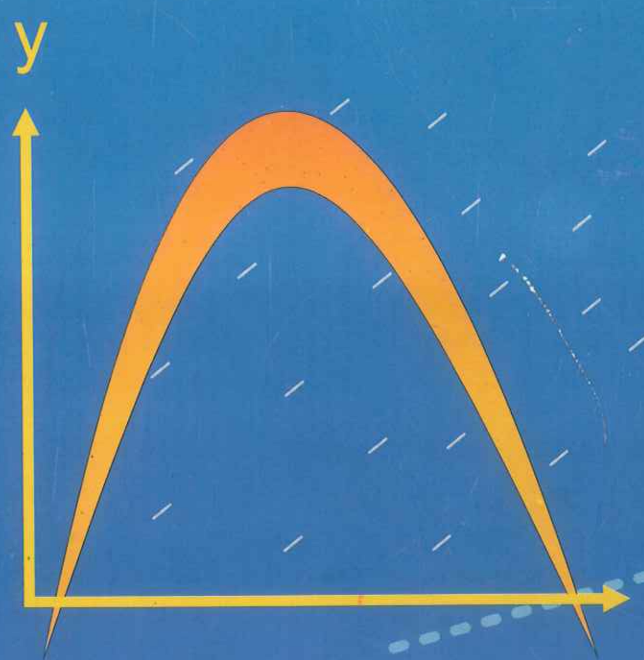
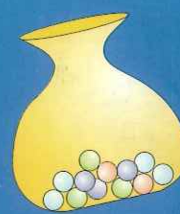
CON ESTÁNDARES
PARA LA EXCELENCIA
Y DESARROLLO DE COMPETENCIAS

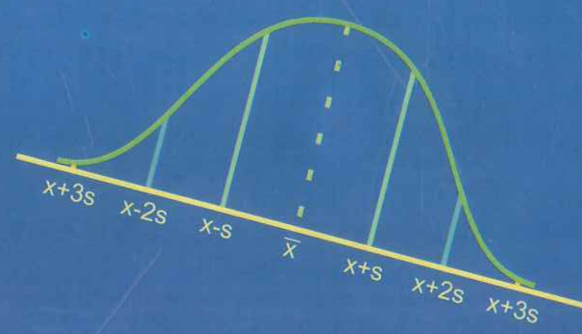
MATEMÁTICA EXPERIMENTAL 9

Álgebra y Estadística

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$







Julio Alberto Uribe Cálad
Marco Tulio Ortiz Díez

UROS EDITORES

CON ESTÁNDARES
PARA LA EXCELEN
Y DESARROLLO DE CO

E

Daniel Sánchez Arboleda
9º C

CON ESTÁNDARES
PARA LA EXCELENCIA
Y DESARROLLO DE COMPETENCIAS

MATEMATICA EXPERIMENTAL

ÁLGEBRA Y ESTADÍSTICA

9

NOVENO GRADO
EDUCACIÓN BÁSICA SECUNDARIA

SEGUNDA EDICIÓN ACTUALIZADA
2007

Julio Alberto Uribe Cálad
Marco Tulio Ortiz Díez

UROS editores

Este texto ha sido elaborado por los autores de acuerdo con los programas del Ministerio de Educación Nacional y bajo la responsabilidad de los siguientes integrantes:

AUTORES

JULIO ALBERTO URIBE CÁLAD

- Licenciado en Matemáticas y Física de la Universidad de Antioquia en el año 1.980
- Posgraduado en Didáctica Universitaria en la misma universidad en el año 2002.
- Rector del colegio Calasanz de Medellín entre los años 1991 y 2002 y profesor de la misma institución desde el año 1971
- Profesor Asociado de la Universidad Nacional de Colombia, sede de Medellín, desde el año 1980
- Distinguido con el premio a la Docencia Excepcional por el Consejo Superior de la Universidad Nacional en los años 2000, 2001 y 2002.
- Coautor de la reconocida serie ELEMENTOS DE MATEMÁTICAS publicada por Editorial Bedout entre los años 1989 y 1999.
- Autor y coautor de más de 25 textos, incluidos dos de carácter universitario, uno de los cuales es actualmente el texto guía en el curso de GEOMETRÍA VECTORIAL, para estudiantes de ingeniería en la Universidad Nacional de Colombia, sede de Medellín.

MARCO TULIO ORTIZ DÍEZ

- Licenciado en Matemáticas y física de la Universidad de Antioquia, en el año 1982.
- Profesor del colegio Calasanz de Medellín, desde hace 25 años.
- Profesor del Liceo Concejo de Medellín desde hace 15 años.
- Profesor del Instituto Nocturno de Bachillerato de la Universidad de Antioquia, durante 28 años.

COMITÉ TÉCNICO

Diseño y Diagramación: Isabel Consuelo Alvarez M.
Diseño de carátula: Sergio Alonso Molina Molina.
Diseño Desprendible:: Juan Carlos Uribe Osorio.
Impresión y terminación: Termimpresos - Medellín

AGRADECIMIENTOS:

- Al profesor Jesús Enrique Uribe Ángel, quien elaboró las preguntas correspondientes a las comprensiones de lectura de cada unidad.
- Al profesor Juan Manuel Ramírez Salazar, quien revisó la unidad de estadística de este texto.
- A los profesores Luis Alfonso Vélez Moreno y René Iral Palomino, de la Escuela de Estadística de la Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín, por sus importantes aportes en el contenido y metodología de la unidad de estadística de este texto.

CRÉDITOS

ISBN : 958 - 97531-5-9

Contenido

MATEMÁTICA

ÁLGEBRA Y

escrito para

ESTRUCTURAR Y DESARROLLAR

a través de

UN CURRÍCULO

mediado por

PROCESOS GENERALES

como

- PLANTEAMIENTO Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
  - Enunciar el problema
  - Desarrollar estrategias de solución
  - Verificar los resultados
  - Generalizar las estrategias de solución
  - Utilizar significativamente la matemática para aplicarla en la solución de nuevos problemas
- RAZONAMIENTO
  - Cómo y por qué de los procesos
  - Justificar los procedimientos
  - Plantear hipótesis y argumentos a partir de propiedades conocidas
  - Exhibir contraejemplos para mostrar la falsedad de ciertas proposiciones
  - Identificar patrones de comportamiento
- COMUNICACIÓN
  - Expresar oralmente las ideas
  - Escribir procesos de solución de problemas
  - Enunciar e interpretar propiedades
  - Evaluar información
- MODELACIÓN
  - Identificar las partes de un problema
  - Escribir un modelo matemático para el enunciado de un problema
  - Resolver el modelo
  - Verificar las soluciones obtenidas
- EJERCITACIÓN
  - Realizar cálculos aritméticos, métricos, geométricos, analíticos y de rutina
  - Dibujar gráficas
  - Medir objetos
  - Realizar transformaciones en el plano y en el espacio

CONOCIMIENTOS ESPECÍFICOS

dados en

PENSAMIENTOS

como

PENSAMIENTO NUMÉRICO Y SISTEMAS NUMÉRICOS

a través de

LÓGICA Y CONJUNTOS

como

- Revisar conceptos básicos de lógica proposicional y conjuntos.
  - Proposiciones simples y compuestas.
  - Formas proposicionales
  - Cuantificadores
  - Operaciones con conjuntos: unión, intersección, complemento.
- Revisar las características de una teoría lógicamente estructurada.
- Utilizar los métodos directo e indirecto para demostrar proposiciones del álgebra y la geometría estudiadas en el curso anterior.

LOS NÚMEROS COMPLEJOS

como

- LOS NÚMEROS REALES
  - Estructura de campo en R y sus consecuencias algebráicas
  - Operaciones: suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación.
- LOS NÚMEROS COMPLEJOS
  - Necesidad de los complejos
  - Parte real y parte imaginaria. Notación
  - Operaciones con números complejos: suma, resta, multiplicación, división.
  - Conjugado de un número complejo.

para desarrollar

COMPETENCIAS

INTERPRETATIVA

PROPOSITIVA

evidenciadas por el alcance de

LOGROS

como

DESTREZA OPERATIVA

APROPIACIÓN Y COMUNICACIÓN DE CONCEPTOS

EXP

ESTA

EL PENSAMI

PENSAMI
SISTE

- DISTRIBUCIÓ
  PADAS EN IN
  - Marca de c
    perior, amp
  - Frecuencia
    lada y frecu
  - Histogram
    ojivas.
- MEDIDAS DE
  - Cuartiles, I
  - Interpretac
- MEDIDAS DI
  - Rango, Ra
    media, De
  - Interpretac
- PROBABILID
  - Azar
  - Experimen
  - Sucesos c
    contrarios
  - Frecuencia
  - Regla de L
  - Cálculo d

RA Y
scrito para
ROLLAR
través de
CURRÍCULO
ediado por
SPECÍFICOS
dados en
SAMIENTOS
como

EXPERIMENTAL 9

ESTADÍSTICA

EL PENSAMIENTO LÓGICO MATEMÁTICO

PENSAMIENTO ALEATORIO Y SISTEMAS DE DATOS

a través de

- DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS AGRUPADAS EN INTERVALOS O CLASES
  - Marca de clase, límite inferior, límite superior, amplitud.
  - Frecuencia absoluta, frecuencia acumulada y frecuencia relativa acumulada.
  - Histogramas, curvas de frecuencias, ojivas.
- MEDIDAS DE POSICIÓN
  - Cuartiles, Deciles y Percentiles.
  - Interpretación gráfica.
- MEDIDAS DE DISPERSIÓN
  - Rango, Rango intercuartil, Desviación media, Desviación típica o estandar.
  - Interpretación gráfica.
- PROBABILIDAD
  - Azar
  - Experimentos aleatorios. Sucesos
  - Sucesos compatibles, incompatibles y contrarios
  - Frecuencia relativa y probabilidad
  - Regla de Laplace
  - Cálculo de probabilidades

PENSAMIENTO VARIACIONAL Y SISTEMAS ALGEBRAICOS Y ANALÍTICOS

a través de

- RADICACIÓN DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS
  - Propiedades de la radicación.
  - Racionalización.
- REVISIÓN DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN
  - Distinta forma de representar una función.
  - Funciones polinómicas.
  - Función constante y función lineal.
- SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES
  - Solución gráfica
  - Métodos de solución algebraicos: igualación, sustitución, reducción, determinantes.
- FUNCIONES DE 2º GRADO
  - Regla de la función cuadrática
  - Gráfica de una función cuadrática
- ECUACIONES CUADRÁTICAS
  - Características
  - Diferentes métodos de solución
  - Ecuaciones de forma cuadrática
- FUNCIÓN EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICA
  - Forma analítica de cada una
  - Representación gráfica
  - Propiedades de ambas funciones
  - Ecuación exponencial y logarítmica
- PROGRESIONES ARITMÉTICAS Y GEOMÉTRICAS
  - Término general de una progresión geométrica
  - Solución de problemas de aplicación

CONTEXTO

como

- Conocer el ambiente social y familiar que rodea al estudiante.
- Identificar la realidad emocional y sicológica propia de la adolescencia.
- Crear, por parte del docente, un ambiente adecuado de motivación para el aprendizaje.
- Lograr la participación activa del estudiante en los procesos de aprendizaje.
- Desarrollar la capacidad de pensamiento de los estudiantes teniendo en cuenta que se encuentran en la etapa de las operaciones concretas.
- Preparar para resolver problemas de la vida cotidiana y de la ciencia.

ra desarrollar
MPETENCIAS
ROPOSITIVA

ARGUMENTATIVA

s por el alcance de
LOGROS
como
DE CONCEPTOS

DIBUJO DE GRÁFICOS

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

1

a)

d)

f

h

2

1 PRODUCTOS NOTABLES

a) $(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$

b) $(x-y)^2 = x^2-2xy+y^2$

c) $(x+y)(x-y) = x^2-y^2$

d) $(x+y)(x^2-xy+y^2) = x^3+y^3$

e) $(x-y)(x^2+xy+y^2) = x^3-y^3$

f) $(x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$

g) $(x-y)^3 = x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$

h) TRIANGULO DE PASCAL: Los coeficientes del desarrollo del binomio $(a+b)^n$, con $n \in \mathbb{N}$ se obtienen así:

$(a+b)^0$	1
$(a+b)^1$	1 1
$(a+b)^2$	1 2 1
$(a+b)^3$	1 3 3 1
$(a+b)^4$	1 4 6 4 1
$(a+b)^5$	1 5 10 10 5 1
$(a+b)^6$	1 6 15 20 15 6 1

2 FACTORIZACION

a) $ax+ay = a(x+y)$

b) $x^2-y^2 = (x+y)(x-y)$

c) $x^2+2xy+y^2 = (x+y)^2$

d) $x^2-2xy+y^2 = (x-y)^2$

e) $x^3+y^3 = (x+y)(x^2-xy+y^2)$

f) $x^3-y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$

g) Ceros de un polinomio y Teorema del Factor:

? Si **x = a** es cero de un polinomio P(x) entonces **x-a** es un factor de P(x).

? Si **x-a** es factor de P(x), entonces los coeficientes del otro factor de P(x) pueden encontrarse aplicando la División Sintética o Regla de Ruffini.

? Si un polinomio P(x) de grado n, con coeficientes enteros, tiene ceros enteros, éstos serán divisores del término independiente.

3 EXPONENTES Y RADICALES

a) $x^m x^n = x^{m+n}$ b) $\dfrac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$ c) $\left(x^m\right)^n = x^{m \cdot n}$

d) $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$ e) $x^0 = 1, \quad \text{con } x \neq 0$ f) $(x\,y)^n = x^n\, y^n$

g) $\left(\dfrac{x}{y}\right)^n = \dfrac{x^n}{y^n}$ h) $x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$ i) $\sqrt[n]{x\,y} = \sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y}$

j) $x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m$ k) $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$ l) $\sqrt[n]{x^n} = \begin{cases} x & \text{si n es impar} \\ |x| & \text{si n es par} \end{cases}$

4 ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

- La ecuación ax^2+bx+c, con $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$ se denomina ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO en x.

La solución de la ecuación $ax^2+bx+c=0$ puede obtenerse aplicando la formula $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, denominada FÓRMULA CUADRÁTICA.

- En la fórmula cuadrática, la expresión b^2-4ac se denomina DISCRIMINANTE:
  - Si $b^2-4ac > 0$, la ecuación $ax^2+bx+c=0$ tiene dos soluciones reales diferentes.
  - Si $b^2-4ac = 0$, la ecuación $ax^2+bx+c=0$ tiene dos soluciones reales iguales.
  - Si $b^2-4ac < 0$, la ecuación $ax^2+bx+c=0$ no tiene soluciones reales. Sus soluciones son complejas.

- La gráfica de la función cuadrática $y=f(x)=ax^2+bx+c$ es una parábola vertical. La abscisa del vértice de esta parábola es $x = -\dfrac{b}{2a}$. Si $a > 0$, la parábola es cóncava hacia arriba y si $a < 0$, la parábola es cóncava hacia abajo.

5 LOGARITMOS Y SUS PROPIEDADES

El logaritmo en base **a** de un número **x** es el exponente **y** al que hay que elevar la base **a** para obtener el número **x**; es decir:

$$\text{Si } \log_a x = y \quad \text{entonces} \quad a^y = x, \text{ con } a > 0 \text{ y } a \neq 0$$

PROPIEDADES

Si $a, x, y \in \mathbb{R}$, $x > 0$, $a > 0$ y $a \neq 0$, entonces

P-1 $\log_a 1 = 0$

P-2 $\log_a a = 1$

P-3 $\log_a a^y = y$

P-4 $\log_a (x \cdot y) = \log_a (x) + \log_a (y)$

P-5 $\log_a \left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a (x) - \log_a (y)$

P-6 $\log_a x^y = y \log_a x$

P-7 $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$

Núcleo Temático

0

REVISIÓN DE CONCEPTOS Y REPASO

LOGRO GENERAL

Afianzar, ampliar e interiorizar los conocimientos algebraicos logrados en el curso anterior buscando fortalecer la destreza operativa y la solución de problemas algebraicos para los procesos y los resultados que de ellos se generen.

DIMENSIONES

LOGROS ESPECÍFICOS	INDICADORES DE LOGRO
Corporal: • Participar activamente en los talleres programados para realizar un repaso profundo y serio, de los contenidos estudiados en el curso anterior	• Interviene en un trabajo colectivo en el cual los alumnos son elegidos al azar para exponer problemas que traen por escrito. • Participa en actividades de destreza operativa y solución de problemas.
Comunicativa: • Emplear correctamente el vocabulario matemático. • Expresarse con seguridad delante de sus compañeros.	• Explica con sus propias palabras el significado de los conceptos matemáticos. • Escribe en lenguaje matemático el enunciado de los problemas. • Explica con claridad y precisión los procesos seguidos para la obtención de los resultados.
Cognitiva: • Repasar los algoritmos de la factorización y la simplificación de fracciones. • Resolver ecuaciones de primer grado. • Hallar ceros enteros de un polinomio.	• Dado un conjunto de números reales, los clasifica en racionales e irracionales. • Factoriza polinomios en R. • Halla ceros reales de un polinomio. • Simplifica fracciones algebraicas y opera con ellas.
Estética: • Dibujar figuras que traduzcan enunciados de problemas algebraicos.	• Ilustra mediante dibujos o gráficos el enunciado de un problema de tipo algebraico.
Etica-Actitudinal: • Reconocer la importancia de realizar un buen repaso, como punto de partida para adquirir nuevos conocimientos.	• Presenta sus trabajos, tareas e informes en el tiempo señalado.

EVALUACIÓN

ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS

0.1 UNAS PALABRAS PARA EMPEZAR

- En esta unidad revisaremos algunos conceptos estudiados en el curso anterior y que consideramos indispensables para abordar con éxito éste que ahora comenzamos.
- Los contenidos que vamos a repasar son: **los números reales, sus operaciones, relaciones y propiedades; polinomios algebraicos y sus operaciones; productos notables y factorización; fracciones algebraicas racionales y ecuaciones de primer grado.**
- Para realizar este repaso, utilizaremos la siguiente estrategia:
  - En un recuadro presentamos los títulos de los conceptos que vamos a revisar, los núcleos temáticos del texto **MATEMÁTICA EXPERIMENTAL 8: Algebra y Estadística**, donde pueden consultarse y las páginas correspondientes.
  - Cuando sea necesario, ilustraremos los conceptos con uno o más ejemplos.
  - Finalmente, proponemos un taller con ejercicios teórico prácticos, para ser resuelto por los estudiantes.
- Nuestra experiencia docente nos permite sugerirle a los colegas, realizar este repaso durante las dos o tres primeras semanas de clase, de manera que los estudiantes hagan una buena "pretemporada" en matemáticas.

0.2 Los Números Reales, Operaciones, Relaciones y Propiedades. Expresiones Algebraicas y Polinomios

CONCEPTO	NÚCLEO TEMÁTICO DE MATEMATICA EXPERIMENTAL 8 Algebra-Geometría	PÁGINAS
LOS NÚMEROS REALES - Clasificación - Expresión decimal de los números racionales y de los números irracionales - Representación en la recta numérica	1	40 a 74
- Operaciones, relaciones y sus propiedades - Axiomas de campo y de la igualdad - Consecuencia de los axiomas de campo.	2	80 a 100
EXPRESIONES ALGEBRAICAS Y POLINOMIOS - Exponentes positivos y raíces - Expresiones algebraicas - Polinomios algebraicos en una y en varias variables - Operaciones con polinomios - División sintética	3	105 a 150

EJERCICIO 0.1

1 Contesta las siguientes preguntas:

1.1 ¿Cómo está conformado el conjunto de los números reales?

1.2 ¿Cuándo un número es irracional? ¿Cuándo es racional?

1.3 ¿Cuáles de los siguientes números son racionales y cuáles irracionales?:

a) La longitud de una circunferencia de radio $\frac{1}{2}$ cm.

b) El área de un cuadrado de lado 2 cm.

c) La hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 5 cm y 12 cm.

d) El volumen de un cilindro de altura 2 cm y cuya base tiene un radio de 1 cm.

e) El área de un triángulo rectángulo isósceles cuya hipotenusa mide 2 cm.

1.4 ¿Cuándo $\frac{2x}{x+5} \notin R$? ¿Por qué?

1.5 ¿Cuándo $\sqrt{x-2} \notin R$? ¿Por qué?

1.6 ¿Por qué los números reales, con la suma y la multiplicación constituyen una estructura de campo?

1.7 ¿Cuáles son los axiomas de la igualdad en R?

1.8 ¿Qué dice y qué significa la Propiedad de Completez en R?

1.9 ¿Cuáles son las consecuencias que se derivan de la estructura de campo y de los axiomas de la igualdad en R?

1.10 ¿Cómo se define a^n cuando $a \in R$ y $n \in Z^+$?

1.11 ¿Cómo se define a^n cuando $n=0$ y $a \neq 0$?

1.12 ¿Cómo se define a^n cuando $n \in Z^-$?

1.13 ¿Cómo se define $\sqrt{a}$ en los reales? ¿Y $\sqrt[3]{a}$? ¿Y $\sqrt[n]{a}$?

1.14 ¿Existe siempre en R la expresión $\sqrt[n]{x}$? Explique

1.15 ¿Es $\sqrt{x^2} = x$, para todo $x \in R$? ¿Por qué?

1.16 ¿Es $\sqrt[3]{x^3} = x$? ¿Por qué?

1.17 En general, ¿a qué es igual $\sqrt[n]{x^n}$ cuando n es par? ¿Y cuándo n es impar?

1.18 ¿Cuáles son las propiedades de la potenciación cuando la base es un número real, diferente de 0, y el exponente es un número entero?

1.19 ¿Es $-(-4a^2b^3)^3 = 64a^6b^9$? ¿Por qué?

1.20 ¿Cómo se define un polinomio en los reales, con una indeterminado x y de grado n?

1.21 ¿A qué se le llama grado de un polinomio? ¿Coeficiente principal? ¿Término independiente?

1.22 ¿Cuándo dos términos algebraicos son semejantes?

1.23 ¿Cómo se suman y cómo se restan dos polinomios?

1.24 ¿Cómo se multiplican dos polinomios?

1.25 ¿Cómo se dividen dos polinomios?

1.26 ¿En qué consiste y cómo se realiza el procedimiento de la División Sintética o Regla de Ruffini?

2 Completa:

2.1 Completa el siguiente cuadro colocando una **X** cuando el número de la columna izquierda corresponda al conjunto de la fila superior.

	N	Z	Q	Q'	R
-7					
3,14					
$\pi - \frac{2}{3}$					
$-\frac{5}{4}$					
$\frac{\sqrt{3}}{2}$					
$\sqrt{\frac{4}{9}}$					
$\sqrt[3]{\frac{4}{27}}$					
4,25					
$4\frac{3}{5}$					

2.2 Completa: $(-7)\bullet[x + (-y)] =$ ______

2.3 Completa: "Si $(x+y) \bullet (z+v) = (a+b) \bullet (z+v)$ entonces $x+y=a+b$", corresponde a la propiedad ______

2.4 El inverso aditivo de $x-y$ se simboliza ______ y es igual a ______

2.5 El inverso multiplicativo de $x+y$ se simboliza ______ y es igual a ______

2.6 la fracción $\frac{83}{99}$ tiene un desarrollo decimal ______

2.7 La fracción $\frac{2x}{x^2-4} \in R$ cuando ______

2.8 FALSO o VERDADERO: $-x^4 = (-x)^4$ ______

2.9 FALSO o VERDADERO: La expresión algebraica $Q(x) = \frac{3}{4}x^3 - \frac{1}{3}x^2 + 4\sqrt{x} - 2$ es un polinomio de grado 3.

2.10. FALSO o VERDADERO: La expresión $P(x) = -\frac{3}{4}x^4 + \frac{2}{x^3} - 4x^2 + 5$ es un polinomio de grado 4.

2.11 FALSO o VERDADERO: Los términos $-ab^2xy^3$ y $4xy^3ab^2$ son semejantes.

3 En los ejercicios siguientes, eliminar signos de agrupación y reducir términos semejantes:

3.1 $\left(\frac{1}{2}a^2 + ab - 2b^2\right)\left(2a^2 - ab + \frac{1}{2}b^2\right) - \frac{3}{2}a^2\left(ab - \frac{5}{2}b^2\right) - \frac{1}{2}b^2\left(2a^2 - 2b^2\right)$

3.2 $\frac{1}{3}a^3 - \left(a^2 + \frac{2}{3}b^2\right)\left(\frac{1}{2}a + b^2\right) + b\left[\left(a^2 - \frac{1}{2}b\right) + a\left(a + b^2\right) - a^2\right] + a\left(\frac{1}{6}a^2 + ab^2 + \frac{1}{3}b^2\right)$

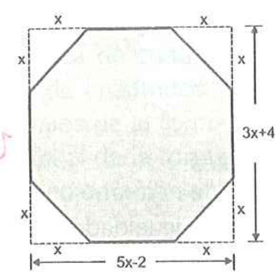
$- b^2\left(ab - \frac{2}{3}b^2 - \frac{1}{2}\right)$

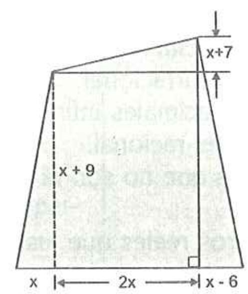
3.3 $\frac{1}{2}a^2 - \left\{\frac{2}{3}ab + b^2 - \left[\frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}b^2 + \left(a^2 - \frac{1}{2}ab\right) + \frac{1}{2}a^2 - \left(\frac{2}{3}ab - b^2\right)\right]\right\}$

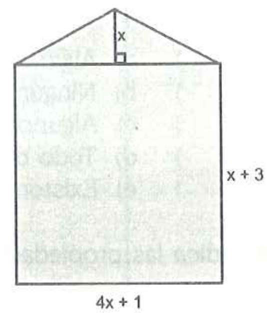
3.4 Dividir $3a^3b^2 - \frac{13}{2}a^2b^3 + \frac{15}{4}ab^4 - \frac{1}{2}b^5$ entre $2a^2b - 3ab^2 + \frac{1}{2}b^3$

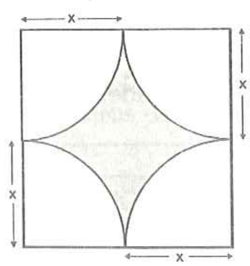
3.5 Dividir $3xy^4 - 4x^2y^3 + \frac{3}{2}x^3y^2 - \frac{1}{2}x^4y$ entre $-xy^2 + x^2y$

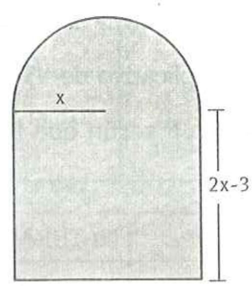
4 En los ejercicios 4.1 a 4.6, escribir un polinomio en x que exprese el área de la parte sombreada de cada figura.

4.1


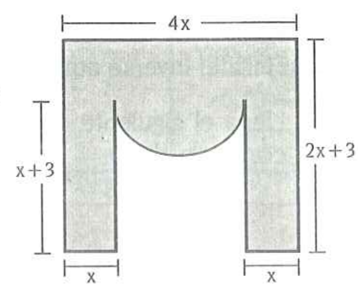
4.2


4.3


4.4


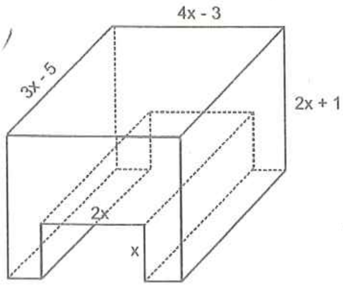
4.5


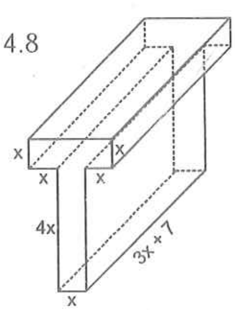
Aproximar π a 3

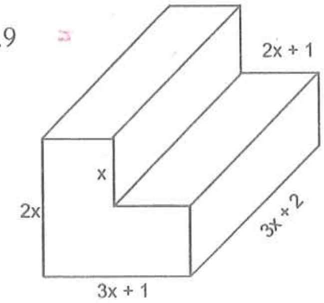
4.6


Aproximar π a 3

En los ejercicios 4.7 a 4.9, escribir un polinomio en x que exprese el volumen de cada figura.

4.7


4.8


4.9


5 En los siguientes ejercicios usar el Método de la División Sintética o Regla de Ruffini para hallar el cociente y el residuo de las divisiones dadas:

5.1 $4x^6 - 3x^3 + 2x - 2 \;\underline{\big|\, x - 1\quad}$

5.2 $x^3 + ax^2 + a^2x + a^3 \;\underline{\big|\, x+a\quad}$

5.3 $4x^2 - 4x + 1 \;\underline{\big|\, 2x-1\quad}$

5.4 $9x^2 - 12xy + 4y^2 \;\underline{\big|\, 3x-2y\quad}$

5.5 $-6x^4 - 28x + 23x^2 - 8x^3 + 14 \;\underline{\big|\, 2 - 3x\quad}$

6 Representar en la recta numérica los siguientes números racionales:

a) $-\dfrac{13}{4}$ b) $2\dfrac{4}{5}$ c) $\dfrac{15}{4}$ d) $-\dfrac{11}{3}$ e) $-2{,}4$

7 Usar el teorema de Pitágoras para representar, en forma precisa, en la recta numérica los números: $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{18}$ y $\sqrt{19}$.

8 En el paréntesis de la izquierda escribe una V o una F, según que el enunciado sea verdadero o falso.

( ) a) Algunos racionales son decimales infinitos periódicos.
( ) b) Ningún decimal infinito es irracional.
( ) c) Algunos racionales son decimales infinitos no periódicos.
( ) d) Todo decimal periódico es racional.
( ) e) Existen algunos números que no son ni enteros ni racionales.

9 Indica las propiedades de los números reales que justifican las siguientes igualdades:

a) $a + [b + (c + d)] = (a + b) + (d + c)$ b) $(a + b) + c = c + (b + a)$

10 Halla el inverso aditivo y el inverso multiplicativo de $\sqrt{2}$

11 Halla el inverso aditivo y el inverso multiplicativo de $\sqrt{3} - \sqrt{2}$

12 Llena el siguiente cuadro colocando V o F según que la afirmación sea verdadera o falsa para el conjunto dado.

	NATURALES	ENTEROS	RACIONALES	REALES
Cerrado con respecto a la suma				
Cerrado con respecto a la multiplicación				
Cerrado con respecto a la resta				
Cerrado con respecto a la división				
Todos los elementos poseen inverso aditivo				
Todos los elementos, excepto el neutro aditivo, poseen inverso multiplicativo				

0.3 PRODUCTOS NOTABLES Y FACTORIZACIÓN

CONCEPTO	NÚCLEO TEMÁTICO DE MATEMATICA EXPERIMENTAL 8 Algebra-Geometría	PÁGINAS
PRODUCTOS NOTABLES - Cuadrado de un binomio - Cuadrado de un polinomio - Suma por diferencia - Cubo de un binomio - Producto de un binomio por su trinomio cuadrado imperfecto - Binomio de Newton. Triángulo de Pascal	5	191 a 208
FACTORIZACIÓN - Concepto. Polinomios primos - Factor común - Factorización de trinomios cuadrados perfectos - Diferencia de cuadrados - Suma de cuadrados - Trinomios de la forma $x^{2n} + bx^n + c$ - Trinomios de la forma $ax^{2n} + bx^n + c$ - Complementación al trinomio cuadrado perfecto - Factorización por agrupación.	6	213 a 249
TEOREMA DEL FACTOR - Teorema del Residuo - Ceros de un polinomio y teorema del factor - Ceros enteros de un polinomio	7	253 a 263

Ejemplo 1

Resolvamos $(3m - 2n + 5p)(3m - 2n - 5p)$

Solución

Agrupemos los dos primeros términos de cada paréntesis para obtener una suma por diferencia:

$$\begin{aligned}(3m - 2n + 5p)(3m - 2n - 5p) &= [(3m - 2n) + 5p][(3m - 2n) - 5p]\\ &= (3m - 2n)^2 - (5p)^2\\ &= 9m^2 - 12mn + 4n^2 - 25p^2\end{aligned}$$

Ejemplo 2

Efectuemos $(7x - 3y)(49x^2 + 21xy + 9y^2)$

Solución:

Tenemos el producto de un binomio por su trinomio cuadrado imperfecto. Por lo tanto:

$$(7x - 3y)(49x^2 + 21xy + 9y^2) = (7x)^3 - (3y)^3 = 343x^3 - 27y^3$$

Ejemplo 3

Los factores de $x^2 - 4$ en Z son $(x + 2)$ y $(x - 2)$ ya que los coeficientes de estos polinomios son números enteros y, además, $x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$.

Ejemplo 4

Los factores de $\frac{8}{27}x^3 - 1$ en Q son $\frac{2}{3}x - 1$ y $\frac{4}{9}x^2 + \frac{2}{3}x + 1$ porque los coeficientes de estos polinomios son números racionales y, además, $\frac{8}{27}x^3 - 1 = \left(\frac{2}{3}x - 1\right)\left(\frac{4}{9}x^2 + \frac{2}{3}x + 1\right)$.

Ejemplo 5

El polinomio $3x^2 - 25$ es primo en Q ya que sus factores son $\sqrt{3}\,x + 5$ y $\sqrt{3}\,x - 5$, pero los coeficientes de estos polinomios no son números racionales.

Ejemplo 6

Factoricemos el polinomio $1 - x^2 + 2xy - y^2$.

Solución:
El polinomio $1 - x^2 + 2xy - y^2$, se factoriza así:

$1 - x^2 + 2xy - y^2 = 1 - (x^2 - 2xy + y^2)$ .... agrupamos los tres últimos términos en un paréntesis precedido del signo (-).

$\therefore\ 1 - x^2 + 2xy - y^2 = 1 - (x - y)^2$ .... el paréntesis contiene un trinomio cuadrado perfecto

$\therefore\ 1 - x^2 + 2xy - y^2 = [\,1 - (x - y)\,]\,[\,1 + (x - y)\,]$ .... diferencia de cuadrados.

$\therefore\ 1 - x^2 + 2xy - y^2 = (1 - x + y)\,(1 + x - y)$ .... quitamos paréntesis internos

Ejemplo 7

Factoricemos el polinomio $xa^2 - xb^2 + a^3 - b^3$.

Solución:
El polinomio $xa^2 - xb^2 + a^3 - b^3$ se factoriza así:

$xa^2 - xb^2 + a^3 - b^3 = (xa^2 - xb^2) + (a^3 - b^3)$ .... agrupación de términos

$\therefore\ xa^2 - xb^2 + a^3 - b^3 = x\,(a^2 - b^2) + (a^3 - b^3)$ .... factor común x

$\therefore\ xa^2 - xb^2 + a^3 - b^3 = x\,(a + b)\,(a - b) + (a - b)\,(a^2 + ab + b^2)$. . aplicamos diferencia de cuadrados y diferencia de cubos

$\therefore\ xa^2 - xb^2 + a^3 - b^3 = (a - b)\,[\,x\,(a + b) + a^2 + ab + b^2\,]$. . . . . factor común $(a - b)$

$\therefore\ xa^2 - xb^2 + a^3 - b^3 = (a - b)\,[\,ax + bx + a^2 + ab + b^2\,]$. . . . . suprimimos el paréntesis interno.

Ejemplo 8

Factoricemos en Z el polinomio $x^7 - 3x^6 + 2x^5$

Solución:
En los enteros, el polinomio $x^7 - 3x^6 + 2x^5$ se factoriza así:

$x^7 - 3x^6 + 2x^5 = x^5(x^2 - 3x + 2)$ .... factor común x^5

$\therefore\ x^7 - 3x^6 + 2x^5 = x^5(x - 2)(x - 1)$ .... $x^2 - 3x + 2$ es un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$

Ejemplo 9

Factoricemos en Z el polinomio $5x^2 + 29x + 20$.

Solución

Este trinomio es de la forma $ax^{2n} + bx^n + c$ y podemos factorizarlo de tres maneras:

PRIMERA MANERA:

Paso 1: Multiplicamos y dividimos por 5 (que es el coeficiente de x^2) el trinomio dado:

$$5x^2 + 29x + 20 = \frac{5(5x^2 + 29x + 20)}{5}$$

$$\therefore\ 5x^2 + 29x + 20 = \frac{5^2x^2 + 29(5x) + 100}{5}$$

$$\therefore\ 5x^2 + 29x + 20 = \frac{(5x)^2 + 29(5x) + 100}{5}$$

Paso 2: Hagamos un cambio de variable. Sea $y=5x$. Por lo tanto:

$$5x^2 + 29x + 20 = \frac{y^2 + 29y + 100}{5}$$

$$\therefore\ 5x^2 + 29x + 20 = \frac{(y + 25)(y + 4)}{5}$$

Paso 3: Devolvamos el cambio de variable:

$$5x^2 + 29x + 20 = \frac{(5x+25)(5x+4)}{5}$$

Paso 4: Como el factor $(5x+25)$ tiene factor común 5, entonces:

$$5x^2 + 29x + 20 = \frac{\cancel{5}(x+5)(5x+4)}{\cancel{5}}$$

$$\therefore\ 5x^2 + 29x + 20 = (x+5)(5x+4)$$

- Por lo tanto: $5x^2 + 29x + 20 = (x+5)(5x+4)$

SEGUNDA MANERA:

La gran mayoría de los trinomios **con coeficientes enteros** de la forma $\mathbf{x^{2n} + bx^n + c}$ o $\mathbf{ax^{2n} + bx^n + c}$ no tiene factores con coeficientes enteros y por lo tanto son primos en Z. En efecto, si a,b y c, los elegimos al azar en el conjunto Z, la probabilidad de que el polinomio no tenga factores con coeficientes enteros es mucho más grande que la probabilidad de que los tenga. Entonces vale la pena saber si un polinomio en Z es primo antes de comenzar a buscar sus factores. Con este fin, describiremos un método llamado **PRUEBA CON ac PARA LA FACTORIZACIÓN**, que no sólo nos indica si es posible factorizar con coeficientes enteros los polinomio, sino que también nos ofrece una forma directa de factorizar tales trinomios en Z, cuando es posible. La prueba consiste en lo siguiente:

Paso 1: Realicemos la prueba ac para la factorización: $ac=(5)(20)= 100$

Paso 2: Encontremos dos factores de 100 que sumados den 29. Estos factores son 25 y 4. Luego, escribimos el término 29x como la suma de 25x y 4x, así:

$$5x^2 + 29x + 20 = 5x^2 + 25x + 4x + 20$$

Paso 3: Agrupamos convenientemente y factorizamos:

$$\begin{aligned} 5x^2 + 29x + 20 &= 5x^2 + 25x + 4x + 20 \\ &= (5x^2 + 25x) + (4x + 20) \\ &= 5x\,(x+5) + 4\,(x+5) \\ &= (x+5)\,(5x+4) \end{aligned}$$

Luego, $5x^2 + 29x + 20 = (x+5)\,(5x+4)$

TERCERA MANERA:

- La tercera manera de factorizar trinomios de la forma $ax^{2n} + bx^n + c$, constituye un método general para factorizar tales trinomios y se denomina **COMPLETACIÓN A UN TRINOMIO CUADRADO PERFECTO**. Este método se fundamenta en las siguientes propiedades:

1. Un trinomio de la forma $ax^{2n} + bx^n + c$ es factorizable en R si y sólo si la expresión $\mathbf{b^2-4ac}$ es positiva o cero; en caso contrario, el trinomio no es factorizable en los reales.

2. Si un trinomio $ax^{2n} + bx^n + c$ es **CUADRADO PERFECTO** y el coeficiente de x^{2n} es $a=1$, entonces el tercer término (c) es igual al **CUADRADO DE LA MITAD DEL COEFICIENTE DE x^n;** es decir:

$$c = \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

- Teniendo en cuenta estas propiedades, la factorización del trinomio $5x^2+29x+20$ la realizamos así:

Paso 1: Necesitamos que el coeficiente de x^2 sea 1. Con este fin, sacamos factor común 5:

$$5x^2 + 29x + 20 = 5\left(x^2 + \frac{29}{5}x + 4\right)$$

Paso 2: Completamos el trinomio del paréntesis al cuadrado perfecto, sumando (y restando) $\left(\frac{29}{10}\right)^2$

$$5\left(x^2 + \frac{29}{5}x + 4\right) = 5\left[x^2 + \frac{29}{5}x + \left(\frac{29}{10}\right)^2 + 4 - \left(\frac{29}{10}\right)^2\right]$$

Paso 3:

$$5\left(x^2 + \frac{29}{5}x + 4\right) = 5\Big[\underbrace{x^2 + \frac{29}{5}x + \left(\frac{29}{10}\right)^2}_{\textbf{TRINOMIO CUADRADO PERFECTO}} + \underbrace{4 - \left(\frac{29}{10}\right)^2}_{+\,4\,-\,\frac{841}{100}}\Big]$$

$$= 5\Big[\underbrace{\left(x^2 + \frac{29}{10}\right)^2 - \frac{441}{100}}_{\textbf{DIFERENCIA DE CUADRADOS}}\Big]$$

$$\downarrow$$

$$= 5\left[\left(x+\frac{29}{10}+\frac{21}{10}\right)\left(x+\frac{29}{10}-\frac{21}{10}\right)\right]$$

$$= 5\left[\left(x+\frac{50}{10}\right)\left(x-\frac{8}{10}\right)\right]$$

$$= 5\ (x+5)\left(x-\frac{4}{5}\right)$$

$$= (x+5)\ (5x-4)$$

- Luego, $5x^2 + 29x + 20 = (x+5)\ (5x-4)$
- Observemos que las tres maneras de factorizar este trinomio conducen a la misma respuesta.

Ejemplo 10

Factoricemos en Q el polinomio $a^9 - a^6 - 64a^3 + 64$

Solución

- Agrupando los dos primeros términos en un paréntesis precedido del signo (+) y los otros dos en un paréntesis precedido del signo (-), tenemos:

$$a^9 - a^6 - 64a^3 + 64 = (a^9 - a^6) - (64a^3 - 64)$$
$$\therefore\ a^9 - a^6 - 64a^3 + 64 = a^6(a^3-1) - 64(a^3-1)$$
$$\therefore\ a^9 - a^6 - 64a^3 + 64 = (a^3-1)(a^6-64)$$

- Como el primer factor es una diferencia de cubos y el segundo es una diferencia de cuadrados, entonces:

$$a^9 - a^6 - 64a^3 + 64 = (a-1)\ (a^2+a+1)\ (a^3+8)\ (a^3-8)$$

- El tercer y cuarto factores son una suma y una diferencia de cubos. Por lo tanto:

$$a^9 - a^6 - 64a^3 + 64 = (a-1)\ (a^2+a+1)\ (a+2)\ (a^2-2a+4)\ (a-2)\ (a^2+2a+4)$$

Ejemplo 11

Hallemos los posibles ceros enteros del polinomio $P(x) = 2x^3 + x^2 - 3x + 6$ y, si existen, factoricémoslo.

Solución

- Los posibles ceros enteros son los divisores del término independiente del polinomio: ±1, ±2, ±3 y ±6.
- Verifiquemos:

* Para $x = -1$: $2(-1)^3 + (-1)^2 - 3(-1) + 6 = -2 + 1 + 3 + 6 = 8 \neq 0$
* Para $x = 1$: $2(1)^3 + 1^2 - 3(1) + 6 = 2 + 1 - 3 + 6 = 6 \neq 0$
* Para $x = -2$: $2(-2)^3 + (-2)^2 - 3(-2) + 6 = -16 + 4 + 6 + 6 = 0$ ✓
* Para $x = 2$: $2(2)^3 + 2^2 - 3(2) + 6 = 16 + 4 - 6 + 6 = 20 \neq 0$
* Para $x = -3$: $2(-3)^3 + (-3)^2 - 3(-3) + 6 = -54 + 9 + 9 + 6 = -30 \neq 0$
* Para $x = 3$: $2(3)^3 + 3^2 - 3(3) + 6 = 54 + 9 - 9 + 6 = 60 \neq 0$
* Para $x = -6$: $2(-6)^3 + (-6)^2 - 3(-6) + 6 = -432 + 36 + 18 + 6 = -372 \neq 0$
* Para $x = 6$: $2(6)^3 + 6^2 - 3(6) + 6 = 432 + 36 - 18 + 6 = 456 \neq 0$

- Sólo encontramos un cero entero: $x=-2$. Por lo tanto $(x+2)$ es un factor $P(x) = 2x^3 + x^2 - 3x + 6$; es decir:

$$P(x) = 2x^3 + x^2 - 3x + 6 = (x+2) \bullet C(x)$$

- Para encontrar C(x), que debe ser un polinomio de segundo grado (¿por qué?) , recurrimos al método de la división sintética:

	2	1	-3	6
-2		-4	6	-6
	2	-3	3	0

Luego, $P(x) = (x+2)(2x^2 - 3x + 3)$

- **Pregunta:** ¿Tiene el polinomio $2x^2 - 3x + 3$ ceros que no sean enteros? ¿Por qué?

EJERCICIO 0.2

1 Contesta las siguientes preguntas:

a) ¿Cómo se escribe en forma simbólica el enunciado: **Cuadrado de la suma de $2x^3$ y $4y^2$?**

b) ¿Cómo se escribe en forma simbólica el enunciado: **Suma de los cuadrados de $2x^3$ y $4y^2$?**

c) ¿Cuál es el desarrollo de una suma al cuadrado?

d) ¿Es una diferencia de cuadrados igual a una diferencia al cuadrado?

e) ¿Cuál es el trinomio cuadrado perfecto de $(2a - 3b)$ ¿Y su trinomio cuadrado imperfecto?

f) ¿Es lo mismo el cubo de la diferencia de dos términos que la diferencia de los cubos de esos mismos términos? ¿por qué?

g) ¿Cómo se llega a una suma de cubos?

h) ¿Qué es factorizar un polinomio en un determinado conjunto numérico?

i) ¿Cuándo un polinomio es primo en un determinado conjunto numérico?

j) ¿En qué conjuntos es primo el polinomio $x^2 - 7$?

k) ¿Cómo se halla el factor común de un polinomio?

l) ¿Cómo se identifica un trinomio cuadrado perfecto? ¿Cómo se factoriza?

m) ¿Es siempre factorizable una suma de cuadrados?¿Cómo se analiza si es factorizable?

n) ¿Cómo se identifica una diferencia de cuadrados? ¿Y cómo se factoriza?

o) ¿Qué diferencia hay entre una diferencia de cuadrados y una diferencia al cuadrado?

p) ¿Qué características presenta un trinomio de la forma $x^{2n} + bx^n + c$?

q) ¿Cómo se factoriza un trinomio de la forma $x^{2n} + bx^n + c$?

r) ¿Cómo se identifica un trinomio de la forma $ax^{2n} + bx^n + c$?

s) Explique el método de completación al trinomio cuadrado perfecto para factorizar trinomios de la forma $ax^{2n} + bx^n + c$.

t) ¿Cómo se identifica una suma de cubos? ¿Y una diferencia de cubos?

u) ¿Cómo se factoriza una suma de cubos? ¿Y una diferencia de cubos?

v) ¿Cuál es el trinomio cuadrado imperfecto de $x^2 - y^3$?

w) ¿Cuándo un número real es cero de un polinomio?

x) ¿Qué establece el Teorema del Factor?

y) Describa el procedimiento para hallar los ceros racionales de un polinomio, en caso de que los tenga.

z) Describa el procedimiento para hallar los ceros irracionales de un polinomio, en caso de que los tenga.

En los ejercicios 2. a 21. efectúa las operaciones indicadas, utilizando los productos notables:

2. $(x + y + z)^2$
3. $(3b^2 + 6c^3)(3b^2 - 6c^3)$
4. $\left(\frac{x}{3} + \frac{y}{5}\right)\left(\frac{x}{3} - \frac{y}{5}\right)$
5. $(m^3 + m^2 - 2m + 1)^2$
6. $(2x + 3y - 4z - 2w)^2$
7. $[3(a + b) - 2][3(a + b) + 2]$
8. $[(a^2 + 3) - a][(a^2 + 3) + a]$
9. $[(a^3 - a) + (a^2 - 3)][(a^3 - a) - (a^2 - 3)]$
10. $(x + y + z)(x + y - z)(x - y + z)(y + z - x)$
11. $(ax + by)^2 (ax - by)^2$
12. $(3a - b)(9a^2 + 3ab + b^2)$
13. $(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$
14. $[(x + y)^2 + 2(x + y) + 1][(x + y)^2 - 2(x + y) + 1]$
15. $(x - 2y + 5z)(x + 2y + 5z)$
16. $(2x - 3y - 5z)(2x + 3y + 5z)$
17. $(-bu - v)(bu - v)$
18. $(a + 3b)^2 (a^2 - 6ab + 9b^2)$
19. $(x + 2y)(x - 2y)(x^2 + 4y^2)$
20. $(2x - 5y)(4x^2 + 10xy + 25y^2)$
21. $(3a + 2b - c)(3a - 2b + c)$

En los ejercicios del 22. al 65. factoriza los polinomios dados en el conjunto de los números racionales.

22. $9x^2y^2 - 36z^6$
23. $3ax - bx - 3ay + by$
24. $12x^2y^3 - 4x^3y^2$
25. $12a^2 - 4ab - 3ax^2 + bx^2$
26. $36t^8 - 25x^{10}$
27. $6x^2 + 3xy - 2ax - ay$
28. $4a^2 - 12ab + 9b^2$
29. $y^3 - y^2 + y - 1$
30. $a^{2n+1} + a^{n+2} + a^{n+1}$; con $n \in Z$
31. $x^2 - x - 2$
32. $6st^2 - 9s^2t - 2t^3 + 27s^3$
33. $x^2 - 26x + 165$
34. $x - 4y - x^3 + 64y^3$
35. $x^2 - 9x - 90$
36. $64x^6 - y^6$
37. $x^2y^2 + 34xy + 289$
38. $a^3 + 27b^3 + a + 3b$
39. $204 - 29x^2 + x^4$
40. $x^2 - a^2 - 6xy + 2ab + 9y^2 - b^2$
41. $110 - x - x^2$
42. $a^3 - 9b^2 - 27b^3 + a^2$
43. $x^4 - 14x^2 - 51$
44. $4(a + b)^2 - 5(a + b) - 6$
45. $a^2y^2 + 14ay - 240$
46. $18a^3 - 8a(x^2 + 8x + 16)$
47. $2x^2 + 3x + 1$
48. $9x^3 - 12x^2y + 4xy^2$
49. $10x^2 + 79x - 8$
50. $16x^4 - x^2 + 6xy - 9y^2$
51. $x^2 - 2xy - 323y^2$
52. $a^2 - 4b^2 + a^2b - 2ab^2$
53. $a^2 + 2ab + b^2 + a + b$
54. $4a^4 - a^2 - 4ab - 4b^2$
55. $x^3 + 12x^2y - 45xy^2$
56. $2x^3 - x^2 - 8x + 4$
57. $6x^2 - 31x + 35$
58. $x^2 - 9 + y^2 - 2xy$
59. $20 - 9x - 20x^2$
60. $a^2 + 2ab + b^2 - a^3 - b^3$
61. $65 + 8xy - x^2y^2$
62. $u^3v - 9uv^3$
63. $3x^3 + 6x^2 - 189x$
64. $m^9 - 27n^{12}$
65. $x^3 + 5x^2 - x - 5$

Factoriza en el conjunto Z, los polinomios de los ejercicios 66. a 68. haciendo uso del Teorema del Factor.

66. $x^5 - 3x^4 - 15x^3 + 35x^2 + 54x - 72$
67. $x^5 - 2x^4 - 10x^3 + 20x^2 + 9x - 18$
68. $x^6 + 5x^5 + x^4 - 25x^3 - 26x^2 + 20x + 24$

0.4 FRACCIONES ALGEBRAICAS Y ECUACIONES DE PRIMER GRADO

CONCEPTO	NÚCLEO TEMÁTICO DE MATEMATICA EXPERIMENTAL 8 Algebra-Geometría	PÁGINAS
FRACCIONES ALGEBRAICAS - Fracciones algebraicas racionales. - Simplificación de fracciones - Multiplicación y división de fracciones - Suma y resta de fracciones algebraicas - Fracciones complejas	8	267 a 286
ECUACIONES ALGEBRAICAS - Identidades y ecuaciones - Ecuaciones algebraicas y ecuaciones equivalentes - Propiedades de las ecuaciones - Solución de ecuaciones de primer grado.	9	281 a 312

Ejemplo 1

Simplifiquemos y hallemos el valor de la fracción: $\frac{a^4-b^4}{a^3+b^3} \bullet \left[1+\frac{ab}{(a-b)^2}\right] \div \left[\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right]$

Solución

- En esta expresión aparece una combinación de operaciones con fracciones algebraicas. El primer paso en su solución es simplificar cada fracción, si es posible, factorizando el numerador y el denominador.

A continuación se resuelven las operaciones de suma o resta contenidas dentro de los corchetes. Finalmente, se resuelven las multiplicaciones y las divisiones. Veamos:

$\frac{a^4-b^4}{a^3+b^3} \bullet \left[1+\frac{ab}{(a-b)^2}\right] \div \left[\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right]$ .... esta es la expresión dada

$= \frac{(a^2+b^2)\cancel{(a+b)}(a-b)}{\cancel{(a+b)}(a^2-ab+b^2)} \bullet \left[\frac{(a-b)^2+ab}{(a-b)^2}\right] \div \left[\frac{b^2+a^2}{a^2b^2}\right]$ .... simplificamos la primera fracción y resolvimos las otras dos.

$= \frac{(a^2+b^2)(a-b)}{a^2-ab+b^2} \bullet \left[\frac{a^2-2ab+b^2+ab}{(a-b)^2}\right] \bullet \left[\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\right]$ .... dividir es multiplicar por la fracción recíproca.

$= \frac{(a^2+b^2)(a-b)}{\cancel{a^2-ab+b^2}} \bullet \left[\frac{\cancel{a^2-ab+b^2}}{(a-b)^2}\right] \bullet \left[\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\right]$ .... ¿qué hicimos?

$= \frac{\cancel{(a^2+b^2)}\,\cancel{(a-b)}a^2b^2}{(a-b)^{\cancel{2}}\cancel{(a^2+b^2)}}$ .... ¿por qué?

$= \frac{a^2b^2}{a-b}$ .... ¿por qué?

Ejemplo 2

Resolvamos y simplifiquemos $\dfrac{a-3+\dfrac{5a}{2a-6}}{2a-1-\dfrac{15}{3-a}}$

Solución:

- Resolvemos por aparte las fracciones del numerador y las del denominador; quedando así:

$$\frac{a-3+\dfrac{5a}{2a-6}}{2a-1-\dfrac{15}{3-a}}=\frac{\dfrac{2(a-3)^2+5a}{2(a-3)}}{\dfrac{(2a-1)(3-a)-15}{3-a}}=\frac{\dfrac{2(a^2-6a+9)+5a}{2(a-3)}}{\dfrac{6a-2a^2-3+a-15}{-(a-3)}}$$

$$\therefore\ \frac{a-3+\dfrac{5a}{2a-6}}{2a-1-\dfrac{15}{3-a}}=\frac{\dfrac{2a^2-12a+18+5a}{2(a-3)}}{\dfrac{-2a^2+7a-18}{-(a-3)}}=\frac{\dfrac{2a^2-7a+18}{2(a-3)}}{\dfrac{-(2a^2-7a+18)}{-(a-3)}}$$

- Ahora realizamos la división de las fracciones obtenidas y simplificamos los resultados; así:

$$\frac{a-3+\dfrac{5a}{2a-6}}{2a-1-\dfrac{15}{3-a}}=\frac{-\cancel{(a-3)}\,\cancel{(2a^2-7a+18)}}{-2\cancel{(a-3)}\,\cancel{(2a^2-7a+18)}}=\frac{1}{2}$$

Ejemplo 3

Resolvamos la ecuación $\dfrac{b(x+a)}{x^2-b^2}+\dfrac{2x+3b-a}{x+b}=\dfrac{2(x^2+bx-b^2)}{x^2-b^2}$

Solución:

- En general, para resolver una ecuación conviene tener en cuenta las siguientes recomendaciones:
  1. Eliminar los denominadores, multiplicando ambos lados de la ecuación por el m.c.m. de los denominadores dados.
  2. Eliminar signos de agrupación.
  3. Reducir términos semejantes.
  4. Hallar el valor de la incógnita.

- Sigamos estos pasos:

  1. **Procedemos a eliminar los denominadores de la ecuación dada.**

     Hallemos el m.c.m. de los denominadores:

$$\left.\begin{aligned} x^2-b^2&=(x+b)(x-b)\\ x+b&=x+b\\ x^2-b^2&=(x+b)(x-b)\end{aligned}\right\}\ \therefore \text{m. c. m.}=(x+b)(x-b)$$

  2. **Multiplicamos ambos lados de la igualdad por $(x+b)(x-b)$:**

$$(x+b)(x-b)\left[\frac{b(x+a)}{(x+b)(x-b)}+\frac{2x+3b-a}{x+b}\right]=(x+b)(x-b)\bullet\frac{2(x^2+bx-b^2)}{(x+b)(x-b)}$$

$$\therefore\ \frac{\cancel{(x+b)}\cancel{(x-b)}\,b(x+a)}{\cancel{(x+b)}\cancel{(x-b)}}+\frac{\cancel{(x+b)}(x-b)(2x+3b-a)}{\cancel{(x+b)}}=\frac{2\cancel{(x+b)}\cancel{(x-b)}(x^2+bx-b^2)}{\cancel{(x+b)}\cancel{(x-b)}}$$

$$\therefore\ b(x+a)+(x-b)(2x+3b-a)=2(x^2+bx-b^2);\ \text{con } x\neq b\ \text{ y }\ x\neq -b$$

3. **A continuación, eliminamos los signos de agrupación (paréntesis) y reducimos términos semejantes:**

$$bx + ab + \cancel{2x^2} + 3bx - ax - 2bx - 3b^2 + ab = \cancel{2x^2} + 2bx - 2b^2$$

$$\therefore\ 2bx - ax + 2ab - 3b^2 = 2bx - 2b^2$$

4. **En términos de x, la ecuación resultante es de primer grado; por lo tanto, para hallar su valor, transponemos todos los términos que tienen x a un lado de la ecuación y los términos que no tienen x al otro lado**; así:

$$2bx - ax - 2bx = b^2 - 2ab$$

$$\therefore\ -ax = b^2 - 2ab$$

$$\therefore\ ax = 2ab - b^2$$

$$\therefore\ x = \frac{b\,(2a - b)}{a}\ ;\ \text{con } a \neq 0$$

EJERCICIO 0.3

En los ejercicios 1. a 12. efectúa las operaciones indicadas y simplifica los resultados.

1 $\dfrac{2a^3 + 54b^3}{2a^2 + 5ab - 3b^2} + \dfrac{8ab - 19b^2}{2a - b} - a - b$

2 $\dfrac{4xy + 4y^2}{4x^2 - 8xy + 3y^2} - \dfrac{15xy}{2x^2 + 3xy - 9y^2} + \dfrac{4x + y}{2x - y}$

3 $\dfrac{4}{x^4 + x^2 + 1} + \dfrac{x^2 + x - 1}{x^2 - x + 1} + \dfrac{x^2 - x - 1}{x^2 + x + 1}$

4 $\dfrac{x^2}{y^2} - \dfrac{1 - x^2}{1 - y^2} + \dfrac{x - 1}{y + y^2} + \dfrac{x + 1}{y - y^2}$

5 $\dfrac{a}{(a - b)\,(a - c)} + \dfrac{b}{(b - c)\,(b - a)} + \dfrac{c}{(c - a)\,(c - b)}$

6 $\dfrac{x^2yz}{(x - y)\,(x - z)} + \dfrac{y^2zx}{(y - z)\,(y - x)} + \dfrac{z^2xy}{(z - x)\,(z - y)}$

7 $\dfrac{a^2 - a - 2}{a^2 + a - 6} \bullet \dfrac{(a - 1)^2}{a^4 - 1} \bullet \left(\dfrac{a}{a - 1} - \dfrac{1}{a + 1}\right)$

8 $\dfrac{x^4 - 1}{x^3 - 1} \bullet \left(1 - \dfrac{x}{(x + 1)^2}\right) \div \left(\dfrac{1}{x} + x\right)$

9 $\dfrac{a^2 - b^2}{a^3 + b^3} \bullet \left(\dfrac{1}{a^2} - \dfrac{1}{ab} + \dfrac{1}{b^2}\right) \bullet \dfrac{a^3\,b^3}{(a - b)^2} - \dfrac{a^2}{a - b}$

10 $\dfrac{a^4 - b^4}{a^3 + b^3} \bullet \left[1 + \dfrac{ab}{(a - b)^2}\right] \div \left[\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2}\right]$

11 $\dfrac{a + \dfrac{b - a}{1 + ab}}{1 - \dfrac{a\,(b - a)}{1 + ab}} \bullet \dfrac{\dfrac{x + y}{1 - xy} - y}{1 + \dfrac{y\,(x + y)}{1 - xy}}$

12 $\dfrac{\dfrac{(a + b)^2 + (a - b)^2}{b - a} - (a + b)}{\dfrac{1}{b - a} - \dfrac{1}{a + b}} \div \dfrac{(a + b)^3 + (b - a)^3}{(a + b)^2 - (a - b)^2}$

En los ejercicios 13. a 22. resolver para x las ecuaciones propuestas:

13 $3\left(\dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{6}\right) - \dfrac{3}{4}(2x + 18) = -4$

14 $ax + \dfrac{b}{a} = bx + 1$

15 $a\,(x - 2) - b\,(x - 1) = b - a$

16 $\dfrac{cx + d^2}{d} - c = \dfrac{4dx - cd}{c}$

17 $\dfrac{x + 4}{3} - \dfrac{5}{6} = \dfrac{2x - 2}{3}$

18 $\dfrac{rx}{s} - \dfrac{sx}{r} = r - s$

19 $\dfrac{2}{x-2} - \dfrac{3}{2x-3} = \dfrac{6}{2x^2-7x+6}$

20 $b(a+x) - (a+x)(b-x) = x^2 + \dfrac{bc^2}{a}$

21 $\dfrac{x-a+b}{x-a} + \dfrac{x-b}{x-2b} = \dfrac{x}{x-b} + \dfrac{x-a}{x-a-b}$

22 $\dfrac{b(x+a)}{x^2-b^2} + \dfrac{2x+3b-a}{x+b} = \dfrac{2(x^2+bx-b^2)}{x^2-b^2}$

0.5 EL DERIVE EN ÁLGEBRA

- Recordemos que el DERIVE es un paquete computacional que permite hacer cálculos numéricos complicados, reduce y simplifica expresiones algebraicas, factoriza polinomios, resuelve ecuaciones y dibuja gráficas en dos y tres dimensiones.
- El siguiente cuadro resume los temas de DERIVE desarrollados en el curso anterior y que vamos a utilizar en éste y en cursos posteriores.

CONCEPTO	NÚCLEO TEMÁTICO DE MATEMATICA EXPERIMENTAL 8 Algebra y Estadística	PÁGINAS
LA PANTALLA DEL DERIVE - Ingreso de expresiones - Simplificación y aproximación de expresiones - Correcciones y cancelaciones	1	68 a 71
EL DERIVE COMO CALCULADORA	1	70 y 71
REDUCCIÓN Y SIMPLIFICACIÓN DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS	3	144 a 147
DIBUJO DE GRÁFICAS EN DOS DIMENSIONES	4	179 a 184
FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS	6	245 y 246
CEROS ENTEROS DE UN POLINOMIO	7	260 y 261

- Para INGRESAR UNA EXPRESIÓN a la ventana de álgebra, hacemos **click** sobre la LÍNEA DE ENTRADA DE EXPRESIONES, digitamos la expresión dada y luego presionamos la tecla ENTER o el símbolo ✓ ubicado a la izquierda de la línea de entrada de expresiones. De inmediato, DERIVE nos mostrará la expresión deseada en la VENTANA DE ÁLGEBRA, antecedida de un número (**#1, #2, #3, ...**), denominado NÚMERO DE ETIQUETA de la expresión. El programa DERIVE queda listo para aceptar la próxima expresión (no es necesario borrar la expresión previamente resaltada en la línea de entrada de expresiones).

- Para SIMPLIFICAR UNA EXPRESIÓN previamente resaltada en la ventana de álgebra, hacemos **click** sobre el símbolo = ubicado a la izquierda de la línea de entrada de expresiones, u oprimimos la tecla **Ctrl** y enseguida la tecla **ENTER.**

- Para APROXIMAR LA EXPRESIÓN hacemos lo mismo sobre el símbolo ≈ u oprimimos la tecla **Shift** y enseguida la tecla **ENTER.**

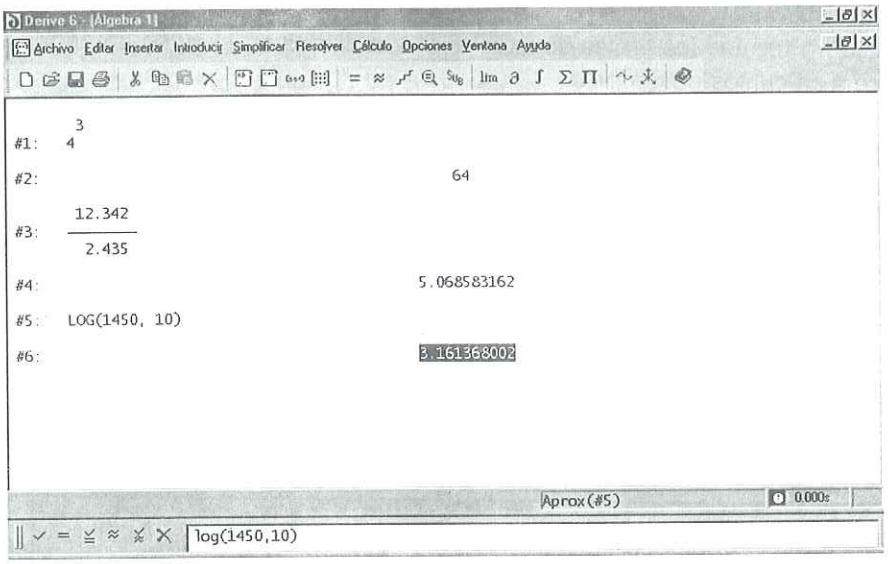
Ejemplo 1

Usemos el DERIVE para introducir, simplificar y aproximar las expresiones siguientes:

a) 4^3 b) $12{,}342 \div 2.435$ c) log (1450)

Solución

- Si a cada expresión le aplicamos las instrucciones anteriores, obtenemos:



- Para BORRAR UNA EXPRESIÓN previamente resaltada en la ventana de álgebra, hacemos **click** sobre el botón × de la barra de herramientas.
- Para MOVER UNA EXPRESIÓN de una línea a otra de la ventana de álgebra basta arrastrarla con el mouse.
- Para CORREGIR una expresión resaltada en la ventana de álgebra, o para usarla como parte de otra expresión, señalamos con el puntero del mouse la línea de edición y a continuación presionamos la tecla F3. Esto hará que la expresión resaltada caiga a la línea de expresión.
- Para CANCELAR LA SELECCIÓN de un comando presionamos la tecla ESC.

Ejemplo 2

La siguiente tabla nos muestra cómo ingresar algunas expresiones con DERIVE.

EXPRESIÓN A INGRESAR	INGRESO A DERIVE
$\dfrac{(-4)^3 + 5\sqrt[3]{27}}{8 \times 0{,}01}$	((-4)^3 + 5*(27)^(1/3)) / (8*0.01)
$\sqrt[5]{\dfrac{2^3+\sqrt{9}}{(-4)^6} + \dfrac{0{,}25}{\sqrt{\frac{3}{2}+\frac{1}{5}}}}$	((2^3 +(9)^(1/2))/((-4)^6) + (0,25/ ((3/2)+(1/5))^(1/2))^(1/5)
$\left\lvert 5^3 - \sqrt{\frac{2}{3}} \right\rvert - 8 \div 2^2 + 100$	abs(5^3 - (2/3)^(1/2)) - (8/2 ^ 2) + 100
$\mathrm{Log}_2\,(128)$	Log (128,2)
$\dfrac{5x\,(x-3)^2}{(x+1)^2\,(x-5)^4}$	(5*x* (x-3) ^ 2)/ ((x+1)^2* (x-5) ^4)
$\dfrac{\sqrt[3]{\frac{4}{9}\,a+1} + a^4}{2^{a-3}}$	(((4/9)*a+1)^(1/3)+a^4)/ (2^(a-3))

Ejemplo 3

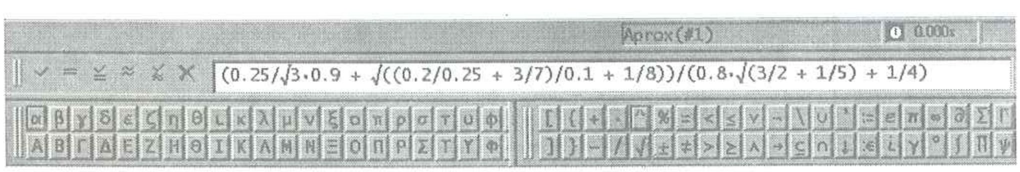
Introduzcamos a la pantalla del DERIVE la expresión

$$\frac{\left(\dfrac{\frac{1}{4}}{\sqrt{3}} \bullet 0{,}9 + \sqrt{\dfrac{\left(\frac{0{,}2}{0{,}25} + \frac{3}{7}\right)}{0{,}1} + \dfrac{1}{8}}\right)}{\left(0{,}8\,\sqrt{\dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{5}} + \dfrac{1}{4}\right)}$$

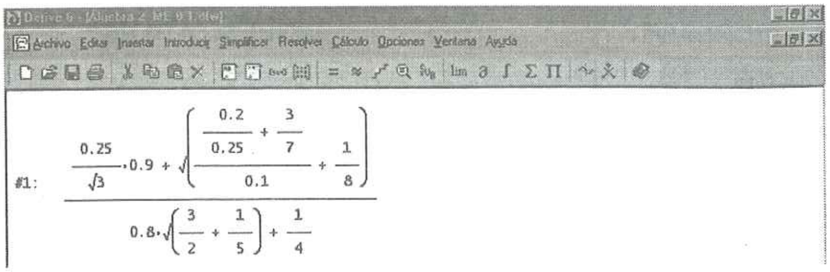
y calculemos su valor.

Solución:

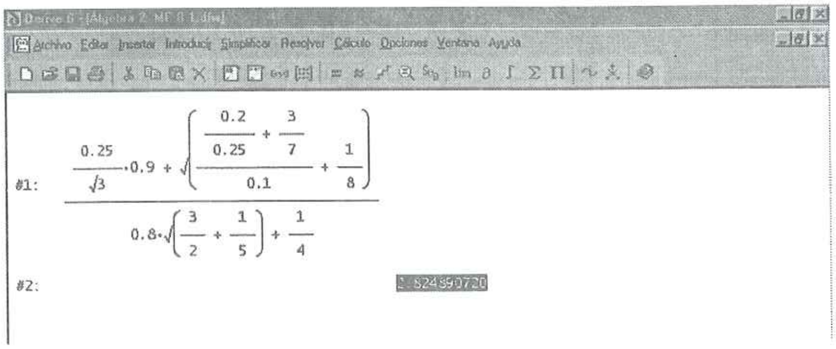
PASO 1: Ingresamos la expresión a través de la línea de entrada de expresiones, teniendo en cuenta el orden indicado en la tabla anterior. Si lo hacemos correctamente, la línea nos mostrará lo siguiente:



PASO 2: Una vez digitada la expresión, presionamos la tecla **ENTER** o el símbolo ✓, ubicado a la izquierda de la línea de entrada de expresiones. De inmediato DERIVE nos mostrará lo siguiente:



PASO 3: Para simplificar la expresión, hacemos **click** sobre el símbolo u oprimimos la tecla **Ctrl** y en seguida la tecla **ENTER.** Para aproximar la expresión hacemos lo mismo sobre el símbolo u oprimimos la tecla **Shift** y enseguida la tecla **ENTER.** De inmediato aparece en la pantalla:



Ejemplo 4

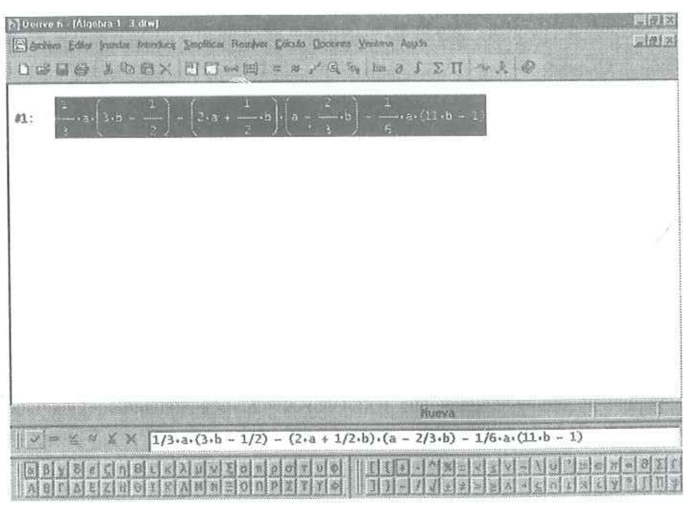
Reduzcamos la expresión algebraica:

$$\frac{1}{3}\,a\left(3b-\frac{1}{2}\right)-\left(2a+\frac{1}{2}\,b\right)\left(a-\frac{2}{3}\,b\right)-\frac{1}{6}\,a\left(11b-1\right)$$

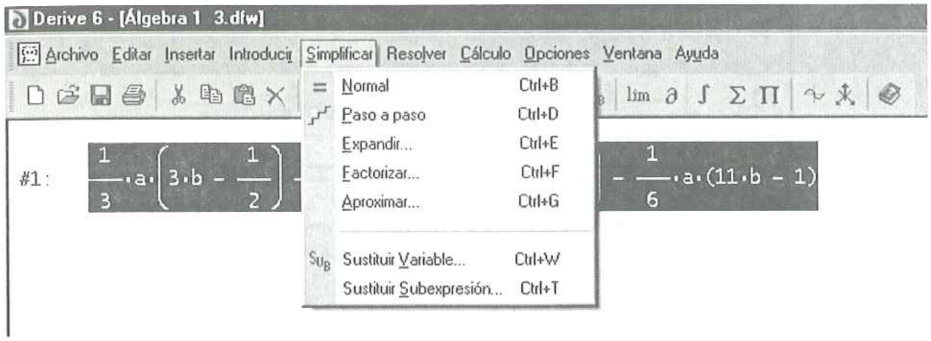
Solución

- Los pasos son los siguientes:

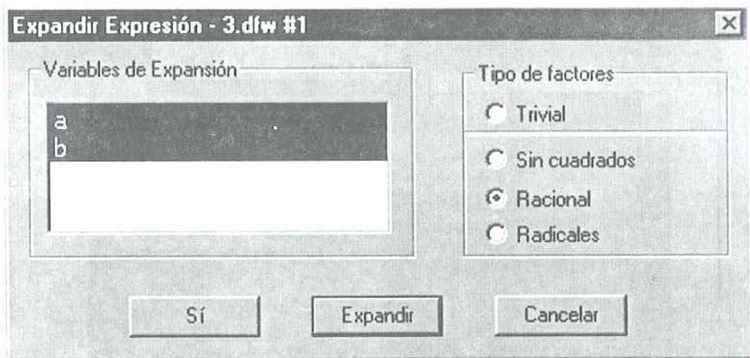
1. Llevamos el puntero del mouse sobre la **LÍNEA DE ENTRADA DE EXPRESIONES**, hacemos **click** y digitamos la expresión dada; luego, presionamos la tecla **ENTER** o el símbolo ubicado a la izquierda de la línea de entrada de expresiones. De inmediato, DERIVE nos mostrará la expresión deseada en la **VENTANA DE ÁLGEBRA**; así:



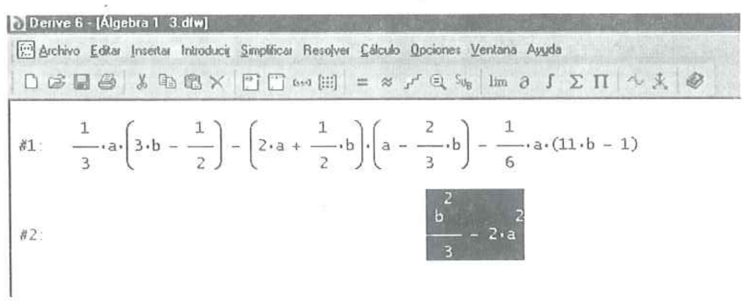
2. Vamos a la **BARRA DEL MENÚ DE OPCIONES** y hacemos **click** sobre el comando **SIMPLIFICAR.** Inmediatamente aparecerá una pequeña ventana, encima de la Ventana de Álgebra.



3. Sobre esta pequeña ventana, señalamos con el mouse la opción **EXPANDIR** y hacemos click. De inmediato aparece otra ventana. Señalamos la opción **RACIONAL**, hacemos **click,** resaltamos las variables (a y b, en este caso) y hacemos click.



4. Finalmente, señalamos en la parte inferior de la ventana la opción **EXPANDIR**, hacemos **click** y la pantalla nos mostrará la expresión calculada y reducida.

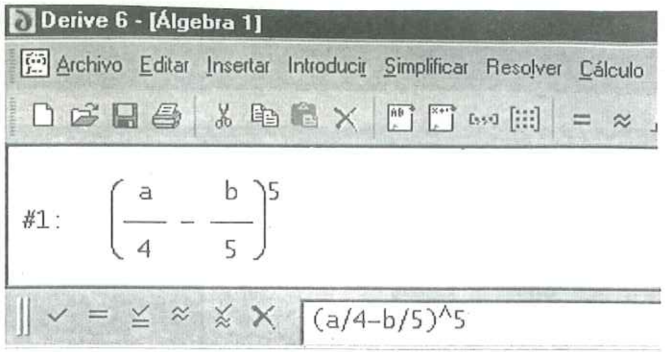


Ejemplo 5

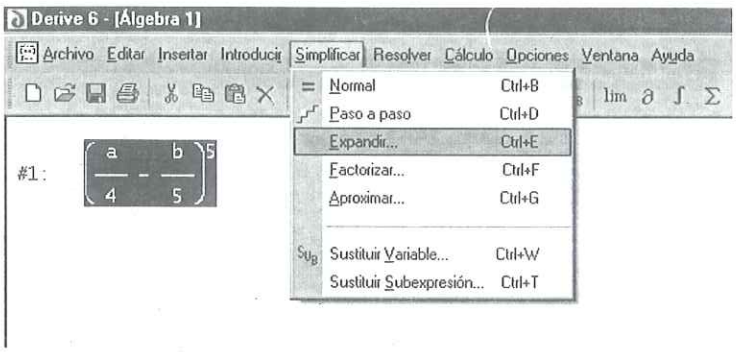
Desarrollemos el siguiente binomio: $\left(\frac{a}{4}-\frac{b}{5}\right)^5$

Solución

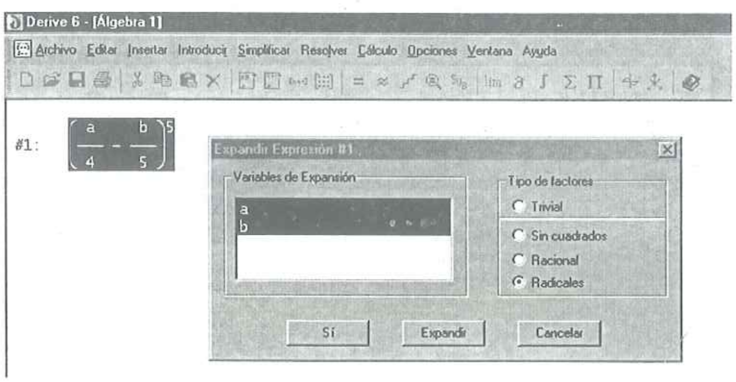
1. Digitamos el binomio en la LÍNEA DE ENTRADA DE EXPRESIONES y lo ingresamos a la VENTANA DE ALGEBRA de la misma manera como lo hemos hecho antes.



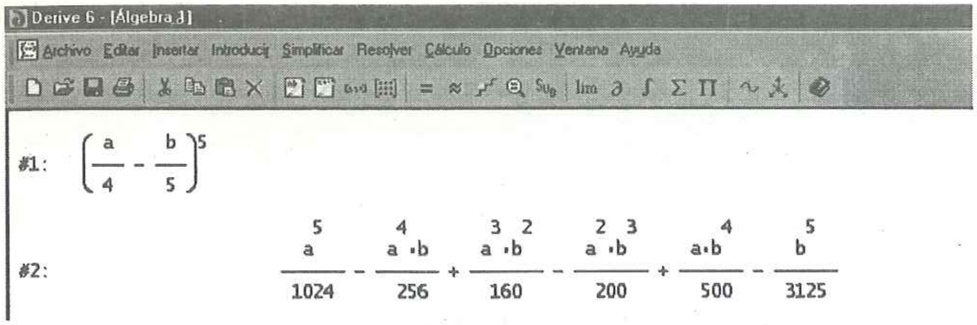
2. Llevamos el puntero del mouse a la BARRA DEL MENÚ DE OPCIONES, hacemos click sobre el comando SIMPLIFICAR. Inmediatamente aparecerá una pequeña ventana, encima de la Ventana de Algebra.



3. Sobre esta pequeña ventana, señalamos con el puntero del mouse la opción EXPANDIR y hacemos click. De inmediato aparece otra ventana, sobre la cual señalamos la opción RADICAL, hacemos click, resaltamos las variables (en este caso, **a** y **b**) y hacemos click.



4. Finalemente, señalamos en la parte inferior de la ventana la opción EXPANDIR, hacemos click y la VENTANA DE ALGEBRA nos mostrará el desarrollo del binomio.

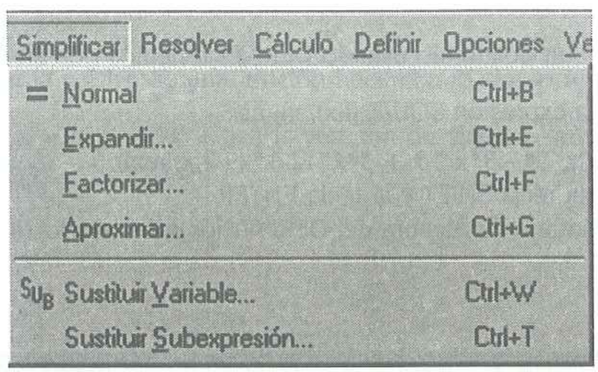


Ejemplo 6

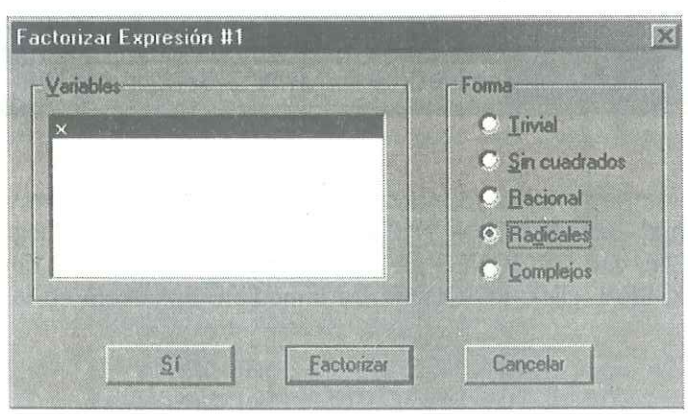
Factoricemos en los reales, el polinomio $2x^3 - 12x^2 + 18x$

Solución

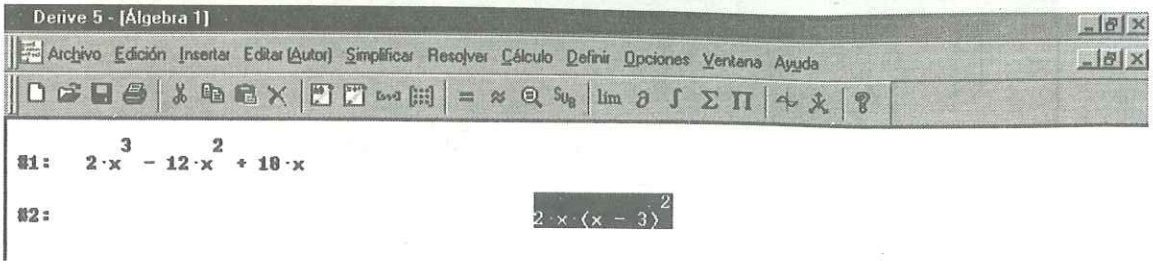
- Después de ingresar el polinomio y resaltarlo en la ventana de álgebra, hacemos lo siguiente:
  - Vamos al MENÚ DE OPCIONES y hacemos click sobre el comando SIMPLIFICAR.
  - Inmediatamente aparecerá esta pequeña ventana, encima de la ventana del DERIVE:



  - Sobre esta pequeña ventana, señalamos con el mouse la opción FACTORIZAR y hacemos **click.** De inmediato aparece otra ventana. Señalamos la opción RADICALES, hacemos **click** y, luego, en la ventana señalamos, en la parte inferior, la opción FACTORIZAR.



- Finalmente, la ventana de álgebra del DERIVE nos mostrará la expresión factorizada; así:



En síntesis, los pasos para factorizar una expresión en los reales son los siguientes:

SIMPLIFICAR click, FACTORIZAR click, RADICALES click, FACTORIZAR click.

Ejemplo 7

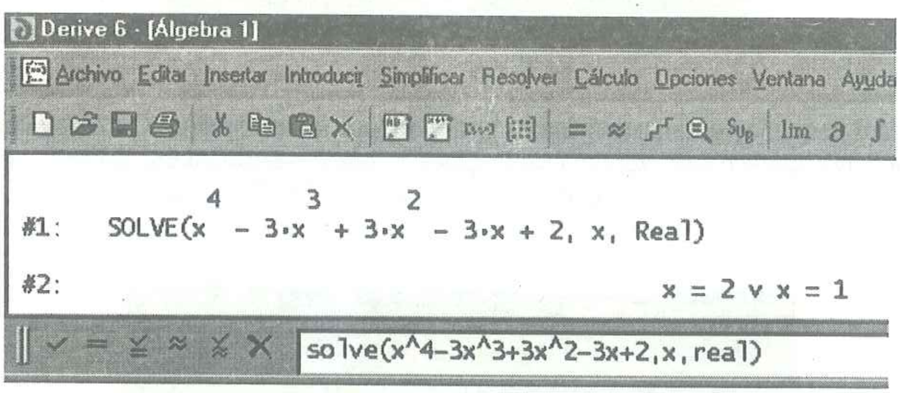
Hallemos los ceros del polinomio $x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2$.

Solución

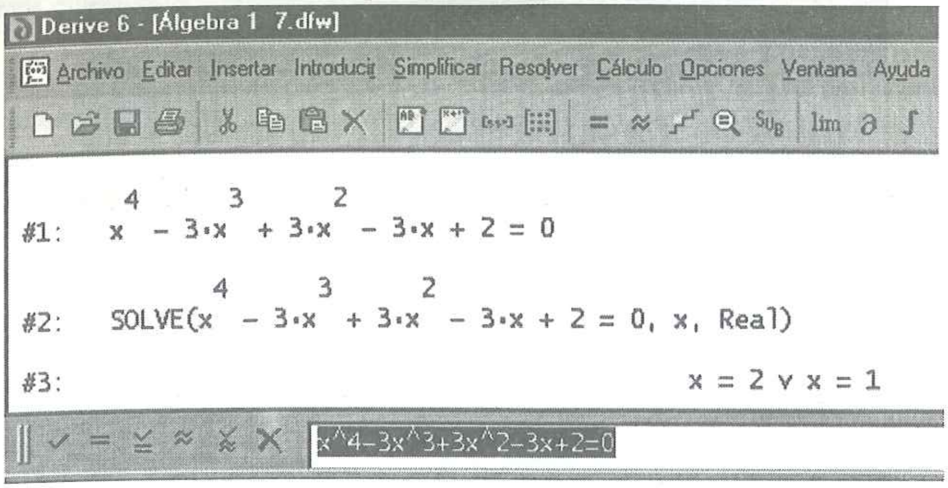
- Para hallar los ceros de un polinomio usando DERIVE, tenemos dos alternativas:

1. Entrar y simplificar la expresión SOLVE (f(x), x); así:

   - Escribimos SOLVE (x^4 - 3*x^3 + 3*x^2-3*x+2,x, real).
   - Luego, oprimimos la tecla SHIFT y la tecla ENTER
   - De inmediato la Ventana de Álgebra del DERIVE nos mostrará lo siguiente:



2. Ingresar la ecuación $x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2 = 0$ a la Ventana de Algebra y, luego, hacer sucesivamente click donde el MENÚ DE OPCIONES en los comandos: RESOLVER click, EXPRESIÓN click, ALGEBRAICOS click, REAL click, RESOLVER. De inmediato aparecerá en la Ventana de Algebra lo siguiente:



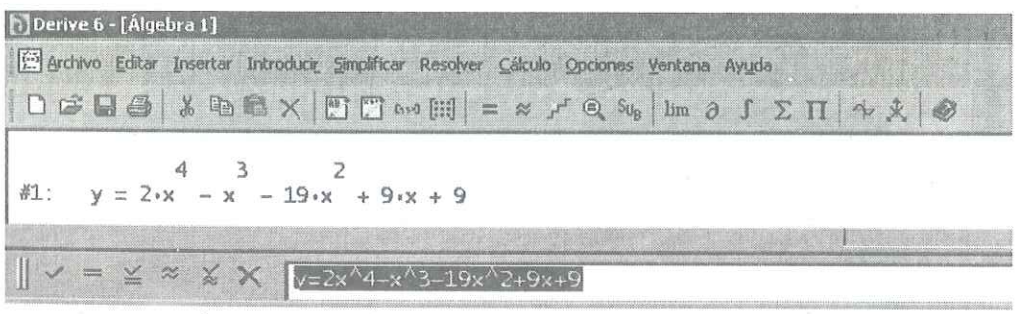
Ejemplo 8

Dibujemos la gráfica de la función $y=2x^4 - x^3 - 19x^2 + 9x + 9$ para valores de x entre -6 y 6 y 12 divisiones y para valores de y entre -50 y 40 y 8 divisiones.

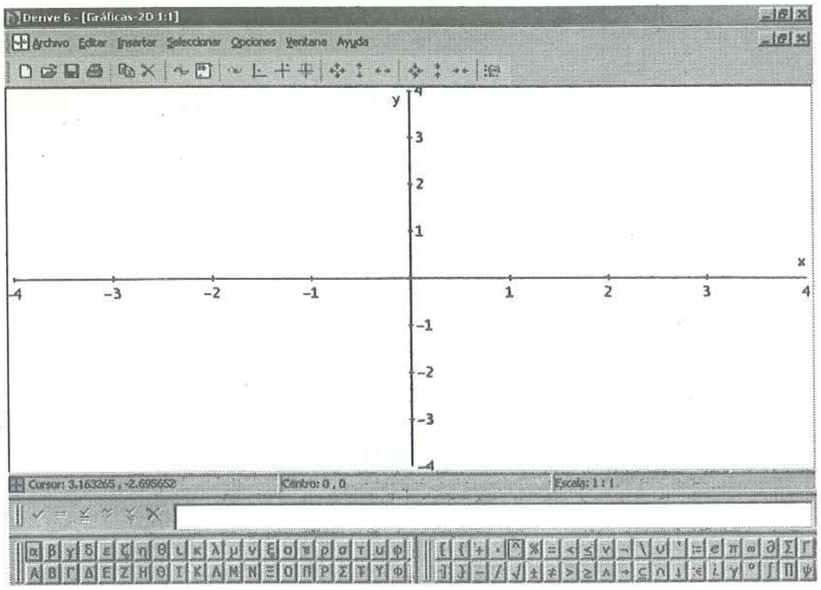
Solución

- En general, para dibujar la gráfica de una función hacemos lo siguiente:

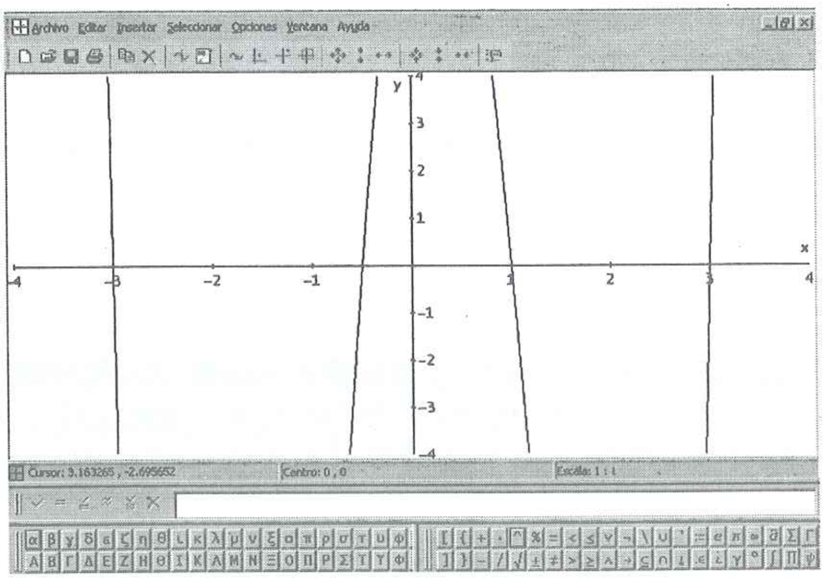
1. Ingresamos $y=2x^4 - x^3 - 19x^2 + 9x + 9$ a la ventana de álgebra, la resaltamos y hacemos **click** sobre el comando .



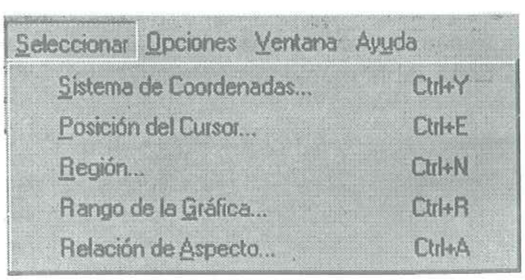
2. Abrimos la ventana **2D-plot** haciendo **click** sobre el botón ubicado en la **BARRA DE HERRAMIENTAS.** De inmediato aparecerá una ventrana de gráficas en dos dimensiones (plano cartesiano), en la cual la barra de herramientas ha cambiado.



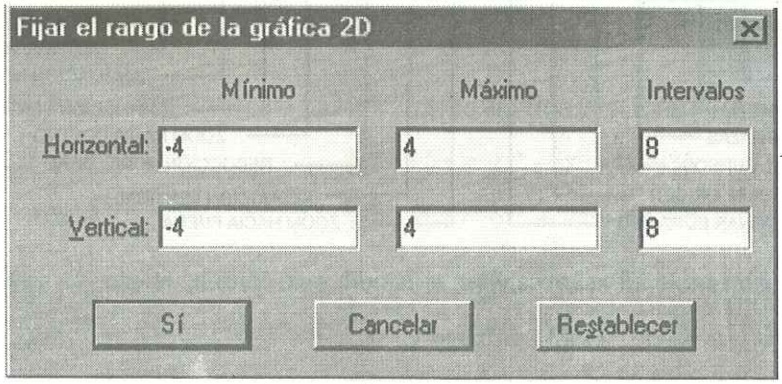
3. Hacemos de nuevo **click** sobre el botón  , que ahora tiene una posición diferente y aparecerá la gráfica deseada.



4. Notemos que la gráfica no aparece completa en la pantalla. Esto se debe a que los ejes coordenados han sido graduados automáticamente por DERIVE. Pero, como queremos graduar el eje x entre -6 y 6 con 12 divisiones, y el eje y entre -50 y 40 con 8 divisiones, entonces hacemos **click** sobre el comando **SELECCIONAR**; de inmediato aparecerá el siguiente menú de opciones:

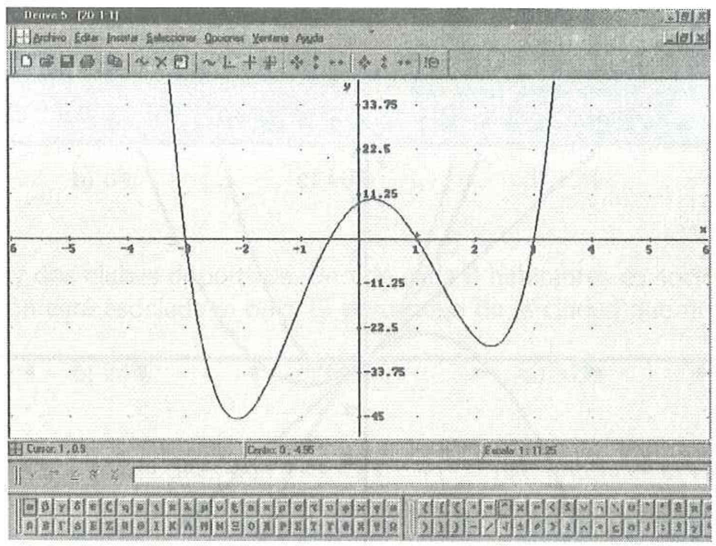


Hacemos **click** sobre el comando **RANGO DE LA GRÁFICA** y aparecerá el siguiente cuadro:



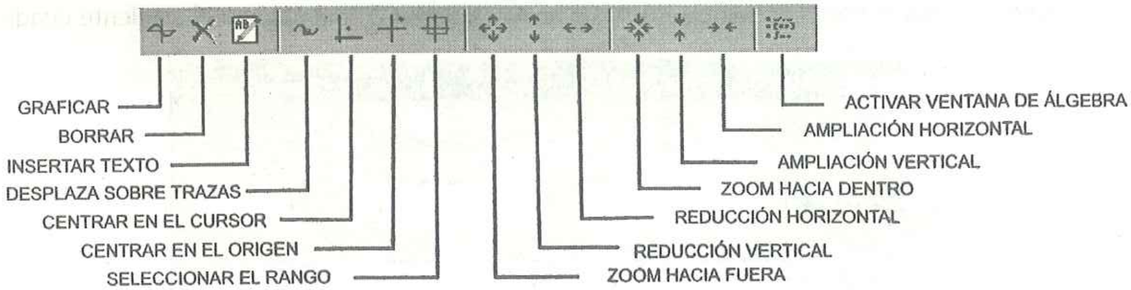
Se ingresa el mínimo horizontal llevando el puntero del mouse hasta el extremo izquierdo de la caja, escribiendo el valor mínimo (-6) y haciendo **click.** El mínimo que había antes se borrará oprimiendo la tecla **Supr.** Los demás valores se ingresan en la misma forma.

Después de hacer lo que acabamos de indicar, hacemos **click** sobre Sí en el cuadro y de inmediato aparecerá:



¡ATENCIÓN! Otra forma de ingresar los datos es oprimiendo la tecla ←→, anotando al mínimo y oprimiendo sucesivamente esta tecla hasta tener toda la información. Finalmente llevamos el puntero del mouse hasta el cuadro Sí y hacemos click. De inmediato aparecerá la gráfica solicitada.

- Para BORRAR la gráfica obtenida hacemos click sobre el botón, ubicado en la BARRA DE HERRAMIENTAS.
- Para REGRESAR A LA VENTANA DE ÁLGEBRA hacemos click sobre el último botón de la BARRA DE HERRAMIENTAS:
- Veamos para qué sirven cada uno de los botones de la ventana para graficar en dos dimensiones.

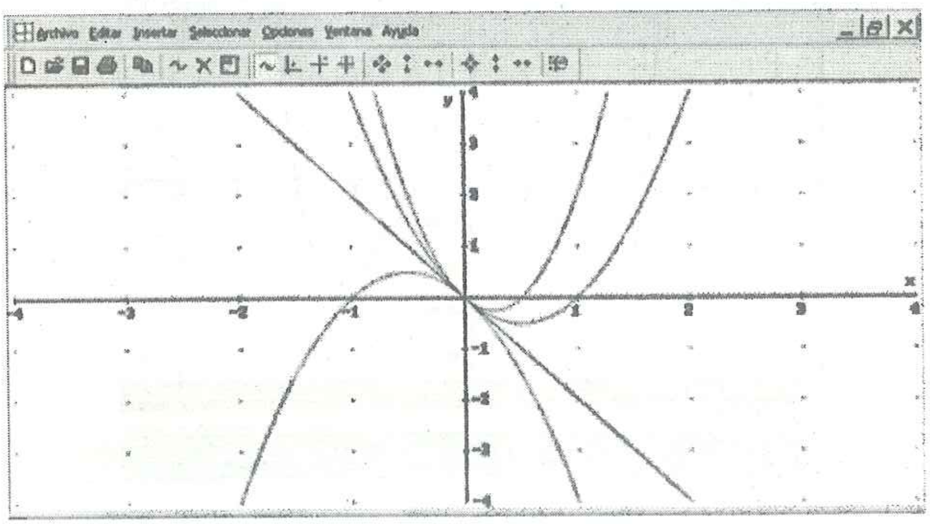


Ejemplo 9

Dibujemos la gráfica de la familia de curvas definida por $y = ax^2 - 2x$, para $a = -2, 0, 2, 4$.

Solución

- Ingresamos en DERIVE: vector (a * x ^ 2 - 2 * x, a, -2, 4 , 2)
- A continuación hacemos clic sobre el botón ✓. De inmediato, quedan registrados la expresión que se quiere dibujar y el vector con las funciones obtenidas para cada valor de a.
- Luego, vamos a [Graficar] y repetimos el proceso anterior.



EJERCICIO 0.4

En los ejercicios 1. y 2. usa el DERIVE para reducir cada expresión algebraica:

1 $\left(\frac{1}{2}a^2 + ab - 2b^2\right)\left(2a^2 - ab + \frac{1}{2}b^2\right) - \frac{3}{2}a^2\left(ab - \frac{5}{2}b^2\right) - \frac{1}{2}b^2\left(2a^2 - 2b^2\right)$

2 Dividir $3a^3b^2 - \frac{13}{2}a^2b^3 + \frac{15}{4}ab^4 - \frac{1}{2}b^5$ entre $2a^2b - 3ab^2 + \frac{1}{2}b^3$

En los ejercicios 3. y 4. usa el DERIVE para desarrollar los siguientes binomios:

3. $(2x - 3)^4$

4. $\left(3a^2b - \quad ab^3\right)^4$

En los ejercicios 5. a 8. usa el DERIVE para hallar los ceros enteros y factorizar los siguientes polinomios:

5. $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

6. $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$

7. $P(x) = 8x^2 + 10x - 3$

8. $P(x) = 6x^3 + 7x^2 - 6x + 8$

En los ejercicios 9. a 12. usa el DERIVE para dibujar la gráfica de las funciones dadas:

9. $y = 4x - 7$

10. $y = 8x^2 + 10x - 3$

11. $y = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$

12. $y = 4x - x^2$

PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS DEL ICFES

1. Primero la gasolina sube un 20% y después baja un 10%. El porcentaje de variación es:

   a) 20% b) 8% c) 10% d) 15%

2. En una ciudad hay dos clubes deportivos. Uno de cada 8 habitantes es socio de uno de ellos y los 3/8 de la población está asociada al otro. El porcentaje de la ciudad que no está asociada es:

   a) 8% b) 24% c) 50% d) 32%

3. Si x y t son números reales tales que $o<x<t$ y $x^2+t^2 = 6xt$, entonces el valor de $\frac{x+t}{x-t}$ es:

   a) $-\sqrt{2}$ b) -1 c) 0 d) $\sqrt{2}$

4. Si $9^{3-x} = 81^{4-2x}$, entonces x es igual a:

   a) 5/3 b) 7/6 c) $\frac{11}{3}$ d) $\frac{10}{7}$

5. Si $x^2 = x + 2$, entonces x^3 es igual a:

   a) $x + 4$ b) $2x + 8$ c) $3x+2$ d) $4x + 8$

Núcleo Temático

1

SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

LOGRO GENERAL

Resolver sistemas de ecuaciones lineales de orden 2x2 y 3x3.

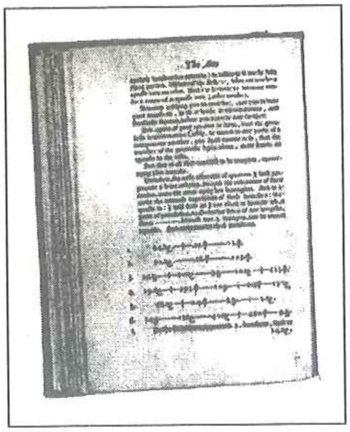
DIMENSIONES

LOGROS ESPECÍFICOS	INDICADORES DE LOGRO
Corporal: • Realizar experiencias que favorezcan la adquisición de los métodos de solución de un sistema de ecuaciones lineales: igualación, sustitución, reducción, determinantes y gráfico.	Utiliza los métodos de igualación, sustitución, reducción, determinantes y gráfico en la solución de un sistema de ecuaciones lineales de orden 2x2 y 3x3.
Comunicativa: • Describir los métodos de igualación, sustitución , reducción, determinantes y gráfico en la solución de un sistema de ecuaciones lineales 2x2 y 3x3.	Explica como se resuelve un sistema de ecuaciones lineales por los métodos de igualación, sustitución, reducción, determinantes o gráfico.
Cognitiva: 1. Identificar los métodos algebraicos de solución de un sistema de ecuaciones lineales. 2. Identificar la ecuación de una función lineal.	Dado un sistema de ecuaciones lineales de orden 2x2 y 3x3, la resuelve aplicando los métodos de sustitución, igualación, reducción, determinante o gráfico.
Estética: • Dibujar sistemas de ecuaciones lineales de orden 2x2 o 3x3 en el plano cartesiano o en el espacio de tres dimensiones.	Dibuja un sistema de ecuaciones lineales de orden 2x2 o 3x3 en el sistema coordenado de dos o tres dimensiones.
Etica-Actitudinal: • Asumir una postura respetuosa frente a la forma de pensar de los demás.	Reconoce que la paz es un gran beneficio que se alcanza con una actitud de respeto por el otro.

EVALUACIÓN

ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS

1.1 HISTORIA DEL ALGEBRA (11)



La forma de escribir expresiones algebraicas tal como las conocemos hoy, fue evolucionando lentamente a través de la historia. Los orientales y los europeos hasta terminar la Edad Media, ni usaban letras para designar las cantidades ni símbolos para las operaciones: simplemente describían verbalmente; por ejemplo, para hallar el área de un triángulo dirían (en latín): "multiplicar la base por la mitad de la altura".

En el Renacimiento, se empieza a abreviar la descripción verbal, a algo que debía parecer un verdadero rompecabezas a los no iniciados. Por ejemplo, la expresión algebraica que hoy escribiríamos: $x^3 + 4x^2 + 3x$, un algebrista italiano del Renacimiento la escribiría así: $1.cu.\tilde{p}.4.ce.\tilde{p}.3.co.\tilde{m}.2.nu$ donde $.\tilde{p}.$ y $.\tilde{m}.$ eran las iniciales, con un adornito de "piu" (más) y "meno" (menos); "co" representa "la cosa", es decir, una cantidad desconocida; "cu" y "ce" abreviarán "cubus" (el cubo) y "census" (el cuadrado) de "la cosa". El símbolo "nu" significaba "número", es decir que el 2 que lo precedía era un número, no un coeficiente de una potencia de "la cosa". Nótese, de paso, que el coeficiente 1 siempre se escribía. Tampoco existía signo de igualdad, sino que, en la tónica de descripción verbal se usaba la palabra "aequalis".

En la fotografía, una página del libro The Whetstone of Witte, escrito en 1557 por Robert Recorde donde se muestra cómo se escribían las expresiones algebraicas en esa época. Nótese que el signo de la igualdad aparece más alargado que el actual.

EJERCICIO 1.1

Lee nuevamente el texto anterior y luego encierra en un círculo, la letra que corresponde a la respuesta correcta:

1. El tema central del escrito podría ser:

   a. Los progresos de álgebra.
   b. Aportes de orientales y europeos al desarrollo del álgebra.
   c. La evolución en la forma de escribir expresiones algebraicas.
   d. Historia de los símbolos matemáticos.

2. Con el escrito anterior, el autor se propone:

   a. Destacar el trabajo de los científicos en los progresos del álgebra.
   b. Mostrar los cambios que se han presentado en los símbolos algebraicos,a través de la historia.
   c. Dar a conocer la simbología de las matemáticas.
   d. Explicar una frase en la codificación de las ciencias.

3. Es curioso que en este texto de corte científico-matemático:

   a. No se haga referencia al álgebra.
   b. No se tenga en cuenta el trabajo de algunas culturas de la humanidad.

c. No exalte la labor de los latinoamericanos en la evolución del álgebra.
d. No se mencione a ningún matemático en particular.

4. Con la expresión "**... a los no iniciados**", que el autor menciona en el texto, se hace referencia a personas que:

a. No tenían ninguna formación matemática.
b. Estaban dedicadas solamente a las humanísticas.
c. Recién comenzaban a incursionar en las ciencias matemáticas.
d. No tenían ningún interés por las matemáticas.

5. En el texto no aparece claramente:

a. Los códigos matemáticos en la Edad Media y el Renacimiento.
b. Las formas de resolver ecuaciones.
c. Expresiones latinas para formular problemas matemáticos.
d. La escritura del coeficiente 1 (uno).

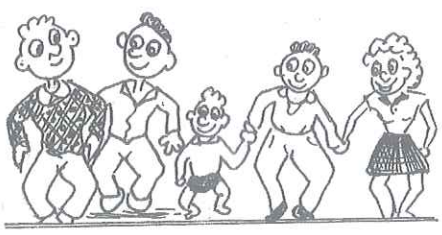
1.2 REVISIÓN DE LOS CONCEPTOS DE FUNCIÓN Y FUNCIÓN LINEAL

1.2.1 El Concepto de Función

PRIMERA EXPERIENCIA

- Las edades de los miembros de una familia se muestran en la siguiente tabla:

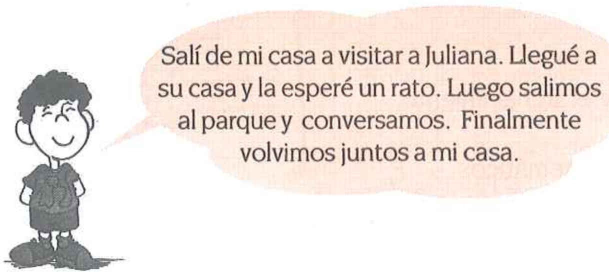
Miembros de la Familia	Edad (en años)
Julio	38
Margarita	35
Juan	12
Sebastián	12
Alejandro	8

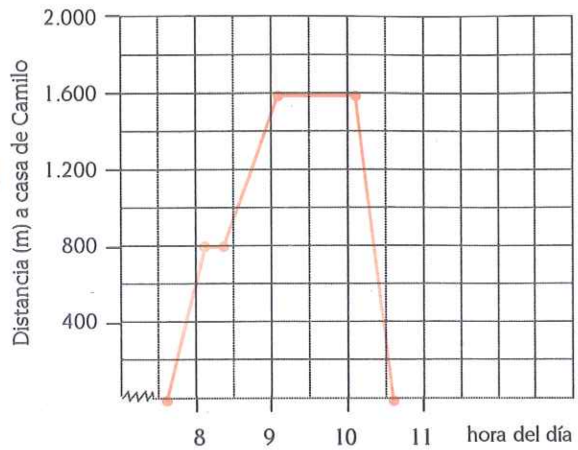


- Interpreta la tabla y contesta a las siguientes preguntas:
  a) ¿Cuál es la edad de Margarita? ¿La de Juan? ¿La de Sebastián?
  b) ¿Es posible que una misma persona tenga dos edades distintas?
  c) ¿Es posible que a dos personas distintas les corresponda la misma edad?
  d) ¿Es posible que a alguna persona no le corresponda ninguna edad?
- A cada persona le corresponde una edad. La edad **depende** de cada persona o **está en función** de la persona.

SEGUNDA EXPERIENCIA

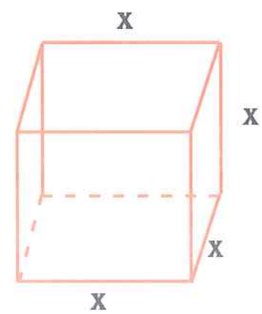
- La siguiente gráfica describe el recorrido realizado por Camilo para ir a visitar a su amiga Juliana.





- Notemos que a cada hora del día le corresponde **una** determinada distancia a la casa de Camilo. Esta distancia **depende** de la hora del día o **está en función** de la hora del día.
- En esta experiencia, la relación la hemos expresado **mediante una gráfica**.

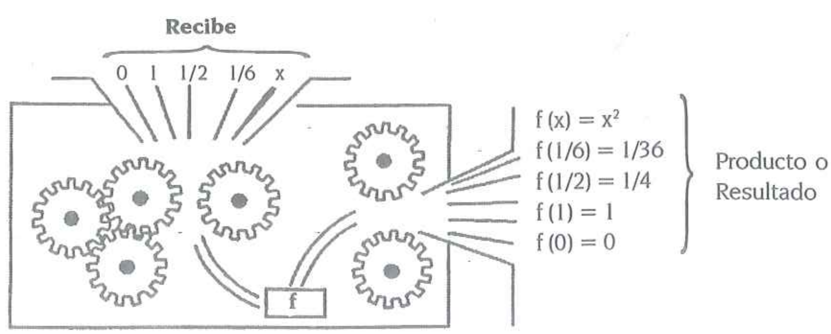
TERCERA EXPERIENCIA



- La expresión $A = 6x^2$ permite calcular el área total de un cubo de arista x.
- A cada valor de la arista le corresponde un área total del cubo. El área total del cubo **depende** del valor de la arista o **está en función** del valor de la arista.

Las relaciones analizadas en las tres experiencias anteriores, presentan una característica común: **a cada elemento de un conjunto inicial o de partida le corresponde un solo elemento de un conjunto final o de llegada**. Cada una de estas relaciones se llama **FUNCION**.

Las funciones son como máquinas **f** a las que les introducimos un elemento **x** y nos produce otro elemento **y** que suele designarse por **f(x)**. Observemos, por ejemplo, el funcionamiento de la máquina siguiente:

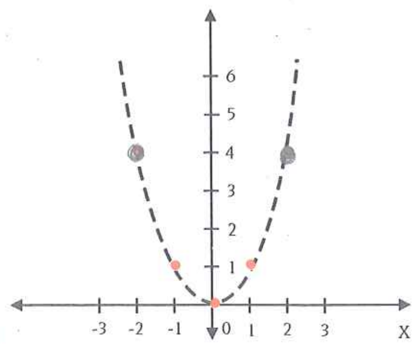


El proceso realizado por la máquina podemos representarlo por medio de una tabla, de una gráfica o de una fórmula; así:

Tabla de Valores

x	f(x)
-2	4
-1	1
0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{36}$
1	1
2	4

Gráfica



Fórmula

$$y = f(x) = x^2$$

- A la variable **x** se le denomina **variable independiente**, a la variable **y** o **f(x)** se le llama **variable dependiente**. El **dominio** de esta función es el conjunto de valores que puede tomar la variable independiente (en este caso, el $D_f = R$). El **rango** de la función es el conjunto de valores que puede tomar la variable dependiente (en este caso, los reales positivos y el cero).

RECORDEMOS

- **FUNCIÓN:** Es la relación o correspondencia entre los elementos de dos conjuntos de manera que a cada elemento del primero le corresponde **un único** elemento del segundo, que denominamos **imagen**.
- **VARIABLE INDEPENDIENTE:** Es la que corresponde a los elementos del conjunto de partida.
- **DOMINIO DE LA FUNCIÓN:** Es el conjunto de todos los valores que toma la variable independiente.
- **VARIABLE DEPENDIENTE:** Es la que corresponde a los elementos del conjunto de llegada. A cada elemento que tome la variable dependiente se les denomina IMAGEN de la función.
- **RANGO:** Es el conjunto formado por todas las imágenes de la función.
- **GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN:** Es la representación en el diagrama cartesiano, mediante puntos, de los pares ordenados obtenidos de una tabla de valores.

1.2.2 Funciones Lineales

- En cierta ciudad la tarifa de los taxis es de 1.000 pesos la bajada de la bandera y 400 pesos por cada km recorrido.
- Elaboremos una tabla de valores que nos indique cuánto debemos pagar por un recorrido de 0 km, de 1 km, de 2 km, de 3 km, de 4 km y de 5 km. Encontremos la ecuación que relaciona el precio del viaje **(y)** en función de los kilómetros recorridos **(x)**. Finalmente, dibujemos la gráfica de esta función.
- El siguiente cuadro responde a las tres inquietudes planteadas:

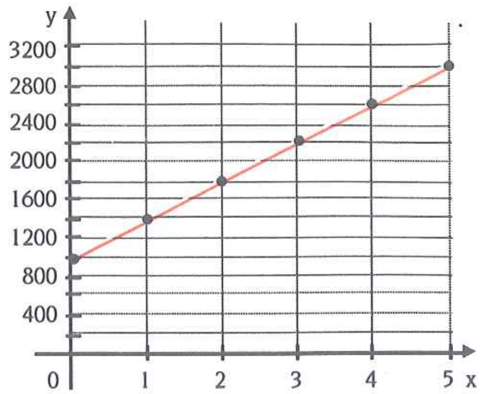
<table>
<tr><th>Tabla de Valores</th><th>Ecuación</th><th>Gráfica</th></tr>
<tr><td>

x	y
0	1.000
1	1.400
2	1.800
3	2.200
4	2.600
5	3.000

</td><td>

$y = 400x + 1000$

</td><td>



</td></tr>
</table>

- Tanto la gráfica como la ecuación de esta relación corresponden a un tipo muy especial de función: LA FUNCIÓN LINEAL.

