CON ESTÁNDARES
PARA LA EXCELENCIA
Y DESARROLLO DE COMPETENCIAS

MATEMATICA EXPERIMENTAL

INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO

11

UNDÉCIMO GRADO
EDUCACIÓN MEDIA

TERCERA EDICIÓN ACTUALIZADA Y CORREGIDA
2007

Julio Alberto Uribe Cálad

UROS editores

Este texto ha sido elaborado por los autores de acuerdo con los programas del Ministerio de Educación Nacional y bajo la responsabilidad de los siguientes integrantes:

AUTOR

JULIO ALBERTO URIBE CÁLAD

- Licenciado en Matemáticas y Física de la Universidad de Antioquia, año 1.980
- Posgraduado en Didáctica Universitaria en la misma universidad en el año 2002.
- Rector del colegio Calasanz de Medellín entre los años 1991 y 2002 y profesor de la misma institución desde el año 1971
- Profesor Asociado de la Universidad Nacional de Colombia, sede de Medellín, desde el año 1980
- Distinguido con el premio a la Docencia Excepcional por el Consejo Superior de la Universidad Nacional en los años 2000, 2001, 2002 y 2006.
- Coautor de la reconocida serie ELEMENTOS DE MATEMÁTICAS publicada por Editorial Bedout entre los años 1989 y 1999.
- Autor y coautor de más de 25 textos, incluidos dos de carácter universitario, uno de los cuales es actualmente el texto guía en el curso de GEOMETRÍA VECTORIAL, para estudiantes de ingeniería en la Universidad Nacional de Colombia, sede de Medellín.

COMITÉ TÉCNICO

Diseño y Diagramación: Juan Carlos Uribe Osorio
Margarita María Osorio Arango
Diseño de carátula: Juan Carlos Uribe Osorio.

AGRADECIMIENTOS:

Al profesor Jesús Enrique Uribe Ángel, quien elaboró las preguntas correspondientes a las comprensiones de lectura de cada unidad.
A los profesores Luis Alfonso Vélez Moreno y René Iral Palomino de la Escuela de Estradística de la Universidad Nacional de Colombia, sede Medellín, quienes hicieron importantes sugerencias metodológicas y de contenido al material de estadística.
Al profesor Félix Ruiz de Villalba y Díaz de Cerio quien corrigió la primera edición de este texto.

CRÉDITOS

Este texto recomienda el uso del paquete computacional DERIVE, propiedad de TEXAS INSTRUMENTS INCORPORATED. Si adquiere este material, hágalo de forma legal; recuerde que la piratería es un delito y, como tal, será sancionado según las leyes.

ISBN: 958-97011-7-5

Contenido

MATEMÁTICA

escrito para

ESTRUCTURAR Y DESARROLLAR EL

a través de

UN CURRÍCULO

mediado por

PROCESOS GENERALES

como

- PLANTEAMIENTO Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
  - Enunciar el problema
  - Desarrollar estrategias de solución
  - Verificar los resultados
  - Generalizar las estrategias de solución
  - Utilizar significativamente la matemática para aplicarla en la solución de nuevos problemas
- RAZONAMIENTO
  - Cómo y por qué de los procesos
  - Justificar los procedimientos
  - Plantear hipótesis y argumentos a partir de propiedades conocidas
  - Exhibir contraejemplos para mostrar la falsedad de ciertas proposiciones
  - Identificar patrones de comportamiento
- COMUNICACIÓN
  - Expresar oralmente las ideas
  - Escribir procesos de solución de problemas
  - Enunciar e interpretar propiedades
  - Evaluar información
- MODELACIÓN
  - Identificar las partes de un problema
  - Escribir un modelo matemático para el enunciado de un problema
  - Resolver el modelo
  - Verificar las soluciones obtenidas
- EJERCITACIÓN
  - Realizar cálculos aritméticos, métricos, geométricos, analíticos y de rutina
  - Dibujar gráficas
  - Medir objetos
  - Realizar transformaciones en el plano y en el espacio

CONOCIMIENTOS ESPECÍFICOS

dados en

PENSAMIENTOS

como

PENSAMIENTO NUMÉRICO

a través de

LÓGICA Y CONJUNTOS

como

- OPERACIONES CON CONJUNTOS:
  - Unión
  - Intersección
- FUNCIONES PROPOSICIONALES ESCRITAS COMO:
  - Desigualdades
  - Igualdades con valor absoluto
  - Desigualdades con valor absoluto
- ENUNCIAR E INTERPRETAR PROPIEDADES RELATIVAS A:
  - Límites de funciones
  - Derivación de funciones.

LOS NÚMEROS REALES

como

- CEROS REALES DE UN POLINOMIO
  - Ceros racionales
  - Ceros irracionales
  - Factorización de polinomios en R.
- VALOR ABSOLUTO
  - Concepto
  - Propiedades
- INTERVALOS DE NÚMEROS REALES
  - Cerrados, abiertos y semicerrados.
  - Intervalos infinitos

PENSAMIENTO ESPACIAL

a través de

- REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA DE:
  - Intervalos
  - Solución de ecuaciones e inecuaciones con o sin valor absoluto
- DIBUJO DE LUGARES GEOMÉTRICOS Y FUNCIONES COMO:
  - Línea recta
  - Circunferencias
  - Secciones cónicas
  - Funciones algebraicas
  - Funciones trascendentes
  - Funciones especiales
- APLICAR LAS PROPIEDADES DE LA GEOMETRÍA EN LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE FUNCIONES COMO:
  - Áreas
  - Volúmenes
- RESOLVER LOS PROBLEMAS GEOMÉTRICOS QUE PERMITIERON DESARROLLAR EL CÁLCULO COMO:
  - El problema de la recta tangente a una curva en un punto dado.
  - El problema del área bajo una curva

para desarrollar

COMPETENCIAS

INTERPRETATIVA

PROPOSITIVA

evidenciadas por el alcance de

LOGROS

como

DESTREZA OPERATIVA

APROPIACIÓN Y COMUNICACIÓN DE CONCEPTOS

EXPERIMENTAL 11

PENSAMIENTO LÓGICO MATEMÁTICO

PENSAMIENTO MÉTRICO

a través de

- DESCRIBIR Y JUSTIFICAR PROCESOS COMO:
  - Aproximaciones sucesivas.
  - Rangos de variación
  - Límites en situaciones de medición
- LA DERIVADA COMO RAZÓN DE CAMBIO INSTANTÁNEO

PENSAMIENTO ALEATORIO

a través de

- PROBABILIDADES:
  - Reglas de probabilidad
  - Independencia, regla de la multiplicación, conteo, diagrama de árbol, probabilidad condicional
  - Límites en situaciones de medición
- ANÁLISIS COMBINATORIO:
  - Permutaciones, variaciones y combinaciones

PENSAMIENTO VARIACIONAL

a través de

- REPRESENTAR Y DESCRIBIR FUNCIONES:
  - Mediante tablas
  - Mediante fórmulas
  - Mediante enunciados verbales
  - Mediante gráficas
- ANALIZAR FUNCIONES A PARTIR DE:
  - Los interceptos con los ejes
  - Las simetrías con los ejes y conel origen
  - El dominio y el rango
  - Las asístotas horizontales, verticales u oblicuas
  - La información que brindan la primera y la segunda derivadas acerca de una funsión dada.
  - La continuidad
- COMBINAR Y TRANSFORMAR FUNCIONES MEDIANTE:
  - La suma, la resta, el producto y el cociente
  - La composición de funciones
  - Las traslaciones, las contracciones, las dilataciones y las reflexiones con los ejes coordenados.
- DESARROLLAR LOS CONCEPTOS DE LÍMITE Y CONTINUIDAD
  - Idea intuitiva de límite
  - Límites laterales
  - Propiedades de los límites
  - Límites infinitos y al infinito
  - Formas indeterminadas
  - Continuidad en un punto y en un intervalo
- DESARROLLAR EL CONCEPTO DE DERIVADA
  - El problema de la recta tangente y el de la velocidad instantánea
  - Definición de derivada
  - La derivada como razón de cambio instantáneo
  - Regla de derivación, derivación implícita
  - Significado y aplicación de la primera y la segunda derivada
  - Solución de problemas de variables relacionadas con el tiempo y de optimización (máximos y mínimos)
- INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO INTEGRAL
  - El concepto de antiderivada
  - Algunas técnicas de antiderivadas
  - Concepto de Ecuación Diferencial
  - Solución de algunos problemas de ecuaciones diferenciales

CONTEXTO

como

- Conocer el ambiente social y familiar que rodea al estudiante.
- Identificar la realidad emocional y sicológica propia de la adolescencia.
- Crear, por parte del docente, un ambiente adecuado de motivación para el aprendizaje.
- Lograr la participación activa del estudiante en los procesos de aprendizaje.
- Desarrollar la capacidad de pensamiento de los estudiantes teniendo en cuenta que se encuentran saliendo de la etapa de las operaciones concretas e ingresando a la etapa de las operaciones formales.
- Preparar a los estudiantes para resolver problemas de la vida cotidiana y de la ciencia.

ARGUMENTATIVA

TOS

DIBUJO DE GRÁFICOS

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

1. PRC

a) (x + y

c) (x + y

e) (x - y)

f) (x - y)

g) (x - y)

h) Trián
binon

(a +

(a +

(a +

(a +

(a +

(a +

(a +

2. FACT

a) ax + a

c) x^2 + 2x

e) x^3 + y

f) x^3 - y^3

g) Ceros

Sea P
de gra

- Si x

- Si x
pue
gla

- Si P
la fo
divis

- Si P
P(a)
aplic

3. EXPON

Teniendo
cumple qu

a) $x^m \cdot x^n = x$

d) $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$

g) $\left(\frac{x}{y}\right)^n =$

j) $x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m}$

ÁLGEBRA

1. PRODUCTOS NOTABLES

a) $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ b) $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

c) $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$ d) $(x+y)(x^2 - xy + y^2) = x^3 + y^3$

e) $(x-y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 - y^3$

f) $(x-y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

g) $(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

h) Triángulo de Pascal: Los coeficientes del desarrollo del binomio $(a+b)^n$, con $n \in \mathbb{N}$ se obtienen así:

$$
\begin{array}{l}
(a+b)^0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\; 1 \\
(a+b)^1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\; 1 \quad 1 \\
(a+b)^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\; 1 \quad 2 \quad 1 \\
(a+b)^3 \cdots\cdots\cdots\; 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
(a+b)^4 \cdots\cdots\; 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
(a+b)^5 \cdots\; 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
(a+b)^6 \cdots\; 1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1
\end{array}
$$

2. FACTORIZACIÓN

a) $ax + ay = a(x+y)$ b) $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$

c) $x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2$ d) $x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2$

e) $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$

f) $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$

g) Ceros de un polinomio y Teorema del factor.

Sea $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ un polinomio de grado n con coeficientes enteros:

- Si x=a es cero de P(x) entonces (x - a) es factor de P(x).
- Si x - a es factor de P(x) entonces el otro factor de P(x) puede obtenerse aplicando la División Sintética o Regla de Ruffini.
- Si P(x) tiene ceros racionales, entonces éstos tienen la forma , $\frac{m}{n}$ donde m es un divisor de a_0 y n es un divisor de a_n.
- Si P(x) tiene ceros irracionales en el intervalo [a ; b] y $P(a) \bullet P(b) < 0$ entonces dicho cero (c) puede obtenerse aplicando la fórmula:

$$c \approx \frac{aP(b) - bP(a)}{P(b) - P(a)}$$

3. EXPONENTES, RADICALES Y RACIONALIZACIÓN

Teniendo en cuenta las restricciones respectivas, se cumple que:

a) $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$ b) $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$ c) $(x^m)^n = x^{m \cdot n}$

d) $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ e) $x^0 = 1$, con $x \neq 0$ f) $(xy)^n = x^n y^n$

g) $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$ h) $x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$ i) $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}$

j) $x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m}$

k) $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$ l) $\sqrt[n]{x^n} = \begin{cases} x & \text{si n es impar} \\ |x| & \text{si n es par} \end{cases}$

m) El factor racionalizante de $\sqrt{x} \pm \sqrt{y} = \sqrt{x} \mp \sqrt{y}$

n) El factor racionalizante de $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}$ es $\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}$

o) El factor racionalizante de $\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}$ es $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}$

4. ECUACIÓN DE 2° GRADO

Si $ax^2 + bx + c = 0$ entonces $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

La expresión b^2-4ac se denomina DISCRIMINANTE:

- Si b^2-4ac > 0, la ecuación tiene dos raíces reales diferentes.
- Si b^2-4ac = 0, la ecuación tiene dos raíces reales iguales.
- Si b^2-4ac < 0, la ecuación tiene dos raíces complejas.

5. LOGARITMOS Y SUS PROPIEDADES

El logaritmo en base **a** de un número **x** es el exponente **y** al que hay que elevar la base **a** para obtener el número **x**; es decir:

Si $\log_a x = y$ entonces $a^y = x$, con $a > 0$ y $a \neq 1$

PROPIEDADES

Si a, x, y $\in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$, entonces:

P-1 $\log_a 1 = 0$ **P-2** $\log_a a = 1$

P-3 $\log_a a^n = n$ **P-4** $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$

P-5 $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$ **P-6** $\log_a x^n = n \cdot \log_a x$

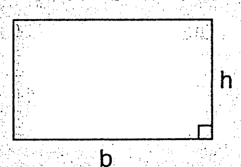
P-7 $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

GEOMETRÍA

1. FÓRMULAS DE LONGITUD (L), ÁREA (A) Y VOLUMEN (V)

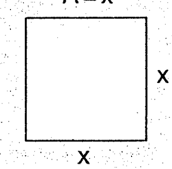
RECTÁNGULO

$A = b \bullet h$



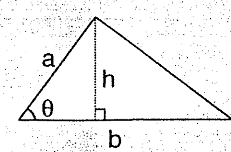
CUADRADO

$A = x^2$



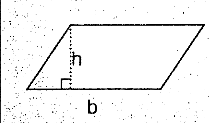
TRIÁNGULO

$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{ab \operatorname{Sen}\theta}{2}$



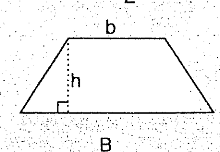
PARALELOGRAMO

$A = b \bullet h$



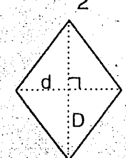
TRAPECIO

$A = \frac{(B+b)}{2} h$



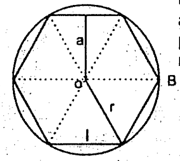
ROMBO

$A = \frac{D \cdot d}{2}$



POLÍGONO REGULAR

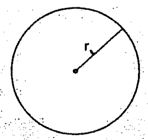
$$A = \frac{n \cdot l \cdot a}{2} = \frac{p \cdot a}{2}$$



l = lado
a = apotema
p = perímetro
n = N° de lados

CÍRCULO

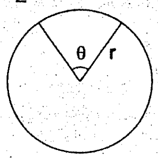
$$L = 2\pi r$$
$$A = \pi r^2$$



SECTOR CIRCULAR

$L = r\theta$ (θ en radianes)

$A = \frac{1}{2} r^2\theta$ (θ en radianes)



π radianes = 180°

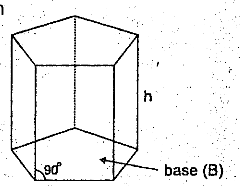
$$1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi} \; ; \; 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$$

PRISMA REGULAR

$A_L = p \cdot h$; p = perímetro de la Base

$A_T = A_L + 2A_B$; A_B = Área de la Base

$V = A_B \cdot h$

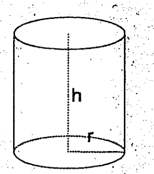


CILINDRO

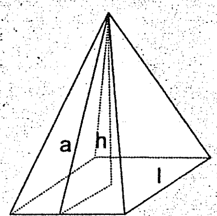
$A_L = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$

$A_T = A_L + 2 \cdot \pi \cdot r^2$

$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$



PIRÁMIDE REGULAR

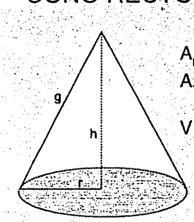


$$A_L = \frac{p \cdot a}{2}$$

$$A_L = A_L + A_B$$

$$V = \frac{A_B \cdot h}{3}$$

CONO RECTO



$A_L = \pi \cdot r \cdot g$

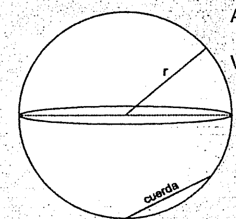
$A_T = A_L + \pi \cdot r^2$

$$V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$$

ESFERA

$A = 4 \cdot \pi \cdot r^2$

$$V = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3$$



2. FÓRMULAS DE DISTANCIA Y PUNTO MEDIO

Distancia de $P(x_1, y_1)$ *a* $Q(x_2, y_2)$*:*

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Punto medio de $\overline{PQ}$*:*

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2} \; ; \; \bar{y} = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

3. ECUACIONES DE RECTAS

Pendiente de la recta que pasa por $P(x_1, y_1)$; $Q(x_2, y_2)$:

$$m = \tan(\alpha) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Forma punto pendiente de la recta:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Forma Pendiente - Intercepto con y:

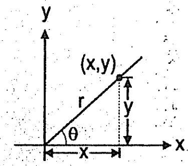
$$y = mx + n$$

TRIGONOMETRÍA

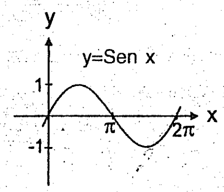
1. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

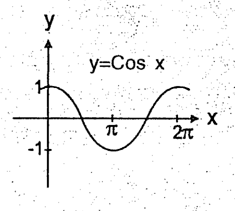
$$\text{Sen}\,\theta = \frac{y}{r} = \frac{op}{hip} \quad \text{Cos}\,\theta = \frac{x}{r} = \frac{ady}{hip} \quad \text{Tan}\,\theta = \frac{y}{x} = \frac{op}{ady}$$

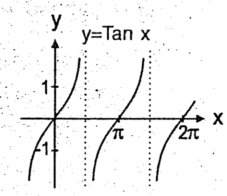
$$\text{Csc}\,\theta = \frac{r}{y} = \frac{hip}{op} \quad \text{Sec}\,\theta = \frac{r}{x} = \frac{hip}{ady} \quad \text{Cot}\,\theta = \frac{x}{y} = \frac{ady}{op}$$



2. GRÁFICAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS







3. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS IMPORTANTES

θ	rad	sen θ	cos θ	tan θ
0°	0	0	1	0
30°	$\pi/6$	1/2	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
45°	$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
60°	$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	1/2	$\sqrt{3}$
90°	$\pi/2$	1	0	---

4. IDENTIDADES FUNDAMENTALES

$$\csc\theta = \frac{1}{\text{sen}\theta} \; ; \; \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \; ; \; \tan\theta = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\,\theta} \; ; \; \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{\cos\theta}{\text{sen}\theta}$$

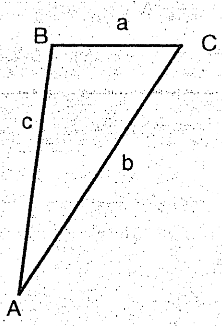
$$\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \; ; \; 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta \; ; \; 1 + \cot^2\theta = \cos^2\theta$$

$$\text{sen}(-\theta) = -\text{sen}\,\theta \; ; \; \cos(-\theta) = \cos\theta \; ; \; \tan(-\theta) = -\tan\theta$$

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta \; ; \; \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \text{sen}\,\theta \; ; \; \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta$$

5. LEY DE LOS SENOS

$$\frac{\text{senA}}{a} = \frac{\text{senB}}{b} = \frac{\text{senC}}{c}$$



6. LEY DE LOS COSENOS

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

7. IDENTIDADES DE ÁNGULOS COMPUESTOS

a) $\text{sen}(x \pm y) = \text{sen}\,x \cos y \pm \cos x\, \text{sen}\,y$

b) $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \text{sen}\,x\, \text{sen}\,y$

c) $\tan(x \pm y) = \dfrac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$

d) $\text{sen}\,2x = 2\,\text{sen}\,x \cos x$

e) $\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\text{sen}^2 x$

f) $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$

g) $\text{sen}^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$ h) $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$

Núcleo Temático 1

REVISIÓN DE CONCEPTOS Y REPASO

Se desarrolla para alcanzar los siguientes logros generales

MANEJO DE CONCEPTOS

como

- El Campo de los Números Reales
- Factorización de Polinomios Reales.
- Ceros Reales de un Polinomio.
- Orden en los Reales.
- Propiedades de las Desigualdades e Intervalos.
- Relaciones Reales y Gráficas: Interceptos, Simetrías, Dominio y Rango.
- Estudio Analítico de la Línea Recta y la Circunferencia.

para desarrollar competencia

ARGUMENTATIVA

DESTREZA OPERATIVA

a través de

- Productos Notables y Factorización.
- Solución de Ecuaciones e Inecuaciones Algebraicas.
- Simplificación de Expresiones Racionales e Irracionales.
- Racionalización de expresiones.
- Obtención de Ecuaciones de la Línea Recta y la Circunferencia.
- Uso del DERIVE para factorizar y simplificar expresiones.

para desarrollar competencia

PROPOSITIVA

DIBUJO DE GRÁFICAS

de

- Relaciones Reales.
- Intervalos de Números Reales.

como

- Representación de Desigualdades.
- Líneas Rectas, Circunferencias y otras expresadas mediante Ecuaciones de la forma $E(x, y) = 0$.
- Uso del DERIVE para dibujar gráficas de relaciones

a partir de

- Interceptos con los Ejes, Simetrías, Dominio y Rango.
- Elementos propios de la Línea Recta: Dirección, Pendiente e Interceptos con los Ejes.
- Elementos propios de la Circunferencia: Centro y Radio.
- Tabla de Valores (cuando se requiera).

para desarrollar competencia

INTERPRETATIVA

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

relativos a

- Lugares Geométricos.
- La Línea Recta.
- La Circunferencia.

para desarrollar competencias

- ARGUMENTATIVA
- PROPOSITIVA
- INTERPRETATIVA

LOS HOMBRES DEL CÁLCULO (I)
ARQUÍMEDES

Arquímedes nació en Siracusa, hoy Italia, en ese entonces parte de Grecia, en el año 287 antes de Cristo, y tuvo un talento extraordinariamente multifacético.

Era hijo de un Astrónomo, Fidias; estudió en Alejandría y allí hizo amistad con casi todos los sabios de su época. Regresó a su ciudad y allí, a instancias del rey Herón, diseñó y construyó numerosos artefactos de guerra, defensivos y ofensivos.

Es bien conocida la anécdota (¿historia o leyenda?) de la forma como llegó al hoy llamado Principio de Arquímedes, y cómo salió desnudo del baño pregonando ¡Eureka!

Menos conocida es su actividad como geómetra, y su cuadratura de la parábola, más o menos por el método que siguió Mateo, sólo que trasladado al lenguaje geométrico. En cuanto a la cuadratura del círculo, que equivale a hallar el valor de π no podía lograrla exactamente, pero llegó a dar una buena aproximación racional: π es menor que $3\frac{1}{7}$ y mayor que $3\frac{10}{71}$.

Si sus cuadraturas lo hacen un precursor del Cálculo Integral, su construcción de la tangente a la curva llamada en su honor espiral de Arquímedes, lo hace también precursor del Cálculo Diferencial.

Cuando los Romanos pusieron sitio a la ciudad durante tres años, y al fin lograron entrar, cuenta otra leyenda que un soldado encontró a Arquímedes enfrascado en un problema geométrico, sobre una figura trazada en el piso, y lo mató sin contemplaciones, mientras el sabio le decía: «¡no borres mis círculos!». El hecho cierto es que murió ese día durante la toma de la ciudad, con 75 años de edad.

COMPRENSIÓN DE LECTURA

EXPLICACIÓN: Lea atentamente el anterior texto y luego encierre en un círculo la letra que corresponda a la respuesta correcta.

1. De Arquímedes se puede afirmar todo lo siguiente, con excepción de:
   a. Su vida se encuentra entre la realidad y la leyenda.
   b. Su padre se dedicó al estudio del universo.
   c. Se codeó con lo más selecto de la intelectualidad griega.
   d. Poco se conoce de su experiencia en el campo de la geometría.
2. La expresión, ¡EUREKA!, empleada en el texto es una manifestación de:
   a. Disgusto por un fracaso en una de sus observaciones científicas.

b. Susto ante un terrible descubrimiento.
c. Su desorden y falta de recato cuando se dedicaba al trabajo científico.
d. Alegría por un descubrimiento importante para el mundo científico.

3. La idea central de todo el escrito es:
   a. Exitos y fracasos de un científico griego.
   b. Estudios y observaciones de Arquímedes en el campo de las matemáticas.
   c. La forma como Arquímedes enunció el principio que lleva su nombre.
   d. Desarrollo del cálculo integral por un matemático griego.

4. De la lectura anterior se puede inferir que:
   a. La verdadera nacionalidad de Arquímedes es Romana.
   b. Para Arquímedes era más importante la ciencia que su propia vida.
   c. Los romanos no toleraban a los hombres de ciencia.
   d. Arquímedes fue un gran observador de los fenómenos de la naturaleza.

5. El propósito del autor, en el escrito anterior es:
   a. Explicar la actividad creadora de Arquímedes.
   b. Presentar la vida y la obra del gran matemático griego.
   c. Destacar el talento de Arquímedes en los diversos campos de la ciencia.
   d. Demostrar como, la leyenda envuelve la vida de los grandes hombres.

1.1 ¿QUÉ VAMOS A ESTUDIAR Y QUÉ NECESITAMOS?

- En este texto desarrollaremos las ideas básicas de un curso de Cálculo Diferencial de Funciones Reales de una Variable Real.
- El Cálculo es la materia del movimiento y del cambio. Donde haya movimiento o crecimiento, donde se presenten fuerzas variables que generen aceleración, el Cálculo será la rama de la matemática que es necesaria aplicar. Esto fue cierto en los comienzos del Cálculo y lo sigue siendo ahora. El Cálculo fue inventado para responder a ciertas necesidades matemáticas de los científicos de los siglos XVI y XVII, necesidades fundamentalmente de índole mecánica; sin embargo, hoy en día, el análisis matemático al que dio lugar el Cálculo, tiene alcances mucho mayores, siendo utilizado para crear modelos matemáticos que nos ayudan a entender el universo y el mundo que nos rodea.
- Para abordar con éxito el estudio de estos contenidos, es necesario contar con algunas herramientas matemáticas básicas que ya debemos conocer. Estas herramientas son:

1. **ÁLGEBRA DE LOS NÚMEROS REALES Y POLINOMIOS**
   - **Los números reales:** operaciones, relaciones y propiedades. Axiomas de Campo y de la igualdad. Consecuencias de los axiomas de campo.
   - **Álgebra de polinomios:** Productos notables. Factorización, ceros reales de un polinomio, Teorema del Factor. Fracciones algebraicas, simplificación y operaciones.
   - **Potenciación, radicación y racionalización.**
   - **Solución de ecuaciones:** de primer grado, de segundo grado, polinómicas de grado mayor que 2, fraccionarias racionales, irracionales, sistemas de ecuaciones.

2. **GEOMETRÍA EUCLIDIANA**
   - **Triángulos:** Clasificación, líneas y puntos notables, congruencia y semejanza, teorema de Thales, relaciones métricas, teorema de Pitágoras.
   - **Áreas de Figuras Planas:** Rectángulo, cuadrado, triángulo, paralelogramo, rombo, triángulo equilátero, trapecio, círculo, sector circular y longitud de la circunferencia.
   - **Áreas de los cuerpos geométricos:** Áreas lateral y total del prisma recto, pirámide recta, cilindro recto y cono recto, área de la esfera.
   - **Volúmenes de los cuerpos geométricos:** Prisma, cilindro, pirámide, cono y esfera.

3. **TRIGONOMETRÍA**
   - **Funciones trigonométricas en el triángulo rectángulo y en el plano cartesiano.**
   - **Identidades y ecuaciones trigonométricas básicas:** de ángulos simples, de suma y diferencia de ángulos, de ángulos dobles y de ángulos medios

- **Solución de triángulos:** Soluciones que originan triángulos no rectángulos. Ley del Seno y del Coseno.

4. **DESIGUALDADES E INECUACIONES**
   - **Axioma de orden en $\mathbb{R}$.**
   - **Relaciones $a < b$, $a > b$, $a \leq b$, $a \geq b$, $a < 0$, $a > 0$.**
   - **Intervalos.**
   - **Propiedades de las desigualdades.**
   - **Solución de inecuaciones:** lineales, polinómicas y racionales.

5. **RELACIONES Y GRÁFICAS**
   - **Análisis y gráfica de una relación teniendo en cuenta:** interceptos con los ejes, simetrías, dominio, rango y tabla de valores.
   - **La línea recta:** dirección y pendiente, diferentes formas de su ecuación, rectas paralelas y perpendiculares, intersección de dos rectas, rectas paralelas a los ejes coordenados.

6. **USO DEL DERIVE**
   - Para hallar ceros y factorizar expresiones algebraicas.
   - Para dibujar gráficas de relaciones.

- Los contenidos de los numerales 1., 2., y 3. ya han sido desarrollados y revisados con detalle en los grados 8°, 9° y 10°, sin embargo, haremos referencia a ellos en el momento en que se necesiten. Al principio del texto, el lector podrá consultar algunas de las principales propiedades del álgebra, la geometría euclidiana y la trigonometría; conviene fotocopiarlas y tenerlas al alcance de la mano.
- A continuación revisaremos los temas correspondientes a los numerales 4. 5. y 6.

1.2 DESIGUALDADES E INECUACIONES

1.2.1. Axiomas de orden y desigualdades

RECORDEMOS

- Para introducir el concepto de orden en los números reales y definir las relaciones **menor que** y **mayor que**, es necesario establecer los siguientes axiomas que caracterizan al conjunto de los números **Reales Positivos**, el cual se simboliza por $\mathbb{R}^+$:

  - **AXIOMA 1: PROPIEDAD DE TRICOTOMÍA**
    Dado cualquier número real x, una y sólo una de las siguientes afirmaciones es verdadera:
    a) $x \in \mathbf{R}^+$ o b) $x = 0$ o c) $-x \in \mathbf{R}^+$

  - **AXIOMA 2: PROPIEDAD CLAUSURATIVA DE LA SUMA EN R^+**
    Para todo $x, y \in R^+$ se cumple que $x + y \in \mathbf{R}^+$

  - **AXIOMA 3: PROPIEDAD CLAUSURATIVA DE LA MULTIPLICACIÓN EN R^+**
    Para todo $x, y \in \mathbf{R}^+$ se cumple que $x \cdot y \in \mathbf{R}^+$

- **DEFINICIÓN DE MENOR QUE Y MAYOR QUE**
  Sean $x, y \in \mathbf{R}$:

  - **x es MENOR QUE y, denotado $x < y$, si y sólo si $y - x \in \mathbf{R}^+$**
  - **x es MAYOR QUE y, denotado $x > y$, si y sólo si $x - y \in \mathbf{R}^+$**

- **DEFINICIÓN DE $\leq$ Y $\geq$**

Los símbolos $\leq$ (menor o igual que) y $\geq$ (mayor o igual que) los definimos así:

- **$a \leq b$ si y sólo si $a < b$ ó $a = b$**
- **$a \geq b$ si y sólo si $a > b$ ó $a = b$**

Ejemplo 1

- $5 < 12$ ya que $12 - 5 = 7 \in R^+$
- $-6 < -2$ ya que $(-2) - (-6) = 4 \in R^+$
- $5 > -9$ ya que $5 - (-9) = 14 \in R^+$
- Si $ab - ac \in R^+$, entonces podemos escribir que $ab > ac$ o que $ac < ab$

Ejemplo 2

Representemos en la recta numérica el conjunto **$A = \{x/x < 4\}$**

SOLUCIÓN

- Los números reales **x**, tales que **$x < 4$**, se encuentran ubicados a la izquierda de 4 en la recta numérica; es decir:

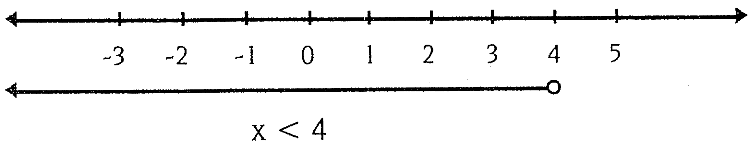


Figura 1-1

- Para representar este conjunto, la figura 1-1 nos muestra una semirrecta orientada hacia la izquierda y con un círculo vacío en su origen (4). ¿Qué significa el círculo vacío?

Ejemplo 3

Representemos en la recta numérica el conjunto **$A = \{x/x \geq -3\}$**

SOLUCIÓN

- Los números reales **x**, tales que **$x \geq -3$**, corresponden a -3 y todos los ubicados a la derecha de -3 en la recta numérica; por lo tanto:

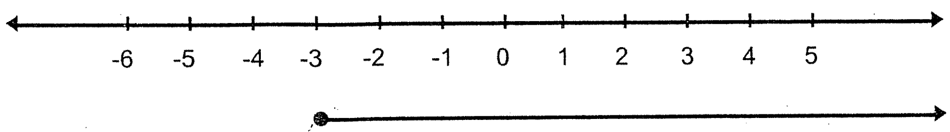


Figura 1 - 2

ATENCIÓN

1. **$x > 0$** significa que **$x - 0 \in R^+$**; es decir, significa que **x** es un número real positivo.
2. **$x < 0$** significa que **$0 - x \in R^+$**; es decir, significa que **$-x$** es un número real positivo, o lo que es lo mismo: **x** es un número real negativo.

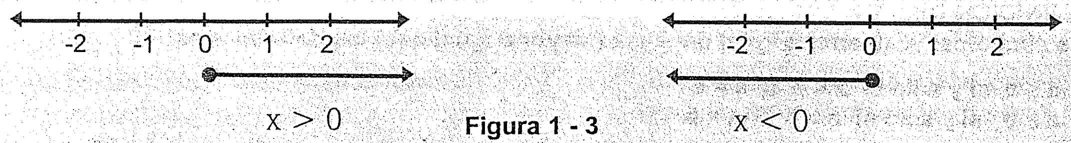


Figura 1 - 3

3. Repasemos algo de conjuntos:

UNIÓN E INTERSECCIÓN DE CONJUNTOS

- **Para UNIR dos conjuntos A y B tomamos tanto los elementos comunes como los no comunes; es decir, tomamos los elementos de A o los de B o los de ambos.**

Simbólicamente: $A \cup B = \{x/x \in A \vee x \in B\}$

El símbolo $\cup$ se lee UNIÓN y el símbolo $\vee$ se lee o

- **Para INTERSECAR dos conjuntos A y B tomamos sólo los elementos comunes a ambos conjuntos; es decir, tomamos los elementos de A y los de B.**

Simbólicamente: $A \cap B = \{x/x \in A \wedge x \in B\}$

El símbolo $\cap$ se lee INTERSECCIÓN y el símbolo $\wedge$ se lee y

Ejemplo 4

Representemos sobre la recta numérica el conjunto $\mathbf{C = \{ x/-2 \leq x < 5 \}}$

SOLUCIÓN

- En primer lugar, "traduzcamos" a nuestro lenguaje este conjunto. Sus elementos son todos los números MAYORES o IGUALES que -2 y MENORES QUE 5; es decir, los comprendidos entre -2 y 5, incluido -2 y sin incluir el 5; figura 1 - 4

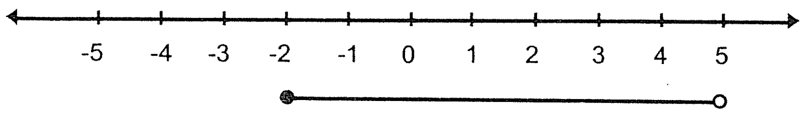


Figura 1 - 4

- Para representar el conjunto C trazamos un segmento cuyo extremo izquierdo (-2) se incluye ("círculo lleno") y cuyo extremo derecho (5) no se incluye ("círculo vacío").

Ejemplo 5

Dados los conjuntos $\mathbf{M = \{x/x \geq 1\}}$ y $\mathbf{N = \{x/ -4 \leq x < 3\}}$, hallemos $\mathbf{M \cup N}$ y $\mathbf{M \cap N}$.

SOLUCIÓN

- Representemos en la recta numérica los conjuntos dados; figura 1-5:

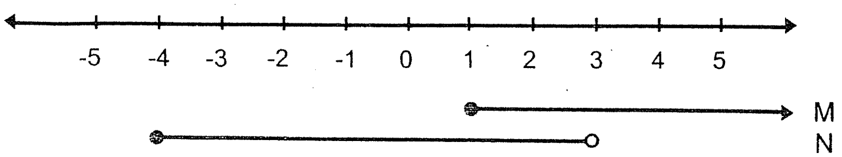


Figura 1 - 5

- Para hallar $M \cup N$ tomamos los elementos comunes y no comunes a M y N. El conjunto resultante es $\{x/x \geq -4\}$; figura 1-6:

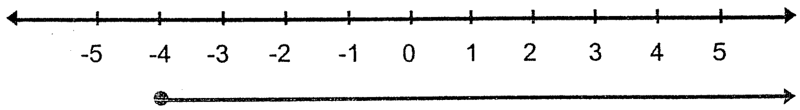


Figura 1 - 6

- Para hallar M∩N tomamos sólo los elementos comunes a M y N. Estos elementos comunes están comprendidos entre 1 (incluido) y 3 (sin incluir). Por lo tanto: M∩N={x/1 ≤ x<3}; figura 1-7:

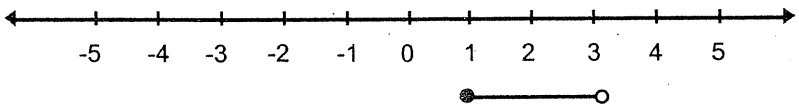


Figura 1 - 7

1.2.2. Intervalos

RECORDEMOS

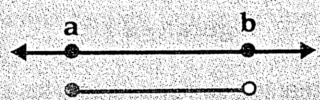
- **INTERVALOS CERRADOS, ABIERTOS Y SEMICERRADOS**

  Si a,b ∈ ℝ tales que a < b, entonces:

[a, b] ={x/a ≤ x ≤ b}

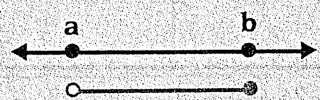
I. CERRADO

[a, b) ={x/a ≤ x < b}



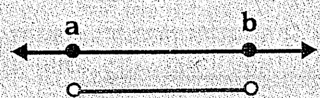
I. SEMICERRADO POR LA IZQUIERDA

(a, b] ={x/a < x ≤ b}



I. SEMICERRADO POR LA DERECHA

(a, b) ={x/a < x < b}

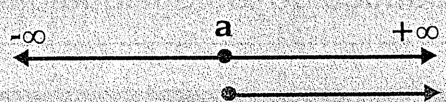


I. ABIERTO

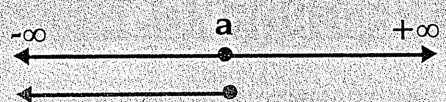
- **INTERVALOS INFINITOS**

  Si a ∈ R entonces los siguientes conjuntos se denominan INTERVALOS INFINITOS:

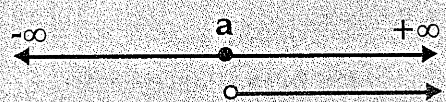
[a ; +∞) ={x/x ≥ a}



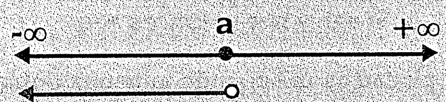
(-∞ ; a] ={x/x ≤ a}



(a ; +∞) ={x/x > a}



(-∞ ; a) ={x/x < a}



Ejemplo

Dados los intervalos A =[-1 ; +∞) ; B =(-3 ; 2) ; C =(-2; 3] y D =(-∞ ; 1] , hallemos:

a) A∩B y b) C∪D.

SOLUCIÓN

a) Representemos sobre la recta numérica los conjuntos A y B:

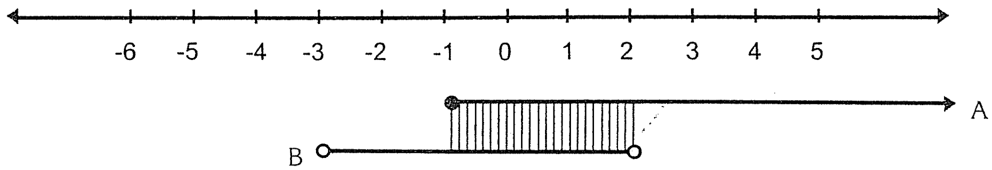


Figura 1 - 8

El conjunto A∩B es la zona rayada en la figura 1-8, correspondiente a los elementos comunes a los conjuntos A y B. Por lo tanto: A∩B = [-1 ; 2)

b) Representemos sobre la recta numérica los conjuntos C y D:

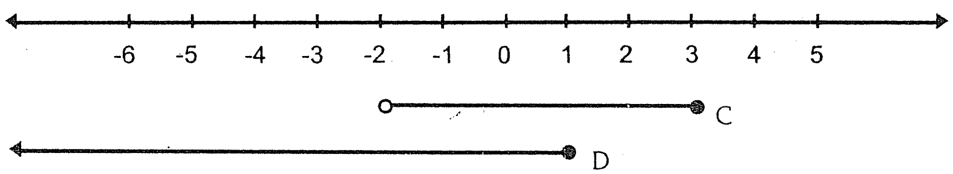


Figura 1 - 9

Como en la unión tomamos tanto los elementos comunes como los no comunes, entonces rayamos los elementos de ambos; figura 1-10

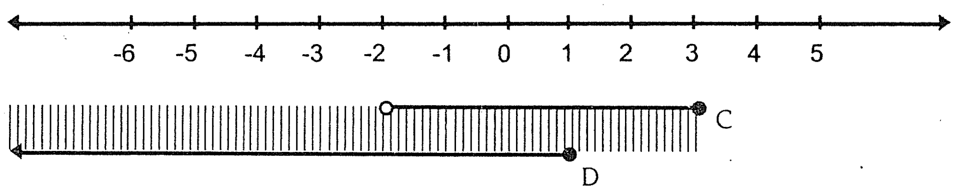


Figura 1 - 10

Por lo tanto: C∪D = (- ∞; 3]

1.2.3. Propiedades de las desigualdades

RECORDEMOS

P-1: PROPIEDAD TRANSITIVA DE LAS DESIGUALDADES

Sean a, b, c ∈ ℝ:

Si a<b y b<c entonces a<c

o

Si a>b y b>c entonces a>c

Esta propiedad es útil cuando tenemos dobles desigualdades como éstas:

$$2x-3 \leq x^2+5x-2 < 4x+8$$

En este caso, la propiedad transitiva nos permite escribir la expresión así:

$$2x-3 \leq x^2+5x-2 \quad \wedge \quad x^2+5x-2 < 4x+8$$

P-2: **Si sumamos o restamos a ambos miembros de una desigualdad un mismo número, la desigualdad NO CAMBIA de sentido, es decir:**

$$\text{Si } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ y } a > b, \text{ entonces } a \pm c > b \pm c$$

APLICACIÓN

Esta propiedad nos garantiza que la transposición de términos en las desigualdades es similar a la transposición de términos en las igualdades; es decir:

Si $x + 7 > 9$, entonces $x > 9 - 7$.
Si $x - 2 > 4$, entonces $x > 4 + 2$

P-3: **Si multiplicamos (o dividimos) ambos lados de una desigualdad por un mismo número POSITIVO, la desigualdad no cambia de sentido; es decir:**

$$\text{Sean } a, b \in \mathbb{R} \text{ y } c > 0. \text{ Si } a > b, \text{ entonces } a \cdot c > b \cdot c$$

APLICACIÓN

Esta propiedad nos dice que podemos trasponer un FACTOR POSITIVO de un lado al otro de una desigualdad SIN QUE CAMBIE el sentido de la desigualdad.

P-4: **Si multiplicamos o dividimos ambos lados de una desigualdad por un mismo número NEGATIVO, la desigualdad cambia de sentido; es decir,**

$$\text{Sean } a, b \in \mathbb{R} \text{ y } c < 0. \text{ Si } a > b, \text{ entonces } a \cdot c < b \cdot c$$

APLICACIÓN

Esta propiedad implica que para transponer un FACTOR NEGATIVO de un lado al otro de una desigualdad es necesario CAMBIAR el sentido de la desigualdad.

P-5: **El producto o cociente de dos números es mayor que CERO (o positivo) cuando ambos números son positivos o ambos números son negativos; es decir:**

$$a \cdot b > 0 \text{ si y sólo si } \begin{cases} 1)\ a > 0 \wedge b > 0 \\ \vee \\ 2)\ a < 0 \wedge b < 0 \end{cases}$$

P-6: **Si el producto (o cociente) de dos números es NEGATIVO es porque los números tienen SIGNOS CONTRARIOS; es decir:**

$$a \cdot b < 0 \text{ si y sólo si } \begin{cases} 1)\ a > 0 \wedge b < 0 \\ \vee \\ 2)\ a < 0 \wedge b > 0 \end{cases}$$

Ejemplo 1

Hallemos los valores de x que verifican la desigualdad:

$$4x - 5 + 12 - 7x \leq 6x + 9 - 2x + 16$$

SOLUCIÓN

$$4x - 5 + 12 - 7x \leq 6x + 9 - 2x + 16.$$

$$\therefore\ 4x - 7x - 6x + 2x \leq 9 + 16 + 5 - 12.$$

$$\therefore\ -7x \leq 18$$

$$\therefore\ x \geq -\frac{18}{7}$$

Luego, los valores de x que solucionan la desigualdad son los números MAYORES o IGUALES que $-\frac{18}{7}$. En forma de intervalo la solución es: $x \in \left[-\frac{18}{7}\,;+\infty\right)$.

Ejemplo 2

$$\text{Si } -3x \geq 15 \text{ entonces } x \leq -\frac{15}{3} = -5$$

cambió de sentido

Ejemplo 3

Hallemos los valores de x que verifiquen la desigualdad

$$\frac{5+x}{x+3} \leq 0$$

SOLUCIÓN

La desigualdad es de la forma $\frac{a}{b} \leq 0$. Para solucionarla debemos tener en cuenta, en primer lugar, que el denominador, x + 3, no puede ser igual a 0; es decir, $x + 3 \neq 0$. Por lo tanto:

$$\frac{5+x}{x+3} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1)\ 5+x \geq 0 \wedge x+3 < 0 \\ \qquad\vee \\ 2)\ 5+x \leq 0 \wedge x+3 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1)\ x \geq -5 \wedge x < -3 \\ \qquad\vee \\ 2)\ x \leq -5 \wedge x > -3 \end{cases}$$

La solución de la parte 1) es la INTERSECCIÓN de los $x \geq -5$ con los $x < -3$; figura 1-11.

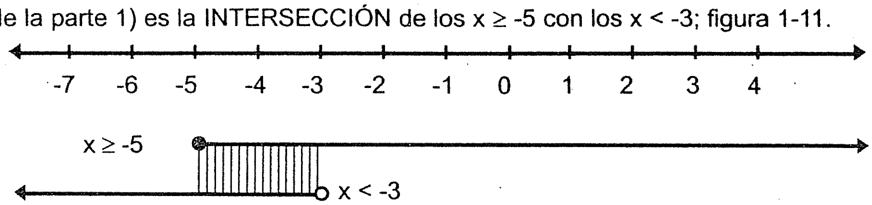


Figura 1 - 11

La intersección corresponde a la parte rayada; es decir:

$$S_1 = \{x \,/ -5 \leq x < -3\} = [-5\,; -3)$$

La solución de la parte 2) es la INTERSECCIÓN de los $x \leq -5$ con los $x > -3$; figura 1-12

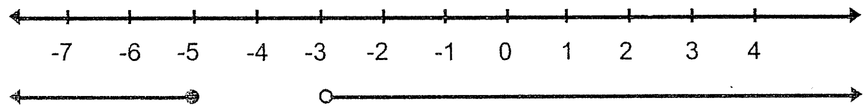


Figura 1 - 12

Observemos que los conjuntos no tienen elementos comunes; por lo tanto, su solución es el conjunto vacío:

$$S_2 = \phi$$

La solución total es la UNIÓN de S_1 con S_2:

$$\begin{aligned} S_T = S_1 \cup S_2 &= \{x / -5 \leq x < -3\} \cup \phi \\ &= \{x / -5 \leq x < -3\} \\ &= [\,-5\,;\,-3) \end{aligned}$$

ATENCIÓN

1. Si miramos con detalle la solución obtenida en el ejemplo 1, encontraremos que los extremos de los intervalos resultantes son precisamente los CEROS de los factores $(5 + x)$ y $(x + 3)$; es decir, -5 y -3

2. Las propiedades 5. y 6. pueden extenderse cuando tengamos tres o más factores; es decir, podemos tener expresiones como éstas:

$$a \cdot b \cdot c > 0 \qquad \frac{a \cdot b}{c} > 0$$

$$a \cdot b \cdot c \cdot d \leq 0 \qquad \frac{a \cdot b}{c \cdot d} \leq 0$$

Sin embargo, su aplicación resultaría poco práctica por la cantidad de posibilidades que aparecerían. Miremos, por ejemplo, el análisis que tendríamos que hacer para la desigualdad $a \cdot b \cdot c > 0$

$$a \cdot b \cdot c > 0 \Leftrightarrow (a \cdot b) \cdot c > 0$$

$$\therefore\ a \cdot b \cdot c > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1)\ a \cdot b > 0 \wedge c > 0 \\ \qquad\quad \vee \\ 2)\ a \cdot b < 0 \wedge c < 0 \end{cases}$$

$$\therefore\ a \cdot b \cdot c > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1) \begin{cases} a > 0 \wedge b > 0 \\ \qquad \vee \\ a < 0 \wedge b < 0 \end{cases} \wedge\ c > 0 \\ \qquad\qquad \vee \\ 2) \begin{cases} a > 0 \wedge b < 0 \\ \qquad \vee \\ a < 0 \wedge b > 0 \end{cases} \wedge\ c < 0 \end{cases}$$

RECORDEMOS

DEFINICIÓN DE INECUACIÓN

- **Una INECUACIÓN es una desigualdad en la que aparecen una o más incógnitas.**
- **La SOLUCIÓN de una desigualdad consta de todos los valores, de un conjunto referencial dado, que hacen verdadera la desigualdad.**
- **Para resolver una inecuación podemos utilizar una o más de las propiedades de las desigualdades estudiadas en la sección anterior.**

Ejemplo

Las siguientes desigualdades son inecuaciones:

- $3x + 5 \le 6x - 7$ .... **inecuación con una incógnita**
- $4x^2 - 3x > 1$ .... **inecuación con una incógnita**
- $\dfrac{x-3}{2x+1} - 5 \le x$ .... **inecuación con una incógnita**
- $4x - 3y \le 2$ .... **inecuación con dos incógnitas**
- $x^2 + y^2 < 4$ .... **inecuación con dos incógnitas**

- **En este texto sólo resolveremos inecuaciones con una incógnita, las cuales clasificamos en:**

INECUACIONES LINEALES O DE PRIMER GRADO

- **Es cualquier inecuación que pueda escribirse en la forma:**

$$ax + b \le 0 \quad \text{ó} \quad ax + b \ge 0$$

INECUACIONES POLINÓMICAS

- **Es cualquier inecuación que pueda escribirse en la forma:**

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 < 0 \ (\text{ó} \le 0)$$

ó

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 > 0 \ (\text{ó} \ge 0)$$

Ejemplos

Las siguientes inecuaciones son polinómicas:

a) $3x^4 - 11x^2 - 4 < 0$ b) $2x^3 + x^2 - 7x - 6 \ge 0$ c) $x^3 + 3x^2 \le x$
d) $4x - x^2 > 0$ e) $x^3 < 9$ f) $3 - x \le x^2$

INECUACIONES RACIONALES

- **Es cualquier inecuación que pueda escribirse en la forma:**

$$\frac{P(x)}{Q(x)} < 0 \ (\text{ó} \le 0) \quad ; \quad \frac{P(x)}{Q(x)} > 0 \ (\text{ó} \ge 0)$$

donde P(x) y Q(x) son POLINOMIOS ALGEBRAICOS.

Ejemplos

Las siguientes son inecuaciones racionales:

$$\frac{x^2+4x}{x-3} \leq 0 \quad ; \quad \frac{x}{x+1} < x-3 \quad ; \quad \frac{x^2+x-6}{2x^2-13x-7} \geq 0$$

1.2.5. Solución de inecuaciones

1.2.5.1. De inecuaciones lineales

Para resolver este tipo de inecuaciones eliminamos denominadores, si los hay, y luego aplicamos las propiedades de las desigualdades relacionadas con la transposición de términos y factores.

Ejemplo 1

Resolvamos la inecuación $\frac{x-5}{6} + \frac{1}{2} \leq \frac{4x+2}{9}$, escribamos la solución en forma de intervalo y representémosla gráficamente.

SOLUCIÓN

- En primer lugar vamos a eliminar los denominadores. El m.c.d. (6, 2, 9) = 18; por tanto

$$\frac{x-5}{6} + \frac{1}{2} \leq \frac{4x+2}{9}$$

$$\therefore\ 18\left(\frac{x-5}{6} + \frac{1}{2}\right) \leq 18\left(\frac{4x+2}{9}\right)$$

$$\therefore\ 3(x-5) + 9 \leq 2(4x+2)$$

$$\therefore\ 3x - 15 + 9 \leq 8x + 4$$

- A continuación aplicamos las propiedades de las desigualdades relativas a la transposición de términos y factores:

$$3x - 8x \leq 4 + 15 - 9$$

$$\therefore\ -5x \leq 10$$

$$\therefore\ x \geq \frac{10}{-5}$$

$$\therefore\ x \geq -2$$

- En forma de intervalo, la solución es: $[-2\,;+\infty)$
- La representación gráfica, figura 1-13, es la siguiente:

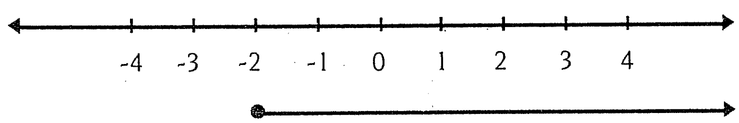


Figura 1 - 13

Ejemplo 2

Resolvamos la inecuación $2x - 12 \leq 4 - 6x < 3x - 5$, escribamos la solución en forma de intervalo y representémosla gráficamente.

SOLUCIÓN

- Como tenemos que resolver una doble inecuación, podemos utilizar la propiedad transitiva de las desigualdades para convertirla en dos inecuaciones simples; así:

$$\mathbf{a < b < c \Leftrightarrow a < b \wedge b < c}$$

- Por lo tanto:

$2x - 12 \leq 4 - 6x < 3x - 5$ ....inecuación dada

$\therefore\ 2x - 12 \leq 4 - 6x \wedge 4 - 6x < 3x - 5$ ....propiedad transitiva

- Ahora resolvemos cada una de estas inecuaciones y al final hallamos la intersección de los resultados:

1) $2x - 12 \leq 4 - 6x \Leftrightarrow 2x + 6x \leq 4 + 12$
$\Leftrightarrow 8x \leq 16$
$\Leftrightarrow x \leq 2$
$\Leftrightarrow x \in (-\infty; 2]$ ....(1)

2) $4 - 6x < 3x - 5 \Leftrightarrow -6x - 3x < -5 - 4$
$\Leftrightarrow -9x < -9$
$\Leftrightarrow 9x > 9$
$\Leftrightarrow x > 1$
$\Leftrightarrow x \in (1 + \infty)$ ....(2)

- Representemos las soluciones (1) y (2) en la recta numérica y hallemos su intersección:

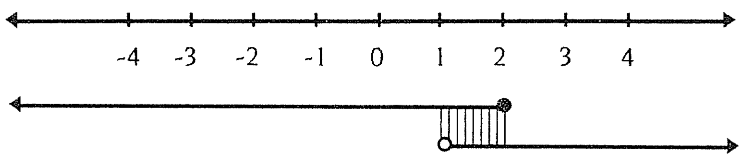


Figura 1 - 14

- Por lo tanto, la solución de la inecuación corresponde a los valores de x pertenecientes al intervalo $(1; 2]$:

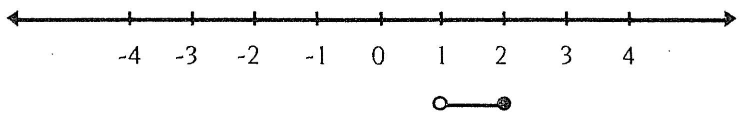


Figura 1 - 15

1.2.5.2. De inecuaciones polinómicas

- Antes de describir el procedimiento para resolver inecuaciones polinómicas conviene recordar cómo se factoriza un polinomio, de grado mayor que 2, en los reales. Consideremos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1

Factoricemos en $\mathbb{R}$ el polinomio $8x^4 + 6x^3 - 15x^2 - 12x - 2$

SOLUCIÓN

- Si el polinomio tiene factores reales entonces buscamos primero los ceros racionales que serán de la forma

$\frac{p}{q}$, donde p es un divisor (factor) de 2 y q un divisor (factor) de 8; es decir:

$$D(2) = \pm 1, \pm 2$$
$$D(8) = \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$$

Luego, los posibles ceros son: $\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{8}, \pm 2$

- Ahora empezamos a tantear con el objeto de encontrar cuál de los "sospechosos" cumple.

  Ni 1, ni -1, ni $\frac{1}{2}$. Veamos con $-\frac{1}{2}$. Apliquemos el proceso de la División Sintética:

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 8 & 6 & -15 & -12 & -2 \\
-\frac{1}{2} & & -4 & -1 & 8 & 2 \\
\hline
 & 8 & 2 & -16 & -4 & 0
\end{array}$$

  Luego, $x = -\frac{1}{2}$ es un cero y $\left(x+\frac{1}{2}\right)$ es un factor; por lo tanto:

$$P(x) = \left(x+\frac{1}{2}\right)(8x^3 + 2x^2 - 16x - 4)$$

- Si continuamos probando, por tanteo, encontraremos que $-\frac{1}{4}$ también es un cero. Veamos:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 8 & 2 & -16 & -4 \\
-\frac{1}{4} & & -2 & 0 & 4 \\
\hline
 & 8 & 0 & -16 & 0
\end{array}$$

  Luego, $\left(x+\frac{1}{4}\right)$ es un factor del polinomio y:

$$P(x) = \left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{4}\right)(8x^2 - 16)$$
$$= \left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{4}\right)8(x^2 - 2)$$

- El último factor cuadrático es una diferencia de cuadrados NO FACTORIZABLE en los racionales, pero sí en los reales:

$$x^2 - 2 = \left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)$$

  Luego:

$$P(x) = \left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{4}\right)8\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)$$
$$= 8\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{4}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)$$
$$= 2\cdot 4\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{4}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)$$
$$= 2\left(x+\frac{1}{2}\right)4\left(x+\frac{1}{4}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)$$
$$= (2x+1)(4x+1)\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)$$

Ejemplo 2

Hallemos los ceros reales del polinomio $P(x) = x^3 + 2x - 4$

SOLUCIÓN

- Los ceros de un polinomio P(x) son los valores de x para los cuales P(x)= 0. Como queremos hallar los ceros reales, entonces éstos pueden ser racionales o irracionales. De acuerdo con lo estudiado en el ejemplo anterior, los posibles ceros racionales de $x^3 + 2x - 4$ son ± 1, ± 2 y ± 4 (¿por qué); sin embargo, fácilmente podemos comprobar que ninguno de ellos anula el polinomio. Por lo tanto, este polinomio no tiene ceros racionales.

- El procedimiento para encontrar los ceros irracionales se fundamenta en una importante propiedad denominada **TEOREMA DE VALOR INTERMEDIO,** consistente en lo siguiente:

1. Escogemos, arbitrariamente, dos números enteros preferiblemente consecutivos, hallamos el valor del polinomio en cada uno de ellos y verificamos que estos valores tengan signo contrario. Si no tienen signo contrario, debemos escoger otros dos valores. Por ejemplo:

   * Si a = 0 y b = 1 entonces P(0) = - 4 y P (1) = 1 + 2 - 4 = -1; luego, no hay cambio de signo. Debemos escoger otros dos valores.

   * Si a = 1 y b = 2 entonces P(1) = -1 y P(2) = 8 + 4 - 4 = 8; como hay cambio de signo, podemos garantizar que entre 1 y 2 hay un cero.

2. El paso siguiente consiste en "estrechar" el intervalo entre 1 y 2. Con este fin, hallamos el valor del polinomio para un número entre 1 y 2 ; por ejemplo, para 1.5; así: P (1.5) = 3.375 + 3 - 4 = 2.375. ¿ Qué comprobamos? que P(1) = -1 y P(1.5) = 2.375; es decir, hay cambio de signo y el cero está entre 1 y 1.5

3. Sigamos estrechando el intervalo. Escojamos un valor entre 1 y 1.5; por ejemplo, 1.2: P(1.2) = 1.728 + 2.4 - 4 = 0.128. Por lo tanto, P(1) = -1 y P(1.2) = 0.128. Luego, el cero está entre 1 y 1.2.

   Notemos que P(1.2) = 0.128. Este resultado está muy próximo a cero; es decir, la raíz de esta ecuación está más cercana a 1.2 que a 1.

4. Tomemos ahora un valor más próximo a 1.2; por ejemplo,1.1: P(1.1) = 1.331 + 2.2 - 4 = - 0.471 Por lo tanto, P(1.1) = -0.471 y P(1.2) = 0.128; luego, el cero está entre 1.1 y 1.2. Si tomamos 1.18 nos queda que P(1.18) = 0.003032, el cual es sumamente próximo a cero.

5. Podemos obtener una mejor aproximación si continuamos el proceso con números que tengan tres o más cifras decimales. Sin embargo, nuestro propósito es sólo hallar un valor que nos proporcione una buena aproximación al cero que buscamos. Por esta razón, podemos afirmar que 1.18 es una buena aproximación al cero del polinomio $P(x) = x^3 + 2x - 4$

6. Como 1.18 es un cero aproximado del polinomio, entonces (x - 1.18) es factor aproximado del mismo. Utilizando la división sintética encontramos los coeficientes aproximados al otro factor del polinomio; así:

	1	0	2	-4
1.18		1.18	1.3924	4.003032
	1	1.18	3.3924	$0.00303 \approx 0$

   Notemos que el residuo de la división es casi cero (0.003032). Así pues, podemos afirmar que:

$$x^3 + 2x - 4 \approx (x - 1.18)(x^2 + 1.18x + 3.3924)$$

   Realiza el producto $(x - 1.18)(x^2 + 1.18x + 3.3924)$ y compara qué tan parecidos son los coeficientes del polinomio resultante con los coeficientes correspondientes del polinomio $x^3 + 2x - 4$.

7. Puesto que el factor $x^2 + 1.18x + 3.3924$ es un polinomio cuadrático, entonces sus ceros podemos encontrarlos aplicando la fórmula cuadrática; así:

$$x = \frac{-1.18 \pm \sqrt{1.18^2 - 4(1)(3.3924)}}{2}$$

$$\therefore\ x = \frac{-1.18 \pm \sqrt{1.39 - 13.5696}}{2}$$

$$\therefore\ x = \frac{-1.18 \pm \sqrt{-12.17}}{2} \notin R$$

Por lo tanto, $x^2 + 1.18x + 3.3924$ no tiene ceros reales.

- **CONCLUSIÓN**: El polinomio $P(x) = x^3 + 2x - 4$ sólo tiene un cero en los reales es: $x \approx 1.18$

MÉTODO PARA RESOLVER INECUACIONES POLINÓMICAS

Para resolver una inecuación polinómica procedemos así:

1. Transponemos todos los términos a un mismo lado de la desigualdad de tal manera que el otro lado sea cero.
2. Factorizamos el polinomio resultante, utilizando alguno de los métodos conocidos: factor común, diferencia de cuadrados, formas trinómicas, completación a trinomio cuadrado perfecto y, sobre todo, el Teorema del Factor.
3. En este momento podríamos aplicar la propiedad:

$$a \cdot b \cdot c > 0$$

ó

$$a \cdot b \cdot c < 0$$

Sin embargo, ya sabemos lo complicado que puede resultar utilizar este proceso. Vamos a desarrollar el siguiente procedimiento, mucho más práctico:

PASO 1

¿De qué depende que el producto $a \cdot b \cdot c$ sea mayor que 0 (positivo) o menor que 0 (negativo)? Sencillo: Depende del signo de cada uno de los factores a, b y c. Por esta razón, el primer paso será determinar para cuáles valores de la variable se anula (se hace 0) cada factor y, luego, a partir de estos valores analizar cuándo los factores obtenidos son positivos o negativos.

PASO 2

Con los valores de la variable que anulan cada factor formamos intervalos abiertos consecutivos desde $-\infty$ hasta $+\infty$.

Hagamos acá un alto en la explicación para que analicemos un caso concreto que nos ilustre lo que hemos dicho:

Ejemplo 3

Resolvamos la inecuación $x^2 + 2x < 8$

SOLUCIÓN

1. De la desigualdad dada tenemos:

$$x^2 + 2x - 8 < 0$$

2. Factorizando el polinomio resultante que, en este caso, es un trinomio de la forma $x^{2n} + bx^n + c$, nos queda:

$$(x + 4)(x - 2) < 0$$

3. PASO 1:
   Los valores de **x** que anulan cada factor son:

$$x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4$$
$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

PASO 2:
Con $x = -4$ y $x = 2$ formamos intervalos consecutivos desde $-\infty$ hasta $+\infty$; así:

$$(-\infty; -4) \qquad (-4\ ;\ 2) \qquad (2\ ;\ +\infty)$$

Sigamos con la explicación...

PASO 3:

De los intervalos: $(-\infty\ ;\ -4)$, $(-4\ ;\ 2)$ y $(2\ ;\ +\infty)$ veamos cuáles valores de **x** son candidatos a ser solución de la inecuación; es decir, debemos determinar cuál o cuáles de ellos hacen que: $(x + 4)\cdot(x - 2) < 0$

PASO 4:

Tomemos un valor arbitrario del primer intervalo: $(-\infty\ ;\ -4)$; por ejemplo, $x = -7$ y probemos cómo es el signo de $(x + 4)\ (x - 2)$:

$$(-7 + 4)\cdot(-7 - 2) = (-3)\cdot(-9)$$
$$(-7 + 4)\cdot(-7 - 2) = 27 > 0$$

Como 27 no es menor que 0, entonces el intervalo $(-\infty, -4)$ no es solución de la inecuación.

