RETOS

Matemáticas

9

GRUPO EDITORIAL
norma

RETOS

Matemáticas

9

GRUPO
EDITORIAL
norma

Textos
Soraya Padilla Chasing

Retos Matemáticas 9

Impreso por Carvajal Soluciones de Comunicación

Impreso en Colombia - Printed in Colombia

Agosto de 2011

Depósito legal.
ISBN del libro:
978-958-45-3744-7

Envíe sus comentarios al área de Matemáticas de Carvajal Educación S.A.S.:
luz.sierra@carvajal.com

Directora editorial
Patricia Ospina Rosero

Editora jefe de área
Luz Marina Sierra Fajardo

Editora
Diana Lucía Polanía Teatino

Adecuación a la equidad de género y diversidad cultural
María Claudia Malaver Fuentes

Investigación de campo
Andrea Escobar Vilá

Dirección de arte
Rocío Milena Marmolejo Cumbe

Diseño de la serie
Edison Blanco Pedraza

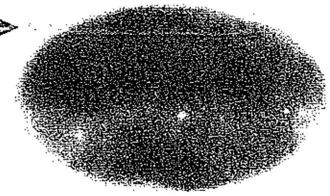
Diseño de cubierta
Ignacio Martínez-Villalba

Diagramación
Edison Blanco Pedraza

Ilustración
Mauricio Restrepo López

Fotografías
Archivo gráfico Editorial Norma
© 2011 Thinkstock

Unidad 1

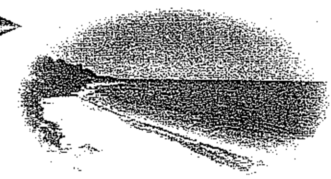


Números reales

Unidad 2

Sistemas de ecuaciones lineales

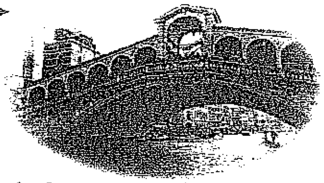
Unidad 3



Números complejos

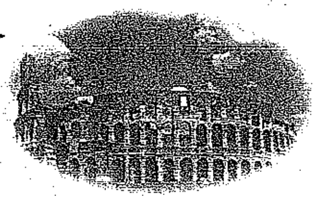
Tabla de contenido

Unidad 4



Ecuaciones cuadráticas

Unidad 5

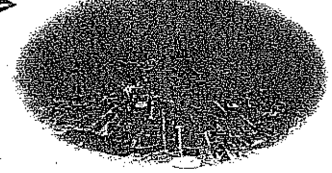


Funciones

Unidad 6

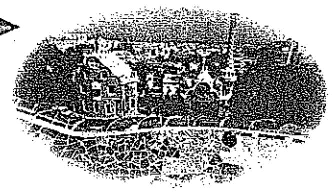
Funciones exponencial y logarítmica

Unidad 7



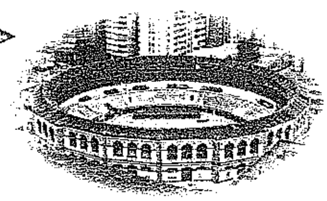
Sucesiones y progresiones

Unidad 8



Geometría

Unidad 9

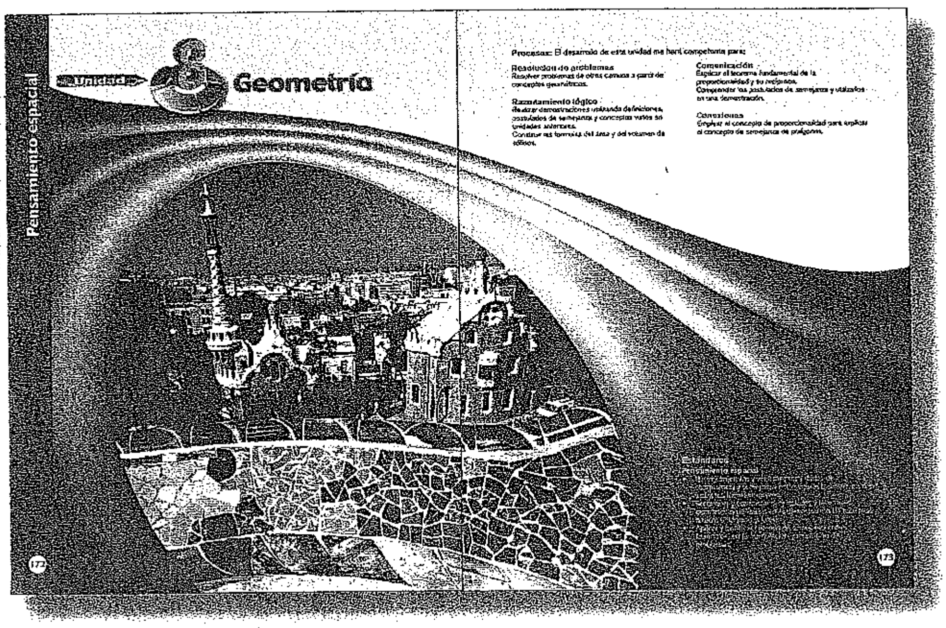


Circunferencia

RETOS Matemáticas

Cada unidad de **Retos 9** contiene distintas actividades que te ayudarán a reconocer, dentro de tu mundo, cómo y para qué sirven las matemáticas.
Estas actividades las encontrarás distribuidas de la siguiente manera:

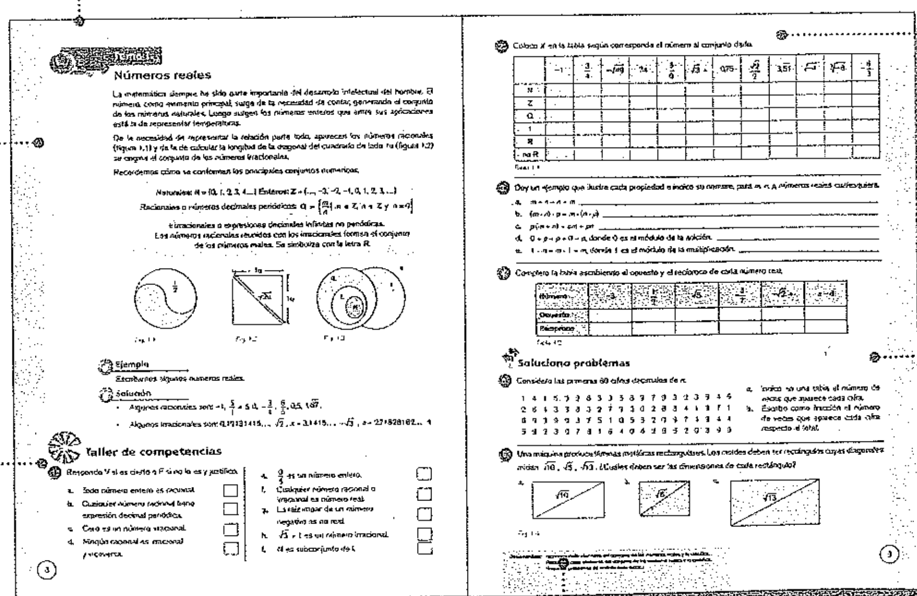
Desarrolla los pensamientos matemáticos propuestos en los estándares curriculares del MEN.



Temas. Se presentan numerados consecutivamente en el libro.

Contenidos. Se desarrollan de manera clara y dinámica.

Ejemplo. Evidencia la aplicación directa del tema desarrollado.



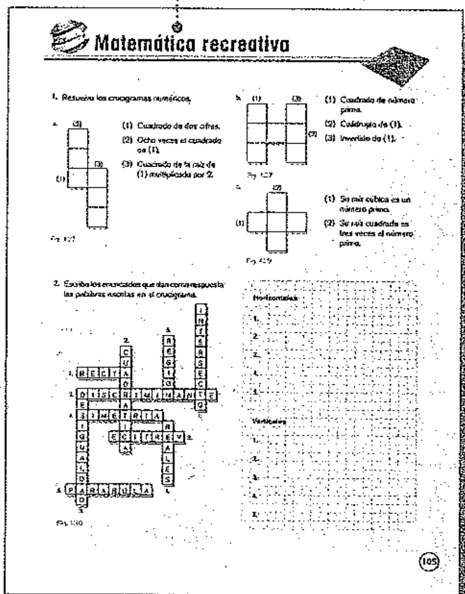
Actividades y ejercicios variados que permiten aplicar los conceptos vistos.

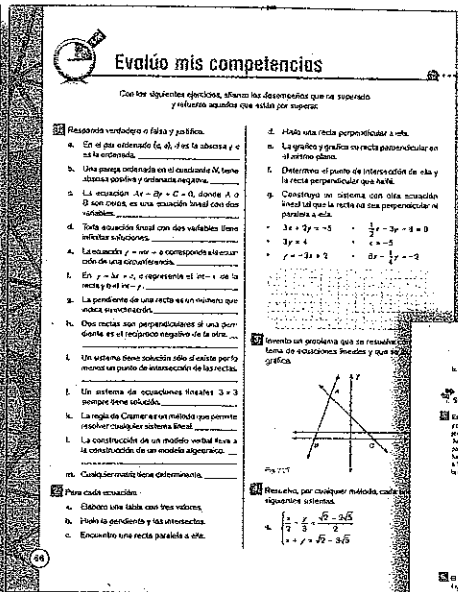
Los numerales de los ejercicios están identificados por colores que permiten establecer el nivel de competencia, así: azul, interpretativa; verde, argumentativa y rojo, propositiva.

Los desempeños muestran la acción de la competencia trabajada.

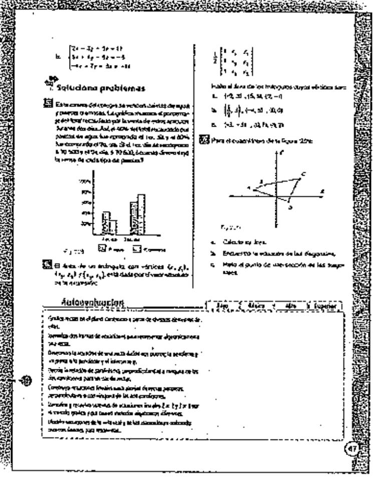
Conoce tu libro

Actividades lúdicas que a través de la exploración de retos, pasatiempos y adivinanzas pondrán en juego el ingenio y la creatividad de los estudiantes.



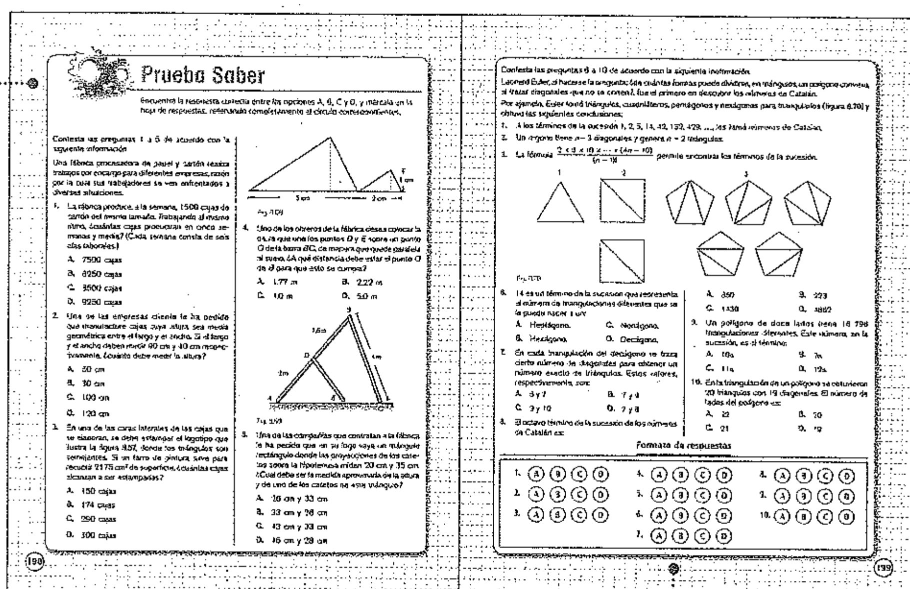


Propuesta de actividades para reforzar y medir el avance de lo aprendido con el desarrollo de la unidad.



Autoevaluación. Permite la autorreflexión del proceso de aprendizaje del estudiante.

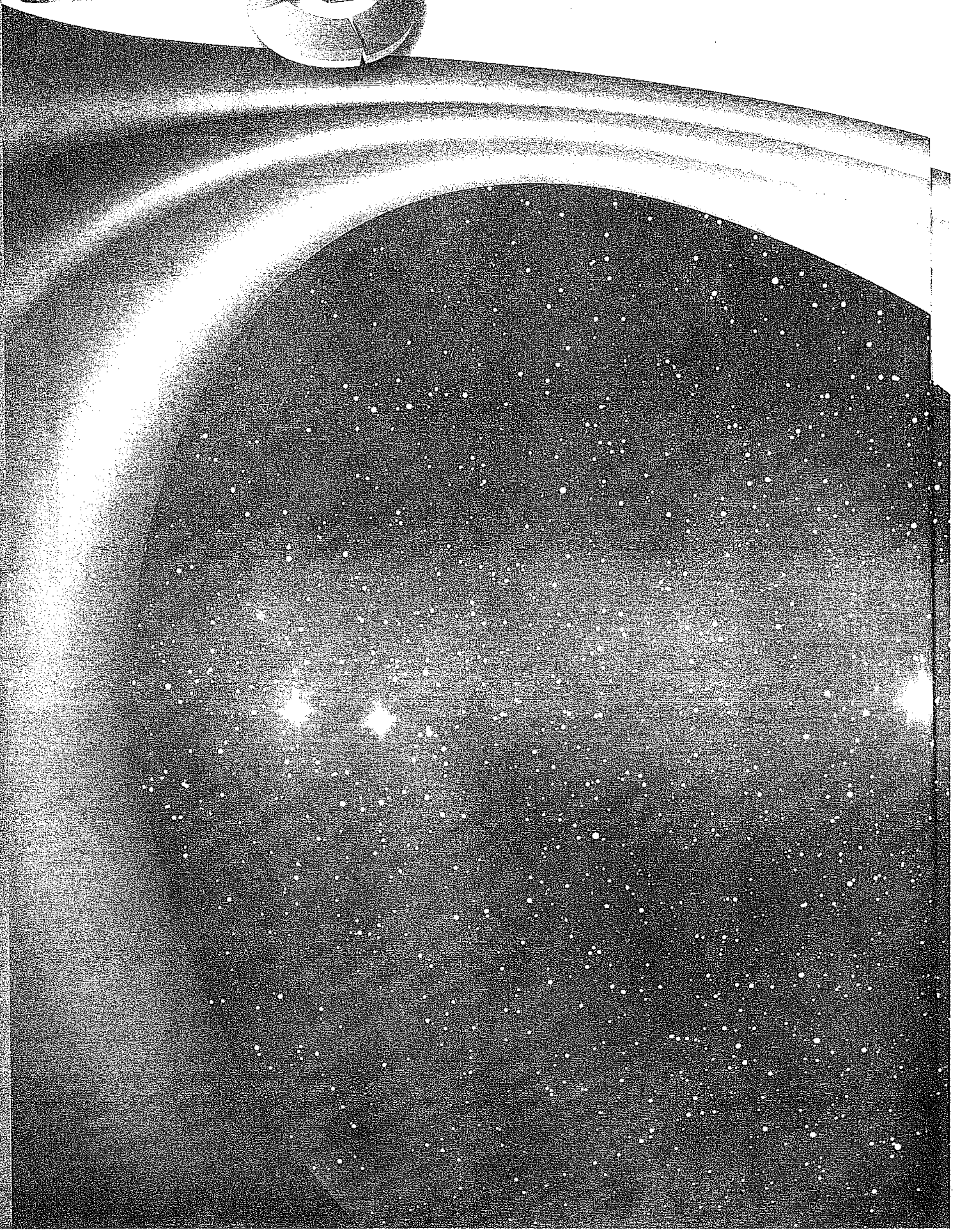
Prueba de preparación para la evaluación por competencias.



Incluye formato de respuestas que permite realizar simulacros con los estudiantes.

Unidad 1

Números reales



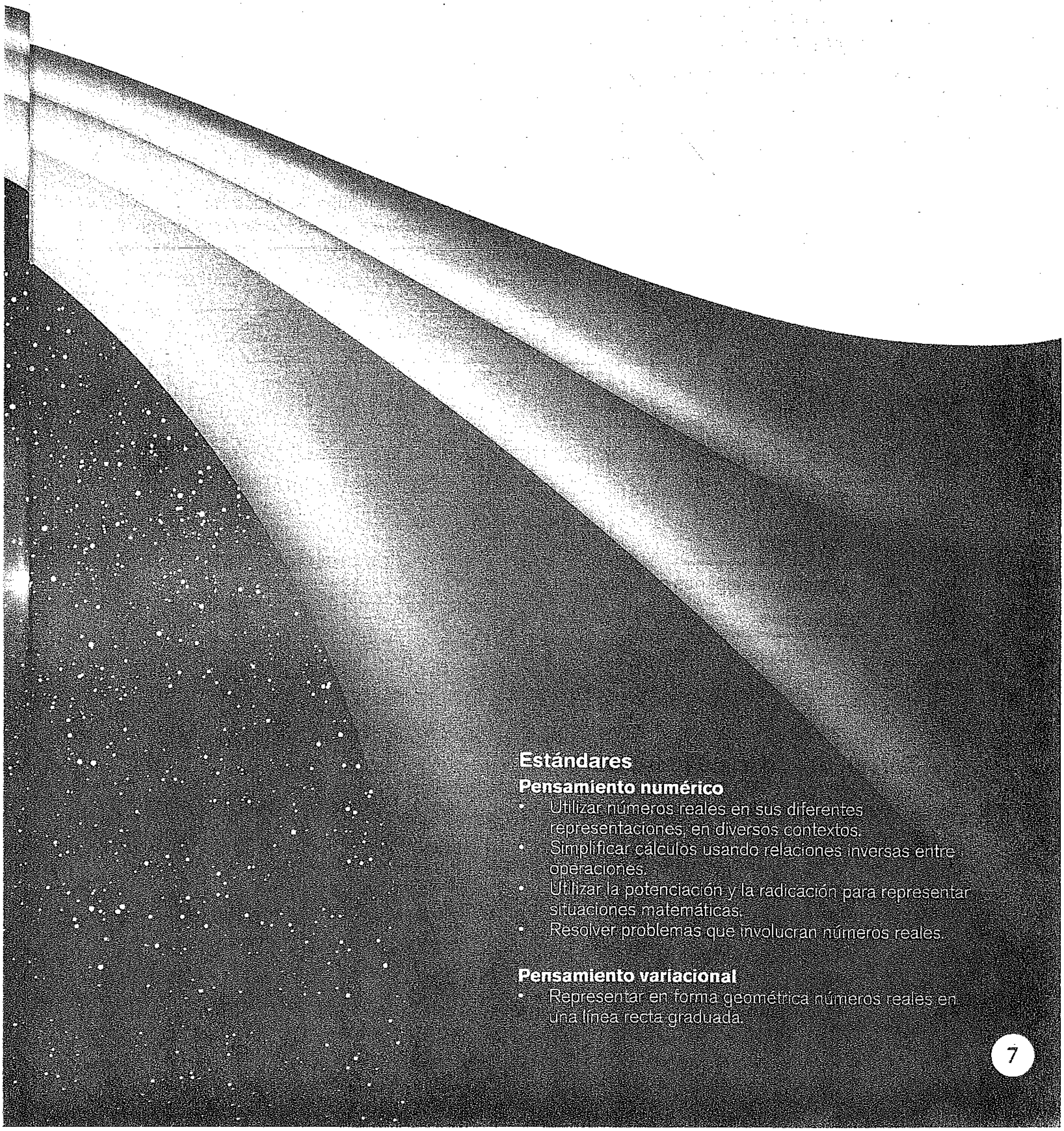
Procesos: El desarrollo de esta unidad me hará competente para:

Resolución de problemas
Determinar el error al aproximar un número real por medio de un conjunto ordenado de números racionales.

Razonamiento lógico
Reconocer la noción de sistema numérico.

Comunicación
Proponer redondeos y truncamientos para establecer niveles de precisión en una aproximación.

Conexiones
Utilizar números decimales para resolver situaciones que involucran números irracionales.



Estándares

Pensamiento numérico
- Utilizar números reales en sus diferentes representaciones, en diversos contextos.
- Simplificar cálculos usando relaciones inversas entre operaciones.
- Utilizar la potenciación y la radicación para representar situaciones matemáticas.
- Resolver problemas que involucran números reales.

Pensamiento variacional
- Representar en forma geométrica números reales en una línea recta graduada.

Tema 1

Números reales

La matemática siempre ha sido parte importante del desarrollo intelectual del hombre. El número, como elemento principal, surge de la necesidad de contar, generando el conjunto de los números naturales. Luego surgen los números enteros que entre sus aplicaciones está la de representar temperaturas.

De la necesidad de representar la relación parte todo, aparecen los números racionales (figura 1.1) y de la de calcular la longitud de la diagonal del cuadrado de lado 1u (figura 1.2) se origina el conjunto de los números irracionales.

Recordemos cómo se conforman los principales conjuntos numéricos.

Naturales: $N = \{0, 1, 2, 3, 4...\}$ Enteros: $Z = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$

Racionales o números decimales periódicos: $Q = \left\{\frac{m}{n} \mid m \in Z, n \in Z \text{ y } n \neq 0\right\}$

I: irracionales o expresiones decimales infinitas no periódicas.
Los números racionales reunidos con los irracionales forman el conjunto de los números reales. Se simboliza con la letra R.

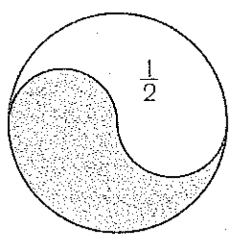


Fig. 1.1

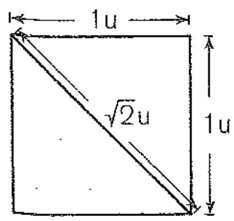


Fig. 1.2

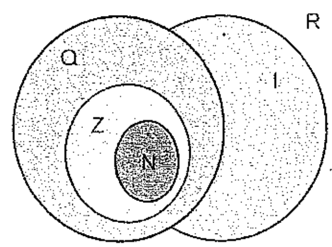


Fig. 1.3

Ejemplo

Escribamos algunos números reales.

Solución

- Algunos racionales son: -1, $\frac{5}{1} = 5$, 0, $-\frac{3}{4}$, $\frac{6}{5}$, $0{,}5$, $1{,}\overline{67}$.
- Algunos irracionales son: $0{,}12131415...$, $\sqrt{2}$, $\pi = 3{,}1415...$, $-\sqrt{3}$, $e = 2{,}71828182...$

Taller de competencias

1. Respondo V si es cierto o F si no lo es y justifico.

a. Todo número entero es racional. ☐

b. Cualquier número racional tiene expresión decimal periódica. ☐

c. Cero es un número irracional. ☐

d. Ningún racional es irracional y viceversa. ☐

e. $\frac{0}{5}$ es un número entero. ☐

f. Cualquier número racional o irracional es número real. ☐

g. La raíz impar de un número negativo es no real. ☐

h. $\sqrt{3} + 1$ es un número irracional. ☐

i. N es subconjunto de I. ☐

2. Coloco ✗ en la tabla según corresponda el número al conjunto dado.

	-1	$\frac{3}{4}$	$-\sqrt{49}$	2π	$\frac{5}{0}$	$\sqrt{3}+$	$0{,}75$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$3{,}\overline{51}$	$\sqrt{-4}$	$\sqrt[3]{-8}$	$-\frac{8}{3}$
N												
Z												
Q												
I												
R												
no R												

Tabla 1.1

3. Doy un ejemplo que ilustre cada propiedad e indico su nombre, para m, n, p, números reales cualesquiera.

a. $m+n=n+m$ ____________________

b. $(m \cdot n)\cdot p = m\cdot(n\cdot p)$ ____________________

c. $p(m+n)=pm+pn$ ____________________

d. $0+p=p+0=p$, donde 0 es el módulo de la adición. ____________________

e. $1\cdot m=m\cdot 1=m$, donde 1 es el módulo de la multiplicación. ____________________

4. Completo la tabla escribiendo el opuesto y el recíproco de cada número real.

Número	-3	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{5}$	$-\frac{5}{7}$	$-\sqrt{2}+1$	$\pi-8$
Opuesto						
Recíproco						

Tabla 1.2

Soluciono problemas

5. Considero las primeras 80 cifras decimales de π.

1	4	1	5	9	2	6	5	3	5	8	9	7	9	3	2	3	8	4	6
2	6	4	3	3	8	3	2	7	9	5	0	2	8	8	4	1	9	7	1
6	9	3	9	9	3	7	5	1	0	5	8	2	0	9	7	4	9	4	4
5	9	2	3	0	7	8	1	6	4	0	6	2	8	6	2	0	8	9	9

a. Indico en una tabla el número de veces que aparece cada cifra.

b. Escribo como fracción el número de veces que aparece cada cifra respecto al total.

6. Una máquina produce láminas metálicas rectangulares. Los moldes deben ser rectángulos cuyas diagonales midan $\sqrt{10}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{13}$. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de cada rectángulo?

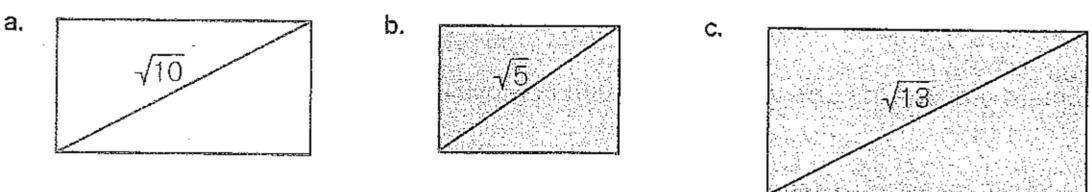


Fig. 1.4

Desempeños: reconoce cada elemento del conjunto de los números reales y lo clasifica.
Reconoce cada elemento del conjunto de los números reales y lo clasifica.
Resuelve problemas de distinta naturaleza.

Tema 2

Ubicación de los reales en la recta numérica

Para representar gráficamente los números reales tomamos una recta horizontal, ubicamos el punto 0 y, tanto a la izquierda como a la derecha del cero, colocamos unidades equidistantes; estos puntos representan los números enteros.

Para ubicar los números racionales no enteros, consideramos la unidad como el todo y la segmentamos para tomar sus partes. En el caso de los números irracionales seguimos un procedimiento particular o hacemos una aproximación según su notación decimal.

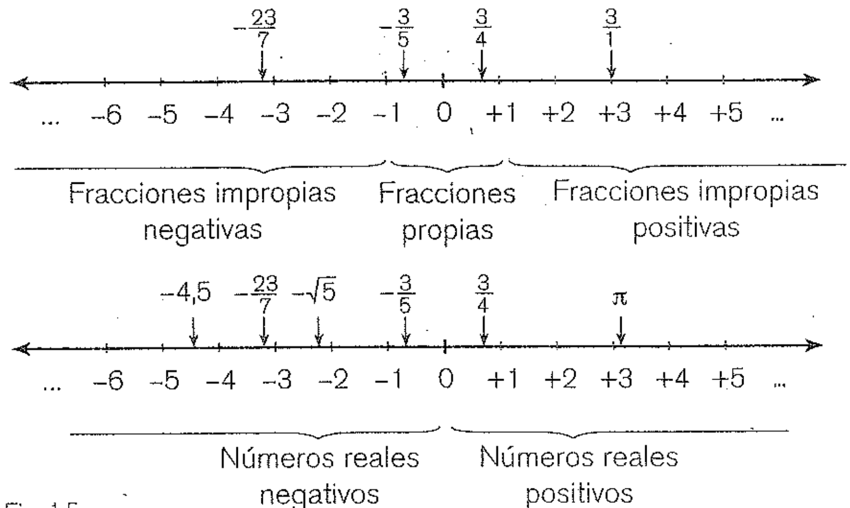


Fig. 1.5

Llamamos **recta real** a aquella en la cual a cada punto le corresponde un único número real y, por tanto, con cada número real se relaciona un único punto de la recta.

Ejemplo

Ubiquemos los siguientes números en la recta real: $-\frac{9}{5}$; $-\sqrt{2}$; 1,23; $\frac{8}{3}$.

Solución

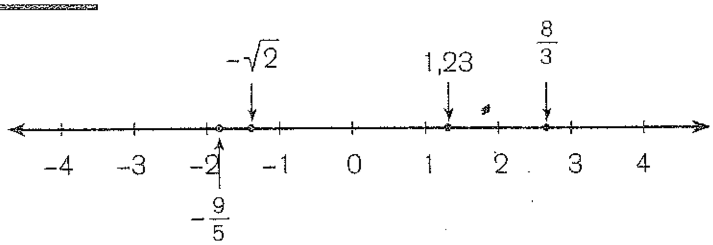


Fig. 1.6

Taller de competencias

1. Determino el número real que le corresponde a cada punto en la recta.

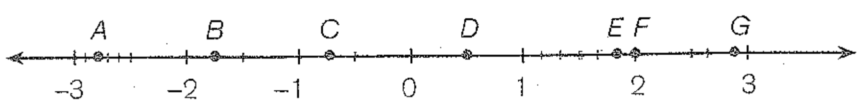


Fig. 1.7

2. Ubico en la recta real las siguientes expresiones numéricas.

a. $\frac{1}{2} + \frac{3}{4}$ b. $-3 + 5$

c. $0,8 + 0,15$ d. $0 - (-4)$

e. $\frac{5}{2} - \frac{7}{2}$ f. $\frac{1}{3} + 2$

g. $(-9) + 4 + \frac{5}{4}$ h. $\pi + 1$

i. $\frac{\pi}{2} - 2$ j. $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

3. Con la ayuda de un compás y del teorema de Pitágoras, asigno un punto sobre la recta real a los siguientes números irracionales. (*Ver* ejemplo.)

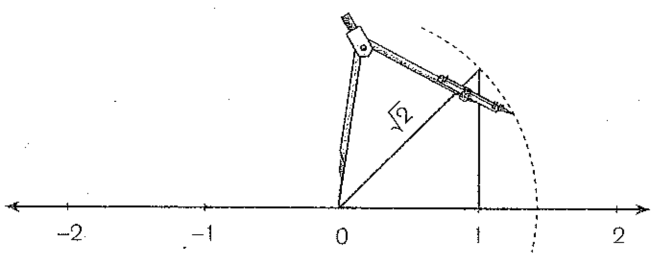


Fig. 1.8

a. $\sqrt{3}$ b. $2\sqrt{5}$

c. $-\sqrt{6}$ d. $-2\sqrt{2}$

e. $\sqrt{7} + 1$ f. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

g. $2\sqrt{3} - 7\sqrt{5}$ h. $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2}$

i. $\frac{\sqrt{10}}{8}$ j. $\sqrt{20} - \sqrt{19}$

4. Con ayuda de la calculadora ubico los resultados de las siguientes expresiones en la recta numérica. (Utilizo aproximaciones de los decimales resultantes.)

a. $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ b. $1 - \sqrt[3]{5}$

c. $4,2 - \pi$ d. $3,14159 - \pi$

e. $5\pi - 4e$ f. $e^2 - \pi^2$

g. $\frac{\sqrt{7} + \sqrt{9}}{2}$ h. $2\sqrt{5} - 5\sqrt{2}$

i. $1 - \frac{1}{\sqrt{4}}$ j. $2,\overline{3} + 7,2\overline{5}$

Soluciono problemas

5. Las cadenas montañosas presentan, en la distribución de la vegetación, gran diferencia entre una altura y otra, razón por la cual los cultivos agrícolas sólo se realizan hasta ciertas alturas.

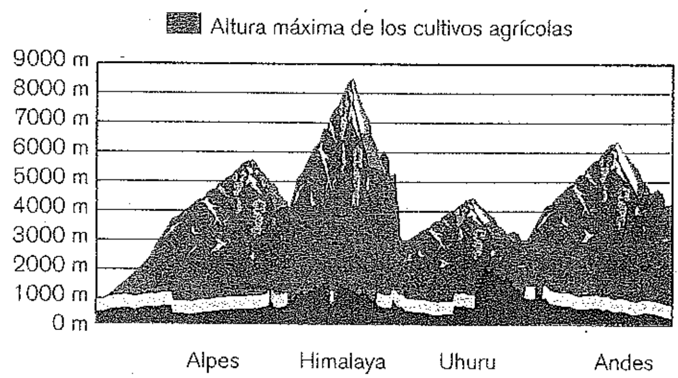


Fig. 1.9

a. Estimo, según la escala, la altura máxima de los cultivos y la altura de las montañas.

b. Determino la diferencia aproximada entre la altura de la montaña más alta y las demás montañas.

c. En proporción, ¿cuál montaña es más fértil y cuál es menos fértil?

Desempeños: ubica y determina números en la recta real.
Elabora esquemas gráficos para ubicar números en la recta real.
Genera resultados a partir de información gráfica.

Tema 3

Expresión decimal de un número real

Tomemos la calculadora y completemos la siguiente tabla:

$1 \div 2$	$(-8) \div 7$	$1 \div (-3)$	$\sqrt{6}$	$\sqrt{36}$	π	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
0,5		−0,3333333...			3,1415926...	

Tabla 1.3

El proceso de división nos permite encontrar la expresión decimal de cualquier número racional, algunas veces con un número finito de pasos y en otras, los pasos deben repetirse indefinidamente. ¿La calculadora nos permite detectar esta diferencia?

Ejemplo

Escribamos la expresión decimal de $1 \div 4$, $1 \div 3$ y $(-8) \div 7$.

Solución

$1 \div 4 = \frac{1}{4} = 0{,}25 = 0{,}25000 = 0{,}25\overline{0}$; $1 \div 3 = 0{,}3333333\ldots = \frac{1}{3} = 0{,}\overline{3}$.

$(-8) \div 7 = -\frac{8}{7} = -1{,}142857142857\ldots = -1{,}\overline{142857}$.

Los números racionales $\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, -\frac{8}{7}$ son decimales periódicos. ◀

A las cifras que se repiten en la expresión decimal de un número racional las llamamos **período**, por tanto, estos decimales se denominan **decimales periódicos**.

Ejemplo

Transformemos $b = 5{,}\overline{3}$ en fracción.

Solución

Como el período tiene una cifra, multiplicamos por 10.

$$b = 5{,}\overline{3} \text{ entonces } 10b = 53{,}\overline{3}$$

Sustraemos $10b = 53{,}\overline{3}$ y $b = 5{,}\overline{3}$, término a término.

$$\begin{array}{rcr} 10b & = & 53{,}\overline{3} \\ -b & = & 5{,}\overline{3} \\ \hline 9b & = & 48 \end{array}$$

Luego, despejando b obtenemos: $b = \frac{48}{9}$. ◀

Cuando un número tiene una expansión decimal infinita pero sin ningún patrón de repetición, decimos de él que es un decimal infinito no periódico. El conjunto de números con esta propiedad es el conjunto de los números irracionales I.

Taller de competencias

1. Utilizo la calculadora para encontrar la expresión decimal de los siguientes números.

a. $-\frac{5}{7}$ b. $\sqrt{11}$ c. $\frac{3094}{99}$

d. $\frac{6}{5}$ e. $\frac{29}{3}$ f. $-\sqrt{8} + 3$

g. $-\frac{101}{24}$ h. $2\pi - 1$ i. $\sqrt{\pi}$

2. Determino, mediante la división manual, si es posible encontrar el período de los decimales periódicos del punto anterior.

3. El siguiente es el procedimiento para transformar un número decimal periódico mixto en fracción. Si $a = 5,3\overline{14}$, $10\,a = 53,\overline{14}$. Como el período tiene dos cifras decimales, multiplicamos $10a$ por 100, entonces: $1000\,a = 5314,\overline{14}$.

Efectuemos la sustracción:

$$\begin{aligned} 1000\,a &= 5314,\overline{14} \\ -\quad 10\,a &= 53,\overline{14} \\ \hline 990\,a &= 5261 \end{aligned}$$

Luego, $a = \frac{5261}{990}$.

Expreso los siguientes decimales periódicos como fracciones.

a. $4,\overline{5}$ b. $23,\overline{11}$

c. $14,5\overline{21}$ d. $-1,\overline{125}$

e. $-3,\overline{3}$ f. $5,\overline{67}$

g. $101,\overline{73}$ h. $-25,3\overline{12}$

i. $1,\overline{25}$ j. $9,25\overline{143}$

k. $3,\overline{257}$ l. $-1,\overline{17}$

m. $-3,26\overline{45}$ n. $-6,\overline{1415}$

ñ. $-3,1\overline{4}$ o. $5,0\overline{1}$

p. $9,\overline{16}$ q. $-0,\overline{01}$

4. Construyo cinco números irracionales.

5. Continúo la serie y escribo 15 cifras más en cada número irracional.

a. 23,020020002 ____________

b. −4,3691215 ____________

c. 101,10010001 ____________

d. −15,491625 ____________

e. 5,0123456 ____________

f. 0,232233 ____________

6. Ubico en la recta real los números, haciendo la mejor aproximación: 3,257, −1,17, −3,2645, 6,1415, −3,1415...

7. La figura 1.10 muestra el desarrollo de un cono. Hallo su área considerando a $\pi = 3,14$ y expreso el resultado en forma de fracción.

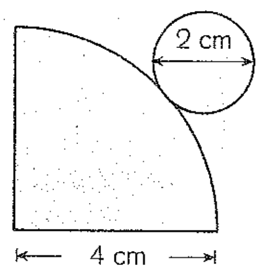


Fig. 1.10

Soluciono problemas

8. Deseo colocar una malla a un jardín triangular como ilustra la figura 1.11. La malla tiene una longitud de 9,8 m y la distancia PQ ocupa 2,4 m de la malla. ($\triangle PQR$ es isósceles.)

a. Calculo las longitudes QR y PR.

b. Encuentro la fracción de malla que debo utilizar en cada lado del jardín.

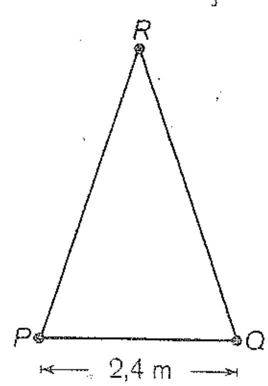


Fig. 1.11

Desempeños: reconoce la expresión decimal de cualquier número real.
Traduce información y la aplica en la solución de ejercicios.
Aplica y utiliza elementos de la geometría en la solución de problemas.

Tema 4

Valor absoluto

La figura 1.12 muestra las ventas del sector industrial entre enero de 2010 y septiembre de 2011. Según el DANE, la producción industrial creció un 5% entre mayo de 2010 y enero de 2011, observándose un repunte del 20% a partir de enero, debido al aumento en las ventas no tradicionales.

La escala porcentual negativa muestra el decaimiento en el que estaban las ventas, pero vemos que entre mayo de 2010 y enero de 2011 éstas pasaron de -15% a -10%. ¿Cómo determinamos el crecimiento del 5% en ese lapso?

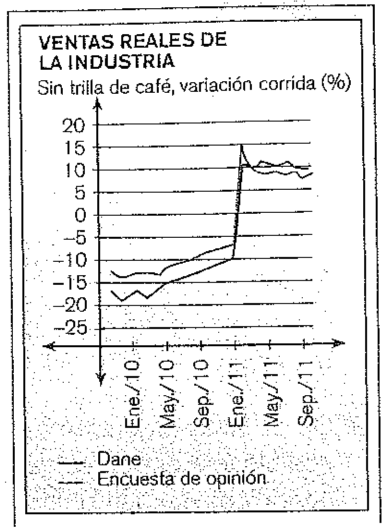


Fig. 1.12

Para todo número real a definimos el valor absoluto de a, $|a|$, como la distancia de dicho número al cero en la recta numérica.

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ si } a \in \mathbb{R}^+ \\ 0, \text{ si } a = 0 \\ -a, \text{ si } a \in \mathbb{R}^- \end{cases}$$

La distancia entre dos puntos A y B, la calculamos así:

$$d(A, B) = |A - B|$$

Ejemplo

Calculemos la diferencia porcentual entre mayo de 2010 y enero de 2011.

Solución

$d(-15\%, -10\%) = |-15 - (-10)| = |-15 + 10| = |-5| = 5$

La diferencia porcentual es 5%.

Taller de competencias

1. Utilizo la gráfica para calcular:

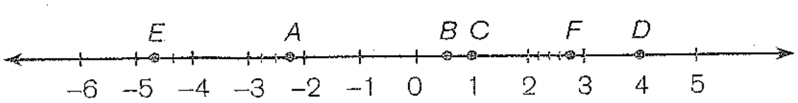


Fig. 1.13

a. $d(A, D)$ b. $d(A, E)$ c. $d(E, F)$ d. $d(B, D)$

e. $d(A, C) + d(C, D)$ f. $d(A, C) \div d(D, F)$ g. $5 \cdot d(A, F) - d(B, C)$ h. $d(0, D) + d(0, E)$

2 Aplico las definiciones de valor absoluto y calculo.

a. $\left|-3-\left(\frac{1}{2}\right)\right|$

b. $\left|5-\left(-\frac{3}{8}\right)\right|$

c. $|-3|+|-4|$

d. $3\left|-\frac{1}{2}-(-4)+8\right.$

e. $|\sqrt{2}-5\sqrt{2}|$

f. $|-|-4+2|-3|$

g. $-|-|-|-9|||$

h. $5\left|-\frac{3}{8}\right|+(-9)\left|-\frac{7}{3}\right|$

i. $\left|3|-2|+5\left|-\frac{1}{2}+7\right|-5\left(\frac{3}{5}\right)\right|$

j. $|\sqrt[3]{-125}|-|\sqrt[5]{-32}|$

k. $|-|-28||-\left|-\frac{1}{3}+\frac{7}{15}\right|$

l. $|2{,}15+3{,}28|+|5{,}01-7|$

3 Observo el ejemplo y encuentro el conjunto solución de cada ecuación.

Hallemos los valores de x que hacen válida la igualdad $|3x+2|=5$.

El valor absoluto de $3x+2$ será 5, sólo cuando $3x+2=5$ o $3x+2=-5$. Resolviendo cada ecuación obtenemos que $x=1$ o $x=-\frac{7}{3}$.

Encuentro el conjunto solución de cada ecuación, si es posible.

a. $|x|=3$

b. $5|-3x-1|=4$

c. $|-x+1|=-3$

d. $\left|\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}\right|=8$

e. $\left|2(x-5)+\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{4}$

f. $|3x-1|=|8x-2|$

g. $\frac{|5-2x|}{3}=|x-1|$

h. $-x-9=|x-7|$

i. $\frac{|5x-9|}{2x}=1$

j. $\frac{4}{\left|x-\frac{1}{2}\right|}=\frac{2}{\left|x+\frac{1}{3}\right|}$

k. $|2x-9+7x|=6-5x+|x+1|$

l. $|x|+|x-9|=4$

m. $\left|\frac{x+2}{3}\right|=\left|\frac{x-5}{2}\right|$

n. $\left|\frac{x+4}{x+2}\right|=1$

Soluciono problemas

4 Tengo en cuenta la figura 1.12.

a. Demuestro matemáticamente el crecimiento de las ventas presentado por las dos fuentes durante enero de 2011 y determino la diferencia.

b. Calculo los crecimientos entre enero de 2010 y septiembre de 2011, presentados por el DANE y por la encuesta de opinión.

c. Encuentro la diferencia porcentual entre los valores máximos presentados por el DANE y por la encuesta de opinión.

5 Un barco A sale del puerto hacia el este, con velocidad de 120 km/h. Un barco B sale del mismo puerto, a la misma hora, pero hacia el sur, con velocidad de 80 km/h.

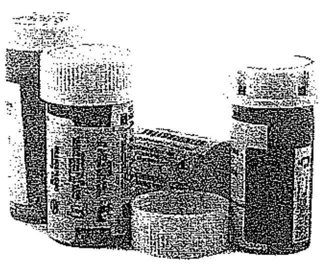
a. ¿Cuál es la distancia de cada barco al puerto al cabo de 2 horas?

b. ¿Cuál es la distancia entre los barcos luego de 3 horas?

Desempeños: aplica el valor absoluto en el cálculo de distancias.
Aplica definiciones y propiedades para realizar operaciones con valor absoluto.
Resuelve situaciones cotidianas usando el valor absoluto.

Tema 5

Exponentes enteros



En medicina, la cantidad de un medicamento en el cuerpo, después de k horas de haber ingerido una dosis inicial de 20 mg, está dada por la expresión $20 \cdot (0{,}7)^k$ mg.

Después de conocer esta información, Julián quiso saber cuánto medicamento contendría su cuerpo al cabo de las primeras 8 horas.

La expresión $20 \cdot (0{,}7)^8$ nos indica que debemos realizar el siguiente cálculo:

$$20 \cdot (0{,}7)^8 = 20\,\underbrace{[(0{,}7) \cdot (0{,}7) \cdots (0{,}7)]}_{8 \text{ veces}} = 1{,}1529602$$

Para $n \in Z$ y $a \in R$, el producto de n veces a lo denotamos a^n y lo llamamos "potencia n-ésima de a".

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n\text{–veces}}$$

Ejemplo

¿Qué cantidad de medicamento permanece en el cuerpo de Julián al cabo de 3 horas?

Solución

La potencia que debemos desarrollar es $20 \cdot (0{,}7)^3$.

$20 \cdot (0{,}7)^3 = 20 \cdot (0{,}343) = 6{,}86$ mg de medicamento. ◀

Propiedades de la potenciación

Para $a, b \in R$, $m, n \in Z$, se cumplen las siguientes propiedades.

1. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

2. $a^n \div a^m = a^{n-m};\ a \neq 0$

3. $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

4. $a^n \div b^n = (a \div b)^n,\ b \neq 0$

5. $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

6. Para $a \neq 0$, $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

7. $a^0 = 1,\ a \neq 0$

8. $1^n = 1$

Taller de competencias

1. Escribo falso o verdadero y justifico, para todo n y $m \in Z$.

a. Para todo $a \in R$, $a^0 = 1$. ☐ ______

b. Para $a, b \in R$, $(a + b)^n = a^n + b^n$. ☐ ______

c. a^{-n} está definido para todo $a \in R$. ☐ ______

d. Para todo $a \in R$, $a^{n+m} = a^n + a^m$ ☐ ______

e. 0^0 no está definido. ☐ ______

f. $a^n = a$ sólo para $a = 1$. ☐ ______

g. $a^n = n^a$ para $a \in R$. ☐ ______

h. $a^1 = a$ para todo $a \in R$. ☐ ______

2. Observo el ejemplo y hallo el resultado.

$$(-2)^{-4} = \frac{1}{(-2)^4} = \frac{1}{(-2)(-2)(-2)(-2)} = \frac{1}{16}$$

Propiedad 8   Producto indicado   Resultado

a. $2^3 \cdot 2^5$

b. $[(-3)^4]^2$

c. $\left(-\frac{1}{2}\right)^0 + \left(-\frac{1}{2}\right)^4$

d. $(3x \cdot 2y)^2$

e. $\left(\frac{-3a}{4}\right)^3$

f. $\left(\sqrt{2}\right)^2 \cdot \left(-\sqrt{2}\right)^3$

g. $\frac{2}{4^{-1}} + 4^{-2}$

h. $x^9 \div x^6$

i. $y^4 \div y^{-6}$

j. $2(-5)^{-3}$

3. Transformo en exponentes positivos y realizo la operación.

a. $3^{-2} - 3^{-3} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-4}$

b. $[(-2)^{-2} \cdot (-3)^{-2} \cdot (-4)^{-2}]^{-1}$

c. $\left(\frac{x^{-2}y^{-3}z^2}{x^5y^2z^{-1}}\right)^{-2}$

d. $\frac{2x^{-1} + 2y^{-1}}{2(x + y)}$

e. $(a^{x+1})^3 \cdot (a^{-x-1})^2$

f. $[x^{-2}(x^2 - y^0)]^{-1}$

g. $\frac{\left[x^{2(a-1)}\right]^3}{\left[x^{3(a-1)}\right]^2}$

h. $\left[\frac{x(x + 2) - 3}{(x + 2)(x - 1)}\right]^{-1}$

i. $\left(\frac{1}{x + 1}\right)^{-1} \cdot \frac{(x + 2)^{-2}}{x + 1}$

4. Determino si los pasos realizados en cada desarrollo son correctos o no lo son; si son incorrectos, doy la respuesta acertada.

a. $\frac{x^{-1} - y^{-1}}{x^{-2} - y^{-2}} = \frac{x^2 - y^2}{x - y} = x + y$

b. $\frac{(x + y)^{-1}}{2} = \frac{x^{-1} + y^{-1}}{2}$

c. $\frac{(z^{-a+1})^2}{(-z^{a-1})^3} = \frac{z^{-2a+2}}{-z^{3a-3}} = -z^{-5a+5}$

Soluciono problemas

5. En cada cuadro mágico escribo las potencias que en cada fila y cada columna, hacen que el producto sea el mismo.

a.

2^6		
2		
2^2		2^0

Tabla 1.4

b.

10^{-3}	10^{-1}	10
10^{-2}		

Tabla 1.5

6. Una varilla toma su forma a una temperatura aproximada de 105 °C y se enfría expuesta al aire a 20 °C. Después de t minutos, la temperatura es $20 + 81(3^{-t})$. ¿Cuál es la temperatura de la varilla después de 5 min? ¿Cuál después de $\frac{1}{2}$ hora? ¿Qué sucede con la temperatura de la varilla cuando el tiempo transcurre indefinidamente?

7. Completo cada expresión para hacerla verdadera.

a. $\dfrac{x^5 (x^2)^{\square}}{x^{\square} (x^{\square})^2} = x^7$

b. $\dfrac{(-1)^{\square}}{\square^{-2}} = -4$

c. $\dfrac{\left(\sqrt{2}\right)^{\square} \sqrt{3}\, y^{\square}}{\sqrt{2}\, y \left(\sqrt{3}\right)^{\square}} = \dfrac{\left(\sqrt{2}\right)^4 y}{\left(\sqrt{3}\right)^2}$

d. $(a^{\square} + b)^2 = a^{\square} + 2\,\square\, b + b^{\square}$

e. $x + y = \dfrac{1}{x^{\square}} + \dfrac{1}{y^{\square}}$

f. $\square\, a^{\square} + 2a^{\square} = \dfrac{2}{a}$

g. $0^{\square} + 1 =$ indeterminado

h. $\dfrac{-\dfrac{1}{t^2} + \dfrac{2}{t}}{4t^2 - 1} = t^{\square}(2t+1)^{\square}$

i. $\dfrac{\left[-(a+b)^{\square}\right]^4 \left[(a+b)^{-1}\right]^{\square}}{(a+b)^{-4}} = (a+b)^{14}$

j. $\left(\dfrac{a^{-2}}{x^3}\right)^{\square} (x^3 \cdot x^{\square} \cdot a^4) = 1$

8. La siguiente tabla presenta el equivalente, en horas y años, de 1 segundo, 1 minuto, 1 hora y 1 año.

	1 segundo	**1 minuto**	**1 hora**	**1 año**
Horas	$2{,}778 \times 10^{-4}$	$1{,}667 \times 10^{-2}$	1	$8{,}760 \times 10^{3}$
Años	$3{,}171 \times 10^{-8}$	$1{,}902 \times 10^{-6}$	$1{,}141 \times 10^{-4}$	1

Tabla 1.6

Realizo las conversiones y completo.

a. 10 000 segundos = _________ horas

b. 5 años = _________ segundos

c. 100 minutos = _________ horas

d. 10^6 minutos = _________ años

e. 24 horas = _________ años

f. 5 años = _________ horas

9. El sistema solar es un conjunto de varios cuerpos enormes llamados planetas, que giran alrededor del Sol. La Tierra es uno de esos y tiene 10^{51} átomos, mientras que el Sol está compuesto por 10^{57} átomos. El sistema solar, a su vez, es una pequeña parte de un gran grupo de estrellas que forman una galaxia llamada *Vía Láctea*, compuesta por 10^{11} estrellas o 10^{70} átomos. El universo puede tener 10^{20} estrellas agrupadas, aproximadamente, en 10^{10} galaxias que contienen alrededor de 10^{80} átomos, en una región cuyo radio es 10^{26}.

a. ¿Cuál es el producto que representa la diferencia de átomos entre el Sol y la Tierra?

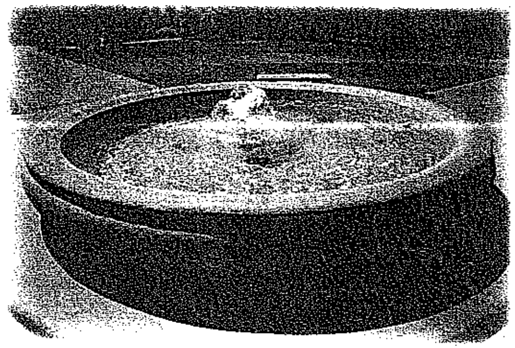
b. ¿Cuántas veces el número de átomos de la Tierra es el número de átomos de la Tierra y el Sol juntos?

Desempeños: distingue propiedades de exponentes enteros y las utiliza en diversas situaciones. Justifica proposiciones; aplica el concepto y propiedades de la potenciación. Aplica los exponentes en la resolución de problemas.

Tema 6

Radicales

Para construir una fuente circular se cuenta con un área de 5 m^2; si la fuente, en su base, debe tener un área de 3 m^2, ¿cuál debe ser el radio del círculo?



Encontramos el radio del círculo al despejar y calcular r en la fórmula $A = \pi r^2$.

$\frac{A}{\pi} = r^2$ por tanto, $\sqrt{\frac{A}{\pi}} = r$. Considerando

$\pi \approx 3{,}14$ tenemos que $r = \sqrt{\frac{3}{3{,}14}} = 0{,}98$ m

El procedimiento anterior nos lleva a formular una nueva definición para los radicales.

Si $n \in Z^+$ y x, y son números reales tal que $x^n = y$, entonces x es la raíz n-ésima de y. Es decir, $\sqrt[n]{y} = x$ si y sólo si $x^n = y$.

Ejemplo

Calculemos la raíz cuadrada de 16.

Solución

$\sqrt{16} = 4$ y $\sqrt{16} = -4$ porque $4^2 = 16$ y $(-4)^2 = 16$.

Para $x \in R$, la raíz n-ésima principal de x se denota $\sqrt[n]{x}$, para $n \in N$ y $n > 1$.
Si $x \in R^+$ entonces $\sqrt[n]{x}$ es la raíz positiva n-ésima de x.

$$\text{Si } x \in R^- \begin{cases} \text{si } n \text{ es par, } \sqrt[n]{x} \text{ no existe en R.} \\ \text{si } n \text{ es impar, } \sqrt[n]{x} \text{ es la raíz negativa } n\text{-ésima de } x. \end{cases}$$

Taller de competencias

1. En cada caso calculo la raíz principal, si es posible.

a. $\sqrt{169}$

b. $\sqrt[4]{625}$

c. $\sqrt[3]{-729}$

d. $\sqrt{-121}$

e. $-\sqrt[5]{-32}$

f. $-\sqrt[4]{16}$

g. $\sqrt[6]{729}$

h. $-\sqrt[6]{-428}$

i. $\sqrt[5]{1}$

j. $\sqrt[9]{-512}$

k. $\sqrt[3]{(10)^3 \cdot (-10)^3}$

l. $\sqrt[3]{-1728}$

2. Considero la siguiente propiedad. Si es posible, expreso cada potencia como radical o viceversa y calculo.

Para $n \in N$ y $n > 1$, con $x \in R$, $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$
si y sólo si $\sqrt[n]{x} \in R$.

a. $64^{\frac{1}{2}} =$ ________

b. $\sqrt[3]{-27} =$ ________

c. $\left(\frac{1}{32}\right)^{\frac{1}{5}} =$ ________

d. $\left(-\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} =$ ________

e. $\sqrt[4]{1296} =$ ________

f. $\sqrt[2]{2} =$ ________

g. $\left(-\frac{27}{64}\right)^{\frac{1}{3}} =$ ________ h. $\sqrt[n]{xy} =$ ________

3. Tengo presente las propiedades. Expreso con un solo radical y calculo.

Para $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ y $x, y \in \mathbb{R}$.

- $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}$
- $\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$; $y \neq 0$
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[mn]{x}$; $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$
- $\left(\sqrt[n]{x}\right)^m = \sqrt[n]{x^m}$

Siempre que los radicales sean reales.

a. $\sqrt{25} \cdot \sqrt{100}$ b. $\sqrt[3]{-3} \cdot \sqrt[3]{9}$

c. $\frac{\sqrt[5]{-32}}{\sqrt[5]{-243}}$ d. $\sqrt[3]{-\sqrt{64}}$

e. $\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{y^3}$ f. $\frac{\sqrt[3]{-10\,000a^5}}{\sqrt[3]{10a^2}}$

g. $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{4096}}}$ h. $\sqrt[4]{162x^5} \cdot \sqrt[4]{yz^4}$

4. Considero las variables como números reales positivos y simplifico.

a. $\sqrt[3]{108a^5b^6c^7}$ b. $-\sqrt[5]{-1024x^5}$

c. $\sqrt{10^8(a+b)^2}$ d. $\sqrt{\frac{100x^5y^{-5}}{24x^3y^{-7}}}$

e. $\sqrt{\frac{4\sqrt{x^4y^4}}{25}}$ f. $\sqrt[4]{x^4(x^4+y^4)}$

5. Escribo un ejemplo que demuestre la falsedad de cada proposición, para $x > 0$ y $y > 0$.

a. $\sqrt{x^2 \pm y^2} = x \pm y$

b. $\sqrt{(x-y)^2} = \sqrt{x^2 - y^2}$, $x > y$

Soluciono problemas

6. La tercera ley de Kepler compara la distancia de los distintos planetas, respecto al Sol, con el tiempo que tardan en girar en torno a él; es decir, la razón r^3 a T^2 es la misma para todos. Si para la Tierra esta razón equivale a 6,04, ¿cuál es el tiempo, en días, que tarda Marte para dar una vuelta alrededor del Sol, si su distancia a éste es 141 millones de millas? ¿Cuál es la distancia de la Tierra al Sol?

7. La distancia media real de los planetas al Sol, en unidades astronómicas, está dada en la tabla 1.7.

Mercurio	Venus	Tierra	Marte	Júpiter	Saturno	Urano	Neptuno
0,39	0,72	1	1,52	5,2	9,53	19,19	30,07

Tabla 1.7

Si la unidad astronómica UA = $1{,}496 \times 10^{11}$ metros y 1 metro $6{,}214 \times 10^{-4}$ mi, realizo la conversión de UA a millones de millas, y con base en el ejercicio anterior, hallo la distancia en millones de millas de cada planeta al Sol y calculo el tiempo (en días) que tarda cada planeta en dar una vuelta alrededor del Sol.

8. El área de cualquier triángulo, cuyos lados son x, y, z, se puede calcular mediante la fórmula $\sqrt{s(s-x)(s-y)(s-z)}$, donde $x + y + z = 2s$. Determino el área de un triángulo equilátero de lado x.

Desempeños: simplifica radicales y establece si la raíz n-ésima de un número es real.
Reduce potencias a radicales y viceversa.
Usa diversas estructuras para la solución de problemas.

Tema 7

Exponentes racionales

Utilicemos los conceptos estudiados anteriormente para calcular $8^{\frac{2}{3}}$.

$$8^{\frac{2}{3}} = 8^{\frac{1}{3}\cdot 2} = (8^{\frac{1}{3}})^2 = 8^{\frac{1}{3}} \cdot 8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8}\,\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$$

Del proceso anterior podemos extraer la igualdad: $8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2}$, la cual nos ejemplifica la definición de potencias con exponentes racionales.

Para $m, n \in Z^+$, $x \in R$ y $\sqrt[n]{x}$ número real,

$$x^{\frac{m}{n}} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m = (x^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x^m} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m$$

Algunas propiedades para exponentes radicales son:

Para $x, y \in R$ y $m, n \in Q$, teniendo en cuenta las condiciones para la existencia de los radicales tenemos:

1. $x^{-m} = \dfrac{1}{x^m}$, $x \neq 0$ **2.** $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$ **3.** $(x^m)^n = x^{mn}$

4. $(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$ **5.** $\left(\dfrac{x}{y}\right)^n = \dfrac{x^n}{y^n}$, $y \neq 0$ **6.** $\dfrac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$, $x \neq 0$

Ejemplo

a. Expresemos en forma de raíz las potencias $3^{\frac{5}{2}}$, $4^{\frac{3}{4}}$, $5^{\frac{2}{4}}$.

b. Expresemos como potencia $\sqrt{7^3}$, $\sqrt[7]{5^4}$.

Solución

a. $3^{\frac{5}{2}} = \sqrt[2]{3^5}$; $4^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{4^3}$; $5^{\frac{2}{4}} = \sqrt[4]{5^2}$

b. $\sqrt{7^3} = 7^{\frac{3}{2}}$; $\sqrt[7]{5^4} = 5^{\frac{4}{7}}$

Taller de competencias

1. Calculo teniendo en cuenta el ejemplo anterior.

a. $(-32)^{\frac{2}{5}}$ b. $16^{\frac{3}{2}}$

c. $(-27)^{\frac{2}{3}}$ d. $81^{-\frac{3}{4}}$

e. $-(-8)^{\frac{2}{3}}$ f. $\left(-\dfrac{1}{125}\right)^{-\frac{5}{3}}$

2. Escribo la potencia como radical o el radical como potencia, simplifico y entrego el resultado con exponentes positivos.

a. $(-27)^{\frac{3}{5}}$ b. $(x^3y^2)^{\frac{2}{3}}$

c. $\left(a^{-\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{4}{3}}$ d. $\sqrt[5]{-32x^5y^{-10}}$

e. $\left(\sqrt{x^2y^3}\right)^3$ f. $\sqrt[3]{(a+b)^2}$

g. $(x^{-1}+y^{-1})^{-\frac{1}{2}}$ h. $\left(-\sqrt[4]{10^4x^{-4}}\right)^4$

i. $\left(\dfrac{1}{y^{-2}}+\dfrac{1}{x^{-2}}\right)^{-\frac{3}{4}}$ j. $\sqrt{\left(\dfrac{1}{4}\right)^6}-\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^6}$

k. $\left(\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{y}\right)^{\frac{1}{2}}$ l. $-(-64x^3)^{-\frac{1}{3}}$

3. Determino si las siguientes expresiones son números reales o no.

a. $(-3)^{-\frac{1}{2}}$ b. $25^{-\frac{1}{4}}$

c. $\left(\sqrt{2}\right)^{-\frac{1}{3}}$ d. $\left(-\sqrt{3}\right)^{-\frac{2}{3}}$

4. Considero las variables como reales positivos, simplifico y doy el resultado con exponentes positivos.

a. $\left(x^{\frac{3}{4}}\right)^{-\frac{3}{5}}x^0\cdot x^{-\frac{3}{7}}$ b. $\dfrac{\left(a^{-\frac{1}{4}}b^{-\frac{3}{2}}c^{-\frac{1}{5}}\right)^2}{a^{\frac{3}{5}}b^{\frac{3}{4}}c^{\frac{3}{2}}}$

c. $\left[\dfrac{(m+n)^{\frac{1}{2}}}{(m+n)^{\frac{3}{2}}}\right]^{-1}$ d. $\dfrac{\left(a^{m-\frac{1}{2}}\right)^{m+\frac{1}{2}}}{a^{m^2+\frac{1}{4}}}$

e. $\dfrac{9a^{-\frac{1}{3}}b^2}{81a^{\frac{1}{4}}b^{-\frac{2}{3}}}$ f. $\left[\dfrac{x^{a^2-b^2}}{y^{(a-b)^2}}\right]^{\frac{1}{a-b}}$

g. $\left(x^{a+1}\right)^{\frac{1}{(a+1)^2}}\cdot x^{a^2+2a+1}$

h. $\dfrac{(-a)^{-\frac{x}{y}}\cdot\left[(-a)^{x^2}\right]^{\frac{1}{y}}}{(-a)^{\frac{1-x}{y}}}$

5. Efectúo las operaciones indicadas y simplifico.

a. $\left[\dfrac{2^{n-1}}{(2^{n+1})^{n-1}}\right]^{\frac{1}{1-n}}\div\left(2^{\frac{1}{n}}\right)^{n^2-1}$ __________

b. $\left(1-x^{-\frac{1}{2}}\right)^2-(x^{-2})^{\frac{1}{2}}+\left(x^{-\frac{3}{2}}\right)^0$ __________

c. $\left(\dfrac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{n}{m}}}\right)^{\frac{m}{m+n}}\div\left[a^{\frac{nm}{(m-n)}}\right]^{\frac{1}{m}}$ __________

d. $\left(\dfrac{y^{-2}+1}{1-y^{-2}}\right)^2\cdot\left[\dfrac{(y-1)^2}{1+2y^2+y^4}\right]$ __________

Soluciono problemas

6. El tipo de movimiento que realiza un péndulo es un ejemplo de movimiento armónico simple (m.a.s.). Un péndulo simple se define como una partícula de masa m suspendida de un punto O por una cuerda de longitud L y masa despreciable (figura 1.14).

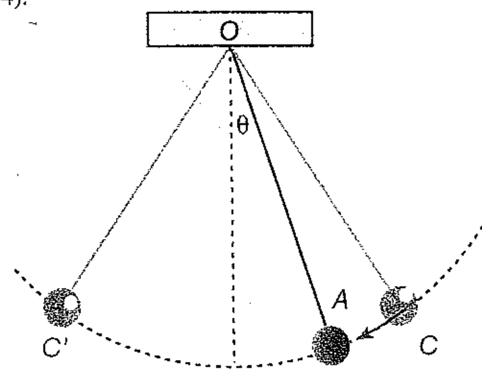


Fig. 1.14

El período de oscilación (P= tiempo que trascurre en ir y volver) equivale a $P=2\pi\left(\dfrac{L}{g}\right)^{\frac{1}{2}}$, donde L es la longitud de la cuerda y $g=9{,}8\dfrac{m}{s^2}$ es la gravedad.

Si una partícula se mueve con m.a.s. y período 2 segundos, ¿cuál debe ser la longitud de la cuerda?

7. Si una persona en una zona urbana se enferma de gripe, el número de personas contagiadas en t días será aproximadamente de

$$N=\frac{10\,000\,e^t}{e^t+10\,000}$$

($e\approx 2{,}718281\ldots\approx 2{,}72$ número de Euler).

a. ¿Cuántas personas se habrán contagiado después de $\dfrac{2}{3}$ de día si empezaron con gripe 3 personas? __________

b. Si empezó una persona con gripe, ¿cuántas estarán enfermas después de 4 días? ______

Desempeños: comprende y aplica propiedades para simplificar expresiones con potencias racionales.
Reduce potencias con exponentes racionales a radicales y viceversa.
Analiza y resuelve situaciones que se representan con exponentes.

Tema 8

Operaciones con radicales

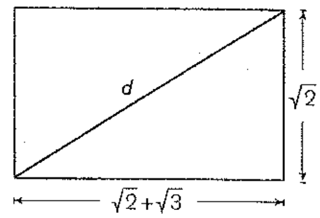


Fig. 1.15

El rectángulo de la figura posee medidas poco usuales; vamos a calcular su perímetro, su área y la longitud de la diagonal. Por tanto,

- Perímetro $= \sqrt{2}+\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)+\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)+\sqrt{2}$. Al reducir términos semejantes tenemos $P = 4\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$.
- Área $= \sqrt{2}\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$; aplicando la propiedad distributiva y las propiedades de radicales tenemos $A = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{3} = \sqrt{4}+\sqrt{6} = 2+\sqrt{6}$.
- Calculamos la longitud de la diagonal:

$d^2 = \left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2$	Aplicamos el teorema de Pitágoras.
$d^2 = \left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)+\left(\sqrt{2}\right)^2$	Usamos propiedades de la potenciación.
$d^2 = \sqrt{2}\sqrt{2}+\sqrt{2}\sqrt{3}+\sqrt{3}\sqrt{2}+\sqrt{3}\sqrt{3}+2$	Aplicamos la propiedad distributiva.
$d^2 = \sqrt{4}+2\sqrt{6}+\sqrt{9}+2 = 7+2\sqrt{6}$	Simplificamos.
$d = \sqrt{7+2\sqrt{6}}$	Despejamos d.

Para adicionar o sustraer raíces inexactas, descomponemos en factores primos el radicando y formamos potencias con exponente igual al índice para extraerlas de la raíz. Luego reducimos radicales semejantes.

La multiplicación se realiza en la misma forma que se multiplican expresiones algebraicas.

Ejemplo

Calculemos $5\sqrt{18a^2b} + 3a\sqrt{32b} - 2a\sqrt{50b}$.

Solución

$$5\sqrt{18a^2b}+3a\sqrt{32b}-2a\sqrt{50b} = 5\cdot\sqrt{3^2\cdot a^2\cdot 2b} + 3a\sqrt{4^2\cdot 2b} - 2a\sqrt{5^2\cdot 2\cdot b}$$
$$= 5\cdot 3\cdot a\sqrt{2b} + 3\cdot 4\cdot a\sqrt{2b} - 2\cdot 5\cdot a\sqrt{2b}$$
$$= 15a\sqrt{2b} + 12a\sqrt{2b} - 10a\sqrt{2b} = 17a\sqrt{2b}$$

Taller de competencias

1. Simplifico cada radical para buscar términos semejantes y reduzco.

a. $5\sqrt[3]{81} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{192} + \frac{5}{2}\sqrt[3]{648}$

b. $\sqrt[5]{x^{12}y^5} - 2\sqrt[5]{x^7} + x^2\sqrt[5]{x^2}$

c. $\sqrt[3]{54} + \sqrt{45} + \sqrt[3]{16} - 2\sqrt{80}$

d. $\frac{1}{2}\sqrt{a^3b} - \frac{3}{4}a\sqrt{ab} + \sqrt{\frac{4}{9}a^3b}$

e. $\sqrt{\frac{t^3+2t^2}{(2+t)^2}} - \frac{1}{t+2}\sqrt{\frac{1}{2+t}}$

f. $\sqrt{b^{-2}} + 4\sqrt{b^{-4}} - 3\sqrt{b^{-6}}$

g. $(a+b)\sqrt[5]{(a+b)^6} + \frac{1}{2}\sqrt[5]{(a+b)^{11}}$

h. $\sqrt[3]{-108} - \sqrt[3]{-32} + 5\sqrt[3]{-500}$

i. $x^2\sqrt{\frac{1}{3y^2}} - \sqrt{\frac{25x^4}{3y^2}}$

j. $\sqrt{1 - \frac{a}{b}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b^2 - 2ab + a^2}{b^2 - ab}}$

2. Aplico la propiedad distributiva y reduzco.

a. $-\sqrt{2}\left(\sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{7}\right)$

b. $a\sqrt{b}\left(2\sqrt{b} + b\sqrt{a}\right)$

c. $5\sqrt[3]{3}\left(-2\sqrt[3]{9} - 3\sqrt[3]{4}\right)$

d. $\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)\left(-\sqrt{6} + \sqrt{3}\right)$

e. $\left(2\sqrt{5} - 3\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3} + 2\sqrt{5}\right)$

f. $\left(\sqrt{5} + \pi\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5} + \sqrt{2}\right)$

3. Resuelvo, aplicando productos notables.

a. $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2$ b. $\left(2\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2$

c. $\left(\sqrt{3} - \sqrt{5}\right)\left(\sqrt{5} + \sqrt{3}\right)$ d. $\left(2 + \sqrt{a}\right)^3$

e. $\left(2\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^3$ f. $\left(\frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{2}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{7}}\right)$

4. En cada triángulo calculo el perímetro y el área.

a. b.

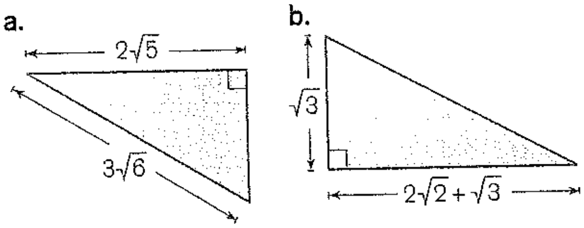
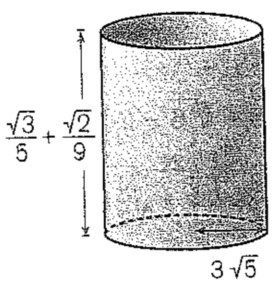


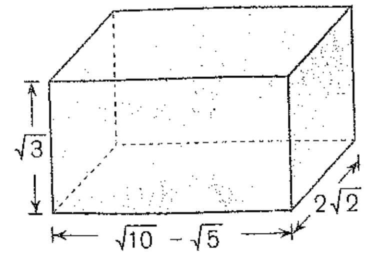
Fig. 1.16

5. Calculo el volumen de cada figura.

a.



b.



c.

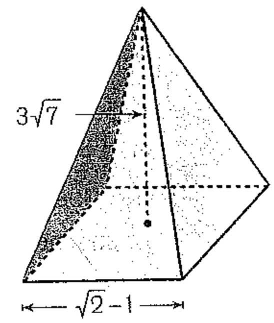


Fig. 1.17

Soluciono problemas

6. El costo de producción, en miles de pesos, de x unidades de cuadernos por hora es

$$\left[\frac{85 + \left(\sqrt{10}x + 10\right)^{\frac{3}{2}}}{x}\right]1000$$

Determino el costo de la producción, en una hora, de una docena, de tres docenas.

7. El área lateral de un cono recto es igual a la mitad del producto de la longitud de la generatriz por la longitud de la circunferencia c de su base.

$A_L = \frac{1}{2}g \cdot c.$

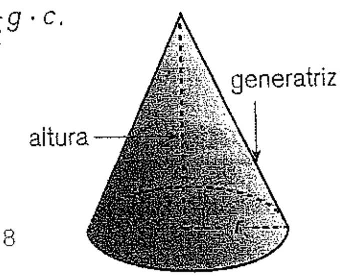


Fig. 1.18

El volumen del cono es $V = \frac{1}{3}B \cdot h$, donde B es el área de la base y h es la altura.

a. Calculo el área lateral y el volumen de un cono recto cuya base tiene como diámetro $3\sqrt{2}$ cm y su altura es 3 cm.

b. Si el cono tiene en su base $5\sqrt{3}$ cm de radio y $\left(3\sqrt{2} + 3\right)$ cm de generatriz, calculo A_L y V.

Desempeños: aplica correctamente las operaciones con raíces y el concepto de semejanza de términos.
Propone alternativas de solución a diversos problemas.

Tema 9

Racionalización

En álgebra, trigonometría o cálculo es normal que encontremos expresiones racionales con radicales en su denominador, como estas:

$$\frac{x+3}{\sqrt{2}},\quad \frac{\sqrt{2}+x}{\sqrt{3}-1},\quad \frac{x^2+1-2x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

Para reducirlas o poder trabajar con ellas, es necesario utilizar un procedimiento llamado racionalización.

Racionalizar un cociente con radicales en el denominador, significa hallar una fracción equivalente que no contenga radicales en el denominador.

Ejemplo

Racionalicemos el denominador de la expresión $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}}$.

Solución

$\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}}=\frac{\left(\sqrt{2}+1\right)\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{3}$. Se complificó por el denominador y se realizaron las operaciones.

Se llama el **conjugado** de $(x+y)$ a $(x-y)$ si el producto $(x+y)(x-y)=x^2-y^2$, donde cada factor es el conjugado del otro.

Ejemplo

Racionalicemos el denominador de $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$.

Solución

Para racionalizar un denominador compuesto, se multiplica por el conjugado del denominador:

$$\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{2}\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}=\frac{3\sqrt{10}+3\sqrt{6}}{\sqrt{5}^2-\sqrt{3}^2}=\frac{3\sqrt{10}+3\sqrt{6}}{2}$$

Taller de competencias

1. Racionalizo el denominador de las siguientes expresiones.

a. $\frac{3+\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$

b. $\frac{5\sqrt{2}-\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$

c. $\frac{-3\sqrt{2}-5\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

d. $\frac{5\sqrt{10}-10\sqrt{2}}{5\sqrt{5}}$

e. $\frac{a+\sqrt{b}}{\sqrt{b}}$

f. $\frac{5x-3y\sqrt{x}}{-2\sqrt{x}}$

g. $\dfrac{2 - \sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}}$ h. $\dfrac{5x\sqrt{5} - 3\sqrt{a^2}}{a\sqrt{3}}$

i. $\dfrac{x + 3\sqrt{x}}{5\sqrt{x}}$ j. $\dfrac{\sqrt{5x} - \sqrt{3y}}{4\sqrt{xy}}$

2. Observo el ejemplo y racionalizo el denominador de cada expresión.

$$\frac{5\sqrt[3]{y^2}}{3\sqrt[3]{xy}} = \frac{5\sqrt[3]{y^2}\cdot\sqrt[3]{x^2y^2}}{3\sqrt[3]{xy}\,\sqrt[3]{x^2y^2}}$$

$$= \frac{5\sqrt[3]{x^2y^4}}{3\sqrt[3]{x^3y^3}} = \frac{5y\sqrt[3]{x^2y}}{3xy} = \frac{5\sqrt[3]{x^2y}}{3x}$$

a. $\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2x}}$ b. $\dfrac{2\sqrt[4]{x} - 3\sqrt[4]{x^2y^5}}{\sqrt[4]{x^2y}}$

c. $\dfrac{3 + \sqrt{a}}{\sqrt[3]{ab}}$ d. $\dfrac{2\sqrt[3]{(a+b)^5}}{\sqrt[3]{(a+b)^2}}$

3. Hallo el conjugado de cada binomio y verifico que se cumpla la diferencia de los cuadrados.

a. $\left(x\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)$ ____________

b. $\left(\frac{1}{2}\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)$ ____________

c. $\left(-\frac{1}{3}\sqrt{ab} + \frac{1}{2}\sqrt{b}\right)$ ____________

d. $\sqrt{3x} - \sqrt{2x - y}$ ____________

e. $2\sqrt{x^2 - y^2} - \sqrt{x - y}$ ____________

f. $-\sqrt{a+b} - \sqrt{a-b}$ ____________

4. Racionalizo los denominadores.

a. $\dfrac{5}{3 + \sqrt{2}}$ ____________

b. $\dfrac{3 + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$ ____________

c. $\dfrac{-3\sqrt{6}}{\sqrt{6} - 2\sqrt{5}}$ ____________

d. $\dfrac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$ ____________

e. $\dfrac{2\sqrt{m+n} - \sqrt{n}}{\sqrt{n} - \sqrt{m+n}}$ ____________

f. $\dfrac{2\sqrt{x+y} - \sqrt{x-y}}{\sqrt{x-y} + \sqrt{x+y}}$ ____________

5. Racionalizo el numerador de la expresión y simplifico.

$$\frac{\sqrt{x+h+1} - \sqrt{x+1}}{h}$$

6. Asocio y racionalizo el denominador.

$$\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3} - \sqrt{2} + 2\sqrt{5}}$$

Soluciono problemas

7. La temperatura Celsius de un recipiente de vidrio, a cierta temperatura, después de t minutos es:

$$T_c = 15 + \frac{740}{\sqrt[5]{e^t}}$$

a. Después de 5 minutos, ¿qué temperatura tendrá el recipiente? ____________

b. ¿Cuál es la fórmula de la T_c sin radicales en el denominador? ____________

8. En ciencias de la Tierra, $\dfrac{v_1}{v_2}$ es la relación entre la velocidad de las ondas de compresión $v_1 = \sqrt{\dfrac{(1+2m)}{p}}$, y la velocidad de ondas de corte $v_2 = \sqrt{\dfrac{m}{p}}$.

¿Cuál es la expresión racionalizada y reducida de $\dfrac{v_1}{v_2}$?

Desempeños: racionaliza en expresiones con radicales, el numerador o el denominador.
Conjuga varios conceptos para reducir expresiones con radicales.
Aplica la racionalización a la solución de problemas.

Tema 10

Ecuaciones con radicales simples

Carlos necesitó saber cuál es el valor de x, para que el lado del cuadrado sea igual al radio de la circunferencia, teniendo en cuenta la información de la figura 1.19.

Carlos planteó entonces la ecuación

$2\sqrt{x} = x - 15$ con $x \geq 0$.

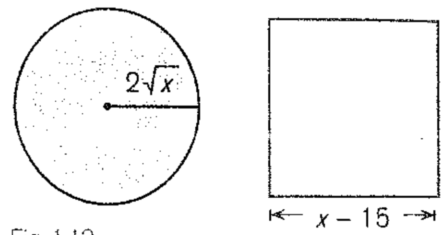


Fig. 1.19

Llamamos **ecuación radical** a la ecuación en la cual la variable aparece bajo el signo radical.

Al resolver una ecuación radical se deben elevar al cuadrado ambos lados de la igualdad para eliminar el radical o radicales que tenga; después se reduce y se puede llegar a una ecuación lineal o a una ecuación de segundo grado.

Ejemplo

Encontremos el valor de x en $2\sqrt{x} = x - 15$.

Solución

$\left(2\sqrt{x}\right)^2 = (x - 15)^2$	Elevamos al cuadrado.
$4x = x^2 - 30x + 225$	Realizamos las operaciones.
$0 = x^2 - 34x + 225$	Igualamos a cero.
$0 = (x - 25)(x - 9)$	Factorizamos.
$x - 25 = 0$, $x - 9 = 0$	Solucionamos cada ecuación.
$x = 25$ o $x = 9$	$x = 25$ es la única solución, ya que para $x = 9$, $2\sqrt{9} \neq 9 - 15$.

Denominamos **raíces extrañas** a las soluciones falsas que se generan al elevar al cuadrado los dos lados de una ecuación radical.

Taller de competencias

1. Coloco una R si la ecuación es ecuación radical o una M si no lo es.

a. $s + 1 = \sqrt{5}$ ☐

b. $5x + \sqrt{2} + x = -3$ ☐

c. $\sqrt{y + 1} - 2y = 0$ ☐

d. $\sqrt{3 + \sqrt{5}} + m = 5$ ☐

e. $\sqrt{z + 1} = -8$ ☐

f. $\sqrt{2x + 3} = \sqrt{x + 1}$ ☐

g. $p + \frac{1}{3} = 5$ ☐

h. $5 + y\sqrt{3} - 1 = 0$ ☐

i. $4 + \sqrt{x} + x = 2$ ☐

2. Verifico si el valor dado a la derecha es una raíz real o una raíz extraña de la ecuación.

a. $\sqrt{x+1} = -2;$ $\quad x = 3$

b. $\sqrt{5x+16} = \frac{1}{2}x + 4;$ $\quad x = 4$

c. $\sqrt{2x+3} = 6;$ $\quad x = 16{,}5$

d. $3\sqrt{x} = x - 4;$ $\quad x = 1$

e. $5\sqrt{x+3} = 2x + 3;$ $\quad x = -\frac{11}{4}$

3. Hallo el valor de x para el cual el perímetro del triángulo es 5 m.

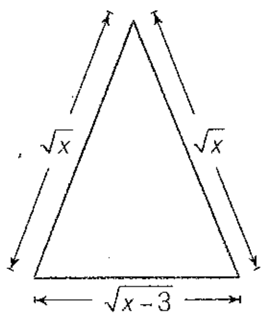


Fig. 1.20

4. Soluciono las siguientes ecuaciones.

a. $\sqrt{2x-1} = 9$

b. $8 - 4\sqrt{x} = 4$

c. $\sqrt{4-3x} = \frac{1}{2}$

d. $\sqrt{x^2+1} = \sqrt{\frac{10}{3}x}$

e. $2\sqrt{x} + 3 = 1$

f. $\sqrt{x+1} = 2\sqrt{x+3}$

g. $4 - \sqrt{3x} = 1$

h. $5 - \sqrt{x} = \sqrt{x-2}$

5. En la figura 1.21 tengo el cuadrado *ABCD* y el triángulo equilátero *DEF*.

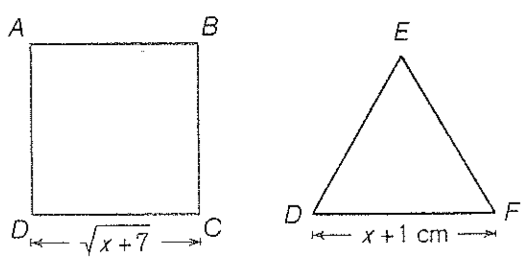


Fig. 1.21

a. Determino el valor de x para el cual la longitud del lado del cuadrado es igual a la longitud del lado del triángulo.

b. ¿Cuál figura geométrica tiene mayor perímetro? ____________________

c. ¿Cuál es el área de cada figura? __________

Soluciono problemas

6. ¿Cuál es el valor de x que hace que el perímetro de los cuadrados de la figura 1.22 sea el mismo? ¿Cuál es el perímetro?