RECORDEMOS

- Las funciones cuyas ecuaciones tienen la forma $\mathbf{y = mx + n}$ se denominan FUNCIONES LINEALES.
- En la ecuación $\mathbf{y = mx + n}$, $\mathbf{m}$ es la **pendiente** de la recta y $\mathbf{n}$ es el valor de la ordenada cuando $x = 0$ y por eso se llama **ordenada en el origen**.
- La gráfica de una función lineal es una **línea recta**; por lo tanto, y de acuerdo con la geometría euclidiana, para dibujar la gráfica de una función lineal sólo necesitamos dos parejas ordenadas (dos puntos).
- La **pendiente (m)** de una recta es la razón entre la variación vertical **(b)** y la variación horizontal **(a)**; es decir, $\mathbf{m = \frac{b}{a}}$. Si la línea recta tiene pendiente positiva, entonces la recta es **creciente**; en cambio, si la línea recta tiene pendiente negativa, entonces la recta es **decreciente**.

Ejemplo 1

El siguiente cuadro nos muestra varias funciones lineales: sus ecuaciones, gráfica, pendiente y ordenada en el origen.

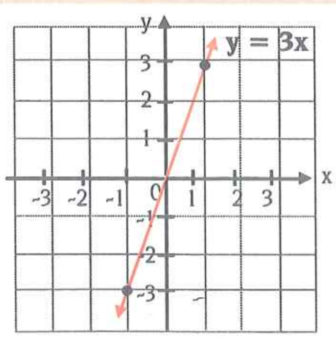
<table>
<tr><th>Ecuación</th><th>Tabla</th><th>Gráfica</th><th>Pendiente</th><th>Ordenada en el Origen</th></tr>
<tr><td>

$y = 3x$

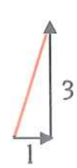
</td><td>

x	y
−1	−3
1	3

</td><td>



</td><td>

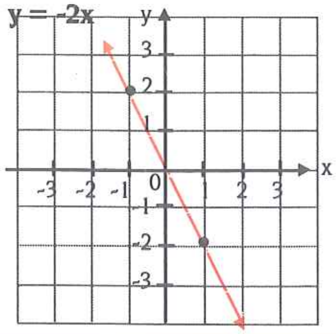
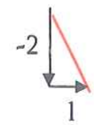


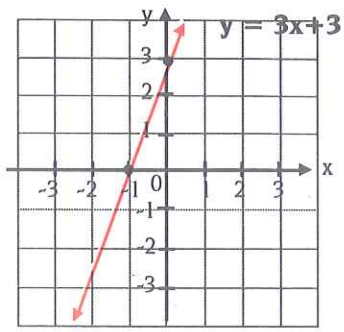
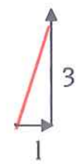
$\mathbf{m = \frac{3}{1} = 3}$

</td><td>

$n = 0$

</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Ecuación</th><th>Tabla</th><th>Gráfica</th><th>Pendiente</th><th>Ordenada en el Origen</th></tr>
<tr><td>$y = -2x$</td><td><table><tr><th>x</th><th>y</th></tr><tr><td>–1</td><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>-2</td></tr></table></td><td>
</td><td>

$m = \frac{-2}{1} = -2$</td><td>$n = 0$</td></tr>
<tr><td>$y = 3x + 3$</td><td><table><tr><th>x</th><th>y</th></tr><tr><td>–1</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>3</td></tr></table></td><td>
</td><td>

$m = \frac{3}{1} = 3$</td><td>$n = 3$</td></tr>
</table>

Ejemplo 2

Mostremos que la relación cuya ecuación es $2x + 3y - 5 = 0$ corresponde a una línea recta. Luego, determinemos su pendiente, la ordenada en el origen y dibujemos su gráfica.

Solución

- Para mostrar que $2x + 3y - 5 = 0$ corresponde a una línea recta, llevamos la ecuación a la forma $\mathbf{y = mx + n}$. Para lograrlo, despejamos la y de esta ecuación; así:

$2x + 3y - 5 = 0$ .... Ecuación dada

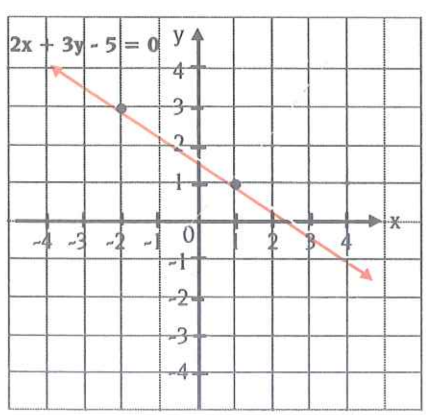
$\therefore\ 3y = -2x + 5$ .... ¿Por qué?

$\therefore\ y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$ .... Despejamos la y

- Esta última ecuación tiene la forma $y = mx + n$. Por lo tanto, la ecuación $2x + 3y - 5 = 0$ corresponde a una línea recta.
- Leyendo en forma directa la ecuación $y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$ encontramos que la pendiente es $m = -\frac{2}{3}$ y la ordenada en el origen es $n = \frac{5}{3}$.
- Para dibujar la gráfica basta encontrar dos parejas ordenadas, marcar los puntos correspondientes en el diagrama cartesiano y unirlos mediante una línea recta. Veamos:

$\mathbf{y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}}$

x	y
–2	3
1	1



EJERCICIO 1.2

1 Tanto la variable independiente **x** como la variable dependiente **y** de una función f toman valores en el conjunto de los números reales. La regla de esta función se define así: $f(-5) = 26$, $f(-4) = 17$, $f(-3) = 10$, $f(-2) = 5$, $f(-1) = 2$, $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, $f(2) = 5$, $f(3) = 10$, se pide:

a) Elaborar una tabla de valores para esta función.
b) Encontrar la ecuación correspondiente.
c) Dibujar la gráfica. ¿Se pueden unir los puntos? ¿Por qué?
d) Hallar el dominio y el rango de f.
e) Escribir las imágenes de: 2, 5, – 3, 0, 1.

2 Dibuja las gráficas de las siguientes funciones lineales:

a) $y = f(x) = 4x$ b) $y = 3x - 1$ c) $y = -2x + 1$
d) $y = -3x$ e) $y = 3x + 2$ f) $y = x - 2$

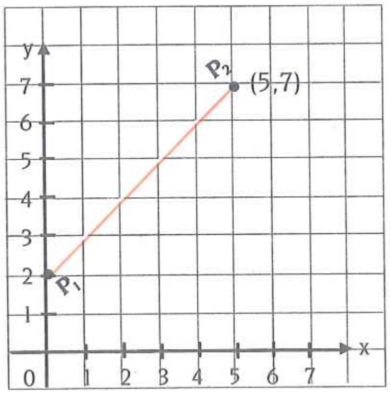
Determina en cada una la pendiente y la ordenada en el origen.

3 Comprueba que cada una de las siguientes ecuaciones corresponden a líneas rectas, determina la pendiente y la ordenada en el origen de cada una y dibuja su gráfica.

a) $2x + y - 3 = 0$ b) $5x - 2y + 1 = 0$
c) $x + y + 2 = 0$ d) $x - 3y + 4 = 0$

4 La gráfica siguiente representa el movimiento realizado por una motocicleta de prueba. Contesta:

- Si **x** es el tiempo transcurrido y **y** es la velocidad, ¿cuál es la ecuación que describe la velocidad en función del tiempo?
- ¿Qué representa la ordenada en el origen en esta ecuación?
- ¿Qué velocidad lleva la moto al cabo de 9 segundos?



5 Cuando un obrero excava hacia el interior de la tierra, la temperatura aumenta de acuerdo con la ecuación $\mathbf{t = 15 + 0{,}01\ d}$, donde **t** es la temperatura alcanzada en grados centígrados y **d** es la profundidad en metros desde la superficie de la tierra.

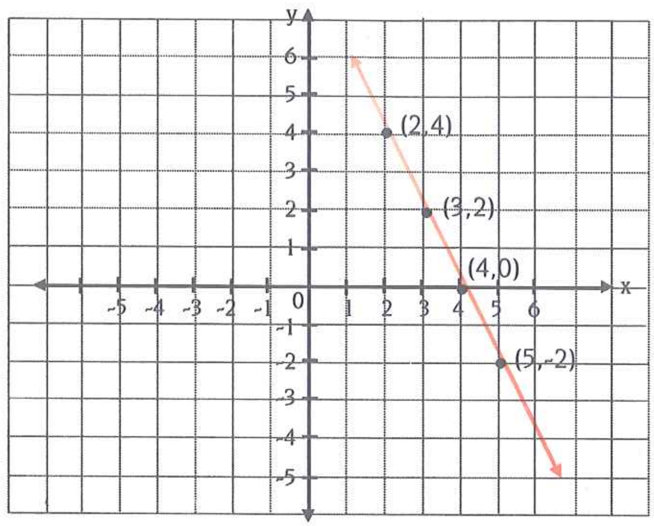
a) ¿Cuál es la temperatura ambiente?
b) ¿Qué temperatura se alcanza a los 100 metros de profundidad?
c) ¿Cuántos metros hay que excavar para alcanzar una temperatura de 100°C?
d) Dibuja la gráfica de esta función.

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 1

Una junta de crédito aprobó una solicitud en una votación de 5 contra 3. ¿Qué fracción de los miembros de la junta negó la solicitud?

1.3 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

- En la sección anterior estudiamos que la gráfica de una ecuación como $2x + y = 8$ (o $y = -2x + 8$) es una LÍNEA RECTA. Por esta razón, a las ecuaciones de la forma $ax + by = c$ o $y = mx + n$, donde a, b, c, m y n son números reales se les llama ECUACIONES LINEALES.
- En el caso de $2x + y = 8$, decimos que la pareja ordenada $(5, -2)$ es solución de esta ecuación ya que: $2(5) + (-2) = 10 - 2 = 8$; es decir, al reemplazar x por 5 y y por -2, en la ecuación, verificamos que la igualdad se cumple.
- Otras parejas ordenadas que son solución de esta ecuación son: (3, 2), (2, 4) y (4, 0). ¿Sabes cómo se obtienen estas parejas ordenadas?



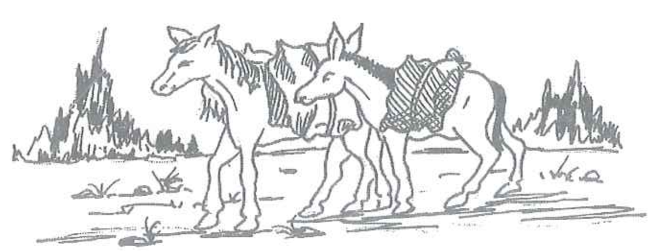
APRENDAMOS

- Una ecuación de la forma $\mathbf{ax + by + c = 0}$, en la cual a, b y c son números reales, tales que **a** y **b** no sean simultáneamente iguales a **0**, se denomina **ECUACION LINEAL** o **DE PRIMER GRADO.** Esta ecuación también se puede escribir en la forma $\mathbf{y = mx + n}$.
- La gráfica de una ecuación lineal es una **LÍNEA RECTA.**
- Una pareja ordenada (x_1, y_1) es **SOLUCION** de una ecuación lineal si al reemplazar **x** por x_1 e **y** por y_1 en la ecuación, podemos verificar que la igualdad se cumple.

- En muchos problemas donde intervienen ecuaciones es necesario encontrar la solución de más de una incógnita. Por esta razón, se requiere resolver, al mismo tiempo, varias ecuaciones en las que aparecen las incógnitas que estamos buscando. El siguiente problema, atribuido al matemático griego Euclides, nos ilustra lo que acabamos de afirmar:

Un caballo y un burro caminaban juntos llevando sobre sus lomos pesados sacos. Lamentábase el jamelgo de su enojosa carga, a lo que el burro repuso: "¿De qué te quejas? Si yo te tomara un saco, mi carga sería el doble de la tuya; en cambio, si te doy un saco, tu carga se igualará a la mía".

Decidme, doctos matemáticos, ¿cuántos sacos llevaba el caballo y cuántos el burro?



Para resolver el problema, podemos proceder así:

- Llamemos **x** el número de sacos que lleva el caballo e **y** el número de sacos que lleva el burro.
- Si el burro tomara un saco del caballo, entonces el burro quedaría con **y + 1** sacos y el caballo con **x – 1**. En estas condiciones, la carga del burro sería el doble de la del caballo; por lo tanto:

$$y + 1 = 2\,(x - 1)\text{..........................}(1)$$

Si, en cambio, el burro le da un saco al caballo, entonces el burro quedaría con y – 1 sacos, el caballo con x + 1 y ambos tendrían la misma carga; es decir:

$$y - 1 = x + 1\text{..............................}(2)$$

De esta manera, para resolver el problema, debemos resolver un **SISTEMA DE DOS ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS:**

$$\begin{cases} y + 1 = 2\,(x - 1)\text{..........................}(1) \\ y - 1 = x + 1\text{..............................}(2) \end{cases}$$

- El objetivo de esta unidad es resolver sistemas de ecuaciones lineales como el anterior.

APRENDAMOS

- Un SISTEMA DE DOS ECUACIONES LINEALES CON DOS INCOGNITAS **x** e **y** es el conjunto:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ mx + ny = p \end{cases}$$

donde **a** y **b** no son simultáneamente iguales a 0 y **m** y **n** tampoco son simultáneamente iguales a 0.

PRIMERA EXPERIENCIA

- Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas:

$$\begin{cases} -4x + y = 5 \\ -x + 3y = 4 \end{cases}$$

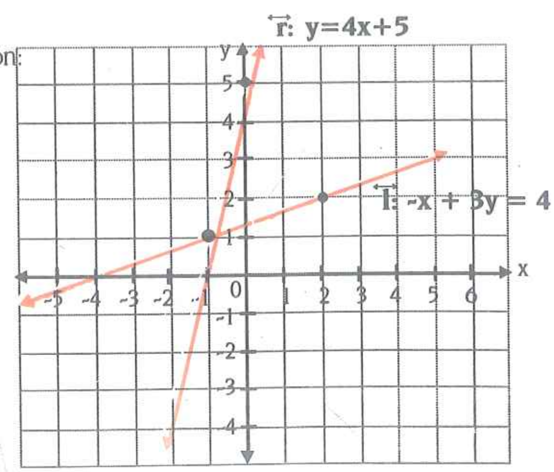
- Contesta: ¿Habrá alguna pareja ordenada que sea solución para las dos ecuaciones del sistema? Para contestar la pregunta dibuja las gráficas de ambas ecuaciones en el mismo diagrama cartesiano. Por comodidad, despeja la **y** de cada ecuación.
- Compara tu trabajo con lo que aparece a continuación:

$\overleftrightarrow{r}$:

x	0	– 1
y = 4x + 5	5	1

$\overleftrightarrow{l}$:

x	-1	2
$y = \frac{x}{3} + \frac{4}{3}$	1	2



- Observa: El punto correspondiente a la pareja ordenada (–1, 1) es común a ambas rectas; es decir, **x = – 1 e y = 1** verifican **simultáneamente** las dos ecuaciones.
- **Conclusión:** $x = -1$ e $y = 1$ es la solución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} -4x + y = 5 \\ -x + 3y = 4 \end{cases}$$

APRENDAMOS

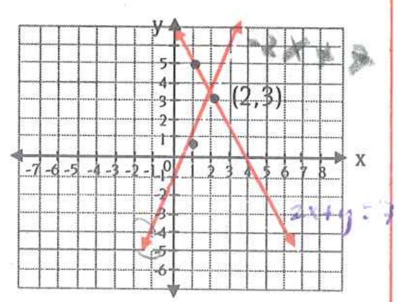
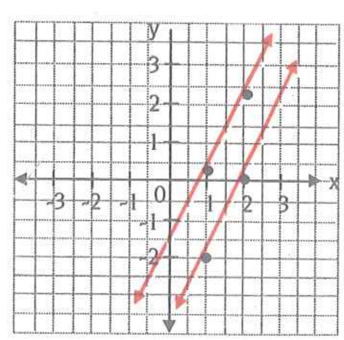
Una pareja ordenada **(a, b)** es **SOLUCION** de un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas cuando sus coordenadas satisfacen las dos ecuaciones o, equivalentemente, cuando el punto correspondiente es la intersección de las gráficas de las dos líneas rectas.

SEGUNDA EXPERIENCIA

- Dibujemos en un diagrama cartesiano los siguientes sistemas de ecuaciones lineales y encontremos, si existe, la solución de cada uno de ellos:

1. $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 5x - 2y = 4 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 6x - 3y = 5 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} 5x + y = 6 \\ 10x + 2y = 12 \end{cases}$

- Compara tu actividad con la que se muestra a continuación:

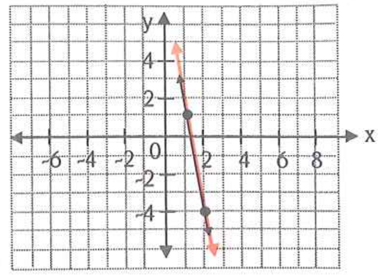
<table>
<tr><th>Sistema</th><th>Tablas de Valores</th><th>Gráficas</th></tr>
<tr><td>1.</td><td>
<table><tr><td>x</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>y = 7 – 2x</td><td>5</td><td>3</td></tr></table>
<table><tr><td>x</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>$y = \frac{5x - 4}{2}$</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td>3</td></tr></table>
</td><td></td></tr>
<tr><td>2.</td><td>
<table><tr><td>x</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>$y = \frac{6x - 5}{3}$</td><td>$\frac{1}{3}$</td><td>$\frac{7}{3}$</td></tr></table>
<table><tr><td>x</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>y = 2x -4</td><td>-2</td><td>0</td></tr></table>
</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Sistema</th><th>Tablas de Valores</th><th>Gráficas</th></tr>
<tr><td>3.</td><td>

x	1	2
$y = 6 - 5x$	1	-4

x	1	2
$y = \frac{12 - 10x}{2}$	1	-4

</td><td>



</td></tr>
</table>

- Observa el sistema 1. y contesta: ¿Tiene solución? ¿Cuál es la solución? ¿Se cortan las rectas que forman el sistema?

  CONCLUSIÓN: La pareja ordenada (2, 3) es la UNICA solución de este sistema.

- Ahora analiza el sistema 2 y contesta: ¿Tiene solución? ¿Por qué? ¿Se cortan las rectas que forman este sistema? ¿Cómo son estas rectas?

  CONCLUSIÓN: Las rectas son paralelas, no tienen ningún punto común y, por tanto, el sistema no tiene solución.

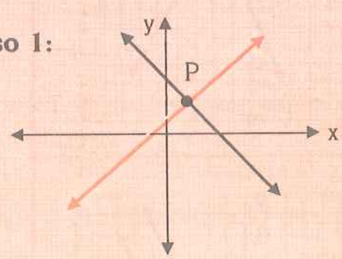
- Finalmente, analiza el sistema 3 y contesta: ¿Tiene solución? ¿Tiene solución única? ¿Cómo son las rectas que forman el sistema?

  CONCLUSIÓN: Las rectas son COINCIDENTES. Notemos que dos parejas ordenadas de la primera recta coinciden con dos parejas ordenadas de la segunda recta y, puesto que por dos puntos distintos pasa una y sólo una recta, entonces todos los puntos de una recta son los mismos de la otra. Esto significa que este sistema tiene INFINITAS SOLUCIONES.

APRENDAMOS

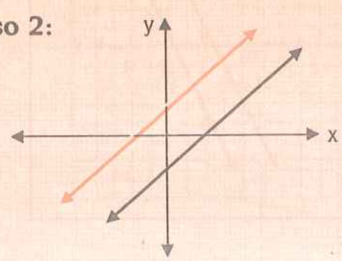
Si en un diagrama cartesiano dibujamos las gráficas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, puede ocurrir uno de estos tres casos:

Caso 1:



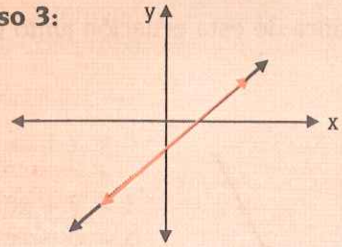
- Las dos rectas se cortan en un punto P.
- El sistema tiene SOLUCIÓN ÚNICA.

Caso 2:



- Las dos rectas son PARALELAS.
- El sistema NO TIENE SOLUCIÓN. Se dice que el sistema es INCONSISTENTE.

Caso 3:



– Las dos rectas son COINCIDENTES; es decir, son la MISMA RECTA.

– El sistema tiene INFINITAS SOLUCIONES.

TERCERA EXPERIENCIA

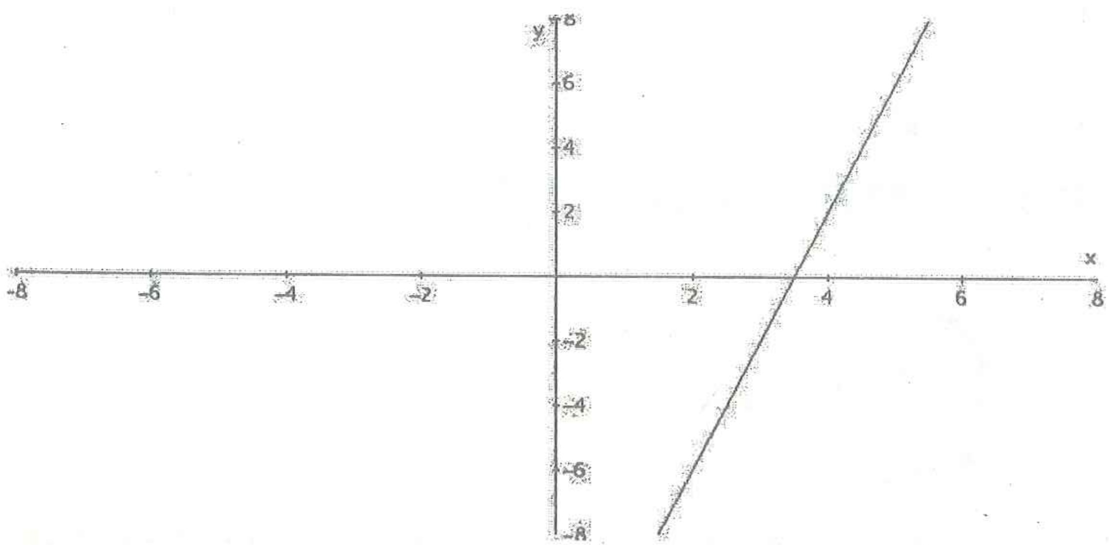
- Podemos usar DERIVE para resolver gráficamente un sistema de ecuaciones.
- Por ejemplo, para hallar la solución gráfica del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 4x - y = 14 \\ 5x + 2y = 11 \end{cases}$$

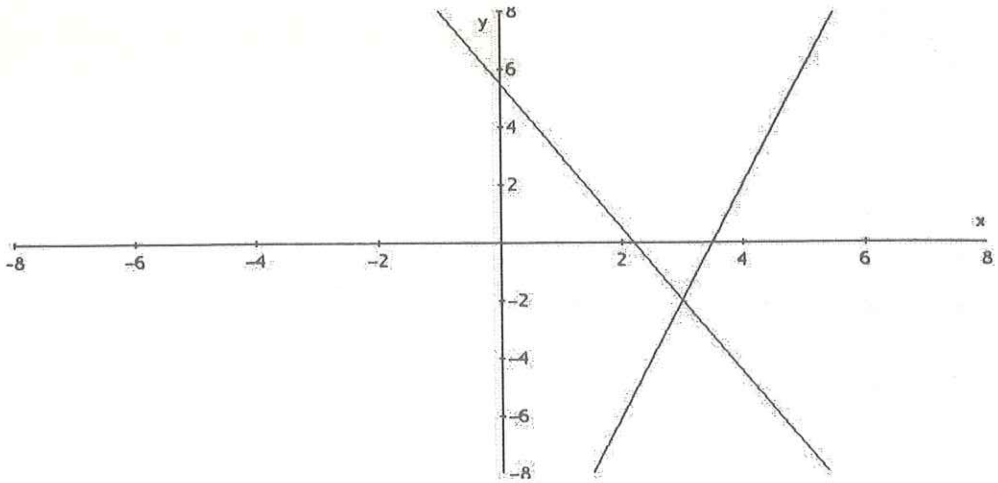
procedemos así:

1. Ingresamos la ecuación $4x - y = 14$ y oprimimos la tecla **ENTER**.

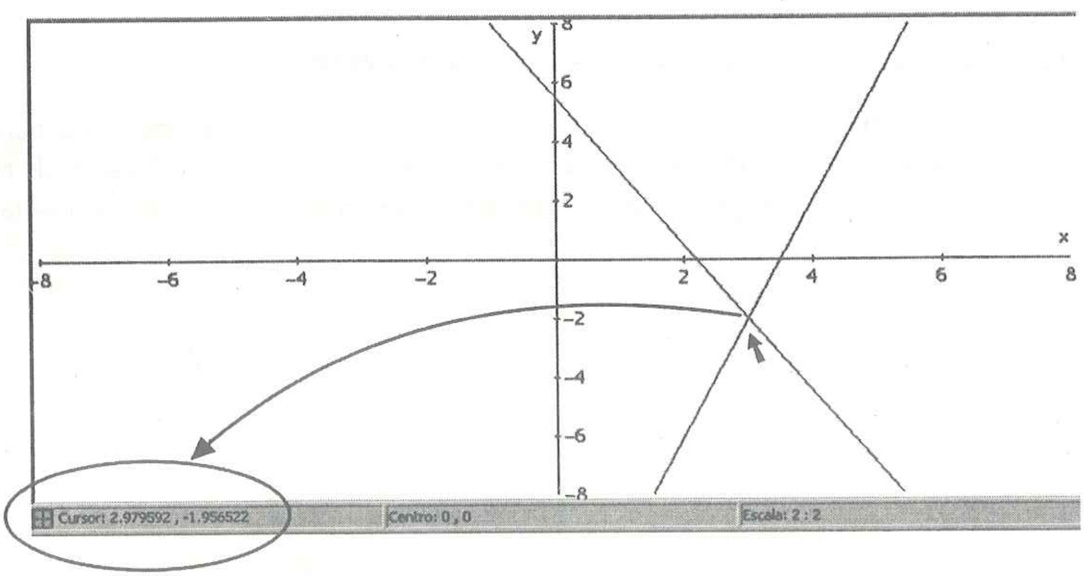
2. Dibujamos la gráfica de $4x - y = 14$ llevando el puntero hasta el símbolo de la barra de herramientas y hacemos **click** para que aparezca el plano cartesiano y luego llevamos de nuevo el puntero hasta el símbolo y hacemos **click** y aparecerá el dibujo de esta línea recta.



3. Ingresamos la ecuación $5x+2y=11$, oprimimos **ENTER** y llevamos el puntero del mouse hasta el símbolo y hacemos **click**. De inmediato aparecerá la gráfica de esta ecuación junto con la otra en el mismo plano cartesiano.



4. Para obtener la solución aproximada del sistema, llevamos el puntero del mouse hasta el punto de intersección de las dos rectas y hacemos **click**. En la primera linea inferior izquierda aparecerá:



EJERCICIO 1.3

1 Halla 5 soluciones de la ecuación lineal $3x - 2y = 4$ y dibújalas en el plano cartesiano. ¿Cuáles son la pendiente y la ordenada en el origen de esta línea recta?

En los ejercicios 2. a 10. Se pide:

a) Dibujar en el plano cartesiano cada sistema de ecuaciones.
b) Determinar si el sistema tiene solución única, no tiene solución o tiene infinitas soluciones.
c) Comprobar estas conclusiones usando DERIVE.

2. $\begin{cases} 3x - y = 7 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ x + y = 3 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x - y = 5 \\ x - y = -7 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3x + y = 1 \\ 9x - 3y = 6 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x - y = -3 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 2x + 4y = 6 \end{cases}$

8. $\begin{cases} -3x + y = 10 \\ x - 3y = 4 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 7x + y = -4 \\ x - 7y = 1 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 2 \end{cases}$

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 2

El ácido sulfúrico contiene en peso 2 partes de hidrógeno, 32 partes de azufre y 64 partes de oxígeno. ¿Qué fracción de ácido sulfúrico es azufre?

1.4 SOLUCIÓN ALGEBRAICA DE SISTEMAS LINEALES

En general, el método gráfico que describimos en la sección anterior para resolver un sistema de ecuaciones es poco preciso. Por esta razón vamos a desarrollar ahora tres métodos algebraicos de solución:

1. METODO DE IGUALACION
2. METODO DE SUSTITUCION
3. METODO DE REDUCCION

1.4.1 Método de Igualación

EXPERIENCIA

- Resolvamos el sistema $\begin{cases} 4x - y = 14 \\ 5x + 2y = 11 \end{cases}$

- El método de igualación consiste en despejar la misma incógnita de ambas ecuaciones; así:

$$4x - y = 14 \iff y = 4x - 14 \quad \text{................................} (1)$$

$$5x + 2y = 11 \iff y = \frac{11-5x}{2} \quad \text{................................} (2)$$

- A continuación, igualamos los resultados obtenidos aplicando la propiedad transitiva de la igualdad (si $a = b$ y $b = c$, entonces $a = c$). Por lo tanto:

$$4x - 14 = \frac{11-5x}{2}$$

- Como nos ha quedado una ecuación de primer grado con una incógnita, entonces:

$$\begin{aligned} & 2(4x - 14) = 11 - 5x \\ \therefore\ & 8x - 28 = 11 - 5x \\ \therefore\ & 8x + 5x = 28 + 11 \\ \therefore\ & 13x = 39 \\ \therefore\ & x = 3 \end{aligned}$$

- Para hallar la otra incógnita basta sustituir el valor obtenido para **x** en cualquiera de las ecuaciones (1) ó (2); así:

$$\begin{aligned} & y = 4(3) - 14 \\ \therefore\ & y = 12 - 14 = -2 \end{aligned}$$

- Por lo tanto, la solución del sistema dado es la pareja ordenada (3, -2). Dejamos como ejercicio dibujar ambas ecuaciones en el mismo plano cartesiano y comprobar que se interceptan en el punto (3, -2).

APRENDAMOS

MÉTODO DE IGUALACIÓN

Para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas por el MÉTODO DE IGUALACIÓN, procedemos así:

1. Despejamos la misma incógnita de ambas ecuaciones.
2. Luego, igualamos ambos resultados aplicando la propiedad transitiva de la igualdad.
3. Como nos queda una ecuación con una sola incógnita, la resolvemos como ya sabemos.
4. El valor de la incógnita obtenida mediante el paso anterior, lo sustituimos en cualquiera de las ecuaciones dadas y la resolvemos para la incógnita restante.
5. La solución del sistema es el par de valores obtenidos en los pasos 3. y 4.

- Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales utilizando el método de igualación:

a) $\begin{cases} 4x - y = 8 \\ x - 3y = 6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2y + x = 10 \\ y - x = 6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5x - 2y = 12 \\ 10x - 4y = 14 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{y}{2} - x = \frac{3}{2} \\ 5x + \frac{x}{3} = 15 \end{cases}$ e) $\begin{cases} \frac{y}{4} + \frac{x}{5} = \frac{1}{20} \\ y = 8 \end{cases}$ e) $\begin{cases} y - 3x - 4 = 0 \\ y + 5x - 10 = 0 \end{cases}$

1.4.2 Método de Sustitución

EXPERIENCIA

- Resolvamos el sistema $\begin{cases} 4x - y = 14 \\ 5x + 2y = 11 \end{cases}$

- El método de sustitución consiste en despejar una incógnita de una cualquiera de las dos ecuaciones. Por ejemplo, despejemos la **y** de la primera:

$$y = 4x - 14$$

- A continuación sustituimos este valor en la otra ecuación:

$$5x + 2(4x - 14) = 11$$

- Como vemos, nos resulta una ecuación de primer grado con una incógnita, la cual resolvemos; así:

$$\begin{aligned} &5x + 2(4x - 14) = 11 \\ \therefore\ &5x + 8x - 28 = 11 \\ \therefore\ &13x = 39 \\ \therefore\ &x = 3 \end{aligned}$$

- La otra incógnita la hallamos sustituyendo x por 3 en la ecuación $y = 4x - 14$; así:

$$\begin{aligned} &y = 4(3) - 14 \\ \therefore\ &y = 12 - 14 = -2 \end{aligned}$$

Luego, la solución del sistema es $x = 3$, $y = -2$.

APRENDAMOS

MÉTODO DE SUSTITUCIÓN

Para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas por el MÉTODO DE SUSTITUCIÓN, procedemos así:

1. Despejamos una incógnita de una cualquiera de las dos ecuaciones dadas.
2. Luego, sustituimos el valor obtenido al despejar en la otra ecuación. De esta forma nos queda una ecuación con una incógnita.
3. Resolvemos esta ecuación.
4. Finalmente, repetimos los pasos 4. y 5. descritos en el Método de Igualación.

- Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales utilizando el método de sustitución:

a) $\begin{cases} 2x + 2y = -6 \\ x - 3y = 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x - 4y = -13 \\ 5x + 4y = 7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{y}{4} = \frac{1}{12} \\ x - y = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y = 4 \\ \frac{x}{6} - \frac{y}{3} = \frac{1}{18} \end{cases}$ e) $\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{5} = \frac{1}{10} \\ \frac{y}{2} - \frac{x}{5} = \frac{1}{14} \end{cases}$ f) $\begin{cases} ax + by = c \\ ax - by = d \end{cases}$

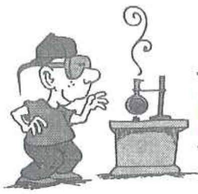
1.4.3 Método de Reducción

- El Método de Reducción se fundamenta en las siguientes propiedades de la igualdad de números reales:

  1. Si multiplicamos ambos lados de una igualdad por un mismo número real, la igualdad se mantiene.

  2. Si sumamos o restamos miembro a miembro dos igualdades obtenemos otra igualdad.

- Este método consiste en multiplicar ambos miembros de cada ecuación por números reales convenientes de tal manera que los coeficientes de una misma incógnita sean de igual valor numérico pero de signo contrario. A continuación, se suman miembro a miembro las dos ecuaciones obtenidas, resultando una ecuación con una incógnita.



EXPERIENCIA

- Resolvamos el sistema $\begin{cases} 4x - y = 14 \ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ 5x + 2y = 11 \ldots\ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$

- Vamos a igualar los coeficientes de la **y** aprovechando que tienen signos contrarios. Para ello, multiplicamos la primera ecuación por 2 y dejamos la segunda igual:

$$(1) \times 2: \; 8x - 2y = 28$$

$$(2) \times 1: \; 5x + 2y = 11$$

- Ahora sumamos miembro a miembro ambas ecuaciones:

$$\begin{array}{rcl} 8x - 2y & = & 28 \\ 5x + 2y & = & 11 \\ \hline 13x \quad & = & 39 \end{array}$$

- Nos quedó la ecuación $13x = 39$, la cual resolvemos normalmente:

$$13x = 39$$

$$\therefore x = \frac{39}{13} = 3$$

- Para hallar la otra incógnita procedemos en la misma forma que lo hicimos en los métodos anteriores.

APRENDAMOS

MÉTODO DE REDUCCIÓN

Para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas por el MÉTODO DE REDUCCIÓN procedemos así:

1. Multiplicamos ambos miembros de cada ecuación por números reales convenientes de tal manera que los coeficientes de una misma incógnita sean de igual valor numérico pero de signo contrario.

2. A continuación sumamos miembro a miembro las dos ecuaciones para obtener una sola ecuación con una incógnita.
3. Procedemos de la misma forma que en los métodos anteriores.

Ejemplo 1

Resolvamos el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 8x + 5y = 3 \text{ ....(1)} \\ 7x + 3y = -7 \text{ .... (2)} \end{cases}$

y determinemos si el sistema tiene solución única, infinitas soluciones o ninguna solución.

Solución

- Vamos a resolver el sistema por el método de reducción; con este fin igualemos en valor numérico y signo contrario el coeficiente de la **y**, multiplicando la ecuación (1) por 3 y la ecuación (2) por -5; así:

$$\begin{aligned} (1) \times 3 &: \ 24x + 15y = 9 \\ (2) \times -5 &: -35x - 15y = 35 \end{aligned}$$

- Ahora sumamos miembro a miembro las dos ecuaciones obtenidas:

$$\begin{array}{r} 24x + 15y = 9 \\ -35x - 15y = 35 \\ \hline -11x \quad = 44 \end{array}$$

$$\therefore x = \frac{44}{-11} = -4$$

- Ahora reemplazamos este valor en la ecuación (1) y resolvemos:

$$8(-4) + 5y = 3$$
$$\therefore -32 + 5y = 3$$
$$\therefore 5y = 35$$
$$\therefore y = \frac{35}{5} = 7$$

- Luego, el conjunto solución del sistema está constituido por la pareja ordenada (-4, 7). Como vemos, el sistema tiene solución única. Gráficamente esta solución significa que las líneas rectas que conforman el sistema se interceptan en el punto (-4, 7).
  Dejamos como ejercicio al lector dibujar este sistema.

Ejemplo 2

Resolvamos el sistema $\begin{cases} 5(x + 2y) - (3x + 11y) = 14 \text{ ....(1)} \\ 7x - 9y - 3(x - 4y) = 38 \text{ .... (2)} \end{cases}$

Solución

- En primer lugar es necesario eliminar los signos de agrupación y reducir términos semejantes; así:

De (1): $5x + 10y - 3x - 11y = 14$
$\therefore 2x - y = 14$ ....(3)

De (2): $7x - 9y - 3x + 12y = 38$
$\therefore 4x + 3y = 38$ ....(4)

- Por lo tanto, el sistema formado por las ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x - y = 14 \text{ ....(3)} \\ 4x + 3y = 38 \text{ ....(4)} \end{cases}$$

es equivalente al original y, en consecuencia, su solución es la misma.

Resolviendo este nuevo sistema por cualquiera de los métodos estudiados obtenemos $x = 8$, $y = 2$. (¡comprobarlo!).

Ejemplo 3

Resolvamos el sistema
$$\begin{cases} \dfrac{2y-5}{3} = x - \dfrac{4x+1}{9} \quad \dotfill (1) \\[2ex] \dfrac{x+18}{10} = y - \dfrac{3y+2}{7} \quad \dotfill (2) \end{cases}$$

Solución

- Para resolver el sistema debemos eliminar, en primer lugar, los denominadores. Veamos:

De (1): $9x - 4x - 1 = 6y - 15$
$\therefore\ 5x - 6y = -14 \ldots\ldots (3)$

De (2): $70y - 30y - 20 = 7x + 126$
$\therefore\ 7x - 40y = -146 \ldots\ldots (4)$

- Eliminando la **x** de (3) y (4) nos queda que $y = 4$. Luego, obtenemos que $x = 2$. (¡comprobarlo!).

Ejemplo 4

Resolvamos el sistema
$$\begin{cases} x - y = 4 \ldots\ldots (1) \\ 3x - 3y = -2 \ldots\ldots (2) \end{cases}$$

Solución

- Multipliquemos la ecuación (1) por 3 y la (2) por -1:

$$\begin{array}{lrcl} (1) \times 3: & 3x - 3y & = & 12 \\ (2) \times -1: & -3x + 3y & = & 2 \\ \hline & 0 + 0 & = & 14 \end{array}$$

$\therefore 0 = 14$ **¡ CONTRADICCIÓN !**

- Si dibujamos las gráficas de estas rectas en el plano cartesiano, comprobaremos que son PARALELAS; es decir, el sistema es INCONSISTENTE y NO TIENE SOLUCIÓN.

Ejemplo 5

Resolvamos el sistema
$$\begin{cases} 4x + 6y = 3 \ldots\ldots (1) \\[1ex] -2x - 3y = -\dfrac{3}{2} \ldots\ldots (2) \end{cases}$$

SOLUCIÓN

- Multipliquemos la ecuación (2) por 2:

$$\begin{array}{lrcl} (1) \times 1: & 4x + 6y & = & 3 \\ (2) \times 2: & -4x - 6y & = & -3 \\ \hline \therefore & 0 + 0 & = & 0 \\ \therefore & 0 = 0 & & \end{array}$$

¡ IDENTIDAD !

- Si dibujamos las gráficas de estas rectas en el plano cartesiano comprobaremos que COINCIDEN; es decir, el sistema posee INFINITAS SOLUCIONES.

¡ATENCIÓN!

1. Si al resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas obtenemos una expresión de la forma $0=k$, donde $k \neq 0$, entonces el sistema NO TIENE SOLUCIÓN y las rectas son PARALELAS.
2. Si al resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas obtenemos una expresión de la forma $0 = 0$, entonces el sistema tiene INFINITAS SOLUCIONES y las rectas son COINCIDENTES.

Ejemplo 6

Resolvamos el sistema
$$\begin{cases} bx + cy = a+b & \text{.........(1)} \\ ax\left(\dfrac{1}{a-b} - \dfrac{1}{a+b}\right) + cy\left(\dfrac{1}{b-a} - \dfrac{1}{a+b}\right) = \dfrac{2a}{a+b} & \text{.........(2)} \end{cases}$$

SOLUCIÓN

- Antes de resolver el sistema debemos eliminar los signos de agrupación y los denominadores de la ecuación (2):

$$ax\left(\frac{1}{a-b} - \frac{1}{a+b}\right) + cy\left(\frac{1}{b-a} - \frac{1}{a+b}\right) = \frac{2a}{a+b}$$

$$\therefore\ \frac{ax}{a-b} - \frac{ax}{a+b} + \frac{cy}{b-a} - \frac{cy}{a+b} = \frac{2a}{a+b}$$

$$\therefore\ \frac{ax}{a-b} - \frac{ax}{a+b} - \frac{cy}{a-b} - \frac{cy}{a+b} = \frac{2a}{a+b}$$

El m.c.m. de los denominadores es $(a + b) (a - b)$. Por lo tanto, multiplicando ambos miembros de la igualdad por $(a + b) (a - b)$ nos queda:

$$ax(a + b) - ax(a - b) - cy(a + b) - cy(a - b) = 2a(a - b)$$

$$\therefore\ \cancel{a^2x} + abx - \cancel{a^2x} + abx - acy - \cancel{bcy} - acy + \cancel{bcy} = 2a^2 - 2ab$$

$$\therefore\ 2abx - 2acy = 2a^2 - 2ab \text{..............................(3)}$$

- Ahora resolvemos el sistema formado por las ecuaciones (1) y (3):

$$bx + cy = a + b \text{..............................(1)}$$
$$2abx - 2acy = 2a^2 - 2ab \text{..............................(3)}$$

Multipliquemos la ecuación (1) por 2a:

$$\begin{array}{ll} (1) \times 2a: & 2abx + 2acy = 2a(a + b) \\ (3) \times 1\ : & 2abx - 2acy = 2a^2 - 2ab \\ \hline & \therefore\ 4abx \qquad = 2a^2 + \cancel{2ab} + 2a^2 - \cancel{2ab} \end{array}$$

$$\therefore\ x = \frac{4a^2}{4ab} = \frac{a}{b}$$

Reemplazando este valor de **x** en la ecuación (1) nos queda:

$$b.\left(\frac{a}{b}\right) + cy = a+b$$

$$\therefore\ a + cy = a + b$$

$$\therefore\ cy = b$$

$$\therefore\ y = \frac{b}{c}$$

- Por lo tanto, la solución del sistema es $x=\frac{a}{b}$, $y=\frac{b}{c}$.

Ejemplo 7

Resolvamos el sistema
$$\begin{cases} \frac{8}{x} - \frac{9}{y} = 1 \quad \dots\dots\dots(1) \\ \frac{10}{x} + \frac{6}{y} = 7 \quad \dots\dots\dots(2) \end{cases} \qquad \text{con } x,\, y \neq 0$$

Solución

- Este sistema, contrariamente a lo que pueda pensarse, NO se resuelve quitando primero los denominadores. Mostraremos dos métodos de solución.

* **PRIMER MÉTODO:**
Multipliquemos la ecuación (1) por 2 y la ecuación (2) por 3 y, luego, sumemos miembro a miembro:

$$\begin{aligned} (1) \times 2 &: \frac{16}{x} - \frac{18}{y} = 2 \\ (2) \times 3 &: \frac{30}{x} + \frac{18}{y} = 21 \\ \hline &\therefore \frac{46}{x} = 23 \\ &\therefore x = \frac{46}{23} = 2 \end{aligned}$$

Sustituyendo este valor en (1) obtenemos $y = 3$

* **SEGUNDO MÉTODO:**
El sistema podemos escribirlo así:

$$\begin{cases} 8\left(\frac{1}{x}\right) - 9\left(\frac{1}{y}\right) = 1 \quad \dots\dots\dots(1) \\ 10\left(\frac{1}{x}\right) + 6\left(\frac{1}{y}\right) = 7 \quad \dots\dots\dots(2) \end{cases}$$

Si hacemos $u=\frac{1}{x}$ y $v=\frac{1}{y}$ entonces el sistema queda:

$$\begin{cases} 8u - 9v = 1 \\ 10u + 6v = 7 \end{cases}$$

La solución de este sistema es $u = \frac{1}{2}$ y $v = \frac{1}{3}$.

Haciendo de nuevo $u = \frac{1}{x}$ y $v = \frac{1}{y}$ y reemplazando obtenemos: $x = 2$ y $y = 3$.

Ejemplo 8

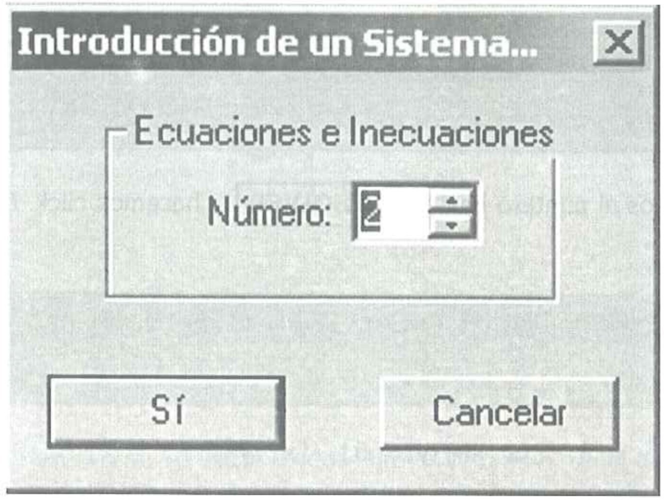
Usemos el DERIVE para resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 2x + 4y = 6 \end{cases}$$

Solución:

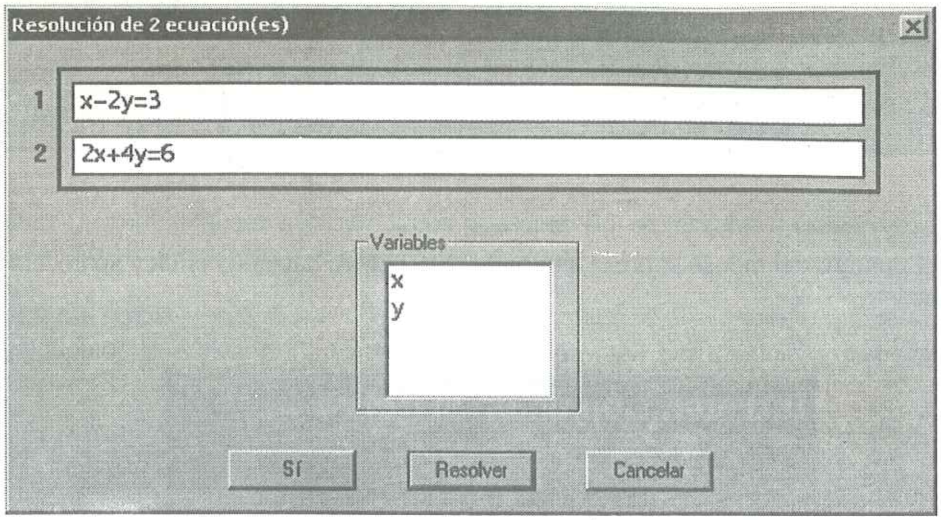
- Llevamos el puntero del mouse sobre la alternativa **RESOLVER** del menú de opciones y hacemos **click**.
- De inmediato aparecerá esta pequeña ventana:

- Llevamos el puntero del mouse sobre la alternativa **SISTEMA**, hacemos **click** y aparecerá la siguiente ventana:

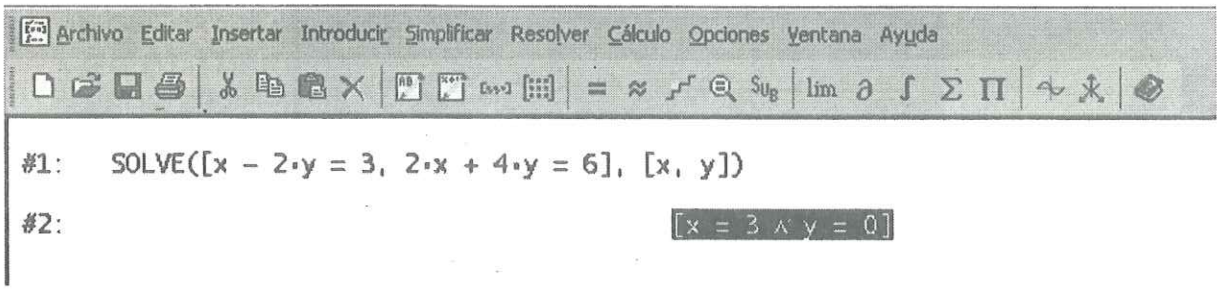


- Como el sistema tiene 2 ecuaciones, llevamos el puntero hasta el cuadro **Sí** y hacemos **click** y aparecerá la siguiente ventana:

- Sobre el primer renglón escribimos la primera ecuación: x-2y=3
- Luego, sobre el segundo renglón escribimos la segunda ecuación: 2x+4y=6.
- A continuación, señalamos con el puntero del mouse las variables **x** e **y**.



- Finalmente, llevamos el puntero hasta **RESOLVER** y hacemos click. De inmediato aparecerá esta pantalla:



EJERCICIO 1.4

En los ejercicios 1. a 6. dibujar una gráfica del sistema de ecuaciones e indicar si tiene solución única, infinitas soluciones o ninguna solución. Comprueba tus respuestas usando DERIVE.

1 $\begin{cases} x - y = 8 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$ **2** $\begin{cases} 2x + y = 6 \\ 8x = 6y + 9 \end{cases}$ **3** $\begin{cases} y = 2x - 4 \\ 6x - 3y - 12 = 0 \end{cases}$

4 $\begin{cases} 4x - 2y = 7 \\ x = \frac{1}{2}y + 5 \end{cases}$ **5** $\begin{cases} 2x + 6y = -11 \\ 4x - 3y = -2 \end{cases}$ **6** $\begin{cases} 9x - 3y = 7 \\ y = 3x - \frac{5}{2} \end{cases}$

En los ejercicios 7. a 22. hallar el conjunto solución del sistema de ecuaciones.Comprueba tus respuestas usando DERIVE.

7 $\begin{cases} 2x + 2y = -6 \\ x - 3y = 5 \end{cases}$ **8** $\begin{cases} 5x - 4y = -13 \\ 5x + 4y = -7 \end{cases}$ **9** $\begin{cases} 39x - 8y = 99 \\ 52x - 15y = 80 \end{cases}$

10 $\begin{cases} \frac{4x-3y+3}{x+y-2} = 5 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$ **11** $\begin{cases} \frac{4x-2y}{3} - \frac{x+2y}{2} = \frac{5}{6} \\ \frac{3x+y}{3} - \frac{2x+y}{2} = -\frac{1}{6} \end{cases}$ **12** $\begin{cases} bx + ay = a+b \\ 3bx - 2ay = 3a - 2b \end{cases}$

13. $\begin{cases} \dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} = 0 \\ bx + ay = 4ab \end{cases}$

14. $\begin{cases} \dfrac{3x}{a} + \dfrac{2y}{b} = 3 \\ \dfrac{9x}{a} - \dfrac{6y}{b} = 3 \end{cases}$

15. $\begin{cases} (a - b)x = (a+b)y \\ x + y = c \end{cases}$

16. $\begin{cases} (a-b)x + (a+b)y = 2a^2 - 2b^2 \\ (a+b)x - (a-b)y = 4ab \end{cases}$

17. $\begin{cases} x\left(a - b + \dfrac{ab}{a-b}\right) = y\left(a+b - \dfrac{ab}{a+b}\right) \\ x + y = 2a^3 \end{cases}$

18. $\begin{cases} \dfrac{x}{a+b} + \dfrac{y}{a+b} = \dfrac{1}{ab} \\ \dfrac{x}{b} + \dfrac{y}{a} = \dfrac{a^2+b^2}{a^2b^2} \end{cases}$

19. $\begin{cases} \dfrac{9}{x} + \dfrac{5}{y} = -1 \\ \dfrac{3}{x} - \dfrac{10}{y} = -5 \end{cases}$

20. $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 5 \\ \dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{y} = -5 \end{cases}$

21. $\begin{cases} \dfrac{6}{x} - \dfrac{5}{y} = 3 \\ \dfrac{9}{x} + \dfrac{20}{y} = -1 \end{cases}$

22. $\begin{cases} \dfrac{5}{x} + \dfrac{1}{y} = 3 \\ \dfrac{2}{2x} - \dfrac{2}{y} = 1 \end{cases}$

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 3

El exceso de 30 sobre 3 veces un número es 6, ¿cuál es el número?

1.5 ECUACIONES LINEALES CON TRES VARIABLES

EXPERIENCIA

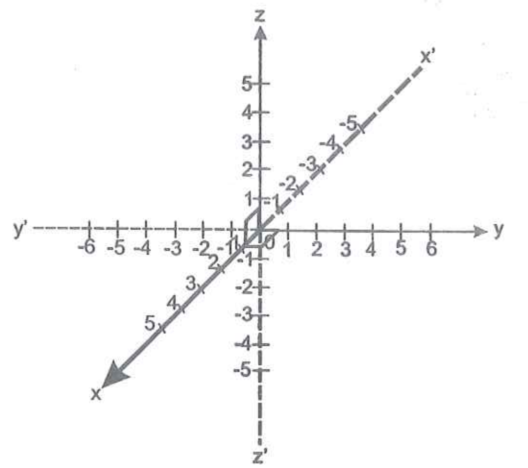
- Si observamos detenidamente la ecuación $2x - 3y + 5z - 6 = 0$ encontramos los siguientes detalles:
  1. Tiene tres variables: x, y, z.
  2. Todas las variables pertenecen a términos distintos.
  3. Todas las variables son de primer grado.
  4. Los coeficientes de las variables (2, -3 y 5) y el término independiente (-6) son números reales.
- Todas las ecuaciones que poseen las mismas características que $2x - 3y + 5z - 6 = 0$ se denominan ECUACIONES LINEALES CON TRES VARIABLES.
- Si en la ecuación $2x - 3y + 5z - 6 = 0$ reemplazamos **x** por 2, **y** por 1 y **z** por 1 obtendremos una igualdad verdadera ya que:

$$2(2) - 3(1) + 5(1) - 6 = 4 - 3 + 5 - 6 = 0$$

Esto significa que la terna ordenada (2, 1, 1) es una SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN $2x - 3y + 5z - 6 = 0$. Existen, por supuesto, infinitas soluciones para esta ecuación.

- La gráfica de una ecuación con tres variables consta de un conjunto de puntos representados por todas las ternas ordenadas de números reales que hacen cierta la ecuación dada. Estos puntos se representan en un SISTEMA COORDENADO DE TRES DIMENSIONES.

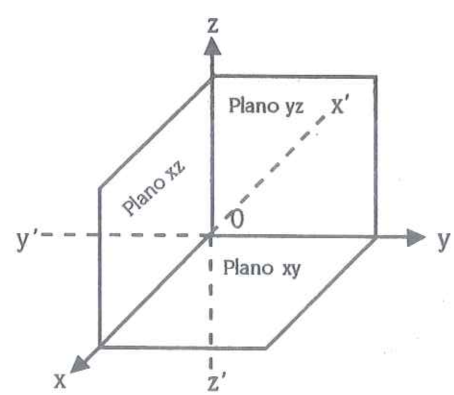
- El sistema coordenado de tres dimensiones fue desarrollado en el siglo XVIII gracias a los aportes realizados por los matemáticos Alejo Claudio Clairaut (1713 , 1765),Joseph-Louis Lagrange (1736 , 1813) y Leonard Euler (1707, 1783). Este sistema coordenado consiste en trazarle al plano coordenado xy un tercer eje coordenado perpendicular en el origen.



- En este sistema coordenado podemos identificar:

  * TRES EJES COORDENADOS: xx',yy', zz'llamados respectivamente el **eje x** , el **eje y** y el **eje z**, cuyas direcciones positivas están indicadas mediante flechas (⟶).

  * TRES PLANOS COORDENADOS: xy, xz, yz que dividen al espacio en ocho regiones llamadas OCTANTES. El octante determinado por los semiejes positivos x, y, z se llama PRIMER OCTANTE. A los demás octantes no se acostumbra asignarles número.



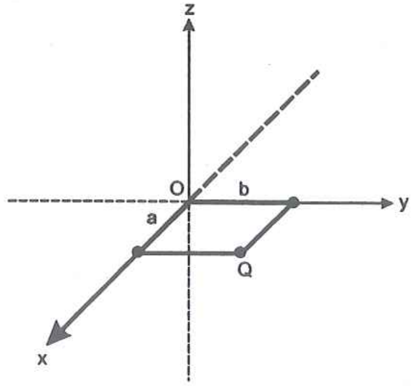
PRIMER OCTANTE

- La representación de un punto **P(a, b, c)** en este sistema la hacemos así:

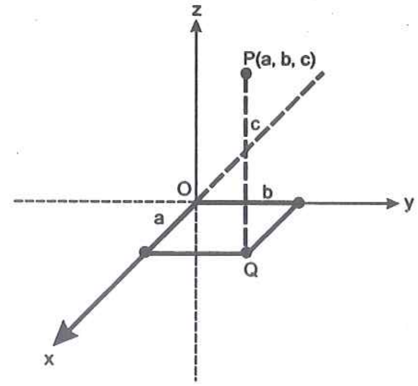
  * Marcamos la distancia dirigida **a** sobre el eje **x** a partir del origen.

  * Marcamos la distancia dirigida **b** sobre el eje **y** a partir del origen.

  * Por los puntos marcados sobre el eje **x** y sobre el eje **y** trazamos rectas paralelas a los ejes coordenados. Estas dos rectas se cortan en un punto Q; figura (a).



(a)



(b)

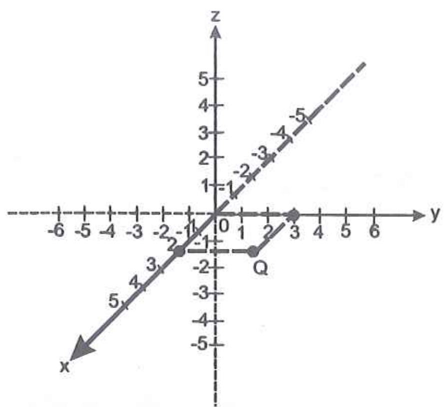
* Finalmente, por el punto Q trazamos una paralela al eje **z** y sobre esta paralela tomamos la distancia dirigida **c**. El punto **P(a, b, c)** es el que estábamos buscando; figura (b).

Ejemplo 1

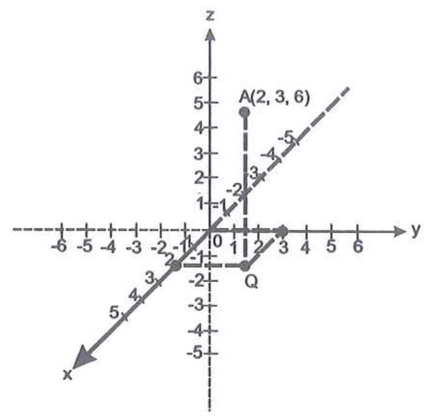
Representemos los puntos A(2, 3, 6) y B(-3, 2, -7).

SOLUCIÓN

- Para representar el punto A(2, 3, 6) primero localizamos las componentes 2 y 3 a lo largo de los ejes **x** y **y**; luego, trazamos paralelas a estos ejes por los puntos marcados para obtener el punto Q.



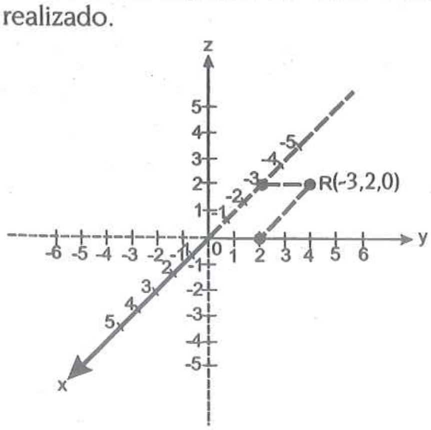
(a)



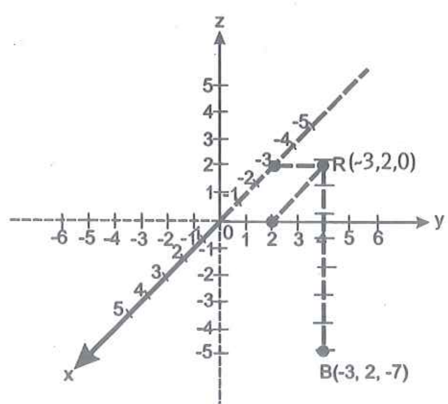
(b)

Finalmente, por el punto Q trazamos una paralela al eje **z** y sobre ella marcamos 6 unidades positivas. De esta manera localizamos el punto A(2, 3, 6).

- Para localizar el punto B(-3, 2, -7) observemos cuidadosamente la figura siguiente y expliquemos lo realizado.



(a)



(b)

Ejemplo 2

Dibujemos la gráfica de la relación $R = \{ (x,y,z) \,/\, 4x + 5y + 8z = 20 \}$

Solución

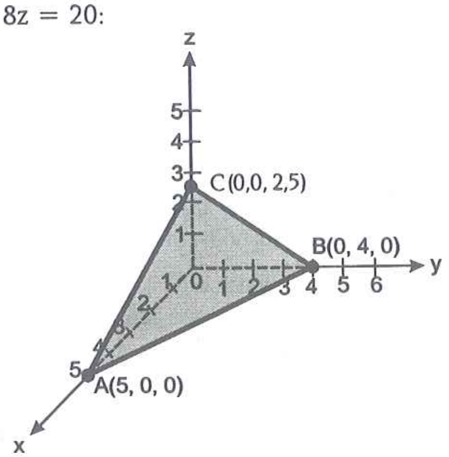
- Vamos a dibujar la gráfica de una ecuación de primer grado en las tres variables x, y, z.
- La manera más sencilla de dibujar esta gráfica es localizando los puntos de intersección con los ejes coordenados. Estos puntos se caracterizan porque dos de sus componentes son iguales a 0. Veamos:

  * **Intercepto con el eje x:**
    Si $y = z = 0$, entonces $4x = 20$; luego, $x = 5$.
    Por lo tanto, corta al eje **x** en el punto $A(5, 0, 0)$.

  * **Intercepto con el eje y:**
    Si $x = z = 0$, entonces $5y = 20$; luego, $y = 4$.
    Por lo tanto, corta al eje **y** en el punto $B(0, 4, 0)$.

  * **Intercepto con el eje z:**
    Si $x = y = 0$, entonces $8z = 20$; luego, $z = 2.5$
    Por lo tanto, corta al eje **z** en el punto $C(0, 0, 2.5)$.

- A continuación ubicamos los puntos A, B y C en el sistema coordenado de tres dimensiones y unimos los puntos con segmentos de recta. El ΔABC es una porción del plano correspondiente a la gráfica de la ecuación $4x + 5y + 8z = 20$:



APRENDAMOS

ECUACIONES LINEALES CON TRES VARIABLES

- Una ecuación de la forma $\mathbf{ax + by + cz + d = 0}$ en la cual **a, b, c** y **d** son números reales no todos iguales a **0** y $x, y, z \in \mathbb{R}$ se denomina **ECUACIÓN LINEAL CON TRES VARIABLES.**
- La terna ordenada (x_1, y_1, z_1) es **SOLUCIÓN** de esta ecuación si al reemplazar **x** por x_1, **y** por y_1, y **z** por z_1, obtenemos una igualdad verdadera.
- La representación gráfica de una ecuación lineal en tres variables $\mathbf{ax + by + cz + d = 0}$ es un **PLANO.**

EJERCICIO 1.5

En los ejercicios 1. a 12. dibuja los puntos correspondientes a cada una de las ternas ordenadas dadas:

1. (3, 4, 5)
2. (1, 3, 1)
3. (3, 0, 0)
4. (0, 3, 0)
5. (0, 0, 3)
6. (-3, 0, 0)
7. (0, -3, 0)
8. (0, 0, -3)
9. (-3, 2, 2)
10. (2, -3, 2)
11. (2, 2, -3)
12. (-3, -2, -2)

En los ejercicios 13. a 20. dibujar el plano que corresponde a cada ecuación de primer grado con tres variables.

13. $x + y + z = 1$
14. $x - y - z = 4$
15. $y - x + z = 2$
16. $x + 2y - 3z = 5$
17. $x - 5y + 2z = 3$
18. $6x - y + z = 8$
19. $x - 2y - 2z = 4$
20. $x + y + z = 0$

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 4

La diferencia de las edades de un padre y su hijo es 25 años. Hace 15 años la edad del hijo era los $\frac{3}{8}$ de la del padre. ¿Cuáles son las edades actuales?

1.6 SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON TRES VARIABLES

EXPERIENCIA

- Ya dijimos al principio de esta unidad que un conjunto de ecuaciones como el siguiente:

$$\begin{cases} 2x + 2y + z = 12 \ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ x + y + z = 8 \ldots\ldots\ldots\ldots (2) \\ 3x + 2y + 5z = 30 \ldots\ldots\ldots\ldots (3) \end{cases}$$

es un SISTEMA DE TRES ECUACIONES LINEALES CON TRES INCÓGNITAS.

- ¿ Es la terna (2, 2, 4) solución de este sistema ? Para contestar esta pregunta debemos comprobar si (2, 2, 4) satisface cada una de las ecuaciones del sistema. Veamos:

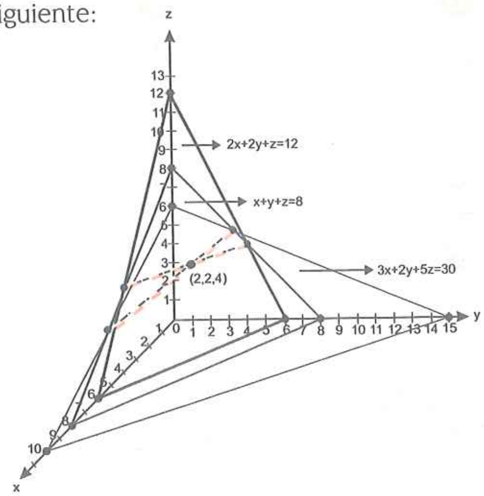
  * En (1) : $2(2) + 2(2) + 4 = 4 + 4 + 4 = 12$............................ ¡satisface!
  * En (2) : $2 + 2 + 4 = 8$..¡satisface!
  * En (3) : $3(2) + 2(2) + 5(4) = 6 + 4 + 20 = 30$.......................¡satisface!

  Luego, la terna (2, 2, 4) es solución del sistema.

- Ahora bien, ¿ cómo interpretamos gráficamente la solución de este sistema ? La respuesta es sencilla: como cada una de las ecuaciones del sistema es un plano, entonces la solución podemos interpretarla gráficamente como la intersección de los tres planos. Veamos cómo hacerlo:

  1. Dibujamos la gráfica del plano correspondiente a cada ecuación.
  2. Trazamos la intersección de dos cualesquiera de estos planos: esta intersección es una línea recta.
  3. Trazamos la intersección del plano restante con cualquiera de los otros, esta intersección es otra línea recta.

4. Buscamos el punto donde se cortan las dos rectas halladas. Este será el PUNTO DE INTERSECCIÓN DE LOS TRES PLANOS. Las coordenadas de este punto son la solución del sistema, tal como nos muestra la figura siguiente:



- Los métodos algebraicos para resolver un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas son los mismos utilizados para resolver sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Conviene tener en cuenta que, al igual que éstos últimos, también los sistemas lineales de tres ecuaciones con tres incógnitas pueden tener solución única, infinitas soluciones o ninguna solución. Los siguientes ejemplos nos mostrarán las distintas posibilidades.

Ejemplo 1

Resolvamos el sistema
$$\begin{cases} 2x + 2y + z = 12 \ldots\ldots (1) \\ x + y + z = 8 \ldots\ldots (2) \\ 3x + 2y + 5z = 30 \ldots\ldots (3) \end{cases}$$

Solución

- Vamos a usar el método de reducción para transformar el sistema dado en un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Eliminemos la variable z, multiplicando la ecuación (1) por -1 y sumándole la ecuación (2):

$$\begin{array}{rl} (1) \times -1: & -2x - 2y - z = -12 \\ (2) \times 1: & \underline{\;\; x + \; y + z = \;\; 8} \\ & -x - y = -4 \ldots\ldots (4) \end{array}$$

Ahora multiplicamos la ecuación (2) por -5 y le sumamos la ecuación (3); así:

$$\begin{array}{rl} (2) \times -5: & -5x - 5y - 5z = -40 \\ (3) \times 1: & \underline{\;\; 3x + 2y + 5z = \;\; 30} \\ & -2x - 3y = -10 \ldots\ldots (5) \end{array}$$

- Como las ecuaciones (4) y (5) constituyen un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, vamos a resolverlo multiplicando la ecuación (4) por -2 y sumándole la ecuación (5):

$$\begin{array}{rl} (4) \times -2: & 2x + 2y = 8 \\ (5) \times 1: & \underline{-2x - 3y = -10} \\ & -y = -2 \\ & \therefore\; y = 2 \end{array}$$

El valor $y = 2$ lo sustituimos, por ejemplo, en la ecuación (4) para hallar **x**:

$$\begin{aligned} -x - 2 &= -4 \\ \therefore\; -x &= -4 + 2 \\ \therefore\; -x &= -2 \\ \therefore\; x &= 2 \end{aligned}$$

Finalmente, los valores obtenidos $x = 2$ y $y = 2$ los sustituimos en cualquiera de las ecuaciones (1), (2) ó (3) para hallar el valor de z. Reemplacemos en (1):

$$
\begin{aligned}
& 2(2) + 2(2) + z = 12 \\
\therefore\ & 4 + 4 + z = 12 \\
\therefore\ & z = 12 - 8 \\
\therefore\ & z = 4
\end{aligned}
$$

- **Conclusión**: El sistema propuesto tiene solución única: la terna ordenada (2, 2, 4). Notemos que esta terna es la misma que obtuvimos cuando resolvimos el sistema gráficamente.

Ejemplo 2

Resolvamos el sistema $\begin{cases} 2x - 3y - 5z = 4 \ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ x + 7y + 6z = -7 \ldots\ldots\ldots\ldots (2) \\ 7x - 2y - 9z = 6 \ldots\ldots\ldots\ldots (3) \end{cases}$

Solución

- Eliminemos la variable **x**. Multipliquemos la ecuación (2) por -2 y sumémosle la (1):

$$
\begin{array}{ll}
(1) \times 1 : & 2x - 3y - 5z = 4 \\
(2) \times -2 : & -2x - 14y - 12z = 14 \\
\hline
& -17y - 17z = 18 \ldots\ldots\ldots\ldots (4)
\end{array}
$$

- Ahora multipliquemos la ecuación (2) por -7 y sumémosle la ecuación (3) :

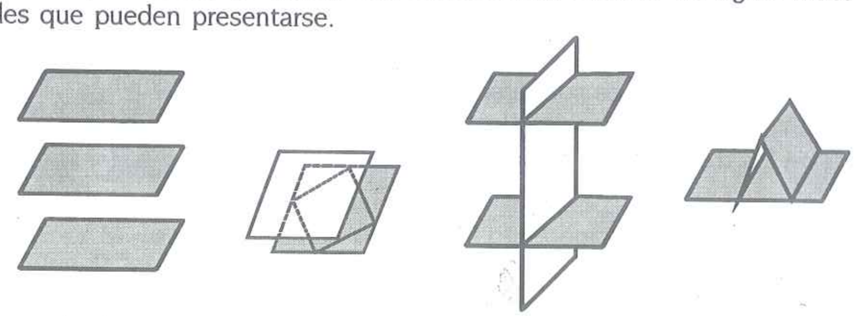
$$
\begin{array}{ll}
(2) \times -7 : & -7x - 49y - 42z = 49 \\
(3) \times 1 : & 7x - 2y - 9z = 6 \\
\hline
& -51y - 51z = 55 \ldots\ldots\ldots\ldots (5)
\end{array}
$$

- Ahora resolvamos el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas formado por las ecuaciones (4) y (5). Multipliquemos la ecuación (4) por -3 y sumémosle la ecuación 5.

$$
\begin{array}{ll}
(4) \times -3 : & 51y + 51z = -54 \\
(5) \times 1 : & -51y - 51z = 55 \\
& 0 = 1 \quad ; \quad \text{¡ CONTRADICCIÓN !}
\end{array}
$$

- Por lo tanto, la solución del sistema es el conjunto vacío y, en consecuencia, las tres ecuaciones son incompatibles.

- Gráficamente un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas es incompatible cuando los planos correspondientes no tienen una intersección común. La figura muestra las distintas posibilidades que pueden presentarse.



(a) (b) (c) (d)

* En la figura (a) los tres planos son paralelos.
* En la figura (b) dos de los planos son coincidentes (el mismo plano) y el tercer plano es paralelo a ellos.
* En la figura (c) dos de los planos son paralelos, la intersección de cada uno de estos planos con el tercero es una recta y estas rectas son paralelas.
* En la figura (d) dos de los planos se intersecan en una recta que es paralela al tercer plano.

Ejemplo 3

Resolvamos el sistema $\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ x + 2y - 5z = 6 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \\ 4x + 5y - 2z = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3) \end{cases}$

Solución

- Eliminemos la variable **y**. Multipliquemos la ecuación (1) por 2, la ecuación (2) por -3 y sumémoslas:

$$\begin{array}{rrrrrrrrr} (1) \times 2: & 4x & + & 6y & - & 8z & = & 8 & \\ (2) \times -3: & -3x & - & 6y & + & 15z & = & -18 & \\ \hline & x & & & + & 7z & = & -10 & \ldots\ldots\ldots (4) \end{array}$$

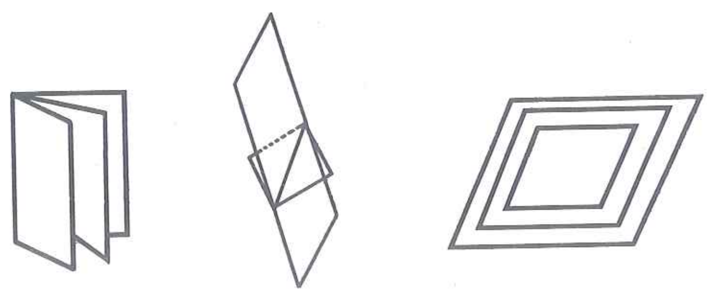
- Ahora multipliquemos la ecuación (2) por 5, la (3) por -2 y sumémoslas:

$$\begin{array}{rrrrrrrrr} (2) \times 5: & 5x & + & 10y & - & 25z & = & 30 & \\ (3) \times -2: & -8x & - & 10y & + & 4z & = & 0 & \\ \hline & -3x & & & - & 21z & = & 30 & \ldots\ldots\ldots (5) \end{array}$$

- A continuación resolvemos el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas formado por las ecuaciones (4) y (5). Multipliquemos la ecuación (4) por 3 y sumémosle la (5).

$$\begin{array}{rrrrrrr} (4) \times 3: & 3x & + & 21z & = & -30 & \\ (5) \times 1: & -3x & - & 21z & = & 30 & \\ \hline & & & 0 & = & 0 & \text{¡ IDENTIDAD !} \end{array}$$

- Por lo tanto, al resolver el sistema hemos obtenido una identidad. Esto significa que el sistema tiene infinitas soluciones. Gráficamente, las tres ecuaciones son tres planos que tienen una recta común o también tres planos coincidentes (el mismo plano). La figura siguiente muestra las posibilidades que pueden presentarse en este caso.



(a) (b) (c)

* En la figura (a) los tres planos son diferentes y tienen una recta común.
* En la figura (b) dos de los planos son coincidentes y el tercero los interseca en una recta.
* En la figura (c) los tres planos son coincidentes.

Ejemplo 4

Usemos DERIVE para resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x + 2y + z = 12 \\ x + y + z = 8 \\ 3x + 2y + 5z = 30 \end{cases}$$

Solución

- Llevamos el puntero del mouse hasta la alternativa **RESOLVER** del menú de opciones y hacemos **click**. De inmediato aparecerá esta pequeña ventana:

$$\begin{vmatrix} -3 & 5 & 4 \\ 1 & -2 & 7 \\ 5 & 0 & -4 \end{vmatrix}$$

nos queda el MENOR: $M_{11} = \begin{vmatrix} -2 & 7 \\ 0 & -4 \end{vmatrix}$

1a. fila — 1a. columna

$$\begin{vmatrix} -3 & 5 & 4 \\ 1 & -2 & 7 \\ 5 & 0 & -4 \end{vmatrix}$$

nos queda el MENOR: $M_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}$

1a. fila — 2a. columna

$$\begin{vmatrix} -3 & 5 & 4 \\ 1 & -2 & 7 \\ 5 & 0 & -4 \end{vmatrix}$$

nos queda el MENOR: $M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}$

1a. fila — 3a. columna

$$\begin{vmatrix} -3 & 5 & 4 \\ 1 & -2 & 7 \\ 5 & 0 & -4 \end{vmatrix}$$

nos queda el MENOR: $M_{23} = \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}$

2a. fila — 3a. columna

APRENDAMOS

Dado un determinante con un número de filas y columnas mayor que 2, definimos el MENOR ij, el cual simbolizamos por M_{ij}, como el determinante que resulta al eliminar la **fila i** y la **columna j**.

1.7.2 Cofactor

EXPERIENCIA

- Cuando un menor M_{ij} lo multiplicamos por $(-1)^{i+j}$ obtenemos el COFACTOR correspondiente al elemento que quedó en la intersección de la fila i con la columna j. Este cofactor lo simbolizamos por A_{ij}; es decir:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

- Teniendo en cuenta la matriz de la experiencia anterior, los cofactores de los menores analizados son:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \bullet M_{11} = (-1)^{1+1} \bullet \begin{vmatrix} -2 & 7 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = 1 \bullet (8 - 0) = 8$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \bullet M_{12} = (-1)^{3} \bullet \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = (-1) \bullet (-4 - 35) = 39$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \bullet M_{13} = (1) \bullet \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 1 \bullet (0 + 10) = 10$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \bullet M_{23} = (-1) \bullet \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \bullet (0 - 25) = 25$$

¡ATENCIÓN!

1. Para una matriz de tercer orden (tres filas y tres columnas) o de cuarto orden (cuatro filas y cuatro columnas), el coeficiente $(-1)^{i+j}$ sigue este comportamiento, llamado "patrón de los signos del tablero de ajedrez":

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{vmatrix}$$

Pregunta: ¿Cómo queda éste patrón de signos en un determinante de orden 5 (5 filas y 5 columnas)?

2. Para calcular el valor de un determinante vamos a recurrir a un método llamado de los MENORES COMPLEMENTARIOS, el cual consiste en transformar un determinante, por ejemplo de orden 3, en la suma de tres determinantes de segundo orden, eliminando adecuadamente una fila y una columna en cada caso.

Ejemplo 1

Escribamos el determinante $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

Como una suma de menores complementarios.

Solución

- Vamos a realizar el desarrollo por menores complementarios, suprimiendo la primera fila:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

- Analicemos lo que acabamos de hacer:
  - El determinante de tercer orden lo expresamos como la suma de tres términos.
  - Cada término se obtuvo al suprimir la primera fila con cada una de las tres columnas.
  - El primer término de la suma está formado por el menor M_{11}, multiplicado por $(-1)^{1+1}$ y por el elemento a_{11} ubicado en la intersección de la primera fila con la primera columna.
  - El segundo término de la suma está formado por el menor M_{12}, multiplicado po $(-1)^{1+2}$ y por el elemento a_{12} ubicado en la intersección de la primera fila con la segunda columna.
  - El tercer término de la suma está formado por el menor M_{13}, multiplicado por $(-1)^{1+3}$ y por el elemento a_{13} ubicado en la intersección de la primera fila y la tercera columna.

Ejemplo 2

Hallemos el valor de $\begin{vmatrix} 4 & 5 & 7 \\ -1 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ eliminando:

a) La primera fila. ; b) La segunda columna.

Solución

a) $\begin{vmatrix} 4 & 5 & 7 \\ -1 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \bullet 4 \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \bullet 5 \begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \bullet 7 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$

$= 1 \bullet 4\,(4 - 6) + (-1) \bullet 5\,(-2 - 18) + 1 \bullet 7\,(-1 - 6)$
$= 4\,(-2) + (-5)\,(-20) + 7\,(-7)$
$= -8 + 100 - 49 = 43$

b) $\begin{vmatrix} 4 & 5 & 7 \\ -1 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} \bullet 5 \begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \bullet 2 \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} \bullet 1 \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ -1 & 6 \end{vmatrix}$

$= (-1) \bullet 5\,(-2 - 18) + 1 \bullet 2\,(8 - 21) + (-1) \bullet 1\,(24 + 7)$
$= (-5)\,(-20) + 2\,(-13) - 1\,(31)$
$= 100 - 26 - 31 = 43$

3. Observemos que no importa si el desarrollo de un determinante, por el método de los menores complementarios, lo hacemos suprimiendo una fila o una columna: el resultado es el mismo. Lo que interesa es tener cuidado con el manejo de los menores y de los cofactores.

EJERCICIO 1.7

En los ejercicios 1. a 6. Calcula el valor de cada determinante:

1. $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 8 & 0 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 2 & -6 & 1 \\ 6 & 8 & 4 \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 7 \end{vmatrix}$

En los ejercicios 7., 8. y 9. prueba la proposición dada:

7. $\begin{vmatrix} a & b & a \\ d & e & d \\ g & h & g \end{vmatrix} = 0$

Si dos filas o dos columnas de un determinante son iguales, entonces el valor del determinante es 0.

8. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b & a & c \\ e & d & f \\ h & g & i \end{vmatrix}$

Si en un determinante se intercambian dos filas o dos columnas, el valor del determinante cambia de signo.

9. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ kd & ke & kf \\ g & h & i \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

Si una fila o una columna de un determinante se multiplica por un número, todo el determinante queda multiplicado por ese número.

1.8 SOLUCIÓN DE SISTEMAS LINEALES POR DETERMINANTES

En esta sección vamos a estudiar de qué manera podemos utilizar los determinantes en la solución de un sistema de ecuaciones lineales.

EXPERIENCIA

- Utilicemos el método de reducción para resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} ax + by = c \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ dx + ey = f \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

- Multipliquemos la ecuación (1) por -d y la ecuación (2) por a; así:

$$\begin{array}{ll} (1) \times (-d): & -\cancel{adx} - bdy = -dc \\ (2) \times (a): & \cancel{adx} + aey = af \\ \hline \end{array}$$

$$\therefore -bdy + aey = af - dc$$

$$\therefore y\,(ae - bd) = af - dc$$

$$\therefore \boxed{y = \frac{af - dc}{ae - bd}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

- Sustituyamos este valor de y en la ecuación (1):

$$ax + by = c$$

$$\therefore ax + b\left(\frac{af - dc}{ae - bd}\right) = c$$

$$\therefore a(ae - bd)\,x + b(af - dc) = c(ae - bd)$$

$$\therefore a(ae - bd)\,x = c(ae - bd) - b(af - dc)$$

$$\therefore a(ae - bd)\,x = cae - \cancel{cbd} - baf + \cancel{bdc}$$

$$\therefore a(ae - bd)\,x = a(ce - bf)$$

$$\therefore x = \frac{\cancel{a}(ce - bf)}{\cancel{a}(ae - bd)}$$

$$\therefore \boxed{x = \frac{ce - bf}{ae - bd}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

- Ahora detengamos nuestra atención en las ecuaciones (3) y (4).

$$x = \frac{ce - bf}{ae - bd} \qquad ; \qquad y = \frac{af - dc}{ae - bd}$$

Notemos que:
- El numerador de x es $ce - bf = \begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix}$
- El numerador de y es $af - dc = \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}$
- El denominador de ambos es $ae - bd = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \neq 0$

- Este resultado se conoce con el nombre de REGLA DE CRAMER para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

APRENDAMOS

REGLA DE CRAMER

- La solución del sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas: $\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$

es:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}} \quad ; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}}$$

- Por comodidad, al determinante del numerador de x lo simbolizamos por Δx, al determinante del numerador de y por Δy y al denominador de ambos simplemente por Δ.
- El determinante Δx se obtiene, reemplazando en Δ, los coeficientes de x por los términos independientes c y f.
- El determinante Δy se obtiene, reemplazando en Δ, los coeficientes de y por los términos independientes.

¡ATENCIÓN!

La regla de Cramer podemos extenderla a sistemas más grandes de ecuaciones lineales. En particular, para sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas tenemos lo siguiente: La solución del sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas:

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= d \\ ex + fy + gz &= h \\ ix + jy + kz &= l \end{aligned}$$

es:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{d} & b & c \\ \mathbf{h} & f & g \\ \mathbf{l} & j & k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ i & j & k \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & \mathbf{d} & c \\ e & \mathbf{h} & g \\ i & \mathbf{l} & k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ i & j & k \end{vmatrix}} \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} a & b & \mathbf{d} \\ e & f & \mathbf{h} \\ i & j & \mathbf{l} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ i & j & k \end{vmatrix}}$$

Ejemplo 1

Utilicemos la regla de Cramer para resolver el sistema: $\begin{cases} 3x - y = -3 \\ -2x + 4y = 6 \end{cases}$

Solución

- Teniendo en cuenta la regla de Cramer para sistemas de ecuaciones lineales con dos variables, nos queda:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{-12 + 6}{12 - 2} = \frac{-6}{10} = -\frac{3}{5} \quad ; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{18 - 6}{12 - 2} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$$

- Por lo tanto, la solución del sistema es la pareja ordenada $\left(-\frac{3}{5}, \frac{6}{5}\right)$.
- Pregunta: ¿Qué significa gráficamente esta solución?

Ejemplo 2

Utilicemos la regla de Cramer para resolver el sistema:

$$\begin{cases} -x + 2y + 4z = 9 \\ x - y + 6z = -2 \\ 4x + 6y - 2z = -1 \end{cases}$$

Solución

- Teniendo en cuenta la aplicación de la regla de Cramer para sistemas de ecuaciones lineales con tres variables, nos queda:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 6 \\ 4 & 6 & -2 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 126$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 9 & 2 & 4 \\ -2 & -1 & 6 \\ -1 & 6 & -2 \end{vmatrix} = 9\begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -2 & 6 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = -378$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} -1 & 9 & 4 \\ 1 & -2 & 6 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} -2 & 6 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} - 9\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 252$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 9 \\ 1 & -1 & -2 \\ 4 & 6 & -1 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} + 9\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 63$$

- Con esta información ya podemos encontrar los valores de x, y y z; así:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = -\frac{378}{126} = -3 \quad ; y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{252}{126} = 2 \quad ; z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{63}{126} = \frac{1}{2}$$

- Por lo tanto, la solución de este sistema es la terna ordenada $\left(-3, 2, \frac{1}{2}\right)$.
- Pregunta: ¿Qué significa gráficamente esta solución?

Ejemplo 3

Utilicemos la regla de Cramer para resolver el sistema: $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 4x + 6y = -2 \end{cases}$

Solución

- Tenemos: $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$; $\Delta x = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 6 \end{vmatrix}$; $\Delta y = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}$

- Por lo tanto:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{30+6}{12-12} = \frac{36}{0} : \text{NO EXISTE!}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{-4-20}{12-12} = \frac{-24}{0} : \text{NO EXISTE!}$$

- Como en ambos casos, el denominador se hace CERO, y la división por CERO no está definida, entonces el sistema dado no tiene solución.

- PREGUNTA: ¿Qué significa gráficamente este resultado?

EJERCICIO 1.8

En los ejercicios 1. a 10. resuelve cada sistema de ecuaciones usando la regla de Cramer.

1. $\begin{cases} x - y = 7 \\ 3x + 2y = 6 \end{cases}$

2. $\begin{cases} -x + 3y = 7 \\ 3x - 9y = 6 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x - 3y = 6 \\ y - 4x = -12 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 3x + 4y = 6 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x - y + z = -2 \\ 2x + y - z = 8 \\ 2x + 2y + 3z = -3 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x + 2y + 3z = 23 \\ 2x + 3y + 2z = 20 \\ 4x + 3y + 2z = 24 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 3x + 4y + 5z = 35 \\ 2x + 5y + 3z = 27 \\ 2x + y + z = 13 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 4x + 3y + 5z = 42 \\ 3x + 4y + 3z = 33 \\ 2x + 5y + 2z = 29 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x - 2y + 3z = 2 \\ 3x - y + 2z = -5 \\ x + 3y - 4z = 1 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x - 2y + z = 2 \\ 2x - 4y + 2z = 4 \\ 5x - y + 2z = 13 \end{cases}$

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 5

Se ha repartido cierta suma entre A, B y C. A recibió \$15000, B recibió tanto como A más $\frac{2}{3}$ de lo que recibió C, y C recibió tanto como AyB juntos. ¿Cuánto dinero se repartió?

TALLER DE REPASO DE LA UNIDAD 1

1. Contesta en tu cuaderno las siguientes preguntas:

   a) ¿Qué es un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas? ¿Y con tres incógnitas?

   b) ¿Cuándo una pareja ordenada (h, k) es solución de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas?

   c) ¿Cuándo un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas tiene solución única? ¿Cómo se interpreta gráficamente esta solución?

   d) ¿Cuándo un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas no tiene solución? ¿Cómo se interpreta gráficamente esta situación?

   e) ¿Cuándo un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas tiene infinitas soluciones? ¿Cómo se interpreta gráficamente esta situación?

   f) ¿Cuáles son los métodos algebraicos para resolver sistemas de ecuaciones lineales? ¿En qué consiste cada uno?

g) ¿Qué representa gráficamente una ecuación lineal con tres incógnitas $ax + by + cz + d = 0$?

h) ¿Cuándo un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas tiene solución única? ¿Qué significado gráfico tiene la solución?

i) ¿Cuándo un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas tiene infinitas soluciones? ¿Qué significa gráficamente esta situación?

j) ¿Cuándo un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas no tiene solución? ¿Cómo se interpreta gráficamente esta situación?

k) ¿Qué es un determinante? ¿Cómo se calcula un determinante de segundo orden?

l) ¿Qué es menor de un determinante? ¿Y qué es un cofactor?

m) ¿Cómo se calcula un determinante de tercer orden por el método de los menores complementarios?

n) ¿Cómo se resuelve un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas por el método de los determinantes?

2. Responde falso o verdadero a cada una de las siguientes proposiciones. Justifica cada respuesta.

a) La ecuación $2x - 3y = 5$ representa una línea recta.

b) La pendiente y la ordenada en el origen de la ecuación lineal $4x + y = -3$ son 4 y 3, respectivamente.

c) Las parejas ordenadas $(-1, 1)$ y $(-3, -1)$ son soluciones de la ecuación $y = x + 2$.

d) Las rectas cuyas ecuaciones son $4 - y = 5x$ y $2y + 10x = 17$ son paralelas.

e) El sistema de ecuaciones $\begin{cases} 3x + 2y = -5 \\ -4y - 3x = 2 \end{cases}$ no tiene solución

f) El valor de $\begin{vmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 6 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ es 0

g) Si al resolver un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas por la regla de Cramer, encontramos que $\Delta \neq 0$, entonces el sistema de ecuaciones tiene solución única.

h) El método de sustitución consiste en despejar la misma incógnita en dos ecuaciones e igualar los resultados.

3. Halla todas las soluciones de la ecuación $4x + y = 12$ para $x, y \in \mathbb{N}$.

4. Analiza cuales de las ternas $(1, 1, 0)$, $(1, -2, 0)$ y $(1, 2, 0)$ son soluciones de la ecuación $x - 2y + 3z = 5$

En los ejercicios 5. a 8., dibuja la gráfica del sistema de ecuaciones e indica si tiene solución única, infinitas soluciones o no tiene solución. Luego, resuélvelo algebraicamente y comprueba las conclusiones anteriores.

5. $\begin{cases} 4x + 3y = 6 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$ 6. $\begin{cases} 2y = 4x - 6 \\ 6x = 3y + 9 \end{cases}$ 7. $\begin{cases} 3x + 5y = 11 \\ 6x + 10y = 21 \end{cases}$ 8. $\begin{cases} x + 2y + 2z = 1 \\ x - 3y - 2z = 4 \\ 6x + y - z = 21 \end{cases}$

En los ejercicios 9. a 17. resuelve cada sistema por el método que prefieras.

9. $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} - \dfrac{y-1}{3} = -\dfrac{13}{36} \\ \dfrac{x+1}{3} - \dfrac{y+1}{2} = -\dfrac{2}{3} \end{cases}$ 10. $\begin{cases} x - \dfrac{4x+1}{9} = \dfrac{2y-5}{3} \\ y - \dfrac{3y+2}{7} = \dfrac{x+18}{10} \end{cases}$ 11. $\begin{cases} \dfrac{x+b}{a} + \dfrac{y-b}{b} = \dfrac{a+b}{b} \\ \dfrac{x-a}{b} - \dfrac{y-a}{a} = \dfrac{a+b}{a} \end{cases}$

12. $\begin{cases} \dfrac{x}{a+b} + \dfrac{y}{a+b} = \dfrac{1}{ab} \\ \dfrac{x}{b} + \dfrac{y}{a} = \dfrac{a^2+b^2}{a^2b^2} \end{cases}$

13. $\begin{cases} \dfrac{1}{4x} + \dfrac{8}{y} = \dfrac{103}{84} \\ \dfrac{3}{x} - \dfrac{7}{3y} = \dfrac{2}{3} \end{cases}$

14. $\begin{cases} \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{y} = 2 \\ \dfrac{2}{x} - \dfrac{3b}{y} = \dfrac{2-3a}{a} \end{cases}$

15. $\begin{cases} x - \dfrac{y+z}{3} = 4 \\ y - \dfrac{x+z}{8} = 10 \\ z - \dfrac{y-x}{2} = 5 \end{cases}$

16. $\begin{cases} \dfrac{x+y}{7} = \dfrac{y+4}{5} \\ \dfrac{x-z}{5} = \dfrac{y-4}{2} \\ \dfrac{y-z}{3} = \dfrac{x+2}{10} \end{cases}$

17. $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{4}{y} + \dfrac{2}{z} = -6 \\ \dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{y} + \dfrac{4}{z} = 3 \\ \dfrac{6}{x} - \dfrac{5}{y} - \dfrac{6}{z} = 31 \end{cases}$

En los ejercicios 18. a 20. resuelve cada sistema por determinantes.

18. $\begin{cases} 3p + 8q = 4 \\ 15p + 10q = -10 \end{cases}$

19. $\begin{cases} x - 8y + 2z = -1 \\ x + z - 3y = 1 \\ 2x - 11y + 3z = 2 \end{cases}$

20 $\begin{cases} \dfrac{x}{3} + y = 2z + 3 \\ x - y = 2 \\ x + z = \dfrac{y}{4} + 11 \end{cases}$

Resuelve los sistemas de ecuaciones de los ejercicios 21. a 24. por el método que prefieras.

21. $\begin{cases} x + y = a \\ ax - by = a(a+b) + b^2 \end{cases}$

22. $\begin{cases} nx + my = m + n \\ mx - ny = \dfrac{m^3 - n^3}{mn} \end{cases}$

23. $\begin{cases} \dfrac{x+b}{a} + \dfrac{y-b}{b} = \dfrac{a+b}{b} \\ \dfrac{x-a}{b} - \dfrac{y-a}{a} = \dfrac{a+b}{a} \end{cases}$

24. $\begin{cases} x+y = \dfrac{a^2+b^2}{ab} \\ ax - by = 2b \end{cases}$

PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS DEL ICFES

Subraya la letra correspondiente a la UNICA respuesta correcta.

1. La diferencia de dos números es 44. Si el mayor se divide por el menor, el cociente es 3 y el residuo es 2. Los números son:

   a) 10 y 54 b) 21 y 65 c) 32 y 76 d) 53 y 97

2. Un trozo de hierro que equivale a los 5/11 de una varilla excede en 68 cm a otro pedazo que equivale a 1/9 de la varilla. La longitud de la varilla es:

   a) 58 cm b) 100 cm c) 198 cm d) 200 cm

3. En un laboratorio se determina que la unidad de medida de peso es una bola de cristal de 23 gramos. Si un tornillo y una tuerca pesan juntos 207 gramos y un tornillo equivale a dos bolas, entonces una tuerca equivale a:

   a) 4 bolas b) 5 bolas c) 6 bolas d) 7 bolas

4. Un tanque tiene 3 metros de largo, 2m de ancho y 2m de profundidad. Si cada 9 minutos salen 300 litros, el tiempo que tardará en vaciarse es:

a) 1 hora b) 3 horas c) 6 horas d) 12 horas

5. Un ejército de 1.300 hombres tiene víveres para 120 días y si se quiere que los víveres duren 10 días más, entonces el número de hombres que hay que despedir es:

a) 100 b) 200 c) 300 d) 50

Núcleo Temático

2

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS CON SISTEMAS DE ECUACIONES

LOGRO GENERAL

Plantear y resolver problemas que impliquen la solución de sistemas de ecuaciones lineales de orden 2x2 y 3x3.

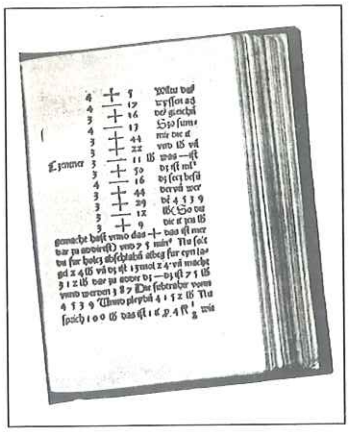
LOGROS ESPECÍFICOS	INDICADORES DE LOGRO
Corporal: • Elaborar modelos que ayuden a resolver problemas que conducen a sistemas de ecuaciones lineales.	En grupos de tres alumnos interpretan, analizan y resuelven problemas matemáticos que conducen a sistemas de ecuaciones lineales.
Comunicativa: • Formular problemas que involucren sistemas de ecuaciones lineales con dos o tres variables. • Interpretar los enunciados de los problemas.	• Comprende e interpreta correctamente los enunciados de los problemas. • Escribe los problemas en lenguaje matemático.
Cognitiva: • Resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos o tres variables. • Resolver e interpretar problemas que dan lugar a sistemas de ecuaciones lineales.	• Identifica problemas cuyo enunciado conduce a sistemas de ecuaciones lineales con dos o tres variables. • Resuelve problemas mediante sistemas de ecuaciones lineales en dos y tres variables.
Estética: • Interpretar gráficamente los problemas.	• Ilustra los enunciados de los problemas mediante dibujos que tengan que ver con el mismo.
Etica-Actitudinal: • Valorar el trabajo en grupo.	Valora la ayuda de los otros y está dispuesto a colaborar con los demás.

DIMENSIONES

EVALUACIÓN

ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS

2.1 HISTORIA DEL ALGEBRA (12)



Los signos + y - aparecen por primera vez en manuscritos, en 1481; y el primer libro impreso en que se usan es la "Aritmética Comercial" del alemán Juan Widmann, publicada en Leipzig en 1489. En Italia su uso generalizado se demorará cien años más.

Michel Stifel introduce la palabra "exponente" hacia 1544. Robert Recorde publica en Londres en 1557, el primer libro en que se utiliza el signo = para la igualdad, excepto que las dos rayitas de Recorde eran mucho más largas que lo que hoy se acostumbra.

En fin, sólo con Descartes y su Geometría Analítica, en 1639, llega la notación respecto a igualdades y expresiones algebraicas, a ser lo que hoy conocemos. En cuanto al uso de los signos de agrupación, el italiano renacentista Bombelli, usa por primera vez (aunque se sospecha que la iniciativa no fue suya sino de su editor), una ele mayúscula para "abrir" corchete y la misma ele pero invertida para cerrarlo.

Nuestro actual paréntesis, como signo de agrupación, lo propone Leibnitz en 1702 y los matemáticos del siglo XVIII, especialmente Leonard Euler y John Bernoulli.

El francés Blas Pascal (1623-1662) es tanto más conocido como filósofo y escritor que como matemático. Es uno de los creadores de la Teoría de la Probabilidad, de la cual surge espontáneamente el famoso triángulo que lleva su nombre. Pascal lo llamó "triángulo aritmético" y sólo después de su muerte empezó a ser llamado triángulo de Pascal.

En la fotografía se reproduce una de las páginas del libro **Behede und hubschd Rechnung auf allen Kauffmanschafft**, primer registro impreso del empleo de los signos + y - , escrito en 1489 por Juan Widman.

EJERCICIO 2.1

Lee nuevamente el texto anterior y luego encierra en un círculo la letra que corresponda a la respuesta correcta:

1. En el escrito se mencionan científicos y trabajos matemáticos de los siguientes países, con excepción de:

   a. Francia
   b. Inglaterra
   c. Italia
   d. Grecia

2. De acuerdo con el contenido del texto, se puede establecer la siguiente analogía; Michel Stifel es a exponente como Leibnitz es a:

   a. Igual
   b. Signos de agrupación
   c. Paréntesis
   d. Corchete

3. El tema central más exacto del escrito podría ser:

   a. Aportes de Italia a los códigos matemáticos.
   b. Aparición y empleo de los signos en las ciencias matemáticas.
   c. Evolución de la simbología algebraica.
   d. Alemania fue pionera en el descubrimiento de los símbolos matemáticos.

4. En el texto se afirma que:

   a. La mayoría de los signos matemáticos fueron descubiertos entre los siglos XV y XVI.
   b. Bombelli no es el creador de los signos de agrupación.
   c. La reputación de Pascal se debe más a su perfil humanístico que científico.
   d. Recorde nada tuvo que ver en la creación del signo igual.

5. Se nota claramente que el escritor se propone:

   a. Explicar cómo fueron los primeros pasos del álgebra moderna
   b. Aclarar dudas respecto del trabajo de los italianos en la creación de los signos matemáticos.
   c. Presentar un informe subjetivo sobre códigos matemáticos.
   d. Informar al lector sobre la aparición de algunos signos matemáticos.

2.2 MODELOS DE SOLUCIÓN

- Numerosos problemas de las ciencias y de la vida diaria pueden resolverse aplicando sistemas de ecuaciones lineales.
- Antes de analizar algunos modelos de problemas conviene recordar los pasos que debemos seguir al resolver un problema usando ecuaciones.

  PASO 1: ELECCIÓN DE LAS INCOGNITAS: Consiste en nombrar con letras, cada una de las cantidades desconocidas.

  PASO 2: OBTENCIÓN DE LAS ECUACIONES: Este paso se logra cuando hacemos una adecuada "traducción" del enunciado del problema al lenguaje matemático.

  PASO 3: SOLUCIÓN DEL SISTEMA DE ECUACIONES: Mediante uno de los métodos estudiados en la unidad anterior.

  PASO 4: ANÁLISIS DE LA SOLUCIÓN: Consiste en comprobar si los resultados obtenidos están de acuerdo con las condiciones establecidas en el enunciado del problema.

2.2.1 Primera Aplicación

Un hotel tiene habitaciones dobles y sencillas. En total hay 50 habitaciones y 87 camas. ¿Cuántas habitaciones hay de cada tipo?

Solución

- **ELECCIÓN DE LAS INCOGNITAS**

  Sean: x = número de habitaciones sencillas

  y = número de habitaciones dobles

- **OBTENCIÓN DE LAS ECUACIONES**

  – Como el hotel tiene 50 habitaciones entonces:

$$x + y = 50 \dots\dots\dots\dots (1)$$

– Las habitaciones sencillas tienen 1 cama y las dobles tienen 2 camas. El total de camas es 87; por lo tanto:

$$1x + 2y = 87 \text{..} (2)$$

- **SOLUCIÓN DEL SISTEMA DE ECUACIONES**

  – De la ecuación (1) despejamos x : $x = 50 - y$

  – Ahora reemplazamos en la ecuación (2):

$$50 - y + 2y = 87$$
$$\therefore -y + 2y = 87 - 50$$
$$\therefore y = 37$$
$$\therefore x = 50 - 37 = 13$$

- **ANÁLISIS DE LA SOLUCIÓN**
  Comprobemos si las soluciones obtenidas satisfacen las condiciones del problema:

$$x + y = 50 \Rightarrow 13 + 37 = 50 \text{ ¡Satisface!}$$
$$x + 2y = 87 \Rightarrow 13 + 2(37) = 13 + 74 = 87 \text{ ¡Satisface!}$$

  Concluimos que ambas soluciones están de acuerdo con las condiciones del problema.

2.2.2. Segunda Aplicación

En una cafetería, Sara compra 2 buñuelos y 3 gaseosas por $5900 y Carlos compra 4 buñuelos y 2 gaseosas por $8200. ¿Cuánto vale cada producto?

Solución

- **ELECCIÓN DE LAS INCOGNITAS**
  Sea: x = precio de un buñuelo
  y = precio de una gaseosa

- **OBTENCIÓN DE LAS ECUACIONES**
  – Como 2 buñuelos y 3 gaseosas cuestan $5900, entonces:

$$2x + 3y = 5900 \text{..} (1)$$

  – Y como 4 buñuelos y 2 gaseosas cuestan $8200, entonce:

$$4x + 2y = 8200 \text{......................................} (2)$$

- **SOLUCIÓN DEL SISTEMA DE ECUACIONES**
  – Si multiplicamos la ecuación (1) por -2 y aplicamos el método de reducción nos queda:

$$\begin{array}{rl} (1) \times -2: & \cancel{-4x} - 6y = -11800 \\ (2): & \cancel{4x} + 2y = \quad 8200 \\ \hline & -4y = -3600 \\ & \therefore y = 900 \end{array}$$

  – Reemplazamos este valor de y en la ecuación (1):

$$2x + 3\,(900) = 5900$$
$$\therefore 2x + 2700 = 5900$$
$$\therefore 2x = 3200$$
$$\therefore x = 1600$$

  – Por lo tanto, un buñuelo cuesta $1600 y una gaseosa cuesta $900.

- **ANÁLISIS DE LAS SOLUCIONES**
  Dejamos este punto como ejercicio al lector.

2.2.3 Tercera Aplicación

La edad de una persona es el doble de la edad de otra. Hace 7 años la suma de las edades era igual a la edad actual de la mayor. Hallemos las edades de ambas personas.

Solución

- **ELECCIÓN DE LAS INCOGNITAS**

  Sea: x = edad de la persona menor

  y = edad de la persona mayor

- **OBTENCIÓN DE LAS ECUACIONES**

  – Como la edad de y es el doble de la edad de x entonces:

  $$y = 2x \text{.....................................} (1)$$

  – Hace 7 años la edad de cada una era $x - 7$ e $y - 7$. Y como la suma de las edades era igual a la edad actual de la mayor entonces:

  $$(x - 7) + (y - 7) = y \text{..................} (2)$$

- **SOLUCIÓN DEL SISTEMA DE ECUACIONES**

– Si sustituimos (1) en (2) nos queda:

$$(x - 7) + (2x - 7) = 2x$$
$$\therefore x - 7 + 2x - 7 = 2x$$
$$\therefore x + 2x - 2x = 7 + 7$$
$$\therefore x = 14$$

  – Reemplazando este valor de x en (1) obtendremos: $y = 2\,(14) = 28$

  – Por lo tanto, la persona mayor tiene 28 años y la menor tiene 14 años.

- **ANÁLISIS DE LAS SOLUCIONES**

  Queda como ejercicio.

2.2.4 Cuarta Aplicación

Un comerciante mezcla café tipo A con café tipo B para obtener una calidad intermedia. Si los mezcla en la proporción de 2 a 3, la mezcla resulta a $7800 el kg, mientras que con una mezcla en la proporción de 2 a 1, el precio de la mezcla es de $7000 el kg. ¿Cuál es el precio del kg de cada tipo de café?

Solución

- **ELECCIÓN DE LAS INCOGNITAS**

  Sean : x = precio por kg del café tipo A

  y = precio por kg del café tipo B

- **OBTENCIÓN DE LAS ECUACIONES**

  – Una mezcla de 2 a 3 significa que por cada 2 kg de café tipo A se añaden 3 kg de café tipo B. Por lo tanto:

2 kg de café tipo A a x pesos el kg	+	3 kg de café tipo B a y pesos el kg	=	5 kg de mezcla a $7800 el kg
$\Downarrow$		$\Downarrow$		$\Downarrow$
$2x$	+	$3y$	=	$(5)\bullet(\$7800)$

  O sea: $2x + 3y = 39000 \text{.................................} (1)$

– Una mezcla de 2 a 1 significa que por cada 2 kg de café tipo A se añade 1 kg de café tipo B. Por lo tanto:

2 kg de café tipo A a x pesos el kg	+	1 kg de café tipo B a y pesos el kg	=	3 kg de mezcla a \$7000 el kg
⇓		⇓		⇓
$2x$	+	$1y$	=	(3) • (\$7000)

O sea: $2x + y = 21.000$ ....(2)

- **SOLUCIÓN DEL SISTEMA DE ECUACIONES**
  Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2) obtenemos x = \$6000 el kg y y = \$9000 el kg.
- **ANÁLISIS DE LAS SOLUCIONES**
  Queda como ejercicio.

2.2.5 Quinta Aplicación

Hallemos dos números sabiendo que si se divide el mayor por el menor, el cociente es 2 y el residuo es 2, y si se divide el quíntuple del menor por el mayor el cociente es 2 y el residuo es 3.

Solución

- **ELECCIÓN DE LAS INCOGNITAS**
  Sea: x = el número mayor
  y = el número menor
- **OBTENCIÓN DE LAS ECUACIONES**
  – En la solución de este problema necesitamos recordar la propiedad fundamental de la división:

  Dividendo = divisor • cociente + residuo

  – Como al dividir el mayor entre el menor, el cociente es 2 y el residuo es 2 entonces:

  $x = 2y + 2$ ....(1)

  – Y como el quíntuple del menor (5y) entre el mayor (x) da como cociente 2 y residuo 3 entonces:

  $5y = 2x + 3$ ....(2)
- **SOLUCIÓN DEL SISTEMA DE ECUACIONES**
  – Sustituyendo (1) en (2) nos queda:

  $$5y = 2(2y + 2) + 3$$
  $$\therefore 5y = 4y + 4 + 3$$
  $$\therefore y = 7$$

  – Y el valor de x será: $x = 2(7) + 2 = 16$
- **ANÁLISIS DE LAS SOLUCIONES**
  Queda como ejercicio.

2.2.6 Sexta Aplicación

Un tren sale de una estación con dirección al Este. Una hora más tarde, un segundo tren, viajando a una velocidad de 16 km/h más que la del primero, sale de la misma estación y se dirige hacia el Oeste. 4 horas después de la salida del primer tren, los dos se encuentran a 384 km de distancia uno del otro. ¿Qué velocidad lleva cada uno?

Solución

- **ELECCIÓN DE LAS INCOGNITAS**
  Sea : x = velocidad que lleva el primer tren
  y = velocidad que lleva el segundo tren

- **OBTENCIÓN DE LAS ECUACIONES**
  – Vamos a dibujar la situación del problema:

– Como el segundo tren viaja a una velocidad de 16 km/h más que el primero, entonces:

$$y = x + 16 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

– El primer tren viaja durante 4 horas y el segundo durante 3 horas, ya que sale 1 hora después. Recordemos que cuando un móvil se desplaza a velocidad constante, la distancia recorrida es: **distancia = velocidad x tiempo**. Por lo tanto:

El primer tren recorrerá: $\mathbf{d_1 = 4x}$
El segundo tren recorrerá: $\mathbf{d_2 = 3y}$

– Y como 4 horas después los separa una distancia de 384 km, entonces:

$$d_1 + d_2 = 384$$

$$\therefore\ 4x + 3y = 384 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

- **SOLUCIÓN DEL SISTEMA DE ECUACIONES**

– Sustituyendo (1) en (2), tenemos:

$$4x + 3(x + 16) = 384$$
$$\therefore\ 4x + 3x + 48 = 384$$
$$\therefore\ 7x = 336$$
$$\therefore\ x = 48 \text{ km/h}$$

– El valor de y será: $y = 48 + 16 = 64$ km/h

- **ANÁLISIS DE LAS SOLUCIONES**
  Queda como ejercicio.

2.2.7 Séptima Aplicación

Una persona tiene un capital de 30.000 dólares en tres inversiones financieras. Una de las inversiones le produce 12% de interés anual, la otra le produce 10% de interés anual y la tercera es un negocio. Hace dos años el negocio perdió 6% y su ingreso neto proveniente de las tres inversiones fue de 2.200 dólares . El año pasado la empresa obtuvo utilidades del 18% y el ingreso neto de las tres inversiones fue 3.640 dólares. ¿Cuánto dinero tiene en cada inversión?

Solución

- **ELECCIÓN DE LAS INCOGNITAS**
  Sea: x = dinero colocado en la primera inversión.
  y = dinero colocado en la segunda inversión.
  z = dinero colocado en la empresa.

- **OBTENCIÓN DE LAS ECUACIONES**
  – Como la inversión total asciende a 30.000 dólares, entonces:

$$x + y + z = 30000 \ldots\ldots(1)$$

- Cada año, la primera inversión le produce ganancias del 12%; es decir, $0,12x$. La segunda inversión le produce ganancias del 10%; es decir, $0,10y$. Como hace 2 años perdió 6% en la empresa, esto equivale a $0,06z$. Hace 2 años la ganancia fue de 2200 dólares, por lo tanto:

$$0,12x + 0,10y - 0,06z = 2200 \ldots\ldots(2)$$

- Y como el año pasado, la empresa obtuvo 18% de ganancia y la ganancia total fue 3640 dólares, entonces:

$$0,12x + 0,10y + 0,18z = 3640 \ldots\ldots(3)$$

- Tenemos, pues, un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas.

- **SOLUCIÓN DEL SISTEMA DE ECUACIONES**
  La solución de este sistema de ecuaciones es $x = 8000$ dólares, $y = 16000$ dólares y $z = 6000$ dólares (¡compruébalo!)

- **ANÁLISIS DE LAS SOLUCIONES**
  Queda como ejercicio.

2.2.8 Octava Aplicación

Marcos, Julio y Margarita limpian una pared en 20 minutos trabajando juntos. Si Marcos y Julio trabajan juntos, la limpian en 24 minutos. Julio hace doble trabajo que Margarita en el mismo tiempo. ¿Cuánto tardará cada uno en hacer el trabajo?

Solución

- **ELECCIÓN DE LAS INCOGNITAS**
  Sea: x = minutos que emplea Marcos en hacer el trabajo solo.
  y = minutos que emplea Julio en hacerlo solo.
  z = minutos que emplea Margarita en hacerlo sola.

- **OBTENCIÓN DE LAS ECUACIONES**

- Analicemos, en primer lugar, la parte del carro que cada uno lava en un minuto:

$\frac{1}{x}$ = parte de la pared que Marcos limpia en 1 minuto

$\frac{1}{y}$ = parte de la pared que Julio limpia en 1 minuto

$\frac{1}{z}$ = parte de la pared que Margarita limpia en 1 minuto

- En 20 minutos, cada uno limpiará $20 \bullet \frac{1}{x}$, $20 \bullet \frac{1}{y}$ y $20 \bullet \frac{1}{z}$. Por lo tanto, para limpiar toda la pared, tardarán juntos:

$$20 \bullet \frac{1}{x} + 20 \bullet \frac{1}{y} + 20 \bullet \frac{1}{z} = 1 \ldots\ldots(1)$$

- En 24 minutos, Marcos y Julio tardarán

$$24 \bullet \frac{1}{x} + 24 \bullet \frac{1}{y} = 1 \ldots\ldots(2)$$

- Como Julio hace doble trabajo que Margarita, entonces Margarita empleará doble tiempo que Julio; es decir:

$$z = 2y \ldots\ldots(3)$$

- Por lo tanto, para solucionar el problema debemos resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 20 \bullet \frac{1}{x} + 20 \bullet \frac{1}{y} + 20 \bullet \frac{1}{z} = 1 \ldots\ldots(1) \\ 24 \bullet \frac{1}{x} + 24 \bullet \frac{1}{y} = 1 \ldots\ldots(2) \\ z = 2y \ldots\ldots(3) \end{cases}$$

- **SOLUCIÓN DEL SISTEMA DE ECUACIONES**

La solución del sistema de ecuaciones obtenido es:

$x = 40$.........Marcos limpia la pared en 40 minutos

$y = 60$.........Julio limpia la pared en 60 minutos

$z = 120$.......Margarita limpia la pared en 120 minutos

18

550 x 8 = 4400

18 + 33 = 51

220 | 3 — 10 73

TALLER DE REPASO DE LA UNIDAD 2

PROBLEMAS SOBRE NÚMEROS

1. Halla dos números sabiendo que su media aritmética es 12 y su diferencia es 8.

2. Se reparten 473 canicas entre A y B. Si dividimos el número de canicas de A entre el número de canicas de B, el cociente es 7 y el residuo es 9. ¿Cuántas canicas tendrá cada uno?

3. Dos números suman 51. La diferencia entre la tercera parte del primero y la sexta parte del segundo es 1. ¿Cuáles son los dos números?

4. Si en una fracción desconocida se suma 2 al numerador, el valor de la fracción queda igual a $\frac{1}{2}$. Si, en cambio, se suma 1 al denominador, queda igual a $\frac{1}{2}$. Halla la fracción.

5. La suma de las dos cifras de un número es 14. Al intercambiar la cifra de las decenas con el de las unidades, el número se aumenta en 18. Halla el número original.

6. Si multiplicamos por 3 el numerador de una fracción y añadimos 12 al denominador, el valor de la fracción es $\frac{3}{4}$, y si el numerador se aumenta en 7 y se triplica el denominador, el valor de la fracción es $\frac{1}{2}$. Halla la fracción.

7. La suma de tres números es 160. Un cuarto de la suma del mayor y el mediano equivale al menor disminuido en 20. Si a la mitad de la diferencia entre el mayor y el menor se suma el número del medio el resultado es 57. Halla los números.