Ahora, tomemos un valor arbitrario del segundo intervalo: $(-4\ ;\ 2)$; por ejemplo, $x = 0$ y probemos el signo de $(x + 4)(x - 2)$:

$$(0 + 4)\cdot(0 - 2) = (4)\cdot(-2)$$
$$(0 + 4)\cdot(0 - 2) = -8 < 0$$

Como -8 es menor que 0, entonces el intervalo $(-4\ ;\ 2)$ es solución de la inecuación.

Finalmente, tomemos un valor arbitrario del intervalo $(2\ ;+\infty)$; por ejemplo, $x = 5$ y probemos el signo de $(x + 4)(x - 2)$:

$$(5 + 4)\cdot(5 - 2) = (9)\cdot(3)$$
$$(5 + 4)\cdot(5 - \ ) = 27 > 0$$

Como 27 no es menor que 0, entonces el intervalo $(2\ ;\ +\infty)$ no es solución de la inecuación.

Por lo tanto, de los tres intervalos analizados, sólo $(-4\ ;\ 2)$ es solución de la inecuación.

PASO 5

Sólo nos quedan por analizar dos valores: $x = -4$ y $x = 2$; es decir, los CEROS. Si reemplazamos cada uno de ellos en la expresión $(x + 4)(x - 2) < 0$ nos queda: $0 < 0$, lo cual no es verdad.
Por lo tanto, $x = -4$ y $x = 2$ no son solución de la inecuación.

4. CONCLUSIÓN: La solución de la inecuación $x^2 + 2x < 8$ es el intervalo $(-4\ ;\ 2)$

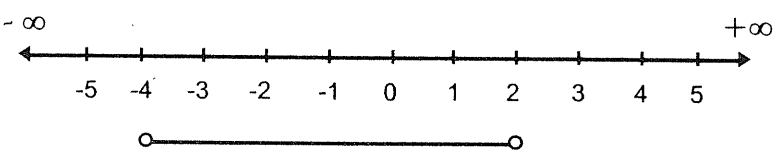


Figura 1-16

ATENCIÓN

Como ejercicio, recomendamos resolver esta misma inecuación aplicando la propiedad $a\cdot b < 0$.

Ejemplo 4

Resolvamos la inecuación $3x^3 - 7x \geq 14x^2 - 10$

SOLUCIÓN

1. $\therefore 3x^3 - 7x \geq 14x^2 - 10$
2. $\therefore 3x^3 - 14x^2 - 7x + 10 \geq 0$
3. $\therefore (3x - 2)(x + 1)(x - 5) \geq 0$
4. Los ceros de cada factor son:

$$3x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$
$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$
$$x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$$

5. Con $x = -1$, $x = \frac{2}{3}$ y $x = 5$ formamos los intervalos que serán las posibles soluciones de la inecuación. Estos intervalos son:

$$(-\infty ; -1) \quad , \quad \left(-1 ; \frac{2}{3}\right) \quad , \quad \left(\frac{2}{3} ; 5\right) \quad , \quad (5; +\infty)$$

6. Analicemos el signo de la inecuación en cada uno de los intervalos obtenidos:

En $(-\infty ; -1)$, tomemos, por ejemplo, $x = -4$:

$$(-12 - 2)\cdot(-4 + 1)\cdot(-4 - 5) = \underbrace{(-14)\cdot(-3)\cdot(-9)}$$

Este producto es negativo

Luego, en este intervalo la inecuación es NEGATIVA y necesitamos valores de **x** para los cuales sea POSITIVA O CERO (≥ 0). Por lo tanto, el intervalo $(-\infty; -1)$ no es solución de la inecuación.

En $\left(-1 ; \frac{2}{3}\right)$, tomemos $x = 0$:

$$(0 - 2)\cdot(0 + 1)\cdot(0 - 5) = \underbrace{(-2)\cdot(1)\cdot(-5)}$$

Este producto es positivo

Por lo tanto, en este intervalo, la inecuación es POSITIVA; luego $\left(-1 ; \frac{2}{3}\right)$ es solución de la inecuación.

En $\left(\frac{2}{3} ; 5\right)$, tomemos $x = 2$:

$$(6 - 2)\cdot(2 + 1)\cdot(2 - 5) = \underbrace{(4)\cdot(3)\cdot(-3)}$$

Este producto es negativo

Luego, en este intervalo la inecuación es NEGATIVA y necesitamos valores de **x** para los cuales sea POSITIVA O CERO (≥ 0). Por lo tanto, el intervalo no es solución de la inecuación.

En $(5 ; +\infty)$, tomemos $x = 8$:

$$(24 - 2)\cdot(8 + 1)\cdot(8 - 5) = \underbrace{(22)\cdot(9)\cdot(3)}$$

Este producto es positivo

Por lo tanto, en este intervalo la inecuación es POSITIVA; luego, $(5 ; +\infty)$ es solución de la inecuación.

Sólo nos queda por analizar tres valores: $x = -1$, $x = \frac{2}{3}$ y $x = 5$, es decir, los CEROS. Veamos:

* Si $x = -1$: $(-3 - 2)\cdot(-1 + 1)\cdot(-1 - 5) = (-5) \cdot (0) \cdot (-6) = 0$

luego, en x = -1, se cumple que $0 \geq 0$, lo cual es cierto; es decir, x = -1 es solución de la inecuación

- Si $x = \frac{2}{3}$: $(2 - 2) \cdot \left(\frac{5}{3}\right) \cdot \left(\frac{-13}{3}\right) = 0$

  luego, en $x = \frac{2}{3}$: se cumple que $0 \geq 0$, lo cual es CIERTO; es decir, $x = \frac{2}{3}$ es solución de la inecuación.

- Si x = 5: $(15 - 2) \cdot (5 + 1) \cdot (5 - 5) = 0$

  luego, en x = 5, se cumple que 0 = 0, lo cual es CIERTO; es decir, x = 5 es solución de la inecuación

7. **CONCLUSIÓN:** La solución de la inecuación:

$$3x^3 - 7x \geq 14x^2 - 10$$

es la unión de los intervalos $\left(-1 ; \frac{2}{3}\right)$, $(5; +\infty)$ y el conjunto $\left\{-1, \frac{2}{3}, 5\right\}$. Por lo tanto:

$$S_T = \left[-1 ; \frac{2}{3}\right] \cup [5 ; +\infty)$$

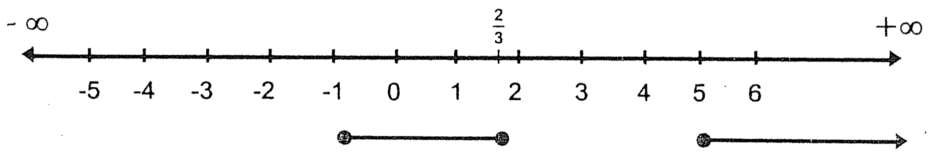


Figura 1 - 17

1.2.5.3. De inecuaciones racionales

MÉTODO PARA RESOLVER INECUACIONES RACIONALES

- Cuando queremos resolver una inecuación como $\frac{x-3}{2x+1} < 5$, la primera tentación que podemos tener es transponer el factor 2x + 1 al otro lado de la desigualdad; sin embargo, ésta no es una buena idea ya que habría que tener en cuenta el signo de este factor: ¿es siempre positivo? ¿es siempre negativo? La respuesta es NO; por lo tanto:

$$\frac{x-3}{2x+1} < 5 \not\Leftrightarrow x - 3 < 5(2x + 1)$$

- Veamos, pues, cómo se resuelve una inecuación racional. En realidad, el procedimiento es muy similar al que estudiamos para resolver inecuaciones polinómicas.

  1. Transponemos todos los términos a un mismo lado de la desigualdad de tal manera que el otro lado sea cero.
  2. Resolvemos la suma o resta de fracciones que resulte hasta que nos quede una expresión de la forma

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0 \quad ó \quad \frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$$

  3. Factorizamos completamente el numerador y el denominador de la fracción.
  4. Una vez factorizados el numerador y el denominador de la fracción, hallamos los ceros de cada factor y con ellos formamos intervalos abiertos consecutivos desde $-\infty$ hasta $+\infty$.
  5. Finalmente, analizamos el signo de la fracción en cada uno de los intervalos, como lo hicimos en el caso de las inecuaciones polinómicas y de acuerdo con los resultados decidimos cuáles de ellos son solución y cuáles no.

  El siguiente ejemplo nos ayudará a aclarar las posibles dudas.

Ejemplo 1

Resolvamos la inecuación $2x - 1 \leq \dfrac{5}{x+1}$

SOLUCIÓN

1. $2x - 1 \leq \dfrac{5}{x+1}$ .... inecuación dada.

2. $2x - 1 - \dfrac{5}{x+1} \leq 0$........................ ¿por qué ?

3. $\left.\begin{array}{l} \dfrac{(2x-1)(x+1)-5}{x+1} \leq 0 \\ \\ \dfrac{2x^2+x-6}{x+1} \leq 0 \end{array}\right\}$ ....resolvimos la operación con fracciones.

4. $\dfrac{(2x-3)(x+2)}{(x+1)} \leq 0$................factorizamos numerador y denominador de la fracción.

5. Los ceros de cada factor son: $x = \dfrac{3}{2}$, $x = -2$ y $x = -1$. Con estos ceros formamos los siguientes intervalos:

$$(-\infty ; -2) , (-2 ; -1) , \left(-1 ; \frac{3}{2}\right) \text{ y } \left(\frac{3}{2} ; +\infty\right)$$

6. Analicemos el signo de $\dfrac{(2x-3)(x+2)}{(x+1)}$ en cada uno de los intervalos:

* En $(-\infty; -2)$ tomamos $x = -4$ y nos queda: $\dfrac{(-)\cdot(-)}{(-)} = \dfrac{(+)}{(-)} = (-)$; es decir, en este intervalo la expresión es negativa y eso precisamente es lo que necesitamos. Por lo tanto, el intervalo $(-\infty; -2)$ es solución de la inecuación.

$$\therefore \quad \mathbf{S_1 = (-\infty ; -2)}$$

* En $(-2 ; -1)$ tomamos $x = -1.5$ y nos queda: $\dfrac{(-)\cdot(+)}{(-)} = \dfrac{(-)}{(-)} = (+)$; es decir, en este intervalo la expresión es positiva y nosotros necesitamos que sea negativa o cero (≤ 0). Por lo tanto, el intervalo $(-2 ; -1)$ no es solución de la inecuación.

* En $\left(-1 ; \dfrac{3}{2}\right)$ tomamos $x = 0$ y nos queda $\dfrac{(-)\cdot(+)}{(+)} = \dfrac{(-)}{(+)} = (-)$; es decir, en este intervalo la expresión es negativa. Por lo tanto, el intervalo $\left(-1 ; \dfrac{3}{2}\right)$ es solución de la inecuación.

$$\therefore \quad \mathbf{S_2} = \left(-1 ; \frac{3}{2}\right)$$

* El lector verificará que el intervalo $\left(\dfrac{3}{2} ; +\infty\right)$ no es solución de la inecuación.

* Si probamos los ceros encontraremos que $x = -2$ y $x = \frac{3}{2}$ cumplen con la condición de ser ≤ 0; pero, $x = -1$ no cumple ya que con este valor se anula el denominador de la fracción.
* **CONCLUSIÓN:** La solución de esta inecuación es:

$$S_T = S_1 \cup S_2 \cup \left\{-2 \,;\, \frac{3}{2}\right\}$$

$$\therefore\ S_T = (-\infty \,;\, -2) \cup \left(-1 \,;\, \frac{3}{2}\right) \cup \left\{-2 \,;\, \frac{3}{2}\right\}$$

$$\therefore\ S_T = (-\infty \,;\, -2\,] \cup \left(-1 \,;\, \frac{3}{2}\right]$$

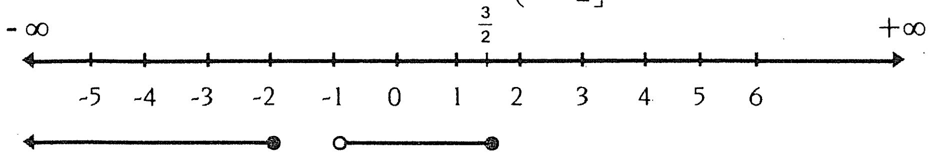


Figura 1-18

Ejemplo 2

Resolvamos la inecuación $\dfrac{2x^2 - x + 3}{x - 4} \leq 0$

SOLUCIÓN

- Observemos que ya la inecuación tiene la forma $\dfrac{P(x)}{Q(x)} \leq 0$. Por lo tanto, debemos proceder a factorizar el numerador y el denominador.
- El denominador ya está factorizado y al tratar de factorizar el numerador encontramos que el trinomio $2x^2 - x + 3$ no es factorizable en los reales porque al calcular el valor del discriminante $b^2 - 4ac$ obtenemos:

$$(-1)^2 - 4(2)(3) = 1 - 24 = -23 < 0$$

  es decir, un valor negativo. Esto significa que, como el coeficiente del término cuadrático es positivo (es 2) en el trinomio $2x^2 - x + 3$, entonces el valor de este trinomio siempre es positivo para cualquier valor que le demos a x (¿por qué?)

- Por lo tanto, si $2x^2 - x + 3$ es siempre positivo, entonces el factor $(x - 4)$ tendrá que ser negativo para que la expresión $\dfrac{2x^2 - x + 3}{x - 4}$ sea negativa (< 0); es decir:

$$x - 4 < 0 \Rightarrow x < 4$$
$$x - 4 < 0 \Rightarrow x \in (-\infty \,;\, 4)$$

- Ahora bien, una fracción es igual a 0 sólo cuando el numerador es 0; sin embargo, ya dijimos que el numerador es siempre positivo.

- CONCLUSIÓN: La solución de la inecuación $\dfrac{2x^2 - x + 3}{x - 4} \leq 0$ es el intervalo $(-\infty \,;\, 4)$.

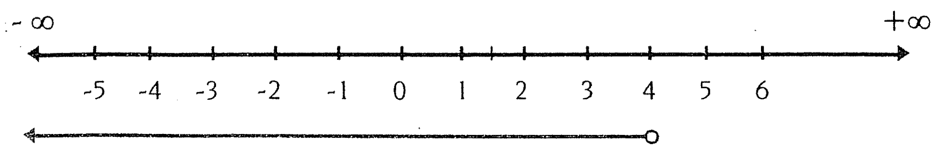


Figura 1-19

Ejemplo 3

Hallemos los valores de **y** para los cuales $\sqrt{\dfrac{1}{2-y}-3} \in \mathbf{R}$

SOLUCIÓN

- Para que una raíz par (raíz cuadrada en este caso) sea real es necesario que el radicando sea positivo o cero; es decir:

$$\sqrt{\frac{1}{2-y}-3} \in \mathbf{R} \iff \frac{1}{2-y}-3 \geq 0$$

$$\iff \frac{1-3(2-y)}{2-y} \geq 0$$

$$\iff \frac{1-6+3y}{2-y} \geq 0$$

$$\iff \frac{3y-5}{2-y} \geq 0$$

- Tanto el numerador como el denominador están factorizados. Los ceros del numerador y el denominador son y $= \dfrac{5}{3}$ y y = 2. Con estos ceros formamos los intervalos $\left(-\infty\,;\,\dfrac{5}{3}\right)$, $\left(\dfrac{5}{3}\,;\,2\right)$ y $(2\,;\,+\infty)$

- Ahora analicemos el signo de la fracción $\dfrac{3y-5}{2-y}$ en cada uno de estos intervalos:

  * En $\left(-\infty\,;\,\dfrac{5}{3}\right)$ tomamos y = 0: $\left(\dfrac{(-)}{(+)}\right)=(-)$. En este intervalo la expresión es negativa. Por lo tanto, este intervalo no es solución de la inecuación.

  * En $\left(\dfrac{5}{3}\,;\,2\right)$ tomamos y = 1.8: $\left(\dfrac{(+)}{(+)}\right)=(+)$. En este intervalo, la expresión es positiva. Por lo tanto, este intervalo es solución de la inecuación.

  * En $(2\,;\,+\infty)$ tomamos y = 5: $\left(\dfrac{(+)}{(-)}\right)=(-)$. En este intervalo, la expresión es negativa. Por lo tanto, este intervalo no es solución de la inecuación.

  * Finalmente, $\dfrac{3y-5}{2-y}=0$ cuando 3y - 5 = 0; luego, $y=\dfrac{5}{3}$. Por lo tanto, los valores de **y** para los cuales $\sqrt{\dfrac{1}{2-y}-3} \in$ R corresponden al intervalo $\left[\dfrac{5}{3}\,;\,2\right)$.

EJERCICIO 1.1

1 PREGUNTAS PARA REVISAR LA TEORÍA:

a) ¿Cuál es la propiedad que introduce el concepto de orden en el conjunto de los números reales?

b) Si a y b son números reales, ¿cómo se define a < b ? ¿y a > b?

c) Si a y b son números reales tales que a < b, ¿cómo se llaman y cómo se definen los siguientes conjuntos: [a;b] , [a;b) , (a;b] , (a;b) , (a;+∞) , (-∞; a), [a;+∞) , (-∞; a]?

d) ¿Qué establece la propiedad transitiva de las desigualdades?

e) ¿Cómo se transponen términos de un lado al otro de una desigualdad?

f) ¿Cómo se transponen factores de un lado al otro de una desigualdad?

g) Si a y b son números reales diferentes de 0, ¿cuándo se cumple que $a \cdot b > 0$? ¿cuándo $a \cdot b < 0$? ¿cuándo $\frac{a}{b} \geq 0$? ¿cuándo $\frac{a}{b} \leq 0$?

h) ¿Qué es una inecuación?

i) ¿Cómo se define una inecuación polinómica en la variable x? ¿cómo se resuelven estas inecuaciones?

j) ¿Cómo se define una inecuación racional en la variable x? ¿cómo se resuelven estas inecuaciones?

2 Indicar cuáles de los siguientes enunciados son verdaderos y cuáles son falsos:

a) $5 \leq 6 + 1$

b) $\frac{6-3}{3} > \frac{3}{2}$

c) $\left(\frac{4}{7} + \frac{3}{4} > \frac{3}{5} + \frac{5}{7}\right)$ y $(4 \geq 5 \cdot 3)$

d) $(18 - 10) - 4 \geq 18 - (10 - 4)$

e) $(4 > 6)$ ó $(5 + 2 = 10)$

f) $(3 + 4 < 8)$ ó $(6 + 5 > 5 + 6)$

3 Indicar cuáles de los siguientes enunciados son verdaderos y cuáles son falsos. Justificar la respuesta.

a) Si $x > 2$ entonces $x^2 > 4$

b) Para todo $x > 2$, se cumple que $x^2 > 4$

c) Si x es cualquier número real, entonces $x + 1 > x$

d) Si x es cualquier número real, entonces $x + x > x$

e) Si x es cualquier número real, entonces $x^2 > x$

f) Si $x > 0$ y $y < 0$ entonces $x + y > y$

g) Si y es cualquier número real diferente de 0 y $\frac{x}{y} > 1$ entonces $x > y$

4 Escribir cada conjunto en forma de desigualdad, en forma de intervalo y representarlo gráficamente.

a) El conjunto de los números reales menores o iguales a 5.

b) El conjunto de los números reales mayores que -4 y menores que 4.

c) El conjunto de los números reales menores que -4 o mayores o iguales que 4.

d) El conjunto de los números reales entre -2 y 7.

5 Demostrar que $x^2 - 2x + 5 > 0$, para todo x

6 ¿Cómo deben ser m y n para que $x^2 + mx + n > 0$?

7 Utilizando la notación de intervalos, encontrar en cada caso el conjunto solución y representarlo gráficamente.

a) $[-3 ; 7] \cup [2 ; 6]$

b) $[2 ; 4] \cup [3 ; 10]$

c) $[6 ; 9] \cap [7 ; 10]$

d) $[2 ; 6] \cap [-3 ; +\infty]$

e) $(-\infty ; -8) \cup [-5 ; 0]$

f) $[(-\infty; -2] \cap (-2; -7)] \cup (0 ; 10]$

En los ejercicios **8** a **19** ,hallar el conjunto solución de la inecuación indicada y representarla gráficamente

8 $5x + 2 > x - 6$

9 $\frac{2}{3}x - \frac{1}{2} \leq 0$

10 $13 \geq 2x - 3 \geq 5$

11 $2 > -3 - 3x \geq -7$

12 $\frac{4}{x} - 3 > \frac{2}{x} - 7$

13 $\frac{1}{x+1} < \frac{2}{3x-1}$

14 $x^2 > 4$

15 $(x - 3)(x + 5) > 0$

16 $1 - x - 2x^2 \geq 0$

17 $4x^2 + 9x < 9$

18 $\dfrac{x + 2}{x - 1} < \dfrac{2x}{2x + 3}$

19 $\dfrac{2x^3 - x^2 - 5x - 2}{x + 3} \leq 0$

En los ejercicios **20** a **23** hallar todos los valores de x para los cuales:

20 $\sqrt{8x - 5} \in R$

21 $\sqrt{x^2 - 3x - 10} \notin R$

22 $\sqrt{x^2 - 5x + 4} \in R$

23 $\sqrt{\dfrac{x + 3}{x - 2} - 5} \in R$

1.3 CONCEPTO DE RELACIÓN Y RELACIONES REALES

1.3.1. Concepto de relación

RECORDEMOS

- **En el plano cartesiano una RELACIÓN queda definida cuando conocemos:**

  1. **El conjunto de partida.**
  2. **El conjunto de llegada.**
  3. **Una regla o propiedad que nos permita hacer corresponder los elementos del conjunto de partida con los elementos del conjunto de llegada.**

- **Para indicar que R es una relación de A en B escribimos R: A → B. Si los conjuntos A y B son los números reales o intervalos de números reales, decimos que la relación es REAL.**

- **Toda relación real es un CONJUNTO DE PAREJAS ORDENADAS. Este conjunto de parejas ordenadas es un subconjunto de todas las parejas ordenadas de números reales que es imaginable obtener y está formado por aquellas y sólo por aquellas parejas ordenadas que cumplen la regla o propiedad.**

- **La GRÁFICA de una relación es la representación en el plano cartesiano, mediante puntos, de los pares ordenados que la conforman.**

Ejemplo

Dados los conjuntos A = {-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3} y B = {-2, -1, 0, 1, 2} y una relación R: A → B definida mediante la regla: **«Cada elemento de B es 2 unidades mayor que un elemento de A»**, se pide:

1) Identificar el conjunto de partida y el conjunto de llegada.

2) Si los elementos del conjunto de partida se representan por x y los del conjunto de llegada por y, escribir en lenguaje matemático la regla dada.

3) Elaborar el diagrama de flechas de R.

4) Escribir el conjunto de parejas ordenadas de R.

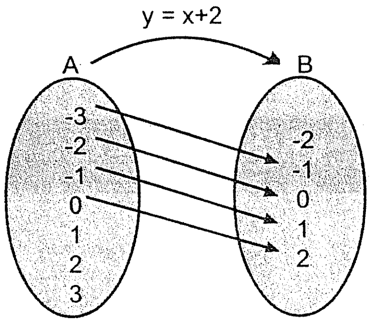
5) Dibujar la gráfica de R.

SOLUCIÓN

1) Como R es una relación de A en B entonces A es el conjunto de partida y B el conjunto de llegada.

2) La regla establece que: **«cada elemento de B es 2 unidades mayor que un elemento de A»**; esto es lo mismo que decir que: **«y es 2 unidades mayor que x»** ó que: **«y = x + 2»**.

3) Este es el diagrama de flechas:

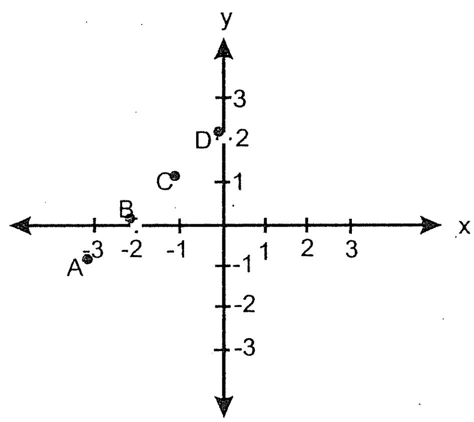


- \- 1 es 2 unidades mayor que -3: -1 es LA IMAGEN DE -3.
- 0 es 2 unidades mayor que -2: 0 es LA IMAGEN DE -2
- 1 es 2 unidades mayor que -1: 1 es LA IMAGEN DE -1
- 2 es 2 unidades mayor que 0: 2 es LA IMAGEN DE 0.
- -2 NO ES IMAGEN de ningún elemento de A.

4) De acuerdo con el diagrama de flechas, el conjunto de parejas ordenadas de R es:

$$R = \{(-3, -1), (-2, 0), (-1, 1), (0, 2)\}$$

5) Para dibujar la gráfica de R basta dibujar los puntos correspondientes a cada pareja ordenada, así:



Los puntos A, B, C y D de la figura, y exclusivamente estos puntos, conforman la gráfica de R.

1.3.2. Relaciones lineales

RECORDEMOS

- **Una RELACIÓN LINEAL se define como el conjunto de todos los pares ordenados de números reales (x, y) que satisfacen una regla de la forma:**

$$ax + by + c = 0$$

donde a, b y c son números reales fijos tales que a y b no son simultáneamente iguales a 0.

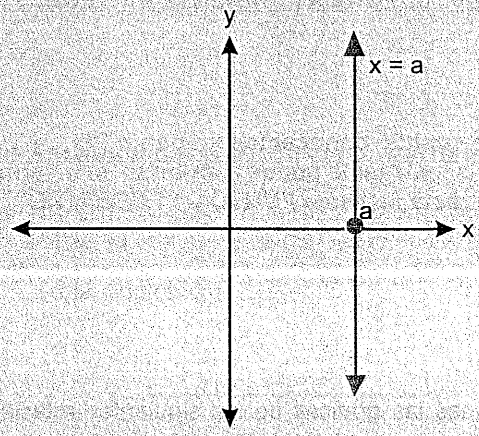
- Notemos una característica especial de las relaciones lineales: las variables x y y son de PRIMER GRADO.

- La gráfica de una relación lineal es una LÍNEA RECTA; por lo tanto, para dibujar su gráfica sólo necesitamos dos puntos.

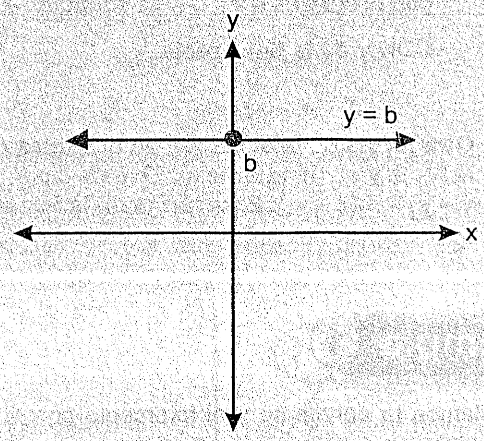
- Hay dos tipos de relaciones lineales que merecen una atención especial:

  Aquellas cuya regla es una ecuación de la forma $x = a$, donde a es un número real. Las gráficas de estas relaciones lineales son LÍNEAS RECTAS PARALELAS AL EJE y.

  Aquellas cuya regla es una ecuación de la forma $y = b$, donde b es un número real. Las gráficas de estas relaciones son LÍNEAS RECTAS PARALELAS AL EJE x.

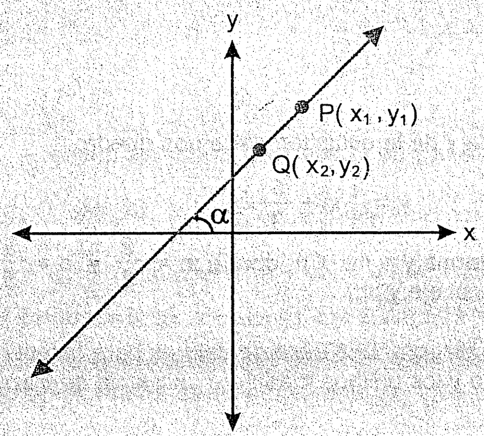


x = a: Línea recta paralela al eje y.



y = b: Línea recta paralela al eje x

- En toda línea recta no vertical podemos identificar dos elementos claves: la pendiente y el intercepto con el eje y. La pendiente m nos indica la inclinación de la recta con relación al eje x y puede obtenerse de dos maneras:



* Si conocemos el ángulo α que la recta forma con el eje x, la pendiente m se calcula así:

$$m = \tan(\alpha)$$

* Si conocemos dos puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ de la recta, la pendiente m se calcula así:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

* El intercepto con el eje y es el punto donde la recta corta al eje y.

- Para obtener la pendiente y el intercepto con el eje y, en la ecuación $ax + by + c = 0$, procedemos así:

  * **Despejamos completamente la y de la ecuación:**

$$ax + by + c = 0$$
$$\therefore\ by = -ax - c$$
$$\therefore\ y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

  * **Esta última ecuación tiene la forma $y = mx + n$, donde la pendiente es $m = -\frac{a}{b}$ y el intercepto con el eje y es $n = -\frac{c}{b}$. La ecuación $y = mx + n$ se denomina FORMA PENDIENTE – INTERCEPTO CON y de la línea recta.**

- **Otra forma de la ecuación de una línea recta se obtiene cuando conocemos un punto $P(x_1, y_1)$ de la recta y su pendiente m. En este caso, la ecuación de la línea recta puede escribirse en la forma: $y - y_1 = m(x - x_1)$. Esta forma de la ecuación de la línea recta se llama PUNTO – PENDIENTE.**

Ejemplo 1

Hallemos la pendiente y el intercepto con el eje y, y dibujemos las gráficas de las siguientes relaciones lineales:

a) $R_1 = \{(x, y) / 2x - 3y + 5 = 0\}$

b) $R_2 = \{(x, y) / y + 4 = 2x\}$

c) $R_3 = \{(x, y) / 5x - 4y = 0\}$

SOLUCIÓN

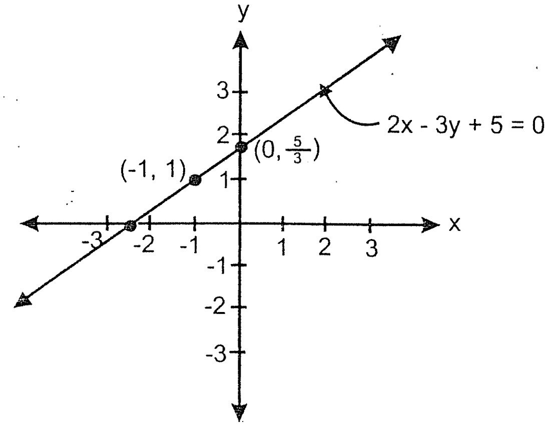
a) Despejando completamente la y de la ecuación dada nos queda:

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$$

Esta es una ecuación de la forma $y = mx + n$, donde $m = \frac{2}{3}$ y $n = \frac{5}{3}$. Estos son, respectivamente, la pendiente y el intercepto con el eje y.

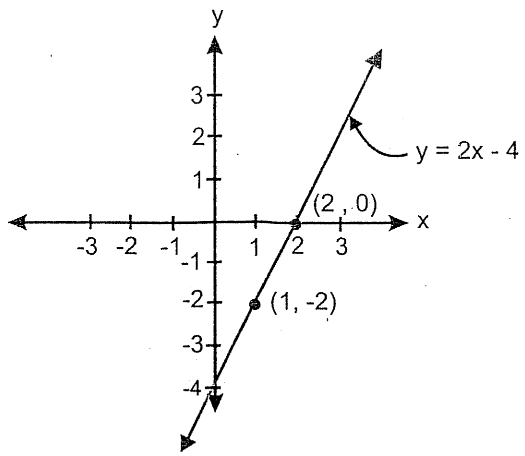
Para dibujar la gráfica, basta elaborar una tabla de valores para obtener dos puntos, dibujamos estos dos puntos en el plano cartesiano y los unimos mediante una recta de trazo continuo; así:

x	y
0	$\frac{5}{3}$
-1	1



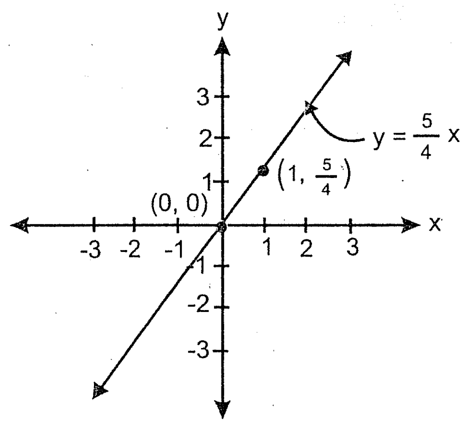
b) Despejando la y nos queda: $y = 2x - 4$. La pendiente de la recta es $m = 2$ y el intercepto con el eje y es $(0\ ,\ -4)$. Para dibujar la gráfica elaboramos una tabla de valores, obtenemos dos pares ordenados, los dibujamos en el plano cartesiano y los unimos mediante una recta de trazo continuo; así:

x	y = 2x-4
1	-2
2	0



c) La forma pendiente – intercepto y de la recta de ecuación $5x - 4y = 0$ es $y = \frac{5}{4}x$. La pendiente de esta recta es $m = \frac{5}{4}$ y el intercepto con el eje y es 0. Esto significa que la recta pasa por el origen. Su gráfica es la siguiente:

x	$y = \frac{5}{4}x$
0	0
1	$\frac{5}{4}$



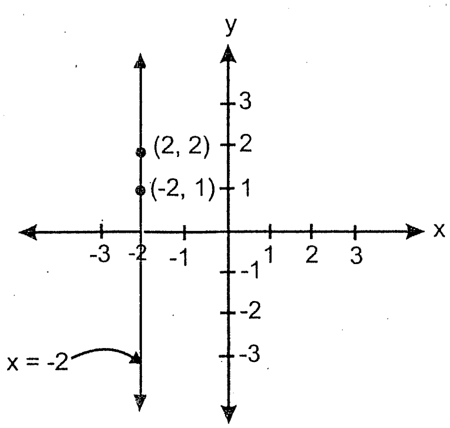
Ejemplo 2

Dibujemos la gráfica de $R = \{(x, y) / x = -2\}$

SOLUCIÓN

- Para dibujar la gráfica de R debemos tener en cuenta que x siempre tomará el valor de –2, cualquiera sea el valor que tome y. Por lo tanto, esta relación corresponde a una LÍNEA RECTA PARALELA AL EJE y.
- En consecuencia, su gráfica es la siguiente:

y	x = -2
-2	-2
1	-2



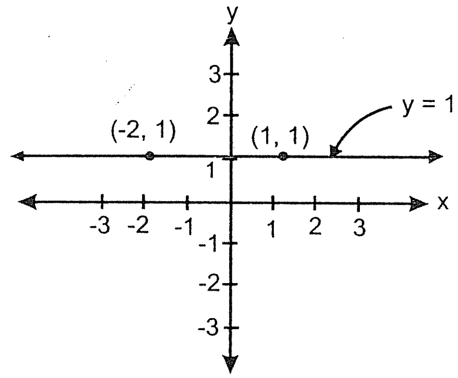
Ejemplo 3

Dibujemos la gráfica de R = {(x, y) / y = 1}

SOLUCIÓN

- Para dibujar **R** tengamos en cuenta que la variable **y** siempre tomará el valor de 1, cualquiera sea el valor que tome la **x**. Por lo tanto, esta relación corresponde a una LÍNEA RECTA PARALELA AL EJE x.
- Su gráfica es la siguiente:

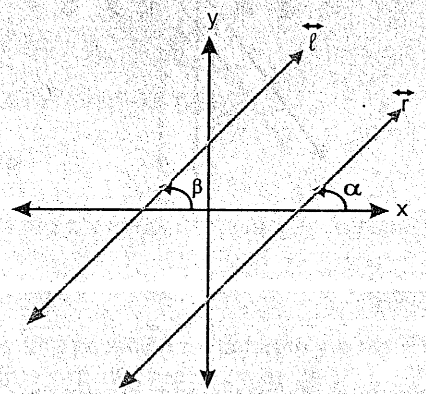
x	y = 1
-2	1
1	1



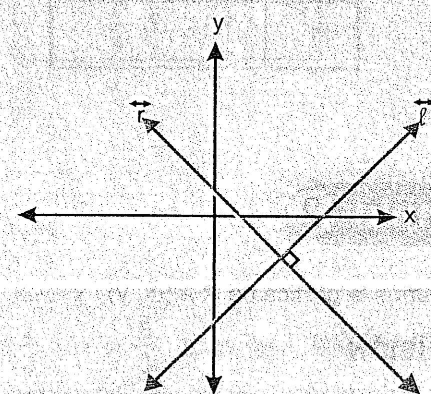
RECORDEMOS

RECTAS PARALELAS Y PERPENDICULARES - DISTANCIAS

- **Dos rectas no verticales son paralelas cuando sus pendientes son iguales.**
- **Dos rectas no paralelas a los ejes son perpendiculares cuando el producto de sus pendientes es igual a –1; es decir, cuando la pendiente de una es el inverso aditivo y multiplicativo de la otra.**

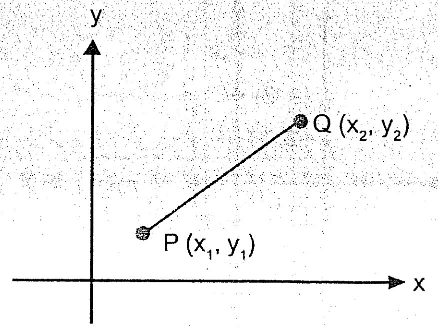


$\overleftrightarrow{\ell} \parallel \overleftrightarrow{r}$ si y sólo si $m_{\overleftrightarrow{\ell}} = m_{\overleftrightarrow{r}}$



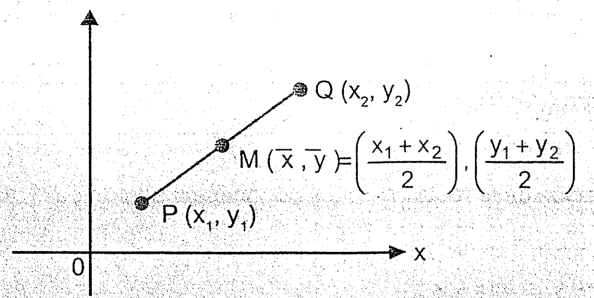
$\overleftrightarrow{\ell} \perp \overleftrightarrow{r}$ si y sólo si $m_{\overleftrightarrow{\ell}} \cdot m_{\overleftrightarrow{r}} = -1$

- La **distancia entre dos puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ del plano cartesiano** se obtiene aplicando la fórmula:



$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

- Las coordenadas del punto medio de un segmento cuyos extremos son los puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ se obtienen aplicando las ecuaciones:

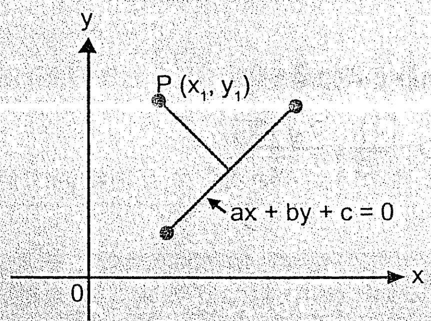


$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$\overline{y} = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

- **Las coordenadas del punto de intersección de dos rectas que se cortan se obtienen resolviendo simultáneamente (por igualación, sustitución, reducción, método gráfico o determinantes) el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas formado por las dos líneas rectas dadas.**

- **La distancia de un punto $P(x_1, y_1)$ a una recta de ecuación $ax + by + c = 0$ se obtiene aplicando la siguiente fórmula:**



$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Ejemplo 4

Una recta $\overleftrightarrow{r}$ es perpendicular a la recta $2x - 3y - 4 = 0$ y pasa por el punto de intersección de las rectas $2y - 3x = 3$ y $y + x = -1$. Hallemos la ecuación de la recta y la distancia desde el punto $P(-2, 3)$ a la recta.

SOLUCIÓN

- Como $\overleftrightarrow{r}$ es perpendicular a $2x - 3y - 4 = 0$ entonces la pendiente de $\overleftrightarrow{r}$ es el inverso multiplicativo y aditivo de la pendiente de $2x - 3y - 4 = 0$. La pendiente de ésta la hallamos despejando completamente la y; así:

  $y = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$. Por lo tanto, la pendiente de $2x - 3y - 4 = 0$ es $m = \frac{2}{3}$ y la pendiente de $\overleftrightarrow{r}$ será $m_{\overleftrightarrow{r}} = -\frac{3}{2}$.

- Para hallar el punto de intersección de las rectas $2y - 3x = 3$ y $y + x = -1$, resolvemos simultáneamente las dos ecuaciones; así:

$$2y - 3x = 3 \quad\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$
$$y + x = -1 \quad\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Multiplicamos la (2) por 3 y sumamos miembro a miembro las dos ecuaciones:

$$2y - \cancel{3x} = 3 \quad\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$
$$3y + \cancel{3x} = -3 \quad\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2) \times 3$$
$$\overline{5y = 0}$$
$$\therefore\ y = 0$$

Reemplazamos este valor, por ejemplo en la ecuación (2), y nos queda:

$$0 + x = -1$$

$$\therefore \quad x = -1$$

Luego, las rectas se cortan en el punto (-1 , 0).

- Ahora ya podemos encontrar la ecuación de la recta $\overleftrightarrow{r}$, pues conocemos un punto (-1 , 0) y la pendiente $m = -\frac{3}{2}$; así:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$\therefore \quad y - 0 = -\frac{3}{2}(x + 1)$$

$$\therefore \quad 2y = -3x - 3$$

$$\therefore \quad 2y + 3x + 3 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{Ecuación de } \overleftrightarrow{r}$$

- Ahora hallemos la distancia desde P(-2, 3) a la recta 3x + 2y + 3 = 0:

$$d = \frac{|3(-2) + 2(3) + 3|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{|3|}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$$

1.3.3. Relaciones Cuadráticas

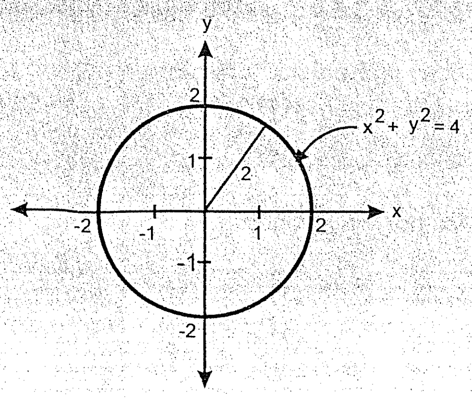
RECORDEMOS

- **Una relación real definida por $ax^2 + cy^2 + dx + ey + f = 0$, donde a, c, d, e y f son números reales tales que a y c no son simultáneamente iguales a 0 se denomina RELACIÓN CUADRÁTICA o de SEGUNDO GRADO.**

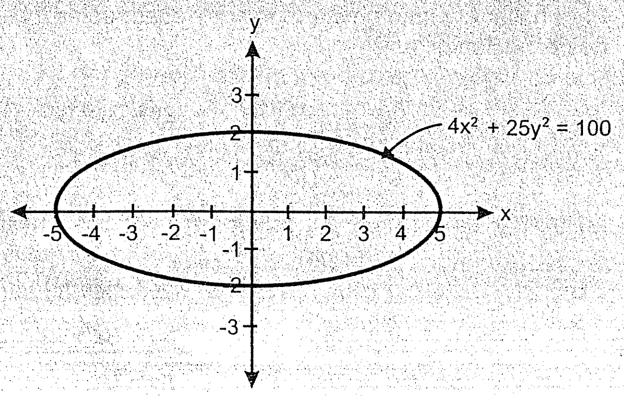
- **La gráfica de una relación cuadrática no representa una única curva y la clase de curva dibujada dependerá de los valores de a y de c; es decir, de los coeficientes de los términos cuadráticos; así:**

  Si a = c, la curva tiene forma de CIRCUNFERENCIA.
  Si $a \cdot c > 0$ y $a \neq c$, la curva tiene forma de ELIPSE.
  Si $a \cdot c < 0$, la curva tiene forma de HIPÉRBOLA.
  Si a = 0 ó c = 0, la curva tiene forma de PARÁBOLA.

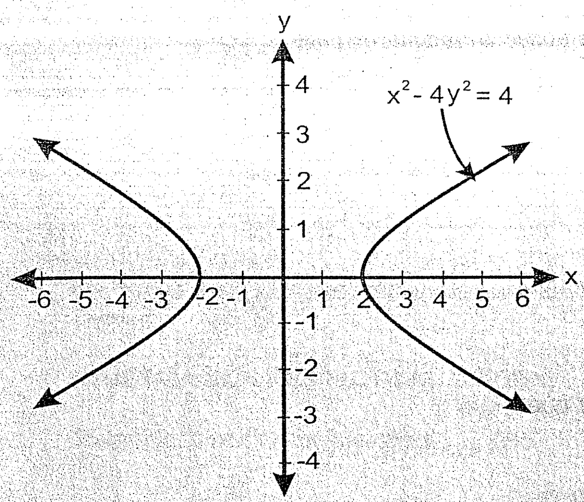
- **A continuación presentamos una gráfica de cada una:**



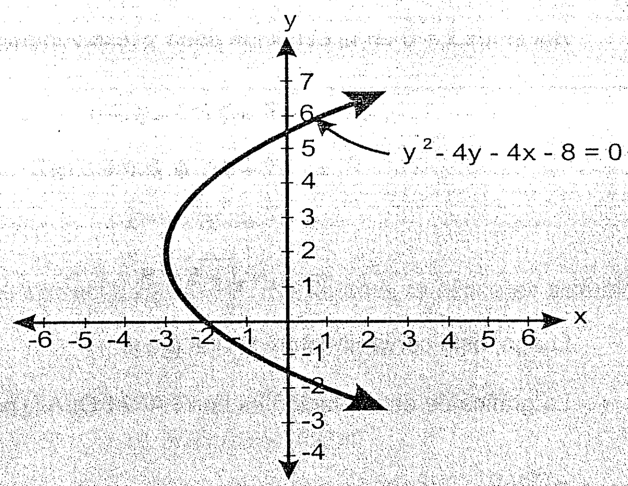
CIRCUNFERENCIA: a = c



ELIPSE: $a \cdot c > 0$ y $a \neq c$



HIPÉRBOLA a · c < 0



PARÁBOLA a = 0 ó c = 0

1.3.4. Elementos que ayudan a dibujar la gráfica de una relación

1.3.4.1. Interceptos con los ejes

RECORDEMOS

- **Los puntos donde una curva corta a los ejes coordenados se denominan INTERCEPTOS CON LOS EJES.**
- **Los interceptos con el eje x se caracterizan por tener su segunda componente u ordenada igual a 0 y los interceptos con el eje y por tener su primera componente o abscisa igual a 0.**
- **En la práctica, para hallar los interceptos con el eje x, de una relación definida por una regla E(x, y) = 0, reemplazamos la variable y por 0 y resolvemos la ecuación resultante para x. Así mismo, para hallar los interceptos con el eje y reemplazamos la variable x por 0 y resolvemos la ecuación resultante para y.**

Ejemplo 1

Hallemos los interceptos con los ejes de la relación definida por $R = \{(x, y) / y^2 - 2x + 5 = 0\}$

SOLUCIÓN

- **INTERCEPTOS CON EL EJE x**

  Hacemos y = 0 en la ecuación dada y resolvemos la ecuación resultante para x:

$$y = 0 \Rightarrow (0)^2 - 2x + 5 = 0$$
$$\Rightarrow -2x + 5 = 0$$
$$\Rightarrow x = 2.5$$

  Luego, el punto P(2.5 , 0) es el intercepto con el eje x.

- **INTERCEPTO CON EL EJE y**

Hacemos x = 0 en la ecuación dada y resolvemos la ecuación resultante para y:

$$x = 0 \Rightarrow y^2 - 2(0) + 5 = 0$$
$$\Rightarrow y^2 + 5 = 0$$
$$\Rightarrow y^2 = -5$$
$$\Rightarrow y = \sqrt{-5} \notin \mathbb{R}$$

Luego, esta curva no intercepta al eje y.

- La gráfica de esta relación es una PARÁBOLA (¿por qué?)

1.3.4.2. Simetrías con los ejes y con el origen

RECORDEMOS

- **SIMETRÍA RESPECTO AL EJE x.**

  Una curva de ecuación E(x, y) = 0 es simétrica respecto al eje x si tanto el punto P(x, y) como el punto P'(x, -y) pertenecen a la gráfica; es decir, si al sustituir y por -y en la ecuación obtenemos una ecuación equivalente.

- **SIMETRÍA RESPECTO AL EJE y.**

  Una curva de ecuación E(x, y) = 0 es simétrica respecto al eje y, si tanto el punto P(x, y) como el punto P'(-x, y) pertenecen a la gráfica; es decir, si al sustituir x por -x en la ecuación obtenemos una ecuación equivalente.

- **SIMETRÍA RESPECTO AL ORIGEN.**

  Una ecuación E(x, y) = 0 es simétrica respecto al origen, si tanto el punto P(x, y) como el punto P'(-x, -y) pertenecen a la gráfica; es decir, si al sustituir x por -x y y por -y en la ecuación, obtenemos una ecuación equivalente.

Ejemplo 2

Analicemos las simetrías de la elipse $R = \{(x, y) / 3x^2 + 4y^2 = 12\}$

SOLUCIÓN

- **SIMETRÍA CON EL EJE x:**

Reemplacemos y por - y en la ecuación dada:

$3x^2 + 4y^2 = 12$ ....Ecuación dada.

$\therefore\ 3x^2 + 4(-y)^2 = 12$ ....Cambiamos y por -y

$\therefore\ 3x^2 + 4y^2 = 12$ ....$(-y)^2 = y^2$

Como vemos, esta última ecuación es equivalente a la ecuación dada. Por lo tanto, la elipse es simétrica respecto al eje x.

- **SIMETRÍA CON EL EJE y:**

Reemplacemos x por -x en la ecuación dada:

$$3x^2 + 4y^2 = 12 \text{ .... } \quad \text{Ecuación dada.}$$

$$\therefore\ 3(-x)^2 + 4y^2 = 12 \text{ .... } \quad \text{Cambiamos x por -x}$$

$$\therefore\ 3x^2 + 4y^2 = 12 \text{ .... } \quad (-x)^2 = x^2$$

De nuevo, esta última ecuación es equivalente a la ecuación dada. Por lo tanto, la elipse es simétrica respecto al eje y.

- **SIMETRÍA CON RESPECTO AL ORIGEN:**

Reemplazamos simultáneamente x por -x y y por -y en la ecuación dada:

$$3x^2 + 4y^2 = 12 \text{ .... } \quad \text{Ecuación dada.}$$

$$\therefore\ 3(-x)^2 + 4(-y)^2 = 12 \text{ .... } \quad \text{Cambiamos x por -x y y por -y}$$

$$\therefore\ 3x^2 + 4y^2 = 12 \text{ .... } \quad (-x)^2 = x^2 \text{ y } (-y)^2 = y^2$$

También, en este caso, esta última ecuación es equivalente a la ecuación dada. Por lo tanto, la elipse es simétrica respecto al origen.

CONCLUSIÓN: La elipse de ecuación $3x^2 + 4y^2 = 12$ es simétrica respecto al eje x , al eje y y al origen.

- Dejamos como ejercicio al lector dibujar la gráfica de la curva y verificar las conclusiones obtenidas analíticamente.

PREGUNTAS:

1. ¿Si una curva es simétrica respecto al eje x y respecto al eje y, podemos concluir que es simétrica respecto al origen?

2. ¿Si una curva no es simétrica respecto al eje x y tampoco es simétrica respecto al eje y, podemos concluir que tampoco es simétrica respecto al origen?

1.3.4.3. Dominio y Rango

RECORDEMOS

CONCEPTO DE DOMINIO Y RANGO

Sea R: A → B una relación de A en B.

- **El dominio de R, denotado D_R, es el conjunto de elementos de A que están relacionados al menos con un elemento de B; es decir, el dominio de R es un subconjunto del conjunto de partida: $D_R \subset A$**

- **El rango de R, denotado I_R, es el conjunto de elementos de B que están relacionados al menos con un elemento de A. Luego, el rango de R es un subconjunto del conjunto de llegada: $I_R \subset B$**

MÉTODO PRÁCTICO PARA HALLAR EL DOMINIO

- **Si al despejar la variable y de una relación R definida por la ecuación E (x , y) = 0, encontramos que la variable x hace parte de una RAIZ DE ÍNDICE PAR, entonces para hallar su dominio basta hacer el radicando MAYOR O IGUAL A CERO y resolver la inecuación resultante.**

- Si al despejar la variable y en una relación R definida por la ecuación E(x, y) = 0, encontramos que la variable x hace parte del denominador de una fracción, entonces determinamos los valores de x que anulan (hacen cero) dicho denominador. A continuación, reemplazamos tales valores de x en la ecuación original. Si obtenemos una contradicción (2 = 5, 0 = -3, 4 = 0, etc.) entonces esos valores de x no pertenecen al dominio de la relación; si obtenemos algún valor de y o una identidad, entonces dichos valores de x pertenecen al dominio de R.

MÉTODO PRÁCTICO PARA HALLAR EL RANGO

- Como dijimos antes, el rango de una relación es el conjunto formado por aquellos elementos del conjunto de llegada que están relacionados con algún elemento del conjunto de partida. Por esta razón, para hallar el rango de una relación real, definida mediante una ecuación de la forma E(x, y) = 0, debemos despejar la variable x y realizar sobre la variable y un análisis similar al realizado sobre la variable x cuando despejamos la y.

SIGNIFICADO GRÁFICO DEL DOMINIO Y EL RANGO

- El dominio y el rango de una relación tienen una gran importancia desde el punto gráfico: determinan las zonas del plano cartesiano donde se puede dibujar la gráfica de la relación.
- En esta unidad de repaso sólo estudiaremos el significado gráfico del dominio y el rango cuando éstos son intervalos de números reales. Más adelante, en la unidad 5, estudiaremos el significado del dominio y el rango cuando la x y la y toman valores que hacen CERO el denominador de una fracción.

Ejemplo 3

Hallemos el dominio y el rango de la relación $R = \{(x, y) / 4x^2 + 25y^2 = 400\}$ e interpretemos gráficamente estos resultados.

SOLUCIÓN

- DOMINIO

  * Despejamos la variable **y**:

$$4x^2 + 25y^2 = 100$$

$$\therefore\ y = \pm\sqrt{\frac{100 - 4x^2}{25}}$$

$$\therefore\ y = \pm\frac{\sqrt{100 - 4x^2}}{5}$$

  * Como **x** hace parte de una radical par, entonces:

$$\sqrt{100 - 4x^2} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 100 - 4x^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 25 - x^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (5 + x)(5 - x) \geq 0$$

La solución de esta inecuación es el intervalo $[-5 ; 5]$ (¡ verifíquelo !).

CONCLUSIÓN: $D_R = [-5 ; 5]$

- RANGO

  * Despejamos la variable **x**:

$$4x^2 + 25y^2 = 100$$

$$\therefore\ x = \pm\sqrt{\frac{100 - 25y^2}{4}}$$

$$\therefore\ x = \pm\frac{\sqrt{100 - 25y^2}}{2}$$

* Como **y** hace parte de un radical par, entonces:

$$\sqrt{100 - 25y^2} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 100 - 25y^2 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow 4 - y^2 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (2 + y)(2 - y) \geq 0$$

La solución de esta inecuación es el intervalo $[-2\,;\,2]$ (¡verifíquelo!).

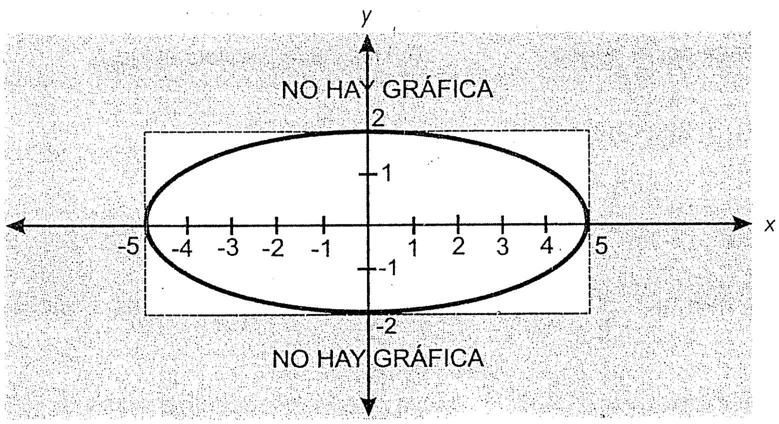
CONCLUSIÓN: $\mathbf{I_R = [-2\,;\,2]}$

- SIGNIFICADO GRÁFICO

Como **x** puede tomar valores sólo en el intervalo $[-5\,;\,5]$, esto significa que a lo largo del eje **x**, es decir de izquierda a derecha del plano cartesiano, la gráfica estará dibujada entre -5 y 5, incluyendo ambos valores.

Como **y** puede tomar valores sólo en el intervalo $[-2\,;\,2]$ esto significa que a lo largo del eje **y,** es decir de abajo hacia arriba del plano cartesiano, la gráfica estará dibujada entre -2 y 2.

La figura siguiente nos muestra que la gráfica de esta relación (una elipse), está dibujada en el intervalo $[-5\,;\,5]$, a lo largo del eje x; y en el intervalo $[-2\,;\,2]$, a lo largo del eje y.



EJERCICIO 1.2

En los ejercicios 1 a 11 marcar la letra correspondiente a la ÚNICA respuesta correcta:

1. La proposición verdadera es:

   a) En toda relación, el dominio coincide siempre con el conjunto de partida.

   b) En toda relación, el rango coincide siempre con el conjunto de llegada.

   c) En toda relación, el conjunto de partida debe ser distinto al conjunto de llegada.

   d) En toda relación, el dominio es un subconjunto del conjunto de partida.

2. El dominio de la relación R: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por la regla $3x^2 - y + 6 = 0$ es:

a) $\mathbb{R}$ b) $\{y / y \geq 6\}$

c) $\{x / x \geq 6\}$ d) $\{x / x \leq -6\}$

3. El rango de la relación del ejercicio 2. es:

a) $\mathbb{R}$ b) $\{y / y \geq 6\}$

c) $\{x / x \geq 6\}$ d) $\{x / x \leq -6\}$

4. La gráfica de la relación $R = \{(x, y) / 4x^2 - 3y + 2 = 0\}$ es:

a) Simétrica con relación al eje **x** b) Simétrica con relación al eje **y**.

c) Simétrica con relación al origen. d) No tiene simetrías.

5. La gráfica de la relación $R = \{(x, y) / x^2 - 3y^2 = 9\}$:

a) Intercepta al eje **x** en (3, 0) y (-3, 0) b) Intercepta al eje **y** en (0, -3) y (0, 3)

c) No intercepta al eje **x** d) No tiene interceptos.

6. La pendiente de la recta $3x - y - 2 = 0$ es:

a) 3 b) - 3

c) $\frac{1}{3}$ d) $-\frac{1}{3}$

7. La ecuación $3x - 2y = 0$ corresponde a:

a) El eje x b) Una recta paralela al eje y.

c) Una recta que pasa por el origen d) Una recta paralela al eje x

8. Los puntos A(-3, -2) y B(5, -2) son colineales con el punto:

a) (9, -2) b) (4, 4)

c) (4, 9) d) (-9, 4)

9. La pendiente de una recta es $-\frac{2}{5}$. La pendiente de una recta perpendicular a ella es:

a) $\frac{3}{5}$ b) $\frac{5}{2}$

c) $-\frac{2}{5}$ d) $-\frac{5}{2}$

10. Los vértices de un triángulo son A(3, 11), B(-9, -5) y C(6, -10). La ecuación del lado $\overline{AB}$ es:

a) $4x - 3y + 21 = 0$ b) $4x + 3y + 21 = 0$

c) $4x - 3y - 21 = 0$ d) $3y - 4x + 21 = 0$

11. La ecuación de un lado de un paralelogramo es $y = 2x - 3$. La pendiente del lado opuesto es:

a) 3 b) -3

c) 2 d) -2

En los ejercicios 12 a 17, para cada relación, se pide:

a) Hallar los interceptos con los ejes.
b) Determinar las simetrías con los ejes y con el origen.
c) Hallar el dominio y el rango.
d) Elaborar una tabla de valores, si lo requiere.
e) Dibujar la gráfica.

12 $R = \{(x, y) / 5x - y = 2\}$

13 $R = \{(x, y) / 3x^2 - 2x + y = 5\}$

14 $R = \{(x, y) / 4x^2 + 5y^2 = 20\}$

15 $R = \{(x, y) / 4y^2 - 3x = -2\}$

16 $R = \{(x, y) / x^2y + y = 2x^2\}$

17 $R = \{(x, y) / 3x^2 - 4y^2 = 12\}$

Los ejercicios 18 a 24 se resuelven con base en la siguiente información: Los vértices de un ΔABC son los puntos A(3, 4), B(7, 0) y C(-3, -2). Se pide:

18 Dibujar el ΔABC y hallar su perímetro.

19 Hallar las ecuaciones de las medianas trazadas desde los vértices A y B.

20 Hallar las coordenadas del baricentro del ΔABC.

21 Hallar las ecuaciones de las mediatrices de los lados $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$.

22 Hallar el circuncentro del ΔABC y la ecuación de la circunferencia circunscrita al ΔABC.

23 Hallar la ecuación de la recta tangente a la circunferencia en el vértice C.

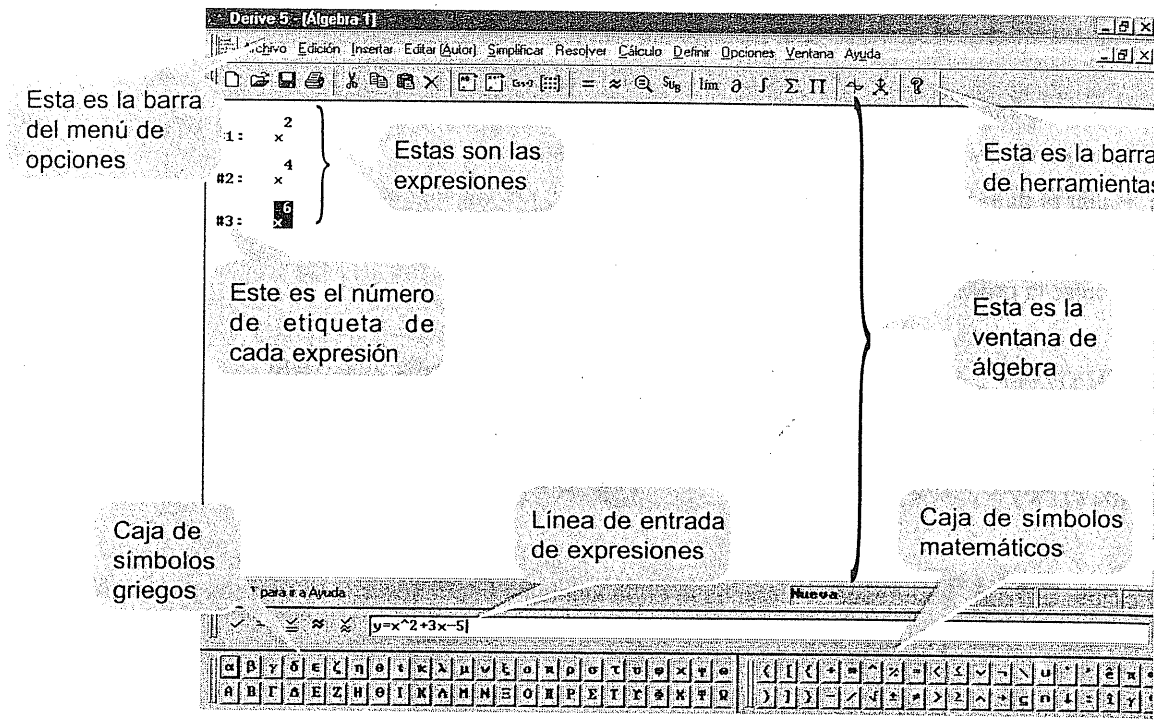
24 Hallar el área del ΔABC.

1.4 UTILIZACIÓN DEL DERIVE

Vamos a recordar algunas de las aplicaciones más comunes del DERIVE en nuestro trabajo con las matemáticas.

1.4.2. El Entorno de Trabajo de DERIVE

- Una vez instalado el programa DERIVE en el computador, se busca el icono del DERIVE, en el lugar donde haya sido instalado y se hace **doble click** sobre él.
- Inmediatamente después de hacer doble click, aparecerá la pantalla de trabajo de DERIVE. Esta pantalla contiene de arriba a abajo las siguientes líneas o zonas:



- Para INGRESAR UNA EXPRESIÓN a la ventana de álgebra, hacemos **click** sobre la LÍNEA DE ENTRADA DE EXPRESIONES, digitamos la expresión dada y luego presionamos la tecla ENTER o el símbolo ✓ ubicado a la izquierda de la línea de entrada de expresiones. De inmediato, DERIVE nos mostrará la expresión digitada en la VENTANA DE ÁLGEBRA, antecedida de un número (**#1, #2, #3, ...**), denominado NÚMERO DE ETIQUETA de la expresión. El programa DERIVE queda listo para aceptar la próxima expresión (no es necesario borrar la expresión previamente resaltada en la línea de entrada de expresiones).

- Para SIMPLIFICAR UNA EXPRESIÓN previamente resaltada en la ventana de álgebra, hacemos **click** sobre el símbolo = ubicado a la izquierda de la línea de entrada de expresiones, u oprimimos la tecla Ctrl y enseguida la tecla ENTER.

