norma
Matemáticas
para pensar

6

Incluye
Lección Digital norma

norma

Matemáticas para pensar

6

GRUPO
EDITORIAL
norma

Autores

Manuel Alejandro García Riveros

- Magister en docencia de las matemáticas. Universidad Pedagógica Nacional, Colombia.
- Especialista en Edumática. Universidad Autónoma, Colombia.
- Licenciado en matemáticas. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Colombia.

Nidia López

- Maestría en didáctica de la matemática. Instituto Latinoamericano y del Caribe IPLAC, Cuba.
- Licenciada en matemáticas. Universidad Pedagógica Nacional, Colombia.

Sandra Ortiz Peña

- Maestría en didáctica de la matemática. Instituto Latinoamericano y del Caribe IPLAC, Cuba.
- Licenciada en matemáticas. Universidad Pedagógica Nacional, Colombia.

Francisco Eduardo Romero Morales

- Magister en estadística. Universidad Federal de Ternambuco, Brasil.
- Matemático. Universidad Nacional de Colombia.

Carmen Samper de Caicedo

- B. Sc. (Mathematics), University of Ottawa, Canadá
- Master of Arts (Mathematics), University of Maryland, E.U.

Ivonne María Suárez Higuera

- Magister en educación. Universidad de los Andes, Colombia.
- Matemática. Universidad Nacional, Colombia.

Adecuación a la equidad de género y diversidad cultural
Hernando García Bustos

Investigación de campo
Andrea Escobar Vilá

Directora editorial
Patricia Ospina Rosero

Editora jefe de área
Luz Marina Sierra Fajardo

Editora
Andrea Viviana Saavedra Garzón

Dirección de arte
Rocío Milena Marmolejo Cumbe

Diseño de la serie y cubierta
Miguel Darío Martínez
Yein Barreto

Diagramación
Marisol Robayo Rivera

Ilustración
Iván A. Lizcano Silva
Mauricio Restrepo López

Fotografías
Archivo gráfico Editorial Norma
© 2011 Thinkstock
© 2011 Photos.com
© 2011 www.photostogo.com

Norma Matemáticas para pensar 6

Impreso por Editora Géminis Ltda.

Impreso en Colombia - Printed in Colombia
Agosto de 2011

Depósito legal.

ISBN del libro:
978-958-45-3536-8

Envíe sus comentarios
al área de Matemáticas
de Editorial Norma:
luz.sierra@carvajal.com

Querido estudiante:

Norma Matemáticas para pensar 6 *te reta a explorar tu mundo con creatividad y a aprender matemáticas a través de situaciones que te llevarán a desarrollar tus habilidades de pensamiento crítico, y así aprender a pensar. En sus páginas encontrarás temas en contextos cotidianos y cercanos con preguntas y actividades interesantes que te guiarán por el universo fascinante de los números, las figuras, las formas, los datos, los modelos y las diferentes representaciones del pensamiento matemático, que te llevarán a indagar por las causas y las relaciones, mediante la interpretación, la búsqueda de patrones, la formulación de hipótesis y la argumentación para solucionar problemas de tu diario vivir. Mediante todo esto podrás explicar tus ideas, tomar decisiones y hallar nuevas y mejores formas de hacer las cosas.*

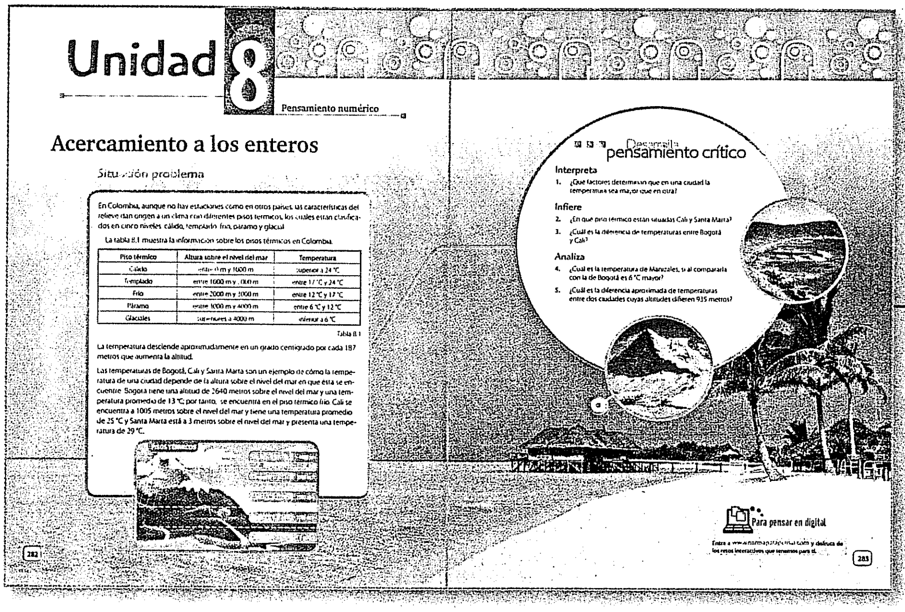
Con la propuesta de ***Norma Matemáticas para pensar 6*** *adquirirás conocimientos, destrezas, actitudes y las habilidades para interpretar, analizar, explicar, inferir, evaluar y autorregularte en la formulación de problemas y preguntas vitales, con claridad y precisión. Además, podrás evaluar información relevante, usar los conceptos matemáticos para interpretar esa información de manera efectiva y sugerir soluciones a los distintos problemas que se te presenten de manera que comuniques los resultados y argumentos de forma pertinente y coherente.*

...¡ Y algo novedoso...! Como tú formas parte del mundo virtual, en ***Norma Matemáticas para pensar 6*** *encontrarás lecciones digitales, una nueva forma de aprendizaje interactivo, adaptado a las necesidades de un estudiante crítico. De ahora en adelante, los juegos, las imágenes, los videos, los audios y las evaluaciones digitales estarán disponibles en tu propia plataforma de aprendizaje, en el lugar y a la hora que necesites.*

Cordialmente,

Equipo editorial

¡Hola!
Cuando abres un libro quieres saber qué partes lo componen. Norma Matemáticas 6 te ofrece las siguientes secciones para pensar.



Unidad 8

Pensamiento numérico

Acercamiento a los enteros

Situación problema

En Colombia, aunque no hay estaciones como en otros países, las características del relieve dan origen a un clima con diferentes pisos térmicos, los cuales están clasificados en cinco niveles: cálido, templado, frío, páramo y glacial.

La tabla 8.1 muestra la información sobre los pisos térmicos en Colombia.

Piso térmico	Altura sobre el nivel del mar	Temperatura
Cálido	entre 0 m y 1000 m	superior a 24 °C
Templado	entre 1000 m y 2000 m	entre 17 °C y 24 °C
Frío	entre 2000 m y 3000 m	entre 12 °C y 17 °C
Páramo	entre 3000 m y 4000 m	entre 6 °C y 12 °C
Glaciales	superiores a 4000 m	inferior a 6 °C

Tabla 8.1

La temperatura desciende aproximadamente en un grado centígrado por cada 187 metros que aumenta la altitud.

Las temperaturas de Bogotá, Cali y Santa Marta son un ejemplo de cómo la temperatura de una ciudad depende de la altura sobre el nivel del mar en que ésta se encuentre. Bogotá tiene una altitud de 2640 metros sobre el nivel del mar y una temperatura promedio de 13 °C; por tanto, se encuentra en el piso térmico frío. Cali se encuentra a 1005 metros sobre el nivel del mar y tiene una temperatura promedio de 25 °C y Santa Marta está a 3 metros sobre el nivel del mar y presenta una temperatura de 29 °C.

282

Desarrolla pensamiento crítico

Interpreta

1. ¿Qué factores determinan que en una ciudad la temperatura sea mayor que en otra?

Infiere

2. ¿En qué piso térmico están situadas Cali y Santa Marta?
3. ¿Cuál es la diferencia de temperaturas entre Bogotá y Cali?

Analiza

4. ¿Cuál es la temperatura de Manizales, si al compararla con la de Bogotá es 6 °C mayor?
5. ¿Cuál es la diferencia aproximada de temperaturas entre dos ciudades cuyas altitudes difieren 935 metros?

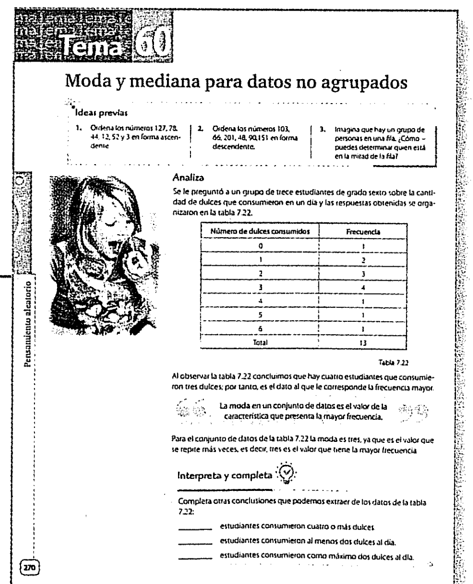
Para pensar en digital

Entra a [illegible] y disfruta de los retos interactivos que tenemos para ti.

283

Apertura de unidad

Al comenzar cada unidad, observas una ilustración y una **Situación** a partir de la cual podrás responder las preguntas de la sección Desarrolla pensamiento crítico.



Tema 60

Moda y mediana para datos no agrupados

Ideas previas

1. Ordena los números 127, 78, 44, 12, 52 y 3 en forma ascendente.
2. Ordena los números 103, 66, 201, 48, 90,151 en forma descendente.
3. Imagina que hay un grupo de personas en una fila. ¿Cómo puedes determinar quién está en la mitad de la fila?

Analiza

Se le preguntó a un grupo de trece estudiantes de grado sexto sobre la cantidad de dulces que consumieron en un día y las respuestas obtenidas se organizaron en la tabla 7.22.

Número de dulces consumidos	Frecuencia
0	1
1	2
2	3
3	4
4	1
5	1
6	1
Total	13

Tabla 7.22

Al observar la tabla 7.22 concluimos que hay cuatro estudiantes que consumieron tres dulces; por tanto, es el dato al que le corresponde la frecuencia mayor.

La moda en un conjunto de datos es el valor de la característica que presenta la mayor frecuencia.

Para el conjunto de datos de la tabla 7.22 la moda es tres, ya que es el valor que se repite más veces, es decir, tres es el valor que tiene la mayor frecuencia.

Interpreta y completa

Completa otras conclusiones que podemos extraer de los datos de la tabla 7.22:

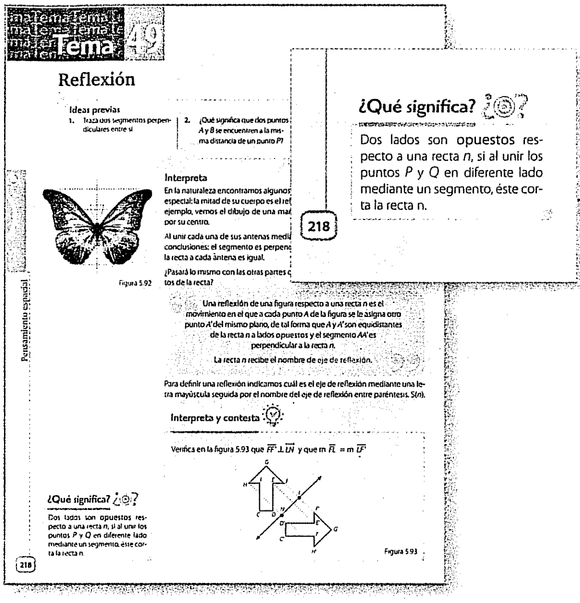
_______ estudiantes consumieron cuatro o más dulces.
_______ estudiantes consumieron al menos dos dulces al día.
_______ estudiantes consumieron como máximo dos dulces al día.

Pensamiento aleatorio

270

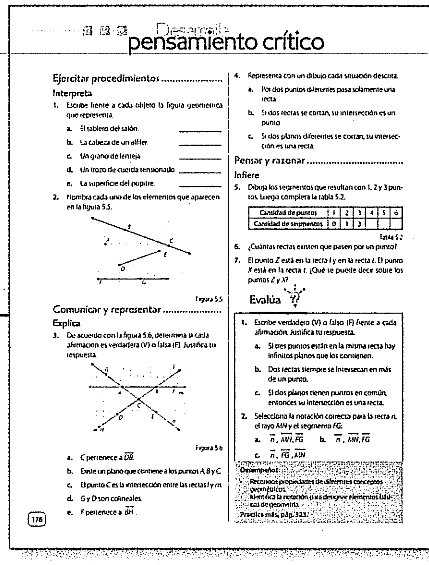
Presentación de contenidos

Comienzas cada tema con la sección **Ideas previas**, en la que con una actividad podrás determinar qué tanto sabes de algunos conceptos que necesitas para entender mejor el contenido que vas a estudiar.
Luego, con una situación se explica el concepto de la lección. Además, encuentras algunas secciones como: **Interpreta y resuelve** o **Infiere y contesta** con una pregunta interesante sobre el tema que vas a ver.



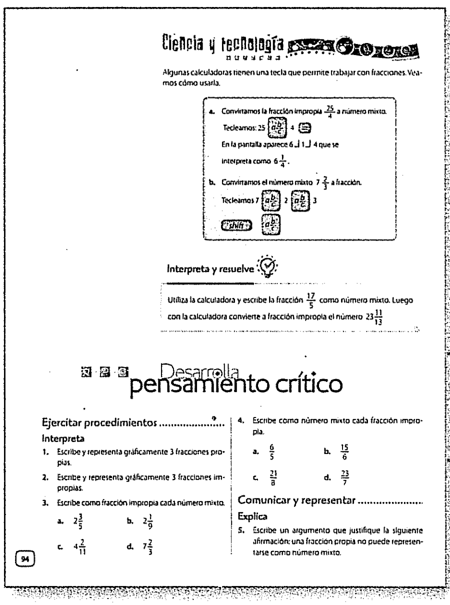
En los ladillos aparecen las secciones

- **Problema del día** que es una pregunta para que discutas con los demás estudiantes de tu clase.
- En ocasiones, necesitas repasar el significado de algún término matemático. Esto podrás hacerlo en la sección **¿Qué significa?**
- **Dato histórico**, como su nombre lo indica son datos relacionados con la historia de la matemática y el tema que se explica en la lección.



Desarrolla pensamiento crítico

Encontrarás actividades y ejercicios variados que te permitirán aplicar los contenidos estudiados. Al final está la sección **Evalúa**, cuyo fin es que determines cuánto aprendiste del tema visto.

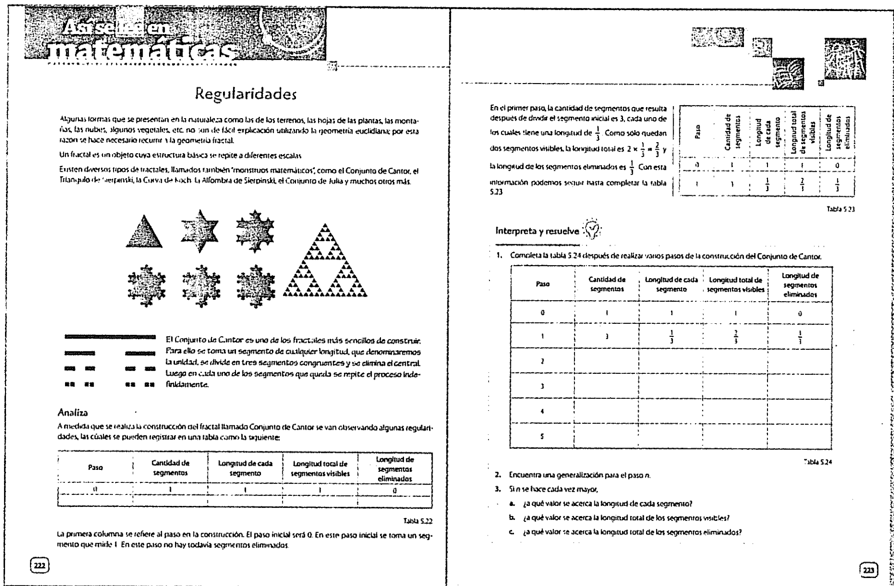


Ciencia y tecnología

Ciencia y tecnología

En algunos temas encontrarás la sección **Ciencia y Tecnología**, la cual propone una explicación del tema o una actividad, que involucra el uso de la tecnología.

Al final de las unidades, aparecen algunas de las siguientes secciones.



Así se lee en matemáticas

Regularidades

Algunas formas que se presentan en la naturaleza como las de los terrenos, las hojas de las plantas, las montañas, las nubes, algunos vegetales, etc. no son de fácil explicación utilizando la geometría euclidiana; por esta razón se hace necesario recurrir a la geometría fractal.

Un fractal es un objeto cuya estructura básica se repite a diferentes escalas.

Existen diversos tipos de fractales, llamados también "monstruos matemáticos", como el Conjunto de Cantor, el Triángulo de Sierpinski, la Curva de Koch, la Alfombra de Sierpinski, el Conjunto de Julia y muchos otros más.

El Conjunto de Cantor es uno de los fractales más sencillos de construir. Para ello se toma un segmento de cualquier longitud, que denominaremos la unidad, se divide en tres segmentos congruentes y se elimina el central. Luego en cada uno de los segmentos que queda se repite el proceso indefinidamente.

Analiza

A medida que se realiza la construcción del fractal llamado Conjunto de Cantor se van observando algunas regularidades, las cuáles se pueden registrar en una tabla como la siguiente:

Paso	Cantidad de segmentos	Longitud de cada segmento	Longitud total de segmentos visibles	Longitud de segmentos eliminados
0	1	1	1	0

Tabla 5.22

La primera columna se refiere al paso en la construcción. El paso inicial será 0. En este paso inicial se toma un segmento que mide 1. En este paso no hay todavía segmentos eliminados.

222

En el primer paso, la cantidad de segmentos que resulta después de dividir el segmento inicial es 3, cada uno de los cuales tiene una longitud de $\frac{1}{3}$. Como sólo quedan dos segmentos visibles, la longitud total es $2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ y la longitud de los segmentos eliminados es $\frac{1}{3}$. Con esta información podemos seguir hasta completar la tabla 5.23

Paso	Cantidad de segmentos	Longitud de cada segmento	Longitud total de segmentos visibles	Longitud de segmentos eliminados
0	1	1	1	0
1	3	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

Tabla 5.23

Interpreta y resuelve

1. Completa la tabla 5.24 después de realizar varios pasos de la construcción del Conjunto de Cantor.

Paso	Cantidad de segmentos	Longitud de cada segmento	Longitud total de segmentos visibles	Longitud de segmentos eliminados
0	1	1	1	0
1	3	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
2				
3				
4				
5				

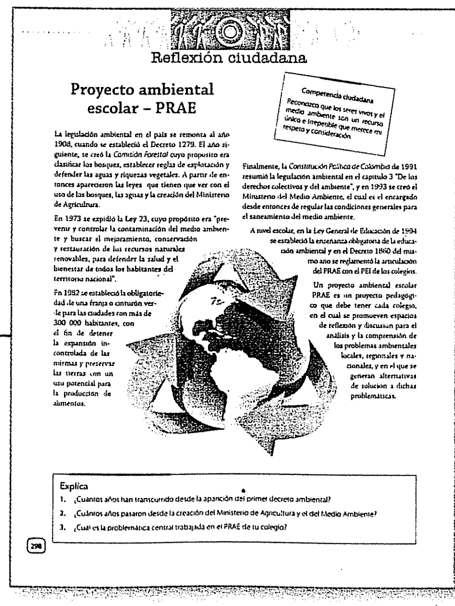
Tabla 5.24

2. Encuentra una generalización para el paso n.
3. Si n se hace cada vez mayor,
   a. ¿a qué valor se acerca la longitud de cada segmento?
   b. ¿a qué valor se acerca la longitud total de los segmentos visibles?
   c. ¿a qué valor se acerca la longitud total de los segmentos eliminados?

223

Así se lee en matemáticas

Esta sección te explica de manera sencilla el manejo y significado de algunas expresiones matemáticas en la vida cotidiana.



Reflexión ciudadana

Proyecto ambiental escolar – PRAE

Competencia ciudadana
Reconozco que los seres vivos y el medio ambiente son un recurso único e irrepetible que merece mi respeto y consideración.

La legislación ambiental en el país se remonta al año 1908, cuando se estableció el Decreto 1279. El año siguiente, se creó la *Comisión Forestal* cuyo propósito era clasificar los bosques, establecer reglas de explotación y defender las aguas y riquezas vegetales. A partir de entonces aparecieron las leyes que tienen que ver con el uso de los bosques, las aguas y la creación del Ministerio de Agricultura.

En 1973 se expidió la Ley 23, cuyo propósito era "prevenir y controlar la contaminación del medio ambiente y buscar el mejoramiento, conservación y restauración de los recursos naturales renovables, para defender la salud y el bienestar de todos los habitantes del territorio nacional".

En 1982 se estableció la obligatoriedad de una franja o cinturón verde para las ciudades con más de 300 000 habitantes, con el fin de detener la expansión incontrolada de las mismas y preservar las tierras con un uso potencial para la producción de alimentos.

Finalmente, la *Constitución Política de Colombia* de 1991 resumió la legislación ambiental en el capítulo 3 "De los derechos colectivos y del ambiente", y en 1993 se creó el Ministerio del Medio Ambiente, el cual es el encargado desde entonces de regular las condiciones generales para el saneamiento del medio ambiente.

A nivel escolar, en la Ley General de Educación de 1994 se estableció la enseñanza obligatoria de la educación ambiental y en el Decreto 1860 del mismo año se reglamentó la articulación del PRAE con el PEI de los colegios.

Un proyecto ambiental escolar PRAE es un proyecto pedagógico que debe tener cada colegio, en el cual se promueven espacios de reflexión y discusión para el análisis y la comprensión de los problemas ambientales locales, regionales y nacionales, y en el que se generan alternativas de solución a dichas problemáticas.

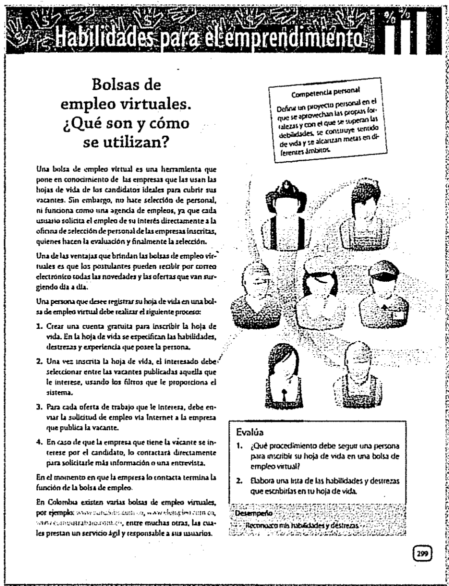
Explica

1. ¿Cuántos años han transcurrido desde la aparición del primer decreto ambiental?
2. ¿Cuántos años pasaron desde la creación del Ministerio de Agricultura y el del Medio Ambiente?
3. ¿Cuál es la problemática central trabajada en el PRAE de tu colegio?

298

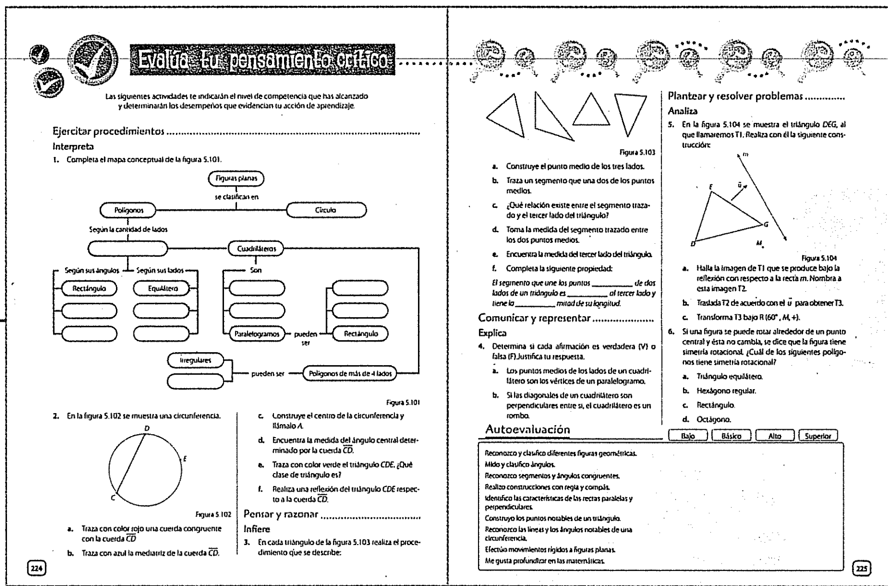
Reflexión ciudadana

En esta sección encuentras una situación cotidiana que presenta alguna de las competencias ciudadanas.



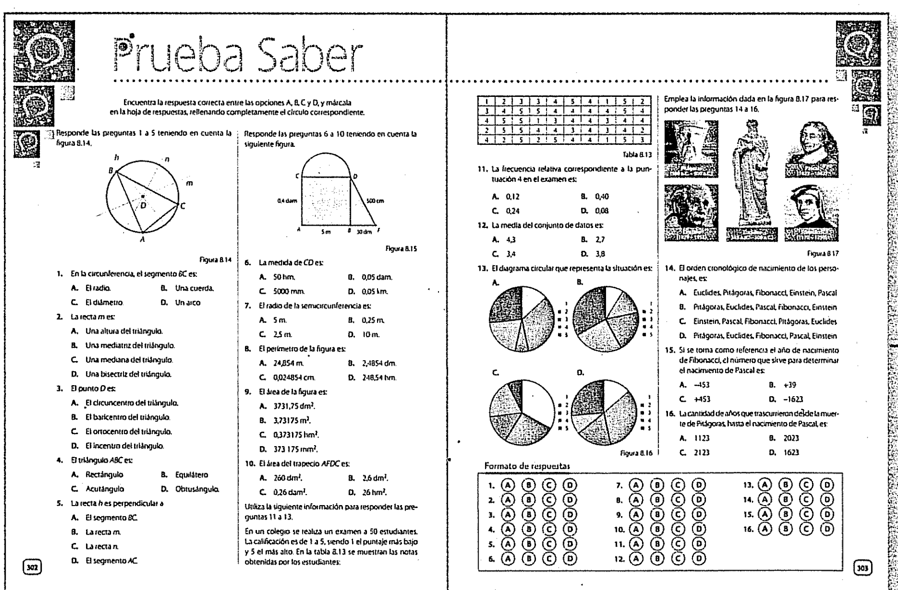
Habilidades para el emprendimiento

En esta sección se presentan diversas situaciones en las que deberás tomar decisiones que incluyen a otros.



Evalúa tu pensamiento crítico

Es la sección en la que podrás hacer una autoevaluación de las competencias que has desarrollado.



Prueba Saber

A partir de diferentes contextos, aquí se plantean preguntas que te preparan para las evaluaciones de competencias.

Contenido

Unidad 1

Números naturales y sistemas de numeración

Pensamiento numérico

Temas

Recursos digitales

Lección Digital norma

Ecuaciones de tipo aditivo

En tu entorno, las ecuaciones aditivas son comunes. Afianza tus conocimientos sobre este tema en tu lección digital, en http://www.normaparapensar.com

Unidad 2

Conjuntos y teoría de números

Pensamiento numérico

Temas

Recursos digitales

Lección Digital norma

Múltiplos y divisores

Los múltiplos y divisores de un número forman dos conjuntos numéricos con características y propiedades que te ayudarán a resolver diversos problemas y ejercicios; identifícalos y refuerza tus conocimientos ingresando en tu lección digital, en http://www.normaparapensar.com

Unidad 3

Números fraccionarios

Pensamiento numérico

Temas

Recursos digitales

Lección Digital norma

Ecuaciones de tipo aditivo y multiplicativo

Las ecuaciones aditivas y multiplicativas con números fraccionarios se pueden transformar en ecuaciones del mismo tipo pero con números enteros. Repasa tu lección digital en http://www.normaparapensar.com y amplía tus conocimientos.

Unidad 4

Números decimales

Pensamiento numérico

Temas

Recursos digitales

Para pensar en digital

Entra a www.normaparapensar.com y disfruta de los retos interactivos que tenemos para ti.

Unidad 5

Geometría

Pensamiento espacial

Temas

Recursos digitales

Lección Digital norma

Rectas paralelas y perpendiculares

Ingresa en tu lección digital en http://www.normaparapensar.com y refuerza tus conocimientos acerca de rectas paralelas y perpendiculares.

Unidad 6

Medición

Pensamiento métrico

Temas

Recursos digitales

Lección Digital norma

Perímetro y área de figuras planas

El perímetro y el área de una figura plana son medidas diferentes que te permiten tomar decisiones en diversas situaciones. A propósito, explora este tema en tu lección digital, en http://www.normaparapensar.com

Unidad 7

Estadística

Pensamiento Aleatorio

Temas

Recursos digitales

Lección Digital norma

Tablas de frecuencia de datos no agrupados

Cuando recolectas información y formas las tablas de frecuencias de datos puedes establecer las medidas de tendencia central y tomar decisiones importantes basadas en ellas. Refuerza estos conceptos en tu lección digital, enwww.normaparapensar.com

Unidad 8

Acercamiento a los enteros

Pensamiento numérico

Temas

Recursos digitales

Para pensar en digital

Entra a www.normaparapensar.com y disfruta de los retos interactivos que tenemos para ti.

Unidad 1

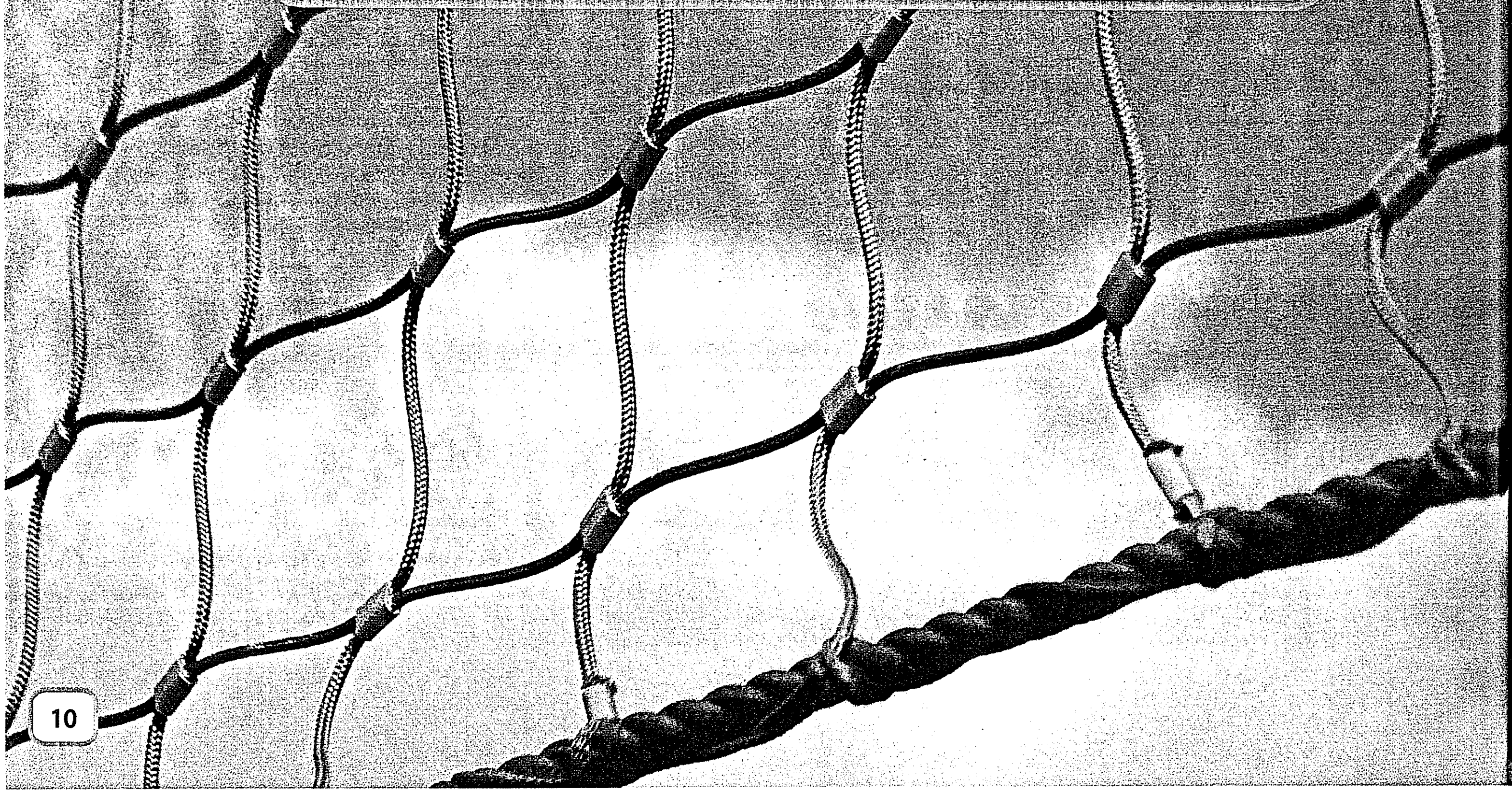
Pensamiento numérico

Números naturales y sistemas de numeración

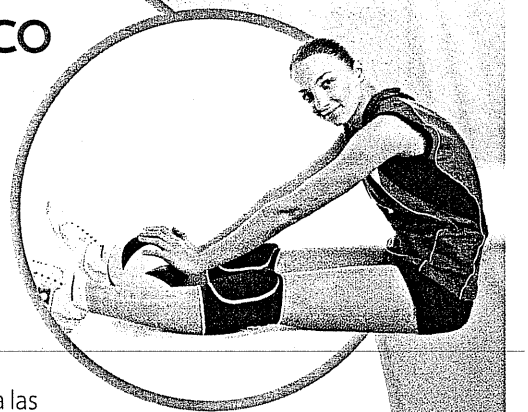
Situación problema

En la última revisión médica de Julieta, el doctor le dijo que debía practicar algún deporte porque llevaba una vida muy sedentaria, lo que a largo plazo podría afectar su estado de salud. Julieta siguió las recomendaciones del doctor y se inscribió en la convocatoria para la conformación del nuevo equipo de voleibol de su universidad.

El día señalado para la selección de los participantes, Julieta se presentó a la convocatoria. Después de realizar un estiramiento inicial dirigido por el profesor del equipo, la primera prueba que debió presentar consistió en correr alrededor de la cancha de voleibol durante 20 minutos. A medida que transcurría el tiempo empezó a sentir que los latidos de su corazón eran cada vez más rápidos y fuertes. Finalizada la prueba, el profesor le tomó el pulso y contó 140 pulsaciones por minuto. Julieta volvió a recuperar su pulso normal después de 5 minutos.



Desarrolla pensamiento crítico



Interpreta

1. ¿Qué significado tiene la expresión "140 pulsaciones por minuto"?
2. ¿Cuáles consideras que son las razones por las que Julieta volvió a recuperar su pulso normal después de 5 minutos?

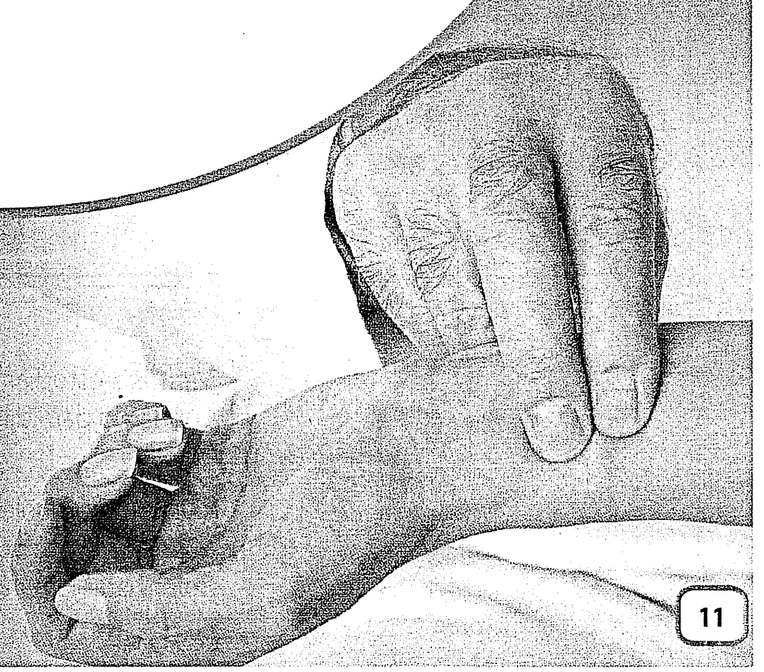
Infiere

3. La tabla 1.1 muestra el estado de la condición física para las mujeres que tienen entre 20 y 29 años de edad respecto a las pulsaciones que tienen por minuto después de haber realizado algún tipo de ejercicio.

Condición física de mujeres entre 20 y 29 años de edad	Pulsaciones por minuto después de haber realizado algún tipo de ejercicio
Excelente	Menos de 86 pulsaciones por minuto
Buena	Entre 86 y 93 pulsaciones por minuto
Regular	Entre 94 y 110 pulsaciones por minuto
Mala	Más de 110 pulsaciones por minuto

Tabla 1.1

Si Julieta tiene 22 años de edad, ¿qué puedes decir acerca de su condición física?



Lección Digital norma

Ecuaciones de tipo aditivo

En tu entorno, las ecuaciones aditivas son comunes. Afianza tus conocimientos sobre este tema en tu lección digital, en http://www.normaparapensar.com

Tema 1

Números naturales y sistema decimal

Ideas previas

1. Completa la tabla 1.2.

Número	Se lee
239	
	Dos mil trescientos cuarenta y cinco
12 367	
	Doscientos cincuenta y dos mil setecientos ochenta y tres

Tabla 1.2

2. Determina el número de unidades que hay representadas en cada letra:

   a. $53c = 532$

   b. $n43u = 7438$

   c. $t7s = 970$

   d. $21r = 216$

Analiza

Después de visitar al médico, Leonardo se practicó un examen de diagnóstico para monitorear su ritmo cardíaco durante 24 horas, mientras realizaba sus actividades cotidianas.

Como parte del examen, él debió anotar en un formato las actividades que realizaba durante un día, resaltando los momentos en los que sentía mareos, dolor en el pecho o palpitaciones. En la tabla 1.3 se muestra el formato con el registro de algunas actividades.

Formato de registro de actividades			
Fecha de inicio: **13/07/2011** Nombre del paciente: Leonardo Pérez Dirección: calle **146**D– No. **95**A –**63**			Fecha de finalización: **14/07/2011** Edad: **41** años Teléfono: **2994372**
Actividad	**Hora de registro**	**Descripción de la actividad**	**Síntoma**
1	**9:00 a. m.**	Inicio de la toma de examen	Ninguno
2	**9:30 a. m.**	Tomé un taxi después de caminar	Palpitaciones
3	**10:15 a. m.**	Subí varias escaleras	Palpitaciones y dolor en el pecho

Tabla 1.3

Vamos a estudiar el significado que adquieren los números naturales que usó Leonardo para diligenciar el formato.

Los números naturales resaltados con color azul los usó para **medir**, los resaltados con color verde los usó para **localizar**, mientras que usó el número 2994372 para **codificar**. Finalmente, usó los números naturales resaltados con color naranja para **contar**.

Para representar el conjunto de los **números naturales** usamos la letra **N**.

N = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13…}

Los números naturales que utilizas en la vida cotidiana adquieren distintos significados en contextos de **medición, localización, codificación** y **conteo**.

Valor de posición

En el formato de la tabla 1.3 encontramos los números 14 y 41. Al compararlos podemos establecer que a pesar de estar formados por los dígitos 4 y 1, son números diferentes.

Cada número se puede expresar como un **polinomio aritmético** de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} 14 &= 1 \times 10^1 + 4 \times 10^0 \\ &= 1 \times 10 + 4 \times 1 \\ &= 10 + 4 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 41 &= 4 \times 10^1 + 1 \times 10^0 \\ &= 4 \times 10 + 1 \times 1 \\ &= 40 + 1 \end{aligned}$$

Tanto el número 1 como el número 4 tienen un valor diferente, el cual está determinado por su posición. Así, en el número 14, el 1 en la posición de las decenas indica que hay 10 unidades, mientras que en el número 41, el 1 representa una sola unidad.

Infiere y contesta

¿Cuál es el valor de posición de 4 en el número 14? ¿Cuál es el valor de posición de 4 en el número 41?

El sistema de numeración de los números naturales es **decimal** porque las agrupaciones de las unidades se hacen en grupos de diez, y **posicional** porque el valor que toma cada dígito dentro del número depende de la posición que tenga.

En la tabla 1.4 aparecen algunos valores posicionales, expresados como **potencias de 10**, en el sistema de numeración decimal.

Posición	Centenas de millón	Decenas de millón	Unidades de millón	Centenas de mil	Decenas de mil	Unidades de mil	Centenas	Decenas	Unidades
Valor de posición en potencias de 10	10^8	10^7	10^6	10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0

Tabla 1.4

¿Qué significa?

1. La descomposición de un número expresando el valor posicional de sus dígitos y usando potencias de diez, es la expresión del número como **polinomio aritmético**.
2. Potencia de 10.

10^0

$10^1 = 10$

$10^2 = 10 \times 10 = 100$

$10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000$

$10^4 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10\,000$

$10^5 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 100\,000$

Desarrolla pensamiento crítico

Ejercitar procedimientos

Interpreta

1. En los supermercados, los productos destinados para la venta vienen acompañados de etiquetas, las cuales se usan para informar al cliente sobre las características principales del producto. ¿Cuál es el significado que adquieren los números naturales en cada una de las etiquetas de la figura 1.1?

Figura 1.1

2. Lee el siguiente aviso clasificado:

SE ALQUILA FINCA

Ubicada aproximadamente a 84 km de Bogotá,
temperatura promedio 25 °C,
con cinco habitaciones, tres baños, dos salas,
un comedor y una cocina con dotación completa.
Informes en el 3163332736.

¿Cuál es el significado que adquiere cada uno de los números naturales en el aviso clasificado? Explica tu respuesta.

Pensar y razonar

Infiere

3. En la tabla 1.5 se muestra el número de actividades que registraron seis pacientes en el seguimiento de preparación para un examen médico.

Paciente	Número de actividades
1	11
2	12
3	24
4	21
5	24
6	11

Tabla 1.5

Usa la información de la tabla para extraer una conclusión acerca del número de actividades de los siguientes pacientes:

a. Pacientes 1 y 6
b. Pacientes 2 y 4
c. Pacientes 3 y 5

Comunicar y representar

Explica

4. ¿Cuáles son los valores de posición para cada uno de los números de los literales del *a.* al *f.*? Justifica tu respuesta expresando cada número como un polinomio aritmético.

a. 59
b. 163
c. 2546
d. 87 618
e. 534 402
f. 6 309 152

Plantear y resolver problemas

Analiza

5. El dígito de las decenas de un número de cuatro cifras es 3. El dígito de las centenas es el doble del dígito de las decenas y el dígito de las unidades de mil es uno más que el de las centenas. La suma de los dígitos es 25. ¿Cuál es el número?

Evalúa

1. Escribe un ejemplo de la vida cotidiana en el que identifiques el uso de los números naturales y el contexto con el que está relacionado: conteo, medición, localización o codificación.
2. ¿Cuál es el valor de posición de cada dígito en el número 5648? Justifica tu respuesta.
3. ¿Qué significa que el sistema de numeración de los números naturales sea decimal y posicional? Justifica tu respuesta utilizando algunos ejemplos.

Desempeños

- Reconoce que los números naturales adquieren diferentes significados en contextos de medición, localización, codificación y conteo.
- Identifica los valores de posición de un número natural en el sistema de numeración decimal.
- Entiende el significado de los términos decimal y posicional en el sistema de numeración de los números naturales.

Practica más, pág. 305.

Tema 2

Orden en los números naturales

Ideas previas

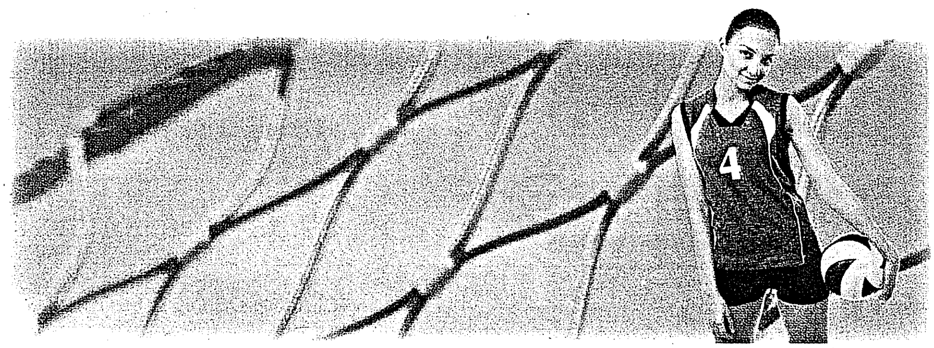
En la tabla 1.6 aparecen seis números escritos en palabras o como polinomio aritmético. Completa la tabla escribiendo cada número en la forma estándar.

Número	Forma estándar
$3 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 2 \times 10^0$	
Nueve mil quinientos ochenta y seis	
$4 \times 10^4 + 5 \times 10^3 + 6 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 3 \times 10^0$	
Doscientos sesenta y cinco mil	

Tabla 1.6

Analiza

Retomemos la pregunta **3.** de la situación problema al inicio de la unidad. Establezcamos si la edad de Julieta está entre 20 y 29 años de edad: sabemos que Julieta tiene 22 años, entonces debemos determinar el tipo de relación que tienen los números 20, 22 y 29.



Primero comparamos los números 20 y 22: los números tienen la misma cantidad de dígitos y el valor de posición de las decenas es igual, pero el valor de posición de las unidades no es igual; entonces, 20 es menor que 22 porque 0 es menor que 2.

> Para **comparar** dos números naturales que tienen la misma cantidad de dígitos, comparamos los mismos valores de posición de izquierda a derecha, hasta encontrar los que sean distintos.

Infiere y aplica

Utiliza el proceso descrito en el diagrama de la figura 1.2 para concluir que 22 es menor que 29.

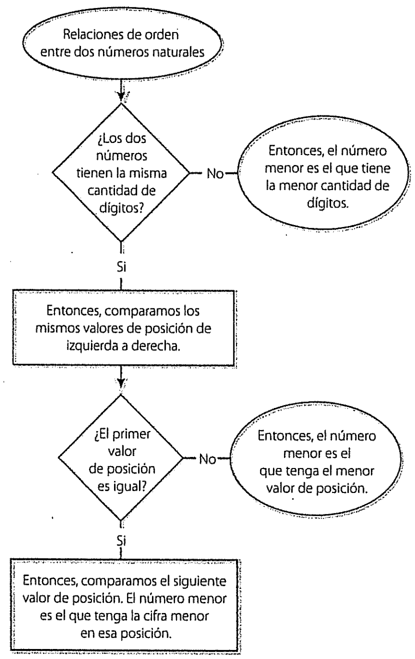


Figura 1.2

¿Qué significa?

En la **recta** se representa el primer elemento de los números naturales: el 0, y de ahí en adelante los elementos que se obtienen adicionando 1 al anterior. Entonces, 1 es el siguiente de 0, 2 es el siguiente de 1, 3 es el siguiente de 2, y así sucesivamente. La flecha de la semirrecta acompañada de los puntos suspensivos indica que los números naturales no tienen último elemento.

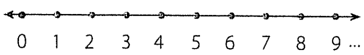


Figura 1.3

La relación de orden entre dos números naturales se puede representar en una **recta**, o simbólicamente: la relación *menor que* se representa con el símbolo <, la relación *mayor que* se representa con el símbolo >, y la relación *igual a* se representa con el símbolo =.

Ejemplo

Establezcamos la relación de orden entre los números 8246 y 8237.

Solución

Dado que los números tienen la misma cantidad de dígitos, comparamos los valores de posición de izquierda a derecha: en los dos casos los dígitos de las unidades de mil son iguales, los dígitos de las centenas también son iguales, pero los dígitos de las decenas no. 8246 > 8237 porque 4 > 3.

Gráficamente, 8246 está a la derecha de 8237 como se muestra en la figura 1.4:

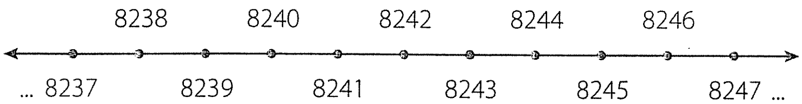


Figura 1.4

> Si un número natural es menor que otro y este último es menor que un tercer número, el primero es menor que el tercero. Esta propiedad se llama **propiedad transitiva.**

Interpreta y contesta

Si sabemos que 34 < 76 y 76 < 194, ¿cuál es la relación de orden entre los números 34 y 194? Justifica tu respuesta.

Ciencia y tecnología

Estudiemos que sucede con la relación de orden entre dos números al adicionar el mismo sumando a los dos lados de la desigualdad.

Paso 1

45 < 78. Si a cada número le adicionamos 15, 45 + 15 = 60 y 78 + 15 = 93. La relación de orden entre los resultados es 60 < 93.

Paso 2

60 < 93. Si a cada número le adicionamos 15, 60 + 15 = 75 y 93 + 15 = 108. La relación de orden entre los resultados es 75 < 108.

Continúa con el procedimiento usando una calculadora hasta llegar al paso 10. Anota al final de cada paso los resultados. ¿Qué puedes concluir acerca de la relación de orden entre los números que se van obteniendo al finalizar cada paso?

Desarrolla pensamiento crítico

Ejercitar procedimientos

Interpreta

1. Observa las representaciones gráficas que se muestran en la figura 1.5 de algunas relaciones de orden entre números naturales.

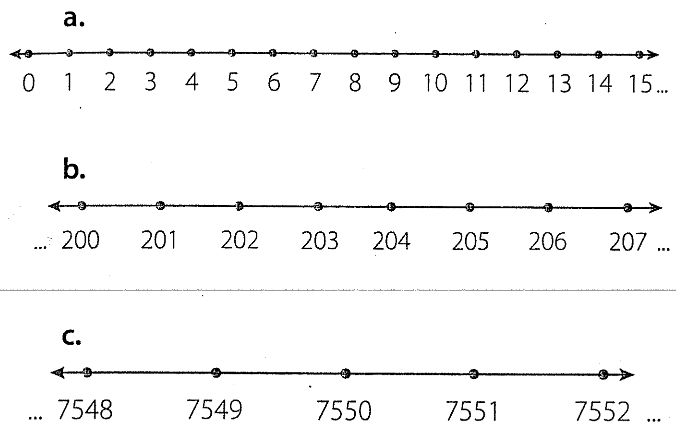


Figura 1.5

¿Cuál es la relación de orden entre los números resaltados en cada una de las rectas?

Comunicar y representar

Explica

2. Usa una recta en cada caso para representar,

- **a.** Los números naturales mayores que 45 y menores que 65.
- **b.** Los números naturales menores que 250.
- **c.** Los números naturales mayores que 15 730.

Pensar y razonar

Infiere

3. 23 < 46. Si cada número lo multiplicamos por 3, $23 \times 3 = 69$ y $46 \times 3 = 138$. La relación de orden entre los resultados es 69 < 138.

Si repetimos el procedimiento varias veces, podemos comprobar que si un número natural es menor que otro y cada uno se multiplica por el mismo número natural diferente de 0, el orden entre los resultados es el mismo que existía entre los números originales.

De acuerdo con la información anterior, completa los espacios con números naturales para que la desigualdad sea verdadera:

$145 \times \square > \square \times 12$. Entonces, 1740 > 1200

4. Si Laura tiene 35 años de edad, Santiago es el hermano menor de Laura y tiene más de 20 años de edad, ¿cuál es la posible edad de Santiago?

5. Jorge afirma que entre dos números naturales dados, el menor es aquel que tiene menos dígitos. ¿Estás de acuerdo con la afirmación de Jorge? Justifica tu respuesta.

Plantear y resolver problemas

Analiza

6. En un tarro había cierta cantidad de galletas. Luis se comió más de 6 galletas y Francisco más de 10. Si quedan más de 32 galletas, ¿cuántas había en el tarro?

7. Fernando tiene una estatura mayor que la de Diego pero menor que la de Mario. Si Diego y Mario miden 173 cm y 189 cm, respectivamente, ¿cuál es la posible estatura de Fernando?

Evalúa

1. Ordena los números de cada literal de menor a mayor. Luego representa gráficamente cada relación de orden.

- **a.** 467, 249, 123, 625
- **b.** 2456, 7895, 1470, 5694
- **c.** 13 645, 10 976, 12 431, 11 690

2. Si Julián tiene 8 años de edad más que Clara, Clara es menor 4 años que Manuel, y Manuel tiene más de 26 años pero menos de 30, ¿cuáles son las posibles edades de Julián, Clara y Manuel?

Desempeños

- Representa las relaciones de orden entre los números naturales.
- Resuelve situaciones problema utilizando las relaciones de orden entre números naturales.

Practica más, pág. 305.

Adición y sustracción de números naturales

Ideas previas

1. Calcula el resultado de las siguientes operaciones:
   - **a.** 45 + 78
   - **b.** 4563 + 2945
   - **c.** 245 − 124
   - **d.** 6538 − 4312
2. Selecciona la expresión que es equivalente a 4279:
   - **a.** 4 grupos de 1000, 2 de 100, 7 de 10 y 2 unidades sueltas.
   - **b.** 4 grupos de 1000, 2 de 100, 6 de 10 y 19 unidades sueltas.
   - **c.** 4 grupos de 1000, 1 de 100, 18 de 10 y 9 unidades sueltas.

Analiza

En estado de reposo, el número de pulsaciones por hora de Julieta es 5820. Para determinar la cantidad de pulsaciones que puede llegar a tener en dos horas, adicionamos 5820 y 5820:

Suma	Pasos	Resultados
$\begin{array}{r} 1 \\ 5820 \\ +\ 5820 \\ \hline 11640 \end{array}$	$0+0=0$	0 unidades
	$2+2=4$	4 decenas
	$8+8=16$	1 unidad de mil y 6 centenas
	$(5+5)+1=10+1=11$	1 decena de mil y 1 unidad de mil

Tabla 1.7

Si lo que deseamos ahora es conocer el número de pulsaciones en tres horas, adicionamos 11 640 y 5820:

Suma	Pasos	Resultados
$\begin{array}{r} 1 \\ 11640 \\ +\ 5820 \\ \hline 17460 \end{array}$	$0+0=0$	0 unidades
	$4+2=6$	6 decenas
	$6+8=14$	1 unidad de mil y 4 centenas
	$(1+5)+1=6+1=7$	7 unidades de mil
	1	1 decena de mil

Tabla 1.8

> El proceso para obtener la **suma** de dos números naturales se realiza adicionando los mismos valores de posición de cada uno de los **sumandos** de derecha a izquierda.

¿Qué significa?

Si a, b y c son números naturales, y $a + b = c$, los términos a y b se conocen como **sumandos** y el término c se conoce como **suma**.

Interpreta y resuelve

Usa el procedimiento descrito para hallar el número de pulsaciones que puede llegar a tener Julieta en cuatro horas.

Pensamiento numérico

Sustracción de números naturales

Analiza

Como parte de un seguimiento al estado físico de sus jugadoras, el entrenador del equipo de voleibol tiene los registros de las pulsaciones de Julieta y Paola para una, dos y tres horas en estado de reposo. Con la información elaboró la tabla 1.9.

Número de horas	Total de pulsaciones de Julieta	Total de pulsaciones de Paola	Diferencia el número de pulsaciones de Julieta y de Paola
1	5820	3780	2040
2	11 640	7560	
3	17 460	11 340	

Tabla 1.9

Para completar la cuarta columna de la tabla, el entrenador calculó primero la **diferencia** entre 11 640 y 7560.

Sustracción	Paso	Explicación	Resultados
$\begin{array}{r} {\scriptstyle 0\ 11\ 5\ 14} \\ 1\ 1\ 6\ 4\ 0 \\ -\quad 7\ 5\ 6\ 0 \\ \hline 4\ 0\ 8\ 0 \end{array}$	$0 - 0 = 0$		0 unidades
	$14 - 6 = 8$	$4 - 6$ Dado que $4 < 6$, reagrupamos las decenas y las centenas, de tal forma que ahora se tienen 14 decenas y 5 centenas.	8 decenas
	$5 - 5 = 0$		0 centenas
	$11 - 7 = 4$	$1 - 7$ Dado que $1 < 7$, reagrupamos las unidades de mil y las decenas de mil y ahora tenemos 11 unidades de mil y 0 decenas de mil.	4 unidades de mil

Tabla 1.10

Interpreta y explica

Describe el proceso que siguió el entrenador para llenar la casilla faltante en la tabla 1.9.

El proceso para obtener la diferencia de dos números naturales se realiza sustrayendo los mismos valores de posición del **minuendo** y el **sustraendo** de derecha a izquierda.

Si a y b son números naturales, en donde a es menor que b, la operación $a - b$ no está definida para los números naturales y por tanto, no se puede realizar.

¿Qué significa?

Si a, b y c son números naturales y $a - b = c$, en donde a es mayor que b, el término a se conoce como **minuendo**, el término b se conoce como **sustraendo** y el término c se denomina **diferencia**.

Propiedades de la adición

Propiedad	Explicación	Ejemplos
Conmutativa	El resultado de una adición no depende de la posición de los sumandos.	**a.** 572 + 914 = 1486 y 914 + 572 = 1486 **b.** 1836 + 8519 = 10 355 y 8519 + 1836 = 10 355 **c.** 23 785 + 52 954 = 76 739 y 52 954 + 23 785 = 76 739 Observa que la posición de los sumandos en cada caso no cambia la suma.
Modulativa	La suma de un número natural y el número cero es igual al mismo número natural.	**a.** 562 + 0 = 562 **b.** 0 + 1234 = 1234 **c.** 32 916 + 0 = 32 916 En cada caso ignoramos el sumando 0 porque éste no afecta la suma.
Clausurativa	La suma que se obtiene al adicionar dos números naturales es un número natural.	8 + 12 es un número natural.
Asociativa	El resultado de una adición no depende de las agrupaciones que se realicen con sus sumandos.	(1 275 632 + 452 641) + 23 478 = 1 728 273 + 23 478 = 1 751 751 | 1 275 632 + (452 641 + 23 478) = 1 275 632 + 476 119 = 1 751 751

Tabla 1.11

Algunas de las propiedades de la adición no se cumplen en la sustracción de números naturales. Veamos algunos ejemplos:

La **propiedad conmutativa** no se cumple porque al cambiar el orden de los términos el resultado cambia. Por ejemplo, 123 – 45 = 78, pero el resultado de 45 – 123 no es 78.

La **propiedad modulativa** se cumple únicamente cuando el cero es el sustraendo. Por ejemplo, 4591 – 0 = 4591, pero 0 – 4591 no se puede hacer con números naturales.

Interpreta y verifica

Realiza dos agrupaciones diferentes en la sustracción 150 – 21 – 8. Usa los resultados para escribir un razonamiento que justifique la siguiente afirmación: "La propiedad asociativa no se cumple en la sustracción de números naturales".

Dato histórico

Los signos + y – fueron utilizados en la Edad Media por los alemanes: el signo + indicaba *exceso* mientras que el signo – indicaba *defecto* en la medida de las mercancías. En el libro del alemán Johann Widman publicado en el año 1489 sobre aritmética comercial, ya aparecen los signos + y – con el significado de suma y resta.

Desarrolla pensamiento crítico

Ejercitar procedimientos

Interpreta

1. Completa cada espacio con el número natural correspondiente:

   a. 562 – 62 = 500, porque 62 + $\boxed{}$ = 562

   b. 8950 – 634 = $\boxed{}$, porque 8316 + 634 = 8950

   c. $\boxed{}$ – 34 905 = 89 325, porque 89 325 + 34 905 = 124 230

   d. 722 – 227 = 495, porque $\boxed{}$ + 495 = 722

   e. 2 543 706 – 2 400 127 = 143 579, porque 2 400 127 + 143 579 = $\boxed{}$

2. Efectúa las operaciones señaladas y escribe el resultado en cada caso:

   a. 3824 + 5609

   b. 56 338 – 12 289

   c. 23 175 + 48 254 + 33 516

   d. 1 651 581 + 479 670 – 55 238

   e. 82 392 + 10 423 – 2415

   f. 7 423 865 – 2 427 132 – 75 932

Pensar y razonar

Infiere

3. Identifica las propiedades de la adición de números naturales que se usaron para hallar las sumas indicadas en la tabla 1.12 y complétala.

Adición	Procedimiento	Propiedad
178 + 425 + 620 + 125 + 32	= 32 + 125 + 178 + 425 + 620	Conmutativa
	= (32 + 125) + (178 + 425) + 620	
	= 157 + 603 + 620	
	= 157 + (603 + 620)	
	= 157 + 1223	
	= 1223 + 157	
	= 1380	
85 420 + 0 + 1 236 451	= (85 420 + 0) + 1 236 451	
	= 85 420 + 1 236 451	
	= 1 321 871	

Tabla 1.12

Comunicar y representar

Explica

4. ¿Cuál es el procedimiento para adicionar dos números naturales?

5. ¿Cuál es el procedimiento para sustraer dos números naturales?

6. Escribe un ejemplo en el que muestres que en la sustracción de números naturales no se cumple la propiedad modulativa cuando 0 es el minuendo.

Plantear y resolver problemas

Analiza

7. Un comerciante recibe en un mes $ 5 355 000 por las ventas de artículos para mujer y $ 3 734 200, por las ventas en artículos para hombre. Del dinero total recibido por las ventas le paga a sus empleados $ 2 200 000, paga por el arriendo del local $ 3 000 000 y $ 900 000 en servicios públicos. ¿De cuánto fue la ganancia del comerciante en ese mes?

Evalúa

1. Utiliza las propiedades de la adición de números naturales para calcular el resultado de las adiciones en los literales *a.* y *b.* Indica la propiedad que estás utilizando a medida que vas desarrollando las operaciones.

   a. 120 + 35 + 0 + 1234 + 950 + 7

   b. 95 320 + 88 640 + 15 730 + 9740 + 12 593

2. Marisol radicó una cuenta de cobro por un valor de $ 1 855 000 por el pago de sus servicios a una empresa. Sobre el anterior valor, la empresa le abona $ 148 400 de bonificación por cumplimiento y le descuenta $ 351 819 de retención en la fuente. ¿Cuál es el valor neto del pago que recibirá Marisol?

Desempeños

- Identifica el uso de las propiedades de la adición de números naturales en el cálculo de una suma.
- Resuelve situaciones problema utilizando la adición y/o la sustracción de números naturales.

Practica más, pág. 306.

Ecuaciones de tipo aditivo

Ideas previas

1. Selecciona en cada literal el número natural que representa la letra n:

   a. $546 + n = 1370$; 815, 824, 869

   b. $n - 2870 = 2599$; 5493, 5481, 5469

   c. $n + 35\,641 = 51\,533$; 15 892, 15 968, 15 975

   d. $25\,684 - n = 15\,189$; 10 325, 10 495, 10 843

2. Relaciona cada situación con la adición o sustracción de números naturales:

   a. Claudia tiene 25 años más que Carolina y Carolina tiene 15 años.

   b. Roberto y Patricia se casaron hace 19 años.

   c. En 20 días estaré en Cartagena.

   d. Gabriel mide 160 cm y es 15 cm más bajo que Leonardo.

Analiza

En la tabla 1.13 se presenta información relacionada con el peso, la longitud y la altura de dos mamíferos: el guanaco y la vicuña.

Animal / Información	Guanaco	Vicuña
Peso (kg)	150 kilogramos	
Longitud (cm)	200 centímetros	
Altura (cm)		90 centímetros

Tabla 1.13

Determinemos el peso y la longitud de la vicuña y la altura del guanaco de acuerdo con los siguientes datos: un guanaco pesa 110 kg más que una vicuña y es 40 cm más largo que ésta. La vicuña tiene 20 cm menos de altura que el guanaco.

Para interpretar la frase "un guanaco pesa 110 kg más que una vicuña" usamos una **expresión aritmética**:

Frase → **Un guanaco pesa 110 kilogramos más que** una vicuña.

↓

Expresión aritmética → $110 + p$

p: peso de la vicuña

Con la información de la tabla 1.13 y la expresión aritmética que hallamos, vamos a establecer una ecuación:

Peso en kilogramos del guanaco	150
Expresión aritmética	$110 + p$
Ecuación	$150 = 110 + p$

Una **ecuación** es una expresión matemática que indica la igualdad entre dos informaciones en las cuales hay una variable. **Solucionar** una ecuación significa encontrar el dato desconocido representado por la variable.

¿Qué significa?

Una **expresión aritmética** es la representación de una frase que relaciona un dato conocido con otro dato que es desconocido mediante una operación. El dato desconocido se denomina **variable** y se representa mediante una letra.

El siguiente paso es solucionar la ecuación que planteamos. Para esto, utilizamos el hecho de que la adición y la sustracción son operaciones inversas.

$110 + p = 150$	Identificamos la operación planteada en la ecuación. El signo + nos indica que hay una adición.
$p + 110 = 150$	Determinamos qué se busca. Debemos hallar un número que al adicionarle 110 dé como resultado 150.
$p + 110 - 110 = 150 - 110$	Sustraemos 110 en cada lado de la ecuación.
$p + 0 = 40$	Resolvemos las operaciones planteadas. $110 - 110 = 0$ y $150 - 110 = 40$
$p = 40$	Aplicamos la propiedad modulativa.

Escribimos la respuesta. $p = 40$, entonces el peso de la vicuña es 40 kg. Finalmente, comprobamos que el resultado satisface la adición planteada en la ecuación: $110 + 40 = 150$

Analiza y resuelve

Plantea y resuelve una ecuación que te permita hallar la longitud de la vicuña.

Para hallar la altura del guanaco planteamos y solucionamos la ecuación correspondiente:

a. Determinamos la expresión aritmética:

Frase → La vicuña tiene 20 centímetros **menos** de altura que el guanaco.

Expresión aritmética → $a - 20$

a: altura del guanaco

Interpreta y explica

¿Por qué planteamos la expresión aritmética como $a - 20$ y no como $20 - a$?

b. Planteamos la ecuación:

Altura de la vicuña en centímetros	90
Expresión aritmética	$a - 20$
Ecuación	$90 = a - 20$

c. Solucionamos la ecuación:

$90 = a - 20$	Identificamos la operación planteada en la ecuación. El signo – nos indica que hay una sustracción.
$90 + 20 = a - 20 + 20$	Como debemos hallar el minuendo de la sustracción, adicionamos 20 en cada lado de la ecuación.
$110 = a + 0$	Resolvemos las operaciones planteadas. $90 + 20 = 110$ y $20 - 20 = 0$.
$110 = a$	Aplicamos la propiedad modulativa.

Escribimos la respuesta. $a = 110$, entonces la altura del guanaco es 110 cm. Comprobamos que el resultado satisface la adición planteada en la ecuación. $90 = 110 - 20$

Escribir expresiones del lenguaje común como expresiones aritméticas es útil para plantear ecuaciones. Algunas frases del lenguaje común escritas como expresión aritmética, son:

Lenguaje común	Expresión aritmética
78 **más** que un número.	m representa el número. $78 + m$
La **suma** de un número y 36.	t representa el número. $t + 36$
La ganancia de ayer **disminuida** en tres millones.	n representa la ganancia de ayer. $n - 3\,000\,000$
Camilo tiene \$ 12 500 **menos** que Diego.	p representa el dinero de Diego. $p + 12\,500$
37 **más** que la **diferencia** de un número y 22.	x representa el número. $37 + (x - 22)$

Tabla 1.14

Desarrolla pensamiento crítico

Ejercitar procedimientos

Interpreta

1. Resuelve la ecuación planteada en cada literal utilizando las relaciones entre la adición y la sustracción de números naturales:

a. $1863 + p = 7584$ **b.** $s - 2540 = 6390$

c. $m + 43\,765 = 68\,662$ **d.** $69\,314 - r = 12\,442$

Pensar y razonar

Infiere

2. En cada caso marca con una (*X*) la ecuación que usarías para encontrar la solución al problema planteado:

a. Fernando es 24 centímetros más alto que Gloria. Si Gloria tiene una altura de 160 centímetros, ¿cuál es la altura de Fernando?

☐ $160 + f = 24$

☐ $160 = 24 + f$

☐ $f - 24 = 160$

b. Valentina es 15 años menor que Lorena. Si Valentina tiene 25 años de edad, ¿cuántos años tiene Lorena?

☐ $l - 15 = 25$

☐ $25 = l + 15$

☐ $25 + l = 15$

c. Ana tiene un peso de 18 kilogramos más que Roberto. Si Roberto tiene un peso de 75 kilogramos, ¿cuál es el peso de Ana?

☐ $p + 75 = 18$

☐ $p - 75 = 18$

☐ $p + 18 = 75$

3. Propón en cada caso una situación que puedas resolver planteando una ecuación. La solución de dicha ecuación debe ser el número natural indicado:

a. 28

b. 165

c. 180

d. 2870

e. 3562

Comunicar y representar

Explica

4. Determina una expresión aritmética para cada frase:

a. Un número incrementado en 95.

b. 160 disminuido en un número.

c. 2870 más que un número.

d. La diferencia entre 68 194 y un número.

e. 1 254 816 aumentado en un número.

f. Un número menos 2 564 385.

5. Encuentra una frase para cada expresión aritmética:

a. $38 + s$

b. $t - 472$

c. $p + 6382$

d. $45\,670 - j$

e. $k + 3\,564\,980$

f. $56\,789\,235 - z$

6. Describe con tus propias palabras el procedimiento que usarías para solucionar una ecuación del tipo $a = c - b$, si a y b son números naturales, c es mayor que b y quieres hallar el valor de c.

7. Escribe un argumento que explique la razón por la que las siguientes ecuaciones no tienen solución en los números naturales:

a. $368 - n = 829$

b. $t + 325 = 272$

c. $639 + u = 521$

Plantear y resolver problemas

Analiza

8. Representa cada situación por medio de una ecuación. Utiliza las relaciones entre la adición y la sustracción de números naturales para solucionar cada ecuación.

a. Andrea tomó un taxi desde su casa hasta el aeropuerto y pagó por la carrera $ 2800 menos que lo que paga usualmente. Si regularmente la carrera le cuesta $ 21 500, ¿cuánto le cobró el taxista?

b. La longitud de un cucarrón es 28 milímetros más que la de una polilla. Si el cucarrón mide 45 milímetros, ¿cuánto mide la polilla?

c. Julián compró en febrero un tiquete de ida y vuelta de la ciudad de Bogotá a Pereira, el cual le costó $ 451 440. Si en abril compró otro tiquete de ida y vuelta en el mismo trayecto, y éste le costó $ 193 320 menos que el que compró en febrero, ¿cuánto pagó por dicho tiquete?

Evalúa

1. Utiliza las relaciones de la adición y la sustracción de números naturales para solucionar cada una de las siguientes ecuaciones:

a. $634 + n = 890$

b. $j - 724 = 262$

c. $x + 5873 = 12\,763$

d. $6398 - p = 2753$

2. Escribe dos ejemplos que muestren que las ecuaciones del tipo $a - b = c$, en donde a y c son números naturales y b es la incógnita, no tienen solución en los números naturales si a es menor que c.

3. El peso de un jaguar es 99 kilogramos más que el peso de un puma. Si un jaguar pesa 158 kilogramos, ¿cuánto pesa el puma?

Desempeños

- Identifica el uso de las relaciones entre la adición y la sustracción de números naturales en la solución de ecuaciones de tipo aditivo.
- Construye ejemplos que muestran las condiciones que debe tener una ecuación para que tenga solución en los números naturales.
- Resuelve situaciones problema mediante ecuaciones de tipo aditivo.

Practica más, pág. 306.

Tema 5

Multiplicación y división de números naturales

Ideas previas

1. Calcula el resultado de las siguientes multiplicaciones:

   a. 476×5 b. 7204×28

   c. $18\,961 \times 127$

2. Calcula el resultado de las siguientes divisiones:

   a. $760 \div 2$ b. $6495 \div 15$

   c. $12\,915 \div 105$

Multiplicación de números naturales

Interpreta

Retomemos la situación de acercamiento para la adición de números naturales. En dicha situación, Julieta calculó la suma de 5820 y 5820 para determinar cuántas pulsaciones podría llegar a tener en dos horas estando en reposo. Otra manera de encontrar el resultado habría sido calcular el producto de 5820 y 2:

Multiplicación	Paso	Resultado
$\begin{array}{r} 1 \\ 5820 \\ \times 2 \\ \hline 11640 \end{array}$	$2 \times 0 = 0$	0 unidades
	$2 \times 2 = 4$	4 decenas
	$2 \times 8 = 16$	1 unidad de mil y 6 centenas
	$(2 \times 5) + 1 = 10 + 1 = 11$	1 decena de mil y 1 unidad de mil

Tabla 1.15

Analiza y contesta

¿Qué multiplicación debería efectuar Julieta para determinar el número de pulsaciones que podría llegar a tener después de tres horas estando en reposo, en lugar de hallar la suma de 5820 con 5820 y con 5820?

La **multiplicación** es una operación que consiste en sumar repetidas veces un mismo valor.

Si a es un número natural, calcular la suma de $\underbrace{a + a + a \ldots + a}_{n \text{ veces}}$ es igual a calcular el producto de $a \times n$.

Dato histórico

El signo × fue utilizado por el inglés William Oughtred en el año 1631 como símbolo para la multiplicación, mientras que el signo ÷ fue inventado por el suizo Johann Heinrich Rahnen en el año 1659 para la división.

División de números naturales

Retomemos la situación de acercamiento para la sustracción de números naturales. En dicha situación, el profesor registró que Julieta tenía un total de 5820 pulsaciones y Paola tenía un total de 3780 pulsaciones después de una hora en estado de reposo. Para determinar el número de pulsaciones que tendría cada una de ellas en un minuto, hallamos el resultado de la división de cada dato por 60:

$5820 \div 60 = 97$ y $3780 \div 60 = 63$, entonces, Julieta tiene 97 pulsaciones por minuto en estado de reposo y Paola tiene 63 pulsaciones por minuto en estado de reposo.

Infiere y responde

¿Por qué dividimos por 60?

Problema del día

¿Qué peso transporta una tractomula que lleva 125 bultos de cebada de 60 kg cada uno, 30 sacos de café de 50 kg cada uno y 40 bultos de arroz de una arroba cada uno?

Propiedades de la multiplicación

Comparemos el resultado de las siguientes parejas de multiplicaciones:

a. $25 \times 56 = 1400$ y $56 \times 25 = 1400$

b. $5916 \times 125 = 739\,500$ y $125 \times 5916 = 739\,500$

Observa que en cada caso la posición de los **factores** no cambia el **producto**.

La **propiedad conmutativa** de la multiplicación de números naturales indica que el resultado de una multiplicación no depende del orden de sus factores. Es decir, si a, b y c son números naturales, y $a \times b = c$, entonces $b \times a = c$.

El producto de 76×528 es un número natural.

La **propiedad clausurativa** de la multiplicación indica que el resultado de una multiplicación de números naturales es otro número natural.

Calculemos el producto en cada caso:

a. $843 \times 1 = 843$ **b.** $1 \times 5624 = 5624$ **c.** $81\,429 \times 1 = 81\,429$

En cada caso ignoramos el factor 1 porque éste no afecta el producto.

La **propiedad modulativa** de la multiplicación indica que el producto de un número natural por el número uno es igual al mismo número natural. Es decir, si a es un número natural, $a \times 1 = a$.

Para calcular el resultado de las siguientes multiplicaciones, realizamos primero las operaciones que se encuentran indicadas dentro de los paréntesis:

$(3690 \times 1867) \times 45$	$3690 \times (1867 \times 45)$
$= (6\,889\,230) \times 45$	$= 3690 \times (84\,015)$
$= 310\,015\,350$	$= 310\,015\,350$

Al comparar los resultados podemos afirmar que la forma de agrupar los factores no afecta el resultado de la multiplicación.

La **propiedad asociativa** de la multiplicación de números naturales indica que el resultado de una multiplicación no depende de las agrupaciones que se realicen con sus factores. Es decir, si a, b y c son números naturales, el producto $(a \times b) \times c$ es igual al producto $a \times (b \times c)$.

¿Qué significa?

Si a, b y c son números naturales y $a \times b = c$, los términos a y b se conocen como **factores** y el término c se denomina **producto**.

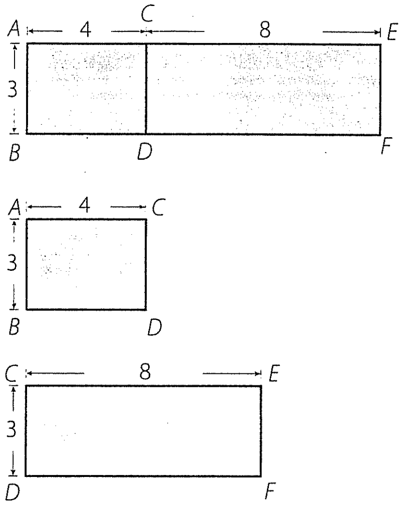


Figura 1.6

Hallemos el área de los rectángulos de la figura 1.6.

El rectángulo *ABFE* tiene por área 36 unidades cuadradas. El rectángulo *ABDC* tiene por área 12 unidades cuadradas y el rectángulo *CDFE* tiene por área 24 unidades cuadradas.

Una forma de escribir la equivalencia entre las áreas de la figura 1.6 es la siguiente:

$$3 \times (4 + 8) = 3 \times (12) \qquad\qquad (3 \times 4) + (3 \times 8) = (12) + (24)$$
$$= 36 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = 36$$

Infiere y completa

Usa los rectángulos de la figura 1.7 para completar los espacios. Halla el resultado de las operaciones indicadas, realizando primero las operaciones que se encuentran indicadas dentro de los paréntesis y completa los espacios con los resultados:

$$5 \times (\square + \square) = \square \times (\square) \qquad (5 \times \square) + (5 \times \square) = (\square) + (\square)$$
$$= 45 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = 45$$

"La **propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición** indica que si *a*, *b* y *c* son números naturales, el producto de $a \times (b + c)$ es igual al resultado de $(a \times b) + (a \times c)$."

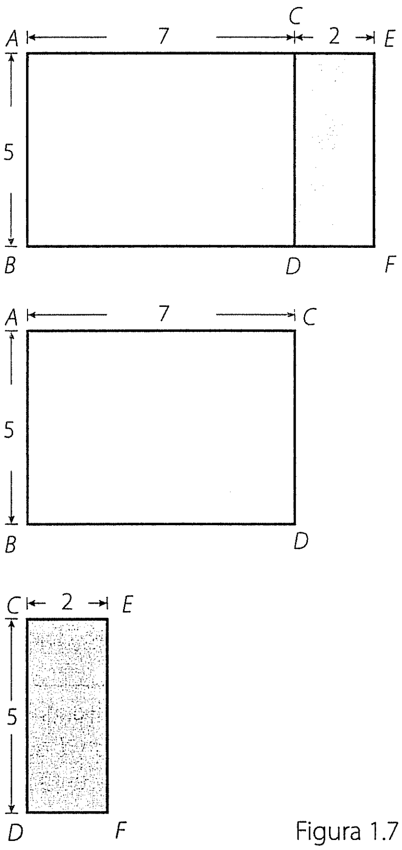


Figura 1.7

Propiedades de la división

Algunas de las propiedades de la multiplicación de números naturales no se cumplen en la división. Veamos algunos ejemplos:

La **propiedad conmutativa** no se cumple en la división de números naturales. Por ejemplo, $415 \div 5 = 83$, pero el resultado de $5 \div 415$ no es 83.

La **propiedad modulativa** sólo se cumple a la derecha. Por ejemplo, $5296 \div 1 = 5296$, pero el resultado de $1 \div 5296$ no es 5296.

La **propiedad asociativa** no se cumple para la división de números naturales. El resultado de la división $(1600 \div 10) \div 2$ es 80, pero es diferente al resultado de la división $1600 \div (10 \div 2)$, que es 320.

Interpreta y argumenta

Escribe un razonamiento que justifique la siguiente afirmación: "La propiedad clausurativa no se cumple para la división de números naturales".

Ejercitar procedimientos

Interpreta

1. Completa cada espacio con el número natural correspondiente:

   a. $7812 \div 62 = 126$, porque $62 \times \square = 7812$

   b. $2886 \div 222 = 13$, porque $\square \times 13 = \square$

   c. $112\,800 \div 235 = 480$, porque $\square \times \square = 112\,800$

   d. $\square \div 7 = 6326$, porque $6326 \times 7 = 44\,282$

   e. $\square \div \square = 27$, porque $51\,243 \times 27 = 1\,383\,561$

Pensar y razonar

Infiere

2. Identifica las propiedades de la multiplicación de números naturales que se usaron para hallar las multiplicaciones indicadas en la tabla 1.16 y complétala.

Multiplicación	Procedimiento	Propiedad
$56 \times 149 \times 45 \times 8 \times 2$	$= (56 \times 149) \times (45 \times 8) \times 2$	
	$= 8344 \times 360 \times 2$	
	$= 8344 \times (360 \times 2)$	
	$= 8344 \times 720$	
	$= 720 \times 8344$	
	$= 6\,007\,680$	
3467×9	$= 3467 \times (1 + 8)$	
	$= (3467 \times 1) + (3467 \times 8)$	
	$= 3467 + 27\,736$	
	$= 31\,203$	

Tabla 1.16

Comunicar y representar

Explica

3. ¿Qué propiedad especial cumple el 0 en la multiplicación?

4. ¿En cuáles de las siguientes divisiones el cociente no es un número natural? Justifica tu respuesta para cada caso.

   a. $6840 \div 15$

   b. $15\,753 \div 259$

   c. $419\,040 \div 970$

   d. $6\,734\,589 \div 6$

5. ¿Por qué si a es un número natural, no existe otro número natural que pueda ser el cociente de $a \div 0$?

Plantear y resolver problemas

Analiza

6. En la gráfica de la figura 1.8 se muestra la cantidad de kilocalorías por minuto que una persona puede quemar realizando las actividades de bailar, nadar, correr y jugar fútbol.

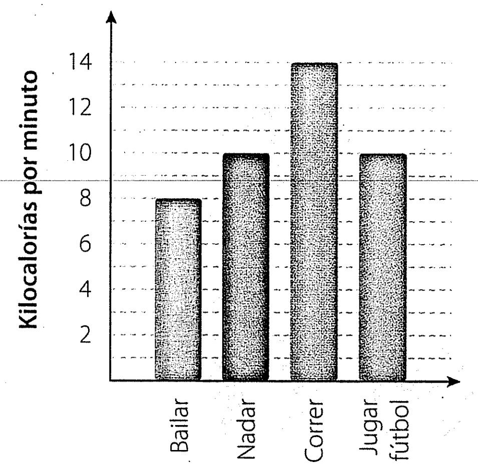


Figura 1.8

Teniendo en cuenta la información presentada en la gráfica, contesta las siguientes preguntas:

   a. Si Camilo bailó durante 5 horas, ¿cuántas kilocalorías quemó?

   b. Si Javier quemó 3600 kilocalorías jugando fútbol, ¿cuántos partidos de 90 minutos jugó?

Evalúa

En un supermercado una bolsa que contiene quince paquetes de papas fritas cuesta $ 9900. Si un paquete individual cuesta $ 800, ¿qué es más económico, comprar el paquete de quince papas fritas o comprar quince paquetes individuales? Justifica tu respuesta.

Desempeño

- Resuelve situaciones problema utilizando la multiplicación y/o la división de números naturales.

Practica más, pág. 307.

Tema 6

Ecuaciones de tipo multiplicativo

Ideas previas

1. Determina para los literales *a.* al *d.*, cuál de los tres números naturales dados representa la letra *n*.

a. $285 \times n = 1425$ 5, 6, 7

b. $2673 \div n = 891$ 2, 3, 4

c. $n \times 3650 = 91\,250$ 23, 24, 25

d. $53\,040 \div n = 1560$ 33, 34, 35

2. Asocia cada situación planteada con la multiplicación o división de números naturales.

a. Una lupa aumenta hasta 300 veces el tamaño de un objeto.

b. Martha repartió 50 chocolates entre 10 personas.

c. El precio de venta de una casa es el triple de su valor inicial.

Analiza

La tabla 1.17 contiene información relacionada con la cantidad de artículos que se vendieron en una papelería al final de una temporada escolar.

Artículos	Cantidad
Cuadernos	600
Lápices	255
Borradores	29
Reglas	15

Tabla 1.17

Si durante la temporada escolar el almacén vendió **cinco veces** el número de cuadernos que se esperaba, el **triple** de lápices, **la mitad** de borradores y la **tercera parte** de reglas, ¿cuántos cuadernos, lápices, borradores y reglas se esperaba vender durante la temporada escolar?

Para determinar la cantidad de cuadernos que se esperaba vender durante la temporada escolar, establecermos una ecuación que relacione la información que conocemos.

Frase → La cantidad de cuadernos vendidos es **cinco veces** la cantidad que se esperaba vender

Ecuación → $600 = 5 \times c$

c: cantidad de cuadernos que se esperaba vender

Para resolver la ecuación utilizamos las relaciones entre las operaciones de multiplicación y división de números naturales.

$600 = 5 \times c$	Identificamos la operación planteada en la ecuación: el signo $\times$ nos indica que hay una multiplicación.
$600 = c \times 5$	Determinamos qué se busca. Debemos hallar un número que multiplicado por 5 dé 600.
$600 \div 5 = c \times (5 \div 5)$	Dividimos por 5 en cada lado de la ecuación.
$120 = c \times 1$	Resolvemos las operaciones planteadas. $600 \div 5 = 120$ y $5 \div 5 = 1$
$120 = c$	Aplicamos la propiedad modulativa.

Escribimos la respuesta.

$c = 120$, 120 es la cantidad de cuadernos que se esperaba vender durante la temporada escolar.

Comprobamos que el resultado satisface la multiplicación planteada en la ecuación. $5 \times 120 = 600$

Para hallar la cantidad de borradores que se esperaba vender durante la temporada escolar interpretamos la frase "la mitad de borradores" y planteamos la ecuación:

Frase → **La cantidad de borradores vendidos es la mitad de la cantidad que se esperaba vender**

Ecuación → $29 = \dfrac{b}{2}$

b: cantidad de borradores que se esperaba vender.

Resolvamos la ecuación utilizando las relaciones entre las operaciones de multiplicación y división de números naturales.

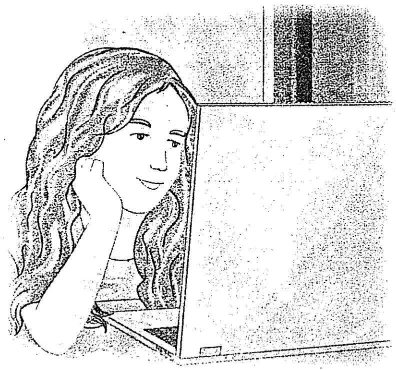
$29 = \dfrac{b}{2}$	Identificamos la operación planteada en la ecuación. La raya horizontal nos indica que hay división.
$29 \times 2 = \dfrac{b}{2} \times 2$	Como debemos hallar un número que dividido por 2 dé 29, multiplicamos por dos en cada lado de la ecuación.
$58 = b$	Resolvemos las operaciones planteadas. $29 \times 2 = 58$ y $\dfrac{b}{2} \times 2 = b$.

Escribimos la respuesta. $58 = b$, entonces, la cantidad de borradores que se esperaba vender durante la temporada escolar era 58.

Comprobamos que el resultado satisface la división planteada en la ecuación. $29 = 58 \div 2$

Problema del día

Describe las propiedades de la multiplicación de números naturales que se utilizaron para resolver las ecuaciones $600 = 5 \times c$ y $29 = \dfrac{b}{2}$.



Analiza y aplica

Usa el procedimiento mostrado para plantear y resolver la ecuación que te permita determinar:

a. La cantidad de lápices que se esperaba vender durante la termporada escolar.

b. La cantidad de reglas que se esperaba vender durante la temporada escolar.

Con los resultados completa la tabla 1.18:

Artículos	Número de artículos vendidos	Número de artículos que se esperaba vender
Cuadernos	600	120
Lápices	255	
Borradores	29	58
Reglas	15	

Tabla 1.18

En la tabla 1.19 encontrarás algunas frases que se pueden interpretar a través de una expresión aritmética.

Frase	Operación	Expresión aritmética
Dos veces un número	Multiplicación	$2 \times n$
El **triple** de un número		$3 \times n$
El **producto** de 8 y un número		$8 \times n$
El **producto** de un número y 8		$n \times 8$
26 **multiplicado** por un número		$26 \times n$
Un número **multiplicado** por 26		$n \times 26$
La **mitad** de un número	División	$n \div 2$
La **tercera parte** de un número		$n \div 3$
El **cociente** de 5 y un número		$5 \div n$
El **cociente** de un número y 5		$n \div 5$
25 **dividido** por un número		$25 \div n$
Un número **dividido** por 25		$n \div 25$

Tabla 1.19

Desarrolla pensamiento crítico

Ejercitar procedimientos

Interpreta

1. Resuelve las ecuaciones planteadas en los literales *a.* al *f.*, utilizando las relaciones de la multiplicación y la división de números naturales.

a. $n \times 485 = 28\,130$ **b.** $68\,160 \div n = 568$

c. $3872 \times n = 979\,616$ **d.** $n \div 237 = 1659$

e. $2014 = n \times 53$ **f.** $8896 = n \div 64$

Pensar y razonar

Infiere

2. Selecciona marcando con una equis (✗) en el cuadro correspondiente a la ecuación, aquella que representa la situación problema en cada literal.

a. La edad de Margarita es el doble de la edad de su hija Adriana. Si Margarita tiene 64 años, ¿cuál es la edad de Adriana?

☐ $64 = e \div 2$ ☐ $64 = 2 \times e$ ☐ $64 = 2 \div e$

b. Si Fabián pagó la cuarta parte de la cuenta de una comida que costó $103 200, ¿cuánto pagó por la comida?

☐ $103\,200 = c \div 4$ ☐ $4 = 103\,200 \div c$ ☐ $4 \times c = 103\,200$

3. Escribe una situación problema que corresponda a cada una de las siguientes ecuaciones:

a. $4 \times n = 3600$ **b.** $n \div 5 = 2800$

c. $n \times 25 = 37\,500$ **d.** $39\,000 \div n = 2600$

Comunicar y representar

Explica

4. Explica con tus propias palabras la razón por la que cada una de las ecuaciones no tiene solución en los números naturales.

a. $15 = 280 \times n$

b. $n \times 360 = 37$

c. $740 = 15 \div n$

Plantear y resolver problemas

Analiza

5. Representa cada situación problema a través de una ecuación y soluciónala.

a. Con el triple de la cantidad de dinero que tiene Alberto en su cuenta bancaria, puede pagar la primera cuota para la compra de un apartamento. Si la cuota es de $ 26 520 000, ¿cuánto dinero tiene Alberto en la cuenta?

b. Un colegio realizó una salida pedagógica a uno de los museos de la ciudad. Si para llevar a 504 estudiantes el colegio contrató 6 buses, ¿cuántos estudiantes transportó cada uno de los buses?

c. Una floristería vende un paquete de rosas a $ 18 000. Si cada rosa cuesta $ 1200, ¿cuántas rosas tiene el paquete?

Evalúa

1. Utiliza las relaciones entre la multiplicación y la división de números naturales para resolver cada una de las siguientes ecuaciones.

a. $345 \times n = 23\,805$

b. $n \div 417 = 127$

c. $n \times 9546 = 267\,288$

d. $385\,506 \div n = 6534$

2. Paula aporta mensualmente al fondo de empleados de su empresa la quinta parte de su sueldo. Si el valor de su sueldo es $ 2 288 000, ¿cuánto está ahorrando Paula mensualmente en el fondo de empleados?

Desempeños

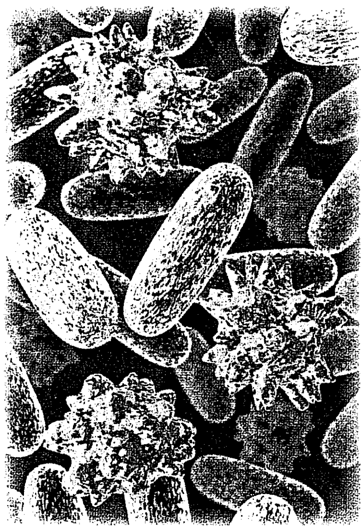
- Identifica el uso de las relaciones entre multiplicación y división de números naturales para resolver ecuaciones de tipo multiplicativo.
- Resuelve situaciones problema representándolas por medio de una ecuación de tipo multiplicativo.

Practica más, pág. 307.

Potenciación en los números naturales

Ideas previas

1. Determina si cada afirmación es falsa (F) o verdadera (V). Justifica tu respuesta.
   - **a.** 2 al cuadrado es mayor que 5 al cuadrado
   - **b.** 3 a la cuarta es menor que 4 al cubo.
2. Explica la diferencia entre el significado de las expresiones $a \times n$ y a^n.



Analiza

Durante los últimos seis meses, Cristian estudió la reproducción de un tipo de bacteria a través de varias observaciones y registros. A partir del análisis de los datos, Cristian dedujo que una bacteria se divide en otras dos bacterias del mismo tipo cada 20 minutos y pronosticó que una bacteria estará dividida en 64 bacterias del mismo tipo en dos horas. ¿Cómo podemos verificar la validez del pronóstico de Cristian?

La tabla 1.20 muestra la cantidad de bacterias que se generan cada 20 minutos durante dos horas.

Tiempo (minutos)	División de una bacteria cada 20 minutos	Total de divisiones
20	2	2
40	2×2	4
60	$2 \times 2 \times 2$	8
80	$2 \times 2 \times 2 \times 2$	16
100	$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$	32
120	$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$	64

Tabla 1.20

Podemos inferir que en dos horas una bacteria estará dividida en 64 bacterias. Este resultado lo obtenemos después de multiplicar $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$, expresión que podemos escribir como 2^6.

Interpreta y resuelve

Elabora un diagrama y/o esquema para ilustrar los resultados presentados en la tabla 1.20. ¿En cuántas bacterias del mismo tipo estará dividida una bacteria a las tres y a las cuatro horas después de iniciada la reproducción? Expresa tus respuestas usando potencias de 2.

La operación de multiplicar el mismo factor varias veces se llama **potenciación**. Si a es un número natural, calcular el producto de $a \times a \times a \ldots \times a$, n veces, es igual a calcular la **potencia** de a^n.

¿Qué significa?

Si a y b son números naturales y $a^b = c$, en donde c es otro número natural, el término a se conoce como *base*, el término b se llama *exponente* y el término c se denomina **potencia**.

Propiedades de la potenciación

Propiedad	Ejemplo	Generalización	Explicación
Multiplicación de potencias con igual base.	$3^2 \times 3^4 = (3 \times 3) \times (3 \times 3 \times 3 \times 3)$ $= (3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3)$ $= 3^6$	Si a, b y c son números naturales, $a^b \times a^c = a^{b+c}$	El producto de potencias de la misma base es igual a otra potencia con la misma base que tiene como exponente la suma de los exponentes dados.
Potencia de una potencia.	$(2^3)^6 = 2^3 \times 2^3 \times 2^3 \times 2^3 \times 2^3 \times 2^3$ $= 2^{3+3+3+3+3+3}$ $= 2^{3 \times 6}$	Si a, b y c son números naturales, $(a^b)^c = a^{b \times c}$	La potencia de una potencia es igual a otra potencia con la misma base que tiene como exponente el producto de los exponentes dados.
Potencia de un producto.	$(4 \times 9)^3 = (4 \times 9) \times (4 \times 9) \times (4 \times 9)$ $= (4 \times 9 \times 4 \times 9 \times 4 \times 9)$ $= (4 \times 4 \times 4) \times (9 \times 9 \times 9)$ $= 4^3 \times 9^3$	Si a, b y c son números naturales, $(a \times b)^c = a^c \times b^c$	La potencia de un producto es igual al producto de las potencias.
División de potencias con igual base.	$7^5 \div 7^3 = (7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7) \div (7 \times 7 \times 7)$ $= 16\,807 \div 343$ $= 49$ $= 7 \times 7$ $= 7^2$	Si a, b y c son números naturales, $a^b \div a^c = a^{b-c}$ con $b > c$	La división de potencias con igual base y diferente exponente es igual a otra potencia con la misma base que tiene como exponente la diferencia de los dos exponentes dados.
Potencia de un cociente.	$(100 \div 2)^2 = (100 \div 2)\,(100 \div 2)$ $= (50)\,(50)$ $= 2500$ $= 100^2 \div 2^2$	Si a, b y c son números naturales, $(a \div b)^c = a^c \div b^c$	La potencia de un cociente es igual al cociente de las potencias.

Tabla 1.21

Analiza y argumenta

Ubícate en la casilla correspondiente a la generalización de la división de potencias con igual base. Escribe un argumento que justifique por qué en $a^b \div a^c$, b debe ser mayor que c.

Cuadrados y cubos

Las potencias segunda y tercera reciben nombres especiales: *cuadrados* para las potencias en las que el exponente es dos y *cubos* para las potencias en las que el exponente es tres.

Interpreta y aplica

Usa los cuadrados y los cubos de la figura 1.9 para completar la tabla 1.22.

Base	1	2	3	4	5	6	7
Cuadrado	1	4	9				
Cubo	1	8	27				

Tabla 1.22

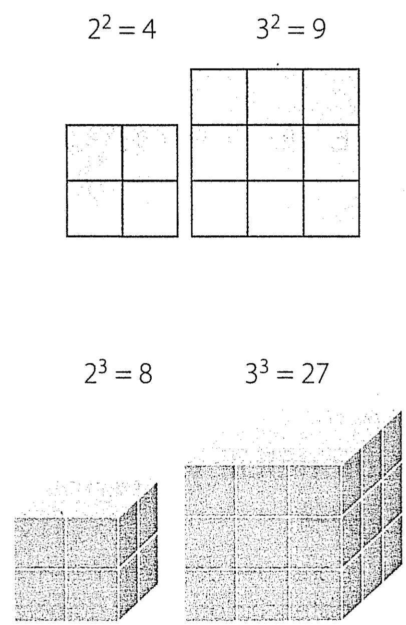


Figura 1.9

Desarrolla pensamiento crítico

Ejercitar procedimientos

Interpreta

1. Completa los cuadrados con números naturales de tal modo que la igualdad planteada sea verdadera.

   a. $\square^3 \times 8^{\square} = 8^{15}$

   b. $(49^{\square})^{\square} = \square^{18}$

   c. $10^8 \div \square^5 = 10^3$

   d. $(61 \times 5)^{\square} = \square^{\square} \times \square^6$

   e. $(175 \div 35)^{\square} = \square^9 \div \square^{\square}$

Pensar y razonar

Infiere

2. Determina la propiedad de la potenciación de números naturales que se está utilizando en cada una de las igualdades planteadas. Ten en cuenta que primero se desarrollan las operaciones indicadas por los paréntesis y luego las operaciones indicadas por los corchetes.

   a. $$\begin{aligned}[(5 \times 8)^4]^7 &= [5^4 \times 8^4]^7\\ &= [5^4]^7 \times [8^4]^7\\ &= 5^{28} \times 8^{28}\end{aligned}$$

   b. $$\begin{aligned}[(7^4)^5 \times (9^3)^2]^6 &= [7^{20} \times 9^6]^6\\ &= [7^{20}]^6 \times [9^6]^6\\ &= 7^{120} \times 9^{36}\end{aligned}$$

   c. $$\begin{aligned}[(6^{10} \div 6^3) \div 3^2]^9 &= [6^7 \div 3^2]^9\\ &= [6^7]^9 \div [3^2]^9\\ &= 6^{63} \div 3^{18}\end{aligned}$$

   d. $$\begin{aligned}[(8^3)^5 \div (4^4 \times 4^6)]^2 &= [8^{15} \div 4^{10}]^2\\ &= [8^{15}]^2 \div [4^{10}]^2\\ &= 8^{30} \div 4^{20}\end{aligned}$$

Comunicar y representar

Explica

3. Construye dos ejemplos en los que muestres que la potenciación en los números naturales no cumple con la propiedad conmutativa. Es decir, si a y b son números naturales, $a^b \neq b^a$.

4. Construye dos ejemplos en donde muestres que la potenciación en los números naturales no es distributiva respecto a la adición de números naturales. Es decir, si a, b y c son números naturales, $(a + b)^c \neq a^c + b^c$.

Plantear y resolver problemas

Analiza

5. Santiago armó una resma de hojas de diferentes colores. Primero colocó 5 hojas de color azul, luego 25 hojas de color verde y finalmente 125 hojas de color rosado. Si Santiago sigue el mismo patrón para colocar hojas de color morado, amarillo y rojo en ese orden, respectivamente, ¿cuántas hojas de cada color pone para terminar de armar la resma?

6. La diferencia entre los lados de dos cuadrados es 1 y la diferencia entre sus áreas es 21. ¿Cuáles son las medidas de los lados y de las áreas de los cuadrados?

Evalúa

1. Resuelve las operaciones indicadas en los literales *a.*, *b.* y *c.* utilizando las propiedades de la potenciación.

   a. $[(9^2)^4 \times (7^6 \div 7^3)]^2$

   b. $[(10^{12} \times 10^8) \div 5^7]^8$

   c. $\{(4^2)^3 \times [(3^2)^6 \div (3^4)^2]\}^5$

2. Un banco tiene un plan de ahorro programado a seis meses que funciona de la siguiente manera: el primer mes se deben consignar \$ 50 000 y los siguientes meses el doble de lo que se consignó el mes anterior. ¿Cuánto tiene ahorrado después de seis meses una persona que tome el plan de ahorro programado por el banco? Justifica tu respuesta.

Desempeños

- Usa las propiedades de la potenciación en los números naturales para resolver operaciones.
- Resuelve situaciones problema utilizando la potenciación de números naturales.

Practica más, pág. 308.

Tema 8

Radicación y logaritmación en los números naturales

Ideas previas

1. Describe cuáles son los términos de la potenciación.
2. Responde cada una de las siguientes preguntas.
   a. ¿Qué número multiplicado por sí mismo 2 veces da como resultado 25?
   b. ¿Cuántas veces debes multiplicar el número 3 para obtener como resultado 27?
   c. ¿Cuántas veces debes multiplicar el número 4 para obtener como resultado 64?

Interpreta

Recordemos que en la potenciación de números naturales, los términos son *base, exponente* y *potencia*. Así, en la expresión $a^b = c$, a es la base, b es el exponente y c es la potencia.

Ahora, supongamos que conocemos los términos b y c, y que deseamos hallar el término a. ¿Cómo podríamos calcular la base?

Para responder esta pregunta debemos utilizar una operación llamada **radicación**.

La **radicación** es la operación que permite calcular la base de una potencia si se conocen el exponente y la potencia.

$\sqrt[b]{c} = a$, si y sólo si, $a^b = c$.

¿Qué significa?

En la radicación, el signo $\sqrt{\ }$ se conoce como *signo radical*. Si la raíz es cuadrada, $\sqrt[2]{\ }$ es igual a $\sqrt{\ }$.

En la expresión $\sqrt[b]{c} = a$, el término b es llamado *índice o grado de la raíz*, el término c es conocido como *cantidad subradical* y el término a se denomina la *raíz b de c*.

Ejemplo

Calculemos el resultado de las siguientes raíces.

a. $\sqrt[9]{512}$ **b.** $\sqrt[3]{3375}$

Solución

a. Para encontrar la raíz novena de 512, vamos a expresar 512 como producto de sus factores primos.

512	2
256	2
128	2
64	2
32	2
16	2
8	2
4	2
2	2
1	

Entonces, $\sqrt[9]{512} = 2$ porque $512 = 2^9$

b. Para encontrar la raíz cúbica de 3375, vamos a expresar 3375 como producto de sus factores primos.

3375	3
1125	3
375	3
125	5
25	5
5	5
1	

Entonces, $\sqrt[3]{3375} = 15$ porque

$3375 = 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5$

$= (3 \times 3 \times 3) \times (5 \times 5 \times 5)$

$= 3^3 \times 5^3$

$= (3 \times 5)^3$

$= 15^3$

Pensamiento numérico

Interpreta y aplica

Expresa 20 736 como un producto de sus factores primos y usa el resultado para hallar $\sqrt[4]{20\,736}$.

Propiedades de la radicación

Propiedad	Distributiva de la radicación respecto a la multiplicación.	Distributiva de la radicación respecto a la división.
Ejemplo	$\sqrt[3]{(8 \times 8)} = \sqrt[3]{64}$ $= 4$ $= 2 \times 2$ $= \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{8}$	$\sqrt[4]{(256 \div 16)} = \sqrt[4]{16}$ $= 2$ $= 4 \div 2$ $= \sqrt[4]{256} \div \sqrt[4]{16}$
Generalización	Si a, b y c son números naturales, $\sqrt[c]{(a \times b)} = \sqrt[c]{a} \times \sqrt[c]{b}$	Si a, b y c son números naturales, y $b \neq 0$ $\sqrt[c]{(a \div b)} = \sqrt[c]{a} \div \sqrt[c]{b}$
Explicación	El resultado de la raíz de un producto es igual al resultado del producto de las raíces.	El resultado de la raíz de un cociente es igual al resultado del cociente de las raíces.

Tabla 1.23

Analiza y responde

Ubícate en la casilla de generalización de la propiedad distributiva de la radicación respecto a la división. ¿Por qué b debe ser diferente de 0?

¿Qué significa?

En la logaritmación, el número pequeño en la notación de los logaritmos es la **base** de la **potencia** correspondiente.

$\log_a c$ se lee: " logaritmo en base a de c".

Logaritmación

Supongamos que ahora nuestro problema consiste en averiguar el exponente en una potenciación, si conocemos la **base** y la **potencia**. ¿Cómo podríamos calcularlo?

$$a^? = c$$

Para responder esta pregunta debemos utilizar una operación llamada logaritmación.

La **logaritmación** es una operación que nos permite encontrar el exponente, conocida la base y la potencia.

$n = \log_a b$, si y sólo si, $a^n = b$.

Ejemplo

Calculemos el resultado de los siguientes logaritmos.

a. $\log_2 128$ **b.** $\log_5 625$ **c.** $\log 1000$

Solución

a. Para encontrar el logaritmo en base dos de 128, vamos a expresar 128 como producto de sus factores primos.

$$\begin{array}{r|l} 128 & 2 \\ 64 & 2 \\ 32 & 2 \\ 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

Entonces, $\log_2 128 = 7$ porque $128 = 2^7$

b. Para encontrar el logaritmo en base cinco de 625, vamos a expresar 625 como producto de sus factores primos.

$$\begin{array}{r|l} 625 & 5 \\ 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Entonces, $\log_5 625 = 4$ porque $625 = 5^4$

c. Para encontrar el **logaritmo en base diez** de 1000, vamos a expresar 1000 como producto de sus factores primos.

$$\begin{array}{r|l} 1000 & 2 \\ 500 & 2 \\ 250 & 2 \\ 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Entonces, $\log 1000 = 3$ porque $1000 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5$

$$= (2 \times 2 \times 2) \times (5 \times 5 \times 5)$$

$$= 2^3 \times 5^3$$

$$= (2 \times 5)^3$$

$$= 10^3$$

Interpreta y aplica

Expresa 50 625 como un producto de sus factores primos y usa el resultado para encontrar el logaritmo en base quince de 50 625.

¿Qué significa?

El **logaritmo en base 10** de c se puede expresar como $\log c$ que es igual a $\log_{10} c$.

Ejercitar procedimientos

Interpreta

1. Escribe en cada cuadrado el símbolo >, < o = según corresponda.

   a. $\sqrt{225}$ $\square$ $\log_5 625$

   b. $\log_6 216$ $\square$ $\sqrt[3]{27}$

   c. $\sqrt[4]{2401}$ $\square$ $\log_8 4096$

   d. $\log_2 128$ $\square$ $\sqrt[3]{2744}$

2. Completa los cuadrados con números naturales que te permitan hacer verdadera la igualdad planteada.

   a. $\sqrt[3]{(\square \times 216)} = \sqrt[\square]{8} \times \sqrt[3]{\square}$

   b. $\sqrt[\square]{(32\,768 \div \square)} = \sqrt[5]{\square} \div \sqrt[5]{1024}$

   c. $\log_{\square} 16 = 2$

   d. $\log_{\square} 625 = 4$

   e. $\log_{\square} 64 = 3$

3. Completa la tabla 1.24 con los resultados de cada operación.

Operación	Resultado
$\sqrt{324}$	
$\sqrt[5]{1024}$	
$\sqrt[4]{1296}$	
$\sqrt[5]{3125}$	
$\sqrt[4]{4096}$	
$\log_{12} 1728$	
$\log_7 2401$	
$\log_8 4096$	
$\log_6 1296$	

Tabla 1.24

Pensar y razonar

Infiere

4. Completa los cuadrados con números naturales de tal manera que se cumpla la condición indicada en cada caso.

   a. Si $8^{\square} = 512$, $\sqrt[3]{\square} = 8$

   b. Si $\square^2 = 625$, $\log_{25} \square = 2$

   c. Si $\sqrt[5]{\square} = 6$, $6^{\square} = 7776$

   d. Si $\log_4 \square = 5$, $\square^5 = 1024$

5. En los siguientes literales, cada número está expresado como un producto de sus factores primos. Halla su raíz cuadrada.

   a. $2^2 \times 3^2 \times 5^2$

   b. $2^8 \times 13^4$

   c. $3^6 \times 11^2 \times 13^4$

   d. $5^4 \times 7^2 \times 11^6 \times 17^8$

6. Escribe las propiedades de la radicación de los números naturales que se usaron en la siguiente igualdad.

$$\left[\left(\sqrt[3]{64} \times \sqrt[3]{125}\right) \div \sqrt[3]{8}\right] = \left[\sqrt[3]{(64 \times 125)} \div \sqrt[3]{8}\right]$$

$$= \left[\sqrt[3]{8000} \div \sqrt[3]{8}\right]$$

$$= \sqrt[3]{(8000 \div 8)}$$

$$= \sqrt[3]{1000}$$

$$= 10$$

7. Observa la propiedad de la logaritmación que se ilustra en el siguiente ejemplo:

$$\log_4 (256 \div 16) = \log_4 (256 \div 16)$$

$$= \log_4 256 - \log_4 16$$

$$= 4 - 2$$

Usa el ejemplo para completar el siguiente enunciado:

"El logaritmo de un cociente es igual a la sustracción del logaritmo del ______________ y el logaritmo del ________________".

Comunicar y representar

Explica

8. ¿Por qué la base de un logaritmo nunca es 1?

9. ¿Por qué no existe un número natural que sea la raíz cuadrada de un número primo?

10. Analiza por qué no existe un número natural que sea la raíz cuadrada de $2^3 \times 5^2$.

11. Escribe una lista de cinco números naturales cuya raíz cúbica sean respectivamente 5, 7, 8, 10 y 11.

Plantear y resolver problemas

Analiza

12. Para ensamblar un cubo se utilizaron 216 cubos pequeños. ¿Cuántos cubos pequeños tiene el cubo por cada lado?

13. Arturo es un diseñador y está cosiendo lentejuelas a un vestido de baile teniendo en cuenta el siguiente patrón: en la primera fila cosió 5 lentejuelas, en la segunda fila cosió 25 lentejuelas y en la tercera fila cosió 125 lentejuelas. Si Arturo sigue el mismo patrón,

   a. ¿Cuántas lentejuelas coserá en la cuarta fila al vestido de baile?

   b. ¿En cuál fila le coserá 3125 lentejuelas al vestido?

14. Una caja tiene una base cuadrada de área 14 400 cm^2. Si se pintan las dos bases cuadradas de verde y en ellas, cada 10 cm, se dibuja una línea roja de borde a borde, ¿cuántas líneas rojas se pintaron?

15. Una caja cúbica tiene volumen 571 787 cm^3. ¿Cuánto mide la arista de la caja?

Evalúa

1. Resuelve las operaciones indicadas utilizando las propiedades de la radicación.

   a. $\left(\sqrt[6]{4096} \times \sqrt[6]{729}\right) \div \sqrt[6]{64}$

   b. $\sqrt[9]{19\,683} \times \left(\sqrt[9]{262\,144} \div \sqrt[9]{512}\right)$

2. Una caja cúbica tiene volumen 421 875 cm^3. ¿Cuánto mide la arista de la caja? Si se pintan de rojo tres de las caras de la caja, ¿qué área se pintó?

3. Camila tiene una panadería y está probando la aceptación que tienen entre sus clientes unas nuevas galletas que salieron al mercado. En el primer mes vende 12 galletas, en el segundo mes vende 144 galletas y en el tercer mes vende 1728 galletas. Si el comportamiento de las ventas se mantiene con el mismo patrón por el resto del año, ¿en qué mes venderán 248 832 galletas?

Desempeños

- Usa las propiedades de la radicación en los números naturales para resolver operaciones.
- Resuelve situaciones problema utilizando la radicación en los números naturales.
- Resuelve situaciones problema utilizando la logaritmación en los números naturales.

Practica más, pág. 308.

Otros sistemas de numeración

Ideas previas

1. ¿Cuáles son las principales características del sistema de numeración decimal? Justifica tu respuesta.
2. ¿Conoces otros sistemas de numeración distintos al sistema de numeración decimal? Justifica tu respuesta.

Sistema de numeración egipcio

Los egipcios desarrollaron un sistema jeroglífico para escribir los números (*ver* tabla 1.25).

Símbolo	𓏺	𓎆	𓍢	𓆼	𓂭
Valor	1	10	100	1 000	10 000

Tabla 1.25

Como vemos era un sistema en base 10, porque a las potencias de 10 se les asignaban símbolos. Para hallar el valor representado en cada numeral, simplemente adicionamos los números representados con cada símbolo, sin importar la posición de cada uno en el numeral.

Ejemplo

Escribamos los números 18, 249 y 5623 en el sistema de numeración egipcio.

Solución

18	𓎆 𓏺𓏺 𓏺𓏺 𓏺𓏺 𓏺𓏺 10 + 8
249	𓍢𓍢𓎆𓎆𓎆𓎆 𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺 100 + 100 + 10 + 10 + 10 + 10 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1
5623	𓆼𓆼𓆼𓆼𓆼 𓎆𓎆 𓍢𓍢𓍢 𓏺𓏺𓏺 𓍢𓍢𓍢 1000 + 1000 + 1000 + 1000 + 1000 + 10 + 10 + 100 + 100 + 100 + 1+1+1 + 100 + 100 + 100

Tabla 1.26

Problema del día

¿Qué diferencia y qué semejanza encuentras entre el sistema de numeración egipcio y el sistema de numeración decimal que usamos?

Interpreta y resuelve

Usa el sistema de numeración egipcio para escribir una representación diferente a la de la tabla 1.26 de los números 18, 249 y 5623.