PROBLEMAS DE LA VIDA DIARIA

8. En la papelería, un cliente compra 4 bolígrafos y 3 marcadores por un total de \$2930 y otro se lleva 2 bolígrafos y 5 marcadores por \$3390. ¿Cuánto vale cada artículo?

9. En un corral hay conejos y gallinas, que hacen un total de 61 cabezas y 196 patas. ¿Cuántas gallinas y cuántos conejos hay?

10. Un barco presta el servicio de llevar pasajeros por un río, los traslada de A a B, distantes 75 km, en 3 horas, y de B a A en 5 horas. Halla las velocidades del barco y de la corriente, suponiendo que son constantes.

11. Un pueblo tiene 460 habitantes. El 55% de los hombres y el 60% de las mujeres están casados (hombres con mujeres, claro). Determina el número de hombres y mujeres en este pueblo.

12. Un alumno realiza un examen tipo "test" que consta de 20 preguntas. Cada acierto le supone 0,5 puntos a favor y cada respuesta equivocada o no contestada le significa 0,25 puntos menos. Calcula en número de aciertos si obtuvo al final 7 puntos.

13. Halla las edades de dos personas, sabiendo que hace 10 años la edad de la primera era 4 veces la edad de la segunda, y dentro de 20 años la edad de la primera será sólo el doble.

14. Un inversionista coloca una parte de cierto capital al 4% y otra al 5%, recibiendo anualmente un interés de 1100 dólares. Si los hubiera invertido al contrario, recibiría 50 dólares más por concepto de interés. Halla la cantidad de dinero invertido.

15. El 40% de los alumnos de 8º A son varones y la cuarta parte de los de 8º B son chicas. En total son 33 varones y 25 chicas. ¿Cuántos alumnos tiene cada grupo?

16. Una empresa comercializa dos tipos de latas de carne con fríjoles: las normales, que contienen 200g de carne y 150g de fríjoles, y las "extra", que llevan 250g de carne y 100g de fríjoles. ¿Cuántas latas de cada tipo podrán fabricar con 44 kg de carne y 26 kg de fríjoles?

17. Una química tiene dos concentraciones de un ácido, en soluciones al 40% y al 70%. ¿Cuánto debe tomar de cada una para obtener 100 gramos de una solución al 49%?

18. Una caja contiene 120 paquetes. Unos pesan 1/2 libra cada uno, y los demás, 1/3 libra cada uno. ¿Cuántos paquetes de cada tipo hay, si el peso total del contenido de la caja asciende a 48 libras?

19. El taller de imprenta de un periódico cuenta con dos máquinas dobladoras para dejar listo el diario de la mañana, cuya circulación es de 29000 ejemplares. La máquina más lenta puede doblar los periódicos a una velocidad de 6000 por hora, mientras la otra los dobla a 10.000 por hora. Si el uso de la máquina más lenta se retrasa media hora, por una leve avería, ¿cuál será el tiempo total necesario para doblar todo el periódico? ¿cuánto tiempo empleará cada máquina en esta tarea?

20. Dos empresas le han ofrecido empleo de vendedor a una persona. Ambos empleos son básicamente iguales; sin embargo, una empresa le paga sólo una comisión del 8%, en tanto que la otra le ofrece 51 dólares a la semana, más una comisión del 5%. Los mejores vendedores, en cualquiera de las dos empresas, rara vez tienen ventas superiores a los 4.000 dólares por semana. Antes de aceptar una de estas dos ofertas el candidato necesita saber en qué punto pagan lo mismo ambas empresas y cuál de las dos paga más a ambos lados de dicho punto. Resuélvelo gráfica y algebraicamente.

21. Una concesión del gobierno de 1.360.000 dólares se dividió entre 100 científicos de tres grupos de investigación A, B y C. Cada científico del grupo A recibió 20.000 dólares, cada científico del B recibió 8.000 dólares y cada científico del C recibió 10.000 dólares. El grupo de investigación A recibió cinco veces los fondos del grupo de investigación B. ¿Cuántos científicos pertenecen a cada grupo?

PROBLEMAS DE GEOMETRÍA

22. Si la base de un rectángulo aumenta 2 m y la altura 1 m, el área aumenta 19 m^2. Si, en cambio, la base disminuye 1 m y la altura 2 m, el área pierde 17 m^2. Calcula las dimensiones del rectángulo.

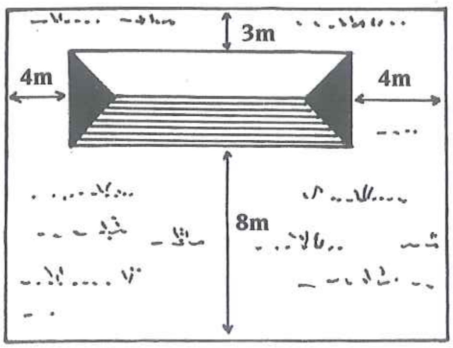
23. Encuentra las dimensiones de un rectángulo de 72 cm de perímetro, si su base es 25% más larga que su altura.

24. Un trapecio tiene 42 cm^2 de área y 6 cm de altura. Calcula la longitud de las dos bases, sabiendo que una de ellas excede a la otra en 3 cm.

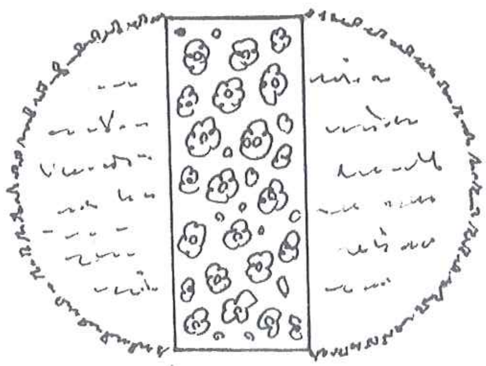
25. Un terreno rectangular tenía 340 metros de perímetro. El municipio expropió una franja de 15 m de ancho para ampliar una carretera. En compensación, cedió a la finca otra banda de 10 metros de largo. Con todo, el terreno cuenta ahora con 200 m^2 menos del área de antes. ¿Cuáles eran sus dimensiones iniciales?

26. Si la base de un rectángulo aumentara en un 20%, su perímetro sería de 130 cm. Pero si la base no se modifica y la altura la aumentamos en un 20%, el perímetro sería de 134 cm. Calcula la longitud de la base y la altura.

27. Tenemos el plano de un lote con un casa de campo. ¿Cuáles son las dimensiones del lote, sabiendo que su perímetro es de 78 m y el área que no ocupa la casa cubre 300 m^2?



Problema 27



Problema 28

28. El contorno de un parque mide 43,4 metros y el perímetro del rectángulo es de 32 m. Calcula las dimensiones del rectángulo (Toma $\pi = 3{,}14$).

PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS DEL ICFES

1. Los números que siguen en la serie: 1, 2, 3 ; 6, 7, 8 ; 11, 12, 13 son:

   a) 14, 15, 16 b) 16, 17, 18 c) 20, 21, 22 d) 15, 16, 17

2. Si usted demora 3 minutos para recorrer 200 metros, ¿cuántos minutos emplea para llegar a una distancia de 800 metros, si descansa 1 minuto cada 200 metros?

   a) 13 b) 14 c) 15 d) 16

3. Una profesora parte una manzana en 4 partes iguales. Brinda a una compañera el 25% y a una alumna le da el 33 1/3% del resto. Finalmente, ella se come la mitad de lo que le queda. La fracción que sobra es:

   a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{1}{3}$ e) Nada

4. Carlos pinta una casa en 2 días y Pedro en 3 días. Los dos juntos tardarán:

a) 1 día, 4 horas, 48 minutos
b) 1 día, 2 horas, 7 minutos
c) 1 día, 1 hora
d) 1 día, 48 minutos

5. Rafael es mayor que Darío, y menor que Alberto, quien tiene la misma edad de Carlos. El menor es:

a) Darío
b) Alberto
c) Carlos
d) Rafael

Núcleo Temático

3

POTENCIACIÓN Y RADICACIÓN

LOGRO GENERAL

Simplificar expresiones algebraicas utilizando las propiedades de la potenciación y de la radicación.

DIMENSIONES

LOGROS ESPECÍFICOS	INDICADORES DE LOGRO
Corporal: • Participar en actividades que faciliten el aprendizaje y favorezcan el desarrollo de habilidades de pensamiento.	• En grupos de 2 ó 3 alumnos, utilizan las propiedades de la potenciación y de la radicación para simplificar expresiones algebraicas.
Comunicativa: • Expresar con fluidez sus ideas a sus compañeros. • Expresar una potencia con exponente fraccionario en forma de raíz.	• Explica con claridad los procesos seguidos al utilizar las propiedades de la potenciación y la radicación y al simplificar expresiones algebraicas. • Expresa raíces en forma de potencias.
Cognitiva: • Identificar las propiedades de la potenciación y de la radicación. • Utilizar la notación científica en cantidades muy grandes o muy pequeñas. • Simplificar radicales.	• Utiliza las propiedades de la potenciación y de la radicación para simplificar expresiones algebraicas. • Simplifica radicales. • Escribe una cantidad en notación científica.
Estética: • Elaborar carteleras con las propiedades de la potenciación y de la radicación.	• Socializa las propiedades de la potenciación y de la radicación.
Etica-Actitudinal: • Actuar de manera honesta en la presentación de trabajos y evaluaciones.	• Reconoce y acepta sus fortalezas y debilidades en la actividad académica.

EVALUACIÓN

ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS

3.1 HISTORIA DEL ALGEBRA (13): PIERRE DE FERMAT

Este matemático francés nació en Beaumont de Lomagne, en agosto de 1601, y falleció en Castres, el 12 de enero de 1665. Se educó en su ciudad natal y en Toulouse, dedicándose a la abogacía al terminar sus estudios. Fue nombrado consejero del Parlamento de Toulouse en el año 1631.

Entre sus maestros tuvo a Blaise Pascal, con quien posteriormente mantendría correspondencia sobre temas matemáticos. Entre sus cartas relativas a un juego de azar se encontraba el germen del cálculo de probabilidades. También mantuvo correspondencia con Descartes y otros sabios, pero es especialmente recordado por sus aportaciones a la teoría de números, a la que contribuyó con la formulación de numerosos teoremas (aunque en la mayoría de los casos no daba su demostración). El más famoso de estos teoremas es el llamado "último teorema de Fermat" cuya demostración ha representado un gran reto para los matemáticos durante más de trescientos años "**no existen a, b, c, enteros positivos tales que si $n>2$ se cumple $a^n + b^n = c^n$**".

Format solía escribir sus teoremas en los márgenes de los libros que tenía en sus manos y junto a este teorema dejó anotado "haber encontrado una maravillosa demostración de este teorema pero no cabe en la estrechez del margen".

La demostración maravillosa que no cabía en la estrechez del margen ha sido fuente de numerosas aportaciones matemáticas hasta convertirse en los doscientos folios que el matemático británico Andrew Wiles presentó en 1993 y que contenía un error hacia el final, corregido en 1995 por el propio Wiles y su colega Taylor. Con esta demostración cayó uno de los mayores mitos de las matemáticas.

EJERCICIO 3.1

Lee nuevamente el texto anterior y luego encierra en un círculo, la letra que corresponde a la respuesta correcta:

1. De la lectura del texto anterior se puede deducir que:
   a. El cálculo de las probabilidades se incubó en un trabajo de Fermat.
   b. El derecho es el mejor complemento de la matemática.
   c. Para ser un gran matemático se requiere tener una profesión alterna.
   d. El talento de P. de Fermat era de procedencia innata.

2. De los científicos que se mencionan a continuación, cuál parece haber ejercido más influencia en Pierre de Fermat?
   a. Taylor.
   b. Andrew Wiles.
   c. Blaise Pascal.
   d. René Descartes.

3. En el texto se menciona mucho la palabra teorema. Esta hace referencia a:
   a. Una verdad revelada por Dios a los hombres.
   b. Un principio matemático que da origen a teorías complejas.

c. Un problema geométrico que requiere investigación.
d. Una proposición que afirma una verdad que puede ser demostrada.

4. De Pierre de Fermat se dice todo lo siguiente, menos:
   a. Ejerció la jurisprudencia luego de terminar sus estudios.
   b. Es el inventor del cálculo de las probabilidades.
   c. Acostumbraba apuntar sus descubrimientos matemáticos en las márgenes de los textos que leía.
   d. Uno de sus teoremas, aún representa un desafío para los matemáticos.

5. En el último párrafo el autor afirma que:
   a. Después de la demostración del último teorema de Fermat, éste cayó en el olvido.
   b. La demostración que hizo Fermat de su teorema ocupó doscientos folios.
   c. Wiles y Taylor convirtieron a Fermat en una leyenda.
   d. El último teorema de Fermat ha sido objeto de múltiples estudios y trabajos matemáticos.

3.2 EXPONENTES ENTEROS POSITIVOS

- En el curso anterior usamos el símbolo x^2 para representar el número real $x \cdot x$, el símbolo x^3 para representar el número real $x \cdot x \cdot x$ y, en general, el símbolo x^n para representar el número real $x \cdot x \cdot x \cdots x$ cuando el factor x se repite n veces. Ahora bien, esta definición tiene significado sólo cuando el exponente n es un entero positivo.

RECORDEMOS

DEFINICIÓN DE x^n, con $n \in Z^+$ y $x \in R$

- **Si $n \in Z^+$ y $x \in R$, entonces $x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot x \ldots x}_{n \text{ factores}}$**
- **El número x se llama BASE**
- **El número n se llama EXPONENTE**

- Igualmente establecimos la siguiente lista de propiedades para la potenciación, cuando el exponente es un número entero positivo, denominadas **LEYES DE LOS EXPONENTES.**

RECORDEMOS

LEYES DE LOS EXPONENTES

Si x, y son números reales y m, n son números enteros positivos, entonces:

1. $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$
2. $(x^m)^n = x^{m \cdot n}$
3. $\dfrac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$, con $x \neq 0$ y $m > n$
4. $(x \cdot y)^m = x^m \cdot y^m$
5. $\left(\dfrac{x}{y}\right)^m = \dfrac{x^m}{y^m}$, con $y \neq 0$

- Es importante tener en cuenta que las leyes de los exponentes se aplican a productos y cocientes, y no a sumas ni a restas. Son muchos los errores que se cometen en álgebra por aplicar una propiedad de los exponentes a expresiones algebraicas en las que no es posible hacerlo.

3.3 EXPONENTE CERO Y EXPONENTE ENTERO NEGATIVO

- Dijimos en la sección anterior que la igualdad:

$$x^n = \underbrace{x \bullet x \bullet x \ldots x}_{\text{n factores}}$$

sólo es válida cuando el exponente **n** es un número entero positivo. ¿Cómo debemos definir entonces expresiones como x^0 y x^{-4} ?

- Es claro que no podemos interpretar que 3^0 consiste en multiplicar la base 3 por sí misma 0 veces, ni que 3^{-4} es multiplicar la base 3 por sí misma -4 veces. ¿ Verdad que no tiene sentido ? Debemos, pues, ampliar el concepto de exponente más allá del conjunto de los números enteros positivos; pero, al hacerlo debemos tratar de que cualquier nuevo símbolo de exponente que se defina siga cumpliendo las cinco leyes de los exponentes que aplicamos a los números enteros positivos. Manos a la obra.

3.3.1 El Exponente Cero

EXPERIENCIA

- ¿Cómo debemos definir x^0 de tal manera que se sigan cumpliendo las leyes de los exponentes ?
- Supongamos que la primera ley de los exponentes se cumple cuando el exponente es cero. Veamos:

$$x^0 \bullet x^n = x^{0+n}$$
$$\therefore\ x^0 \bullet x^n = x^n \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Luego, para que la igualdad (1) se cumpla es necesario que $x^0 = 1$ ya que $1 \bullet x^n = x^n$.

- Por lo tanto, para todos los números reales x, diferentes de cero, se cumple que: $x^0 = 1$
- ¿ Por qué $x \neq 0$? Si permitiéramos que $x = 0$ y realizáramos el mismo razonamiento tendríamos lo siguiente:

$$0^0 \bullet 0^n = 0^{0+n}$$
$$\therefore\ 0^0 \bullet 0^n = 0^n$$
$$\therefore\ 0^0 \bullet 0 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ ya que } 0^n = 0$$

Por lo tanto, 0^0 podría ser cualquier número real, ya que todo número real multiplicado por cero es igual a cero; es decir, 0^0 no determina un número real único y por ello preferimos no definir 0^0

APRENDAMOS

DEFINICIÓN DE EXPONENTE CERO

- Para todo número real $x \neq 0$ se cumple que $x^0 = 1$
- No se define 0^0

Ejemplo 1

a) $7^0 = 1$ b) $(-8)^0 = 1$ c) $\left(\frac{4}{5}\right)^0 = 1$

d) $p^0 = 1$, con $p \neq 0$ e) $(m^2 n^3)^0 = 1$; con $m \neq 0$, $n \neq 0$

3.3.2 El Exponente Entero Negativo

EXPERIENCIA

- ¿Con los conocimientos que tenemos hasta el momento, podemos hallar el resultado de $\frac{x^2}{x^5}$?. La respuesta es no, ya que el exponente de la potencia del numerador es menor que el exponente de la potencia del denominador.
- Sin embargo, si aceptamos que las leyes de los exponentes se aplican en este caso, tenemos:

$$\frac{x^2}{x^5} = x^{2-5}$$

$$\therefore \boxed{\frac{x^2}{x^5} = x^{-3}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(1)}$$

es decir, el exponente negativo se origina al dividir dos potencias de la misma base cuando el exponente del numerador es menor que el exponente del denominador.

- Ahora bien, ¿ cómo se interpreta x^{-3} ? La respuesta la obtenemos al examinar de nuevo la fracción $\frac{x^2}{x^5}$

$$\frac{x^2}{x^5} = \frac{\cancel{x}\bullet\cancel{x}}{\cancel{x}\bullet\cancel{x}\bullet x\bullet x\bullet x} \text{ ; con } x \neq 0$$

$$\therefore \frac{x^2}{x^5} = \frac{1}{x\bullet x\bullet x} \text{ ; con } x \neq 0$$

$$\therefore \boxed{\frac{x^2}{x^5} = \frac{1}{x^3}; \text{ con } x \neq 0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(2)}$$

- De las igualdades (1) y (2) podemos concluir que: $x^{-3} = \frac{1}{x^3}$, $x \neq 0$
- En general:

APRENDAMOS

DEFINICIÓN DE EXPONENTE ENTERO NEGATIVO

Si $x \neq 0$ y $n \in N$, entonces $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$

¡ATENCIÓN!

1. Puede probarse que las leyes de los exponentes son válidas para todo entero m y n, positivo, negativo o cero. Así pues, la tercera ley de los exponentes, relacionada al principio de esta unidad, podemos escribirla así:

$$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n} \text{ , para todo } m, n \in Z.$$

2. En adelante, cuando tengamos que simplificar expresiones, supondremos que todas las letras que aparecen en el denominador son números reales diferentes de cero.

Ejemplo 2

Simplifiquemos y escribamos con exponente positivo la expresión $7x^{-5}y^{0}$

Solución

- Tenemos:

$$7x^{-5}y^{0} = 7\bullet\frac{1}{x^{5}}\bullet 1 \text{ ....ya que } x^{-5} = \frac{1}{x^{5}} \text{ y } y^{0} = 1$$

- Por lo tanto:

$$7x^{-5}y^{0} = \frac{7}{x^{5}} \text{ ....¿por qué?}$$

Ejemplo 3

Simplifiquemos y escribamos con exponente positivo la expresión $\dfrac{9m^{5}n^{-3}}{4m^{-3}}$

Solución

Este ejercicio podemos resolverlo de dos maneras. Veamos:

- **PRIMERA MANERA:**

$$\frac{9m^{5}n^{-3}}{4m^{-3}} = \frac{9m^{5-(-3)}n^{-3}}{4} \text{ ....ya que } \frac{m^{5}}{m^{-3}} = m^{5-(-3)}$$

$$\therefore \frac{9m^{5}n^{-3}}{4m^{-3}} = \frac{9m^{8}\bullet\frac{1}{n^{3}}}{4} \text{ ....ya que } n^{-3} = \frac{1}{n^{3}}$$

$$\therefore \frac{9m^{5}n^{-3}}{4m^{-3}} = \frac{\frac{9m^{8}}{n^{3}}}{4} \text{ ....¿ por qué ?}$$

$$\therefore \frac{9m^{5}n^{-3}}{4m^{-3}} = \frac{9m^{8}}{4n^{3}} \text{ .... ¿ por qué ?}$$

- **SEGUNDA MANERA:**

$$\frac{9m^{5}n^{-3}}{4m^{-3}} = \frac{9m^{5}\bullet\frac{1}{n^{3}}}{4\bullet\frac{1}{m^{3}}} \text{ ....ya que } n^{-3} = \frac{1}{n^{3}} \text{ ; } m^{-3} = \frac{1}{m^{3}}$$

$$\therefore \frac{9m^{5}n^{-3}}{4m^{-3}} = \frac{\frac{9m^{5}}{n^{3}}}{\frac{4}{m^{3}}} \text{ ....¿ por qué ?}$$

$$\therefore \frac{9m^{5}n^{-3}}{4m^{-3}} = \frac{9m^{5}\bullet m^{3}}{4n^{3}} \text{ ....¿ por qué ?}$$

$$\therefore \frac{9m^{5}n^{-3}}{4m^{-3}} = \frac{9m^{8}}{4n^{3}} \text{ .... ¿ por qué ?}$$

¡ATENCIÓN!

- Notemos que en ambos métodos, los FACTORES que eran potencias con exponente negativo se pasaron del numerador al denominador y viceversa, con la sola modificación de cambiar el signo del exponente de negativo a positivo. En general:

$$\frac{x^{-n}\bullet y^{-m}}{z^{-p}} = \frac{z^{p}}{x^{n}\bullet y^{m}}$$

- La definición $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ hace posible trasladar FACTORES del numerador al denominador de una fracción y viceversa, cambiando únicamente el signo del exponente.
- Al hacer el traslado es indispensable tener en cuenta que sean FACTORES y no TÉRMINOS los que se están trasladando. No olvidemos que las leyes de los exponentes se aplican sólo a productos y cocientes (factores) y no a sumas y restas (términos).

Ejemplo 4

Simplifiquemos y escribamos sin exponentes negativos la expresión: $\frac{a+b}{a^{-3}+b^{-3}}$

Solución

$$\frac{a+b}{a^{-3}+b^{-3}} = \frac{a+b}{\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad a^{-3} = \frac{1}{a^3} \ ; \ b^{-3} = \frac{1}{b^3}$$

$$\therefore \ \frac{a+b}{a^{-3}+b^{-3}} = \frac{a+b}{\frac{b^3+a^3}{a^3b^3}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{¿ por qué ?}$$

$$\therefore \ \frac{a+b}{a^{-3}+b^{-3}} = \frac{a^3b^3(a+b)}{a^3+b^3} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{¿ por qué ?}$$

$$\therefore \ \frac{a+b}{a^{-3}+b^{-3}} = \frac{a^3b^3\cancel{(a+b)}}{\cancel{(a+b)}(a^2-ab+b^2)} \quad \cdots\cdots \text{¿ por qué ?}$$

$$\therefore \ \frac{a+b}{a^{-3}+b^{-3}} = \frac{a^3b^3}{a^2-ab+b^2}$$

Ejemplo 5

Simplifiquemos y escribamos sin exponentes negativos la expresión $\frac{(m^{-1}-n^{-1})^{-2}}{(m^2n^2)}$

Solución:

$$\therefore \ \frac{(m^{-1}-n^{-1})^{-2}}{m^2n^2} = \frac{\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)^{-2}}{m^2n^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad m^{-1} = \frac{1}{m} \ ; \ n^{-1} = \frac{1}{n}$$

$$\therefore \ \frac{(m^{-1}-n^{-1})^{-2}}{m^2n^2} = \frac{\left(\frac{n-m}{mn}\right)^{-2}}{m^2n^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{¿ por qué ?}$$

$$\therefore \ \frac{(m^{-1}-n^{-1})^{-2}}{m^2n^2} = \frac{\frac{(n-m)^{-2}}{(mn)^{-2}}}{m^2n^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$\therefore \ \frac{(m^{-1}-n^{-1})^{-2}}{m^2n^2} = \frac{\frac{(mn)^2}{(n-m)^2}}{m^2n^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad \frac{a^{-2}}{b^{-2}} = \frac{b^2}{a^2}$$

$$\therefore \ \frac{(m^{-1}-n^{-1})^{-2}}{m^2n^2} = \frac{\frac{m^2n^2}{(n-m)^2}}{m^2n^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (mn)^2 = m^2n^2$$

$$\therefore \ \frac{(m^{-1}-n^{-1})^{-2}}{m^2n^2} = \frac{\cancel{m^2n^2}}{\cancel{m^2n^2}(n-m)^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{¿ por qué ?}$$

$$\therefore \ \frac{(m^{-1}-n^{-1})^{-2}}{m^2n^2} = \frac{1}{(n-m)^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{¿ por qué ?}$$

¡ATENCIÓN!

1. **Una recomendación general**: al simplificar expresiones con exponentes es mejor aplicar primero las leyes de los exponentes y, luego, las definiciones correspondientes al exponente cero y al exponente negativo.

2. En el ejemplo 5, al trabajar la expresión $(m^{-1} - n^{-1})^{-2}$ pudimos tener la tentación de escribir que $(m^{-1} - n^{-1})^{-2} = (m^{-1})^{-2} - (n^{-1})^{-2}$. Desgraciadamente éste es uno de los errores más frecuentes que se cometen en álgebra y nace de la creencia que la potenciación es distributiva con respecto a la suma y a la resta. Recordemos que:

$$(\mathbf{x^a \pm b^b})^n \neq (\mathbf{x^a})^n \pm (\mathbf{y^b})^n$$

La potenciación no es distributiva con respecto a la suma ni a la resta.

En cambio:

$$(\mathbf{x^a \bullet b^b})^n = (\mathbf{x^a})^n \bullet (\mathbf{y^b})^n$$

$$\left(\frac{\mathbf{x^a}}{\mathbf{y^b}}\right)^n = \frac{(\mathbf{x^a})^n}{(\mathbf{y^b})^n}$$

La potenciación es distributiva con respecto a la multiplicación y a la división.

Ejemplo 6

¿ Cómo resulta mejor la simplificación de $(x^{-5}y^4)^{-3}$?

Solución

- Analicemos estas dos formas de resolver el ejercicio:

PRIMER MÉTODO	SEGUNDO MÉTODO
$(x^{-5}y^4)^{-3} = (x^{-5})^{-3} \bullet (y^4)^{-3}$	$(x^{-5}y^4)^{-3} = \dfrac{1}{(x^{-5}y^4)^3}$
$\therefore (x^{-5}y^4)^{-3} = x^{15} \bullet y^{-12}$	$\therefore (x^{-5}y^4)^{-3} = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{x^5} \bullet y^4\right)^3}$
$\therefore (x^{-5}y^4)^{-3} = \dfrac{x^{15}}{y^{12}}$	$\therefore (x^{-5}y^4)^{-3} = \dfrac{1}{\frac{1}{x^{15}} \bullet y^{12}}$
	$\therefore (x^{-5}y^4)^{-3} = \dfrac{1}{\frac{y^{12}}{x^{15}}}$
	$\therefore (x^{-5}y^4)^{-3} = \dfrac{x^{15}}{y^{12}}$

- Como vemos, el primer método es más simple que el segundo.

EJERCICIO 3.2

En los ejercicios 1. a 20. simplificar las expresiones dadas utilizando las leyes de los exponentes y hallar el resultado.

1. 7^{-3}
2. $(-7)^{-2}$
3. $5^3 \cdot 3^{-4} \cdot 3^3$
4. $\dfrac{6^{-2} \cdot 6^5}{6^4}$
5. $\dfrac{5^{-3}}{5^{-1}}$
6. $\left(\dfrac{3}{5}\right)^{-3}$
7. $(-6)^2 \cdot 6^{-2}$
8. $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-3}$
9. $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{3} \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-4}$
10. $5^3 \div (-5)^{-2}$
11. $5^0 + 2^0 - 7^1$
12. $11 \cdot (-11)^{-2}$
13. $7^0 \cdot 7^{-3}$
14. $(5^{-1} - 5^{-2})^{-1}$
15. $(5^{-1} \cdot 5^{-2})^{-1}$
16. $(2^3 + 5^3)^0$
17. $5(3^4)^0$
18. $\left(\dfrac{2^5}{3^{-4}}\right)^{0}$
19. $\left(\dfrac{5^{-2}}{5^{-4}}\right)^{-1}$
20. $\left(\dfrac{3}{7}\right)^{-3}$

En los ejercicios 21. a 24., escribir una expresión equivalente a la dada pero sin usar fracciones.

21. $\dfrac{3a}{4b^2}$
22. $\dfrac{5(a-b)}{(a+b)^{-1}}$
23. $\dfrac{15m^{-2}n}{3m^5n^{-3}}$
24. $\dfrac{8p^{-5}n^{-4}}{2p^{-5}n^{-6}}$

En los ejercicios 25. a 28., escribir una fracción de numerador 1 que sea equivalente a la fracción dada:

25. $\dfrac{x^3}{y^5}$
26. $\dfrac{5x^0y^3}{y^2z^{-2}}$
27. $\dfrac{7}{9}$
28. $x^2 + y^2$

En los ejercicios 29. a 42., simplificar las expresiones dadas y escribir el resultado con exponentes positivos:

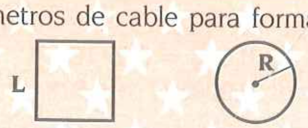
29. $\dfrac{3^{-5}x^{-2}y^{-3}}{9^{-3}x^{-4}y}$
30. $\dfrac{10^{-2}x^{-2}y^5z^{-3}}{2^{-3}x^2y^{-3}z^{-4}}$
31. $\left(\dfrac{5^{-2}t^{-2}b^3}{25^{-1}t^{-3}b^{-1}}\right)^2$
32. $\left(\dfrac{x^{-1}y^5z^{-3}}{x^0y^5z^{-4}}\right)^{-3}$
33. $\left(\dfrac{n^{-3}b^{-2}z^0}{n^{-4}b^{-3}z^{-2}}\right)^2$
34. $a^{-3} - \dfrac{5}{a^3}$
35. $\dfrac{x^{-1}}{y^{-2}} + \dfrac{y}{x^{-2}}$
36. $\dfrac{a^{-2} + a^{-3}}{a^{-4}}$
37. $\dfrac{b^{-2} + x^{-2}}{b^{-2} - x^{-2}}$
38. $\dfrac{b^{-2}a^{-1} + b^{-1}a^{-2}}{b^{-2} - a^{-2}}$
39. $\dfrac{a^{-2} + 2a^{-1}b^{-1} - 15b^{-2}}{b^{-1}a^{-2} + 5b^{-2}a^{-1}}$
40. $5(a-1)(a+1)^{-3} - (a+1)^{-2}$
41. $(a+3)^{-3}(a-2)^2 - (a-2)^3(a+3)^{-4}$
42. $4(3m-2)^{-2}(4m+3)^{-2} + 3(3m-2)^{-3}(4m+3)^{-1}$

En los ejercicios 43. a 50., escribir el resultado como una potencia de base 3 y exponente positivo.

43. $(-81)^{-3}$
44. $9^2 \cdot 27^3 \cdot 81^{-3}$
45. $3^{-5} \cdot 9^4$
46. $5 \cdot 3^4 + 4 \cdot 3^4$
47. $35 \cdot 3^{-2} - 8 \cdot 3^{-2}$
48. $\dfrac{3^{-4} \cdot 3^{-2}}{3^2 \cdot 3^{-3}}$
49. $\dfrac{7 \cdot 3^{-2} + 2 \cdot 3^{-2}}{13 \cdot 3^4 - 4 \cdot 3^4}$
50. $\dfrac{29 \cdot 3^{-5} - 2 \cdot 3^{-5}}{9 \cdot 3^{-2}}$

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 1

Se tienen 4 metros de cable para formar un cuadrado y un círculo con iguales áreas



Para encontrar la cantidad de cable que debe emplearse en cada figura, deben plantearse las siguientes ecuaciones:

a) $L = \pi R$ y $4L + \pi R = 4$

b) $L = \sqrt{\pi} R$ y $4L + 2\pi R = 4$

c) $2L = \pi R$ y $L + R = 4$

d) $L = \pi\sqrt{R^2}$ y $4L + 4\pi R = 4$

3.4 NOTACIÓN CIENTÍFICA

- A menudo, el trabajo científico implica trabajar con cantidades muy grandes o muy pequeñas; por ejemplo, la velocidad de la luz es:

$$300.000 \text{ km/seg} = 3x10^5 \text{ km/seg}$$

La masa de un átomo de hidrógeno (cuenta 23 ceros después de la coma decimal) es:

$$0{,}000000000000000000000001673 \text{ g} = 1{,}673 \bullet 10^{-24} \text{g}$$

- Para simplificar la escritura emplearemos la **NOTACIÓN CIENTÍFICA** que consiste en representar el número como el producto de su número entre 1 y 10 por una potencia de 10.

Ejemplo 1

Escribamos el número 357,43 en notación científica.

Solución

- Primero escribimos el número 357,43 como un número decimal entre 1 y 10; así: 3,5743
- Naturalmente $357{,}43 \neq 3{,}5743$ ya que hemos corrido la coma decimal dos lugares a la izquierda; es decir, para que 3,5743 sea igual a 357,43 debemos multiplicarlo por 100 (o por 10^2)
- Por lo tanto, $357{,}43 = 3{,}5743 \bullet 10^2$

Ejemplo 2

Escribamos el número 0,0056 en notación científica.

Solución

- El número decimal entre 1 y 10 que corresponde a 0,0056 es 5,6
- Para convertir 0,0056 en 5,6 tenemos que correr la coma decimal tres lugares a la derecha; es decir, para que 5,6 sea igual a 0,0056 debemos dividirlo por 1000 (ó multiplicarlo por 10^{-3}).
- Por lo tanto, $0{,}0056 = 5{,}6 \bullet 10^{-3}$

APRENDAMOS

NÚMEROS EN NOTACIÓN CIENTÍFICA

Un número positivo **N** está escrito en NOTACIÓN CIENTÍFICA cuando **N** se representa en la forma:

$$\mathbf{m \bullet 10^a}$$

donde $\mathbf{1 \leq m < 10}$ y **a** es un número entero (positivo, negativo o cero)

Ejemplo 3

a) $5870 = 5{,}87 \bullet 10^3$ b) $0{,}083 = 8{,}3 \bullet 10^{-2}$

c) $4960000 = 4{,}96 \bullet 10^6$ d) $0{,}000687 = 6{,}87 \bullet 10^{-4}$

Ejemplo 4

Calculemos el valor de la siguiente fracción: $\dfrac{(0{,}000000000000024)(720)}{(48000000000)(0{,}0012)}$

Solución

- Escribimos cada factor en notación científica; así: $\dfrac{(2{,}4\cdot 10^{-14})(7{,}2\cdot 10^{2})}{(4{,}8\cdot 10^{10})(1{,}2\cdot 10^{-3})}$
- A continuación, asociamos todas las potencias de 10 y los otros factores; así: $\dfrac{(2{,}4\cdot 7{,}2)\cdot(10^{-14}\cdot 10^{2})}{(4{,}8\cdot 1{,}2)\cdot(10^{10}\cdot 10^{-3})}$
- Finalmente, simplificamos cada grupo asociado y escribimos el resultado en notación científica

$$\frac{(2{,}4\cdot 7{,}2)(10^{-14}\cdot 10^{2})}{(4{,}8\cdot 12)(10^{10}\cdot 10^{-3})} = \frac{6\cdot 10^{-12}}{2\cdot 10^{7}} = 3\cdot 10^{-19}$$

¡ATENCIÓN! Muchas calculadoras electrónicas emplean la notación científica escribiendo en la pantalla: 2,87369 15 ó 2,87369 E 15. Cualquiera de estas dos escrituras significa $2{,}87369\cdot 10^{15}$

Ejemplo 5

Cuando observamos un objeto celeste lejano (como el sol o una estrella) en realidad no lo vemos como está en el instante sino como estaba hace un tiempo. Esto debido a la gran distancia que nos separa de ellos. Consideremos esta situación: la distancia entre el sol y la tierra es de aproximadamente $1{,}488\cdot 10^{8}$ km y la luz viaja a una velocidad de $3\cdot 10^{5}$ km/seg ¿ Hace cuántos minutos estaba el sol como lo estamos viendo ahora ?

Solución

- Puesto que $d = v\cdot t$, entonces $t = \dfrac{d}{v}$
- Por lo tanto:

$$t = \frac{1{,}488\cdot 10^{8}\,\text{Km}}{3\cdot 10^{5}\,\text{Km/seg}} = 0{,}496\cdot 10^{3}\text{ seg} = 4{,}96\cdot 10^{2}\text{ seg} = 8{,}3\text{ minutos}$$

EJERCICIO 3.3

En los ejercicios 1. a 12. escriba cada número en notación científica.

1. 80
2. 700
3. 4000
4. 200000
5. 0,007
6. 0,06
7. 0,000009
8. 0,63
9. 0,81
10. 0,0045
11. 0,00084
12. 978,0045

En los ejercicios 13. a 24. escriba cada número después de eliminar la potencia de 10

13. $7\cdot 10^{3}$
14. $6\cdot 10^{5}$
15. $7\cdot 10^{-2}$
16. $9\cdot 10^{-4}$
17. $9{,}7\cdot 10^{-4}$
18. $4{,}3\cdot 10^{5}$
19. $6{,}3\cdot 10^{-5}$
20. $6{,}9\cdot 10^{-7}$
21. $8{,}43\cdot 10$
22. $7{,}15\cdot 10^{-12}$
23. $6{,}23\cdot 10^{-4}$
24. $7{,}32\cdot 10^{8}$

En los ejercicios 25. a 32. escriba cada número en notación científica

25. 7325000000
26. 0,0000000456
27. La energía de un rayo láser puede llegar hasta 10 000 000 000 vatios.

28. Se denomina **AÑO-LUZ** la distancia que recorre la luz en una año. Esta distancia es aproximadamente 5 870 000 000 000 millas.

29. El núcleo de un átomo tiene un diámetro que mide un poco más de $\frac{1}{100000}$ del átomo entero.

30. La masa de una molécula de agua es: 0,00000000000000000000003 gramos.

En los ejercicios 31. a 35. escriba el número equivalente al número dado pero sin la potencia de base 10.

31. $8{,}35 \bullet 10^{10}$

32. $6{,}23 \bullet 10^{-13}$

33. El radio del sol mide aproximadamente $4{,}33 \bullet 10^{5}$ millas.

34. La masa probable de un átomo de hidrógeno es $1{,}7 \bullet 10^{-24}$ gramos.

35. El diámetro de un glóbulo rojo es de unos $7{,}5 \bullet 10^{-5}$ cm.

En los ejercicios 36. a 41. simplificar y escribir el resultado en notación científica.

36. $(2 \bullet 10^{-5})(3 \bullet 10^{9})$

37. $(4 \bullet 10^{6})(2 \bullet 10^{-4})$

38. $(2 \bullet 10^{-4})(2 \bullet 10^{-3})$

39. $\dfrac{6 \bullet 10^{12}}{2 \bullet 10^{15}}$

40. $\dfrac{15 \bullet 10^{-2}}{3 \bullet 10^{-6}}$

41. $\dfrac{12 \bullet 10^{3}}{4 \bullet 10^{-4}}$

En los ejercicios 42. a 45. escribir cada número en notación científica y simplificar. Luego, expresar cada resultado en notación científica.

42. $\dfrac{(60000)\,(0{,}000002)}{0{,}0012}$

43. $\dfrac{(0{,}0008)\,(3000)}{0{,}00024}$

44. $\dfrac{(90000)\,(0{,}000003)}{(0{,}0006)\,(1800000)}$

45. $\dfrac{(0{,}000026)\,(210)}{(420000)\,(0{,}00013)}$

46. La masa de la tierra es $6 \bullet 10^{27}$ gramos y cada gramo equivale a $1 \bullet 10^{-6}$ toneladas. ¿Cuántas toneladas son la masa de la tierra ?

47. Algunas computadoras son capaces de hacer operaciones a una velocidad de 10^{-7} segundos.¿Cuántas operaciones podrá realizar la computadora en 1 seg. ? ¿ Y en 1 min ?

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 2

Halla los posibles valores que permitan reconstruir la siguiente multiplicación:

$$\begin{array}{r} 2\,\square\,80 \\ \times\ 5 \\ \hline 13\,\square\,00 \end{array}$$

3.5 EXPONENTES RACIONALES

3.5.1 Introducción y Repaso

- Ya sabemos el significado de la expresión $\mathbf{a^n}$ cuando **n** es un número entero positivo, **n** es cero y **n** es un entero negativo. Pero, ¿ qué significa $\mathbf{a^n}$ cuando **n** es un número racional como $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$? En esta sección vamos a dar respuesta a esta pregunta.

- Los exponentes racionales están íntimamente ligados con las raíces cuyo estudio inicial abordamos en el curso anterior. Por ésta razón, conviene revisar algunos de los conceptos estudiados allí. Veamos:

2 es una raíz cuadrada de 4 porque $2^2 = 4$
-2 también es una raíz cuadrada de 4 porque $(-2)^2 = 4$
3 es una raíz cuarta de 81 porque $3^4 = 81$
-3 también es una raíz cuarta de 81 porque $(-3)^4 = 81$
-4 es una raíz cúbica de -64 porque $(-4)^3 = -64$
4 es una raíz cúbica de 64 porque $4^3 = 64$

- Notemos que hay dos raíces cuadradas reales de 4 y dos raíces cuartas reales de 81. Para distinguir entre las dos raíces, usamos el concepto de **raíz cuadrada principal** o **raíz cuarta principal**, así:

$\sqrt{4} = 2$ es la **raíz cuadrada principal (o positiva) de 4**.
$\sqrt[4]{81} = 3$ es la **raíz cuarta principal (ó positiva) de 81**.

Sin embargo, si queremos referirnos a la raíz cuadrada negativa de 4 ó a la raíz cuarta negativa de 81 escribimos:

$$-\sqrt{4} = -2 \quad ; \quad -\sqrt[4]{81} = -3$$

Y si queremos indicar ambas raíces, escribimos:

$$\pm\sqrt{4} = \pm 2 \quad ; \quad \pm\sqrt[4]{81} = \pm 3$$

APRENDAMOS

DEFINICIÓN DE RAÍZ n-SIMA

- Si $n \in N$ y $n > 1$ entonces el símbolo $\sqrt[n]{a}$ denota la **raíz n-sima principal** de **a**
- Si **a > 0**, entonces $\sqrt[n]{a}$ es la **raíz n-sima positiva** de **a**
- Si **a < 0** y **n es impar**, entonces $\sqrt[n]{a}$ es la **raíz n-sima negativa** de **a**.
- En todos los casos, $\sqrt[n]{0}=0$

Ejemplo 1

a) $\sqrt{169}=13$ (no - 13 y tampoco ± 13)

b) $-\sqrt{169}=-13$

c) $\pm\sqrt{169}=\pm 13$

d) $\sqrt{14400}= 120$ porque $120 > 0$ y $120^2 = 14400$

e) $\sqrt{-225}$ no está definido porque no existe ningún número real que elevado al cuadrado sea igual a - 225

f) $\sqrt[3]{343}= 7$ porque $343 = 7^3$

g) $\sqrt[3]{-1728}= -12$ porque $-1728 = (-12)^3$

- Estos ejemplos nos muestran una diferencia fundamental entre las raíces de índice par y las raíces de índice impar. Las raíces de índice par están definidas sólo para números reales positivos y el cero. Las raíces de índice impar están definidas para cualquier número real.
- Siempre que $\sqrt[n]{a}$ exista, se cumple por definición que: $(\sqrt[n]{a})^n = a$
- Muchas veces es necesario considerar no sólo $(\sqrt[n]{a})^n$, sino también $\sqrt[n]{a^n}$. Por ejemplo:

$$\sqrt[4]{2^4} = \sqrt[4]{16} = 2 \quad ; \quad \sqrt[3]{(-4)^3} = \sqrt[3]{-64} = -4$$

Si el índice de la raíz es **impar,** no hay ningún problema ya que para todo número real **a** se cumple que: $\sqrt[n]{a^n} = a$

Sin embargo, el problema se presenta cuando **n** es par y **a** es negativo. Veamos por qué:

* Si $a=-3$ y $n=4$, entonces $\sqrt[n]{a^n}=\sqrt{(-3)^4}=\sqrt{81}=+9$ a pesar de que $a=-3$
* Si $a=-6$ y $n=2$, entonces $\sqrt{a^2}=\sqrt{(-6)^2}=\sqrt{36}=+6$ a pesar de que $a=-6$

En general, si n es par, se cumple que:

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{a^2}=|a|\\ \sqrt[4]{a^4}=|a|\\ \sqrt[6]{a^6}=|a|\end{array}\right\} \therefore \sqrt[n]{a^n}=|a|\text{, si n es par y } n\geq 2$$

¡ATENCIÓN!

- En adelante, y con el fin de evitar confusiones, supondremos que todas las variables contenidas dentro de un radical son positivas, con lo cual: $\sqrt[n]{a^n}=a$
- Teniendo en cuenta esta suposición y que n es un entero positivo, mayor que uno, podemos escribir que: $(\sqrt[n]{a})^n=\sqrt[n]{a^n}=a$

Ejemplo 2

a) $\sqrt[3]{-343}=-\sqrt[3]{7^3}=-7$

b) $\sqrt[5]{243}=\sqrt[5]{3^5}=3$

c) $\sqrt[4]{a^4}=a$, siempre que $a\geq 0$

d) $\sqrt{x^6}=\sqrt{(x^3)^2}=x^3$, siempre que $x\geq 0$

e) $\sqrt[3]{b^6}=\sqrt[3]{(b^2)^3}=b^2$

3.5.2 Origen del Exponente Fraccionario Racional

PRIMERA EXPERIENCIA

- Completemos las siguientes igualdades de manera que la propiedad de los exponentes: $(a^m)^n=a^{mn}$ siga siendo válida aunque el exponente sea fraccionario:

  $(5^{1/2})^2=5^{1/2\cdot 2}=5^{2/2}=5$ $\quad(6^{1/2})^2=$____ $=$____ $=$____ $\quad(8^{1/5})^5=8^{1/5\cdot 5}=8^{5/5}=8$

  $(7^{1/4})^4=$____ $=$____ $=$____ $\quad(3^{1/7})^7=$____ $=$____ $=$____

- Como vemos:
  * $5^{1/2}$ es lo mismo que la raíz cuadrada de 5, porque al elevar $5^{1/2}$ al cuadrado obtenemos 5.
  * $6^{1/2}$ es lo mismo que la raíz cuadrada de 6, porque al elevar $6^{1/2}$ al cuadrado obtenemos 6.
  * $8^{1/5}$ es lo mismo que la raíz quinta de 8, porque al elevar $8^{1/5}$ a la quinta potencia obtenemos 8.
  * $7^{1/4}$ es lo mismo que la raíz cuarta de 7, porque al elevar $7^{1/4}$ a la cuarta potencia obtenemos 7.
  * $3^{1/7}$ es lo mismo que la raíz séptima de 3, porque al elevar $3^{1/7}$ a la séptima potencia obtenemos 3.

- Por lo tanto:

  $5^{1/2}=\sqrt{5}$ $\quad 6^{1/2}=\sqrt{6}$ $\quad 8^{1/5}=\sqrt[5]{8}$ $\quad 7^{1/4}=\sqrt[4]{7}$ $\quad 3^{1/7}=\sqrt[7]{3}$

APRENDAMOS

DEFINICIÓN DE $a^{1/n}$

- Si $n \in N$ y a es un número real no negativo cuando n es par mayor que uno, entonces: $(a^{1/n})^n = a^{n/n} = a$
- Por lo tanto, $a^{1/n}$ corresponde a una raíz n-sima de a; es decir: $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$
- Para todo $n \in N$, con $n \geq 2$, se cumple que $0^{1/n} = \sqrt[n]{0} = 0$

Ejemplo 3

a) $9^{1/2} = 3$	b) $-9^{1/2} = -3$	c) $(-9)^{1/2} \notin R$
d) $27^{1/3} = 3$	e) $(-27)^{1/3} = -3$	f) $0^{1/5} = 0$

SEGUNDA EXPERIENCIA

- Con la actividad anterior definimos símbolos como $5^{1/2}$, $6^{1/2}$, $8^{1/5}$, $7^{1/4}$, $3^{1/7}$. Ahora queremos definir símbolos como $3^{2/5}$, $6^{3/4}$, $9^{2/3}$. En general, queremos saber la forma de definir el símbolo $a^{m/n}$ cuando m y n son números naturales tales que la fracción $\frac{m}{n}$ no sea simplificable y tales que $\sqrt[n]{a}$ sea siempre un número real.
- Si queremos que la ley de los exponentes siga cumpliéndose con todos los exponentes racionales, entonces a $3^{2/5}$ debemos expresarlo así: $3^{2/5} = \left(3^{1/5}\right)^2$ es decir: $3^{2/5}$ representa el cuadrado de la raíz quinta de **3**.
- En general, $a^{m/n}$ debemos definirlo de tal forma que: $a^{m/n} = \left(a^{1/n}\right)^m = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$

APRENDAMOS

DEFINICIÓN DE $a^{m/n}$

Si $a \in R$; $m, n \in N$, $\frac{m}{n}$ no es simplificable y $\sqrt[n]{a} \in R$, entonces: $a^{m/n} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \left(a^{1/n}\right)^m$

¡ATENCIÓN!

1. Con las mismas restricciones sobre a definimos: $a^{-m/n} = \frac{1}{a^{m/n}}$, con $a \neq 0$
2. Es posible demostrar, aunque no lo haremos aquí, que las cinco (5) leyes de los exponentes se cumplen para todos los exponentes racionales **siempre y cuando evitemos las raíces pares de números negativos.** Teniendo en cuenta esta restricción, podemos escribir la siguiente relación, que en la práctica resulta bastante útil: $a^{m/n} = \left(a^{1/n}\right)^m = \left(a^m\right)^{1/n}$
3. De la definición de $a^{m/n}$ y las dos observaciones anteriores podemos deducir que **toda potencia con exponente fraccionario puede escribirse en forma de raíz y toda raíz puede escribir-**

se en forma de potencia con exponente fraccionario, mientras tengamos en cuenta las restricciones originadas en las raíces pares de números negativos,; es decir:

a) $x^{m/n} = (x^m)^{1/n} = \sqrt[n]{x^m}$

b) $\sqrt[n]{x^m} = (x^m)^{1/n} = x^{m/n}$ donde **m** es el exponente del radicando y **n** es el índice de la raíz.

Ejemplo 4

a) $27^{2/3} = (27^{1/3})^2 = 3^2 = 9$ ó $27^{2/3} = (27^2)^{1/3} = (729)^{1/3} = 9$

b) $(-27)^{5/3} = [(-27)^{1/3}]^5 = (-3)^5 = -243$

c) $(2x^{1/3})(-3x^{1/2}) = -6x^{1/3+1/2} = -6x^{5/6}$

d) $(3a^{-2/3}b^{1/3})^3 = 27a^{-2}b = \dfrac{27\,b}{a^2}$

e) $\left(\dfrac{4x^{1/3}}{x^{1/2}}\right)^{1/2} = \dfrac{4^{1/2}x^{1/6}}{x^{1/4}} = \dfrac{2}{x^{1/4-1/6}} = \dfrac{2}{x^{1/12}}$

f) $(3x^{1/2}+y^{1/2})(x^{1/2}+2y^{1/2}) = 3x + 7x^{1/2}y^{1/2} + 2y$

Ejemplo 5

- Encontremos el error que se comete en la siguiente " demostración " según la cual $1 = -1$

Paso 1: $-1 = (-1)^{2/2}$ Paso 2: $-1 = [(-1)^2]^{1/2}$

Paso 3: $-1 = (1)^{1/2}$ Paso 4: $-1 = 1$

- El error se encuentra en el PASO 2 ya que $(-1)^{2/2}$ incluye la raíz par de un número negativo $\left((-1)^{2/2} = \left[(-1)^{1/2}\right]^2\right)$ que no es un número real; además observemos que $(-1)^{2/2}$ tiene de exponente la fracción $\frac{2}{2}$,la cual es simplificable y no permite, por tanto, aplicar siempre la propiedad: $a^{m/n} = (a^{1/n})^m = (a^m)^{1/n}$

Ejemplo 6

Así convertimos de la forma de potencia a la forma de raíz:

a) $7^{1/2} = \sqrt{7}$

b) $a^{1/3} = \sqrt[3]{a}$

c) $x^{3/4} = \sqrt[4]{x^3}$ ó $x^{3/4} = (\sqrt[4]{x})^3$ .... generalmente se prefiere la primera forma.

d) $(3m^2n^3)^{3/5} = \sqrt[5]{(3m^2n^3)^3}$ ó $\left(\sqrt[5]{3m^2n^3}\right)^3$.... generalmente se prefiere la primera forma.

e) $p^{-2/3} = \dfrac{1}{p^{2/3}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{p^2}}$ ó también: $\dfrac{1}{\left(\sqrt[3]{p}\right)^2}$ .... no olvidemos que el índice del radical no puede ser negativo

f) $(a^2+b^2)^{1/2} = \sqrt{a^2+b^2} \neq a+b$ .... ¿por qué?

Ejemplo 7

Convirtamos de la forma radical a la forma con exponente racional:

a) $\sqrt{15} = 15^{1/2}$: raíz cuadrada positiva de 15

b) $\sqrt[7]{x} = x^{1/7}$

c) $\sqrt[3]{z^2} = z^{2/3}$

d) $\sqrt[5]{(5m^2n^3)^4} = (5m^2n^3)^{4/5}$

e) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \dfrac{1}{x^{2/3}} = x^{-2/3}$ f) $\sqrt[3]{m^3+n^3} = (m^3+n^3)^{1/3} \neq m+n$

EJERCICIO 3.4

¡ ATENCIÓN ! En este ejercicio todas las letras están restringidas de manera que se eviten las raíces pares de números negativos.

En los ejercicio 1. a 12. escribir con radicales y hallar el resultado.

1. $25^{1/2}$ 2. $64^{1/3}$ 3. $(-243)^{2/5}$ 4. $27^{2/3}$
5. $49^{-1/2}$ 6. $27^{-1/3}$ 7. $125^{-2/3}$ 8. $9^{-3/2}\,x$
9. $(7ab)^{-4/7}$ 10. $(a-b)^{7/2}$ 11. $-16^{1/4}$ 12. $(-64)^{1/2}$

En los ejercicios 13. a 20. expresar con exponente fraccionario y simplificar cuando sea posible:

13. $\sqrt{25p^2}$ 14. $\sqrt[3]{a^3+b^3}$ 15. $-\sqrt[3]{x^3y^6}$ 16. $\sqrt[5]{(a+b)^5}$
17. $\sqrt[4]{-16}$ 18. $\sqrt[5]{-32}$ 19. $\sqrt[3]{-27}$ 20. $-\sqrt{625}$

En los ejercicios 21. a 40. simplificar y expresar el resultado con exponente positivo

21. $a^{1/3}a^{3/4}$ 22. $b^{2/3}b^{4/3}$ 23. $(m^{-3/4})^{-8}$ 24. $\dfrac{y^{3/4}}{y^{1/4}}$
25. $b^{-4/5}b^{-6/5}$ 26. $(a^3b^6)^{-1/3}$ 27. $(8x^{-3})^{-1/3}$ 28. $(3a^{1/3}b^{2/3})^3$
29. $\left(\dfrac{25x^{-6}y^{4/7}}{16^{-1}x^6y^{4/5}}\right)^{1/2}$ 30. $\left(\dfrac{32^{-1}p^{5/4}q^{-5}}{243^{-1}t^{10/4}}\right)^{1/5}$ 31. $(a^xb^{-x})^2\bullet(a^4b^2)^{-x}$ 32. $\left[\sqrt[3]{\left(a^{-3/4}b^{2/3}\right)^4}\right]^{-3/4}$
33. $\sqrt[5]{a\sqrt[4]{a^{-3}}}$ 34. $\sqrt[5]{(x+y)^7}\bullet(x+y)^{-2/5}$ 35. $[(a-b)^{-5}]^x \div [(a+b)^x]^5$ 36. $\left[m^{1/2}p^{1/5}\sqrt{mp^{-1/5}(\sqrt{p})^{6/5}}\right]^{1/5}$
37. $(x^{5/2}-x^{3/2})(x^{5/2}+x^{3/2})$ 38. $(m^{2/3}+n^{2/3})(m^{4/3}-m^{2/3}n^{2/3}+n^{4/3})$
39. $\left(\dfrac{a^{x+y}}{a^y}\right)^x\left(\dfrac{a^{y-x}}{a^y}\right)^{x-y}$ 40. $\left[\left(a^{\frac{1}{m+n}}\right)^{m-\frac{n^2}{m}}\right]^{\frac{m}{m-n}}$

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 3

Una peluquería atiende un promedio de 100 clientes a la semana y les cobra \$5000 por corte. Se necesita incrementar el precio del corte y por ello se realizó una encuesta entre los clientes, arrojando la siguiente información: por cada incremento de \$500 en el corte, la peluquería pierde 5 clientes. Los administradores deciden acertadamente:

a) No realizar ningún incremento y mantener los 100 clientes que dan un ingreso de \$500.000 semanales.
b) Hacer un incremento de \$100 y atender 95 clientes que dan un ingreso de \$570.000 semanales.
c) Atender 50 clientes por un valor de \$11.000 cada uno y obtener un ingreso de \$550.000
d) Incrementar el corte a \$7.500 de tal forma que se atiendan 75 clientes que dan un ingreso de \$562.500 semanales.

3.6 PROPIEDADES DE LOS RADICALES

En la sección anterior estudiamos que una expresión que está bajo un radical puede escribirse como una potencia con exponente fraccionario y viceversa. Las siguientes propiedades de los radicales nos ayudarán a facilitar estas transformaciones. Todas ellas se deducen partiendo de las leyes de los exponentes que ya conocemos. La siguiente actividad nos facilitará la comprensión de estas propiedades.

EXPERIENCIA

- Comprobemos que $\sqrt[5]{3^5}=3$. Veamos:

  $\sqrt[5]{3^5}=(3^5)^{1/5}=3^{5/5}=3^1=3$

- Comprobemos que $\sqrt{16 \bullet 25}=\sqrt{16}\bullet\sqrt{25}$. Veamos:

  $\sqrt{16 \bullet 25} = \sqrt{400} = 20$.........(1) ; $\sqrt{16}\bullet\sqrt{25} = \sqrt{4 \bullet 5} = 20$..............(2)

  De (1) y (2): $\sqrt{16 \bullet 25} = \sqrt{16}\bullet\sqrt{25}$

- Comprobemos que $\sqrt{\dfrac{64}{16}} = \dfrac{\sqrt{64}}{\sqrt{16}}$. Veamos:

  $\sqrt{\dfrac{64}{16}} = \sqrt{4} = 2$.............(3) ; $\dfrac{\sqrt{64}}{\sqrt{16}} = \dfrac{8}{4} = 2$........................(4)

  De (3) y (4): $\sqrt{\dfrac{64}{16}} = \dfrac{\sqrt{64}}{\sqrt{16}}$

- Comprobemos que $\sqrt[6]{3^4} = \sqrt[3]{3^2}$. Veamos:

  $\sqrt[6]{3^4} = (3^4)^{1/6} = 3^{4/6} = 3^{2/3} = (3^2)^{1/3} = \sqrt[3]{3^2}$

- Comprobemos que $\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[6]{64}$

  $\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[3]{8} = 2$..............(5) ; $\sqrt[6]{64} = 2$....................................(6)

  De (5) y (6): $\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[6]{64}$

Los casos particulares considerados en esta actividad, podemos generalizarlos enunciando las siguientes PROPIEDADES DE LOS RADICALES

APRENDAMOS

PROPIEDADES DE LOS RADICALES

Si **x y y** son números reales positivos, cuando **m** y **n** son pares, y **m, n,** y **k,** son números naturales mayores ó iguales que 2, entonces:

P-1: $\sqrt[n]{x^n} = x$

P-2: $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\ \sqrt[n]{y}$:la raíz de un producto es igual al producto de las raíces.

P-3: $\sqrt[n]{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$: la raíz de un cociente es igual al cociente de las raíces, siempre que $y \neq 0$.

P-4: $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[n\cdot m]{x}$: la raíz de una raíz se obtiene escribiendo el mismo radicando y multiplicando los índices de los radicales.

P-5: $\sqrt[kn]{x^{km}} = \sqrt[n]{x^m}$: podemos multiplicar el índice del radical y el exponente del radicando por un mismo número natural.

¡ATENCIÓN!

1. Las anteriores propiedades de los radicales podemos demostrarlas a partir de las propiedades gemelas de los exponentes; así:

P-1: $\sqrt[n]{x^n} = (x^n)^{1/n} = x^{n/n} = x$

P-2: $\sqrt[n]{xy} = (xy)^{1/n} = x^{1/n}\, y^{1/n} = \sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y}$

P-3: $\sqrt[n]{\dfrac{x}{y}} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^{1/n} = \dfrac{x^{1/n}}{y^{1/n}} = \dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$

P-4: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = (x^{1/n})^{1/m} = x^{1/mn} = \sqrt[mn]{x}$

P-5: $\sqrt[kn]{x^{km}} = (x^{km})^{1/kn} = x^{km/kn} = x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m}$

2. Al enunciar las propiedades de los radicales pusimos la condición que las variables fueran cantidades no negativas. Si retiramos esta condición debemos recordar que:

Si x es cualquier número real y n es un entero positivo mayor que 1, entonces:

$$\sqrt[n]{x^n} = \begin{cases} |x| & \text{si n es par} \\ x & \text{si n es impar} \end{cases}$$

Por ejemplo: $\sqrt{x^2} = |x|$, $\sqrt[3]{x^3} = x$, $\sqrt[4]{x^4} = |x|$, $\sqrt[5]{x^5} = x$

Ejemplo 1

Si todas las variables representan números reales positivos entonces:

- $\sqrt[3]{(4m^2n)^3} = 4m^2n$
- $\sqrt{9x^2y^2} = 3xy$
- $\sqrt[3]{\dfrac{x}{27}} = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{27}} = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{3} = \dfrac{1}{3}\sqrt[3]{x}$
- $\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[6]{64} = 2$
- $\sqrt[8]{x^6} = \sqrt[2\cdot4]{x^{2\cdot3}} = \sqrt[4]{x^3}$

Ejemplo 2

Hallemos el valor de $\sqrt[3]{x^3} + \sqrt{x^2}$ sabiendo que x es un número positivo.

Solución

- Como x es un número positivo, entonces: $\sqrt[3]{x^3} = x$ y $\sqrt{x^2} = |x| = x$
- Por lo tanto: $\sqrt[3]{x^3} + \sqrt{x^2} = x + |x| = x + x = 2x$

Ejemplo 3

Hallemos el valor de $\sqrt[3]{x^3} + \sqrt{x^2}$ sabiendo que x es un número negativo.

Solución

- Como x es un número negativo, entonces: $\sqrt[3]{x^3} = x$ y $\sqrt{x^2} = |x| = -x$
- Por lo tanto: $\sqrt[3]{x^3} + \sqrt{x^2} = x + |x| = x + (-x) = 0$

Notemos la diferencia entre los dos resultados cuando x es un número positivo y cuando x es un número negativo.

EJERCICIO 3.5

En los ejercicios 1. a 20. simplificar cada una de las expresiones dadas. Téngase en cuenta que todas las letras representan números reales positivos.

1 $\sqrt{81}$	2 $\sqrt[3]{\dfrac{27}{64}}$	3 $\sqrt[4]{(-2)^4}$	4 $\sqrt{(-15)^2}$
5 $\sqrt[5]{-243}$	6 $\sqrt[3]{-125}$	7 $\sqrt[4]{\dfrac{16}{81}}$	8 $\sqrt[5]{-\dfrac{32}{243}}$
9 $\sqrt{(p+5)^2}$	10 $\sqrt{\dfrac{25}{y^2}}$	11 $\sqrt[5]{-32a^5}$	12 $\sqrt[7]{-\dfrac{m^7}{n^7}}$
13 $\sqrt{36x^4 \div 9x^2}$	14 $\sqrt[5]{243a^{15}b^{25}}$	15 $\sqrt[3]{-64m^6n^9}$	16 $\sqrt[3]{8a^{3x}b^{3x}}$
17 $\sqrt[7]{a^{-7x}b^{-14x}}$	18 $\sqrt{12^2+5^2}$	19 $\sqrt{13^2-12^2}$	20 $\sqrt{25(x+y)^2 - 9(x+y)^2}$

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 4

El crecimiento prenatal de un feto que tenga más de 12 semanas se puede calcular con la fórmula: L=1,53t-6,7, donde L es la longitud del feto en cm y t su edad en semanas. La gestación promedio de un ser humano es de 38 semanas. De acuerdo con esta información, podemos afirmar que un niño que nace con 39,2 cm, es un niño:

a) Normal para un período de gestación de 38 semanas
b) Con dos semanas de atraso respecto a lo normal
c) Prematuro con 20 semanas de gestación
d) Prematuro con 30 semanas de gestación

3.7 SIMPLIFICACIÓN DE RADICALES

- Las propiedades de los exponentes nos proporcionan los elementos necesarios para transformar expresiones algebraicas con radicales en otras equivalentes más fáciles de operar. Una forma muy útil es la FORMA RADICAL MAS SIMPLE.

- Se dice que una expresión irracional (es decir, que posee radicales) **NO** está escrita en la FORMA RADICAL MAS SIMPLE cuando se presenta alguna de las siguientes situaciones:

1. Que el radicando (expresión dentro de la raíz) contenga factores polinómicos cuyo exponente sea mayor o igual al índice del radical (por ejemplo, $\sqrt[3]{x^5}$ no está en la forma radical más simple).

2. Que el exponente del radicando y el índice del radical se puedan simplificar (por ejemplo, $\sqrt[9]{x^3}$ no está en la forma radical más simple).

3. Que aparezca un radical en el denominador de una fracción (por ejemplo, $\frac{10}{\sqrt{5}}$ no está en la forma radical más simple).

4. Que aparezca una fracción dentro del radical (por ejemplo, $\sqrt{\frac{2}{3}}$ no está en la forma radical más simple).

- Consideraremos en esta sección las dos primeras situaciones en las cuales no se tiene una expresión escrita en la forma radical más simple y veremos qué debemos hacer para obtenerla. Analicemos los siguientes ejemplos y expliquemos lo que se realiza en cada paso. Suponemos que las variables son números reales positivos.

Ejemplo 1

Observemos cómo se simplifican los siguientes radicales:

$\sqrt[7]{x^7} = x^{7/7} = x$ $\qquad$ $\sqrt[3]{x^{15}} = x^{15/3} = x^5$ $\qquad$ $\sqrt[5]{m^{10}n^{15}} = m^{10/5}n^{10/5} = m^2n^3$

$\sqrt{p^{10}q^{12}} = p^{10/2}q^{12/2} = p^5q^6$ $\qquad$ $\sqrt[6]{\frac{x^{24}}{y^{30}}} = \frac{x^{24/6}}{y^{30/6}} = \frac{x^4}{y^5}$

Ejemplo 2

Ahora simplifiquemos $\sqrt[5]{729}$

Solución

$$\sqrt[5]{729} = \sqrt[5]{3^6} = \sqrt[5]{3^5 \bullet 3} = \sqrt[5]{3^5} \bullet \sqrt[5]{3} = 3 \bullet \sqrt[5]{3}$$

Ejemplo 3

Finalmente, simplifiquemos $\sqrt[3]{54a^5\,b^{10}c^{13}}$

Solución

$$\sqrt[3]{54a^5\,b^{10}c^{13}} = \sqrt[3]{3^3 \bullet 2 \bullet a^3 \bullet a^2 \bullet b^9 \bullet b \bullet c^{12} \bullet c}$$

$$\therefore \sqrt[3]{54a^5\,b^{10}c^{13}} = \sqrt[3]{3^3\,a^3\,b^9\,c^{12}} \bullet \sqrt[3]{2a^2\,bc}$$

$$\therefore \sqrt[3]{54a^5\,b^{10}c^{13}} = 3ab^3c^4\,\sqrt[3]{2a^2\,bc}$$

APRENDAMOS

SIMPLIFICACIÓN DE RADICALES

Cuando el exponente de algún factor del radicando es mayor que el índice de la raíz (pero no divisible por éste) descomponemos dicho factor en otros dos factores de manera que el exponente de uno de ellos sea divisible por el índice; es decir:

5. La radicación es distributiva respecto a:

a) La suma y la resta
b) La suma y la multiplicación
c) La multiplicación y la división
d) La suma y la división

6. El resultado de $\sqrt{36+25}$ es

a) 11
b) $\sqrt{61}$
c) 61
d) $\sqrt{36} + \sqrt{25}$

7. Una de las siguientes igualdades es correcta:

a) $\sqrt{36} = 18$
b) $\sqrt[4]{(-5)^2} = \sqrt[4]{25}$
c) $\sqrt[3]{64} = 8$
d) $\sqrt{-36} = \sqrt[4]{(-36)^2}$

En los ejercicios 8. a 30. simplificar cada ejercicio y expresar la respuesta con exponente positivo. Las letras representan números reales positivos.

8. $\left(\dfrac{7x^5}{8w^3y^4z^6}\right)^2$

9. $x^{-3/4}\, x^{5/6}\, x^{-1/3}$

10. $\left(\dfrac{3x^3y^{-2}z^{-1}}{2xy^2z^3}\right)^{-1}$

11. $\dfrac{a^{-1}+b^{-1}}{a^{-2}-b^{-2}}$

12. $\dfrac{(x+1)^{-1}}{x^{-1}+y^{-1}}$

13. $\dfrac{2x^{-1}+3xy^{-2}}{4x^{-2}-9x^2y^{-4}}$

14. $\dfrac{xy^{-2}+yx^{-2}}{x^{-2}-y^{-2}}$

15. $\left[\left(x^{1/4}+y^{1/4}\right)\left(x^{1/4}-y^{1/4}\right)\right]^2$

16. $(x^{-1}-y^{-1})(x^{-2}+x^{-1}y^{-1}+y^{-2})$

17. $\dfrac{x^{1/2}y^{-1}+2xy^{-1/2}+x^{3/2}}{6x^{3/2}y}$

18. $\dfrac{x^{1/5}y^{1/2}+x^2y^2z}{x^{1/2}y^2}$

19. $\dfrac{4 \bullet 16^{n/2}}{4^{1/2}(4^n)^{1/2}}$

20. $\left[\left(\dfrac{a^x}{a}\right)^{2x} \bullet (a^{-2})^{x^2}\right]^{1/x}$

21. $\dfrac{mn^{1/2}}{4c^{1/3}} \bullet \left(\dfrac{m^{1/2}n^{1/4}}{2c^{-1/6}d}\right)^{-2}$

22. $\dfrac{3 \bullet 3^{3n} - 9 \bullet 9^n}{(3 \bullet 3^n)^3 - 27 \bullet 3^{2n+1}}$

23. $\dfrac{81^{x+1}+3^{2x+3}+27\sqrt{3}}{3 \bullet 3^{4x}+9^x+\sqrt{3}}$

24. $\dfrac{3^a \bullet 9^{a+1}}{2 \bullet 27^a} \bullet \dfrac{4^{2a}}{81} \bullet \dfrac{36(3^{2a}+9^a)^{-3}}{16^a}$

25. $\dfrac{(5^{2b})^{b-1}}{5^3 \bullet 5^{b-2}} \bullet \dfrac{(625^b)^{2-b} \bullet 3125^{b(b-1)}}{(125^{b-1})^{b+1}}$

26. $(a^2+8a+16)^{1/2} - (a^2-8a+16)^{1/2}$

27. $(a^{2n}-a^{-2n})^x\,(a^n+a^{-n})^{-x}$

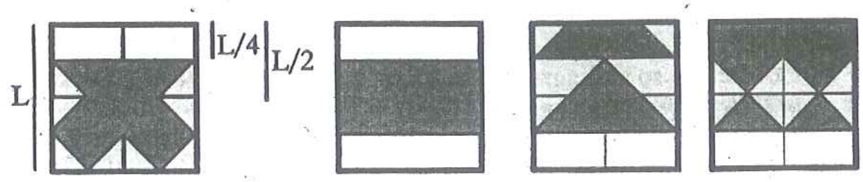
28. $\left[(x^{-1}-1)^{-1}+1\right]^{-1} - \left[(x^{-1}+1)^{-1}\right]^{-1}$

29. $\left[2+\dfrac{ma^{4p}-ma^{-4p}}{(a^p-a^{-p})(ma^p+ma^{--p})}\right]^{1/2}$

30. $\dfrac{(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})\sqrt{1-\left(\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)^2}}$

PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS DEL ICFES

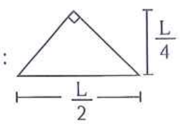
Las preguntas 1 a 3 se responden con base en las siguientes figuras:



A B C D

1. De estas figuras, la única que tiene un área sombreada distinta a las otras es:

   a) A b) B c) C d) D

2. Si se dispone inicialmente de piezas triangulares iguales como esta: 

, entonces de las figuras anteriores, la única en la cual la región sombreada no puede cubrirse utilizando dichas piezas, sin partir, añadir o superponer piezas es:

   a) A b) B c) C d) D

3. En la figura A, la fración que representa el área sombreada con respecto al área del cuadrado total es:

   a) $\frac{1}{16}$ b) $\frac{1}{8}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{2}$

Las preguntas 4 y 5 se responde de acuerdo con la siguiente información:

Producir un ejemplar de un periódico tiene un costo de \$600. El periódico se vende al público a \$500, pero recibe ingresos por publicidad equivalente al 30% de las ventas correspondientes a la cantidad de periódicos vendidos que superan la cifra de 20.000 ejemplares.

4. Si el periódico no desea tener pérdidas, al menos debe vender:

   a) 50.000 ejemplares b) 60.000 ejemplares
   c) 20.000 ejemplares d) 100.000 ejemplares

5. Al vender 100.000 periódicos, la empresa obtuvo:

   a) Una ganancia de \$1.000.000 b) Una pérdida de \$2.000.000
   c) Una ganancia de \$2.000.000 d) Una pérdida de \$1.000.000

Núcleo Temático

4

OPERACIONES CON RADICALES Y RACIONALIZACIÓN

LOGRO GENERAL

Racionalizar un denominador con términos irracionales.

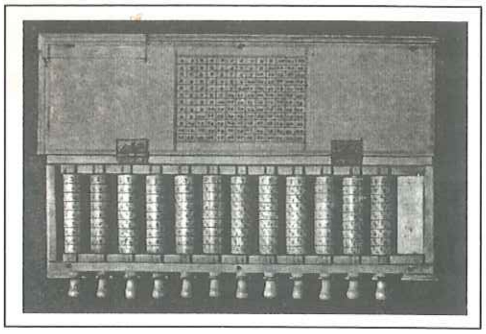
LOGROS ESPECÍFICOS	INDICADORES DE LOGRO
Corporal: • Realizar experiencias que permitan hallar raíces exactas.	• Utiliza las propiedades de la radicación para encontrar raíces exactas.
Comunicativa: • Describir la forma como se racionalizan denominadores de la forma $\mathbf{a\sqrt[n]{x}}$,de la forma $\mathbf{a\sqrt{x} \pm b\sqrt{y}}$ y de la forma $\mathbf{a\sqrt[3]{x} \pm b\sqrt[3]{y}}$. • Explicar cuándo dos o más radicales son semejantes.	• Explica cómo se racionaliza un denominador monomio de la forma $\mathbf{a\sqrt[n]{x}}$,un denominador binomio de la forma $\mathbf{a\sqrt{x} \pm b\sqrt{y}}$ y un denominador binomio de la forma $\mathbf{a\sqrt[3]{x} \pm b\sqrt[3]{y}}$. • Suma radicales semejantes.
Cognitiva: • Sumar, restar, multiplicar y dividir radicales. • Racionalizar denominadores de la forma $\mathbf{a\sqrt[n]{x}}$, de la forma $\mathbf{a\sqrt{x} \pm b\sqrt{y}}$ y de la forma $\mathbf{a\sqrt[3]{x} \pm b\sqrt[3]{y}}$.	• Opera con expresiones irracionales. • Racionaliza denominadores de la forma $\mathbf{a\sqrt[n]{x}}$, de la forma $\mathbf{a\sqrt{x} \pm b\sqrt{y}}$ y de la forma $\mathbf{a\sqrt[3]{x} \pm b\sqrt[3]{y}}$.
Estética: • Elaborar material didáctico (carteleras)para utilizar en la clase.	• Ilustra mediante carteleras las propiedades de la potenciación y la radicación.
Etica-Actitudinal: • Reconocer la importancia que tienen las propiedades de la potenciación y la radicación en la simplificación de expresiones algebraicas.	• Cumple a tiempo con la tareas y trabajos que le son encomendados.

DIMENSIONES

EVALUACIÓN

ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS

4.1 HISTORIA DEL ALGEBRA (14): LA HISTORIA DE LOS LOGARITMOS



El uso sistemático de los logaritmos fue introducido en el segundo decenio del siglo XVII por Henry Briggs y John Napier (o Neper, de ahí el nombre de neperianos dado a los logaritmos naturales, mientras que los decimales se llaman a veces de Briggs). Como antecedente de los logaritmos podemos mencionar el "compás geométrico y militar" de Galileo Galilei, que era una regla de cálculo rudimentaria.

Neper fue un matemático escocés (1550-1617), nacido en Merchiton Castle, cerca de Edimburgo. Se educó en St. Andrews y amplió sus estudios en los Países Bajos, Francia e Italia.

Se destacó por su teoría de los logaritmos, método que reemplazó a las laboriosas operaciones aritméticas de las que había dependido hasta entonces la resolución de los más sencillos problemas trigonométricos. Sobre este tema escribió dos tratados (uno de ellos sus tablas, en 1614), tomando como base de los logaritmos el llamado "número de Neper". Se dedicó también a cuestiones de trigonometría esférica: las fórmulas conocidas con el nombre del matemático dan la expresión de los ángulos de un triángulo esférico, en función de la amplitud de los lados y se pueden calcular por medio de logaritmos.

Escribió también un tratado teológico (1593). En el año 1615 escribió su última obra, donde dio a conocer sus procedimientos de multiplicación y división abreviados, que implicaban el uso de los bastones de Neper, antecesores de las modernas máquinas de multiplicar.

La fotografía muestra una calculadora construida por Neper.

EJERCICIO 4.1

Lee nuevamente el texto anterior y luego encierra en un círculo, la letra que corresponda a la respuesta correcta:

1. El propósito específico del autor apunta a:
   a. Mostrar una etapa en el desarrollo del pensamiento.
   b. Explicar cómo se ha desarrollado la técnica por la aplicación de un principio.
   c. Destacar la labor de un científico en la evolución de la tecnología.
   d. Exponer la forma como fue creada la calculadora.

2. La idea central de todo el escrito se puede enunciar como:
   a. Las matemáticas, un misterio para el hombre.
   b. La tecnología, al servicio de la humanidad.
   c. La evolución creciente de la ciencia.
   d. El hombre y la máquina.

3. Por su estructura, el fragmento podría hacer parte de:
   a. Una crónica.
   b. Una descripción científica.
   c. Un relato.
   d. Un ensayo.

4. Uno de los siguientes enunciados es falso:

   a. Neper se formó matemáticamente en diferentes países europeos.
   b. El nombre dado a los logaritmos naturales está ligado a Henry Briggs.
   c. Los logaritmos estuvieron antecedidos por una regla de cálculo rudimentaria.
   d. En algún momento de su vida, el matemático Neper trabajó la teología.

5. Los antecedentes inmediatos de las modernas máquinas de calcular los encontramos en:

   a. El compás geométrico y militar de Galileo.
   b. La tabla de logaritmos de Briggs.
   c. Una regla de cálculo rudimentaria creada por un científico italiano.
   d. Los bastones de un matemático escocés.

4.2 SUMA Y RESTA DE RADICALES

En nuestro trabajo de simplificación de expresiones algebraicas será necesario sumar, restar, multiplicar o dividir radicales. Este será el objetivo de esta unidad. Pero antes de comenzar es necesario afirmar dos cosas:

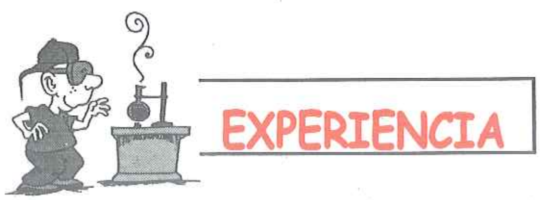
1. Sólo pueden sumarse o restarse **RADICALES SEMEJANTES**; es decir aquellos que tienen igual radicando e igual índice. Por ejemplo:

   a) $\sqrt{3}$, $5\sqrt{3}$, $x\sqrt{3}$ y $-m\sqrt{3}$ son radicales semejantes

   b) $\sqrt[3]{4x}$ y $\sqrt[5]{4x}$ no son radicales semejantes porque aunque tienen el mismo radicando (4 x), no tienen el mismo índice.

   Para determinar si dos radicales son ó no semejantes es necesario simplificarlos previamente (si es posible).

2. Sólo pueden multiplicarse o dividirse radicales que tengan el mismo índice; sin embargo, si no tienen el mismo índice es posible transformarlos de manera que los tengan.



- Resolvamos $4\sqrt[5]{a^3b^2} + 5\sqrt[5]{a^3b^2} - 3\sqrt[5]{a^3b^2}$.

  Como los radicales son semejantes, entonces: $4\sqrt[5]{a^3b^2} + 5\sqrt[5]{a^3b^2} - 3\sqrt[5]{a^3b^2} = 6\sqrt[5]{a^3b^2}$.

- Ahora resolvamos $x\sqrt[3]{8xy} - y\sqrt[3]{125\,xy} + 3\sqrt[3]{x^4y} + 5\sqrt[3]{xy^4}$.

  Los radicales no son semejantes. Por lo tanto, debemos simplificarlos; así:

$$\begin{aligned} x\sqrt[3]{8xy} - y\sqrt[3]{125\,xy} + 3\sqrt[3]{x^4y} + 5\sqrt[3]{xy^4} &= x\sqrt[3]{2^3xy} - y\sqrt[3]{5^3\,xy} + 3\sqrt[3]{x^3xy} + 5\sqrt[3]{xy^3y} \\ &= 2x\sqrt[3]{xy} - \cancel{5y\sqrt[3]{xy}} + 3x\sqrt[3]{xy} + \cancel{5y\sqrt[3]{xy}} \\ &= 5x\sqrt[3]{xy} \end{aligned}$$

APRENDAMOS

RADICALES SEMEJANTES son los que tienen igual radicando e igual índice.
Para determinar si dos radicales son semejantes es necesario simplificarlos previamente.
Para SUMAR y RESTAR radicales se simplifican previamente y luego se reducen los radicales semejantes.

4.3 MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE RADICALES

EXPERIENCIA

- Multipliquemos $\sqrt[3]{4x^2}$ por $\sqrt[5]{8x^4}$

Como los radicales tienen distinto índice, entonces hallamos el m.c.m. de 3 y 5 para que nos queden con el mismo índice; así: m.c.m. (3, 5) = 15

Por lo tanto:

$$\sqrt[3]{4x^2} = \sqrt[3\cdot5]{(4x^2)^5} = \sqrt[15]{2^{10}x^{10}}$$
$$\sqrt[5]{8x^4} = \sqrt[3\cdot5]{(8x^4)^3} = \sqrt[15]{2^9x^{12}}$$

Ahora tenemos:

$$\sqrt[3]{4x^2}\bullet\sqrt[5]{8x^4} = \sqrt[15]{2^{10}x^{10}}\bullet\sqrt[15]{2^9x^{12}} = \sqrt[15]{2^{10}x^{10}\bullet 2^9x^{12}}$$
$$\therefore \sqrt[3]{4x^2}\bullet\sqrt[5]{8x^4} = \sqrt[15]{2^{19}x^{22}} = \sqrt[15]{2^{15}\bullet 2^4x^{15}x^7} = 2x\sqrt[15]{16x^7}$$

- Multipliquemos $\sqrt[3]{9xy^2}\bullet\sqrt[3]{6x^2y^4}\bullet\sqrt[3]{60x^5y}$

Como los radicales tienen el mismo índice, entonces:

$$\sqrt[3]{9xy^2}\bullet\sqrt[3]{6x^2y^4}\bullet\sqrt[3]{60x^5y} = \sqrt[3]{(9xy^2)(6x^2y^4)(60x^5y)} = \sqrt[3]{3240x^8y^7}$$
$$\therefore \sqrt[3]{9xy^2}\bullet\sqrt[3]{6x^2y^4}\bullet\sqrt[3]{60x^5y} = \sqrt[3]{2^3\bullet3^4\bullet5\bullet x^8\bullet y^7} = \sqrt[3]{2^3\bullet3^3\bullet3\bullet5\bullet x^6\bullet x^2\bullet y^6\bullet y}$$
$$\therefore \sqrt[3]{9xy^2}\bullet\sqrt[3]{6x^2y^4}\bullet\sqrt[3]{60x^5y} = 2\bullet3\bullet x^2\bullet y^2\sqrt[3]{15x^2y} = 6x^2y^2\sqrt[3]{15x^2y}$$

- Dividamos $\sqrt[4]{x^2y^3}$ entre $\sqrt[6]{x^4y^2}$

Los radicales tienen distinto índice; por lo tanto: m.c.m. (4, 6) = 12

Luego:

$$\sqrt[4]{x^2y^3}\div\sqrt[6]{x^4y^2} = \sqrt[4\cdot3]{(x^2y^3)^3}\div\sqrt[6\cdot2]{(x^4y^2)^2}$$
$$\therefore \sqrt[4]{x^2y^3}\div\sqrt[6]{x^4y^2} = \sqrt[12]{x^6y^9}\div\sqrt[12]{x^8y^4} = \sqrt[12]{\frac{x^6y^9}{x^8y^4}}$$
$$\therefore \sqrt[4]{x^2y^3}\div\sqrt[6]{x^4y^2} = \sqrt[12]{\frac{y^5}{x^2}}$$

APRENDAMOS

MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE RADICALES.

Para MULTIPLICAR o DIVIDIR RADICALES es necesario que tengan el mismo índice.

Una vez que tengan el mismo índice, multiplicamos o dividimos los radicandos y escribimos el mismo índice.

Finalmente simplificamos el resultado obtenido, si es posible.

Ejemplo 1

Efectuemos las operaciones indicadas y simplifiquemos el resultado si es posible:

$$\frac{3}{a-b}\sqrt{\frac{2x}{a-b}} \div \sqrt{\frac{18x^3}{(a-b)^5}}$$

Solución

- Primero simplifiquemos el segundo radical; así:

$$\sqrt{\frac{18x^3}{(a-b)^5}} = \frac{3x\sqrt{2x}}{(a-b)^2\sqrt{a-b}}$$

- Por lo tanto:

$$\frac{3}{a-b}\sqrt{\frac{2x}{a-b}} \div \sqrt{\frac{18x^3}{(a-b)^5}} = \frac{3}{a-b}\sqrt{\frac{2x}{a-b}} \div \frac{3x\sqrt{2x}}{(a-b)^2\sqrt{a-b}}$$

$$\therefore \frac{3}{a-b}\sqrt{\frac{2x}{a-b}} \div \sqrt{\frac{18x^3}{(a-b)^5}} = \frac{3}{a-b}\sqrt{\frac{2x}{a-b}} \bullet \frac{(a-b)^2\sqrt{a-b}}{3x\sqrt{2x}}$$

$$\therefore \frac{3}{a-b}\sqrt{\frac{2x}{a-b}} \div \sqrt{\frac{18x^3}{(a-b)^5}} = \frac{3}{a-b} \bullet \frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{a-b}} \bullet \frac{(a-b)^2\sqrt{a-b}}{3x\sqrt{2x}}$$

$$\therefore \frac{3}{a-b}\sqrt{\frac{2x}{a-b}} \div \sqrt{\frac{18x^3}{(a-b)^5}} = \frac{\cancel{3}(a-b)^{\cancel{2}}\cancel{\sqrt{a-b}}\,\cancel{\sqrt{2x}}}{\cancel{3}x\cancel{(a-b)}\cancel{\sqrt{a-b}}\,\cancel{\sqrt{2x}}} = \frac{(a-b)}{x}$$

Ejemplo 2

Efectuemos las operaciones indicadas y simplifiquemos el resultado si es posible:

$$(\sqrt{a+x} - 2)(\sqrt{a+x} - 1)$$

Solución

- Multipliquemos como si fueran polinomios algebraicos, aplicando la propiedad distributiva:

$$(\sqrt{a+x} - 2)(\sqrt{a+x} - 1) = (\sqrt{a+x})^2 - 2\sqrt{a+x} - \sqrt{a+x} + 2$$

$$\therefore (\sqrt{a+x} - 2)(\sqrt{a+x} - 1) = a+x - 3\sqrt{a+x} + 2$$

$$\therefore (\sqrt{a+x} - 2)(\sqrt{a+x} - 1) = a+x+2 - 3\sqrt{a+x}$$

- Luego, $(\sqrt{a+x} - 2)(\sqrt{a+x} - 1) = a+x+2 - 3\sqrt{a+x}$

EJERCICIO 4.2

En los ejercicios 1. a 12. resuelve y simplifica:

1. $8\sqrt{5}+3\sqrt{5}-4\sqrt{5}$
2. $12\sqrt[3]{xy^2} - 5\sqrt[3]{xy^2} + 3\sqrt[3]{xy^2}$
3. $4\sqrt{125} - 3\sqrt{45}$
4. $\sqrt{8mn} + 2\sqrt{18mn}$
5. $\sqrt{4x} - \sqrt{9x} + \sqrt{16x}$
6. $\sqrt{72a^3} + \sqrt{8a^3} - \sqrt{18a^3}$

7 $3\sqrt[3]{192ab^3} - 6\sqrt[3]{24ab^3}$

8 $7\sqrt[3]{81} - 5\sqrt[3]{192} + 6\sqrt[3]{648}$

9 $5\sqrt[5]{32y} - 2\sqrt[5]{243y} + 3\sqrt[5]{16y}$

10 $8\sqrt[3]{-108} - 4\sqrt[3]{-32} + 9\sqrt[3]{1372}$

11 $\frac{1}{3}x\sqrt{x^3y} - \frac{1}{2}\sqrt{xy^3} - \frac{1}{6}xy\sqrt{4xy}$

12 $\sqrt{\frac{25}{3a}} - 3\sqrt{\frac{1}{12a}}$

En los ejercicios 13. a 20., calcular el producto o cociente indicado y simplificar el resultado.

13 $\sqrt[4]{27}\cdot\sqrt[3]{9}$

14 $\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[6]{a^5}$

15 $\sqrt{2t}\cdot\sqrt[3]{4t^2}\cdot\sqrt[4]{4t^3}$

16 $\dfrac{\sqrt{3ab}}{\sqrt[3]{4ab^2}}$

17 $\dfrac{\sqrt{2xy}}{\sqrt[4]{9x^2y^3}}$

18 $\sqrt[4]{x^2y^3} \div \sqrt[6]{x^4y^2}$

19 $\dfrac{4\sqrt{96}}{7\sqrt{224}} \div \dfrac{12\sqrt{168}}{14\sqrt{1176}}$

20 $\dfrac{5}{a}\sqrt{\dfrac{x^2}{a}}\cdot\dfrac{3}{5}\sqrt{\dfrac{a^3}{2x^4}}$

En los ejercicios 21. a 32. efectuar las operaciones indicadas y simplificar los radicales.

21 $3\sqrt{2}\,(\sqrt{6} - 2\sqrt{3})$

22 $\sqrt{7}\,(2\sqrt{7} - \sqrt{14})$

23 $\sqrt{10}\,(5\sqrt{2} - 4\sqrt{5} - 3\sqrt{10})$

24 $\sqrt[3]{15}\,(3\sqrt[3]{45} + \frac{1}{15}\sqrt[3]{675} + 5\sqrt[3]{75})$

25 $(4\sqrt{2}-5)(4\sqrt{2}+5)$

26 $(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})^2$

27 $(5\sqrt{2}-4\sqrt{3})(5\sqrt{2}+4\sqrt{3})$

28 $(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{9})$

29 $(\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y})^2$

30 $(3\sqrt{a+b}+2\sqrt{a-b})\,(3\sqrt{a+b}-2\sqrt{a-b})$

31 $(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})$

32 $\left(2\sqrt{x^2-y^2} - 3\sqrt{x^2+y^2}\right)^2$

En los ejercicios 33. y 34. resuelve cada problema.

33 Los lados de un triángulo miden $4\sqrt{96}$ cm, $5\sqrt{216}$ cm y $4\sqrt{486}$ cm. Hallar el perímetro del triángulo.

34 Un cateto de un triángulo rectángulo mide $\sqrt{45}$ cm y la hipotenusa mide $5\sqrt{45}$ cm. Hallar la medida del otro cateto, el perímetro del triángulo y su área.

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 1

María tiene 24 años. Su edad es el doble de la que tenía Ana cuando María tenía la edad que ahora tiene Ana. ¿Qué edad tiene Ana?

4.4 RACIONALIZACIÓN DE DENOMINADORES

- En la unidad anterior afirmamos que si en una expresión irracional aparece un radical en el denominador o una fracción dentro del radical, dicha expresión no está simplificada.
- El procedimiento que nos permite eliminar los factores o los términos irracionales de un denominador se denomina RACIONALIZACIÓN DE DENOMINADORES.
- En el proceso de racionalización de denominadores vamos a considerar cuatro casos:

1. El denominador es un monomio con un factor raíz cuadrada.
2. El denominador es un monomio con un factor raíz n, con $n > 2$.
3. El denominador es un binomio de la forma $a\sqrt{x} \pm b\sqrt{y}$.
4. El denominador es un binomio de la forma $\sqrt[3]{x} \pm \sqrt[3]{y}$.

- Consideremos cada caso:

4.4.1 El Denominador es un Monomio con un Factor Raíz Cuadrada

EXPERIENCIA

- Racionalicemos el denominador de $\dfrac{4x^2}{\sqrt{x}}$.
- Para eliminar la raíz del denominador debemos recordar en primer lugar que $\sqrt{x}\bullet\sqrt{x}=(\sqrt{x})^2 = x$ (¡claro!, siempre que $\sqrt{x}$ exista, lo cual daremos por supuesto).
- Por lo tanto, si multiplicamos el numerador y el denominador de la fracción dada por $\sqrt{x}$ tenemos:

$$\frac{4x^2}{\sqrt{x}} = \frac{4x^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{x}} = \frac{4x^2\sqrt{x}}{(\sqrt{x})^2} = \frac{4x^{\cancel{2}}\sqrt{x}}{\cancel{x}} = 4x\sqrt{x}$$

- Notemos que esta última expresión es más simple que la original (está simplificada).

APRENDAMOS

RACIONALIZACIÓN DE DENOMINADORES (1)

Para racionalizar el denominador de una fracción cuando éste es un monomio que contiene un factor raíz cuadrada, basta multiplicar el numerador y el denominador de la fracción por dicha raíz cuadrada.

EJEMPLO

Racionalicemos el denominador de la fracción $\dfrac{x+y}{\sqrt{x^4-y^4}}$

Solución

Como el denominador es un monomio con un factor raíz cuadrada, entonces multiplicamos el numerador y el denominador de la fracción por $\sqrt{x^4-y^4}$:

$$\frac{x+y}{\sqrt{x^4-y^4}} = \frac{(x+y)\sqrt{x^4-y^4}}{(\sqrt{x^4-y^4})(\sqrt{x^4-y^4})} = \frac{(x+y)\sqrt{x^4-y^4}}{x^4-y^4}$$

$$\therefore \frac{x+y}{\sqrt{x^4-y^4}} = \frac{(x+y)\sqrt{x^4-y^4}}{(x^2+y^2)(x^2-y^2)} = \frac{\cancel{(x+y)}\sqrt{x^4-y^4}}{(x^2+y^2)\cancel{(x+y)}(x-y)}$$

- Por lo tanto: $\dfrac{x+y}{\sqrt{x^4-y^4}} = \dfrac{\sqrt{x^4-y^4}}{(x^2+y^2)(x-y)}$

4.4.2. El Denominador es un Monomio con un Factor Raíz n-sima, con n>2

PRIMERA EXPERIENCIA

- ¿ Por cuál factor debemos multiplicar a $\sqrt[5]{x^3}$ de manera que eliminemos la raíz quinta? Como el producto de radicales debe hacerse entre raíces del mismo índice entonces:

$$\sqrt[5]{x^3} \bullet \sqrt[5]{x^2} = \sqrt[5]{x^5} = x$$

- ¿ Y si queremos eliminar $\sqrt[3]{(x+y)^2}$? De nuevo debemos multiplicar a $\sqrt[3]{(x+y)^2}$ por otra raíz del mismo índice; así:

$$\sqrt[3]{(x+y)^2} \bullet \sqrt[3]{x+y} = \sqrt[3]{(x+y)^3} = x + y$$

- Como vemos, en ambos casos el factor pedido es otra raíz del mismo índice y tal que la suma de los exponentes del radicando del producto sea igual al índice.

SEGUNDA EXPERIENCIA

- Racionalicemos el denominador de la fracción $\dfrac{5x}{\sqrt[3]{75x}}$

- Queremos racionalizar la expresión $\sqrt[3]{75x}$. Como es un monomio, debemos multiplicarla por otra raíz cúbica. Veamos:

$$\sqrt[3]{75x} = \sqrt[3]{5^2 \bullet 3 \bullet x}$$

Luego, el factor es $\sqrt[3]{5 \bullet 3^2 \bullet x^2} = \sqrt[3]{45x^2}$ ya que:

$$\sqrt[3]{75x} \bullet \sqrt[3]{45x^2} = \sqrt[3]{5^3 \bullet 3^3 \bullet x^3} = 5 \bullet 3 \bullet x = 15x$$

- En consecuencia, para racionalizar el denominador de esta fracción debemos multiplicar su numerador y denominador por $\sqrt[3]{45x^2}$; así:

$$\frac{5x}{\sqrt[3]{75x}} = \frac{5x \bullet \sqrt[3]{45x^2}}{\sqrt[3]{75x} \bullet \sqrt[3]{45x^2}} = \frac{5x \bullet \sqrt[3]{45x^2}}{\sqrt[3]{3375x^3}}$$

$$\therefore\ \frac{5x}{\sqrt[3]{75x}} = \frac{5x \bullet \sqrt[3]{45x^2}}{\sqrt[3]{3^3 \bullet 5^3 \bullet x^3}} = \frac{5\cancel{x} \bullet \sqrt[3]{45x^2}}{15\cancel{x}} = \frac{\sqrt[3]{45x^2}}{3}$$

APRENDAMOS

RACIONALIZACIÓN DE DENOMINADORES (2)

Para racionalizar el denominador monomio de una fracción, uno de cuyos factores es una raíz de índice $n > 2$, debemos multiplicar el numerador y el denominador por una raíz que tenga el mismo índice del factor dado y tal que al multiplicar estos dos factores obtengamos una raíz exacta.

4.4.3. El Denominador es un binomio de la forma $a\sqrt{x} \pm b\sqrt{y}$

EXPERIENCIA

- Efectuemos los siguientes productos:

  a) $(\sqrt{7} + 3)(\sqrt{7} - 3)$ b) $(2\sqrt{5} - 3\sqrt{2})(2\sqrt{5} + 3\sqrt{2})$

  c) $(5\sqrt{a} + 3\sqrt{b})(5\sqrt{a} - 3\sqrt{b})$ d) $(a\sqrt{x} + b\sqrt{y})(a\sqrt{x} - b\sqrt{y})$

- Si observamos con cuidado, cada una de estas expresiones es el producto de una suma por una diferencia de términos. En consecuencia:

  a) $(\sqrt{7} + 3)(\sqrt{7} - 3) = (\sqrt{7})^2 - 3^2 = 7 - 9$

  b) $(2\sqrt{5} - 3\sqrt{2})(2\sqrt{5} + 3\sqrt{2}) = (2\sqrt{5})^2 - (3\sqrt{2})^2 = 4 \bullet 5 - 9 \bullet 2$

  c) $(5\sqrt{a} + 3\sqrt{b})(5\sqrt{a} - 3\sqrt{b}) = (5\sqrt{a})^2 - (3\sqrt{b})^2 = 25a - 9b$

  d) $(a\sqrt{x} + b\sqrt{y})(a\sqrt{x} - b\sqrt{y}) = (a\sqrt{x})^2 - (b\sqrt{y})^2 = a^2x - b^2y$

- En el álgebra, binomios como $(a\sqrt{x} + b\sqrt{y})$ y $(a\sqrt{x} - b\sqrt{y})$ cuyos términos no son ambos racionales y que difieren en el signo de uno de sus términos se denominan IRRACIONALES CONJUGADOS.

- Los ejemplos anteriores nos muestran que cuando un binomio de la forma $a\sqrt{x} + b\sqrt{y}$ o de la forma $a\sqrt{x} - b\sqrt{y}$ (es decir, una suma o resta de términos en la cual uno o los dos son raíces cuadradas) se multiplica por su CONJUGADO, entonces resulta una diferencia de cuadrados y, por lo tanto, se eliminan las raíces cuadradas.

- En consecuencia:

APRENDAMOS

RACIONALIZACIÓN DE DENOMINADORES (3)

Los binomios $(\mathbf{a\sqrt{x} + b\sqrt{y}})$ y $(\mathbf{a\sqrt{x} - b\sqrt{y}})$ en los cuales **a, b, x, y** son números racionales se denominan IRRACIONALES CONJUGADOS.

Si el denominador de una fracción es un binomio de la forma $(\mathbf{a\sqrt{x} + b\sqrt{y}})$ ó $(\mathbf{a\sqrt{x} - b\sqrt{y}})$, donde **a, b, x, y** son números racionales, entonces para racionalizarlo debemos multiplicar el numerador y el denominador de la fracción por el respectivo conjugado.

Ejemplo 1

Racionalicemos el denominador de la fracción $\dfrac{\sqrt{7} - 3}{2 - \sqrt{7}}$ y simplifiquemos el resultado si es posible.

SOLUCIÓN

Como el denominador de la fracción es un binomio y al menos uno de sus términos es una raíz cuadrada, entonces multiplicamos el numerador y el denominador de la fracción por la conjugada de $2 - \sqrt{7}$ que es $2 + \sqrt{7}$

$$\frac{\sqrt{7}-3}{2-\sqrt{7}} = \frac{(\sqrt{7}-3)(2+\sqrt{7})}{(2-\sqrt{7})(2+\sqrt{7})} = \frac{2\sqrt{7}+7-6-3\sqrt{7}}{2^2-(\sqrt{7})^2}$$

$$\therefore \; \frac{\sqrt{7}-3}{2-\sqrt{7}} = \frac{1-\sqrt{7}}{4-7} = \frac{1-\sqrt{7}}{-3} = \frac{\sqrt{7}-1}{3}$$

Ejemplo 2

Racionalicemos el denominador de la fracción $\dfrac{h}{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}$ y simplifiquemos el resultado, si es posible.

Solución

De nuevo, el denominador es un binomio cuyos términos contienen raíces cuadradas. Por lo tanto, multiplicamos el numerador de la fracción por la conjugada de $\sqrt{x+h}-\sqrt{x}$ que es $\sqrt{x+h}+\sqrt{x}$:

$$\frac{h}{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}} = \frac{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \frac{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+h})^2-(\sqrt{x})^2}$$

$$\therefore \; \frac{h}{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}} = \frac{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{(x+h)-x} = \frac{\cancel{h}(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{\cancel{h}} = \sqrt{x+h}+\sqrt{x}, \text{ con } h\neq 0$$

4.4.4. El Denominador es un binomio de la forma $a\sqrt[3]{x} \pm b\sqrt[3]{y}$

EXPERIENCIA

- Cuando factorizamos sumas y diferencias de cubos establecimos que:

$$x^3 + y^3 = (x+y) \bullet (x^2 - xy + y^2)$$

SUMA DE CUBOS	=	SUMA DE LAS RAICES CÚBICAS	•	TRINOMIO CUADRADO IMPERFECTO DE x + y

$$x^3 - y^3 = (x-y) \bullet (x^2 + xy + y^2)$$

DIFERENCIA DE CUBOS	=	DIFERENCIA DE LAS RAICES CÚBICAS	•	TRINOMIO CUADRADO IMPERFECTO DE x - y

- En forma similar podemos afirmar que:

$$(\sqrt[3]{x})^3 + (\sqrt[3]{y})^3 = (\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x}\,\sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{y^2})$$

$$\therefore \; x+y = (\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x}\,\sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{y^2})$$

Y que:

$$(\sqrt[3]{x})^3 - (\sqrt[3]{y})^3 = (\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x}\,\sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{y^2})$$

$$\therefore\ x - y = (\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x}\,\sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{y^2})$$

- Por lo tanto, el factor racionalizante de $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}$ es SU TRINOMIO CUADRADO IMPERFECTO $\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x}\,\sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{y^2}$ y el factor racionalizante de $\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}$ es SU TRINOMIO CUADRADO IMPERFECTO $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x}\,\sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{y^2}$.

- En consecuencia:

APRENDAMOS

RACIONALIZACIÓN DE DENOMINADORES (4)

Para racionalizar un denominador de la forma $(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y})$ ó de la forma $(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y})$ se multiplican el numerador y el denominador de la fracción por su trinomio cuadrado imperfecto $\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}$ ó $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}$ respectivamente.

Ejemplo

Racionalicemos el denominador de de la fracción $\dfrac{h}{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}$ y simplifiquemos el resultado.

Solución

- Como el denominador es una diferencia de raíces cúbicas, entonces su factor recionalizante es $\sqrt[3]{(x+h)^2} + \sqrt[3]{x(x+h)} + \sqrt[3]{x^2}$.

- Por lo tanto:

$$\frac{h}{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}} = \frac{h\left(\sqrt[3]{(x+h)^2} + \sqrt[3]{x\,(x+h)} + \sqrt[3]{x^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{(x+h)} - \sqrt[3]{x}\right)\left(\sqrt[3]{(x+h)^2} + \sqrt[3]{x(x+h)} + \sqrt[3]{x^2}\,\right)}$$

$$\therefore\ \frac{h}{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}} = \frac{h\left(\sqrt[3]{(x+h)^2} + \sqrt[3]{x\,(x+h)} + \sqrt[3]{x^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{x+h}\right)^3 - \left(\sqrt[3]{x}\right)^3}$$

$$\therefore\ \frac{h}{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}} = \frac{h\left(\sqrt[3]{(x+h)^2} + \sqrt[3]{x\,(x+h)} + \sqrt[3]{x^2}\right)}{(x+h) - x}$$

$$\therefore\ \frac{h}{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}} = \frac{\cancel{h}\left(\sqrt[3]{(x+h)^2} + \sqrt[3]{x\,(x+h)} + \sqrt[3]{x^2}\right)}{\cancel{h}}\text{; con } h \neq 0$$

$$\therefore\ \frac{h}{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}} = \sqrt[3]{(x+h)^2} + \sqrt[3]{x\,(x+h)} + \sqrt[3]{x^2}\text{; con } h \neq 0$$

EJERCICIO 4.3

En los ejercicios 1. a 15. racionaliza el denominador de cada una de las fracciones dadas y simplifica el resultado cuando sea posible. Ten en cuenta que las letras representan números reales positivos.

1 $\dfrac{4\sqrt{7}}{\sqrt{84}}$ **2** $\dfrac{\sqrt[4]{a^3b^2}}{3\sqrt[4]{ab}}$ **3** $\dfrac{21}{\sqrt[3]{-98x}}$

4 $\sqrt{\dfrac{15m^7}{8m^6n^3}}$ **5** $\dfrac{270x^2yz^3}{\sqrt[4]{288x^5y^6z^2}}$ **6** $\dfrac{3x^2y}{5\sqrt[5]{x^3y^4}}$

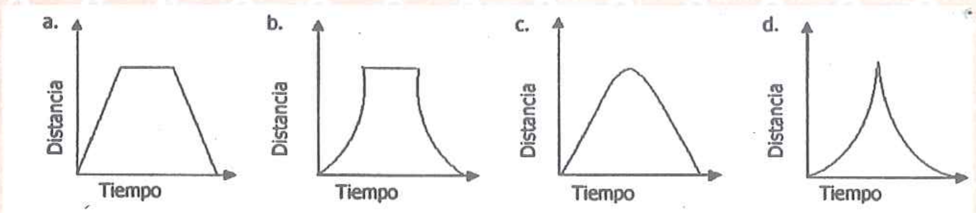
7 $\dfrac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ **8** $\dfrac{m-4}{\sqrt{m}-2}$ **9** $\dfrac{x}{\sqrt{x+4}-2}$

10 $\dfrac{a-b\sqrt{c}}{a+b\sqrt{c}}$ **11** $\dfrac{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}{b\sqrt{a}-a\sqrt{b}}$ **12** $\sqrt{\dfrac{7+\sqrt{2}}{7-\sqrt{2}}}$

13 $\dfrac{a-\sqrt{a^2-1}}{a+\sqrt{a^2-1}}$ **14** $\dfrac{2xy(x^2-y^2)}{\sqrt[3]{2x}+\sqrt[3]{2y}}$ **15** $\dfrac{a^2-b^2}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}$

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 2

Sebastián sale de su casa y maneja lentamente hacia el oriente en el tráfico de la ciudad. Cuando entra a la autopista maneja más rápido, pero siempre hacia el oriente hasta que llega a un centro comercial. Se queda en el centro comercial por una hora. Luego, regresa a casa manejando hacia el occidente rápidamente por la autopista y luego lentamente debido al tráfico de la ciudad. Cada una de las gráficas muestra en el eje vertical la distancia a la que Sebastián se encuentra de su casa con respecto al tiempo transcurrido (en el eje horizontal) desde el momento de salir de ella. ¿Cuál de las gráficas describe mejor el recorrido realizado por Sebastián?.



TALLER DE REPASO DE LA UNIDAD 4

1. Preguntas para revisar la teoría:

   a) ¿Cuándo una expresión irracional no está escrita en la forma radical más simple?
   b) ¿Cómo se suman y restan raíces? ¿Cómo se multiplican y dividen?
   c) ¿Cuál es el factor racionalizante de $\sqrt[5]{8x^2y^3}$?
   d) ¿Cuál es el factor racionalizante de $4\sqrt{x}-3$?
   e) ¿Cuál es el factor racionalizante de $3\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{y^2}$?
   f) ¿Cuál es el factor racionalizante de $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}$?

En los ejercicios 2. a 10. selecciona la letra que corresponda a la UNICA respuesta correcta.

2. Si la expresión $\dfrac{z^{-\frac{1}{2}}\,y^{\frac{1}{4}}}{x^{-\frac{2}{3}}\,y^{-3}}$ la escribimos con exponentes positivos y raíces, entonces después de simplificarla quedaría:

a) $\dfrac{\sqrt{x}\,\sqrt{y}}{\sqrt{z}}$ b) $\dfrac{\sqrt{x^2}\,\sqrt[4]{y^{13}}}{\sqrt{z^2}}$ c) $\dfrac{\sqrt[3]{x^2}\,\sqrt[4]{y^{13}}}{\sqrt{z}}$ d) $\dfrac{\sqrt[3]{x}\,\sqrt{y^{13}}}{\sqrt{z}}$

3. Después de simplificar la expresión $\sqrt[3]{\sqrt[4]{x^2}}$ nos queda:

a) $\sqrt[6]{x}$ b) $\sqrt[6]{x^2}$ c) $\sqrt[12]{x}$ d) x^{12}

4. El producto de $\left(\sqrt[x]{x}\right)^x$ por $\left(\sqrt[y]{y}\right)^y$ es:

a) $\left(\sqrt[xy]{xy}\right)^{xy}$ b) $\left(\sqrt[xy]{xy}\right)^{x+y}$ c) $(xy)^{xy}$ d) xy

5. Luego de simplificar la expresión $\sqrt[4]{5\sqrt{25}}$ nos queda:

a) $\sqrt[4]{5}$ b) $\sqrt[4]{125}$ c) $\sqrt{5}$ d) $\sqrt{25}$

6. La forma más simple de $\dfrac{(0{,}25)^{-3/2}-(0{,}008)^{-2/3}}{(0{,}00032)^{-0{,}6}-6x^0}$ es:

a) $-\dfrac{1}{7}$ b) $-\dfrac{2}{7}$ c) $-\dfrac{3}{7}$ d) $-\dfrac{4}{7}$

7. Al simplificar $\left[\sqrt[3]{a^2}\div\sqrt[4]{a^3}\right]\bullet\sqrt[6]{a^5}$, el resultado es:

a) $\sqrt[3]{a^3}$ b) $\sqrt[4]{a^3}$ c) $\sqrt[6]{a^3}$ d) $\sqrt[3]{a}$

8. Al simplificar $\dfrac{\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\frac{2}{3}}-\sqrt{\frac{3}{2}}}$ el resultado es:

a) -1 b) -2 c) -3 d) -5

9. Si eliminamos los radicales del denominador de la expresión $\dfrac{h}{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}$, obtenemos:

a) $\sqrt{x+h}-\sqrt{x}$ b) $\sqrt{x+h}+\sqrt{x}$ c) $\dfrac{\sqrt{x}}{x}$ d) $\dfrac{\sqrt{x+h}}{2}$

10. La expresión $\dfrac{\sqrt[18]{a^7b^9}}{\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[3]{ab}}}}$ equivale a:

a) $\sqrt{ab}$ b) $\sqrt[9]{a^3b^4}$ c) $\sqrt[18]{ab}$ d) $\sqrt[9]{a^6b^8}$

En los ejercicios 11. a 20., resuelve cada ejercicio y simplifica el resultado. Las letras representan números reales positivos.

11. $7\sqrt{50}+4\sqrt{72}-2\sqrt{98}$

12. $3\sqrt{54}+2\sqrt{48}-5\sqrt{96}-3\sqrt{75}$

13. $\sqrt{75x}+\sqrt{108x}-\sqrt{12x}$

14. $\frac{1}{2}\sqrt{63}+\frac{2}{3}\sqrt{112}-\frac{1}{6}\sqrt{28}$

15. $\sqrt{x^5}+\sqrt{x^7}-\sqrt{x^9}$

16. $3\sqrt{5}\left(8\sqrt{20}-3\sqrt{45}+2\sqrt{5}\right)$

17. $\left(\sqrt{18}+\sqrt[6]{243}\right)\div\sqrt[3]{9}$

18. $-2\sqrt[3]{4}\left(3\sqrt[3]{2}+5\sqrt[3]{16}-4\sqrt[3]{128}\right)$

19. $\dfrac{6\sqrt[3]{16}}{5\sqrt[3]{54}}$

20. $\left(\dfrac{4\sqrt{5}-3}{5}\right)\left(\dfrac{-3-4\sqrt{5}}{5}\right)$

21. Si x representa un número real positivo, hallar el valor de la expresión $3\sqrt{x^2} - 5\sqrt[3]{x^3} + 7\sqrt[4]{x^4} - 2x$

22. Si x representa un número real negativo, hallar el valor de la expresión $3\sqrt{x^2} - 5\sqrt[3]{x^3} + 7\sqrt[4]{x^4} - 2x$

En los ejercicios 23. a 28. racionalizar el denominador y simplificar el resultado:

23. $\dfrac{\sqrt{x+a} - \sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a} + \sqrt{x-a}}$

24. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2}}$

25. $\dfrac{2+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2-\sqrt{3}-\sqrt{5}}$

26. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}$

27. $\dfrac{5}{(\sqrt{6}-1)(6+\sqrt{6})}$

28. $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt[6]{9}}$

En los ejercicios 29. a 32. racionalizar el numerador y simplificar todo lo que sea posible.

29. $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}$

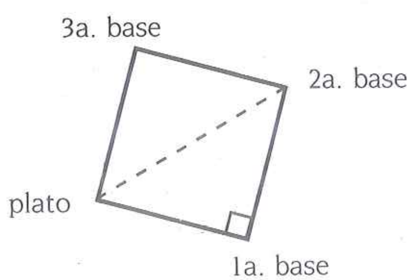
30. $\dfrac{\sqrt{h+4}-2}{h}$

31. $\dfrac{\sqrt{3(x+h)-2}-\sqrt{3x-2}}{h}$

32. $\dfrac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}$

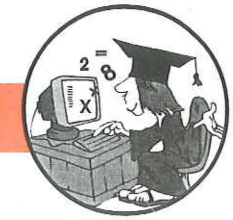
33. Los lados de un rectángulo miden $\sqrt{13}$ cm y $\sqrt{325}$ cm. Halla su área.

34. Un diamante de béisbol es un cuadrado de 90 pies de lado. Encuentra la distancia del plato a la segunda base.



35. Encuentra la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden $(2\sqrt{7}+3)$cm y $(2\sqrt{7}-3)$cm.

PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS DEL ICFES



1. Si a las 8: a.m. se le suministra a un paciente una droga A que debe tomar cada media hora y una droga B que debe tomar cada 8 minutos, entonces las drogas A y B se vuelven a tomar juntas a las:

   a) 8:38 a.m b) 9:08 a.m. c) 9:20 a.m. d) 10:00 a.m.

2. La comida que reciben 4 pájaros diariamente puede pesar de 12 a 18 gramos. Si el turpial recibe 1/3 de la comida y el resto se reparte en partes iguales entre 3 canarios, entonces la cantidad máxima de comida que puede recibir un canario es:

   a) 4 gramos b) 6 gramos c) 8 gramos d) 10 gramos

3. El resultado de $(4 \times 10^{2}) \bullet (3 \times 10^{-1}) \bullet (2 \times 10^{3})^{-1}$ es:

   a) 24×10^{6} b) 6×10^{-2} c) 24×10^{-4} d) 6×10^{6}

4. Los 14 dígitos del número de una tarjeta de crédito deben escribirse en las casillas que se muestran a continuación:

			9				X				7		

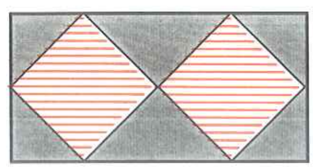
   Si la suma de tres dígitos cualesquiera consecutivos debe ser 20, entonces el valor de x es:

   a) 3 b) 4 c) 5 d) 7

5. En la figura, el área de la parte rayada es respecto al área de la parte sombreada:

   a) Igual b) La mitad

   c) El doble d) El triple



DIMENSIONES

Cor
• P
re
p

Com
• Ex
op

Cog
• O
• Ha
de
• Re
co

Estét
• Re
ple

Etica
• Val

E S

Núcleo Temático

5

NÚMEROS COMPLEJOS

LOGRO GENERAL

Identificar el conjunto de los números complejos y realizar operaciones con ellos.