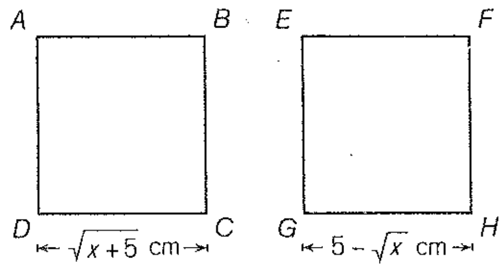


Fig. 1.22

Escribo una expresión, en términos de x, que represente la diagonal de cada cuadrado y calculo su longitud.

7. Deseo extender un cable para un amplificador a lo largo de 4 cuadras; si el precio, en centenas de pesos, por cada x metros de cable instalado está dado por la expresión $2(5+x) + 2\sqrt{x^2+0{,}5625} = 14{,}5$, ¿cuántos metros se instalan a un precio de \$ 1450? ¿Cuál es el precio de instalar 450 metros de cable?

Desempeños: reconoce las ecuaciones con radicales simples y sus raíces.
Establece relaciones entre operaciones y propiedades para resolver ecuaciones con radicales.
Soluciona problemas que se reducen a ecuaciones con radicales.

Matemática recreativa

1. **"Magia con el cálculo mental"**

   Pídele a un amigo que piense en un número real, lo divida entre 2, le sume 5, lo multiplique por 3 y le reste 25. Al final le pedirás la respuesta que obtuvo. A partir de las órdenes que le diste a tu amigo puedes construir el siguiente modelo algebraico:

   $x = 3\left(\frac{n}{2} + 5\right) - 25$, donde x es la respuesta que da tu amigo y n el número que adivinarás.

   Al simplificar esta expresión, obtenemos:

   $x = \frac{3n}{2} + 15 - 25 = \frac{3n}{2} - 10 = \frac{3n - 20}{2}$. Esto es $x = \frac{3n - 20}{2}$.

   ¡Practica con tus amigos! $n = \frac{2x + 20}{3}$

   1   3 -20 45 -15 133   91 $\frac{1}{2}$ 47 $-\frac{3}{5}$ 63

   Fig. 1.23

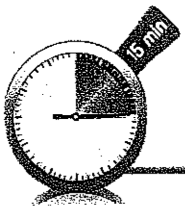
   - Si N está generado por el patrón $4\left(\frac{n}{3} + 6\right) - 2$, ¿cómo descubres el número n?
   - Invento 4 patrones diferentes donde n sea cada vez un N, Z^+, Z^-, Q.

2. En medicina se encontró experimentalmente una fórmula que determina el nivel de desnutrición de una persona. Éste depende de su masa, en gramos, y de la altura, en centímetros, de la persona sentada (distancia desde lo alto de la cabeza hasta la silla). Se llama *peledisi.*

   $$\text{Peledisi} = \frac{\sqrt[3]{10 \times (\text{masa en gramos})}}{\text{Talla sentado en cm}} = 100\%.$$

   Si el peledisi está entre 98% y 102% indica que la persona es saludable.

   - Invento tres situaciones en las que se deba consultar alguna de las variables que involucra la fórmula dada.
   - Intercambio con un compañero la resolución de problemas y comentamos las soluciones.



Evalúo mis competencias

Con los siguientes ejercicios, afianzo los desempeños que he superado y refuerzo aquellos que están por superar.

1. Escribo en cada caso un número que cumpla la condición.

a. Entero positivo. ________
b. Racional no entero. ________
c. Real no racional. ________
d. Real no irracional. ________
e. Entero no negativo y no positivo. ________
f. Entero negativo. ________
g. No real negativo. ________
h. Entero en notación decimal. ________

2. La siguiente tabla presenta la lista de las marcas mundiales de atletismo en las distintas modalidades, tanto para mujeres como para hombres.

Modalidad	Tiempo mujeres	Tiempo hombres
100 m	11,01 s	9,96 s
200 m	22,21 s	19,5 s
400 m	49,29 s	43,86 s
800 m	1:54,9 min	1:43,5 min
1500 m	3:56 min	3:32,3 min

Tabla 1.8

a. Expreso cada decimal en fracción.

b. Convierto los segundos en minutos.

c. Ubico en la recta real la velocidad de las mujeres, en metros por segundo.

d. Ubico en la recta real la velocidad de los hombres, en metros por segundo.

e. Calculo la diferencia de tiempos entre mujeres y hombres, para cada modalidad.

f. ¿En cuál modalidad la diferencia de velocidades entre mujeres y hombres es menor?

g. Invento dos preguntas que pueda responder con la información de la tabla.

3. Escribo cada decimal en su notación científica y efectúo la operación.

a. $\dfrac{0{,}00183 \times 555}{0{,}00143 \times 394{,}63}$ ________

b. $\dfrac{5343{,}5}{0{,}01432}$ ________

c. $\dfrac{25{,}3(0{,}6045) - 10{,}34}{18{,}5 - 5{,}64}$ ________

d. $\dfrac{(0{,}15)^2 - (34{,}45 \times 5{,}3)}{10^3}$ ________

4. Reduzco aplicando las propiedades de la potenciación y escribo con exponentes positivos.

a. $\dfrac{\left[m^{-5}n^{7}(p^{-3})^{2}\right]^{4}}{m^{18}n^{20}(p^{15})^{2}}$

b. $\dfrac{(-m^{3}np^{2})^{4}}{m^{2}n^{2}p^{-3}}$

c. $\dfrac{x^{2n}(-2x^{n+1}y^{2a+3})^{4}(y^{1-3a}x^{2+n})^{2}}{x^{2n-1}y^{2a+3}}$

d. $\dfrac{xy^{-1} + yx^{-1}}{(x^{4} - y^{4})(x - y)^{-1}}$

5. Hallo el conjunto solución de cada ecuación.

a. $\left|-3\left(x - \dfrac{1}{4}\right) + x\right| = 2$ ________

b. $|2x + 1| = |3(x - 2)|$ ________

c. $\sqrt{2x - 1} + 3 = 2\sqrt{x + 4}$ ________

d. $\sqrt{x - 1} = \sqrt{2x + 5} - \sqrt{2x}$ ________

6. Realizo las operaciones con radicales, reduzco y racionalizo el denominador si es necesario.

a. $\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2$ b. $-\frac{3}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{5}-1\right)^3$

c. $\frac{\sqrt{50}+3\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$ d. $(xy)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{y^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}}{x^2y^2}\right)$

e. $\frac{\sqrt{3}-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3\sqrt{2}}$ f. $\frac{h}{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}$

7. Invento y resuelvo ecuaciones con radicales cuyas soluciones reales sean los números dados.

a. $x=2$ b. $y=\frac{1}{2}$

8. Las alturas sobre el nivel del mar (+) o bajo el nivel del mar (−) de algunos sitios altos y bajos del mundo son:

Valle de la muerte	−86 m
Mar Muerto	−395 m
Pico McKinley	6194 m
Pico del Everest	8848 m

Tabla 1.9

a. Calculo la diferencia de altura entre el Mar Muerto y los demás sitios. ________________

b. ¿Entre cuáles sitios hay la menor diferencia de altura? ________________

c. ¿Entre cuáles sitios hay la mayor diferencia de altura? ________________

9. Un rectángulo está en proporción áurea si la razón entre el largo (l) y el ancho (a) es igual a la razón $\frac{2}{\sqrt{5}-1}\approx 1{,}618$.

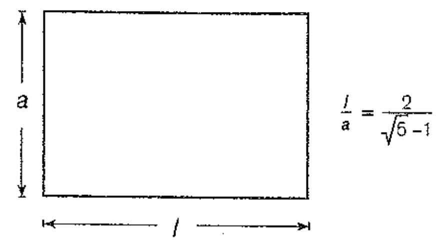


Fig. 1.24

En el rectángulo $MNOP$, A es el punto medio del segmento MC en el cuadrado $MNBC$ y $\overset{\frown}{BP}$ es un arco con centro en A.

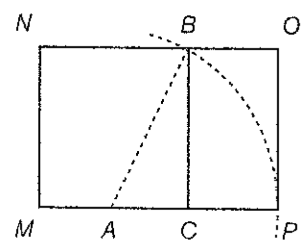


Fig. 1.25

a. Si x es la longitud del lado del cuadrado, pruebo que $MNOP$ es un rectángulo en proporción áurea. ________________

b. Si un rectángulo tiene 2,5 cm de ancho, ¿cuál debe ser su largo para que el rectángulo esté en proporción áurea? ________________

c. Escribo, según la figura 1.25 los pasos que se siguen para construir con regla y compás un rectángulo en proporción áurea. ________________

Autoevaluación

	Bajo	Básico	Alto	Superior
Clasifico cualquier número real como **N**, **Z**, **Q**, **I** o **R**.				
Utilizo las propiedades para realizar operaciones entre números reales.				
Construyo la recta real, ubico y leo números en ella.				
Escribo un número mediante su expresión decimal o viceversa.				
Aplico el concepto de valor absoluto al interpretar información y resolver problemas.				
Resuelvo diversos ejercicios y problemas con potencias enteras y potencias racionales.				
Domino los radicales: realizo simplificación, operaciones, racionalización y resuelvo diversas situaciones.				

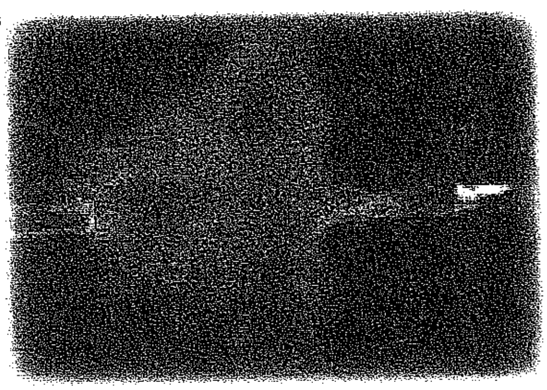
Prueba Saber

Encuentra la respuesta correcta entre las opciones A, B, C y D, y márcala en la hoja de respuestas, rellenando completamente el círculo correspondientes.

Contesta las preguntas 1 a 4 de acuerdo con la siguiente información.

El disparo de una bala

Todo objeto en movimiento posee un tipo de energía conocida como "cinética". Cuanto mayor es la velocidad y la masa del cuerpo, tanto más grande es su energía cinética. Así, la energía cinética depende del cuadrado del valor de la velocidad y de la mitad de su masa. Por ejemplo, la energía del movimiento de una bala proviene de la explosión de la pólvora que tiene lugar en el cañón. La explosión genera sobre todo energía calorífica que se trasmite al aire del cañón. El aire se expande rápidamente y proporciona energía cinética a la bala que sale a gran velocidad. La energía de la bala se trasmite al objeto que impacta.



1. Según el texto podemos deducir que la velocidad de cualquier objeto en movimiento, su masa y su energía cinética, se relacionan así:

   A. $\frac{E_k m}{2} = v^2$

   B. $\frac{2E_k}{m} = v^2$

   C. $\frac{E_k}{2m} = v^2$

   D. $\frac{2m}{E_k} = v^2$

2. Al introducir un clavo en la madera, no es posible que:

   A. La cabeza del martillo que posee energía cinética, la pierda cuando se detiene.

   B. La energía cinética desaparezca al detenerse el martillo.

   C. Los átomos del clavo reciban la energía cinética.

   D. La energía que reciba la madera sea de tipo calorífico.

3. Una bala de masa 0,05 kg sale con una velocidad de 60 m/s. La energía que gana el objeto que impacta es:

   A. 180 $m^2\ kgs^{-2}$

   B. 90 $m^2\ kgs^{-2}$

   C. 90 $m\ kgs^{-2}$

   D. 180 $m^2\ kgs^{-1}$

4. La unidad internacional de medida de la energía es el julio (J), cuyas unidades son $m^2\ kgs^{-2}$. La potencia indica la velocidad a la que cambia la energía y su unidad de medida es el vatio (W). Un vatio de potencia significa que se trasforma un julio en un segundo. Es decir, un electrodoméstico de 1000 W de potencia convierte 1000 J de energía eléctrica en la misma cantidad de energía calorífica por segundo, representado por 1 kJ.

   Si un aparato de 1000 W está encendido dos horas y media, entonces consume:

   A. 3600 kJ

   B. 9000 kJ

   C. 7200 kJ

   D. 1800 kJ

Contesta las preguntas de 5 a 7 de auerdo con la siguiente información.

En una fábrica se ensamblan tres clases de sillas: pequeñas, medianas y grandes, las cuales pasan por tres departamentos, pintura, ensamblaje y empaque. El tiempo que demora cada silla en cada uno de estos tres procesos se muestra en la tabla 1.10.

Tiempo empleado en cada proceso (minutos)

Silla / Departamento	Pequeña	Mediana	Grande
Pintura	10	15	20
Ensamble	5	15	10
Empaque	15	15	20

Tabla 1.10

Por problemas de espacio y de personal en la fábrica, los departamentos están disponibles únicamente durante los tiempos indicados en la tabla 1.11.

Departamento	Tiempo disponible semanal (en horas)
Pintura	5
Ensamble	3
Empaque	6

Tabla 1.11

Si x, y, z representan, respectivamente, el número de sillas pequeñas, medianas y grandes que se fabrican a la semana, entonces:

5. La ecuación que representa el tiempo (en minutos) semanal empleado por el departamento de pintura es:

A. $x + y + z = 5$

B. $x + y + z = 300$

C. $10x + 15y + 20z = 5$

D. $10x + 15y + 20z = 300$

6. La ecuación que representa el tiempo (en minutos) semanal empleado por el departamento de ensamble es:

A. $x + y + z = 180$

B. $5x + 15y + 10z = 3$

C. $5x + 15y + 10z = 180$

D. $x + y + z = 3$

7. La ecuación que representa el tiempo (en minutos) semanal empleado por el departamento de empaque es:

A. $15x + 15y + 20z = 360$

B. $15x + 15y + 20z = 5$

C. $x + y + z = 300$

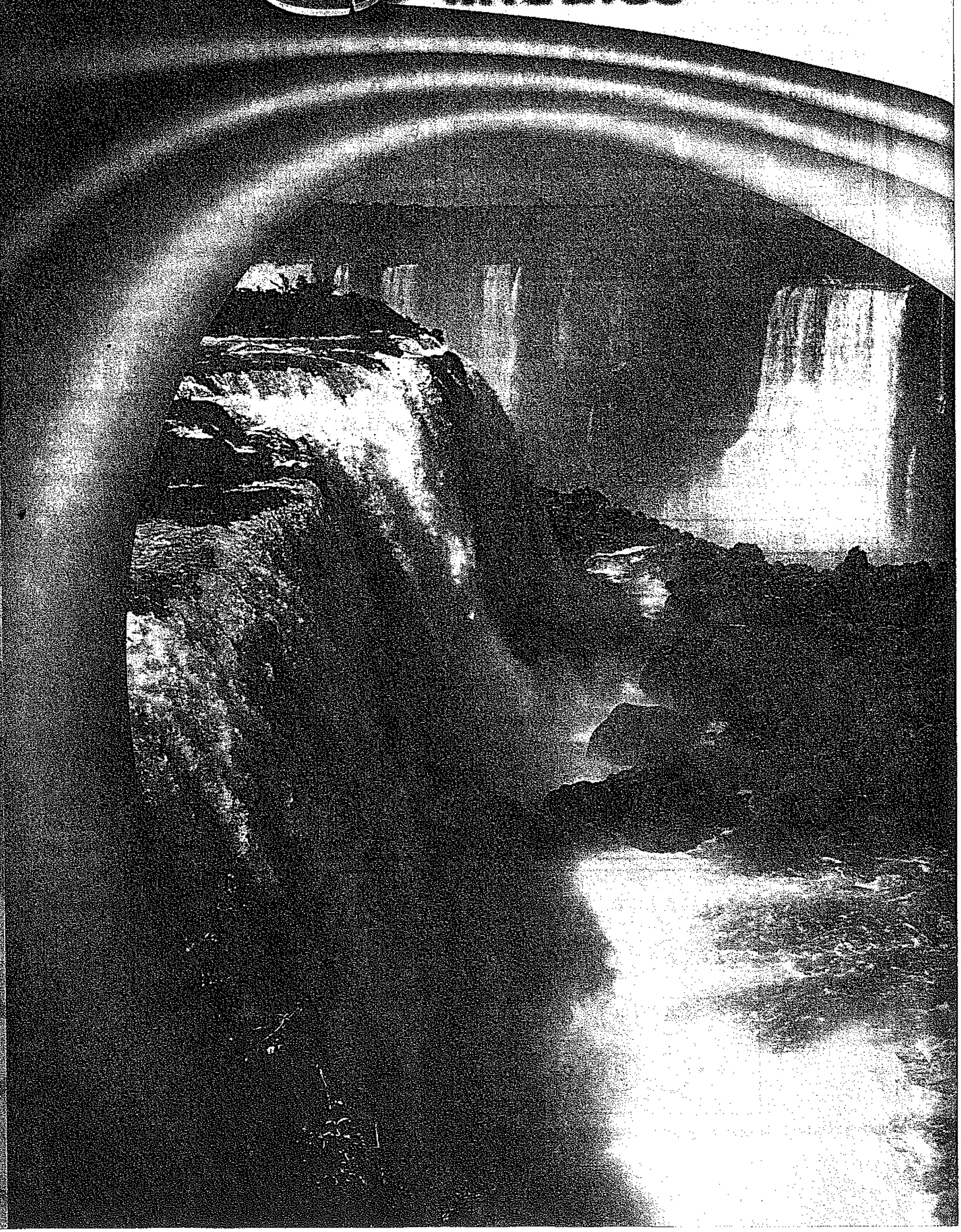
D. $x + y + z = 3$

Formato de respuestas

1. (A) (B) (C) (D)
2. (A) (B) (C) (D)
3. (A) (B) (C) (D)
4. (A) (B) (C) (D)
5. (A) (B) (C) (D)
6. (A) (B) (C) (D)
7. (A) (B) (C) (D)

Unidad 2

Sistemas de ecuaciones lineales



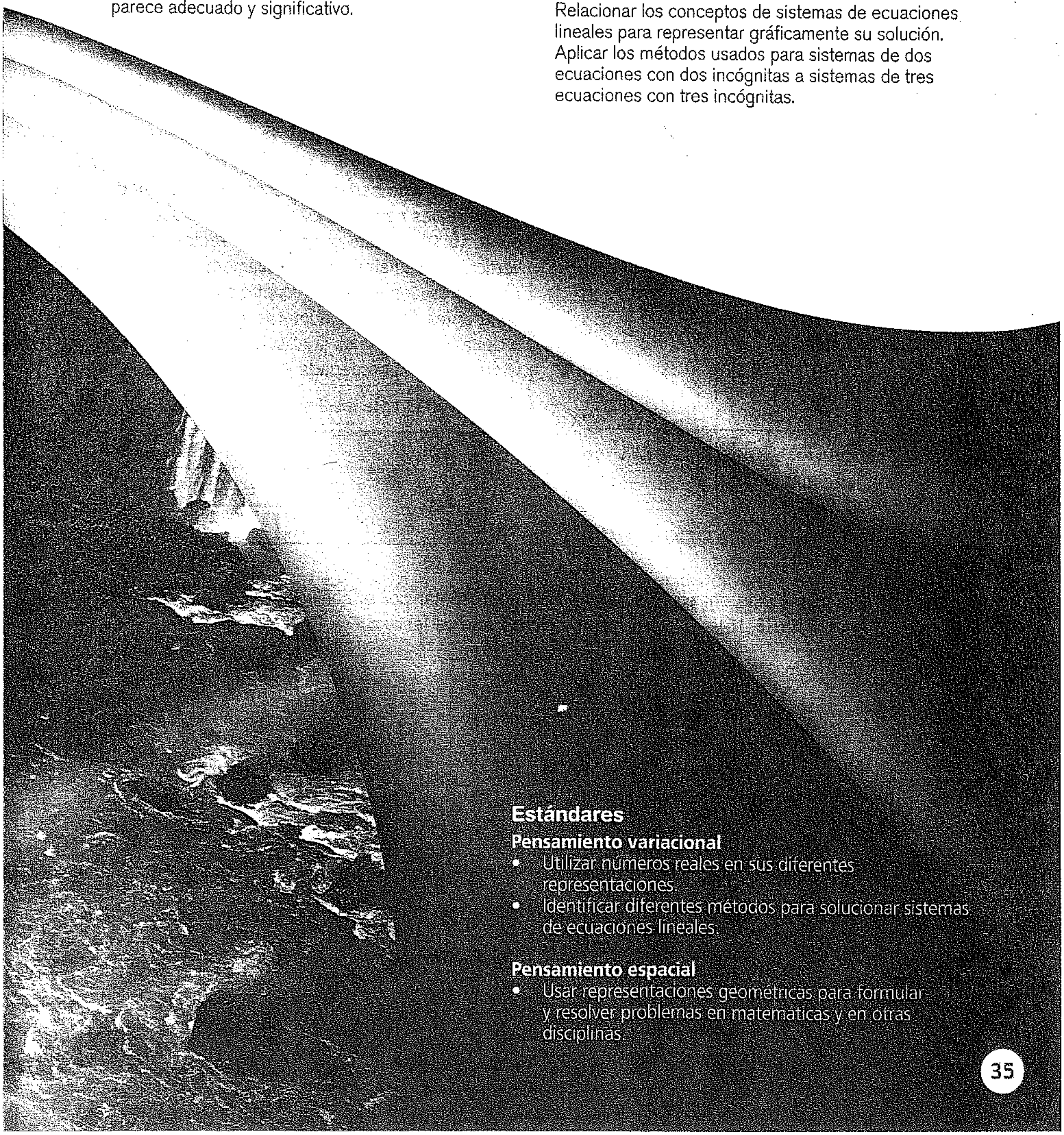
Procesos: El desarrollo de esta unidad me hará competente para:

Resolución de problemas
Aplicar diversas estrategias para resolver problemas que involucren la solución de sistemas de ecuaciones lineales.

Razonamiento lógico
Aplicar procesos de razonamiento para resolver sistemas de ecuaciones lineales.
Comparar distintos métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales y escoger el que mas me parece adecuado y significativo.

Comunicación
Proponer sistemas de ecuaciones lineales que satisfagan condiciones dadas propuestas en lenguaje cotidiano.
Construir sistemas de ecuaciones para modelar relaciones entre variables de situaciones numéricas.
Explicar cuando un sistema de ecuaciones con dos incógnitas tienen solución.

Conexiones
Relacionar los conceptos de sistemas de ecuaciones lineales para representar gráficamente su solución.
Aplicar los métodos usados para sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas a sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas.



Estándares

Pensamiento variacional
- Utilizar números reales en sus diferentes representaciones.
- Identificar diferentes métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales.

Pensamiento espacial
- Usar representaciones geométricas para formular y resolver problemas en matemáticas y en otras disciplinas.

Tema 1

Sistemas de coordenadas cartesianas

Las relaciones entre dos variables las podemos representar mediante gráficas. Algunas de ellas son: distancia y tiempo, ganancia e inversión, radio y área del círculo, perímetro y lado del cuadrado.

Por ejemplo, para representar la relación lado-perímetro, en un triángulo equilátero, elaboramos una tabla así:

Lado del △	1	2	3	4	5	...
Perímetro	3	6	9	12	15	...

Tabla. 2.1

La gráfica correspondiente a la tabla 2.1 es la figura 2.1.

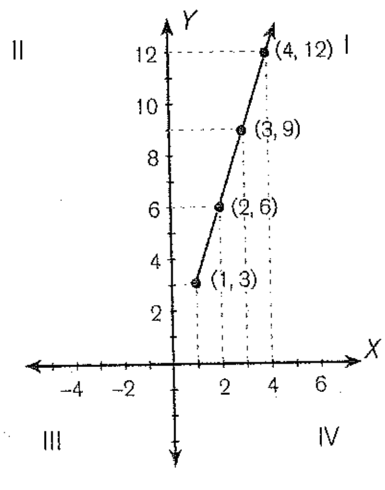


Fig. 2.1

Para hacer la gráfica de esta relación, usamos el sistema coordenado cartesiano, construido a partir de dos rectas reales perpendiculares, cuya intersección es el punto (0, 0) llamado origen. A las rectas horizontal y vertical las llamamos, respectivamente, eje X y eje Y. Los ejes dividen el plano en cuatro partes denominadas cuadrantes. Para a y b números reales, (a, b) es un par ordenado, donde a es la abscisa o coordenada x y b, la ordenada o coordenada y.

En cada cuadrante los signos de a y b son:

Cuadrante	I	II	III	IV
Abscisa *a*	+	–	–	+
Ordenada *b*	+	+	–	–

Tabla 2.2

La relación del ejemplo la podemos representar por el conjunto $T = \{(1, 3), (2, 6), (3, 9), (4, 12), (5, 15), \ldots\}$, subconjunto del producto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Taller de competencias

1. Ubico los puntos dados en el sistema coordenado.

$A(1, 1)$; $B(-2, 4)$; $C(-3, -2)$;

$D\left(-4, \frac{1}{2}\right)$; $E(5, -1)$; $F\left(\frac{3}{4}, 2\right)$;

$G(2, 4)$; $H(-3, 0)$; $I(0, -4)$

2. Hallo las coordenadas de los puntos A, B, C, D, E, F, G, H, I.

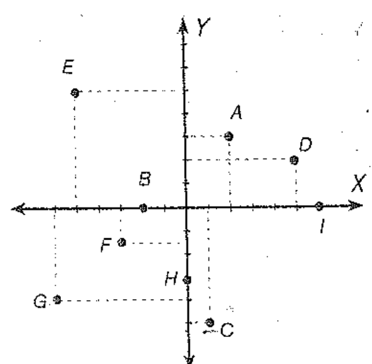


Fig. 2.2

3. Describo, como en el ejemplo, el subconjunto del plano representado en cada gráfica.

El conjunto es $N = \{(x, 3) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

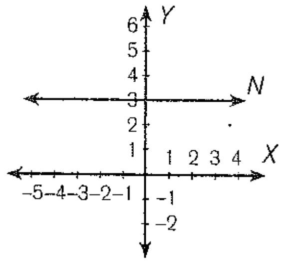
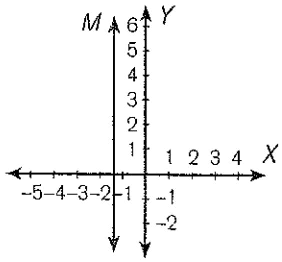
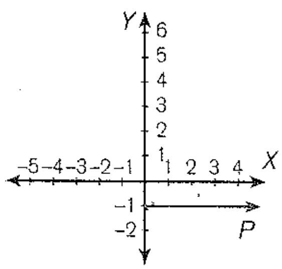


Fig. 2.3

a.



b.



c.

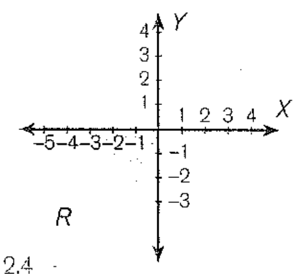


Fig. 2.4

4. Elaboro la gráfica de cada uno de los siguientes subconjuntos del plano.

a. $A = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}^+, y \in \mathbb{R}\}$

b. $B = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}^-\}$

c. $C = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \text{ y } x \cdot y > 0\}$

d. $M = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \text{ y } x = y\}$

e. $J = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$

5. Para hallar la distancia entre dos puntos del plano procedemos de la siguiente manera:

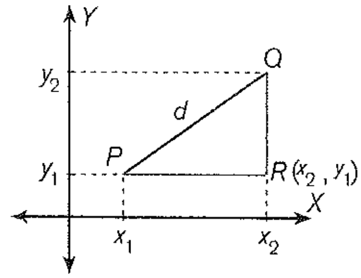


Fig. 2.5

Dados $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$, la distancia d, entre P y Q, notada por $d(P, Q)$ está dada por

$$d^2(P, Q) = d^2(Q, R) + d^2(P, R)$$
$$= |y_2 - y_1|^2 + |x_2 - x_1|^2$$

como $|x|^2 = x^2$, tenemos:

$$d(P, Q) = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}$$

Hallo la distancia entre los dos puntos dados.

a. $A(3, 2)$ y $B(-1, 5)$

b. $C\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ y $D\left(-4, \frac{3}{4}\right)$

c. $F(0, 1)$ y $G\left(-3, \frac{5}{2}\right)$

d. $M\left(\sqrt{2}, 3\right)$ y $N\left(3, -\sqrt{2}\right)$

e. $R(a + 3, b)$ y $S(3 - a, + 2b)$

Soluciono problemas

6. El alquiler de un carro tiene un costo fijo de \$ 350 000. Si se cobra según el número de kilómetros recorridos, a \$ 1000 por kilómetro:

a. ¿Cuánto debo pagar por 10 km, 20 km, 100 km?

b. Elaboro una expresión que represente el costo total según se recorran x kilómetros.

c. Grafico, en el sistema coordenado, la relación costo-kilometraje por cada 10 km, hasta 100 km.

7. Si un feto tiene más de 12 semanas, su longitud l en cm está dada por $l = 1{,}53t - 6{,}7$, donde t es la edad en semanas.

a. Elaboro una tabla para la longitud de un feto de 13, 14, 15, 16 y 17 semanas.

b. Hago la representación gráfica.

Desempeños: ubica puntos en el sistema coordenado.
Identifica aspectos básicos del sistema coordenado cartesiano.
Deduce la fórmula de distancia entre dos puntos.
Genera expresiones y tablas de situaciones prácticas.

Tema 2

Ecuaciones lineales con dos variables

José, en su papelería, vende diferentes artículos y sobre cada uno de ellos espera ganar \$ 500. Él organizó la información que posee, sobre costos y precios de venta de algunos artículos, en la siguiente tabla.

Artículo	Precio venta	Precio costo
Pegante unidad	1200	700
Sacapuntas	900	400
Regla	1500	1000
Corrector	2800	2300
Portaminas	2000	1400
Escuadra		2400

Tabla 2.3

Para completar la tabla escribió la expresión general:

Precio venta − Precio costo = 500

$$x \quad - \quad y$$
$$x \quad - \quad y \quad = 500$$

Para completar la tabla, José necesita saber el precio de venta de la escuadra. Utiliza la ecuación general para aplicarla al caso:

$$x - 2400 = 50$$
$$x = 500 + 2400$$
$$x = 2900$$

A toda ecuación de la forma $Ax + By = C$, donde A, B y C son números reales y A y B no son al mismo tiempo cero, la llamamos ecuación lineal con dos variables.

Cada par ordenado (1200, 700), (900, 400), etc., de la tabla 2.3 satisface la ecuación $x - y = 50$, por tanto, cada par es solución de la ecuación.

Si la ecuación lineal es una proposición verdadera para uno o más pares ordenados de números reales, cada uno de esos pares ordenados es una solución de la ecuación.

Si ubicamos cada par ordenado que satisface la ecuación $x - y = 500$ en el plano cartesiano obtenemos la figura 2.6:

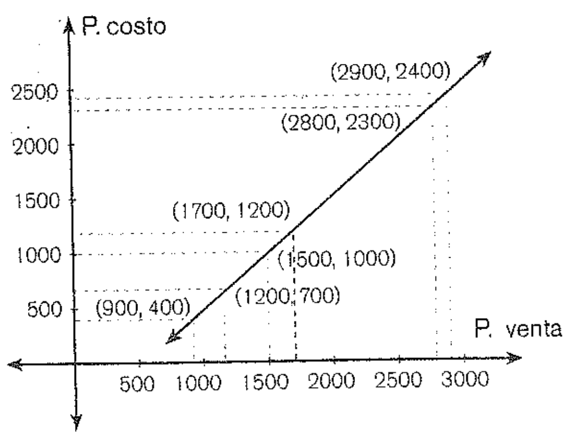


Fig. 2.6

Llamamos gráfica de la ecuación lineal con dos variables a la representación gráfica de los pares ordenados que son solución de la ecuación lineal.

La gráfica de una ecuación lineal con dos variables corresponde a una recta y toda recta del plano tiene una ecuación lineal con dos variables que la representa.

Taller de competencias

1. Escribo una E si la expresión dada es una ecuación lineal con dos variables y una C si no lo es.

a. $2x + 3y = 4$ ☐ b. $0x - y = -2$ ☐

c. $0x - 0y = \frac{1}{2}$ ☐ d. $4x - 0y = 1$ ☐

e. $x = 0$ ☐ f. $x = y$ ☐

g. $3x - 5y - \frac{1}{2} = 0$ ☐ h. $y = -1$ ☐

i. $\sqrt{-3}x + y = \sqrt{2}$ ☐ j. $\pi x - 2y = \pi$ ☐

2. Para cada ecuación determino 5 soluciones.

a. $x - y = 1$ b. $2x - 3y - 1 = 0$

c. $\frac{1}{2}x - 3 = y$ d. $y = -3x + 1$

e. $y = 4$ f. $x = -5$

g. ¿Cuántas soluciones más se pueden hallar para cada ecuación?

3. Determino si cada par ordenado es solución de la ecuación o no lo es. Escribo Sí o No en el cuadro.

a. $x - 5y = 2$; $(-1, 2)$ ☐

b. $3x + 4y - 1 = 0$; $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$ ☐

c. $2y - 6x = 0$; $(2, 6)$ ☐

d. $-x - y = -1$; $(0, 4)$ ☐

e. $2x = 5$; $\left(\frac{5}{2}, -1\right)$ ☐

f. $y - 3 = 0$; $(5, -3)$ ☐

g. $y = \frac{x}{2}$; $\left(5, \frac{1}{2}\right)$ ☐

h. $y = 3 - x$; $(-1, 4)$ ☐

i. $y = -5$; $(1, 4)$ ☐

j. $3x - y - 5 = 0$; $(3, -2)$ ☐

4. Hago una tabla de valores para cada ecuación a partir de los siguientes pasos:

- Despejo y si es necesario.
- Asigno a x un valor arbitrario.
- Remplazo x por el valor dado y hallo y.

a. $x + y = -1$

x	y
⋮	⋮

Tabla 2.4

b. $3x + 2y = 5$

x	y
⋮	⋮

Tabla 2.5

c. $y = -2x - \frac{1}{2}$

x	y
⋮	⋮

Tabla 2.6

d. $\frac{1}{3}x + y = \frac{1}{5}$

x	y
⋮	⋮

Tabla 2.7

e. $y = -x$

x	y
⋮	⋮

Tabla 2.8

f. $2y + 2x = \frac{1}{2}$

x	y
⋮	⋮

Tabla 2.9

5. Trazo la recta de cada una de las ecuaciones lineales del punto anterior. ¿Cuántos puntos, mínimo, necesito tener para trazar cada recta?

6. Consigo dos puntos de cada recta y las trazo en el mismo plano cartesiano.

a. $y = 3x$ b. $y = \frac{1}{2}x$

c. $3y = x$ d. $y = -x$

e. $-y = 2x$ f. $y = x$

¿Las rectas se cortan? ¿Cuál es el punto de intersección?

Soluciono problemas

7. La masa adecuada de una persona está determinado por su estatura t, según sea hombre o mujer. Para la masa en kg y la estatura en cm, tengo:

Mujeres: $M = \frac{t}{2} - 25$ Hombres: $M = \frac{3t}{4} - 62{,}5$

a. Completo las siguientes tablas de valores para mujeres y para hombres.

Mujeres	
Estatura (cm)	**Masa (kg)**
145	
150	
153	
158	
160	
165	
170	
175	

Tabla 2.10

Hombres	
Estatura (cm)	**Masa (kg)**
150	
155	
160	
168	
173	
178	
180	
185	

Tabla 2.11

b. Trazo las gráficas, estatura contra masa para cada sexo.

c. Escribo cada ecuación en la forma $Ax + By = C$.

8. En la fórmula $c = 0{,}138n + 4{,}46$, c representa la temperatura en grados centígrados a la que se encuentra un grillo y n representa el número de chirridos que éste emite en un minuto.

a. ¿Cuántos chirridos emite un grillo a 15,5 °C?

b. ¿Cuál es la temperatura a la cual debe estar el grillo para emitir 160 chirridos en un minuto?

c. ¿A qué temperatura debe estar el grillo para que deje de chirriar?

d. Elaboro una tabla donde incremento n cada vez.

e. ¿A mayor temperatura es mayor el número de chirridos?

f. Grafico la ecuación.

9. Las rectas $3y - 4x = -1$, $2y + 3x = 22$ y $5y - x = 4$ determinan el triángulo ABC.

a. Grafico las tres rectas en el mismo plano y trazo el triángulo.

b. Determino los vértices A, B y C del triángulo.

c. Hallo el perímetro del triángulo.

Sugerencia: hallo la distancia entre cada par de vértices del triángulo.

10. Una ferretería dispone de $ 100 000 para comprar tornillos y tuercas. Los precios por unidad de los tornillos oscilan entre $ 150 y $ 500 y los de las tuercas entre $ 100 y $ 400.

a. Si se compran a $ 100 y $ 200 la unidad de tuercas y tornillos, respectivamente, y se adquieren 300 tornillos, ¿cuántas tuercas se pueden comprar?

b. Si se compra igual número de tuercas que de tornillos a $ 350 los tornillos y a $ 150 las tuercas, ¿cuántas parejas tuerca-tornillo se pueden formar? ¿Cuánto cuestan las tuercas? ¿Cuál es el costo de los tornillos?

c. Si se compran los tornillos y las tuercas más costosos, y mínimo se deben adquirir 150 tuercas, para comprar tantas tuercas como tornillos, ¿en cuánto excede el presupuesto? Si se gastan los $ 100 000, ¿cuántos tornillos se pueden comprar?

Desempeños: Identifica la forma general de una ecuación lineal con dos variables.
Encuentra soluciones de una ecuación lineal con dos variables y su gráfica.
Da solución a problemas de ecuaciones lineales con dos variables.

Tema 3

Pendiente de una recta

Una rampa de patinaje se construyó con tres tablas; una horizontal de 4 metros de longitud, una vertical de 1 metro de alto y otra inclinada de 4,1 metros, aproximadamente.

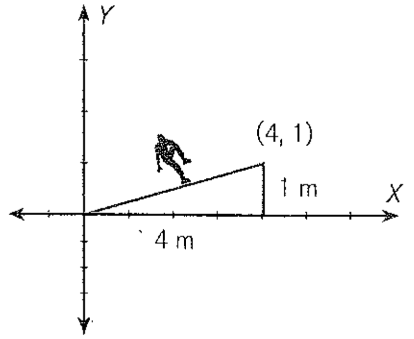


Fig. 2.7

Si no es posible medir el ángulo de inclinación de la rampa respecto a la horizontal, ¿cómo se puede determinar la inclinación de la rampa?

Al dibujar la rampa en el plano cartesiano, donde (0, 0) y (4, 1) son las intersecciones de la tabla inclinada con las tablas horizontal y vertical, respectivamente, podemos calcular:

$$\text{Número que indica la inclinación} = \frac{\text{Diferencia de las ordenadas}}{\text{Diferencia de las abscisas}} = \frac{1-0}{4-0} = \frac{1}{4}.$$

El número que indica la inclinación de la recta se llama pendiente. Dados dos puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$, de una recta no vertical, la pendiente m se calcula:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\text{Diferencia de ordenadas}}{\text{Diferencia de abscisas}}$$

Taller de competencias

1. Encuentro la pendiente de la recta que pasa por cada pareja de puntos.

a. $(-1, 4)$; $(5, 3)$ **b.** $(-3, -2)$; $(1, 0)$

c. $(0, 0)$; $(-4, 6)$ **d.** $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$; $\left(-1, \frac{3}{2}\right)$

e. $(3, 1)$; $(3, 8)$ **f.** $(2, -5)$; $(3, -5)$

g. $\left(\sqrt{2}, 2\right)$; $\left(-1, \sqrt{2}\right)$ **h.** $(1, 1)$; $(1, 4)$

i. $\left(\frac{3}{4}, -1\right)$; $\left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{4}\right)$ **j.** (a, b); $\left(2a, \frac{b}{2}\right)$

k. (a, a^2); (b, b^2) **l.** $\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right)$; $\left(\frac{2}{a}, \frac{3}{b}\right)$

2. Observo el ejemplo y encuentro dos puntos de la recta a partir de la pendiente m y un punto dado.

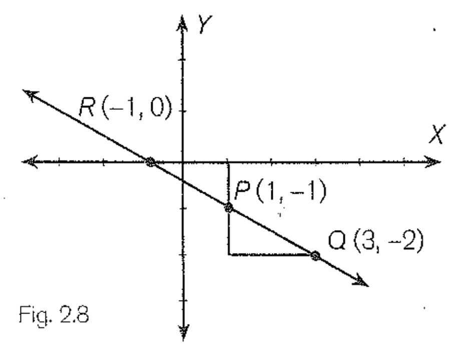


Fig. 2.8

Si $m = \frac{-1}{2}$ y $P(1, -1)$, me desplazo, a partir de P, una unidad hacia abajo y dos unidades hacia la derecha (o viceversa). El punto Q es el punto pedido.

Como $m = \frac{-1}{2} = \frac{1}{-2}$ y me puedo, también, desplazar 1 unidad arriba y 2 unidades a la izquierda, hallo a partir de P, otro punto R de la recta.

a. $m = \frac{4}{-3}$, (−1, 2) b. $m = \frac{-1}{3}$; (0, 0)

c. $m = \frac{2}{5}$, (−2, 3) d. $m = 3$, $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$

e. $m = -2$, (0, 4) f. $m = -\frac{3}{2}$, (2, −3)

g. $m = \frac{0}{1}$, (3, 4)

h. $m = \frac{1}{0}$ indeterminada, (−1, 1)

3. Hallo la coordenada que falta en cada caso.

	Pendiente	Puntos de la recta
a.	$m = 2$,	$P(1, -3)$ y $Q(1, y)$
b.	$m = -\frac{1}{3}$,	$P(2, y)$ y $Q(-1, 5)$
c.	$m = -\frac{2}{7}$,	$P(x, -1)$ y $Q(0, 4)$
d.	$m = -\frac{4}{3}$,	$P\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ y $Q(x, -1)$
e.	$m = 0$,	$P(5, y)$ y $Q\left(\frac{1}{2}, 3\right)$
f.	$m = 6$,	$P(-3, 4)$ y $Q(0, 4)$

Soluciono problemas

4. Interpreto la información suministrada en 1, 2 y 3, determino la pendiente y, según ella, decido si la recta propuesta es inclinada, vertical u horizontal. Trazo la gráfica.

Dados dos puntos de la recta:

1. Si las ordenadas son iguales, la pendiente m es cero y la recta es horizontal.
2. Si las abscisas son iguales, la pendiente m es indeterminada y la recta es vertical.
3. Si las abscisas y las ordenadas son diferentes, la pendiente m es cualquier número real diferente de cero y la recta es inclinada.

a. (−1, 2) y (−3, 2) b. (8, 9) y (−9, 8)

c. (0, 1) y (0, 3) d. (4, 3) y (−2, 3)

e. (5, −3) y $\left(5, \frac{1}{2}\right)$

f. $\left(3, -\frac{1}{4}\right)$ y $\left(2, -\frac{3}{5}\right)$

g. $\left(5, -\frac{1}{4}\right)$ y $\left(3, -\frac{1}{4}\right)$

h. (3, −7) y $\left(\frac{1}{2}, -7\right)$

i. $\left(9, -\frac{1}{2}\right)$ y $\left(7, -\frac{1}{4}\right)$

5. Indico la inclinación del carro, la bicicleta, la persona y la montaña, según la gráfica.

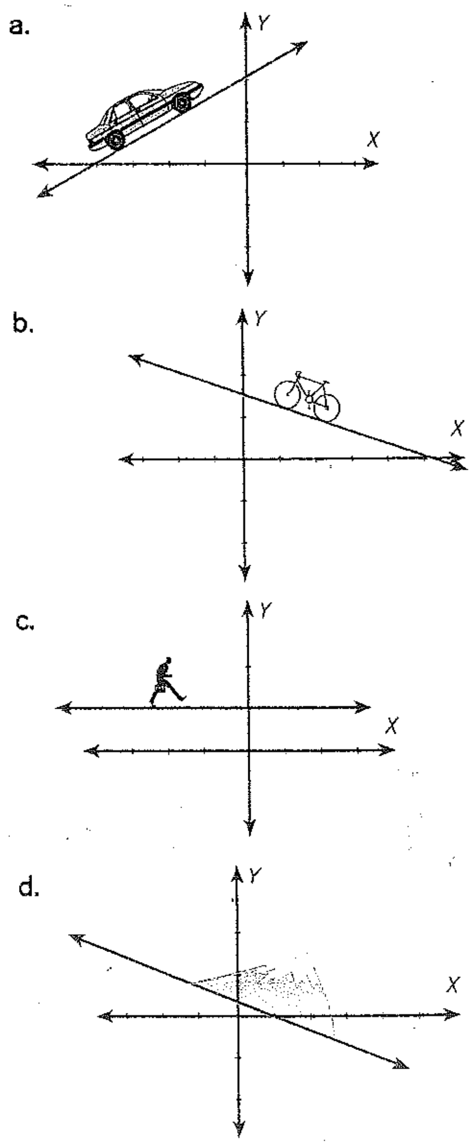


Fig. 2.9

Desempeños: relaciona elementos para calcular la pendiente de una recta.
Comprende el concepto de pendiente.
Propone soluciones para situaciones prácticas donde se requiere un plano inclinado.

Tema 4

Forma pendiente-intersecto

En la ecuación de la recta $x + 2y - 1 = 0$, si $x = 0$ encontramos que y es $\frac{1}{2}$.
Análogamente si $y = 0$ hallamos que $x = 1$. Gráficamente tenemos la figura 2.10.

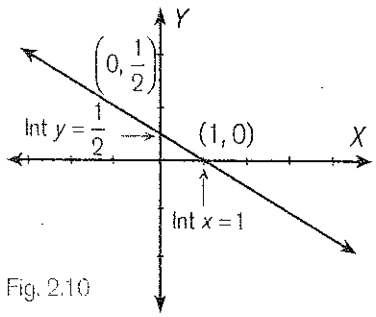


Fig. 2.10

Los puntos donde la recta corta al eje X y al eje Y son $(x, 0)$ y $(0, y)$, respectivamente. La coordenada x se llama **intersecto** x y la coordenada y se llama **intersecto** y se denotan int - x e int - y, respectivamente.

Despejemos y en la ecuación $x + 2y - 1 = 0$: $y = -\frac{x}{2} + \frac{1}{2}$, donde int - $y = \frac{1}{2}$, y

$m = \dfrac{0 - \frac{1}{2}}{1 - 0} = -\frac{1}{2}$. Por tanto:

> Si m es la pendiente de una recta y b es el int - y, tenemos que la **ecuación de la recta, en la forma pendiente-intersecto**, es: $y = mx + b$.

Ejemplo

Escribamos en la forma pendiente-intersecto la ecuación de la recta con $m = 3$ y $b = -\frac{1}{4}$.

Solución

En $y = mx + b$ remplazamos y obtenemos $y = 3x - \frac{1}{4}$.

Taller de competencias

1. Determino para cada ecuación int - x, int - y y trazo la gráfica.

a. $2x - 3y - 5 = 0$
b. $\frac{1}{2}x + y - \frac{1}{4} = 0$
c. $5y + 3x = \frac{5}{3}$
d. $2x = 6y$
e. $\frac{5}{7}y - 3 = 2x$
f. $y = 5$
g. $x = -\frac{1}{4}$
h. $\frac{x + y}{5} = \frac{1}{2}$
i. $\frac{4}{3}y - \frac{5}{6}x - \frac{3}{2} = 0$

2. Dado el intersecto b en y, y la pendiente m, trazo la recta ubicando otro punto de ella mediante el desplazamiento que indica la pendiente.

Recuerdo el ejercicio 2 del tema 3.

a. $b = 0$; $m = 1$
b. $b = 4$; $m = \frac{1}{2}$
c. $b = -3$; $m = -\frac{3}{4}$
d. $b = -\frac{3}{5}$; $m = 4$
e. $b = 9$; $m = 0$
f. $b = 1$; $m = -\frac{5}{6}$
g. $b = \frac{1}{2}$; $m = -2$
h. $b = 5$; $m = 8$

3. Escribo la ecuación de cada recta del punto anterior, en la forma pendiente-intersecto.

4. Hallo el intersecto en x, de cada recta del punto 2.

5. En cada ecuación de la forma $Ax + By = C$ despejo y, escribo la ecuación de la recta en la forma $y = mx + b$ y determino la pendiente m y el int - y.

a. $5y = 3$ **b.** $\frac{1}{4}x + 3y = -2$

c. $-3x - 7y = -\frac{1}{2}$ **d.** $\frac{2(x+3) - y}{5} = 4$

e. $5 - x = \frac{y+1}{3}$ **f.** $\frac{x+y}{4} = \frac{5}{3}$

g. $3x + \frac{1}{4} = 2y + 1$ **h.** $2y - 4 = 0$

i. $\frac{x-y}{4} - \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$ **j.** $Ax + By = C$

6. Encuentro el intersecto en y, de una recta si conozco la pendiente y un punto de ella, como indica el ejemplo.

Si $m = \frac{1}{3}$ y $P(4, -2)$, entonces $y = mx + b$ se convierte en $-2 = \frac{1}{3} \cdot 4 + b$. Al despejar b, obtengo $b = -\frac{10}{3}$, que es el int - y.

a. $m = -\frac{1}{4}$; $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ **b.** $m = -5$; $(-3, 2)$

c. $m = 3$; $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$ **d.** $m = 0$; $(1, 3)$

e. $m = -\frac{3}{2}$; $(4, 1)$ **f.** $m = \frac{5}{7}$; $(-2, -9)$

g. $m = \frac{1}{2}$; $\left(-6, \frac{3}{2}\right)$ **h.** $m = 0$; $\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$

i. $m = 1$; $(0, 0)$ **j.** $m = 0$; $(0, 0)$

k. $m = \frac{c}{d}$; (a, b) **l.** $m = 4$; $\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right)$

Soluciono problemas

7. Si la recta es vertical, la pendiente es indefinida y no existe el int - y. Por tanto, su ecuación es de la forma $x = k$ donde $k \in \mathbb{R}$.

Utilizo esta información y, a partir de la gráfica, determino la ecuación de cada recta.

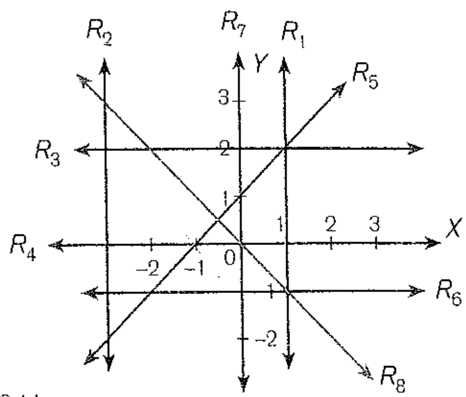


Fig. 2.11

a. $R_1 \longrightarrow$ ______ **b.** $R_2 \longrightarrow$ ______

c. $R_3 \longrightarrow$ ______ **d.** $R_4 \longrightarrow$ ______

e. $R_5 \longrightarrow$ ______ **f.** $R_6 \longrightarrow$ ______

g. $R_7 \longrightarrow$ ______ **h.** $R_8 \longrightarrow$ ______

8. La masa promedio de una mujer de 160 cm es 55 kg, mientras que el de una mujer de 170 cm es 60 kg.

a. Elaboro la gráfica estatura contra masa.

b. Hallo la pendiente de la recta.

c. Determino la ecuación lineal que relaciona los datos.

d. Interpreto el significado de la pendiente y del int - y de la recta.

e. ¿A partir de qué estatura la ecuación tiene sentido?

f. ¿Cuál es la estatura de una mujer de 75 kg? ¿Cuál es la estatura de una mujer de 65 kg?

Este ejercicio ilustra una utilidad de las rectas: dados dos valores extremos, se pueden hallar valores intermedios; por ejemplo, se puede conocer la masa de una mujer de 168 cm o la estatura de una mujer de 72 kg.

Desempeños: Identifica la ecuación de una recta en la forma $y = mx + b$ a partir de sus elementos y viceversa.
Reconoce la forma $y = mx + b$ como la ecuación de una recta.
Resuelve problemas y comprende la utilidad de las ecuaciones lineales.

Tema 5

Ecuación de la recta a partir de elementos dados

La esperanza de vida para los hombres, en 1950, era de 65 años y, en 1970, era de 68 años. ¿Cuál expresión nos permite determinar la esperanza de vida para los hombres durante los años siguientes?

1. Los puntos tienen coordenadas (año, edad), por tanto, (1950, 65), (1970, 68) representan la información dada.

$$m = \frac{68 - 65}{1970 - 1950} = \frac{3}{20}$$

2. Como $y = mx + b$, tomamos como ejemplo la pareja (1950, 65) y obtenemos: $65 = \frac{3}{20} \cdot 1950 + b$, por tanto $b = -227{,}5$. Formamos así la ecuación: $y = \frac{3}{20}x - 227{,}5$. Esta ecuación es la expresión buscada.

Si conociéramos la pendiente $m = \frac{3}{20}$ y la pareja (1970, 68) el procedimiento para deducir la expresión sería similar al realizado en el numeral 2.

La ecuación de una recta, en cualquiera de sus formas, se puede escribir a partir de:

- Dos puntos de la recta.
- La pendiente y un punto de la recta.

Taller de competencias

1. Escribo la ecuación de la recta en la forma pendiente-intersecto para la pendiente m y el punto dado.

a. $m = -4$; $(-1, 5)$

b. $m = -\frac{3}{2}$; $(2, -7)$

c. $m = 2$; $\left(-\frac{3}{2}, 5\right)$

d. $m = 8$; $\left(-7, \frac{1}{3}\right)$

e. $m = 0$; $(-5, 4)$

f. m indefinida; $(3, 4)$

g. $m = \frac{5}{4}$; $(0, 3)$

h. $m = -\frac{6}{7}$; $(3, 0)$

i. m indefinida; $(0, 0)$

j. $m = 0$; $(0, 0)$

2. Escribo la ecuación en la forma $Ax + By = C$ para la recta que pasa por los puntos dados.

a. $\left(-1, \frac{1}{4}\right)$ y $\left(1, \frac{3}{4}\right)$

b. $(8, -6)$ y $(2, -1)$

c. $(5, 3)$ y $(5, -2)$

d. $(3, 1)$ y $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

e. $(1, 1)$ y $(2, 2)$

f. $(0, 4)$ y $(-1, 4)$

g. $(-9, 3)$ y $(8, 3)$

h. $(15, 64)$ y $(13, 60)$

i. $\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$ y $\left(0, \frac{1}{3}\right)$

j. $(-3, 5)$ y $\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{8}\right)$

Soluciono problemas

3. A partir de la gráfica, determino las ecuaciones de las rectas que contienen los lados del pentágono.

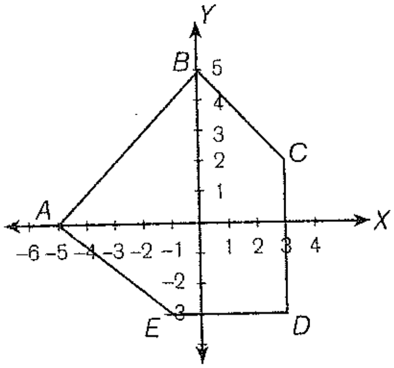


Fig. 2.12

4. Los vértices de un triángulo son $A(-1, 4)$, $B(-2, 3)$ y $C(4, 1)$.

a. Escribo la ecuación que representa cada lado del triángulo.

b. Determino el perímetro del triángulo.

c. El punto medio de un segmento de extremos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) está dado por la expresión

$$P_M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Hallo las ecuaciones de las tres medianas del triángulo.

5. Laura y Karina, partiendo del mismo punto, recorren una carretera en autos diferentes. En 2 horas Laura recorre 80 km, y Karina, 100 km.

a. Uso dos rectas, una para cada recorrido, y represento la situación en un mismo plano cartesiano: tiempo-distancia.

b. Hallo la ecuación que representa la distancia recorrida por cada mujer en términos del tiempo.

c. Si la velocidad es el cociente distancia sobre tiempo, ¿cuál elemento de la ecuación, de cada recta, la representa?

d. Si la carretera tiene 450 km, ¿en cuánto tiempo hace cada una este recorrido?

e. Al cabo de 3 h y 30 min, ¿qué distancia habrá recorrido cada una de ellas?

6. La longitud l de un péndulo es la distancia que existe del centro de suspensión al centro de la esfera (figura 2.13). El período de oscilación del péndulo simple corresponde a la expresión:

$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, donde $T^2 = \frac{4\pi^2}{g} l$ y $g = 9{,}8\ m/s^2$.

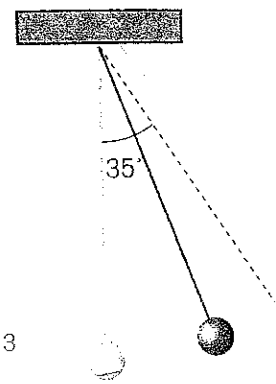


Fig. 2.13

Para péndulos de amplitud no mayor a 30°, con longitudes de 0,3 m, 0,45 m y 0,7 m:

a. Encuentro, para cada longitud, el respectivo T^2.

b. Construyo la gráfica que representa la variación de T^2 de acuerdo con la longitud del péndulo, para cada uno de los casos considerados.

c. Calculo la longitud de los péndulos cuyos T^2 son $1\ s^2$, $5\ s^2$, $10\ s^2$.

d. ¿Es la relación, entre T^2 y l una relación lineal? Si es así, encuentro una ecuación lineal que represente esta variación.

7. Demuestro que la ecuación $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ corresponde a la recta que pasa por los puntos $(a, 0)$ y $(0, b)$.

Desempeños: plantea la ecuación de una recta a partir de sus elementos.
Identifica con cuáles elementos puede escribir la ecuación de una recta.
Resuelve problemas mediante el uso de ecuaciones lineales.

Tema 6

Rectas paralelas y perpendiculares

Para el cuadrado de la figura 2.14, verifiquemos que dos lados no consecutivos son paralelos y que dos lados consecutivos son perpendiculares.

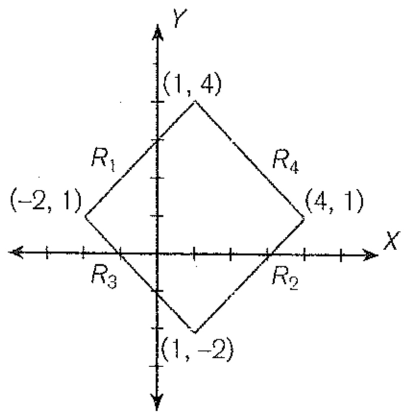


Fig. 2.14

Las ecuaciones de las rectas que contienen los segmentos R_1, R_2, R_3 y R_4 son $y = x + 3$, $y = x - 3$, $y = -x - 1$ y $y = -x + 5$, respectivamente.

- R_1 y R_2 tienen la misma pendiente y R_3 y R_4 también.
- R_1 y R_3 tienen pendientes 1 y −1, respectivamente, y su producto es $1(-1) = -1$.
- R_4 y R_2 tienen pendientes −1 y 1, respectivamente, y su producto es: $(-1)1 = -1$.

Dos rectas no verticales son:

- **Paralelas** si y sólo si sus pendientes son iguales.
- **Perpendiculares** si y sólo si el producto de sus pendientes es −1.

El enunciado anterior, nos permite verificar la relación de paralelismo y perpendicularidad entre los lados del cuadrado.

Taller de competencias

1 Determino si cada pareja de rectas son paralelas, perpendiculares o no cumplen ninguna de las dos condiciones.

a. $\begin{cases} 3x + 2y = -1 \\ -x + y = 4 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2y + x = 6 \\ y - 2 = -\dfrac{1}{2}x \end{cases}$

c. $\begin{cases} y - 2x = 1 \\ 2y + x = 6 \end{cases}$

d. $\begin{cases} \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = -1 \\ x - y = 4 \end{cases}$

e. $\begin{cases} y = \dfrac{2x + 15}{5} \\ 2y + 5x + 1 = 0 \end{cases}$

f. $\begin{cases} \dfrac{y + 1}{4} = x \\ y - 4x = -3 \end{cases}$

2 En cada caso escribo las ecuaciones de las rectas R_1 y R_2, en la forma $y = mx + b$, tales que una de ellas sea paralela y la otra perpendicular a la recta dada.

a. $-x + y = -2$

b. $-2x - y = 4$

c. $x + \dfrac{1}{2}y - 1 = 0$

d. $\dfrac{x + y}{3} = -1$

e. $\dfrac{x}{3} + 2y = -5$

f. $y = -3x + 3$

g. $y = 5$

h. $5x - y - 2 = 0$

i. $3x + ay = c$

j. $Ax + By = C$

3. De acuerdo con las gráficas determino la ecuación de:

a. Las rectas R_1, R_2 y R_3.

b. La recta que pasa por P y es perpendicular a R_1.

c. La recta que pasa por Q y es paralela a R_1.

d. La recta que pasa por M y es paralela a R_2.

e. La recta que pasa por S y es perpendicular a R_2.

f. La recta que pasa por M y es perpendicular a R_3.

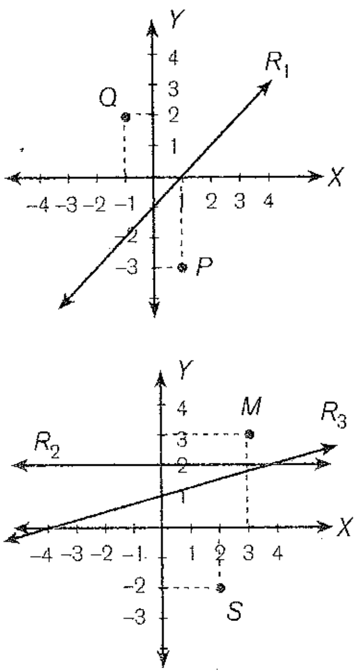


Fig. 2.15

Soluciono problemas

4. Examino, en cada caso, si los tres puntos determinan un triángulo rectángulo o no.

a. $(4, 1)$, $(1, -3)$, $(9, -9)$

b. $(-1, 0)$, $(3, -4)$, $(1, 2)$

c. $(0, 0)$, $(0, 5)$, $(-5, 0)$

d. $(4, 2)$, $(7, 4)$, $(0, 8)$

5. Encuentro la ecuación de la recta que pasa por el intersecto en x, de $y - 4x - 2 = 0$, y es paralela a la recta $\frac{1}{2}x + 3y = -2$.

6. Escribo la ecuación de la recta que tiene como intersecto en y, el doble del intersecto en y de la recta $3x - 2y - \frac{1}{2} = 0$, y es perpendicular a la recta $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = -1$.

7. Encuentro la ecuación de la recta que pasa por el punto $(1, 3)$ y es perpendicular a la recta que pasa por los puntos $(-1, 4)$ y $(3, 2)$.

8. Para la recta R_1: $3x + \frac{1}{2}y - 1 = 0$, determino:

a. La coordenada y del punto donde $x = 1$.

b. La ecuación de la recta R_2 que es perpendicular a R_1 y pasa por $(1, y)$.

c. La ecuación de la recta R_3 que es paralela a R_1 y corta a R_2.

9. Hallo la ecuación de la recta que es perpendicular y pasa por el punto medio del segmento de extremos $(-1, 3)$ y $(2, 4)$.

10. Para el triángulo de la figura 2.16:

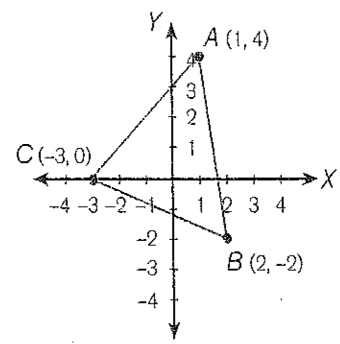


Fig. 2.16

a. Determino la ecuación que representa cada lado del triángulo.

b. Hallo el punto medio de cada lado.

c. Escribo la ecuación de las tres mediatrices del triángulo.

Desempeños: Identifica según la pendiente el paralelismo o la perpendicularidad de dos rectas.
Establece relaciones entre las propiedades vistas para hallar ecuaciones de rectas en ciertas condiciones.
Resuelve problemas geométricos con base en relaciones entre rectas.

Sistemas de ecuaciones lineales. Método gráfico

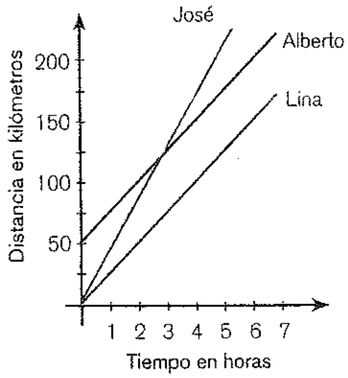


Fig. 2.17

Las rectas de la gráfica 2.17 representan la distancia que recorren José, Lina y Alberto en diversos tiempos. Si Alberto se encuentra 50 km delante de José y Lina, ¿después de cuánto tiempo José y Alberto recorren la misma distancia?

¿Alberto y Lina recorren alguna distancia igual en el mismo tiempo?

Las ecuaciones que representan la distancia en términos del tiempo para Alberto, José y Lina son:

$$d_A = 25t + 50;\ d_J = \frac{125}{3}t\ ;\ d_L = 25t$$

Estas tres ecuaciones nos permiten decir que:

Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de dos o más ecuaciones lineales.

Así, para nuestro propósito formemos dos sistemas, que gráficamente representan:

1. La intersección de las rectas.

$$\begin{cases} d_A = 25t + 50 \\ d_J = \dfrac{125t}{3} \end{cases}$$

José y Alberto han recorrido 125 km después de 3 horas, aunque Alberto tuvo ventaja de 50 km.

2. El paralelismo de las rectas.

$$\begin{cases} d_A = 25t + 50 \\ d_L = 25t \end{cases}$$

Alberto y Lina en ningún momento harán la misma distancia porque sus rectas no coinciden en ningún punto.

Podríamos formar otro sistema con una cuarta ecuación, que represente el mismo desplazamiento de Lina tanto en distancia como en tiempo. Por tanto, la gráfica ilustraría la coincidencia de las rectas en todos sus puntos.

Un sistema de dos ecuaciones lineales, con dos variables, se soluciona gráficamente determinando el conjunto de todos los pares ordenados que corresponden a la intersección de las gráficas de las dos ecuaciones lineales. El sistema puede tener:

- Una única solución. ⟶ Las rectas se cortan en un punto.
- Infinitas soluciones. ⟶ Las rectas coinciden.
- Ninguna solución. ⟶ Las rectas no se cortan.

En la vida real o en las diferentes ciencias, se presentan situaciones que las matemáticas las puede interpretar a través de modelos.

Generalmente esas situaciones se modelan con ecuaciones de una variable para darles solución, sin embargo, esas mismas situaciones es posible modelarlas también con sistemas de ecuaciones lineales.

- ¿Cómo podemos modelar situaciones con sistemas de ecuaciones lineales?

1.	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**
Describimos con palabras la relación entre las variables.	Asignamos variables.	Escribimos algebraicamente el modelo.	Resolvemos el sistema.	Verificamos la solución.

Ejemplo

Modelemos y resolvamos la siguiente situación.

En la tienda del colegio José compró 2 pasteles y 3 jugos por \$ 5300. Al mismo tiempo, Arturo compró 3 pasteles y un jugo por \$ 4100. Ellos se preguntaron, después de la compra "¿cuánto pagamos por cada pastel y por cada jugo?"

Solución

1. Modelo en palabras → 2 (precio de 1 pastel) + 3 (precio de 1 jugo) = 5300 (total pagado)

   ↓ 3 (precio de 1 pastel) + 1 (precio de 1 jugo) = 4100 (total pagado)

2. Asignación de variables → x → Precio de 1 pastel, y → Precio de 1 jugo

   ↓

3. Modelo algebraico → $\begin{cases} 2x + 3y = 5300 \\ 3x + y = 4100 \end{cases}$

   ↓

4. Solución del sistema →

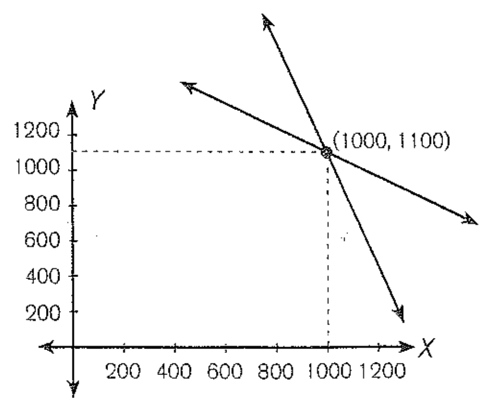


Fig. 2.18

Así, $x = 1000$ y $y = 1100$.

Por tanto, José y Arturo pagaron \$ 1000 por cada pastel y \$ 1100 por cada jugo.

Taller de competencias

1. Para cada gráfica:

- Encuentro la solución del sistema.
- Hallo la ecuación de cada pareja de rectas.
- Verifico la solución del sistema, remplazando los valores de x y y de la pareja solución en cada ecuación.

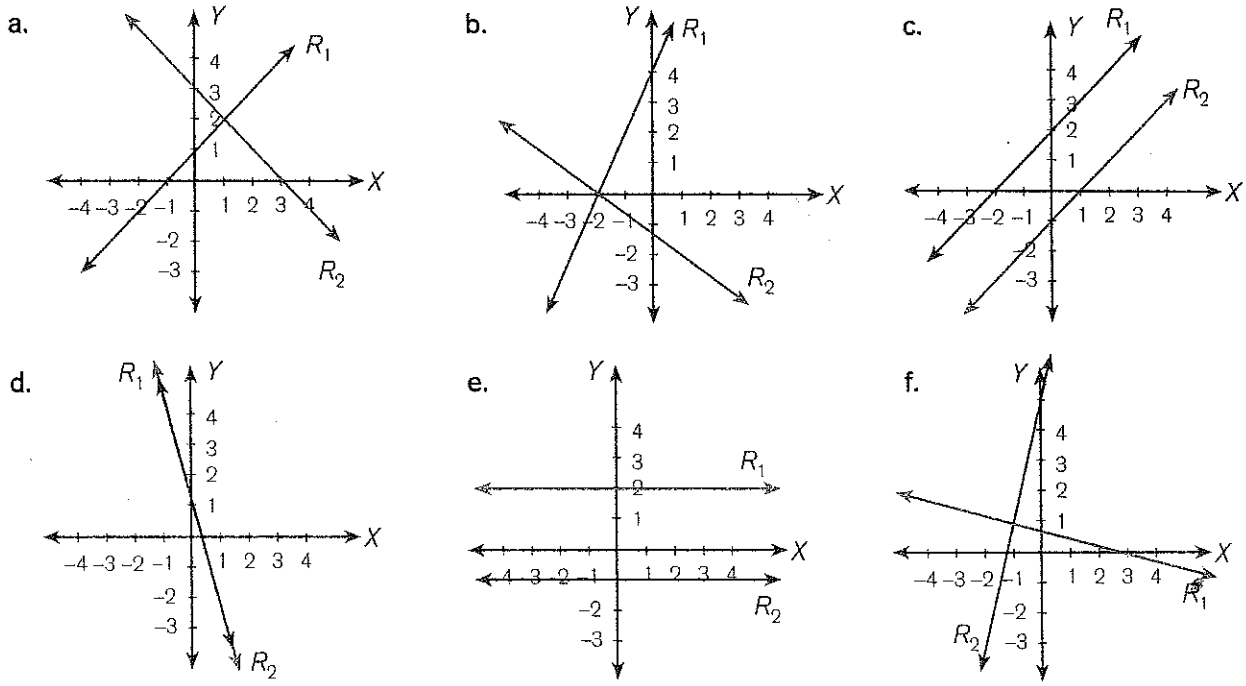


Fig. 2.19

2. Grafico cada pareja de ecuaciones lineales en el mismo plano y resuelvo el sistema.

a. $\begin{cases} \dfrac{y+1}{2} = x \\ y = 2x - 3 \end{cases}$ b. $\begin{cases} \dfrac{x+1}{3} = y \\ y = x - 1 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 3x - 2y = -4 \\ x = \dfrac{4y - 8}{6} \end{cases}$ d. $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ y = \dfrac{4 - x}{3} \end{cases}$

e. $\begin{cases} -y + \dfrac{1}{2}x = 1 \\ 3y - 5x = -3 \end{cases}$ f. $\begin{cases} x = 5 \\ y - 4 = 0 \end{cases}$

g. $\begin{cases} 7x - 2y = 3 \\ y = \dfrac{x+3}{2} \end{cases}$ h. $\begin{cases} y = \dfrac{1}{3}x + 5 \\ 3y - x = -3 \end{cases}$

3. Completo cada sistema con la ecuación que hace que su solución sea la pareja ordenada o el conjunto dado.

	Ecuaciones	Solución
a.	$\begin{cases} ① \\ ② \ x - y = 2 \end{cases}$	(3, 1)
b.	$\begin{cases} ① \\ ② \ 2x + \frac{1}{2}y = -1 \end{cases}$	(0, −2)
c.	$\begin{cases} ① \\ ② \ -y - 3x = 5 \end{cases}$	$\left(\frac{1}{3}, -6\right)$
d.	$\begin{cases} ① \\ ② \ -x + y = -5 \end{cases}$	$\varnothing$
e.	$\begin{cases} ① \ -2x - 3y = -4 \\ ② \end{cases}$	$\left(3, -\frac{2}{3}\right)$
f.	$\begin{cases} ① \ -4x + y = \frac{1}{2} \\ ② \end{cases}$	Infinitas soluciones

Soluciono problemas

4. Las situaciones descritas en palabras tienen su equivalente en modelos algebraicos. Las relaciono colocando frente a la columna A el número correspondiente a la columna B.

A

a. Un dinero se invirtió al 15% y otro dinero, al 12%; la ganancia fue $ 25 000.

b. Una empresa tiene empleados de dos tipos, con una nómina de $ 15 800 000. Cada empleado de medio tiempo gana $ 530 000 y cada empleado de tiempo completo gana $ 750 000.

c. Lina recorre 100 km: una parte en carro, a 60 km/h en determinado tiempo y la otra parte en bicicleta, a 20 km/h, empleando más tiempo.

d. Hace diez años la edad de Josué era $\frac{4}{3}$ de la de Lucía.

e. Entre monedas de $ 500 y de $ 200 tengo $ 8400.

f. Compré 5 cuadernos y 8 esferos por $ 23 000.

B

1. ☐ $x - 10 = \frac{4}{3}(y - 10)$

2. ☐ $5C + 8E = 23\,000$

3. ☐ $0{,}15x + 0{,}12y = 25\,000$

4. ☐ $530\,000x + 750\,000y = 15\,800\,000$

5. ☐ $500a + 200b = 8400$

6. ☐ $60x + 20y = 100$

---

5. Represento en el mismo sistema coordenado las rectas $y = x + 3$, $5y = -2x + 1$, $3y + 4x = 9$ y determino los vértices del triángulo que forman.

6. Doy un ejemplo de un sistema de dos ecuaciones con dos variables que tenga la siguiente propiedad:

a. La solución es $(-3, 2)$.

b. No hay solución.

c. Existen infinitas soluciones.

7. Una empresa *A*, que alquila autos, cobra una tarifa básica diaria de $ 30 000, más $ 4000 por kilómetro recorrido. Una empresa *B*, de alquiler de autos, cobra $ 24 000 diaros de tarifa básica, más $ 6000 por kilómetro recorrido.

a. Determino, para cada empresa, el precio *c* que corresponde a *k* kilómetros recorridos en un día.

b. Grafico ambas ecuaciones en el mismo plano.

c. ¿Cuántos km debe recorrer un carro de la empresa *A* para que el costo de alquiler sea igual al de un auto de la empresa *B*?

d. Para recorrer 50 km en un día, ¿cuál empresa es más económica?

8. Invento un problema cuya solución se consiga resolviendo gráficamente un sistema de ecuaciones lineales con dos variables.

Desempeños: encuentra a través de la gráfica la solución de un sistema.
Reconoce un sistema de ecuaciones lineales y sus soluciones.
Analiza gráficamente situaciones y genera sistemas de ecuaciones para diferentes casos.

Tema 8

Método de sustitución

La solución gráfica de un sistema de ecuaciones lineales no siempre es apropiado porque en algunos casos no se visualiza fácilmente el punto de intersección. Por eso, es necesario aprender métodos algebraicos que nos den la solución exacta.

Método de sustitución para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables:

1. Despejamos cualquiera de las variables en una de las ecuaciones dadas;
2. una vez encontrado el valor de la variable, lo sustituimos por su igual en la otra ecuación;
3. resolvemos la ecuación resultante con una variable y
4. remplazamos el valor obtenido en el punto 3, en alguna de las ecuaciones originales y hallamos el valor de la otra variable.

Ejemplo

Resolvamos por sustitución el sistema.

$$\begin{cases} 2x - y = 1 & (1) \\ 3y = 4 - x & (2) \end{cases}$$

Solución

1. De (1) despejamos y: $2x - 1 = y$.
2. Sustituimos en (2) este valor: $3(2x - 1) = 4 - x$.
3. Solucionamos la ecuación $3(2x - 1) = 4 - x$ y obtenemos $x = 1$.
4. Remplazamos $x = 1$ en (1): $2(1) - y = 1$, de donde $y = 1$.
5. La solución es $(1, 1)$.

Taller de competencias

1. Resuelvo cada sistema de ecuaciones lineales por el método de sustitución.

a. $\begin{cases} 1 = 2x - 4y \\ y = x - 1 \end{cases}$

b. $\begin{cases} y = \dfrac{2x + 4}{2} \\ 4y - x = 14 \end{cases}$

c. $\begin{cases} \dfrac{2x}{3} + \dfrac{3y}{4} = 2 \\ \dfrac{x}{6} + \dfrac{y}{2} = -2 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 3x - 2y = \dfrac{1}{2} \\ x = \dfrac{y + 3}{2} \end{cases}$

e. $\begin{cases} \dfrac{x + y}{2} - \dfrac{3x + y}{3} = 4 \\ x - \dfrac{y + 1}{2} = 1 \end{cases}$

f. $\begin{cases} \dfrac{1}{2}x + 3y = 5 \\ -x + 4y = 0 \end{cases}$

g. $\begin{cases} \dfrac{2(x + y)}{3} - y = x - 1 \\ x - \dfrac{3(x - y)}{2} = y + 1 \end{cases}$

h. $\begin{cases} x + y = a + b \\ 2x - 2a = b - y \end{cases}$

i. $\begin{cases} \dfrac{2(x-y)}{3} - \dfrac{1}{2} = x \\ \dfrac{1}{2} - 3(x+y) = y \end{cases}$ j. $\begin{cases} \dfrac{y}{3} - \dfrac{x}{5} = x + y \\ 5x - 3y = 52 \end{cases}$

2. Observo el ejemplo y hallo la solución de cada sistema.

Al resolver algebraicamente un sistema de ecuaciones, no siempre es posible encontrar una solución única, porque pueden suceder otros dos casos:

Caso 1

- $\begin{cases} y = 3x - 5 & (1) \\ -3x + y = 1 & (2) \end{cases}$

Al remplazar $y = 3x - 5$ en (2) se tiene:

$-3x + 3x - 5 = 1$

$-5 = 1$

La proposición es falsa, por tanto, el sistema no tiene solución.

Caso 2

- $\begin{cases} x - y = 5 & (1) \\ 3x - 3y = 15 & (2) \end{cases}$

Como (1) es igual a $x = 5 + y$, al sustituir en (2) se tiene:

$3(5 + y) - 3y = 15$

$15 + 3y - 3y = 15$, por tanto $15 = 15$

La proposición es verdadera, por tanto, el sistema tiene infinitas soluciones.

a. $\begin{cases} 2y - 8 = x \\ y = \dfrac{x + 12}{2} \end{cases}$ b. $\begin{cases} -1 = x - y \\ y = x - \dfrac{1}{5} \end{cases}$

c. $\begin{cases} x = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{5}y \\ 20x - 4y = 15 \end{cases}$ d. $\begin{cases} y = \dfrac{3x - 20}{4} \\ -3x + 4y = -2 \end{cases}$

e. $\begin{cases} x - y = \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{x - y}{4} = \dfrac{1}{16} \end{cases}$ f. $\begin{cases} y - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{2}{3}x \\ 21y = -14x + 3 \end{cases}$

g. $\begin{cases} \dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}y \\ 20x - 15y = 30 \end{cases}$ h. $\begin{cases} \dfrac{y + 1}{6} = x \\ y = 6x + 4 \end{cases}$

i. $\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ -\dfrac{3}{2}x + y = 2 \end{cases}$ j. $\begin{cases} x + y = 1 \\ y = \dfrac{-2x + 2}{2} \end{cases}$

Soluciono problemas

3. De acuerdo con el ejercicio anterior respondo:

a. ¿Cuáles corresponden al caso 1?

b. ¿Cuáles corresponden al caso 2?

c. ¿Cuál es el valor de la pendiente para cada pareja de rectas que corresponden al caso 1?

d. ¿Cuál es el valor de la pendiente para cada pareja de rectas que corresponden al caso 2?

e. ¿Qué se puede concluir de las respuestas de los dos literales anteriores?

4. Para el triángulo de la figura 2.20:

a. Hallo los puntos medios de cada lado.

b. Escribo las ecuaciones de las medianas.

c. Encuentro el punto de intersección de las medianas.

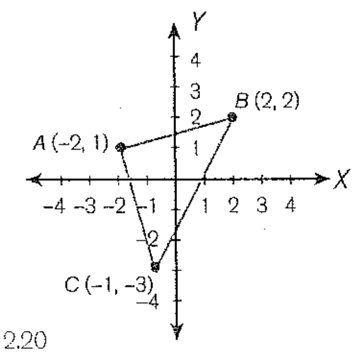


Fig. 2.20

5. Las rectas R_1, R_2 y R_3, en el plano cartesiano, tienen por ecuaciones $y = 2x - \frac{1}{3}$, $5y - 10x = 1$, $x - 2y = 4$, respectivamente.

a. ¿Cuáles de las rectas son paralelas?

b. ¿Cuál es el punto de intersección de la recta trasversal con cada una de las rectas paralelas?

c. Trazo las gráficas de las rectas.

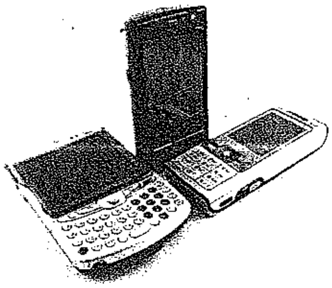
6. Recuerdo que la relación masa-estatura, de hombres y mujeres, está dada por las ecuaciones $M = \frac{3t}{4} - 62{,}5$ y $M = \frac{t}{2} - 25$, respectivamente.

¿Existe, para hombres y mujeres, una estatura en la que ambos tengan la misma masa?

Desempeños: Identifica un método algebraico para resolver sistemas de ecuaciones.
Utiliza el método para resolver problemas de diversas áreas.

Tema 9

Métodos de igualación y eliminación



Dos empresas de celulares ofrecen diversos planes a sus usuarios. La empresa A tiene un plan con cargo fijo de \$ 35 000 más \$ 580 por minuto, mientras que la empresa B, tiene un plan con cargo fijo de \$ 32 000 más \$ 620 por minuto. ¿Durante cuántos minutos se debe hablar por celular para que los precios sean iguales en ambas empresas?

El precio C para cada plan, se representa con ecuaciones lineales en términos de los minutos m así:

Empresa $A: C = 35\ 000 + 580m$ Empresa $B: C = 32\ 000 + 620m$

Para determinar cuándo los precios son iguales, como ya está despejada la misma variable en ambas ecuaciones, igualamos sus valores.

$$35\ 000 + 580m = 32\ 000 + 620m$$

$$3000 = 40m, \text{ entonces } m = 75.$$

Por tanto, si se habla durante 75 minutos, el precio será $C = 35\ 000 + 580(75) = 78\ 500$ en cualquiera de las empresas.

El ejemplo anterior nos permite conocer otro método algebraico para resolver sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Método de igualación

1. Despejamos la misma variable en cada ecuación.
2. Igualamos las dos expresiones.
3. Seguimos los pasos 3 y 4 del método de sustitución.

Si las ecuaciones están expresadas en la forma $Ax + By = C$, el sistema también se puede resolver así:

Método de eliminación

1. Multiplicamos una o ambas ecuaciones por un número, tal que los coeficientes de una variable sean del mismo valor pero de signo contrario.
2. Adicionamos las dos ecuaciones para obtener otra ecuación con una variable. Resolvemos para la incógnita existente.
3. Sustituimos el valor encontrado en una de las ecuaciones originales y despejamos la segunda variable.