Sistema de numeración romano

Para representar los números, los romanos utilizaron siete letras, cada una de las cuales tenían un valor, tal como se muestra en la tabla 1.27.

Símbolo	Valor
I	1
V	5
X	10
L	50
C	100
D	500
M	1000

Tabla 1.27

- Si a la derecha de una cifra romana se escribe otra de igual o de menor valor, el valor de ésta se adiciona a la anterior. Si a la izquierda se escribe una de menor valor, éste se sustrae del valor de la siguiente cifra.
- Si sobre un símbolo se traza una línea horizontal, el valor del símbolo se multiplica por 1000.

Ejemplo

Escribamos los números 18, 249 y 5623 en el sistema de numeración romano.

Solución

18	XVIII 10 + 5 + 3
249	CCXLIX 200 + (50 − 10) + (10 − 1)
5623	$\overline{\text{V}}$DCXXIII (5 × 1000) + (500 + 100) + 20 + 3

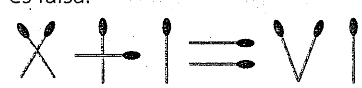
Tabla 1.28

Interpreta y resuelve

Escribe los números 25, 386 y 6254 en el sistema de numeración romano.

Problema del día

Con los fósforos se ha construido la expresión 10 + 1 = 6 que es falsa.



Mueve un solo fósforo para que la igualdad sea verdadera.

Sistema de numeración binario o en base dos

Las calculadoras y los computadores usan sistema de numeración binario o en base dos, en el que la información se almacena usando dos estados: cargado o descargado, encendido o apagado, los cuales se asocian con los números 1 o 0, respectivamente.

> Para expresar un número en **base 2** se hacen agrupaciones de 2 en 2. La posición de los dígitos 1 y 0 en un numeral representan la cantidad de unidades sueltas, de grupos de 2, de grupos de 2^2, de grupos de 2^3, y así sucesivamente.

Ejemplo

Escribamos los números 4 y 15 en el sistema de numeración binario.

Solución

Para expresar el número 4 en el sistema de numeración binario, primero dividimos 4 entre 2 y continuamos realizando divisiones sucesivas de los cocientes que se obtienen por 2. Dejamos de dividir cuando el cociente sea menor que 2:

$$\begin{array}{r|l} 4 & 2 \\ \cline{2-2} 0 & \begin{array}{r|l} 2 & 2 \\ \cline{2-2} 0 & 1 \end{array} \end{array}$$

Usamos el último cociente y los residuos de las divisiones para escribir el número 4 como un número del sistema de numeración binario: $\mathbf{100_{(2)}}$

Número	Polinomio aritmético en base 2	Numeral en base 2
4	$1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0$	$100_{(2)}$
15	$1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$	$1111_{(2)}$

Tabla 1.29

¿Qué significa?

El subíndice$_{(2)}$ indica que el número se encuentra en el sistema de numeración binario o en base 2.

Infiere y aplica

Describe el procedimiento para representar el número 15 en el sistema de numeración binario o en base 2.

Ejemplo

Escribamos el número $10010_{(2)}$ en el sistema de numeración decimal o en base 10.

Solución

Numeral base 2	Polinomio aritmético en base 10	Numeral decimal
$10010_{(2)}$	$1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$ $= (1 \times 16) + (0 \times 8) + (0 \times 4) + (1 \times 2) + (0 \times 1)$ $= 16 + 0 + 0 + 2 + 0$ $= 18$	18

Tabla 1.30

Problema del día

Investiga para qué se utiliza el sistema de numeración binario actualmente. Da algunos ejemplos.

Desarrolla pensamiento crítico

Ejercitar procedimientos

Interpreta

1. Ordena los números de menor a mayor.

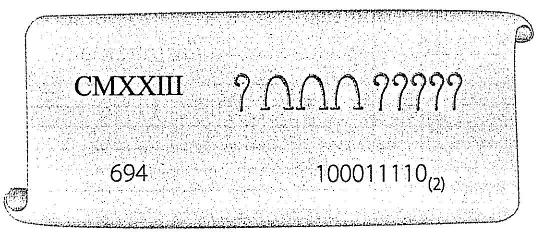


Figura 1.10

Pensar y razonar

Infiere

2. Teniendo en cuenta el procedimiento para expresar un número en el sistema de numeración decimal como un numeral en el sistema de numeración binario, ¿cuál sería el procedimiento para expresar un número en el sistema de numeración decimal en el sistema de numeración en base 4? Verifica que $865 = 31201_{(4)}$

Plantear y resolver problemas

Analiza

3. ¿Cuántos y cuáles símbolos necesitas para trabajar en el sistema de numeración decimal, en base 9, en base 8, en base 7, en base 6, en base 5, en base 4, en base 3 y en base 2? Da algunos ejemplos para justificar tu respuesta.

4. Sin expresar los siguientes números en el sistema de numeración decimal, cómo decidirías si $110_{(2)}$, $111_{(2)}$, $1000_{(2)}$, $1001_{(2)}$ son pares o impares. Justifica tu respuesta.

Evalúa

1. Haz un cuadro comparativo entre las características de los sistemas de numeración egipcio, romano, binario y decimal.
2. Escoge un número en el sistema de numeración decimal y exprésalo como un número en el sistema de numeración egipcio, romano y binario o en base dos.

Desempeños

- Reconoce las características de los sistemas de numeración egipcio, babilónico, romano, maya, binario y decimal.
- Expresa números del sistema de numeración decimal en los sistema de numeración egipcio, babilónico, romano, maya y binario.

Practica más, pág. 308.

Así se lee en matemáticas

Es frecuente que cuando leemos información encontremos datos de tipo numérico. La interpretación que hacemos de estos datos puede servirnos para tomar decisiones y aplicarlas en nuestra vida cotidiana.

Veamos un ejemplo, leyendo el siguiente texto que fue adaptado de un artículo de la sección Economía y negocios de un periódico.

Toma de decisiones

Actualmente, miles de familias están consumiendo un alimento que, aunque parece leche, en realidad es una sustancia elaborada con lactosuero rehidratado, que es un sobrante del proceso de la elaboración del queso. Dicha mezcla es ofrecida en dos presentaciones: líquida y en polvo, ambas en empaques parecidos a los de la leche, pero con composición, calidad nutricional y precios diferentes, como se muestra en la tabla 1.31.

Producto / Características	Leche (900 mL)	Mezcla láctea (900 mL)
Ingredientes	Leche entera	Agua, leche entera, sólidos lácteos no grasos (lactosuero), crema de leche, azúcar.
Proteína	Entre 6 g y 8 g	Entre 3 g y 4 g
Calcio	Hasta 50%	Entre 200 g y 600 g
Precio	Entre $ 1800 y $ 2300	Entre $ 800 y $ 1450

*Cantidades por porción (200ml)

Tabla 1.31

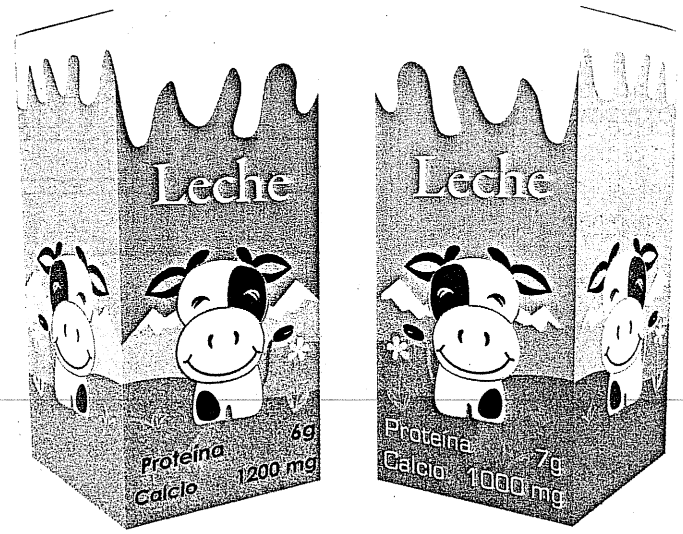
La directora del Centro Colombiano de Nutrición Integral afirma que si las mezclas lácteas están bien preparadas no son peligrosas, pero que su consumo indiscriminado en reemplazo de la leche disminuye la cantidad de proteínas y de grasa en el organismo, mientras aumenta la cantidad de azúcar, lo cual podría ocasionar obesidad y desnutrición.

Una persona que tenga déficit de calcio en su organismo debe aumentar su consumo a través de productos que lo contengan y dado que la diferencia de calcio que aporta al organismo el consumo de leche es mayor que el de la mezcla láctea, es aconsejable consumir preferiblemente leche. Pero, ¿qué leche seleccionar?

Adaptado de www.eltiempo.com – domingo 10 de abril de 2011,
Sección: Debes saber (economía y negocios)–Jorge Quintero–Redacción Domingo.

Interpreta

Parte de la información nutricional de las etiquetas de dos cajas de leche de diferente marca se encuentra indicada en la tabla 1.32.



Características \ Producto	Leche 1	Leche 2
Proteína	6 g	7 g
Calcio	1200 mg	1000 mg
Cantidad	1100 mL	1100 mL
Precio	$ 2300	$ 2100

Tabla 1.32

Dado que los valores del calcio que contiene cada caja están dados en relación con la cantidad total de leche, este es el primer dato que se debe comparar.

Si nos ubicamos en la cuarta fila de la tabla podemos deducir que los productos 1 y 2 tienen la misma cantidad de leche, entonces pasamos a comparar los valores del calcio. Si nos situamos en la tercera fila de la tabla, vemos que la leche 1 aporta más calcio; por tanto, la mejor elección es comprar la leche 1.

Infiere y aplica

Revisa la información nutricional de la leche que consumen en tu casa. Luego, contesta las siguientes preguntas:

- ¿Qué puedes concluir sobre el porcentaje de proteína y calcio que aporta ese producto a tu organismo? Justifica tu respuesta.
- ¿Qué otros componentes aporta a tu organismo ese producto, además de proteína y calcio? Justifica tu respuesta.

Evalúa tu pensamiento crítico

Las siguientes actividades te indicarán el nivel de competencia que has alcanzado y determinarán los desempeños que evidencian tu acción de aprendizaje.

Ejercitar procedimientos

Interpreta

1. En cada caso, selecciona un número natural que represente la variable n para que se cumpla la relación de orden establecida.

a. $4 + n < 15$; 16, 12, 9, 5

b. $n - 32 > 54$; 98, 87, 74, 56

c. $543 - n < 125$; 515, 420, 243, 128

d. $n + 291 > 862$; 475, 528, 654, 721

e. $4865 - n < 1543$; 4745, 3564, 2547, 1234

f. $6 \times n < 740$; 85, 98, 142, 235

g. $n \div 8 > 526$; 3400, 4160, 5000, 6720

h. $45 \times n < 1360$ 14, 25, 65, 74

i. $256\,256 \div n < 728$ 128, 352, 364, 704

2. Calcula el resultado de las expresiones numéricas indicadas en cada literal. Ten en cuenta que debes efectuar las operaciones en el siguiente orden: potencias, multiplicaciones y divisiones, adiciones y sustracciones.

a. $5^3 + 8^4 \div 2^5 - 4^2$ **b.** $7 \times 8^2 - 3 \times 5^2$

c. $10^6 \div 2^3 \times 6^2 - 3^5$ **d.** $9^3 - 3 \times 4^2 + 2 \times 7 - 2^8$

3. Determina cuál es el número menor de cada grupo.

a.

CMXXIV CMXXVI

b.

?∩∩∩?III ?∩∩∩∩∩III

Figura 1.12

4. Completa la siguiente tabla.

Numeral base 10	Numeral base 2	Numeral egipcio	Numeral romano
		??∩∩∩III	
1392			
			$\overline{\text{IV}}$CDIV

Tabla 1.33

Pensar y razonar

Infiere

5. Sergio afirma que entre dos números naturales dados, el menor es aquel que tiene menos dígitos.

a. Si el número está escrito en el sistema de numeración decimal, ¿es válida la afirmación de Sergio? Justifica tu respuesta.

b. Si el número está escrito en el sistema de numeración binario, ¿es válida la afirmación de Sergio? Justifica tu respuesta.

6. Teniendo en cuenta que al adicionar dos números en el sistema de numeración decimal estamos haciendo grupos de diez, infiere cómo adicionas dos números naturales en el sistema de numeración binario. Escribe un ejemplo.

7. Identifica el error en cada una de las siguientes igualdades, corrígelo y justifica tu respuesta.

a. $\sqrt[5]{243} = 2$ **b.** $\log_{14} 2744 = 4$

c. $\sqrt[7]{6561} = 3$ **d.** $\log_{19} 256 = 2$

8. Identifica cuál es el error cometido al resolver la siguiente ecuación.

$$3 \times n = 24$$
$$3 - 3 \times n = 24 - 3$$
$$n = 21$$

Comunicar y representar

Explica

9. Busca en el periódico un artículo en el cual identifiques varios números naturales. Luego, indica cuál es el significado que adquiere el uso de cada número natural en el contexto del artículo. Justifica tu respuesta.

10. Si la letra n representa el mismo número natural a cada lado de la desigualdad, ¿cuáles números naturales podrían estar representados por la letra n? Justifica tu respuesta.

a. $3 \times n < 9 \times n$

b. $n + 5 > n - 2$

c. $n + 4 < n + 2$

Plantear y resolver problemas ....

Analiza

11. La distancia entre las fincas de una vereda están relacionadas de la siguiente manera: entre La Esperanza y San Jacinto la distancia es menor que el doble de la distancia de Puerto Viejo a Florida, pero mayor que la tercera parte de esa distancia. Si entre Puerto Viejo y Florida hay 126 km, ¿entre qué valores está la distancia de La Esperanza a San Jacinto?

12. La tabla 1.34 muestra los precios de algunos artículos que se ofrecen en un supermercado.

Artículo	Precio
1 caja de cereal	$ 7800
1 docena de manzanas	$ 2700
1 docena de naranjas	$ 4800
1 libra de queso	$ 5500

Tabla 1.34

Teniendo en cuenta la información que se presenta en la tabla, contesta las siguientes preguntas:

a. Si Valentina compra 2 cajas de cereal, 2 docenas de naranjas y 3 libras de queso, ¿cuánto marca la registradora del supermercado por los anteriores artículos?

b. Si Samuel compra 1 caja de cereal, 3 docenas de manzanas y 1 docena de naranjas, pero tiene un bono de descuento por $ 5000, ¿cuánto debe pagar por la compra de los anteriores artículos?

c. Lorena pagó en la caja del supermercado $ 88 800. Si compró 4 cajas de cereal, 2 docenas de manzanas, 4 docenas de naranjas y determinada cantidad de queso, ¿cuántas libras de queso compró Lorena?

13. De las plantas que tengo en mi casa, la begonia debe estar en un ambiente cuya temperatura sea 11 °C más que la temperatura del sitio en donde está el jazmín. La begonia está en un sitio en donde la temperatura es 23 °C. ¿Cuál es la temperatura del sitio en donde está el jazmín?

14. Si el área de un rectángulo se halla multiplicando la medida de su base por la medida de su altura, ¿cuál es la base de un rectángulo que tiene un área de 1008 cm^2 y una altura de 28 cm?

Autoevaluación

	Bajo	Básico	Alto	Superior
Reconozco que los números naturales adquieren diferentes significados en distintos contextos.				
Identifico el sistema de numeración decimal como posicional.				
Establezco relaciones de orden entre los números naturales gráficamente y simbólicamente.				
Reconozco las propiedades que no cumplen la sustracción y la división en los números naturales.				
Resuelvo situaciones problema mediante una ecuación de tipo aditivo o multiplicativo.				
Reconozco las características de los sistemas de numeración egipcio, babilónico, romano, maya, binario y decimal.				
Reconozco que las matemáticas son necesarias en mi vida.				

Unidad 2

Pensamiento numérico

Conjuntos y teoría de números

Situación problema

Los estudiantes de sexto grado de un colegio van a realizar una actividad especial para el día de la Independencia. Para esto, en cada curso deben reunirse en varios grupos, con la misma cantidad de integrantes y con dos estudiantes por lo menos en cada uno de ellos.

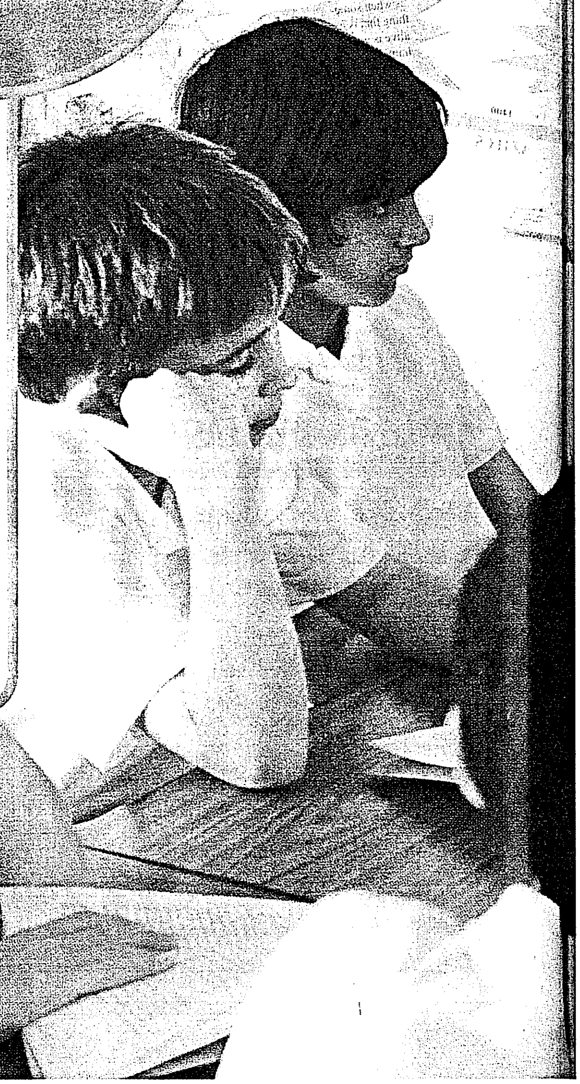
Los estudiantes de uno de los cursos, después de algunos intentos de organización notaron que siempre resultaba un grupo con menos alumnos que los demás.

En otro de los cursos no hubo satisfacción con el número de estudiantes en cada grupo, pues debían organizarse en parejas o en grupos muy grandes, lo cual les impedía distribuir las tareas de acuerdo con las habilidades de cada uno.

La tabla 2.1 presenta el número de estudiantes de los distintos cursos de sexto grado del colegio.

Curso	Número de estudiantes
Sexto A	25
Sexto B	27
Sexto C	26
Sexto D	31

Tabla 2.1



Desarrolla pensamiento crítico

Interpreta

1. ¿Cuáles son las condiciones que deben tener en cuenta los estudiantes del colegio para organizar los grupos?
2. ¿Cuántos cursos son de sexto grado?

Analiza

3. ¿En cuál de los cursos no fue posible organizar los grupos? ¿Por qué?

Explica

4. ¿Por qué sólo en uno de los cursos se pueden organizar parejas?

Lección Digital norma

Múltiplos y divisores

Los múltiplos y divisores de un número forman dos conjuntos numéricos con características y propiedades que te ayudarán a resolver diversos problemas y ejercicios; identifícalos y refuerza tus conocimientos ingresando en tu lección digital, en **http://www.normaparapensar.com**

Tema 10

Conjuntos

Ideas previas

Relaciona cada característica con el grupo de elementos correspondiente:

a. Son sustantivos femeninos — 1, 7, 90, 44, 23

b. Son herramientas — 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

c. Son números dígitos — azul, verde, negro, rojo

d. Son colores — casa, mata, papaya, sandalia

e. Son números naturales — martillo, pala, serrucho

Pensamiento numérico

Interpreta

Los conjuntos pueden determinarse de dos maneras: por comprensión, enunciando la característica común de sus elementos. Por extensión nombrando cada uno de los elementos que lo integran separados por una coma (,)

Ejemplo

Determinemos el conjunto E de los números naturales de dos cifras menores que 20.

Solución

Por comprensión: E = {números naturales de dos cifras menores que 20}

Para determinar el conjunto por extensión tomamos los números naturales menores que 20 y seleccionamos los que tienen dos cifras:

Por extensión: $E = \{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19\}$ (*ver* figura 2.1).

Podemos usar un diagrama de Venn para representar el conjunto E. (*ver* figura 2.1)

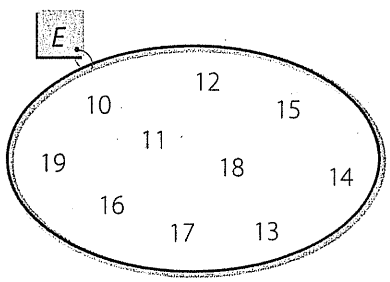


Figura 2.1

Los elementos que **pertenecen** al conjunto E son 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18 y 19.

Un **conjunto** es una agrupación de objetos que tienen una característica común. Los objetos que forman el conjunto se denominan **elementos.**

¿Qué significa?

Para nombrar un conjunto se utilizan letras mayúsculas. Para indicar que un elemento está en un conjunto se usa el símbolo $\in$ (**pertenece**) y para indicar que no está en el conjunto se usa el símbolo $\notin$ (no pertenece).

Observemos los conjuntos N y E en la figura 2.2.

N = {números naturales menores que 20}

E = {números naturales de dos cifras menores que 20}

E es un **subconjunto** del conjunto N, porque los elementos de E pertenecen al conjunto N.

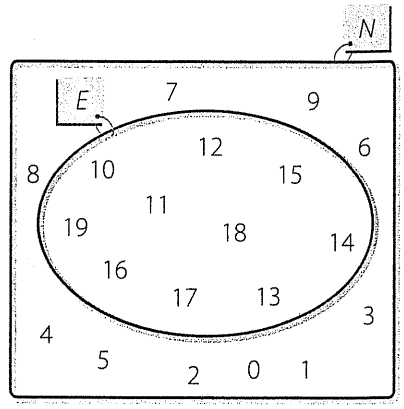


Figura 2.2

> En general, un conjunto B es **subconjunto** de un conjunto A cuando todo elemento de B pertenece a A. Si B es subconjunto de A, se escribe: $B \subset A$ y se lee B está contenido en A.

Infiere y resuelve

De acuerdo con el diagrama de la figura 2.2, determina si las siguientes expresiones son falsas (F) o verdaderas (V):

a. $11 \in E$; entonces, $11 \in N$

b. $25 \notin N$; entonces, $25 \in E$

c. $17 \in E$; entonces, $17 \notin N$

d. $30 \notin E$; entonces, $30 \notin N$

Clases de conjuntos

Tomemos nuevamente el conjunto N y formemos con él varios subconjuntos (*ver* figura 2.3)

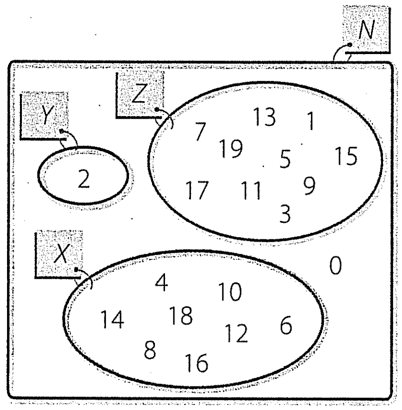


Figura 2.3

Determinemos por extensión los conjuntos X, Y y Z:

$X = \{4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}$ $\quad$ $Z = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17\}$

$Y = \{2\}$

El conjunto a partir del cual obtuvimos los subconjuntos fue el conjunto N. Este conjunto se denomina conjunto **universal** o **referencial**.

> El conjunto a partir del cual podemos obtener subconjuntos se denomina conjunto **universal** o **referencial**.

El conjunto X tiene 8 elementos y el conjunto Z tiene 10 elementos. En los dos conjuntos pudimos determinar el número de elementos que tenía cada uno; por tanto, los conjuntos X y Z son **finitos**.

> Un conjunto es **finito** si el número de elementos se puede determinar. Si no es finito, el conjunto es **infinito**.

Infiere y responde

Observa el diagrama de la figura 2.3.

¿Por qué Y es un conjunto unitario?

¿Qué conjunto tiene como elementos los números mayores que 20?

Dato histórico

Los diagramas de Venn deben su nombre a su creador, John Venn, matemático y filósofo británico, quien introdujo en 1880 el sistema de representación que hoy conocemos.

Desarrolla pensamiento crítico

Ejercitar procedimientos

Interpreta

1. Determina cada conjunto por comprensión.
   - **a.** $A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14...\}$
   - **b.** $N = \{I, V, X, D, C, L, M\}$
   - **c.** $Q =$ {América, Europa, África, Asia, Oceanía, Antártida}
   - **d.** $Y =$ {audición, visión, tacto, olfato, gusto}
2. Escribe la relación de pertenencia o no pertenencia que existe entre los elementos 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, y los siguientes conjuntos.
   - **a.** $A =$ {números pares y primos}
   - **b.** $B =$ {números impares entre 4 y 10}
   - **c.** $C =$ {divisores de 12}

Pensar y razonar

Infiere

3. Dos conjuntos A y B son iguales cuando tienen los mismos elementos, es decir, son el mismo conjunto. Si dos conjuntos tienen el mismo número de elementos, ¿puede afirmarse que los conjuntos son iguales?

Comunicar y representar

Explica

4. Considera como conjunto universal los estudiantes de tu curso y determina por extensión cada uno de los siguientes conjuntos:
   - **a.** M es el conjunto formado por estudiantes menores de 12 años.
   - **b.** R es el conjunto formado por los estudiantes cuyo apellido comienza con la letra R.
   - **c.** U es el conjunto de los estudiantes que no tienen hermanos.

Plantear y resolver problemas

Analiza

5. Los siguientes animales se pueden agrupar en 4 conjuntos de tal manera que cada conjunto tenga igual cantidad de animales y estos no se repitan. ¿Cuál es la característica común que determina a cada conjunto para que se cumplan las condiciones anteriores?

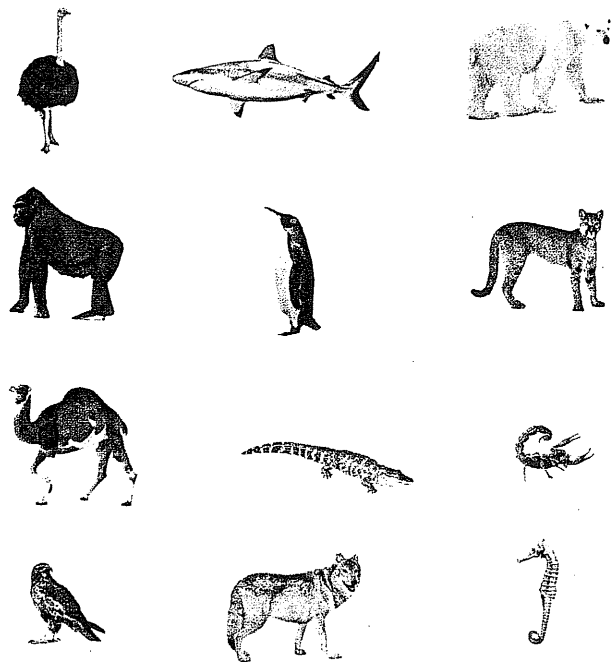


Figura 2.4

Evalúa

Completa la tabla 2.2.

Conjunto	Forma en que está determinado	Clase de conjunto
$N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$		
$T =$ {Números naturales menores que 1}		
$M = \{1, 3, 5, 7, 9\}$		
$D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$		

Tabla 2.2

Desempeño

- Determina conjuntos por extensión y por comprensión y los clasifica de acuerdo con el número de elementos.

Practica más, pág. 309.

Tema 11

Operaciones entre conjuntos

Ideas previas

1. Escribe en cada caso un conjunto que cumpla con las condiciones señaladas:
   a. Conjunto vacío escrito por comprensión.
   b. Conjunto finito escrito por extensión.
   c. Conjunto finito representado en un diagrama de Venn.

2. En cada caso determina los elementos que pertenecen a los dos conjuntos que se indican:
   a. M = {múltiplos de 4 menores que 20}
      W = {múltiplos de 6 menores que 18}
   b. A = {divisores de 8}
      B = {divisores de 6}

Analiza

Un grupo de jóvenes de diferentes nacionalidades viajan en un crucero por el Caribe. Entre ellos están: Sofía, Ernesto, Carol, Jian, Hao, Lin, Adam y Brandon, quienes al intentar comunicarse notan que hablan tres idiomas diferentes: inglés, español y mandarín.

En el diagrama de Venn de la figura 2.5 están representados los conjuntos M, E y G:

M = {jóvenes del crucero que hablan mandarín}

E = {jóvenes del crucero que hablan español}

G = {jóvenes del crucero que hablan inglés}

Vemos que todos los elementos del conjunto E pertenecen también al conjunto G, es decir, que todos los jóvenes que hablan español también hablan inglés.

Infiere y responde

¿Todos los jóvenes que viajan en el crucero y que hablan inglés también hablan español? Justifica tu respuesta.

Formemos el conjunto I de los jóvenes que viajan en el crucero y hablan mandarín, inglés o español.

I = {Sofía, Ernesto, Carol, Lin, Jian, Hao, Adam, Brandon}

Un elemento pertenece a I, si pertenece a E, pertenece a M, o pertenece a G.

I recibe el nombre de **conjunto unión** de los conjuntos E, M y G, y se denota así:

$$I = E \cup M \cup G$$

> En general, se denomina **unión** de dos conjuntos A y B al conjunto formado por los elementos que están en A o en B. Se representa como $A \cup B$.

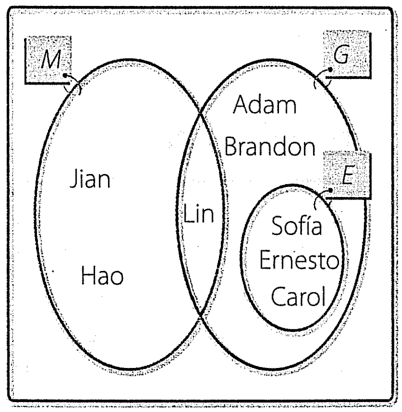


Figura 2.5

Interpreta y responde

Si nombramos por extensión los conjuntos E, M y G el total de elementos es 12. ¿Por qué el número de elementos del conjunto I es 8?

En el diagrama de la figura 2.5 podemos ver que Lin es el único joven que habla inglés y mandarín. Lin está en la intersección de los conjuntos M y G. Si llamamos $J = \{\text{Lin}\}$, entonces $J = M \cap G$.

En general, se denomina **intersección** de dos conjuntos A y B al conjunto formado por los elementos que pertenecen a A y también pertenecen a B. Se representa como $A \cap B$.

Ejemplo

Otros de los jóvenes que viajan en el crucero se comunican en portugués e italiano. Los conjuntos P y T están definidos así:

$P = \{\text{jóvenes que hablan portugués}\}$ $\quad T = \{\text{jóvenes que hablan italiano}\}$

Hallemos la unión y la intersección de los conjuntos P y T.

Solución

El diagrama de Venn de la figura 2.6 ilustra los elementos de los dos conjuntos.

$P \cup T = \{\text{Jomara, Aída, Franco, Karina, Cayetano}\}$

$P \cap T = \{\text{Aída, Franco}\}$

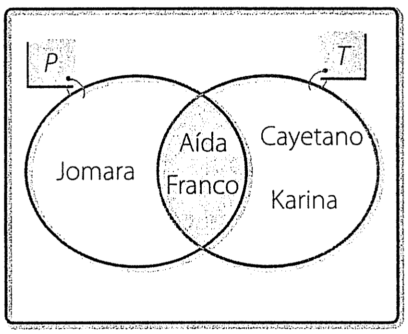


Figura 2.6

Problema del día

Escribe por extensión dos conjuntos, F y S de tal manera que $F \subset S$. Luego encuentra $F \cap S$.

Si el conjunto F es subconjunto del conjunto S, ¿cuál es la intersección entre F y S?

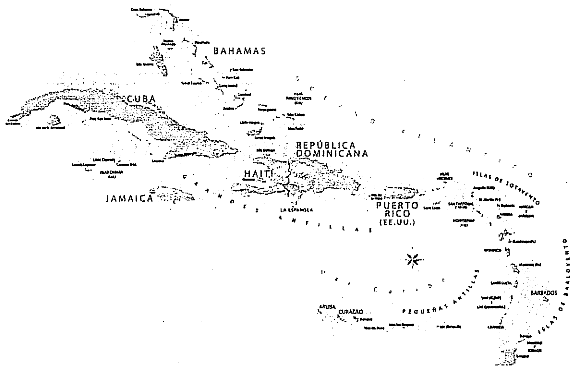
Interpreta y resuelve

Los elementos de T que no pertenecen a P forman la **diferencia** entre T y P. ¿Cuáles son esos elementos?

En general, el conjunto $A - B$ lo forman todos los elementos de A que no pertenecen a B. $A - B$ representa la **diferencia** entre A y B.

Interpreta

La agencia de viajes que dirige el crucero por el Caribe programó visita a las islas de Aruba, Bahamas, Barbados, Cuba, Curazao, Jamaica y Puerto Rico. Las islas que han visitado hasta el momento los viajeros del crucero son: Cuba, Jamaica y Bahamas. ¿Cuáles son las islas por las cuales todavía no ha pasado el crucero?



Las islas programadas en el crucero forman el conjunto universal:

U = {Aruba, Bahamas, Barbados, Cuba, Curazao, Jamaica, Puerto Rico}

Las islas que han visitado hasta el momento los viajeros forman el conjunto L:

L = {Cuba, Jamaica, Bahamas}

En la figura 2.7 vemos la representación de los conjuntos L y U en un diagrama de Venn.

La región sombreada en el diagrama corresponde a las islas por las cuales todavía no ha pasado el crucero. El conjunto formado por estas islas se llama complemento de L y se escribe L^c:

L^c = {Aruba, Barbados, Curazao, Puerto Rico}

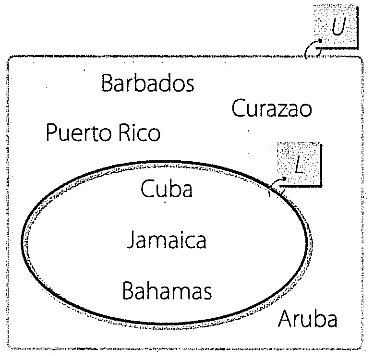


Figura 2.7

> El **complemento** de un conjunto E es el conjunto formado por los elementos que pertenecen al conjunto universal pero que no pertenecen a E.
>
> Para indicar el complemento de E se escribe E^c.

Desarrolla pensamiento crítico

Ejercitar procedimientos

Interpreta

1. Observa la representación gráfica de los conjuntos A, B y C en el diagrama de la figura 2.8. Luego escribe los elementos de cada conjunto.

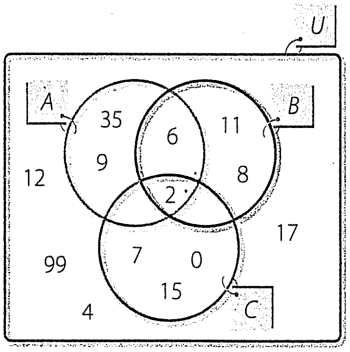


Figura 2.8

a. A

b. $A \cap B \cap C$

c. A^c

d. B

e. $B \cap C$

f. $A - B$

g. $A \cup B \cup C$

h. $C - A$

i. $(A \cup B \cup C) - A$

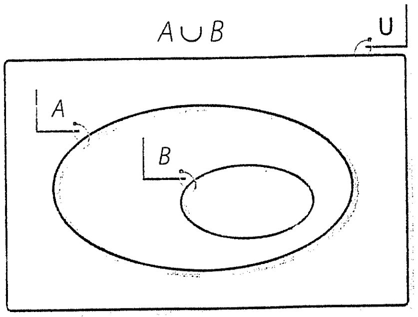
j. $(A \cup B) - (A \cup C)$

Comunicar y representar

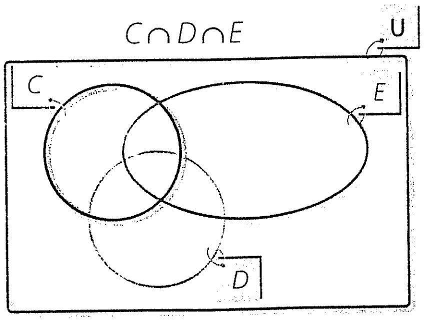
Explica

2. Colorea la región del diagrama de Venn que representa el resultado de cada operación:

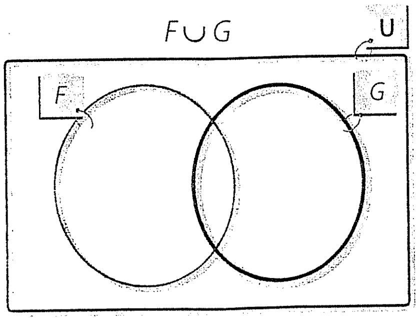
a. $A \cup B$



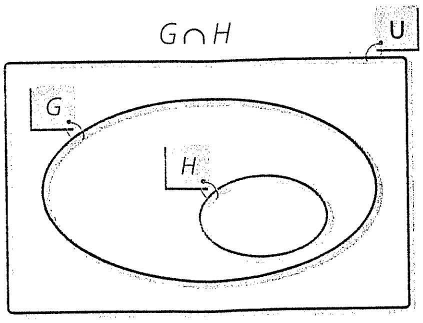
b. $C \cap D \cap E$



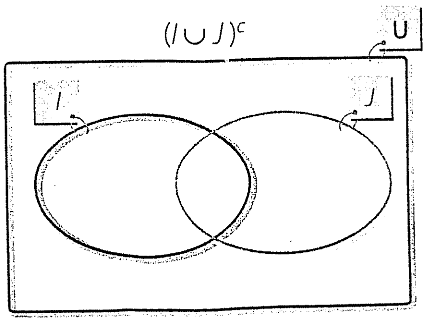
c. $F \cup G$



d. $G \cap H$



e. $(I \cup J)^c$



f. E^c

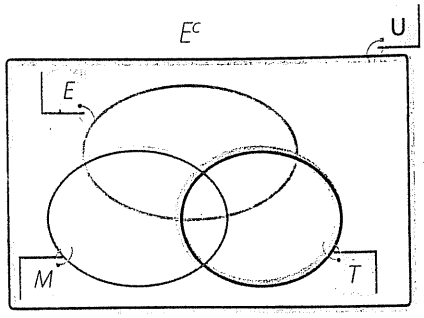


Figura 2.9

3. De acuerdo con los conjuntos que se definen, siendo U el conjunto universal, encuentra y corrige el error cometido en cada operación:

$U = \{\text{números dígitos}\}$ $\quad S = \{1, 3, 9\}$

$M = \{1, 2, 4, 8\}$ $\quad X = \{1, 4\}$

a. $M \cup S \cup X = \{1, 1, 1, 2, 3, 4, 4, 8, 9\}$

b. $M \cap S \cap X = \{1, 4\}$

c. $M \cap X = \{1, 2, 4, 8\}$

d. $S^c = \{2, 4, 8\}$

e. $M^c = \{3, 4, 5, 6, 7\}$

4. Determina cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera, si:

$A = \{\text{múltiplos de 4 mayores que 5 y menores que 30}\}$

$B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$

a. $A \cup B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 20\}$

b. $B \cap A = \{4, 8, 12\}$

c. $A - B = \{12, 16, 20, 24, 28\}$

5. Explica por qué $A - B$ no es igual a $B - A$. Escribe dos ejemplos.

Pensar y razonar

Infiere

6. Sean

$U = \{\text{meses del año}\}$

$X = \{\text{meses de 31 días}\}$

$Y = \{\text{meses del primer semestre del año}\}$

a. Dibuja un diagrama de Venn que represente los conjuntos y escribe la operación que corresponde:

________= {febrero, abril, junio, julio, agosto, septiembre, octubre, noviembre, diciembre}

b. Colorea en el diagrama la parte que representa la operación $(X - Y) \cup Y^c$. ¿Qué otra operación tiene el mismo resultado?

Plantear y resolver problemas

Analiza

7. El diagrama de Venn de la figura 2.10 muestra las actividades que pueden desarrollar los estudiantes de grado sexto en un taller para el desarrollo de talentos. Los números indican la cantidad de estudiantes inscritos en cada actividad.

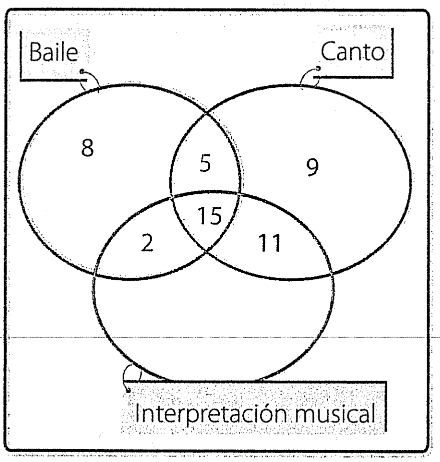


Figura 2.10

De acuerdo con el diagrama responde las preguntas:

a. ¿Cuántos estudiantes se inscribieron en las tres actividades?

b. ¿Cuántos estudiantes escogieron solamente canto?

c. ¿Cuántos estudiantes se interesaron por el baile?

d. ¿Cuántos de los estudiantes que se inscribieron en baile no participaron en canto?

e. ¿Cuántos estudiantes se inscribieron en dos actividades?

f. De los 63 estudiantes matriculados en grado sexto, ¿cuántos se inscribieron únicamente en interpretación musical?

g. ¿Cuántos estudiantes escogieron como opción canto o baile?

h. ¿Cuántos estudiantes escogieron como opción interpretación musical y baile?

8. La agencia Tierra-Mar-Aire encuestó a un grupo de 50 viajeros frecuentes sobre su preferencia en el uso de medios de transporte para viajar y encontró que: 5 personas prefieren el transporte marítimo y terrestre, 19 personas prefieren los medios de transporte terrestre, 13 personas prefieren el transporte marítimo y los demás prefieren viajar en avión. ¿Cuántos viajeros prefieren viajar en avión?

9. Un profesor de música quiere formar un conjunto musical. Al hacer la convocatoria, se presentaron 47 niños. De los 47 niños, 23 sabían tocar algún instrumento y 13 además de tocar algún instrumento también tenían habilidades para el canto. ¿Cuántos niños tenían una sola habilidad?

Evalúa

1. Teniendo en cuenta las condiciones, ubica cada elemento de los que se describe a continuación, en su respectivo lugar en el diagrama de la figura 2.11.

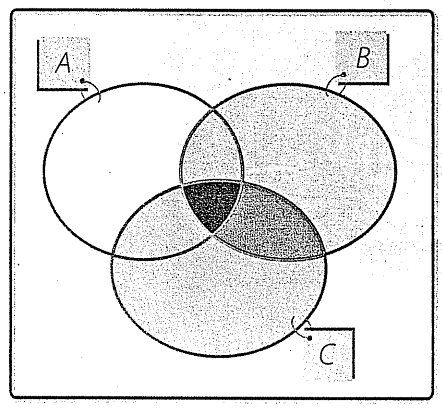


Figura 2.11

- $7 \in A - (B \cap C)$
- $18 \in B - (A \cup C)$
- $13 \in C - (A \cup B)$
- $4 \in (A \cap B \cap C)$
- $12 \in (A \cap B) - C$
- $35 \in (A \cap C) - B$
- $9 \in (B \cap C) - A$
- $11 \in (A \cup B \cup C)^c$

2. En una encuesta realizada a la salida de un cinema, se encontró que a 84 personas les gustan las películas de comedia, a 92 les gustan las películas de drama y a 22 les gustan los dos géneros. ¿Cuántas personas fueron encuestadas?

Desempeños

- Establezco vínculos entre el resultado de una operación entre conjuntos y la parte del diagrama de Venn que la representa.
- Uso operaciones entre conjuntos para resolver problemas.

Practica más, pág. 309.

Tema 12

Múltiplos y divisores de un número natural

Ideas previas

1. Nombra los números primos menores que 50.
2. Escribe el nombre de los términos en cada operación:

a.

```
670 |25  ——→ [      ]
170  26  ——→ [      ]
 20      ——→ [      ]
```

b.

```
  18 ——→ [      ]
×  4 ——→ [      ]
  72 ——→ [      ]
```

3. Realiza cada división y determina en cuáles de ellas el residuo es cero:

a. $891 \div 7$ **b.** $65\,092 \div 4$

c. $12\,875 \div 5$ **d.** $871\,230 \div 29$

Analiza

El parque agropecuario Los Sauces ofrece a los turistas un recorrido por sus diferentes cultivos y granjas de animales. Los turistas son movilizados en carros que tienen capacidad para tres personas acompañadas de un guía.

Julián, quien es un guía turístico, recibe las boletas de los turistas cada vez que hace un recorrido. De acuerdo con el número de recorridos que realiza con el cupo del carro completo, las posibles cantidades de boletas que acumula en el día son:

0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, ...

A esta lista de números se le denomina **múltiplos** de 3, y se obtienen al multiplicar 3 por los números naturales:

$3 \times 0, 3 \times 1, 3 \times 2, 3 \times 3, 3 \times 4, 3 \times 5, 3 \times 6, 3 \times 7, \ldots$

Al finalizar un día Julián acumuló 48 boletas. Si queremos determinar cuántos recorridos hizo, efectuamos la división:

```
48 |3
 0  16
```

Podemos concluir que ese día Julián hizo 16 recorridos.

A partir de esta división podemos afirmar que:

- 3 está contenido un número exacto de veces en 48, porque el residuo de la división es cero.
- $48 = 16 \times 3$.
- 48 es un múltiplo de 3 y de 16.
- 3 y 16 son **divisores** de 48.

> Los **múltiplos** de un número son aquellos que se obtienen al multiplicarlo por los números naturales. Un **divisor** de un número es aquel que lo divide sin dejar residuo.

Ejemplo

Determinemos si 7 es un divisor de 595.

Solución

Realizamos la división:

$$\begin{array}{r|l} 595 & 7 \\ \cline{2-2} 35 & 85 \\ 0 & \end{array}$$

El residuo de la división es cero, entonces 7 es divisor de 595. De la misma división podemos concluir que:

- Otro divisor de 595 es 85.
- 595 es múltiplo de 7 y es múltiplo de 85.

Infiere y comprueba

Efectúa las divisiones necesarias para verificar que 5, 17, 35 y 119 son divisores de 595.

Ejemplo

Hallemos los múltiplos de 9.

Solución

Para hallar los múltiplos de 9, lo multiplicamos por los números naturales:

$9 \times 0 = 0, 9 \times 1 = 9, 9 \times 2 = 18, 9 \times 3 = 27, 9 \times 4 = 36, 9 \times 5 = 45, 9 \times 6 = 54$

$9 \times 7 = 63, 9 \times 8 = 72, 9 \times 9 = 81, 9 \times 10 = 90, 9 \times 11 = 99, 9 \times 12 = 108\ldots$

$$M_9 = \{0, 9, 18, 27, 36, 45, \ldots\}$$

Podemos continuar multiplicando a 9 por los números naturales y encontrar la cantidad de múltiplos que queramos.

Analiza y contesta

¿Cuántos múltiplos tiene un número? Justifica tu respuesta.

Problema del día

¿Qué número natural es múltiplo de todos los números?

¿Qué número natural es divisor de todos los números?

Ejemplo

Hallemos los divisores de 36.

Solución

Para encontrar los divisores de 36, lo dividimos entre los números naturales menores o iguales que él. De las divisiones en las que el residuo es cero concluimos que los divisores de 36 son: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 y 36.

$$D_{36} = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$$

Infiere y resuelve

1. Efectúa las divisiones correspondientes para verificar que los números mencionados son los divisores de 36.
2. Escribe una justificación para la siguiente afirmación: 36 es múltiplo de 9, 12 y 18.

Desarrolla pensamiento crítico

Ejercitar procedimientos

Interpreta

1. Determina cada conjunto por extensión.
   - **a.** D = {múltiplos de 12 menores que 72}
   - **b.** C = {múltiplos de 4 mayores que 40 y menores que 60}
   - **c.** Q = {divisores de 15}
   - **d.** T = {divisores pares de 39}
   - **e.** L = {divisores de 100 mayores que 10}

2. Relaciona los conjuntos de la columna de la izquierda con la expresión equivalente en la columna de la derecha.

a. Múltiplos de 7 menores que 28	• {1, 2, 4, 8, 16}
b. Divisores de 24	• {21, 28, 35}
c. Múltiplos de 7 mayores que 20 y menores que 40	• {0, 7, 14, 21}
d. Divisores de 16	• {0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14}
e. Múltiplos de 2 menores que 16	• {1, 2, 3, 8, 12, 24}
f. Divisores de 48	• {1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48}

3. Halla los 10 primeros múltiplos de los siguientes números.

   a. 12
   b. 7
   c. 11
   d. 30
   e. 1
   f. 17

4. Halla todos los divisores de los siguientes números.

   a. 100
   b. 45
   c. 81
   d. 17
   e. 82
   f. 60

Comunicar y representar

Explica

5. Las siguientes afirmaciones son verdaderas. Ilustra cada una de ellas con un ejemplo.

   a. Los divisores de un número siempre son menores o iguales que el número.
   b. La suma de dos múltiplos de un número también es múltiplo del número.
   c. El producto de dos múltiplos de un número también es múltiplo del número.
   d. Si un número es divisor de otro y éste a su vez es divisor de un tercer número, entonces el primer número es divisor del tercero.

6. Escribe un argumento que justifique cada una de las siguientes afirmaciones.

   a. 40 no es divisor de 8.
   b. 72 es múltiplo de 9.
   c. 13 tiene solamente dos divisores.
   d. Los múltiplos de 1 son los números naturales.
   e. Dos divisores de 450 son 9 y 15.

7. Las siguientes afirmaciones son falsas. Escribe un ejemplo que muestre cada caso.

   a. Si un número es mayor que otro, entonces tiene más divisores.
   b. La suma de dos divisores de un número es divisor del número.
   c. Los números pares tienen un número par de divisores.
   d. Si un número se multiplica por 2, el resultado es un número que tiene el doble de divisores que el número inicial.

Pensar y razonar

Infiere

8. Responde las siguientes preguntas:

   a. ¿Qué número es a la vez múltiplo de 7 y divisor de 7?
   b. ¿Existe algún número que tenga sólo un divisor?

9. Un número se llama **perfecto** si es igual a la suma de sus divisores menores que él. Por ejemplo, el número 6 es perfecto porque sus divisores menores son 1, 2 y 3 y su suma es 6: $1 + 2 + 3 = 6$.

Determina cuáles de los siguientes números son perfectos:

a. 4
b. 12
c. 28
d. 56
e. 496

10. ¿De cuántos carros dispone el parque agropecuario Los Sauces para guiar a los turistas, si en un momento dado todos están en uso y se sabe que entre 30 y 35 turistas están haciendo el recorrido?

11. Halla un número que sea divisor de 60 pero no de 10.

Plantear y resolver problemas

Analiza

12. Dibuja todos los posibles rectángulos que puedes construir usando el mismo número de cuadrados de cartulina que puedes observar en la figura 2.12.

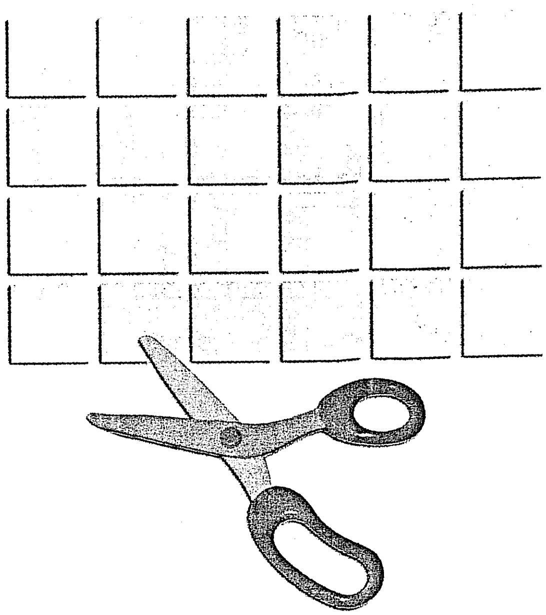


Figura 2.12

13. Consigue un calendario y ubícate en algún día que sea martes. ¿Qué fecha será dentro de 21 días? Verifica tu respuesta con el calendario.

14. Un grupo de 24 estudiantes se debe organizar en el patio formando filas con igual número de estudiantes. ¿De cuántas maneras se pueden organizar?

15. ¿Qué número mayor que 50 y menor que 60, al sustraerle 3 da como resultado un múltiplo de 7?

Evalúa

1. Encuentra los 10 primeros múltiplos de los siguientes números.

a. 8
b. 11
c. 13
d. 42
e. 5

2. Da ejemplos de números que completen adecuadamente la tabla 2.3.

Número	Cantidad de divisores
	1
	2
	3
	4

Tabla 2.3

3. Completa cada afirmación para que sea verdadera.

a. 32 es un múltiplo de 4 porque

________________________________.

b. Un divisor de 35 es 5, porque _____ ÷ 5 = 7.

c. Los divisores de 29 son 1 y 29 porque

________________________________.

d. Como 7 × 9 = 63 entonces 7 y 9 son
________________________________ de 63.

Desempeños

- Encuentra los múltiplos y los divisores de un número natural.
- Justifica afirmaciones que involucran los conceptos de múltiplo y divisor.

Practica más, pág. 310.

Tema 13

Criterios de divisibilidad

Ideas previas

1. Escribe los números que siguen en cada secuencia.

   a. 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, ☐, ☐, ☐.

   b. 0, 11, 22, 33, 44, 55, 66, ☐, ☐, ☐.

2. Efectúa las siguientes divisiones. ¿En alguna de ellas el residuo es cero? Explica tu respuesta.

   a. $10 \div 3$

   b. $100 \div 3$

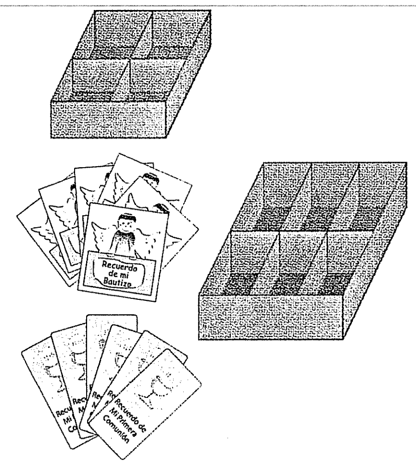
   c. $100\,000 \div 3$

3. Encierra con un círculo los números que tienen entre sus divisores a 2 y 3:

5	8
9	12
21	24
30	

Analiza

Carlos diseña y distribuye recordatorios para diferentes eventos. En cierta ocasión un hotel programó dos eventos que se iban a llevar a cabo de manera simultánea. El hotel hizo un pedido de recordatorios de bautizo para un salón en el cual los invitados estarían organizados en mesas para cuatro personas, y un pedido de recordatorios de primera comunión para un salón en el cual los asistentes estarían organizados en mesas para seis personas.



Carlos escribió la cantidad de recordatorios que debía elaborar de cada tipo: 228 y 224, pero olvidó anotar a qué evento correspondía cada cantidad.

¿Cómo puede determinar Carlos qué cantidad corresponde a cada evento?

Teniendo en cuenta que los recordatorios deben ir en cajas de 4 y 6 unidades, debemos encontrar cuál de los números es **divisible** por 4 y cuál es divisible por 6.

Los criterios de divisibilidad permiten determinar cuándo un número es divisible por otro sin necesidad de realizar la división correspondiente. En el caso de 4 y 6 los criterios son:

> “Un número es **divisible por 4** si el número formado por las dos últimas cifras es múltiplo de 4.
>
> Un número es **divisible por 6** si es divisible por 2 y por 3 a la vez.
>
> Un número es **divisible por 2** si el dígito de las unidades es par, es decir: 0, 2, 4, 6, 8.
>
> Un número es **divisible por 3** si la suma de sus dígitos es un múltiplo de 3.”

Para determinar qué cantidad corresponde a cada evento apliquemos los criterios de divisibilidad por 4 a los números 228 y 224:

28 es múltiplo de 4, entonces 228 es divisible por 4.
24 es múltiplo de 4, entonces 224 es divisible por 4.

Dado que los dos números son divisibles por 4, no podemos establecer aún qué cantidad corresponde a cada evento. Debemos aplicar el criterio de divisibilidad por 6.

¿Qué significa?

Un número a es **divisible** por otro b cuando al dividir a entre b el residuo de la división es cero.

Para el caso de 228:

228

El dígito de las unidades es par. → Es divisible por 2 ✓

La suma de sus cifras es 12
12 es múltiplo de 3. → Es divisible por 3 ✓

Como 228 es divisible por 2 y por 3 a la vez, entonces 228 es divisible por 6.

Para el caso de 224:

224

El dígito de las unidades es par. → Es divisible por 2 ✓

La suma de sus cifras es 8
8 no es múltiplo de 3. → No es divisible por 3 ✗

Como 224 es divisible por 2 pero no por 3, entonces 224 no es divisible por 6.

Podemos concluir que el pedido hecho a Carlos fue de 228 recordatorios para primera comunión y 224 recordatorios para bautizo.

Interpreta y completa

Completa los espacios para que cada número sea divisible por 6.

a. 72 ☐ **b.** 53 ☐ 8 **c.** 3 ☐ 8 ☐ 5

Ten en cuenta que hay más de una respuesta posible.

Un número es **divisible por 5** si el dígito de las unidades es 0 o 5.
Un número es **divisible por 9** si la suma de sus dígitos es múltiplo de 9.
Un número es **divisible por 10** si el dígito de las unidades es 0.

Ejemplo

Usemos los criterios de divisibilidad para determinar cuáles de los números 5, 9, 10 y 6 son divisores de 945.

Solución

a. El dígito de las unidades es 5, entonces 945 es divisible por 5.

b. La suma de sus cifras es 18 (9 + 4 + 5), y 18 es múltiplo de 9, entonces 945 es divisible por 9.

c. El dígito de las unidades no es 0, entonces 945 no es divisible por 10.

d. El dígito de las unidades es 5, que es un número impar, entonces 945 no es divisible por 2, por tanto no es divisible por 6.

Problema del día

¿Por qué no necesitamos averiguar si 945 es divisible por 3 para determinar si es divisible por 6?

Desarrolla pensamiento crítico

Ejercitar procedimientos

Interpreta

1. Escribe sí o no para indicar si el número de la columna es divisible por cada uno de los números de la fila superior.

	Divisible por					
Número	2	3	4	5	9	10
307						
2508						
40 761						
831 000						
9 201 375						

Tabla 2.4

2. Utiliza los criterios de divisibilidad para hallar al menos tres divisores de cada número.

a. 678 **b.** 325 **c.** 4818

Comunicar y representar

Explica

3. Determina si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F). Justifica tu respuesta.

a. 100 es divisible por 2 y por 10.

b. 3 no es divisible por 63.

c. 45 es divisible por 6.

d. Todos los números pares son divisibles por 4.

4. Formula tres ejemplos que ilustren la siguiente afirmación: "la suma de dos números impares consecutivos es divisible por cuatro".

Pensar y razonar

Infiere

5. Un número natural de tres cifras es divisible por 7 si al adicionar el doble del dígito de las centenas con el triple del dígito de las decenas y la cifra de las unidades, la suma es divisible por 7.

- Con base en el criterio anterior verifica si 133 es divisible por 7.

6. ¿Qué dígito debe eliminarse de 124 para que el nuevo número sea divisible por 7?

7. ¿Si se cambia el orden de las cifras de un número que es divisible por 2, el número que se obtiene sigue siendo divisible por 2? Justifica tu respuesta.

8. ¿Si se cambia el orden de los dígitos de un número que es divisible por 3, el número que se obtiene sigue siendo divisible por 3? Justifica tu respuesta.

Plantear y resolver problemas

Analiza

9. Escribe en cada caso un número que cumpla las condiciones dadas:

a. De cuatro cifras que sea divisible por 9 y 10 a la vez.

b. De tres cifras, de manera que al suprimir cualquiera de los dígitos, el número que quede siga siendo divisible por 3.

10. ¿Es posible escribir un número que sea divisible por 2 y 5 a la vez?

11. En una fábrica de chocolates, éstos se empacan en bolsas de 3, 5 o 7 chocolates. Si se tienen 973 chocolates, ¿en cuál de estas bolsas se pueden empacar sin que sobren chocolates?

Evalúa

1. Escribe tres números que sean divisibles por 2, 5 y 10 a la vez.

2. Tienes 76 palillos del mismo tamaño y con ellos debes formar una de las siguientes dos figuras de manera que utilices todos los palillos. ¿Cuál figura escogerías? ¿Por qué?

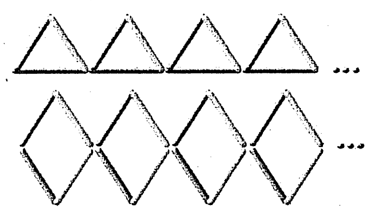


Figura 2.13

Desempeños

- Emplea procedimientos abreviados para determinar si un número es divisible por 4, 5, 6, 9 y 10.
- Resuelve situaciones que requieren el uso de los criterios de divisibilidad.

Practica más, pág. 310.

Tema 14

Números primos y números compuestos

Ideas previas

1 ¿Cuántos arreglos rectangulares se pueden hacer con 13 fichas cuadradas del mismo tamaño?

2. ¿Cuántos arreglos rectangulares se pueden hacer con 12 fichas cuadradas del mismo tamaño?

Figura 2.15

Analiza

En la **situación problema** del inicio de la unidad se plantea la organización de unos grupos con igual número de integrantes y con dos estudiantes por lo menos en cada uno de ellos.

Respondamos la pregunta 3: ¿en cuál de los cursos no fue posible organizar los grupos?

En el curso sexto A los estudiantes se pueden distribuir en 5 grupos de 5 estudiantes cada uno.

Los estudiantes de sexto B se pueden organizar en 3 grupos de 9 estudiantes o en 9 grupos de 3 estudiantes porque 27 es divisible por 3 y por 9.

En sexto C hay 26 estudiantes y 26 es un número divisible por 2, entonces pueden hacer 2 grupos de 13 estudiantes o formar 13 parejas.

En sexto D hay 31 estudiantes. El número 31 sólo es divisible por 1 y 31, es decir, las únicas agrupaciones posibles son un grupo de 31 estudiantes o 31 grupos de 1 estudiante.

La primera opción no genera grupos y la segunda opción es trabajo individual, y en ese caso no se cumple la condición que indica que debe haber por lo menos dos estudiantes en cada uno de los grupos.

Tenemos entonces que en sexto D no se pudieron formar los grupos con las condiciones señaladas.

El número 31 tiene solamente dos divisores: 1 y 31 ($1 \times 31 = 31$), por esta razón es un número primo.

Los números 25, 26 y 27 tienen más de dos divisores, por esta razón son números compuestos.

Los divisores de 26 son 1, 2, 13 y 26, ya que $1 \times 26 = 26$ y $2 \times 13 = 26$.

Dato histórico

El gran matemático Euclides demostró desde el siglo III a.C. que existen infinitos números primos. Sin embargo, no ha sido posible determinar con certeza una regla para saber cada cuánto aparece entre los números naturales un número primo.

Analiza y verifica

Comprueba que 25 tiene 3 divisores y que 27 tiene 4 divisores.

Un número es **primo** si tiene solamente dos divisores: 1 y el mismo número.

Un número es **compuesto** si tiene más de dos divisores.

Problema del día

¿Es el número 0 primo o compuesto? ¿Es el número 1 primo o compuesto?

Ejemplo

Realicemos todos los arreglos rectangulares que se pueden formar con 7 fichas cuadradas del mismo tamaño.

Solución

Como siete es un número primo, porque sus divisores son 1 y 7, podemos formar dos arreglos rectangulares.

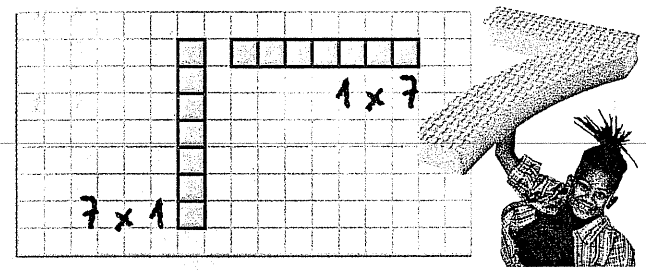


Figura 2.14

Desarrolla pensamiento crítico

Ejercitar procedimientos

Interpreta

1. Completa la tabla 2.5 para clasificar los números que se indican en primos o compuestos.

Número	Divisores	Cantidad de divisores	Clase de número (primo/ compuesto)
2			
8			
9			
11			
13			
16			
17			
20			
25			

Tabla 2.5

2. Representa mediante arreglos rectangulares los números 8, 12 y 24.

Comunicar y representar

Explica

3. Las siguientes afirmaciones son falsas. Muestra con un ejemplo por qué son falsas.

- **a.** Todos los números compuestos son pares.
- **b.** Todos los números primos son impares.
- **c.** El mayor número primo es 97.
- **d.** Todos los números que terminan en 3 son primos.
- **e.** Los números compuestos se representan sólo con dos posibles arreglos rectangulares.

4. Utiliza las definiciones de número primo y número compuesto para explicar por qué el número 1 no es primo y tampoco es compuesto.

Pensar y razonar

Infiere

5. Escribe en cada cuadro un dígito apropiado para que el número que se forme sea un número primo.

   a. ☐1

   b. ☐3

   c. ☐7

   d. ☐9

6. ¿Puedes encontrar números primos de dos cifras que terminen en 0, 2, 4, 6 u 8? Justifica tu respuesta.

7. Un método conocido para encontrar números primos es la criba de Eratóstenes. Consulta en qué consiste y aplícala para encontrar los números primos menores que 100.

Plantear y resolver problemas

Analiza

8. Escribe cada número par y compuesto menor que 20 como una adición o producto de números primos.

9. Observa la tabla 2.6.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16
17	18	19	20
21	22	23	24
25	26	27	28

Tabla 2.6

   a. ¿En cuál de las cuatro columnas todos los números son compuestos? ¿Por qué ocurre esto?

   b. ¿En cuál de las cuatro columnas hay un solo número primo? ¿Cuál es? ¿Por qué ocurre esto?

10. Un padre ahorró en una alcancía determinada cantidad de dinero en billetes de $ 1000. Después de cierto tiempo se da cuenta de que puede repartir los billetes por igual entre sus tres hijos. ¿Pudo el padre haber ahorrado 314 billetes? Justifica tu respuesta.

Evalúa

1. Escribe los números dígitos que son primos.

2. Escribe, en cada caso, dos números compuestos que tengan como factores a los números indicados.

   a. 6 y 11

   b. 3, 7 y 9

   c. 2, 11 y 17

   d. 24 y 5

3. Dibuja todos los arreglos rectangulares que se pueden formar con 42 cuadritos del mismo tamaño.

Desempeños

- Identifica números primos y compuestos.
- Hace arreglos rectangulares de números compuestos.

Practica más, pág. 311.

Tema 15

Factorización prima

Ideas previas

1. Responde las preguntas:
   a. ¿Cuál es el producto entre 7 y 12?
   b. ¿Cuáles son los múltiplos de 6 menores que 30?
   c. ¿Cuáles son los divisores de 8?
   d. ¿Cuáles son los factores en la siguiente multiplicación: $10 \times 15 = 150$?
2. Elabora la lista de los números primos menores que 20.

Analiza

Para la semana de las matemáticas, el profesor de sexto grado organizó varios juegos sobre números primos.

Catalina y Rubén decidieron participar en un juego para dos personas. De una caneca que contenía varias tarjetas marcadas con un número primo diferente, Catalina sacó una tarjeta y escribió en su libreta el número, luego devolvió la tarjeta a la caneca y repitió este proceso cuatro veces. Finalmente, multiplicó los números que tenía escritos.

Catalina le dijo a Rubén que obtuvo como resultado 24. Ahora él debe adivinar cuáles fueron las tarjetas que sacó Catalina de la caneca.

Rubén escribió 24 como el producto de dos números:

$$24 = 4 \times 6 \qquad 24 = 3 \times 8$$

$$24 = 2 \times 12 \qquad 24 = 1 \times 24$$

Después expresó a 24 como producto de tres y cuatro factores (sin tener en cuenta el orden en que se escriben los factores):

$$24 = 4 \times 2 \times 3$$

$$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$$

Como Catalina hizo cuatro extracciones, las tarjetas que sacó fueron las marcadas con el número 2 y el número 3.

Interpreta y responde

¿En cuál de las anteriores factorizaciones se utilizaron **factores primos**?

Todo número compuesto se puede expresar como el producto de **factores primos**. Esa descomposición es única, si no se tiene en cuenta el orden en que se escriben los factores.

Pensamiento numérico

Ejemplo

Expresemos a 90 como producto de factores primos.

Solución

Veamos dos maneras de hacerlo:

a. Usando un diagrama de árbol.

Expresamos a 90 como el producto de dos factores y cada uno de éstos en otros dos hasta obtener números primos. Vamos organizando los factores en el diagrama:

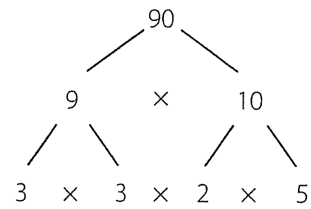


Figura 2.15

Finalmente ordenamos de menor a mayor los factores primos obtenidos:

$$90 = 2 \times 3 \times 3 \times 5$$

Interpreta y completa

Parte de un par de factores diferentes a 9 y 10 y completa el diagrama de la figura 2.16.

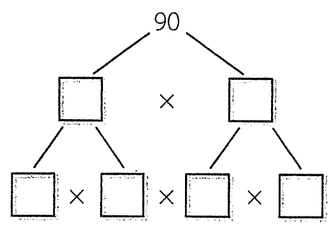


Figura 2.16

¿Qué factores primos obtienes?

b. Haciendo divisiones sucesivas.

Trazamos una raya vertical al lado derecho de 90 y escribimos el menor número primo por el cual es divisible, hacemos la división y escribimos el cociente debajo de 90.

$$\begin{array}{r|l} 90 & 2 \\ 45 & \end{array} \qquad 90 \div 2 = 45$$

Repetimos el proceso con 45 y continuamos así hasta obtener 1 como cociente.

$$\begin{array}{r|lr} 90 & 2 & 90 \div 2 = 45 \\ 45 & 3 & 45 \div 3 = 15 \\ 15 & 3 & 15 \div 3 = 5 \\ 5 & 5 & 5 \div 5 = 1 \\ 1 & & \end{array}$$

$$90 = 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 2 \times 3^2 \times 5$$

Problema del día

23 es el número primo más pequeño en el que la suma de los cuadrados de sus dígitos es también un número primo impar.

Encuentra el siguiente número primo que cumple esta condición.

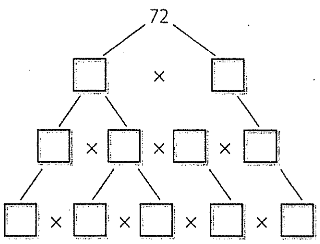
Desarrolla pensamiento crítico

Ejercitar procedimientos

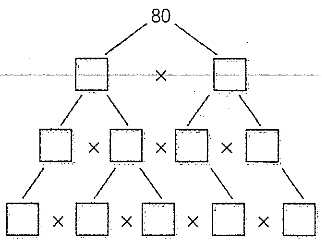
Interpreta

1. Realiza la descomposición en factores primos de cada número completando los diagramas de árbol.

   a.



   b.



   c.

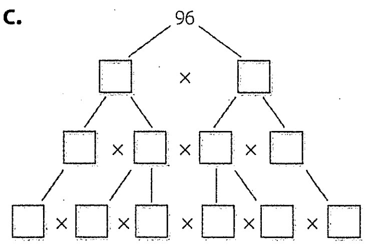


Figura 2.17

2. Aplica el método de divisiones sucesivas para encontrar la factorización prima de cada número.

   a. 144   b. 210

   c. 375   d. 2695

Comunicar y representar

Explica

3. Encuentra una justificación para la siguiente afirmación: "la descomposición en factores primos de 53 no es 1×53".

Pensar y razonar

Infiere

4. Cuando la descomposición en factores primos de un número tiene factores iguales se puede abreviar la expresión usando la potenciación. Por ejemplo $90 = 2 \times 3 \times 3 \times 5$ se puede escribir como $90 = 2 \times 3^2 \times 5$.

   Encuentra el número que corresponde a cada descomposición en factores primos.

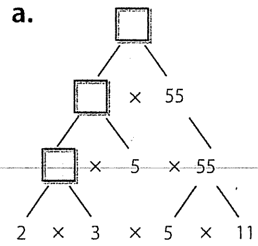
   a. $2^3 \times 3 \times 5 \times 7$ b. $2 \times 11^2 \times 13 \times 17$

   c. $2 \times 3^3 \times 7$ d. $3^2 \times 5^4$

   e. $7^2 \times 13$ f. $5^2 \times 11$

5. Completa adecuadamente cada diagrama de descomposición en factores primos.

   a.



   b.

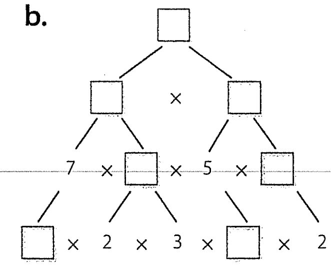


Figura 2.18

Plantear y resolver problemas

Analiza

6. ¿Cuál es el menor número compuesto que tiene a 11 entre sus factores primos? Justifica tu respuesta.

7. ¿El volumen de un prisma de base cuadrada puede ser $275\ cm^3$? Justifica tu respuesta.

Evalúa

1. Relaciona cada número con su factorización prima.

170	7×11
2205	$2 \times 5 \times 17$
77	$2^3 \times 3^4$
648	$3^2 \times 5 \times 7^2$

2. Sara necesita elaborar una caja que tenga $442\ cm^3$ de volumen. ¿Cuáles son las posibles dimensiones de la caja?

Desempeños

- Expresa un número compuesto como el producto de sus factores primos.
- Resuelve situaciones que requieren el uso de la factorización prima de un número.

Practica más, pág. 311.

Tema 16

Mínimo común múltiplo

Ideas previas

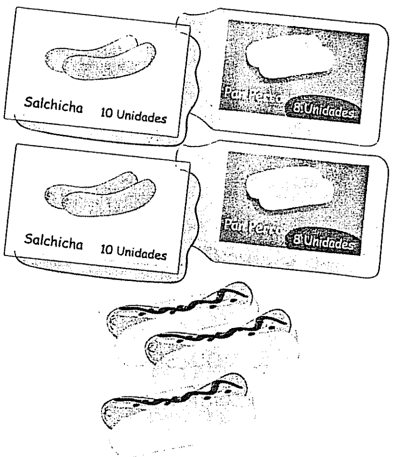
En la cuadrícula de la tabla 2.7, colorea de azul las casillas que tienen múltiplos de 2 y de color rojo las casillas que tienen múltiplos de 3.

Ten en cuenta que puede haber casillas con más de un color.

¿Qué números tienen un solo color?, ¿por qué hay casillas que tienen dos colores?

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Tabla 2.7



Interpreta

Mario necesita hacer un pedido de panes y salchichas a la tienda que surte su negocio de comidas rápidas. Los panes vienen en paquetes de 8 unidades y las salchichas en paquetes de 10 unidades. Para preparar los perros calientes, Mario debe pedir igual número de panes que de salchichas. ¿Qué cantidades de cada artículo debe pedir?

Como los panes vienen en paquetes de 8 unidades, las cantidades de pan que puede pedir son: 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, 80…

Para las salchichas, que vienen en paquetes de 10 unidades, las cantidades que puede pedir son: 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80…

Para conseguir igual cantidad de panes que de salchichas, Mario debe pedir cualquiera de las siguientes cantidades: 40, 80, 120,… que corresponden a los múltiplos comunes de 8 y 10 mayores que 0.

Infiere y responde

¿Cuál es la mínima cantidad que debe pedir de cada producto?

El **mínimo común múltiplo** de dos o más números es el menor de los múltiplos comunes mayores que 0. Para abreviar la expresión "mínimo común múltiplo" se escribe: m. c. m.

Ejemplo

Hallemos el mínimo común múltiplo (m. c. m.) de 6 y 9.

Solución

Mostraremos dos maneras de hacerlo.

a. Usando conjuntos.

Hallamos los múltiplos mayores que cero de cada número:

$M_6 = \{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54...\}$

$M_9 = \{9, 18, 27, 36, 45, 54, 63...\}$

Hallamos la intersección entre los dos conjuntos:
$M_6 \cap M_9 = \{18, 36, 54,...\}$

Escogemos el menor de los múltiplos comunes: 18

El mínimo común múltiplo (m. c. m.) de 6 y 9 es 18.

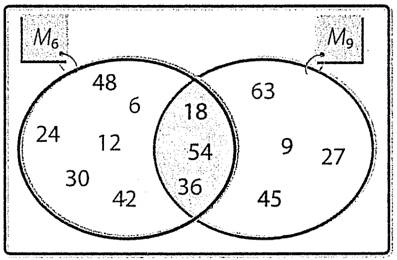


Figura 2.19

Problema del día

¿Cuál es el m. c. m. de dos números primos?

b. Haciendo descomposición en factores primos.

Organizamos los números en dos columnas y los descomponemos al mismo tiempo en factores primos:

6	9	2	Dividimos por 2, que es el menor número primo que divide por lo menos a uno de los números.
3	**9**	3	Como 9 no es múltiplo de 2, lo copiamos en esta fila.
1	3	3	Dividimos por 3 a 3.
	1		

Multiplicamos todos los factores primos que obtuvimos y el producto de ellos será el m. c. m. que buscamos:

m. c .m. (6 y 9) $= 2 \times 3^2 = 18$

Desarrolla pensamiento crítico

Ejercitar procedimientos

Interpreta

1. Escribe los múltiplos comunes de 6, 8 y 9 que sean menores que 100.

2. Aplica el método de conjuntos para encontrar el m. c. m. de:

a. 3 y 7 **b.** 5 y 11

c. 4, 12 y 15 **d.** 3, 4, 6 y 8

3. Aplica el método de descomposición en factores primos para encontrar el m. c. m. de:

a. 48 y 72

b. 6, 12 y 15

c. 32, 48 y 96

d. 680 y 820

Plantear y resolver problemas

Analiza

4. Resuelve cada problema:

   a. Valentín debe tomar tres medicamentos de la siguiente manera: uno cada 2 días, otro cada 3 días y el último cada 4 días. Si empieza tomando los tres medicamentos un mismo día, ¿a los cuántos días vuelve a coincidir en la toma de los medicamentos?

   b. Los alumnos de un curso se pueden distribuir exactamente en grupos de 4, 5 u 8 personas. Si cada curso del colegio tiene menos de 44 estudiantes, ¿cuántos alumnos hay en el curso?

Comunicar y representar

Explica

5. Escribe varios ejemplos para justificar la siguiente afirmación: en un conjunto de números en el que el mayor es múltiplo de los demás, el m. c. m. de los números es el número mayor.

6. Calcula mentalmente el m. c. m. de cada pareja de números:

   a. 4 y 8

   b. 20 y 30

   c. 10 y 15

7. ¿Por qué el m. c. m. de dos o más números no puede ser menor que los números?

8. Explica con tus propias palabras qué significa:

   a. Ser el múltiplo de un número.

   b. Ser múltiplo común de varios números.

   c. Ser el mínimo común múltiplo de varios números.

Pensar y razonar

Infiere

9. Escribe un número apropiado en cada diagrama de la figura 2.20, distinto de los que allí aparecen, de modo que el número de la parte superior sea el m. c. m.

   a. 24 → 12, □

   b. 30 → □, 10

   c. 18 → 6, □

   d. 40 → 20, □

   e. 36 → 4, □

Figura 2.20

Evalúa

1. Encuentra el mínimo común múltiplo de:

   a. 5 y 15

   b. 9 y 12

   c. 3, 8 y 14

2. ¿Cuánto dinero tiene Gabriel, si es la cantidad mínima con la que puede comprar un número exacto de cualquiera de tres bebidas cuyos precios son \$ 800, \$ 1200 y \$ 1500? ¿Cuántas bebidas podría comprar de cada tipo?

Desempeños

- Encuentra el mínimo común múltiplo de dos o más números.
- Resuelve situaciones que involucran el concepto de mínimo común múltiplo.

Practica más, pág. 312.

Tema 17

Máximo común divisor

Ideas previas

1. Determina si cada afirmación en falsa (F) o verdadera (V):
   - **a.** 72 es múltiplo de 7.
   - **b.** 4 es un divisor de 36.
   - **c.** Los divisores de 13 son 1 y 13.
   - **d.** 20 tiene 8 divisores.

2. Encuentra los números que cumplen las condiciones dadas:
   - **a.** Un número que tenga entre sus divisores a 3 y a 7.
   - **b.** Tres números que compartan los siguientes divisores: 2 y 5.
   - **c.** Tres números mayores que 50 que compartan entre sus divisores a 6.

Analiza

Tres poblaciones están conectadas por una misma carretera y están separadas una de la otra como se muestra en la figura 2.21.

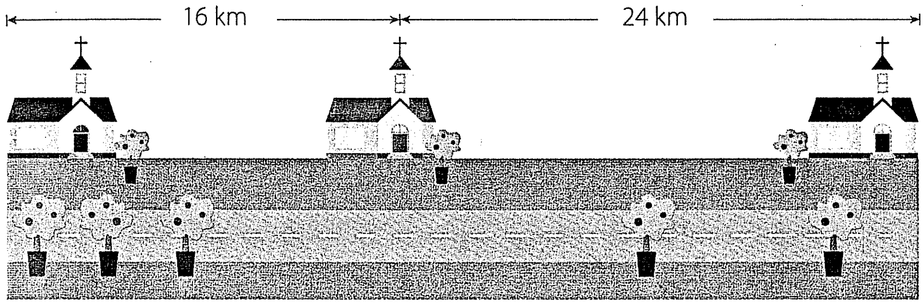


Figura 2.21

La carretera que las conecta está recién pavimentada y se van a disponer en ella las señales de kilometraje de acuerdo con las siguientes condiciones:

- Las señales deben estar separadas entre sí por la misma distancia.
- Se debe mantener la mayor distancia posible entre ellas.
- Deben situarse señales en los tres pueblos.

¿Qué distancia debe haber entre las señales?

Las señales entre el primer y el segundo pueblos, pueden estar separadas 1, 2, 4, 8 o 16 km. Dichos números corresponden a los divisores de 16.

$D_{16} = \{1, 2, 4, 8, 16\}$

Entre el segundo y el tercer pueblos, las señales pueden estar separadas1 , 2, 3, 4, 6, 8, 12 o 24 km. Dichos números corresponden a los divisores de 24.

$D_{24} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$

Las señales deben estar separadas entre sí por la misma distancia, por esta razón debemos hallar la intersección de los dos conjuntos:

$D_{16} \cap D_{24} = \{1, 2, 4, 8\}$ (*ver* figura 2.22).

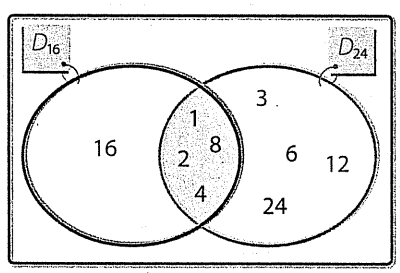


Figura 2.22

Pensamiento numérico

Como se debe mantener la mayor distancia posible entre las señales, identificamos el mayor de los divisores que forman la intersección de los dos conjuntos:

$D_{16} \cap D_{24} = \{1, 2, 4, 8\}$

Veamos:

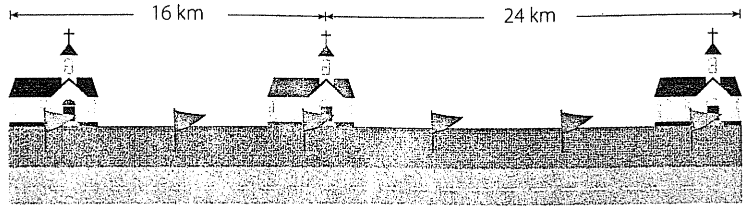


Figura 2.23

El **máximo común divisor** de dos o más números es el mayor de los divisores comunes de esos números. Para abreviar la expresión "máximo común divisor" se escribe: m. c. d.

Ejemplo

Hallemos el máximo común divisor (m. c. d.) de 36 y 90.

Solución

Mostraremos dos maneras de hacerlo.

a. Usando conjuntos.

Hallamos los divisores de cada número:

$D_{36} = \{1, 2, 3, 4, 9, 12, 18, 36\}$

$D_{90} = \{1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90\}$

Hallamos la intersección entre los dos conjuntos: $D_{36} \cap D_{90} = \{1, 2, 3, 9, 18\}$

Escogemos el mayor de los divisores comunes: 18

El máximo común divisor (m. c. d.) de 36 y 90 es 18. (*ver* figura 2.24).

b. Haciendo la descomposición en factores primos.

Organizamos los números en dos columnas y los descomponemos al mismo tiempo en factores primos:

36	90	2
18	45	2
9	45	3
3	15	3
1	5	5
	1	

Multiplicamos los divisores comunes a ambos números: $2 \times 3^2 = 18$

El máximo común divisor (m. c. d.) de 36 y 90 es 18.

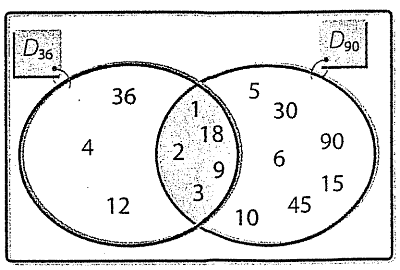


Figura 2.24

Interpreta y explica

Describe los pasos necesarios para hallar el m. c. d. de 18, 45 y 90 usando conjuntos.

Desarrolla pensamiento crítico

Ejercitar procedimientos

Interpreta

1. Aplica el método de conjuntos para encontrar el m. c. d. de:

   a. 12 y 18 **b.** 10 y 40

   c. 9, 15 y 21 **d.** 24, 30 y 56

2. Aplica el método de descomposición en factores primos para encontrar el m. c. d. de:

   a. 48 y 72 **b.** 300 y 360

   c. 40, 60 y 80 **d.** 90, 135 y 180

Plantear y resolver problemas

Analiza

3. Resuelve cada problema.

   a. Verónica quiere llenar con cubos de madera del mismo tamaño la siguiente caja:

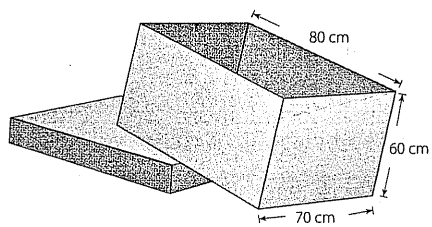


Figura 2.25

   Además, quiere que los cubos sean del mayor tamaño posible. ¿Qué dimensiones deben tener los cubos?, ¿con cuántos cubos llena la caja?

   b. Julián necesita cortar tres rollos de alambre de 75 m, 250 m y 525 m en trozos tan grandes como sea posible sin desperdiciar nada de material. Si los trozos de alambre deben tener la misma longitud, ¿cuánto deben medir?

Comunicar y representar

Explica

4. Si tienes un número *a*, ¿cómo puedes diferenciar los divisores de *a* de los múltiplos de *a*?

5. Explica con tus propias palabras qué significa:

   a. Ser el divisor de un número.

   b. Ser divisor común de varios números.

   c. Ser el máximo común divisor de varios números.

Pensar y razonar

Infiere

6. Escribe en cada diagrama un número apropiado de modo que el número de la parte inferior sea el m. c. d.

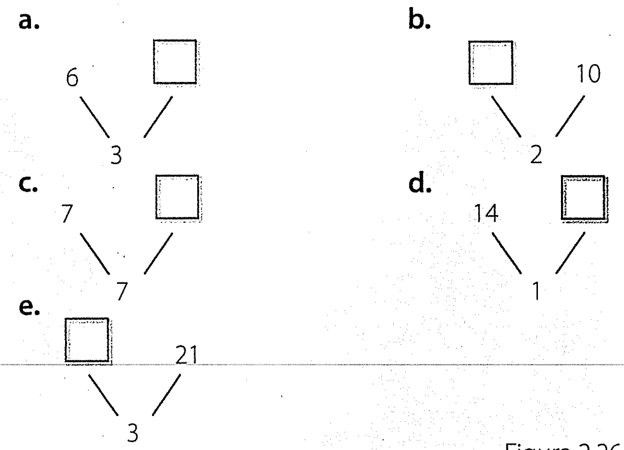


Figura 2.26

7. Dos números que sólo tienen a 1 como factor común se llaman "primos entre sí" o "primos relativos"; por ejemplo, 2 y 3.

   a. Encuentra tres nuevas parejas de números que sean primos relativos.

   b. ¿Cuál es el m. c. d. de dos números que son primos relativos?

Evalúa

1. Encuentra el máximo común divisor de:

   a. 5 y 20 **b.** 14 y 21

2. El salón comunal de un conjunto residencial tiene forma rectangular y mide 15 m de largo y 7 m de ancho. Si se quiere cubrir todo el piso con baldosas cuadradas del mismo tamaño:

   a. ¿Cuál debe ser la medida del lado de cada baldosa?

   b. ¿Cuántas baldosas se necesitan?

Desempeños

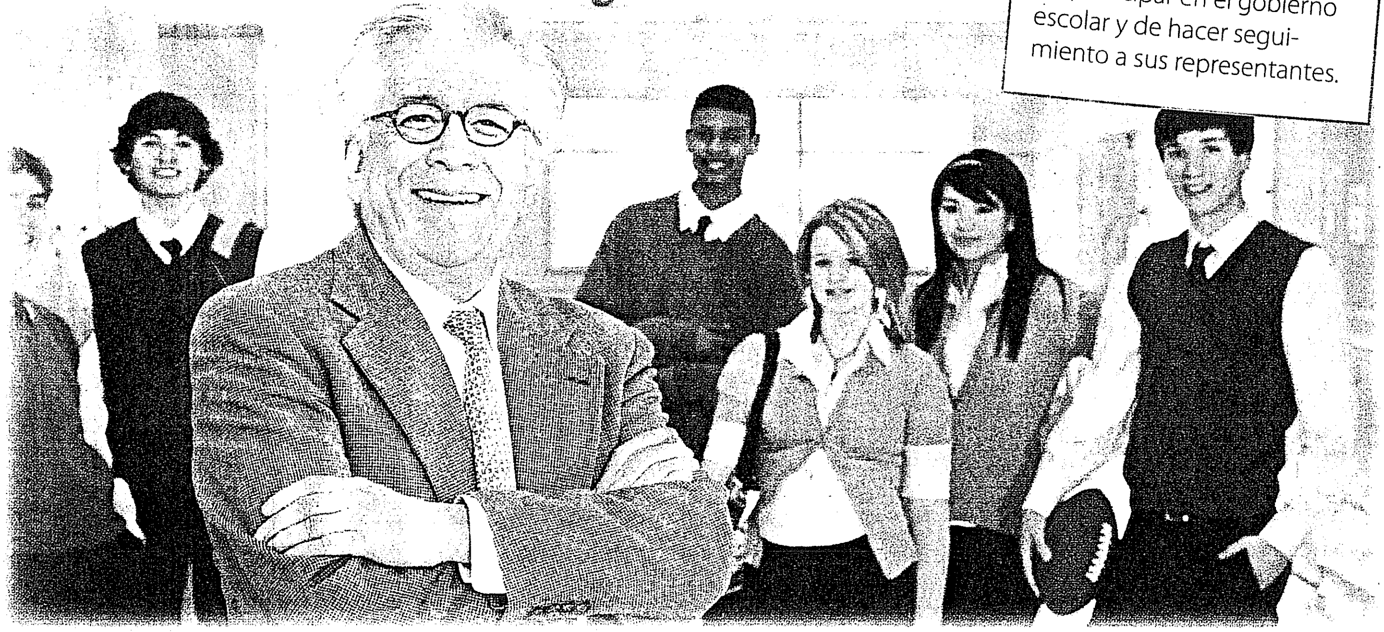
- Encuentra el máximo común divisor de dos o más números.
- Resuelve situaciones que involucran el concepto de máximo común divisor.

Practica más, pág. 312.

El gobierno escolar

Competencia ciudadana

Comprendo la importancia de participar en el gobierno escolar y de hacer seguimiento a sus representantes.



La Ley General de Educación, en el artículo 142, establece que todo plantel educativo debe tener un gobierno escolar. Su propósito es integrar a los miembros de la comunidad educativa y promover una gestión democrática en el interior de la institución educativa; debe orientar, dirigir y administrar la institución en aspectos pedagógicos, académicos, administrativos, financieros, culturales y sociales.

El diagrama de la figura 2.27, muestra los órganos que tienen voz y voto y que conforman el gobierno escolar.

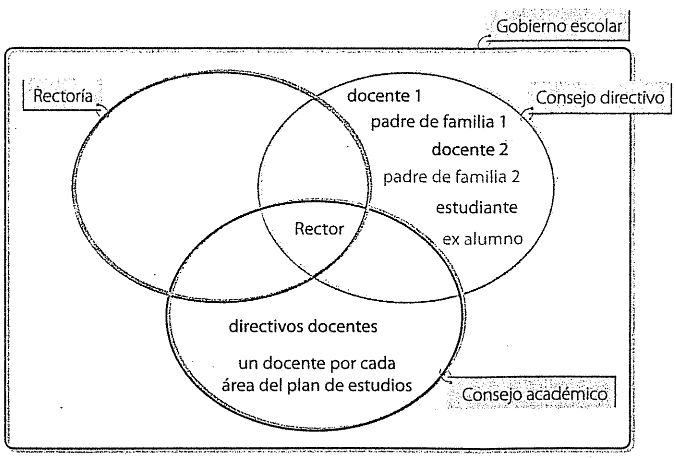


Figura 2.27

Los integrantes que tienen voz pero no tienen voto en el gobierno escolar son el personero, los miembros del comité de convivencia, los miembros de la contraloría estudiantil, los integrantes del consejo estudiantil, los integrantes de la asociación de padres de familia y los miembros de la asociación de ex alumnos.

Infiere

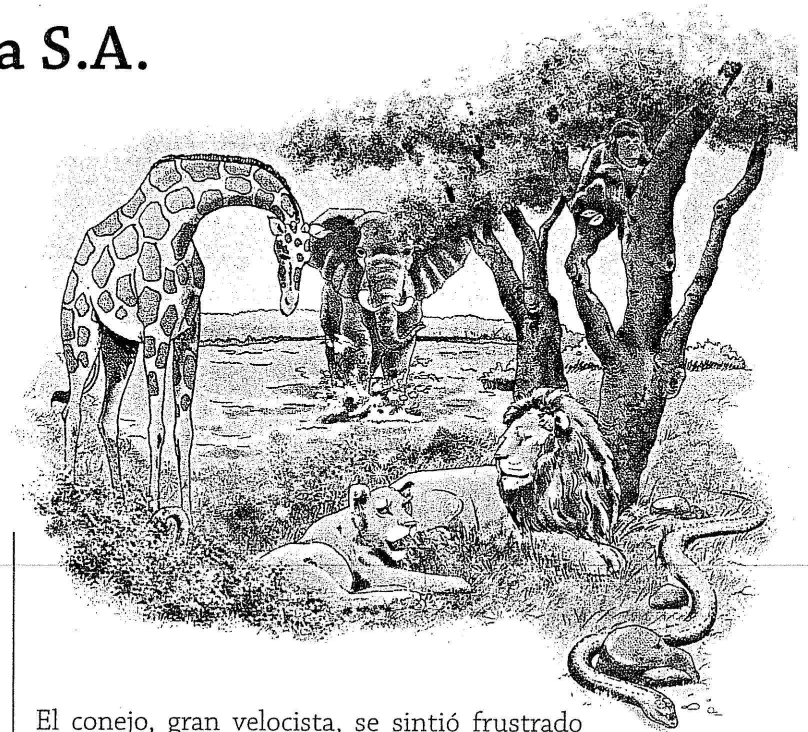
1. La persona encargada de ejecutar las decisiones del gobierno escolar hace parte de los 3 órganos que tienen voz y voto, ¿quién es?
2. ¿Cuántas personas hacen parte del consejo directivo?

Selva S.A.

Competencia Interpersonal

Liderazgo

Identificar las necesidades de un grupo e influir positivamente en él, para convocarlo, organizarlo, comprometerlo y canalizar sus ideas, fortalezas y recursos con el fin de alcanzar beneficios colectivos, actuando como agente de cambio mediante acciones y proyectos.



El león, gerente de "Selva S.A.", buscaba el mejor camino para lograr la excelencia y convocó a sus ejecutivos a una convención, en la que todos participaron durante 3 días.

La reunión estuvo orientada en los factores de éxito por fortalecer.

El conejo propuso que para lograr la excelencia todos debían estar preparados para correr veloces con el fin de no ser presa del peligro.

La ardilla propuso desarrollar la capacidad de trepar y escalar, ya que desde lo alto de los árboles podía verse todo con más amplitud.

Un pato dijo que lo más importante era la capacidad de nadar para atravesar los ríos de "Selva S.A."

El águila señaló la capacidad de volar como el elemento clave para el desarrollo del éxito.

Así continuaron el resto de los animales, señalando otros atributos importantes como la capacidad de ver en la oscuridad, o tener colmillos y garras fuertes, etc. Ante la diversidad de ideas, el león conformó un consejo de consulta y seleccionaron los elementos de éxito: correr, escalar, nadar y volar.

Acto seguido el león encargó al departamento de entrenamiento para preparar a todos los animales en el dominio de esas capacidades; pero por más que practicaron, no lograban su cometido.

El pato, excelente nadador, tenía dificultad para correr y como corría lentamente tenía menos tiempo para nadar y al final las patas se le hincharon. Dejó de nadar para descansar.

El conejo, gran velocista, se sintió frustrado por no poder nadar.

La ardilla, excelente en el arte de escalar, se lesionó en las clases de vuelo y también sacó notas muy bajas en carrera y natación.

Al mes se presentaron las evaluaciones y al ver los resultados, el león decidió que todo quedara como antes y propuso la siguiente moraleja:

Lo más importante es la capacidad de trabajar en equipo, colaborando y cooperando unos con otros. Esto es más apropiado que tratar de hacer mejor lo que saben hacer los demás.

Texto tomado y adaptado de
http://www.geocities.com/wialo_al/fabula.htm.

Interpreta

1. ¿Por qué el león tomó la decisión de que todo volviera a ser como antes?
2. Elabora una lista de las cualidades que son importantes cuando un grupo de personas emprende un proyecto.

Desempeño

- Comprende el impacto de las acciones individuales frente a la colectividad.

Evalúa tu pensamiento crítico

Las siguientes actividades te indicarán el nivel de competencia que has alcanzado y determinarán los desempeños que evidencian tu acción de aprendizaje.

Ejercitar procedimientos

Interpreta

1. Observa en detalle los elementos de los siguientes conjuntos y descubre la característica que tienen en común. Luego escríbelos por comprensión.

a. $F = \{4, 6, 8, 9\}$

b. $G = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, \ldots\}$

c. $H = \{23, 29\}$

d. $J = \{1, 17\}$

2. De acuerdo con la información del diagrama de Venn de la figura 2.28.

a. Determina si cada expresión es verdadera (V) o falsa (F). Justifica tu respuesta.

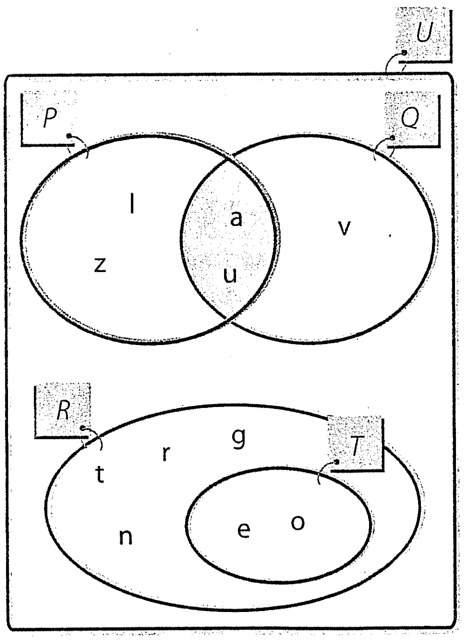


Figura 2.28

- $T \subset R$
- $P \subset Q$
- $Q \not\subset U$
- $e \in R$
- $v \in P$
- $o \notin T$
- $T \cap R = T$
- $T \cup R =$ {vocales de la palabra *negro*}

b. Si $U =$ {letras del alfabeto}, encuentra $(P \cup Q \cup R)^c$.

Comunicar y representar

Explica

3. Completa cada diagrama de la figura 2.29 con el m. c. m. y el m. c. d. de cada pareja de números así: en el rectángulo azul el m. c. m. y en el rectángulo naranja el m. c. d.

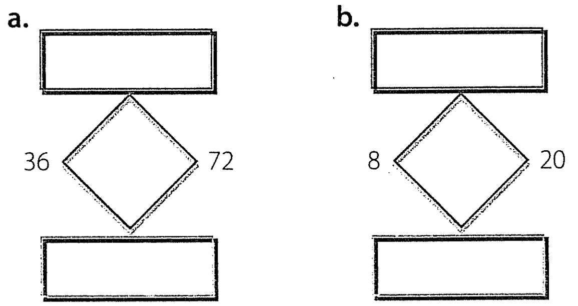


Figura 2.29

Pensar y razonar

Infiere

4. Con tarjetas marcadas con los dígitos 0, 1, 4 y 6 se pueden formar números de hasta 4 cifras. Completa:

a. El mayor número primo de dos cifras que se puede formar es _________.

b. El múltiplo común de 4, 5 y 16 que se puede formar es _________.

c. El divisor de 100 que se obtiene es: _________.

d. La cantidad de múltiplos de 5 usando tres tarjetas es _________.

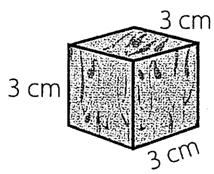
e. La cantidad de múltiplos de 3 que se pueden formar con las 4 tarjetas es: _________.

Plantear y resolver problemas

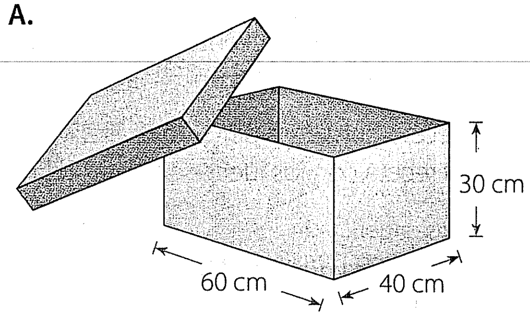
Analiza

5. Resuelve.

   a. ¿Cuál de las siguientes cajas puede contener, exactamente, cubos de 3 cm de arista?



A.



B.

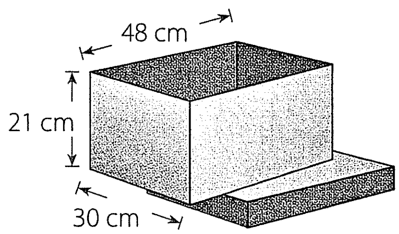


Figura 2.30

   b. Si quieres repartir 48 manzanas rojas y 60 manzanas verdes en bolsas que tengan igual cantidad de manzanas, sin mezclar las dos variedades y usando un mínimo de bolsas, ¿cuántas manzanas debes guardar en cada bolsa y cuántas bolsas necesitas?

   c. Los integrantes del consejo estudiantil del colegio tienen reunión cada 3 semanas y los integrantes de la asociación de padres de familia, cada 4 semanas. Si acordaron un primer encuentro conjunto en la sala de audiovisuales, ¿cada cuántas semanas se pueden volver a encontrar las dos asociaciones?

Autoevaluación

	Bajo	Básico	Alto	Superior
Interpreto y uso conjuntos determinados por extensión, comprensión o representados en diagrama de Venn.				
Uso correctamente las relaciones de pertenencia y contenencia.				
Realizo operaciones entre conjuntos.				
Resuelvo situaciones que involucran los conceptos de múltiplo, divisor, número primo, número compuesto, m. c. m. y m. c. d.				
Aplico criterios de divisibilidad en el desarrollo de procesos que requieren divisiones.				
Encuentro el m. c. m. y el m. c. d. de dos o más números.				
Me interesan las cosas que aprendo en matemáticas.				

Unidad 3

Pensamiento numérico

Números fraccionarios

Situación problema

En un concurso de recetas para tortas que organiza anualmente la pastelería *Deli torta*, participaron 25 pasteleros con variadas y originales recetas.

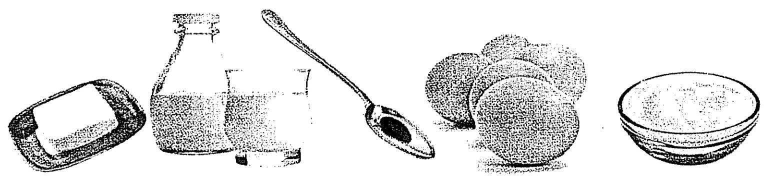
Los jueces encargados de evaluar todas las recetas fueron algunos clientes de la pastelería, quienes degustaron las diferentes tortas, las cuales eran todas del mismo tamaño.

Aunque 5 personas prepararon torta de vainilla, la receta ganadora por su sencillez y delicioso sabor fue la de la señora Inés, quien compartió la receta con los jueces después de recibir su premio.

Receta de torta de vainilla

Ingredientes

4	tazas de harina	2	tazas de azúcar
$2\frac{1}{2}$	tazas de leche	1	barra de margarina
$\frac{1}{4}$	cucharadita de esencia de vainilla	5	huevos

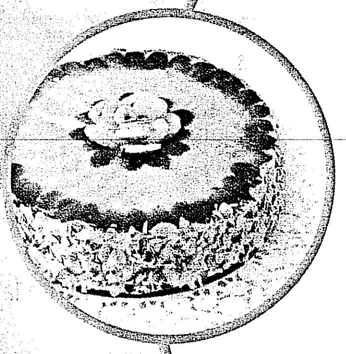


Preparación

Derretir la mantequilla y mezclarla con el azúcar. Agregar media taza de harina, media taza de leche y un huevo; mezclar y repetir el proceso hasta terminar con todos los ingredientes. Finalmente, agregar la vainilla.

En un molde preferiblemente de aluminio, previamente engrasado con mantequilla y polvoreado con harina, agregar la masa de la torta. Introducir en el horno precalentado y dejar cocinar aproximadamente $\frac{3}{4}$ de hora.

Desarrolla pensamiento crítico



Interpreta

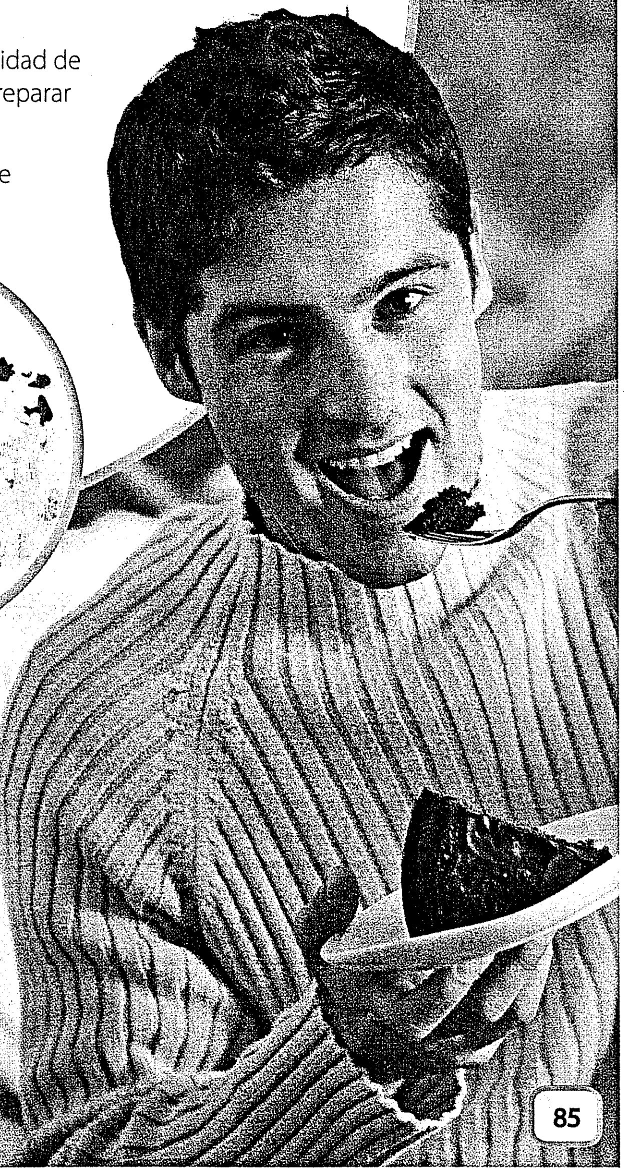
1. ¿Qué números fraccionarios aparecen en la receta de la señora Inés?
2. Si se repartió la torta de vainilla elaborada por la señora Inés entre 8 personas, de tal forma que todas las porciones tenían el mismo tamaño, ¿qué fracción le correspondió a cada persona?

Infiere

3. ¿Qué parte del total de concursantes preparó torta de vainilla?

Analiza

4. Representa mediante un dibujo la cantidad de tazas de leche que se necesitan para preparar la receta.
5. Según la receta, ¿cuántos minutos debe estar la mezcla dentro del horno?



Ecuaciones de tipo aditivo y multiplicativo

Lección Digital norma

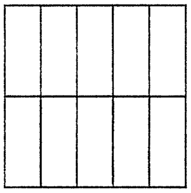
Las ecuaciones aditivas y multiplicativas con números fraccionarios se pueden transformar en ecuaciones del mismo tipo pero con números enteros. Repasa tu lección digital en **http://www.normaparapensar.com** y amplía tus conocimientos.

Tema 18

Significados de la fracción

Ideas previas

1. Escribe la fracción que se representa en cada caso y cómo se lee:

a. 

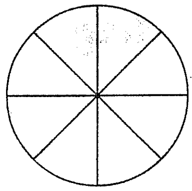
b. 

Figura 3.1

2. Representa gráficamente las fracciones $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$ y $\frac{4}{4}$.

Analiza

En un salón de sexto grado hay 35 estudiantes, de los cuales 20 son niñas y 15 son niños.

¿Qué fracción del total de estudiantes representa la cantidad de niñas?

Como hay 20 niñas de un total de 35 estudiantes, la fracción que representa la cantidad de niñas es: $\frac{20}{35}$

El número $\frac{20}{35}$ es un **número fraccionario**; 20 es el **numerador** y representa la cantidad de niñas que hay, 35 es el **denominador** y representa la cantidad total de estudiantes.

Ejemplo

Si del total de niños del salón, 10 usan gafas, ¿qué fracción representa dicha situación?

Solución

Como el total de niños es 15, este número representa el denominador de la fracción. De esos 15, 10 usan gafas, es decir, $\frac{10}{15}$.

Infiere y resuelve

¿Qué fracción representa la cantidad de niños que no usan gafas?, ¿cuál es el numerador en dicha fracción?, ¿cuál es el denominador?

Con un número **fraccionario** comparamos una parte con el todo o unidad. Estos números se representan de la forma $\frac{a}{b}$, con b diferente de cero. El número a es el **numerador** e indica las partes que estamos considerando, y el número b es el **denominador** e indica las partes iguales en que dividimos el todo o la unidad.

Problema del día

Con frecuencia usamos fracciones en la vida diaria. Por ejemplo, media libra de arroz, media hora, o un cuarto de queso. Escribe cinco expresiones en las que utilices fracciones en tu vida diaria.

Ejemplo

Veamos cómo representar la fracción $\frac{3}{5}$ si la unidad es

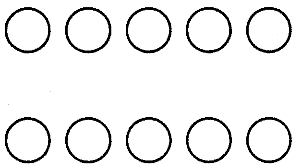


Figura 3.2

Solución

La fracción $\frac{3}{5}$ indica que debemos formar 5 grupos con igual cantidad de elementos y tomar 3 grupos, entonces $\frac{3}{5}$ de $10 = 6$ (*ver* figura 3.3).

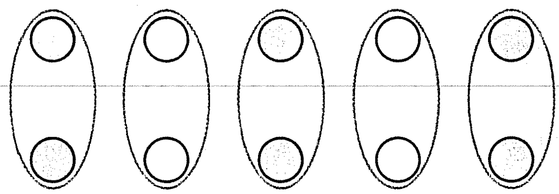
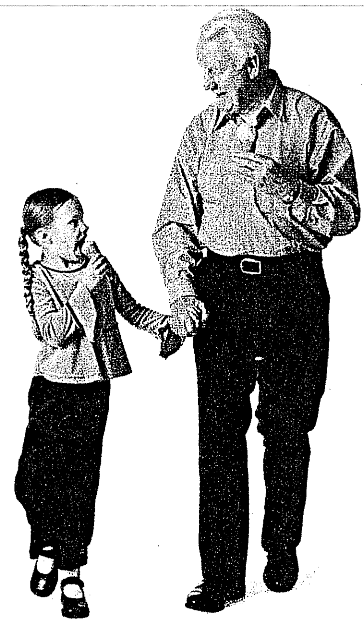


Figura 3.3

Problema del día

¿Qué es mayor: un cuarto de hora o la tercera parte de dos horas?

Otros significados de la fracción



Don Jerónimo, el abuelo de Diana tiene 50 años. Si Diana tiene la quinta parte de la edad de su abuelo, ¿qué edad tiene Diana?

La quinta parte de un número se obtiene dividiendo el número por cinco: $50 \div 5 = 10$. Es decir, Diana tiene 10 años.

Al aplicar la fracción $\frac{1}{5}$ a 50, ésta actuó como un **reductor**, pues la edad de Diana es menor que la edad de su abuelo.

Interpreta y resuelve

Don Tomás, un amigo de don Jerónimo, tiene $\frac{3}{2}$ de la edad de él. Calcula primero $\frac{1}{2}$ de la edad de don Jerónimo. Ahora multiplica el resultado que obtuviste por 3. ¿Cuántos años tiene don Tomás?

Al dividir un número por 2 y multiplicar el resultado por 3, estamos hallando los $\frac{3}{2}$ del número original. En este caso, la fracción $\frac{3}{2}$ actúa como **ampliadora**.

> Las fracciones pueden utilizarse como **operadores**, los cuales reducen o amplían cantidades.

Los lápices que observas en la figura 3.4 están organizados en grupos de 3 lápices rojos y 4 lápices azules cada uno.