D I M E N S I O N E S

LOGROS ESPECÍFICOS	INDICADORES DE LOGRO
Corporal: • Participar en actividades donde se suman, restan, multiplican y dividen números complejos.	• Participa en actividades de destreza operativa y manejo conceptual.
Comunicativa: • Explicar con sus propias palabras cómo se opera con números complejos.	• Explica con sus propias palabras como: - se suman y restan complejos. - se multiplican complejos. - se dividen complejos.
Cognitiva: • Operar con números complejos. • Hallar el conjugado, el inverso y el módulo de un número complejo. • Representar geométricamente un número complejo.	• Suma, resta, multiplica y divide números complejos. • Halla el conjugado, el inverso y el modulo de $a \pm bi$. • Representa geométricamente el número complejo $a \pm bi$.
Estética: • Representar vectorialmente el número complejo $a \pm bi$.	• Representa vectorialmente un número complejo.
Etica-Actitudinal: • Valorar la importancia del trabajo en grupo.	• Realiza con interés las actividades propuestas en grupo. • Comparte con sus compañeros sus habilidades y conocimientos.

E V A L U A C I Ó N

E S T R A T E G I A S   M E T O D O L Ó G I C A S

5.1 HISTORIA DEL ALGEBRA (15): ISAAC NEWTON

Isaac Newton nació en una villa rural inglesa, la navidad de 1642, tres meses después de la muerte de su padre. A la edad de tres años, su madre volvió a casarse y lo dejó con su abuela. No existen indicios, en su niñez o en la escuela elemental, que sugiriesen que su vida y obra serían un punto crucial en la historia de la humanidad.

Debido a la influencia de un tio suyo que intuía un potencial oculto en el joven Isaac, Newton pudo ingresar a la universidad de Cambridge en 1661. Durante los años 1665 y 1666, cuando Cambridge cerró sus puertas debido a la peste bubónica diseminada por Europa, él regresó a su tierra y estableció las bases para los tres grandes logros de su carrera científica: la invención del cálculo, el descubrimiento del espectro de los colores de la luz y la teoría de la gravitación.

A los 40 años, siendo profesor de matemáticas (y aparentemente un maestro con poco éxito) en Cambridge, Newton escribió **Principia Mathematica** (1687), tal vez el tratado científico de mayor influencia jamás publicado. Esta obra le dio tal fama a Newton que después de su muerte, en 1727, fue enterrado junto a los grandes de su país en la abadía de Westminster, con tal pompa que el filósofo Voltaire señaló: "he visto un profesor de matemáticas... enterrado como un rey que hizo el bien a sus súbditos"

Los aportes de Newton al desarrollo del álgebra fueron igualmente importantes. Poco después de su graduación en Cambridge en 1665, Newton descubrió un nuevo método para resolver una ecuación de la forma f(x) = 0. A diferencia de los métodos particulares, como la fórmula cuadrática que sólo se aplica a las ecuaciones de forma particular, el **método de Newton** se puede utilizar para aproximar las soluciones numéricas de casi toda ecuación.

EJERCICIO 5.1

Lee nuevamente el escrito anterior y luego encierra, en un círculo, la letra que corresponda a la respuesta correcta.

1. El autor del escrito **afirma** de Newton que:
   a. Demostró toda su inteligencia y capacidad en los primeros años de su vida escolar.
   b. Gracias a la visión de un tio suyo no se perdió, para la ciencia, un talento como el de este insigne inglés.
   c. Se sentía realizado en el ejercicio de la docencia.
   d. Murió en la soledad de la Abadía de Westminster.

2. En el texto se emplean las palabras **abadía** y **pompa** para referirse, respectivamente a:
   a. Colegio y pólvora.
   b. Provincia y rito.
   c. Convento y Fastuosidad.
   d. Campo y fiesta.

3. Del contenido del escrito se puede inferir que:
   a. Los grandes hombres, en la historia de la humanidad, no han disfrutado de la educación de sus padres a temprana edad.
   b. Los hombres más lucidos de las ciencias han sido huérfanos de padre.
   c. Los saberes de Newton fueron de procedencia innata.
   d. Newton poseía inteligencia y talento superiores.

4. Son grandes realizaciones matemáticas de Newton las siguientes, con excepción de:
   a. La teoría de la gravedad.
   b. La teoría del color.
   c. Principia Matemática.
   d. La invención del cálculo.

5. Después de leer el texto, **no podemos afirmar que**:
   a. Newton haya sido un hombre desdichado.
   b. Este matemático se hubiera formado fuera de la casa paterna.
   c. Los vínculos de su familia le permitieron a Newton una buena preparación universitaria.
   d. Newton fuera inhumado con honores, despedido como gran solemnidad y con la tristeza de todos sus admiradores.

5.2 HISTORIA DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

El desarrollo de los números complejos constituye una de las experiencias más interesantes de la Matemática, no sólo por la trascendencia que tiene, sino por ser una muestra típica de la evolución de una idea en la historia del pensamiento científico.

La historia es la siguiente: corría la mitad del siglo XVI. Los algebristas italianos (Tartaglia, Cardano, Bombelli) buscaban la forma de resolver la ecuación de tercer grado o ecuación cúbica. La fórmula que obtuvieron (la misma que se utiliza hoy día) contiene una raíz cuadrada y hay casos en los que este radical, por contener una cantidad negativa, resultaba imposible de resolver. Sin embargo, lo sorprendente de la ecuación cúbica es que aún así, posee soluciones reales.

¿ Cómo es posible - se preguntaban aquellos matemáticos - **que de un objeto tan irreal y carente de sentido, como es la raíz cuadrada de un número negativo, se obtuviese una solución real de la ecuación cúbica ?** Ante esta situación, Bombelli se arriesgó e inventó "algo" que no era un número real, pero que le servía como tal y le permitía "dar el salto en el vacío" para llegar a las raíces de la ecuación.

Bombelli escribió sus ideas en el "Álgebra", 1572, pero éstas parecieron demasiado atrevidas, y sus contemporáneos no quisieron seguirle. Sólo un siglo más tarde, Leibnitz acogió sin reservas las ideas de Bombelli y las difundió en sus obras matemáticas. En el siglo XVIII cada vez más personas trabajaron con "eso" que se dio en llamar NÚMEROS IMAGINARIOS, cuya introducción se justificaba así:

$$\sqrt{-5} = \sqrt{-1}\sqrt{5}$$

es decir, la raíz cuadrada de un número negativo puede expresarse como la raíz cuadrada de su opuesto, positivo, multiplicado por $\sqrt{-1}$.

A esto último se le llamó la UNIDAD IMAGINARIA, y Leonardo Euler la representó por la letra **i**.

5.3 DEFINICIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS

- De acuerdo con lo visto en la sección anterior, ecuaciones como: $x^2 = -49$ no tienen solución en los reales, porque no hay un número real que elevado al cuadrado de -49, pues el cuadrado de todo número real es un número no negativo.
- Por lo tanto, para considerar raíces cuadradas de números negativos, debemos tratar con números distintos de los reales; es decir, debemos desarrollar un conjunto de números que contenga a los números reales y también las raíces cuadradas de números negativos. Con este fin, definimos una clase de números, llamados NÚMEROS COMPLEJOS, de la siguiente manera:

APRENDAMOS

El conjunto de todos los números de la forma: $\mathbf{a + bi}$,donde $\mathbf{a, b \in R}$, con $\mathbf{i = \sqrt{-1}}$, se denomina conjunto de los **NÚMEROS COMPLEJOS** y se denota por **C**.

Ejemplo

Los números $3 - 2i$; $\frac{2}{3} + 8i$; $\sqrt{3} - 0{,}5i$; $0 + 6i$; $8 + 0i$; $0 + 0i$ son números complejos.

¡ATENCIÓN!

1. En el número complejo $\mathbf{a + bi}$, el número **a** se llama la **PARTE REAL**, y el número **bi** se llama la **PARTE IMAGINARIA.** Por ejemplo, en el número complejo $-5 + 3i$, la parte real es -5 y la parte imaginaria es $3i$.
2. Todo número real **a** es un número complejo y podemos escribirlo así: $\mathbf{a + 0i}$. El número $\mathbf{0 + bi}$ se puede escribir más simplemente como **bi**; es decir: $\mathbf{bi = 0 + bi}$. El número **bi** se llama número **IMAGINARIO PURO.**
3. El número real **0** es un número complejo, y podemos escribirlo como $\mathbf{0 + 0i}$.

5.4 IGUALDAD, SUMA Y MULTIPLICACIÓN DE COMPLEJOS

- Definamos, en primer lugar, la igualdad de números complejos:

APRENDAMOS

IGUALDAD DE NÚMEROS COMPLEJOS:
Dos números complejos $\mathbf{a + bi}$ y $\mathbf{c + di}$ son **iguales** si y sólo si $\mathbf{a = c}$ y $\mathbf{b = d}$.

Ejemplo 1

Si $a + bi = 7 + 6i$, entonces $a = 7$ y $b = 6$

Ejemplo 2

Si $x - 2 + 4yi = 3 + 12i$, entonces: $\begin{cases} x - 2 = 3 \\ 4y = 12 \end{cases}$; luego, $\begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \end{cases}$

- La suma, la diferencia y la multiplicación de números complejos se facilita si consideramos los números $a + bi$ y $c + di$ como polinomios en i y tenemos en cuenta que $i^2 = -1$. De esta manera, definimos las operaciones suma y multiplicación en **C** aplicando las propiedades de campo en el conjunto de los números reales. Por ejemplo:

a) $(5 + 4i) + (6 - 7i) = (5 + 6) + (4 - 7)i = 11 - 3i$

b) $(2 + 3i) - (4 - 5i) = (2 - 4) + (3 + 5)i = -2 + 8i$

c) $(5 + 3i) . (6 - 2i) = 30 - 10i + 18i - 6i^2 = 30 + 8i - 6i^2$

$= 30 + 8i - 6(-1)$ .... $i^2 = -1$

$= 30 + 8i + 6 = 36 + 8i$

APRENDAMOS

SUMA Y MULTIPLICACIÓN DE COMPLEJOS

Si $a + bi$ y $c + di$ son números complejos, entonces:

$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

y

$(a + bi) \bullet (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

¡ATENCIÓN!

1. Al sumar dos números complejos, el resultado es un número complejo; es decir, la suma en **C** cumple la propiedad clausurativa.
2. Al multiplicar dos números complejos, el resultado es un número complejo; es decir, la multiplicación en **C** cumple la propiedad clausurativa.
3. No es necesario memorizar las fórmulas para sumar o multiplicar números complejos. Basta trabajar como si fueran polinomios en **i**.
4. El ELEMENTO NEUTRO ADITIVO en el conjunto de los números complejos es **0**, ya que podemos escribirlo como **0 + 0i**; y además:

   Para todo $(a+bi) \in C$: $(a+bi) + (0+0i) = (a+0) + (b+0)i = a+bi$

5. El OPUESTO (inverso aditivo) de **a + bi** es **-a - bi** ya que:

   $(a+bi) + (-a - bi) = [a + (-a)] + [b + (-b)]i = 0 + 0i$

   Por lo tanto: **$-(a+bi) = -a - bi$**

6. Lo mismo que en los números reales, la RESTA de números complejos se define a partir de la suma, así:

   $(a + bi) - (c + di) = (a + bi) + [-(c + di)]$

   $\therefore (a + bi) - (c + di) = (a + bi) + (-c - di) = (a - c) + (b - d)i$

7. El ELEMENTO NEUTRO MULTIPLICATIVO en el conjunto de los números complejos es **1**, ya que podemos escribirlo como **1 + 0i**; y además:

   Para todo $(a+bi) \in C$: $(a+bi) \bullet (1+0i) = a + 0i + bi + 0i^2 = a + bi$

EJERCICIO 5.2

Efectúa las operaciones indicadas en los siguientes ejercicios:

1. $(6 + 4i) + (7 + 9i)$
2. $(-4 + 5i) + (2 - i)$
3. $(8 + 12i) - (9 + 8i)$
4. $-(-3 + 2i) + (-7 + 8i)$
5. $3 - (3 - 4i)$
6. $12i - (8 + 3i)$
7. $(5 + 3i)(-8 + 5i)$
8. $(3 + 5i)(3 - 5i)$
9. $-8i(4 - 9i)$
10. $6(4 - 11i)$
11. $(-5i)(8i)$
12. $(\sqrt{5} + \sqrt{11}\,i)(\sqrt{5} - \sqrt{11}\,i)$
13. $(5 + 4i)^2$
14. $i(3 - 2i)(5 + i)$
15. $(4 - 3i)^2 (5i - 2)^2$

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 1

75 niños compran 24 bolsas de canicas, pagando con sus ahorros $\frac{2}{3}$ del precio total, porque el vendedor les rebajó la tercera parte. Si el precio original de cada bolsa es de \$63.000 y las canicas se reparten por igual, entonces la cantidad x que debe pagar cada niño es:

a) $x \leq 10.000$ b) $10.000 < x < 15000$ c) $15000 \leq x < 20000$ d) $x = 20.000$

5.4 CONJUGADOS E INVERSOS

- En la sección anterior definimos la suma, la resta y la multiplicación de números complejos. Ahora queremos definir la división de números complejos. Recordemos que en los números reales la división se definió así:

$$a \div b = a \cdot \frac{1}{b}, \; b \neq 0$$

es decir, para dividir dos números reales basta multiplicar el dividendo por el INVERSO MULTIPLICATIVO del divisor.

- Para definir la división en C comencemos definiendo el concepto de CONJUGADO DE UN COMPLEJO.

APRENDAMOS

Dos números complejos son CONJUGADOS cuando sus partes reales son iguales y sus partes imaginarias difieren sólo en el signo.

$(a + bi)$ y $(a - bi)$ son COMPLEJOS CONJUGADOS

¡ATENCIÓN! 1. Notemos que: $(a + bi) (a - bi) = a^2 + b^2$; es decir, el producto de un número complejo y su conjugado es un número real.

2. Si multiplicamos ambos lados de la igualdad anterior por $\dfrac{1}{a^2 + b^2}$, nos queda:

$$\left(\frac{1}{a^2 + b^2} \right) (a - bi) (a + bi) = \left(\frac{1}{a^2 + b^2} \right) (a^2 + b^2) = 1$$

Por lo tanto, si $a + bi \neq 0$, entonces existe un inverso multiplicativo para $a + bi$, simbolizado por

$(a + bi)^{-1}$ ó $\dfrac{1}{a + bi}$ tal que: $\dfrac{1}{a + bi} = \left(\dfrac{1}{a^2 + b^2} \right) (a - bi)$

3. Ya podemos definir el cociente $\dfrac{a + bi}{c + di}$, con $c + di \neq 0$, como el producto de $a + bi$ y $\dfrac{1}{c + di}$.
Sin embargo, este cociente podemos escribirlo en la forma ordinaria $m + ni$, multiplicando el numerador y el denominador de $\dfrac{a + bi}{c + di}$ por el conjugado del denominador, $c - di$; así:

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a+bi) \cdot (c - di)}{(c+di) \cdot (c - di)}$$

$$\therefore \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(ac+bd) + (bc - ad)\, i}{c^2 + d^2}$$

$$\therefore \frac{a + bi}{c + di} = \left(\frac{ac+bd}{c^2 + d^2} \right) + \left(\frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \right) i$$

Ejemplo 1

Expresemos a $\dfrac{1}{7+5i}$ en la forma a + bi

Solución

$$\frac{1}{7+5i} = \frac{1}{7+5i} \cdot \frac{7 - 5i}{7 - 5i} = \frac{7 - 5i}{49+25}$$

$$\therefore \frac{1}{7+5i} = \frac{7 - 5i}{74} = \frac{7}{74} - \frac{5}{74}\, i$$

Ejemplo 2

Expresemos el cociente $\dfrac{4 - i}{3 - 7i}$ en la forma a + bi

Solución

$$\frac{4 - i}{3 - 7i} = \frac{4 - i}{3 - 7i} \cdot \frac{3+7i}{3+7i} = \frac{12 + 28i - 3i - 7i^2}{9 - 49\, i^2}$$

$$\therefore \frac{4 - i}{3 - 7i} = \frac{12 + 25i + 7}{9 + 49} = \frac{19 + 25i}{58} = \frac{19}{58} + \frac{25}{58}\, i$$

PROPIEDADES DE LOS CONJUGADOS

Los conjugados de los números complejos tienen varias propiedades interesantes y útiles. Para simplificar la notación tendremos en cuenta lo siguiente:

Si $z = a + bi$ es un número complejo, entonces el conjugado lo simbolizamos por $\overline{z} = a - bi$.

Las propiedades de los conjugados son las siguientes:

Si z y w son números complejos entonces:

P-1: $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$

P-2: $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

P-3: $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$, **con** $n \in N$

P-4: $\overline{z} = z$ **si y sólo si** $z \in R$

DEMOSTRACIÓN DE P-1:

1. Sean $z = a + bi$ y $w = c + di$; con $a, b, c, d \in R$
2. $\therefore z + w = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$
3. $\therefore \overline{z + w} = (a + c) - (b + d)i = \underbrace{(a - bi)} + \underbrace{(c - di)} = \overline{z} + \overline{w}$

La demostración de las otras propiedades la dejamos como ejercicio.

Ejemplo 3

Efectuemos $5 + 7i + \overline{5 + 7i}$

Solución

$$5 + 7i + \overline{5 + 7i} = 5 + 7i + 5 - 7i = 10 + 0i = 10$$

Ejemplo 4

Efectuemos $(5 + 6i)(\overline{5 + 6i})$

Solución

$$(5 + 6i)(\overline{5 + 6i}) = (5 + 6i)(5 - 6i) = 25 + 36 = 61$$

EJERCICIO 5.3

1 Halla los conjugados de los números complejos siguientes:

a) $3 + 4i$ b) $6 - i$ c) $-2 + 3i$ d) $4 + 3i$

e) $2 - 5i$ f) 7 g) $4i$ h) $(1 + i)(-2 - i)$

i) $(2 + 3i)(5 + 8i)$ j) $2i(-3 + 8i)$

2 Escribe las siguientes expresiones de números complejos en la forma a + bi:

a) $\dfrac{4 - i}{4 + 3i}$ b) $\dfrac{2 + 5i}{6 + 7i}$ c) $\dfrac{1 + 4i}{3 + i}$

d) $\dfrac{(3+4i)(1-2i)}{1 + i}$ e) $\dfrac{(5-i)(1-5i)}{3 + 2i}$ f) $(2 - 3i)(\overline{3 + 4i})$

g) $(\overline{4+i})(\overline{-1+3i})$ h) $(\overline{7 - 2i})(\overline{2 - 7i})$

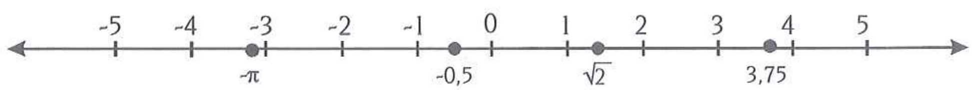
DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 2

En la numeración de las páginas de un libro se utilizan 642 dígitos. El número de páginas en el libro es:

a) 251 b) 244 c) 247 d) 250 e) 253

5.5 REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

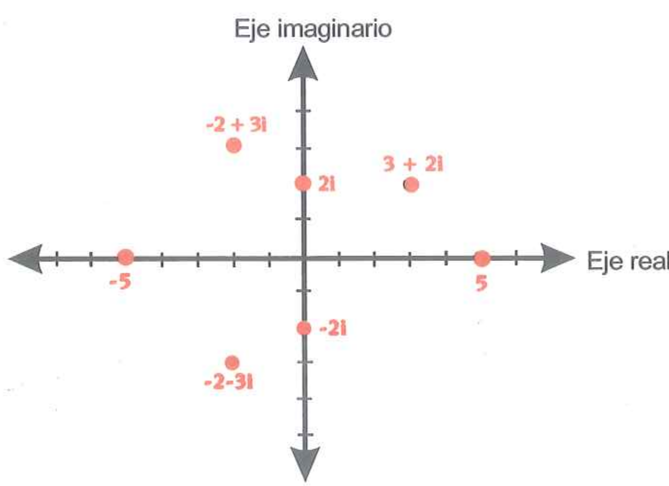
- Ya sabemos que los números reales se pueden representar geométricamente mediante puntos en una recta numérica.



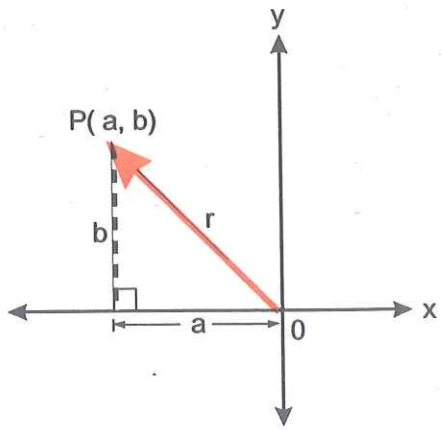
- La representación geométrica de los números complejos se realiza por medio de puntos en un plano coordenado. En efecto, cada número complejo **a + bi** determina un único par ordenado **(a, b)**. El correspondiente punto **P (a, b)** en un plano coordenado se denomina la REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA DE **a + bi**. De esta manera, cuando los ejes **x** e **y** se usan para representar números complejos, reciben los siguientes nombres:

  * El eje **x** se denomina EJE REAL
  * El eje **y** se denomina EJE IMAGINARIO
  * El plano coordenado se denomina PLANO COMPLEJO

- En la figura siguiente hemos indicado la forma de representar geométricamente varios números complejos. Notemos que para obtener el conjugado a - bi de cualquier número complejo a + bi basta hallar su simétrico con respecto al eje real.



- A veces también es útil representar el número complejo **a + bi** por el segmento dirigido o vector $\overrightarrow{\mathbf{OP}}$ trazado desde el origen hasta el punto **(a, b).** En este texto usaremos ambas representaciones: por medio de un vector o por medio de un punto.



VALOR ABSOLUTO Y ARGUMENTO DE UN NÚMERO COMPLEJO

- Definamos, en primer lugar, el concepto de VALOR ABSOLUTO o MÓDULO de un número complejo:

APRENDAMOS

DEFINICIÓN DE VALOR ABSOLUTO O MÓDULO

El VALOR ABSOLUTO o MODULO del número complejo **a + bi** denotado **|a+bi|** es la longitud del vector $\overrightarrow{\mathbf{OP}}$ de la figura anterior.

- Por lo tanto, de acuerdo con la figura anterior:

$|a+bi|^2 = |\overrightarrow{OP}|^2 = a^2 + b^2$ ....Teorema de Pitágoras

$\therefore |a+bi| = |\overrightarrow{OP}| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ....¿ Por qué?

- En consecuencia:

APRENDAMOS

El VALOR ABSOLUTO de un número complejo **a + bi**, denotado por **|a+bi|**, se define como el número real no negativo $\mathbf{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Ejemplo 1

Hallemos la norma del número complejo $z = 8 - 7i$

Solución

- Sabemos que: $|\ z\ | = \sqrt{a^2 + b^2}$, con $a = 8$, $b = 7$
- Luego, $|\ z\ | = \sqrt{8^2 + (-7)^2} = \sqrt{64 + 49} = \sqrt{113}$
- Por lo tanto, la norma de $z = 8 - 7i$ es $|\ z\ | = \sqrt{113}$

Ejemplo 2

Hallemos la norma del vector que resulta al restar $z = -3 + 5i$ de $w = 7 - 2i$

Solución

- Debemos hallar la norma del número complejo $w - z$.
- En primer lugar, hallemos $w - z$:

$$w - z = (7 - 2i) - (-3 + 5i) = (7 + 3) - (2i + 5i) = 10 - 7i$$

- Ahora calculemos $|w - z|$:

$$|w - z| = \sqrt{10^2 + (-7)^2} = \sqrt{100 + 49} = \sqrt{149}$$

EJERCICIO 5.4

En los ejercicios 1. a 8. representa el número complejo dado por medio de puntos del plano.

1. $8 - 3i$	2. $12 + i$	3. $2 + 4i$	4. $6i$
5. 9	6. $0 + 0i$	7. $-2i - 5$	8. i

En los ejercicios 9. a 16. representa vectorialmente cada número complejo dado y halla su norma.

9. $7 - 3i$	10. $-2 + 6i$	11. $-7 - 13i$	12. $0 + 0i$
13. $4 - i$	14. 8	15. $-6i$	16. 0

17. Calcula $|7 - 2i|$ y $|7 + 2i|$
18. Halla la norma de $\frac{4}{5} - \frac{4}{9}i$
19. Halla la norma de $5a - 12bi$
20. Si $w = 12 - 5i$, calcula $w \bullet \overline{w}$ y $|\overline{w}|^2$
21. Si $z = c + di$, prueba que $z \bullet \overline{z} = |z|^2 = c^2 + d^2$
22. Calcula $|(12 - 13i) \bullet (4 + 3i)|$
23. Si $z = 4 - 4i$, calcula $\left|\frac{z}{z - 1}\right|$
24. Si $b = 5i$, calcula $\left|\frac{b - 1}{b + 1}\right|$
25. Si $c = 4 + 4i$, calcula $\left|\frac{c}{c - i}\right|$
26. Si $w = 1 - 3i$, calcula $|w^2 + i|$
27. Si $z = 1 - 5i$, calcula $|z^2 + i|^2$
28. Si $b = i$, calcula $|b^2 - 2b + 1|$
29. Si $x = 4i - 3$, calcula $|x^2 - 2x + 1|$
30. Si $p = \frac{3}{5}i + \frac{4}{5}$, calcula $\left|\frac{p}{\overline{p}}\right|$

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 3

Marco, Julio y Lina han comprado nuevas mascotas. Marco llama a la suya Kaiser, Julio a la suya Olafo y Lina a su animal lo puso Emperador. Una de las mascotas es gato, la otra es un conejo y la tercera es un canguro. Se sabe que el canguro boxeó ayer con su dueño. Marco tiene la pierna enyesada desde hace dos semanas. El dueño del gato monta a caballo los domingos con otro de los jóvenes. El gato mordió a Olafo.

a) ¿Quién es el dueño del conejo?

b) ¿Cuál es el nombre del canguro?

TALLER DE REPASO DE LA UNIDAD 5

1. Determina cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Justifica en cada caso la respuesta.

a) $-\frac{2}{3}$ no es un número complejo.

b) $\sqrt[3]{-64}$ es un número real.

c) El número $\sqrt[5]{-32}$ es imaginario puro.

d) Si $i = \sqrt{-1}$, $i^2 = -1$, $i^3 = -\sqrt{-1}$, $i^4 = 1$, entonces $i^5 = \sqrt{-1}$

e) $i^{26} = -1$

f) $i^{53} = \sqrt{-1}$

g) El inverso aditivo de $-5 + 4i$ es $-5 - 4i$

h) El inverso multiplicativo de $8 + 3i$ es $\frac{8}{73} - \frac{3}{73}i$

i) $\overline{w} = w$ sólo cuando $w \in R$

j) Cualquier número complejo puede representarse geométricamente sobre la recta numérica.

En los ejercicios 2. a 10. subraya la letra que corresponde a la única respuesta correcta.

2. Si $a - 3 + bi = 4 + 5i$, entonces los valores de a y b son respectivamente:

a) 5 y 7 b) 8 y 4 c) 4 y 8 d) 7 y 5

3. El conjugado del número complejo $-\frac{2}{3}i + 4$ es:

a) $4 + \frac{2}{3}i$ b) $\frac{2}{3}i - 4$ c) $-4 - \frac{2}{3}i$ d) $-\left(\frac{2}{3}i - 4\right)$

4. El valor de i^{79} es:

a) $\sqrt{-1}$ b) $-\sqrt{-1}$ c) -1 d) 1

5. El conjugado del número complejo -12 es:

a) -12 b) 12 c) $-12 + 12i$ d) $-12 - 12i$

6. El inverso aditivo de $-5+7i$ es:

a) 74 b) $5+7i$ c) $5-7i$ d) $7i-5$

7. La norma del número complejo $-7i$ es:

a) $7i$ b) 49 c) 7 d) -7

8. Si $\overline{w}=w$ entonces:

a) w es un número imaginario puro
b) w es un número real
c) w es un número complejo
d) $w=-i$

9. Si $m=3-i$ entonces $\left|\frac{m}{m+i}\right|$ es igual a:

a) $\frac{\sqrt{10}}{3}$ b) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ c) $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ d) $-\frac{\sqrt{10}}{3}$

10. El inverso multiplicativo de $-7+3i$ es:

a) $7-3i$ b) $\frac{7}{58}+\frac{3}{58}i$ c) $-\frac{7}{58}-\frac{3}{58}i$ d) $\frac{1}{7-3i}$

Representa gráficamente los números complejos de los ejercicios 11. a 18.

11. $4+5i$ 12. $4-5i$ 13. $-4+5i$ 14. $-4-5i$
15. $7+3i$ 16. $7+i$ 17. $\sqrt{3}\,i$ 18. $-\sqrt{2}+\pi i$

En los ejercicios 19. a 30., simplifica cada expresión:

19. $(3+i)+(4-2i)$ 20. $(5+3i)-(7-5i)$ 21. $(9-i)+(4+5i)$
22. $(6-3i)-(3+2i)$ 23. $\frac{5+3i}{3+i}$ 24. $\frac{5-2i}{i}$
25. $\frac{7+i}{2+i}$ 26. $\frac{i}{\sqrt{2}-i}$ 27. $\frac{7+2i}{1-2i}$
28. $(1+3i)^2$ 29. $(4-3i)^3$ 30. $(5-\sqrt{-3})^2$

31. Halla el valor de la expresión $x^3-2x^2+9x+13$, sabiendo que $x=4-5i$

32. Halla el valor de la expresión $(x^2+5x)^2+x(x+5)$ sabiendo que $x=\frac{-5+i\sqrt{3}}{2}$

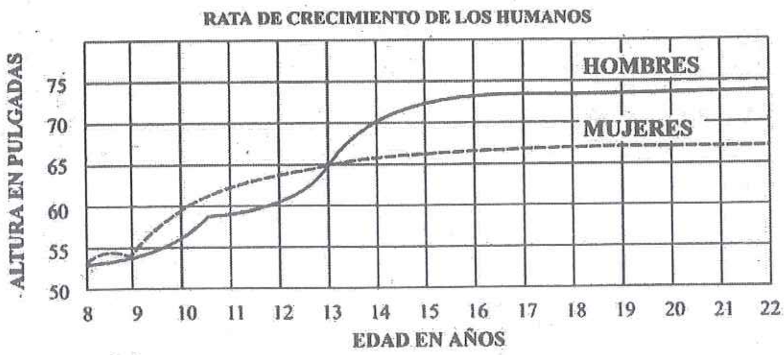
33. Halla el valor de $\frac{3x^2-4x+12}{x^2+x+1}$, si $x=3+i$

34. Determina los valores de m y n tales que: $m+n+(2m+3n)i=3+i$

35. Determina los valores de p y q tales que: $p(1+i)+q(1-i)=2$

PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS DEL ICFES

Contesta las preguntas 1. a 3. con base en el siguiente gráfico.



1. ¿Qué edad tiene un hombre cuando alcanza la estatura de una mujer de 11 años?

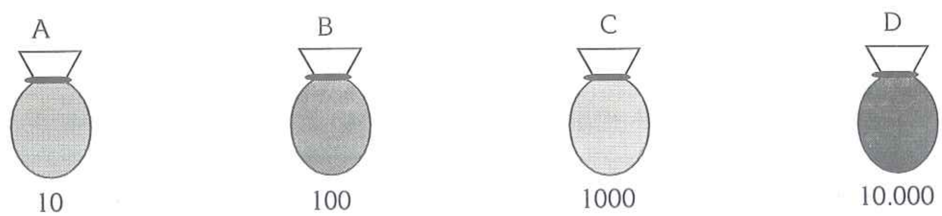
   a) 11   b) 12   c) 12,2   d) 12,5

2. Según el gráfico, ¿cuántos años transcurren mientras hombres y mujeres de la misma edad tienen la misma estatura?

   a) 4   b) 8   c) 9   d) 13

3. ¿Qué edad tiene un hombre cuando es 20% más alto que una mujer cuya edad es 10,5 años?

4. En cada bolsa hay el número de canicas que aparece debajo de cada una; además, se sabe que en cada una sólo hay una canica roja.



   Sin mirar dentro de las bolsas, usted puede sacar una canica de cada una de las bolsas. ¿Cuál de las bolsas dará la mayor posibilidad de sacar la canica roja?

   a) A   b) B   c) C   d) D

5. Un cierto número **a** es el 80% del número **b**; un número **c** es el 140% del número **b** y se sabe además que **c** es mayor que **a** en 72. El sistema de ecuaciones que satisface el enunciado es:

a)	b)	c)	d)
$0{,}8b = a$	$0{,}8b = a$	$0{,}8b = a$	$0{,}8b = a$
$1{,}4\,a = c$	$1{,}4b = c$	$1{,}4b = c$	$1{,}4a = c$
$c + a = 72$	$c + a = 72$	$c - a = 72$	$c - a = 72$

Núcleo Temático

6

FUNCIONES CUADRÁTICAS

LOGRO GENERAL

Reconocer la importancia de la función cuadrática en la matemática y su utilidad para modelar situaciones de la vida diaria.

LOGROS ESPECÍFICOS	INDICADORES DE LOGRO
Corporal • Manipular diagramas, tablas y gráficas para representar relaciones que son funciones cuadráticas.	• Elabora tablas de relaciones que son funciones cuadráticas. • Dibuja gráficas de relaciones que son funciones cuadráticas.
Comunicativa • Escribir en el lenguaje de las funciones cuadráticas, situaciones de la ciencia o de la vida diaria. • Expresar con claridad sus ideas a los compañeros.	• Traduce al lenguaje matemático, situaciones problemáticas de otras ramas de la ciencia o de la vida diaria, que pueden expresarse mediante funciones cuadráticas. • Explica con claridad los procesos seguidos para la obtención de resultados.
Cognitiva • Formular y resolver problemas de aplicación. • Hallar el vértice, la ecuación del eje de simetría y el intercepto con el eje y de una función cuadrática.	• Resuelve problemas cuyos enunciados corresponden a funciones cuadráticas. • Analiza, dibuja e interpreta gráficas de funciones cuadráticas.
Estética • Elaborar diagramas cartesianos para representar funciones cuadráticas.	• Interpreta la gráfica de una función cuadrática mostrando el vértice, la ecuación del eje de simetría y el intercepto con el eje y.
Etica-Actitudinal • Actuar de manera honesta en la presentación de trabajos y evaluaciones.	• Reconoce y acepta sus fortalezas y debilidades en la actividad académica.

DIMENSIONES

EVALUACIÓN

ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS

6.1 HISTORIA DEL ALGEBRA (16)

Paolo Ruffini, nació en Valentano el 23 de septiembre de 1765 y murió en Módena, el 10 de mayo de 1822. Desde temprana edad demostró sus capacidades intelectuales y decidió adelantar estudios universitarios en la medicina, a pesar de sentir una **entrañable** atracción hacia las matemáticas. Terminados sus estudios médicos, se dedicó a las matemáticas que llegaron a ser su ocupación favorita, logrando hacer numerosas investigaciones en el campo de las ecuaciones. Debido a sus publicaciones, fue nombrado profesor de Análisis de la Universidad de Módena y poco después de matemáticas. Por haber negado su adhesión al partido Republicano, cuando llegaron los franceses, perdió sus cátedras, las cuales le fueron devueltas en 1799, después de la nueva entrada de los austriacos en Módena.

Sus investigaciones en matemáticas no tuvieron receso y escribió entre otras **La Teoría General de Ecuaciones, Reflexiones sobre la solución de las Ecuaciones Generales** (memoria sobre la determinación de las raíces en las ecuaciones de un grado cualquiera).

En 1806, fue profesor de matemáticas de la Escuela Militar de Módena. Cuando el duque de esta ciudad recobró sus estados, lo nombró rector de la Universidad, en donde fue a la vez profesor de clínica médica, de medicina práctica y de matemáticas aplicadas.

Fue Presidente del Insituto Italiano de Ciencias y perteneció a la mayor parte de las corporaciones científicas de su país.

Ruffini fue el primero que realizó un intento, con éxito parcial, de demostrar la imposibilidad de resolver mediante procesos elementales de álgebra las ecuaciones generales de un grado superior a cuatro. Esta formulación denominada teorema Abel-Ruffini, fue demostrada definitivamente por el matemático noruego Niels Henrik Abel.

EJERCICIO 6.1

Lee nuevamente el texto anterior y luego encierra en un círculo, la letra que corresponda a la respuesta correcta:

1. De Paolo Ruffini se puede afirmar que:
   a. Su actividad científica la adelantó entre los siglos XVII y XVIII.
   b. Dedicó gran parte de su vida al trabajo médico.
   c. Tuvo inconvenientes en el ejercicio de la docencia por razones políticas.
   d. Demostró la formulación del teorema que lleva su nombre.

2. Una de las siguientes afirmaciones no aparece en el texto:
   a. El científico Ruffini dictó cátedra de medicina.
   b. A Paolo Ruffini nunca le interesó la actividad política.
   c. Este médico fue un hombre de extraordinaria capacidad intelectual.
   d. El médico y matemático Ruffini tuvo vínculos con el estamento militar italiano.

3. El propósito específico del autor, en el texto anterior es:
   a. Explicar las razones que llevaron a un médico a dedicarse al trabajo matemático.
   b. Destacar la constancia de un científico en el trabajo y la enseñanza de la matemática.
   c. Demostrar que la medicina y la matemática no son ciencias incompatibles.
   d. Exponer los motivos que llevaron a los republicanos a destituir a Ruffini de su cátedra.

4. El título que mejor expresa las ideas del texto es:
   a. Paolo Rufini, un maestro ejemplar.
   b. La constancia de un investigador.
   c. La ciencia entre la medicina y la matemática.
   d. Las grandes realizaciones del científico Paolo Ruffini.

5. El adjetivo **entrañable** que aparece en el texto puede sustituirse exactamente por:
   a. Hermosa.
   b. Real.
   c. Intima.
   d. Profunda.

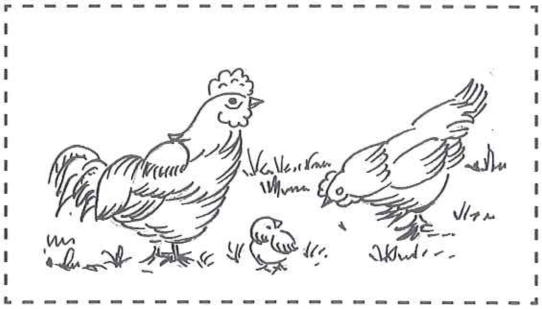
6.2 LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

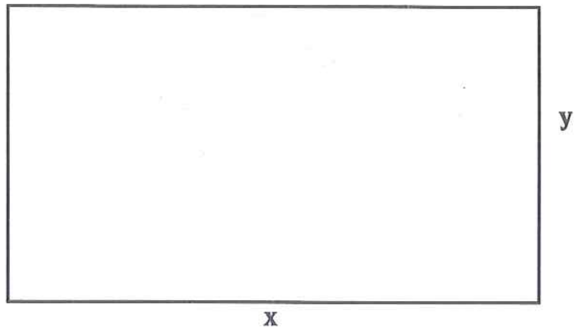
- Cuando en un partido de basquetbol un jugador lanza a la canasta, el balón describe una trayectoria que inicialmente es ascendente y, luego, es descendente. Estas trayectorias se llaman **PARABOLICAS**.

- Como sólo son válidos los bloqueos que se hacen cuando el balón está subiendo, el jugador que lanza trata de dar al balón la mayor inclinación posible de manera que en la trayectoria ascendente el balón no pueda ser bloqueado por sus rivales.
- Las trayectorias parabólicas constituyen un ejemplo de lo que estudiaremos en esta unidad: **Las funciones cuadráticas o de segundo grado**.

EXPERIENCIA

- Nos proponen el siguiente problema: **Un campesino tiene 36 metros de malla para construir un gallinero de forma rectangular. ¿Cómo cambiará el área del gallinero si variamos la longitud de uno de sus lados? ¿Cuáles dimensiones del rectángulo permitirán encerrar la mayor área?**
- En primer lugar imaginemos la situación:





- La figura nos muestra un gallinero rectangular de base x y altura y.
  - Como la malla disponible para encerrar el gallinero son 36 m, esta información corresponde al perímetro; por lo tanto:

$$2x + 2y = 36$$
$$\therefore x + y = 18$$
$$\therefore y = 18 - x$$

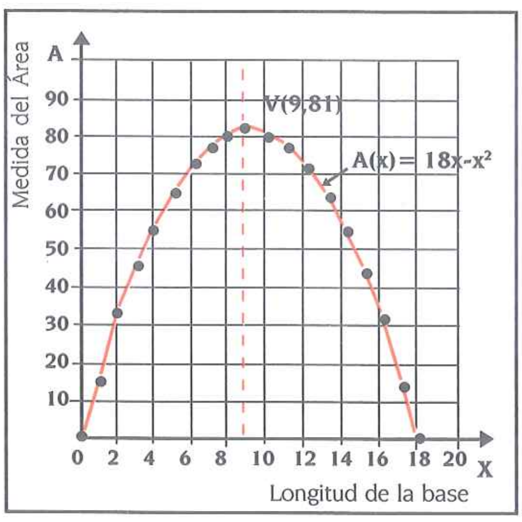
  - Y entonces el área del gallinero en **función** de x será:

$$A = \text{base x altura}$$
$$\therefore A = x \bullet y$$
$$\therefore A = x \bullet (18 - x)$$
$$\therefore A(x) = 18x - x^2$$

- Elaboremos ahora una tabla de valores para ver cómo varía el área a medida que variamos la longitud de la base **(x).**

Lado (x)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Area (A)	0	17	32	45	56	65	72	77	80	81	80	77	72	65	56	45	32	17	0

- Dibujemos la gráfica en un papel cuadriculado:



- La gráfica nos muestra varias cosas:
  1. Las medidas óptimas o ideales para construir el gallinero son x = 9 m , y = 18 m - 9 m y el área máxima es A = 9m x 9m = 81 m^2

2. La gráfica de $A(x) = 18x - x^2$ es una curva llamada **PARÁBOLA**. El punto máximo de la parábola **V (9,81)** se llama **VÉRTICE** y la recta paralela al eje vertical, que pasa por el vértice, se llama **EJE DE LA PARÁBOLA** y es un **eje de simetría** de la curva.

- La relación $A(x) = 18x - x^2$ se llama **función cuadrática** porque su regla o propiedad corresponde a una expresión polinómica de grado 2.
- Contesta: ¿Por qué en este caso, a la variable x no le asignamos valores negativos?'

6.3 FUNCIONES CUADRÁTICAS DE ECUACIÓN $y=ax^2$ y $y=ax^2+q$

PRIMERA EXPERIENCIA

- Dibuja en tu cuaderno las siguientes funciones cuadráticas:

$y = x^2$

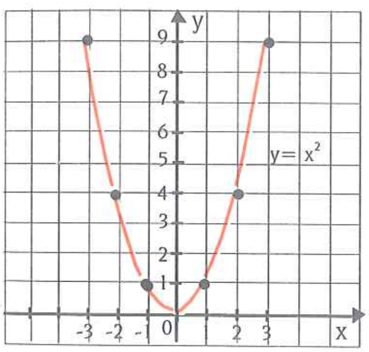
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

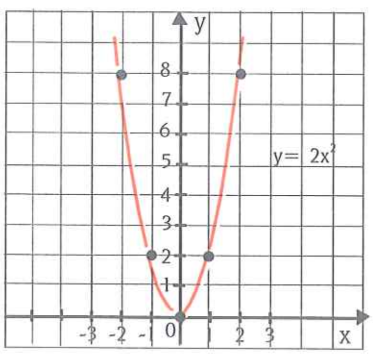
$y = 2x^2$

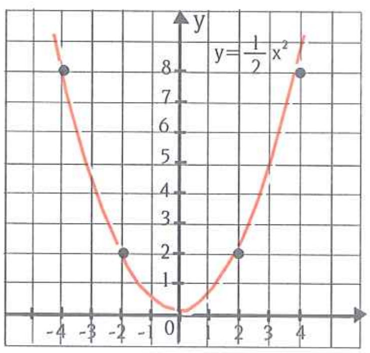
x	-2	-1	0	1	2
y	8	2	0	2	8

$y = \frac{1}{2}x^2$

x	-2	-1	0	1	2
y	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2



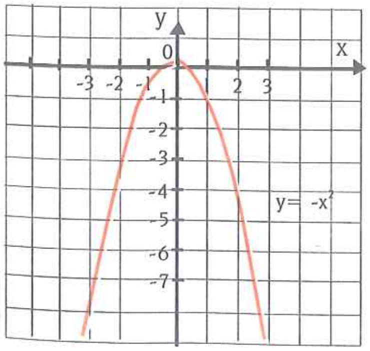


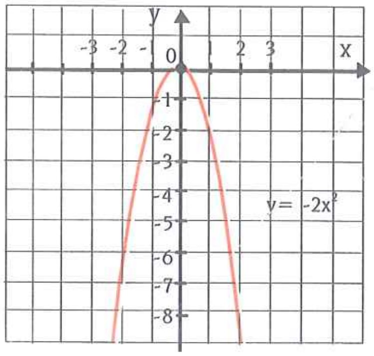


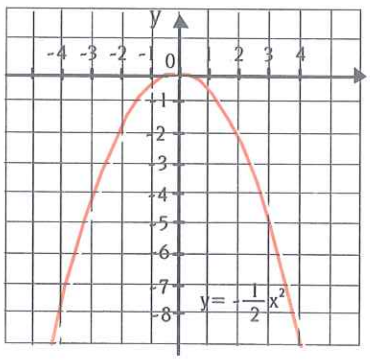
- Ahora dibuja las gráficas de estas funciones cuadráticas:

$y = -x^2$; $y = -2x^2$; $y = -\frac{1}{2}x^2$

Compara tus gráficas con las siguientes:







- Contesta:
  - ¿En qué se diferencian las gráficas de la función cuadrática $\mathbf{y = ax^2}$, cuando a es positivo y cuando a es negativo?
  - ¿Dónde queda localizado el vértice de una parábola de ecuación $\mathbf{y = ax^2}$?
  - ¿Cuál es el eje de simetría de estas parábolas?
  - ¿De qué depende que la parábola sea más ancha o más estrecha?

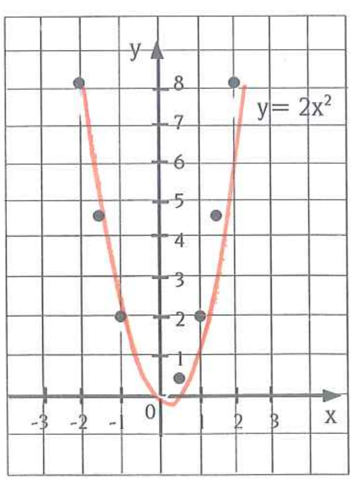
APRENDAMOS

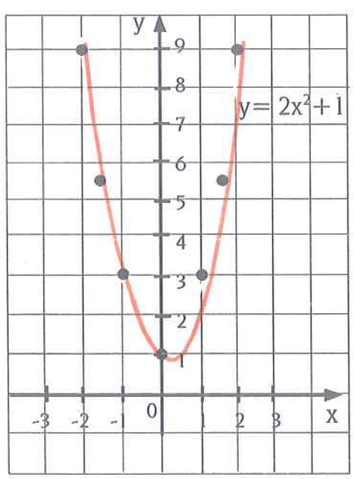
Las funciones cuadráticas cuya ecuación es $\mathbf{y = ax^2}$ tienen las siguientes características:

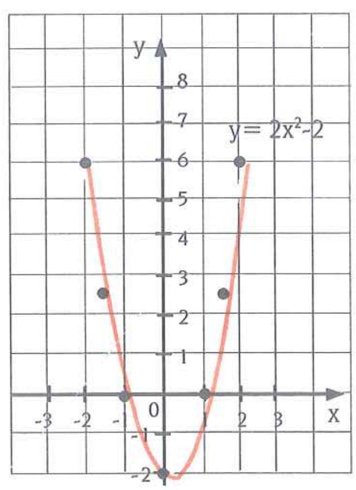
1. Si $\mathbf{a > 0}$, entonces la parábola está **abierta hacia arriba**.
   Si $\mathbf{a < 0}$, entonces la parábola está **abierta hacia abajo**.
2. Si $\mathbf{-1 < a < 1}$, la parábola es **más ancha** que la de $\mathbf{y = x^2}$
   Si $\mathbf{a < -1}$ ó $\mathbf{a > 1}$, la parábola es **más estrecha** que la de $\mathbf{y = x^2}$
3. La curva es **simétrica respecto al eje y**. Este eje es el **eje de la parábola**.
4. Si $\mathbf{a < 0}$, la curva pasa de **creciente** a **decreciente** y, en este caso, el vértice es un **máximo.**
   Si $\mathbf{a > 0}$, la curva pasa de **decreciente** a **creciente** y, en este caso, el vértice es un **mínimo.**

SEGUNDA EXPERIENCIA

- Sobre un papel cuadriculado, traza un diagrama cartesiano, coloca una hoja transparente y dibuja la gráfica de la función $\mathbf{y = 2x^2}$. Esta hoja transparente se llama **plantilla**.
- A continuación, desplaza verticalmente el vértice de esta parábola, primero 1 unidad hacia arriba y, luego, 2 unidades hacia abajo. Has dibujado las gráficas de las funciones cuadráticas de ecuaciones $\mathbf{y = 2x^2 + 1}$ y $\mathbf{y = 2x^2 - 2}$. Dibuja las gráficas de las tres funciones y compáralas con los siguientes:







- También puedes dibujar estas gráficas usando DERIVE.

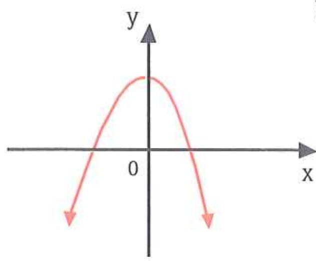
APRENDAMOS

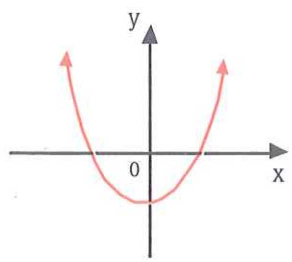
- Para representar funciones cuadráticas de la forma $\mathbf{y = ax^2 + q}$, basta desplazar verticalmente el vértice de la parábola de la plantilla (en este caso, $\mathbf{y = ax^2}$) **q** unidades hacia arriba, si **q** es positivo, o **q** unidades hacia abajo, si **q** es negativo.
- El vértice de la parábola $\mathbf{y = ax^2 + q}$ es el punto **(0, q)** y su eje de simetría es el **eje y**.

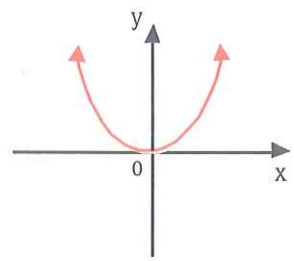
- Pregunta: ¿Cómo representamos funciones como $y = 2x^2 - 3$, $y = \frac{1}{2}x^2 + 2$, $y = -3x^2 + 1$

EJERCICIO 6.2

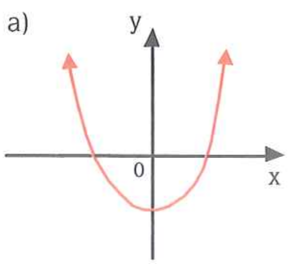
1 Determina el signo del coeficiente **a** de la función $\mathbf{y=ax^2 + q}$ en cada caso:

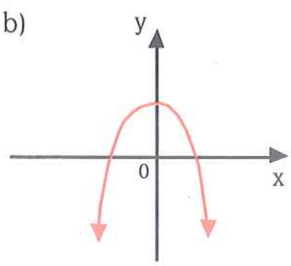
a)


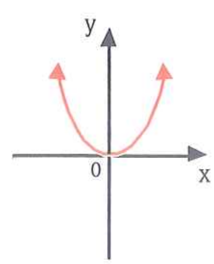
b)


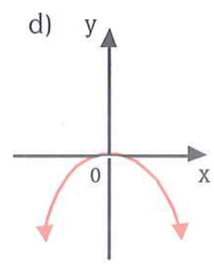
c)


2 En las siguientes gráficas determina si el coeficiente de x^2 y el término independiente de la función cuadrática $y = ax^2 + q$ son positivos, negativos o cero.

a)


b)


c)


d)


3 Completa las ecuaciones de cada una de las siguientes funciones cuadráticas cuyos vértices se dan:

a) $y = 2x^2 + —$; V (0, 1)   b) $y = 2x^2 + —$; V (0, 3)

c) $y = x^2 + —$; V (0, -1)   d) $y = -x^2 + —$; V (0, -2)

e) $y = \frac{1}{2}x^2 + —$; V (0, 6)   f) $y = -2x^2 + —$; V (0, -3)

4 Dibuja en el mismo plano cartesiano las siguientes funciones cuadráticas:

a) $y = 3x^2$ b) $y = 3x^2 - 1$ c) $y = 3x^2 + 4$

5 Dibuja en el mismo plano cartesiano las siguientes funciones cuadráticas:

a) $y = -2x^2$ b) $y = -2x^2 - 3$ c) $y = -2x^2 + 2$

6 Escribe las coordenadas del vértice de las siguientes parábolas:

a) $y = 3x^2 + 4$ b) $y = -2x^2 + 5$ c) $y = 4x^2 - 3$

d) $y = -3x^2 - 7$ e) $y = \frac{3}{4}x^2 - 5$ f) $y = -\frac{2}{5}x^2 - 2$

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 1

Un grupo de personas está negociando un contrato con una compañía que alquila minitecas para organizar varias fiestas durante una semana. La compañía cobra $600.000 por noche, más el 40% de la recaudación de la taquilla. Los organizadores planean cobrar $12.000 por boleta. Si en una noche se vendieron 100 boletas, se puede afirmar que las personas obtuvieron una ganancia de $120.000 porque:

a) Corresponde al total de lo recaudado en la taquilla.
b) Equivale al 60% del recaudo en la taquilla menos $600.000 que les cobran como base.
c) Corresponde al total de ingresos menos el 40%.
d) Equivale al 40% del recaudo en la taquilla menos $600.000 de base.

6.4 FUNCIONES CUADRÁTICAS DE ECUACIÓN $y=ax^2 + bx + c$

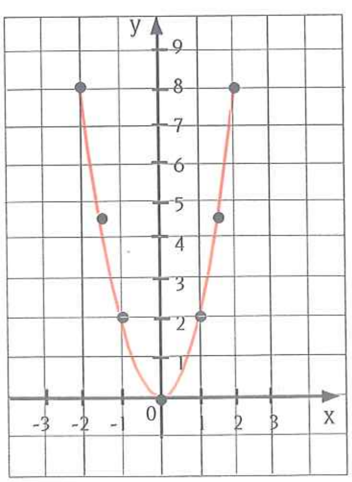
PRIMERA EXPERIENCIA

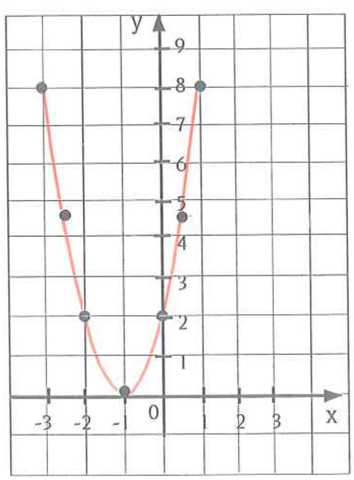
- Dibuja las gráficas de las siguientes funciones $\mathbf{y = 2x^2}$, $\mathbf{y = 2(x + 1)^2}$ y $\mathbf{y = 2(x - 2)^2}$:
- Compara tus gráficas con las que se muestran a continuación:

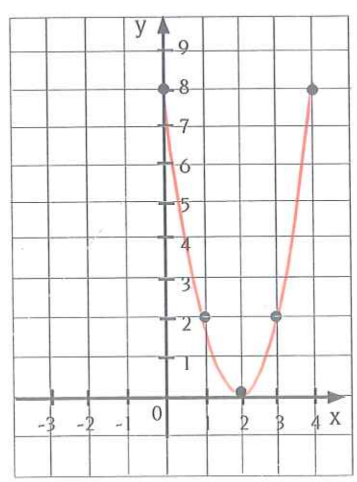
x	-2	-1	0	1	2
y	8	1	0	1	8

x	-3	-2	-1	0	1
y	8	2	0	2	8

x	0	1	2	3	4
y	8	2	0	2	8







- Contesta:
  - ¿Qué diferencias y qué semejanzas encuentras entre las tres gráficas?
  - ¿Si desplazas la gráfica de $\mathbf{y = 2x^2}$ una unidad hacia la izquierda, coincidiría con la gráfica de $\mathbf{y = 2\ (x + 1)^2}$? Compruébalo.
  - ¿Si desplazas la gráfica de $\mathbf{y = 2x^2}$ dos unidades hacia la derecha, coincidiría con la gráfica de $\mathbf{y = 2\ (x - 2)^2}$? Compruébalo.
- Observa de nuevo las ecuaciones de las tres funciones y contesta:
  - ¿Qué diferencia hay entre las ecuaciones de la función $\mathbf{y = 2x^2}$ y la función $\mathbf{y = 2\ (x + 1)^2}$? ¿Tiene que ver esta diferencia con la unidad que se desplazó la curva?
  - ¿Qué diferencia hay entre las ecuaciones de la función $\mathbf{y = 2x^2}$ y la función $\mathbf{y = 2\ (x - 2)^2}$? ¿Tiene que ver esta diferencia con las unidades que se desplazó la curva?
- Contesta: Si la función cuadrática $\mathbf{y = ax^2}$ se desplaza **p** unidades hacia la derecha, ¿cómo varía su ecuación? ¿Y si se desplaza **p** unidades hacia la izquierda?'

APRENDAMOS

- Para representar funciones de la forma $\mathbf{y = a(x - p)^2}$ basta desplazar horizontalmente el vértice de la parábola $\mathbf{y = ax^2}$, **p** unidades hacia la derecha si **p** es positivo, o **p** unidades hacia la izquierda si **p** es negativo.
- El vértice de la parábola de ecuación $\mathbf{y = a\ (x - p)^2}$ es el punto **V (p, 0)** y su eje de simetría es la recta $\mathbf{x = p}$.

¡ATENCIÓN!

Observemos que al desarrollar la ecuación $\mathbf{y = 2\ (x - 2)^2}$ obtendremos la ecuación $\mathbf{y = 2x^2 - 8x + 8}$, la cual tiene la forma $\mathbf{y = ax^2 + bx + c}$. Esto significa que para determinar el vértice de esta parábola es necesario llevarla a la forma $\mathbf{y = a\ (x - p)^2}$ mediante el método de **completación al trinomio cuadrado perfecto**. El siguiente ejemplo nos aclarará esta situación.

Ejemplo 1

Dibujemos la gráfica de la función cuadrática cuya ecuación es $y = 3x^2 - 12x + 12$

Solución

- En primer lugar, escribamos la ecuación de esta función cuadrática en la forma $y = a\ (x - p)^2$. Para lograrlo debemos completar a $3x^2 - 12x + 12$ al trinomio cuadrado perfecto; así:

$$3x^2 - 12x + 12 = 3\ (x^2 - 4x + 4)$$
$$\therefore 3x^2 - 12x + 12 = 3\ (x - 2)^2$$

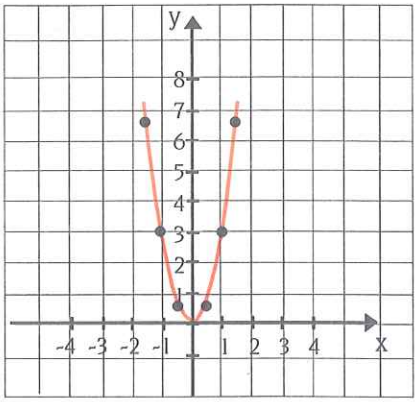
- Por lo tanto, $y = 3x^2 - 12x + 12 = 3\ (x - 2)^2$. Para dibujar la gráfica de $y = 3\ (x - 2)^2$, primero dibujamos la gráfica de $y = 3x^2$ y, luego, desplazamos horizontalmente su vértice 2 unidades hacia la derecha; así:

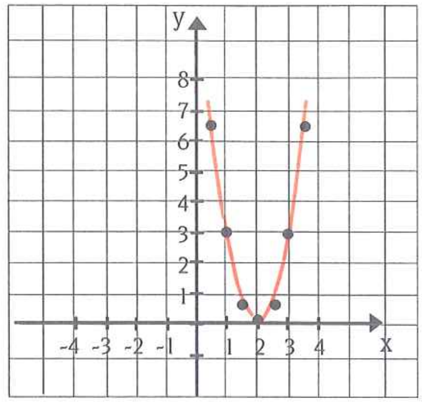
$y = 3x^2$

x	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
y	12	6,75	3	0,75	0	0,75	3	6,75	12

$y = 3(x - 2)^2$

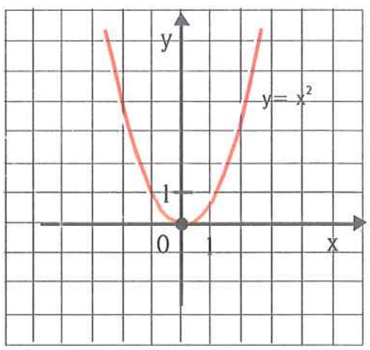
x	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
y	18,75	12	6,75	3	0,75	0	0,75	3	6,75	12



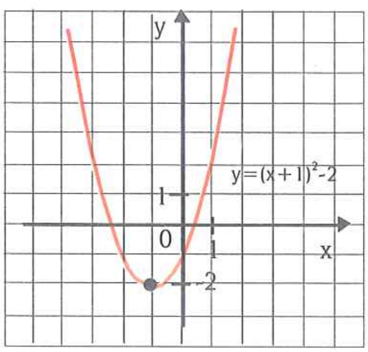


SEGUNDA EXPERIENCIA

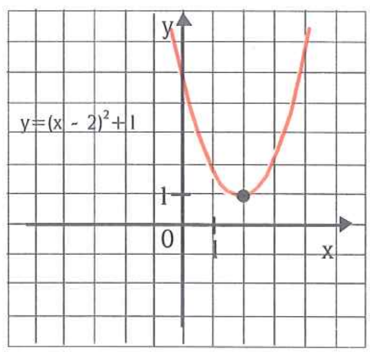
- Ahora observemos las gráficas y las ecuaciones de las siguientes funciones cuadráticas:



Gráfica (1)



Gráfica (2)



Gráfica (3)

- Contesta:
  - ¿Qué desplazamientos debemos realizar con la plantilla (gráfica (1)) para transformarla en la gráfica (2)? Descríbelos.
  - ¿Qué desplazamientos debemos realizar con la plantilla (gráfica (1)) para transformarla en la gráfica (3)? Descríbelos.
  - ¿Qué diferencia hay entre las ecuaciones de las gráficas (1) y (2)? ¿Qué relación hay entre la ecuación (2) y los desplazamientos efectuados?
  - ¿Qué diferencia hay entre las ecuaciones de las gráficas (1) y (3)? ¿Qué relación hay entre la ecuación (3) y los desplazamientos efectuados?
- Contesta: Si la función cuadrática $\mathbf{y = ax^2}$ se desplaza horizontalmente **p** unidades y verticalmente **q** unidades, ¿cuáles son las coordenadas de su nuevo vértice? ¿Cómo queda su ecuación? ¿cuál es la ecuación de su eje de simetría?

APRENDAMOS

- Si la gráfica de la función cuadrática $\mathbf{y = ax^2}$ se desplaza horizontalmente **p** unidades y verticalmente **q** unidades, entonces su ecuación se transforma en $\mathbf{y = a\,(x - p)^2 + q}$.
- El vértice de la parábola de ecuación $\mathbf{y = a\,(x - p)^2 + q}$ se ubica en el punto **V (p, q)** y el eje de simetría es la recta de ecuación $\mathbf{x = p}$.

Ejemplo 2

Estudiemos la función cuadrática $y = x^2 - 6x + 8$

Solución

- Esta función cuadrática tiene la forma $y = ax^2 + bx + c$, donde $a = 1 > 0$; por lo tanto, su gráfica es una parábola **abierta hacia arriba**.
- Para determinar su vértice y su eje de simetría debemos transformar su ecuación en $\mathbf{y = a\,(x - p)^2 + q}$ por el método de completación al trinomio cuadrado perfecto; así:

$y = x^2 - 6x + 8$ .... ecuación dada

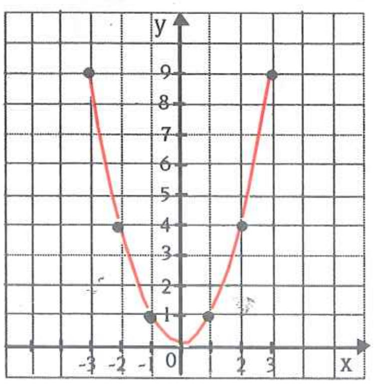
$\therefore\ y = (x^2 - 6x) + 8$ .... propiedad asociativa de la suma

$\therefore\ y = \left[x^2 - 6x + \left(\frac{6}{2}\right)^2\right] + 8 - \left(\frac{6}{2}\right)^2$ .... completación al trinomio cuadrado perfecto

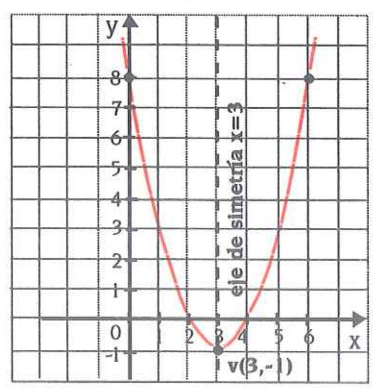
$\therefore\ y = (x - 3)^2 + 8 - 9$ .... ¿Por qué?

$\therefore\ y = (x - 3)^2 - 1$ .... ¿Por qué?

- Esta transformación nos permite concluir que el vértice está ubicado en el punto V (3, -1) y el eje de simetría es la recta de ecuación $x = 3$.
- Estas son las gráficas de la función cuadrática plantilla $y = x^2$ y la de $y = x^2 - 6x + 8 = (x + 3)^2 - 1$



$y = x^2$



$y = x^2 - 6x + 8 = (x - 3)^2 - 1$

¡ATENCIÓN! Si observamos con detalle la gráfica de la función $\mathbf{y = x^2 - 6x + 8}$ encontraremos un punto que vale la pena tener en cuenta: el punto donde la parábola intercepta al eje y. Es el punto de coordenadas **(0, 8)** y podemos encontrarlo cuando reemplazamos la x por 0 en la ecuación. En efecto:

Si $\mathbf{x = 0}$ entonces $\mathbf{y = 0^2 - 6(0) + 8 = 8}$

Este punto es la **ORDENADA EN EL ORIGEN** de la función.

Ejemplo 3

Estudiemos la función cuadrática de ecuación $y = ax^2 + bx + c$

Solución

- Hay un primer punto de la gráfica que es clave y fácil de obtener: la ordenada en el origen; es decir, el punto para el cual $x = 0$:

$$y = a(0)^2 + b(0) + c \quad \Rightarrow \quad y = 0 + 0 + c = c$$

Por lo tanto, la parábola intercepta al eje y en el punto A (0, c). Si observamos de nuevo el ejemplo anterior, la parábola corta al eje y en el punto (0, 8).

- Determinemos ahora el vértice y el eje de simetría de la parábola. Con este fin, transformemos la ecuación $y = ax^2 + bx + c$ en $y = a(x - p)^2 + q$; así:

$y = ax^2 + bx + c$ .... ecuación dada

$\therefore\ y = (ax^2 + bx) + c$ .... asociamos los dos primeros términos

$\therefore\ y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c$ .... sacamos factor común a

$\therefore\ y = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c - a\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ .... completamos al trinomio cuadrado perfecto

$\therefore\ y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - a\left(\frac{b^2}{4a^2}\right)$ .... ¿Por qué?

$\therefore\ y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$ .... ¿Por qué?

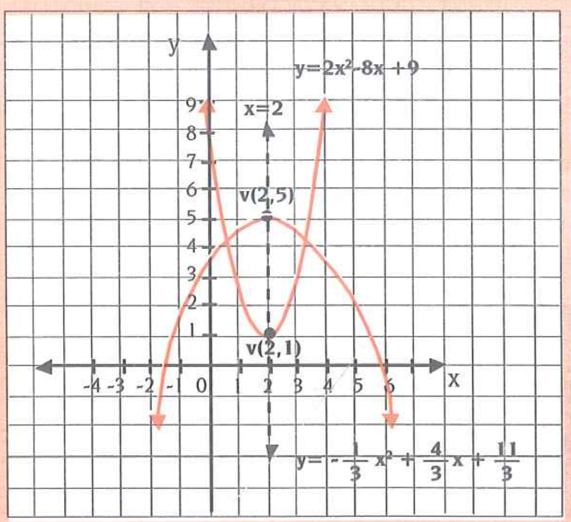
- Así, pues, la ecuación $y = ax^2 + bx + c$ es equivalente a la ecuación $y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$. En esta última, el vértice es el punto de coordenadas $\left(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right)$ y el eje de simetría es la recta vertical de ecuación $x = -\frac{b}{2a}$.

APRENDAMOS

La función cuadrática de ecuación $\mathbf{y = ax^2 + bx + c}$ presenta las siguientes características:

- Su gráfica es una **PARÁBOLA.**
- Se abre hacia abajo, si $\mathbf{a < 0}$

  Se abre hacia arriba, si $\mathbf{a > 0}$.
- La abscisa del vértice es $\mathbf{x = -\frac{b}{2a}}$.
- El eje de simetría es la recta vertical $\mathbf{x = -\frac{b}{2a}}$.
- La estrechez o amplitud de la curva depende del coeficiente **a** del término $\mathbf{ax^2}$.
- La curva corta al eje **y** en el punto **(0, c).**



Ejemplo 4

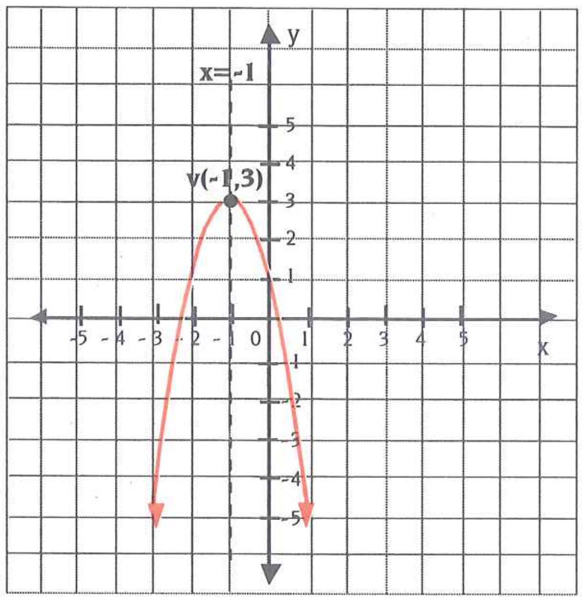
Analicemos y dibujemos la gráfica de la función $y = -2x^2 - 4x + 1$

Solución

- Como el coeficiente de x^2 es negativo, entonces la parábola se abre hacia abajo.
- La abscisa del vértice es $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2(-2)} = -1$.

  La ordenada del vértice es $y = -2(-1)^2 - 4(-1) + 1 = 3$.

  Luego, el vértice es el punto V (-1, 3).
- El eje de simetría de la parábola es la recta $x = -1$.
- La curva corta al eje y en el punto (0, 1).
- Con esta información podemos dibujar la gráfica de la parábola, así:



EJERCICIO 6.3

1 Indica cuáles de las siguientes funciones reales son cuadráticas:

a) $y = 3x^2 + 1$
b) $y = -4x^2 - 2x + 1$
c) $y = 2x^3 - 4x^2 + 6$
d) $y = 2(x - 3)^2 + 2$
e) $y = -4(x + 1) - 6$
f) $y = 4x - 3x^2$
g) $y = -3(x + 1)^3 + 4$
h) $y - 4x^2 + 6x = 7$
i) $-3(x - 4)^2 = y - 2$

2 Halla el vértice, la ecuación del eje de simetría y el intercepto con el eje y de las siguientes parábolas:

a) $y = 3(x - 1)^2 + 4$
b) $y = -4(x + 7)^2 - 1$
c) $y = 6(x - 12)^2 + \frac{1}{2}$
d) $y = \frac{1}{2}\left(x + \sqrt{2}\right)^2 + 14$

En los ejercicios 3. a 10. se pide:

a) Determinar si se abre hacia arriba o hacia abajo.
b) Hallar el intercepto con el eje y.

c) Hallar las coordenadas del vértice. d) Hallar la ecuación del eje de simetría

e) Dibujar la gráfica a mano y usando DERIVE.

3 $y = x^2 - 7x - 18$

4 $y = (2x - 3)^2 - 8x$

5 $y = x^2 - 6x$

6 $y = 3x\,(x - 1) - 6$

7 $y = 3x^2 + 12x - 5$

8 $y = 4x - x^2$

9 $y = 6 - 3x + x^2$

10 $y = \frac{1}{3}x^2 - x + \frac{2}{3}$

11 Una función cuadrática tiene una ecuación de la forma $\mathbf{y = x^2 + ax + a}$ y pasa por el punto (1, 9). Calcula el valor de **a.**

12 Una parábola tiene su vértice en el punto V (1, 1) y pasa por el punto (0, 2). Halla su ecuación.

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 2

Teniendo en cuenta el enunciado del DIVIERTETE MIENTRAS PIENSAS del ejercicio 6 - 2 (página 148) responde:

Si los organizadores quieren una ganancia mínima de un millón de pesos por noche, el número de boletas que deben vender es:

a) Suficiente con 220 b) Al menos 222 c) Suficiente con 200 d) Al menos 220

6.5 APLICACIONES DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

- La matemática, aparte de su contribución al desarrollo de la inteligencia, es sumamente útil para el estudio de las demás áreas del conocimiento y para la solución de problemas de la vida cotidiana. En particular, la función cuadrática ayuda a interpretar fenómenos físicos muy comunes. Veamos:

PRIMERA EXPERIENCIA

- Galileo Galilei (1564 - 1642) fue tal vez el primer científico experimental de Occidente. Entre sus muchas aportaciones descubrió la ley que rige el movimiento de caída de los cuerpos. Hasta entonces, y siguiendo los escritos de Aristóteles, se pensaba que los cuerpos pesados caían más rápidamente que los livianos.

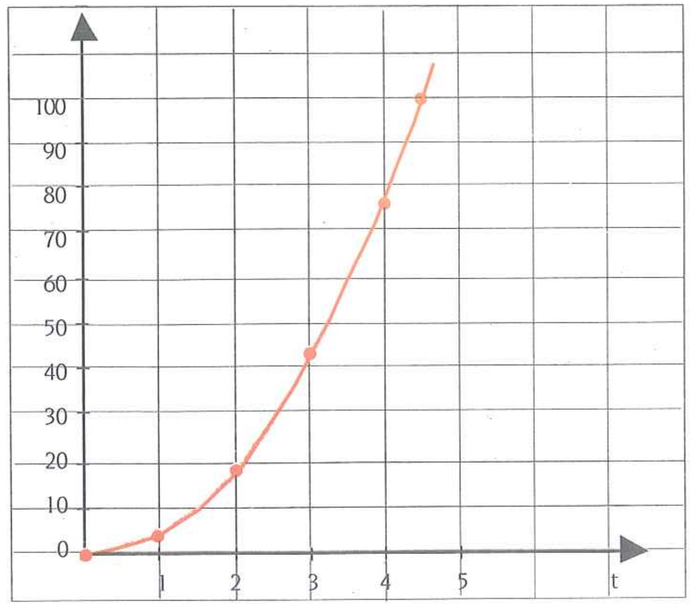
- Galileo comprobó que lo hacían con la misma celeridad, y se cuenta que para convencer a sus incrédulos colegas de Pisa dejó caer desde la famosa torre inclinada dos esferas del mismo tamaño, una de madera y otra de hierro, las cuales llegaron a tierra simultáneamente.

- Galileo llegó a la conclusión de que el espacio recorrido, **s**, en función del tiempo **t**, estaba de acuerdo con la fórmula cuadrática:

$$\mathbf{s\,(t) = 4{,}9t^2} \quad \text{(s en metros, t en segundos)}$$

Si elaboramos una tabla de valores y dibujamos la gráfica, tenemos:

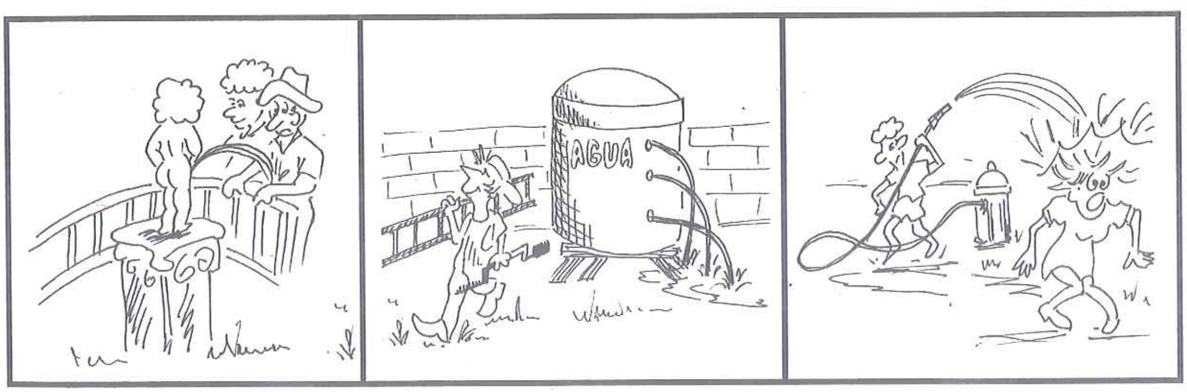
t	$s = 4{,}9\ t^2$
0	0
1	4,9
2	19,6
3	44,1
4	78,4



La gráfica es una MEDIA PARABOLA, abierta hacia arriba y con su vértice en el punto (0, 0).

SEGUNDA EXPERIENCIA

- El efecto de la gravedad crea trayectorias en forma de parábolas, cuando lanzamos un objeto con cierta velocidad inicial.



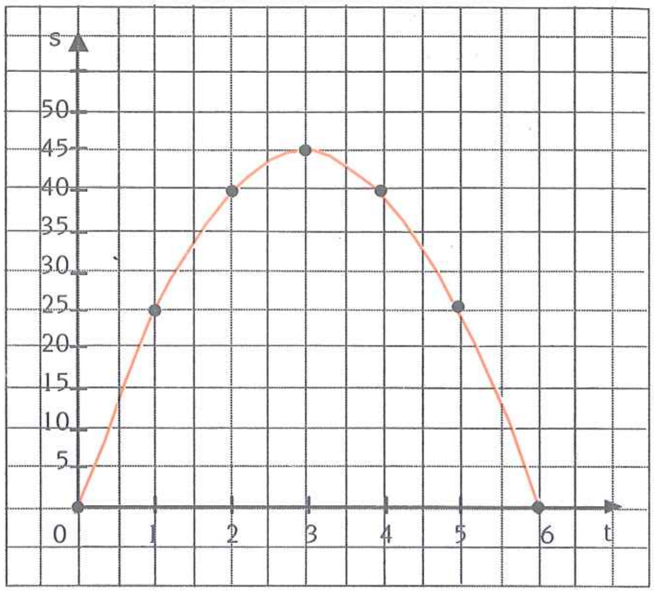
- La física ha establecido que cuando un cuerpo se lanza libre de obstáculos, la relación entre la posición del objeto **(s)**, la velocidad inicial **(v_o)** y el tiempo transcurrido **(t)** es:

$$s(t) = v_o - 5t^2$$ (s en metros, t en segundos)

- Si lanzamos una piedra hacia arriba con una velocidad de 30 metros por segundo, entonces la posición de la piedra en cada segundo de tiempo transcurrido podemos describirlo mediante la ecuación $s = 30t - 5t^2$.

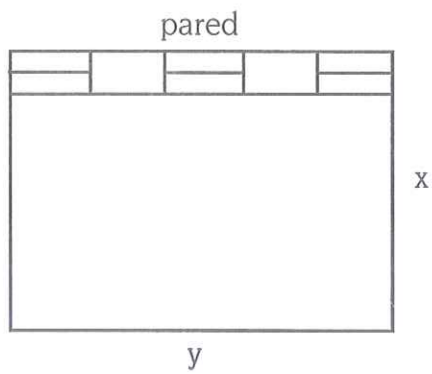
Si elaboramos una tabla de valores y dibujamos la gráfica nos queda:

t	$s = 30t - 5t^2$
0	0
1	25
2	40
3	45
4	40
5	25
6	0



TERCERA EXPERIENCIA

- Con 22 metros de longitud de malla se quiere encerrar un corral rectangular para conejos, aprovechando una pared ya construida. Se pretende que el área del corral sea la mayor posible, ¿cuáles deben ser sus dimensiones?
- Un dibujo nos ayudará a entender el problema:



- La figura nos muestra un corral rectangular de base **y** y altura **x**.
  - Como la malla disponible para encerrar el corral son 22 m, esta información corresponde a tres lados del rectángulo, ya que el cuarto lado coincide con la pared. Por lo tanto:

$$2x + y = 22$$

$$\therefore\ y = 22 - 2x$$

  - Luego, el área del gallinero en **función** de x será:

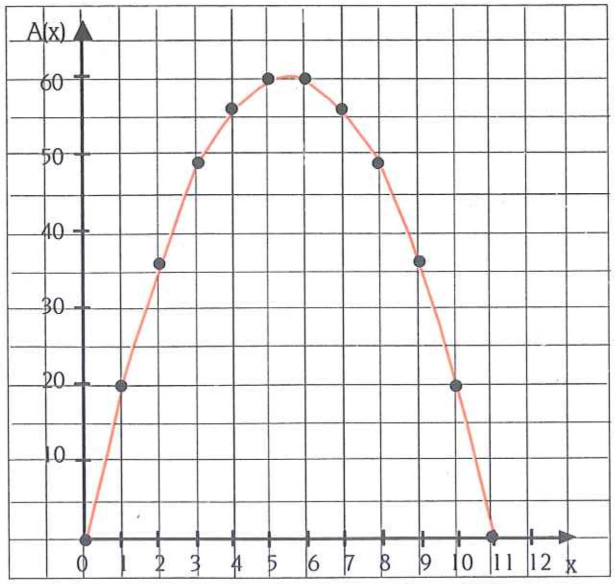
$$A = \text{base x altura}$$

$$\therefore\ A = x \bullet y = x \bullet (22 - 2x)$$

$$\therefore\ A(x) = 22x - 2x^2$$

- Si elaboramos una tabla de valores y dibujamos la gráfica nos queda:

x	A(x)
0	0
1	20
2	36
3	48
4	56
5	60
6	60
7	56
8	48
9	36
10	20
11	0



- La ecuación y la gráfica corresponden a una función cuadrática. Como el coeficiente de x^2 es negativo, entonces el vértice de la parábola es un MAXIMO. Esto significa que el valor máximo que puede tomar **x** corresponde a la abscisa del vértice de la parábola; es decir, $\mathbf{x = -\frac{b}{2a}}$ con $\mathbf{a = -2}$ y $\mathbf{b = 22}$, o sea: $\mathbf{x = -\frac{22}{2(-2)} = -\frac{22}{-4} = 5{,}5}$ e $\mathbf{y = 22 - 2\,(5{,}5) = 11}$
- Conclusión: El corral de mayor área que podemos construir con las condiciones dadas es aquel cuya base mide 11 m y cuya altura mide 5,5 m.

TALLER DE REPASO DE LA UNIDAD 6

En los ejercicios 1. a 10., señala la letra correspondiente a la ÚNICA respuesta correcta.

1. De las siguientes ecuaciones sólo una corresponde a una función cuadrática.

   a) $y = 3x - 5$ b) $y = -4x^2 + x^3$ c) $y = 6x - 3x^2$ d) $y = \frac{x^2 - 3}{x + 1}$

2. La gráfica de una función cuadrática es:

   a) Una circunferencia b) Una parábola
   c) Una línea recta d) Una circunferencia o una parábola

3. De las siguientes funciones cuadráticas sólo una corresponde a una parábola abierta hacia abajo.

   a) $y = 6x^2 - 2x$ b) $y = -4x + x^2 - 3$
   c) $y = 6x - 4x^2$ d) $y = -4x + 3x^2$

4. De las siguientes parábolas, la más estrecha es:

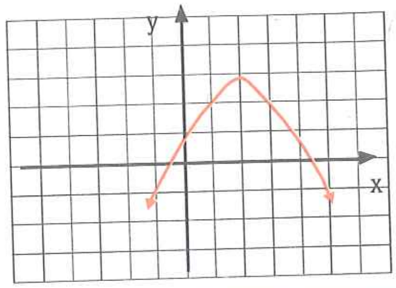
   a) $y = x^2$ b) $y = 3x^2$ c) $y = -\frac{1}{2}x^2$ d) $y = \frac{2}{3}x^2$

5. El vértice de la parábola de ecuación $y = -5(x+3)^2 - 2$ es el punto de coordenadas:

a) (3, -2) b) (-3, -2) c) (-3, 2) d) (3, 2)

6. Si la parábola de la figura tiene por ecuación $y = ax^2 + bx + c$, entonces

a) $a > 0$, $b > 0$ y $c > 0$
b) $a < 0$, $b > 0$ y $c > 0$
c) $a > 0$, $b < 0$, $c > 0$
d) $a < 0$, $b > 0$, $c < 0$



7. El vértice de la parábola $y = 2x^2 - 4x + 3$ es:

a) (1, 1) b) (2, 3) c) (-2, 19) d) (-1, 9)

8. La parábola del ejercicio anterior intercepta al eje y en el punto:

a) (0, -3) b) (3, 0) c) (-3, 0) d) (0, 3)

9. Una pelota se lanza hacia arriba con una velocidad de 40 metros por segundo. La ecuación que nos permite determinar la posición s de la pelota, t segundos después de lanzarse es:

a) $s = 40t^2 - 5t$ b) $s = 5t^2 - 40t$ c) $s = 40t - 5t^2$ d) $s = 5t - 40t^2$

10. La altura máxima alcanzada por la pelota es:

a) 160 m b) 40 m c) 120 m d) 80 m

En los ejercicios 11. a 18. se pide:

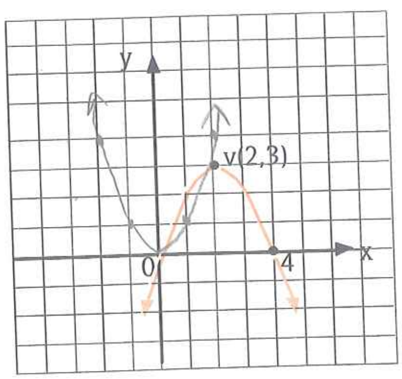
a) Determinar los valores de a, b y c.
b) Determinar hacia donde se abre la parábola.
c) Hallar las coordenadas del vértice y la ecuación del eje de la parábola.
d) Dibujar la gráfica a mano y usando DERIVE.

11. $y = \frac{1}{2}x^2$ 12. $y = -2x^2$ 13. $y = x^2 + 3x$ 14. $y = 2x - 4x^2$

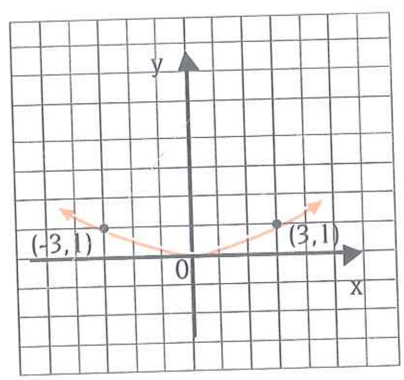
15. $y = 2x^2 - 5$ 16. $y = 9 - x^2$ 17. $y = 3x^2 + 12x + 11$ 18. $y = 1 + 4x - 2x^2$

19. Escribe la ecuación de las funciones cuyas gráficas se muestran:

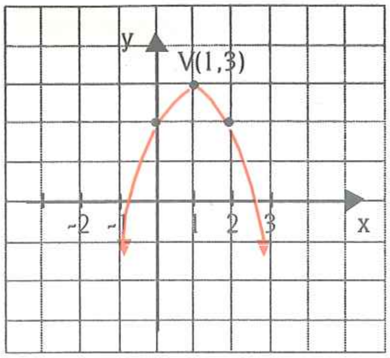
a)



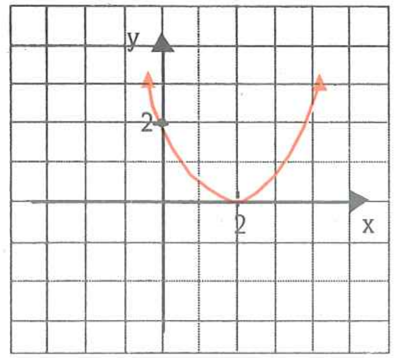
b)



c)



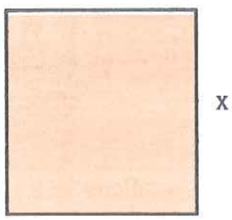
d)



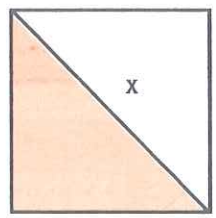
20. Calcula el valor de c de modo que la gráfica de $y = 3x^2 + 5x + c$ pase por el punto (-1, -4).

21. Calcula el área de las siguientes figuras en función de x.

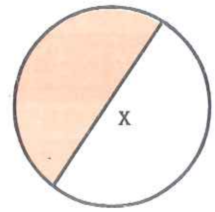
a)



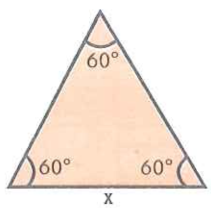
b)



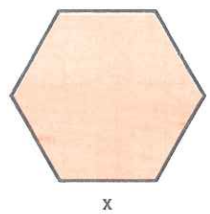
c)



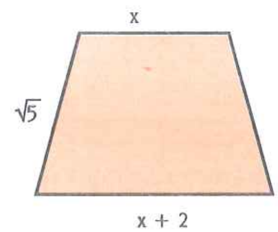
d)



e)



f)



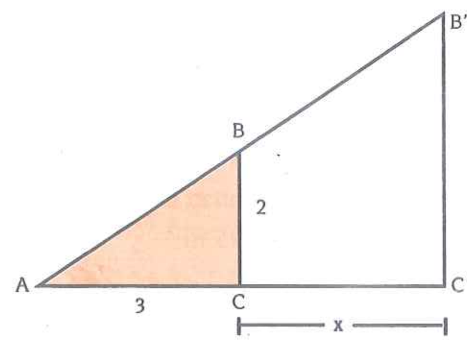
22. Datos: $\overline{B'C'} \parallel \overline{BC}$

Se pide:

a) Calcular el área del Δ AB'C' en función de x.

b) Dibujar la gráfica de la función obtenida.

(Sugerencia: prueba que ΔABC es semejante a $\Delta AB'C'$ y que $|\overline{C'B'}| = \frac{2}{3}(x+3)$)



23. Una avioneta vuela entre dos poblaciones A y B. Su altura de vuelo viene dada por la ecuación $s(t) = 800t - 30t^2$ donde s es la altura de la avioneta en metros a los t minutos de haber despegado de A. Se pide:

a) Dibujar la gráfica de la ecuación.

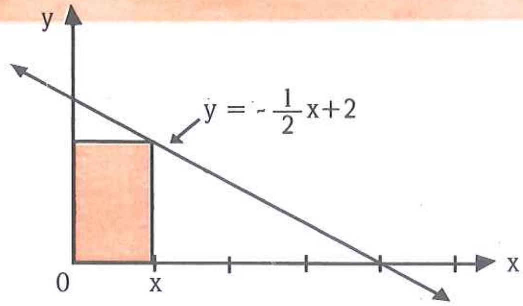
b) Determinar la altura máxima alcanzada por la avioneta.

c) Hallar el tiempo de duración del vuelo.

24. La suma de dos números positivos es 20. Determina cuáles son los números cuyo producto es máximo.

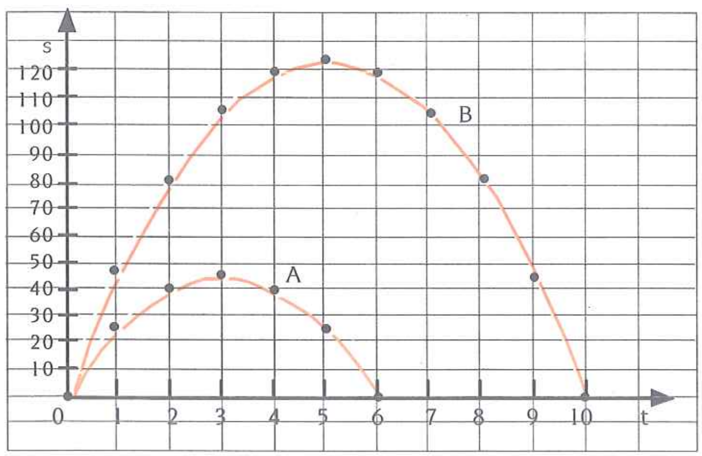
25. Teniendo en cuenta la figura:

a) Calcula el área del rectángulo en función de x.
b) Dibuja la gráfica de la función área obtenida.
c) Halla el rectángulo de área máxima.



PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS DEL ICFES

Dos piedras A y B se lanzan desde el mismo sitio y al mismo tiempo. Las gráficas que describen la posición s (en metros) de cada una en función del tiempo t (en segundos) son las siguientes:



1. La altura máxima que alcanza la piedra B es:
   a) 50 m b) 125 m c) 100 m d) 45 m

2. La piedra A regresa a tierra al cabo de:
   a) 6 segundos b) 5 segundos c) 10 segundos d) No se sabe

3. La piedra B alcanza su altura máxima al cabo de:
   a) 10 segundos b) 5 segundos c) 3 segundos d) 6 segundos

4. La ecuación que describe la posición s de la piedra A en cada instante t es:
   a) $s = 30t + 5t^2$ b) $s = 30t - 5t^2$ c) $s = 50t - 5t^2$ d) $s = 50t + 5t^2$

5. La distancia total recorrida por la piedra A es:
   a) 90 m b) 250 m c) 45 m d) 125 m

es

la

Núcleo Temático

7

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO O CUADRÁTICAS

LOGRO GENERAL

Resolver ecuaciones cuadráticas.

LOGROS ESPECÍFICOS	INDICADORES DE LOGRO
Corporal • Realizar experiencias que permitan factorizar polinomios de segundo grado.	• Participa en actividades de destreza operativa para factorizar polinomios de segundo grado.
Comunicativa • Enunciar y explicar la fórmula cuadrática. • Describir el método de la solución de ecuaciones cuadráticas incompletas.	• Explica cómo utilizar la fórmula cuadrática en la solución de una ecuación de segundo grado. • Resuelve ecuaciones cuadráticas donde falta el término **bx**, utilizando la definición de raíz cuadrada.
Cognitiva • Resolver ecuaciones de segundo grado. • Determinar cuándo la solución de una ecuación cuadrática es real.	• Utiliza la fórmula cuadrática en la solución de una ecuación de segundo grado. • Utiliza el discriminante para analizar el tipo de soluciones que posee una ecuación de segundo grado.
Estética • Elaborar material didáctico para utilizar en la clase.	• Ilustra, con ejemplos, la aplicación de la fórmula cuadrática.
Etica-Actitudinal • Reconocer la importancia de la fórmula cuadrática para resolver ecuaciones de segundo grado.	• Cumple a tiempo con las tareas y trabajos que le son encomendados.

DIMENSIONES

EVALUACIÓN

ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS

7.1 HISTORIA DEL ALGEBRA (17): CARL F. GAUSS

Durante el siglo XVIII se continuó trabajando en la teoría de ecuaciones y en 1799 el matemático alemán Carl Friedrich Gauss publicó la demostración de que toda ecuación polinómica tiene al menos una raíz en los complejos.

Gauss, denominado el "príncipe de los matemáticos" o "la cima imponente que domina el siglo XVIII", nació en Brunswick, Alemania, en 1777, en el hogar de un hombre humilde y dominante, quien sólo aspiraba a que su hijo lo acompañara y sucediera como capataz de obreros de la construcción. Fue un niño prodigio que aprendió a contar antes de hablar correctamente. Se cuenta que en una ocasión, el maestro de su escuela quiso poner a sus alumnos una prueba que los mantuviera entretenidos un buen rato: sumar los cien primeros números naturales $1 + 2 + 3 + ... + 99 + 100$; Gauss que tenía ocho años, dio la respuesta en unos pocos minutos así:

escribió.....................	1	+	2	+	3	+...+	99	+	100
y debajo....................	100	+	99	+	98	+...+	2	+	1
y sumó.....................	101	+	101	+	101	+...+	101	+	101

de esta forma dedujo que la suma que pedía su maestro era la mitad de 100 veces 101;por lo tanto, el resultado era: $\left(\frac{100 \cdot 101}{2}\right)$

Debido a sus aptitudes, logró ganarse el aprecio y la protección del Duque de Brunswick durante sus brillantes estudios. Con tan sólo 18 años enunció su teoría de los números primos y la ley de reciprocidad cuadrática. A los 22 años se doctoró en la Universidad de Gotinga con una tesis titulada: **Una nueva prueba de que toda función algebraica racional de una variable puede ser descompuesta en factores reales de primero o segundo grado.** Esta prueba se conoció más tarde con el nombre de **Teorema de Gauss.**

Tanto o más que matemático, Gauss fue un científico universal: se ocupa de Astronomía, Geodesia, Física; es el precusor de la Matemática Actuarial (calculó un fondo para las viudas de profesores de la Universidad de Gotinga); en Matemáticas se ocupa de Teoría de Números, Geometría no Euclidiana, Funciones de variable compleja, etc. Este genial personaje murió en la ciudad de Gotinga en 1855.

EJERCICIO 7.1

Lee nuevamente el texto anterior y luego encierra en un círculo, la letra que corresponda a la respuesta correcta:

1. De acuerdo con el texto anterior Gauss provenía de:
   a. Un hogar provinciano humilde.
   b. Una familia pobre de agricultores.
   c. Un hogar pobre de personas intelectuales.
   d. El hogar del Duque de Brunswick.

2. El deseo del padre de Gauss era que su hijo:
   a. Desarrollara sus potencialidades intelectuales en el trabajo científico.
   b. Fuera un gran doctor en Ciencias.

c. Aprendiera su humilde oficio y lo reemplazara en estas tareas.
d. Se doctorara y perteneciera a la realeza.

3. Son trabajos o realizaciones de Carl F. Gauss las siguientes, con excepción de:
   a. Enunció la teoría de los números primos.
   b. Incursionó en el campo de la astronomía.
   c. Trabajó funciones de variable compleja.
   d. Concluyó trabajos de cálculo iniciados por su padre.

4. El tema central del escrito es:
   a. El sentido práctico del científico alemán Carl Gauss.
   b. El progreso de las ciencias por el talento y la constancia de un genio.
   c. La genialidad del hombre del Siglo XVIII.
   d. La evolución de la ciencia por la aplicación de un principio.

5. En cierta parte del escrito el autor da a entender que Gauss:
   a. Era un científico muy tenido en cuenta por la burguesía alemana.
   b. Puso en ridículo a uno de sus maestros.
   c. Se rebeló contra los deseos de su padre.
   d. Poseía una gran sensibilidad humana.

7.2 EXPERIENCIA DE REPASO

1. Factoriza los siguientes polinomios:

a) $x^2 - 4$	b) $x^2 + 2x - 3$	c) $x^2 - 7x + 12$
d) $x^2 + 7x + 10$	e) $2x^2 + x - 6$	f) $6x^2 - 7x - 5$

2. Halla los ceros de los siguientes polinomios:

a) $P(x) = x^2 - 4$	b) $P(x) = x^2 + 2x - 3$	c) $P(x) = x^2 - 7x + 12$
d) $P(x) = x^2 + 7x + 10$	e) $P(x) = 2x^2 + x - 6$	f) $P(x) = 6x^2 - 7x - 5$

3. Dibuja las gráficas de las funciones reales cuadráticas definidas por las reglas siguientes:

a) $P(x) = x^2 - 4$	b) $P(x) = x^2 + 2x - 3$	c) $P(x) = x^2 - 7x + 12$
d) $P(x) = x^2 + 7x + 10$	e) $P(x) = 2x^2 + x - 6$	f) $P(x) = 6x^2 - 7x - 5$

4. Contesta: ¿Dónde interceptan al eje x las gráficas de las funciones cuadráticas del numeral anterior? ¿Coinciden los puntos de intersección obtenidos con los ceros de los polinomios? Compara los resultados de los numerales 2. y 3.

7.3 ECUACIONES DE 2° GRADO O CUADRÁTICAS

EXPERIENCIA

- Fíjate bien y descubre las características que presentan las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 + 2x - 3 = 0$	b) $2x^2 + x - 6 = 0$	c) $5x^2 + 10x = 0$
d) $6x^2 = 7x + 5$	e) $4x^2 = 25$	f) $6x^2 = 7x$

- Contesta:
  a) ¿Cuántas incógnitas tiene cada ecuación? ¿Cuál(es) es?
  b) ¿Son polinómicas estas ecuaciones? ¿De qué grado son?

APRENDAMOS

ECUACIONES DE 2º GRADO O CUADRÁTICAS

- Una ecuación que puede escribirse en la forma $ax^2 + bx + c = 0$, donde **a, b, c** son números reales tales que $a \neq 0$, se denomina **ECUACION DE 2º GRADO o ECUACION CUADRATICA en** la incógnita **x.**
- Una ecuación cuadrática está escrita en la FORMA GENERAL cuando se escribe así:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

- La(s) solución(es) de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ son los valores de **x** para los cuales la igualdad es verdadera.
- Cuando en la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, alguno de los coeficientes **b** o **c** o **ambos** son iguales a CERO, obtenemos una ecuación de segundo grado **INCOMPLETA;** es decir, ecuaciones como $ax^2 + bx = 0$, $ax^2 + c = 0$ o $ax^2 = 0$ son **ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO INCOMPLETAS.**

Ejemplo 1

La ecuación $3x^2 + 5x - 8 = 0$ es una ecuación de segundo grado completa, en la incógnita x y está escrita en la forma general.

Ejemplo 2

La ecuación $18 = 200\,p - 19p^2$ es una ecuación de segundo grado completa, en la incógnita p y no está escrita en la forma general, pero podemos escribirla; así:

$18 = 200p - 19p^2$ .... Ecuación dada
$\therefore 18 - 200p + 19p^2 = 0$ .... Igualamos a cero
$\therefore 19p^2 - 200p + 18 = 0$ .... Ordenamos los términos

Ejemplo 3

La ecuación $mx^2 + nx = px - q$ es una ecuación de segundo grado completa, en la incógnita x y no está escrita en la forma general $ax^2 + bx + c = 0$, pero podemos escribirla haciendo lo siguiente:

$mx^2 + nx = px - q$ .... Ecuación dada
$\therefore mx^2 + nx - px + q = 0$ .... Igualamos a cero
$\therefore mx^2 + (nx - px) + q = 0$ .... Agrupamos los términos en x
$\therefore mx^2 + (n - p)x + q = 0$ .... Sacamos factor común x

Esta última ecuación está escrita en la forma $ax^2 + bx + c = 0$, donde $a = m$, $b = n - p$ y $c = q$.

Ejemplo 4

La ecuación $3x^2 = 9x$ es una ecuación de segundo grado incompleta (falta el término independiente c), en la incógnita x y no está escrita en la forma general. Vamos a escribirla en la forma general:

$3x^2 = 9x$ .... Ecuación dada
$\therefore 3x^2 - 9x = 0$ .... Igualamos a cero

Ejemplo 5

La ecuación $16 = 4x^2$ es una ecuación de segundo grado incompleta (falta el término bx), en la incógnita x y no está escrita en la forma general. Vamos a escribirla en esta forma:

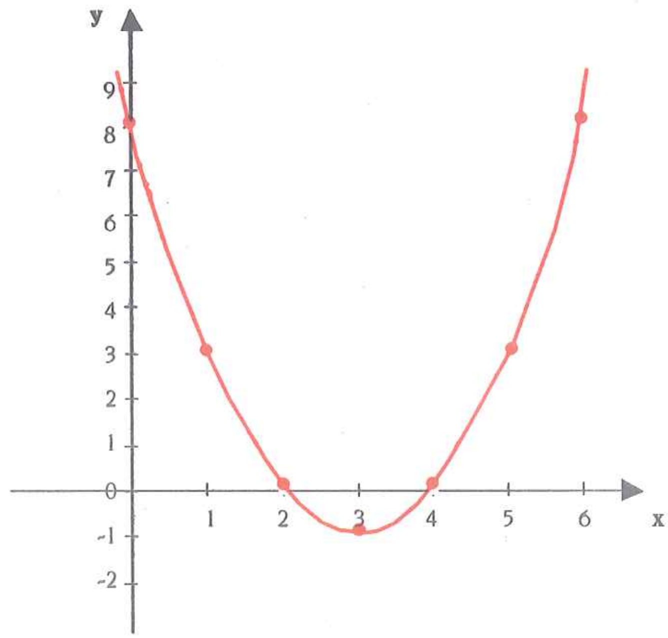
$16 = 4x^2$ .... Ecuación dada
$\therefore 16 - 4x^2 = 0$ .... Igualamos a cero
$\therefore -4x^2 + 16 = 0$ .... Ordenamos los términos
$\therefore 4x^2 - 16 = 0$ .... Multiplicamos ambos lados por (-1)

Esta ecuación es de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, con $a = 4$, $b = 0$ y $c = -16$.

EXPERIENCIA

- Dibuja en una hoja de papel cuadriculado la gráfica de la función cuadrática cuya ecuación es $y = x^2 - 6x + 8$.
- Compara tu trabajo con el siguiente:

x	y
0	8
1	3
2	0
3	-1
4	0
5	3
6	8



- Contesta:
  - ¿Dónde intercepta o corta la curva al eje x?
  - ¿Cuáles son las coordenadas de estos puntos?
  - ¿Qué caracteriza las coordenadas de estos puntos de intersección?
- La gráfica nos muestra que la curva intercepta al eje x en los puntos de coordenadas (2, 0) y (4, 0); es decir, en tales puntos el valor de la ordenada (de la y) es CERO:

$$\begin{cases} \text{Cuando } y = 0 \ , & \text{entonces } x = 2 \\ \text{Cuando } y = 0 \ , & \text{entonces } x = 4 \end{cases}$$

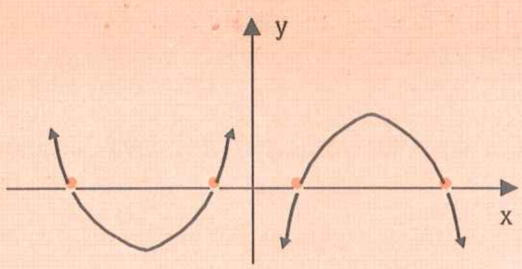
- Los interceptos con el eje x de una función cuadrática, también se denominan CEROS, RAÍCES o SOLUCIONES de la función. Esto significa que $x = 2$ y $x = 4$ son CEROS, RAÍCES o SOLUCIONES de la función $y = x^2 - 6x + 8$.

APRENDAMOS

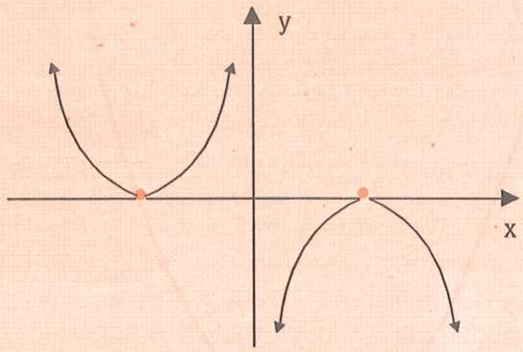
- Resolver la ecuación $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$ equivale a encontrar los CEROS de la función $\mathbf{y = f(x) = ax^2 + bx + c}$.
- Para resolver gráficamente la ecuación $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$ dibujamos la gráfica de la parábola de ecuación $\mathbf{y = ax^2 + bc + c}$ y determinamos los puntos donde la curva intercepta al eje x.

¡ATENCIÓN!

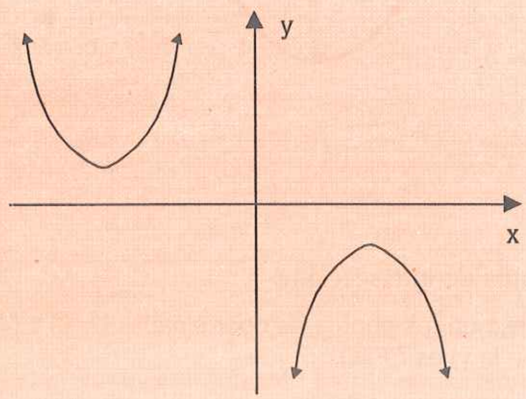
- Cuando dibujamos la gráfica de una función cuadrática, puede ocurrir una de estas 3 cosas:



1. La parábola corta al eje x en DOS PUNTOS. En este caso, la ecuación tiene DOS SOLUCIONES REALES DISTINTAS.



2. La parábola tiene UN PUNTO común con el eje x. En este caso, la ecuación tiene UNA SOLA SOLUCION REAL. (En realidad son DOS SOLUCIONES REALES IGUALES)



3. La parábola NO INTERCEPTA AL EJE x. En este caso la ecuación NO TIENE SOLUCIONES REALES.

- De acuerdo con la observación anterior, una ecuación de segundo grado puede tener:
  - Dos soluciones reales distintas.
  - Una solución real.(Dos soluciones reales iguales)
  - Ninguna solución real.

EJERCICIO 7.2

En los ejercicios 1. a 15., determina cuales ecuaciones son cuadráticas. Aquellas que lo sean escríbelas en la forma $ax^2 + bx + c = 0$ y halla los valores de a, b y c:

1 $4x^2 = 0$

2 $1 - 3x^2 = 0$

3 $7 = 8x^2$

4 $6x - 8x^2 = x^3$

5 $3x^2 - \frac{4}{x} + 5 = 0$

6 $9x - 5 + 6x^2 = 0$

7 $\frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} + x = 0$

8 $a^2x^2 + abx = 2b^2$

9 $x(x - 3) + 2(x + 1) = 4$

10 $x(x^2 + 4) + 4 = 0$

11 $(x + 3)(2x - 4) = 0$

12 $3x(x - 2) = 0$

13 $abx^2 - x(b - 2a) = 2$

14 $(x^2 - 3) + x(x^2 + 4) = 7$

15 $x^2 - 3x(2 - 5a) = 12a$

En los ejercicios 16. a 21. determina si los valores dados son raíces de la ecuación de segundo grado correspondiente.

16 -5 y 2 son raíces de $x^2 + 3x - 10 = 0$

17 2 y $\frac{1}{3}$ son raíces de $3x^2 - 7x + 2 = 0$

18 $-\frac{3}{2}$ y $\frac{1}{3}$ son raíces de $6x^2 + 7x - 3 = 0$

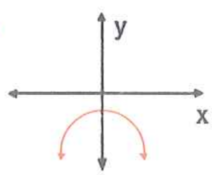
19 $2, -3, 1$ y -1 son raíces de $x^2 - x - 6 = 0$

20 $4i$ y $-4i$ son raíces de $x^2 + 16 = 0$

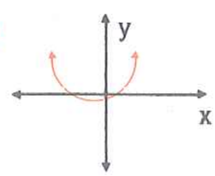
21 $\frac{b}{2} - m$ y $\frac{b}{2} + m$ son raíces de $4x(x - b) + b^2 = 4m^2$

En los ejercicios 22. a 25., determina el número de soluciones reales de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ correspondiente a cada función cuadrática.

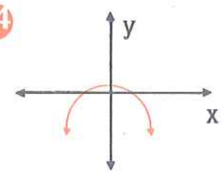
22



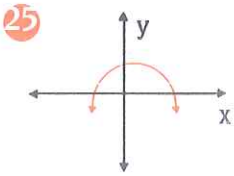
23



24



25



DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 1

Se vende un reloj por 150 dólares. Si se hubiera vendido en 15 dólares más, se hubiera ganado 20 dólares. ¿Cuál es el porcentaje de la ganancia sobre el precio de venta?

7.5 SOLUCIÓN ALGEBRAICA DE LA ECUACIÓN CUADRÁTICA

7.5.1 Solución por Factorización

EXPERIENCIA DE REPASO

- Un aspecto clave en la solución de las ecuaciones cuadráticas $ax^2 + bx + c = 0$ tiene que ver con la factorización de los trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$. Recordemos que estos trinomios pueden factorizarse en los reales de varias maneras:

1. Por simple inspección o tanteo, cuando los factores son enteros.
2. Por completación al trinomio cuadrado perfecto.
3. Por aplicación del teorema del factor.

- Vamos a recordar, con un ejemplo, la utilización de estas tres maneras de factorizar un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$.

- Factoricemos el trinomio $3x^2 + 7x - 6$

1. POR SIMPLE INSPECCION o TANTEO

$3x^2 + 7x - 6 = \frac{3(3x^2+7x-6)}{3}$ .... Multiplicamos y dividimos por 3

$\therefore 3x^2 + 7x - 6 = \frac{3^2x^2+7(3x)-18}{3}$ .... ¿Qué hicimos?

$\therefore 3x^2 + 7x - 6 = \frac{(3x)^2+7(3x)-18}{3}$ .... ¿Por qué?

$\therefore 3x^2 + 7x - 6 = \frac{(3x+9)(3x-2)}{3}$ .... ¿Por qué?

$\therefore 3x^2 + 7x - 6 = \frac{\cancel{3}(x+3)(3x-2)}{\cancel{3}}$ .... ¿Por qué?

$\therefore 3x^2 + 7x - 6 = (x + 3)(3x - 2)$

2. POR COMPLETACIÓN AL TRINOMIO CUADRADO PERFECTO

$3x^2 + 7x - 6 = 3\left[x^2 + \frac{7}{3}x - \frac{6}{3}\right]$ .... Hacemos el coeficiente de x^2 igual a 1

$\therefore 3x^2 + 7x - 6 = 3\left[\left(x^2 + \frac{7}{3}x + \quad\right) - \frac{6}{3}\right]$ .... ¿Qué hicimos acá?

Ahora debemos completar al trinomio cuadrado perfecto la expresión $(x^2 + \frac{7}{3}x + \quad)$. Para lograrlo, debemos sumar la mitad del cuadrado del coeficiente del término $\frac{7}{3}x$; es decir, debemos sumar (y restar para que no se altere la expresión) $\left(\frac{7}{6}\right)^2 = \frac{49}{36}$. Por lo tanto:

$3x^2 + 7x - 6 = 3\left[\left(x^2 + \frac{7}{3}x + \frac{49}{36}\right) - \frac{6}{3} - \frac{49}{36}\right]$

$\therefore 3x^2 + 7x - 6 = 3\left[\left(x + \frac{7}{6}\right)^2 - \frac{6}{3} - \frac{49}{36}\right]$

$\therefore 3x^2 + 7x - 6 = 3\left[\left(x + \frac{7}{6}\right)^2 - \frac{121}{36}\right]$ .... ¿por qué?

$\therefore 3x^2 + 7x - 6 = 3\left[\left(x + \frac{7}{6}\right) + \frac{11}{6}\right]\left[\left(x + \frac{7}{6}\right) - \frac{11}{6}\right]$ .... ¿por qué?

$\therefore 3x^2 + 7x - 6 = 3\left(x + \frac{18}{6}\right)\left(x - \frac{4}{6}\right)$ .... ¿por qué?

$\therefore 3x^2 + 7x - 6 = 3(x + 3)\left(x - \frac{2}{3}\right)$ .... ¿por qué?

$\therefore 3x^2 + 7x - 6 = \cancel{3}(x + 3)\left(\frac{3x-2}{\cancel{3}}\right)$ .... ¿por qué?

$\therefore 3x^2 + 7x - 6 = (x + 3)(3x - 2)$

3. POR APLICACION DEL TEOREMA DEL FACTOR

Al repasar la unidad 0 de este texto, recordábamos que si un polinomio tiene CEROS enteros, necesariamente estos hay que buscarlos en los divisores de su término independiente. Así, pues, los posibles ceros enteros del polinomio $P(x) = 3x^2 + 7x - 6$ son los divisores de 6:

Divisores de 6: ± 1 , ± 2 , ± 3 , ± 6

Un chequeo rápido nos muestra que sólo $x = -3$ es cero entero de este polinomio. Por lo tanto, $(x + 3)$ es un factor de $3x^2 + 7x - 6$. El otro factor podemos encontrarlo por simple inspección o buscando sus coeficientes a través del proceso de la división sintética; así:

$$\begin{array}{c|ccc} & 3 & 7 & -6 \\ -3 & & -9 & 6 \\ \hline & 3 & -2 & 0 \end{array}$$

Luego, el otro factor es $(3x - 2)$ y la factorización completa del polinomio $P(x) = 3x^2 + 7x - 6$ es $(x + 3)(3x - 2)$.

- Finalmente, conviene recordar la propiedad $a \bullet b = 0$ de los números reales porque la usaremos a continuación en la solución de ecuaciones de segundo grado.