Ejemplo

Resolvamos el sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} C - 580m = 35\ 000 & (1) \\ C - 620m = 32\ 000 & (2) \end{cases}$$

Solución

La variable C tiene el mismo coeficiente en ambas ecuaciones pero necesitamos, además, que sean de signo opuesto, por ello multiplicamos la ecuación (1) por -1.

$$\begin{array}{lcl} (-1)(C - 580m = 35\ 000) & & -C + 580m = -35\ 000 \\ C - 620m = 32\ 000 & \text{entonces} & \underline{C - 620m = 32\ 000} \quad \text{por tanto } m = 75 \\ & & -40m = -3000 \end{array}$$

Así, $C - 620(75) = 32\ 000$, $C = 32\ 000 + 46\ 500$, por tanto $C = 78\ 500$

Solución $(75, 78\ 500)$

Taller de competencias

1. Resuelvo por igualación los siguientes sistemas:

a. $\begin{cases} -x + \frac{1}{3}y = 4 \\ -y + 9x = 0 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 3x - 8y = 1 \\ \frac{5}{3}x - 1 = 4y \end{cases}$

c. $\begin{cases} -\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = \frac{3}{2} \\ 5x + \frac{y}{3} = -4 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 12y + 9x = 4 \\ 4y = -3x + 2 \end{cases}$

e. $\begin{cases} x + ay = a(b - 1) \\ bx + \frac{ay}{b} = 0 \end{cases}$

f. $\begin{cases} 3x + 4y = -\frac{3}{2} \\ -x - y = -\frac{1}{2} \end{cases}$

g. $\begin{cases} 8y + 4 = -7x \\ x + \frac{8}{7}y = -\frac{4}{7} \end{cases}$

h. $\begin{cases} y - 8x = 3 \\ 16x = 2y + 10 \end{cases}$

2. Para cada sistema, multiplico una o ambas ecuaciones por un número tal que los coeficientes de la variable indicada sean del mismo valor y de signo contrario.

a. $\begin{cases} -2x + y = 4 \\ x - 3y = 2 \end{cases}; x$

b. $\begin{cases} \frac{3}{2}x - y = \frac{1}{4} \\ -2x + 3y = -1 \end{cases}; x$

c. $\begin{cases} -\frac{2}{3}x + y = 20 \\ \frac{3}{4}x - 2y = -5 \end{cases}; x$

d. $\begin{cases} x + (-3)y = 4 \\ 2x + 4y = -7 \end{cases}; y$

e. $\begin{cases} (a + b)y - ax = ab \\ (a - b)y + bx = 1 \end{cases}; y$

3. Resuelvo por eliminación los siguientes sistemas:

a. $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 5x + 4y = 16 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 3x - 4y = 3 \\ 1{,}5x - 2y = 1 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 5x + 4y = 5 \\ -\frac{3}{8}x + y = -2 \end{cases}$

d. $\begin{cases} x + \frac{y}{2} - 1 = 0 \\ 3x - 2(y + 5) = 0 \end{cases}$

e. $\begin{cases} 2\sqrt{2}x - \sqrt{3}y = 1 \\ \sqrt{2}x + 2\sqrt{3}y = 8 \end{cases}$

f. $\begin{cases} 4(x - 2y) + 3(x + y) = 2 \\ 4(x + y) - 3(x + y) = 14 \end{cases}$

g. $\begin{cases} x - \sqrt{5}y + 4 = 0 \\ \sqrt{5}x + 2y - 3\sqrt{5} = 0 \end{cases}$

4. Hallo los valores para que la solución de cada sistema sea la que se da en cada caso.

	Sistema	Solución
a.	$\begin{cases} 2x - y = \square \\ \square x + y = -1 \end{cases};$	$(-1, 2)$
b.	$\begin{cases} 3x + 2y = \square \\ \square x - 2y = -8 \end{cases};$	$(-3, 1)$
c.	$\begin{cases} 2x - \square y = 1 \\ \square (x + 1) + y = \frac{3}{2} \end{cases};$	$\left(0, -\frac{1}{2}\right)$
d.	$\begin{cases} \frac{x}{\square} = \frac{y}{3} \\ 3x + 5y = \square \end{cases}$	$\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$

Soluciono problemas

5. Construyo un sistema cuya solución sea $(-5, 4)$.

6. Un terreno rectangular tiene un perímetro de 220 m. Si el ancho se disminuye en 2 m y el largo se aumenta en 2 m, el área se incrementa en 16 m^2. ¿Cuáles son las dimensiones iniciales del terreno?

7. En la figura 2.21 la suma de los radios de las circunferencias concéntricas es 1,5 m y su diferencia es 0,5 m. ¿Cuál es el diámetro de cada circunferencia?

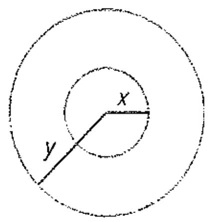


Fig. 2.21

8. En la figura 2.22 la suma de las longitudes de las circunferencias es 26π cm. ¿Cuál es la longitud de los radios de cada circunferencia?

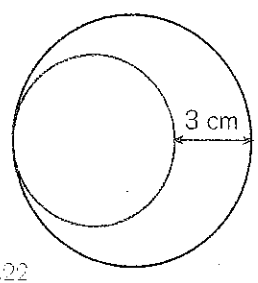


Fig. 2.22

9. Las edades de Jorge y Lucía suman 38 años. Si la edad de él, hace 10 años, era el doble de la de ella, ¿cuál es la edad actual de cada uno?

Para el problema siguiente utilizo la fórmula $v = \frac{d}{t}$, donde, v: velocidad, d: distancia y t: tiempo.

10. Eduardo hace un recorrido, todos los domingos, de 24 km, durante una hora y media. Parte la recorre caminando con una velocidad de 8 km/h y la otra parte la recorre en bicicleta a 20 km/h.

a. ¿Qué distancia recorre en cada tramo?

b. ¿Qué tiempo utiliza la bicicleta y qué tiempo camina?

11. Resuelvo cada problema.

a. La suma de las dos cifras de un número es 9. Si invierto sus cifras, el número aumenta en 27. ¿Cuál es el número?

b. Carmen va en su carro hasta la casa de Sofía, con una velocidad de 75 km/h. Luego, ambas se dirigen, a 60 km/h, a un coliseo ubicado a 40 km de la casa de Carmen. Si llegan 35 minutos después de que Carmen salió de su casa, ¿qué distancia hay entre las dos casas y entre la casa de Sofía y el coliseo? ¿Qué tiempo tardó Carmen en llegar a la casa de Sofía?

c. En la figura 2.23 los perímetros del rectángulo y del triángulo son 20 cm y 12 cm, respectivamente. Calculo:

- Los valores de x y y.
- El perímetro de la figura II.
- El área de la figura II.

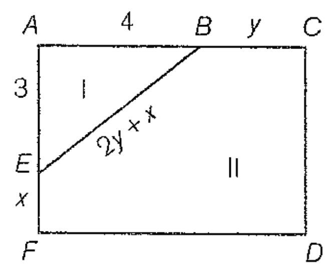


Fig. 2.23

d. La fórmula $F = \frac{9}{5}C + 32$ relaciona las temperaturas Fahrenheit (F) y Celsius (C). La fórmula $K = C + 27$ relaciona las temperaturas Kelvin (K) y Celsius.

¿Cuál es la fórmula que relaciona las temperaturas Fahrenheit y Kelvin?

e. La señora Rojas recibió \$ 10 000 000 como herencia de su esposo. Invirtió una parte al 12% anual y el resto en un CDT al 15% anual. Si su ganancia por concepto de intereses en un año fue \$ 1 365 000, ¿cuánto invirtió en el CDT?

Tema 10

Solución de sistemas de ecuaciones 3×3

Una ecuación de la forma $ax + by + cz = m$, donde x, y, z son números reales cualesquiera y a, b, c y m son números reales fijos, es una ecuación lineal de primer grado con 3 incógnitas. Una solución de esta ecuación es una terna ordenada (x_1, y_1, z_1), de números reales, y su gráfica es un plano en tres dimensiones.

La ecuación $x - 2y + z = 1$ es una ecuación lineal con 3 incógnitas. Las ternas $(1, 1, 2)$, $(0, 0, 1)$ y $(-1, 1, 4)$ son algunas de sus soluciones.

Tres ecuaciones lineales con tres incógnitas forman un sistema lineal 3×3 y su solución es la terna o el conjunto de ternas que son intersección de los conjuntos solución de las tres ecuaciones.

Ejemplo

Resolvamos el sistema $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x - y + 3z = -2 \\ x - 2y + 3z = 2 \end{cases}$.

Solución

Un sistema lineal 3×3 lo podemos resolver utilizando el método de eliminación que se utiliza para resolver un sistema lineal 2×2 así:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 & (1) \\ 2x - y + 3z = -2 & (2) \\ x - 2y + 3z = 2 & (3) \end{cases} \xrightarrow[\text{una variable}]{\text{De (1) y (2) eliminamos}} \begin{array}{r} \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x - y + 3z = -2 \end{cases} \\ \hline 3x + 2z = -1 \quad (4) \end{array} \xrightarrow[\text{la misma variable}]{\text{De (1) y (3) eliminamos}}$$

$$\begin{array}{r} \begin{cases} 2x + 2y - 2z = 2 \\ x - 2y + 3z = 2 \end{cases} \\ \hline 3x + z = 4 \quad (5) \end{array} \xrightarrow[\text{(4) y (5)}]{\text{Resolvemos el sistema } 2 \times 2} \begin{array}{r} \begin{cases} -6x - 2z = -8 \\ 3x + 2z = -1 \end{cases} \\ \hline -3x = -9 \end{array} \quad \text{Así, } x = 3$$

$$\xrightarrow[\text{en (5)}]{\text{Sustituimos } x = 3} \begin{array}{c} 3(3) + z = 4 \\ z = -5 \end{array} \xrightarrow[y\, z = -5 \text{ en (1)}]{\text{Sustituimos } x = 3} 3 + y - (-5) = 1, \text{ así } y = -7.$$

Taller de competencias

1 Hallo tres soluciones de cada ecuación lineal con tres incógnitas.

a. $x + 3y - z = 5$

b. $x - y - z = \frac{1}{2}$

c. $2x - 3y + z = -1$

2 Escribo en cada caso una ecuación lineal con tres incógnitas que tenga como una de sus soluciones la terna dada.

a. $(1, 0, -3)$

b. $\left(-\frac{1}{2}, 4, -1\right)$

c. $(2, 2, 2)$

d. $\left(-1, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}\right)$

3. Hallo, para cada sistema, los valores *a*, *b* y *c* para los cuales existe la solución dada.

Sistema	Solución
a. $\begin{cases} ax + y + z = 3 \\ -x + by - z = 0 \\ 2x - y + cz = -1 \end{cases}$	(1, 1, 1)
b. $\begin{cases} x + ay - z = 0 \\ 2bx - 3y + z = 1 \\ 3x + 2y - 3cz = 10 \end{cases}$	(−1, 2, 3)
c. $\begin{cases} ax + by = 1 \\ -x + z = c \\ x - 2by + az = 2 \end{cases}$	(1, −1, 4)

4. Verifico que las soluciones de los sistemas 3 × 3, del punto anterior, son correctas.

5. Encuentro el conjunto solución de cada sistema 3 × 3. Para ello tengo presente la siguiente información.

Las soluciones de un sistema 3 × 3 pueden ser:

- Una terna ordenada que es el punto de intersección de los tres planos.
- Ninguna, porque se llega a una proposición $0 = K$ donde $K \in \mathbb{R}$, $K \neq 0$, lo cual significa que los tres planos no tienen un punto en común.
- Infinitas, porque se llega a una proposición $0 = 0$, lo cual significa que los tres planos tienen una recta común, que los tres planos son idénticos o que dos de los planos son idénticos y el tercero los corta en una recta.

a. $\begin{cases} x - 2y + z = 4 \\ 3x - y + 4z = 9 \\ -2x + 5y - z = -7 \end{cases}$

b. $\begin{cases} \dfrac{x}{5} - \dfrac{y}{2} + z = 3 \\ -x + 2y - 3z = -12 \\ \dfrac{x}{2} - 3y + \dfrac{z}{2} = 9 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 2x - y + 4z = -1 \\ 4x + 3y - z = 2 \\ -x - 2y + \dfrac{5}{2}z = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$

d. $\begin{cases} -x + y = \dfrac{3}{2} \\ 4x - 2y + z = -6 \\ 3x + 5y - 2z = \dfrac{15}{2} \end{cases}$

e. $\begin{cases} x - 3y + z = 1 \\ -2x + 11y - 3z = 3 \\ -x - 12y + 2z = 5 \end{cases}$

f. $\begin{cases} -x - 2y - z = 1 \\ 2x + 3y - 4z = 2 \\ 3x + 7y + 9z = -7 \end{cases}$

Soluciono problemas

6. La suma de tres números es 6. La suma de los dos primeros es la quinta parte del tercero. El triple de la diferencia entre el primero y el segundo, aumentada en 14, es el tercero. ¿Cuáles son los números?

7. Del grupo de deportes de un colegio se eligieron alumnos para participar en tres torneos: torneo intercolegiado de Barranquilla, torneo internacional y campeonato nacional. En total salieron 19, 25 y 18 deportistas para cada evento, respectivamente. Si la tabla muestra el porcentaje de deportistas del colegio que se tomó para cada disciplina, ¿cuántos alumnos de cada deporte eligieron para participar en los tres torneos?

Deportes			
	Baloncesto	**Fútbol**	**Voleibol**
Intercolegiado	30%	40%	40%
Internacional	20%	20%	80%
Campeonato nacional	40%	60%	20%

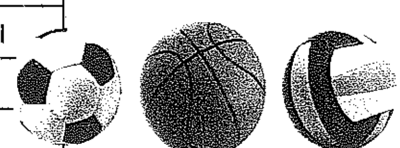


Tabla 2.12

Desempeños: Identifica sistemas de ecuaciones lineales 3 × 3 y sus soluciones.
Resuelve problemas utilizando sistemas de ecuaciones lineales 3 × 3.

Tema 11

Matrices y determinantes

La prensa publica el equivalente en dólares y en pesos colombianos del valor de las principales monedas del mundo así:

$$
\begin{array}{l c r}
\textbf{Moneda} & \textbf{USD\$} & \textbf{Pesos} \\
\begin{array}{l}\text{Euro}\\ \text{Libra esterlina}\\ \text{Real}\\ \text{Peso mexicano}\\ \text{Peso argentino}\\ \text{Yen}\end{array} & \multicolumn{2}{c}{\begin{bmatrix} 1{,}33 & 2598 \\ 1{,}55 & 3025 \\ 0{,}53 & 1041 \\ 0{,}07 & 139 \\ 0{,}23 & 457 \\ 0{,}01 & 24{,}98 \end{bmatrix}} & \begin{array}{l}\text{Fila 1}\\ \text{Fila 2}\\ \text{Fila 3}\\ \text{Fila 4}\\ \text{Fila 5}\\ \text{Fila 6}\end{array} \\
 & \text{Columna 1} & \text{Columna 2}
\end{array}
$$

Una matriz es un arreglo rectangular de números en filas y columnas. Al producto del número de filas (m) por el número de columnas (n), de la matriz, se le llama orden y está dado por $m \times n$.

Nuestra matriz tiene 6 filas y dos columnas, por tanto, es de orden 6×2.

Los números de la matriz se llaman elementos de la matriz. Si una matriz tiene el mismo número de filas que de columnas se llama matriz cuadrada.

Matriz 2×2

$$
\begin{array}{l c c}
 & \textbf{USD\$} & \textbf{Pesos} \\
\begin{array}{l}\text{Peso mexicano}\\ \text{Peso argentino}\end{array} & \multicolumn{2}{c}{\begin{bmatrix} 1{,}6129 & 1443 \\ 0{,}23 & 457 \end{bmatrix}}
\end{array}
$$

A cada matriz cuadrada A se le asocia un número real llamado determinante y se denota generalmente así: $|A|$.

Determinante de una matriz 2×2

El determinante de la matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ es $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$.

Ejemplo

El determinante de $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$

es $\xrightarrow{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}}$ $3(5) - (-1)4 = 19$.

Taller de competencias

1. Para cada matriz determino su orden y, si es posible, hallo su determinante.

a. $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} -5 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$

e. $\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \sqrt{2} \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

f. $\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 5 & 2 & 0 & 4 \\ 4 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

2 Para las matrices dadas, observo el ejemplo y realizo los cálculos.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} -3 & 10 \\ 11 & 21 \end{bmatrix}$$

$$A + 2B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -10 & 0 \\ 8 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -2 \\ 9 & 5 \end{bmatrix}$$

a. $3A + C$ **b.** $\frac{1}{2}(B - C)$

c. $B + C - 5A$ **d.** $-\frac{3}{4}B + \frac{1}{2}A$

3 Escribo, en cada caso, una matriz que cumpla la condición dada.

a. Cuadrada, de orden 3×3.

b. De orden 1×1.

c. De determinante 0.

d. De determinante 4.

e. De mayor número de filas que de columnas.

f. De orden 2×3 y cuya suma de sus elementos sea 20.

4 Hallo el determinante de cada matriz.

a. $\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 4 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ **b.** $\begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} \\ -5\sqrt{2} & -\sqrt{3} \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 2a & 3 \\ -3 & a \end{bmatrix}$ **d.** $\begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix}$

e. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ **f.** $\begin{bmatrix} a + b & 1 \\ b^2 & a - b \end{bmatrix}$

5 Resuelvo cada ecuación.

a. $\begin{vmatrix} 3x & 5 \\ x + 1 & -1 \end{vmatrix} = x + 1$

b. $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ 3 & x - 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3x & \frac{x}{3} \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$

c. $\dfrac{\begin{vmatrix} \frac{x}{3} & -5 \\ x & 1 \end{vmatrix}}{x - 3} = \dfrac{3}{2}$

Soluciono problemas

6 El número de alumnos, según el deporte que practican y el curso al que pertenecen, en un colegio de Medellín, se organizó en la siguiente matriz:

$$\begin{array}{c|c} \text{Grado} & \begin{array}{ccccc} \text{Baloncesto} & \text{Fútbol} & \text{Voleibol} & \text{Ajedrez} & \text{Ningún deporte} \end{array} \\ \begin{array}{c} 6.^{\circ} \\ 7.^{\circ} \\ 8.^{\circ} \\ 9.^{\circ} \\ 10.^{\circ} \\ 11.^{\circ} \end{array} & \begin{bmatrix} 5 & 6 & 8 & 3 & 0 \\ 4 & 9 & 7 & 6 & 2 \\ 3 & 11 & 4 & 15 & 1 \\ 8 & 4 & 12 & 9 & 4 \\ 1 & 3 & 20 & 2 & 6 \\ 9 & 2 & 14 & 1 & 5 \end{bmatrix} \end{array}$$

Respondo las preguntas.

a. ¿Cuál es el orden de la matriz? ¿Es una matriz cuadrada?

b. ¿Cuántos alumnos hay en cada curso?

c. ¿Cuántos alumnos hay en cada deporte?

d. ¿Cuántos alumnos hay en el bachillerato de este colegio?

e. ¿En cuál deporte hay el mayor número de alumnos?

7 Algunos datos de los lotes rectangulares de una manzana del barrio están organizados en la siguiente matriz.

$$\begin{array}{c|cccc}
\text{No. de lote} & \text{Largo (m)} & \text{Ancho (m)} & \text{Perímetro (m)} & \text{Área (m}^2\text{)} \\
\hline
1 & \left[\begin{array}{c} 20 \\ \square \\ 18 \\ 21{,}5 \\ \square \end{array}\right. & \begin{array}{c} 8 \\ 10 \\ \square \\ 9{,}5 \\ \square \end{array} & \begin{array}{c} \square \\ 70 \\ \square \\ \square \\ 62 \end{array} & \left.\begin{array}{c} \square \\ \square \\ 198 \\ \square \\ 228 \end{array}\right] \\
2 & & & & \\
3 & & & & \\
4 & & & & \\
5 & & & &
\end{array}$$

a. Completo la matriz.

b. ¿Cuáles son los lotes de menor perímetro?

---

8 Para calcular el determinante de una matriz 3×3 utilizo el método de las diagonales así:

- Repito las columnas 1 y 2 de la matriz, para formar las columnas 4 y 5.
- Adiciono los productos de las tres diagonales a derecha y sustraigo los productos de las tres diagonales a izquierda.

Para hallar el determinante de $\begin{bmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$ se procede así:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} x & y & z & x & y \\ a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \end{array}\right. = xbf + ycd + zae - dbz - ecx - fay$$

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 4 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & 5 & 2 & -2 \end{array}\right. = 15 - 8 + 0 - 0 - (-8) - (-20) = 35$$

Calculo los siguientes determinantes:

a. $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

b. $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 3 & 4 \\ -2 & -1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 4 & 6 \end{vmatrix}$

c. $\begin{vmatrix} -3 & a & 2 \\ a & 1 & -a \\ -1 & -a & -2 \end{vmatrix}$

d. $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$

e. ¿Cuál es el valor de x?

$$\begin{vmatrix} x & 1 & -x \\ 1 & 2x & 1 \\ -x & 1 & x \end{vmatrix} = -4$$

f. ¿Cuál es el valor de y?

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & y \\ -1 & 2y & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & -y \\ 3 & 2y \end{vmatrix}$$

Desempeños: domina los conceptos de matriz y determinante.
Entiende los conceptos de matriz y determinante.
Organiza e interpreta información de una situación por medio de una matriz.
Resuelve problemas mediante la propuesta de modelos de matrices.

Tema 12

Regla de Cramer para resolver sistemas de ecuaciones

Podemos organizar un sistema de ecuaciones lineales en filas y columnas.

Para el sistema $\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$ formamos las matrices A, B y C y calculamos los respectivos determinantes.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix} \rightarrow |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} = ae - db \neq 0$$

$$B = \begin{bmatrix} a & c \\ d & f \end{bmatrix} \rightarrow |B| = \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} = af - cd$$

$$C = \begin{bmatrix} c & b \\ f & e \end{bmatrix} \rightarrow |C| = \begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix} = ce - fb$$

Regla de Cramer. Si en el sistema lineal 2×2 el determinante A es diferente de 0, el sistema tiene una solución dada por:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases} \rightarrow x = \frac{|C|}{|A|} \quad y = \frac{|B|}{|A|}$$

El determinante de A es el determinante del sistema; el determinante de B es el determinante para la variable y, y se halla remplazando los valores de la columna que le corresponde a y por los términos independientes c, f. El determinante de C es el determinante para la variable x.

Ejemplo

Usemos la regla de Cramer para resolver el sistema lineal $\begin{cases} 4x - y = -2 \\ -2x + y = 3 \end{cases}$.

Solución

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 2 = 2; \ |B| = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 12 - 4 = 8; \ |C| = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 3 = 1$$

$x = \frac{1}{2}$; $y = \frac{8}{2} = 4$. La solución es $\left(\frac{1}{2}, 4\right)$.

Taller de competencias

1. Completo cada sistema para que el determinante A sea igual a cero.

a. $\begin{cases} 2x + \square\, y = -3 \\ \square\, x - 3y = 1 \end{cases}$

b. $\begin{cases} \square\, x - 5y = 4 \\ \frac{1}{2}x - \square\, y = -2 \end{cases}$

c. $\begin{cases} \square\, x + \square\, y = -\frac{1}{2} \\ 3x - 8y = 7 \end{cases}$

d. $\begin{cases} \square\, x + \square\, y = -5 \\ \square\, x - \frac{1}{2}y = 11 \end{cases}$

e. $\begin{cases} ax - by = 1 \\ \frac{1}{a}x + \square\, y = 2 \end{cases}$

f. Resuelvo los sistemas anteriores por los métodos de igualación, sustitución o eliminación e indico cuál es su solución.

2. Completo los determinantes que llevan a la solución del sistema y escribo la solución.

a. $\begin{cases} 3x + 2y = -1 \\ 2x - y = \frac{5}{3} \end{cases} \rightarrow x = \dfrac{\begin{vmatrix} -1 & \\ \frac{5}{3} & \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & \\ & -1 \end{vmatrix}},$

$y = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & \\ 2 & \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} & 2 \\ 2 & \end{vmatrix}}$. Solución (,).

b. $\begin{cases} -3x + y = \frac{15}{2} \\ \frac{3}{2}x - 4y = -9 \end{cases} \rightarrow x = \dfrac{\begin{vmatrix} & 1 \\ & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}},$

$y = \dfrac{\begin{vmatrix} & \frac{15}{2} \\ & -9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ & \end{vmatrix}}$. Solución (,).

c. $\begin{cases} 4x + 2z = 3 \\ -x + 2y + 5z = -1 \\ 3x + y - 7z = 10 \end{cases} \rightarrow x = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 0 & \\ -1 & 2 & \\ 10 & 1 & \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 0 & \\ -1 & 2 & \\ 3 & 1 & \end{vmatrix}},$

$y = \dfrac{\begin{vmatrix} 4 & & 2 \\ -1 & & 5 \\ 3 & & -7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} & & 2 \\ & & 5 \\ & & -7 \end{vmatrix}}, \quad z = \dfrac{\begin{vmatrix} & & 3 \\ & & -1 \\ & & 10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} & 0 & \\ & 2 & \\ & 1 & \end{vmatrix}}$

Solución (,).

3. Resuelvo cada sistema utilizando la regla de Cramer.

a. $\begin{cases} x + 4y = 12 \\ 2x + 5y = 18 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x + y = a^2 + b^2 \\ 2x - \frac{y}{2} = \frac{4a^2 - b^2}{2} \end{cases}$

c. $\begin{cases} \sqrt{2}x + \frac{1}{7}y = -3\sqrt{2} - 1 \\ x + \frac{\sqrt{2}}{7}y = -3 - \sqrt{2} \end{cases}$

d. $\begin{cases} \frac{x}{2} + y - \frac{z}{3} = 1 \\ 3x - \frac{y}{2} - z = -10 \\ -x + 3y + \frac{2z}{3} = 8 \end{cases}$

e. $\begin{cases} -x + 2y + z = 6 \\ 2x - 3y - z = -7 \\ 5y - 6z = -8 \end{cases}$

f. $\begin{cases} \frac{1}{2}x + 3y + \frac{z}{3} = 0 \\ 3x + y - 2z = -24 \\ 2x - 3y - z = -14 \end{cases}$

4. La gráfica muestra los porcentajes del total de alumnos de grado 11, de un colegio de Cali, que escogieron las áreas del conocimiento que son de su preferencia. Por ejemplo, el área de ciencias y matemáticas la escogió el 15% de 11A, el 25% de 11B y el 20% de 11C.

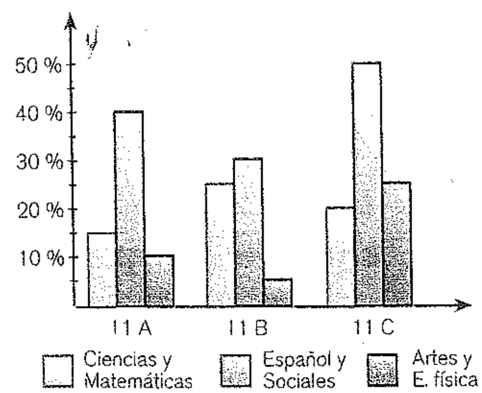


Fig. 2.24

Si de 11A, 11B y 11C participaron en la encuesta 19, 16 y 29 alumnos, respectivamente, ¿cuántos alumnos votaron por cada área del conocimiento?; ¿cuál fue el área de mayor preferencia?

Desempeños: conoce otro método para resolver sistemas lineales 2 × 2 y 3 × 3.
Utiliza los determinantes para resolver sistemas lineales 2 × 2 y 3 × 3.
Analiza situaciones y las resuelve utilizando la regla de Cramer.

Matemática recreativa

1. Encuentro, en la sopa de letras, las siguientes palabras relacionadas con los temas estudiados.

A	T	R	U	W	C	Q	R	A	B	E	J	Q	L	X	O	M	E	S	J	O
I	B	S	M	U	P	S	A	M	E	T	S	I	S	F	L	G	U	D	I	Y
Z	O	E	N	B	O	E	I	A	L	C	D	Q	J	I	O	R	O	E	L	N
E	C	T	C	R	Z	B	X	M	U	B	T	N	Y	N	A	S	A	T	P	E
S	D	N	Z	U	Q	A	N	V	C	S	D	N	V	L	R	S	R	E	R	O
S	E	E	R	C	A	S	I	C	S	B	A	E	U	T	H	K	Z	R	X	N
I	R	I	D	Y	E	C	N	A	R	Q	V	C	I	F	P	S	O	M	S	A
U	T	D	U	D	P	A	I	Z	E	E	I	H	M	J	O	J	Y	I	P	D
V	E	N	C	E	X	B	E	O	S	D	G	L	Z	L	E	O	Q	N	L	A
D	J	E	A	I	M	L	D	X	N	U	H	F	U	Y	R	G	O	A	T	N
S	I	P	O	W	E	F	X	E	A	L	E	C	Z	D	N	X	R	N	D	E
G	M	T	F	M	I	M	P	G	D	L	I	K	E	M	J	I	Q	T	M	D
V	I	R	E	M	A	R	C	I	K	O	D	N	J	I	P	W	Y	E	U	R
H	R	N	G	I	E	J	Y	H	N	M	A	C	E	L	O	R	F	V	G	O
E	T	A	J	P	V	Z	Z	I	W	D	I	S	T	A	N	C	I	A	H	A
O	N	N	I	H	I	U	I	J	A	K	L	A	L	E	L	A	R	A	P	J
A	K	E	L	J	K	K	R	E	V	B	K	C	T	B	S	E	O	U	O	E
O	U	M	A	V	J	O	T	C	E	S	R	E	T	N	I	D	T	N	X	R
O	N	H	M	Q	O	I	A	O	X	P	B	Q	C	R	I	S	M	E	O	A
L	A	G	O	L	P	E	M	L	A	E	A	R	S	L	W	E	A	W	R	P

1. Ecuación lineal
2. Pareja ordenada
3. Abscisa
4. Ordenada
5. Intersecto
6. Pendiente
7. Paralela
8. Sistemas
9. Matriz
10. Determinante
11. Perpendicular
12. Cramer
13. Distancia
14. Elemento
15. Solución

2. Invento una situación que involucre sistemas de ecuaciones lineales, utilizando la información de la figura y la resuelvo.

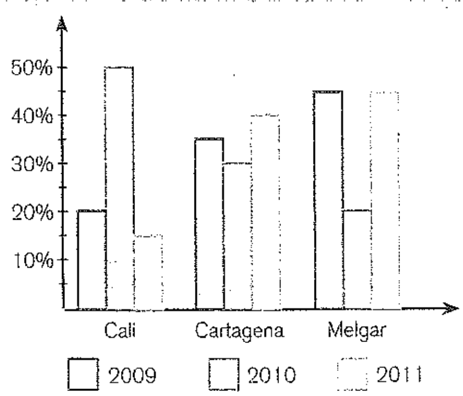


Fig. 2.26

No. de viajeros a

$$\begin{array}{l} \text{Cali} \\ \text{Cartagena} \\ \text{Melgar} \end{array} \begin{bmatrix} 3950 \\ 5000 \\ 5050 \end{bmatrix}$$

Evalúo mis competencias

Con los siguientes ejercicios, afianzo los desempeños que he superado y refuerzo aquellos que están por superar.

1. Respondo verdadero o falso y justifico.

a. En el par ordenado (c, d), d es la abscisa y c es la ordenada. ________

b. Una pareja ordenada en el cuadrante IV, tiene abscisa positiva y ordenada negativa. ________

c. La ecuación $Ax + By + C = 0$, donde A o B son ceros, es una ecuación lineal con dos variables. ________

d. Toda ecuación lineal con dos variables tiene infinitas soluciones. ________

e. La ecuación $y = mx + b$ corresponde a la ecuación de una circunferencia. ________

f. En $y = bx + c$, c representa el $\text{int} - x$ de la recta y b el $\text{int} - y$. ________

g. La pendiente de una recta es un número que indica su inclinación. ________

h. Dos rectas son perpendiculares si una pendiente es el recíproco negativo de la otra. ________

i. Un sistema tiene solución sólo si existe por lo menos un punto de intersección de las rectas. ________

j. Un sistema de ecuaciones lineales 3×3 siempre tiene solución. ________

k. La regla de Cramer es un método que permite resolver cualquier sistema lineal. ________

l. La construcción de un modelo verbal lleva a la construcción de un modelo algebraico. ________

m. Cualquier matriz tiene determinante. ________

2. Para cada ecuación:

a. Elaboro una tabla con tres valores.

b. Hallo la pendiente y los intersectos.

c. Encuentro una recta paralela a ella.

d. Hallo una recta perpendicular a ella.

e. La grafico y grafico su recta perpendicular en el mismo plano.

f. Determino el punto de intersección de ella y la recta perpendicular que hallé.

g. Construyo un sistema con otra ecuación lineal tal que la recta no sea perpendicular ni paralela a ella.

- $3x + 2y = -5$
- $\frac{1}{2}x - 3y - 8 = 0$
- $3y = 4$
- $x = -5$
- $y = -3x + 2$
- $6x - \frac{1}{4}y = -2$

3. Invento un problema que se resuelva con un sistema de ecuaciones lineales y que se ajuste a la gráfica.

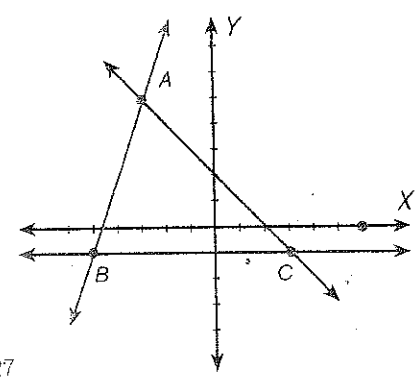


Fig. 2.27

4. Resuelvo, por cualquier método, cada uno de los siguientes sistemas.

a. $\begin{cases} \dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{3} = \dfrac{\sqrt{2} + 2\sqrt{5}}{2} \\ x + y = \sqrt{2} - 3\sqrt{5} \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2x - 3y + 5z = 11 \\ 5x + 4y - 6z = -5 \\ -4x + 7y - 8z = -14 \end{cases}$

Soluciono problemas

5. En la caseta del colegio se venden paletas de agua y paletas cremosas. La gráfica muestra el porcentaje del total recaudado por la venta de estos artículos durante dos días. Así, el 40% del total recaudado por paletas de agua fue comprado el 1er. día y el 60% fue comprado el 2.° día. Si el 1er. día se recogieron \$ 30 500 y el 2.° día, \$ 70 500, ¿cuánto dinero dejó la venta de cada tipo de paletas?

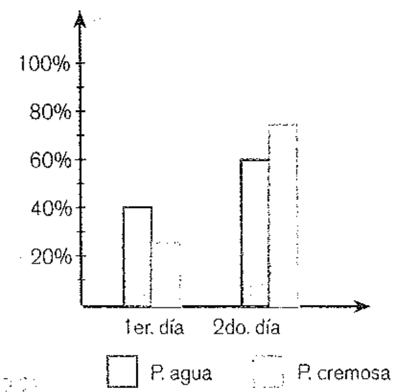


Fig. 2.28

6. El área de un triángulo, con vértices (x_1, y_1), (x_2, y_2) y (x_3, y_3), está dada por el valor absoluto de la expresión:

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

Hallo el área de los triángulos cuyos vértices son:

a. $(-2, 3)$, $(5, 6)$, $(2, -1)$

b. $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$, $(-4, 5)$, $(0, 0)$

c. $(-3, -8)$, $(0, 7)$, $(8, 2)$

7. Para el cuadrilátero de la figura 2.29:

a. Calculo su área.

b. Encuentro la ecuación de las diagonales.

c. Hallo el punto de intersección de las diagonales.

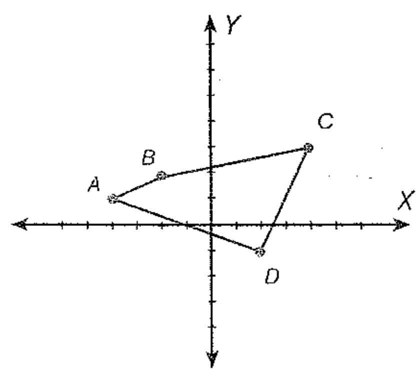


Fig. 2.29

Autoevaluación

	Bajo	Básico	Alto	Superior
Grafico rectas en el plano cartesiano a partir de diversos elementos de ellas.				
Identifico dos formas de ecuaciones para representar algebraicamente una recta.				
Determino la ecuación de una recta dados dos puntos; la pendiente y un punto o la pendiente y el intersecto *y*.				
Decido la relación de paralelismo, perpendicularidad o ninguna de las dos condiciones para un par de rectas.				
Construyo ecuaciones lineales para parejas de rectas paralelas, perpendiculares o con ninguna de las dos condiciones.				
Identifico y resuelvo sistemas de ecuaciones lineales 2×2 y 3×3 por el método gráfico y por cuatro métodos algebraicos diferentes.				
Modelo situaciones de la vida real y de las matemáticas utilizando sistemas lineales para resolverlas.				

Prueba Saber

Encuentra la respuesta correcta entre las opciones A, B, C y D, y márcala en la hoja de respuestas, rellenando completamente el círculo correspondientes.

Para obtener 100 kilos de cierta calidad de café se mezclan café de calidad A de $ 4800 el kilo, con café de calidad B de $ 3800 el kilo, de tal manera que el café obtenido produzca una ganancia de 15% al ser vendido a $ 4600 el kilo.

1. Las ecuaciones que permiten hallar las cantidades de café de cada clase que se debe mezclar son:

A. $\begin{cases} x + y = 100 \\ 3800\,x + 4800\,y + 15\%\,(3800\,x + 4800\,y) \\ = 460\ 000 \end{cases}$

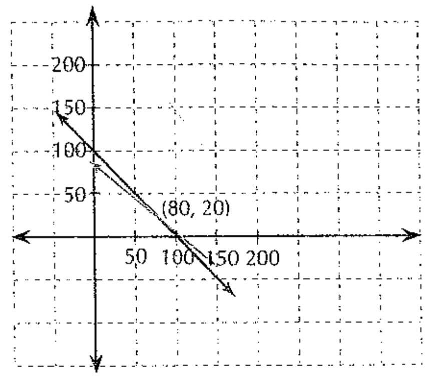
B. $\begin{cases} x = 100 - y \\ 437\,x + 552\,y = 46\ 000 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x - y = 100 \\ 38\,x + 48\,y = 4600 \end{cases}$

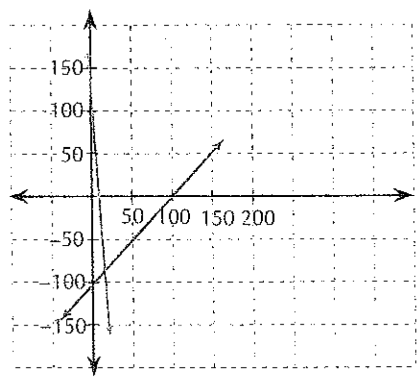
D. $\begin{cases} y = 100 - x \\ 57\,x + 72\,y = 4600 \end{cases}$

2. ¿Cuál de las siguientes gráficas representa la situación?

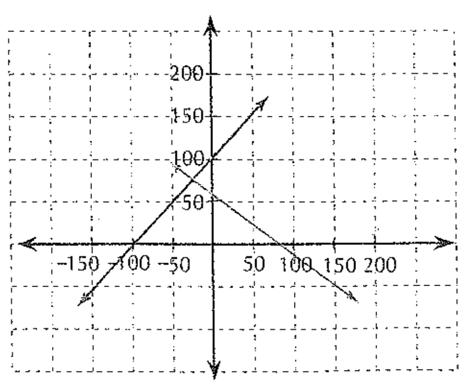
A.



B.



C.



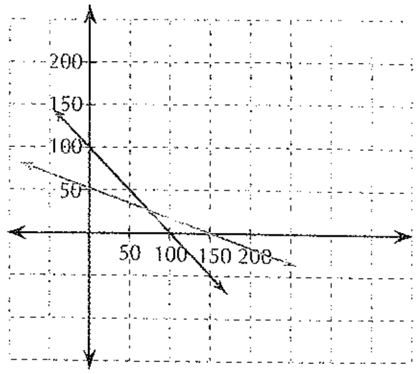
D. 

Fig. 2.30

3. La razón entre la cantidad de café calidad A y la cantidad de café calidad B es:

A. 4:1 porque debe ser mayor la cantidad de café más barato para poder obtener ganancia.

B. 1:4 porque para obtener la calidad deseada se requiere mayor cantidad del café más costoso.

C. 2:3 porque la suma 2 + 3 es un divisor de 100.

D. 20:80 porque la suma de las dos cantidades da 100, que son los kilos que se quieren obtener.

4. El dinero invertido en la compra de cada calidad fue:

A. $ 304 000 en la compra del café de calidad A y $ 96 000 en la compra del café de calidad B.

B. $ 96 000 en la compra del café de calidad A y $ 304 000 en la compra del de calidad B.

C. Un total de $ 400 000.

D. $ 480 000 en la compra del café de calidad A y $ 380 000 en la compra del café de calidad B.

5. Como la ganancia esperada es 15%, entonces el precio total de venta debe ser:

A. $3800 \times 100 \times 115$ porque este valor supera en 15% el precio de compra del café calidad B.

B. $4800 \times 100 \times 115$ porque este valor supera en 15% el precio de compra del café calidad A.

C. $(3800 \times 80 + 4800 \times 20) \times 1{,}15$ porque este valor supera en 15% el precio de compra de ambos tipos de café.

D. $(4800 \times 80 + 3800 \times 20) \times 1{,}15$ porque este valor supera en 15% el costo total de compra de los dos tipos de café.

Formato de respuestas

1.	A	B	C	D	4.	A	B	C	D
2.	A	B	C	D	5.	A	B	C	D
3.	A	B	C	D					

Unidad > 3

Números complejos

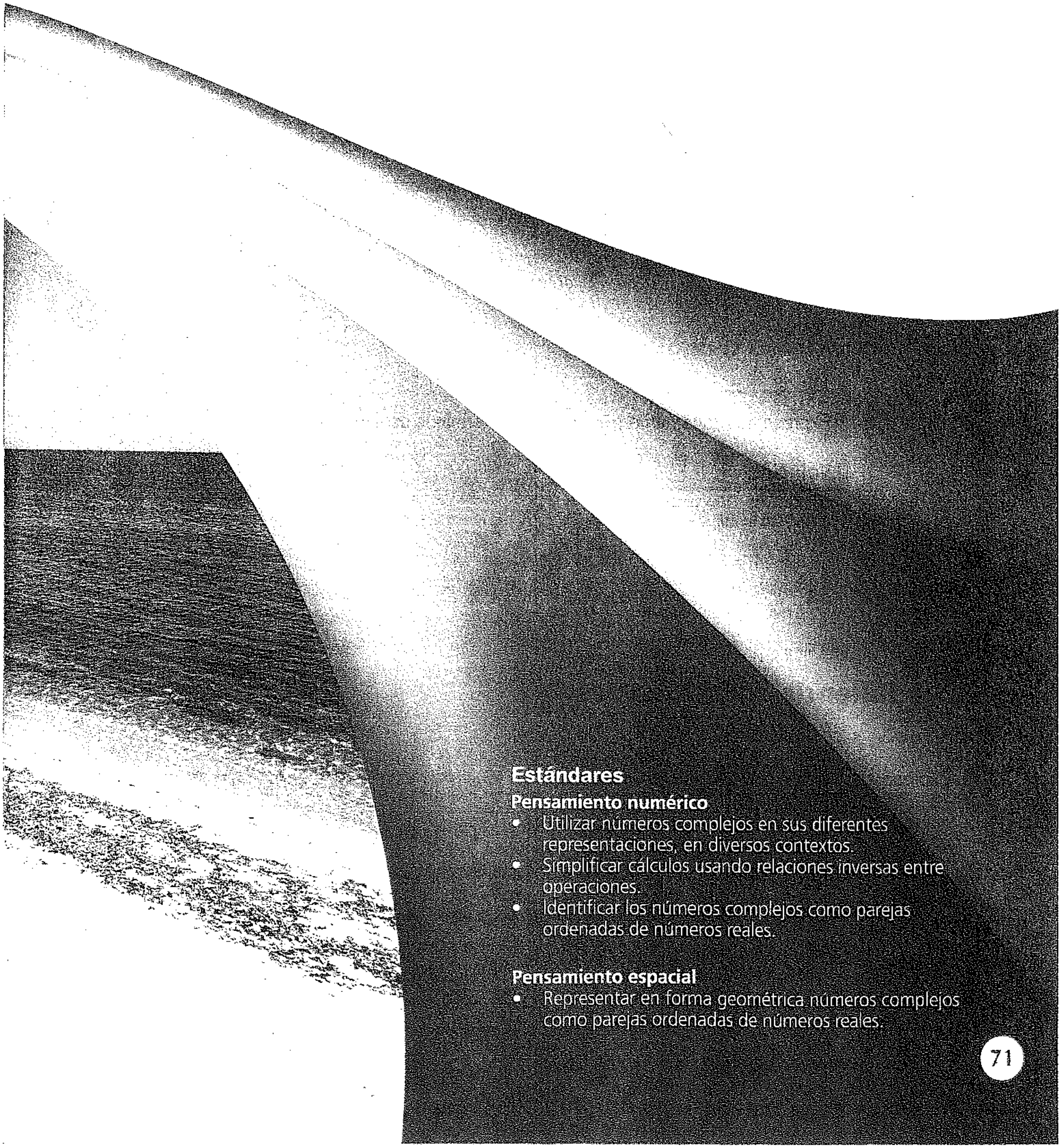
Procesos: El desarrollo de esta unidad me hará competente para:

Resolución de problemas
Resolver problemas que involucran números complejos.

Razonamiento lógico
Identificar los números imaginarios.
Asimilar los números complejos como una extensión de los números reales.

Comunicación
Explicar la representación geométrica de identidades algebraicas en los números complejos.

Conexiones
Utilizar números complejos en situaciones geométricas.
Representar en forma geométrica los números complejos como parejas ordenadas de números reales.



Estándares

Pensamiento numérico
- Utilizar números complejos en sus diferentes representaciones, en diversos contextos.
- Simplificar cálculos usando relaciones inversas entre operaciones.
- Identificar los números complejos como parejas ordenadas de números reales.

Pensamiento espacial
- Representar en forma geométrica números complejos como parejas ordenadas de números reales.

Tema 1

Raíz cuadrada de un número negativo

- ¿La ecuación $x^2 + 1 = 0$ tiene solución en el conjunto de los números reales?
  Al despejar, tenemos que $x^2 = -1$.
- ¿Existe un número real que elevado al cuadrado equivalga a -1?
  No, porque el cuadrado de todo número real es un número no negativo, por tanto, extrayendo raíz cuadrada se tiene: $x = \pm\sqrt{-1} \rightarrow x = \sqrt{-1}$ o $x = -\sqrt{-1}$.

Como no hay raíces cuadradas reales de números negativos, los matemáticos crearon, para expandir los conjuntos numéricos, la unidad imaginaria.

$\sqrt{-1} = i$ la llamamos unidad imaginaria, donde $-1 = i^2$.

En el caso $x^2 + 4 = 0$, para calcular el valor de x, tenemos que $x^2 = -4$; por tanto, $x = \pm\sqrt{-4}$, donde $\sqrt{-4} = \sqrt{4(-1)} = \sqrt{4}\sqrt{-1} = \sqrt{4}i = 2i$. Así, la solución es $x^2 = \pm 2i$.

Si $a \in R$, $a > 0$, entonces $\sqrt{-a}$ es un número imaginario puro
y $\sqrt{-a} = \sqrt{a}i$.

Ejemplo

Expresemos cada número imaginario en términos de i: $\sqrt{-25}$; $\sqrt{-50}$; $3\sqrt{-24}$.

Solución

$\sqrt{-25} = 5i$; $\sqrt{-50} = 5\sqrt{2}i$;

$3\sqrt{-24} = 3 \cdot 2\sqrt{6}i = 6\sqrt{6}i$

Taller de competencias

1. Expreso cada raíz como un número imaginario puro.

   a. $\sqrt{-81}$ b. $\sqrt{-64}$ c. $\sqrt{-48}$

   d. $\sqrt{-39}$ e. $-\sqrt{-72}$ f. $-\sqrt{-42}$

   g. $-2\sqrt{-9}$ h. $3\sqrt{-27}$ i. $\left(\sqrt{-6}\right)^2$

   j. $\left(4\sqrt{-4}\right)^2$ k. $\left(-3\sqrt{-25}\right)^2$

   l. $\left(-6\sqrt{-108}\right)^2$ m. $5\sqrt{-150}$

2. Escribo la raíz que equivale al número dado.

   a. $\square = 5i$ b. $3\sqrt{2}i = \square$

   c. $\square = 27i$ d. $7i = \square$

e. $\square = 2i$ f. $-10i = \square$

g. $3i + 8i = \square$ h. $\square^2 = -6$

i. $\square^2 = 3i^2$ j. $-\square^2 = \frac{1}{2}i$

k. $\frac{3\sqrt{5}}{2}i = \square$ l. $\square = 9i$

3. Calculo cada potencia. Recuerdo que $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.

a. $2i^2$ b. $(-4i^2)$ c. $(3 + 2i)^2$

d. $\left(\sqrt{3}i\right)^2$ e. $-i^2$ f. $(3i)^2$

g. $(2 - 3i)^2$ h. $\left(\frac{1}{2}i + 1\right)^2$ i. $-\frac{\sqrt{3}}{5}i^2$

j. $(-1 - i)^2$ k. $\left(-6\sqrt{2}i\right)^2$

l. $\left(-\frac{3}{4} - \sqrt{3}i\right)^2$

4. Completo y calculo las potencias de i. Recuerdo que $i^1 = i$.

a. $i^2 = \square$

b. $i^3 = \square \cdot i = (-1)\,i = \square$

c. $i^4 = i^2 \cdot \square = (-1)(-1) = \square$

d. $i^5 = i^4 \cdot \square = \square\, i = \square$

e. $i^6 = i^3 \cdot \square = \square$

f. $i^7 = \square^2 \cdot i = (-i)^2 \cdot i = \square$

g. $i^8 = i^5 \cdot \square = i \cdot \square = \square$

h. $i^9 = \square^4 \cdot i = \square\, i = \square$

i. $i^{10} = i^2 \cdot \square = \square$

j. $i^{11} = \square^3\, i^2 = \square(-1) = \square$

k. Observo las potencias de i. ¿Es necesario conseguir una por una las potencias para calcular i^{50}? Encuentro un procedimiento corto que me permita calcular potencias de i con exponentes enteros positivos mayores que 11.

5. Resuelvo cada ecuación y escribo, si es posible, la solución como un número imaginario puro.

a. $x^2 - 5 = 0$ b. $3 + x^2 = 0$

c. $3\sqrt{2} - x^2 - 1 = 0$ d. $-x^2 + 4 = 0$

e. $-9x^2 = 25$ f. $3x^2 = 16$

g. $64 - 25x^2 = 0$ h. $x^2 = -78$

i. $16x^2 + 49 = 0$ j. $2x^2 + 18 = 0$

6. Escribo ecuaciones de grado 2, como la del ejemplo, cuya solución sea el número dado.

Ejemplo: $x^2 + 8 = 0$. La solución es $x = +2\sqrt{2}i$.

a. $x = \pm 3i$ b. $s = \pm 5\sqrt{3}i$

c. $y = \pm\frac{1}{2}i$ d. $z = \pm\sqrt{6}i$

e. $w = \pm\left(3\sqrt{2} - 1\right)$ f. $m = \pm 7\sqrt{5}$

Soluciono problemas

7. La regla $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$ la verifico para cada par de valores dados.

a. $x = 4$ y $y = 3$ b. $x = -5$ y $y = 2$

c. $x = -3$ y $y = 7$ d. $x = -9$ y $y = -4$

e. ¿La regla es válida si x, y son positivos?

f. ¿La regla es válida para x y y si uno es positivo y el otro es negativo?

g. ¿Qué ocurre si x, y son ambos negativos?

8. Resuelvo la desigualdad y respondo.

a. ¿Para cuáles valores de x, $\sqrt{2x + 1}$ es un número imaginario?

Verifico la raíz con tres de tales valores.

b. ¿Para cuáles valores de x, $\sqrt{x^2 + 1}$ es un número real?

c. ¿Es $\sqrt{x^2 - 4}$ un número imaginario para cualquier x real en $-2 < x < 2$?

Desempeños: expresa la raíz cuadrada de un número negativo como un imaginario puro.
Relaciona los nuevos números con propiedades de R para realizar cálculos.
Resuelve situaciones matemáticas, antes sin solución en R.

Tema 2

Números complejos

El conjunto de los números de la forma $a + bi$, donde a y b son números reales e $i = \sqrt{-1}$, recibe el nombre de **conjunto de los números complejos**. Se denota C.

Para todo número complejo $a + bi$ se tiene:

$$\underbrace{a}_{\text{Parte real}} + \underbrace{\boxed{\overbrace{b}^{\text{Parte imaginaria}}\, i}}_{\text{Número imaginario puro}}$$

Ejemplo

Identifiquemos las partes real e imaginaria del número $-7 + \sqrt{2}i$.

Solución

En el número complejo $-7 + \sqrt{2}i$, -7 es la parte real, $\sqrt{2}$ es la parte imaginaria y $\sqrt{2}i$ es el imaginario puro.

El número real a es un número complejo porque $a = a + 0i$.

El número imaginario bi es un número complejo porque $bi = 0$, $bi \neq 0$.

Así, los números reales (R) y los números imaginarios puros (P) son subconjuntos del conjunto de los números complejos (C).

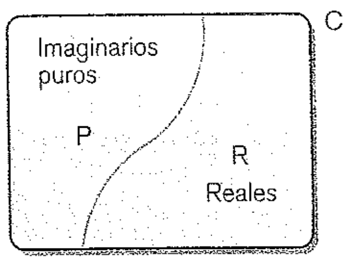


Fig. 3.1

Taller de competencias

1. Escribo Sí o No en la tabla, según el número de la columna pertenezca al conjunto numérico dado en la fila.

	$-\sqrt{-15}$	$3 - 4i$	0	$-\pi i$	$\frac{3}{4}$	$5\sqrt{3}i$	$-8 - \sqrt{7}i$
C							
P							
R							

Tabla 3.1

2. Completo para que el número pertenezca al conjunto dado.

a. $\square + 3i \in C$ b. $-\pi + \square i \in R$

c. $\square + 5 \in C$ d. $\square + 0i \in R$

e. $\square + 4i \in P$ f. $\sqrt{3} + 2\square \in C$

g. $\square - \square i \in C$ h. $-9 + \square i \in R$

i. $\square i + \square \in P$ j. $-5\sqrt{5}i + \square \in R$

k. $\square + \square \in C$ l. $\square + \square \in P$

3. Teniendo en cuenta la siguiente información:

Dos números complejos $a + bi$ y $c + di$ son **iguales** si y sólo si: $a = c$ y $b = d$.

Escribo números reales equivalentes para que los números complejos sean iguales. Observo el ejemplo: $\frac{9}{3} + \sqrt{16}i = 3 + 4i$.

a. $2 + 5i = \square + \square i$

b. $-8 - 25i = \square + \square i$

c. $\sqrt{4} - 2i = \square + \square i$

d. $\frac{3}{4} + \square i = \square + 7i$

e. $-i + \square = \square i - 6$

f. $i^2 - \sqrt{-100} = \square + \square i$

4. Hallo los valores x, y para que los números complejos sean iguales.

a. $x + 3i - 1 = yi + 4$

b. $(x + y) + 3i = -1 + (x - y)\, i$

c. $xi + 2y - 3i = -2 + 3i$

d. $\left(\frac{3}{4}x - y\right)i + 2x - 5y = 4i$

e. $8i + x - yi = \frac{3}{2} + 6i$

f. $(-2x - 3y) + \left(-y - \frac{1}{2}x\right)i = 6$

g. $2x - 4i - 5i = yi - 24$

h. $(y - 2x)\, i - (2y - 7x) = 0$

5. Existe correspondencia uno a uno entre los números complejos y los puntos del plano. Ella se establece gráficamente en el plano complejo, donde X es el eje real y Y es el eje imaginario.

Ejemplo:

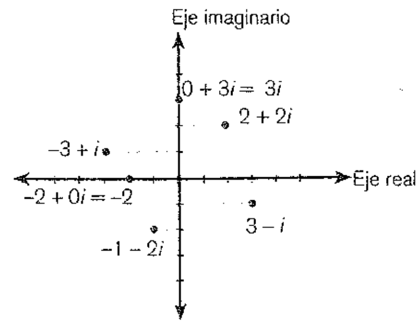


Fig. 3.2

a. Ubico los siguientes números en el plano complejo.

$3 - 5i$; $-1 - i$; $3i$;

5; $-\frac{1}{2} + 3i$; $-\frac{3}{4}i$;

$-2 - 3i$; $0 + 0i$; $-6 - i$;

$6 + i$; $-4 - \frac{3}{5}i$; $5i$

b. Encuentro el número complejo que corresponde a cada punto en el plano.

$A = \square$ $B = \square$ $C = \square$

$D = \square$ $E = \square$ $F = \square$

$G = \square$ $H = \square$ $I = \square$

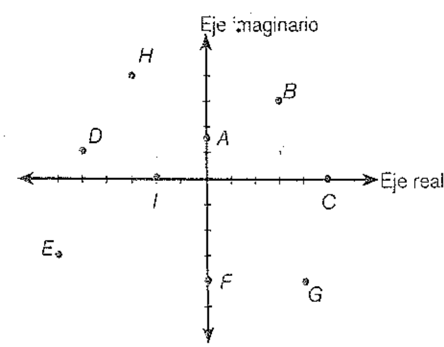


Fig. 3.3

Desempeños: clasifica los números como reales, imaginarios puros o complejos.
Ubica números complejos en el plano.
Aplica correctamente el concepto de número complejo en la solución de ejercicios y problemas.

Tema 3

Adición y sustracción de números complejos

Para adicionar y sustraer números complejos, $a + bi$ y $c + di$, los consideramos como si fueran polinomios en i. Definimos la operación adición en C, de tal manera que se cumplan las propiedades de la adición en R.

Si $a + bi$ y $c + di$ son números complejos, su suma está dada por

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i.$$

Ejemplo

Hallemos la suma de $-5 + 4i$ y $-9 - 8i$.

Solución

$(-5 + 4i) + (-9 - 8i) = [(-5) + (-9)] + [4i + (-8i)] = -14 + (-4i) = -14 - 4i$

- La suma de dos números complejos es un número complejo. C es cerrado en la adición.
- $0 = 0 + 0i$ es el módulo de la adición en el conjunto de los números complejos.
- El inverso aditivo de $a + bi$ es $-a - bi$.
- Sustraer un número complejo de otro es adicionar al minuendo el inverso aditivo del sustraendo.

Ejemplo

Restemos $3 - 9i$ de $6 - 4i$.

Solución

$(6 - 4i) - (3 - 9i) = (6 - 4i) + (-3 + 9i) = 3 + 5i$

Taller de competencias

1. Efectúo la adición y expreso el resultado en la forma $a + bi$.

a. $(3 - 8i) + (4 - 5i)$

b. $(i + 1) + (2i - 4)$

c. $\left(\frac{1}{2} - 3i\right) + (-5 - 2i)$

d. $(-5 + 2i) + (3 - 10i)$

e. $(14i + 2) + (-6 - 9i)$

f. $(15i + 3) + (-i - 1)$

g. $\left(3 + \sqrt{-2}\right) + \left(6 + \sqrt{-3}\right)$

h. $\left(\sqrt{-10} + 1\right) + 6i$

i. $\left(1 - \sqrt{-25}\right) + 4$

j. $-9i + \left(\sqrt{-8} + 1\right)$

2. Hallo el inverso aditivo de cada número complejo y efectúo la adición para comprobar que es el inverso.

a. $3 + 2i$

b. $-5 + \frac{3}{4}i$

c. $-\pi - \sqrt{2}i$

d. $7\pi - \sqrt{3}i$

e. $8i$

f. 4

g. $-\sqrt{-3} + 4$

h. $-\sqrt{-4} + 2 + i$

i. $5i - 8\sqrt{-25}$

j. $-18i$

k. $-\sqrt{-45}$

l. $6 - \sqrt{-8} + 3i$

3. Resto los números complejos y expreso el resultado en la forma $a + bi$.

a. $(8 + 2i) - (3 - 10i)$

b. $(-4 - 5i) - (-2 - 3i)$

c. $-10i - \left(1 - \frac{3}{5}i\right)$

d. $4 - \left(-5 - \sqrt{2}i\right)$

e. $(-3 + 2i) - (-5 + 6i)$

f. $(-4 - 3i) - (3 - 9i)$

g. $\left(\sqrt{-2} + 3\right) - \left(\sqrt{-5} + 4\right)$

h. $\left(-\sqrt{-7} + 2\right) - \left(-2\sqrt{-7} + 4\right)$

i. $\left(\frac{1}{2} + i\right) - \left(\frac{5}{2} - 2i\right)$

j. $\left(-\frac{3}{7} + 2i\right) - 5i$

k. $9i - \left(\sqrt{-9} - 4\right)$

l. $(6 - 8i) - \left(\sqrt{3} + 4i\right)$

4. Para cada pareja de números complejos compruebo que $z + w = w + z$.

a. $z = 3 + 2i$, $w = -5 - 10i$

b. $z = -6 - 8i$, $w = 9i$

c. $z = -2 - \sqrt{-2}$, $w = \sqrt{-8}$

d. $z = a + bi$, $w = c + di$

5. Para cada terna de números complejos compruebo que $x + (y + z) = (x + y) + z = x + y + z$.

a. $x = \sqrt{-2} + i$, $y = 3i$, $z = 4$

b. $x = 3 - 2i$, $y = 4 + 5i$, $z = -i + 1$

c. $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}i$, $y = -\sqrt{2} + 3\sqrt{2}i$, $z = -3\sqrt{2}i$

d. $x = a + bi$, $y = c + di$, $z = f + gi$

6. Como a cada número $a + bi$ le corresponde un punto (a, b) del plano complejo, a él también le corresponde un segmento dirigido llamado vector, que va del origen de coordenadas al punto representativo del número complejo.

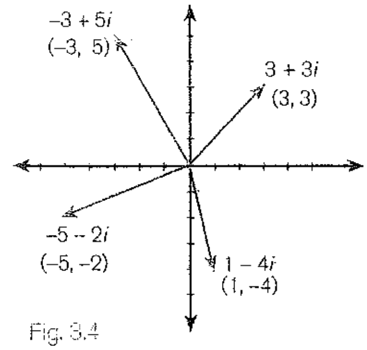


Fig. 3.4

Represento mediante un vector los siguientes números complejos.

a. $z_1 = 3i$

b. $w = (-5 + 8i) + (2 - i)$

c. $x = (-9 + 2i) + (4 - 5i)$

d. $y = \sqrt{-2} + 1$

e. $z_2 = 4 + (-2i + 1)$

f. $z_3 = -9 + \sqrt{-3}$

g. $w_1 = -i - 1$

h. $x_1 = (3 + 2i) + (-3 + i)$

i. $y_1 = (-1 + i) - \left(\frac{1}{2} + 3i\right)$

j. $z_4 = 8 + (3i)$

7. La norma de un número complejo $a + bi$, denotado por $|a + bi|$ (valor absoluto del número complejo), es la longitud del vector que lo representa:

$$|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$|3 + 2i| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}.$$

Encuentro la norma de cada número complejo.

a. $-5 - 1$

b. $4i + (-1 - i)$

c. $(5 + 8i) - (3 - 2i)$

d. $\frac{1}{4} - \frac{3}{2}i$

e. $\sqrt{6} + 8i$

f. $\left(3 - \frac{1}{3}i\right) + (2i - 5)$

g. $x + yi$

h. $(a + bi) + (c + di)$

i. $i + (a - bi)$

Desempeños: verifica que las propiedades de la adición en **R** se cumplen en **C** y las utiliza; interpreta información para conocer nuevas propiedades de **C**.
Conoce la operación adición de números complejos y su operación inversa.

Tema 4

Multiplicación y división de números complejos

Para multiplicar números complejos lo hacemos como si se multiplicaran polinomios en i, excepto que i^2 se sustituye por -1.

$$\begin{aligned}(a+bi)\cdot(c+di) &= ac+adi+bci+bdi^2\\ &= ac+(ad+bc)i-bd=(ac-bd)+(ad+bc)i\end{aligned}$$

El producto de los números complejos
$a+bi$ y $c+di$ está dado por:
$(a+bi)\,(c+di)=(ac-bd)\,(ad+bc)i$

Ejemplo

Multipliquemos $-2+i$ y $4-2i$.

Solución

$(-2+i)\,(4-2i)=-8+4i+4i-2i^2=-8+8i+2=-6+8i$

Si $a+bi$ es un número complejo, el conjugado de $a+bi$ es $a-bi$ y se denota $\overline{a+bi}$. Así, $\overline{a+bi}=a-bi$.

Ejemplo

Hallemos el conjugado de $3+2i$ y $-3-5i$.

Solución

$\overline{3+2i}=3-2i$; $\overline{-3-5i}=-3+5i$

Para dividir dos números complejos se multiplican ambos miembros de la fracción por el conjugado del denominador.

Ejemplo

Encontremos el cociente de $(1-i)\div(2-3i)$.

Solución

$$\frac{1-i}{2-3i}=\frac{(1-i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)}=\frac{2+3i-2i-3i^2}{(2)^2-(3i)^2}=\frac{5+i}{4-9i^2}=\frac{5+i}{13}=\frac{5}{13}+\frac{1}{13}i$$

Taller de competencias

Tengo presente la siguiente información.

- La multiplicación de dos números complejos es un número complejo.
- $1=1+0i$ es el módulo de la multiplicación en el conjunto C.
- Para todo $a+bi\in$ C, $a+bi\neq 0+0i$, existe un único número complejo $(a+bi)^{-1}$ tal que $(a+bi)(a+bi)^{-1}=1$.
- En el conjunto C se satisface la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición.

1. Hallo el producto de las siguientes multiplicaciones.

a. $(-3+5i)(4-6i)$ ________________

b. $\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{7}i\right)(-3+2i)$ ________________

c. $(1+i)(1-i)$

d. $\left(\sqrt{2}i+4\right)\left(\sqrt{3}i+6\right)$

e. $4i(8-9i)$

f. $(-9i-1)(3-5i)$

g. $\left(-\frac{3}{4}-2i\right)\left(\frac{5}{7}-\frac{3}{5}i\right)$

h. $(\pi+4i)(2\pi-8i)$

i. $(5+i)(-2+7i)$

j. $\left(4+\frac{1}{2}i\right)\left(3-\frac{1}{5}i\right)$

k. $3i(4-10i)$

l. $(0{,}25-3i)(4+0{,}3i)$

2. Encuentro el conjugado de cada número complejo $a+bi$ y verifico que $(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$.

a. $3+4i$

b. $x+yi$

c. $-2-3i$

d. $-x+yi$

e. $8-\frac{3}{4}i$

f. $x-yi$

g. $(1-i)+(4-2i)$

h. $(3-2i)-(1+5i)$

i. $(2-2i)(4-5i)$

j. $(3+4i)(-9+10i)$

k. $\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}i\right)\left(-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}i\right)$

l. $(a+bi)(c+di)$ $(a+bi)(c+di)$

3. Determino el cociente entre los dos números complejos y lo expreso como un número complejo.

a. $\dfrac{1+i}{3-2i}$

b. $\dfrac{1-5i}{5+i}$

c. $\dfrac{14-12i}{7-i}$

d. $\dfrac{1+2i}{1-2i}+\dfrac{3-2i}{3+2i}$

e. $\dfrac{3+i}{3-2i}-\dfrac{3-i}{3+2i}$

f. $\dfrac{3+4i}{2-i}+\dfrac{3-4i}{2+i}$

g. $\dfrac{x+yi}{x-yi}$

h. $\dfrac{\sqrt{x}+i}{i-\sqrt{x}},\ x>0$

i. $[(1+i)+(2+2i)]+(-3+i)$

4. Recuerdo las potencias básicas de i y aplico la regla del cuatro para potencias de i así:

$i^1 = i$ $\qquad i^3 = -i$

$i^2 = -1$ $\qquad i^4 = 1$

Ejemplo:
$$i^{50} = (i^4)^{12} \cdot i^2$$
$$= 1^{12} \cdot (-1)$$
$$i^{50} = -1$$

Calculo:

a. i^{94} $(i^4)^{23} \cdot i^2 = 1^{23} \cdot (-1) = -1$

b. i^{-25}

c. $(1+i)^{-2}$

d. $\dfrac{i^3+i^4-i^5}{i^2+1-i^6}$ $(i^4)^2 \cdot i \cdot i^8 = 1^2 \cdot (-1) = -i$

e. $(-1+2i)^5$

f. $-i^{-23}$

g. $(i^4+i^5)^{-2}$

h. $4(-i^{-35})^2$

i. $(i^2+i^8+i^{15})^{-1}$

5. Teniendo en cuenta la figura 3.5, realizo las operaciones. Observo el ejemplo:

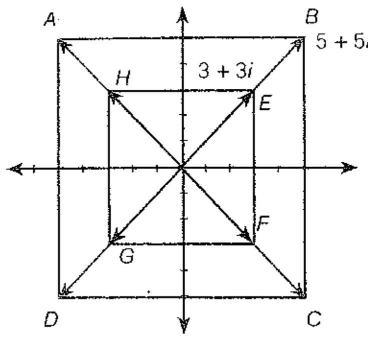


Fig. 3.5

Calculemos $(A + B - C) \cdot D$.

$(A + B - C) \cdot D$

$= [(-5 + 5i) + (5 + 5i) - (5 - 5i)] \cdot (-5 - 5i)$

$= (-5 + 15i)(-5 - 5i)$

$= (25 - 50i + 75)$

$= 100 - 50i$

a. $(D + E) \div (i + H)$

b. $(H - B) \cdot (C + G)$

c. $[A + (B - E)] \div (F + i)$

d. $F \cdot (A + G + i)$

e. $(G \div F) \div (H \cdot i)$

f. $(D - C) + B \cdot A$

g. $(C \cdot H) \div (F \cdot D)$

h. $(B + D) \cdot (F - C)$

i. $1 \div A$

j. $A \cdot B \div D$

k. $H \div i \div G$

l. $(B + D + i) \div (A - H + i)$

m. $(4 \cdot C - 3 \cdot D) \div 2$

n. $(2G \cdot 3i)$

o. $3(C + G) + 2(H - A)$

p. $(A - 2B + 3D) \cdot (i)$

6. Calculo la norma de cada número complejo.

a. $\dfrac{i}{3 - 2i}$

b. $\dfrac{2i - 1}{2i + 4}$

c. $(-2 + 4i)(-1 - i)$

d. $\left(-\dfrac{3}{2} - i\right)\left(1 + \dfrac{1}{2}i\right)$

e. $\dfrac{2 - 6i}{i}$

f. $\dfrac{(1 - i)(1 + i)}{-2 + i}$

7. Encuentro los valores de x, y tales que los dos números complejos sean iguales.

a. $(x + iy)(-2 + i) = 1 + 3i$

b. $(x - 3iy)(3 - i) = 4$

c. $(x - 2iy)(2 + 3i) = -1 - 2i$

d. $(x - yi)(-2 + 5i) = 3 + 2i$

8. Evalúo cada expresión para el x dado.

a. $x^2 - 1$; si $x = i - 2$.

b. $x^2 + 3x + 2$; si $x = 3 - i$.

c. $x^2 + 8x + 27$; si $x = 2 + 5i$.

d. $(ix)^2 + 2ix - 1$; si $x = 2i + 1$.

e. $x^3 - x^2$; si $x = 1 - \sqrt{-8}$

9. Si $x + yi \neq 0$, demuestro que su inverso multiplicativo es $\dfrac{x - yi}{x^2 + y^2}$.

Desempeños: Identifica números complejos y su conjugado.
Realiza operaciones entre números complejos.
Calcula potencias de i en diversos ejercicios.
Aplica conceptos para resolver problemas y demostrar propiedades.

1. **Frisos**

Los frisos se obtienen a partir de un motivo que va formando una figura completa, por acciones sucesivas de trasformaciones.

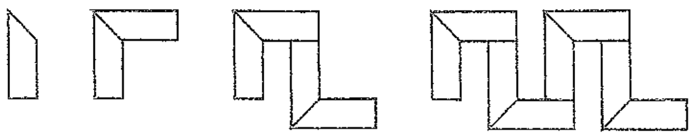


Fig. 3.6

Invento un friso utilizando un procedimiento análogo.

Fig. 3.7

2. Los fractales nos permiten ver un nuevo tipo de geometría. Mandelbrot, el creador o descubridor de los fractales, los describe como "figuras geométricas u objetos naturales cuyas partes tienen igual forma o estructura que el todo, salvo que están a diferente escala".

Un sencillo fractal puedo construirlo así: sobre cada lado del triángulo equilátero, construyo otro, cuyo lado es la tercera parte del lado del triángulo base; continúo con el proceso como muestra la figura.

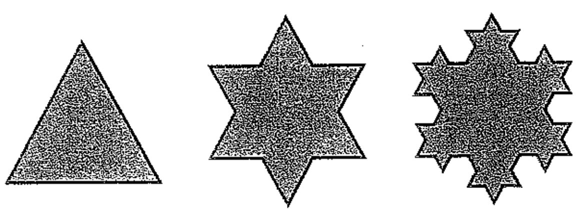


Fig. 3.8

Evalúo mis competencias

Con los siguientes ejercicios, afianzo los desempeños que he superado y refuerzo aquellos que están por superar.

1 Respondo F o V y justifico mi respuesta.

a. Todo número real es un número complejo. ______________________

b. Todo número imaginario puro es un número real. ______________________

c. Cero es un número complejo. ______________

d. En C se cumple la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición. ______ ______________________

e. $\sqrt{-1}$ es un número real. ______________

f. Si z es un número complejo $z\bar{z} = 1$. ________ ______________________

g. $\sqrt{-a} = \sqrt{a}i$ para todo $a \in$ R. ______________

h. Las soluciones de $x^2 + 8 = 0$ son $\pm 3\sqrt{2}i$. ___ ______________________

i. Todo número complejo es un número real. ______________________

j. El plano complejo se determina con el eje real X y el eje real Y. ______________________

2 Realizo el crucigrama.

Verticales

1. Números de la forma $a + bi$.
2. Cuarta potencia de i.
3. Es un subconjunto de C.
4. Se utiliza para dividir dos complejos. (Inv.)
5. Es el valor absoluto de un número complejo.

Horizontales

1. Parte no imaginaria de un número complejo.
2. Módulo de la adición en C.
3. A $\sqrt{-1}$ le llaman unidad...
4. Otra interpretación gráfica de los números complejos.
5. Resultado de la adición entre números complejos.

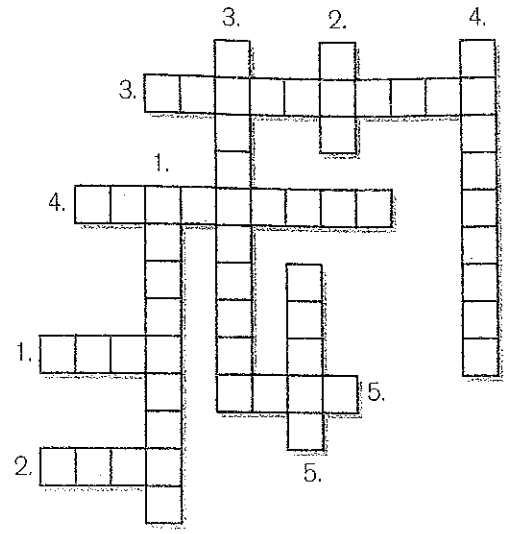


Fig. 3.9

3 Completo la tabla.

z_1	z_2	$z_1 + z_2$	$z_1 - z_2$	$z_1 \cdot z_2$
$3i$	$4 - i$			
$-1 + 2i$	$\frac{1}{2} - 2i$			
$\sqrt{2}i +$	$-\sqrt{3}$			
$\sqrt{5}i$	$\sqrt{10} + 2i$			

Tabla 3.2

4 Utilizo las potencias de i y completo la tabla.

•	i^{10}	i^{-25}	$-i^{-2}$	$1 + i$	$-i^{99}$
i					
i^3					
$-i$					
i^{-1}					
$-i^2$					

Tabla 3.3

5. Completo la tabla escribiendo el inverso aditivo, el conjugado y la norma del número complejo.

z	$-z$	$\bar{z}$	$\lvert z \rvert$
$-4i$			
$\frac{1}{2} + 3i$			
$-5 - 9i$			
8			
$\sqrt{5} - 6\sqrt{3}i$			

Tabla 3.4

Soluciono problemas

6. Para $z = x + yi$, $z_1 = a + bi$ y $z_2 = e + di$, demuestro que:

a. $z \cdot z_1 = z_1 \cdot z$

b. $z(z_1 \cdot z_2) = (z \cdot z_1)z_2$

c. $\overline{z + z_1} = \bar{z} + \bar{z}_1$

d. $\overline{z \cdot z_1} = \bar{z} \cdot \bar{z}_1$

e. $\bar{\bar{z}} = z$

7. Una de las desigualdades más importantes en matemáticas es la desigualdad triangular que dice:

Dados z, w dos números complejos,

$$|z + w| \leq |z| + |w|$$

Verifico la desigualdad triangular si,

a. $z = 9 - 4i$ y $w = 2 - 7i$

b. $z = 3 - 2i$ y $w = \frac{1}{2} - i$

8. Los números complejos se utilizan en teorías más avanzadas de las matemáticas. Por ejemplo el plano complejo desempeña un papel básico en la geometría fractal, ya que sobre el plano complejo se dibujan figuras llamadas fractales. El Triángulo de Sierpinski es una de tales figuras.

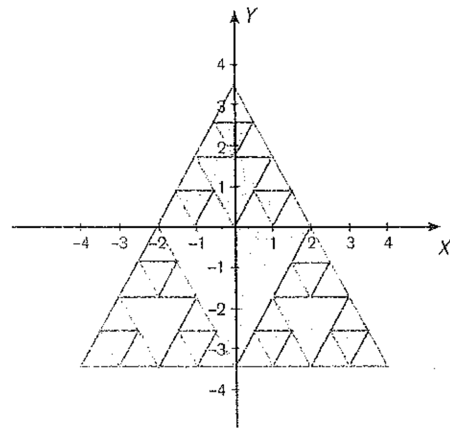


Fig. 3.16

Determino tres números complejos que estén en el Triángulo de Sierpinski y tres números complejos que no estén.

Autoevaluación

	Bajo	Básico	Alto	Superior
Identifico los números complejos.				
Sumo, resto y multiplico números complejos.				
Determino el conjugado de un número complejo y divido dos números complejos.				
Represento gráficamente números complejos en el plano complejo y uso el concepto de número complejo como vector.				
Hallo la norma de un número complejo y calculo potencias de i.				
Resuelvo problemas de índole matemático utilizando el conjunto de los números complejos.				

Prueba Saber

Encuentra la respuesta correcta entre las opciones A, B, C y D, y márcala en la hoja de respuestas, rellenando completamente el círculo correspondientes.

Contesta las preguntas 1 a 4 de acuerdo con la siguiente información.

El metro que Gabriel Císcar (delegado español en la Comisión Internacional encargada de elaborar el metro) llevó a sus compatriotas en 1800 tenía un error de alrededor de una cienmilésima de metro, mientras que el internacional la tenía de 10^{-7} m. En el que se usó, a partir de la radiación de un átomo de criptón, la precisión era 10^{-9} m, y con el arreglo que se hizo en 1983, ésta se multiplicó por 10 000 hasta alcanzar los 10^{-13} m. La modesta exactitud de los metros revolucionarios reveló los aspectos térmicos de la naturaleza y con la precisión de la última definición, 10^{-13} m, se puso de manifiesto su comportamiento relativista: la longitud depende de la rapidez a la que se mueve el objeto. Y qué no decir de la precisión de nuestra información cuando medimos líneas costeras de un país, fronteras que separan a dos países, entre otros.

1. El río más largo del mundo es el Nilo, con una longitud aproximada de 6690 km. Si se hubiera medido con el metro de Císcar, entonces el error cometido, en metros, sería:

   A. 6690

   B. 669

   C. 66,9

   D. 6,69

   E. 0,669

2. Si el río Nilo se hubiera medido con el metro internacional de 1800, entonces el error cometido, en metros, sería:

   A. 6690

   B. 669

   C. 66,9

   D. 6,69

   E. 0,669

3. La segunda montaña más alta del mundo es el K2, en Karakoram, entre China y Paquistán, con una altura de 8611 m (237 m menos que el Everest). El error en la altura del K2 al medir según la radiación de un átomo de criptón es:

   A. $8{,}611 \times 10^{-10}$

   B. $8{,}611 \times 10^{-8}$

   C. $8{,}611 \times 10^{-7}$

   D. $8{,}611 \times 10^{-6}$

   E. $8{,}611 \times 10^{-5}$

4. Al medir según el acuerdo de 1983, el error en la medida de la altura del Everest es:

   A. $8{,}848 \times 10^{-10}$

   B. $8{,}848 \times 10^{-8}$

   C. $8{,}848 \times 10^{-7}$

   D. $8{,}848 \times 10^{-6}$

   E. $8{,}848 \times 10^{-5}$

Contesta las preguntas 5 a 9 de acuerdo con la siguiente información.

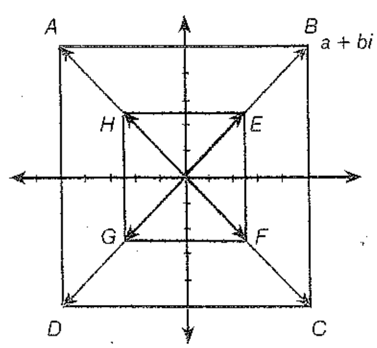


Fig. 3.11

Rocío, aplicando simetrías al número complejo $a + bi$, determinó nuevos números complejos y, con ellos, originó el cuadrado rojo de vértices $ABCD$. Luego, redujo a y b a la mitad y realizó las respectivas simetrías, generando así el cuadrado negro de vértices *EFGH*.