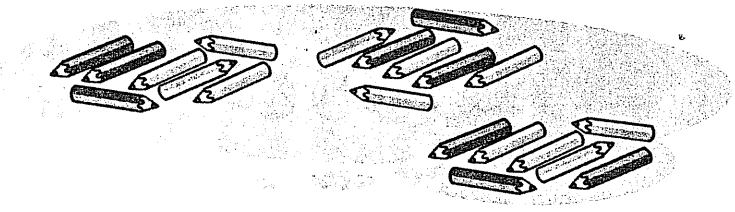


Figura 3.4

Para comparar la cantidad de lápices rojos con la de lápices azules, podemos utilizar las siguientes expresiones:

- Por cada 3 lápices rojos hay 4 azules.
- La cantidad de lápices rojos es a la de azules como 3 es a 4.
- La cantidad de lápices rojos es los tres cuartos $\left(\frac{3}{4}\right)$ de los azules.

Infiere y explica

¿Cómo puedes comparar la cantidad de lápices azules con la cantidad de lápices rojos?

Las fracciones permiten **comparar** cantidades de la misma magnitud. En este caso la fracción se llama **razón**.

Un automóvil recorre 160 kilómetros en dos horas; si mantiene su rapidez en todo el recorrido, decimos que la **rapidez** del automóvil es 80 kilómetros por cada hora. Esta expresión la podemos representar mediante la fracción:

$$\text{Rapidez} = \frac{160 \text{ kilómetros}}{2 \text{ horas}} = \frac{80 \text{ kilómetros}}{\text{hora}}$$

La comparación entre dos cantidades de diferente magnitud también se puede expresar empleando fracciones. En este caso, la fracción se interpreta como un **cociente**.

Ejemplo

¿Cuál es el rendimiento del automóvil, si para recorrer los 160 kilómetros consume 5 galones de gasolina?

Solución

El rendimiento de un automóvil se calcula hallando el cociente entre el número de kilómetros recorridos y la cantidad de combustible que gasta para recorrerlos. Así:

$$\text{rendimiento} = \frac{160 \text{ kilómetros}}{5 \text{ galones}} = \frac{32 \text{ kilómetros}}{\text{galón}}$$

¿Qué significa?

La relación entre la distancia recorrida y el tiempo empleado en recorrerla se denomina **rapidez**.

El diámetro de un tubo de agua se mide en pulgadas o fracción de **pulgadas**. Debido a esto, los plomeros nombran las llaves que utilizan para abrir los tubos con expresiones como "la llave de media" o "la llave de tres cuartos".

> Con las fracciones representamos **cantidades no enteras** de alguna medida.

¿Qué significa?

La **pulgada** es una unidad de longitud antropométrica que equivale aproximadamente a la longitud de un dedo pulgar.

Desarrolla pensamiento crítico

Ejercitar procedimientos

Interpreta

1. Completa los espacios con el número correspondiente para que la igualdad sea verdadera.

   a. $\frac{1}{6}$ de $42 = \square$ **b.** $\frac{1}{8}$ de $80 = \square$

   c. $\frac{4}{5}$ de $20 = \square$ **d.** $\frac{7}{3}$ de $300 = \square$

   e. $\square$ de $45 = 5$ **f.** $\square$ de $100 = 10$

   g. $\frac{1}{3}$ de $\square = 16$ **h.** $\frac{9}{2}$ de $\square = 18$

2. Escribe cada expresión utilizando fracciones:

   a. En el colegio, por cada 2 niños hay 3 niñas.

   b. Por cada paraguas amarillo que se produce en una fábrica, se producen 5 azules.

   c. Por cada 7 carros hay 2 taxis.

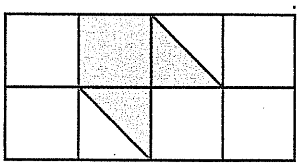
   d. Por cada 5 cuadernos rayados hay 3 cuadriculados.

Comunicar y representar

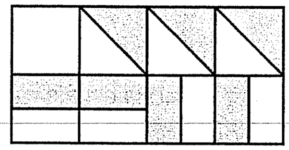
Explica

3. Escribe la fracción que representa la parte coloreada y la no coloreada, en cada figura.

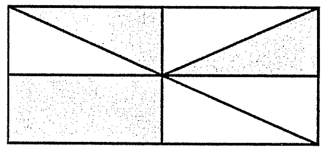
   a.



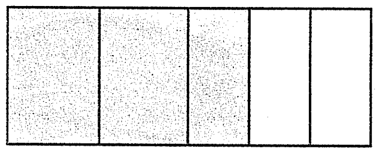
   b.



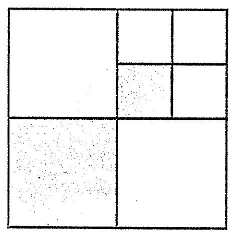
   c.



   d.



   e.



   f.

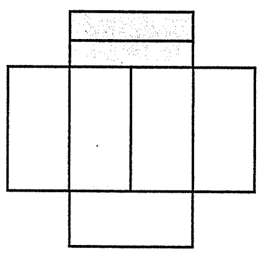


Figura 3.5

4. Representa gráficamente cada fracción.

a. $\frac{6}{7}$ b. $\frac{7}{20}$

c. $\frac{3}{11}$ d. $\frac{17}{22}$

Pensar y razonar

Infiere

5. En el siguiente plano la escala que se usó es 1:1000; esto significa que cada cm del dibujo corresponde a 1000 cm de la realidad. Determina la distancia entre:

a. El hotel y la piscina.

b. El lago y la entrada.

c. El kiosco y el lago.

d. La piscina y el kiosco.

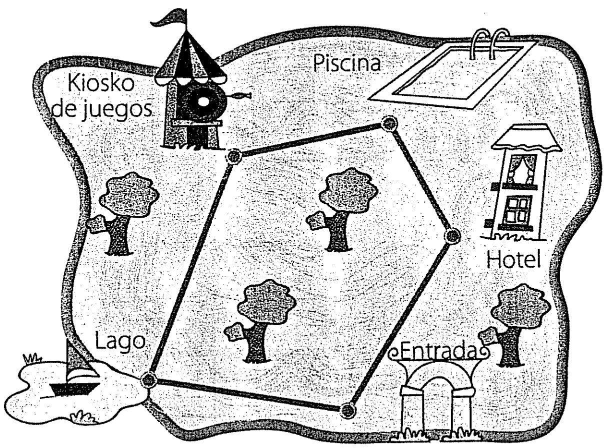


Figura 3.6

6. ¿Cuál es el número de cuadrados que se deben colorear para representar $\frac{3}{8}$ de la figura 3.7?

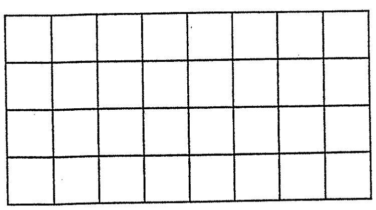
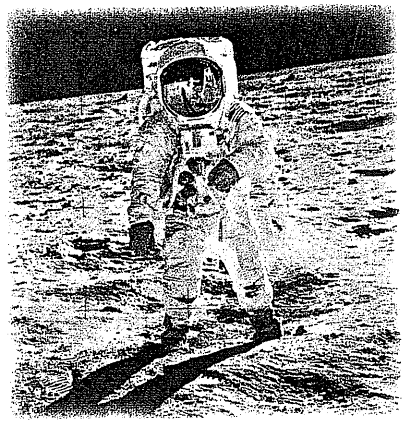


Figura 3.7

Plantear y resolver problemas

Analiza

7. El peso de un objeto en la Luna es un sexto del peso que tiene en la Tierra. Si una persona pesa en la Tierra 72 kg, ¿cuál es el peso de esta persona en la Luna?



8. Fanny recibió $ 2 500 000 por un trabajo que realizó. La décima parte la utilizó para comprar ropa, con los tres quintos de lo que le quedó, pagó un viaje y el resto del dinero lo ahorró. ¿Cuánto gastó en ropa?, ¿cuánto pagó por el viaje?, ¿cuánto dinero ahorró?

Evalúa

Relaciona cada expresión con el significado de la fracción que le corresponde.

☐ La quinta parte de $ 28 500

☐ La imagen de la cédula en la fotocopia es cinco tercios del tamaño original de la cédula.

☐ Por cada 2 rosas rojas hay 3 amarillas.

☐ Un tubo de $\frac{3}{4}$ de pulgada.

☐ Un auto recorre 100 kilómetros en una hora.

a. Fracción como razón.

b. Fracción como cociente.

c. Fracción como un operador ampliador.

d. Fracción como una cantidad no entera de alguna medida.

e. Fracción como parte de un todo.

Desempeño

- Interpreta las fracciones en diferentes contextos.

Practica más, pág. 313.

Tema 19

Clases de fracciones y números mixtos

Ideas previas

1. ¿Qué diferencia hay entre las fracciones $\frac{7}{2}$ y $\frac{2}{7}$?
2. En cada caso escribe y representa gráficamente una fracción que cumpla con las condiciones dadas.

   a. El numerador es menor que el denominador.

   b. El numerador es mayor que el denominador.

   c. El numerador y el denominador son iguales.

   d. Una fracción en la que el numerador es múltiplo del denominador.

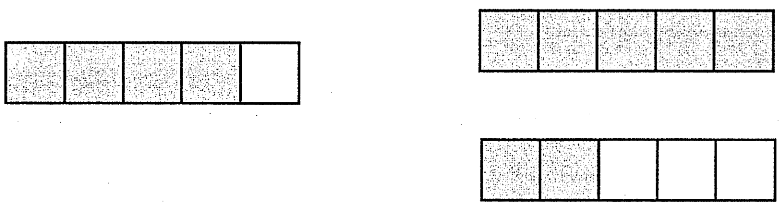
Interpreta

Carlos representó en un rectángulo la fracción $\frac{4}{5}$. Para representar $\frac{7}{5}$ notó que un solo rectángulo no era suficiente. ¿Cuántos rectángulos debió usar?

Para representar $\frac{4}{5}$ necesitó un rectángulo dividido en 5 partes iguales, de las cuales pintó 4. En este caso, el rectángulo es la unidad y decimos que la fracción es propia.

En el caso de $\frac{7}{5}$, necesitó usar dos unidades: dividió cada unidad en 5 partes iguales y pintó 5 partes de una y 2 de la otra. Decimos que la fracción es **impropia**.

Veamos la representación de las dos fracciones en la figura 3.8.



La parte morada representa $\frac{4}{5}$ La parte morada representa $\frac{7}{5}$

Figura 3.8

Analiza y responde

Representa la fracción $\frac{5}{5}$. ¿Por qué es correcto afirmar que $\frac{5}{5}$ es una fracción igual a la unidad?

Una fracción puede ser **propia**, si es menor que la unidad, **impropia** si es mayor que la unidad, o ser **igual a la unidad**.

Problema del día

Compara el numerador y el denominador de una fracción propia. ¿Qué relación de orden hay entre ellos?

Compara el numerador y el denominador de una fracción impropia. ¿Qué relación de orden hay entre ellos?

Compara el numerador y el denominador de una fracción igual a la unidad. ¿Qué relación de orden hay entre ellos?

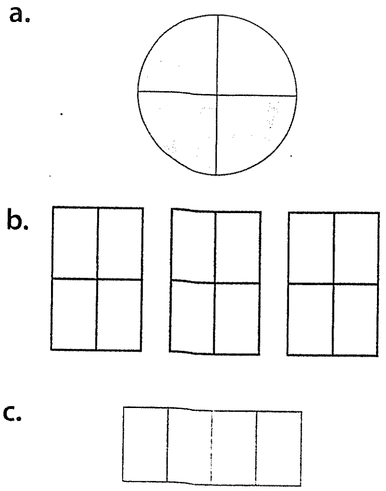


Figura 3. 9

Ejemplo

Clasifiquemos cada una de las fracciones representadas en la figura 3.9 en propia, impropia o igual a la unidad.

Solución

a. $\frac{3}{4}$ es una fracción propia.

b. $\frac{11}{4}$ es una fracción impropia.

c. $\frac{4}{4}$ es una fracción igual a la unidad.

Analiza

Decir que Carolina tarda $\frac{11}{4}$ de hora en hacer su tarea es lo mismo que afirmar que gasta $2\frac{3}{4}$ horas. Observemos la representación de $\frac{11}{4}$ en la figura 3.10; podemos ver que usamos tres unidades: dos unidades completas y otra en la que hemos representado la fracción tres cuartos. Se lee "dos enteros y tres cuartos".

A este tipo de fracciones las llamamos **números mixtos**, puesto que son una combinación de un número entero y una fracción.

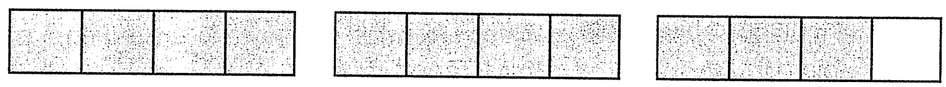


Figura 3.10

Interpreta y aplica

Alberto gasta $\frac{9}{4}$ horas en hacer la misma tarea que Carolina. Representa gráficamente la fracción. Escribe la fracción como un número mixto.

> Un **número mixto** está formado por una parte entera y una fracción propia.

Interpreta

Volvamos a la **situación problema** del inicio de la unidad y representemos mediante un dibujo la cantidad de tazas de leche que se necesitan para preparar la receta.

Para la elaboración de la receta se necesitan $2\frac{1}{2}$ tazas de leche (*ver* figura 3.11). Si observamos la figura 3.11 podemos determinar que otra forma de expresar la cantidad de leche, es con la fracción $\frac{5}{2}$.

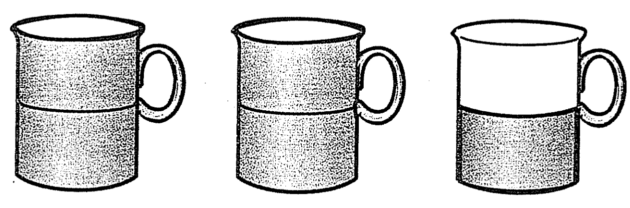


Figura 3.11

Conversiones

¿Cómo expresamos una fracción impropia como un número mixto?

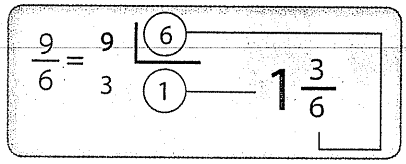
Toda fracción impropia puede expresarse como número mixto, aplicando los siguientes pasos:

1. Dividimos el numerador por el denominador.
2. Tomamos el cociente de la división como el número entero.
3. Tomamos el residuo como el numerador de la parte fraccionaria.
4. Dejamos el mismo denominador de la fracción inicial para el denominador de la parte fraccionaria.

Ejemplo

Expresemos la fracción $\frac{9}{6}$ como número mixto.

Solución



Por tanto, $\frac{9}{6} = 1\frac{3}{6}$

¿Cómo expresamos un número mixto como fracción impropia?

Para expresar un número mixto como una fracción impropia aplicamos el siguiente procedimiento:

1. Multiplicamos el número entero por el denominador de la fracción y al resultado le adicionamos el numerador de la fracción. El resultado será el numerador de la fracción impropia.
2. El denominador de la parte fraccionaria será el denominador de la fracción impropia.

Ejemplo

Expresemos el número mixto $2\frac{3}{4}$ como una fracción impropia.

Solución

1. Multiplicamos el número entero por el denominador de la fracción:

$$2 \times 4 = 8.$$

2. Al resultado le sumamos el numerador de la fracción:

$$8 + 3 = 11$$

   11 es el numerador de la fracción impropia.

3. El denominador de la parte fraccionaria es 4, entonces 4 será el denominador de la fracción impropia.

Entonces, $2\frac{3}{4} = \frac{(2 \times 4) + 3}{4} = \frac{8 + 3}{4} = \frac{11}{4}$

Problema del día

En la fracción $\frac{15}{3}$ el numerador es múltiplo del denominador. ¿Puede esta fracción representarse como un número mixto?

Ciencia y tecnología

Algunas calculadoras tienen una tecla que permite trabajar con fracciones. Veamos cómo usarla.

a. Convirtamos la fracción impropia $\frac{25}{4}$ a número mixto.

Tecleamos: 25 $\boxed{a\frac{b}{c}}$ 4 $\boxed{=}$

En la pantalla aparece 6 ⌋ 1 ⌋ 4 que se

interpreta como $6\frac{1}{4}$.

b. Convirtamos el número mixto $7\frac{2}{3}$ a fracción.

Tecleamos 7 $\boxed{a\frac{b}{c}}$ 2 $\boxed{a\frac{b}{c}}$ 3

$\boxed{shift}$ $\boxed{a\frac{b}{c}}$

Interpreta y resuelve

Utiliza la calculadora y escribe la fracción $\frac{17}{5}$ como número mixto. Luego con la calculadora convierte a fracción impropia el número $23\frac{11}{13}$.

Desarrolla pensamiento crítico

Ejercitar procedimientos

Interpreta

1. Escribe y representa gráficamente 3 fracciones propias.

2. Escribe y representa gráficamente 3 fracciones impropias.

3. Escribe como fracción impropia cada número mixto.

a. $2\frac{3}{5}$ **b.** $2\frac{1}{9}$

c. $4\frac{2}{11}$ **d.** $7\frac{2}{3}$

4. Escribe como número mixto cada fracción impropia.

a. $\frac{6}{5}$ **b.** $\frac{15}{6}$

c. $\frac{21}{8}$ **d.** $\frac{23}{7}$

Comunicar y representar

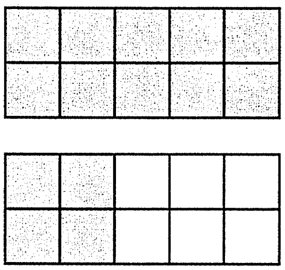
Explica

5. Escribe un argumento que justifique la siguiente afirmación: una fracción propia no puede representarse como número mixto.

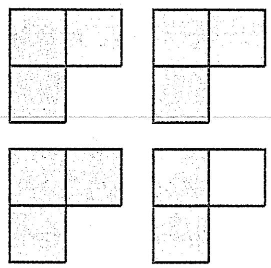
6. Explica por qué no es correcto escribir $4\frac{7}{3}$.

7. Escribe el número mixto representado en cada caso.

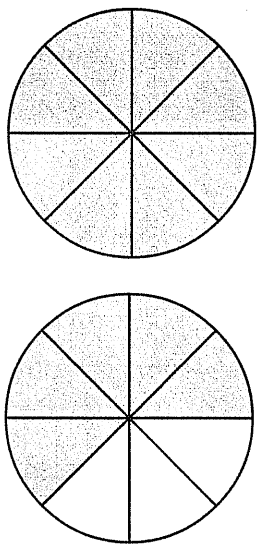
a.



b.



c.



d.

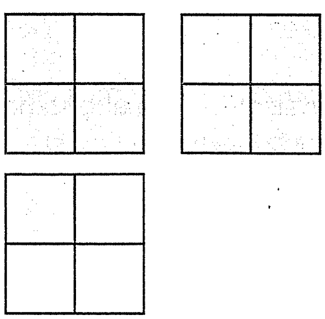


Figura 3.12

8. ¿Cuántas fracciones se pueden escribir que sean propias y que tengan como denominador 10? Argumenta tu respuesta.

9. ¿Por qué no es posible tener una fracción impropia cuyo numerador sea uno? Justifica tu respuesta.

Plantear y resolver problemas ....

Analiza

10. Elkin multiplicó un número por $2\frac{1}{4}$ y obtuvo 72. ¿Cuál fue el número que multiplicó?

11. Lina compró $1\frac{3}{4}$ libras de carne. ¿Cuánta carne más debe comprar para completar dos libras?

Evalúa

1. Señala las fracciones propias con color rojo, las impropias con color azul y las iguales a la unidad, con color verde.

$$\frac{7}{4}, \frac{45}{45}, \frac{8}{8}, \frac{6}{11}, \frac{9}{17}, \frac{10}{3}, \frac{10}{29}, \frac{29}{10}$$

2. Completa la tabla 3.1.

Fracción impropia		$\frac{26}{11}$		$\frac{9}{7}$		$\frac{51}{10}$
Número mixto	$4\frac{2}{9}$		$10\frac{1}{5}$		$9\frac{4}{7}$	

Tabla 3.1

Desempeños

- Identifica fracciones propias, fracciones impropias y fracciones iguales a la unidad.
- Escribe números mixtos como fracciones impropias y viceversa.

Practica más, pág. 313.

Tema 20

Fracciones equivalentes

Ideas previas

1. Representa gráficamente las siguientes fracciones.

a. $\frac{1}{4}$ **b.** $\frac{2}{8}$ **c.** $\frac{4}{16}$

2. Halla el m. c. d. de cada pareja de números.

a. 6 y 18 **b.** 24 y 28 **c.** 100 y 10

Analiza

Camila y Diana deben realizar entre ambas 48 ejercicios de matemáticas. Para que las dos resuelvan la misma cantidad, Camila asegura que ella debe desarrollar 24 ejercicios, porque en total son 48; entonces $\frac{24}{48}$ expresa la cantidad de ejercicios que debe hacer cada una. Diana afirma que cada una debe hacer exactamente la mitad, es decir, $\frac{1}{2}$ de los 48 ejercicios. ¿Quién de las dos tiene la razón?

24 es exactamente la mitad de 48, es decir, que la cantidad de ejercicios que debe hacer cada una es la mitad del total de ejercicios. Tanto Camila como Diana tienen la razón porque $\frac{1}{2}$ y $\frac{24}{48}$ representan la misma cantidad y se llaman fracciones equivalentes.

> Dos **fracciones** son **equivalentes** cuando representan la misma parte de un todo.

Ejemplo

Dibujemos otras fracciones equivalentes a $\frac{1}{2}$.

Solución

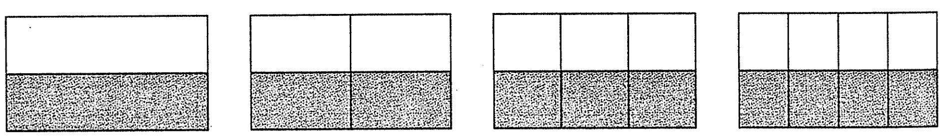


Figura 3.13

Cada una de las fracciones de la figura 3.13 es equivalente a $\frac{1}{2}$, por lo que escribimos: $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8}\ldots$

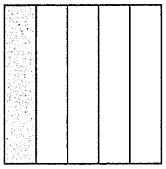
Podemos obtener fracciones equivalentes a $\frac{1}{2}$ multiplicando el numerador y el denominador por un mismo número diferente de cero:

$\frac{1 \times 2}{2 \times 2} = \frac{2}{4}$ $\frac{2}{4}$ es una fracción equivalente a $\frac{1}{2}$

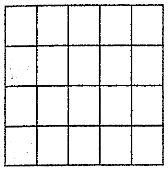
$\frac{1 \times 3}{2 \times 3} = \frac{3}{6}$ $\frac{3}{6}$ es otra fracción equivalente a $\frac{1}{2}$

Interpreta y resuelve

Selecciona las fracciones que son equivalentes a la fracción:

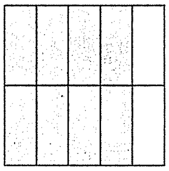


a.



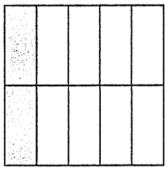
$\frac{4}{20}$

b.



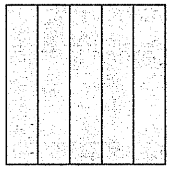
$\frac{8}{10}$

c.



$\frac{2}{10}$

d.



$\frac{5}{5}$

Figura 3.14

Al multiplicar el numerador y el denominador de una fracción por un mismo número natural, diferente de cero, obtenemos fracciones equivalentes. Este proceso se denomina **complificación** o **amplificación**.

Ejemplo

Complifiquemos por 9 la fracción $\frac{3}{4}$.

Solución

Multiplicamos por 9 tanto el numerador como el denominador:

$$\frac{3 \times 9}{4 \times 9} = \frac{27}{36}$$

Analiza y explica

¿Por qué es correcto afirmar que podemos obtener infinitas fracciones equivalentes a $\frac{1}{2}$ mediante complificación?

Otra forma de obtener fracciones equivalentes es por medio de la división.

Al dividir el numerador y el denominador de una fracción por un **divisor común**, diferente de uno, obtenemos una fracción equivalente. Este proceso se llama **simplificación**.

Ejemplo

Simplifiquemos por 3 la fracción $\frac{42}{36}$.

Solución

Como 3 es un divisor común de 36 y 42, podemos simplificar la fracción por 3:

$$\frac{42 \div 3}{36 \div 3} = \frac{14}{12}$$

Problema del día

Si un número divide a varios números a la vez sin dejar residuo, es un divisor común de dichos números. Si el único divisor común del numerador en una fracción es 1, la fracción es irreducible. ¿Es la fracción $\frac{1}{7}$ irreducible?

Una fracción está simplificada al máximo o es **irreducible** cuando el único divisor común del numerador y el denominador es 1. Una fracción se lleva a la forma irreducible simplificándola por el m. c. d. del numerador y el denominador.

Ejemplo

Llevemos la fracción $\frac{15}{45}$ a su forma irreducible.

Solución

Como m. c. d. (15, 45) = 15, entonces, simplificamos por 15.

$$\frac{15 \div 15}{45 \div 15} = \frac{1}{3}$$

Podemos observar que $\frac{1}{3}$ es una fracción irreducible.

Ciencia y tecnología

Las calculadoras diseñadas para trabajar con fracciones traen la tecla $a\frac{b}{c}$. Con una calculadora de estas puedes obtener fracciones irreducibles. Por ejemplo, simplifiquemos la fracción $\frac{12}{18}$:

1. Introducimos la fracción tecleando el 12, luego la tecla $a\frac{b}{c}$ y después el 18 (en la pantalla aparece la fracción en forma horizontal y en vez de la raya aparece el símbolo ⌋).
2. Oprimimos el $=$ y nos aparece 2 ⌋ 3, que corresponde a la fracción $\frac{2}{3}$, la cual está simplificada al máximo.

Interpreta y resuelve

Simplifica con una calculadora que tenga la tecla $a\frac{b}{c}$ las siguientes fracciones:

a. $\frac{8}{12}$

b. $\frac{15}{45}$

c. $\frac{102}{340}$

d. $\frac{480}{768}$

e. $\frac{512}{2048}$

f. $\frac{320}{186}$

Desarrolla pensamiento crítico

Ejercitar procedimientos

Interpreta

1. Complifica por 8 cada fracción.

   a. $\frac{3}{4}$ b. $\frac{8}{11}$ c. $\frac{5}{9}$ d. $\frac{8}{5}$ e. $\frac{11}{6}$

2. Simplifica cada fracción hasta hacerla irreducible.

   a. $\frac{16}{10}$ b. $\frac{30}{25}$ c. $\frac{33}{44}$

   d. $\frac{80}{90}$ e. $\frac{42}{54}$ f. $\frac{300}{100}$

Comunicar y representar

Explica

3. Relaciona las figuras que representan fracciones equivalentes:

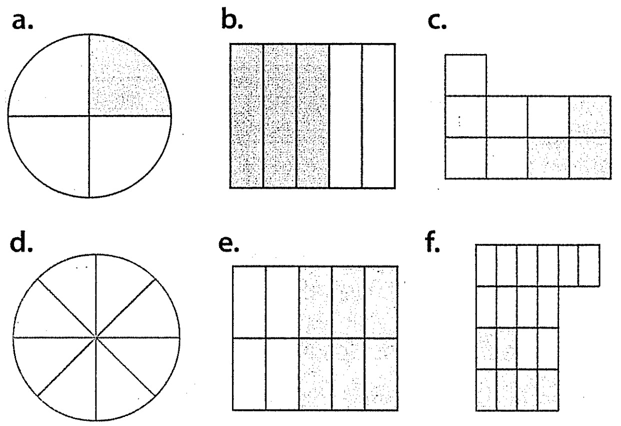


Figura 3.15

4. Al complificar una fracción es posible obtener infinitas fracciones equivalentes. ¿Ocurre lo mismo al simplificar una fracción? Justifica tu respuesta.

Pensar y razonar

Infiere

5. Una forma de verificar que dos fracciones son equivalentes es calculando sus productos cruzados y determinando si son iguales. Por ejemplo, $\frac{5}{8}$ y $\frac{15}{24}$ son equivalentes porque $5 \times 24 = 15 \times 8$. Halla los productos cruzados en cada caso para determinar cuáles de los siguientes pares de fracciones son equivalentes:

   a. $\frac{18}{7}, \frac{5}{2}$ b. $\frac{14}{21}, \frac{4}{6}$

   c. $\frac{12}{60}, \frac{2}{10}$ d. $\frac{5}{9}, \frac{10}{6}$

6. Escribe el número que falta para que las fracciones sean equivalentes:

   a. $\frac{5}{4} = \frac{\square}{24}$ b. $\frac{\square}{10} = \frac{35}{50}$

   c. $\frac{9}{4} = \frac{63}{\square}$ d. $\frac{10}{\square} = \frac{50}{55}$

7. Escribe un argumento que justifique la siguiente afirmación: "multiplicar el numerador y el denominador de una fracción por el mismo número es igual que multiplicar la fracción por otra fracción igual a la unidad".

Plantear y resolver problemas

Analiza

8. Encuentra una fracción equivalente a $\frac{3}{7}$ que tenga a 28 como denominador.

9. Encuentra una fracción equivalente a $\frac{3}{7}$ que tenga a 45 como numerador.

10. En una fiesta le dieron a Manuel $\frac{1}{4}$ de una pizza y a Rocío $\frac{2}{8}$ de la misma pizza. ¿Quién comió más pizza? Explica tu respuesta.

Evalúa

1. Relaciona las fracciones que son equivalentes.

   $\frac{13}{17}$ $\frac{9}{2}$ $\frac{8}{10}$ $\frac{33}{27}$

   $\frac{11}{9}$ $\frac{63}{14}$ $\frac{39}{51}$ $\frac{12}{15}$

2. Daniel gastó la quinta parte de sus ganancias y Marina $\frac{3}{15}$ de las suyas. ¿Quién gastó más? Justifica tu respuesta.

Desempeños

- Determina cuándo dos o más fracciones son equivalentes.
- Resuelve problemas relacionados con fracciones equivalentes.

Practica más, pág. 314.

Tema 21

Relaciones de orden en los números fraccionarios. Ubicación en la recta

Ideas previas

1. Ordena de mayor a menor los siguientes números: 89, 76, 98, 55, 101 y 68.
2. Halla el m. c. m. de cada pareja de números.
   a. (4, 12) **b.** (10, 12) **c.** (11, 7)
3. Dibuja tres segmentos de recta de la misma longitud. Con ayuda de una regla divide el primer segmento en dos partes iguales, el segundo segmento en cuatro partes iguales y el tercer segmento en 8 partes iguales.

Analiza

Para preparar un refresco de mora, Camilo mezcló en una jarra 5 vasos de agua con 4 cucharadas de un concentrado de mora. Lina preparó también refresco en otra jarra, pero ella mezcló 7 vasos de agua con 3 cucharadas del mismo concentrado. ¿Cuál de los dos refrescos quedó con más sabor a mora?

Establezcamos la relación entre el número de cucharadas del concentrado de mora y el número de vasos de agua de cada mezcla.

	Mezcla de Camilo	Mezcla de Lina
Número de cucharadas	4	3
Número de vasos de agua	5	7

Tabla 3.2

La fracción que representa la relación de los dos ingredientes en la bebida que preparó Camilo es $\frac{4}{5}$ y en la que preparó Lina es $\frac{3}{7}$.

Para analizar las mezclas comparamos las fracciones que representan la relación entre el número de cucharadas del concentrado de mora y el número de vasos de agua de cada mezcla.

Para establecer cuál de los dos refrescos quedó con más sabor a mora, debemos determinar cuál de las dos fracciones es mayor.

Las dos fracciones tienen diferente denominador; entonces, para compararlas buscamos fracciones equivalentes con el mismo denominador.

Infiere y verifica

Si las dos fracciones tuvieran el mismo denominador, para determinar cuál es la mayor bastaría con comparar los numeradores. Representa gráficamente las fracciones $\frac{3}{5}$ y $\frac{4}{5}$ usando la misma unidad y verifica que $\frac{4}{5} > \frac{3}{5}$.

¿Cómo obtenemos fracciones equivalentes que tengan el mismo denominador?

Buscamos el m. c. m. de los denominadores; en este caso, 5 y 7:

$$\text{m. c. m. } (5, 7) = 35$$

Buscamos los numeradores que faltan para que se tengan las equivalencias

$$\frac{3}{7} = \frac{\quad}{35} \text{ y } \frac{4}{5} = \frac{\quad}{35}$$

Complificamos la fracción $\frac{3}{7}$ por 5 y la fracción $\frac{4}{5}$ por 7, entonces:

$$\frac{3}{7} = \frac{15}{35} \text{ y } \frac{4}{5} = \frac{28}{35}$$

Las fracciones ya tienen el mismo denominador y podemos comparar los numeradores: $28 > 15$, entonces $\frac{4}{5} > \frac{3}{7}$. Por tanto, la bebida de Camilo tiene más sabor a mora.

Para comparar fracciones:

Si tienen el mismo denominador, es mayor la que tiene mayor numerador.
Si tienen diferente denominador, se buscan fracciones equivalentes con el mismo denominador y luego se comparan.

Problema del día

¿Cómo se pueden expresar los números naturales en forma de fracciones?

Ejemplo

Ordenemos de menor a mayor las fracciones $\frac{3}{7}$, $\frac{8}{7}$ y $\frac{6}{7}$.

Solución

Como tienen igual denominador, comparamos los numeradores: $3 < 6 < 8$.

El orden de menor a mayor de las fracciones es: $\frac{3}{7}, \frac{6}{7}, \frac{8}{7}$.

Ejemplo

Ordenemos de mayor a menor las siguientes fracciones: $\frac{7}{3}, \frac{11}{2}, \frac{5}{4}$.

Solución

El m. c. m. (2, 3, 4) es 12.

Las fracciones equivalentes a las dadas con denominador 12 son: $\frac{28}{12}, \frac{66}{12}, \frac{15}{12}$.

Comparando los numeradores: $66 > 28 > 15$, entonces el orden de mayor a menor es $\frac{66}{12}, \frac{28}{12}, \frac{15}{12}$ que corresponde a $\frac{11}{2}, \frac{7}{3}, \frac{5}{4}$.

Analiza y resuelve

- Si comparas una fracción propia con una fracción impropia, ¿cuál es mayor? Si comparas una fracción igual a la unidad con una fracción impropia, ¿cuál es mayor?

Recta numérica

Otra forma de comparar fracciones es ubicándolas en la recta numérica.

Ejemplo

Comparemos las fracciones $\frac{3}{4}$ y $\frac{1}{2}$ ubicándolas en la recta numérica.

Solución

Hallamos las fracciones equivalentes que necesitemos para expresar $\frac{3}{4}$ y $\frac{1}{2}$ como fracciones con el mismo denominador:

El m. c. m. (4, 2) = 4, entonces las fracciones que vamos a ubicar en la recta son $\frac{3}{4}$ y $\frac{2}{4}$. (Recordemos que $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{4}$ son fracciones equivalentes).

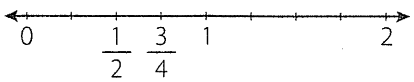


Figura 3.16

Como el denominador común es 4, dividimos el segmento unidad en 4 partes de igual longitud.

Contamos de izquierda a derecha a partir del cero 3 unidades y ubicamos $\frac{3}{4}$ al final del tercer segmento. Repitiendo el proceso, ubicamos $\frac{2}{4}$ al final del segundo segmento (*ver* figura 3.16)

La posición de $\frac{2}{4}$ en la recta es la misma de $\frac{1}{2}$.

Observamos que $\frac{3}{4}$ está a la **derecha** de $\frac{1}{2}$, entonces $\frac{3}{4} > \frac{1}{2}$.

Analiza y contesta

¿Por qué en la recta numérica, ubicamos las fracciones propias entre 0 y 1?

De varias fracciones representadas en la recta numérica, la **mayor** es la que se encuentra a la derecha de las demás.

Ejemplo

Usando la recta numérica, probemos que $\frac{2}{3} > \frac{3}{5}$.

Solución

El m. c. m. (3, 5) = 15, entonces las fracciones que ubicaremos en la recta numérica son $\frac{10}{15}$ y $\frac{9}{15}$:

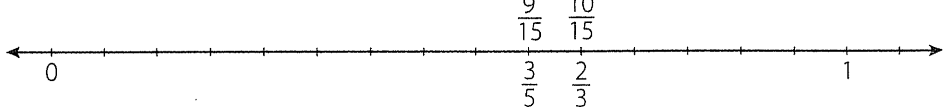


Figura 3.17

En la recta de la figura 3.17 observamos que $\frac{2}{3}$ está a la derecha de $\frac{3}{5}$. Por tanto, $\frac{2}{3} > \frac{3}{5}$.

Desarrolla pensamiento crítico

Ejercitar procedimientos

Interpreta

1. Ordena de mayor a menor cada grupo de fracciones.

   a. $\frac{4}{7}, \frac{8}{7}, \frac{6}{7}, \frac{22}{7}, \frac{36}{7}$

   b. $\frac{4}{5}, \frac{5}{4}, \frac{6}{6}, \frac{2}{5}, \frac{6}{3}$

   c. $\frac{1}{6}, \frac{7}{6}, \frac{6}{6}, \frac{2}{6}, \frac{16}{12}$

2. Ordena de menor a mayor cada grupo de fracciones.

   a. $\frac{6}{5}, \frac{8}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{15}, \frac{8}{2}$

   b. $\frac{20}{3}, \frac{2}{9}, \frac{3}{1}, \frac{5}{3}, \frac{11}{9}$

   c. $\frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \frac{3}{12}, \frac{5}{2}, \frac{9}{4}$

3. Escribe en cada casilla el símbolo >, < o = según corresponda.

   a. $\frac{15}{7} \square \frac{13}{7}$ **b.** $\frac{20}{8} \square \frac{5}{2}$

   c. $2\frac{3}{4} \square \frac{5}{2}$ **d.** $4\frac{1}{5} \square 5\frac{1}{3}$

Comunicar y representar

Explica

4. Ubica la fracción $\frac{1}{17}$ en la recta numérica y nombra tres fracciones menores que ella.

5. Compara los siguientes grupos de fracciones ubicándolas en la recta numérica.

   a. $\frac{9}{5}, \frac{7}{5}, \frac{6}{5}, \frac{3}{5}$ **b.** $1, \frac{8}{3}, \frac{2}{3}$

   c. $\frac{3}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}$ **d.** $\frac{2}{5}, \frac{3}{10}, \frac{1}{4}$

Pensar y razonar

Infiere

6. Encuentra cuatro fracciones cuya ubicación corresponda al punto *A* y cinco fracciones para el punto *B*.

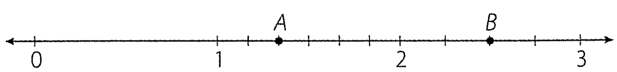


Figura 3.18

Plantear y resolver problemas

Analiza

7. Escribe una fracción que se encuentre entre las dos fracciones dadas:

   a. $\frac{1}{10}$ y $\frac{1}{3}$ **b.** $\frac{5}{4}$ y $\frac{8}{3}$

   c. $\frac{3}{8}$ y $\frac{1}{3}$ **d.** 2 y $\frac{7}{3}$

8. ¿Quién gastó más tiempo en hacer su trabajo, si Hernán demoró $\frac{3}{5}$ de hora y Alberto tardó $\frac{2}{3}$ de hora?

9. Durante una maratón, Blanca recorrió $\frac{4}{7}$ del trayecto y Antonio $\frac{3}{4}$ del mismo trayecto. ¿Quién recorrió la mayor parte del trayecto?

Evalúa

1. Completa la casilla con una fracción, de tal forma que la afirmación sea verdadera en cada caso.

   a. $\square$ Es mayor que $\frac{7}{8}$

   b. $\square$ Está entre $\frac{9}{4}$ y $\frac{7}{3}$

   c. $\square$ Es menor que $\frac{1}{7}$

   d. $\square$ En la recta numérica está a la izquierda de $\frac{1}{10}$

2. Germán tiene $\frac{1}{3}$ de taza de leche, ¿le alcanza para preparar una receta que requiere $\frac{2}{9}$ de taza? Justifica tu respuesta.

Desempeños

- Establece orden entre fracciones.
- Resuelve situaciones relacionadas con la comparación de fracciones.

Practica más, pág. 314.

Adición y sustracción de números fraccionarios

Ideas previas

1. Halla el m. c. m. de cada pareja de números:

   (4, 5); (7, 14); (16, 20)

2. Complifica las siguientes fracciones por 4: $\frac{2}{9}$, $\frac{8}{7}$, $\frac{16}{25}$

3. Simplifica las siguientes fracciones hasta hacerlas irreducibles: $\frac{14}{7}$, $\frac{18}{24}$, $\frac{55}{25}$

Figura 3.19

Analiza

Alfredo tiene 2 recipientes iguales. Cada uno tiene una escala que indica la cantidad de líquido que contienen. Si el contenido de uno de los recipientes se vierte en el otro, ¿qué parte del recipiente queda lleno? ¿Qué parte queda por llenar?

Observemos que cada recipiente está dividido en 5 partes iguales. El recipiente 1 está ocupado hasta los $\frac{3}{5}$ de su capacidad y el recipiente 2 hasta su quinta parte. Si vertemos el líquido del recipiente 1 en el recipiente 2, éste ocupa $\frac{4}{5}$ de la capacidad total del recipiente.

Esta situación la podemos representar mediante una **adición** en la que el resultado indica la cantidad total de líquido en el recipiente (*ver* figura 3.19)

$$\frac{3}{5} + \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

La parte del recipiente que falta por ocupar la obtenemos de la sustracción entre la capacidad total del recipiente y la parte que está llena.

Como el recipiente está dividido en 5 partes, su capacidad total es $\frac{5}{5}$ y lo que está ocupado corresponde a $\frac{4}{5}$, entonces $\frac{5}{5} - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$.

Para **adicionar o sustraer** fracciones que tienen **igual denominador** (homogéneas), dejamos el mismo denominador y adicionamos o sustraemos los numeradores.

Ejemplo

Calculemos la suma de $\frac{5}{4} + \frac{3}{4} + \frac{1}{4}$.

Solución

Dejamos el mismo denominador y adicionamos los numeradores:

$$\frac{5}{4} + \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5+3+1}{4} = \frac{9}{4}$$

Consideremos ahora una situación similar a la anterior.

Luis tiene líquido en dos recipientes, como se muestra en la figura 3.20. Si pasa todo el líquido a un tercer recipiente, éste queda ocupado hasta los $\frac{3}{4}$ de su capacidad.

Este resultado lo obtenemos calculando la suma de $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$.

Como $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$ tienen diferentes denominadores, debemos buscar fracciones equivalentes a ellas que tengan el mismo denominador.

$\frac{1\times 2}{2\times 2}=\frac{2}{4}$, entonces las fracciones que adicionamos son $\frac{1}{4}$ y $\frac{2}{4}$:

$$\frac{1}{4}+\frac{2}{4}=\frac{3}{4}$$

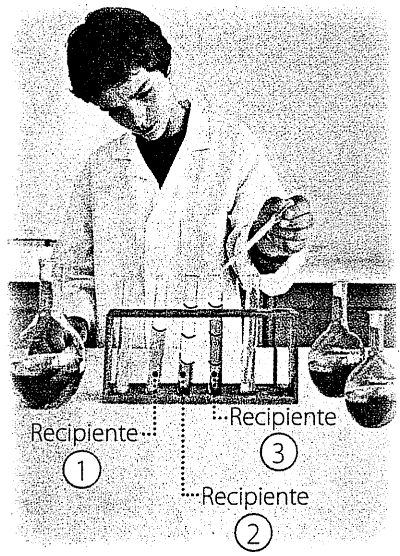


Figura 3.20

Para **adicionar o sustraer** fracciones que tienen **diferente denominador (heterogéneas)**, buscamos fracciones equivalentes a ellas que tengan el mismo denominador y luego adicionamos o sustraemos estas fracciones.

Ejemplo

Calculemos la diferencia de $\frac{3}{7}-\frac{1}{3}$.

Solución

El m. c. m. (3, 7) = 21

Complificamos las fracciones para que queden con denominador 21:

$\frac{3}{7}=\frac{9}{21}$ y $\frac{1}{3}=\frac{7}{21}$.

Ahora realizamos la sustracción de estas fracciones: $\frac{9}{21}-\frac{7}{21}=\frac{2}{21}$

Luego, $\frac{3}{7}-\frac{1}{3}=\frac{9}{21}-\frac{7}{21}=\frac{2}{21}$

Infiere y aplica

Para adicionar varios números fraccionarios aplicamos la propiedad asociativa, teniendo en cuenta cómo conviene agrupar las fracciones. Aplica la propiedad asociativa y resuelve:

a. $\frac{4}{9}+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}$

b. $\frac{2}{5}+\frac{5}{4}+\frac{3}{8}+\frac{1}{10}$

c. $\frac{4}{5}+\frac{1}{20}+\frac{3}{10}+\frac{1}{4}$

Dato histórico

Los egipcios resolvían problemas de la vida diaria mediante operaciones con fracciones. Entre ellos estaban la distribución del pan, el sistema de construcción de las pirámides y las medidas utilizadas para estudiar el planeta Tierra. La figura 3.21 muestra algunas de las fracciones utilizadas por los egipcios.

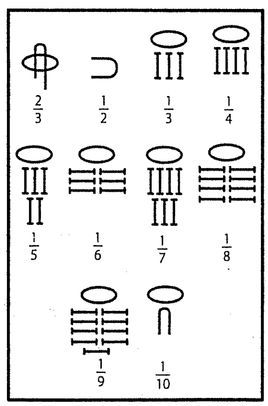


Figura 3.21

Podemos utilizar la adición de un número natural y una fracción propia para expresar fracciones impropias.

Ejemplo

Escribamos la fracción impropia $\frac{4}{3}$ como la adición de un número natural y una fracción propia.

Solución

$\frac{4}{3} = \frac{3}{3} + \frac{1}{3} = 1 + \frac{1}{3}$. En forma abreviada escribimos $1\frac{1}{3}$, que es un número mixto.

Una **fracción impropia** se puede representar como la adición de un número natural y una fracción propia, es decir, como un **número mixto**.

Adición y sustracción de números mixtos

Para adicionar o sustraer dos números mixtos podemos utilizar cualquiera de estos procedimientos:

- **Procedimiento uno**: operar los números naturales y luego las fracciones propias.
- **Procedimiento dos**: expresar cada número mixto como fracción impropia y luego hacer la operación respectiva.

Ejemplo

Apliquemos el **procedimiento uno** para calcular $3\frac{2}{5} + 2\frac{3}{4}$.

Solución

$$3\frac{8}{20} + 2\frac{15}{20} = 5\frac{23}{20}$$

Como $\frac{23}{20}$ es una fracción impropia, la expresamos como un número mixto:

$\frac{23}{20} = 1\frac{3}{20}$. Finalmente, $5 + 1\frac{3}{20} = 6\frac{3}{20}$.

Ejemplo

Apliquemos el **procedimiento dos** para calcular $4\frac{3}{4} - 2\frac{1}{8}$.

Solución

$$\begin{aligned} 4\frac{3}{4} - 2\frac{1}{8} &= \frac{19}{4} - \frac{17}{8} \\ &= \frac{38}{8} - \frac{17}{8} \\ &= \frac{21}{8} \end{aligned}$$

Es decir, $4\frac{3}{4} - 2\frac{1}{8} = 2\frac{5}{8}$.

Problema del día

¿Es posible usar el **procedimiento uno** para hallar el resultado de $2\frac{1}{3} - 1\frac{5}{6}$? ¿Por qué?

Desarrolla pensamiento crítico

Ejercitar procedimientos

Interpreta

1. Realiza las adiciones y simplifica la suma.

a. $\frac{2}{5}+\frac{6}{5}+\frac{9}{5}+\frac{8}{5}$

b. $\frac{4}{18}+\frac{7}{18}+\frac{10}{18}+\frac{33}{18}$

c. $6+\frac{7}{9}$

d. $\frac{5}{16}+\frac{3}{8}+\frac{3}{4}$

2. Realiza las sustracciones y simplifica la diferencia.

a. $\frac{27}{11}-\frac{10}{11}$

b. $8-\frac{4}{3}$

c. $\frac{15}{8}-1$

d. $\frac{12}{5}-\frac{3}{7}$

3. Halla el resultado de las siguientes operaciones.

a. $3\frac{1}{5}+\frac{3}{7}$

b. $\frac{1}{3}+\frac{1}{7}-\frac{1}{9}$

c. $4\frac{1}{3}+2\frac{1}{7}-3\frac{1}{9}$

d. $25\frac{1}{2}+13\frac{2}{5}-3\frac{1}{10}$

Pensar y razonar

Infiere

4. La gráfica de la figura 3.22 muestra la representación en la recta numérica de la suma de $\frac{3}{4}+\frac{1}{2}$.

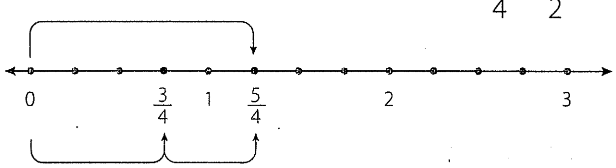


Figura 3.22

Como el mínimo común múltiplo de 4 y 2 es 4, entonces, sólo debemos encontrar una fracción equivalente a $\frac{1}{2}$ con denominador 4.

$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$. Luego, $\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}+\frac{2}{4}$.

A partir del punto correspondiente a $\frac{3}{4}$ avanzamos $\frac{2}{4}$ más.

Usa el mismo procedimiento para representar en la recta numérica la suma $\frac{2}{5}+\frac{3}{2}$.

Plantear y resolver problemas

Analiza

5. Para llenar una piscina se dispone de tres llaves. En un día cada llave llena una parte de la capacidad total de la piscina: la llave uno llena $\frac{2}{5}$, la llave dos llena $\frac{3}{7}$ y la llave tres llena $\frac{1}{3}$. ¿Qué parte de la capacidad de la piscina se llenará en ese día si se abren las tres llaves al mismo tiempo?

6. Halla el perímetro de un lote rectangular que tiene $7\frac{1}{2}$ m de largo y $3\frac{3}{5}$ m de ancho.

Evalúa

1. Halla el resultado de las siguientes operaciones.

a. $\frac{13}{5}+\frac{3}{5}+\frac{8}{5}$ **b.** $\frac{7}{10}+\frac{9}{10}-\frac{8}{5}$

c. $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{7}{6}$ **d.** $\frac{7}{12}-\frac{1}{4}$

e. $5\frac{2}{5}-2\frac{1}{4}$ **f.** $6\frac{1}{3}+3\frac{1}{4}+2\frac{1}{5}$

2. Tomás ha leído $\frac{2}{5}$ de su libro. ¿Cuánto le falta para terminar de leerlo todo?

3. Halla el perímetro de un triángulo equilátero cuyo lado mide $5\frac{1}{4}$ cm.

Desempeños

- Realiza adiciones y sustracciones entre fracciones.
- Resuelve problemas aplicando la adición o sustracción de fracciones.

Practica más, pág. 315.

Ecuaciones de tipo aditivo con números fraccionarios

Ideas previas

1. Halla el resultado de las siguientes operaciones.

   a. $\frac{1}{6}+\frac{3}{5}=\frac{\square}{\square}$

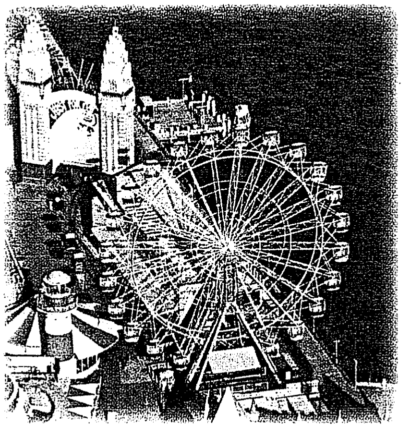
   b. $\frac{5}{7}+\frac{2}{3}-\frac{1}{21}=\frac{\square}{\square}$

2. Encuentra en cada caso el valor desconocido:

   a. $9+\square=24$

   b. $\frac{8}{10}+\frac{\square}{\square}=1$

   c. $\frac{7}{7}-\frac{\square}{\square}=\frac{2}{7}$



Analiza

Para construir un parque de diversiones, se dividió el terreno de la siguiente manera: la mitad de la superficie para las atracciones mecánicas, la tercera parte para las zonas comunes y lo que quedó para las casetas de venta de comida. ¿Qué parte del terreno ocupan las atracciones mecánicas y las zonas comunes? ¿Qué parte del terreno queda para ubicar las casetas de venta de comida?

Vamos a plantear y resolver una ecuación que nos permita responder la pregunta.

¿Cuáles son los datos?

Los datos que podemos extraer del enunciado son el área de las atracciones mecánicas $\left(\frac{1}{2}\text{ del terreno}\right)$ y el área de las zonas comunes $\left(\frac{1}{3}\text{ del terreno}\right)$.

¿Qué buscamos?

Debemos hallar la parte del terreno que ocupan las atracciones mecánicas y las zonas comunes.

¿Qué operación debemos efectuar?

Adicionar las fracciones $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$

Para saber qué parte del terreno queda para las casetas de venta de comida debemos tener en cuenta que: el área de las atracciones mecánicas más el área de las zonas comunes más la zona de venta de comida conforman el área total del parque:

Área atracciones mecánicas + área zonas comunes + área de venta de comida = área total

¿Cuál de estos datos no conocemos?

El dato que no conocemos es el área de venta de comida:

$$\frac{5}{6}+\square=1$$

Pensamiento numérico

¿Cómo relacionamos los datos y las incógnitas?

En lugar de la casilla podemos escribir la letra x, la cual llamaremos **incógnita**:

$$\frac{5}{6} + x = 1$$

Esta expresión se llama **ecuación**.

> Una **ecuación** es una expresión matemática que indica la igualdad entre dos expresiones en las que hay una incógnita.

Así que para hallar la parte del parque que ocupa la zona de comidas, debemos hallar el valor de x, es decir, resolver la ecuación.

¿Cómo resolvemos la ecuación?

$$\frac{5}{6} + x = 1$$

Como $1 = \frac{6}{6}$, entonces: $\frac{5}{6} + x = \frac{6}{6}$

$x + \frac{5}{6} = \frac{6}{6}$ Aplicamos la propiedad conmutativa.

$x + \frac{5}{6} - \frac{5}{6} = \frac{6}{6} - \frac{5}{6}$ Sustraemos $\frac{5}{6}$ en ambos lados de la igualdad.

$x + 0 = \frac{1}{6}$ Efectuamos las operaciones correspondientes.

$x = \frac{1}{6}$ Aplicamos la propiedad modulativa.

¿Cuál es la respuesta?

El área para la zona de venta de comida es $\frac{1}{6}$ del área total.

¿Cómo verificamos que la respuesta es correcta?

Sumamos las tres áreas: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{6}{6}$

Analiza y resuelve

Halla el valor del lado que falta en el triángulo de la figura 3.23.

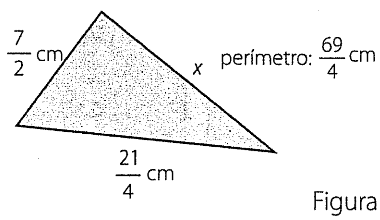


Figura 3.23

Ejemplo

Resolvamos la ecuación $x - \frac{1}{7} = \frac{3}{4}$.

Solución

- Adicionamos a lado y lado de la igualdad $\frac{1}{7}$: $x - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = \frac{3}{4} + \frac{1}{7}$
- Realizamos las operaciones respectivas $x - 0 = \frac{25}{28}$
- La solución de la ecuación es $x = \frac{25}{28}$

¿Qué significa?

Una **incógnita** es un número desconocido en una ecuación, representado por una letra.

Desarrolla pensamiento crítico

Ejercitar procedimientos

Interpreta

1. Resuelve cada ecuación.

   a. $x + \frac{3}{5} = \frac{2}{3}$

   b. $x - 2 = \frac{25}{7}$

   c. $x + \frac{1}{9} = \frac{5}{7}$

   d. $x - \frac{9}{5} = \frac{7}{3}$

   e. $\frac{8}{9} = x - \frac{1}{3}$

   f. $\frac{7}{4} = \frac{1}{3} + x$

Plantear y resolver problemas

Analiza

2. En una frutería usan tres licuadoras para preparar los jugos. En una la cantidad de jugo preparado fue $\frac{3}{4}$ de la capacidad de la licuadora, en otra hasta la mitad y en la tercera la cantidad de jugo que faltaría para llenar 2 licuadoras. ¿Qué cantidad de jugo prepararon en la tercera licuadora?

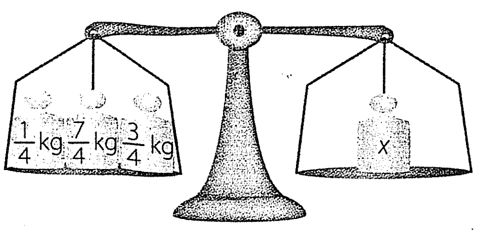
3. Cristina realizó el siguiente recorrido: fue al centro de la ciudad y gastó una hora y media en el viaje, de allí salió para el parque de la 63 y gastó tres cuartos de hora, y finalmente fue a visitar a un amigo a un barrio cercano y gastó media hora en llegar. ¿Cuánto tiempo gastó en el recorrido total?

Pensar y razonar

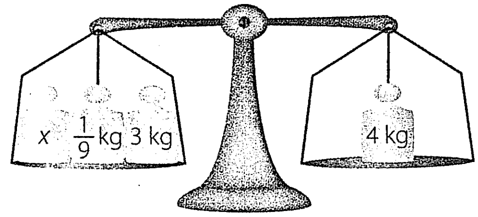
Infiere

4. Determina el peso del objeto marcado con x para que la balanza esté en equilibrio.

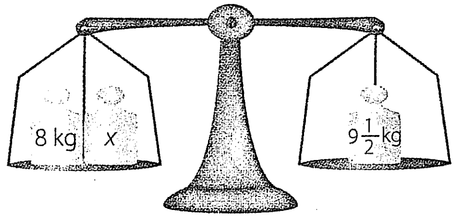
   a.



   b.



   c.



   d.

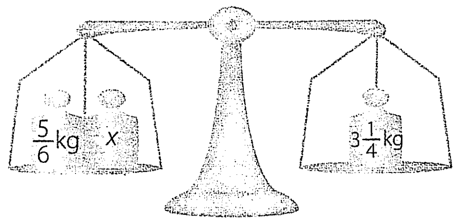


Figura 3.24

Evalúa

1. Resuelve cada ecuación.

   a. $x - \frac{2}{9} = \frac{7}{3}$

   b. $x + \frac{8}{19} = \frac{20}{19}$

   c. $x + \frac{7}{10} = \frac{7}{10}$

   d. $x + \frac{1}{4} + \frac{5}{4} = \frac{5}{2}$

2. Una persona gasta la tercera parte de su sueldo en transporte y la cuarta parte en comida. ¿Qué parte del sueldo le queda para sus otros gastos?

Desempeños

- Resuelve ecuaciones aditivas con fracciones.
- Resuelve problemas que involucran ecuaciones aditivas con fracciones.

Practica más, pág. 315.

Tema 24

Multiplicación y división de números fraccionarios

Ideas previas

Simplifica las siguientes fracciones hasta hacerlas irreducibles:

a. $\frac{90}{40}$ **b.** $\frac{57}{19}$ **c.** $\frac{903}{192}$ **d.** $\frac{70}{91}$

Analiza

Juliana y Esteban tienen dos rectángulos del mismo tamaño. Cada uno debe diseñar una bandera de franjas de la misma medida. Juliana toma su rectángulo, lo divide en 4 franjas horizontales iguales y colorea 3 franjas de amarillo.

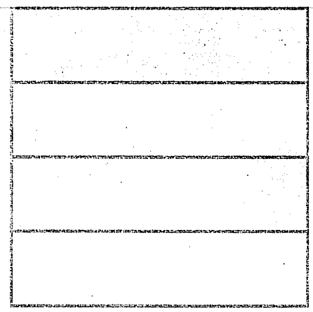


Figura 3.25

Esteban divide su rectángulo en 6 franjas verticales y colorea 2 de rojo.

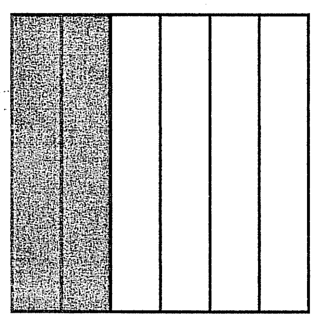


Figura 3.26

Si sobre el rectángulo que ya ha sido coloreado por Juliana, Esteban aplica su respectivo coloreado, ¿qué parte del rectángulo queda de color naranja?

El rectángulo que vuelve a pintar Esteban tenía ya 4 divisiones horizontales. Como él vuelve a hacer 6 divisiones verticales en el rectángulo, éste queda dividido en $4 \times 6 = 24$ rectángulos del mismo tamaño.

Juliana había coloreado $\frac{3}{4}$ del rectángulo y Esteban ahora colorea de rojo $\frac{2}{6}$ del mismo rectángulo; así que la región en donde se combinan los dos colores es la mostrada en la figura 3.27.

Problema del día

Cuando adicionamos dos fracciones, la suma es mayor que cualquiera de ellas. ¿Sucede lo mismo cuando multiplicamos fracciones?

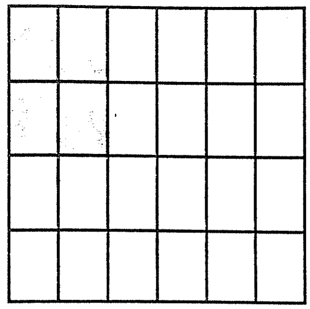


Figura 3.27

Decimos que $\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{6}$ del rectángulo quedan de color naranja y equivalen a $\frac{6}{24}$ del rectángulo.

Este resultado lo podemos obtener realizando una multiplicación de fracciones:

$$\frac{3}{4} \times \frac{2}{6} = \frac{6}{24}$$

> Para **multiplicar** fracciones multiplicamos numeradores entre sí y denominadores entre sí.

Analiza y resuelve

Lucía utiliza $\frac{3}{4}$ de hora cada día en arreglar su cuarto. ¿Cuánto tiempo dedica en una semana a esta actividad?

Ejemplo

Multipliquemos

a. $\frac{6}{7} \times \frac{1}{7}$

Solución

a. $\frac{6}{7} \times \frac{1}{7} = \frac{6 \times 1}{7 \times 7} = \frac{6}{49}$

Ejemplo

Multipliquemos

b. $\frac{4}{5} \times \frac{3}{7}$

Solución

b. $\frac{4}{5} \times \frac{3}{7} = \frac{4 \times 3}{5 \times 7} = \frac{12}{35}$

Fracción de un número

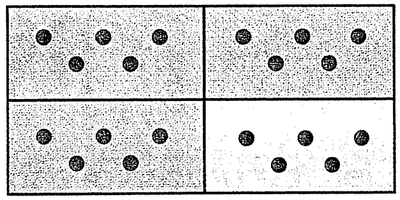


Figura 3.28

Ejemplo

Hallemos $\frac{3}{4}$ de 20.

Solución

Con los 20 elementos de la figura 3.28 formamos 4 grupos iguales y tomamos tres de estos grupos.

El total de elementos que hemos tomado es 15, entonces $\frac{3}{4}$ de 20 equivalen a 15.

La multiplicación con la que obtenemos este resultado es: $\frac{3}{4} \times 20 = \frac{60}{4} = 15$

Infiere y describe

Describe el procedimiento para multiplicar una fracción por un número natural.

División de fracciones

¿Qué fracción multiplicada por $\frac{2}{6}$ da $\frac{6}{24}$?

Veamos si este problema es similar a algún otro que hayamos resuelto antes.

La operación $15 \div 3$ nos permite hallar un número que multiplicado por 3 dé cómo resultado 15. De la misma manera podemos usar la división entre fracciones para responder la pregunta.

$$\frac{2}{6} \times \frac{\square}{\square} = \frac{6}{24}$$

$\frac{6}{24} \div \frac{2}{6} = \frac{6}{24} \times \frac{6}{2} = \frac{36}{48} = \frac{3}{4}$. Hemos multiplicado $\frac{6}{24}$ por la **recíproca** de $\frac{2}{6}$ y finalmente simplificamos hasta hacerla irreducible.

> Para **dividir** fracciones, multiplicamos la primera fracción por la recíproca de la segunda.

Ejemplo

Efectuemos las siguientes divisiones.

a. $\frac{7}{9} \div \frac{1}{4}$ **b.** $\frac{5}{4} \div 6$ **c.** $\frac{6}{5} \div \frac{2}{11}$

Solución

a. $\frac{7}{9} \div \frac{1}{4} = \frac{7}{9} \times \frac{4}{1} = \frac{28}{9}$

b. $\frac{5}{4} \div 6 = \frac{5}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{24}$

c. $\frac{6}{5} \div \frac{2}{11} = \frac{6}{5} \times \frac{11}{2} = \frac{66}{10} = \frac{33}{5}$.

¿Qué significa?

Una fracción es **recíproca** de otra fracción si al multiplicarlas entre ellas el resultado es 1.

Desarrolla pensamiento crítico

Ejercitar procedimientos

Interpreta

1. Efectúa las multiplicaciones.

   a. $\frac{3}{5} \times \frac{4}{7}$

   b. $\frac{9}{6} \times \frac{14}{7}$

   c. $3\frac{2}{5} \times \frac{1}{7}$

   d. $\frac{1}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{5}$

   e. $4 \times \frac{8}{11}$

   f. $6\frac{2}{5} \times 3\frac{1}{4}$

2. Realiza las divisiones.

   a. $\frac{8}{15} \div \frac{3}{5}$

   b. $\frac{6}{17} \div \frac{2}{10}$

   c. $7 \div \frac{3}{9}$

   d. $\frac{1}{10} \div 9$

   e. $4\frac{3}{5} \div \frac{6}{7}$

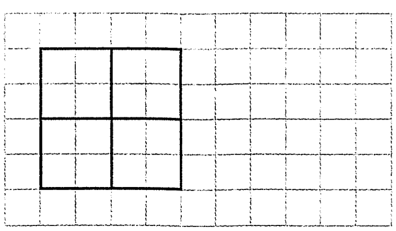
   f. $1\frac{7}{9} \div 2\frac{1}{4}$

Comunicar y representar

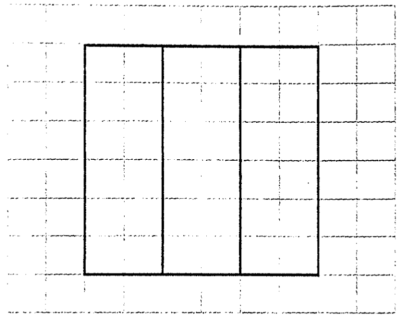
Explica

3. Representa gráficamente la fracción que se indica en cada región.

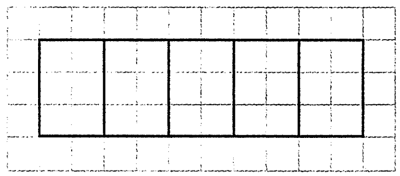
   a. $\frac{6}{4}$ de $\frac{1}{2}$



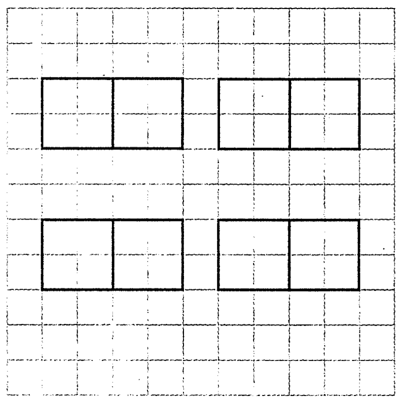
   b. $\frac{4}{6}$ de $\frac{2}{3}$



   c. $\frac{3}{5}$ de 30



   d. $\frac{7}{2}$ de 8



   e. $\frac{4}{5}$ de $\frac{1}{3}$ de 30

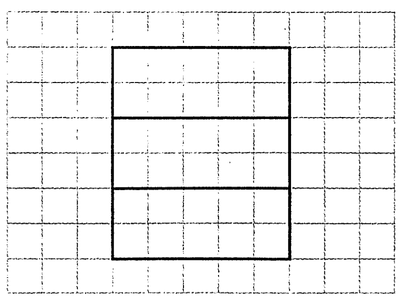


Figura 3.29

Pensar y razonar

Infiere

4. ¿Puedes hallar dos fracciones propias cuyo producto sea una fracción impropia? Explica tu respuesta.

5. Multiplica por 15 cada una de las siguientes fracciones: $\frac{3}{4}, \frac{8}{7}, \frac{9}{9}, \frac{6}{11}, \frac{20}{20}, \frac{5}{8}$.

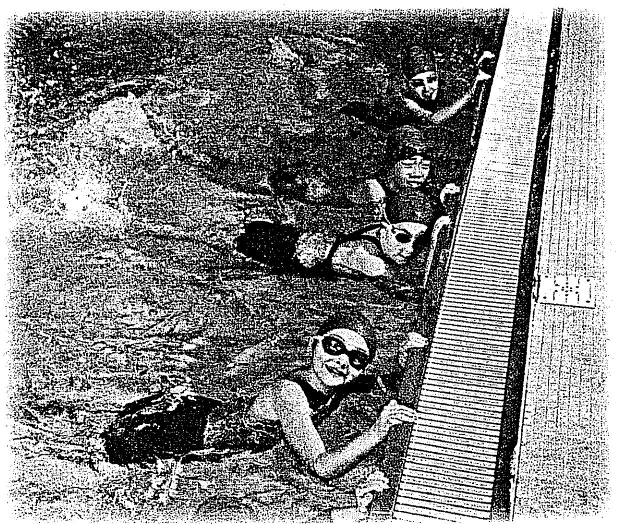
   ¿Al multiplicar con cuáles fracciones el resultado se hizo menor que 15? ¿Con cuáles mayor? ¿Con cuáles resultó igual?

   Escribe una conclusión en la que indiques qué clase de fracciones cuando multiplican a un número disminuyen el resultado, qué clase de fracciones lo aumentan y qué clase de fracciones lo dejan igual.

Plantear y resolver problemas

Analiza

6. En el salón de sexto hay 45 estudiantes. De estos, $\frac{2}{9}$ practican un deporte. De los que practican deporte, la mitad practican natación. ¿Cuántos estudiantes de sexto practican un deporte? ¿Cuántos practican natación?



7. Patricia financió el pago de su semestre en la universidad. Ella paga por semestre $ 3 200 000. Si canceló inicialmente $\frac{1}{8}$ del total y el resto en 4 cuotas mensuales iguales, ¿cuánto pagó de cuota inicial y cuánto mensualmente?

8. Una llave de agua suministra $\frac{10}{7}$ litros de agua en un minuto. ¿Cuántos minutos se necesitan para llenar un tanque cuya capacidad es 900 litros?

Evalúa

1. Decide si la afirmación es verdadera (V) o falsa (F). Explica tu respuesta.
   - **a.** El recíproco de 9 es $\frac{9}{1}$ ( )
   - **b.** $\frac{3}{5} \div \frac{1}{4} = \frac{5}{3} \times \frac{1}{4}$ ( )
   - **c.** $\frac{8}{9} \times 1 = \frac{8}{9}$ ( )
   - **d.** $\frac{7}{3}$ de $\frac{3}{7}$ es igual a la unidad. ( )
2. Realiza las operaciones.
   - **a.** $\frac{5}{8} \div \frac{6}{7}$
   - **b.** $\frac{1}{11} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{3}$
   - **c.** $6 \times \frac{7}{3} \times \frac{9}{10}$
3. Claudia reparte una gaseosa de $2\frac{1}{2}$ litros. ¿Cuántos vasos puede servir si cada uno tiene una capacidad de $\frac{1}{8}$ de litro?

Desempeños

- Explica la validez o no de los procedimientos para realizar multiplicaciones y divisiones entre fracciones.
- Realiza multiplicaciones y divisiones entre fracciones.
- Resuelve problemas que involucran multiplicación o división de fracciones.

Practica más, pág. 316.

Ecuaciones de tipo multiplicativo con números fraccionarios

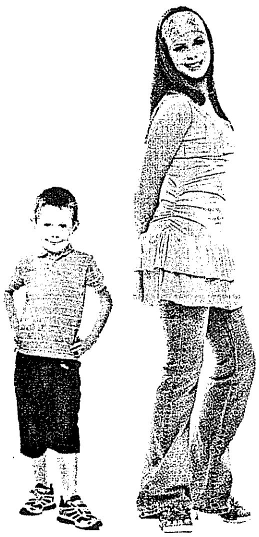
Ideas previas

1. Resuelve las siguientes ecuaciones de tipo aditivo.

   a. $x + \frac{3}{5} = \frac{7}{5}$ b. $x - \frac{8}{7} = \frac{14}{21}$

2. Calcula.

   a. $\frac{3}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{2}$ b. $\frac{10}{9} \div \frac{3}{7}$



Analiza

La altura de Julián es $\frac{2}{5}$ de la de su hermana mayor. Si Julián mide 70 cm, ¿cuál es la altura de su hermana? Planteemos y resolvamos la ecuación que nos permite responder la pregunta.

¿Qué datos conocemos?

Conocemos la altura de Julián (70 cm) y sabemos además que ésta es $\frac{2}{5}$ de la de su hermana mayor.

¿Cuál es el dato que debemos hallar?

La altura de la hermana de Julián.

¿Cómo relacionamos los datos conocidos y el dato que queremos hallar?

Vamos a usar una ecuación. Si llamamos x el número que representa la estatura de la hermana de Julián, escribimos $\frac{2}{5}x = 70$, que es la ecuación por resolver.

¿Cómo resolvemos la ecuación $\frac{2}{5}x = 70$?

Dividimos a lado y lado de la ecuación por $\frac{2}{5}$:

$$\frac{2}{5}x \div \frac{2}{5} = 70 \div \frac{2}{5}$$

Efectuamos las operaciones

$$\left(\frac{2}{5}x\right) \times \frac{5}{2} = 70 \times \frac{5}{2}$$

$$\left(\frac{2}{5} \times \frac{5}{2}\right) x = 70 \times \frac{5}{2}$$

$$x = \frac{350}{2}$$

$$x = 175$$

¿Cuál es la respuesta?

La hermana de Julián tiene 175 cm de estatura.

¿Cómo verificamos que la respuesta es correcta?

Hallamos $\frac{2}{5}$ de 175: $\frac{2}{5} \times 175 = \frac{350}{5} = 70$

¿Qué significa?

$\frac{2}{5}x = 70$ es una ecuación en la que se busca un número que multiplicado por $\frac{2}{5}$ dé 70.

Para resolver una **ecuación de tipo multiplicativo** con números fraccionarios, primero aplicamos las **propiedades de la igualdad** y luego efectuamos las multiplicaciones o divisiones correspondientes.

Infiere y aplica

- ¿Qué número multiplicado por 3 da como resultado 5?

Ejemplo

Resolvamos la ecuación $\frac{2}{3}x = \frac{5}{7}$

Solución

$\frac{2}{3}x \div \frac{2}{3} = \frac{5}{7} \div \frac{2}{3}$ Dividimos a lado y lado de la ecuación por $\frac{2}{3}$

$\left(\frac{2}{3}x\right) \times \frac{3}{2} = \frac{5}{7} \times \frac{3}{2}$

$\left(\frac{2}{3} \times \frac{3}{2}\right) x = \frac{5}{7} \times \frac{3}{2}$ Aplicamos la propiedad asociativa y efectuamos las operaciones.

$x = \frac{15}{14}$

Ejemplo

En un grupo de personas hay 18 mujeres, las cuales representan $\frac{2}{7}$ de las personas del grupo. ¿Cuántas personas hay en el grupo?

Solución

¿Qué datos conocemos?

La cantidad de mujeres (18) y la fracción que representan del total de personas.

¿Cuál es el dato que debemos hallar? El total de personas.

¿Cuál es la ecuación que relaciona los datos? $\frac{2}{7}x = 18$

¿Cómo resolvemos la ecuación?

$$\frac{2}{7}x \div \frac{2}{7} = 18 \div \frac{2}{7}$$

$$\left(\frac{2}{7}x\right) \times \frac{7}{2} = 18 \times \frac{7}{2}$$

$$\left(\frac{2}{7} \times \frac{7}{2}\right) x = 18 \times \frac{7}{2}$$

$$x = \frac{126}{2}$$

$$x = 63$$

¿Cuál es la respuesta? En el grupo hay 63 personas en total.

¿Cómo verificamos que la respuesta es correcta? Nos devolvemos al enunciado del problema y hallamos $\frac{2}{7}$ de 63:

$$\frac{2}{7} \times 63 = \frac{126}{7} = 18$$

Problema del día

¿Qué cociente se obtiene al dividir un número natural por sí mismo?, ¿qué número se obtiene al dividir un número fraccionario por sí mismo?

Desarrolla pensamiento crítico

Ejercitar procedimientos

Interpreta

1. Resuelve cada una de las siguientes ecuaciones.

   a. $\frac{1}{3}x = 12$

   b. $\frac{3}{2}x = 16$

   c. $\frac{5}{4}x = \frac{2}{5}$

   d. $\frac{7}{6}x = \frac{3}{4}$

2. Si multiplicas un número por $\frac{7}{3}$ el resultado que obtienes es 7. Si en lugar de multiplicar el número lo divides por $\frac{7}{3}$, ¿qué resultado obtienes?

3. Un triángulo equilátero tiene un perímetro de $\frac{125}{3}$ metros. ¿Cuál es la medida de cada lado?

Plantear y resolver problemas

Analiza

4. Lucía da un paseo: una parte trotando y otra en patines. En patines recorre 5 km, los cuales corresponden a $\frac{2}{5}$ de todo el recorrido. ¿Cuánto recorrió trotando?, ¿cuánto recorrió en total?

5. El triple de un número es $\frac{4}{5}$. ¿Cuál es el número?

Pensar y razonar

Infiere

6. Jairo le regaló 6 canicas a un amigo. Esto corresponde a los $\frac{2}{7}$ de la cantidad total de canicas que tenía Jairo. ¿Cuántas canicas tenía inicialmente?

7. Si se multiplica un número por $\frac{2}{3}$ el resultado que se obtiene es 9. ¿Cuál es el número?

8. El doble de un número es $\frac{13}{20}$. ¿Cuál es el número?

9. Andrea tiene 8 años y estos son $\frac{1}{2}$ de los $\frac{2}{3}$ de la edad de su primo Daniel. ¿Cuántos años tiene Daniel?

Evalúa

1. Resuelve las ecuaciones.

   a. $\frac{5}{7}x = \frac{2}{9}$

   b. $3x = \frac{1}{5}$

   c. $\frac{1}{2}x = \frac{1}{8}$

   d. $\frac{13}{12}x = \frac{12}{13}$

2. Raúl quiere dividir una cinta de $4\frac{3}{4}$ metros de largo en trozos de $\frac{1}{4}$ de metro. ¿Cuántos trozos de cinta con esta medida obtendrá?

Desempeños

- Resuelve ecuaciones de tipo multiplicativo entre fracciones.
- Resuelve situaciones que involucran multiplicación y división de fracciones.

Practica más, pág. 316.

Tema 26

Potenciación de números fraccionarios

Ideas previas

1. Efectúa las multiplicaciones.

   a. $\frac{3}{2} \times \frac{4}{5}$ b. $\frac{4}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5}$

   c. $\frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2}$ d. $\frac{5}{4} \times \frac{5}{4} \times \frac{1}{7} \times \frac{1}{7}$

2. Encuentra la potencia en cada caso.

   a. 2^5 b. 7^3

   c. 1^{20} d. 10^3

Analiza

María necesita determinar el volumen de un recipiente cúbico cuya **arista** mide $\frac{1}{2}$ metro de longitud.

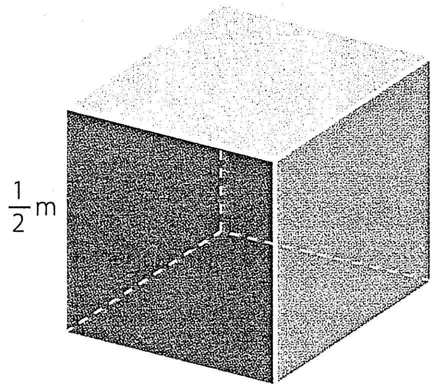


Figura 3.30

Para hallar el volumen del cubo multiplicó las medidas del largo, el ancho y el alto: $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.

Observemos que en esa multiplicación los tres factores son iguales.

El factor que se repite es $\frac{1}{2}$ y se llama **base**. El número de veces que se repite el factor se llama **exponente** y en este caso es 3, y el resultado que obtenemos se llama **potencia**, que es $\frac{1}{8}$.

El volumen del cubo es $\frac{1}{8}$ m^3.

Una forma abreviada de escribir la multiplicación es la siguiente:

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1^3}{2^3} = \frac{1}{8}$$

La **potencia** de una fracción es igual a la potencia del numerador sobre la potencia del denominador. Cuando el exponente es 2, se lee "elevado al cuadrado", si el exponente es 3 se lee "elevado al cubo".

¿Qué significa?

En un cubo, una **arista** es un segmento que une dos vértices contiguos.

Pensamiento numérico

Ejemplo

Escribamos como potenciación y calculemos la potencia de $\frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2}$.

Solución

¿Cuál es el factor que se repite?

El factor que se repite es la fracción $\frac{3}{2}$.

¿Cuántas veces se repite el factor $\frac{3}{2}$?

El factor se repite 4 veces.

¿Cómo escribimos en forma abreviada la multiplicación repetida de $\frac{3}{2}$?

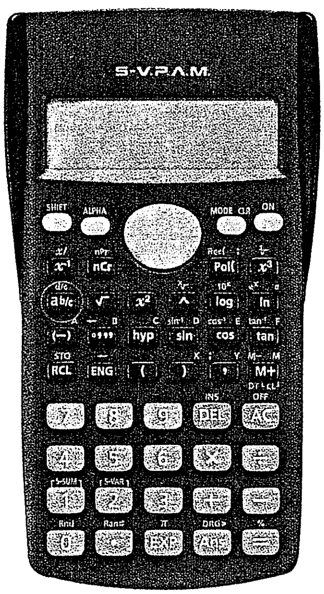
Usaremos la potenciación:

$$\frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} = \left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{3^4}{2^4} = \frac{81}{16}.$$

Infiere y aplica

Las propiedades de la potenciación de números naturales se cumplen en los números fraccionarios. Enuncia las propiedades de la potenciación en números fraccionarios.

Ciencia y tecnología



En una calculadora, podemos usar las teclas $a\,b/c$ y x^2 para hallar el cuadrado de cualquier número fraccionario.

Para elevar un fraccionario al cuadrado, realizamos el siguiente proceso:

Con la tecla (abrimos paréntesis, escribimos el numerador de la fracción seguido de la tecla $a\,b/c$ y luego escribimos el denominador de la fracción. Finalmente, cerramos el paréntesis con la tecla) y oprimimos la tecla x^2.

Interpreta y practica

Abre paréntesis, luego ingresa el número 3 seguido de la tecla $a\,b/c$ y del número 3 nuevamente, cierra el paréntesis y oprime la tecla x^2, ¿qué resultado aparece en la calculadora?

Desarrolla pensamiento crítico

Ejercitar procedimientos

Interpreta

1. Vuelve a escribir cada producto aplicando el concepto de potenciación.

   a. $\frac{3}{7}\times\frac{3}{7}\times\frac{3}{7}\times\frac{3}{7}$

   b. $\frac{9}{4}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}$

   c. $\frac{2}{11}\times\frac{2}{11}\times\frac{5}{4}\times\frac{5}{4}$

   d. $\frac{4}{21}\times\frac{4}{21}\times\frac{4}{21}\times\frac{4}{21}$

2. Calcula las potencias.

   a. $\left(\frac{2}{7}\right)^3$ b. $\left(\frac{1}{5}\right)^4$ c. $\left(\frac{3}{4}\right)^5$ d. $\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$

3. Completa la tabla.

Base	Exponente	Potencia indicada	Potencia
$\left(\frac{9}{8}\right)$	2		
$\left(\frac{1}{17}\right)$			$\left(\frac{1}{83\,521}\right)$
$\left(\frac{4}{7}\right)$		$\left(\frac{4}{7}\right)^3$	
	4		$\frac{81}{625}$
$\left(\frac{9}{2}\right)$	3		

Tabla 3.3

Comunicar y representar

Explica

4. Completa cada frase.

   a. Si la base es $\frac{1}{3}$ y el exponente es 0, la potencia es $\frac{\square}{\square}$.

   b. Si el exponente es 4 y la potencia es $\frac{16}{625}$ la base es $\square$.

   c. Si la potencia es $\frac{1}{32}$ y la base es $\frac{1}{2}$ el exponente es $\square$.

Pensar y razonar

Infiere

5. Algunas propiedades de la potenciación que se cumplen en los números fraccionarios, son:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^1=\frac{a}{b}$$

$$\left(\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\right)^n=\left(\frac{a}{b}\right)^n\times\left(\frac{c}{d}\right)^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n\times\left(\frac{a}{b}\right)^m=\left(\frac{a}{b}\right)^{n+m}$$

Aplica las anteriores propiedades en las siguientes expresiones y halla la potencia.

   a. $\left(\frac{10}{57}\right)^1$ b. $\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\left(\frac{1}{3}\right)^3$

   c. $\left(\frac{1}{9}\times\frac{3}{4}\right)^3$ d. $\left(\frac{1}{4}\right)^3\times\left(\frac{1}{14}\right)^1$

   e. $\left(\frac{3}{17}\times\frac{1}{3}\right)^2$

Evalúa

1. Vuelve a escribir cada producto aplicando el concepto de potenciación.

   a. $\frac{3}{17}\times\frac{3}{17}\times\frac{3}{17}$

   b. $\frac{4}{9}\times\frac{4}{9}\times\frac{4}{9}\times\frac{5}{7}$

2. Calcula cada potencia.

   a. $\left(\frac{6}{7}\right)^2$

   b. $\left(\frac{3}{5}\right)^5$

   c. $\left(\frac{2}{11}\right)^2\times\frac{2}{11}$

Desempeños

- Expresa productos como potencias.
- Calcula potencias.

Practica más, pág. 317.

Tema 27

Radicación y logaritmación de números fraccionarios

Ideas previas

1. Calcula las potencias.
   a. $\left(\frac{3}{2}\right)^3$
   b. $\left(\frac{4}{7}\right)^4$

2. Halla el valor de n en cada expresión.
   a. $\left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{27}{64}$
   b. $\left(\frac{1}{4}\right)^3 = n$

3. Calcula.
   a. $\sqrt{25}$
   b. $\sqrt[3]{27}$

$V = \frac{1}{8}\ m^3$

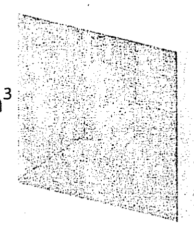


Figura 3.31

Interpreta

El volumen de un cubo es $\frac{1}{8}$ m^3. ¿Cuál es la medida de la longitud de la arista de dicho cubo?

Para hallar el volumen de un cubo elevamos a la tercera potencia la medida de su arista.

En este caso conocemos el volumen del cubo, que corresponde a la potencia, y el exponente, que es 2.

Debemos encontrar la longitud de la arista del cubo, que es la base de la potenciación.

$$\left(\frac{\square}{\square}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

La operación que realizamos para calcular la base en una potenciación cuando conocemos el exponente y la potencia, se denomina **radicación** y la representamos así: $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$

Infiere y contesta

El símbolo $\sqrt[3]{\square}$ se denomina **radical**, el número 3 es el **índice del radical** y el número dentro del radical se llama **cantidad subradical**.

Compara las expresiones $\left(\frac{\square}{\square}\right)^3 = \frac{1}{8}$ y $\sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{\square}{\square}$, ¿qué relación encuentras entre los términos de la potenciación y los de la radicación?

Con la **radicación** estamos respondiendo a la pregunta: ¿qué número fraccionario elevado a la tercera potencia nos da como resultado $\frac{1}{8}$?

Como $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$, $\sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$

El lado del cuadrado mide $\frac{1}{2}$ m.

La **radicación** es la operación inversa de la potenciación, y se aplica cuando se conocen la potencia y el exponente y se necesita hallar la base.

Ejemplo

Calculemos

a. $\sqrt[3]{\frac{64}{27}}$ **b.** $\sqrt[6]{\frac{64}{729}}$

Solución

a. ¿Qué número fraccionario elevado al exponente tres da como resultado $\frac{64}{27}$?

$\left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{64}{27}$; por tanto, $\sqrt[3]{\frac{64}{27}} = \frac{4}{3}$.

b. ¿Qué número fraccionario elevado al exponente seis da como resultado $\frac{64}{729}$?

$\sqrt[6]{\frac{64}{729}} = \frac{2}{3}$ porque $\left(\frac{2}{3}\right)^6 = \frac{64}{729}$.

La **logaritmación** es una operación relacionada con la potenciación y nos permite calcular el exponente conociendo la base y la potencia.

Si queremos determinar cuál es el exponente en la expresión $\left(\frac{1}{2}\right)^? = \frac{1}{4}$ escribimos $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} = 2$, porque $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

Ejemplo

Calculemos $\log_{\frac{2}{3}} \frac{8}{27}$.

Solución

$\log_{\frac{2}{3}} \frac{8}{27} = 3$ porque $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$.

Ejemplo

Calculemos $\log_{\frac{3}{5}} \frac{81}{625}$.

Solución

$\log_{\frac{3}{5}} \frac{81}{625} = 4$ porque $\left(\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{81}{625}$.

Dato histórico

El cálculo a través de logaritmos fue propuesto por primera vez por John Napier en 1614. Posteriormente otro matemático, Kepler, mostró varias de sus aplicaciones. Desde entonces los logaritmos han contribuido al avance de la ciencia en la geodesia, la computación y la astronomía.

Operación	Potencia	Raíz	Logaritmo
Pregunta	¿Cuál es el resultado de multiplicar $\frac{8}{10}\times\frac{8}{10}\times\frac{8}{10}$?	¿Cuál es el factor que se repite tres veces cuando el producto es $\frac{512}{1000}$?	¿Cuántas veces se debe multiplicar $\frac{8}{10}$ para obtener como resultado $\frac{512}{1000}$?
Respuesta	$\frac{512}{1000}$ porque $\left(\frac{8}{10}\right)^3=\frac{512}{1000}$	$\frac{8}{10}$ porque $\sqrt[3]{\frac{512}{1000}}=\frac{8}{10}$	3 veces porque $\log_{\frac{8}{10}}\frac{512}{1000}=3$

Tabla 3.4

Infiere y completa

Completa la tabla.

Potencia	Raíz	Logaritmo
$\left(\frac{8}{10}\right)^3=\frac{512}{1000}$	$\sqrt[3]{\frac{512}{1000}}=\frac{8}{10}$	$\log_{\frac{8}{10}}\frac{512}{1000}=3$
$\left(\frac{2}{4}\right)^2$		
		$\log_{\frac{3}{2}}\frac{81}{16}$
	$\sqrt[4]{\frac{1296}{625}}$	

Tabla 3.5

Desarrolla pensamiento crítico

Ejercitar procedimientos

Interpreta

1. Calcula cada raíz.

a. $\sqrt[5]{\frac{1}{32}}$ **b.** $\sqrt[2]{\frac{36}{25}}$

c. $\sqrt{\frac{64}{625}}$ **d.** $\sqrt[8]{\frac{1}{128}}$

e. $\sqrt[2]{\frac{144}{4}}$ **f.** $\sqrt[8]{\frac{1}{6561}}$

g. $\sqrt[5]{\frac{32\,768}{3125}}$ **h.** $\sqrt{\frac{100}{900}}$

2. Calcula cada logaritmo.

a. $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{64}$ **b.** $\log_{\frac{3}{4}}\frac{81}{256}$

c. $\log_{\frac{3}{2}} \frac{243}{32}$

d. $\log_{\frac{4}{5}} \frac{16}{25}$

e. $\log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{625}$

f. $\log_{\frac{1}{10}} \frac{1}{100\,000}$

Comunicar y representar

Explica

3. Escribe si la afirmación es verdadera (V) o falsa (F) y justifica tu respuesta.

a. El logaritmo es el exponente al que hay que elevar la base para obtener la potencia. ( )

b. El logaritmo en base $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{2}$ es 1. ( )

c. La raíz cúbica de $\frac{1}{27}$ es 3. ( )

d. $\log_{\frac{8}{9}} \frac{8}{9} = 0$. ( )

e. $\log_{\frac{15}{17}} 1 = 0$. ( )

4. Completa la tabla.

Base	Exponente	Potencia	Expresión como logaritmo	Expresión como raíz
$\frac{7}{5}$	2			
$\frac{1}{12}$	3			
$\frac{3}{16}$	4			
$\frac{4}{3}$	5			
$\frac{3}{10}$	6			

Tabla 3.6

Pensar y razonar

Infiere

5. Halla el valor de x en cada expresión.

a. $\sqrt[4]{\frac{16}{81}} = x$

b. $\log_x \frac{1}{25} = 2$

c. $\log_x \frac{36}{625} = 2$

d. $\sqrt[x]{\frac{128}{2187}} = \frac{2}{3}$

e. $\log_{\frac{1}{9}} \frac{1}{729} = x$

f. $\sqrt{x} = \frac{11}{20}$

g. $\log_{\frac{7}{4}} \frac{2401}{256} = x$

h. $\sqrt[5]{x} = \frac{6}{4}$

Plantear y resolver problemas

Analiza

6. ¿Cuál es la longitud del lado de un cuadrado que tiene $\frac{81}{144}$ dm² de área?

7. ¿Cuál es la medida de la arista de un cubo de volumen $\frac{27}{64}$ cm³?

Evalúa

Completa la tabla.

Potenciación	Radicación	Logaritmación
$\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{27}{125}$		
	$\sqrt[2]{\frac{81}{100}} = \frac{9}{10}$	
		$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16} = 4$

Tabla 3.7

Desempeños

- Establece relaciones entre la potenciación, la radicación y la logaritmación de números fraccionarios.

Practica más, pág. 317.

Así se lee en matemáticas

Los números se utilizan con frecuencia para expresar cantidades a partir de las cuales es posible hacer comparaciones. Observemos el siguiente ejemplo.

Interpretación de información

Después de ser seleccionado por el Comité Olímpico Internacional como país anfitrión de las olimpiadas 2008, China fijó como fecha de inauguración el día 8 del mes 8 de 2008, un número que los chinos consideraron su número de suerte y que significa para ellos mucho dinero o fortuna.

A la inauguración de los Juegos Olímpicos de Beijing 2008 asistieron un total de 205 delegaciones procedentes de todo el mundo. En los 18 días que duraron los juegos se entregaron 302 medallas de oro, 303 medallas de plata, 353 medallas de bronce.

La tabla 3.6 muestra las medallas entregadas a los deportistas de los diez países que obtuvieron mayor número de medallas.

Medallas Juegos Olímpicos Beijing 2008					
Posición	País	Oro	Plata	Bronce	Total
1	China	51	21	28	100
2	Estados Unidos	36	38	36	110
3	Rusia	23	21	28	72
4	Gran Bretaña	19	13	15	47
5	Alemania	16	10	15	41
6	Australia	14	15	17	46
7	Corea del sur	13	10	8	31
8	Japón	9	6	10	25
9	Italia	8	10	10	28
10	Francia	7	16	17	40

Tabla 3.6

Tomado y adaptado de: http://www.olimpiadasbeijing2008.com

Interpreta

Resulta más práctico analizar los datos de la tabla si la completamos con los datos correspondientes al total de medallas de cada tipo.

Medallas Juegos Olímpicos Beijing 2008					
Posición	País	Oro	Plata	Bronce	Total
1	China	51	21	28	100
2	Estados Unidos	36	38	36	110
3	Rusia	23	21	28	72
4	Gran Bretaña	19	13	15	47
5	Alemania	16	10	15	41
6	Australia	14	15	17	46
7	Corea del sur	13	10	8	31
8	Japón	9	6	10	25
9	Italia	8	10	10	28
10	Francia	7	16	17	40
	Otros				
Total		302	303	353	958

Tabla 3.7

Observemos que tuvimos que agregar dos filas a la tabla 3.6, dado que no conocemos los datos de los demás países.

De acuerdo con la información de la tabla 3.6 podemos extraer varias conclusiones:

- Del total de medallas de oro otorgadas en los juegos olímpicos, la fracción que representa las obtenidas por China es $\frac{100}{958}$.
- Las medallas de plata obtenidas por los países de la posición 3 a la posición 10 suman un tercio del total de medallas de plata otorgadas.

Infiere y resuelve

1. Completa la tabla 3.7. ¿Qué fracciones representan la cantidad de medallas ganadas por otros países con relación a cada total?
2. ¿Qué dato se puede asociar a cada una de las siguientes fracciones?

   $$\frac{51}{100}, \frac{23}{72}, \frac{8}{28}, \frac{7}{40}$$

3. $\frac{3}{2}$ del total de medallas de plata que ganó Japón equivalen a la cantidad de medallas de oro que ganó. Escribe esa relación usando una ecuación.
4. Si el total de medallas que fueron otorgadas a Australia fue 46 y el de Alemania 41, ¿por qué Australia aparece en la posición 6, mientras que Alemania en la posición 5?

Evalúa tu pensamiento crítico

Las siguientes actividades te indicarán el nivel de competencia que has alcanzado y determinarán los desempeños que evidencian tu acción de aprendizaje.

Ejercitar procedimientos

Interpreta

1. Representa en la recta numérica las siguientes fracciones.

a. $\frac{9}{16}$ **b.** $2\frac{1}{9}$ **c.** $\frac{11}{3}$

2. Ordena de mayor a menor las fracciones.

$\frac{7}{5}, \frac{1}{3}, \frac{8}{2}, \frac{3}{15}, \frac{1}{30}$.

3. Representa como fracción impropia.

a. $1\frac{3}{5}$

b. $3\frac{4}{7}$

c. $7\frac{1}{7}$

d. $9\frac{2}{15}$

4. Representa como número mixto.

a. $\frac{24}{19}$

b. $\frac{33}{23}$

c. $\frac{85}{2}$

d. $\frac{93}{15}$

5. Realiza las siguientes operaciones.

a. $\frac{51}{10} + \frac{3}{10} + \frac{2}{5}$

b. $\frac{10}{5} - \frac{2}{3}$

c. $\frac{8}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{2}$

d. $\frac{7}{8} \div \frac{6}{11}$

e. $\left(\frac{4}{3}\right)^5$

f. $\left(\frac{3}{7}\right)^2 \times \frac{3}{7} \times \left(\frac{3}{7}\right)^3$

g. $\sqrt{\frac{100}{256}}$

h. $\log_{\frac{3}{7}} \frac{81}{2401}$

6. Resuelve las siguientes ecuaciones.

a. $x + \frac{7}{5} = 3$

b. $x - \frac{2}{3} = \frac{3}{4}$

c. $\frac{3}{5}x = 7$

d. $\frac{9}{6}x = \frac{1}{4}$

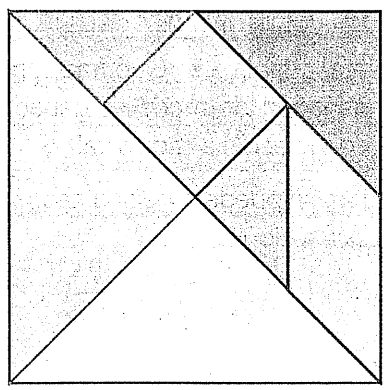
Pensar y razonar

Infiere

7. Al numerador y al denominador de la fracción $\frac{3}{5}$ se le adiciona 1. ¿Qué relación de orden hay entre la fracción que se obtiene y la fracción original?

8. Una fracción tiene el número 7 en el numerador. Si al representarla en la recta numérica ésta queda a la derecha de $\frac{1}{2}$, ¿cuáles son los posibles números que están en el denominador?

9. El cuadrado inicial se ha dividido en 7 partes.



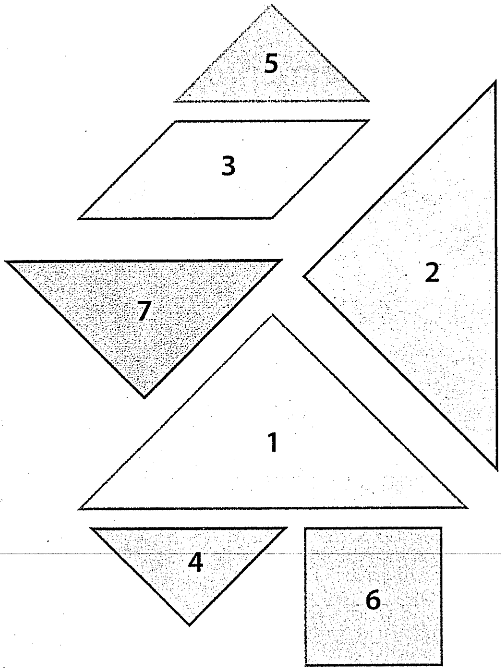


Figura 3.32

a. Si la unidad es el cuadrado inicial, la fracción que representa el área del triángulo 1 es $\frac{1}{4}$. ¿Qué fracción representa el área de las 6 piezas restantes del tangram?

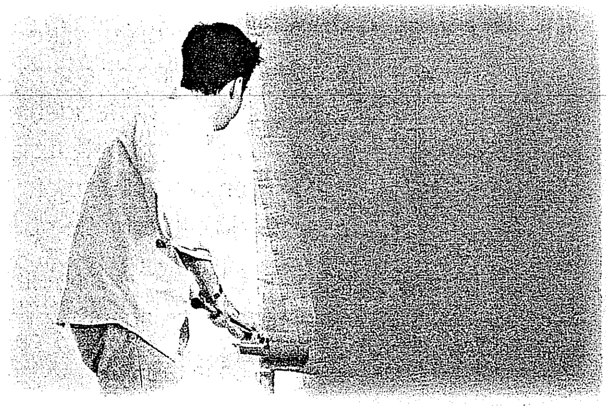
b. Si el triángulo 2 es la nueva unidad, expresa con una fracción la parte que representa cada figura con respecto a éste.

Plantear y resolver problemas

Analiza

10. La edad de Carmen es tres octavos de la de su mamá. Si su mamá tiene 32 años, ¿cuál es la edad de Carmen?

11. Un empleado se compromete a pintar un muro. El primer día pinta $\frac{3}{5}$ del área del muro y el segundo día pinta $\frac{1}{3}$ del área del muro. ¿Qué parte del muro le falta por pintar?



12. Camilo tiene 12 años. Su edad es $\frac{3}{2}$ de la de su hermana. ¿Cuántos años tiene su hermana?

13. ¿Qué número sumado con $\frac{1}{9}$ da como resultado $\frac{3}{7}$?

Autoevaluación

	Bajo	Básico	Alto	Superior
Reconozco los significados de la fracción.				
Identifico las clases de fracciones.				
Expreso un número mixto como una fracción impropia y viceversa.				
Ordeno números fraccionarios.				
Realizo adiciones y sustracciones con fraccionarios.				
Resuelvo ecuaciones aditivas con fraccionarios.				
Realizo multiplicaciones y divisiones con fraccionarios.				
Resuelvo ecuaciones multiplicativas con fraccionarios.				
Calculo la potencia, la raíz y el logaritmo de números fraccionarios.				
Trabajo con agrado en matemáticas.				

Unidad 4

Pensamiento numérico

Números decimales

Situación problema

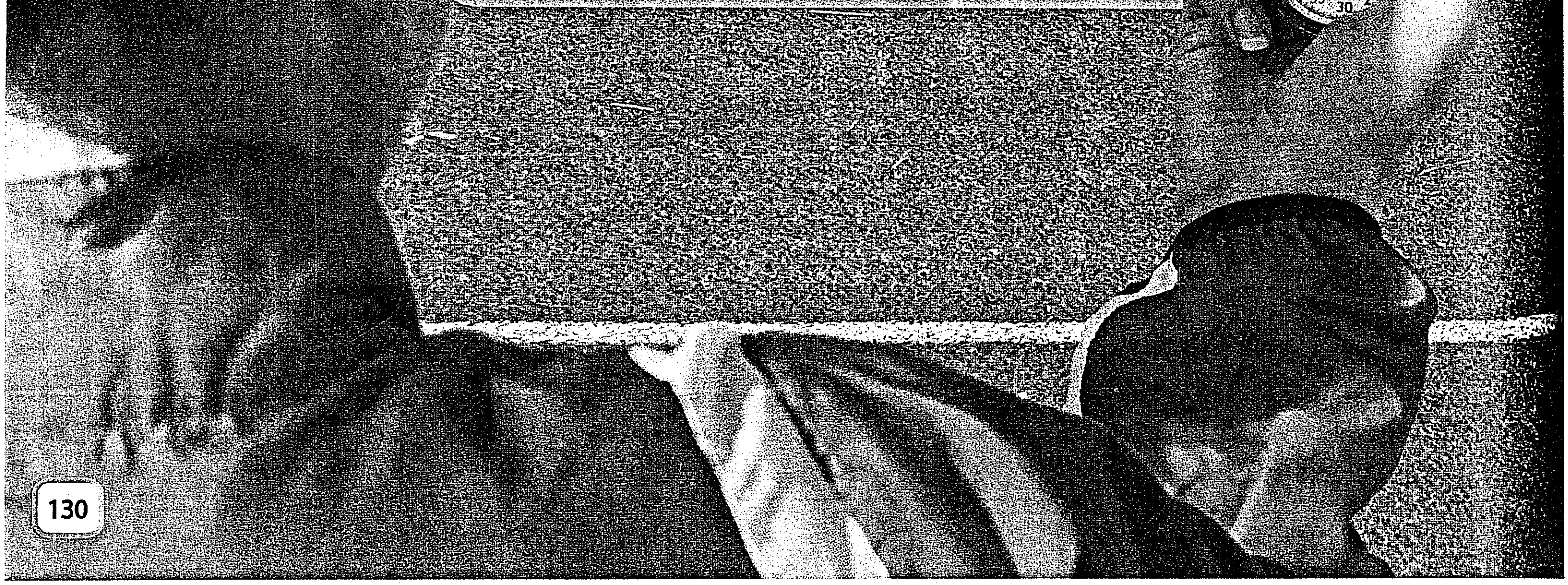
Con el objetivo de prepararse para una carrera de atletismo, un grupo de cuatro amigos: Juan Carlos, José Luis, Eduardo y Sebastián deciden entrenar juntos. La modalidad en la que van a competir es la de 100 metros planos, la cual consiste en correr 100 metros en una pista sin obstáculos empleando el menor tiempo posible.

Ellos entrenaron durante un mes, tres veces por semana, 1,5 horas diarias después de finalizar su jornada académica.

En la tabla 4.1 están registrados los tiempos que lograron en la competencia.

Corredor	Tiempo
Juan Carlos	12,5 segundos
José Luis	11,98 segundos
Eduardo	12,07 segundos
Sebastián	13 segundos

Tabla 4.1



Desarrolla pensamiento crítico

Infiere

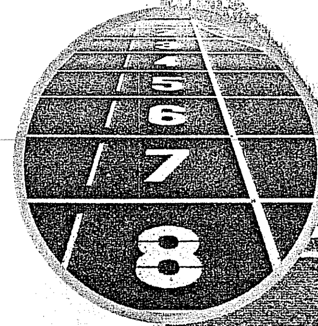
1. ¿Cuántos minutos entrenaron en cada sesión los cuatro amigos?
2. ¿Cuántas horas entrenaron en total?

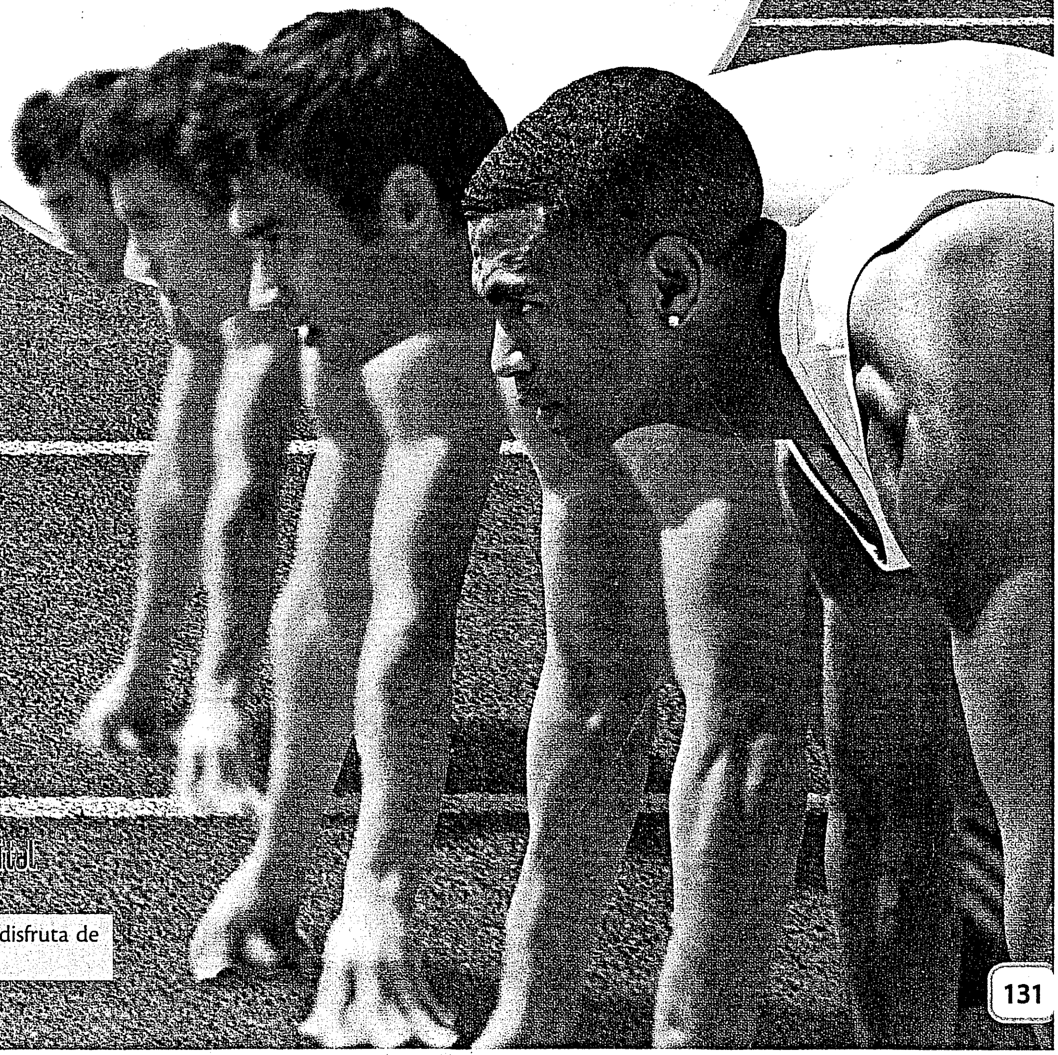
Interpreta

3. ¿Quién empleó más tiempo corriendo los 100 metros?
4. ¿Quién ganó la competencia? Justifica tu respuesta.

Explica

5. ¿Cuál es el promedio de los tiempos que hicieron los 4 jóvenes en la competencia?





Para pensar en digital

Entra a www.normaparapensar.com y disfruta de los retos interactivos que tenemos para ti.

Tema 28

Fracciones decimales

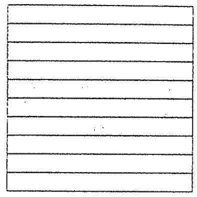
Ideas previas

1. Efectúa las siguientes operaciones.

   a. $\frac{7}{4} - \frac{6}{10} - \frac{21}{100}$

   b. $\frac{64}{100} + \frac{12}{1000} + \frac{9}{10} + \frac{7}{10}$

2. Escribe la fracción representada en cada caso.

   a. 

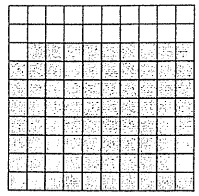
   b. 

Figura 4.1

Analiza

Cada país tiene una unidad monetaria, representada en monedas y billetes con los cuales se realizan las transacciones comerciales. En los países en los cuales existen monedas que corresponden a partes de la unidad monetaria, como en Estados Unidos, se indican los precios usando expresiones decimales. En Estados Unidos el dólar (US$) es la moneda oficial y está subdividido en 100 centavos.

Así, US$ 1,75 corresponde a "un dólar con 75 centavos".

El número 1,75 es un número decimal que también podemos escribir como $1\frac{75}{100}$ o $\frac{175}{100}$.

Infiere y representa

Representa gráficamente la fracción $\frac{175}{100}$.

Las fracciones en las que el denominador es una potencia de 10, se conocen con el nombre de **fracciones decimales**.

Las fracciones decimales se pueden escribir como **números decimales** usando una coma (,) para separar la parte entera de la parte decimal.

Ejemplo

Utilicemos números decimales para escribir la fracción $3\frac{1}{10}$.

Solución

Para expresar una fracción decimal como un número decimal usamos la siguiente **tabla de posiciones**.

Centenas de millón	Decenas de millón	Unidades de millón	Centenas de mil	Decenas de mil	Unidades de mil	Centenas	Decenas	Unidades		Décimas	Centésimas	Milésimas	Diezmilésimas
									,				

coma decimal

Tabla 4.2

En la tabla 4.2 ubicamos cada cifra teniendo en cuenta la posición que representa en el número.

La fracción $3\frac{1}{10}$ la leemos como "tres unidades y una décima". El número 3 irá en la casilla de las unidades y el número 1 en la casilla de las décimas.

Centenas de millón	Decenas de millón	Unidades de millón	Centenas de mil	Decenas de mil	Unidades de mil	Centenas	Decenas	Unidades		Décimas	Centésimas	Milésimas	Diezmilésimas
								3	,	1			

coma decimal

Tabla 4.3

Ejemplo

Utilicemos números decimales para escribir la fracción $\frac{95}{100}$.

Solución

Leemos la fracción $\frac{95}{100}$ como "noventa y cinco centésimas" y de acuerdo con esa lectura ubicamos los números así:

Centenas de millón	Decenas de millón	Unidades de millón	Centenas de mil	Decenas de mil	Unidades de mil	Centenas	Decenas	Unidades		Décimas	Centésimas	Milésimas	Diezmilésimas
								0	,	9	5		

coma decimal

Tabla 4.4

Infiere y practica

Lee el número $18\frac{72}{100}$ y sitúalo en una tabla de posiciones.

Dato histórico

Se cree que los chinos usaron fracciones decimales desde el siglo XIV a. C., pero en otras regiones del mundo fueron desconocidas durante mucho siglos. Sólo en el año 1427 d. C. el matemático persa Al-Kashi las definió y propuso una notación sencilla para ellas.

a.

b.

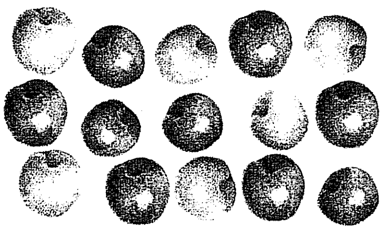


Figura 4.2

Aunque la fracción decimal y el número decimal se usan para representar el mismo número, algunas veces conviene usar una forma más que la otra.