RECORDEMOS

PROPIEDAD DE LOS REALES PARA $a \bullet b = 0$

- Sean **a** y **b** dos números reales:

$$\textbf{Si } a \bullet b = 0 \textbf{ entonces } a = 0 \text{ o } b = 0$$

- Esta propiedad establece que si el producto de dos números reales es igual a cero, entonces al menos uno de los factores (o ambos) son iguales a cero.
- Esta propiedad puede extenderse a un producto con más de dos factores; es decir:

$$\textbf{Si } a \bullet b \bullet c \bullet d = 0 \quad \textbf{entonces} \quad a = 0 \text{ ó } b = 0 \text{ o } c = 0 \text{ ó } d = 0$$

- Los siguientes ejemplos nos muestran de manera detallada cómo usar la factorización y la propiedad **$a \bullet b = 0$** para resolver ecuaciones de segundo grado.

Ejemplo 1

Resolvamos la ecuación $(2x - 1)(x + 3) = 0$

Solución

- La ecuación $(2x - 1)(x + 3) = 0$ tiene la forma $a \bullet b = 0$. Por lo tanto, si aplicamos la propiedad de los números reales que acabamos de mencionar nos queda:

$$(2x - 1)(x + 3) = 0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \quad \text{ó} \quad x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \quad \text{ó} \quad x = -3$$

- Así pues, la solución de la ecuación es el conjunto $S = \left\{-3, \frac{1}{2}\right\}$
- Esta solución puede comprobarse si sustituimos la incógnita x primero por -3 y luego por $\frac{1}{2}$ en la ecuación original; así:

* Sustituimos x por -3:

$$[2(-3) - 1][(-3) + 3] \stackrel{?}{=} 0$$
$$[-6 - 1][0] \stackrel{?}{=} 0$$
$$[-7][0] \stackrel{?}{=} 0$$
$$0 = 0 \quad \text{¡cierto!}$$

* Sustituimos x por $\frac{1}{2}$:

$$\left[2\left(\frac{1}{2}\right) - 1\right]\left[\frac{1}{2} + 3\right] \stackrel{?}{=} 0$$
$$[1 - 1]\left[\frac{7}{2}\right] \stackrel{?}{=} 0$$
$$[0]\left[\frac{7}{2}\right] \stackrel{?}{=} 0$$
$$0 = 0 \quad \text{¡cierto!}$$

Ejemplo 2

Resolvamos la ecuación $x^2 + 2x = 15$

Solución

- La ecuación $x^2 + 2x = 15$ es una ecuación de segundo grado. Para resolverla, lo primero que hacemos es igualar a cero; es decir:

$$x^2 + 2x = 15 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 15 = 0$$

- A continuación, factorizamos el polinomio $x^2 + 2x - 15$. Podemos hacerlo por simple inspección; así:

$$x^2 + 2x - 15 = 0 \Leftrightarrow (x + 5)(x - 3) = 0$$

- Ahora igualamos a cero cada factor:

$$\begin{aligned}(x + 5)(x - 3) = 0 &\Leftrightarrow x + 5 = 0 \text{ ó } x - 3 = 0\\ &\Leftrightarrow x = -5 \text{ ó } x = 3\end{aligned}$$

- **CONCLUSIÓN:** La solución de la ecuación $x^2 + 2x = 15$ es el conjunto $S = \{-5, 3\}$

Ejemplo 3

Resolvamos la ecuación $3x^2 = 2x$

Solución

- En la solución de esta ecuación expliquemos cada paso desarrollado:

$3x^2 = 2x$ .... ecuación dada
$\therefore 3x^2 - 2x = 0$ .... ¿qué hicimos?
$\therefore x(3x - 2) = 0$ .... ¿por qué?
$\therefore x = 0$ ó $3x - 2 = 0$ .... ¿por qué?
$\therefore x = 0$ ó $x = \frac{2}{3}$ .... ¿por qué?

- Por lo tanto, la solución de la ecuación $3x^2 = 2x$ es el conjunto $S = \left\{0, \frac{2}{3}\right\}$

Ejemplo 4

Resolvamos la ecuación $2x^2 - 8x + 3 = 0$

Solución

- El polinomio $2x^2 - 8x + 3$ no tiene factores enteros. Por lo tanto, es bastante difícil factorizarlo por simple inspección. Igualmente, se dificulta su factorización por el teorema del factor. Vamos a factorizarlo por completación al trinomio cuadrado perfecto. Explica cada paso realizado:

$$2x^2 - 8x + 3 = 0 \Leftrightarrow 2\left(x^2 - 4x + \frac{3}{2}\right) = 0$$

$$\therefore 2x^2 - 8x + 3 = 0 \Leftrightarrow 2\left[(x^2 - 4x) + \frac{3}{2}\right] = 0$$

$$\therefore 2x^2 - 8x + 3 = 0 \Leftrightarrow 2\left[(x^2 - 4x + 4) + \frac{3}{2} - 4\right] = 0$$

$$\therefore 2x^2 - 8x + 3 = 0 \Leftrightarrow 2\left[(x - 2)^2 - \frac{5}{2}\right] = 0$$

$$\therefore 2x^2 - 8x + 3 = 0 \Leftrightarrow 2\left[(x - 2) + \sqrt{\frac{5}{2}}\right] \bullet \left[(x - 2) - \sqrt{\frac{5}{2}}\right] = 0$$

$$\therefore 2x^2 - 8x + 3 = 0 \Leftrightarrow 2\left(x - 2 + \sqrt{\frac{5}{2}}\right) \bullet \left(x - 2 - \sqrt{\frac{5}{2}}\right) = 0$$

$$\therefore 2x^2 - 8x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left(x - 2 + \sqrt{\frac{5}{2}}\right) \bullet \left(x - 2 - \sqrt{\frac{5}{2}}\right) = 0$$

$$\therefore 2x^2 - 8x + 3 = 0 \Leftrightarrow x - 2 + \sqrt{\frac{5}{2}} = 0 \quad \text{ó} \quad x - 2 - \sqrt{\frac{5}{2}} = 0$$

$$\therefore 2x^2 - 8x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 2 - \sqrt{\frac{5}{2}} \quad ó \quad x = 2 + \sqrt{\frac{5}{2}}$$

$$\therefore x \approx 2 - 1{,}58 \quad ó \quad x \approx 2 + 1{,}58$$

$$\therefore x \approx 0{,}42 \quad ó \quad x \approx 3{,}58$$

- Luego, la solución de la ecuación es el conjunto { 0,42 , 3,58 }

¡ATENCIÓN! Muchos estudiantes cometen el siguiente error cuando tienen una ecuación como ésta $x(3x - 2) = 0$: pasan, a dividir, el factor x al otro lado de la ecuación, dejando como única solución la correspondiente a la ecuación $3x - 2 = 0$. Cuidémonos, por lo tanto, de cometer esta ligereza pues estaríamos eliminando una de las dos soluciones que tiene toda ecuación de segundo grado.

Ejemplo 5

Resolvamos la ecuación $x^2 = 16$

Solución

- Analicemos cada paso explicando lo que se hace:

$x^2 = 16$....................................... ecuación dada
$\therefore x^2 - 16 = 0$ .... ¿por qué?
$\therefore (x+ 4)(x - 4) = 0$ .... ¿por qué?
$\therefore x + 4 = 0$ ó $x - 4 = 0$ .... ¿por qué?
$\therefore x = -4$ ó $x = 4$ .... ¿por qué?

- Por lo tanto, la solución de la ecuación $x^2 = 16$ es el conjunto $S = \{-4 , 4\}$

¡ATENCIÓN! Este tipo de ecuaciones incompletas de segundo grado, en las cuales falta el término de primer grado bx, también podemos resolverlas aplicando la definición de raíz cuadrada de un número; así:

$$x^2 = 16 \Leftrightarrow x = \sqrt{16} \quad o \quad x = -\sqrt{16}$$
$$\therefore x^2 = 16 \Leftrightarrow x = 4 \ o \ x = -4$$

O en forma más simple:

$$x^2 = 16 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{16}$$
$$\therefore x^2 = 16 \Leftrightarrow x = \pm 4$$

Ejemplo 6

Resolvamos la ecuación $(x - 6)^2 = 10$

Solución

- Esta ecuación podemos resolverla de dos maneras: la primera, desarrollando $(x - 6)^2$, igualando a cero, factorizando y aplicando la propiedad $a \bullet b = 0$; la segunda, aplicando la definición de raíz cuadrada como lo hicimos en el ejemplo anterior. Esta segunda manera es la más rápida. Veamos:

$(x - 6)^2 = 10$ ....ecuación dada
$\therefore\ x - 6 = \pm\sqrt{10}$............................. ¿por qué?
$\therefore\ x = 6 \pm \sqrt{10}$ ....¿por qué?
$\therefore\ x = 6 + \sqrt{10}$ ó $x = 6 - \sqrt{10}$ ....¿ por qué?

- Por lo tanto, la solución de esta ecuación es el conjunto $S = \{ 6 + \sqrt{10} , 6 - \sqrt{10} \}$.
- Invitamos al lector a resolver la ecuación de la otra manera y comparar no sólo los resultados sino los métodos.

Ejemplo 7

Resolvamos la ecuación $2x^2 - 3x + 4 = 0$

Solución

- Damos un tiempo prudencial para que cada lector factorice el polinomio $2x^2 - 3x + 4$.
- ¿Verdad que aparentemente, ninguno de los métodos sugeridos para factorizar este polinomio funciona? ¿Por qué?
- La razón es que probablemente este polinomio no tiene factores reales. Para comprobarlo, recordemos un criterio para saber si un polinomio de la forma $ax^2 + bx + c$ tiene o no factores reales. El criterio es el siguiente:

RECORDEMOS

El polinomio $ax^2 + bx + c$ NO tiene factores reales si la expresión $b^2 - 4ac$ es negativa.

- En nuestro caso: $a = 2$, $b = -3$ y $c = 4$. Por lo tanto: $b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(2)(4) = 9 - 32 = -23$

  Luego, $b^2 - 4ac$ es negativo y el polinomio $2x^2 - 3x + 4$ no tiene factores reales.
- **CONCLUSIÓN:** Como el polinomio $2x^2 - 3x + 4$ no tiene factores reales, entonces la ecuación $2x^2 - 3x + 4 = 0$ tampoco tiene soluciones o raíces reales.

Ejemplo 8

Resolvamos la ecuación $4x^2 + 9 = 12x$

Solución

- Tenemos:

$$\begin{aligned} &4x^2 + 9 = 12x \\ \therefore\ &4x^2 - 12x + 9 = 0 \\ \therefore\ &(2x - 3)^2 = 0 \\ \therefore\ &(2x - 3)(2x - 3) = 0 \\ \therefore\ &2x - 3 = 0 \ \text{ ó } \ 2x - 3 = 0 \\ \therefore\ &x = \frac{3}{2} \ \text{ ó } \quad x = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

- Luego, la solución de la ecuación es el conjunto $S = \left\{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\} = \left\{\frac{3}{2}\right\}$
- Notemos que, en este caso, las soluciones de la ecuación son iguales: $x = \frac{3}{2}$, $x = \frac{3}{2}$. Esto ocurre cuando el polinomio $ax^2 + bx + c$ es un trinomio cuadrado perfecto.
- También podríamos haber resuelto más rápido la ecuación si, en el paso donde $(2x - 3)^2 = 0$, aplicamos la definición de raíz cuadrada; así:

$$\begin{aligned} &(2x - 3)^2 = 0 \\ \therefore\ &2x - 3 = \pm\sqrt{0} \\ \therefore\ &2x - 3 = 0 \\ \therefore\ &2x = 3 \\ \therefore\ &x = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

7.5.2. Solución Mediante la Fórmula Cuadrática

- El método de completación al trinomio cuadrado perfecto nos permite resolver cualquier ecuación cuadrática, pero su aplicación suele ser bastante tediosa. Afortunadamente existe un método general y sencillo con el cual podemos resolver cualquier ecuación de segundo grado. Este método es el de la FORMULA CUADRÁTICA. Esta fórmula, bastante popular entre los estudiantes de secundaria, se deduce al aplicar a la forma general de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ el método de completación al trinomio cuadrado perfecto. Observemos todo el proceso:

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0} \quad ; \ a \neq 0$$

$\div\, a$ — Si dividimos ambos lados por **a** obtenemos:

$$\boxed{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0}$$

$-\frac{c}{a}$ — Restando $\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{a}}$ a ambos lados nos queda:

$$\boxed{x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}}$$

$+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ — Ahora sumamos $\left(\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{2a}}\right)^2$ a ambos lados de la igualdad para que el lado izquierdo sea un trinomio cuadrado perfecto:

$$\boxed{x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2}$$

Pero $\mathbf{x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}$

$$\boxed{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}}$$

Ahora sumamos las fracciones del lado derecho:

$$\boxed{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

Saquemos raíz cuadrada a ambos lados:

$$\boxed{x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}}$$

Simplifiquemos el radical del lado derecho:

$$\boxed{x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Despejamos la x:

$$\boxed{x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Finalmente, sumamos las fracciones de igual denominador del lado derecho:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

- Esta última expresión: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ es la fórmula para resolver cualquier ecuación de segundo grado y debe utilizarse cuando no dan resultado o son difíciles otros métodos como el de la factorización. Se llama FÓRMULA CUADRÁTICA o FÓRMULA DEL BACHILLER, por su popularidad entre los estudiantes de secundaria.

- La expresión $b^2 - 4ac$, que aparece dentro de la raíz cuadrada en la fórmula cuadrática, se denomina **DISCRIMINANTE** y es muy importante ya que nos proporciona información útil acerca de las soluciones o raíces de la ecuación; así:
  * Si $b^2 - 4ac$ es positivo, entonces $ax^2 + bx + c = 0$ tiene dos soluciones reales distintas.
  * Si $b^2 - 4ac = 0$, entonces $ax^2 + bx + c = 0$ tiene dos soluciones reales iguales (una solución real repetida).
  * Si $b^2 - 4ac$ es negativo, entonces $ax^2 + bx + c = 0$ no tiene soluciones reales y ambas son complejas.

Recordemos que esta misma expresión fue la que utilizamos para saber si un polinomio cuadrático tenía o no factores reales.

¡ATENCIÓN!

- Las soluciones de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ pueden obtenerse factorizando el polinomio $ax^2 + bx + c$ y aplicando la propiedad $A \bullet B = 0$ o aplicando directamente la fórmula cuadrática:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- La expresión $b^2 - 4ac$ se denomina DISCRIMINANTE ya que nos permite determinar si la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ tiene dos soluciones reales, una solución real o ninguna solución real dependiendo de si $b^2 - 4ac$ es positivo, cero o negativo, respectivamente.

Ejemplo 1

Resolvamos la ecuación $3x^2 - 2x - 5 = 0$, utilizando la fórmula cuadrática.

Solución

- En este caso: $a = 3$, $b = -2$ y $c = -5$
- Por lo tanto,

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(3)(-5)}}{2(3)} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 60}}{6}$$

$$\therefore\ x = \frac{2 \pm \sqrt{64}}{6} = \frac{2 \pm 8}{6}$$

- Tenemos, pues, las dos soluciones siguientes: $x_1 = \frac{2 + 8}{6} = \frac{5}{3}$ ó $x_2 = \frac{2 - 8}{6} = -1$
- Luego, la solución de la ecuación $3x^2 - 2x - 5 = 0$ es el conjunto $S = \left\{-1, \frac{5}{3}\right\}$

Ejemplo 2

Resolvamos la ecuación $5m + 3m^2 = 4$, utilizando la fórmula cuadrática.

Solución

- En primer lugar, igualamos a cero la ecuación; así: $3m^2 + 5m - 4 = 0$.
- Ahora tenemos: $a = 3$, $b = 5$ y $c = -4$. Por lo tanto:

$$m = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(3)(-4)}}{6} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 48}}{6} = \frac{-5 \pm \sqrt{73}}{6}$$

- Luego, tenemos dos soluciones reales distintas: $m_1 = \frac{-5 + \sqrt{73}}{6}$ y $m_2 = \frac{-5 - \sqrt{73}}{6}$

- Por lo tanto, el conjunto solución de la ecuación $5m + 3m^2 = 4$ es: $S=\left\{\frac{-5+\sqrt{73}}{6}, \frac{-5-\sqrt{73}}{6}\right\}$

Ejemplo 3

Resolvamos la ecuación $x^2 + 13 = 4 - 5x$

Solución

- Tenemos:

$$x^2 + 13 = 4 - 5x \text{ .... ecuación dada}$$
$$\therefore x^2 + 13 - 4 + 5x = 0 \text{ .... igualamos a cero}$$
$$\therefore x^2 + 5x + 9 = 0 \text{ .... ¿por qué?}$$

- Por lo tanto, $a = 1$, $b = 5$ y $c = 9$:

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(1)(9)}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25-36}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{-11}}{2}$$

- Como vemos, el discriminante $b^2 - 4ac$ es negativo. En consecuencia, la ecuación $x^2 + 13 = 4 - 5x$ no tiene soluciones reales sino soluciones complejas y las escribimos así: $x_1 = \frac{-5+\sqrt{11}\,i}{2}$ y $x_2 = \frac{-5-\sqrt{11}\,i}{2}$

Ejemplo 4

- Resolvamos la ecuación: $\frac{2z^2}{z-2} - 1 = \frac{2z+4}{z-2}$

Solución

- En primer lugar, observemos que la ecuación presenta denominadores. Por lo tanto, debemos proceder a eliminarlos.
- El m.c.m. de los denominadores es $z - 2$. Multipliquemos, pues, ambos lados de la ecuación por $z - 2$:

$$\frac{2z^2}{z-2} - 1 = \frac{2z+4}{z-2} \text{ .... Ecuación dada}$$
$$\therefore (z-2)\bullet\left(\frac{2z^2}{z-2} - 1\right) = (z-2)\bullet\frac{2z+4}{z-2} \text{ .... ¿Por qué?}$$
$$\therefore \cancel{(z-2)}\bullet\frac{2z^2}{\cancel{z-2}} - (z-2) = \frac{\cancel{(z-2)}(2z+4)}{\cancel{(z-2)}} \text{ .... Propiedad distributiva}$$
$$\therefore 2z^2 - (z-2) = 2z + 4\ ;\ \text{con } z \neq 2 \text{ .... ¿por qué?}$$
$$\therefore 2z^2 - z + 2 = 2z + 4\ ;\ \text{con } z \neq 2$$
$$\therefore 2z^2 - z + 2 - 2z - 4 = 0\ ;\ \text{con } z \neq 2$$
$$\therefore 2z^2 - 3z - 2 = 0\ ;\ \text{con } z \neq 2$$
$$\therefore (2z+1)(z-2) = 0\ ;\ \text{con } z \neq 2$$
$$\therefore 2z + 1 = 0 \quad \text{ó} \quad z - 2 = 0\ ;\ \text{con } z \neq 2$$
$$\therefore z = -\frac{1}{2} \quad \text{ó} \quad z = 2\ ;\ \text{con } z \neq 2$$

- Como vemos, hay dos soluciones $z = -\frac{1}{2}$, $z = 2$ y una restricción $z \neq 2$. Como esta restricción contradice una de las soluciones, entonces $z = 2$ no puede ser solución de la ecuación y, en consecuencia, la única solución de esta ecuación es $z = -\frac{1}{2}$. Por lo tanto, el conjunto solución de la ecuación es $S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

¡ATENCIÓN! Tengamos en cuenta que la ecuación $\frac{2z^2}{z-2} - 1 = \frac{2z+4}{z-2}$ no es una ecuación cuadrática simple; por lo tanto, no es equivalente a la ecuación $2z^2 - 3z - 2 = 0$. En cambio, sí es equivalente a la ecuación $2z^2 - 3z - 2 = 0$; $z \neq 2$.

Ejemplo 5

Resolvamos la ecuación $(m^2 - n^2)\,x^2 + 2\,(m^2 + n^2)\,x + m^2 - n^2 = 0$, con $m \neq \pm\, n$

Solución

- Si aplicamos la fórmula cuadrática tendríamos: $a = m^2 - n^2$; $b = 2\,(m^2 + n^2)$; $c = m^2 - n^2$

- Por lo tanto:

$$x = \frac{-2\,(m^2+n^2) \pm \sqrt{[\,2\,(m^2+n^2)\,]^2 - 4(m^2-n^2)(m^2-n^2)}}{2(m^2-n^2)}$$

$$\therefore x = \frac{-2\,(m^2+n^2) \pm \sqrt{4\,(m^4+2m^2n^2+n^4) - 4(m^4-2m^2n^2+n^4)}}{2(m^2-n^2)}$$

$$\therefore x = \frac{-2\,(m^2+n^2) \pm \sqrt{4\,m^4+8m^2n^2+4n^4 - 4m^4+ 8m^2n^2- 4n^4}}{2(m^2-n^2)}$$

$$\therefore x = \frac{-2\,(m^2+n^2) \pm \sqrt{16m^2n^2}}{2(m^2-n^2)}$$

$$\therefore x = \frac{-2\,(m^2+n^2) \pm 4mn}{2(m^2-n^2)}$$

$$\therefore x_1 = \frac{-2\,(m^2+n^2) + 4mn}{2(m^2-n^2)} \qquad ó \qquad x_2 = \frac{-2\,(m^2+n^2) - 4mn}{2(m^2-n^2)}$$

$$\therefore x_1 = \frac{-\cancel{2}\,(m^2+n^2-2mn)}{\cancel{2}(m^2-n^2)} \qquad ó \qquad x_2 = \frac{-\cancel{2}\,(m^2+n^2+2mn)}{\cancel{2}(m^2-n^2)}$$

$$\therefore x_1 = \frac{-(m-n)^{\cancel{2}}}{(m+n)\,\cancel{(m-n)}} \qquad ó \qquad x_2 = \frac{-(m+n)^{\cancel{2}}}{\cancel{(m+n)}\,(m-n)}$$

$$\therefore x_1 = \frac{n-m}{m+n} \qquad ó \qquad x_2 = \frac{m+n}{n-m}$$

- Luego, el conjunto solución de esta ecuación es $S = \left\{ \frac{n-m}{m+n}, \frac{m+n}{n-m} \right\}$

Ejemplo 6

Despejemos la variable y, en la ecuación $3x^2 - 4xy + y^2 = 12$.

Solución

- Un examen detenido de la ecuación nos permite determinar que es de segundo grado en la variable **y**; por lo tanto, igualemos a cero y ordenemos los términos de acuerdo con dicha variable:

$3x^2 - 4xy + y^2 = 12$ .... Ecuación dada.

$\therefore\ y^2 - 4xy + 3x^2 - 12 = 0$ .... Igualamos a cero y ordenamos.

- En consecuencia, $a = 1$, $b = -4x$ y $c = 3x^2 - 12$. Luego:

$$\therefore y = \frac{-(-4x) \pm \sqrt{(-4x)^2 - 4(1)\,(3x^2 - 12)}}{2} = \frac{-(-4x) \pm \sqrt{16x^2 - 12x^2 + 48}}{2}$$

$$\therefore y = \frac{-(-4x) \pm \sqrt{(-4x)^2 - 4(1)\,(3x^2 - 12)}}{2} = \frac{4x \pm \sqrt{4x^2 + 48}}{2}$$

$$\therefore\ y = \frac{-(-4x) \pm \sqrt{(-4x)^2 - 4(1)(3x^2 - 12)}}{2} = \frac{4x \pm \sqrt{4(x^2 + 12)}}{2} = \frac{4x \pm 2\sqrt{x^2 + 12}}{2} = 2x \pm \sqrt{x^2 + 12}$$

- Por lo tanto, al despejar la **y** obtenemos dos ecuaciones:

$$y = 2x + \sqrt{x^2 + 12} \qquad y \qquad y = 2x - \sqrt{x^2 + 12}$$

EJERCICIO 7.3

En los ejercicios 1. a 15., halla, por factorización, el conjunto solución de cada ecuación cuadrática.

1. $x^2 + 3x - 10 = 0$
2. $x^2 - 12 = x$
3. $9y^2 - 25 = 0$
4. $25x^2 + 4 = 20x$
5. $5(m^2 + 5) = 6m^2$
6. $y^2 + (1 + \sqrt{2})\,y + \sqrt{2} = 0$
7. $3x^2 - x = 10$
8. $81p^2 - 1 = 0$
9. $x^2 - \frac{2}{3}x = 32$
10. $z^2 + \frac{4}{15}z = \frac{1}{5}$
11. $\frac{19}{5}m = \frac{4}{5} - m^2$
12. $x^2 - 2ax + 4ab = 2bx$
13. $x^2 - 2ax + 8x = 16a$
14. $ax^2 + 2x = bx$
15. $\frac{3}{5}(x + 6)(x - 2) = \frac{2}{3}\left(\frac{621}{10} + \frac{18x}{15}\right)$

En los ejercicios 16. a 30., hallar el conjunto de solución de cada ecuación en la incógnita x:

16. $6x^2 = 7 + x$
17. $x^2 - 2 = \frac{23}{12}x$
18. $35b^2 = 9x^2 + 6bx$
19. $x^2 - 2ax + 4ab = 2bx$
20. $(3x - 5)(2x - 5) = x^2 + 2x - 3$
21. $\frac{5x + 7}{x - 1} = 3x + 2$
22. $\frac{5x - 7}{7x - 5} = \frac{x - 5}{2x - 13}$
23. $\frac{1}{3 - x} - \frac{4}{5} = \frac{1}{9 - 2x}$
24. $\frac{1}{2x - 5a} + \frac{5}{2x - a} = \frac{2}{a}$
25. $5x^2 - 9 = 46$
26. $\frac{2x - b}{b} - \frac{x}{x + b} = \frac{2x}{4b}$
27. $\frac{a + x}{a - x} + \frac{a - 2x}{a + x} = -4$
28. $\frac{x^2}{x - 1} = \frac{a^2}{2(a - 2)}$
29. $x + \frac{2}{x} = \frac{1}{a} + 2a$
30. $\frac{3x}{4} + \frac{a}{2} - \frac{x^2}{2a} = 0$

En los ejercicios 31. a 35. hallar el discriminante y determinar, sin resolver la ecuación cuadrática, el tipo de raíces que presenta la ecuación:

31. $3x^2 - 4x = 3$
32. $25x^2 + 16 = 40x$
33. $3y = 2y^2 + 5$
34. $5m^2 + \sqrt{5}m - 11 = 0$
35. $14y^2 + 11y - 15 = 0$

En los ejercicios 36. a 40. despejar en cada ecuación la variable que se indica:

36. $y^2 + xy - 6x^2 = 0$; despejar y
37. $y^2 - 4xy + 4x^2 - 9 = 0$; despejar x
38. $y^2 - 4xy + 2y + 3x^2 - 6x = 0$; despejar y
39. $9x^2 - 6xy + y^2 - 3y = 0$; despejar x
40. $3y^2 - 4x + 6y = 5$; despejar y.

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 2

Si h hombres pueden hacer un trabajo en x días, entonces 5 hombres más pueden hacer el trabajo en:

a) $x - 5$ días

b) $x + 5$ días

c) $\dfrac{h \cdot x}{h + 5}$ días

d) $h + 5$ días

e) $\dfrac{h + 5}{x}$ días

7.6 SUMA Y PRODUCTO DE LAS RAÍCES DE UNA ECUACIÓN CUADRÁTICA

PRIMERA EXPERIENCIA

- Comprobemos que las raíces de la ecuación $2x^2 + 3x - 20 = 0$ son: $x_1 = \frac{5}{2}$ y $x_2 = -4$.
- ¿Cuáles son los valores de **a** y **b** en esta ecuación?
- Hallemos la suma de las raíces: $x_1 + x_2$ y el valor de $\frac{-b}{a}$
- Ahora comparemos los resultados de $x_1 + x_2$ con el resultado de $\frac{-b}{a}$. ¿Qué podemos concluir?

SEGUNDA EXPERIENCIA

- La experiencia anterior nos ha permitido comprobar que la suma de las raíces de una ecuación cuadrática es igual a $\frac{-b}{a}$. Ahora vamos a demostrar que este resultado se cumple en toda ecuación cuadrática.
- Las raíces de una ecuación cuadrática son:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

- Sumando miembro a miembro (1) y (2)

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \cancel{\sqrt{b^2 - 4ac}} - b - \cancel{\sqrt{b^2 - 4ac}}}{2a}$$

$$\therefore\ x_1 + x_2 = \frac{-\cancel{2}b}{\cancel{2}a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{¿por qué?}$$

$$\therefore\ \boxed{x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{¿por qué?}$$

TERCERA EXPERIENCIA

- Tomemos de nuevo las raíces de la ecuación $2x^2 + 3x - 20 = 0$ y multipliquémoslas. ¿Qué obtenemos?
- Ahora hallemos el cociente $\frac{c}{a}$.
- Finalmente, comparemos los resultados de $x_1 \bullet x_2$ y $\frac{c}{a}$. ¿Qué podemos concluir?

CUARTA EXPERIENCIA

- En la actividad anterior comprobamos que $x_1 \bullet x_2 = \frac{c}{a}$. Demostremos que este resultado se cumple en toda ecuación de segundo grado.
- En efecto:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{.......................................} (1)$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{.......................................} (2)$$

- Multipliquemos miembro a miembro las igualdades (1) y (2):

$$\therefore x_1 \bullet x_2 = \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) \bullet \left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)$$

$$\therefore x_1 \bullet x_2 = \frac{(-b)^2 - \left(\sqrt{b^2 - 4ac}\right)^2}{4a^2} \quad \text{.......................................¿por qué?}$$

$$\therefore x_1 \bullet x_2 = \frac{b^2 - \left(b^2 - 4ac\right)}{4a^2} \quad \text{.......................................¿por qué?}$$

$$\therefore x_1 \bullet x_2 = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} \quad \text{.......................................¿por qué?}$$

$$\therefore x_1 \bullet x_2 = \frac{\cancel{4a}c}{\cancel{4a^2}} \quad \text{.......................................¿por qué?}$$

$$\therefore \boxed{x_1 \bullet x_2 = \frac{c}{a}}$$

APRENDAMOS

SUMA Y PRODUCTO DE LAS RAÍCES DE $ax^2 + bx + c = 0$

- La **SUMA** de las raíces de la ecuación $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$ es igual al cociente del coeficiente de **x**, con el signo contrario, dividido por el coeficiente de $\mathbf{x^2}$; es decir: $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$
- El **PRODUCTO** de las raíces de la ecuación $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$ es igual al cociente del término independiente dividido por el coeficiente de $\mathbf{x^2}$; es decir: $x_1 \bullet x_2 = \frac{c}{a}$

- Como toda ecuación cuadrática $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$ puede escribirse en la forma $\mathbf{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0}$ y sabemos que: $\mathbf{x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}}$ y $\mathbf{x_1 \bullet x_2 = \frac{c}{a}}$, entonces podemos afirmar que toda ecuación cuadrática también puede escribirse así:

$$\mathbf{x^2 - (\text{suma de las raíces})\, x + (\text{producto de las raíces}) = 0}$$

Ejemplo 1

Escribamos la ecuación de segundo grado cuyas raíces son $-\frac{4}{5}$ y $\frac{5}{4}$

Solución

- La suma de las raíces es: $-\frac{4}{5} + \frac{5}{4} = \frac{9}{20}$
- El producto de las raíces es: $\left(-\frac{4}{5}\right) \bullet \left(\frac{5}{4}\right) = -1$
- Y como la ecuación es: $x^2 -$ (suma de las raíces) $x +$ (producto de las raíces) $= 0$, entonces

  queda: $x^2 - \frac{9}{20}x - 1 = 0$ ó $20x^2 - 9x - 20 = 0$

Ejemplo 2

Hallemos el valor de **p** de modo que la suma de las raíces sea igual al producto de las mismas en la ecuación $3x^2 + (p + 2)x + 2p + 1 = 0$

Solución

- Tenemos: $3x^2 + (p + 2)x + 2p + 1 = 0$; luego, $3x^2 + (p + 2)x + (2p + 1) = 0$. Por lo tanto:

  $a = 3$, $b = p + 2$ y $c = 2p + 1$

- De acuerdo con estos valores:

  * la suma de las raíces es $-\frac{b}{a} = -\frac{p+2}{3}$
  * el producto de las raíces es $\frac{c}{a} = \frac{2p+1}{3}$

- Como queremos que la suma de las raíces sea igual al producto de las mismas, entonces:

$$-\frac{p+2}{3} = \frac{2p+1}{3}$$
$$\therefore -(p + 2) = 2p + 1$$
$$\therefore -p - 2 = 2p + 1$$
$$\therefore 3p = -3$$
$$\therefore p = -1$$

Ejemplo 3

Hallemos el conjunto solución de la ecuación: $(2k - 3)x^2 - (4k + 1)x + (5k + 8) = 0$ de tal manera que el producto de las raíces sea igual al doble de la suma de las mismas.

Solución

- Si x_1 y x_2 son las raíces de la ecuación, entonces:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{4k+1}{2k-3}$$

$$x_1 \bullet x_2 = \frac{c}{a} = \frac{5k+8}{2k-3}$$

- De acuerdo con el enunciado del problema:

$$x_1 \bullet x_2 = 2\,(x_1 + x_2)$$

$$\therefore \frac{5k+8}{2k-3} = 2\left(\frac{4k+1}{2k-3}\right)$$

$$\therefore 5k + 8 = 2\,(4k + 1),\ \text{con } 2k - 3 \neq 0$$

$$\therefore 5k + 8 = 8k + 2\ ;\ \text{con } k \neq \frac{3}{2}$$

$$\therefore k = 2\ ;\ \text{con } k \neq \frac{3}{2}$$

- Por lo tanto, la ecuación queda: $x^2 - 9x + 18 = 0$ y su conjunto solución es $S = \{3, 6\}$

EJERCICIO 7.4

En los ejercicios 1. a 8. encontrar la suma y el producto de las raíces, sin resolver las ecuaciones.

1. $x^2 - 4x - 21 = 0$
2. $2y^2 + 7y - 5 = 0$
3. $x^2 = -5x - 3$
4. $3x^2 + 8 = 9x$
5. $5 = 4x^2 + x$
6. $4m\,(3 - m) = 5\,(m - 3)$
7. $3u\,(3 - 4u) = 7\,(u + 1)$
8. $\sqrt{3}x^2 + 6x + \sqrt{6} = 0$

En los ejercicios 9. a 14., escribir las ecuaciones cuadráticas que tienen las raíces dadas:

9. 5 y $-\frac{2}{3}$
10. $-\frac{1}{3}$ y $\frac{9}{4}$
11. $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$
12. $\frac{3 \pm \sqrt{6}}{2}$
13. $\frac{4}{5}$ y $\frac{4}{5}$
14. $2\sqrt{3}$ y $-2\sqrt{3}$

En los ejercicios 15. a 20., determinar el valor de k de modo que la condición dada se cumpla:

15. Una raíz de la ecuación $x^2 - kx + 27 = 0$ es el triple de la otra.
16. Una raíz de la ecuación $4x^2 - 3x + k = 0$ es igual a 3.
17. Las raíces de la ecuación $2x^2 - kx + k = 0$ son iguales.
18. El producto de las raíces de la ecuación $5x^2 - 8x + k = 0$ es igual a $\frac{1}{5}$.
19. La suma de las raíces de la ecuación $3x^2 + (2k + 4)\,x - k + 1 = 0$ es igual al producto de las raíces de la misma.
20. Una raíz de la ecuación $3x^2 = 7x + k - 6$ es igual a cero.

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 3

Si $a^2 + b^2 = 4ab$, entonces $\frac{(a + b)^2}{(a - b)^2}$ es igual a:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

TALLER DE REPASO DE LA UNIDAD 7

1. **Responde las siguientes preguntas:**

   a) ¿Cómo se define una ecuación cuadrática? ¿Cuántas soluciones reales o no, como máximo, tiene una ecuación cuadrática?

   b) Describa los métodos que pueden utilizarse para resolver una ecuación cuadrática.

   c) ¿Qué papel desempeña la expresión $b^2 - 4ac$ en la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + x = 0$?

   d) ¿Cómo se deduce la fórmula $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ para resolver la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$?

   e) ¿Qué relación hay entre la suma y el producto de las raíces de una ecuación cuadrática y los coeficientes a, b y c de la misma?

En los ejercicios 2. a 10. escoge la letra que corresponde a la ÚNICA respuesta correcta.

2. **Si la gráfica de una función cuadrática $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ intercepta al eje x en dos puntos entonces la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ tiene:**

   a) Dos raíces reales diferentes
   b) Dos raíces complejas
   c) Una raíz real doble
   d) Una raíz real y otra compleja

3. **Para completar el trinomio cuadrado perfecto en la expresión $x^2 + 9x$, debemos:**

   a) Sumar 81
   b) Sumar $\frac{81}{4}$
   c) Restar 81
   d) Restar $\frac{81}{4}$

4. **Si las raíces de una ecuación de segundo grado son $(4 - 3i)$ y $(4 + 3i)$, entonces la ecuación es:**

   a) $x^2 - 8x + 25 = 0$
   b) $x^2 + 8x - 25 = 0$
   c) $x^2 - 8x - 25 = 0$
   d) $x^2 + 8x + 25 = 0$

5. **En la ecuación $(a^2 - 9)x^2 + ax + 7 = 0$, el valor de a para que la ecuación sea cuadrática debe ser:**

   a) Igual a 3 ó -3
   b) Diferente de 3 y -3
   c) Diferente de 3 y 0
   d) Diferente de -3 y 0

6. **La fórmula general para resolver la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ es:**

   a) $x = \dfrac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4ab}}{2b}$
   b) $x = \dfrac{b \pm \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}$
   c) $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{c^2 - 4ab}}{2c}$
   d) $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

7. **Si en la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, la expresión $b^2 - 4ac$ es negativa, entonces las soluciones son:**

   a) Reales e iguales
   b) Una real y una compleja
   c) Complejas
   d) Reales distintas

8. **La gráfica de la función $y = 3x^2 + 13x - 10$, intercepta al eje x en los puntos:**

   a) $\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$ y $(-5, 0)$
   b) $\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$ y $(5, 0)$

c) $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ y $(0,-10)$ d) $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ y $(-5, 0)$

9. Una raíz de la ecuación $2x^2 + x + q = 0$ es $-\frac{3}{2}$. La otra raíz es:

a) 1 b) $\frac{3}{2}$ c) -1 d) 4

10. Si la función $y = ax^2 + bx + c$ no tiene interceptos con el eje x, entonces la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$:

a) No tiene soluciones reales
b) Tiene una solución real doble
c) Tiene dos soluciones reales distintas
d) Tiene una solución real y otra imaginaria

11. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $(x-1)(x-2) = 0$
b) $(x-5)(x+11) = 0$
c) $x(2x+6) = 0$
d) $(2x-5)(7x-3) = 0$

12. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 - 9 = 0$
b) $x^2 - 1 = 0$
c) $x^2 - x = 0$
d) $-x^2 + 9x = 0$
e) $x^2 - 6x = 0$
f) $x^2 - 25 = 0$
g) $3x^2 - 48 = 0$
h) $1 - 4x^2 = -8$

13. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 - 7x - 18 = 0$
b) $3x^2 + 15x + 18 = 0$
c) $7x^2 + 21x - 28 = 0$
d) $-x^2 + 4x = 7$
e) $x^2 - 10x + 9 = 0$
f) $x^2 - 26x + 25 = 0$
g) $4x^2 - 17x + 4 = 0$
h) $4x^2 - 37x + 9 = 0$
i) $x^2 - 25x + 144 = 0$
j) $3x^2 + 5x + 7 = 0$

En los ejercicios 14. a 21., resuelve las ecuaciones para la incógnita x:

14. $mx^2 - nx = m + n$
15. $p^2x^2 - px = q^2 + q$
16. $u^2x^2 - x^2 + 2u^2x + 4 = 0$
17. $r^2x^2 - 2r^2x + r^2 = 9$
18. $a + x = \frac{1}{a} + \frac{1}{x}$
19. $\frac{1}{5(2-x)} = \frac{1-2x}{2+x} + \frac{x+1}{x^2-4}$
20. $a^2x^2 - b^2x^2 - 4abx = a^2 - b^2$
21. $a^2x^2 - x^2 + 2a^2x + a^2 = 0$

En los ejercicios 22. a 25. despeja la variable y:

22. $3x^2 - 4y^2 + 6y = 3$
23. $3x^2 - 5xy + 6y^2 + 3x = 4$
24. $xy - 2y^2 + 5y - 1 = 0$
25. $2x^2 + 6xy - y^2 + 4y = 3$

26. Halla el valor de k para que las raíces de la ecuación $x^2 + 2(k-2)x - 8k = 0$ sean iguales.

27. Halla el valor de k para que la suma de las raíces de la ecuación $2x^2 + (3k-1)x - k - 3 = 0$ sea igual al producto de las mismas.

28. Halla el valor de k de modo que una de las raíces de la ecuación $3x^2 + 5x + k^2 - 5k + 6 = 0$ sea igual a 0.

29. Halla la ecuación de segundo grado cuyas raíces son $\frac{2}{3}$ y $\frac{1}{2}$.

30. Halla la ecuación de segundo grado cuyas raíces son $5 - \sqrt{3}$ y $5 + \sqrt{3}$.

PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS DEL ICFES

1. Si $n+3$ divide exactamente a n^2+7, entonces el número de enteros positivos que puede tomar n es:

   a) 0 b) 1 c) 2 d) 3

2. Si (x,y) es una solución del sistema: $\begin{cases} xy = 6 \\ x^2y + xy^2 + x + y = 63 \end{cases}$ entonces el valor de x^2+y^2 es:

   a) 13 b) 55 c) 69 d) 81

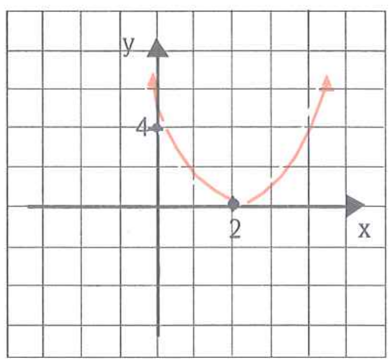
3. Para llenar un estante de libros se necesitan A libros de álgebra, todos del mismo grueso, y H libros de geometría, también todos del mismo grueso entre sí, pero más gruesos que los libros de álgebra. Además S de los libros de álgebra y M de los libros de geometría llenarían el mismo estante. Finalmente, E de los libros de álgebra solos llenarían el estante. Dado que A, H, S, M, E representan enteros positivos distintos, entonces el valor de E es:

   a) $\frac{AM+SH}{M+H}$ b) $\frac{AM-SH}{M-H}$ c) $\frac{AM^2+SH^2}{M^2+H^2}$ d) $\frac{AH-SM}{M-H}$

4. La figura de la derecha podría ser la gráfica de:

   a) $y= (x-2)^2$ b) $y= x^2 +4$

   c) $y= x^2- 2x$ d) $y= (x+2)^2$



5. Si $x>0$ y $x^2+\frac{1}{x^2} = 7$, entonces $x^5 +\frac{1}{x^5}$ es igual a:

   a) 55 b) 123 c) 63 d) 145

Núcleo Temático

8

APLICACIONES DE LAS ECUACIONES CUADRÁTICAS

LOGRO GENERAL

Resolver ejercicios y problemas que conducen a ecuaciones de segundo grado.

LOGROS ESPECÍFICOS	INDICADORES DE LOGRO
Corporal • Participar en actividades que faciliten el aprendizaje y favorezcan el desarrollo de habilidades de pensamiento.	• En grupos de 3 ó 4 alumnos, utilizan el teorema de los ceros racionales y el teorema del valor intermedio para resolver ecuaciones polinómicas.
Comunicativa • Explicar con claridad cómo se hallan los ceros reales de una ecuación polinómica utilizando la división sintética. • Representar simbólicamente enunciados de situaciones de la vida diaria.	• Explica con claridad cómo se hallan los ceros racionales de una ecuación polinómica al aplicar el teorema de los ceros racionales. • Traduce al lenguaje matemático situaciones problemáticas de la vida diaria.
Cognitiva • Identificar ecuaciones de forma cuadrática. • Resolver ecuaciones de forma cuadrática y ecuaciones irracionales. • Resolver problemas de aplicación.	• Determina las soluciones de una ecuación de forma cuadrática. • Resuelve ecuaciones irracionales.
Estética • Elaborar una cartelera con el teorema para hallar ceros racionales y el teorema del valor intermedio para polinomios.	• Socializa el teorema para ceros racionales y el teorema del valor intermedio para polinomios.
Etica-Actitudinal • Actuar de manera honesta en la presentación de trabajos y evaluaciones.	• Reconoce y acepta sus fortalezas y debilidades en la actividad académica.

DIMENSIONES

EVALUACIÓN

ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS

8.1. HISTORIA DEL ALGEBRA (18): NIELS H. ABEL

En los tiempos de Gauss, el álgebra había entrado en su etapa moderna. El foco de atención se trasladó de las ecuaciones polinómicas al estudio de la estructura de sistemas matemáticos abstractos, cuyos **axiomas** estaban basados en el comportamiento de objetos matemáticos, como los números complejos, que los matemáticos habían encontrado al estudiar las ecuaciones polinómicas. Un ejemplo de dichos sistemas son los **grupos,** que comparten algunas de las propiedades de los **sistemas numéricos**, aunque también difieren de ellos de manera sustancial. Los grupos comenzaron como sistemas de permutaciones y combinaciones de las raíces de polinomios, pero evolucionaron hasta llegar a ser uno de los más importantes conceptos unificadores del siglo XIX. De esta época merecen mención especial el matemático noruego Niels Henrik Abel (1802-1829) y los matemáticos franceses Evariste Galois (1811-1832) y Agustín Cauchy (1789-1857).

Niels H. Abel nació en Findo, Noruega, el 5 de agosto de 1802 y murió en Arendal el día 6 de abril de 1829. Su padre era pastor y Niels fue el segundo hijo entre siete. Nació en una época en la que Noruega se encontraba extraordinariamente empobrecida como consecuencia de las guerras con Inglaterra y Suecia. A pesar de la pobreza, Niels y su familia se mantenían alegres. El juego de sus hermanos jamás lo distrajo y podía intervenir en la conversación mientras escribía.

Como otros grandes matemáticos, Abel mostró pronto su talento, bajo la cariñosa y clara enseñanza de Holmboë, su maestro, quien más tarde publicó las primeras ediciones de sus obras completas. A los 16 años comenzó a leer y digerir las obras de sus predecesores, incluyendo algunas de Newton, Euler y Lagrange. Su padre murió cuando Niels tenía 18 años, por lo que se entregó a la enseñanza particular y sólo pudo dedicar a las investigaciones matemáticas los momentos libres.

Demostró la imposibilidad de una solución algebraica a la ecuación de 5o. grado y probó el teorema general del binomio. En junio de 1822 completó sus estudios en la Universidad de Cristania, en donde trabajó año y medio antes de conseguir, no sin dificultades, fondos para estudiar dos años en Alemania y Francia. En julio de 1826 se trasladó a París en donde conoció a Legendre, Cauchy y otros matemáticos. Mientras permaneció en el Instituto de Ciencias de París, terminó su obra **Memoria sobre una propiedad general de una clase muy extensa de funciones trascendentes,** que dejó al cuidado de Cauchy para que la presentara a la Academia de Ciencias de París, pero éste la extravió.

Pasó sus últimos días en Arendal, en donde murió el 6 de abril de 1829, teniendo 26 años y 8 meses de edad. Dos días después de su muerte, August Leonold Crelle, quien le prestó en vida gran ayuda y publicó parte de sus trabajos, le escribió afirmándole que sería nombrado para la Cátedra de Matemáticas de la Universidad de Berlín. El cónsul noruego en París reclamó el manuscrito dejado en manos de Cauchy, quien lo encontró en 1830. La academia de París le concedió el mismo año el gran premio de Matemática en unión de Jacobi y su obra fue publicada en 1841.

EJERCICIO 8.1

Lee nuevamente el texto anterior y luego encierra en un círculo, la letra que corresponda a la respuesta correcta:

1. De la lectura del texto anterior se puede inferir que:
   a. Los grandes científicos nacen en cunas humildes.
   b. No hay obstáculos para un hombre de ciencia.

c. La vocación de H. Abel por la docencia fue innanta.
d. El trabajo científico de Niels pudo haber sido abundante y rico en frutos.

2. De Niels Henrik Abel se dice todo lo siguiente menos:
   a. La pobreza en la que se levanta no le quita su alegría.
   b. Trabajó en la docencia e investigó sobre matemáticas.
   c. Murió longevo y cuando tenía todo un mundo científico por delante.
   d. Estudió y trabajó en la Universidad de Cristania.

3. El término **permutación** que se maneja en el texto, se refiere a:
   a. Trueque de un número menor por otro mayor sin alterar el resultado.
   b. Cambio de un binomio por un polinomio en un sistema numérico.
   c. Transplantación de una combinación, de un lugar a otro en un sistema numérico.
   d. Transformación que consiste en sustituir el orden de cierto número de objetos por otro sin que cambien su naturaleza ni su número.

4. Uno de los siguientes científicos no se menciona en el texto.
   a. August L. Crelle.
   b. Paolo Ruffini.
   c. Agustín Cauchy.
   d. Lagrange.

5. El título más apropiado para este fragmento podría ser:
   a. "La constancia de un investigador".
   b. "Pequeños aportes de Niels al álgebra".
   c. "Mucho trabajo para tan corta existencia".
   d. "El adios de uno de los grandes del álgebra".

8.2 ECUACIONES DE FORMA CUADRÁTICA

EXPERIENCIA

- Muchas ecuaciones no son de segundo grado, pero pueden reducirse a la forma cuadrática mediante una sustitución adecuada.
- Las siguientes son ecuaciones de forma cuadrática:

$$(x^2 - 5)^2 - 19\,(x^2 - 5) + 60 = 0 \cdots\cdots\cdots (1)$$

$$35x^6 - 24x^3 - 7 = 0 \cdots\cdots\cdots (2)$$

$$\left(\frac{2x+1}{x-3}\right)^2 - 5\left(\frac{2x+1}{x-3}\right) + 7 = 0 \cdots\cdots\cdots (3)$$

- Notemos que si en la ecuación (1) hacemos $u = x^2 - 5$, nos queda: $u^2 - 19u + 60 = 0$, la cual es una ecuación cuadrática.

  Si en la ecuación (2) hacemos $p = x^3$, nos queda: $35\,p^2 - 24p - 7 = 0$ que también es una ecuación cuadrática.

  Y si en la ecuación (3) hacemos $t = \left(\frac{2x+1}{x-3}\right)$ nos queda: $t^2 - 5t + 7 = 0$ que también es una ecuación cuadrática.

APRENDAMOS

Las ecuaciones de la forma: $\mathbf{a\,[\,P(x)\,]^2 \;+\; b\,[\,P(x)\,] + c = 0}$, donde $\mathbf{P(x)}$ es una expresión algebraica en la variable x, se denominan ECUACIONES DE FORMA CUADRÁTICA.

La clave para resolver este tipo de ecuaciones consiste en realizar una sustitución adecuada de la expresión P(x) de manera que la ecuación resultante sea de segundo grado.

Ejemplo 1

Resolvamos la ecuación $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

Solución

- Si hacemos la sustitución $u = x^2$, entonces la ecuación dada nos queda así:

$$\therefore u^2 - 13u + 36 = 0$$
$$\therefore (u - 9)\,(u - 4) = 0$$
$$\therefore u - 9 = 0 \quad \text{o} \quad u - 4 = 0$$
$$\therefore u = 9 \quad \text{ó} \quad u = 4$$

- Sustituyendo de nuevo u por x^2, nos queda:

$$x^2 = 9 \quad \text{ó} \quad x^2 = 4$$
$$\therefore x = \pm 3 \quad \text{ó} \quad x = \pm 2$$

- Por lo tanto, la solución de la ecuación $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ es el conjunto $S = \{ -3, -2, 2, 3 \}$.

- Observemos un detalle: la ecuación es polinómica de cuarto grado y el número de soluciones que obtuvimos fue precisamente 4. Ese es el número **máximo** de soluciones reales que puede tener una ecuación de cuarto grado.

Ejemplo 2

Resolvamos la ecuación $27x^6 + 8 = 35x^3$

Solución

- Si igualamos a cero y ordenamos en potencias decrecientes de la variable, nos queda: $27x^6 - 35x^3 + 8 = 0$

- Ahora hacemos la sustitución $u = x^3$:

$$27x^6 - 35x^3 + 8 = 0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; \text{Ecuación dada}$$
$$\therefore 27u^2 - 35u + 8 = 0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; \text{Hicimos la sustitución}$$
$$\therefore\; u = \frac{35 \pm \sqrt{(35)^2 - 4\,(27)(8)}}{2\,(27)} \;\ldots\ldots\ldots\; \text{Aplicamos la fórmula cuadrática}$$
$$\therefore\; u = \frac{35 \pm 19}{54}$$
$$\therefore \begin{cases} u = \dfrac{35 + 19}{54} = 1 \\[2mm] u = \dfrac{35 - 19}{54} = \dfrac{8}{27} \end{cases}$$

- Sustituyendo de nuevo u por x^3, nos queda:

$$x^3 = 1 \quad ó \quad x^3 = \frac{8}{27}$$

$$\therefore x = \sqrt[3]{1} \quad ó \quad x = \sqrt[3]{\frac{8}{27}}$$

$$\therefore x = 1 \quad ó \quad x = \frac{2}{3}$$

- Luego, el conjunto solución de la ecuación es $S = \left\{ 1, \frac{2}{3} \right\}$
- ¿Por qué si la ecuación dada es polinómica de sexto grado sólo obtuvimos dos soluciones reales? Queda como ejercicio responder esta pregunta.

Ejemplo 3

Resolvamos la ecuación $x^{2/n} + 6 = 5x^{1/n}$, con $n \neq 0$

Solución

- Si hacemos la sustitución $u = x^{1/n}$ tenemos:

$$u^2 + 6 = 5u$$
$$\therefore u^2 - 5u + 6 = 0$$
$$\therefore (u - 3)(u - 2) = 0$$
$$\therefore u - 3 = 0 \quad o \quad u - 2 = 0$$

- Si hacemos de nuevo la sustitución de u por $x^{1/n}$, tenemos:

$$x^{1/n} = 3 \quad ó \quad x^{1/n} = 2$$
$$\therefore x = 3^n \quad ó \quad x = 2^n$$

- Luego, el conjunto solución de esta ecuación es $S = \{ 2^n , 3^n \}$

Ejemplo 4

Resolvamos la ecuación $\left(\frac{x}{x-1}\right)^2 + 4 = 5\left(\frac{x}{x-1}\right)$

Solución

- Haciendo la sustitución $u = \frac{x}{x-1}$, la ecuación dada nos queda así:

$$u^2 + 4 = 5u$$
$$\therefore u^2 - 5u + 4 = 0$$
$$\therefore (u - 4)(u - 1) = 0$$
$$\therefore u - 4 = 0 \quad ó \quad u - 1 = 0$$
$$\therefore u = 4 \quad ó \quad u = 1$$

- Sustituyendo de nuevo u por $\frac{x}{x-1}$ tenemos:

$$\frac{x}{x-1} = 4 \quad ó \quad \frac{x}{x-1} = 1$$

$$\therefore x = 4(x - 1) \;;\; \text{con } x \neq 1 \quad ó \quad x = x - 1 \;;\; \text{con } x \neq 1$$

$$\therefore x = 4x - 4 \;;\; \text{con } x \neq 1 \quad ó \quad x - x = -1 \;;\; \text{con } x \neq 1$$

$$\therefore 3x = 4 \;;\; \text{con } x \neq 1 \quad ó \quad \underbrace{0 = -1}_{\text{¡absurdo!}} \;;\; \text{con } x \neq 1$$

$$\therefore x = \frac{4}{3} \;;\; \text{con } x \neq 1$$

- **Conclusión:** $x = \frac{4}{3}$ es la única solución de esta ecuación; luego, $S = \left\{\frac{4}{3}\right\}$

Ejemplo 5

Resolvamos la ecuación $6\sqrt{x} = 5x^{-1/2} - 13$

Solución

- Esta ecuación es equivalente a:

$$6x^{1/2} - 5x^{-1/2} + 13 = 0$$

$$\therefore 6x^{1/2} - \frac{5}{x^{1/2}} + 13 = 0$$

$$\therefore 6x - 5 + 13x^{1/2} = 0 \text{ ; siempre que x sea positivo.}$$

- Si hacemos $u = x^{1/2}$, entonces esta última ecuación nos queda así: $6u^2 + 13u - 5 = 0$; siempre que x sea positivo
- Resolviendo esta ecuación por la fórmula cuadrática encontramos que: $u = \frac{1}{3}$ ó $u = -\frac{5}{2}$
- Sustituyendo de nuevo u por $x^{1/2}$, nos queda:

$$x^{1/2} = \frac{1}{3} \quad \text{ó} \quad x^{1/2} = -\frac{5}{2}$$

$$\therefore x = \frac{1}{9} \quad \text{ó} \quad x = \frac{25}{4}$$

- Luego, como ambas soluciones son positivas entonces la solución de la ecuación dada es el conjunto $S = \left\{\frac{1}{9}, \frac{25}{4}\right\}$

8.3 ECUACIONES IRRACIONALES

EXPERIENCIA

- ¿Qué característica especial podemos identificar en cada una de las siguientes ecuaciones?

1. $\sqrt{x + 17} - \sqrt{17 - x} = 2$
2. $\sqrt[3]{x} = 7$
3. $\sqrt{x} + \sqrt{x - 1} = 0$
4. $x^2 + \sqrt{x} = 5$

- En cada una de estas ecuaciones la incógnita hace parte de una raíz.
- Por esta razón, cada una de estas ecuaciones se denomina **ECUACIÓN IRRACIONAL**.

APRENDAMOS

ECUACIONES IRRACIONALES

Se denominan **ECUACIONES IRRACIONALES** aquellas en las que la incógnita hace parte de una raíz.

- En este texto sólo resolveremos ecuaciones irracionales con raíces cuadradas, como éstas:

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{3-x} = 2$$
$$\sqrt{x} = 7$$
$$\sqrt{x} + \sqrt{x-1} = 0$$
$$x^2 + \sqrt{x} = 5$$

- Para resolver este tipo de ecuaciones debemos transformarlas en racionales, elevando los dos lados de la ecuación al cuadrado, tantas veces como sea necesario para eliminar las raíces.

¡ATENCIÓN! **1.** Las ecuaciones así obtenidas NO SON EQUIVALENTES a la original; es decir, pueden resultar algunas soluciones que no satisfacen la ecuación dada. Estas soluciones se denominan SOLUCIONES EXTRAÑAS. Veamos por qué:

Sea $F(x) = P(x)$ la ecuación original .... (1)

$\therefore [\,F(x)\,]^2 = [\,P(x)\,]^2$ .... ¿por qué?

$\therefore [\,F(x)\,]^2 - [\,P(x)\,]^2 = 0$ .... Igualamos a cero

$\therefore [\,F(x) + P(x)\,]\,[\,F(x) - P(x)\,] = 0$ .... Factorizamos

$\therefore F(x) + P(x) = 0 \quad o \quad F(x) - P(x) = 0$ .... ¿por qué?

$\therefore F(x) = -P(x) \quad o \quad F(x) = P(x)$

Tenemos, pues, dos soluciones:

$$\begin{cases} F(x) = P(x) \text{ que es precisamente la ecuación original} \\ \text{y} \\ F(x) = -P(x) \text{ cuyas soluciones son, en general, extrañas a la ecuación original (1)} \end{cases}$$

2. Para resolver una ecuación irracional con términos que son raíces cuadradas, procedemos así:

2.1. Aislamos, a un lado de la ecuación, el término que contiene la raíz cuadrada.
2.2. Elevamos al cuadrado ambos lados de la ecuación.
2.3. Si aún queda algún término irracional, lo aislamos y elevamos de nuevo ambos lados de la ecuación al cuadrado. Este procedimiento se repite hasta que ya no queden raíces cuadradas.
2.4 Resolvemos la ecuación resultante. Sus soluciones deben chequearse en la ecuación original y admitirse sólo aquellas que la satisfagan.

Ejemplo 1

Resolvamos la ecuación $x - \sqrt{25 - x^2} = 1$

Solución

- En primer lugar, aislamos la raíz cuadrada: $x - 1 = \sqrt{25 - x^2}$
- Ahora, elevamos ambos miembros de la ecuación al cuadrado y desarrollamos:

$$(x-1)^2 = 25 - x^2$$
$$\therefore x^2 - 2x + 1 = 25 - x^2$$
$$\therefore 2x^2 - 2x - 24 = 0$$
$$\therefore x^2 - x - 12 = 0$$
$$\therefore (x-4)(x+3) = 0$$
$$\therefore x - 4 = 0 \quad ó \quad x + 3 = 0$$
$$\therefore x = 4 \quad ó \quad x = -3$$

- Finalmente, chequeamos las soluciones obtenidas en la ecuación original; así:

Sea $x = -3$:

$$-3 - \sqrt{25 - (-3)^2} \overset{?}{=} 1$$
$$-3 - \sqrt{25 - 9} \overset{?}{=} 1$$
$$-3 - \sqrt{16} \overset{?}{=} 1$$
$$-3 - 4 = 1$$
$-7 \neq 1$: $x = -3$ no es solución

Sea $x = 4$:

$$4 - \sqrt{25 - 4^2} \overset{?}{=} 1$$
$$4 - \sqrt{9} \overset{?}{=} 1$$
$$4 - 3 \overset{?}{=} 1$$
$1 = 1$: $x = 4$ es solución de la ecuación

- **Conclusión:** Sólo $x = 4$ es solución de la ecuación. Por lo tanto, el conjunto solución es: $S = \{ 4 \}$

Ejemplo 2

Resolvamos la ecuación $\sqrt{2x + 3} = 1 + \sqrt{x + 1}$

Solución

- La ecuación tiene dos términos que son raíces cuadradas y uno de ellos está aislado. Por lo tanto, elevamos ambos miembros de la ecuación al cuadrado; así:

$$\therefore \left(\sqrt{2x + 3}\right)^2 = \left(1 + \sqrt{x + 1}\right)^2$$
$$\therefore 2x + 3 = 1 + 2\sqrt{x + 1} + x + 1$$
$$\therefore x + 1 = 2\sqrt{x + 1}$$

- Como aún nos queda un término con raíz cuadrada y ya lo tenemos aislado, entonces de nuevo elevamos ambos miembros al cuadrado:

$$(x + 1)^2 = \left(2\sqrt{x + 1}\right)^2$$
$$\therefore x^2 + 2x + 1 = 4(x + 1)$$
$$\therefore x^2 + 2x + 1 = 4x + 4$$
$$\therefore x^2 - 2x - 3 = 0$$
$$\therefore (x - 3)(x + 1) = 0$$
$$\therefore x - 3 = 0 \quad ó \quad x + 1 = 0$$
$$\therefore x = 3 \quad ó \quad x = -1$$

- Si chequeamos estas dos soluciones en la ecuación original encontramos que ambas la satisfacen. Por lo tanto, la solución de la ecuación es el conjunto $S = \{ -1, 3 \}$

EJERCICIO 8.2

En los ejercicios 1. a 10. determinar todos los valores de **x** que satisfacen la ecuación dada:

1. $12x^2 - 27 = x^4$
2. $3x^{-2} = 4x^{-1} + 4$
3. $27x^6 + 8 = 35x^3$
4. $(x^2 + 6)^2 - 17(x^2 + 6) + 70 = 0$

5 $(2x^2 - 5x)^2 - 3 = 2\,(2x^2 - 5x)$

6 $\left(\frac{x+1}{2x-1}\right) + 2\left(\frac{2x-1}{x+1}\right) = 3$

7 $2\left(\frac{x-2}{3-x}\right) + \left(\frac{3-x}{x-2}\right) - 3 = 0$

8 $2x + 1 - 5\sqrt{2x+1} + 6 = 0$

9 $2x + 6 = 4\sqrt{2x+3}$

10 $6x - 4 = 5\sqrt{3x-2}$

En los ejercicios 11. a 20., determinar todos los valores de **x** que satisfacen la ecuación dada:

11 $\sqrt{x-5} = 3$

12 $\sqrt{5x-1} = 2\sqrt{x+3}$

13 $\sqrt{x+25} = 1 + \sqrt{x}$

14 $\sqrt{12x-5} - \sqrt{3x-1} = \sqrt{27x-2}$

15 $\sqrt{x + \sqrt{4a + x}} = 2\sqrt{b + x}$

16 $\sqrt{8x+33} - 3 = 2\sqrt{2x}$

17 $\sqrt{x + 4ab} = 2a + \sqrt{x}$

18 $\cancel{\sqrt{x - 5\sqrt{x+3}} = 3}$

19 $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} = \sqrt{2x+1}$

20 $\sqrt{13 + 3\sqrt{x+5} - 4\sqrt{x+1}} - 5 = 0$

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 1

Se inscribe un rectángulo en la parábola de ecuación $y=4-x^2$ de tal manera que dos de sus vértices son puntos de la parábola y los otros dos están sobre el eje x. Se pide:

a) Dibujar el problema

b) Escribir una ecuación que permita calcular el área de dicho rectángulo en función de x.

8.4 ECUACIONES POLINÓMICAS (OPCIONAL)

8.4.1 Soluciones Racionales

- Dijimos antes que, durante muchos años, uno de los asuntos de los que se ocupó el álgebra fue el de resolver ecuaciones. Las culturas antiguas, incluyendo la griega, conocían las fórmulas para resolver ecuaciones de primero y segundo grado. Las fórmulas para resolver ecuaciones de tercer y cuarto grado fueron descubiertas a mediados del siglo XVI por los matemáticos italianos Ferrari, Tartaglia y Cardano. Sólo en 1824, el gran matemático Abel demostró que no existen fórmulas similares para resolver ecuaciones polinómicas de grado 5 y superiores.
- A pesar de la existencia de fórmulas para resolver ecuaciones polinómicas de tercer y cuarto grado, su aplicación práctica se hace a veces tan complicada que es preferible, de una vez, olvidarnos de ellas como herramientas de trabajo. Preferiremos, en cambio, una técnica sencilla y práctica que ya empleamos con éxito al resolver las ecuaciones de segundo grado: LA FACTORIZACIÓN por intermedio del TEOREMA DEL FACTOR y la propiedad de los números reales: **si $a \cdot b \cdot c \cdot d = 0$ entonces $a = 0$ ó $b = 0$ ó $c = 0$ ó $d = 0$**.
- Conviene, en este momento, recordar algunas propiedades relacionadas con la factorización de polinomios con una variable y de grado mayor que 2. Estas propiedades son:

  1. **Un polinomio P(x) de grado $n > 1$, con coeficientes reales, tiene MÁXIMO n factores reales lineales de la forma $(ax + b)$. Esto significa, por ejemplo, que un polinomio de grado 4 puede tener cuatro factores lineales de la forma $(ax + b)$ o puede tener dos factores lineales de la forma $(ax + b)$ y un factor cuadrático de la forma $ax^2 + bx + c$, que no sea factorizable en los reales debido a que el discriminante $b^2 - 4ac$ es negativo.**
  2. **Si un polinomio P(x), con coeficientes enteros, tiene ceros enteros, entonces necesariamente estos ceros son divisores del término independiente.**
  3. **Si $x = a$ es un cero de P(x) y éste se repite k veces, decimos que a es un CERO DE MULTIPLICIDAD k..**

- Pero surge ahora una pregunta: ¿Cómo sabemos si un polinomio P(x) con coeficientes enteros tiene o no CEROS RACIONALES? ¿Y CEROS IRRACIONALES? El siguiente teorema, que sólo enunciaremos, nos responde la primera pregunta:

APRENDAMOS

TEOREMA PARA CEROS RACIONALES

Si un polinomio **P(x)**, con coeficientes enteros, tiene ceros racionales, entonces dichos ceros son de la forma $\frac{\mathbf{p}}{\mathbf{q}}$ con $\mathbf{q \neq 0}$, donde $\frac{\mathbf{p}}{\mathbf{q}}$ es una fracción no simplificable, **p** es un divisor del término independiente de **P(x)** y **q** es un divisor del coeficiente principal del polinomio.

- El siguiente ejemplo nos mostrará cómo debemos aplicar este teorema.

Ejemplo

Resolvamos la ecuación $10x^4 - 4x^3 - 11x^2 + 12x + 9 = 0$

Solución

- En primer lugar, debemos factorizar el polinomio $P(x) = 10x^4 - 4x^3 - 11x^2 + 12x + 9$. Este polinomio tiene máximo 4 factores lineales reales de la forma $ax + b$ o, dos factores lineales reales y uno cuadrático no factorizable en los reales. Veamos qué ocurre en este caso.
- Si $\frac{p}{q}$ es un cero racional de P(x), entonces p debe ser un divisor entero de 9 y q debe ser un divisor entero de 10. Por lo tanto:

$$\text{Divisores de } (9) = \pm 1, \pm 3, \pm 9$$

$$\text{Divisores de } (10) = \pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10$$

POSIBLES CEROS: $\pm 1, \pm 3, \pm 9, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{9}{2}, \pm\frac{1}{5}, \pm\frac{3}{5}, \pm\frac{9}{5}, \pm\frac{1}{10}, \pm\frac{3}{10}, \pm\frac{9}{10}$

Ahora aplicamos la división sintética para probar estas posibles raíces una por una:

Con x = 1

	10	-4	-11	12	9
1		10	6	-5	7
	10	6	-5	7	16

$\therefore x = 1$ no es cero de P(x)

Con x = -1

	10	- 4	-11	12	9
-1		-10	14	-3	-9
	10	-14	3	9	0

$\therefore x = -1$ es cero de P(x)

Como $x = -1$ es un cero de P(x) entonces $(x + 1)$ es un factor de P(x). Por lo tanto:

$$10x^4 - 4x^3 - 11x^2 + 12x + 9 = (x + 1)(10x^3 - 14x^2 + 3x + 9)$$

Continuamos aplicando la división sintética al cociente $Q(x) = 10x^3 - 14x^2 + 3x + 9$, empezando con $x = -1$, ya que si $x = 1$ no fue cero de P(x) tampoco lo será de uno de sus factores. Haciendo la prueba con los posibles candidatos, llegamos a $x = -\frac{3}{5}$. Veamos:

	10	- 14	3	9
$-\frac{3}{5}$		- 6	12	-9
	10	-20	15	0

Luego, $x = -\frac{3}{5}$ es un cero de Q(x) y, por lo tanto, de P(x).

Como $x = -\frac{3}{5}$ es un cero de P(x) entonces $x + \frac{3}{5}$ es un factor de P(x) y este polinomio podemos escribirlo así:

$$P(x) = (x + 1)\left(x + \frac{3}{5}\right)(10x^2 - 20x + 15)$$

$$\therefore P(x) = (x + 1)\left(\frac{5x+3}{\cancel{5}}\right)\cancel{5}\,(2x^2 - 4x + 3)$$

$$\therefore P(x) = (x + 1)(5x + 3)(2x^2 - 4x + 3)$$

Hasta este punto el polinomio P(x) ha quedado expresado como el producto de dos factores lineales: $(x + 1)$ y $(5x + 3)$ y uno cuadrático: $2x^2 - 4x + 3$. Los ceros de este último factor podemos hallarlos fácilmente aplicando la fórmula cuadrática a la ecuación $2x^2 - 4x + 3 = 0$. Veamos:

$$2x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$\therefore x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 24}}{4}$$

$$\therefore x = \frac{4 \pm \sqrt{-8}}{4} \notin R$$

luego, las soluciones de esta ecuación cuadrática no son números reales y, en consecuencia, el polinomio $2x^2 - 4x + 3$ no es factorizable en los reales. Por lo tanto:

$$10x^4 - 4x^3 - 11x^2 + 12x + 9 = (x + 1)(5x + 3)(2x^2 - 4x + 3)$$

- Ahora ya podemos encontrar las soluciones de la ecuación: $10x^4 - 4x^3 - 11x^2 + 12x + 9 = 0$; así:

$10x^4 - 4x^3 - 11x^2 + 12x + 9 = 0$.............................. Ecuación dada

$\therefore (x + 1)(5x + 3)(2x^2 - 4x + 3) = 0$........................ Ya factorizada

$\therefore x + 1 = 0$ ó $5x + 3 = 0$ ó $2x^2 - 4x + 3 = 0$...... ¿Por qué?

$\therefore x = -1$ ó $x = -\frac{3}{5}$ ó $2x^2 - 4x + 3 = 0$.......... ¿Por qué?

Luego, el conjunto solución de esta ecuación es $S = \left\{-1, -\frac{3}{5}\right\}$

- Notemos que las soluciones de esta ecuación han coincidido con los ceros del polinomio

$$P(x) = 10x^4 - 4x^3 - 11x^2 + 12x + 9$$

Esta observación es válida para toda ecuación polinómica. Por lo tanto:

¡ATENCIÓN!

Las soluciones de una ecuación polinómica P(x) = 0 son los ceros del polinomio P(x).

8.4.2 Soluciones Irracionales

- Ya sabemos que los números irracionales tienen un desarrollo decimal infinito no periódico. En esta sección vamos a ilustrar un método práctico para encontrar, con el grado de exactitud que deseemos, las soluciones o raíces irracionales de una ecuación polinómica P(x) = 0. Por supuesto, estas raíces son los ceros del polinomio P(x).

- El método se basa en la siguiente propiedad: **"si a y b son dos números reales tales que P(a) y P(b) tienen signos contrarios, entonces la ecuación tiene una raíz o solución entre a y b"**. Esta propiedad se conoce con el nombre de **TEOREMA DEL VALOR INTERMEDIO PARA POLINOMIOS**.

- En el siguiente ejemplo vamos a describir en qué consiste este método, denominado MÉTODO DE BISECCIÓN.

Ejemplo

Hallemos los ceros reales del polinomio $P(x) = x^3 + 2x - 4$

Solución

- Los ceros de un polinomio $P(x)$ son los valores de x para los cuales $P(x)= 0$. Como queremos hallar los ceros reales, entonces éstos pueden ser racionales o irracionales. De acuerdo con lo estudiado en el ejemplo anterior, los posibles ceros racionales de $x^3 + 2x - 4$ son ± 1, ± 2 y ± 4 (¿por qué); sin embargo, fácilmente podemos comprobar que ninguno de ellos anula el polinomio. Por lo tanto, este polinomio no tiene ceros racionales.
- El procedimiento para encontrar los ceros irracionales se fundamenta en una importante propiedad denominada **TEOREMA DE VALOR INTERMEDIO**, consistente en lo siguiente:

1. Escogemos, arbitrariamente, dos números enteros preferiblemente consecutivos, hallamos el valor del polinomio en cada uno de ellos y verificamos que estos valores tengan signo contrario. Si no tienen signo contrario, debemos escoger otros dos valores. Por ejemplo:

* Si $a = 0$ y $b = 1$ entonces $P(0) = -4$ y $P(1) = 1 + 2 - 4 = -1$; luego, no hay cambio de signo. Debemos escoger otros dos valores.

* Si $a = 1$ y $b = 2$ entonces $P(1) = -1$ y $P(2) = 8 + 4 - 4 = 8$; como hay cambio de signo, podemos garantizar que entre 1 y 2 hay un cero.

2. El paso siguiente consiste en "estrechar" el intervalo entre 1 y 2. Con este fin, hallamos el valor del polinomio para un número entre 1 y 2 ; por ejemplo, para 1.5; así: $P(1.5) = 3.375 + 3 - 4 = 2.375$. ¿ Qué comprobamos? que $P(1) = -1$ y $P(1.5) = 2.375$; es decir, hay cambio de signo y el cero está entre 1 y 1.5

3. Sigamos estrechando el intervalo. Escojamos un valor entre 1 y 1.5; por ejemplo, 1.2: $P(1.2) = 1.728 + 2.4 - 4 = 0.128$. Por lo tanto, $P(1) = -1$ y $P(1.2) = 0.128$. Luego, el cero está entre 1 y 1.2.

Notemos que $P(1.2) = 0.128$. Este resultado está muy próximo a cero; es decir, la raíz de esta ecuación está más cercana a 1.2 que a 1.

4. Tomemos ahora un valor más próximo a 1.2; por ejemplo, 1.1: $P(1.1) = 1.331 + 2.2 - 4 = -0.471$ Por lo tanto, $P(1.1) = -0.471$ y $P(1.2) = 0.128$; luego, el cero está entre 1.1 y 1.2. Si tomamos 1.18 nos queda que $P(1.18) = 0.003032$, el cual es sumamente próximo a cero.

5. Podemos obtener una mejor aproximación si continuamos el proceso con números que tengan tres o más cifras decimales. Sin embargo, nuestro propósito es sólo hallar un valor que nos proporcione una buena aproximación al cero que buscamos. Por esta razón, podemos afirmar que 1.18 es una buena aproximación al cero del polinomio $P(x) = x^3 + 2x - 4$

6. Como 1.18 es un cero aproximado del polinomio, entonces $(x - 1.18)$ es factor aproximado del mismo. Utilizando la división sintética encontramos los coeficientes aproximados al otro factor del polinomio; así:

	1	0	2	-4
1.18		1.18	1.3924	4.003032
	1	1.18	3.3924	$0.00303 \approx 0$

Notemos que el residuo de la división es casi cero (0.003032). Así pues, podemos afirmar que:

$$x^3 + 2x - 4 \gg (x - 1.18)(x^2 + 1.18x + 3.3924)$$

Realiza el producto $(x - 1.18)(x^2 + 1.18x + 3.3924)$ y compara qué tan parecidos son los coeficientes del polinomio resultante con los coeficientes correspondientes del polinomio $x^3 + 2x - 4$.

7. Puesto que el factor $x^2 + 1.18x + 3.3924$ es un polinomio cuadrático, entonces sus ceros podemos encontrarlos aplicando la fórmula cuadrática; así:

$$x = \frac{-1.18 \pm\sqrt{1.18^2 - 4(1)(3.3924)}}{2}$$

$$\therefore\ x = \frac{-1.18 \pm\sqrt{1.39 - 13.5696}}{2}$$

$$\therefore\ x = \frac{-1.18 \pm\sqrt{-12.17}}{2} \notin R$$

Por lo tanto, $x^2 + 1.18x + 3.3924$ no tiene ceros reales.

- **CONCLUSIÓN**: El polinomio $P(x) = x^3 + 2x - 4$ sólo tiene un cero en los reales: $x \approx 1.18$

APRENDAMOS

TEOREMA DEL VALOR INTERMEDIO PARA POLINOMIOS

Sea **P(x)** un polinomio con coeficientes reales, **a** y **b** dos números reales tales que **a** es menor que **b**. Si los números **P(a)** y **P(b)** tienen signos contrarios, entonces hay por lo menos un número real **c** entre **a** y **b** tal que **P(c) = 0**

¡ATENCIÓN!

1. El método descrito en el ejemplo anterior se denomina **MÉTODO DE BISECCIÓN** porque el intervalo de números comprendidos entre **a** y **b** se puede estrechar una y otra vez utilizando el Teorema del Valor Intermedio hasta hallar la raíz que buscamos.

2. Hay una fórmula que nos permite hallar un valor aproximado de la raíz **c** de una ecuación polinómica **P(x) = 0** cuando conocemos dos números **a** y **b** tales que **P(a)** y **P(b)** tienen signos contrarios. La fórmula es la siguiente:

$$c \approx \frac{aP(b) - bP(a)}{P(b) - P(a)}$$

El valor de **c** tendrá una mejor aproximación mientras más cercanos sean entre sí los números **a** y **b**.

Si en nuestro ejemplo anterior tomamos los valores $a = 1$ y $b = 2$ entonces:

$$c \approx \frac{1P(2) - 2P(1)}{P(2) - P(1)}$$

$$\therefore c \approx \frac{1 \bullet 8 - 2 \bullet (-1)}{8 - (-1)}$$

$$\therefore c \approx \frac{8 + 2}{8 + 1}$$

$$\therefore c \approx \frac{10}{9}$$

$$\therefore c \approx 1{,}11$$

Si tomamos los valores a = 1 y b = 1,5, entonces:

$$c \approx \frac{1P(1,5) - 1,5P(1)}{P(1,5) - P(1)}$$

$$\therefore c \approx \frac{(1)\bullet(238) - (1,5)\bullet(-1)}{2,38 - (-1)}$$

$$\therefore c \approx \frac{2,38 + 1,5}{2,38 + 1}$$

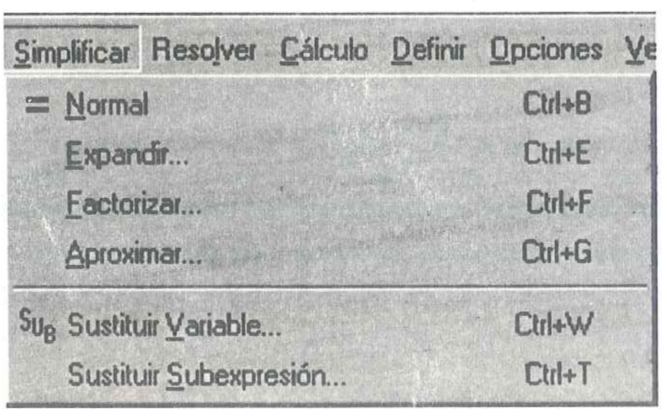
$$\therefore c \approx \frac{3,88}{3,38}$$

$$\therefore c \approx 1,15$$

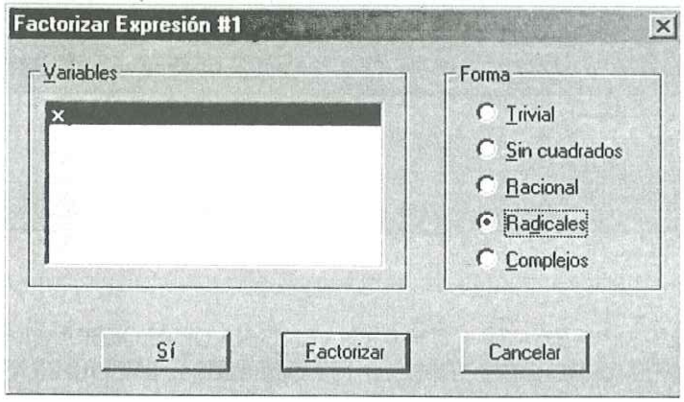
Como vemos, ambos resultados 1,11 y 1,15 son buenas aproximaciones a la raíz obtenida 1,18. El valor 1,15 es más próximo a 1,18 que 1,11 debido a que el intervalo entre 1 y 1,15 es más estrecho que el intervalo entre 1 y 2.

8.4.3 Uso del DERIVE Para Factorizar Polinomios y Resolver Ecuaciones Polinómicas

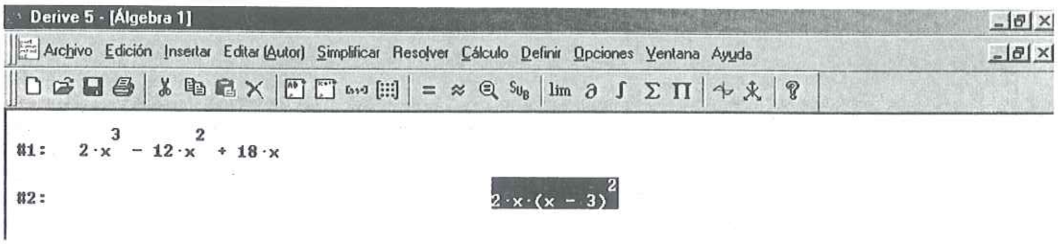
- Para FACTORIZAR, en los reales, una expresión previamente resaltada en la ventana de álgebra (por ejemplo, $2x^3 - 12x^2 + 18x$), hacemos lo siguiente:
  - Vamos al MENÚ DE OPCIONES y hacemos click sobre el comando SIMPLIFICAR.
  - Inmediatamente aparecerá esta pequeña ventana, encima de la ventana del DERIVE:



  - Sobre esta pequeña ventana, señalamos con el mouse la opción FACTORIZAR y hacemos **click.** De inmediato aparece otra ventana. Señalamos la opción RADICALES, hacemos **click** y, luego, en la ventana señalamos, en la parte inferior, la opción FACTORIZAR.



- Finalmente, la ventana de álgebra del DERIVE nos mostrará la expresión factorizada; así:



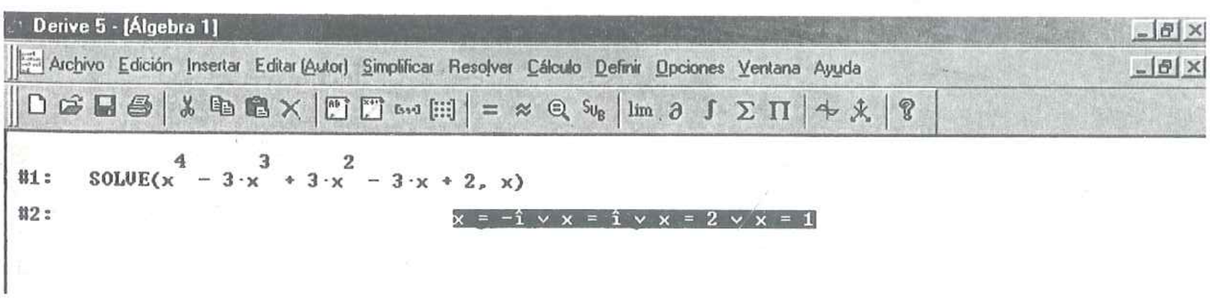
En síntesis, los pasos para factorizar una expresión en los reales son los siguientes:

SIMPLIFICAR click, FACTORIZAR click, RADICALES click, FACTORIZAR click.

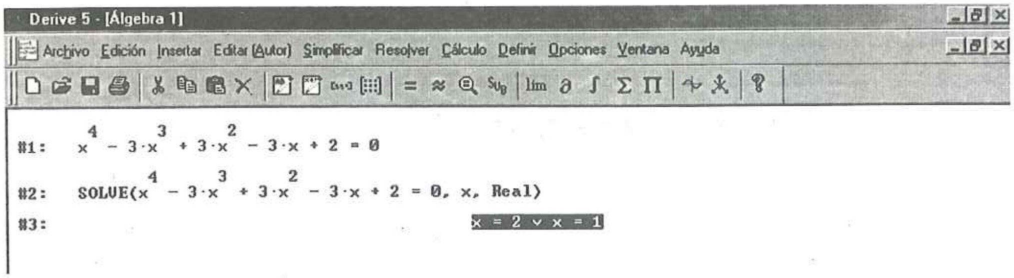
Si queremos factorizar la expresión en los complejos, basta cambiar la opción RADICALES por COMPLEJOS.

- Para RESOLVER UNA ECUACIÓN EN UNA VARIABLE $f(x) = 0$ (por ejemplo, $x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2 = 0$) en los complejos y en forma EXACTA, tenemos dos alternativas:

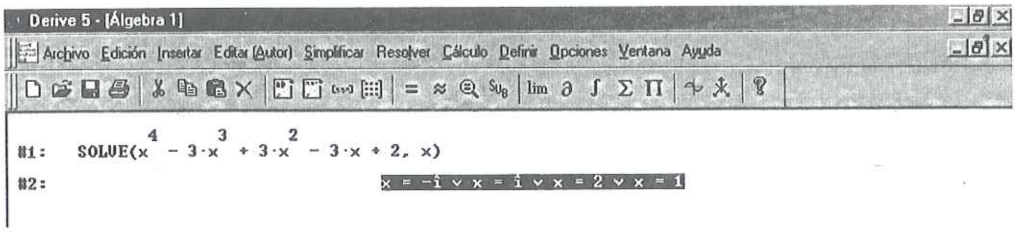
1. Entrar y simplificar la expresión SOLVE (f(x),x); así:
   - Escribimos SOLVE (x^4 - 3*x^3 + 3*x^2 - 3*x + 2 , x)
   - Luego. oprimimos la tecla SHIFT y la tecla ENTER.
   - De inmediato, la ventana de álgebra del DERIVE nos mostrará lo siguiente:



   - Si sólo requerimos las raíces reales, entonces entramos y simplificamos la expresión: SOLVE (f(x),x,real).



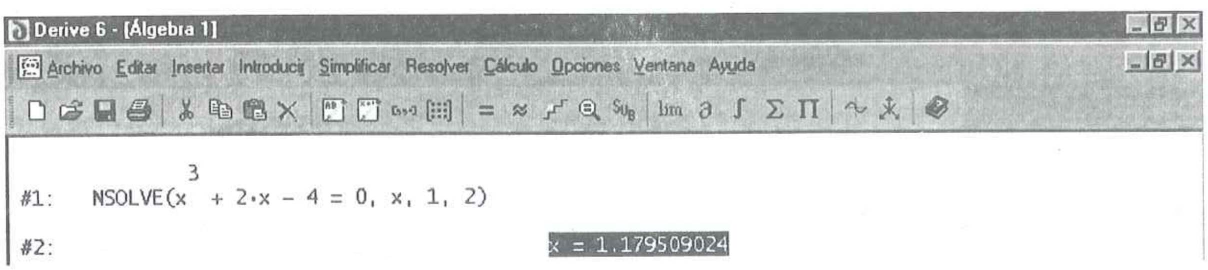
2. Entrar la ecuación $x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2 = 0$ a la VENTANA DE ÁLGEBRA y, luego, hacer sucesivamente click desde el MENU DE OPCIONES en los comandos: RESOLVER click, EXPRESIÓN click, ALGEBRAICO click, COMPLEJO (O REAL) click, RESOLVER. De inmediato aparecerá en la VENTANA DE ÁLGEBRA lo siguiente:



¡ATENCIÓN!

Para hallar en FORMA APROXIMADA una raíz de la ecuación $f(x) = 0$ en $[a ; b]$ (por ejemplo, $x^3+2x-4=0$ en el intervalo $[1 ; 2]$), entramos y simplificamos la expresión NSOLVE (f(x), x,a,b); así:

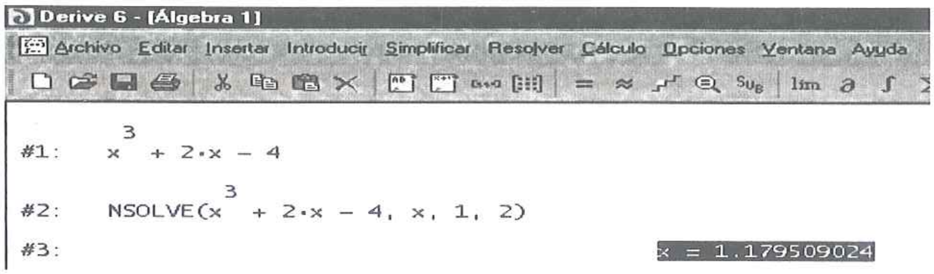
NSOLVE (x^3+2x-4, x , 1,2) y luego presionar el botón ✓. De inmediato aparecerá en pantalla:



También podemos hacerlo así:

- Ingresamos y seleccionamos la expresión x^3+2x-4
- Presionamos el botón 🔍 (o Resolver + Expresión)
- De inmediato, aparecerá en la pantalla la siguiente ventana:

- En esta ventana podemos elegir la variable para la cual deseamos resolver la ecuación (en este caso x).
- También podemos escoger entre método **algebraico, numérico o cualquiera**. Hemos escogido el método **numérico**. El dominio para la búsqueda de la solución puede ser **complejo, real** o un **intervalo;** hemos escogido esta última alternativa y por eso escogimos el límite inferior 1 y el límite superior 2.
- Finalmente, hacemos **click** sobre el rectángulo **Resolver** y de inmediato aparecerá:



EJERCICIO 8.3

En los ejercicios 1. a 6. hallar todas las raíces racionales de las siguientes ecuaciones polinómicas:

1. $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$
2. $8x^3 + 4x^2 - 18x - 9 = 0$
3. $6x^4 + x^3 - 25x^2 - 4x + 4 = 0$
4. $2x^3 + x^2 - 4x - 3 = 0$
5. $12x^3 = 16x^2 + 5x - 3$
6. $9x^4 - 15x^3 = 80x^2 - 22x - 2$

Usar el DERIVE para comprobar los resultados obtenidos.

En los ejercicios 7. a 10. hallar, con aproximación de una cifra decimal, las raíces reales de cada ecuación polinómica.

7. $x^3 - x^2 - 4x + 3 = 0$
8. $x^3 - 2x^2 - 5x + 5 = 0$
9. $2x^3 + 5x^2 - 4x - 11 = 0$
10. $x^3 + 3x^2 + x - 3 = 0$

Usar el DERIVE para comprobar los resultados obtenidos.

En los ejercicios 11. y 12. hallar, con aproximación de dos cifras decimales, la menor raíz positiva de las siguientes ecuaciones polinómicas:

11. $3x^3 - 4x^2 - 5x + 1 = 0$
12. $2x^3 - 9x^2 + 7x + 5 = 0$

Usar el DERIVE para comprobar los resultados obtenidos.

En los ejercicios 13. a 15., usar el DERIVE para dibujar la gráfica de la función polinómica dada y, luego, comprobar que los intercetos con el eje x son los ceros del polinomio.

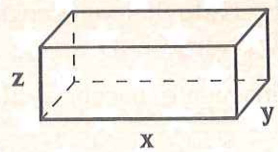
13. $y=f(x)= x^3 + 3x^2 + x -3$

14. $y=f(x)= 3x^3 - 4x^2 - 5x + 1$

15. $y=f(x)= 2x^3 + 9x^2 + 7x + 5$

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 2

La figura ilustra las dimensiones de un ortoedro que será fabricado con cartulina. Halla una expresión que permita calcular la cantidad de material utilizado para construir la caja.



8.5 SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

8.5.1. Primera Aplicación

En la antigüedad estaba muy extendida en la India una diversión singular: la solución de rompecabezas en competiciones públicas. Los manuales de matemáticas de ese país contribuían a la celebración de tales competencias de cálculo. Aquí presentamos uno de ellos escrito en verso tal como fue traducido por Lévedec:

"Regocíjanse los monos divididos en dos bandos.
Su octava parte al cuadrado en el bosque se solaza.
Con alegres gritos, doce
atronando el campo están
¿Sabes cuántos monos hay en la manada, en total?".

Solución

- **Elección de la Incógnita**

  Sea x = número de monos que hay en la manada.

- **Obtención de la Ecuación**

  * Su octava parte .... $\frac{x}{8}$

  * Al cuadrado .... $\left(\frac{x}{8}\right)^2$

  * Doce atronando el campo están .... $+12$

  * ¿Cuántos hay en total? x

Luego,

$$\underbrace{\text{Los que se solazan}}_{\left(\frac{x}{8}\right)^2} \quad \text{y} \quad \underbrace{\text{los que están en el campo}}_{+\ 12} \quad \text{son} \quad \underbrace{\text{en total } x}_{=\ x}$$

- **Solución de la Ecuación**

$$\left(\frac{x}{8}\right)^2 + 12 = x$$

$$\therefore \frac{x^2}{64} + 12 = x$$

$$\therefore x^2 + 768 = 64x$$

$$\therefore x^2 - 64x + 768 = 0$$

$$\therefore (x - 48)(x - 16) = 0$$

$$\therefore x = 48 \text{ ó } x = 16$$

- **Análisis de las Soluciones**

El problema tiene, pues, dos soluciones: $x = 48$ ó $x = 16$; es decir, en la manada puede haber 48 monos ó 16 monos. Comprobemos:

Si $x = 48$ entonces: $\left(\frac{48}{8}\right)^2 + 12 \overset{?}{=} 48$ $\therefore (6)^2 + 12 \overset{?}{=} 48$ $\therefore 36 + 12 \overset{\checkmark}{=} 48$	Si $x = 16$ entonces: $\left(\frac{16}{8}\right)^2 + 12 \overset{?}{=} 16$ $\therefore (2)^2 + 12 \overset{?}{=} 16$ $\therefore 4 + 12 \overset{\checkmark}{=} 16$

Por lo tanto, ambas soluciones son correctas.

8.5.2. Segunda Aplicación

Un parque tiene un jardín interior de 50 m de largo y 30 m de ancho. El jardín está rodeado por una acera de ancho uniforme. Si el área de la acera es 704 m², hallemos su ancho.

Solución

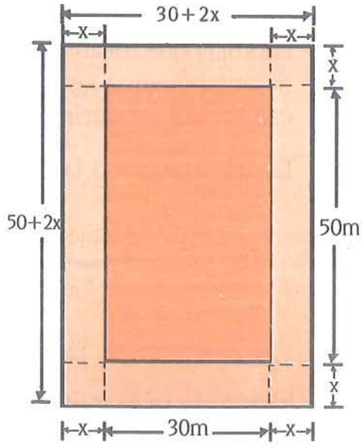
- **Elección de la Incógnita**

Sea x = número de metros que tiene de ancho la acera

- **Obtención de la Ecuación**

* Sabemos que el área del jardín es: $A_1 = 30\text{m} \times 50\text{m} = 1500 \text{ m}^2$
* También sabemos que el área de la acera es: $A_2 = 704 \text{ m}^2$
* Luego, el área del parque será: $A = A_1 + A_2$

$$A = A_1 + A_2$$
$$\therefore A = 1500 \text{ m}^2 + 704 \text{ m}^2$$
$$\therefore A = 2204 \text{ m}^2 \quad \ldots\ldots(1)$$



* Ahora bien, el área del parque, en términos de x, es:

$$\text{Largo} = 50 + 2x$$
$$\text{Ancho} = 30 + 2x$$
$$\therefore \text{Área} = (50 + 2x)(30 + 2x) \quad \ldots\ldots(2)$$

* Por lo tanto, de (1) y (2) tenemos:

$$(50 + 2x)(30 + 2x) = 2204$$

Solución de la Ecuación

$$(50 + 2x)(30 + 2x) = 2204$$
$$\therefore 1500 + 100x + 60x + 4x^2 = 2204$$
$$\therefore 4x^2 + 160x - 704 = 0$$
$$\therefore x^2 + 40x - 176 = 0$$
$$\therefore x = 4 \quad ó \quad x = -44$$

Análisis de las Soluciones

La solución $x = -44$ queda descartada porque una longitud no puede ser negativa. Analicemos la solución $x = 4$:

* El largo del parque es: $50 + 2(4) = 58$ m
* El ancho del parque es: $30 + 2(4) = 38$ m
* Luego, el Área = (58 m)•(38 m) = 2204 m^2

Por lo tanto, la solución $x = 4$ satisface las condiciones del problema.

8.6.3. Tercera Aplicación

Los naranjos que crecen en una finca producen 600 naranjas al año si no se siembran más de 20 árboles por cuadra de terreno. Por cada árbol que se siembre de más por cuadra, el rendimiento de cada árbol disminuye en 15 naranjas. ¿Cuántos árboles por cuadra deben sembrarse con el fin de obtener 13500 naranjas?

Solución

Elección de la Incógnita

Sea x = número de árboles que deben sembrarse por cuadra.

Obtención de la Ecuación

* Tengamos en cuenta que el número de naranjas por cuadra es igual al número de árboles sembrados por el número de naranjas que produce cada árbol; es decir,

Nº de naranjas por cuadra = (Nº de naranjas por árbol) • (Nº de árboles) ....(1)

* La producción con 20 árboles es (20) • (600) = 12000 naranjas
* El número de árboles sembrados en cada cuadra, por encima de los 20, se representa por $x - 20$. Como por cada uno de éstos árboles se producen 15 naranjas menos, entonces el total de naranjas que dejan de producir los $(x - 20)$ árboles es $15(x - 20)$. Luego, cada árbol producirá 600 naranjas menos las que se dejan de producir por el aumento de árboles por cuadra; es decir, cada árbol producirá $600 - 15(x - 20)$ naranjas.

Luego, aplicando la igualdad (1) nos queda:

$$\underbrace{\text{Nº de naranjas por cuadra}}_{13500} = \underbrace{\text{Nº de naranjas por árbol}}_{[600 - 15(x - 20)]} \bullet \underbrace{\text{Nº de árboles}}_{x}$$

O sea: $\mathbf{13500 = [600 - 15(x - 20)]\, x}$ es la ecuación pedida.

- **Solución de la Ecuación**

$$13500 = [600 - 15(x - 20)]\, x$$
$$\therefore 13500 = [600 - 15x + 300]\, x$$

$$\therefore 13500 = [900 - 15x]\, x$$
$$\therefore 13500 = 900x - 15x^2$$
$$\therefore 15x^2 - 900x + 13500 = 0$$
$$\therefore x^2 - 60x + 900 = 0$$
$$\therefore (x - 30)^2 = 0$$
$$\therefore x = 30$$

Luego, para que se produzcan 13500 naranjas por cuadra es necesario plantar 30 árboles en la misma.

8.6.4. Cuarta Aplicación

Veamos otra forma de resolver el problema anterior.

- **Elección de la Incógnita**

  Sea x = número de árboles que se siembran de más por cuadra.

- **Obtención de la Ecuación**
  - La producción de naranjas por cuadra cuando hay 20 árboles sembrados es $(600) \bullet (20) = 12000$ naranjas.
  - Si sembramos x árboles más entonces habrán $x + 20$ árboles y la producción de cada uno de estos será $600 - 15x$ naranjas.
  - Luego, la producción total por cuadra será: $(x + 20)(600 - 15x)$ y como queremos que ésta sea de 13500 naranjas por cuadra, entonces:

$$\mathbf{13500 = (x + 20) \bullet (600 - 15x)}$$

- **Solución de la Ecuación**

$$13500 = (x + 20)(600 - 15x)$$
$$\therefore 13500 = 600x - 15x^2 + 12000 - 300x$$
$$\therefore 15x^2 - 300x + 1500 = 0$$
$$\therefore x^2 - 20x + 100 = 0$$
$$\therefore (x - 10)^2 = 0$$
$$\therefore x = 10$$

Luego, para lograr una producción de 13500 naranjas por cuadra es necesario sembrar 10 árboles más; es decir, hay que sembrar, por cuadra, $20 + 10 = 30$ árboles.

Como vemos, ambos procedimientos conducen a la misma solución.

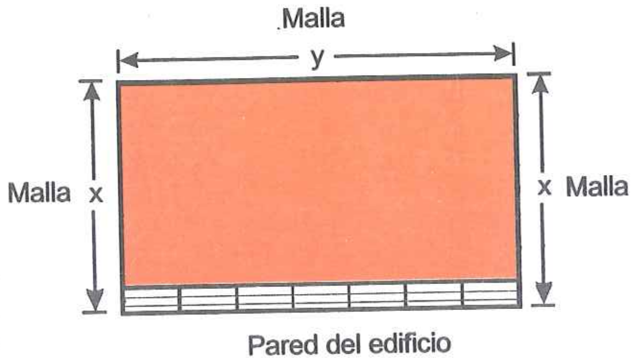
8.6.5. Quinta Aplicación

Se desea encerrar tres lados de un jardín rectangular de área 1250 m² con 100 metros de malla. El cuarto lado está protegido por la pared de un edificio. Hallar las dimensiones del jardín.

Solución

- **Elección de la Incógnita**

Sea x = ancho del jardín
y = largo del jardín



- **Obtención de la Ecuación**

* Los 100 metros de malla vamos a colocarlos alrededor de tres lados del jardín. Por lo tanto, corresponden a una parte del perímetro del rectángulo; es decir:

$$100 = 2x + y$$
$$\therefore\ y = 100 - 2x \text{ .... } (1)$$

* Como el área de un rectángulo es igual al producto del largo por el ancho, entonces:

$$1250 = x \bullet y\text{.........................}(2)$$

* Si sustituimos (1) en (2) nos queda:

$$1250 = x \bullet (100 - 2x)$$
$$\therefore 1250 = 100x - 2x^2$$
$$\therefore 2x^2 - 100x + 1250 = 0$$
$$\therefore x^2 - 50x + 625 = 0\text{.............. Ecuación buscada}$$

- **Solución de la Ecuación**

$$\therefore x^2 - 50x + 625 = 0$$
$$\therefore (x - 25)^2 = 0$$
$$\therefore x - 25 = 0$$
$$\therefore x = 25$$

8.6.6. Sexta Aplicación

Dos automóviles A y B se desplazan por carreteras perpendiculares entre sí a velocidades de 80 km./h y 70 km./h, respectivamente. En un momento dado, el auto A se encuentra 50 km. antes de la intersección y el auto B se encuentra 20 km. después de la intersección. ¿En qué momento la distancia que los separa es de $34\sqrt{2}$ km.?

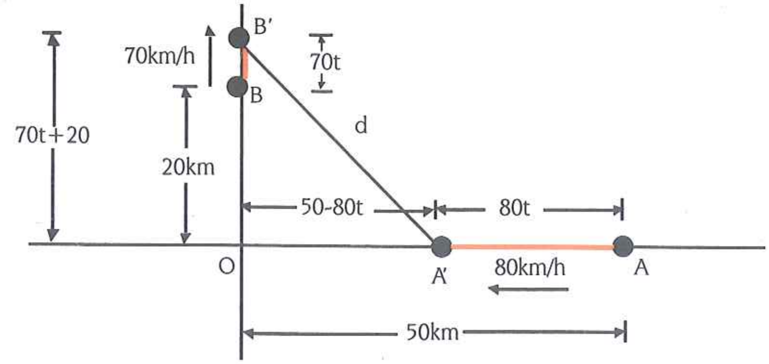
Solución

- **Elección de la Incógnita**

Sea t = el momento en el cual los automóviles están separados una distancia cualquiera.

- **Obtención de la Ecuación**

* La siguiente figura nos describe el enunciado del problema:



* Después de t horas, el auto A habrá recorrido una distancia de 80t km (recordemos que **distancia = velocidad • tiempo** y se encontrará ubicado en el punto A'; así mismo, el auto B habrá recorrido 70t km y estará ubicado en el punto B'.

* Cuando el auto A llega al punto A' le faltarán 50 - 80t kilómetros para llegar al punto de intersección O. Cuando el auto B llega al punto B' estará a 20 + 70t kilómetros del punto O.

* La distancia d que separa a los dos autos cuando están en los puntos A' y B' es:

$$d = \sqrt{|\overline{OA'}|^2 + |\overline{OB'}|^2} \quad \text{.................................Por el Teorema de Pitágoras}$$

Como queremos hallar t cuando $d = 34\sqrt{2}$ km., entonces:

$$\therefore 34\sqrt{2} = \sqrt{|\overline{OA'}|^2 + |\overline{OB'}|^2}$$

$$\therefore 34\sqrt{2} = \sqrt{(50 - 80t)^2 + (20 + 70t)^2}$$

$$\therefore \left(34\sqrt{2}\right)^2 = (50 - 80t)^2 + (20 + 70t)^2$$

$$\therefore 2312 = 2500 - 8000t + 6400t^2 + 400 + 2800t + 4900t^2$$

$$\therefore 2312 = 11300t^2 - 5200t + 2900$$

$$\therefore 11300t^2 - 5200t + 588 = 0$$

$$\therefore 2825t^2 - 1300t + 147 = 0$$

- **Solución de la Ecuación**

$$2825t^2 - 1300t + 147 = 0$$

$$\therefore t = \frac{1300 \pm \sqrt{(1300)^2 - 4(2825)(147)}}{2(2825)} = \frac{1300 \pm \sqrt{28900}}{5650} = \frac{1300 \pm 170}{5650}$$

$$\therefore t = \frac{1470}{5650} \quad \text{ó} \quad t = \frac{1130}{5650}$$

$\therefore t \approx 0{,}26$ horas ó $t = 0{,}2$ horas

$\therefore t \approx 15{,}6$ minutos ó $t = 12$ minutos

- **Análisis de las Soluciones**

* Cuando t = 0,2 horas $\begin{cases} 50 - 80t = 50 - 16 = 34 \\ 20 + 70t = 20 + 14 = 34 \end{cases}$

Luego, $d = \sqrt{34^2 + 34^2}$

$d = \sqrt{2 \bullet 34^2}$

$d = 34\sqrt{2}$ ¡Cumple!

* Cuando $t = 0.26$ horas $\begin{cases} 50 - 80t = 50 - 20{,}8 = 29{,}2 \\ 20 + 70t = 20 + 18{,}2 = 38{,}2 \end{cases}$

Luego, $d = \sqrt{(29{,}2)^2 + (38{,}2)^2}$

$d = \sqrt{852{,}64 + 1459{,}24}$

$d = \sqrt{2311{,}88}$

$d \approx 48{,}8 = 34\sqrt{2}$ ¡Cumple!

* Por lo tanto, ambas soluciones son correctas. Invitamos al lector a dibujarlas.

8.6.7. Séptima Aplicación

Dos puntos A y B están opuestos en las orillas de un río de 3 km de ancho. Otro punto C está en la misma orilla que B pero a 6 km de éste.

Se desea tender un cable desde el punto A hasta el punto C. El costo del cable por kilómetro es 25% más caro bajo el agua que en tierra.

¿A qué distancia del punto B debe aparecer el cable sobre tierra si el costo total del cable es de 8,25 millones de pesos?

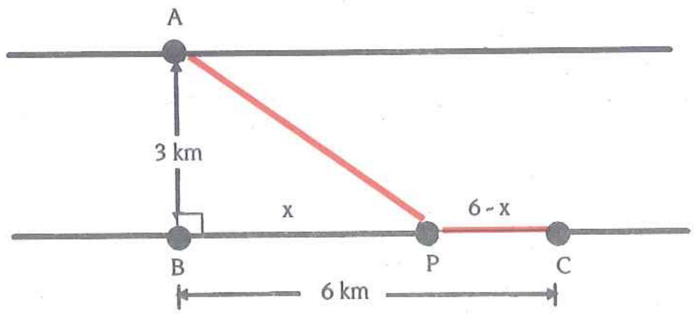
Solución

- **Elección de la Incógnita**

  Sea **x** la distancia sobre $\overline{BC}$, a partir del punto B, donde aparecerá el cable.

- **Obtención de la Ecuación**

  La siguiente figura nos describe el enunciado del problema.



* $|\overline{AP}|$ representa la medida del cable tendido bajo el agua y $|\overline{PC}|$ la medida del cable tendido en tierra. En este caso, P es el punto donde el cable sale a tierra.

* La medida del cable expresada en términos de **x**, la obtenemos aplicando el Teorema de Pitágoras en el triángulo ABP; así:

$$|\overline{AP}| = \sqrt{3^2 + x^2}$$

$$\therefore |\overline{AP}| = \sqrt{9 + x^2}$$

* Si la distancia desde P hasta B es **x** y la de B hasta C es 6, entonces la medida del cable $\overline{PC}$ es 6 - x kilómetros.

* ¿Cuál es el costo total del proyecto de tendido del cable? Pues, 8,25 millones de pesos que corresponde al costo del cable por agua más el costo del cable por tierra.

  En cualquier caso, el costo del cable será el costo de 1 kilómetro por el total de kilómetros. Como el costo del cable por agua es 25% más que el costo por tierra, eso significa que por cada peso que cueste el cable por tierra, el costo del cable por agua será de $1,25. Por lo tanto:

$$\text{COSTO TOTAL} = \text{COSTO POR AGUA} + \text{COSTO POR TIERRA}$$

$$\therefore 8{,}25 = 1{,}25\sqrt{9 + x^2} + 1\,(6 - x)$$

$$\therefore 2{,}25 + x = 1{,}25\sqrt{9 + x^2}$$

$$\therefore (2{,}25 + x)^2 = \left(1{,}25\sqrt{9 + x^2}\right)^2$$

$$\therefore 5{,}0625 + 4{,}5x + x^2 = 1{,}5625\,(9 + x^2)$$

$$\therefore 5{,}0625 + 4{,}5x + x^2 = 14{,}0625 + 1{,}5625x^2$$

$$\therefore 0{,}5625x^2 - 4{,}5x + 9 = 0$$

$$\therefore 9x^2 - 72x + 144 = 0 \quad \text{.................................Multiplicamos por 16}$$

$$\therefore (3x - 12)^2 = 0$$

$$\therefore 3x - 12 = 0$$

$$\therefore x = 4$$

* Por lo tanto, el cable debe aparecer, en tierra, en el punto P ubicado a 4 km del punto B.

- **Análisis de la Solución**

  La dejamos como ejercicio al lector.

8.6.8. Octava Aplicación

Una ventana está formada por un rectángulo y un semicírculo en la parte superior. Si el perímetro de la ventana es 10 m, ¿cuáles deben ser las medidas si su área es 4,86 m²?

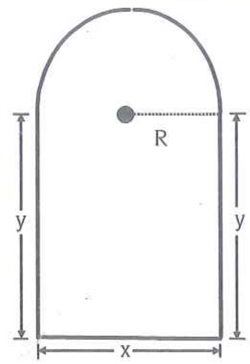
Solución

- **Elección de la Incógnita**

  Sea x = el ancho de la parte rectangular de la ventana.

  y = el largo de la parte rectangular de la ventana.

  R = el radio del semicírculo



- **Obtención de la Ecuación**

* El perímetro de la ventana es conocido: 10 m. Se obtiene sumando la longitud de los lados del rectángulo con la longitud de la semicircunferencia; es decir:

$$P = x + y + y + \frac{2\pi R}{2}$$

$\therefore 10 = x + 2y + \pi\left(\frac{x}{2}\right)$ .... $P = 10$ m y $R = \frac{x}{2}$

$\therefore 10 = x + 2y + \frac{\pi}{2}\,x$

$\therefore 10 = x + 2y + 1{,}57x$ .... por comodidad hagamos $\frac{\pi}{2} = 1{,}57$

$\therefore 10 = 2{,}57x + 2y$

$\therefore y = \frac{10 - 2{,}57x}{2}$

$\therefore y = 5 - 1{,}285x$

* El área de la ventana es la suma del área del rectángulo y el área del semicírculo. Por lo tanto:

$A_R = x\,y \quad y \quad A_S = \frac{\pi R^2}{2}$

$\therefore A_V = x\,y + \frac{\pi R^2}{2}$

$\therefore 4{,}86 = x\,(5 - 1{,}285x) + \frac{3{,}14\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2}$

$\therefore 4{,}86 = 5x - 1{,}285x^2 + 0{,}3925x^2$

$\therefore 0{,}8925x^2 - 5x + 4{,}86 = 0$

$\therefore x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4\,(0{,}8925)(4{,}86)}}{2\,(0{,}8925)}$

$\therefore x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 17{,}35}}{1{,}785}$

$\therefore x = \frac{5 \pm 2{,}765}{1{,}785}$

$\therefore x = \frac{7{,}765}{1{,}785} = 4{,}35 \text{ m} \quad ó \quad x = \frac{2{,}235}{1{,}785} = 1{,}25 \text{ m}$

* Si $x = 4{,}35$ m, entonces $y = 5 - 1{,}285\,(4{,}35) = -0{,}58$

  Si $x = 1{,}25$ m, entonces $y = 5 - 1{,}285\,(1{,}25) = 3{,}39$

* Por lo tanto, la solución $x = 4{,}35$ m se descarta ya que genera, para el largo, una longitud negativa. Si tomamos la solución $x = 1{,}25$ m, nos queda $y = 3{,}39$ m y $R = \frac{1{,}25 \text{ m}}{2} = 0{,}625$ m.

* **Análisis de la Solución**

  Si $x = 1{,}25$ m , $y = 3{,}39$ m y $R = 0{,}625$ m , entonces:

  * $A_R = x\,y = (1{,}25\text{m})\,(3{,}39) = 4{,}2375 \text{ m}^2$
  * $A_S = \frac{\pi R^2}{2} = 1{,}57\,(0{,}625 \text{ m})^2 = 0{,}6132 \text{ m}^2$
  * $A_R + A_S = 4{,}2375 \text{ m}^2 + 0{,}6132 \text{ m}^2 = 4{,}8507 \text{ m}^2 \approx 4{,}86 \text{ m}^2$

  Este último resultado corresponde, precisamente, al área de la ventana.

8.6.9. Novena Aplicación

Para pintar 1 m^2 de pared Juan tarda 1 minuto menos que Andrés. Juntos pueden pintar 27 m^2 en 1 hora. ¿Cuánto tiempo se demora cada uno para pintar 1 m^2 de pared?

Solución

- **Elección de la Incógnita**

Sea t = número de minutos que tarda Andrés en pintar 1 m^2 de pared.

$t - 1$ = número de minutos que tarda Juan en pintar 1 m^2 de pared.

- **Obtención de la Ecuación**

* Veamos qué parte de 1 m^2 de pared pinta cada uno en 1 minuto:

* En 1 minuto, Andrés pintará $\frac{1}{t}$ m^2 de pared (¿por qué?).

* En 1 minuto, Juan pintará $\frac{1}{t-1}$ m^2 de pared (¿por qué?).

* Como entre los dos pueden pintar 27 m^2 en 60 minutos, entonces en 1 minuto pintarán $\frac{27}{60}\ m^2 = \frac{9}{20}\ m^2$

* Por lo tanto: $\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} = \frac{9}{20}$

- **Solución de la Ecuación**

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} = \frac{9}{20}$$

$$\therefore 20\,t\,(t-1)\left[\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1}\right] = 20\,t\,(t-1)\frac{9}{20}$$

$$\therefore 20\,(t-1) + 20\,t = 9\,t\,(t-1), \text{ con } t \neq 0 \text{ y } t \neq 1$$

$$\therefore 20\,t - 20 + 20\,t = 9\,t^2 - 9t$$

$$\therefore 9\,t^2 - 49\,t + 20 = 0$$

$$\therefore (9\,t - 4)\,(t - 5) = 0$$

$$\therefore t = \frac{4}{9} \text{ min. ó } t = 5 \text{ min.}$$

- **Análisis de las Soluciones**

* Si $t = \frac{4}{9}$ min., entonces $t - 1 = -\frac{5}{9}$ min., lo cual no tiene sentido (¿por qué?).

* Si $t = 5$ min., entonces $t - 1 = 4$ min.

* Por lo tanto, Andrés tardará 5 min. para pintar 1 m^2 de pared y Juan tardará 4 min. para realizar la misma labor.

EJERCICIO 8.4

En los ejercicios 1. y 2. escribe con una incógnita los siguientes datos:

1. Los cuadrados de dos números cuya diferencia es 10.
2. Los cuadrados de dos números cuyo cociente es 4.

En los ejercicios 3. a 7. traduce a ecuaciones con una incógnita los siguientes enunciados:

3. El producto de dos números pares consecutivos es 2024.
4. Un número y su cuadrado suman 30.
5. La diferencia entre un número y su inverso es $\frac{9}{20}$.
6. La diferencia entre el producto y la suma de dos números naturales consecutivos es 305.
7. La suma de los cuadrados de dos enteros consecutivos es 61.