Rocío presentó a sus compañeros la gráfica y les preguntó:

5. Los vértices *F* y *C*, en los cuadrados negro y rojo respectivamente, son:

   A. $\left(-\frac{a}{2}+\frac{b}{2}i\right)$ y $(-a+bi)$

   B. $\left(-\frac{a}{2}-\frac{b}{2}i\right)$ y $(-a-bi)$

   C. $\left(\frac{a}{2}-\frac{b}{2}i\right)$ y $(a-bi)$

   D. $\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}i\right)$ y $(a+bi)$

6. La aplicación de la simetría sobre el eje *X* del complejo $a+bi$ lo convierte en su:

   A. Opuesto.

   B. Conjugado.

   C. Inverso aditivo.

   D. Inverso multiplicativo.

7. La aplicación de la simetría central respecto al origen de coordenadas de $a+bi$, determinó en los cuadrados los vértices:

   A. *A* y *H*

   B. *F* y *C*

   C. *G* y *D*

   D. *E* y *B*

8. La medida de las diagonales del cuadrado *HEFG* equivalen a:

   A. El doble de la norma de $\frac{a}{2}-\frac{b}{2}i$.

   B. La norma de $a+bi$.

   C. El doble de la norma de $a+bi$.

   D. La norma de $a+bi$.

9. El vértice *A* del cuadrado *ABCD* se obtuvo a partir de la simetría de:

   A. $a+bi$ respecto al origen.

   B. El conjugado de $a+bi$ respecto al origen.

   C. El opuesto de $a+bi$ respecto al eje imaginario.

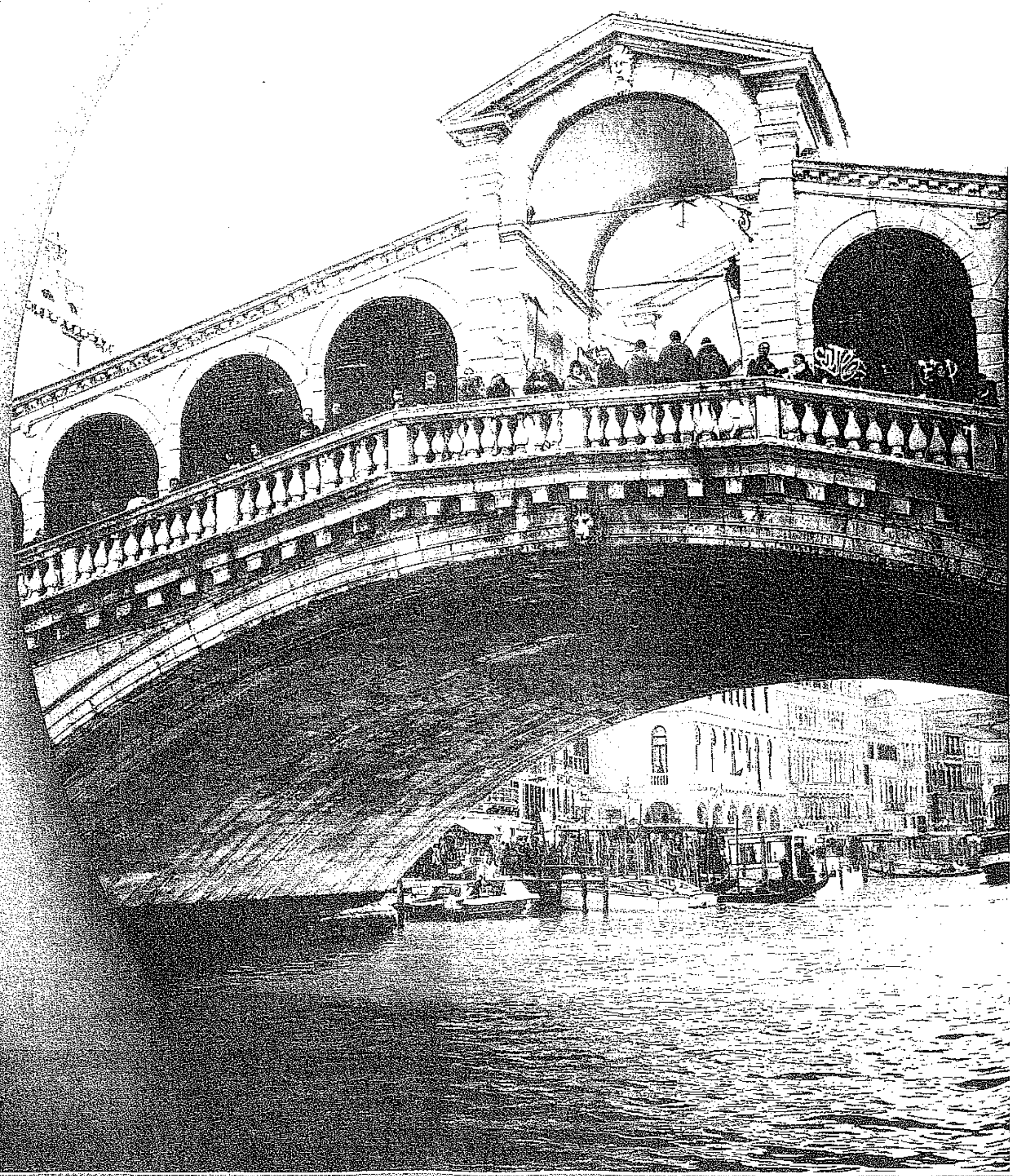
   D. $a+bi$ respecto al eje real.

Formato de respuestas

1.	A	B	C	D	6.	A	B	C	D
2.	A	B	C	D	7.	A	B	C	D
3.	A	B	C	D	8.	A	B	C	D
4.	A	B	C	D	9.	A	B	C	D
5.	A	B	C	D					

Unidad 4

Ecuaciones cuadráticas



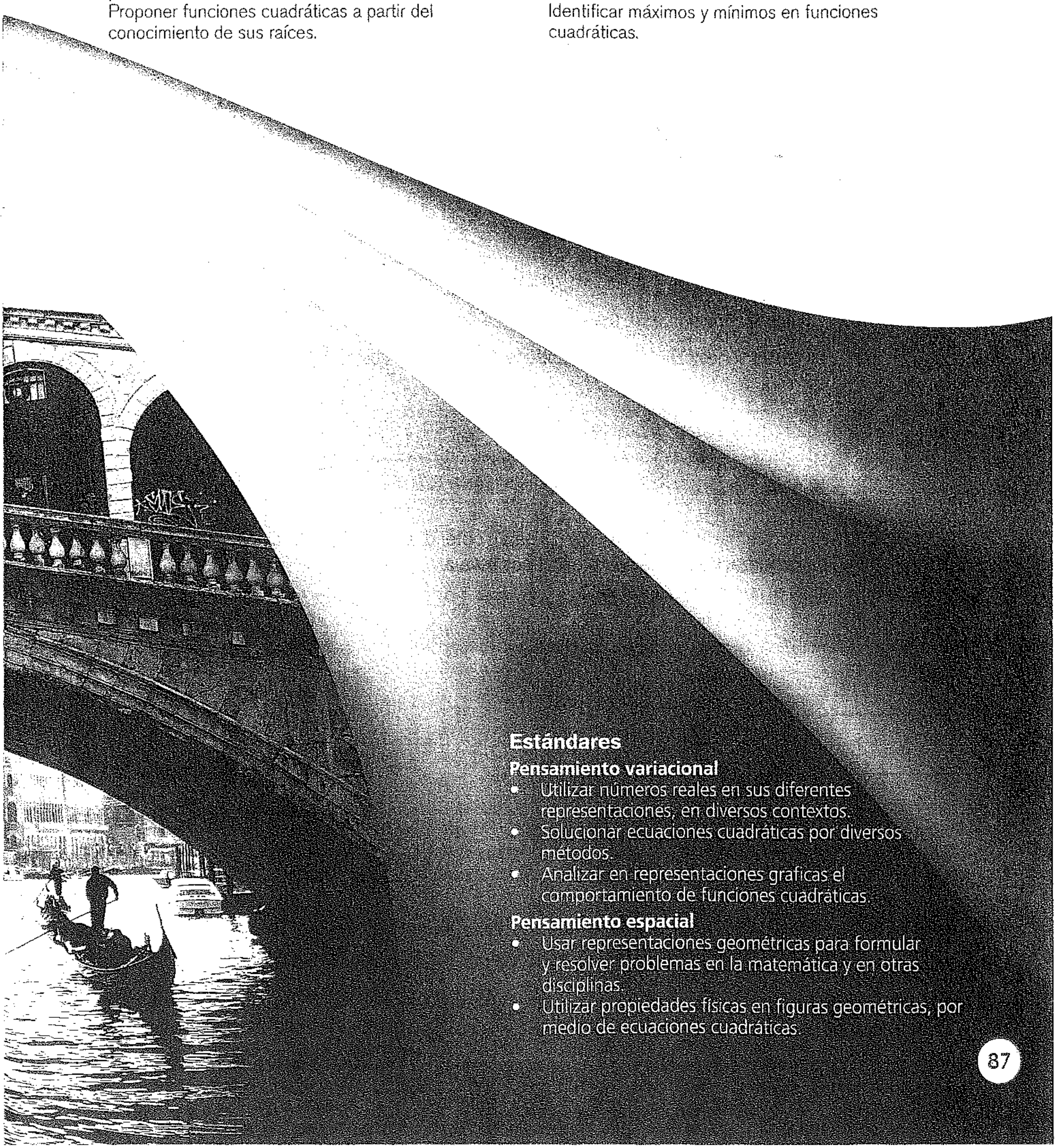
Procesos: El desarrollo de esta unidad me hará competente para:

Resolución de problemas
Resolver, aplicando distintas estrategias, problemas que requieren el planteamiento de ecuaciones y desigualdades cuadráticas.
Interpretar gráficamente problemas y resolverlos haciendo uso de ecuaciones cuadráticas.

Razonamiento lógico
Clasificar las soluciones de una ecuación cuadrática a partir del discriminante.
Proponer funciones cuadráticas a partir del conocimiento de sus raíces.

Comunicación
Explicar relaciones entre las graficas de funciones cuadráticas y la solución de ecuaciones cuadráticas.
Encontrar soluciones de ecuaciones cuadráticas por medio de la grafica de la función cuadrática.

Conexiones
Modelar y solucionar problemas en geometría y de la vida diaria, en otras disciplinas, por medio de ecuaciones cuadráticas.
Identificar máximos y mínimos en funciones cuadráticas.



Estándares

Pensamiento variacional
- Utilizar números reales en sus diferentes representaciones, en diversos contextos.
- Solucionar ecuaciones cuadráticas por diversos métodos.
- Analizar en representaciones graficas el comportamiento de funciones cuadráticas.

Pensamiento espacial
- Usar representaciones geométricas para formular y resolver problemas en la matemática y en otras disciplinas.
- Utilizar propiedades físicas en figuras geométricas, por medio de ecuaciones cuadráticas.

Tema 1

Solución de ecuaciones cuadráticas factorizando

Al golpear una pelota de golf que se encuentra en el suelo, la altura h (cm) que alcanza la bola depende del tiempo t (s) que ha estado en el aire. La relación altura-tiempo de este movimiento está representada por la ecuación no lineal:

$$h = -13t^2 + 61t \text{ (figura 4.1)}$$

Al golpear la pelota que se halla en un soporte a 20 cm sobre el suelo, la relación altura-tiempo, en este caso, estará dada por la ecuación $h = -13t^2 + 61t + 20$ (figura 4.2).

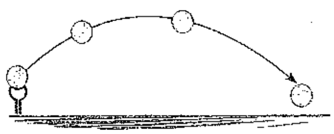


Fig. 4.1

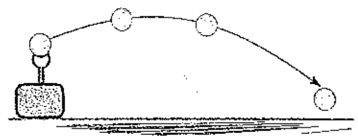


Fig. 4.2

- ¿Cuántos segundos tarda la bola en tocar el suelo en cada una de las situaciones?

  El tiempo será:

  En la situación 1: $0 = -13t^2 + 61t$ (1)

  En la situación 2: $0 = -13t^2 + 61t + 20$ (2)

Las ecuaciones (1) y (2) son cuadráticas y las resolvemos aplicando la propiedad del producto cero.

La ecuación que tiene la forma $0 = ax^2 + bx + c$, donde a, b y c son números reales y $a \neq 0$, se llama ecuación cuadrática o de segundo grado.
Si $a \cdot b = 0$, para los reales a, b, entonces $a = 0$ o $b = 0$.

Al resolver las ecuaciones (1) y (2) para t obtendremos los tiempos pedidos.
La factorización de cada expresión nos lleva a:

(1)

$0 = t(-13t + 61)$

Haciendo uso de la propiedad nombrada:

$t = 0$ o $-13t + 61 = 0$

$\downarrow$

$t = \dfrac{61}{13} \approx 4{,}7$ s

(2)

$0 = -13t^2 + 61t + 20$

$0 = 13t^2 - 61t - 20$

$0 = (t - 5)(13t + 4)$

$\downarrow \qquad \downarrow$

$0 = t - 5 \quad 0 = 13t + 4$

$\downarrow \qquad \downarrow$

$t = 5 \quad t = -\dfrac{4}{13}$, solución no posible.

Por tanto, la bola tarda 4,7 s en tocar el suelo en la situación 1 y 5 s en la situación 2.

Taller de competencias

1 Escribo C si la ecuación es cuadrática o N si no lo es.

a. $x^2 + x + 1 = 0$ ☐

b. $-x + 2 = x^2$ ☐

c. $0 = 3t^2 + 1$ ☐

d. $3x = -2 + y$ ☐

e. $(x + 2)^2 = 5$ ☐

f. $x + \frac{1}{x} = 1$ ☐

g. $\frac{x+1}{x^2-1} = -2$ ☐

h. $x^2 = 4$ ☐

---

2 En la ecuación $-3x^2 + x + 3 = 0$, $a = -3$, $b = 1$ y $c = 3$.

Para las siguientes ecuaciones determino los valores de a, b y c.

Ecuación	a	b	c	Ecuación	a	b	c
$-x^2 + 2x - 1 = 0$				$2y = -3y^2$			
$\frac{3}{4}x^2 - 8 = 0$				$x^2 = d$			
$t = t^2 - 2$				$\sqrt{3}z^2 - z = 0$			
$3x + \frac{1}{x} = 1$				$\frac{x-1}{2-x^2} = -2$			

Tabla 4.1

---

3 Verifico si el número dado es solución o no de la ecuación cuadrática.

a. $y^2 + 3y - 1 = 0;$ 1

b. $x^2 - 5 = 0;$ $\sqrt{5}$

c. $12 = 7x - x^2;$ 3

d. $2t^2 = 8t;$ 4

e. $m^2 + 1 = 0;$ i

f. $2x - \frac{3}{x} = 1;$ $\frac{3}{2}$

g. $x^2 - 2x - 1 = 6;$ $2i + 1$

h. $t - 3t^2 + 5 = 0;$ $-\frac{1}{2}$

4 Cada ecuación cuadrática modela una situación. Calculo los valores de la variable indicada y completo la tabla en cada caso.

a. Área de un círculo

$A = \pi R^2$ $\pi = 3{,}14$

R	2	3	$\frac{1}{2}$	4	5	$\frac{3}{4}$
A	4π					

Tabla 4.2

b. Longitud de un péndulo

$l = \frac{gt^2}{2\pi}$ $\pi = 3{,}14$
$g = 9{,}8\ m/s^2$

t	1	2	3	4	5	6
l						

Tabla 4.3

c. Superficie de una esfera

$A = 4\pi R^2$ $\qquad \pi = 3{,}14$

R	1	2	$\frac{3}{2}$	4	$\frac{5}{2}$	5
A	4π					

Tabla 4.4

d. Altura h de un objeto después de t segundos, lanzado con una velocidad inicial v_0.

$h = -12t^2 + v_0 t$

t	1	2	3	4
h	$v_0 - 12$			

Tabla 4.5

5. Utilizo la propiedad dada para resolver las siguientes ecuaciones.

$$\text{Si } x^2 = a \text{ y } a > 0,\ x = \pm\sqrt{a}.$$

a. $x^2 = 45$

b. $x^2 - 9 = 0$

c. $9x^2 = 64$

d. $(x-4)^2 = -1$

e. $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$

f. $(x-3)^2 = 9$

g. $4x^2 - 12x + 9 = 0$

h. $y^2 + 2\sqrt{5}y + 5 = 0$. (*Sugerencia:* factorizar.)

6. Resuelvo por factorización cada una de las siguientes ecuaciones.

a. $3t - 5t^2 = 0$ ____________

b. $9x - 10x^2 = 2$ ____________

c. $x^3 + x^2 - x - 1 = 0$ ____________

d. $-6t^2 + 13t - 5 = 0$ ____________

e. $t^2 - 10t + 21 = 0$ ____________

f. $x(1 - 2x) = -(2x - 1)$ ____________

g. $xn - x^2 = 2n^2 - 2nx$ ____________

h. $14x^2 + 25bx + 6b^2 = 0$ ____________

i. $2t^3 = 11t^2 + 6t$ ____________

Soluciono problemas

7. Determino las dimensiones y el perímetro de cada figura.

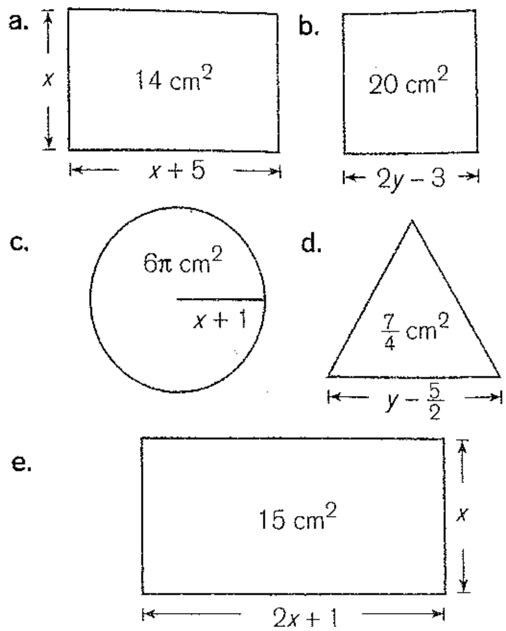


Fig. 4.3

8. La ecuación $h = -2t^2 + 14t$ modela el movimiento de un balón cuando es pateado. Si h representa la altura, en pies, que alcanza el balón después de un tiempo t, indico la situación que se solucionaría con cada una de las siguientes ecuaciones.

a. $0 = -2t^2 + 14t$

b. $20 = -2t^2 + 14t$

c. $h = -2t^2 + 14t$, si $t = 4$

9. La escalera de la figura 4.4 tiene una longitud de $\sqrt{20}$ m. ¿A qué altura del piso debe tocar la escalera el muro para que la base de ella esté separada 2 m del muro?

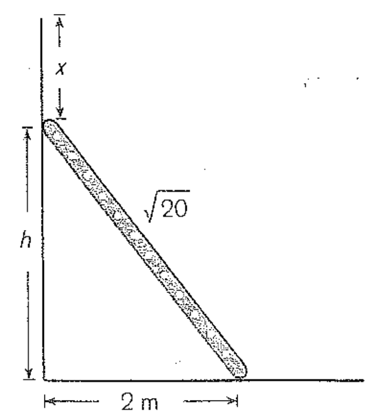


Fig. 4.4

Desempeños: Identifica los elementos de una ecuación cuadrática.
Verifica soluciones de una ecuación cuadrática.
Resuelve ecuaciones cuadráticas por dos métodos diferentes.
Analiza y da solución a situaciones que requieren de ecuaciones cuadráticas.

Tema 2

Ecuación cuadrática completando el cuadrado

El cuadrado de la figura 4.5, de lado $x + \frac{b}{2}$, se descompone en cuatro cuadriláteros cuyas áreas son:

$$x^2 + \frac{b}{2}x + \frac{b}{2}x + \left(\frac{b}{2}\right)$$

Si adicionamos los términos semejantes y factorizamos, observamos que la expresión es igual a $\left(x + \frac{b}{2}\right)^2$.

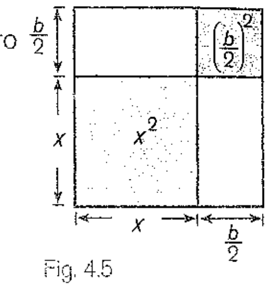


Fig. 4.5

La parte roja de la figura 4.6, de área $(x^2 + 8x)$ cm^2, será un cuadrado de lado $(x + 4)$ cm, sólo si se agrega un cuadrado de área $4^2 = 16$ cm^2.

Esto, traducido al lenguaje matemático, es:

$x^2 + 8x + 4^2 = x^2 + 2(4x) + 4^2 = (x + 4)^2$, área del cuadrado resultante.

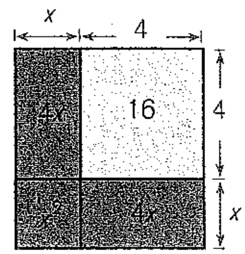


Fig. 4.6

Podemos generalizar el método anterior así:

> Si se tiene una expresión de la forma $x^2 + bx$ se puede obtener un trinomio cuadrado perfecto adicionando $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ a la expresión dada así: $x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2$.

Si una ecuación cuadrática no es factorizable se puede resolver completando el trinomio cuadrado perfecto.

Ejemplo

Resolvamos la ecuación $x^2 + 10x - 7 = 0$.

Solución

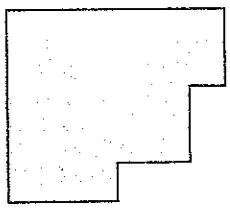
$x^2 + 10x - 7 = 0 \longrightarrow x^2 + 10x = 7$, así $x^2 + 10x + \left(\frac{10}{2}\right)^2 = 7 + \left(\frac{10}{2}\right)$, entonces:

$(x + 5)^2 = 32$	Escribimos el trinomio cuadrado perfecto.
$x + 5 = \pm\sqrt{32}$	Hallamos las raíces.
$x = \pm\sqrt{16 \cdot 2} - 5$	Despejamos x.
$x = \pm 4\sqrt{2} - 5$	Simplificamos.

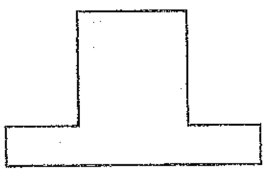
Taller de competencias

1. Cada figura se obtuvo de la descomposición, en cuatro partes, de un cuadrado. Completo el cuadrado para hallar la expresión que representa cada área y hago los trazos para determinar las cuatro partes.

a. $x^2 + 6x + \boxed{}$



b. $x^2 + 2x + \boxed{}$



c. $x^2 + 2x + \boxed{}$

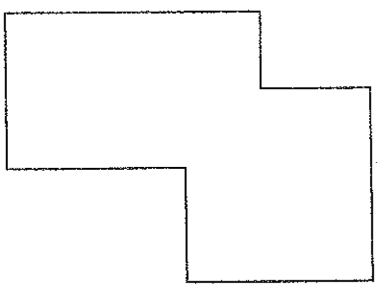
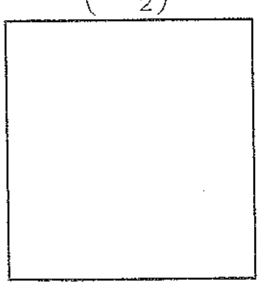


Fig. 4.7

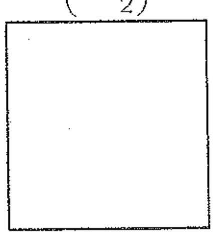
2. Divido cada cuadrado en cuatro partes tales que sus áreas satisfagan el binomio y la condición dados.

a. $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2$



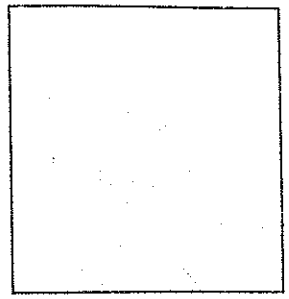
$x < \frac{3}{2}$

b. $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$



$x > \frac{1}{2}$

c. $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$



$x > \frac{1}{3}$

Fig. 4.8

3. En cada caso completo el cuadrado perfecto y factorizo.

a. $x^2 + 25x + \boxed{}$ = ____________

b. $x^2 - 3x + \boxed{}$ = ____________

c. $y^2 - 13x + \boxed{}$ = ____________

d. $z^2 - \frac{5}{4}z + \boxed{}$ = ____________

e. $x^2 + cx + \boxed{}$ = ____________

f. $y^2 - \frac{14}{5}y + \boxed{}$ = ____________

g. $z^2 - \frac{z}{3} + \boxed{}$ = ____________

h. $y^2 + \frac{\sqrt{3}}{3}y + \boxed{}$ = ____________

4. Observo el ejemplo y, según el caso, resuelvo la ecuación cuadrática completando el cuadrado.

Cuando la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ tiene $a \neq 1$ se divide toda la ecuación por a para obtener una de la forma $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ que se resuelve completando el cuadrado.

$$3x^2 + 12x - 5 = 0 \longrightarrow \frac{1}{3}(3x^2 + 12x - 5) = \frac{1}{3}0$$

$$x^2 + 4x - \frac{5}{3} = 0$$

$$x^2 + 4x + 4 = \frac{5}{3} + 4$$

$$(x+2)^2 = \frac{17}{3}$$

así $x = \pm\sqrt{\frac{17}{3}} - 2$

a. $2x^2 - x - 3 = 0$

b. $-3x^2 + 2 = 2x$

c. $(x+1)(x-3) + 2 = 0$

d. $y^2 + 7y - 1 = 0$

e. $5y^2 = y - 2$

f. $(x+2)^2 - 3x = 5$

g. $2(x-3)(x+2) = 1$

h. $b^2 = 4b + 25$

i. $ax^2 + bx = 1$

j. $4x^2 + x = 2$

k. $-y + 5 = -4y^2$

l. $4m^2 + 8m - 1 = 0$

m. $z^2 = -7z - 4$

n. $3x + 3 - x^2 = 0$

ñ. $\frac{x^2}{3} = -3x + 1$

Soluciono problemas

5. Resuelvo problemas de carácter numérico.

a. La suma de un número y su recíproco es $\frac{17}{4}$. ¿Cuál es el número?

b. El producto de un número y su consecutivo es 240. ¿Cuáles son los números?

c. Un número disminuido en su cuadrado es -110. ¿Cuántos y cuáles números cumplen la condición?

d. El triple del cuadrado de un número, disminuido en dos, es cinco veces el número. ¿Cuántos y cuáles números cumplen la condición?

e. Hallo tres números enteros consecutivos, si sé que el cociente entre su producto y el cuadrado de su semisuma es igual a $\frac{130}{21}$.

(*Sugerencia*: denomino a los números como $x - 1$, x, $x + 1$.)

Un número a es media proporcional entre b y c, si $\frac{a}{b} = \frac{c}{a}$, es decir, $a^2 = b \cdot c$.

f. En un triángulo isósceles, cuyos lados iguales tiene cada uno 24 cm, la altura es media proporcional entre la base y el lado. Calculo la base.

6. Redacto problemas de carácter numérico que se ajusten a cada ecuación y los resuelvo.

a. $x(x-1) = 156$

b. $(y+3)^2 = 49$

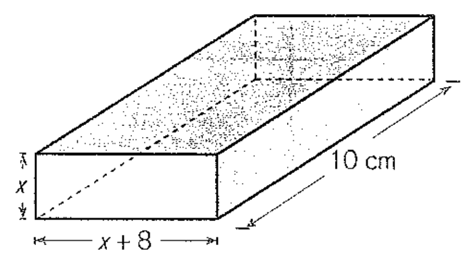
c. $\frac{1}{x} + 2x = \frac{33}{4}$

d. $x^2 - 4 = 3x$

e. $\frac{1}{2}z(z+1) = 10$

f. $5x^2 - 3x = 2$

7. ¿Cuáles son el alto y el ancho de la caja?



Volumen = 480 cm^3

Fig. 4.9

8. Las ciudades A, B y C se encuentran ubicadas como muestra la figura. ¿Cuántos km de distancia hay entre las ciudades A y B y entre B y C?

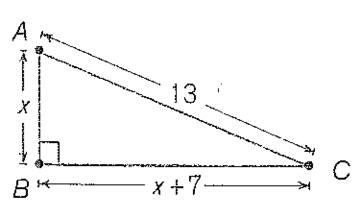
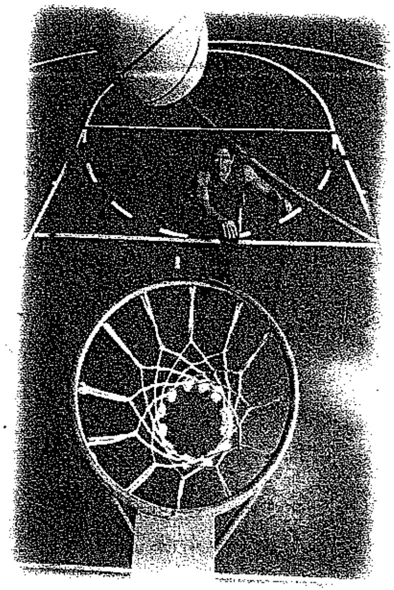


Fig. 4.10

Tema 3

Gráfica de la ecuación cuadrática: parábola



Si se lanza un balón, verticalmente hacia arriba, con una velocidad inicial de 20 m/s, la altura h, expresada en metros, después de t segundos, está dada por la expresión $h = 30t - 5t^2$.

- ¿Qué altura alcanza el balón segundo por segundo?
- ¿Cuál es la altura máxima y cuánto tarda en alcanzarla?
- ¿Cuánto tarda el balón en volver al suelo?

Construyamos la tabla de valores y la gráfica.

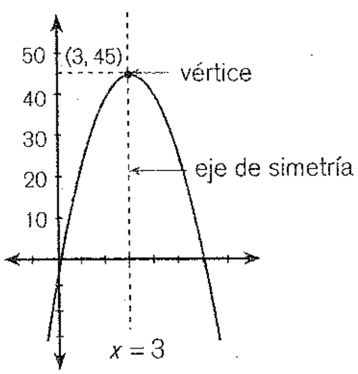


Fig. 4.11

$t(s)$	0	1	2	3	4	5	6
$h(m)$	0	25	40	45	40	25	0

Tabla 4.6

La gráfica muestra la altura que el balón alcanza cada segundo; indica que a los 3 s él logra su altura máxima y muestra también una simetría que determina que a los 6 s el balón vuelve al suelo.

La gráfica de la ecuación cuadrática $y = ax^2 + bx + c$ es una parábola.

1. Si $a > 0$, la parábola abre hacia arriba. Si $a < 0$, la parábola abre hacia abajo.
2. $x = -\dfrac{b}{2a}$ es la coordenada x del vértice.
3. El eje de simetría es la recta vertical $x = -\dfrac{b}{2a}$.
4. Los intersectos en x se hallan mediante la ecuación $0 = ax^2 + bx + c$.
5. El intersecto con el eje Y es $y = c$.

Taller de competencias

1. Tengo en cuenta cada gráfica y completo la tabla.

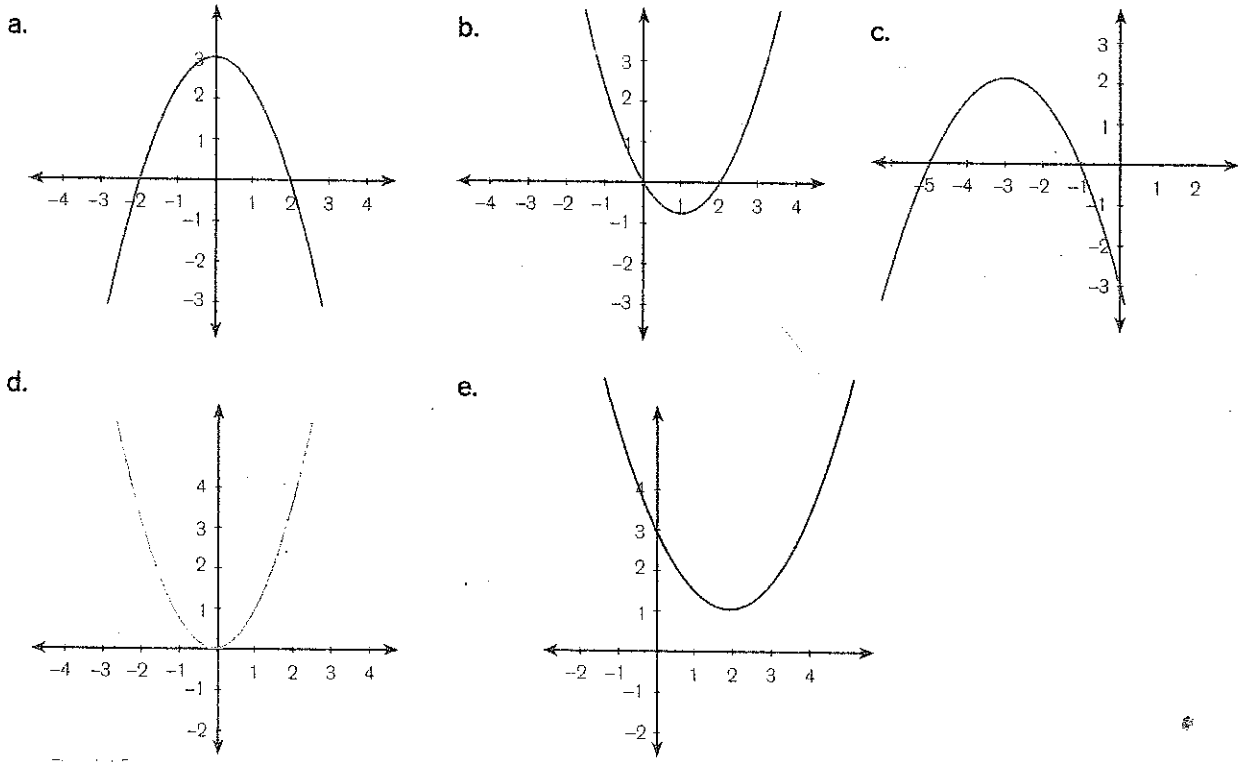


Fig. 4.12

Gráfica	Signo	Vértice de *a*	Eje de simetría	Int - *x*	Int - *y*
a.					
b.					
c.					
d.					
e.					

Tabla 4.7

2. Para cada ecuación:

- Hallo el valor de los coeficientes *a*, *b* y *c*.
- Determino si la gráfica de la ecuación abre hacia arriba o hacia abajo.
- Determino el vértice y la ecuación del eje de simetría.
- Hallo los intersectos en *x* y el intersecto en *y*.
- Hago una tabla con cuatro valores para completar la información.
- Trazo la gráfica.

a. $y = x^2 - 5x + 4$

b. $x^2 + x = y + \frac{3}{4}$

c. $1 + \frac{3}{2}x - x^2 = y$

d. $y = 17x - 6x^2 - 12$

e. $3 - 2x - x^2 = y$

f. $y = 2x^2 - 13x + 6$

g. $y = -\frac{3}{4}x^2$

h. $y = x^2 + 1$

i. $3x^2 - 1 = y$

j. $y = x^2 - 5x + 6$

3. Tomo los elementos dados en la tabla 4.8 y determino la ecuación y su gráfica.
Int - x: intersecto con el eje X. Int - y: intersecto con el eje Y.

Int - x	**Int - y**	**Coordenada x del vértice**	**Coordenada y del vértice**	**Punto adicional**
$-2, 4$	1	1		
$-\frac{3}{2}, \frac{11}{2}$	3	2		
$\frac{1}{4}, 2$				
		2	-1	$(1, -3)$
	1	3		$(1, -1)$

Tabla 4.8

Soluciono problemas

El área de una región formada por una parábola que abre hacia arriba o hacia abajo y un segmento horizontal que la corta llamado base es $A = \frac{2}{3}bh$, donde b es la longitud del segmento y h es la altura.

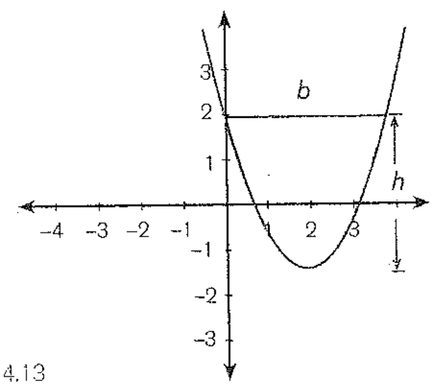
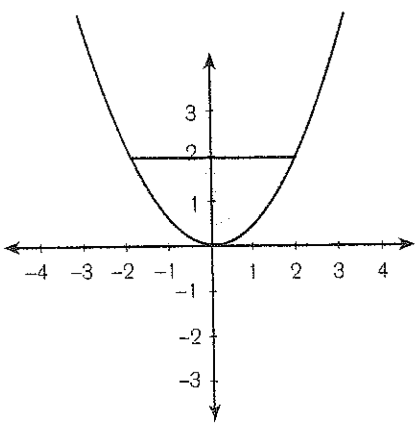


Fig. 4.13

Para la figura 4.14:



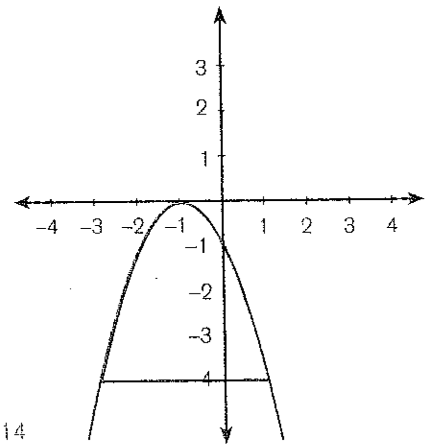


Fig. 4.14

a. Calculo el área de las regiones sombreadas en cada figura.

b. Determino el área de la región delimitada por la parábola de ecuación $y = x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{3}{2}$ y el segmento del eje X que la corta.

5. Trazo las gráficas de cada una de las relaciones dadas en Trabajo mis competencias del tema 1, ejercicio 4, colocando la variable de grado dos en el eje X.

6. En un proceso manufacturero la ganancia G, en millones de pesos, está dada por el número x de concesiones vendidas: $G = -8 + 8x - x^2$.

a. Grafico la relación entre ganancias y el número de concesiones.

b. ¿Cuál es el ingreso si se venden 0, 4, 5 o 6 concesiones?

c. Para tener el mayor ingreso, ¿cuántas concesiones se deben vender?

Desempeños: Identifica los elementos y la ecuación de una parábola.
Grafica ecuaciones cuadráticas.
Analiza gráficamente diversas situaciones.

Tema 4

Fórmula cuadrática

Generalicemos el método de completar el cuadrado para resolver una ecuación cuadrática. Para ello, hallemos las soluciones de la ecuación $0 = ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$.

$ax^2 + bx + c = 0$

1. $ax^2 + bx = -c$ — Despejamos c.
2. $\dfrac{ax^2}{a} + \dfrac{b}{a}x = -\dfrac{c}{a}$ — Dividimos entre a.
3. $x^2 + \dfrac{b}{a}x + \left(\dfrac{b}{2a}\right)^2 = -\dfrac{c}{a} + \left(\dfrac{b}{2a}\right)^2$ — Completamos el cuadrado.
4. $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = \dfrac{b^2}{4a^2} - \dfrac{c}{a}$ — Factorizamos el primer miembro.
5. $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = \dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ — Realizamos la sustracción.
6. $x + \dfrac{b}{2a} = \pm\sqrt{\dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$ — Obtenemos la raíz cuadrada.
7. $x + \dfrac{b}{2a} = \dfrac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ — Calculamos la raíz del cociente.
8. $x = -\dfrac{b}{2a} \pm \dfrac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ — Despejamos x.
9. $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ — Realizamos la adición.

Luego:

Una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$, tiene dos soluciones: $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ y $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Ejemplo

Resolvamos la ecuación $-3x^2 + x = -1$.

Solución

Para aplicar la fórmula cuadrática la ecuación debe estar en la forma normal $ax^2 + bx + c = 0$.

$-3x^2 + x = -1 \longrightarrow -3x^2 + x + 1 = 0$; $a = -3$, $b = 1$, $c = 1$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot(-3)\cdot 1}}{2(-3)} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 12}}{-6} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{-6}$$

Las soluciones son: $x_1 = \dfrac{\sqrt{13} - 1}{-6}$; $x_2 = \dfrac{\sqrt{13} + 1}{6}$.

Taller de competencias

1. Utilizo la fórmula cuadrática para hallar las soluciones de cada ecuación.

a. $2x^2 = 12x + 6$ **b.** $x^2 + 1 = (2x - 1)^2 + 2$

c. $3(x^2 - 2) = x + 4$ **d.** $\frac{1}{2}x^2 + 4x - 1 = 0$

e. $2 + x - x^2 = 0$ **f.** $x + \frac{1}{x} = \frac{65}{8}$

g. $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = 3$ **h.** $2 = \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x}$

i. $2y + \frac{2}{y} = -1$ **j.** $-5x - x^2 = 0$

2. En cada caso se da una de las soluciones de la ecuación; hallo el valor de k y encuentro la otra solución.

a. $x^2 + x - k = 0$; $x = 1$

b. $-2x^2 + kx + 1 = 0$; $x = -2$

c. $kx^2 - 2x = \sqrt{3}$; $x = \sqrt{3}$

d. $3x^2 + 2x = k$; $x = \frac{1}{2}$

e. $2x + i = kx^2$; $x = i$

3. Resuelvo cada ecuación para la variable indicada.

a. $h = -10t^2 + vt$; para t

b. $2x^2 + (2a - 1)x - a = 0$; para x

c. $A - \pi r^2 = 2\pi rh$; para r

d. $10 - \alpha\, 10 = 4\alpha^2$; para α

e. $3ix - 2x^2 + 1 = 0$; para x

4. Para resolver cada ecuación utilizo la fórmula cuadrática.

a. $\sqrt{x-1} + \sqrt{2x+1} = \sqrt{4x-1}$

b. $\sqrt{1-x} = \sqrt{3x-2} - 1$

c. $\frac{1}{2x-1} + \frac{2}{1-3x} = 1$

d. $\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^2 + \left(\frac{x+1}{x-2}\right) - 2 = 0$

Soluciono problemas

5. ¿Cuáles deben ser las dimensiones del cuadrado y del círculo para que la suma de sus áreas sea 16 cm²?

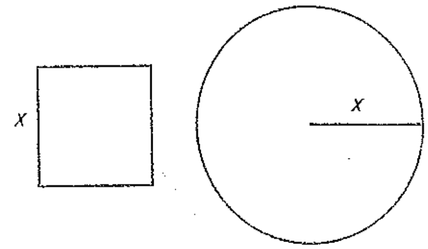


Fig. 4.15

6. ¿Cuáles deben ser las dimensiones del triángulo y del rectángulo para que las áreas sean iguales?

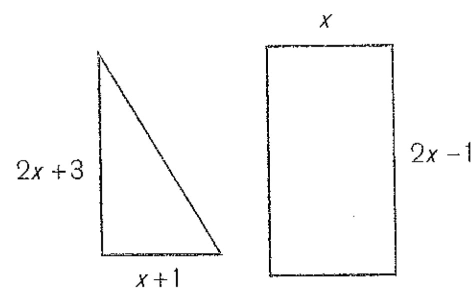


Fig. 4.16

7. La distancia entre la casa y la oficina de Carmenza es 20 km. Si un día tardó 20 minutos en ir y volver y el regreso lo hizo 10 km/h más rápido que la ida, ¿cuál fue la velocidad en cada recorrido?

8. Escribo un problema que se ajuste a la información dada en la tabla y lo resuelvo.

	Velocidad (km/h)	Distancia (km)	Tiempo (h)
Carro	v	25	
Moto	$v - 10$	15	
Total			30 min

Tabla 4.9

Desempeños: conoce y aplica la fórmula cuadrática.
Deduce y utiliza la fórmula cuadrática para resolver ecuaciones cuadráticas.
Da solución a situaciones utilizando la fórmula cuadrática.

Tema 5

Discriminante

En la fórmula cuadrática $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, la expresión $b^2 - 4c$ (dentro del radical) se denomina discriminante de $ax^2 + bx + c$.

El discriminante indica cómo son y cuántas son las soluciones de la ecuación.

Para la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ con $a, b, c \in R$ y $a \neq 0$.

- Si $b^2 - 4ac > 0$, la ecuación tiene **dos soluciones reales diferentes.**
- Si $b^2 - 4ac = 0$, la ecuación tiene **dos soluciones reales iguales.**
- Si $b^2 - 4ac < 0$, la ecuación tiene **dos soluciones complejas.**

Ejemplo

Analicemos la naturaleza de las soluciones de cada ecuación.

Solución

Ecuación	a	b	c	$b^2 - 4ac$	Naturaleza de las soluciones
$x^2 - 3x + 2 = 0$	1	−3	2	1	Dos soluciones reales diferentes, porque $1 > 0$.
$x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$	1	−1	$\frac{1}{4}$	0	Dos soluciones reales iguales.
$2x^2 + x + 2 = 0$	2	1	2	−15	Dos soluciones complejas, porque $-15 < 0$.

Tabla 4.10

En toda ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$, $-\frac{b}{a}$ y $\frac{c}{a}$ son respectivamente la suma y el producto de sus soluciones.

Ejemplo

En la ecuación $x^2 + 49 = 0$, $x_1 = 7i$ y $x_2 = 7i$, encontremos la suma y el producto de sus soluciones.

Solución

$-\frac{b}{a} = -\frac{0}{1} = 7i - 7i = 0$ y $\frac{c}{a} = \frac{49}{1} = (7i)(-7i) = -49i^2 = 49$

Taller de competencias

1. La ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, se puede escribir de la forma $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ que es equivalente a $x^2 - \left(-\frac{b}{a}\right)x + \frac{c}{a} = 0$, lo cual indica que: x^2 − (suma de las soluciones) x + (producto de las soluciones) = 0.

Utilizo esta información para encontrar la ecuación cuadrática cuyas soluciones son:

a. 3 y -2

b. $-\frac{3}{4}$ y 1

c. $3 + 2i$ y $3 - 2i$

d. $2i$ y $-2i$

e. $\sqrt{3} + 1$ y $\sqrt{3} - 1$

f. 4 y $-\frac{1}{2}$

2. Completo la tabla 4.11.

Ecuación	a	b	c	$b^2 - 4ac$	Naturaleza de las soluciones	Soluciones		Soluciones	
						x_1	x_2	Suma	Producto
$x^2 - 169 = 0$									
$x^2 = 3x$									
$\frac{1}{2}x^2 + x - 1 = 0$									
$3x^2 + 9 = 0$									
$3x^2 - 9x - 8 = 0$									
$x^2 - ix + 2 = 0$									
$x^2 - 16x + 64 = 0$									

Tabla 4.11

3. Demuestro que en la ecuación cuadrática de soluciones $x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$ y $x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$, donde $D = b^2 - 4ac$, la suma de sus soluciones es $-\frac{b}{a}$ y su producto es $\frac{c}{a}$.

4. Encuentro en cada caso una ecuación cuadrática tal que la suma y el producto de sus soluciones sean los dados. (*Sugerencia:* asigno un valor cualquiera a a, diferente de cero.)

a. $x_1 + x_2 = 3$ y $x_1 \cdot x_2 = -1$

b. $x_1 + x_2 = \sqrt{2}$ y $x_1 \cdot x_2 = 2$

c. $x_1 + x_2 = -2$ y $x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{2}$

d. $x_1 + x_2 = 2i$ y $x_1 \cdot x_2 = i$

e. $x_1 + x_2 = \sqrt{2} - 1$ y $x_1 \cdot x_2 = \sqrt{3}$

f. $x_1 + x_2 = \frac{3}{4}$ y $x_1 \cdot x_2 = 1$

Soluciono problemas

5. Escribo ecuaciones cuadráticas tales que sus soluciones x_1 y x_2 cumplan:

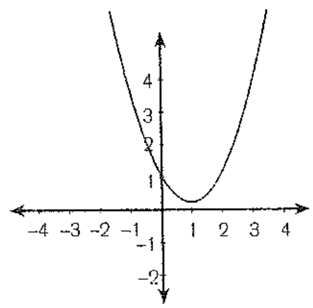
a. $x_1 + x_2 = x_1 \cdot x_2 = 3$

b. $x_1 + x_2 = x_1 \cdot x_2 = -1$

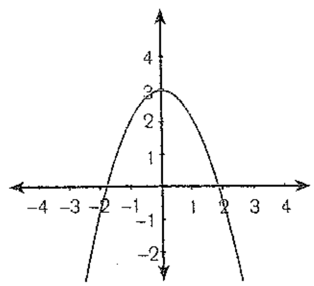
c. Calculo el discriminante de cada ecuación y hallo x_1 y x_2.

6. De acuerdo con la gráfica, determino si el discriminante de la ecuación que representa es mayor, menor o igual a cero.

a.



b.



c.

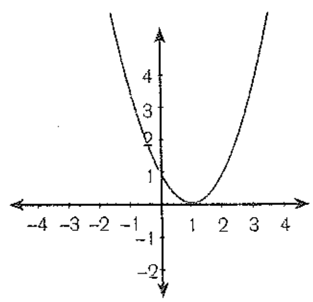


Fig. 4.17

7. Hallo el valor de k, tal que la ecuación tenga una solución real.

$$kx^2 + x - (k - 1) = 0$$

Desempeños: Identifica el discriminante y su utilidad.
Determina la naturaleza de las soluciones de una ecuación cuadrática.
Analiza y resuelve, con el discriminante, situaciones matemáticas.

Tema 6

La gráfica de una inecuación cuadrática

La curva $y = x^2 - 2x - 3$ divide el plano en tres regiones: los puntos dentro de la curva, los puntos de la curva y los puntos fuera de esta.

¿Cuáles de estos puntos satisfacen la inecuación $y > x^2 - 2x - 3$?

- Graficamos la ecuación $y = x^2 - 2x - 3$ que representa una parábola que abre hacia arriba, con vértice $(1, -4)$, int - y: -3 e int - x: -1 y 3. La trazamos con líneas interrumpidas porque esos puntos no satisfacen la inecuación.

- Tomamos un punto dentro de la curva y otro fuera de ella y verificamos si cumplen la inecuación o no:

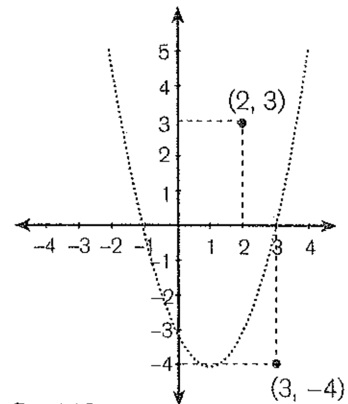


Fig. 4.18

Punto interior $\longrightarrow (2, 3) \longrightarrow 3 \overset{?}{>} 2^2 - 2 \cdot 2 - 3 \longrightarrow 3 > -3$

Punto exterior $\longrightarrow (3, -4) \longrightarrow -4 \overset{?}{>} 3^2 - 2 \cdot 3 - 3 \longrightarrow -4 \not> 0$

- Solamente el punto $(2, 3)$ es solución. Por tanto, los puntos que satisfacen $y > x^2 - 2x - 3$ son los de la región que contiene al punto $(2, 3)$.

Para hacer la gráfica de una inecuación cuadrática:

1. Se traza la gráfica de la parábola $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.
2. Se toman dos puntos, uno fuera y otro dentro de la parábola, y se verifican en la inecuación.
3. Sólo uno de estos puntos será solución. Se sombrea la región que contiene a ese punto.

Taller de competencias

1 Dibujo la gráfica de la región determinada por:

a. $y > 2x - x^2$

b. $y \leq x^2 - 4$

c. $y \geq -x^2 + 4x - 3$

d. $y < 3x^2 - 2x + 5$

e. $y \leq 6x^2 - 5x - 6$

f. $-x^2 - x + 6 < y$

g. $y > -x^2 + 4x + 5$

h. $y \leq 6x^2 + x - 12$

i. $y \geq x^2 + 9$

j. $y < x^2 - 16$

2. Sombreo la región que es solución de cada inecuación cuadrática.

a. $y \geq x^2 - 1$ **b.** $y < x^2 - x - 2$ **c.** $y \leq 3 - 2x - x^2$

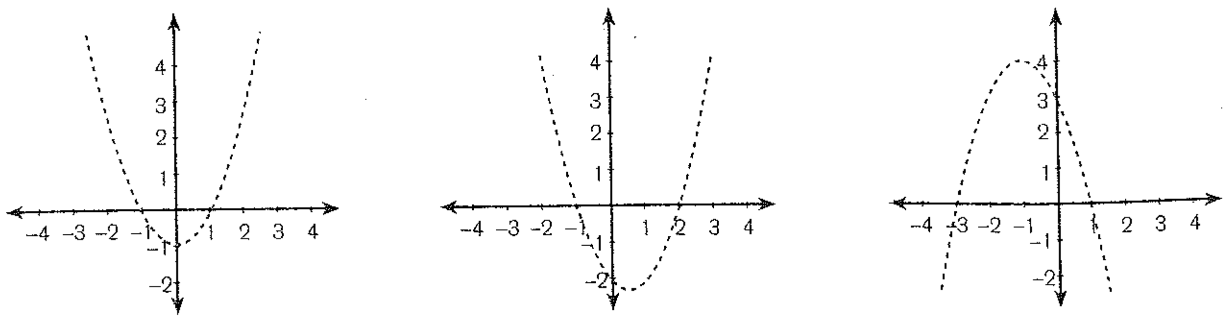


Fig. 4.19

3. La figura representa la región determinada por las gráficas de $y > 3x - x^2$, $y < x^2 - 4x + 3$.

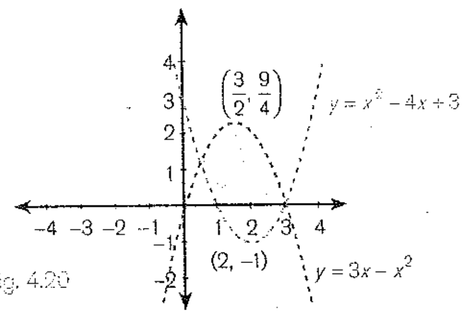


Fig. 4.20

Represento la región determinada por los puntos que satisfacen simultáneamente las inecuaciones dadas:

a. $\begin{cases} y \leq -2x^2 \\ y \geq x^2 - 1 \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} y \geq x + 1 \\ y \leq 4 - x^2 \end{cases}$

c. $\begin{cases} y \geq x^2 - 9 \\ y < x^2 + x - 6 \end{cases}$ **d.** $\begin{cases} y \geq x^2 \\ y < -\dfrac{3}{2}x + 3 \end{cases}$

4. Observo la figura.

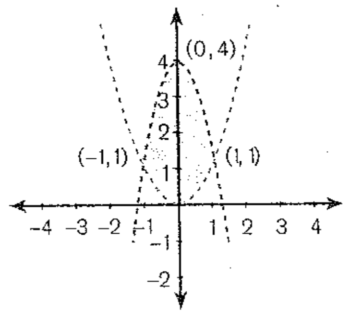


Fig. 4.21

a. ¿Cuáles ecuaciones representan las parábolas de la gráfica?

b. ¿Cuáles son las inecuaciones que satisfacen los puntos de la región sombreada?

5. A partir de la figura 4.22, determino:

a. La ecuación de la recta.

b. La ecuación de la parábola.

c. Las inecuaciones que deben cumplirse simultáneamente para indicar la región sombreada.

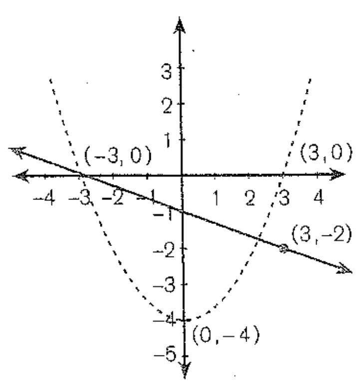


Fig. 4.22

Desempeños: representa en el plano regiones limitadas por una parábola.
Grafica inecuaciones cuadráticas.
Resuelve problemas con inecuaciones cuadráticas y rectas.

Tema 7

Problemas con ecuaciones cuadráticas

Así como las ecuaciones lineales modelan situaciones de la vida real, existen otras situaciones que podemos representarlas y darles solución mediante las ecuaciones o desigualdades cuadráticas.

Para modelar situaciones lineales se siguen los mismos pasos que utilizamos al modelar situaciones cuadráticas.

Ejemplo

El lote de la familia Camelo tiene 16 m × 10 m y se desea construir una casa de base rectangular en el centro de él. ¿Qué dimensiones debe tener el rectángulo del piso de la casa si tiene un área de 91 m^2?

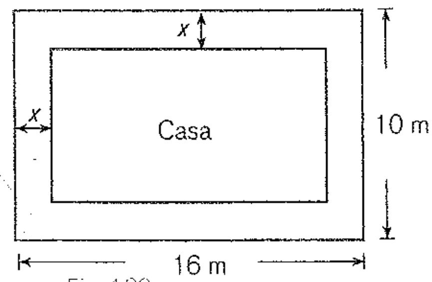


Fig. 4.23

Solución

- Para el piso de la casa:

  Largo: $16 - 2x$ Ancho: $10 - 2x$

  Área: $(16 - 2x)(10 - 2x)$

- Resolvemos la ecuación $(16 - 2x)(10 - 2x) = 91$. Es decir; $4x^2 - 52x + 69 = 0$, de donde:

$$x = \frac{52 \pm \sqrt{1600}}{8} \longrightarrow \begin{cases} x_1 = 11{,}5 \text{ m} \\ x_2 = 1{,}5 \text{ m} \end{cases}$$

- La solución $x_1 = 11{,}5$ no tiene sentido. ¿Por qué?
- $x_2 = 1{,}5$ m nos permite calcular el largo que es $16 - 2(1{,}5) = 13$ m y el ancho es $10 - 2(1{,}5) = 7$ m.

Taller de competencias

1. Del cuadrado de la figura 4.24 deseo obtener un octágono de 92 cm^2 de área, cortando triángulos isósceles. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de cada triángulo? Demuestro que el octágono no es regular.

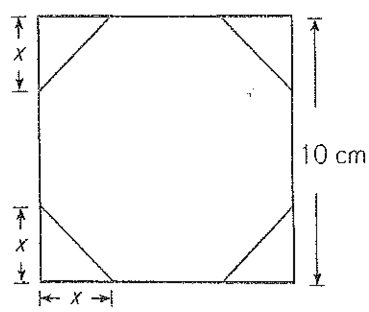


Fig. 4.24

2. Hallo las dimensiones del patio rectangular de un colegio, si su perímetro es 120 m y su área 896 m^2.

Soluciono problemas

3. ¿Cuáles son los números que sumados con una de sus raíces cuadradas da como resultado 6?

4. El producto de un número par con su consecutivo es 624; ¿cuáles son los números?

5. La suma de dos números es 10 y la de sus cuadrados es 58. ¿Cuáles son los números?

6. La diferencia de un número y su recíproco es $\frac{24}{5}$. ¿Cuál es el número?

7. En cualquier cilindro:

$$\text{Área lateral} = 2\pi r \times h$$
$$\text{Área lateral} = 2\pi rh + 2\pi r^2$$
$$\text{Volumen} = \pi r^2 \times h$$

Para el cilindro de la figura 4.25 determino:

a. Las dimensiones, si su área total es 24π cm^2.

b. El área lateral y el volumen.

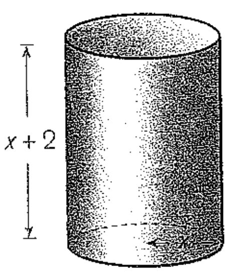


Fig. 4.25

8. Desde la parte superior de un poste se fija un cable de 12 m de longitud a una estaca. La separación entre la base del poste y la estaca es igual a la altura de éste disminuida en 3 m. ¿Cuál es la altura del poste?

9. Un avión sale hacia los Llanos con un viento a favor de 15 mi/h; una falla mecánica lo obliga a regresar cuando había recorrido 90 mi, esta vez con un viento en contra de 15 mi/h. Si el avión aterrizó después de 70 minutos, ¿cuál fue la velocidad promedio del avión?

10. Un proyectil se lanza con una velocidad inicial de 48 pies/s y la altura que alcanza después de t s está dada por $h = 48t - 16t^2$.

a. Cuando el proyectil alcanza 32 pies de altura, ¿cuántos segundos han trascurrido?

b. ¿Después de cuánto tiempo el proyectil toca el suelo?

c. ¿Cuándo alcanza la altura máxima el proyectil?

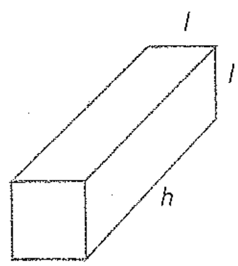
d. ¿Cuál es la altura máxima que alcanza?

e. Trazo la gráfica del movimiento del proyectil.

11. La longitud (l) de un péndulo depende del cuadrado del tiempo y de la aceleración debida a la gravedad g ($g = 9{,}8$ m/s^2).

$l = \frac{g}{2\pi}t^2$. ¿Cuánto tiempo tarda un péndulo de 30 cm en completar una oscilación?

12. El área total de un prisma de base cuadrada está dada por $A = 2l^2 + 4hl$.



$A = 2l^2 + 4hl$

Fig. 4.26

a. Expreso l en términos de h y A.

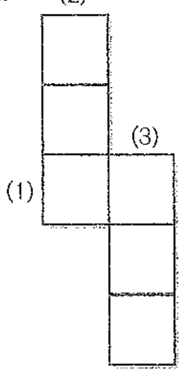
b. Si $h = 10$ cm y el área es 250 cm^2, ¿cuál es la medida de l, en cm?

Desempeño: analiza, modela y resuelve situaciones matemáticas y de la vida real.

Matemática recreativa

1. Resuelvo los crucigramas numéricos.

a.



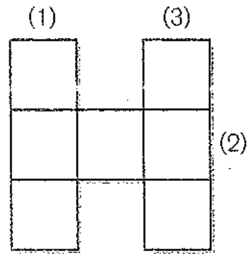
(1) Cuadrado de dos cifras.

(2) Ocho veces el cuadrado de (1).

(3) Cuadrado de la raíz de (1) multiplicado por 2.

Fig. 4.27

b.



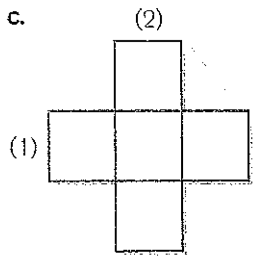
(1) Cuadrado de número primo.

(2) Cuádruplo de (1).

(3) Invertido de (1).

Fig. 4.28

c.



(1) Su raíz cúbica es un número primo.

(2) Su raíz cuadrada es tres veces el número primo.

Fig. 4.29

2. Escribo los enunciados que dan como respuesta las palabras escritas en el crucigrama.

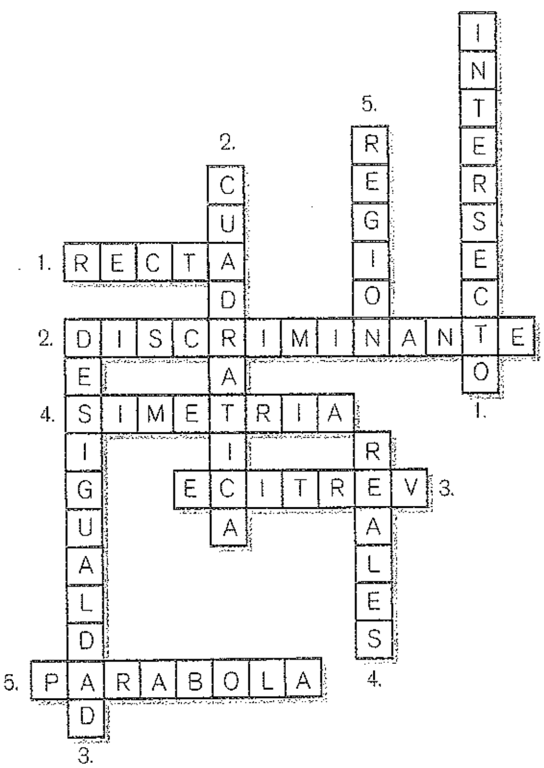


Fig. 4.30

Horizontales

1.

2.

3.

4.

5.

Verticales

1.

2.

3.

4.

5.

Evalúo mis competencias

Con los siguientes ejercicios, afianzo los desempeños que he superado y refuerzo aquellos que están por superar.

1. Clasifico cada proposición como cierta:

• Siempre • a veces o • nunca

a. En la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, a debe ser diferente de cero. ______

b. Para resolver por factorización una ecuación cuadrática se desiguala a cero. ______

c. En los reales, si el producto de dos de ellos es cero es porque ambos son ceros. ______

d. Una ecuación cuadrática se resuelve por factorización. ______

e. Las situaciones que involucran velocidad, distancia y tiempo se modelan con una ecuación cuadrática. ______

f. La fórmula cuadrática da la solución de toda ecuación cuadrática. ______

g. La gráfica de una desigualdad cuadrática incluye la curva. ______

h. Una recta vertical que corta la parábola en cualquier punto es su eje de simetría. ______

i. La coordenada en x, del vértice de una parábola, es $-\frac{b}{2a}$. ______

j. Una de las soluciones de una ecuación cuadrática es el intersecto en y de la curva. ______

2. En cada ecuación cuadrática:

- Igualo a cero.
- Determino si el discriminante D es mayor, menor o igual a cero.
- Hallo sus soluciones.
- Encuentro el intersecto en y, y el vértice.
- Trazo la gráfica.

a. $x^2 = 49$ **b.** $\frac{7}{2}x = x^2 - \frac{3}{2}$

c. $x^2 = -3$ **d.** $x^2 + 7{,}5 = 5{,}5x$

3. Resuelvo y verifico cada ecuación.

a. $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2x} = \frac{7}{12}$

b. $\sqrt{8+x} - \frac{2}{\sqrt{8+x}} = \frac{7}{3}$

c. $\sqrt{x+19} - 8 = -\sqrt{15-x}$

4. Hallo el valor de k para que cada ecuación tenga una solución real.

a. $x^2 - (k+3)x + k^2 = 0$

b. $x^2 + \left(\frac{3}{2} + k\right)x - \frac{1}{2}k = 0$

5. Escribo ecuaciones cuyas soluciones sean:

a. $x_1 = 4$; $x_2 = -\frac{3}{2}$

b. $x_1 = \sqrt{2}$; $x_2 = -3$

c. $x_1 = i - 1$; $x_2 = i + 1$

6. Completo la expresión y hago la representación gráfica de $x^2 + 8x + \boxed{}$.

7. Represento la región determinada por los puntos que satisfacen simultáneamente:

a. $\begin{cases} 2x + y = -1 \\ y \geq x^2 + \frac{1}{2}x - 3 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 4y + 10x = 25 \\ y < \frac{25}{4} - x^2 \end{cases}$

8. En cada caso hallo los valores de z para que la distancia entre los puntos sea la dada.

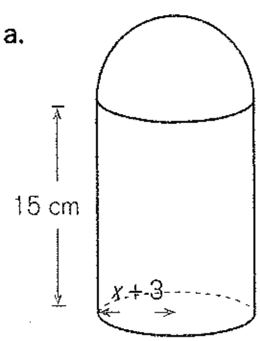
a. $(-1, 4)$ y $(z, 5)$; $d = \sqrt{10}$ cm

b. $(10, -z)$ y $(-2, -1)$; $d = 13$ cm

9. José y Alberto recorren en bicicleta 15 km hasta un parque. ¿Cuál fue la velocidad de José si fue 5 km/h menor que la de Alberto y se demoró 15 minutos más que él en llegar al parque?

10. Redacto y resuelvo una situación que se modele con una ecuación cuadrática, de acuerdo con los datos de cada figura.

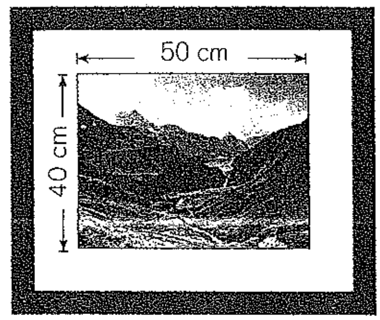
a.



Volumen esfera = $\frac{4}{3}\pi r^3$

Volumen cilindro = $540\,\pi$ cm^3

b.



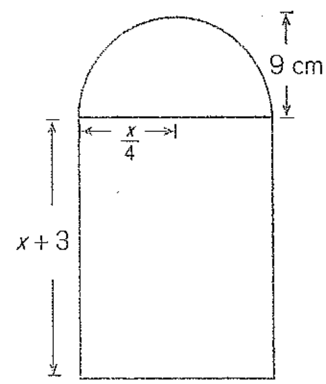
Área del marco = 1000 cm^3

x = ancho del marco

11. Una lámina para repuesto de carro tiene la forma de la figura 4.32.

a. Si el área del rectángulo es 90 cm^2, ¿cuáles son sus dimensiones?

b. ¿Cuál es el área de la lámina?



Autoevaluación

	Bajo	Básico	Alto	Superior
Identifico la forma general de una ecuación o una inecuación cuadrática.				
Resuelvo ecuaciones cuadráticas por raíz cuadrada, factorización, completando el cuadrado o fórmula cuadrática.				
Reconozco la curva llamada parábola como la gráfica que representa una ecuación cuadrática; además, identifico sus elementos.				
Utilizo el discriminante para determinar la naturaleza de las soluciones de una ecuación cuadrática.				
Grafico regiones en el plano que representan inecuaciones cuadráticas.				
Modelo situaciones con ecuaciones o inecuaciones cuadráticas y las resuelvo.				

Prueba Saber

Encuentra la respuesta correcta entre las opciones A, B, C y D, y márcala en la hoja de respuestas, rellenando completamente el círculo correspondientes.

Alrededor de una región están localizados cuatro pueblos. La carretera que une a Pueblo Hermoso (*B*), Pueblo Rico (*A*) y Pueblo Grande (*C*), tiene forma de parábola y va por la parte inferior de la montaña. Se quiere construir una nueva carretera entre Pueblo Hermoso y Pueblo Grande, que pase por Pueblo Alto (*D*), en la parte norte; esta carretera también tiene forma de parábola. El siguiente es el mapa de la región; las unidades están en kilómetros.

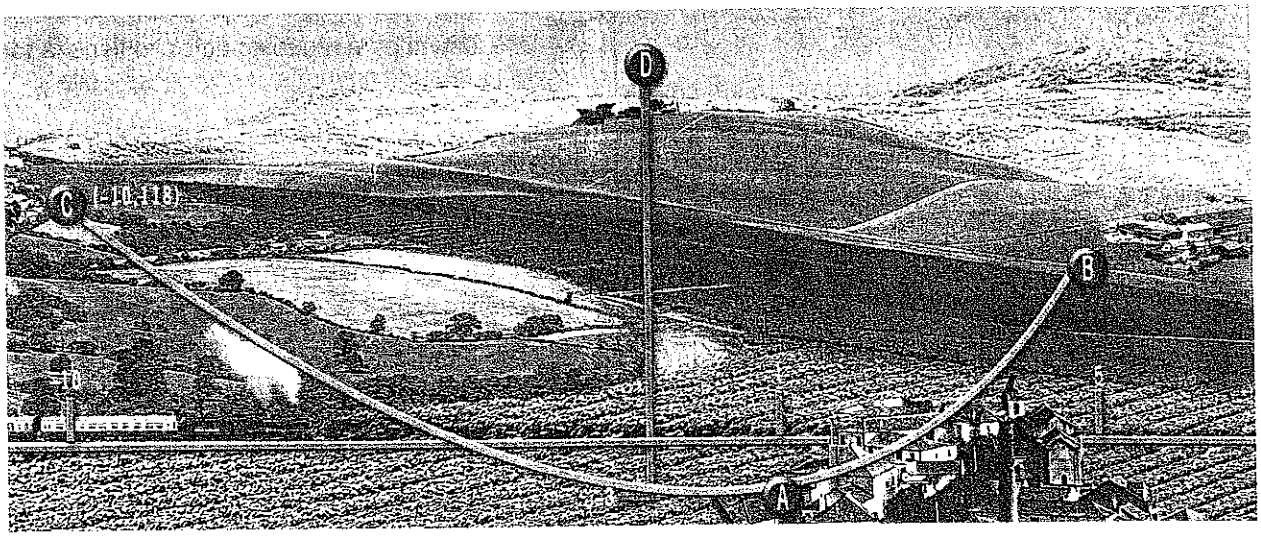


Fig. 4.33

1. Si *A* está en el vértice de la parábola, la ecuación de la carretera es:

   A. $x^2 - 3 = y$

   B. $(x-1)^2 - 3 = y$

   C. $(x+1)^2 - 3 = y$

   D. $-(x-1)^2 - 3 = y$

2. Las coordenadas de *B* son:

   A. (5, 19) C. (5, 13)

   B. (5, 22) D. (5, 33)

3. La distancia en línea recta entre *A* y *B* es:

   A. $\sqrt{272}$ C. $\sqrt{20}$

   B. $\sqrt{194}$ D. 100

4. Si se pudiese construir una carretera en línea recta entre B y C, ¿cuál sería la ecuación que la describe?

A. $\frac{-21}{3}(x-5)+13=y$

B. $\frac{21}{3}(x-13)+5=y$

C. $\frac{-21}{3}(x+10)+13=y$

D. $\frac{-3}{21}(x-5)+13=y$

5. Si las coordenadas de D son (0, 300), ¿cuál de las siguientes ecuaciones es la mejor opción para la carretera que pasa por D y que unirá a B y C?

A. $-5x^2-32x+300=y$

B. $-5x^2-32x-300=y$

C. $5x^2+32x-300=y$

D. $-5x^2+32x+300=y$

6. La ruta del tren corre a lo largo del eje X y en las intersecciones con la carretera que pasa por A hay estaciones del tren. ¿En dónde se encuentran las estaciones?

A. $(-2,0)$, $(2,0)$

B. $(1-\sqrt{3},0)$, $(1+\sqrt{3},0)$

C. $(-\sqrt{3},0)$, $(\sqrt{3},0)$

D. $(5-\sqrt{3},0)$, $(5+\sqrt{3},0)$

7. Pueblo Alto se encuentra en la región:

A. $y<(x-1)^2-3$

B. $y<(x-1)^2+3$

C. $y>(x+1)^2-3$

D. $y>(x-1)^2-3$

8. La región delimitada por la curva que pasa por los cuatro pueblos, esta dada por las expresiones:

A. $y\le(x-1)^2-3;\ \ y\ge-5x^2-32x-300$

B. $y\le(x-1)^2-3;\ \ y\ge-5x^2-32x+300$

C. $y\ge(x-1)^2-3;\ \ y\le-5x^2-32x+300$

D. $y\ge(x-1)^2-3;\ \ y\ge-5x^2-32x+300$

Formato de respuestas

1.	A	B	C	D	5.	A	B	C	D
2.	A	B	C	D	6.	A	B	C	D
3.	A	B	C	D	7.	A	B	C	D
4.	A	B	C	D	8.	A	B	C	D

Unidad 5

Funciones

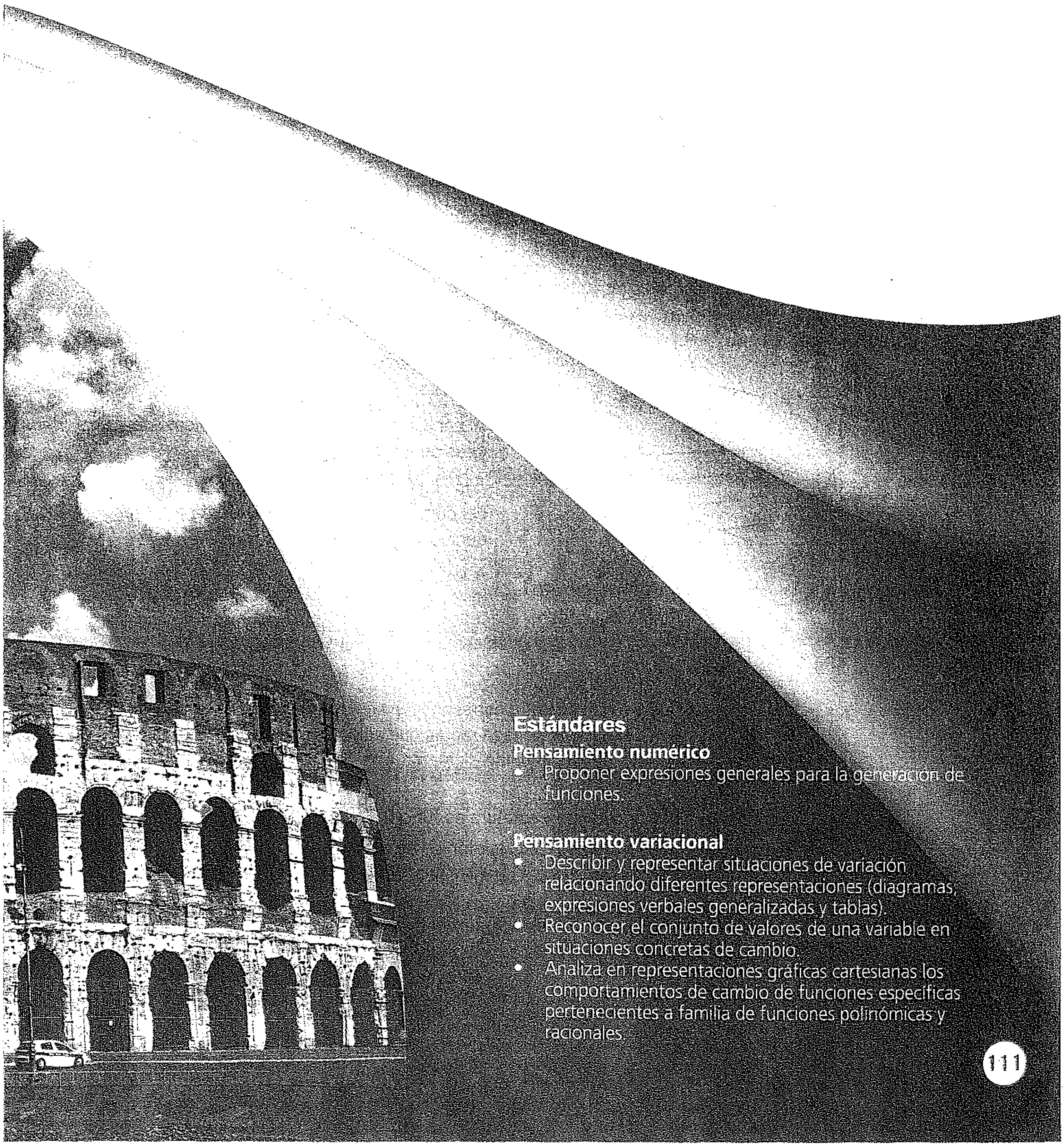
Procesos: El desarrollo de esta unidad me hará competente para:

Resolución de problemas
Plantear modelos funcionales para situaciones que impliquen relaciones entre dos variables.

Razonamiento lógico
Analizar situaciones empleando funciones.

Comunicación
Expresar información verbal mediante funciones.

Conexiones
Interpretar información de diversas áreas mediante modelos funcionales.



Estándares

Pensamiento numérico

- Proponer expresiones generales para la generación de funciones.

Pensamiento variacional

- Describir y representar situaciones de variación relacionando diferentes representaciones (diagramas, expresiones verbales generalizadas y tablas).
- Reconocer el conjunto de valores de una variable en situaciones concretas de cambio.
- Analiza en representaciones gráficas cartesianas los comportamientos de cambio de funciones específicas pertenecientes a familia de funciones polinómicas y racionales.

Tema 1

Definición de función y notación

En un grupo de 8 alumnos, la profesora recogió cierta información y la organizó en la tabla 5.1.

Alumno	Estatura	No. telefónico
José	175 cm	3245216 - 7231412
Gabriel	170 cm	
Moisés	180 cm	3458091
Rocío	165 cm	2472916
Juanita	155 cm	2142613 - 3120001
Jazmín	160 cm	
Laura	170 cm	6743601
Marcela	167 cm	5450009 - 3162312

Tabla 5.1

La tabla nos muestra que entre los conjuntos alumno y estatura está definida una relación que cumple:

- Cada alumno tiene asignada una estatura y esta es única.

Por el contrario, entre los conjuntos alumno y número telefónico observamos que:

- No todo alumno tiene asignado un número telefónico y, además, hay alumnos que tienen más de uno.

Correspondencias como las anteriores también las podemos realizar entre conjuntos numéricos, como por ejemplo, a cada $x \in$ R le hacemos corresponder $x^2 + 1$ en R; gráficamente tenemos:

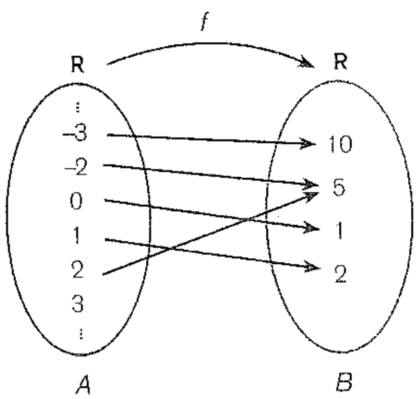


Fig. 5.1

- Al conjunto de valores posibles de A se le llama dominio.
- Al conjunto de valores correspondientes a los valores del dominio se le llama rango.
- A la correspondencia que asigna a cada elemento del dominio su respectivo elemento en el rango la denotamos con f.
- A los elementos y del rango se les llama valores de x y se denotan $f(x)$, que se lee "f de x", y son el conjunto de imágenes de f.

Una función f es una regla o correspondencia de un conjunto A llamado dominio en un conjunto B llamado rango, que asigna a cada elemento x de A un único elemento y de B.

- ¿La correspondencia alumno - estatura es función?
- ¿La correspondencia alumno - No. telefónico es función?
- ¿La correspondencia $f(x) = x^2 + 1$ es función?

Una función se puede representar en un diagrama sagital, con una expresión algebraica, en un conjunto de parejas ordenadas o en una gráfica en el plano cartesiano.

Ejemplo

Determinemos cuáles de las correspondencias en las figuras 5.2 y 5.3 son funciones.

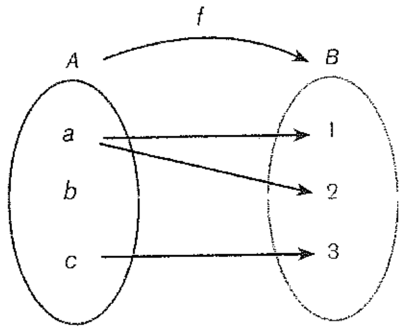


Fig. 5.2

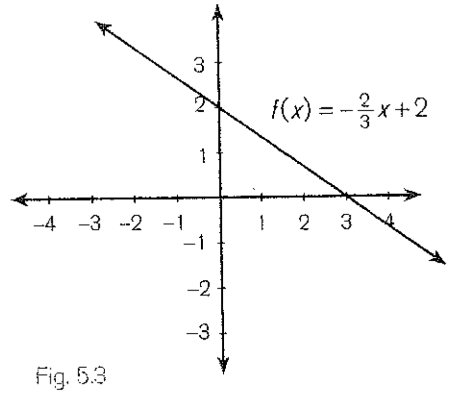


Fig. 5.3

Solución

El diagrama sagital no representa una función porque b no tiene imagen y a tiene dos imágenes. La gráfica en el plano cartesiano representa una función porque satisface la definición.

Una función puede ser definida mediante una regla que establezca la relación entre los elementos del conjunto A con los elementos del conjunto B.

Ejemplo

De R en R se define la función f que relaciona cada $x \in$ R con el opuesto de su cuadrado aumentado en uno. Escribamos esta relación matemáticamente.

Solución

$y = 1 - x^2$ o también $f(x) = 1 - x^2$ (se lee f de x es igual a $1 - x^2$).

Si $x = 1$, entonces $f(1) = 1 - (1)^2 = 0$.

Para $f(0)$, $f(-1)$, $f(-2)$, $f(2)$, los valores correspondientes los registramos en la tabla.

x	0	−1	−2	2
y	1	0	−3	−3

Tabla 5.2

La función f también puede ser escrita como un conjunto de parejas ordenadas así:

$$f = \{(0, 1), (-1, 0), (-2, -3), (2, -3), \ldots\}$$

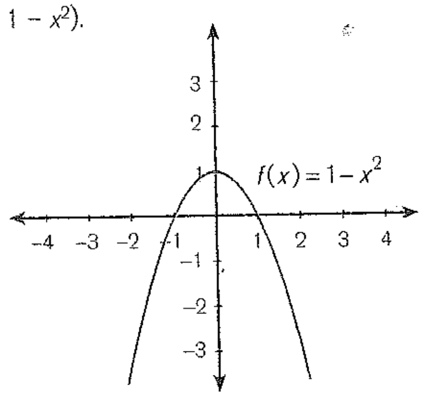


Fig. 5.4

y su representación, en el plano cartesiano, da como resultado la figura 5.4.

Taller de competencias

1 Para cada función:

- Hallo $f(-3)$, $f(-2)$, $f\left(-\frac{3}{2}\right)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(1)$, $f(2)$.
- Registro la información en una tabla de valores.
- Escribo a f como un conjunto de parejas ordenadas.
- Represento a f en el plano cartesiano y determino su gráfica.

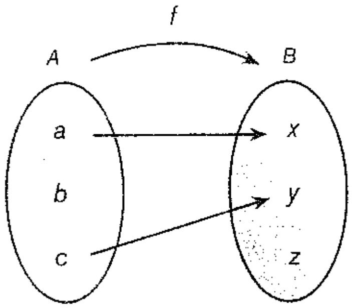
a. $f(x) = 2x - 1$ **b.** $f(x) = 4$

c. $f(x) = x^2 - 2$ **d.** $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$

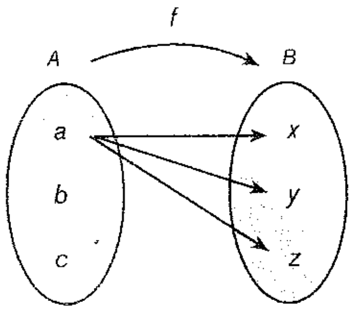
e. $f(x) = x^2 - x - 2$ **f.** $f(x) = -5$

2. Determino si los siguientes diagramas sagitales representan una función de $A = \{a, b, c\}$ en $B = \{x, y, z\}$ o no la representan. Justifico.

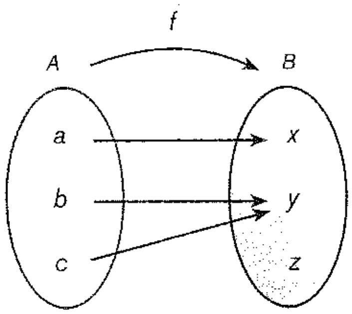
a.



b.



c.



d.