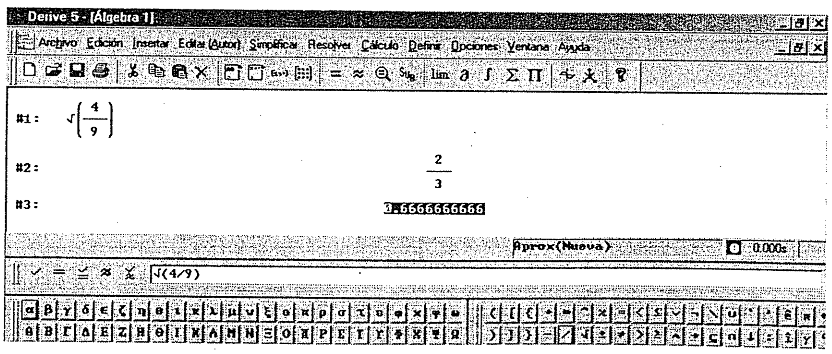
- Para APROXIMAR LA EXPRESIÓN hacemos lo mismo sobre el símbolo ≈ u orpimimos la tecla Shift y enseguida la tecla ENTER.

Ejemplo 1

Introduzcamos la expresión $\sqrt{\frac{4}{9}}$ en la línea de entrada de expresiones; luego, utilicemos las tres combinaciones y comparemos los resultados.

SOLUCIÓN

Teniendo en cuenta las tres instrucciones anteriores, la ventana del DERIVE nos mostrará lo siguiente:



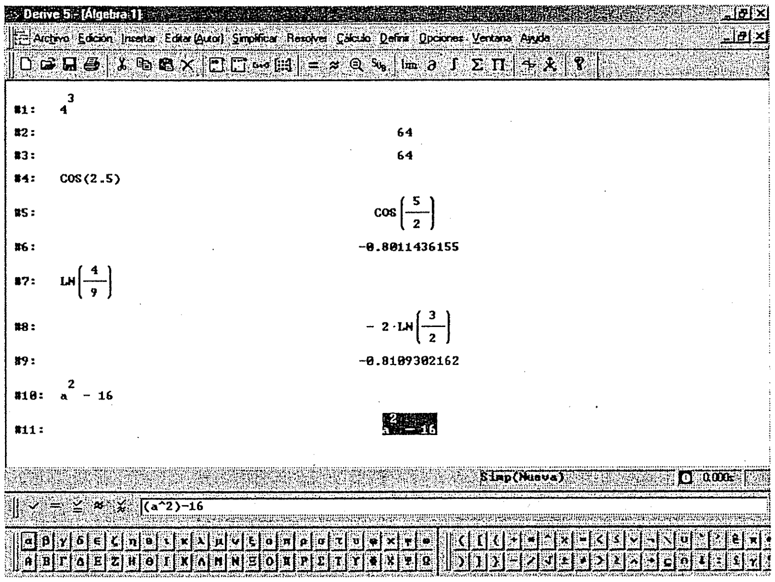
Ejemplo 2

Introducir, simplificar y aproximar las expresiones siguientes:

a) 4^3 b) Cos (2.5) c) $\ln\left(\frac{4}{9}\right)$ d) $a^2 - 16$

SOLUCIÓN

Si aplicamos las instrucciones anteriores a cada expresión obtenemos:



- Para BORRAR UNA EXPRESIÓN previamente resaltada en la ventana de álgebra, hacemos **click** sobre el botón X de la barra de herramientas.
- Para MOVER UNA EXPRESIÓN de una línea a otra de la ventana de álgebra basta arrastrarla con el mouse.
- Para CORREGIR una expresión resaltada en la ventana de álgebra, o para usarla como parte de otra expresión, señalamos con el puntero del mouse la línea de edición y a continuación presionamos la tecla F3. Esto hará que la expresión resaltada caiga a la línea de expresión.
- Para CANCELAR LA SELECCIÓN de un comando presionamos la tecla ESC.

Ejemplo 3

La siguiente tabla nos muestra cómo ingresar algunas expresiones en DERIVE.

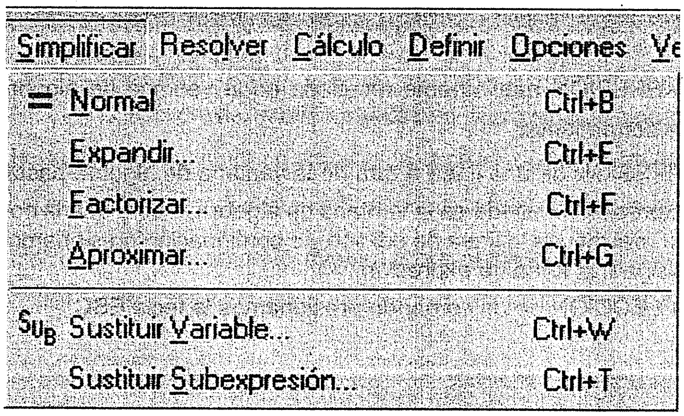
EXPRESIÓN A INGRESAR	INGRESO A DERIVE
$\frac{a^3+3b^2}{5}$	(a^3 + 3*b^2) / 5
$\frac{5w(w-3)^2}{(w+1)^{2w^3}(w-3)^4}$	(5 * w * (w-3) ^2) / ((w+1) ^(2*w^3) * (w-3) ^4)
cos (x-2) + sen (x^2) - tan (x) + 1	cos (x-2) + sin (x^2) - tan (x) + 1
$\lvert x^2-3\rvert$ - ln(x + 3) + 100	abs (x^2 - 3) - ln (x+3) + 100

EXPRESIÓN A INGRESAR	INGRESO A DERIVE
$\dfrac{\sqrt[3]{\frac{4}{9}a+1}+e^{x^2}}{2^{x-3y}}$	((4/9*a+1) ^ (1/3) + exp (x^2)) / (2^(x-3*y))
$\mathrm{Log}_3\,(x^2-5)+\mathrm{sen}(50\pi y)$	log (x^2 - 5,3) + sin (50 * π * y)
$\left(\sqrt[5]{a-2}\right)^{-\infty}$	((a-2) ^(1/5)) ^(- inf)

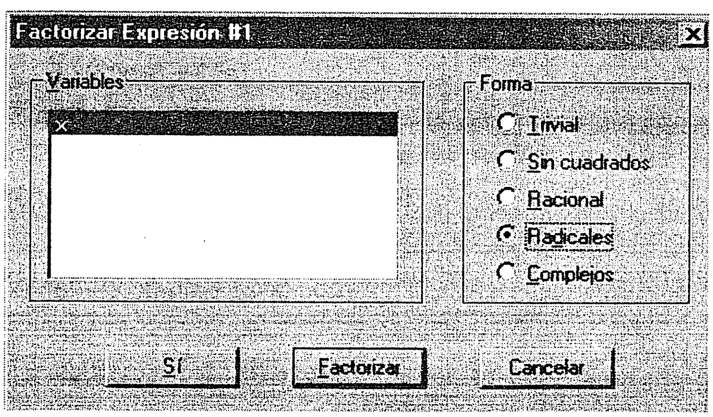
- En caso de presentarse un OLVIDO en la forma de INTRODUCIR ALGUNA EXPRESIÓN, basta con ir a la BARRA DE OPCIONES donde aparece el símbolo AYUDA O HELP. Con éste, en CONTENIDO o en ÍNDICE podemos encontrar cómo escribir la expresión olvidada. Allí también se encuentran respuestas a las preguntas más frecuentes.

1.4.3. Factorización y Solución de Ecuaciones con Derive

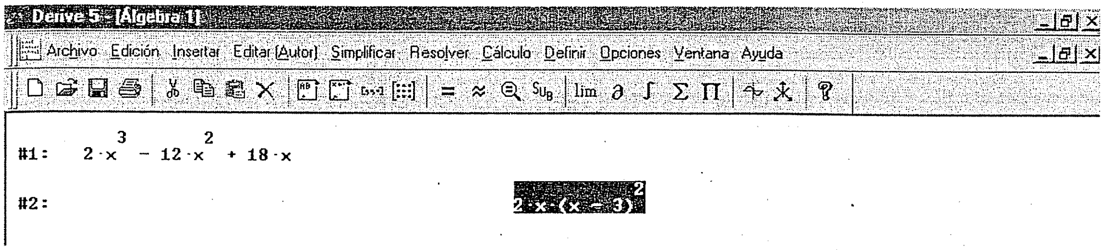
- Para FACTORIZAR, en los reales, una expresión previamente resaltada en la ventana de álgebra (por ejemplo, $2x^3 - 12x^2 + 18x$), hacemos lo siguiente:
  - Vamos al MENÚ DE OPCIONES y hacemos click sobre el comando SIMPLIFICAR.
  - Inmediatamente aparecerá esta pequeña ventana, encima de la ventana del DERIVE:



  - Sobre esta pequeña ventana, señalamos con el mouse la opción FACTORIZAR y hacemos **click.** De inmediato aparece otra ventana. Señalamos la opción RADICALES, hacemos **click** y, luego, en la ventana señalamos, en la parte inferior, la opción FACTORIZAR.



- Finalmente, la ventana de álgebra del DERIVE nos mostrará la expresión factorizada; así:



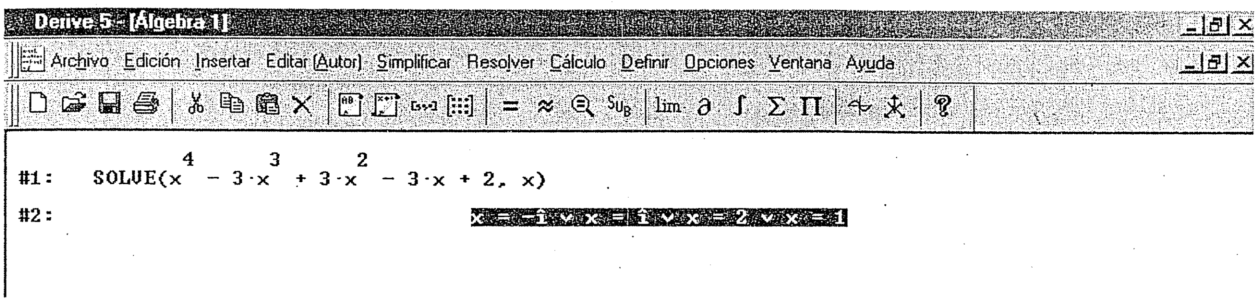
En síntesis, los pasos para factorizar una expresión en los reales son los siguientes:

SIMPLIFICAR click, FACTORIZAR click, RADICALES click, FACTORIZAR click.

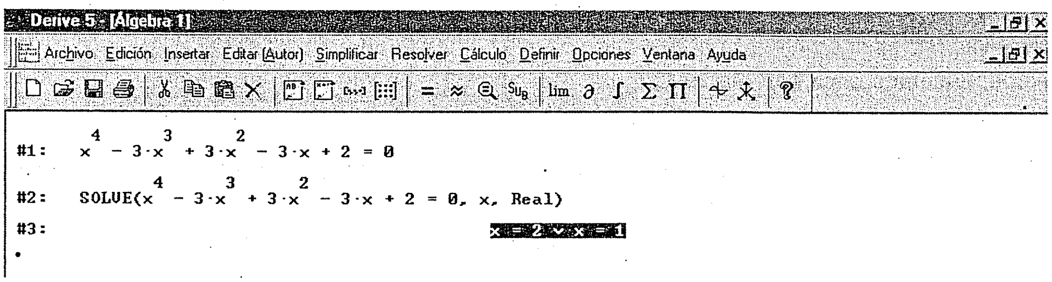
Si queremos factorizar la expresión en los complejos, basta cambiar la opción RADICALES por COMPLEJOS.

- Para RESOLVER UNA ECUACIÓN EN UNA VARIABLE $f(x) = 0$ (por ejemplo, $x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2 = 0$) en los complejos y en forma EXACTA, tenemos dos alternativas:

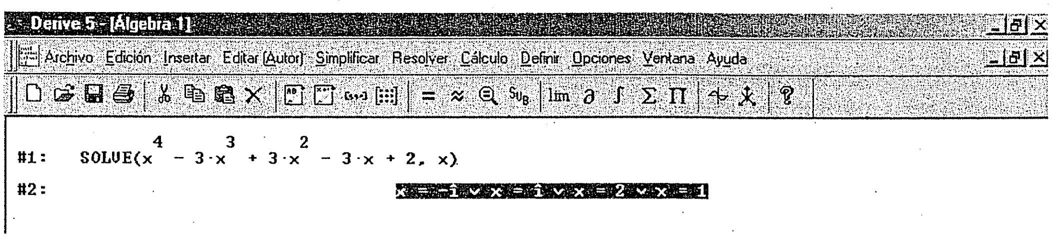
1. Entrar y simplificar la expresión SOLVE (f(x),x); así:
   - Escribimos SOLVE (x^4 - 3*x^3 + 3*x^2 - 3*x + 2 , x)
   - Luego. oprimimos la tecla SHIFT y la tecla ENTER.
   - De inmediato, la ventana de álgebra del DERIVE nos mostrará lo siguiente:



   - Si sólo requerimos las raíces reales, entonces entramos y simplificamos la expresión: SOLVE (f(x),x,real).



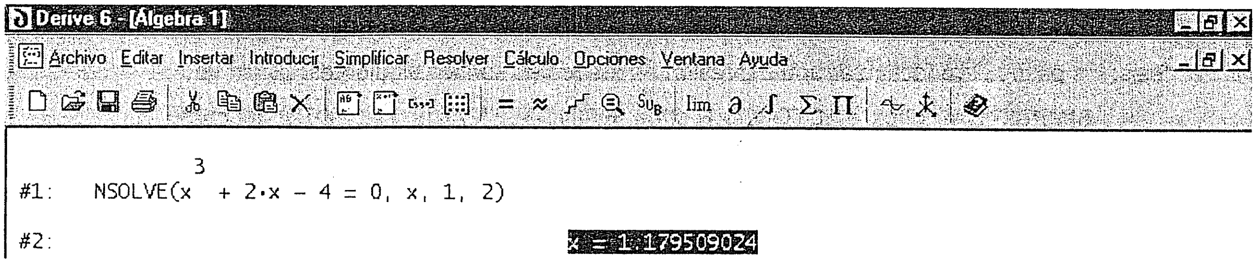
2. Entrar la ecuación $x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2 = 0$ a la VENTANA DE ÁLGEBRA y, luego, hacer sucesivamente click desde el MENU DE OPCIONES en los comandos: RESOLVER click, EXPRESIÓN click, ALGEBRAICO click, COMPLEJO (O REAL) click, RESOLVER. De inmediato aparecerá en la VENTANA DE ÁLGEBRA lo siguiente:



ATENCIÓN

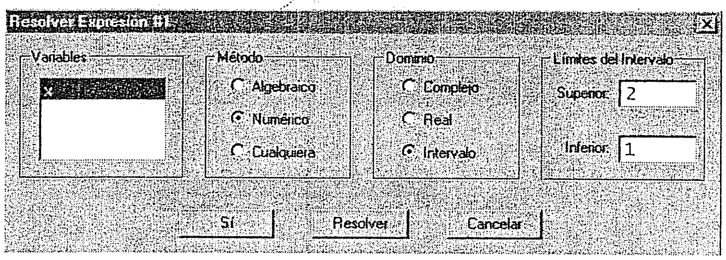
Para hallar en FORMA APROXIMADA una raíz de la ecuación f(x) =0 en [a ; b] (por ejemplo, $x^3+2x-4=0$ en el intervalo [1 ; 2]), entramos y simplificamos la expresión NSOLVE (f(x), x,a,b); así:

NSOLVE (x^3+2x-4, x , 1,2) y luego presionar el botón ☑. De inmediato aparecerá en pantalla:

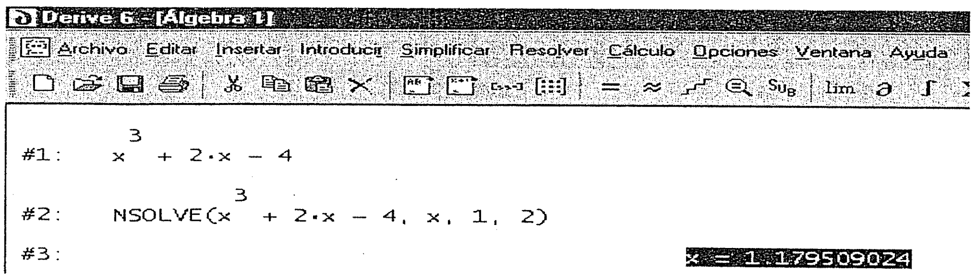


También podemos hacerlo así:

- Ingresamos y seleccionamos la expresión x^3+2x-4
- Presionamos el botón 🔍 (o Resolver + Expresión)
- De inmediato, aparecerá en la pantalla la siguiente ventana:

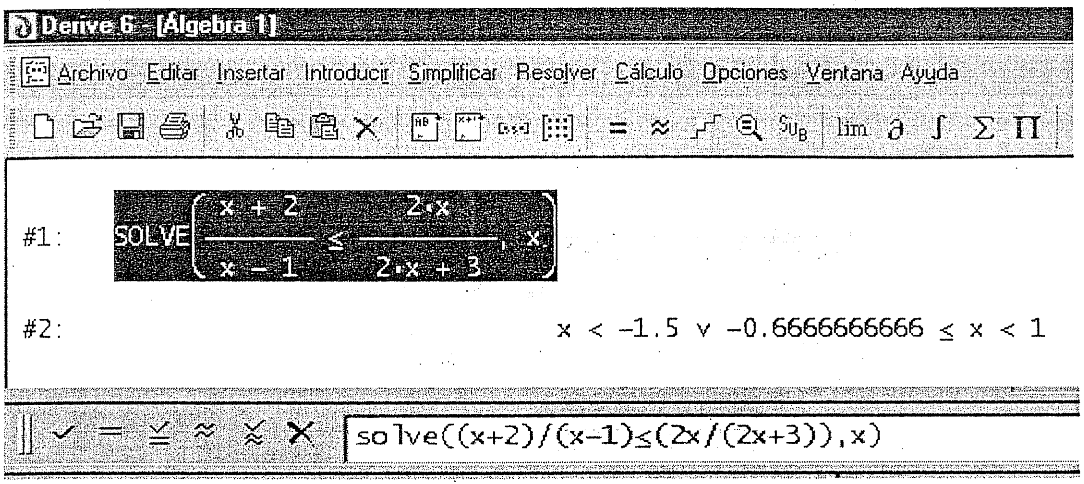


- En esta ventana podemos elegir la variable para la cual deseamos resolver la ecuación (en este caso x).
- También podemos escoger entre método **algebraico, numérico o cualquiera**. Hemos escogido el método **numérico**. El dominio para la búsqueda de la solución puede ser **complejo, real** o un **intervalo;** hemos escogido esta última alternativa y por eso escogimos el límite inferior 1 y el límite superior 2.
- Finalmente, hacemos **click** sobre el rectángulo **Resolver** y de inmediato aparecerá:



- **DERIVE** también es útil para resolver inecuaciones. Al igual que las ecuaciones, podemos resolver inecuaciones de dos maneras. Por ejemplo, para resolver la inecuación $\frac{X+2}{X-1} \leq \frac{2X}{2X+3}$; hacemos lo siguiente:

1. - Escribimos SOLVE ((x+2) / (x - 1) ≤ (2x) / (2x + 3), x)
   - Oprimimos simultáneamente las teclas SHIFT y ENTER.
   - De inmediato, la VENTANA DE ALGEBRA nos mostrará:



2. También podemos hacerlo entrando la expresión a la ventana de álgebra y haciendo luego click desde el MENÚ DE OPCIONES sobre los comandos: RESOLVER click, EXPRESIÓN click, ALGEBRAICO click, REAL click, RESOLVER click.

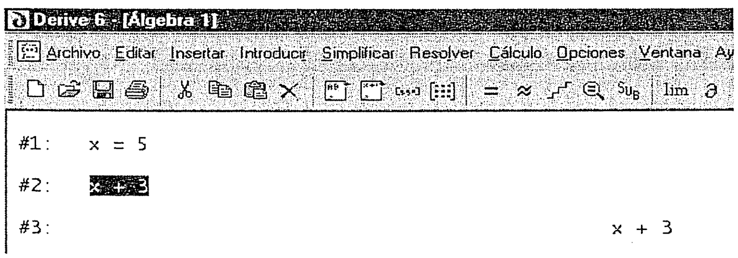
1.4.3. Dibujo de gráficas con DERIVE

DERIVE es un programa bastante bueno para ingresar relaciones, elaborar tablas de valores y dibujar gráficas en dos dimensiones. A continuación, estudiaremos cada uno de estos conceptos.

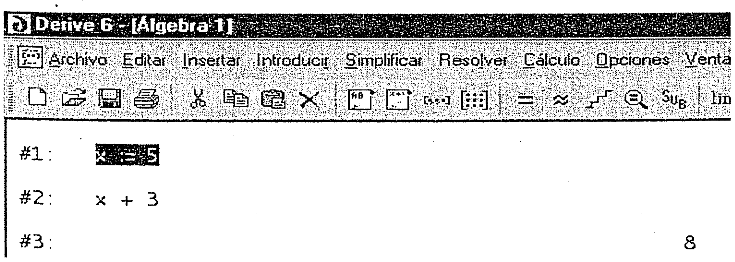
1.4.3.1. Definición de Variables y Constantes

- La expresión x : = 5, asigna el valor 5 a la variable x (no olvidar los dos puntos: antes del =).
- La expresión x : = elimina el último valor asignado a la variable x; es decir, la "limpia".

Ejemplo



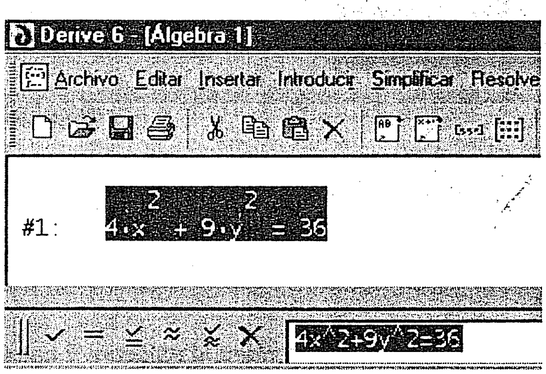
En este caso, el computador no acepta que x tome el valor de 5 y, por eso, x + 3 es x + 3 y no 8.



El hecho de escribir x : = 5 esta indicando que todo lo que sea x valdrá 5 y por ello x + 3 es igual a 8.

1.4.3.2 Ingreso de Relaciones

- Para ingresar una relación como $4x^2 + 9y^2 = 36$ basta escribirla con el teclado y luego presionar ENTER para ponerla en pantalla. De inmediato aparecerá:



1.4.3.3 Ingreso de Vectores y Elaboración de Tablas de Valores

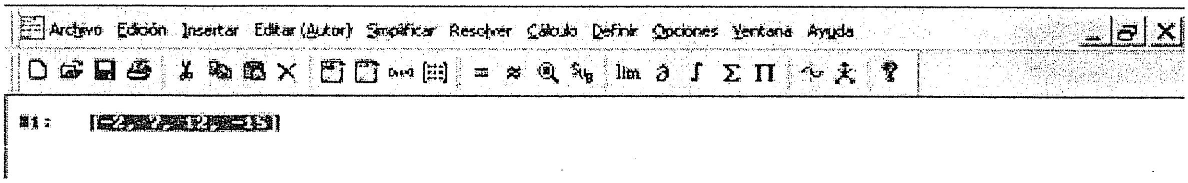
- Un vector es un arreglo de la forma [a_1, a_2, a_3,...a_n]

Ejemplo 1

Ingresemos a través de DERIVE el vector [-2, 7, 12, -15]

SOLUCIÓN

Escribimos [-2, 7, 12, -15] y presionamos ENTER. De inmediato aparecerá:



Ejemplo 2

Obtengamos la familia de curvas de la forma $y = ax^2 + 1$, para los valores $-5 \leq a \leq 20$ y $a \in Z$.

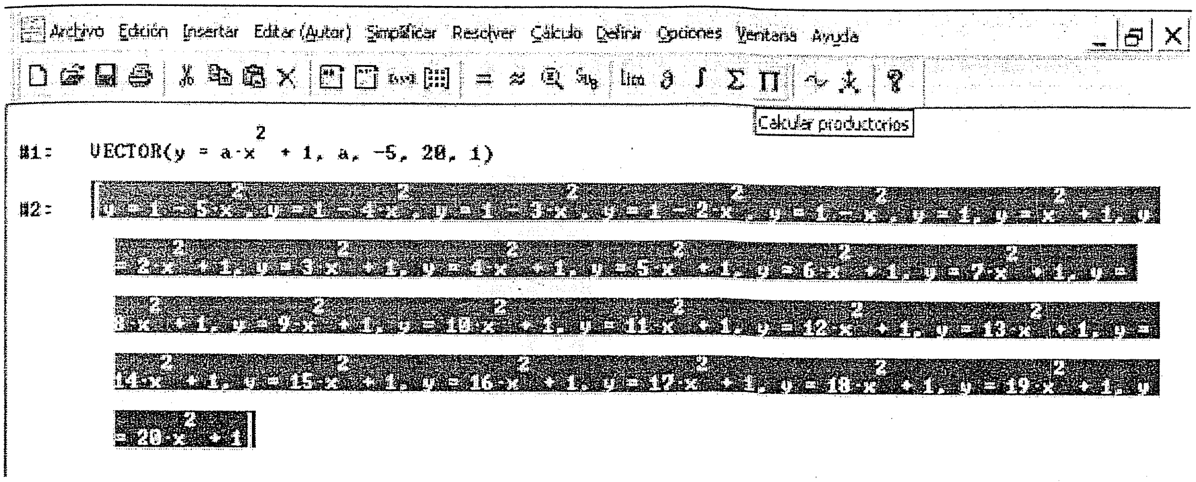
SOLUCIÓN

- En este caso emplearemos el comando **vector.**
- Ingresamos en la línea de entrada de expresiones:

vector (y = a * x ^ 2 + 1, a, -5, 20, 1)

luego, oprimimos sucesivamente las teclas Ctrl y ENTER y aparecerá la familia que estábamos buscando, en forma de vactor así:

$$[y = -5x^2 + 1, y = -4x^2 + 1, y = -3x^2 + 1, y = -2x^2 + 1, \ldots , y = 20x^2 + 1]$$



- En este caso, hemos empleado el comando **vector**; así:

vector (función, variable, valor INICIO, valor FIN, incremento)

Ejemplo 3

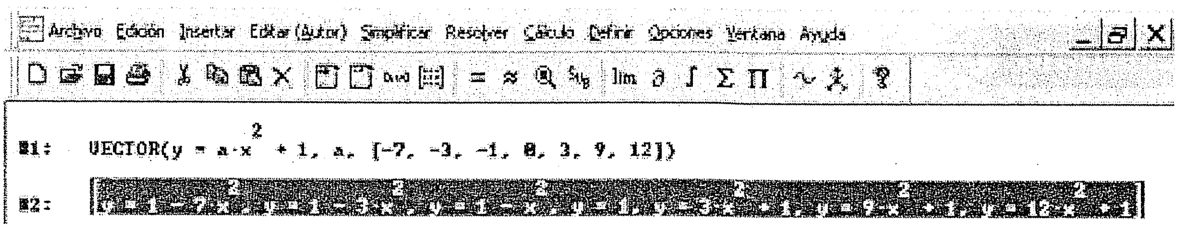
Obtengamos la familia de curvas de la forma $y = ax^2 + 1$, para los valores de a = -7, -3, -1, 0, 3, 9, 12.

SOLUCIÓN

- Como los valores de a no siguen ninguna secuencia, entonces debemos utilizar una variación del comando vector, ingresando en la línea de entrada de expresiones:

vector (y = a * x ^2 + 1, a, [-7, -3, -1, 0, 3, 9, 12])

- Obtendremos el resultado deseado presionando las teclas Ctrl y ENTER.



- En este caso, hemos utilizado la versión:

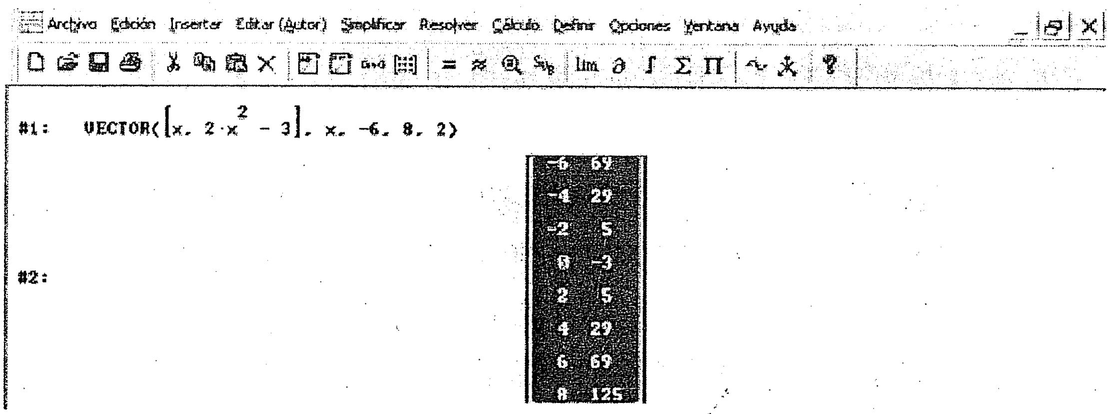
vector (función, variable, [valor 1, valor 2, ... , valor n])

Ejemplo 4

- El comando **vector** también nos permite crear TABLAS DE VALORES. Si, por ejemplo, queremos una tabla de valores de la función $y = 2x^2 - 3$, para valores de x entre -6 y 8 y de 2 en 2, escribimos lo siguiente:

vector ([x, 2 * x ^ 2 - 3], x, -6, 8, 2)

luego oprimimos Ctrl y ENTER y aparecerá en pantalla:



- El diseño general para producir tablas de valores es el siguiente:

vector ([variable, función], variable, valor INICIAL, valor FINAL, incremento)

Ejemplo 5

- Elaboremos una tabla de valores para la misma función del ejemplo anterior, pero para los siguientes valores de la variable: -8, -3, -1, 0, 4, 9, 12.

SOLUCIÓN

Ingresamos:

vector ([x, 2 * x ^ 2 - 3], x, [-8, -3, -1, 0, 4, 9, 12])

y luego oprimimos las teclas Ctrl y ENTER.

1.4.3.4 Dibujo de gráficas en dos dimensiones

Los siguientes ejemplos nos recordarán cómo dibujar gráficas de relaciones y funciones en dos dimensiones.

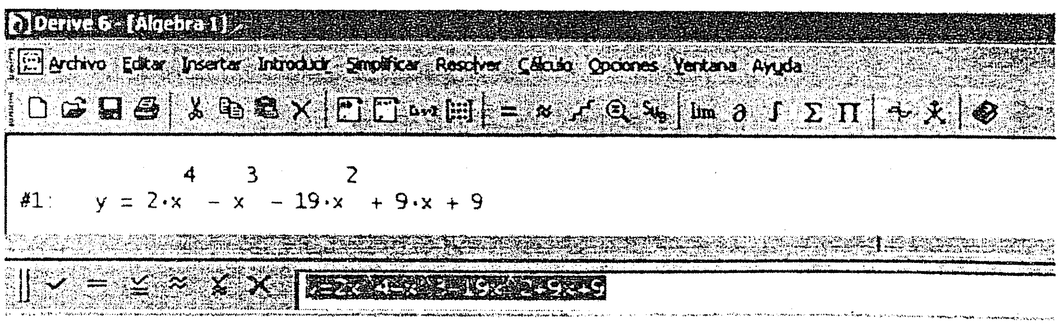
Ejemplo 1

Dibujemos la gráfica de $y = 2x^4 - x^3 - 19x^2 + 9x + 9$ para valores de $x \in [-6 ; 6]$ con 12 divisiones del eje, y para valores de $y \in [-50 ; 40]$ con 8 divisiones del eje.

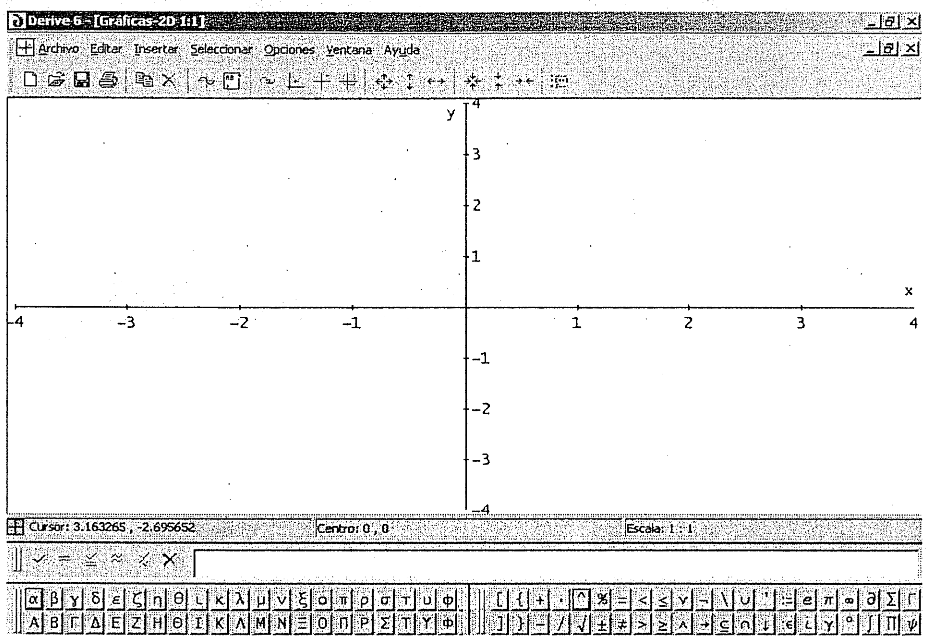
SOLUCIÓN

- En general, para dibujar la gráfica de una función hacemos lo siguiente:

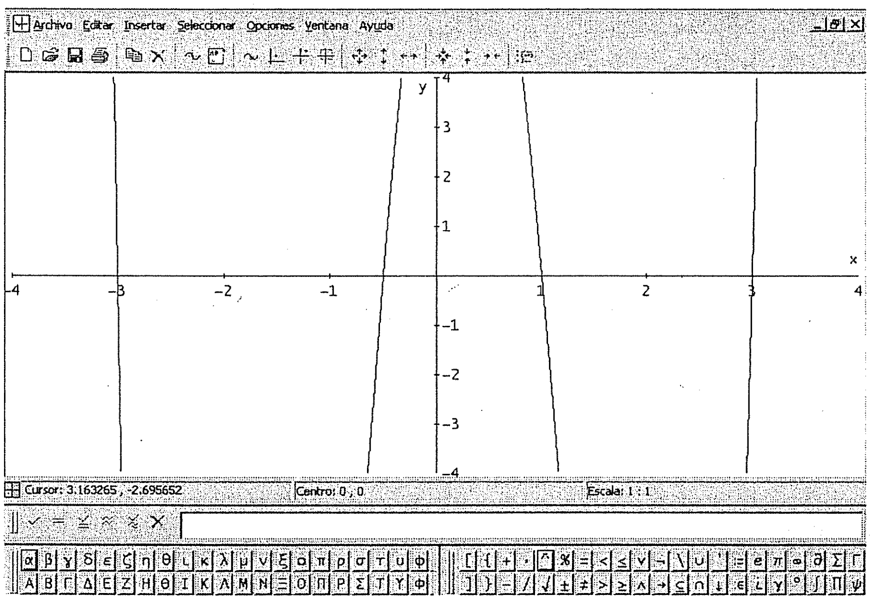
 1. Ingresamos $y=2x^4 - x^3 - 19x^2 + 9x + 9$ a la ventana de álgebra, la resaltamos y hacemos **click** sobre el comando ✓ .



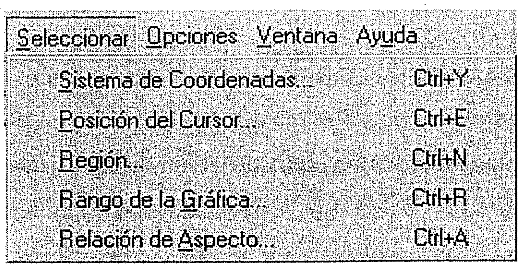
2. Abrimos la ventana **2D-plot** haciendo **click** sobre el botón ubicado en la **BARRA DE HERRAMIENTAS.** De inmediato aparecerá una ventrana de gráficas en dos dimensiones (plano cartesiano), en la cual la barra de herramientas ha cambiado.



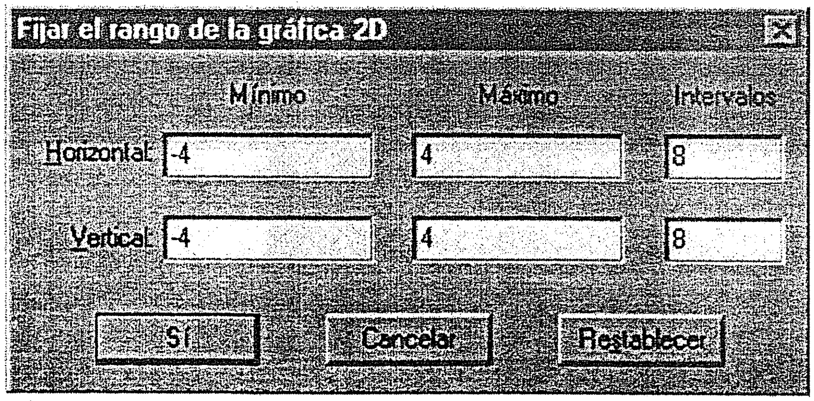
3. Hacemos de nuevo **click** sobre el botón , que ahora tiene una posición diferente y aparecerá la gráfica deseada.



4. Notemos que la gráfica no aparece completa en la pantalla. Esto se debe a que los ejes coordenados han sido graduados automáticamente por DERIVE. Pero, como queremos graduar el eje x entre -6 y 6 con 12 divisiones, y el eje y entre -50 y 40 con 8 divisiones, entonces hacemos **click** sobre el comando **SELECCIONAR**; de inmediato aparecerá el siguiente menú de opciones:

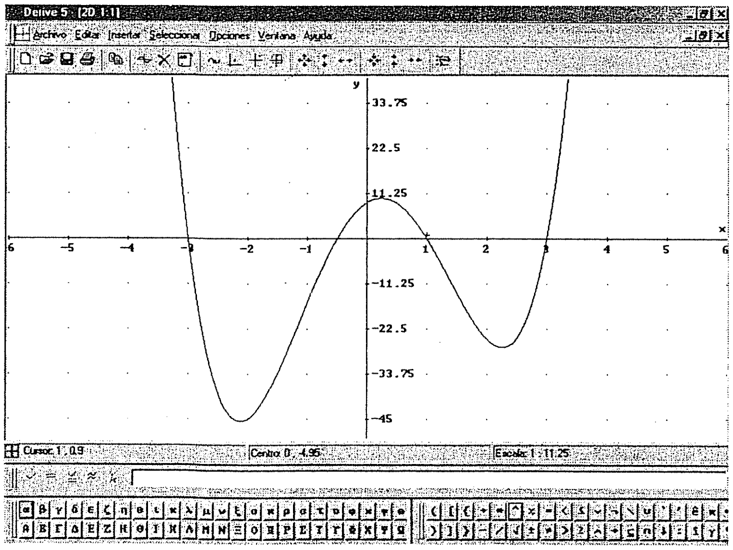


Hacemos **click** sobre el comando **RANGO DE LA GRÁFICA** y aparecerá el siguiente cuadro:



Se ingresa el mínimo horizontal llevando el puntero del mouse hasta el extremo izquierdo de la caja, escribiendo el valor mínimo (-6) y haciendo **click.** El mínimo que había antes se borrará oprimiendo la tecla **Supr.** Los demás valores se ingresan en la misma forma.

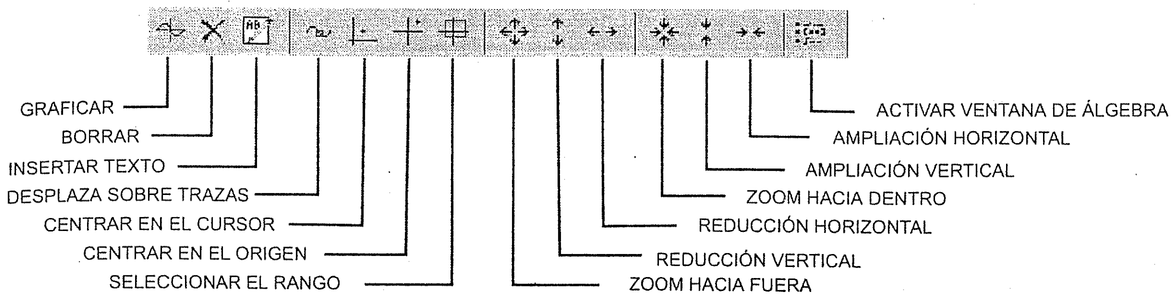
Después de hacer lo que acabamos de indicar, hacemos **click** sobre [Sí] en el cuadro y de inmediato aparecerá:



ATENCIÓN

Otra forma de ingresar los datos es oprimiendo la tecla ←→, anotando al mínimo y oprimiendo sucesivamente esta tecla hasta tener toda la información. Finalmente llevamos el puntero del mouse hasta el cuadro [Sí] y hacemos click. De inmediato aparecerá la gráfica solicitada.

- Para BORRAR la gráfica obtenida hacemos click sobre el botón ✕, ubicado en la BARRA DE HERRAMIENTAS.
- Para REGRESAR A LA VENTANA DE ÁLGEBRA hacemos click sobre el último botón de la BARRA DE HERRAMIENTAS:
- Antes de analizar otros ejemplos recordemos para qué sirven cada uno de los botones de la ventana para graficar en dos dimensiones.



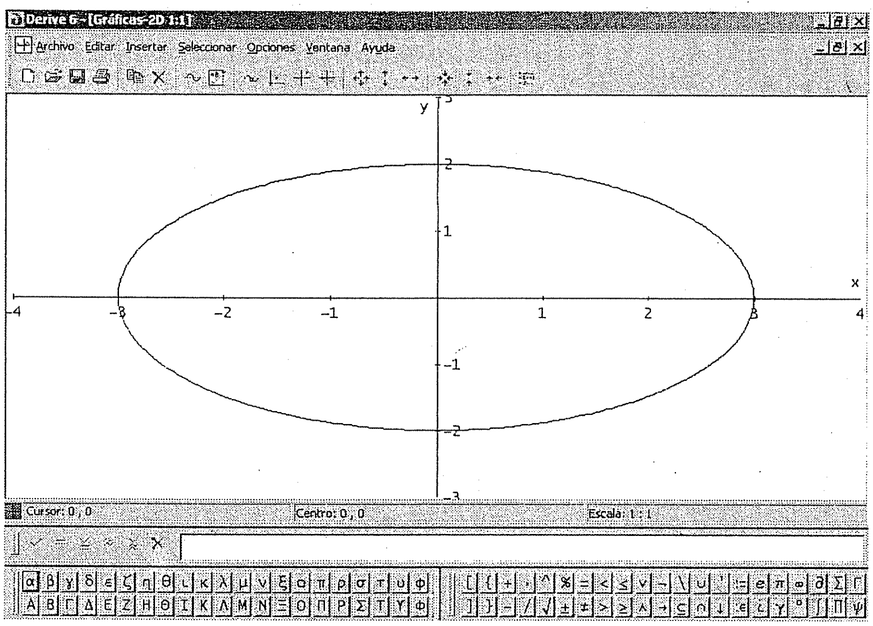
Ejemplo 2

Dibujemos la gráfica de $4x^2 + 9y^2 = 36$

SOLUCIÓN

Tenemos el siguiente proceso:

1. Ingresamos $4x^2 + 9y^2 = 36$ a la ventana de álgebra, la resaltamos y hacemos click sobre el comando .
2. Abrimos la ventana para dibujar gráficas en dos dimensiones haciendo click sobre el botón .
3. De inmediato aparece el plano cartesiano, hacemos de nuevo click sobre el comando y de inmediato aparecerá la gráfica de la curva; así:

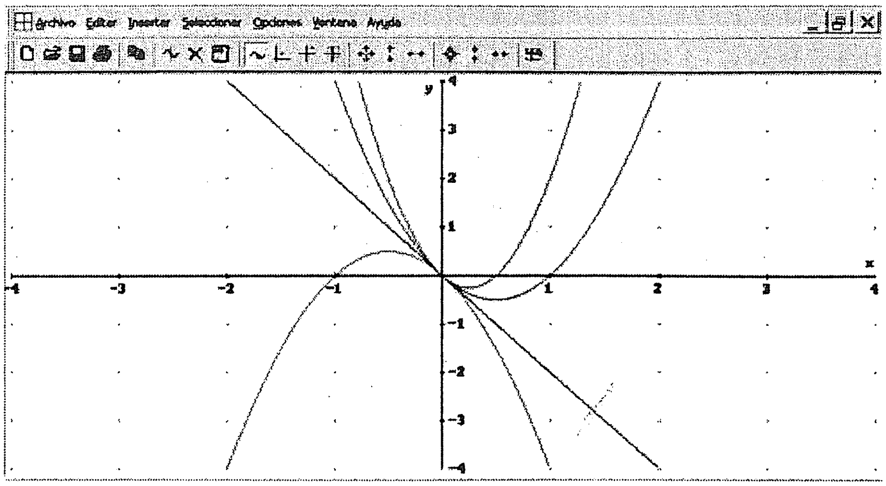


Ejemplo 3

Dibujemos la gráfica de la familia de curvas definida por $y = ax^2 - 2x$, para a = -2, 0, 2, 4.

SOLUCIÓN

- Ingresamos en DERIVE: vector (a * x ^ 2 - 2 * x, a, -2, 4 , 2)
- A continuación hacemos clic sobre el botón . De inmediato, quedan registrados la expresión que se quiere dibujar y el vector con las funciones obtenidas para cada valor de a.
- Luego, vamos a y repetimos el proceso anterior.



EJERCICIO 1.3

En los ejercicios 1 a 5 usar DERIVE para simplificar cada expresión:

1. $$\frac{a^4-b^4}{a^3+b^3}\left(1+\frac{ab}{(a-b)^2}\right)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^{-1}$$

2. $$\left(\frac{x^{-2}y^{-3}}{x^3y^2}\right)\left(\frac{\left(y^3x^{-3}\right)^{-3}}{x^2y^3}\right)^{-2}$$

3. $$\frac{\dfrac{(a+b)^2+(a-b)^2}{b-a}-(a+b)}{\dfrac{1}{b-a}-\dfrac{1}{a+b}}\cdot\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{(a+b)^3+(b-a)^3}$$

4. $$\frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}}$$

5. $$\frac{\left(e^x+e^{-x}\right)^2-\left(e^x-e^{-x}\right)^2}{\left(e^x+e^{-x}\right)^2\sqrt{1-\left(\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)^2}}$$

En los ejercicios 6 a 15 usar DERIVE para factorizar cada uno de los polinomios dados:

$x^5-3x^4-15x^3+35x^2+54x-72$

7. $3ax-bx-3ay+by$

8. $x^5-2x^4-10x^3+20x^2+9x-18$

9. $204-29x^2+x^4$

10. m^9-27n^{12}

11. $a^3+2ab+b^2+a+b$

12. $6st^2-9s^2t-2t^3+27s^3$

13. $48x^4-52x^3+13x-3$

14. $6x^2-31xy+35y^2$

15. $a^{2n+1}+a^{n+2}+a^{n+1}$, con $n\in Z$

En los ejercicios 16 a 18 usar DERIVE para resolver, en los reales, las siguientes ecuaciones:

10. $x^4-3x^3+3x^2-3x+2=0$

17. $3x^3+3x^2-12x+2=0$

18. $x^3-3x+1=0$

En los ejercicios 19 a 22 usar DERIVE para dibujar las gráficas de las relaciones dadas:

7. $R=\{(x,y)\,/\,5y^2-4x^2=20\}$

8. $R=\{(x,y)\,/\,4x^2-y+2x=6\}$

9. $R=\{(x,y)\,/\,y^2+9x^2=9\}$

10. $R=\{(x,y)\,/\,y^2-3x+5y=8\}$

Prepárate para las Pruebas ICFES

1. Competencia: Interpretativa; Ámbito: Conteo.

   Un accionista compró acciones a \$180 cada una. Al día siguiente el precio bajó \$5. En los días siguientes subieron \$8, bajaron \$12 y volvieron a subir \$15. En ese momento, el accionista vendió sus papeles. El precio de venta de cada acción fue:

   a) \$10 más que el precio inicial. b) Igual que el precio del tercer día.
   c) \$10 más que el precio inicial d) Superior en \$6 al precio inicial.

Los ejercicios 2. y 3. se responden con base en la siguiente información:

Los interceptos con el eje x o raíces de una función cuadrática son –2 y 2.

2. Competencia: Argumentativa; Ámbito: Variación.

   Si la ordenada en el origen es negativa, entonces es falso que:

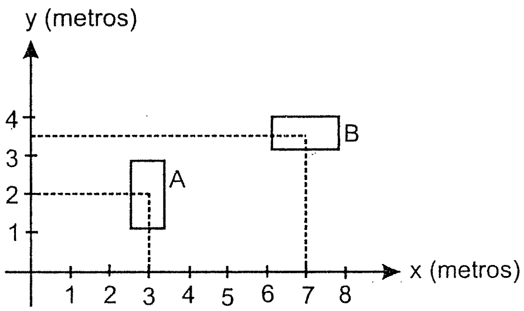
   a) Es negativa en el intervalo (-2 ; 2) b) Tiene un máximo en el punto (0 ; -4)
   c) Tiene un mínimo en el punto (0; -4) d) Es positiva en $(-\infty\ ; -2) \cup (2\ ; +\infty)$

3. Competencia: Propositiva; Ámbito: Variación.

   Su ecuación puede ser:

   a) $y = x^2 + 4$ b) $2x - 2y = 0$ c) $y + 4 = x^2$ d) $y + x^2 = 4$

Los ejercicios 4. y 5. se responden según el siguiente dibujo:



1. Competencia: Interpretativa; Ámbito: Medición.

   Al llevar el rectángulo de la posición A a la posición B realizamos:

   a) Sólo una rotación b) Sólo una traslación paralela al eje x.
   c) Sólo una traslación paralela al eje y d) Una traslación no paralela a los ejes y una rotación.

2. Competencia: Interpretativa; Ámbito: Medición.

   En la transformación de la posición A a la posición B ocurrió que el rectángulo:

   a) Se trasladó 5.25 metros y se rotó 90^0 en sentido horario
   b) Se rotó 90^0 en sentido horario y se trasladó 4 metros
   c) Se trasladó $\sqrt{18.25}$ metros y se rotó 90^0 en sentido horario
   d) Se rotó 180^0 en sentido antihorario y se trasladó 1.5 metros.

Núcleo Temático

Núcleo Temático 2

VALOR ABSOLUTO

Se desarrolla para alcanzar los siguientes logros generales

MANEJO DE CONCEPTOS

como

- Valor Absoluto de un Número Real.
- Propiedades del Valor Absoluto.
- La Desigualdad Triangular.
- La Propiedad $\sqrt{x^2} = |x|$

para desarrollar competencia

ARGUMENTATIVA

DESTREZA OPERATIVA

a través de

- Resolver ecuaciones con términos que contienen Valor Absoluto.
- Resolver inecuaciones con términos que contienen Valor Absoluto.

para desarrollar competencia

PROPOSITIVA

DIBUJO DE GRÁFICAS

de

- Relaciones Reales.
- Intervalos de Números Reales.

como

- Representación de Soluciones de Inecuaciones con Valor Absoluto.
- Líneas Rectas y Circunferencias.

a partir de

- Elementos propios de la Línea Recta como: Dirección, Pendiente e interceptos con los Ejes.
- Elementos propios de la Circunferencia: Centro y Radio.

para desarrollar competencia

INTERPRETATIVA

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

relativos a

- Lugares Geométricos.
- La Línea Recta.
- La Circunferencia.

para desarrollar competencias

- ARGUMENTATIVA
- PROPOSITIVA
- INTERPRETATIVA

LOS HOMBRES DEL CÁLCULO (2)
GALILEO GALILEI

Galileo Galilei, nació en Pisa, Italia, en 1564 y fue profesor en las universidades de Pisa y Padua. No fue un matemático, sino más bien, físico y astrónomo. Investigó las leyes del movimiento del péndulo y de los cuerpos en caída libre: se cuenta que, para ello, arrojaba piedrecitas desde la torre de Pisa, y medía, con rudimentarios cronómetros, el tiempo de caída.

Perfeccionó el telescopio, y con él escrutó los cielos: De estas observaciones concluyó, mejor corroboró, puesto que ya Copérnico lo había dicho, que el sol y no la tierra era el centro del sistema solar. Su libro **Diálogo sobre los dos grandes sistemas del mundo** (1632) le valió la condena por parte de la Inquisición: fue obligado a retractarse públicamente, lo cual lo salvó de la hoguera de los « herejes», pero no de la cárcel, en la cual murió en 1642.

Se cuenta que, terminada la lectura pública de su retractación, en la cual declaraba que la tierra no se movía, añadió en voz baja: «y sin embargo se mueve».

COMPRENSIÓN DE LECTURA

EXPLICACIÓN: Lea, con mucha atención, el anterior texto y luego encierre, en un círculo, la letra que corresponda a la respuesta correcta.

1. En el fragmento anterior se afirma, de Galileo, que:
   a. No fue original porque repitió las teorías de Copérnico.
   b. Su miedo a la muerte le llevó a retractarse de sus teorías científicas.
   c. Se destacó en los campos de la física, la astronomía y las matemáticas.
   d. Fue a la cárcel porque a pesar de abjurar siguió sosteniendo que la tierra se movía.

2. Los siguientes trabajos y actividades científicas corresponden a Galileo, menos:
   a. Estudió los astros.
   b. Empleó métodos primitivos en sus observaciones y experimentos.
   c. Perfeccionó un aparato para observar los astros.
   d. Sus estudios sobre el péndulo dieron origen al reloj de pared.

3. De la lectura anterior se puede concluir, perfectamente que:
   a. La Iglesia de esa época fue muy tolerante con algunos herejes.
   b. Galileo fue un astrónomo que apostató de la religión católica.
   c. La Iglesia siempre ha perseguido a los hombres de Ciencia.
   d. La Iglesia de la época chocaba fuertemente con el conocimiento científico.

4. El escrito leído puede catalogarse como:
a. Argumentativo.
b. Descriptivo.
c. Expositivo.
d. Épico.

5. De acuerdo al fragmento anterior, Galileo fue condenado por la Inquisición:
a. Por sus inventos y descubrimientos.
b. Por su teoría geocéntrica respecto del sistema solar.
c. Por su obstinación al no retractarse, del todo, de las teorías que pregonaba.
d. Por sus escritos sobre el centro del sistema solar.

2.1 EL CONCEPTO DE VALOR ABSOLUTO

El concepto de valor absoluto no es nuevo para nosotros, pues ya fue trabajado en los grados 7 y 8 cuando abordamos el trabajo con números enteros y números reales.
En esta unidad vamos a desarrollarlo con más detalle, estableceremos sus principales propiedades y describiremos algunas de las aplicaciones que tiene en el Cálculo.

Experiencia

- A la máquina de la figura 2 - 1 le hemos suministrado materia prima: NÚMEROS REALES. Observemos en qué transforma la máquina esta materia prima:

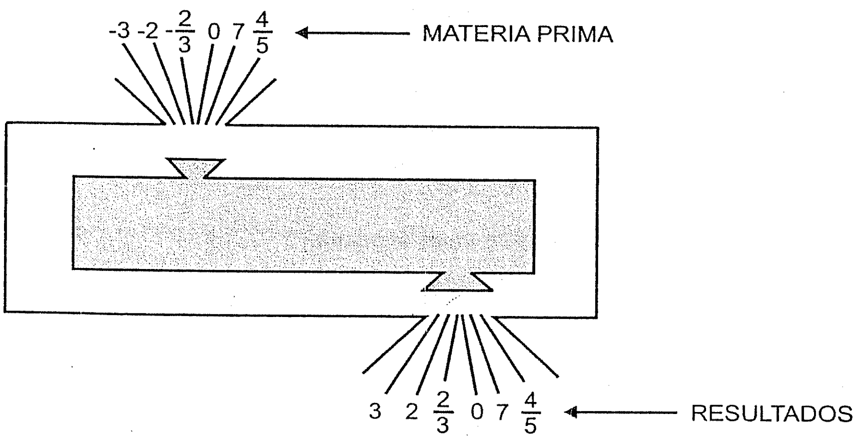


Figura 2-1

- Como vemos la máquina ha hecho el siguiente trabajo.

* a -3 lo transformó en 3	* a 0 lo dejó igual: 0
* a -2 lo transformó en 2	* a 7 lo dejó igual: 7
* a $-\frac{2}{3}$ lo transformó en $\frac{2}{3}$	* a $\frac{4}{5}$ lo dejó igual: $\frac{4}{5}$

- ¿ En qué transformó la máquina cada número negativo ?
- ¿ En qué transformó la máquina al 0 y a cada número positivo ?.
- Como este proceso se cumple para todos los números reales, podemos afirmar que:
  * Cuando la materia prima es un número real negativo, el resultado es su inverso aditivo.
  * Cuando la materia prima es un número real positivo o cero, el resultado es el mismo número.
- La máquina que realiza todo este proceso transformador se denomina VALOR ABSOLUTO.

Ejemplo 1

Obtengamos los resultados cuando a los elementos del conjunto A = {-5, -3, -1, 0, 4, 8, 9} le aplicamos el operador VALOR ABSOLUTO.

SOLUCIÓN

- Observemos el siguiente diagrama, figura 2 - 2:

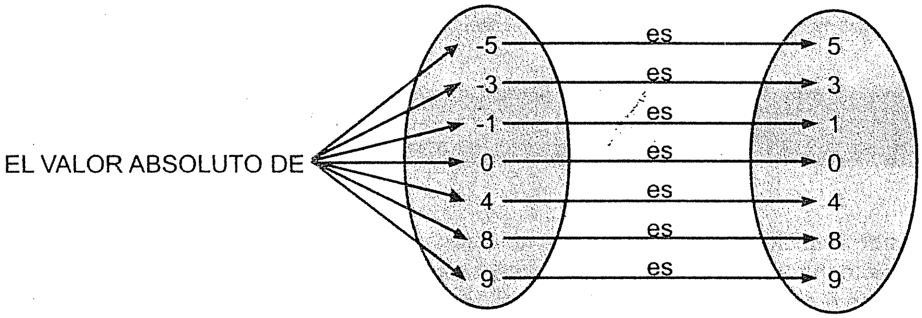


Figura 2 - 2

- La transformación ilustrada en el anterior diagrama podemos escribirlo también así:

$$
\begin{array}{lcl}
-5 & \xrightarrow{\text{lo transforma en}} & -(-5) = 5 \\
-3 & \xrightarrow{\text{lo transforma en}} & -(-3) = 3 \\
-1 & \xrightarrow{\text{lo transforma en}} & -(-1) = 1 \\
0 & \xrightarrow{\text{lo transforma en}} & 0 \\
4 & \xrightarrow{\text{lo transforma en}} & 4 \\
8 & \xrightarrow{\text{lo transforma en}} & 8 \\
9 & \xrightarrow{\text{lo transforma en}} & 9
\end{array}
$$

- A continuación presentamos la definición de valor absoluto.

DEFINICIÓN DE VALOR ABSOLUTO

EL VALOR ABSOLUTO de un número real x, el cual simbolizamos por $|x|$, se define así:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- Según esta definición:

  * Si **x** es un número negativo entonces el valor absoluto de **x** es el inverso aditivo de **x**: **-x**. Observemos que al ser **x** negativo, entonces **-x** es positivo. Por ejemplo:

$$|-7| = -(-7) = 7$$

  * Si **x** es un número positivo o cero entonces el valor absoluto de **x** es el mismo número **x**. Por ejemplo:

$$|5| = 5$$

$$|0| = 0$$

ıos el

En consecuencia, el valor absoluto de cualquier número real es siempre positivo o cero; es decir, para todo $x \in \mathbb{R}$ se cumple que $|x| \geq 0$

Ejemplo 2

a) $|8| = 8$

b) $|-6| = -(-6) = 6$

c) $|-6-4| = |-10| = -(-10) = 10$

d) $\dfrac{|-15| \cdot |3|}{|-5|} = \dfrac{15 \cdot 3}{5} = \dfrac{45}{5} = 9$

e) $|8-3| \cdot |9-15| = |5| \cdot |-6| = 5 \cdot 6 = 30$

f) $$\begin{aligned} |3-12| - |-5+8| + |15-2| &= |-9| - |3| + |13| \\ &= -(-9) - 3 + 13 \\ &= 9 - 3 + 13 \\ &= 19 \end{aligned}$$

Ejemplo 3

Hallemos una expresión equivalente a $|4-3x|$ que no tenga las barras de valor absoluto.

SOLUCIÓN

- La clave para eliminar el valor absoluto de una expresión la encontramos en la definición de este operador. Recordemos que la definición de valor absoluto consta de tres partes: una, cuando el número es positivo; otro, cuando el número es cero y, la tercera, cuando el número es negativo.

- Entonces, apliquemos la definición de valor absoluto a la expresión $|4-3x|$; así:

$$|4-3x| = \begin{cases} 4-3x & \text{si } 4-3x > 0 \\ 0 & \text{si } 4-3x = 0 \\ -(4-3x) & \text{si } 4-3x < 0 \end{cases}$$

$$\therefore \ |4-3x| = \begin{cases} 4-3x & \text{si } 3x < 4 \\ 0 & \text{si } 3x = 4 \\ 3x-4 & \text{si } 3x > 4 \end{cases}$$

$$\therefore \ |4-3x| = \begin{cases} 4-3x & \text{si } x < \dfrac{4}{3} \\ 0 & \text{si } x = \dfrac{4}{3} \\ 3x-4 & \text{si } x > \dfrac{4}{3} \end{cases}$$

emos

- Notemos que en el lado derecho de esta última igualdad aparece una expresión equivalente a $|4-3x|$, pero de la cual han desaparecido las barras de valor absoluto.

ηplo:

- **CONCLUSIÓN**

$$|4 - 3x| = \begin{cases} 4 - 3x & \text{si } x < \frac{4}{3} \\ 0 & \text{si } x = \frac{4}{3} \\ 4 - x^2 & \text{si } x > \frac{4}{3} \end{cases}$$

Ejemplo 4

Hallemos una expresión equivalente a $\left|x^2 - 4\right|$ que carezca de las barras de valor absoluto.

SOLUCIÓN

- Apliquemos la definición de valor absoluto a la expresión dada:

$$\left|x^2 - 4\right| = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x^2 - 4 > 0 \\ x^2 - 4 & \text{si } x^2 - 4 = 0 \\ -(x^2 - 4) & \text{si } x^2 - 4 < 0 \end{cases}$$

- A continuación, resolvemos las inecuaciones $x^2 - 4 > 0$ y $x^2 - 4 < 0$, y la ecuación $x^2 - 4 = 0$:

$$\begin{aligned} x^2 - 4 > 0 &\Rightarrow (x + 2)(x - 2) > 0 \\ &\Rightarrow x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty) \\ x^2 - 4 = 0 &\Rightarrow (x + 2)(x - 2) = 0 \\ &\Rightarrow x = -2 \text{ ó } x = 2 \\ x^2 - 4 < 0 &\Rightarrow (x + 2)(x - 2) < 0 \\ &\Rightarrow x \in (-2; 2) \end{aligned}$$

- Por lo tanto:

$$|x^2 - 4| = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x \in (-\infty ; -2) \cup (2; +\infty) \\ 0 & \text{si } x = -2 \text{ ó } x = 2 \\ 4 - x^2 & \text{si } x \in (-2 ; 2) \end{cases}$$

ATENCIÓN

1. Si analizamos con cuidado los dos ejemplos anteriores, fácilmente comprobamos que hay un número clave que aparece en los distintos tramos que se forman al aplicar la definición de valor absoluto: ese número es aquel para el cual la expresión entre las barras del valor absoluto se anula o se hace igual a CERO. En el ejemplo 3, ese número clave fue $\frac{4}{3}$ y en el ejemplo 4, fueron dos: -2 y 2.
2. Un procedimiento general para eliminar barras de valor absoluto de una expresión dada consiste en hallar, en primer lugar, los valores para los cuales tales valores absolutos se anulan (es decir, se hacen 0).

Ejemplo 5

Hallemos una expresión equivalente a $|2x - 5| - 4x + \left|x^2 - 1\right|$ que carezca de las barras de valor absoluto.

SOLUCIÓN

- Teniendo en cuenta las dos observaciones anteriores, hallamos los ceros de las expresiones que están entre barras de valor absoluto; así:

$$2x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$$

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ ó } x = 1$$

- Con estos valores obtenidos formemos intervalos abiertos desde $-\infty$ hasta $+\infty$ +: $(-\infty\ ;\ -1)$, $(-1;\ 1)$, $\left(1; \frac{5}{2}\right)$ y $\left(\frac{5}{2} + \infty\right)$.