8 Dentro de 11 años la edad de Sebastián será la mitad del cuadrado de la edad que tenía hace 13 años. Calcula la edad de Sebastián.

9 Una habitación rectangular tiene una superficie de 28 m^2 y su perímetro mide 22 m. Halla las dimensiones de la habitación.

10 Para cercar una finca rectangular de 750 m^2 se han utilizado 110 m de malla. Calcula las dimensiones de la finca.

11 Un jardín rectangular de 50 m de largo por 34 m de ancho está rodeado por un camino de ancho uniforme. Halla el ancho de dicho camino si se sabe que su área es 540 m^2.

12 Los lados de un triángulo rectángulo tienen por medidas en centímetros tres números pares consecutivos. Halla las medidas de dichos lados.

13 Calcula las dimensiones de un rectángulo cuya diagonal mide 75 m, sabiendo que es semejante a otro rectángulo cuyos lados miden 36 m y 48 m, respectivamente.

14 La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 10 cm y la suma de los catetos 14 cm. Halla la medida de los catetos.

15 La diagonal de un rectángulo mide 26 cm y el perímetro 68 cm. Halla la medida de los lados del rectángulo.

16 Varios amigos deciden comprar C.D. por valor de \$156.000. A última hora se les unen dos más, y debido a ello paga cada uno \$13.000. Calcula el número inicial de amigos.

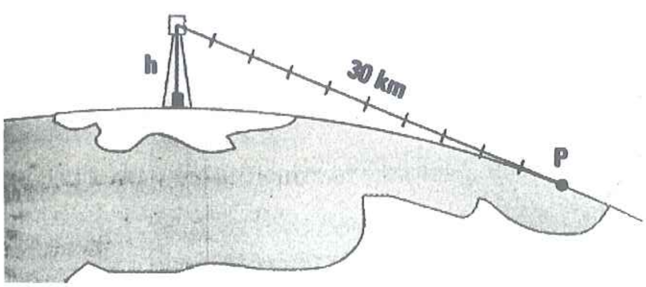
17 Un vehículo recorre 600 km con una cierta velocidad media. Si la velocidad disminuyera en 10 km/h, el tiempo empleado aumentaría en 1 hora. ¿Qué velocidad lleva el vehículo?

18 Una pieza rectangular de zinc es 4 cm más larga que ancha. Con ella se construye una caja de 840 cm^3 cortando un cuadrado de 6 cm de lado en cada esquina y doblando los bordes. Halla las dimensiones de la caja.

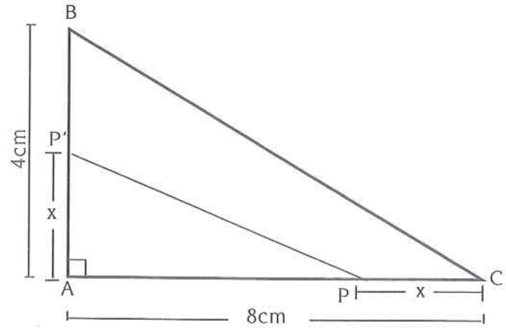
19 Dos mangueras A y B llenan juntas una piscina en 2 horas. A lo hace por sí sola en 3 horas menos que B. ¿Cuántas horas tarda cada una separadamente?

20 Un aeroplano vuela 1260 km contra el viento y luego regresa en un total de 16 horas. Halla la velocidad del aeroplano en aire tranquilo si la velocidad del viento es 20 km/h.

21 ¿Cuál es la altura mínima de un faro, sobre la superficie del mar, de modo que su luz se vea desde P? (Radio de la tierra: 6360 km)



22 En el triángulo rectángulo ABC se toman dos puntos P y P' a una misma distancia, x, de C y de A.

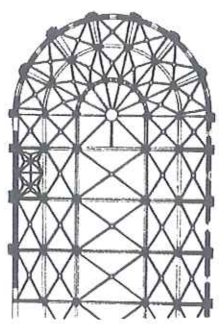


a) Expresa el área del triángulo P'AP en función de x.
b) Expresa el área del cuadrilátero BP'PC en función de x.
c) ¿Para que valores de x coinciden las áreas anteriores?

23 Cuando a una persona le preguntaron por su edad, respondió: **"Sume 25 al producto del número de años que tenía hace 5 años por el de los que tendré dentro de 5 años y resultará un número igual al cuadrado de la edad que tengo hoy".** ¿Cuál es la edad de esa persona?

24 De un punto salen dos personas, una en dirección norte y la otra en dirección este. La primera camina a 6 km/h y la segunda a 8 km/h. Dibujar el problema y determinar al cabo de cuánto tiempo tardarán en estar una de otra a 5 kilómetros de distancia.

25 El perímetro de la planta de iglesia (ver figura) es de 90 m y el área de 450 m^2. Halla sus dimensiones.



DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 3

El número 365, que indica los días del año, es un número muy curioso. Es el único número que es suma de los cuadrados de tres números naturales consecutivos y que, además, es suma de los cuadrados de los dos siguientes. ¿Sabrías hallarlos?

TALLER DE REPASO DE LA UNIDAD 8

En los ejercicios 1. a 14. resuelve las ecuaciones dadas:

1. $\sqrt{x-4}+3=\sqrt{x+11}$

2. $\sqrt{4x+5}-\sqrt{x}=\sqrt{x+3}$

3. $\sqrt{x} + \sqrt{4a + x} = 2\sqrt{b + x}$

4. $\sqrt{\frac{x+3}{x-3}} - 2\sqrt{\frac{x-3}{x+3}} = 1$

5. $9\sqrt{x^2 - 9x + 28} + 9x = x^2 + 36$

6. $27x^6 + 8 = 35x^3$

7. $3\left(\frac{2x-1}{x+3}\right) + 2\left(\frac{x+3}{2x-1}\right) = 5$

8. $2x^{2/3} - 3x^{1/3} = 2$

9. $x^2 + 3x - \sqrt{x^2 + 3x - 1} = 7$

10. $16x^{-2} + 19x^{-1} = 0$

11. $\sqrt{3 - \sqrt{3 + \sqrt{x - \sqrt{2x + 1}}}} = 1$

12. $5\sqrt[3]{70x + 29} = 9\sqrt[3]{14x - 15}$

13. $(x + \sqrt{12a - x})(x - \sqrt{12a - x}) = (\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)$

14. $\dfrac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}} - \dfrac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}} = 8x\sqrt{x^2 - 3x + 2}$

En los ejercicios 15. a 20., resuelve las siguientes ecuaciones polinómicas.

15. $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$

16. $4x^3 - 4x^2 - 11x + 6 = 0$

17. $4x^5 + 12x^4 - 41x^3 - 99x^2 + 10x + 24 = 0$

18. $x^3 - 2x^2 + 3x = 1$

19. $3x^3 + 3x = 8x^2 - 1$

20. $3x^4 + x^3 - 8x^2 - 2x + 4 = 0$

En cada uno de los problemas 21. a 40. se pide:

a) Elegir una letra para designar la incógnita.
b) Escribir una ecuación de segundo grado que interprete adecuadamente el enunciado del problema.
c) Resolver la ecuación obtenida.
d) Analizar la(s) solución(es).

21. Dos números suman 21 y su producto es 104. Halla los números.

22. Halla todos los números con la propiedad siguiente: que cuando el número se sume a sí mismo, la suma sea igual al producto del número por sí mismo.

23. Encuentra dos números enteros consecutivos cuyo producto sea 156.

24. Halla dos números enteros pares consecutivos tales que la suma de sus cuadrados sea 123 unidades mayor que el cuadrado del entero que está entre ellos.

25. El denominador de una fracción es una unidad mayor que el numerador. Si ambos se aumentan en 3, la fracción resultante excede en $\frac{1}{18}$ a la fracción original. ¿Cuál es la fracción original?

26. Un ganadero desea hacer un potrero rectangular de 7500 m^2 y tiene 250 m de cerca. Uno de los lados ya tiene cerca. ¿Qué dimensiones debe tener el potrero?

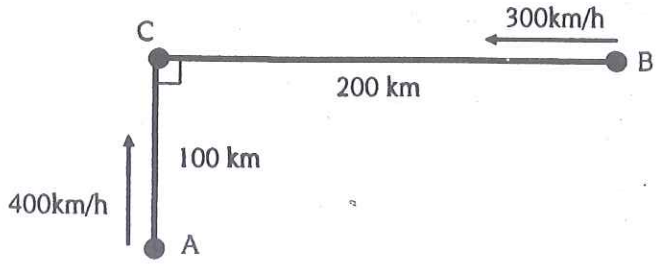
27. Se construye una caja abierta con un volumen de 1440 cm^3 utilizando una hoja metálica rectangular en la que se cortan cuadrados de 3 cm de lado en las esquinas, doblando luego los lados. Halla las dimensiones de la hoja metálica si su área es 792 cm^2.

28. El área combinada de dos círculos tangentes exteriormente es de 34π cm^2. Hallar el radio de cada círculo si entre sus centros hay una separación de 8 cm.

29. En un trapecio ABCD, las bases $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son perpendiculares a $\overline{AD}$; además, $\overline{DC}$ mide 8 cm más que $\overline{BC}$ y 4 cm menos que $\overline{AB}$. Halla las longitudes de los lados si el perímetro del trapecio es 38 cm.

30. Un trozo de alambre de 100 cm de longitud se corta en dos pedazos y cada uno se dobla para que tome la forma de un cuadrado. Si la suma de las áreas formadas es 397 cm^2, halla la longitud de cada pedazo de alambre.

31. Dos aviones A y B vuelan en trayectorias perpendiculares, a la misma altura y acercándose al punto de intersección C tal como muestra la figura. En un instante dado, el avión A vuela hacia el norte a una velocidad de 400 km/h, encontrándose a 100 km de la intersección; mientras el avión B vuela hacia el oeste a 300 km/h, encontrándose a 200 km de la intersección. ¿Al cabo de cuántas horas estarán separados una distancia de 100 km?



32. Una hoja de papel tiene 16 cm de largo y 13 cm de ancho. Las cuatro márgenes tienen el mismo ancho. ¿Qué dimensiones debe tener la parte impresa si ésta ocupa un área de 108 cm^2.

33. Una compañía ofrece instalar bombillas a un costo de $300 cada una si el pedido es de 40 unidades o menos. Para conseguir mejores contratos reduce en $5 el costo por cada bombilla que pase de 40. ¿Cuántas bombillas, por encima de las 40, deben instalarse para que el costo total de la instalación sea de $12500?

34. Un viaje organizado por un colegio puede llevar un número máximo de 250 alumnos. El viaje le costará a cada alumno $15000 si no se inscriben más de 150 estudiantes; sin embargo, el costo por persona se reducirá $50 por cada alumno que exceda en número a 150. ¿Cuántos estudiantes deben hacer el viaje para que el ingreso bruto sea de $2'531.250?

35. Un tanque se puede llenar en 4 horas cuando se usan dos canillas, ¿cuántas horas necesita cada canilla para llenar el tanque si la canilla más pequeña necesita 3 horas más que la otra?

36. Una bodega de paredes rectangulares cuyo fondo es el doble de su frente se divide en dos partes mediante una pared situada a 30 m del frente y paralela a éste. Si la parte trasera del edificio ocupa un área de 3500 m^2, encuentra las dimensiones del edificio.

37. Un estudiante se encontraba a 11 km del edificio donde debía recibir su clase una hora más tarde. Primero caminó un kilómetro y luego tomó en bus cuya velocidad era de 12 km/h mayor que su velocidad a pie. Halla la velocidad con que caminó y la velocidad del bus sabiendo que llegó a tiempo.

38. Una persona coloca $8'000.000 a cierto tanto por ciento. Al cabo de un año retira el capital y los intereses producidos y coloca el total a un 1% más que el inicial. De esta manera obtiene un interés de $416000. Halla el % inicial.

39. Se dispara un proyectil hacia arriba desde el suelo con una velocidad inicial de 800 m/seg. Al cabo de t segundos, la posición S del proyectil con relación al punto de lanzamiento está dada por la ecuación $S = -5t^2 + 800\,t$. Determina:

a) En cuánto tiempo el proyectil se encuentra a 3200 m de su posición inicial.
b) En cuánto tiempo regresa al suelo.
c) Cuál es la altura máxima alcanzada.

40. Una fábrica produce 10000 jabones semanalmente, cobrando \$50 por cada jabón. Si el gerente quiere aumentar las ventas debe rebajar \$1 en cada jabón para vender 1000 jabones más. ¿Cuánto debe rebajar el precio de cada jabón para que las ventas semanales asciendan a \$800000?

PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS DEL ICFES

1. las letras M, U, Ñ, E,C, A y los dígitos 2,5,5,1 se rotan de forma cíclica de la siguiente manera:

	MUÑECA	2551
Fila 1	UÑECAM	5512
Fila 2	ÑECAMU	5125
Fila 3	ECAMUÑ	1255

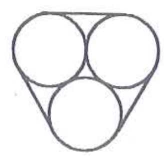
La fila en que aparece la combinación MUÑECA 2551 por primera vez es:

a) 6 b) 10 c)12 d) 18

2. Otra forma de escribir la expresión $-\frac{x}{y} - \frac{z}{w}$ es:

a) $-\frac{x}{y} - (-\frac{z}{w})$ b) $-(\frac{x}{y} - \frac{z}{w})$ c) $\frac{x}{y} + \frac{z}{w}$ d) $-(\frac{z}{w} + \frac{x}{y})$

3. Tres tubos iguales, cuyo diámetro mide 1 metro, se unen como muestra la figura por una banda metálica ajustada completamente. La longitud de esta banda metálica es:



a) 3π metros b) $3+\pi$ metros
c) $6\pi + 3$ metros d) $2\pi + 3$ metros

4. Después de haber estado trabajando un año en EEUU, Andrés, Carolina y Lina regresan al país con 20.000 dólares. Si la cantidad que trajo cada uno es: x, y, z respectivamente y sabemos que Andrés trajo $\frac{2}{3}$ de lo que trajo Carolina y que Carolina y Lina trajeron la misma cantidad, entonces las ecuaciones que deben plantear para saber la cantidad que trajo cada uno es:

a) $\frac{2}{3}x = y$; $z=y$; $x+y+z = 20.000$
b) $\frac{2}{3}y = x$; $x + 2y = 20.000$
c) $x = \frac{3}{2}y$; $z= y$; $x+y+z = 20.000$
d) $3y = 2x$; $x + 2y = 20.000$

5. La tabla presenta la relación entre el número de personas de un pueblo y el año en el cual se toma el dato:

AÑO	1950	1960	1970	1980	1990	2000
No. de Personas	2000	4000	8000			?

¿Cuántas personas se tendrán en ese pueblo en el año 2000?

a) 20.000 b) 32.0000 c) 40.000 d) 64.000

Núcleo Temático

9

FUNCIONES EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICA

LOGRO GENERAL

Reconocer la importancia que para la matemática tienen los conceptos de función logarítmica y función exponencial y su utilidad para modelar situaciones de la vida diaria.

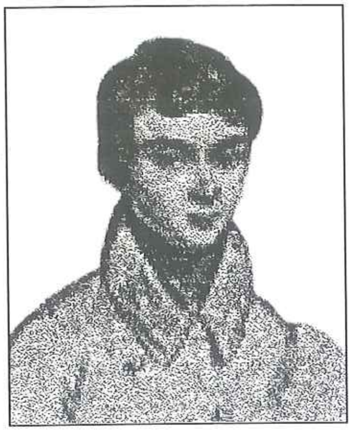
DIMENSIONES

LOGROS ESPECÍFICOS	INDICADORES DE LOGRO
Corporal • Manipular diagramas, tablas y gráficas para representar relaciones que sean funciones exponencial o logarítmica.	• Dibuja gráficas de relaciones que son funciones exponencial o logarítmica. • Participa en actividades de destreza operativa y manejo conceptual.
Comunicativa • Explicar cómo se halla el logaritmo de una raíz, utilizando las propiedades. • Escribir en el lenguaje de la función exponencial, situaciones de la ciencia o de la vida diaria.	• Describe cómo se encuentra, utilizando las propiedades, el logaritmo de la raíz de un producto. • Traduce al lenguaje matemático situaciones problemáticas de otras ramas de la ciencia o de la vida diaria, que pueden expresarse mediante funciones exponencial o logarítmica.
Cognitiva • Identificar las funciones exponencial y logarítmica. • Utilizar con destreza las propiedades de los logaritmos en la solución de ejercicios. • Resolver ecuaciones logarítmicas y exponenciales.	• Analiza, dibuja e interpreta gráficas de funciones exponencial y logarítmica. • Encuentra el logaritmo de un producto, un cociente o una potencia. • Resuelve ecuaciones que contienen logaritmos o expresiones exponenciales.
Estética • Elaborar diagramas cartesianos para representar funciones exponenciales y logarítmicas.	• Dibuja la gráfica de una función exponencial y de una función logarítmica.
Etica-Actitudinal • Valorar el trabajo en grupo.	• Participa, se integra y coopera en actividades grupales.

EVALUACIÓN

ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS

9.1 HISTORIA DEL ALGEBRA (19):EVARISTE GALOIS



En álgebra, el concepto de **grupo** fue sin duda el que ejerció una fuerza de cohesión más importante, a la vez que era uno de los factores esenciales que promovieron la aparición y el rápido desarrollo de los conceptos abstractos. Ningún matemático en particular puede considerarse como el responsable del origen de la idea de grupo, pero la figura que se nos presenta inevitablemente como la más importante en este contexto es la del hombre que dio su nombre a este concepto, el joven Evariste Galois (1811-1832), quien murió trágicamente antes de cumplir los 21 años.

Galois nació en las cercanías de París, en el pequeño poblado de Bourg -la Reine, donde su padre era alcalde. Sus padres tenían una sólida formación cultural y Evariste aprendió de ellos a despreciar cualquier forma de tiranía. A los 12 años ingresó en el Liceo de Louis -Legrand de París, regentado por un director que más que un maestro era un carcelero. A los 13 años aburrido e incomprendido por sus profesores, asistió al curso regular de matemáticas. La espléndida **Geometría** de Legendre abrió su camino. Leyó el libro del comienzo hasta el fin con la misma facilidad que un muchacho lee un libro de aventuras. Era tal su capacidad matemática y su posición contestataria con respecto a sus maestros del liceo que uno de éstos afirmó: "la locura matemática domina a este muchacho. Pienso que sus padres debían dedicarle tan sólo a las matemáticas. Aquí está perdiendo el tiempo y todo lo que hace es atormentar a sus maestros y perturbarse".

A los 16 años comenzó su carrera de descubrimiento fundamentales. Presentó los exámenes de ingreso a la famosa École Polytechnique, lugar donde se habían formado tantos matemáticos famosos, pero fue rechazado debido a su falta de preparación sistemática. Se trataba sólo de su primero y amargo fracaso. Sin embargo, a los 17 años Galois desarrolló por escrito sus descubrimientos fundamentales en un artículo que entregó a Cauchy para que lo presentara a la Academia de Ciencias de París. Esta vez, Cauchy no sólo puso el artículo en algún lugar que luego no recordaba, como lo hizo antes con un importante trabajo de Abel, sino que iperdió el artículo! (se estaba haciendo un verdadero especialista en estas técnicas). Ahora Galois ya tenía motivos para odiar, no sólo a los profesores examinadores, sino también a los académicos.

A los 18 años dos hechos intensificaron su amargura y decepción: un segundo fracaso en su intento por ingresar a la Polytechnique y el suicidio de su padre a causa de sentirse perseguido por intrigas clericales. Por fin,en 1830, a la edad de 19 años, Galois consigue entrar al fin al Poly y recopila una serie de investigaciones que entregó a Fourier, secretario de la Academia de Ciencias quien las llevó a su casa para leerlas en calma, pero desgraciadamente murió poco después y este segundo trabajo se perdió también irremediablemente.

En 1831 y 1832, completamente decepcionado, participa en actividades revolucionarias antimonárquicas, es encarcelado y absuelto. En mayo de 1832, fue retado a duelo a raíz de una pelea con una novia. Los días previos al duelo, los dedicó Galois a escribir teorías matemáticas que aún estaban sólo en su cabeza, en una larga carta dirigida a su amigo Augusto Chevalier. La carta termina con estas palabras: "Después de esto habrá, espero, gente para la que será provechoso, descifrar todo este enredo. Te abrazo con efusión. Evaristo".

A primera hora de la mañana del 30 de mayo de 1832, Galois se enfrentó a su adversario en duelo a pistola. Recibió un disparo que le perforó los intestinos, murió horas después en el hospital local en brazos de un hermano. En 1846 se publicaron póstumamente todos sus manuscritos gracias a la insisitencia de su hermano y de su amigo Augusto.

EJERCICIO 9.1

Lee nuevamente el texto anterior y luego encierra en un círculo, la letra que corresponda a la respuesta correcta:

1. Caracteriza a Evariste Galois:
   a. Su pasión por los duelos.
   b. Su perseverancia.
   c. El afán por alcanzar la gloria.
   d. El profundo conocimiento que tiene del ser humano.

2. Rodea la vida de este joven matemático:
   a. Un permanente rechazo por la sociedad de su época.
   b. Los traumas síquicos que le ocasionan las matemáticas.
   c. El asedio constante de las mujeres.
   d. La tragedia y el infortunio.

3. Evariste Galois provenía de:
   a. Padres de escasa formación humanística.
   b. Una rancia familia de la realeza parisina.
   c. Un hogar provinciano culto y de sólidos principios humanos.
   d. Una familia de políticos y matemáticos.

4. El tema central más exacto del fragmento es:
   a. La relación cronológica de los eventos familiares y académicos en la vida de Evariste Galois.
   b. Los descubrimientos matemáticos de Galois.
   c. Las causas de la muerte de un gran matemático.
   d. Observaciones y comentarios de un hombre de ciencia.

5. De la lectura del fragmento anterior se puede inferir que:
   a. La práctica de la matemática exige una renuncia a la vida afectiva.
   b. La ciencia y la locura "caminan de la mano".
   c. Galois fue uno de esos genios persistentes que no retorocedían ante las dificultades.
   d. La soberbia y el orgullo acabaron con un hombre de letras.

9.2 LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

PRIMERA EXPERIENCIA

- Observemos las ecuaciones que nos muestran las listas A y B y escribamos las diferencias y similitudes entre ellas:

Columna A	Columna B
$y = x^2$	$y = 2^x$
$y = x^{-5}$	$y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$
$y = x^{2/3}$	$y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$
$y = x^4$	$y = 4^x$

- Un análisis detenido de las dos columnas nos permite identificar estas similitudes:

  a) El lado izquierdo de cada igualdad es el mismo: **y**.
  b) En ambas columnas, el lado derecho de cada igualdad está escrito en forma de potencia.

- Así mismo, podemos detectar la siguiente diferencia fundamental: mientras en la columna A, la base de la potencia es **x** y el exponente es un número racional; en la columna B, la base es un número racional positivo y el exponente es la incógnita **x**.

- Por esta razón, las ecuaciones de la columna B se denominan ECUACIONES EXPONENCIALES.

SEGUNDA EXPERIENCIA

- Un científico desea estudiar cómo varía el número de bacterias presente en un cultivo, al cabo de cierto tiempo.
- Un científico descubre que, mientras las condiciones sean favorables, el tiempo necesario para que el número de bacterias se triplique no depende del momento en que se empieza el experimento; además, el número de bacterias se triplica diariamente.
- Un día cualquiera, el científico se dio cuenta que el cultivo tenía 500 bacterias. ¿Cuál es el número de bacterias presente en el cultivo al cabo de t días?
- Para resolver el problema, el científico razonó así:

El día que comenzó la observación .... 500 bacterias
Un día después .... $(3)\bullet(500$ bacterias$)$
Dos días después .... $(3)\bullet[(3)\bullet(500$ bacterias$)] = (3^2)\bullet(500$ bacterias$)$
Tres días después .... $3\bullet(3^2\bullet 500$ bacterias$) = (3^3)\bullet(500$ bacterias$)$

⋮

t días después .... $3\bullet(3^{t-1}\bullet 500) = (3^t)\bullet(500$ bacterias$)$

- Por lo tanto, después de t días, el número B de bacterias presentes en el cultivo puede calcularse mediante la ecuación:

$$\boxed{B = 500 \bullet 3^t}$$

- Como vemos, en esta ecuación la incógnita t aparece como EXPONENTE. Por esta razón, se denomina ECUACIÓN EXPONENCIAL.

APRENDAMOS

DEFINICIÓN DE ECUACIÓN EXPONENCIAL

Una ecuación en la cual la incógnita aparece como exponente se denomina **ECUACIÓN EXPONENCIAL.**

- Las calculadoras científicas poseen la tecla $\boxed{y^x}$ con la cual podemos calcular el valor de cantidades como $41{,}3^{1{,}5}$; así: ingresamos la base (41,3), oprimimos la tecla $\boxed{y^x}$, ingresamos el exponente (1,5), oprimimos la tecla $\boxed{=}$ y leemos en pantalla 265,4147641; es decir, para calcular $41{,}3^{1{,}5} = 265{,}4147641$ procedemos así: 41,3 $\boxed{y^x}$ 1,5 $\boxed{=}$ 265,4147641.

TERCERA EXPERIENCIA

- Consideramos ahora la ecuación exponencial $y = 2^x$.
- En la unidad seis estudiamos que si x es un número racional, entonces existe un resultado para 2^x; por ejemplo:

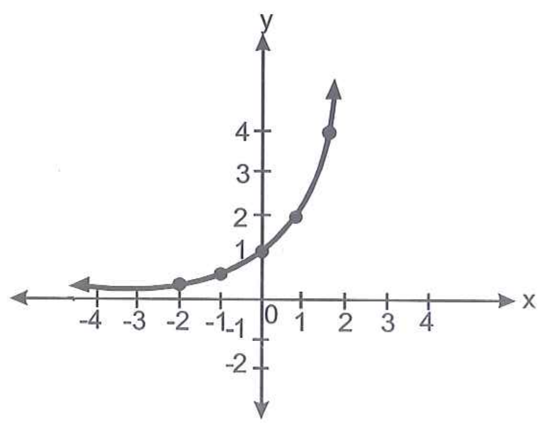
Si x = -2, entonces $y = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

Si x = 0, entonces $y = 2^0 = 1$

Si $x = \frac{3}{2}$, entonces $y = 2^{3/2} = \sqrt{2^3} = 2\sqrt{2} \approx 2{,}82$

- Pero, si x es un número irracional como $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ o π, entonces 2^x no está definido (por ahora). La definición de 2^x, cuando x es un número irracional requiere de conocimientos de cálculo que no están al alcance de este texto. Sin embargo, podemos tener una idea general bastante buena acerca de este concepto, estudiando la gráfica de la ecuación exponencial $\mathbf{y = 2^x}$. Elaboremos, pues, una tabla de valores y dibujemos la gráfica respectiva:

x	2^x
-3	$\frac{1}{8}$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8



- Notemos que los puntos parecen quedar sobre una curva "suave" y siempre que x tome valores racionales podremos comprobar que los puntos están sobre la curva. Sin embargo, si nuestra elección se restringe sólo a números racionales, entonces la gráfica de $\mathbf{y = 2^x}$ nunca será la curva suave de la figura, sino que mostrará un número infinito de "huecos", correspondientes cada uno de ellos a un valor irracional de **x.** Por lo tanto, si queremos que la gráfica de esta ecuación no presente "huecos" (en el lenguaje matemático se dice que sea CONTINUA), supondremos que para cada valor de x real (racional o irracional), $\mathbf{2^x}$ es la segunda componente del punto respectivo de la curva.
- Con esta condición, es claro que para cada $x \in R$ existe uno y sólo un número real y tal que $\mathbf{y = 2^x}$. Esto significa que la ecuación $\mathbf{y = 2^x}$ define una función $\mathbf{f = \{ (x, y) / y = 2^x \}}$ cuyo dominio es el conjunto de los números reales. Esta función se denomina FUNCIÓN EXPONENCIAL DE BASE 2.
- En general:

APRENDAMOS

DEFINICIÓN DE FUNCIÓN EXPONENCIAL

Sea **a** cualquier número real positivo diferente de **1** y **x** cualquier número real, entonces la función **f** definida por la regla:

$$\mathbf{f(x) = a^x}$$

se llama FUNCIÓN EXPONENCIAL DE BASE **a.**

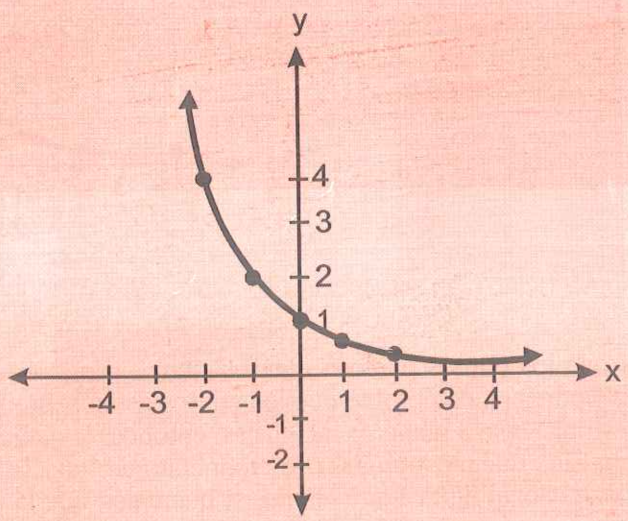
¡ATENCIÓN!

1. Si $a>1$, la gráfica de cualquier función de la forma $f(x) = a^x$ se parece mucho a la gráfica de $f(x) = 2^x$. Un estudio detenido de esta gráfica nos permite sacar algunas conclusiones importantes:

* El rango de esta función es el conjunto R^+ de los reales positivos; es decir, $a^x > 0$ para todo $x \in R$.
* Si $x = 0$, entonces $a^x = 1$: la gráfica corta al eje **y** en el punto **(0, 1)**.
* Si $x > 0$ entonces $a^x > 1$.
* Si $x < 0$ entonces $0 < a^x < 1$.
* A medida que **x** crece, también a^x crece; es decir, la función $f(x) = a^x$ es creciente cuando $a > 1$.

2. Si $0 < a < 1$, la gráfica de $f(x) = a^x$ tendrá una forma distinta. Por ejemplo, dibujemos la gráfica de $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$:

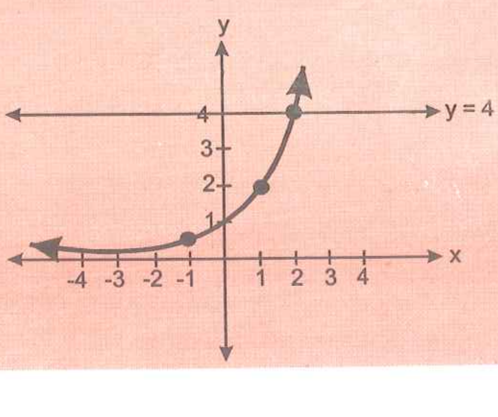
x	$\left(\frac{1}{2}\right)^x$
-3	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}=8$
-2	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=4$
-1	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=2$
0	$\left(\frac{1}{2}\right)^{0}=1$
1	$\left(\frac{1}{2}\right)^{1}=\frac{1}{2}$
2	$\left(\frac{1}{2}\right)^{2}=\frac{1}{4}$
3	$\left(\frac{1}{2}\right)^{3}=\frac{1}{8}$



* El rango de la función es el conjunto de los números reales positivos.
* Si $x = 0$, entonces $a^x = 1$
* Si $x > 0$, entonces $0 < a^x < 1$
* Si $x < 0$, entonces $a^x > 1$
* A medida que x crece, a^x decrece; es decir, $y = a^x$ es decreciente cuando $0 < a < 1$.

3. Cuando $a = 1$, la función $\{(x, y) / y = 1^x = 1\}$ no se considera como función exponencial **y**, en realidad, es una función constante.

4. La función exponencial es uno a uno. Esto significa que si trazamos una recta paralela al eje **x**, y por encima de él, dicha recta corta a la curva exactamente en un punto:



Esto significa que:

$$\boxed{\textbf{Si } a^x = a^y \textbf{ entonces } x = y}$$

5. Las leyes de los exponentes también se verifican cuando el exponente es un número irracional. En efecto:

a) $a^m \bullet a^n = a^{m+n}$ b) $(a^m)^n = a^{mn}$ c) $a^m/a^n = a^{m-n}$

d) $(a \bullet b)^m = a^m \bullet b^m$ e) $(a/b)^m = a^m/b^m$

Ejemplo 1

a) $2^{\sqrt{5}} \bullet 2^3 = 2^{\sqrt{5}+3}$ b) $5^{\sqrt{3}} / 5^{\sqrt{2}} = 5^{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ c) $\left[(\sqrt{7})^4 \right]^{-p} = (\sqrt{7})^{-4p} = 7^{-2p}$

Ejemplo 2

Resolvamos la ecuación $3^x = 27$

Solución

$3^x = 27$................................ecuación dada
$\therefore 3^x = 3^3$ ....¿ por qué?
$\therefore x = 3$....................................ya que si $a^x = a^y$ entonces $x = y$

Ejemplo 3

La gráfica de cierta función exponencial contiene el punto $\left(2, \frac{1}{9}\right)$. ¿Cuál es la base de esta función?

Solución

- Como la función es exponencial, sabemos que su ecuación tiene la forma $f(x) = a^x$. Además, sabemos que:

$$\therefore\ f(2) = a^2 = \frac{1}{9}$$

$$\therefore\ a^2 = \frac{1}{9}$$

$$\therefore\ (a^2)^{1/2} = \left(\frac{1}{9}\right)^{1/2}$$

$$\therefore\ a = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$$

- Luego, $y = f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

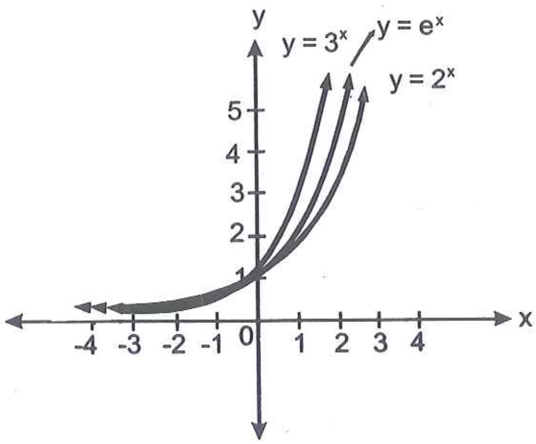
9.3 EL NÚMERO e Y LA FUNCIÓN $f(x)=e^x$

- En la práctica, las funciones exponenciales se denominan FUNCIONES DE CRECIMIENTO ya que su uso más extenso está en la descripción de distintos tipos de fenómenos de crecimiento (o decrecimiento). Estas funciones se usan para describir entre otros fenómenos, los siguientes:

a) Crecimiento de poblaciones de personas.
b) Crecimiento de poblaciones de bacterias.
c) Disminución en la temperatura de un cuerpo cuando se enfría.
d) Aumento de dinero colocado a interés.
e) Descenso de la presión atmosférica cuando aumenta la altura.
f) Desintegración de sustancias radioactivas.

- Aunque las bases 2 y $\frac{1}{2}$ son útiles para comprender el concepto de función exponencial, en la práctica la función exponencial de mayor aplicación es aquella que tiene por base el número irracional **e = 2.71828...**; es decir, la función: $\mathbf{f(x) = e^x}$, denominado FUNCIÓN EXPONENCIAL NATURAL.

- Puesto que **$2 < e < 3$**, la gráfica de **$f(x) = e^x$** se encuentra entre las gráficas de **$y = 2^x$** y **$y = 3^x$**:



- Las calculadoras poseen la tecla e^x que permite obtener valores de esta función. Por ejemplo, para calcular e^{-2}, ingresamos -2 en la calculadora; luego, presionamos las teclas $\boxed{e^x}$ y $\boxed{=}$; así:

$$-2 \ \boxed{e^x} \ \boxed{=} \ \ 0{,}1353$$

Ejemplo 1

En un cierto cultivo bacteriano, el número de bacterias presentes a los t minutos se obtiene mediante el modelo exponencial de crecimiento:

$$f(t) = A\,e^{0.04t} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

donde A es una constante. Si inicialmente hay 1500 bacterias presentes, ¿cuántas habrá después de 1 hora?

Solución

- Como inicialmente hay 1500 bacterias presentes en el cultivo, entonces $f(0) = 1500$. Por lo tanto:

$$f(0) = A\,e^{0.04(0)}$$
$$\therefore\ 1500 = A\,e^{0}$$
$$\therefore\ A = 1500$$

- Reemplazando este valor en la ecuación (1) nos queda:

$$f(t) = 1500\,e^{0.04t}$$

- Como el tiempo t en la ecuación (1) está dado en minutos y nos piden hallar el total de bacterias al cabo de 1 hora = 60 minutos, entonces debemos calcular f(60):

$$f(60) = 1500\,e^{0.04(60)}$$
$$\therefore\ f(60) = e^{2.4} \text{ (Recordemos como calcular } e^{2.4}\text{: } 2{,}4 \ \boxed{e^x} \ \boxed{=}\text{)}$$
$$\therefore\ f(60) = 1500\,(11.023)$$
$$\therefore\ f(60) = 16.535$$

- Por lo tanto, después de 1 hora hay 16.535 bacterias en el cultivo.

Ejemplo 2

Una sustancia radiactiva tiene inicialmente 500 gramos. Dicha sustancia se va desintegrando y en un instante determinado la cantidad de sustancia presente está dada por la ecuación: $f(t) = 500\,e^{-0.05t}$, t está dado en horas.

¿Cuánta sustancia queda después de 4 horas?

Solución

Al cabo de 4 horas, la sustancia que queda es: $f(4) = 500\ e^{-0,05(4)} = 500\ e^{-0,2} = 409,4$ gramos

EJERCICIO 9.2

En los ejercicios 1. a 6., usa las leyes de los exponentes para hallar el valor numérico de cada una de las expresiones dadas:

1. $(5^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$
2. $7^{3+\pi} \bullet 7^{-\pi}$
3. $(3^{-2\pi})^{1/\pi}$
4. $\dfrac{3^{5\sqrt{2}}}{9^{1+\sqrt{2}}}$
5. $\dfrac{27^{\frac{\sqrt{2}}{2}}}{3^{2\sqrt{2}}}$
6. $\dfrac{125^{2\sqrt{3}}}{25^{\sqrt{27}}}$

En los ejercicios 7. a 12. dibujar a mano y usando DERIVE, la gráfica de cada una de las funciones exponenciales dadas.

7. $\{(x\ ,\ y)\ /\ y = 5^x\ \}$
8. $\{(x\ ,\ y)\ /\ y = 5^{-x}\ \}$
9. $\{\ (x\ ,\ y)\ /\ y = (1/5)^x\ \}$
10. $\{\ (x\ ,\ y)\ /\ y = 3^{x/2}\ \}$
11. $\{\ (x\ ,\ y)\ /\ y = 3^{2-x}\ \}$
12. $\{\ (x\ ,\ y)\ /\ y = 2^x + 2^{-x}\ \}$
13. Si $f(x) = 2^x$ y $g(x) = x^2$, ilustra las diferencias de los crecimientos de f y g, para $x \geq 0$, dibujando las gráficas de ambas funciones en el mismo plano coordenado.

En los ejercicios 14. a 19., halla la solución de cada una de las ecuaciones exponenciales dadas:

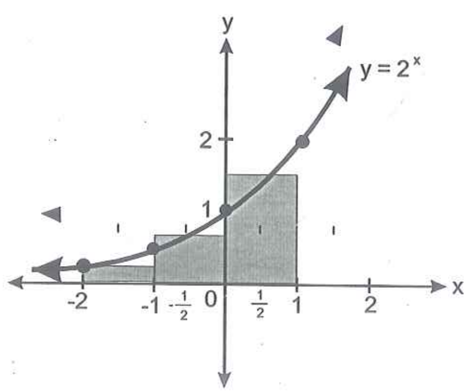
14. $5^{4x} = 125^{2x-3}$
15. $49^x = 7^{x^2-3}$
16. $9^{x^2} = 3^{8x-8}$
17. $10^{3x-6} = 0{,}000001$
18. $e^{x-1} = e^3$
19. $e^{x-1} = 1$

En los ejercicios 20. a 23., halla la base **a** de una función exponencial $\mathbf{f(x) = a^x}$ que pasa por el punto dado:

20. (3,216)
21. (-1, 5)
22. (-1, e^2)
23. (2, e)

En los ejercicios 24. a 31., utiliza una calculadora para hallar el valor de cada cantidad, con cuatro cifras decimales:

24. $4^{\sqrt{3}}$
25. 2^e
26. $8^{\sqrt{7}}$
27. $6^{-\sqrt{2}}$
28. $e^{-0,02589}$
29. $\sqrt{5 + \sqrt{5}}$
30. $5^{3/4}$
31. $(\sqrt{e}\,)^{e^{0,64}}$
32. Halla el área de la región sombreada de la figura siguiente:



33 Sea f la función definida por: $\mathbf{f(n)} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

donde **n** es un entero positivo. Completa la tabla siguiente y verifica que **f(n)** toma valores próximos a **e** cuando **n** crece indefinidamente.

n	f(n)
1	2,0000000
10	2,5937425
100	
1000	
10000	
100000	
1000000	
10000000	

34 El número de bacterias en un cultivo después de t horas está dado por la ecuación $b(t) = 200\ e^{-0,25t}$.

a) ¿Cuál es el número inicial de bacterias?
b) Encuentra el número de bacterias en el cultivo después de 20 horas.
c) Completa la siguiente tabla:

t	1	4	8	10
b(t)				

35 El valor de un cierto objeto t años después de su compra es $V(t) = k\ e^{-0,3\,t}$, donde k es una constante. Si el objeto se compró hace 8 años en $100.000, ¿cuál es su valor actual?

36 La presión atmosférica P por pie cuadrado a una altura de h pies sobre el nivel del mar está dada por la ecuación exponencial $P(h) = k\ e^{-0,00003\,h}$, donde k es una constante. Si la presión atmosférica al nivel del mar es 2.116 libras por pie cuadrado, determina la presión atmosférica que actúa sobre un avión que vuela a una altura de 10.000 pies.

37 Una obra de arte antigua fue comprada en 1922 por $200.000 y su valor se ha duplicado cada diez años desde su compra. Se pide:

a) Halla f(t), sabiendo que f(t) es el valor de la obra de arte t años después de su compra.
b) Determina el valor de la obra de arte en 1982.

38 La eficiencia de un obrero común de una cierta fábrica está dada por la función definida por $f(t) = 100 - 60\ e^{-0,2\,t}$, donde f indica el número de unidades de un producto que el obrero puede empacar por día después de haber trabajado t meses. Se pide:

a) Dibujar la gráfica de f y observar su comportamiento cuando t crece sin limitación.
b) Determinar cuántas unidades puede completar un obrero principiante.
c) Determinar cuántas unidades por día puede completar un trabajador con un año de experiencia.
d) Determinar cuántas unidades por día puede esperarse que produzca un obrero.

39 El número de bacterias de cierto cultivo aumentó de 500 a 1500 entre las 8 a.m. y las 10 a.m. Si t horas después de las 8 a.m., el número de bacterias es $b(t) = 500(3)^{t/2}$. Se pide:

a) Calcular el número de bacterias presentes en el cultivo a las 9 a.m., a las 10 a.m. y a las 12 m.
b) Dibujar la gráfica de b.

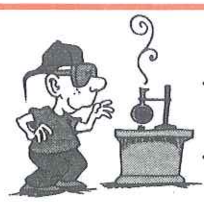
DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 1

Si x es un número entre 0 y 1 $(0 < x < 1)$, el menor de los siguientes números es:

a) $\frac{12x}{25}$ b) $\frac{12x}{27}$ c) $\frac{12}{25x}$ d) $\frac{13}{27x}$ e) $12x$

9.4 LOGARITMOS Y SUS PROPIEDADES

9.4.1 Revisión del concepto de Logaritmo



EXPERIENCIA

- En la sección anterior aceptamos que si **a** es un número positivo distinto de **1** y **N** es cualquier número positivo dado, entonces existe un sólo número real **x** tal que:

$$\boxed{a^x = N}$$

- De acuerdo con esto:
  * El exponente al que debemos elevar la base 3 para obtener el número 81 es 4, ya que:

$$\boxed{3^4 = 81}$$

  * El exponente al que debemos elevar la base 10 para obtener el número 0,001 es -3, ya que:

$$\boxed{10^{-3} = 0{,}001}$$

  * El exponente al que debemos elevar la base **a** para obtener el número **1** es **0**, ya que:

$$\boxed{a^0 = 1}$$

- En general, el exponente **x** al que debemos elevar una base **a** para obtener un número dado **N** se denomina LOGARITMO de **N** en la base **a.**

APRENDAMOS

DEFINICIÓN DE LOGARITMO

El **logaritmo** de un número positivo **N**, en una base positiva **a** $(a \neq 1)$, es el exponente **(x)** al que hay que elevar la base **a** para obtener el número **N**; es decir:

Si **N** y **a** son números positivos y $a \neq 1$, entonces:

$$\log_a N = x \text{ si y sólo si } N = a^x$$

- De acuerdo con la anterior definición, es fácil concluir que los conceptos de EXPONENTE y LOGARITMO son dos formas diferentes de describir lo mismo. Esto significa que las ecuaciones $\mathbf{N = a^x}$ y $\mathbf{\log_a N = x}$ son equivalentes y podemos pasar de una a otra para obtener la forma que nos resulte más útil en un momento dado.

Ejemplo 1: $3^4 = 81$ y, por lo tanto, $\log_3 81 = 4$.

Ejemplo 2: $10^{-3} = 0{,}001$ y, por lo tanto, $\log_{10} 0{,}001 = -3$.

Ejemplo 3: $a^0 = 1$ y, por lo tanto, $\log_a 1 = 0$.

Ejemplo 4: $\log_5 \left(\frac{1}{25}\right) = -2$, puesto que $5^{-2} = \frac{1}{25}$.

Ejemplo 5: Si $\log_x 8 = \frac{3}{2}$ entonces $x^{3/2} = 8$.

9.4.2 Propiedades de los Logaritmos

- Las siguientes son algunas consecuencias inmediatas de la definición de logaritmo:

1. $\mathbf{\log_a 1 = 0}$ ya que $\mathbf{a^0 = 1}$
2. $\mathbf{\log_a a = 1}$ ya que $\mathbf{a^1 = a}$
3. Para todo $\mathbf{y \in R}$ se cumple que $\mathbf{\log_a a^y = y}$ ya que $\mathbf{a^y = a^y}$
4. Como las ecuaciones:

$$y = \log_a x \quad \text{.......................................(1)}$$

y

$$x = a^y \quad \text{..(2)}$$

son equivalentes, entonces reemplazando (1) en (2) nos queda:

$$x = a^{\log_a x}$$

- Como un logaritmo es esencialmente un exponente, podemos reescribir las propiedades de los exponentes, que ya conocemos, en el lenguaje de los logaritmos; así:

APRENDAMOS

PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS

Si $\mathbf{x, y \in R^+}$, entonces:

1. **LOGARITMO DE UN PRODUCTO**

$$\mathbf{\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y}$$

es decir, el logaritmo de un producto de números es igual a la suma de los logaritmos de cada número.

2. **LOGARITMO DE UN COCIENTE**

$$\mathbf{\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y}$$

es decir, el logaritmo de un cociente de números es igual a la diferencia entre el logaritmo del dividendo y el logaritmo del divisor.

3. **LOGARITMO DE UNA POTENCIA**

$$\mathbf{\log_a x^y = y \log_a x}$$

es decir, el logaritmo de una potencia es igual al exponente por el logaritmo de la base.

Demostración de 1.

1. Supongamos que $\log_a x = m$ y $\log_a y = n$
2. Luego, $x = a^m$ y $y = a^n$ .... Definición de logaritmo.
3. Luego, $x \bullet y = a^m \bullet a^n$ .... ¿por qué?
4. Luego, $x \bullet y = a^{m+n}$ .... ¿por qué?
5. Luego, $\log_a (x \bullet y) = \log_a a^{m+n}$ .... ¿por qué?
6. Luego, $\log_a (x \bullet y) = m + n$ .... ¿por qué?
7. Finalmente, $\log_a (x \bullet y) = \log_a x + \log_a y$ .... Sustituimos 1. en 6.

Demostración de 3.

1. Supongamos que $\log_a x = m$
2. Luego, $x = a^m$ .... Definición de logaritmo.
3. Luego, $x^y = (a^m)^y = a^{my}$ .... ¿por qué?
4. Luego, $\log_a x^y = \log_a a^{my}$ .... ¿por qué?
5. Luego, $\log_a x^y = my$ .... ¿por qué?
6. Luego, $\log_a x^y = y \log_a x$ .... Sustituimos 1. en 5.

¡ATENCIÓN!

- No existe ninguna propiedad de los logaritmos para las expresiones:
  a) $\log_a x \bullet \log_a y$ b) $\dfrac{\log_a x}{\log_a y}$
- Tampoco existe ninguna propiedad de los logaritmos para las expresiones:
  a) $\log_a (m + n)$ b) $\log_a (m - n)$.

Ejemplo 1: Escribamos la expresión $\log_a \sqrt[5]{\dfrac{mn^2}{p^3}}$ en términos de los logaritmos de m, n y p, sabiendo que m, n y p representan números reales positivos.

Solución

Justifiquemos cada paso del desarrollo del ejercicio:

$$\log_a \sqrt[5]{\frac{mn^2}{p^3}} = \log_a \left(\frac{mn^2}{p^3}\right)^{1/5}$$

$$\therefore \log_a \sqrt[5]{\frac{mn^2}{p^3}} = \frac{1}{5} \log_a \left(\frac{mn^2}{p^3}\right) \text{ .... ¿por qué?}$$

$$\therefore \log_a \sqrt[5]{\frac{mn^2}{p^3}} = \frac{1}{5} \left[\log_a (mn^2) - \log_a (p^3)\right] \text{ .... ¿por qué?}$$

$$\therefore \log_a \sqrt[5]{\frac{mn^2}{p^3}} = \frac{1}{5} (\log_a m + \log_a n^2 - \log_a p^3) \text{ .... ¿por qué?}$$

$$\therefore \log_a \sqrt[5]{\frac{mn^2}{p^3}} = \frac{1}{5} (\log_a m + 2\log_a n - 3 \log_a p) \text{ .... ¿por qué?}$$

Ejemplo 2: Simplifiquemos la expresión $\frac{1}{3}(\log_a 4 - \log_a 3 + 2\log_a x - \log_a y)$

Solución

Justifiquemos cada paso del desarrollo del ejercicio:

$$\frac{1}{3}(\log_a 4 - \log_a 3 + 2\log_a x - \log_a y) = \frac{1}{3}[(\log_a 4 + 2\log_a x) - (\log_a 3 + \log_a y)]$$

$$\therefore \frac{1}{3}(\log_a 4 - \log_a 3 + 2\log_a x - \log_a y) = \frac{1}{3}[(\log_a 4 + \log_a x^2) - (\log_a 3 + \log_a y)]$$

$$\therefore \frac{1}{3}(\log_a 4 - \log_a 3 + 2\log_a x - \log_a y) = \frac{1}{3}[\log_a (4x^2) - \log_a (3y)]$$

$$\therefore \frac{1}{3}(\log_a 4 - \log_a 3 + 2\log_a x - \log_a y) = \frac{1}{3}\log_a\left(\frac{4x^2}{3y}\right) = \log_a\left(\frac{4x^2}{3y}\right)^{1/3} = \log_a\sqrt[3]{\frac{4x^2}{3y}}$$

Ejemplo 3

Sabiendo que $\log_{10} 2 = 0{,}3010$, $\log_{10} 3 = 0{,}4771$ y $\log_{10} 7 = 0{,}8451$, utilicemos las leyes de los logaritmos para calcular el valor de $\log_{10}\sqrt[3]{4{,}2}$. Justifiquemos cada paso.

Solución

- En primer lugar tengamos en cuenta que $4{,}2 = \frac{42}{10}$ y que $42 = 2\bullet3\bullet7$.
- Por lo tanto:

$$\therefore \log_{10}\sqrt[3]{4{,}2} = \log_{10}\sqrt[3]{\frac{42}{10}} = \log_{10}\sqrt[3]{\frac{2\bullet3\bullet7}{10}} = \log_{10}\left(\frac{2\bullet3\bullet7}{10}\right)^{1/3}$$

$$\therefore \log_{10}\sqrt[3]{4{,}2} = \frac{1}{3}\log_{10}\left(\frac{2\bullet3\bullet7}{10}\right) = \frac{1}{3}[\log_{10}(2\bullet3\bullet7) - \log_{10} 10]$$

$$\therefore \log_{10}\sqrt[3]{4{,}2} = \frac{1}{3}[\log_{10}(2\bullet3\bullet7) - 1] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \log_{10} 10 = 1$$

$$\therefore \log_{10}\sqrt[3]{4{,}2} = \frac{1}{3}(\log_2 2 + \log_2 3 + \log_2 7 - 1) = \frac{1}{3}(0{,}301 + 0{,}4771 + 0{,}8451 - 1)$$

$$\therefore \log_{10}\sqrt[3]{4{,}2} = \frac{1}{3}(0{,}6232) = 0{,}2077$$

9.4.3. Logaritmos Naturales, Logaritmos Comunes y cambio de base

- Hemos visto que cualquier número positivo $a \neq 1$ puede utilizarse como base logarítmica. Ahora bien, como nuestro sistema de numeración es el decimal, parece lógico pensar que la base más conveniente en el trabajo con logaritmos es la base 10.
- Los logaritmos de base 10 se llaman LOGARITMOS COMUNES, DECIMALES o DE BRIGGS (en honor a H. Briggs (1560 - 1631), quien elaboró la primera tabla de logaritmos en base 10). Sin embargo, el inventor de los logaritmos fue el matemático británico Juan Néper (1550 - 1617). Fue precisamente Néper quien encontró la base irracional **e ≈ 2.718281**... de gran importancia por sus aplicaciones, no sólo en matemáticas sino en física, química, biología, sicología y otras ciencias. Los logaritmos en base **e** se denominan LOGARITMOS NEPERIANOS o LOGARITMOS NATURALES.
- Convenciones:
  * Cuando escribamos **log x**, sin escribir la base, queremos decir $\log_{10}x$.
  * Cuando escribimos **In x**, queremos decir $\log_e x$.

Es decir:

$$\log x = \log_{10} x$$
$$\ln x = \log_e x$$

Si tenemos en cuenta las consecuencias de la definición de logaritmo, podemos escribir:

$$\log 10 = 1$$
$$\ln e = 1$$

- Para calcular log x y ln x, la mayoría de las calculadoras científicas poseen las teclas $\boxed{\log}$ y $\boxed{\ln}$, respectivamente.Veamos cómo usarlas:

Ejemplo 1

Calculemos: a) log 647 y b) ln 123

Solución

a) Para calcular log 647 tecleamos 647, luego, presionamos $\boxed{\log}$ y obtendremos, aproximadamente, 2,8109; es decir:

$$\log 647 \approx 2{,}8109$$

b) Para calcular ln 123 tecleamos 123, luego, presionamos $\boxed{\ln}$ y obtendremos, aproximadamente, 4.8122; es decir:

$$\ln 123 = 4.8122$$

- Es posible expresar el logaritmo de un número en base **a** en términos del logaritmo en otra base **b** utilizando la siguiente fórmula:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Demostración

1. Supongamos que $\log_a x = m$
2. Luego, $a^m = x$ .... Definición de logaritmo
3. Luego, $\log_b a^m = \log_b x$ .... Aplicamos $\log_b$ a ambos lados de la igualdad.
4. Luego, $m \log_b a = \log_b x$ .... Logaritmo de una potencia.
5. Luego, $m = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$ .... ¿por qué?
6. Finalmente, $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$ .... Sustituimos 1. en 5.

Ejemplo 2

Calculemos $\log_2 7$

Solución

- Podemos utilizar la fórmula del cambio de base para convertir el logaritmo dado a base 10 o a base e; así:
- A base 10:

$$\log_2 7 = \frac{\log_{10} 7}{\log_{10} 2} \approx \frac{0,84509}{0,30103} = 2,80732$$

$$\therefore \log_2 7 \approx 2,80732$$

- A base e:

$$\log_2 7 = \frac{\text{In}7}{\text{In}2} \approx \frac{1,94591}{0,69314}$$

$$\therefore \log_2 7 \approx 2,80732$$

9.4.4. Antilogaritmo de un número

- La calculadora científica también puede utilizarse para encontrar el número x cuando conocemos log x o In x.
- Por ejemplo, si sabemos que log x = 3,414 y queremos hallar x procedemos así:

1. Tecleamos 3,8414
2. Presionamos la tecla [INV] (en otras es la tecla [SHIFT]) y, luego, oprimimos la tecla [log].

Es decir: log x = 3,8414 es lo mismo que 3,8414 [INV] [log] = 6940,647

APRENDAMOS

DEFINICIÓN DE ANTILOGARITMO

El **ANTILOGARITMO** de un número **y** es el número **x** tal que: **log x = y**

Ejemplo 3

Usando logaritmos, calculemos aproximadamente (57,4) (0,0496)

Solución

- Tenemos:

$$x = (57,4)\,(0,0496)$$
$$\therefore \log x = \log\,[(57,4)\,(0,0496)] = \log 57,4 + \log 0,0496$$
$$\therefore \log x = 1,7589 + (0,6955 - 2) = 1,7589 - 1,3045 = 0,4544$$

- Finalmente buscamos el antilogaritmo y obtenemos x ≈ 2,85.
- Ensayemos utilizando logaritmos naturales y comparemos los resultados.

Ejemplo 4

Usando logaritmos, calculemos aproximadamente $\sqrt[3]{87,96}$

Solución

- Tenemos:

$$x = \sqrt[3]{87,96} = (87,96)^{1/3}$$
$$\therefore \log x = \log\,(87,96)^{1/3} = \frac{1}{3} \log 87,96$$
$$\therefore \log x = \frac{1}{3}(1,9442) = 0,6480$$
$$\therefore x \approx 4,447$$

- Luego, $\sqrt[3]{87,96} \approx 4,447$

- En lugar de aplicar logaritmos decimales, apliquemos logaritmos naturales y comparemos los resultados.

Ejemplo 5

Calculemos $\frac{\sqrt{95,6}}{(3,5)^4}$, usando logaritmos.

Solución

- Tenemos:

$$x = \frac{\sqrt{95,6}}{(3,5)^4}$$

$$\therefore \log x = \log \left[\frac{(95,6)^{1/2}}{(3,5)^4} \right] = \log (95,6)^{1/2} - \log (3,5)^4$$

$$\therefore \log x = \frac{1}{2} \log (95,6) - 4\log (3,5) = 0,9902 - 2,1762 = -1,1860$$

$$\therefore x = 0,0651$$

- Luego: $\frac{\sqrt{95,6}}{(3,5)^4} = 0,0651$

EJERCICIO 9.3

En los ejercicios 1. a 5. reescribe cada una de las igualdades utilizando la notación logarítmica:

1. $10^5 = 100.000$
2. $6^0 = 1$
3. $(0,2)^3 = 0,008$
4. $p^x = t$
5. $a^{10} = b$

En los ejercicios 6. a 10., reescribe cada una de las igualdades utilizando la notación exponencial:

6. $\log_5 125 = 3$
7. $\log_6 \frac{1}{6} = -1$
8. $\log_7 7 = 1$
9. $\log_8 x = y$
10. $\log_x y = 10$

En los ejercicios 11. a 16., halla el logaritmo dado:

11. $\log_3 81$
12. $\log_5 625$
13. $\log_9 3$
14. $\log_{10} 1$
15. $\log_{10} 10^{\sqrt{5}}$
16. $\log_b \sqrt{b}$

En los ejercicios 17. a 20., halla el conjunto solución de cada una de las ecuaciones dadas:

17. $\log_x 64 = 3$
18. $\log_5 x = -2$
19. $3^{\log_3 x} = \frac{1}{4}$
20. $5^{\log_x 7} = 7$

En los ejercicios 21. a 30., halla los logaritmos respectivos sabiendo que $\log_a 2 = 0,30$, $\log_a 3 = 0,48$ y $\log_a 5 = 0,70$.

21. $\log_a \sqrt[3]{5}$
22. $\log_a \sqrt{10}$
23. $\log_a \frac{\sqrt{15}}{5}$
24. $\log_a (\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{5})$
25. $\log_a \sqrt[4]{24}$
26. $\log_a 2a$

27. $\log_a \dfrac{5}{\log_a 3}$ 28. $(\log_3 a)(\log_a 3)$ 29. $\log_5 a$ 30. $\log_a \left(\dfrac{a}{2}\right)$

En los ejercicio 31. a 39., utiliza la calculadora para hallar el logaritmo dado.

31. log 673
32. log 5,74
33. log 50
34. log 3,5
35. log 96,3
36. In 46200
37. In 0,000721
38. In 4130000
39. In 74,2

En los ejercicios 40. a 45., utiliza la calculadora para hallar el valor de x:

40. $\log x = 0{,}6731$
41. $\log x = 0{,}8280$
42. $\ln x = 0{,}5623$
43. $\log x = -1{,}6923$
44. $\log x = -3{,}9754$
45. $\ln x = -1{,}3990$

En los ejercicios 46. a 51., utiliza la calculadora para hallar el valor de:

46. $(0{,}313)(64{,}5)$
47. $\dfrac{0{,}0035}{7260}$
48. $(49{,}6)^2$
49. $\dfrac{(54{,}3)(2{,}15)^3}{675}$
50. $\sqrt[4]{0{,}000315}$
51. $\sqrt[3]{\dfrac{(83{,}4)(0{,}03)}{(4{,}5)^2}}$

En los ejercicios 52. a 57., resuelve las ecuaciones dadas:

52. $\log_2 x^2 = -2$
53. $\log_2 (x^2 - 5x + 14) = 3$
54. $\log_8 2 - x = \log_8 4$
55. $5^{\log_5 x} = 10$
56. $\log_5 x + \log_5 (x + 6) = \dfrac{1}{2} \log_5 9$
57. $\dfrac{1}{2} \log_5 (x - 2) = 3 \log_5 2 - \dfrac{3}{2} \log_5 (x - 2)$

58. Expresa a $\log_a x\sqrt[3]{\dfrac{y^2}{z^4}}$ en términos de $\log_a x$, $\log_a y$ y $\log_a z$.

59. Expresa a $\log_a (y^2 x^3) - 2 \log_a x\sqrt[3]{y} + 3 \log_a \left(\dfrac{x}{y}\right)$ como un solo logaritmo.

60. Demuestra la segunda ley de los logaritmos.

61. Demuestra que para todo $x \geq 1$ se cumple que: $\log_a (x + \sqrt{x^2 - 1}) = -\log_a (x - \sqrt{x^2 - 1})$
(Sugerencia: Usa el método de reducción al absurdo).

62. Dibuja las gráficas de $\mathbf{y = 3^x}$ y de $\mathbf{y = \log_3 x}$ sobre el mismo sistema coordenado. ¿Qué relación hay entre las gráficas de $\mathbf{x = 3^y}$ y $\mathbf{y = \log_3 x}$?

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 2

Un entrenador está tratando de conformar un equipo de 4 jugadores para un torneo de tenis. Tiene 7 jugadores disponibles: los hombres A, B y C y las mujeres M, N, O, P. Todos los jugadores son de igual capacidad y deben, por lo menos pertenecer al equipo 2 hombres. Para un equipo de cuatro, todos los tenistas pueden jugar entre ellos mismos.

El tenista B no puede jugar con el tenista M
El tenista C no puede jugar con el tenista P
El tenista M no puede jugar con el tenista O

De acuerdo con la anterior información, si es seleccionado el jugador O y rechazado el jugador B, el equipo de cuatro personas deberá ser:

a) A, C, M, O b) A, C, N, O c) A, C, P, O d) A, N, P, O e) C, P, N, O

9.5 LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA

EXPERIENCIA

- Consideremos la ecuación logarítmica $\mathbf{y=log_a\ x}$. Como **a** es un número positivo distinto de **1**, entonces esta ecuación hace corresponder a cada número real positivo **x** uno y sólo un número real **y**. Esto significa que la ecuación $\mathbf{y=log_a\ x}$ define una función $\mathbf{f: R^+ \to R}$. Esta función se denomina FUNCIÓN LOGARÍTMICA DE BASE a.

APRENDAMOS

DEFINICIÓN DE FUNCIÓN LOGARÍTMICA

La función $\mathbf{f: R^+ \to R}$ definida por: $\mathbf{f(x) = log_a\ x}$ se denomina FUNCIÓN LOGARÍTMICA DE BASE **a.**

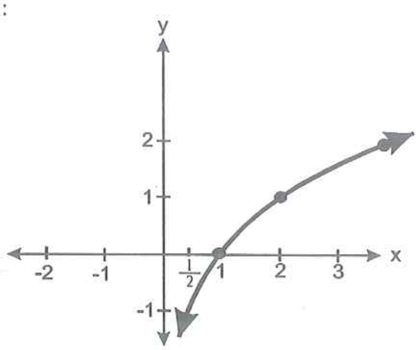
- La gráfica de esta función es la misma que la de la ecuación $\mathbf{y = log_a\ x}$, la cual es equivalente, por definición de logaritmo, a la ecuación $\mathbf{a^y = x}$. Por lo tanto, para localizar puntos que satisfagan esta ecuación, damos valores arbitrarios a **y** y calculamos los valores correspondientes de **x**.

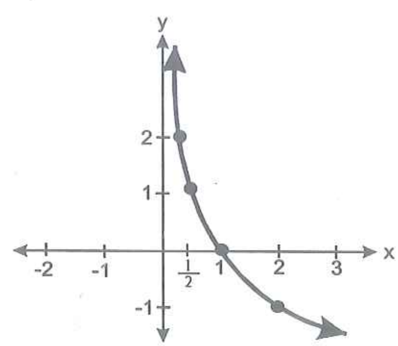
Ejemplo

Dibujemos las gráficas de las funciones cuyas ecuaciones son $y = \log_2 x$ y $y = \log_{1/2} x$ y anotemos algunas características especiales.

Solución

- La figura siguiente nos muestra las fráficas y las tablas de valores correspondientes a estas funciones:





x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$\log_2 x$	-3	-2	-1	0	1	2	3

x	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
$\log_{1/2} x$	-3	-2	-1	0	1	2	3

- Características Particulares

1. Si $\mathbf{a > 1}$, la gráfica de cualquier función logarítmica es similar a la gráfica de $\mathbf{y = \log_2 x}$. En estas funciones:

   * el rango de la función es el conjunto $\mathbf{R}$
   * si $\mathbf{0 < x < 1}$, entonces $\mathbf{\log_a x < 0}$
   * si $\mathbf{x = 1}$, entonces $\mathbf{\log_a x = 0}$
   * si $\mathbf{x > 1}$, entonces $\mathbf{\log_a x > 0}$
   * a medida que $\mathbf{x}$ crece, también $\mathbf{\log_a x}$ crece; es decir, la función $\mathbf{y = \log_a x}$ es creciente cuando $\mathbf{a > 1}$.

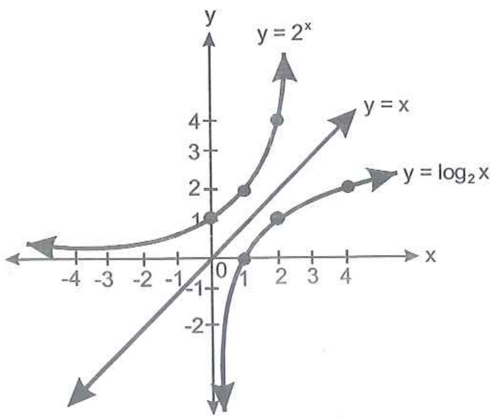
2. Si $\mathbf{0 < a < 1}$, la gráfica de cualquier función logarítmica es similar a la gráfica de $\mathbf{y = \log_{1/2} x}$. En estas funciones:

   * el rango de la función es todo el conjunto $\mathbf{R}$
   * si $\mathbf{0 < x < 1}$, entonces $\mathbf{\log_a x > 0}$
   * si $\mathbf{x = 1}$, entonces $\mathbf{\log_a x = 0}$
   * si $\mathbf{x > 1}$, entonces $\mathbf{\log_a x < 0}$
   * a medida que $\mathbf{x}$ crece, $\mathbf{\log_a x}$ decrece; es decir, la función $\mathbf{y = \log_a x}$ es decreciente cuando $\mathbf{a < 1}$.

3. Al igual que en la función exponencial, también en la función logarítmica cualquier línea recta paralela al eje x corta la gráfica en uno y sólo un punto. Esto significa que también la función logarítmica es uno a uno; es decir:

   Si $\log_a x = \log_a y$ entonces $x = y$

4. Puesto que $\mathbf{y = \log_a x}$ y $\mathbf{y = a^x}$ son biyectivas y las ecuaciones $\mathbf{y = \log_a x}$ y $\mathbf{x = a^y}$ son equivalentes, entonces podemos afirmar que las funciones $\mathbf{y = \log_a x}$ y $\mathbf{y = a^x}$ son INVERSAS. Esto significa que sus gráficas son simétricas con relación a la recta $\mathbf{y = x}$ tal que como nos muestra la figura siguiente donde se han dibujado las gráficas de $\mathbf{y = \log_2 x}$ y $\mathbf{y = 2^x}$.



9.6 ECUACIONES LOGARÍTMICAS Y EXPONENCIALES

- Las propiedades de las funciones exponenciales y logarítmicas pueden utilizarse para hallar la solución de cierto tipo de ecuaciones.
- En la solución de una ecuación exponencial o logarítmica debemos tener en cuenta los siguientes aspectos:
  1. Para resolver una ecuación exponencial, tomamos logaritmos a ambos lados de la ecuación.
  2. Para resolver una ecuación logarítmica, la escribimos en la forma exponencial equivalente.

Ejemplo 1

Resolvamos, para x, la ecuación $3^{2x-4} = 7$.

Solución

- Tenemos:

$$3^{2x-4} = 7 \text{ .... Ecuación dada}$$

$$\therefore \log 3^{2x-1} = \log 7 \text{ .... aplicamos logaritmo a ambos lados}$$

$$\therefore (2x - 1) \log 3 = \log 7 \text{ .... logaritmo de una potencia.}$$

$$\therefore 2x - 1 = \frac{\log 7}{\log 3} \text{ .... ¿por qué?}$$

$$\therefore x = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\log 7}{\log 3}\right) \text{ .... ¿por qué?}$$

- Luego: $x = 1{,}385$

Ejemplo 2

Resolvamos la ecuación $5^{2x+1} = 6^{x-2}$

Solución

- Tenemos:

$$5^{2x+1} = 6^{x-2} \text{ .... Ecuación dada}$$

$$\therefore \log 5^{2x+1} = \log 6^{x-2} \text{ .... aplicamos logaritmo a ambos lados}$$

$$\therefore (2x + 1) \log 5 = (x - 2) \log 6 \text{ .... logaritmo de una potencia}$$

$$\therefore 2x \log 5 + \log 5 = x \log 6 - 2 \log 6 \text{ .... ¿por qué?}$$

$$\therefore 2x \log 5 - x \log 6 = -2 \log 6 - \log 5 \text{ .... ¿por qué?}$$

$$\therefore x\,(2 \log 5 - \log 6) = -\,(2 \log 6 + \log 5) \text{ ..... ¿por qué?}$$

$$\therefore x = -\frac{2 \log 6 + \log 5}{2 \log 5 - \log 6} \text{ .... ¿por qué?}$$

$$\therefore x = -\frac{\log 36 + \log 5}{\log 25 - \log 6} \text{ .... ¿por qué?}$$

$$\therefore x = -\frac{\log (36 \cdot 5)}{\log\left(\frac{25}{6}\right)} \text{ .... ¿por qué?}$$

$$\therefore x = -\frac{\log 180}{\log\left(\frac{25}{6}\right)} \text{ .... ¿por qué?}$$

- Luego: $x \approx -3.6387764$

Ejemplo 3

Resolvamos la ecuación $\log (2x + 8) = 1 + \log (x - 4)$

Solución

- Tenemos:

$$\log (2x + 8) = 1 + \log (x - 4) \text{ .... Ecuación dada}$$

$$\therefore \log (2x + 8) - \log (x - 4) = 1 \text{ .... ¿por qué?}$$

$$\therefore \log \frac{2x + 8}{x - 4} = 1 \text{ .... ¿por qué?}$$

- Ahora usando la definición de logaritmo con base 10, tenemos: $\frac{2x+8}{x-4} = 10$, con $x > 4$ (¿Por qué?)
- Por lo tanto:

$$2x + 8 = 10(x - 4), \text{ con } x>4$$
$$\therefore 2x + 8 = 10x - 40, \text{ con } x>4$$
$$\therefore 2x - 10x = -40 - 8, \text{ con } x>4$$
$$\therefore -8x = -48, \text{ con } x>4$$
$$\therefore x = 6>4$$

Ejemplo 4

Resolvamos la ecuación $\frac{3^x - 3^{-x}}{5} = 2$

Solución

- Tenemos:

$\frac{3^x - 3^{-x}}{5} = 2$ .... Ecuación dada

$\therefore 3^x - 3^{-x} = 10$ .... multiplicamos ambos lados de la ecuación por 5

$\therefore 3^{2x} - 3^0 = 10(3^x)$ .... multiplicamos ambos lados de la ecuación por 3^x

$\therefore 3^{2x} - 1 = 10(3^x)$ .... ¡Atención!: $10(3^x) \neq 30^x$

$\therefore 3^{2x} - 10(3^x) = 1$ .... ¿por qué?

$\therefore (3^x)^2 - 10(3^x) - 1 = 0$ .... ¿por qué?

- Si hacemos $u = 3^x$, entonces la ecuación nos queda:

$$u^2 - 10u - 1 = 0$$
$$\therefore u = \frac{10 \pm \sqrt{100+4}}{2}$$
$$\therefore u = \frac{10 \pm 2\sqrt{26}}{2}$$
$$\therefore u = 5 \pm \sqrt{26}$$

- Por lo tanto, $3^x = 5 \pm \sqrt{26}$. Sin embargo, como 3^x nunca es negativo, debemos descartar la solución $3^x = 5 - \sqrt{26}$ y sólo nos queda: $3^x = 5 + \sqrt{26}$
- Aplicando logaritmos a ambos lados de esta igualdad obtenemos:

$$\log 3^x = \log(5 + \sqrt{26})$$
$$\therefore x \log 3 = \log(5 + \sqrt{26})$$
$$\therefore x = \frac{\log(5 + \sqrt{26})}{\log 3} \approx 2{,}1047$$

Ejemplo 5

Resolvamos el sistema
$$\begin{cases} 2^{x+y+1} = 2^{y+1} \cdot 3^y \text{.....................(1)} \\ 3^{x-1} = 2^{y+1} \text{..................................(2)} \end{cases}$$

Solución

- Tomando logaritmos a ambos lados de la ecuación (1) tenemos:

$$\log 2^{x+y+1} = \log (2^{y+1} \bullet 3^{y})$$
$$\therefore (x + y + 1) \log 2 = (y + 1) \log 2 + y \log 3$$
$$\therefore x \log 2 + y \log 2 + \log 2 = y \log 2 + \log 2 + y \log 3$$
$$\therefore y \log 3 = x \log 2$$
$$\therefore y = \frac{x \log 2}{\log 3} \quad \text{.......................................(3)}$$

- Ahora tomamos logaritmos a ambos lados de la igualdad (2):

$$\log 3^{x-1} = \log 2^{y+1}$$
$$\therefore (x - 1) \log 3 = (y + 1) \log 2$$
$$\therefore x \log 3 - \log 3 = y \log 2 + \log 2$$
$$\therefore y \log 2 = x \log 3 - \log 3 - \log 2$$
$$\therefore y = \frac{x \log 3 - \log 3 - \log 2}{\log 2} \quad \text{. .... (4)}$$

- Igualando (3) y (4) queda:

$$\frac{x \log 2}{\log 3} = \frac{x \log 3 - \log 3 - \log 2}{\log 2}$$

- Simplificando y despejando la x en esta última ecuación nos queda:

$$x = \frac{\log 3}{\log 3 - \log 2} \quad \text{(¡comprobarlo!)}$$

- Finalmente, sustituyendo este valor de x en la ecuación (3) obtenemos:

$$y = \frac{\log 2}{\log 3 - \log 2} \quad \text{(¡comprobarlo!)}$$

Ejemplo 6

Se sabe que un material radiactivo se desintegra de acuerdo con la ecuación exponencial $f(t)=50\ e^{kt}$, siendo 50 mg la cantidad de material presente inicialmente. Si después de 2 horas se ha desintegrado el 10% del material original, hallemos:

a) El valor de la constante K

b) La masa de material después de 4 horas.

c) El tiempo al cabo del cual se ha desintegrado la mitad de su masa inicial.

Solución

a) Sabemos que $f(t) = 50\ e^{kt}$ y que para $t = 2$ horas la masa original se ha desintegrado un 10%; es decir, 5 mg. Por lo tanto, $f(2) = 50 - 5 = 45$ mg.

Reemplazando en la ecuación dada, obtenemos:

$$45 = 50\ e^{2k}$$
$$\therefore \ln 45 = \ln [\ 50\ e^{2k}\ ]$$
$$\therefore \ln 45 = \ln 50 + \ln e^{2k}$$
$$\therefore \ln 45 = \ln 50 + 2k \ln e$$

$$\therefore \ln \frac{45}{50} = 2k$$

$$\therefore k = \frac{1}{2} \ln \frac{45}{50}$$

$$\therefore k = -0{,}053$$

Este resultado significa que la cantidad de masa radiactiva presente en un momento dado t es:

$$f(t) = 50\, e^{-0{,}053t}$$

b) Queremos obtener f(4); es decir: $f(4) = 50e^{(-0{,}053)(4)} = 40{,}5$ mg.

c) Queremos saber al cabo de cuanto tiempo $f(t) = \frac{50}{2} = 25$. Veamos: $25 = 50^{e^{-0{,}053t}}$; luego, despejando t nos queda $t = 13$ horas.

EJERCICIO 9.4

En los ejercicios 1. y 2. dibuja a mano y usando DERIVE, las gráficas de las funciones señaladas y compararlas.

1 $y = \log_2 (2x)$ **2** $y = 1 + \log_2 x$

En los ejercicios 3. a 14., resuelve las ecuaciones dadas:

3 $10^x = 7$

4 $10^{5x-2} = 348$

5 $27 = 3^{-x}$

6 $\log(x + 2) - \log x = \log 12$

7 $e^{\ln 2} + 10^{\log 6} = 2x$

8 $3 = (1 + x)^{18}$

9 $\log (x^2 - 4) - \log (x + 2) = 3 \log (x - 2)$

10 $e^{\ln x} - 1 = 3$

11 $\ln (e^{x^2}) = 4$

12 $\log (\log x) = 2$

13 $x^{\sqrt{\log x}} = 10^8$

14 $\dfrac{10^x - 10^{-x}}{10^x + 10^{-x}} = \dfrac{1}{3}$

En los ejercicios 15. a 18., despeja la x:

15 $y = \dfrac{10^x + 10^{-x}}{2}$

16 $y = \dfrac{10^x - 10^{-x}}{10^x + 10^{-x}}$

17 $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

18 $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

19 La corriente eléctrica de cierto circuito está dada por la ecuación: $i = \frac{E}{R}(1 - e^{-\frac{Rt}{L}})$, donde E, R, L son constantes no nulas. Despeja el valor de t.

20 Resolver el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 2^x = 8^{y+1} \\ 9^y = 3^{x-9} \end{cases}$

21 La ley de enfriamiento de Newton establece que la rapidez a la cual un cuerpo cambia de temperatura es proporcional a la diferencia entre su temperatura y la del medio que lo rodea. Si un cuerpo está en el aire a una temperatura de 35° y el cuerpo se enfría de 120° a 60° en 40 minutos, entonces puede probarse que su temperatura, después de t minutos, es $T = 85e^{kt} + 35$. Se pide:

a) Hallar el valor de la constante k.
b) Hallar la temperatura al cabo de 20 minutos.
c) Hallar al cabo de cuánto tiempo la temperatura es 39°.

22 En un tanque hay 100 galones de agua salada que contiene 70 libras de sal disuelta. Si entra y sale agua fresca a una velocidad constante, entonces la cantidad de sal que hay en el tanque en un instante es $f(t) = 70e^{-0{,}03t}$.

a) ¿Cuántas libras de sal hay en el tanque al cabo de 1 hora?
b) ¿Al cabo de cuánto tiempo la cantidad de sal se ha reducido a la mitad?

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 3

Si $\log_2 5 = x$ entonces $\log_2 20$ es igual a:

a) $4x$ b) $x + 1$
c) $x + 2$ d) $x + 4$

TALLER DE REPASO DE LA UNIDAD 9

1. Dibuja a mano y usando DERIVE, la gráfica de la función $f = \{ (x, y) / y = 3^{x+2} \}$

2. Dibuja a mano y usando DERIVE, la gráfica de la función $f = \{ (x, y) / y = 2\log_3 x \}$

3. Reescribe cada una de las igualdades utilizando la notación logarítmica.

a) $5^0 = 1$ b) $8^{2/3} = 4$ c) $4^{-2} = \frac{1}{16}$
d) $8^{4/3} = 16$ e) $x^2 = y$

4. Reescribe cada una de las igualdades utilizando la notación exponencial.

a) $\log_{10} 10 = 1$ b) $\log_{36} 6 = ½$ c) $\log_2 \frac{1}{8} = -3$
d) $\log_2 x = y$ e) $\log_x y = 2$

5. Usa las propiedades de los logaritmos para verificar cada igualdad:

a) $\log (3x^2 + 6x) = \log 3 + \log x + \log (x + 2)$, si x es positivo

b) $\log \frac{49x^3}{13} = 2 \log 7 + 3 \log x - \log 13$, si x es positivo

c) $\log \frac{x^2}{(x-1)^3} = 2 \log x - 3 \log (x - 1)$, si $x - 1$ es positivo

6. Expresa como un logaritmo único con coeficiente 1, cada una de las siguientes expresiones:

a) $\log_b (x\,y\,z) - 2 \log_b w$ b) $\log_b (x + 1) - \log_b (y - z)$ c) $\frac{1}{3} \log_a y - \frac{2}{5} \log_a z$

7. Reescribe cada una de las ecuaciones dadas para expresar a y como una función de x.

a) $\log y = 3x + \log 2$

b) $2 \log y = 5x + 3 \log 10$

8. Usando logaritmos y la calculadora, halla el valor de cada una de las expresiones siguientes:

a) $\dfrac{(314 \times 10^7)^{2/5}}{(31{,}78)^2 \sqrt{917{,}6}}$

b) $\left[\dfrac{(0{,}03798)^2 (8349)^3}{4351 \times 10^3}\right]^{1/7}$

c) $\left[\dfrac{(3127 \times 10^{-6})^2 (72{,}31 \times 10^4)^3}{(317{,}4 \times 10^3)^4}\right]^{2/3}$

d) $\log_3 2{,}346$

e) $\log_e 1{,}285$

9. Determina el valor de x en cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $e^{-2x} e^{3x} = e^4$

b) $5^{x^2-3} = 25 \bullet 5^x$

c) $\log_8 16 + \log_8 (x - 2) = 2$

d) $\log_5 (3x + 7) - \log_5 (x - 5) = 2$

e) $\log_2 (x^2 - 3x + 6) - \log_2 (x - 1) = 2$

10. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} 2^{x-y} = 5 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 9^{2x-y} = 3 \\ 6x + 2y = 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 10^{x-3y} = 3 \\ \log 2x - \log y = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \log x + \log y = 4 \\ \log 2x - \log 5y = 1 \end{cases}$

11. La tasa de decrecimiento de un material está dada por la ecuación $A = ce^{kt}$. Si la mitad de la sustancia desaparece al cabo de 1690 años e inicialmente había 60 mg de ella, ¿al cabo de cuánto tiempo habrá 57,6 mg de sustancia?

12. En un tanque hay 100 millones de litros de agua salada que contiene 700 kg. de sal disuelta. Con el fin de disminuir la sal que contiene el agua, se echa al tanque agua dulce a razón de 3 millones de litros diarios, y la mezcla de agua y sal, que permanece uniforme al agitarla, sale a la misma razón. Si en un instante dado la cantidad de sal presente en el tanque es $x = ce^{-0{,}03\,t}$, determina al cabo de cuánto tiempo hay 115,71 kg de sal en el tanque.

PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS DEL ICFES

1. El valor de $2^{\log_2 a^5}$ es:

a) $2a^5$

b) 2^{a^5}

c) 5^a

d) 2^5

2. Se disponen los estudiantes de una clase de baile igualmente espaciados en círculo y luego se les asignan números consecutivos comenzando por el 1. El estudiante número 20 se encuentra diametralmente opuesto al estudiante número 53. El número de estudiantes que hay en la clase es:

a) 60

b) 62

c) 64

d) 66

3. Si x,y >0, $\log_y x + \log_x y = \frac{10}{3}$ y $xy=144$, entonces el resultado de $\frac{x+y}{2}$ es:

a) $12\sqrt{2}$ b) $13\sqrt{3}$ c) 24 d) 30

4. 10 personas se forman en círculo. Cada una escoge un número y lo revela a sus dos vecinos en el círculo.
Cada persona toma el promedio de sus dos vecinos en el círculo y lo dice en voz alta. La figura muestra los promedios dados en voz alta por cada una de las personas (no muestra el número que cada persona escogió originalmente).
El número que escogió la persona que dio el promedio 6 fue:

10 1
9 2
8 3
7 4
6 5

a) 1 b) 5

c) 6 d) 10

5. En un examen todas las preguntas tienen el mismo valor. Si usted responde 9 de las primeras 10 preguntas correctamente, pero sólo $\frac{3}{10}$ de las restantes correctamente, obtiene un puntaje del 50% para todo el examen. El número de preguntas del examen es:

a) 60 b) 40 c) 20 d) 30

DIMENSIONES

Núcleo Temático

10

SUCESIONES Y PROGRESIONES

LOGRO GENERAL

Identificar sucesiones con su respectiva ley de formación.

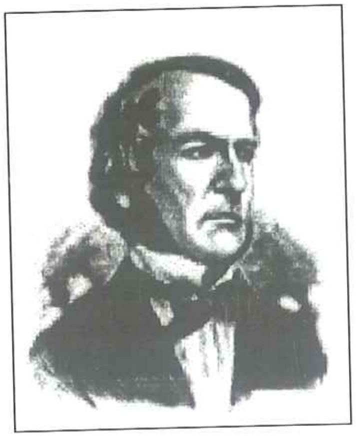
DIMENSIONES

LOGROS ESPECÍFICOS	INDICADORES DE LOGRO
Corporal • Realizar experiencias que favorezcan la adquisición de los conceptos de progresión aritmética y de progresión geométrica.	• Escribe los primeros 10 términos de la progresión 3,5 ,7,... • Determina el octavo término de la progresión 2,6,18,...
Comunicativa • Explicar cómo se halla el término n-simo de una progresión aritmética y de una geométrica. • Explicar el significado de la notación $\sum_{n=1}^{p} f_n$.	• Se integra en grupos para describir oralmente cómo se halla el término n-simo de una progresión aritmética o geométrica. • Interpreta con sus palabras el significado de la notación $\sum_{n=1}^{p} f_n$.
Cognitiva • Identificar sucesiones que son progresiones aritméticas o geométricas. • Hallar el término n-simo de una progresión geométrica o aritmética. • Encontrar la suma de los n primeros términos de una progresión aritmética o geométrica.	• Encuentra la diferencia de una progresión aritmética y la razón de una progresión geométrica. • Halla la suma de los 50 primeros términos de una progresión aritmética y de una geométrica.
Estética • Elaborar una cartelera con las propiedades del operador sumatoria (Σ)	• Diseña una cartelera con las propiedades del operador Σ.
Etica-Actitudinal • Destacar la contribución de la matemática en la solución de problemas prácticos.	• Demuestra interés por aprender.

EVALUACIÓN

ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS

10.1 HISTORIA DEL ALGEBRA (20): GEORGE BOOLE



George Boole, como algunos de los otros precusores de la matemática, procedía de los estratos económicos más bajos de la sociedad. Nació el 2 de noviembre de 1815 en Lincoln, Inglaterra, siendo hijo de un modesto tendero. Como en la escuela a la que Boole podía asistir no enseñaban latín, decidió aprender latín y griego por su cuenta, con el fin de alcanzar una posición. A los 12 años sabía el latín suficiente para traducir en versos ingleses una oda de Horacio.

Boole recibió su primera instrucción matemática de su padre, quien gracias a sus esfuerzos privados, había aprendido mucho más de lo que le enseñaron en la escuela. Teniendo 20 años, Boole abrió una escuela para preparar alumnos y enseñarles matemáticas como debía ser enseñada.

Pronto los ordinarios y excecrables manuales que le producían admiración, provocarían su desprecio. ¿Sería esto por ventura la matemática? ¡increible!

Sus conocimientos matemáticos no iban más allá de los rudimentos, pero su capacidad mental era extraordinaria. Sin ayuda de nadie leyó la "Mecánica Celeste" de Laplace, una de las obras más difíciles de asimilar para un estudioso consciente, pues el razonamiento matemático está lleno de lagunas y de declaraciones enigmáticas.

Otra de las conquistas de Boole fue el descubrimiento de los invariantes que habrían de desarrollar en gran escala Cayley y Sylvester, y sin los cuales la teoría de la relatividad hubiera sido imposible.

Fue uno de los "reformadores" británicos ya que contribuyó a la comprensión del Álgebra como Álgebra, es decir como el desarrollo abstracto de la consecuencia de una serie de postulados, sin una interpretación o aplicación obligada a "números o a cualquier otra cosa", pudiendo decirse que ayudó a la concepción moderna del álgebra.

La renovación del álgebra dio a Boole su primera oportunidad para hacer una obra sobresaliente, apreciada por sus contemporáneos. Por su propia iniciativa separó los símbolos de las operaciones matemáticas de aquellas cosas sobre las cuales actúan, y procedió a investigar esas operaciones por su propia cuenta. ¿Cómo se combinan? ¿Se sujetan a algún tipo de Algebra Simbólica? Encontró que así era. Su obra en esta dirección es extraordinariamente interesante, pero pasa a un segundo plano ante otra que es más propia de él: la creación de un sistema sencillo de lógica simbólica o matemática.

En 1849 tuvo oportunidad de mostrar su notable capacidad como investigador y maestro. Fue nombrado profesor en el Quee´s College, recientemente fundado en la ciudad de Cork, irlanda. Como ocurre con casi todas las novedades, la lógica simbólica fue despreciada durante muchos años después de su invención; en 1910 se encuentran matemáticos que la consideran despectivamente como una curiosidad "filosófica".

Murió rodeado de honores y con una fama cada vez mayor, el 8 de diciembre de 1864 a los 50 años. Boole se dio perfecta cuenta de que había hecho una gran obra.

EJERCICIO 10.1

Lee nuevamente el texto anterior y luego encierra en un círculo, la letra que corresponda a la respuesta correcta:

1. El título más apropiado para el escrito anterior podría ser:
   a. Un políglota en el mundo de las matemáticas.
   b. El triunfo de un hombre humilde.
   c. George Boole: Una vida dedicada a la matemática.
   d. La constancia de un hombre de ciencia.

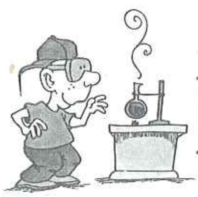
2. En el texto, se habla de ordinarios y execrables manuales, para referirse a unos libros de matemáticas. El adjetivo **execrables** significa:
   a. Prohibidos o ilícitos.
   b. De contenido complejo; difíciles de comprender.
   c. Demasiado elementales.
   d. Reprobables o condenables.

3. Dentro del texto se considera a Boole como:
   a. Maestro de maestros de la ciencia algebraica.
   b. El genio matemático hijo de humilde tendero.
   c. Un talento rico de ascendencia humilde.
   d. Uno de los grandes reformadores del álgebra.

4. El propósito específico del autor con el escrito anterior es:
   a. Demostrar que los grandes matemáticos nacen en hogares humildes.
   b. Explicar una fase en el desarrollo de las matemáticas.
   c. Destacar el trabajo de Boole en la renovación del álgebra.
   d. Exponer los principios fundamentales del álgebra moderna.

5. De Georges Boole se dice todo lo siguiente, con excepción de:
   a. Descubrimiento de los invariantes.
   b. Fue docente destacado en el área de las matemáticas.
   c. De extraordinaria capacidad mental y excelente lector.
   d. Tradujo al inglés los clásicos romanos y griegos.

10.2 CONCEPTO DE SUCESIÓN



EXPERIENCIA

- Frecuentemente en matemáticas necesitamos manejar conjuntos de números, cada uno de los cuales puede ser obtenido del número anterior, mediante la aplicación de una operación o por el uso de una regla o ley que determine su formación. Conjuntos como estos se denominan SUCESIONES y a su estudio nos dedicaremos en esta unidad. Consideremos, por ejemplo, el siguiente conjunto de números:

$$1, 4, 9, 16, 25, \ldots$$

- A simple vista no parece haber ninguna relación o concordancia entre sus elementos; sin embargo, si escribimos este conjunto así:

$$1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, \ldots$$

encontramos que corresponden a los cuadrados de los números naturales, en su orden; es decir, empezando por el 1, a cada uno de los números naturales le corresponde exactamente su cuadrado. Veamos:

$$\begin{array}{lcl}
1 & \rightarrow & 1^2 = 1 \\
2 & \rightarrow & 2^2 = 4 \\
3 & \rightarrow & 3^2 = 9 \\
4 & \rightarrow & 4^2 = 16 \\
5 & \rightarrow & 5^2 = 25 \\
\vdots & & \vdots \\
n & \rightarrow & n^2
\end{array}$$

- Esta correspondencia es una función **f** del conjunto **N** de los números naturales en el conjunto **R** de los números reales. Cada elemento del conjunto de llegada 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2,... se denomina un TERMINO DE LA SUCESIÓN. El término de **orden n** o **n-simo término** de la sucesión, podemos escribirlo usando la notación de función, así:

$$\mathbf{f(n) = n^2}$$

siendo **n** un número natural. Esta función se denomina una **SUCESIÓN.**

APRENDAMOS

CONCEPTO DE SUCESIÓN

- Una **SUCESIÓN** es una función cuyo dominio es el conjunto de los números naturales o un subconjunto de él.
- Si el dominio es un subconjunto finito de números naturales, entonces la sucesión es FINITA.

Ejemplo 1

El conjunto f = { (1, 3) , (2, 5) , (3, 7) , (4, 9),... } es una sucesión infinita cuyo término n-simo es $f(n) = 2n + 1$, con $n \in N$.

Ejemplo 2

El conjunto g = { (1, 3) , (2, 6) , (3, 9) , (4, 12), (5, 15)} es una sucesión finita en la cual $g(n) = 3n$, con $n \in N$ y $1 \leq n \leq 5$.

Ejemplo 3

El conjunto h = { (1, 1/2) , (2, 2/3) , (3, 3/4) , (4, 4/5) } es una sucesión finita en la cual

$h(n) = \frac{n}{n+1}$, $n \in N$ y $1 \leq n \leq 4$.

¡ATENCIÓN!

1. Como el dominio de una sucesión es N o un subconjunto finito de N, entonces podemos describirla simplemente enumerando los elementos del rango en el orden de los números naturales con los cuales se asocian.

Por ejemplo la sucesión:

$$f = \{ (n, f(n)) \,/\, n \in N \}$$

se puede escribir así:

$$f(1),\ f(2),\ f(3), \ldots,\ f(n) \ldots$$

Sin embargo, adoptaremos una notación más simple, utilizando subíndices:

$$\begin{aligned} f(1) &= f_1 \\ f(2) &= f_2 \\ f(3) &= f_3 \\ &\vdots \\ f(n) &= f_n \end{aligned}$$

Por lo tanto, la sucesión la representamos por: $f_n = f_1, f_2, f_3, f_4, \ldots f_n \ldots$

f_1 es el **PRIMER TÉRMINO** de la sucesión.

f_2 es el **SEGUNDO TÉRMINO** de la sucesión.

f_3 es el **TERCER TÉRMINO** de la sucesión.

$\vdots$

f_n es el **n-SIMO TÉRMINO** de la sucesión.

En el ejemplo 1, como $f_n = n^2$, entonces $f_n = n^2 = 1, 4, 9, 16, 25, \ldots n^2, \ldots$ y leemos: **f es la sucesión cuyo n-simo término es n^2**.

Para hallar el octavo término de esta sucesión, basta hacer n = 8 en la fórmula $f_n = n^2$; es decir: $f_8 = 8^2 = 64$

2. Un ejercicio interesante consiste en determinar el n-simo término de una sucesión cuando conocemos los cuatro o cinco primeros términos de la misma.

Ejemplo 4

Hallemos el n-simo término de las siguientes sucesiones:

a) $\frac{1}{3}, \frac{4}{5}, \frac{9}{7}, \frac{16}{9}, \frac{25}{11}, \ldots$

b) $\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{8}{9}, \frac{16}{12}, \frac{32}{15}, \ldots$

c) $-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, -\frac{5}{6}, \ldots$

Solución

a) Los numeradores corresponden a la sucesión de los cuadrados de los números naturales; es decir, n^2.

Los denominadores corresponden a la sucesión de los números impares, a partir del segundo; es decir, $2n + 1$.

Por lo tanto, $\frac{n^2}{2n+1}$ es el n-simo término.

b) Numeradores: sucesión de las potencias de 2; es decir, 2^n.

Denominadores: sucesión de los múltiplos de 3; es decir, $3n$.

Por lo tanto, el n-simo término de esta sucesión es $\frac{2^n}{3n}$.

c) El problema lo constituye la alternación de los signos. Por esta razón, hallemos primero el n-simo término sin tener en cuenta los signos; es decir: $\frac{n}{n+1}$.

Ahora, para obtener la alternación de los signos basta multiplicar a $\frac{n}{n+1}$ por $(-1)^n$. En consecuencia, el n-simo término es $(-1)^n \bullet \frac{n}{n+1}$.

¿Qué pasa si la alternación de los signos se da al contrario; es decir: +, -, +, -,...?

10.3 EL OPERADOR SUMATORIA (Σ)

- Frecuentemente es necesario considerar la suma de un número finito de términos consecutivos de una sucesión. Por ejemplo:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7$$
$$2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18$$
$$2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128$$

- Estos son cálculos aritméticos sencillos, pero lentos. Más adelante, desarrollaremos fórmulas para calcular este tipo de sumas rápidamente. Por ahora, sólo queremos introducir un símbolo que nos permita escribir la suma sin usar todos los términos de la sucesión. Para ello, utilizamos la letra griega Σ (sigma), seguida de la fórmula para el término n-simo e indicaremos los términos que se van a sumar escribiendo números arriba y abajo de Σ. Por ejemplo:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = \sum_{n=1}^{7} n$$

$$2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18 = \sum_{n=1}^{9} 2n$$

$$2 + 4 + 8 + 16 + 32 + + 64 + 128 = \sum_{n=1}^{7} 2^n$$

$1 + 3 + 5 + 8 + 15$: No se puede expresar mediante el uso del operador Σ.

APRENDAMOS

EL OPERADOR Σ

- Para expresar la suma $f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_p$ de los términos de una sucesión usamos la letra griega Σ (sigma) así:

$$\sum_{n=1}^{p} f_n = f_1 + f_2 + f_3 + \ldots f_p \text{ ; con } n, p \in N, n \leq p$$

y leemos: **"la sumatoria desde 1 hasta p de f_n es igual a $f_1 + f_2 + f_3 + \ldots f_p$".**

- Los números naturales 1 y p son los extremos inferior y superior de la suma.

PROPIEDADES DEL OPERADOR Σ

P - 1: Si c es una constante cualquiera entonces:

$$\sum_{n=1}^{p} c \cdot f_n = c \cdot \sum_{n=1}^{p} f_n$$

Esta propiedad establece que si una constante está multiplicando a una sucesión dentro del operador Σ, entonces dicha constante puede colocarse fuera de Σ.

Demostración

Explica cada paso de la demostración:

1. $\sum_{n=1}^{p} c \bullet f_n = c \bullet f_1 + c \bullet f_2 + c \bullet f_3 + \dots + c \bullet f_p$ .... ¿Por qué?

2. $\sum_{n=1}^{p} c \bullet f_n = c \bullet \underbrace{(f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_p)}$ .... ¿Por qué?

3. $\sum_{n=1}^{p} c \bullet f_n = c \bullet \sum_{n=1}^{p} f_n$ .... ¿Por qué?

4. Luego, $\sum_{n=1}^{p} c \bullet f_n = c \bullet \sum_{n=1}^{p} f_n$ .... ¿Por qué?

P - 2: Si c es una constante cualquiera, entonces:

$$\sum_{n=1}^{p} c = pc$$

Demostración:

Explica cada paso de la demostración:

1. $\sum_{n=1}^{p} c = \sum_{n=1}^{p} c \bullet 1^n$ ....ya que $c = c \bullet 1^n$

2. $\sum_{n=1}^{p} c = c \bullet 1^1 + c \bullet 1^2 + \dots + c \bullet 1^p$..¿por qué?

3. $\sum_{n=1}^{p} c = \underbrace{c + c + c + \dots + c}_{\text{p veces}}$ ....¿por qué?

4. $\sum_{n=1}^{p} c = p \bullet c$ ....¿por qué?

5. Luego, $\sum_{n=1}^{p} c = p \bullet c$

$$\textbf{P - 3: } \sum_{n=1}^{p} (f_n \pm g_n) = \sum_{n=1}^{p} f_n \pm \sum_{n=1}^{p} g_n$$

Esta propiedad establece que la sumatoria de una suma o resta de sucesiones es igual a la suma o resta de las sumatorias de cada sucesión.

Demostración

Explica cada paso de la demostración:

1. $\sum_{n=1}^{p} (f_n + g_n) = (f_1 + g_1) + (f_2 + g_2) + \dots + (f_p + g_p)$...................Definición de sumatoria.

2. $\sum_{n=1}^{p} (f_n + g_n) = \underbrace{(f_1 + f_2 + \dots + f_p)} + \underbrace{(g_1 + g_2 + \dots + g_p)}$..............Propiedad asociativa de la suma.

3. $\sum_{n=1}^{p} (f_n + g_n) = \sum_{n=1}^{p} f_n + \sum_{n=1}^{p} g_n$ ....¿Por qué?

4. Por lo tanto: $\sum_{n=1}^{p} (f_n + g_n) = \sum_{n=1}^{p} f_n + \sum_{n=1}^{p} g_n$ ....¿Por qué?

¡ATENCIÓN!

1. No existen propiedades para la sumatoria de un producto, la sumatoria de un cociente y la sumatoria de una potencia; es decir:

a) $\sum_{n=1}^{p} f_n \cdot g_n \neq \sum_{n=1}^{p} f_n \cdot \sum_{n=1}^{p} g_n$ b) $\sum_{n=1}^{p} \frac{f_n}{g_n} \neq \frac{\sum_{n=1}^{p} f_n}{\sum_{n=1}^{p} g_n}$ c) $\sum f_n^2 \neq \left(\sum f_n\right)^2$

2. Las siguientes propiedades son muy útiles, especialmente en el estudio del cálculo integral, por lo cual conviene tenerlas muy presentes., aunque no demostraremos ninguna de ellas.

$$\textbf{P - 4: } \sum_{n=1}^{p} n = 1 + 2 + 3 + \ldots + p = \frac{p(p+1)}{2}$$

$$\textbf{P - 5: } \sum_{n=1}^{p} n^2 = 1 + 4 + 9 + \ldots + p^2 = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6}$$

$$\textbf{P - 6: } \sum_{n=1}^{p} n^3 = 1 + 8 + 27 + \ldots + p^3 = \frac{p^2(p+1)^2}{4}$$

Ejemplo: Hallemos el valor de $\sum_{n=1}^{10} (3n^2 - 4n + 5)$

Teniendo en cuenta P - 3 podemos escribir:

$$\sum_{n=1}^{10} (3n^2 - 4n + 5) = \sum_{n=1}^{10} 3n^2 - \sum_{n=1}^{10} 4n + \sum_{n=1}^{10} 5$$

Ahora bien:

$$\sum_{n=1}^{10} 3\,n^2 = 3\sum_{n=1}^{10} n^2 = 3\,(1 + 4 + 9 + \ldots + 10^2) = 3\,\frac{10\,(10+1)\,(20+1)}{6}$$ ...... ¿por qué?

$$\sum_{n=1}^{10} 4\,n = 4\sum_{n=1}^{10} n = 4\,(1 + 2 + 3 + \ldots + 10) = 4\,\frac{10\,(10+1)}{2}$$ .... ¿por qué?

$$\sum_{n=1}^{10} 5 = 5 \cdot 10$$ .... ¿por qué?

Por lo tanto:

$$\sum_{n=1}^{10} (3n^2 - 4n + 5) = 3\,\frac{10\,(10+1)\,(20+1)}{6} + 4\,\frac{10\,(10+1)}{2} + 5 \cdot 10$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{10} (3n^2 - 4n + 5) = 3\,\frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} + 4\,\frac{10 \cdot 11}{2} + 50$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{10} (3n^2 - 4n + 5) = (3) \cdot (385) + (4) \cdot (55) + 50 = 1155 + 220 + 50 = 1425$$

EJERCICIO 10.2

1 Halla los cinco primeros términos de las siguientes sucesiones:

a) $\left\{ \dfrac{n-2}{n+1} \right\}$ b) $\left\{ \dfrac{n+1}{3n} \right\}$ c) $\left\{ \dfrac{n^3}{n^3+1} \right\}$

d) $\left\{ \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} \right\}$ e) $\left\{ \dfrac{2n}{n^3+1} \right\}$ f) $\left\{ \dfrac{2n^2+3}{4n^2+5} \right\}$

g) 1, 1, 1, ... h) $\left\{ \dfrac{3n+2}{n} \right\}$ i) $\left\{ n \bullet 3^{n-1} \right\}$

2 Halla el n-simo término de las siguientes sucesiones:

a) $\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \dfrac{5}{6}, \dfrac{6}{7}, \dfrac{7}{8}, \ldots$ b) 0, 1, 0, 1, 0, 1,...

c) $1, -\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{5}, -\dfrac{1}{7}, \ldots$ d) $1, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{9}, \dfrac{1}{16}, \dfrac{1}{25}, \ldots$

e) $\dfrac{1}{2}, -\dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, -\dfrac{4}{5}, \dfrac{5}{6}, \ldots$ f) $1, -\dfrac{2}{9}, \dfrac{3}{25}, -\dfrac{4}{49}, \dfrac{5}{81}, \ldots$

g) 2, 6, 10, 14, 18,... h) -1, 1, -1, 1, -1,...

3 Halla el término cincuenta de la sucesión $\{3n - 1\}$.

4 Expresa las sumas dadas en los siguientes ejercicios, en forma desarrollada, simplificando cada término:

a) $\sum_{n=1}^{p} (n+3)$ b) $\sum_{n=1}^{p} \dfrac{n}{1+n}$ c) $\sum_{i=1}^{p} (3i-2)$

d) $\sum_{k=0}^{p} \dfrac{k}{(1+k)^k}$ e) $\sum_{n=0}^{p} \dfrac{(-1)^n}{3^n+1}$ f) $\sum_{i=1}^{p} (-1)^{i+1}(i^2-1)$

5 Escribe las siguientes expresiones usando el símbolo $\sum$:

a) $1 \bullet 2 - 3 \bullet 4 + 5 \bullet 6 - 7 \bullet 8$ b) $\dfrac{3}{5} + \dfrac{5}{7} + \dfrac{7}{9} + \dfrac{9}{11} + \ldots + \dfrac{57}{59}$

c) $1^2 + 2^3 + 3^4 + 4^5 + \ldots + 100^{101}$ d) $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + 100^2$

e) $a_1b_2 + a_2b_3 + a_3b_4 + a_4b_5 + a_5b_6$ f) $1 + \dfrac{1}{2\sqrt{2}} + \dfrac{1}{3\sqrt{3}} + \ldots + \dfrac{1}{15\sqrt{15}}$

g) $\log(2) - \log\left(\dfrac{3}{2}\right) + \log\left(\dfrac{4}{3}\right) - \log\left(\dfrac{5}{4}\right)$

h) $3 \bullet 4 \bullet 5 + 4 \bullet 5 \bullet 6 + 5 \bullet 6 \bullet 7 + \ldots + K(K+1)(K+2)$

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 1

Todos los neumáticos están hechos de goma. La goma siempre es flexible. Algunas veces la goma es negra. Entre las siguientes proposiciones, sólo dos son ciertas, ¿cuáles son?

1. Todos los neumáticos son flexibles y negros.
2. Todos los neumáticos son negros.
3. Sólo algunos neumáticos están hechos de goma.
4. Todos los neumáticos son flexibles.
5. Todos los neumáticos son flexibles y están hechos de goma.

10.4 PROGRESIONES ARITMÉTICAS

10.4.1 Concepto

EXPERIENCIA

- Consideremos las siguientes sucesiones:

(1) 2, 7, 12, 17, 22,... (2) $\frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$, 2, $\frac{5}{2}$, 3,... (3) -3, -5, -7, -9, -11, -13,...

- Observemos que en la sucesión (1), cada uno de los términos es igual al anterior más 5; en la (2), cada término es igual al anterior más $\frac{1}{2}$; en la (3), cada término es igual al anterior más (-2)
- Cada una de las sucesiones anteriores es una PROGRESIÓN ARITMÉTICA.

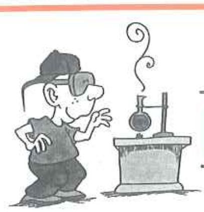
APRENDAMOS

DEFINICIÓN DE PROGRESIÓN ARITMÉTICA

Una sucesión f_1, f_2, f_3,..., f_n,... se llama **PROGRESIÓN ARITMÉTICA** cuando cada término se deduce del anterior sumándole un número fijo d.

El número **d** es la **DIFERENCIA** de la progresión. Puede ser positivo o negativo; en el primer caso, la progresión es creciente; en el segundo, decreciente.

10.4.2 Cálculo de un Término Cualquiera de una Progresión Aritmética



EXPERIENCIA

- Dada una progresión aritmética, es fácil encontrar una fórmula para hallar el n-simo término cuando se conoce el número de términos **(n)** y el primer término **(f_1)**. En efecto: como $f_2 = f_1 + d$ y $f_3 = f_2 + d$, entonces:

$$f_3 = (f_1 + d) + d$$
$$\therefore f_3 = f_1 + 2d$$

- En forma similar, podemos obtener que:

$$f_4 = f_3 + d \qquad f_5 = f_4 + d$$
$$\therefore f_4 = (f_1 + 2d) + d \qquad \therefore f_5 = (f_1 + 3d) + d$$
$$\therefore f_4 = f_1 + 3d \qquad \therefore f_5 = f_1 + 4d$$

- En general:

APRENDAMOS

TÉRMINO n-ESIMO DE UNA PROGRESIÓN ARITMÉTICA

El n-simo término de una progresión aritmética está dado por:

$$\mathbf{f_n = f_1 + (n - 1)\, d}$$

Ejemplo 1

Hallemos el 11° término de la progresión 5, 9, 13, 17,...

Solución

- Datos: $f_1 = 5$, $n = 11$, $d = 4$; hallemos f_{11}.
- Como: $f_n = f_1 + (n - 1)\, d$, entonces $f_{11} = 5 + (11 - 1)\, 4 = 5 + 40 = 45$.

Ejemplo 2

Calculemos la diferencia de la progresión aritmética cuyo primer término es 21 y el último -35, siendo 15 el número de sus términos.

Solución

- Datos: $f_1 = 21$, $f_n = -35$, $n = 15$; hallemos d.
- Tenemos: $f_n = f_1 + (n - 1)\, d$; luego, $d = \dfrac{f_n - f_1}{n - 1}$
- Por lo tanto: $d = \dfrac{-35-21}{15-1} = -\dfrac{56}{14} = -4$

Ejemplo 3

Hallemos el número de términos de una progresión aritmética cuyos extremos son 15 y 48 y la diferencia es 3.

Solución

- Datos: $f_1 = 15$, $f_n = 48$, $d = 3$; hallemos n
- Tenemos: $f_n = f_1 + (n - 1)\, d$; luego, despejando n de esta ecuación nos queda:

$$n = \frac{f_n - f_1}{d} + 1 = \frac{48 - 15}{3} + 1 = 11 + 1 = 12$$

Ejemplo 4

El 12^0 término de una progresión aritmética es -21 y el 25^0 término es 18. ¿Cuál es el cuarto término?

Solución

- Tenemos una progresión aritmética de 25 términos; es decir:

$$f_1, f_2, f_3, \ldots, f_{12}, \ldots, f_{25}$$

- Por lo tanto, usando la fórmula $f_n = f_1 + (n - 1)\,d$, con $n = 25$ y $f_{25} = 18$, obtenemos:

$$f_{25} = f_1 + (25 - 1)\,d$$

$$\therefore \quad \boxed{18 = f_1 + 24\,d \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (1)}$$

- Ahora bien, los doce primeros términos forman una progresión aritmética, con $n = 12$, $f_{12} = -21$. Por lo tanto:

$$f_{12} = f_1 + (12 - 1)\,d$$

$$\therefore \boxed{-21 = f_1 + 11\,d \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)}$$

- Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2) obtenemos:

$$\begin{cases} f_1 = -54 \\ d = 3 \end{cases}$$

Luego: $f_4 = -54 + (4 - 1)(3) = -54 + 9 = -45$

¡ATENCIÓN!

En toda progresión aritmética, los términos comprendidos entre el primero y el último se denominan MEDIOS ARITMÉTICOS entre dichos elementos. Por ejemplo, en la sucesión:

$$3, \underbrace{7, 11, 15, 19, 23}_{\text{Medios aritméticos}}, 27$$

los elementos 7, 11, 15, 19, 23 son cinco medios aritméticos entre 3 y 27.

Ejemplo 5

Hallemos tres medios aritméticos entre 16 y 32.

Solución

- Supongamos que f_2, f_3 y f_4 son los tres medios aritméticos que debemos encontrar. Por lo tanto, tenemos la progresión aritmética: 16, f_2, f_3, f_4, 32 con $n=5$. Aplicando la fórmula $f_n = f_1 + (n - 1)\,d$ obtenemos:

$$32 = 16 + (5 - 1)\,d$$
$$\therefore 32 - 16 = 4\,d$$
$$\therefore 16 = 4\,d$$
$$\therefore d = 4$$

- Luego: $f_2 = 16 + 4 = 20$; $f_3 = 20 + 4 = 24$; $f_4 = 24 + 4 = 28$

EXPERIENCIA

- Consideremos la sucesión: $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$. La suma de los n primeros términos de esta sucesión podemos escribirla así:

$$S_n = f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_n = \sum_{1}^{n} f_n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

- Si la sucesión dada es una progresión aritmética, entonces existe una diferencia común, d, entre sus términos y la igualdad (1) podemos escribirla así:

$$S_n = f_1 + (f_1 + d) + (f_1 + 2d) + \ldots + (f_n - 2d) + (f_n - d) + f_n \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

- Ahora, escribiendo el lado derecho de la igualdad (2) en orden contrario, obtenemos:

$$S_n = f_n + (f_n - d) + (f_n - 2d) + \ldots + (f_1 + 2d) + (f_1 + d) + f_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

- Y si sumamos miembro a miembro las igualdades (2) y (3) nos queda:

$$2\,S_n = \underbrace{(f_1 + f_n) + (f_1 + f_n) + (f_1 + f_n) + \ldots + (f_1 + f_n) + (f_1 + f_n)}_{\text{n veces}}$$

$$\therefore\ 2\,S_n = n\,(f_1 + f_n)$$

$$\therefore\ S_n = \frac{n\,(f_1 + f_n)}{2}$$

APRENDAMOS

Teorema: SUMA DE LOS TÉRMINOS DE UNA PROGRESIÓN ARITMÉTICA

La SUMA DE LOS TÉRMINOS DE UNA PROGRESIÓN ARITMÉTICA es igual a la semisuma de los extremos por el número de términos.

$$\mathbf{S_n = \frac{f_1 + f_n}{2} \cdot n}$$

¡ATENCIÓN!

Si tenemos en cuenta que $\mathbf{f_n = f_1 + (n - 1)\,d}$ entonces reemplazando en la ecuación anterior, tenemos:

$$\mathbf{S_n = \frac{f_1 + f_1 + (n - 1)\,d}{2} \cdot n}$$

$$\mathbf{\therefore\ S_n = \frac{2f_1 + (n - 1)\,d}{2} \cdot n}$$

Ejemplo 1

Demostremos que la suma de los **n** primeros números impares es $\mathbf{n^2}$.

Solución

- Los números impares constituyen una progresión aritmética de razón 2; así:

$$1, 3, 5, 7, \dots, (2n - 1)$$

- Por lo tanto: $S_n = \dfrac{(2n-1)+1}{2} \bullet n = \dfrac{2n}{2} \bullet n = n^2$

Ejemplo 2

Calculemos el camino recorrido por un viajero durante 15 días, sabiendo que el primer día recorrió 12 km y en los días siguientes disminuyó en 200 metros el recorrido, con respecto al día anterior.

Solución

- Tenemos la progresión aritmética:

$$12000,\ 11800,\ 11600,\ 11400, \dots$$

- Por lo tanto:

$$S_n = \frac{2f_1 + (n-1)d}{2} \bullet n = \frac{2(12000) + (15-1) \bullet (-200)}{2} \bullet 15$$

$$\therefore S_n = \frac{24000 + (14) \bullet (-200)}{2} \bullet 15 = \frac{24000 - 2800}{2} \bullet 15$$

$$\therefore S_n = \frac{21200}{2} \bullet 15 = (10600) \bullet (15) = 159000 \text{ m} = 159 \text{ km}$$

EJERCICIO 10.3

1. Indica cuáles de las siguientes sucesiones son progresiones aritméticas:

   a) 4, 8, 12, 16, 20

   b) 27, 23, 30, 16, 10

   c) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$

   d) 4, -7, 14, -21

   e) 5a, 7a, 9a, 11a

   f) 5a, 5a - 1, 5a - 6, 5a - 9

2. Halla el quinto término de una progresión aritmética cuyo primer término es 5 y cuya diferencia es 4.

3. Calcula la diferencia de la progresión aritmética cuyo primer término es 12, el último 42 y el número de términos 11.

4. Halla el número de términos de una progresión aritmética cuyo último y primer término son respectivamente 126 y 42, y la diferencia 7.