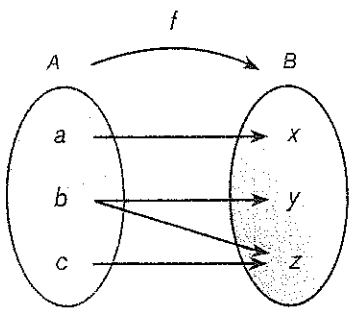
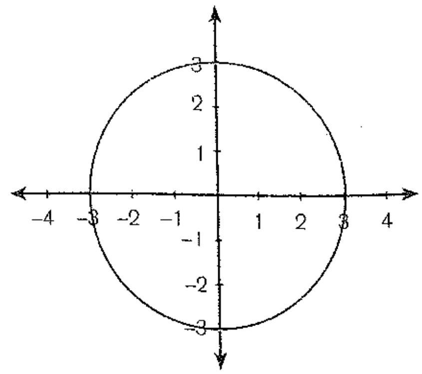


Fig. 5.5

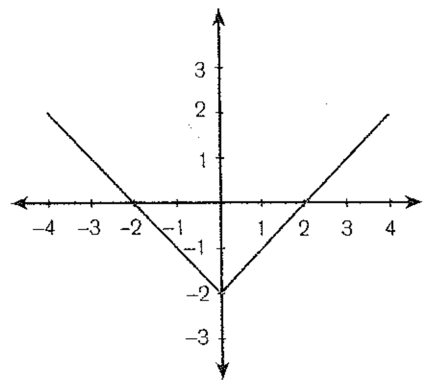
3. Una gráfica, en el plano cartesiano, corresponde a una función si y sólo si cualquier recta paralela al eje Y corta la gráfica máximo en un punto.

Determino, mediante rectas paralelas al eje Y, si la gráfica representa una función o no.

a.



b.



c.

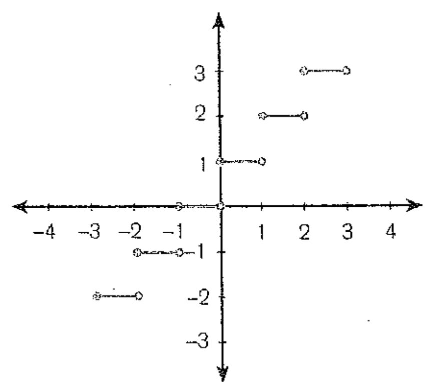


Fig. 5.6

4. Trazo un diagrama sagital o una gráfica en el plano cartesiano y determino cuáles correspondencias son funciones.

a. $f = \{(1, 3), (2, 3), (3, 3), (5, 3), (4, 3)\}$

b. $g = \{(1, 4), (3, 1), (5, 2), (1, 6), (8, 3)\}$

c. $h = \{(3, 5), (3, 6), (3, -1), (3, -2), (3, 0)\}$

d. $g = \{(1, 1), (-1, 1), (2, 4), (-2, 4), (3, 9), (-3, 9)\}$

e. $h = \left\{(x, y) \mid x \in (1, 3) \ \text{ y } \ y = \dfrac{1}{x}\right\}$

f. $g = \left\{(x, y) \mid x \in [-2, 2] \ \text{ y } \ y = \sqrt{x}\right\}$

Para aquellas correspondencias que son función determino el dominio y el rango.

5. Para identificar el dominio de una función analizo si la expresión dada para cada $x \in R$ está definida.

Por ejemplo, se restringe el dominio de la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ a $R - \{-1, 1\}$, porque con 1 y −1 el denominador se hace cero.

Determino el dominio de cada función y si es necesario lo limito.

Función	Dominio
$f(x) = x^2 + 3x + 2$	
$g(x) = \dfrac{1}{x - 1}$	
$h(x) = \sqrt{x + 1}$	
$i(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$	
$s(x) = x + 1$	

Tabla 5.3

Soluciono problemas

6. Para completar la tabla 5.4 encuesto a 6 de mis compañeros o compañeras e indico cuál correspondencia es función y cuál no lo es.

Compañero(a)	Masa en kg	No. de hermanos	No. telefónico	e-mail	Año de nacimiento

Tabla 5.4

7. Para cada situación escribo una regla f que describa la función y determino el dominio.

a. El perímetro de la circunferencia de radio r.
b. El doble de x.
c. El cubo de x más 1.
d. El cociente entre 2 y $x + 1$.
e. El tiempo que tarda un carro en recorrer una distancia d con una velocidad de 60 km/h.

8. Para cada caso doy tres ejemplos.

a. Gráficas de correspondencias que no sean funciones.
b. Correspondencias de funciones utilizadas en la vida real.
c. Funciones cuyo dominio restrinja el conjunto de los números reales.

Desempeños: determina si una correspondencia es función o no en cualquiera de sus representaciones.
Explica y ejemplifica el concepto de función.
Analiza situaciones que representan funciones.

Tema 2

Función constante y función lineal

La distancia d recorrida por un auto con una velocidad promedio de 70 km/h, depende del tiempo t y se representa mediante la función $d = f(t) = 70t$.

Consignamos los valores de esta función en una tabla y el conjunto de los puntos (t, d) nos determina la gráfica de f (figura 5.7).

La gráfica de la ecuación $y = f(x)$ es la gráfica de la función f.

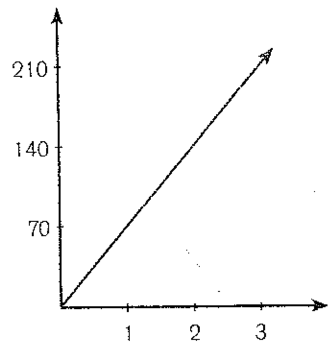


Fig. 5.7

t	$f(t) = d$
0	0
1	70
2	140
3	210
⋮	⋮

Tabla 5.5

Observemos que si la velocidad es 40 km/h la gráfica de la función $f(t) = 40t$ es la gráfica de la ecuación lineal $d = 40t$. Por tanto:

La función $f(x) = ax + b$, donde a y b son números reales para $a \neq 0$, la llamamos función afín, cuando $b = 0$ lineal.

Como la ecuación $y = 0x + b$ representa una recta de pendiente 0, la gráfica de la función $f(x) = 0x + b$ es una recta horizontal que pasa por $y = b$ (figura 5.8).

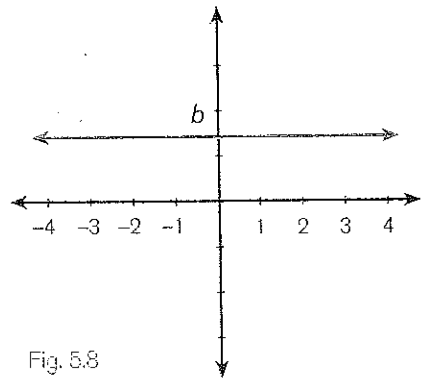


Fig. 5.8

La función $f(x) = b$, donde $b \in \mathbb{R}$, la llamamos función constante.

Taller de competencias

1. Escribo una L si la función es lineal, una C si la función es constante o una N si la función no es ni lineal ni constante.

a. $f(x) = 5x + 3$ ☐

b. $g(x) = -9$ ☐

c. $h(x) = x^2 + 1$ ☐

d. $g(x) = \frac{3}{2}x - 1$ ☐

e. $s(x) = 4$ ☐

f. $h(x) = 3 - 2x$ ☐

g. $s(x) = \sqrt{x}$ ☐

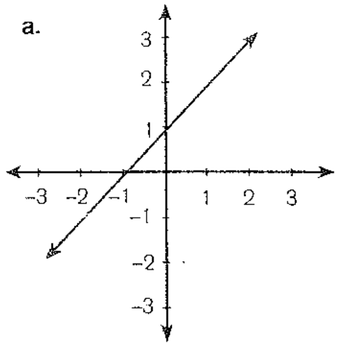
h. $f(x) = \frac{1}{x}$ ☐

i. $m(x) = x^4 - 3x + 2$ ☐

j. $g(x) = 25 - 3x$ ☐

2. Recuerdo cómo hallo la ecuación de una recta y escribo la regla que determina la gráfica de cada función lineal.

a.



b.

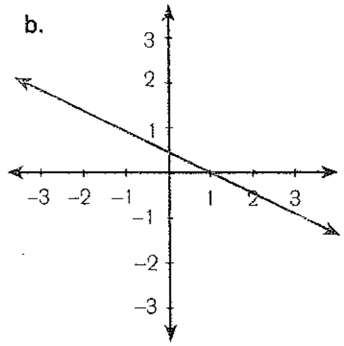


Fig. 5.9

---

3. Para cada función lineal o función constante:

- Trazo la gráfica.
- Determino la pendiente, los intersectos en x y y, el dominio y el rango.

a. $f(x) = -2x + 6$ **b.** $g(x) = -\frac{1}{2}$

c. $h(x) = 3 - 2x$ **d.** $f(x) = -x$

e. $g(x) = 6$ **f.** $h(x) = \frac{x}{2}$

4. La recta que representa una ecuación lineal se caracteriza, según el signo de su pendiente, de la manera que indica la tabla.

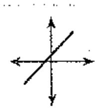
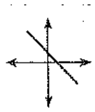
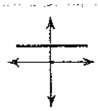
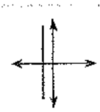
Pendiente	Recta	Característica
Positiva		Ascendente
Negativa		Descendente
Cero		Horizontal
Indefinida		Vertical

Tabla 5.6

Respondo:

a. ¿La recta con pendiente indefinida corresponde a la gráfica de una función? ¿Por qué?

b. Clasifico cada recta del punto 3., según su pendiente, como ascendente, descendente u horizontal.

c. Para cada tipo de recta escribo tres ejemplos de funciones.

- Ascendente
- Descendente
- Horizontal

d. Escribo 3 ecuaciones de rectas verticales.

Soluciono problemas

5. Dibujo sobre un plano cartesiano dos rectas paralelas y dos rectas perpendiculares.

a. Escribo, para cada una, la ecuación que describe la gráfica.

b. ¿Cuáles representan una función?

c. Determino los puntos de intersección.

6. Una fábrica de zapatos vendió en dos meses, en promedio, 500 pares y en ocho meses vendió 1 100 pares. ¿Cuántos pares de zapatos venderá en x meses? Hago una gráfica meses-pares vendidos que represente la situación.

7. Demuestro que el perímetro del cuadrado y de la circunferencia son respectivamente $4\,L$ (L = lado) y $2\pi r$ (r = radio) utilizando la siguiente información:

a. Los perímetros de los cuadrados de lados 6 cm y 8 cm son 24 cm y 32 cm, respectivamente.

b. Los perímetros de las circunferencias de radios 3 cm y 5 cm son 18,84 cm y 31,4 cm, respectivamente.

8. ¿Cuál es la función que permite determinar el tiempo que tarda un carro en recorrer 150 km variando su velocidad v? ¿La función es lineal? ¿Cuál es el dominio de f?

Desempeños: Identifica la gráfica y la ecuación de una función lineal y de una función constante. Relaciona elementos y propiedades de la ecuación lineal con la función lineal. Resuelve situaciones de ecuaciones lineales desde el punto de vista de la función lineal.

Tema 3

La función inversa

La masa ideal, y, de una mujer depende de su estatura x. La función $y = f(x) = \frac{x}{2} - 25$ nos permite encontrar el peso ideal conociendo la estatura.

- Para cada estatura x, en la función $f(x) = y$, ¿existe una única masa y y viceversa?
- ¿Existe una función para encontrar la estatura ideal x dada la masa y de la mujer?

Tengamos presente que el conjunto de parejas de la función f, $\{(150, 50), (170, 60), (180, 65), \ldots\}$, nos da respuesta afirmativa a la primera pregunta.

Ahora veamos si existe la función que tiene como parejas ordenadas el conjunto $\{(50, 150), (60, 170), (65, 180), \ldots\}$ que resulta de intercambiar el orden de las componentes de cada pareja ordenada de f.

En $y = f(x) = \frac{x}{2} - 25$, función dada, al intercambiar x y y obtenemos $x = \frac{y}{2} - 25$. Si esta ecuación la resolvemos para y, tenemos $2(x + 25) = y$, que es la ecuación que genera la función que buscamos. Esta la llamamos función inversa de f y la denotamos $f^{-1}(x)$. Por tanto: $f^{-1}(x) = 2(x + 25)$.

Si en una función $y = f(x)$ para cada valor de x existe un único valor de y, y viceversa, se puede afirmar que existe la función inversa f^{-1} y se halla así:

a. En la función $y = f(x)$ dada, se intercambian x y y para obtener $x = f(y)$.

b. $x = f(y)$ se resuelve para y y la solución se escribe como $y = f^{-1}(x)$.

Taller de competencias

1. En $A = \{a, b, c, d\}$ se definen las funciones $f: A \to A$, $g: A \to A$ y $h: A \to A$. Mediante los diagramas sagitales determino, en cada caso, si la función tiene inversa o no tiene y por qué.

a. **b.** **c.**

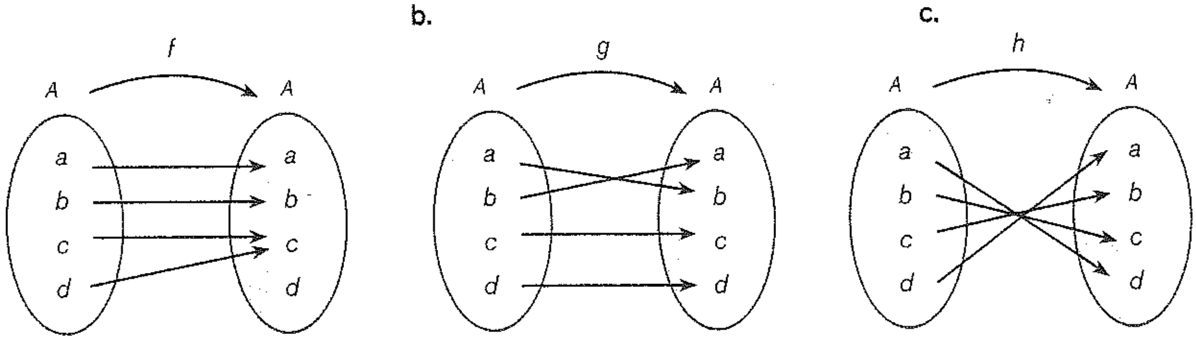


Fig. 5.10

2. Para cada función definida de R en R según la gráfica:

- Determino si la función tiene inversa o no la tiene y por qué.
- Si la función tiene inversa, establezco la regla que define tanto a f como a f^{-1} y las grafico en el mismo plano cartesiano.

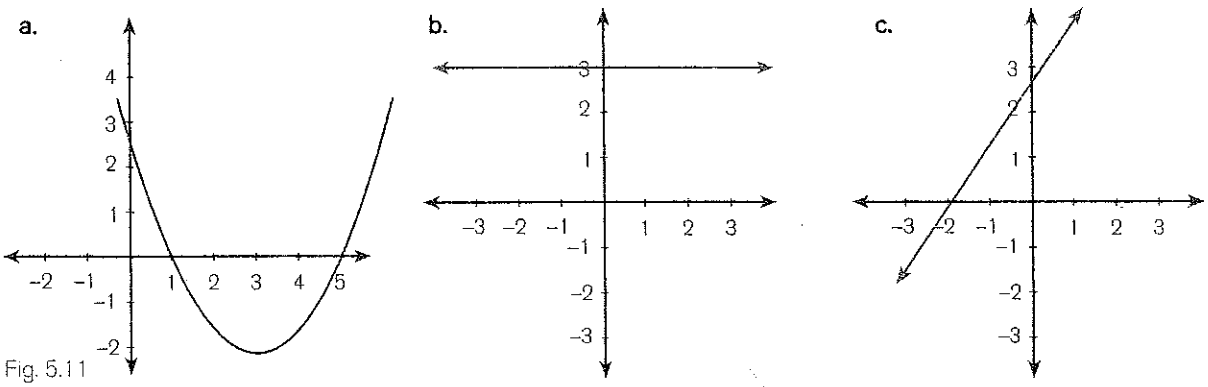


Fig. 5.11

3. Para $f(x) = 1 - 2x$, con dominio R:

a. Establezco el conjunto de parejas de f.

b. Determino el conjunto de parejas al intercambiar el orden de cada pareja ordenada de f.

c. Ubico, en el mismo plano, los conjuntos de parejas ordenadas obtenidos en **a** y **b**.

d. ¿Puedo verificar que a cada valor de x le corresponde un único valor de y y viceversa?

e. Al trazar rectas horizontales sobre f, ¿alguna de estas rectas interseca su gráfica en más de un punto?

4. Hallo la inversa de cada función de R en R dada; encuentro algunas parejas, tanto de la función como de su inversa, y represento gráficamente la función y su inversa en el mismo plano cartesiano.

a. $f(x) = -x$

b. $h(x) = -2x + \frac{1}{3}$

c. $g(x) = 3 - 4x$

d. $f(x) = \frac{1}{2}x$

e. $h(x) = \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}$

f. $m(x) = \sqrt{2}x - 3$

g. $s(x) = -3x$

h. $g(x) = \frac{x+1}{5}$

Soluciono problemas

5. Calculo $f^{-1}(x)$ si $f(x) = \frac{x-1}{2x+3}$.

6. Si $f(x) = 3x - 6$, muestro que $(f^{-1})^{-1} = f$; para ello calculo f^{-1} y luego hallo la inversa de f^{-1}.

7. Para cada función determino su inversa y escribo, en palabras, qué permite calcular, como en el ejemplo de la introducción del tema.

a. $y = f(t) = \frac{3t}{4} - 62$.

y es la masa ideal de un hombre dada su estatura. $f^{-1}(t) =$ ______________________

____

b. $s = g(n) = 180n - 360$.

s es la suma de los ángulos de un polígono de n lados. $g^{-1}(n) =$ ______________________

____

c. $F = h(C) = \frac{9}{5}C + 32$.

F representa los grados Fahrenheit que equivalen a C grados Celsius.

$h^{-1}(C) =$ ______________________

____

d. $H = f(L) = \frac{\sqrt{3}L}{2}$.

H es la altura de un triángulo equilátero de lado L. $f^{-1}(L) =$ ______________________

____

Tema 4

Función cuadrática

La ecuación cuadrática $h = -5t^2 + 14t + 3$ representa la altura h que alcanza un proyectil al cabo de t segundos, cuando es lanzado con una velocidad inicial de 14 m/s desde una altura de 3 m. Como la altura h está en función de t se puede escribir como $h(t) = -5t^2 + 14t + 3$ que es una función cuadrática.

Una función f es una función cuadrática si $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde a, b y c son números reales, con $a \neq 0$. Su gráfica es una **parábola**.

En la gráfica de $h(t) = -5t^2 + 14t + 3$ tenemos que:

- La parábola abre hacia abajo porque $a < 0$.
- La altura máxima que alcanza el proyectil está dada por $t = \frac{7}{5}$ s, que es la primera coordenada del vértice de la parábola.
- El proyectil toca el suelo después de 3 s; este resultado se obtiene resolviendo la ecuación $0 = -5t^2 + 14t + 3$. La solución $t = -\frac{1}{5}$ no tiene sentido en la situación descrita.

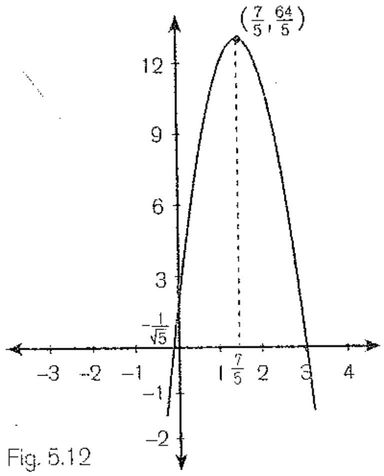


Fig. 5.12

- La función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$, la representamos por una parábola que tiene:
  a. Un mínimo que es el vértice, si $a > 0$.
  b. Un máximo que es el vértice, si $a < 0$.
- Los ceros de la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ son las intersecciones de la función con el eje X, y se obtienen resolviendo la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.
- El eje de simetría está dado por la coordenada x del vértice.

Taller de competencias

1 Escribo una C si la función es cuadrática y una N si no lo es.

a. $f(x) = -3x^2 + 2x + 1$ ☐

b. $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ ☐

c. $h(x) = 1 - 3x$ ☐

d. $g(x) = 4$ ☐

e. $h(x) = 1 - x^2$ ☐

f. $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x$ ☐

g. $s(t) = \frac{1}{t^2}$ ☐

h. $m(a) = -a^2$ ☐

i. $f(x) = -4x + 1$ ☐

j. $h(x) = -2x - 5x^2 + 1$ ☐

2. Para cada ecuación cuadrática, en la columna 1, escribo si ella tiene un mínimo o un máximo y, en la columna 2, escribo la pareja ordenada que lo representa en el plano.

	Columna 1	Columna 2
a. $f(x) = -x^2 + 2$		
b. $g(x) = x^2 + 5x + 6$		
c. $h(x) = 2x(x + 1)$		
d. $f(x) = (x + 4)^2$		
e. $m(x) = (x - 2)^2 + 1$		
f. $h(x) = 3x - 5x^2$		
g. $f(x) = 2x - x^2 + 1$		

Tabla 5.7

3. Para cada función cuadrática:

- Hallo el máximo o el mínimo.
- Encuentro los ceros.
- Elaboro una tabla de valores.
- Determino el vértice y el eje de simetría.
- Trazo la gráfica.

a. $f(x) = -2x^2$

b. $g(x) = \left(x - \frac{1}{4}\right)^2$

c. $h(x) = -(x - 1)^2$

d. $g(x) = 2x^2 - 5x - 8$

e. $s(x) = -x^2 + 5x + 4$

f. $m(x) = 3x^2 - 3x + 5$

g. $h(x) = -3x^2 + 1$

h. $f(x) = 2x^2 - 8x + 4$

4. Interpreto la información, observo el ejemplo y determino el dominio y el rango de cada función del ejercicio 3.

En una función cuadrática:

a. El dominio es el conjunto de los números reales si no se restringe.

b. El rango se determina a partir de la ordenada del vértice.

Ejemplo: en $f(x) = x^2 + 3x + 2$.

Dominio de f: R

Rango de f: $\left\{y \in R \mid y \geq -\frac{1}{4}\right\}$

Vértice V: $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$

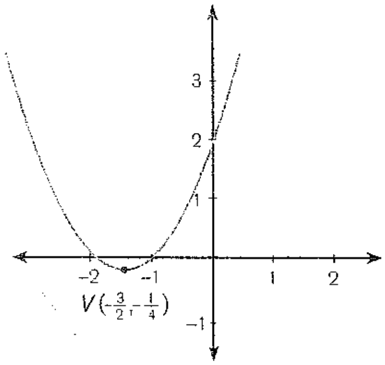


Fig. 5.13

Soluciono problemas

5. La gasolina de un automóvil, que se maneja a x km/h, tiene un rendimiento R de km/galón expresado por la función $R(x) = 2x - \frac{x^2}{24}$. ¿A qué velocidad se obtiene el máximo rendimiento?

6. Arrojo una pelota hacia arriba desde una torre de 400 m de altura. La altura de la pelota depende del tiempo según la función $h(t) = 400 - 5t^2 + 30t$.

a. ¿En qué momento alcanza la pelota su punto más alto?

b. ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por la pelota?

c. ¿Cuánto tarda la pelota en llegar al suelo?

d. ¿En qué momento está la pelota a una altura de 80 metros?

e. ¿Cuál es la gráfica del movimiento?

7. Se pretende cercar con 150 m de alambre un lote rectangular. ¿Qué dimensiones tendrá el lote para alcanzar su área máxima?

Desempeños: Identifica la ecuación cuadrática y algunos elementos básicos de su gráfica.
En una función cuadrática halla todos los elementos para hacer su gráfica.
Soluciona problemas mediante el uso de funciones cuadráticas.

Tema 5

Funciones crecientes y decrecientes

Observemos las gráficas de las funciones $f(x) = 3 - 2x$ y $g(x) = x^2 - x - 6$, en las figuras 5.14 y 5.15, respectivamente.

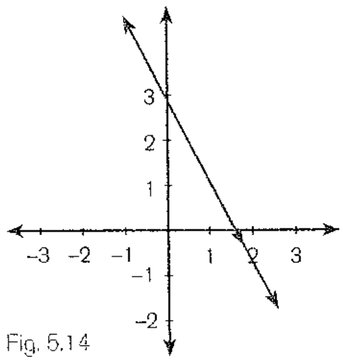


Fig. 5.14

- En la función f:

x	$x_1 = 1$	$x_2 = 2$	...
$f(x)$	1	−1	...

Tabla 5.8

para $x_1 < x_2$, $f(x_1) > f(x_2)$, la función decrece.

- En la función g:

x	$x_1 = -1$	$x_2 = 0$	$x_3 = 1$	$x_4 = 2$	...
$g(x)$	−4	−6	−6	−4	...

Tabla 5.9

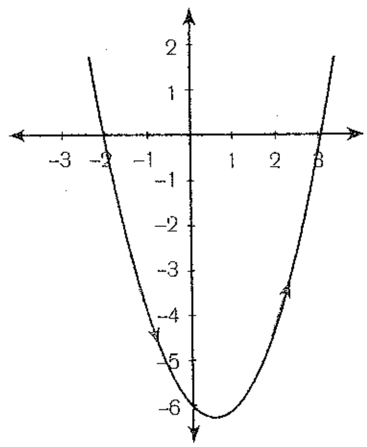


Fig. 5.15

1. Si x_1 y x_2 pertenecen a $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$, para $x_1 < x_2$, $f(x_1) > f(x_2)$, la función decrece.

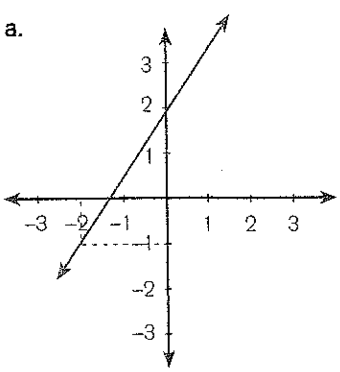
2. Si x_3 y x_4 pertenecen a $\left[\frac{1}{2}, \infty\right)$, para $x_3 < x_4$, $f(x_3) < f(x_4)$, la función crece.

- Si f es una función definida en un intervalo I, donde x_1 y x_2 son valores de I tales que $x_1 < x_2$, entonces:
  a. Si $f(x_1) \leq f(x_2)$ se dice que f es creciente en I.
  b. Si $f(x_1) \geq f(x_2)$ se dice que f es decreciente en I.
- Se dice que f es constante en un intervalo I si $f(x_1) = f(x_2)$ para todo x_1, x_2 en I.

Taller de competencias

1. Para cada función de la figura 5.16 completo la tabla de valores con algunas parejas ordenadas que permitan decidir si la función es creciente, decreciente o constante, en el intervalo o intervalos dados.

a.

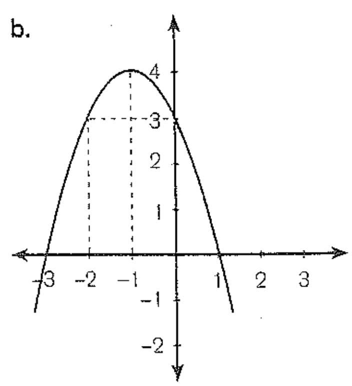


x	$f(x)$

Tabla 5.10

$I = [-2, 2]$

b.

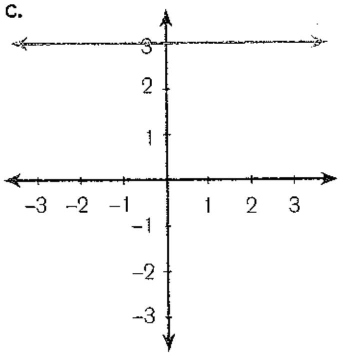


x	$f(x)$

Tabla 5.11

$I = (-\infty, -1]$
$M = [-1, \infty)$

c.

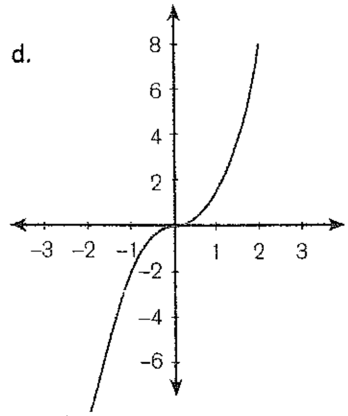


x	$f(x)$

Tabla 5.12

$I=(-\infty,\infty)$

d.

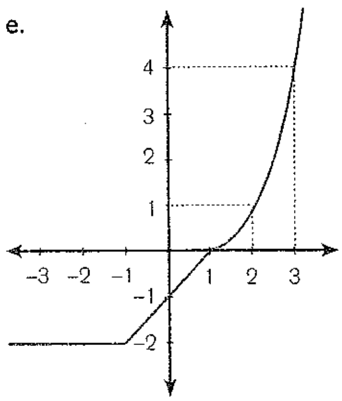


x	$f(x)$

Tabla 5.13

$I=(-\infty,0]$
$M=[0,\infty)$

e.



x	$h(x)$

Tabla 5.14

$I=(-\infty,-1]$
$M=(-1,1)$
$J=[-1,\infty)$

Fig. 5.16

2 Algunas veces se definen funciones por intervalos combinando varias ecuaciones. A este tipo de funciones las llamamos funciones por tramos. Observo el ejemplo.

$$f(x)=\begin{cases}4 & \text{si } x\leq -2\\ x^2 & \text{si } -2<x<2\\ x+2 & \text{si } x\geq 2\end{cases}$$

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	...
$f(x)$	4	4	4	1	0	1	4	5	6	...

Tabla 5.15

Dom $f=(-\infty,\ -2]\cup(-2,\ 2)\cup[2,\ \infty)=\mathbb{R}$

Ran $f=\{4\}\cup[0,\ 4]\cup(4,\ \infty)=\mathbb{R}^+\cup\{0\}$

En: $(-\infty,-2]$ f es constante.

$(-2,0)$ f es decreciente.

$(0,\infty)$ f es creciente.

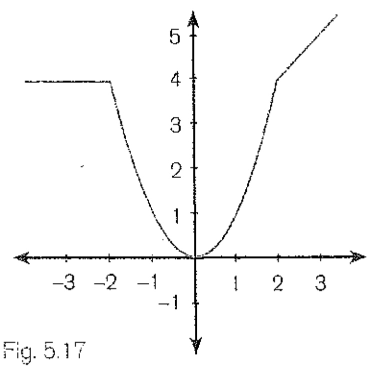


Fig. 5.17

La representación gráfica es la figura 5.17.

Para cada una de las siguientes funciones definidas por tramos:

- Elaboro una tabla de valores y trazo la gráfica.
- Hallo dominio, rango e indico los intervalos en que es creciente, decreciente o constante.

a. $h(x) = \begin{cases} -5 & \text{si } x < -1 \\ 5x & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ 5 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

b. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

c. $g(x) = \begin{cases} 1 - 3x & \text{si } x \leq 1 \\ 2x^2 - 4 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

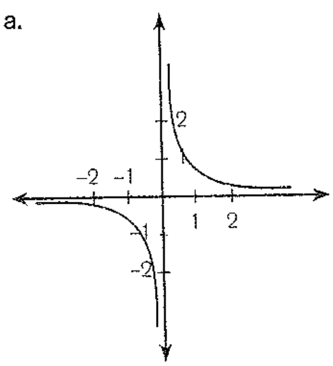
d. $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \leq -1 \\ x & \text{si } -1 < x < 1 \\ \sqrt{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

e. $h(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x \leq -2 \text{ o } x \geq 2 \\ -x+1 & \text{si } -2 < x \leq -1 \\ 2 & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ x+1 & \text{si } 1 < x < 2 \end{cases}$

f. $m(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x < 0 \\ x^3 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 12 - x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

3. Determino los intervalos de crecimiento y de decrecimiento en cada caso.

a.



b.

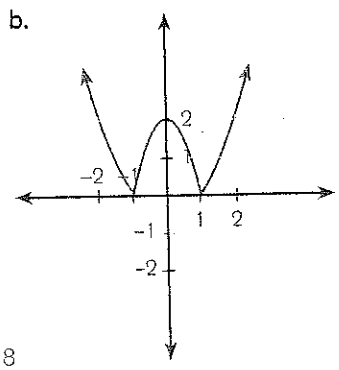
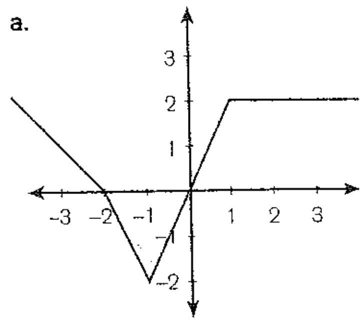


Fig. 5.18

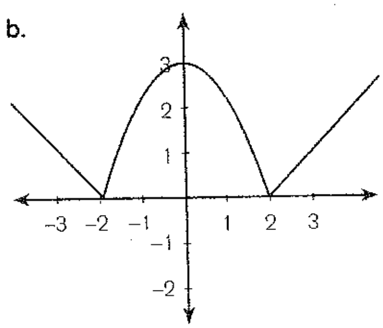
Soluciono problemas

4. Para cada gráfica determino las ecuaciones que generaron la función según el intervalo. Hallo el dominio y el rango e indico los intervalos en los cuales la función es creciente, decreciente o constante.

a.



b.



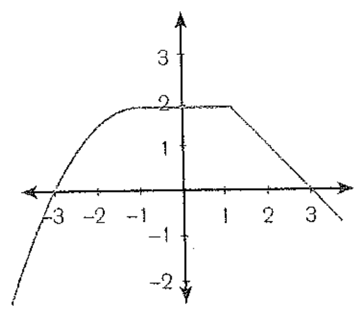


Fig. 5.19

5. La gráfica de la figura 5.20 es el logotipo de un artículo. Lo dibujo en el plano cartesiano, determino los intervalos y las ecuaciones por intervalos que definen la función.

Fig. 5.20

Desempeños: traza funciones por tramos y analiza si son crecientes, decrecientes o constantes según el intervalo.
Verifica con valores los intervalos donde una función es creciente, decreciente o constante.

Tema 6

Traslación de gráficas

Al dibujar en la computadora la gráfica de la función $f(x) = x^2$, se obtienen, mediante traslaciones de la parábola, las gráficas de las figuras 5.21 y 5.22.

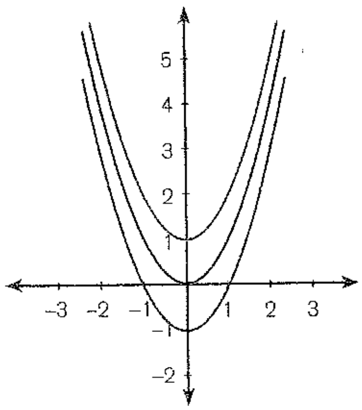


Fig. 5.21

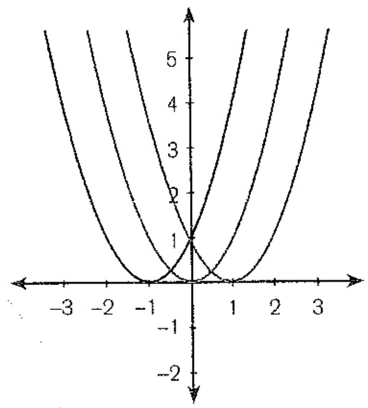


Fig. 5.22

Al trasladar la gráfica de $f(x) = x^2$ una unidad arriba, una unidad abajo, una unidad a la derecha y una unidad a la izquierda, se pueden determinar las ecuaciones de las nuevas parábolas y concluir:

1 unidad arriba $\rightarrow y - 1 = x^2 \rightarrow y = x^2 + 1$
1 unidad abajo $\rightarrow y + 1 = x^2 \rightarrow y = x^2 - 1$
1 unidad a la izquierda $\rightarrow y = (x + 1)^2$
1 unidad a la derecha $\rightarrow y = (x - 1)^2$

Para hallar la ecuación de la **gráfica trasladada**, si ésta se traslada *a* unidades, se sustituye:

- x por $x - a$ cuando se traslada hacia la derecha.
- x por $x + a$ cuando se traslada hacia la izquierda.
- y por $y + a$ cuando se traslada hacia abajo.
- y por $y - a$ cuando se traslada hacia arriba.

Taller de competencias

1 Escribo la ecuación para el desplazamiento indicado.

a. $y = x + 5$; 3 unidades hacia arriba.

b. $y = x^2 + 3$; 5 unidades hacia abajo.

c. $y = x^2 + 5x + 7$; 2 unidades hacia la izquierda.

d. $7x^2 - 2y = 5$; 3 unidades hacia la derecha y 2 hacia arriba.

e. $y = x^2 - 3$; 1 unidad hacia abajo y 3 hacia la izquierda.

f. $y - 1 = (x - 1)^2$; 6 unidades hacia la derecha.

g. $(x - 2)^2 = 3y$; 1 unidad hacia la izquierda.

h. $y - 3x = x^2 + 1$; 2 unidades hacia abajo.

2 En cada caso, determino la ecuación de las cuatro traslaciones para las unidades indicadas y trazo todas las gráficas en el mismo plano.

a. $3x^2 - 2y = -5$; 3 unidades

b. $y = (x - 2)^2$; 1 unidad

c. $y = \frac{x^2}{2}$; 2 unidades

d. $y = -3x^2 - 1$; 2 unidades

3. Cada función lineal de la figura 5.23 se trasladó x unidades arriba, abajo, a la izquierda o a la derecha.

- Determino la ecuación de la recta original.
- Indico, para cada nueva recta, cuánto y cómo se desplazó.
- Encuentro la ecuación de las nuevas rectas utilizando las reglas de la traslación de gráficas.

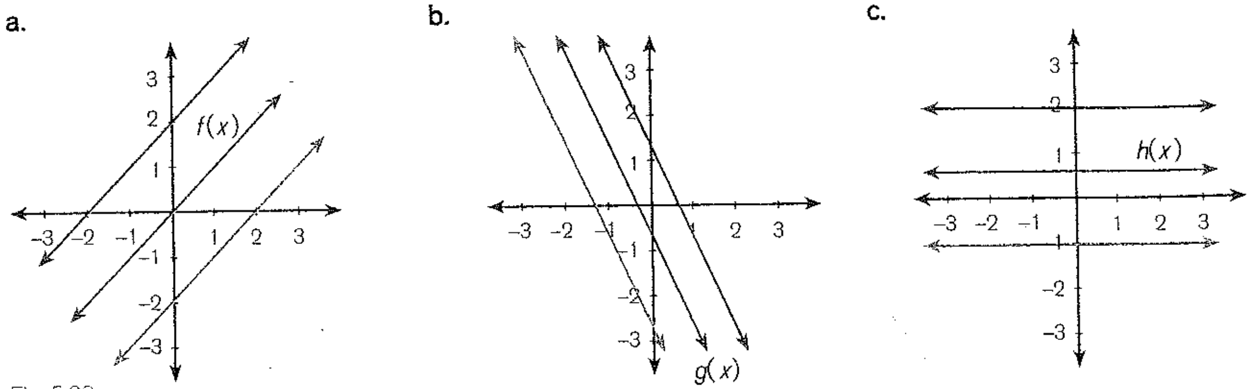


Fig. 5.23

4. Identifico las gráficas que representan traslaciones.

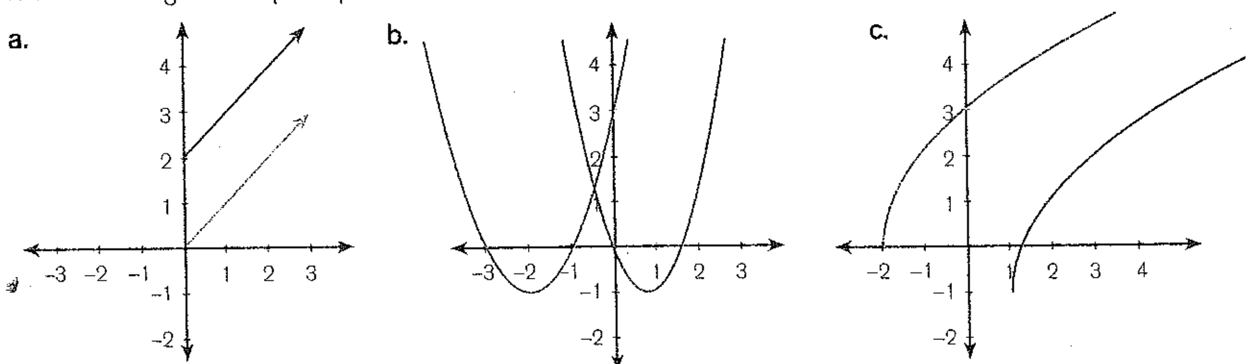


Fig. 5.24

Soluciono problemas

5. A cada ecuación se le aplicó primero una traslación horizontal y luego una traslación vertical; determino la ecuación de la parábola resultante.

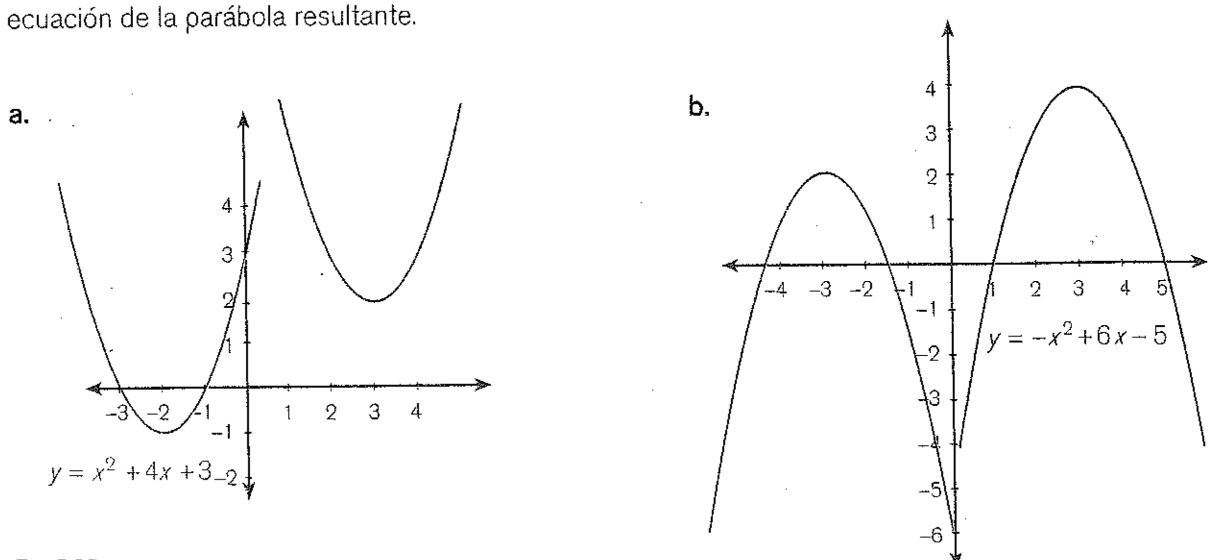


Fig. 5.25

Desempeños: aplica reglas de traslación para hallar ecuaciones de gráficas a partir de una ecuación dada.
Identifica gráficas que representan traslaciones.

1. Octavio Paz escribió la frase:

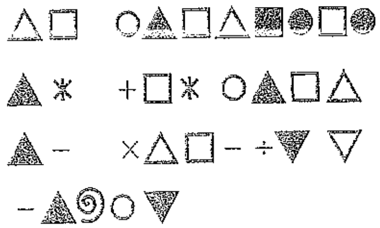


Fig. 5.26

Cada letra del alfabeto tiene un signo como código; encuentro la frase utilizando la tabla de porcentajes que indica la aparición de cada letra en el texto.

Letra	%
a	18,1
s	6,1
i	3
d	6,1
b	3
m	3
c	3
o	6,1
n	9,1
l	12
r	9,1
g	3
e	15,2
y	3

Tabla 5.16

2. Invento una situación que involucre funciones y utilizo la información de la gráfica de barras que aparece a continuación.

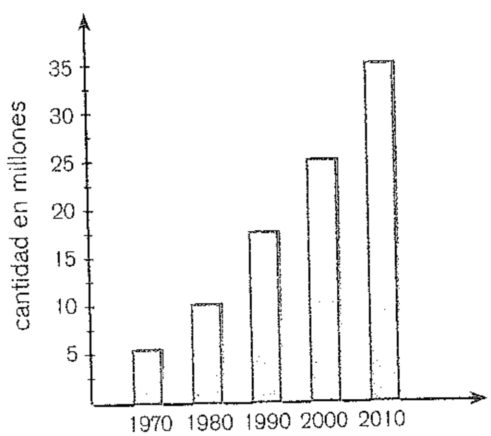


Fig. 5.27

Evalúo mis competencias

Con los siguientes ejercicios, afianzo los desempeños que he superado y refuerzo aquellos que están por superar.

1. Selecciono en cada caso la respuesta correcta.

a. Las siguientes son situaciones de correspondencias que definen una función, excepto:

A. La estatura de una persona.

B. El tiempo transcurrido para que una piedra alcance determinada altura.

C. Un número positivo asociado con sus raíces positiva y negativa.

D. El número de kilómetros recorridos determinado con el costo del alquiler del carro.

b. Son imágenes para algún $x \in \mathbb{R}$ de $f(x) = 2x + c$, excepto:

A. $2 + c$ **B.** $c + i$

C. $1 + c$ **D.** $\frac{c}{2}$

c. El dominio de la función $g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ es:

A. R   **B.** $R - \{1\}$

C. $(-\infty, 1)$ **D.** $[1, \infty)$

d. El dominio de una función se restringe porque:

A. La función es lineal o cuadrática.

B. Se conoce el vértice de la parábola.

C. El denominador de la fracción que la define se hace cero.

D. El conjunto de las imágenes son números reales.

e. Una recta ascendente representa, en el plano cartesiano, la gráfica de una función lineal con coeficiente en x:

A. Positivo   **B.** Negativo

C. Cero   **D.** Racional

f. La función de la gráfica en la figura 5.28 tiene por dominio y rango:

A. R y R   **B.** R y R^+

C. $(-\infty, 1)$ y R   **D.** R y $[1, \infty)$

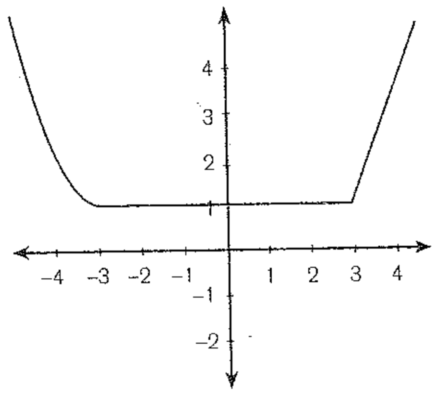


Fig. 5.28

g. La función inversa de la función inversa de la función $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ es:

A. $y = \frac{2x+1}{x-1}$ **B.** $y = \frac{x+1}{x-2}$

C. $y = \frac{x-2}{x+1}$ **D.** $y = \frac{x+1}{2x-1}$

h. La ecuación $y = (x-3)^2 + 1$ indica que la gráfica de la ecuación $y = x^2$ se trasladó:

A. 1 unidad a la derecha y 3 unidades arriba.

B. 1 unidad a la izquierda y 3 unidades abajo.

C. 3 unidades a la derecha y 1 unidad arriba.

D. 3 unidades a la izquierda y 1 unidad abajo.

Soluciono problemas

2. $N = \{1, 2, 3, ..., n\}$ es el dominio de cada una de las siguientes funciones. Determino el conjunto f con, por lo menos, seis elementos. Escribo como un conjunto de parejas ordenadas.

a. $f(n) = 2n + 1$

b. $f(n) = 2^n$

c. $f(n) = \begin{cases} n + 1 & \text{si } n \text{ es par} \\ n - 1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$

d. $f(n) = (-1)^n$

3. Para un rectángulo cuya longitud es tres más que su altura:

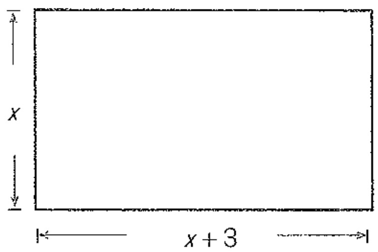


Fig. 5.29

a. Escribo la expresión que representa el perímetro en función de su altura.

b. Encuentro la fórmula para representar la altura en función de su perímetro.

c. Trazo la gráfica de las dos funciones.

4. Para cada afirmación escribo la regla que define su función.

a. El área de un paralelogramo, si su base es 10 más que su altura.

b. El área de un rombo, si una de sus diagonales es tres menos que la otra diagonal.

c. El área de un triángulo, si su base es el cuádruplo de su altura.

d. El área de una esfera de radio r.

e. El área total de un cilindro, si su radio es la cuarta parte de su altura.

5. La longitud de las marcas de las llantas que deja un carro al frenar es 128,5 m si va a una velocidad de 60 km/h y está dada por la ecuación $l = \frac{v^2}{28}$.

Trazo la gráfica que presente la longitud de las marcas si la velocidad oscila entre 30 y 120 km/h.

6. Cuando un meteoro entra en la atmósfera de la Tierra se calienta rápidamente y parece una estrella fugaz. La temperatura de calentamiento, en grados Celsius, está dada en función de la velocidad con la que viaja por la función $f(C) = 450\ C^2$. ¿Cuál es la temperatura del meteoro si su velocidad oscila entre 3 y 12 km/s?

Autoevaluación

	Bajo	Básico	Alto	Superior
Domino el concepto de función y conozco sus propiedades y notación.				
Grafico una función y determino su dominio y rango.				
Grafico una función lineal y una función cuadrática y las diferencio.				
Determino dominio y rango de funciones lineales, cuadráticas, constantes y por tramos.				
Identifico cuándo una función tiene inversa y cuándo no.				
Encuentro y grafico la inversa de una función, si existe.				
Grafico funciones por tramos e identifico intervalos en los que cualquier función sea creciente, decreciente o constante.				
Traslado funciones y determino sus ecuaciones.				
Comprendo y uso las funciones en distintos contextos de la vida cotidiana y científica.				

Prueba Saber

Encuentra la respuesta correcta entre las opciones A, B, C y D, y márcala en la hoja de respuestas, rellenando completamente el círculo correspondientes.

Contesta las preguntas 1 a 4 de acuerdo con la siguiente información.

La tabla "Requerimientos de energía calórica" presenta la actividad que debe realizar una persona, en función de las calorías necesarias por libra y por hora.

c: calorías necesarias por libra y por hora.

Actividad realizada	c	Actividad realizada	c
Dormir profundamente	0,4	Dormir por intervalos	0,5
Sentarse sin movimiento	0,6	Pararse relajado	0,7
Coser a mano	0,75	Vestirse o desvestirse	0,8
Cantar	0,85	Escribir a máquina	0,9
Planchar o sacudir	0,95	Barrer pisos	1,0
Hacer ejercicios ligeros	1,25	Caminar a 4,48 km/h	1,5
Trabajo industrial	1,75	Hacer ejercicios activos	1,9
Caminar de prisa a 6,4 km/h	2,0	Bajar escalones	2,25
Cargar o descargar objetos pesados	2,5	Hacer ejercicios pesados	2,75
Jugar tenis o nadar	3,25	Correr a 8,8 km/h	3,75
Hacer ejercicios muy pesados	4,0	Subir escalones	7,0

Tabla 5.17

1. La tabla de "Requerimientos de energía calórica" representa una función porque:

   A. Ninguna actividad tiene más de un requerimiento en cantidad de calorías.

   B. Existen actividades que no tienen la cantidad necesaria de calorías para realizarlas.

   C. Es posible que una actividad tenga dos requerimientos en cantidad de calorías para realizarlas.

   D. Cada actividad en la tabla tiene su respectivo requerimiento calórico por libra y por hora.

2. La gráfica más apropiada para representar la función entre la actividad realizada y las calorías requeridas es:

   A. Diagrama sagital

   B. Recta

   C. Parábola

   D. Tramos por intervalos

3. Una persona que pesa 60 kilogramos, en el gimnasio realiza ejercicios ligeros para calentar y ejercicios activos y pesados para fortalecer. ¿Cuántas calorías debe consumir en alimentos para practicar 1 hora diaria?

   A. 354 B. 623

   C. 708 D. 506

4. El peso de una persona es 100 kilogramos y desea quemar 1000 calorías en una hora. Las actividades que podría realizar son:

   A. Ejercicios ligeros y correr a 8,8 km/h.

   B. Escribir a máquina, planchar, barrer.

   C. Subir escalones y caminar de prisa.

   D. Bajar escalones y hacer ejercicios pesados.

Contesta las preguntas 5 a 10 de acuerdo con la siguiente información.

Las plantas vivas asimilan el carbono del CO_2 atmosférico durante la fotosíntesis y lo expulsan durante la respiración. De esta forma, los tejidos de las plantas vivas y de los animales vivos (humanos incluidos), que se alimentan de esas plantas, continuamente están intercambiando carbono 14 con la atmósfera.

Una vez los organismos vegetales y animales mueren, cesa este intercambio, el remplazo del carbono en sus tejidos.

5. La cantidad de carbono 14 en un ser que está muerto se comporta como se muestra en la figura 5.30. Según la gráfica, ¿qué cantidad de carbono 14 hay inicialmente?

A. 0,5 lb **B.** 2 lb

C. 1 lb **D.** No se puede determinar.

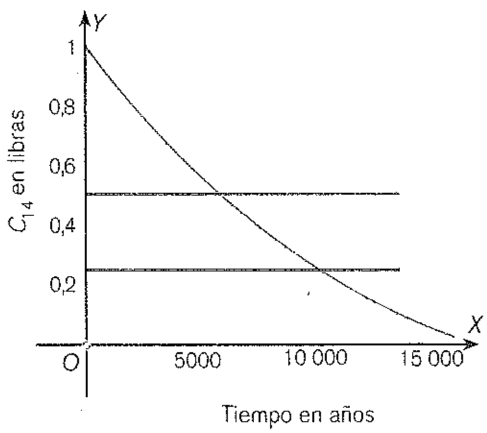


Fig. 5.30

6. El comportamiento de la cantidad de carbono 14 en el tiempo se puede describir como:

A. constante.

B. Siempre está aumentando.

C. A veces aumenta y a veces disminuye.

D. Disminuye con el paso del tiempo.

7. Aproximadamente en cuánto tiempo la cantidad de carbono 14 es 0,5 lb.

A. 100 años. **B.** 2500 años.

C. 5500 años. **D.** 7000 años.

8. Cuáles de las siguientes tparejas de puntos están en la gráfica.

A. $(0, 1)$ y $\left(2500, \frac{1}{2}\right)$

B. $(1, 0)$ y $\left(5500, \frac{1}{2}\right)$

C. $(0, 1)$ y $\left(5500, \frac{1}{2}\right)$

D. $(1, 0)$ y $\left(\frac{1}{2}, 5500\right)$

9. ¿Cuál de las siguientes expresiones sería la más adecuada, si la gráfica de la figura 5.30 fuese lineal?

A. $\dfrac{\frac{1}{2}}{-5500}x+1$ **B.** $\dfrac{\frac{1}{2}}{-5500}(x+1)$

C. $\dfrac{\frac{1}{2}}{5500}x+1$ **D.** $\dfrac{\frac{1}{2}}{5500}(x+1)$

10. Si el comportamiento del decrecimiento del carbono 14 fuese lineal, entonces en cuánto tiempo desaparecerá totalmente la cantidad inicial que teníamos:

A. En 10 000 años. **B.** En 11 000 años.

C. En 12 000 años. **D.** En 13 000 años.

Formato de respuestas

1. (A) (B) (C) (D)
2. (A) (B) (C) (D)
3. (A) (B) (C) (D)
4. (A) (B) (C) (D)
5. (A) (B) (C) (D)
6. (A) (B) (C) (D)
7. (A) (B) (C) (D)
8. (A) (B) (C) (D)
9. (A) (B) (C) (D)
10. (A) (B) (C) (D)

Unidad 6

Funciones exponencial y logarítmica

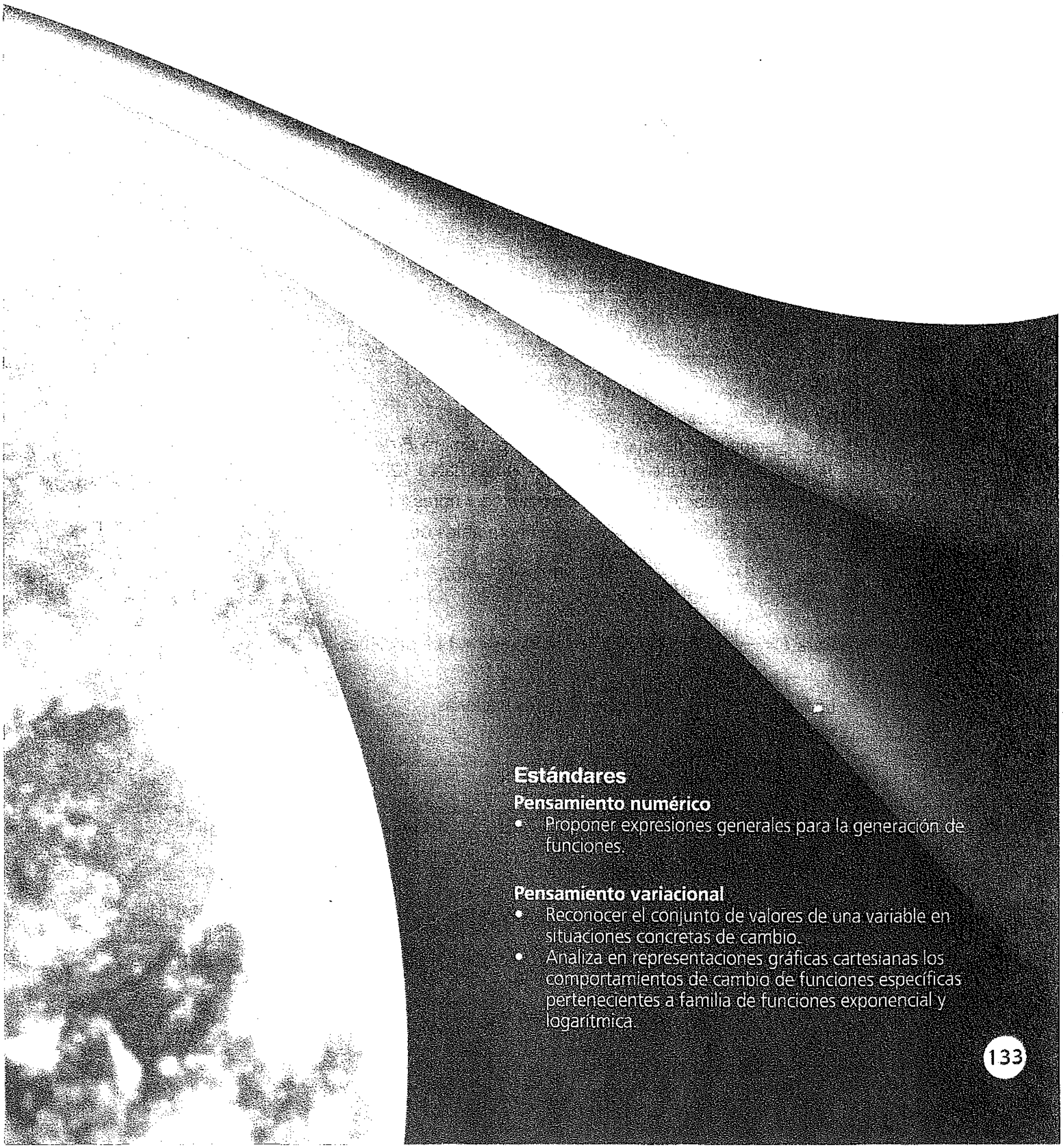
Procesos: El desarrollo de esta unidad me hará competente para:

Resolución de problemas
Resolver problemas que surgen en matemáticas y en otras áreas, utilizando el concepto de función.

Comunicación
Expresar y justificar información verbal mediante funciones exponencial y logarítmica.

Razonamiento lógico
Analizar la relación entre las funciones exponencial y logarítmica.

Conexiones
Solucionar ecuaciones con exponenciales y logaritmos.



Estándares

Pensamiento numérico
- Proponer expresiones generales para la generación de funciones.

Pensamiento variacional
- Reconocer el conjunto de valores de una variable en situaciones concretas de cambio.
- Analiza en representaciones gráficas cartesianas los comportamientos de cambio de funciones específicas pertenecientes a familia de funciones exponencial y logarítmica.

Función exponencial

En un experimento se tomó una bacteria y se observó que se duplicaba cada hora. Si se comenzó con 20 bacterias, ¿cuántas habrá después de 6 horas?

Como el número de bacterias F está en función del tiempo t, elaboremos una tabla y determinemos una función que modele la reproducción de las bacterias.

t	$F(t)$	
0	$20 \cdot 1$	$= 20 \cdot 2^0$
1	$2(20)$	$= 20 \cdot 2^1$
2	$2(2 \cdot 20)$	$= 20 \cdot 2^2$
3	$2(2 \cdot 2 \cdot 20)$	$= 20 \cdot 2^3$
4	$2(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 20)$	$= 20 \cdot 2^4$
5	$2(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 20)$	$= 20 \cdot 2^5$
6	$2(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 20)$	$= 20 \cdot 2^6$
$\vdots$		$=$
t	$2(\underbrace{2\dots2}_{t-1\ \text{veces}} \cdot 20)$	$= 20 \cdot 2^t$

Tabla. 6.1

Observemos que después de t horas el número F de bacterias está dado por la función $F(t) = 20 \cdot 2^t$. Con este modelo a las 6 horas habrá 1280 bacterias.

- ¿Cuántas bacterias habrá después de 4 horas y media?
- ¿Cuántas bacterias había media hora antes de empezar el experimento?

Para $t = \frac{9}{2}\text{h}$, $F\left(\frac{9}{2}\right) = 20 \cdot 2^{\frac{9}{2}} = 20 \cdot 16\sqrt{2} \approx 452{,}5$ bacterias.

Para $t = -\frac{1}{2}\text{h}$, $F\left(-\frac{1}{2}\right) = 20 \cdot 2^{-\frac{1}{2}} = 20 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 14{,}1$ bacterias.

La figura 6.1 ilustra el crecimiento de las bacterias según el modelo $F(t) = 20 \cdot 2^t$.

Una función exponencial es una función de la forma $f(x) = ab^x$, donde $a \neq 0$, $b > 0$ y $b \neq 1$. Su dominio y su rango son, respectivamente, el conjunto de los números reales y el de los números reales positivos. En $f(x) = ab^x$, b es el factor de crecimiento.

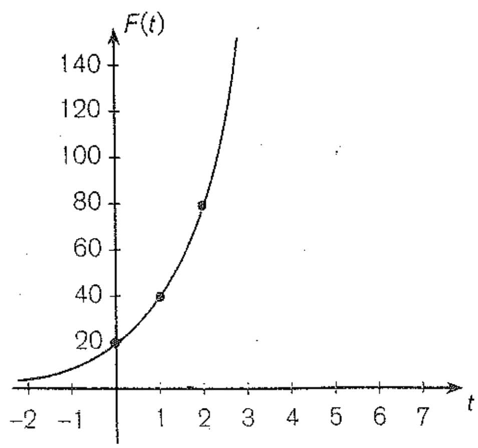


Fig. 6.1

Taller de competencias

1. Analizo la definición anterior y respondo:

a. ¿Por qué a, en $f(x) = ab^x$, debe ser diferente de cero?

b. Si x es cualquier número real, ¿puede ser $b < 0$ en $f(x) = ab^x$? ¿Por qué?

c. Si $b = 1$ en $f(x) = ab^x$, ¿cómo es la función f?

d. Si $0 < b < 1$, ¿se puede definir la función exponencial?

2. Escribo E si la función es exponencial y N si no lo es.

a. $f(x) = 3 + x$ ☐

b. $g(x) = 3^x$ ☐

c. $h(x) = (-3)^x$ ☐

d. $f(x) = \left(-\frac{1}{2}\right)^{x+1}$ ☐

e. $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ☐

f. $h(x) = x^2$ ☐

g. $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ ☐

h. $g(x) = \left(\sqrt{2}\right)^{x-1}$ ☐

i. $h(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ ☐

3. En una función exponencial; si $b > 1$, $f(x)$ es creciente, si $0 < b < 1$, $f(x)$ es decreciente y si $b = 1$, f es constante.

Indico si la función dada es función exponencial creciente, función exponencial decreciente o función constante.

a. $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ ______________

b. $g(x) = 3 \cdot 2^x$ ______________

c. $h(x) = 1 + 3^x$ ______________

d. $g(x) = 5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$ ______________

e. $f(x) = -2 \cdot 1^x$ ______________

f. $f(x) = 5 \cdot 1^x$ ______________

g. $h(x) = (-4)3^x$ ______________

h. $h(x) = \frac{3}{2^x}$ ______________

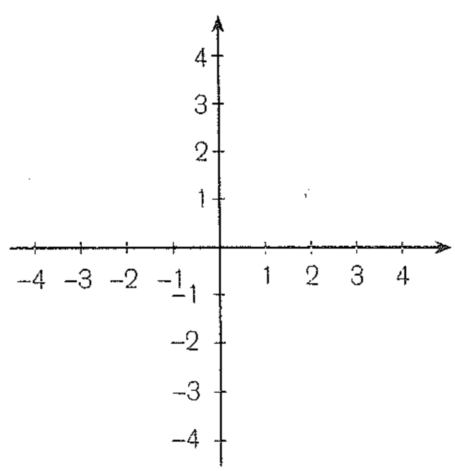
i. $g(x) = 4^{x+1}$ ______________

j. $f(x) = 5^{-x}$ ______________

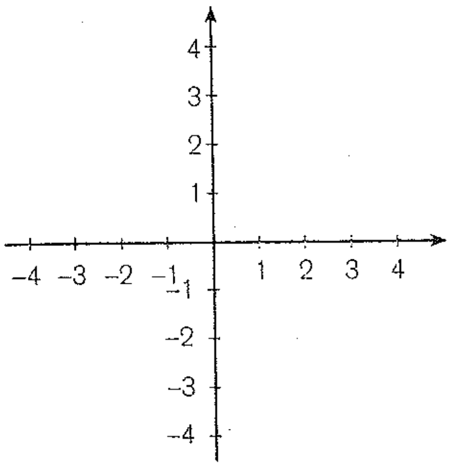
4. Trazo en el mismo plano cartesiano la pareja de funciones dadas, analizo y determino:

- El crecimiento o decrecimiento.
- El punto de intersección.
- Los intersectos con el eje X y con el eje Y, si existen.
- El dominio y el rango.

a. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ $\quad$ $f(x) = 2^x$



b. $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{-x}$ $\qquad g(x) = 3^{-x}$



c. $f(x) = 2^x$ $\qquad g(x) = 2^{x+1}$

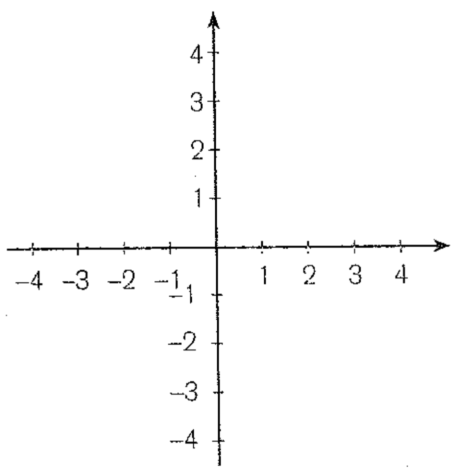


Fig. 6.2

5. Trazo las gráficas de las siguientes funciones exponenciales.

a. $f(x) = 4^x$ $\qquad$ b. $g(x) = 4^{-x}$

c. $h(x) = 3^{x+1}$ $\qquad$ d. $g(x) = 3^{x-1}$

e. $f(x) = 2^x - 1$ $\qquad$ f. $g(x) = 2 - 2^x$

g. $h(x) = 1 + 2^{-x}$ $\qquad$ h. $h(x) = 1 - 4^{-x}$

i. $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ $\qquad$ j. $f(x) = (1{,}5)^{1-x}$

Soluciono problemas

6. Al estudiar muchos fenómenos físicos, la función $f(x) = e^x$, donde e es un número irracional que se aproxima al valor 2,71828..., se denomina función exponencial natural.

Elaboro una tabla de valores y la gráfica de $f(x) = e^x$ y de $f(x) = e^{-x}$.

7. Realizo aproximaciones con la calculadora para encontrar el valor del número irracional e.

a. Demuestro que $e \approx \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, donde $n \in \mathbb{N}$. Completo la tabla:

n	1	2	3	4	5	...
$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$	2	$\left(\frac{3}{2}\right)^2$				

Tabla 6.2

¿Para cuál valor de n e es aproximadamente 2,716923?

b. Pruebo que otra aproximación para e está dada por $e \approx 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{n!}$, en donde $n! = n(n-1)(n-2)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$.

c. ¿Cuál de los dos métodos proporciona la mejor aproximación?

8. La función $f(x) = e^{-kx}$, en el análisis de tumores cancerígenos, representa la fracción de tumor que sobrevive al realizar una radioterapia de x unidades, si se conoce el tamaño promedio k del tumor.

¿Cuál es la fracción de tumor que sobrevive si se sabe que su tamaño es 25 mm y la dosis de radioterapia es 30 unidades?

9. Tomo una hoja de papel cuyo espesor es 0,004 mm; si la doblo 8 veces, ¿cuál es el espesor de la pila de papel que resulta? Si fuera posible doblarla muchísimas veces, ¿cuál es el modelo que representa este crecimiento?

10. La presión atmosférica P, en libras por pulgada cuadrada, depende de la altura h, en pies, y está dada por la fórmula $P = (14{,}7)2^{-0{,}000055555h}$. ¿Cuál es la presión a 15 000 pies de altura?

Desempeños: grafica funciones exponenciales.
Identifica la función exponencial y sus características.
Analiza situaciones que se representan con modelos exponenciales.

Tema 2

Función logarítmica

Tomando la población bacteriana de la que se habló en la parte introductoria del tema anterior, si se comienza con 20 bacterias, ¿cuánto tiempo debe trascurrir para obtener 550 bacterias?

En el modelo $F(t) = 20 \cdot (2^t)$, $F(t) = 550$

Luego: $550 = 20(2^t)$

$27{,}5 = 2^t$

Esta es una expresión exponencial que no permite despejar t.

El problema se reduce a encontrar el valor de un exponente que llamaremos logaritmo.

Recurrimos a una expresión que nos permita hallar el valor de t fácilmente:

$\log_2 27{,}5 = t$ (Que se lee: el logaritmo en base 2 de 27,5 es igual a t)

Sea a un número real que cumple $a > 0$, $a \neq 1$.

Entonces la función:

$y = \log_a x$, donde $a^y = x$, $x \in R^+$, se llama **función logarítmica.**

De la definición se deduce que el dominio de la función logarítmica es el conjunto de los R^+, y el rango es R. Para nuestro caso particular, la función que describe el problema planteado es:

$$t(F) = \log_2\left(\frac{F}{20}\right)$$

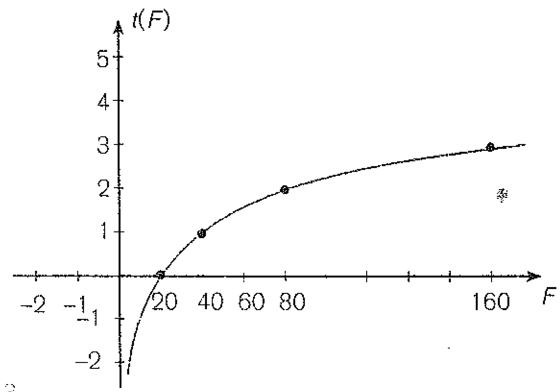


Fig. 6.3

Taller de competencias

1. Dado que $y = \log_a x$ si y sólo si $a^y = x$, completo la tabla.

Forma logarítmica	Forma exponencial
$\log_2 16 = 4$	$2^4 = 16$
	$2^x = y$
	$10^x = 1000$
$\log_a (x + 1) = y$	
$\log_{10} 0{,}001 = -3$	
	$x^{\frac{5}{2}} = 32$

Tabla 6.3

2. Haciendo uso de la calculadora, completo la tabla y trazo la gráfica de cada función logarítmica.

a. $f(x) = \log_3 x$

x	$\frac{1}{9}$					
$f(x)$	-2					

Tabla 6.4

b. $f(x) = \log_{10} x$

x			1		
$f(x)$			0		

Tabla 6.5

c. $f(x) = \log_e x$

x				1	
$f(x)$				0	

Tabla 6.6

Nota: $f(x) = \log_{10} x$ se llama función logaritmo común y se denota $f(x) = \log x$.

$f(x) = \log_e x$ se llama función logaritmo natural y se denota $f(x) = \ln x$.

3. La función logarítmica $f(x) = \log_a x$ es la función inversa de la función exponencial de base a $f(x) = a^x$. La figura 6.4 muestra la función $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ y su inversa la función $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$.

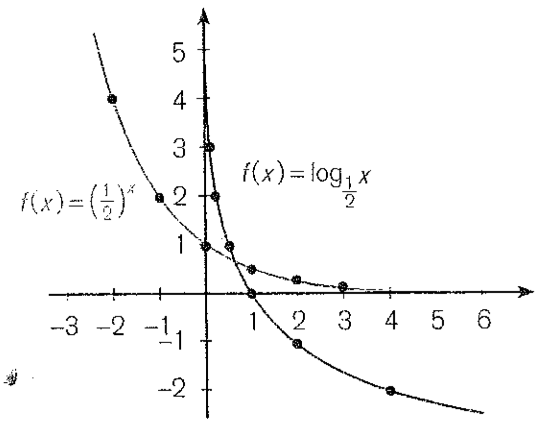


Fig. 6.4

Grafico, en el mismo plano cartesiano, la pareja de funciones dadas, analizo y determino:

- El crecimiento o decrecimiento.
- Los intersectos con el eje X y con el eje Y, si existen.
- El dominio y el rango.

a. $\begin{cases} f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x \\ g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x \end{cases}$ b. $\begin{cases} f(x) = 4^x \\ g(x) = \log_4 x \end{cases}$

c. $\begin{cases} f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x \\ g(x) = \log_{\frac{1}{4}} x \end{cases}$

4. Trazo la gráfica de cada una de las siguientes funciones:

a. $f(x) = \log x^2$ b. $g(x) = \log\sqrt{x}$

c. $h(x) = \log(x - 1)$ d. $g(x) = 1 + \log x$

e. $f(x) = \ln(x + 2)$ f. $g(x) = 2 - \log x$

Soluciono problemas

5. El número de decibeles, es decir, la intensidad del sonido (S) está dada por la función $S(I) = 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$, donde I es la potencia del sonido en watt por centímetro cuadrado e I_0 es una constante que representa la potencia del sonido justo por debajo del umbral de audición, aproximadamente 10^{-16} watt por centímetro cuadrado.

a. Hallo el número de decibeles durante una conversación normal si la potencia $I = 3{,}16 \times 10^{-10}$ watt.

b. Hallo el número de decibeles durante el paso de una tractomula si la potencia $I = 10^{6,5}$ watt.

c. Hallo el número de decibeles si el sonido se duplica cuando pasan dos tractomulas al mismo tiempo.

d. Determino el número de decibeles cuando escucho *heavy* metal si la potencia $I = 10^{4,2}$ watt.

6. La magnitud M de un temblor de tierra depende de la amplitud A de sus ondas de choque: $M(A) = \log\left(\frac{A}{A_0}\right)$, donde A_0 representa la amplitud de un temblor normal. (Escala de Richter.)

¿Cuál es la magnitud, en la escala de Richter, de un terremoto que tiene 100 000 veces la intensidad del terremoto normal?

7. Sea f la función definida por $f(x) = \frac{\log x}{x}$.
Esbozo la gráfica de f, y digo en qué subconjuntos de R es creciente y en cuáles decreciente.

Desempeños: Identifica la función logarítmica y sus características.
Grafica funciones logarítmicas.
Analiza y resuelve situaciones que se representan mediante modelos logarítmicos.

Tema 3

Propiedades de las funciones

De la gráfica de la función exponencial, ilustrada en la figura 6.5, tenemos:

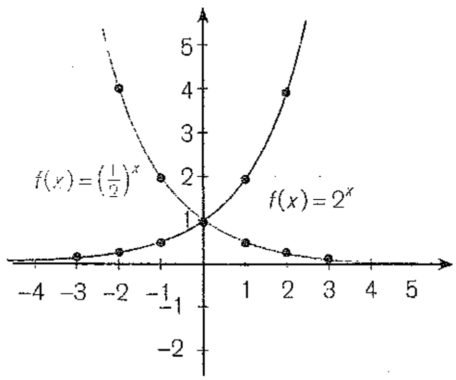


Fig. 6.5

- $f(x) = a^x$, con $a > 1$ es creciente y con $0 < a < 1$ es decreciente, por tanto, para x, y, números reales distintos, a^x y a^y nunca son iguales.

- En $f(x) = a^x$ y $g(x) = b^x$, $f(x) = g(x)$ sólo cuando $x = 0$.

1. Si $a^x = a^y$, entonces $x = y$.

2. Si $a^x = b^x$, para todo $x \neq 0$, entonces $a = b$.

De la gráfica de la función logarítmica, ilustrada en la figura 6.6, podemos decir:

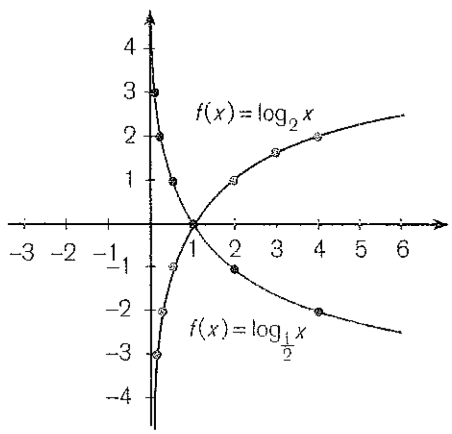


Fig. 6.6

- $f(x) = \log_a x$, con $a > 1$ es creciente y con $0 < a < 1$ es decreciente, por tanto, para x, y, números reales distintos, $\log_a x$ y $\log_a y$ nunca son iguales.

- Para $f(x) = \log_a x$ y $g(x) = \log_b x$, $f(x) = g(x)$ sólo cuando $x = 1$.

1. Si $\log_a x = \log_a y$, entonces $x = y$.

2. Si $\log_a x = \log_b x$, con $x \neq 1$, entonces $a = b$.

Ejemplo

Resolvamos las ecuaciones.

a. $32 = (x + 2)^5$

b. $\log_{x+1} = \log_2 8$

Solución

a.
$$32 = (x + 2)^5$$
$$2^5 = (x + 2)^5$$
$$2 = x + 2$$
$$0 = x$$

b.
$$\log_{x+1} = \log_2 8$$
$$x + 1 = 2$$
$$x = 1$$

Taller de competencias

1. Resuelvo cada ecuación para x.

a. $3^{x+1} = 3^5$
b. $2^{4x} = 8^{x-1}$
c. $4^{2x-1} = 64^{x-2}$
d. $5^{2(x-3)} = 25$
e. $e^{2x-1} = e^3$
f. $6^{x^2+5x} = 6^6$
g. $10^{x^2+2x} = 1$
h. $1 = (e^2)^{x-3}$
i. $1000^{x-\frac{1}{2}} = \frac{1}{100}$
j. $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{x+3}{x-1}} = \frac{1}{125},\ x \neq 1$

2. Resuelvo cada ecuación para y.

a. $(2y+3)^x = (y+1)^x$
b. $(y-2)^x = \left(\frac{3y}{4} - 5\right)^x$
c. $\left(3y - \frac{1}{2}\right)^a = (-y-6)^a$
d. $\left(\frac{y+5}{2}\right)^x = \left(\frac{2y-1}{4}\right)^x$
e. $y^{\frac{3}{2}} = 27$
f. $(16y)^5 = 243$

3. Recuerdo que $\log_a x = y$ si y sólo si $a^y = x$; observo el ejemplo y resuelvo cada ecuación.

Ejemplo: el valor de x en $\log_5 (x+1) = 3$ equivale a $5^3 = x+1$, por tanto; $x = 124$.

a. $\log_5 x = -1$
b. $\log_6 1296 = y$
c. $\log_3(x^2 + x + 1) = 1$
d. $\log\left(\frac{2x-3}{4}\right) = 2$
e. $\log_4 \frac{1}{16} = y$
f. $\log_{2x} 64 = 3$
g. $\log_{x-1} 1 = 2$
h. $\ln x = 3$
i. $\ln(x+1) = \frac{1}{2}$
j. $\log_x \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

4. Tengo presente que $\log_x x = 1$ y $\log_x 1 = 0$ y calculo:

a. $\log_8 8$
b. $\log_8 1 + \log_5 1 - \log_2 2$
c. $(\log 10)^3 + (\log 1)^2 + \log 10$
d. $(4 \log_5 5)^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{4}(25 \log_6 6)^{\frac{1}{2}}$
e. $(\ln e + \ln 1)^{-2} + (3 \ln e)^{-3}$

5. Resuelvo cada ecuación para x.

a. $\log_6 (2x-1) = \log_6 23$
b. $\log_{x+2} 20 = \log_{3x} 20$
c. $\ln\left(\frac{1}{2}x - 3\right) = \ln(1-x)$
d. $\log_{x^2-x} 5 = \log_{12} 5$
e. $\log_{2x-1} 3 = \log_{x-\frac{3}{4}} 3$
f. $\log_2 7x - 2x^2 = \log_2 6$

Soluciono problemas

6. Se define una operación según los vértices del triángulo en la figura 6.7 así: $a^b + c$.

Calculo:

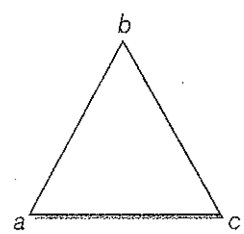


Fig. 6.7

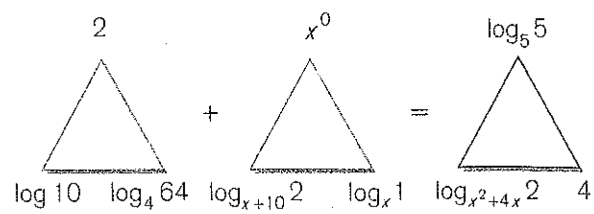


Fig. 6.8

Desempeños: conoce las propiedades básicas de las funciones exponencial y logarítmica. Resuelve ecuaciones exponenciales y logarítmicas simples.

Tema 4

Propiedades de los logaritmos

Para realizar cálculos con logaritmos, utilizamos básicamente tres propiedades:

Si x, y son números reales, $a \in R^+$, $a \neq 1$ y $n \in R$, entonces:

1. $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
2. $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
3. $\log_a x^n = n \log_a x$

Ejemplo

a. Calculemos log 36 sabiendo que log 2 = 0,3010 y log 3 = 0,4771.

b. Escribamos la expresión $\log_a \dfrac{3\sqrt{x}}{x^2-1}$ en términos de logaritmos simples.

c. Escribamos como un logaritmo simple la expresión $\ln x + 3(\ln x^2 - \ln y)$.