- A continuación, analizamos como es la expresión dada en cada uno de estos intervalos. Para ello, tomamos un valor cualquiera del intervalo analizado, lo reemplazamos en las barras de valor absoluto, verificamos si el resultado es positivo o negativo y le aplicamos la definición de valor absoluto. Veamos:

  * En $(-\infty; -1)$ tomemos, por ejemplo, $x = -3$:

    Si $x = -3$ entonces $2x - 5 = 2(-3) - 5 = -11$; luego, en el intervalo $(-\infty; -1)$ se tiene que $2x - 5 < 0$, con lo cual:

    $$\begin{aligned} |2x - 5| &= -(2x - 5) \\ &= -2x + 5 \end{aligned}$$

    Si $x = -3$ entonces $x^2 - 1 = (-3)^2 - 1 = 8$; luego, en el intervalo $(-\infty; -1)$ se tiene que $x^2 - 1 > 0$, con lo cual:

    $$|x^2 - 1| = x^2 - 1$$

    CONCLUSIÓN: En el intervalo $(-\infty; -1)$ se cumple que:

    $$\boxed{\begin{aligned} |2x - 5| - 4x + |x^2 - 1| &= -2x + 5 - 4x + x^2 - 1 \\ &= x^2 - 6x + 4 \end{aligned}} \quad \text{...........(1)}$$

  * En $(-1; 1)$ tomemos, por ejemplo, $x = 0$:

    Si $x = 0$, entonces $2x - 5 = 2(0) - 5 = -5$; luego, en el intervalo $(-1\ ;\ 1)$ se tiene que $2x - 5 < 0$, con lo cual:

    $$\begin{aligned} |2x - 5| &= -(2x - 5) \\ &= -2x + 5 \end{aligned}$$

    Si $x = 0$, entonces $x^2 - 1 = 0^2 - 1 = -1$; luego, en el intervalo $(-1; 1)$ se tiene que $x^2 - 1 < 0$, con lo cual:

    $$\begin{aligned} |x^2 - 1| &= -(x^2 - 1) \\ &= 1 - x^2 \end{aligned}$$

    CONCLUSIÓN: En el intervalo $(-1; 1)$ se cumple que:

    $$\boxed{\begin{aligned} |2x - 5| - 4x + |x^2 - 1| &= -2x + 5 - 4x + 1 - x^2 \\ &= -x^2 - 6x + 6 \end{aligned}} \quad \text{...........(2)}$$

  * En $\left(1; \frac{5}{2}\right)$ tomemos, por ejemplo, $x = 2$:

    Si $x = 2$, entonces $2x - 5 = 2(2) - 5 = -1$; luego, en el intervalo $\left(1; \frac{5}{2}\right)$ se tiene que $2x - 5 < 0$, con lo cual:

    $$\begin{aligned} |2x - 5| &= -(2x - 5) \\ &= -2x + 5 \end{aligned}$$

Si $x = 2$, entonces $x^2 - 1 = 2^2 - 1 = 3$; luego, en el intervalo se tiene que $x^2 - 1 > 0$, con lo cual:

$$|x^2 - 1|$$

CONCLUSIÓN: En el intervalo $\left(1; \frac{5}{2}\right)$ se cumple que:

$$\begin{aligned} |2x - 5| - 4x + |x^2 - 1| &= -2x + 5 - 4x + x^2 - 1 \\ &= x^2 - 6x + 4 \end{aligned} \quad \text{...........(3)}$$

* En $\left(\frac{5}{2} + \infty\right)$ tomemos, por ejemplo, $x = 5$:

Si $x = 5$, entonces $2x - 5 = 2(5) - 5 = 5$; luego, en el intervalo $\left(\frac{5}{2} + \infty\right)$ se tiene que $2x - 5 > 0$, con lo cual:

$$|2x - 5| = 2x - 5$$

Si $x = 5$, entonces $x^2 - 1 = 5^2 - 1 = 24$; luego, en el intervalo $\left(\frac{5}{2} + \infty\right)$ se tiene que $x^2 - 1 > 0$, con lo cual:

$$|x^2 - 1| = x^2 - 1$$

CONCLUSIÓN: en el intervalo se cumple que:

$$\begin{aligned} |2x - 5| - 4x + |x^2 - 1| &= 2x - 5 - 4x + x^2 - 1 \\ &= x^2 - 2x - 6 \end{aligned} \quad \text{...........(4)}$$

- Sólo nos resta analizar cómo es la expresión en $x = \frac{5}{2}$, $x = 1$ y $x = -1$. Lo dejamos como ejercicio al lector ....**(5).**

- Si ahora reunimos los resultados (1), (2), (3), (4) y (5) nos queda:

$$-4x + \left|x^2 - 1\right| = \begin{cases} x^2 - 6x + 4 & \text{si } x \in (-\infty; -1) \cup \left(1; \frac{5}{2}\right) \\ -x^2 - 6x + 6 & \text{si } x \in (-1; 1) \\ x^2 - 2x - 6 & \text{si } x \in \left(\frac{5}{2}; +\infty\right) \\ 11 & \text{si } x = -1 \\ -1 & \text{si } x = 1 \\ -\frac{19}{4} & \text{si } x = \frac{5}{2} \end{cases}$$

EJERCICIO 2.1

1 Calcular el valor de:

a) $|7| - |8| + |-4|$

b) $\dfrac{|-7|+|-15|+|23|}{|6|-|-8|}$

c) $\big||-3|+|-4|-|-12|\big|$

d) $\dfrac{\big||-2|+|6|\big|-|4|}{|12|-|-4|}$

2 Calcular el valor de la expresión $|3x-2| + 2x - |x^2-4|$ cuando:

a) $x = -7$

b) $x = \dfrac{2}{3}$

c) $x = -2$

d) $x = 0$

e) $x = \dfrac{3}{2}$

f) $x = 2$

3 Escribir una expresión equivalente a las siguientes que carezca de los valores absolutos:

a) $|4-5x|$

b) $|3x^2-10x-8|$

c) $|9-x^2|$

d) $|x-3| + 5x - |2x+6|$

e) $|x^2-4| + 3x - |x+6|$

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (1)

Supongamos que un punto P(x, y) se mueve en el plano de tal manera que siempre equidista de los extremos del segmento $\overline{AB}$, tal que A(-3, 5) y B(7, 3). Se pide:

1. **Dibujar en el plano cartesiano cinco puntos que cumplan con las condiciones del enunciado del problema.**
2. **Hallar la ecuación E(x, y) = 0 de la curva o la recta que cumple las condiciones e identificarla.**
3. **Hallar los elementos básicos de la gráfica (interceptos, simetrías, dominio y rango).**
4. **Dibujar la gráfica de la recta o de la curva obtenida.**

2.2 PROPIEDADES DEL VALOR ABSOLUTO

PRIMERA PROPIEDAD

- ¿Cómo se comportará el operador VALOR ABSOLUTO en presencia de otras operaciones como la multiplicación, la división y la potenciación? Para responder esta pregunta completemos el siguiente cuadro:

x	y	$\lvert x\cdot y\rvert$	$\lvert x\rvert\cdot\lvert y\rvert$	$\left\lvert\frac{x}{y}\right\rvert$ $\frac{\lvert x\rvert}{\lvert y\rvert}$	$\lvert x^2\rvert$	$\lvert x\rvert^2$
-4	-6					
-2	5					
3	-4					
6	8					

- ¿ Qué relación hay entre $\lvert x\cdot y\rvert$ y $\lvert x\rvert\cdot\lvert y\rvert$?

  ¿ Qué relación hay entre $\left\lvert\frac{x}{y}\right\rvert$ y $\frac{\lvert x\rvert}{\lvert y\rvert}$?

  ¿ Qué relación hay entre $\lvert x^2\rvert$ y $\lvert x\rvert^2$?

- Podemos verificar que el operador valor absoluto es distributivo respecto al producto, al cociente y a la potenciación.

P - 1: Si x, y son números reales, entonces:

- **El VALOR ABSOLUTO DE UN PRODUCTO es igual al producto de los valores absolutos de cada factor; es decir:**

$$\lvert x\cdot y\rvert = \lvert x\rvert\cdot\lvert y\rvert$$

- **El VALOR ABSOLUTO DE UN COCIENTE es igual al cociente de los valores absolutos de los números; es decir:**

$$\left\lvert\frac{x}{y}\right\rvert = \frac{\lvert x\rvert}{\lvert y\rvert}\ \text{; con } y \neq 0$$

- **El VALOR ABSOLUTO DE UNA POTENCIA es igual a elevar el valor absoluto de la base al exponente; es decir:**

$$\lvert x^n\rvert = \lvert x\rvert^n$$

Ejemplos

a) $\lvert(-3)\cdot(+2)\rvert = \lvert-3\rvert\cdot\lvert 2\rvert = 3\cdot 2=6$

b) $\lvert(-2)\cdot(-5)\rvert = \lvert-2\rvert\cdot\lvert-5\rvert = 2\cdot 5=10$

c) $\left\lvert\frac{-2}{5}\right\rvert = \frac{\lvert-2\rvert}{\lvert 5\rvert} = \frac{2}{5}$

d) $\lvert(-3)^2\rvert = \lvert(-3)\rvert^2 = \lvert 9\rvert = 9$

SEGUNDA PROPIEDAD

Experiencia

- ¿Cuáles son los valores de x que satisfacen la desigualdad $\lvert x\rvert \leq 3$?
- Si empezamos a reemplazar x por valores arbitrarios, encontraremos que cumplen -3, 3 y todos los números comprendidos entre -3 y 3. Veamos:

Si $x = -3$ entonces $\lvert -3\rvert = 3 \leq 3$

Si $x = -2.8$ entonces $\lvert -2.8\rvert = 2.8 \leq 3$

Si x = -1.5 entonces $|-1.5| = 1.5 \leq 3$

Si x = 0 entonces $|0| = 0 \leq 3$

Si x = 1.9 entonces $|1.9| = 1.9 \leq 3$

Si x = 2.999 entonces $|2.999| = 2.999 \leq 3$

Si x = 3 entonces $|3| = 3 \leq 3$

- Hay algún valor de y para el cual $|y| \leq 0$?

  La respuesta es que el único valor que lo cumple es y = 0. En efecto:

  Si y = 0 entonces $|0| \leq 0$ es verdadero.

  Si y = -3 entonces $|-3| = 3 \leq 0$ es falso

  Si y = 2 entonces $|2| = 2 \leq 0$ es falso.

- ¿Hay algún valor de **z** para el cual $|z| < -3$?

  La respuesta es NO, ya que el valor absoluto de un número real nunca es menor que un número negativo.

- Por lo tanto:

P - 2: Sean p(x) y q(x) dos expresiones en la variable real x:

$$\textbf{a)}\ |p(x)| < q(x) \Leftrightarrow \begin{cases} 1)\ q(x) > 0 \\ \quad \wedge \\ 2)\ -q(x) < p(x) < q(x) \end{cases}$$

$$\textbf{b)}\ |p(x)| \leq q(x) \Leftrightarrow \begin{cases} 1)\ q(x) \geq 0 \\ \quad \wedge \\ 2)\ -q(x) \leq p(x) \leq q(x) \end{cases}$$

Ejemplo

Resolvamos y grafiquemos la solución de cada una de las siguientes desigualdades:

a) $|x| \leq 5$

b) $|x - 3| < 6$

c) $|2x - 3| \leq x + 1$

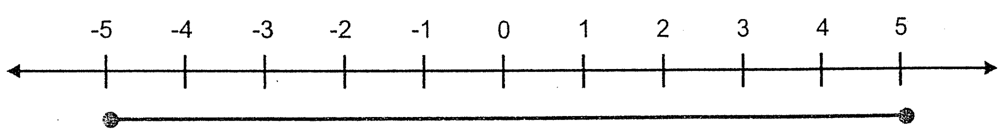
d) $|x + 2| < -3$

SOLUCIÓN

a) Teniendo en cuenta la parte a) de la P-1 podemos escribir:

$$|x| \leq 5 \Leftrightarrow -5 \leq x \leq 5 \Leftrightarrow x \Leftrightarrow \in [-5;5]$$

La representación gráfica de esta desigualdad es la siguiente:

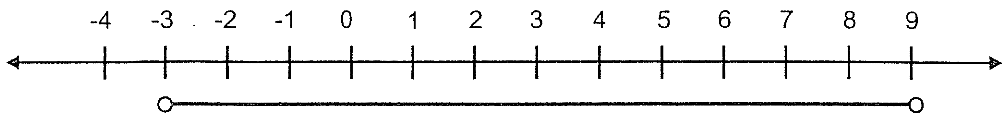


b) $|x - 3| < 6 \Leftrightarrow -6 < x - 3 < 6$

$\Leftrightarrow 3 - 6 < x < 3 + 6$

$\Leftrightarrow -3 < x < 9$

$\Leftrightarrow \boxed{x \in (-3\,;\,9)}$



c) La desigualdad $|2x - 3| \leq x + 1$ podemos resolverla de dos maneras. Veamos:

PRIMERA MANERA

Aplicando la propiedad $|p(x)| \leq q(x)$:

$$|2x - 3| \leq x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 1)\ \ x + 1 \geq 0 \\ \qquad \wedge \\ 2)\ \ -(x + 1) \leq 2x - 3 \leq x + 1 \end{cases}$$

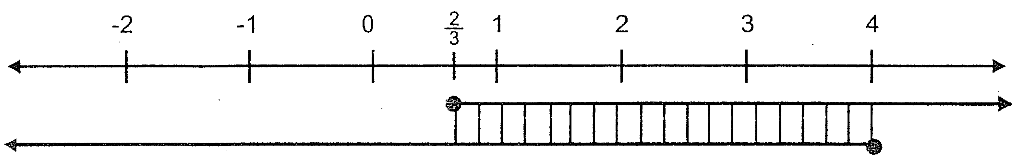
De 1): $x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1 \Leftrightarrow \boxed{S_1 = [-1;\, +\infty)}$

De 2) $-(x + 1) \leq 2x - 3 \leq x + 1 \Leftrightarrow -(x + 1) \leq 2x - 3 \wedge 2x - 3 \leq x + 1$

$\Leftrightarrow 2x - 3 \geq -x - 1 \wedge 2x - 3 \leq x + 1$

$\Leftrightarrow 3x \geq 2 \wedge x \leq 4$

$\Leftrightarrow x \geq \frac{2}{3} \wedge x \leq 4$



En consecuencia, $\boxed{S_2 = \left[\frac{2}{3};\, 4\right]}$

La solución total, de acuerdo con la P-1 es la intersección entre S_1 y S_2, es decir:

$$\boxed{S_T = S_T \cap S = [-1;\, +\infty) \cap S = \left[\frac{2}{3};\, 4\right] = \left[\frac{2}{3};\, 4\right]}$$

SEGUNDA MANERA

Utilizando la definición de valor absoluto:

- El cero de la expresión entre barras de valor absoluto es:

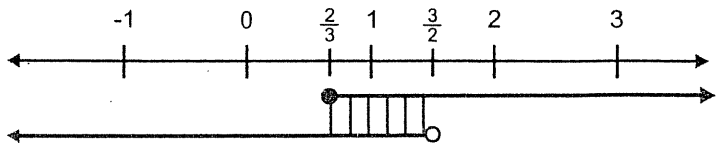
$$2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

- Así, pues, debemos analizar en los intervalos $\left(-\infty ; \frac{3}{2}\right)$ y $\left(\frac{3}{2} ; +\infty\right)$ y en $x = \frac{3}{2}$. Veamos:

❖ En $\left(-\infty ; \frac{3}{2}\right)$: $|2x - 3| = -(2x - 3)$. Por lo tanto:

$$-(2x - 3) \leq x + 1 \Leftrightarrow -2x + 3 \leq x + 1$$
$$\Leftrightarrow -3x \leq -2$$
$$\Leftrightarrow x \geq$$

La solución de esta desigualdad es el intervalo $\left[\frac{2}{3} ; +\infty\right)$; pero como la solución debe limitarse al intervalo $\left[-\infty ; \frac{3}{2}\right)$ entonces:

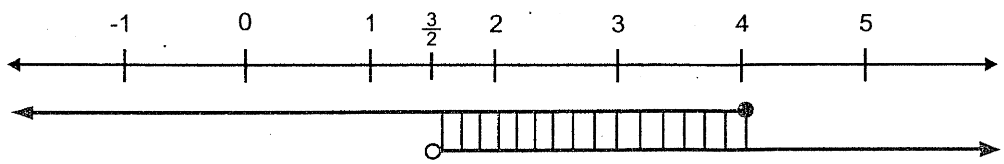


Luego, $\boxed{S_1 = \left[\frac{2}{3} ; \frac{3}{2}\right)}$

❖ En $\left(\frac{3}{2} ; +\infty\right)$: $|2x - 3| = 2x - 3$. Por lo tanto:

$$2x - 3 \leq x + 1 \Leftrightarrow 2x - x \leq 1 + 3$$
$$\Leftrightarrow x \leq 4$$

La solución de esta desigualdad es el intervalo $(-\infty ; 4]$; pero, como la solución debe limitarse al intervalo $\left(\frac{3}{2} ; +\infty\right)$ entonces:



Luego, $\boxed{S_2 = \left(\frac{3}{2} ; 4\right]}$

❖ Finalmente, en $x = \frac{3}{2}$, la expresión queda: $|0| \leq \frac{3}{2} + 1$, lo cual es verdadero. Por lo tanto,

$\boxed{S_3 = \left\{\frac{3}{2}\right\}}$

- La solución total de esta desigualdad es la unión de las tres soluciones anteriores; es decir:

$$\boxed{S_T = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \left[\frac{2}{3};\frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2};4\right] \cup \left\{\frac{3}{2}\right\} = \left[\frac{2}{3};4\right)}$$

d) $| x+2 | < -3$

Como el valor absoluto de un número real no puede ser negativo, la desigualdad no tiene solución; es decir,

$$\boxed{S_T = \phi}$$

TERCERA PROPIEDAD

Experiencia

- ¿Cuáles valores de x satisfacen la desigualdad $| x | \geq 5$?
- Si empezamos a reemplazar la x por valores arbitrarios, encontraremos que cumplen todos los números mayores o iguales a 5 y los menores o iguales a -5; por ejemplo:

Si $x = -10$ entonces $| -10 | = 10 \geq 5$

Si $x = -7$ entonces $| -7 | = 7 \geq 5$

Si $x = -5.5$ entonces $| -5.5 | = 5.5 \geq 5$

Si $x = -5$ entonces $| -5 | = 5 \geq 5$

Si $x = 6.3$ entonces $| 6.3 | = 6.3 \geq 5$

Si $x = 5$ entonces $| 5 | = 5 \geq 5$

- Por lo tanto:

P - 3: Sean p(x) y q(x) dos expresiones en la variable x:

a) $| p(x) | > q(x) \Leftrightarrow p(x) < -q(x) \vee p(x) > q(x)$

b) $| p(x) | \geq q(x) \Leftrightarrow p(x) \leq -q(x) \vee p(x) \geq q(x)$

ATENCIÓN

Notemos que en esta propiedad no fue necesario colocar la condición q(x) es positivo. Esto se debe a que si q(x) es negativo, entonces | p(x) | siempre será mayor que un número negativo. Por lo tanto, en este caso, x podrá tomar todos los números reales.

Ejemplo

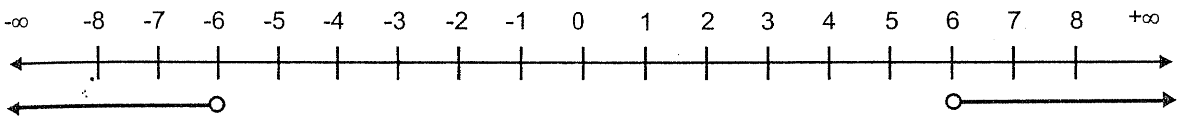
Resolvamos y grafiquemos la solución de cada una de las siguientes desigualdades:

a) $|x| > 6$ b) $|x + 3| > 7$

c) $|2x - 4| > 1$ d) $|x + 3| \geq 2x + 1$

SOLUCIÓN

a) $|x| > 6 \Leftrightarrow x < -6 \vee x > 6 \Leftrightarrow$ $\boxed{x \in (-\infty\,;\,-6) \cup (6;\,+\infty)}$

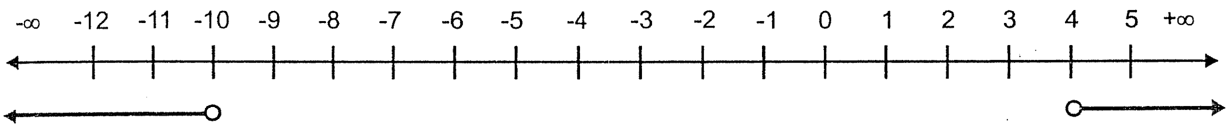


b) $|x + 3| > -7 \Leftrightarrow x + 3 < -7 \vee x + 3 > 7$

$\Leftrightarrow x < -7 - 3 \vee x > 7 - 3$

$\Leftrightarrow x < -10 \vee x > 4$

$\Leftrightarrow$ $\boxed{x \in (-\infty\,;\,-10) \cup (4;\,+\infty)}$



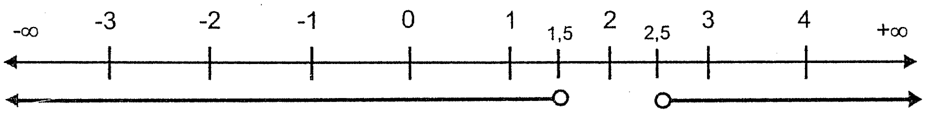
c) $|2x - 4| > 1 \Leftrightarrow 2x - 4 < -1 \vee 2x - 4 > 1$

$\Leftrightarrow 2x < 4 - 1 \vee 2x > 4 + 1$

$\Leftrightarrow 2x < 3 \vee 2x > 5$

$\Leftrightarrow x < \frac{3}{2} \vee x > \frac{5}{2}$

$\Leftrightarrow$ $\boxed{x \in (-\infty\,;\,1.5) \cup (2.5;\,+\infty)}$



d) $|x + 3| \geq 2x + 1 \Leftrightarrow x + 3 \leq -(2x + 1) \vee x + 3 \geq 2x + 1$

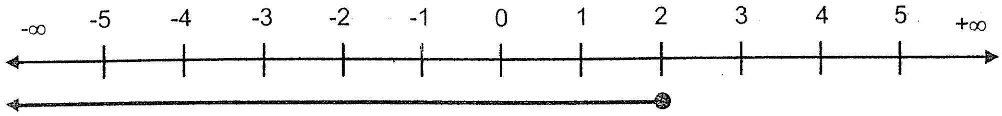
$\Leftrightarrow x + 3 \leq -2x - 1 \vee x + 3 \geq 2x + 1$

$\Leftrightarrow x + 2x \leq -1 - 3 \vee x - 2x \geq 1 - 3$

$\Leftrightarrow 3x \leq -4 \vee -x \geq -2$

$\Leftrightarrow x \leq -\frac{4}{3} \vee x \leq 2$

$\Leftrightarrow x \in (-\infty\,;\,2]$



NOTA: Resuelva este ejercicio utilizando la definición de valor absoluto.

e) $| x - 4 | > -3$

En forma intuitiva podemos obtener la solución. Como $| x-4 |$ siempre es positivo, y todo número positivo es mayor que cualquier número negativo, concluimos que la desigualdad se cumple para todo $x \in \mathbb{R}$.

Analíticamente:

$| x - 4 | > -3 \quad \Leftrightarrow \quad x + 4 < -(-3) \vee x + 4 > -3$

$\Leftrightarrow \quad x + 4 < 3 \vee x + 4 > -3$

$\Leftrightarrow \quad x < -1 \vee x > -7$

$\Leftrightarrow \quad \boxed{x \in (-\infty ; -1) \cup (-7; +\infty) \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}}$

CUARTA PROPIEDAD

Experiencia

- Queremos saber ahora cómo es el comportamiento del operador VALOR ABSOLUTO en presencia de la operación suma. Con este fin, completemos el siguiente cuadro:

x	y	$\lvert x + y \rvert$	$\lvert x \rvert + \lvert y \rvert$
-3	-2		
-3	2		
3	-2		
3	2		

- ¿Qué relación hay entre $| x + y |$ y $| x | + | y |$?

- ¿Podemos afirmar que el operador valor absoluto es distributivo respecto a la suma? La respuesta es NO. Notemos que cuando los números que se toman son de igual signo se cumple que:

$$| x + y | = | x | + | y |$$

en cambio, cuando los números tienen distinto signo se cumple que:

$$| x + y | < | x | + | y |$$

- Por lo tanto, la experiencia realizada nos permite concluir que:

> **P - 4: El VALOR ABSOLUTO de una SUMA de números es MENOR O IGUAL que la suma de los valores absolutos de los números; es decir:**
>
> $$| x + y | \leq | x | + | y |$$

- **UNA APLICACIÓN:**

Una aplicación muy corriente de esta propiedad la encontramos al estudiar los vectores. En efecto, la magnitud de la suma de dos vectores es menor o igual que la suma de las magnitudes de los vectores; figura 2 - 3.

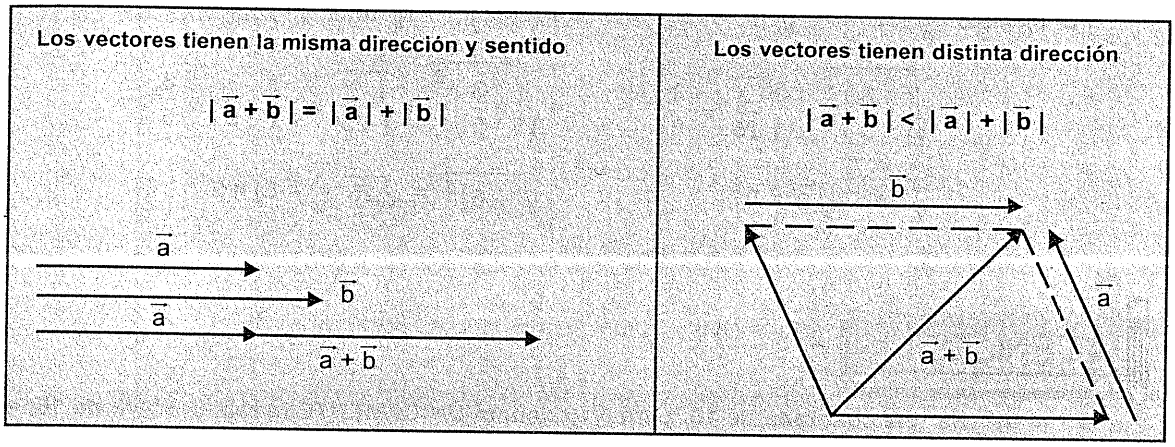


Figura 2 - 3

Es decir, si los vectores tienen la misma dirección y sentido (son paralelos) entonces la magnitud del vector suma es igual a la suma de las magnitudes de cada vector. En cambio, si los vectores tienen distinta dirección, la magnitud del vector suma es MENOR que la suma de las magnitudes de los vectores (la longitud de un lado de un triángulo es menor que la suma de las longitudes de los otros dos lados). Por esta razón esta propiedad se denomina **DESIGUALDAD TRIANGULAR**.

Ejemplos

a) Si $a = 4$ y $b = 8$, entonces:

$| 4 + 8 | = | 4 | + | 8 |$, pues: $| 12 | = 4 + 8 = 12$

b) Si $a = -3$ y $b = -8$, entonces:

$| (-3) + (-8) | = | -3 | + | -8 |$, pues: $| -11 | = 3 + 8 = 11$

c) Si $a = -5$ y $b = 10$, entonces:

$| (-5) + 10 | < | -5 | + | 10 |$, pues: $| 5 | < 5 + 10$

d) Si $a = 5$ y $b = -10$ entonces:

$| 5 + (-10) | < | 5 | + | -10 |$, pues: $| -5 | < 5 + 10$

QUINTA PROPIEDAD

RELACIÓN ENTRE LA RAÍZ CUADRADA Y EL VALOR ABSOLUTO

Experiencia

- Ya sabemos que el símbolo $\sqrt{a}$, donde $a \geq 0$, se define como el único número x no negativo tal que $x^2 = a$.

- se lee: «la principal raíz cuadrada de a».

Por ejemplo: $\sqrt{(+4)^2} = \sqrt{16} = 4$; $\sqrt{(-4)^2} = \sqrt{16} = -(-4) = 4$

$$\sqrt{\left(+\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5} \quad ; \quad \sqrt{\left(-\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{25}} = -\left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{3}{5}$$

$$\sqrt{0^2} = \sqrt{0} = 0 \quad ; \quad \sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = -(-5) = 5$$

ATENCIÓN

- **-4 es una raíz cuadrada de 16, pero $\sqrt{16}$ denota ÚNICAMENTE la raíz positiva de 16; es decir, $\sqrt{16} \neq -4$**

- **Como sólo nos interesan los números reales, entonces $\sqrt{a}$ no está definida cuando $a < 0$. Por lo tanto, de la definición de $\sqrt{a}$ concluimos que: $\sqrt{a^2} = |a|$**

Ejemplo

$\sqrt{5^2} = |5| = 5$ $\qquad$ $\sqrt{(-6)^2} = |-6| = 6$

$\sqrt{7^2} = |7| = 7$ $\qquad$ $\sqrt{(-9)^2} = |-9| = 9$

- La realización de esta actividad nos permite concluir que:

> **P-5: RELACIÓN ENTRE RAÍZ CUADRADA Y VALOR ABSOLUTO.**
>
> **a) Si $x \in \mathbb{R}$ entonces $\sqrt{x^2} = |x|$**
>
> **b) Si p(x) es una expresión en la variable real x, entonces**
>
> **$\sqrt{(p(x))^2} = |p(x)|$**

RESUMEN DE LAS PROPIEDADES DEL OPERADOR VALOR ABSOLUTO

Si p(x) y q(x) son expresiones en la variable x, entonces:

P - 1:

a) $| p(x) | \geq 0$

b) $| p(x) \cdot q(x) | = | p(x) | \cdot | q(x) |$

c) $\left| \dfrac{p(x)}{q(x)} \right| = \dfrac{|p(x)|}{|q(x)|}$; con $q(x) \neq 0$

d) $| p(x)^n | = | p(x) |^n$

P - 2:

a) $| p(x) | < q(x) \Leftrightarrow \begin{cases} 1)\ q(x) > 0 \\ \quad \wedge \\ 2)\ -q(x) < p(x) < q(x) \end{cases}$

b) $| p(x) | \leq q(x) \Leftrightarrow \begin{cases} 1)\ q(x) \geq 0 \\ \quad \wedge \\ 2)\ -q(x) \leq p(x) \leq q(x) \end{cases}$

P - 3:

a) $| p(x) | > q(x) \Leftrightarrow p(x) > q(x) \vee p(x) < -q(x)$

b) $| p(x) | \geq q(x) \Leftrightarrow p(x) \geq q(x) \vee p(x) \leq -q(x)$

P - 4: $| p(x) + q(x) | \leq | p(x) | + | q(x) |$

P - 5: $\sqrt{(p(x))^2} = | p(x) |$

EJERCICIO 2.2

En los ejercicios 1. a 12. resolver cada ecuación o inecuación y representar gráficamente la solución.

1 $|2x + 1| = 4$

2 $|4 - 2x| = 3$

3 $\left| x + \dfrac{1}{3} \right| = 5$

4 $|3x - 5| = |7x - 2|$

5 $|x-6| = |3-2x|$

6 $\left| \dfrac{x+2}{x+5} \right| = 3$

7 $|x + 1| < 4$

8 $|2x + 5| < 3$

9. $|12 + 5x| \leq 1$

10 $\left|\dfrac{3-2x}{2+x}\right| < 4$

11 $|3 - 2x| \leq |x + 4|$

12 $|x(x+1)| < |x + 4|$

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (2)

Supongamos que un punto P(x, y) se mueve en el plano de tal manera que siempre su distancia al origen es igual a 5 unidades. Se pide:

1. **Dibujar en el plano cartesiano cinco puntos que cumplan con las condiciones expresadas en el enunciado del problema.**
2. **Hallar la ecuación E(x, y) = 0 de la curva que cumpla las condiciones expresadas en el enunciado del problema e identificarla.**
3. **Hallar los elementos básicos de la curva (interceptos, simetrías, dominio y rango).**
4. **Dibujar la gráfica de la curva.**

2.3 MÉTODO GENERAL PARA RESOLVER ECUACIONES E INECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO. USO DEL DERIVE

- En la sección anterior, resolvimos ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto aplicando una o varias de las propiedades del valor absoluto. Sin embargo, este procedimiento resulta, en general, sumamente dispendioso y por lo tanto, muy poco práctico.

- En esta sección, vamos a describir un método general que nos permitirá resolver cualquier ecuación o inecuación donde aparezcan uno o más términos con valor absoluto.

- El procedimiento, que vamos a describir a partir de dos ejemplos, se fundamenta en el método que sugerimos para resolver el ejemplo 5 de la sección 2.1

Ejemplo 1

Resolvamos la ecuación $|2x - 3| - 4x = |x^2 - 1|$

SOLUCIÓN

- La estrategia en la solución del problema consiste en tratar de eliminar lo que nos está «estorbando»: las barras de valor absoluto.

- Para eliminar las barras de valor absoluto, hallemos, en primer lugar, los ceros de cada uno de ellos:

$$|2x - 3| = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$|x^2 - 1| = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ ó } x = 1$$

- A continuación, formemos con estos ceros intervalos abiertos consecutivos desde $-\infty$ hasta + .
Los intervalos que podemos formar son:

$$(-\infty; -1), (-1; 1); \left(1; \frac{3}{2}\right), \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$$

- Ahora, examinemos cómo es la ecuación en cada uno de los intervalos formados:

  * Si $x \in (-\infty; -1)$ entonces:

$$\begin{aligned} |2x - 3| - 4x = |x^2 - 1| &\Leftrightarrow -(2x - 3) - 4x = x^2 - 1 \\ &\Leftrightarrow -2x + 3 - 4x = x^2 - 1 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 6x - 4 = 0 \end{aligned}$$

Si

$\Leftrightarrow x = 0.61$ ó $x = -6.61$

Pero, ¿están estas dos soluciones en el intervalo $(-\infty ; -1)$? Si hacemos la confrontación respectiva, encontramos que sólo $x = -6.61$ pertenece a este intervalo.

Por lo tanto, el conjunto { -6.61 } es la primera solución de esta ecuación:

$$\boxed{S_1 = \{-6.61\}}$$

* Si $x \in (-1 ; 1)$ entonces:

$$\begin{aligned} |2x - 3| - 4x = |x^2 - 1| &\Leftrightarrow -(2x - 3) - 4x = -(x^2 - 1) \\ &\Leftrightarrow -2x + 3 - 4x = -x^2 + 1 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 6x + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 5.64 \text{ ó } x = 0.36 \end{aligned}$$

De nuevo, es necesario confrontar cuál de las soluciones obtenidas está en el intervalo considerado: $(-1 ; 1)$. Fácilmente comprobamos que sólo $x = 0.36$ hace parte de este intervalo. Por lo tanto:

$$\boxed{S_2 = \{0.36\}}$$

* Si $x \in \left(1 ; \frac{3}{2}\right)$ entonces:

$$\begin{aligned} |2x - 3| - 4x = |x^2 - 1| &\Leftrightarrow -(2x - 3) - 4x = x^2 - 1 \\ &\Leftrightarrow -2x + 3 - 4x = x^2 + 1 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 6x - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0.61 \text{ ó } x = 6.61 \end{aligned}$$

Sin embargo, ninguna de estas dos soluciones pertenece al intervalo ; por lo tanto:

$$\boxed{S_3 = \emptyset}$$

* Si $x \in \left(\frac{3}{2} ; +\infty\right)$ entonces:

$$\begin{aligned} |2x - 3| - 4x = |x^2 - 1| &\Leftrightarrow 2x - 3 - 4x = x^2 - 1 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 2x + 2 = 0 \end{aligned}$$

Esta ecuación no tiene soluciones reales; por lo tanto:

$$\boxed{S_4 = \emptyset}$$

* Sólo nos queda por analizar si los ceros son o no solución de la ecuación. Veamos:

Si $x = -1$: $|2(-1) - 3| - 4(-1) = |(-1)^2 - 1|$

$|-5| + 4 = 0$

$5 + 4 = 0$

$9 \neq 0$. Luego, $x = -1$ no es solución

Si $x = 1$: $|2(1) - 3| - 4(1) = |1^2 - 1|$

$|-1| - 4 = 0$

$1 - 4 = 0$

$-3 \neq 0$. Luego, $x = 1$ no es solución

Si $x = \frac{3}{2}$: $\left|2\left(\frac{3}{2}\right) - 3\right| - 4\left(\frac{3}{2}\right) = \left|\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 1\right|$

$$|\,0\,| - 6 = \left|\frac{5}{4}\right|$$

$$0 - 6 = \frac{5}{4}$$

$-6 \neq \frac{5}{4}$. Luego, $x = \frac{3}{2}$ no es solución.

CONCLUSIÓN: La solución de la ecuación: $|\,2x - 3\,| - 4x = |\,x^2 - 1\,|$ es la unión de las soluciones S_1, S_2, S_3, y S_4; es decir:

$$S_T = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$$

$$S_T = \{-6.61\} \cup \{0.4\} \cup \emptyset \cup \emptyset$$

$$S_T = \{-6.61\ ,\ 0.4\}$$

$$\therefore \boxed{S_T = \{-6.61\ ,\ 0.4\}}$$

Ejemplo 2

Resolvamos la inecuación $\dfrac{|\,2x - 5\,| + 1}{x + 3} \leq x$

SOLUCIÓN

- Inicialmente vamos a eliminar el valor absoluto que nos «estorba».Con este fin, hallamos el cero de la expresión $2x - 5$:

$$2x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$$

- Con $x = \frac{5}{2}$ formamos dos intervalos abiertos consecutivos desde $-\infty$ hasta $+\infty$: $\left(-\infty\ ;\ \frac{5}{2}\right)$ y $\left(\frac{5}{2};\ +\infty\right)$.

- Ahora examinemos cómo es la inecuación en cada uno de los intervalos formados:

  * Si $x \in \left(-\infty\ ;\ \frac{5}{2}\right)$ entonces:

$$\frac{|\,2x - 5\,| + 1}{x + 3} \leq x \Leftrightarrow \frac{-(2x - 5) + 1}{x + 3} \leq x$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2x + 5 + 1}{x + 3} \leq x$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2x + 6}{x + 3} \leq x$$

Esta última inecuación la resolvemos como una inecuación racional que es, así:

$$\frac{-2x + 6}{x + 3} \leq x \Leftrightarrow \frac{-2x + 6}{x + 3} - x \leq 0$$

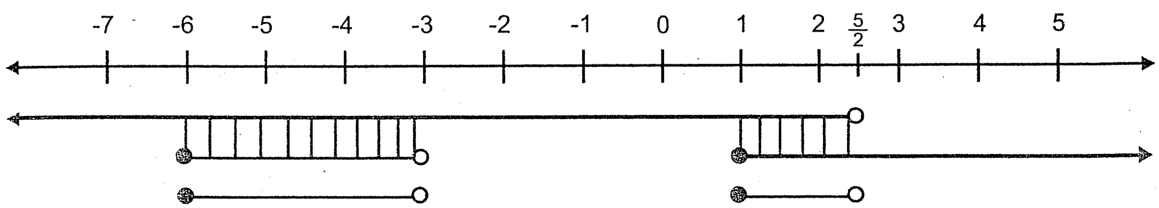
$$\Leftrightarrow \frac{-2x + 6 - x^2 - 3x}{x + 3} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x^2 - 5x + 6}{x + 3} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 + 5x - 6}{x + 3} \geq 0 \qquad \text{¿ por qué cambió el sentido de la desigualdad ?}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x + 6)(x - 1)}{x + 3} \geq 0$$

Los posibles intervalos de solución de esta inecuación son: $(-\infty\ ;\ -6)$, $(-6\ ;\ -3)$, $(-3\ ;\ 1)$ y $(1\ ;\ +\infty)$, y los valores $x = -6$ y $x = 1$. Si hacemos el análisis correspondiente encontramos que la satisfacen los intervalos: $[-6;\ -3)$ y $[1;\ +\infty)$. Ahora bien, debemos confrontar estos dos intervalos con el intervalo donde estamos haciendo el análisis: $\left(-\infty\ ;\ \frac{5}{2}\right)$. Esta confrontación se hace realizando la INTERSECCIÓN entre $\left(-\infty\ ;\ \frac{5}{2}\right)$ y $[-6;-3) \cup [1;\ +\infty)$ (¿ por qué ?):



Por lo tanto, la primera solución de esta inecuación es:

$$\boxed{S_1 = [-6\ ;\ -3) \cup \left[1 + \frac{5}{2}\right)}$$

* Si $x \in \left(\frac{5}{2}\ ;\ +\infty\right)$ entonces:

$$\frac{|2x - 5| + 1}{x + 3} \leq x \Leftrightarrow \frac{2x - 5 + 1}{x + 3} \leq x$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x - 4}{x + 3} \leq x$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x - 4}{x + 3} - x \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x - 4 - x^2 - 3x}{x + 3} \leq 0$$

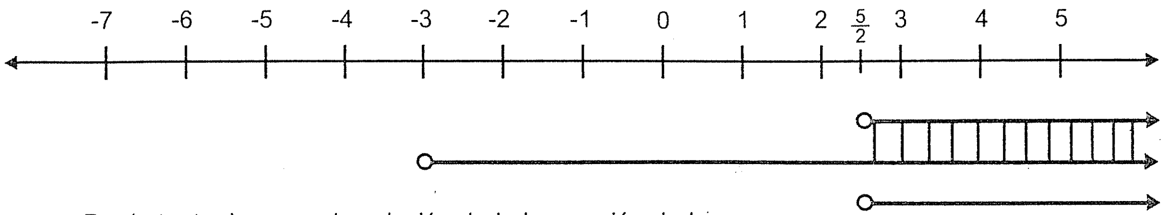
$$\Leftrightarrow \frac{-x^2 - x - 4}{x + 3} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 + x + 4}{x + 3} \geq 0$$

Como el numerador de esta fracción no es factorizable en los reales, entonces el polinomio $x^2 + x + 4$ siempre será positivo (¿por qué?); por lo tanto, para que $\frac{x^2 + x + 4}{x + 3} \geq 0$ es necesario que $x + 3 > 0$:

$x + 3 > 0 \Leftrightarrow x > -3$
$\Leftrightarrow x \in (-3;+\infty)$

Ahora debemos intersectar este intervalo con $\left(\frac{5}{2}\ ;\ +\infty\right)$ para determinar, efectivamente, cuáles valores son solución de la inecuación dada:



Por lo tanto, la segunda solución de la inecuación dada es:

$$\boxed{S_2 = \left(\frac{5}{2}\ ;+\infty\right)}$$

* Nos queda faltando por analizar si $x = \frac{5}{2}$ es o no solución de la inecuación. Verifiquemos:

$$\frac{\left|2\frac{5}{2}-5\right|+1}{\frac{5}{2}+3} \leq \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{0+1}{\frac{11}{2}} \leq \frac{5}{2}$$

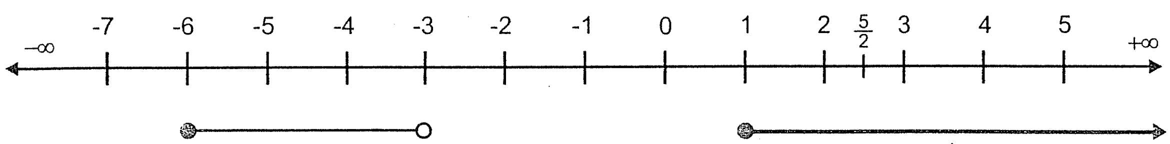
$$\Leftrightarrow \frac{2}{11} \leq \frac{5}{2} \text{ ¡ cierto !}$$

Luego, $x = \frac{5}{2}$ es solución de la inecuación:

$$\boxed{S_3 = \left(\frac{5}{2}\right)}$$

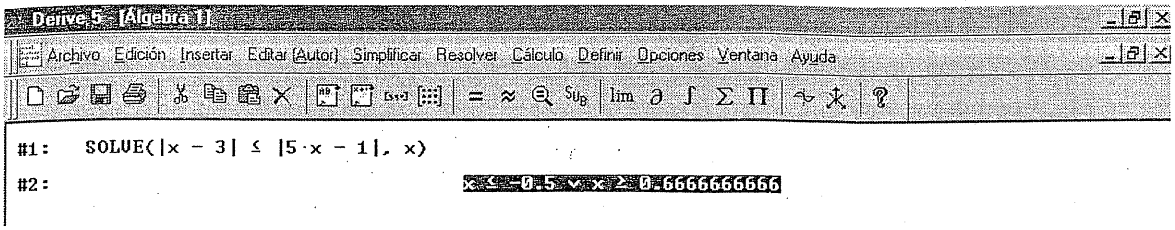
- **CONCLUSIÓN**: la solución de la inecuación: $\frac{|2x - 5| + 1}{x + 3} \leq x$ es:

$$\boxed{S_T = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = [-6\,;-3) \cup [1\,;+\infty)}$$



- DERIVE también es útil para resolver inecuaciones con o sin valor absoluto. Al igual que las ecuaciones, podemos resolver inecuaciones de dos maneras:

1. Para resolver, por ejemplo, la inecuación $|x-3| \leq |5x-1|$ hacemos lo siguiente:
   Escribimos SOLVE (abs(x – 3) $\leq$ abs(5*x – 1) , x)
   Oprimimos simultáneamente las teclas SHIFT y ENTER.
   De inmediato, la VENTANA DE ÁLGEBRA nos mostrará:



2. También podemos hacerlo entrando la expresión a la ventana de álgebra y haciendo luego click desde el MENÚ DE OPCIONES sobre los comandos: RESOLVER click, EXPRESIÓN click, ALGEBRAICO click, REAL click, RESOLVER click.

EJERCICIO 2.3

1. Utilizando sus propias palabras, describa los pasos a seguir para resolver ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto por el método práctico aplicado en esta sección.

2. Resolver las ecuaciones e inecuaciones del ejercicio 2 - 2 utilizando el método práctico.

En los ejercicios 3. a 12., resolver las ecuaciones e inecuaciones y representar gráficamente su solución.

3. $|3x + 5| = 9$

4. $|5x - 2| = 7x + 2$

5. $|4x + 3| = |2x + 6|$

6. $|3x + 2| < 4$

7. $|x + 7| \geq 2$

8. $|4x + 1| \leq |x - 2|$

9. $\left|\dfrac{x + 5}{x - 1}\right| > 3$

10. $2|x + 6| > 3x$

11. $|x(x + 1)| < |x + 4|$

12. $|x - 2| \leq 4 + |3x - 5| + 3x$

13. Resuelva los ejercicios 3 a 12, usando DERIVE

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (3)

Un punto P(x, y), se mueve en el plano de tal manera que su distancia al punto fijo A(-3, 2) es siempre igual a su distancia a la recta x – 3 = 0. Se pide:

1. **Dibujar en el plano cartesiano cinco puntos que cumplan las condiciones expresadas en el enunciado.**
2. **Hallar la ecuación de la curva que describe el movimiento del punto P e identificarla.**
3. **Hallar los elementos básicos de la curva obtenida (interceptos, simetrías, dominio y rango).**
4. **Dibujar la gráfica de la curva.**

Taller de la Unidad 2

PREGUNTAS PARA REVISAR LA TEORÍA:

a) ¿Cómo se define el valor absoluto de un número real?

b) ¿Cuáles son los valores de x que satisfacen la ecuación $|x| = 4$?

c) ¿Cuáles son los valores de x que satisfacen la inecuación $|x| < 5$?

d) ¿Cuáles son los valores de x que satisfacen la inecuación $|x| > 8$?

e) ¿Por qué $\sqrt{a^2} = a$?

f) ¿Cuándo se cumple que $|a + b| < |a| + |b|$? ¿Y cuándo $|a + b| = |a| + |b|$?

g) ¿Es la expresión $-5 \leq x \leq 5$ equivalente a $|x| \leq 5$? ¿Por qué?

h) ¿Cuál es la solución de la inecuación $|2x - 3| \leq -2$?

i) ¿Cuál es la solución de la inecuación $\dfrac{|x^2 + 1|}{x - 3} \leq 0$?

2 FALSO O VERDADERO

Indicar cuáles de los siguientes enunciados son verdaderos y cuáles son falsos. Justificar la respuesta.

a) Si **x** es un número negativo entonces $|x| = x$

b) La ecuación $|x - 2| = -1$ no tiene solución en los reales.

c) $|x + y| < |x| + |y|$, si $x \cdot y < 0$

d) $|a|^2 = a^2$

e) Si $x < 0$ entonces $\sqrt{x^2} = -x$

f) La inecuación $|x - 6| > -3$ no tiene solución en $\mathbb{R}$

g) Si $|x| < 3$ entonces $x < 3$

h) Si $|x - 5| < 2$ entonces $3 < x < 7$

i) No existe un $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x - 1| = |x - 2|$

j) Para todo $x > 0$, existe un $y > 0$ tal que $|2x + y| = 5$

3 Cada desigualdad de la izquierda equivale exactamente a una de la derecha. Determinar todos los pares equivalentes:

a) $|x| < 3$	1. $-1 \leq x \leq 0$
b) $|x - 1| < 3$	2. $1 < x < 2$
c) $|3 - 2x| < 1$	3. $x > 3 \vee x < -1$
d) $|1 + 2x| \leq 1$	4. $-3 < x < 3$
e) $|x - 1| > 2$	5. $x \leq -7 \vee x \geq 3$
f) $|x + 2| \geq 5$	6. $-2 < x < 4$

En los ejercicios 4. a 7., escribir una expresión equivalente a la expresión dada pero que carezca de las barras de valor absoluto.

4 $p(x) = |1 - x^2| + x - 3$

5 $p(x) = |2x - 1| + x^2 - 2$

6 $p(x) = |x^2 - 2x + 3| + 5x - 1$

7 $p(x) = \dfrac{|x - 1|}{x - 1}$

En los ejercicios 8. a 15., resolver las inecuaciones dadas aplicando la definición de valor absoluto y utilizando la propiedad correspondiente, y representar gráficamente la solución. Resolver algunas de ellas utilizando DERIVE y comprobar las soluciones obtenidas anteriormente.

8 $|x + 1| > 2$

9 $|x - 1| + 1 \leq 3x$

10 $|x - 3| \leq |x + 2|$

11 $|x^2 - 4| \geq 2x + 1$

12 $\left|\dfrac{2x+3}{3x-2}\right| < 1$

13 $\left|\dfrac{4x+1}{x-2}\right| \leq 1$

14 $\left|\dfrac{x-3}{x^2-1}\right| \geq -4$

15 $|2x-5| < -x^2$

Prepárate para las Pruebas ICFES

Las preguntas 1. y 2. se responden con base en la siguiente información:

75 niños compran 24 bolsas de canicas, pagando con sus ahorros $\frac{2}{3}$ del precio total, porque el vendedor les rebajó la tercera parte. Si el precio original de cada bolsa es de $63.000 y las canicas se reparten por igual, entonces:

1 Competencia: Propositiva; Ámbito: Conteo.

La cantidad x que debe pagar cada niño es:

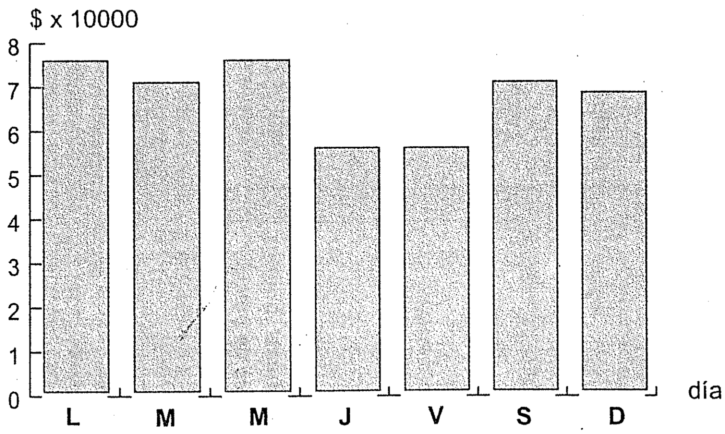
a) $x \leq 10.000$ b) $10.000 < x < 15.000$ c) $15.000 \leq x \leq 20.000$ d) $x = 20.000$

2 Competencia: Propositiva; Ámbito: Conteo.

Si un niño tiene ahorrados $47.040, el porcentaje de sus ahorros que le representa la compra de las canicas es:

a) Entre el 10% y el 15%
b) Entre el 20% y el 25%
c) Entre el 15% y el 20%
d) Entre el 25% y el 30%

Las preguntas 3., 4. y 5. se responden de acuerdo con el siguiente gráfico que muestra la cantidad de dinero recolectado por limosnas durante los siete días de una semana:



3 Competencia: Interpretativa; Ámbito: Estadístico.

El mayor descenso en la recolección de limosnas se presentó entre los días:

a) Miércoles y jueves
b) Jueves y Viernes
c) Lunes y Martes
d) Viernes y sábado.

4 Competencia: Interpretativa; Ámbito: Estadístico

La media aritmética o promedio de la recolección semanal es un valor:

a) Entre $50.000 y $60.000
b) Entre $60.000 y $70.000
c) Entre $70.000 y $80.000
d) Igual a $70.000

5 Competencia: Interpretativa; Ámbito: Estadístico.

De la observación del gráfico puede concluirse que:

a) La recolección más próxima al promedio se produjo el domingo
b) El miércoles se produjo el mayor aumento en las limosnas con relación al día anterior.
c) El jueves y el viernes solo recolectaron en la mañana.
d) El promedio de recolección de los cuatro últimos días de la semana fue mayor que en los tres primeros días.

Núcleo Temático 3

MÁS SOBRE FUNCIONES

Se desarrolla para alcanzar los siguientes logros generales

MANEJO DE CONCEPTOS

como

- Revisión del concepto de función.
- Funciones algebraicas, polinómicas, trascendentes y especiales.
- La notación y = f(x).
- Transformaciones de funciones.
- Operaciones con Funciones.
- Función Compuesta.
- Función Inversa.

para desarrollar competencia

ARGUMENTATIVA

DESTREZA OPERATIVA

a través de

- Calcular la imagen de una función.
- Transformar funciones simples mediante traslaciones, dilataciones, contracciones o reflexiones.
- Operar con funciones (Suma, Resta, Producto y Cociente).
- Hallar el Dominio de la Suma, Resta, Producto o Cociente de Funciones.
- Hallar la compuesta de dos funciones y su Dominio.
- Hallar la inversa de una función.

para desarrollar competencia

PROPOSITIVA

DIBUJO DE GRÁFICAS

de

- Funciones Reales.

como

- Algebraicas:
  * Polinómicas
  * Racionales
- Trascendentes:
  * Trigonométricas
  * Exponenciales
  * Logarítmicas
- Especiales:
  * Valor Absoluto
  * Mayor Entero Contenido
  * Por Tramos

a partir de

- Interceptos con los Ejes.
- Simetrías.
- Dominio y Rango.
- Transformaciones de funciones simples mediante traslaciones, dilataciones, contracciones o reflexiones.
- Características particulares de cada Función

para desarrollar competencia

INTERPRETATIVA

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

relativos a

- Lugares Geométricos.
- Variación directa e Inversa.
- Funciones como Modelos Matemáticos.

para desarrollar competencias

- ARGUMENTATIVA
- PROPOSITIVA
- INTERPRETATIVA

LOS HOMBRES DEL CÁLCULO (3)

RENÉ DESCARTES

René (Renato) Descartes nació en 1596 en el pueblo Le Haye, Francia, de una familia noble, y siguió las carreras de Medicina y Derecho en la universidad de Poitiers, las cuales terminó en 1616, a los 20 años.

En 1617 se enroló como voluntario en el ejército y durante nueve años, su vida transcurrió en la milicia.

Pero en 1619, durante unas vacaciones, según lo relató después en una carta, «descubrió una ciencia admirable», no dijo cuál, pero tenemos derecho a sospechar que descubrió las Matemáticas.

En 1628 abandonó la milicia, fijó su residencia en Holanda, y se dedicó, durante 20 años, a estudiar, meditar, y escribir, alternando la Filosofía, con la Física, la Astronomía y las Matemáticas...

En un libro dedicado a la Astronomía, llamado «El Mundo», se basó en los descubrimientos de Copérnico y Galileo, tomándolos como cosa sabida y aceptada. Cuál no sería su asombro al enterarse de que Galileo acababa de ser condenado a prisión por la Inquisición, por sostener doctrinas «contrarias a la Biblia». Ante esa noticia, suspende la publicación de su libro, para no correr la misma suerte.

Su obra magna es el «Discurso del Método» publicada en 1637 y dividida en seis partes; una de ellas es la «Geometría» en la cual dió a conocer al mundo un nuevo enfoque en el cual cualquier curva geométrica se representa por una ecuación con dos incógnitas, y cualquier ecuación con dos incógnitas representa una curva. Aquí no aparecen todavía los sistemas de coordenadas cartesianas que ya conocemos, aunque sí, algo muy cercano (falta dibujar el eje vertical); sus libros los firmaba con su apellido latinizado «Cartesius», de allí el adjetivo «cartesiano» con que algún matemático posterior, cuyo nombre no recogió la Historia, decidió honrarlo.

En 1649 acepta una invitación de la reina de Suecia para instalarse en su corte; pero el clima de Estocolmo le sienta mal y muere allí en 1650, de un resfriado que evolucionó a neumonía...

COMPRENSIÓN DE LECTURA

EXPLICACIÓN: Lea atentamente el anterior fragmento y luego encierre, en un círculo, la letra que corresponda a la respuesta correcta:

1. René Descartes descendía de:
   a. Una familia de galenos y jurisprudentes.
   b. Un hogar provinciano de gente humilde y sencilla.
   c. Una familia ilustre de Francia.
   d. Una casta de la realeza europea.

2. De Descartes se puede afirmar todo lo siguiente, con excepción de:
   a. Fue un enciclopedista.

b. Dedicó gran parte de su vida a estudiar y producir conocimiento científico.
c. Su amor por las ciencias y la filosofía le hizo abandonar la milicia.
d. Algunos de sus estudios están basados en trabajos de Copérnico y Galileo.

3. La publicación de un libro, se ve suspendida, abruptamente por:
   a. Miedo de ser acusado de plagio por Galileo.
   b. Ir en contra de los postulados anglicanos de la Iglesia.
   c. Considerar que iba en contra de la moral católica.
   d. Temor de la Santa Inquisición.

4. El adjetivo «cartesiano» que se maneja en el lenguaje de las matemáticas tuvo origen en:
   a. El apellido del insigne intelectual del cual estamos hablando.
   b. El seudónimo «cartius» empleado en algunos de sus escritos.
   c. La escritura latina de su apellido paterno.
   d. Unas «cartas» que escribió a Galileo en su época de juventud.

5. En su conocida obra «El Discurso del Método» encontramos:
   a. Los sistemas de coordenadas Cartesianas.
   b. Una sexta parte dedicada a la geometría.
   c. Cómo cualquier línea geométrica se representa por una ecuación con dos incógnitas.
   d. Cómo cualquier ecuación con dos incógnitas no representa una curva.

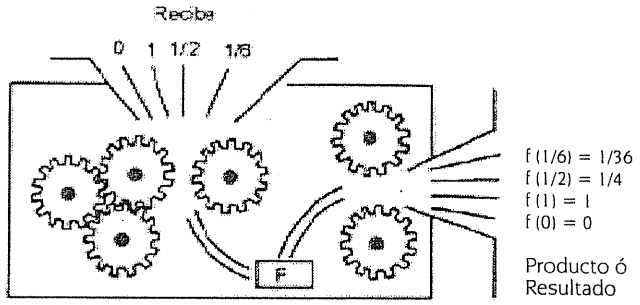
3.1 REVISIÓN DE CONCEPTOS

En los cursos anteriores hemos estudiado el concepto de función: en 8º grado, la función lineal; en 9º, las funciones cuadrática, exponencial y logarítmica y, en 10º, las funciones trigonométricas. En este grado, vamos a generalizar el estudio de las funciones, ya que éstas constituyen la base del desarrollo del Cálculo. Por esta razón, haremos una revisión de los conceptos básicos relacionados con las funciones.

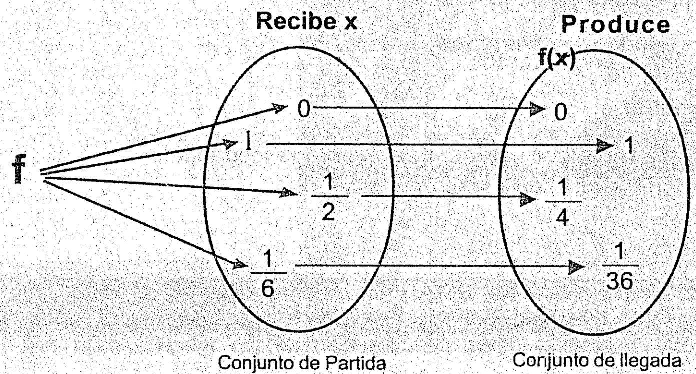
3.1.1. Las funciones y su representación

RECORDEMOS

- Una **función** f es una relación de A en B que hace corresponder a cada elemento **x** de A exactamente un elemento, llamado **f(x)**, de B.
- En general, consideramos funciones para las cuales los conjuntos A y B son conjuntos de números reales.
- El conjunto A se llama **dominio**. El número **f(x)** es el **valor de la función f para un cierto valor de x**. El **rango** de f es el conjunto de todos los valores posibles de f(x), a medida que x varía en todo el dominio de A.
- El símbolo que utilizamos para representar un número arbitrario del dominio de una función f se llama **variable independiente**. El símbolo que representa un número del rango de f se llama variable dependiente. Por ejemplo, el área A de un círculo depende (está en función) del radio r; la regla que relaciona r con A se expresa mediante la ecuación $A=\pi r^2$. En este ejemplo, **r** es la variable independiente y **A** es la variable dependiente.
- Podemos comparar una **función** con una **máquina f** a la que le introducimos un elemento **x** y la máquina produce una salida y=f(x) de acuerdo con la regla de la función. Observemos, por ejemplo, el funcionamiento de la máquina siguiente:

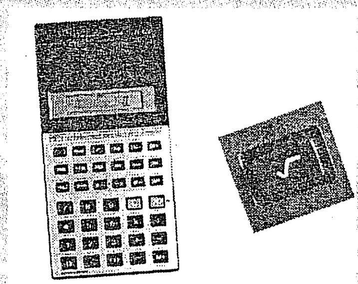


El proceso realizado por la máquina también podemos visualizarlo en el siguiente diagrama sagital o en una tabla de valores:



x	f (x)
0	0
1	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{36}$

- Las teclas de las calculadoras tienen incorporadas funciones, mediante fórmulas, en algunas de sus teclas; por ejemplo, la tecla de la **raíz cuadrada** $\sqrt{\ }$ define la función $y = \sqrt{x}$.



- Si tecleamos 36 y pulsamos $\sqrt{\ }$, aparece en pantalla 6. Decimos que 36 es una **entrada válida** para la función $y = \sqrt{x}$ y que 6 es una **salida válida** para esta función. También se dice que 6 es la **imagen** de 36 en la función $y = \sqrt{x}$.

El conjunto de entradas válidas se llama **dominio** de la función.

- Si tecleamos – 9 y pulsamos $\sqrt{\ }$, aparece en pantalla E (ERROR). – 9 no es una entrada válida para la función $y = \sqrt{x}$.

  y = – 6 no es una salida válida para la función $y = \sqrt{x}$, pues no existe ningún valor de entrada que luego de pulsar la tecla nos devuelva en pantalla a – 6.

El conjunto de salidas válidas se llama **rango** de la función.

- El método más común para visualizar una función es su **gráfica**. Si f es una función cuyo dominio es A, entonces su gráfica es el conjunto de parejas ordenadas

$$\left\{ (x, f(x)) \big/ x \in A \right\}$$

En otras palabras, la gráfica de f consta de todos los puntos (x,y) en el plano coordenado, tales que y=f(x) y x esté en el dominio de f. La gráfica de f también nos permite tener una visión del dominio y del rango de f sobre los ejes x e y, respectivamente.

- La siguiente prueba, llamada **prueba de la recta vertical**, nos permite determinar cuáles curvas dibujadas en el plano cartesiano son gráficas de funciones:

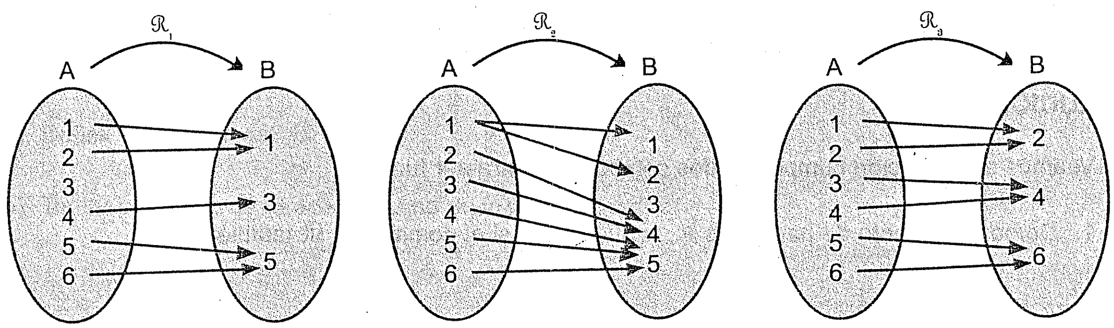
> PRUEBA DE LA RECTA VERTICAL
>
> Una curva en el plano cartesiano es la gráfica de una función de x si y sólo si ninguna recta vertical corta a la curva más de una vez.

- Hay cuatro maneras de representar una función:

1. **Verbalmente**: mediante una descripción con palabras de la situación.
2. **Numéricamente**: a través de un diagrama sagital o de una tabla de valores.
3. **Visualmente**: por medio de una gráfica.
4. **Algebraicamente**: mediante una fórmula explícita.

Ejemplo 1

¿Cuáles de las siguientes relaciones son funciones de A en B?



(a) (b) (c)

Figura 3 - 1

SOLUCIÓN

- $\mathcal{R}_1$ no es función, ya que $3 \in A$ y 3 no está relacionada con ningún elemento de B.
- $\mathcal{R}_2$ no es función porque hay un elemento de A: el 1, relacionado con dos elementos de B.
- $\mathcal{R}_3$ es función, ya que cumple las condiciones de la definición.

Ejemplo 2

En un momento dado la temperatura T del agua contenida en un vaso es de 22°C. Tres segundos después se le adiciona hielo al agua de tal manera que durante los dos segundos siguientes la temperatura desciende brusca y continuamente hasta los 5°C. Luego, la temperatura se estabiliza durante tres segundos y después empieza a aumentar de manera constante durante 6 segundos hasta alcanzar nuevamente la temperatura de 22°C. Dibujemos una gráfica que describa aproximadamente la temperatura del agua como función del tiempo.

SOLUCIÓN

Una posible gráfica es la siguiente:

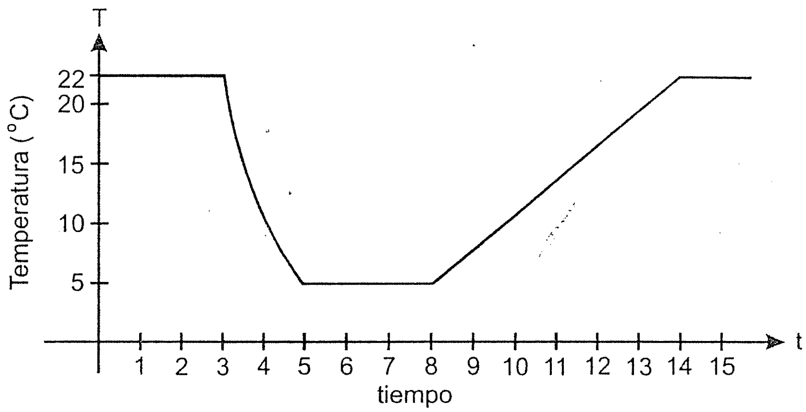


Figura 3 - 2

Ejemplo 3

Consideremos la relación $\Re$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por la regla $xy + 2y = 3$:

a) ¿Es $\Re$ función? ¿por qué?

b) Si no lo es, ¿cómo debemos redefinirla para que lo sea?