5. a) Halla 10 medios aritméticos entre 4 y 26.

   b) Halla 8 medios aritméticos entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{4}$

   c) Halla 7 medios aritméticos entre 7 y -9

6 Calcula la suma de:

a) 5 términos de la progresión 36, 30, 24, 18, 12,...

b) 20 términos de la progresión 4, $4\frac{1}{2}$, 5, $5\frac{1}{2}$, 6,...

c) 10 términos de la progresión $-4\frac{1}{2}$, $-2\frac{3}{4}$, -1, ...

d) 9 términos de la progresión (2a - 4), (2a - 1), (2a + 2), ...

7 Calcula la suma de los n primeros números:

a) naturales b) pares c) impares

8 ¿Qué valor numérico debe tener z para que las expresiones $2(z-1)$; z^2+1; $5z+1$, formen una progresión aritmética?

9 ¿Qué valor numérico debe tener b para que las expresiones b^2+1; $4b+1$; $4b^2+4$ sean tres términos consecutivos de una progresión aritmética? Escribe las progresiones.

10 Halla $f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(30)$, si $f(x)=2x+3$, con $x \in N$.

11 En una progresión aritmética de 10 términos, el 2º y el 9º suman 35, si el 4º término vale 13, ¿cuánto valdrá el 7º?

12 ¿Forman progresión aritmética las expresiones x^2-3x+1; x^2+1; x^2+3x+1; x^2+6x+1? Si la respuesta es verdadera, halla la diferencia y el 6º término.

13 a) Halla tres medios aritméticos entre 2 y 14.
b) Halla cuatro medios aritméticos entre 1 y 21.
c) Halla cinco medios aritméticos entre 21 y -3.

14 Halla la suma de todos los múltiplos de 3, de 9 a 27, incluidos ambos.

15 Halla la suma de todos los múltiplos de 6, comprendidos entre 11 y 58.

16 ¿Cuántas campanadas da un reloj en 24 horas, si no suena más que a las horas exactas?

17 Luis ahorró el primer mes 3.000 dólares. Si cada mes ahorra 100 dólares ¿cuántos meses tendrá que ahorrar para tener 60.000 dólares?

18 La suma de los 3 términos de una progresión aritmética es 36 y su producto 1680. Calcula los 3 términos.

19 La calificación de un estudiante fue de 41 puntos en el primero de 7 exámenes de álgebra y en cada examen siguiente obtuvo 8 puntos más que en el examen anterior. ¿Cuánto obtuvo en el último examen?

20 En un aserrío hay un montón de troncos con 31 troncos en la hilera del suelo y con un tronco menos en la hilera inmediatamente anterior. Calcula cuántos troncos hay en la hilera superior si el total de troncos es 286.

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 2

Un fabricante de jugos de fruta tiene una mezcla de 100 kilolitros que contiene w% de jugo puro de naranja. Si se le añade x kilolitros de una mezcla que contiene un y% de jugo puro de naranja, el fabricante pretende producir una mezcla que contiene un z% de jugo puro de naranja. El valor de x está dado por:

a) $\dfrac{100(100x-w)}{y}$ b) $\dfrac{100(100-w)}{y+100z}$ c) $\dfrac{10000z}{y+100w}$ d) $\dfrac{100(z-w)}{y-z}$

10.5 PROGRESIONES GEOMÉTRICAS

10.5.1 Concepto

EXPERIENCIA

- Cuenta la leyenda que Sessa, inventor del ajedrez, presentó su juego al príncipe indio Scheran, que se comprometió a darle en recompensa lo que pidiera. Sessa pidió un grano de trigo por el primer cuadro, dos por el segundo, cuatro por el tercero, y así sucesivamente hasta el cuadro 64. ¿Cuántos granos pidió?

- Este problema, aparentemente largo y complejo, podemos resolverlo en forma inmediata a partir de las progresiones geométricas. Te invitamos a resolverlo al finalizar esta unidad.

- Observemos ahora las siguientes sucesiones:

1) 2, 6, 18, 54, 162,... 2) 3, -3, 3, -3, 3, -3,... 3) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$

Podemos comprobar que:

* En la primera, cada término es igual al anterior multiplicado por 3.
* En la segunda, cada término es igual al anterior multiplicado por -1.
* En la tercera, cada término es igual al anterior multiplicado por $\frac{1}{2}$.

- Cada una de las sucesiones anteriores es una PROGRESIÓN GEOMÉTRICA.

APRENDAMOS

DEFINICIÓN DE PROGRESIÓN GEOMÉTRICA

Una sucesión f_1, f_2, f_3,... se llama **PROGRESIÓN GEOMÉTRICA,** si cada término es igual al anterior multiplicado por un número fijo **r**, llamado **RAZÓN** de la progresión.

10.5.2 Cálculo de un Término Cualquiera

EXPERIENCIA

- Consideremos la progresión geométrica: $\sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4, 4\sqrt{2}, \ldots$ ¿ Cuál es la razón de esta progresión? ¿cuánto vale el término que ocupa el lugar 254?

- Notemos que cada término de la progresión de obtiene multiplicando el anterior por $\sqrt{2}$. Por lo tanto, la razón de esta progresión es $\sqrt{2}$.

  Para hallar un término cualquiera de una progresión geométrica (por ejemplo, el que ocupa el lugar 254), hacemos lo siguiente:

  Sea $f_1, f_2, f_3, \ldots$ una progresión geométrica. Si designamos por r a la razón, tendremos:

$$
\begin{aligned}
f_1 &= f_1\\
f_2 &= f_1 \bullet r\\
f_3 &= f_2 \bullet r\\
f_4 &= f_3 \bullet r\\
&\vdots\\
f_n &= f_{n-1} \bullet r
\end{aligned}
$$

- Ahora multiplicamos miembro a miembro estas igualdades:

$$f_1 \bullet f_2 \bullet f_3 \ldots f_{n-1} \bullet f_n = f_1 \bullet (f_1 \bullet r) \bullet (f_2 \bullet r) \bullet (f_3 \bullet r) \ldots (f_{n-1} \bullet r)$$

$$\therefore\ f_1 \bullet f_2 \bullet f_3 \ldots f_{n-1} \bullet f_n = f_1 \bullet (f_1 \bullet f_2 \bullet f_3 \ldots f_{n-1}) \bullet \underbrace{(r \bullet r \bullet r \bullet r \ldots r)}_{\text{n-1 factores}}$$

$$\therefore\ (f_1 \bullet f_2 \bullet f_3 \bullet \ldots f_{n-1}) \bullet f_n = f_1 \bullet (f_1 \bullet f_2 \bullet f_3 \bullet \ldots f_{n-1}) \bullet r^{n-1}$$

$$\therefore\ f_n = \frac{f_1 \bullet \cancel{(f_1 \bullet f_2 \bullet f_3 \ldots f_{n-1})} \bullet r^{n-1}}{\cancel{(f_1 \bullet f_2 \bullet f_3 \ldots f_{n-1})}} = f_n = f_1 \bullet r^{n-1}$$

- Por lo tanto, para calcular un término cualquiera de una progresión geométrica f_n, aplicamos la expresión $f_n = f_1 \bullet r^{n-1}$

APRENDAMOS

TÉRMINO n-ESIMO DE UNA PROGRESIÓN GEOMÉTRICA

En toda progresión geométrica un término cualquiera es igual al primero multiplicado por la razón, elevada ésta al número de términos que la preceden, es decir:

$$\mathbf{f_n = f_1 \bullet r^{n-1}}$$

¡ATENCIÓN! La expresión $f_n = f_1 \cdot r^{n-1}$ liga cuatro cantidades, de tal forma que conocidas tres de ellas, se puede calcular la cuarta. Por ejemplo, si despejamos r nos queda:

$$r = \sqrt[n-1]{\frac{f_n}{f_1}}$$

¿Cómo se calcula el número de términos n?

Ejemplo 1

Hallemos el 12º término de la progresión geométrica: $8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$

Solución

- Esta es una progresión geométrica de razón $\frac{1}{2}$.
- Por lo tanto: $f_{12} = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{12-1} = \frac{1}{256}$

Ejemplo 2

Hallemos el primer término de una progresión geométrica cuyo quinto término es 15 y la razón es $\frac{1}{2}$.

Solución

$$15 = f_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5-1}$$

$$\therefore 15 = f_1 \cdot \frac{1}{16}$$

$$\therefore f_1 = 240$$

10.5.3 Suma de n Términos Consecutivos de una Progresión Geométrica

- Sea $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n, \ldots$ una progresión geométrica. Vamos a calcular la suma de los **n** primeros términos; es decir:

$$S_n = f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

- Multiplicando por r ambos miembros de la igualdad (1), obtenemos:

$$r \cdot S_n = f_1 \cdot r + f_2 \cdot r + f_3 \cdot r + \ldots + f_n \cdot r \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

- Ahora bien, como:

$$\begin{aligned} f_2 &= f_1 \cdot r \\ f_3 &= f_2 \cdot r \\ f_4 &= f_3 \cdot r \\ &\vdots \\ f_n &= f_{n-1} \cdot r \end{aligned}$$

entonces la igualdad (2) podemos expresarla así:

$$r \cdot S_n = f_2 + f_3 + f_4 + \ldots + f_n + f_n \cdot r \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

- Restando (1) de (3) y simplificando obtenemos:

$$r \bullet S_n - S_n = f_n \bullet r - f_1$$

$$\therefore S_n (r - 1) = f_n \bullet r - f_1$$

$$\therefore S_n = \frac{f_n \bullet r - f_1}{r - 1}, \; r \neq 1$$

- El proceso que acabamos de describir podemos sintetizarlo en el siguiente teorema:

APRENDAMOS

Teorema: SUMA DE LOS TÉRMINOS DE UNA PROGRESIÓN GEOMÉTRICA

La suma S_n de los n primeros términos de una progresión geométrica es igual al último término por la razón MENOS el primero, dividido por la razón menos uno; es decir:

$$\mathbf{S_n = \frac{f_n \bullet r - f_1}{r - 1}}$$

¡ATENCIÓN!

1. Hay ocasiones en las cuales interesa aplicar la fórmula de la suma en la forma siguiente:

$$S_n = \frac{f_n \bullet r - f_1}{r - 1} = \frac{f_1 \bullet r^{n-1} \bullet r - f_1}{r - 1} = \frac{f_1 \bullet r^n - f_1}{r - 1} = \frac{f_1 (r^n - 1)}{r - 1}$$

2. Si la razón de una progresión geométrica es r = 1, todos los términos serán iguales al primero y la suma de los **n** términos será:

$$S_n = \underbrace{f_1 + f_1 + f_1 + \ldots + f_1}_{\text{n sumandos}} = n \bullet f_1$$

Ejemplo 1

Hallemos la suma de los seis primeros términos de la progresión geométrica: 2, -6, 18, -54,...

Solución

- De acuerdo con el enunciado del problema tenemos los siguientes datos: $f_1 = 2$; $r = -3$; $n = 6$
- Por lo tanto: $f_6 = 2(-3)^5 = -486$
- Finalmente: $S_6 = \frac{(-486) \bullet (-3) - 2}{-3 - 1} = \frac{2 - 1458}{4} = -364$

Ejemplo 2

Hallemos la suma de los seis primeros términos de una progresión geométrica en la que $r = 3$ y $f_1 = 2$.

- Estudiemos el término r^n:

  * Si $r > 1$, entonces r^n crece indefinidamente a medida que crece el exponente $n \in N$; es decir, llega a ser mayor que cualquier número, y lo mismo ocurre con la suma, por lo que decimos que esta es INFINITA.

  * Si $r = 1$, entonces la suma de n términos será: $f_1 + f_1 + ... + f_1 = n \bullet f_1$ y llega a ser tan grande como queramos.

  * Si $r = -1$, resulta $f_1 - f_1 + f_1 - f_1 ...$ y decimos que es **alternada**, pues vale f_1 ó 0 según tomemos un número impar o par de sumandos.

  * Si $-1 < r < 1$, entonces el valor de r^n, con $n \in N$, es cada vez más pequeño, cuando hacemos que n tome valores suficientemente grandes. Como estamos trabajando con sumas de infinitos términos, entonces podemos afirmar que **"r^n se aproxima a cero a medida que n crece infinitamente"**. Por lo tanto, reemplazando r^n por cero en la fórmula (2) y denotando dicha suma por S, obtenemos: $\mathbf{S = \frac{f_1}{1 - r}}$ **, cuando $-1<r<1$**

Ejemplo 1: Calculemos la suma: $\frac{3}{2} + 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + ...$

Solución

- La razón común es $r = \frac{2}{3}$; luego, tenemos la suma de los términos de una progresión geométrica con $-1<r<1$.

- Por lo tanto: $S = \dfrac{f_1}{1 - r} = \dfrac{\frac{3}{2}}{1 - \frac{2}{3}} = \dfrac{9}{2}$

Ejemplo 2: Calculemos la suma $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + ...$

Solución

- La razón común es $r = -\frac{1}{3}$.

- Luego, la suma es: $S = \dfrac{f_1}{1 - r} = \dfrac{1}{1 - (-\frac{1}{3})} = \dfrac{1}{\frac{4}{3}} = \dfrac{3}{4}$

Ejemplo 3

Una pelota se dejó caer de una altura de 72 metros. En cada rebote alcanzó una altura equivalente a los $\frac{3}{4}$ de la altura anterior. Hallemos la suma total de las alturas alcanzadas por la pelota.

Solución

- Como la pelota sube y baja la misma altura en cada rebote, entonces llamando **d** la distancia total, tenemos:

$$d = 72 + \left[72 \left(\frac{3}{4}\right) + 72\left(\frac{3}{4}\right) + 72 \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 72 \left(\frac{3}{4}\right)^2 + ... \right]$$

$$\therefore d = 72 + 2 \left[72 \left(\frac{3}{4}\right) + 72 \left(\frac{3}{4}\right)^2 + ... \right]$$

- La suma que está entre los corchetes corresponde a la suma de los términos de una progresión geométrica infinita, en la cual: $f_1 = 72\left(\frac{3}{4}\right)$ y $r = \frac{3}{4}$. Luego:

$$S = \frac{f_1}{1 - r} = \frac{54}{1 - \frac{3}{4}} = 216$$

- Por lo tanto: $d = 72 + 2\,(216) = 504$ metros.

Ejemplo 4

Hallemos la fracción generatriz correspondiente a $0{,}2828... = 0{,}\overparen{28}$

Solución

- Sabemos que: $0.\overparen{28} = 0{,}282828...$

$$= 0 + 0{,}28 + 0{,}0028 + 0{,}000028 + ...$$

$$= \frac{28}{100} + \frac{28}{10000} + \frac{28}{1000000} + ...$$

$$= \frac{28}{10^2} + \frac{28}{10^4} + \frac{28}{10^6} + ...$$

- Esta es la suma de los términos de una progresión geométrica infinita, en la cual:

$$f_1 = \frac{28}{10^2} \qquad y \qquad r = \frac{1}{10^2}$$

Luego:

$$S = \frac{f_1}{1 - r} = \frac{\frac{28}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{28}{99}$$

- Por lo tanto: $0{,}\overparen{28} = \frac{28}{99}$

EJERCICIO 10.4

1 Analiza cuáles de las siguientes sucesiones son progresiones geométricas.

a) 120, 60, 30, 15,...

b) 80, -20, 5, $-\frac{5}{4}$

c) 24, 20, 14, 10, ...

d) $ax,\ a^2x^2,\ a^3x^3$

e) $(x + y)$, $2(x + y)$, $3(x + y)$

2 Si $f_1, f_2, f_3,..., f_n,...$ es una sucesión geométrica, encuentra las cantidades que se indican:

a) $f_1 = -6$, $r = -\frac{1}{2}$, $f_2 = ?$, $f_3 = ?$, $f_4 = ?$

b) $f_1 = 81$, $r = \frac{1}{3}$, $f_{10} = ?$

9. Un objeto cae libremente cerca a la superficie de la tierra. Durante el primer segundo cae 16 pies, durante el segundo cae 48 pies, durante el tercero cae 80 pies y así sucesivamente.

   a) ¿Qué distancia cae el objeto durante el 11° segundo?
   b) ¿Qué distancia cae el objeto en 11 segundos?
   c) ¿Qué distancia cae el objeto en t segundos?

10. Si la población de una ciudad aumenta a razón de 20% cada año, ¿durante qué año se duplicará la población?

11. a) Halla seis medios aritméticos entre -2 y -23
    b) Halla siete medios geométricos entre 10 y 100

12. Los tres primeros términos de una progresión geométrica son $-\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $-\frac{4}{3}$. Halla el séptimo término y la suma de los siete términos.

13. Halla la suma de todos los múltiplos de 7 que quedan entre 500 y 660.

14. Después de que una persona viaja en bicicleta retira sus pies de los pedales y la rueda delantera gira 300 veces durante los primeros 10 segundos. Después de cada período sucesivo de 10 segundos, la rueda gira $\frac{4}{5}$ de las veces que giró en el período anterior, ¿cuántos giros dará la rueda antes de detenerse?

15. Dividir 20 en cuatro partes que estén en progresión aritmética y tales que el producto de la primera por la cuarta sea al producto de la segunda por la tercera como 2 es a 3.

16. Se tienen dos grupos de números, cada uno de tres términos, en progresión aritmética y tales que la suma de cada grupo es 15. La diferencia del primer grupo es una unidad mayor que la diferencia del segundo, y el producto del primer grupo es al producto del segundo grupo como 7 es a 8. Halla los números que forman los dos grupos.

17. Demuestra que el término de lugar (n + 1) de una progresión geométrica cuyo primer término es **a** y el tercer término es **b**, es igual al término de lugar (2n + 1) de otra progresión geométrica cuyo primer término es **a** y cuyo quinto término es **b**.

18. La suma de 2n términos de una progresión geométrica cuyo primer término es **a** y cuya razón es **r**, es igual a la suma de **n** términos de otra progresión geométrica cuyo primer término es **b** y cuya razón es $\mathbf{r}^2$. Demuestra que **b** es igual a la suma de los dos primeros términos de la primera serie.

19. La suma de tres números en progresión geométrica es 70; si se multiplican los dos extremos por 4 y el intermedio por 5, los productos están en progresión aritmética. Halla los números.

20. Si la media aritmética entre **a** y **b** es el doble de la media geométrica, demuestra que **a** es a **b** como $2 + \sqrt{3}$ es a $2 - \sqrt{3}$.

PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS DEL ICFES

Las preguntas 1. y 2.se contestan de acuerdo con la siguiente información:

- Un cubo tiene 6 caras con colores diferentes.
- El lado blanco es opuesto al negro.
- El lado rojo está entre el blanco y el negro.
- El lado azul es adyacente al verde.
- El lado café es adyacente al azul.

1. El lado opuesto al café es:

   a. Blanco b. Negro c. Verde d. Rojo e. Azul

2. Los cuatro colores adyacentes al rojo son:

   a. Blanco, negro, azul, verde
   b. Blanco, café, negro, verde
   c. Blanco, negro, azul, rojo
   d. Negro, azul, café, verde
   e. Blanco, negro, azul, café

3. Se ordenan los números impares de la siguiente forma:

Columna 1	Columna 2	Columna 3	Columna 4	Columna 5	Columna 6	Columna 7
1	3	5	7			
	9	11	13	15		
		17	19	21	23	
			25	27	29	31

Las columnas están enumeradas como se indica.
¿Cuál es el número de la columna donde quedará el 1995?

a. 250 b. 135 c. 251 d. 172 e. 270

4. Uno de los requisitos para un concurso de ortografía, en el que cada institución envía cinco representantes, es que la edad promedio sea de 12 años y que ninguno de ellos sea menor de 9 años. Podemos afirmar que para que uno de ellos tenga la máxima edad se necesita que:

   a. Otro tenga 16 años.
   b. Los demás tengan 12 años
   c. Los demás tengan 9 años
   d. Tenga 15 años

5. Una balanza está en equilibrio. En un platillo hay medio ladrillo y una masa de 1 Kg. En el otro platillo hay un ladrillo. El peso del ladrillo es:

   a. 1/2 kg b. 1 kg c. 3/2 kg d. 2 kg e. 3 kg

Núcleo Temático

11

PENSAMIENTO ALEATORIO

LOGRO GENERAL

- Revisar y profundizar en el estudio de las medidas de tendencia central: media aritmética, mediana y moda.
- Calcular e interpretar las medidas de posición y las medidas de dispersión

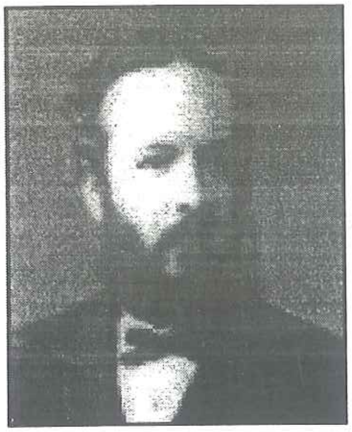
LOGROS ESPECÍFICOS	INDICADORES DE LOGRO
Corporal: • Recolectar información acerca de un tema concreto y consignarlo en tablas de valores, diagramas de barras, diagramas circulares o histogramas.	• Recogidos los datos de una muestra poblacional, los consigna en tablas de valores y los representa mediante diagramas de barras, diagramas circulares o histogramas.
Comunicativa: • Realizar encuestas entre sus compañeros o familiares, explicando los objetivos y procedimientos para llevarlas a cabo. • Enunciar la Regla de Laplace para determinar la probabilidad de un suceso.	• Explica los objetivos y alcances de una encuesta realizada a los compañeros de estudio o a familiares. • Enuncia y analiza el significado de la Regla de Laplace para determinar la probabilidad de un suceso.
Cognitiva: • Recolectar, tabular y organizar datos. • Hallar medidas de posición y medidas de dispersión: cuartiles, deciles, percentiles, rango, rango intercuantil, desviación, desviación media, varianza , desviación típica y coeficiente de variación. • Relacionar los conceptos de frecuencia relativa y probabilidad de un suceso.	• Halla las medidas de posición y las medidas de dispersión de una distribución de datos. • Aplica la Regla de Laplace para hallar la probabilidad de un suceso cuando en un experimento todos los resultados son equiprobables.
Estética: • Dibujar polígonos y curvas de frecuencias absolutas y acumuladas. • Diseñar ruletas, dados y tiros al blanco para realizar experiencias aleatorias.	• Dada una tabla de datos agrupados, dibuja los polígonos y las curvas de frecuencias absolutas y acumuladas. • Utiliza materiales como cartulina, madera y plastilina para diseñar ruletas, dados y tiros al blanco que le ayuden a realizar experimentos aleatorios.
Etica-Actitudinal: • Reconocer la importancia del trabajo en grupo para el éxito de una encuesta.	• Participa, se integra y colabora en las diferentes actividades programadas para la realización de una encuesta.

DIMENSIONES

EVALUACIÓN

ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS

11.1 HISTORIA DEL ALGEBRA (21): GEORGE CANTOR



George Cantor, nació en San petesburgo, Rusia, el 3 de marzo de 1845. El padre de Cantor, descendiente de judíos puros, había nacido en Dinamarca y tal vez a esta curiosa mezcla de nacionalidades se debe que diversas patrias reclamen a Cantor como hijo, aunque él se inclinó siempre hacia Alemania, nación que no le favoreciera muy cordialmente.

Sus primeros estudios fueron semejantes a los de la mayor parte de los matemáticos eminentes. Su gran talento y su interés absorvente por los estudios matemáticos, fueron reconocidos precozmente (antes de cumplir 15 años). Su educación primaria fue confiada a un preceptor particular, y después siguió un curso en una escuela elemental de San Petesburgo. Cuando la familia se trasladó a Alemania, asistió primero a algunas escuelas privadas de Francfort y Darmstadt, ingresando luego en el Instituto de Wiesbaden en 1860, cuando tenía 15 años.

Cantor comenzó sus estudios universitarios en Zurich, en 1862, pero pasó a la Universidad de Berlín al siguiente año. Allí se especializó en matemática, filosofía y física, pero su interés predominó por la primera. Cantor hizo un profundo estudio de las Disquisiciones Aritméticas de Gauss, y escribió, en 1867, su disertación, aceptada para aspirar el título de doctor. Era un excelente trabajo, pero puede afirmarse que ningún matemático que lo leyera podría pronosticar que el autor de 22 años, llegaría a ser uno de los más originales creadores de la historia de la matemática.

Su primera admiración fue la teoría Gaussiana de números, hacia la cual se sintió atraído por la dificultad, nitidez y clara perfección de las pruebas. A partir de estos estudios, pasó al Análisis riguroso, particularmente a la teoría de las series trigonométricas (series de Fourier). Antes de cumplir los treinta años, Cantor publicó su primer trabajo revolucionario (en el Journal de Crelle) sobre la **teoría de conjuntos**. El inesperado y paradógico resultado referente al conjunto de todos los números algebraicos y la completa novedad de los métodos empleados, señalaron inmediatamente al joven autor como un matemático creador, de originalidad extraordinaria.

Jamás logró su ambición de una cátedra en Berlín, posiblemente la más alta distinción durante el período de la mayor fecundidad creadora de Cantor (de los 29 a los 39). Su carrera profesional activa transcurrió en la Universidad de Halle. Sus primeras tareas docentes tuvieron lugar en una escuela femenina de Berlín. Los razonamientos de Cantor en su teoría de las clases infinitas fueron consideradas por Kronocker, su antiguo profesor, como una forma peligrosa de locura matemática. Kronocker atacó "La teoría positiva del infinito" y a su hipersensible autor Cantor, con todas las armas que tuvo a su disposición, con el trágico resultado de quien cayó en el manicomio, fue el autor de la teoría, George Cantor.

Cantor murió en un hospital de enfermedades mentales en halle, el 6 de enero de 1918, a los 73 años. Ya le habían sido concedidos múltiples honores y su obra había logrado ser reconocida. Si Cantor viviera hoy, podría estar orgulloso del movimiento que se ha producido hacia un pensamiento más riguroso en toda la Matemática, del cual es ámpliamente él responsable por sus esfuerzos para colocar el Análisis (y el infinito) sobre una base sólida.

EJERCICIO 11.1

Lee nuevamente el texto anterior y luego encierra en un círculo, la letra que corresponda a la respuesta correcta:

1. Sólo uno de los siguientes enunciados es verdadero:
   a. Cantor se especializó en matemáticas, filosofía y física en la Universidad de Zurich.
   b. Por temporadas, G. Cantor era internado en hospitales por perturbaciones mentales.
   c. Cantor fue maestro de matemática en la Universidad de Berlín.
   d. Estudió en amplitud el trabajo matemático de Gauss.

2. La verdadera nacionalidad de George Cantor era:

a. Judía. b. Danesa.
c. Rusa. d. Alemana.

3. Se dice de Cantor que escribió una disertación para aspirar al título de doctor. La palabra que sustituye perfectamente a disertación sin afectar su significación, es:

a. Razonamiento. b. Relato.
c. Teorema. d. Demostración.

4. Con el escrito anterior, el autor se propone:

a. Destacar los problemas que tuvo Cantor a lo largo de su vida.
b. Relievar la actividad creadora del matemático G. Cantor.
c. Explicar las causas que llevaron a Cantor a la demencia.
d. Relacionar la ciencia con la locura.

5. Los ataques de Kronecker a Cantor y sus trabajos matemáticos:

a. No afectaron al científico, quien siguió adelante con sus trabajos.
b. Le restaron popularidad al insigne matemático.
c. Le aumentaron la fama y le llenaron de admiradores.
d. Le ocasionaron la reclusión en un manicomio.

11.2 REVISIÓN DE CONCEPTOS

11.2.1 Conceptos Básicos

- En un colegio de la ciudad hay 750 estudiantes matriculados en el grado 10º. Se quiere hacer un estudio acerca de sus pesos en kg. Con este fin el médico escoge 75 de ellos al azar para realizar el estudio y con la ayuda del profesor de estadística hacen lo siguiente: **recogen los datos y los ordenan, hacen el recuento de frecuencias, agrupan los datos en intervalos o clases, elaboran una tabla de frecuencias, representan gráficamente la información, hallan las medidas de tendencia central (moda, media aritmética y mediana) y las interpretan.**
- Para que el médico entienda lo que van a hacer, el profesor de estadística le recuerda al médico algunos conceptos:

RECORDEMOS

- **POBLACIÓN:** es el conjunto de todos los elementos que cumplen determinada condición; por ejemplo, "ser alumnos de 10º grado de un cierto colegio".
- **MUESTRA:** es cualquier subconjunto o parte de la población; por ejemplo, "los 75 alumnos escogidos al azar del grado 10º de dicho colegio".
- El aspecto o los aspectos que se va(n) a estudiar (en este caso, el PESO) se denomina(n) **CARACTERES ESTADÍSTICOS.** Los caracteres estadísticos pueden ser **CUALITATIVOS** o **CUANTITATIVOS.** Los cualitativos son básicamente cualidades o atributos (por ejemplo, el lugar de naci-

miento, el estado civil de una persona, la profesión de alguien, el color del cabello,...) y los cuantitativos son especialmente cantidades numéricas (por ejemplo, el número de hermanos, la estatura y el peso de las personas, la calificación obtenida en un examen,...).

- El conjunto de valores que puede tomar un caracter se denomina **VARIABLE ESTADÍSTICA O ALEATORIA.** Las variables estadísticas pueden ser **DISCRETAS** o **CONTINUAS.** Las variables son discretas cuando sólo pueden tomar valores aislados y son continuas cuando pueden tomar todos los valores posibles dentro de un intervalo.
- Si la variable se simboliza por **x**, entonces los valores de la variable se representan por $x_1, x_2, x_3, \ldots x_i, \ldots x_n$

- En el caso que nos ocupa, la **población** corresponde a los 750 estudiantes matriculados en grado 10°, la **muestra** a los 75 estudiantes escogidos al azar, la característica que queremos medir es **cuantitativa** y la **variable estadística peso** es **continua** porque los pesos de las personas pueden tomar valores dentro de un intervalo.
- Una vez escogida la muestra, el médico y el profesor de estadística hacen lo siguiente:

1. **RECOGEN LOS DATOS:** Consultan a los estudiantes que componen la muestra y consignan sus respuestas.
2. **ORDENAN LOS DATOS:** Escriben los datos en orden ascendente o descendente.
3. **RECUENTAN FRECUENCIAS:** Cuando la variable es cualitativa, se construye una tabla en cuya primera columna escriben los nombres que toma la variable y en la segunda se hace el recuento de los datos.
4. **AGRUPAN LOS DATOS:** Cuando el número de datos es grande, así la variable sea discreta o continua, los datos se agrupan en **intervalos** o **clases.** Por ejemplo, supongamos que el coordinador recogió la siguiente información sobre los pesos de los estudiantes de 10° grado (los pesos fueron aproximados a un entero):

57	49	60	47	42	48	52	62	48	51	46	53
51	50	41	52	51	47	57	52	54	59	46	48
43	55	53	48	53	49	48	49	50	52	45	59
50	52	49	50	51	46	45	61	39	44	50	45
40	48	47	42	46	61	49	38	51	45	58	57
45	43	52	53	50	54	51	44	52	54	49	46
43	37	55									

Como el número de datos es grande, conviene agruparlos en intervalos o clases, teniendo en cuenta estas recomendaciones:

- Cada intervalo o clase tiene un extremo inferior y un extremo superior. El extremo inferior de la primera clase es, en general, el menor dato de la muestra y el extremo superior de la última clase es el mayor valor de la muestra. A veces conviene tomar como extremo inferior un número menor que el de la muestra redondeado a un múltiplo de 5 o de 10 y como extremo superior un número mayor que el de la muestra redondeado igualmente a un múltiplo de 5 o de 10. Por ejemplo, si el menor valor de una muestra es 1,43 m, puede tomarse como extremo inferior 1,4 y si el mayor valor es 1,74 m, puede tomarse como extremo superior 1,8. A veces los extremos se eligen por conveniencia o por presentación adecuada.

- Es recomendable que todas las clases o intervalos tengan la misma amplitud.
- Los puntos medios de cada clase se llaman **marcas de clase.**
- No existe una regla única para fijar el número **k** de intervalos o clases en que se va a agrupar la muestra, pero generalmente varía entre 5 y 15, dependiendo del tamaño de la muestra. Una buena guía para tomar la decisión acerca del valor de **k** es la propuesta de **Herbert A. Sturges (1926)**, quien diseñó la siguiente tabla:

Números de Elementos de la Muestra	**Números de Intervalos**
n	**k**
De 6 a 11	4
De 12 a 22	5
De 23 a 45	6
De 45 a 90	7
De 91 a 181	8
De 182 a 362	9
De 363 a 724	10
De 725 a 1.448	11
De 1.449 a 2.896	12

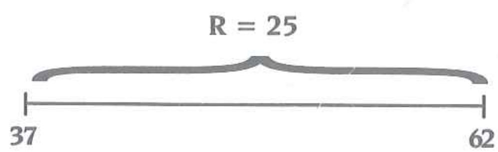
- Para determinar la amplitud de los intervalos o clases procedemos así:
  * Hallamos la diferencia entre el mayor valor y el menor valor de la muestra. Esta diferencia se denomina **RANGO** de la muestra y lo representamos por **R;** es decir:

$$R = X_{max} - X_{min}$$

  * Dividimos **R** entre **k** para hallar la amplitud **A** de cada intervalo:

$$A = \frac{R}{k}$$

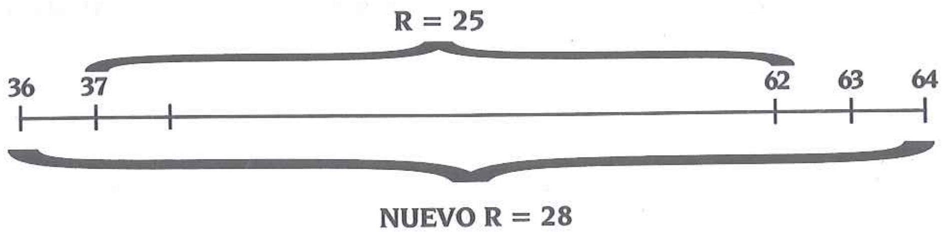
  * Como en este caso, el dato mayor es 62 y el menor es 37, entonces el rango de la muestra es **R=62-37=25:**



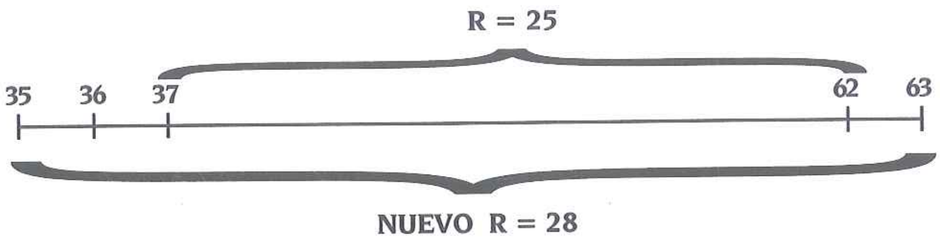
* El número de intervalos, de acuerdo con la tabla de Sturges es **k=7** y la amplitud de cada intervalo será

$$A = \frac{25}{7} = 3{,}571...$$

Como los datos de la muestra son números enteros, entonces aproximamos este número al entero mayor más próximo; es decir a 4. Esto hace que el nuevo rango sea **7x4=28**; es decir **3** unidades más que el rango de los datos. Estas 3 unidades podemos repartirlas como mejor convenga: una por debajo y dos por encima (de 36 a 64) o dos por debajo y una por encima (de 35 a 63); así:



ó



5. **ELABORAN LA TABLA DE FRECUENCIAS:** Debe contener los valores de la variable. Si estos valores vienen agrupados en clases, entonces deben aparecer el extremo superior, el extremo inferior, las marcas de clase, las frecuencias absolutas y relativas. En ocasiones también es conveniente incluir las frecuencias absolutas y relativas acumuladas y los porcentajes.

Antes de continuar revisemos los conceptos de **frecuencia absoluta, frecuencia relativa, frecuencia absoluta acumulada y frecuencia relativa acumulada.**

RECORDEMOS

- La **FRECUENCIA ABSOLUTA** de un valor x_i es el número de veces que se repite dicho valor en toda la muestra. La frecuencia absoluta del valor x_i se representa por f_i.
- La **FRECUENCIA RELATIVA** de un valor x_i es el cociente entre su frecuencia absoluta y el número de datos de la muestra. La frecuencia relativa de un dato o valor x_i la representamos por h_i.

$$h_i = \frac{f_i}{n}$$

siendo **n** el número total de datos; es decir,

$$n = f_1 + f_2 + f_3 + ... + f_n$$

- La **FRECUENCIA ABSOLUTA ACUMULADA** de un valor x_i es la suma de las frecuencias absolutas de los valores menores o iguales a x_i. La frecuencia absoluta acumulada del valor x_i se representa por F_i.

$$F_i = f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_i$$

- La **FRECUENCIA RELATIVA ACUMULADA** de un valor x_i es el cociente entre la frecuencia absoluta acumulada del valor x_i y el número total de datos. La frecuencia relativa acumulada del valor x_i la representamos por H_i.

$$H_i = \frac{F_i}{n} = \frac{f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_i}{n}$$

La tabla estadística para la distribución de los pesos de los 75 estudiantes del 10° grado, tomando como dato menor 35 y como dato mayor 63, es la siguiente:

PESO (kg)	RECUENTO	FRECUENCIA ABSOLUTA	FRECUENCIA ABSOLUTA ACUMULADA	FRECUENCIA RELATIVA	FRECUENCIA RELATIVA ACUMULADA	PORCENTAJE	PORCENTAJE ACUMULADO
x_i		f_i	F_i	$h_i = \frac{f_i}{n}$	$H_i = \frac{F_i}{n}$	$P_i = f_i \cdot \frac{100}{n}$	$P_i = F_i \cdot \frac{100}{n}$
[35 - 39)		2	2	$\frac{2}{75}$	$\frac{2}{75}$	$2,\widehat{6}\,\%$	$2,\widehat{6}\,\%$
[39 - 43)		5	7	$\frac{1}{15}$	$\frac{7}{75}$	$6,\widehat{6}\,\%$	$9,\widehat{3}\,\%$
[43 - 47)		16	23	$\frac{16}{75}$	$\frac{23}{75}$	$21,\widehat{3}\,\%$	$30,\widehat{6}\,\%$
[47 - 51)		20	43	$\frac{4}{15}$	$\frac{43}{75}$	$26,\widehat{6}\,\%$	$57,\widehat{3}\,\%$
[51 - 55)		20	63	$\frac{4}{15}$	$\frac{63}{75}$	$26,\widehat{6}\,\%$	84 %
[55 - 59)		6	69	$\frac{6}{75}$	$\frac{69}{75}$	8 %	92 %
[59 - 63)		6	75	$\frac{6}{75}$	$\frac{75}{75} = 1$	8 %	100 %
		75		1		100 %	

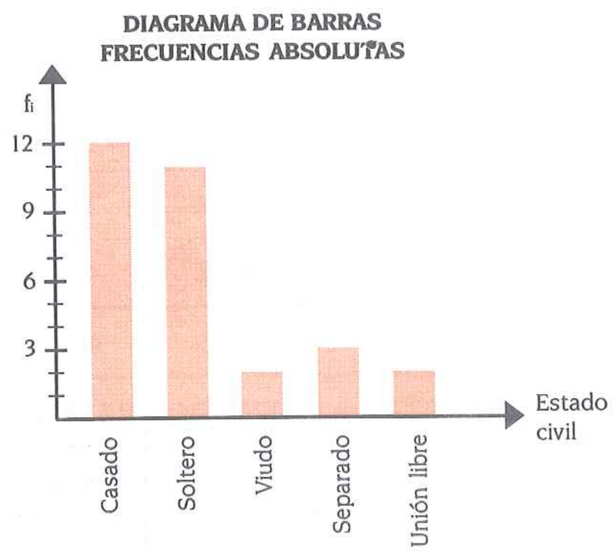
6. **REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA DISTRIBUCIÓN:** Una distribución de datos puede representarse por medio de un diagrama de barras, un diagrama lineal, un pictograma, un histograma, un polígono de frecuencias o una curva de frecuencias. Recordemos algunas de estas representaciones teniendo en cuenta el tipo de variable.

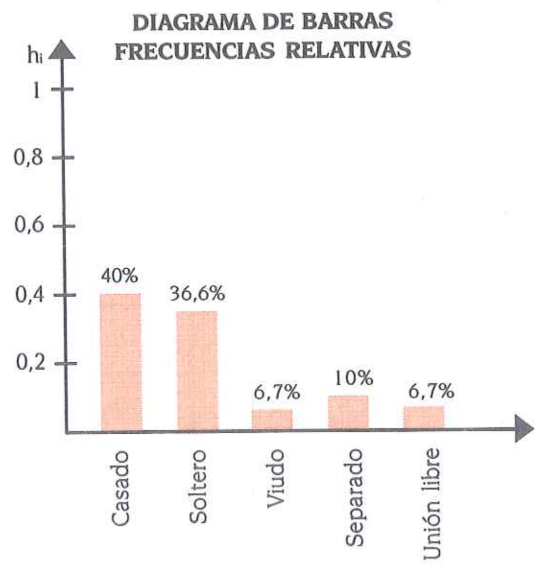
6.1 PARA VARIABLES CUALITATIVAS:

- Después de construir la tabla de frecuencias, generalmente se acostumbra presentar gráficamente los datos obtenidos de una encuesta o de un experimento. Los gráficos más comunes para representar datos cualitativos son el **diagrama de barras** y el **gráfico de sectores.**
- Por ejemplo, la tabla siguiente representa la información correspondiente al estado civil de 30 personas encuestadas:

Estado Civil	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa
Casado	12	0,400 = 40%
Soitero	11	0,366 = 36.6%
Viudo	2	0,067 = 6.7%
Separado	3	0,100 = 10%
Unión libre	2	0,067 = 6.7%
	30	1,000 = 100%

a) El **diagrama de barras** consiste en un conjunto de barras de la misma amplitud y con alturas determinadas por la frecuencia absoluta (o relativa) de cada una de las categorías (casado, soltero,...) en que hemos clasificado la variable de interés. La figura siguiente presenta un diagrama de barras de frecuencias absolutas y otro de frecuencias relativas para la situación del estado civil de las 30 personas encuestadas.





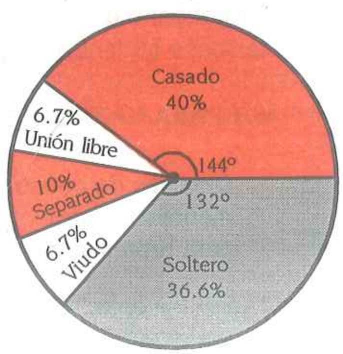
Las barras también se pueden construir horizontalmente. En este caso, la frecuencia absoluta (o relativa) va sobre el eje horizontal y la variable estadística sobre el eje vertical.

b) El **diagrama de sectores** consiste en un círculo dividido en sectores circulares cuyos ángulos obtenemos aplicando una regla de tres simple directa. En nuestro ejemplo tenemos:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Si} & 30 \xrightarrow{\text{son}} & 360^\circ \\ \text{entonces} & 12 \xrightarrow{\text{serán}} & x \end{array}\right\} \therefore\ x = \frac{360^\circ \times 12}{30} = 144^\circ$$

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Si} & 30 \xrightarrow{\text{son}} & 360^\circ \\ \text{entonces} & 11 \xrightarrow{\text{serán}} & x \end{array}\right\} \therefore\ x = \frac{360^\circ \times 11}{30} = 132^\circ$$

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Si} & 30 \xrightarrow{\text{son}} & 360^\circ \\ \text{entonces} & 2 \xrightarrow{\text{serán}} & x \end{array}\right\} \therefore\ x = \frac{360^\circ \times 2}{30} = 24^\circ$$



$$\left.\begin{array}{ll} \text{Si} & 30 \xrightarrow{\text{son}} 360^\circ \\ \text{entonces} & 3 \xrightarrow{\text{serán}} x \end{array}\right\} \therefore\ x = \frac{360^\circ \times 3}{30} = 36^\circ$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Si} & 30 \xrightarrow{\text{son}} 360^\circ \\ \text{entonces} & 2 \xrightarrow{\text{serán}} x \end{array}\right\} \therefore\ x = \frac{360^\circ \times 2}{30} = 24^\circ$$

A continuación, trazamos un radio cualquiera en el círculo y con ayuda de un transportador construimos el sector que representa la categoría **casado.** En forma similar construimos los demás sectores, tal como nos muestra la figura anterior.

6.2 PARA VARIABLES CUANTITATIVAS:

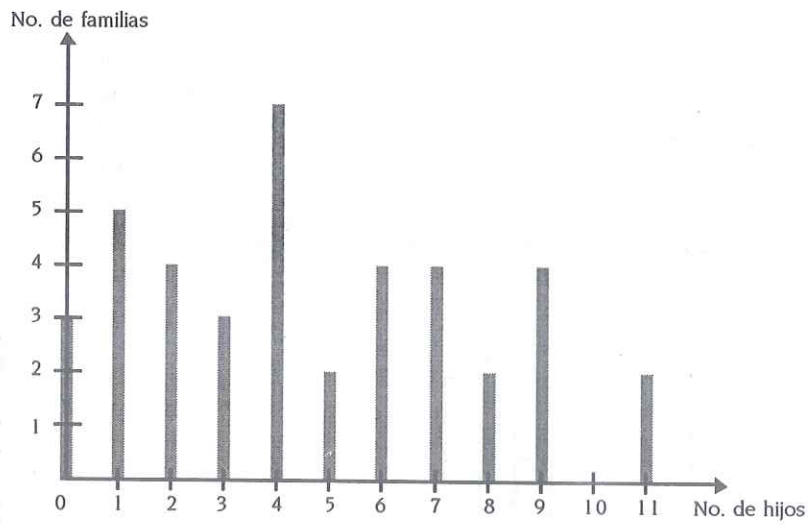
6.2.1 VARIABLES DISCRETAS

- En el caso de variables discretas, la representación gráfica usual es el diagrama de barras que se construye en forma similar al de las variables cualitativas; sólo que, en este caso, sobre el eje horizontal colocamos los diferentes valores de la variable.

EJEMPLO

Para obtener información sobre el número de hijos por familia en una región de Colombia, se tomó una muestra de 40 familias. Los resultado se presentan en una tabla de distribución de frecuencias y en un diagrama de barras; así:

No. de hijos por familia	Frecuencia Absoluta
x_i	f_i
0	3
1	5
2	4
3	3
4	7
5	2
6	4
7	4
8	2
9	4
10	0
11	2



6.2.2 VARIABLES CONTINUAS

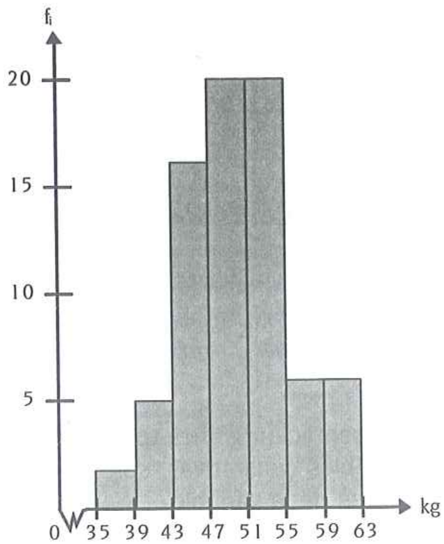
Para los datos agrupados en intervalos, existen las siguientes representaciones gráficas : **histogramas, polígonos de frecuencias, polígonos de frecuencias acumuladas y curvas de frecuencias.**

a) Histogramas

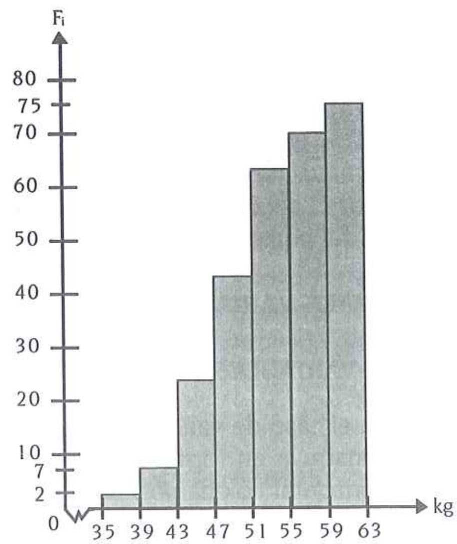
- Un histograma es un conjunto de rectángulos contiguos cuyas bases son los intervalos o clases sobre el eje horizontal y alturas iguales a las frecuencias absolutas o relativas correspondientes a cada clase sobre el eje vertical.

- Si consideramos de nuevo el problema de los pesos de los 75 alumnos del grado 10°, en el cual los datos fueron agrupados en intervalos o clases, entonces podemos elaborar la tabla de frecuencias absolutas y acumuladas y los histogramas correspondientes, así:

Intervalos (kg)	f_i	F_i
[35-39)	2	2
[39-43)	5	7
[43-47)	16	23
[47-51)	20	43
[51-55)	20	63
[55-59)	6	69
[59-63)	6	75



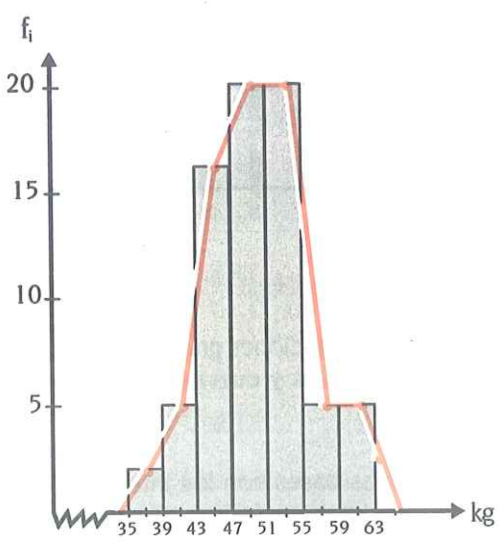
HISTOGRAMA DE FRECUENCIAS ABSOLUTAS



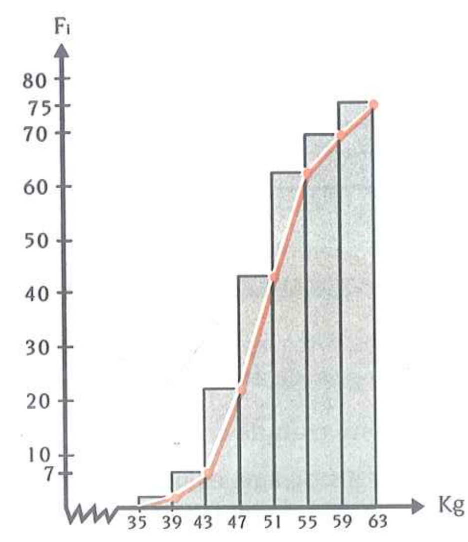
HISTOGRAMA DE FRECUENCIAS ABSOLUTAS ACUMULADAS

b) Polígonos de Frecuencias

- El polígono de frecuencias se construye uniendo con una línea poligonal los puntos medios de los lados superiores de cada rectángulo. En el caso de los histogramas, serán los puntos formados por las marcas de clases y con el fin de que el área encerrada bajo el polígono de frecuencia sea igual a la suma de las áreas de los rectángulos, unimos la marca de clase del primer rectángulo con el punto medio del lado vertical izquierdo, prolongando hasta el eje horizontal; de la misma forma procedemos con el último rectángulo. Si queremos construir el polígono de frecuencias acumuladas, unimos con segmentos los extremos derechos de cada clase.
- Los polígonos de frecuencias absolutas y frecuencias acumuladas del problema de los pesos de los estudiantes de 10° grado son los siguientes:



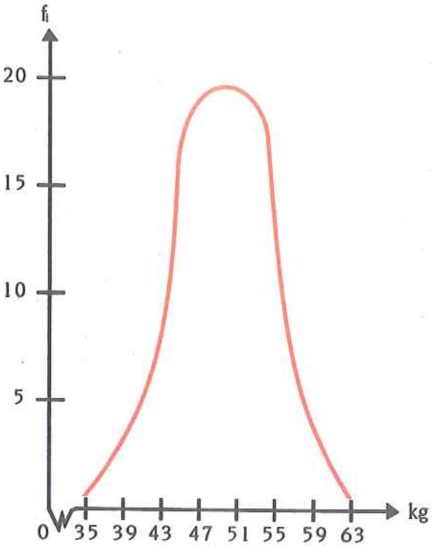
POLÍGONO DE FRECUENCIAS ABSOLUTAS



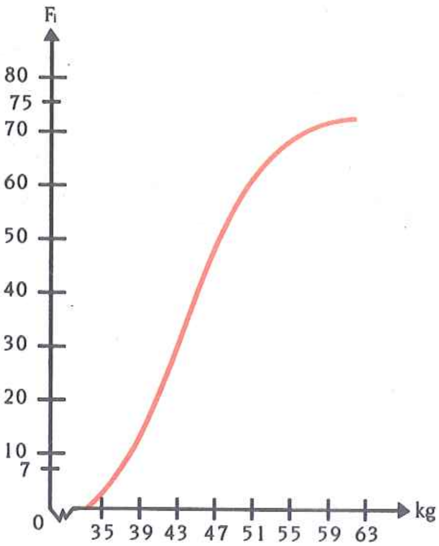
POLÍGONO DE FRECUENCIAS ACUMULADAS

c) Curvas de Frecuencias

- El polígono de frecuencias (o el histograma) sugiere el dibujo de una curva suave como una representación idealizada de la distribución de la población. Si pudiéramos aumentar el tamaño de la muestra y disminuir la amplitud de cada intervalo, obtendríamos un polígono de frecuencias menos irregular cada vez y podríamos dibujar una curva suave y continua. La figura siguiente muestra las curvas de frecuencia absoluta y frecuencia acumulada del caso que nos ocupa:



CURVA DE FRECUENCIAS ABSOLUTAS

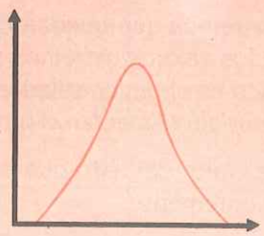


CURVA DE FRECUENCIAS ACUMULADAS (OJIVAS)

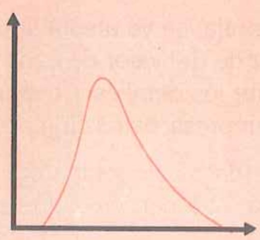
Este tipo de curvas reciben el nombre de **CURVAS DE FRECUENCIAS.** Las curvas de frecuencias acumuladas se llaman **OJIVAS.**

¡ATENCIÓN!

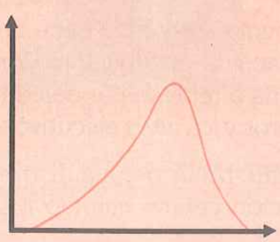
Ciertos tipos de poblaciones suficientemente estudiadas exhiben formas más o menos estables y conocidas. Por ejemplo, el peso de las personas y de los animales, la vida útil de las cosas y el coeficiente de inteligencia de las personas presentan curvas de forma simétrica, como muestra la figura (a). Otras, como los salarios, tienen una distribución asimétrica ya que un porcentaje alto de los trabajadores reciben bajos salarios; por lo cual, éstos tienden a agruparse en el extremo izquierdo de la distribución. Estas curvas se llaman **ASIMÉTRICAS A LA DERECHA** como la figura (b) o **ASIMÉTRICAS A LA IZQUIERDA** como la figura (c).



CURVA SIMÉTRICA
(a)



CURVA ASIMÉTRICA A LA DERECHA
(b)



CURVA ASIMÉTRICA A LA IZQUIERDA
(c)

- **PREGUNTAS:** ¿Qué clase de curva representa las frecuencias absolutas correspondiente a los pesos de los 75 alumnos del grado 10°? ¿Y la del número de hijos de las 40 familias encuestadas de la región de Colombia?

11.2.2. Medidas de Tendencia Central

En el análisis del problema de los pesos de los estudiantes del grado 10°, el médico seguramente estará interesado en determinar los valores que más se repitan (el peso de moda), en cuál es el peso promedio de los estudiantes (la media aritmética) y en cuál es el peso que ocupa la posición central cuando los datos se ordenan creciente o decrecientemente (la mediana de los pesos). Estos valores que tienden a ocupar los puestos centrales de la distribución se denominan **MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL.**

RECORDEMOS

- Las **MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL** son: la **MODA**, la **MEDIA ARITMÉTICA** y la **MEDIANA.**
- La **MODA** de una distribución es el dato que se presenta con mayor frecuencia y lo simbolizamos por **Mo.**
- La **MEDIA ARITMÉTICA** de una muestra o conjunto de **n** datos es la suma de todos sus valores dividida por el número total de datos; es decir:

  Si $x_1, x_2, x_3, \dots x_i \dots x_n$ son los valores de los **n** datos, entonces la media aritmética $\overline{x}$ es:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$

- Cuando en una distribución hay datos que se repiten varias veces, no resulta práctico sumarlos todos y dividir por el número total de datos. Es más fácil multiplicar cada valor de la variable por el número de veces que aparece (su frecuencia absoluta), sumarlos todos y dividir por el número total de datos. En este caso, $\overline{x}$ es: $\overline{x} = \dfrac{\Sigma x_i \cdot f_i}{\Sigma f_i}$, donde $\Sigma f_i = n$.
- Cuando los datos están agrupados, entonces tomamos el valor (x_i) que representa a cada intervalo. Este valor es la **marca de clase** o **punto medio del intervalo.** En este caso, la media aritmética $\overline{x}_a$, se obtiene en forma similar al caso anterior; es decir: $\overline{x}_a = \dfrac{\Sigma x_i \cdot f_i}{n}$

¡ATENCIÓN!

La media aritmética tiene una desventaja: se ve afectada por los extremos que quedan después de hacer la distribución. Como depende del valor de cada medida, los valores extremos pueden llevarla a representar defectuosamente los detalles. Un ejemplo típico es el de los salarios de los obreros y los altos ejecutivos de una empresa, éstos últimos por ser muy altos, afectan el promedio.

- La **MEDIANA** de una distribución de datos, denotada por **Me**, es el valor del dato que ocupa la posición central cuando los datos se ordenan creciente o decrecientemente.
  * Si el número de datos es impar, tomamos como mediana el valor del centro y cuando es par, tomamos como mediana la semisuma de los dos valores centrales.
  * La mediana es un valor que deja por debajo el 50% de los datos y el otro 50% por encima.
  * La mediana no es sensible a datos externos.

EJEMPLO: **Si** 1,2,3,4 **entonces** $Me = \frac{2+3}{2} = 2.5$
Si 1,2,3,10 **entonces** $Me = \frac{2+3}{2} = 2.5$ } **No se altera la Mediana**

* Cuando la distribución de datos es muy grande no resulta práctico escribirlo en orden creciente o decreciente. En este caso, recurrimos a la frecuencia absoluta acumulada para calcular la mediana.

* Cuando hay que encontrar la mediana de una distribución de datos agrupados en intervalos, aplicamos la siguiente fórmula:

$$Me = L_{i-1} + \frac{\left(\frac{n}{2} - F_{i-1}\right)}{f_i} \cdot A$$

donde:

- **n** = número de datos de la distribución
- L_{i-1} = límite inferior del intervalo que contiene la mediana
- F_{i-1} = frecuencia absoluta acumulada del intervalo anterior a donde se encuentra la mediana
- f_i = frecuencia absoluta del intervalo donde está la mediana.
- **A** = amplitud del intervalo donde está la mediana.

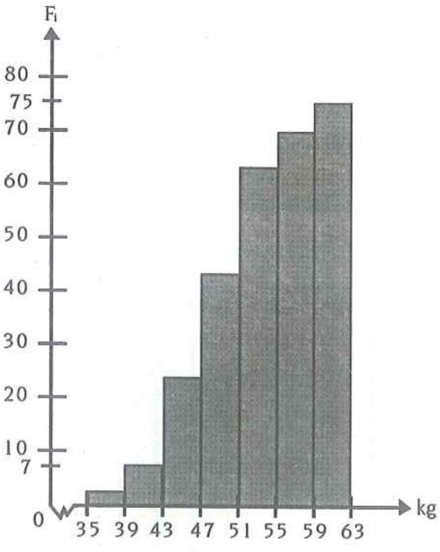
EJEMPLO

Hallemos la moda, la media y la mediana de la distribución de los pesos de los alumnos de 10° grado. Determinemos con base en estos resultados si la distribución de los pesos es simétrica o asimétrica.

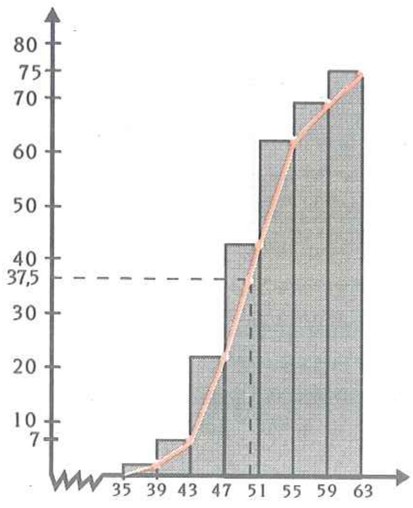
Solución

- Estos son la tabla de frecuencias, el histograma y el polígono de frecuencias acumuladas:

Intervalos (kg)	x_i	f_i	F_i	$f_i \cdot x_i$
[35-39)	37	2	2	74
[39-43)	41	5	7	205
[43-47)	45	16	23	720
[47-51)	49	20	43	980
[51-55)	53	20	63	1060
[55-59)	57	6	69	342
[59-63)	61	6	75	366



HISTOGRAMA DE FRECUENCIAS ABSOLUTAS ACUMULADAS



POLÍGONO DE FRECUENCIAS ACUMULADAS

- Como los datos están agrupados en intervalos, se toma como moda la marca de clase del intervalo que tenga la mayor frecuencia absoluta (f_i). En este caso, la moda no es única, ya que hay dos intervalos que tienen la misma frecuencia absoluta: [47-51) y [51-55). Las marcas de clase de estos intervalos son 49 y 53; éstos son los pesos **MODA**. Sin embargo, en este caso, posiblemente la moda sea 51 ya que la moda es el valor que maximiza la frecuencia de ocurrencia de los datos y el máximo parece estar alrededor de 51.

- La media aritmética de esta distribución es:

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i \cdot x_i}{n} = \frac{74 + 205 + 720 + 980 + 1060 + 342 + 366}{75}$$

$$= \frac{3747}{75} = 49{,}96 \text{ kg}$$

Esto significa que el peso promedio de los alumnos es de 49,96 kg.

- Como n=75, entonces $\frac{n}{2} = 37{,}5$. Por lo tanto, la mediana se encontrará en el intervalo correspondiente a la frecuencia absoluta acumulada inmediatamente superior a $\frac{n}{2} = 37{,}5$. Si en el polígono de frecuencias absolutas acumuladas ubicamos a 37,5 y por allí trazamos una paralela al eje horizontal, que intercepte al polígono, y luego por el punto de intersección proyectamos sobre el eje horizontal, encontramos que la mediana se encuentra ubicada en el intervalo [47-51) y que está más cerca a 51 que a 47.

Aplicando la fórmula:

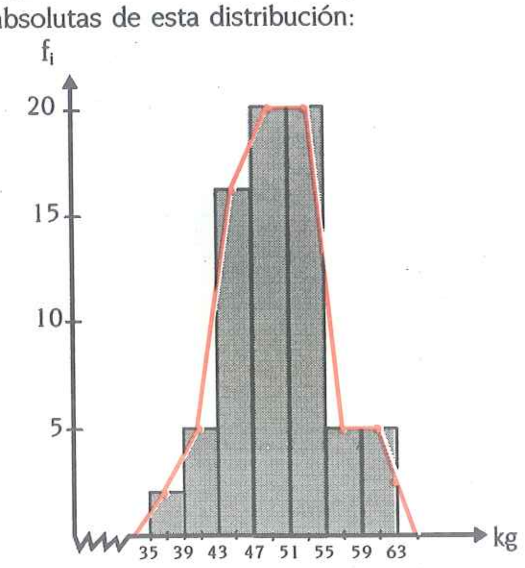
$$\text{Me} = L_{i-1} + \frac{\left(\frac{n}{2} - F_{i-1}\right)}{f_i} \times A$$

nos queda:

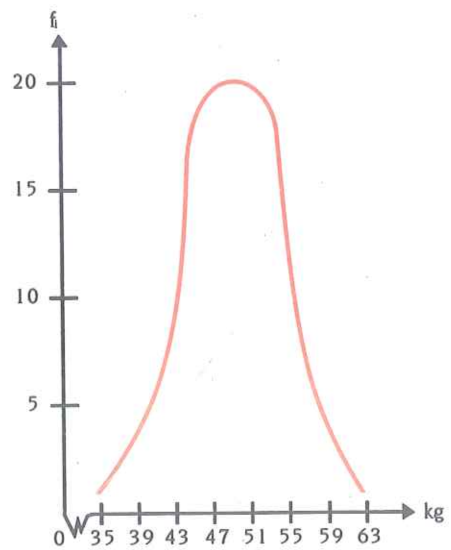
$$\text{Me} = 47 + \frac{37{,}5 - 23}{20} \times 4 \approx 49{,}9$$

Este resultado significa que el 50% de los estudiantes tiene un peso menor o igual a 49,9 kg.

- Puesto que Mo está alrededor de 51, $\bar{x}$=49,96 kg y Me=49,9 kg, podemos afirmar que, dado que estos valores casi coinciden, la distribución de los pesos es aproximadamente simétrica. La figura siguiente nos muestra el polígono de frecuencias absolutas y su respectiva curva de frecuencias absolutas de esta distribución:



POLÍGONO DE FRECUENCIAS ABSOLUTAS



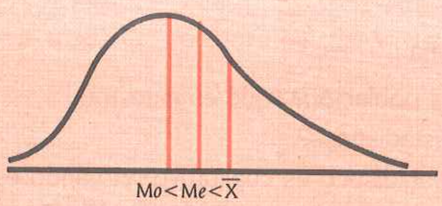
CURVA DE FRECUENCIAS ABSOLUTAS

¡ATENCIÓN!

1. En general, cuando en un problema debamos obtener las medidas de tendencia central, casi siempre será posible determinar la media, mediana y moda; sin embargo, conviene recordar:

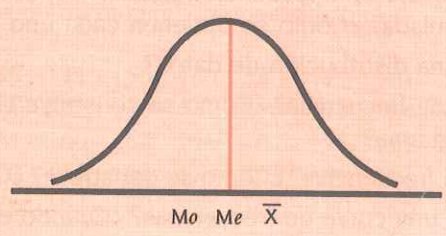
- Cuando se trate de intervalos y los intervalos primero y último quedan abiertos, debemos utilizar **mediana** y **moda.**
- Cuando se trate de caracteres cualitativos y los datos estén ordenados, debemos utilizar **mediana** y **moda.**
- Cuando se trate de calcular totales, la única medida es la **media aritmética**; por ejemplo, si basados en la experiencia queremos conocer el posible gasto futuro de energía eléctrica en una empresa, la única medida es la **media.**
- Cuando los valores extremos tiendan a descentrar el representante de la muestra, debemos utilizar la **mediana.**
- Cuando queramos conocer el rendimiento académico de un estudiante con relación a su grupo, la **mediana** resulta la medida apropiada ya que permite determinar si la persona está por encima de la mitad o por debajo de ella.

2. Las medidas de tendencia central tienen una interpretación geométrica sencilla (observemos la siguiente figura).

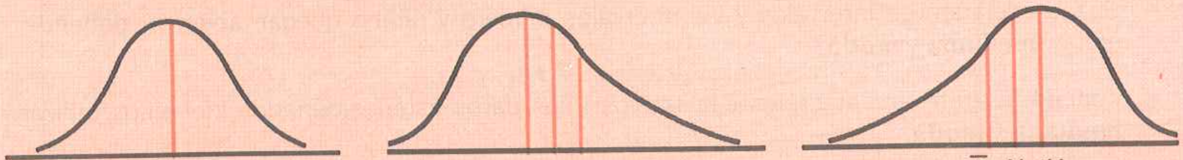


- La **moda (Mo)** es la abscisa correspondiente al punto máximo de la curva.
- La **mediana Me)** tiene la propiedad de que su ordenada divide al área bajo la curva en dos partes iguales.
- La **media aritmética ($\bar{x}$)** es un punto de equilibrio (semejante a un centro de gravedad).

- Si la curva es simétrica, las tres medidas coinciden y podemos tomar cualquiera de ellas como valor representativo de la distribución.



- Si la curva de la distribución no es simétrica, se denomina **ASIMÉTRICA O SESGADA.** En este caso, la moda no cambia, pero la mediana y la media se corren en la dirección de la asimetría. La asimetría es positiva hacia la derecha y negativa hacia la izquierda. En la asimetría positiva, la mediana aumenta (queda más a la derecha que la moda) debido al mayor número de frecuencias y la media aritmética aumenta aún más (queda más a la derecha que las otras dos) ya que hay un aumento en la frecuencia y en el valor de las observaciones. En las asimetrías negativas, ocurre lo contrario: la mediana disminuye y la media aritmética disminuye más que la mediana. Las figuras siguiente nos aclaran todo lo anterior:



$Mo=Me=\overline{X}$	$Mo<Me<\overline{X}$	$\overline{X}< Me<Mo$
SIMÉTRICA	ASIMÉTRICA A LA DERECHA o POSITIVA	ASIMÉTRICA A LA IZQUIERDA o NEGATIVA

EJERCICIO 11.2

1 Preguntas para revisar la teoría

1.1 En estadística, ¿qué es población? ¿qué es muestra?

1.2 ¿Qué son caracteres estadísticos?

1.3 ¿Cuándo un caracter estadístico es cualitativo? ¿Cuándo es cuantitativo?

1.4 ¿Cuándo una variable estadística es discreta? ¿Cuándo es continua?

1.5 Una vez escogida una muestra, ¿qué se hace con ella?

1.6 ¿Cómo se agrupan los datos de una distribución cuando la variable es discreta y hay muchos datos o cuando la variable es continua?

1.7 ¿A qué se denomina MARCA DE CLASE?

1.8 ¿De qué maneras se puede representar gráficamente una distribución de datos?

1.9 ¿Cómo se diseña un diagrama circular?

1.10 ¿Cómo se diseña un histograma?

1.11 ¿Qué es frecuencia absoluta? ¿Frecuencia relativa? ¿Frecuencia absoluta acumulada? ¿Frecuencia relativa acumulada? ¿Cómo se obtienen cada uno de ellos?

1.12 ¿Qué es RANGO de una distribución de datos?

1.13 ¿Qué es un polígono de frecuencia? ¿Cómo se construye el polígono de frecuencia correspondiente a un histograma?

1.14 ¿Qué es una curva de frecuencias? ¿Cómo se construye? ¿Qué es una OJIVA?

1.15 ¿Cuándo es simétrica una curva de frecuencias? ¿Cuándo es asimétrica?

1.16 ¿Qué son medidas de tendencia central? ¿Cuáles son?

1.17 ¿Cómo se calcula la media aritmética de un conjunto de datos?

1.18 ¿Qué es la media aritmética ponderada? ¿Cómo se calcula?

1.19 ¿Qué es la mediana? ¿Cómo se obtiene la mediana cuando el número de datos es pequeño? ¿Y cuando es grande?

1.20 ¿Cómo se obtiene la mediana de una distribución de datos agrupados en intervalos?

1.21 ¿Qué es la moda de una distribución? En una curva de frecuencia, ¿cómo se determina la moda?

1.22 ¿Cómo es la ubicación de las medidas de tendencia central en una curva asimétrica hacia la derecha? ¿Y hacia la izquierda?

2 Halla la media de los siguientes conjuntos de datos:

a) 46, 85, 53, 76, 60

b) 0,25 ; 0,36 ; 0,83 ; 0,86 ; 0,90

3 Dos alumnos de un mismo curso obtuvieron las calificaciones que se indican a continuación. Las asignaturas tienen diferentes ponderaciones (representadas por los números 6,3,4,3,... escritos entre paréntesis al lado de cada asignatura). Halla el promedio de cada uno.

ASIGNATURA	ESTUDIANTE A	ESTUDIANTE B
ESPAÑOL (6)	4,0	3,0
HISTORIA (3)	3,0	4,0
FILOSOFIA (4)	4,0	5,0
INGLÉS (3)	5,0	3,0
MATEMÁTICAS (6)	3,0	4,0
FÍSICA (4)	4,0	4,0
QUÍMICA (4)	3,0	4,0
DIBUJO (2)	5,0	3,0

4 Halla la media, la mediana y la moda del conjunto de datos siguiente:

1, 2, 2, 3, 3, 5, 6, 6, 10, 12

5 Se tiene la siguiente lista de datos:

17	14	16	8	31	16	14	9	17	11
25	24	28	10	48	24	12	13	43	24
32	37	33	42	11	34	16	41	21	15

a) Construye un histograma de frecuencias para este conjunto
b) Dibuja un polígono de frecuencias para este conjunto de datos usando ocho puntos, incluidos los puntos finales.
c) Dibuja la curva de frecuencias para este conjunto de datos
d) Halla la media, la mediana y la moda de esta muestra, para los datos agrupados y para los datos sin agrupar. Compara los resultados y coméntalos.

6 Las estaturas en centímetros de 50 mujeres son las siguientes:

157	155	171	150	163	150	172	161	154	174
163	147	152	163	149	158	175	164	157	153
169	161	160	164	155	162	151	167	167	167
154	170	158	163	175	169	169	158	150	156
157	174	162	150	151	165	170	156	170	153

a) Construye una tabla de frecuencias agrupadas.
b) Construye un histograma usando el resultado del literal a)
c) Dibuja una ojiva usando el resultado del literal a)
d) Halla la media, la mediana y la moda de esta distribución, para los datos agrupados y para los datos sin agrupar. Compara los resultados y coméntalos.
e) ¿Cuál sería la medida adecuada para resumir en un valor único los datos de este problema?

7 En una investigación realizada por la secretaria de un médico para averiguar los tiempos de espera, en minutos, de los pacientes que visitan al doctor, una muestra de pacientes de un día arrojó estos resultados:

32	25	35	50	25	55	30	50	35	35	35
5	5	60	35	30	30	25	55	30	30	20
60	25	25	40	80	20	20	5	5	5	10

a) Construye una tabla de frecuencias agrupadas
b) Construye un histograma usando el resultado anterior
c) Dibuja la curva de frecuencias correspondiente
d) ¿La curva es simétrica o asimétrica?
e) Dibuja la ojiva para esta distribución
f) Calcula la media, la mediana y la moda de esta distribución, para los datos agrupados y para los datos sin agrupar. Compara los resultados y coméntalos.
g) ¿Cuál sería la medida adecuada para resumir en un valor único los datos de este problema?

8 Se realizó un experimento para determinar el efecto de un cierto fármaco en los niveles de colesterol en la sangre, medido en mg por cada 100 ml, en hombres de 30 años y se obtuvieron estas medidas:

235	120	145	185	195	210	190	220
140	215	195	160	240	285	175	260
225	245	165	195	225	205	170	245
210	185	230	225	265			

a) Elabora una tabla de frecuencias agrupadas
b) Dibuja un histograma de frecuencias absolutas usando la tabla anterior
c) Dibuja la curva de frecuencias absolutas de esta distribución. ¿Es simétrica o asimétrica?
d) Dibuja la ojiva correspondiente a esta distribución
e) Calcula la media, la mediana y la moda de esta distribución
f) ¿Cuál sería la medida adecuada para resumir en un valor único los datos de este problema?

9 Escoge al azar el 20% de los estudiantes de 9º grado de tres colegios y recoge información acerca de sus estaturas medidas en centímetros. A continuación:

a) Elabora una tabla de frecuencias agrupadas
b) Dibuja un histograma de frecuencias absolutas usando la tabla anterior
c) Dibuja la curva de frecuencias absolutas de esta distribución. ¿Es simétrica o asimétrica?
d) Dibuja la ojiva correspondiente a esta distribución, para los datos agrupados y para los datos no agrupados. Compara los resultados y coméntalos.
e) Calcula la media, la mediana y la moda de esta distribución
f) ¿Cuál sería la medida adecuada para resumir en un valor único los datos de este problema?

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 1

La tabla siguiente corresponde al total de espectadores que asistieron a los estadios de Bogotá, Medellín, Cali y Barranquilla durante una fecha del campeonato rentado:

Ciudad	Espectadores
Bogotá	35.000
Medellín	40.000
Cali	30.000
Barranquilla	35.000

Con respecto al total de espectadores en las 4 ciudades, el porcentaje de personas que ingresaron al estadio de Barranquilla fue:

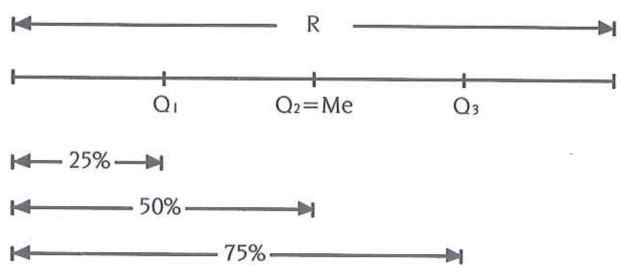
a) 20%   b) 25%
c) 30%   d) 18%

11.3 OTRAS MEDIDAS ESTADÍSTICAS

- Las medidas estadísticas que estudiamos en la sección anterior (la media aritmética, la mediana y la moda) se denominan **MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL** porque los valores de la variable indican una cierta "acumulación" de datos alrededor de tales valores en el centro de la distribución. Sin embargo, las informaciones que estas medidas proporcionan son limitadas y nada nos dicen sobre la forma en que están dispersos o varían los datos con relación a la tendencia central; es decir, no informan acerca de la relación de tales medidas con los otros datos de la distribución.
- Otras medidas estadísticas que nos ayudan a interpretar mucho mejor los datos de una distribución son las **MEDIDAS DE POSICIÓN** y las **MEDIDAS DE DISPERSIÓN.**
- Las medidas de posición son: la **MEDIANA,** los **CUARTILES**, los **DECILES**, y, en general, los **PERCENTILES.**
- Las medidas de dispersión son: El **rango o recorrido,** el **rango intercuartil, la desviación media,** la **varianza** y la **desviación típica, normal o estándar.**

11.4 MEDIDAS DE POSICIÓN

- Así como la mediana divide los datos de una distribución en dos partes iguales (luego de haberlos ordenado de menor a mayor o de mayor a menor), los **cuartiles** son tres números denominados $\mathbf{Q_1}$, $\mathbf{Q_2}$ y $\mathbf{Q_3}$ que dividen los datos en 4 partes porcentualmente iguales. Q_1 separa el 25% inferior de los datos clasificados del 75% superior; Q_2 es la mediana y Q_3 separa el 25% superior del 75% inferior.



- Los **deciles** son nueve números, simbolizados D_1, D_2, D_3,..., D_9 que dividen la distribución de los datos en 10 grupos con aproximadamente el 10% de los datos en cada grupo.
- También hay 99 **percentiles**, los cuales dividen los datos en 100 grupos con aproximadamente el 1% de los datos en cada grupo. Los percentiles se simbolizan en $\mathbf{P_1}$, $\mathbf{P_2}$, $\mathbf{P_3}$, ... $\mathbf{P_{99}}$.

¡ATENCIÓN!

1. El percentil 25, P_{25}, es el mismo Q_1. El percentil 50, P_{50}, es el segundo cuartil y, por lo tanto, la misma mediana. Así mismo, $D_1 = P_{10}$, $D_5 = P_{50} = Me$.
2. Un estudiante de 9° grado presenta las Pruebas Saber correspondientes a matemáticas y obtiene un porcentaje en el percentil 92 (P_{92}). Esto no significa que el estudiante haya obtenido un puntaje de 92% en el examen; más bien significa que el puntaje que obtuvo, sea cual haya sido, fue mayor que el del 92% de los puntajes obtenidos por quienes presentaron el mismo examen y también menor que el del 8% de sus compañeros.

3. El procedimiento para determinar el percentil P_k de un conjunto de n datos consiste en aplicar estos 4 pasos:

Paso 1 ....

Ordenar los **n** datos de menor a mayor

Paso 2 ....

Calcular $\dfrac{nk}{100}$

Paso 3 ....

Si $\dfrac{nk}{100}$ es entero, entonces la posición que ocupa P_k es $\dfrac{nk}{100} + 0.5$	Si $\dfrac{nk}{100}$ no es entero, entonces la posición de P_k es la del siguiente entero mayor que $\dfrac{nk}{100}$.

Paso 4 ....

P_k es la mitad entre el valor del dato que ocupa la posición $\dfrac{nk}{100}$ y el valor del siguiente dato.	P_k es el valor del dato que ocupa la posición del siguiente entero mayor que $\dfrac{nk}{100}$.

EJEMPLO 1

Los siguientes valores corresponden al contenido de grasa, en gramos, de una muestra de 21 litros de leche:

32	26	26	26	10	15	26	15	15	28	
26	28	11	22	22	30	26	30	26	22	22

Se pide hallar:

a) Me b) Q_1 c) D_7 d) P_{95} e) Mo f) $\overline{x}$

Solución

Para responder las preguntas, ordenamos los datos de menor a mayor:

10	11	15	15	15	15	22	22	22
22	26	26	26	26	26	26	26	28
28	30	32						

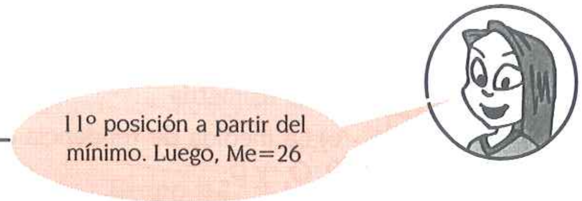
a) Como Me=P_{50} entonces, siguiendo los pasos recomendados tenemos, para n=21 y k=50:

Paso 2: Hallamos $\dfrac{nk}{100}$: $\dfrac{nk}{100} = \dfrac{(21)(50)}{100} = \dfrac{1050}{100} = 10{,}5$

Paso 3: Encontramos la posición de P_{50}: la posición de P_{50} es 11 ya que 10,5 no es entero y por ello, debemos tomar el siguiente entero más grande, en este caso 11.

Paso 4: Hallamos P_{50}: P_{50} es el undécimo valor de la distribución, contado a partir del mínimo.

10	11	15	15	15	15	22	22	22
22	$\boxed{26}$	26	26	26	26	26	26	28
28	30	32						



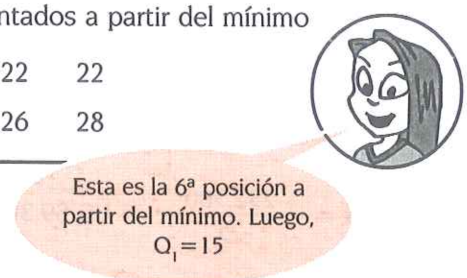
b) Como $Q_1 = P_{25}$, entonces para n=21 y k=25, se tiene:

Paso 2: $\frac{nk}{100} = \frac{(21)(25)}{100} = 5{,}25$

Paso 3: La posición de Q_1 es 6 (¿por qué?)

Paso 4: Q_1 es el 6° valor de los datos ordenados contados a partir del mínimo

10	11	15	15	15	$\boxed{15}$	22	22	22
22	26	26	26	26	26	26	26	28
28	30	32						



c) Como $D_7 = P_{70}$, entonces:

Paso 2: $\frac{nk}{100} = \frac{(21)(70)}{100} = 14{,}7$

Paso 3: La posición de D_7 es 15 (¿por qué?)

Paso 4: D_7 es el 15° valor de los datos ordenados contados a partir del mínimo: $D_7=26$ (¡Compruébalo!)

d) **Paso 2:** $\frac{nk}{100} = \frac{(21)(95)}{100} = 19{,}95$

Paso 3: La posición de P_{95} es 20 (¿por qué?)

Paso 4: P_{95} es el 20° valor de los datos ordenados contados a partir del mínimo: $P_{95}=30$

e) La moda es el dato que más se repite. Una sencilla observación de este conjunto de datos nos permite concluir que la moda de esta distribución es 26.

f) $$\overline{x} = \frac{10 + 11 + 4x15 + 4x22 + 7x26 + 2x28 + 30 + 32}{21} = \frac{10+11+60+88+182+56+30+32}{21}$$

$$= \frac{469}{21} = 22{,}\widehat{3}$$

Los resultados de la media, la moda y la mediana permiten concluir que esta distribución es ligeramente asimétrica o sesgada hacia la derecha.

EJEMPLO 2

La tabla siguiente contiene los salarios anuales, en dólares, de 25 trabajadores. Determinar:

Salario anual	f_i
5.500	7
6.000	5
7.000	6
8.000	4
30.000	3
	25

a) La moda
b) La media
c) La mediana
d) La asimetría
e) La medida de tendencia central adecuada para determinar el valor central
f) Q_1 y D_6

Solución

a) El dato de mayor frecuencia absoluta es U.S. $5.500 el cual aparece 7 veces. Luego, Mo= US $5.500

b) La media es:

$$\overline{x} = \frac{7 \text{ x } 5.500 + 5 \text{ x } 6.000 + 6 \text{ x } 7.000 + 4 \text{ x } 8.000 + 3 \text{ x } 30.000}{25}$$

$$\therefore \overline{x} = \frac{38.500 + 30.000 + 42.000 + 32.000 + 90.000}{25}$$

$$\therefore \overline{x} = \frac{232.500}{25} = \text{US } \$9.300$$

c) Como n=25 datos, entonces la mediana es el dato que ocupa la posición central; es decir, el dato número 13, el cual corresponde a US $7.000. Por lo tanto, Me = US $7.000.

d) Como: $\overline{x} > Me > Mo$, entonces la curva correspondiente al conjunto de datos es asimétrica o sesgada hacia la derecha.

e) La medida de tendencia central adecuada para determinar el valor central es la mediana, ya que la presencia, tres(3) veces, del salario 30.000, afecta mucho la media.

f) $Q_1 = P_{25}$. La posición de P_{25} es $\frac{(25)(25)}{100} = 6{,}25 \approx 7$. Luego, Q_1 es el 7º valor del conjunto de datos ordenados contados a partir del mínimo; es decir, US $5.500.

$D_6 = P_{60}$. La posición de P_{60} es $\frac{(25)(60)}{100} = 15$. Como este resultado es entero, entonces la posición de P_{60} es 15,5 y P_{60} será la semisuma del dato que ocupa la posición 15 y la que ocupa la posición 16; es decir: $\frac{7.000+7.000}{2}$ = US $7.000.

11.5 MEDIDAS DE DISPERSIÓN

- Cuando los datos de una distribución se encuentran muy alejados del valor central, se dice que presentan mucha **dispersión o variabilidad**; por el contrario, cuando los datos están muy cercanos al valor central, se dice que están concentrados y que se desvían poco del valor central. La siguiente experiencia nos mostrará la necesidad de contar con otras medidas estadísticas diferentes a las medidas de tendencia central: **Las medidas de dispersión.**

- En una universidad, la evaluación se realiza en la escala de 0,0 a 5,0. Dos grupos A y B de economía, tienen 25 alumnos cada uno y las notas obtenidas por los alumnos, en matemáticas, fueron las siguientes:

Grupo A

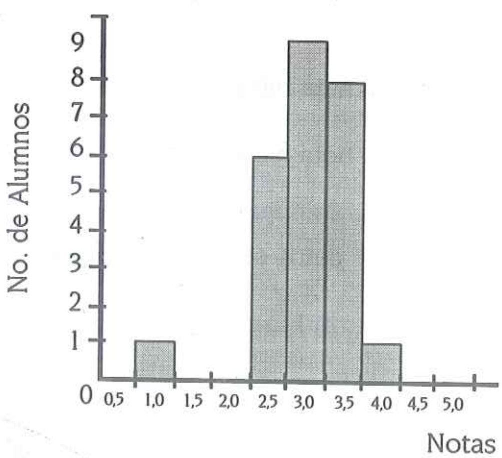
Nota	Frecuencia
1,0	1
2,5	6
3,0	9
3,5	8
4,0	1
Suma: 25	

Grupo B

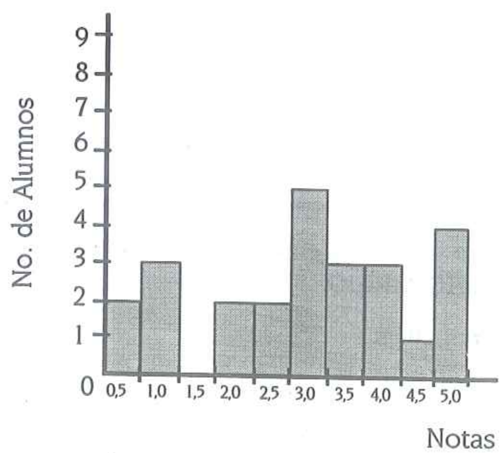
Nota	Frecuencia
0,5	2
1,0	3
2,0	2
2,5	2
3,0	5
3,5	3
4,0	3
4,5	1
5,0	4
Suma: 25	

- Representemos las notas en un par de histogramas de frecuencias.

Grupo A



Grupo B



- Contesta:

– ¿Cuál es la moda del grupo A? ¿Y la mediana?
– ¿Cuál es la moda del grupo B? ¿Y la mediana?
– Si $\overline{x}_A$ denota la media del grupo A y $\overline{x}_B$ la media del grupo B, entonces:

$$\bar{x}_A = \frac{1 \bullet 1{,}0 + 6 \bullet 2{,}5 + 9 \bullet 3{,}0 + 8 \bullet 3{,}5 + 1 \bullet 4{,}0}{25} = \frac{75{,}0}{25} = 3{,}0$$

$$\overline{x}_B = \frac{2 \cdot 0{,}5 + 3 \cdot 1{,}0 + 2 \cdot 2{,}0 + 2 \cdot 2{,}5 + 5 \cdot 3{,}0 + 3 \cdot 3{,}5 + 3 \cdot 4{,}0 + 1 \cdot 4{,}5 + 4 \cdot 5{,}0}{25} = \frac{75{,}0}{25} = 3{,}0$$

- Como vemos, ambos grupos tienen la misma nota media: 3,0; sin embargo, sus histogramas de frecuencias son muy diferentes: mientras que las notas en el grupo A están muy próximas a la media, las notas en el grupo B están muy dispersas; es decir, toman valores muy distintos.
- Para determinar el **grado de dispersión** de un conjunto de datos estadísticos utilizamos las llamadas **MEDIDAS DE DISPERSIÓN**, que son:

a) El recorrido o rango
b) El rango intercuantil
c) La desviación
d) La desviación media
e) La varianza
f) La desviación típica

11.5.1 El Rango o Recorrido y Rango Intercuartil

11.5.1.1. Rango o Recorrido

- Una manera de determinar la dispersión de una serie de datos es dar el **recorrido** o **rango**. La siguiente experiencia nos ayudará a comprender este concepto.

EXPERIENCIA

- Consideremos de nuevo las notas de los grupos A y B que analizamos en la experiencia anterior.
- Contesta:
  - ¿Cuál fue la nota máxima obtenida en el grupo A? ¿Y cuál fue la nota mínima? ¿Cuál es la diferencia entre estos dos valores?
  - ¿Cuál fue la nota máxima obtenida en el grupo B? ¿Y cuál fue la nota mínima? ¿Cuál es la diferencia entre estos dos valores?
- La diferencia entre el dato mayor y el dato menor de una serie de datos se denomina **RANGO o RECORRIDO**.
- Así pues:

RECORRIDO DE A = 4,0 – 1,0 = 3,0
RECORRIDO DE B = 5,0 – 0,5 = 4,5

Como el RECORRIDO DE B ES MAYOR QUE el RECORRIDO DE A entonces decimos que en el grupo B hay mayor **GRADO DE DISPERSIÓN.**

APRENDAMOS

- El **RANGO** o **RECORRIDO** de una serie de datos es la diferencia entre el dato mayor y el dato menor.
- El recorrido nos da una medida del **GRADO DE DISPERSIÓN**.

¡ATENCIÓN!

El **RANGO** es una medida fácil de calcular y, por esta razón, a menudo se usa para estimar otras medidas de dispersión, como la **desviación estándar**, que no se calculan fácilmente. Sin embargo, el rango no siempre es una medida confiable para la dispersión de una colección de datos ya que puede afectarse gravemente por la presencia de valores extremos de los datos, llamados **valores atípicos.**

11.5.1.2. El Recorrido Intercuartil

- Una medida que es indiferente a la presencia de valores atípicos es el **RANGO INTERCUARTIL**, el cual se define así:

APRENDAMOS

- El **RANGO INTERCUARTIL** , denotado **IQR**, es la diferencia entre el tercer cuartil (Q_3) y el primer cuartil (Q_1); es decir:

$$\mathbf{IQR = Q_3 - Q_1}$$

EJEMPLO

Hallemos el rango intercuartil de las notas de los grupos A y B que hemos venido analizando.

Solución

- **Rango intercuartil del grupo A:**

1,0	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	3,0	3,0	3,0
3,0	3,0	3,0	3,0	3,0	3,0	3,5	3,5	3,5	3,5
3,5	3,5	3,5	3,5	4,0					

- Hallemos $Q_1 = P_{25}$:

$* \ \dfrac{nk}{100} = \dfrac{(25)(25)}{100} = 6{,}25$

* Luego, la posición de Q_1 es 7.

* Q_1 es el 7° valor de la distribución, contando a partir del mínimo; es decir, $Q_1 = 2{,}5$.

Grupo B – Media: 3,0			
Nota	**Frecuencia (F)**	**Desviación (d): $x_i - \overline{x}$**	**Desviación Total: F•d**
0,5	2	-2,5	2 • (– 2,5) = –5,0
1,0	3	-2,0	3 • (– 2,0) = –6,0
2,0	2	-1,0	2 • (– 1,0) = –2,0
2,5	2	-0,5	2 • (– 0,5) = –1,0
3,0	5	0,0	5 • (0,0) = 0,0
3,5	3	0,5	3 • (0,5) = 1,5
4,0	3	1,0	3 • (1,0) = 3,0
4,5	1	1,5	1 • (1,5) = 1,5
5,0	4	2,0	4 • (2,0) = 8,0
			Suma = 0

- Así, pues, si queremos dar la desviación de una serie de datos, debemos hallar el valor absoluto de cada desviación, sumarlos y dividir por el número de datos. El resultado se denomina **desviación media**.
- Hallemos la desviación de cada dato y su valor absoluto:

– GRUPO A:

$d_1 = 1,0 - 3,0 = -2,0$; luego, $| d_1 | = 2,0$; $d_2 = 2,5 - 3,0 = -0,5$; luego, $| d_2 | = 0,5$

$d_3 = 3,0 - 3,0 = 0,0$; luego, $| d_3 | = 0,0$; $d_4 = 3,5 - 3,0 = 0,5$; luego, $| d_4 | = 0,5$

$d_5 = 4,0 - 3,0 = 1,0$; luego, $| d_5 | = 1,0$

Luego, la **desviación media** del grupo A es:

$$\overline{d} = \frac{2,0 + 0,5 + 0,0 + 0,5 + 1,0}{25} = \frac{4,0}{25} = 0,16 \quad \text{.............................} \quad (1)$$

– GRUPO B:

$d_1 = 0,5 - 3,0 = -2,5$; luego, $| d_1 | = 2,5$; $d_2 = 1,0 - 3,0 = -2,0$; luego, $| d_2 | = 2,0$

$d_3 = 2,0 - 3,0 = -1,0$; luego, $| d_3 | = 1,0$; $d_4 = 2,5 - 3,0 = -0,5$; luego, $| d_4 | = 0,5$

$d_5 = 3,0 - 3,0 = 0,0$; luego, $| d_5 | = 0,0$; $d_6 = 3,5 - 3,0 = 0,5$; luego, $| d_6 | = 0,5$

$d_7 = 4,0 - 3,0 = 1,0$; luego, $| d_7 | = 1,0$; $d_8 = 4,5 - 3,0 = 1,5$; luego, $| d_8 | = 1,5$

$d_9 = 5,0 - 3,0 = 2,0$; luego, $| d_9 | = 2,0$

Luego, la **desviación media** del grupo B es:

$$\overline{d} = \frac{2,5 + 2,0 + 1,0 + 0,5 + 0,0 + 0,5 + 1,0 + 1,5 + 2,0}{25} = \frac{11,0}{25} = 0,44 \quad \text{..........} \quad (2)$$

- Los resultados (1) y (2) nos muestran que la desviación media del grupo B es mucho mayor que la desviación media del grupo A; así, pues, los datos del grupo B están **más dispersos** o **menos concentrados** que los del grupo A.

APRENDAMOS

La **DESVIACIÓN MEDIA** de una serie de datos es el promedio o media aritmética de los valores absolutos de todas las desviaciones; es decir:

$$\overline{\mathbf{d}} = \frac{|\mathbf{d}_1| + |\mathbf{d}_2| + |\mathbf{d}_3| + \dots + |\mathbf{d}_n|}{\mathbf{n}} = \frac{1}{\mathbf{n}} \sum |\mathbf{x}_i - \overline{\mathbf{x}}|$$

11.5.2.2 Varianza

EXPERIENCIA

- Es posible que la desviación media no permita conocer la situación de algunos miembros que están muy alejados de la media aritmética. En este caso, podemos utilizar dos medidas estadísticas: **la varianza** y **la desviación estandar o típica.**
- Para calcular la **varianza** procedemos así:
  - Hallamos cada desviación: $x_1 - \overline{x}$, $x_2 - \overline{x}$, ..., $x_n - \overline{x}$.
  - Elevamos al cuadrado cada una de las desviaciones y sumamos los resultados:

$$(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \dots + (x_n - \overline{x})^2$$

  - Finalmente, dividimos esta suma entre el número de datos **n** menos **1**. Esta es la varianza:

$$\text{VARIANZA} = \frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \dots + (x_n - \overline{x})^2}{n - 1} = \frac{1}{n-1} \sum (x_i - \overline{x})^2$$

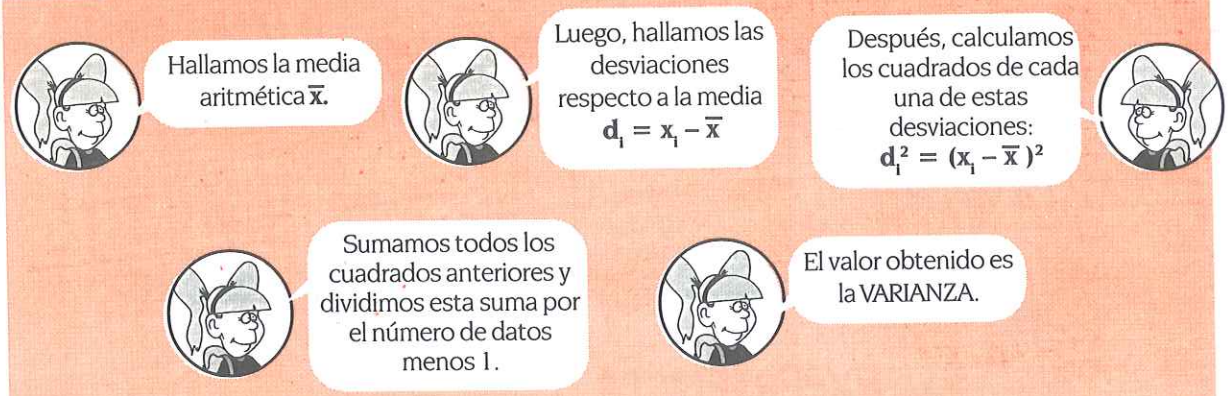
APRENDAMOS

La **VARIANZA** de una distribución, denotada por $\mathbf{s^2}$ es el cociente de la suma de los cuadrados de las desviaciones medias entre el número de datos **n** menos **1**; es decir:

$$\mathbf{VARIANZA} = \mathbf{s}^2 = \frac{\sum(\mathbf{x}_i - \overline{\mathbf{x}})^2}{\mathbf{n-1}} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \mathbf{(1)}$$

¡ATENCIÓN!

1. Para el cálculo de la varianza debemos aplicar la definición anterior, lo cual significa seguir estos pasos:



2. Algunos autores calculan la varianza dividiendo $\Sigma(x_i - \overline{x})^2$ entre **n**. Desde luego, para valores grandes de **n** hay poca diferencia entre los valores de $\frac{\Sigma(x_i - \overline{x})^2}{n-1}$ y $\frac{\Sigma(x_i - \overline{x})^2}{n}$, pero se prefiere el primero por las propiedades estadísticas que tiene.

3. Cuando el número de datos **n** es muy grande, la expresión (1) puede volverse poco práctica. En estos casos, conviene utilizar la siguiente expresión que es una transformación de la (1).

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\left[\Sigma x_i^2 - \frac{(\Sigma x_i)^2}{n}\right] \quad \text{.................................} \ (2)$$

La expresión (2) se denomina **"de atajo"** porque ahorra el cálculo de la media aritmética ($\overline{x}$).

4. Si la varianza se usa por sí misma como medida descriptiva de la dispersión, es difícil interpretarla porque sus unidades son el cuadrado de las unidades de medida.

5. Las expresiones (1) y (2) son útiles cuando tomamos cada dato unitariamente, en la forma en que fueron obtenidos de la encuesta o experimento. Si los **n** datos han sido ordenados o agrupados en intervalos en una tabla de frecuencias de modo que cada dato tenga una frecuencia f_i, entonces la expresión para calcular la varianza que debemos aplicar es:

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\left[\Sigma x_i^2 \cdot f_i - \frac{(\Sigma f_i \cdot x_i)^2}{n}\right]; \text{ siendo } x_i \text{ las marcas de clase} \quad \text{............} \ (3)$$

EJEMPLO 1

La siguiente tabla presenta la distribución de los pesos en kg de 75 niños. Los datos fueron agrupados en intervalos así:

Intervalos	Marcas de clase x_i	Frecuencia f_i
[36 - 40)	38	4
[40 - 44)	42	8
[44 - 48)	46	19
[48 - 52)	50	25
[52 - 56)	54	9
[56 - 60)	58	7
[60 - 64)	62	3
TOTAL		75

Determinemos la varianza de los pesos de estos 75 niños:

Solución

- Completemos la tabla anterior con los cálculos correspondientes a $\mathbf{x_i \bullet n_i}$ y $\mathbf{x^2_i \bullet n_i}$:

Intervalos	Marcas de clase x_i	Frecuencia f_i	$x_i \bullet f_i$	$x^2_i \bullet f_i$
[36 - 40)	38	4	152	5776
[40 - 44)	42	8	336	14112
[44 - 48)	46	19	874	40204
[48 - 52)	50	25	1250	62500
[52 - 56)	54	9	486	26244
[56 - 60)	58	7	406	23548
[60 - 64)	62	3	186	11532
		$\sum f_i=75$	$\sum x_i \bullet f_i=3690$	$\sum x_i^2 \bullet f_i=183.916$

- Ahora aplicamos la expresión (3) para calcular la varianza:

$$s^2 = \frac{1}{74}\left[\,183916 - \frac{(3690)^2}{75}\,\right] = 32 \text{ kg}^2$$

11.5.2.3 Desviación Típica o Estándar

APRENDAMOS

La **DESVIACIÓN TÍPICA O ESTÁNDAR** de una distribución estadística es la raíz cuadrada positiva de la varianza. Se simboliza con **s;** es decir:

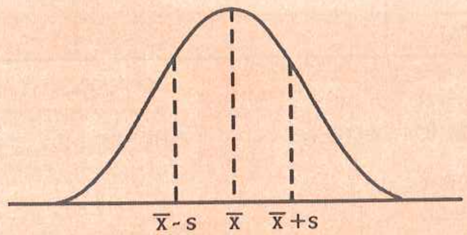
$$\mathbf{s = \sqrt{s^2}}$$

- En el ejemplo anterior, la desviación típica o estándar es $s = \sqrt{32} = 5{,}66$ kg

¡ATENCIÓN!

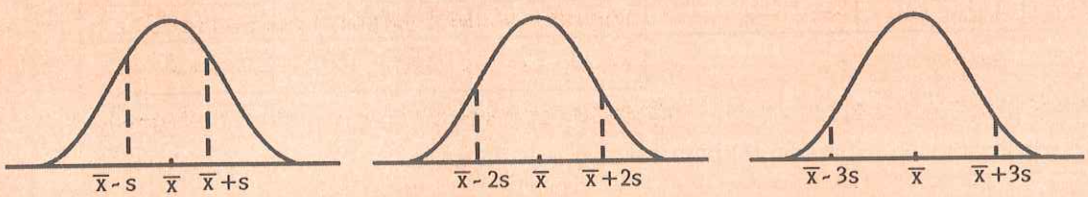
1. Una ventaja práctica de la desviación típica sobre la varianza es que sus unidades son las mismas unidades de los datos de la muestra.

2. Aunque tanto la desviación típica como la varianza no se pueden interpretar en forma aislada, la desviación típica conjuntamente con la media aritmética si tiene un significado práctico. En efecto, si la distribución de los datos es simétrica, su representación gráfica puede obedecer a la famosa "campana de Gauss" la cual corresponde a una **distribución normal** porque muchos fenómenos se distribuyen de esta manera.

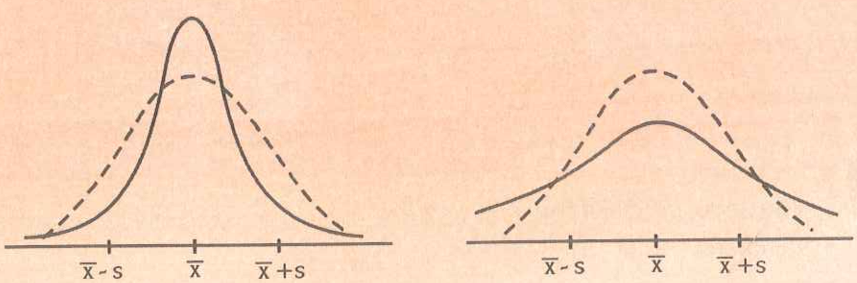


El punto más alto de esta campana corresponde a la media aritmética, los valores centrales son más frecuentes que los alejados, cuya frecuencia disminuye. En este tipo de distribuciones normales, se considera que el 100% de los datos está dentro del área comprendida en la campana:

- El área que hay entre $\overline{x}-s$ y $\overline{x}+s$ es del 68,2%
- El área que hay entre $\overline{x}$-2s y $\overline{x}$+2s es del 95,5%
- El área que hay entre $\overline{x}$ - 3s y $\overline{x}$ +3s es del 97,7 %



Cuando la campana es muy puntiaguda se dice que hay poca dispersión y cuando la campana está muy aplastada entonces la dispersión es mucho mayor.



3. La varianza y la desviación típica tienen una seria limitación: como ambas dependen de la media aritmética, pueden verse gravemente afectadas por la presencia de datos atípicos. Cuando en un conjunto de datos hay datos atípicos y se quiere tener una medida resistente a ellas, debe utilizarse el rango intercuartil.

EJEMPLO 2

Hallemos el porcentaje de la distribución de los pesos de los 75 niños del ejemplo 1, que se encuentran en los intervalos: a) $\overline{x} \pm s$ b) $\overline{x} \pm 2s$ c) $\overline{x} \pm 3s$

Solución:

- Como la media aritmética de esta distribución es $\overline{x} = 49{,}20$ entonces:

a) $\overline{x} \pm s = (\overline{x} - s ; \overline{x} + s) = (49{,}20-5{,}66 ; 49{,}20+5{,}66) = (43{,}54 ; 54{,}86)$, Entre 43,54 y 54,86 hay 54 datos, lo que equivale al $\frac{54}{75} \times 100 = 72\%$ de la distribución

b) $\overline{x} \pm 2s = (\overline{x} - 2s ; \overline{x} + 2s) = (37{,}58 ; 60{,}52)$. En este intervalo hay 71 datos, equivalente al $\frac{71}{75} \times 100 = 94{,}67\%$ de la distribución.

c) $\overline{x} \pm 3s = (x-3s ; x+3s) = (32{,}22 ; 66{,}18)$. Este intervalo contiene el 100% de los datos y no hay datos atípicos.

- Estos porcentajes nos dicen que la distribución de los pesos de los niños puede tener forma acampanada; es decir, puede ser normal o aproximadamente normal.

11.5.2.4 Coeficiente de Variación

APRENDAMOS

- El **COEFICIENTE DE VARIACIÓN,** denotado **CV**, es el cociente entre la desviación típica y la media aritmética, expresado este cociente en porcentaje; es decir:

$$\mathbf{CV} = \frac{s}{\overline{x}} \times 100$$

- El **CV** es independiente de la unidad de medida; por lo tanto permite comparar la dispersión de los datos de dos o más muestras, aún en los casos en que dichos datos están expresados en unidades diferentes. Por ejemplo, los datos de una muestra pueden estar en años y los de otra muestra en kilos y, sin embargo, podemos comparar sus coeficientes de variación.

EJEMPLO

Determinemos los coeficientes de variación de los grupos A y B de economía que presentaron la prueba de matemáticas y saquemos conclusiones.

Solución:

- Las varianzas son:

s^2 (grupo A) = 0,229 (¡Comprobar!)

s^2 (grupo B) = 0,791 (¡Comprobar!)

y las desviaciones estandar fueron:

$$s_A = \sqrt{0,229} = 0,478$$
$$s_B = \sqrt{0,791} = 0,889$$

- Por lo tanto, los coeficientes de variación de estos dos grupos son:

$$CV_A = \frac{s_A}{\overline{X}_A} x100 = \frac{0,478}{3,0} x\ 100 = 15,9$$

$$CV_B = \frac{s_B}{\overline{X}_B} x100 = \frac{0,889}{3,0} x\ 100 = 29,6$$

- Como el coeficiente de variación es mayor en el grupo B que en el grupo A, entonces los datos del grupo B están más dispersos o menos concentrados que los del grupo A.

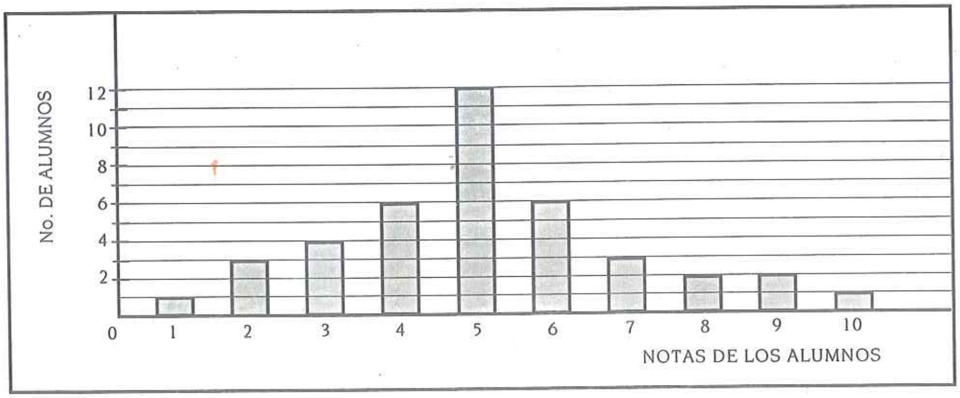
1 Se ha tomado el peso a un grupo de atletas. Estos son los resultados en kg:

75, 77, 76, 77, 77, 79, 78, 77

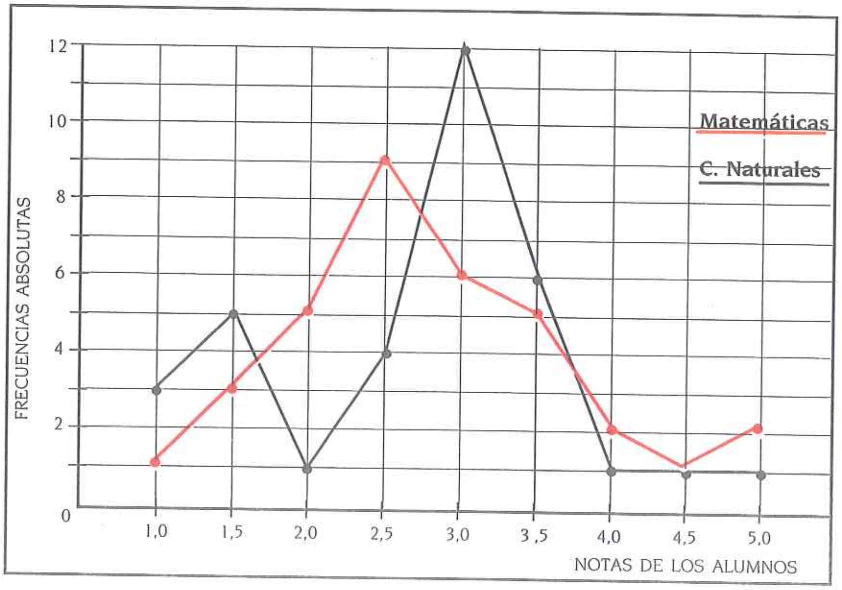
Halla el recorrido, la desviación media, la varianza y la desviación típica.

2 Las estaturas en centímetros de 10 jóvenes son: 163, 167, 154, 170, 165, 167, 168, 163, 169, 154 Calcula el rango y la desviación típica.

3 El siguiente diagrama de barras muestra las notas de los alumnos de una clase. Halla el rango y la desviación típica.



4 El siguiente polígono de frecuencias compara los resultados de unos alumnos en una evaluación de ciencias naturales y matemáticas.



a) ¿Cuántos alumnos presentaron las evaluaciones?
b) Halla la media, la mediana y la moda de cada una de las materias.
c) ¿En cuál de las dos materias están las notas menos dispersas?

5 Una fábrica tiene que seleccionar entre dos empresas A y B para el suministro de bombillas. Elige 30 muestras de cada una de las dos empresas y anota la duración de las bombillas, manteniéndolas permanentemente encendidas. Estos fueron los resultados:

EMPRESA A

Días de Duración	No. de Bombillas
52	6
58	8
66	7
70	5
76	4
	30

EMPRESA B

Días de Duración	No. de Bombillas
51	3
56	5
67	7
73	8
75	7
	30

¿En cuál de las dos empresas es mayor la dispersión?

6 Un científico midió los pesos de varios elefantes en la India y encontró un peso promedio por elefante de 10800 kg con una varianza igual a 338.724 kg^2. También midió el peso de las ratas y encontró una medida de 470 gramos y una varianza de 7569 $gramos^2$. Compara la variabilidad de los pesos de estos animales. ¿Cuál peso es más homogeneo?

7 A continuación se presentan las calificaciones definitivas obtenidas por un grupo de 70 estudiantes del curso Matemáticas Básicas, en el semestre anterior:

2,8	3,3	2,4	3,7	3,2	3,1	4,5	3,3	3,0	1,3
3,4	2,5	3,6	1,8	3,0	3,4	3,7	3,4	2,3	3,1
3,1	2,8	2,0	4,3	2,5	1,0	3,0	3,3	1,4	3,7
3,7	3,7	3,2	3,6	1,6	2,4	2,5	3,0	3,5	2,0
4,2	3,6	3,1	3,5	2,6	3,2	3,2	2,6	2,8	1,5
3,1	3,2	3,4	2,6	3,4	2,3	1,7	3,2	3,3	3,4
3,0	2,2	3,9	3,0	3,3	3,8	3,1	4,3	3,9	3,0

Se pide:

a) Determinar el porcentaje de estudiantes que perdió el curso.

b) Agrupar los datos de esta distribución en clases.

c) Hallar el porcentaje de estudiantes que obtuvo calificación entre 2,5 y 3,5

d) Construir el histograma, el polígono de frecuencias absolutas, la curva de frecuencias absolutas, el polígono de frecuencias acumuladas y la ojiva de esta distribución.

e) Calcular la media, la mediana y la moda para los datos de esta distribución e interpretar los resultados.

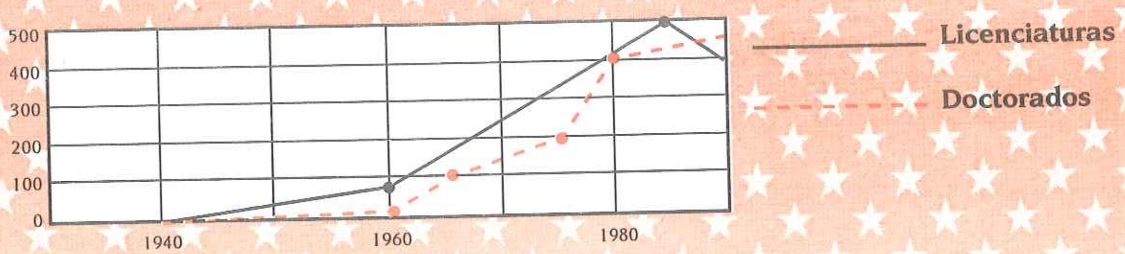
f) Calcular Q_1, Q_3, D_8 y P_{90} en esta distribución.

g) Calcular el rango, el rango intercuartil, la varianza, la desviación típica y el coeficiente de variación para los datos de esta distribución.

h) Calcular los porcentajes de la distribución en los intervalos $x \pm s$, $x \pm 2s$, $x \pm 3s$ y compararlos con los de una distribución normal. ¿Podría ser la distribución de estos datos una distribución normal?

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 2

La gráfica muestra el total de licenciaturas y doctorados, en miles de diplomas, otorgados durante un período de años por una universidad:



De acuerdo con la gráfica, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

a) En 1950 hubo 50.000 doctorados y 60.000 licenciados.

b) En 1960 hubo 50.000 doctorados.

c) El número de licenciados fue siempre en aumento.

d) En 1980 hubo igual número de licenciados que de doctorados.

11.6 PROBABILIDAD

11.6.1 Revisión de Conceptos

- Esta sección trata del **azar**, de lo que puede o no ocurrir.
- Expresiones como "quizá", "muy posible" y "seguramente" pretenden medir la confianza en que algo suceda. Las situaciones más simples se presentan en los juegos de azar: dados, monedas, ruletas,...
- Recordaremos algunos de los conceptos fundamentales relacionados con la probabilidad y profundizaremos en ellos.