Solución

a. $\log 36 = \log(2^2 \cdot 3^2) = \log 2^2 + \log 3^2 = 2\log 2 + 2\log 3 = 0{,}602 + 0{,}954 = 1{,}556$

b. $\log_a \dfrac{3\sqrt{x}}{x^2-1} = \log_a 3\sqrt{x} - \log_a(x^2-1) = \log_a 3 + \log_a \sqrt{x} - \log_a(x^2-1)$

$= \log_a 3 + \dfrac{1}{2}\log_a x - \log_a(x^2-1)$

c. $\ln x + 3(\ln x^2 - \ln y) = \ln x + (3\ln x^2 - 3\ln y) = \ln x + (\ln x^6 - \ln y^3)$

$= \ln x + \ln\dfrac{x^6}{y^3} = \ln\left(x \cdot \dfrac{x^6}{y^3}\right) = \ln\dfrac{x^7}{y^3}$

Taller de competencias

1. Calculo cada logaritmo: (log 2 = 0,3010, log 3 = 0,4771 y log 4 = 0,6020).

a. $\log 6$

b. $\log\sqrt{24}$

c. $\log\dfrac{2}{3}$

d. $\log 12^{\frac{1}{3}}$

e. $\log 48 + 3\log 60$

f. $\log\dfrac{3}{4} - (\log\dfrac{1}{2})^{-2}$

g. $3^{\log\frac{3}{2}} + \log_2 2$

h. $\log\left(\dfrac{16}{3}\right)^2 - \dfrac{1}{2}\log\dfrac{4}{9}$

i. $\log(4 \times 10^{-3}) + \log\left(\dfrac{3 \times 10^{-2}}{2}\right)$

j. $\log\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right) - \log\sqrt{6}$

2. Determino la veracidad de cada expresión haciendo uso de la calculadora.

a. $\log_a (x+y) \neq \log x + \log y$

b. $\log_a (x-y) \neq \log x + \log y$

c. $\log_a \frac{x}{y} \neq \frac{\log_a x}{\log_a y}$

d. $\log_a x^n \neq (\log_a x)^n$

e. $\log_a x + \log_b y \neq \log_a xy$

f. $\log_a x - \log_b y \neq \log_a \frac{x}{y}$

3. Escribo cada expresión en términos de logaritmos simples.

a. $\log_2\left(\frac{x^2(x-1)}{3(x+1)}\right)$ **b.** $\log_3\left(\sqrt[3]{x^2y}\cdot\sqrt{xy^2}\right)$

c. $\log_a\left(\frac{3x^2y}{\sqrt{xy}}\right)$ **d.** $\log_b\left(\frac{3z}{4\sqrt{x^2+1}}\right)$

e. $\log_6\left[\frac{(x^2-2)(x+1)}{x\sqrt{x-1}}\right]$

f. $\log_a\left(\frac{2x^3y^{\frac{1}{3}}}{z^{-\frac{1}{4}}}\right)$

4. Escribo cada expresión como un logaritmo simple.

a. $3\log x + \frac{1}{2}\log x^2 - 4\log x^3$

b. $2\ln[x(x+1)] - \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$

c. $\frac{1}{3}\log_a \frac{x}{y} + \log_a\left(\frac{x^2}{y}\right) - \log_a \frac{1}{y}$

d. $\log\sqrt{x^2+3x+2} - \log\sqrt{x^2+2x+1}$

e. $2\log\sqrt{x+1} - 2\log\sqrt{x^2-1}$

f. $-\frac{5}{4}\left(3\ln x + 5\ln\frac{1}{x}\right) - 3\ln\frac{x}{e}$

5. Observo el ejemplo y encuentro el logaritmo de cada número.

Ejemplo: calculemos log 0,00034.

- Escribimos el número 0,00034 en notación científica: $0{,}00034 = 3{,}4 \times 10^{-4}$.
- $$\begin{aligned}\log 0{,}00034 &= \log(3{,}4\times 10^{-4})\\ &= \log 3{,}4 + \log 10^{-4}\\ &= \log 3{,}4 - 4\log 10 = \log 3{,}4 - 4\\ &= 0{,}5314 - 4 = -3{,}4685\end{aligned}$$

Si x es un número real positivo, escrito en la forma $x = m \cdot 10^k$, donde $1 \leq m < 10$ y $k \in Z$, entonces:

$\log x = k + \log m$.

k es llamada la característica del logaritmo de x, y la expresión $\log m$ es llamada mantisa.

a. log 45 323 **b.** log 0,002405

c. log 323 822 **d.** log 432,93

e. log 0,346 **f.** log 52,801

g. log 0,007001 **h.** log 46 379,56

6. Propiedad del cambio de base. Si a, b y x son números positivos con $a \neq 1$ y $b \neq 1$, entonces $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$. Esta fórmula permite encontrar los logaritmos de los números en el sistema de base b si se conocen los logaritmos de base a.

En particular:

1) Si $a = b = e$, entonces $\log_b x = \frac{\ln x}{\ln b}$.

2) Si $a = e$ y $b = 10$, entonces $\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$.

3) Si $a = 10$, entonces $\log_b x = \frac{\log x}{\log b}$.

Utilizo la propiedad del cambio de base y calculo:

a. $\log_5 20$ **b.** $\log_8 17$

c. log 348 **d.** ln 3,9

e. $\log_7 0{,}0023$ **f.** $\log_9 252{,}5$

g. $e^{\ln 5}$ **h.** $e^{\log 200}$

i. $e^{\ln 0{,}4}$ **j.** $e^{\ln 1}$

Desempeños: Identifica las propiedades de los logaritmos.
Utiliza las propiedades de los logaritmos para el cálculo y la simplificación de expresiones.

Tema 5

Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

Para resolver ecuaciones exponenciales o logarítmicas debemos utilizar los siguientes recursos:

1. Las propiedades de los logaritmos.
2. Si la ecuación es exponencial, se extraen logaritmos a ambos lados de la ecuación.
3. Si la ecuación es logarítmica, se convierte a la forma exponencial equivalente.

Ejemplo

Resolvamos las ecuaciones: **a.** $3^{3x}\cdot 3^{1-2x}=40$ **b.** $\log x+\log 4-\log(x-1)=1$

Solución

a. Ecuación exponencial

$$\begin{aligned}
3^{3x}\cdot 3^{1-2x} &= 40\\
3^{3x+1-2x} &= 40\\
3^{1+x} &= 40\\
\log 3^{1+x} &= \log 40\\
(1+x)\log 3 &= \log 40\\
1+x &= \frac{\log 40}{\log 3}\\
x &= \frac{\log 40}{\log 3}-1\\
x &= 2{,}35776
\end{aligned}$$

b. Ecuación logarítmica

$$\begin{aligned}
\log x+\log 4-\log(x-1) &= 1\\
(\log x+\log 4)-\log(x-1) &= 1\\
\log(x\cdot 4)-\log(x-1) &= 1\\
\log\frac{4x}{x-1} &= 1\\
\frac{4x}{x-1} &= 10^1\\
4x &= 10x-10\\
10 &= 6x\\
\frac{5}{3} &= x
\end{aligned}$$

Taller de competencias

1. Resuelvo las siguientes ecuaciones exponenciales.

a. $5^x=4$

b. $3^{2x}=2$

c. $4^{x+1}=5$

d. $2^x=\sqrt{\frac{3}{4}}$

e. $3^{2x}\cdot 5^{4x-1}=20$

f. $3^x\cdot 5^{x-1}=32\cdot 2^x$

g. $3^{2x+1}=2^{3x-1}$

h. $3^{-x}=8$

i. $5^{2x}\cdot 3^{3x+1}=2025$

j. $e^x=25$

k. $3^{x+1}3^{2x+3}=20\cdot 3^x$

l. $2^x+2^{x+1}+2^{x+2}=3^x+3^{x+1}+3^{x+2}$

2. Resuelvo las siguientes ecuaciones logarítmicas.

a. $\log x + \log 5 = 3$

b. $\log 2x + \log 3 = 4$

c. $\log_x 2x - 1 = 2$

d. $\log (x - 16) = \log 105 - \log x$

e. $\log\left(1 - \sqrt{x + 2}\right) = \frac{1}{2}\log(3x + 7)$

f. $\log (x^2 - 7x + 110) = 2$

g. $\log x + \log (x - 5) = \log 4$

h. $\log (3x - 1) - \log (5x + 2) = 1$

i. $\log (2x + 1) - \log 2 = \log (3 - x)$

j. $\log x + \log (x + 1) = 2 \log (1 - x)$

k. $\log 2 + 2 \log (3x - 2) - \log 13 = \log (6x - 4)$

l. $\log (x^2 + 3) - 2 \log x - \log 2 = \log 4 - \log (x^2 - 3)$

3. En cada fórmula despejo la variable indicada.

a. $P = \frac{S}{(1 + i)^n}$; n

b. $Q = Re^{-kt}$; t

c. $I = 30\, e^{-\frac{Rt}{L}}$; L

d. $f = 1 - 5^{-\frac{t}{2N}}$; t

e. $S = S_0 (1 + C)^r$; r

f. $R = d + C \log A$; A

Soluciono problemas

4. En una empresa de publicidad se estima que el número N de personas informadas, después de t semanas de haber lanzado un comercial por televisión, está dado por $N = \frac{25}{3 \cdot 2^{-\frac{5}{2}t}}$.

a. Despejo t en la ecuación.

b. ¿Cuántas personas se habrán informado después de 3 semanas?

c. Si se informó a 520 000 personas, ¿cuántas semanas trascurrieron después del lanzamiento del comercial?

5. La ley de enfriamiento, (de Newton), está dada por la función $F(t) = x + (y - x)10^{-kt}$, donde t es el número de minutos que trascurren cuando un objeto de temperatura y está expuesto a una temperatura x del aire o del agua. k es una constante positiva.

a. Despejo t de la ecuación.

b. Si $k = 1$, ¿qué temperatura tiene, después de 2 minutos, un cuerpo con temperatura de 60 °C que es sumergido en agua a 15 °C?

c. Para $k = 2$, ¿cuánto tiempo se debe tener un cuerpo con 60 °C, expuesto a un aire de 10 °C, para que su temperatura baje a 20 °C?

6. La presión atmosférica a la cual está expuesto un cuerpo a una altura h, en pies, es:

$$P = 14{,}7\, e^{-0{,}000055h}$$

a. Expreso h en términos de P.

b. ¿Cuál es la presión a que está expuesto un cuerpo a 150 pies de altura?

c. Si la presión es 3,5 unidades, ¿a qué altura se encuentra el cuerpo?

7. Si la temperatura del aire es 10 °C, la temperatura V de la lava de un volcán es:

$V = 10 + 740(10^{-0{,}08t})$ después de t horas. ¿Después de cuántas horas la temperatura de la lava de un volcán será 150 °C?

Desempeños: encuentra la solución de una ecuación exponencial o logarítmica. Resuelve situaciones que involucran fórmulas con expresiones exponenciales o logarítmicas.

Matemática recreativa

1. El japonés Seki Kowa, un matemático del siglo XVII, creó el "círculo mágico". El círculo mágico se caracteriza porque cada diámetro en él tiene la misma suma.

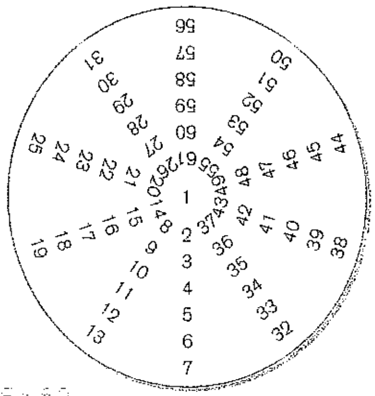


Fig. 6.9

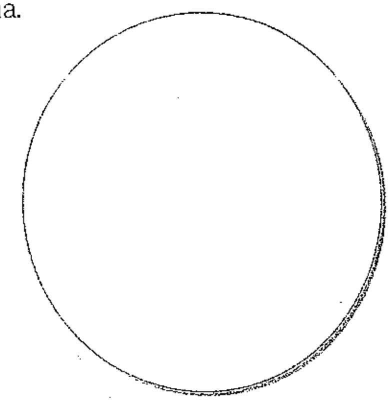


Fig. 6.10

a. Utilizo el círculo mágico para hallar la suma de los primeros 61 enteros positivos.

b. Construyo el círculo mágico que me permita calcular la suma de los primeros 81 enteros positivos.

c. Amplío el círculo mágico y encuentro una expresión general que me permita calcular sumas similares a las de los puntos **a.** y **b.**

2. La medida de acidez o alcalinidad de un material se llama *pH*. Si un material tiene un *pH* de 7 es neutro pero si tiene menos de 7 es un ácido. El *pH* de un material está dado por la fórmula $pH = \log\frac{1}{H}$, donde H es la concentración de iones de hidrógeno en moles por litro. La tabla muestra el *pH* de algunas frutas. Escribo una situación de la vida cotidiana que involucre esta información y le doy solución.

Frutas	*pH*
Manzana	3,1
Uvas	4,0
Limones	2,3
Naranjas	3,5
Peras	3,8

Tabla 6.7

Evalúo mis competencias

Con los siguientes ejercicios, afianzo los desempeños que he superado y refuerzo aquellos que están por superar.

1. Grafico cada función.

a. $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ b. $g(x) = 3^{x+2}$

c. $S(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x + 1$ d. $f(x) = \log(x+1)$

e. $f(x) = -2 + \log x$ f. $f(x) = \ln(x+1)$

g. $h(x) = -\log x$ h. $h(x) = \log(0{,}4)^x$

2. Cambio cada expresión a forma exponencial o a forma logarítmica, según el caso.

Forma logarítmica	Forma exponencial
	$3^{-4} = \frac{1}{81}$
$\ln x = 2$	
	$e^{-\frac{1}{2}} = a$
$\log a - \log b = 1$	
	$81^{\frac{3}{4}} = 27$
$\log_a \frac{y}{x} = M$	
$\log_2(x-3) = z$	

Tabla 6.8

3. Calculo:

a. $\ln\frac{3}{4}$ b. $(\log_6 6)^2 + \log_6 2$

c. $\log_3 2 - \log_2 3$ d. $(\log_5 7)^{\frac{1}{2}} + 3\log_2 7$

e. $\log 63$ f. $\frac{1}{2}\ln\frac{3}{4} + \ln\frac{4}{3}$

g. $\log_2 \sqrt[3]{3} + \log_3 \sqrt{2}$ h. $\log_3 \frac{8}{\log_8 3}$

4. En la demostración, escribo la propiedad que justifica cada paso.

Demuestro que $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$.

Dado que $\log_a x = u$ y $\log_a y = v$:

- $a^u = x$; $a^v = y$ ____________
- $a^u \cdot a^v = xy$ ____________
- $a^{u+v} = xy$ ____________
- $\log_a xy = u + v$ ____________
- $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ ____________

5. Demuestro las siguientes propiedades.

(*Sugerencia*: observo el ejercicio anterior.)

a. $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

b. $\log_a x^n = n\log_a x$

6. Resuelvo cada ecuación para x.

a. $(2x+1)^a = (3x)^a$ b. $2^{-x} = 32$

c. $25^x = \frac{1}{5}$ d. $9^{-2x} = \frac{1}{81}$

e. $8^x \cdot 4^{3x} = 16^{x+5}$ f. $a^{4-x} = a^2$

g. $8^{\sqrt{x+1}} = 64$ h. $4x^{2-6} = 64$

i. $a^{15} \cdot a^{(x-1)(5x-1)} = a^{x-8} \cdot a^{(x-2)(5x-7)}$

j. $a^{2x-1} + a^{2x+1} = a^3 + a^5$

(*Sugerencia*: factorizar cada miembro de la ecuación.)

7. Resuelvo cada ecuación.

a. $\log 2x - \log(2x-1) = 3\log 2 - \log 7$

b. $2\log(x-1) = 1 - \log 5$

c. $\log\sqrt{x+1} + \log\sqrt{x-1} = 2 - \log 2$

d. $\log_3 x - \log_9 x = 4$

e. $\log_2 x + 3\log_8 \sqrt{x} = \frac{3}{2}$

8. Escribo cada expresión en términos de logaritmos simples.

a. $\log\left(\frac{(x+1)x^3}{x-1}\right)^{-\frac{1}{2}}$ ______

b. $\log\left(\frac{z\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[2]{x^3}}{y}\right)$ ______

9. Escribo cada expresión como un solo logaritmo.

a. $\frac{1}{3}\left[\log_a x + \log_a(x+1) - \log_a(x+1)^2\right]$

b. $\log\sqrt{2x^2-3} - 2\log(x^2-1) + 3\log 2$

10. Calculo:

a. $\log 0{,}03407$ b. $\log 6345$

c. $\log_7 0{,}008$ d. $\log_8 345{,}2$

Soluciono problemas

11. En Bogotá una persona que tenga influenza puede contagiar a N personas al cabo de t días, según la función $N(t) = \frac{10\,000\,e^t}{e^t + 10\,000}$.

¿Cuántos días pasaron si una persona contagió a otras 25?

12. El hindú Ramanujan hizo una muy precisa aproximación del valor de π. Compruebo que:

$$\pi \approx \frac{12}{\sqrt{130}}\ln\left(\frac{(3+\sqrt{13})(2+\sqrt{5})}{\sqrt{2}}\right)$$

13. Las bacterias en un cultivo crecen en función del tiempo, según la función $N(t) = 400(2)^{\frac{1}{3}t}$.

a. ¿Cuántas bacterias habrá después de 2 horas y media?

b. Si se pasó de 400 a 2000 bacterias, empezando a las 8:00 a. m., ¿a qué hora se alcanzan las 2000 bacterias?

14. Se contaba con 100 animales de una especie que estaba en vías de extinción; en un lago se dejaron libres los 100 animales, esperando tener en el futuro 1000 de ellos. Si el número N de animales, después de t años, se modela según la función $N(t) = \frac{1000}{1 + 8e^{-0{,}15t}}$,

a. ¿cuántos animales habrá después de 8 años?

b. ¿Cuánto tiempo pasó si hoy la población es de 250 animales?

Autoevaluación

	Bajo	Básico	Alto	Superior
Identifico las funciones exponencial y logarítmica.				
Represento gráficamente una función exponencial o una función logarítmica.				
Utilizo propiedades de las funciones exponencial y logarítmica para el cálculo y la simplificación.				
Resuelvo ecuaciones exponenciales y logarítmicas.				
Interpreto ecuaciones exponenciales y logarítmicas que representan fenómenos.				

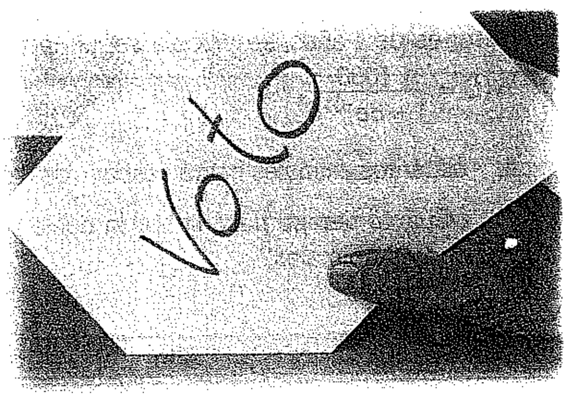
Prueba Saber

Encuentra la respuesta correcta entre las opciones A, B, C y D, y márcala en la hoja de respuestas, rellenando completamente el círculo correspondientes.

Contesta las preguntas 1 a 4 de acuerdo con la siguiete información.

A nivel nacional se pretende analizar las preferencias de la población por *x*, *y* o *z* candidatos a la presidencia de la República, en las próximas elecciones. Para llevar a cabo dicho análisis se realizará un muestreo con ciertas condiciones y requisitos, de tal manera que se constituya en un procedimiento práctico, económico y rápido para generalizar las conclusiones obtenidas a través de la muestra, a toda la población. Previamente se establecerán ciertos límites de confiabilidad respetando las normas estadísticas que recurren al cálculo de probabilidades.

Así, una muestra se toma de la población objetivo aleatoriamente cuando se selecciona probabilísticamente, siguiendo para ello alguno de los tipos de muestreo. La muestra se toma no aleatoriamente cuando se selecciona la muestra por criterio subjetivo, es decir, no probabilísticamente.



1. El hecho de obtener una muestra de la población colombiana para conocer las preferencias por *x*, *y* o *z* candidatos a la presidencia implica que:

   A. Se realizarán operativos de gran magnitud para obtener la información.

   B. Se entregarán resultados que caracterizan a la población en el aspecto analizado.

   C. Se ampliarán los recursos económicos del estudio si no se realiza el muestreo.

   D. El estudio tomará más tiempo en trabajo de campo.

2. El muestreo que se realiza para el análisis propuesto, entregará resultados confiables, excepto cuando:

   A. Se estratifique la población y se seleccionen los elementos de cada estrato.

   B. Cada elemento de la población tenga la misma probabilidad de ser incluido en la muestra.

   C. Se escojan los elementos de la población por criterio subjetivo del investigador.

   D. Se enumeren todos los elementos de la población objetivo, sacando al azar los de la muestra sin que puedan volver a ser elegidos.

3. Un procedimiento práctico, económico y rápido que lleva a tener la información a generalizar es:

   A. Contar en cada hogar las personas mayores de 18 años y preguntarles por sus candidatos favoritos.

   B. Colocar un encuestador cada cuatro manzanas de las principales ciudades del país, para preguntar la preferencia a todas las personas mayores de 18 años.

   C. Tomar el directorio telefónico de las ciudades seleccionadas probabilísticamente, para escoger aleatoriamente las personas que se van a encuestar.

   D. Seleccionar algunas ciudades y utilizar la información de encuestas anteriores.

4. La encuesta para detectar las preferencias de los colombianos por x, y o z candidatos debe contemplar:

   A. Preguntas claras y de fácil interpretación.

   B. Información de los tres candidatos.

   C. Gráficas con resultados de encuestas anteriores.

   D. El método de selección de la muestra.

Contesto las preguntas 5 y 6 de acuerdo con la siguiente información.

La población mundial en los últimos diez años ha crecido a un ritmo del 2% anual.

5. Si la población mundial al iniciar el año 2001 era P, la población mundial al iniciar el año 2101 será:

   A. Un poco más de 7 veces P, porque $(1{,}02)^{100} \approx 7{,}25$.

   B. 725% P porque $(1+2\%)^{100} \approx 725\%$.

   C. 200% P porque en cada año aumenta 2% y son 100 años.

   D. $P + 50\%$ porque en 100 años sólo aumentará el 50%.

6. El tiempo en años que tardará la población mundial en doblarse será:

   A. Aproximadamente 35 años porque $(1{,}02)^{35} = 1{,}999889$.

   B. Entre 30 y 40 años porque $(1{,}02)^{30} < 2 < (1{,}02)^{40}$.

   C. 100 años porque doblarse equivale a convertirse en 200% P.

   D. 50 años porque doblarse equivale a crecer 100%.

   NOTA: El valor de P al finalizar el año 2000 era aproximadamente 6200 millones de personas.

Formato de respuestas

1.	A	B	C	D	4.	A	B	C	D
2.	A	B	C	D	5.	A	B	C	D
3.	A	B	C	D	6.	A	B	C	D

Unidad 7

Sucesiones y progresiones

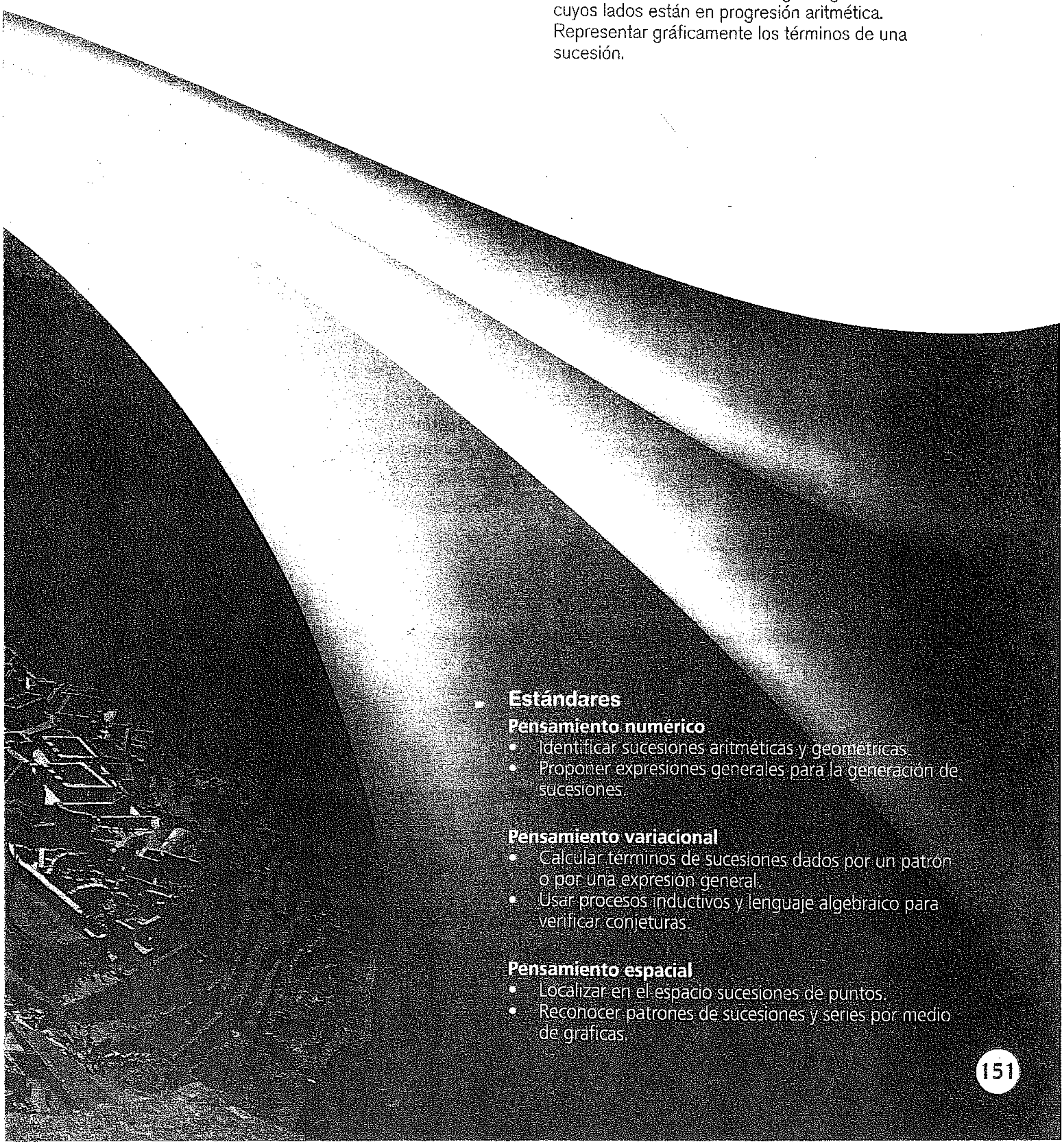
Procesos: El desarrollo de esta unidad me hará competente para:

Resolución de problemas
Resolver problemas que surgen en matemáticas y en otras áreas, utilizando los conceptos de series y sucesiones, progresiones e interés compuesto.

Razonamiento lógico
Encontrar la formula general para el desarrollo de sucesiones.
Identificar patrones en sucesiones y series.

Comunicación
Justificar si una sucesión es aritmética o geométrica.
Elaborar conjeturas sobre el comportamiento de los términos de una sucesión o sobre el comportamiento de los términos de una sucesión o sobre el comportamiento de una serie.

Conexiones
Proponer condiciones sobre figuras geométricas cuyos lados están en progresión aritmética.
Representar gráficamente los términos de una sucesión.



Estándares

Pensamiento numérico
- Identificar sucesiones aritméticas y geométricas.
- Proponer expresiones generales para la generación de sucesiones.

Pensamiento variacional
- Calcular términos de sucesiones dados por un patrón o por una expresión general.
- Usar procesos inductivos y lenguaje algebraico para verificar conjeturas.

Pensamiento espacial
- Localizar en el espacio sucesiones de puntos.
- Reconocer patrones de sucesiones y series por medio de graficas.

Tema 1

Sucesiones

El salario mensual de una persona, mientras dura el período de prueba, es \$ 600 000; si ella demuestra capacidades para asumir el cargo durante el primero y los siguientes años, recibirá un aumento de \$ 105 000 cada año. ¿Cuánto recibirá mensualmente durante el cuarto año de trabajo?

Año	Salario mensual en miles de \$	
1o. $\rightarrow S_1 =$	$600 + 105$	$= 600 + (105 \times 1) = 705$
2o. $\rightarrow S_2 =$	$600 + 105 + 105$	$= 600 + (105 \times 2) = 810$
3o. $\rightarrow S_3 =$	$600 + 105 + 105 + 105$	$= 600 + (105 \times 3) = 915$
4o. $\rightarrow S_4 =$	$600 + 105 + 105 + 105 + 105$	$= 600 + (105 \times 4) = 1020$
⋮		
no. $\rightarrow S_n =$	$600 + \underbrace{105 + \ldots + 105}_{n \text{ veces}}$	$= 600 + 105n$

Observemos que la situación anterior se representa mediante la función $\{S_n\}$, donde el salario mensual durante cada año depende del número de años trabajados. Así, el cuarto año ganará \$ 1 020 000 y el enésimo año ganará \$ 600 000 + 105 000n.

Una función S cuyo dominio es el conjunto de todos los enteros positivos se denomina sucesión infinita. Su recorrido es el conjunto de los números reales. Por brevedad, se usa la notación $\{S_n\}$ para indicar la sucesión cuyo término enésimo o término general es S_n.

Cada elemento de $\{S_n\}$ se denomina término de la sucesión y

$$\{S_n\} = \{S_1, S_2, S_3, S_4, \ldots\}.$$

Ejemplo

Para el caso anterior:

- $\{S_n\} = \{705, 810, 915, 1020\ldots\}$
- 1020 es el cuarto término.
- El término enésimo es: $S_n = 600 + 105n$.

Taller de competencias

1. Escribo los seis primeros términos de la sucesión infinita cuyo enésimo término está dado por:

a. $S_n = n + 1$ ____________ **b.** $S_n = \dfrac{n+1}{n}$ ____________ **c.** $S_n = \dfrac{1}{n}$ ____________

d. $S_n = \dfrac{2n-1}{2}$ ____________ **e.** $S_n = \dfrac{1}{2n} - 1$ ____________ **f.** $S_n = n^2$ ____________

g. $S_n = \dfrac{n-1}{n^2}$ ____________ **h.** $S_n = \dfrac{3n+1}{3n-1}$ ____________ **i.** $S_n = 2^n$ ____________

j. $S_n = (-1)^n$ ____________ **k.** $S_n = -3n^3$ ____________ **l.** $S_n = \dfrac{1}{4n-1}$ ____________

2. Se llama sucesión finita a una función S cuyo dominio es un subconjunto finito de N.
Observo el ejemplo y, para cada sucesión finita $\{a_n\}$ cuyo enésimo término es a_n, encuentro sus términos si $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Ejemplo: $a_n = (n-1)^2$.

Si $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ se tiene:

$\{a_n\} = \{(1-1)^2, (2-1)^2, (3-1)^2, (4-1)^2, (5-1)^2\}$, $\{a_n\} = \{0, 1, 4, 9, 16\}$.

a. $a_n = n$ ________	**b.** $a_n = n^2 - 1$ ________	**c.** $a_n = 1 - 2n$ ________
d. $a_n = 2 - \frac{1}{n}$ ________	**e.** $a_n = 3$ ________	**f.** $a_n = n^3$ ________
g. $a_n = n + x, x \in R$ ________	**h.** $a_n = n^{-2} + 1$ ________	**i.** $a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{2n}$ ________
j. $a_n = \frac{(-2)}{n}$ ________	**k.** $a_n = (1-n)^3 + 1$ ________	**l.** $a_n = \frac{n^2 - 1}{n}$ ________

3. Para descubrir un modelo para el término enésimo de una sucesión, se halla la relación entre n (el número del término) y S_n (el valor de ese término). Los primeros términos de la sucesión pueden sugerir modelos diferentes. Si todo término de la sucesión es igual al mismo número real, ella se llama sucesión constante.

Ejemplo: ¿cuál es el enésimo término de la sucesión $\{S_n\} = \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots\right\}$?

Observemos que 1 es numerador en cada elemento de $\{S_n\}$, mientras que el denominador aumenta según las potencias de tres. Así la sucesión $\{S_n\}$ está definida por $S_n = \frac{1}{3^n}$.

Encuentro el enésimo término de cada sucesión e indico si es finita o infinita.

a. $\{a_n\} = \{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$

b. $\{b_n\} = \{1, -1, 1, -1, 1, \ldots\}$

c. $\{c_n\} = \{6, 6, 6, 6, 6\}$

d. $\{d_n\} = \{4, 9, 14, 19, 24, \ldots\}$

e. $\{a_n\} = \left\{-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}\right\}$

f. $\{S_n\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots\right\}$

g. $\{a_n\} = \left\{3, \frac{5}{3}, \frac{7}{5}, \frac{9}{7}, \frac{11}{9}\right\}$

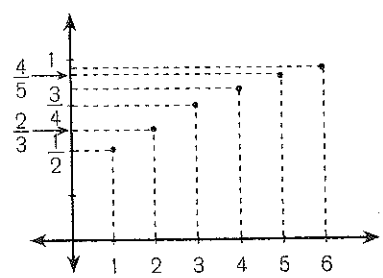
h. $\{S_n\} = \{3, 2, 3, 2, 3, \ldots\}$

i. $\{t_n\} = \left\{\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{6}{27}, \frac{8}{81}, \frac{10}{243}, \ldots\right\}$

j. $\{b_n\} = \{2, 4, 8, 16, 32\}$

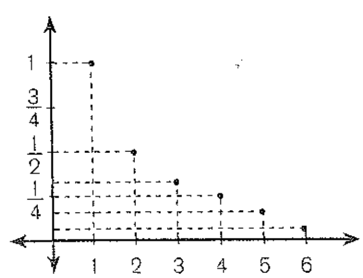
4. La representación gráfica de las sucesiones, $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$, definidas por las fórmulas $a_n = \frac{n}{n+1}$, $b_n = \frac{1}{n}$ y $c_n = (-1)^n$, aparece en la figura 7.1.

a.



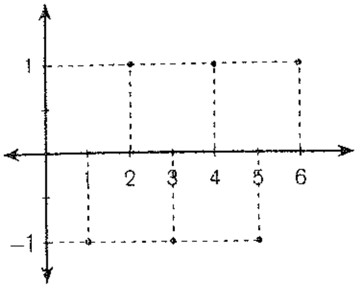
$S_n = \frac{n}{n+1}$

b.



$S_n = \frac{1}{n}$

c.



$S_n = (-1)^n$

Fig. 7.1

Una sucesión $\{S_n\} = \{S_1, S_2, S_3, \dots\}$ es:

- Creciente si cualquier término es mayor o igual al término inmediatamente anterior.

$$S_1 \leq S_2 \leq S_3 \dots$$

- Decreciente si cualquier término es menor o igual al término inmediatamente anterior.

$$S_1 \geq S_2 \geq S_3 \dots$$

- Oscilante si no es creciente ni decreciente cuando n crece.

a. Represento gráficamente cada sucesión del punto 3. e indico si la sucesión es creciente, decreciente u oscilante.

b. Para cada sucesión infinita del punto 3. hallo el término 40.

Soluciono problemas

5. Iván pretende fabricar figuras de madera en varios tamaños (figura 7.2). Si n varía, centímetro por centímetro, desde 1 cm:

a. ¿Cuál es la fórmula que representa el perímetro del rectángulo, el área del trapecio y el área del triángulo?

b. ¿Cuál es el perímetro de los cinco primeros rectángulos?

c. ¿Cuál es el área de los cinco primeros trapecios?

d. ¿Cuál es el área de los cinco primeros triángulos?

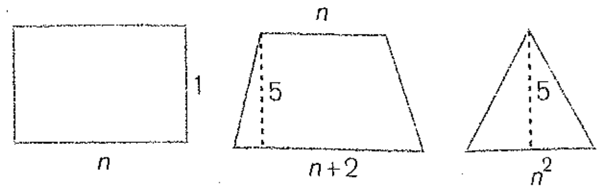


Fig. 7.2

6. El salario mensual de un operario en una empresa manufacturera es \$ 600 000. El sueldo se incrementa de acuerdo con el número de días extra que el operario trabaja. Si por un día extra pagan \$ 15 000 y lo máximo que un operario puede trabajar son 8 días adicionales al mes,

a. ¿cuál es el incremento en el salario si se trabaja 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 u 8 días extra?

b. Si José Ospina trabajó 4 días extra durante el mes pasado, ¿cuánto recibió de sueldo?

c. Si Carlos Roa recibió al final del mes \$ 705 000, ¿cuántos días extra trabajó?

d. ¿Cuánto es el sueldo de Pedro Suárez si trabajó 8 días extra el mes pasado?

e. ¿Cuál es el modelo que representa el sueldo con días extra de un operario?

7. Escribo en cada caso una situación que se ajuste al modelo.

a. $50\,000 + 3000n$, $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

b. $2\pi n$, n radio de la circunferencia y $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

c. $100 + 20n$, $n = 1, 2, 3$.

d. $V = 150\,(n + 12)$ cm³ es el volumen de un prisma de alto 10 cm, ancho 15 cm y largo $n + 12$ cm.

Desempeños: Identifica una sucesión y calcula algunos de sus términos.
Calcula los términos de una sucesión, la grafica y la clasifica.
Resuelve problemas mediante el uso de las sucesiones.

Tema 2

Progresiones aritméticas

El precio de una casa originalmente fue de \$ 95 000 000 y se valoriza en \$ 3 000 000 cada año; por tanto, el precio de la casa (en millones de pesos) en los siguientes años, está dado mediante la sucesión:

$$\{95, 98, 101, 104, 107, \ldots\}$$

Si a es el precio inicial de la casa y d es el valor constante de valorización, la sucesión se puede generalizar así:

	$\{a,$	$a+d,$	$a+2d,$	$a+3d,$	$a+4d,$	$\ldots$	$a+(n-1)d\}$
	↓	↓	↓	↓	↓		↓
Año →	1o.	2o.	3o.	4o.	5o.	$\ldots$	no.
	↓	↓	↓	↓	↓		↓
	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	$\ldots$	$a_n\}$

donde $n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$. El enésimo término es $a_n = a + (n-1)d$ y cada término es igual al anterior más el valor constante d.

Una sucesión en la cual el término siguiente se obtiene aumentando o disminuyendo el término anterior, en una cantidad constante, es llamada una progresión aritmética. El enésimo término se puede expresar como $a_n = a_1 + (n-1)d$ o, utilizando el término anterior, como $a_n = a_{n-1} + d$, donde a_1 es el primer término de la progresión y d es la cantidad constante llamada razón de la progresión.

Ejemplo

Hallemos la razón y el vigésimo término en la sucesión $\left\{2\sqrt{2}, 7\sqrt{2}, 12\sqrt{2}, 17\sqrt{2}, \ldots\right\}$.

Solución

$a_4 = a_3 + d$, entonces $17\sqrt{2} - 12\sqrt{2} = d$. Luego $d = 5\sqrt{2}$.

$a_{20} = a_1 + (20-1)d$, entonces $a_{20} = 2\sqrt{2} + 19\left(5\sqrt{2}\right) = 97\sqrt{2}$

Taller de competencias

1. Escribo A si la sucesión es una progresión aritmética o N si no lo es.

a. $\{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, \ldots\}$ ☐

b. $\{-10, -8, -7, -5, 1, 2, 8, \ldots\}$ ☐

c. $\{0{,}06; 0{,}36; 0{,}66; 0{,}96; 1{,}26, \ldots\}$ ☐

d. $\left\{-\frac{1}{4}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \ldots\right\}$ ☐

e. $\left\{-7\sqrt{3}, -4\sqrt{3}, -\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 5\sqrt{3}, \ldots\right\}$ ☐

f. $\left\{1+\sqrt{5}, 1+2\sqrt{5}, 2+\sqrt{5}, 2+2\sqrt{5}, \ldots\right\}$ ☐

g. $\left\{\frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, 2, \ldots\right\}$ ☐

h. $\{-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, \ldots\}$ ☐

2. Decido si la situación se puede representar o no mediante una progresión aritmética.

a. La distancia recorrida por un carro que viaja a 60 km/h, hora tras hora.

b. La distancia recorrida por una rana en 10 saltos consecutivos.

c. El sueldo anual de una persona cuyo salario inicial es \$ 620 000 y aumenta \$ 90 000 cada año.

d. La depreciación anual de un carro en \$ 500 000, cuyo costo inicial fue \$ 22 000 000.

e. El crecimiento de un niño cada mes del año.

3. Para las progresiones aritméticas de los puntos 1. y 2. identifico el primer término, determino la razón de la progresión y hallo el enésimo término.

4. Completo la tabla 7.1 y escribo:

a. La progresión aritmética con los primeros cinco términos.

b. El enésimo término.

c. El término pedido.

a_1	d	Progresión aritmética	enésimo término	Término
-4	$\frac{1}{2}$			20o.
0,85	0,01			35o.
$-\frac{3}{5}$	2			50o.
9	$\sqrt{2}$			100o.
$2x$	$\frac{x}{2}$			150o.

Tabla 7.1

5. Encuentro el primer término de la progresión aritmética. Utilizo la razón y el término dados.

a. $a_7 = 3;\ d = 0{,}5$

b. $a_{10} = \sqrt{2}\ ;\ d = 1$

c. $a_{11} = -\frac{1}{6}\ ;\ d = \frac{1}{4}$

d. $a_5 = x;\ d = 2$

e. $a_7 = \frac{x}{3}\ ;\ d = \frac{x}{3}$

f. $a_{10} = x - 1;\ d = 5$

Soluciono problemas

6. En una progresión aritmética el primer término es 16 y el noveno término es 48; si hay siete términos entre ellos, ¿cuáles son?

7. Un objeto cae desde un avión. Durante el primer segundo cae 6 metros, pero durante cada uno de los segundos siguientes cae 10 metros más que en el segundo anterior.

a. ¿Cuántos metros ha caído a los 8 segundos?

b. Si el avión se encontraba a 576 m de altura, ¿cuántos segundos después el objeto toca el suelo?

8. El primer día Carlos hace 15 abdominales; el segundo, aumenta 8; el tercero hace 8 más y así sucesivamente. ¿En qué día hace 63 abdominales?

9. Describo una situación que se ajuste a los valores escritos en cada progresión aritmética.

a. {158, 188, 218, 248, 278, ...}

b. {500, 450, 400, 350, ...}

Desempeños: conoce las progresiones aritméticas e identifica sus principales elementos.
Halla en una progresión aritmética cualquier término.
Analiza y aplica información para resolver diversos problemas.

Tema 3

Progresiones geométricas

Felipe recibe \$ 600 000, mensualmente, durante su primer año, pero cada año recibirá un aumento del 10%. ¿Cuál es el salario que recibirá en cada uno de los próximos cinco años?

Recordemos que cualquier cantidad x aumentada en su 10% es igual a:

$$x + x \cdot \frac{10}{100} = x + x(0,1) = x(1,1)$$

El sueldo de Felipe, durante cada año, lo podemos calcular así:

Año		Sueldo		
a_1	$=$	600 000		
a_2	$=$	$a_1 + a_1(0,1)$	$=$	$a_1(1,1)$
a_3	$=$	$a_2 + a_2(0,1)$	$=$	$a_2(1,1)$
a_4	$=$	$a_3 + a_3(0,1)$	$=$	$a_3(1,1)$
a_5	$=$	$a_4 + a_4(0,1)$	$=$	$a_4(1,1)$

Luego, su salario durante los próximos cinco años puede ser mostrado por la sucesión $\{a_n\} = \{a_1, a_1(1,1), a_2(1,1), a_3(1,1), a_4(1,1)\}$ donde el salario de cualquier año se calcula multiplicando el salario anterior por 1,1.

Una sucesión en la que cada término es igual al anterior multiplicado por una cantidad constante r, es llamada **progresión geométrica**.

A r se le denomina razón de la progresión y equivale a: $\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$

Observemos que: $a_5 = a_4(1,1) = a_1\,(1,1)^4$

y que $a_n = a_1(1,1)^{n-1} = a_1 r^{n-1}$

fórmula que es válida para hallar el enésimo término de cualquier progresión geométrica.

Taller de competencias

1. Escribo G si la sucesión es una progresión geométrica o N si no lo es.

a. $\{3, 15, 75, 375, 1875, \ldots\}$ ☐

b. $\{-1, -2, -6, -24, 24, \ldots\}$ ☐

c. $\{3, 3, 3, 3, 3, \ldots\}$ ☐

d. $\left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{9}{2}, \frac{27}{2}, \frac{81}{2}, \ldots\right\}$ ☐

e. $\{2, -2, 4, -4, 6, -6, \ldots\}$ ☐

f. $\left\{-\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, -4\sqrt{3}, 8\sqrt{3}, -16\sqrt{3}, \ldots\right\}$ ☐

g. $\{1{,}5;\ 0{,}45;\ 0{,}135;\ 0{,}0405, \ldots\}$ ☐

h. $\{1, -3, 1, -3, 1, -3, \ldots\}$ ☐

2. Para las progresiones del punto anterior, identifico a_1, determino r y hallo el enésimo término.

3. A partir de un término de la progresión geométrica y su razón, hallo a_1, a_n y escribo los seis primeros términos de cada progresión.

a.

Término	r	a_1	a_n
$a_3 = 5$	4		
$a_4 = \frac{1}{2}$	1		
$a_5 = -1$	2		
$a_7 = 0{,}1$	−3		
$a_{10} = 2$	$\frac{1}{2}$		

Tabla 7.2

b.

Término	r	a_1	a_n
$a_{20} = \sqrt{3}$	−1		
$a_2 = x$	0,3		
$a_4 = xy$	2		
$a_6 = -\frac{x}{2}$	−4		
$a_{50} = -90$	1		

Tabla 7.3

4. La figura 7.3 presenta las gráficas de tres progresiones geométricas. En cada caso:

- Hallo la razón.
- Escribo los seis primeros términos de la sucesión.
- Encuentro los términos 25o. y 40o.
- Determino el enésimo término.
- Decido si la sucesión es creciente o decreciente y justifico.

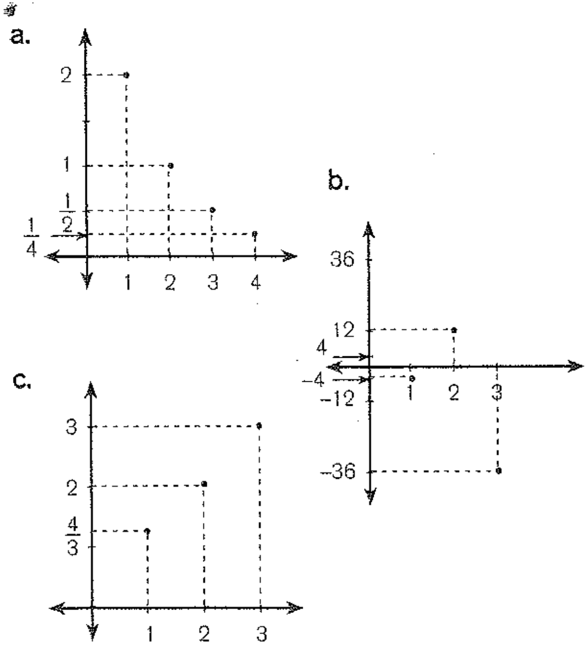


Fig. 7.3

5. Hallo, para cada progresión geométrica, los términos intermedios entre:

a. $a_1 = 3$ y $a_4 = 81$ **b.** $a_1 = 6$ y $a_6 = 192$

c. $a_1 = 8$ y $a_5 = 128$ **d.** $a_1 = 2$ y $a_7 = 1458$

Soluciono problemas

6. Indico si cada situación tiene valores que estén en progresión geométrica o no.

a. La cantidad de material radiactivo que queda cada hora, si se inicia con 480 gramos de él y se reduce a la mitad cada hora.

b. El sueldo anual de un empleado oficial en Colombia, cuyo salario inicial es $ 700 000 y le hacen aumentos iguales a la inflación.

c. Los ángulos de un triángulo isósceles, cuyo ángulo desigual mide la mitad de cualquiera de los ángulos congruentes.

7. Para las situaciones que se encuentren en progresión geométrica del punto 6, escribo la sucesión y hallo la razón r.

8. Escribo una situación que se encuentre en progresión geométrica y se ajuste a la gráfica de la figura 7.4.

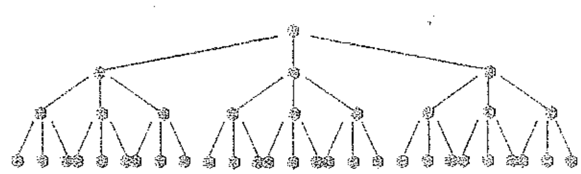


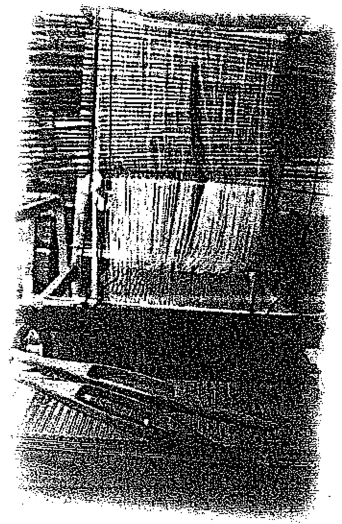
Fig. 7.4

9. Muestro que en una progresión geométrica el cociente entre un término y el anterior es igual a la razón.

Desempeños: conoce las progresiones geométricas e identifica sus principales elementos.
Halla en una progresión geométrica cualquier elemento.
Analiza diversas situaciones y las resuelve con progresiones geométricas.

Tema 4

Series



Un artesano modela conjuntos de casitas en alambre a escala, como muestra la figura 7.5. n recorre el conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$. ¿Cuántos centímetros de alambre necesita para hacer un conjunto de cuatro casitas?

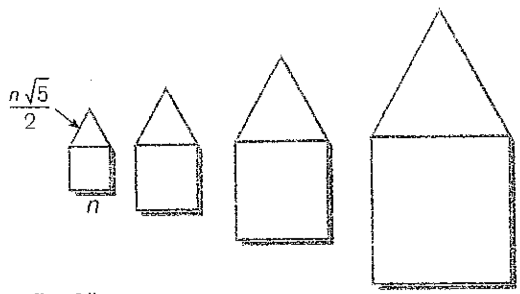


Fig. 7.5

- La fórmula para calcular los bordes de una casita cuyo cuadrado tiene de lado n cm y el triángulo tiene $\frac{n\sqrt{5}}{2}$ cm, es:

$$4n + 2 \cdot \frac{n\sqrt{5}}{2} = n\left(4 + \sqrt{5}\right) \text{ cm}$$

- Los bordes de cada una de las cuatro casitas está dado por la sucesión finita:

$$\{S_n\} = \left\{4 + \sqrt{5}, 2\left(4 + \sqrt{5}\right), 3\left(4 + \sqrt{5}\right), 4\left(4 + \sqrt{5}\right)\right\}$$

- La cantidad S de alambre necesaria para el conjunto de las cuatro casitas es la suma:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 4 + \sqrt{5} + 2\left(4 + \sqrt{5}\right) + 3\left(4 + \sqrt{5}\right) + 4\left(4 + \sqrt{5}\right) = 10\left(4 + \sqrt{5}\right)$$

Si $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n$ son los términos de una sucesión, entonces $S = S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_n$ se llama serie asociada a la sucesión.

La serie se denota con el símbolo Σ así $\sum_{i=1}^{n} S_i = S_1 + S_2 + S_3 + \cdots + S_n$,

donde i se llama índice de la sumatoria y se lee "sumatoria de S_i donde i varía desde 1 hasta n".

Ejemplo

Calculemos $\sum_{i=1}^{4} 2i + 1$.

Solución

La suma $\sum_{i=1}^{4} 2i + 1$ se escribe:

$$\sum_{i=1}^{4} 2i + 1 = (2 \cdot 1 + 1) + (2 \cdot 2 + 1) + (2 \cdot 3 + 1) + (2 \cdot 4 + 1)$$

$$= 3 + 5 + 7 + 9 = 24$$

Taller de competencias

1. Completo la tabla.

Sucesión finita	$\{S_n\}$	Serie asociada a la sucesión	Suma
$S_n = \dfrac{3n-1}{2}$	$\left\{1, \dfrac{5}{2}, 4, \dfrac{11}{2}, 7\right\}$	$\sum_{i=1}^{5} \dfrac{3i-1}{2}$	20
	$\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \sqrt{5}, \sqrt{6}\}$		
		$\sum_{i=1}^{6} i^2 - 2i$	
$S_n = 1 + \dfrac{1}{n}; n = 1, 2, 3, 4$			
		$\sum_{i=1}^{10} 3^i - i$	
	$\{2, 3, 5, 9, 17, 23\}$		
$S_n = nx^n; n = 1, 2, 3, 4$			

Tabla 7.4

2. Calculo cada sumatoria.

a. $\sum_{i=1}^{8} 2x + i$

b. $\sum_{i=1}^{7} 3i + \dfrac{1}{i}$

c. $\sum_{i=1}^{10} (2x)^{i-1}$

d. $\sum_{i=1}^{3} \left(\dfrac{x}{3}\right)^{i+1} \cdot i$

e. $\sum_{i=1}^{6} \dfrac{x+1}{i}$

f. $\sum_{i=1}^{4} 2^i x^{2i-1}$

g. $\sum_{i=1}^{4} \dfrac{i(i+1)}{2}$

h. $\dfrac{\sum_{i=1}^{6} ix}{6}$

3. La figura 7.6 ilustra la serie asociada a la sucesión $S_n = n$ para $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

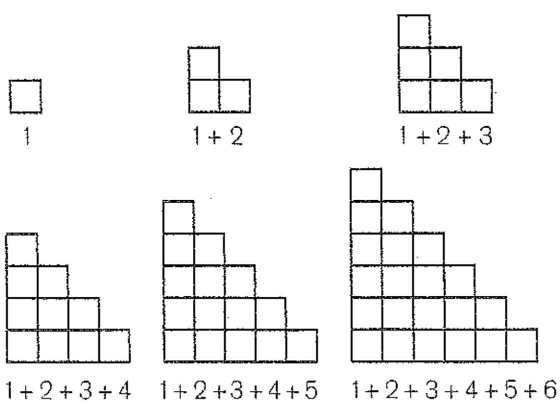


Fig. 7.6

a. Ilustro y calculo $\sum_{i=1}^{12} i$.

b. Ilustro y calculo $\sum_{i=1}^{5} i^2$.

c. ¿Para todo número natural se cumple que: $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$?

d. ¿Para todo número natural se cumple que: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$?

e. Calculo $\sum_{i=1}^{500} i$ y $\sum_{i=1}^{200} i^2$.

Soluciono problemas

4. La media aritmética o promedio de un conjunto de números $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ es $\overline{X} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$. Calculo la media aritmética de cada uno de los siguientes conjuntos:

a. $\{2, 4, 5, 7, 9, 11, 15, 17\}$

b. $\{3{,}5; 3{,}2; 1{,}0; 5{,}0; 3{,}7; 2{,}5; 4{,}1\}$

c. $X_i = i^2 \qquad i = \{1, 2, \ldots 6\}$

Desempeños: calcula sumatorias.
Sabe qué es una serie y conoce su notación y elementos.
Analiza y resuelve problemas a través del uso de las series.

Tema 5

Series aritméticas y series geométricas

A una persona que recibe durante el primer año de trabajo \$ 600 000 de salario mensual, le proponen dos tipos de aumento para los próximos años:

1. 10% del salario mensual inicial en cada año de trabajo.
2. 10% del salario mensual anterior en cada año de trabajo.

¿Cuánto dinero recibirá esta persona, después de 5 años, si acepta una u otra propuesta?

El salario mensual para cada uno de los cinco años se representa así: (en miles de pesos)

Propuesta 1: progresión aritmética {600, 660, 720, 780, 840}.

Propuesta 2: progresión geométrica {600, 660, 726, 798,6, 878,46}.

La serie asociada a cada sucesión, multiplicada por 12, que es el número de meses por año, nos da el total recibido después de 5 años en cada caso.

Propuesta 1: ⟶ 12 × 3 600 000 = 43 200 000

Propuesta 2: ⟶ 12 × 3 663 060 = 43 956 720

- Se llama serie aritmética a la serie asociada a una progresión aritmética.
- Se llama serie geométrica a la serie asociada a una progresión geométrica.
- La suma de los n primeros términos de una progresión aritmética es

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

- La suma de los n primeros términos de una progresión geométrica es

$$S_n = a_1 \cdot \frac{(r^n - 1)}{r - 1},\ r \neq 1$$

Taller de competencias

1. Encuentro la suma de los primeros términos, indicados en cada tabla, según la progresión sea aritmética o geométrica.

a.

Progresión aritmética			
a_1	d	Términos	S_n
3	2	15	
−2	$\frac{1}{4}$	20	
$\frac{1}{4}$	−3	24	
38	−2	40	
45	$-\frac{1}{3}$	18	

Tabla 7.5

b.

Progresión geométrica			
a_1	r	Términos	S_n
3	2	15	
−2	$\frac{1}{4}$	10	
$\frac{1}{4}$	−3	8	
38	−2	10	
45	$-\frac{1}{3}$	10	

Tabla 7.6

2. Determino si a cada expresión está asociada una progresión aritmética o una progresión geométrica y hallo la suma según el caso.

Expresión	Progresión	Suma
a. Todos los números enteros positivos menores que 200.		
b. Los números enteros positivos que son potencias de 2 y son menores que 300.		
c. Los 100 primeros números enteros positivos terminados en 0.		
d. Los 35 primeros números positivos múltiplos de 8.		
e. Los números fraccionarios positivos que son potencias de $\frac{1}{3}$ cuyos denominadores son hasta de 3 cifras.		
f. Los números enteros positivos de hasta 4 cifras que son potencias de 4.		
g. Los 50 primeros números positivos pares.		
h. Los n primeros números positivos que son potencias de $\frac{1}{2}$.		

Tabla 7.7

3. Verifico en el problema introductorio la suma de cada progresión utilizando las fórmulas:

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \quad \text{y} \quad S_n = a_1 \frac{(r^n - 1)}{r - 1}, r \neq 1.$$

4. Determino la suma de los elementos en cada conjunto incluyendo los extremos dados.

a. Números enteros pares entre 46 y 208.

b. Números enteros impares entre 5 y 157.

c. Múltiplos de 4 entre 40 y 1000.

d. Múltiplos de 5 entre 30 y 2000.

Soluciono problemas

5. Jorge Eduardo invierte $ 3 000 000 en un CDT que paga el 2,5% de interés mensual. Si él renueva el CDT automáticamente, sin retirar rendimientos, ¿cuánto dinero recibe después de 6 meses?

6. Se estima que la población de una ciudad crece el 10% por año. Si en 1990 tenía 370 000 habitantes, ¿cuál será su población en el año 2010?

7. Camila empieza una cadena de cartas enviando una a cada uno de sus 6 amigos y en la carta pide enviar copias de ella a 6 amigos.

Si todos cumplen con lo pedido, ¿cuántas personas han recibido la carta después de 5 envíos?

8. Una pirámide de cartas tiene en la base 14 de ellas y va disminuyendo 2 cartas en cada fila. Para terminarla, ¿cuántas cartas se necesitan?

9. La figura 7.7 ilustra los primeros cuatro números triangulares.

¿Cuál es el vigesimoquinto número triangular?

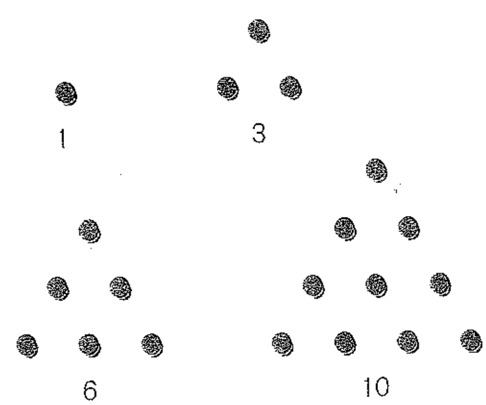


Fig. 7.7

Desempeños: calcula series aritméticas y series geométricas.
Determina cuándo a una situación se le asocia una serie aritmética o una serie geométrica.
Resuelve problemas utilizando series aritméticas y series geométricas.

Tema 6

Interés simple

A Tatiana le hicieron un préstamo de \$ 4 000 000, cobrándole un interés simple del 3% mensual mientras dure el préstamo.

¿Cuánto debe pagar mensualmente Tatiana de intereses?

Calculamos el 3% del capital prestado y esa cantidad será lo que debe pagar mensualmente.

$$I = Co \cdot R = 4\,000\,000 \cdot \frac{3}{100} = 120\,000$$

Ella cree que puede pagar la deuda en tres meses o más y elaboró una tabla para saber cuánto pagará en caso de que necesite más tiempo.

Meses de plazo	Interés acumulado	Monto total a pagar
1	120 000	4 120 000
2	240 000	4 240 000
3	360 000	4 360 000
4	480 000	4 480 000
5	600 000	4 600 000
⋮	⋮	⋮
n	$n \cdot I$	$M = Co + nI$

Tabla 7.8

Observemos que cada columna muestra una sucesión aritmética, ya que en cada una de ellas la diferencia entre un término y el anterior es un valor constante. Los términos enésimos nos permiten deducir que:

- I, llamado interés mensual, es el beneficio pagado por el dinero prestado, donde Co es el capital inicial y R es la tasa porcentual.
- M es el monto total a pagar, donde n es el período o tiempo.

Un capital inicial Co se coloca a interés simple cuando los intereses causados se producen sólo sobre el capital inicial Co.

Taller de competencias

1. Calculo el interés simple mensual que se debe pagar o recibir, si el capital inicial se presta a la tasa porcentual dada.

a. $Co = \$\ 500\,000 \longrightarrow R = 4\%$

b. $Co = \$\ 780\,000 \longrightarrow R = 2{,}5\%$

c. $Co = \$\ 1\,230\,000 \longrightarrow R = 2{,}3\%$

d. $Co = \$\ 6\,200\,000 \longrightarrow R = 3{,}3\%$

e. $Co = \$\ 3\,500\,000 \longrightarrow R = 2{,}7\%$

f. $Co = \$\ 2\,345\,000 \longrightarrow R = 3\%$

g. $Co = \$\ 315\,000 \longrightarrow R = 3{,}5\%$

h. $Co = \$\ 7\,000\,000 \longrightarrow R = 5\%$

2. Determino la tasa porcentual R a la cual se prestó un capital inicial Co, si se recibió o pagó el interés simple mensual indicado.

a. $Co = \$\ 100\,000 \longrightarrow I = \$\ 10\,000$

b. $Co = \$\ 384\,000 \longrightarrow I = \$\ 9600$

c. $Co = \$ 78\,000 \longrightarrow I = \$ 2340$

d. $Co = \$ 560\,000 \longrightarrow I = \$ 19\,600$

e. $Co = \$ 2\,200\,000 \longrightarrow I = \$ 88\,000$

f. $Co = \$ 1\,300\,000 \longrightarrow I = \$ 29\,900$

g. $Co = \$ 4\,300\,000 \longrightarrow I = \$ 111\,800$

h. $Co = \$ 10\,000\,000 \longrightarrow I = \$ 420\,000$

3. Hallo el valor del capital inicial (Co) que se colocó a la tasa porcentual dada, y que produce el interés simple mensual indicado.

a. $I = \$ 750 \longrightarrow R = 5\%$

b. $I = \$ 27\,200 \longrightarrow R = 4\%$

c. $I = \$ 38\,500 \longrightarrow R = 3{,}5\%$

d. $I = \$ 89\,134{,}32 \longrightarrow R = 3{,}8\%$

e. $I = \$ 116\,480 \longrightarrow R = 3{,}2\%$

f. $I = \$ 5400 \longrightarrow R = 4{,}5\%$

g. $I = \$ 102\,060 \longrightarrow R = 2{,}1\%$

h. $I = \$ 334\,850 \longrightarrow R = 3{,}7\%$

4. Un banco proyecta hacer préstamos especiales de tres clases para microempresarios, con interés simple mensual así:

Clase A: $Co = \$ 5\,000\,000$ al 2,8%.

Clase B: $Co = \$ 6\,000\,000$ al 3,2%.

Clase C: $Co = \$ 7\,000\,000$ al 3,7%.

a. Calculo cuánto se espera recibir mensualmente por cada clase de préstamo.

b. Elaboro una tabla para cada clase de préstamo que muestre interés acumulado y monto total a recibir, si el plazo, en cada caso, es 12 meses.

5. Con la información dada y la obtenida en el ejercicio 1.:

a. Calculo el interés acumulado correspondiente al sexto mes.

b. Determino el monto (M) total a recibir al sexto mes.

6. Diego hace préstamos con un interés simple mensual del 3,8%. Si él prestó $ 2 500 000, el 30 de junio de 2011,

a. ¿cuánto dinero recibe mensualmente por concepto de intereses?

b. Si le pagaran la deuda el 30 de diciembre de 2011, ¿cuánto dinero recibiría?

c. Si después de unos meses le pagaron $ 3 640 000, ¿cuánto tiempo tuvo el capital prestado?

7. Una cooperativa prestó cierto capital a interés simple, durante año y medio, a un porcentaje del 3,9%. Si recibió un monto de $ 3 520 000, ¿cuánto fue el capital prestado?

8. Camila tenía una deuda de $ 1 800 000, pero esta se incrementó debido a que no canceló el interés simple del 3% por algún tiempo. Si ahora debe pagar $ 2 124 000, ¿por cuántos meses tuvo el capital prestado? Si se refinancia la deuda con un interés simple del 2,8% mensual para pagarla en 10 meses, ¿cuánto debe pagar después de pasado ese tiempo?

Desempeños: Identifica los elementos que intervienen en problemas de interés simple.
Calcula elementos para analizar situaciones de interés simple.
Resuelve problemas de interés simple.

Tema 7

Interés compuesto

Un banco ofrece a los clientes que ahorren más de $ 2 000 000 un interés mensual del 3% sobre el saldo, siempre que el dinero no sea retirado durante el tiempo establecido.

¿Cuánto recibe una persona que ahorre $ 2 500 000, en esas condiciones, al cabo de cuatro meses?

La tabla 7.9 nos muestra el comportamiento de los intereses según este modelo. Vemos que el monto recibido, al finalizar los cuatro meses, equivale a $ 2 813 772.

Meses	*Co* al iniciar el mes	Interés obtenido en el mes	Monto al final del mes
1	2 500 000	75 000	2 575 000
2	2 575 000	77 250	2 652 250
3	2 652 250	79 567,5	2 731 817,5
4	2 731 817,5	81 954.5	2 813 772
n	$M_n = Co\,(1 + R)^{n-1}$	$I\,(1 + R)^{n-1}$	$M_n = Co\,(1 + R)^n$

Tabla 7.9

Si observamos las columnas 2, 3 y 4 de la tabla, vemos que el modelo se comporta como sucesiones geométricas cuya razón r es $1 + 0{,}03 = 1 + R$. Concluimos que: $M_n = Co\,(1 + R)^n$ es el monto total que se debe pagar o recibir por un capital inicial Co, colocado a una tasa porcentual R durante un tiempo n.

Un capital inicial *Co* se coloca o presta a interés compuesto cuando los intereses del primer período se adicionan al capital inicial para constituir un nuevo capital, a partir del cual se calculan los intereses del segundo período y se constituye un nuevo capital. Siguiendo este modelo se calculan los intereses y el monto final de los períodos siguientes.

Taller de competencias

1. Escribo las progresiones geométricas que representan el comportamiento de los intereses y el monto final, del capital inicial y la tasa porcentual dados en cada tabla.

a. $R = 0{,}025 = 2{,}5\%$

Meses	*Co* al iniciar el mes	I	M_n
1	6 000 000		
2			
3			
4			

Tabla 7.10

b. $R = 0{,}04 = 4\%$

Meses	*Co* al iniciar el mes	I	M_n
1	2 300 000		
2			
3			
4			

Tabla 7.11

c. $R = 0{,}35 = 35\%$

Año	*Co* al iniciar el año	*I*	M_n
1	17 500 000		
2			
3			
4			
5			
6			

Tabla 7.12

d. $R = 0{,}39 = 39\%$

Año	*Co* al iniciar el año	*I*	M_n
1	13 000 000		
2			
3			
4			
5			
6			

Tabla 7.13

2. Alberto le prestó a cada uno de sus cinco clientes, la suma indicada en la tabla 7.14, a una tasa compuesta del 20% semestral.

a. ¿Cuál es el monto final (M_n), después de año y medio, que debe devolverle cada cliente? (Sugerencia*:* en año y medio hay 3 períodos de capitalización.)

b. ¿Cuánto recibe Alberto, dentro de año y medio, por concepto de los cinco préstamos?

Cliente	*Co* ($)	M_n ($)
1	2 000 000	
2	3 500 000	
3	1 800 000	
4	6 500 000	
5	8 000 000	

Tabla 7.14

3. Cinco personas pagaron, al terminar el plazo, la cantidad (M_n) registrada en la tabla 7.15. Si el dinero que les prestaron fue al 30% de interés compuesto anual, con capitalización semestral, por 3 años, ¿cuánto dinero le prestaron a cada uno de ellos? (*Sugerencia*: la tasa semestral será $\frac{0{,}3}{2} = 0{,}15$.)

Persona	M_n ($)	*Co* ($)
1	4 626 121,2	
2	7 401 794,2	
3	9 946 161	
4	11 796 609	
5	4 394 815,3	

Tabla 7.15

4. Analizo el ejemplo.

Ana hizo un ahorro fijo de $ 2 500 000 en una corporación que le pagó el 32% anual, con capitalización anual. Si al finalizar el tiempo su capital inicial se duplicó, ¿cuánto tiempo se dejó consignado el capital?

$5\,000\,000 = 2\,500\,000(1+0{,}32)^n$, por tanto $2 = (1{,}32)^n$, lo que quiere decir que $\log_{10} 2 = \log_{10} (1{,}32)^n$. Aplicando las propiedades de los logaritmos se tiene que $n = \dfrac{\log 2}{\log 1{,}32} = 2{,}5$, lo que indica que el dinero se dejó por 2 años y 6 meses.

a. Para que a Yanira se le triplicara el capital, ¿cuánto tiempo debería dejar el dinero en la corporación?

b. Una persona que ahorre $ 5 000 000, en las mismas condiciones de Yanira, ¿cuánto tiempo debe dejar el dinero para recibir al final $ 12 500 000?

c. Carlos ahorró cierto dinero pero al 35% anual, con capitalización anual por 3 años; si al cabo del tiempo recibió $ 12 000 000, ¿cuánto dinero ahorró?

5. ¿Durante cuánto tiempo se debe mantener, en un banco, un capital de $ 3 000 000 para que se triplique, si la entidad paga el 32% anual y la capitalización de intereses es:

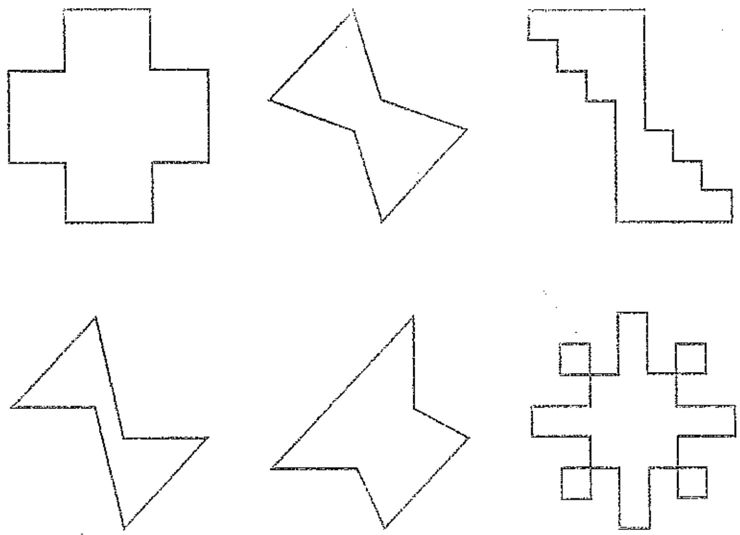
a. anual?

b. semestral?

6. ¿En cuánto tiempo un capital de $ 40 000, colocado a interés compuesto, logra el monto de $ 67 835,70, si la tasa es del 45% anual?

Desempeños: Identifica los elementos que intervienen en problemas de interés compuesto.
Calcula elementos para analizar situaciones de interés compuesto.
Resuelve problemas de interés compuesto.

1. En cada caso, ¿cuál es la razón del área sombreada al área del cuadrado?



2. Invento una situación que involucre los temas trabajados en esta unidad. Utilizo la figura 7.9.

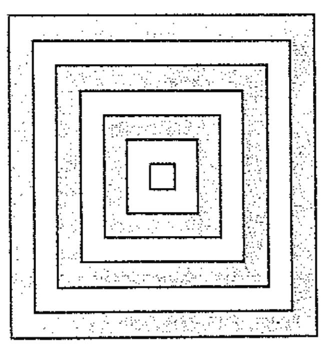


Fig. 7.9

Evalúo mis competencias

Con los siguientes ejercicios, afianzo los desempeños que he superado y refuerzo aquellos que están por superar.

1. Defino y doy un ejemplo de:

a. Sucesión infinita.

b. Progresión geométrica.

c. Sucesión finita.

d. Serie.

e. Progresión aritmética.

f. Serie geométrica.

g. Serie aritmética.

2. Escribo los cinco primeros términos de cada sucesión y hallo su serie asociada.

a. $a_n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} + n$ **b.** $b_n = \frac{2n-1}{n^2}$

c. $S_n = n^{n-1}$ **d.** $a_n = \frac{n^2(n+1)}{2}$

3. Para cada sucesión:

- Hallo el enésimo término.
- Trazo la gráfica.
- Determino si la sucesión es creciente, decreciente u oscilante.
- Hallo el término 80.

a. $\{3, 6, 9, 12, 15, \ldots\}$

b. $\left\{1, \frac{3}{4}, \frac{4}{6}, \frac{5}{8}, \frac{6}{10}, \ldots\right\}$

c. $\{2, -2, 2, -2, 2, \ldots\}$

d. $\left\{5, \frac{9}{3}, \frac{13}{5}, \frac{17}{7}, \frac{21}{9}, \ldots\right\}$

4. Determino la suma.

a. $\sum_{j=1}^{10} 2j + 3$ **b.** $\sum_{i=1}^{6} 3 - \frac{1}{4}i$

c. $\sum_{j=1}^{8} 2^{-j}$ **d.** $\sum_{i=1}^{5} (-2)\left(\frac{1}{2}\right)^{-i}$

5. Escribo la progresión aritmética que se genera en cada caso, con n términos.

a. $a_1 = 4$, $d = 3$, $n = 5$

b. $a_1 = \frac{1}{2}$, $d = \frac{1}{4}$, $n = 6$

c. $a_1 = -\frac{3}{5}$, $d = -\frac{1}{2}$, $n = 7$

d. $a_1 = 3$, $a_2 = 5$, $n = 4$

6. Hallo el término pedido en cada progresión aritmética.

a. $a_1 = -6$, $d = 2$; término 25

b. $a_1 = 0{,}04$, $d = \sqrt{2}$; término 20

c. $a_1 = 10$, $d = \frac{3}{4}$; término 55

d. $a_1 = 0$, $d = -2$; término 70

7. Hallo el enésimo término (n), el primer término (a_1), la razón (d) o la serie aritmética asociada (S_n), si faltan, de cada una de las siguientes progresiones aritméticas.

a. $a_1 = 2$, $d = 3$, $n = 7$

b. $a_1 = 12$, $a_n = 3$, $S_n = 52{,}5$

c. $a_n = 17$, $d = 4$, $S_n = 45$

d. $a_n = -7$, $d = -3$, $S_n = 3$

8. Escribo la progresión geométrica que se genera en cada caso, con n términos.

a. $a_1 = 4$, $r = 3$, $n = 6$

b. $a_1 = -5$, $r = -2$, $n = 5$

c. $a_1 = 120$, $a_4 = 15$, $n = 7$

d. $a_2 = 8$, $a_4 = 2$, $n = 6$

9. Hallo el enésimo término (n), el primer término (a_1), la razón (r) o la serie geométrica asociada (S_n), si faltan, de cada una de las siguientes progresiones geométricas.

a. $a_1 = 3,\ r = \frac{1}{4},\ n = 5$

b. $a_1 = 6,\ r = -\frac{1}{2},\ a_n = -\frac{3}{16}$

c. $n = 7,\ r = 2,\ a_n = -64$

d. $S_n = \frac{37}{18},\ r = \frac{4}{3},\ a_n = \frac{8}{9}$

10. Hallo el valor de x, si los términos dados son términos consecutivos de una progresión aritmética.

a. $x - 2,\ \frac{3x}{2},\ 4x - 6$

b. $x - 5,\ 3x - 13,\ 2x + 3$

11. Hallo el valor de x, si los términos dados son términos consecutivos de una progresión geométrica.

a. $3x,\ x + \frac{1}{2},\ 2x - \frac{5}{4}$ **b.** $x + \frac{3}{2},\ 2x + 1,\ -2x$

12. Rocío obtuvo 2,8 en el primer parcial de matemáticas; si en los exámenes sucesivos fue aumentando 0,3 respecto al examen anterior, ¿cuál fue su calificación en el sexto parcial? Si el último parcial tuvo un valor del 30% de la nota del semestre, ¿cuál fue su calificación semestral?

13. Cada año una máquina se deprecia 20% de su valor al comienzo de ese año. Si la máquina costó \$ 3 000 000, ¿cuál es el valor de la máquina al cabo de 4 años?

14. Dentro de un cuadrado de lado 4 cm se dibuja otro cuadrado cuyos vértices son los puntos medios de los lados del cuadrado anterior. Si se repite el proceso para trazar nuevos cuadrados:

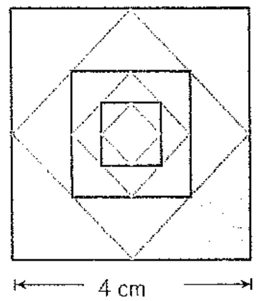


Fig. 7.10

a. ¿Cuál es el perímetro y el área del cuarto cuadrado?

b. ¿Cuál es la suma de los perímetros y la suma de las áreas de los 4 primeros cuadrados?

15. Juliana ahorra \$ 30 000 mensuales en un fondo que le paga el 25% anual con capitalización semestral. ¿Cuál es el capital que tiene al cabo de 3 años?

16. Un capital de \$ 1 000 000 se coloca a interés compuesto del 3,5% mensual. ¿Cuánto se recibe al finalizar el año?

Autoevaluación

	Bajo	Básico	Alto	Superior
Reconozco las sucesiones como funciones de los números naturales en cualquier conjunto numérico.				
Diferencio una sucesión finita de una sucesión infinita.				
Determino los términos de una sucesión incluyendo su enésimo término.				
Identifico una serie como la suma de los elementos de una sucesión.				
Diferencio las características de una progresión aritmética o geométrica.				
Calculo los principales elementos en una progresión aritmética o geométrica.				
Calculo series aritméticas y series geométricas y resuelvo problemas.				
Analizo situaciones que involucran sucesiones y series.				
Resuelvo problemas de interés simple y de interés compuesto planteando progresiones aritméticas y geométricas.				

Prueba Saber

Encuentra la respuesta correcta entre las opciones A, B, C y D, y márcala en la hoja de respuestas, rellenando completamente el círculo correspondientes.

Las figuras geométricas: circunferencia, parábola, elipse e hipérbola son llamadas **secciones cónicas**, porque los griegos las definieron con base en la intersección de planos con conos, como muestra la figura 7.11.

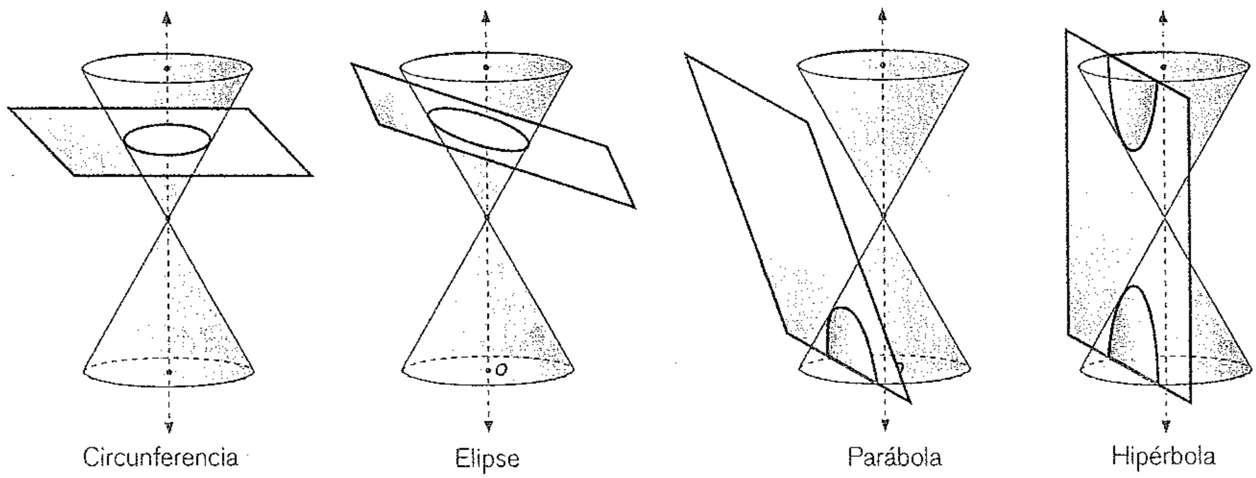


Fig. 7.11

La ecuación de una cónica es una ecuación de segundo grado en x y y, expresada como $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$. El discriminante $B^2 - 4AC$ clasifica a una cónica como: elipse o circunferencia si $B^2 - 4AC < 0$ (si $A = C$ es una circunferencia), parábola si $B^2 - 4AC = 0$ e hipérbola si $B^2 - 4AC > 0$.

Utilizo la gráfica de la figura 7.11 y la información anterior para responder.

1. La elipse y la circunferencia se obtienen haciendo cortes en el cono, con planos que son respectivamente:

A. Horizontal y vertical.

B. Oblicuo y horizontal.

C. Vertical y oblicuo.

D. Oblicuo y paralelo.

2. La ecuación $2x^2 + y^2 - 4x - 4 = 0$ corresponde a:

A. Círculo.

C. Elipse.

B. Hipérbola.

D. Parábola.

3. Corresponderían a gráficas de funciones en el plano cartesiano:

A. La circunferencia de radio r.

B. La parábola que abre hacia abajo.

C. Media circunferencia, no importa el radio.

D. La parábola que abre hacia la derecha.

4. El discriminante de una ecuación indicó que ésta correspondía a una hipérbola. La ecuación pudo ser:

A. $2x^2 + 3y^2 - 12x + 24y + 36 = 0$

B. $x^2 - y^2 - 9 = 0$

C. $3x^2 - y^2 - 12x - 2y + 5 = 0$

D. $y^2 - 9y + 2x + 81 = 0$

5. Si se corta consecutivamente con planos horizontales un cono, se obtienen varias circunferencias cuyas longitudes se pueden asociar a una:

A. Progresión aritmética.

B. Serie aritmética.

C. Progresión geométrica.

D. Sucesión cualquiera.

Álvaro es un desempleado a quien una empresa A le ofrece un salario inicial de \$ 1 500 000 por el primer mes de trabajo y le promete un aumento mensual de \$ 10 000, de acuerdo con su compromiso y trabajo; una empresa B le ofrece un salario inicial de \$ 1 800 000 por el primer mes y un aumento mensual de \$ 8000, de acuerdo con el rendimiento en su trabajo.

6. Pensando en su futuro Álvaro compara los salarios ofrecidos en cada empresa al finalizar los primeros 60 meses y encuentra que el sueldo en la empresa A sería:

   A. Mayor que el devengado en la empresa B, porque el aumento mensual en la empresa A es mayor que el aumento mensual en la empresa B.

   B. Menor que el sueldo devengado en la empresa B, porque el sueldo inicial en la empresa A es menor que el ofrecido por la empresa B.

   C. Igual que el sueldo mensual que devengaría en la empresa B, porque el aumento mensual en A compensa el salario inicial ofrecido en la empresa B.

   D. \$ 182 000 menor que el devengado en la empresa B, porque el aumento en los 60 meses no alcanza a compensar el mayor salario inicial de la empresa B.

7. Álvaro establece ahora en qué momento los dos salarios se igualarán y encuentra que este hecho se dará al cabo de:

   A. 30 meses porque con el aumento mensual de \$ 10 000 se compensa la diferencia de salario inicial.

   B. Doce años y siete meses porque la diferencia de salario inicial debe compensarse con la diferencia de aumento mensual desde el segundo mes de trabajo.

   C. 151 meses porque hay \$ 300 000 de diferencia en el salario inicial y \$ 2000 de diferencia en el aumento mensual que se inicia en el segundo mes de trabajo.

   D. 37,5 meses porque con el aumento mensual de \$ 8000 compensa la diferencia de \$ 300 000 que hay entre los dos salarios iniciales.

8. Para llegar a la respuesta anterior Álvaro encontró una forma general de expresar el salario devengado en cada empresa en el mes m la cual es:

   A. En la empresa A es 1 500 000 + 10 000 $(m - 1)$ (pesos), y en la empresa B es 1 800 000 + 8000 $(m - 1)$ (pesos), porque los números que aparecen en las expresiones son los correspondientes a cada empresa.

   B. En la empresa A es 1 500 000 + 10 000 m (pesos) y en la empresa B, 1 800 000 + 8000 m (pesos), porque se trata de progresiones con razón el aumento mensual en cada empresa.

   C. En la empresa A es 1 490 000 + 10 000 m (pesos) y en la empresa B, 1 792 000 + 8000 m, porque el aumento comienza en el segundo mes.