Ejemplo

Expresemos en dos formas diferentes el número que representa las situaciones de la figura 4.2.

Solución

a. La longitud de la abeja es 0,6 cm.

b. 9 de 15 manzanas son rojas, es decir $\frac{9}{15}$. Simplificado, $\frac{3}{5}$ del número de manzanas son rojas.

Convertir expresiones decimales en fracciones es muy sencillo si recordamos qué representa cada posición del numeral. Veamos la tabla 4.5.

Expresión decimal	Lectura	Fracción decimal
25,08	Veinticinco unidades y ocho centésimas.	$25\frac{8}{100}$
9,003	Nueve unidades y tres milésimas.	$9\frac{3}{1000}$

Tabla 4.5

> Algunas fracciones de uso común son equivalentes a **fracciones decimales**, lo cual permite escribirlas como **números decimales** después de complificarlas o simplificarlas.

Ejemplo

Escribamos $\frac{16}{20}$ como número decimal.

Solución

Simplificamos $\frac{16}{20}$ por 2 y escribimos la fracción que resulta como número decimal:

$$\frac{16 \div 2}{20 \div 2} = \frac{8}{10} = 0{,}8$$

Ejemplo

Escribamos $\frac{2}{5}$ como número decimal.

Solución

Complificamos $\frac{2}{5}$ por 2 y escribimos la fracción decimal como número decimal:

$$\frac{2 \times 2}{5 \times 2} = \frac{4}{10} = 0{,}4$$

Analiza y contesta

¿Por cuáles otros números es posible simplificar y/o complificar las fracciones de los ejemplos para obtener fracciones decimales?

Desarrolla pensamiento crítico

Ejercitar procedimientos

Interpreta

1. Escribe en palabras cada número decimal.

   a. 18,9 **b.** 0,64 **c.** 3,85

   d. 5,026 **e.** 31,004 **f.** 1,38

2. Expresa cada fracción decimal como número decimal.

   a. $\frac{9}{100}$ **b.** $\frac{4}{10\,000}$ **c.** $5\frac{34}{1000}$

   d. $\frac{708}{100}$ **e.** $\frac{64\,375}{10\,000}$ **f.** $3\frac{804}{10\,000}$

3. Expresa cada fracción como número decimal.

   a. $\frac{1}{2}$

   b. $\frac{7}{5}$

   c. $\frac{8}{40}$

   d. $\frac{4}{25}$

   e. $\frac{7}{20}$

4. Expresa la longitud de cada animal con una fracción.

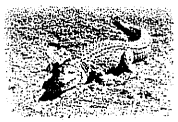
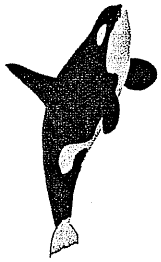
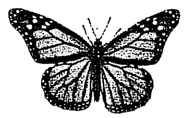
Animal						
Longitud como número decimal	5,5 m	0,009 km	1,65 m	1,2 cm	0,019 km	2,4 cm
Longitud como fracción						

Tabla 4.6

Comunicar y representar

Explica

5. Determina si cada expresión es verdadera (V) o falsa (F). Justifica tu respuesta.

   a. Todo número decimal se puede escribir como una fracción. ( )

   b. Toda fracción cuyo denominador es múltiplo de 2 o de 5 es equivalente a una fracción decimal. ( )

   c. $\frac{1}{2} + \frac{1}{25} + \frac{7}{1000} = 0{,}587$ ( )

   d. $5{,}8 = 5{,}08$ ( )

   e. $34 = 0{,}34$ ( )

Pensar y razonar

Infiere

6. Usa la regla (marcada en centímetros) que se ve debajo de cada insecto, para determinar la longitud de cada animal con un número decimal y luego con una fracción.

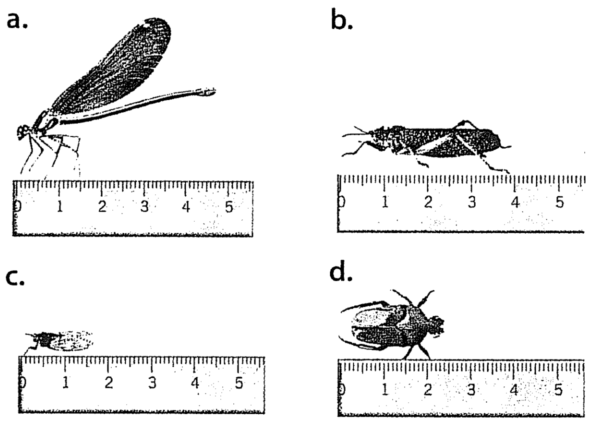


Figura 4.3

7. Decide si usarías una fracción o un número decimal para expresar cada una de las siguientes situaciones:
   - **a.** La parte que queda de una torta de queso.
   - **b.** La medida del grosor de un libro.
   - **c.** La cantidad de mantequilla que se va a usar en una receta.
   - **d.** La cantidad de estudiantes que toman la ruta escolar del total de estudiantes del colegio.

Plantear y resolver problemas

Analiza

8. En una salsamentaria, una persona solicitó algunos productos. Para cada uno, determina si recibió o no la cantidad solicitada.

Solicitud	$\frac{1}{2}$ de libra de jamón	$\frac{3}{4}$ de libra de queso mozarella	$\frac{1}{4}$ de libra de mortadela	$\frac{3}{8}$ de libra de queso paipa
Número que indica la báscula	0,50	0,73	0,25	0, 37

Tabla 4.7

9. Escribe dos números decimales que cumplan las condiciones dadas.
   - **a.** El dígito de las unidades es el mismo dígito de las centésimas. El dígito de las décimas es el doble del dígito de las milésimas.
   - **b.** La suma de los dígitos de las décimas y las centésimas es igual a la parte entera del número.

10. Escribe cómo se lee la información nutricional del yogur de la figura 4.4.

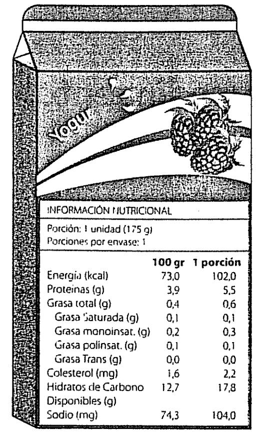


Figura 4.4

Evalúa

1. Escribe los siguientes números decimales.
   - **a.** Cuarenta y cinco centésimas.
   - **b.** Dos enteros y cuarenta y tres milésimas.
   - **c.** Nueve diezmilésimas.
   - **d.** Ciento cuarenta y siete enteros y veintiocho centésimas.

2. Encierra con un círculo las fracciones decimales en la columna de la izquierda y relaciónalas con su correspondiente expresión decimal en la columna de la derecha.

$\frac{3}{10}$	
$\frac{1}{3}$	0,21
$\frac{21}{100}$	1,5
$\frac{9}{8}$	0,058
$\frac{58}{1000}$	0,3
$\frac{10}{12}$	
$1\frac{5}{10}$	

Desempeños

- Comprende el valor posicional de las cifras de un número decimal.
- Reconoce fracciones decimales y las escribe como números decimales.

Practica más, pág. 318.

Tema 29

Clases de decimales: exactos y periódicos

Ideas previas

1. Cita un ejemplo de:
   a. Una división en la que el residuo sea cero.
   b. Una división en la que el residuo sea 6.
   c. Una fracción decimal.
   d. Una fracción que no sea decimal.
2. Explica cómo encontrar el número decimal equivalente a $\frac{4}{25}$.

Analiza

Don José cuida las matas de su jardín aplicándoles regularmente abono. Él compra un **litro** de abono líquido que debe mezclar con agua y está decidiendo qué cantidad de abono usar. La tabla 4.8 muestra las cantidades que puede usar.

Parte del frasco que puede usar	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{22}$
Cantidad en litros	0,5	0,25	0,3		

Tabla 4.8

En las tres primeras columnas calculamos la cantidad de abono en litros expresando la fracción como número decimal. Los decimales que obtuvimos se llaman decimales finitos.

Interpreta y explica

Escribe el proceso para obtener los números 0,5 y 0,25 a partir de las fracciones $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$ respectivamente.

En la tabla 4.8 no aparece el dato de la cuarta columna porque no podemos complificar la fracción $\frac{1}{3}$ para obtener una fracción decimal equivalente. Dado que no podemos usar una fracción decimal, realizamos una división para obtener su expresión decimal:

$$\begin{array}{r|l} 1\ 0 & 3 \\ \hline & 0, \end{array}$$

3 no está en 1. Escribimos 0 en el cociente, seguido de una coma y agregamos 0 en el dividendo para continuar la división.

$$\begin{array}{r|l} 1\ 0 & 3 \\ \hline 1\ 0 & 0,3 \end{array}$$

3 está 3 veces exactas en 10. Escribimos 3 en el cociente y agregamos 0 en el nuevo dividendo para continuar la división.

¿Qué significa?

El **litro** (L) es la unidad básica para medir capacidad. Algunas equivalencias son:

1 L = 1000 mililitros (mL)

1 L = 100 centilitros (cL)

1 L = 10 decilitros (dL)

```
10      |3
 10     0,333
  10
   1
```

Como vemos, el proceso no se acaba. Siempre quedará 1 como residuo y 3 como cociente.

Se ha establecido un patrón, la expresión de $\frac{1}{3}$ como decimal no es finita sino periódica:

$$\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots$$

Los puntos suspensivos indican que se sigue repitiendo el 3. Otra forma de indicar que el 3 se sigue repitiendo, es escribiendo sobre él una barra horizontal:

$$\frac{1}{3} = 0{,}\overline{3}$$

$0{,}\overline{3}$ es un **decimal periódico** y su **período** es 3.

Cuando no se puede hallar la expresión decimal de una fracción usando fracciones decimales equivalentes, se divide el numerador por el denominador de la fracción.

Ejemplo

$\frac{7}{22}$ no es una fracción decimal y tampoco tiene una fracción decimal equivalente. Expresémosla como número decimal usando división.

Solución

```
70       |22
 40      0,31818
 180
   40
   180
     4
```

El período del número decimal que obtuvimos es 18.

$$\frac{7}{22} = 0{,}3181818\ldots = 0{,}3\overline{18}$$

$0{,}3\overline{18}$ es un **decimal periódico.**

Si en un número decimal el **período** es 0 el número se denomina decimal **finito**. Si el período es diferente de 0 el número se llama **decimal peródico**.

¿Qué significa?

El grupo de números que se repiten sucesivamente en la parte decimal de un número decimal periódico se llama **período**.

Desarrolla pensamiento crítico

Ejercitar procedimientos

Interpreta

1. Colorea las burbujas que tienen números decimales periódicos.

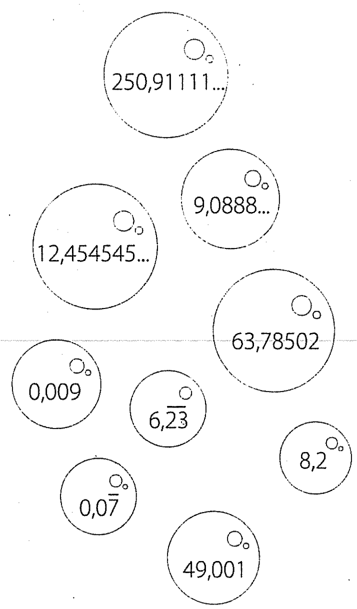


Figura 4.5

Comunicar y representar

Explica

2. ¿Cuál es el error de escritura en cada caso? Justifica tu respuesta.

   a. $0{,}\overline{257}13$

   b. $8{,}62546254 = 8{,}6\overline{254}$

   c. $12{,}121212 = \overline{12}$

   d. $0{,}1\overline{6} = 0{,}\overline{16}$

Pensar y razonar

Infiere

3. Los números decimales que no son finitos y tampoco son periódicos no se pueden expresar como una fracción. Escribe 3 ejemplos de estos decimales.

Plantear y resolver problemas

Analiza

4. Si don José decide usar $\frac{1}{4}$ del contenido del frasco de abono, ¿cómo puede medir esa cantidad usando un recipiente como el de la figura 4.6?

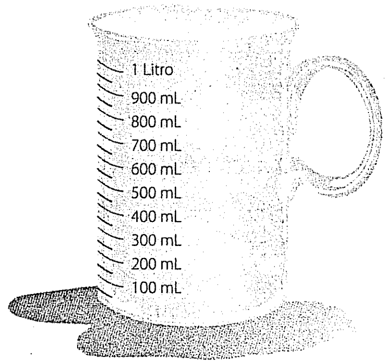


Figura 4.6

Evalúa

1. Expresa cada fracción como un número decimal y clasifícalo en decimal exacto o decimal periódico.

   a. $\frac{23}{16}$

   b. $\frac{73}{25}$

   c. $\frac{4}{11}$

   d. $\frac{2}{9}$

   e. $\frac{19}{10}$

2. En cada caso, escribe un número decimal que cumpla las condiciones descritas.

   a. El período tiene 3 cifras. La primera cifra es cuatro menos que la tercera. La segunda cifra es tres más que la tercera.

   b. No tiene parte entera y tampoco es periódico.

   c. Tiene infinitas cifras decimales pero no es periódico.

Desempeños

- Expresa cualquier fracción como número decimal y lo clasifica en exacto o periódico.
- Propone números decimales que satisfacen condiciones dadas.

Practica más, pág. 318.

Decimales equivalentes

Ideas previas

1. Escribe 3 fracciones equivalentes a $\frac{15}{9}$.
2. Explica cómo verificar si dos fracciones son o no equivalentes.
3. Encuentra la expresión decimal de cada fracción.

   a. $\frac{12}{100}$ b. $\frac{9}{11}$

Analiza

El valor de la unidad monetaria en cada país cambia frente a otros países, debido a factores económicos, políticos e incluso sociales. Los abuelos de Sofía y Samuel llegaron de un viaje a Europa y les regalaron algunos euros.

Si asumimos que el valor de un **euro** (1€) es aproximadamente \$ 2480, ¿cuánto dinero, en pesos, recibieron Sofía y Samuel de sus abuelos?

Sofía recibió 4,7 € | Samuel recibió 4,70 €

Para comparar la cantidad de dinero que recibieron Sofía y Samuel, primero escribimos cada cantidad en forma de fracción:

$$4{,}7 = \frac{47}{10} \qquad 4{,}70 = \frac{470}{100}$$

Luego calculamos $\frac{47}{10}$ de euro y $\frac{47}{100}$ de euro:

$$\frac{47}{10} \times 2480 = 11\,656 \qquad \frac{470}{100} \times 2480 = 11\,656$$

Aunque Sofía recibió 4,7 € y Samuel recibió 4,70 €, ambos recibieron la misma cantidad de dinero en pesos colombianos: \$ 11 656.

Esto se explica porque $\frac{47}{10}$ y $\frac{470}{100}$ son fracciones **equivalentes**; entonces, los números decimales correspondientes a estas fracciones decimales también son equivalentes:

$$4{,}7 = 4{,}70$$

¿Qué significa?

En algunos países miembros de la Unión Europea la moneda oficial es el **euro** (€).

Interpreta y verifica

Comprueba que $\frac{47}{10}$ y $\frac{470}{100}$ son fracciones equivalentes.

> Un grupo de números decimales son **equivalentes** si representan la misma cantidad.

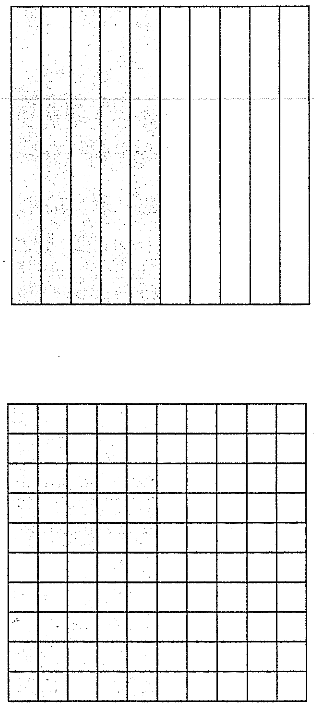
Ejemplo

Escribamos un número decimal equivalente a 0,5.

Solución

$0{,}5 = 0{,}50$ porque sus expresiones fraccionarias son $\frac{5}{10}$ y $\frac{50}{100}$ que son equivalentes. En la figura 4.7 podemos observar la representación gráfica de $\frac{5}{10}$ y $\frac{50}{100}$: las dos fracciones representan la misma área; por tanto, son equivalentes.

$\frac{5}{10}$ Cinco décimas



$\frac{50}{100}$ Cincuenta centésimas

Figura 4.7

> Al agregar uno o más ceros a la derecha de la última cifra decimal de un número decimal se obtienen **decimales equivalentes** al número decimal inicial.

Ejemplo

Escribamos el número decimal equivalente a 42,39 que resulta de agregar un cero a la derecha.

Solución

Si agregamos un cero a la derecha de 42,39 el número que obtenemos es 42,390 el cual se lee como *cuarenta y dos enteros trescientos noventa milésimas.*

Problema del día

¿Por qué los números 1,0 y 0,1 no son equivalentes?

Desarrolla pensamiento crítico

Ejercitar procedimientos

Interpreta

1. Encuentra parejas de números que sean equivalentes.

80,0	0,8	1,0800
	1,8	
1800	8	0,8
8000	1,08	80

Figura 4.8

Comunicar y representar

Explica

2. Muestra gráficamente por qué $0{,}9 = 0{,}90$

3. Muestra gráficamente por qué $0{,}2 \neq 0{,}02$

Plantear y resolver problemas

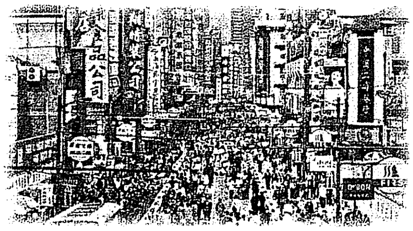
Analiza

4. Juan Manuel viajó a China y encontró en dos tiendas un dispositivo electrónico que necesita comprar. En la primera tienda tiene un costo de 148,70 yuanes (¥ 148,70) y en la segunda cuesta 148,700 **yuanes** (¥ 148,700).

Si los dos dispositivos son de la misma marca, ¿en cuál de las dos tiendas le conviene comprarlo?

¿Qué significa?

La moneda oficial china es el **yuan.**



Pensar y razonar

Infiere

5. Escribe un argumento que justifique que los números 1 y 1,0 son equivalentes, pero 1 y 0,1 no son equivalentes.

Evalúa

1. Escribe dos decimales equivalentes a cada número.

a. 83

b. 0,04

c. 9,600

2. Determina si cada expresión es verdadera (V) o falsa (F). Justifica tu respuesta.

a. $56 = 0{,}56$

b. $0{,}004 = 0{,}4$

c. $7{,}01 \neq 7{,}1$

d. $4{,}052 \neq 4{,}0520$

Desempeños

- Identifica números decimales equivalentes.
- Justifica afirmaciones que involucran decimales equivalentes.

Practica más, pág. 318.

Tema 31

Ubicación de decimales en la recta numérica

Ideas previas

1. Verifica si cada pareja corresponde a números equivalentes.
   - **a.** $\frac{3}{10}$ y $\frac{15}{20}$
   - **b.** $\frac{8}{7}$ y $\frac{4}{7}$
   - **c.** $\frac{12}{4}$ y 3
   - **d.** 0,2 y 0,20

2. Ubica en una recta numérica las siguientes fracciones:

   $\frac{1}{3}, \frac{7}{5}, \frac{4}{16}, \frac{9}{2}, \frac{3}{4}.$

Interpreta

Felipe y Diana iniciaron en diferentes momentos una caminata desde el mismo punto de partida por un camino recto. La distancia que ambos deben recorrer es 10 km.

Una forma de representar un número decimal en la recta numérica es hacer las divisiones de cada segmento de recta de acuerdo con la cantidad de cifras decimales del número y contar el número de divisiones necesarias.

Las décimas indican que dividimos la unidad en 10, las centésimas que dividimos en 100 y así sucesivamente.

La figura 4.9 representa la posición de cada uno. En ella observamos que Felipe se encuentra a 4,3 km del punto de partida, mientras que Diana está a 5,5 km del punto de partida.

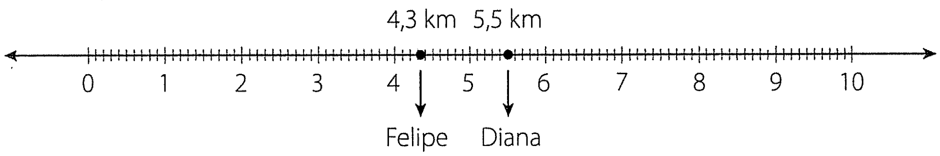


Figura 4.9

Otra forma de representar los números 4,3 y 5,5 en la recta numérica es escribiéndolos como fracción decimal y graficando estas fracciones en la recta.

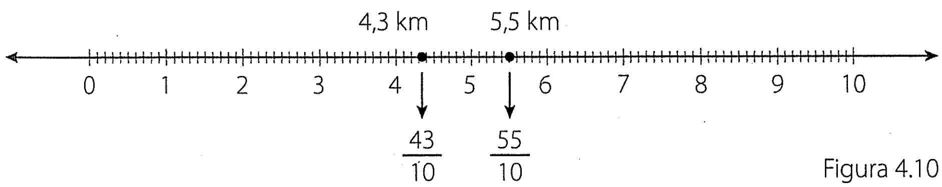


Figura 4.10

A cada número decimal le corresponde un punto en la **recta numérica**.

Interpreta y practica

Escribe como fracción decimal los números 0,2 y 0,02. Grafica en la recta numérica las fracciones que obtuviste. ¿Cuántas divisiones debes hacer para ubicar cada número?

Ejemplo

Ubiquemos en la recta numérica el número 0,8.

Solución

Como el número 0,8 está entre 0 y 1, dividimos el segmento de recta comprendido entre 0 y 1 en diez partes iguales. Contamos 8 después de 0 y allí ubicamos 0,8.

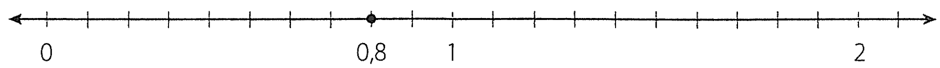


Figura 4.11

Ejemplo

Ubiquemos en la recta numérica el número 3,6.

Solución

3,6 es un número que está entre 3 y 4, entonces para ubicarlo en la recta numérica contamos 6 partes después de 3:

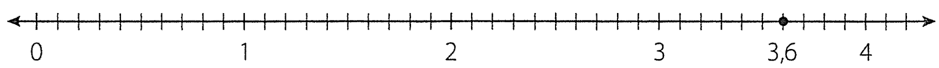


Figura 4.12

Dato histórico

Aunque los matemáticos usaban fracciones decimales, la gente del común sólo empezó a usarlas desde cuando Simón Stevin (1548-1620) escribió una manera de usar las fracciones decimales asignando un nombre y un símbolo a cada posición decimal. Así, para expresar el número 6,935 escribió;

6 0 9 1 3 2 5 3

Interpreta y aplica

Para ubicar en la recta numérica el número 16,52, divide el segmento comprendido entre 16 y 17 en 10 partes iguales..

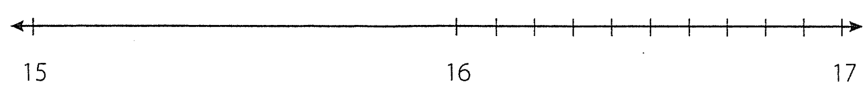


Figura 4.13

Como el número 16,52 está entre 16,5 y 16,6, amplía el segmento de recta comprendido entre 16,5 y 16,6, divídelo en 10 partes iguales y cuenta 2 partes a partir de 16,5. Localiza allí el número 16,52.

Desarrolla pensamiento crítico

Ejercitar procedimientos

Interpreta

1. Escribe en cada recta numérica los números decimales que corresponden a los puntos azules.

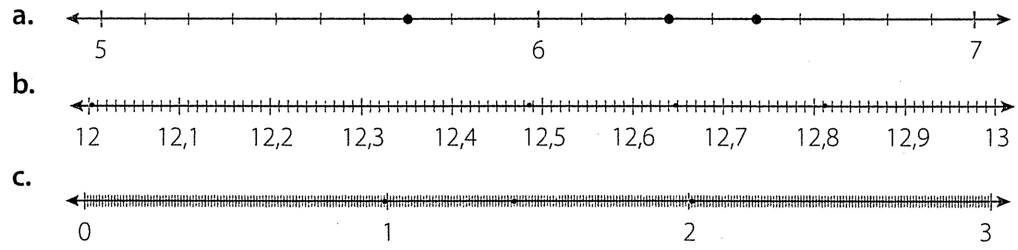


Figura 4.14

Pensar y razonar

Infiere

2. Ubica en la misma recta numérica los siguientes números: 0; 1; 2; 3; $\frac{4}{5}$; $\frac{5}{2}$; $\frac{9}{3}$; 0,8; 1,5; 3,0.
   - ¿Qué números ocuparon el mismo lugar en la recta?
   - ¿Por qué puede haber más de un número ocupando el mismo punto en la recta numérica?

Comunicar y representar

Explica

3. Utiliza la recta numérica para escribir una explicación de por qué los números 5 y 0,5 no son equivalentes.

Plantear y resolver problemas

Analiza

4. Escribe tres números decimales que estén en cada recta de la figura 4.15.

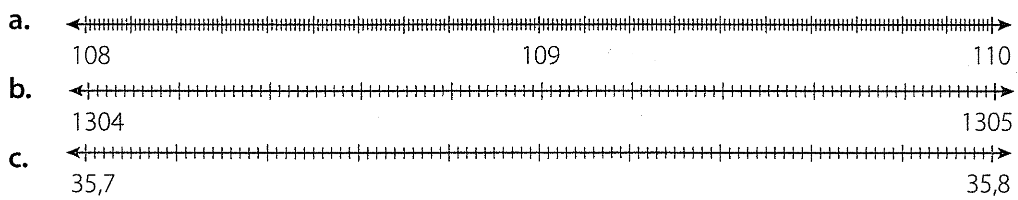


Figura 4.15

Evalúa

1. Dibuja una recta numérica y ubica en ella los siguientes números:

   a. 4,5 **b.** 1,02 **c.** 3,57 **d.** 0,01

2. ¿Qué números corresponden a los puntos de colores?

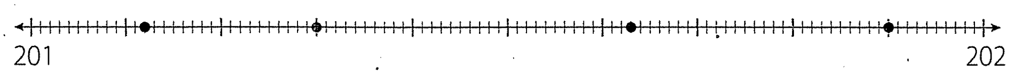


Figura 4.16

3. Utiliza la recta numérica para mostrar que los números 6,7 y 6,70 son equivalentes.

Desempeños

- Ubica números decimales en la recta numérica.
- Usa la recta numérica para mostrar equivalencia entre dos números decimales.

Practica más, pág. 319.

Comparación de números decimales

Ideas previas

1. Transforma cada pareja de expresiones decimales en fracciones. Luego compáralas y determina cuál es mayor.
   - **a.** 25,4 y 25,43
   - **b.** 10,02 y 10,2
   - **c.** 0,81 y 0,94
   - **d.** 3,5 y 2,95

2. Escribe en palabras las siguientes expresiones.
   - **a.** $4{,}5 = 4{,}50$
   - **b.** $\frac{7}{8} > \frac{3}{16}$
   - **c.** $\frac{27}{3} = 9$
   - **d.** $11 < 12\frac{4}{5}$

Analiza

Un grupo ambientalista organizó una exposición con el ánimo de motivar a los visitantes a preservar diferentes especies de ranas. Algunas ranas que se van a exhibir son:

				
Nombre	Rana de cristal moteada	Rana venenosa de flecha verde	Rana roja	Rana mirona
Longitud	2,385 cm	2,824 cm	2,382 cm	2,546 cm

Tabla 4.9

Sofía es la encargada de disponer las ranas en los anfibiarios según su longitud. ¿En qué orden debe hacerlo?

De la tercera fila de la tabla 4.9 podemos deducir que todas las ranas miden más de 2 cm pero menos de 3 cm.

Para decidir el orden en que se van a situar debemos comparar las cifras decimales, así:

Los números 2,824 y 2,546 son los que tienen el mayor valor en la cifra de las décimas; además $8 > 5$, entonces la rana de flecha verde es la más larga, seguida de la rana mirona. Nos falta comparar las longitudes de la ranas cristal moteada y la rana roja.

Veamos la figura 4.17. Utilizando sólo la regla es difícil determinar si la rana de cristal moteada es más larga o más corta que la rana roja.

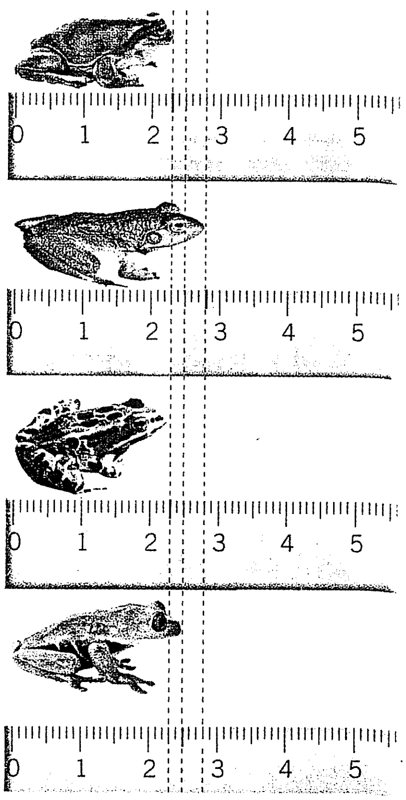


Figura 4.17

Analiza y explica

¿Por qué no es suficiente emplear la regla para determinar si la rana de cristal moteada es más larga o más corta que la rana roja?

Para determinar cuál de las ranas es más larga necesitamos entonces, comparar la cifra de las centésimas:

2,385 (=) 2,382

Como son iguales, entonces comparamos la cifra de las milésimas:

2,385 (>) 2,382

Como 5 > 2, decimos que 2,385 > 2,382

Las longitudes de las ranas ordenadas de mayor a menor son:

2,824; 2,546; 2,385; 2,382

Infiere y responde

¿Cuál es el orden en que Sofía debe disponer las ranas?

Para establecer el **orden** entre dos **números decimales**, se comparan las cifras que están en la misma posición, empezando por el mayor valor posicional, hasta encontrar en cuál difieren. El orden entre esas cifras diferentes determina el orden entre los números decimales, así: aquel que tenga la mayor cifra en el mismo valor posicional, indicará el decimal mayor.

Ejemplo

Determinemos cuál de los siguientes números es mayor: 43,25; 43,209.

Solución

Empezamos comparando de izquierda a derecha las cifras que están en la misma posición decimal hasta que encontremos cifras diferentes. Entre las cifras diferentes establecemos la relación de orden:

43,25 43,209

(=)
(=)
(=)
(>)

Concluimos que 43,25 es el mayor de los dos números.

Ejemplo

En la *situación problema* del comienzo de la unidad, están registrados los tiempos de cuatro amigos en una competencia, así: Juan Carlos: 12,5 segundos, José Luis: 11,98 segundos, Eduardo: 12,07segundos y Sebastián: 13 segundos.

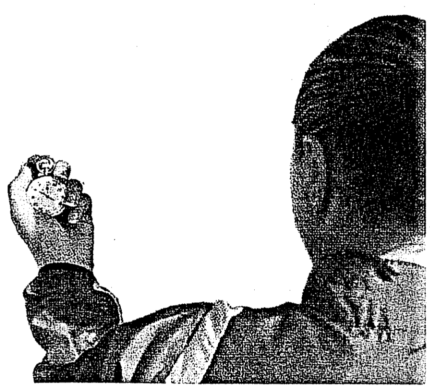
Resolvamos la pregunta **4.**: ¿quién ganó la competencia?

Solución

Para responder la pregunta, comparamos los cuatro números y determinamos cuál de los tiempos es el menor: 11,98 < 12,07 < 12,5 < 13. El menor tiempo lo hizo José Luis, por tanto él es el ganador de la competencia.

Problema del día

La altura mínima permitida para subir a una montaña rusa en un parque de atracciones mecánicas es 1,22 m. Si Juan mide 125 cm y Carolina mide 121 cm, ¿pueden los dos subir a la montaña rusa de dicho parque?



Desarrolla pensamiento crítico

Ejercitar procedimientos

Interpreta

1. Ordena de menor a mayor cada lista de números.
   - **a.** 18,34; 10,234; 22; 15,34
   - **b.** 270,6; 271,7; 270,63; 270,82
   - **c.** 0,305; 0,3008; 0,306; 0,30011
   - **d.** 0,001; 0,0005; 0,00058; 0,00053
2. Ordena las fracciones de mayor a menor encontrando primero la expresión decimal de cada una.

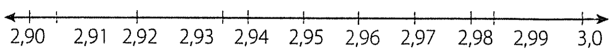
$$\frac{3}{10}, \frac{1}{3}, \frac{4}{15}, \frac{7}{25}$$

Comunicar y representar

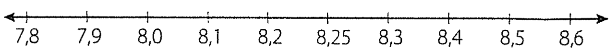
Explica

3. Argumenta por qué están equivocadas las representaciones que se han hecho de los números decimales en las rectas numéricas de la figura 4.18.

a.



b.



c.

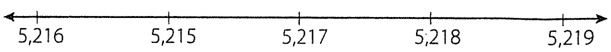


Figura 4.18

Pensar y razonar

Infiere

4. En cada uno de los siguientes números intercambia el dígito de las décimas con el de las centésimas. ¿Obtienes en cada caso un número mayor?
   - **a.** 6,7141
   - **b.** 8,592
   - **c.** 4,3369
   - **d.** 1,843
5. Encuentra un número decimal finito y un número decimal periódico entre cada pareja de números.
   - **a.** 1,452 y 1,448
   - **b.** 63,12 y 63,13
   - **c.** 84,322 y 84,325
   - **d.** 30 y 30,02

Plantear y resolver problemas

Analiza

6. Dos números decimales tienen igual la parte entera y la cifra de las décimas, pero difieren en las centésimas. Si la cifra de las centésimas del primer número es la mitad de la cifra de las centésimas del segundo, ¿qué número es mayor?
7. Sofía debe organizar las siguientes ranas en los anfibiarios de acuerdo con la longitud de cada una. Escribe dentro del círculo el puesto que deben ocupar si las ordena desde la más pequeña hasta la más grande.
   - ◯ Rana fantasma: 3,672 cm
   - ◯ Rana cuatro ojos: 3,236 cm
   - ◯ Rana casera: 3,675 cm
   - ◯ Rana arborícola gris: 3,671 cm

Evalúa

1. Completa los espacios con uno de los signos >, < o = según corresponda.
   - **a.** 81,45 ☐ 1,405
   - **b.** 7,20 ☐ 7,2
   - **c.** 0,08 ☐ 0,8
   - **d.** 2,034 ☐ 2,031
2. Escribe dos números decimales que estén entre los siguientes números:

   56,034 y 56,035

Desempeños

- Establece relaciones de orden entre números decimales.
- Encuentra números decimales entre otros dados.

Practica más, pág. 319.

Tema 33

Adición y sustracción de números decimales

Ideas previas

1. Escribe los siguientes números, uno debajo del otro, alineando las comas.

   a. 334,05 b. 48,9

   c. 0,00007 d. 12,068

2. Explica por qué los números 45,6; 45,60 y 45,600 son equivalentes.

3. Realiza las operaciones.

   a. $\frac{7}{10} + \frac{9}{100} - \frac{3}{1000}$ b. $4\frac{5}{3} + 8\frac{1}{2} - \frac{15}{4}$

   c. 24 070 – 19 382 d. 10 000 – 8460

Analiza

Don Silvio lleva un registro del crecimiento de una de las plantas de tomate que cultiva en su terraza.

Semana	Crecimiento de la planta
1	0,5 cm
2	0,2 cm
3	1,3 cm
4	2,85 cm
5	4 cm

Tabla 4.10

¿Qué altura alcanzó la planta al cabo de 5 semanas?

Para responder esta pregunta adicionamos las medidas correspondientes al crecimiento de la planta durante las cinco semanas:

0,5 cm + 0,2 cm + 1,3 cm + 2,85 cm + 4 cm

Para **adicionar** números decimales, primero alineamos los números en forma vertical haciendo coincidir las cifras que tienen el mismo valor posicional y luego sumamos de derecha a izquierda. El resultado mantiene la coma en la misma posición de los sumandos. Si es necesario, añadimos ceros a la derecha para que todos los sumandos tengan igual cantidad de cifras decimales.

$$\begin{array}{r} 0{,}5 \\ 0{,}2 \\ 1{,}3 \\ 2{,}85 \\ +\ 4{,}0 \\ \hline 8{,}85 \end{array}$$

unidades — décimas — centésimas

La planta creció 8,85 cm después de 5 semanas.

Interpreta

Don Silvio olvidó registrar el crecimiento de la planta en las dos semanas siguientes, pero al finalizar la séptima semana midió la altura de la planta y encontró que era 15,2 cm. Para averiguar cuántos centímetros creció durante este tiempo, calculó la **diferencia** entre 15,2 cm y 8,85 cm.

> Para **sustraer** dos números decimales, escribimos el sustraendo debajo del minuendo, ubicando cada cifra según su valor posicional. Sustraemos el número menor del mayor y ubicamos la coma decimal en el lugar que le corresponde.

$$\begin{array}{r} 15{,}20 \\ -\ \ 8{,}85 \\ \hline 6{,}35 \end{array}$$

La planta creció 6,35 cm durante las dos últimas semanas.

Infiere y explica

¿Por qué escribimos 15,20 en lugar de 15,2?

¿Qué significa?

El resultado de una sustracción se denomina **diferencia**.

Propiedades

La adición de números decimales cumple las mismas propiedades que la adición de números naturales.

Propiedad	Ejemplo	
Asociativa: el resultado de una adición no depende de las agrupaciones que se realicen con sus sumandos.	$(45 + 23,7) + 19,56$ $= 68,7 + 19,56$ $= 88,26$	$45 + (23,7 + 19,56)$ $= 45 + 43,26$ $= 88,26$
Modulativa: todo número decimal adicionado con cero es el mismo número.	• $3,8 + 0 = 3,8 + 0,0 = 3,8$ • $0 + 3,8 = 0,0 + 3,8 = 3,8$	
Conmutativa: el resultado de una adición no depende de la posición de los sumandos.	$0,567 + 13,56 = 13,56 + 0,567$ $14,127 = 14,127$	
Clausurativa: la suma de dos decimales es otro decimal.	$7,43 + 5,11 = 12,54$ 12,54 es un número decimal.	

Tabla 4.11

La **adición** de números decimales cumple las propiedades **asociativa, modulativa, conmutativa** y **clausurativa.**

Infiere y responde

Completa la tabla 4.12. ¿Qué propiedades de la adición de números decimales no se cumplen en la sustracción?

Clausurativa	$64,12 - 5,4 = 58,72$	$5,4 - 64,12 = \boxed{}$
Asociativa	$25,16 - 13,8 - 7,1 = (25,16 - 13,8) - 7,1$ $= 11,36 - 7,1$ $= 4,26$	$25,16 - (13,8 - 7,1) = \boxed{}$
Conmutativa	$32,05 - 7,16 = 24,89$	$7,16 - 32,05 = \boxed{}$
Modulativa	$93,66 - 0 = 93,66$	$0 - 93,66 = \boxed{}$

Tabla 4.12

En algunos casos necesitamos adicionar o sustraer fracciones y números decimales; en ese caso transformamos las fracciones a decimales o los decimales a fracciones y efectuamos la operación correspondiente.

Ejemplo

Calculemos $7,6 - \frac{7}{2}$.

Solución

Encontramos la expresión decimal de $\frac{7}{2}$ y efectuamos la sustracción correspondiente:

$7,6 - 3,5 = 4,1.$

Desarrolla pensamiento crítico

Ejercitar procedimientos

Interpreta

1. Efectúa las siguientes adiciones.

- **a.** 895,78 + 34,6 + 2,678 + 45,9
- **b.** 5680 + 5678,89
- **c.** 45,21 + 36,78 + 456,673 + 34,008
- **d.** 23 609,8 + 123 456 + 5708,006

2. Calcula las diferencias.

- **a.** 607 890,93 – 45 701,457
- **b.** 891 – 69,65
- **c.** 0,9087 – 0,0198
- **d.** 54,69 – 31

Comunicar y representar

Explica

3. Juliana no obtuvo las respuestas correctas en los siguientes ejercicios. Encuentra dónde está el error y explica cómo corregirlo.

- **a.** 43,56 + 8,345 = 12,701
- **b.** 62,81 – 7,592 = 55,222
- **c.** 12,64 + 7,82 = 0,2046
- **d.** 37,281 – 9,59 = 28,791

4. Responde cada pregunta, efectuando las operaciones correspondientes.

- **a.** ¿Cuál es la diferencia entre 56,7 y 29,41?
- **b.** ¿En cuánto excede 5 a 2,5?
- **c.** ¿Cuál es el resultado de 76,58 + 24,302 + 320?

5. Decide si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F). Justifica tu respuesta.

- **a.** La suma de un número natural y un número decimal es un número natural. ( )
- **b.** La suma de dos números decimales finitos puede ser un número decimal periódico. ( )
- **c.** La diferencia de dos números decimales puede ser un número natural. ( )
- **d.** Un número decimal se puede sustraer de un número natural mayor. ( )

Pensar y razonar

Infiere

6. Determina qué número representa cada letra en la operación.

a.

$$\begin{array}{r} 34{,}a5b \\ +\quad 7{,}278 \\ \hline 42{,}034 \end{array}$$

b.

$$\begin{array}{r} 128{,}0fg \\ -\quad 3h{,}l48 \\ \hline 93{,}314 \end{array}$$

7. Encuentra el término que falta en cada operación.

a.

$$\begin{array}{r} 3409{,}45 \\ +\quad \boxed{} \\ \hline 5843{,}12 \end{array}$$

b.

$$\begin{array}{r} \boxed{} \\ -\quad 28791{,}056 \\ \hline 9097{,}245 \end{array}$$

c.

$$\begin{array}{r} 45{,}0321 \\ -\quad \boxed{} \\ \hline 23{,}8641 \end{array}$$

d.

$$\begin{array}{r} \boxed{} \\ +\quad 0{,}07056 \\ \hline 10{,}25273 \end{array}$$

8. Cuando hay adiciones o sustracciones entre números decimales y números fraccionarios es necesario transformar la operación sólo con decimales o sólo con fraccionarios. Efectúa las siguientes operaciones.

a. $0{,}65 + \frac{17}{5}$

b. $\frac{1}{9} + 8{,}34$

c. $23{,}073 - \frac{26}{25}$

d. $\frac{13}{4} - 2{,}003$

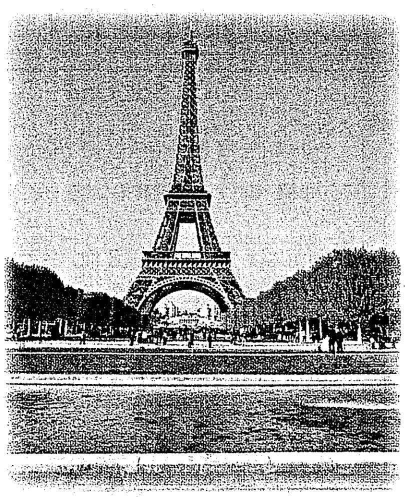
Plantear y resolver problemas

Analiza

9. Don Silvio utiliza un abono orgánico que viene en dos presentaciones: el granulado, que trae 130 gramos y el líquido, que trae 121,5 gramos. ¿Cuál es la diferencia en el peso de las dos presentaciones?

10. Cierto día en la capital la temperatura a la 1 p.m. fue 23,7 °C y en la noche 15,9 °C. ¿Cuántos grados disminuyó la temperatura?

11. Alberto viajó a Francia y tuvo que pagar en el aeropuerto 53,72 € por concepto de impuestos y 29,6 € por exceso de peso en su equipaje. ¿Cuántos euros pagó en el viaje de ida si el tiquete le costó 1285 €?



12. La estatura de Raúl es 0,32 m más que la estatura de Graciela. ¿Cuál es la estatura de Graciela si Raúl mide 1,7 m?

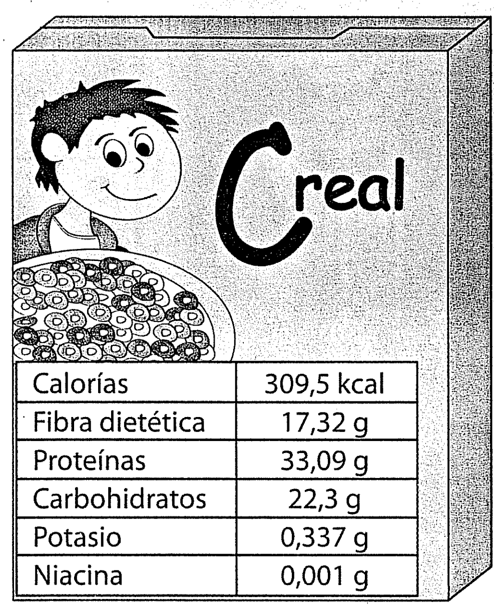
13. Formula un problema que para su solución requiera de adiciones y sustracciones, utilizando la información de la tabla 4.13.

Día de la semana	Lunes	Miércoles	Viernes	Domingo
Galones de gasolina	5,6	0,78	8,5	2,03

Tabla 4.13

Evalúa

La información nutricional de una caja de cereal de 100 g es la siguiente.



Calorías	309,5 kcal
Fibra dietética	17,32 g
Proteínas	33,09 g
Carbohidratos	22,3 g
Potasio	0,337 g
Niacina	0,001 g

Figura 4.19

a. ¿Qué cantidad de potasio y niacina contiene una caja de este cereal?

b. ¿Cuál es la diferencia entre la cantidad de fibra dietética y de proteína que tiene una caja de este cereal?

Desempeño

- Resuelve problemas que involucran adición y sustracción de números decimales.

Practica más, pág. 320.

Tema 34

Ecuaciones aditivas con números decimales

Ideas previas

1. Relaciona cada expresión de la columna izquierda con su correspondiente resultado en la columna de la derecha.

La mitad de 24	6
La décima parte de 180	43
4 menos que 10	30
5 veces el doble de 3	12
8 más que 35	18

2. Completa los espacios en cada caso para que la igualdad sea verdadera.

a. $\square + 25 = 50$

b. $\square - 8 = 12$

c. $0,5 + \square = 2,5$

d. $23,6 - \square = 10,6$

Analiza

Carlos y Manuel son dos competidores de Fórmula 1. En la última competencia Manuel empleó 1,56 horas en completar un circuito, 0,013 horas más que el tiempo que gastó Carlos en completar el mismo circuito. ¿Cuál fue el tiempo de Carlos?

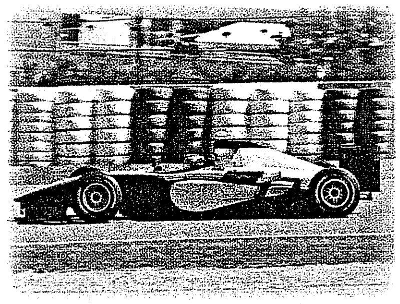
Para responder la pregunta vamos a plantear y resolver una ecuación.

Paso 1 ¿Cuál es el dato desconocido?	**Solución** El dato desconocido es el tiempo que Carlos empleó en completar el circuito.
Paso 2 ¿Cómo representamos el dato que no conocemos?	**Solución** Usaremos la letra t para representar el dato que queremos hallar.
Paso 3 ¿Cuáles son los datos conocidos?	**Solución** Los datos que nos da el enunciado son dos: • El tiempo que empleó Manuel, que fue 1,56 horas. • Manuel empleó 0,013 horas más que Carlos.
Paso 4 ¿Qué operación relaciona a través de una igualdad el dato desconocido y los datos conocidos?	**Solución** Usaremos la **adición**, porque Manuel empleó 0,013 horas **más** que Carlos en completar el circuito.
Paso 5 ¿Cómo escribimos la ecuación?	**Solución** $\underbrace{1,56}_{\text{Tiempo empleado por Manuel}} = 0,013 + \underbrace{t}_{\text{Tiempo empleado por Carlos}}$

Tabla 4.14

Pensamiento numérico

Sólo nos falta resolver la ecuación $1,56 = 0,013 + t$ para resolver el problema.



$1,56 = 0,013 + t$	Sustraemos en ambos lados de la igualdad el sumando que acompaña la incógnita.
$1,56 - \mathbf{0,013} = 0,013 - \mathbf{0,013} + t$	Realizamos las operaciones indicadas.
$1,547 = t$	

Concluimos que Carlos empleó 1,547 horas en completar el circuito.

Fijémonos en la solución que obtuvimos. ¿Parece lógicamente posible?

La solución que obtuvimos tiene sentido, ya que $1,547 > 1,56$.

¿Podemos probar que la solución es correcta?

Para probar si la solución es correcta, verifiquemos que cumple las condiciones del enunciado: Manuel empleó 1,56 horas en completar el circuito, y Carlos 1,547 horas. La diferencia entre estos tiempos es 0,013 horas.

Una **ecuación aditiva** es una igualdad que involucra la adición o la sustracción y un término desconocido llamado **incógnita**. La incógnita se representa con cualquier letra minúscula.

Ejemplo

Resolvamos la ecuación $m - 45,8 = 63,72$.

Solución

$m - 45,8 = 63,72$	Tomamos la ecuación a resolver.
$m - 45,8 + \mathbf{45,8} = 63,72 + \mathbf{45,8}$	Adicionamos en ambos lados de la igualdad el opuesto de $-45,8$.
$m = 109,52$	Realizamos las operaciones indicadas.

Vamos a comprobar la solución. Volvemos a la ecuación inicial y en ella remplazamos el valor que encontramos para la incógnita:

$m - 45,8 = 63,72$	
$109,52 - 45,8 = 63,72$	Efectuamos la sustracción.
$63,72 = 63,72$	

Analiza y resuelve

Plantea y resuelve una ecuación que te permita responder la pregunta planteada.

La diferencia entre las estaturas de Diana y Luz es 0,8 m. Si Diana mide 1,75 m, ¿cuál es la altura de Luz?

Dato histórico

El primer matemático en usar la coma (,) para separar la parte entera de la parte decimal fue el italiano Giovanni Antonio Magini (1555-1617), pero en 1616 el escocés John Napier recomendó para esta misma tarea el uso del punto (.)

Hoy día el punto decimal se usa en los países anglosajones mientras que la coma decimal se usa en muchos países de Europa y Suramérica.

Desarrolla pensamiento crítico

Ejercitar procedimientos

Interpreta

1. Resuelve y prueba la solución de las siguientes ecuaciones.

   a. $45{,}001 + x = 93{,}8$

   b. $p - 0{,}0076 = 43{,}9$

   c. $5607 = y + 834{,}54$

   d. $841{,}32 = t - 560{,}105$

Pensar y razonar

Infiere

2. En el cuadrado de la figura 4.20 la suma de cada fila, columna o diagonal es la misma. Completa el cuadrado.

2	0,25	1,50
	2,2	

Figura 4.20

Plantear y resolver problemas

Analiza

Resuelve cada uno de los siguientes problemas usando ecuaciones.

3. La longitud del cucarrón que encontró Lorena es 5,46 mm menor que la longitud del que encontró Álvaro. Si el cucarrón de Lorena mide 22,37 mm, ¿cuánto mide el cucarrón de Álvaro?

4. Un atleta logró su mejor tiempo corriendo 400 m planos en 39,5 segundos. Este tiempo equivale a 0,07 segundos menos que su anterior registro de tiempo en la misma prueba. ¿Cuál era el registro anterior de tiempo que tenía el atleta?

5. Sebastián y Gonzalo practican béisbol. El promedio de bateo de Sebastián es 0,385. Este número es unas milésimas menos que el promedio de Gonzalo, que es 0,483. ¿Cuántas milésimas menos es el promedio de Sebastián?

Comunicar y representar

Explica

6. Sin resolver cada ecuación, decide si el número dado como solución es correcto o no. Justifica tu respuesta.

   a. $48{,}003 + a = 52{,}62$; $a = 3{,}89$

   b. $g - 52{,}17 = 2{,}39$; $g = 51{,}24$

   c. $h - 5{,}82 = 13{,}05$; $h = 18{,}87$

   d. $45{,}73 = p + 21{,}3$; $p = 67{,}03$

Evalúa

1. Resuelve las ecuaciones y prueba que la solución es correcta.

   a. $238{,}65 + m = 458{,}3$

   b. $3509 = x - 149{,}81$

2. Responde.

   a. ¿Qué número sumado con 45,006 da como resultado 53,9?

   b. Una libra equivale a 500 gramos. ¿Cuántos gramos le faltan a 350,25 g para completar una libra?

3. El perfume *Flor de loto* cuesta 36,75 € y su valor es 9,08 € más que el agua de colonia de la misma marca. ¿Cuánto cuesta el agua de colonia?

Desempeños

- Resuelve ecuaciones aditivas con números decimales.
- Traduce situaciones aditivas expresadas en lenguaje común a ecuaciones.
- Utiliza ecuaciones para resolver problemas.

Practica más, pág. 320.

Tema 35

Multiplicación de números decimales

Ideas previas

1. Escribe los siguientes números decimales y luego exprésalos como fracciones decimales.
   - **a.** Cuatro milésimas.
   - **b.** Ciento ocho unidades y dos décimas.
   - **c.** Treinta y cinco diezmilésimas.
   - **d.** Doce unidades y veinticuatro cienmilésimas.

2. Realiza las operaciones.
   - **a.** $\frac{7}{10} \times \frac{1}{100}$
   - **b.** $\frac{4}{100} \times \frac{3}{100}$
   - **c.** $34{,}56 + 29{,}8$
   - **d.** $18\,095{,}347 + 5832{,}06$

Analiza

La unidad monetaria de Estados Unidos es el dólar (US$). Cada dólar está compuesto por 100 centavos. Hay monedas de 1, 5, 10, 20 y 50 centavos y billetes de 1, 5, 10, 20 y 50 dólares. Los precios de los productos se denotan con números enteros y decimales. Por ejemplo, US$ 15,23 significa 15 dólares con 23 centavos.

Valeria es colombiana y viajó con su familia a Estados Unidos. En el restaurante donde almorzaron el día que llegaron, tuvo que cancelar 4 almuerzos de US$ 13,56 cada uno. ¿Cuántos dólares pagó Valeria?

Para responder la pregunta podemos usar una adición:

$$13{,}56 + 13{,}56 + 13{,}56 + 13{,}56 = 54{,}24$$

Como se trata de una adición con sumandos iguales también podemos multiplicar:

$$\begin{array}{r} 13{,}56 \\ \times\ 4 \\ \hline 54{,}24 \end{array}$$

Multiplicamos como si fueran números naturales.

El número decimal que es factor tiene 2 cifras decimales y el resultado también.

Valeria pagó 54,24 dólares en el restaurante.

> Para **multiplicar** números decimales se organizan los números en forma vertical y se multiplica como si fueran números naturales. Teniendo en cuenta que el número de cifras decimales del producto es igual a la suma de la cantidad de cifras decimales de cada factor, se sitúa la coma en el resultado.

Ejemplo

Sabiendo que un euro equivale a 1,40 dólares (1 € = US$ 1,40), determinemos cuántos dólares hay en 3,5 euros.

Solución

Debemos multiplicar el valor de un euro en dólares por la cantidad de euros: $1{,}40 \times 3{,}5$.

Situamos los números en forma vertical	1, 4 0	2 cifras decimales
	× 3, 5	1 cifra decimal
Multiplicamos como si se tratara de números naturales, sin tener en cuenta la posición de la coma.	7 0 0	
	4, 2 0	
	4, 9 0 0	3 cifras decimales

Adicionamos la cantidad de cifras decimales de los dos factores y separamos ese número de cifras en el producto.

Así, 3,5 € equivalen a US$ 4,9

Propiedades

Propiedad	Ejemplo
Asociativa: el resultado de una multiplicación no depende de las agrupaciones que se realicen con sus factores.	• $(18 \times 2{,}5) \times 0{,}13 = 45{,}0 \times 0{,}13 = 5{,}85$ • $18 \times (2{,}5 \times 0{,}13) = 18 \times 0{,}325 = 5{,}85$
Conmutativa: el resultado de una multiplicación no depende de la posición de los factores.	$12{,}65 \times 7{,}6 = 7{,}6 \times 12{,}65$ $96{,}14 = 96{,}14$
Modulativa: todo número decimal multiplicado con uno es el mismo número.	• $8{,}41 \times 1 = 8{,}41 \times 1{,}0 = 8{,}41$ • $1 \times 8{,}41 = 1{,}0 \times 8{,}41 = 8{,}41$
Clausurativa: el producto de dos números decimales es otro número decimal.	• $72{,}5 \times 8{,}3 = 601{,}75$ 601,75 es un número decimal.

Tabla 4.15

Al igual que sucede con los números naturales, la **multiplicación** de números decimales es una operación **asociativa, conmutativa, modulativa y clausurativa.**

Problema del día

Otra forma de hallar el producto de dos números decimales es expresar los números como fracciones y luego multiplicarlas. Usa ese método para multiplicar $0{,}92 \times 3{,}5$. ¿El resultado es el mismo que se obtiene al multiplicar directamente los dos decimales?

Analiza y argumenta

Si un número se multiplica con su inverso multiplicativo, el resultado es 1.

Por ejemplo, el inverso multiplicativo de $\frac{1}{4}$ es 4 porque $\frac{1}{4} \times 4 = 1$.

Escribe un argumento que justifique la siguiente afirmación: el inverso multiplicativo de 1,5 es $\frac{2}{3}$.

Desarrolla pensamiento crítico

Ejercitar procedimientos

Interpreta

1. Encuentra el producto en cada caso.

   a. $78{,}9 \times 0{,}7$ b. $12{,}781 \times 0{,}6$

   c. $9{,}3 \times 2{,}4$ d. $2042 \times 5{,}3$

Pensar y razonar

Infiere

2. Resuelve las siguientes potencias:

   a. $(1{,}7)^2 = 1{,}7 \times 1{,}7 = \square$

   b. $(0{,}13)^2 = 0{,}13 \times 0{,}13 = \square$

   c. $(0{,}2)^2 = 0{,}2 \times 0{,}2 = \square$

   d. $(3{,}8)^2 = 3{,}8 \times 3{,}8 = \square$

3. Compara cada resultado con el número que elevaste al cuadrado en el ejercicio 2.
   a. ¿Cuál es mayor?
   b. ¿Cuáles resultados son mayores que 1?, ¿cuáles resultados son menores que 1?
   c. Escribe una conclusión.

4. En cada caso, escribe y desarrolla una multiplicación de números decimales que cumpla las condiciones indicadas.

   a. El producto tiene 2 cifras decimales.
   b. Uno de los factores es 65,3 y el producto tiene 3 cifras decimales.
   c. El producto no tiene cifras decimales.
   d. Uno de los factores tiene 3 cifras decimales y el producto tiene 4 cifras decimales.

Comunicar y representar

Explica

5. Para multiplicar en forma abreviada un número decimal por una potencia de 10, se corre la coma a la derecha tantos lugares como ceros tenga la potencia de diez. Si las cifras decimales son menos que el número de ceros de la potencia de diez, se agregan tantos ceros a la derecha como sea necesario.

   Justifica con varios ejemplos la afirmación anterior. Desarrolla los ejemplos mostrando todo el proceso de la multiplicación.

Plantear y resolver problemas

Analiza

6. Valeria entró a una tienda de suvenires y compró 5 cajas de chocolates a US$ 6,30 cada una, 8 artesanías de la región a US$ 35,02 cada una y un almanaque de US$ 10.
   a. ¿Cuántos dólares pagó Valeria en la tienda?
   b. ¿Si pagó con 7 billetes de US$ 50, cuánto dinero le sobró?
   c. ¿Qué combinación de billetes y monedas pudo hacer el tendero para entregarle las vueltas a Valeria?

7. Una familia consumió durante el período de facturación del agua 42,6 m^3 del líquido. En el recibo aparece que el precio por m^3 es $ 2210. Encuentra el costo que debe pagar esta familia por el servicio de agua si además le cobran $ 32 500 por el servicio de alcantarillado.

Evalúa

1. Calcula los siguientes productos.

   a. $967{,}5 \times 0{,}73$ b. $4{,}071 \times 2{,}6$

   c. $18{,}002 \times 9$ d. $26{,}4 \times 3{,}265$

2. Completa cada igualdad con la potencia de 10 que falta.

   a. $\square \times 53{,}8504 = 5385{,}04$

   b. $2{,}35 \times \square = 235$

3. Cambia el orden y/o asocia los números de tal manera que sea más rápido hallar el producto.

   a. $5 \times 67{,}854 \times 2$ b. $75{,}024 \times 6 \times 10$

   c. $1000 \times 11{,}0087 \times 100$

   d. $245 \times 100 \times 65{,}3 \times 0{,}4$

Desempeños

- Multiplica números decimales.
- Multiplica en forma abreviada números decimales y potencias de 10.
- Aplica las propiedades de la multiplicación de números decimales.

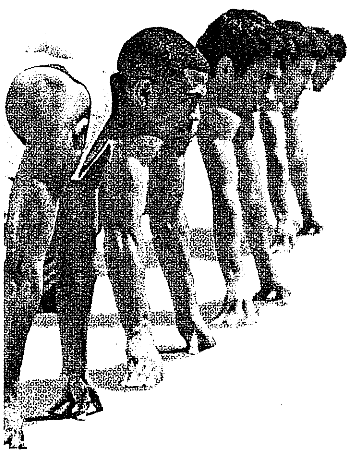
Practica más, pág. 321.

Tema 36

División de números decimales

Ideas previas

1. ¿Qué número multiplicado por 12 da como resultado 144?
2. Si un factor es 8 y el producto es 120, ¿cuál es el otro factor?
3. Calcula el cociente 87 045 ÷ 23.
4. Calcula los siguientes productos.
   - **a.** $23{,}42 \times 42$
   - **b.** $235{,}801 \times 1{,}2$
   - **c.** $5 \times 33{,}611$



Analiza

Retomemos la **Situación problema** del comienzo de la unidad y la pregunta **5**: ¿cuál es el promedio de los tiempos que hicieron los 4 jóvenes en la competencia?

Corredor	Tiempo
Juan Carlos	12,5 segundos
José Luis	11,98 segundos
Eduardo	12,07 segundos
Sebastián	13 segundos

Tabla 4.16

Para calcular el promedio, adicionamos los datos de los cuatro tiempos que aparecen en la tabla 4.16 y dividimos la suma por 4:

Paso 1. Adicionamos los cuatro datos: $12{,}5 + 11{,}98 + 12{,}07 + 13 = 49{,}55$

Paso 2. Dividimos la suma por 4:

```
4 9,5 5 | 4
        |_____
  1       1 2
```

Dividimos la parte entera.

```
4 9,5 5   | 4
          |_________
  1 5       1 2,3 8 7 5
    3 5
      3 0
        2 0
          0
```

Ubicamos una coma en el cociente y continuamos la división.

El promedio de los tiempos invertidos por los amigos en correr los 100 m fue 12,3875 segundos.

> Para **dividir** dos números decimales multiplicamos tanto el dividendo como el divisor por una potencia de diez que elimine la parte decimal en el divisor.

Ejemplo

Hallemos el cociente entre 7,812 y 6,3.

Solución

$$\frac{7{,}812}{6{,}3} = \frac{7{,}812 \times 10}{6{,}3 \times 10} = \frac{78{,}12}{63}$$

Multiplicamos el dividendo y el divisor por 10.

```
7 8, 1  2 | 6 3
1 5 1       1, 2 4
  2 5  2
        0
```

Dividimos la parte entera, ubicamos la coma en el cociente antes de empezar a dividir la parte decimal y continuamos la división.

Infiere y contesta

¿Por qué son equivalentes los cocientes 7,812 ÷ 6,3 y 78,12 ÷ 63?

Si en una división el dividendo es un número natural y la división ha terminado se puede escribir una **coma en el divisor** y **agregar un cero** al residuo para continuar la división.

Ejemplo

Veamos qué clase de número decimal obtenemos al efecturar la división de 76 por 1,5.

Solución

1. Tomamos 76 como 76,0.

```
76,0 | 1,5
```

2. Multiplicamos tanto el dividendo como el divisor por 10.

```
760 | 15
```

3. Efectuamos la división

```
760 | 15
 10   5
```

```
760   | 15
100     5 0,66
 100
```

```
760   | 15
100     5 0,66
  100
   10
```

Interpreta y responde

En el ejemplo anterior, ¿qué clase de número decimal es el cociente?

En la **división** de números decimales, podemos agregar ceros a la derecha de la última cifra decimal del dividendo, para obtener un cociente con la cantidad de cifras decimales que necesitemos.

Problema del día

Encuentra dos números cuya suma dividida entre 6 sea 2,5.

Desarrolla pensamiento crítico

Ejercitar procedimientos

Interpreta

1. Calcula el cociente.

   a. $19,72 \div 29$

   b. $345,3 \div 0,3$

   c. $0,325 \div 13$

   d. $48,756 \div 0,02$

2. Efectúa las siguientes operaciones.

   a. $\frac{3}{7} \times 0,25$

   b. $\frac{3}{4} \div 1,35$

   c. $0,01 \div \frac{1}{2}$

   d. $\left(7,8 \times \frac{2}{5}\right) \div 0,001$

Pensar y razonar

Infiere

3. Sigue las instrucciones.

   a. Efectúa las siguientes divisiones.

   - $475,3 \div 10$
   - $475,3 \div 1000$
   - $475,3 \div 100$
   - $475,3 \div 10\,000$

   b. Encuentra las diferencias entre la posición de la coma decimal en el cociente y en el dividendo en cada ejercicio del literal anterior.

   c. De acuerdo con lo que hiciste en los literales *a.* y *b.* completa la siguiente regla:

   Cuando se ___________ *un número decimal por una potencia de* _____*, la coma decimal se mueve a la izquierda tantos lugares como* _________ *hay en la potencia de* _____.

Comunicar y representar

Explica

4. Decide si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F). Escribe un ejemplo en las que son verdaderas y adapta las que son falsas para que sean verdaderas.

   a. La división de números decimales no es conmutativa. ( )

   b. El cociente de dos números decimales puede ser un número natural. ( )

   c. La división de números decimales es asociativa. ( )

   d. Al dividir dos números decimales siempre resulta un número decimal. ( )

Plantear y resolver problemas

Analiza

5. El diámetro de la estrella de mar más pequeña es la tercera parte del diámetro de un tipo del erizo más pequeño. Si el diámetro del erizo más pequeño es 5,5 cm, ¿cuál es el diámetro de la estrella de mar?

Evalúa

1. Calcula mentalmente.

   a. $567 \div 100$

   b. $7853,35 \div 10$

   c. $954,6 \div 10^4$

2. Formula y resuelve un problema que requiera para su solución la división $1,50 \text{ m} \div 0,25 \text{ m}$.

3. Relaciona cada expresión de la columna de la izquierda con la expresión que le corresponde en la columna de la derecha.

$89,25 \div 15$	$2450 \div 5,4$
División cuyo cociente es $453,\overline{703}$	$2450 \div 54$
Expresión equivalente a $24,5 \div 0,54$	5,95

Desempeños

- Divide en forma abreviada números decimales por potencias de diez.
- Propone situaciones problema a partir de datos dados.
- Comprende y utiliza los procesos relacionados con la división de números decimales.

Practica más, pág. 321.

Tema 37

Ecuaciones multiplicativas con números decimales

Ideas previas

1. Relaciona cada operación con su resultado.

$67{,}2 \times 0{,}5$	36
$78 \div 0{,}39$	200
$67{,}56 \times 10^3$	33,6
$450 \div 12{,}5$	0,06756
$0{,}81 \times 5{,}3$	4,293

2. Resuelve las ecuaciones.

a. $976{,}4 + m = 3\,008{,}74$

b. $y - 0{,}0065 = 45{,}6$

Analiza

Una marca reconocida de tecnología digital lanzó al mercado la que se considera la cámara fotográfica más pequeña y ligera del mundo. Pesa tan sólo 360,53 gramos y su estuche tiene las siguientes dimensiones: 13 cm de ancho, 9,5 cm de alto y 1,35 cm de espesor.

Para distribuir el producto en los almacenes, empacan varias cámaras en su estuche dentro de una caja, una al lado de otra como muestra la figura 4.21.

¿Cuántas cámaras con su estuche se pueden empacar en la caja?

Podemos responder esta pregunta usando una ecuación. Veamos:

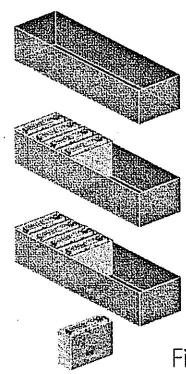


Figura 4.21

Paso 1: ¿Cuál es el dato desconocido?	El dato que debemos hallar es el número de cámaras que caben en la caja.
Paso 2: ¿Con qué letra representamos el valor desconocido?	En este caso escogimos la letra *c* para representar el dato desconocido.
Paso 3: ¿Cuáles son los datos conocidos?	Los datos conocidos son tres: • El peso de la cámara: 360,53 g • Las dimensiones del estuche de la cámara: 13 cm de ancho, 9,5 cm de alto y 1,35 cm de espesor. • Las dimensiones de la caja: ancho: 27 cm, alto: 9,5 cm y fondo: 13 cm.
Paso 4: De los datos conocidos, ¿cuáles vamos a usar?	Los datos que usaremos son el espesor del estuche y el largo de la caja.
Paso 5: ¿Qué operación relaciona a través de una igualdad el dato desconocido y los datos conocidos?	La multiplicación, porque el espesor del estuche repetido tantas veces como cámaras empacadas equivale al largo de la caja.
Paso 6: ¿Cómo escribimos la ecuación?	$\underbrace{1{,}35}_{\text{espesor del estuche}} \times \underbrace{c}_{\text{repetido tantas veces como cámaras empacadas}} = \underbrace{27}_{\text{largo de la caja}}$

Tabla 4.17

Pensamiento numérico

Ahora resolvamos la ecuación que obtuvimos:

$1,35 \times c = 27$

$1,35 \div 1,35 \times c = 27 \div 1,35$ — Dividimos a ambos lados de la igualdad por el número que multiplica a la incógnita.

$c = 20$ — Efectuamos las operaciones.

En la caja se pueden empacar 20 cámaras fotográficas.

Infiere y argumenta

Escribe un argumento que justifique que la solución $c = 20$ es correcta.

> Una **ecuación multiplicativa** es una igualdad que involucra la multiplicación o la división y un término desconocido llamado **incógnita.** La incógnita se representa con cualquier letra minúscula.
>
> Para resolver una ecuación que involucra la multiplicación se usa la división y para resolver una ecuación que involucra la división se usa la multiplicación.

Ejemplo

Resolvamos la ecuación $d \div 0,07 = 6,39$.

Solución

$d \div 0,07 = 6,39$

$d \div 0,07 \times 0,07 = 6,39 \times 0,07$ — Multiplicamos en ambos lados de la ecuación por 0,07, que es el número que divide a la incognita.

$d = 0,4473$ — Efectuemos las operaciones.

Vamos a comprobar la solución.

$d \div 0,07 = 6,39$ — Volvamos a la ecuación inicial: $d \div 0,07 = 6,39$.

$0,4473 \div 0,07 = 6,39$ — Remplazamos el valor que encontramos para la incógnita y efectuamos la división.

$6,39 = 6,39$

Dato histórico

Los matemáticos de la antigüedad no usaban símbolos matemáticos sino que utilizaban expresiones verbales para representar relaciones y operaciones.

Por ejemplo, el uso del símbolo "=" que usamos para la igualdad se atribuye al matemático inglés Robert Recode en 1557, pero hay algunos manuscritos anteriores a él en los que posiblemente se utilizó este símbolo, aunque lo usó en una forma mucho más larga que la que usamos hoy día.

Desarrolla pensamiento crítico

Ejercitar procedimientos

Interpreta

1. Resuelve las siguientes ecuaciones.

   a. $0{,}96 = 0{,}8 \times t$

   b. $100{,}9 = 2{,}5 \times g$

   c. $w \div 18 = 2{,}7$

   d. $n \div 2{,}2 = 0{,}17$

Comunicar y representar

Explica

2. Describe en cada caso el proceso que se debe seguir para resolver la ecuación.

   a. $56 = 2{,}7 \times a$

   b. $q \times 99 = 4$

   c. $65 \div c = 1540{,}5$

   d. $28{,}73 = d \div 20$

3. Describe el procedimiento para probar la solución de una ecuación. Luego verifica que la solución de cada ecuación es la correcta.

   a. $37{,}05 = x \div 3{,}8$ $\quad x = 140{,}79$

   b. $m \times 0{,}001 = 54$ $\quad m = 54\,000$

   c. $7{,}2 \times p = 5{,}4$ $\quad p = 0{,}75$

   d. $z \div 83 = 1{,}395$ $\quad z = 115{,}785$

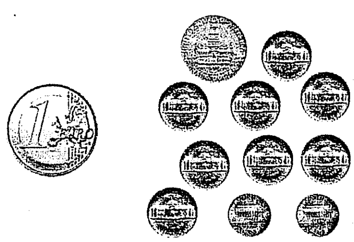
Plantear y resolver problemas

Analiza

4. Para cada situación, inventa y resuelve un problema utilizando los datos dados.

   a. En Estados Unidos pagan US$ 0,78 por cada libra de café colombiano.

   b. El precio del euro hoy en el mercado internacional es $ 2750,16.



5. Plantea la ecuación que describe el problema, luego resuelve la ecuación para responder la pregunta.

   a. Cada tableta de un medicamento para el resfriado contiene 13,5 mg de un ingrediente. Claudia tomó algunas tabletas y en estas ingirió 20,25 mg de dicho ingrediente. ¿Cuántas tabletas del medicamento tomó?

   b. Para la elaboración de un postre de coco se necesitan 0,06 kg de coco rallado. Si el cocinero del restaurante gastó 0,39 kg de coco rallado, ¿cuántos postres hizo?

Evalúa

Diana compró algunas verduras para el almuerzo. La tabla 4.18 muestra los precios por kilogramo de los productos que compró.

Producto	Precio por kg
Tomate	$ 1990
Fríjol	$ 5020
Zanahoria	$ 2290

Tabla 4.18

a. Si en la factura que le dieron aparece que pagó $ 5725 por las zanahorias, ¿cuántos kg compró?

b. ¿Cuánto pesaban los tomates que escogió si pagó $ 5572 por ellos?

c. ¿Cuánto debe pagar por un kilo y medio de fríjol?

Desempeño

- Utiliza ecuaciones multiplicativas para resolver problemas con números decimales.

Practica más, pág. 322.

Reflexión ciudadana

Elecciones

Competencia ciudadana

Identifico decisiones colectivas en las que intereses de diferentes personas están en conflicto y propongo alternativas de solución que tengan en cuenta esos intereses.

El consejo estudiantil es un órgano del gobierno escolar que permite la participación de los estudiantes. Está conformado por un representante de los estudiantes de cada uno de los grados que ofrece la institución educativa. El proceso de elección de cada representante es el siguiente:

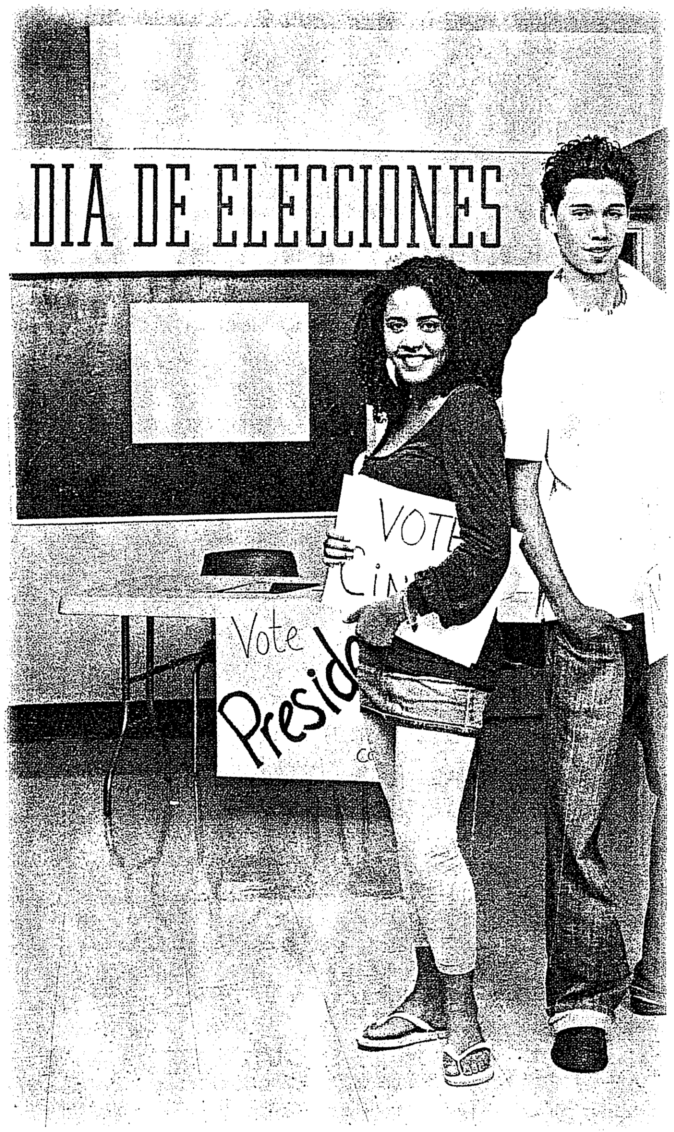
Los directores de grupo reciben las inscripciones de los aspirantes y verifican que los estudiantes inscritos cumplan con el perfil y los requisitos estipulados en el Manual de Convivencia Institucional.

Los directores de grupo programan espacios para que los candidatos puedan dar a conocer su programa y propuestas a los compañeros de grupo.

Se llevan a cabo las votaciones.

Se hace el conteo de los votos.

Si el candidato que obtuvo mayor votación no alcanzó a superar el 50% de la votación, se lleva a cabo una segunda vuelta. Es decir, una nueva votación con los candidatos que obtuvieron mayoría de votos.



Analiza

A las elecciones para escoger al vocero de grado sexto de un colegio se presentaron dos candidatos: Karla y Joan. Los resultados de la votación fueron 39 votos para Karla, 40 votos para Joan y 0 votos en blanco.

Cuando la rectora anunció que el ganador fue Joan, las reacciones en el auditorio estuvieron divididas: unos estudiantes aplaudían y otros daban muestras de descontento. Para el primer grupo era claro que el ganador había sido Joan porque obtuvo más votos que Karla, pero los integrantes del segundo grupo discutían que se necesita la mitad más uno de los votos para ganar y que Joan no cumplía esa condición.

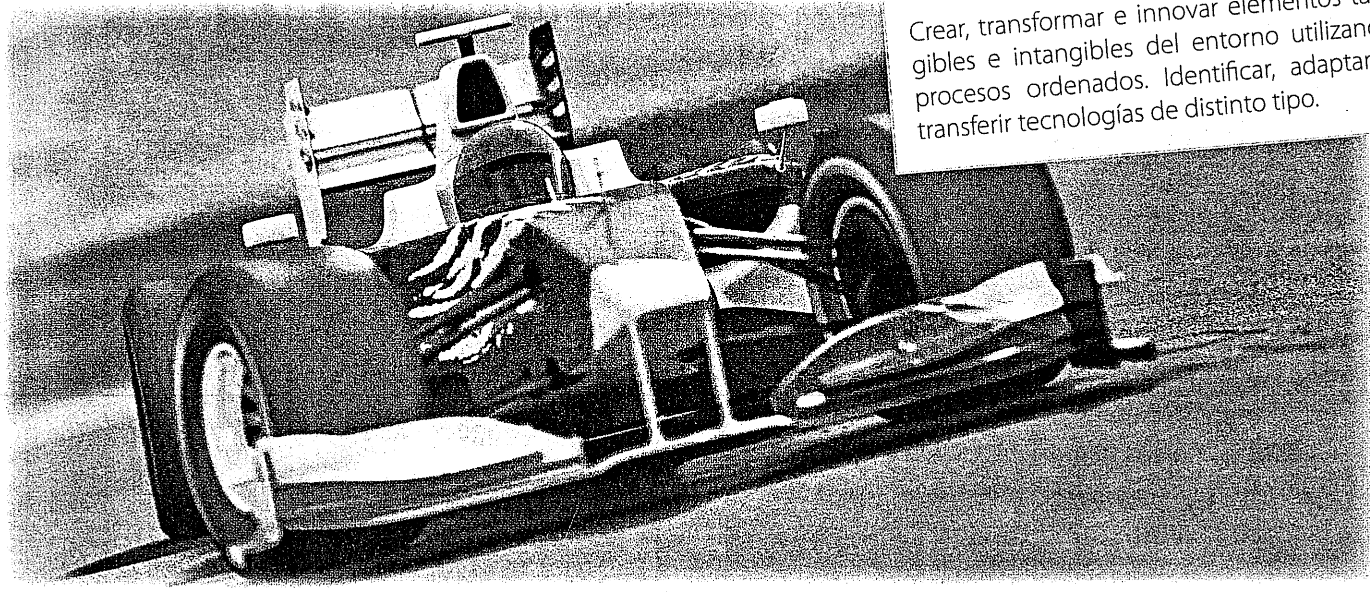
¿Qué decisión es la más acertada y equitativa para solucionar el conflicto que se presentó en las elecciones?

Medida del tiempo en la Fórmula 1

Competencia tecnológica

Gestión de la tecnología y las herramientas informáticas.

Crear, transformar e innovar elementos tangibles e intangibles del entorno utilizando procesos ordenados. Identificar, adaptar y transferir tecnologías de distinto tipo.



La diferencia entre el tiempo de llegada de un auto y otro en las competiciones automovilísticas de la Fórmula 1 puede medirse en milésimas de segundo; por esta razón, los organizadores han buscado mejorar la tecnología que usan para medir en forma más exacta el tiempo de llegada de los autos.

En 1950 se usaba un reloj con cronómetro común y un formato para anotaciones, alguien de cada equipo se paraba a un lado de la pista y anotaba el número de la vuelta y el tiempo de ésta cada vez que el carro cruzaba la línea de meta.

A partir de los años 60 se desarrolló un sistema que permitía a una persona cronometrar todos los autos en una carrera, simplemente presionando un botón, conforme cada uno cruzaba la meta, pero se seguía necesitando un equipo de personal de apoyo para llevar a cabo el seguimiento de los autos: un "gritón" para decir la secuencia en que cruzaban la línea, un escribiente para anotar los números de los carros y un equipo de calculistas para determinar las velocidades promedio y otras estadísticas de la carrera.

Para los años 80 se desarrolló una cronometría automática, en la que cada auto estaba equipado con un aparato electrónico que emitía una señal, la cual era usada para identificarlo cuando cruzaba la meta y se detenía el cronómetro en ese momento exacto.

En ese entonces, aunque las computadoras ya estaban disponibles para realizar los cálculos, se seguía necesitando la intervención humana. En la actualidad la gente no interviene, al menos durante la carrera. El sistema desarrollado por una compañía de relojes suizos desde 1996, está integrado a la pista y los datos son procesados en un centro de cronometría, con una exactitud de una milésima de segundo.

Texto adaptado de "Cronometraje en fórmula 1" en http://radiocentro.mx/grc/redam.nsf/vwALL/LEVO-8GDVBP.

Explica

1. Elabora un esquema que muestre cómo ha evolucionado la tecnología para la medición del tiempo en las carreras de Fórmula 1.
2. ¿Qué importancia tiene la actualización en el manejo de herramientas tecnológicas?

Desempeño

- Identifica los recursos tecnológicos disponibles para el desarrollo de una tarea.

Evalúa tu pensamiento crítico

Las siguientes actividades te indicarán el nivel de competencia que has alcanzado y determinarán los desempeños que evidencian tu acción de aprendizaje.

Ejercitar procedimientos

Interpreta

1. Escribe cada fracción como un número decimal. Clasifica la respuesta en: decimal periódico, finito o infinito no periódico.

a. $\frac{8}{9}$

b. $\frac{312}{625}$

c. $\frac{85}{1000}$

d. $\frac{3}{14}$

2. Relaciona cada operación de la columna de la izquierda con su resultado en la columna de la derecha.

a.	$768{,}9 \times 100$	0,765
b.	$0{,}564 + 89 + 45{,}73$	135,294
c.	$765 \div 1000$	130,612…
d.	$78{,}09 - 9{,}394$	76 890
e.	$320 \div 2{,}45$	68,696

3. Resuelve y prueba la solución de cada ecuación.

a. $x + 0{,}009 = 2{,}3$

b. $670{,}5 = 9 \times m$

c. $t \div 23{,}56 = 1{,}004$

d. $890{,}7 = y - 71{,}086$

Comunicar y representar

Explica

4. Sitúa los siguientes números decimales en una recta numérica y ordénalos de menor a mayor:

12,4   11,48   12,04   12,50   11,05

5. Explica por qué la división de números decimales no cumplen la propiedad conmutativa.

6. Representa gráficamente cada número.

a. 0,47

b. 5,8

c. 1,05

d. 0,005

Pensar y razonar

Infiere

7. Escribe la coma decimal en cada número para que las frases tengan sentido.

a. La longitud de la mesa del comedor es 186 m.

b. La botella contiene 35 litros de gaseosa.

c. El bebé pesa 7200 kg.

d. La máxima temperatura de Honda hoy fue 3108 °C.

8. Determina cuáles de los números dados hacen verdadera la relación de desigualdad.

a.	$p + 3{,}67 < 9{,}6$	14,52	4,8	3,99
b.	$x - 8{,}74 > 65{,}807$	72,94	14,08	94,81

9. Halla el perímetro y el área de los polígonos de la figura 4.22.

a.   **b.**

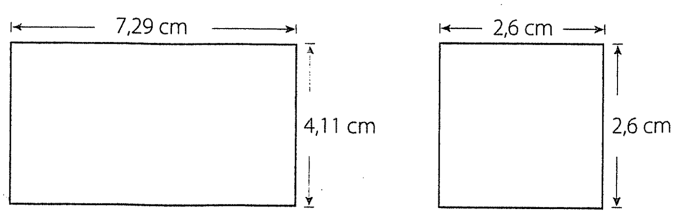


Figura 4.22

Plantear y resolver problemas

Analiza

10. Usa las operaciones que sean necesarias para responder las preguntas.

La tabla 4.9 muestra la longitud de algunos de los animales más pequeños del mundo.

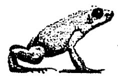
Animal	Origen	Longitud
 Rana dorada	Brasil	0,98 cm
 Colibrí zunzún	Cuba	5,8 cm
 Murciélago abejorro	Tailandia	2,9 cm
 Caballito de mar enano	Nueva Caledonia	0,84 cm

Tabla 4.19

a. ¿Cuál es la diferencia entre las longitudes de la rana dorada y el caballito de mar enano?

b. Si el tití pigmeo mide 2,5 veces lo que mide el colibrí zunzún, ¿cuánto mide el tití pigmeo?

c. Si la araña *Mycrolinypheus* mide la doceava parte de lo que mide la rana dorada, ¿cuánto mide la araña?

d. ¿Cuánto más mide el colibrí zunzún que el murciélago abejorro?

e. La distancia que hay entre punta y punta de las alas del murciélago abejorro cuando están abiertas, es 4,5 veces su longitud. ¿Cuánto mide esa distancia?

11. La figura 4.23 muestra el plano de un apartamento que ofrece una constructora. ¿Cuál es el área del apartamento?

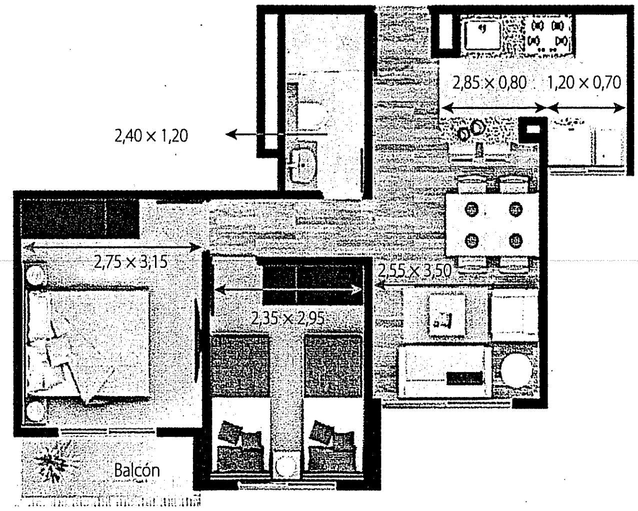


Figura 4.23

12. Plantea una ecuación para modelar la siguiente situación. Luego resuélvela.

En 1996, la marca en natación femenina para los 100 metros pecho fue 0,107 minutos más que la marca de los hombres en la misma prueba. Si la marca femenina fue de 1,117 minutos, ¿cuál es la correspondiente a los hombres?

Autoevaluación

	Bajo	Básico	Alto	Superior
Relaciono los números decimales como otra forma de expresar los números fraccionarios.				
Diferencio decimales finitos, periódicos e infinitos no periódicos.				
Establezco relaciones de orden con números decimales.				
Sitúo decimales en la recta numérica.				
Calculo operaciones con números decimales y las uso en la solución de problemas.				
Expreso situaciones problema mediante ecuaciones y las resuelvo.				
Me agrada resolver problemas de matemáticas.				

Prueba Saber

Encuentra la respuesta correcta entre las opciones A, B, C y D, y márcala en la hoja de respuestas rellenando completamente el círculo correspondiente.

Responde las preguntas 1 a 9, teniendo en cuenta la siguiente información.

Los organizadores de una exposición de pintura no lograron la participación de los 100 artistas colombianos y extranjeros que habían invitado; sin embargo, la convocatoria tuvo gran acogida, pues participaron más de 90 de estos artistas, quienes quisieron contribuir con la venta de sus cuadros al mantenimiento de varias zonas del Parque Arqueológico de San Agustín.

La ilustración de la figura 4.25 muestra una de las paredes de la exhibición.

1. Uno de los siguientes números no corresponde a al ancho de la pared:

A. 5,00 m

B. 500 cm

C. 5,0 m

D. 0,5 m

2. Si la pared mide de ancho 1,15 m más que lo que mide de alto, la altura de la pared es:

A. 3,40 m

B. 3,85 m

C. 8,15 m

D. 8,20 m

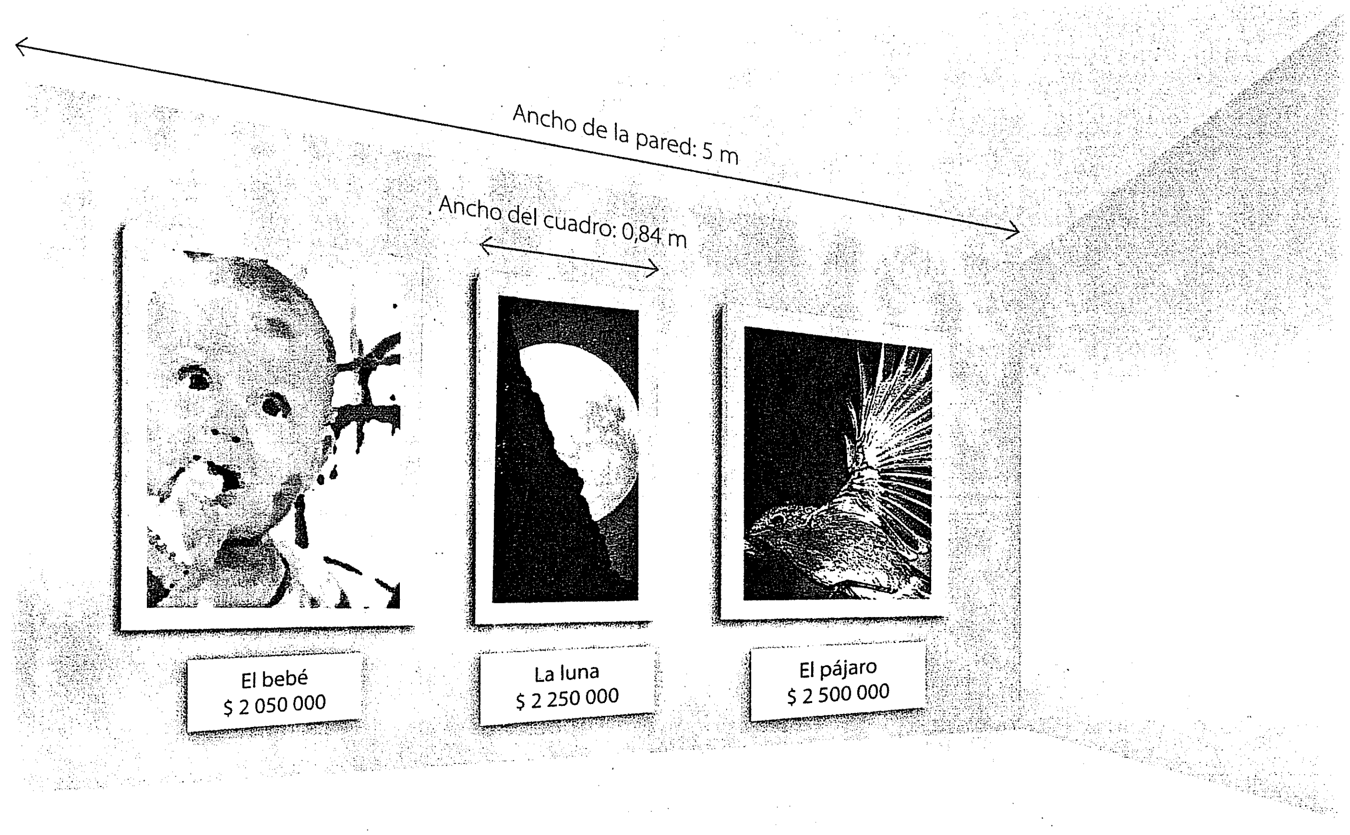


Figura 4.24

3. El primer día de la exposición asistieron 350 personas, de las cuales dos quintas partes eran menores de edad y los demás eran adultos. ¿Cuántos adultos asistieron a la exposición?

A. 70

B. 140

C. 210

D. 280

4. Finalizada la semana de exposición se reunieron $ 24 787 500 por concepto del valor de la entrada a la sala de exhibición. Si el número de asistentes durante este período fue 1983, la ecuación que permite calcular el costo de la entrada es:

A. $24\,787\,500 + c = 1983$

B. $24\,787\,500 = 1983 \times c$

C. $24\,787\,500 - c = 1983$

D. $24\,787\,500 = c \div 19\,835$.

5. Los cuadros que se pueden ver en la pared, ordenados por precio, de mayor a menor, son:

A. El bebé, La luna, El pájaro

B. La luna, El bebé, El pájaro

C. El pájaro, La luna, El bebé

D. El bebé, El pájaro, La luna

6. Para conservar la estética en la exhibición, los cuadros se dispusieron en la pared de tal modo que el marco de los tres tuviera la misma altura y que el ancho de los cuadros situados en los extremos fuera el doble del ancho del cuadro situado en la mitad.

El ancho de los cuadros situados en los extremos de la pared mide:

A. 0,42 m

B. 1,68 m

C. 8,4 m

D. 16,8 m

7. Cada cuadro mide 2,10 m de largo y la distancia del borde superior al techo es la misma distancia del borde inferior al piso. La distancia del piso al borde inferior de los cuadros es:

A. 2,90 cm

B. 7,9 cm

C. 105 cm

D. 87,5 cm

8. En la pared de la ilustración sólo se puede ver $\frac{1}{65}$ parte de los cuadros exhibidos. El número total de cuadros exhibidos es:

A. 195

B. 65

C. $21,\overline{6}$

D. 3

9. Se sabe que el número de artistas que participaron con sus obras en la exposición es un número primo. La cantidad de artistas fue:

A. 3

B. 15

C. 97

D. 100

Formato de respuestas

1. (A) (B) (C) (D)   4. (A) (B) (C) (D)   7. (A) (B) (C) (D)
2. (A) (B) (C) (D)   5. (A) (B) (C) (D)   8. (A) (B) (C) (D)
3. (A) (B) (C) (D)   6. (A) (B) (C) (D)   9. (A) (B) (C) (D)

Unidad 5

Pensamiento espacial

Geometría

Situación problema

Una estrella es un cuerpo celeste que brilla con luz propia, visible desde la Tierra como un pequeño punto luminoso. Existen aproximadamente 8000 estrellas distribuidas de la siguiente forma: 4000 en el hemisferio norte del cielo y las 4000 restantes en el hemisferio sur, aunque no todas son visibles en todo momento, ya que la mayoría son ocultadas por la neblina atmosférica y por la luz propia del cielo.

Nº	Nombre	Radio	Diámetro
1	Sirio	1,7	3,4
2	Arctur	25,1	50,2
3	Rigil Kent	1,2	2,4
4	Vega	2,0	4,0
5	Capella	13,3	26,6
6	Rigel	63,1	126,2
7	Antares	510,6	1021,2
8	Espiga	6,6	13,2
9	Betelgeuse	226,4	452,8

Tabla 5.1

Las estrellas se clasifican de acuerdo con su tamaño y su luminosidad; las más grandes se llaman supergigantes, mientras que las más pequeñas son llamadas enanas blancas. En la tabla 5.1 se muestran los radios y los diámetros de algunas de las estrellas más brillantes, comparadas con el radio del Sol, el cual se ha tomado como 1.

Al unir los puntos que representan las estrellas mediante segmentos de recta y agruparlas, se obtienen las constelaciones. En la actualidad se conocen 88 constelaciones, y aunque las más conocidas son las que representan los signos del Zodiaco, también existen otras como, por ejemplo, la Osa Menor, que se representa como una cuchara en la que su base está determinada por cuatro estrellas que forman un cuadrilátero, o el Triángulo Austral, determinado por tres estrellas que al unirlas forman un triángulo.

Desarrolla pensamiento crítico

Interpreta

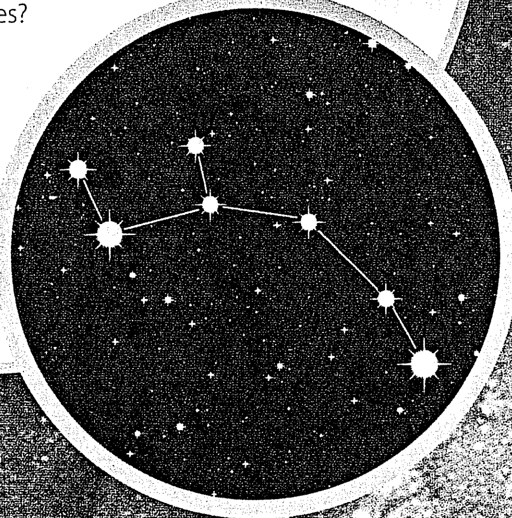
1. ¿Qué relación existe entre el radio y el diámetro de una estrella?
2. ¿Por qué la constelación llamada Triángulo Austral tiene forma de triángulo?
3. ¿Cuántas estrellas forman la base de la Osa Menor?

Infiere

4. Si el diámetro de una estrella supergigante es aproximadamente 400 veces el diámetro del Sol, ¿cuáles de las estrellas de la tabla 5.1 son supergigantes?

Analiza

5. ¿Qué elementos básicos de la geometría identificas en la lectura?



Lección Digital norma

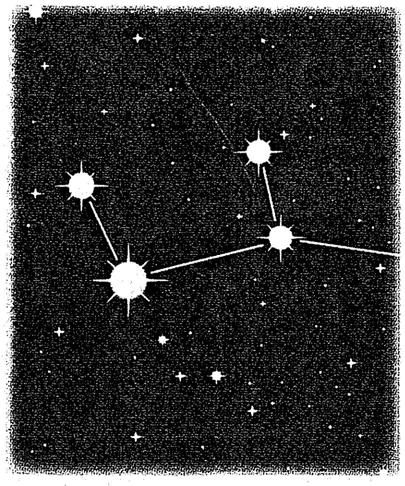
Rectas paralelas y perpendiculares

Ingresa en tu lección digital en http://www.normaparapensar.com y refuerza tus conocimientos acerca de rectas paralelas y perpendiculares.

Elementos de la geometría

Ideas previas

1. ¿Qué entiendes por cada uno de los siguientes términos: punto, recta, segmento, rayo?
2. ¿Cuántas rectas diferentes puedes trazar por un mismo punto?
3. ¿En cuántos puntos se cortan dos rectas?



Interpreta

Retomemos la pregunta **5** de la situación problema. En el planteamiento de la situación encontramos afirmaciones que podemos asociar a elementos básicos de la geometría, como las siguientes: *"desde la Tierra, una estrella se ve como un pequeño* ***punto*** *luminoso"*, o *"Al unir los puntos que representan las estrellas mediante* ***segmentos*** *de recta y agruparlas, se obtienen las constelaciones"*.

Términos no definidos

Aunque no sea posible definirlos, gracias a la observación de algunos hechos en la naturaleza es posible tener una idea intuitiva del significado de los términos **punto**, **recta** y **plano**.

La noción de punto es un elemento básico de la geometría. Imagina cómo es la marca que deja la punta de un lápiz al caer sobre un papel: esta marca no tiene ni medida ni dimensión, pero sí ocupa un sitio.

Aunque las estrellas tienen un radio muy grande, las vemos como pequeños puntos luminosos, a veces unos más grandes que otros, debido a que las observamos como marcas sin medidas ni dimensión.

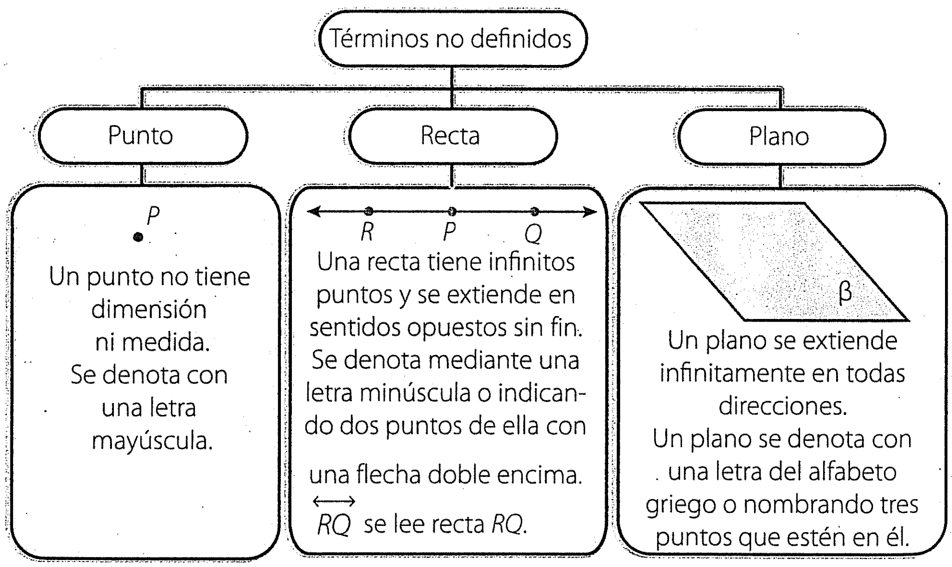


Figura 5.1

Si dos o más puntos están en la misma recta se llaman **colineales** y si dos o más puntos están en el mismo plano se llaman **coplanares**.

Elementos básicos

Rayo

Sea la $\overleftrightarrow{RQ}$, el punto P entre R y Q determina dos conjuntos diferentes de puntos sobre la misma recta:

a. el conjunto formado por P y todos los puntos de la recta que están al mismo lado de R.

b. el conjunto formado por P y todos los puntos de la recta que se encuentran al mismo lado de Q.

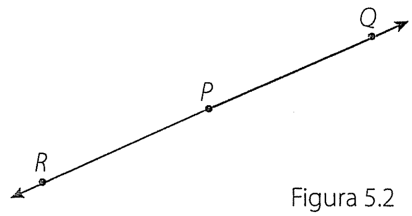


Figura 5.2

> Cada conjunto de puntos determinados por P en la recta RQ se llama **rayo** y el punto P se llama **origen**. El rayo que tiene origen en el punto P y pasa por el punto Q se nombra $\overrightarrow{PQ}$.

Infiere y contesta

¿Cómo se nombra el rayo que tiene origen en el punto P y pasa por el punto R?

Segmento

Sea la recta t, y Q y R sobre t. El conjunto formado por los puntos Q, R y todos los puntos entre éstos determinan el segmento QR y se denota $\overline{QR}$.

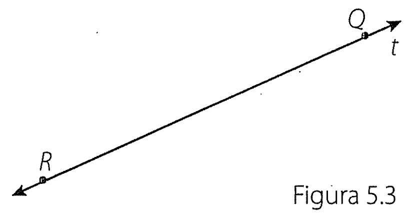


Figura 5.3

Ejemplo

Identifiquemos dos segmentos en la figura 5.4.

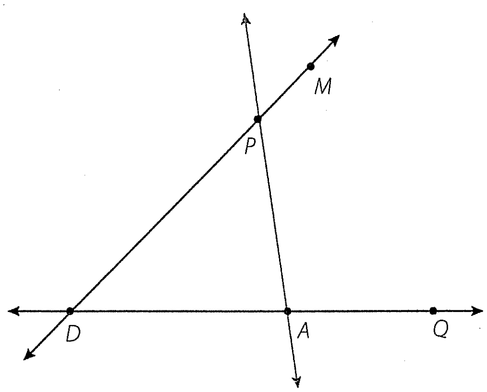


Figura 5.4

Solución

Dos segmentos son $\overline{AP}$ y $\overline{PM}$.

Interpreta y contesta

Observa la figura 5.4 y nombra otros dos segmentos, tres rayos y una recta que estén en la figura.

Dato histórico

El primer libro en el que se trataron conceptos sobre geometría y se estableció ésta como un sistema axiomático fue *Los elementos*, escrito por el matemático griego Euclides, quien enseñaba matemáticas en Alejandría aproximadamente en el año 300 a. C.

Desarrolla pensamiento crítico

Ejercitar procedimientos

Interpreta

1. Escribe frente a cada objeto la figura geométrica que representa.
   - **a.** El tablero del salón. ____________
   - **b.** La cabeza de un alfiler. ____________
   - **c.** Un grano de lenteja. ____________
   - **d.** Un trozo de cuerda tensionado. ____________
   - **e.** La superficie del pupitre. ____________
2. Nombra cada uno de los elementos que aparecen en la figura 5.5.

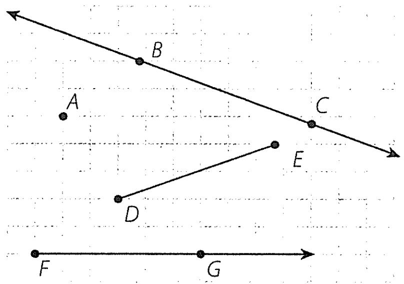


Figura 5.5

Comunicar y representar

Explica

3. De acuerdo con la figura 5.6, determina si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F). Justifica tu respuesta.

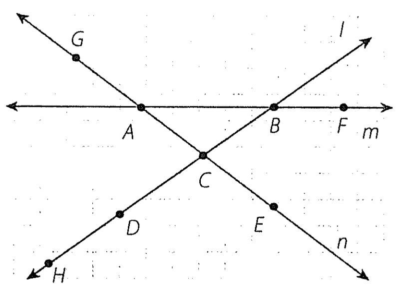


Figura 5.6

   - **a.** *C* pertenece a $\overline{DB}$.
   - **b.** Existe un plano que contiene a los puntos *A*, *B* y *C*.
   - **c.** El punto *C* es la intersección entre las rectas *l* y *m*.
   - **d.** *G* y *D* son colineales.
   - **e.** *F* pertenece a $\overrightarrow{BH}$.

4. Representa con un dibujo cada situación descrita.
   - **a.** Por dos puntos diferentes pasa solamente una recta.
   - **b.** Si dos rectas se cortan, su intersección es un punto.
   - **c.** Si dos planos diferentes se cortan, su intersección es una recta.

Pensar y razonar

Infiere

5. Dibuja los segmentos que resultan con 1, 2 y 3 puntos. Luego completa la tabla 5.2.

Cantidad de puntos	1	2	3	4	5	6
Cantidad de segmentos	0	1	3			

Tabla 5.2

6. ¿Cuántas rectas existen que pasen por un punto?
7. El punto *Z* está en la recta *l* y en la recta *t*. El punto *X* está en la recta *t*. ¿Qué se puede decir sobre los puntos *Z* y *X*?

Evalúa

1. Escribe verdadero (V) o falso (F) frente a cada afirmación. Justifica tu respuesta.
   - **a.** Si tres puntos están en la misma recta hay infinitos planos que los contienen.
   - **b.** Dos rectas siempre se intersecan en más de un punto.
   - **c.** Si dos planos tienen puntos en común, entonces su intersección es una recta.
2. Selecciona la notación correcta para la recta *n*, el rayo *MN* y el segmento *FG*:
   - **a.** $\overrightarrow{n}$, $\overleftrightarrow{MN}$, $\overline{FG}$
   - **b.** $\overleftrightarrow{n}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overline{FG}$
   - **c.** $\overrightarrow{n}$, $\overleftrightarrow{FG}$, $\overline{MN}$

Desempeños

- Reconoce propiedades de diferentes conceptos geométricos.
- Identifica la notación para designar elementos básicos de geometría.

Practica más, pág. 323.

Tema 39

Ángulos y su clasificación

Ideas previas

1. Dibuja pares de rayos que tengan el mismo origen, de manera que:
   a. Formen una recta.
   b. No formen una recta.
2. Si consideramos que las manecillas de un reloj son rayos, ¿en qué casos formarán rayos opuestos?

Analiza

En algunos países del mundo el año se divide en cuatro estaciones: verano, otoño, invierno y primavera. Esta división se produce debido a que el eje de la Tierra sobre el cual ésta gira, tiene una inclinación respecto a su órbita de traslación, lo que implica que los rayos del Sol lleguen a ciertas partes del planeta con diferente inclinación. Esta inclinación de los rayos del Sol respecto al horizonte nos da una idea del concepto de **ángulo**.

La figura geométrica formada por dos rayos no colineales que tienen el mismo origen recibe el nombre de **ángulo**. El origen de los dos rayos se denomina **vértice** del ángulo y los rayos que lo forman se llaman **lados** del ángulo.

El ángulo de la figura 5.7 se puede nombrar de diferentes maneras:

- Usando el símbolo $\angle$, seguido por el nombre de los tres puntos que determinan el ángulo y nombrando en el centro el vértice: $\angle AOB$.
- Escribiendo el símbolo $\angle$ seguido del nombre del vértice: $\angle O$
- Usando una letra del alfabeto griego.

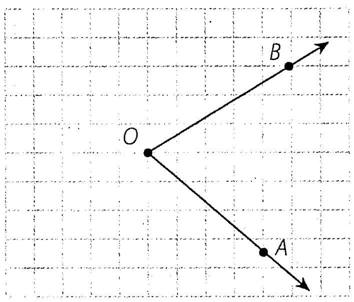


Figura 5.7

Ejemplo

Determinemos cuál de las ilustraciones de la figura 5.8 representa un ángulo y nombrémoslo.

Solución

La única figura que representa un ángulo es **a.** porque los rayos $\overrightarrow{EF}$ y $\overrightarrow{ED}$ no son colineales y comparten el mismo origen. El ángulo se nombra como $\angle DEF$ o $\angle E$.

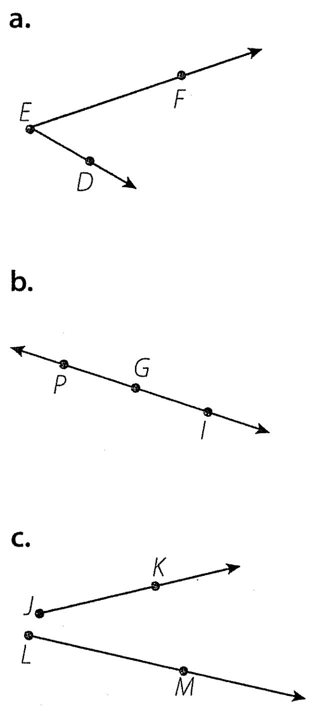


Figura 5.8

Infiere y completa

La figura **b.** no es un ángulo debido a que $\overrightarrow{GI}$ y ______ son colineales.

La figura **c.** no es un ángulo ya que $\overrightarrow{JK}$ y _____ no tienen el mismo origen.

Medida de ángulos

La abertura de un ángulo se puede medir empleando un instrumento llamado **transportador.**

A todo ángulo le corresponde un número entre 0 y 180. La unidad de **medida** de un ángulo es el grado y se simboliza con °. La medida de un ángulo se nota con la letra m antes del nombre del ángulo.

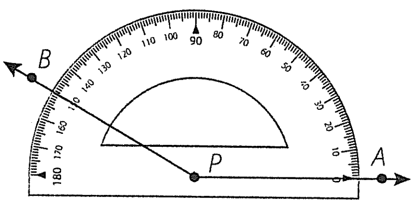


Figura 5.9

Ejemplo

Hallemos la medida del $\angle APB$ de la figura 5.9.

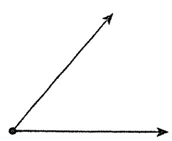
Solución

El vértice P del ángulo coincide con la marca central del transportador, $\overrightarrow{PA}$ pasa por la marca del 0 en el transportador y $\overrightarrow{PB}$ pasa por la marca del número 150 en el transportador, luego m $\angle APB = 150°$.

Clasificación

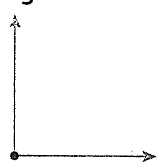
Los ángulos se clasifican así:

Ángulo agudo



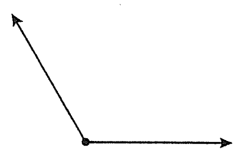
Es el ángulo cuya medida es menor que 90°

Ángulo recto



Es el ángulo cuya medida es 90°

Ángulo obtuso



Es el ángulo cuya medida es mayor que 90°

Si tenemos dos ángulos, la suma de sus medidas se relacionan así:

Ángulos complementarios
Dos ángulos son complementarios si la suma de sus medidas es 90°

Ángulos suplementarios
Dos ángulos son suplementarios si la suma de sus medidas es 180°

Ejemplo

Determinemos en la figura 5.10 cuáles son ángulos complementarios y cuáles son suplementarios.