RECORDEMOS

- Un experimento es **ALEATORIO** o de **AZAR** cuando no podemos determinar el resultado que se va a obtener al realizarlo o que aún sabiendo los posibles resultados del experimento no es posible establecer cuál de ellos aparecerá al realizarlo.

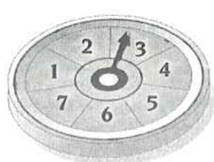
- Se llama **ESPACIO MUESTRAL** al conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio. Este conjunto se denota con la letra **E.**

EJEMPLO:

Observemos los siguientes experimentos aleatorios y sus espacios muestrales.

EXPERIMENTO	ESPACIO MUESTRAL
	E = { cara, sello}
Lanzar una moneda	2 resultados posibles

EXPERIMENTO	ESPACIO MUESTRAL
	E = {1,2,3,4,5,6}
Lanzar un dado cúbico	6 resultados posibles

EXPERIMENTO	ESPACIO MUESTRAL
	E={1,2,3,4,5,6,7}
Se gira la aguja	7 resultados posibles

EXPERIMENTO	ESPACIO MUESTRAL
	Las 40 cartas de la baraja española
Se extrae una carta de una baraja española	40 resultados posibles

- A los subconjuntos del espacio muestral se les llama **SUCESOS** o **EVENTOS.**

EJEMPLO:

En el experimento que consiste en lanzar un dado de 6 caras numeradas del 1 al 6, el espacio muestral es

$$E=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

y algunos subconjuntos de este espacio muestral son:

Salir par: A={2,4,6} ; Salir impar: B={1, 3, 5}
Salir múltiplo de 3: C={3,6} ; Salir mayor que 4: D={5,6}

Los conjuntos A,B,C y D se llaman **SUCESOS** o **SUCESOS ALEATORIOS.**

- Dos sucesos son **EQUIPROBABLES** cuando tienen la misma **oportunidad** o **posibilidad** de ocurrir.

EJEMPLO:

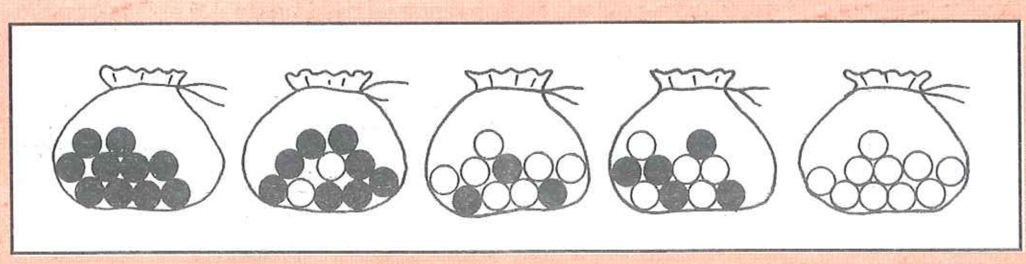
- Si lanzamos una moneda balanceada al aire, los sucesos **"sale cara"** y **"sale sello"** son equiprobables.
- Si lanzamos un dado exagonal balanceado numerado del 1 al 6, los sucesos **"sale par"** y **"sale impar"** son equiprobables.

- Un suceso es:

IMPOSIBLE: si sabemos que no puede suceder; es decir , que no tiene ninguna probabilidad de ocurrir.
SEGURO: si sabemos que siempre ocurre; es decir, que tiene toda la probabilidad de ocurrir.
POCO PROBABLE: si tenemos poca confianza en que ocurra
BASTANTE PROBABLE: si tenemos mucha confianza en que ocurra.

EJEMPLO:

Tenemos las siguientes bolsas con balotas de colores negro o blanco:



- ¿De cuál bolsa es **IMPOSIBLE** que salga una balota negra?
- ¿De cuál bolsa es **POCO PROBABLE** que salga una balota blanca?
- ¿De cuál bolsa es **BASTANTE PROBABLE** que salga una balota negra?
- De cuál bolsa es **SEGURO** que salga una balota blanca?

11.6.2 Probabilidad de un Suceso. Regla de Laplace.

PRIMERA EXPERIENCIA

- Entre los jugadores y jugadoras de baloncesto, hay que elegir el representante del colegio para una competición de tiros libres.

- Camilo, Mariana, Lina y Sergio hacen distinto número de lanzamientos. Estos son los resultados:

- Para saber a quien elegir el entrenador hace una tabla de frecuencias:

JUGADORES	Camilo	Mariana	Lina	Sergio
Frecuencia absoluta	40	60	63	36
Frecuencia absoluta	60	80	90	50
Frecuencia relativa	$\frac{40}{60} = 0{,}66$	$\frac{60}{80} = 0{,}75$	$\frac{63}{90} = 0{,}70$	$\frac{36}{50} = 0{,}72$

- El entrenador elegirá a Mariana porque tiene mejor frecuencia relativa y eso da más confianza en ella.

APRENDAMOS

- Cuanto mayor es la **frecuencia relativa** de un hecho, mayor es la **probabilidad** de que ocurra.

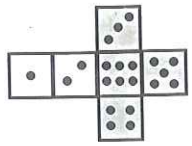
SEGUNDA EXPERIENCIA

- En una rifa se vendieron 100 boletas con los números 00 al 99. Contesta:
  - ¿Hay algún número que tenga mayor probabilidad de ganar que otro?
  - Si compro 5 boletas, ¿cuál será la probabilidad que tengo de ganar?
- Como todos los números son **EQUIPROBABLES** (es decir, igualmente probables), entonces una persona que compró 1 boleta tendrá **1** oportunidad de **100** de ganar o que **la probabilidad de ganar** es la fracción $\frac{1}{100}$.

- Por lo tanto, si compro 5 boletas, mi probabilidad de ganar será de **5** de **100;** es decir $\frac{5}{100}$.

TERCERA EXPERIENCIA

- Las caras de un lado ordinario se pintaron como muestra la figura. Si lanzamos el dado, ¿cuál es la probabilidad de obtener:



a) un 4?
b) una cara blanca?
c) una cara de color?
d) un número menor que 7?
e) un 9?

- a) Como hay 6 casos igualmente probables, la probabilidad de sacar 4 es $\frac{1}{6}$.

  b) Como hay 2 caras blancas de un total de 6, la probabilidad de obtener una cara blanca es $\frac{2}{6}$.

  c) Como hay 4 caras de color de un total de 6, la probabilidad de obtener cara de color es $\frac{4}{6}$.

  d) Como todos los números son menores que 7, la probabilidad de sacar alguno de ellos es $\frac{6}{6} = 1$

  e) Como no es posible que salga 9, entonces la probabilidad de este suceso es $\frac{0}{6} = 0$.

APRENDAMOS

DEFINICIÓN DE PROBABILIDAD

- Si en un experimento todos los resultados son equiprobables, entonces la probabilidad de que ocurra un suceso A, denotado **P(A)**, se define así:

$$\textbf{La probabilidad de un suceso A} = \textbf{P(A)} = \frac{\textbf{No. de casos favorables al suceso}}{\textbf{No. total de casos posibles}}$$

- Esta definición de probabilidad la enunció el matemático francés Pierre Simón de Laplace en 1812 y por eso se denomina **REGLA DE LAPLACE.**

11.6.3 Comparación de Probabilidades

PRIMERA EXPERIENCIA

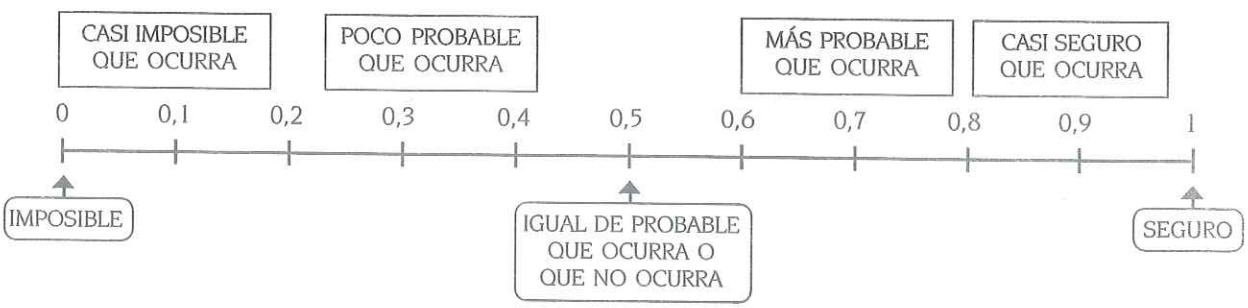
- Santiago y Camila van a jugar parqués. Para comenzar el juego, Santiago dice que hay que sacar 6 en el dado; pero, Camila dice que ella prefiere sacar 3, porque piensa que de este modo tiene ventaja.

¿Tiene razón Camila? ¿Podemos dejar que Camila comience a mover las fichas cuando le salga un 3, o es necesario que los dos jueguen a sacar el mismo número?

- Daniel, que está observando el juego, les propone hacer un experimento para resolver la discusión. Piensa que así podrá saberse quién tiene ventaja.
- Con este fin, les pide que traten de adivinar cuántas veces aproximadamente, saldrá el 3 y cuántas el 6, si lanzan el dado 24 veces. Les pide que completen la siguiente tabla:

RESULTADO	RECUENTO	FRECUENCIA ABSOLUTA	FRECUENCIA RELATIVA	NÚMERO ESPERADO DE VECES
1				
2				
3				
4				
5				
6				
TOTAL	**24**	**24**	**1**	**24**

- Ahora, lanzan el dado 24 veces y anotan los resultados en la tabla. Calcula la frecuencia relativa de obtener 6 y la de obtener 3. ¿Cuál es mayor? Completa todas las columnas de la tabla.
- Para medir la mayor o menor posibilidad de que ocurra un suceso en un experimento, le asignamos un número entre 0 y 1, llamado su **probabilidad**. Asignamos una **probabilidad 0** a un suceso que nunca puede ocurrir, por ejemplo, que salga un 7 al lanzar el dado. Asignamos una **probabilidad 1** a un suceso que ocurre siempre que se realiza el experimento; por ejemplo, al lanzar una moneda es seguro que saldrá **"cara"** o **"sello"**. A cualquier otro suceso distinto del **"imposible"** o del **"seguro"** se le asigna un número entre 0 y 1: Observa la siguiente recta donde se ha distribuído la probabilidad de un evento entre 0 y 1.



- ¿Cuál de las siguientes afirmaciones te parece verdadera cuando lanzamos un dado?

a) La probabilidad de obtener un 3 es mayor que la de obtener un 5.
b) La probabilidad de obtener un 5 es mayor que la de obtener un 3.
c) La probabilidad de obtener un 1 es mayor que la de obtener un 5.
d) La probabilidad de obtener un 5 es igual que la de obtener un 3.
e) La probabilidad de obtener un 1 es mayor que 0,5.
f) La probabilidad de obtener un 1 es menor que 0,5.

APRENDAMOS

- La **PROBABILIDAD** de un suceso cualquiera es un número comprendido entre 0 y 1.
- La probabilidad de ocurrencia de un suceso coincide con su frecuencia relativa después de repetir la experiencia un número grande de veces.

SEGUNDA EXPERIENCIA

- Para realizar esta experiencia, los alumnos formarán grupos de 3, uno de ellos tendrá una moneda de $200; el segundo, una tabla como la siguiente para el suceso "sello"

No. DE LANZAMIENTOS	SALE "SELLO"	SALE "SELLO"	SALE "SELLO"
	RECUENTO	FRECUENCIA ABSOLUTA	FRECUENCIA RELATIVA
20			
40			
60			
80			
100			
120			
140			
160			
180			
200			

y el tercer alumno, otra tabla similar a la anterior, pero para el suceso "cara".

- Empieza el juego. El alumno encargado de la moneda la lanza y los otros dos compañeros anotan los resultados de los sucesos "cara" o "sello", después de 20, 40, 60... 200 lanzamientos

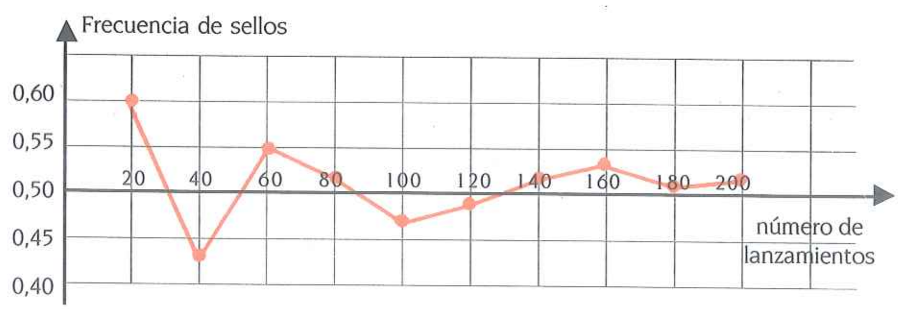
- Terminado el experimento, el profesor solicita a uno de los grupos que presente su informe. Este fue el resultado:

No. DE LANZAMIENTOS	SALE "SELLO"		SALE "CARA"	
	FRECUENCIA ABSOLUTA	FRECUENCIA RELATIVA	FRECUENCIA ABSOLUTA	FRECUENCIA RELATIVA
20	12	0,6	8	0,4
40	17	0,425	23	0,575
60	33	0,55	27	0,45
80	41	0,5125	39	0,4875
100	47	0,47	53	0,53
120	58	0,483	62	0,516
140	73	0,521	67	0,479
160	84	0,525	76	0,475
180	91	0,505	89	0,494
200	102	0,51	98	0,49

- ¿A qué valor se aproximan, por exceso o por defecto, la frecuencias relativas de los sucesos "cara" y "sello"? ¿Le ocurre lo mismo a los demás grupos de la clase?
- Cuando todos los alumnos presentaron sus tablas, observamos que las frecuencias relativas de los sucesos **SELLO** y **CARA** tomaron valores aproximados, por exceso o por defecto, al número **0,5** con variaciones cada vez más pequeñas.
- Este número al que se acerca la frecuencia relativa de un suceso cuando el número de pruebas es muy grande, lo denominamos **probabilidad del suceso.**
- Como vemos, los sucesos "sale cara" o "sale sello" al lanzar una moneda tienen la **misma probabilidad** de salir y escribimos:

$$\mathbf{P(cara)} = \frac{1}{2} = \mathbf{0{,}5} \quad ; \quad \mathbf{P(sello)} = \frac{1}{2} = \mathbf{0{,}5}$$

- El primer grupo que presentó el informe de la tabla de frecuencias absolutas y relativas elaboró este gráfico, correspondiente al **polígono de frecuencias relativas** del suceso "sello":



- Luego, el profesor escoge al azar los polígonos de frecuencias relativas de otros 2 grupos:

- Como vemos, en todos los trabajos presentados, los valores tienden a estabilizarse alrededor de 0,5 y el polígono de frecuencias se hace "menos brusco" en sus cambios a medida que el número de pruebas es más grande.

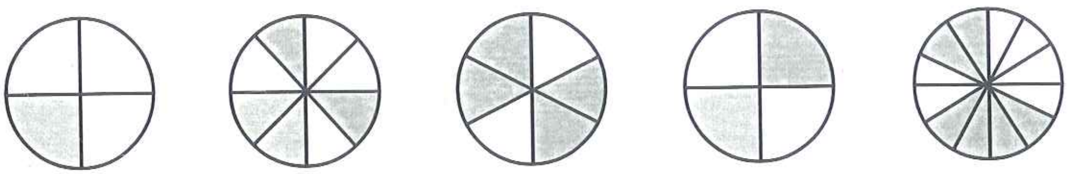
APRENDAMOS

PROBABILIDAD DE UN SUCESO

- La **FRECUENCIA RELATIVA** de un suceso se aproxima a su **PROBABILIDAD** a medida que el número de experimentos aumenta.

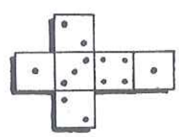
EJERCICIO 11.4

1 Fíjate en estas ruletas:



¿En cuáles de ellas los colores gris y blanco tienen la misma probabilidad de salir?

2 Supongamos que han construído un dado con estas caras:

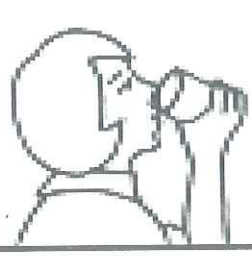


a) ¿Qué resultados pueden salir?
b) ¿Cuáles de ellos tienen la misma probabilidad de salir?

3 De los siguientes carteles, elige el más adecuado para cada uno de estos hechos:

IMPOSIBLE	POCO PROBABLE	BASTANTE PROBABLE	SEGURO

Hoy beberás al menos un vaso de agua.



Verás volar a un perro.

Este año, un familiar tuyo ganará el Baloto.

4 Una empresa tiene que elegir la marca de bombillas que va a comprar. Sus expertos han probado varias marcas durante un mes y han obtenido estos resultados:

MARCAS	A	B	C
No. de Bombillas	68	65	80
Bombillas fundidas	11	9	12

¿Cuál marca de bombillas comprará la empresa? ¿por qué?

5 Se lanza una chincheta varias veces. Ha salido 297 veces con la punta hacia arriba y 503 con la punta hacia abajo. Calcula la frecuencia relativa en cada caso. ¿Cuál de los dos resultados es más probable?

6 Cuatro amigos van a jugar al tiro al blanco con dardos. En el entrenamiento consiguieron estos resultados:

	Mariana	Sara	Juan	Camilo
No. de Lanzamientos	18	22	21	28
No. de Aciertos	3	5	4	6

a) Calcula las frecuencias relativas de aciertos para cada uno.
b) Ordena a los amigos según sea mayor o menor la probabilidad de estos resultados.

7 Indica la probabilidad de estos resultados:

a) Obtener un número par al lanzar un dado.
b) Conseguir el premio de un sorteo habiendo comprado todas las boletas.
c) Sacar sello al echar una moneda al aire.

8 Juan, Mariana y Camilo lanzan varias veces una moneda al aire y ésto es lo que obtuvieron:

Juan: "**mi frecuencia relativa de caras fue** $\frac{18}{40}$ ".

Mariana: "**la mía fue** $\frac{42}{80}$ ".

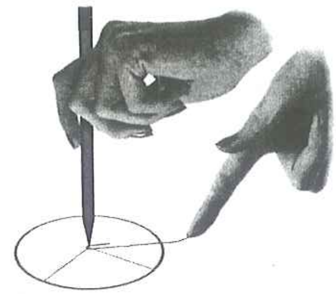
Lina: "**la mía,** $\frac{97}{200}$ ".

Camilo: "**Obtuve** $\frac{540}{1000}$ ".

a) ¿Cuántas veces realizó la experiencia cada uno?

b) ¿Quién obtuvo más éxito al sacar caras?

9 Realiza el siguiente experimento:



- Dibuja una circunferencia de radio 5cm, en un pedazo de cartulina y divídela en 4 sectores circulares iguales; luego, pinta 3 de azul y 1 de gris.
- Desenrolla un clip, dejando intacta la última curva, coloca la punta de un lápiz sobre el centro de la circunferencia y el clip a su alrededor. Has construído una ruleta, como la que muestra la figura siguiente.
- Para que la ruleta funcione basta darle un golpe al extremo del clip con el dedo índice.
- Sin hacer girar la ruleta, ¿cuál es la frecuencia esperada para el suceso "azul" y cuál para el suceso "gris"?
- Ahora, gira la ruleta 50 veces y confirma tu pronóstico completando la tabla siguiente:

No. DE GIROS	FRECUENCIA RELATIVA DEL AZUL	FRECUENCIA RELATIVA DEL GRIS	P (A)	P (G)
5				
10				
15				
20				
25				
30				

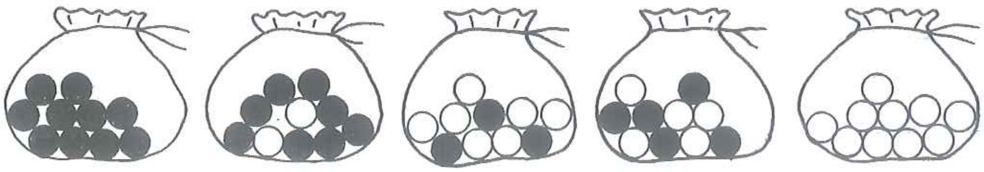
- Dibuja en un mismo diagrama, el polígono de frecuencias relativas (probabilidad) de ambos sucesos. ¿Hacia dónde tiende a estabilizarse la gráfica del suceso "azul"? ¿Y hacia dónde tiende a estabilizarse la gráfica del suceso "gris"?

10 Hemos tirado 5 veces una moneda de $500. Salieron 5 caras. ¿Qué es más probable que salga en el sexto lanzamiento: cara o sello?

11 Una urna tiene 10 bolas **negras** y 4 blancas. Se extrae al azar una bola. Halla las siguientes probabilidades:

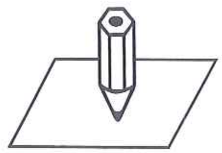
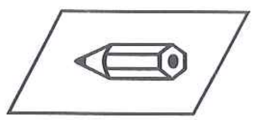
a) P (verde) b) P (azul) c) P (blanca)
d) P (no azul) e) P (no blanca)

12 Las siguientes bolsas contienen bolas **negras** o blancas. Indica a cuál bolsa se le puede asociar la frase:



a) Seguro que sale azul
b) Casi imposible que salga blanca
c) Poco probable que salga azul
d) Más probable que salga blanca
e) Imposible que salga azul
f) Igual de probable que salga azul o blanca

13 Numeramos las 6 caras de un lápiz. Lo hacemos rodar y observamos el número de la cara superior. Completa el siguiente cuadro:

SUCESO	PROBABILIDAD
0	
Par	
Menor que 5	
Obtener 1 ó 6	
El lápiz quedará así 	
El lápiz quedará así 	

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 4

Si se lanzan dos dados y su suma es 6, ¿ cuál es la probabilidad de que el resultado se halla obtenido mediante un 3 en cada dado?

TALLER DE REPASO DE LA UNIDAD 11

1. Preguntas para revisar la teoría:

1.1 En estadística, ¿qué son MEDIDAS DE POSICIÓN? ¿Cuáles son las medidas de posición?

1.2 ¿Cuáles son los CUARTILES? ¿Qué significa el Cuartil Q_3?

1.3 ¿Cuáles son los DECILES? ¿Qué significa el decil D_8?

1.4 ¿Cuáles son los PERCENTILES? ¿Qué significa el percentil P_{57}?

1.5 ¿Cuál es el procedimiento para hallar el percentil P_n de un conjunto **n** de datos?
1.6 ¿Qué y cuáles son las MEDIDAS DE DISPERSIÓN?
1.7 ¿Qué es RANGO o RECORRIDO? ¿Qué es RANGO INTERCUARTIL?
1.8 ¿Qué es DESVIACIÓN MEDIA? ¿VARIANZA? ¿DESVIACIÓN TÍPICA?
1.9 ¿Qué es el COEFICIENTE DE VARIACIÓN? ¿Cómo se calcula?
1.10 ¿Qué forma tiene la curva que representa una distribución normal?
1.11 En la campana que representa una distribución normal, ¿qué área ocupa el 68,2% de los datos? ¿Y el 97,7%?

2. En un examen en forma de test se tiene un punto de VERDADERO o FALSO que consta de 10 preguntas. 48 estudiantes presentan el examen y el profesor observa el número de respuestas acertadas, obteniendo los siguientes resultados:

7	5	7	6	8	6	5	7
10	8	6	9	4	8	7	6
5	7	10	9	7	6	7	6
9	8	7	7	6	7	3	4
7	8	8	9	7	7	8	7
7	6	8	3	8	8	7	7

Se pide:

a) Construir la tabla de distribución de frecuencias

b) La "Capacidad evaluativa" de este punto se considera **buena** si por lo menos el 60% de los estudiantes responden acertadamente 7 o más preguntas. ¿Qué conclusión puede obtenerse con los resultados anteriores?

c) Construir el diagrama de barras.

d) Calcular las medidas de tendencia central e interpretarlas.

e) Calcular Q_1, Q_3, D_3, D_6, P_{70} y P_{90}.

f) Calcular las medidas de dispersión y los intervalos $\overline{x} \pm s$, $\overline{x} \pm 2s$, $\overline{x} \pm 3s$. Hallar el porcentaje de los datos de cada uno de ellos y compararlos con los porcentajes de la Campana de Gauss.

3. Los registros de los tiempos empleados en los 100 metros planos por 80 estudiantes del programa de Educación Física fueron:

12,7	14,6	13,8	12,9	12,5	11,8	14,6	14,0	14,3	13,1
12,8	13,6	13,5	14,2	13,8	15,3	14,4	13,3	14,1	14,5
13,2	11,7	12,9	13,0	14,1	14,6	12,4	15,0	13,9	13,6
14,3	14,1	14,2	12,3	13,1	12,9	13,6	13,4	13,5	13,8
13,0	14,5	14,8	13,7	12,0	14,8	13,5	14,3	14,5	13,7
14,2	13,8	13,5	14,0	12,5	13,2	12,8	13,4	13,4	14,0
12,8	12,3	13,1	12,5	14,2	12,9	13,4	12,6	13,5	13,0
13,4	12,2	14,1	13,5	13,5	14,0	12,2	13,4	12,9	13,0

Se pide:

a) Agrupar la muestra en 7 intervalos y construir la tabla de frecuencias.

b) Construir el histograma, el polígono de frecuencias absolutas y el polígono de frecuencias acumuladas.

c) Calcular e interpretar las medidas de tendencia central.

d) Calcular Q_3, D_5, D_7, P_{60} y P_{90}.

e) Calcular las medidas de dispersión y los porcentajes de datos en los intervalos $\overline{x} \pm s$, $\overline{x} \pm 2s$ y $\overline{x} \pm 3s$. Compáralos con los porcentajes de la campana de Gauss y explicar cómo es la concentración de los datos respecto a la media.

f) ¿Podría considerarse normal esta distribución?

5. Contesta:

a) ¿Qué es un experimento aleatorio?

b) ¿Qué es un espacio muestral?

c) ¿Cuándo dos sucesos son equiprobables?

d) ¿Cuándo un suceso es seguro? ¿Imposible? ¿Poco probable? ¿Poco seguro?

e) Si en un experimento aleatorio todos los n sucesos son equiprobables, ¿qué valor toma la probabilidad de un suceso? ¿cuál es la probabilidad del suceso seguro? ¿Y la del suceso imposible?

f) ¿Qué relación existe entre la probabilidad de un suceso y su frecuencia relativa?

g) ¿Qué dice la Regla de Laplace?

h) Si lanzamos 200 veces un dado y dibujamos el diagrama del polígono de frecuencias relativas del evento "sale 5", ¿en qué valor tiende a estabilizarse la gráfica? ¿por qué?

6. Una ruleta como la de los casinos tiene 37 agujeros numerados del 0 al 36. Teniendo en cuenta los siguientes sucesos:

A = "salir el 15" ; B = "salir múltiplo de 11"
C = "salir par" ; D = "salir divisor de 3"

Determina el espacio muestral E y calcula:

a) P (A) b) P (B) c) P (C) d) P (D) e) P (E)

7. Se extrae, sin mirar, una carta de la baraja española. Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) Sea una copa
b) Sea un caballo
c) Sea un caballo de copa

8. Una bolsa contiene 5 bolas rojas, 3 verdes y 2 azules. Si extraemos una bola sin mirar, halla el espacio muestral E y calcula:

a) P (azul) b) P (roja) c) P (verde)
d) P (no azul) e) P (no roja) f) P (no verde)

5. En una bolsa hay guardadas 10 bolas numeradas del 1 al 10. Se saca una bola al azar. Determina el espacio muestral y halla la probabilidad de los siguientes sucesos:

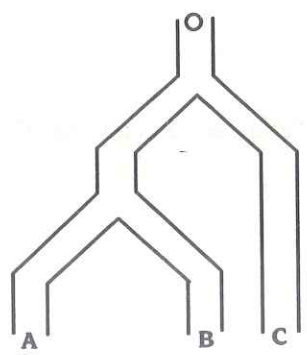
a) Que salga un número múltiplo de 2.
b) Que salga un número múltiplo de 3.
c) Que salga un número múltiplo de 5.
d) Que salga un número mayor que 5.
e) Que salga un número menor que 5.

6. Al lanzar una chincheta puede ocurrir que caiga con la punta hacia arriba o con la punta hacia abajo. Efectúa 100 lanzamientos de una chincheta y completa la siguiente tabla:

NÚMERO DE LANZAMIENTOS	NÚMERO DE CHINCHETAS CON LA PUNTA HACIA ARRIBA	FRECUENCIA RELATIVA DE LA PUNTA HACIA ARRIBA
10		
20		
30		
40		
50		
60		
70		
80		
90		
100		

Ahora, dibuja el polígono de frecuencias relativas. ¿Qué observas? Justifica tu respuesta.

7. Por la parte superior del laberinto se introduce una bola.



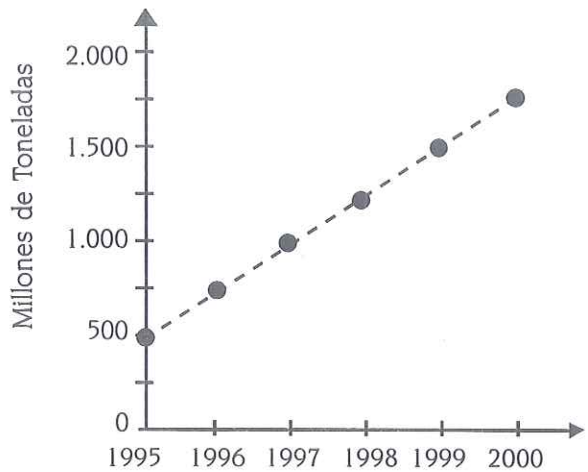
Contesta Verdadero o Falso a las siguientes afirmaciones:

a) Es igualmente probable que la bolsa recorra los caminos A y B.
b) La tercera parte de las veces la bola recorrerá el camino C.
c) El 25% de las veces recorrerá el camino B.

NOTA: Estos ejercicios fueron tomados de las Pruebas Saber del año 2002.

Las preguntas 1. a 4. se responden con base en la siguiente información:

Producción de Café en Colombia



1. Con base en la gráfica anterior, se puede afirmar que la producción de café a nivel nacional, fue de:

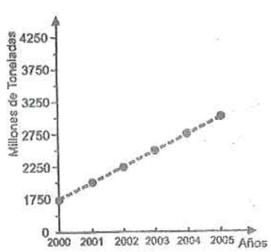
   a. 350 millones de toneladas en el año 1996
   b. 750 millones de toneladas en el año 1995
   c. 1.250 millones de toneladas en el año 1998
   d. 1.600 millones de toneladas en el año 1999

2. En el año 2002 se exportó el 83% del café producido en Colombia. ¿Cuántas toneladas quedaron para abastecer de café a todo el país?

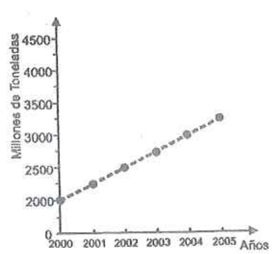
   a. 269 millones
   b. 269,5 millones
   c. 279,5 millones
   d. 297,5 millones

3. Si se proyecta que la producción de café aumenta al mismo ritmo que el presentado en la gráfica durante los siguientes cinco años, la producción en millones de toneladas desde el año 2000 al 2005, estará representada por la gráfica.

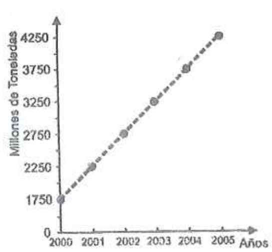
a.



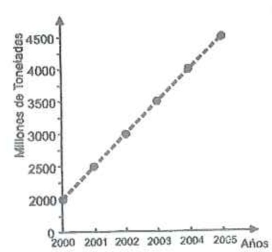
b.



c.



d.

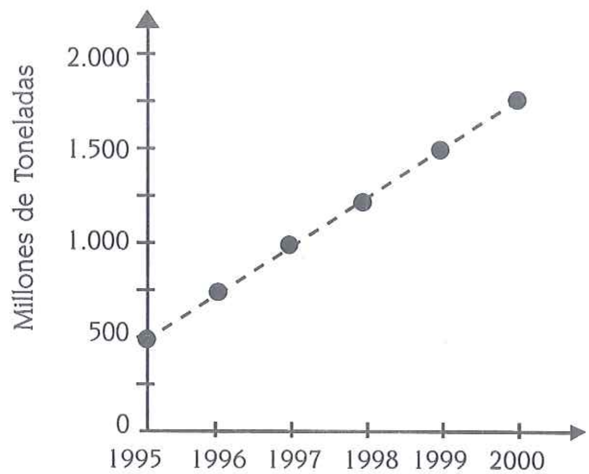


PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS DEL ICFES

NOTA: Estos ejercicios fueron tomados de las Pruebas Saber del año 2002.

Las preguntas 1. a 4. se responden con base en la siguiente información:

Producción de Café en Colombia



1. Con base en la gráfica anterior, se puede afirmar que la producción de café a nivel nacional, fue de:

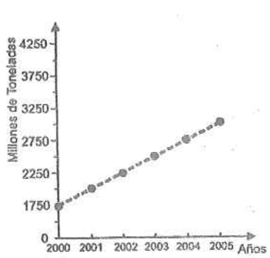
   a. 350 millones de toneladas en el año 1996
   b. 750 millones de toneladas en el año 1995
   c. 1.250 millones de toneladas en el año 1998
   d. 1.600 millones de toneladas en el año 1999

2. En el año 2002 se exportó el 83% del café producido en Colombia. ¿Cuántas toneladas quedaron para abastecer de café a todo el país?

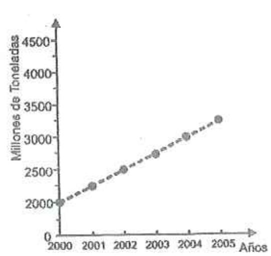
   a. 269 millones
   b. 269,5 millones
   c. 279,5 millones
   d. 297,5 millones

3. Si se proyecta que la producción de café aumenta al mismo ritmo que el presentado en la gráfica durante los siguientes cinco años, la producción en millones de toneladas desde el año 2000 al 2005, estará representada por la gráfica.

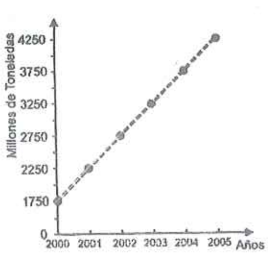
a.



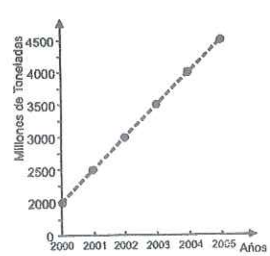
b.



c.



d.



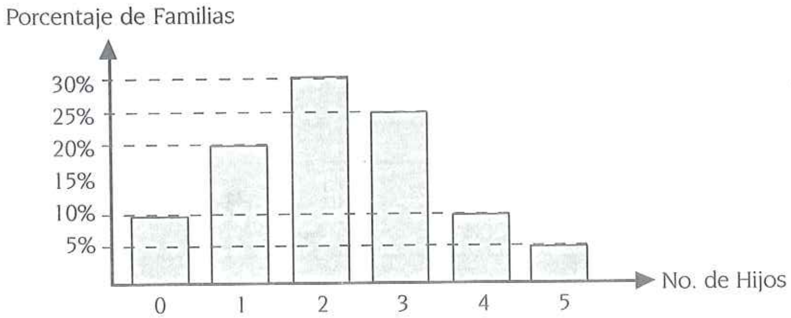
4. ¿Cuál fue en promedio, la producción anual de café en Colombia entre 1995 y 2000?

a. 1.125 toneladas
b. 1.250 toneladas
c. 1.750 toneladas
d. 1.997,5 toneladas

Los ejercicios 5. y 6. se contestan con base en la siguiente información:

Se ha preguntado a un cierto número de familias por el número de hijos. Los resultados obtenidos están representados en una tabla y un diagrama de barras.

NÚMERO DE HIJOS	NÚMERO DE FAMILIAS
0	2
1	4
2	6
3	?
4	2
5	?
TOTAL	?



5. Al completar la tabla se tiene que:

a. El número de familias que tiene 3 hijos es 5
b. El número de familias que tiene 5 hijos es 5
c. El total de familias encuestadas es de 44
d. No hay familias que tengan 5 hijos

6. Al analizar el diagrama de barras, se puede afirmar que:

a. La mayoría de las familias encuestadas tiene 4 o más hijos
b. El 70% de las familias tiene 2 o más hijos
c. El 50% de las familias tiene 2 o menos hijos
d. 30 familias tienen 2 hijos

7. Dentro de una bolsa están guardadas 48 canicas de colores verde, azul y rojo. La probabilidad de sacar una canica verde de la bolsa es de $\frac{1}{8}$. ¿Cuántas canicas verdes hay dentro de la bolsa?

a. 1
b. 6
c. 8
d. 16

Respuestas

NÚCLEO TEMÁTICO

0

EJERCICIOS

EJERCICIO 0 – 1

1. 1.3 a) Irracional
b) Racional
c) Racional
d) Irracional
e) Racional

1.4 Cuando $x = -5$

1.5 Cuando $x < 2$

1.15 No, $\sqrt{x^2} = |x|$

1.16 Sí

1.17 A $|x|$ cuando n es par y a x cuando n es impar.

1.18 No

2. 2.1

	N	Z	Q	Q'	R
-7		X	X		X
3.14			X		X
$\pi - \frac{2}{3}$				X	X
$-\frac{5}{4}$			X		X
$\frac{\sqrt{3}}{2}$				X	X
$\sqrt{\frac{4}{9}}$			X		X
$\sqrt[3]{\frac{4}{27}}$				X	X
4.25			X		X
$4\frac{3}{5}$			X		X

2.2 $(-7)\,x + (-7)\,(-y)$

2.3 Cancelativa de la igualdad respecto a la multiplicación

2.4 $-(x-y) = -x+(-y) = -x-y$

2.5 $(x+y)^{-1} = \dfrac{1}{x+y}$

2.6 Infinito periódico puro

2.7 $x \neq -2$

2.8 Falso

2.9 Falso

2.10 Falso

2.11 Verdadero

3. 3.1 $a^4 + \frac{5}{2}ab^3 - 2a^2b^2$

3.2 a^2b

3.3 $2a^2 - \frac{4}{3}ab + \frac{1}{2}b^2$

3.4 Cociente: $\frac{3}{2}ab - b^2$, Residuo 0

3.5 Cociente: $-\frac{1}{2}x^2 + xy - 3y^2$
Residuo: 0

4. 4.1 $13x^2 + 14x - 8$ unidades cuadradas

4.2 $\frac{9}{2}x^2 + \frac{63}{2}x - 48$ unidades cuadradas

4.3 $6x^2 + \frac{27}{2}x + 3$ unidades cuadradas

4.4 $4x^2 + \pi x^2$ unidades cuadradas

4.5 $5.5x^2 - 6x$ unidades cuadradas

4.6 $7{,}5\,x^2 + 6x$ unidades cuadradas

4.7 $18x^3 - 36x^2 + x + 15$ unidades cúbicas

4.8 $21x^3 + 49x^2$ unidades cúbicas

4.9 $12x^3 + 11x^2 + 2x$ unidades cúbicas

5. 5.1 Cociente: $4x^5 + 4x^4 + 4x^3 + x^2 + x + 3$
Residuo: 1

5.2 Cociente: $x^2 + a^2$
Residuo: 0

5.3 Cociente: $2x-1$; Residuo: 0

5.4 Cociente: $3x-2y$; Residuo: 0

5.5 Cociente: $2x^3+4x^2-5x+6$
Residuo: 2

8. **a.** V **b.** F **c.** F
d. V **e.** V

9. **a.** Asociativa de la suma en R
b. Conmutativa de la suma en R

10. Inverso aditivo: $-\sqrt{2}$

Inverso multiplicativo: $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

11. Inverso aditivo: $\sqrt{2} - \sqrt{3}$

Inverso multiplicativo:

12.

V	V	V	V
V	V	V	V
F	V	V	V
F	F	V	V
F	V	V	V
F	F	V	V

EJERCICIO 0 – 2

2. $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$

3. $9b^4 - 36c^6$ **4.** $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{25}$

5. $m^6 + 2m^5 - 3m^4 - 2m^3 + 6m^2 - 4m + 1$

6. $4x^2 + 9y^2 + 16z^2 + 4w^2 + 12xy - 16xz - 8xw - 24yz - 12yw + 16zw$

7. $9a^2 + 18ab + 9b^2 - 4$

8. $a^4 + 5a^2 + 9$

9. $a^6 - 3a^4 + 7a^2 - 9$

EJERCICIOS 0

10 $-x^4-y^4-z^4+2x^2y^2+2x^2z^2+2y^2z^2$

11. $a^4x^4-2a^2b^2x^2y^2+b^4y^4$

12. $27a^3-b^3$

13. x^3+8

14. $x^4+4x^3y+6x^2y^2-2x^2+4xy^3-4xy-2y^2+y^4+1$

15. $x^2+10xz+25z^2-4y^2$

16. $4x^2-9y^2-30yz-25z^2$

17. $v^2-b^2u^2$

18. $a^4-18a^2b^2+81b^4$

19. x^4-16y^4

20. $8x^3-125y^3$

21. $9a^2-4b^2+4bc-c^2$

22. $9(xy+2z^3)(xy-2z^3)$

23. $(3a-b)(x-y)$

24. $4x^2y^2(3y-x)$

25. $(3a-b)(4a-x^2)$

26. $(6t^4+5x^5)(6t^4-5x^5)$

27. $(2x+y)(3x-a)$

28. $(2a-3b)^2$

29. $(y-1)(y^2+1)$

30. $a^{n+1}(a^n+a+1)$

31. $(x-2)(x+1)$

32. $(3s-t)(2t^2+9s^2)$

33. $(x-15)(x-11)$

34. $(x-4y)(1-x^2-4xy-16y^2)$

35. $(x-15)(x+6)$

36. $(2x+y)(2x-y)(4x^2-2xy+y^2)(4x^2+2xy+y^2)$

37. $(xy+17)^2$

38. $(a+3b)(a^2-3ab+9b^2+1)$

39. $(x^2-17)(x^2-12)$

40. $(x-3y+a-b)(x-3y-a+b)$

41. $(x+11)(10-x)$

42. $(a-3b)(a^2+3ab+9b^2+a+3b)$

43. $(x^2-17)(x^2+3)$

44. $(4a+4b+3)(a+b-2)$

45. $(ay+24)(ay-10)$

46. $2a(3a+2x+8)(3a-2x-8)$

47. $(2x+1)(x+1)$

48. $x(3x-2y)^2$

49. $(x+8)(10x-1)$

50. $(4x^2+x-3y)(4x^2-x+3y)$

51. $(x-19y)(x+17y)$

52. $(a-2b)(a+2b+ab)$

53. $(a+b)(a+b+1)$

54. $(2a^2+a+2b)(2a^2-a-2b)$

55. $x(x+15y)(x-3y)$

56. $(2x-1)(x+2)(x-2)$

57. $(2x-7)(3x-5)$

58. $(x-y+3)(x-y-3)$

59. $(4x+5)(4-5x)$

60. $(a+b)(a+b-a^2+ab-b^2)$

61. $(13-xy)(xy+5)$

62. $uv(u+3v)(u-3v)$

63. $3x(x+9)(x-7)$

64. $(m^3-3n^4)(m^6+3m^3n^4+9n^8)$

65. $(x+5)(x+1)(x-1)$

66. $(x+2)(x-4)(x+3)(x-3)(x-1)$

67. $(x-2)(x+3)(x-3)(x+1)(x-1)$

68. $(x+1)(x-1)(x+2)^2(x-2)(x+3)$

EJERCICIO 0 – 3

1. $\frac{ab}{2a-b}$ **2.** $\frac{2x+y}{x+3y}$ **3.** 2

4. $\frac{(x+y)^2}{y^2(1-y^2)}$ **5.** 0 **6.** 0

7. $\frac{1}{(a+1)(a+3)}$ **8.** $\frac{x}{x+1}$

9. $-a$ **10.** $\frac{a^2b^2}{a-b}$ **11.** bx

12. $a+b$ **13.** $\{18\}$

14. $\left\{\frac{1}{a}\right\}$ **15.** $\left\{\frac{a}{a-b}\right\}$

16. $\left\{\frac{cd}{c+2d}\right\}$ **17.** $\{\quad\}$

18. $\left\{\frac{rs}{r+s}\right\}$ **19.** $\{6\}$

20. $\left\{\frac{bc^2}{a^2}\right\}$ **21.** $\left\{\frac{a+2b}{2}\right\}$

22. $\left\{\frac{b(2a-b)}{a}\right\}$

23. $b=\frac{2-2d}{3}$

24. $t=\frac{L_2-L_1}{aL_1}$

25. $t=\frac{w(v_1^2-v_2^2)}{2pg}$

26. $m=\frac{2Es+2e^2}{sr^2w^2}$

27. $f=\frac{25}{M-1}$

PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS DEL ICFES 0

1. b) **2.** c) **3.** a) **4.** a) **5.** c)

NÚCLEO TEMÁTICO

1

EJERCICIOS

EJERCICIO 1.1

1. c. **2.** b. **3.** d. **4.** c. **5.** b.

EJERCICIO 1.2

1. a)

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	26	17	10	5	2	1	2	5	10

b) $y = f(x) = x^2+1$

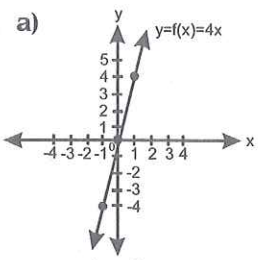
c) Si se pueden unir

d) $D_f = R$; $I_f = \{y/y \geq 1\}$

e) $f(2)=5$; $f(5)=26$; $f(-3)=10$

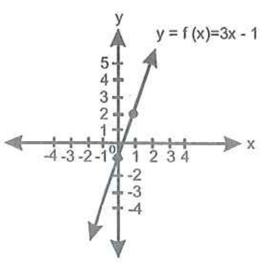
$f(0) = 1$; $f(1) = 2$

2. a)



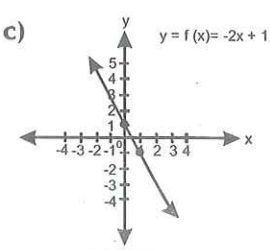
m = 4, n = 0

b)



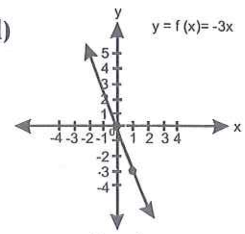
m = 3, n = -1

c)



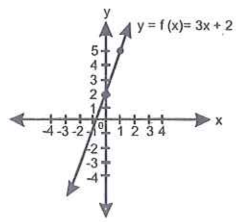
m = -2, n = 1

d)



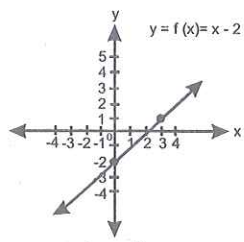
m = -3, n = 0

e)



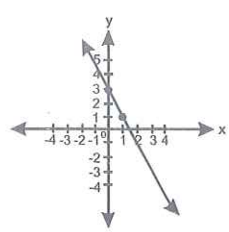
m = 3, n = 2

f)

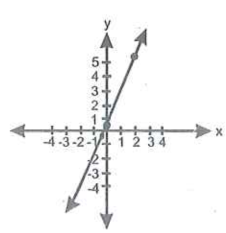


m = 1, n = -2

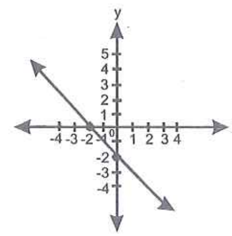
3. a) $m=-2$, $n=3$



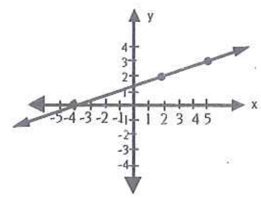
b) $m=\frac{5}{2}$, $n=\frac{1}{2}$



c) $m=-1$, $n=-2$



d) $m=\frac{1}{3}$, $n=\frac{4}{3}$



4. $y=x+2$; La velocidad inicial ; Lleva 11.

5. a) 15°C ; **b)** 16°C ;

c) 8500 metros

EJERCICIO 1.3

1. Pendiente $m=\frac{3}{2}$,

Ordenada en el origen: $n=-2$

2. b) Tiene solución única.

3. b) Tiene solución única.

4. b) No tiene soluciones.

5. b) Tiene solución única.

6. b) Tiene solución única.

7. b) Tiene solución única.

8. b) Tiene solución única.

9. b) Tiene solución única.

10. b) Tiene solución única.

EJERCICIO 1.4

1. Solución única: $\{(3,-5)\}$

2. Solución única: $\left\{\left(\frac{9}{4}, \frac{3}{2}\right)\right\}$

3. Infinitas soluciones

4. Ninguna solución

5. Solución única: $\left\{\left(-\frac{3}{2}, -\frac{13}{10}\right)\right\}$

EJERCICIOS 1

6. Ninguna solución

7. (-1, -2) **8.** $\left(-2, \frac{3}{4}\right)$

9. (5, 12) **10.** (-3,2) **11.** (3,1)

12. $\left(\frac{a}{b}, \frac{b}{a}\right)$ **13.** (2a,2b)

14. $\left(\frac{2}{3}a, \frac{1}{2}b\right)$ **15.** $\left(\frac{c(a+b)}{2a}, \frac{c(a-b)}{2a}\right)$

16. (a+b, a-b)

17. (a^3- b^3 , a^3+b^3)

18. $\left(\frac{1}{b}, \frac{1}{a}\right)$ **19.** $\left(-3, \frac{5}{2}\right)$

20. $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ **21.** (3,-5)

22. $\left(\frac{3}{2}, -3\right)$

EJERCICIO 1.6

1. {(-3,2,4)} **2.** {(3,1,6)}
3. $\left\{\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)\right\}$
4. No tiene solución
5. Infinitas soluciones
6. { (8, 10, 14)}
7. {(6,2,1)}
8. $\left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right)\right\}$
9. $\left\{\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{12}, \frac{1}{16}\right)\right\}$
10. {(3,-2,1)}

EJERCICIO 1.7

1. 12	**2.** 8	**3.** 38
4. 140	**5.** 25	**6.** -61

EJERCICIO 1.8

1. {(4, -3)} **2.** No tiene solución
3. {(3,0)} **4.** {(-2,3)}
5. {(2,1,-3)} **6.** {(2,2,5)}
7. {(4,2,3)} **8.** {(2,3,5)}
9. No tiene solución
10. Infinitas soluciones

TALLER DE REPASO DE LA UNIDAD 1

2. a) Verdadero **b)** Falso

c) Verdadero **d)** Verdadero

e) Falso **f)** Verdadero

g) Verdadero **h)** Falso

3. {(0,12), (1,8), (2,4), (3,0)}
4. Sólo (1, -2, 0)
5. Solución única: {(3, -2)}
6. Infinitas soluciones
7. No tiene solución.
8. Solución única: {(3,1,-2)}
9. $\left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{4}{3}\right)\right\}$ **10.** {(2,4)}
11. {(2,4)} **12.** $\left\{\left(\frac{1}{b}, \frac{1}{a}\right)\right\}$
13. {(3,7)} **14.** {(a,b)
15. {(10,12,6)} **16.** {(8,6,3)
17. $\left\{\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, -2\right)\right\}$ **18.** $p = -\frac{4}{3}$, q=1
19. No tiene solución
20. $\left\{\left(\frac{156}{17}, \frac{122}{17}, \frac{123}{34}\right)\right\}$ **21.** {(a+b, -b)}
22. $\left\{\left(\frac{m}{n}, \frac{n}{m}\right)\right\}$ **23.** {(a-b, a+b)}
24. $\left\{\left(\frac{a+b}{a}, \frac{a-b}{b}\right)\right\}$

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 1

1. $\frac{3}{8}$, **2.** $\frac{16}{49}$; **3.** 8 ; **4.** Padre:55 años, Hijo: 30 años; **5.** 60 **6.** $180.000

PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS DEL ICFES 1

1. b. **2.** c. **3.** d. **4.** c. **5.** a.

NÚCLEO TEMÁTICO

2

EJERCICIOS

EJERCICIO 2 – 1

1. d. **2.** c. **3.** b. **4.** c. **5.** d.

TALLER DE REPASO DE LA UNIDAD 2

1. 16 y 8.

2. A tiene 415 canicas y B tiene 58 canicas.

3. 19 y 32.

4. No existe tal fracción.

5. 68 **6.** $\frac{5}{8}$

7. 62, 50, 48

8. Bolígrafos: $320, Marcadores: $550.

9. Conejos: 37; Gallinas: 24.

10. Barco: 20km/h, corriente: 5km/h

11. 240 hombres y 220 mujeres.

12. Aciertos: 16.

13. 70 años y 25 años.

14. 25000 dólares.

15. 8°A: 30 y 8°B: 28.

16. Normales: 120 y Extra: 80.

17. De la primera 70g y de la segunda: 30g.

18. De $\frac{1}{2}$ lb hay 48 paquetes y de $\frac{1}{3}$ lb hay 72 paquetes

19. 2 horas; solas en 4h 50min., 2h 54min.

20. Ambas empresas pagan 136 dólares sobre una venta de 1700 dólares.

21. Grupo A: 40; Grupo B: 20; Grupo C: 40.

22. Base: 7m, Altura: 5m.

23. Base: 20cm., Altura: 16cm.

24. 5,5cm. y 8,5cm.

25. 100m y 70m.

26. Base: 25cm; Altura: 35cm.

27. Largo $= 25\frac{1}{3}$ m, ancho$= 2\frac{2}{3}$ m

28. Ancho $\approx 13{,}8$,m ; largo$\approx 2{,}2$ m

PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS DEL ICFES

1. b) **2.** c) **3.** b) **4.** a) **5.** a)

NÚCLEO TEMÁTICO

3

EJERCICIOS

EJERCICIO 3 –1

1. a. **2.** c. **3.** d.
4. b **5.** d.

EJERCICIO 3 –2

1. $\frac{1}{343}$ **2.** $\frac{1}{49}$ **3.** $\frac{125}{3}$

4. $\frac{1}{6}$ **5.** $\frac{1}{25}$ **6.** $\frac{125}{27}$

7. 1 **8.** $\frac{27}{8}$ **9.** $\frac{3}{2}$

10. 3125 **11.** -5 **12.** $\frac{1}{11}$

13. $\frac{1}{343}$ **14.** $\frac{25}{4}$ **15.** $5^3 = 125$

16. 1 **17.** 5 **18.** 1

19. $\frac{1}{25}$ **20.** $\frac{343}{27}$

21. $3\cdot 2^{-2}ab^{-2}$ **22.** $5(a-b)(a+b)$

23. $5m^{-7}n^4$ **24.** $4n^2$

25. $\frac{1}{x^{-3}y^5}$ **26.** $\frac{1}{5^{-1}y^{-1}z^{-2}}$

27. $\frac{1}{9\cdot 7^{-1}}$ **28.** $\frac{1}{(x^2+y^2)^{-1}}$

29. $\frac{3x^2}{y^4}$ **30.** $\frac{2y^8z}{25x^4}$

31. t^2b^8 **32.** $\frac{x^3}{z^3}$

33. $n^2b^2z^4$ **34.** $-\frac{4}{a^3}$

35. $\frac{y^2+x^3y}{x}$ **36.** $a(a+1)$

37. $\frac{x^2+b^2}{x^2-b^2}$ **38.** $\frac{1}{a-b}$

39. $b-3a$ **40.** $\frac{2(2a-3)}{(a+1)^3}$

41. $\frac{5(a-2)^2}{(a+3)^4}$ **42.** $\frac{24m+1}{(3m-2)^3(4m+3)^2}$

43. $-\frac{1}{3^{12}}$ **44.** 3 **45.** 3^3

46. 3^6 **47.** 3 **48.** $\frac{1}{3^5}$

49. $\frac{1}{3^6}$ **50.** $\frac{1}{3^2}$

EJERCICIO 3 –3

1. 8×10 **2.** 7×10^2

3. 4×10^3 **4.** 2×10^5

5. 7×10^{-3} **6.** 6×10^{-2}

7. 9×10^{-6} **8.** $6{,}3 \times 10^{-1}$

9. $8{,}1 \times 10^{-1}$ **10.** $4{,}5 \times 10^{-3}$

11. $8{,}4 \times 10^{-4}$

12. $9{,}780045 \times 10^2$

13. 7000 **14.** 600000

15. 0,07 **16.** 0,0009

17. 0,00097 **18.** 430000

19. 0,000063

20. 0,00000069 **21.** 84,3

22. 0,00000000000715

23. 0,000623

24. 732000000

25. $7{,}325 \times 10^9$

26. $4{,}56 \times 10^{-8}$ **27.** 1×10^{10}

28. $5{,}87 \times 10^{12}$ **29.** 10^{-5}

30. 3×10^{-23} gramos

31. 83500000000

32. 0,000000000000623

33. 433000

34. 0,0000000000000000000000017

35. 0,000075 cm **36.** 6×10^4

37. 8×10^2 **38.** 4×10^{-7}

39. 3×10^{-3} **40.** 5×10^4

41. 3×10^7 **42.** 10^2

43. 10^4 **44.** $2{,}5 \times 10^{-4}$

45. 1×10^{-4} **46.** 6×10^{21} ton

47. 10^7; 6×10^8

EJERCICIO 3 –4

1. $\sqrt{25}=5$ **2.** $\sqrt[3]{64}=4$

3. $\sqrt[5]{(-243)^2}=9$ **4.** $\sqrt[3]{27^2}=9$

5. $\frac{1}{\sqrt{49}}=\frac{1}{7}$ **6.** $\frac{1}{\sqrt[3]{27}}=\frac{1}{3}$

7. $\frac{1}{\sqrt[3]{(125)^2}}=\frac{1}{25}$ **8.** $\frac{x}{\sqrt{9^3}}=\frac{x}{27}$

9. $\frac{1}{\sqrt[7]{(7ab)^4}}=\frac{1}{\sqrt[7]{2401a^4b^4}}$

10. $\sqrt{(a-b)^7}$ **11.** $-\sqrt[4]{16}=-2$

12. $\sqrt{-64}\notin \mathbb{R}$ **13.** $(25p^2)^{1/2}=5|p|$

14. $(a^3+b^3)^{1/3}$

15. $-(x^3y^6)^{1/3}=-xy^2$

16. $(a+b)^{5/5}=a+b$

17. $(-16)^{1/4}\notin \mathbb{R}$

18. $(-32)^{1/5}=-2$

19. $(-27)^{1/3}=-3$

20. $-(625)^{1/2}=-25$

21. $a^{13/12}$ **22.** b^2 **23.** m^6

24. $y^{1/2}$ **25.** $\frac{1}{b^2}$ **26.** $\frac{1}{ab^2}$

27. $\frac{x}{2}$ **28.** $27ab^2$

29. $\frac{20}{x^6y^{4/35}}$ **30.** $\frac{3p^{1/4}}{2qt^{1/2}}$

31. $\frac{1}{a^{2x}b^{4x}}$ **32.** $\frac{a^{3/4}}{b^{2/3}}$

33. $a^{1/20}$ **34.** $(x+y)$

35. $\frac{1}{(a^2-b^2)^{5x}}$ **36.** $m^{1/5}p^{2/25}$

37. $x^3(x+1)(x-1)$ **38.** m^2+n^2

39. a^{xy} **40.** a

EJERCICIO 3 –5

1. 9 **2.** $\frac{3}{4}$ **3.** 2

4. 15 **5.** -3 **6.** -5

7. $\frac{2}{3}$ **8.** $-\frac{2}{3}$ **9.** $p+5$

10. $\frac{5}{y}$ **11.** $-2a$ **12.** $-\frac{m}{n}$

13. $2x$ **14.** $3a^3b^5$ **15.** $-4m^2n^3$

16. $2a^xb^x$ **17.** $\frac{1}{a^xb^{2x}}$ **18.** 13

19. 5 **20.** $4(x+y)$

EJERCICIO 3 –6

1. $\frac{2}{3}$ **2.** $\frac{5}{7}$ **3.** x^3

4. a **5.** a^{11} **6.** $2x^2y^3$

7. $-3p^4q^5$ **8.** $12a^{3b}b^5$

9. $\frac{1}{(x+y)^2}$ **10.** $bc\sqrt[5]{ac}$

11. $m^4n^8t^{10}\sqrt{nt}$

12. $-4b^3c^4d\sqrt[3]{a^2cd^2}$

13. $pr^3s^2\sqrt[5]{q}$ **14.** $8x^5y^{10}z\sqrt{z}$

15. ab **16.** $\frac{1}{xy}$ **17.** x^4y^2

18. $\frac{a^3b^2\sqrt[4]{a^3b^2}}{32}$

19. $\frac{\sqrt[3]{a^3+b^3}}{ab}$ **20.** $\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$

TALLER DE REPASO DE LA UNIDAD 3

2. **a)** F **b)** F **c)** V
d) F **e)** V **f)** F
g) F **h)** F **i)** V

3. b) **4.** c) **5.** c)

6. b) **7.** b) **8.** $\frac{49x^{10}}{64w^6y^8z^{12}}$

9. $\frac{1}{x^{1/4}}$ **10.** $\frac{2y^4z^4}{3x^2}$ **11.** $\frac{ab}{b-a}$

12. $\frac{xy}{(x+y)^2}$ **13.** $\frac{xy^2}{2y^2-3x^2}$

14. $\frac{x^2-xy+y^2}{y-x}$ **15.** $x-2x^{1/2}y^{1/2}+y$

16. $-\frac{x^3-y^3}{x^3y^3}$ **17.** $\frac{\left(1+x^{1/2}y^{1/2}\right)^2}{6xy^2}$

18. $\frac{1+x^{9/5}y^{3/2}z}{x^{3/10}y^{3/2}}$ **19.** 2^{n+1}

20. $\frac{1}{a^2}$ **21.** $\frac{d^2}{c^{2/3}}$ **22.** $\frac{1}{9}$

23. 27 **24.** $\frac{1}{4\cdot\left(3^{5a}\right)}$ **25.** 25

26. 8 **27.** $\frac{\left(a^{2n}-1\right)^x}{a^{nx}}$

28. $-\frac{x^2+1}{x}$ **29.** $\frac{a^{2p}+1}{a^p}$ **30.** 2

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS

1. b. **2.** Cuadro superior: 6 y cuadro del resultado: 4 **3.** d **4.** d **5.** \$1,100.000

PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS DEL ICFES

1. c) **2.** d) **3.** d) **4.** b) **5.** c)

NÚCLEO TEMÁTICO

4

EJERCICIOS

EJERCICIO 4 – 1

1. c. **2.** c. **3.** d.
4. b. **5.** d.

EJERCICIO 4 – 2

1. $7\sqrt{5}$ **2.** $10\sqrt[3]{xy^2}$ **3.** $11\sqrt{5}$

4. $8\sqrt{2mn}$ **5.** $3\sqrt{x}$ **6.** $5a\sqrt{2a}$

7. 0 **8.** $37\sqrt[3]{3}$ **9.** $4\sqrt[5]{y}+3\sqrt[5]{16y}$

10. $47\sqrt[3]{4}$ **11.** $\sqrt{xy}\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{2}y-\frac{1}{3}xy\right)$

12. $\frac{7}{2\sqrt{3a}}$ **13.** $3\sqrt[12]{243}$ **14.** a^2

15. $2t\sqrt[12]{256t^{11}}$ **16.** $\sqrt[6]{\frac{27a}{16b}}$

17. $\sqrt[4]{\frac{4}{9y}}$ **18.** $\sqrt[12]{\frac{y^5}{x^2}}$ **19.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

20. $\frac{3\sqrt{2}}{2x}$ **21.** $6\sqrt{3}\left(1-\sqrt{2}\right)$

22. $7\left(2-\sqrt{2}\right)$ **23.** $10\sqrt{5}-20\sqrt{2}-30$

24. $9\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{3}+25\sqrt[3]{9}$

25. 7 **26.** $30+12\sqrt{6}$ **27.** 2

28. $1+\sqrt[3]{36}-2\sqrt[3]{6}$

29. $2x+2\sqrt{x^2-y^2}$

30. $5a+13b$ **31.** $a-b$

32. $13x^2+5y^2-12\sqrt{x^4-y^4}$

33. $82\sqrt{6}$ cm

34. $6\sqrt{30}$ cm, $\left(18\sqrt{5}+6\sqrt{30}\right)$cm, $45\sqrt{6}$ cm^2

EJERCICIO 4 – 3

1. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ **2.** $\frac{\sqrt[4]{a^2b}}{3}$

3. $-\frac{3\sqrt[3]{28x^2}}{2x}$ **4.** $\frac{\sqrt{30mn}}{4n^2}$

5. $\frac{45z^2\sqrt[4]{72x^3y^2z^2}}{2y}$

6. $\frac{3x\sqrt[5]{x^2y}}{5}$ **7.** $\sqrt{x}+\sqrt{y}$

EJERCICIOS 4

8. $\sqrt{m}+2$ 9. $\sqrt{x+4}+2$

10. $\dfrac{a^2-2ab\sqrt{c}+b^2c}{a^2-b^2c}$

11. $\dfrac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}{b-a}$

12. $\dfrac{\left(7+\sqrt{2}\right)\sqrt{47}}{47}$

13. $\left(a-\sqrt{a^2-1}\right)^2$

14. $xy(x-y)\left(\sqrt[3]{4x^2}-\sqrt[3]{4xy}+\sqrt[3]{4y^2}\right)$

15. $(a+b)\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)$

TALLER DE REPASO DE LA UNIDAD 4

2. c) 3. a) 4. d)
5. c) 6. a) 7. b)
8. d) 9. b) 10. b)
11. $45\sqrt{2}$ 12. $-7\sqrt{3}-11\sqrt{6}$
13. $9\sqrt{3x}$ 14. $\frac{23}{6}\sqrt{7}$
15. $x^{5/2}(x^2+x+1)$ 16. 135
17. $\sqrt[6]{72}+\sqrt[6]{3}$ 18. 12
19. $\frac{4}{5}$ 20. $-\frac{71}{25}$ 21. 3x

22. $-17x$ 23. $\dfrac{x-\sqrt{x^2-a^2}}{a}$

24. $\dfrac{x\sqrt[3]{x}-\sqrt{x^2y^2}+y\sqrt[3]{y}}{x^2y^2}$

25. $\dfrac{2+4\sqrt{3}-6\sqrt{5}-\sqrt{15}}{11}$ 26. $\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}$

27. $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$ 28. $\sqrt[3]{9}(\sqrt[6]{3}-1)(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1)$

29. $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ 30. $\dfrac{1}{\sqrt{h+4}+2}$

31. $\dfrac{3}{\sqrt{3(x+h)-2}+\sqrt{3x-2}}$

32. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x(x+h)}+\sqrt[3]{x^2}}$

33. 65 cm^2 34. $90\sqrt{2}$ pies
35. $\sqrt{74}$ cm

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 4

1. 18 años 2. b

PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS DEL ICFES 4

1. d) 2. a) 3. b) 4. b) 5. a)

NÚCLEO TEMÁTICO

5

EJERCICIOS

EJERCICIO 5-1

1. b) 2. c) 3. d) 4. b) 5. a)

EJERCICIO 5-2

1. $13+13i$ 2. $-2+4i$ 3. $-1+4i$
4. $-4+6i$ 5. $4i$ 6. $-8+9i$
7. $-55+i$ 8. 34 9. $-32i-72$
10. $24-66i$ 11. 40 12. 16
13. $9+40i$ 14. $7+17i$
15. $364i-627$

EJERCICIO 5-3

1. a) $3-4i$ b) $6+i$ c) $-2-3i$ d) $4-3i$ e) $2+5i$ f) 7 g) $-4i$ h) $(1-i)(-2+i)$ i) $(2-3i)(5-8i)$ j) $-2i(-3-8i)$

2. a) $\frac{13}{25}-\frac{16}{25}i$ b) $\frac{47}{85}+\frac{16}{85}i$ c) $\frac{7}{8}+\frac{11}{8}i$ d) $\frac{9}{2}-\frac{13}{2i}i$

e) $-4-6i$ f) $-6-17i$
g) $-7-11i$ h) $53i$

EJERCICIO 5-4

9. $|7-3i|=\sqrt{58}$
10. $|-2+6i|=\sqrt{40}$
11. $|-7-13i|=\sqrt{218}$
12. $|0+0i|=0$
13. $|4-i|=\sqrt{17}$

EJERCICIOS 5

14. $|8|=8$ 15. $|-6i|=6$

16. $|0|=0$ 17. $\sqrt{53}$ y $\sqrt{53}$

18. $\left|\frac{4}{5}-\frac{4}{9}i\right|=\sqrt{\frac{16}{25}+\frac{16}{81}}$

19. $|5a-12bi|=\sqrt{25a^2+144b^2}$

h)

20. $w\bullet\overline{w}=169, |\overline{w}|^2=169$

21. $z\bullet\overline{z}=c^2+d^2, |z|^2=c^2+d^2$

22. $\sqrt{7825}$ 23. $\frac{4\sqrt{2}}{5}$

24. $\left|\frac{5i-1}{5i+1}\right|=1$

25. $\left|\frac{c}{c-i}\right|=\frac{4}{5}\sqrt{2}$

26. $|w^2+i|=\sqrt{89}$

27. $|z^2+i|^2=657$

28. $|b^2-2b+1|=2$

29. $|x^2-2x+1|=32$

30. $\left|\frac{p}{p}\right|=1$

TALLER DE REPASO DE LA UNIDAD 5

1. Falsas: a, c, j;
   Verdaderas: b, d, e, f, g, h, i.
2. d 3. a 4. b
5. a 6. c 7. c
8. b 9. a 10. c
19. 7-i 20. $-2+8i$

21. $13+4i$ 22. $3-5i$

23. $\frac{9}{5}+\frac{2}{5}i$

24. $-2-5i$ 25. $3-i$

26. $-\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{2}}{3}i$

27. $\frac{3}{5}+\frac{16}{5}i$ 28. $-8+6i$

29. $-44-117i$ 30. $22-10\sqrt{3}i$

31. $-169-80i$ 32. 42

33. 2 34. $m=8$, $n=-5$

35. $p=1$, $q=1$

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 5

1. b 2. d 3. a) Marco b) Olafo

PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS DEL ICFES 5

1. d) 2. a) 3. 15,2 años 4. a) 5. c)

NÚCLEO TEMÁTICO

6

EJERCICIOS

EJERCICIO 6.1.

1. c 2. b 3. b 4. d 5. c

EJERCICIO 6.2

1. a) Menos b) Más c) Más
2. a) a positivo y q negativo;
   b) a negativo y q positivo;
   c) a positivo y q = 0 ;
   d) a negativo y q = 0
3. a) 1 b) 3 c) -1
   d) -2 e) 6 f) -3

6. a) V(0,4) b) V (0, 5)
   c) V(0,-3) d) V (0,-7)
   e) V(0,-5) f) V (0,-2)

EJERCICIO 6.3.

1. a, b, d, f, h, i
2. a) $V(1,4)$, $x=1$, $(0,7)$
   b) $V(-7,-1)$, $x=-7$, $(0,-197)$
   c) $V\left(12,\frac{1}{2}\right)$, $x=12$, $(0,864;5)$
   d) $V\left(-\sqrt{2},14\right)$, $x=-\sqrt{2}$, $(0,15)$
3. a) Hacia arriba b) (0,-18)
   c) $V\left(\frac{7}{2},-\frac{121}{4}\right)$ d) $x=\frac{7}{2}$
4. a) Hacia arriba b) (0,9)
   c) $V\left(\frac{5}{2},-16\right)$ d) $x=\frac{5}{2}$
5. a) Hacia arriba b) (0,0)
   c) V(3,-9) d) x=3
6. a) Hacia arriba b) (0,-6)
   c) $V\left(\frac{1}{2},-\frac{27}{4}\right)$ d) $x=\frac{1}{2}$

EJERCICIOS 6

7. a) Hacia arriba **b)** (0,-5)
c) V(-2,-17) **d)** x=-2
8. a) Hacia abajo **b)** (0,0)
c) V(2,4) **d)** x=2
9. a) Hacia arriba **b)** (0,6)
c) $V\left(\frac{3}{2},\frac{15}{4}\right)$ **d)** $x=\frac{3}{2}$
10. a) Hacia arriba **b)** $\left(0,\frac{2}{3}\right)$
c) $V\left(\frac{3}{2},\frac{1}{12}\right)$ **d)** $x=\frac{3}{2}$
11. 4
12. $y=x^2-2x+2$

TALLER DE REPASO DE LA UNIDAD 6

1. c **2.** b **3.** c **4.** b **5.** b
6. b **7.** a **8.** d **9.** c **10.** d
11. a) $a=\frac{1}{2}$, b=c=0 ,
b) Hacia arriba
c) V (0,0), x=0
12. a) a= -2 , b=c=0
b) Hacia abajo
c) V (0,0), x=0
14. a) a= -4 , b=2, c=0
b) Hacia abajo
c) $V\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$, $x=\frac{1}{4}$
16. a) a= -1 , b=0, c=9
b) Hacia abajo
c) V(0,9), x=0
18. a) a= -2 , b=4, c=1
b) Hacia abajo
c) V(1,3), x=1
19. a) $y=-\frac{3}{4}x^2+3x$
b) $y=\frac{1}{9}x^2$
c) $y=-x^2+2x+2$
d) $y=\frac{1}{2}x^2-2x+2$
20. -2
21. a) x^2 **b)** $\frac{x^2}{2}$ **c)** $\frac{\pi x^2}{4}$
d) $\frac{x^2\sqrt{3}}{4}$ **e)** $\frac{3x^2\sqrt{3}}{2}$ **f)** 2x+2
22. a) $A=\frac{x^2}{3}+2x+3$
23. b) $5{,}333\ \frac{1}{3}$ m
c) 26 min 40 seg.
24. 10 y 10
25. a) $A=-\frac{1}{2}x^2+2x$
c) x=2 unidades
y= 1 unidad

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 6

1. b **2.** b

PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS DEL ICFES 6

1. b **2.** a **3.** b **4.** b **5.** a

NÚCLEO TEMÁTICO 7

EJERCICIOS

EJERCICIO 7.1

1. a **2.** c **3.** d **4.** b **5.** d

EJERCICIO 7.2

1. a=4 b=c=0
2. a= -3, b=0, c= 1
3. a= 8, b=0, c= -7
4. No es cuadrática
5. No es cuadrática
6. a=6, b=9, c=-5
7. No es cuadrática
8. $\mathbf{a}=a^2$, $\mathbf{b}=ab$, $\mathbf{c}=-2b^2$
9. a=1, b=-1, c=-2
10. No es cuadrática
11. a=2, b=2, c= -12
12. a=3, b=-6, c=0
13. **a**=ab, **b**=2a-b , **c**=-2
14. No es cuadrática
15. a=1 , b=15a - 6, c=-12a
16. Sí **17.** Sí
18. Sí **19.** No
20. Sí **21.** Sí
22. No tiene **23.** 2
24. 1 **25.** 2

EJERCICIOS 7

EJERCICIO 7.3

1. $\{-5,2\}$ **2.** $\{-3,4\}$

3. $\left\{\frac{5}{3},-\frac{5}{3}\right\}$ **4.** $\left\{\frac{2}{5}\right\}$ **5.** $\{-5,5\}$

6. $\{-\sqrt{2},-1\}$ **7.** $\left\{2,-\frac{5}{3}\right\}$

8. $\left\{-\frac{1}{9},\frac{1}{9}\right\}$ **9.** $\left\{-\frac{16}{3},6\right\}$

10. $\left\{-\frac{3}{5},\frac{1}{3}\right\}$ **11.** $\left\{-4,\frac{1}{5}\right\}$

12. $\{2a,2b\}$ **13.** $\{-8, 2a\}$

14. $\left\{0,\frac{b-2}{a}\right\}$

15. $\left\{\frac{-4+\sqrt{745}}{3},\frac{-4-\sqrt{745}}{3}\right\}$

16. $\left\{-1,\frac{7}{6}\right\}$ **17.** $\left\{-\frac{3}{4},\frac{8}{3}\right\}$

18. $\left\{-\frac{7b}{3},\frac{5b}{3}\right\}$ **19.** $\{2a,2b\}$

20. $\left\{4,\frac{7}{5}\right\}$ **21.** $\{-1,3\}$

22. $\{2, 11\}$ **23.** $\left\{2,\frac{39}{8}\right\}$

24. $\left\{3a,\frac{3a}{2}\right\}$ **25.** $\{-\sqrt{11},\sqrt{11}\}$

26. $\left\{b,-\frac{2b}{3}\right\}$ **27.** $\{2a,-3a\}$

28. $\left\{\frac{a}{2},\frac{a}{a-2}\right\}$ **29.** $\left\{\frac{1}{a},2a\right\}$

30. $\left\{2a,-\frac{a}{2}\right\}$

31. 52, 2 raíces reales y diferentes.

32. 0, dos raíces reales e iguales.

33. –31, dos raíces complejas.

34. 225, dos raíces reales y diferentes.

35. 961, dos raíces reales y diferentes.

36. $y= 2x$ ó $y=-3x$

37. $x=\frac{y\pm 3}{2}$

38. $y= x-2$ ó $y= 3x$

39. $x=\frac{y\pm\sqrt{3y}}{3}$

40. $y=\frac{-3\pm 2\sqrt{6+3x}}{3}$

EJERCICIO 7.4

1. 4, -21 **2.** $-\frac{7}{2}, -\frac{5}{2}$ **3.** –5, 3

4. $3,\frac{8}{3}$ **5.** $-\frac{1}{4},-\frac{5}{4}$

6. $\frac{7}{4},-\frac{15}{4}$ **7.** $\frac{1}{6},\frac{7}{12}$

8. $-2\sqrt{3},\sqrt{2}$

9. $3x^2-13x-10= 0$

10. $12x^2-23x-9= 0$

11. $x^2+x-1= 0$

12. $4x^2-12x + 3 =0$

13. $25x^2-40x + 16 =0$

14. $x^2-12=0$ **15.** $k= \pm 12$

16. $k=-27$ **17.** $k=0, k=8$

18. $k=1$ **19.** $k= -5$

20. $k= 6$

TALLER DE REPASO DE LA UNIDAD 7

2. a **3.** b **4.** a **5.** b

6. d **7.** c **8.** d **9.** a

10. a

11. **a)** $\{1,2\}$ **b)** $\{-11,5\}$ **c)** $\{-3,0\}$
d) $\left\{\frac{5}{2},\frac{3}{7}\right\}$

12. **a)** $\{-3,3\}$ **b)** $\{-1,1\}$ **c)** $\{0,1\}$
d) $\{0,9\}$ **e)** $\{0,6\}$ **f)** $\{-5,5\}$
g) $\{-4,4\}$ **h)** $\left\{-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right\}$

13. **a)** $\{-2,9\}$ **b)** $\{-3,-2\}$ **c** $\{-4,1\}$
d) $\{2+\sqrt{3}\,i, 2-\sqrt{3}\,i\}$ **e)** $\{1,9\}$
f) $\{25,1\}$ g) $\left\{\frac{1}{4},4\right\}$ **h)** $\left\{\frac{1}{4},9\right\}$
i) $\{9,16\}$ **j)** $\left\{\frac{-5-\sqrt{59}\,i}{6},\frac{-5+\sqrt{59i}}{6}\right\}$

14. $\left\{-1,\frac{m+n}{m}\right\}$ **15.** $\left\{\frac{1+q}{p},\frac{-q}{p}\right\}$

16. $\left\{\frac{-2}{u^2-1},-2\right\}$ **17.** $\left\{\frac{r+3}{r},\frac{r-3}{r}\right\}$

18. $\left\{-a,\frac{1}{a}\right\}$ **19.** $\left\{\frac{1}{10},3\right\}$

20. $\left\{\frac{b-a}{a+b},\frac{a+b}{a-b}\right\}$ **21.** $\left\{\frac{-a}{a-1},\frac{-a}{a+1}\right\}$

22. $y=\frac{3\pm\sqrt{12x^2-3}}{4}$

23. $y=\frac{5x\pm\sqrt{96-72x-47x^2}}{12}$

24. $y=\frac{5+x\pm\sqrt{x^2+10x+17}}{4}$

25. $y=2+3x\pm\sqrt{11x^2+12x}$

26. $k=-2$ **27.** $k=2$

28. $k= 2$ ó $k=3$

29. $x^2-\frac{7}{6}x+\frac{1}{3}=0$

30. $x^2-10x+22=0$

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 7

1. $3\frac{1}{3}\%$ **2.** c **3.** c

PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS DEL ICFES 7

1. d **2.** c **3.** b **4.** a **5.** b

NÚCLEO TEMÁTICO

8

EJERCICIOS

EJERCICIOS 8.1.

1. d **2.** c **3.** d **4.** b **5.** c

EJERCICIOS 8.2.

1. $\{-3, -\sqrt{3}, \sqrt{3}, 3\}$

2. $\left\{\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right\}$ **3.** $\left\{\frac{2}{3}, 1\right\}$

4. $\{\pm 2, \pm 1\}$ **5.** $\left\{3, -\frac{1}{2}, \frac{5 \pm \sqrt{17}}{4}\right\}$

6. $\{1, 2\}$ **7.** $\left\{\frac{7}{3}, \frac{5}{2}\right\}$

8. $\left\{4, \frac{3}{2}\right\}$ **9.** $\{-1, 3\}$ **10.** $\left\{\frac{2}{3}, \frac{11}{4}\right\}$

11. $\{14\}$ **12.** $\{13\}$

13. $\{144\}$ **14.** $\{\}$

15. $\left\{\frac{(a-b)^2}{2a-b}\right\}$ **16.** $\{2\}$

17. $\{x / x = (b-a)^2, b > a, a \neq 0\}$

18. $\{6\}$ **19.** $\{0\}$ **20.** $\{35\}$

EJERCICIOS 8.3.

1. $\{2, 3, -1\}$ **2.** $\left\{\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right\}$

3. $\left\{-2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 2\right\}$ **4.** $\left\{-1, \frac{3}{2}\right\}$

5. $\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}\right\}$ **6.** $\left\{\frac{1}{3}\right\}$

7. {-1,9 ; 0,7; 2,2}

8. { -1,9 ; 0,8; 3,1 }

9. {-2,4 , -1,6 , 1,5} **10.** {0,8}

11. {0,18} **12.** {1,82}

EJERCICIOS 8.4.

1. x^2, $(10-x)^2$ **2.** x^2, $16x^2$

3. $x(x+2)=2024$ **4.** $x+x^2=30$

5. $x - \frac{1}{x} = \frac{9}{20}$

6. $(x^2+x)-(2x+1)=305$

7. $x^2+(x+1)^2=61$

8. 21 **9.** 7m,4m

10. 25m,30m **11.** 3m

12. 6cm, 8cm, 10cm

13. 60cm,45cm **14.** 8cm, 6cm

15. 24cm, 10cm **16.** 10

17. $v \approx 82{,}6$ km/h **18.** 22cm, 26cm

19. A: 3horas, B: 6 horas

20. 160 km/h

21. 70,7 metros

22. a) $A(x) = 4x - \frac{x^2}{2}$

b) $A(x) = 16 - 4x + \frac{x^2}{2}$

c) x=4cm

23. Se cumple para cualquier x, siempre que x>5

24. 30 minutos

25. Largo: 13,74m.; Ancho: 27,34m.; radio: 6,87m.

TALLER DE REPASO DE LA UNIDAD 8

1. $\{5\}$ **2.** $\{1\}$ **3.** $\left\{\frac{(b-a)^2}{2a-b}\right\}$

4. $\{5\}$ **5.** $\{12, -3\}$ **6.** $\left\{1, \frac{2}{3}\right\}$

7. **8.** $\left\{8, -\frac{1}{8}\right\}$ **9.** $\{-5, 2\}$

10. $\left\{-\frac{16}{19}\right\}$ **11.** $\{4\}$ **12.** $\{10\}$

13. $\{\sqrt{12a-1}, -\sqrt{12a-1}\}$

14. $\{1, 3\}$ **15.** $\{-2, 2, 3\}$

16. $\left\{2, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right\}$

17. $\left\{-4, -2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 3\right\}$ **18.** $\{0, 4\}$

19. {2,1; 0,8; -0,23}

20. $\left\{-\sqrt{2}, -1, \sqrt{2}, \frac{2}{3}\right\}$

21. b) $21x-x^2=104$
c) $\{8, 13\}$

22. b) $2x=x^2$; **c)** $\{0, 2\}$

23. b) $x^2 + x = 156$;
c) {12,13} ó {-12, -13}

24. b) $x^2 + (x+2)^2 - 123 = (x+1)^2$
c) {10,12} ó {-12,-10}

25. b) $\frac{x}{x+1} = \frac{x+3}{x+4} - \frac{1}{18}$ **c)** $\frac{5}{6}$

26. b) $250x - 2x^2$
c) {150,50} ó { 100,75}

27. b) $3(x-6)\left(\frac{792}{x} - 6\right) = 1440$
c) 22 cm , 36 cm

28. b) $\pi x^2 + \pi(8-x)^2 = 34\pi$
c) 5cm , 3cm

29. b) $(18-3x)^2 = x^2-16$; 13 cm; 17 cm; 5cm, 3cm

30. b) $\frac{x^2}{16} + \frac{(100-x)^2}{16} = 397$
c) 76cm, 24 cm

31. b) $(100-400t)^2 + (200-300t)^2 = (100)^2$;
c) $t = \frac{2}{5}h$

32. b) $(13-2x)(16-2x) = 108$;
c) 12cm , 9 cm

33. b) $C(x) = [300-5(x-40)]\, x > 40$;
c) 10 bombillas

34. b) $[15000 - 50(x-150)]x$, si $150 < x \leq 250$;
c) 225 estudiantes

35. b) $\frac{1}{4} = \frac{1}{t} + \frac{1}{t+3}$
c) $\frac{5+\sqrt{73}}{2}$ horas $\frac{11+\sqrt{73}}{2}$ horas.

36. b) $x(2x-30) = 3500$;
c) frente: 50 m, fondo: 100 m.

37. $\frac{10}{1-t} - 12 = \frac{1}{t}$; velocidad del bus: $\frac{10}{1-t}$, velocidad a pie $\frac{1}{t}$

TALLER DE REPASO DE LA UNIDAD 8

c) 3 km/h , 15 km/h

38. $\frac{(x+1)(8000000+80000x)}{100}=416000$,

c) 4%

39. a) $3200 = 800t - 5t^2$;

$t=\left(80+24\sqrt{10}\right)$ seg ó

$t=\left(80-24\sqrt{10}\right)$ seg.

b) $-5t^2 + 800t = 0$, t=160 seg

c) $S(80) = -5(80)^2 + 800(80)$

t= 32000 m ; $t=\frac{-800}{-10}=80$ seg

40. b) P(x) = (50 - x) (10000+1000x) ;

c) \$30 ó \$10

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS

1. b) $A(x) = 4x - x^2$ **2.** $2xy + 2xz + 2yz$ **3.** 10, 11 , 12

PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS DEL ICFES

1. c) **2.** d) **3.** b) **4.** b) **5.** d)

NÚCLEO TEMÁTICO

9

EJERCICIOS

EJERCICIO 9.1

1. b **2.** d **3.** c **4.** a **5.** c

EJERCICIO 9 – 2

1. 25 **2.** 343 **3.** $\frac{1}{9}$ **4.** $3^{3\sqrt{2}-2}$

5. $3^{-\sqrt{2}/2}$ **6.** 1. **14.** $\left\{\frac{9}{2}\right\}$

15. {3, -1} **16.** {2} **17.** {0}

18. {4} **19.** {1} **20.** a=6

21. $a=\frac{1}{5}$ **22.** $a=e^{-2}$

23. $a=\sqrt{e}$ **24.** 11,0356

25. 6,5808

26. 245,1046 **27.** 0,0793

28. 0,9744 **29.** 2,6899

30. 3,3437 **31.** 2,5811

32. 2,37

34. a) 200 **b)** $200e^{-5} \approx 1{,}35$

35. \$9071,8

36. 1.567,57 libras por pie cuadrado

37. a) $f(t) = 100.000 \bullet 2^{\frac{t}{10}+1}$,

t=10 k, k∈N

b) \$12,800.000

38. b) 40 **c)** 94

d) Aprox. 100

39. a) 9 a.m.: $500\sqrt{3}$, 10 a.m.:

1500, 12 m : 4500

EJERCICIO 9 – 3

1. $5 = \log 100000$

2. $0 = \log_6 1$

3. $3 = \log_{0,2} 0{,}008$

4. $x = \log_p t$

5. $10 = \log_a b$

6. $5^3 = 125$

7. $6^{-1}=\frac{1}{6}$ **8.** $7^1 = 7$

9. $8^y = x$ **10.** $x^{10} = y$

11. 4 **12.** 4

13. $\frac{1}{2}$ **14.** 0

15. $\sqrt{5}$ **16.** $\frac{1}{2}$ **17.** {4}

18. $\left\{\frac{1}{25}\right\}$ **19.** $\left\{\frac{1}{4}\right\}$ **20.** {5}

21. 0,233… **22.** 0,5

23. –0,11 **24.** 0,275

25. 0,345 **26.** 1,30

27. 1,02 **28.** 1

29. 1,42 **30.** 0,7

31. 2,828 **32.** 0,7589

33. 1,6989 **34.** 0,5440

35. 1,9836 **36.** 10,7407

37. –7,2348 **38.** 15,2337

39. 4,3067 **40.** 4,7108

41. 6,7297 **42.** 1,7547

43. 0,0203 **44.** $1{,}05\cdot10^{-4}$

45. . 0,2468 **46.** 20,188

47. $4{,}8\cdot10^{-7}$ **48.** 2460,16

49. 0,799 **50.** 0,133

51. 0,498 **52.** $\left\{\frac{1}{2}\right\}$ **53.** {2,3}

54. $\left\{-\frac{1}{3}\right\}$ **55.** {10}

56. $\left\{-3+2\sqrt{3}\right\}$ **57.** $\left\{2+2\sqrt{2}\right\}$

58. $\log_a x + \frac{2}{3}\log_a y - \frac{4}{3}\log_a z$

59. $Log_a \frac{x^4}{y^3\sqrt[3]{y^2}}$

62. Coinciden

EJERCICIO 9 – 4

3. {0,84} **4.** { 0,91}

5. {-3} **6.** $\left\{\frac{2}{11}\right\}$ **7.** {4}

EJERCICIOS 9

8. $\{0{,}06\}$ **9.** $\{3\}$ **10.** $\{4\}$

11. $\{-2,2\}$ **12.** $\{10^{100}\}$

13. $\{10^4\}$ **14.** $\left\{\frac{Log\ 2}{2}\right\}$

15. $x = Log\left(y \pm \sqrt{y^2-1}\right)$

16. $x = \log\sqrt{\frac{y+1}{1-y}}$

17. $x = \ln\left(\sqrt{y^2+1}+y\right)$

18. $x = \ln\sqrt{\frac{y+1}{1-y}}$

19. $t = \frac{L}{R} Ln\left(1-\frac{Ri}{E}\right)$

20. $\{(21,6)\}$

21. **a)** $k \approx -0{,}03$ b) $81{,}65°$
c) $t = 101{,}9$ min

22. **a)** 67,93 libras
b) 23,1 horas

TALLER DE REPASO DE LA UNIDAD 9

3. a) $0 = Log_5 1$ **b)** $\frac{2}{3} = Log_8 4$
c) $-2 = Log_4 \frac{1}{4}$ **d)** $\frac{4}{3} = Log_8 16$
e) $2 = Log_x y$

4. **a)** $10^1 = 10$ **b)** $36^{1/2} = 6$
c) $2^{-3} = \frac{1}{8}$ **d)** $2^y = x$
e) $x^2 = y$

6. **a)** $Log_b \frac{xyz}{w^2}$ **b)** $Log_b \frac{x+1}{y-z}$
c) $Log_a \frac{y^{1/3}}{z^{2/5}}$

7. **a)** $y = f(x) = 2\cdot(10^{3x})$
b) $y = 10^{\frac{5x+3}{2}}$

8. **a)** 0,2057 **b)** 2,120
c) $5{,}1 \times 10^{-7}$ **d)** 0,7761

e) 0,2507

9. **a)** $\{4\}$ **b)** $\left\{\frac{1+\sqrt{21}}{2}, \frac{1-\sqrt{21}}{2}\right\}$
c) $\{6\}$ **d)** $\{6\}$ **e)** $\{2{,}5\}$

10. **a)** $x = 2{,}548$, $y = 0{,}226$
b) $x = 0{,}6$, $y = 0{,}7$
c) $x = 1{,}1929$, $y = 0{,}2386$
d) $x = 500$, $y = 20$

11. 100 años

12. 60 días

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 9

1. b. **2.** b. **3.** c.

PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS DEL ICFES 9

1. d **2.** d **3.** b **4.** a **5.** d

NÚCLEO TEMÁTICO

10

EJERCICIOS

EJERCICIO 10 – 1

1. c **2.** d **3.** d **4.** c **5.** d

EJERCICIO 10 – 2

1. **a)** $\left\{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, \frac{2}{5}, \frac{3}{6}, \ldots\right\}$

b) $\left\{\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{4}{9}, \frac{5}{12}, \frac{2}{5}, \ldots\right\}$

f) $\left\{\frac{5}{9}, \frac{11}{21}, \frac{21}{41}, \frac{35}{69}, \frac{53}{105}, \ldots\right\}$

g) $\{1, 1, 1, 1, 1, \ldots\}$

j) $\{1, 6, 27, 108, 405, \ldots\}$

2. a) $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ **b)** $\left\{\frac{(-1)^n+1}{2}\right\}$

c) $\left\{(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}\right\}$ **d)** $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$

e) $\left\{(-1)^{n+1}\cdot\frac{n}{n+1}\right\}$

f) $\left\{\frac{(-1)^{n+1}n}{(2n-1)^2}\right\}$

g) $\{4n-2\}$ **h)** $(-1)^{n+1}$

3. 149

4. **a)** $4+5+7+8+9+10+\ldots+(p+3)$

b) $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\cdots+\frac{p}{1+p}$

e) $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{10}-\cdots+\frac{(-1)^p}{3^{p+1}}$

f) $0-3+8-15+\ldots+(-1)^{p+1}\cdot(p^2-1)$

5. **a)** $\sum_{i=1}^{4}(-1)^{i+1}(2i-1)(2i)$

b) $\sum_{i=1}^{28}\frac{2i+1}{2i+3}$

EJERCICIOS 10

c) $\sum_{i=1}^{100} i^{i+1}$ d) $\sum_{i=1}^{100} i^2$

e) $\sum_{i=1}^{5} a_i\, b_{i+1}$ f) $\sum_{i=1}^{15} \frac{1}{i\sqrt{i}}$

g) $\sum_{i=1}^{4} (-1)^{i+1} \log\left(\frac{i+1}{i}\right)$

h) $\sum_{i=3}^{k} i(i+1)(i+2)$

EJERCICIO 10 – 3

1. **a)** Sí **b)** No **c)** No
   d) No **e)** Sí **f)** No
2. 21 **3.** 3 **4.** 13
5. **a)** 6, 8, 10, 12, 14, ..., 24
   b) $\frac{19}{36}, \frac{5}{9}, \frac{21}{36}, \frac{11}{18}, \frac{23}{36}, \frac{2}{3}, \frac{25}{36}, \frac{13}{18}$
   c) 5, 3, 1, -1, -3, -5, -7
6. **a)** 120 **b)** 175 **c)** 33,75
   d) 18a + 72
7. **a)** $\frac{n^2-n}{2}$ **b)** n(n + 1) **c)** n^2
8. 3 ó $\frac{1}{2}$ **9.** 1 ó $\frac{3}{5}$ **10.** 1020
11. 22 **12.** Sí, $x^2 + 12x + 1$,
13. **a)** 5, 8, 11
    b) 5, 9, 13, 17
    c) 17, 13, 9, 5, 1
14. 126 **15.** 264 **16.** 156
17. 571 meses **18.** 10, 12, 14
19. 89 **20.** 21

EJERCICIO 10 - 4

1. **a)** Sí **b)** Sí **c)** No
   d) Sí **e)** No
2. **a)** $3, -\frac{3}{2}, \frac{3}{4}$ **b)** $\frac{1}{243}$
   c) 3279 **d)** r = 0.398
   e) -1705 **f)** $f_2 = 6$, $f_3 = 4$
   g) 547 **h)** $\frac{1023}{1024}$
3. **a)** $\frac{9}{2}$ **b)** No existe **c)** $\frac{8}{5}$
4. **a)** $\frac{1}{3}$ **b)** $\frac{70}{9}$ **c)** $\frac{20}{33}$ **d)** $\frac{250}{33}$
   e) $\frac{519}{110}$ **f)** $\frac{758}{165}$
5. 2 **6.** $ 504,21 **7.** $ 81000
8. 18 cm **9.** 72 cm^2

TALLER DE REPASO DE LA UNIDAD 10

1. **a)** $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ **b)** $\left\{\frac{n+1}{2n-1}\right\}$ **c)** $\left\{\frac{2n-1}{2n}\right\}$
   d) $\{3n - 2\}$ **e)** $\left\{\frac{5-n}{2+3n}\right\}$
   f) $\{(-1)^{n+1}\}$ **g)** $\left\{\frac{l_n n}{n^2}\right\}$
   h) $\left\{(-1)^n \frac{n^2+1}{n}\right\}$
2. **a)** $\sum_{i=1}^{5}(2i-1)^i$ **b)** $\sum_{i=1}^{4}(i+2)a^{i+5}$
   c) $\sum_{i=1}^{6}(-1)^i 2^i$ **d)** $\sum_{i=1}^{4} i x^{i^2}$
   e) $\sum_{i=1}^{4}(-1)^{i+1} x^{-3i}$ **f)** $\sum_{i=1}^{4} 2i(2i-1)$
   g) $\sum_{i=1}^{4}\frac{2i-1}{i(i+1)}$ **h)** $\sum_{i=1}^{5}(-1)^{i+1}\frac{i}{i^2+i-1}$
3. **a)** Geométrica, r = -2, $\left\{\frac{(-2)^n}{6}\right\}$
   b) Aritmética, $d = \frac{2}{3}$, $\left\{\frac{2n}{3} - 1\right\}$
   c) Aritmética, d = 1, {n},
   d) Aritmética, d = 2, {2n},
   e) Geométrica, r = 2, $\{2^n\}$
   f) Aritmética, d = -3, {50-3n}
   g) Aritmética, d = $\sqrt{2}$, $\{n\sqrt{2}\}$
   h) Geométrica, $r = -\frac{1}{5}$; $\left\{25 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}\right\}$
4. 53
5. $\left\{-\frac{3071}{512}, -\frac{2047}{512}, -\frac{1023}{512}, \frac{1}{512}, \frac{1025}{512}, \ldots\right\}$
6. **a)** $x = \frac{5}{2}$ **b)** $x = \pm\frac{3}{2}$
7. 81
8. 4, 8, 12, 24, 48
9. **a)** 336 pies **b)** 1936 pies
   c) $16\,t^2$
10. Al cuarto año.
11. **a)** -5, -8, -11, -14, -17, -20
    b) $10\sqrt[8]{10}, 10\sqrt[4]{10}, \pm 10\sqrt[8]{10^3}, 10\sqrt{10},$
    $\pm 10\sqrt[8]{10^5}, 10\sqrt[4]{10^3}, \pm 10\sqrt[8]{10^7}$
12. $-\frac{64}{3}, -\frac{43}{3}$ **13.** 13363
14. 1.500 **15.** 2, 4, 6, 8
16. Primer grupo: 3, 5, 7 ; Segundo grupo: 4, 5, 6 o también, primer grupo: 21 , 5 , -11 y Segundo grupo: 22, 5, -12
18. 40, 20, 10

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 10

1. 4 y 5 **2.** d **3.** 1

PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS DEL ICFES 10

1. c. **2.** b. **3.** c. **4.** c. **5.** d.

NÚCLEO TEMÁTICO

11

EJERCICIOS

EJERCICIO 11 – 1

1. d **2.** c **3.** d **4.** b **5.** d

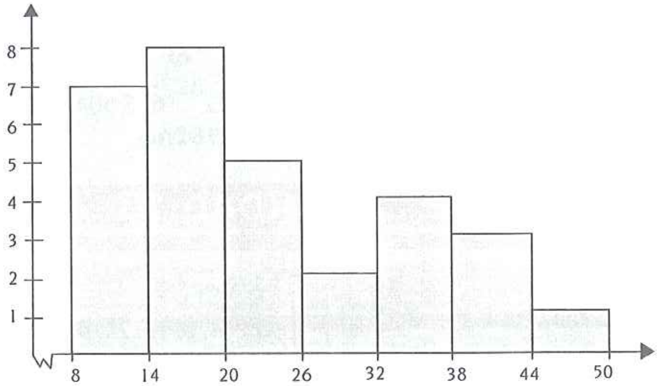
EJERCICIO 11 – 2

2. a. 64 **b.** 0,64

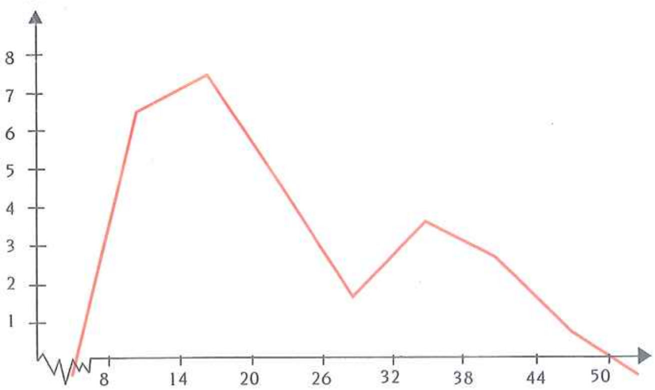
3. Promedio del alumno A: $\overline{x}_A \approx 3{,}8$, promedio del alumno A: $\overline{x}_B \approx 3{,}8$

4. $\overline{x} = 5$, Me= 4 , La moda son 2, 3 y 6

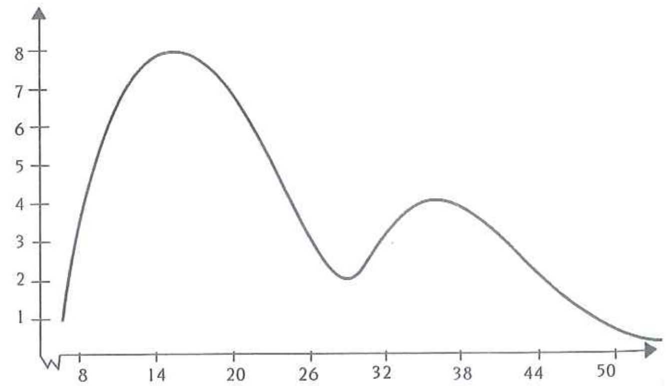
5. a.



b.



c.

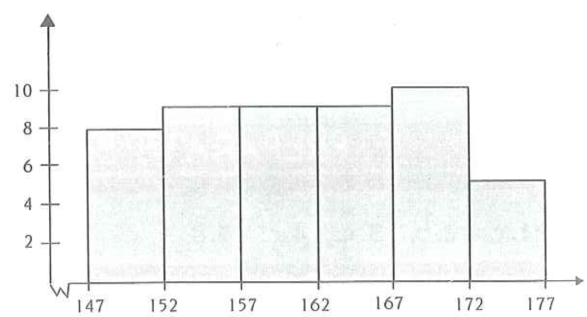


d. $\overline{x} \approx 27{,}87$, Me = 17 , Mo=17

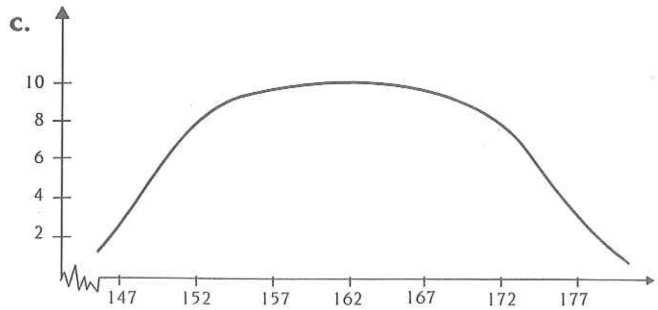
6. a.

Intervalo	x_i	f_i	F_i
[147 - 152)	149,5	8	8
[152 - 157)	154,5	9	17
[157 - 162)	159,5	9	26
[162 - 167)	164,5	9	35
[167 -172)	169,5	10	45
[172 - 177)	174,5	5	50

b.



c.



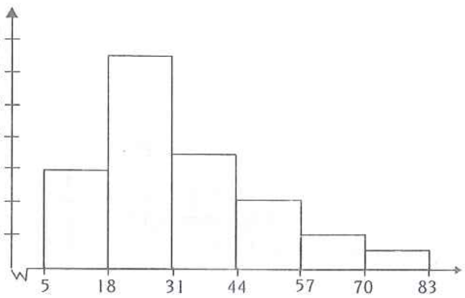
d. $\overline{x} \approx 161,4$; $Me \approx 161,4$, $Mo = 169,5$

e. La media aritmética o promedio que es 161,4

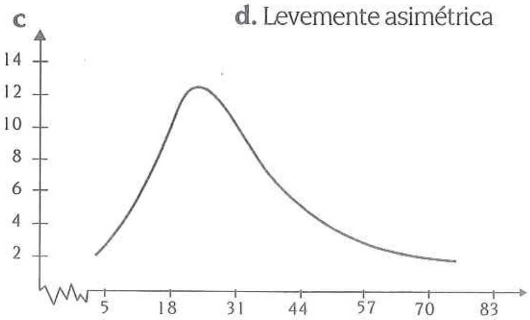
7. a.

Intervalo	x_i	f_i	F_i
[5 - 18)	11,5	6	6
[18 - 31)	24,5	13	19
[31- 44)	37,5	7	26
[44 - 57)	50,5	4	30
[57 - 70)	63,5	2	32
[70 - 83)	76,5	1	33

b.

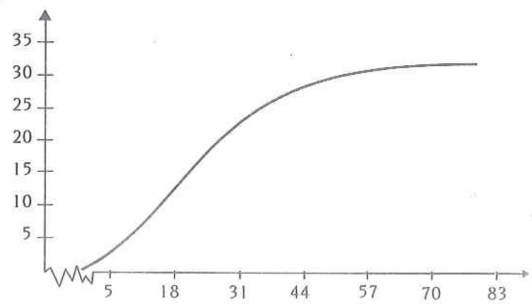


c



d. Levemente asimétrica

e.

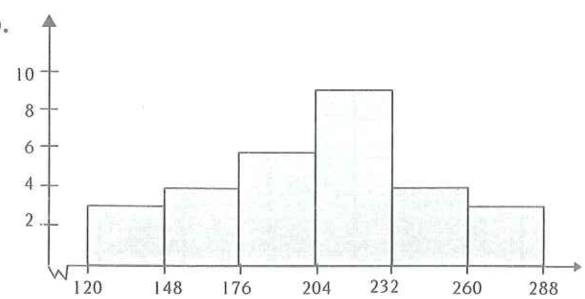


f. $\overline{x} \approx 32$, $Me = 28,5$, $Mo = 24,5$ **g.** La mediana

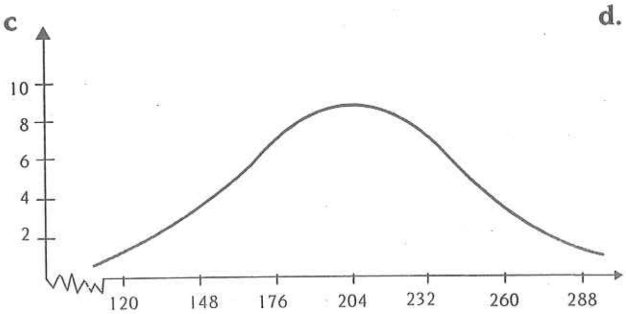
8. a.

Intervalo	x_i	f_i	F_i
[120 -148)	134	3	3
[148 -176)	162	4	7
[176 -204)	190	6	13
[204 -232)	218	9	22
[232 - 260)	246	4	26
[260 - 288)	274	3	29

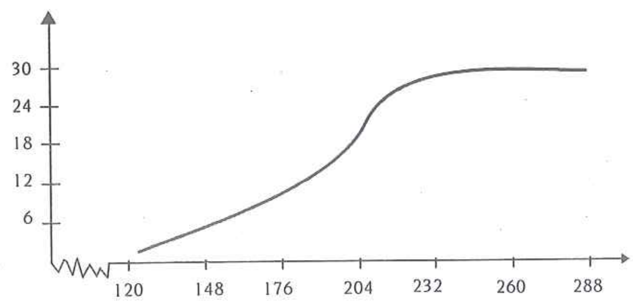
b.



c



d.



e. $\overline{x} \approx 205{,}4$ Me$=208{,}7$ Mo$=218$,

f. La mediana

EJERCICIO 11 – 3

1. Recorrido = 4 kg , d = 0,75 , la varianzas = 1,43 , $s = \sqrt{1{,}25} \approx 1{,}195$

2. Rango o recorrido = 16 , s = 5,754

3. Rango = 9 , s = 2,01

4. **a)** 34 ,

b) En ciencias naturales: $x \approx 2{,}73$; la mediana = 3,0 , la moda es 3,0 ;
En matermáticas: $x \approx 2{,}82$, la mediana = 2,5 , la moda es 2,5

c) En matemáticas

5. En la empresa B.

6. $CV_1 = 5{,}39\%$; $CV_2 = 18{,}28\%$; El peso de los elefantes es más homogéneo

a) 33% aproximadamente

c) 54.3%

e) $\overline{x}=2{,}96$; Me$=3{,}1$; Mo$=3{,}25$

g) $s^2=0{,}57$; $s=0{,}75$; cv$=25{,}5\%$.
Leve dispersión respecto a $\overline{x}$

h) $\overline{x} \pm s = 2{,}96 \pm 0{,}75 = (2{,}21 ; 3{,}71) \approx 74\%$

$\overline{x} \pm 2s = 2{,}96 \pm 1{,}5 = (1{,}46 ; 4{,}46) \approx 94\%$

$\overline{x} \pm 3s = 2{,}96 \pm 2{,}25 =$ contiene el 100%

EJERCICIO 11 – 4

1. En donde hay: 4 blancas y 4 de color gris, 2 blancas y 2 de color gris y 6 blancas y 6 de color gris.

4. La B, porque su frecuencia relativa es menor que en las marcas A y C.

5. El número de veces que se lanzó es 800. Ahora, la frecuencia relativa: Del número de veces que ha salido con la punta hacia arriba es: $\frac{297}{800}$

Del número de veces que ha salido con la punta hacia abajo es: $\frac{503}{800}$

Es más probable de que salga con la punta hacia abajo.

6. **a.** Mariana: $\frac{3}{18}$, Sara: $\frac{5}{22}$
Juan: $\frac{4}{21}$, Camilo: $\frac{6}{28}$

b. Ordenado de mayor a menor: Sara, Camilo, Juan y Mariana.

7. **a.** $\frac{1}{2}$ **b.** 1 **c.** $\frac{1}{2}$

8. **a.** Juan: 40 veces, Mariana: 80 veces, Lina: 200 veces y Camilo: 1000 veces.

b. Camilo

9. La probabilidad de que salga cara o sello es la misma.

10. **a.** 0 **b.** $\frac{5}{7}$ **c.** $\frac{2}{7}$
d. $\frac{2}{7}$ **e.** $\frac{5}{7}$

11. La probabilidad para el: suceso cero es 0, suceso par es $\frac{1}{2}$, suceso "menor que 5" es $\frac{5}{6}$, suceso "obtener 1 ó 6 es $\frac{1}{3}$, suceso "el lápiz quedar vertical apoyado en la punta" es 0, el suceso "el lápiz con una cara horizontal" es 1.

7.

Intervalos	x_i	f_i	F_i	h_i	% H_i
[1,0 - 1,5)	1,25	4	4	0,0571	5,71
[1,5 - 2,0)	1,75	5	9	0,0714	12,86
[2,0 - 2,5)	2,25	8	17	0,1143	24,29
[2,5 - 3,0)	2,75	13	30	0,1857	42,86
[3,0 - 3,5)	3,25	25	55	0,3571	78,57
[3,5 - 4,0)	3,75	11	66	0,1571	94,29
[4,0 - 4,5)	4,25	4	70	0,0571	100,00
		70		10000	

TALLER DE REPASO DE LA UNIDAD 11

2. a)

x_i	f_i	F_i	h_i	% H_i
3	2	2	0,042	4,2
4	2	4	0,042	8,4
5	3	7	0,063	14,7
6	8	15	0,167	31,4
7	17	32	0,354	66,8
8	10	42	0,208	87,6
9	4	46	0,083	95,9
10	2	48	0,042	100,0
	48			

b) 7 o más ; 68,8% es buena
$\overline{x} = 6,9$; Me = 7 ; Mo = 7
$s^2 = 2,42$; s= 1,56 ; cv= 22,6 %

3. a)

Intervalos	x_i	f_i	F_i	h_i	% H_i
[11,4 - 12,0)	11,7	3	3	0,0375	3,75
[12,0 - 12,6)	12,3	9	12	0,1125	15,00
[12,6 - 13,2)	12,9	18	30	0,2250	37,50
[13,2 - 13,8)	13,5	23	53	0,2875	66,25
[13,8 - 14,4)	14,1	17	70	0,2125	87,50
[14,4 - 15,0)	14,7	9	79	0,1125	98,75
[15,0 -15,6)	15,3	1	80	0,0125	100,00

c) $\overline{x}$=13,45 ; Me=13,46 ; Mo = 13,5

e) $s^2 = 0,65$; s = 0,81 ; cv = 6,02 %

f) Sí

4. e. $\frac{1}{n}$, 1 , 0

h. $\frac{1}{6}$, porque los seis sucesos que se puede dar son equiprobables.

5. E={salir:0,1,2,3,...36}

a. P(A)= $\frac{1}{37}$ **b.** P(B)= $\frac{3}{37}$

c. P(C)= $\frac{19}{37}$ **d.** P(D)= $\frac{2}{37}$

e. P(E)= 1

7. a. P(azul) = $\frac{1}{5}$

b. P(roja) = $\frac{1}{2}$

c. P(verde) = $\frac{3}{10}$

d. P(no azul) = $\frac{4}{5}$

e. P(no rojo) = $\frac{1}{2}$

f. P (no azul) = $\frac{7}{10}$

8. E={1, 2, 3, ... 10}

a. $\frac{1}{2}$ **b.** $\frac{3}{10}$ **c.** $\frac{1}{5}$

d. $\frac{1}{2}$ **e.** $\frac{2}{5}$

10. a. V **b.** F **c.** V

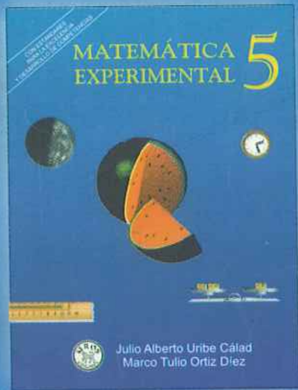
DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS

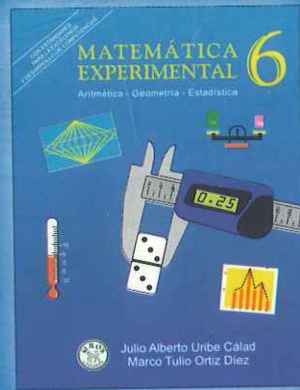
1. b) **2.** d) **3.** $\frac{1}{36}$

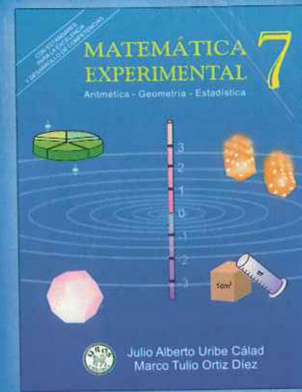
PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS DEL ICFES

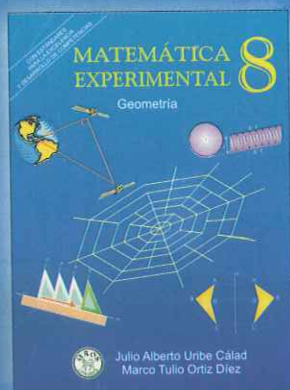
1. c. **2.** d. **3.** a. **4.** a. **5.** a. **6.** b **7.** b

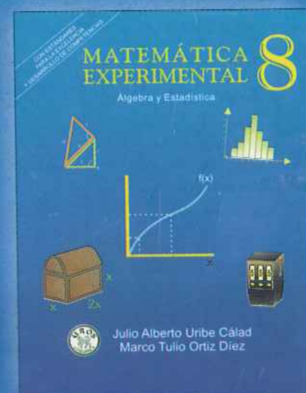
Esta obra se terminó de imprimir en los
talleres de TERMIMPRESOS - Medellín,
en el mes de diciembre del año 2006

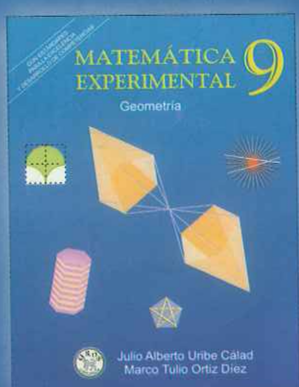


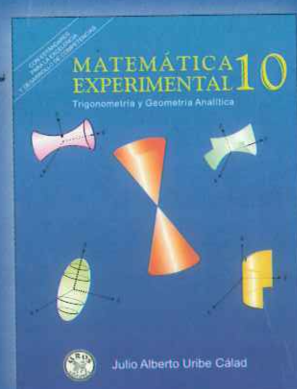


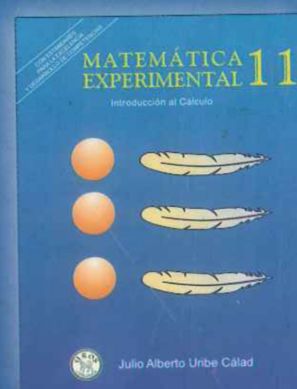












ISBN 958-97531-5-9

9 789589 753156