SOLUCIÓN

a) Veamos si la relación cumple las dos condiciones para ser función:

1. Como el conjunto de partida es $\mathbb{R}$, verifiquemos si el dominio de $\Re$ también es $\mathbb{R}$:

$$xy + 2y = 3$$
$$\therefore\ y(x + 2) = 3$$
$$\therefore\ y = \frac{3}{x+2}$$

Para que $\frac{3}{x+2} \in \mathbb{R}$ debe cumplirse que $x + 2 \neq 0$, es decir, $x \neq -2$; por lo tanto, $D_{\Re} = \mathbb{R} - \{-2\}$.
Como vemos, el dominio no es igual al conjunto de partida, con lo cual la primera condición de la definición no se cumple.

2. La segunda condición de la definición se cumple, ya que para cada $x \in \mathbb{R} - \{-2\}$ el valor de $y = \in \mathbb{R}$.

b) Para que la relación $\Re$ sea función debemos definirla así:

$$\Re: \mathbb{R} - \{-2\} \to \mathbb{R} \text{ definida por } y = \frac{3}{x+2}$$

Ejemplo 4

Indiquemos si la relación $\mathfrak{R}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por la regla $y^2 + 3x - 2 = 0$ es o no función. En caso contrario, redefínala de manera que lo sea y dibujemos tanto la gráfica de la relación como la de la función.

SOLUCIÓN

- Veamos si se cumplen las condiciones de la definición de función:

  a) Despejemos la **y** para hallar el dominio:

$$y^2 + 3x - 2 = 0$$
$$\therefore\ y^2 = 2 - 3x$$
$$\therefore\ y = \pm\sqrt{2 - 3x}$$

  Ahora bien, $\sqrt{2 - 3x} \in \mathbb{R}$ cuando $2 - 3x \geq 0$. Resolvamos esta desigualdad:

$$2 - 3x \geq 0$$
$$\therefore\ -3x \geq -2$$
$$\therefore\ 3x \leq 2$$
$$\therefore\ x \leq \frac{2}{3}$$

  Por lo tanto, $D_{\mathfrak{R}} = \left(-\infty; \frac{2}{3}\right]$. Esto significa que la primera condición de la definición no se cumple pues el dominio no es igual al conjunto de partida.

  b) Como a cada valor de **x** le corresponden dos de **y** (por los dos signos de la raíz cuadrada), tampoco se cumple la segunda condición.

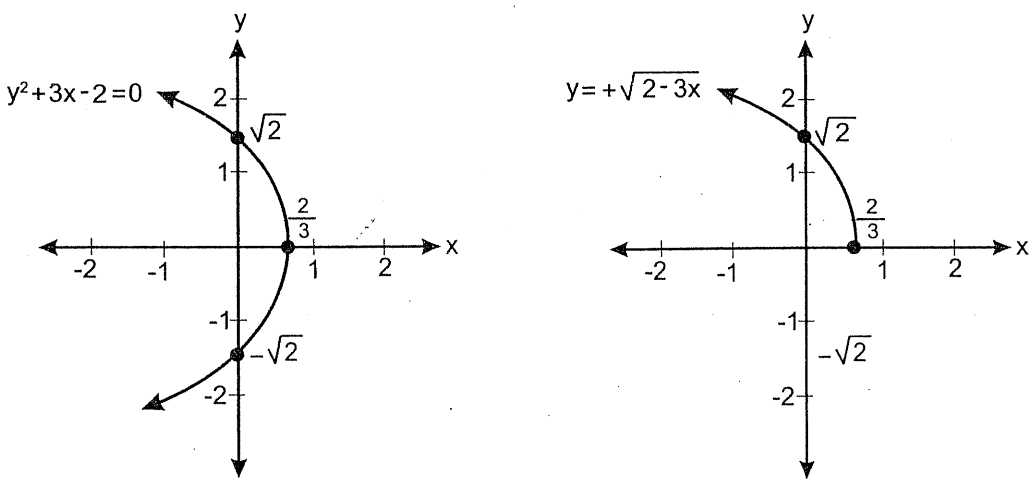
- Si queremos que $\mathfrak{R}$ sea función debemos hacer dos cosas:

  a) Definir la relación así: $\mathfrak{R} : \left(-\infty; \frac{2}{3}\right] \to \mathbb{R}$

  b) Tomar en la raíz cuadrada sólo uno de los signos; así:

$$y = +\sqrt{2 - 3x} \quad ó \quad y = -\sqrt{2 - 3x}$$

- Las figuras 3 – 3 (a) y 3 – 3 (b) nos muestran, respectivamente, las gráficas de la relación y de función.



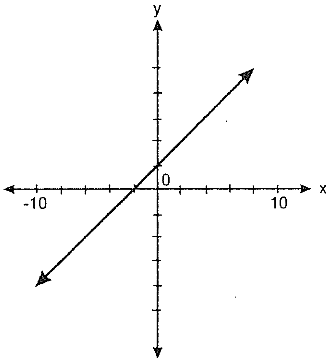
(a) (b)

Figura 3 - 3

Ejemplo 5

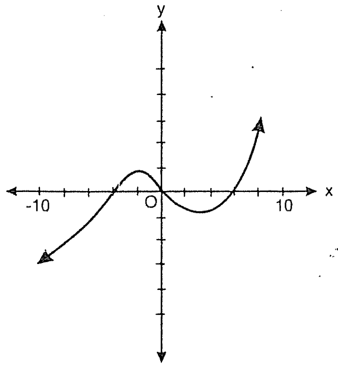
Indiquemos cuáles de las siguientes relaciones son funciones y cuáles no.

1.



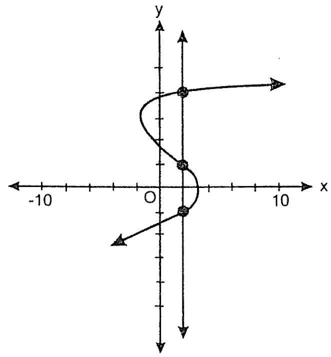
ES FUNCIÓN

2.



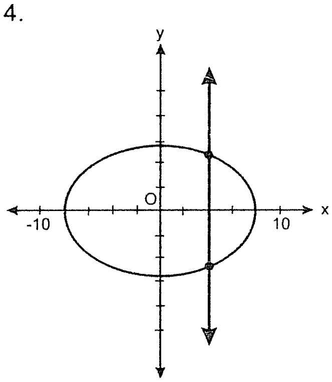
ES FUNCIÓN

3.



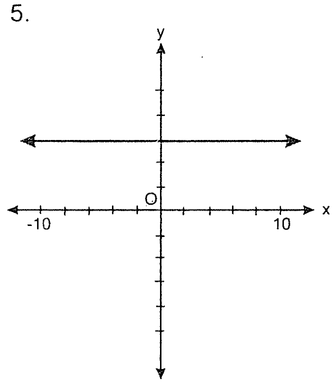
NO ES FUNCIÓN

4.



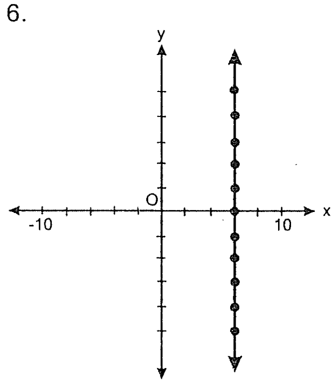
NO ES FUNCIÓN

5.



ES FUNCIÓN

6.



NO ES FUNCIÓN

Ejemplo 6

Sea f: ℝ ℝ una función definida por la regla $y = f(x) = x^2 + 2x - 3$. Hallemos:

a) f(-3) b) f(0) c) f(5)

d) f(a + 1) e) $\dfrac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$

SOLUCIÓN

a) f(-3) significa que debemos ir a la regla de la función **f** y reemplazar **x** por -3; así:

$$\begin{aligned} f(-3) &= (-3)^2 + 2(-3) - 3 \\ &= 9 - 6 - 3 \\ &= 0 \end{aligned}$$

b) f(0) significa que debemos ir a la regla de la función **f** y reemplazar **x** por 0; así:

$$\begin{aligned} f(0) &= 0^2 + 2(0) - 3 \\ &= -3 \end{aligned}$$

c) f(5) significa que debemos ir a la regla de la función **f** y reemplazar **x** por 5; así:

$$f(5) = 5^2 + 2(5) - 3$$

$$= 25 + 10 - 3$$
$$= 32$$

d) f(a + 1) significa que debemos ir a la regla de la función **f** y reemplazar **x** por a + 1; así:

$$\begin{aligned} f(a+1) &= (a+1)^2 + 2(a+1) - 3 \\ &= a^2 + 2a + 1 + 2a + 2 - 3 \\ &= a^2 + 4a \end{aligned}$$

e) Para calcular $\dfrac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}$, hallamos $f(x_1 + h)$ y $f(x_1)$; así:

$$f(x_1 + h) = (x_1 + h)^2 + 2(x_1 + h) - 3$$
$$f(x_1) = x_1^2 + 2x_1 - 3$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h} &= \frac{(x_1+h)^2+2(x_1+h)-3-(x_1^2+2x_1-3)}{h} \\ &= \frac{x_1^2+2hx_1+h^2+2x_1+2h-3-x_1^2-2x_1+3}{h} \\ &= \frac{2hx_1+2h+h^2}{h} \\ &= \frac{h(2x_1+2+h)}{h} \\ &= 2x_1 + 2 + h, \text{ con } h \neq 0 \end{aligned}$$

3.1.2. Funciones crecientes y decrecientes

RECORDEMOS

DEFINICIÓN DE FUNCIÓN CRECIENTE Y DECRECIENTE

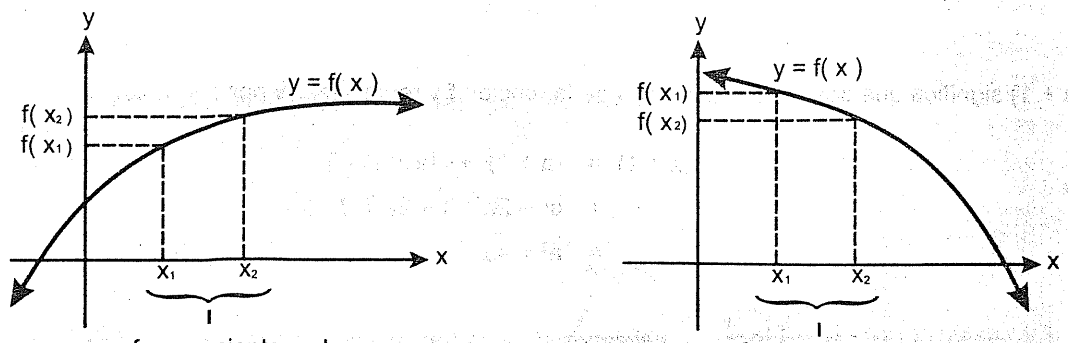
Sea f una función definida en un intervalo abierto I.

- **Se dice que f es CRECIENTE en I si al aumentar los valores de x en I, también aumentan los valores de f(x); es decir:**

  f es CRECIENTE en I, si $x_2 > x_1$ implica que $f(x_2) > f(x_1)$, para todo $x_1, x_2 \in I$

- **Se dice que f es DECRECIENTE en I si al aumentar los valores de x en I, en cambio los valores de f(x) disminuyen; es decir:**

  f es DECRECIENTE en I, si $x_2 > x_1$ implica que $f(x_2) < f(x_1)$, para todo x_1, x_2 I



f es creciente en I

$x_2 > x_1$ implica $f(x_2) > f(x_1)$

(a)

f es decreciente en I

$x_2 > x_1$ implica $f(x_2) < f(x_1)$

(b)

Ejemplo

La gráfica de la figura 3 - 4 representa la variación de temperatura de una población a lo largo de un determinado día.

Figura 3 - 4

a) Estimar la temperatura máxima y mínima de ese día y las horas las que se produjeron tales temperaturas.

b) ¿En cuáles períodos del día la temperatura crece? ¿Y en cuáles decrece?

c) ¿A qué hora la temperatura fue de 0°C?

SOLUCIÓN

a) De acuerdo con la gráfica, la temperatura máxima se produce a las 2 de la tarde y es aproximadamente de 15°C. La temperatura mínima se produce a las 4 de la mañana y es de –4°C.

b) La temperatura aumenta entre las 4 a.m. y las 8 a.m., y entre las 10 a.m. y las 2 p.m.. La temperatura disminuye entre las 0 horas y las 4 a.m., y entre las 2 p.m. y las 24 horas.

c) La temperatura es 0° en los puntos donde la gráfica intercepta al eje horizontal. Esto ocurre a las 2 a.m. y a las 5:15 a.m., aproximadamente.

3.1.3. Funciones pares e impares

RECORDEMOS

DEFINICIÓN DE FUNCIÓN PAR E IMPAR

- **Una función f es PAR cuando para cualquier valor de x de su dominio se cumple que:**

$$f(-x) = f(x)$$

Toda función PAR es simétrica con el eje y

- **Una función f es IMPAR cuando para cualquier valor de x de su dominio se cumple que:**

$$\mathbf{f(-x) = -f(x)}$$

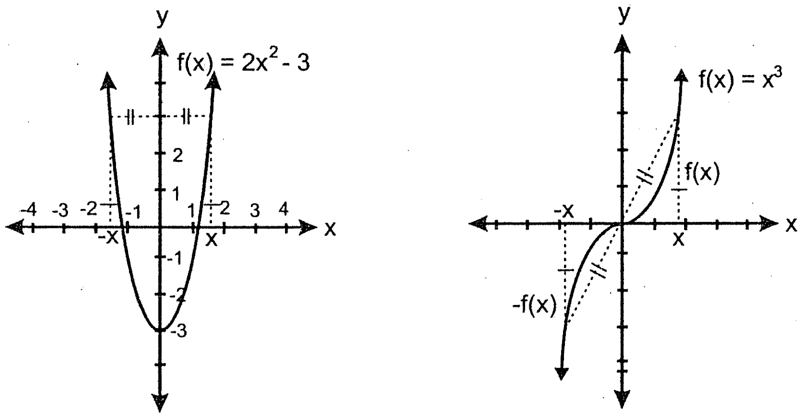
Toda función IMPAR es simétrica con el origen.

Ejemplo 1

La función real definida por $f(x) = 2x^2 - 3$ es PAR ya que $\mathbf{f(-x) = 2(-x)^2 - 3 = 2x^2 - 3 = f(x)}$.
En la figura 3 – 5 (a) podemos observar la simetría de la curva con respecto al eje y.

Ejemplo 2

La función real definida por $f(x) = x^3$ es IMPAR ya que $\mathbf{f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)}$.
En la figura 3 – 5(b) podemos observar la simetría de la curva con respecto al origen.



(a) (b)

Figura 3 - 5

Ejemplo 3

Determinemos si las siguientes funciones reales son pares, impares o ninguna de las dos:

a) $f(x) = 4x^5 - 2x^3$ b) $g(x) = 3 - 2x^4$ c) $h(x) = \text{Sen}(x)$

SOLUCIÓN

a)
$$\left.\begin{aligned} f(-x) &= 4(-x)^5 - 2(-x)^3 \\ &= -4x^5 + 2x^3 \\ &= -\left(4x^5 - 2x^3\right) \\ &= -f(x) \end{aligned}\right\} \therefore f(-x) = -f(x)$$ Por lo tanto, f es una función impar.

b)
$$\left.\begin{aligned} g(-x) &= 3 - 2(-x)^4 \\ &= 3 - 2x^4 \\ &= g(x) \end{aligned}\right\} \therefore g(-x) = g(x)$$ Luego, g es una función par.

c) $h(-x) = \text{Sen}(-x)$

$= -\text{Sen}(x) \cdots\cdots$ pues $\text{Sen}(-x) = -\text{Sen}(x)$

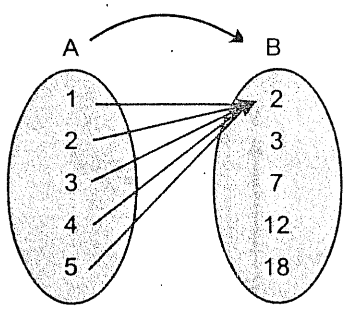
$= -h(x)$

Por lo tanto, h es una función impar.

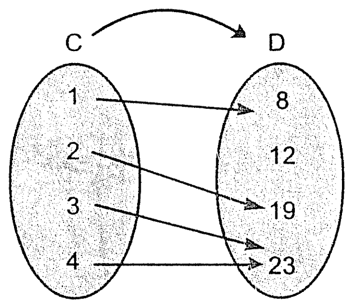
EJERCICIO 3.1

1 Indicar cuáles de las relaciones definidas mediante los siguientes diagramas sagitales son funciones. Explicar la respuesta.

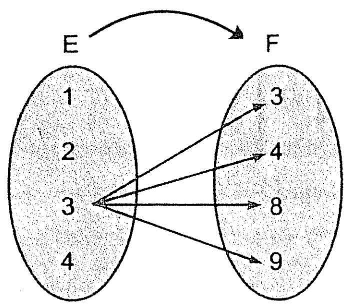
a)



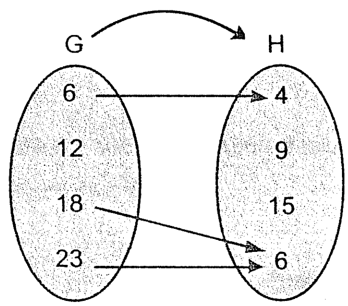
b)



c)

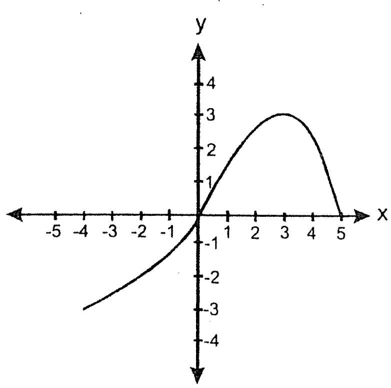


d)



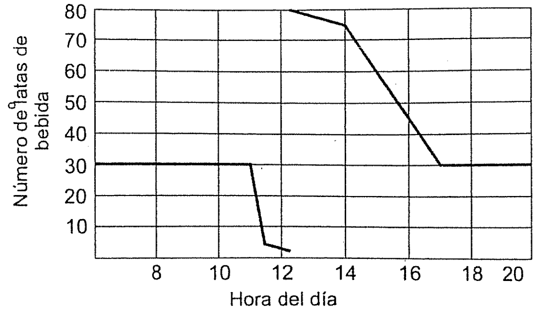
2 La gráfica de la derecha corresponde a una relación real $\Re$ definida de un conjunto A en un conjunto B ($\Re$: $A \to B$).

a) ¿Cuáles son los conjuntos A y B?
b) ¿Es $\Re$ una función f de A en B? ¿Por qué?
c) Si la respuesta en b) es afirmativa halle f(-4) y estime el valor de f(1).
d) ¿Para cuáles valores f(x)=-2? ¿Y f(x)=0?
e) ¿Cuáles son el dominio y el rango de f?
f) ¿En qué intervalos f es creciente y en cuáles es decreciente?

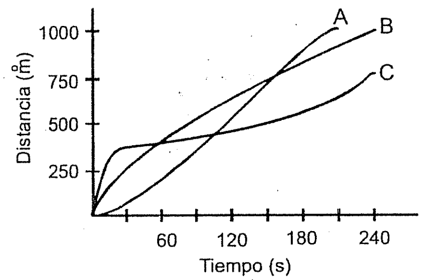


3 En una cafetería se encuentra una máquina con latas de gaseosas. Un cierto día la empresa que instaló la máquina realizó un estudio para saber cuántas latas había en cada momento, desde las 8 de la mañana hasta las 8 de la noche. Dicho estudio quedó representado en la gráfica de la derecha. Contesta:

a) ¿Cuántas latas había en la máquina a las 8 de la mañana?
b) ¿En qué períodos no se consumió ninguna lata?
c) ¿Cuántas latas se consumieron entre las 11:00 y las 11:30 a.m.?
d) ¿A qué hora se llenó la máquina?
e) ¿Puede preverse, a partir de la gráfica, a qué hora se suspende el servicio en la tarde?
f) ¿Cuándo se han consumido más latas de gaseosa por hora?

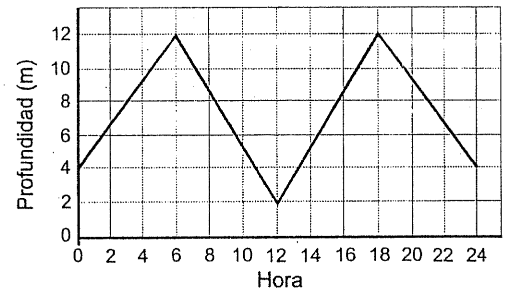


4 Tres atletas participan en una carrera de 1000m. La gráfica de la derecha describe de forma aproximada el comportamiento de los atletas en dicha prueba. ¿Cómo describiría un locutor que está transmitiendo la prueba lo que ha ocurrido?



5 La gráfica muestra cómo varía la profundidad del agua en un puerto durante un día cualquiera:

a) ¿A qué horas aumenta la profundidad? ¿A qué hora disminuye?
b) ¿A qué horas se producirá el máximo de profundidad? ¿Y el mínimo?
c) Imagine la gráfica en los días siguientes y trate de representarla.

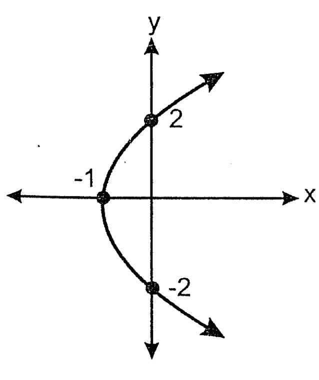


6 En la tabla, se muestra la población P (en miles) de un municipio cualquiera, desde 1990 hasta 2000.

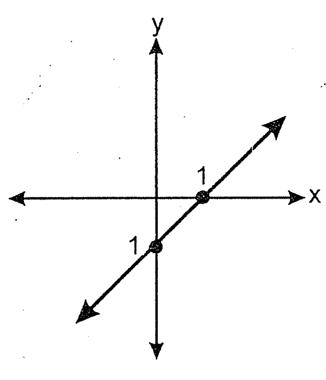
t	1990	1992	1994	1996	1998	2000
P	823	847	887	935	1005	1080

a) Dibujar una gráfica de P como función del tiempo.
b) Use la gráfica para estimar la población en 1991.

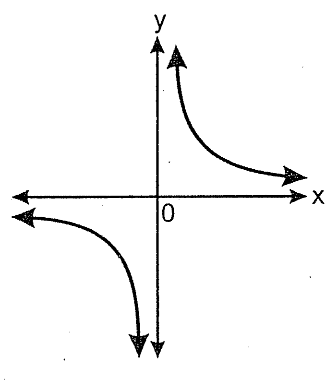
7 Determinar si las gráficas de las siguientes relaciones son funciones de x en y. Si lo son, escribir el dominio y el rango.



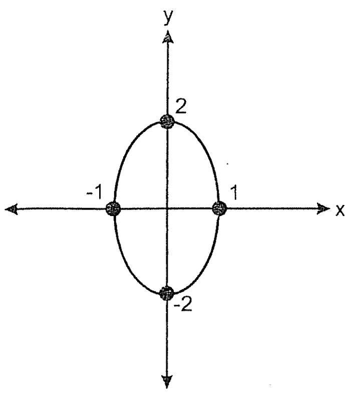
(a)

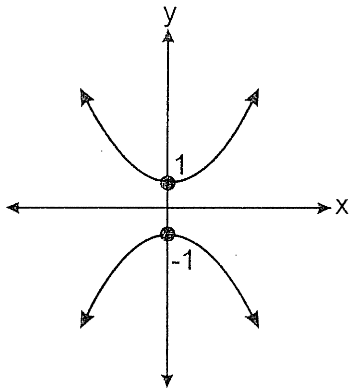


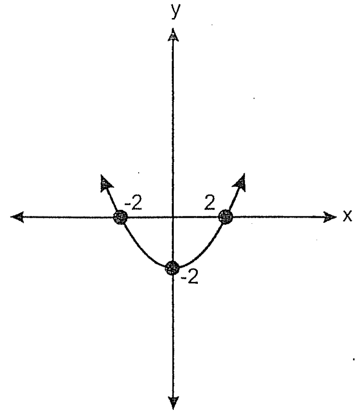
(b)



(c)







En los ejercicios **8** a **13**, determinar cuáles de las relaciones reales son funciones y cuáles no. Aquellas que no lo sean, redefinirlas de tal manera que se conviertan en funciones.

8 $\mathcal{R}_1 = \{(x, y) \mid x = y^2\}$

9 $\mathcal{R}_2 = \left\{(x, y) \mid y = \dfrac{1}{x}\right\}$

10 $\mathcal{R}_3 = \{(x, y) \mid y = x^2\}$

11 $\mathcal{R}_4 = \{(x, y) \mid y = 2x + 1\}$

12 $\mathcal{R}_5 = \{(x, y) \mid x \cdot y = 2\}$

13 $\mathcal{R}_6 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$

En los ejercicios **14** a **16**, hallar el dominio de la función

14 $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2 + 5x - 6}$

15 $g(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$

16 $h(t) = \sqrt[4]{9 - t^2}$

En los ejercicios **17** a **22**, calcular para cada función f:

a) $f(-3)$

b) $f(0)$

c) $f(2)$

d) $f(a + b)$

e) $f(a) + f(b)$

f) $\dfrac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$

17 $f(x) = x^2 + 3x - 4$

18 $f(x) = \sqrt{x - 2}$

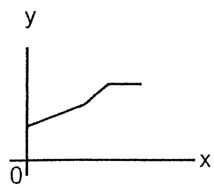
19 $f(x) = x$

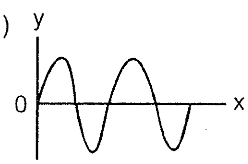
20 $f(x) = \dfrac{x + 2}{x + 3}$

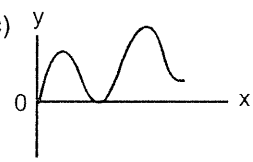
21 $f(x) = x^3$

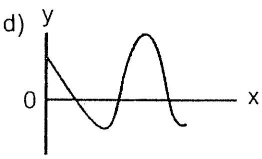
22 $f(x) = 8$

23 Completar las siguientes gráficas sabiendo que corresponden a funciones pares.

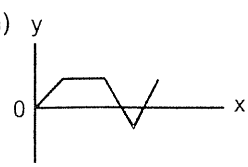
a)


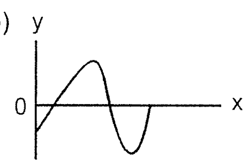
b)


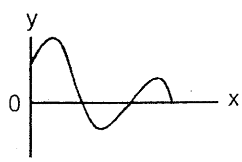
c)


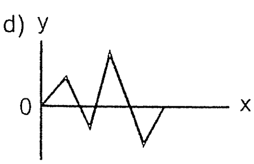
d)


24 Completar estas gráficas sabiendo que corresponden a funciones impares.

a)


b)


c)


d)


En los ejercicios 25 a 30, determinar si f es par o impar o ninguna de las dos.

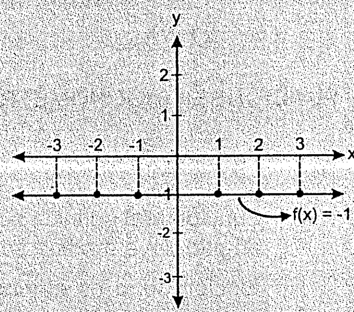
25 $f(x) = x^{-4}$	26 $f(x) = 3x^2 - 4x$	27 $f(x) = 2x - x^3$
28 $f(x) = x^{-5}$	29 $f(x) = 3x^2 - 2x^4$	30 $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 3$

3.1.4. Clases de funciones reales

3.1.4.1 Funciones en su forma más simple

Estas son algunas funciones reales escritas en su forma más simple:

RECORDEMOS

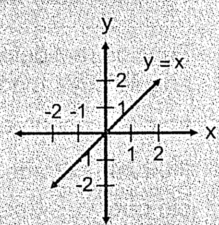


1. **FUNCIÓN CONSTANTE**
Función real definida por la regla y=f(x)=k, donde k es un número real fijo. Su gráfica es una recta paralela al eje x. A la derecha tenemos la gráfica de la función constante y=f(x)=-1

$D_f = R$; $I_f = \{ -1 \}$

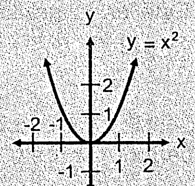
2. **FUNCIÓNES POTENCIA**
Las **funciones potencia** tienen la forma **$f(x)=x^n$**, donde n es una constante. Consideraremos varios casos:

2.1. n es un entero positivo



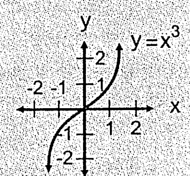
- Si **n=1**, la gráfica corresponde a línea recta de ecuación y=x. Esta función recibe el nombre de función identidad.

  $D_f = R$; $I_f = R$



- Si **n es un número par**, la gráfica de $y=x^n$ es muy parecida a la gráfica de la parábola $y=x^2$

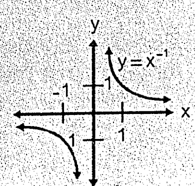
  $D_f = R$; $I_f = \{ 0; +\infty)$



- Si **n es un número impar mayor que 1**, la gráfica de $y=x^n$ es muy parecida a la gráfica de la parábola $y=x^3$

  $D_f = R$; $I_f = R$

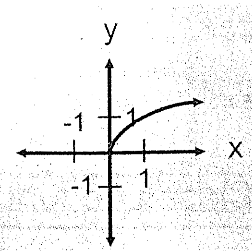
2.2. n = -1



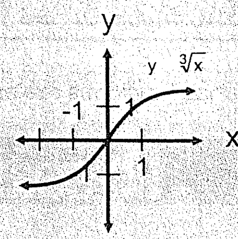
- Si **n=-1**, la gráfica corresponde a la hipérbola de ecuación $y = x^{-1} = \frac{1}{x}$

  $D_f = R - \{ 0 \}$; $I_f = R - \{ 0 \}$

2.3. $n = \dfrac{1}{a}$, **donde a** $\in \mathbb{Z}^+$



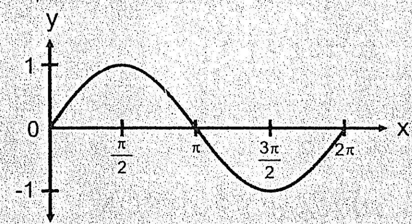
- Si a=2, se tiene la función **raíz cuadrada** $y = x^{1/2} = \sqrt{x}$, cuyo dominio es el intervalo $[0;+\infty)$ y su gráfica es la mitad superior de la parábola $x=y^2$.
- Si a = 4, 6, 8, ... la gráfica de $y = \sqrt[a]{x}$ es similar a la de $y = \sqrt{x}$.
- Si a = 3, se tiene la finción **raíz cúbica** $y = x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$, cuyo dominio es R y cuya gráfica se muestra a la derecha.
- Si a = 5, 7, 9, ... la gráfica de $y = \sqrt[a]{x}$ es similar a la de $y = \sqrt[3]{x}$.



3. FUNCIÓNES TRIGONOMÉTRICAS

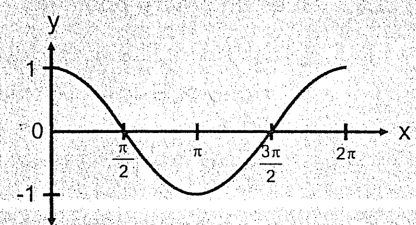
3.1. Función Seno

Función real definida por la regla y=Sen(x), donde x es un ángulo cuya medida se da en radianes. El dominio de la función seno es el intervalo $(-\infty;+\infty)$ y el rango es el intervalo cerrado $[-1;1]$. Por lo tanto, para todo x se cumple que: $-1 \leq \text{Sen}(x) \leq 1$.
Esta es la gráfica de la función seno en el intervalo $[0;2\pi]$



3.2. Función Coseno

Función real definida por la regla y=Cos(x), donde x es un ángulo cuya medida se da en radianes. El dominio de la función coseno es el intervalo $(-\infty;+\infty)$ y el rango es el intervalo cerrado $[-1;1]$. Por lo tanto, para todo x se cumple que: $-1 \leq \text{Cos}(x) \leq 1$.
Esta es la gráfica de la función coseno en el intervalo $[0;2\pi]$

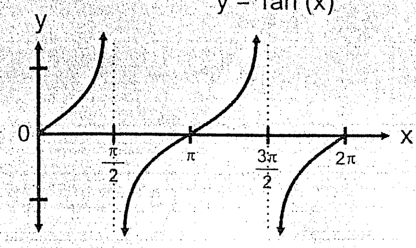


!ATENCIÓN!: Una propiedad importante de las funciones seno y coseno es que son periódicas y tienen período 2π. Esto significa que para todos los valores de x

$$\text{Sen}(x+2\pi) = \text{Sen } x \quad \text{y} \quad \text{Cos}(x+2\pi) = \text{Cos } x$$

La naturaleza periódica de estas funciones las hace muy apropiadas para describir fenómenos repetitivos como mareas, resortes vibrantes y ondas sonoras.

3.3. Función Tangente



Función real definida por la regla y=Tan(x), donde x es un ángulo cuya medida se da en radianes.
La función tangente no está definida cuando $x = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots$; es decir, su dominio es el conjunto

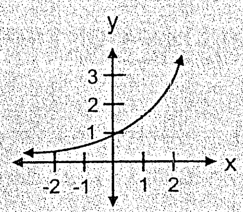
$\left\{x/x \neq (2n-1)\frac{\pi}{2}, \text{con } n \in Z\right\}$. Su rango es $(-\infty;+\infty)$

Hemos dibujado su gráfica en el intervalo $[0;2\pi]$

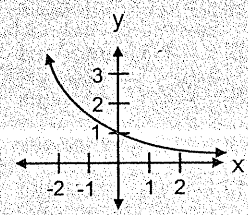
4. FUNCIONES EXPONENCIALES

Las **funciones exponenciales** tienen la forma **$y=f(x)=a^x$**, donde a es un número real positivo diferente de 1

- Si **a>1**, su gráfica es una curva creciente. Su dominio es $(-\infty;+\infty)$ y su rango es el intervalo $(0;+\infty)$. A la derecha se dibujó la gráfica de $y=2^x$.



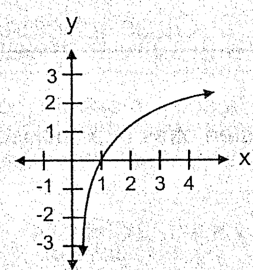
- Si **0<a<1**, su gráfica es una curva decreciente. Su dominio es $(-\infty;+\infty)$ y su rango es el intervalo $(0;+\infty)$. A la derecha se dibujó la gráfica de $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$.



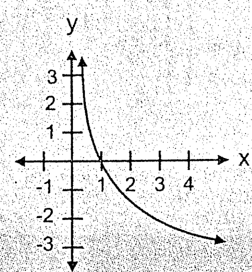
5. FUNCIONES LOGARÍTMICAS

Las **funciones logarítmicas** tienen la forma **$y=f(x)=\log_a(x)$**, donde la base **a** es un número real positivo diferente de 1. Son las funciones inversas de las funciones exponenciales. Las funciones inversas serán estudiadas un poco más adelante en esta misma unidad.

- Si **a>1**, su gráfica es una curva creciente. Su dominio es $(0;+\infty)$ y su rango es el intervalo $(-\infty;+\infty)$. A la derecha se dibujó la gráfica de $y=\log_2(x)$.



- Si **0<a<1**, su gráfica es una curva decreciente. Su dominio es $(0;+\infty)$ y su rango es el intervalo $(-\infty;+\infty)$. A la derecha se dibujó la gráfica de $y=\log_{\frac{1}{2}}(x)$.

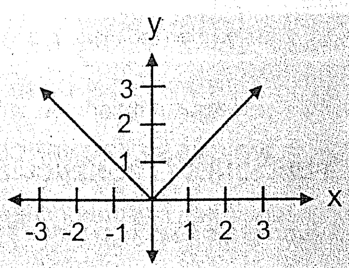


- Entre las funciones logarítmicas debe destacarse la función $y=\log_e(x) = \ln(x)$, donde $e \approx 2.71...$

6. **FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO**

En la unidad anterior definimos el valor absoluto de un número y lo simbolizamos |x|. La **función valor absoluto** definida por la regla **y = f(x) = |x|** relaciona cada número real con su valor absoluto.

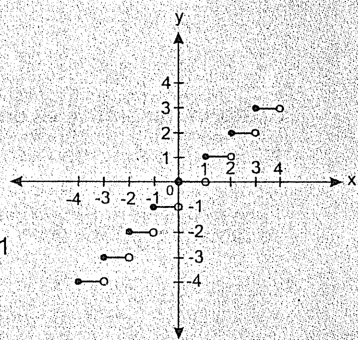
El dominio de y = |x| es (-∞ , +∞) y el rango es [0; +∞).



7. **FUNCIÓN MAYOR ENTERO CONTENIDO EN**

- La **función mayor entero contenido** definida por la regla y = f(x) = ‖ x ‖ relaciona cada número real con el **mayor número entero que sea menor o igual** que él; por ejemplo:

Si x = 0.5 entonces ‖0.5‖ =0.5; Si x = 0.3 entonces ‖0.3‖ =0.3
Si x = 1.3 entonces ‖1.3‖=1.3; Si x = 2.5 entonces ‖2.5‖ =2
Si x = 4 entonces ‖4‖ =4; Si x = 0 entonces ‖0‖ =0
Si x = -2.4 entonces ‖-2.4‖ =-3; Si x = -3.7 entonces ‖-3.7‖ =-4
Si x =-0.8 entonces ‖-0.8‖ =-1; Si x = -0.01 entonces ‖-0.01‖ =-1



- La gráfica de la función y = f(x) = ‖ x ‖ aparece dibujada a la derecha.
- El dominio de esta función es el conjunto (- ∞ ;+ ∞) y el rango es el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros.

3.1.4.2 Otras funciones reales

- En la sección anterior consideramos algunas funciones básicas escritas en la forma más simple. Pero existen otras que, incluso, pueden escribirse como combinación de las anteriores, por ejemplo:

$y = 4x^3 - 3x^2 + 6x - 4$; $y = \sqrt{2x^2 - 5}$; $y = \dfrac{4x^3 - 2x + 1}{x^2 - 3}$

$y = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 - 4 & \text{si } -1 < x \leq 2 \\ 6 & \text{si } x > 2 \end{cases}$; $y = 3 \operatorname{Sen}\left(\mathbf{2x} + \dfrac{\pi}{3}\right)$; $y = e^{2x-1}$

- Revisemos algunas de estas funciones reales.

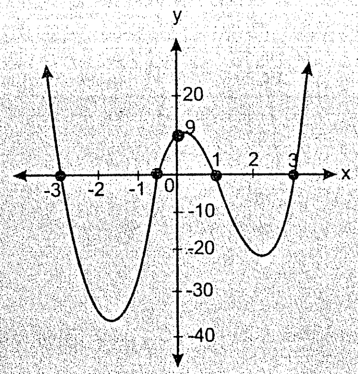
RECORDEMOS

1. **LA FUNCIÓN POLINÓMICA**

Una función es **polinómica** cuando su regla tiene la forma:

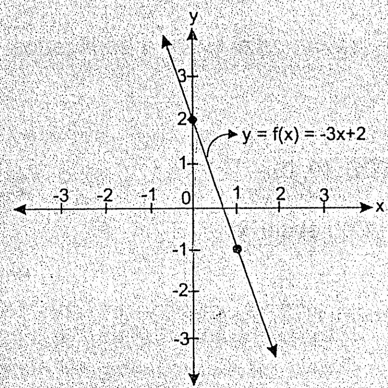
$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 n + a_0$$

donde n es un número entero no negativo y los números a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_1, a_0 son constantes reales llamadas **coeficientes**. El mayor exponente n del polinomio se llama **grado** de la función. El dominio de una función polinómica es D = $(-\infty;+\infty)$. A continuación dibujamos la gráfica de la función polinómica de cuarto grado $y=f(x)=2x^4-x^3-19x^2+9x+9$:



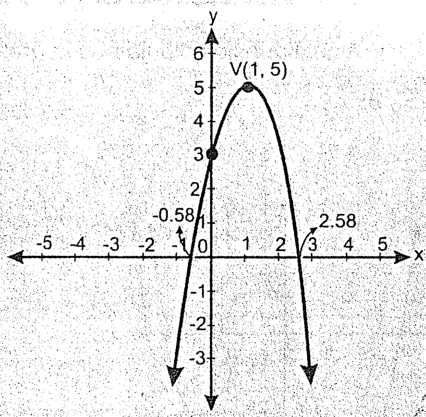
2. LA FUNCIÓN LINEAL O POLINÓMICA DE PRIMER GRADO

- La **función lineal** está definida por la regla **y=f(x)=mx+n**, donde m y n son dos números reales fijos.
- Los números reales **m** y **n** son la pendiente de la recta y el intercepto con el eje y.
- Para dibujar la gráfica de una función lineal basta conocer dos puntos y unirlos con una recta de trazo continuo. A continuación, dibujamos la gráfica de $y=f(x)=-3x+2$



3 LA FUNCIÓN CUADRÁTICA O POLINÓMICA DE SEGUNDO GRADO

- La **función cuadráica** está definida por la regla **y=f(x)=ax²+bx+c**, donde a, b, c $\in\mathbb{R}$ y a≠0.
- La gráfica de una función cuadrática es una **parábola vertical** y los números a, b, c son claves en su dibujo. Veamos:
  - El signo de **a** determina la concavidad de la parábola: si **a>0**, la parábola es cóncava hacia arriba $(\cup)$; si **a<0**, la parábola es cóncava hacia abajo $(\cap)$.
  - El cociente $\frac{-b}{2a}$ nos permite determinar la abscisa del vértice de la parábola; es decir, $x=\frac{-b}{2a}$ es la primera componente del punto más alto o más bajo de la parábola. Por supuesto, la otra componente del vértice la obtenemos reemplazando este valor de x en la regla de la función.
  - El valor de **c** indica el punto donde la parábola intercepta al eje y (el punto (0,c) es el intercepto con el eje y).
  - Los interceptos con el eje **x** son los ceros de la función y los obtenemos resolviendo la ecuación de segundo grado **ax²+bx+c=0**.
- A continuación, dibujamos la gráfica de y=f(x)= -2x²+4x+3. Recomendamos al lector verificar por su cuenta los elementos básicos (coordenadas del vértice e interceptos con los ejes coordenados)



4. FUNCIONES RACIONALES

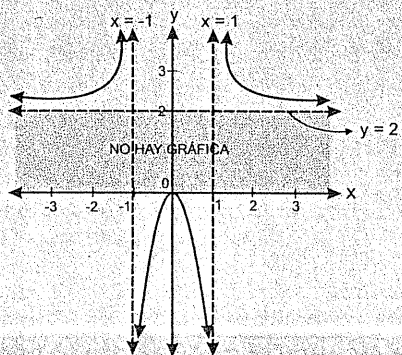
- Si p(x) y q(x) son polinomios, entonces la función real f definida por la regla:

$$f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$$

se denomina **función racional** y está definida para todos los valores de x tales que $q(x)\neq 0$.

- Para dibujar la gráfica de una función racional debemos recurrir a los análisis que realizamos en la unidad uno, cuando repasamos el concepto de relación; es decir, debemos determinar: interceptos con los ejes, simetrías con los ejes y con el origen, dominio y rango. En la unidad cinco estudiaremos otros elementos que nos ayudarán a dibujar las gráficas de ciertas funciones racionales: las **asíntotas**. La figura siguiente nos muestra la gráfica y el análisis parcial correspondiente a la función racional $f(x)=\frac{2x^2}{x^2-1}$. Invitamos al lector a verificarlos.

1. INTERCEPTOS: (0, 0).
2. SIMETRÍAS: Con el eje **y**
3. DOMINIO: $\mathbb{R}$ - $\{-1, 1\}$
4. RANGO: $(-\infty\,;0]\cup(2;+\infty)$



5. FUNCIONES POR TRAMOS

- Las **funciones por tramos** son aquellas que están definidas por reglas diferentes en diferentes partes de su dominio. Por ejemplo, la función definida por la regla:

$$f(x)=\begin{cases}-3 & \text{si } x\in(-\infty;-1)\\ x^2+1 & \text{si } x\in[-1;2)\\ 1-x & \text{si } x\in[-2;+\infty)\end{cases}$$

- Para dibujar una función por tramos es necesario analizar cada intervalo y el tramo o pedazo de la función que se define en el.

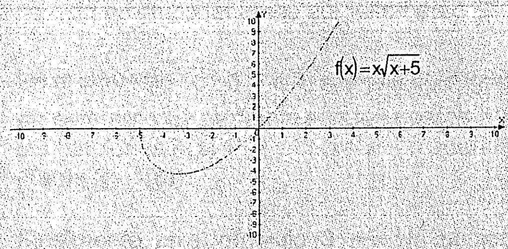
6. FUNCIONES ALGEBRAICAS

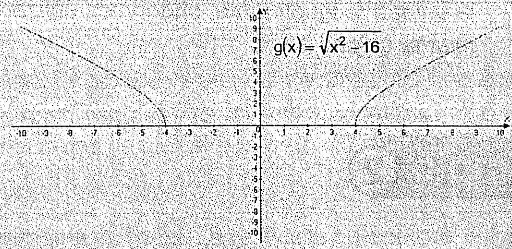
- Una función f es **función algebraica** si puede obtenerse usando operaciones algebraicas (suma, resta, multiplicación, división, potenciación y extracción de raíz) a partir de polinomios. Por supuesto, cualquier función racional es una función algebraica.

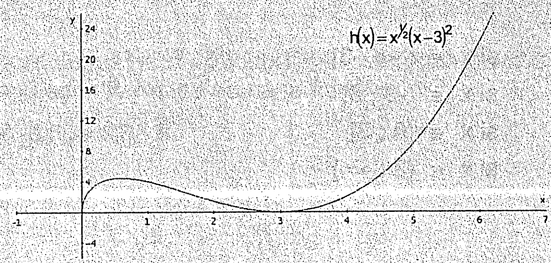
- Algunos ejemplos de funciones algebraicas son las siguientes:

$$f(x)=x\sqrt{x+5} \quad ; \quad g(x)=\sqrt{x^2-16} \quad ; \quad h(x)=x^{1/2}(x-3)^2$$

- El estudio de estas funciones lo haremos en la unidad 7, al analizar las aplicaciones de la derivada de una función. Mientras tanto, haremos el dibujo de cada una de ellas utilizando el DERIVE.







Ejemplo 1

Analicemos y dibujemos la gráfica de la función f: ℝ→ℝ definida por la regla: $y = f(x) = 3x^5 - 19x^4 + 16x^3 + 70x^2 - 100x + 48$.

SOLUCIÓN

- Se requieren métodos que proporciona el Cálculo Diferencial, los cuales estudiaremos en la unidad 7, para hacer un análisis completo de las gráficas de funciones polinómicas de grado mayor que 2. Generalmente, a medida que el grado aumenta, la gráfica es más complicada, pero su apariencia es siempre la de una curva suave, sin interrupciones, sin esquinas, huecos o brechas y con algunas «cimas» y «valles» que pueden aparecer en gran cantidad si el grado es elevado, tal como nos muestra la figura 3-7.

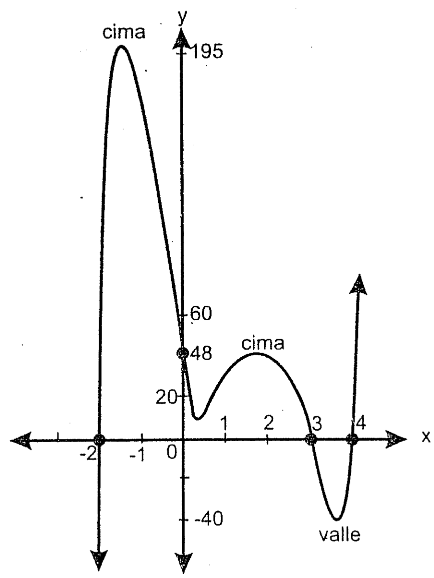


Figura 3 - 7

- Un elemento clave en el dibujo de la gráfica de una función polinómica lo constituye la obtención de los interceptos con los ejes; en particular, los interceptos con el eje **x**. Para obtener éstos últimos debemos resolver la ecuación polinómica correspondiente, recurriendo a los métodos ya estudiados previamente (teorema del factor y la división sintética).

- La factorización de $3x^5 - 19x^4 + 16x^3 + 70x^2 - 100x + 48$ es $(x+2)(x-3)(x-4)(3x^2 - 4x + 2)$, por lo tanto, la gráfica de f tiene tres interceptos con el eje x: x=-2, x=3 y x=4; además, tiene un intercepto con el eje y: (0.48)

ATENCIÓN

Invitamos a cada lector a resolver la ecuación polinómica $3x^5 - 19x^4 + 16x^3 + 70x^2 - 100x + 48$ con el objeto de repasar los aspectos básicos de la teoría de ecuaciones polinómicas estudiadas en la unidad 1. Igualmente, sugerimos utilizar DERIVE para hallar los ceros tal como se hizo en la misma unidad 1.

Ejemplo 2

Sea h: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida por la regla:

$$h(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x \in (-\infty, -3] \\ -5 & \text{si } x \in (-3\,;\,0] \\ x^2 - 5 & \text{si } x \in (0\,;\,3] \\ 4 - x & \text{si } x \in (3\,;\,+\infty] \end{cases}$$

Se pide:

a) Dibujar la gráfica de h.

b) Hallar el dominio y el rango.

c) Hallar h(-4), h(-1), h(2), h(6).

d) Usar el DERIVE para dibujar la gráfica de f y compararla con la obtenida en el literal a).

SOLUCIÓN

a) Para graficar h debemos dibujar cada tramo; así:

1. En el intervalo $(-\infty, -3]$, la función es lineal. Elaboremos una tabla de valores, tengamos en cuenta que toda función lineal corresponde a una línea recta y que para dibujar ésta sólo necesitamos dos puntos (tabla 3 - 1(a)). El punto correspondiente al extremo x = -3 es un «círculo lleno», pues el intervalo es cerrado.

x	2x + 1
-4	-7
-3	-5

(a)

x	-5
-3	-5
0	-5

(b)

x	x^2 - 5
0	-5
1	-4
2	-1
3	4

(c)

x	4 - x
3	1
4	0

(d)

Tabla 3 - 1

2. En el intervalo (-3; 0] , la función es constante. La gráfica es un segmento de recta paralelo al eje **x**, que pasa por y = -5, con un «círculo vacío» en (-3 , -5), y otro lleno en (0 , -5), (Tabla 3 - 1(b)).

ATENCIÓN

En la figura 3 - 8, los dos tramos aparecen conectados debido a que cuando x = -3, en ambas funciones el valor de y es el mismo: -5.

3. En el intervalo $(0 ; 3]$, la función es de segundo grado. La gráfica es un arco de parábola. Los extremos de este arco de parábola son los puntos (0, -5)(«círculo vacío») y (3, 4) («círculo lleno»). De nuevo, las funciones h(x) = -5 y $h(x) = x^2 - 5$ aparecen conectadas ya que el punto (0, -5) coincide en ambas, (Tabla 3 - 1(c)).

4. Finalmente, en el intervalo $(3 ; +\infty)$ la función nuevamente es lineal. La gráfica la obtenemos asignando a **x** dos valores (Tabla 3- 1(d)). El extremo correspondiente a x = 3 (es decir, el punto (3, 1)) es un «círculo vacío».

   En este caso, las gráficas de $h(x) = x^2 - 5$ y h(x) = 4 - x aparecen desconectadas, pues las imágenes correspondientes a x = 3 son diferentes en cada función.

   La gráfica se ilustra en la figura 3 - 8.

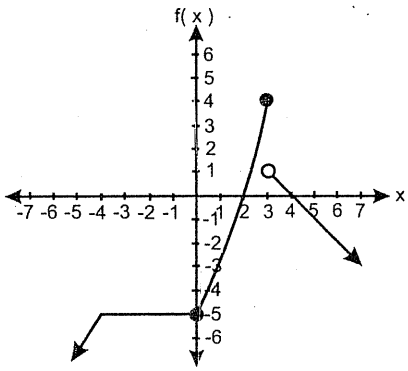


Figura 3 - 8

b) El dominio de h es: $(-\infty; -3] \cup (-3;0] \cup (0; 3] \cup (3; +\infty) = \mathbb{R}$. El rango lo obtenemos mirando la gráfica de abajo hacia arriba (a lo largo del eje **y**): $I_h = (-\infty; 4]$.

c) Finalmente, hallemos las imágenes solicitadas:

- Como $-4 \in (-\infty; -3]$ entonces h(-4) = 2(-4) + 1 = -7
- Como $-1 \in (-3;0]$ entonces h(-1) = -5
- Como $2 \in (0; 3]$ entonces $h(2) = 2^2 - 5 = -1$
- Como $6 \in (3; +\infty)$ entonces h(6) = 4 - 6 = -2

d) Para dibujar la gráfica de esta función usando DERIVE podemos emplear el comando IF o el comando CHI:

- Si empleamos el comando IF, entonces la función debemos ingresarla así:

  f(x): = if (x ≤ -3, 2 * x + 1, if (x ≤ 0, -5,if(x ≤ 3, x ^ 2 – 5, 4 – x)))

  y luego procedemos en la misma forma que en los ejercicios donde hemos dibujado gráficas de curvas en el plano.

  Si usamos el comando CHI (característico de un intervalo), debemos ingresar la función así:

  f(x): = (2 * x + 1)* CHI (-inf, x, -3) + (-5) * CHI (-3, x, 0) + (x ^ 2 –5) * CHI (0, x, 3) + (4 – x) *CHI (3,x,inf)

y luego procedemos en la misma forma que antes.

- En cualquiera de los dos casos, la gráfica obtenida es la siguiente; figura 3 - 9:

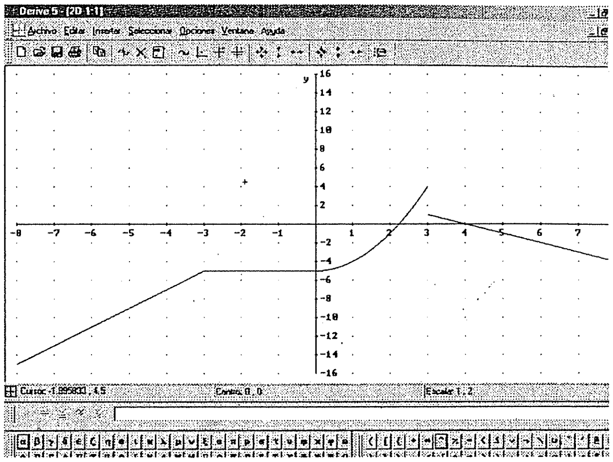


Figura 3 - 9

- Observemos que se ha escogido una graduación horizontal de –8 a 8 con 16 divisiones y una graduación vertical de –16 a 16 con 16 divisiones.

Ejemplo 3

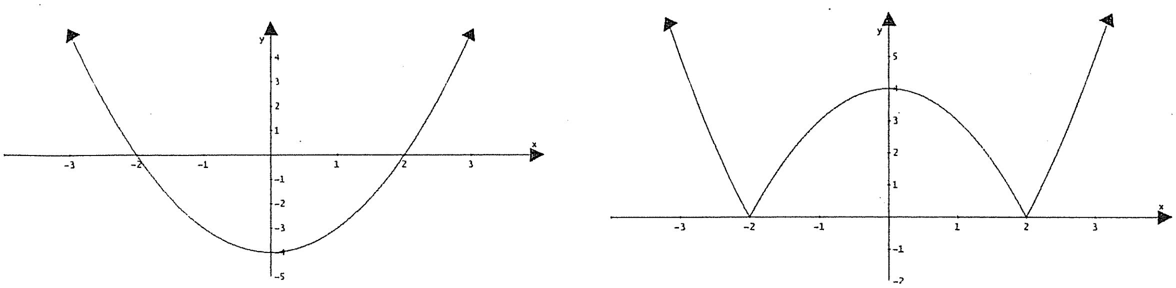
Dibujemos la gráfica de la función g: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por la regla $y=g(x)=|x^2-4|$

SOLUCIÓN

Este problema lo podemos resolver de dos maneras:

PRIMERA MANERA

- Primero dibujamos la gráfica de la parábola $y=x^2-4$, figura 3 - 10 (a):



(a) (b)

Figura 3 - 10

- Luego dibujamos $y = |x^2 - 4|$, dibujando el simétrico del tramo que queda por debajo del eje x; es decir, el tramo que queda en el intervalo $[-2 ; 2]$. El resto de la gráfica queda igual; figura 3 - 10 (b).

SEGUNDA MANERA

- Consiste en obtener una expresión equivalente a $|x^2 - 4|$ que no tenga las barras de valor absoluto.
- Aplicando la definición de valor absoluto nos queda que:

$$\left| x^2 - 4 \right| = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty) \\ 4 - x^2 & \text{si } x \in (-2; 2) \end{cases}$$

- Por lo tanto, la gráfica de $g(x) = \left| x^2 - 4 \right|$ es exactamente igual a la gráfica de:

$$G(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty) \\ 4 - x^2 & \text{si } x \in (-2; 2) \end{cases}$$

- La gráfica de esta función es, por supuesto, la de la figura 3 - 10 (b).

EJERCICIO 3.2

En los ejercicios **1** a **12** clasificar cada función en polinómica, racional, trigonométrica, exponencial, logarítmica, valor absoluto, mayor entero contenido o por tramos.

1 $f(x) = -\sqrt{2}$

2 $f(x) = \pi^x$

3 $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^3 + 1}$

4 $f(x) = \mathrm{Cos}(x)$

5 $f(x) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^x$

6 $f(x) = -\dfrac{4}{x}$

7 $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x < -2 \\ 3 & \text{si } x = -2 \\ x^2 - 3 & \text{si } x > -2 \end{cases}$

8 $f(x) = \pi - \dfrac{4}{5}x$

9 $f(x) = |x + 1|$

10 $f(x) = e^x$

11 $f(x) = \ln(x)$

12 $f(x) = \log_{0.1}(x)$

En los ejercicios **13** a **16** hallar los interceptos con los ejes de cada una de las funciones polinómicas dadas. Luego, usar el DERIVE para dibujar sus gráficas.

13 $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

14 $f(x) = 3x^3 - 4x^2 - 5x + 2$

15 $f(x) = x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 8x$

16 $f(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$

En los ejercicios **17** a **22** bujar a mano y con derive la gráfica de la función dada y hallar el dominio y el rango de cada una.

17 $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < -2 \\ 4x - 5 & \text{si } -2 \le x < 4 \\ x^2 + 1 & \text{si } x \ge 4 \end{cases}$

18 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & \text{si } x < -3 \\ 4 & \text{si } -3 \le x < 0 \\ 2x - 5 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

19 $f(x) = \begin{cases} -3 & \text{si } x \le -2 \\ 2 & \text{si } -2 < x < 3 \\ 5 & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$

20 $f(x) = \begin{cases} 4 - x & \text{si } x < -2 \\ x^2 + 2 & \text{si } -2 \le x < 2 \\ 6 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$

21 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 2 \\ 6 & \text{si } 2 \le x < 5 \\ 2x - 3 & \text{si } x \ge 5 \end{cases}$

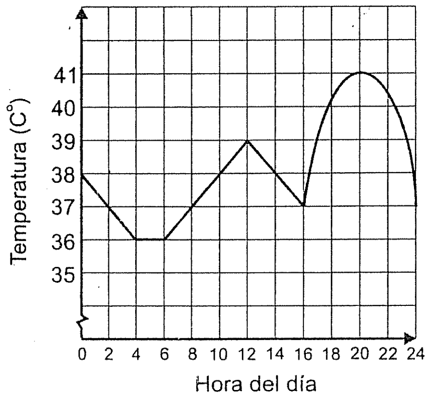
22 $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x \le 0 \\ x - 2 & \text{si } 0 < x < 2 \\ x^2 - 2 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$

23 Escribir una expresión equivalente a la regla de la función $f(x)=|x|+|x-1|$ pero que carezca de las barras de valor absoluto, dibujar su gráfica y hallar su rango.

24 Se sabe que la longitud L del cabello aumenta aproximadamente 2cm. por cada dos meses. Una chica se corta el cabello y justo después del corte este mide 20cm., y a partir de ese día decide cortarse el cabello 4cm. cada dos meses:

a) Haga un dibujo que muestre la longitud del cabello (cm) en función del tiempo (meses) durante el transcurso de los 10 meses siguientes.
b) Usando la gráfica, determine en qué mes el cabello de la chica mide aproximadamente 15cm.

25 En una unidad de cuidados intensivos (UCI) hay un aparato que registra permanentemente, en forma de gráfica, la temperatura del enfermo. Cierto día se hizo este registro:



a) ¿Con qué temperatura ingresó a la UCI? ¿Cuál fue la máxima temperatura de este enfermo y a qué hora se presentó?
b) ¿A qué hora la temperatura superó los 40º? ¿Cuándo la temperatura volvió a ser 37º?
c) Con la información que da el gráfico, escriba una regla para esta función.

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (4)

Supongamos que un punto P(x, y) se mueve en el plano de tal manera que siempre su distancia al punto (-3, 2) es igual a 3 unidades. Se pide:

1. **Dibujar en el plano cartesiano cinco puntos que cumplan con las condiciones expresadas en el enunciado del problema.**
2. **Hallar la ecuación E(x, y) = 0 de la curva que cumpla las condiciones expresadas en el enunciado del problema e identificarla.**
3. **Hallar los elementos básicos de la curva (interceptos, simetrías, dominio y rango).**
4. **Dibujar la gráfica de la curva.**

3.2 TRANSFORMACIONES Y OPERACIONES CON FUNCIONES

3.2.1. Transformaciones de funciones

A las funciones reales escritas en su forma más simple como:

$$y = f(x) = x^2 \quad , \quad y = g(x) = \text{Sen}(x) \quad , \quad y = h(x) = 2^x$$

podemos realizarles ciertas transformaciones y obtener otras funciones cuyas gráficas podemos dibujar de una manera relativamente sencilla. Estas transformaciones son:

- Traslaciones verticales y horizontales.
- Contracciones o dilataciones verticales y horizontales.
- Reflexiones respecto al eje x o al eje y.

Vamos a recordar cada una de estas transformaciones:

3.2.1.1 Traslaciones verticales

RECORDEMOS

- Si **a** es un **número real positivo**, entonces la gráfica de **y=f(x)+a** es la misma de la de **y=f(x)** pero trasladada hacia arriba una distancia de **a** unidades. Si, en cambio, **a** es un número negativo, entonces la gráfica de **y=f(x)+a** es la misma de la de **y=f(x)** pero trasladada hacia abajo una distancia de **a** unidades.

- En la práctica, si una pareja ordenada de y=f(x) es, por ejemplo, (-3 , 4), entonces una pareja ordenada y=f(x)+3 será (-3 , 7); es decir, para obtener las parejas ordenadas de y=f(x)+3, debemos sumar 3 unidades a las segundas componentes u ordenadas de las parejas de y=f(x).

Ejemplo 1

La figura 3 - 11 nos muestra las gráficas de las funciones $f(x)=x^2$, $g(x)=x^2+1$ y $h(x) = x^2-2$.

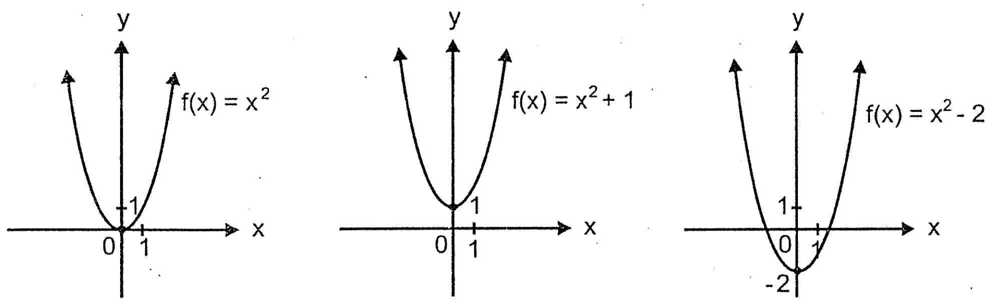


Figura 3 - 11

¿Qué efecto se produjo en la gráfica de $f(x)=x^2$ cuando a la función le sumamos 1 o restamos 2?

3.2.1.2 Traslaciones horizontales

RECORDEMOS

- Si **a** es un **número real positivo**, entonces la gráfica de **y=f(x-a)** es la misma de la de **y=f(x)** pero trasladada **a** unidades hacia la **derecha** y la gráfica de **y=f(x+a)** es la misma de **y=f(x)** pero desplazada **a** unidades hacia la **izquierda**.

- En la práctica, si una pareja ordenada de **y=f(x)** es, por ejemplo, (-2 , 4), entonces una pareja ordenada y=f(x+3) será (-5 , 4); es decir, para obtener las parejas ordenadas de y=f(x+3), debemos restar 3 a las abscisas de las parejas ordenadas de y=f(x).

Ejemplo 2

La figura 3 - 12 nos permite comparar las gráficas de $f(x)=x^2$, con las gráficas de $g(x)=(x+1)^2$ y $h(x)=(x-2)^2$.