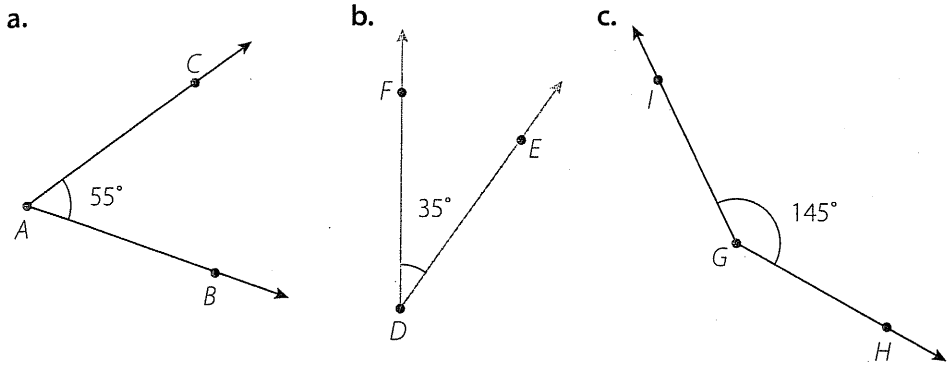


Figura 5.10

Solución

1. $\angle BAC$ y $\angle EDF$ son complementarios porque m $\angle BAC$ + m $\angle EDF$ = $55° + 35° = 90°$.

2. $\angle EDF$ y $\angle HGI$ son suplementarios porque m $\angle EDF$ + m $\angle HGI$ = $35° + 145° = 180°$.

Interpreta y contesta

Halla la medida de cada ángulo y clasifícalo.

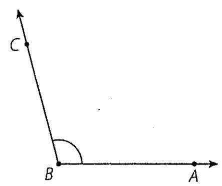
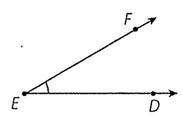
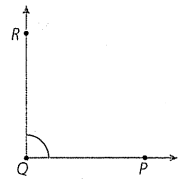
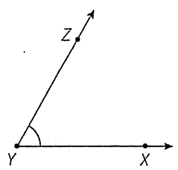
Ángulo	Medida	Clase de ángulo
	105°	
		
		Ángulo recto
		

Tabla 5.3

Problema del día

Valentina encontró en su libro de arte un dibujo de una estrella de cinco puntas. Ella necesita determinar la medida de cada ángulo de la figura para reproducirla y elaborar un diseño. ¿Cuáles son las medidas de los ángulos que encontrará Valentina?

Desarrolla pensamiento crítico

Ejercitar procedimientos

Interpreta

1. Determina cuáles de las figuras dadas a continuación representan ángulos. Justifica tu elección.

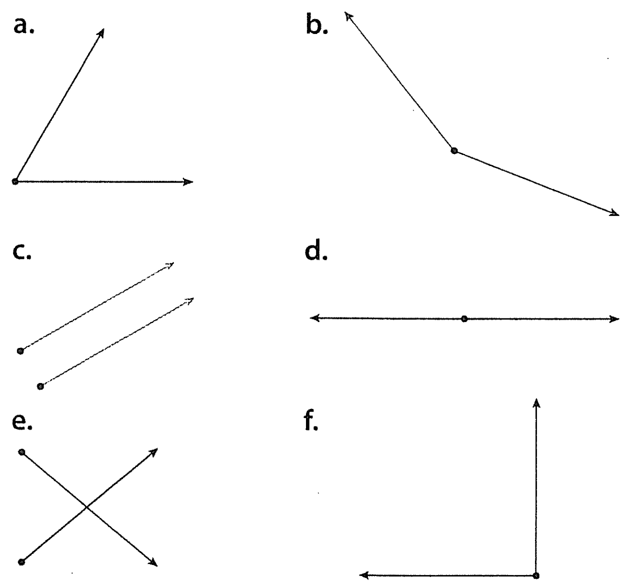


Figura 5.11

2. Nombra y clasifica cada uno de los ángulos representados en la figura 5.12.

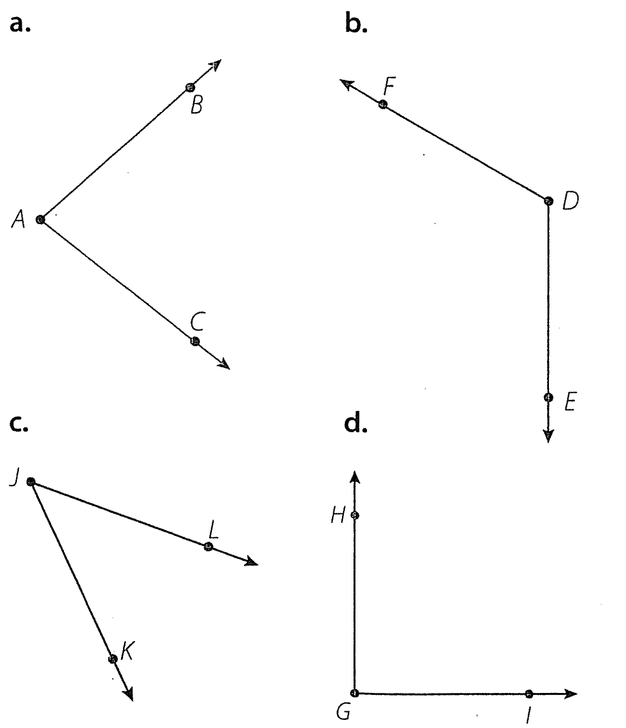


Figura 5.12

Pensar y razonar

Infiere

3. Teniendo en cuenta la información de la figura 5.13,

   a. Completa la tabla 5.4.

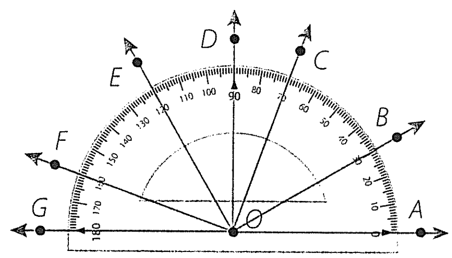


Figura 5.13

Ángulo	Medida	Clase
$\angle AOB$		
$\angle AOD$		
$\angle AOF$		
$\angle COE$		
$\angle BOF$		
$\angle EOF$		

Tabla 5.4

   b. Completa los espacios en blanco.

   - $\angle COE$ y $\angle BOF$ son ángulos ____________.
   - $\angle AOB$ y $\angle BOD$ son ángulos ____________.
   - $\angle DOE$ y ____________ son complementarios.
   - ____________ y $\angle AOC$ son suplementarios.

4. Completa la tabla 5.5.

m $\angle ABC$	m $\angle DEF$	Relación
48°		Son complementarios
	56°	Son suplementarios
	12°	Son complementarios
105°		Son suplementarios
	32°	Son complementarios
90°		Son suplementarios

Tabla 5.5

Comunicar y representar

Explica

5. Determina si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F). Justifica tu respuesta.
   a. Si dos ángulos son agudos, entonces son complementarios.
   b. El suplemento de un ángulo agudo es un ángulo obtuso.
   c. Dos ángulos rectos son suplementarios.
   d. Si dos rayos con origen común son colineales, entonces los dos rayos forman un ángulo.
   e. El complemento de un ángulo obtuso es otro ángulo obtuso.
6. De las notaciones $\angle CED$, $\angle DCE$, $\angle DEC$, $\angle CDE$, ¿cuáles representan el mismo ángulo? Explica tu respuesta.

Plantear y resolver problemas

Analiza

7. Representa con un dibujo cada situación descrita.
   a. Dos ángulos complementarios que compartan su vértice.
   b. Dos ángulos suplementarios que no compartan su vértice.
   c. Dos ángulos agudos que compartan su vértice pero no sean complementarios.
   d. Un ángulo agudo y un ángulo obtuso que compartan su vértice pero no sean suplementarios.
   e. Un ángulo agudo y un ángulo obtuso que compartan su vértice y sean suplementarios.
8. Si se sabe que m $\angle ABC$ es 50° mayor que m $\angle CBD$, y $\angle ABC$ y $\angle CBD$ son complementarios, haz un dibujo de la situación y halla cada una de las siguientes medidas:
   a. m $\angle ABC$ + m $\angle CBD$ = ________
   b. m $\angle ABC$ – m $\angle CBD$ = ________
   c. m $\angle ABC$ = ______
   d. m $\angle CBD$ = ______
9. m $\angle ABC$ es 70° menor que m $\angle DEF$. $\angle ABC$ y $\angle DEF$ son suplementarios. Haz un dibujo de la situación y halla cada una de las siguientes medidas:
   a. m $\angle ABC$ + m $\angle DEF$ = ________
   b. m $\angle DEF$ – m $\angle ABC$ = ________
   c. m $\angle ABC$ = ______
   d. m $\angle DEF$ = ______
10. Diego observa en su reloj que a medida que pasa el tiempo, las manecillas del minutero y el horario forman diferentes ángulos.

    En cada caso dibuja el reloj que representa la situación descrita y responde la pregunta.
    a. ¿Qué clase de ángulo se forma cuando las manecillas indican las 2:00 p.m.?
    b. ¿Cuál es la medida del ángulo que forman las manecillas a las 6:55 p.m?
    c. ¿En qué horas el ángulo formado por el horario y el minutero es recto?
    d. ¿Cuál es la medida del ángulo que forman las manecillas a las 3:20 p.m.?
    e. ¿Cuánto mide el ángulo suplementario del ángulo que se forma entre las manecillas a las 4:40 p.m.?

Evalúa

1. Selecciona las características que definen un ángulo.
   a. Está formado por dos rayos que tienen el mismo origen.
   b. Está formado por dos rayos que tienen el mismo origen y no son colineales.
   c. Está formado por dos rectas.
2. Escribe verdadero (V) o falso (F) frente a cada afirmación. Justifica tu respuesta.
   a. Un ángulo divide al plano en dos regiones.
   b. Dos ángulos suplementarios deben tener lados que sean rayos opuestos.
   c. La medida de un ángulo obtuso siempre será mayor que 180°.
   d. La medida de un ángulo recto está entre 0° y 90°.

Desempeños

- Define con precisión el concepto de ángulo.
- Clasifica ángulos de acuerdo con su medida.

Practica más, pág. 323.

Tema 40

Congruencia de segmentos y ángulos

Ideas previas

1. ¿Cómo se mide un segmento?
2. ¿Cómo se mide un ángulo?
3. Construye dos segmentos que tengan la misma medida.
4. Construye dos ángulos que tengan la misma medida.

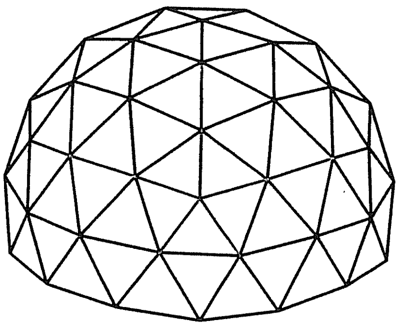


Figura 5.14

Interpreta

Diferentes construcciones arquitectónicas se realizan con polígonos que tienen la misma forma y la misma medida. Por ejemplo, en la figura 5.14 se observa un domo geodésico en el que todos los segmentos que lo conforman tienen la misma medida.

En geometría, dos figuras geométricas son **congruentes** cuando tienen la misma forma y el mismo tamaño. Para notar la congruencia entre dos figuras usamos el símbolo $\cong$.

Congruencia de segmentos

Dos **segmentos** son **congruentes** si tienen la misma longitud.

$\overline{AB} \cong \overline{CD}$ se lee: "el segmento AB es congruente al segmento CD".

Para construir segmentos congruentes llevamos a cabo el siguiente procedimiento:

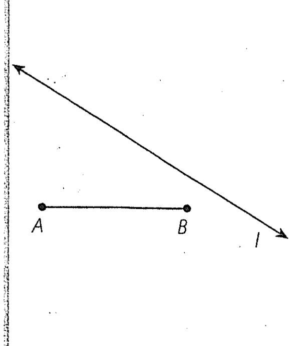
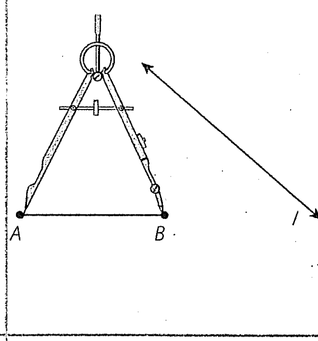
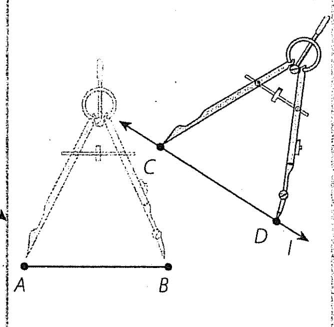
Paso 1	Paso 2	Paso 3
		
Con la regla se dibujan un segmento AB y una recta l. El segmento no debe ser un subconjunto de la recta.	Se toma la longitud del segmento utilizando el compás.	Se toma un punto C sobre la recta l y con la misma abertura del compás, se marca el punto D. El segmento CD tiene la misma medida que el segmento AB.

Tabla 5.6

Punto medio

Si P es un punto entre Q y R y se tiene que $QP = PR$, entonces se dice que P es el punto medio del $\overline{QR}$.

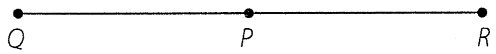


Figura 5.15

Infiere y responde

Si se sabe que P es el punto medio de $\overline{QR}$ y $PR = 7{,}8$ cm, ¿cuál es la longitud del $\overline{QR}$?

Congruencia de ángulos

Dos ángulos son congruentes si tienen la misma medida.
$\angle A \cong \angle B$ si y solamente si, m $\angle A$ = m $\angle B$.

Ejemplo

En la figura 5.16 m $\angle A = 30°$ y m $\angle B = 30°$. Como la medida de los dos ángulos es la misma, se tiene que $\angle A \cong \angle B$.

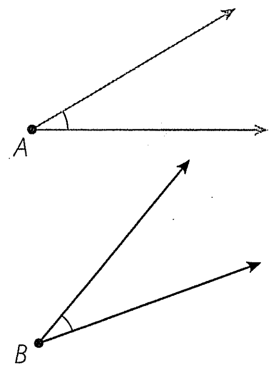


Figura 5.16

Para construir un ángulo congruente a otro ángulo dado usando regla y compás, llevamos a cabo el siguiente procedimiento:

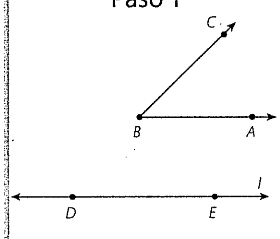
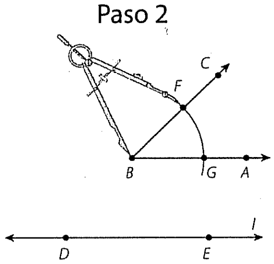
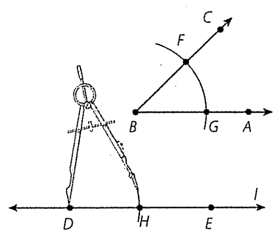
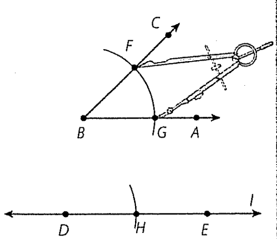
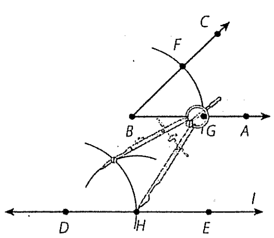
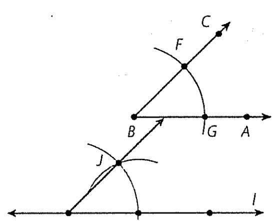
Paso 1	Paso 2	Paso 3
		
Dado $\angle ABC$, con la regla se traza $\overleftrightarrow{DE}$. Los puntos A, B y C no están en la recta DE.	Se toma el compás con centro en el punto B y se traza un arco de cualquier abertura que corte los dos lados del ángulo. Los puntos de corte serán los puntos F y G.	Con centro en D se repite el mismo arco sobre la recta DE. Se marca el punto H como el punto de corte con la recta.
Paso 4	**Paso 5**	**Paso 6**
		
Se sitúa el compás con centro en F y se mide el arco entre F y G.	Con la medida encontrada y centro en H, se traza el arco. El punto J será el punto de corte de los dos arcos.	Con la regla se traza $\overrightarrow{DJ}$. Se construyó $\angle HDJ$ tal que $\angle ABC \cong \angle HDJ$

Tabla 5.7

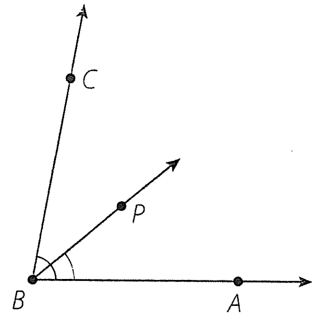


Figura 5.17

Bisectriz de un ángulo

Si P es un punto en el interior del $\angle ABC$ y $\angle ABP \cong \angle PBC$, entonces $\overrightarrow{BP}$ es la bisectriz del $\angle ABC$.

Interpreta y contesta

Si $\overrightarrow{BP}$ es la bisectriz del $\angle ABC$ y m $\angle ABP = 47°$, ¿cuál es la medida del $\angle PBC$? ¿Qué tipo de ángulo es $\angle ABC$?

Desarrolla pensamiento crítico

Ejercitar procedimientos

Interpreta

1. De acuerdo a la figura 5.18.

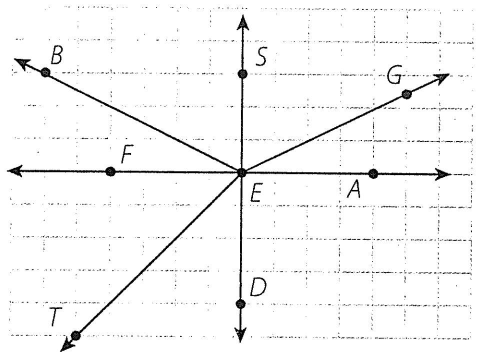


Figura 5.18

   a. Nombra un par de segmentos congruentes.
   b. Señala un par de ángulos congruentes.
   c. Identifica el punto medio del $\overline{AF}$.
   d. Halla la bisectriz del $\angle DEF$.

2. Dibuja con la regla $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ de modo que $AB = 2$ cm y $CD = 4{,}5$ cm. Construye con ayuda del compás un segmento congruente con cada uno de ellos.

3. Dibuja un ángulo de 45° y uno de 105° y con ayuda del compás construye un ángulo congruente con cada uno de ellos.

Pensar y razonar

Infiere

4. En la figura 5.19 se muestran dos segmentos de longitudes a y b.

a. b.

Figura 5.19

Con ayuda del compás construye:

   a. El segmento de longitud $a + b$.
   b. El segmento de longitud $a - b$.
   c. El segmento de longitud $3a$.

5. En la figura 5.20 se muestran dos ángulos con medidas a y b.

a. b.

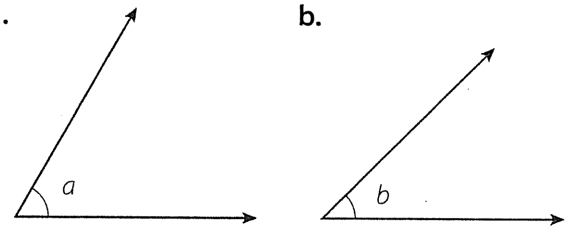


Figura 5.20

Con ayuda del compás construye:

   a. El ángulo con medida $a + b$.
   b. El ángulo con medida $a - b$.
   c. El ángulo con medida $2a$.
   d. El ángulo con medida $3b$.

Comunicar y representar

Explica

6. Determina si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F). Justifica tu respuesta.

a. Si P está en el interior de $\angle ABC$ y $\overrightarrow{BP}$ es la bisectriz de $\angle ABC$, entonces $m\ \angle ABC = 2m\ \angle PBC$.

b. Si B es el punto medio de $\overline{AC}$ y además $AC = 2DE$, entonces AB mide la mitad de DE.

c. Si dos ángulos agudos son congruentes, entonces son complementarios.

d. La bisectriz de un ángulo obtuso lo divide en dos ángulos agudos de igual medida.

Plantear y resolver problemas

Analiza

7. Realiza la construcción siguiendo cada uno de los pasos:

- Traza un segmento AB.
- Traza un rayo desde A que no contenga a B. Construye sobre el rayo tres segmentos consecutivos congruentes entre sí. Nombra los segmentos $\overline{AC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DE}$.
- Con la regla traza $\overline{EB}$.
- Construye con el compás un ángulo congruente con $\angle AEB$ con vértice en D y nombra con la letra F al punto de corte con $\overline{AB}$.
- Construye con el compás un ángulo congruente con $\angle AEB$ con vértice en C y nombra con la letra G al punto de corte con $\overline{AB}$.

¿Qué relación hay entre las medidas de $\overline{AG}$, $\overline{GF}$ y $\overline{FB}$? Justifica tu respuesta.

8. El polígono de la figura 5.21 tiene varias propiedades.

- Los lados opuestos son congruentes.
- Los ángulos opuestos son congruentes.
- La suma de las medidas de los 4 ángulos es 360°.

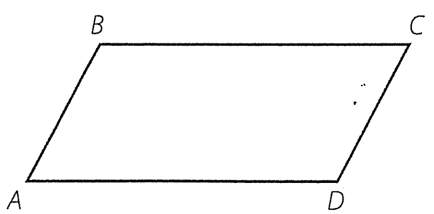


Figura 5.21

a. Si $AB = 5$ cm, halla DC.

b. Si $m\ \angle A = 50°$, halla $m\ \angle D$.

c. Si $m\ \angle B = 65°$, halla $m\ \angle C$.

d. Si $AD = 2AB$ y $AD = 8$ cm, halla DC.

9. Dibuja un punto C en el segmento AB que se muestra en la figura 5.22, de tal forma que la longitud de AC sea la cuarta parte de la longitud de AB.

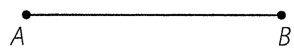


Figura 5.22

10. En la figura 5.23 se tiene que $\overrightarrow{BF}$ es la bisectriz de $\angle EBG$, $\angle ABC$ es recto, $m\ \angle ABE = 20°$, $m\ \angle GBC = 24°$.

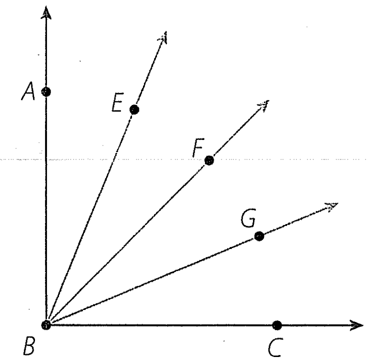


Figura 5.23

¿Cuál es la medida de $\angle ABF$?

Evalúa

1. Escribe un ejemplo que muestre por qué la siguiente afirmación es falsa: "Si dos ángulos son agudos y congruentes, la suma de sus medidas corresponde a un ángulo obtuso".

2. Describe cómo son los ángulos que se forman entre dos rayos opuestos por un vértice.

3. Completa los espacios para que cada afirmación sea verdadera:

a. El ____________ de un segmento lo divide en dos segmentos congruentes.

b. La ________ de un ángulo lo divide en dos ángulos congruentes.

Desempeños

- Deduce relaciones a partir de las definiciones de ángulos congruentes.
- Deduce relaciones a partir de las definiciones de segmentos congruentes.

Practica más, pág. 324.

Rectas perpendiculares y paralelas

Ideas previas

1. Traza dos rectas que no se corten.
2. Traza dos rectas que se corten formando un ángulo recto.
3. ¿Qué objetos de la vida real te dan la idea de dos líneas que no se cortan?

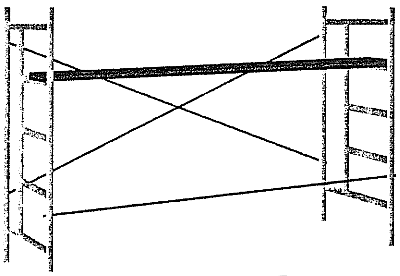


Figura 5.24

Interpreta

Las personas que trabajan en construcción utilizan una estructura llamada andamio para tener acceso a partes de edificios a los que no se puede llegar fácilmente. El andamio de la figura 5.24 tiene varias parejas de varillas que son paralelas o perpendiculares.

Rectas perpendiculares

Dos rectas l y m son **perpendiculares** si al intersecarse forman ángulos rectos. Para indicar perpendicularidad entre dos rectas se utiliza el símbolo $\perp$ en medio del nombre de éstas.

En la figura 5.25, l es perpendicular a m. Se escribe $l \perp m$.

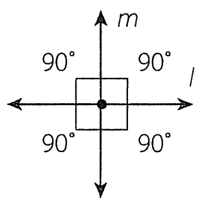


Figura 5.25

Infiere y define

Observa la figura 5.26. ¿Cuántos puntos tienen en común los dos segmentos? ¿Qué tipo de ángulos se forman? Usa las respuestas para indicar cuándo dos segmentos son perpendiculares.

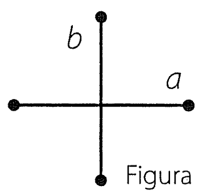


Figura 5.26

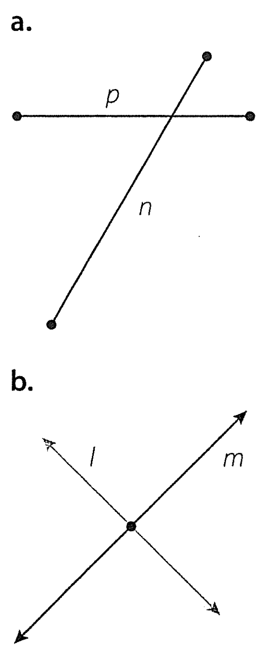


Figura 5.27

Ejemplo

Determinemos cuáles rectas o segmentos de la figura 5.27 son perpendiculares.

Solución

Los segmentos del literal **a.** no son perpendiculares ya que no forman un ángulo recto. En el literal **b.** $l \perp m$.

Construcción de rectas perpendiculares con regla y compás

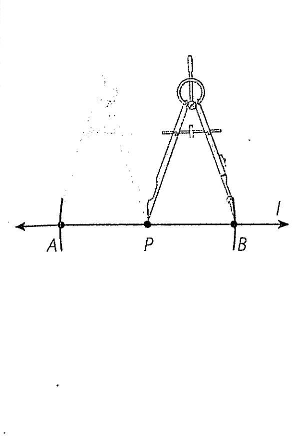
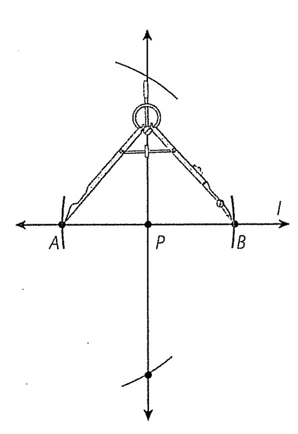
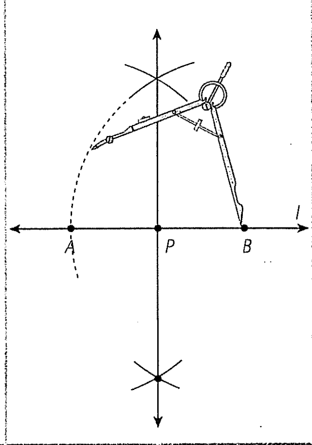
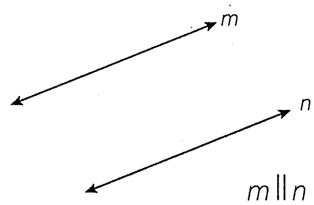
Paso 1	Paso 2	Paso 3
		
Usando un compás con cualquier abertura, hacemos centro en un punto *P* sobre la recta *l* y marcamos dos arcos que la intersequen en los puntos *A* y *B*.	Con centro en *A* y abertura mayor que *AP*, trazamos dos arcos.	Repetimos el paso 2, haciendo centro en *B*. Finalmente, trazamos la recta que pasa por los puntos *C* y *D* que son la intersección de los dos arcos.

Tabla 5.8

Rectas paralelas

En la figura 5.28 *m* es paralela a *n*. Se escribe $m \parallel n$.



$m \parallel n$

Figura 5.28

Dos rectas *m* y *n* son **paralelas** si están en el mismo plano y no se cortan. Para indicar paralelismo entre dos rectas se utiliza el símbolo $\parallel$ en medio del nombre de éstas.

Construcción de rectas paralelas con regla y compás

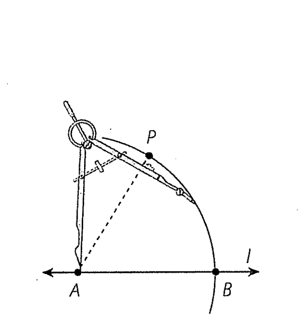
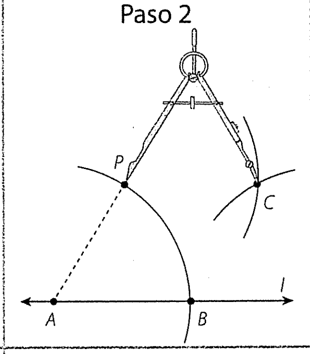
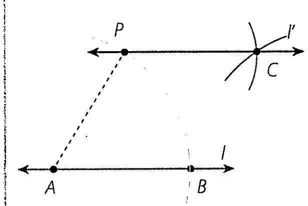
Paso 1	Paso 2	Paso 3
		
Trazamos una recta *l* y un punto *P* que no esté en *l*. Dibujamos un punto *A* sobre la recta *l*. Con centro en el punto *A* y radio $\overline{AP}$ marcamos el punto *B* en *l*, tal que m $\overline{AB}$ = m $\overline{AP}$.	Utilizando la medida de $\overline{AP}$, trazamos arcos con centro en *P* y *B* y determinamos el punto *C*.	Dibujamos una recta *l'* que contenga los puntos *P* y *C*. La recta *l'* es paralela a la recta *l*.

Tabla 5.9

Desarrolla pensamiento crítico

Ejercitar procedimientos

Interpreta

1. En la figura 5.29 encuentra un par de segmentos perpendiculares y un par de segmentos paralelos.

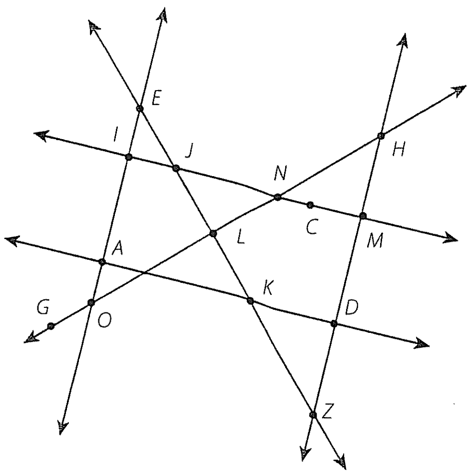


Figura 5.29

Pensar y razonar

Infiere

2. Realiza la siguiente construcción paso a paso:

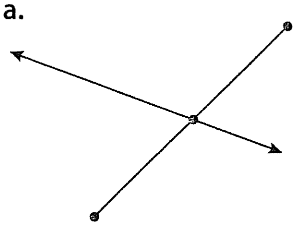
- **a.** Traza una recta *m* y un punto *P* que no esté en *m*.
- **b.** Construye una recta *n* perpendicular a *m* que pase por *P*.
- **c.** Construye una recta *h* perpendicular a *n* que pase por *P*.

¿Qué relación existe entre las rectas *h* y *m*?

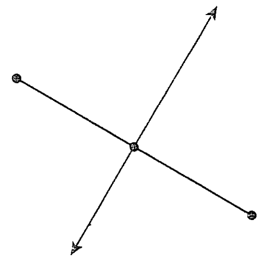
3. La mediatriz de un segmento es la recta perpendicular al segmento dado que lo divide en dos segmentos congruentes.

Usando esta definición, determina en cada caso si la recta es la mediatriz del segmento dado. Justifica tu respuesta.

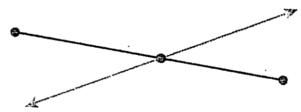
a.



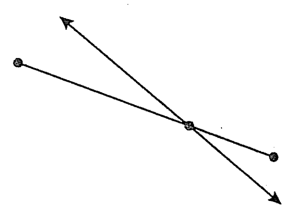
b.



c.



d.



e.

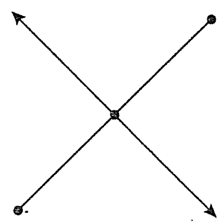


Figura 5.30

Comunicar y representar

Explica

4. Explica el proceso para construir la mediatriz de un segmento empleando regla y compás. Sigue el proceso que describiste para construir la mediatriz del segmento que se muestra en la figura 5.31.

Figura 5.31

5. Completa los espacios en blanco, utilizando las palabras "paralelas" o "perpendiculares", según corresponda:

a. Si dos rectas se intersecan formando ángulos de 90°, son rectas ________________.

b. Dos rectas ________________ son aquellas que así se prolonguen indefinidamente no se intersecan.

c. En una vía férrea los rieles sobre los que circulan los trenes representan rectas ________________.

6. Determina si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F). Justifica tu respuesta.

a. Dos rectas paralelas a una misma recta son paralelas entre sí.

b. Por un punto exterior a una recta solamente pasa una recta paralela a la recta dada.

c. Dadas dos rectas m y n, tales que $m \parallel n$, y una tercera recta l, tal que $l \perp m$, $l \parallel n$.

d. Una recta paralela a una de dos rectas perpendiculares es también paralela a la otra recta.

e. La mediatriz de un segmento es cualquier recta que pase por su punto medio.

Plantear y resolver problemas

Analiza

7. En la figura 5.32 identifica:

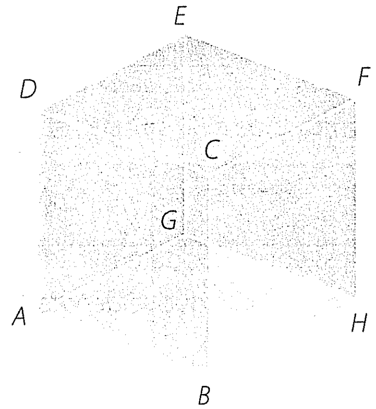


Figura 5.32

a. Un segmento paralelo al segmento AB.

b. Un segmento perpendicular al segmento BC.

c. Un segmento que no sea paralelo ni perpendicular al segmento CF.

8. En la figura 5.33 se muestra el mapa del barrio en que vive Natalia. Usa la información que contiene el mapa para completar los espacios:

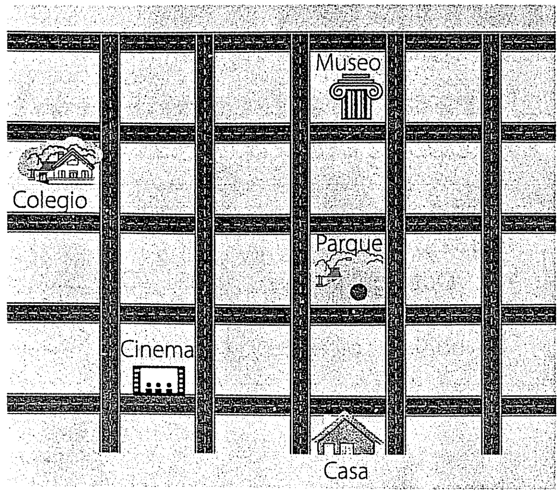


Figura 5.33

a. La calle sobre la que está la entrada al colegio es ____________ a la carrera sobre la que está la puerta del parque.

b. La carrera sobre la que se encuentra la entrada al museo es ____________ a la carrera en la que se encuentra la puerta del cinema.

c. Las calles se representan mediante rectas ________________ entre sí.

d. Las calles y las carreras se representan mediante rectas ________________ entre sí.

9. Representa gráficamente las siguientes situaciones:

a. Tres rectas: m, n y h están en el mismo plano. Además, $m \perp h$ y $n \perp h$.

b. n está en un plano diferente al plano que contiene a m y h.

Evalúa

Selecciona la afirmación falsa:

a. Si la intersección de dos rectas forma cuatro ángulos rectos, las rectas son perpendiculares.

b. Si dos rectas no son paralelas, entonces son intersecantes.

c. Si dos rectas son intersecantes, entonces son perpendiculares.

Desempeño

- Reconoce los conceptos de rectas paralelas y perpendiculares.

Practica más, pág. 324.

Triángulos y su clasificación

Ideas previas

1. ¿Qué significa que un par de puntos no sean colineales?
2. ¿Qué es un segmento de recta?
3. ¿Cuándo dos segmentos son congruentes?
4. ¿Cómo se clasifican los ángulos según su medida?

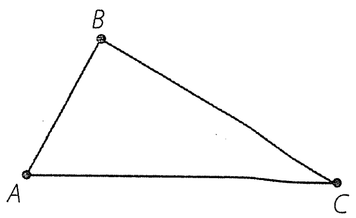


Figura 5.34

Interpreta

En la situación problema presentada al inicio de la unidad se describe la constelación llamada Triángulo Austral como una figura determinada por tres estrellas que al unirlas forman un triángulo.

Un **triángulo** es la unión de tres segmentos determinados por tres puntos *A*, *B* y *C* no colineales. Los puntos *A*, *B* y *C* se llaman **vértices** y los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ son los **lados** del triángulo.

El triángulo determinado por los puntos *A*, *B* y *C* se nombra $\triangle ABC$ y se lee triángulo *ABC*. (*Ver* figura 5.34).

Ejemplo

Determinemos cuáles son los triángulos que se observan en la figura 5.35.

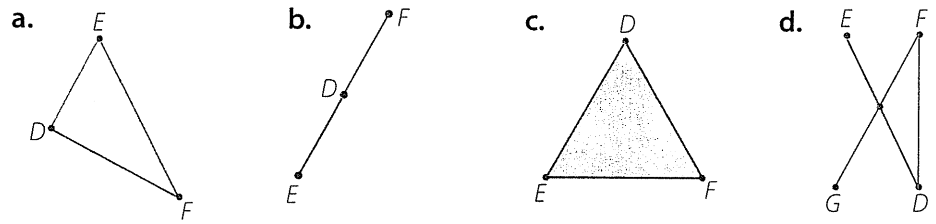


Figura 5.35

Solución

La figura del literal **a.** es la unión de tres segmentos determinados por tres puntos no colineales; por tanto, representa un triángulo que se denota $\triangle DEF$.

Infiere y argumenta

Completa los argumentos que justifican por qué las figuras de los literales **b.**, **c.** y **d.** no representan triángulos.

- La figura del literal **b.** no representa un triángulo porque los puntos *D*, *E* y *F* son ______________.
- La figura del literal **c.** no representa un triángulo ya que, al estar sombreada, además de los segmentos se incluyen los puntos ______________.
- La figura del literal **d.** no representa un triángulo ya que ______________.

Clasificación

Los triángulos se clasifican de acuerdo con la longitud de sus lados o con la medida de sus ángulos, tal como se muestra en el mapa de la figura 5.36.

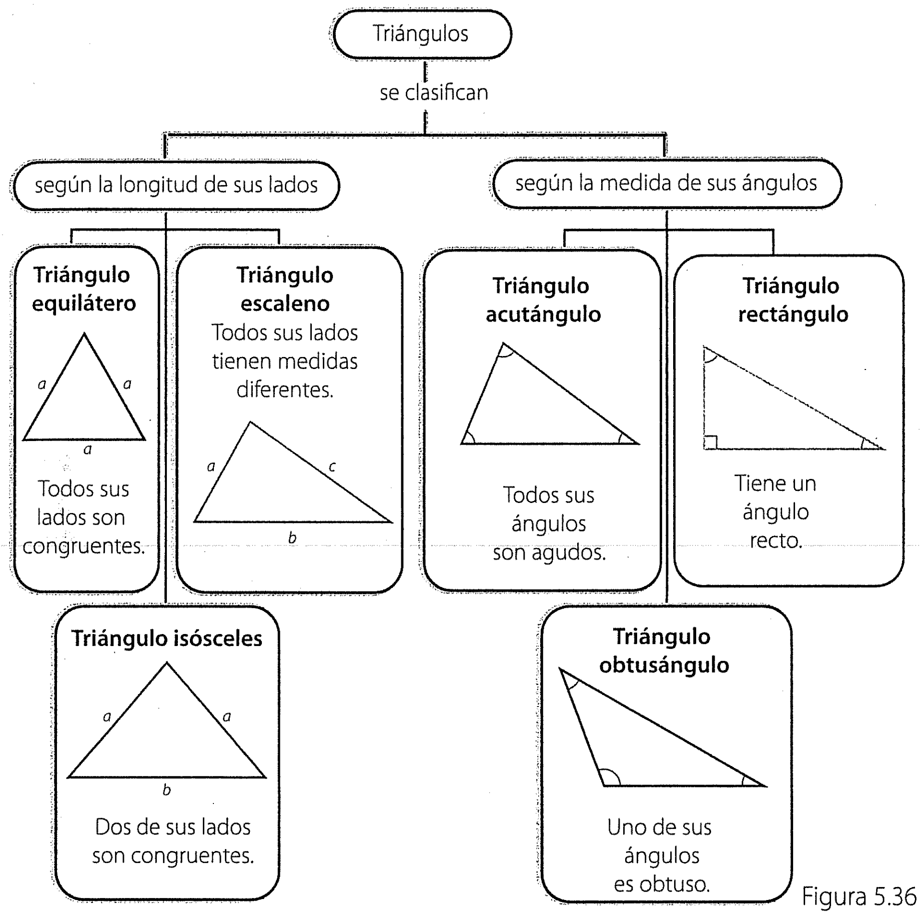


Figura 5.36

Interpreta y completa

Utiliza el mapa de la figura 5.36 para completar la tabla 5.10.

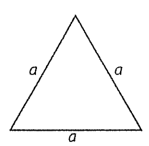
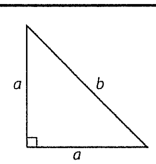
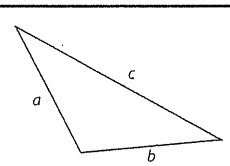
Triángulo	Clasificación según la longitud de sus lados	Clasificación según la medida de sus ángulos
	Equilátero	Acutángulo
		
		

Tabla 5.10

Problema del día

En un triángulo rectángulo los lados que forman el ángulo recto se llaman *catetos* y el lado opuesto al ángulo recto se llama *hipotenusa*. Con los datos de la tabla 5.11 verifica que se cumple la siguiente relación: "la suma de los cuadrados de los catetos es igual a la hipotenusa al cuadrado".

Cateto 1	Cateto 2	Hipotenusa
3	4	5
5	12	13
7	24	25
8	15	17

Tabla 5.11

Desarrolla pensamiento crítico

Ejercitar procedimientos

Interpreta

1. Utiliza una regla y un transportador para medir en cada triángulo de la figura 5.37 la longitud de los lados y la amplitud de los ángulos. De acuerdo con las medidas que obtuviste clasifica cada triángulo.

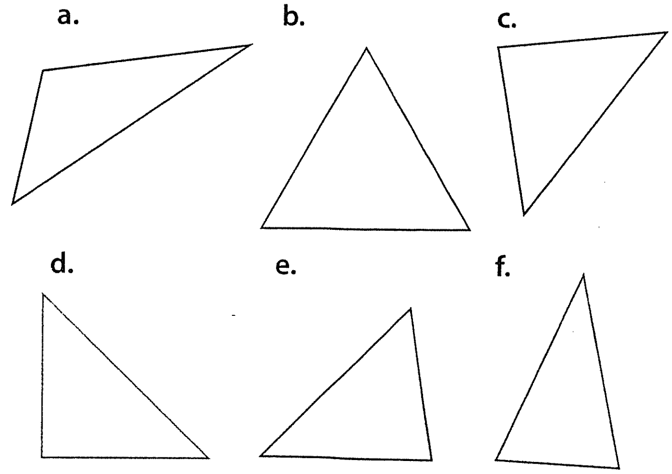


Figura 5.37

Pensar y razonar

Infiere

2. Mide los lados de cada triángulo mostrado en la figura 5.38 y completa la tabla 5.12.

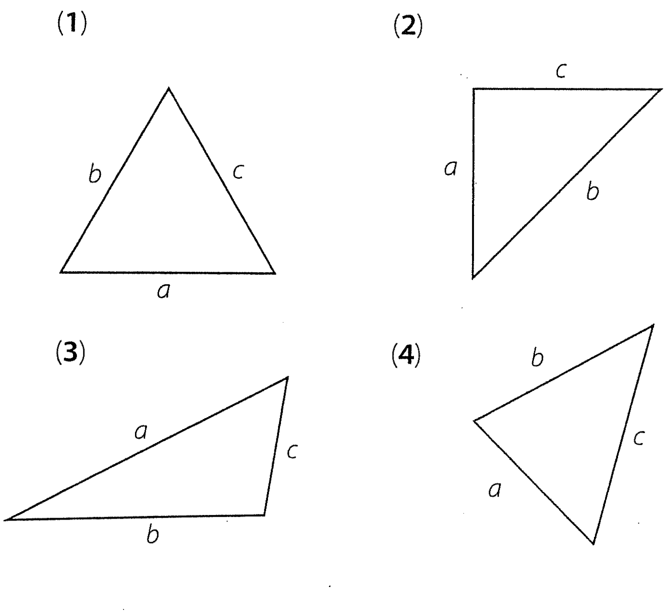


Figura 5.38

	a	b	c	$a+b$
(1)				
(2)				
(3)				
(4)				

Tabla 5.12

Compara la tercera y la cuarta columna de la tabla 5.12 y completa el siguiente enunciado: *"La suma de las longitudes de dos lados de un triángulo es ________________ que la longitud del tercer lado del triángulo".*

3. Utiliza la generalidad encontrada en el punto anterior para verificar si las siguientes tripletas de números corresponden a las medidas de los lados de un triángulo:

a. 3, 4, 5 **c.** 12, 6, 19 **e.** 2, 9, 10

b. 6, 8, 13 **d.** 6, 8, 10

4. Mide los ángulos de cada triángulo mostrado en la figura 5.39 y completa la tabla 5.13.

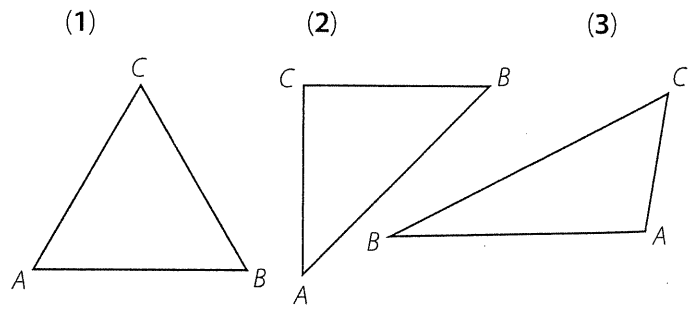


Figura 5.39

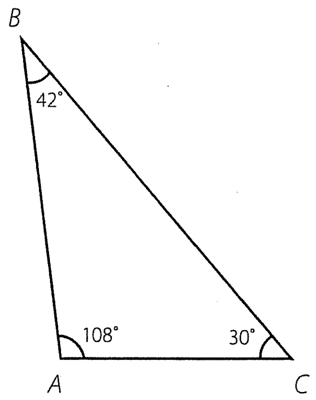
	m $\angle A$	m $\angle B$	m $\angle C$	m $\angle A$ + m $\angle B$ + m $\angle C$
(1)				
(2)				
(3)				

Tabla 5.13

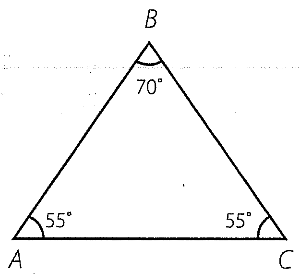
De acuerdo con los resultados de la quinta columna, completa la siguiente afirmación: *"La suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo es* ________________*".*

5. Utiliza la generalidad encontrada en el punto anterior para verificar el valor de la suma de las medidas de los ángulos interiores de cada triángulo de la figura 5.40.

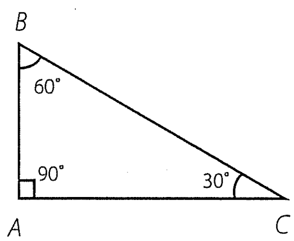
a.



b.



c.



d.

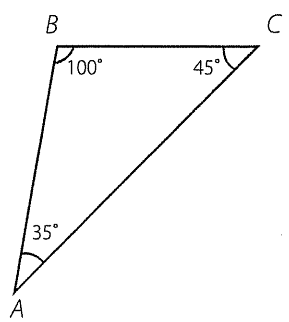


Figura 5.40

Comunicar y representar

Explica

6. Determina si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F). Justifica tu respuesta.

   a. Un triángulo puede tener dos ángulos obtusos.

   b. Un triángulo puede tener tres lados de igual medida.

   c. Un triángulo escaleno siempre es obtusángulo.

   d. Todo triángulo isósceles es también acutángulo.

   e. Un triángulo equilátero es también isósceles.

Plantear y resolver problemas

Analiza

7. Las longitudes de dos lados de un triángulo son 6 cm y 10 cm. ¿Cuáles son los posibles valores que puede tener la longitud del tercer lado del triángulo?

8. Encuentra la medida del ángulo x en la figura 5.41.

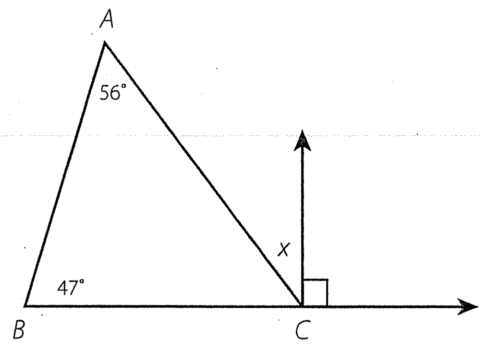


Figura 5.41

Evalúa

1. Selecciona las características que debe tener una figura geométrica para ser un triángulo:

   a. Tener tres puntos colineales, tener tres segmentos unidos, tener varios puntos unidos con segmentos.

   b. Tener tres puntos no colineales, tener tres segmentos unidos, tener tres puntos unidos.

   c. Tener tres puntos no colineales, tener tres segmentos unidos, tener tres puntos unidos con segmentos.

2. Escribe un argumento que justifique por qué un triángulo no puede tener un ángulo recto y uno obtuso.

Desempeño

- Define, caracteriza y establece propiedades geométricas de los triángulos.

Practica más, pág. 325.

Tema 43

Líneas y puntos notables de un triángulo

Ideas previas

1. ¿Cuándo un ángulo es recto?
2. ¿Cómo se construye el punto medio de un segmento?
3. ¿Qué es la bisectriz de un ángulo?
4. ¿Qué es la mediatriz de un segmento?

Analiza

Una empresa que comercializa bebidas gaseosas necesita construir una bodega para surtir desde allí los tres puntos de venta que tiene en una ciudad, de manera que cada punto de venta quede a igual distancia de la bodega. ¿Cómo se puede determinar el sitio en donde debe construirse la bodega?

Mediana

El segmento que une un vértice del triángulo con el punto medio del lado opuesto es la mediana relativa a ese lado.

Interpreta y responde

Observa la figura 5.42. ¿Cuántas medianas tiene el triángulo *ABC*? Nómbralas.

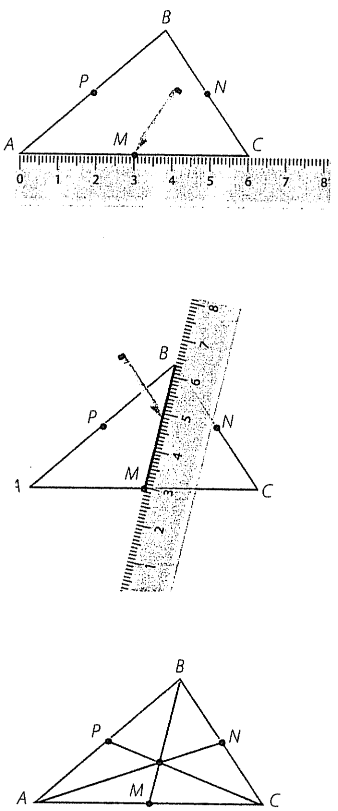


Figura 5.42

Las tres medianas de un triángulo se intersecan en un punto llamado **baricentro**.

Altura

El segmento perpendicular trazado desde un vértice a su lado opuesto o a su prolongación se llama **altura** relativa a ese lado.

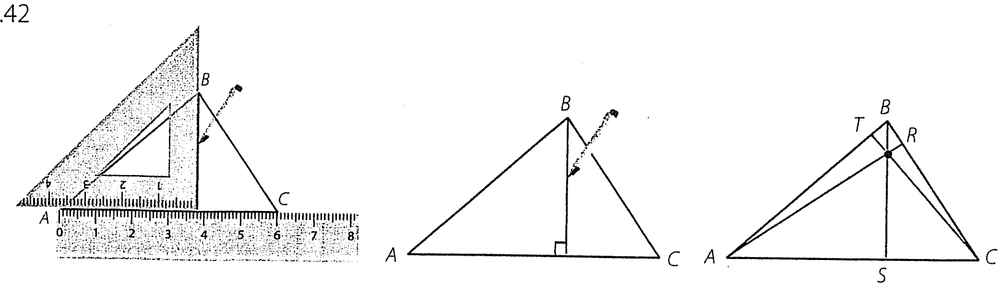


Figura 5.43

Las tres alturas de un triángulo se cortan en un punto llamado **ortocentro**.

Ejemplo

Construyamos el ortocentro del triángulo mostrado en la figura 5.44.

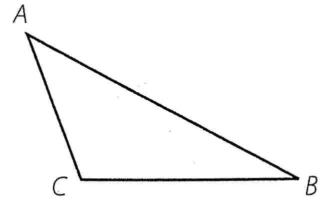


Figura 5. 44

Solución

Trazamos la altura que va del vértice A al lado $\overline{BC}$, la cual no cae sobre el lado sino sobre su prolongación. (*Ver* figura 5.45a).

Luego trazamos la altura que va de B al lado $\overline{AC}$. Como el triángulo es obtusángulo, esta altura no cae sobre el lado, sino sobre su prolongación. (*Ver* figura 5.45b).

De la misma manera trazamos la altura que va del vértice C al lado $\overline{AB}$. (*Ver* figura 5.45c).

Para hallar el punto de intersección de las tres alturas, prolongamos las alturas hasta donde se encuentren y ese punto de intersección es el ortocentro. (*Ver* figura 5.45d).

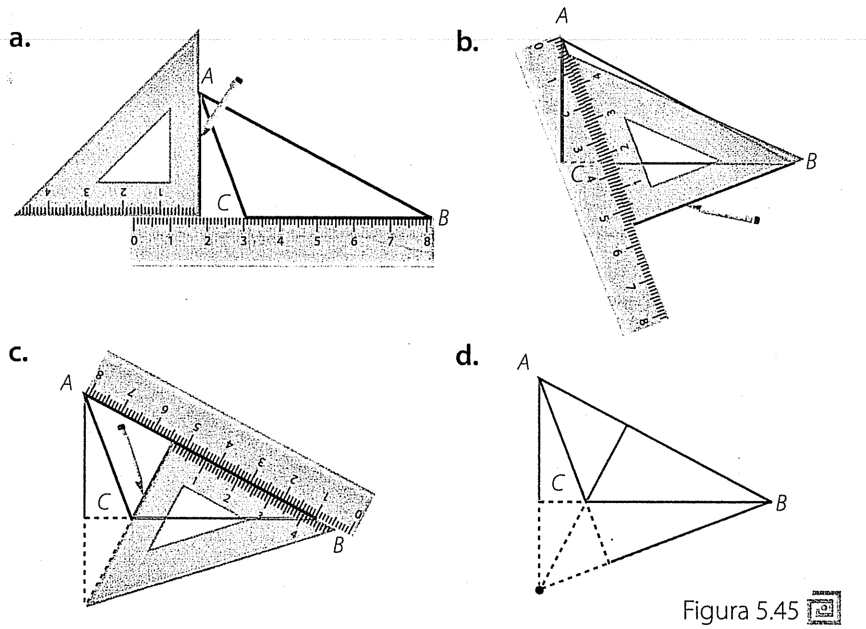


Figura 5.45

Interpreta y explica

¿Por qué es correcto afirmar que en un triángulo rectángulo dos de las alturas coinciden con dos lados del triángulo?

Mediatriz

La recta perpendicular a un lado del triángulo que pasa por su punto medio se denomina **mediatriz**.

Las tres mediatrices de un triángulo se intersecan en un punto llamado **circuncentro**.

Ejemplo

Construyamos el circuncentro del triángulo de la figura 5.46.

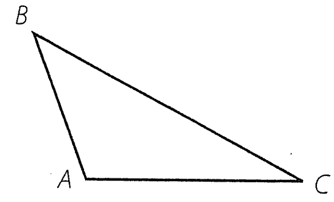


Figura 5.46

Solución

1. En el triángulo ABC, con la regla ubicamos el punto medio de cada lado, los llamamos X, Y y Z.
2. Trazamos con la escuadra la recta perpendicular a cada lado que pasa por su punto medio.

Así se determinan las rectas s, t y r. El punto Q es el circuncentro del $\triangle ABC$. (*Ver* figura 5.47).

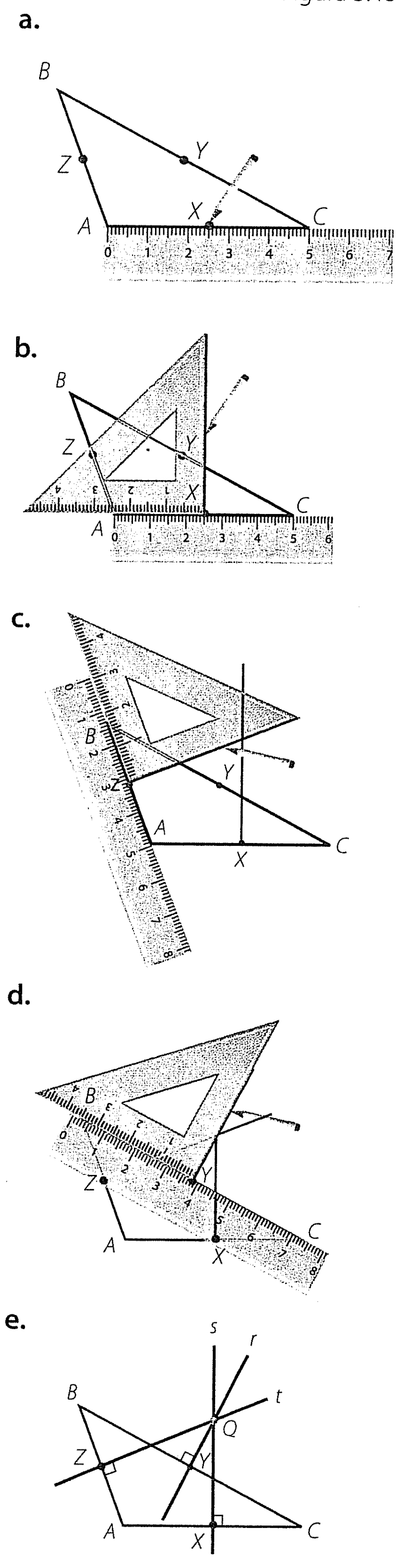


Figura 5.47

Analiza y contesta

¿Por qué hallamos el circuncentro y no otro punto notable del triángulo para responder la pregunta planteada al inicio del tema?

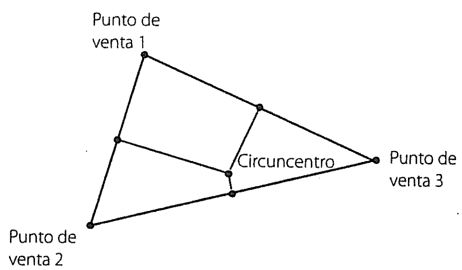


Figura 5.48

Bisectriz

El segmento de recta comprendido entre un vértice y su lado opuesto, que divide al ángulo en dos ángulos congruentes, se denomina **bisectriz** relativa a ese ángulo. Las tres bisectrices de un triángulo se intersecan en un punto llamado **incentro**.

Interpreta y describe

Observa cómo construimos el incentro del triángulo de la figura 5.49. Describe paso a paso el procedimiento.

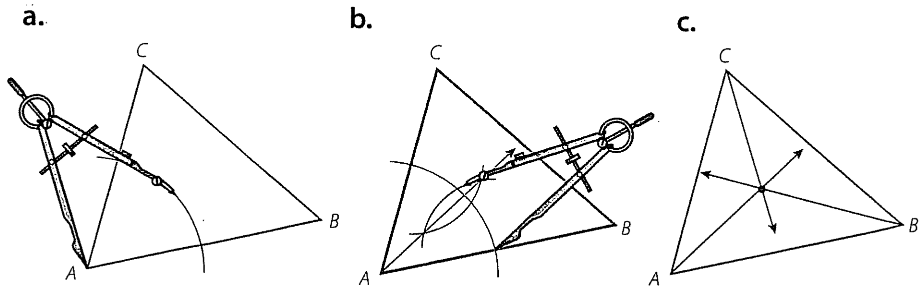


Figura 5.49

Ciencia y tecnología

Con ayuda de un software de geometría dinámica construye un triángulo utilizando la herramienta *polígono*. Con la herramienta *punto medio*, encuentra el punto medio de cada lado del triángulo. Luego con la herramienta *recta perpendicular* construye la mediatriz de cada lado del triángulo. Por último, con la herramienta *punto de intersección entre dos objetos* determina el circuncentro del triángulo.

Con el apuntador arrastra cada uno de los vértices del triángulo y observa qué pasa con el circuncentro.

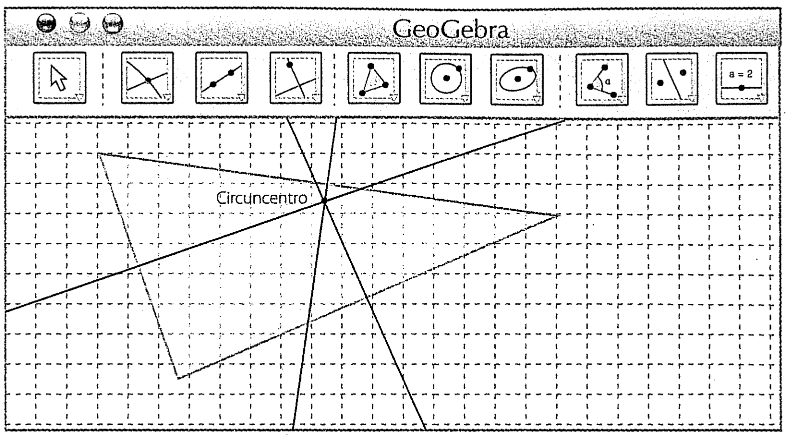


Figura 5.50

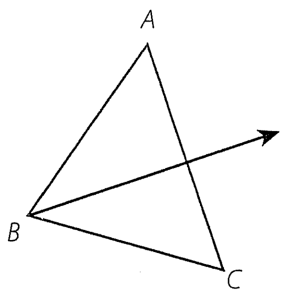
Desarrolla pensamiento crítico

Ejercitar procedimientos

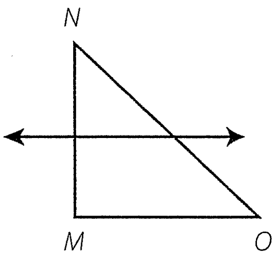
Interpreta

1. Determina la línea notable que se representa en cada triángulo de la figura 5.51.

a.



b.



c.

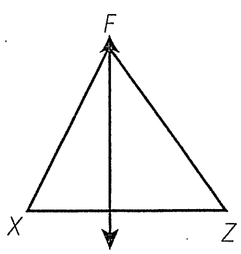


Figura 5.51

2. Construye los puntos notables que se indican en cada caso.
   - **a.** El ortocentro de un triángulo equilátero.
   - **b.** El circuncentro de un triángulo isósceles.
   - **c.** El baricentro de un triángulo obtusángulo.
   - **d.** El incentro de un triángulo escaleno.
3. De acuerdo con la figura 5.52 nombra:

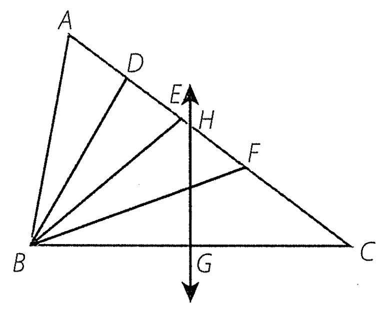


Figura 5.52

   - **a.** Una altura del $\triangle ABC$.
   - **b.** Una mediana del $\triangle ABC$.
   - **c.** Una bisectriz de un ángulo del $\triangle ABC$.
   - **d.** Una mediatriz del $\triangle ABC$.

Pensar y razonar

Infiere

4. Construye un triángulo cuyos lados midan 14 cm, 17 cm y 20 cm.

a. Marca con rojo el ortocentro del triángulo.

b. Marca con verde el circuncentro del triángulo.

c. Marca con azul el baricentro del triángulo.

d. ¿Qué relación existe entre los tres puntos?

5. Realiza paso a paso la construcción que se describe y úsala para responder las preguntas.

- **Paso 1:** Dibuja un triángulo *ABC*.
- **Paso 2:** Construye las medianas del triángulo ($\overline{AD}$, $\overline{BE}$ y $\overline{CF}$).
- **Paso 3:** Nombra con la letra *H* el baricentro del triángulo.

a. Utiliza una regla para medir los segmentos y completar la tabla 5.14:

$\overline{AH}$	$\overline{HD}$	$\overline{BH}$	$\overline{HE}$	$\overline{CH}$	$\overline{HF}$

Tabla 5.14

b. ¿Qué relación existe entre $\overline{AH}$ y $\overline{HD}$?

c. ¿Qué relación existe entre $\overline{BH}$ y $\overline{HE}$?

d. ¿Qué relación existe entre $\overline{CH}$ y $\overline{HF}$?

De acuerdo con los resultados, completa la siguiente afirmación:

El baricentro divide a cada una de las ____________ del triángulo en dos segmentos, tal que la longitud del segmento que une el vértice con el baricentro es __________ de la longitud del segmento que une el baricentro con el lado opuesto al vértice.

Comunicar y representar

Explica

6. Determina si cada afirmación es verdadera (V) o (F). Justifica tu respuesta.

a. En un triángulo equilátero, el ortocentro coincide con el incentro.

b. Si un triángulo es rectángulo, el ortocentro está ubicado en el exterior del triángulo.

c. Si un triángulo es isósceles, entonces el ortocentro, el incentro y el circuncentro son colineales.

d. El baricentro de un triángulo obtusángulo se encuentra en el interior del triángulo.

Plantear y resolver problemas

Analiza

7. En la figura 5.53 $\overline{AJ}$, $\overline{BK}$ y $\overline{CH}$ son las medianas del $\triangle ABC$.

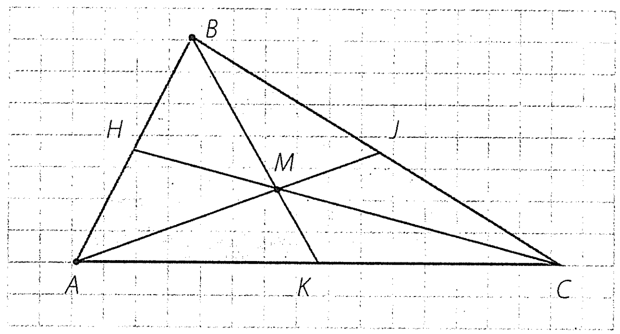


Figura 5.53

a. Si $\overline{AH} = 5$, halla la medida de $\overline{HB}$.

b. Si $\overline{HM} = 3$, halla la medida de $\overline{MC}$.

c. Si $\overline{BK} = 6$, halla la medida de $\overline{MK}$.

Evalúa

1. ¿En qué tipo de triángulos coinciden las cuatro líneas notables?

2. Escribe un ejemplo para mostrar que cada una de las siguientes afirmaciones es falsa:

a. El ortocentro se encuentra siempre en el interior de un triángulo.

b. Una altura pasa necesariamente por el punto medio de uno de los lados.

c. Una altura y una mediatriz no pueden ser paralelas.

Desempeño

- Identifica las líneas notables del triángulo.

Practica más, pág. 325.

Tema 44

Cuadriláteros

Ideas previas

1. ¿Qué significa que dos segmentos se intersecan en su extremo?
2. ¿Cuándo dos rectas son paralelas?
3. ¿Cuál es el resultado de sumar las medidas de los ángulos interiores de un triángulo?

Interpreta

En la situación problema del inicio de la unidad se describe la constelación *Osa Menor* como una cuchara cuya base está determinada por cuatro estrellas que forman un cuadrilátero.

> Un **cuadrilátero** es la figura determinada por la unión de cuatro segmentos coplanares que se intersecan únicamente en sus extremos.

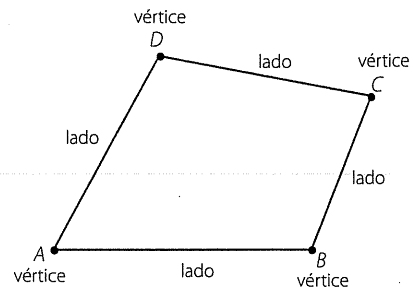


Figura 5.54

Observemos la figura 5.54. Los segmentos que forman el cuadrilátero se llaman lados y los extremos de los segmentos se llaman vértices del cuadrilátero. Cada vértice del cuadrilátero es un extremo de exactamente dos de los lados del cuadrilátero. Para nombrar un cuadrilátero se utiliza el símbolo "□" seguido de los nombres de los vértices de la figura nombrados en el sentido del avance de las manecillas del reloj.

Ejemplo

Determinemos cuáles de las imágenes de la figura 5.55 son cuadriláteros.

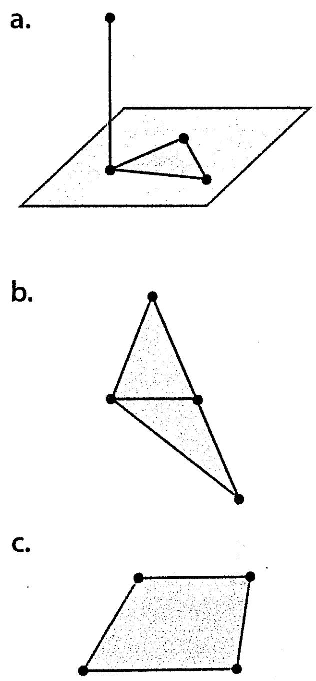


Figura 5.55

Solución

Únicamente la figura del literal **c.** es un cuadrilátero. La figura del literal **a.** no es un cuadrilátero ya que no todos los segmentos que la conforman son coplanares y en la figura del literal **b.** hay segmentos que no se intersecan en sus extremos.

Lados y ángulos

En todo cuadrilátero los lados y los ángulos que lo conforman reciben sus nombres así:

- Los lados del cuadrilátero que no se intersecan se llaman lados opuestos.
- Los lados del cuadrilátero que se intersecan en un extremo se llaman lados consecutivos.
- Los ángulos que comparten solamente dos vértices del cuadrilátero se llaman ángulos opuestos.
- Los ángulos que comparten un lado del cuadrilátero se llaman ángulos consecutivos.

Pensamiento espacial

Clasificación

Los cuadriláteros se clasifican teniendo en cuenta algunas propiedades, como se muestra en el diagrama de la figura 5.56:

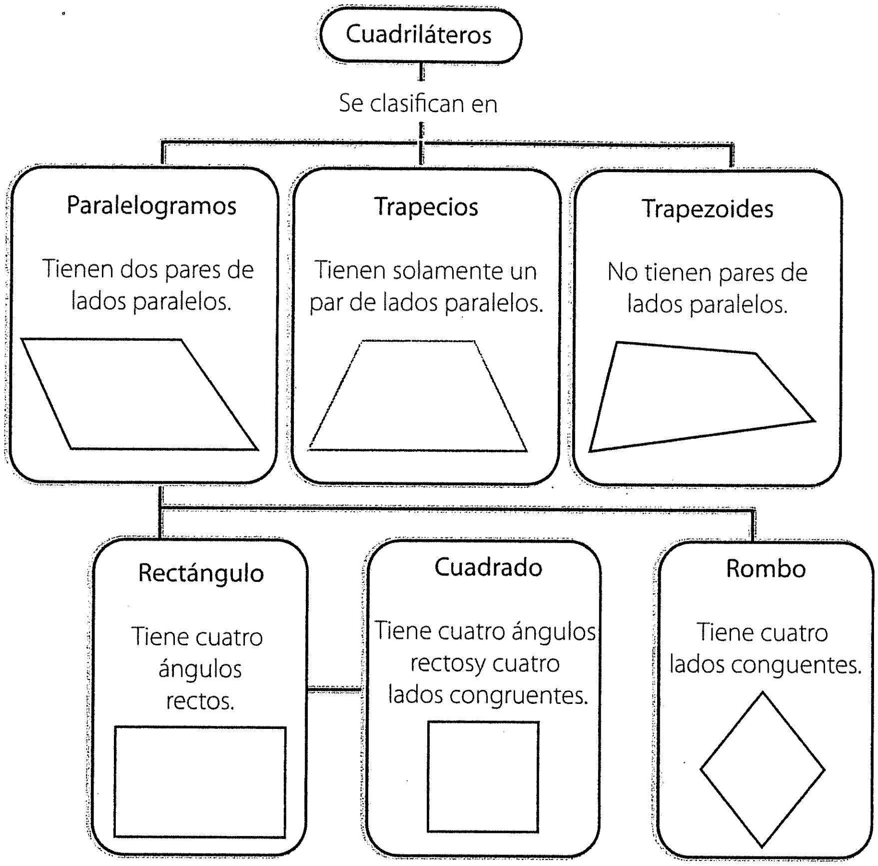


Figura 5.56

> Un cuadrilátero es **convexo** si sus diagonales se encuentran en el interior del cuadrilátero.

Ejemplo

En la figura 5.57, el cuadrilátero del literal **c.** es el único no convexo ya que una de sus **diagonales** no se encuentra en el interior del polígono.

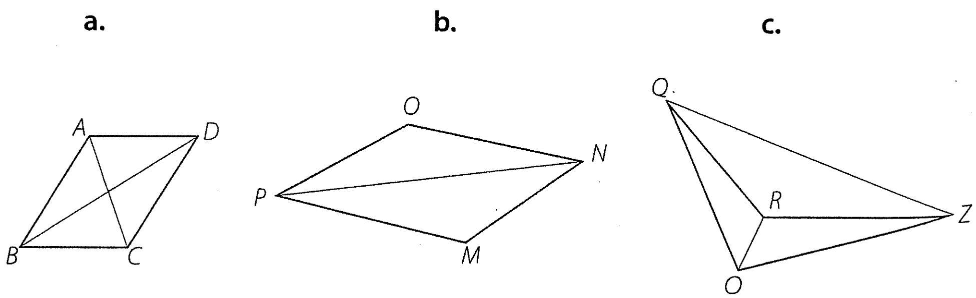


Figura 5.57

¿Qué significa?

Una **diagonal** de un cuadrilátero es un segmento que tiene como extremos dos vértices opuestos del cuadrilátero.

Desarrolla pensamiento crítico

Ejercitar procedimientos

Interpreta

1. De acuerdo con la figura 5.58, contesta cada pregunta:

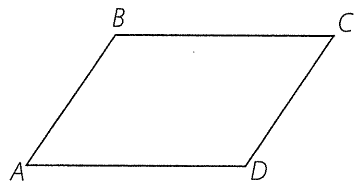


Figura 5.58

a. ¿Cuál es el lado opuesto al $\overline{AB}$?

b. ¿Cuál es el lado opuesto al $\overline{BC}$?

c. ¿Qué ángulos son consecutivos al $\angle C$?

d. ¿Cuál es el ángulo opuesto al $\angle B$?

e. ¿Cuál es el ángulo opuesto al $\angle A$?

f. ¿Qué ángulos son consecutivos al $\angle D$?

Pensar y razonar

Infiere

2. Utiliza un transportador para medir los ángulos interiores de cada cuadrilátero convexo de la figura 5.59 y con las medidas completa la tabla 5.15.

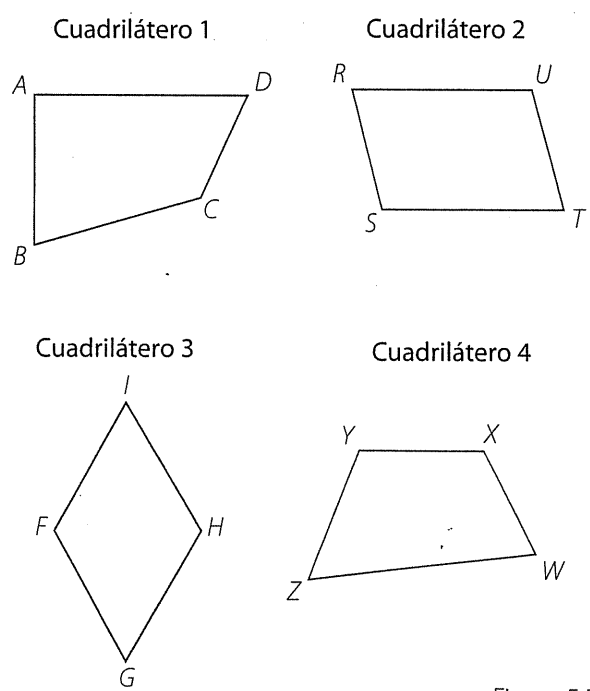


Figura 5.59

	□1	□2	□3	□4
m $\angle 1$				
m $\angle 2$				
m $\angle 3$				
m $\angle 4$				
m $\angle 1$ + m $\angle 2$ + m $\angle 3$ + m $\angle 4$				

Tabla 5.15

De acuerdo con la información de la tabla 5.15 completa la afirmación:

La suma de las medidas de los ángulos interiores de un __________________ *es igual a* ____________.

3. Construye algunos paralelogramos y en cada uno de ellos mide sus cuatro ángulos y sus cuatro lados. Después, completa los espacios en blanco con las palabras *congruentes* o *suplementarios* para que la afirmación sea verdadera.

a. Los lados opuestos de un paralelogramo son ______________________.

b. En un paralelogramo los ángulos consecutivos son ________________.

c. Los ángulos opuestos de un paralelogramo son ________________.

Evalúa

1. Señala qué tipo de cuadrilátero cumple con las condiciones que se indica:

a. Cualquiera de sus diagonales forman dos triángulos isósceles rectángulos.

b. No es un paralelogramo ni un trapecio.

c. Tiene cuatro ángulos interiores congruentes, pero no todos sus lados son congruentes entre sí.

d. Todos sus lados son congruentes pero no tiene ángulos rectos.

Desempeño

- Define, caracteriza y establece propiedades geométricas de los cuadriláteros.

Practica más, pág. 326.

Polígonos

Ideas previas

1. ¿Qué es un triángulo?
2. ¿Qué es un cuadrilátero?
3. ¿Qué es una diagonal de un cuadrilátero?

Analiza

Estudiemos por qué algunas de las imágenes de la figura 5.60 no son polígonos.

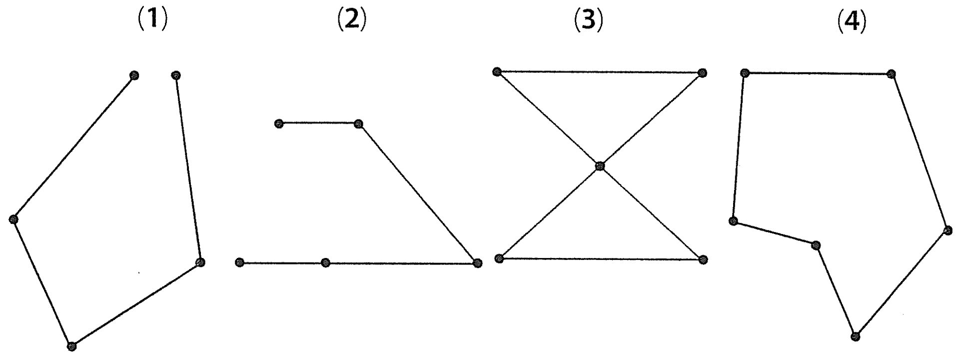


Figura 5.60

La figura del literal (**1**) no es un polígono ya que tiene dos segmentos que no están unidos.

La figura del literal (**2**) no es un polígono porque tiene dos segmentos colineales.

La razón por la que la figura del literal (**3**) no es un polígono, es que tiene puntos que son extremos de más de dos segmentos.

Un **polígono** es una figura plana determinada por la unión de segmentos que solamente se intersecan en sus extremos y que cumple con las siguientes características:

1. No tiene segmentos colineales.

2. Dos segmentos se encuentran únicamente en un punto.

3. Cada extremo de un segmento es extremo de sólo dos segmentos.

Interpreta y verifica

Comprueba que la figura del literal (**4**) cumple las condiciones para ser polígono.

Los extremos de los segmentos reciben el nombre de **vértices** del polígono y los segmentos que lo forman se llaman **lados** del polígono. Un polígono se nombra con la palabra **polígono** seguida por los nombres de los vértices en sentido del avance de las manecillas del reloj.

Clasificación

Los polígonos reciben su nombre de acuerdo con el número de lados que tienen; un polígono con n lados donde $n > 4$ se denomina ***n* – ágono**.

Número de lados	Nombre del polígono
3	Triángulo
4	Cuadrilátero
5	Pentágono
6	Hexágono
7	Heptágono

Tabla 5.16

Diagonales

Una **diagonal** de un polígono es un segmento que tiene como extremos dos vértices no consecutivos del polígono.

Ejemplo

Determinemos la cantidad de diagonales que tiene un pentágono.

Solución

Para identificar la cantidad de diagonales que tiene un pentágono usamos el mismo color para las diagonales de un mismo vértice, teniendo cuidado de no contar dos veces la misma diagonal. (*Ver* figura 5.61).

Si contamos las diagonales que han quedado dibujadas en el pentágono de la figura 5.61, tenemos: desde el vértice A, dos diagonales; desde B, dos diagonales y desde C una diagonal, para un total de cinco diagonales.

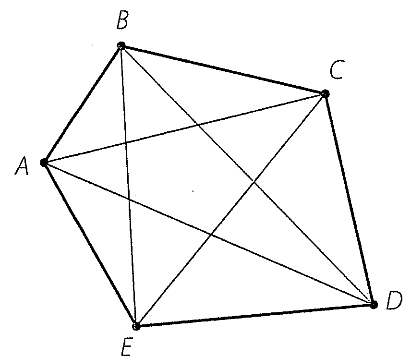


Figura 5.61

> Un **polígono** es **regular** si sus lados son congruentes y sus ángulos interiores son congruentes entre sí.

Infiere y resuelve

El número de diagonales que tiene un pentágono lo podemos escribir así:

$5 = 2 + 3$. Observa la regularidad en el número de diagonales de otros polígonos y descubre una regularidad.

Un **hexágono** tiene 9 diagonales. $9 = 2 + 3 + 4$

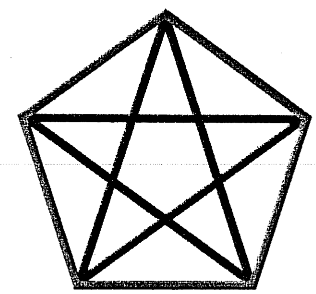
Un **heptágono** tiene 14 diagonales. $14 = 2 + 3 + 4 + 5$

Un **octágono** tiene 20 diagonales. $20 = 2 + 3 + 4 + 5 + 6$

Un polígono de n lados tiene $2 + 3 + 4 + 5 + ... + (\_\_\_\_\_)$ diagonales.

Dato histórico

Pitágoras, quien fue un filósofo y matemático griego, fundó en Cretona (Italia) una escuela que no tenía carácter filosófico sino religioso y que se dedicaba a enseñar a sus discípulos a vivir en comunidad y a resolver sus problemas empleando la matemática. El símbolo que identificaba a esta escuela y a sus participantes era un pentágono estrellado, llamado **pentalfa**.



Desarrolla pensamiento crítico

Ejercitar procedimientos

Interpreta

1. Selecciona los polígonos presentes en la figura 5.62 y determina si son o no convexos.

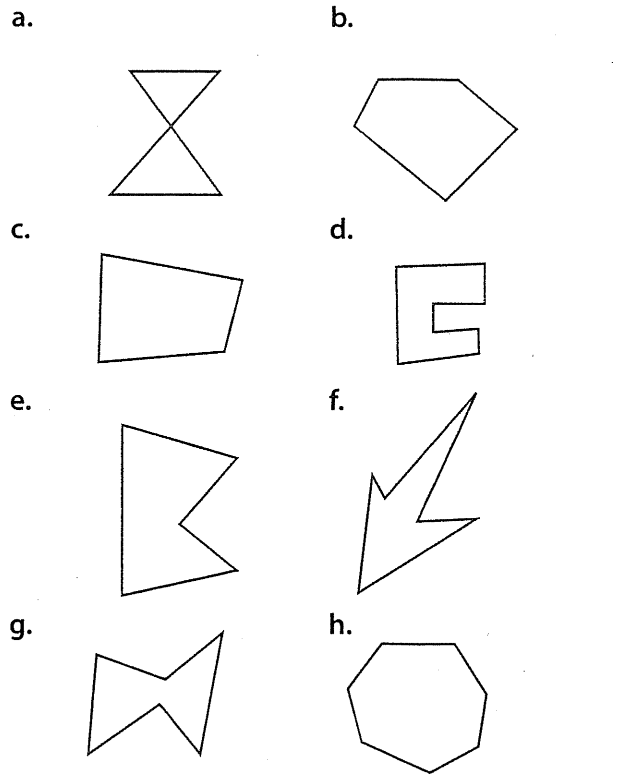


Figura 5.62

2. Realiza el procedimiento que se describe para construir un polígono regular:

   - Con el compás construye una circunferencia.
   - Divide 360° entre 6 para encontrar la medida de cada ángulo del polígono.
   - Ubica sobre la circunferencia, con ayuda del transportador, un punto cada 60° comenzando desde cero.
   - Une los puntos con segmentos de manera consecutiva.

   a. ¿Cuántos vértices y cuántos lados tiene el polígono que construiste?

   b. Encuentra la medida de los lados y de los ángulos interiores.

   c. Da el nombre del polígono construido.

3. Utiliza un procedimiento similar al dado en el punto (*2*) para construir los siguientes polígonos.

   a. Pentágono regular.

   b. Heptágono regular.

   c. Octágono regular.

   d. Eneágono regular.

4. Determina la cantidad de diagonales que tiene cada uno de los polígonos regulares construidos en el punto (*3*).

Pensar y razonar

Infiere

5. En cada polígono convexo mostrado en la figura 5.63, traza las diagonales desde uno solo de sus vértices para obtener varios triángulos y con los resultados completa la tabla 5.17.

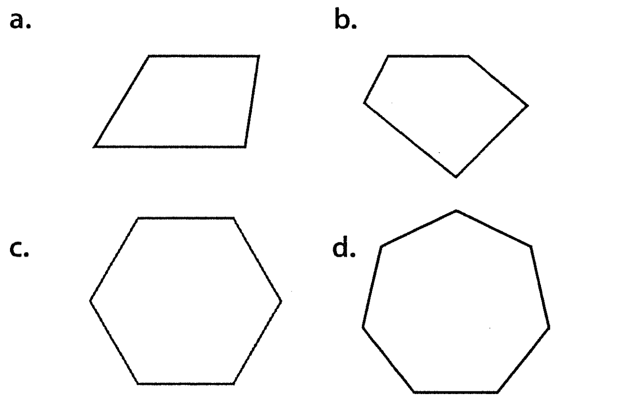


Figura 5.63

Número de lados	Número de triángulos	Número de triángulos × 180
4		
5		
6		
7		
n		

Tabla 5.17

Completa la siguiente afirmación:

Si un polígono convexo tiene n lados, entonces la suma de las medidas de sus ángulos interiores es igual a: ____________________

Comunicar y representar

Explica

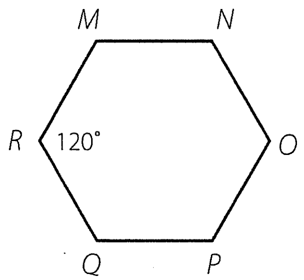
6. Determina si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F). Justifica tu respuesta.
   - **a.** Los ángulos interiores de un pentágono regular son agudos.
   - **b.** Un decágono tiene 12 diagonales.
   - **c.** En todo hexágono la suma de sus ángulos interiores es 720°.
   - **d.** En un polígono regular los ángulos interiores son congruentes.
   - **e.** Si los ángulos interiores de un polígono regular son agudos, el polígono es un triángulo.
   - **f.** No existe ningún polígono convexo en el que sus ángulos interiores sean rectos.

Plantear y resolver problemas

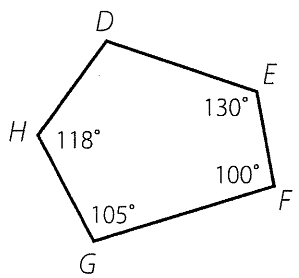
Analiza

7. Halla la medida del ángulo interior que falta en cada polígono de la figura 5.64.

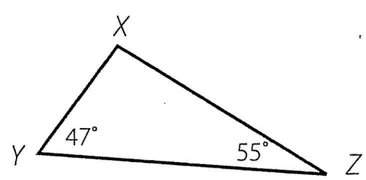
a.



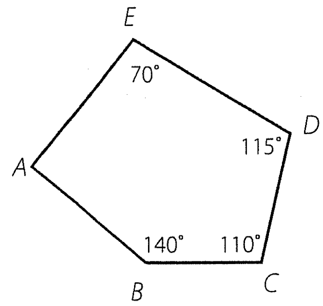
b.



c.



d.



e.

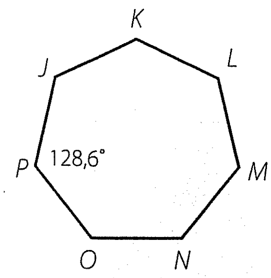


Figura 5.64

8. Determina si existe un polígono convexo para el cual la suma de las medidas de sus ángulos interiores es 2140°.
9. Determina si existe un polígono convexo para el que la suma de las medidas de sus ángulos interiores sea 1200°.
10. Encuentra el polígono regular convexo para el que la medida de cada ángulo interior es:

    a. 120° **b.** 144° **c.** 150°
11. Encuentra el polígono en el que la cantidad de diagonales es el doble de la cantidad de lados.
12. ¿Cuál es el polígono que tiene 12 diagonales más que lados?

Evalúa

1. Dibuja los siguientes polígonos.
   - **a.** Cuadrilátero no convexo.
   - **b.** Pentágono no regular y convexo.
   - **c.** Pentágono no regular y no convexo.
   - **d.** Cuadrilátero regular.
2. Si los ángulos de un polígono regular no son obtusos, ¿es el polígono un cuadrado?

Desempeño

- Identifica y clasifica diferentes tipos de polígonos.

Practica más, pág. 326.

Tema 46

Círculo y circunferencia

Ideas previas

1. Imagina que estás hablando por teléfono con un amigo y necesitas darle una definición de segmento. ¿Qué le dirías?
2. Dibuja dos puntos Q y R que se encuentren a igual distancia de un punto P.
3. Describe el procedimiento para medir un ángulo.

Figura 5.65

Interpreta

En la figura 5.65 se observa una cabra amarrada con un lazo en el que uno de sus extremos es atado a una estaca enterrada en el suelo. La cabra puede pastar en el terreno determinado por una **circunferencia**.

Una **circunferencia** es el conjunto de puntos coplanares que se encuentran a la misma distancia de un punto fijo C llamado centro. El conjunto de puntos que se encuentran sobre la circunferencia o en el interior de ésta se llama **círculo**.

Ejemplo

Determinemos cuáles de las imágenes de la figura 5.66 son circunferencias.

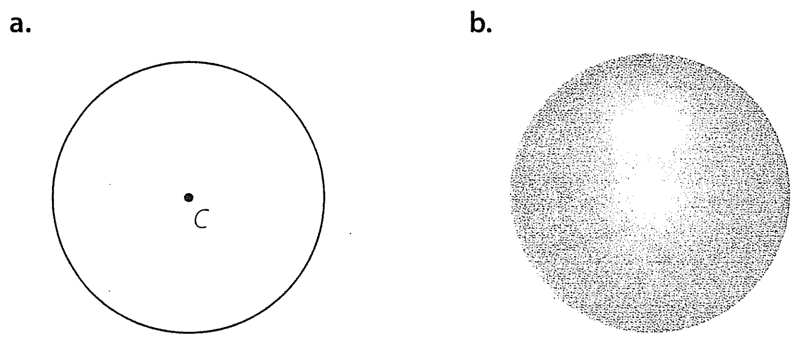


Figura 5.66

Solución

La imagen **a.** es una circunferencia con centro en C.

La imagen **b.** no es una circunferencia ya que contiene puntos que no están en el mismo plano, esta figura recibe el nombre de esfera.

Líneas y ángulos notables

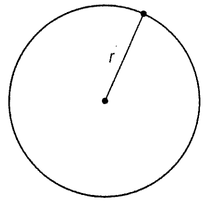
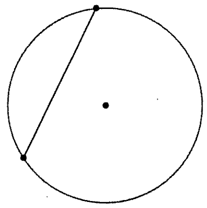
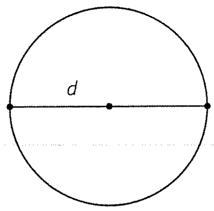
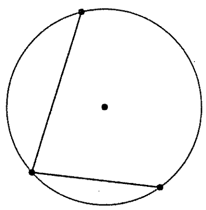
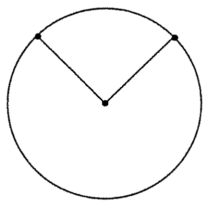
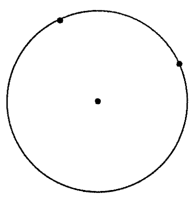
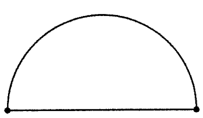
Un **radio** es un segmento que tiene como extremos el centro y cualquier punto sobre la circunferencia; el radio se simboliza con la letra *r*.	
Una **cuerda** es un segmento cuyos extremos son dos puntos diferentes de la circunferencia.	
Un **diámetro** es una cuerda que contiene al centro de la circunferencia. Se simboliza con la letra *d*.	
Un **ángulo inscrito** es un ángulo que tiene como vértice un punto de la circunferencia y sus lados contienen dos cuerdas de la circunferencia.	
Un **ángulo central** es un ángulo cuyo vértice se encuentra en el centro de la circunferencia.	
Un **arco** es la porción de la circunferencia limitada por los puntos en los que un ángulo central la corta.	
Una **semicircunferencia** es el conjunto de puntos determinado por la unión de los extremos del diámetro con los puntos de la circunferencia que se encuentran entre ellos.	

Tabla 5.18

Interpreta y completa

En una circunferencia, la medida de su diámetro es el doble de la medida de su ____________________.

Problema del día

En la figura 5.67 se muestra la forma en que está distribuida la basura de una ciudad.

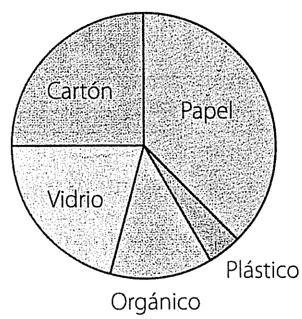


Figura 5.67

a. Encuentra la medida de cada ángulo central.

b. ¿Cuál es el valor de la suma de las medidas de los ángulos centrales?

Desarrolla pensamiento crítico

Ejercitar procedimientos

Interpreta

1. Relaciona cada definición con el concepto que le corresponde.

   a. Segmento de cuerda cuyos extremos son dos puntos de la circunferencia y pasa por el centro.

   b. Conjunto de puntos que se encuentran a igual o menor distancia del punto llamado centro.

   c. Segmento de recta cuyos extremos son dos puntos de la circunferencia.

   d. Conjunto de puntos que se encuentran a la misma distancia de uno llamado centro.

   e. Segmento de recta cuyos extremos son el centro y cualquier punto de la circunferencia.

   _______ Círculo　　　_______ Radio

   _______ Circunferencia　　　_______ Cuerda

   _______ Diámetro

2. En la figura 5.68.

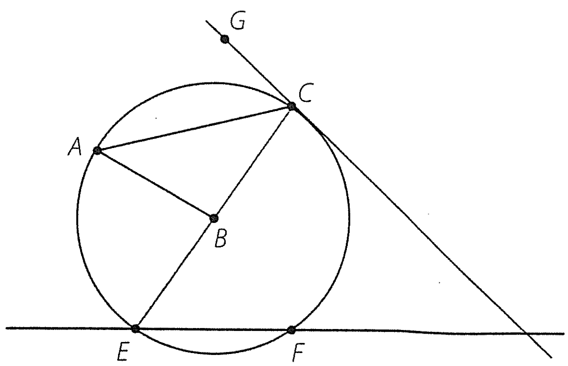


Figura 5.68

   a. Marca con color verde un ángulo central.

   b. Señala con color rojo dos cuerdas.

   c. Indica con color azul el arco *CF*.

   d. Encuentra un radio de la circunferencia.

   e. Encuentra un diámetro de la circunferencia.

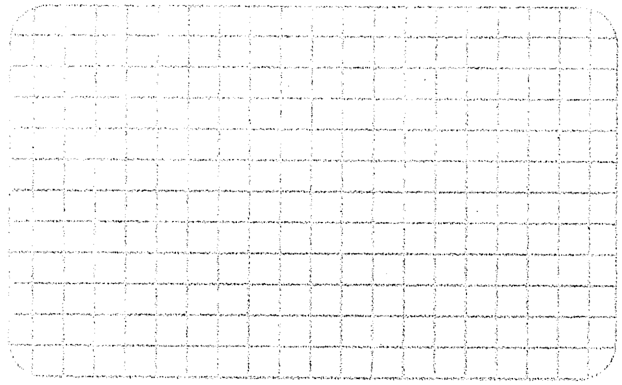
   f. Encuentra un ángulo inscrito.

Pensar y razonar

Infiere

3. Realiza la construcción que se describe.

   - Dibuja una circunferencia de 6 cm de radio.
   - Traza el diámetro *AB*.
   - Construye con regla y transportador la cuerda *BC* tal que el ángulo $\angle ABC$ mida 30°.
   - Dibuja el $\triangle ABC$.



   Según la anterior construcción, ¿qué nombre recibe el segmento $\overline{AC}$?

4. En la figura 5.69 se muestran tres cuerdas de una circunferencia.

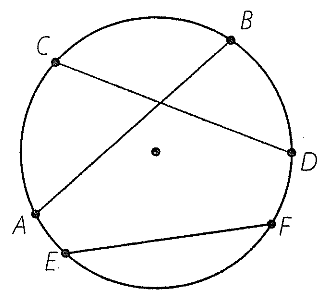


Figura 5.69

   a. Construye la mediatriz de cada una de las cuerdas.

   b. Toma la medida de la cuerda y de los dos segmentos en que la divide la mediatriz.

   c. Completa la siguiente afirmación:

   La mediatriz de una _______________ *contiene el* _______________ *de la circunferencia.*

Comunicar y representar

Explica

5. Determina si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F). Justifica tu respuesta.
   - **a.** En la circunferencia, la longitud de una cuerda es mayor que la longitud de un diámetro.
   - **b.** La medida de un arco es igual a la medida de la cuerda que lo determina.
   - **c.** Un radio es también una cuerda de la circunferencia.
   - **d.** El círculo es el contorno de la circunferencia.

Plantear y resolver problemas

Analiza

6. Si el diámetro de una circunferencia es 24 cm, ¿cuál es la medida del radio de dicha circunferencia?
7. Encuentra el centro de la circunferencia que se muestra en la figura 5.70.

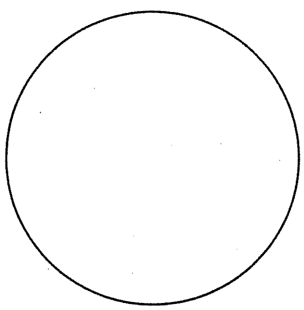


Figura 5.70

8. En una excavación arqueológica se ha encontrado un trozo de un plato como se muestra en la figura 5.71.

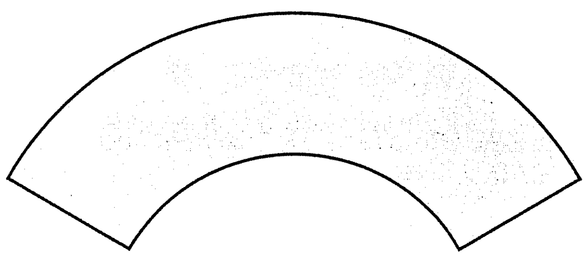


Figura 5.71

¿Cómo reconstruirías el plato?

9. Realiza la construcción que se describe.
   - Traza una circunferencia de cualquier radio.
   - Ubica 5 puntos sobre ella igualmente espaciados (cada 72°).
   - Llama a uno de estos puntos *A*.
   - A partir de *A* une con segmentos cada dos puntos en el sentido del avance de las manecillas del reloj.

La figura que construiste se llama polígono de estrella {5, 2} ya que tiene cinco puntos, los cuales se unen cada dos.

   - **a.** ¿Qué relación existe entre cada una de las cuerdas que forman el polígono de estrella?
   - **b.** ¿Cuál es la medida de cada uno de los arcos determinados por los cinco puntos?
   - **c.** Construye el polígono de estrella {8, 3}.

Evalúa

1. Si la medida del radio de una circunferencia es 27 cm, ¿qué puedes afirmar de las medidas de cualquier cuerda de la circunferencia?
2. ¿Es el centro de una circunferencia parte de ella? Explica tu respuesta
3. Corrige la siguiente afirmación para que sea verdadera: "Los puntos de intersección de un ángulo central con la circunferencia determinan un arco".

Desempeño

- Caracteriza líneas y ángulos especiales relacionados con la circunferencia.

Practica más, pág. 326.

Tema 47

Traslación

Ideas previas

1. ¿Cuál es la diferencia entre los conceptos dirección y sentido?
2. ¿Qué tipos de figuras geométricas planas conoces?
3. ¿Qué entiendes por la palabra deslizamiento?

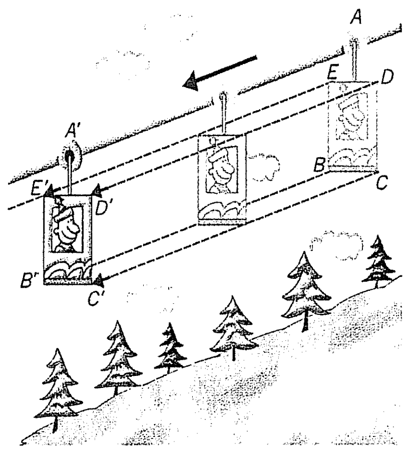


Figura 5.72

Analiza

Para subir a la iglesia que se encuentra en la parte superior del cerro de Monserrate en Bogotá, se utilizan dos medios de transporte: el teleférico y el funicular. El teleférico se usa para trasladar a las personas de un punto a otro del camino.

Estudiemos el movimiento del teleférico de la figura 5.72.

El punto A se mueve hacia otro punto A', determinando la línea recta $\overleftrightarrow{AA'}$.

De la misma manera, si seguimos la trayectoria de los puntos B, E, D y C, encontramos que éstos se mueven hacia los puntos B', E', D', C', respectivamente, determinando las rectas $\overleftrightarrow{BB'}$, $\overleftrightarrow{EE'}$, $\overleftrightarrow{DD'}$ y $\overleftrightarrow{CC'}$.

Decimos que $B'E'D'C'$ es la imagen mediante traslación de la figura $BEDC$.

> El movimiento que realiza un objeto al desplazarse en una cierta dirección se llama **traslación**. En una traslación todos los puntos de la figura se mueven una misma longitud en la misma dirección y sentido. Cada punto de la figura describe una línea recta.

Características de una traslación

Los tres elementos que caracterizan una traslación se pueden representar mediante un segmento provisto de flecha, llamado vector.

Un **vector** determina las características de la traslación, así:

- La **dirección**, con la inclinación de la recta a la cual pertenece.
- El **sentido**, con la punta de la flecha.
- La **longitud** del segmento.

El vector de la figura 5.73 se denota $\vec{a}$, y se lee vector a.

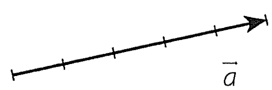


Figura 5.73

¿Qué significa?

Vector: es un segmento de recta dirigido provisto de dirección, longitud y sentido.

Traslación de un polígono

Para trasladar un polígono en el plano el procedimiento que seguimos es el siguiente:

1. Por cada vértice del polígono trazamos rectas paralelas al vector dado.
2. Sobre las paralelas construidas marcamos los vértices del polígono trasladado, teniendo en cuenta el sentido y la magnitud del vector.
3. Trazamos los segmentos que unen los vértices del nuevo polígono.

Ejemplo

Traslademos el polígono de la figura 5.74 respecto al $\vec{u}$ dado.

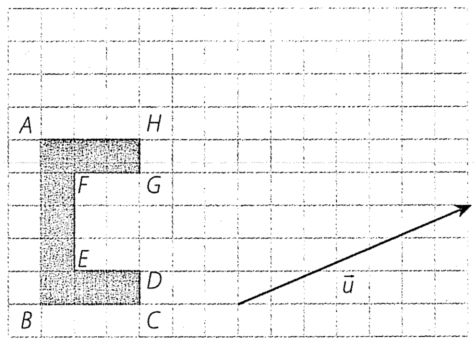


Figura 5.74

Solución

1. Trazamos paralelas al $\vec{u}$ por cada uno de los vértices del polígono.
2. Sobre las rectas construidas trasladamos con el compás la medida del $\vec{u}$ y señalamos los puntos *A', B', C', D', E', F', G',* y *H'*.
3. Unimos los puntos para obtener el polígono *A'B'C'D'E'F'G'H'* que es la imagen del polígono *ABCDEFGH* mediante traslación.

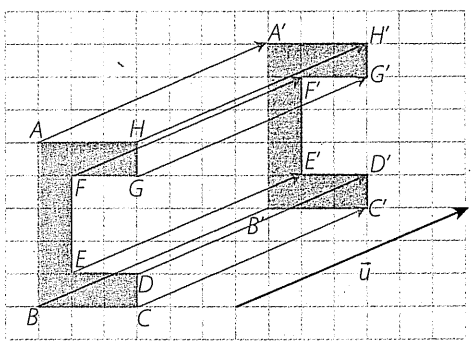


Figura 5.75

Analiza y responde

¿Qué características se mantienen en un polígono después de ser trasladado?

Desarrolla pensamiento crítico

Ejercitar procedimientos

Interpreta

1. En cada caso determina si hay una traslación que transforme la figura *A* en la figura *B*.

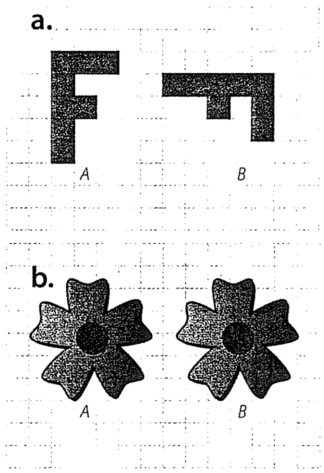


Figura 5.76

2. Determina la amplitud, la dirección y el sentido de cada vector de la figura 5.77.

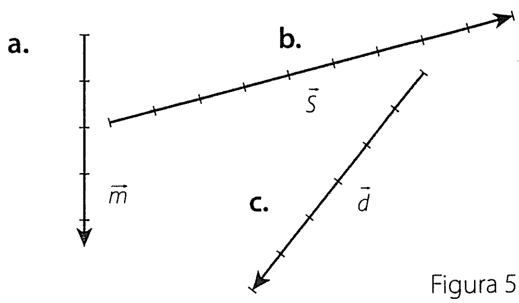


Figura 5.77

3. Realiza la traslación de cada figura de acuerdo con el vector dado:

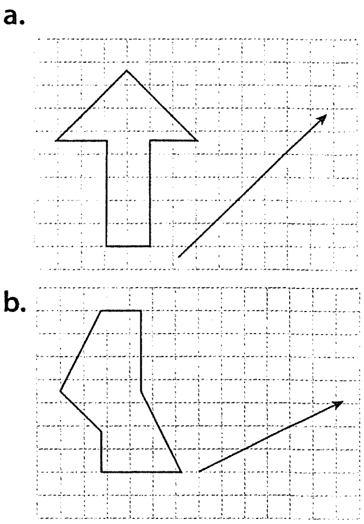


Figura 5.78

4. Utiliza la cuadrícula para encontrar el vector de traslación aplicado en cada caso.

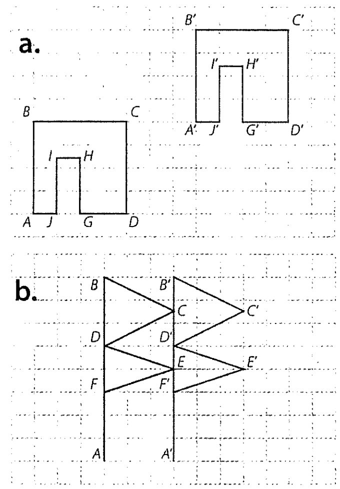


Figura 5.79

Pensar y razonar

Infiere

5. En la figura 5.80 se muestran los puntos *A* y *B* y el vector de traslación $\vec{v}$.

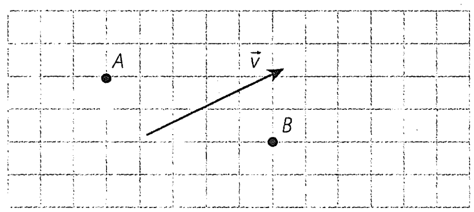


Figura 5.80

   a. Encuentra la imagen *A'* que resulta de aplicar la traslación al punto *A*.

   b. Encuentra la imagen *B'* que resulta de aplicar la traslación al punto *B*.

   c. Completa los espacios en blanco para enunciar la siguiente propiedad de las traslaciones:

   Si A' es la imagen de A y B' es la imagen de B respecto a una traslación T, entonces $\overline{AB}$ __________ $\overline{A'B'}$.

6. Si un polígono se traslada respecto al $\vec{v}$ y su imagen se traslada respecto al $\vec{w}$, siendo $\vec{w}$ el vector que tiene la misma dirección, la misma magnitud y sentido contrario al $\vec{v}$, ¿qué resultado se obtiene?

Comunicar y representar

Explica

7. Determina si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F). Justifica tu respuesta.

   a. Si una figura se transforma mediante la aplicación de una traslación, la imagen conserva su forma pero cambia su tamaño.

   b. Un punto sólo puede ser trasladado en dirección horizontal o vertical.

   c. Las rectas determinadas por dos puntos diferentes y sus imágenes luego de aplicarles una traslación *T*, son perpendiculares entre sí.

   d. Si una figura se traslada hacia arriba cambia su tamaño.

Plantear y resolver problemas

Analiza

8. Señala con el mismo color las figuras de cada franja que se corresponden mediante una traslación.

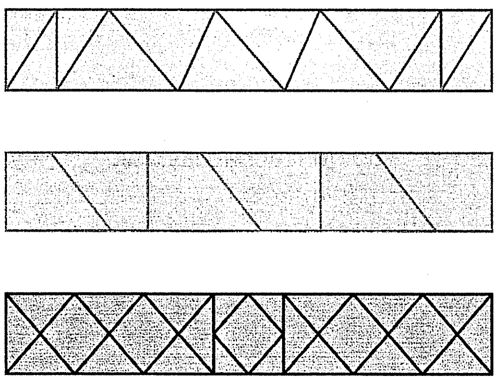


Figura 5.81

9. En la figura 5.82 se muestran los ángulos determinados por las rectas paralelas *x* y *v* que son cortadas por la transversal *t*.

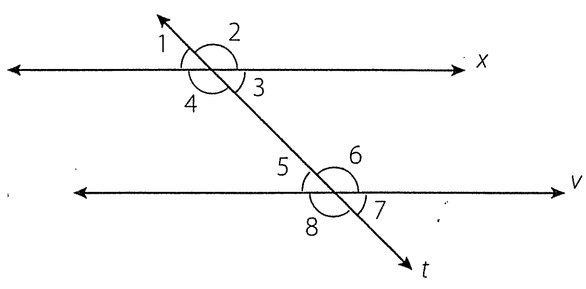


Figura 5.82

Describe cómo se puede verificar que los siguientes pares de ángulos son congruentes: 1 y 5; 2 y 6; 3 y 7; 4 y 8.

10. En la figura 5.83 se muestra un pentágono regular.

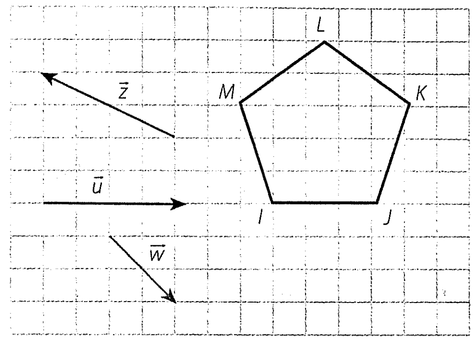


Figura 5.83

   a. Traslada el pentágono respecto al $\vec{z}$.

   b. Encuentra la imagen del pentágono *I'J'K'L'M'* mediante la traslación respecto al $\vec{u}$.

   c. Encuentra la imagen del pentágono *I''J''K''L''M''* mediante la traslación respecto al $\vec{w}$.

Evalúa

1. Una figura se traslada según un vector dado y luego se traslada usando el vector inicial pero en sentido contrario. ¿Qué resultado se obtiene?

2. Corrige las siguientes afirmaciones para que sean verdaderas:

   a. Las trayectorias seguidas por dos puntos de una figura mediante una traslación, son rectas perpendiculares.

   b. La traslación de todo rombo es un cuadrado.

   c. La traslación de un polígono regular es un polígono irregular.

Desempeño

- Reconoce las características de una traslación.

Practica más, pág. 327.

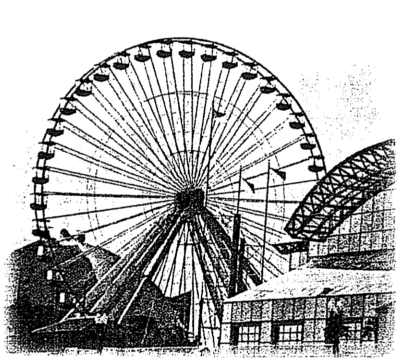
Tema 48

Rotación

Ideas previas

Realiza las siguientes construcciones:

1. Dibuja un segmento y cópialo empleando el compás.
2. Dibuja una circunferencia y en ella ubica un ángulo de 45°.



Interpreta

En los parques de diversiones existen varios juegos en los que se aplican diferentes tipos de movimiento. Por ejemplo, en la rueda de Chicago, las canastas están sujetas a una rueda que va girando sobre su centro, es decir, las canastas se van moviendo alrededor de una circunferencia.

El movimiento que realiza una figura alrededor de un punto fijo se denomina rotación.

El punto fijo se llama **centro de rotación**.

El valor del ángulo que ha girado la figura se llama **amplitud de la rotación**.

La rotación en sentido contrario al avance de las manecillas del reloj se simboliza con un signo + y en el sentido del avance de las manecillas del reloj se simboliza con un signo –.

> Los **elementos** que caracterizan una rotación son:
>
> - La **amplitud** del arco que recorre la figura.
> - El **centro** de rotación.
> - El **sentido** de la rotación.
>
> Para denotar una rotación de 45° en el sentido contrario al avance de las manecillas del reloj, con centro en *I* escribimos: R (45°, *I*, +)

Ejemplo

En la figura 5.84, *A'* es la imagen de *A* luego de transformarla con la rotación R definida como R (50°, *P*, +).