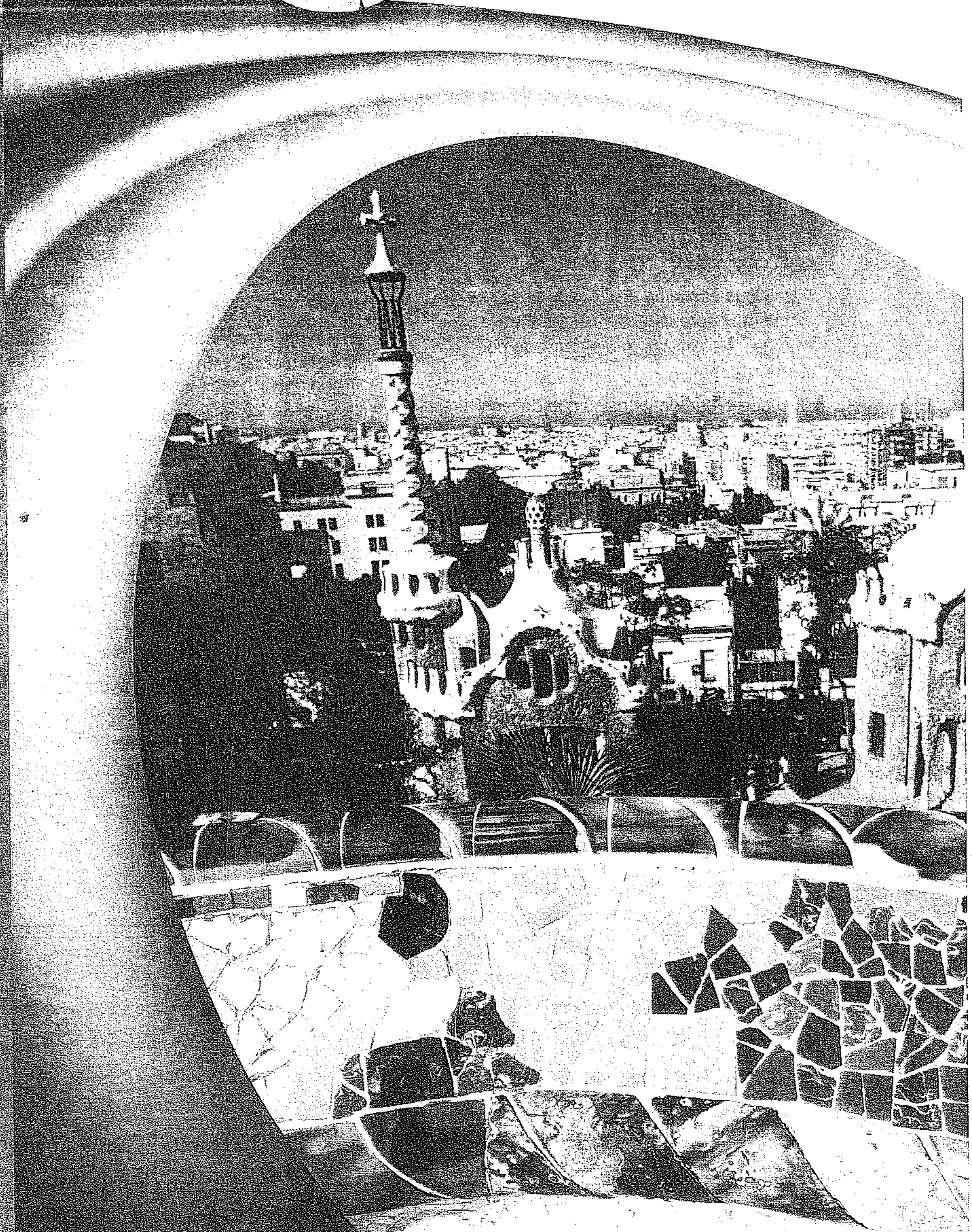
   D. En la empresa A es 10 000 m (pesos) y en empresa B es 8000 m (pesos), porque los aumentos mensuales son 10 000 y 8000 pesos respectivamente.

Formato de respuestas

1. (A) (B) (C) (D)	4. (A) (B) (C) (D)	7. (A) (B) (C) (D)
2. (A) (B) (C) (D)	5. (A) (B) (C) (D)	8. (A) (B) (C) (D)
3. (A) (B) (C) (D)	6. (A) (B) (C) (D)	

Pensamiento espacial

Unidad 8 Geometría



Procesos: El desarrollo de esta unidad me hará competente para:

Resolución de problemas
Resolver problemas de otros campos a partir de conceptos geométricos.

Razonamiento lógico
Realizar demostraciones utilizando definiciones, postulados de semejanza y conceptos vistos en unidades anteriores.
Construir las formulas del área y del volumen de sólidos.

Comunicación
Explicar el teorema fundamental de la proporcionalidad y su reciproco.
Comprender los postulados de semejanza y utilizarlos en una demostración.

Conexiones
Emplear el concepto de proporcionalidad para explicar el concepto de semejanza de polígonos.

Estándares
Pensamiento espacial
- Hacer conjeturas y verificar propiedades de congruencia y semejanza entre figuras bidimensionales y objetos tridimensionales.
- Reconocer y contrastar propiedades y relaciones geométricas utilizadas en la demostración de teoremas básicos (Pitágoras y Tales).
- Aplicar y justificar criterios de semejanza entre triángulos, en la formulación y resolución de problemas.

Tema 1

Método directo de demostración

La geometría, por ser una teoría lógicamente estructurada, está dotada de elementos básicos, como términos indefinidos, definiciones, axiomas que aceptamos sin demostrar y teoremas que requieren de demostración. Recordemos que:

1. Los teoremas son proposiciones de la forma:
   Si p, entonces q, y se escribe: $p \rightarrow q$, o p si y sólo si q, y se escribe: $p \leftrightarrow q$.
2. La demostración es un proceso en el cual se enlazan, mediante argumentaciones lógicas, definiciones, axiomas y otros teoremas ya demostrados, para llegar a nuevas conclusiones.

Uno de los métodos de demostración que estudiaremos se llama método directo.

Método directo

Para demostrar que la proposición $p \Rightarrow q$ es verdadera:
1. Se supone que p es verdadera.
2. Se encadenan lógicamente lo dado (p es verdadera) con definiciones, axiomas o teoremas ya demostrados, para probar que la proposición q es verdadera.

Ejemplo

Si $\measuredangle X$ es un ángulo exterior al $\triangle ABC$ y $\measuredangle A$ y $\measuredangle B$ son los ángulos interiores no adyacentes a $\measuredangle X$, entonces demostremos que m $\measuredangle X$ = m $\measuredangle A$ + m $\measuredangle B$.

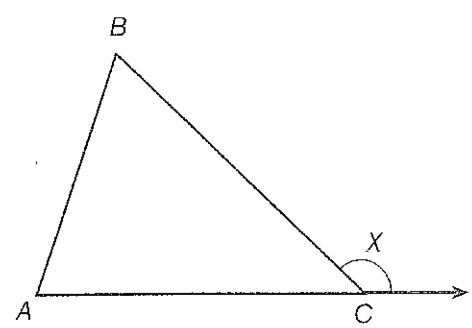


Fig. 8.1

Solución

Demostración

Afirmación	Justificación
1. $\measuredangle X$ exterior a $\triangle ABC$	1. Dado.
2. m $\measuredangle A$ + m $\measuredangle B$ + m $\measuredangle C$ = 180°	2. Suma de ángulos interiores.
3. m $\measuredangle X$ + m $\measuredangle C$ = 180°	3. $\measuredangle X$ y $\measuredangle C$ son adyacentes.
4. m $\measuredangle A$ + m $\measuredangle B$ + m $\measuredangle C$ = m $\measuredangle X$ + m $\measuredangle C$	4. Transitiva entre 2 y 3.
5. m $\measuredangle A$ + m $\measuredangle B$ = m $\measuredangle X$	5. Propiedad de R.

Tabla 8.1

Taller de competencias

1. **a.** En el teorema dado identifico p y q.
   b. Escribo la justificación en cada paso de la demostración.

Teorema: si $ABCD$ es un cuadrilátero cualquiera en el que $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ y $\overline{AD} \cong \overline{BC}$, entonces $ABCD$ es un paralelogramo.

Demostración

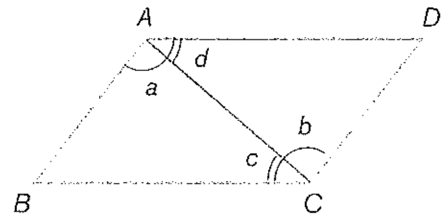
Afirmación	Justificación
1. En $ABCD$ se tiene $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ y $\overline{AD} \cong \overline{BC}$.  Fig. 8.2	1. ____________
2. Trazo la diagonal $\overline{AC}$.	2. ____________
3. $\measuredangle a \cong \measuredangle b$ y $\measuredangle d \cong \measuredangle c$	3. ____________
4. $\overline{AC} \cong \overline{AC}$	4. ____________
5. $\triangle ABC \cong \triangle ADC$	5. ____________
6. $\overline{AB} \cong \overline{DC}$	6. ____________
7. $ABCD$ es un paralelogramo.	7. ____________

Tabla 8.1

Soluciono problemas

2. Para cada teorema:
   - Identifico p y q.
   - Hago un listado de las definiciones, axiomas o teoremas que pueda necesitar en la demostración.
   - Realizo la demostración por el método directo.

   a. Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes.

   b. Si $\overrightarrow{BX}$ es la bisectriz del ángulo ABC, entonces la medida del $\measuredangle ABC$ es igual al doble de la medida del $\measuredangle ABX$.

   c. En el $\triangle ABC$, de la figura 8.3, $\overline{AD} \cong \overline{BE}$ y $\overline{DC} \cong \overline{EC}$, entonces $\overline{AC} \cong \overline{BC}$.

   d. Los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios.

   e. En el $\triangle ADP$ de la figura 8.4, $m\measuredangle 1 + m\measuredangle 4 = 180°$, $\overline{AB} \cong \overline{DC}$ y $\overline{PB} \cong \overline{PC}$, entonces $\triangle ABP \cong \triangle DCP$.

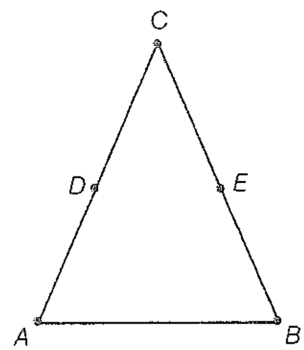


Fig. 8.3

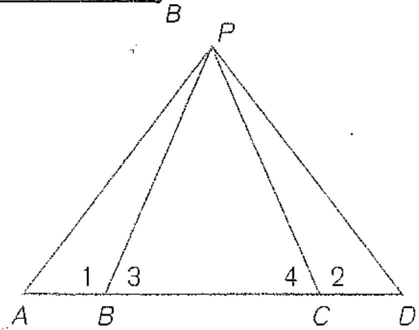


Fig. 8.4

Desempeños: identifica el método directo de demostración.
Comprende demostraciones hechas por el método directo.
Demuestra teoremas por el método directo

Tema 2

Método indirecto de demostración

No siempre es posible demostrar un teorema por el método directo. En tales casos utilizamos el método indirecto, también llamado demostración por reducción al absurdo.

Método indirecto

Para demostrar que la proposición $p \to q$ es verdadera:

1. Se acepta que p es verdadera y se niega la proposición q que se desea probar.
2. Se toma la negación de q como una proposición dada y se desarrolla la demostración por el método directo.
3. Se llega a una proposición que contradiga la proposición p o un hecho demostrado anteriormente.
4. Se concluye que la negación de q es falsa, por tanto, q es verdadera y se afirma lo demostrado.

Ejemplo

Demostremos, por reducción al absurdo, que "si $x \neq 0$, entonces $\frac{1}{x} \neq 0$".

Solución

Identifiquemos p y q. p: $x \neq 0$ y q: $\frac{1}{x} \neq 0$.

Demostración

Afirmación	Justificación
1. Supongamos que $\frac{1}{x} = 0$.	1. Negamos q.
2. $x \cdot \left(\frac{1}{x}\right) = x \cdot 0$	2. Propiedad uniforme de la igualdad porque $x \neq 0$.
3. $1 = x \cdot 0$	3. Propiedad del inverso multiplicativo.
4. $1 = 0$	4. Propiedad de R ($x \cdot 0 = 0$)
5. La proposición 4 es una contradicción.	5. $1 \neq 0$
De 5., afirmamos que la suposición es falsa y concluimos que $\frac{1}{x} \neq 0$ es verdadera.	

Tabla 8.3

Taller de competencias

1. Determino si la proposición II es la contradicción de la proposición I o no lo es. Si no lo es, justifico por qué.

a. I: a es impar.
II: a es un número real.

b. I: 0 no tiene recíproco.
II: 0 tiene recíproco.

c. I: $\triangle ABC$ es equilátero.
II: $\triangle ABC$ es isósceles.

d. I: dos rectas se cortan cuanto más en un punto.
II: las dos rectas son paralelas.

e. I: ab es un número natural par.
II: ab es un número natural impar.

f. I: $\sqrt{2}$ es un número irracional.
II: $\sqrt{2}$ es un número real.

2. a. En el teorema dado determino p, q y la negación de q.

b. Completo la demostración.

Teorema: si a^2 es un número par, entonces a es par.

Demostración

Afirmación	Justificación
1. ______________	1. Negación de q.
2. a es impar.	2. ______________
3. Existe $n \in Z$ tal que $a = 2n + 1$.	3. ______________
4. $a^2 = 4n^2 + 4n + 1$	4. ______________
5. ______________	5. Propiedad asociativa de la adición.
6. $a^2 = 2(2n^2 + 2n) + 1$	6. ______________
7. ______________	7. a^2 es de la forma $2k + 1$. Es decir, a^2 es impar.
8. a^2 es un número par.	8. ______________
9. (7) y (8) se contradicen.	9. ______________
De 9. afirmamos que la suposición es falsa y concluimos que a es par.	

Tabla 3.4

Soluciono problemas

3. Demuestro la parte **a.** y la parte **b.** del teorema, por los métodos directo e indirecto, respectivamente.

p: el punto M pertenece a la recta l.

q: **a.** Existe una recta (n) perpendicular a l tal que M es punto de la recta n.

b. Existe sólo una recta (n) perpendicular a l tal que M es punto de la recta n.

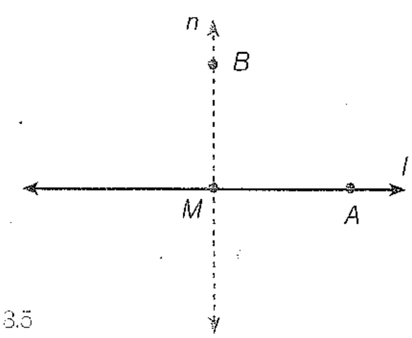


Fig. 3.5

4. En el teorema: "si dos rectas diferentes se intersecan, su intersección contiene solamente un punto",

a. Identifico p y q y determino la negación de q.

b. Demuestro el teorema por el método indirecto.

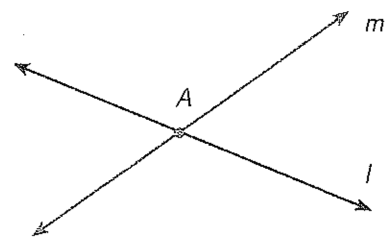


Fig. 3.6

5. Para cada teorema:

- Identifico p y q y determino la negación de q.
- Hago la demostración por el método indirecto.

a. Si x^2 es un número impar, entonces x es impar.

b. Dos rectas paralelas a la misma recta son paralelas entre sí.

c. Si dos rectas en un plano son perpendiculares a la misma recta, entonces son paralelas entre sí.

d. $\sqrt{2}$ es un número irracional.

e. Si a y b son números reales tales que $a \cdot b = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$.

Desempeños: conoce el método indirecto de demostración.
Comprende demostraciones hechas por el método indirecto.
Demuestra teoremas por el método indirecto.

Tema 3

Demostración por contraejemplo

Muchas veces tendemos a sacar conclusiones a partir de unos cuantos casos particulares. Por ejemplo, podríamos clasificar como verdadera la proposición:

"Todo número par es múltiplo 4"

porque 8, 16, 24 son pares múltiplos de 4; pero si descubrimos al menos un número par que no es múltiplo de 4, como 30, la proposición será falsa.

El ejemplo anterior nos muestra que se encontró un caso para el cual no se cumple la proposición; a este caso lo llamamos contraejemplo y el proceso utilizado lo llamamos demostración por contraejemplo.

Demostración por contraejemplo

La demostración por contraejemplo es el procedimiento que permite demostrar que proposiciones de la forma:

"Para todo..." o "Ningún..."

son falsas, cuando hallamos un caso para el cual la proposición no se cumple. El caso particular se llama **contraejemplo.**

Taller de competencias

1. Determino cuáles proposiciones son falsas. Para las que lo sean doy un contraejemplo.

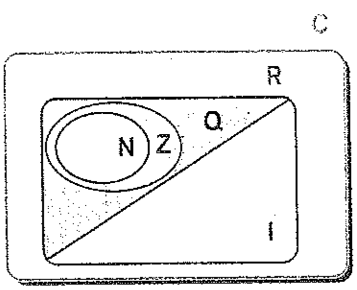


Fig. 8.7

a. Todo número real es un número complejo.
b. Todo número complejo es un número real.
c. Ningún número natural es irracional.
d. Todo número entero es irracional.
e. Ningún número irracional es racional.
f. Todo subconjunto numérico de R es subconjunto de C.
g. Ningún número natural es un número C.
h. Todo imaginario puro es un número R.
i. Todo número de la forma $\frac{a}{b}$ con a y $b \in Z$, es un número R.
j. Ningún número decimal es un número real.

2. Verifico, de acuerdo con el esquema, la falsedad de cada proposición y la demuestro con un gráfico que sea su contraejemplo.

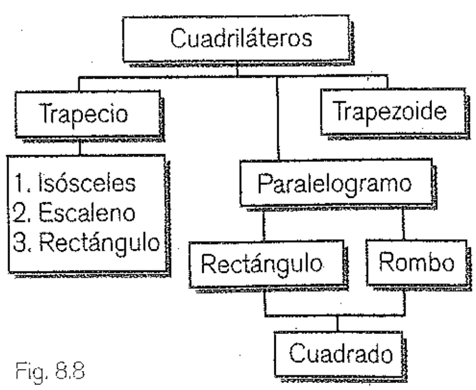


Fig. 8.8

a. Ningún cuadrilátero tiene dos diagonales.

b. Todo rectángulo es trapezoide.

c. Ningún polígono regular es cuadrilátero.

d. Todo rectángulo es trapecio.

e. Todo cuadrilátero es trapezoide.

f. Todo cuadrilátero equiángulo es cuadrado.

Soluciono problemas

3. Hallo, en cada caso, por lo menos un contraejemplo que refute la proposición.

   a. Ningún $n \in R$ satisface la ecuación $19n = n^2 + 34$.

   b. Ningún $x \in C$ satisface la ecuación $0 = 3x^2 - 8x + 10$.

   c. No existen a y b, números enteros, tales que $(a + b)^2 \neq a^2 + b^2$.

   d. No existe ningún número natural x tal que $x^2 > 2x + 1$.

   e. Todo $x \in R$ satisface $\frac{3}{4}x - 2x + 3(x + 1) < -8x + 1$.

4. Para el gráfico de la figura 8.9 escribo tres proposiciones falsas de la forma "Para todo..." o "Ningún..." y su contraejemplo en la tabla 8.5.

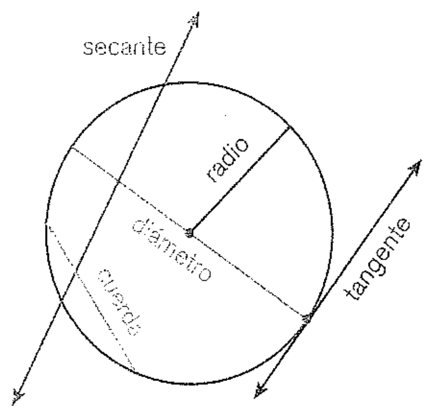


Fig. 8.9

Proposición falsa	Contraejemplo
1.	
2.	
3.	

Tabla 8.5

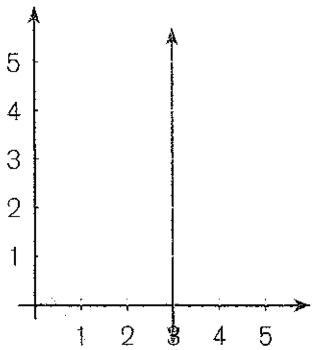
Relaciono cada proposición falsa con la gráfica que es su contraejemplo.

a. Toda relación es función. ( )

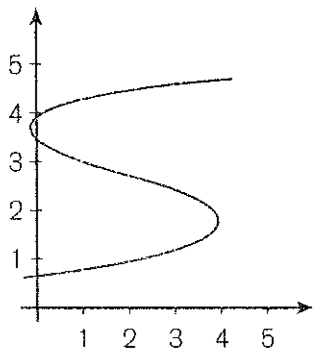
b. Toda función es lineal. ( )

c. Toda recta representa la gráfica de una función lineal. ( )

A.



B.



C.

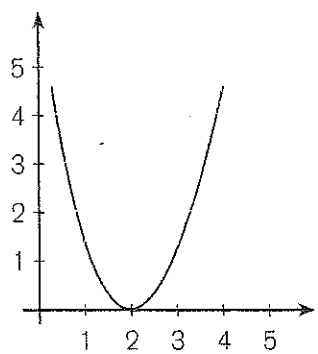


Fig. 8.10

Desempeños: relaciona elementos y da contraejemplos para demostrar proposiciones de la forma "Para todo" y "Ningún" como falsas.
Relaciona elementos y da contraejemplos para demostrar proposiciones.
Identifica proposiciones que se demuestran por contraejemplo.

Tema 4

Polígonos semejantes

La ampliación de la figura 8.11, ilustrada en la figura 8.12, tiene características comunes con su original.

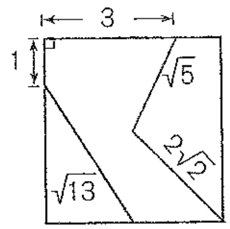


Fig. 8.11

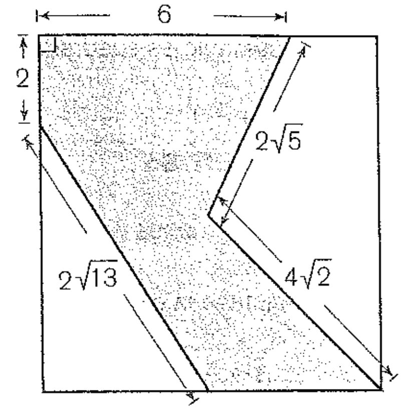


Fig. 8.12

1. Medimos los ángulos y comprobamos la congruencia de los ángulos correspondientes.
2. Hallemos las razones entre las longitudes de los lados correspondientes:

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{13}}{2\sqrt{13}}$$

Observamos que hay proporcionalidad entre las longitudes de los lados correspondientes.

Estas dos características nos permiten afirmar que las dos figuras son semejantes.

Dos figuras son semejantes cuando:

1. Los ángulos correspondientes son congruentes.
2. Las longitudes de los lados correspondientes son proporcionales.

Para indicar que dos figuras son semejantes se utiliza el símbolo ~.

Taller de competencias

1 Para cada pareja de figuras:

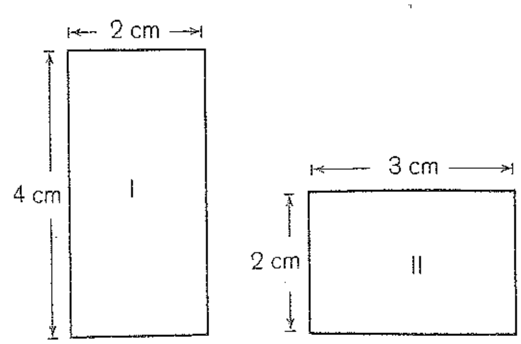
a. Mido, con un transportador, los ángulos y determino si las parejas de ángulos correspondientes son congruentes.

b. Establezco las razones de lados correspondientes y determino si ellos son proporcionales.

c. ¿Las figuras I y II son semejantes?

d. ¿Las figuras III y IV son semejantes?

a.



b.

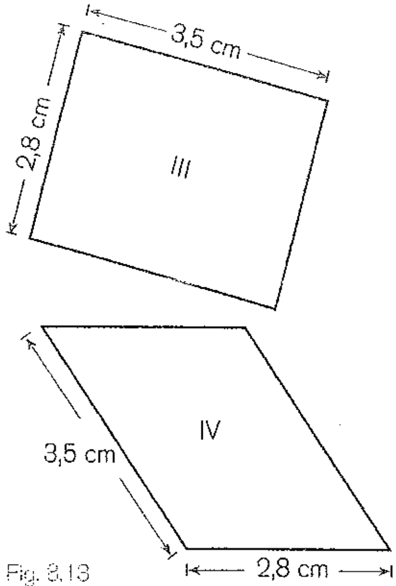


Fig. 8.13

2. Dibujo polígonos semejantes al polígono $ABCDEF$, trazando rectas paralelas a cada uno de sus lados.

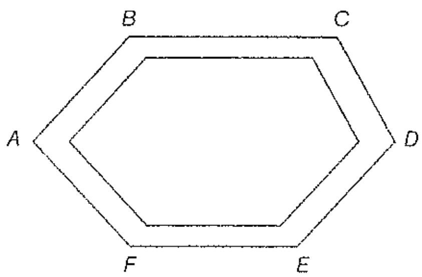


Fig. 8.14

3. Dibujo en papel cuadriculado figuras semejantes a la dada, que no sean congruentes con ella.

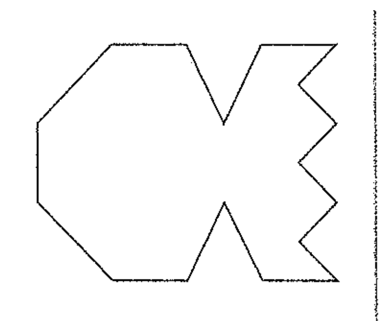
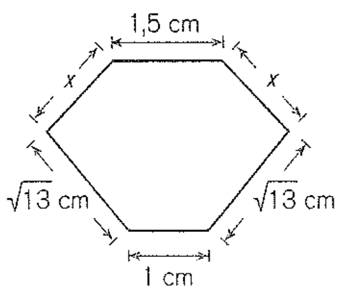
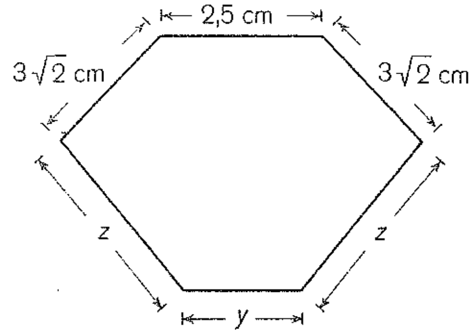


Fig. 8.15

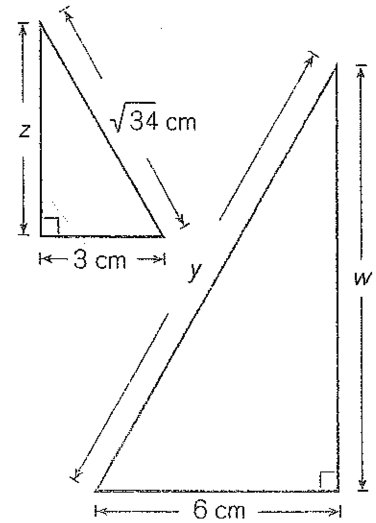
4. En cada caso, calculo las longitudes restantes, si los polígonos son semejantes.

a.





b.



c.

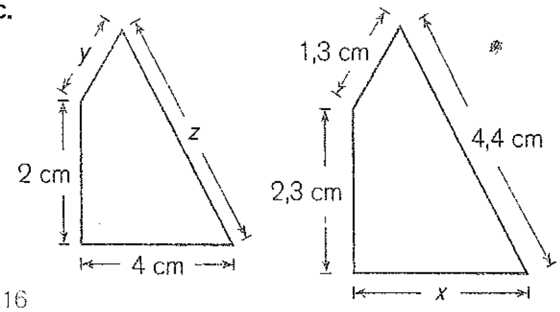


Fig. 8.16

Soluciono problemas

5. Una foto de 25 cm de ancho por 35 cm de largo se desea reducir de tal manera que el ancho sea 10 cm. ¿Cuál es el largo de la foto reducida? ¿Qué área debe tener un marco para colocar la foto reducida?

6. Los lados de un cuadrilátero miden 3, 5, 9 y 12 cm. Si se dibuja un cuadrilátero semejante a él, con perímetro de 39 cm, ¿cuál es la longitud de cada lado del segundo cuadrilátero?

7. Demuestro que si dos triángulos son congruentes, entonces son semejantes.

Desempeños: identifica parejas de polígonos semejantes.
Resuelve problemas aplicando conceptos de semejanza de figuras.

Tema 5

Triángulos semejantes

Existen criterios que nos permiten determinar, de manera rápida, si dos triángulos son semejantes.

Postulado de semejanza Ángulo-Ángulo (AA)

Si dos ángulos de un triángulo son congruentes con dos ángulos de un segundo triángulo, los triángulos son semejantes.

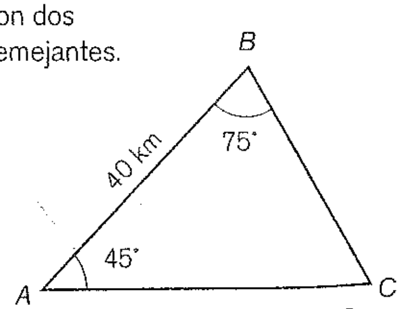


Fig. 8.17

Ejemplo

Las ciudades A y B, de la figura 8.17, distan 40 km. Calculemos la distancia entre las ciudades B y C.

Solución

Para ello, construimos un triángulo semejante al triángulo dado (figura 8.18), conservando los ángulos de 45° y 75°. Si m $DE = 4{,}2$ cm y m $EF = 3{,}3$ cm, tenemos:

$$\frac{m\,\overline{AB}}{m\,\overline{DE}} = \frac{m\,\overline{BC}}{m\,\overline{EF}}, \text{ así, } \frac{4\ 000\ 000 \text{ cm}}{4{,}2 \text{ cm}} = \frac{m\,\overline{BC}}{3{,}3 \text{ cm}}$$

Por tanto, m $\overline{BC} \approx 31{,}43$ km

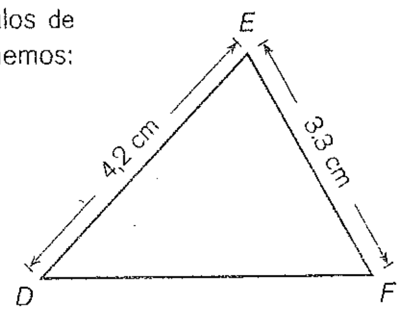


Fig. 8.18

Criterios de semejanza LAL y LLL

1. (LAL). Si un ángulo de un triángulo es congruente con un ángulo de otro triángulo y las longitudes de los lados que forman los ángulos son respectivamente proporcionales, entonces los triángulos son semejantes.
2. (LLL). Si los lados correspondientes de dos triángulos son proporcionales, entonces los triángulos son semejantes.

Taller de competencias

1. Utilizo los criterios de semejanza de triángulos para encontrar el valor desconocido en cada pareja de triángulos.

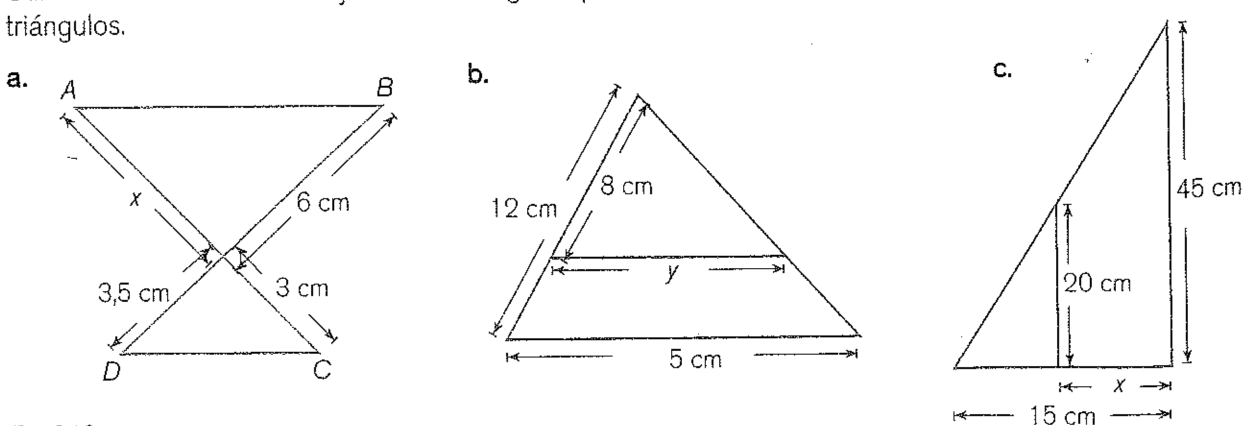


Fig. 8.19

2. Relaciono las parejas de triángulos semejantes. Tengo en cuenta los criterios mencionados arriba.

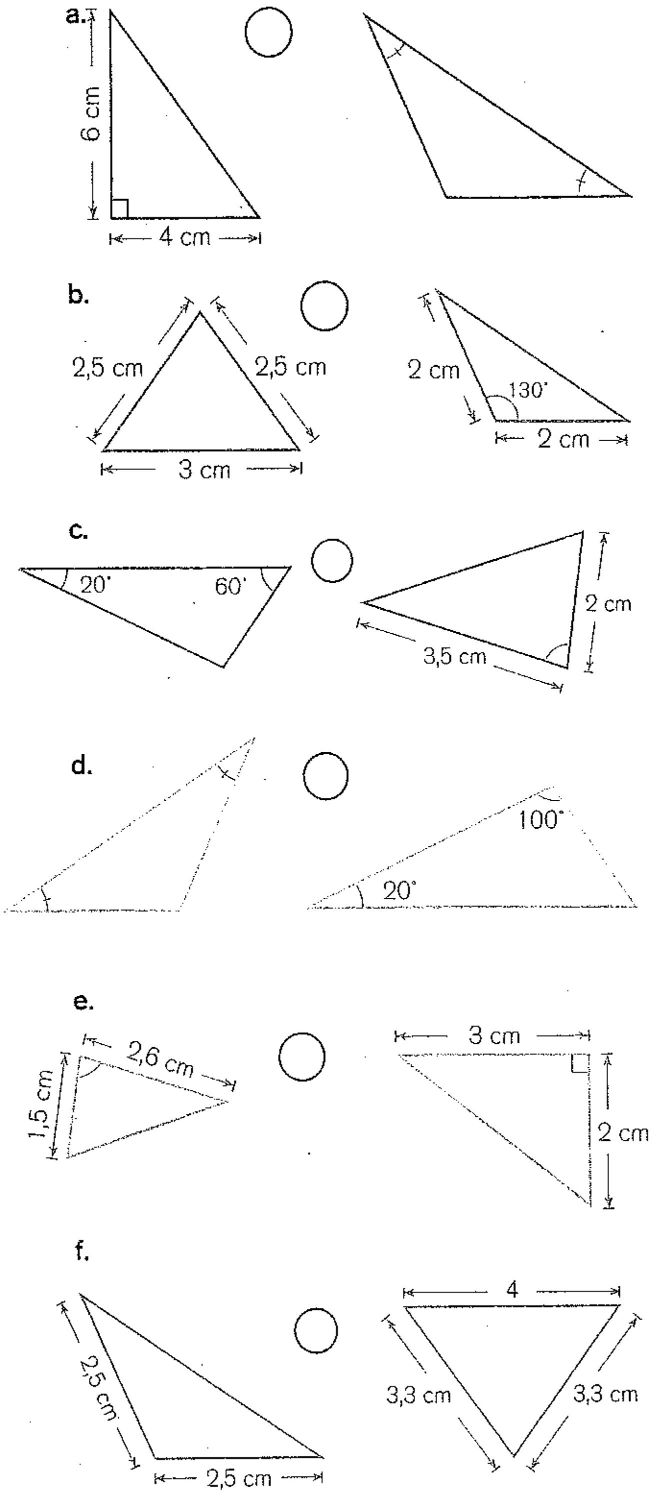


Fig. 8.20

3. Demuestro los criterios LAL y LLL de semejanza de triángulos.

4. Demuestro que dos triángulos rectángulos son semejantes si tienen un par de ángulos agudos, respectivamente congruentes.

Soluciono problemas

5. Una muchacha de 180 cm de estatura proyecta sobre el piso una sombra de longitud *y* cuando se encuentra a una distancia *x* de un poste, que tiene una lámpara, cuya altura es 7 metros.

a. Si la muchacha se encuentra a 6 m del poste, ¿cuál es la longitud de la sombra que proyecta?

b. Escribo una expresión que represente la longitud de la sombra en función de la distancia de la joven al poste.

c. Planteo un problema que genere una función si se conserva la distancia al poste y se cambia la persona.

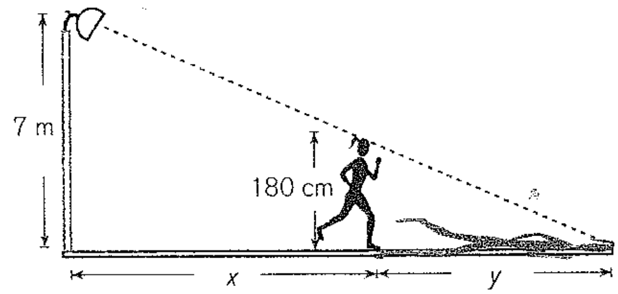


Fig. 8.21

6. Redacto, en cada caso, un problema que se ajuste a la gráfica.

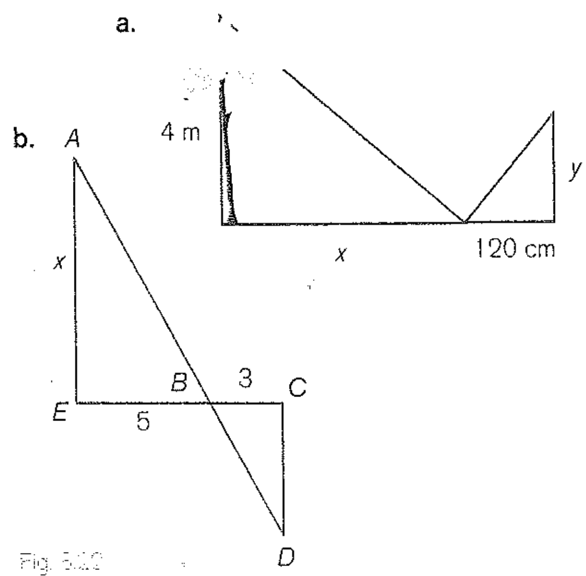


Fig. 8.22

Desempeños: aplica los criterios de semejanza de triángulos.
Analiza situaciones que se resuelven con triángulos semejantes.

Tema 6

Teorema de Tales

La plazoleta de un parque tiene la forma que ilustra la figura 8.23. ¿Cuál es la distancia entre la iluminación 2 y el restaurante?

En el esquema de la figura 8.24, reconstruimos el plano del parque y vemos que como $\overline{IA} \parallel \overline{DR}$, entonces $\measuredangle 1 \cong \measuredangle 3$ y $\measuredangle 2 \cong \measuredangle 4$ y, por tanto, $\triangle IAF \sim \triangle DRF$.

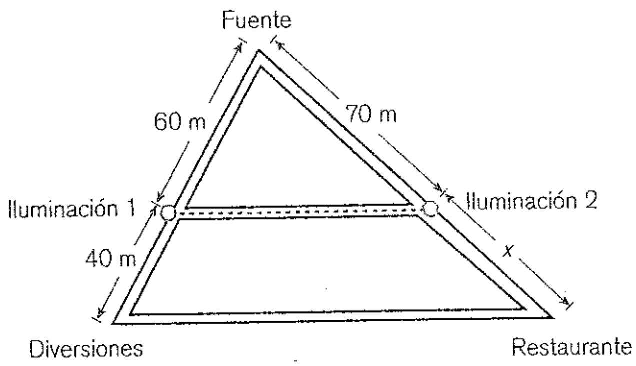


Fig. 8.23

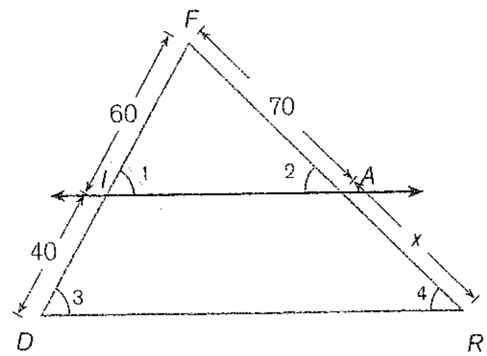


Fig. 8.24

Como los dos triángulos son semejantes, sus lados correspondientes son proporcionales.

$\dfrac{m\,\overline{IF}}{m\,\overline{DF}} = \dfrac{m\,\overline{AF}}{m\,\overline{RF}}$. Reemplazando tenemos:

$\dfrac{60}{100} = \dfrac{70}{70+x}$, entonces, $60(70+x) = 70 \times 100$

$$4200 + 60x = 7000$$
$$60x = 2800$$
$$x \approx 46{,}7 \text{ m}$$

La distancia entre la iluminación 2 y el restaurante es aproximadamente 46,7 m.

El esquema anterior nos lleva a formular el siguiente teorema.

Paralela a un lado de un triángulo

Si una recta paralela a un lado de un triángulo interseca a los otros dos lados, entonces determina sobre ellos segmentos proporcionales.

En la solución de problemas podemos aplicar el teorema anterior y su teorema recíproco.

Proporcionalidad en un triángulo

Si una recta divide dos lados de un triángulo en segmentos proporcionales, entonces la recta es paralela al tercer lado del triángulo.

Los teoremas anteriores llevan a la formulación del teorema de Tales.

Teorema de Tales

Si tres rectas paralelas o más son cortadas por dos transversales, las rectas paralelas determinan, en las transversales, segmentos proporcionales.

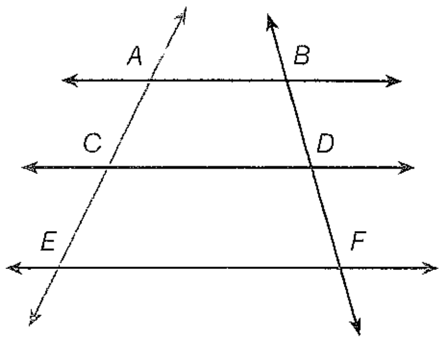


Fig. 8.25

Reformulemos el teorema de Tales, de acuerdo con la figura 8.25.

Dados: $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{EF}$ y $\overleftrightarrow{AE}$ y $\overleftrightarrow{BF}$ transversales, se cumple que: $\dfrac{m\,\overline{AC}}{m\,\overline{CE}} = \dfrac{m\,\overline{BD}}{m\,\overline{DF}}$.

Taller de competencias

1. El teorema de la paralela a un lado de un triángulo reformulado dice:

Dados: $\triangle ABC$; E y F puntos de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$, respectivamente, y $\overleftrightarrow{EF} \parallel \overline{BC}$.

Entonces: $\dfrac{m\,\overline{BE}}{m\,\overline{EA}} = \dfrac{m\,\overline{CF}}{m\,\overline{FA}}$.

Completo la demostración escribiendo la justificación de cada afirmación.

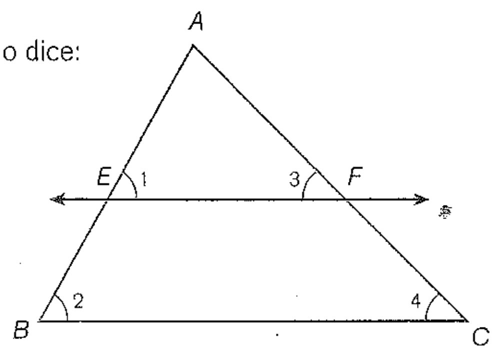


Fig. 8.26

Afirmación	Justificación
1. $\overleftrightarrow{EF} \parallel \overline{BC}$	**1.** ______________
2. $\measuredangle 1 \cong \measuredangle 2$ y $\measuredangle 3 \cong \measuredangle 4$	**2.** ______________
3. $\triangle AEF \sim \triangle ABC$	**3.**
4. $\dfrac{m\,\overline{AB}}{m\,\overline{EA}} = \dfrac{m\,\overline{AC}}{m\,\overline{FA}}$	**4.** ______________
5. $\dfrac{m\,\overline{AB} - m\,\overline{EA}}{m\,\overline{EA}} = \dfrac{m\,\overline{AC} - m\,\overline{FA}}{m\,\overline{FA}}$	**5.** ______________
6. $m\,\overline{AB} - m\,\overline{EA} = m\,\overline{BE}$ y $m\,\overline{AC} - m\,\overline{FA} = m\,\overline{FC}$	**6.** ______________
7. $\dfrac{m\,\overline{BE}}{m\,\overline{EA}} = \dfrac{m\,\overline{CF}}{m\,\overline{FA}}$	**7.** ______________

Tabla 8.6

2. El teorema de la proporcionalidad en un triángulo reformulado dice:

Dados: $\triangle ABC$ y $\dfrac{m\,\overline{EA}}{m\,\overline{BE}} = \dfrac{m\,\overline{FA}}{m\,\overline{FC}}$.

Demuestro que: $\overleftrightarrow{EF} \parallel \overline{BC}$.

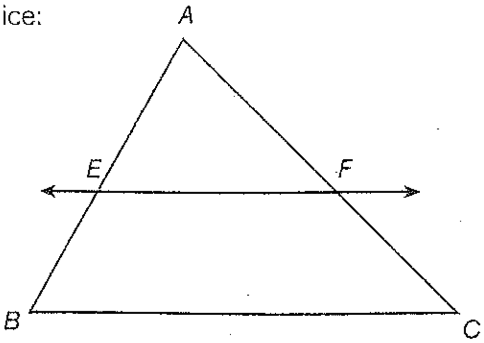


Fig. 8.27

---

3. Completo la demostración del teorema de Tales, escribiendo la afirmación de cada justificación. Tengo en cuenta la figura 8.28.

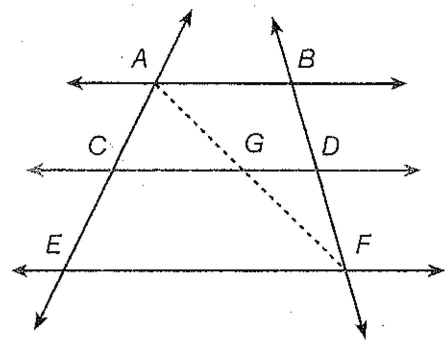


Fig. 8.28

Afirmación	Justificación
1. Se traza $\overline{AF}$, que interseca a $\overleftrightarrow{CD}$ en G.	1. Dos puntos determinan una recta.
2. ______________________	2. Dado.
3. ______________________	3. Teorema de la paralela a un lado de un triángulo.
4. ______________________	4. Sustitución.

Tabla 8.7

---

4. Tengo en cuenta la figura 8.29 donde $\overleftrightarrow{EF} \parallel \overline{AB}$.

a. Si $m\,\overline{CE} = 4$ cm, $m\,\overline{EA} = 2$ cm y $m\,\overline{BF} = 3$ cm, hallo $m\,\overline{CF}$.

b. Si $m\,\overline{CA} = 10$ cm, $m\,\overline{CE} = 5$ cm y $m\,\overline{CF} = 7$ cm, hallo $m\,\overline{CB}$.

c. Si $m\,\overline{CA} = 8$ cm, $m\,\overline{CE} = 3$ cm y $m\,\overline{BF} = 4{,}5$ cm, hallo $m\,\overline{CF}$.

d. Si $m\,\overline{EA} = 2{,}5$ cm, $m\,\overline{CE} = 6$ cm y $m\,\overline{CB} = 10{,}5$ cm, hallo $m\,\overline{BF}$.

e. Si $m\,\overline{CE} = 6$ cm, $m\,\overline{EA} = 2$ cm y $m\,\overline{CF} = 7$ cm, hallo $m\,\overline{FB}$.

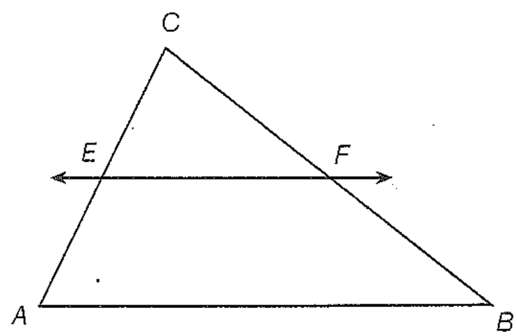


Fig. 8.29

5. En cada triángulo el segmento que interseca a dos lados es paralelo a la base; hallo x en términos de las otras cantidades.

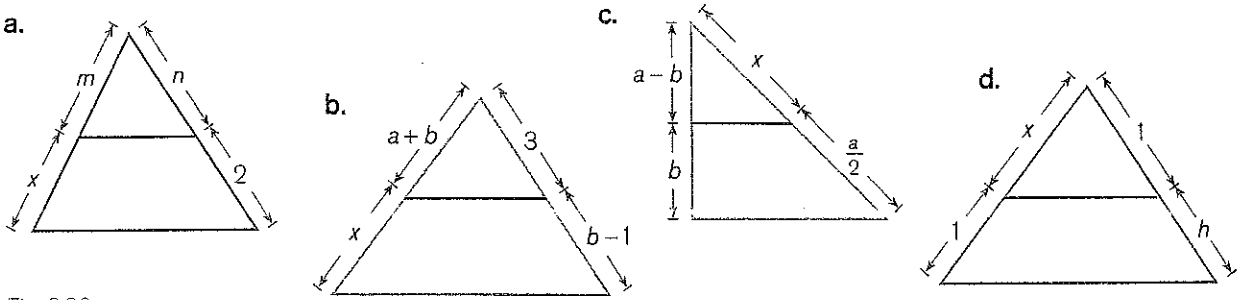


Fig. 8.30

6. **Teorema de la bisectriz de un ángulo de un triángulo**

Dados: $\triangle ABC$ y $\overrightarrow{BE}$ bisectriz del $\measuredangle ABC$.

Entonces: $\dfrac{m\,\overline{AE}}{m\,\overline{EC}} = \dfrac{m\,\overline{AB}}{m\,\overline{BC}}$.

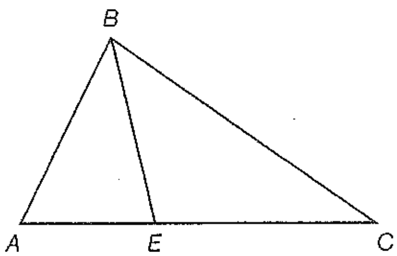


Fig. 8.31

a. Demuestro el teorema de la bisectriz de un ángulo de un triángulo.

b. En la figura 8.31 hallo la $m\,\overline{AB}$ si $m\,\overline{AE} = 6$ cm, $m\,\overline{EC} = 7$ cm y $m\,\overline{BC} = 12$ cm.

c. En la figura 8.31 hallo la $m\,\overline{AE}$ y $m\,\overline{EC}$ si $m\,\overline{AB} = 6$ cm, $m\,\overline{BC} = 8$ cm y $m\,\overline{AC} = 10$ cm.

d. En la figura 8.31 hallo la $m\,\overline{EC}$ si $m\,\overline{AB} = 5$ cm, $m\,\overline{BC} = 9$ cm y $m\,\overline{AC} = 13$ cm.

7. En la figura 8.32 las rectas o, p, q, r son paralelas y m, n son trasversales.

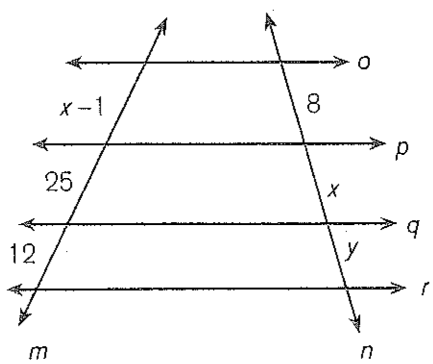


Fig. 8.32

Hallo el valor de x y de y; además, la longitud de cada segmento entre las paralelas.

8. Observo en la figura 8.33.

Dados: $\overline{MB}$ bisectriz del $\measuredangle M$ y $\overline{AB} \parallel \overline{MP}$.

Demuestro que: $m\,\overline{NA} = \dfrac{m\,(\overline{MN})^2}{m\,\overline{MN} + m\,\overline{MP}}$.

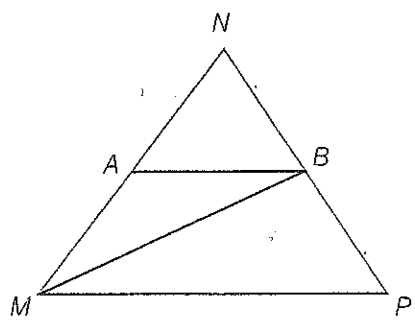


Fig. 8.33

Desempeños: Identifica el teorema de Thales.
Aplica el teorema de Thales y sus corolarios.
Demuestra el teorema de Thales y algunos que son consecuencia de él.

Tema 7

Triángulos rectángulos

La altura sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo determina dos triángulos rectángulos, los cuales conservan respecto al triángulo original propiedades de semejanza.

Altura sobre la hipotenusa

La altura sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo, divide a este en dos triángulos semejantes entre sí y semejantes al original.

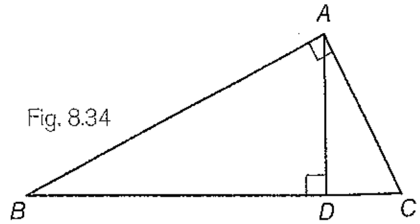


Fig. 8.34

Del teorema anterior se derivan dos propiedades importantes:

En un $\triangle ABC$ con $\measuredangle A$ recto y $\overline{AD} \perp \overline{BC}$:

1. $\dfrac{m\,\overline{CD}}{m\,\overline{AD}} = \dfrac{m\,\overline{AD}}{m\,\overline{DB}}$

2. $\dfrac{m\,\overline{CB}}{m\,\overline{AC}} = \dfrac{m\,\overline{AC}}{m\,\overline{CD}}$ y $\dfrac{m\,\overline{CB}}{m\,\overline{BA}} = \dfrac{m\,\overline{AB}}{m\,\overline{DB}}$

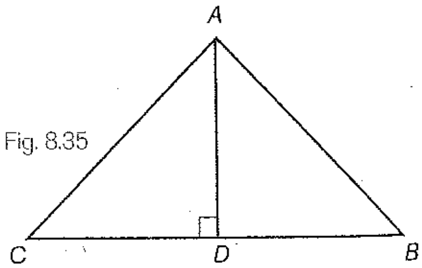


Fig. 8.35

Ejemplo

Hallemos la altura h del $\triangle EFC$ en la figura 8.36.

Solución

Por la propiedad 1: $\dfrac{5}{h} = \dfrac{h}{10}$.

$h^2 = 50$

$h = \sqrt{50}$, por tanto, $h = 5\sqrt{2}$

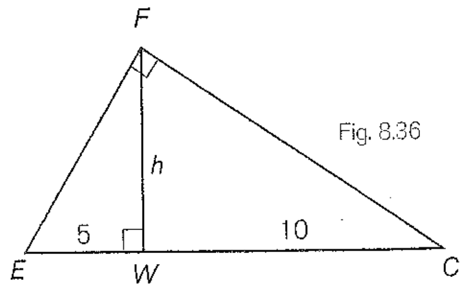


Fig. 8.36

Taller de competencias

1. De acuerdo con la figura 8.37 hallo el valor de la letra en cada caso.

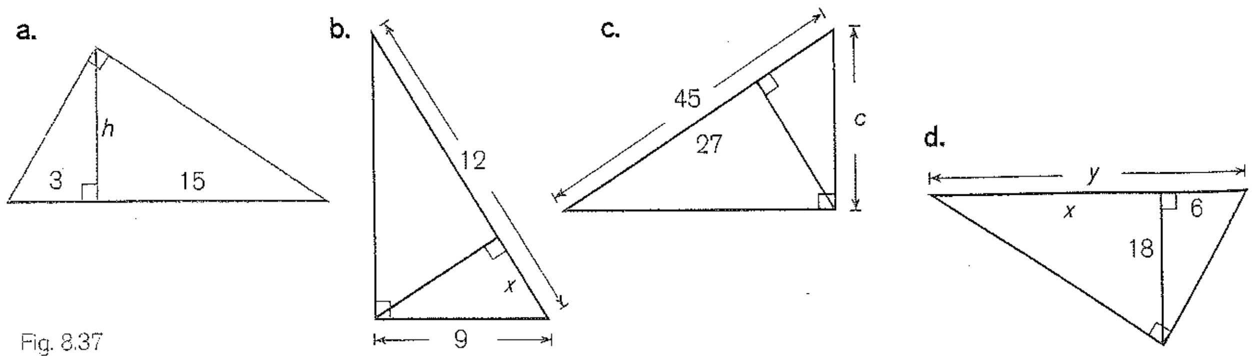


Fig. 8.37

2. Demuestro las dos propiedades que son consecuencia del teorema de la altura sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo.

3. Completo la demostración del teorema de la altura sobre la hipotenusa, teniendo en cuenta la figura 8.34.
Dados: $\triangle ABC$ con $\measuredangle A$ recto y $\overline{AD} \perp \overline{BC}$. Entonces: $\triangle CDA \sim \triangle CAB$; $\triangle CAB \sim \triangle BDA$; $\triangle CDA \sim \triangle BDA$.

Afirmación	Justificación
1. $\measuredangle A$ es recto y $\overline{AD} \perp \overline{BC}$.	**1.** ______________
2. ______________	**2.** Ángulos determinados.
3. $\measuredangle C \cong \measuredangle C$	**3.** ______________
4. $\measuredangle CDA \cong \measuredangle A$	**4.** ______________
5. ______________	**5.** Postulado de semejanza AA.
6. $\measuredangle B \cong \measuredangle B$	**6.** ______________
7. ______________	**7.** Los ángulos rectos son congruentes.
8. $\triangle CAB \sim \triangle BDA$	**8.** ______________
9. ______________	**9.** Transitividad de la semejanza de triángulos.

Tabla 8.8

4. En cada caso encuentro el valor de las incógnitas indicadas.

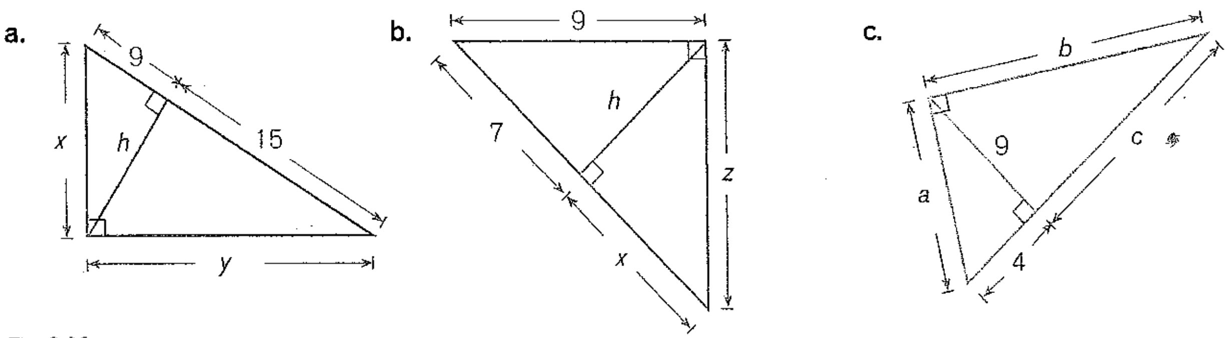


Fig. 8.38

5. De acuerdo con la figura 8.39 demuestro que:

a. $h = \dfrac{ab}{x + y}$

b. $(x + y)^2 = a^2 + b^2$

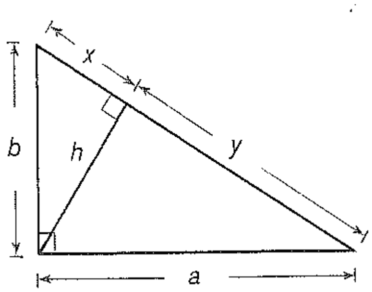


Fig. 8.39

6. Desde la playa se observan dos pequeñas embarcaciones pesqueras, distantes de un faro, como muestra la figura 8.40. ¿Cuál es la distancia que separa a cada embarcación del faro?

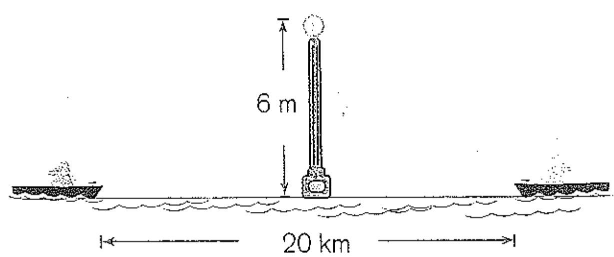


Fig. 8.40

Desempeños: aplica el teorema de triángulos rectángulos.
Reconoce propiedades básicas de los triángulos rectángulos.
Utiliza las propiedades para resolver triángulos rectángulos y resolver problemas.
Demuestra teoremas relacionados con triángulos rectángulos.

Tema 8

Triángulos rectángulos especiales

- Calculemos la longitud de la hipotenusa en cada triángulo rectángulo isósceles de la figura 8.41.

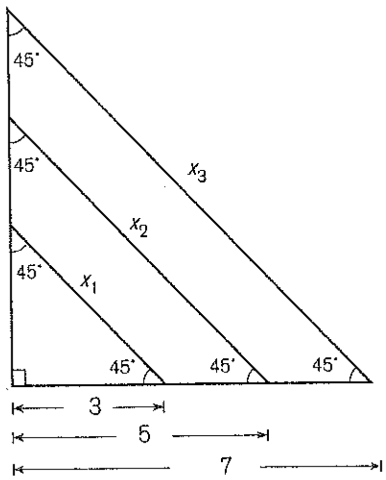


Fig. 8.41

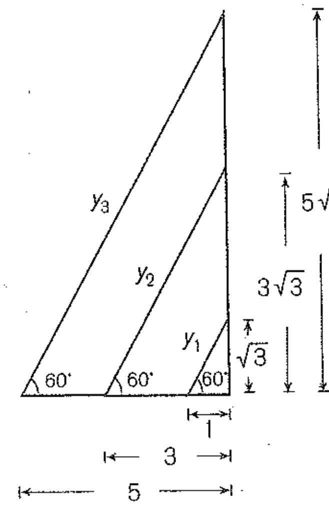


Fig. 8.42

$x_1^2 = 3^2 + 3^2$ $\qquad$ $x_2^2 = 5^2 + 5^2$ $\qquad$ $x_3^2 = 7^2 + 7^2$

$x_1 = 3\sqrt{2}$ $\qquad$ $x_2 = 5\sqrt{2}$ $\qquad$ $x_3 = 7\sqrt{2}$

Como la longitud de la hipotenusa se relaciona con la longitud de los catetos de los triángulos rectángulos isósceles, tenemos:

Triángulos rectángulos 45° – 90° – 45°

La longitud de la hipotenusa en un triángulo rectángulo isósceles es $\sqrt{2}$ veces la longitud de uno de los catetos.

Calculemos la longitud de la hipotenusa en cada triángulo rectángulo 30° – 90° – 60° de la figura 8.42.

$y_1^2 = c_1^2 + c_2^2$ $\qquad$ $y_2^2 = c_1^2 + c_2^2$ $\qquad$ $y_3^2 = c_1^2 + c_2^2$

$y_1^2 = 1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2$ $\qquad$ $y_2^2 = 3^2 + \left(3\sqrt{3}\right)^2$ $\qquad$ $y_3^2 = 5^2 + \left(5\sqrt{3}\right)^2$

$y_1^2 = 1 + 3$ $\qquad$ $y_2^2 = 9 + 27$ $\qquad$ $y_3^2 = 25 + 75$

$y_1 = 2$ $\qquad$ $y_2 = 6$ $\qquad$ $y_3 = 10$

$y_1 = 2c_1$ $\qquad$ $y_2 = 2c_1$ $\qquad$ $y_3 = 2c_1$

$c_2 = \sqrt{3}c_1$ $\qquad$ $c_2 = \sqrt{3}c_1$ $\qquad$ $c_2 = \sqrt{3}c_1$

Triángulos rectángulos 30° – 90° – 60°

En todo triángulo rectángulo cuyos ángulos agudos midan 30° y 60°, la longitud del cateto mayor es $\sqrt{3}$ veces la longitud del cateto menor y la longitud de la hipotenusa es el doble de la longitud del cateto menor.

Taller de competencias

1. Los triángulos Δi, $i = 1, \ldots, 5$, son triángulos rectángulos 45° – 90° – 45°. Completo la tabla 8.9 y determino un patrón que permita calcular el perímetro de cualquier triángulo rectángulo isósceles.

Triángulos	C_1	C_2	h	Perímetro
Δ_1	8			
Δ_2			$9\sqrt{2}$	
Δ_3			$\sqrt{15}$	
Δ_4	$\sqrt{10}$			
Δ_5		$\sqrt{6}$		

Tabla 8.9

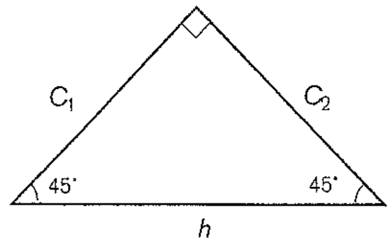


Fig. 8.43

2. Los triángulos Δi, $i = 1, \ldots, 5$, son triángulos rectángulos 30° – 90° – 60°. Completo la tabla 8.10 y determino un patrón que permita calcular el perímetro de cualquier triángulo rectángulo 30° – 90° – 60°.

Triángulos	C_1	C_2	h	Perímetro
Δ_1	2			
Δ_2			5	
Δ_3			$2\sqrt{8}$	
Δ_4			$\sqrt{10}$	
Δ_5	$\sqrt{6}$			

Tabla 8.10

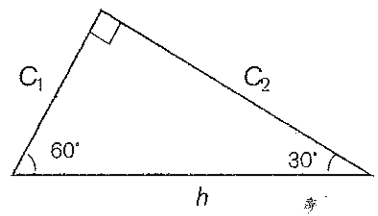


Fig. 8.44

3. Hallo el valor de x sin aplicar el teorema de Pitágoras.

a. **b.** **c.**

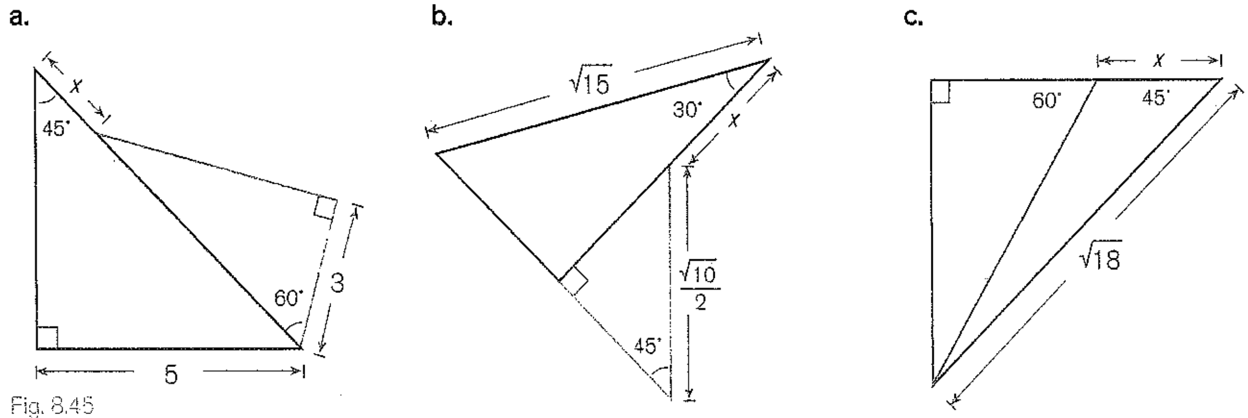


Fig. 8.45

4. Calculo el área de la región sombreada en cada figura del ejercicio 3.

Soluciono problemas

5. Demuestro los teoremas de los triángulos rectángulos 45° – 90° – 45° y 30° – 90° – 60°, cuya reformulación es:

a. Dados: $\triangle ABC$ rectángulo isósceles y $m\,\overline{AC} = m\,\overline{AB} = x$. Se cumple: $m\,\overline{BC} = x\sqrt{2}$.

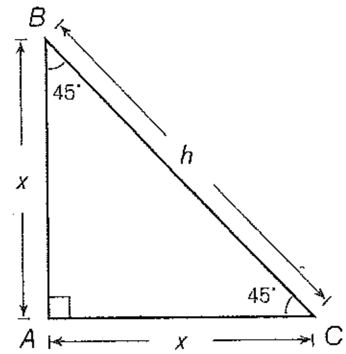


Fig. 8.46

b. Dados: $\triangle ABC$ rectángulo, donde $m\,\measuredangle A = 30°$, $m\,\measuredangle B = 60°$ y $m\,\overline{BC} = x$. Se cumple que: $m\,\overline{AB} = 2x$ y $m\,\overline{AC} = x\sqrt{3}$.

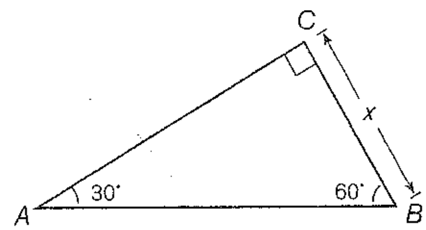


Fig. 8.47

6. ¿Cuál es la longitud del $\overline{AK}$?

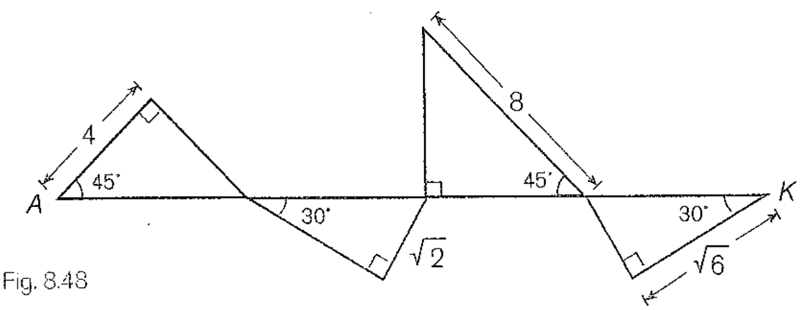


Fig. 8.48

7. Una pieza de una máquina tiene la forma de la figura 8.49.
¿Cuál es su perímetro?

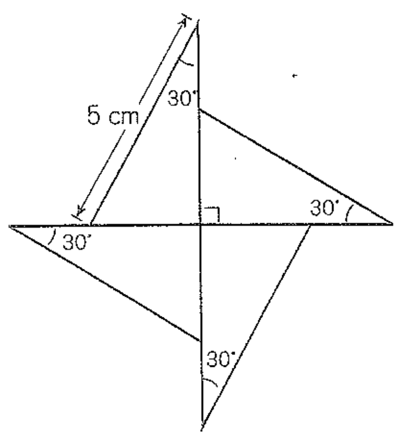


Fig. 8.49

8. Calculo el área y el perímetro de cada triángulo del ejercicio 6.

9. Calculo el área de la figura del ejercicio 7.

Desempeños: Identifica las propiedades de los triángulos rectángulos especiales.
Demuestra y aplica las propiedades de los triángulos rectángulos especiales.
Resuelve problemas relacionados con triángulos rectángulos especiales.

Tema 9

Razones trigonométricas

Un cable se fija al piso desde un poste formando un ángulo de 50°, como muestra la figura. ¿Cuál es la altura del poste?

Con la información que contamos y las propiedades anteriormente vistas, no es posible resolver el problema. Por tanto, utilizaremos lo que los matemáticos egipcios llamaron razones trigonométricas. Tales razones surgieron al relacionar las longitudes de los lados y la medida de los ángulos agudos en un triángulo rectángulo.

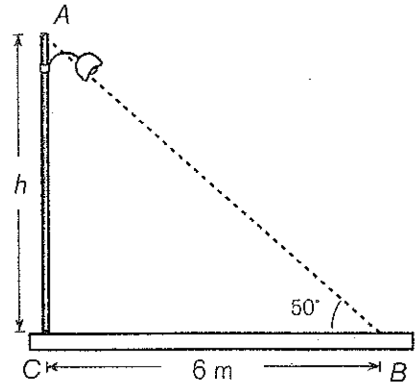


Fig. 8.50

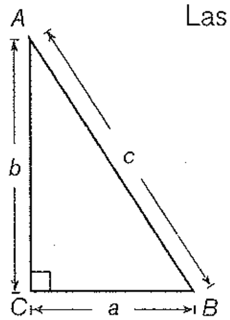


Fig. 8.51

Las razones trigonométricas para un triángulo rectángulo ABC, respecto al ángulo agudo A, son:

$$\text{Seno } \measuredangle A = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{a}{c}$$

$$\text{Coseno } \measuredangle A = \frac{\text{Cateto adyacente}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{b}{c}$$

$$\text{Tangente } \measuredangle A = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto adyacente}} = \frac{a}{b}$$

La altura del poste la calculamos utilizando la razón trigonométrica tangente respecto al ángulo B.

$$\tan 50° = \frac{h}{6}, \text{ entonces } 6 \tan 50° = h$$

Con la calculadora encontramos tan 50°, que aproximadamente es 1,1918.

$h = 6(1{,}1918) = 7{,}15$ m

La altura del poste es 7,15 m, aproximadamente.

Taller de competencias

1. Dibujo un triángulo para la razón trigonométrica dada y encuentro las otras dos razones.

a. $\operatorname{sen} A = \frac{3}{7}$ **b.** $\cos A = \frac{4}{9}$ **c.** $\tan A = \frac{3}{2}$

d. $\operatorname{sen} B = \frac{5}{6}$ **e.** $\cos B = \frac{1}{\sqrt{2}}$ **f.** $\tan B = \frac{5}{2}$

2. Los triángulos $\triangle i$, $i = 1, 2, 3, 4$, son triángulos rectángulos como el de la figura 8.52. Calculo las razones trigonométricas del ángulo A y del ángulo B y completo la tabla 8.11.

Triángulos	a	b	c	sen A	cos A	tan A	sen B	cos B	tan B
$\triangle_1$	3	4	5						
$\triangle_2$	1	1							
$\triangle_3$	4	$4\sqrt{3}$							
$\triangle_4$	$\sqrt{6}$		$\sqrt{7}$						

Tabla 8.11

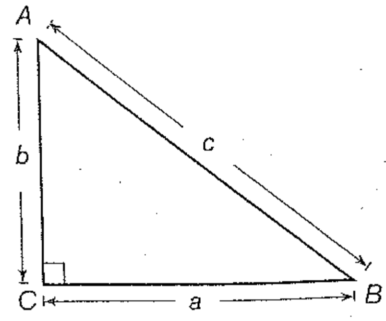


Fig. 8.52

---

3. Dado: $\triangle ABC$ rectángulo en C.
Demuestro que: $\operatorname{sen}^2 A + \cos^2 A = 1$.

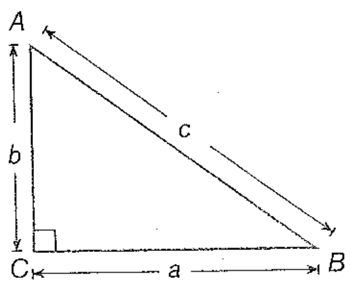


Fig. 8.53

4. Para el rectángulo de la figura 8.54 encuentro:

a. La longitud de la diagonal.
b. El perímetro.
c. El área.

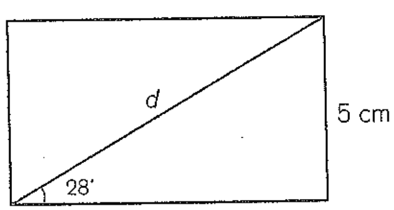


Fig. 8.54

Soluciono problemas

5. ¿Cuál es la altura del tejado?

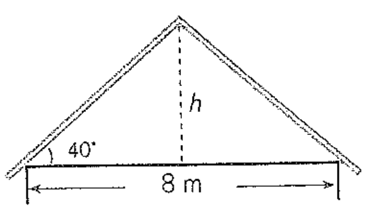


Fig. 8.55

6. ¿Cuál es la longitud del cable?

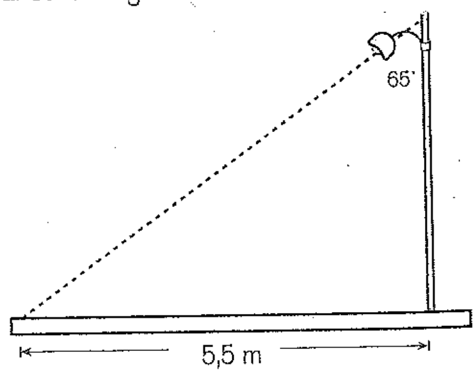


Fig. 8.56

7. ¿Cuál es la distancia entre las dos embarcaciones?

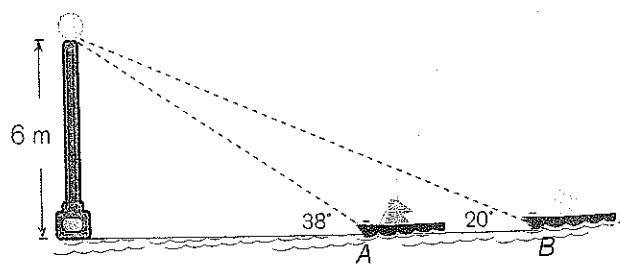


Fig. 8.57

8. ¿Cuál es el volumen del cilindro?

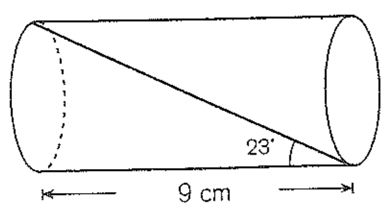


Fig. 8.58

Desempeños: reconoce las razones trigonométricas en triángulos rectángulos.
Realiza cálculos con triángulos rectángulos.
Resuelve problemas relacionados con triángulos rectángulos.

Matemática recreativa

1. El teorema de Pitágoras nos da la propiedad más importante que se cumple en cualquier triángulo rectángulo. Así, el área de un cuadrado, construido sobre la hipotenusa, es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos. Pruebo esta propiedad realizando la siguiente construcción.

   En una hoja de cartulina:

   a. Dibujo un triángulo rectángulo y tres cuadrados en él, cuyos lados son los lados del triángulo, respectivamente, como muestra la figura 8.59.

   b. Trazo las diagonales del cuadrado *ABCD* y determino su centro.

   c. Trazo los segmentos $\overline{PQ}$ y $\overline{RT}$ que pasan por el centro y son paralelos a $\overline{DF}$ y $\overline{FG}$, respectivamente.

   d. Recorto el cuadrado *ABCD* en las cuatro piezas iguales que generaron los segmentos $\overline{PQ}$ y $\overline{RT}$.

   e. Recorto el cuadrado *CMNF*.

   f. Con las cinco piezas, cubro el cuadrado *DFGO*.

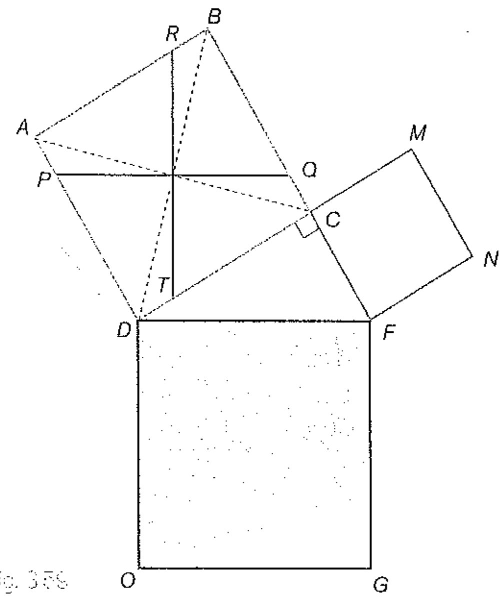


Fig. 8.59

2. Escribo una situación que se ajuste a la gráfica de la figura 8.60 y la resuelvo.

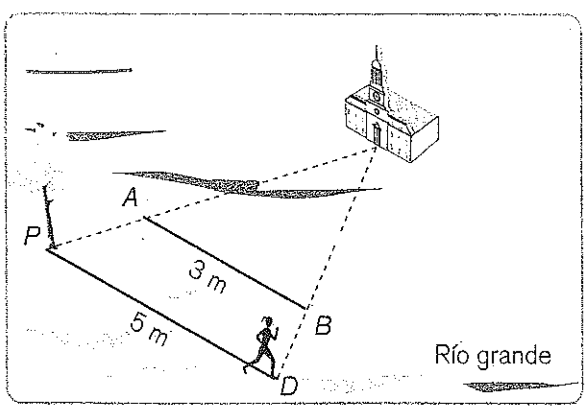
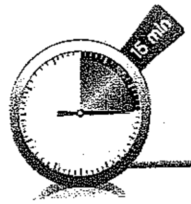


Fig. 8.60



Evalúo mis competencias

Con los siguientes ejercicios, afianzo los desempeños que he superado y refuerzo aquellos que están por superar.

1. Demuestro, por el método directo.

Dados: $\triangle ABC$ y $\measuredangle A$ recto.

Se cumple: $\tan C = \dfrac{\operatorname{sen} C}{\cos C}$.

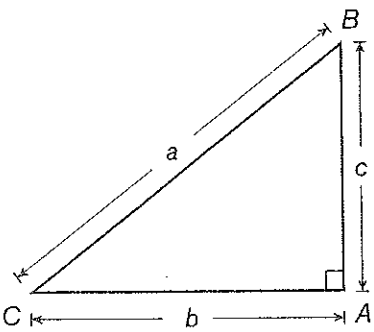


Fig. 8.61

2. Demuestro, con el método indirecto, que por un punto exterior a una recta pasa al menos una recta paralela a la recta dada.

3. Escribo la expresión que hace cierta la igualdad.

a. $\dfrac{x+y}{x^2-y^2} = \dfrac{1}{\square}$

b. $x^{-2} + y^{-2} = \dfrac{y^2+x^2}{\square}$

c. $\dfrac{a^{-1}}{b} + \dfrac{b^{-1}}{a} = \dfrac{\square}{ab}$

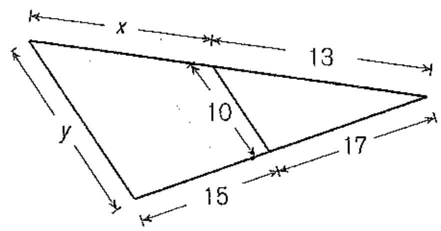
d. $(x+3)^{-1} - (x-2)^{-2} = \dfrac{\square}{x^2+x-6}$

4. Dos ángulos de un triángulo están en razón 4 a 3; si el tercer ángulo mide 131°, ¿cuál es la medida de los ángulos?

5. Trazo un paralelogramo $EFGH$ tal que m $\overline{EF} = 8$ cm, m $\overline{EH} = 12$ cm y m $\overline{FH} = 10$ cm. Sea K un punto de $\overline{EH}$ tal que m $\overline{HK} = 2{,}4$ cm. Por K trazo $\overleftrightarrow{KJ}$ paralela a $\overleftrightarrow{GH}$, tal que J es el punto de intersección con $\overleftrightarrow{FH}$. ¿Cuál es la longitud de $\overline{HJ}$ y de $\overline{JK}$?

6. Para cada figura calculo x, y. Los segmentos en rojo son paralelos.

a.



b.

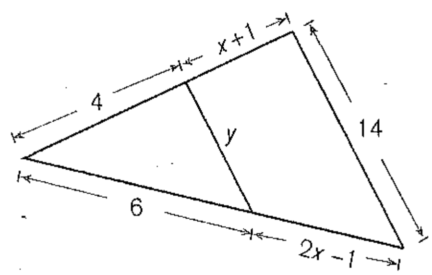


Fig. 8.62

7. **a.** En la figura 8.63, ¿cuál es la ordenada de C?

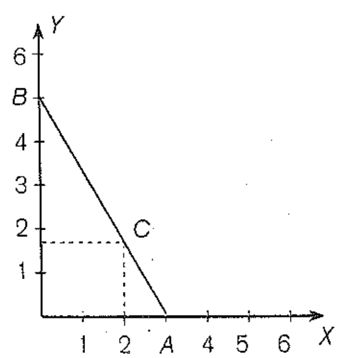


Fig. 8.63

b. En la figura 8.64, x es la abscisa de M. ¿Cuál es la ordenada de M en función de x?