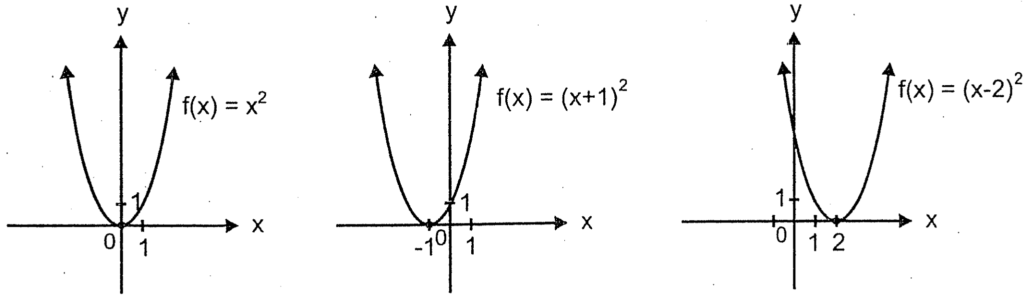


Figura 3 - 12

¿Qué efecto se produce en la gráfica de $f(x)=x^2$ cuando a la variable independiente x le sumamos 1 o le restamos 2?

3.2.1.3 Dilataciones y contracciones verticales

RECORDEMOS

- Si **a>1**, entonces para dibujar la gráfica de **y=af(x)** alargamos o dilatamos verticalmente, **a** veces, la gráfica de **y=f(x)**.
- Si **0<a<1**, entonces para dibujar la gráfica de **y=af(x)** reducimos o contraemos verticalmente, **a** veces, la gráfica de **y=f(x).**
- Cuando el factor **a** es negativo, entonces para dibujar la gráfica de **y=af(x)** realizamos sobre la función **y=f(x)**, las mismas dilataciones o contracciones descritas anteriormente, pero adicionalmente la gráfica se refleja con respecto al eje x; es decir, las gráficas de **y=af(x)** y **y=-af(x)** son simétricas con respecto al eje x.
- En la práctica, si una pareja ordenada de y=f(x) es (4 , -3), entonces una pareja ordenada de y=-2f(x) será (4 , 6); es decir, para obtener las parejas ordenadas de y=-2f(x) debemos multiplicar por -2 las segundas componentes de las parejas ordenadas de y=f(x).

Ejemplo 3

En la figura 3 - 13 hemos dibujado, en un mismo plano cartesiano, las gráficas de las funciones:

$$f(x) = \text{Sen}(x) \quad ; \quad g(x) = 3\text{Sen}(x) \quad ; \quad h(x) = -\frac{1}{2}\text{Sen}(x)$$

x	Sen(x)	-3Sen(x)	-½ Sen(x)
0	0	0	0
π/4	0.7	-2.1	-0.35
π/2	1	-3	-0.5
3π/4	0.7	-2.1	-0.35
π	0	0	0
5π/4	-0.7	2.1	0.35
3π/2	-1	3	0.5
7π/4	-0.7	2.1	0.35
2π	0	0	0

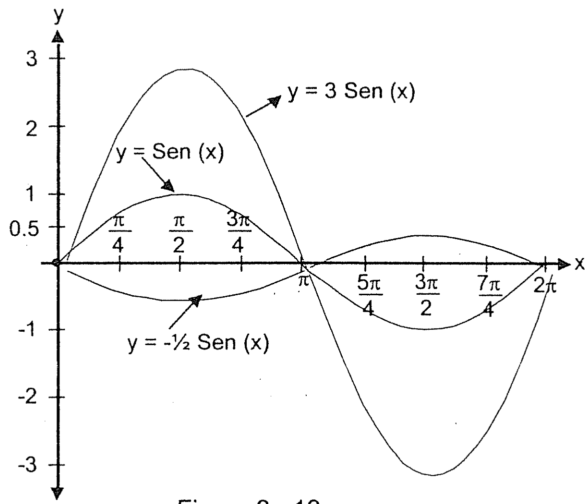


Figura 3 - 13

3.2.1.3 Dilataciones y contracciones horizontales

RECORDEMOS

- Si **a>1**, entonces para dibujar la gráfica de **y=f(ax)** reducimos o contraemos horizontalmente, **a** veces, la gráfica de **y=f(x)**.
- Si **0<a<1**, entonces para dibujar la gráfica de **y=f(ax)** alargamos o dilatamos horizontalmente $\frac{1}{a}$ veces, la gráfica de **y=f(x).**

- Cuando el factor **a** es negativo, entonces para dibujar la gráfica de **y=f(ax)** realizamos sobre la función **y=f(x)**, las mismas dilataciones o contracciones descritas anteriormente, pero adicionalmente la gráfica se refleja con respecto al eje y; es decir, las gráficas de **y=f(ax)** y **y=f(-ax)** son simétricas con respecto al eje y.
- En la práctica, si una pareja ordenada de y=f(x) es (4 , -3), entonces una pareja ordenada de y=f(-2x) será (-2 , -3); es decir, para obtener las parejas ordenadas de y=f(-2x) debemos dividir por -2 las primeras componentes de las parejas ordenadas de y=f(x).

Ejemplo 4

En la figura 3 - 13 hemos dibujado, en un mismo plano cartesiano, las gráficas de las funciones:

$$f(x) = \text{Sen}\,(x) \quad ; \quad g(x) = \text{Sen}\,(2x) \quad ; \quad h(x) = \text{Sen}\left(-\frac{1}{2}x\right)$$

en el intervalo $[0\ ;\ 2\pi]$

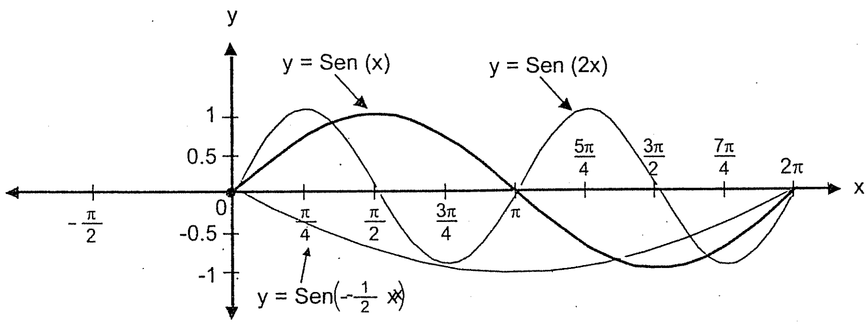


Figura 3 - 13

¿Qué efecto se produce en la gráfica de f(x)=Sen (x) cuando multiplicamos la variable independiente x por 2? ¿y cuando la multiplicamos por $-\frac{1}{2}$?

PREGUNTA: ¿Por qué si el factor $a = -\frac{1}{2}$ es negativo, la gráfica de $y = \text{sen}\left(-\frac{1}{2}x\right)$ no se dibujó simétrica con el eje y sino con el eje x?

ATENCIÓN

- Para dibujar la gráfica de **y = a f(bx+c)+d** a partir de la gráfica de **y = f(x)** debemos tener en cuenta el siguiente orden:

  PASO 1: Desplazamos horizontalmente la gráfica de **y = f(x)**, **c unidades** hacia la derecha o hacia la izquierda, dependiendo de si **c** es negativo o positivo; es decir, realizamos la transformación **y=f(x+c).**

  PASO 2: Alargamos o comprimimos horizontalmente la gráfica de **y = f(x+c)**, **b veces**; es decir, realizamos la transformación **y= f(bx+c)**. Si, además, **b** es negativo, debemos dibujar la simétrica de esta última función respecto al eje **y.**

  PASO 3: Alargamos o comprimimos verticalmente la gráfica de **y = f(bx+c)**, **a veces**; es decir, realizamos la transformación **y= a f(bx+c).** Si, además, **a** es negativo debemos dibujar su simétrica con respecto al eje **x.**

  PASO 4: Finalmente, desplazamos verticalmente la gráfica de **y = a f(bx+c)**, **d unidades** hacia arriba o hacia abajo dependiendo de si **d** es positivo o negativo; es decir, realizamos la transformación $\mathbf{y = a\,f\left(bx + c\right) + d}$

- La regla de la función **y= a f(bx +c) + d** también puede escribirse así: $\mathbf{y= a f\left[b\left(x + \frac{c}{b}\right)\right] + d}$. En este caso, el orden de trabajo es el siguiente:

PASO 1: Alargamos o comprimimos horizontalmente la gráfica de **y = f(x), b veces;** es decir, realizamos la transformación **y=f(bx).** Si además **b** es negativo debemos dibujar su simétrica con respecto al eje **y.**

PASO 2: Desplazamos horizontalmente la gráfica de $\mathbf{y = f(bx)}$, $\dfrac{c}{b}$ unidades hacia la derecha o hacia la izquierda, dependiendo de si $\dfrac{c}{b}$ es negativo o positivo; es decir, realizamos la transformación $\mathbf{y= f\left[b\left(x + \dfrac{c}{b}\right)\right]}$

PASO 3: El mismo PASO 3 anterior sobre la gráfica de $\mathbf{y= f\left[b\left(x + \dfrac{c}{b}\right)\right]}$

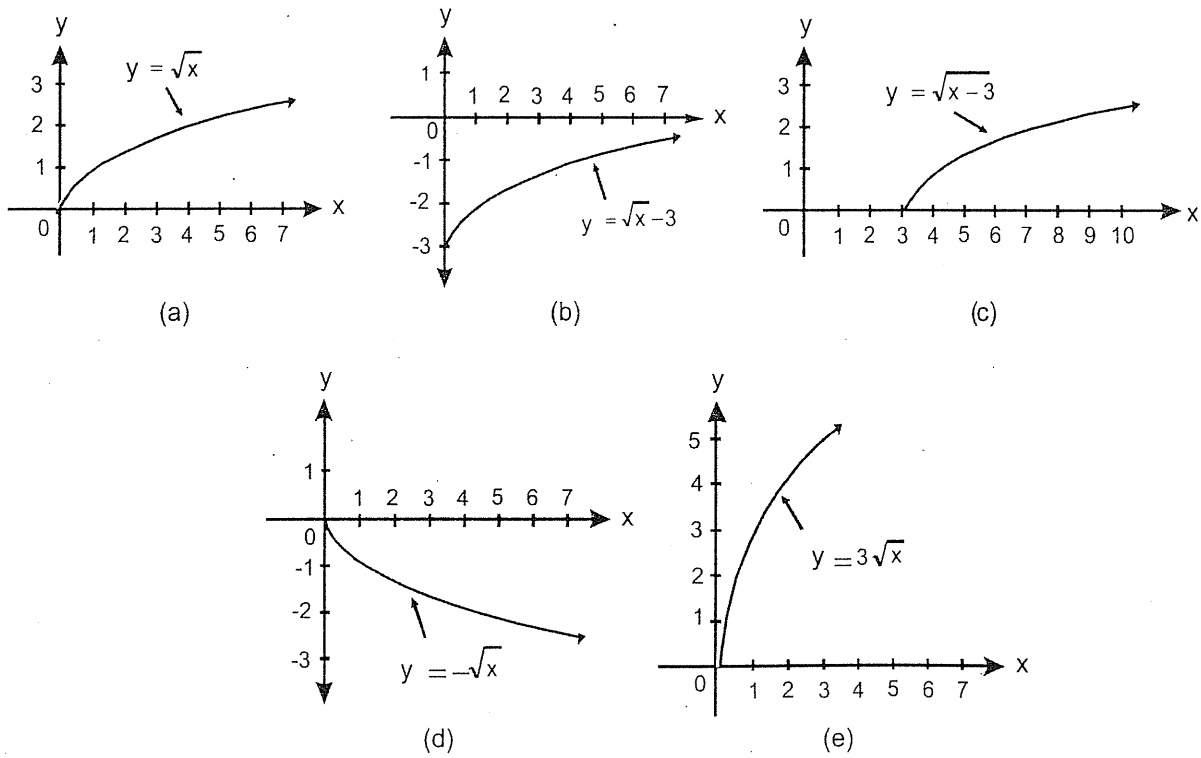
PASO 4: El mismo PASO 4 anterior sobre la gráfica de $\mathbf{y= af\left[b\left(x + \dfrac{c}{b}\right)\right]}$

Ejemplo 5

Partiendo de la gráfica de $y = \sqrt{x}$, utilicemos las transformaciones para graficar $y = \sqrt{x} - 3$, $y = \sqrt{x-3}$, $y = -\sqrt{x}$ y $y = 3\sqrt{x}$.

SOLUCIÓN

- En la figura 3-14 (a) hemos dibujado la gráfica de $y = \sqrt{x}$. Para dibujar la gráfica de $y = \sqrt{x} - 3$ desplazamos 3 unidades hacia abajo, la gráfica de $y = \sqrt{x}$, figura 3 - 14(b).



- La gráfica de $y= \sqrt{x-3}$, la obtenemos desplazando, 3 unidades hacia la derecha, la gráfica de $y = \sqrt{x}$, figura 3 - 14(c). Para dibujar la gráfica de $y = -\sqrt{x}$ basta dibujar la simétrica con respecto al eje x de $y = \sqrt{x}$, figura

3 - 14(d). Finalmente, para dibujar la gráfica de $y = 3\sqrt{x}$, alargamos verticalmente 3 veces la gráfica de $y = \sqrt{x}$, figura 3 - 14(e).

Ejemplo 6

La gráfica de una función f definida por y = f(x) es la siguiente, figura 3 - 15:

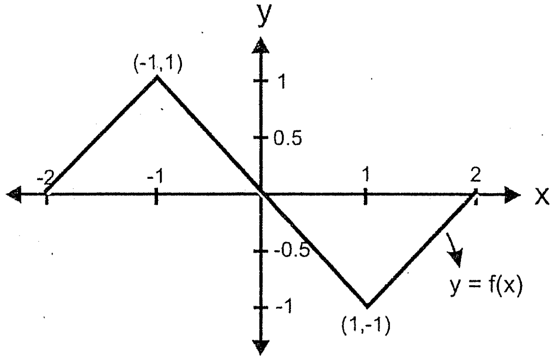


Figura 3 - 15

Dibujemos la gráfica de $y = f\left(\frac{1}{2}x + 1\right)$

SOLUCIÓN

- El orden en que debemos dibujar la gráfica es el siguiente:

  PASO 1: Dibujamos y= f(x+1) ; es decir, trasladamos horizontalmente 1 unidad hacia la izquierda, la gráfica de y = f(x). Esto significa que restamos 1 unidad a la abscisa de cada pareja ordenada de y = f(x); figura 3 - 16(b):

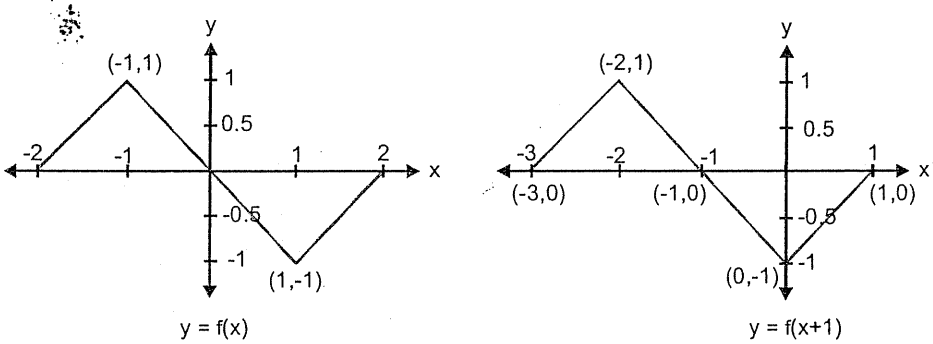


Figura 3 - 16

PASO 2: Finalmente, dibujamos $y = f\left(\frac{1}{2}x + 1\right)$ que consiste en alargar horizontalmente, 2 veces, la gráfica de y= f(x+1). Con este fin, multiplicamos por 2 las abscisas de cada pareja ordenada de y= f(x+1); figura 3 -17:

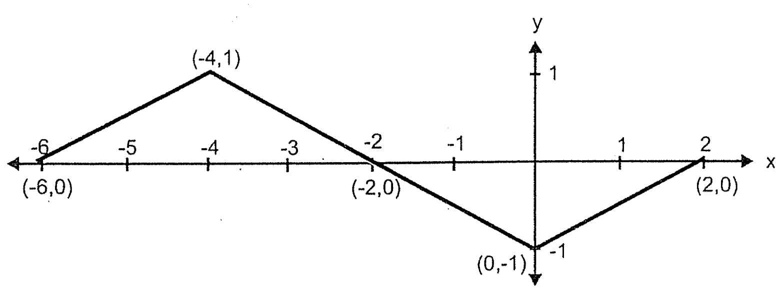
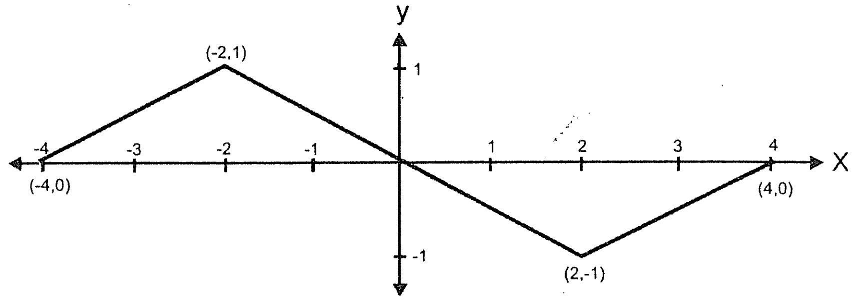


Figura 3 - 17

- Otra manera de resolver el problema es escribiendo la función que queremos dibujar así: $y = f\left[\dfrac{1}{2}(x+2)\right]$. En este caso, el orden para dibujar la gráfica es el siguiente:

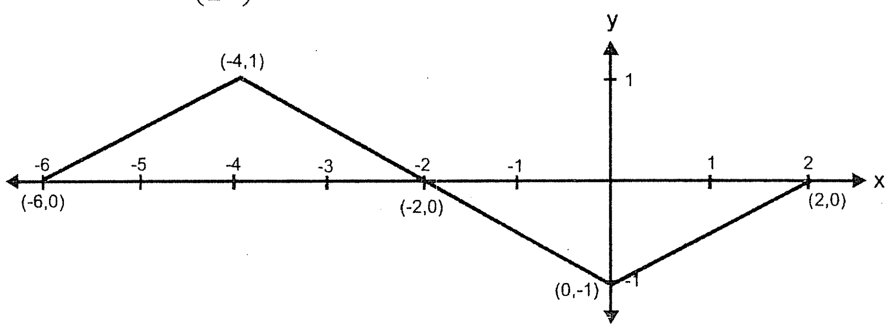
PASO 1: Dibujamos $y = f\left(\dfrac{1}{2}x\right)$; es decir, alargamos horizontalmente, 2 veces, la gráfica de y = f(x). Con este fin, multiplicamos por 2 las abscisas de cada pareja ordenada de y = f(x); figura 3 - 18:



$$y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$$

Figura 3 - 18

PASO 2: Finalmente dibujamos $y = f\left[\dfrac{1}{2}(x+2)\right]$ que consiste en trasladar horizontalmente, 2 unidades hacia la izquierda, la gráfica de $y = f\left(\dfrac{1}{2}x\right)$; figura 3 - 19:



$$y = f\left[\frac{1}{2}(x+2)\right]$$

Figura 3 - 19

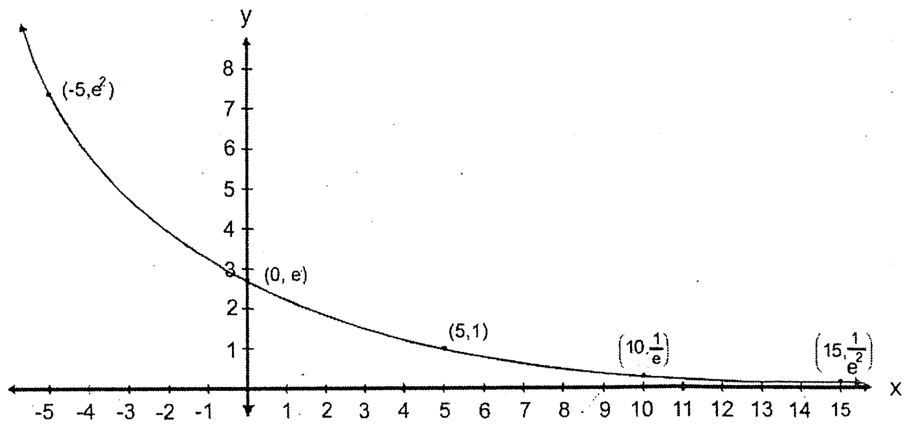
- Como vemos, ambos procesos nos conducen al mismo resultado.

Ejemplo 7

Dibujemos paso a paso la gráfica de la función definida por: $y = e^{1-\frac{x}{5}}$.

SOLUCIÓN

- La función también podemos escribirla así: $y = e^{-\frac{1}{5}x+1}$.
- En estas condiciones, partimos de la gráfica de $f(x) = e^x$, figura 3 - 20(a) y efectuamos sobre ella las siguientes transformaciones.



$$y = f(x) = e^{1-\frac{1}{5}x}$$

Figura 3 - 22

EJERCICIO 3.3

1. Suponga que se tiene la gráfica de una función f. Escribir las ecuaciones para las gráficas que se obtienen a partir de la gráfica de f; así:

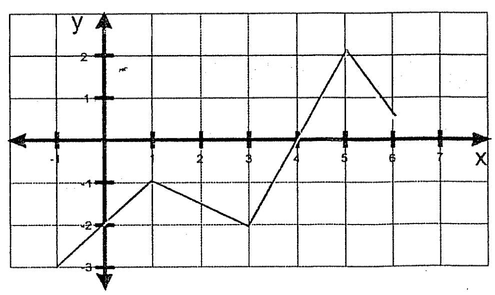
   a) Trasládela 5 unidades hacia arriba.
   b) Trasládela 5 unidades hacia abajo.
   c) Trasládela 4 unidades hacia la derecha.
   d) Trasládela 4 unidades hacia la izquierda.
   e) Simétrica con respecto al eje x.
   f) Simétrica con respecto al eje y.
   g) Alárguela verticalmente un factor de 2.
   h) Contráigala horizontalmente un factor de 3.

2. Explicar cómo se obtienen las gráficas siguientes a partir de la gráfica de $y = f(x)$.

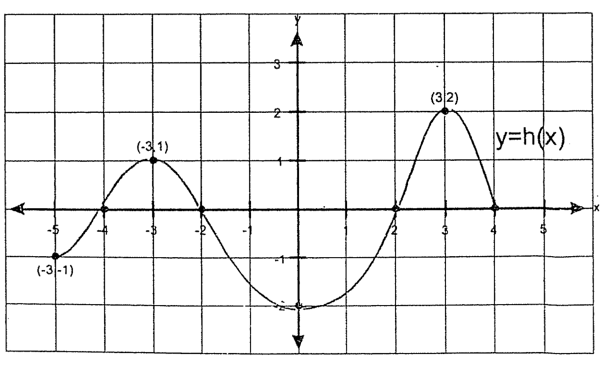
   a) $y = 3\,f(x)$
   b) $y = f(x - 5)$
   c) $y = -\,f(x)$
   d) $y = -3\,f(x)$
   e) $y = f(3x)$
   f) $y = 3\,f(x) - 5$

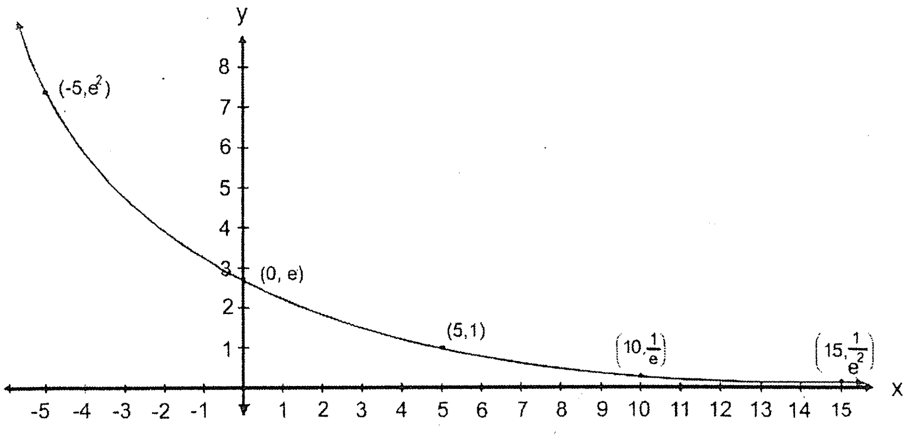
3. Con base en la gráfica de una función f, trazar la gráfica de las funciones siguientes:

   a) $f(3x)$
   b) $f(x - 3)$
   c) $f\left(\frac{1}{2}x\right)$
   d) $f(2x + 3)$
   e) $f(-x)$
   f) $-f(x + 1)$



4. Partiendo de la gráfica de la función h siguiente, dibujar: a) $y= 3h(x+2)$; b) $y= -h(2x-2)+2$





$$y = f(x) = e^{1-\frac{1}{5}x}$$

Figura 3 - 22

EJERCICIO 3.3

1. Suponga que se tiene la gráfica de una función f. Escribir las ecuaciones para las gráficas que se obtienen a partir de la gráfica de f; así:

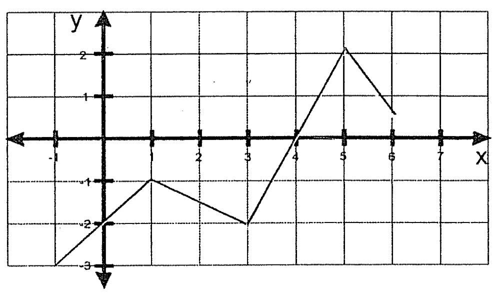
   a) Trasládela 5 unidades hacia arriba.
   b) Trasládela 5 unidades hacia abajo.
   c) Trasládela 4 unidades hacia la derecha.
   d) Trasládela 4 unidades hacia la izquierda.
   e) Simétrica con respecto al eje x.
   f) Simétrica con respecto al eje y.
   g) Alárguela verticalmente un factor de 2.
   h) Contráigala horizontalmente un factor de 3.

2. Explicar cómo se obtienen las gráficas siguientes a partir de la gráfica de $y = f(x)$.

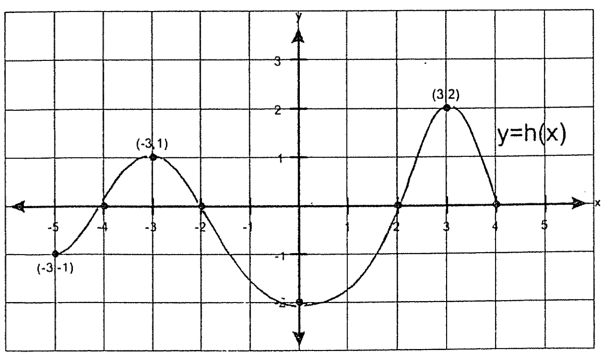
   a) $y = 3\,f(x)$
   b) $y = f(x - 5)$
   c) $y = -\,f(x)$
   d) $y = -3\,f(x)$
   e) $y = f(3x)$
   f) $y = 3\,f(x) - 5$

3. Con base en la gráfica de una función f, trazar la gráfica de las funciones siguientes:

   a) $f(3x)$
   b) $f(x - 3)$
   c) $f\left(\frac{1}{2}x\right)$
   d) $f(2x + 3)$
   e) $f(-x)$
   f) $-f(x + 1)$



4. Partiendo de la gráfica de la función h siguiente, dibujar: a) $y= 3h(x+2)$; b) $y= -h(2x-2) +2$



5 Partiendo de la gráfica de una de las funciones básicas estudiadas en la sección 3.1.4.1, dibujar la gráfica de las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt{2x}$ b) $y = \dfrac{1}{x+3}$ c) $y = 2\,|\,x+3\,|$

d) $y = 2^{-2x+3}$ e) $y = -3\log_2(2x-1)$ f) $y = x^2 - 4x + 7$

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (5)

Un punto P(x, y), se mueve en el plano de tal manera que su distancia al punto fijo A(-3, 2) es siempre igual a su distancia a la recta x - 3 = 0. Se pide:

1. **Dibujar en el plano cartesiano cinco puntos que cumplan las condiciones expresadas en el enunciado.**
2. **Hallar la ecuación de la curva que describe el movimiento del punto P e identificarla.**
3. **Hallar los elementos básicos de la curva obtenida (interceptos, simetrías, dominio y rango).**
4. **Dibujar la gráfica de la curva.**

3.2.2. Operaciones con funciones

3.2.2.1 Suma, resta, multiplicación y división de funciones

- Dadas dos funciones f y g podemos combinarlas para formar nuevas funciones f + g, f – g, f · g y f/g de manera similar a la que utilizamos para sumar, restar, multiplicar y dividir polinomios en álgebra.

- Por ejemplo, si f y g son dos funciones de x, entonces definimos la suma de f y g mediante la expresión:
  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

  Ahora bien, el lado derecho de esta igualdad tiene sentido si tanto f(x) como g(x) están definidas; es decir, si x pertenece tanto al dominio de f como al dominio de g. Por lo tanto, si el dominio de f es A y el dominio de g es B, entonces el dominio de f + g es la intersección de ambos, es decir $A \cap B$.

- De manera similar podemos definir la resta f - g y el producto f · g , cuyos dominios también son $A \cap B$. Sin embargo, para definir el cociente f/g es necesario, además, no dividir por 0.

ÁLGEBRA DE FUNCIONES

Si f y g son dos funciones de x con dominios A y B respectivamente, entonces las funciones f + g, f – g, f · g y f/g se definen así:

1. $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, con $D_{f+g} = A \cap B$.
2. $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$, con $D_{f-g} = A \cap B$.
3. $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$, con $D_{f \cdot g} = A \cap B$.
4. $(f/g)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, con $D_{f/g} = \left\{ {}^{x}/x \in A \cap B \wedge g(x) \neq 0 \right\}$.

Ejemplo 1

En un mismo plano cartesiano dibujemos las gráficas de las funciones reales f y g, definidas por las reglas $f(x) = x + 1$ y $g(x) = x^2$. Luego, en otro plano cartesiano dibujemos la gráfica de la función f + g.

SOLUCIÓN

- En primer lugar, elaboremos una tabla de valores de cada función:

x	-3	0
$f(x) = x + 1$	-2	1

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$g(x) = x^2$	9	4	1	0	1	4	9

Tabla 3 - 2

- Para dibujar la gráfica de f + g tengamos en cuenta que:

$$
\begin{aligned}
(f + g)(x) &= f(x) + g(x) \\
&= x + 1 + x^2 \\
&= x^2 + x + 1
\end{aligned}
$$

Por lo tanto:

$$(f + g)(-3) = f(-3) + g(-3) = -2 + 9 = 7$$

$$(f + g)(-2) = f(-2) + g(-2) = -1 + 4 = 3$$

$$(f + g)(-1) = f(-1) + g(-1) = 0 + 1 = 1$$

$$(f + g)(0) = f(0) + g(0) = 1 + 0 = 1$$

$$(f + g)(1) = f(1) + g(1) = 2 + 1 = 3$$

de la

$$(f + g)(2) = f(2) + g(2) = 3 + 4 = 7$$

$$(f + g)(3) = f(3) + g(3) = 4 + 9 = 13$$

- La figura 3 - 23(a) nos muestra las gráficas de f y g y la figura 3 - 23(b) la gráfica de f + g.

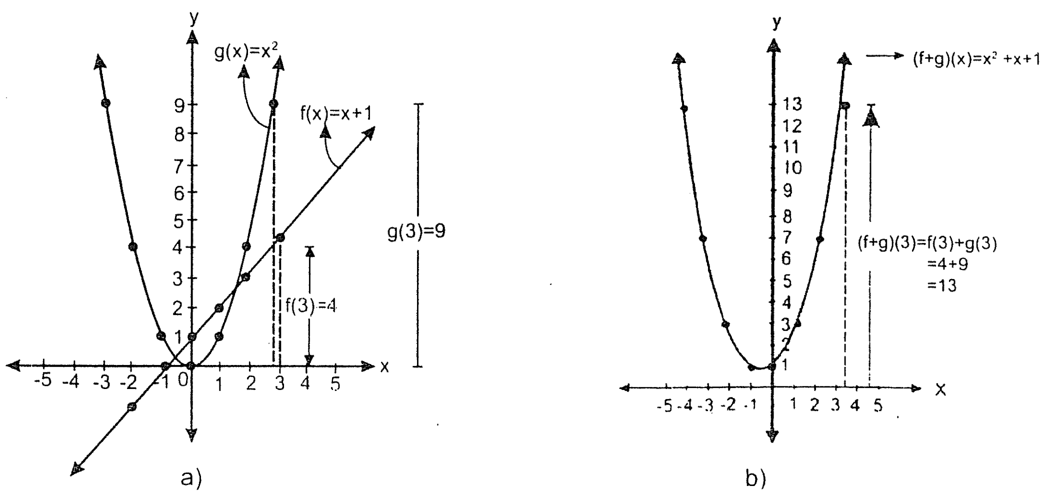


Figura 3 - 23

Ejemplo 2

Sean f y g dos funciones reales definidas por las reglas: $f(x) = \sqrt{x - 4}$ y $g(x) = \sqrt{7 - x}$ hallemos:

a) $f \cdot g$ y su dominio. b) f / g y su dominio.

SOLUCIÓN

a) $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

$$= \sqrt{x - 4} \cdot \sqrt{7 - x}$$

Ahora bien: $D_f = \{x/x - 4 \geq 0\} = \{x/x \geq 4\} = [\,4; +\infty\,)$

$D_g = \{x/7 - x \geq 0\} = \{x/x \leq 7\} = (-\infty\,;\,7\,]$

Por lo tanto: $D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$

$$= [\,4; +\infty\,) \cap (-\infty\,;\,7\,]$$

$$= [\,4\,;\,7\,]$$

b) $(f / g)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$

$$= \frac{\sqrt{x-4}}{\sqrt{7-x}}$$

El dominio de f/g son los valores de **x** tales que $x \in D_f \cap D_g$ y que $\sqrt{7 - x} \neq 0$. Como $\sqrt{7 - x} \neq 0$ cuando $x \neq 7$, entonces $D_{f/g} = [4\,;\,7] - \{7\} = [4\,;\,7)$.

3.2.2.2 Función compuesta

El concepto de función compuesta o composición de funciones tiene gran aplicación en muchos temas importantes de la matemática, tales como: límite, continuidad, derivación e integración de funciones. Antes de dar su definición vamos a realizar algunas experiencias preparatorias que nos ayudarán a comprender este concepto.

Primera Experiencia

- Observemos el siguiente diagrama y contestemos las preguntas que se formulan:

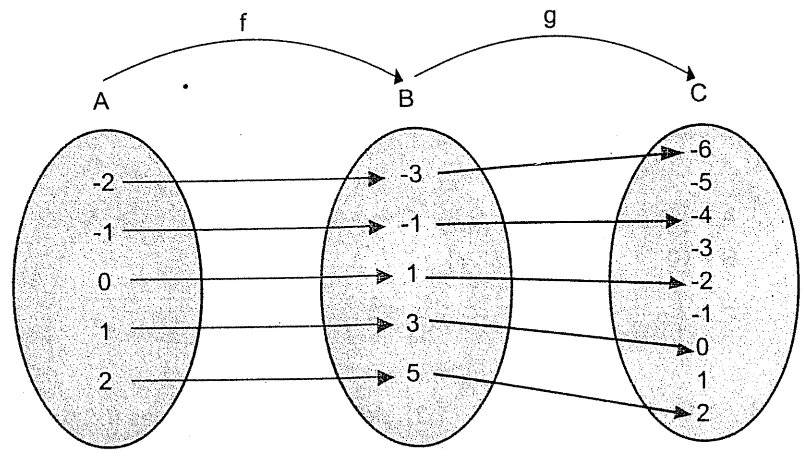


Figura 3 - 24

a) ¿Es **f** una función de A en B? ¿por qué?

b) ¿Es **g** una función de B en C? ¿por qué?

- Completemos:

f(-2) =	f(-1) =	f(0) =	f(1) =	f(2) =
g(-3) =	g(-1) =	g(1) =	g(3) =	g(5) =
$g[f(-2)]$ =	$g[f(-1)]$ =	$g[f(0)]$ =	$g[f(1)]$ =	$g[f(2)]$ =

- ¿Será posible construir una función h: $A \rightarrow C$ mediante la cual a cada elemento de A le asignemos uno de C? La respuesta es afirmativa. Observemos que ambas funciones f y g han utilizado al conjunto B como «puente»; si quitamos el «puente» B, podemos elaborar el siguiente diagrama sagital:

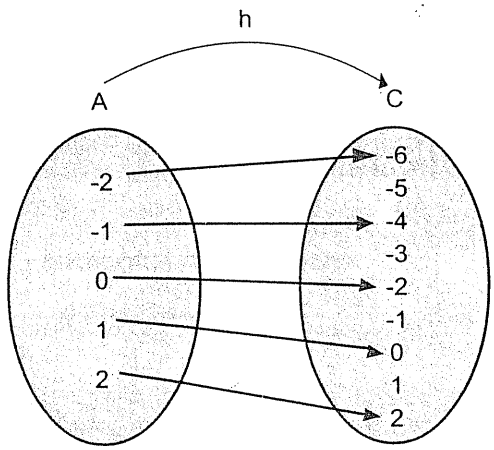


Figura 3 - 25

- Por lo tanto:

h(-2) = -6 h(-1) = -4 h(0) = -2 h(1) = 0 h(2) = 2

- Observemos que:

$$h(-2) = g[f(-2)] \qquad h(-1) = g[f(-1)]$$
$$h(0) = g[f(0)] \qquad h(1) = g[f(1)]$$
$$h(2) = g[f(2)]$$

En general, para todo $x \in A$ se cumple que $h(x) = g[f(x)]$

- El procedimiento anterior nos muestra que es posible construir una función h, a partir de las funciones f y g. Esta nueva función h se llama la COMPUESTA DE f y g, que simbolizamos con g o f (se escribe al contrario de como se lee).

Segunda Experiencia

- Tenemos los conjuntos:

$$A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$
$$B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
$$C = \left\{-\frac{1}{2}, -1, 0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right\}$$

y dos funciones f: $A \rightarrow B$ y g: $B' \rightarrow C$, donde $B' = B - \{2\}$, definidas por las reglas $f(x) = x + 3$ y $g(x) = \dfrac{1}{x-2}$.

¿Será posible construir una función h: $A \rightarrow C$ que sea la compuesta de las funciones f y g?

- Para contestar la pregunta dibujemos los diagramas de ambas funciones:

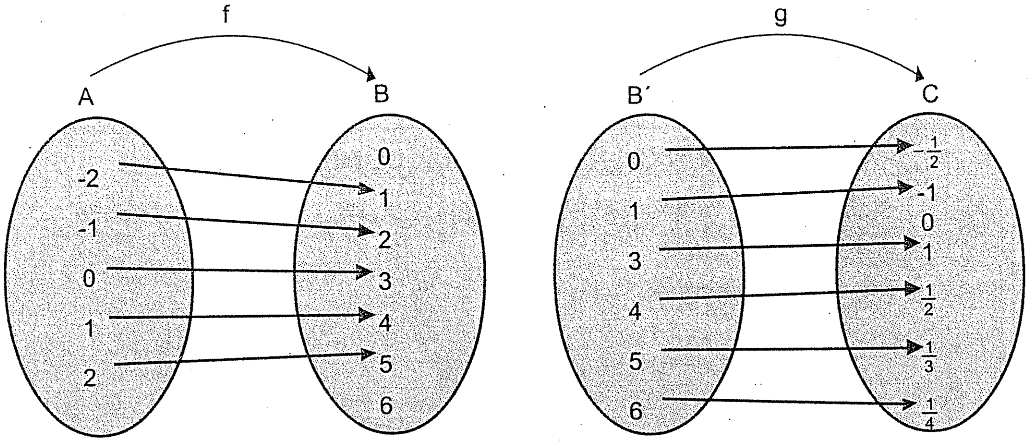


Figura 3 - 26

Como vemos, la imagen de -1 bajo la función f es 2; es decir, f(-1) = 2. Sin embargo, la imagen de 2 bajo la función g no existe, es decir, g(2) no existe. Esto significa que no podemos definir una función h: A→C que sea la compuesta de las funciones f y g. Veámoslo mejor en el siguiente diagrama sagital:

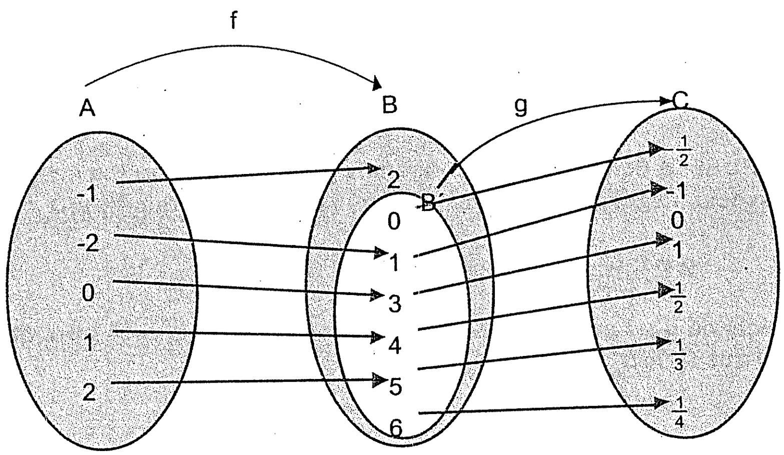


Figura 3 - 27

En el diagrama podemos ver que: f(-1) = 2, pero g(2) no existe; luego, h(-1) = g [f (-1)] no existe.

- En resumen: tal como están las cosas, no es posible definir una función h: A→C que sea la compuesta de las funciones **f** y **g**. Sin embargo, podemos resolver el problema de la siguiente manera: basta que eliminemos del conjunto A el elemento -1, quedándonos entonces el conjunto A' = A -{-1}. En estas condiciones, la función compuesta de **f** y **g**, simbolizada **g o f**, es una función de A' en C tal que a cada x∈ A' le hace corresponder el elemento g[f (x)]∈C. Veámoslo gráficamente:

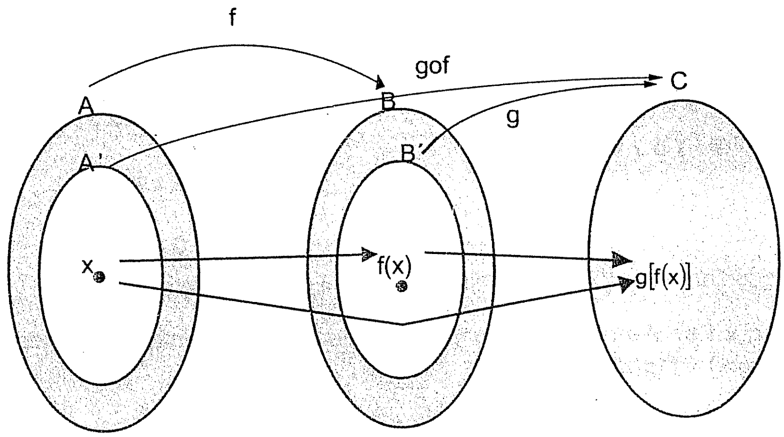


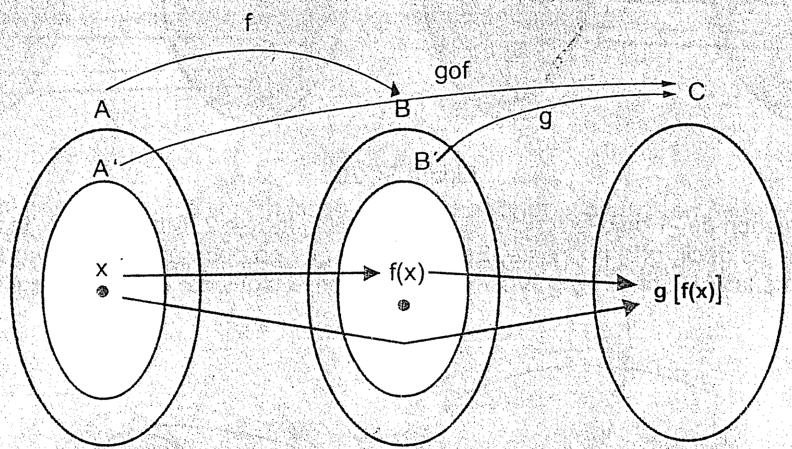
Figura 3 - 28

- Finalmente una pregunta: ¿Cuál será el dominio de la función g o f? Los diagramas de las figuras 3- 27 y 3-28 nos ayudan a contestar la pregunta: **al dominio de g o f pertenecerán aquellos x del dominio de f y tales que sus imágenes (f(x)) pertenezcan al dominio de g.** En este caso, el dominio de g o f será el conjunto: $\{-2, 0, 1, 2\}$

DEFINICIÓN DE FUNCIÓN COMPUESTA:

- **Sean f y g dos funciones de x tales que: $f: A \rightarrow B$ y $g: B' \rightarrow C$, donde $B' \subset B$.**

  Sea $A' \subset A$ tal que $f(A') \subset B'$:



La COMPUESTA de f y g, que denotaremos g o f, es otra función de A' en C que asocia a cada $x \in A'$ el elemento $g\,[f(x)]$, siempre que $f(x) \in D_g$; es decir:

$$g \circ f: A' \rightarrow C \text{ tal que } (g \circ f)(x) = g\,[f(x)]$$

- **El dominio de g o f está formado por aquellos elementos $x \in A$ tales que $x \in D_f$ y que $f(x) \in D_g$; es decir:**

$$D_{g\circ f} = \{x \in A / x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\}$$

Ejemplo 1

Sea $f: \mathbb{R}-\{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida por la regla $y = f(x) = \dfrac{1}{x}$ y sea $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida por la regla $y = g(x) = x + 3$. Nos piden:

a) Hallar los dominios de f y g.

b) Hallar la compuesta entre g y f y su dominio.

c) Hallar la compuesta entre f y g y su dominio.

SOLUCIÓN

a) El dominio de f es el conjunto $\mathbb{R} - \{0\}$ y el dominio de g es el conjunto $\mathbb{R}$.

b) La compuesta entre g y f se denota por f o g y es tal que cada elemento x de su dominio se asocia con f [g(x)] ; es decir, (f o g)(x) = f [g(x)]; figura 3-29:

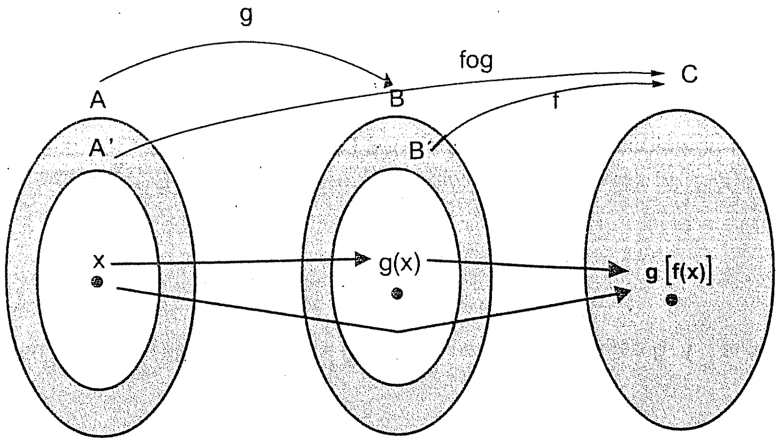


Figura 3 - 29

Por lo tanto: $(f \circ g)(x) = f\,[g(x)]$

$$= f\,[x + 3]$$

$$= \frac{1}{x+3}\ ,\ \text{con } x \neq -3$$

¿Cuál es el dominio de $f \circ g$? A simple vista, mirando la regla de la función $(f \circ g)(x) = \frac{1}{x+3}$ podríamos decir que es $\mathbb{R}$-{-3}. Sin embargo, en general, el dominio de la función compuesta no se obtiene en forma directa a partir de su regla. Es necesario aplicar la definición, así:

$$
\begin{aligned}
D_{f\,o\,g} &= \{\, x/x \in D_g \wedge g(x) \in D_f \,\} \\
&= \{\, x/x \in \mathbb{R} \wedge x + 3 \in \mathbb{R}\text{-}\{0\} \} \\
&= \{\, x/x \in \mathbb{R} \wedge x + 3 \neq 0 \} \\
&= \{\, x/x \in \mathbb{R} \wedge x \neq -3 \} \\
&= \{\, x/x \neq -3 \} \\
&= \mathbb{R}\text{-}\ \{-3\}
\end{aligned}
$$

c) La compuesta entre f y g es la función dada por la regla:

$$
\begin{aligned}
(g \circ f)(x) &= g\ [\ f(x)\ ] \\
&= g\left[\frac{1}{x}\right],\ \text{con } x \neq 0 \\
&= \frac{1}{x} + 3 \\
&= \frac{1 + 3x}{x}
\end{aligned}
$$

El dominio de esta función es:

$$
\begin{aligned}
D_{g\,o\,f} &= \{\, x/x \in D_f \wedge f(x) \in D_g \,\} \\
&= \{\, x/x \neq 0 \wedge \frac{1}{x} \in \mathbb{R} \} \\
&= \{\, x/x \neq 0 \wedge x \neq 0 \} \\
&= \{\, x/x\ \neq 0 \} \\
&= \mathbb{R}\text{-}\ \{0\}
\end{aligned}
$$

ATENCIÓN

Al comparar los resultados obtenidos al hallar las funciones f o g y g o f, encontramos que son diferentes. En general, $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$; es decir, la composición de funciones NO ES CONMUTATIVA.

Ejemplo 2

Dadas dos funciones reales f y g definidas por las reglas $f(x) = \sqrt{x - 3}$ y $g(x) = x^2 + 5$, nos piden:

a) Hallar sus dominios.

b) Hallar la compuesta entre f y g y su dominio.

c) Hallar la compuesta entre g y f y su dominio.

SOLUCIÓN

a) El dominio de **f** está formado por aquellos valores de **x** para los cuales $\sqrt{x - 3} \in \mathbb{R}$; es decir, $[3; +\infty)$.
El dominio de **g** está formado por aquellos valores de **x** para los cuales $x^2 + 5 \in \mathbb{R}$, es decir, $x \in \mathbb{R}$.

b) La compuesta entre f y g se denota por g o f (recordemos que se escribe al contrario de como se lee). Por lo tanto:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g\,[f(x)]\\ &= g\left[\sqrt{x-3}\right]\\ &= \left(\sqrt{x-3}\right)^2 + 5\\ &= x - 3 + 5\\ &= x + 2\end{aligned}$$

¿Cuál es el dominio de esta función compuesta? A primera vista pareciera que son todos los reales; sin embargo, notemos que, en uno de los pasos, eliminamos una raíz cuadrada cuando elevamos al cuadrado.

Esta eliminación no es gratuita y exige que pongamos alguna condición: la condición es que $\left(\sqrt{x-3}\right)^2 = x - 3$ siempre que $x - 3 \geq 0$, o sea, $x \geq 3$. ¿Será éste el dominio de g o f? Veamos:

$$\begin{aligned}D_{gof} &= \{x / x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\}\\ &= \{x / x \in [3; +\infty) \wedge \sqrt{x-3} \in \mathbb{R}\}\\ &= \{x / x \in [3; +\infty) \wedge x \in [3; +\infty)\}\\ &= \{x / x \geq 3\}\end{aligned}$$

Se confirma, pues, que el dominio es $[3; +\infty)$ y no $\mathbb{R}$ como pudo pensarse inicialmente.

Ejemplo 3

Dadas las funciones f y g definidas por $f(x) = \sqrt{x - 3}$ y $g(x) = \sqrt{x}$, hallemos fog y su dominio.

SOLUCIÓN

- $(fog)(x) = f[g(x)] = f\left(\sqrt{x}\right) = \sqrt{3 - \sqrt{x}}$
- $D_f = (-\infty\,; 3]$ y $D_g = [0; +\infty)$

$$D_{f \circ g} = \{ x/x \in D_g \wedge g(x) \in D_f \}$$
$$= \{ x/x \geq 0 \wedge \sqrt{x} \in (-\infty; 3] \}$$
$$= \{ x/x \geq 0 \wedge \sqrt{x} \leq 3 \}$$

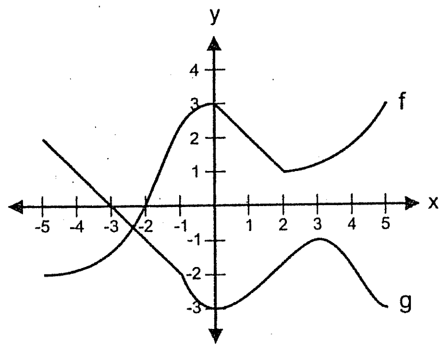
Para resolver la desigualdad $\sqrt{x} \leq 3$, debemos tener en cuenta que $\sqrt{x}$ siempre es un número positivo, por lo cual podemos elevar ambos miembros de la desigualdad al cuadrado sin que se afecte el sentido de ésta. En consecuencia:

$$\sqrt{x} \leq 3 \text{ cuando } x \leq 9$$

Así, pues: $D_{f \circ g} = \{ x/x \geq 0 \wedge x \leq 9 \} = \{ x/0 \leq 0\ x \leq 9 \} = [\,0;9\,]$

Ejemplo 4

Usemos las gráficas de las funciones f y g para estimar el valor de $f[g(x)]$ para x = -5, -4, -3, ..., 4, 5. Usemos estas estimaciones para trazar una gráfica aproximada de fog.



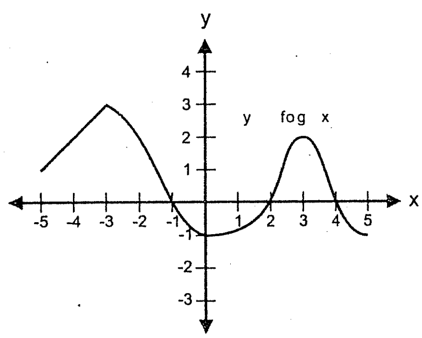
SOLUCIÓN

- Para calcular $f[g(-5)]$, primero hallamos g(-5). De acuerdo con la gráfica de g, g(-5) = 2; por tanto $f[g(-5)] = f(2)$.

  Ahora, hallamos f(2): de acuerdo con la gráfica, f(2) = 1. Luego, $f[g(-5)] = f(2) = 1$.

- Un análisis similar nos permite completar una tabla para los demás valores de fog y dibujar una aproximación de su gráfica.
  Si queremos una gráfica más exacta, debemos darle a x valores intermedios entre -5 y -4, -4 y -3, -3 y -2, ...

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
g(x)	2	1	0	-1	-2	-3	-2.8	-2	-1	-2	-3
(fog)(x)	1	2	3	2	0	-1	-0.8	0	2	0	-1



EJERCICIO 3.4

1. Sean f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función definida por la regla f(x) = x - 1 y g: $\mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}$ una función definida por la regla $g(x) = \dfrac{1}{x-1}$, se pide:

   a) Hallar los dominios de **f** y **g**.
   b) Hallar (f + g)(x) , (f - g)(x) , (f · g)(x), (f/g)(x) y sus respectivos dominios.
   c) Hallar (f + g)(-3), (f - g)(a + 1), (f · g)(1), (f/g)(m - 1)

2. Sean f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función definida por $f(x) = 4x$ y g: $[0; +\infty) \to \mathbb{R}$ una función definida por $g(x) = 2\sqrt{x}$.
Se pide:

a) Hallar los dominios de **f** y **g**.

b) Hallar $(f + g)(x)$, $(f - g)(x)$, $(f \cdot g)(x)$, $(f/g)(x)$ y sus respectivos dominios.

c) Hallar $(f + g)(-3)$, $(f - g)(3)$, $(f \cdot g)(a + 1)$, $(f/g)(p^2)$.

3. Si **f** y **g** son dos funciones en los reales definidas por las reglas $f(x) = \sqrt{4 + 2x}$ y $g(x) = 3 - x^2$. Se pide:

a) Hallar los dominios de **f** y **g**.

b) Hallar la compuesta entre **f** y **g** y su dominio.

c) Hallar la compuesta entre **g** y **f** y su dominio.

d) Hallar $(f \circ g)(-3)$, $(f \circ g)(4)$, $(f \circ g)(0)$, $(f \circ g)(2)$, $(g \circ f)(-5)$, $(g \circ f)(1)$, $(g \circ f)(6)$, $(g \circ f)(0)$

4. Hallar las funciones f o g, f o f y g o g, así como sus dominios.

a) $f(x) = 2x - 3x^2$; $g(x)=2x-4$

b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$; $g(x) = \sqrt{4 - x}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x - 1}$; $g(x) = \dfrac{x - 1}{x + 1}$

5. Encontrar funciones f y g tales que $y = (f \circ g)(x)$.

a) $y = (x - 2)^4$

b) $y = \text{Cos}\left(\sqrt{x}\right)$

c) $y = \log_2\left(x^2 - 3\right)$

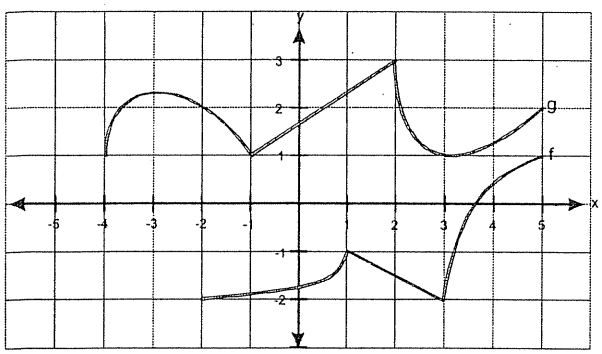
d) $y = \dfrac{x^3}{x^3 - 1}$

6. Si $h(x) = x^2 + 3x - 1$, encontrar una función **f** tal que $(h \circ f)(x) = 2x - 3$.

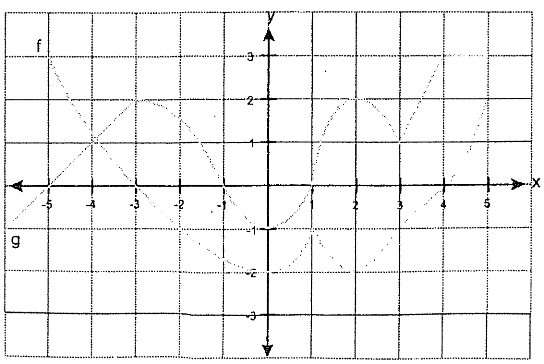
7. Si $f(x) = x^2 - 5$, encontrar dos funciones **h** para las cuales $(f \circ h)(x) = 2x^2$.

8. Usar las gráficas de las funciones f y g para calcular cada expresión o explicar por qué no está definida.

a) f(g(2))
b) g(f(1))
c) (gof)(2)
d) (gof)(-3)
e) f(g(-4))



9. Usar las gráficas dadas de f y g para estimar el valor de $f[g(x)]$, para x = -5, -4, -3, -2, , 5. Usar estas estimaciones para dibujar una gráfica de f o g.



SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (6)

Un punto P(x, y) se mueve en el plano de tal manera que siempre la suma de las distancias del punto P a los puntos fijos A(-4, 0) y B(4, 0) es igual a 10. Se pide:

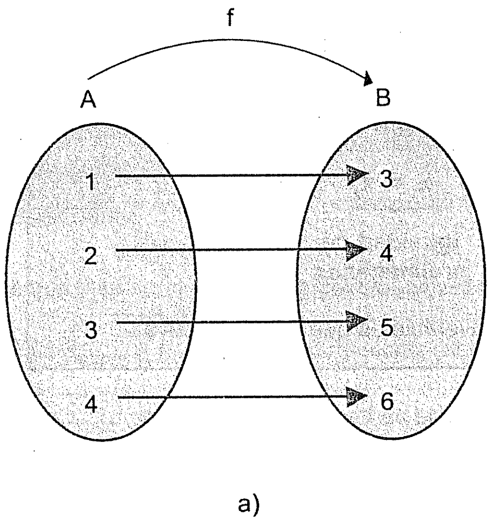
1. **Dibujar en el plano cuatro puntos que cumplan las condiciones del enunciado.**
2. **Hallar la ecuación de la curva descrita por el punto P en su movimiento e identificarla.**
3. **Determinar los siguientes elementos de la curva (interceptos con los ejes, simetrías, dominio y rango).**
4. **Teniendo en cuenta la información anterior, dibujar la gráfica de la curva.**

3.3 FUNCIONES INVERSAS (OPCIONAL)

3.3.1. Criterio de invertibilidad y definición de inversa

- En esta sección vamos a dar un criterio que nos permita encontrar la FUNCIÓN INVERSA de otra. Por ejemplo, consideremos la función f: A→B definida por el diagrama sagital de la figura 3 – 30(a).

  Si invertimos los conjuntos, obtenemos una nueva regla de correspondencia dada en el diagrama sagital de la figura 3 - 30(b). Esta última regla también es una función y se simboliza por f^{-1}.



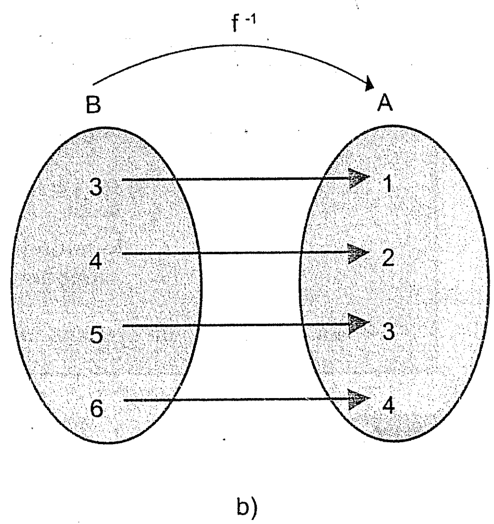


Figura 3 - 30

El símbolo f^{-1} se lee INVERSA DE f. Es importante señalar que el -1 en f^{-1} no es exponente; es decir:

$$f^{-1} \neq \frac{1}{f}$$

f^{-1} denota la INVERSA de f.

- Ahora consideremos otra función g: M→N definida mediante el diagrama sagital de la figura 3 - 31(a). Si «invertimos» el diagrama sagital, obtendremos la relación p: N→M, la cual no es función, puesto que hay dos valores del conjunto de llegada (4 y 5) asociados con un mismo valor del conjunto de partida (8); figura 3 - 31(b).

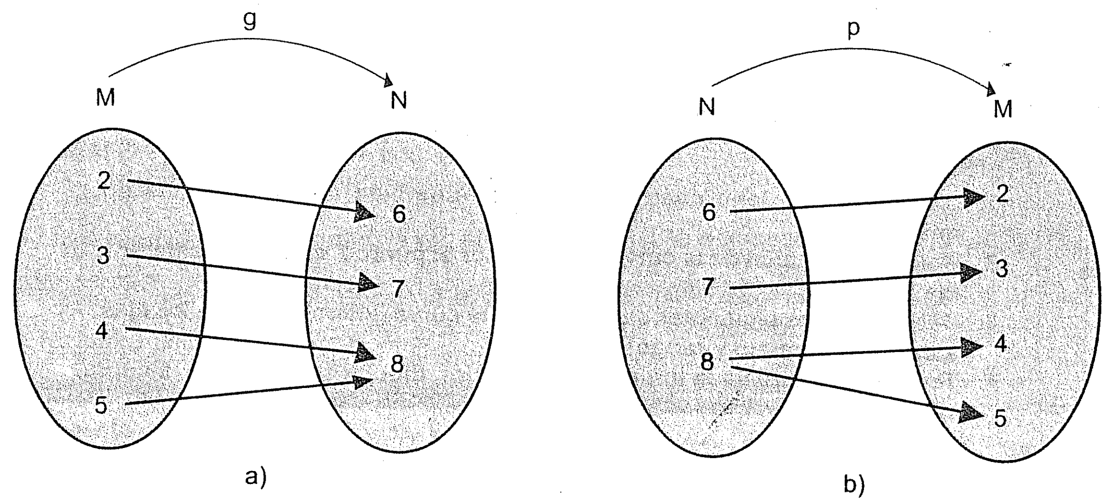


Figura 3 - 31

Por lo tanto, la función g no posee inversa.

- Queremos, pues, saber qué propiedad debe tener una función para que la «relación inversa» sea también una función. Notemos que en los diagramas sagitales (a) y (b) de la figura 3 - 30, **todo** elemento del rango esta asociado con **sólo un** elemento del dominio, mientras que en el diagrama sagital (a) de la figura 3 - 31, uno de los elementos del rango (8) le corresponde a **más de un elemento** del dominio (4 y 5). Decimos que la función f: A→B representada en el diagrama sagital (a) de la figura 3 - 30 es BIYECTIVA y por tal condición es INVERTIBLE.

DEFINICIÓN DE FUNCIÓN BIYECTIVA

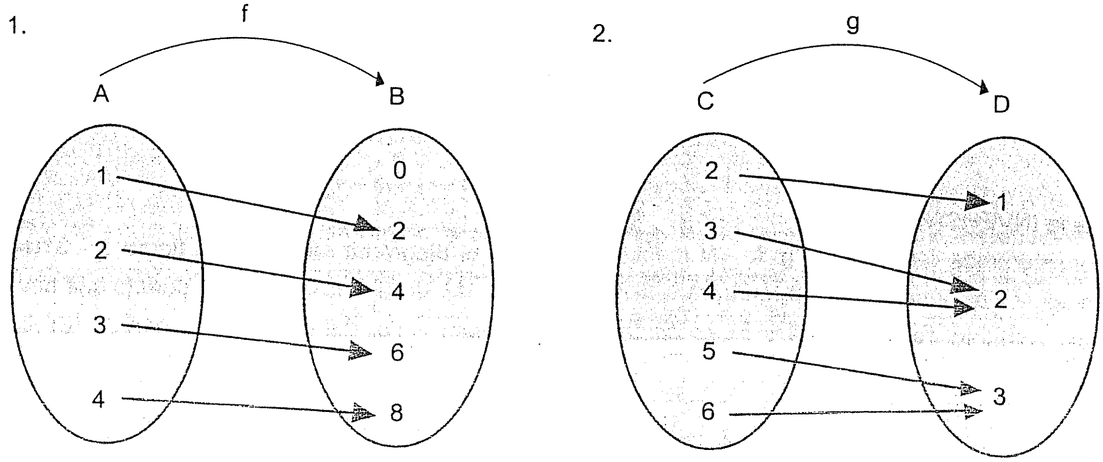
- Una función **f:A→B es BIYECTIVA** si y sólo si cumple las dos condiciones siguientes:
  1. El rango de f es igual a B; es decir, $I_f = B$.
  2. Cada $y \in B$ es imagen de un único $x \in A$ tal que $y = f(x)$; es decir:

$$\textbf{Si } \underbrace{f(x_1) = f(x_2)}_{\text{igualdad de imágenes}} \quad \textbf{entonces} \quad \underbrace{x_1 = x_2}_{\text{igualdad de preimágenes}}$$

- La condición para que una función f sea invertible es que f sea biyectiva.