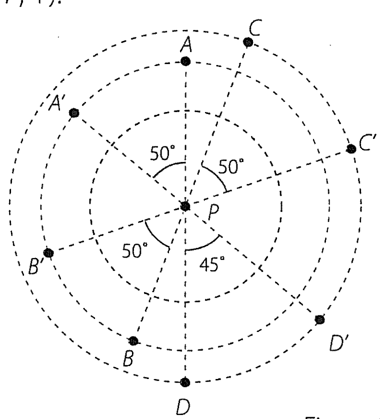


Figura 5.84

Determinemos si B' y D' son imágenes de B y D respectivamente bajo la misma rotación R.

Solución

B' no es imagen de B bajo la rotación R ya que el sentido de la rotación es contrario al de R.

D' no es imagen de D debido a que la medida del ángulo es diferente.

Interpreta y responde

¿Por qué C' no es imagen de C mediante la rotación definida?

Rotación de un polígono

Para rotar un polígono en el plano el procedimiento que utilizamos es el siguiente:

1. Trazamos segmentos de cada vértice al centro de rotación (P).
2. Situamos el transportador con centro en el punto (P) y lado inicial el segmento trazado y se mide el ángulo que indica la rotación.
3. Con el compás trazamos el arco con centro en P que tenga la medida dada por la rotación.
4. Repetimos el proceso en cada vértice.
5. Trazamos el polígono imagen.

Ejemplo

Dado el polígono $ABCD$ de la figura 5.85, apliquemos sobre él la rotación R (60°, P, +).

Solución

1. Trazamos los segmentos AP, BP, CP y DP.
2. Medimos un ángulo de 60° con vértice en P y lado inicial el segmento AP.
3. Trazamos con el compás el arco con centro en P que pasa por A y que corta el lado final del ángulo trazado. Marcamos el punto como A'.
4. Repetimos el proceso anterior para los otros vértices del polígono $ABCD$.
5. Trazamos el polígono $A'B'C'D'$.

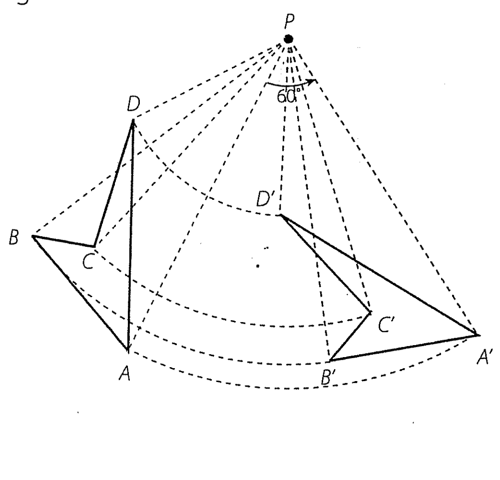


Figura 5.85

Dato histórico

Vitrubio, quien fue un arquitecto, ingeniero y escritor romano que vivió en el siglo I a. C, escribió algunos tratados de ingeniería en los que aplicó los principios de la rotación de figuras. Basado en dichos principios, diseñó mecanismos como los molinos, los cuales se basaban en unas circunferencias con dientes iguales que rotaban alrededor de su centro impulsadas por el viento o por corrientes de agua.

Desarrolla pensamiento crítico

Ejercitar procedimientos

Interpreta

1. Compara el pentágono *ABCDE* con los demás pentágonos de la figura 5.86 y completa la tabla 5.19 utilizando las palabras *igual* o *diferente*.

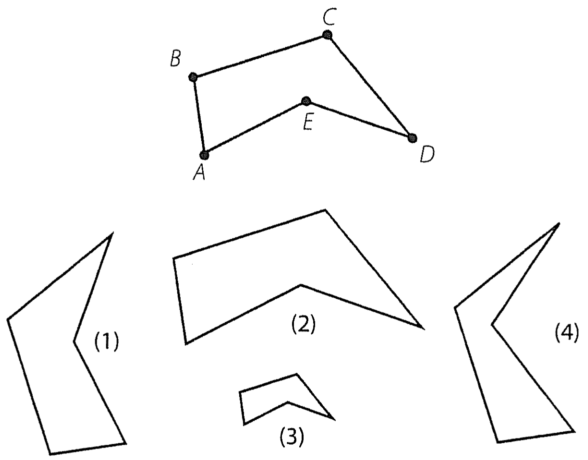


Figura 5.86

a.

Pentágono	Tamaño	Forma	Posición
(1)			
(2)			
(3)			
(4)			

Tabla 5.19

b. Utiliza la información de la tabla 5.19 para determinar cuál de los pentágonos es imagen del polígono *ABCDE* mediante una rotación.

2. Completa los espacios en blanco teniendo en cuenta la figura 5.87.

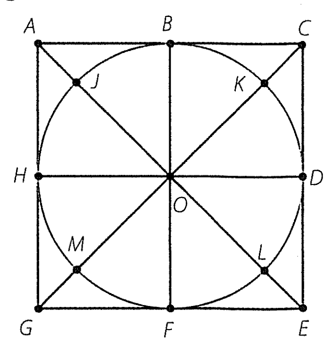


Figura 5.87

a. La imagen del punto *A* bajo una rotación de 45° en sentido positivo con centro en *O* es el punto ________________.

b. La imagen del punto *J* bajo una rotación de 135° en sentido negativo con centro en *O* es el punto ________________.

c. El punto *D* es la imagen del punto *F* mediante una rotación de ________________ en sentido positivo con centro en el punto *O*.

d. La imagen del $\triangle EOD$ bajo una rotación de 135° en sentido positivo es el ________________.

e. La imagen del segmento *OM* bajo una rotación de 45° en sentido negativo, con centro en *O* es ________________.

3. Teniendo en cuenta la figura 5.88, completa la tabla 5.20. El centro de rotación es *P*.

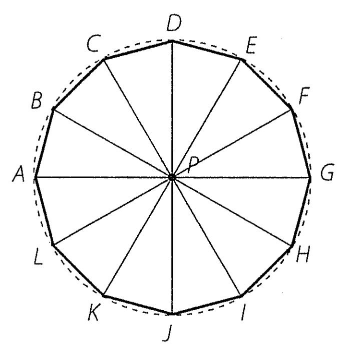


Figura 5.88

Punto inicial	Punto final	Rotación
C	*F*	(90°, *P*, –)
L	*A*	
G	*L*	
E	*D*	
B	*F*	

Tabla 5.20

4. Transforma los polígonos de la figura 5.89 mediante las siguientes rotaciones:

$$R_1\ (60°, M, +),\ R_2\ (110°, M, -),\ R_3\ (30°, M, +)$$

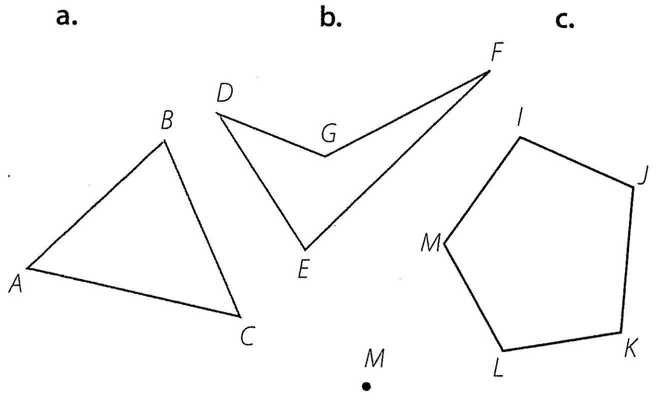


Figura 5.89

Pensar y razonar

Infiere

5. Si a un polígono se le aplica la rotación R (120°, *P*, +) y a la imagen obtenida se le aplica la rotación Q (45°, *P*, –), ¿existe una sola rotación del polígono inicial que permita encontrar la imagen final del polígono?

   Aplica varias rotaciones consecutivas a diferentes polígonos para explicar tu respuesta.

6. A tres estudiantes de grado sexto se les pidió encontrar la imagen del triángulo *ABC* mediante la rotación R (80°, *A*, +).

   Las respuestas dadas por los estudiantes se muestran en la figura 5.90.

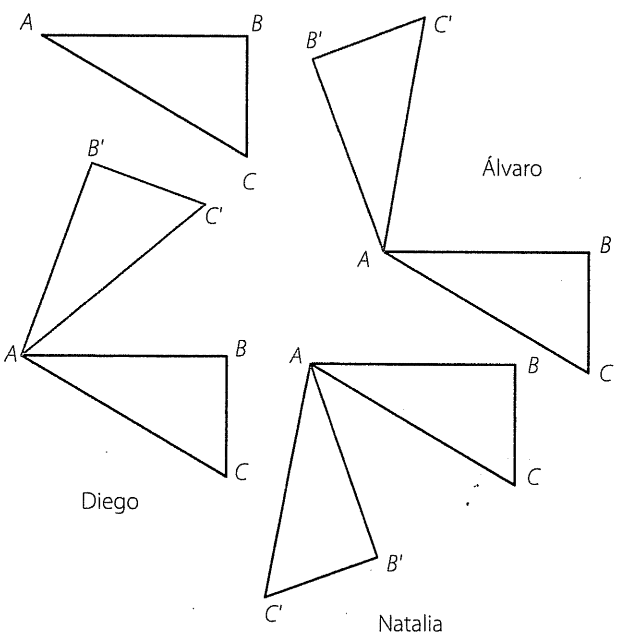


Figura 5.90

¿Cuál de los estudiantes resolvió correctamente el ejercicio? ¿Por qué?

Comunicar y representar

Explica

7. Determina si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F). Justifica tu respuesta.

   a. Si una figura es transformada bajo una rotación, su imagen cambia de forma.

   b. El centro de rotación, un punto y su imagen determinan un arco de una circunferencia.

   c. El centro de una rotación siempre debe ser un vértice de la figura que se va a transformar.

Plantear y resolver problemas

Analiza

8. Las banderas de la figura 5.91 se rotaron dos veces, de tal forma que la imagen de *P* es *P'* y la imagen de *P'* es *P''*.

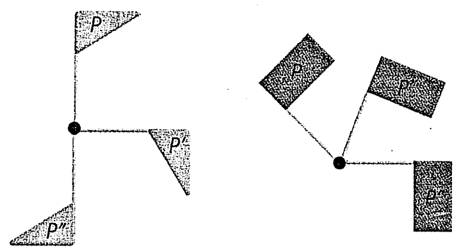


Figura 5.91

   a. En cada caso determina el centro de la rotación, la amplitud y el sentido que permite obtener *P'* a partir de *P*.

   b. En cada caso determina el centro de la rotación, la amplitud y el sentido que permite obtener *P''* a partir de *P'*.

Evalúa

1. Explica por qué un grado es equivalente a $\frac{1}{360}$ parte de una vuelta. Puedes ayudarte de la rotación de un segmento.

2. ¿Qué propiedades de un polígono permanecen iguales después de una rotación?

Desempeño

- Reconoce las características de una rotación.

Practica más, pág. 327.

Tema 49

Reflexión

Ideas previas

1. Traza dos segmentos perpendiculares entre sí.
2. ¿Qué significa que dos puntos *A* y *B* se encuentren a la misma distancia de un punto *P*?
3. ¿Qué tienen en común la imagen de un objeto en un pozo de agua y la imagen de un objeto en un espejo?

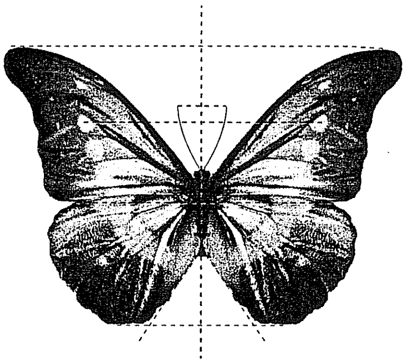


Figura 5.92

Interpreta

En la naturaleza encontramos algunos seres vivos que tienen una característica especial: la mitad de su cuerpo es el reflejo de la otra mitad. En la figura 5.92, por ejemplo, vemos el dibujo de una mariposa en el que se ha trazado una recta por su centro.

Al unir cada una de sus antenas mediante un segmento, podemos extraer dos conclusiones: el segmento es perpendicular a la recta trazada y la distancia de la recta a cada antena es igual.

¿Pasará lo mismo con las otras partes de la mariposa que están en lados opuestos de la recta?

Una **reflexión** de una figura respecto a una recta *n* es el movimiento en el que a cada punto *A* de la figura se le asigna otro punto *A'* del mismo plano, de tal forma que *A* y *A'* son equidistantes de la recta *n* a lados **opuestos** y el segmento *AA'* es perpendicular a la recta *n*.

La recta *n* recibe el nombre de **eje de reflexión**.

Para definir una reflexión indicamos cuál es el eje de reflexión mediante una letra mayúscula seguida por el nombre del eje de reflexión entre paréntesis. S(*n*).

Interpreta y contesta

Verifica en la figura 5.93 que $\overline{FF'} \perp \overleftrightarrow{LN}$ y que m $\overline{FL}$ = m $\overline{LF'}$

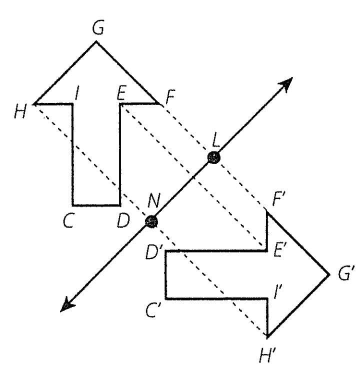


Figura 5.93

¿Qué significa?

Dos lados son **opuestos** respecto a una recta *n*, si al unir los puntos *P* y *Q* en diferente lado mediante un segmento, éste corta la recta n.

Pensamiento espacial

Ejemplo

Con base en la figura 5.94 y dada la reflexión $S(n)$ determinemos si los puntos A', B', C' y D' son imágenes de reflexión de los puntos A, B, C, D respectivamente.

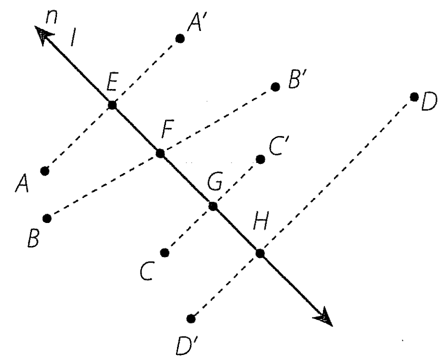


Figura 5.94

Solución

A' es la imagen de A bajo la reflexión $S(n)$ ya que $\overline{AA'} \perp \overleftrightarrow{n}$ y m $\overline{AE}$ = m $\overline{CG}$.

B' no es la imagen de B bajo la reflexión $S(n)$ debido a que $\overline{BB'}$ no es perpendicular a $\overleftrightarrow{n}$.

C' es la imagen de C bajo la reflexión $S(n)$ ya que $\overline{CC'} \perp \overleftrightarrow{n}$ y m $\overline{CG'}$ = m $\overline{GC'}$.
D' no es la imagen de D bajo la reflexión $S(n)$ porque m $\overline{DH} \neq$ m $\overline{HD'}$.

Analiza y responde

¿El eje de reflexión de una figura puede contener puntos de la figura?

Reflexión de un polígono

Para reflejar un polígono en el plano respecto a una recta n, el procedimiento que seguimos es:

1. Por un vértice del polígono trazamos la perpendicular al eje de reflexión n.
2. Marcamos el punto de intersección del eje de reflexión con la perpendicular hallada.
3. Con el compás tomamos la distancia del vértice del polígono al punto de intersección y la copiamos en el lado opuesto de la recta n.
4. Marcamos el punto imagen.
5. Repetimos el proceso para cada vértice.
6. Trazamos la imagen del polígono dado.

Ejemplo

Hallemos la reflexión $S(n)$ del cuadrilátero $ABCD$ de la figura 5.95.

Solución

1. Construimos las rectas perpendiculares a n que pasan por A, B, C y D.
2. Marcamos el punto de intersección de cada perpendicular con la recta n.
3. Tomamos la distancia de A, B, C y D a la recta n y la copiamos al lado opuesto de la recta formando los puntos A', B', C', D'.
4. Trazamos la imagen del cuadrilátero $ABCD$ uniendo los puntos A', B', C', D'.

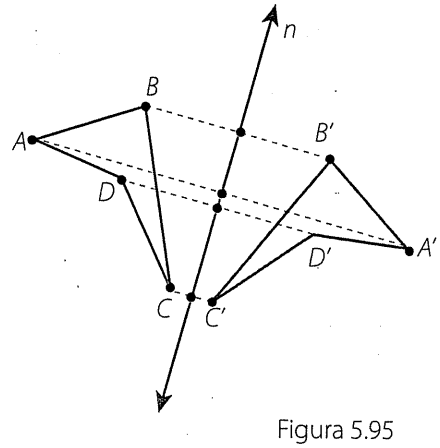


Figura 5.95

Ciencia y tecnología

Utiliza un software de geometría dinámica para realizar la siguiente construcción:

Con la herramienta *polígono*, construye un cuadrilátero no convexo.

Con la herramienta *recta que pasa por dos puntos*, traza una recta *m*.

Con la herramienta *refleja objeto en recta*, encuentra la imagen de reflejar el polígono respecto a la recta *m*.

Con la herramienta *desplaza*, mueve cualquier punto de la construcción.

¿Qué sucede cuando mueves un vértice del cuadrilátero inicial?

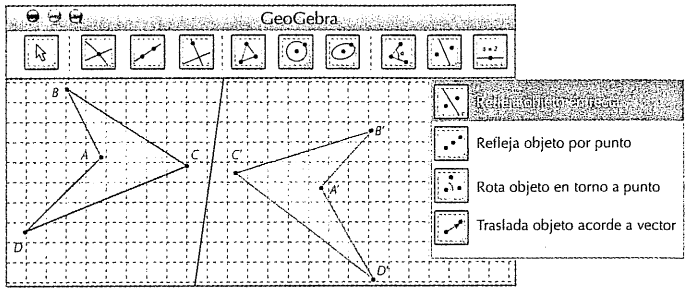


Figura 5.96

Desarrolla pensamiento crítico

Ejercitar procedimientos

Interpreta

1. **a.** Compara el hexágono *ABCDEF* con los demás hexágonos de la figura 5.97 y completa la tabla 5.21 utilizando las palabras *igual* o *diferente*.

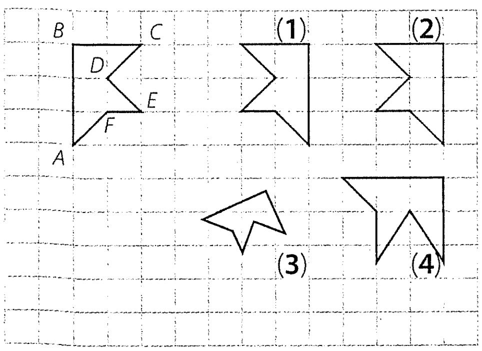


Figura 5.97

Hexágono	Tamaño	Forma	Posición
(1)			
(2)			
(3)			
(4)			

Tabla 5.21

b. Utiliza la información de la tabla 5.21 para determinar cuáles de los hexágonos representados son imagen del hexágono *ABCDEF* mediante una reflexión.

2. En cada caso traza el eje de reflexión.

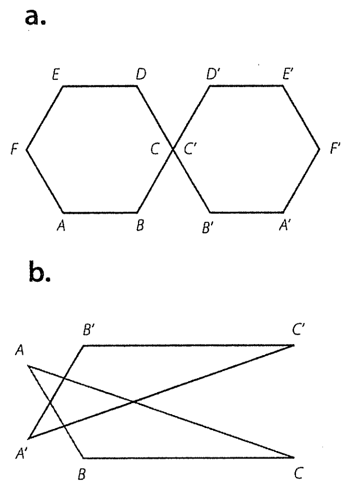


Figura 5.98

3. Halla la imagen de cada figura bajo la reflexión S(*m*).

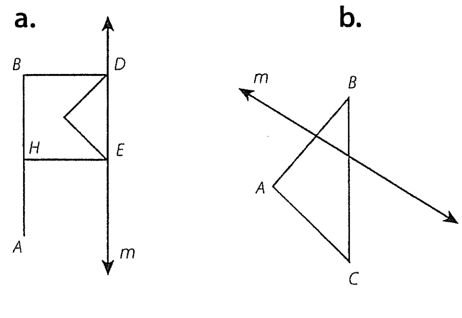


Figura 5.99

Comunicar y representar

Explica

4. Determina si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F). Justifica tu respuesta.
   a. Si *P'* es la imagen de *P* al ser reflejado bajo la recta *m*, entonces el segmento *PP'* es paralelo a la recta *m*.
   b. Si un trapecio se refleja con respecto a una recta vertical, entonces su imagen es un paralelogramo.
   c. Si se refleja una figura respecto a una recta vertical y la imagen obtenida se refleja respecto a una recta horizontal, entonces la imagen final se encuentra en la misma posición que la figura inicial.
   d. Si *B'* es la imagen de *B* al aplicarle una reflexión respecto a la recta *m*, entonces *m* es la mediatriz del segmento *BB'*.

Plantear y resolver problemas

Analiza

5. Para el cuadrado que se muestra en la figura 5.100, realiza la siguiente construcción:

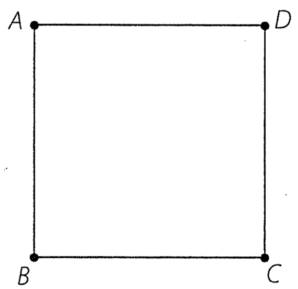


Figura 5.100

   a. Traza sus diagonales.
   b. Traza los segmentos que unen los puntos medios de dos lados opuestos.
   c. Halla la imagen del cuadrado bajo la reflexión que tiene como eje cada una de las diagonales del cuadrado.
   d. Halla la imagen del cuadrado bajo la reflexión que tiene como eje cada una de los segmentos trazados en el literal (*b*).

6. Repite el proceso del ejercicio anterior para los siguientes polígonos:
   a. Hexágono regular.
   b. Octágono regular.
   c. Pentágono irregular convexo.
   d. Triángulo rectángulo.

Pensar y razonar

Infiere

7. Con ayuda de un software de geometría dinámica, realiza la siguiente construcción:
   a. Con la herramienta *polígono*, construye un isodecágono regular.
   b. Con la herramienta *recta que pasa por dos puntos*, traza una diagonal del polígono.
   c. Con la herramienta *refleja objeto en recta*, encuentra la imagen de reflejar el polígono respecto a su diagonal.
   d. Con la herramienta *desplaza*, mueve cualquier punto de la construcción.

   ¿Qué puedes deducir cuando mueves un vértice de la figura?

Evalúa

Selecciona la afirmación verdadera:

a. La imagen de una figura bajo una reflexión tiene el mismo tamaño, la misma forma y el mismo sentido de la original respecto al eje de reflexión.

b. Si a una figura se aplican dos reflexiones respecto a la misma recta, la imagen es la misma, aun si se aplican en diferente orden.

c. Cada punto de la figura y su imagen bajo una reflexión están a diferente distancia del eje de reflexión.

Desempeño

- Reconoce las características de una reflexión.

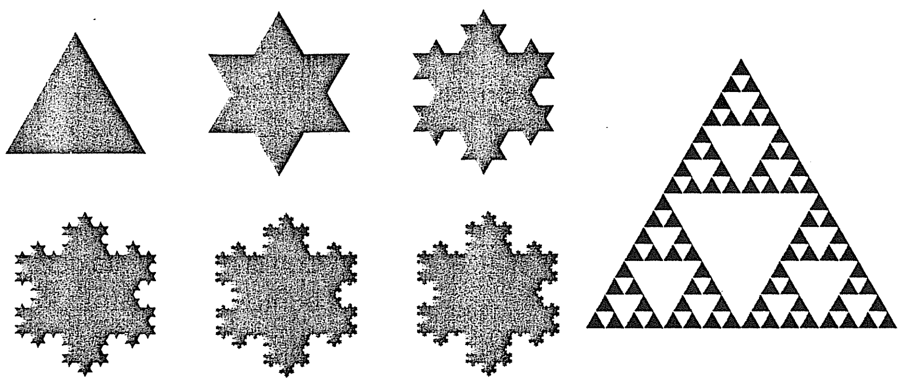
Practica más, pág. 327.

Regularidades

Algunas formas que se presentan en la naturaleza como las de los terrenos, las hojas de las plantas, las montañas, las nubes, algunos vegetales, etc. no son de fácil explicación utilizando la geometría euclidiana; por esta razón se hace necesario recurrir a la geometría fractal.

Un fractal es un objeto cuya estructura básica se repite a diferentes escalas.

Existen diversos tipos de fractales, llamados también "monstruos matemáticos", como el Conjunto de Cantor, el Triángulo de Sierpinski, la Curva de Koch, la Alfombra de Sierpinski, el Conjunto de Julia y muchos otros más.



El Conjunto de Cantor es uno de los fractales más sencillos de construir. Para ello se toma un segmento de cualquier longitud, que denominaremos la unidad, se divide en tres segmentos congruentes y se elimina el central. Luego en cada uno de los segmentos que queda se repite el proceso indefinidamente.

Analiza

A medida que se realiza la construcción del fractal llamado Conjunto de Cantor se van observando algunas regularidades, las cuales se pueden registrar en una tabla como la siguiente:

Paso	Cantidad de segmentos	Longitud de cada segmento	Longitud total de segmentos visibles	Longitud de segmentos eliminados
0	1	1	1	0

Tabla 5.22

La primera columna se refiere al paso en la construcción. El paso inicial será 0. En este paso inicial se toma un segmento que mide 1. En este paso no hay todavía segmentos eliminados.

En el primer paso, la cantidad de segmentos que resulta después de dividir el segmento inicial es 3, cada uno de los cuales tiene una longitud de $\frac{1}{3}$. Como sólo quedan dos segmentos visibles, la longitud total es $2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ y la longitud de los segmentos eliminados es $\frac{1}{3}$. Con esta información podemos seguir hasta completar la tabla 5.23.

Paso	Cantidad de segmentos	Longitud de cada segmento	Longitud total de segmentos visibles	Longitud de segmentos eliminados
0	1	1	1	0
1	3	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

Tabla 5.23

Interpreta y resuelve

1. Completa la tabla 5.24 después de realizar varios pasos de la construcción del Conjunto de Cantor.

Paso	Cantidad de segmentos	Longitud de cada segmento	Longitud total de segmentos visibles	Longitud de segmentos eliminados
0	1	1	1	0
1	3	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
2				
3				
4				
5				

Tabla 5.24

2. Encuentra una generalización para el paso n.

3. Si n se hace cada vez mayor,

a. ¿a qué valor se acerca la longitud de cada segmento?

b. ¿a qué valor se acerca la longitud total de los segmentos visibles?

c. ¿a qué valor se acerca la longitud total de los segmentos eliminados?

Evalúa tu pensamiento crítico

Las siguientes actividades te indicarán el nivel de competencia que has alcanzado y determinarán los desempeños que evidencian tu acción de aprendizaje.

Ejercitar procedimientos

Interpreta

1. Completa el mapa conceptual de la figura 5.101.

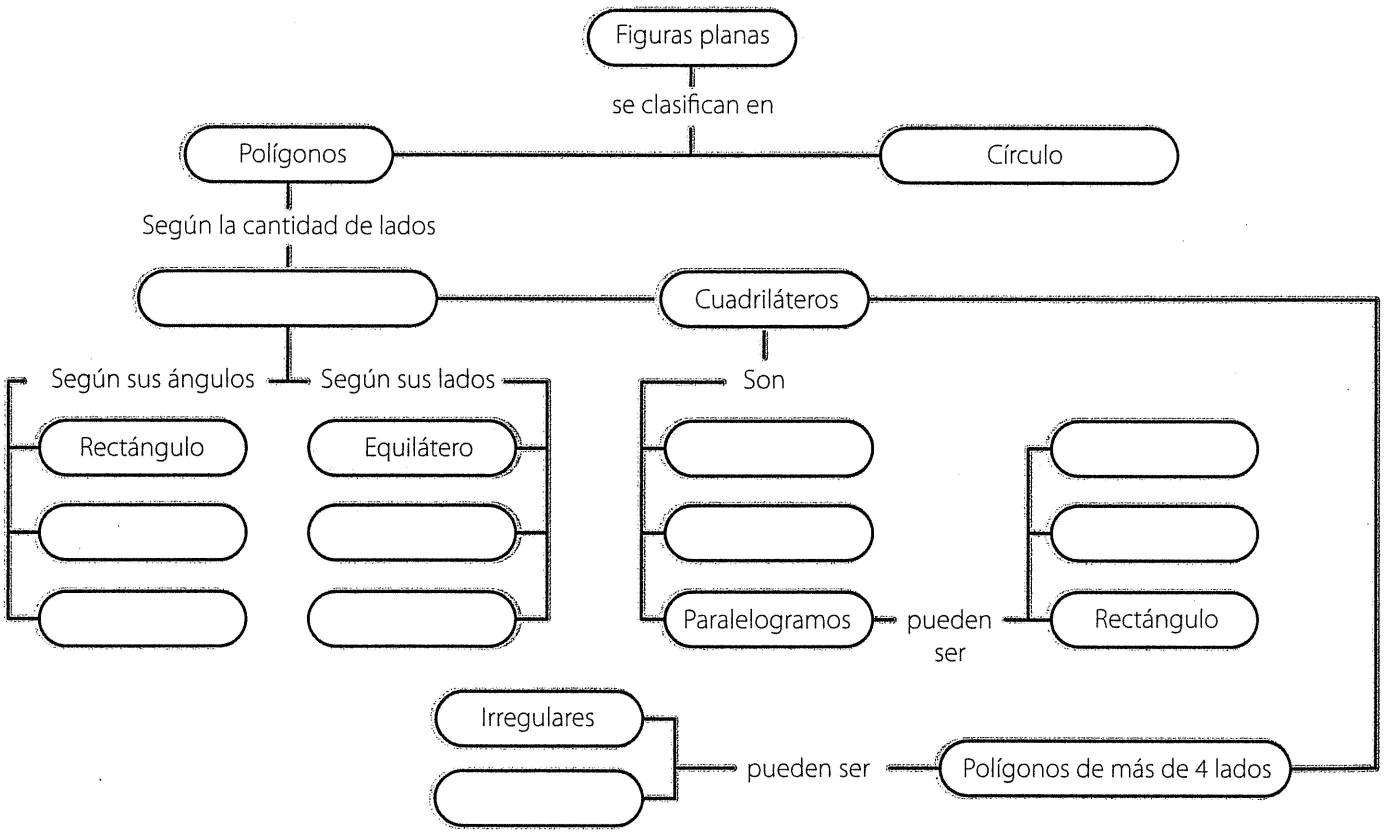


Figura 5.101

2. En la figura 5.102 se muestra una circunferencia.

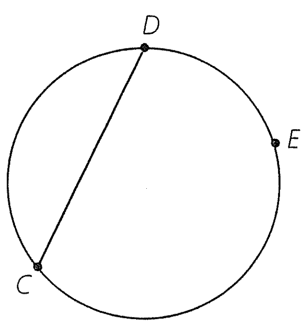


Figura 5.102

a. Traza con color rojo una cuerda congruente con la cuerda $\overline{CD}$.

b. Traza con azul la mediatriz de la cuerda $\overline{CD}$.

c. Construye el centro de la circunferencia y llámalo *A*.

d. Encuentra la medida del ángulo central determinado por la cuerda $\overline{CD}$.

e. Traza con color verde el triángulo *CDE*. ¿Qué clase de triángulo es?

f. Realiza una reflexión del triángulo *CDE* respecto a la cuerda $\overline{CD}$.

Pensar y razonar

Infiere

3. En cada triángulo de la figura 5.103 realiza el procedimiento que se describe:

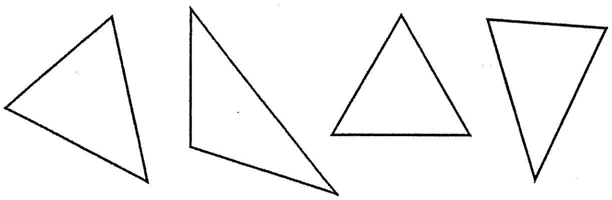


Figura 5.103

a. Construye el punto medio de los tres lados.

b. Traza un segmento que una dos de los puntos medios.

c. ¿Qué relación existe entre el segmento trazado y el tercer lado del triángulo?

d. Toma la medida del segmento trazado entre los dos puntos medios.

e. Encuentra la medida del tercer lado del triángulo.

f. Completa la siguiente propiedad:

El segmento que une los puntos ___________ de dos lados de un triángulo es ___________ al tercer lado y tiene la ___________ mitad de su longitud.

Comunicar y representar ....

Explica

4. Determina si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F).Justifica tu respuesta.

a. Los puntos medios de los lados de un cuadrilátero son los vértices de un paralelogramo.

b. Si las diagonales de un cuadrilátero son perpendiculares entre sí, el cuadrilátero es un rombo.

Plantear y resolver problemas ....

Analiza

5. En la figura 5.104 se muestra el triángulo *DEG*, al que llamaremos T1. Realiza con él la siguiente construcción:

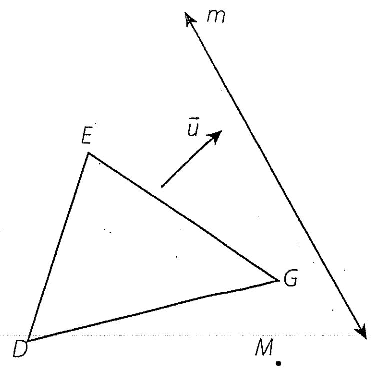


Figura 5.104

a. Halla la imagen de T1 que se produce bajo la reflexión con respecto a la recta *m*. Nombra a esta imagen T2.

b. Traslada T2 de acuerdo con el $\vec{u}$ para obtener T3.

c. Transforma T3 bajo R (60°, *M*, +).

6. Si una figura se puede rotar alrededor de un punto central y ésta no cambia, se dice que la figura tiene simetría rotacional. ¿Cuál de los siguientes polígonos tiene simetría rotacional?

a. Triángulo equilátero.

b. Hexágono regular.

c. Rectángulo.

d. Octágono.

Autoevaluación

	Bajo	Básico	Alto	Superior
Reconozco y clasifico diferentes figuras geométricas.				
Mido y clasifico ángulos.				
Reconozco segmentos y ángulos congruentes.				
Realizo construcciones con regla y compás.				
Identifico las características de las rectas paralelas y perpendiculares.				
Construyo los puntos notables de un triángulo.				
Reconozco las líneas y los ángulos notables de una circunferencia.				
Efectúo movimientos rígidos a figuras planas.				
Me gusta profundizar en las matemáticas.				

Unidad 6

Pensamiento métrico

Medición

Situación problema

Las medidas que debe tener una cancha de fútbol fueron establecidas por la FIFA (Federación Internacional de Fútbol Asociado), asi: el largo debe estar entre 90 y 120 mientras que el ancho puede variar entre 45 y 90 metros. Sin embargo, para los partidos de campeonatos internacionales, como el Mundial de fútbol, el largo debe estar entre 100 y 110 metros y el ancho debe oscilar entre 64 y 75 metros.

En el reglamento de fútbol profesional, publicado por la FIFA encontramos el resto de medidas que deben tener las canchas de fútbol; por ejemplo, el círculo central debe tener un área de 263,03 m^2 y la zona de penalti, un área de 665,28 m^2.

Cada portería también cumple ciertas especificaciones: es equidistante a las esquinas de la cancha, consta de dos postes verticales de 2,44 metros de alto con una distancia de 7,32 metros, entre ellos y el grueso de estos elementos no puede ser superior a 12 centímetros.

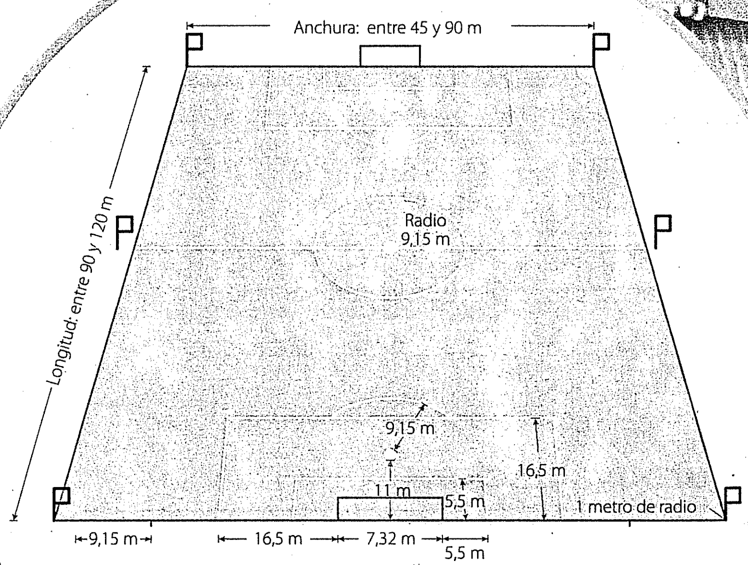


Figura 6.1

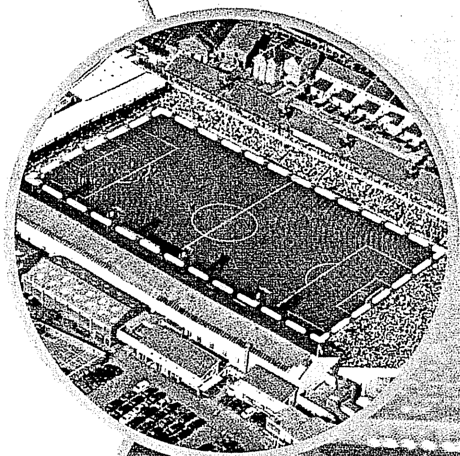
Desarrolla pensamiento crítico

Interpreta

1. ¿Cuáles son las medidas que estableció la FIFA para una cancha de fútbol?
2. ¿En qué unidades se mide la longitud de los lados de la cancha?

Infiere

3. Observa la figura 6.1. El punto medio de la línea que marca la mitad del terreno de juego es el centro de una circunferencia. ¿Cuál es el diámetro de dicha circunferencia?



Analiza

4. Durante el mantenimiento de una cancha de fútbol se debe cubrir con cinta su borde. Si la cancha mide 105 metros de largo y 70 metros de ancho, ¿cómo se podría determinar la cantidad de cinta que se usará para cubrir el borde?

Lección Digital norma

Perímetro y área de figuras planas

El perímetro y el área de una figura plana son medidas diferentes que te permiten tomar decisiones en diversas situaciones. A propósito, explora este tema en tu lección digital, en http://www.normaparapensar.com

Tema 50

Unidades de longitud

Ideas previas

1. ¿Qué unidad consideras la más apropiada para medir la distancia entre dos ciudades?

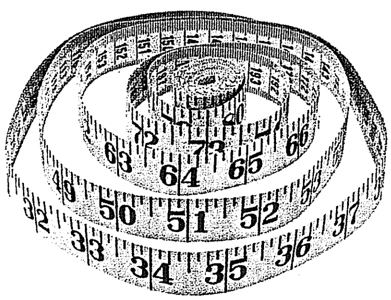
2. Realiza las siguientes operaciones:

   a. $4{,}5 \times 100$

   b. $6{,}24 \div 10$

   c. $0{,}013 \times 1000$

   d. $135{,}2 \div 100$



Interpreta

Cuando mencionamos las medidas del largo y del ancho del campo de fútbol en la situación problema presentada al inicio de la unidad, usamos un valor numérico acompañado de una unidad de medida. Si decimos que la cancha tiene 120 m de largo, significa que un metro cabe 120 veces en el largo de la cancha.

Para expresar la longitud de un objeto empleamos las unidades del **sistema métrico decimal** (S.M.D.).

> En el S.M.D. la unidad básica empleada para medir longitud es el **metro**.

Del metro se derivan otras unidades de longitud llamadas múltiplos y submúltiplos del metro. Las equivalencias entre ellas se muestran en la tabla 6.1.

Múltiplos	m	Submúltiplos
decámetro (dam) = 10 m		decímetro (dm) = 0,1m
hectómetro (hm) = 100 m		centímetro (cm) = 0,01m
kilómetro (km) = 1000 m		milímetro (mm) = 0,001m

Tabla 6.1

Conversiones

En el diagrama de la figura 6.2 se muestran las unidades de longitud del S.M.D.

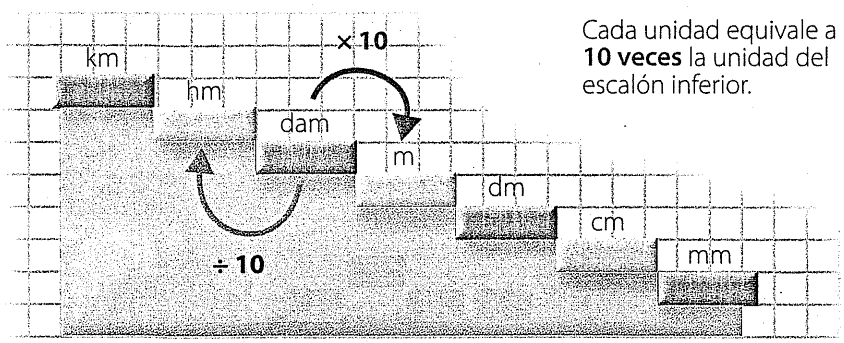


Figura 6.2

¿Qué significa?

El sistema métrico decimal (S.M.D.) es un sistema que unifica las unidades de medida. Se llama decimal porque las unidades derivadas de la unidad básica están relacionadas entre sí por múltiplos o submúltiplos de 10.

Podemos usar el diagrama para determinar equivalencias entre una unidad y otra.

Para expresar una medida de longitud en otra de orden inferior se **multiplica** por una potencia de 10.
Para expresar una medida de longitud en otra de orden superior se **divide** por una potencia de 10.

El número por el que se debe multiplicar o dividir está determinado por la cantidad de lugares que se recorren en el diagrama de la figura 6.2.

Dato histórico

El sistema métrico decimal se implementó oficialmente en la conferencia mundial de pesos y medidas realizada en Francia en 1889 y hoy día más de 90% de la población mundial lo utiliza.

Ejemplo

Expresemos 2798,4 dm en dam.

Solución

Por cada escalón que subimos en la escalera de la figura 6.2 dividimos por 10; y para pasar de dm a dam debemos subir dos escalones, entonces debemos dividir por 100:

$2798{,}4 \text{ dm} = 2798{,}4 \div 100 = 27{,}984 \text{ dam}.$

Interpreta y responde

¿Por qué para expresar 472,56 hm en dm, debemos multiplicar 472,56 por 1000?

Ejemplo

Expresemos en metros la distancia que recorre un atleta en un circuito que tiene 6 kilómetros, 8 metros y 73 centímetros de longitud.

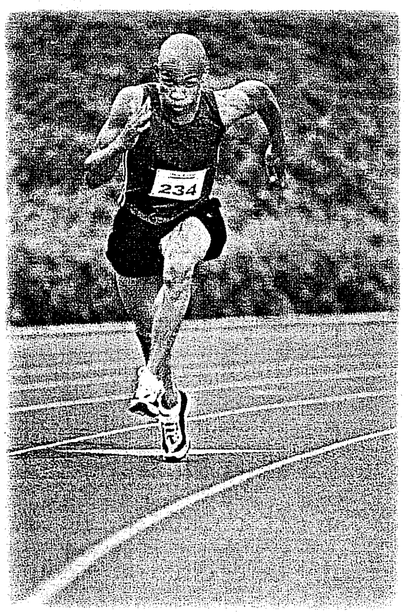
Solución

Debemos expresar cada unidad de longitud en metros y adicionar los resultados obtenidos:

$$6 \text{ km} = 6 \times 1000 = 6000 \text{ m}$$

$$73 \text{ cm} = 73 \div 100 = 0{,}73 \text{ m}$$

Entonces, la distancia total recorrida por el atleta es
$6000 \text{ m} + 8 \text{ m} + 0{,}73 \text{ m} = 6008{,}73 \text{ m}$



Desarrolla pensamiento crítico

Ejercitar procedimientos

Interpreta

1. Expresa cada longitud en la unidad que se indica:

   a. 62,3 m en hm.
   b. 798 dm en dam.
   c. 3,50 m en km.
   d. 0,005 mm en cm.
   e. 235 mm en m.

Plantear y resolver problemas

Analiza

2. Un atleta recorre un circuito de cuatro etapas, las cuales tienen las longitudes que se indican en la tabla 6.2:

Etapa	Primera	Segunda	Tercera	Cuarta
Longitud	7 hm	12 dam	39 m	19 dm

Tabla 6.2

   a. ¿Qué distancia total recorre el atleta, expresada en metros?
   b. ¿Qué distancia total recorre el atleta, expresada en hectómetros?

3. La tabla 6.3 muestra la estatura de algunos jugadores de fútbol destacados:

Futbolista	Estatura
Lionel Messi	1,69 m
Cristiano Ronaldo	186 cm
Iván Córdoba	17,3 dm
Wesley Sneijder	1,70 m

Tabla 6.3

Ordena los jugadores mostrados en la tabla de acuerdo con su estatura.

Comunicar y representar

Explica

4. En cada caso indica la unidad más conveniente para medir la longitud que se señala:

   a. La distancia entre Bogotá y Cali.
   b. La longitud de un lápiz.
   c. La longitud de una cancha de baloncesto.
   d. La longitud del escritorio del salón.
   e. El grosor de una moneda.

5. Explica cuál es el procedimiento para realizar las siguientes conversiones en el sistema métrico decimal:

   a. De decímetros a metros.
   b. De metros a milímetros.
   c. De decámetros a kilómetros.

Pensar y razonar

Infiere

6. En algunos países de habla inglesa se emplea un conjunto de unidades diferente al sistema métrico decimal, llamado sistema inglés. Las equivalencias entre medidas en dicho sistema se muestran en la figura 6.3.

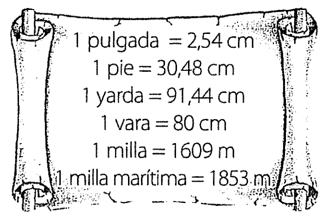


Figura 6.3

   a. La longitud de un circuito de la fórmula uno es 5,4 millas. Expresa esta longitud en kilómetros.
   b. El radio de una moneda es 12,3 milímetros. Expresa el radio de la moneda en pulgadas.

Evalúa

1. Ordena las siguientes longitudes de menor a mayor:

   416,7 cm; 5671 mm; 74,65 dm; 6,9 m; 0,56 dam; 0,005 hm; 0,00051 km

2. La estatura mínima requerida para subir a una de las atracciones del parque Walt Disney Studios es 1,22 metros. Si la estatura de Andrea es 1389 mm, ¿se le permite ingresar a esta atracción?

Desempeños

- Realiza conversiones entre unidades de longitud en el sistema métrico decimal.
- Encuentra la solución a problemas que requieren el manejo de unidades de longitud.

Practica más, pág. 328.

Tema 51

Perímetro

Ideas previas

1. ¿Cuántos kilómetros, hectómetros y decámetros hay en 654 982 m?
2. ¿Cómo se clasifican los polígonos?

Interpreta

Retomemos la pregunta **4** de la situación problema. Para responderla, usamos el concepto de **perímetro** de una figura.

El **perímetro** de una figura plana es la medida de la longitud de su borde. Se simboliza con la letra *P*.

La cancha de fútbol tiene forma rectangular; por tanto, sus lados opuestos son **congruentes**, entonces las longitudes de los lados de la cancha son 105 m, 105 m, 70 m y 70 m.

Para hallar la cantidad de cinta que se necesita para cubrir el borde de la cancha, adicionamos las longitudes de los cuatro lados:

$$105 \text{ m} + 105 \text{ m} + 70 \text{ m} + 70 \text{ m} = 350 \text{ m}$$

¿Qué significa?

Dos lados de una figura son **congruentes** cuando tienen la misma medida.

Ejemplo

Hallemos el perímetro de cada uno de los polígonos que se muestran en la figura 6.4.

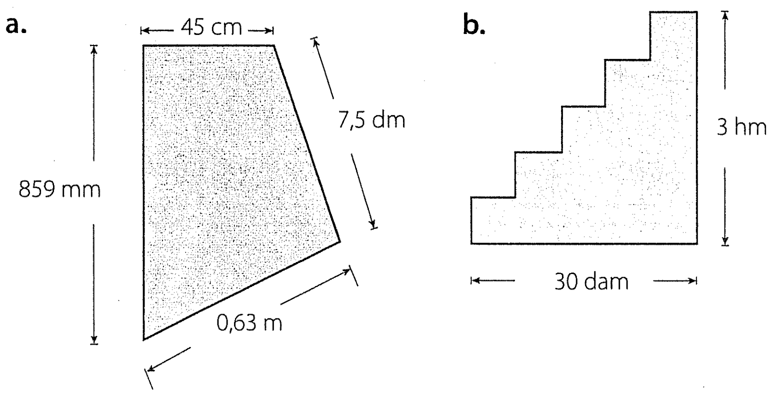


Figura 6.4

Solución

El perímetro del polígono del literal **a.** se halla adicionando las longitudes de todos sus lados:

$$P = 45 \text{ cm} + 7{,}5 \text{ dm} + 0{,}63 \text{ m} + 859 \text{ mm}$$

Para adicionar las longitudes debemos expresarlas en la misma unidad de medida:

$$45 \text{ cm} \div 100 = 0{,}45 \text{ m}$$

$$7{,}5 \text{ dm} \div 10 = 0{,}75 \text{ m}$$

$$859 \text{ mm} \div 1000 = 0{,}859 \text{ m}$$

$$P = 0{,}45 \text{ m} + 0{,}75 \text{ m} + 0{,}63 \text{ m} + 0{,}859 \text{ m} = 2{,}689 \text{ m.}$$

Pensamiento métrico

Analiza y resuelve

En el polígono del literal **b.** los segmentos verticales y horizontales de menor longitud son congruentes. Cada uno de estos segmentos mide la quinta parte de la longitud de uno de los lados de longitud mayor del polígono. ¿Cuál es el perímetro del polígono?

En la tabla 6.4 se presentan las fórmulas para encontrar el perímetro de algunas figuras planas:

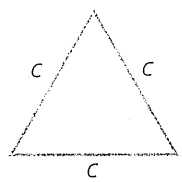
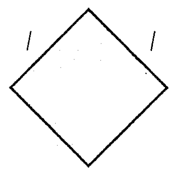
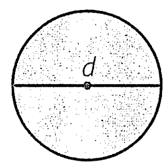
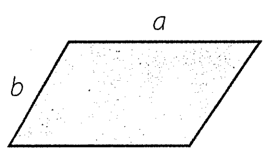
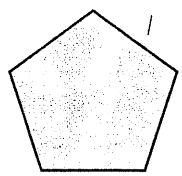
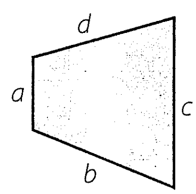
Triángulo equilátero	Cuadrado	Círculo
 Perímetro = $3 \times c$	 Perímetro = $4 \times l$	 Perímetro = $\pi \times d$
Paralelogramo	**Polígono regular de *n* lados**	**Trapecio**
 Perímetro = $2 \times a + 2 \times b$	 Perímetro = $n \times l$	 Perímetro = $a + b + c + d$

Tabla 6.4

Ejemplo

Hallemos el perímetro de un círculo de radio 2,4 cm.

Solución

El diámetro del círculo equivale al doble del radio, entonces el diámetro mide 4,8 cm.

$P = \pi \times 4{,}8 \text{ cm} = 3{,}1416 \times 4{,}8 \text{ cm} = 15{,}07968 \text{ cm}$

Interpreta y contesta

Si el perímetro de un cuadrado es 28 cm, ¿cuál es la longitud del lado?

¿Qué significa?

En todo círculo, la razón entre la longitud de su circunferencia y su diámetro es igual al número π (pi), cuyo valor es aproximadamente 3,1416.

Desarrolla pensamiento crítico

Ejercitar procedimientos

Interpreta

1. Encuentra el perímetro de cada una de las regiones de la figura 6.5.

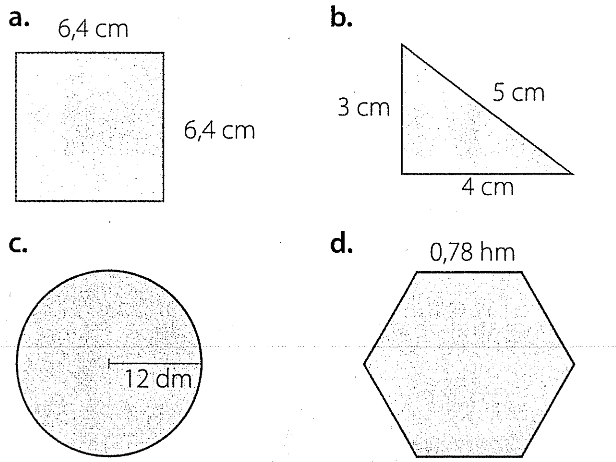


Figura 6.5

2. Completa la tabla 6.5, teniendo en cuenta que los datos corresponden a tres rectángulos.

Largo	Ancho	Perímetro
7 cm	16 mm	
	2,4 cm	8,4 dm
12 dm		480 cm

Tabla 6.5

3. Encuentra el perímetro de la región que se muestra en la figura 6.6.

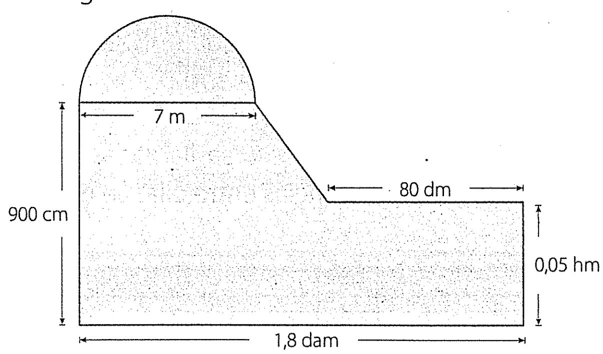


Figura 6.6

Pensar y razonar

Infiere

4. Un triángulo tiene dos lados congruentes. Su perímetro es 30 unidades y los lados congruentes miden cada uno 12 unidades. ¿Cuánto mide el tercer lado?

Plantear y resolver problemas

Analiza

5. Mateo dibujó un plano de su salón de clase como el que se muestra en la figura 6.7.

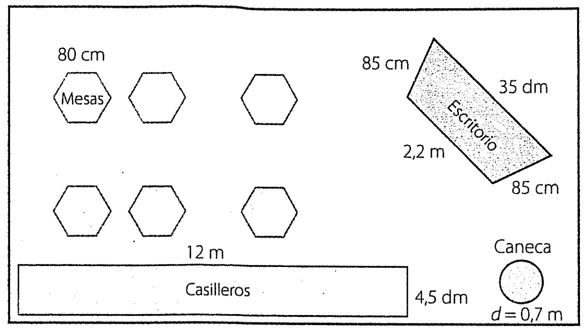


Figura 6.7

Con base en el dibujo que realizó Mateo, responde las siguientes preguntas:

a. ¿Cuál es el perímetro del escritorio del profesor?

b. ¿Cuál es la medida de la circunferencia en la abertura de la caneca?

c. Mateo quiere poner una cinta de color rojo alrededor de una de las mesas del salón de clase. ¿Cuánta cinta necesita?

d. Si se debe pintar una línea amarilla en el borde de los casilleros para demarcarlos, ¿cuál es la longitud de esta línea?

Evalúa

1. Una habitación de forma rectangular tiene 2,90 m de ancho, 320 cm de largo y una puerta de 7,5 dm de ancho. ¿Cuántos metros de guardaescoba se requieren para colocar en el contorno de la pared de la habitación?
2. El largo de un rectángulo es 12 centímetros mayor que su ancho y el perímetro es 104 cm. Calcula el largo y el ancho del rectángulo.

Desempeños

- Encuentra la solución a problemas que involucran el concepto de perímetro.
- Realiza conversiones entre unidades de longitud.

Practica más, pág. 328.

Tema 52

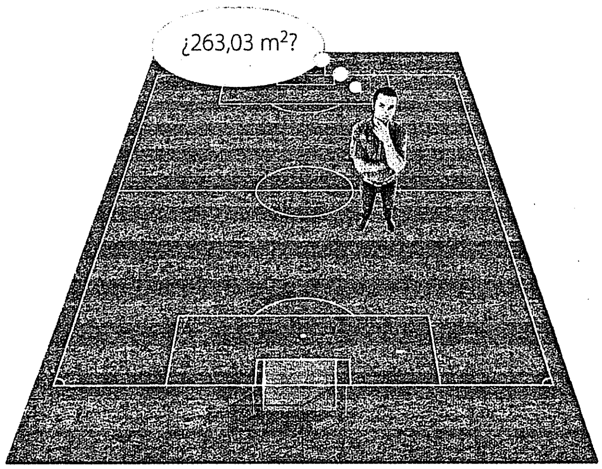
Unidades de área

Ideas previas

1. ¿Qué unidad consideras la más apropiada para medir la superficie de una hoja de cuaderno?
2. ¿Cuál es la diferencia entre circunferencia y círculo?
3. Realiza las siguientes operaciones:
   a. $2{,}45 \times 10\,000$
   b. $0{,}325 \div 100$

Interpreta

En la situación problema presentada al inicio de la unidad encontramos las expresiones "el círculo central tiene un área de 263,03 m^2" y "la zona de penalti tiene un área de 665,28 m^2". Estas expresiones indican la cantidad de terreno que cubren tanto el círculo central como la zona de penalti.



El **área** de una figura plana es la medida de la superficie que ésta cubre. La medida del área se da en unidades cuadradas. En el sistema métrico decimal la unidad básica de área es el metro cuadrado (m^2), es decir, un cuadrado cuyos lados miden un metro.

Del metro cuadrado se derivan otras unidades de área llamadas múltiplos y submúltiplos del metro cuadrado. Las equivalencias entre ellas se muestran en la tabla 6.6.

Múltiplos	m^2	Submúltiplos
decámetro cuadrado (dam^2) = 100 m^2		decímetro cuadrado (dm^2) = 0,01 m^2
hectómetro cuadrado (hm^2) = 10 000 m^2		centímetro cuadrado (cm^2) = 0,0001 m^2
kilómetro cuadrado (km^2) = 1 000 000 m^2		milímetro cuadrado (mm^2) = 0,000001 m^2

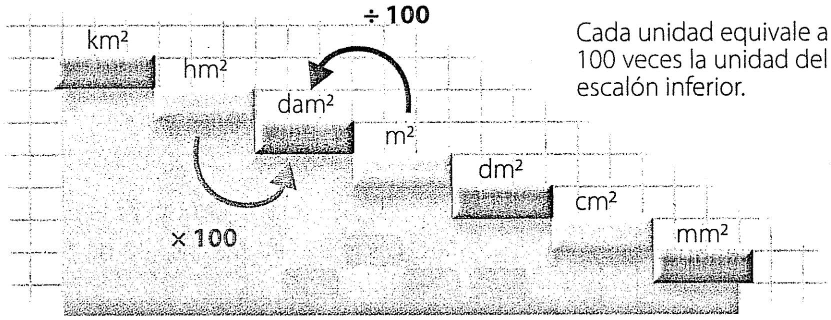
Tabla 6.6

Pensamiento métrico

Conversiones

En el diagrama de la figura 6.8 se muestran las unidades de área del S.M.D.

Podemos usar el diagrama para determinar equivalencias entre una unidad y otra.



Cada unidad equivale a 100 veces la unidad del escalón inferior.

Figura 6.8

Para expresar una medida de área en otra de orden inferior se **multiplica** por una potencia de 100.
Para expresar una medida de área en otra de orden superior se **divide** por una potencia de 100.
El número por el que se debe multiplicar o dividir está determinado por la cantidad de lugares que se recorren en el diagrama de la figura 6.8.

Ejemplo

Expresemos 1,256 km^2 en m^2.

Solución

Para pasar de km^2 a m^2 debemos descender tres pasos en la escalera de la figura 6.8. Dado que por cada paso que bajamos multiplicamos por 100, debemos multiplicar por 1 000 000: 1,256 km^2 = 1,256 × 1 000 000 = 1 256 000 m^2.

Interpreta y responde

¿Por qué para expresar 789,34 dm^2 en dam^2 debemos dividir 789,34 por 10 000?

Ejemplo

En la figura 6.10 se muestra un terreno que tiene un área de 305,5 hm^2. Expresemos el área del terreno en m^2 y en km^2.

Solución

$$305{,}5\ hm^2 = 305{,}5 \times 10\,000 = 3\,055\,000\ m^2$$

$$305{,}5\ hm^2 = 305{,}5 \div 100 = 3{,}055\ km^2$$

El área del terreno de la figura 6.10 se puede expresar como 305,5 hm^2, 3 055 000 m^2 o 3,055 km^2

Problema del día

Halla el área de cada región, tomando como unidad de medida el cuadrado que se indica.

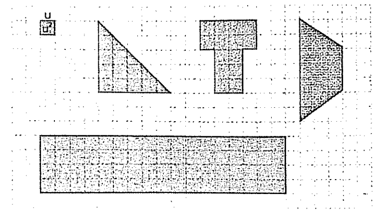


Figura 6.9

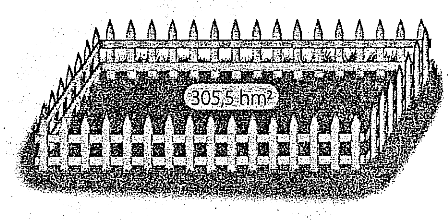


Figura 6.10

Desarrolla pensamiento crítico

Ejercitar procedimientos

Interpreta

1. Determina la unidad más apropiada para medir la longitud, o la superficie que se indica en cada caso:

- **a.** La superficie del piso de un salón.
- **b.** La cantidad de papel necesaria para hacer una tarjeta.
- **c.** El terreno empleado para construir un parque.
- **d.** La superficie de un departamento de Colombia.

2. Transforma cada medida en la unidad indicada:

- **a.** 478,4 cm^2 en dam^2.
- **b.** 0,005 hm^2 en mm^2.
- **c.** 1002,46 cm^2 en dm^2.
- **d.** 0,000064 km^2 en m^2.
- **e.** 46,5 dam^2 en dm^2.
- **f.** 0,087 hm^2 en km^2.
- **g.** 0,0000000068 km^2 en mm^2.

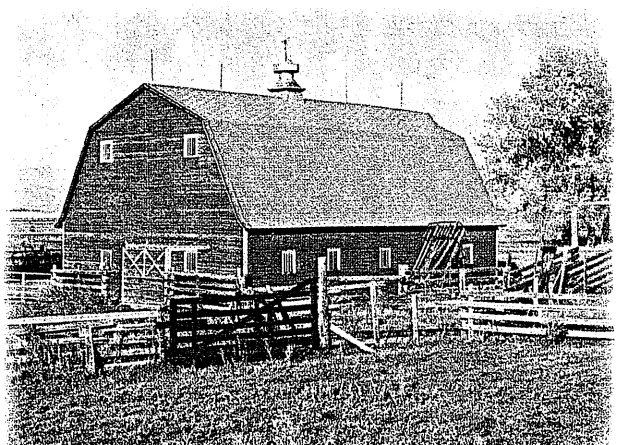
Pensar y razonar

Infiere

3. Ordena de menor a mayor las siguientes medidas:

8 km^2, 80 000 m^2, 8000 hm^2, 80 000 cm^2.

4. Para medir superficies rurales se utilizan tres unidades llamadas el área (a), la hectárea (ha) y la fanegada. Un área equivale a 100 m^2, una hectárea es igual a 10 000 m^2, y una fanegada equivale a 6400 m^2.



Usa la información anterior para transformar cada medida en la unidad indicada:

- **a.** 2 ha en m^2.
- **b.** 19 200 m^2 en fanegadas.
- **c.** 4,5 a en cm^2.
- **d.** 4,5 km^2 en ha.
- **e.** 19,2 fanegadas en dam^2.
- **f.** 42,4 ha en hm^2.

5. ¿Cuántas baldosas de 4 dm^2 se necesitan para cubrir un espacio de 12 m^2 de área?

Comunicar y representar

Explica

6. Explica cuál es el procedimiento para transformar cada unidad de superficie en la unidad indicada:

- **a.** m^2 en hm^2.
- **b.** cm^2 en mm^2.
- **c.** dam^2 en km^2.
- **d.** km^2 en cm^2.
- **e.** dm^2 en m^2.
- **f.** mm^2 en dm^2.

7. Escribe un argumento para justificar por qué el mm^2 no es una unidad de área apropiada para medir:

- **a.** La superficie de un país.
- **b.** El tablero de un salón de clase.
- **c.** La cubierta de un libro.
- **d.** Una tarjeta de crédito.

8. Determina si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F). Justifica tu respuesta.

   a. Los múltiplos del m^2 se utilizan para medir longitudes.

   b. El área y el perímetro de una figura representan la misma medida.

   c. Para expresar m^2 en dm^2 se multiplica por 1000.

   d. El área de una figura es la medida de la porción del plano que ella ocupa.

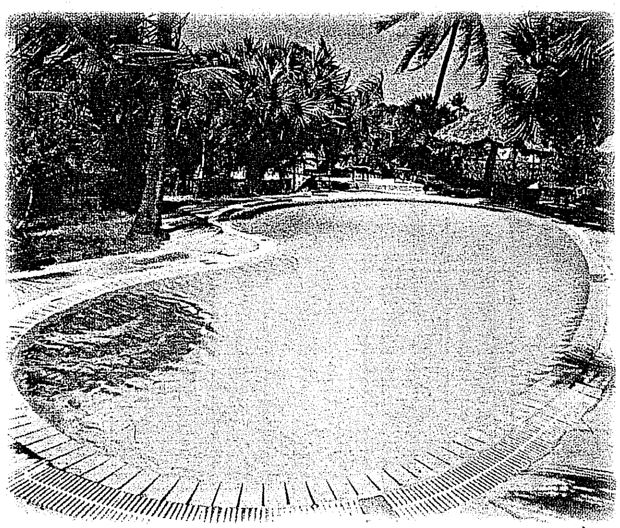
   e. El área de una figura se mide en unidades cúbicas.

Plantear y resolver problemas

Analiza

9. La finca "Luna de Macondo" tiene un área de 230 ha. Si se tiene planeado usar 250 m^2 para construir una vivienda y dividir el resto del terreno en 10 corrales de igual área, ¿cuál es el área de cada corral, expresada en dam^2?

10. El piso de una piscina tiene un área de 1100 m^2. Determina la cantidad de baldosas necesarias para cubrirlo, si:



   a. Las baldosas son de 500 cm^2 cada una.

   b. Las baldosas son de 15 dm^2 cada una.

   c. Las baldosas son de 0,005 dam^2 cada una.

11. Miguel compró 0,875 dam^2 de alfombra para instalar en su apartamento nuevo. Si el área que desea alfombrar tiene 92 m^2, ¿puede cubrir los 92 m^2 de piso con la alfombra que compró? Justifica tu respuesta.

12. En la figura 6.11 se muestra el plano del apartamento de Lucía:

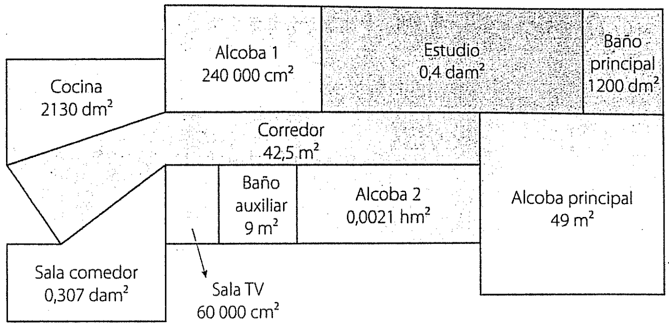


Figura 6.11

   a. Escribe en m^2 el área del apartamento de Lucía.

   b. ¿Cuántas baldosas se requieren para cubrir el piso de la sala y del corredor con baldosas de 625 cm^2?

   c. ¿Qué cantidad de alfombra se requiere para cubrir el piso de las tres alcobas?

Evalúa

1. Averigua las áreas de tres departamentos de Colombia y exprésalas en m^2 y en dam^2.

2. Colombia es un país que cuenta con territorio continental y territorio marítimo. La superficie total del país es de, aproximadamente, 2 070 408 km^2 de los cuales 1 141 748 km^2 corresponden al territorio continental mientras que la superficie restante corresponde a la soberanía marítima. ¿Cuál es el área, expresada en hm^2, que corresponde a la soberanía marítima de Colombia?

Desempeños

- Realiza conversiones entre unidades de área del sistema métrico.
- Resuelve problemas que requieran el uso de conceptos de área.

Practica más, pág. 329.

Tema 53

Área de figuras planas

Ideas previas

1. Dibuja un triángulo rectángulo, un triángulo acutángulo y un triángulo obtusángulo. Traza la altura en cada uno.
2. Si la unidad seleccionada para hallar el área de un rectángulo es un cuadrado de 1 cm de lado, el área de dicho rectángulo es 30 cm^2. ¿Cuál es el área del rectángulo si la unidad se cambia por un triángulo que tiene la mitad del área del cuadrado?

Analiza

En una finca se separan los animales por medio de corrales, los cuales están diseñados con formas de algunas figuras geométricas planas. Para distribuir adecuadamente los animales el dueño de la finca no sólo debe cercar el terreno, también debe determinar el área que destinará para acomodar cada una de las especies de animales que posee.

Ejemplo

Estimemos el área de las regiones **a.** y **b.** de la figura 6.12 usando como unidad el cuadrado del plano cuadriculado sobre el que se encuentran.

Solución

En la figura **a.**, la unidad cabe 49 veces completas en el cuadrado. Entonces, el área del cuadrado es 49 unidades cuadradas.

En el rectángulo de la figura **b.** caben 28 unidades completas. Entonces, el área del rectángulo es 28 unidades cuadradas.

a. **b.** **c.**

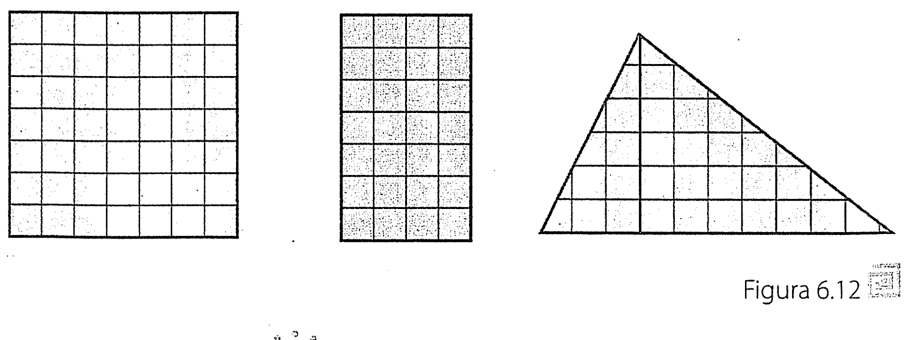


Figura 6.12

Infiere y resuelve

¿Cuál es el área, en unidades cuadradas, de la región **c.** de la figura 6.12?

No siempre es posible cubrir una figura con la unidad escogida para encontrar su área. Generalmente, cuando se trata de figuras con lados rectos, el área la calculamos con base en sus dimensiones.

Área de algunos polígonos

En la tabla 6.7 se muestran las fórmulas para hallar el área de algunos polígonos:

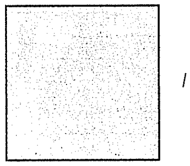
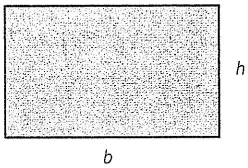
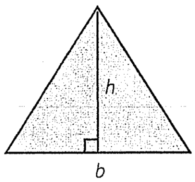
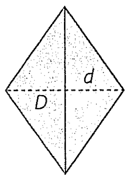
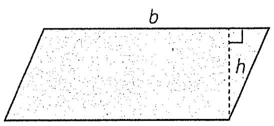
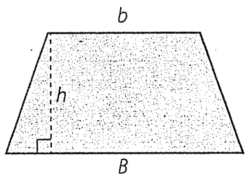
Nombre	Figura	Área
Cuadrado		$A = l^2$
Rectángulo		$A = b \times h$
Triángulo		$A = \dfrac{b \times h}{2}$
Rombo		$A = \dfrac{D \times d}{2}$
Paralelogramo		$A = b \times h$
Trapecio		$A = \dfrac{(B + b) \times h}{2}$

Tabla 6.7

Dato histórico

Los egipcios calculaban el área de rectángulos y cuadrados utilizando cuerdas. El cálculo de dichas áreas surgió de la necesidad de la clase alta de esta civilización de determinar en qué superficies debían sembrar sus súbditos y así establecer el valor de los impuestos que debían pagar.

Ejemplo

Hallemos el área del trapecio que se muestra en la figura 6.13.

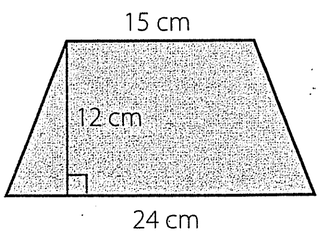


Figura 6.13

Solución

Aplicando la fórmula $A = \dfrac{(B + b) \times h}{2}$, tenemos que el área del trapecio de la figura es 234 cm^2:

$$A = \frac{(24\,cm + 15\,cm) \times 12\,cm}{2}$$

$$= \frac{39\,cm \times 12\,cm}{2} = \frac{468\,cm^2}{2} = 234\,cm^2$$

pensamiento crítico

Ejercitar procedimientos

Interpreta

1. Halla el área de cada polígono de la figura 6.14.

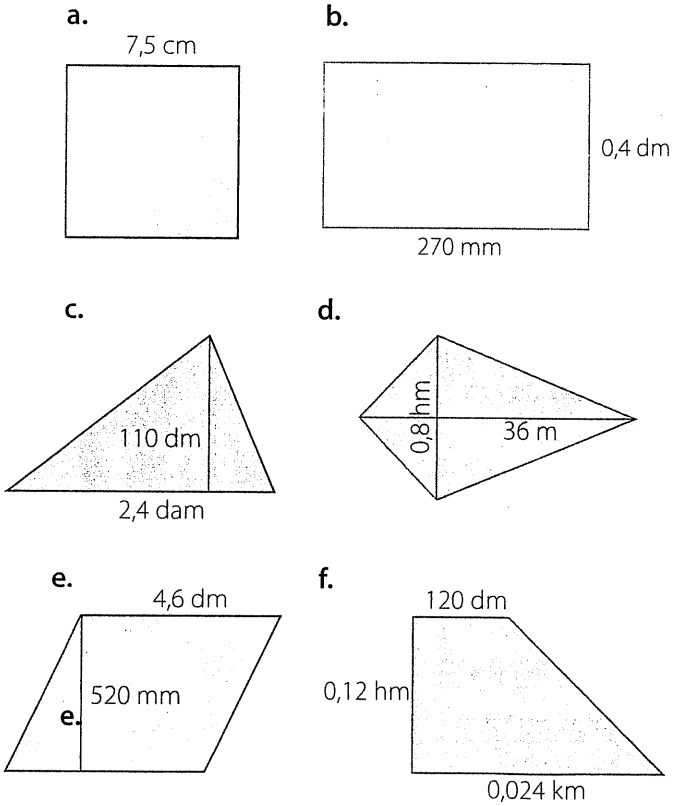


Figura 6.14

Pensar y razonar

Infiere

2. De acuerdo con cada figura, completa el enunciado correspondiente. Usa las palabras "paralelogramo", "mitad" y "suma":

a.

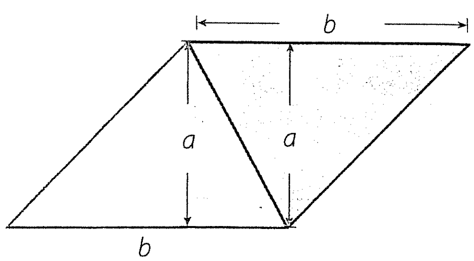
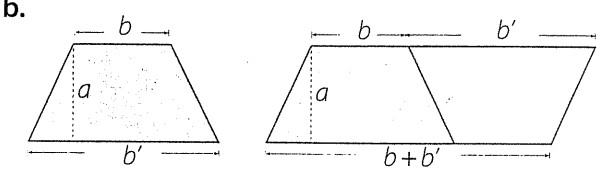


Figura 6.15

$$\text{Área} = \frac{b \times a}{2}$$

El área de un triángulo es la ____________ del área de un ____________ que tenga la misma base y la misma altura.

b.



$$\text{Área} = \frac{(b + b') \times a}{2}$$

Figura 6.16

El área de un trapecio es igual a la ____________ del área de un paralelogramo cuya base es la ____________ de las dos bases del trapecio.

3. Determina en cada caso el área de la región coloreada:

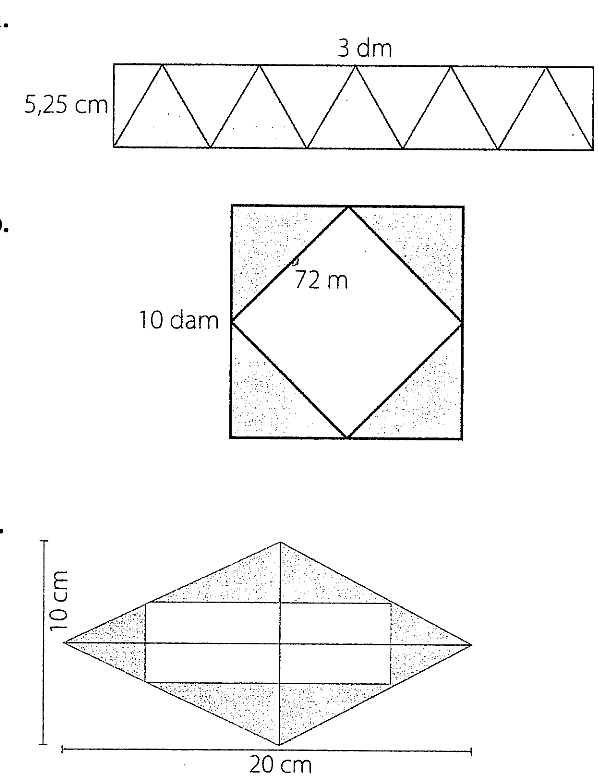


Figura 6.17

Plantear y resolver problemas

Analiza

4. El área de un rectángulo es 28 cm^2. Halla su perímetro sabiendo que uno de sus lados mide 4 cm.

5. Calcula la altura de un triángulo que tiene de área 6,25 dam^2, si su base mide 2,5 dam.

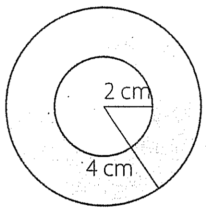
6. Calcula la medida de la base mayor de un trapecio cuya altura es 12 cm, si su área es 132 cm^2 y se sabe que: la suma de sus bases es 22 cm y la diferencia de sus bases es 6 cm.

7. El área de un rombo es 90 m^2. Halla la medida de una de sus diagonales si la medida de la otra diagonal es 1200 cm.

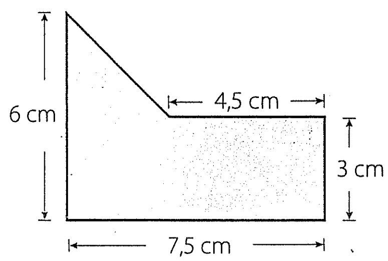
8. En un rectángulo la longitud de uno de sus lados es 3 cm mayor que la longitud de su lado adyacente. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo si su área es 70 cm^2?

9. Encuentra en cada caso el área de la región coloreada:

a.



b.



c.

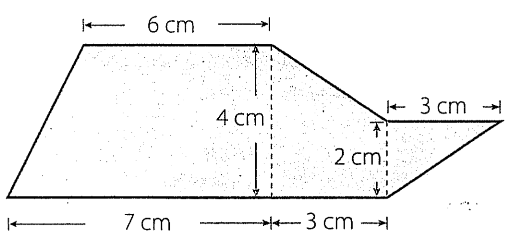


Figura 6.18

Ciencia y tecnología

10. En un software de geometría dinámica realiza la siguiente construcción:

- Con la herramienta *recta que pasa por dos puntos*, construye la recta *AB*.
- Con la herramienta *nuevo punto*, ubica un punto *C* en el exterior de la recta *AB*.
- Con la herramienta *polígono*, construye el triángulo *CBA*.
- Con la herramienta *medida*, encuentra el área y el perímetro del triángulo *CBA*.

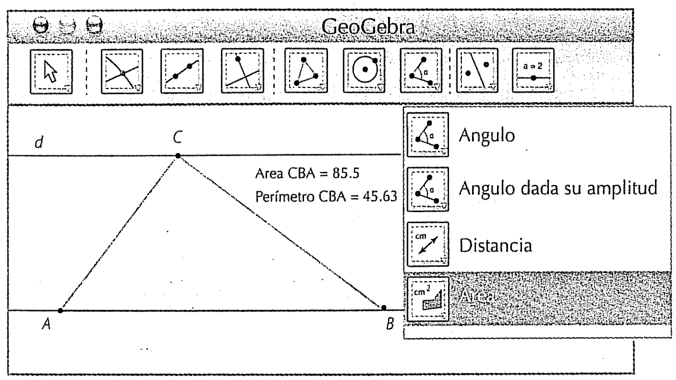


Figura 6.19

Si mueves el punto *C* a lo largo de la recta,

a. ¿Qué pasa con el perímetro del triángulo *CBA*? Explica tu respuesta.

b. ¿Qué pasa con el área del triángulo *CBA*? Explica tu respuesta.

Evalúa

1. Un rectángulo tiene 12 cm de largo y 5 cm de ancho. ¿Cuál es el área de un rectángulo cuyo perímetro es el doble del anterior?

2. Un triángulo y un trapecio tienen la misma área y la misma altura. ¿Qué relación existe entre las dos bases?

3. En la cuadrícula de la figura 6.20 cada cuadro mide 0,7 dm de lado. Calcula el área total, expresada en m^2, de cada uno de los polígonos que conforman la figura.

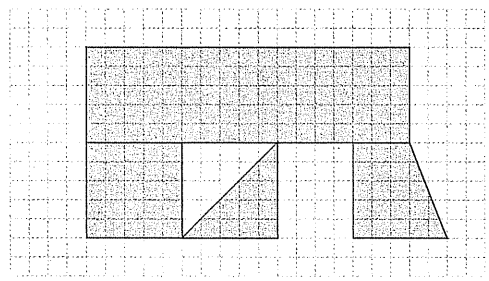


Figura 6.20

Desempeños

- Calcula el área de figuras planas.
- Establece relaciones entre las dimensiones de figuras que tienen igual área.
- Resuelve problemas que involucran el concepto de área.

Practica más, pág. 329.

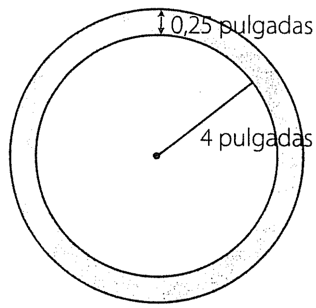
Área del círculo

Ideas previas

1. ¿Cuál es la diferencia entre círculo y circunferencia?
2. ¿Cuál es la relación entre la longitud de una circunferencia y su diámetro?
3. Efectúa las siguientes multiplicaciones:
   - **a.** $2{,}92 \times 5{,}76$
   - **b.** $5{,}47 \times 3{,}1416$
   - **c.** $144 \times 3{,}1416$

Analiza

Las tuberías empleadas en construcción se miden de acuerdo con su diámetro interno; por ejemplo, en la figura 6.21 se observa la **sección transversal** de un tubo de 4 pulgadas de diámetro. Para calcular el área determinada por el espesor de la tubería, debemos encontrar el área de la región coloreada restando el área del círculo menor del área del círculo mayor.



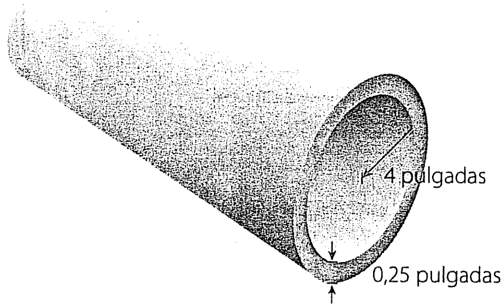


Figura 6.21

El **área** de un círculo es igual al producto de π por el cuadrado de su radio. $A = \pi \times r^2$

Observa la figura 6.21. El radio del círculo menor es 4 pulgadas, mientras que el radio del círculo mayor es 4,25 pulgadas.

¿Qué significa?

La **sección transversal** de un objeto es la figura que se obtiene cuando se corta un sólido en forma paralela a la base.

Infiere y explica

¿Por qué afirmamos que el radio del círculo mayor tiene 4,25 pulgadas?

El área del círculo menor (A_1) se calcula de la siguiente forma:

$$A_1 = \pi \times (4 \text{ pulgadas})^2 = \pi \times 16 \text{ pulgadas}^2$$
$$= 3{,}1416 \times 16 \text{ pulgadas}^2 = 50{,}2656 \text{ pulgadas}^2$$

El área del círculo mayor (A_2) se calcula de la siguiente forma:

$$A_2 = \pi \times (4{,}25 \text{ pulgadas})^2 = \pi \times 18{,}0625 \text{ pulgadas}^2$$
$$= 3{,}1416 \times 18{,}0625 \text{ pulgadas}^2 = 56{,}74515 \text{ pulgadas}^2$$

Finalmente, el área sombreada en la figura 6.21, es:

$$A = A_2 - A_1 = 56{,}74515 \text{ pulgadas}^2 - 50{,}2656 \text{ pulgadas}^2 = 6{,}47955 \text{ pulgadas}^2$$

La región de un círculo determinada por un ángulo central y su arco intersecado recibe el nombre de **sector circular**. El área del sector circular determinado por el ángulo α, se calcula usando la fórmula:

$$A = \frac{\alpha}{360°} \times \text{área del círculo}$$

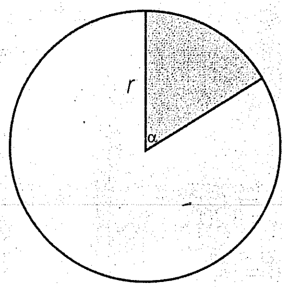


Figura 6.22

Ejemplo

La familia García almuerza en una pizzería para celebrar el cumpleaños de sus dos hijos. Ellos ordenan una pizza circular de 15 cm de radio, dividida en 8 porciones iguales.

a. ¿Cuál es el área de la pizza?

b. ¿Cuál es el área de cada porción?

Solución

a. Aplicando la fórmula para el área de un círculo tenemos que el área de la pizza es 706,86 cm^2:

$$A = \pi \times (15 \text{ cm})^2 = 706{,}86 \text{ cm}^2$$

b. El área de una porción de pizza corresponde a un sector circular y es 88,3575 cm^2:

$$A = \frac{45°}{360°} \times 706{,}86 \text{ cm}^2 = \frac{1}{8} \times 706{,}86 \text{ cm}^2 = 88{,}3575 \text{ cm}$$

Analiza y responde

¿Qué procedimiento usamos para determinar que la medida del ángulo central es 45°?

Desarrolla pensamiento crítico

Ejercitar procedimientos

Interpreta

1. Calcula el área de cada uno de los siguientes círculos:
   - **a.** Círculo de radio 2,5 cm.
   - **b.** Círculo de radio 5,8 dm.
   - **c.** Círculo de diámetro 8 m.
   - **d.** Círculo de diámetro 12,25 dam.
2. Los datos que se dan en cada caso corresponden a un sector circular. Halla el área de cada uno:
   - **a.** radio = 4 cm, ángulo central = 30°.
   - **b.** radio = 3,5 pulgada, ángulo central = 120°.
   - **c.** diámetro = 18,2 dm, ángulo central = 90°.
   - **d.** diámetro = 0,8 dam, ángulo central = 60°.

Pensar y razonar

Infiere

3. Las medidas de los radios de cuatro círculos aparecen en la tabla 6.8. Halla el perímetro y el área en cada caso, compara los datos y completa los enunciados:

Radio	Perímetro	Área
1 cm		
2 cm		
4 cm		
8 cm		

Tabla 6.8

   - **a.** Si el radio de un círculo se multiplica por dos, su perímetro se ________________ .
   - **b.** Si el radio de un círculo se multiplica por dos, el área del círculo se ________________ .

Comunicar y representar

Explica

4. Determina si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F). Justifica tu respuesta.
   - **a.** El área de un círculo de radio 2 cm es mayor que el área de un cuadrado de lado 2 cm.
   - **b.** Si en un círculo la longitud del radio se divide por dos, el área del nuevo círculo se reduce a la mitad.

Plantear y resolver problemas

Analiza

5. Halla en cada figura el área de la región coloreada.

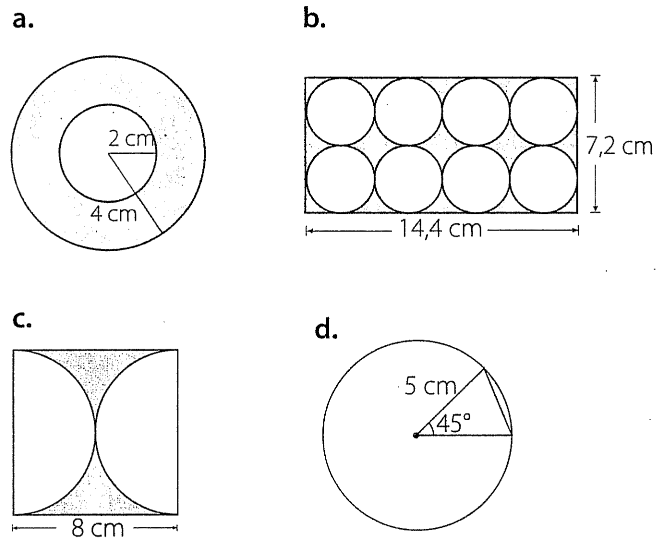


Figura 6.23

Evalúa

En la figura 6.24 el diámetro del círculo mayor es 30 pulgadas.

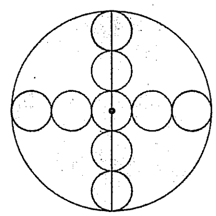


Figura 6.24

Encuentra el área de cada círculo y el área de la región sombreada con color rosado.

Desempeño

- Soluciona problemas que requieren el cálculo de áreas de círculos.

Practica más, pág. 330.

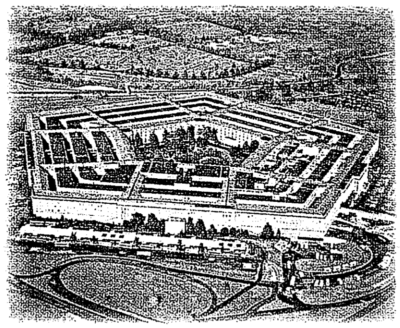
Tema 55

Área de polígonos regulares

Ideas previas

1. ¿Cuál es la diferencia entre un polígono regular y un polígono irregular?
2. ¿Cómo se calcula el área de un triángulo?

Infiere



El Pentágono es el edificio que sirve como sede del Departamento de Defensa de Estados Unidos. Se caracteriza por tener forma de pentágono regular, su construcción inició el 11 de septiembre de 1941 y tiene un área de 120 191 km^2. La medida de la superficie del terreno ocupado por este edificio se determina hallando el área de un pentágono regular.

Observa los polígonos de la figura 6.25; en cada uno de ellos trazamos segmentos de recta desde el centro a cada vértice, y obtuvimos tantos triángulos congruentes como lados tiene el polígono.

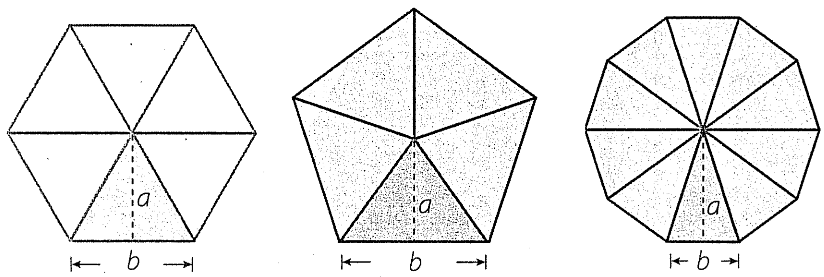


Figura 6.25

Si en cada polígono sumamos las áreas de todos los triángulos que lo componen, obtenemos el área del polígono regular. La altura de cada uno de los triángulos recibe el nombre de **apotema** del polígono regular.

El **área de un polígono regular** de n lados, longitud del lado b y apotema a, la expresamos como: $A = \dfrac{n \times b \times a}{2}$.

Ejemplo

Hallemos el área del hexágono regular que se muestra en la figura 6.26.

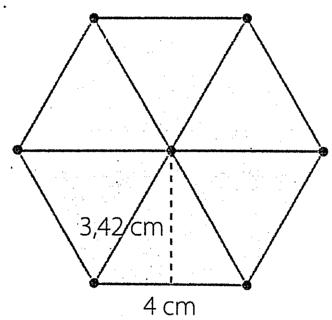


Figura 6.26

Solución

La longitud de cada uno de los lados del hexágono es 4 cm y su apotema es 3,42 cm. El área del hexágono de la figura es 41,04 cm^2:

$$A = \frac{6 \times 4 \text{ cm} \times 3{,}42 \text{ cm}}{2} = 41{,}04 \text{ cm}^2$$

Ejemplo

Daniel tiene un terreno circular y desea construir en él un corral para su ganado cercándolo con estacas. La cerca del terreno tiene forma de polígono regular, con vértices sobre el círculo. Daniel piensa en tres formas diferentes para el corral: pentágono regular, hexágono regular y decágono regular. Determinemos cuál de los tres polígonos debe elegir si quiere que el ganado tenga la mayor cantidad posible de terreno para pastar.

Solución

En la figura 6.27 se muestran los dibujos de las formas de los corrales que pensó Daniel.

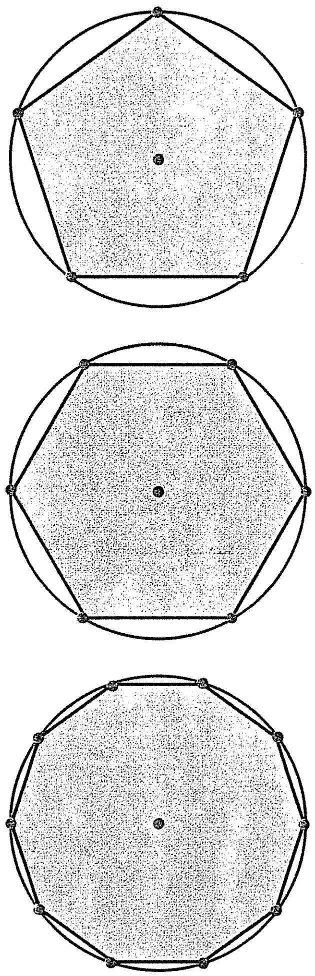


Figura 6.27

La cerca con forma de decágono regular es la que deja menos espacio sin cubrir del círculo, por tanto, el corral que debe seleccionar es el que tiene forma de decágono.

Infiere y argumenta

Compara las áreas que cubren los tres polígonos. ¿Qué puedes decir sobre la relación entre el número de lados del polígonos y el área del círculo?

Problema del día

En la construcción de un centro comercial se utilizaron dos tipos diferentes de tuberías para el agua: una de 12 pulgadas de diámetro y otra de 12,7 cm de radio.

Si la tubería de mayor diámetro tiene un costo de \$ 4500 por m^2 mientras que la de menor diámetro cuesta \$ 4100 por m^2, ¿cuál de las dos resulta más económica?

Desarrolla pensamiento crítico

Ejercitar procedimientos

Interpreta

1. Encuentra el área de cada polígono regular de la figura 6.28.

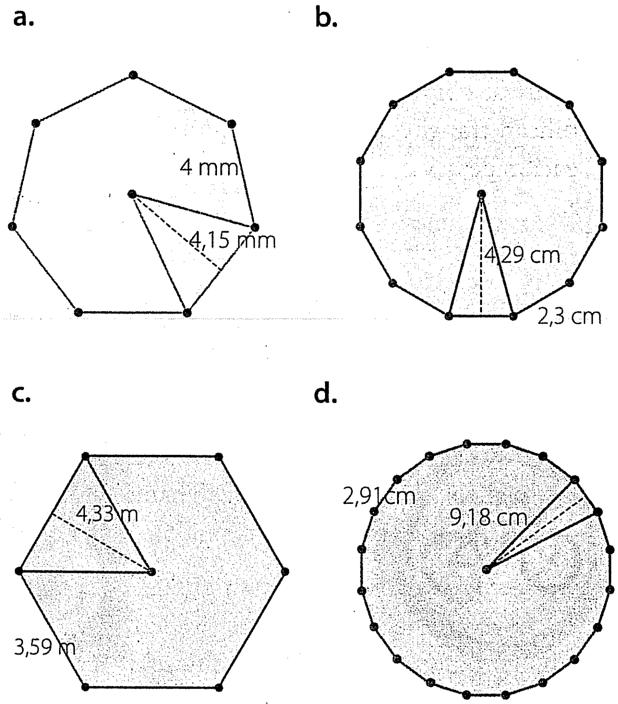


Figura 6.28

Pensar y razonar

Infiere

2. Construye con ayuda de un compás y un transportador 5 hexágonos regulares de diferentes medidas. Con una regla mide sus dimensiones y utiliza los resultados para completar los siguientes enunciados:

   a. El cociente entre los perímetros de dos polígonos regulares con la misma cantidad de lados es igual al cociente entre la longitud de dos ______________ correspondientes de los polígonos.

   b. El cociente entre las áreas de dos polígonos regulares con la misma cantidad de lados es igual al ______________ del cociente entre las longitudes de ________ lados correspondientes de los polígonos.

Comunicar y representar

Explica

3. Determina el valor de verdad de cada afirmación. Justifica tu respuesta.

   a. El área de un pentágono regular de lado 3 unidades es menor que el área de un decágono regular de lado 3 unidades.

   b. Si la longitud de un lado de un polígono regular se duplica, su área también se duplica.

Plantear y resolver problemas

Analiza

4. La longitud de los lados de un octágono regular de área 19,31 cm^2 es 2 cm. ¿Cuál es la medida de su apotema?

5. El área de un polígono regular es 58,14 dm^2, si su apotema mide 41,5 cm y la longitud de cada uno de sus lados es 0,4 m, ¿cuántos lados tiene el polígono?

Evalúa

1. Encuentra el área de la región coloreada de la figura 6.29, si se sabe que el área del hexágono es 96 cm^2.

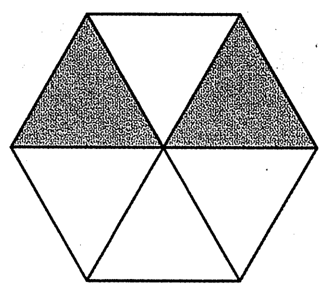


Figura 6.29

2. ¿Qué polígono tiene mayor área: un hexágono de lado 5 dm y 6 dm de apotema, o un pentágono de apotema 5 dm y lado 8 dm?

Desempeños

- Calcula el área sombreada en un polígono regular.
- Compara áreas de polígonos regulares.

Practica más, pág. 330.

La importancia de las señales de tránsito

Competencia ciudadana

Promuevo el respeto a la vida, frente a riesgos como ignorar señales de tránsito.

Las señales de tránsito nos ayudan a guiarnos en las calles y en las carreteras: nos indican distancias entre ciudades, proximidad de curvas y puentes, y nos dan la información que necesitamos conocer a lo largo de un trayecto. Están diseñadas de tal forma que las personas que hablan diferentes idiomas o tienen diferentes culturas pueden interpretar los mensajes que contienen.

Es muy importante que cada persona reconozca la mayoría de señales de tránsito y que esté en capacidad de interpretar las que no conoce cuando las encuentra en la vía pública, ya que conociendo y respetando las señales de tránsito ayudamos a que los accidentes de tránsito disminuyan notablemente y, en consecuencia, se salven muchas vidas al año; pero si no las conocemos y no las respetamos, nos exponemos, y a las demás personas con las que compartimos la vía pública, al riesgo de sufrir accidentes de tránsito.

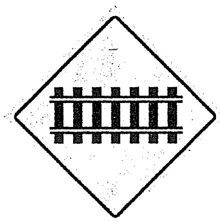
En el Código de tránsito de Colombia encontramos dos artículos que se refieren a la obligatoriedad y a la clasificación de estas señales:

Artículo 109. De la obligatoriedad. Todos los usuarios de la vía están obligados a obedecer las señales de tránsito de acuerdo con lo previsto en el artículo 5° de este código.

Artículo 110. Clasificación y definiciones. Clasificación y definición de las señales de tránsito:

- Señales reglamentarias: Tienen por objeto indicar a los usuarios de las vías las limitaciones, prohibiciones o restricciones sobre su uso y cuya violación constituye falta que se sancionará conforme a las normas del presente código.
- Señales preventivas: Tienen por objeto advertir al usuario de la vía la existencia de un peligro y la naturaleza de éste.
- Señales informativas: Tienen por objeto identificar las vías y guiar al usuario, proporcionándole la información que pueda necesitar.
- Señales transitorias: Pueden ser reglamentarias, preventivas o informativas y serán de color naranja. Modifican transitoriamente el régimen normal de utilización de la vía.

Tomado y adaptado de: http://señalesdetransito.com/



Preventivas

Reglamentarias

Informativas

Interpreta

1. ¿Cómo se clasifican las señales de tránsito?
2. Visita *http://señalesdetransito.com/* y explora las señales de tránsito. ¿Cuáles de estas señales reconoces cerca a tu colegio?

Feria de Jóvenes Empresarios, ¿qué es y para qué sirve?

Competencia empresarial
Identificación de oportunidades para crear empresas

Reconocer en el entorno las condiciones y oportunidades para la creación de empresas o unidades de negocio.

La Feria de Jóvenes Empresarios es un proyecto iniciado hace aproximadamente seis años por la Cámara de Comercio de Bogotá con el fin de estimular el emprendimiento empresarial de los jóvenes de la ciudad y de la región. En esta feria que dura 4 días, cada uno de los participantes tiene la oportunidad de mostrar su portafolio de servicios y productos y así poder generar nuevos negocios.

La feria está diseñada para que participen jóvenes empresarios de los siguientes sectores productivos: obras civiles, salud, artesanías, cuero, confección, metalmecánica, educación superior, alimentos y software.

La Cámara de Comercio de Bogotá (CCB) se ha planteado con el desarrollo de esta feria los siguientes objetivos:

- Generar la apertura de nuevos mercados locales, regionales y nacionales para los jóvenes empresarios productores.
- Identificar, caracterizar y ampliar la oferta de productos pertenecientes a empresas jóvenes de la ciudad y la región.
- Presentar los productos y servicios de los expositores al público en general.
- Desarrollar paralelamente a la exhibición comercial las jornadas académicas con énfasis en emprendimiento, comercialización y competitividad, entre otros.

El desarrollo de esta feria trae para los jóvenes empresarios diversos beneficios como, por ejemplo, un gran despliegue publicitario para sus productos y servicios, desarrollo de jornadas académicas de enfoque comercial y visita a sus *stands* de jefes de compra de empresas nacionales e internacionales.

Cada joven empresario tiene a su disposición en esta feria que se realiza en el centro ferial más importante de América Latina, CORFERIAS, un *stand* rectangular de 9,35 m^2 para exponer todo su portafolio de servicios y productos, el cual es financiado en 95% por la Cámara de Comercio de Bogotá.

Adaptado de: http://camara.ccb.org.co

Evalúa

1. ¿Qué es la Feria de Jóvenes Empresarios?
2. ¿Para qué sirve la Feria de Jóvenes Empresarios?
3. Dibuja las posibles formas que puede tener un *stand* de la Feria de Jóvenes Empresarios.

Desempeño

- Identifica oportunidades para crear o proveer bienes o servicios.

Evalúa tu pensamiento crítico

Las siguientes actividades te indicarán el nivel de competencia que has alcanzado y determinarán los desempeños que evidencian tu acción de aprendizaje.

Ejercitar procedimientos

Interpreta

1. Expresa cada longitud en la unidad que se indica:

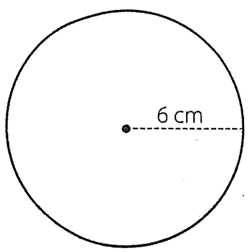
- **a.** 5,67 cm en dm.
- **b.** 0,0057 hm en mm.
- **c.** 45,67 dam en cm.
- **d.** 85,68 pulgadas en m.
- **e.** 0,16 dam en pies.

2. Transforma cada medida en la unidad indicada:

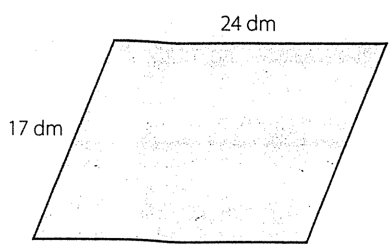
- **a.** 45,78 cm^2 en mm^2.
- **b.** 0,00078 km^2 en dam^2.
- **c.** 7 fanegadas en m^2.
- **d.** 47,38 dam^2 en hectáreas.
- **e.** 13 456 mm^2 en m^2.

3. Halla el perímetro y el área de cada polígono de la figura 6.30.

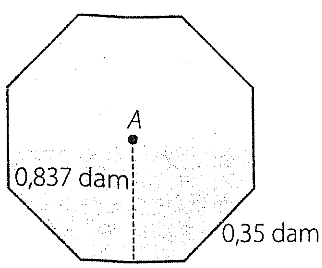
a.



b.



c.



d.

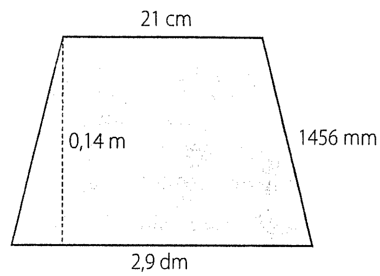


Figura 6.30

Pensar y razonar

Infiere

4. Con el objetivo de prepararse para una maratón, un atleta entrena cinco días de una semana. Cada día realiza los siguientes recorridos:

Lunes: 18 km, 47 hm y 67 m

Martes: 23 km, 56 hm y 2 dam

Miércoles: 22 km, 57 hm, 48 m y 78 cm

Jueves: 22 km, 43 hm, 56 dam y 65 m

Viernes: 23 km, 109 hm, 67 dam y 11 m

- **a.** Calcula la distancia recorrida cada día y exprésala en kilómetros.
- **b.** ¿Cuál es la diferencia entre la distancia que recorrió el viernes y la que recorrió el lunes?
- **c.** ¿Cuál fue la distancia total recorrida por el atleta en los 5 días de entrenamiento?

5. La tabla 6.9 muestra la medida del lado de cinco cuadrados.

- **a.** Completa la tabla.

Lado del cuadrado	Perímetro	Área
3 cm		
5 cm		
6 cm		
10 cm		
15 cm		

Tabla 6.9

- **b.** Usando los datos de la tabla 6.9, completa cada afirmación para que sea verdadera:

- El resultado de dividir el _______ de un cuadrado por la longitud de su lado es siempre igual a cuatro.
- El resultado de dividir el ______ de un cuadrado por la longitud de su lado es igual a la longitud del lado.

6. Dibuja en tu cuaderno dos figuras geométricas que tengan igual área, pero diferente perímetro.

Comunicar y representar ....

Explica

7. Determina el valor de verdad de cada afirmación. Justifica tu respuesta.

   a. Si la altura de un trapecio se duplica, su área también se duplica.

   b. Si el radio de un círculo de triplica, su área también se triplica.

   c. Si el lado del cuadrado se reduce a la mitad, su perímetro no cambia.

   d. Si la apotema de un hexágono regular se duplica, su perímetro también se duplica.

   e. El área y el perímetro de un triángulo rectángulo siempre son iguales.

Plantear y resolver problemas ....

Analiza

8. El perímetro de un círculo es 24,68 cm. ¿Cuál es la medida de su área?

9. El perímetro de un rectángulo es 24 metros. Si su largo es 2 metros mayor que su ancho, halla la medida del área.

10. El área de un paralelogramo es 56 dm^2 y su perímetro es 30 dm. Halla el largo y el ancho.

11. El área de un heptágono regular de apotema 4 dam es 70 dam^2. ¿Cuál es la medida del perímetro del heptágono?

12. Halla en cada figura el área de la región coloreada.

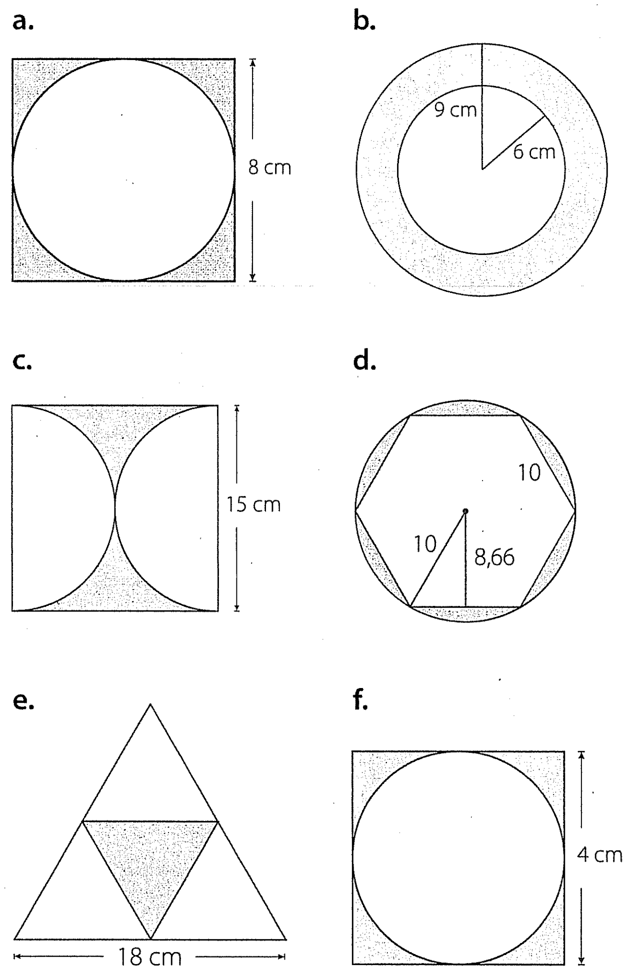


Figura 6.31

Autoevaluación

	Bajo	Básico	Alto	Superior
Reconozco y empleo unidades de longitud y de área en el sistema métrico decimal.				
Realizo conversiones entre unidades de longitud y de área en el sistema métrico decimal.				
Encuentro el área de polígonos.				
Hallo el área de círculos.				
Soluciono problemas que involucren conceptos relacionados con la longitud y el área de regiones planas.				
Trabajo fácilmente en matemáticas.				

Unidad 7

Pensamiento aleatorio

Estadística

Situación problema

La entrada de una nueva bebida gaseosa peruana al mercado de nuestro país le dio un nuevo dinamismo al sector de las bebidas refrescantes, ya que permitió diversificar los precios de las gaseosas.

Ciudad	Personas consumidoras
Bogotá	525
Medellín	350
Cali	300
Barranquilla	150
Cartagena	125
Montería	125
Manizales	25
Resto nacional	900

Tabla 7.1

Dada la ingeniosa estrategia de los peruanos de presentar su gaseosa bajo el lema de precio "justo", haciendo alusión a que las demás bebidas eran costosas, la reacción de una empresa colombiana líder fue impulsar su producto en las calles, a la par que anunció la reducción de sus precios. Además, durante una temporada regaló muestras del producto en envase retornable para que la gente lo conservara y luego pudiera comprar el producto a un precio menor que el que venían ofreciendo.

Otra empresa colombiana, aunque no bajó los precios, lanzó una promoción que consistía en que dos gaseosas de 2,5 litros cada una, más un vaso con pitillo se ofrecían por un valor menor.

Algunas estrategias de mercado que usan las empresas productoras de gaseosas se planean teniendo en cuenta las ciudades en las que el consumo de éstas es mayor. Según los resultados de un estudio en un grupo de personas que consumen gaseosa en todo el país, los principales consumidores se encuentran en las grandes ciudades. La tabla 7.1 muestra los resultados de dicho estudio.

Tomado y adaptado de:
http://www.dinero.com/negocios/refresca-mercado-gaseosas_40194.aspx
Publicado: 10/12/2007

Desarrolla pensamiento crítico

Interpreta

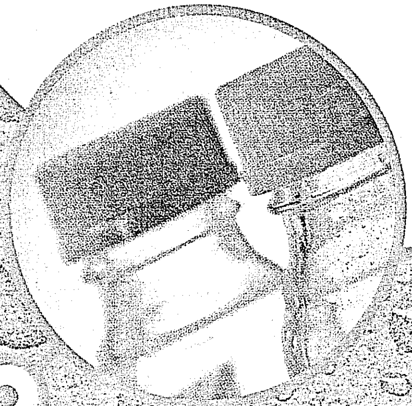
1. ¿Qué ventajas tiene para los consumidores la variedad de ofertas en los precios de la gaseosa?

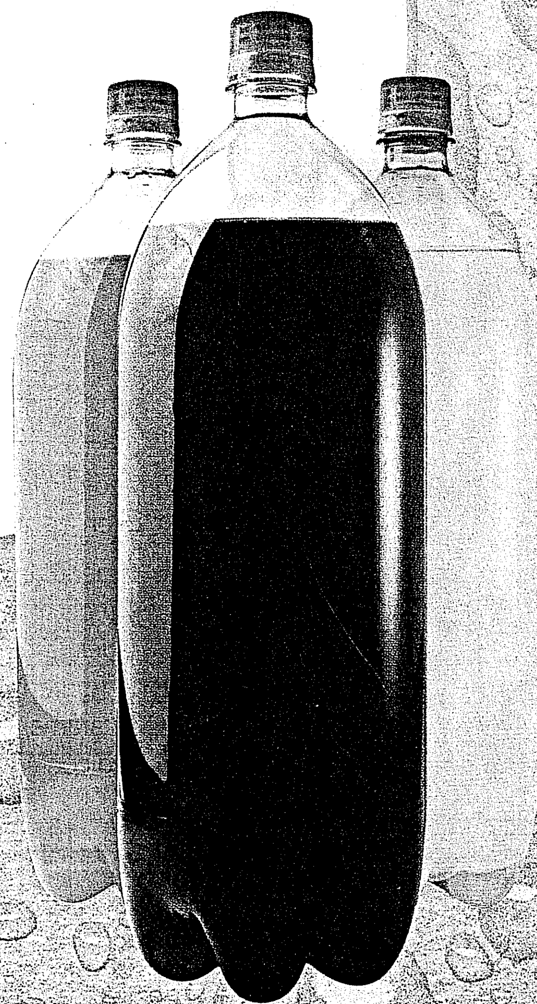
Infiere

2. De acuerdo con la información de la tabla 7.1, ¿en qué ciudad está la mayor cantidad de consumidores de gaseosa?
3. ¿A cuántas personas se les aplicó la encuesta?