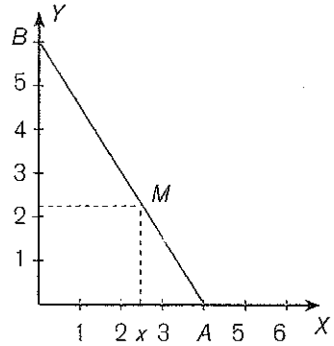


Fig. 8.64

8. En la figura 8.65 $\overline{BC}$ y $\overline{DF}$ son paralelos. ¿Cuál es la longitud de $\overline{DE}$?

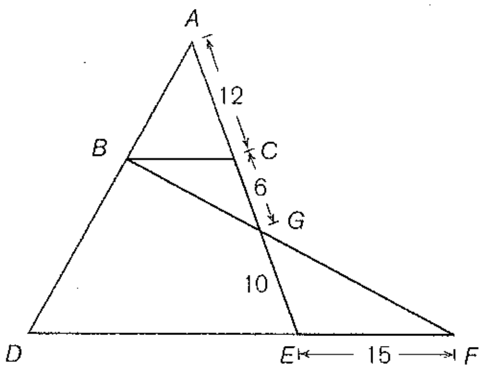


Fig. 8.65

Soluciono problemas

9. En la figura 8.66, ¿cuál es el valor de x y cuál el valor de y?

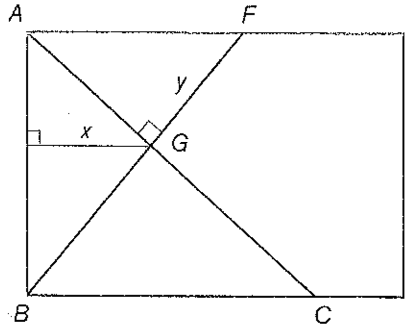


Fig. 8.66

10. La sombra que proyecta el árbol es 9,4 m y la que proyecta su tronco es 2,7 m. ¿Cuál es la altura del árbol?

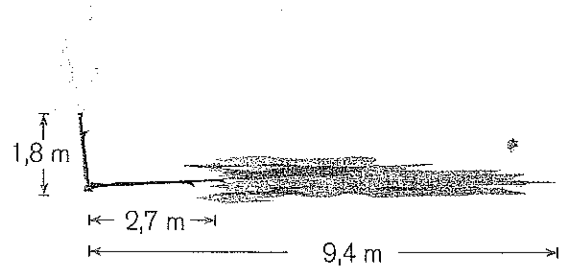


Fig. 8.67

Autoevaluación

	Bajo	Básico	Alto	Superior
Conozco y utilizo los diferentes métodos de demostración.				
Hallo la razón entre las cantidades correspondientes a una magnitud.				
Determino si dos razones dadas forman una proporción.				
Utilizo las propiedades básicas de las proporciones en la solución de problemas.				
Aplico el concepto de semejanza de polígonos en la solución de diversas situaciones.				
Identifico los criterios de semejanza de triángulos y los aplico.				
Utilizo el teorema de Tales en la solución de problemas.				
Analizo y aplico propiedades básicas de los triángulos rectángulos.				
Utilizo el teorema de Pitágoras y resuelvo algunas aplicaciones.				
Hallo las razones trigonométricas seno, coseno y tangente de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo.				
Analizo y aplico las propiedades de los triángulos rectángulos $30° - 90° - 60°$ y $45° - 90° - 45°$.				

Prueba Saber

Encuentra la respuesta correcta entre las opciones A, B, C y D, y márcala en la hoja de respuestas, rellenando completamente el círculo correspondientes.

Contesta las preguntas 1 a 5 de acuerdo con la siguiente información.

Una fábrica procesadora de papel y cartón realiza trabajos por encargo para diferentes empresas, razón por la cual sus trabajadores se ven enfrentados a diversas situaciones.

1. La fábrica produce, a la semana, 1500 cajas de cartón del mismo tamaño. Trabajando al mismo ritmo, ¿cuántas cajas producirán en cinco semanas y media? (Cada semana consta de seis días laborales.)

   A. 7500 cajas

   B. 8250 cajas

   C. 8500 cajas

   D. 9250 cajas

2. Una de las empresas cliente le ha pedido que manufacture cajas cuya altura sea media geométrica entre el largo y el ancho. Si el largo y el ancho deben medir 90 cm y 40 cm respectivamente, ¿cuánto debe medir la altura?

   A. 60 cm

   B. 80 cm

   C. 100 cm

   D. 120 cm

3. En una de las caras laterales de las cajas que se elaboran, se debe estampar el logotipo que ilustra la figura 8.68, donde los triángulos son semejantes. Si un tarro de pintura sirve para recubrir 2175 cm^2 de superficie, ¿cuántas cajas alcanzan a ser estampadas?

   A. 150 cajas

   B. 174 cajas

   C. 290 cajas

   D. 300 cajas

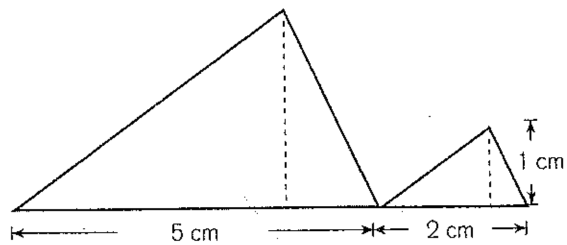


Fig. 8.68

4. Uno de los obreros de la fábrica desea colocar la barra que une los puntos *D* y *E* sobre un punto *O* de la barra *BC*, de manera que quede paralela al suelo. ¿A qué distancia debe estar el punto *O* de *B* para que esto se cumpla?

   A. 1,77 m **B.** 2,22 m

   C. 4,0 m **D.** 5,0 m

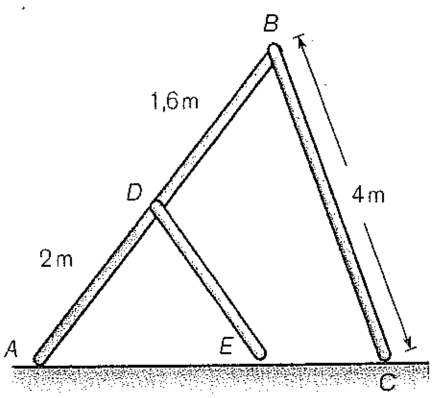


Fig. 8.69

5. Una de las compañías que contratan a la fábrica le ha pedido que en su logo vaya un triángulo rectángulo donde las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa midan 20 cm y 35 cm. ¿Cuál debe ser la medida aproximada de la altura y de uno de los catetos de este triángulo?

   A. 26 cm y 33 cm

   B. 33 cm y 26 cm

   C. 43 cm y 33 cm

   D. 45 cm y 28 cm

Contesta las preguntas 6 a 10 de acuerdo con la siguiente información.

Leonard Euler, al hacerse la pregunta: ¿de cuántas formas puede dividirse, en triángulos, un polígono convexo, al trazar diagonales que no se corten?, fue el primero en descubrir los números de Catalán.

Por ejemplo, Euler tomó triángulos, cuadriláteros, pentágonos y hexágonos para triangularlos (figura 8.70) y obtuvo las siguientes conclusiones:

1. A los términos de la sucesión 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, ..., los llamó números de Catalán.
2. Un n-gono tiene $n - 3$ diagonales y genera $n - 2$ triángulos.
3. La fórmula $\dfrac{2 \times 6 \times 10 \times \cdots \times (4n - 10)}{(n - 1)!}$ permite encontrar los términos de la sucesión.

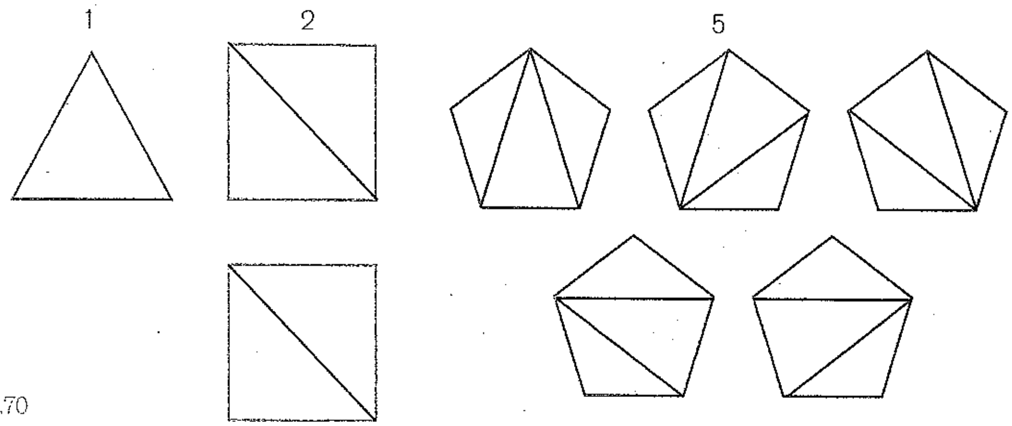


Fig. 8.70

6. 14 es un término de la sucesión que representa el número de triangulaciones diferentes que se le puede hacer a un:
   - **A.** Heptágono.
   - **B.** Hexágono.
   - **C.** Nonágono.
   - **D.** Decágono.

7. En cada triangulación del decágono se traza cierto número de diagonales para obtener un número exacto de triángulos. Estos valores, respectivamente, son:
   - **A.** 6 y 7
   - **B.** 7 y 9
   - **C.** 9 y 10
   - **D.** 7 y 8

8. El octavo término de la sucesión de los números de Catalán es:
   - **A.** 850
   - **B.** 923
   - **C.** 1430
   - **D.** 4862

9. Un polígono de doce lados tiene 16 796 triangulaciones diferentes. Este número, en la sucesión, es el término:
   - **A.** 10o.
   - **B.** 9o.
   - **C.** 11o.
   - **D.** 12o.

10. En la triangulación de un polígono se obtuvieron 20 triángulos con 19 diagonales. El número de lados del polígono es:
    - **A.** 22
    - **B.** 20
    - **C.** 21
    - **D.** 19

Formato de respuestas

1. A B C D	4. A B C D	8. A B C D
2. A B C D	5. A B C D	9. A B C D
3. A B C D	6. A B C D	10. A B C D
	7. A B C D	

Unidad 9

Circunferencia

Procesos: El desarrollo de esta unidad me hará competente para:

Resolución de problemas
Determinar estrategias para efectuar construcciones específicas basándose en teoremas relacionados con circunferencias.

Razonamiento lógico
Demostrar teoremas concernientes a la circunferencia.
Realizar demostraciones haciendo uso de nuevos teoremas.

Comunicación
Enunciar oralmente y por escrito los teoremas relativos a la circunferencia.
Describir, en forma clara y ordenada, los procedimientos para resolver problemas y ejercicios.

Conexiones
Plantear y resolver ecuaciones con base en nuevos teoremas.
Aplicar teoremas para resolver problemas cotidianos.

Estándares

Pensamiento espacial
- Aplicar y justificar criterios de congruencia y semejanza de triángulos en la resolución de problemas aplicados a la circunferencia y sus elementos.
- Aplicar los teoremas que expresan las relaciones entre segmentos en cuerdas intersecadas, segmentos determinados al trazar tangentes y secantes desde un punto exterior a una circunferencia.

Pensamiento numérico
- Realizar correctamente operaciones aritméticas determinadas por las relaciones numéricas entre las longitudes de los diferentes tipos de segmentos en una circunferencia o entre las medidas de los diferentes tipos de ángulos.

Tema 1

Rectas tangentes a una circunferencia

Estudiemos la circunferencia y su relación con la recta tangente.

1. Al conjunto de puntos del plano que se encuentran a una misma distancia de un punto fijo llamado centro lo llamamos circunferencia.
2. Al segmento que une el centro y un punto cualquiera de la circunferencia lo denominamos radio.
3. La recta que contiene exactamente un punto de la circunferencia es una recta tangente.

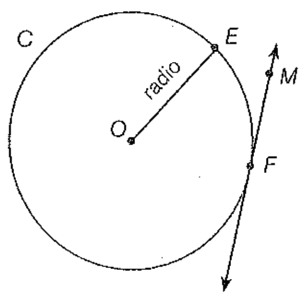


Fig. 9.1

C circunferencia con centro O.

$\overline{OE}$ es un radio de C.

$\overleftrightarrow{FM}$, recta tangente a C en F.

F, punto de tangencia.

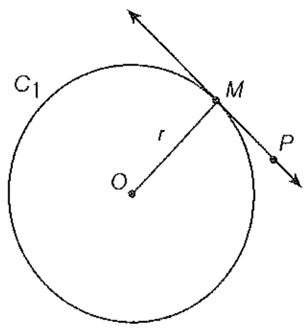


Fig. 9.2

Propiedad 1

La tangente a una circunferencia y el radio, trazado por el punto de tangencia, son perpendiculares.

En la figura, la tangente $\overleftrightarrow{MP}$ es perpendicular a $\overline{OM}$, en M.

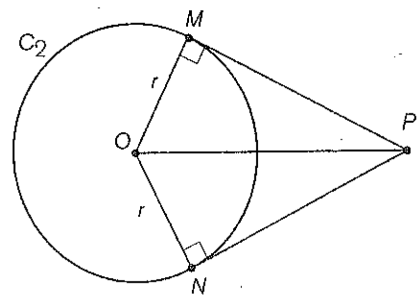


Fig. 9.3

Propiedad 2

Los segmentos tangentes, trazados desde un punto exterior a una circunferencia, son congruentes.

En la figura, los segmentos MP y NP son congruentes. (Escribimos $\overline{MP} \cong \overline{NP}$)

Taller de competencias

1. Con regla y compás construyo una recta tangente a la circunferencia C (figura 9.4).

a. Trazo la circunferencia C, cuyo radio es $\overline{OA}$.

b. Prolongo $\overline{OA}$ hasta un punto P, exterior a C.

c. Con centro en A y con cualquier radio, trazo una circunferencia que interseca a $\overline{OP}$ en M y N.

d. Con radio mayor a la medida de $\overline{MA}$, con centro en M y luego en N, trazo dos arcos que se intersecan en S.

e. Trazo la recta $\overleftrightarrow{SA}$ que es tangente a C, en A.

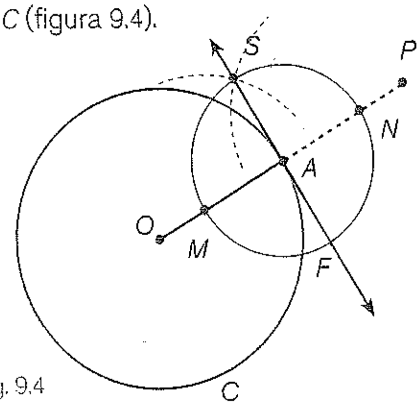


Fig. 9.4

2. Recuerdo y escribo las definiciones de:

a. Cuerda: ______________________________
____

b. Diámetro: ______________________________
____

c. Recta secante: ______________________________
____

3. En la figura identifico:

a. El centro.
b. Una recta secante.
c. Un diámetro.
d. Dos radios.
e. Una cuerda.
f. Una recta tangente.
g. El punto de tangencia.
h. Dos puntos exteriores.
i. Dos puntos de la circunferencia.

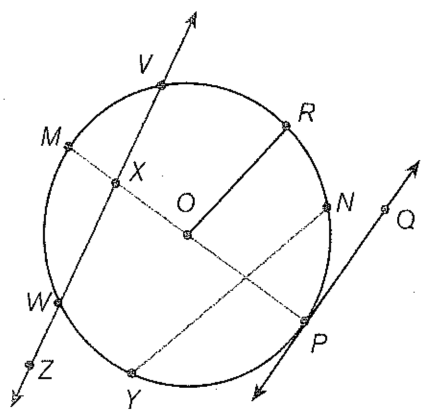


Fig. 9.5

Soluciono problemas

4. En la figura 9.6 encuentro:

a. Longitud de $\overline{OM}$.
b. Longitud de $\overline{MQ}$.

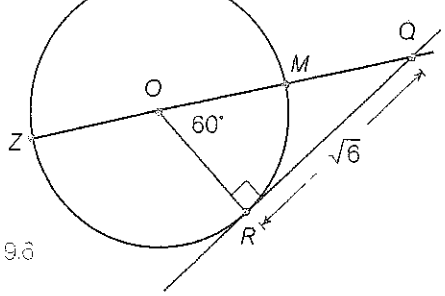


Fig. 9.6

5. En la figura 9.7 encuentro el perímetro del cuadrilátero *PROQ*. (*Sugerencia*: recordar la relación entre los lados de un triángulo 30° - 90° - 60°.)

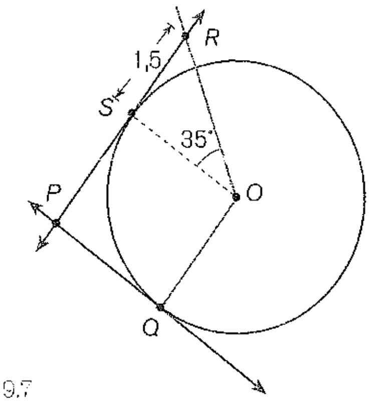


Fig. 9.7

6. En la figura 9.8 encuentro la longitud de $\overline{QO}$.

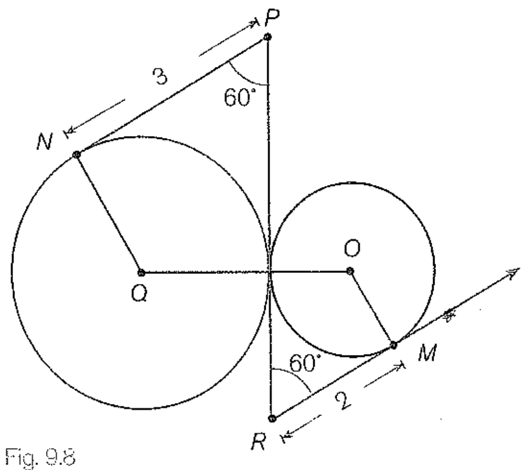


Fig. 9.8

7. En la figura 9.9 encuentro la longitud de $\overline{MR}$. ¿Es $\overline{MR} \cong \overline{NS}$?

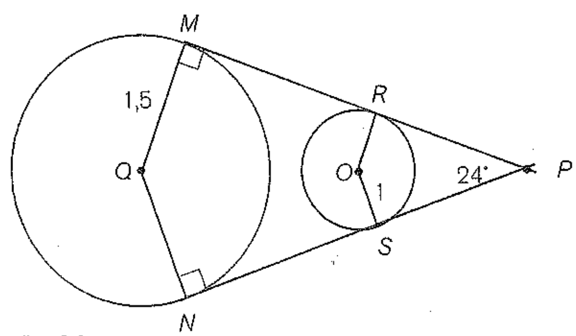


Fig. 9.9

Desempeños: Identifica los elementos de la circunferencia.
Utiliza las propiedades de la recta tangente para realizar cálculos en la circunferencia.
Demuestra algunas propiedades.

Tema 2

Arcos, cuerdas y ángulos centrales

Veamos la figura 9.10.

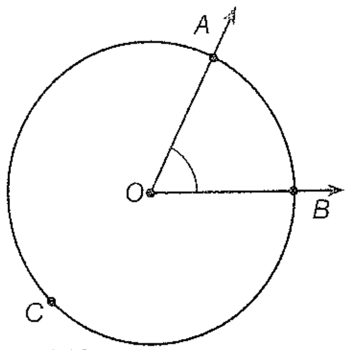


Fig. 9.10

1. El ángulo *AOB*, con vértice *O* en el centro de la circunferencia, es un ángulo central.
2. A la porción de circunferencia comprendida entre dos puntos de la misma la denominamos arco.
3. Al arco *AB* lo llamamos arco menor y al $\widehat{ACB}$, arco mayor.

Hay algunos teoremas que nos permiten el trabajo con arcos, cuerdas y ángulos centrales.

Teorema 1

Arcos y ángulos centrales

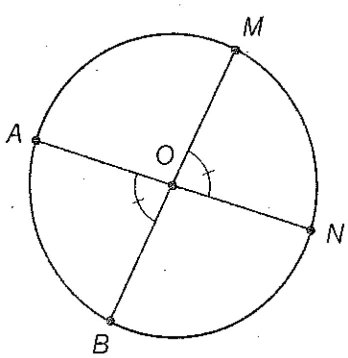


Fig. 9.11

En una circunferencia, dos arcos menores son congruentes si y sólo si sus ángulos centrales son congruentes.

Teorema 2

Cuerdas y arcos

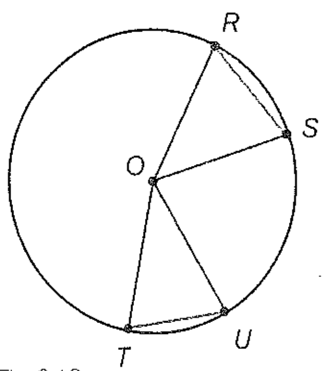


Fig. 9.12

En una circunferencia, dos arcos menores son congruentes si y sólo si sus cuerdas asociadas lo son.

Teorema 3

Diámetro y arco

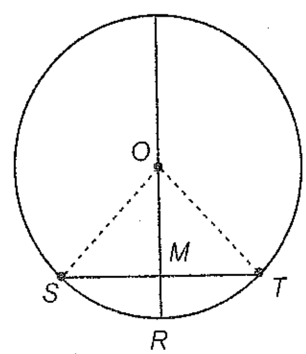


Fig. 9.13

Todo diámetro perpendicular a una cuerda, biseca a la cuerda y al arco asociado.

Taller de competencias

1. En la figura identifico:
   a. Cuatro arcos menores.
   b. Tres arcos mayores.
   c. Dos ángulos centrales congruentes.
   d. Dos ángulos centrales.

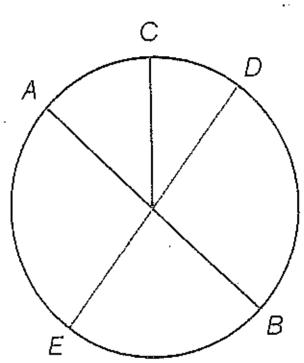


Fig. 9.14

2. Completo la demostración de los teoremas 2 y 3. Observo la figura 9.15.

a. Dado: $\overline{TU} \cong \overline{RS}$, se cumple que $\overset{\frown}{TU} \cong \overset{\frown}{RS}$.

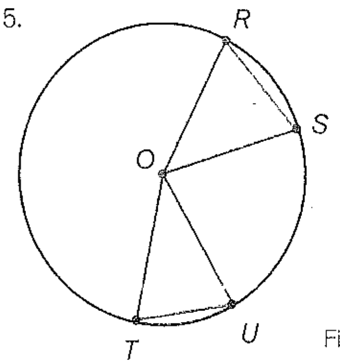


Fig. 9.15

Afirmación	Justificación
1. $\overline{TU} \cong \overline{RS}$	**1.** ________
2. ________	**2.** Radios de la circunferencia.
3. $\triangle TOU \cong \triangle ROS$	**3.** ________
4. $\measuredangle TOU \cong \measuredangle ROS$	**4.** ________
5. ________	**5.** Teorema 1.

Tabla 9.1

b. Observo la figura 9.16. Dados: $\overline{ST}$ cuerda, $\overline{UR}$ diámetro, $\overline{ST} \perp \overline{UR}$, se cumple que $\overline{SM} \cong \overline{MT}$.

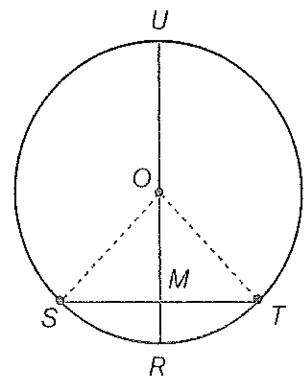


Fig. 9.16

Afirmación	Justificación
1. Sean $\overline{OS}$ y $\overline{OT}$ radios.	**1.** ________
2. ________	**2.** Por ser radios.
3. $\triangle SOT$ isósceles.	**3.** ________
4. $\overline{ST} \perp \overline{UR}$	**4.** ________
5. $\overline{SM} \cong \overline{MT}$	**5.** ________

Tabla 9.2

3. Realizo la siguiente construcción.

- Trazo una circunferencia y en ella dos cuerdas congruentes $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.
- Trazo, desde el centro O de la circunferencia, segmentos perpendiculares $\overline{OM}$ y $\overline{ON}$, tales que $\overline{OM} \perp \overline{AB}$ y $\overline{ON} \perp \overline{CD}$.
- Mido los segmentos $\overline{OM}$ y $\overline{ON}$. ¿Son congruentes?

Dos cuerdas de una circunferencia equidistan del centro si y sólo si las cuerdas son congruentes.

Soluciono problemas

4. Utilizo el teorema anterior y calculo.

a. La longitud de $\overline{XY}$ y $\overline{ZW}$.

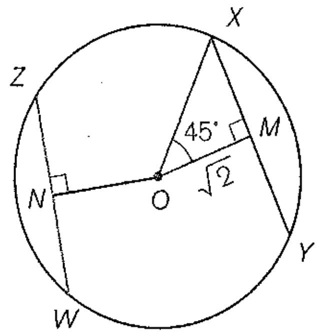


Fig. 9.17

b. El perímetro del rectángulo *ABCD*.

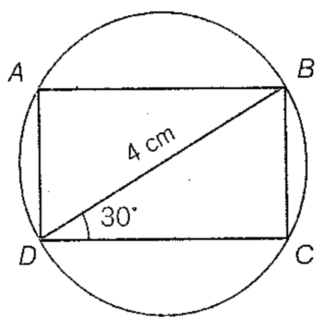


Fig. 9.18

5. Demuestro que si el $\triangle DEF$ es equilátero, se cumple que: m $\widehat{DE}$ = m $\widehat{EF}$ = m $\widehat{DF}$.

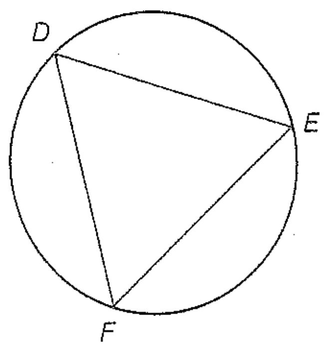


Fig. 9.19

6. En la figura 9.20 demuestro que si $\widehat{AB} \cong \widehat{BC}$, entonces: $\triangle AFO \cong \triangle CFO$

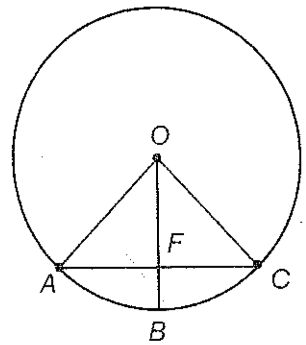


Fig. 9.20

7. Calculo la medida de los ángulos del:

a. $\triangle EBC$

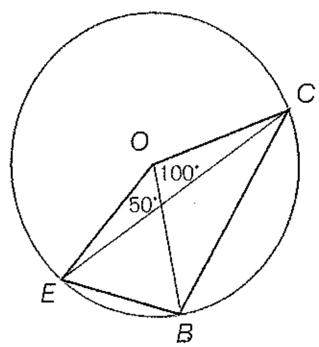


Fig. 9.21

b. $\triangle ABC$

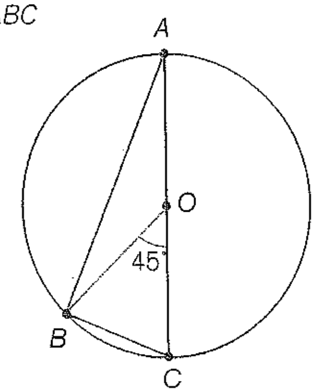


Fig. 9.22

Desempeños: reconoce arcos, cuerdas y ángulos centrales en la circunferencia.
Aplica teoremas relacionados con la circunferencia en la solución de problemas.
Calcula el valor de ángulos centrales y arcos.
Realiza demostraciones geométricas.

Tema 3

Ángulos inscritos

Un ángulo cuyo vértice es un punto de la circunferencia y sus lados son cuerdas de la misma, es un ángulo inscrito (figura 9.23).

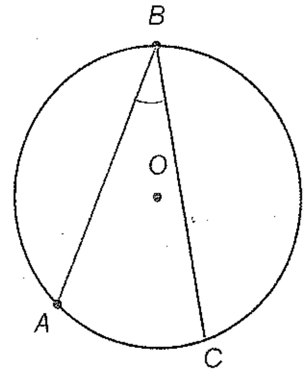


Fig. 9.23

Propiedades de los ángulos inscritos

1. La medida de un ángulo inscrito es la mitad de la medida del arco subtendido por el ángulo.
2. Si dos ángulos inscritos intersecan el mismo arco, o arcos congruentes, entonces son congruentes.
3. Un ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto.
4. Si un cuadrilátero está inscrito en una circunferencia, entonces los ángulos opuestos son suplementarios.

Ejemplo

Calculemos la longitud aproximada del diámetro $\overline{AB}$ y del $\overline{BC}$.

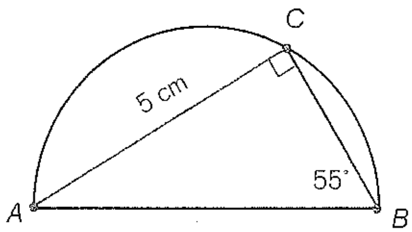


Fig. 9.24

Solución

- Hallemos m $\overline{AB}$:

$$\text{sen}\,55° = \frac{5\text{ cm}}{\text{m}\,\overline{AB}},\ \text{entonces m}\,\overline{AB} = \frac{5\text{ cm}}{\text{sen}\,55°} \approx 6{,}1\text{ cm}$$

- Hallemos m $\overline{BC}$:

$$\tan 55° = \frac{5\text{ cm}}{\text{m}\,\overline{BC}},\ \text{entonces m}\,\overline{BC} = \frac{5\text{ cm}}{\tan 55°} \approx 3{,}5\text{ cm}$$

Por tanto, las longitudes de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ son, aproximadamente, 6,1 cm y 3,5 cm, respectivamente.

Taller de competencias

1. Tengo en cuenta la figura 9.25 e identifico:
   - **a.** Un ángulo inscrito.
   - **b.** Dos ángulos inscritos que intersecan el mismo arco.
   - **c.** Un ángulo inscrito recto.
   - **d.** Un ángulo no inscrito.

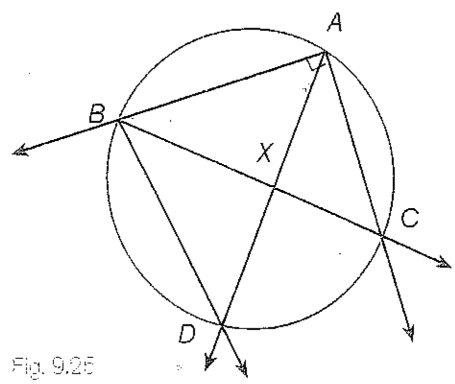
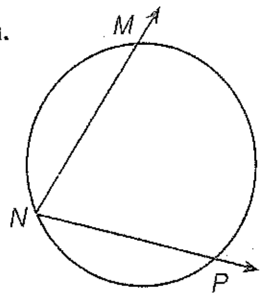


Fig. 9.25

2. Hallo la medida del ángulo en cada caso.

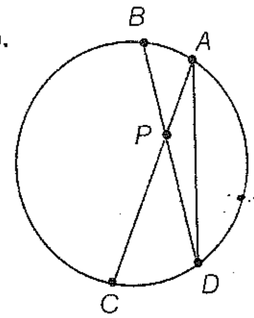
a.



m $\widehat{MP} = 140°$

m $\measuredangle MNP = ?$

b.

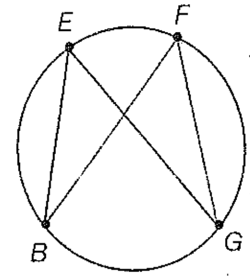


m $\widehat{AB} = 25°$

m $\measuredangle CPD = 55°$

m $\measuredangle CAD = ?$

c.



m $\widehat{BG} = 80°$

m $\measuredangle BFG = ?$

m $\measuredangle BEG = ?$

Fig. 9.26

3. **a.** Si m $\widehat{AB} = 50°$, m $\widehat{CD} = 80°$ y m $\overline{BC} = 4$ cm, hallo el perímetro del cuadrilátero $ABCD$.

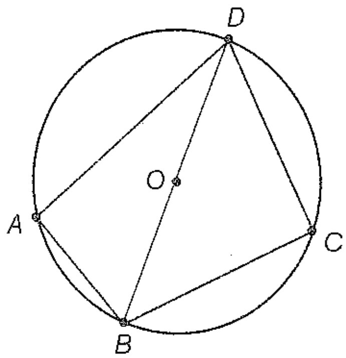


Fig. 9.27

b. Hallo m $\measuredangle A$, m $\measuredangle B$ y m $\measuredangle D$ si: m $\measuredangle ADC = 77°$ y $\overline{AD} \cong \overline{BC}$.

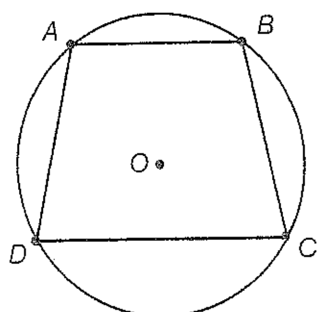


Fig. 9.28

Soluciono problemas

4. Observo en la figura 9.29 y

a. escribo en función de β:

m $\overline{DE}$, m $\overline{DA}$, m $\overline{BA}$, m $\overline{BK}$, m $\overline{AK}$, m $\overline{CE}$ y m $\overline{CK}$.

b. Si $\beta = 65°$, calculo los perímetros del $\triangle ABD$ y $\triangle DEC$.

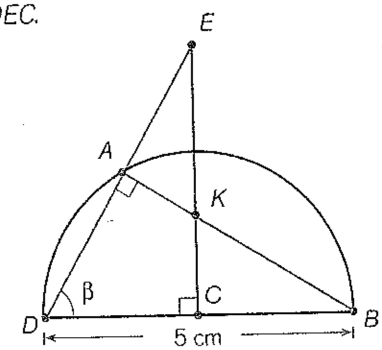


Fig. 9.29

5. En la figura 9.30 demuestro que:

$\measuredangle ABC \cong \measuredangle DEF$.

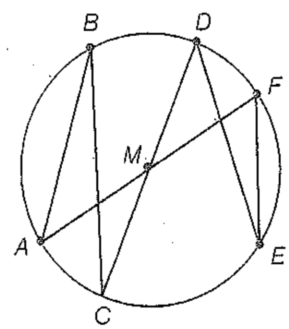


Fig. 9.30

6. En la figura 9.31 calculo m $\overline{AB}$ y m $\measuredangle 1$.

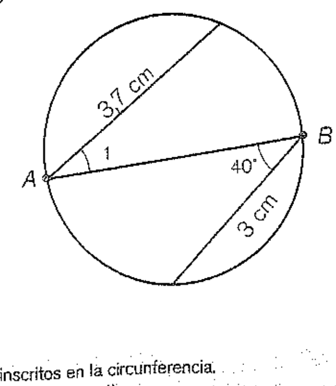


Fig. 9.31

Desempeños: Identifica ángulos inscritos en la circunferencia.
Halla la medida de ángulos inscritos.
Realiza demostraciones y resuelve problemas en los que intervienen ángulos inscritos.

Otros ángulos relacionados con la circunferencia

Estudiemos otros teoremas que permiten calcular medidas de ángulos formados en la circunferencia.

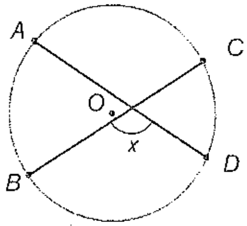
<table>
<tr><th>Ángulo entre dos cuerdas</th><th>Ángulo entre cuerda y tangente</th><th>Ángulo entre tangentes o secantes</th></tr>
<tr>
<td>

Fig. 9.32

La medida de un ángulo formado por dos cuerdas que se intersecan en el interior de la circunferencia es igual a la mitad de la suma de las medidas de los dos arcos subtendidos.

En otras palabras:

Si $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ son cuerdas de la circunferencia, con centro en O,

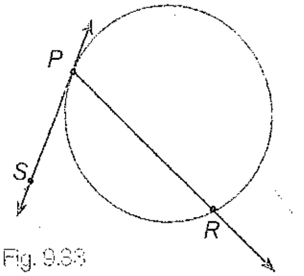
$m\measuredangle x = \frac{1}{2}\left(m\,\overset{\frown}{BD} + m\,\overset{\frown}{AC}\right)$.</td>
<td>

Fig. 9.33

La medida del ángulo formado por una tangente y una cuerda que se intersecan en un punto de la circunferencia es igual a la mitad de la medida del arco subtendido.

En otras palabras:

Si $\overleftrightarrow{SP}$ es tangente a la circunferencia en P y $\overline{RP}$ una cuerda,

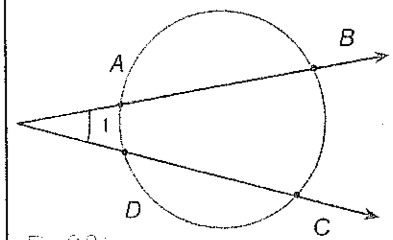
$m\measuredangle SPR = \frac{1}{2}m\,\overset{\frown}{PR}$.</td>
<td>

Fig. 9.34

La medida de un ángulo formado por una tangente y una secante, dos tangentes o dos secantes, es igual a la mitad de la diferencia de las medidas de los arcos subtendidos.

En otras palabras:

Si los $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ son tangentes o secantes,

$m\measuredangle 1 = \frac{1}{2}\left(m\,\overset{\frown}{BC} - m\,\overset{\frown}{AD}\right)$.</td>
</tr>
</table>

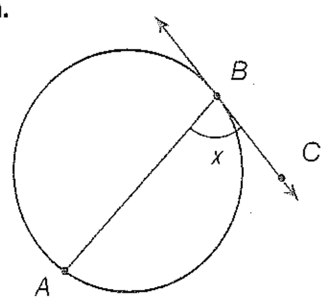
Tabla 9.3

Taller de competencias

1. La posición de las cuerdas, tangentes o secantes, puede variar al trazar ángulos en la circunferencia, como ilustra la figura 9.35.

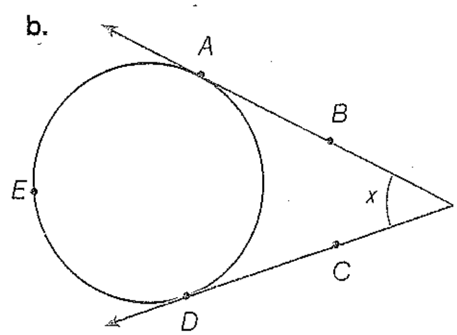
Indico, según la gráfica, la medida del ángulo x. Aplico el teorema correcto.

a.



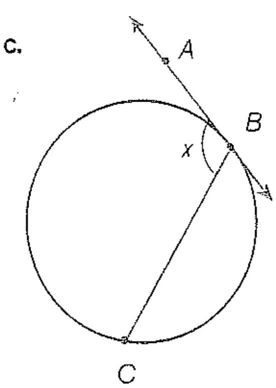
____

b.



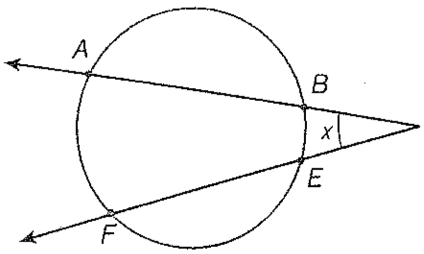
____

c.

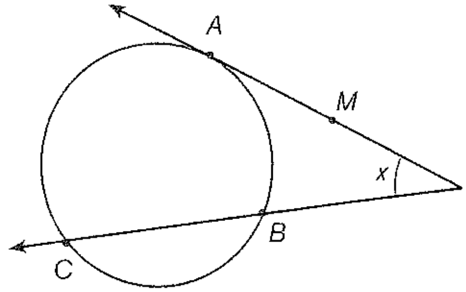


____

d.



e.



f.

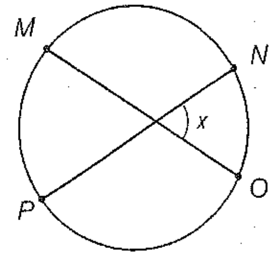


Fig. 9.35

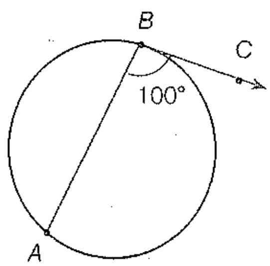
2. Completo la demostración del teorema de ángulos entre dos cuerdas según la figura 9.32.

Afirmación	Justificación
1. Se traza el segmento $\overline{AB}$.	**1.** ______________
2. m $\measuredangle x =$ m $\measuredangle A +$ m $\measuredangle B$	**2.** ______________
3. m $\measuredangle A =$	**3.** Medida de ángulo inscrito.
4. m $\measuredangle B =$	**4.** ______________
5. m $\measuredangle x =$	**5.** Principio de sustitución.
6. m $\measuredangle x = \frac{1}{2}\left(\text{m } \widehat{BD} + \text{m } \widehat{AC}\right)$	**6.** Propiedad distributiva de R.

Tabla 9.4

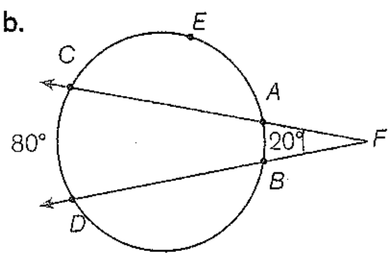
3. Hallo el valor del ángulo o del arco según el caso.

a.



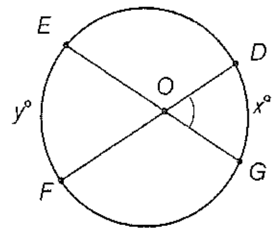
m $\widehat{AB}$ = $\square$

b.



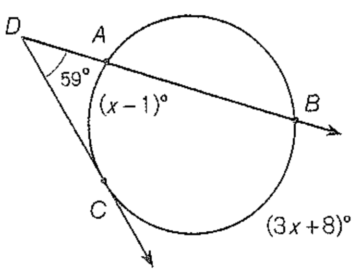
m $\widehat{AB}$ = $\square$

c.



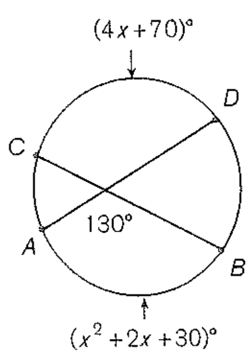
m $\measuredangle DOG$ = $\square$

d.



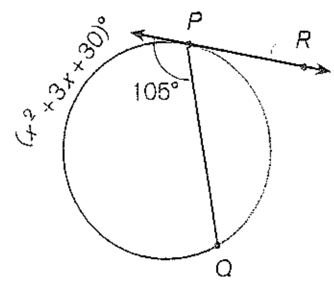
$x = \square$

e.



m $\widehat{CD}$ = $\square$ m $\widehat{AB}$ = $\square$

f.



$x = \square$

Fig. 9.36

Desempeños: conoce los teoremas que permiten calcular la medida de ángulos formados por cuerdas, tangentes y secantes en la circunferencia.
Demuestra teoremas.

Tema 5

Longitudes proporcionales de líneas especiales

A continuación estudiaremos las relaciones que existen entre las longitudes de los segmentos relacionados con la circunferencia.

Necesitamos algunas definiciones (figura 9.37).

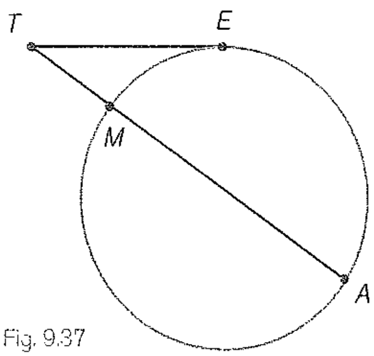


Fig. 9.37

1. Si E es el punto de tangencia, entonces $\overline{TE}$ es un segmento tangente.
2. $\overline{TA}$ es un segmento secante.
3. $\overline{TM}$ es un segmento secante externo.

Las figuras 9.38 **a.**, **b.** y **c.** ilustran, respectivamente, los siguientes teoremas.

1. Si las cuerdas $\overline{MS}$ y $\overline{RN}$ se intersecan en T, un punto interior de la circunferencia, entonces $m\,\overline{MT} \cdot m\,\overline{TS} = m\,\overline{RT} \cdot m\,\overline{TN}$.
2. Si $\overline{AC}$ es un segmento secante y $\overline{BC}$ un segmento tangente a una circunferencia, entonces $m\,(\overline{BC})^2 = m\,\overline{AC} \cdot m\,\overline{DC}$.
3. Si $\overline{AC}$ y $\overline{EC}$ son segmentos secantes en una circunferencia, entonces $m\,\overline{AC} \cdot m\,\overline{BC} = m\,\overline{EC} \cdot m\,\overline{DC}$.

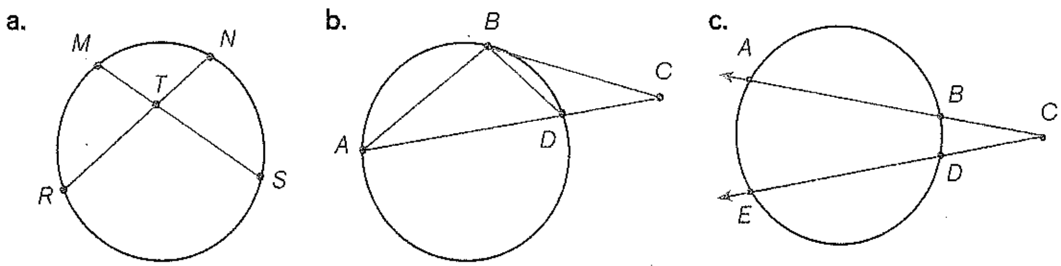


Fig. 9.38

Taller de competencias

1. Justifico cada paso de la demostración del teorema 2, ilustrado en la figura 9.38 b.

a. $m\,\measuredangle CAB = \frac{1}{2} m\,\widehat{BD}$

b. $m\,\measuredangle CBD = \frac{1}{2} m\,\widehat{BD}$

c. $m\,\measuredangle CAB \cong \measuredangle CBD$

d. $\measuredangle C \cong \measuredangle C$

e. $\triangle CAB \sim \triangle CBD$

f. $\dfrac{m\,\overline{CA}}{m\,\overline{BC}} = \dfrac{m\,\overline{BC}}{m\,\overline{DC}}$

g. $m\,(\overline{BC})^2 = m\,\overline{CA} \cdot m\,\overline{DC}$

2. Según el caso, hallo el valor de cada incógnita.

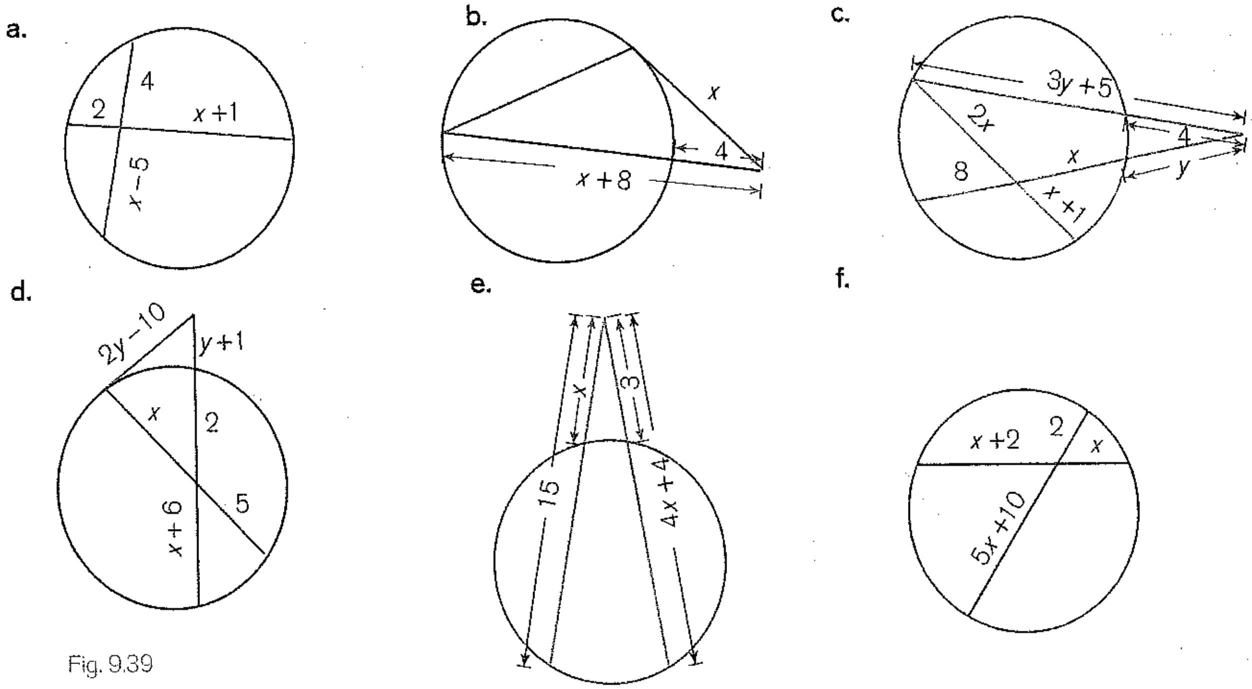


Fig. 9.39

3. Demuestro los teoremas 1 y 3, ilustrados por las figuras 9.38 **a.** y **c.**

Soluciono problemas

4. Según la figura 9.40 demuestro que:

Si las dos circunferencias son tangentes a la recta *m*, en *D*, y *X* es cualquier punto de la recta *m*, excepto *D*, entonces m $\overline{AX}$ · m $\overline{BX}$ = m $\overline{XC}$ · m $\overline{PX}$.

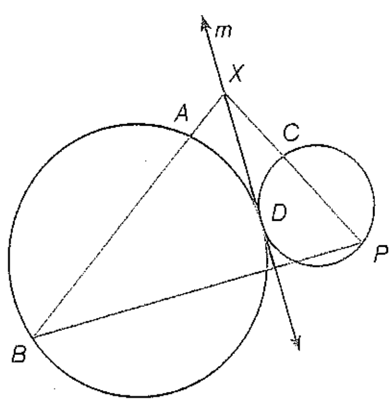


Fig. 9.40

5. Calculo la longitud de cada diagonal del cuadrilátero inscrito (figura 9.41).

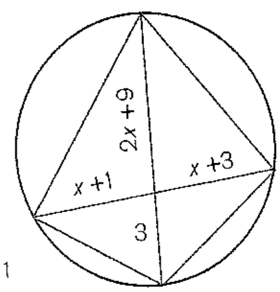


Fig. 9.41

6. Tres observadores, ubicados en una circunferencia, distan de un punto externo a ella como muestra la figura 9.42. ¿Cuál es la distancia de cada uno de ellos al punto *T*?

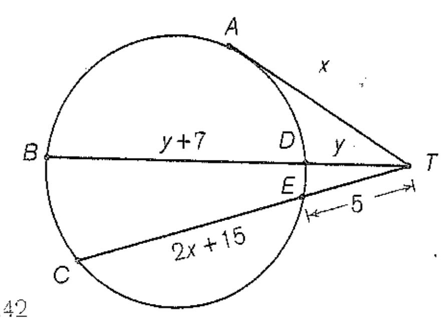


Fig. 9.42

Desempeños: Identifica segmentos en la circunferencia.
Utiliza teoremas que permiten calcular longitudes de cuerdas, tangentes y secantes en una circunferencia.
Demuestra teoremas.

1. **Rompecabezas**

   a. Tomo una lámina de cartón paja y construyo dos rectángulos congruentes, de dimensiones 20 cm × 25 cm.

   b. En uno de los rectángulos dibujo las piezas que indica la figura 9.43 y las recorto.

   c. Coloco las fichas sobre el otro rectángulo de 20 cm × 25 cm y, mediante una secuencia de movimientos, desplazando las fichas sobre la superficie, ubico el cuadrado rojo en la posición que indica la figura 9.44.

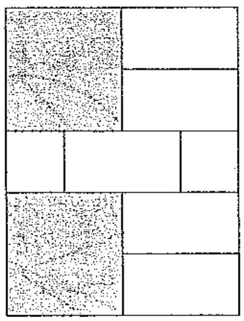


Fig. 9.43

1 cuadrado 10 cm × 10 cm
6 rectángulos 10 cm × 5 cm
2 cuadrados 5 cm × 5 cm

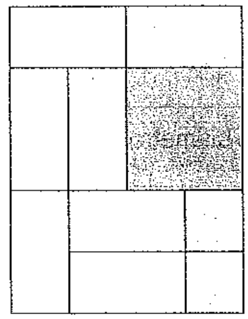


Fig. 9.44

2. De acuerdo con la figura 9.45 formulo preguntas, y las resuelvo, relacionadas con el concepto de ángulo central.

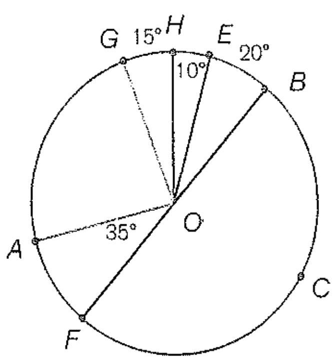
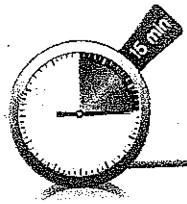


Fig. 9.45



Evalúo mis competencias

Con los siguientes ejercicios, afianzo los desempeños que he superado y refuerzo aquellos que están por superar.

1. Determino el valor de verdad de cada enunciado. Para los enunciados falsos doy un contraejemplo.

a. Toda cuerda es un diámetro.

____

b. Dos radios siempre forman un diámetro.

____

c. Todo diámetro es determinado por dos radios.

____

d. Toda recta que interseca a una circunferencia es tangente.

____

e. Cualquier recta secante contiene un diámetro de la circunferencia.

____

f. Siempre un ángulo central tiene como vértice el centro de la circunferencia.

____

g. Todo par de puntos de la circunferencia genera un arco menor y un arco mayor.

____

h. Dos cuerdas de la circunferencia siempre determinan un ángulo inscrito.

____

i. Todo ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto.

____

j. El arco subtendido por un ángulo inscrito mide el doble del ángulo.

____

k. Dos segmentos secantes siempre generan un ángulo cuya medida es la mitad de la diferencia de las medidas de los arcos subtendidos.

____

2. Según la figura 9.46 doy la medida de cada ángulo.

a. m ∡ XED ______________

b. m ∡ BAD ______________

c. m ∡ ABC ______________

d. m ∡ BCX ______________

e. m ∡ AEC ______________

f. m ∡ ADF ______________

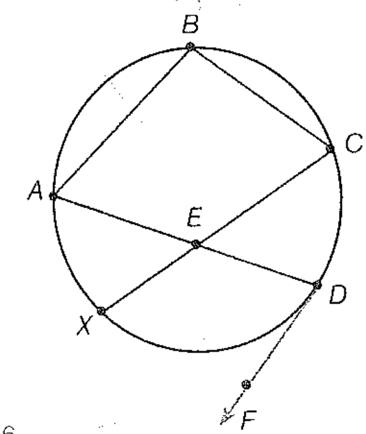


Fig. 9.46

3. En la figura 9.47 calculo:

a. El radio de la circunferencia con centro C.

b. El perímetro del cuadrado $BCFE$.

c. El perímetro y el área del $\triangle ADE$.

d. Los perímetros y las áreas del $\triangle ABC$ y $\triangle CFD$.

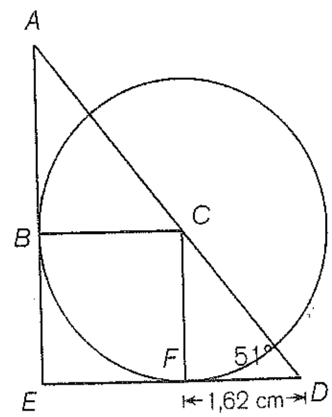


Fig. 9.47

4. En la figura 9.48 calculo:

a. m ∡ ABC

b. El perímetro del cuadrilátero $ABCD$.

c. m $\overset{\frown}{AC}$.

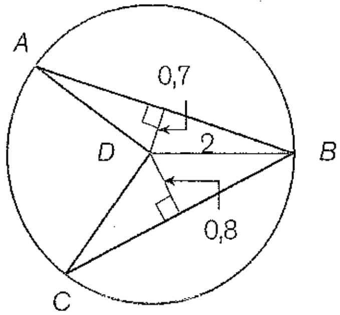


Fig. 9.48

5. Una circunferencia, respecto a un punto A sobre la horizontal, determina, con una tangente y una secante, el ángulo A de la figura 9.49.

¿Cuál es la medida del $\widehat{BD}$?

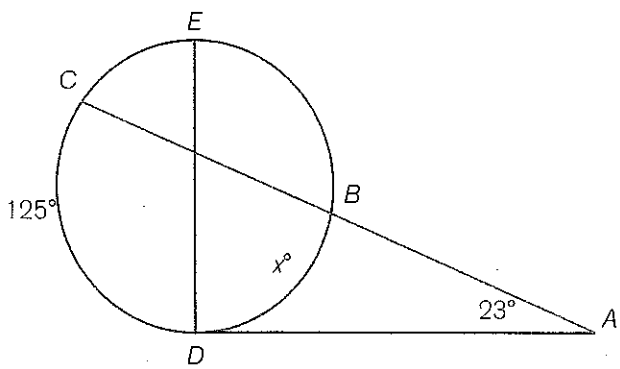


Fig. 9.49

6. Las circunferencias de la figura 9.50 son tangentes. $\overline{AB}$ es tangente, $\overline{AD}$ es un diámetro, m $\overline{AB}$ = $x + 1$, m $\overline{AD}$ = $x + 4$ y m $\overline{AC}$ = 4. ¿Cuál es la m $\overline{CD}$?

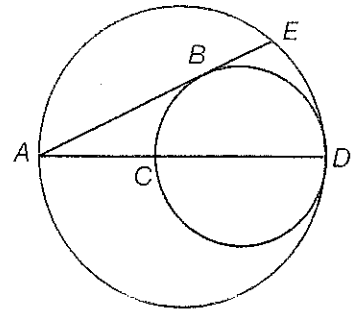


Fig. 9.50

7. Hallo la medida del arco BC si $\overline{AB} \perp \overline{DC}$ y m $\measuredangle AED = 60°$.

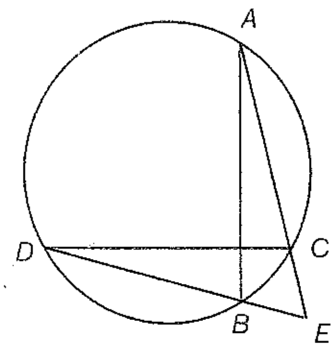


Fig. 9.51

8. Observo la figura 9.52.

Dados: $\overline{OE} \perp \overline{BC}$, $\overline{OD} \perp \overline{BA}$, m $\overline{DN}$ = m $\overline{ME}$.

Demuestro que: $\triangle ABC$ es isósceles.

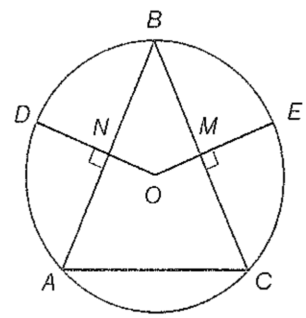


Fig. 9.52

Autoevaluación

	Bajo	Básico	Alto	Superior
Identifico los elementos de la circunferencia.				
Reconozco las propiedades de las rectas tangentes a una circunferencia.				
Aplico teoremas acerca de arcos, cuerdas y ángulos centrales en una circunferencia.				
Identifico en una circunferencia ángulos inscritos y aplico sus propiedades.				
Conozco y aplico teoremas sobre la medida de ángulos generados por tangentes, cuerdas o secantes en una circunferencia.				
Calculo la longitud de cuerdas, segmentos, tangentes y secantes en una circunferencia.				
Demuestro teoremas referentes a los elementos de la circunferencia.				

Prueba Saber

Encuentra la respuesta correcta entre las opciones A, B, C y D, y márcala en la hoja de respuestas, rellenando completamente el círculo correspondientes.

Un ingeniero mecánico está construyendo una máquina; para hacerlo, debe diseñar diferentes tipos de piezas que le exige enfrentarse con distintos problemas geométricos.

1. Se quiere construir una pieza como la que se ilustra en la figura 9.53. En la hendidura de dicha pieza ha de encajar perfectamente un cilindro conectado con un cable metálico, desde el punto *B* hasta el punto *A*. ¿Cuánto mide el radio del cilindro?

   a. 20 cm b. 25 cm
   c. 30 cm d. 35 cm

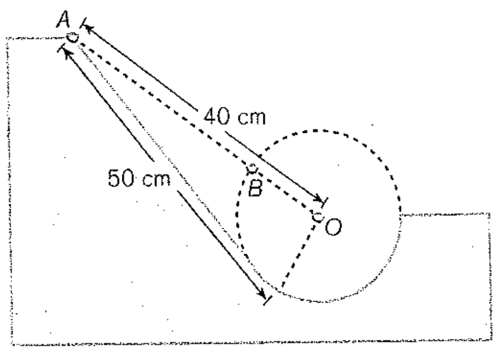


Fig. 9.53

2. Uno de los mecanismos internos de la máquina consta de dos poleas, conectadas con una correa de caucho. Una de las poleas está centrada en el punto *A* y la otra en el punto *O*. Para verificar que dicho mecanismo está correctamente instalado, el ∡*AOB* debe medir:

   a. 42°
   b. 43°
   c. 44°
   d. 45°

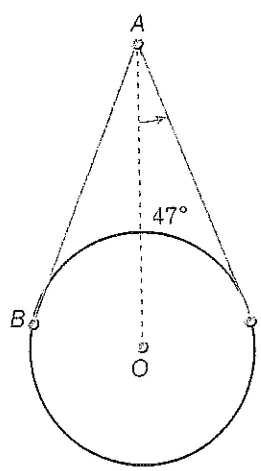


Fig. 9.54

3. Los extremos de la barra *MNOP* deben rotar respecto al punto *O*. Si el ∡*NOP* mide 52 grados, ¿cuál fue la medida con la que el ingeniero construyó el ∡*NMP*?

   a. 24° c. 26°
   b. 25° d. 27°

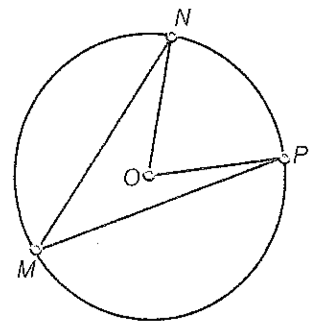


Fig. 9.55

4. Debido a que en el primer ensayo la máquina no funcionó adecuadamente, el ingeniero tuvo que diseñar una pieza como la de la figura 9.56, en donde el $\widehat{CD}$ mide la mitad del $\widehat{AB}$ y ambos pertenecen a la misma circunferencia.

   ¿Cuánto mide, respectivamente, cada arco?

   a. 36° y 72° b. 18° y 36°
   c. 24° y 48° d. 16° y 32°

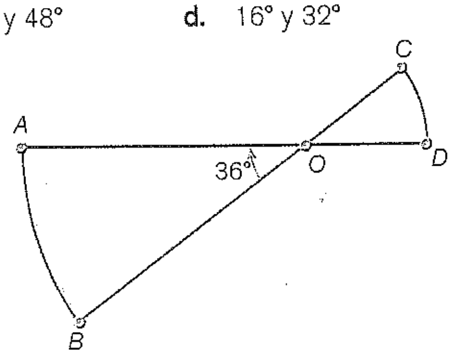


Fig. 9.56

5. Durante el diseño de la máquina el ingeniero debe construir una pieza *NMPO*, tal que $\widehat{NP}$ y $\widehat{EF}$ sean arcos de una misma circunferencia. Si

$m\widehat{PN} = 70°$, ¿cuál debe ser el valor de *x* respecto al cual debe fabricar la pieza?

a. 14° b. 12°
c. 24° d. 29°

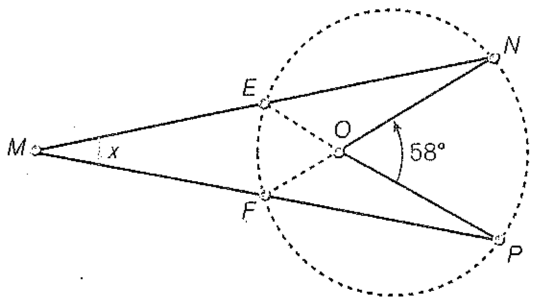


Fig. 9.57

6. Si el borde de la pieza que ilustra la figura 9.58 debe rodearse con una tira de aluminio de 1 cm de ancho, ¿cuál es la longitud de dicha tira?

a. 68 dm b. 88 dm
c. 58 dm d. 78 dm

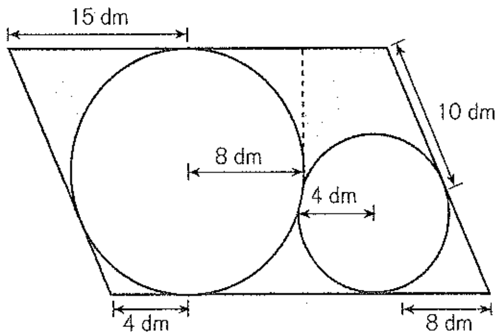


Fig. 9.58

7. El ingeniero debe construir una cuña a la cual debe soldar un cilindro de centro *O*, de modo que los puntos *F*, *E* y *B* estén alineados. El lado *AC* de la cuña no debe tener inclinación respecto a la horizontal de 40°. ¿Cuál es la medida del $\measuredangle ACB$ con la cual el ingeniero construyó la cuña?

a. 45°
b. 50°
c. 55°
d. 35°

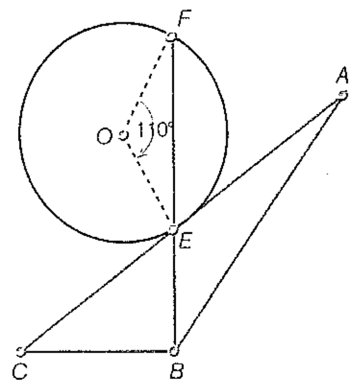


Fig. 9.59

8. La máquina debe hacer mover la barra *P* según una trayectoria circular, manteniéndola unida a dos puntos fijos *A* y *B* por dos cables. Cada vez que el $\measuredangle PBA$ sea el triple del $\measuredangle PAB$ se encenderá una bombilla naranja. ¿Para qué valor del $\measuredangle PAB$ se prenderá la bombilla?

a. 18,5°
b. 20,5°
c. 22,5°
d. 24,5°

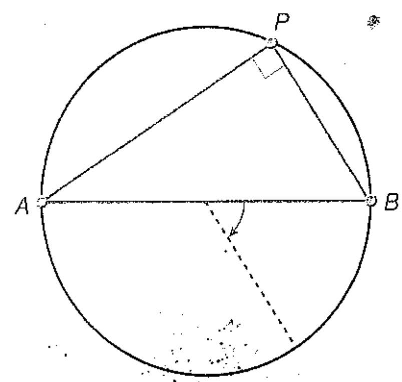


Fig. 9.60

Formato de respuestas

1.	A	B	C	D	5.	A	B	C	D
2.	A	B	C	D	6.	A	B	C	D
3.	A	B	C	D	7.	A	B	C	D
4.	A	B	C	D	8.	A	B	C	D

Glosario

Adición de matrices: (definida para dos matrices que tienen las mismas dimensiones) matriz de las mismas dimensiones de los sumandos, en donde cada elemento es la suma de los elementos correspondientes de las matrices que se adicionan.

Altura de un triángulo: segmento perpendicular a un lado, cuyo extremo es el vértice opuesto al otro lado.

Ángulo central: ángulo con vértice en el centro de la circunferencia.

Ángulo de depresión: ángulo formado por la horizontal y la línea visual del observador de un objeto, situado por debajo de la horizontal.

Ángulo de elevación: ángulo formado por la horizontal y la línea visual del observador de un objeto, situado por encima de la horizontal.

Ángulo inscrito: ángulo con vértice sobre la circunferencia y con lados que contienen cuerdas de la circunferencia.

Ángulos congruentes: aquellos que tienen la misma medida.

Arco mayor: unión de los puntos de la circunferencia contenidos en el exterior de un ángulo central con los puntos de la intersección del ángulo y la circunferencia.

Arco menor: unión de los puntos de la circunferencia contenidos en el interior de un ángulo central con los puntos de la intersección del ángulo y la circunferencia.

Arco subtendido por un ángulo: arco en el interior de un ángulo relacionado con la circunferencia, cuyos extremos están en los lados del ángulo.

Arcos congruentes: arcos en la misma circunferencia o en circunferencias diferentes con la misma medida.

Argumento válido: conclusión que se obtiene a través de formas correctas de argumentar.

Cantidad subradical: expresión abarcada por el signo radical.

Clinómetro: instrumento con el cual podemos medir ángulos de inclinación.

Completación del cuadrado: adición del término $\left(\frac{t}{2}\right)^2$ a la expresión $x^2 + tx$, con el fin de convertir este binomio en un trinomio cuadrado perfecto y así obtener $\left(x + \frac{t}{2}\right)^2$.

Composición de trasformaciones: aplicación consecutiva de dos trasformaciones, en donde la segunda se le aplica a la imagen de la primera.

Conjugado de un número complejo $a + bi$: es el complejo $a - bi$. Su producto con el número complejo $a + bi$ es el número real $a^2 + b^2$.

Contraejemplo: caso particular que contradice un enunciado y permite mostrar la falsedad de éste.

Corolario: propiedades importantes que surgen de los teoremas.

Cos α: razón entre la longitud del cateto adyacente al ángulo α y la longitud de la hipotenusa.

Cuantificadores: palabras como todos, algunos, ninguno, que expresan cantidad sin hacer referencia a un número exacto.

Demostrar: probar la verdad de una proposición mediante un razonamiento lógico.

Desigualdad lineal: inecuación que contiene dos incógnitas y cuya solución gráfica es una región del plano cartesiano.

Determinante: número real asignado a una matriz, el cual se halla con un algoritmo específico.

Dimensiones de una matriz: expresión $m \times n$, en donde m es el número de filas y n es el número de columnas que tiene la matriz.

Discriminante de la ecuación cuadrática: la expresión $b^2 - 4ac$, cuyo valor permite diferenciar el número de raíces de la ecuación cuadrática.

Dispersión: es toda medida de la separación de un grupo de números alrededor de su valor medio. El rango, el rango intercuartílico y la desviación estandar son ejemplos de medidas de dispersión.

Ecuaciones lineales estándar: ecuaciones de la forma $ax + by = c$; las modela gráficamente una línea recta.

Eje de simetría de la parábola: recta vertical que pasa por el vértice de la parábola y divide la curva en dos ramas, cuyos puntos de igual ordenada equidistan de dicha recta.

Elipse: lugar geométrico de todos los puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos dados es constante. Los puntos dados se denominan focos de la elipse.

Error absoluto: diferencia entre el valor exacto y el valor encontrado en una medida.

Error relativo: cociente entre el error absoluto y la medida exacta.

Escalar: cualquier número real k.

Fórmula cuadrática: expresión que indica, en forma general, la solución de la ecuación cuadrática. Para una ecuación de segundo grado de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, tenemos que $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Función afín: expresión de la forma $y = mx + b$, donde b es el intersecto con el eje Y y m es la pendiente, dada por la expresión $\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)$.

Función creciente: aquella que cuando aumenta el valor de x también aumenta el valor de y.

Función decreciente: aquella que cuando aumenta el valor de x disminuye el valor de y.

Función exponencial natural: función exponencial de la forma $f(x) = e^x$.

Función exponencial: función f definida por la ecuación $f(x) = a \cdot b^x$, donde $a \neq 0$, $b > 0$, $b \neq 1$.

Función inversa: una función $y = f(x)$ tiene una función inversa si a cada valor de x le corresponde un único valor de y, es decir, si f es biyectiva, la función inversa de f se denota f^{-1}.

Inecuación: expresión algebraica que identifica una desigualdad con una o más incógnitas.

Intersectos: puntos de intersección de la gráfica de una función con los ejes coordenados.

Inverso multiplicativo del complejo $(a + bi)$: es el complejo $\left(\frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i\right)$ (con $a \neq 0$ y $b \neq 0$).

Isometrías: trasformaciones que no cambian ni el tamaño ni la forma de una figura, sólo cambian la posición.

Matrices iguales: matrices que tienen las mismas dimensiones y elementos correspondientes iguales.

Matriz: arreglo rectangular de números en filas y columnas, encerrados con un par de paréntesis redondos o cuadrados.

Media geométrica de dos números positivos a y b: número positivo g tal que tan $\frac{a}{g} = \frac{g}{b}$ o, lo que es equivalente, $g^2 = ab$.

Medida de un arco mayor: 360° – (medida del arco menor asociado).

Medida de un arco menor: medida de su ángulo central.

Medios: términos comprendidos entre el primero (a_1) y el n-ésimo (a_n) de una progresión.

Módulo o idéntico de la multiplicación de números complejos: es el complejo $(1 + 0i)$.

Módulo o radio vector del complejo $a + bi$: número real positivo $\sqrt{a^2 + b^2}$, que corresponde a la longitud del segmento OP que une el origen de las coordenadas polares con el punto P, que representa al complejo $a + bi$. Se nota $|a + bi|$.

Número complejo: número de la forma $a + bi$, en donde a y b son números reales y $b \neq 0$.

Pantógrafo: herramienta que permite ampliar o reducir figuras.

Potencia de una potencia: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}, a \in R; m, n \in Z$.

Potencia: resultado de multiplicar la base tantas veces como lo indique el exponente.

Potencias con exponente negativo: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}, a \neq 0; a \in R; n \in Z$.

Premisa: enunciado inicial que se considera cierto y sobre el cual se basa el razonamiento lógico.

Producto de matrices: (definida para matrices de dimensiones tales que el número de columnas del primer factor es igual al número de filas del segundo) matriz C para la cual el elemento C_{JK} es el producto de la fila j del primer factor y la columna k del segundo factor.

Producto de potencias con el mismo exponente: $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$, $a, b \in R; m, n \in Z$.

Producto de potencias con la misma base: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}, a \in R$; $m, n \in Z$.

Producto de raíces: $\sqrt[n]{x \cdot y} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}, x, y \in R, n \in N; x, y \geq 0$ cuando n es par.

Programación lineal: modelo matemático usado para resolver problemas en los que se requiere hallar un valor máximo o mínimo de una función, con ciertas restricciones expresadas por desigualdades lineales.

Promedio ponderado: es una media aritmética, en la cual se considera a cada uno de los valores del grupo de acuerdo con su importancia (peso) en el grupo de datos.

Propiedades de la adición de números complejos: son las mismas propiedades de la adición de números reales: asociativa, conmutativa, modulativa e invertiva.

Proporción: es la expresión de la igualdad de dos razones.

Punto máximo de una parábola: punto de la curva donde el valor de la ordenada es mayor que la ordenada de cualquier otro punto que pertenece a ella.

Punto mínimo de una parábola: punto de la curva donde el valor de y es menor que el valor de la ordenada de los puntos que pertenecen a ella.

Racionalización: procedimiento para eliminar el radical en un denominador, o numerador.

Radicación: operación que permite hallar la base conocidos la potencia y el índice.

Raíz de una ecuación: valor de la variable que hace 0 la ecuación.

Raíz de una raíz: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[m \cdot n]{x}, x \in R, m, n \in N; x > 0$ cuando x es par.

Raíz n-ésima: expresión utilizada para expresar la raíz n de un número real x, siendo n un número natural mayor o igual a 2. Se denota por $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$, $x > 0$ cuando n es par.

Rango: diferencia entre el valor máximo y mínimo de una muestra o población. Sólo es válido en variables continuas.

Rango intercuartilico: la diferencia entre el percentil 75% y el percentil 25%.

Razón trigonométrica: razón entre las medidas de los lados de un triángulo rectángulo.

Razón: dados dos números x y y con $y \neq 0$, la razón es el cociente $\frac{x}{y}$.

Recta real: representación de todos los números reales en la recta numérica.

Recurrencia: manera de definir una sucesión cuando se expresa el término n-ésimo a partir de uno o más de los términos anteriores.

Redondeo: procedimiento para expresar un número de acuerdo a una precisión establecida.

Rotación: trasformación que depende de la medida de un ángulo escogido y de un punto O fijo, llamado centro de rotación.

Segmento secante: segmento desde un punto externo a la circunferencia que la corta en dos puntos.

Segmento tangente: segmento trazado desde un punto A, externo a la circunferencia C, a un punto D de la circunferencia, de tal forma que $\overline{AD}$ es tangente a la circunferencia.

Semiplano cerrado: región del plano cartesiano que incluye la recta frontera. Los semiplanos cerrados se relacionan con los símbolos ≤ o ≥.

Semiplano: porción del plano cartesiano limitado por una recta trazada en este plano.

Sen α: razón entre la longitud del cateto opuesto al ángulo α y la longitud de la hipotenusa.

Serie aritmética: serie asociada a una sucesión o progresión aritmética. El n-ésimo término de la serie aritmética es $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$.

Serie geométrica: serie asociada a una sucesión o progresión geométrica. El n-ésimo término de la serie geométrica es $S_n = a_1 \frac{(r^n - 1)}{r - 1}$ o $S_n = a_1 \frac{(1 - r^n)}{1 - r}$, para $r \neq 1$.

Sistema de coordenadas polares: sistema que fija un punto O llamado polo y una semirrecta orientada OX llamada eje polar, que expresa la posición de un punto mediante una distancia radial desde el origen (el polo) con su dirección expresada como un ángulo o ángulos (positivos cuando van en sentido contrario a las manecillas del reloj), entre el radio y el eje polar.

Sistema de ecuaciones simultáneas: el formado por las ecuaciones donde la solución satisface todas las ecuaciones al mismo tiempo.

Sistema de ecuaciones: dos o más ecuaciones con las mismas incógnitas.

Solución de un sistema lineal: punto en donde se cortan las dos o tres líneas rectas.

Sucesión creciente $\{a_n\}$: aquella en la cual para todo valor de n se cumple que $a_n < a_{n+1}$, es decir, los términos de la sucesión aumentan.

Sucesión decreciente $\{a_n\}$: si para todo valor de n se cumple que $a_n > a_{n+1}$, es decir, los términos de la sucesión disminuyen.

Sucesión geométrica o progresión geométrica: sucesión en la cual cada término es igual al anterior multiplicado por un valor constante r.

Sucesión infinita: función cuyo dominio es el conjunto de los números enteros positivos. Se nota como el conjunto $S(n) = \{S(n)\} = \{S(1), S(2), S(3), S(4), S(5), \ldots\}$ que se escribe $\{S_1, S_2, S_3, S_4, \ldots\}$.

Sucesión o progresión aritmética: sucesión en la cual cada término es igual al anterior, más un valor constante.

Tan α: razón entre la longitud del cateto opuesto al ángulo α y la longitud del cateto adyacente.

Tasa o rata de interés: interés causado por un peso en la unidad de tiempo. Se nota i.

Trasformación: correspondencia uno-a-uno entre dos subconjuntos de puntos del plano.

Traslación horizontal: imagen de la función original trasladada sobre el eje horizontal, al sustituir x por $x - h$ en la ecuación de $f(x)$.

Traslación simultánea: imagen trasladada tanto en el eje Y como en el eje X de la función $f(x)$.

Traslación vertical: imagen de la función original trasladada sobre el eje vertical, al sustituir y por $y - k$ en la ecuación de $f(x)$.

Triángulos semejantes: triángulos cuyos lados correspondientes son proporcionales y los ángulos respectivamente correspondientes son congruentes.

Truncamiento: acto de eliminar (para abreviar) los números decimales de un número, quedándose sólo con la parte entera.

Unidad imaginaria: número que es solución de la ecuación $x^2 = -1$. La unidad imaginaria es i porque $i^2 = -1$.

Valor absoluto: distancia entre un punto y el origen 0. El valor absoluto de a se denota $|a|$ y siempre es positivo.

Valor máximo o mínimo: una o más esquinas de la frontera de la región, cuyos puntos sean la solución de las desigualdades.

Velocidad: espacio recorrido en una unidad de tiempo. Se modela por la fórmula $e = v \cdot t$, en donde t es el tiempo y e es el espacio recorrido.

Vértice de la parábola: el punto máximo o mínimo de la parábola. El vértice está dado por $\left(\frac{-b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right)$.

x-intersecto: punto de corte de una gráfica con el eje X.

y-intersecto: punto de corte de la gráfica con el eje Y.

Bibliografía

AGOSTINI, F. Juegos de lógica y matemáticas. Círculo de Lectores, S.A., Madrid, 1982.

ARTIGUE, Michèle y otros. Ingeniería didáctica en educación matemática. Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1995.

BERGAMINI, D. Matemáticas. Colección científica de Life en Español, México, 1965.

CHEVALLARD, Y. La Transposition Didactique. Ediciones La Pensèe Sauvage, 1985.

DAVIS, P. J. y R., Hersh. The Mathematical Experience. Boston: Houghton Mifflin Co., 1981.

DICKSON, Linda. El aprendizaje de las matemáticas. Editorial Labor, S.A., Madrid, 1991.

DIENES, Z. P., GOLDING, E. W. La geometría a través de las trasformaciones. Editorial Teide, Barcelona, 1976.

DREYFUS, T. & EISENBERG, T. A graphical approach to solving inequalities. School Science and Mathematics, 1985.

ESPINOSA, F. Investigaciones en matemática educativa. Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1996.

GONZÁLEZ, J. y otros. Números Enteros. Colección Cultura y Aprendizaje Editorial Síntesis, Madrid, 1990.

LEAN, G. A. & CLEMENTS, M. A. Spatial ability, visual imagery, and mathematics performance, 1981.

LOVAGLIA, Florence M., y otros. Álgebra. Harla S.A. de C. V., México, 1972.

MEN. Lineamientos curriculares para el área de matemáticas, Colombia, 1998.

MENDENHALL, William y otros. Estadística matemática con aplicaciones. Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1986.

MOISE, Edwin E., DOWNS, Floyd L. Jr. Geometría Moderna. Addison-Wesley Iberoamericana, S.A., Estados Unidos, 1986.

NCTM. Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática. Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES, España, 1991.

PERKINS, David. La Escuela Inteligente. Editorial Gedisa, Barcelona, 1992.

PÓLYA, George. On solving mathematical problems in high school. Stephen Krulik, 1980.

SMITH, Karl J. Introducción a la lógica. Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1991.

SMITH, Sanderson M. Agnesi to zeno: over 100 vignettes from the history of math. Key Curriculum Press, California, EE.UU., 1996.

Universitas, Tomo 10. La Matemática. Salvat Editores, S.A, 1987.

VOLSTER, Carter. CROWN, Warren. Invitación a las matemáticas. Editorial Norma, Bogotá, Colombia.

Índice temático

Mis contactos

Nombre: ______________________________

Colegio: ____________________ **Grado:** ____ **Año:** ______

	Nombre	Fecha de cumpleaños	Observaciones	
1.			Teléfono:	e-mail:
2.			Teléfono:	e-mail:
3.			Teléfono:	e-mail:
4.			Teléfono:	e-mail:
5.			Teléfono:	e-mail:
6.			Teléfono:	e-mail:
7.			Teléfono:	e-mail:
8.			Teléfono:	e-mail:
9.			Teléfono:	e-mail:
10.			Teléfono:	e-mail:
11.			Teléfono:	e-mail:
12.			Teléfono:	e-mail:
13.			Teléfono:	e-mail:
14.			Teléfono:	e-mail:
15.			Teléfono:	e-mail:
16.			Teléfono:	e-mail:
17.			Teléfono:	e-mail:
18.			Teléfono:	e-mail:

RETOS
Matemáticas

RETOS MATEMÁTICAS 1 a 9 desarrolla una propuesta pedagógica que se basa en el aprendizaje significativo y en el desarrollo de los procesos asociados a las competencias en Matemáticas. Sugiere una metodología interactiva, ágil y motivadora que estimula en el estudiante el interés por aprender y apropiarse de la comunicación en Matemáticas, de manera natural para resolver problemas de su diario vivir.

Retos Matemáticas enriquece la práctica de enseñanza y aprendizaje al incorporar los siguientes recursos didácticos:

- Variedad y abundancia de actividades y problemas.
- Evaluaciones.
- Actividades de Matemática recreativa.
- Pruebas Saber.

C.C. 26503816
ISBN 978-958-45-3744-7
9 789584 537447

GRUPO EDITORIAL norma