Ejemplo 1

¿Cuáles de las funciones definidas mediante los siguientes diagramas sagitales de la figura 3 -32 poseen inversa?



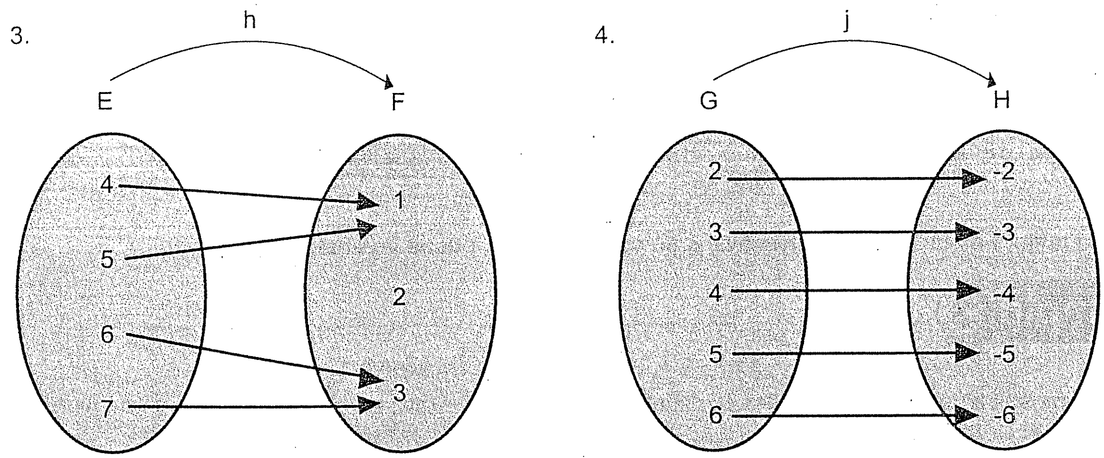


Figura 3 - 32

SOLUCIÓN

- La función f: $A \rightarrow B$, definida en el diagrama sagital 1., no posee inversa ya que la relación $\Re$:$B \rightarrow A$ no es función puesto que $0 \in B$ y no está relacionado con ningún elemento de A.
- La función g: $C \rightarrow D$, definida en el diagrama sagital 2., no posee inversa ya que la relación $\Re$: $D \rightarrow C$ no es función porque los elementos 2 y $3 \in D$ y están relacionados, cada uno, con dos elementos del conjunto C.
- La función h: $E \rightarrow F$, definida en el diagrama sagital 3., no es función ya que la relación $\Re$: $F \rightarrow E$ no es función porque el $2 \in F$ y no tiene imagen en E y a los elementos 1 y $3 \in F$ les corresponden dos elementos de E.
- La función j: $G \rightarrow H$ definida por el diagrama sagital 4., sí tiene inversa ya que la relación $\Re$: $H \rightarrow G$ también es función porque cumple las dos condiciones de la definición.

Ejemplo 2

Determinemos si la función f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por la regla $y = f(x) = 3x - 2$ tiene o no inversa.

SOLUCIÓN

- En primer lugar debemos probar que f es biyectiva. Para ello hacemos dos cosas:

  1. Probar que todos los elementos del conjunto de llegada de f están relacionados; es decir que $I_f = \mathbb{R}$. En efecto, si despejamos la x de la ecuación $y = 3x - 2$ nos queda:

  $$y = 3x - 2$$
  $$\therefore\ 3x = y + 2$$
  $$\therefore\ x = \frac{y+2}{3}$$

  Esta última expresión no presenta restricción, por lo cual $I_f = \mathbb{R}$. Luego, todos los elementos del conjunto de llegada de f están relacionados.

  2. Probar que cada elemento del rango es imagen de un único elemento del dominio; es decir, debemos probar que **a imágenes iguales corresponden pre-imágenes iguales:**

  $$\text{Si } f(x1) = f(x2) \text{ entonces } x_1 = x_2.$$

Veamos:

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow 3x_1 - 2 = 3x_2 - 2 \\ &\Rightarrow 3x_1 = 3x_2 \\ &\Rightarrow x_1 = x_2 \end{aligned}$$

$$\underline{\text{Igualdad de imágenes}} \Rightarrow \underline{\text{Igualdad de preimágenes}}$$

- Por lo tanto, f es una función biyectiva y, en consecuencia, posee inversa.

Ejemplo 3

Determinemos si la función g: $\mathbb{R}$ -{2}→ $\mathbb{R}$ definida por la regla $y = g(x) = \dfrac{3x - 4}{x - 2}$ posee o no inversa.

SOLUCIÓN

- Veamos si f es biyectiva. Probemos dos casos:

1. Si el rango de g(I_g) coincide con el conjunto de llegada ($\mathbb{R}$). Despejemos la x en la ecuación dada:

$$y = \frac{3x - 4}{x - 2}$$
$$\therefore\ xy - 2y = 3x - 4$$
$$\therefore\ xy - 3x = 2y - 4$$
$$\therefore\ x = \frac{2y - 4}{y - 3}$$

Esta última expresión está definida cuando $y - 3 \neq 0$ ó $y \neq 3$. Por lo tanto, $I_g = \mathbb{R} - \{3\}$ y, en consecuencia, la función g no es biyectiva.

- Si la función g se define como g: $\mathbb{R}$ -{2} → $\mathbb{R}$ -{3}, ¿será biyectiva? Veamos. En este caso, todos los elementos del conjunto de llegada están relacionados con un elemento del conjunto de partida. Nos falta probar que cada elemento del conjunto de llegada es imagen de un único elemento del conjunto de partida; es decir, debemos probar que:

Si $g(x_1) = g(x_2)$ entonces $x_1 = x_2$

En efecto:

$$\begin{aligned} g(x_1) = g(x_2) &\Rightarrow \frac{3x_1 - 4}{x_1 - 2} = \frac{3x_2 - 4}{x_2 - 2} \\ &\Rightarrow (3x_1 - 4)(x_2 - 2) = (3x_2 - 4)(x_1 - 2) \\ &\Rightarrow 3x_1x_2 - 6x_1 - 4x_2 + 8 = 3x_1x_2 - 6x_2 - 4x_1 + 8 \\ &\Rightarrow -6x_1 + 4x_1 = -6x_2 + 4x_2 \\ &\Rightarrow -2x_1 = -2x_2 \\ &\Rightarrow x_1 = x_2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la función g: $\mathbb{R}$ -{2} → $\mathbb{R}$ -{3} definida por la regla $y = g(x) = \dfrac{3x - 4}{x - 2}$ es biyectiva y posee inversa.

Ejemplo 4

¿La función $g(x)=x^2 - 4$ es invertible?

SOLUCIÓN

Esta función no es invertible ya que no es biyectiva. En efecto: $g(-3) = g(3)=5$ luego, $x_1=-3$ y $x_2=3$ tienen la misma imagen 5.

ATENCIÓN

Las funciones biyectivas son importantes porque poseen funciones inversas, tal como lo expresa la siguiente definición

> **DEFINICIÓN DE FUNCIÓN INVERSA**
>
> Sea f una función biyectiva, con dominio A y rango B.
> La **función inversa de f** denotada $\mathbf{f^{-1}}$ tiene dominio B y rango A y es tal que:
>
> $$\mathbf{f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y}$$
>
> Para cualquier $y \in B$.

Ejemplo 5

Si f(1)=4, f(3)=9, y f(5)=12, y f es una función biyectiva, hallemos $f^{-1}(9)$, $f^{-1}(12)$ y $f^{-1}(4)$

SOLUCIÓN

- Teniendo en cuenta la definición de f^{-1}, nos queda:

  $f^{-1}(9)=3$ porque $f(3)=9$

  $f^{-1}(12)=5$ porque $f(5)=12$

  $f^{-1}(4)=1$ porque $f(1)=4$

- Los diagramas de la figura 3-33 nos aclaran como f^{-1} invierte el efecto de f en este caso.

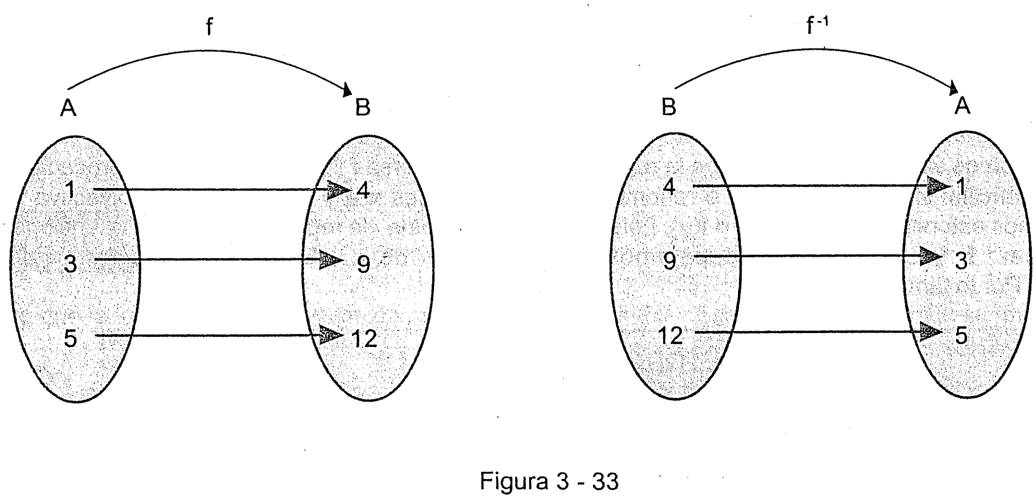


Figura 3 - 33

ATENCIÓN

Un criterio gráfico para identificar si una función tiene o no inversa consiste en trazar cualquier recta paralela al eje x (horizontal) que corte la curva. Si dicha recta corta a la curva en un solo punto, entonces dicha curva posee inversa; figura 3 - 34.

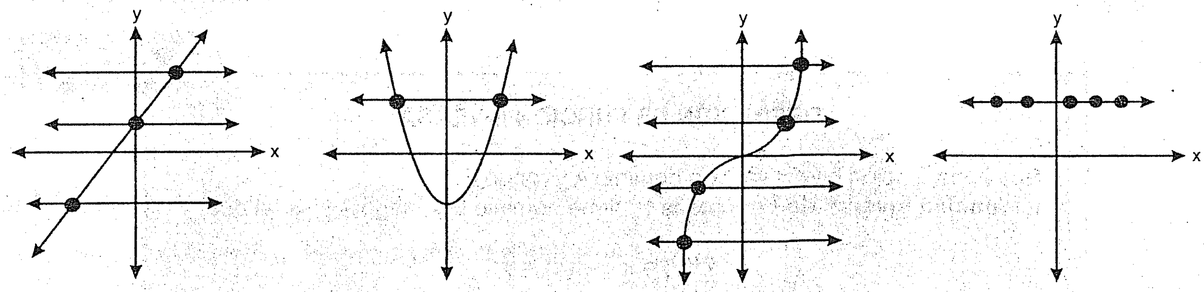


Figura 3 - 34

- En la figura 3 - 34(a), cualquier recta horizontal sólo corta a la gráfica de la función en un punto. Esta función tiene inversa.
- En la figura 3 - 34(b), la recta horizontal corta a la gráfica de la función en dos puntos. Esta función no posee inversa y es necesario redefinirla convenientemente para que la tenga.
- En la figura 3 - 34(c) cualquier recta horizontal sólo corta la gráfica de la función en un punto. Esta función tiene inversa.
- Finalmente, la figura 3 - 34(d) es una recta horizontal y por esa misma razón no tiene inversa.

CRITERIO GRÁFICO DE INVERTI BILIDAD

Una función f posee inversa si cualquier recta horizontal intercepta la gráfica a lo más en un punto.

3.3.2. Método para hallar la inversa de una función f biyectiva

- En la sección anterior establecimos un criterio para determinar si una función es invertible: probar que la función es biyectiva.
- Ahora queremos saber cómo se obtiene la regla de la función inversa $\mathbf{f^{-1}}$. En la práctica, el procedimiento es bastante sencillo: si intercambiamos o renombramos las variables **x** e **y** en una función biyectiva $\mathbf{y = f(x)}$, obtendremos entonces la ecuación $\mathbf{x = f(y)}$. Esta ecuación determina «la regla de inversión» o función inversa. Para hallar $\mathbf{f^{-1}}$, simplemente despejamos **y** en términos de **x**. Esto nos da la forma deseada $\mathbf{y = f^{-1}(x)}$. Por lo tanto:

MÉTODO PARA HALLAR f^{-1}

Para hallar f^{-1} de una función biyectiva f:

1. **Despejamos a x de la ecuación $y = f(x)$.**
2. **Intercambiamos las variables x y y en la ecuación $y = f(x)$.**
3. **Despejamos la variable y de la ecuación resultante $x = f(y)$, obteniéndose la ecuación $y = f^{-1}(x)$.**

Ejemplo 1

Hallemos la inversa de la función f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por la regla $y = f(x) = 3x - 2$.

SOLUCIÓN

- Ya probamos en la sección anterior que esta función es biyectiva. Por lo tanto:

$$y = 3x - 2 \text{.................................. regla de la función f.}$$

$$\therefore \quad x = f(y) = \frac{y+2}{3} \text{ .... despejamos x}$$

- Ahora intercambiamos la x y la y para obtener la regla de la función inversa de f; así:

$$y = f^{-1}(x) = \frac{y+2}{3}$$

Ejemplo 2

En la sección anterior probamos que la función g: $\mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R} - \{3\}$ definida por la regla $y = g(x) = \frac{3x-4}{x-2}$ es biyectiva. Hallemos su inversa.

SOLUCIÓN

- Despejemos x en términos de y:

$$\begin{aligned} y = \frac{3x-4}{x-2} &\Rightarrow xy - 2y = 3x - 4 \\ &\Rightarrow xy - 3x = 2y - 4 \\ &\Rightarrow x(y-3) = 2y - 4 \\ &\Rightarrow x = \frac{2y-4}{y-3} \end{aligned}$$

- Ahora intercambiamos la x y la y para obtener la regla de la función inversa de g; así:

$$y = g^{-1}(x) = \frac{2x-4}{x-3}.$$

- Por lo tanto, la inversa de la función g se define así:

$$g^{-1}: \mathbb{R} - \{3\} \to \mathbb{R} - \{2\} \text{ por la regla } y = g^{-1}(x) = \frac{2x-4}{x-3}$$

Ejemplo 3

Sabiendo que la función f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por la regla $y = f(x) = 2x^3 - 1$ es biyectiva, hallemos su inversa.

SOLUCIÓN

- En efecto, f es biyectiva ya que si $f(x_1) = f(x_2)$ entonces $x_1 = x_2$ (!probarlo!). Luego, f es invertible.
- Ahora, intercambiemos **x** e **y** en la regla de la función y despejamos **y** de la ecuación resultante, si es posible:

$$y = 2x^3 - 1 \text{ ....ecuación dada.}$$

$$\therefore \quad x = 2y^3 - 1 \text{ ....intercambiamos x e y}$$

$$\therefore \quad 2y^3 = x + 1$$

$$\therefore \quad y = \sqrt[3]{\frac{x+1}{2}} \text{ ....despejamos y}$$

- Por lo tanto, $y = f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{x+1}{2}}$ es la regla de la función inversa de f.

ATENCIÓN

1. Otra forma de probar que una función f es la inversa de otra función g es probando que:

$$f[g(x)] = x \text{, para todo } x \in D_g$$
$$y$$
$$g[f(x)] = x \text{, para todo } x \in D_f$$

Si, en el ejemplo anterior, hacemos $f(x) = 2x^3 - 1$ y $g(x) = \sqrt[3]{\frac{x+1}{2}}$ entonces:

$$f[g(x)] = f\left[\sqrt[3]{\frac{x+1}{2}}\right] = 2\left(\sqrt[3]{\frac{x+1}{2}}\right)^3 - 1 = 2\left(\frac{x+1}{2}\right) - 1 = x + 1 - 1 = x$$

$$g[f(x)] = g\left[2x^3 - 1\right] = \sqrt[3]{\frac{(2x^3 - 1) + 1}{2}} = \sqrt[3]{\frac{2x^3}{2}} = x$$

Luego, $f[g(x)] = g[f(x)] = x$ y hemos probado que f y g son mutuamente inversas.

2. Si dibujamos en un mismo plano cartesiano las gráficas de la función **f** y su inversa **f** $^{-1}$ del ejemplo 1 podremos observar un detalle interesante; figura 3 - 35:

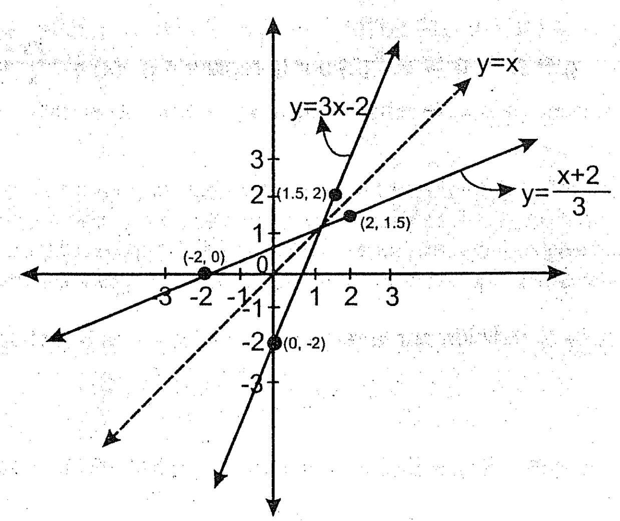


Figura 3 -35

En la figura 3 - 35 vemos que si (-2, 0) es un punto de la gráfica de **f**, entonces (0, -2) es un punto de la gráfica de f^{-1}; si (1.5, 3) es un punto de la gráfica de f, entonces (3; 1.5) es un punto de la gráfica de f^{-1}. En general, si (a, b) es un punto de la gráfica de f, entonces (b, a) es un punto de la gráfica de f^{-1}. Esta observación podemos concretarla afirmando que las gráficas de f y f^{-1} son SIMÉTRICAS respecto a la recta y = x.

3. Puesto que $\mathbf{y = \log_a x}$ y $\mathbf{y = a^x}$ son biyectivas y las ecuaciones $\mathbf{y = \log_a x}$ y $\mathbf{x = a^y}$ son equivalentes, entonces podemos afirmar que las funciones $\mathbf{y = \log_a x}$ y $\mathbf{y = a^x}$ son INVERSAS. Esto significa que sus gráficas son simétricas con relación a la recta $\mathbf{y = x}$ tal que como nos muestra la figura 3 - 36 donde se han dibujado las gráficas de $\mathbf{y = \log_2 x}$ y $\mathbf{y = 2^x}$.

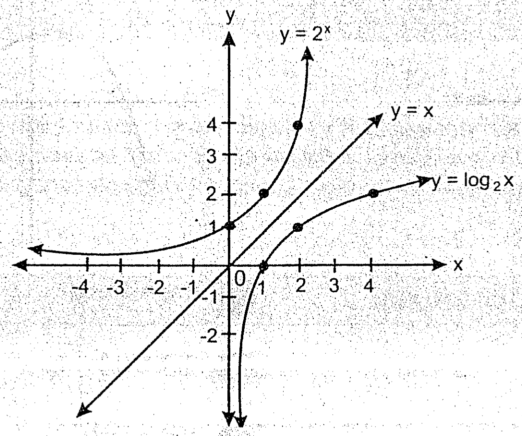


Figura 3 - 36

OTROS CRITERIOS DE INVERTI BILIDAD

- Una función g es la inversa de la función f si:

, para todo x $\in D_g$

y

, para todo x $\in D_f$

- Una función g es la inversa de la función f si las gráficas de f y g son simétricas con respecto a la recta y=x; es decir, si para toda pareja ordenada (a,b) de f existe la pareja ordenada (b,a) de g.

EJERCICIO 3.5

1 Responder las siguientes preguntas:

a) ¿Qué es una función biyectiva?

b) ¿Con base en la gráfica de una función, cómo puede saberse si es biyectiva?

c) Suponga que f es una función biyectiva, con dominio A y rango B. ¿Cómo se define la función inversa f^{-1}? ¿Cuál es el dominio de f^{-1}? ¿Cuál es el rango de f^{-1}?

d) Dada la regla para f, ¿cómo se halla la fórmula para f^{-1}?

e) Si se tiene la gráfica de f, ¿cómo se dibuja la gráfica de f^{-1}?

f) Si f y g son funciones de x y f y g son inversas entre sí, ¿es (fog)(x) = (gof)(x)?

En los ejercicios 2 a 12 se presenta una función por medio de una tabla de valores, una gráfica o una descripción verbal. Determinar si la función es biyectiva.

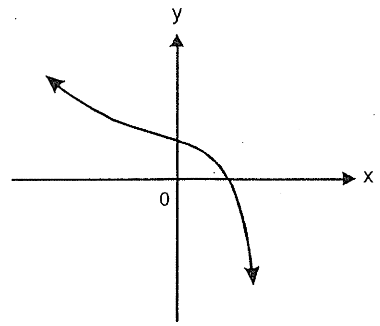
2

x	1	2	3	4	5	6
f(x)	0.5	3.2	4.3	5.0	4.0	3.2

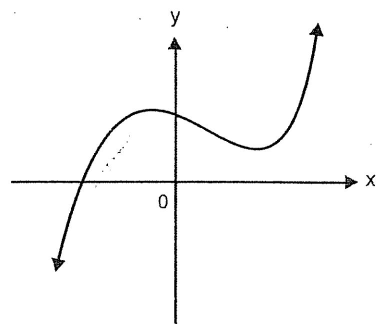
3

x	1	2	3	4	5	6
f(x)	1	3	9	27	81	243

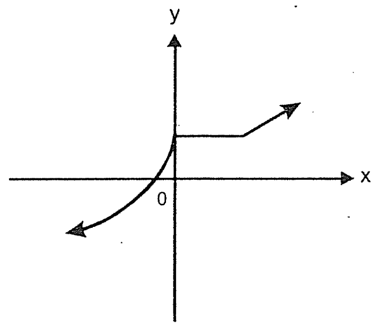
4



5



6



7 $f(x) = 4x - 3$

8 $f(x) = 4x^2 - 4x$

9 $f(x) = |x|$

10 $f(x) = \sqrt{x - 3}$

11 f(t) es la distancia recorrida por un objeto que se desplaza con velocidad constante de 30 km/h.

12 f(t) es la altura a la que se encuentra una bala de cañón, t segundos después de ser disparada.

En los ejercicios 13 a 16, probar que cada función f es biyectiva, hallar f^{-1} y dibujar ambas en un mismo plano cartesiano.

13 $f(x) = x^3 - 2$

14 $f(x) = \dfrac{4 - 2x}{x - 1}$

15 $f(x) = \ln(x - 2)$

16 $f(x) = 2^{x+1}$

En los ejercicios 17 y 18, indicar si las funciones f: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por las reglas dadas poseen o no inversa. Si la poseen hállelas y si no la poseen redefínalas de manera que las posean.

17 $f(x) = 2 - x^2$

18 $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 1$

19 Escribir una función f que tenga inversa f^{-1} y comprobar que $(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x$.

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (7)

Un punto P(x, y) se mueve en el plano de tal manera que su distancia a la recta y + 2 = 0 es siempre la mitad de su distancia al punto fijo A(5, 4). Se pide:

1. **Dibujar en el plano cartesiano cuatro puntos que cumplan con el enunciado del problema**
2. **Hallar la ecuación de la curva descrita por el punto P en su movimiento e identificarla.**

3. **Determinar, de la curva obtenida, los siguientes elementos: interceptos con los ejes, simetrías con los ejes y con el origen, dominio y rango.**

4. **Utilizar la información obtenida en el numeral 3. para dibujar la gráfica de este lugar geométrico.**

3.4 LAS FUNCIONES COMO MODELOS MATEMÁTICOS

- Numerosas aplicaciones de la matemática a otras ciencias y a situaciones de la vida diaria exigen la aplicación de ciertas fórmulas o relaciones básicas. La mayoría de estas fórmulas son funciones definidas mediante una ecuación de la forma y = f(x). Algunas de estas funciones reciben nombres especiales que daremos a continuación, en el siguiente cuadro:

ECUACIÓN	SIGNIFICADO
1. $y = kx$; con k constante, $k \neq 0$	y es directamente proporcional a x
2. $y = kx^n$; con k constante, $k \neq 0$	y es directamente proporcional a la potencia n-ésima de x.
3. $y = k/x$; con k constante, $k \neq 0$	y es inversamente proporcional a x.
4. $y = k/x^n$; con k constante, $k \neq 0$	y es inversamente proporcional a la potencia n-ésima de x.
5. $y = k\,x\,z$, con k constante, $k \neq 0$	y es conjuntamente proporcional a **x** y a **z.**
6. $y = k\,\frac{x}{w}$; con k constante, $k \neq 0$	y es directamente proporcional a x e inversamente proporcional a w.

- En estos casos, la letra k es una constante y recibe el nombre de constante de variación o constante de proporcionalidad.

Ejemplo 1

- El área de un círculo varía directamente con el cuadrado de su radio. Por esta razón, $A = kR^2$. En este caso, ya sabemos, el valor de $k = \pi$.
- La LEY DE NEWTON DE LA GRAVITACIÓN establece que la atracción gravitacional entre dos cuerpos es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que hay entre sus centros de gravedad. Si G, m_1, m_2 y d representan la fuerza de atracción gravitacional, las dos masas y la distancia, respectivamente, entonces la ley afirma que:

$$G = k\,\frac{m_1\,m_2}{d^2}$$

ATENCIÓN

En los problemas de variación, no es indispensable calcular la constante de proporcionalidad a menos que se requiera explícitamente. La constante se puede calcular si se conoce un conjunto particular de valores de las variables.

Ejemplo 2

Se sabe que si la temperatura permanece constante, entonces la presión de un gas encerrado en un recipiente es inversamente proporcional al volumen. La presión de cierto gas dentro de un globo esférico de 9 cm de radio es de 20 libras por cm^3. Si el radio del globo anterior es ahora de 12 cm, hallemos la nueva presión del gas.

SOLUCIÓN

- Si llamamos P a la presión y V al volumen y la presión es inversamente proporcional al volumen, entonces:

$$P = \frac{k}{V}$$

para algún número real k.

- Para hallar el valor de k, tengamos en cuenta que el volumen del globo inicial es $V = \frac{4}{3}\pi (9)^3 = 972\pi\ cm^3$. Por lo tanto: cuando P = 20, V = 972π y, entonces $20 = \frac{k}{972\pi}$; luego,

$$k = 19440\pi \text{ y } P = \frac{19440\pi}{V} \text{ ....(1).}$$

- Si el radio es de 12 cm, entonces $V = \frac{4}{3}(12)^3\ \pi = 2304\ \pi cm^3$. Y sustituyendo este valor en la ecuación (1) nos queda:

$$P = \frac{19440\ \pi}{2304\ \pi} = 8.4375 \text{ libras por } cm^3.$$

- Por lo tanto, la nueva presión del gas es 8.4375 lb/cm^3.

Ejemplo 3

- El peso que puede soportar una viga con sección transversal rectangular es directamente proporcional al ancho y al cuadrado del alto de la sección transversal y es inversamente proporcional a la longitud de la viga. Si una viga que tiene una sección transversal de 6 cm por 12 cm y 2.5 m de longitud soporta una carga de 250 Kgf, ¿qué peso soportará una viga de 6 cm por 24 cm de sección transversal y 3 m de longitud? (Suponga que el ancho es la longitud más corta de la sección transversal).

SOLUCIÓN

- Si el ancho, el alto, la longitud y el peso los denotamos por a, h, ℓ y P, respectivamente, entonces:

$$P = k\frac{ah^2}{\ell} \text{ ....(1)}$$

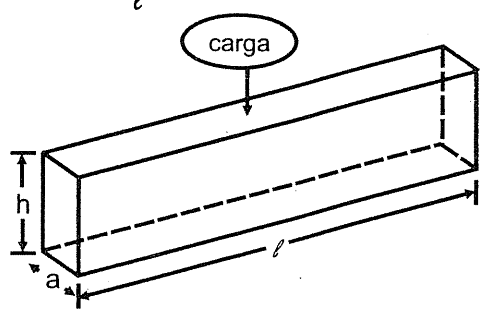


Figura 3 - 37

- Teniendo en cuenta los datos del problema, nos queda:

$$250 = k\frac{6\,(12)^2}{250\text{ cm}}$$

Despejando k de esta última igualdad tenemos que $k = \dfrac{62.500}{864}$

- Por lo tanto, reemplazando este valor en (1) resulta que:

$$P = \frac{62.500}{864}\left(\frac{a\,h^2}{\ell}\right)\text{................. (2)}$$

- Finalmente, para calcular el peso P que soporta la viga cuando a = 6 cm, h = 24 cm y ℓ = 3m reemplazamos estos valores en (2); así:

$$P = \frac{62.500}{864}\cdot\frac{6\,(24)^2}{300}$$

$$\therefore\ P = 833.33\ \text{kgf.}$$

Ejemplo 4

Se va a cercar un terreno rectangular situado en la ribera de un río, utilizando para ello una malla de 80 m. La parte del terreno que está sobre la ribera del río no requiere malla. Se pide:

a) Si **x** metros es el largo del terreno, expresemos en metros cuadrados el área del terreno como función de **x.**
b) ¿Cuál es el dominio de la función resultante?
c) ¿Cuáles son las dimensiones del terreno para las cuales el área del mismo es máxima?

SOLUCIÓN

a) Del enunciado del problema sabemos que **x** metros mide el largo del terreno. Si llamamos **y** al número de metros del ancho del terreno, entonces podemos dibujar la figura 3 - 38:

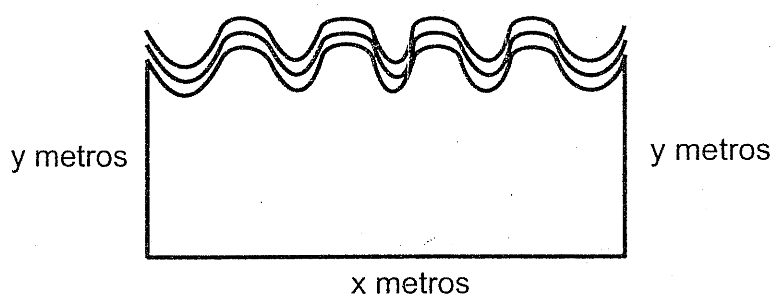


Figura 3 - 38

Como contamos con 80 metros de malla y ésto corresponde al perímetro del terreno, entonces:

$$80 = x + 2y\text{.....................(1)}$$

El área de un rectángulo es igual al producto de su base por su altura (largo por ancho). Por lo tanto:

$$A = xy\text{.............................(2)}$$

Pero el área hay que escribirla sólo en función de **x**. Por lo tanto:

$$\text{De (1)}: y = 40 - \frac{1}{2}x$$

$$\text{En (2)}: A(x) = x\left(40 - \frac{1}{2}x\right)$$

$$\text{Luego}: A(x) = 40x - \frac{1}{2}x^2$$

Por lo tanto, el área del rectángulo en función del largo x es:

$$\boxed{A(x) = 40x - \frac{1}{2}x^2}$$

b) Cualquiera que mire desprevenidamente esta función dirá que su dominio son todos los números reales. Y es verdad. Sin embargo, en este caso concreto no tiene sentido que **x**, ni **A(x)** tomen valores negativos (¿por qué?). En consecuencia, averigüemos donde $A(x) = 0$ y así podremos saber donde $A(x) > 0$ y donde $A(x) < 0$. Veamos:

$$A(x) = 0$$
$$\therefore\ 40x - \frac{1}{2}x^2 = 0$$
$$\therefore\ 80x - x^2 = 0$$
$$\therefore\ x(80 - x) = 0$$
$$\therefore\ x = 0 \quad ó \quad x = 80$$

Como **x** no puede ser negativo, entonces sólo debemos analizar dos intervalos $(0 ; 80)$ y $(80 ; +\infty)$. Una sencilla comprobación nos permitirá concluir que $A(x) > 0$ en el intervalo $(0 ; 80)$

Esto significa que el dominio de esta función es el intervalo $(0 ; 80)$.

c) La función de ecuación $A(x) = 40x - \frac{1}{2}x^2$ es una función cuadrática. Esta función tiene su máximo valor cuando:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{40}{-2\left(\frac{1}{2}\right)} = 40$$

si $x = 40$, entonces $y = 40 - \frac{1}{2}(40) = 20$

Por lo tanto, el terreno de máxima área es aquel cuyas dimensiones son: largo = 40m y ancho = 20m.

Ejemplo 5

Una isla está ubicada en el punto A, 6 Km. mar adentro del punto más cercano B en una playa recta. Una mujer que se encuentra en la isla desea ir hacia un punto C situado a 9 Km. de B sobre la misma playa. La mujer puede alquilar una lancha por \$15.000 el kilómetro, desembarcar en un punto P ubicado entre B y C y allí alquilar un carro con chofer a un costo de \$12.000 por kilómetro para llegar hasta C. Se pide:

a) Hacer un dibujo de la situación planteada por el enunciado del problema.
b) Si x es la distancia entre B y P, escribamos una expresión que nos permita calcular el costo de viajar desde el punto A hasta el punto C.
c) ¿Cuál es el dominio de la función resultante donde el problema tiene sentido?

SOLUCIÓN

a) La figura 3 - 39 describe el enunciado del problema.

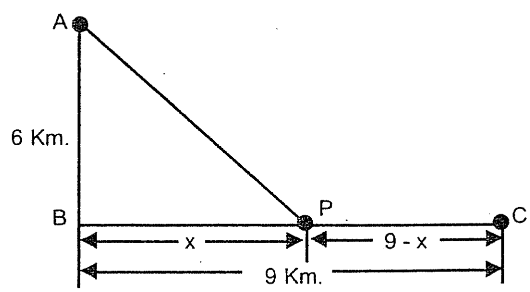


Figura 3 - 39

b) El costo de recorrer una distancia determinada es igual al producto del número de kilómetros por el valor de 1 kilómetro. Por lo tanto:

Distancia $\overline{AP} = \sqrt{36 + x^2}$

Distancia $\overline{PC} = 9 - x$

Costo de recorrer $\overline{AP} = 15000\sqrt{36 + x^2}$

Costo de recorrer $\overline{PC} = 12000\,(9 - x)$

Si llamamos C(x) el costo total entonces:

$$\boxed{\mathbf{C(x) = 15000\sqrt{36 + x^2} + 12000\,(9 - x)}}$$

c) Para determinar el dominio de esta función basta observar que x puede tomar valores entre 0 y 9: toma el valor de 0 cuando P coincide con B y toma el valor de 9 cuando P coincide con C. Por lo tanto, el dominio de esta función es el intervalo [0 ; 9].

Ejemplo 6

- Una compañía ofrece instalar bombillas a un costo de \$300 cada una si el pedido es de 40 unidades o menos. Para conseguir mejores contratos reduce en \$5 el costo para cada bombilla que pase de 40.

  a) Si x es el número de bombillas que van a instalarse, escribamos una expresión para determinar el costo total de la instalación.

  b) ¿Cuál es el dominio de la función resultante?

  c) ¿Cuántas bombillas deben instalarse de manera que la compañía obtenga las mayores ganancias?

SOLUCIÓN

a) En primer lugar, tengamos en cuenta que el costo total de la instalación, que representaremos por C(x), es igual al **producto del número de bombillas a instalar por el precio de cada una.** En este caso, la expresión que debemos encontrar para C(x) consta de dos partes: la primera, cuando se van a instalar 40 bombillas o menos y, la segunda, cuando se van a instalar más de 40 bombillas; es decir:

1. Si $x \leq 40$, entonces $C(x) = 300 \cdot x$

2. Si $x > 40$, entonces el precio de cada bombilla será \$300 menos \$5 que se descuenta por cada bombilla por encima de las 40. El número de bombillas por encima de las 40 se representa por (x - 40); el descuento obtenido por estas (x - 40) bombillas es 5(x - 40) en cada una y, en consecuencia, el precio será 300 - 5(x - 40)por bombilla. Por lo tanto, el costo total C(x) de instalar más de 40 bombillas es: x [300 - 5(x - 40)]

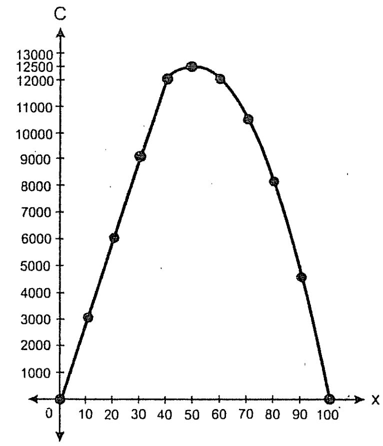
De 1. y 2. podemos escribir la siguiente expresión para determinar el costo total de la instalación:

$$C(x) = \begin{cases} 300\,x & \text{si } 0 \leq x \leq 40 \\ x\,[300 - 5\,(x-40)\,] & \text{si } x > 40 \end{cases}$$

$$\therefore\ C(x) = \begin{cases} 300\,x & \text{si } 0 \leq x \leq 40 \\ 300x - 5x^2 + 200x & \text{si } x > 40 \end{cases}$$

$$\therefore\ C(x) = \begin{cases} 300\,x & \text{si } 0 \leq x \leq 40 \\ 500\,x - 5x^2 & \text{si } x > 40 \end{cases}$$

b) Para que entendamos cuál es el dominio de la función dibujemos su gráfica; figura 3 - 40



La figura nos muestra que C toma valores no negativos cuando el número de bombillas está entre 0 y 100. Por lo tanto, el dominio de C es el intervalo [0 ; 100]. Para obtener este resultado analíticamente basta averiguar donde C es igual a 0 y luego evaluar los intervalos donde C es positiva; es decir:

$C(x) = 0$ cuando $300x = 0$ ó $500x - 5x^2 = 0$

$300x = 0$ cuando $x = 0$

$500x - 5x^2 = 0$ cuando $x(500 - 5x) = 0$, $x = 0$ ó $x = 100$

Por lo tanto, los posibles intervalos de análisis son $(-\infty; 0)$, $(0 ; 100)$ y $(100 ; +\infty)$. El intervalo $(-\infty; 0)$, se descarta (¿por qué?); en el intervalo $(0 ; 100)$, la función C es positiva (¡ verificarlo !) y en el intervalo $(100 ; +\infty)$, la función C vuelve a ser negativa (¿por qué?). En consecuencia, el dominio de C es el intervalo [0 ; 100].

c) La figura 3-40 nos muestra que el valor máximo de la función se presenta en un punto entre $x = 40$ y $x = 100$. Como en este intervalo (40 ; 100), la función es cuadrática entonces el valor máximo se encuentra donde $x = -\dfrac{b}{2a}$; es decir: $x = -\dfrac{500}{-10} = 50$.

CONCLUSIÓN: La compañía obtiene la mayor ganancia cuando vende lotes de 50 bombillas. En este caso, el valor de la venta es: $500(50) - 5(50)^2 = 12.500$ pesos.

EJERCICIO 3.6

En los ejercicios **1** a **4** expresar cada enunciado en forma de ecuaciones:

1 p es directamente proporcional al cuadrado de q.

2 t es inversamente proporcional a r.

3 a varía directa y conjuntamente proporcional con b y c^3.

4 m varía directamente proporcional con n e inversamente proporcional con el cuadrado de p.

5 m varía directamente proporcional con n. Si m vale 15 cuando $n = 10$, determinar el valor de m cuando $n = 12$.

6 p varía inversamente proporcional con q. Si $p = 6$ cuando $q = 8$, hallar el valor de p cuando $q = 10$.

7 t varía directa y conjuntamente proporcional con r y s. Si $t = 20$ cuando $r = 4$ y $s = 5$, hallar el valor de t cuando $r = 9$ y $s = 15$.

8 a varía directamente proporcional con el producto de b y c e inversamente proporcional con el cuadrado de d. Si $a = 6$ cuando $b = 4$, $c = 12$ y $d = 2$, calcular el valor de a si $b = 2$, $c = 5$ y $d = 3$.

9. x varía directamente proporcional con y^2 e inversamente proporcional con z^3. Si $x = 2$ cuando $y = 3$ y $z = 5$, calcular y si $x = 10$ y $z = 12$.

10. El volumen de un cilindro circular recto varía directa y conjuntamente proporcional con la altura y el cuadrado del radio. Si el volumen de un cilindro circular recto de radio 4 cm y de altura 7 cm es 352 cm^3, calcular el volumen de otro cilindro de radio 8 cm y altura 14 cm.

11. La nómina diaria correspondiente a un grupo de trabajadores es directamente proporcional al número de obreros. Si 12 de éstos perciben un pago total de $540.000, se pide: a) Expresar el costo de la nómina diaria como función del número de obreros. b) ¿Cuál es el costo de la nómina diaria para un grupo de 15 trabajadores?

12. La ley de Hooke establece que la fuerza F requerida para estirar un resorte x unidades de su posición natural es directamente proporcional a x. Si un peso de 4 kgf estira un resorte cuya longitud natural es de 10 cm hasta una longitud de 10.3 cm. ¿Cuál es el peso que produce una longitud de 11.5 cm?

13. La intensidad de la luz varía inversamente con el cuadrado de la distancia a partir de su fuente. Comparar la intensidad de una pantalla que está a 5 metros de una fuente dada con la intensidad de una pantalla que está a 7 metros de la misma fuente.

14. En un pequeño poblado con 5.000 habitantes la tasa de propagación de una epidemia (índice de variación del número de personas infectadas) es conjuntamente proporcional al número de personas atacadas y al número de personas que todavía no se han contagiado. (a) Si la epidemia se difunde con una tasa de 9 personas por día cuando hay 100 personas contagiadas, exprese la rapidez de propagación de la epidemia como función del número de personas enfermas. b) ¿ Con qué rapidez se difunde la epidemia cuando 200 personas ya se han contagiado ?

15. La iluminación producida sobre una superficie por una fuente luminosa varía directamente con la potencia en candelas de la fuente e inversamente con el cuadrado de la distancia entre la fuente y la superficie. Comparar la iluminación producida por una lámpara de 512 cd (candelas) que está a 8 dm de la superficie con la de una lámpara de 72 cd a 2 dm de la superficie.

16. Una ventana rectangular está rematada por un semicírculo. El perímetro de la ventana es 200 cm y la cantidad de luz que ingresa por ella es directamente proporcional al área de la ventana, (a) Si x cm es el radio del semicírculo, expresar la cantidad de luz que ingresa por la ventana como función de x; (b) ¿Cuál es el dominio de la función resultante?; (c) ¿Cuál es el radio del semicírculo de la ventana que admite el paso de la mayor cantidad de luz?

17. Una caja rectangular de base cuadrada se construye de tal manera que el área de sus seis caras es de 18m^2:

a) Si x m es la longitud del lado de la base, expresar el volumen de la caja en función de x.
b) ¿Cuál es el dominio de la función resultante? ¿Dónde el problema tiene sentido?

18. Con una hoja metálica rectangular de 12 cm de ancho se desea construir un canal para conducir el agua-lluvia. Con este fin se doblan hacia arriba dos lados de tal manera que queden perpendiculares a la hoja. ¿Cuántos centímetros se deben doblar para que el canal tenga capacidad máxima?

19. Un hombre desea cercar un terreno rectangular y después colocar otras dos cercas paralelas a alguno de los lados para subdividirlo en tres lotes rectangulares. Si dispone de 1000 metros de cerca, ¿con qué dimensiones obtendrá el área máxima?

20. Un fabricante de envases de cartón desea construir cajas, sin la tapa superior, usando láminas cuadradas de cartón de 12 dm de lado, recortando cuadrados iguales de las cuatro esquinas y doblando los lados hacia arriba. (a) Si x decímetros es la longitud del lado del cuadrado que debe recortarse, expresar en dm^3 el volumen de la caja a fabricar, como función de x. (b) ¿Cuál es el dominio de la función resultante?

Taller de la Unidad 3

1 Preguntas para revisar la teoría

a) ¿Qué condiciones debe cumplir una relación para que sea función?

b) ¿De qué maneras se puede representar una función?

c) ¿Cómo se definen los siguientes conceptos:

   i. Función?

   ii. Dominio y rango de una función?

   iii. Gráfica de una función?

   iv. Variable independiente de una función?

d) ¿Qué es una función par? ¿Cómo puede determinarse que una función es par sólo con mirar su gráfica?

e) ¿Qué es una función impar? ¿Cómo puede determinarse que una función es impar con sólo mirar su gráfica?

f) ¿Qué es función creciente y función decreciente?

g) ¿Qué es función uno a uno? ¿Cómo puede determinarse que una función es uno a uno con sólo mirar su gráfica?

h) Si f es una función dada, ¿Qué significa la expresión $y = f(x)$? ¿Qué nombres reciben x e y en esta función?

i) ¿Cuáles operaciones pueden realizarse con funciones? ¿Cuál es el dominio de cada una de las funciones obtenidas?

j) Si **f** y **g** son dos funciones bien definidas, ¿cómo se halla la compuesta de **f** y **g**?¿Y la compuesta de **g** y **f**? ¿Cómo se halla el dominio de la compuesta de dos funciones?

k) ¿Cómo se clasifican las funciones reales?

l) ¿Qué es una función algebraica? Escriba cinco (5) ejemplos.

m) ¿Cuál es la gráfica de una función constante? ¿De una función lineal? ¿De una función cuadrática?

n) ¿Cómo se obtienen las coordenadas del vértice de una parábola funcional?

o) Gráficamente, ¿qué representan los ceros de una ecuación polinómica?

p) ¿Cómo se define una función racional?

q) ¿Cuáles son las funciones trascendentes, cómo se definen y cómo se simbolizan?

r) ¿Posee toda función **f** una inversa? ¿Qué condiciones debe cumplir una función para tener inversa? ¿Cómo se obtiene la regla de la inversa de una función real dada?

s) ¿Cuál es la prueba gráfica para saber si una función dada tiene inversa?

t) Si se dibujan en un mismo plano cartesiano las gráficas de una función y su inversa, ¿qué características presentan?

u) Si dos funciones f y g son inversas, ¿Cuál es el resultado de la composición de ellas?

2 FALSO O VERDADERO

Colocar en el paréntesis de la izquierda una V o una F según que el enunciado sea verdadero o falso. Justificar las respuestas FALSAS mediante un contraejemplo.

( ) a) Toda relación es función, pero no toda función es relación.

( ) b) En una función es posible que un mismo elemento del conjunto de partida tenga dos imágenes.

( ) c) Si f es una función tal que $f(a) = f(b)$ entonces $a = b$.

( ) d) Si f es una función entonces f (a + b) = f (a) + f (b).

( ) e) Si $x_1 < x_2$ y f es una función decreciente, entonces $f(x_1) > f(x_2)$.

( ) f) Una recta vertical intercepta la gráfica de una función más de una vez.

( ) g) En una función que posee inversa, el rango es igual al conjunto de llegada.

( ) h) Si f es uno a uno entonces $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{f(x)}$.

( ) i) Si **f** es una función real definida por la regla f(x) = 5 - 3x, entonces f(a + 1) = 2 - 3a.

( ) j) Si **f** es una función real definida por la regla $f(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{si } x \le -3 \\ 6 & \text{si } -3 < x < 0 \\ x^2 + 3 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$ entonces f(1) = 4.

( ) k) La función $f = \{ (x,y) \,/\, y = \sqrt{-5} \}$ es una función real constante.

( ) l) La función f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por la regla $f(x) = 4x - x^2 - 4$ tiene un valor máximo en x = 2.

( ) m) La función f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por la regla f(x) = |x + 1| posee inversa.

( ) n) Las raíces de la función f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por la regla $f(x) = x(x^2 - 1)(x^3 + 8)$ son x = 0, x = 1, x = -1 y x = -2.

( ) o) El dominio de la compuesta de dos funciones **f** y **g** es la intersección de los dominios de **f** y **g.**

( ) p) El dominio de la función real definida por la regla $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 3}}$ es $\mathbb{R}$.

( ) q) La relación $\mathfrak{R} = \{(x, y) \,/\, 4x^2 - 2y^2 - 3x + 1 = 0\}$ es una función.

( ) r) La relación $\mathfrak{R} = \{(x, y) \,/\, x = -3\}$ es una función.

( ) s) Siempre se puede dividir por 2^x.

( ) t) Si 0 < a < b entonces log a < log b

( ) u) Si x > 0 entonces $(\ln x)^3 = 3 \ln x$.

( ) v) Si c es directamente proporcional a a e inversamente proporcional al cuadrado de b entonces $c = k\dfrac{b^2}{a}$.

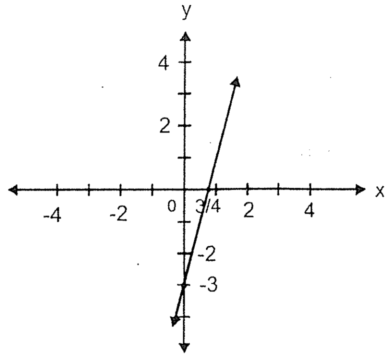
( ) w) Si y es directamente proporcional al cubo de x e inversamente proporcional a z entonces $y = k\dfrac{x^3}{z}$.

( ) x) La gráfica de y = -f (x) es la simétrica con el eje y de y = f (x).

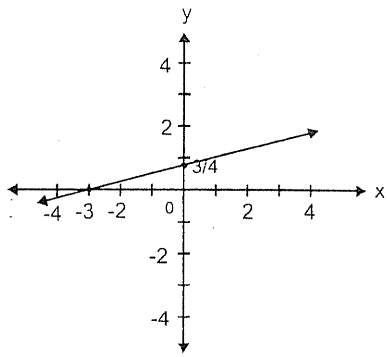
( ) y) La gráfica de y = f (-x) es la simétrica con el eje y de y = f (x).

Los ejercicios **3** a **11** se responden con base en las gráficas de las funciones que aparecen a continuación. Tenga en cuenta cómo están numeradas para dar su respuesta. Las gráficas representan funciones polinómicas , exponenciales o logarítmicas. Escriba al frente de cada afirmación el (los) número(s) de las gráficas de las funciones que la verifican. Tenga en cuenta que para una misma afirmación puede haber varias funciones que la satisfagan; en este caso, debe señalarlas todas.

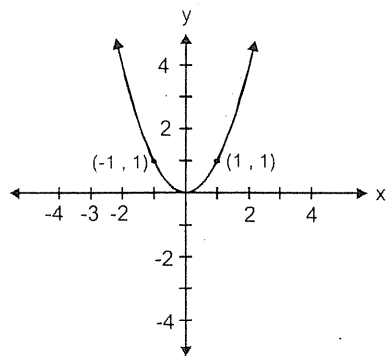
1.



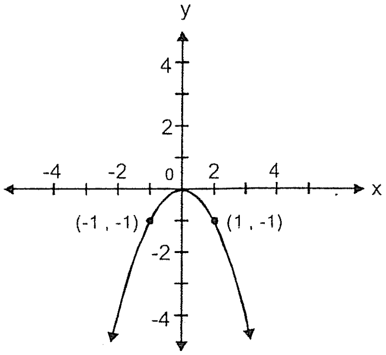
2.



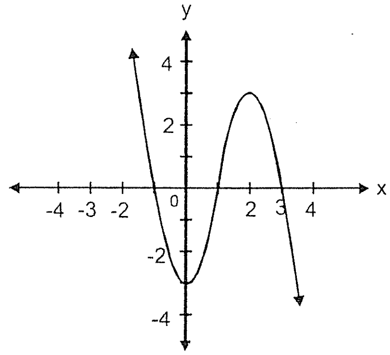
3.



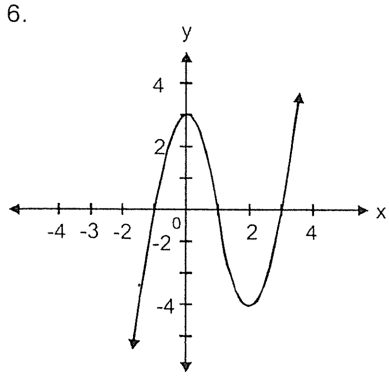
4.



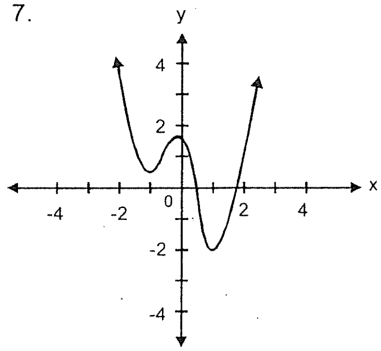
5.



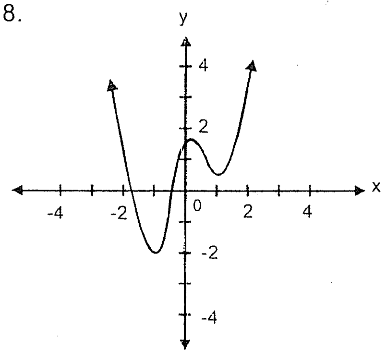
6.



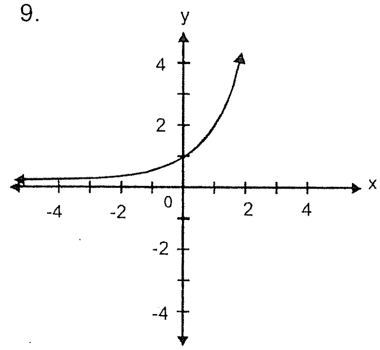
7.



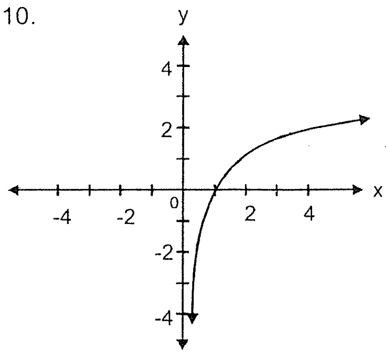
8.



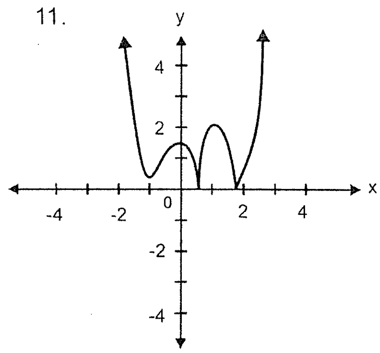
9.



10.



11.



3 Es función par ______.

4 La regla de la función es y = 4x – 3 ______.

5 Es función polinómica de grado mínimo igual a 4 ______.

6 Es polinomio con tres raíces reales ______.

7 Es función exponencial _______.

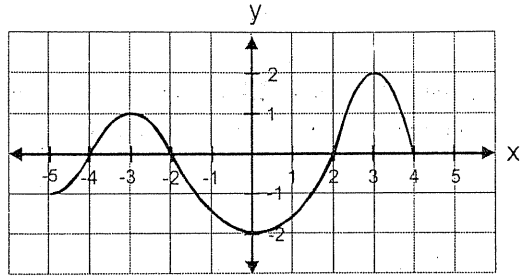
8 La gráfica de su valor absoluto es la número (11) _______.

9 Si una de las funciones es y = f(x), la otra es y = -f (x) (puede haber varias parejas) _______.

10 Si una de las funciones es y = f(x), la otra es y = f(-x) (puede haber varias parejas) _______.

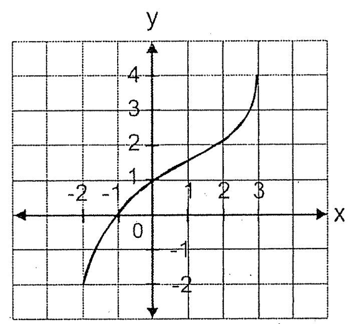
11 Son funciones inversas entre sí (puede haber varias parejas) _______.

12 Sea f una función cuya gráfica es la siguiente:



a) Estimar el valor de f (-3)
b) Estimar el valor de f (-2.5)
c) Estimar los valores de x tales que f(x) = 1.5.
d) Hallar el dominio y el rango de f.
e) En cuál(es) intervalos f es creciente y en cuál(es) decreciente.
f) ¿Es f uno a uno? ¿Por qué?
g) ¿Es f par, impar o ninguna de las dos? ¿Por qué?

13 Teniendo en cuenta la gráfica de una función g se pide:



a) Hallar g(3).
b) ¿Por qué g es uno a uno?
c) Estimar el valor de $g^{-1}(3)$
d) Estimar el dominio de g^{-1}.
e) Dibujar la gráfica de g^{-1}.

En los ejercicios 14 y 15, hallar para cada una de las funciones dadas: f(a), -f(a), f(a+h), f(a) + f(h) y $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ con $h \neq 0$.

14 $f(x) = 3x^2 - x + 2$

15 $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

En los ejercicios 16 a 23, hallar el dominio de cada una de las funciones dadas.

16 $f(x) = \sqrt{3x - 5}$

17 $f(x) = \sqrt{7 - 2x}$

18 $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

19 $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$

20 $f(x) = \frac{x + 1}{x^3 - 9x}$

21 $f(x) = \frac{4x + 7}{6x^2 + 13x - 5}$

22 $f(x) = \frac{\sqrt{x + 1}}{\sqrt{x - 1}}$

23 $f(x) = \sqrt{\frac{x + 1}{x - 1}}$

En los ejercicios 24 a 27 encontrar las funciones f + g, f – g, f • g , f / g y sus dominios.

24 $f(x) = x - 3$; $g(x) = x^2 - 1$

25 $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = x^2 + 1$

26 $f(x) = x^2 + 4$; $g(x) = \sqrt{2x + 5}$

27 $f(x) = \sqrt{x + 3}$; $g(x) = \sqrt{x + 3}$

28 Teniendo en cuenta la función f del ejercicio **12**, dibujar la gráfica de:

a) $g(x) = -2f(x-3)$ b) $h(x) = \frac{1}{2} f(1-2x) + 3$

29 Usar transformaciones de funciones básicas para dibujar las gráficas de las siguientes funciones:

a) $y = \frac{1}{3}\sqrt{x-2} - 1$ b) $y = (x-2)^2 + 1$ c) $y = 3\,\mathrm{Cos}\left(\frac{x}{2}\right) + 2$

d) $y = -2\,e^{(-x+1)} - 1$ e) $y = -\log_2\left(\frac{1}{2}x + 5\right)$ f) $y = \begin{cases} 1-x & \text{si } x < 1 \\ \ln x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

En los ejercicios **30** a **33** dibujar a mano y luego con el DERIVE cada una de las siguientes funciones por tramos. Hallar el dominio y el rango de cada una.

30 $f(x) = \begin{cases} 2-3x & \text{si } x \leq -2 \\ \dfrac{2x+1}{x+2} & \text{si } -2 < x \leq 1 \\ 2^{x-1} & \text{si } 1 < x < 3 \\ x^2 - 2x - 4 & \text{si } x = 3 \\ 8 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

31 $f(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{2}\right)^x & \text{si } x < -1 \\ x^2 + 3 & \text{si } x = -1 \\ \sqrt{3-x} & \text{si } -1 < x \leq 3 \\ x^2 - 2x - 3 & \text{si } 3 < x \leq 5 \\ \dfrac{2}{x-5} & \text{si } x > 5 \end{cases}$

32 $f(x) = \begin{cases} 5-x^2 & \text{si } x \leq -2 \\ 2x+5 & \text{si } -2 < x \leq 0 \\ \log_2(x+1) & \text{si } 0 < x \leq 3 \\ 2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

33 $f(x) = \begin{cases} 2x+8 & \text{si } x < -2 \\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^x & \text{si } -2 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{2x+1}{x-1} & \text{si } 1 < x \leq 4 \\ -2 & \text{si } x > 4 \end{cases}$

En los ejercicios **34** a **37** hallar fog, gof y sus dominios.

34 $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = 4 - x^2$

35 $f(x) = x^2$; $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

36 $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$; $g(x) = \dfrac{x}{x-2}$

37 $f(x) = x^2 - 9$; $g(x) = \sqrt{x+5}$

Las funciones de los ejercicios **38** a **41** son funciones definidas en los reales. Determinar cuáles de ellas poseen inversa y hallarla; las que no posean inversa, redefinirlas de manera que la tengan y hallarla.

38 $f(x) = 4 - 3x$

39 $f(x) = 4 - x^2$

40 $f(x) = x^3 + 2$

41 $f(x) = 3x + x^2$

42 La babilla del río Magdalena se encuentra en peligro de extinción. Las mediciones del Inderena muestran que dicha población se reduce la mitad cada año. La función B que expresan el número de babillas en el año t es:

$$y = B(t) = 50000 \cdot \left(\frac{1}{2^t}\right)$$

a) ¿Cuántas babillas había cuando se inició la medición? ¿Cuántas al cuarto año?

b) ¿Tiene B una función inversa? Si su respuesta es afirmativa hállela y exprese en palabras su significado.

43 La vida media del paladio 100, ^{100}Pd, es de cuatro días (la vida media es el tiempo que tarda una sustancia en reducir su masa a la mitad). La masa inicial de una muestra es de un gramo.

a) Encontrar la cantidad que queda después de 16 días.

b) Indicar la masa que queda después t días.

c) Hallar la inversa de esta función y explicar su significado.

d) ¿Cuándo se reducirá la masa hasta 0.01 gramos?

44 Supóngase que y varía directamente con el cuadrado de x. Si y = 3 cuando x = 1, ¿cuál es el valor de y cuando x = 2?

45 Supóngase que w es inversamente proporcional a la raíz cúbica de t. Si w = 2 cuando t = 27, ¿cuál es el valor de w cuando t = 8?

46 Un método práctico establece que el tono T de una campana es inversamente proporcional a la raíz cúbica de su peso p. Una campana que pesa 800 libras tiene un tono de 512 ciclos por segundo. ¿Qué tan pesada debe ser una campana similar para que produzca un tono de 256 ciclos por segundo?

47 El período T de un péndulo plano varía directamente con la raíz cuadrada de su longitud L. ¿Cuánto se debe cambiar la longitud L para doblar el período del péndulo?

48 Expresar el área de un triángulo equilátero como una función de la altura h del triángulo.

49 Se va a construir una caja rectangular abierta con una base cuadrada de longitud x y un volumen de 16.000 cm^3. Expresar el área A de la caja como una función de x.

50 Se debe construir una pista de atletismo con dos segmentos rectos y dos semicirculares, como muestra la figura 3 - 41. El radio de cada segmento semicircular es r. La longitud de la pista debe ser de 1 Km. Expresar el área limitada por la pista como función de r.

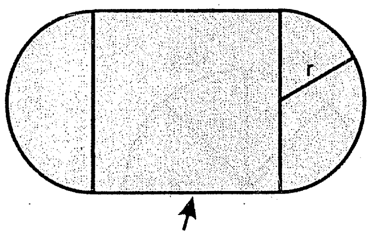


Figura 3 - 41

51 Se bombea agua en un tanque cónico cuya altura es de 1.2 m y cuyo radio es de 40 cm. Expresar, en m^3, el volumen del agua como una función de su profundidad.

52 En el proyecto de una heladería se calcula que si se instalan sillas para ubicar entre 40 y 80 personas, la ganancia diaria será de $8.000 pesos por silla. Pero si la capacidad de sillas sobrepasa los 80, entonces la ganancia diaria de cada silla disminuye $40 por el número de sillas excedentes. Si x es el número de sillas y G la ganancia diaria, se pide:

a) Escribir a G en términos de x.

b) Dibujar la gráfica de G y hallar su dominio.

c) Hallar el número de sillas que deben instalarse para obtener la mayor ganancia.

Prepárate para las Pruebas ICFES

Los ejercicios 1. y 2. se responden con base en la siguiente información: En la siguiente tabla se da una operación $*$ y la forma como se operan los elementos respectivos.

$*$	α	Ω	π
α	α	π	α
Ω	α	Ω	Ω
π	α	Ω	π

1. Competencia: Interpretativa; Ámbito: Conteo.

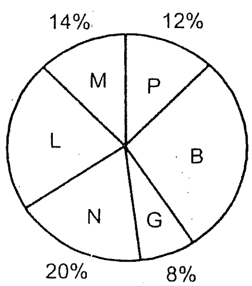
   Al realizar las operaciones $(\alpha * \alpha) * \Omega$ y $\Omega * (\alpha * \alpha)$ puede deducirse que:

   a) Al cambiar el orden de los elementos el resultado es el mismo.
   b) Al operar dos elementos iguales el resultado es el mismo elemento operado.
   c) Al cambiar el orden de los elementos los resultados difieren.
   d) Al operar dos elementos iguales el resultado da un elemento diferente.

2. Observando la tabla podemos concluir que:

   a) En cualquier operación donde figure π siempre se obtiene como resultado π.
   b) En cada columna siempre está α.
   c) En cada fila siempre está π
   d) π es el elemento neutro de la operación $*$

3. Competencia: Interpretativa; Ámbito: Estadístico.

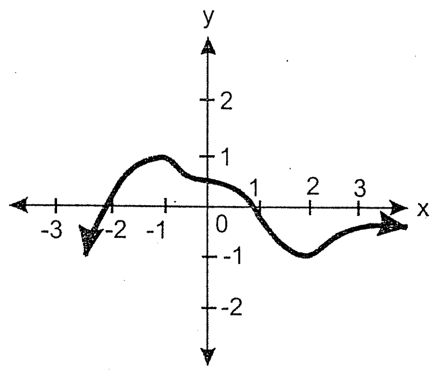


   La compañía FRUTERA AMAZONAS publica los datos estadísticos de las ventas de sus productos Mango (M), Banano (B), Naranja (N), Papaya (P), Guanábana (G) y Limón (L)

   Por un error no se muestran los porcentajes de ventas de Banano y Limón, sin embargo, de ellos podemos afirmar que:

   a) Fueron mayores las ventas de Naranja que de Bananos.
   b) El porcentaje de Limones y Bananos juntos no puede superar el 90%.
   c) Las ventas de Papaya, Banano y Guanábanas representan la mitad de lo vendido.
   d) La fruta que más se vendió fue la Naranja.