Explica

4. ¿Podemos deducir cuál es la gaseosa de mayor consumo en las principales ciudades del país a partir de los datos de la tabla 7.1?





Lección Digital norma

Tablas de frecuencia de datos no agrupados

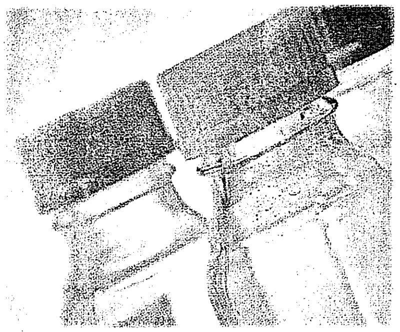
Cuando recolectas información y formas las tablas de frecuencias de datos puedes establecer las medidas de tendencia central y tomar decisiones importantes basadas en ellas. Refuerza estos conceptos en tu lección digital, en **http://www.normaparapensar.com**

Tema 56

Frecuencia absoluta, relativa y acumulada para datos no agrupados

Ideas previas

1. ¿Cuál es el conjunto de números que utilizamos para contar?
2. ¿Tiene sentido afirmar que existen 15,4 personas a las que les gusta alguna gaseosa en particular?
3. ¿Es posible que el número −5 se use para representar una cantidad de personas?
4. Argumenta por qué las expresiones 25%, 15 de 60, $\frac{1}{4}$ y 0,25 son equivalentes.



Analiza

Retomemos la pregunta *3.* de la situación problema. Si adicionamos los valores de la segunda columna de la tabla 7.1, obtenemos el número natural 2500, el cual usamos para indicar la cantidad de personas a las que se les aplicó el estudio sobre consumo de gaseosas. En este caso, la variable que medimos fue la *cantidad de personas* en cada ciudad. Esta variable es de tipo numérico, ya que está representando una cantidad de elementos que cumplen alguna característica. (*Ver* tabla 7.2).

Los datos de la segunda columna se conocen como **frecuencia** o **frecuencia absoluta**.

Llamamos **frecuencia absoluta** al número de veces que se repite un dato específico dentro de un conjunto.

De la tabla 7.2 podemos inferir que el número de personas con las que se realizó el estudio fue 2500, y que de éstas, 525 están en la ciudad de Bogotá, 350 en Medellín, 300 en Cali, 150 en Barranquilla, 125 en Cartagena, 125 en Montería y 25 en Manizales.

La penúltima fila de la tabla contiene el dato del "resto nacional", equivalente a 900 personas; lo que quiere decir que aunque el estudio contempló más ciudades, la cantidad de personas en cada ciudad no era superior a 25, y por tanto no figuran por separado en la lista. Por ejemplo, los datos correspondientes a Bucaramanga y a Pereira no aparecen porque en estas ciudades el estudio se hizo con 4 y con 2 personas, respectivamente.

Ciudad	Frecuencia o frecuencia absoluta
Bogotá	525
Medellín	350
Cali	300
Barranquilla	150
Cartagena	125
Montería	125
Manizales	25
Resto nacional	900
Total	2500

Tabla 7.2

Frecuencia relativa

Otra forma de expresar que en la ciudad de Bogotá la cantidad de personas es 525, es diciendo que en este grupo se encuentra 21% de las personas encuestadas.

¿Cómo obtenemos ese porcentaje?

La relación entre el número de personas que está en ese grupo y el total de las personas encuestadas se puede expresar con la fracción $\frac{525}{2500}$, que a su vez se puede escribir como un número decimal o como **porcentaje**:

Fracción	Número decimal	Porcentaje
$\frac{525}{2500}$	0,21	21%

Tabla 7.3

Los valores 0,21 o 21% corresponden a la **frecuencia relativa** de la categoría de personas consumidoras de gaseosa que son de la ciudad de Bogotá.

La **frecuencia relativa** se puede expresar como una fracción, como un número decimal o como un porcentaje. Se obtiene dividiendo la frecuencia absoluta por el número total de datos.

Infiere y completa

Completa la tabla 7.4 de frecuencias relativas sobre la ciudad a la que pertenecen los consumidores de gaseosa a nivel nacional.

Ciudad	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa		
		Fracción	Decimal	Porcentaje
Bogotá	525	$\frac{525}{2500}$	0,21	21%
Medellín	350	$\frac{350}{\square}$	0,14	14%
Cali	300	$\frac{300}{2500}$		12%
Barranquilla	150	$\frac{150}{2500}$	0,06	
Cartagena	125	$\frac{\square}{2500}$	0,05	
Montería	125	$\frac{125}{2500}$		
Manizales	25	$\frac{\square}{2500}$		
Resto nacional	900		0,36	
Total	2500	1	1	100%

Tabla 7.4

¿Qué significa?

La palabra **porcentaje** se refiere al número de partes que nos interesan de un total de 100. Por ejemplo, la expresión *"veinte por ciento"* se representa como 20%, y significa que consideramos *"veinte de cada cien"*. Escrito en forma decimal es 0,2:

$$20\% = \frac{20}{100} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} = 0{,}2$$

Frecuencia acumulada

Usando los valores de las frecuencias absolutas y las frecuencias relativas podemos determinar la frecuencia acumulada.

Ejemplo

Como parte de un estudio, la sicóloga de un colegio selecciona al azar un grupo de veinte estudiantes y les pregunta sobre la cantidad de hermanos que tienen. Las respuestas obtenidas fueron las siguientes: 5, 8, 3, 5, 9, 1, 3, 12, 4, 5, 1, 2, 3, 4, 8, 0, 5, 3, 4, 5.

a. ¿Cuántos estudiantes tienen tres hermanos?

b. ¿Cuál es la frecuencia relativa correspondiente al hecho de que se tengan dos hermanos?

c. ¿Cuántos estudiantes tienen como máximo dos hermanos?

Solución

a. Para facilitar la lectura de los datos organizamos la información, haciendo el recuento de las respuestas obtenidas. Después de hacer el recuento registramos la información en una tabla de frecuencias:

Número de hermanos	0	1	2	3	4	5	8	9	12	Total
Frecuencia absoluta	1	2	1	4	3	5	2	1	1	20

Tabla 7.5

De la tabla 7.5 podemos inferir que de los veinte estudiantes, cuatro tienen tres hermanos.

b. Usando las frecuencias absolutas, podemos hallar las frecuencias acumuladas y relativas, como se muestra en la tabla 7.6.

Número de hermanos	Frecuencia absoluta	Frecuencia acumulada	Frecuencia relativa			Frecuencia relativa acumulada
			Fracción	Decimal	Porcentaje	Fracción
0	1	2	$\frac{1}{20}$	0,05	5%	$\frac{2}{20}$
1	2	3	$\frac{2}{20}$	0,10	10%	$\frac{3}{20}$
2	1	**4**	$\frac{1}{20}$	0,05	5%	$\frac{4}{20}$
3	4	8	$\frac{4}{20}$	0,20	20%	$\frac{8}{20}$
4	3	11	$\frac{3}{20}$	0,15	15%	$\frac{11}{20}$
5	5	16	$\frac{5}{20}$	0,25	25%	$\frac{16}{20}$
8	2	18	$\frac{2}{20}$	0,10	10%	$\frac{18}{20}$
9	1	19	$\frac{1}{20}$	0,05	5%	$\frac{19}{20}$
12	1	20	$\frac{1}{20}$	0,05	5%	$\frac{20}{20}$
Total	20			1	100%	

Tabla 7.6

La frecuencia relativa correspondiente al hecho de tener dos hermanos es 5%, es decir que 5% de los estudiantes entrevistados tiene dos hermanos.

c. Para determinar el número de estudiantes que tienen como máximo dos hermanos, ubicamos la casilla que está en la tercera columna y a su vez en la cuarta fila de la tabla. El número localizado en dicha casilla es 4; por tanto, hay 4 estudiantes que tienen como máximo dos hermanos.

La **frecuencia acumulada** de un dato es la suma de las frecuencias absolutas de todos los valores inferiores o iguales al valor considerado.

Analiza y argumenta

Observa la tabla 7.6. ¿Por qué la casilla correspondiente al total de la frecuencia relativa decimal es 1, y la correspondiente al porcentaje total es 100%?

Desarrolla pensamiento crítico

Ejercitar procedimientos

Interpreta

1. En un peaje situado a la salida de una ciudad se registra el número de carros que pasan cada día, durante una semana. El resultado se presenta en la tabla 7.7.

Día	Número de vehículos
Lunes	1863
Martes	941
Miércoles	916
Jueves	728
Viernes	1962
Sábado	2818
Domingo	3114
Total	12 342

Tabla 7.7

De acuerdo con la tabla, responde las preguntas:

a. ¿Sobre qué conjunto se hizo el estudio?

b. ¿Cuál es la frecuencia absoluta correspondiente al día martes?

c. ¿Cuál es la frecuencia relativa del día miércoles? Expresa la frecuencia relativa como fracción, como decimal y como porcentaje.

d. ¿En cuál día se registró el mayor número de vehículos por el peaje?

e. ¿En cuál día se registró el menor número de vehículos por el peaje?

Comunicar y representar

Explica

2. Determina si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F) y justifica tu respuesta.

a. Usando las frecuencias relativas se hallan las frecuencias absolutas. ( )

b. La frecuencia absoluta se puede expresar como un número fraccionario. ( )

c. La frecuencia absoluta se puede expresar como un número decimal. ( )

d. La frecuencia acumulada es el número de veces que se repite un dato específico en un conjunto de elementos. ( )

e. Los valores de la frecuencia relativa no pueden ser números decimales. ( )

Pensar y razonar

Infiere

3. La cantidad de televisores que poseen varias familias en un sector de una ciudad aparece en la tabla 7.8.

Cantidad de televisores	Frecuencia absoluta	Frecuencia acumulada	Frecuencia relativa		Frecuencia relativa acumulada
			Fracción	Porcentaje	Fracción
1	5	5	$\frac{5}{45}$	11,11%	
2		21		35,56%	$\frac{21}{45}$
3	13			28,89%	
4		41			
5	4	45			
Total	45			100%	

Tabla 7.8

a. Escribe los datos que faltan en la tabla 7.8.

b. ¿Cuántas familias tienen como máximo tres televisores?

c. ¿Cuántas familias tienen por lo menos dos televisores?

d. ¿Qué porcentaje de familias tiene entre 3 y 5 televisores?

Plantear y resolver problemas

Analiza

4. Los datos que aparecen a continuación corresponden a la estatura, medida en centímetros, de los estudiantes de sexto grado: 146, 150, 152, 148, 155, 148, 161, 163, 156, 160, 152, 145, 147, 157, 149, 157, 148, 145, 155, 145, 146, 147, 146, 156, 147, 148, 160, 148, 154, 149, 149, 151, 150, 153, 152.

a. Ordena los datos y construye una tabla de frecuencias absolutas.

b. ¿Cuál es la estatura de mayor frecuencia?

c. Si los datos de las estaturas se usan para determinar la altura a la cual se pondrá el tablero en la pared, para que todos los estudiantes puedan escribir en él, ¿cuáles de los anteriores datos es indispensable tener en cuenta? Justifica tu respuesta.

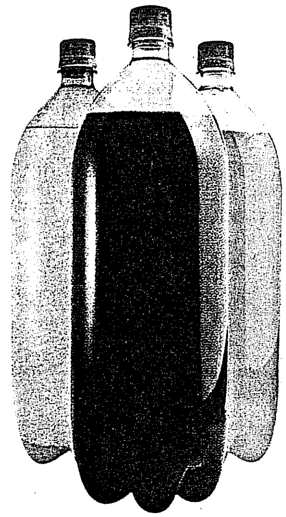
5. Pregúntales a tus compañeros de curso sobre su sabor de gaseosa preferido. Con los resultados elabora una tabla de frecuencias y responde las siguientes preguntas:

a. ¿Cuál es el sabor de mayor preferencia?

b. ¿Qué porcentaje representa el sabor de menor preferencia?

c. ¿Cuál es la frecuencia relativa que corresponde a cada sabor?

d. ¿Cuál es la frecuencia acumulada que corresponde a cada sabor?



Evalúa

En un edificio que tiene 20 apartamentos se hizo una encuesta sobre el número de personas que habitan en cada vivienda y se concluyó que en cada apartamento viven 1, 2, 3 o 4 personas. La tabla 7.9 muestra las frecuencias relativas para 1, 2 y 4 personas. ¿En cuántos apartamentos viven 3 personas?

Personas en cada vivienda	Frecuencia relativa
1	5%
2	30%
4	30%

Tabla 7.9

Desempeño

- Propone soluciones a problemas que involucran los diferentes tipos de frecuencia.

Practica más, pág. 331.

Tema 57

Pictogramas

Ideas previas

1. Escribe el tipo de dibujo que usarías para representar cada conjunto de datos:
   - **a.** El conjunto de las ventas en un almacén de discos compactos.
   - **b.** La cantidad de rosas que se venden en una floristería durante una semana.
   - **c.** La población de un país en determinado periodo de tiempo.
   - **d.** Los puntajes de varios equipos de fútbol, al finalizar un torneo.

2. Si por convención se usa el dibujo de un galón de gasolina para representar 12 galones,
   - **a.** ¿cuántos galones se deben dibujar para representar 24 galones?
   - **b.** ¿Cuántos galones se deben dibujar para representar 84 galones?
   - **c.** ¿Cuántos galones se deben dibujar para representar 147 galones?

Interpreta

El número de botellas de gaseosa que contiene una canasta depende del tamaño de las mismas; por ejemplo, si las botellas son de tamaño personal, es decir, 350 c.c., la canasta contendrá 30 botellas, pero si se trata de botellas de 3 litros, la canasta tendrá solamente seis botellas.

La unidad con la que estamos haciendo las comparaciones es la canasta; por tanto, podemos hacer el dibujo de una canasta para representar varias unidades de gaseosa y elaborar un **pictograma**.

Un **pictograma** es un diagrama en el que se representa la información mediante un dibujo que ilustra la cantidad de elementos de un grupo.

Ejemplo

Representemos los datos de la tabla 7.10 en un pictograma. En la tabla aparece el registro de la cantidad de gaseosas de tamaño personal que deja el camión distribuidor en las diferentes tiendas de un barrio de la ciudad.

Tienda	Cantidad de gaseosas
Don Pepe	90
El vecino	150
El mirador	120
Azabache	45
Nutibara	60
El amigo	30
Mi Tolima	60

Tabla 7.10

Solución

Cada canasta contiene treinta gaseosas, entonces para la tienda *Don Pepe*, la cantidad de canastas que se usan es 3. En el caso de la tienda *Azabache*, el número de canastas será 1,5, es decir, una canasta más la mitad de otra canasta.

La tabla 7.11 muestra el número de canastas que se deben pintar para representar cada dato, teniendo en cuenta que una canasta está conformada por 30 gaseosas.

Tienda	Cantidad de gaseosas	Número de canastas
Don Pepe	90	3
El vecino	150	5
El mirador	120	4
Azabache	45	1,5
Nutibara	60	2
El amigo	30	1
Mi Tolima	60	2

Tabla 7.11

Con la información de la tabla elaboramos el pictograma correspondiente:

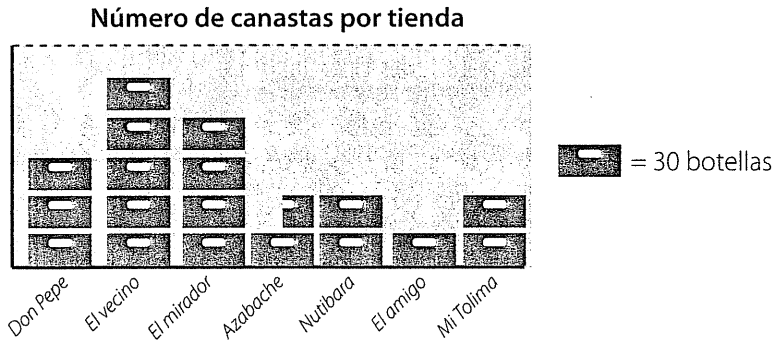


Figura 7.1

Infiere y representa

Al cambiar el tamaño de las botellas por cada canasta, cambia la cantidad de canastas en cada dibujo. Si cada canasta contiene seis gaseosas, determina el número de canastas que debes usar para representar cada dato y usa la información para elaborar un pictograma.

Las siguientes, son las **características** de un **pictograma**:

- La información se representa con dibujos que tienen relación con el tema.
- Cuando el dibujo tiene un valor fijo, debe aparecer una convención que indique cuántas unidades representa.
- Cuando se quiere mostrar parte del grupo, el dibujo no se cambia por uno más pequeño, sino que se toma alguna parte de él, de tal manera que sea proporcional a lo que se quiere ilustrar.

Dato histórico

La palabra pictografía proviene del latín *pictus*, que significa pintar, y *grafía*, es decir, se trata de una escritura en la que las palabras se representan por medio de objetos dibujados. Los primeros sistemas de escritura de la humanidad (babilonio, asirio, egipcio, chino o maya) son de carácter pictográfico o ideográfico, o resultan de una combinación de ambos.

Desarrolla pensamiento crítico

Ejercitar procedimientos

Interpreta

1. Un parque de atracciones mecánicas recibe un sábado a 4610 personas. El registro de la cantidad de personas que ingresan a una sola atracción mecánica de las ofrecidas por el parque se presenta en la tabla 7.12.

Atracciones	Visitantes
Montaña rusa	1600
Carros chocones	1200
La araña	400
El martillo	510
Carrusel	900

Tabla 7.12

Usando la información de la tabla 7.12, elabora un pictograma. El dibujo que escojas para representar el número de visitantes equivale a 200 personas.

Comunicar y representar

Explica

2. En la tabla 7.13 aparecen los datos de un estudio estadístico, pero están incompletos. Plantea una situación que dé lugar a las frecuencias que se presentan y completa la tabla.

	Frecuencia
	36
	12
	48
	60
	30
	90
	54

Tabla 7.13

Elabora un pictograma con los datos de la tabla 7.13.

3. Determina si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F) y justifica tu respuesta.

   a. Es correcto mezclar diferentes tamaños del mismo dibujo dentro de un pictograma. ( )

   b. Es correcto mezclar diferentes ilustraciones en el mismo pictograma. ( )

   c. En un pictograma se representa una distribución de frecuencias relativas. ( )

   d. En un pictograma se representa una distribución de frecuencias absolutas. ( )

   e. Usando un pictograma puedo representar grupos de 2,5 personas. ( )

   f. Usando un pictograma puedo representar 2,5 grupos de personas. ( )

Pensar y razonar

Infiere

4. A partir del pictograma que se muestra en la figura 7.2, construye una tabla de frecuencias. ¿Cómo cambia la tabla de frecuencias si se cambia el número de elementos que asignas a cada uno de los cd del pictograma?

Número de discos compactos

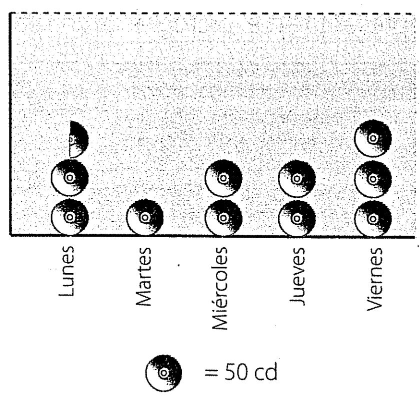


Figura 7.2

Plantear y resolver problemas

Analiza

5. Para cada una de las tablas de datos y de acuerdo con la convención dada, construye un pictograma.

   a. En un almacén se registra el número de camisetas que se venden cada semana. La tabla 7.14 presenta el registro de una semana. Convención: 10 camisetas se representan con una camiseta.

Día	Número de camisetas vendidas
Lunes	30
Martes	45
Miércoles	5
Jueves	75
Viernes	90
Sábado	150
Domingo	125

Tabla 7.14

   b. En la tabla 7.15 se presentan las ventas semestrales de un cultivo de rosas durante 6 meses. Convención: 50 docenas de rosas se representan con una rosa.

Mes	Decenas vendidas
Enero	200
Febrero	150
Marzo	125
Abril	125
Mayo	250
Junio	300

Tabla 7.15

6. El número de líneas telefónicas instaladas en una determinada ciudad durante 3 años consecutivos se representa en el pictograma de la figura 7.3.

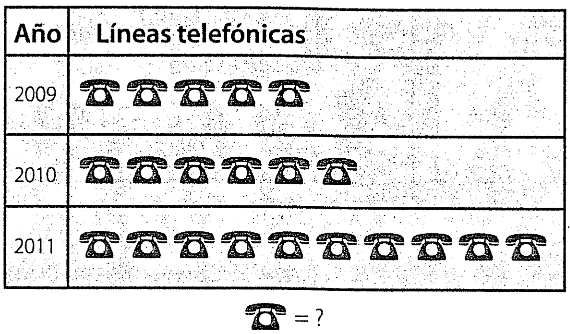


Figura 7.3

Si se sabe que en 2009 se instalaron 50 000 líneas telefónicas,

a. ¿cuántas líneas se representan con el dibujo de un teléfono?

b. ¿Cuántas líneas se instalaron en 2010?

c. ¿Cuántas líneas se instalaron en 2011?

d. ¿Cuántas líneas de más se instalaron en 2011 con relación a las líneas instaladas en 2009?

Evalúa

En el pictograma de la figura 7.4 están representados los datos sobre la población de un país desde 1591 hasta 2011, cada veinte años.

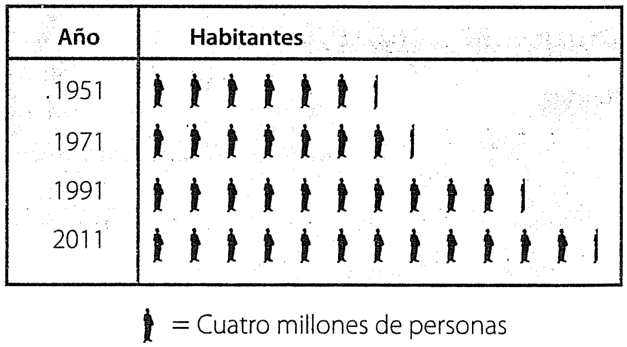


Figura 7.4

Si el dibujo de cada persona completa representa 4 millones de personas, selecciona la afirmación que es verdadera:

a. En 1951 había 21 millones de habitantes.

b. En 1971 había 4 millones de habitantes más que en 1951.

c. Cada veinte años la población aumentó en 4 millones de personas.

d. En 2011 la población era el doble que en 1951.

Desempeño

- Interpreta datos presentados en pictogramas.

Practica más, pág. 331.

Tema 58

Diagramas de barras y diagramas circulares

Ideas previas

1. En un círculo, dibuja de manera consecutiva los sectores circulares cuyos ángulos centrales miden respectivamente: 55°, 112°, 26°, 11°, 69° y 87°.

2. Halla el porcentaje que se indica en cada caso:
   - **a.** El 20% de 5000.
   - **b.** El 25% de 226.
   - **c.** El 36% de 450.

3. Efectúa las siguientes multiplicaciones:
   - **a.** $10 \times 3{,}6$
   - **b.** $10 \times 2{,}5$
   - **c.** $10 \times 4{,}7$

Diagrama de barras

Analiza

En la tabla 7.16 se muestra la información recolectada de 32 jóvenes a los que se les preguntó sobre la actividad que llevan a cabo en su tiempo libre.

Actividad	Frecuencia	Frecuencia relativa	
		Fracción	Porcentaje
Lectura	4	$\frac{4}{32}$	12,5%
Deportes	4	$\frac{4}{32}$	12,5%
Música	2	$\frac{2}{32}$	6,25%
Ver televisión	4	$\frac{4}{32}$	12,5%
Juegos electrónicos	8	$\frac{8}{32}$	25%
Internet	10	$\frac{10}{32}$	31,25%
Total	32	$\frac{32}{32}$	100%

Tabla 7.16

Con los datos de la tabla 7.16 podemos elaborar un diagrama de barras de la siguiente manera:

Paso 1.
Dibujamos dos semirrectas perpendiculares. Sobre la semirrecta horizontal situamos cada una de las actividades que aparecen en la tabla, asignando a cada una segmentos iguales. En la semirrecta vertical situamos la frecuencia de cada dato.

Paso 2.
A partir de cada segmento de la semirrecta horizontal dibujamos rectángulos cuyas alturas están determinadas por las frecuencias correspondientes. (*Ver* figura 7.5).

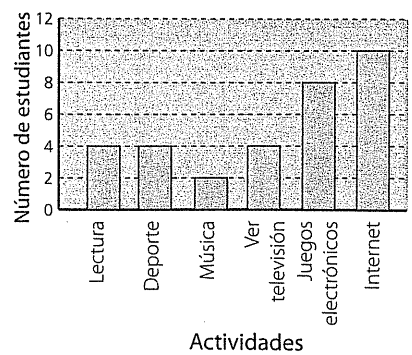


Figura 7.5

Pensamiento aleatorio

¿Qué significa?

Un **círculo** es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia a otro punto fijo, llamado centro, es menor o igual que la longitud del radio.

Un **diagrama de barras** es un gráfico que muestra la variación de los datos con relación a una característica analizada en un conjunto. Esta variación se representa mediante barras horizontales o verticales.

Infiere y responde

En el diagrama de la figura 7.5 el rectángulo de mayor altura corresponde a la actividad preferida por los jóvenes. ¿Cuál es la actividad preferida por los jóvenes que fueron encuestados?, ¿cuál es la actividad que menos practican?

Diagramas circulares

Para representar datos también podemos elaborar un diagrama circular, el cual se construye dividiendo un **círculo** en regiones, cada una de las cuales es proporcional al porcentaje que se quiere representar.

Ejemplo

Elaboremos un diagrama circular para representar los datos registrados en la tabla 7.16.

Actividad en el tiempo libre

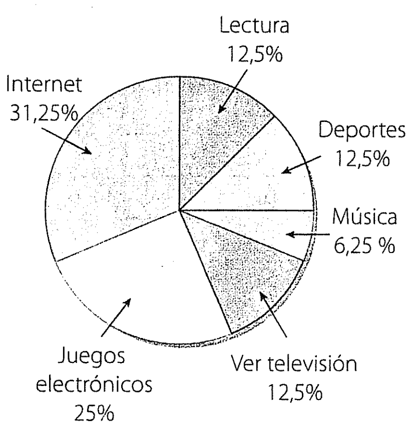


Figura 7.6

Solución

Para representar los datos en un diagrama circular es necesario conocer la medida del ángulo que representa cada región.

Teniendo en cuenta que al 100% de los datos se le asigna todo el círculo, es decir, los 360°, entonces a cada 1% de la información se le asigna un ángulo de 3,6°.

Para el caso de los jóvenes que leen, el porcentaje es 12,5%; por tanto, el ángulo correspondiente en el diagrama circular es $12{,}5 \times 3{,}6 = 45°$. En el caso de la categoría juegos electrónicos, sería: $25 \times 3{,}6 = 90°$.

El diagrama circular de la figura 7.6 representa cada una de las actividades a las que los estudiantes dedican el tiempo libre.

Interpreta y completa

Escribe la medida del ángulo que corresponde a cada actividad, de acuerdo con los datos de la tabla 7.16:

Música ________ Deportes ________

Internet ________ Ver televisión ________

Verifica las medidas de los ángulos en el diagrama de la figura 7.6.

Desarrolla pensamiento crítico

Ejercitar procedimientos

Interpreta

1. La tabla 7.17 muestra la cantidad de días festivos que tienen algunos países de Suramérica. Completa la columna correspondiente a la frecuencia relativa:

País	Frecuencia	Frecuencia relativa
Argentina	12	
Bolivia	9	
Brasil	15	
Chile	15	
Colombia	18	
Ecuador	13	
Venezuela	11	
Total	93	100%

Tabla 7.17

   a. De acuerdo con los datos de la tabla, ¿cuál es el país con menor cantidad de días festivos?

   b. Elabora el diagrama de barras que represente los datos de la tabla. ¿A qué país le corresponde el rectángulo de mayor altura?, ¿a qué país le corresponde el rectángulo de menor altura?

2. Los resultados de un estudio estadístico se representan en el diagrama de barras de la figura 7.7. Plantea una situación que dé lugar a las frecuencias que allí se presentan y elabora una tabla de frecuencias con esta información.

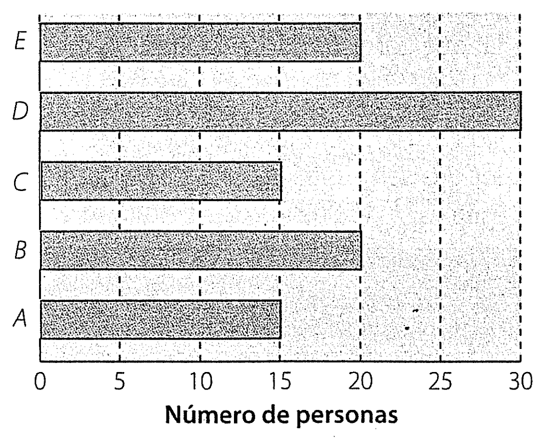


Figura 7.7

Comunicar y representar

Explica

3. Determina si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F) y justifica tu respuesta.

   a. En un diagrama de barras, estas sólo pueden ser verticales. ( )

   b. Para elaborar un diagrama de barras es necesario conocer solamente las frecuencias. ( )

   c. Para elaborar un diagrama circular es necesario conocer solamente las frecuencias. ( )

   d. Con los datos de las frecuencias acumuladas es posible construir los diagramas de barras y el circular. ( )

   e. Toda información que esté representada en un diagrama de barras se puede representar en un diagrama circular y viceversa. ( )

   f. En un gráfico de barras, la barra de mayor altura representa el dato que tiene mayor frecuencia. ( )

   g. Es indispensable escribir el porcentaje en cada uno de los sectores dentro del diagrama circular. ( )

4. ¿Existe alguna diferencia en cuanto a la interpretación de un conjunto de datos si en lugar de utilizar un diagrama de barras verticales, se utiliza un diagrama de barras horizontales? Argumenta tu respuesta.

Pensar y razonar

Infiere

5. El diagrama circular de la figura 7.8 presenta los resultados de un estudio sobre el cumplimiento de las expectativas por parte del alcalde de una ciudad en sus habitantes. Los pobladores contestaron si el alcalde electo había llenado o no las expectativas que tenían de él; y algunos no respondieron.

Aprobación de la gestión del alcalde

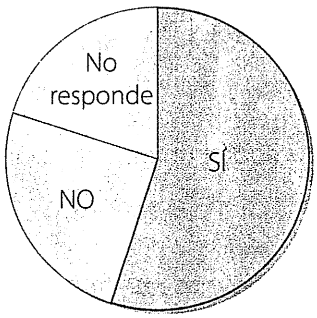


Figura 7.8

De acuerdo con el diagrama de la figura 7.8,

a. Estima el porcentaje de habitantes que están satisfechos con la función del alcalde.

b. Estima el porcentaje de habitantes que no están satisfechos con la función del alcalde.

c. Estima el porcentaje de habitantes que no respondió la pregunta.

d. Usa el transportador para determinar el ángulo correspondiente a cada región del diagrama circular y con ese dato calcula el porcentaje de cada una. Si la encuesta se realizó a 7000 personas, ¿cuál es la cantidad de personas que están representadas en cada sector del diagrama?

6. Diseña una pregunta que no tenga más de cinco opciones de respuesta. Formula la pregunta a tus compañeros de curso y organiza las respuestas en una tabla. Con esta información elabora un diagrama circular y determina cuál de las opciones abarca más de 75% de la información.

Plantear y resolver problemas

Analiza

7. Sandra tiene un salario mensual de \$ 2 700 000, de los cuales la empresa le descuenta \$ 108 000 por concepto de pensión obligatoria, \$ 27 000 de aporte al fondo de solidaridad y \$ 108 000 de servicio de salud.

a. Representa la información en un diagrama circular.

b. ¿Qué porcentaje de los descuentos corresponde al fondo de solidaridad?

c. ¿Qué porcentaje del salario le descuentan a Sandra?

Evalúa

Un almacén de ropa masculina tiene registradas las ventas de un año por trimestres. La tabla 7.18 muestra la información organizada correspondiente al año anterior.

Trimestre	Ventas (en millones de pesos)
Primero	180
Segundo	160
Tercero	125
Cuarto	215
Total	680

Tabla 7.18

a. Elabora un diagrama de barras y un diagrama circular para representar la información anterior.

b. ¿Cuál es la medida del ángulo del sector circular que corresponde al segundo trimestre?

c. Usa los dos diagramas para escribir dos argumentos diferentes que justifiquen que en los dos semestres del año las ventas fueron iguales.

Desempeños

- Representa información mediante diagramas de barras y diagramas circulares.
- Interpreta datos presentados en diagramas de barras o diagramas circulares.

Practica más, pág. 332.

Tema 59

Diagramas de líneas

Ideas previas

1. Dibuja en un plano cartesiano los puntos cuyas coordenadas son $P = (1, 2)$; $A = (3, 4)$; $B = (5, 2)$; $C = (6, 5)$ y únelos con segmentos de recta.
2. Escribe tres ejemplos de datos que sean cuantitativos y tres ejemplos de datos que sean cualitativos.
3. ¿Qué tipo de diagrama es más conveniente para representar datos cuantitativos?
4. ¿Qué tipo de diagrama es más conveniente para representar datos cualitativos?

Analiza

En Colombia, cada año el gobierno nacional de común acuerdo con representantes de grupos económicos decide el incremento del salario mínimo mensual. La tabla 7.19 muestra los incrementos del salario mínimo desde el año 2000 en términos de porcentajes.

Año	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011
Porcentaje (%)	10	9,96	9,04	7,44	7,83	6,56	6,95	6,3	6,41	7,64	3,64	4

Tabla 7.19

El porcentaje que aparece en la tabla 7.18 se mide en periodos anuales. De los valores de la tabla podemos inferir que la tendencia del incremento del salario mínimo cada año es ir disminuyendo, es decir, que cada vez aumenta en una cantidad menor comparada con los años anteriores, salvo en el caso de 2009 y 2011 en los que hubo un leve incremento.

Los datos en los que intervienen **series de tiempo** se representan usando **diagramas de líneas**, en los que la variable "tiempo" se ubica en el eje horizontal. La interpretación de este tipo de datos brinda la posibilidad de predecir su comportamiento a futuro. Por ejemplo, podemos determinar variaciones en el clima, las acciones, los precios del dólar o el incremento del salario cada año.

Ejemplo

Hallemos el valor del salario mínimo establecido para el año 2001, si se sabe que el salario mínimo en el año 2000 era $ 260 100.

Solución

Como se puede ver en la tabla 7.18 el incremento para el año 2001 fue del 9,96%, por lo tanto, el salario mínimo en el 2001 aumentó $ 25 906:
$260\,100 \times 9{,}96\% = 25\,906$. El salario mínimo para el 2001 fue $ 286 006:
$260\,100 + 25\,906 = 286\,006$.

¿Qué significa?

Cuando se recolecta la información de una variable numérica en iguales intervalos de tiempo, se dice que el conjunto de datos forma una **serie de tiempo**.

Incremento en porcentajes del salario mínimo

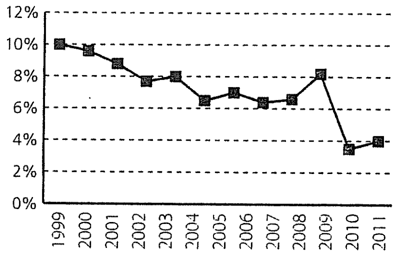


Figura 7.9

Ejemplo

Dibujemos el diagrama de líneas que muestre los cambios en el aumento del salario mínimo, de un año al siguiente.

Solución

Para representar los datos trazamos un plano cartesiano. En el eje horizontal ubicamos una escala de una unidad, para representar los años (tiempo) y en el eje vertical una escala de 1 cm o 2 cm, para representar los porcentajes.

En cada año marcamos con un punto el valor correspondiente y, finalmente, unimos con segmentos de recta los puntos que marcamos en el plano cartesiano. (*Ver* figura 7.9).

Desarrolla pensamiento crítico

Ejercitar procedimientos

Interpreta

1. El diagrama de líneas que se muestra en la figura 7.10 corresponde a las ventas (en millones de pesos) de un almacén. Las ventas se registraron durante un tiempo de ocho años, cada uno de los cuales está dividido en periodos trimestrales; por tanto, las ventas del primer trimestre se registraron a finales del mes de marzo (que corresponde al primer punto, de izquierda a derecha), las del segundo trimestre a finales del mes de junio (corresponde al segundo punto de izquierda a derecha), las ventas del tercer trimestre a finales del mes de septiembre (tercer punto) y las del cuarto trimestre a finales del mes de diciembre (cuarto punto).

Registro en ventas en periodos trimestrales

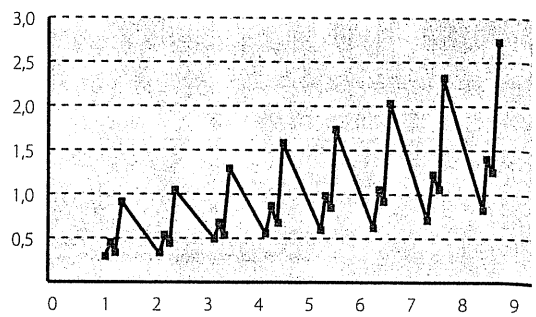


Figura 7.10

De acuerdo con la gráfica, responde:

a. Para cada año, ¿en qué trimestre se registra la menor venta?

b. Para cada año, ¿en qué trimestre se registra la mayor venta?

c. ¿Se puede decir que año tras año las ventas van aumentando?, argumenta tu respuesta.

d. ¿Hay algún comportamiento repetitivo durante cada año?

Comunicar y representar

Explica

2. En una librería se lleva el registro de los precios año tras año de los libros y revistas que ofrece. En la tabla 7.20 se muestra el cambio del precio en un libro y en una revista determinados durante un periodo de cinco años.

Año	1	2	3	4	5
Libro	\$ 20 400	\$ 22 300	\$ 23 300	\$ 24 600	\$ 27 000
Revista	\$ 30 000	\$ 33 400	\$ 36 000	\$ 39 800	\$ 45 700

Tabla 7.20

a. Elabora dos diagramas de líneas usando el mismo plano cartesiano. En un diagrama representa los precios del libro y en el otro los precios de la revista de un año al otro.

b. Compara los precios del libro y la revista en el diagrama. ¿Cuál de los dos productos presentó mayor incremento?

c. ¿De cuánto fue el incremento, en porcentaje, de los precios del quinto año comparados con los del primer año?

3. Determina si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F) y justifica tu respuesta.

a. La tendencia en un diagrama de líneas cambia cuando se varía la escala en el eje vertical; por ejemplo, que se duplique. ( )

b. Si se tiene la información sobre la estatura de varios estudiantes, medida en centímetros, esta información la puedo representar en un diagrama de líneas. ( )

c. En un mismo diagrama de líneas es correcto mezclar diferentes escalas de tiempo. Por ejemplo, información dada en días con información dada en semanas. ( )

d. La información que se representa en un diagrama de líneas se recolecta en un solo momento. ( )

Pensar y razonar

Infiere

4. En la tabla 7.21 aparecen organizados los datos sobre el peso (en kg) que ganó un grupo de cachorros en diferentes periodos.

Periodo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Peso ganado	0,77	1,26	1,12	1	0,81	1,18	0,88	0,64	0,67	1,18

Tabla 7.21

Construye un diagrama de líneas para representar los datos de la tabla y extrae tres conclusiones sobre este conjunto de datos.

Plantear y resolver problemas

Analiza

5. Durante una semana, establece cuántos de tus compañeros de clase han llegado tarde al salón después de un descanso. Una vez obtenida la información elabora un diagrama de líneas y responde:

a. ¿Cuál es el día en que se registra la mayor cantidad de estudiantes que llegan tarde?

b. ¿Cuál es el día en que se registra la menor cantidad de estudiantes que llegan tarde?

c. Si se registraran los valores durante un mes, ¿crees que tendrían un comportamiento similar al compararlos semana a semana? Justifica tu respuesta.

Evalúa

1. ¿En qué situaciones es adecuado presentar y analizar la información usando diagramas de líneas?

2. En el diagrama de la figura 7.11 representa los datos sobre el número de autos alquilados por una empresa durante una semana.

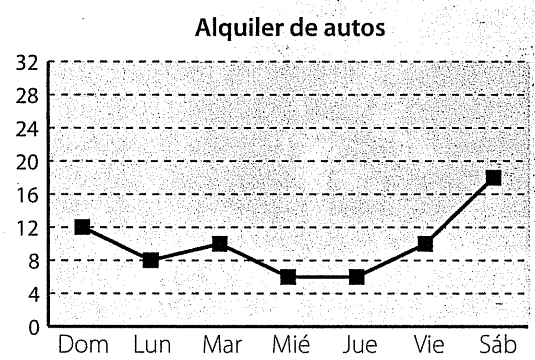


Figura 7.11

a. ¿Cuántos autos se alquilaron durante la semana?

b. ¿Cuántos autos de más se alquilaron el sábado con relación al lunes?

c. ¿Qué día se registró la mayor variación en la cantidad de autos alquilados?

d. ¿Qué días fue mayor el número de autos alquilados con respecto al correspondiente día anterior?

Desempeños

- Reconoce la utilidad de los diagramas de líneas en situaciones en las que la información varía en el tiempo.
- Interpreta datos presentados en diagramas de líneas.

Practica más, pág. 332.

Tema 60

Moda y mediana para datos no agrupados

Ideas previas

1. Ordena los números 127, 78, 44, 12, 52 y 3 en forma ascendente.
2. Ordena los números 103, 66, 201, 48, 90,151 en forma descendente.
3. Imagina que hay un grupo de personas en una fila. ¿Cómo puedes determinar quién está en la mitad de la fila?

Analiza

Se le preguntó a un grupo de trece estudiantes de grado sexto sobre la cantidad de dulces que consumieron en un día y las respuestas obtenidas se organizaron en la tabla 7.22.

Número de dulces consumidos	Frecuencia
0	1
1	2
2	3
3	4
4	1
5	1
6	1
Total	13

Tabla 7.22

Al observar la tabla 7.22 concluimos que hay cuatro estudiantes que consumieron tres dulces; por tanto, es el dato al que le corresponde la frecuencia mayor.

"La **moda** en un conjunto de datos es el valor de la característica que presenta la mayor frecuencia."

Para el conjunto de datos de la tabla 7.22 la moda es tres, ya que es el valor que se repite más veces, es decir, tres es el valor que tiene la mayor frecuencia.

Interpreta y completa

Completa otras conclusiones que podemos extraer de los datos de la tabla 7.22:

________ estudiantes consumieron cuatro o más dulces.

________ estudiantes consumieron al menos dos dulces al día.

________ estudiantes consumieron como máximo dos dulces al día.

Pensamiento aleatorio

En algunos conjuntos de datos es posible encontrar que dos valores diferentes tienen la misma frecuencia. Cuando dicha frecuencia es la mayor de todas las posibles, se dice que la distribución es bimodal.

Ejemplo

La tabla 7.23 presenta el número de balones que tienen quince niños. Determinemos cuál es la moda de dicho conjunto de datos.

Número de balones que posee el estudiante	0	1	2	3 o más
Frecuencia	2	**5**	**5**	3

Tabla 7.23

Solución

Observemos que cinco estudiantes tienen un balón y también cinco estudiantes tienen dos balones; además esta frecuencia es la mayor, por tanto, la distribución es bimodal.

La **mediana** de un conjunto de datos es el dato central que divide el grupo en dos partes iguales.

Para calcular la mediana se ordenan los datos en forma **ascendente**. Si el número de datos es impar, la mediana es el dato central. Si el número de datos es par, la mediana es la mitad de la adición de los dos datos centrales.

Ejemplo

Calculemos la mediana del conjunto de datos representados en la tabla 7.22.

Primer paso: ordenamos los datos en forma ascendente:

0, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 5, 6

Segundo paso: Como la cantidad de datos es trece, que es un número impar, la mediana es el dato que está en la séptima posición y que corresponde al valor tres:

0, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 5, 6

Interpreta y resuelve

Supongamos que no aparece el último dato. En ese caso, sólo habría doce datos y los datos centrales serían 2 y 3. ¿Cuál es el valor de la mediana en este caso? Recuerda que es la mitad de la adición de los datos centrales.

Problema del día

¿Es posible que un conjunto de datos no tenga moda?

¿Qué significa?

Ordenar en forma **ascendente** significa ordenar de menor a mayor.

Ejemplo

La información recolectada en la tabla 7.24 corresponde a la cantidad de libros que han comprado en un año escolar un grupo de 116 estudiantes de un colegio. Determinemos la moda y la mediana de los datos.

Cantidad de libros pedidos	1	2	3	4	5	6	7	8	9 o más
Frecuencia	9	**15**	11	**15**	14	14	**15**	10	13

Tabla 7.24

Solución

En este caso la mayor frecuencia registrada es 15 y corresponde a los valores de dos, cuatro y siete libros.

Como la cantidad de datos es 116, que es un número par, se tienen en cuenta los dos datos centrales, es decir, el dato de la posición $\frac{116}{2} = 58$ y el dato de la posición $\frac{116}{2} + 1 = 58 + 1 = 59$. En los dos casos el valor de dicho dato es 5; por tanto, la mediana es 5:

$$\frac{5+5}{2} = 5.$$

Analiza y argumenta

Describe un procedimiento que permita concluir que el valor que está ubicado en las posiciones 58 y 59 es 5.

Desarrolla pensamiento crítico

Ejercitar procedimientos

Interpreta

1. La tabla 7.25 muestra el tiempo (en segundos) de los campeones olímpicos en una competencia de atletismo de 100 metros planos.

   a. Elabora una tabla de frecuencias y encuentra la moda y la mediana del conjunto de datos.

   b. Representa los datos mediante un diagrama de líneas.

Año	Tiempo	Año	Tiempo	Año	Tiempo
1896	12	1936	10,3	1980	10,25
1900	11	1948	10,3	1984	9,99
1904	11	1952	10,4	1988	9,92
1908	10,8	1956	10,5	1992	9,96
1912	10,8	1960	10,2	1996	9,84
1920	10,8	1964	10	2000	9,87
1924	10,6	1968	9,9	2004	9,85
1928	10,8	1972	10,14	2008	9,69
1932	10,3	1976	10,06		

Tabla 7.25

2. La tabla 7.26 contiene el registro de la cantidad de personas que viven por cada casa en un barrio.

Número de personas por cada casa	1	2	3	4	5	6	7 o más
Frecuencia	6	14	84	92	63	11	8

Tabla 7.26

Para los datos de la tabla 7.26 halla la moda y la mediana.

Comunicar y representar

Explica

3. A las personas que necesitan llevar a cabo un programa aeróbico de bajo impacto, se les recomienda correr en el agua como método de acondicionamiento cardiovascular. En un seguimiento realizado a 27 voluntarios que aplicaron el método, se les midió la frecuencia cardiaca antes de realizar ejercicio. Los resultados se muestran en la tabla 7.27.

87	107	79	80	96	95	90	92	96
100	91	78	112	94	98	94	107	94
98	81	96	88	87	92	91	96	100

Tabla 7.27

Con los datos de la tabla 7.27:

a. Elabora una tabla de frecuencias.

b. Realiza un diagrama de barras.

c. Encuentra la moda y la mediana.

4. Usa el diagrama de la figura 7.12 para describir cómo se halla la mediana de un conjunto de datos. El número de datos que se están analizando se representan con la letra *n*.

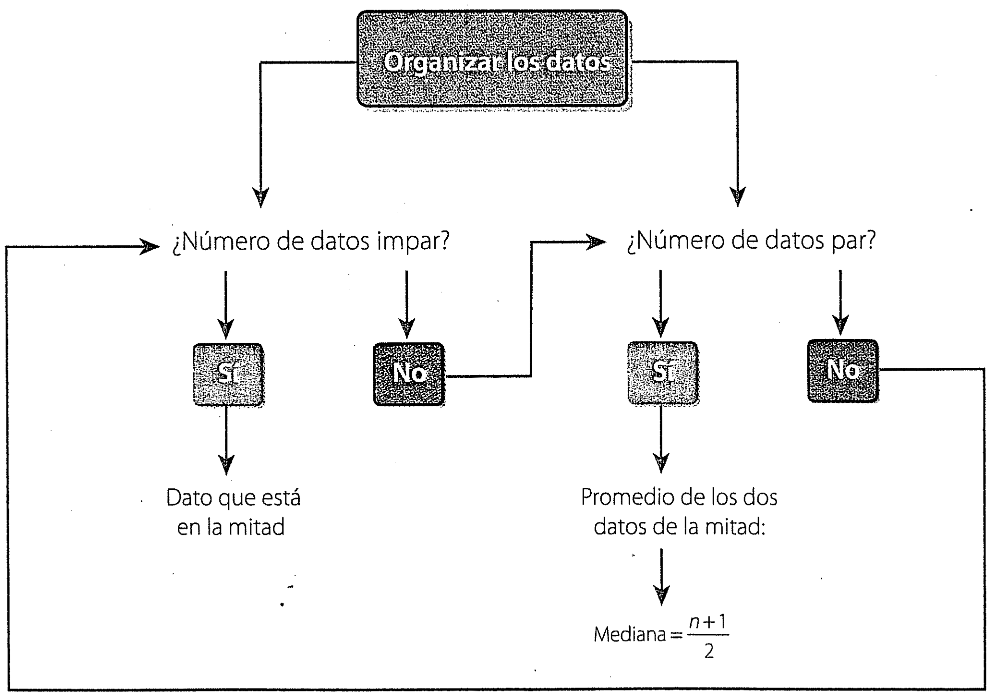


Figura 7.12

5. Determina si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F) y justifica tu respuesta.

   a. Algunos conjuntos de datos no tienen moda. ( )

   b. La moda de un conjunto de datos es el mayor de estos. ( )

   c. La moda se determina de acuerdo con la frecuencia. ( )

   d. En cualquier conjunto de datos, la moda es igual a la mediana. ( )

   e. La moda es única. ( )

   f. No es posible que el valor de la mediana sea el mismo valor de la media. ( )

   g. El valor de la mediana siempre coincide con un valor que está en la lista de los datos. ( )

   h. Para calcular la mediana es necesario ordenar los datos. ( )

   i. Para conocer el valor de la mediana los datos se deben ordenar en forma descendente. ( )

6. Pregunta a tus compañeros de clase el número de calzado que usan y con las respuestas obtenidas elabora una tabla, luego dibuja un diagrama de barras para representar los datos. Con los resultados que obtuviste contesta las siguientes preguntas:

   a. ¿Cuál es el número más frecuente entre los hombres?

   b. ¿Cuál es el número más frecuente entre las mujeres?

   c. ¿Cuál es el número más frecuente en general?

   d. ¿Cuál es el número de calzado más pequeño?

   e. ¿Cuál es el número de calzado más grande?

Plantear y resolver problemas

Analiza

7. En el diagrama circular de la figura 7.13 se muestra la información referente al porcentaje de personas que colaboran en la preservación del medio ambiente, de acuerdo con el estrato socioeconómico al que pertenecen.

Distribución por estratos sobre preservación del medio ambiente

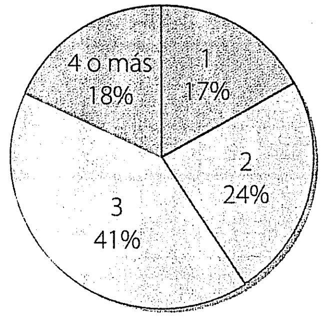


Figura 7.13

Si la cantidad de personas que se encuestaron fue 1000, ¿cuáles son los valores de la moda y la mediana?

8. Indaga entre tus compañeros de clase la información sobre la edad actual de cada uno de ellos, teniendo en cuenta el género. Con los datos recolectados:

   a. Elabora una gráfica de barras en la que compares las edades de los dos géneros.

   b. Halla la moda y la mediana de cada conjunto de datos.

   c. Compara las medidas que encontraste y saca una conclusión.

Evalúa

1. Las edades de los 11 estudiantes que conforman el equipo de fútbol de grado sexto en un colegio son: 12, 12, 13, 11, 10, 15, 13, 12, 11, 16, 14. Halla la moda y la mediana de los datos.

2. En el siguiente conjunto de datos hace falta un valor: 5, 4, 6, 7, 8, 9. Encuentra el valor que falta para que:

   a. El valor de la mediana sea 6.

   b. El valor de la moda sea 4.

Desempeños

- Halla la moda y la mediana en un conjunto de datos.
- Resuelve situaciones en las que intervienen la moda y la mediana.

Practica más, pág. 333.

Tema 61

Media de datos no agrupados

Ideas previas

1. Al finalizar el semestre, un estudiante de economía obtiene en una materia las siguientes notas: 3,5; 2,8; 4,2 y 3,0. ¿Cómo calcula el estudiante la nota definitiva para dicha materia? Si la materia se aprueba cuando la nota definitiva es mayor que 3,5, ¿aprobó el estudiante la materia?

2. Menciona tres ejemplos de tu vida cotidiana en los que hayas escuchado el término "promedio".

Analiza

Para establecer si la cantidad de máquinas dispensadoras de agua que hay en una empresa son suficientes, se preguntó a un grupo de 700 empleados sobre la cantidad de vasos de agua que bebe usualmente en un día y se obtuvieron los resultados que se muestran en la tabla 7.28.

Número de vasos de agua consumidos	Frecuencia
0	10
1	50
2	140
3	500
	700

Tabla 7.28

De la tabla concluimos que hay 10 empleados que no beben agua, 50 que beben un vaso, 140 que beben dos vasos y 500 que beben 3 vasos de agua; por tanto, para calcular el total de vasos de agua consumidos en un día multiplicamos cada dato por su correspondiente frecuencia y adicionamos los resultados:

$$(10 \times 0) + (50 \times 1) + (140 \times 2) + (500 \times 3) = 1830$$

Para calcular cuántos vasos de agua bebe en promedio un trabajador de los del grupo considerado, dividimos el resultado por 700: $\frac{1830}{700} = 2,6$, es decir, un trabajador de los del grupo considerado consume en promedio 2,6 vasos de agua al día.

Otra medida que nos sirve para describir un conjunto de datos es la **media**, también conocida como **promedio** o **media aritmética**.

La **media**, promedio o media aritmética de un conjunto de datos, es el resultado de dividir la suma de todas las frecuencias por el número total de datos obtenidos.

Problema del día

Supongamos que la distribución de frecuencias de un estudio que se realizó a 330 personas arrojó los resultados que se muestran en la tabla 7.29.

Valores de la variable	0	10	5	3	7	20
Frecuencia	10	25		65	120	60

Tabla 7.29

Si la media se encuentra hallando el cociente entre 123 y 18, ¿cuál es el valor que falta en la tabla?

Analiza

El departamento médico de un colegio está interesado en determinar los índices de obesidad en sus estudiantes de grado undécimo, para lo que toma una muestra de 18 de ellos y mide su peso en kilogramos. La tabla 7.30 muestra los resultados de los estudiantes que han sido tomados para el estudio.

Mujeres	47	47	57	44	60	51	67	68	63
Hombres	74	87	95	73	78	59	72	84	62

Tabla 7.30

Se considera que un estudiante está bajo de peso si al compararlo con los demás se encuentra que el peso del estudiante está por debajo de 90% del peso promedio del grupo.

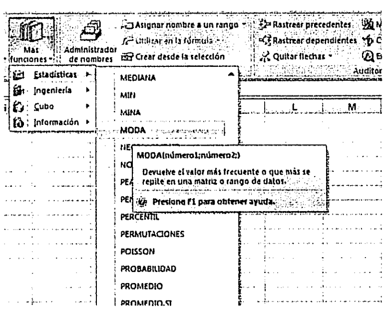
Si consideramos el grupo de las mujeres, el peso promedio es 56 kg y 90% de este valor es 50,4 kg; por tanto, hay tres mujeres con bajo peso.

En el caso de los hombres, se tiene que el peso promedio es 76 kg. 90% de este valor es 68,4; por tanto, hay dos hombres bajos de peso.

Interpreta y verifica

Realiza los procedimientos respectivos para verificar que el peso promedio de las mujeres es 56 kg y que el de los hombres es 76 kg.

Ciencia y tecnología



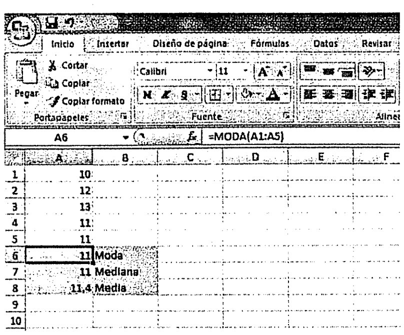


Figura 7.14

Podemos usar el programa Excel para hallar la moda, la mediana y la media de un conjunto de datos. Para hacerlo, seleccionamos en el menú *fórmulas* la opción *más funciones*, luego la opción *estadísticas* y, finalmente, la medida que queremos calcular. Veamos cómo usar el programa Excel para calcular la moda de los datos: 10; 12; 13; 11 y 11.

Primero seleccionamos la opción *moda* en el menú. En la ventana que aparece escribimos las celdas en las que se ubican el dato inicial y el dato final separados por dos puntos, así: =MODA(A1:A5) y luego damos clic en la opción *aceptar*. (*Ver* figura 7.14).

Interpreta y aplica

Usa el procedimiento descrito para verificar que los valores de la mediana y la media son 11 y 11,4, respectivamente.

Desarrolla pensamiento crítico

Ejercitar procedimientos

Interpreta

1. Indaga entre tus compañeros de curso los datos sobre estatura de cada uno y encuentra la media del conjunto de datos que obtengas.
2. Averigua entre tus compañeros de curso los datos sobre el peso de cada uno y encuentra la media del conjunto de datos que obtengas.

Comunicar y representar

Explica

3. Determina si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F) y justifica tu respuesta.
   - **a.** Es posible que el valor de la media coincida con el mayor de los datos. ( )
   - **b.** Hay ocasiones en que el valor de la media coincide con algún valor que está dentro del conjunto de datos. ( )
   - **c.** La media es una valor que siempre está entre los datos. ( )
   - **d.** La expresión "en promedio se tienen 2,5 hermanos" significa que es común tener dos hermanos y adicionalmente un medio hermano. ( )

Pensar y razonar

Infiere

4. La tabla 7.31 contiene la información sobre la cantidad de personas que asistieron a una biblioteca durante una semana.

Día	Número de asistentes
Lunes	240
Martes	236
Miércoles	238
Jueves	225
Viernes	240
Sábado	272
Domingo	284

Tabla 7.31

De acuerdo con la información registrada en la tabla 7.31, responde:

- **a.** ¿Cuántas personas asisten en promedio durante una semana a la biblioteca?
- **b.** ¿Qué información adicional a la de los datos de la tabla es necesaria para determinar el promedio mensual de asistencia a la biblioteca?

Plantear y resolver problemas

Analiza

5. Hay 10 personas en un ascensor: 4 mujeres y 6 hombres. El peso medio de las mujeres es 60 kilos y el de los hombres, 80 kilos. ¿Cuál es el peso promedio de las 10 personas del ascensor?
6. A cinco estudiantes se les practica una prueba de comprensión de lectura y obtienen la siguiente puntuación: 62, 75, 80, 86 y 92.

   Halla la puntuación media. Determina cuánto aumenta la media si se aumenta la puntuación de cada estudiante en:

   - **a.** Un punto
   - **b.** 5 puntos
   - **c.** 8 puntos
   - **d.** *n* puntos

Evalúa

1. Los pesos (en kg) de 40 estudiantes de un curso son:

55	66	60	53	58	51	60
63	59	64	56	59	55	59
61	58	71	51	55	70	65
58	62	66	58	69	57	59
54	61	56	54	64	58	54
57	60	62	58	51		

   Si te preguntan cuál sería el mejor número para representar este conjunto de datos, ¿Qué número o números elegirías? ¿Por qué?
2. En el siguiente conjunto de datos hace falta un valor. Encuéntralo de tal manera que el valor de la media sea 3: 1, 3, 4, 5, 1, **?** , 3.

Desempeños

- Escoge entre la moda, la mediana y la media, la medida más representativa de un conjunto de datos.
- Resuelve situaciones en las que interviene el concepto de media.

Practica más, pág. 333.

Organización de información

Resulta más fácil leer información que contenga descripciones en un contexto específico cuando la resumimos y organizamos en tablas, ya que a partir de éstas podemos relacionar los datos que contienen y hacer inferencias.

Veamos el siguiente ejemplo.

Todos los años se realiza en Colombia el campeonato del fútbol profesional. Debido al cambio de patrocinador, el torneo pasó de llamarse Copa Mustang a llamarse Liga Postobón a partir de 2010 y por un periodo de 5 años.

El torneo de un año se divide en dos fases: apertura, de febrero a junio, y finalización, de julio a diciembre. Actualmente participan en el torneo 18 equipos en las siguientes etapas: primero se juegan 18 partidos, después clasifican los mejores ocho equipos del campeonato según la tabla de posiciones y se separan en dos cuadrangulares de cuatro equipos cada uno; finalmente, los mejores equipos de cada uno de los dos cuadrangulares se enfrentan en la final para así definir al campeón del semestre.

En el torneo apertura de 2011 después de jugar la fecha número 15, tanto *Once Caldas* como *Tolima* habían perdido 4 partidos, pero *Once Caldas* había ganado 9 partidos, y empatado 2, mientras que *Tolima* había ganado 8 y empatado 3; por tanto, *Once Caldas* estaba mejor posicionado que *Tolima*. Aunque *Envigado* sólo había perdido 2 partidos, se encontraba en la tercera posición, ya que había ganado 7 partidos y empatado 6.

Analiza

La información que describe las tres primeras posiciones después de jugar los 15 primeros partidos usa como referencia la cantidad de partidos ganados, empatados y perdidos. Para que la comparación sea más rápida podemos elaborar una tabla como la que se muestra a continuación.

Fase de todos contra todos

	Equipo	PJ	PG	PE	PP
1	*Once Caldas*	15	9	2	4
2	*Tolima*	15	8	3	4
3	*Envigado*	15	7	6	2

Tabla 7.32

PJ = Partidos jugados; PG = Partidos ganados;
PE = Partidos empatados; PP = Partidos perdidos.

Si finalizada la fecha 15 se hiciera la clasificación de los ocho mejores equipos, según la tabla de posiciones los equipos que pasarían a la siguiente ronda serían *Once Caldas*, *Tolima*, *Envigado*, *Nacional*, *Millonarios*, *Equidad*, *América* y *Quindío*.

Fase de todos contra todos

	Equipo	PJ	PG	PE	PP
1	*Once Caldas*	15	9	2	4
2	*Tolima*	15	8	3	4
3	*Envigado*	15	7	6	2
4	*Nacional*	15	8	3	4
5	*Millonarios*	15	8	2	5
6	*Equidad*	15	7	4	4
7	*América*	15	7	2	6
8	*Quindío*	15	7	2	6

Tabla 7.33

PJ = Partidos jugados; PG = Partidos ganados;
PE = Partidos empatados; PP = Partidos perdidos

Infiere y resuelve

La clasificación de los equipos se hace teniendo en cuenta el puntaje que se les asigna, así: por cada partido ganado se asignan 3 puntos y por cada partido empatado, un punto. Por los partidos perdidos no se asignan puntos.

1. Completa la tabla 7.34 hallando el puntaje de cada equipo.

2. Usa la información de la tabla 7.33 para elaborar un diagrama de barras en el que muestres el puntaje de los ocho equipos que hasta esa fecha lideraron la tabla de posiciones.

Fase de todos contra todos

	Equipo	PJ	PG	PE	PP	Pts
1	*Once Caldas*	15	9	2	4	29
2	*Tolima*	15	8	3	4	
3	*Envigado*	15	7	6	2	
4	*Nacional*	15	8	3	4	
5	*Millonarios*	15	8	2	5	
6	*Equidad*	15	7	4	4	
7	*América*	15	7	2	6	
8	*Quindío*	15	7	2	6	

Tabla 7.34

PJ = Partidos jugados; PG = Partidos ganados;
PE = Partidos empatados; PP = Partidos perdidos

Evalúa tu pensamiento crítico

Las siguientes actividades te indicarán el nivel de competencia que has alcanzado y determinarán los desempeños que evidencian tu acción de aprendizaje.

Ejercitar procedimientos

Interpreta

1. A 40 niños que se encuentran en un centro comercial se les pregunta cuál es el sabor de su helado predilecto. Estas fueron sus respuestas:

   Fresa, vainilla, coco, coco, guanábana, vainilla, fresa, fresa, ron con pasas, pistacho, fresa, vainilla, chocolate, chocolate, mora, mora, fresa, vainilla, coco, chocolate, vainilla, guanábana, coco, guanábana, pistacho, coco, vainilla, fresa, fresa, vainilla, chocolate, chocolate, mora, coco, guanábana, vainilla, fresa, ron con pasas, pistacho, vainilla.

   a. ¿Cuántos niños prefieren helado de fresa?

   b. ¿Cuál es el helado que menos prefieren los niños del centro comercial?

   c. Construye un diagrama de barras que represente la información anterior.

   d. Si se elabora un diagrama circular, ¿cuántos grados mide el ángulo central del sector que le corresponde al helado de coco?

Pensar y razonar

Infiere

2. En un centro comercial se le preguntó a un grupo de 270 personas sobre el número de personas menores de 18 años que habitan en su casa. Parte de la información recolectada se muestra en la tabla 7.35.

Personas por casa	1	4	8	5	2	
Frecuencia	15	20		40	100	80

Tabla 7.35

Si se sabe que el promedio de personas menores de 18 años por casa es $\frac{1095}{270}$ personas, encuentra los valores que hacen falta en la tabla para que esta información sea válida.

3. Carlos, atleta profesional, representa en un diagrama circular como el de la figura 7.15, el tiempo que dedica a su entrenamiento diario en el centro de alto rendimiento.

   Si Carlos entrena 40 horas a la semana, estima el porcentaje de tiempo semanal que dedica cada día para entrenar.

   a. ¿Qué días de la semana dedica más tiempo para entrenar?

   b. ¿Cuánto tiempo entrena el miércoles?

   c. ¿Cuál es la diferencia en horas entre el menor tiempo de práctica y el mayor?

Distribución de tiempo dedicado al día al entrenamiento

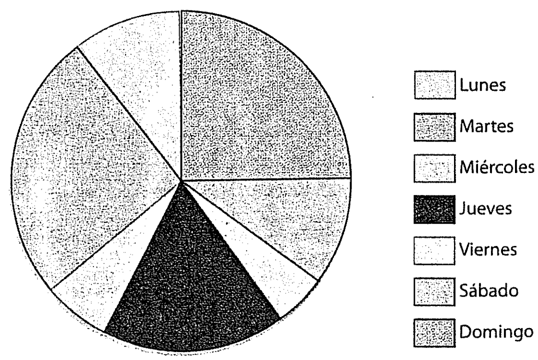


Figura 7.15

Comunicar y representar

Explica

4. Para compartir en una actividad escolar, un grupo de niños debe llevar cualquier cantidad de la misma clase de dulces. Andrés lleva 5, Paula 8, Jaime 6, Anita 1 y Daniel no lleva ninguno. ¿Qué medida te permite establecer cómo repartir los caramelos en forma equitativa?

Plantear y resolver problemas

Analiza

5. Construye un grupo de datos de tal manera que su moda, mediana y media coincidan.

6. Construye un grupo de datos en el que la media y la mediana sean menores que la moda.

7. Construye un grupo de datos en el que la media y la moda sean menores que la mediana.

8. En el siguiente diagrama se muestra el número de personas que acuden a un café Internet durante un mes:

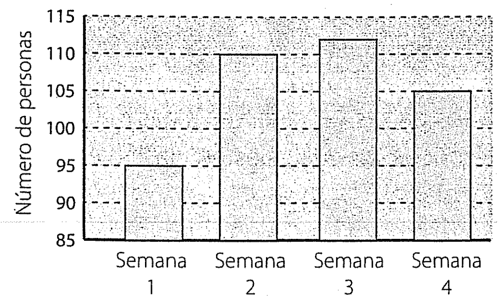


Figura 7.16

¿Cuántas personas deberían visitar durante el mes siguiente el café Internet para que el promedio de los dos meses sea de 110 personas?

9. En un colegio se realizó una encuesta para conocer el sistema de desplazamiento que utilizan los estudiantes para llegar a diario y el resultado se representó en el siguiente diagrama.

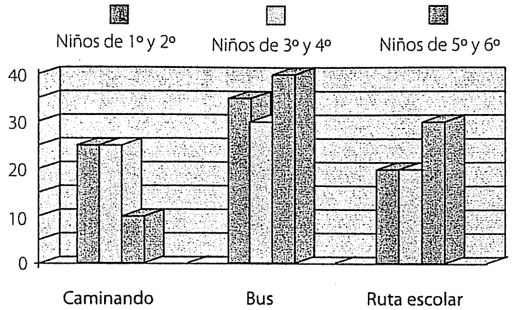


Figura 7.17

De acuerdo con los datos representados en la gráfica,

a. ¿Cuántos niños vienen a pie?

b. ¿Cuántos en ruta escolar?

c. ¿Cuántos niños no vienen a pie?

d. ¿Cuántos niños de 1° y 2° no vienen en bus?

e. ¿A cuántos niños se les practicó la encuesta?

Autoevaluación

	Bajo	Básico	Alto	Superior
Reconozco la diferencia entre frecuencia absoluta y frecuencia relativa.				
Recojo y organizo datos en tablas de frecuencias y diagramas.				
Describo situaciones usando tablas y diagramas.				
Reconozco la relación entre un conjunto de datos y su representación.				
Interpreto y construyo pictogramas, diagramas de barras, diagramas circulares y diagramas de líneas.				
Utilizo los conceptos de moda, mediana y media para interpretar el comportamiento de un conjunto de datos.				
Disfruto leyendo sobre matemáticas.				

Unidad 8

Pensamiento numérico

Acercamiento a los enteros

Situación problema

En Colombia, aunque no hay estaciones como en otros países, las características del relieve dan origen a un clima con diferentes pisos térmicos, los cuales están clasificados en cinco niveles: cálido, templado, frío, páramo y glacial.

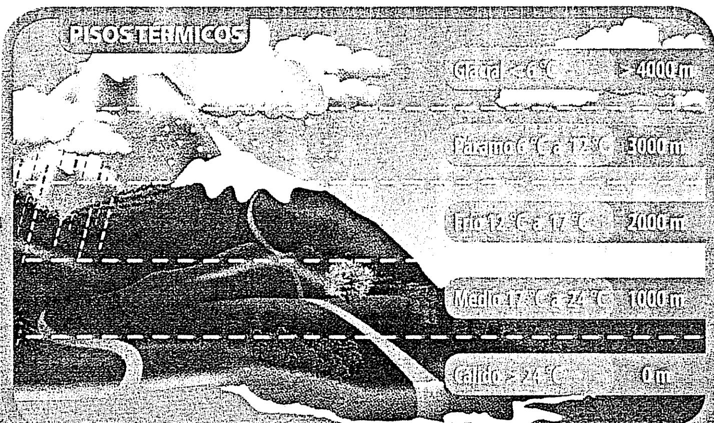
La tabla 8.1 muestra la información sobre los pisos térmicos en Colombia.

Piso térmico	Altura sobre el nivel del mar	Temperatura
Cálido	entre 0 m y 1000 m	superior a 24 °C
Templado	entre 1000 m y 2000 m	entre 17 °C y 24 °C
Frío	entre 2000 m y 3000 m	entre 12 °C y 17 °C
Páramo	entre 3000 m y 4000 m	entre 6 °C y 12 °C
Glaciales	superiores a 4000 m	inferior a 6 °C

Tabla 8.1

La temperatura desciende aproximadamente en un grado centígrado por cada 187 metros que aumenta la altitud.

Las temperaturas de Bogotá, Cali y Santa Marta son un ejemplo de cómo la temperatura de una ciudad depende de la altura sobre el nivel del mar en que ésta se encuentre: Bogotá tiene una altitud de 2640 metros sobre el nivel del mar y una temperatura promedio de 13 °C; por tanto, se encuentra en el piso térmico frío. Cali se encuentra a 1005 metros sobre el nivel del mar y tiene una temperatura promedio de 25 °C y Santa Marta está a 3 metros sobre el nivel del mar y presenta una temperatura de 29 °C.



Desarrolla pensamiento crítico

Interpreta

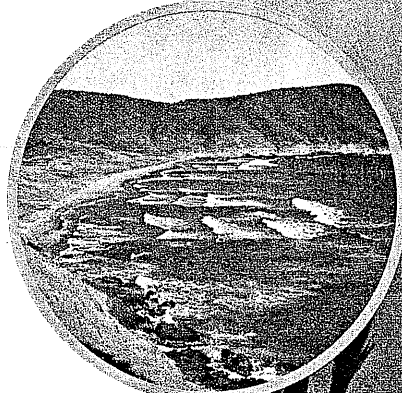
1. ¿Qué factores determinan que en una ciudad la temperatura sea mayor que en otra?

Infiere

2. ¿En qué piso térmico están situadas Cali y Santa Marta?
3. ¿Cuál es la diferencia de temperaturas entre Bogotá y Cali?

Analiza

4. ¿Cuál es la temperatura de Manizales, si al compararla con la de Bogotá es 6 °C mayor?
5. ¿Cuál es la diferencia aproximada de temperaturas entre dos ciudades cuyas altitudes difieren 935 metros?



Para pensar en digital

Entra a www.normaparapensar.com y disfruta de los retos interactivos que tenemos para ti.

Tema 62

Números signados y relativos

Ideas previas

1. Un mensajero debe entregar unos recibos en un edificio y para hacerlo, toma el ascensor en el sótano, sube al décimo piso y luego dos pisos más; después baja tres pisos y finalmente otros dos pisos. ¿Cómo escribirías los números que representan los movimientos del mensajero en el ascensor para diferenciar los que indican ascenso de los que indican descenso?
2. Asocia a cada palabra el signo + o el signo –: aumento – disminución; pérdida – ganancia; avance – retroceso.

Interpreta

En cuestiones financieras, las cantidades indican situaciones contrarias de ganancias y pérdidas, depósitos y retiros e ingresos y egresos. En la figura 8.1 se observa el extracto bancario del mes de febrero del señor Guzmán, quien tiene una cuenta en el Banco de las Américas.

BA BANCO DE LAS AMÉRICAS

Aquiles Guzmán
Avenida Cali 20
Bogotá

EXTRACTO

Fecha				
Mes	Día	Valor	Clase de movimiento	Oficina
02	04	150 000,00 –	Retiro cajero	Unicentro
02	07	300 000,00 –	Retiro cajero	Porciúncula
02	07	5611,00 –	Impuesto decreto	
02	10	322 000,00 –	Retiro ventanilla	Calle 140
02	11	1 287 014,08 +	Consignación otras entidades	
02	14	1500,00 –	Impuesto decreto	
02	15	260 000,00 –	Retiro cajero	Cedritos
02	16	400,00 –	Impuesto decreto	
02	16	180 000,00 –	Retiro cajero	Av. Chile
02	21	449 678,00 +	Consignación por transferencia	
02	21	100 000,00 –	Retiro cajero	Calle 64
02	25	600,00 –	Impuesto decreto	
02	25	150 000,00 –	Retiro cajero	Calle 64
02	26	1 258 410,53 +	Consignación por agilizador	
02	26	300,00 –	Impuesto decreto	
02	28	240 000,00 –	Retiro cajero	Porciúncula
02	28	480,00 –	Impuesto decreto	
02	28	4 200,00 –	Manejo tarjeta	Recaudo

Figura 8.1

En el extracto observamos que cada cantidad está seguida de uno de los signos + o –. Estos signos indican el tipo de operación que realizó el señor Guzmán, así: si un número está acompañado por el signo +, significa que el dinero ha sido consignado en la cuenta, pero si el número está acompañado por el signo –, significa que el dinero ha sido retirado de la cuenta.

El 21 de febrero, el señor Guzmán realizó dos transacciones: un retiro de $ 100 000 y una consignación de $ 449 678.

Los números 449 678 + y 100 000 – reciben el nombre de números signados.

Un **número signado** es un número acompañado del signo + o del signo –. El signo indica una de dos situaciones contrarias: aumento o disminución. El signo empleado en un número signado puede escribirse antes o después de la cantidad.

Interpreta y contesta

¿Cuántos movimientos que representan ingresos aparecen registrados en la cuenta del señor Guzmán en el mes de febrero?

Ejemplo

Determinemos la cantidad de dinero que salió de la cuenta del señor Guzmán en la primera quincena del mes de febrero.

Solución

Para hallar la cantidad de dinero que salió de la cuenta del señor Guzmán en los primeros quince días del mes de febrero, debemos adicionar los números signados que aparecen en el extracto con el signo – hasta el 15 de febrero:

$$150\,000 + 300\,000 + 5611 + 322\,000 + 1500 + 260\,000 = 1\,039\,111$$

En este caso la cantidad de dinero que salió de la cuenta se representa mediante el número signado 1 039 111 –

Durante el primer semestre del año se registraron las variaciones en las temperaturas promedio por mes en Bogotá, comparadas con la temperatura promedio en Bogotá durante el mismo semestre del año anterior.

Los datos registrados aparecen en la tabla 8.2:

Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio
+3 °C	−3 °C	+2 °C	−2 °C	−1 °C	+1 °C

Tabla 8.2

La temperatura promedio en Bogotá durante el mismo semestre del año anterior fue 14 °C. Este es el dato que usaremos como punto de referencia, es decir, que a partir de él hacemos las comparaciones de las temperaturas mes a mes aumentando o disminuyendo la cantidad que indica el número relativo.

En enero la temperatura que se debe registrar es 17 °C, ya que el dato de referencia es 14 °C y el número relativo +3 °C indica aumento de 3 °C (14 + 3).

> La ubicación de un punto de referencia da lugar a la determinación de los **números relativos**.

Infiere y responde

El número relativo que corresponde a febrero es −3 °C. ¿Qué indica este número con relación al dato de referencia?

Usando el dato de referencia y los números relativos de la tabla 8.2, obtenemos los datos de la temperatura en cada mes:

Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio
17 °C	11 °C	16 °C	12 °C	13 °C	15 °C

Tabla 8.3

Los números relativos se usan para indicar temperaturas, la altura sobre el nivel del mar de un lugar, la profundidad de un objeto bajo el nivel del mar, momentos de tiempo respecto a un acontecimiento específico, y en física se utilizan para señalar la dirección o la **aceleración** de un movimiento.

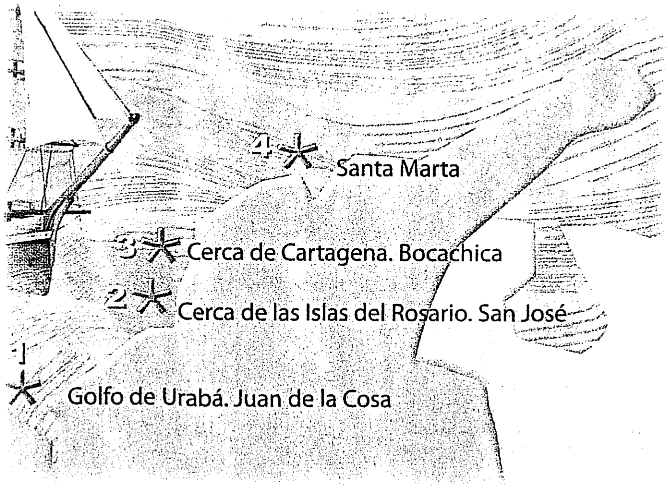
¿Qué significa?

La **velocidad** es una magnitud física que expresa el desplazamiento de un objeto por unidad de tiempo.

La **aceleración** es una magnitud física que indica el cambio de la velocidad por unidad de tiempo.

Ejemplo

Durante la época de la Conquista e Independencia de Colombia, en la costa atlántica se hundieron muchas embarcaciones españolas por diferentes razones. En la figura 8.2 se muestran algunos lugares en los que se presentaron hundimientos:



En 1502 Rodrigo de Bastidas descubre la costa atlántica de Colombia.

En 1509 Alonso de Ojeda funda San Sebastián de Urabá.

En 1526 Rodrigo de Bastidas funda Santa Marta.

En 1504, las cuatro naves del conquistador español Juan de la Cosa se hundieron con 175 hombres y sus pertenencias.

En 1708, uno de los tesoros más grandes que se tenga noticia en América, el galeón San José, fue hundido con oro, plata y peculio de 640 pasajeros. Sobrevivieron 10 personas.

Tres navíos todavía sin identificar, se hundieron en 1542 con cerca de medio millón de pesos de la época, en oro y plata.

En 1544, una nave sin identificar, que llevaba al obispo de Cartagena a España, se hundió con millonarias mercancías.

Figura 8.2

Organicemos cronológicamente los acontecimientos descritos, y comparemos las fechas usando como punto de referencia la fundación de Cartagena en 1533.

Solución

Acontecimiento histórico	Año	Años respecto a la fundación de Cartagena
Rodrigo de Bastidas descubre la costa atlántica	1502	−31
Hundimiento de las cuatro naves de Juan de la Cosa	1504	−29
Fundación de San Sebastián de Urabá	1509	−24
Fundación de Santa Marta	1526	−7
Fundación de Cartagena	1533	0
Hundimiento de tres navíos sin identificar	1542	+9
Hundimiento de la nave que trasladaba al obispo de Cartagena a España	1544	+11
Hundimiento del galeón *San José*	1708	+175

Tabla 8.4

De acuerdo con los datos de la tabla 8.4, algunas conclusiones que podemos extraer son las siguientes: Santa Marta fue fundada 7 años antes que Cartagena, la fundación de San Sebastián de Urabá ocurrió 24 años antes que la fundación de Cartagena, y el hundimiento del galeón *San José* se dio 175 años después de la fundación de Cartagena.

Infiere y explica

¿Por qué podemos afirmar que Rodrigo de Bastidas descubrió la costa atlántica 31 años antes de la fundación de Cartagena?

Desarrolla pensamiento crítico

Ejercitar procedimientos

Interpreta

1. Escribe el número signado asociado a cada situación.
   - **a.** Retiro de $ 150 000.
   - **b.** Reembolso de $ 50 000.
   - **c.** Ganancia de 12%.
2. Según el último censo de población realizado en Colombia, el tamaño de la población en cuatro de las principales ciudades es:

Ciudad	Número de habitantes
Bogotá	6 840 116
Medellín	2 216 830
Cali	2 119 908
Barranquilla	1 146 359

Tabla 8.5

   - **a.** Escribe los números relativos en cada caso, si se toma como punto de referencia el número de habitantes de Medellín.
   - **b.** ¿Cuáles son los números relativos si se toma como punto de referencia el número de habitantes de Barranquilla?
3. En la tabla 8.6 se muestra la superficie en km^2 de cuatro ciudades de Colombia.

Ciudad	Superficie (km^2)
Bogotá	1587
Medellín	380
Cali	542
Barranquilla	166

Tabla 8.6

   - **a.** Organiza los datos de la tabla usando números relativos y tomando como referencia la superficie de Cali.
   - **b.** Si se toma como punto de referencia la superficie de Bogotá, ¿qué significa el signo – en los números relativos de las otras ciudades?

Pensar y razonar

Infiere

4. En la tabla 8.7 se muestra el registro de los ingresos y los egresos en la papelería "El buen papel" durante cinco días:

Día	Movimiento
Lunes	55 000+
Martes	72 500–
Miércoles	25 700–
Jueves	108 900+
Viernes	12 450+

Tabla 8.7

   - **a.** ¿Cuánto dinero ingresó en la semana?
   - **b.** Si al comenzar la semana había $ 150 000 en la caja registradora, ¿cuánto dinero había al finalizar la semana?
   - **c.** ¿Cuál es la diferencia de dinero entre el inicio y el final de la semana?
5. Usa la figura 8.3 para ubicar:
   - **a.** Un flotador sobre el nivel del mar.
   - **b.** Un pez 15 metros bajo el flotador.
   - **c.** Un helicóptero 110 m sobre el pez.
   - **d.** Un tesoro 180 metros bajo el helicóptero.
   - **e.** Un pelícano 30 m sobre el pez.
   - **f.** Un buzo 40 metros bajo el pez.

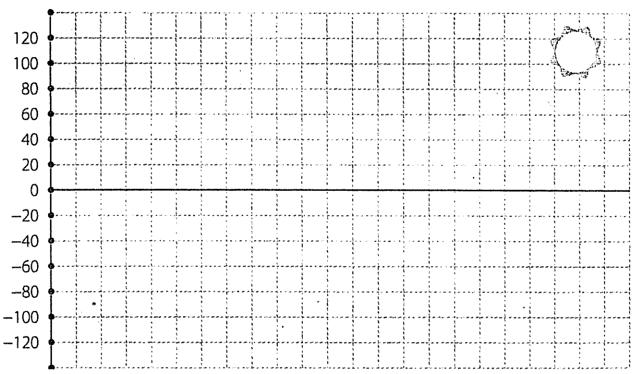


Figura 8.3

Escribe los números relativos en cada caso, si se toma como referencia el nivel del mar.

Comunicar y representar

Explica

6. Debido a un problema hormonal, Pedro aumenta y disminuye de peso con mucha facilidad. Para iniciar un tratamiento, el doctor le solicita registrar la cantidad de kilogramos que aumenta o disminuye durante siete semanas consecutivas. El registro que hace Pedro se muestra en la tabla 8.8.

Semana 1	Semana 2	Semana 3	Semana 4	Semana 5	Semana 6	Semana 7
−2	−3	+1	−2	+ 4	0	−2

Tabla 8.8

a. ¿Es correcto afirmar que Pedro bajó en total 5 kg después de 7 semanas? Justifica tu respuesta.

b. Si el peso inicial de Pedro era 80 kg, ¿cuál era su peso al finalizar la cuarta semana?

c. Si el peso de Pedro al finalizar la séptima semana fue 67 kg, ¿qué peso tenía al iniciar la semana 1?

7. En los siguientes tableros de ascensores no se usaron los números signados. ¿Cómo quedarían si se escriben números signados?

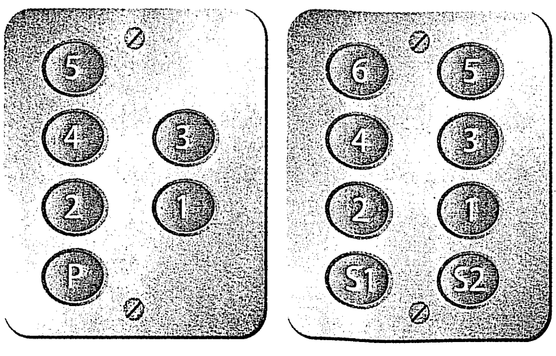


Figura 8.4

Plantear y resolver problemas

Analiza

8. La señora Adriana Pinto tiene una cuenta en el Banco Capital. Durante el mes de abril realizó en su cuenta bancaria los movimientos que se muestran en el extracto de la figura 8.5.

Banco Capital — Extracto — Adriana Pinto, Bogotá

Mes	Día	Detalle	Crédito	Débito	Balance
4	3	Depósito	560 000		1 380 000
4	7	Consignación de nómina	2 156 400		
4	10	Pago de servicio público		62 000	
4	16	Retiro		350 000	
4	17	Reintegro de IVA	5200		
4	20	Depósito	380 000		
4	22	Pago almacén de cadena		175 000	
4	23	Retiro de cajero automático		50 000	
4	25	Manejo de cajero		3500	
4	28	Pago crédito hipotecario		850 000	

Figura 8.5

a. Escribe el número signado correspondiente a cada transacción.

b. Completa la columna "balance" del extracto bancario, de acuerdo con el significado de cada número signado.

9. En un restaurante al comenzar el día hay en la registradora \$ 120 000. Después de preparar la comida del día, el dueño del restaurante escribe en su agenda \$ 80 500–, y al finalizar las ventas escribe el número \$ 160 700+. ¿Qué cantidad de dinero hay en la registradora al terminar el día?

Evalúa

Con las siguientes temperaturas completa el párrafo.

| −19° | −18° | 20° | −16° | −5° | 180° | 0° |

Juana decide hacer una torta especial para el cumpleaños de su hermano. Saca del congelador que tiene una temperatura de ☐ °C, la margarina para que esté a temperatura ambiente ☐. Además retira de la nevera, que está a ☐ °C los huevos y la leche. Una vez preparada la masa, la coloca en un molde que mete al horno a ☐ °C. Después, lava todos los utensilios con el agua caliente de la llave a ☐ °C. En el momento de servir la torta, coloca una bola de helado que está a ☐ °C en cada plato y sirve gaseosa en vasos con hielo a ☐ °C.

Desempeños

- Interpreta números relativos y signados.
- Expresa situaciones empleando números relativos.

Practica más, pág. 334.

Tema 63

Números enteros

Ideas previas

1. ¿Para qué se emplean los números signados?
2. Encuentra el valor que falta en cada caso:

   a. $145 - \square = 47$

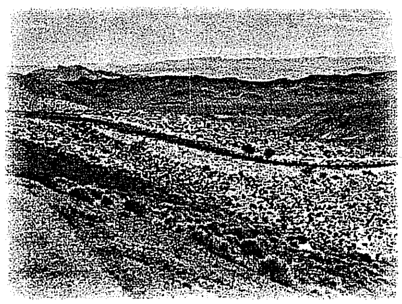
   b. $201 - \square = 101$

   c. $12 - \square = 8$

3. Explica por qué la propiedad conmutativa no se cumple en la sustracción de números naturales.

Analiza

Uno de los lugares más calientes del planeta es el Valle de la Muerte, en Estados Unidos, el cual tiene una temperatura promedio de 40 °C, mientras que el lugar más frío de la Tierra es la Antártica, en donde se han llegado a registrar temperaturas de –89 °C.



Los números 40 y –89 forman parte de un conjunto denominado conjunto de los **números enteros**.

El conjunto de los enteros

En el conjunto de los números naturales, **N** = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...}, no es posible encontrar un número que sumado con otro dé como resultado cero. Para resolver situaciones como esta fue necesario crear el **número opuesto** de cada número natural. Por ejemplo, el número opuesto de 6 es –6; por tanto, 6 + (–6) = 0.

El conjunto formado por los opuestos de los números naturales diferentes de cero se llama conjunto de los enteros negativos y se simboliza $\mathbf{Z}^-$.

El conjunto de los números naturales diferentes de cero recibe el nombre de enteros positivos y se simboliza $\mathbf{Z}^+$.

Al ampliar el conjunto de los números naturales agregando los números enteros negativos se forma un nuevo conjunto numérico.

> El conjunto de los números naturales unido con el conjunto de los números enteros negativos forman el conjunto de los **números enteros**, el cual se simboliza con la letra **Z**.
>
> **Z** = {..., –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, ...}

Para representar los números enteros (**Z**) en una recta numérica se toma como referencia el número cero y se marcan puntos equidistantes, tanto a la derecha como a la izquierda del mismo, haciendo corresponder a cada punto un número consecutivo, así:

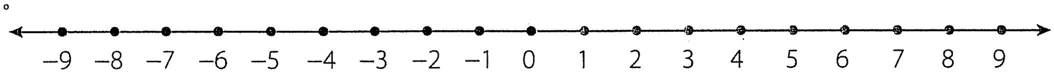


Figura 8.6

¿Qué significa?

Para cualquier número natural b diferente de cero, existe un número que no es natural llamado **opuesto** de b y simbolizado $-b$ de tal manera que al adicionarlos su resultado es cero.

Pensamiento numérico

Ejemplo

Determinemos los opuestos de 2 y -5.

Solución

En la recta de la figura 8.7 podemos observar que el opuesto de 2 es −2 y el opuesto de −5 es 5:

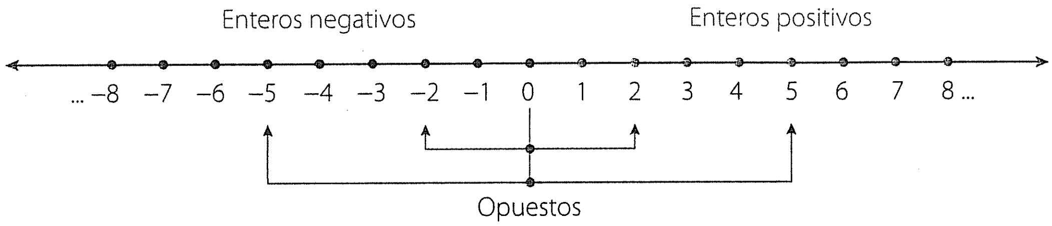


Figura 8.7

Dato histórico

Los números negativos, al igual que el cero, comenzaron a utilizarse en Oriente en el siglo V por las culturas china e hindú para diferenciar créditos y débitos, mientras que en Occidente fueron aceptados en el siglo XVIII. La notación que utilizamos actualmente para representar positivos (+) y negativos (−) fue popularizada en el siglo XV por el matemático alemán Stifel (1487−1567), ya que hasta ese momento los positivos se simbolizaban con la letra *p* y los negativos con la letra *m*.

Infiere y completa

En la recta numérica, si un número entero ______ y un número entero negativo están a la misma distancia de ______ se llaman opuestos.

Orden

Si se tienen dos números enteros distintos, es posible establecer entre ellos una relación de orden de acuerdo a su posición en la recta numérica.

Si en la recta numérica un número *a* se encuentra a la **izquierda** de un número *b*, entonces se dice que *a* es **menor** que *b* y se simboliza $a < b$.

Ejemplo

Organicemos de menor a mayor los números 3, −2, 6, −6, 0.

Solución

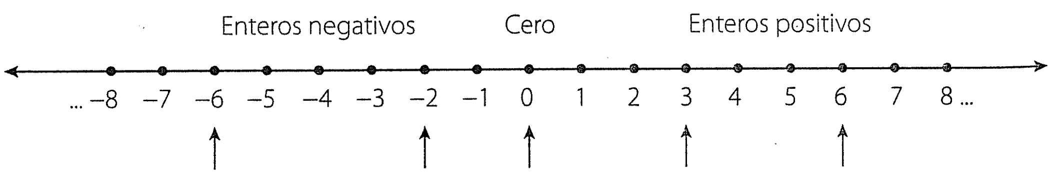


Figura 8.8

En la recta de la figura 8.8 observamos que el número −6 se encuentra a la izquierda de −2, −2 está a la izquierda de 0, 0 está a la izquierda de 3 y 3 está ubicado a la izquierda de 6; entonces, $-6 < -2 < 0 < 3 < 6$.

Desarrolla pensamiento crítico

Ejercitar procedimientos

Interpreta

1. Escribe el número entero que representa cada una de las siguientes situaciones:
   a. 100 metros bajo el nivel del mar.
   b. 350 m de altura.
   c. 200 años antes de Cristo.
   d. Ingreso de $ 150 000.
   e. 100 km antes de un pueblo.
2. Escribe el opuesto de cada número:
   a. 25 b. 7
   c. −11 d. −16
   e. 18 f. −2
3. Sitúa en la recta numérica los siguientes números enteros:

   −12, 8, −8, 0, 1, −3, 5, 18, −20, 27

Pensar y razonar

Infiere

4. Determina si el número dado es un entero positivo o un entero negativo:
   a. −(−4) b. −(−(−(−12)))
   c. −(−(−12)) d. −(−(−(−(−1))))
5. Determina si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F) y justifica tu respuesta.
   a. El opuesto de un número entero negativo es un número entero positivo.
   b. Si un entero *a* está a la izquierda de otro entero *b* y *b* está a la izquierda de cero, entonces *a* es un entero positivo.

Comunicar y representar

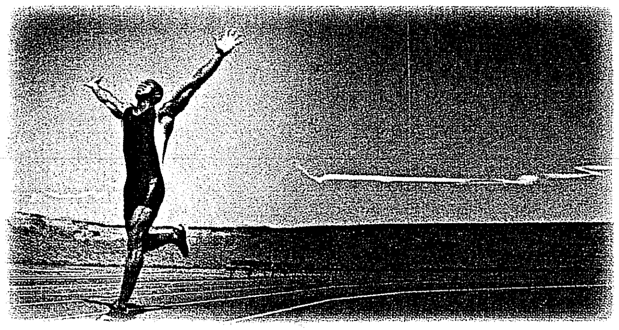
Explica

6. Utiliza una recta numérica para completar los espacios en blanco:
   a. 2 se encuentra ______ unidades a la izquierda de 7.
   b. El opuesto de 3 está a ______ unidades de −4.
   c. El opuesto de 5 se encuentra a ______ unidades del opuesto de 1.

Plantear y resolver problemas

Analiza

7. Un atleta corre por una carretera recta desde el kilómetro 25 hasta el kilómetro 37. ¿Cuántos kilómetros recorrió?



8. ¿En qué posición se encuentra un móvil que partió de la posición −12 y se desplazó sobre una recta 18 unidades hacia la derecha? Representa sobre una recta la situación.
9. Una sustancia química que está a 3 °C bajo cero se calienta en un mechero hasta alcanzar una temperatura de 12 °C por encima de cero. ¿Cuántos grados subió la temperatura de la sustancia?

Evalúa

1. Ubica en una recta numérica los números −3, 6, −4, 0, 8, 2, −5 y sus opuestos.
2. Completa los espacios en blanco:
   a. 0 está a la _________ de 16, entonces 0 < 16.
   b. −2 > −9 porque −2 está a la ____ de −9.
   c. Si 4 está a la izquierda de 6, 4 ______ 6.
   d. Si 8 está a la derecha de −6, 8 ____ −6.

Desempeños

- Ubica en la recta numérica números enteros y sus opuestos.
- Establece relaciones de orden entre números enteros.

Practica más, pág. 334.

Tema 64

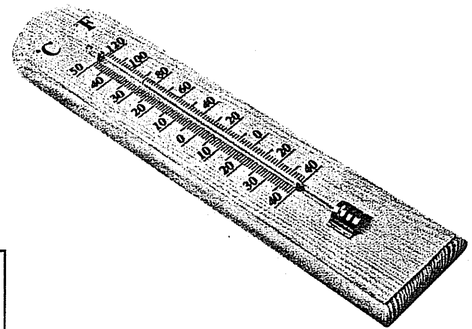
Adición y sustracción de números enteros

Ideas previas

1. ¿Cuál es la distancia de –5 a 0? ¿Cuál es la distancia de 7 a 0?
2. Resuelve las siguientes operaciones:

a. 28 + 62 **b.** 14 + 58 **c.** 88 – 27 **d.** 189 – 86

Analiza



Carlos está realizando un experimento en la clase de ciencias y debe tomar la temperatura ambiente en ciertos momentos del día. En la madrugada la temperatura fue de 6 °C bajo cero, a las 10:00 a.m. aumentó 15 °C, al medio día disminuyó 3 °C y en la noche disminuyó 2 °C más.

Usaremos la recta numérica para determinar cuál fue la temperatura al final del día. Para representar una temperatura de 6 °C bajo cero ubicamos el número –6 y a partir de él realizamos movimientos en la recta, teniendo en cuenta que si la cantidad aumenta el movimiento es a la derecha y si disminuye, a la izquierda:

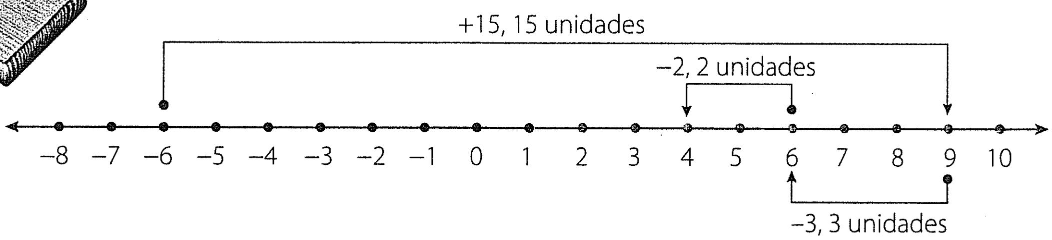


Figura 8.9

En la recta de la figura 8.9 observamos que la posición final es 4, lo que significa que la temperatura al final del día es 4 °C.

Valor absoluto

El valor absoluto de un número entero es la distancia que separa al número del cero en la recta numérica. El valor absoluto de a se denota $|a|$.

Ejemplo

Hallemos el valor absoluto de –7 y 9.

Solución

La distancia de –7 a 0 es 7 unidades, por tanto $|-7| = 7$

La distancia de 9 a 0 es 9 unidades, por tanto $|9| = 9$.

Adición

Para **adicionar** dos números enteros procedemos de acuerdo con el signo de los sumandos, así:

- Si los números son de igual signo, se suman sus valores absolutos y el signo del resultado es el mismo que el de los sumandos.
- Si los números tienen signos contrarios, se encuentra la diferencia entre los valores absolutos del mayor y el menor, y el resultado tiene el signo del entero que tenga el mayor valor absoluto.

Ejemplo

Hallemos el resultado de la adición $(-6) + 15 + (-3) + (-2)$.

Solución

Los sumandos -6, -3 y -2 tienen el mismo signo, entonces adicionamos los valores absolutos de cada uno y colocamos el mismo signo de los sumandos:

$$(-6) + (-3) + (-2) = -11.$$

La adición inicial $(-6) + 15 + (-3) + (-2)$ se convierte en $15 + (-11)$, es decir, en una adición de dos enteros con diferente signo: $15 + (-11) = 4$.

Infiere y responde

En la adición $15 + (-11)$, ¿cuáles son los valores absolutos de los sumandos?, ¿cuál es el sumando que tiene el mayor valor absoluto?, ¿qué signo debe tener el resultado?

Sustracción

Para **sustraer** dos números enteros, se suma el minuendo con el opuesto del sustraendo.

$$a - b = a + (-b)$$

Ejemplo

Efectuemos la sustracción $17 - 32$.

Solución

En esta sustracción el minuendo es 17 y el sustraendo es 32; por tanto, tenemos:

$$17 - 32 = 17 + (-32) = -15.$$

Problema del día

Los primeros términos de la sucesión de Fibonacci son 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13. Halla los siguientes cinco términos de la sucesión.

Desarrolla pensamiento crítico

Ejercitar procedimientos

Interpreta

1. Halla el resultado de las siguientes adiciones.

a.	753 + (–750)	**b.**	–852 + (–117)
c.	1238 + 5004	**d.**	–495 + 847
e.	856 + (–987)	**f.**	–1458 + 5890
g.	1234 + (–1234)	**h.**	–568 + (–792)

2. Identifica en cada sustracción el minuendo, el sustraendo y el opuesto del sustraendo.

a.	103 – 245	**b.**	97 – 79
c.	–79 – 68	**d.**	973 – 159
e.	–138 – 138	**f.**	0 – 67
g.	16 – (–7)	**h.**	–36 – (–19)

Pensar y razonar

Infiere

3. Un cuadrado mágico es una cuadrícula de $n \times n$ en la que se acomodan ciertos números que cumplen que la suma de cualquier renglón, la suma de cualquier columna y la suma de cualquiera de las dos diagonales es siempre igual.

   Construye un cuadrado mágico de lado tres con los números –8, –7, –6, –5, –4, –3, –2, –1 y 0.

Comunicar y representar

Explica

4. Determina si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F). Justifica tus respuestas.
   - **a.** La diferencia entre dos números enteros opuestos es cero.
   - **b.** La adición de dos enteros con diferente signo siempre da como resultado un entero negativo.
   - **c.** La adición de números enteros es conmutativa.
   - **d.** La suma de dos enteros opuestos es cero.

Plantear y resolver problemas

Analiza

5. Una persona se lanza en paracaídas desde un avión que vuela a 450 m de altura. La persona comienza a caer y desciende 78 m, pero una corriente de aire lo eleva 26 m.
   - **a.** ¿A qué altura respecto al piso se encuentra el paracaidista?
   - **b.** ¿A qué altura respecto al avión se encuentra el paracaidista?

6. La construcción de una edificación en la edad antigua duró 100 años y fue iniciada en el 154 a.C. ¿En qué año terminó la construcción?

7. El señor Gómez sale de su casa a realizar unas compras por $ 12 000. Si vuelve con una deuda de $ 5200, ¿cuál es el número entero que representa el valor total de las compras?

8. En la luna no hay atmósfera que modere la temperatura y ésta depende fuertemente de cómo incide la luz solar. Allí la temperatura durante el día alcanza 107 °C y en la noche –153 °C. ¿Cuál es la diferencia entre la temperatura máxima y mínima de la luna?

Evalúa

1. Completa la tabla 8.9.

Resta	Minuendo	Sustraendo	Opuesto del sustraendo	Resta como suma	Diferencia
42 – 51					
65 – (–56)					
–51 – 87					

Tabla 8.9

Desempeño

- Realiza adiciones y sustracciones entre números enteros.

Practica más, pág. 335.

Tema 65

Multiplicación y división de números enteros

Ideas previas

1. Realiza las siguientes operaciones:

   a. 24×36

   b. 76×7

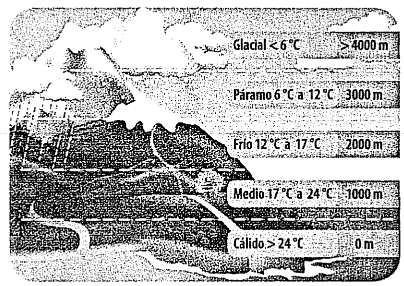
   c. $864 \div 12$

   d. $2376 \div 18$

2. Un depósito dispone de un grifo de entrada y de un desagüe. El caudal de entrada es de 3 litros cada hora y el de desagüe, de 5 litros cada hora. Si actúan conjuntamente el grifo de desagüe y el de entrada, ¿cómo estará el depósito pasadas 5 horas?

Interpreta

Retomemos la pregunta **5.** de la **situación problema** presentada al inicio de la unidad: ¿cuál es la diferencia aproximada de temperaturas entre dos ciudades cuyas altitudes difieren 935 metros?



Del enunciado de la situación extraemos el siguiente dato: la temperatura desciende aproximadamente en un grado centígrado por cada 187 metros que aumenta la altitud.

Debemos determinar cuántas veces está 187 en 935; por tanto, efectuamos una división. $935 \div 187 = 5$, entonces, la diferencia de temperaturas entre las dos ciudades es de 5 °C.

> Al **multiplicar** dos números enteros se multiplican sus valores absolutos y el signo del producto está determinado por la **ley de signos**.
>
> Al **dividir** dos números enteros se dividen sus valores absolutos y el signo del cociente se encuentra empleando la **ley de signos**.

Para diferenciar el signo menos que indica que el número es un entero negativo del signo que indica sustracción, colocamos el número entre paréntesis. Así (-3) representa el número entero -3.

¿Qué significa?

La **ley de signos** señala que:

El producto de signos iguales es positivo y el producto de signos diferentes es negativo:

$(+) \times (+) = +$ $\quad (-) \times (-) = +$

$(+) \times (-) = -$ $\quad (-) \times (+) = -$

El cociente de signos iguales es positivo y el cociente de signos diferentes es negativo:

$(+) \div (+) = +$ $\quad (-) \div (-) = +$

$(+) \div (-) = -$ $\quad (-) \div (+) = -$

Ejemplo

Hallemos los siguientes productos:

a. $11 \times (-8)$

b. 7×12

Solución

a. Como los factores tienen diferente signo, el producto es negativo.
$11 \times 8 = 88$, entonces $11 \times (-8) = -88$.

b. Como los dos factores son positivos, el producto es positivo.
$7 \times 12 = 84$, entonces $7 \times 12 = 84$.

Ejemplo

Efectuemos las siguientes divisiones:

a. $-126 \div 42$

b. $-364 \div (-13)$

Solución

a. Realizamos la división entre los valores absolutos: $126 \div 42 = 3$.

Dado que los números tienen diferente signo, el resultado del cociente es negativo; por tanto: $-126 \div 42 = -3$.

b. Los dos números tienen signo negativo, en consecuencia, el resultado del cociente es positivo; entonces, $-364 \div (-13) = 28$.

Ejemplo

Realicemos las siguientes multiplicaciones y divisiones entre números enteros:

a. 4×6

b. $6 \times (-3)$

c. -5×7

d. $-8 \times (-9)$

e. $24 \div 6$

f. $6 \div (-3)$

g. $-35 \div 7$

h. $-81 \div (-9)$

Solución

a. $4 \times 6 = +(4 \times 6) = 24$

b. $6 \times (-3) = -(6 \times 3) = -18$

c. $-5 \times 7 = -(5 \times 7) = -35$

d. $-8 \times (-9) = -(8 \times 9) = -72$

e. $24 \div 6 = +(24 \div 6) = 4$

f. $6 \div (-3) = -(6 \div 3) = -2$

g. $-35 \div 7 = -(35 \div 7) = -5$

h. $-81 \div (-9) = -(81 \div 9) = -9$.

Analiza y completa

En la división de números enteros, el dividendo debe ser múltiplo del ________ y además el divisor debe ser diferente de ________.

Simplificación de expresiones

Para simplificar expresiones que involucran varias operaciones, incluyendo la multiplicación y/o la división, se debe tener en cuenta que la multiplicación y la división priman ante la adición y la sustracción y que las operaciones se realizan de izquierda a derecha.

Ejemplo

Simplifiquemos: $-36 \div 6 + 4 \times (-3)$.

Solución

$-6 + (-12) = -6 + (-12) = -6 - 12 = -18$.

$$\begin{aligned} & -36 \div 6 + 4 \times (-3) \\ &= -6 + 4 \times (-3) \\ &= -6 - 12 \\ &= -18 \end{aligned}$$

Problema del día

Escribe dos divisiones para cada multiplicación:

$7 \times (-5) = -35$

$-25 \times (-5) = 125$

$-8 \times (-12) = 96$

$-7 \times 11 = -77$

Desarrolla pensamiento crítico

Ejercitar procedimientos

Interpreta

1. Encuentra el resultado de las siguientes operaciones:

   a. $432 \div (-6)$ **b.** $14 \times (-8)$

   c. $-18 \times (-16)$ **d.** $-1344 \div 24$

   e. $-3200 \div (-8)$ **f.** -28×38

2. Simplifica las siguientes expresiones:

   a. $35 + 56 \div (-7) \times 4$

   b. $-164 + 62 \times (-9) \div 3$

   c. $-840 \div 3 \div (-7) + 13 \times (-4)$

   d. $231 - 459 + 63 \div (-9) \times 7$

3. Completa la tabla 8.10.

a	b	c	$a \times b$	$b \times c$	$c \times a$
−3		−7	−21		
	−8	−10			−90
−5	−7			−49	
	4	−12			−48
0	11			11	

Tabla 8.10

Pensar y razonar

Infiere

4. Completa el diagrama de la figura 8.10.

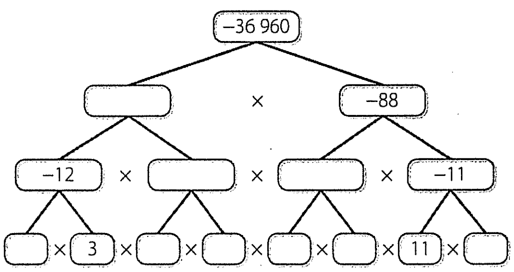


Figura 8.10

Comunicar y representar

Explica

5. Determina si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F). Justifica tu respuesta.

   a. El cociente entre dos números enteros siempre es un número entero.

   b. El producto de dos números enteros opuestos es cero.

   c. Si el producto de dos enteros es positivo, es porque cada uno de los factores es positivo.

   d. Si se divide un entero por el opuesto de 1, el resultado es el mismo entero.

Plantear y resolver problemas

Analiza

6. En una fábrica de dulces empacan 50 chocolates en cada bolsa y 12 bolsas en cada caja. Si se tienen 25 cajas, ¿cuántos chocolates hay?
7. Un submarino desciende 5 m cada minuto. ¿Cuántos metros desciende en 25 minutos?
8. ¿Cuál es el número entero que multiplicado por −8 da como resultado −144?
9. Un buzo está en la superficie del agua y se sumerge 5 m en 30 segundos. ¿Cuánto tiempo tarda en sumergirse 45 m?

Evalúa

1. Marcela y Germán resolvieron el mismo ejercicio, como se muestra en la figura 8.11. Cada uno cometió un error, encuéntralo y corrígelo.

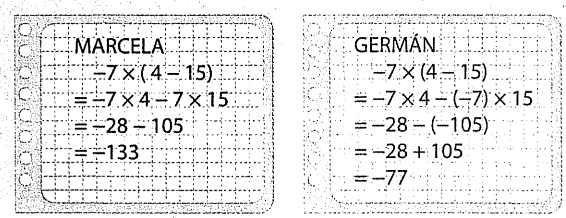


Figura 8.11

2. ¿Cuál de las siguientes divisiones tiene el cociente menor?

   a. $-14 \div 7$ **b.** $-14 \div (-7)$ **c.** $14 \div 7$

Desempeños

- Justifica procedimientos relacionados con la multiplicación de números enteros.
- Realiza comparaciones entre cocientes de números enteros.

Practica más, pág. 336.

Reflexión ciudadana

Proyecto ambiental escolar – PRAE

Competencia ciudadana

Reconozco que los seres vivos y el medio ambiente son un recurso único e irrepetible que merece mi respeto y consideración.

La legislación ambiental en el país se remonta al año 1908, cuando se estableció el Decreto 1279. El año siguiente, se creó la *Comisión Forestal* cuyo propósito era clasificar los bosques, establecer reglas de explotación y defender las aguas y riquezas vegetales. A partir de entonces aparecieron las leyes que tienen que ver con el uso de los bosques, las aguas y la creación del Ministerio de Agricultura.

En 1973 se expidió la Ley 23, cuyo propósito era "prevenir y controlar la contaminación del medio ambiente y buscar el mejoramiento, conservación y restauración de los recursos naturales renovables, para defender la salud y el bienestar de todos los habitantes del territorio nacional".

En 1982 se estableció la obligatoriedad de una franja o cinturón verde para las ciudades con más de 300 000 habitantes, con el fin de detener la expansión incontrolada de las mismas y preservar las tierras con un uso potencial para la producción de alimentos.

Finalmente, la *Constitución Política de Colombia* de 1991 resumió la legislación ambiental en el capítulo 3 "De los derechos colectivos y del ambiente", y en 1993 se creó el Ministerio del Medio Ambiente, el cual es el encargado desde entonces de regular las condiciones generales para el saneamiento del medio ambiente.

A nivel escolar, en la Ley General de Educación de 1994 se estableció la enseñanza obligatoria de la educación ambiental y en el Decreto 1860 del mismo año se reglamentó la articulación del PRAE con el PEI de los colegios.

Un proyecto ambiental escolar PRAE es un proyecto pedagógico que debe tener cada colegio, en el cual se promueven espacios de reflexión y discusión para el análisis y la comprensión de los problemas ambientales locales, regionales y nacionales, y en el que se generan alternativas de solución a dichas problemáticas.

Explica

1. ¿Cuántos años han transcurrido desde la aparición del primer decreto ambiental?
2. ¿Cuántos años pasaron desde la creación del Ministerio de Agricultura y el del Medio Ambiente?
3. ¿Cuál es la problemática central trabajada en el PRAE de tu colegio?

Bolsas de empleo virtuales. ¿Qué son y cómo se utilizan?

Una bolsa de empleo virtual es una herramienta que pone en conocimiento de las empresas que las usan las hojas de vida de los candidatos ideales para cubrir sus vacantes. Sin embargo, no hace selección de personal, ni funciona como una agencia de empleos, ya que cada usuario solicita el empleo de su interés directamente a la oficina de selección de personal de las empresas inscritas, quienes hacen la evaluación y finalmente la selección.

Una de las ventajas que brindan las bolsas de empleo virtuales es que los postulantes pueden recibir por correo electrónico todas las novedades y las ofertas que van surgiendo día a día.

Una persona que desee registrar su hoja de vida en una bolsa de empleo virtual debe realizar el siguiente proceso:

1. Crear una cuenta gratuita para inscribir la hoja de vida. En la hoja de vida se especifican las habilidades, destrezas y experiencia que posee la persona.
2. Una vez inscrita la hoja de vida, el interesado debe seleccionar entre las vacantes publicadas aquella que le interese, usando los filtros que le proporciona el sistema.
3. Para cada oferta de trabajo que le interesa, debe enviar la solicitud de empleo vía Internet a la empresa que publica la vacante.
4. En caso de que la empresa que tiene la vacante se interese por el candidato, lo contactará directamente para solicitarle más información o una entrevista.

En el momento en que la empresa lo contacta termina la función de la bolsa de empleo.

En Colombia existen varias bolsas de empleo virtuales, por ejemplo: www.zonajobs.com.co, www.elempleo.com.co, www.computrabajo.com.co, entre muchas otras, las cuales prestan un servicio ágil y responsable a sus usuarios.

Competencia personal

Definir un proyecto personal en el que se aprovechan las propias fortalezas y con el que se superan las debilidades, se construye sentido de vida y se alcanzan metas en diferentes ámbitos.

Evalúa

1. ¿Qué procedimiento debe seguir una persona para inscribir su hoja de vida en una bolsa de empleo virtual?
2. Elabora una lista de las habilidades y destrezas que escribirías en tu hoja de vida.

Desempeño

- Reconozco mis habilidades y destrezas.

Evalúa tu pensamiento crítico

Las siguientes actividades te indicarán el nivel de competencia que has alcanzado y determinarán los desempeños que evidencian tu acción de aprendizaje.

Ejercitar procedimientos

Interpreta

1. Marca con una ✗ el conjunto al cual pertenece cada número:

	N	Z^-	Z^+	Z
7				
−11				
457				
0				
−857				
9				
−1235				

Tabla 8.11

2. Realiza las siguientes operaciones. En los casos en que hay paréntesis, resuelve primero las operaciones allí indicadas:
   - **a.** $-4 \times 5 + 8 \times -9$
   - **b.** $-12 - (6 \times -8)$
   - **c.** $72 \div (-12) + (-8 \times -3) - 36$
   - **d.** $11 \times 18 + (-192 \div 12) - (-98)$
   - **e.** $-16 - 42 + 56 - (-32 \div (-4))$
3. Natalia escribe el número relativo asociado a las edades de sus amigos, tomando como referencia su edad, como se muestra en la figura 8.12.

Andrés: − 4
Lina: + 1
Sandra: + 5
Diego: − 3
Camilo: + 2

Figura 8.12

   - **a.** Si Natalia tiene 15 años, ¿cuál es la edad de cada uno de sus amigos?
   - **b.** ¿Cuántos años tendrían Andrés, Lina y Sandra si Diego tuviera 22 años?
   - **c.** Utiliza números relativos para organizar las edades si el punto de referencia es la edad de Camilo.

Pensar y razonar

Infiere

4. Dibuja tres cuadrados mágicos de lado tres. Completa cada cuadrado con un conjunto de números:
   - **a.** −4, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, 4
   - **b.** −2, −4, −6, −8, −10, −12, −14, −16, −18
   - **c.** −6, −5, −4, −3, −2, −1, 0, 1, 2
5. Completa la tabla 8.12 efectuando las multiplicaciones respectivas.

×	6	−7		2
−7	−42			
	−24			
5			40	
−11				
		56		

Tabla 8.12

6. En la pirámide de la figura 8.13 la suma de dos casillas consecutivas da como resultado el número de la casilla superior. Completa los espacios en blanco.

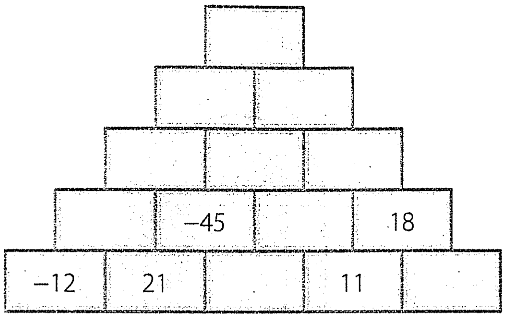


Figura 8.13

7. Organiza los siguientes números de menor a mayor y ubícalos en la recta numérica.

$$6,\ -(-2),\ -(-(-4)),\ -7$$

Comunicar y representar

Explica

8. Representa en la recta numérica cada una de las siguientes situaciones y soluciónalas:

   a. La temperatura de un lugar al iniciar el día es 17 °C, en la tarde aumenta 4 °C y finalmente disminuye 6 °C. ¿Cuál es la temperatura al final del día?

   b. Una pelota de tenis se deja caer desde una altura de 10 metros, cae al piso y rebota hasta una altura de 2 metros, cae otra vez al piso y rebota a una altura de 1 metro y finalmente, cae al piso y queda quieta. ¿Qué distancia recorrió la pelota?

9. Determina el valor de verdad de cada afirmación. Justifica tu respuesta.

   a. Dados tres números enteros a, b y c se cumple que $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

   b. Al dividir dos enteros negativos el resultado es un entero negativo.

   c. La unión de los enteros negativos y los enteros positivos forma el conjunto de los números enteros.

Plantear y resolver problemas

Explica

10. El tanque de almacenamiento de agua de un conjunto residencial tiene una capacidad de 3250 litros. En un día de corte de agua se consumen 89 litros cada hora. ¿Cuántos litros se han gastado y cuántos quedan si han pasado 14 horas de racionamiento?

11. En una excavación se descienden 12 metros cada minuto. Si en un momento la profundidad a la que se encuentran los excavadores es de 576 metros, ¿cuánto tiempo han trabajado en la excavación?

12. ¿Cuál es el número entero que dividido por −8 da como resultado −28?

Autoevaluación

	Bajo	Básico	Alto	Superior
Identifico números relativos y signados.				
Interpreto el concepto de número entero.				
Reconozco números enteros en diferentes situaciones.				
Establezco relaciones de pertenencia y contenencia entre conjuntos numéricos.				
Realizo adiciones y sustracciones entre números enteros.				
Encuentro el resultado de multiplicaciones y divisiones entre números enteros.				
Empleo la adición y la sustracción de números enteros en la solución de problemas.				
Utilizo la multiplicación y la división de números enteros en la solución de problemas.				
Comprendo las tareas a realizar en matemáticas.				

Prueba Saber

Encuentra la respuesta correcta entre las opciones A, B, C y D, y márcala en la hoja de respuestas, rellenando completamente el círculo correspondiente.

Responde las preguntas 1 a 5 teniendo en cuenta la figura 8.14.

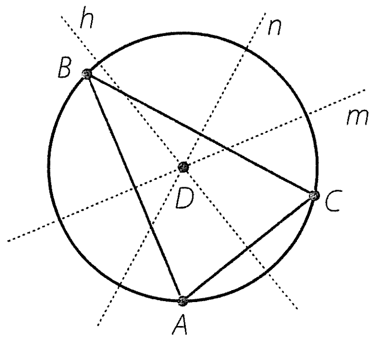


Figura 8.14

1. En la circunferencia, el segmento *BC* es:

   A. El radio. **B.** Una cuerda.

   C. El diámetro. **D.** Un arco.

2. La recta *m* es:

   A. Una altura del triángulo.

   B. Una mediatriz del triángulo.

   C. Una mediana del triángulo.

   D. Una bisectriz del triángulo.

3. El punto *D* es:

   A. El circuncentro del triángulo.

   B. El baricentro del triángulo.

   C. El ortocentro del triángulo.

   D. El incentro del triángulo.

4. El triángulo *ABC* es:

   A. Rectángulo **B.** Equilátero

   C. Acutángulo **D.** Obtusángulo.

5. La recta *h* es perpendicular a

   A. El segmento *BC*.

   B. La recta *m*.

   C. La recta *n*.

   D. El segmento *AC*.

Responde las preguntas 6 a 10 teniendo en cuenta la siguiente figura.

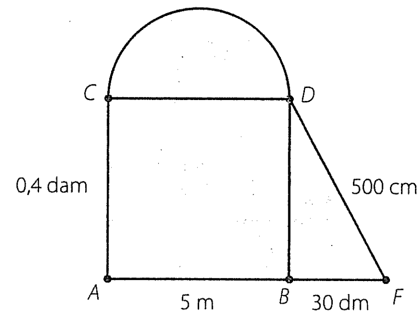


Figura 8.15

6. La medida de *CD* es:

   A. 50 hm. **B.** 0,05 dam.

   C. 5000 mm. **D.** 0,05 km.

7. El radio de la semicircunferencia es:

   A. 5 m. **B.** 0,25 m.

   C. 2,5 m. **D.** 10 m.

8. El perímetro de la figura es:

   A. 24,854 m. **B.** 2,4854 dm.

   C. 0,024854 cm. **D.** 248,54 hm.

9. El área de la figura es:

   A. 3581,75 dm^2.

   B. 3,58175 m^2.

   C. 0,358175 hm^2.

   D. 358 175 mm^2.

10. El área del trapecio *AFDC* es:

    A. 260 dm^2. **B.** 2,6 dm^2.

    C. 0,26 dam^2. **D.** 26 hm^2.

Utiliza la siguiente información para responder las preguntas 11 a 13.

En un colegio se realiza un examen a 50 estudiantes. La calificación es de 1 a 5, siendo 1 el puntaje más bajo y 5 el más alto. En la tabla 8.13 se muestran las notas obtenidas por los estudiantes:

1	2	3	3	4	5	4	1	5	2
3	4	5	5	4	4	4	4	5	4
4	5	5	1	3	4	4	3	4	4
2	5	5	4	4	3	4	3	4	2
4	2	5	2	5	4	4	1	5	3

Tabla 8.13

11. La frecuencia relativa correspondiente a la puntuación 4 en el examen es:

A. 0,12 **B.** 0,40

C. 0,24 **D.** 0,08

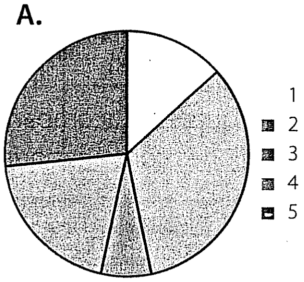
12. La media del conjunto de datos es:

A. 4,3 **B.** 2,7

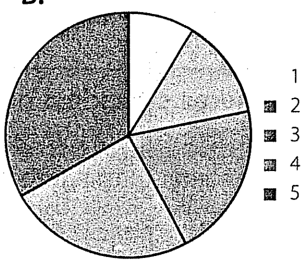
C. 3,4 **D.** 3,8

13. El diagrama circular que representa la situación es:

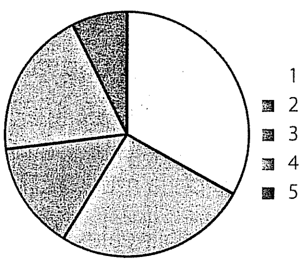
A.



B.



C.



D.

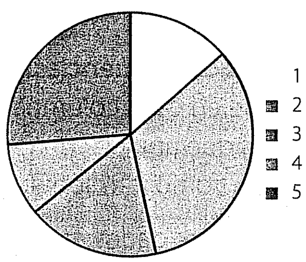


Figura 8.16

Emplea la información dada en la figura 8.17 para responder las preguntas 14 a 16.

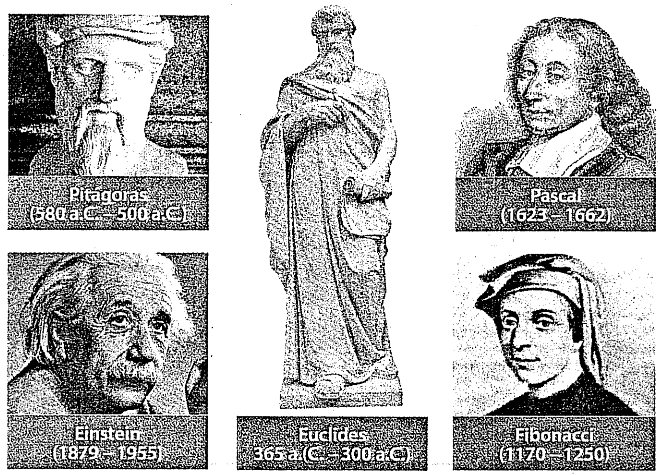


Figura 8.17

14. El orden cronológico de nacimiento de los personajes, es:

A. Euclides, Pitágoras, Fibonacci, Einstein, Pascal

B. Pitágoras, Euclides, Pascal, Fibonacci, Einstein

C. Einstein, Pascal, Fibonacci, Pitágoras, Euclides

D. Pitágoras, Euclides, Fibonacci, Pascal, Einstein

15. Si se toma como referencia el año de nacimiento de Fibonacci, el número que sirve para determinar el nacimiento de Pascal es:

A. −453 **B.** +39

C. +453 **D.** −1623

16. La cantidad de años que trascurrieron desde la muerte de Pitágoras, hasta el nacimiento de Pascal, es:

A. 1123 **B.** 2023

C. 2123 **D.** 1623

Formato de respuestas

1. A B C D
2. A B C D
3. A B C D
4. A B C D
5. A B C D
6. A B C D
7. A B C D
8. A B C D
9. A B C D
10. A B C D
11. A B C D
12. A B C D
13. A B C D
14. A B C D
15. A B C D
16. A B C D

Glosario

Ángulo: figura geométrica formada por dos rayos que no son colineales y que tienen el mismo origen.

Área: cantidad de superficie de una región plana.

Conjunto: Colección de objetos con una característica común. Los objetos que forman el conjunto se denominan elementos.

Divisor: número que divide a otro sin dejar residuo.

Ecuación: expresión matemática que indica la igualdad entre dos informaciones en las cuales hay un número desconocido representado por una variable. Resolver una ecuación significa encontrar el número representado por la variable.

Expresión aritmética: frase que expresa la operación entre un dato desconocido, representado por una letra, y un número.

Factorización prima: expresar a un número compuesto como el producto de factores primos.

Fracción: número que indica el cociente entre dos naturales, donde el denominador nunca es cero.

Fracción decimal: fracción cuyo denominador es una potencia de 10.

Máximo común divisor: de dos o más números, es el mayor de los divisores comunes de estos números.

Mínimo común múltiplo: de dos o más números, es el menor de los múltiplos comunes, diferente de cero, de estos números.

Múltiplos: los múltiplos de un número son aquellos que se obtienen multiplicando ese número por cada uno de los números naturales.

Número compuesto: número distinto de cero que tiene más de dos divisores diferentes.

Números enteros: conjunto numérico formado por los números naturales y sus opuestos.

Número primo: número que tiene sólo dos divisores diferentes, la unidad y el mismo número.

Números relativos: número al que se le antepone un signo, para indicar cantidades respecto a un punto de referencia.

Números signados: número que está acompañado de un signo, para indicar situaciones contrarias que no dependen de un referente.

Perímetro: longitud total alrededor de una figura plana.

Polígono: figura cerrada, limitada por segmentos de recta.

Tablas de frecuencias: tabla de datos de una variable, donde en cada columna se contabilizan el número de veces que aparece un individuo; se acumulan o se escriben como fracción del tamaño de la muestra.

Triángulo: dados tres puntos no colineales, la unión de los tres segmentos que conectan los puntos es un triángulo.

Nombre: ______ Curso: ______ Fecha: ______

Tema 1 Números naturales y sistema decimal

Interpreta

1. Escribe el número que corresponde a cada descomposición polinomial.

   a. $5 \times 10^4 + 2 \times 10^2 + 4 \times 10^1 =$ ______

   b. $8 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 4 =$ ______

   c. $3 \times 10^5 + 5 \times 10^3 + 8 \times 10^0 =$ ______

2. Completa la tabla, indicando el valor posicional del dígito 5 en cada número.

Número	Se lee	Valor posicional del dígito 5	Valor en unidades
37 465 291	Treinta y siete millones cuatrocientos sesenta y cinco mil doscientos noventa y uno	5 unidades de mil	5000
15 237			
90 200 050			
3584			
10 005			

3. Escribe la descomposición polinomial de cada número.

   a. 17 856: ______

   b. 2472: ______

   c. 3 000 789: ______

4. Halla el resultado de cada expresión.

   a. 456 + 5 centenas = ______

   b. 4329 – 1 unidad de mil = ______

   c. 61 030 + 3 decenas = ______

5. Responde.

   a. ¿Cuántas unidades hay en 85 decenas? ______

   b. ¿Cuantas centenas completas hay en 5964 unidades? ______

   c. ¿Cuantas decenas hay en 25 centenas? ______

Tema 2 Orden en los números naturales

Interpreta

6. Escribe los signos > o <, según corresponda.

   a. 23 489 ☐ 17 592

   b. 16 389 ☐ 14 389

   c. 2678 ☐ 3490

   d. 58 731 ☐ 58 726

   e. 47 009 ☐ 47 102

7. En la siguiente tabla se registra la altura del monte más alto de cada continente. Utiliza la información que allí aparece para completar las frases.

Continente	Monte	Altura
América	Aconcagua	6959 m
África	Kilimanjaro	5895 m
Asia	Everest	8848 m
Antártida	Vinson	4897 m
Europa	Elbrus	5633 m
Oceanía	Jaya	5029 m

   a. El orden de los montes, del más bajo al más alto es:

   ______, ______, ______,

   ______, ______, ______.

   b. El monte Everest es ______ m más alto que el monte Aconcagua.

   c. La diferencia entre la mayor y la menor altura de los montes es ______m.

Interpreta: Realiza la descomposición polinomial de un número natural. Identifica el valor posicional de cada dígito en un número natural.
Interpreta: Compara dos a más números naturales.

Nombre: ______________________ Curso: ______ Fecha: ______

Tema 3 Adición y sustracción de números naturales

Analiza

1. Indica en cada caso si la propiedad dada se cumple en la sustracción de números naturales. Justifica tus respuestas.

Propiedad	Conclusión
Clausurativa $16 - 20 = \square$	
Asociativa $(85 - 23) - 19 = \square$ $85 - (23 - 19) = \square$	
Conmutativa $189 - 17 = \square$ $17 - 189 = \square$	
Modulativa $13 - 0 = \square$ $0 - 13 = \square$	

2. Escribe el número que falta de modo que el resultado sea correcto.

a.
$$\begin{array}{r} 1\;4\;9 \\ +\;\square\,\square\,\square \\ 7\;4\;3 \\ \hline 1\;0\;1\;4 \end{array}$$

b.
$$\begin{array}{r} 1\;0\;2\;5\;8 \\ -\;\square\,\square\,\square \\ \hline 9\;3\;1\;5 \end{array}$$

3. Resuelve.

a. Ana María tiene 14 años, Oscar nació cuando ella tenía 5 años. ¿Cuál será la edad de Oscar dentro de 9 años? _______

b. Diego y Mauricio tenían la misma cantidad de estampillas. Mauricio vendió 12. Ahora entre los dos tienen 28. ¿Cuántas estampillas tiene Diego? _______

Tema 4 Ecuaciones de tipo aditivo

Interpreta

4. Escribe el número que hace verdadera la igualdad.

a. $\square + 34 = 87$

b. $13 + \square = 29$

c. $51 + \square = 56$

d. $16 + \square = 45$

5. Reemplaza en cada caso la incógnita por el valor dado y verifica si la ecuación es verdadera o falsa.

a. $32 + x = 56$; para $x = 14$

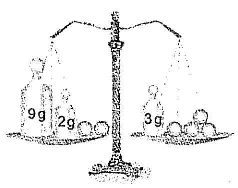
b. $48 - m = 33$; para $m = 15$

c. $1256 + z = 3422$; para $z = 1943$

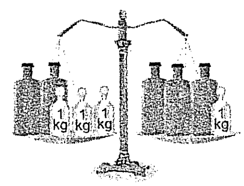
d. $r + 7664 = 8318$; para $r = 654$

6. Las balanzas de la figura están en equilibrio. Averigua en cada caso el peso de los objetos que aparecen en estas.

a.



b.



7. Nicolás tiene 25 carros de colección. Juan tiene 7 más que Nicolás. Felipe tiene 12 menos que Juan. ¿Cuánto tienen entre los tres? _______________

8. La diferencia entre 24 y un número es 15. ¿Cuál es el número? _______________

9. El precio de una bicicleta más el casco es de $ 187 000. Si la bicicleta cuesta $ 152 000, ¿cuánto vale el casco? _______________

Analiza: Identifica las propiedades que no cumple la sustracción de números naturales. Halla los términos faltantes en una adición y/o una sustracción.
Interpreta: Desarrolla y aplica diferentes estrategias para la solución de problemas. Modela con una ecuación una expresión verbal o gráfica.

Nombre: ______ Curso: ______ Fecha: ______

Tema 5 Multiplicación y división de números naturales

Explica

1. Relaciona con una flecha, la columna de la izquierda con la de la derecha teniendo en cuenta el orden en que se aplican las propiedades.

a.	$14 \times 13 \times 20 = (14 \times 20) \times 13 = 280 \times 13 = 3640$	Distributiva y modulativa
b.	$11 \times 28 = 28 \times 11 = 308$	Conmutativa
c.	$50 \times 20 \times 15 = (50 \times 20) \times 15 = 1000 \times 15 = 15\,000$	Asociativa
d.	$65 \times 26 = (65 \times 25) + (65 \times 1) = 1625 + 65 = 1690$	Conmutativa y asociativa

2. Verifica la veracidad o falsedad de cada una de las siguientes afirmaciones. Justifica tus respuestas verdaderas con un ejemplo y las falsas con un contraejemplo.

   a. El módulo de la división es el mismo de la multiplicación. ( )

   b. La división de números naturales es conmutativa. ( )

   c. Existe la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la sustracción. ( )

   d. La división de números naturales no es asociativa. ( )

Tema 6 Ecuaciones de tipo multiplicativo

Analiza

3. Reemplaza el valor dado para la incógnita y comprueba que la igualdad se cumple.

   a. $4 \times x = 72$ $\quad x = 18$

   b. $235 \div p = 5$ $\quad p = 47$

   c. $(24 + m) \times 16 = 1584$ $\quad m = 75$

   d. $y \div 52 = 23$ $\quad y = 1196$

4. Escribe el número que completa la igualdad.

   a. $\square \times 15 = 90$

   b. $1200 \div \square = 25$

   c. $345 \times \square = 5520$

   d. $\square \times 143 = 3146$

5. Resuelve cada ecuación.

   a. $5x = 80$ ______

   b. $11 \times b = 132$ ______

   c. $c \div 15 = 5$ ______

   d. $7 \times m = 84$ ______

   e. $(a - 10) \times 4 = 128$ ______

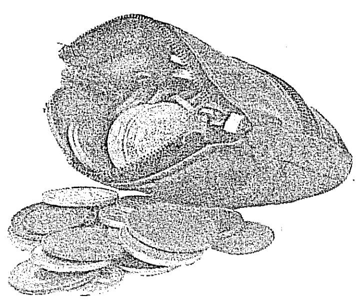
6. En cada problema, plantea una ecuación y resuélvela.

   Una parcela de forma cuadrada se cerca con un alambre que mide, en total, 144 m. ¿Cuál es la longitud del lado de la percela? ______

7. La edad de Tomas aumentada en 28 equivale a la edad de su padre. Si el padre tiene 44 años, ¿cuántos años tiene Tomas? ______

8. Un plomero gana en una hora 3 veces lo que gana su ayudante. Si el plomero gana \$ 12 000 en una hora, ¿cuánto gana el ayudante? ______

9. Juanita tiene el doble de dinero que poseen Paula y Carolina juntas. Si Paula tiene \$ 4500 y Carolina \$ 1200 más que Paula, ¿cuánto dinero tiene Juanita? ______



Nombre: ______ Curso: ______ Fecha: ______

Tema 7 Potenciación en los números naturales

Interpreta

1. Expresa como potencia los productos.

a. $8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8 = \square^{\square}$

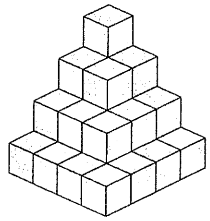
b. $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = \square^{\square}$

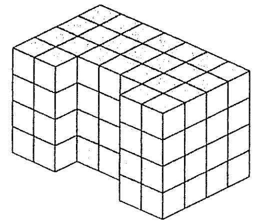
2. Halla el valor de la incógnita en cada expresión.

a. $2^3 \times 2^b \times 2^1 = 2^7$ $\qquad b =$ _____

b. $(6^2 \times 3^2) = (6 \times 3)^a$ $\qquad a =$ _____

3. Expresa el total de cubos de cada figura como una suma de potencias.





Tema 8 Radicación y logaritmación en los números naturales

Infiere

4. Calcula las raíces y justifica la respuesta escribiendo la base correspondiente de la potenciación.

a. $\sqrt[3]{8} =$ _______, porque $\square^3 = 8$

b. $\sqrt[3]{1000} =$ _______, porque $\square^3 = 1000$

c. $\sqrt[4]{625} =$ _______, porque $\square^4 = 625$

d. $\sqrt[5]{243} =$ _______, porque $\square^5 = 243$

e. $\sqrt[9]{512} =$ _______, porque $\square^9 = 512$

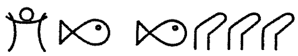
5. En una bodega hay 15 cajas de lápices de colores para distribuir a los diferentes puntos de venta. En cada caja hay 15 cajitas cada una con 15 lápices. ¿Cuantos lápices en total hay en las 15 cajas de la bodega? ___________

6. El disco duro de un computador tiene 40 Gb de capacidad. Si 1 Gb = 2^{10} Mb,1 Mb = 2^{10} Kb y 1 Kb = 210 bytes, ¿Cuál es la capacidad del disco duro en bytes?

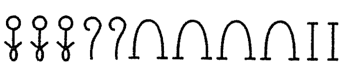
Tema 9 Otros sistemas de numeración

Interpreta

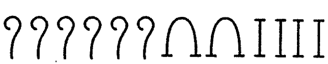
7. Relaciona, con una flecha, los numerales de la columna de la izquierda, con sus equivalentes en la columna de la derecha.

a.  $\qquad$ ( ) 12 127

b. $\overline{\text{XII}}$CXXVII $\qquad$ ( ) 23 341

c.  $\qquad$ ( ) 899

d. $\overline{\text{XXIII}}$CCCXLI $\qquad$ ( ) 624

e.  $\qquad$ ( ) 1 230 000

f. DCCCXCIX $\qquad$ ( ) 3242

Interpreta: Maneja el concepto de potenciación.
Infiere: Calcula raíces a partir de potencias
Interpreta: Identifica sistemas antiguos de numeración y representa números naturales usando la simbología de estos sistemas.

Pensamiento numérico

Nombre: ______ Curso: ______ Fecha: ______

Tema 10 Conjuntos

Interpreta

1. Expresa por extensión cada conjunto.

a. {capital del departamento del Caquetá} ______

b. {océanos del mundo} ______

c. {presidentes de Colombia entre los años 1990 y 2004} ______

d. {principales órganos del sistema respiratorio} ______

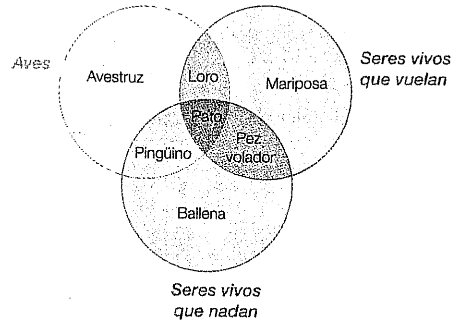
2. Escribe por comprensión cada conjunto.

a. {cordillera Central, cordillera Oriental, cordillera Occidental} ______

b. {2, 4, 6, 8} ______

c. {nitrógeno, helio, oxígeno, potasio, sodio, cinc} ______

3. Escribe falso o verdadero, teniendo en cuenta el diagrama de Venn. Justifica tus respuestas.



a. El pez volador pertenece únicamente al conjunto de los seres vivos que nadan. ( )

b. El loro $\in$ al conjunto de las aves y $\notin$ al conjunto de los seres vivos que nadan. ( )

c. El pingüino y el pato son aves que nadan. ( )

Tema 11 Operaciones entre conjuntos

Analiza

4. Con los siguientes conjuntos, realiza las operaciones indicadas.

$A =$ {números impares menores que 10}

$B =$ {múltiplos de 3 menores que 20}

$C =$ {números primos mayores que 5 y menores que 25}

a. $A \cup B \cup C$ ______

b. $A \cap B$ ______

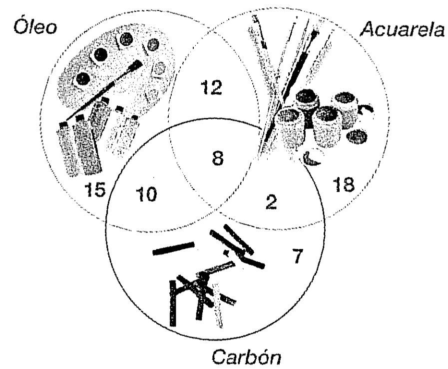
c. $C \cap B$ ______

d. $A - B$ ______

e. $B \Delta C$ ______

f. $(A \Delta C) \cup B$ ______

5. Setenta y dos estudiantes de un colegio decidieron tomar las clases de pintura que se ofrecen en las horas lúdicas. El profesor organizó el grupo de la siguiente forma: 45 estudiantes en clases de óleo, 40 en clases de acuarela y el resto optó por la técnica del carboncillo. En el diagrama de Venn se muestra la organización.



a. ¿Cuántos estudiantes toman las clases de óleo y acuarela? ______

b. ¿Cuántos estudiantes toman carboncillo y acuarela pero no óleo? ______

c. ¿Cuántos estudiantes reciben solamente clase de acuarela? ______

d. ¿Cuántos toman las tres opciones de pintura? ______

Interpreta: Determina por extensión y por comprensión conjuntos. Efectúa operaciones entre conjuntos.
Analiza: Usa las operaciones entre conjuntos en situaciones problema.

Nombre: ______ Curso: ______ Fecha: ______

Tema 12 Múltiplos y divisores de un número natural

Analiza

1. Escribe el número que falta.

   a. 36 es múltiplo de ☐, porque 4 × ☐ = 36.

   b. 85 es múltiplo de 17, porque 17 × ☐ = 85.

   c. ☐ es divisor de 126, porque 126 ÷ ☐ = 9

   d. 24 es divisor de ☐, porque ☐ ÷ 7 = 24.

2. En la clase de Matemáticas hay 30 estudiantes. La profesora quiere que trabajen por grupos iguales de más de dos personas. ¿Cuántas posibilidades de grupos le puedes sugerir?

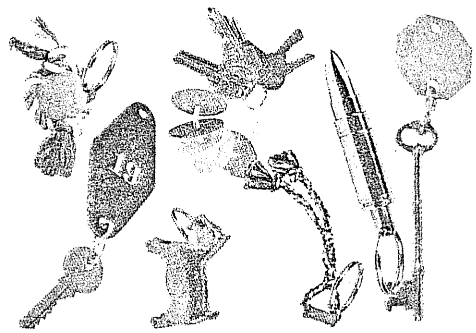
   ______

3. La edad de Diego es un múltiplo de 6; dentro de 3 años su edad será múltiplo de 5 y divisor de 30. ¿Cuántos años tiene Diego?

   ______

4. Adriana y Milena coleccionan llaveros, y ambas tienen cantidades que son múltiplos de 7. Adriana tiene más llaveros. Si Adriana le da tres llaveros a Milena, ambas quedarían con cantidades que son múltiplos de 8. ¿Cuántos llaveros tiene cada una si sabes que la suma de lo que tienen las dos es menor que 60?

   ______



Tema 13 Criterios de divisibilidad

Infiere

5. Usando los criterios de divisibilidad, escribe si los números dados son divisibles por 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10 u 11.

   a. 279 048: ______

   b. 2214: ______

   c. 10 857: ______

   d. 6138: ______

   e. 11 820: ______

6. Escribe verdadero (V) o falso (F) según corresponda. Justifica tu respuesta.

   a. Todo número divisible por 9 también es divisible por 3. ( )

   b. Si el último dígito de un número es impar, podemos afirmar que el número no es divisible por 6. ( )

   c. Para que un número sea divisible por 5 es necesario que termine en 0. ( )

   d. 195 415 es divisible por 11 y por 5. ( )

   e. Todos los números divisibles por 6, son divisibles por 3. ( )

   f. Todos los números divisibles por 10 son divisibles por 2. ( )

7. En una fábrica hay 1225 almohadas de plumas. Se van a organizar varias cajas, de forma que en cada una quede el mismo número de almohadas y no sobre ninguna.

   a. ¿Cuántas cajas pueden organizarse? ____

   b. ¿Cuántas almohadas quedan en cada caja? ____

8. Catalina compró pasabocas para una reunión. Los de dulce costaron $ 9493 y los de sal $ 5994. ¿Cuál de estos dos precios es divisible por 9?

   ______

   ______

Pensamiento numérico

Analiza: Usa los conceptos de múltiplo y divisor para solucionar problemas.
Infiere: Aplica los criterios de divisibilidad. Encuentra un número que cumpla condiciones dadas.

Nombre: ____________ Curso: ______ Fecha: ______

Tema 14 Números primos y compuestos

Interpreta

1. Observa la tabla. Los números que aparecen resaltados son los números primos entre 1 y 100.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	53	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Construye una tabla similar para encontrar los números primos entre 100 y 200.

2. Indica cuáles de los números de la siguiente tabla son primos y cuáles son compuestos. Colorea las casillas de los primos de verde y las de los compuestos, de amarillo.

743	329	317	469	815	321	701	435
261	133	415	433	787	415	809	327
287	169	71	711	207	299	411	253

3. En la siguiente lista de los números primos menores que 100, hay un número que sobra y uno que falta. Identifícalos y enciérralos con un círculo.

2 3 5 11 13 17 23 29 31 37

41 43 47 53 59 61 63 67

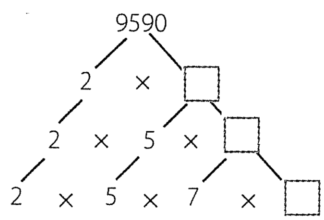
71 73 79 83 89 97

Tema 15 Factorización prima

Infiere

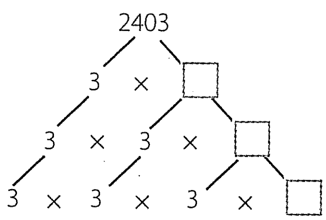
4. En los diagramas de árbol, escribe los números que faltan.

a.



9590 = ________

b.



2403 = ________

5. Halla el error en cada una de estas descomposiciones.

a.

$$\begin{array}{r|l} 512 & 2 \\ 256 & 2 \\ 133 & 133 \\ 1 & \end{array}$$

b.

$$\begin{array}{r|l} 358 & 2 \\ 179 & 3 \\ 53 & 53 \\ 1 & \end{array}$$

Interpreta: Hace uso de las definiciones para clasificar números primos y números compuestos.
Infiere: Establece correspondencia entre un número y sus factores primos.

Nombre: ______ Curso: ______ Fecha: ______

Tema 16 Mínimo común múltiplo

Interpreta

1. Halla el mínimo común múltiplo entre los números.
   - a. 15, 60: ______
   - b. 80 y 160: ______
   - c. 45, 30, 15: ______
   - d. 35, 36, 40 y 42: ______
   - e. 45, 180 y 360: ______
   - f. 27, 90 y 105: ______
   - g. 60, 72, 98: ______
   - h. 120, 130 y 145: ______

2. Un faro se enciende cada 24 segundos, otro cada 30 segundos y otro cada minuto. A las 6:00 a.m. se encienden los tres. ¿A qué hora volverán a encenderse los tres al tiempo?

______

3. Dos ciclistas compiten en pista de un velódromo. El primero tarda cuatro minutos en dar la vuelta mientras que el segundo tarda 5 minutos. Si parten al mismo tiempo, ¿cuántos minutos deben transcurrir para que se encuentren en el mismo punto de partida?

______

4. En una autopista de 3500 km de longitud se encuentra: una estación de gasolina cada 120 km, un peaje cada 70 km y un control de policia cada 80 km. Calcula en qué kilómetro se encuentran juntos:
   - a. una estación de gasolina y control de policía. ______
   - b. Control de policía y un peaje. ______
   - c. Los tres servicios a la vez. ______

Pensamiento numérico

Tema 17 Máximo común divisor

Analiza

5. Observa cómo hallar el m. c. d. de (30, 40, 60).

$$\begin{array}{r|l} 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 40 & 2 \\ 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$2 \times 3 \times 5$ $\qquad$ $2^3 \times 5$ $\qquad$ $2^2 \times 3 \times 5$

Los factores comunes con menor exponente son, 2 y 5. El m. c. d. $(30, 40, 60) = 2 \times 5 = 10$
Abreviadamente:

$$\begin{array}{ccc|l} 30 & 40 & 60 & 2 \\ 15 & 20 & 30 & 5 \\ 3 & 4 & 6 & \end{array}$$

3, 4 y 6 no tienen divisor común por esto el procedimiento termina aquí. El m. c. d. $(30, 40, 60) = 2 \times 5 = 10$. Usando los dos procedimientos, halla el máximo común divisor de:

   - a. 210, 350 y 790 b. 165 y 275
   - c. 180 y 540

6. Dos números son primos relativos si el m. c. d. de los dos números es 1. ¿Cuáles de las siguientes parejas de números son primos relativos? Justifica tus respuestas.
   - a. 2 y 8 b. 7 y 11 c. 23 y 37

7. Se desea dividir un terreno rectangular, de 150 m de ancho por 210 m de largo, en parcelas cuadradas que tengan la mayor área posible. ¿Cuánto debe medir el lado de cada parcela?

______

8. A un diseñador le llegaron dos piezas de tela, una de 120 centímetros y la otra de 225 centímetros. Desea cortar ambas piezas en pedazos de igual longitud sin desperdiciar nada. ¿Esto es posible? Explica tu respuesta.

______

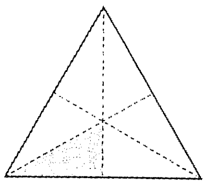
Interpreta: Halla el menor de los múltiplos comunes de varios números.
Analiza: Soluciona situaciones usando el máximo común divisor de dos o más números.

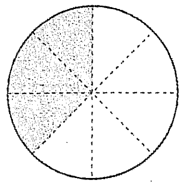
Nombre: ______ Curso: ______ Fecha: ______

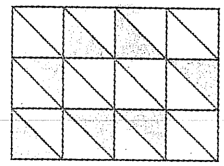
Tema 18 Significado de la fracción

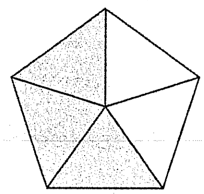
Interpreta

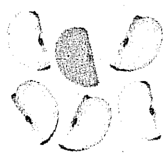
1. Escribe la fracción que representa la parte sombreada de cada figura.

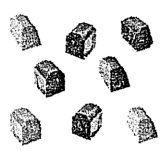
a.


b.


c.


d.


e.


f.


2. Representa gráficamente cada una de las siguientes fracciones.

a. $\frac{4}{5}$ b. $\frac{2}{3}$ c. $\frac{2}{7}$ d. $\frac{5}{9}$

3. Escribe al frente de cada enunciado la fracción que lo representa.

a. El descanso dura media hora: ______

b. Mi casa está en la mitad de la cuadra: ______

c. Mi hamburguesa favorita es la de un cuarto de libra: ______

d. Me tomé un tercio de litro de leche: ______

e. Quedan menos de tres cuartos de litro de aceite: ______

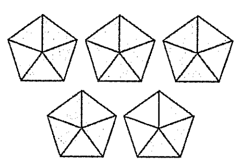
4. Relaciona la columna de la izquierda con su respectiva fracción de hora de la columna de la derecha.

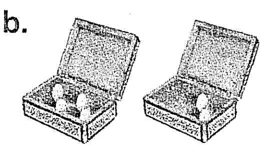
a. 20 minutos	( ) $\frac{1}{2}$ hora
b. 15 minutos	( ) $\frac{1}{6}$ de hora
c. 10 minutos	( ) $\frac{1}{3}$ de hora
d. 45 minutos	( ) $\frac{1}{4}$ de hora
e. 30 minutos	( ) $\frac{3}{4}$ de hora

Tema 19 Clases de fracciones y números mixtos

Infiere

5. En cada caso, escribe la fracción que corresponde como número mixto.

a.


b.


6. Completa los espacios con: propia, impropia o igual a la unidad según corresponda:

a. Si el numerador excede al denominador en 3, la fracción es ______.

b. Si el numerador es 8 y el denominador es la tercera parte de 24, la fracción es ______.

c. Si el numerador es el doble de 6 y el denominador es 5, la fracción es ______.

d. Si el denominador es el triple del numerador, la fracción es ______.

e. Si el numerador es la cuarta parte del denominador, la fracción es ______.

7. Un CD-ROM de 700 MB permite grabar 80 minutos de música. Si las canciones seleccionadas suman 180 minutos, ¿cuántos CD se requieren para grabarlas? ¿Todos los CD se llenan? ¿Qué parte de un CD queda libre? Expresa el espacio utilizado en los CD como una fracción.

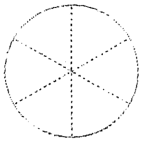
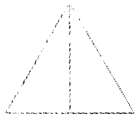
______

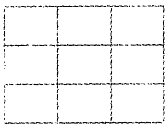
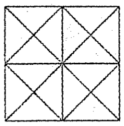
Nombre: ______ Curso: ______ Fecha: ______

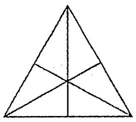
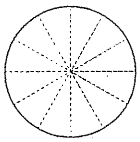
Tema 20 Fracciones equivalentes

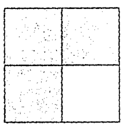
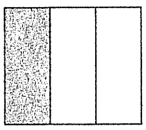
Analiza

1. Relaciona la columna de la izquierda con la de la derecha, de modo que las dos figuras representen la misma fracción.

a.  ( ) 

b.  ( ) 

c.  ( ) 

d.  ( ) 

2. Indica cuáles de las siguientes fracciones son irreducibles. Justifica tus respuestas.

a. $\frac{2}{9}$ ______ **b.** $\frac{7}{18}$ ______

c. $\frac{45}{21}$ ______ **d.** $\frac{6}{8}$ ______

e. $\frac{4}{17}$ ______ **f.** $\frac{77}{121}$ ______

3. Juana se tomó $\frac{3}{4}$ de una gaseosa, mientras que Martha se tomó $\frac{9}{12}$ de otra gaseosa. ¿Cuál de las dos ha tomado más gaseosa? ______

4. Fernando ha recorrido $\frac{4}{6}$ del trayecto de su casa al colegio y su hermano ha recorrido $\frac{10}{15}$ del mismo trayecto. ¿Quién está más cerca del colegio?

______

Tema 21 Relaciones de orden en los números fraccionarios. Recta numérica

Interpreta

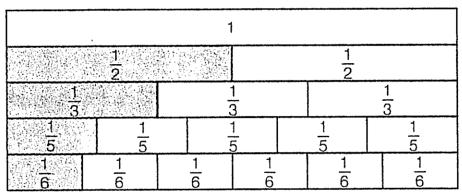
5. Sigue el procedimiento indicado

a. Para ubicar $\frac{2}{3}$ en la recta numérica divide la unidad determinada entre 0 y 1 en 3 partes iguales y toma 2 de esas partes.

b. Para ubicar $\frac{9}{4}$ en la recta numérica.

- Divide el segmento determinado entre 0 y 1 en 4 partes iguales.
- Como la fracción es impropia, divide el siguiente segmento (entre 1 y 2) también en 4 partes iguales. Así obtendrás 8 partes iguales.
- Como se requieren 9 de esas partes, divide el siguiente segmento (entre 2 y 3) también en 4 partes iguales. Así obtendrás 12 de esas partes.

6. Observa la siguiente figura.



a. Ordena de menor a mayor las fracciones resaltadas. ______

b. Halla una fracción mayor que $\frac{1}{6}$ y menor que $\frac{1}{3}$. ______

c. Halla una fracción mayor que $\frac{2}{5}$, cuyo denominador sea diferente de 5. ______

d. Halla una fracción mayor que $\frac{3}{5}$, cuyo denominador sea diferente de 5. ______

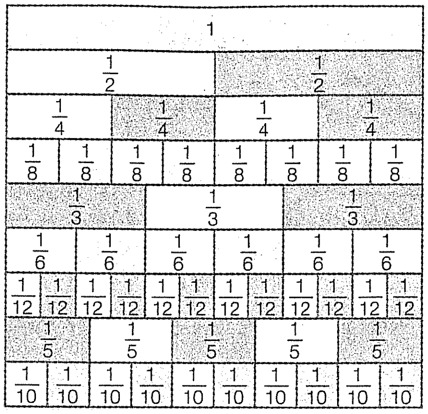
Analiza: Usa fracciones equivalentes para resolver situaciones.
Interpreta: Establece relación de orden de dos o más números fraccionarios.

Nombre: ______ Curso: ______ Fecha: ______

Tema 22 Adición y sustracción de números fraccionarios

Analiza

1. Completa las adiciones, teniendo en cuenta la siguiente figura.



a. $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{\square}{3}$ **b.** $\frac{4}{12} + \frac{1}{6} = \frac{\square}{2}$

c. $\frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{\square}{2}$

d. $\frac{2}{12} + \frac{1}{3} = \frac{\square}{2}$ **e.** $\frac{1}{5} + \frac{3}{10} = \frac{\square}{2}$

2. Un tanque está llenándose con dos grifos. Con uno se llenan los $\frac{3}{7}$ de la capacidad del tanque y con el otro grifo, $\frac{1}{3}$ ¿Qué parte del tanque falta por llenarse? ______

3. En un salón de clase hay 32 sillas; $\frac{7}{8}$ de éstas están ocupadas. ¿Cuántas sillas hay libres? ______

4. La mamá de Julieta fue a la frutería y compró una caja de mandarinas. Julieta se comió $\frac{1}{4}$ de las mandarinas que traía la caja, y su hermano se comió $\frac{5}{12}$.

a. ¿Qué parte del contenido de la caja se comieron entre los dos? ______

b. ¿Qué parte del contenido queda? ______

c. Si en la caja quedan 8 mandarinas, ¿cuántas mandarinas traía la caja? ______

Tema 23 Ecuaciones de tipo aditivo con números fraccionarios

Infiere

5. Completa escribiendo el número que falta.

a. $\frac{2}{3} + \frac{\square}{\square} = \frac{5}{3}$ **b.** $\frac{6}{7} + \frac{\square}{\square} = 1$

c. $\frac{1}{4} + \frac{\square}{\square} = \frac{3}{2}$ **d.** $\frac{\square}{\square} + \frac{2}{5} = 2$

6. Escribe una ecuación que represente cada enunciado.

a. La adición entre $\frac{1}{4}$ y otro número es 4. ______

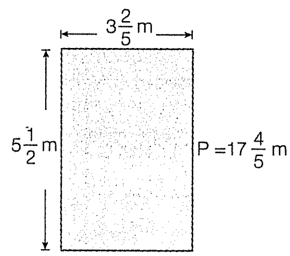
b. La diferencia entre $\frac{4}{9}$ y un número menor que él, es $\frac{1}{3}$. ______

c. Un número disminuido en $\frac{1}{6}$ es $\frac{1}{4}$. ______

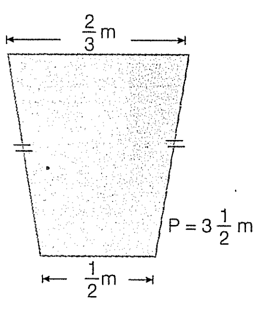
d. $\frac{5}{7}$ excede en $\frac{8}{21}$ a otro número. ______

7. Halla la medida del lado que hace falta para que el perímetro de la figura sea el que se indica.

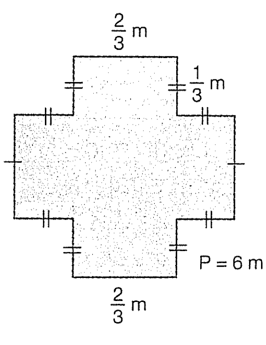
a.



b.



c.



Analiza: Encuentra la suma de dos fracciones o partir de un diagrama.
Infiere: Resuelve situaciones que involucran adiciones y sustracciones de fracciones.

Nombre: ____________ Curso: ______ Fecha: ______

Tema 24 Multiplicación y división de números fraccionarios

Interpreta

1. Representa gráficamente cada una de las fracciones.

a. La mitad de $\frac{1}{4}$.

b. La cuarta parte de $\frac{1}{8}$.

c. La tercera parte de $\frac{4}{5}$.

d. El doble de $\frac{2}{3}$.

2. Para presentar una obra de teatro se deben cubrir los $\frac{3}{4}$ del piso del teatro. El director de la obra quiere que en los $\frac{2}{3}$ de esa parte, se coloque alfombra roja y en el resto alfombra azul. ¿Qué fracción del piso del teatro quedará con alfombra roja? ____________

3. El tiempo que necesitan las diferentes especies de animales para dormir varía. Las ardillas duermen $\frac{5}{8}$ del día, los perros duermen $\frac{5}{12}$ del día, los cerdos duermen $\frac{1}{3}$ del día y los elefantes duermen $\frac{1}{6}$ del día. ¿Cuántas horas duerme cada uno?

________.

4. Milena compra $12\frac{1}{4}$ metros de cinta. ¿En cuántos pedazos de $\frac{7}{8}$ de metro, puede dividirlos?

________.

Tema 25 Ecuaciones de tipo multiplicativo con números fraccionarios

Analiza

5. Expresa cada uno de los enunciados mediante una ecuación, usando una letra para representar el dato desconocido.

Enunciado	Ecuación
La tercera parte de un número es 25.	
El doble de un número es 36.	
La quinta parte de un número más 3 es 7.	
Diego mide 120 cm, y su estatura equivale a las dos terceras partes de la estatura de su padre.	

6. Resuelve las ecuaciones.

a. $\frac{4}{5} \times w = 10$

b. $\frac{3}{7} \times m = 51$

c. $\frac{9}{5} \times x = 30$

d. $\frac{1}{2} \times p = 17$

7. Escribe el número que falta para que el resultado sea el indicado.

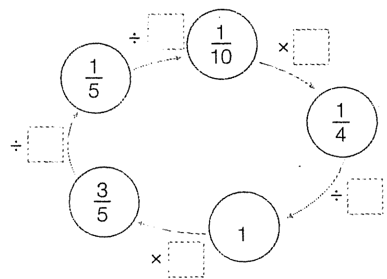
a. $\frac{4}{5} \times \frac{\square}{\square} = \frac{8}{15}$

b. $\frac{2}{3} \div \frac{\square}{\square} = \frac{6}{21}$

c. $\frac{\square}{\square} \times \frac{6}{13} = \frac{42}{65}$

d. $\frac{\square}{\square} \div \frac{14}{19} = \frac{38}{56}$

8. Completa el diagrama con los números que faltan en cada cuadro.



Interpreta: Multiplica y divide fracciones.
Analiza: Expresa enunciados mediante ecuaciones de tipo multiplicativo. Resuelve situaciones de multiplicación y división de fracciones.

Nombre: ____________ Curso: ____ Fecha: ____

Tema 26 Potenciación de números fraccionarios

Interpreta

1. Expresa como potencia los productos.

a. $\frac{25}{100} \times \frac{25}{100} =$ ____

b. $\frac{4}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} =$ ____

c. $\frac{3}{7} \times \frac{3}{7} \times \frac{3}{7} \times \frac{3}{7} \times \frac{3}{7} =$ ____

2. Escribe el número que falta.

a. $\left(\frac{1}{5}\right)^{\square} = \frac{1}{5}$ **b.** $\left(\frac{3}{4}\right)^{\square} = \frac{27}{64}$

c. $\left(\frac{10}{11}\right)^{\square} = \frac{100}{121}$ **d.** $\left(\frac{7}{4}\right)^{\square} = \frac{2401}{256}$

3. Escribe al frente en cada paréntesis, la letra correspondiente, teniendo en cuenta la propiedad que se usa en cada caso.

a. $\left(\frac{4}{9}\right)^5$ ( ) $\left(\frac{2}{7}\right)^3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3$

b. $\left[\left(\frac{8}{11}\right)^2\right]^3$ ( ) 1

c. $\left(\frac{2}{7} \times \frac{1}{3}\right)^3$ ( ) $\frac{2^7}{5^7}$

d. $\left(\frac{15}{7}\right)^0$ ( ) $\frac{4^5}{9^5}$

e. $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{5}\right)^4$ ( ) $\frac{8^6}{11^6}$

Tema 27 Radicación y logaritmación de números fraccionarios

Analiza

4. Explica en qué consiste cada una de las propiedades de la radicación.

Propiedad	Explicación
Raíz de una fracción	
Raíz de un producto	
Potencia de una raíz	
Raíz de una potencia	

5. Escribe si la afirmación es verdadera o falsa. En caso de que sea falsa, escribe un ejemplo.

a. La raíz cuadrada de una fracción propia es una fracción propia. ( )

b. Para obtener la raíz de una fracción, obtenemos por separado la raíz del numerador y del denominador. ( )

c. La raíz de un producto de fracciones equivale al producto de las raíces de cada fracción. ( )

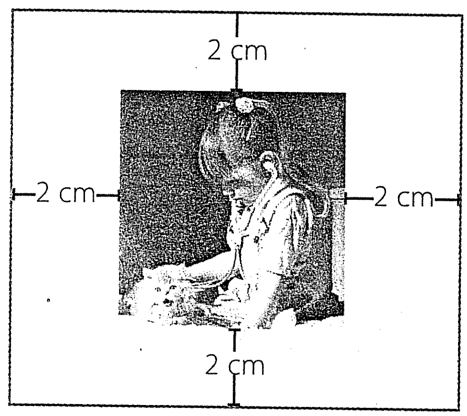
d. Todo número fraccionario tiene raíz cuadrada. ( )

6. Un tanque de almacenamiento de agua de una casa tiene forma cúbica. Su volumen es $3\frac{3}{8}$ m^3. ¿Cuál es la altura del tanque?

____

7. Sofía pinta un dibujo en una hoja cuadrada que tiene $\frac{1681}{4}$ cm^2 de área. Antes de hacer el dibujo, traza márgenes a la hoja, como se muestra en la figura. ¿Cuál es el área del cuadrado del dibujo?

____



Nombre: ______ Curso: ______ Fecha: ______

Tema 28 Fracciones decimales

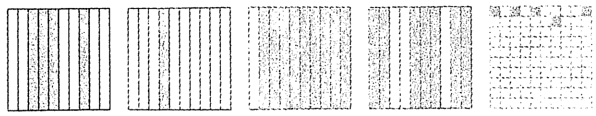
Infiere

1. Para escribir una fracción decimal como número decimal, se anota el número que se encuentra en el numerador y una coma ubicada al contar de derecha a izquierda tantas cifras como ceros tenga la potencia de 10 que está en el denominador; si es necesario, se agregan ceros a la izquierda del numerador. Escribe la expresión decimal de las siguientes fracciones.

   a. $\frac{23}{10} =$ ___ b. $\frac{14}{100} =$ ___

2. Relaciona cada representación gráfica con el número decimal respectivo.

   a. b. c. d. e.



0,9 0,4 0,1 0,7 0,05

Tema 29 Clases de decimales: exactos y periódicos

Interpreta

3. Escribe cada una de las fracciones como número decimal e indica si es un número decimal exacto, periódico o ninguno de los dos.

   a. $\frac{4}{11} =$ ___

   b. $\frac{13}{20} =$ ___

   c. $\frac{215}{713} =$ ___

   d. $\frac{42}{25} =$ ___

4. Completa la siguiente tabla, como se indica en el ejemplo.

Fracción	Decimal	Fracción decimal	Finito	Periódico
$\frac{18}{5}$	1,2	$\frac{12}{10}$	X	
$\frac{236}{25}$				
$\frac{952}{40}$				
$\frac{454}{225}$				
$\frac{457}{4}$				
$\frac{723}{8}$				

Tema 30 Decimales equivalentes

Interpreta

5. Para cada uno de los decimales, halla dos expresiones equivalentes.

   a. 0,25 = ______ = ______

   b. 3,20 = ______ = ______

   c. 23,4 = ______ = ______

   d. 4,250 = ______ = ______

   e. 0,07 = ______ = ______

6. Relaciona cada frase con su expresión decimal equivalente.

   a. El ganador empleó un tiempo de catorce minutos y 20 centésimas de segundo. ( ) 0,37

   b. La altura sobre el nivel del mar de una ciudad es ciento cuarenta y cinco metros con 5 centésimas de metro. ( ) 14,2

   c. El ganador de la competencia obtuvo una ventaja de 370 milésimas de segundo. ( ) 145, 050

Pensamiento numérico

Infiere: Realiza conversiones entre fracciones decimales y números decimales. Encuentra un número decimal equivalente a un número fraccionario.
Interpreta: Identifica si un decimal es periódico.
Interpreta: Comprende el significado de fracciones decimales equivalentes.

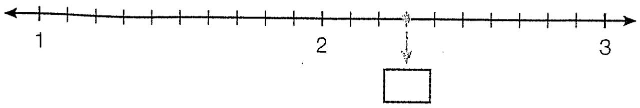
Nombre: ______ Curso: ______ Fecha: ______

Tema 31 Ubicación de decimales en la recta numérica

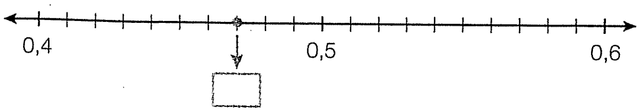
Interpreta

1. Identifica en cada caso el número decimal representado en cada recta numérica.

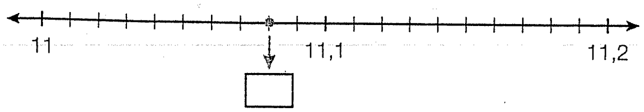
a.



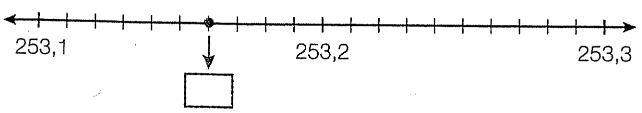
b.



c.



d.



2. La tabla muestra la duración (en horas) del trayecto aéreo desde Bogotá a las principales ciudades de Colombia.

De Bogotá a	Por aire
Cartagena	1,15 h
Barranquilla	1,05 h
Medellín	0,45 h
Manizales	1,00 h
Cali	1,10 h
Leticia	2,15 h

Ubica estos tiempos en una recta numérica.

3. La tabla muestra las calorías por gramo de algunos alimentos.

Alimento	Pan	Carne	Queso	Huevo
Calorías por gramo	3,3	3,7	1,2	1,62

Representa estas calorías en una recta numérica.

Tema 32 Comparación de números decimales

Explica

4. Indica si cada afirmación es verdadera o falsa. Justifica en cada caso tu respuesta.

   a. Trece décimas son mayores que veinticinco centésimas. ( )

   b. Ciento trece milésimas son mayores que dos décimas. ( )

   c. Cuatro décimas equivales a cuarenta centésimas. ( )

   d. Veinte centésimas son más que tres milésimas. ( )

   e. Once décimas son más que ciento diez centésimas. ( )

5. En la tabla se muestran las temperaturas promedio de algunas ciudades de Colombia.

Ciudad	Temperatura promedio en grados centígrados (C°)
Bogotá	13,3
Bucaramanga	25,9
Medellín	22,5
Calí	24,02
Barranquilla	28,2
Zipaquira	14,1
Pereira	20,5

Ordena estas ciudades de menor a mayor temperatura.

______

Interpreta: Ubica números decimales en la recta numérica.
Explica: Justifica la veracidad de afirmaciones sobre comparación de decimales.

Nombre: ______ Curso: ______ Fecha: ______

Tema 33 Adición y sustracción de números decimales

Interpreta

1. Efectúa las operaciones.

a. 45,345 + 2,003 = ☐

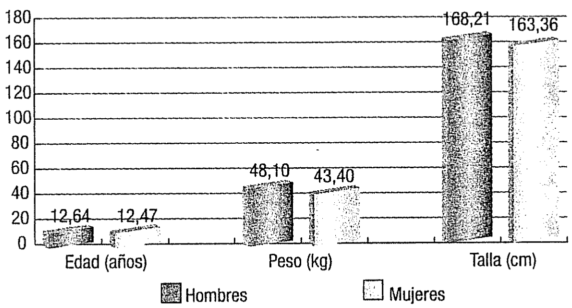
b. 12 234,05 – 10 432,24 = ☐

c. 14 321,455 + 10 429,13 + 9213,004 = ☐

d. 231,05 – 195,4 = ☐

e. 1345,761 – 1200,036 = ☐

2. En la siguiente figura se muestra el valor promedio de las características físicas de los integrantes de un equipo de patinaje.



a. ¿Cuál es la diferencia entre la edad promedio de hombres y mujeres del equipo?

______

b. ¿Cuál es la diferencia entre el peso del promedio de hombres y mujeres del equipo?

______

c. ¿Cuál es la diferencia entre la estatura promedio de hombres y mujeres del equipo?

______

d. ¿En cuál de las tres características hay mayor diferencia entre hombres y mujeres?

______

3. En la tabla se relacionan algunos departamentos colombianos y su extensión en kilómetros cuadrados.

Departamento	Extensión en km²
Atlántico	3388,2
Boyacá	23 189,01
Caquetá	88 965,1
Cauca	29 308
Chocó	47 000,15
Cundinamarca	23 960,3

a. Ordena estos seis departamentos de menor a mayor área.

______

b. ¿Cuál es la diferencia en km², entre el mayor y el menor?

______

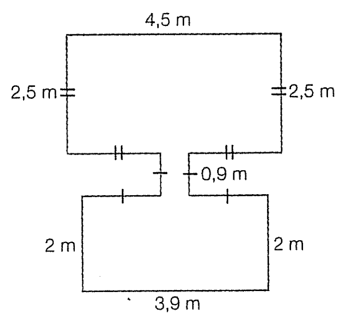
c. ¿Cuantos kilómetros cuadrados ocupan estos seis departamentos?

______

d. ¿Qué área es mayor entre el área del Choco y la suma de las áreas entre Cundinamarca y Cauca?

______

4. Calcula el perímetro de la siguiente figura:



Tema 34 Ecuaciones aditivas con números decimales

Infiere

5. Escribe cada igualdad como una ecuación y soluciónala.

a. 2,007 + ☐ = 5,1

b. 1,034 + ☐ = 2,02

c. 232,04 + ☐ = 267,02

d. 1 233,005 + ☐ = 1543,002

e. ☐ + 2,096 = 4,5

f. ☐ + 9,15 = 13,18

Interpreta: Utiliza los algoritmos de la adición y sustracción de decimales adecuadamente. Usa la adición y sustracción de números decimales en diferentes situaciones.
Infiere: Plantea ecuaciones con base en igualdades con términos desconocidos.

Nombre: ______ Curso: ______ Fecha: ______

Tema 35 Multiplicación de números decimales

Interpreta

1. Efectúa las multiplicaciones e indica que propiedad o propiedades usas en cada caso.

   a. 24,03 × 0,5 × 1 = ☐

   b. (3,005 + 12,57) × 0,20 = ☐

   c. (67,2 × 1 234,32) × (344,65 × 0) = ☐

   d. 10 306,28 × 0,0004 = ☐

2. Escoge para cada número una potencia de 10 adecuada, de manera que al multiplicar el número decimal por esa potencia, este se convierta en un número entero.

   a. 201,32 × ☐ = 20 132

   b. 0,003 × ☐ = 3

   c. 1,901 × ☐ = 1901

   d. 28,00012 × ☐ = 2 800 012

3. En la tabla se muestra el aporte por cada 100 gramos de hierro, calcio y fosforo de algunas frutas.

Fruta	Hierro	Calcio	Fósforo
Mandarina	0,5 mg	41 mg	14,5 mg
Manzana	0,4 mg	6 mg	11 mg
Frambuesa	0,75 mg	40,02 mg	30,1 mg
Fresa	0,75 mg	30 mg	26,01 mg
Melocotón	0,4 mg	8,5 mg	22,3 mg

   a. Si una persona come 200 gramos de mandarina, ¿que cantidad de hierro, calcio y fosforo recibe su cuerpo? ______

   b. Una porción de ensalada de frutas contiene 150 gramos de fresa, 100 gramos de manzana, 200 gramos de melocotón. ¿Qué cantidad de hierro, calcio y fosforo aporta esta porción de ensalada? ______

Tema 36 División de números decimales

Analiza

4. Efectúa las divisiones.

   a. 291,6 ÷ 12 = ☐

   c. 254,2 ÷ 12,4 = ☐

   b. 384 ÷ 25,6 = ☐

   d. 0,6776 ÷ 0,016 = ☐

5. En el colegio organizaron olimpiadas de atletismo, en las cuales hay pruebas de salto alto y de salto largo. Las marcas de los dos equipos finalistas se muestran en las siguientes tablas.

Equipo 1		
Integrantes	Salto largo	Salto alto
Karen	5,32 m	1,3 m
Sandra	4,85 m	1,15 m
Tomás	5,45 m	1,34 m
Felipe	5,38 m	1,42 m

Equipo 2		
Integrantes	Salto largo	Salto alto
Patricia	4,9 m	1,3 m
Lorena	4,75 m	1,15 m
Andrés	5,31 m	1,34 m
Samuel	5,43 m	1,42 m

Si el valor promedio se obtiene sumando todos valores y dividiendo esa suma por el número total de datos,

   a. Calcula el valor promedio de salto largo para el equipo 2. ______

   b. Calcula el valor promedio de salto alto para el equipo 1. ______

   c. Calcula el valor promedio de salto alto para el equipo 2. ______

Interpreta: Usa el algoritmo para multiplicar números decimales. Usa el algoritmo para dividir números decimales.
Analiza: Emplea la división de números decimales en diferentes contextos.

Nombre: ____ Curso: ____ Fecha: ____

Tema 37 Ecuaciones multiplicativas con números decimales

Infiere

1. Escribe el número que falta.

   a. $23{,}6 \times \square = 2{,}36$

   b. $12{,}3 \times \square = 6{,}15$

   c. $\square \times 7{,}16 = 28{,}3$

   d. $\square \times 3{,}11 = 19{,}16$

2. Halla el valor de la letra que hace verdadera la ecuación.

   a. $1{,}3 \times z = 10{,}4$ ____

   b. $0{,}2 \times m = 3{,}6$ ____

   c. $2{,}7 \times x = 28{,}35$ ____

   d. $5 \times m = 21{,}25$ ____

   e. $1{,}3 \times z + 2{,}5 = 5{,}1$ ____

   f. $0{,}2 \times m + 3 = 3{,}6$ ____

3. Para saber la distancia recorrida por un automóvil en determinado tiempo, se multiplica la velocidad por el tiempo. Calcula:

   a. La distancia recorrida por un automóvil en 4,5 horas, si va a una velocidad de 78 km por hora. ____

   b. La velocidad del automóvil, si recorrió 416,8 kilómetros en 5,2 horas. ____

   c. ¿El tiempo que necesita para recorrer 807,5 kilómetros, si el automóvil va a una velocidad de 85 kilómetros por hora? ____

Analiza

Para los enunciados del 4 a 10, plantea y resuelve una ecuación y responde la pregunta:

4. Una caja de chocolates pesa 188,8 gramos. Si la caja contiene 12 Chocolates, ¿cuánto pesa cada chocolate? ____

5. Se desea pintar una pared cuadrada cuyo lado mide 6,4 metros. Si el pintor cobra $ 4300 por pintar un metro cuadrado, ¿cuánto cobra por pintar toda la pared? ____

6. Al multiplicar un número por 2,6 y al resultado adicionarle 16,39, se obtiene 65,79. ¿Cuál es el número? ____

7. Al dividir un número entre 4,67 y al resultado sustraerle 25 se obtiene 61. ¿Cuál es el número? ____

8. Si de 1000 mililitros de gaseosa se obtienen 5 vasos iguales de gaseosa, ¿qué capacidad, en mililitros, tiene cada vaso? ____

9. El tanque de gasolina de un automóvil tiene capacidad para 11,5 galones. Si el tanque estaba desocupado y al llenarlo la cuenta marcó $ 85 102,875, ¿cuál es el precio de un galón de gasolina? ____

10. En una fábrica usan 375 metros de tela para confeccionar 345 blusas de la misma talla. ¿Cuánta tela se necesita para confeccionar una blusa? ____

Infiere: Encuentra el número que falta en una multiplicación de decimales.
Analiza: Usa los números decimales para representar situaciones mediante una ecuación. Plantea y resuelve situaciones que requieran ecuaciones con números decimales.

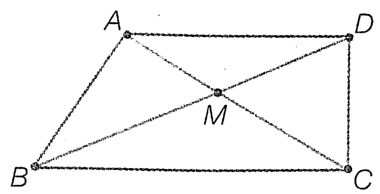
Nombre: ________ Curso: ____ Fecha: ____

Tema 38

Elementos de la geometría

Explica

1. Observa la figura y nombra usando la notación adecuada cada uno de los elementos.



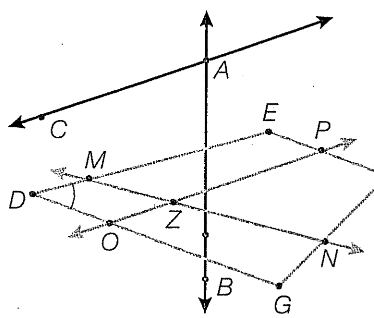
a. Un punto. ____________

b. Un segmento. ____________

c. Un plano. ____________

d. Dos puntos coplanares. ____________

2. Observa la figura y establece el valor de verdad de cada afirmación. Justifica tus respuestas.



a. Las rectas $\overleftrightarrow{AC}$ y $\overleftrightarrow{AB}$ son coplanares. ( )

b. Las rectas $\overleftrightarrow{AC}$ y $\overleftrightarrow{ME}$ son coplanares. ( )

c. Las rectas $\overleftrightarrow{OP}$ y $\overleftrightarrow{ME}$ son coplanares. ( )

d. Los puntos *A* y *B* son colineales. ( )

e. Los puntos *A* y *C* son colineales. ( )

f. Los puntos *A* y *E* no son colineales. ( )

g. Los puntos *Z* y *E* son colineales. ( )

h. Los puntos *DEOP* determinan un plano. ( )

i. Los puntos *G* y *N* determinan un plano. ( )

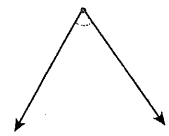
Tema 39

Ángulos y su clasificación

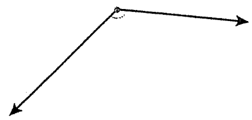
Interpreta

3. Usando el transportador, halla la medida de los ángulos de la figura y clasifícalos.

a.

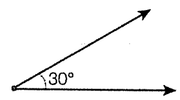


b.

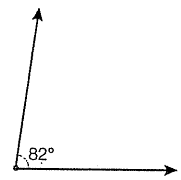


4. Para cada uno de los ángulos de la figura halla su ángulo complementario y su ángulo suplementario; trázalos junto al ángulo, con diferente color.

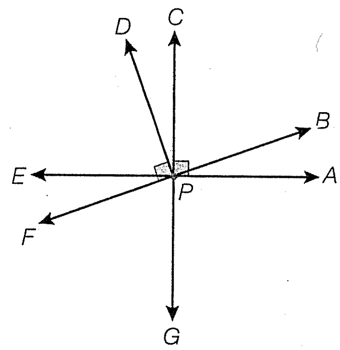
a.



b.



5. Observa la figura y escribe si cada afirmación es verdadera o falsa. Justifica tus respuestas.



a. $\angle APC$ es agudo. ( )

b. $\angle APB$ es agudo. ( )

c. $\angle CPD$ y $\angle DPF$ son complementarios. ( )

d. $\angle APB$ y $\angle BPC$ son complementarios. ( )

e. $\angle BPC$ y $\angle CPF$ son suplementarios. ( )

f. $\angle CPA$ y $\angle APG$ son suplementarios. ( )

g. $\angle CPD$ es agudo. ( )

h. $\angle APD$ es obtuso. ( )

Pensamiento espacial

Nombre: Curso: Fecha:

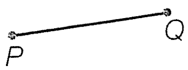
Tema 40 Congruencia de segmentos y ángulos

Interpreta

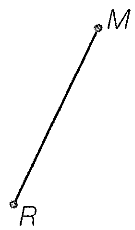
1. Usando el compás, indica cuáles de los segmentos de la figura son congruentes.

a.

b.



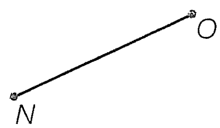
c.



d.

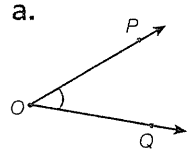
e.

f.

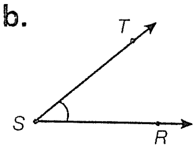


2. Usa el compás para identificar cuáles de los ángulos de la figura son congruentes.

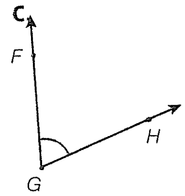
a.



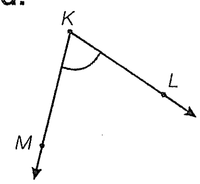
b.



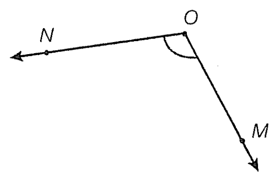
c.



d.



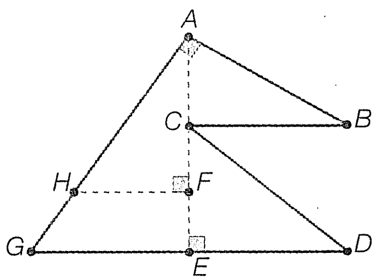
e.



Tema 41 Rectas paralelas y perpendiculares

Infiere

3. Usa la información dada en la figura para completar los espacios, colocando los símbolos || y ⊥, según corresponda, o la negación de ellos en caso de no ser paralela ni perpendicular.



a. $\overline{HF}$ ☐ $\overline{GE}$

b. $\overline{EF}$ ☐ $\overline{GD}$

c. $\overline{HA}$ ☐ $\overline{AB}$

d. $\overline{CD}$ ☐ $\overline{AB}$

e. $\overline{HF}$ ☐ $\overline{FE}$

f. $\overline{HF}$ ☐ $\overline{AE}$

g. $\overline{GE}$ ☐ $\overline{AE}$

h. $\overline{HF}$ ☐ $\overline{CD}$

4. La mediatriz de un segmento es una recta perpendicular al segmento y que pasa por su punto medio. Para trazar la mediatriz del segmento *AB* de la figura, usando el compás, se trazan dos arcos de radio arbitrario (mayor que la mitad de la medida del segmento) con centros en los extremos *A* y *B* respectivamente. Los arcos se intersecan en dos puntos, *P* y *Q*. Al trazar la recta que pasa por los puntos *P* y *Q* se obtiene la mediatriz del segmento *AB*. Siguiendo esta instrucción, traza la mediatriz del segmento *AB* de la figura.

Pensamiento espacial

Interpreta: Establece relaciones respectivas entre segmentos y ángulos congruentes.
Infiere: Deduce segmentos perpendiculares en figuras dadas. Traza la mediatriz de un segmento.

Nombre: Curso: Fecha:

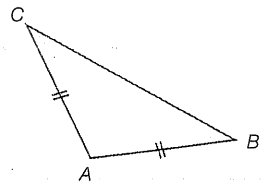
Tema 42

Triángulos y su clasificación

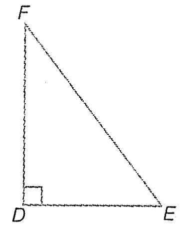
Interpreta

1. Clasifica cada uno de los triángulos de la figura, según la medida de sus lados y según la amplitud de sus ángulos. La notación = en los lados de los triángulos indica que esos segmentos son congruentes y los ángulos señalados son congruentes.

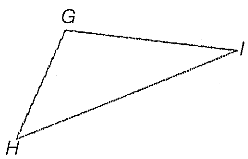
a.



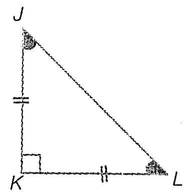
b.



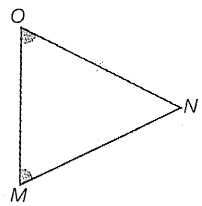
c.



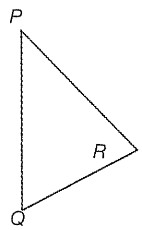
d.



e.



f.



2. Identifica qué clase de triángulo es, según la amplitud de sus ángulos.

   a. m $\angle A = 135°$; m $\angle B = 19°$; m $\angle C = 26°$.

   b. m $\angle A = 90°$; m $\angle B = 16°$; m $\angle C = 74°$.

   c. m $\angle A = 90°$; m $\angle B = 36°$; m $\angle C = 54°$.

   d. m $\angle A = 117°$; m $\angle B = 26°$; m $\angle C = 37°$.

3. Según la medida de sus lados, identifica cada tipo de triángulo.

   a. $a = 17$ cm, $b = 17$ cm, $c = 23$ cm.

   b. $a = 22$ cm, $b = 17$ cm, $c = 23$ cm.

   c. $a = 16$ cm, $b = 24$ cm, $c = 28$ cm.

   d. $a = 15$ cm, $b = 15$ cm, $c = 15$ cm.

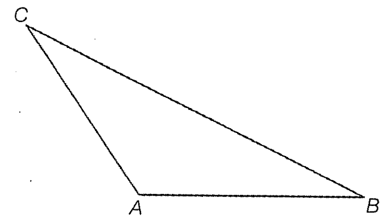
Tema 43

Líneas y puntos notables de un triángulo

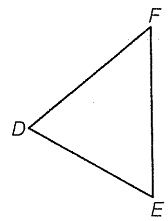
Interpreta

4. Usando el compás, traza las bisectrices de cada triángulo.

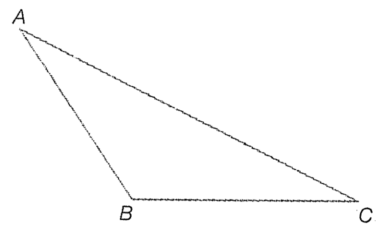
a.



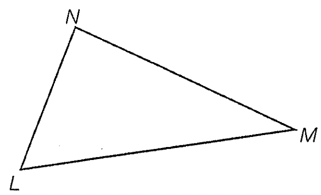
b.



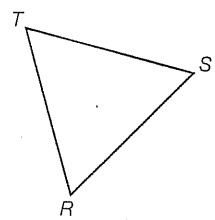
5. En el siguiente triángulo, traza las medianas y ubica el baricentro.



6. En el siguiente triángulo, traza las tres medianas y ubica el baricentro.



7. En el siguiente triángulo, traza las tres mediatrices y ubica el circuncentro.

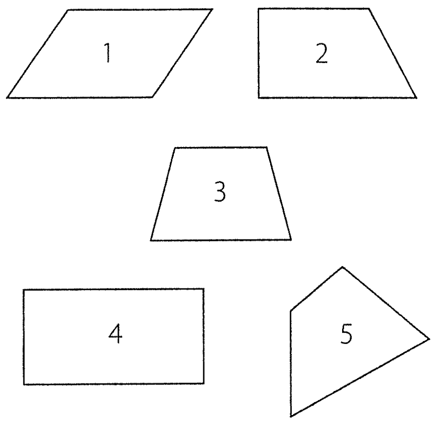


Nombre: Curso: Fecha:

Tema 44 Cuadriláteros

Interpreta

1. Observa los cuadriláteros de la figura y clasifícalos.



2. Establece el valor de verdad, para cada una de las afirmaciones. Justifica tus respuestas.

a. Todo cuadrado es un rectángulo. ( )

b. Todo rectángulo es un cuadrado. ( )

c. Un trapecio es isósceles si tiene los dos lados no paralelos de diferente longitud. ( )

d. Todo paralelogramo es cuadrilátero, pero no todo cuadrilátero es paralelogramo. ( )

e. Un trapezoide es un cuadrilátero pero no es paralelogramo. ( )

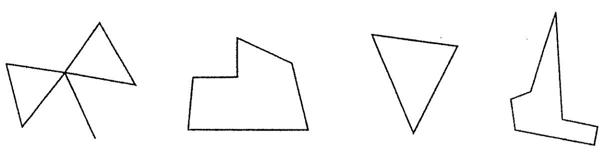
f. Un rombo es un paralelogramo pero no es un cuadrilátero. ( )

Tema 45 Polígonos

Interpreta

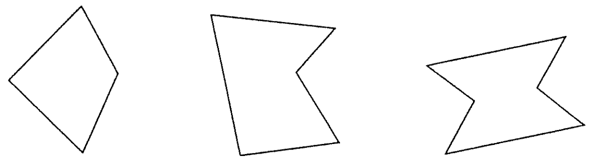
3. Observa las figuras. ¿Cuáles son polígonos?, ¿cuáles no? Justifica tus respuestas.

a. **b.** **c.** **d.**



4. Si alguna de las diagonales no cumple esta condición, entonces el polígono es cóncavo. En los siguientes polígonos, traza todas las diagonales e indica cuáles son convexos y cuáles cóncavos.

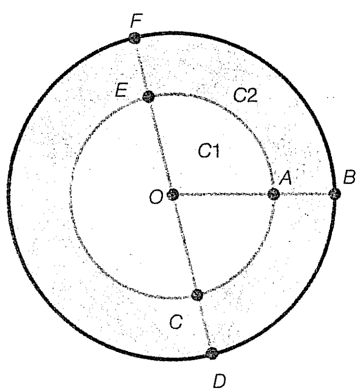
a. **b.** **c.**



Tema 46 Círculo y circunferencia

Explica

5. Observa la figura y establece el valor de verdad para cada afirmación.



a. Las circunferencias C_1 y C_2 son concéntricas. ( )

b. $\overline{OA}$ es el radio de la circunferencia C_1. ( )

c. $\overline{DF}$ es un diámetro de las dos circunferencias. ( )

d. $\overline{EC}$ es una cuerda de la circunferencia C_1. ( )

e. AOC es un sector circular de las dos circunferencias. ( )

Interpreta: Clasifica cuadriláteros.
Interpreta: Usa las propiedades de los polígonos para clasificarlos en cóncavos y convexos.
Explica: Usa propiedades para establecer la veracidad de afirmaciones sobre circunferencias.

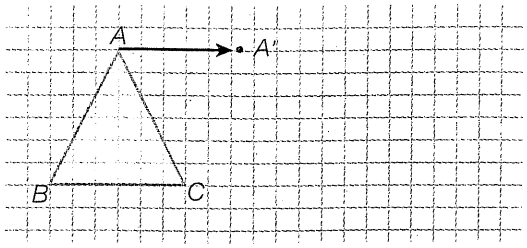
Nombre: Curso: Fecha:

Tema 47 Traslación

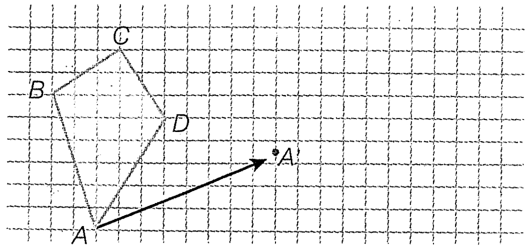
Interpreta

1. En cada caso, traslada los polígonos siguiendo la dirección, la magnitud y el sentido indicado de modo que coincida la letra con su correspondiente letra prima.

a.



b.

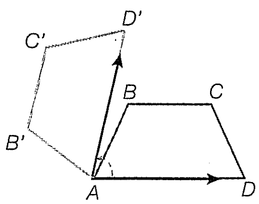


Tema 48 Rotación

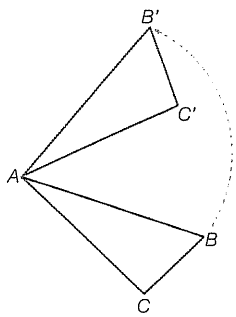
Interpreta

2. En las siguientes rotaciones, identifica el ángulo y el sentido de la rotación.

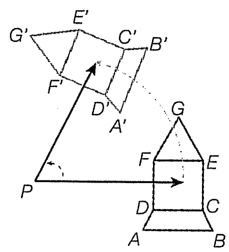
a.



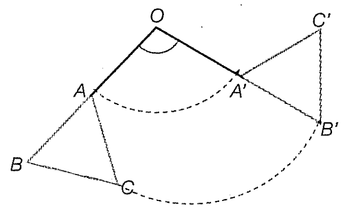
b.



c.



d.

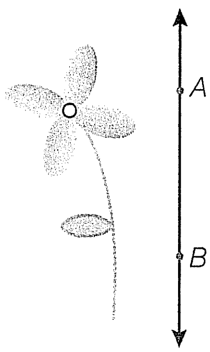


Tema 49 Reflexión

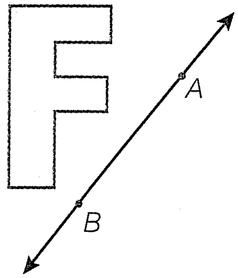
Interpreta

3. Refleja cada gráfica, respecto al eje indicado.

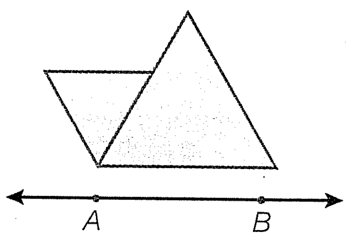
a.



b.



c.



Interpreta: Traslada figuras conociendo la dirección y la magnitud.
Interpreta: Identifica sentido y amplitud de una rotación dada.
Interpreta: Refleja figuras respecto a un eje dado.

Nombre: ______ Curso: ______ Fecha: ______

Tema 50 Unidades de longitud

Interpreta

1. Escribe un ejemplo de:

   a. Un objeto que mida un metro. ______

   b. Un objeto que mida más de un metro, pero menos de 2 metros. ______

   c. Un objeto que mida entre cuatro y cinco metros. ______

   d. Un objeto que mida menos de 1 cm. ______

2. Lucía tiene una cinta azul y una cinta blanca. La cinta azul mide 1 m, 2 dm y 5 cm, y la cinta blanca mide 6 dm, 8 cm y 5 mm.

   a. Calcula la longitud en centímetros de cada cinta. ______

   b. Si se corta la cinta azul en 5 trozos iguales, ¿cuál es la longitud en milímetros de cada trozo? ______

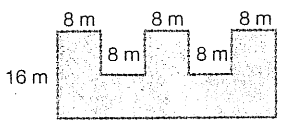
   c. Lucía necesita 1 metro de cinta blanca. ¿Cuántos centímetros más de cinta blanca debe comprar? ______

Tema 51 Perímetro

Infiere

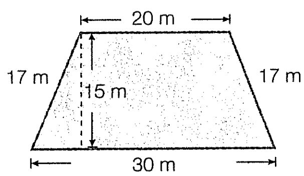
3. Calcula el perímetro de cada polígono.

   a.



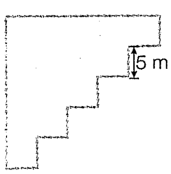
   $P =$ ______

   b.



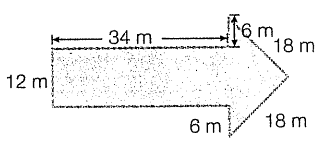
   $P =$ ______

   c.



   $P =$ ______

   d.



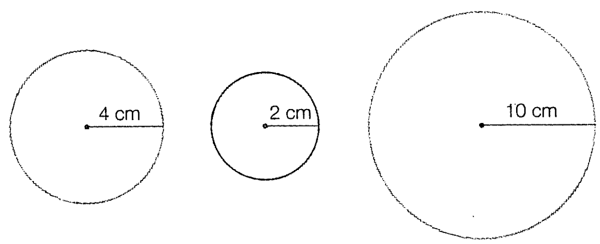
   $P =$ ______

4. El perímetro de una circunferencia se determina mediante la fórmula:

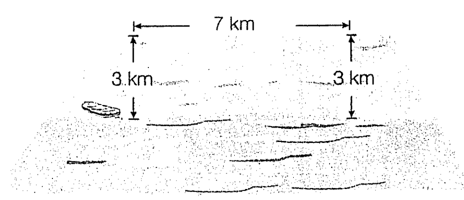
$$p = 2 \times \pi \times r$$

Donde r es el radio de la circunferencia y π es la relación entre las longitudes de la circunferencia y su diámetro ($\pi = 3{,}141592\ldots$).

Calcula el perímetro de cada circunferencia.



5. Un terreno de forma rectangular está ubicado a la orilla de un río. Se desea demarcar el terreno con una cerca doble, sabiendo que por el costado del río no se necesita cerca. Si el terreno tiene 3 kilómetros de ancho por 7 kilómetros de largo, ¿cuántos metros de alambre se necesitan para la cerca?



Interpreta: Realiza conversiones entre unidades de longitud.
Infiere: Calcula el perímetro de una figura plana.

Nombre: Curso: Fecha:

Tema 52 Unidades de área

Analiza

1. Expresa en m².

   a. 6 km². ______

   b. 24, 7 dam². ______

   c. 0, 15 mm². ______

   d. 78, 09 hm². ______

   e. 0,01 dm². ______

   f. 23,68 cm². ______

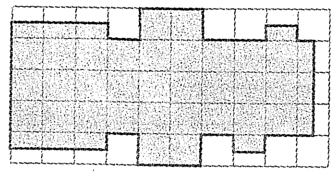
2. Una finca tiene 7 ha y otra tiene 71 345 671 m² de área. ¿Cuál de las dos tiene mayor área?

   ______

3. Si un apartamento de 78 metros cuadrados cuesta $ 110 000 000, y otro de 96 metros cuadrados cuesta $ 96 000 000, ¿cuánto cuesta el metro cuadrado de cada uno?

   ______

4. El terreno del colegio de Mario tiene la forma que se indica en la figura.



Si cada cuadrado representa 15 m², ¿cuál es el área total del terreno?

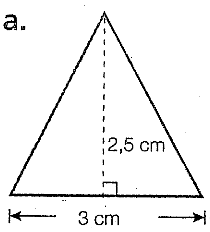
______

Tema 53 Área de figuras planas

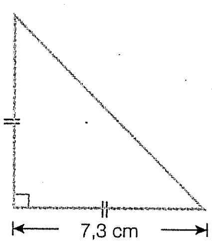
Interpreta

5. Calcula el área de los siguientes triángulos.

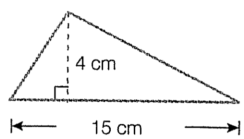
a.



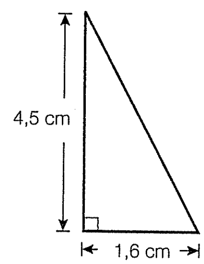
b.



c.

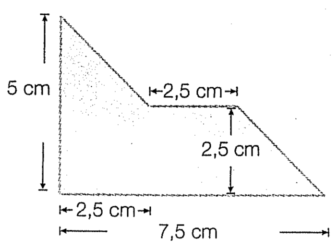


d.

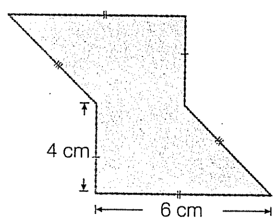


6. Calcula el área de los siguientes polígonos, descomponiéndolos en triángulos, cuadriláteros o ambos.

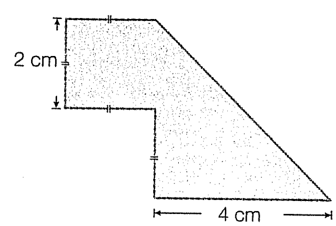
a.



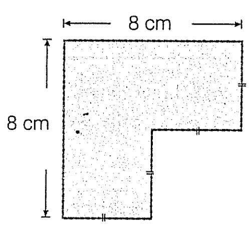
b.



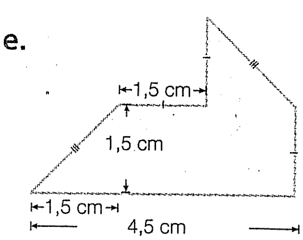
c.



d.



e.



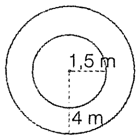
Nombre: Curso: Fecha:

Tema 54 Área del círculo

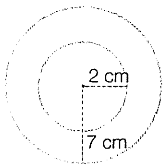
Interpreta

1. Calcula el área de las coronas circulares de la figura.

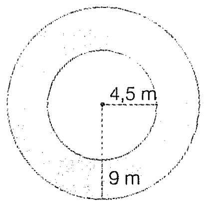
a.



b.

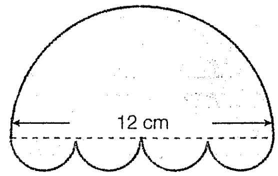


c.

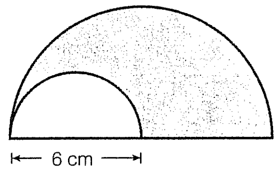


2. Calcula el área de las regiones sombreadas de la figura.

a.



b.

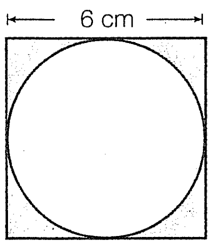


Tema 55 Área de polígonos regulares

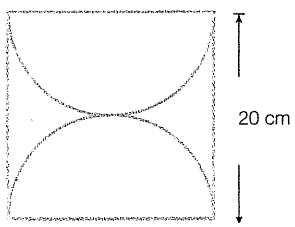
Analiza

3. Calcula el área de las regiones sombreadas de la figura.

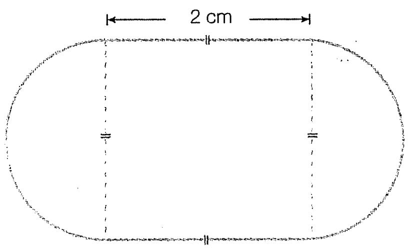
a.



b.



4. La superficie de una mesa está formada por una parte central cuadrada de 2 m de lado y dos semicírculos en dos lados opuestos, como se indica en la figura. Calcula el área.



5. El área de un círculo es 28,26 cm^2. Calcula el perímetro de la circunferencia.

6. Alejandro pinta una acuarela en una hoja de papel de 20 cm por 15 cm. Luego coloca su acuarela sobre una base, de modo que quede una franja de un ancho uniforme alrededor de la pintura. El área de la base es de 546 cm^2. ¿Cuál es el área de la franja que rodea a la acuarela?

$A = 546$ cm^2

7. Calcula el área de un cuadrado inscrito en una circunferencia de 5 cm de radio.

Pensamiento métrico

Interpreta: Calcula el área de círculos y coronas circulares.
Analiza: Soluciona problemas que involucran el concepto de área.

Nombre: Curso: Fecha:

Tema 56 Frecuencia absoluta, relativa y acumulada para datos no agrupados

Interpreta

1. Una editorial de literatura infantil encuestó a 50 niños cuyas edades se encuentran entre los 10 y 12 años acerca de su libro favorito. En la siguiente tabla se observan las respuestas.

Título	Autor	Número de niños que lo leen
El gran libro de los seres fantásticos	Ferran Alexandri	3
Cómo ser un pirata	Cressida Cowel	6
Harry Potter y la orden del fénix	J.K. Rowling	15
Las crónicas de Narnia	C.S. Lewis	7
Kika Superbruja	Knister	12
El secreto de las gemelas	Elisabetta Gnone	5
Un esqueleto en mi armario	Manuel Alonso	2

a. Representa esta información en una tabla de frecuencias.

b. ¿Cuál es la población de este estudio?

c. ¿Cuál es el libro preferido por los niños encuestados?

d. ¿Qué porcentaje de los niños encuestados lee *Harry Potter*?

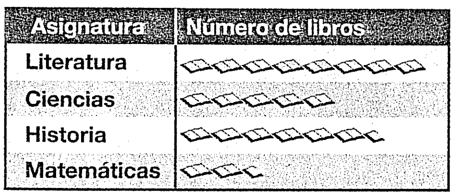
e. ¿Qué fracción representa la parte de los encuestados que lee *el secreto de las gemelas*?

f. Según tu criterio, ¿qué libro falta en esta lista?

Tema 57 Pictogramas

Infiere

2. En el pictograma de la figura se ilustra la cantidad de libros de cuatro asignaturas que hay en la biblioteca de un colegio. En la biblioteca hay en total 300 libros.



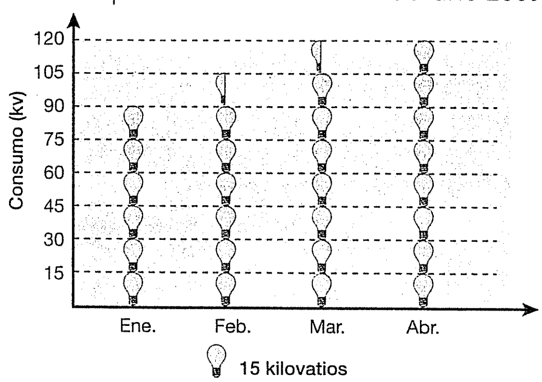
Cada representa 10 libros

a. Elabora una tabla de distribución de frecuencias para esta información.

b. Representa en un gráfico de barras la frecuencia porcentual.

c. ¿Qué porcentaje del total de los libros de la biblioteca corresponde a los libros de matemáticas?

3. En el pictograma de la figura se ilustra la cantidad de kilovatios de luz que consumió una familia durante los primeros cuatro meses del año 2009.



a. Elabora una tabla de distribución de frecuencias para esta información.

b. En qué mes se presenta mayor consumo.

c. ¿Cuál es la diferencia en kilovatios de luz entre el mes con mayor consumo y el mes con menor consumo?

Interpreta: Lee datos en tablas de frecuencias y los representa gráficamente datos estadísticos.
Infiere: Deduce información de pictogramas.

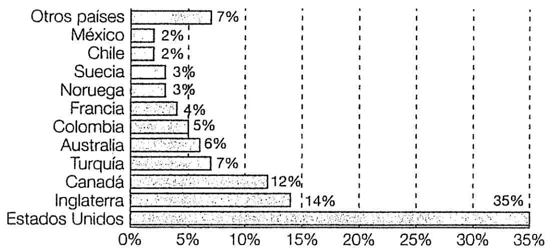
Nombre: ______ Curso: ______ Fecha: ______

Tema 58 Diagramas de barras y diagramas circulares

Interpreta

1. Facebook ha venido creciendo a pasos agigantados. En junio de 2008 se convirtió en la red social más grande con 132 millones de usuarios, un crecimiento de 35% desde finales de 2007.

En la figura se muestran los 11 países del mundo que encabezan la lista con mayor número de usuarios de facebook.



a. ¿Cuál es el país con mayor cantidad de usuarios? ¿Cuántos tiene? ______

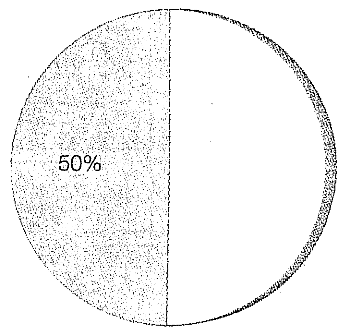
b. A nivel mundial, ¿qué puesto ocupa Colombia? ¿Cuántos usuarios tiene? ______

c. ¿Cuántos usuarios de Facebook son mexicanos? ______

2. Los estudiantes del grado sexto muestran preferencias sobre los cursos opcionales que ofrece el colegio los viernes a la última hora (*ver* tabla).

Opcional	Número de inscritos
Filigrama	7
Origami	8
Pedrería	5
Natación	20

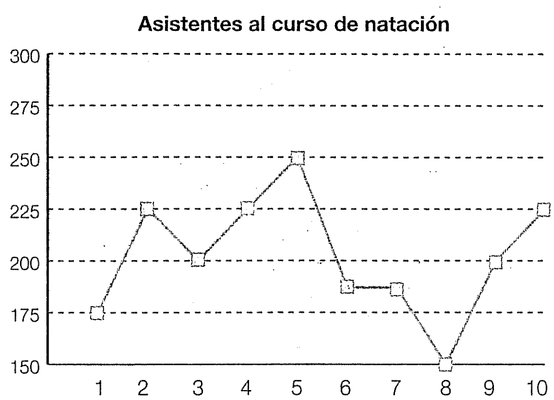
Completa el correspondiente diagrama circular de la figura.



Tema 59 Diagramas de línea

Infiere

3. Observa el diagrama de línea que recoge información sobre el número de asistentes a un curso de natación que ofreció el instituto de recreación y deporte durante 10 semanas.



a. ¿En cuál semana se observa mayor asistencia?

______

b. ¿En cuál semana hubo menor número de asistentes?

______

c. ¿En cuáles semanas hubo el mismo número de asistentes?

______

d. ¿Cuál es la diferencia entre el número de asistentes la primera semana y la última?

______

e. En la semana de mayor asistencia, ¿cuántos fueron?

______

Pensamiento aleatorio

Interpreta: Lee diagramas de barra. Representa en diagramas circulares datos estadísticos.
Infiere: Contesta preguntas con respecto a la información contenida en diagramas de línea.

Nombre: ____________________ Curso: ______ Fecha: ______

Tema 60 Moda y mediana de datos no agrupados

Interpreta

1. Halla la moda y la mediana de cada conjunto de datos.

a. 16, 22, 34, 15, 25, 23, 16, 15, 16, 18, 24, 25, 25, 16, 15, 17, 16.

b. 0, 3, 2, 4, 0, 0, 1, 2, 3, 2, 3, 0, 1, 4, 3, 2, 3, 5, 6, 3, 4, 2, 1.

c. 34, 30, 45, 49, 36, 34, 32, 36, 43, 36, 46, 36, 37, 35, 36, 42, 36.

d. 80, 85, 81, 82, 89, 90, 81, 86, 81, 88, 87, 81, 85, 81.

2. Los datos que se dan a continuación corresponden a los pesos en kg de un grupo de personas.

60; 66; 70; 70; 66; 68; 70; 70; 66; 66; 65; 61; 70; 66; 61; 66; 61; 70; 61; 65; 66; 80; 61; 66; 70; 67; 78; 75; 64; 71; 81; 62; 64; 70; 68; 70; 66; 61; 65; 70; 66; 66; 65; 65; 66; 61; 67; 66; 61; 62; 67; 68; 61; 67; 70; 66; 66; 61; 61; 70; 66; 61; 70; 66; 65; 66; 65; 70; 70; 65; 67; 70; 65; 61; 70; 70; 66; 61; 63; 66.

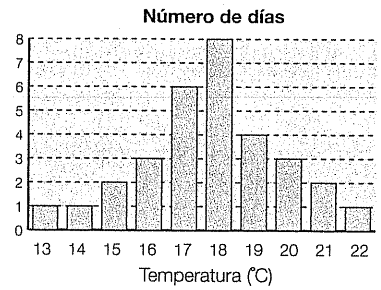
a. Halla la moda y la mediana de los datos. ____________

b. Elabora un diagrama de barras que represente esta información.

c. ¿Qué porcentaje de estas personas pesan menos de 65 kg? ____________

d. ¿Cuántas personas tienen peso mayor que 60 kg? ____________

3. Las temperaturas medias registradas durante el mes de mayo en Bucaramanga, en grados centígrados, se muestran en el gráfico de barras.



a. ¿Cuál es la temperatura con mayor frecuencia? ____________

b. ¿Cuál es la temperatura menos frecuente? ____________

Tema 61 Media de datos no agrupados

Analiza

4. Un policía de una ciudad, usando un radar, verificó la velocidad de los automóviles que circulaban por una calle de la cuidad durante una hora. Obtuvo los siguientes registros:

77, 73, 82, 78, 73, 64, 65, 73
82, 62, 71, 80, 79, 68, 67, 75
69, 58, 66, 73, 65, 67, 85, 81

a. Halla la velocidad promedio que registraron los automóviles.

____

b. ¿Cuál es la moda en estos datos?

____

c. ¿Cuál es la mediana?

____

5. Un grupo de empleados de un cultivo de flores tiene los salarios mensuales (miles $) que se muestran en la siguiente tabla.

Salario	530	610	540	580
Número de empleados	15	12	17	12
Salario	500	530	580	550
Número de empleados	10	21	13	10

a. Halla el promedio de los salarios que pagan los dueños del cultivo de flores. ____________

b. Los empleados piden un reajuste salarial general del 30%, pero el dueño ofrece un aumento del 10%, más una bonificación mensual de $ 20 000. ¿Cuál crees que es la decisión más ventajosa para los empleados?

____

Interpreta: Obtiene la mediana y la moda de un grupo de datos.
Analiza: Usa el concepto media aritmética para resolver problemas.

Nombre: ____________ Curso: ____ Fecha: ____

Tema 62 Números signados y relativos

Interpreta

1. Asocia a cada enunciado un número relativo.
   a. El ascensor quedó atrapado en el quinto piso. ____________
   b. El termómetro marca 3 grados bajo cero. ____________
   c. Una fosa tiene una profundidad de 80 metros. ____________
   d. Un submarino se encuentra a 135 metros de profundidad. ____________
   e. El nevado del Ruiz alcanza una altura de 5400 metros sobre el nivel del mar. ____________
   f. Cartagena de Indias está a 2 metros sobre el nivel del mar. ____________

2. Representa cada situación con un número signado.
   a. Juanita tiene $ 10 000 ahorrados. ____________
   b. Pedro le debe $ 3000 a un amigo. ____________
   c. La mamá de Mónica le dio $ 5000 para las onces. ____________
   d. Alejandra gastó $ 2700 en el descanso. ____________
   e. Se consignaron $ 340 000 en la cuenta de ahorros. ____________
   f. En la cuenta de Sebastián aparece un saldo en rojo de $ 75 000. ____________
   g. Andrés tenía $ 2000 en el bolsillo y los perdió por el camino. ____________

Tema 63 Números enteros

Analiza

3. Completa la tabla.

Número	Opuesto
13	
−98	
−87	
164	
−1487	
−(−25)	

4. Ubica en la recta numérica cada número y su opuesto.
   a. 6 b. −7 c. 12
   d. 9 e. −3 f. −11

5. El punto *R* está a 10 unidades a la derecha de cero. ¿Qué número le corresponde al punto:
   a. *T*, si la distancia de *R* a *T* es 3 unidades?
   b. *M*, si la distancia de *R* a *M* es de 8 unidades?
   c. *K*, si la distancia de *R* a *K* es 20 unidades?
   d. *F*, si la distancia de *R* a *F* es de una unidad?

6. José toma el ascensor en el cuarto piso, sube 6 pisos, se da cuenta de que se equivocó, y entonces baja 3 pisos. ¿A qué piso iba José?
   ____

7. Dos automóviles parten del mismo punto de una ciudad, uno hacia el norte a 65 km por hora y el otro hacia el sur a 80 km por hora. ¿Qué distancia los separa al cabo de una hora?
   ____

8. Un avión vuela a una altura de 10 000 metros sobre el nivel del mar y un submarino se encuentra navegando a 135 metros de profundidad.
   a. Representa gráficamente esta situación.
   b. Halla la distancia que separa al avión del submarino.
   ____

9. En un juego de *rummikub*, uno de los jugadores empieza con 14 puntos, luego pierde 5, gana 3 y pierde 8 puntos. ¿Con cuántos puntos quedó al final?
   ____

Interpreta: Representa situaciones con números relativos y signados.
Analiza: Usa números enteros para solucionar problemas.

Nombre: ____________ Curso: ______ Fecha: ______

Tema 64 Adición y sustracción de números enteros

Interpreta

1. Efectúa las adiciones.

a. $-25 + (-48) + (-70) =$ ____________

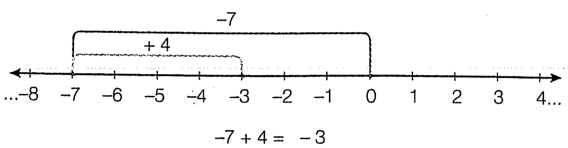
b. $-47 + (+12) =$ ____________

c. $-75 + (-25) =$ ____________

d. $-88 + (+38) =$ ____________

e. $146 + (-54) =$ ____________

2. Representa gráficamente y halla el resultado de cada suma (*ver* figura).



a. $(-3) + (-5) =$ ____________

b. $(+12) + (-9) =$ ____________

c. $(-6) + (-2) =$ ____________

d. $(-3) + (-5) =$ ____________

e. $(+6) + (-1) =$ ____________

3. Completa y efectúa las sustracciones.

a. $27 - (-10) = 27 +$ ______ $=$ ______

b. $-45 - (-10) = -45 +$ ______ $=$ ______

c. $32 - (+15) = 32 +$ ______ $=$ ______

4. Halla el número entero que falta para que se cumpla la igualdad.

a. $8 + \boxed{} = 5$

b. $4 + \boxed{} = -2$

c. $\boxed{} + (-8) = 0$

d. $\boxed{} + (-9) = -5$

5. Escribe la expresión matemática que representa cada enunciado y resuélvelo.

a. Se sustrae –5 de –25. ¿Cuánto se obtiene? ____________

b. Se sustrae este número de 10 y se obtiene 15. ¿Cuál es el número? ____________

c. Se sustrae –8 de un número y se obtiene –20. ¿Cuál es el número? ____________

d. Se sustrae un número de otro y se obtiene 10. ¿Cuáles pueden ser los números? ____________

Analiza

6. En una ciudad se registraron, durante una semana, las temperaturas que aparecen en la siguiente tabla.

Temperaturas	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
Máxima °C	12	13	5	2	13
Mínima °C	0	3	–1	–7	6

a. ¿Qué día se produjo la menor temperatura mínima? ____________

b. ¿Cuál fue la mayor temperatura máxima? ____________

c. Ordena las temperaturas mínimas de menor a mayor. ____________

d. Ordena las temperaturas máximas de mayor a menor. ____________

e. En cada caso, indica cuál es la diferencia entre la temperatura máxima y la temperatura mínima. ____________

7. Aristóteles, uno de los filósofos más influyentes de todos los tiempos, vivió entre los años 106 y 43 a. C. ¿A qué edad murió? ¿Cuántos años han transcurrido desde la muerte de Aristóteles hasta hoy? ____________

8. Un avión vuela sobre el océano a una altura de 10 000 metros y un submarino está sumergido 500 metros. ¿Qué altura los separa? ____________

Interpreta: Calcula adiciones y sustracciones de números enteros. Encuentra el número que falta en una adición de números enteros.
Analiza: Resuelve problemas usando adiciones y sustracciones de números enteros.

Nombre: ______ Curso: ______ Fecha: ______

Tema 65 Multiplicación y división de números enteros

Interpreta

1. Efectúa las multiplicaciones y divisiones. En el caso de las divisiones, indica si el resultado es un número entero.

a. $(-20) \times (32)$ **b.** $(16) \times (-15)$

c. $(105) \div (35)$ **d.** $(-240) \div (-60)$

e. $(58) \times (-1)$ **f.** $(97) \times (1)$

g. $(-80) \div (-1)$ **h.** $(-28) \times (0)$

2. Halla el número entero que falta.

a. $11 \times \square = -33$ **b.** $14 \div \square = -2$

c. $\square \times (-9) = 81$ **d.** $\square \div (-12) = -1$

e. $-21 \times \square = 0$ **f.** $-13 \div \square = 1$

g. $\square \times (-8) = 112$ **h.** $\square \div (-17) = 17$

3. Comprueba si los siguientes cuadrados son mágicos, es decir, si multiplicas los números de las filas, los de las columnas y los de las diagonales, dan siempre el mismo producto.

a.

−5	3	3	1
−1	3	1	3
1	5	3	−15
9	1	−5	−1

b.

−2	−3	2	1
1	−2	−1	6
1	2	−3	−2
−6	1	2	−1

c.

3	−3	−2	−1
1	−2	1	9
−1	3	3	2
6	−1	3	1

d.

2	−2	2	2
2	2	2	−2
−2	2	2	2
2	2	−2	2

Analiza

4. Responde.

a. ¿El producto de dos números enteros también es un número entero? ______

b. ¿Qué sucede cuando se multiplica un número entero por 1? ______

c. ¿La multiplicación de números enteros cumple la propiedad asociativa? ______

d. ¿Cuál es el producto de multiplicar un número entero por cero? ______

5. Indica en cada caso si la división de números enteros cumple la propiedad indicada. Si no es así, muestra un ejemplo que ilustre que no la cumple.

a. Propiedad clausurativa. ______

b. Propiedad conmutativa. ______

c. Propiedad asociativa. ______

6. Al desenchufar una plancha, la temperatura disminuye 18 grados cada 3 minutos.

a. ¿Cuántos grados bajará en 5 minutos? ______

b. Si la plancha tiene una temperatura de 110 °C, ¿cuánto tiempo tardará en alcanzar una temperatura de 38 °C? ______

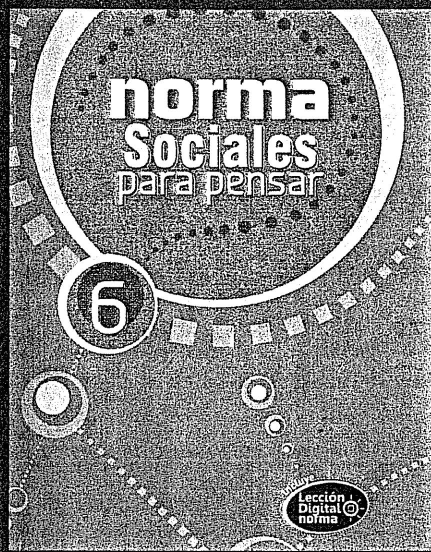
7. Un submarino desciende 32 metros por minuto para explorar el océano. ¿Cuánto tiempo tardará en descender 256 metros? ______

8. El submarino está a 400 metros de profundidad. Si se quiere ascender a 100 metros de profundidad en 15 minutos, ¿cuánto metros por minuto debe ascender? ______

Interpreta: Calcula multiplicaciones y divisiones de números enteros.
Analiza: Resuelve problemas usando multiplicaciones y divisiones de números enteros.

norma
para pensar

Forma ciudadanos con pensamiento crítico para el mundo actual.



Lección
Digital
norma

www.normaparapensar.com

¡Una nueva experiencia de aprendizaje!

Un mundo virtual para descubrir, vivir e interactuar con el conocimiento. En cada grado cuentas con: 6 lecciones digitales, 24 espacios de aprendizaje y más de 60 recursos digitales, entre actividades, infografías, videos, juegos, descargables, audios y evaluaciones.

C.C. 26501006
ISBN 978-958-45-3536-8
9 789584 535368

Visite nuestra página
www.librerianorma.com

GRUPO
EDITORIAL
norma