Las preguntas 4. y 5. se responden con base en la siguiente gráfica



4. Competencia: Argumentativa; Ámbito: Variación.

   Las raíces o ceros de esta relación son

   a) x = -1 y x = 2 porque allí la pendiente de la recta tangente es cero.
   b) x = -2 y x = 1 porque para estos valores la relación vale cero.
   c) x = 0 porque allí la curva corta al eje y.
   d) x = -2, x = 0 y x = 1 porque allí la curva corta a los ejes

5. Competencia: Argumentativa; Ámbito: Variación.

   Todas las siguientes son características de la curva, excepto:

   a) La recta y = 0 es una asíntota de la curva.
   b) El dominio de la relación son todos los reales.
   c) El rango de la relación es (-∞ ; 1].
   d) La curva es simétrica con relación al origen.

Núcleo Temático

Núcleo Temático 4

LÍMITE Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES

Se desarrolla para alcanzar los siguientes logros generales

MANEJO DE CONCEPTOS

como

- Límite de una Función cuando la variable tiende a un valor finito.
- Continuidad de una función en un punto y en un intervalo.
- Eliminación de Indeterminaciones de la forma $\frac{0}{0}$.
- Discontinuidad escencial y evitable
- Propiedades de los Límites y de las funciones continuas.
- Teoremas del Valor Intermedio y de Bolzano

para desarrollar competencia

ARGUMENTATIVA

DESTREZA OPERATIVA

a través de

- Calcular Límites cuando la Variable tiende a un Valor Finito.
- Eliminar Indeterminaciones de la forma $\frac{0}{0}$.
- Calcular el $\lim_{x \to a} f(x)$ y f(a) y comparar los resultados.
- Determinar la continuidad o discontinuidad de una función en un punto y en un intervalo.
- Calcular Límites Trigonométricos.
- Hallar Asíntotas utilizando el concepto de Límite.

para desarrollar competencia

PROPOSITIVA

DIBUJO DE GRÁFICAS

de

- Funciones Reales.

como

- Funciones polinómicas.
- Funciones racionales.
- Funciones trascendentales.
- Funciones por tramos.
- Función valor absoluto

a partir de

- Interceptos con los ejes.
- Simetrías con el eje y y con el origen.
- Dominio y Rango.
- Las características particulares de cada función.
- Su continuidad o discontinuidad en un punto o en un intervalo.

para desarrollar competencia

INTERPRETATIVA

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

relativos a

- Modelo de funciones.
- Aplicaciòn de los Teoremas del Valor Intermedio y de Bolzano.

para desarrollar competencias

- ARGUMENTATIVA
- PROPOSITIVA
- INTERPRETATIVA

LOS HOMBRES DEL CÁLCULO (4)
PIERRE FERMAT

Pierre (Pedro) Fermat nació en 1601 en un pueblecito de Francia, hijo de un comerciante en cueros, quien lo envió a Tolosa a que estudiara Derecho. Eso hizo y durante todo el resto de su vida, vivió allí y ejerció su profesión de abogado. Murió en 1665.

Fue, como tantos otros, un autodidacta de las Matemáticas. Como no era su profesión sino un «hobby» rara vez publicaba sus trabajos, pero sí se carteaba con los grandes científicos de su época.

Acostumbraba a anotar sus descubrimientos en el margen del libro que estaba leyendo. En uno de esos márgenes se encontró escrito, después de su muerte, lo que hasta hace poco se conoció como el **Teorema indemostrado de Fermat**.

A más de ser un coinventor de la Geometría Analítica y precursor del Cálculo Diferencial, Fermat hizo aportes importantes a la Teoría de los Números y a la Teoría de la Probabilidad.

En Teoría de los Números (realmente, de los números naturales) Fermat estableció un teorema (ese sí demostrado) que sólo tres siglos más tarde, con el advenimiento de los computadores electrónicos, resultó de vital importancia para lo que se llama «generación de números al azar» por computador.

COMPRENSIÓN DE LECTURA

EXPLICACIÓN: Lea atentamente la anterior síntesis biográfica y luego encierre, en un círculo, la letra que corresponda a la respuesta correcta:

1. Las siguientes afirmaciones sobre Fermat son falsas, excepto:
   a. Sus estudios y trabajos matemáticos no son el fruto de la formación universitaria.
   b. Su afición por las matemáticas le hizo abandonar su carrera de abogado.
   c. Raras veces se comunicaba con los científicos de su época.
   d. Con alguna frecuencia daba a conocer sus trabajos sobre matemáticas.

2. La «generación de números al azar» realmente apareció:
   a. Por casualidad, tres siglos después que Fermat estableciera su teorema.
   b. Con base en el teorema que había demostrado tres siglos antes, Fermat.
   c. Como producto de la capacidad inventiva de Fermat.
   d. De la interpretación que se hizo de el «Teorema Indemostrado» de este intelectual.

3. El término coinventor, subrayado en la lectura quiere dar a entender que Fermat:
   a. Es el creador de la Geometría Analítica.
   b. Es el precursor y padre de la Geometría y el Cálculo.
   c. Al lado de otro(s) creó la Geometría Analítica.
   d. Perfeccionó la Geometría Analítica y el Cálculo Diferencial.

4. Respecto de la «Teoría de la Probabilidad», en el texto:
   a. Se dice que ayudó siglos más tarde al trabajo de computación.
   b. Fermat la perfeccionó.
   c. Fue un campo al cual Fermat no le dedicó mucho tiempo.
   d. Apenas si se menciona.

5. De la lectura de ese fragmento se puede inferir que:
   a. Los hombres que revolucionaron el campo de las matemáticas fueron autodidactas.
   b. Los padres siempre han determinado el futuro profesional de sus hijos.
   c. Muchos inventos y descubrimientos del ayer, son base fundamental para la ciencia de hoy.
   d. Los humanísticos y las ciencias son campos diametralmente opuestos.

4.1 INTRODUCCIÓN HISTÓRICA

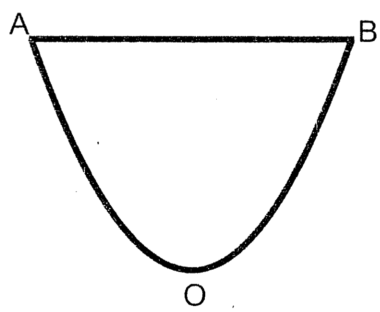
- Los problemas típicos que dieron origen al CÁLCULO comenzaron a plantearse en la época clásica de Grecia (hacia el siglo III antes de nuestra era cristiana) y no se encontraron métodos generales y sistemáticos de resolución hasta veinte siglos después, en el siglo XVII, gracias a los trabajos de Isaac Newton y Gottfried W. Leibnitz.

- Dos de estos problemas típicos fueron los siguientes:

PRIMER PROBLEMA: Hallar el área de la región limitada por una PARÁBOLA y un SEGMENTO DE RECTA.

Este problema fue resuelto por ARQUÍMEDES, el más grande de los matemáticos griegos y uno de los más importantes en toda la historia de la humanidad.

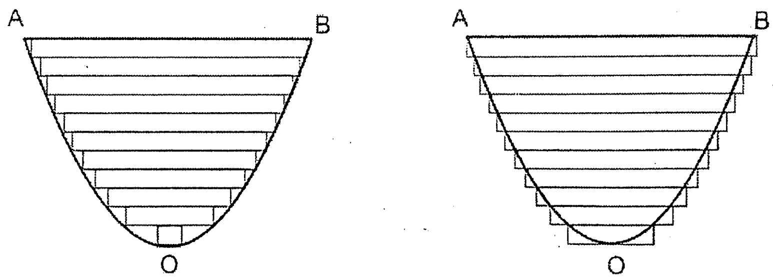
Los matemáticos griegos habían encontrado expresiones para hallar el área de regiones triangulares, rectangulares, poligonales y circulares. Sin embargo, no encontraron una fórmula que les permitiera calcular el área de la región limitada por una porción de parábola y un segmento de recta como el de la figura 4 - 1:



SEGMENTO DE PARÁBOLA AOB

Figura 4 - 1

Arquímedes resolvió este problema por un método denominado **Método de los Recubrimientos**, tan difícil de operar que, aún hoy día, después de conocidos los modernos métodos del CÁLCULO resulta laborioso. El método de Arquímedes consistió en lo siguiente: recubrir la porción de parábola por una serie de rectángulos inscritos con bases paralelas a $\overline{AB}$ y alturas muy pequeñas (figura 4 - 2 (a)) y, luego, recubrirlo por medio de rectángulos circunscritos (figura 4 - 2 (b))



Recubrimiento por
rectángulos inscritos

(a)

Recubrimiento por
rectángulos circunscritos

(b)

Figura 4 – 2

Si suponemos que se construyen 100 rectángulos inscritos y 100 rectángulos circunscritos, entonces es fácil comprender que la suma de las áreas de los rectángulos inscritos será menor que el área de la región parabólica y ésta a su vez será menor que la suma de las áreas de los rectángulos circunscritos. Por lo tanto, el área de cualquiera de los dos recubrimientos (el inscrito y el circunscrito) es una **aproximación** al área de la región. Si quisiéramos el **valor exacto** (no el aproximado) del área de la región parabólica, tendríamos que **proseguir indefinidamente** trazando rectángulos inscritos y circunscritos. Esto significa que a la operación de sumar las áreas de los rectángulos que «integran» cada recubrimiento hay que añadir una operación nueva, que trataremos precisamente en esta unidad, llamada **operación de paso al límite** y que consiste en obtener el valor correspondiente al área de un recubrimiento cuando el número de sus rectángulos aumenta indefinidamente.

Este problema corresponde modernamente a un problema típico de **CÁLCULO INTEGRAL**.

SEGUNDO PROBLEMA: Determinar la recta tangente a una curva en un punto dado de la misma.

- Los antiguos griegos establecieron que la recta tangente a una circunferencia, en un punto P, es la recta que tiene un solo punto común con la circunferencia, figura 4 - 3:

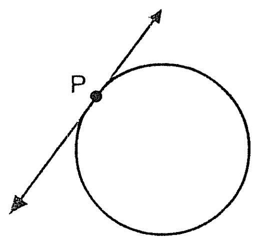
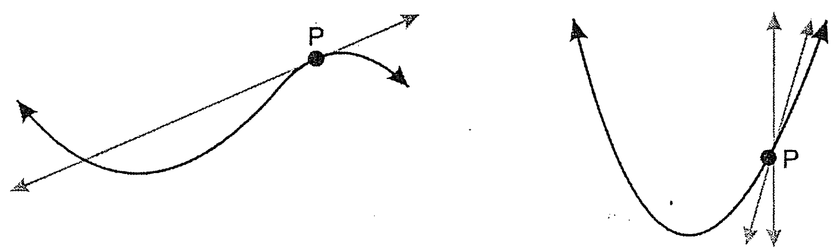


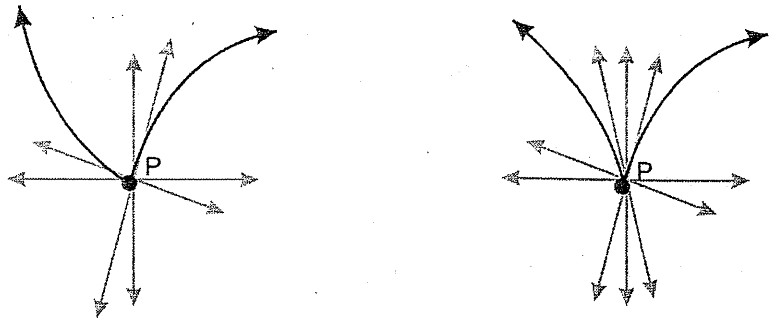
Figura 4 - 3

- Pero, ¿será cierta esta definición para otras curvas? Analicemos, por ejemplo, las curvas de la figura 4 - 4:



(a)

(b)

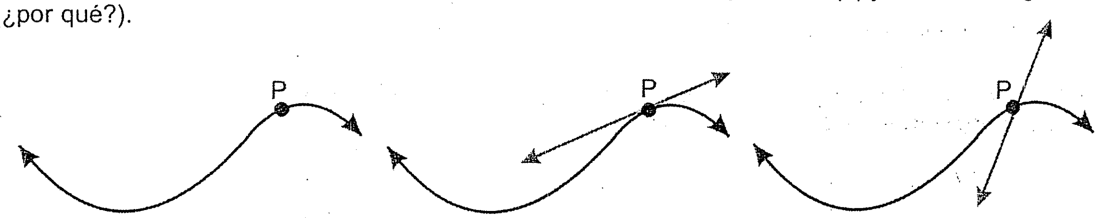


(c) (d)

Figura 4 - 4

Si definimos la tangente a una curva como la línea recta que toca la curva sólo una vez, entonces la recta de la figura 4 - 4 (a) no sería tangente; la parábola de la figura 4 - 4 (b) tendría al menos dos rectas tangentes en cada uno de sus puntos y las curvas de la figura 4 - 4 (c) y 4 - 4 (d) tendrían más de una tangente en los puntos donde la curva forma un «pico».

- Los matemáticos del siglo XVII usaron la siguiente estrategia para resolver el problema: en primer lugar, establecieron que la **dirección** de la recta tangente, en el punto dado P, es la misma que lleva la curva en dicho punto (esta afirmación la justificaremos en la unidad seis); por ejemplo, la recta tangente a la curva de la figura 4 - 5 (a) en el punto P es la que nos muestra la figura 4 - 5 (b) y no la de la figura 4 - 5 (c) (¿por qué?).



(a) (b) (c)

Figura 4 - 5

En segundo lugar, aprovechando que René Descartes ya había inventado la geometría analítica, redujeron el problema de hallar la ecuación de la recta tangente a determinar su **pendiente,** puesto que ya conocían las coordenadas del punto P (recordemos que la ecuación de una recta puede obtenerse si conocemos un punto y su pendiente). Con esta certeza, encontraron que esta pendiente podía **aproximarse** calculando la pendiente de otras rectas que pasan por P y por otro punto Q de la curva. A estas rectas les dieron el nombre de **rectas secantes** (del latín **secare** que significa **cortar**); figura 4 –6:

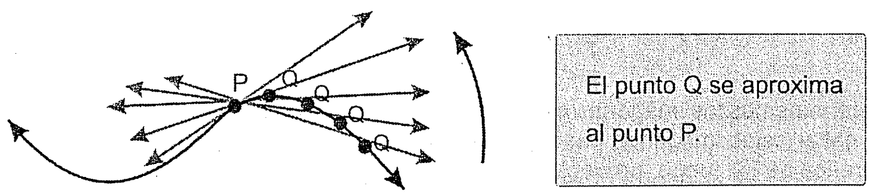


Figura 4 - 6

Observando la figura 4 - 6 se dieron cuenta que a medida que el punto Q se aproxima al punto P, la posición de la recta secante **tiende a** confundirse con la de la recta tangente; es decir, se encontraron con la necesidad de efectuar la **operación de paso al límite** y concluyeron que: **«la pendiente de la tangente es el límite de la pendiente de la secante, cuando el punto Q se aproxima al punto P».**

- Este problema, resuelto por Leibnitz y Newton en el siglo XVII, corresponde a un problema típico del **CÁLCULO DIFERENCIAL** y como tal lo resolveremos en la unidad seis.

- Desde el punto de vista formal, el concepto de límite es quizá uno de los más dificiles de comprender. Por ello, en este texto, preferiremos un tratamiento intuitivo, que nos permita comprender el concepto, sin sacrificar su rigor matemático.

4.2 LA IDEA DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

Primera Experiencia

- Dibujemos en el cuaderno o en una hoja (mejor si es cuadriculada), la figura 4 - 7:

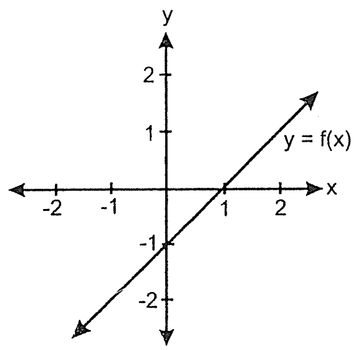


Figura 4 - 7

- ¿Está definida **f** para todo $x \in \mathbb{R}$? De acuerdo con la gráfica, ¿a qué es igual f(2)?

- A continuación, marquemos algunos puntos sobre el eje x, ubicados a la izquierda y a la derecha de 2; pero tan **próximos** a 2 como sea posible: figura 4 - 8 (a):

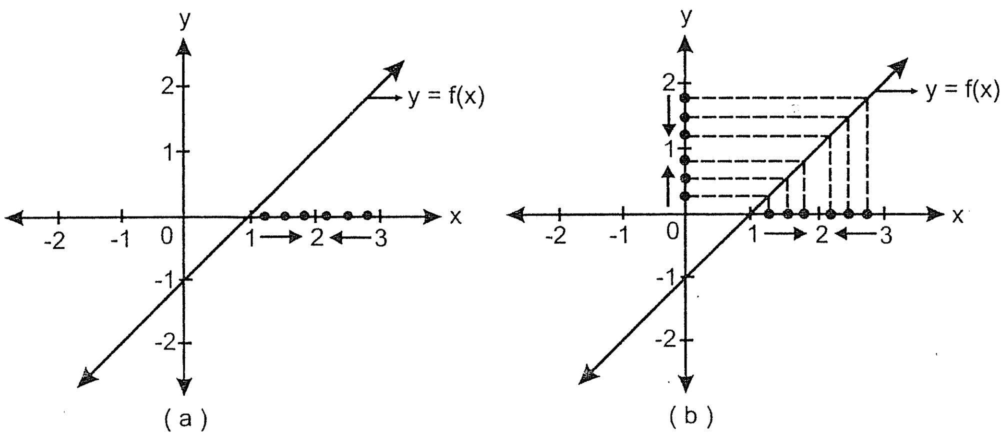


Figura 4 - 8

- Ahora, determinemos las imágenes de cada uno de los puntos marcados alrededor de x = 2. Recordemos que para hallar estas imágenes basta trazar una recta paralela al eje **y** por el punto marcado hasta que corte la gráfica de f y, luego, proyectar el punto de corte sobre el eje **y**; figura 4 - 8 (b).

- Según la figura 4 - 8 (b), ¿qué ocurre con las imágenes de f (es decir, con los f(x)), a medida que los valores de x se **aproximan,** tanto por la derecha como por la izquierda, al número 2?

- Seguramente estaremos de acuerdo en que mientras más próximos estén los valores de x a 2, tanto por la derecha como por la izquierda, más próximos estarán los valores de f(x) a 1.

- Notemos que en este análisis no hemos considerado para nada lo que ocurre en x = 2. Sólo nos hemos interesado en lo que ocurre en las **proximidades de 2.**

Segunda Experiencia

- Consideremos ahora la gráfica de la función **g** de la figura 4 - 9 (a):

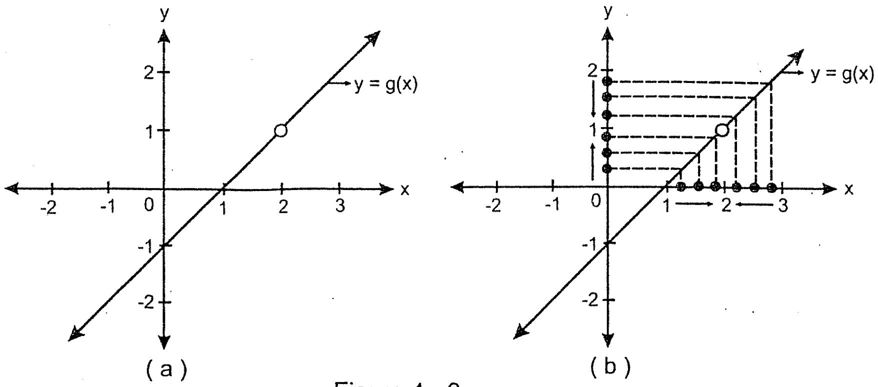


Figura 4 - 9

- ¿En qué se diferencian la gráfica de esta función g y la de la función f de la actividad anterior? ¿Existe g(2)?

- Si de nuevo marcamos puntos cercanos a x = 2, tanto por la izquierda como por la derecha, ¿qué ocurre con las imágenes de g (es decir, con los g(x)) a medida que los valores de x se aproximan más y más a 2? Observemos detenidamente la figura 4 - 9 (b).

- ¿Por qué si las funciones f y g se comportan de manera diferente en x = 2, hemos concluido lo mismo respecto al comportamiento de las imágenes de cada una, cuando los valores de x se aproximan a 2?

Tercera Experiencia

- Analicemos, a continuación, la gráfica de la función h de la figura 4 - 10 (a):

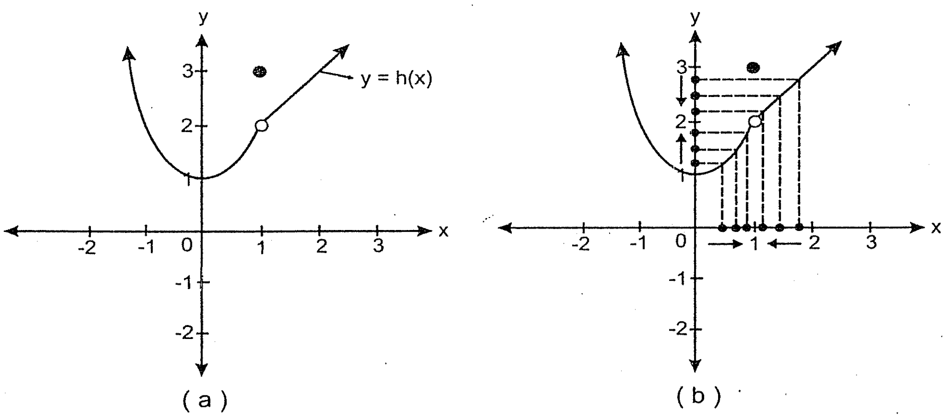


Figura 4 - 10

- ¿Está definida h en 1?. ¿A qué es igual h(1)?

- ¿Qué ocurre con las imágenes de h (es decir, con los h(x)) a medida que los valores de x se aproximan a 1, tanto por la derecha como por la izquierda?

- La figura 4 - 10 (b) nos muestra que a medida que los valores de x se **aproximan** a 1, tanto por la derecha como por la izquierda, los valores de h(x) se aproximan a 2.

- ¿Coinciden h(1) y el valor al cual se aproximan las imágenes de h cuando los x se aproximan a 1?

RESUMEN

1. En la primera experiencia, la figura 4 - 8 nos muestra que mientras más próximos están los valores de x a 2, tanto por la derecha como por la izquierda, entonces los valores de f(x) estarán más próximos a 1. Esto significa que **el límite de f(x), cuando x tiende a 2 es igual a 1** y escribimos:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 1$$

2. En la segunda experiencia, la figura 4 - 9 nos muestra que mientras más próximos están los valores de x a 2, tanto por la derecha como por la izquierda, entonces los valores de g(x) estarán más próximos a 1. Esto significa que el **límite de g(x), cuando x tiende a 2 es igual a 1** y escribimos:

$$\lim_{x \to 2} g(x) = 1$$

3. Finalmente, en la tercera experiencia, la figura 4 - 10 nos muestra que mientras más próximos están los valores de x a 1, tanto por la derecha como por la izquierda, entonces los valores de h(x) estarán más próximos a 2. Esto significa que el **límite de h(x), cuando x tiende a 1 es igual a 2** y escribimos:

$$\lim_{x \to 1} h(x) = 2$$

4. Estas conclusiones nos permiten enunciar la siguiente **idea de límite:**

IDEA DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

Si una función f está definida para valores de x próximos a un número dado a, y si al acercarse los valores de x al número a, tanto por la izquierda como por la derecha, encontramos que los valores de f(x) se aproximan a un ÚNICO número L, entonces decimos que L es el *límite* de f(x) *cuando* x *tiende a* a y escribimos:

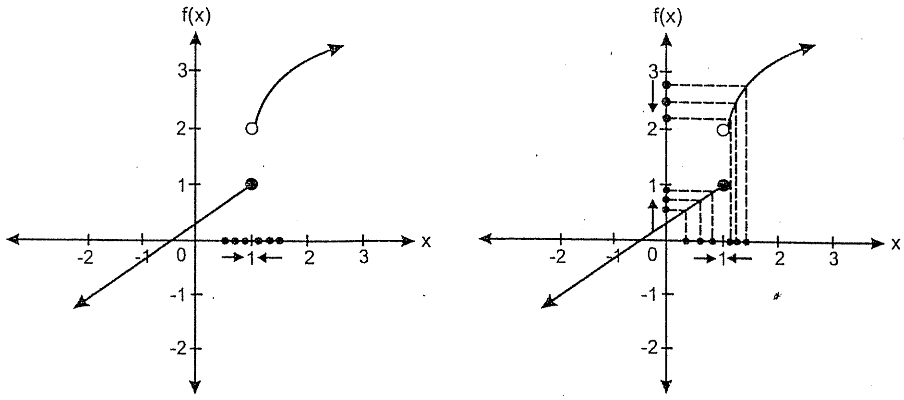
$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

ATENCIÓN

1. Cuando nos proponemos determinar el $\lim_{x \to a} f(x)$ **no** nos interesa lo que ocurre en x = a, sino lo que ocurre cuando nos aproximamos a **a** por la izquierda y por la derecha.
2. Simbólicamente la expresión **x tiende a a por la izquierda** se representa por $\mathbf{x \to a^-}$ y la expresión **x tiende a a por la derecha** se representa por $\mathbf{x \to a^+}$.
3. En este texto, cuando escribamos $\mathbf{\lim_{x \to a} f(x) = L}$, entenderemos dos cosas: que el límite **existe** y que el límite es **L**.
4. Algunas funciones no tienen límite cuando $x \to a$, sino dos límites laterales diferentes. En otras palabras, **para que el límite de una función exista, dicho límite debe ser único.**

Cuarta Experiencia

- La figura 4 - 11 (a) nos presenta la gráfica de una función f:



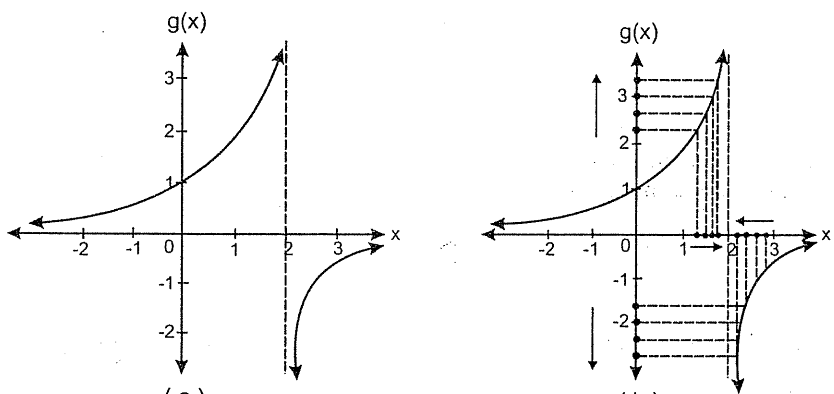
(a) Figura 4 - 11 (b)

- ¿Está definida la función f en x = 1? ¿A qué es igual f(1)?
- ¿Qué ocurre con f(x) cuando $x \to 1^-$? ¿Y cuando $x \to 1^{+1}$? ¿Se aproximan los f(x) al mismo valor?
- La figura 4 - 11 (b) nos muestra que cuando $x \to 1^-$, los f(x) se aproximan a 1; en cambio, cuando $x \to 1^{+1}$, los f(x) se aproximan a 2. Es decir, los f(x) **no** se aproximan al mismo valor; por lo tanto, de acuerdo con la observación 4 anterior, el **límite de f(x), cuando x tiende a 1, no existe** y escribimos:

$$\lim_{x \to 1} f(x) \text{ no existe}$$

Quinta Experiencia

- Consideremos la función g cuya gráfica se muestra en la figura 4 - 12 (a):



(a) Figura 4 – 12 (b)

- ¿Está definida la función en x = 2?. ¿A qué es igual g(2)?
- ¿Qué ocurre con g(x) cuando $x \to 2^-$? ¿Y cuando $x \to 2^+$?
- La figura 4 - 12 (b) nos muestra que cuando $x \to 2^-$, los g(x) crecen **sin limitación** (es decir, $g(x) \to +\infty$) y cuando $x \to 2^+$, los g(x) decrecen **sin limitación** (es decir, $g(x) \to -\infty$). Por lo tanto,

$$\lim_{x \to 2} f(x) \text{ no existe}$$

CONCLUSIÓN

Si al analizar el $\lim_{x \to a} f(x)$ encontramos que los f(x) no se aproximan a ningún valor o los f(x) se aproximan a dos valores distintos, cuando los valores de x se aproximan al número a, entonces decimos que $\lim_{x \to a} f(x)$ no existe.

ATENCIÓN

1. En muchas ocasiones estamos interesados en analizar lo que pasa en una función cuando los valores de **x** se aproximan al número **a** sólo por la izquierda o sólo por la derecha. Estos límites se denominan, respectivamente, **límite lateral por la izquierda** o **límite lateral por la derecha** y se denotan:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L \quad : \quad \textbf{límite lateral por la izquierda}$$

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L \quad : \quad \textbf{límite lateral por la derecha}$$

Estos límites resultan muy útiles cuando queremos analizar el comportamiento de ciertas funciones irracionales o de funciones por tramos. Por ejemplo, la figura 4 - 13 nos muestra la gráfica de la función definida por $f(x) = \sqrt{x - 1}$

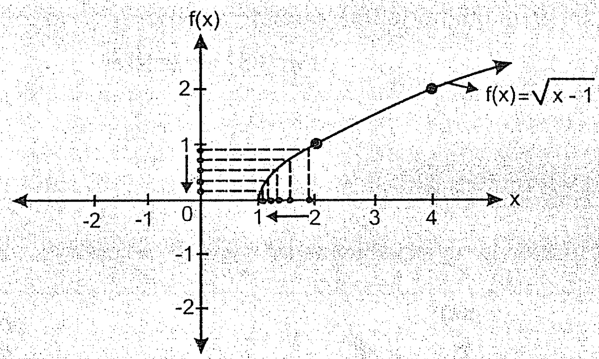


Figura 4 - 13

El dominio de esta función es $x \geq 1$; por lo tanto, sólo tiene sentido que nos aproximemos a 1 por la derecha. En este caso, la misma figura 4 - 13 nos muestra que:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 0$$

2. Sea f es una función. Si el $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$ y el $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$, entonces $\lim_{x \to a} f(x) = L$; es decir, el límite de una función, cuando x tiende a a, existe cuando sus límites laterales existen y son iguales.

Ejemplo

Hallemos el $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{x^2}$

SOLUCIÓN

- En primer lugar, tenemos en cuenta que la función no está definida en x = 0; sin embargo, esto no nos importa ya que la definición de límite nos dice que sólo nos interesan valores de x próximos a 0, pero diferentes de 0.

- En la tabla 4 – 1 podemos observar los valores de la función para valores de x próximos a 0:

x	-1	-0,5	-0,1	-0,05	-0,01	$\longrightarrow$	0		$\longleftarrow$	0,01	0,05	0,1	0,5	1
$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x^2}$	0,236	0,246	0,249	0,2499	0,24999	$\longrightarrow$	0,25	0,25	$\longleftarrow$	0,24999	0,2499	0,249	0,246	0,236

$x \to 0^-$ $\qquad$ $x \to 0^+$

Tabla 4 - 1

La tabla nos muestra que a medida que x tiende a 0, los valores de la función parecen aproximarse a 0.25. Esta observación nos permitiría suponer que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x^2} = 0.25$$

- Sin embargo, ¿qué ocurrirá si le damos a x valores todavía más cercanos a 0? La tabla 4 – 2 nos muestra lo que pasa:

$x \to 0^-$ $\qquad$ $x \to 0^+$

x	-0,001	-0,0001	-0,00001	$\longrightarrow$	0	$\longleftarrow$	0,00001	0,0001	0,001
$\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x}$	0,249	0,2	0	$\longrightarrow$	¿0?	$\longleftarrow$	0	0,2	0,249

Tabla 4 - 2

Da la impresión, de acuerdo con esta tabla, que el límite de la función es 0 en lugar de 0.25. ¿Será esto cierto? La respuesta es NO; en realidad el límite de esta función es 0.25, como demostraremos más adelante. El problema es que la **calculadora dio valores falsos** porque $\sqrt{x^2+4}$ está muy cercano a 2 cuando x es muy pequeño.

La figura 4 - 14(a) nos muestra la gráfica de la función y la figura 4 - 14(b), un zoom de aproximación a 0 ¿qué puede concluirse?

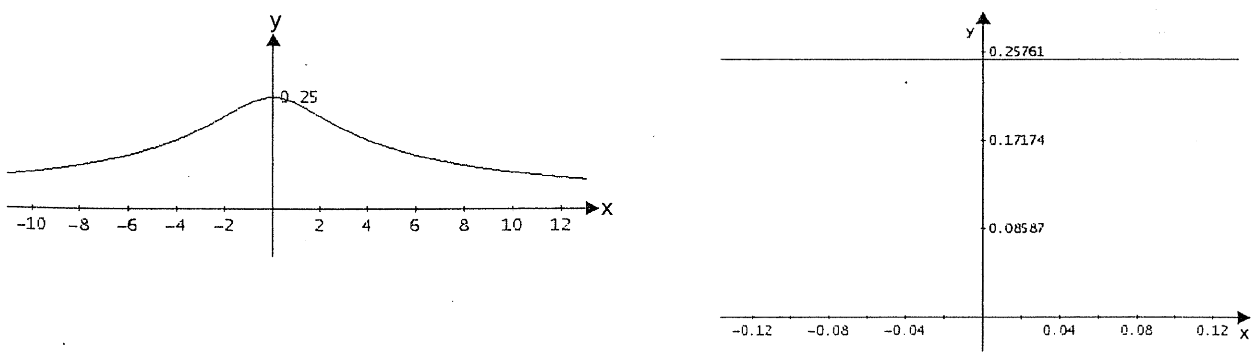


Figura 4 - 14

- Este ejemplo nos muestra una **trampa** en la que podemos caer al presumir el valor de un límite. Es fácil llegar a un valor equivocado, si se usan valores inapropiados de x, pero es difícil saber cuando suspender el cálculo de tales valores, si tenemos en cuenta que a veces las calculadoras o el computador nos dan valores equivocados. Por esta razón, en la sección 4.4, enunciaremos e interpretaremos una serie de propiedades que nos permitirán determinar con certeza si el límite de la función existe o no existe.

Ejemplo 1

Sin dibujar la gráfica, hallemos el $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ sabiendo que f es una función real definida por $f(x) = x - 2$.

SOLUCIÓN

- Queremos hallar $\lim\limits_{x \to 3} (x - 2)$. Con este fin, analicemos lo que ocurre con f(x) cuando x toma valores próximos a 3, tanto por la izquierda como por la derecha. Con este fin, elaboremos una tabla de valores:

$x \to 3^-$ $\qquad$ $x \to 3^+$

x	2.5	2.8	2.9	2.99	--->	3		<---	3.01	3.1	3.2	3.5
f(x) = x-2	0.5	0.8	0.9	0.99	--->	1	1	<---	1.01	1.1	1.2	1.5

Tabla 4 – 3

- La tabla 4 - 3 nos muestra que cuando los valores de x se aproximan a 3, tanto por la derecha como por la izquierda, los f(x) se aproximan a 1. Por lo tanto:

$$\lim_{x \to 3} (x - 2) = 1$$

- ¿ Coinciden f(3) y $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$?

- Invitamos al lector a dibujar la gráfica de la función f y comprobar todas las conclusiones que acabamos de obtener.

Ejemplo 2

a) Sin dibujar la gráfica, hallemos el $\lim\limits_{x \to 2} g(x)$, sabiendo que g: $\mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R}$ está definida por la propiedad

$g(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$.

b) Mostrar que esta función es equivalente a la función h: $\mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R}$ definida por la regla $h(x) = x + 2$.

SOLUCIÓN

a) Para hallar el $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$, analicemos qué pasa con g(x) cuando $x \to 2^-$ y cuando $x \to 2^+$ Con tal fin observemos la tabla 4 - 4:

$x \to 2^-$ $\qquad$ $x \to 2^+$

x	1.5	1.8	1.9	1.99	--->	2		<---	2.01	2.1	2.2	2.5
$g(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$	3.5	3.8	3.9	3.99	--->	4	4	<---	4.01	4.1	4.2	4.5

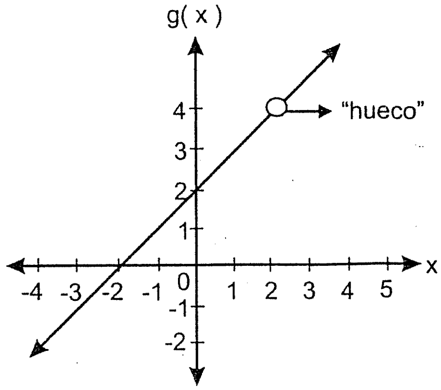
Tabla 4 - 4

La tabla nos muestra que cuando los x se aproximan a 2, tanto por la izquierda como por la derecha, los valores de g(x) se aproximan a 4. Por lo tanto:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$$

Notemos un detalle importante en este ejemplo: g(2) **no existe** pero $\lim_{x \to 2} g(x) = 4$

b) La gráfica de la función g aparece en la figura 4 - 14 y corresponde a una línea recta con un «hueco» en el punto (2, 4).



Si simplificamos la expresión $g(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ nos queda:

$g(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ ....expresión dada

$\therefore\ g(x) = \frac{(x + 2)(x - 2)}{(x - 2)}$ ....factorizamos

$\therefore\ g(x) = x + 2;$ con $x \neq 2$ ....simplificamos

Por lo tanto, la propiedad $g(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ es equivalente a $g(x) = x + 2$; con $\mathbf{x \neq 2}$. La gráfica de esta última corresponde precisamente a la línea recta de la figura 4 - 15 con un «hueco» en (2, 4).

Ejemplo 3

Sea f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por la propiedad $f(x) = \begin{cases} X^2 + 1 & \text{si } x < 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \\ X + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Hallemos, sin dibujar la gráfica, el $\lim_{x \to 1} f(x)$. ¿ Coincide f(1) con el $\lim_{x \to 1} f(x)$?

SOLUCIÓN

- Elaboremos una tabla de valores de modo que **x** tome valores próximos a 1, por la izquierda y por la derecha. En este caso, hay que tener en cuenta que cuando **x** se aproxima a 1 por la izquierda, las imágenes hay que buscarlas en $f(x) = x^2 + 1$; en cambio, cuando **x** se aproxima a 1 por la derecha, las imágenes hay que buscarlas en $f(x) = x + 1$. Veamos:

$x \to 1^-$ $\qquad\qquad$ $x \to 1^+$

x	0.5	0.8	0.9	0.99		1		1.01	1.1	1.2	1.5
f(x)	1.25	1.64	1.81	1.98		2 2		2.01	2.1	2.2	2.5

Tabla 4 - 5

- De acuerdo con la tabla 4 - 5, el $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$
- Puesto que $f(1) = 3$ y el $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$, entonces $\lim\limits_{x \to 1} f(x) \neq f(1)$
- La gráfica de esta función es la misma de la figura 4 - 10. Comparemos los resultados.

Ejemplo 4

Sea $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por la propiedad $h(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 2 \\ 2x - 3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$. Hallemos, sin dibujar la gráfica, el $\lim\limits_{x \to 2} h(x)$

SOLUCIÓN

- Elaboremos una tabla de valores en la cual **x** tome valores próximos a 2, tanto por la derecha como por la izquierda.

$x \to 2^-$ $\qquad\qquad$ $x \to 2^+$

x	1.5	1.8	1.9	1.99	--->	2	<---	2.01	2.1	2.2	2.5
h(x)	3.25	4.24	4.61	4.96	--->	5 1	<---	1.02	1.2	1.4	2

Tabla 4 - 6

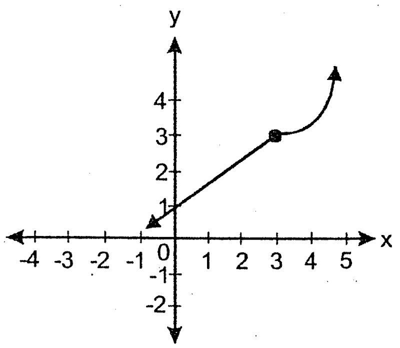
- La tabla 4 - 6 muestra que cuando **x** toma valores próximos a 2 por la izquierda, los h(x) se aproximan a 5; en cambio, cuando **x** toma valores próximos a 2 por la derecha, los h(x) se aproximan a 1. Es decir, los valores de h(x) no se aproximan **al mismo valor**, cuando **x** se aproxima a 2.

CONCLUSIÓN: El $\lim\limits_{x \to 2} h(x)$ no existe.

EJERCICIO 4.1

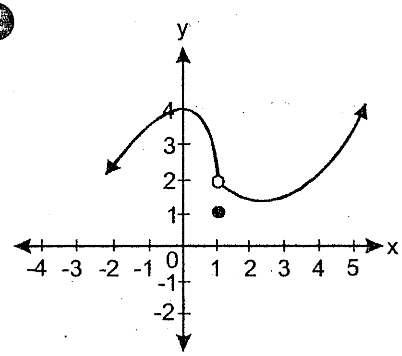
En los ejercicios **1** a **4** indicar si existe o no el $\lim_{x \to a} f(x)$. Si el límite existe, hallarlo. Finalmente, hallar f(a) y decidir si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

1



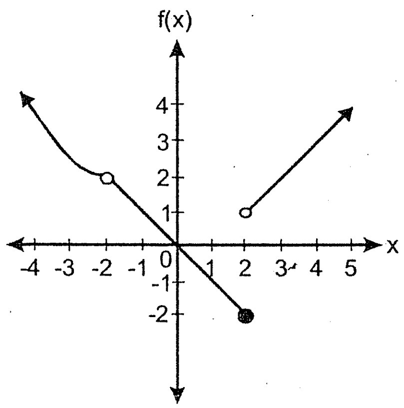
$\lim_{x \to 3} f(x)$

2



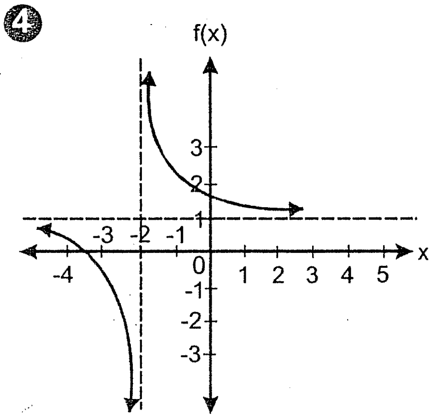
$\lim_{x \to 1} f(x)$

3



$\lim_{x \to -2} f(x)$, $\lim_{x \to 2} f(x)$, $\lim_{x \to 4} f(x)$

4



$\lim_{x \to -2} f(x)$, $\lim_{x \to -1} f(x)$

En los ejercicios **5** a **10** , hallar f(a) y el $\lim_{x \to a} f(x)$:

5 $f(x) = 3x - 1$, en $a = 4$

6 $f(x) = 3 - x$, en $a = 1$

7 $f(x) = x^2 + 1$, en $a = -1$

8 $f(x) = x^3 + 3$, en $a = 2$

9 $f(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{si } x < -2 \\ 5 & \text{si } x = -2 \\ x^2 + 2x & \text{si } x > -2 \end{cases}$, en $a = -4$, en $a = -2$, en $a = 1$

10 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{si } x < -1 \\ 3 - x & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$, en $a = -3$, en $a = -1$, en $a = 3$

11 Sea f la función real definida por $f(x) = \text{Sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)$:

a) ¿Está f definida en x = 0? ¿Por qué?

b) Observe la siguiente tabla de valores:

x	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{100}$	$\longrightarrow$	0	$\longleftarrow$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{4}$	1
f(x)	0	0	0	0	0	$\longrightarrow$		$\longleftarrow$	0	0	0	0

¿De acuerdo con la tabla, puede concluirse que el $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{Sen}\left(\frac{\pi}{x}\right) = 0$?

c) Ahora observe esta tabla:

x	-1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{7}$	$-\frac{1}{10}$	$\longrightarrow$	0	$\longleftarrow$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$
f(x)	0	1	0	1	0	$\longrightarrow$		$\longleftarrow$	0	1	1	0	-1

De acuerdo con la tabla, ¿Cuál es el $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{Sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)$?

d) Use el DERIVE para dibujar la gráfica de f y haga un acercamiento (zoom) hacia el origen varias veces, ¿Qué observa? ¿Qué puede concluir acerca del $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{Sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)$?

12 Dibujar la gráfica de una función f que satisfaga las siguientes condiciones:

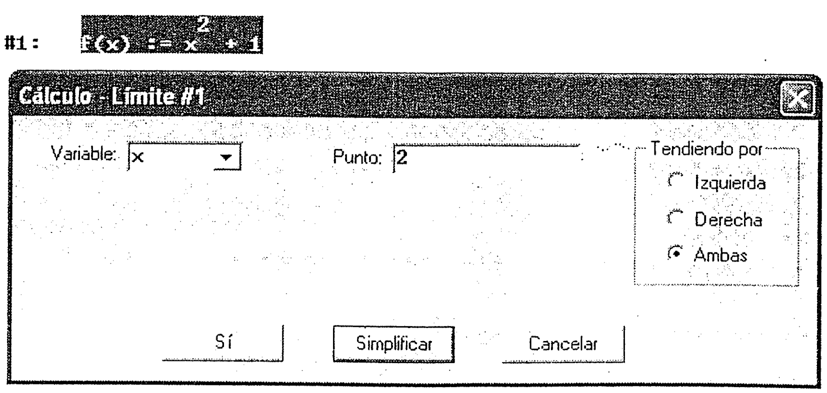
$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = 4 \ , \ \lim_{x\to 3^-} f(x) = 2 \ , \ \lim_{x\to -2} f(x) = 2 \ , \ f(3) = 3 \ , \ f(-2) = 1$$

13 a) Estimar el valor del $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{1/x}$ hasta con cinco cifras decimales. ¿Le parece familiar este número?

b) Ilustrar el literal a) dibujando con el DERIVE la gráfica de la función $f(x) = (1+x)^{1/x}$.

14 El DERIVE cuenta con un dispositivo para calcular el límite de una función, el cual se encuentra ubicado en la BARRA DE HERRAMIENTAS. Si, por ejemplo, queremos calcular el $\lim\limits_{x\to 2} (x^2+1)$ procedemos así:

1. Ingresamos la expresión f(x):=x^2+1.
2. Hacemos click sobre el botón $\boxed{\text{lim}}$. De inmediato aparece un cuadro que nos pregunta cuál es la variable con respecto a la cual queremos calcular el límite (en este caso, x), el valor al cual deseamos acercarnos (en este caso a 2) y la dirección por la cual deseamos hacerlo (izquierda, derecha o ambos):



Por último, presionamos $\boxed{\text{simplificar}}$ y aparecerá:

#1: $f(x) := x^2 + 1$

#2: $\lim\limits_{x \to 2} f(x) := x^2 + 1$

#3:

15 Usar el DERIVE para calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 5} (3 - x)$ b) $\lim\limits_{x \to -1} (x^3 + 3)$ c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{Sen}(x)}{x}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \text{Cos}\left(\dfrac{\pi}{x}\right)$ e) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ f) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x + 3}{x - 2}$

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (8)

Un tanque cónico, con el vértice hacia abajo, de 6 m de radio y 15 m de altura, se llena de agua y en cada momento entra la misma cantidad de líquido. Escribir una ecuación para calcular el volumen del agua presente en el tanque, en un instante dado, en función de la altura.

4.3 DEFINICIÓN RIGUROSA DE LÍMITE (OPCIONAL)

- Decíamos al principio de esta unidad que, desde el punto de vista riguroso, el concepto de límite es quizá uno de los más difíciles de comprender.

- Para llegar a la definición rigurosa de límite, debieron pasar muchos años y muchas discusiones entre los matemáticos que sometían a escrutinio una y otra vez, en ocasiones en forma acalorada, el significado preciso de las dos frases:

  « f(x) se aproxima cada vez más a L» y «x tiende a a»

  Finalmente, en la segunda mitad del siglo XIX, los matemáticos Agustín Louis Cauchy (1.789 - 1.857) y Karl Weierstrass (1.815 - 1.897) formularon la **definición rigurosa (épsilon - delta) de límite,** que continúa siendo usada hoy día. La definición es la siguiente:

DEFINICIÓN DE LÍMITE

El número L es el límite de f(x), cuando x tiende al número a, si para todo número real $\epsilon > 0$, existe otro número real $\delta > 0$ tal que:

$$\text{Si } 0 < |x - a| < \delta \text{ entonces } |f(x) - L| < \epsilon$$

ATENCIÓN

1. La figura 4 - 16 nos muestra paso a paso la interpretación geométrica de la definición de límite:

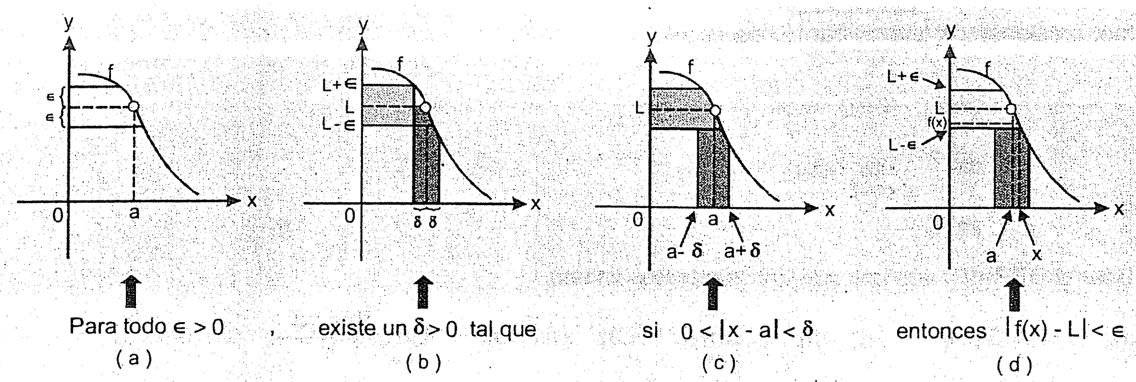


Figura 4 - 16

2. En la figura 4 - 15 (a), ∈ representa un número pequeño positivo. La frase **«f(x) se aproxima más y más a L»** significa que **f(x) está en el intervalo (L - ∈ , L +∈).** En términos de valor absoluto esto lo escribimos así:

$$| f(x) - L | < \in$$

3. En forma similar, la frase **«x tiende a a»** significa que existe un número positivo δ tal que x está en **el intervalo (a - δ ; a) o en el intervalo (a; a +δ).** Esto podemos expresarlo en forma simplificada por la doble desigualdad:

$$0 < | x - a | < \delta$$

La primera desigualdad $0 < | x - a |$ significa que $x \neq a$ y la segunda, $| x - a | < \delta$ establece que los valores de **x** están a una distancia de **a** menor que δ .

4. La definición nos impone un orden: **«para todo ∈ > 0 existe un δ > 0».** Se da primero un valor ∈ y debemos encontrar un δ apropiado. No se exige que un δ concreto sirva para varias elecciones de ∈. Es más, el número δ no es único, ya que si un δ concreto sirve, entonces cualquier número menor también será válido; figura 4 - 17:

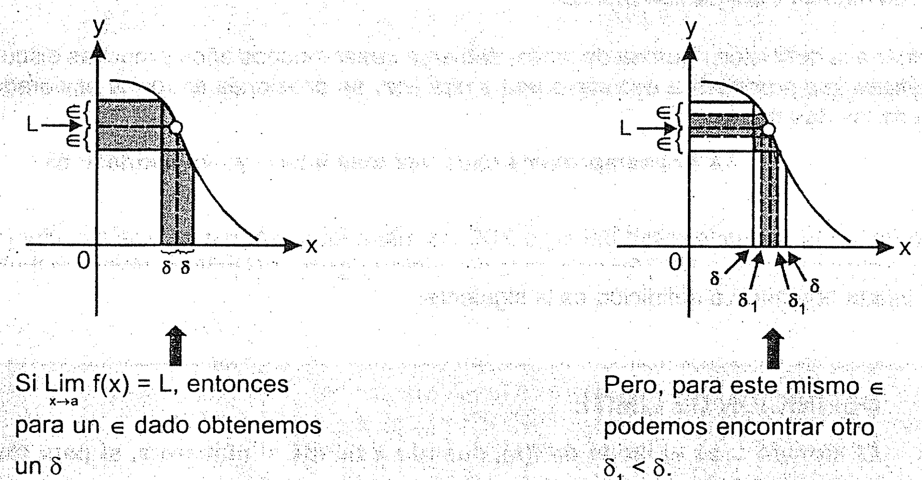


Figura 4 - 17

5. En la práctica, para probar que el $\lim_{x\to a} f(x) = L$ procedemos así:

PASO 1: La definición nos dice que **si** $0 < | x - a | < \delta$, **entonces** $| f(x) - L | < \in$; es decir, sabemos que $0 < | x - a | < \delta$ y debemos concluir que $| f(x) - L | < \in$. Para lograrlo buscamos establecer alguna relación entre las expresiones $| x - a |$ y $| f(x) - L |$. Con tal fin, desarrollamos algebraicamente $| f(x) - L |$.

PASO 2: Factorizamos la expresión $| f(x) - L |$ de manera que $| x - a |$ sea uno de los factores; así:

$$| f(x) - L | = | x - a | \, |g(x)|$$

es decir; hasta acá tenemos:

Si $0 < |x - a| < \delta$ entonces $| x - a | \, | g(x) | < \epsilon$ .... (1)

PASO 3: Notemos que la desigualdad $| x - a | \, | g(x) | < \epsilon$ posee dos factores: $| x - a |$ y $| g(x) |$; por lo tanto, para demostrar (1) es necesario ponerle una condición a δ de manera que, partiendo de $0 < |x - a| < \delta$ produzca otra desigualdad que incluya a $| g(x) |$. En general, esta condición consiste en tomar $\delta \leq 1$, lo cual nos conduce a obtener un número positivo **m** tal que $|g(x)| < m$ (este número m se denomina COTA SUPERIOR de $| g(x) |$). De esta manera tendríamos las dos desigualdades siguientes:

$$0 < |x - a| < \delta \quad y \quad | g(x) | < m$$

Si multiplicamos miembro a miembro estas dos desigualdades de términos positivos y del mismo sentido, nos queda:

$|x - a| \, | g(x) | < \delta m$.. (2)

PASO 4: Ahora bien, como nuestro objetivo es lograr que $|x - a| \, | g(x) | < \epsilon$ entonces la expresión (2) nos indica que debemos colocar la condición $\delta \leq \epsilon\, m$; es decir, $\delta \leq \frac{\epsilon}{m}$.

PASO 5: Por lo tanto, hemos impuesto dos condiciones sobre δ: una, que $\delta \leq 1$ y, la otra, que $\delta \leq \frac{\epsilon}{m}$. Para que ambas condiciones se cumplan, tomamos a δ como el menor de los números 1 y $\frac{\epsilon}{m}$ y, simbólicamente, escribimos $\delta = \min\left\{1, \frac{\epsilon}{m}\right\}$.

Con el desarrollo de los siguientes ejemplos procuraremos aclarar la aplicación de la definición rigurosa de límite de una función.

Ejemplo 1

Sabiendo que $\lim\limits_{x\to 3} (2x + 1) = 7$, hallemos un δ tal que si $0 \, |x - 3| < \delta$ entonces $| (2x+1) - 7| < 0.02$

SOLUCIÓN

- En este problema nos dan un valor concreto de $\epsilon : \epsilon = 0.02$

- Para hallar un δ apropiado, debemos establecer alguna relación entre las expresiones $| (2x + 1) - 7|$ y $|x - 3|$. Con tal fin, desarrollamos algebraicamente $| (2x + 1) - 7|$; así:

$$\begin{aligned} | (2x + 1) - 7| &= | 2x - 6| \\ &= 2 \, |x - 3| \end{aligned}$$

- Por lo tanto:

$$\begin{aligned} | (2x + 1) - 7| < 0.02 &\Leftrightarrow 2 \, | x - 3 | < 0.02 \\ &\Leftrightarrow | x - 3 | < \frac{0.02}{2} \\ &\Leftrightarrow | x - 3 | < 0.01 \end{aligned}$$

- Luego, tenemos lo siguiente:

$$\text{Si } 0 < |x - 3| < \delta \text{ entonces } |x - 3| < 0.01$$

basta, pues, escoger $\delta = 0.01$. Esta elección es adecuada ya que:

$$\text{Si } 0 < |x - 3| < 0.01 \text{ entonces } |(2x + 1) - 7| = 2|x - 3| < 2(0.01) = 0.02$$

tal como nos muestra la figura 4 - 18

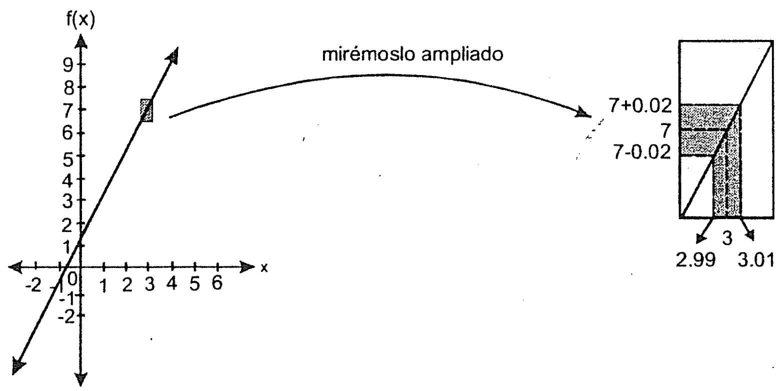


Figura 4 - 18

- Observemos que 0.01 es el **mayor** valor de δ que asegura el cumplimiento de la condición $|(2x + 1) - 7| < 0.02$. Cualquier valor **más pequeño** que ese también serviría como δ.

Ejemplo 2

Demostremos, usando la definición $\in - \delta$, que $\lim\limits_{x \to 2} (3x - 2) = 4$

SOLUCIÓN

- Debemos demostrar que para todo $\in > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que:

$$\text{Si } 0 < |x - 2| < \delta \text{ entonces } |(3x - 2) - 4| < \in$$

- Veamos:

$$\begin{aligned} |(3x - 2) - 4| &= |3x - 6| \\ &= |3||x - 2| \\ &= 3 \end{aligned}$$

- Por lo tanto:

$$\text{Si } 0 < |x - 2| < \delta \text{ entonces } |x - 2| < \in$$

o sea:

$$\text{Si } 0 < |x - 2| < \delta \text{ entonces } |x - 2| < \frac{\in}{3}$$

- En consecuencia, escogemos $\delta = \frac{\in}{3}$. Esta elección es adecuada porque:

Si $0 < |x - 2| < \delta = \frac{\in}{3}$ entonces $|(3x - 2) - 4| = 3|x - 2| < 3\left(\frac{\in}{3}\right) = \in$, como vemos en la figura 4 - 19:

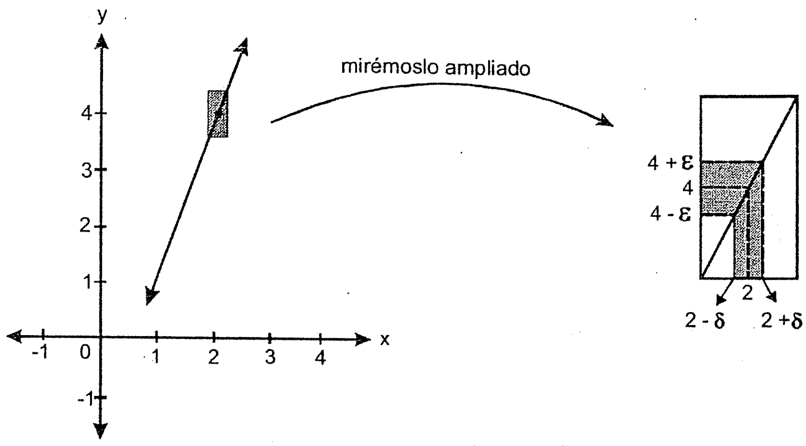


Figura 4 - 19

Ejemplo 3

Usando la definición de límite probemos que $\lim_{x \to 2} x^2 = 4$

SOLUCIÓN

- Debemos probar que para todo $\in > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que:

$$\text{Si } 0 < |x - 2| < \delta \text{ entonces } |x^2 - 4| < \in$$

- Sigamos los pasos sugeridos en la observación 4. anterior:

PASOS 1 Y 2: Desarrollemos la expresión $|x^2 - 4|$:

$$\begin{aligned} |x^2 - 4| &= |(x + 2)(x - 2)| \\ &= |x + 2|\,|x - 2| \end{aligned}$$

Por lo tanto, debemos probar que:

$$\text{Si } 0 < |x - 2| < \delta \text{ entonces } |x - 2|\,|x + 2| < \in \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

PASO 3: Para probar la proposición (1) debemos tener en cuenta que la desigualdad $|x + 2|\,|x - 2| < \in$ posee dos factores: $|x + 2|$ y $|x - 2|$. Por lo tanto, para demostrar (1) le ponemos una condición a δ: hacemos $\delta \leq 1$. Luego:

$$\begin{aligned} 0 < |x - 2| < 1 &\Leftrightarrow -1 < x - 2 < 1 \\ &\Leftrightarrow 1 < x < 3 \\ &\Leftrightarrow 3 < x + 2 < 5 \\ &\Leftrightarrow |x + 2| < 5 \end{aligned}$$

Tenemos, pues, estas dos desigualdades:

$$0 < |x - 2| < \delta \quad \text{y} \quad |x + 2| < 5, \text{ con } \delta \leq 1$$

luego:

$$|x - 2|\,|x + 2| < 5\,\delta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

PASO 4: Como nuestro objetivo es lograr que $|x - 2|\,|x + 2| < \in$ entonces la expresión (2) nos indica que debemos colocar la condición que $5\,\delta \leq \in$ es decir, $\delta \leq \frac{\in}{5}$

PASO 5: En consecuencia, hemos colocado dos condiciones a δ:$\delta \leq 1$ y $\delta \leq \frac{\epsilon}{5}$. Tomamos a δ como el menor entre 1 y $\frac{\epsilon}{5}$; es decir, $\delta = \min\left(1, \frac{\epsilon}{5}\right)$. De esta manera demostramos que $\lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4$.

Ejemplo 4

Usando la definición de límite probemos que $\lim\limits_{x \to 2} (x^2 + 2x - 4) = 4$

SOLUCIÓN

- Debemos probar que para todo $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que:

$$\text{Si } 0 < |x - 2| < \delta \text{ entonces } |(x^2 + 2x - 4) - 4| < \epsilon \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

- Veamos:

$$\begin{aligned} |(x^2 + 2x - 4) - 4| &= |x^2 + 2x - 8| \\ &= |(x + 4)(x - 2)| \\ &= |x + 4|\,|x - 2| \end{aligned}$$

- Luego, la proposición (1) se convierte en:

$$\text{Si } 0 < |x - 2| < \delta \text{ entonces } |x + 4|\,|x - 2| < \epsilon$$

- Busquemos ahora una cota superior para $|x + 4|$, haciendo $\delta \leq 1$; así:

$$\begin{aligned} |x - 2| < 1 &\Leftrightarrow -1 < x - 2 < 1 \\ &\Leftrightarrow 1 < x < 3 \\ &\Leftrightarrow 5 < x + 4 < 7 \\ &\Leftrightarrow |x + 4| < 7 \end{aligned}$$

- Por lo tanto, tenemos:

$$0 < |x - 2| < \delta \quad \text{y} \quad |x + 4| < 7$$

luego:

$$|x - 2|\,|x + 4| < 7\,\delta \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

- Como queremos que $|x + 4|\,|x - 2| < \epsilon$, entonces de esta expresión y de la (2) concluimos que $7\delta < \epsilon$; es decir, $\delta < \frac{\epsilon}{7}$. Por lo tanto, bastará tomar a δ como el menor entre 1 y $\frac{\epsilon}{7}$ para garantizar que $\lim\limits_{x \to 2} (x^2 + 2x - 4) = 4$

EJERCICIO 4.2

En los ejercicios **1** a **4** calcular el límite L y hallar un $\delta > 0$ tal que si 0 , $|x - a| < \delta$ entonces $|f(x) - L| < 0.01$

1. $\lim\limits_{x \to 2} (3x + 2)$

2. $\lim\limits_{x \to 3} (2x + 1)$

3. $\lim\limits_{x \to 2} (x^2 + 3)$

4. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$

En los ejercicios 5 a 8 calcular de manera intuitiva el límite propuesto. A continuación, usar la definición rigurosa para verificar dicho límite.

5. $\lim\limits_{x \to 5} (2x + 5)$

6. $\lim\limits_{x \to 2} (4)$

7. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2}$

8. $\lim\limits_{x \to 2} \left(x^2 - 2\right)$

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (9)

Un depósito de agua es un prisma de 3 metros de largo y se ha colocado horizontalmente. Sus extremos son triángulos equiláteros de 60 cm de lado. Si se bombea agua de manera constante, se pide: Escribir una expresión, en función de la profundidad h, para calcular el volumen cuando la profundidad del agua es h m.

4.4 PROPIEDADES DE LOS LÍMITES

- En las secciones 4.2 y 4.3 hemos estudiado dos maneras de determinar el límite de una función: una intuitiva, a partir del dibujo de la gráfica o de la elaboración de tablas de valores (la cual, incluso, puede conducirnos a conclusiones falsas); la otra, aplicando la definición rigurosa o formal de límite. Ambas maneras exigen procesos laboriosos y, a veces, complicados. En esta sección estudiaremos que el cálculo de límites puede hacerse más fácil y natural con la ayuda de las **propiedades de los límites** que enunciaremos e interpretaremos a continuación. Estas propiedades son, en realidad, **teoremas** cuyas demostraciones se basan en la definición rigurosa de límite y pueden ser consultadas en otros textos de cálculo.

- Estas son las propiedades de los límites:

P-1: UNICIDAD DEL LÍMITE

En el ejemplo 4. de la sección 4.2 verificamos que el $\lim\limits_{x \to 2} h(x)$ no existe porque cuando **x** toma valores próximos a 2 por la izquierda, h(x) se aproxima a 5, en cambio, cuando **x** se aproxima a 2 por la derecha, h(x) se aproxima a 1; es decir, el $\lim\limits_{x \to 2} h(x)$ no es único.

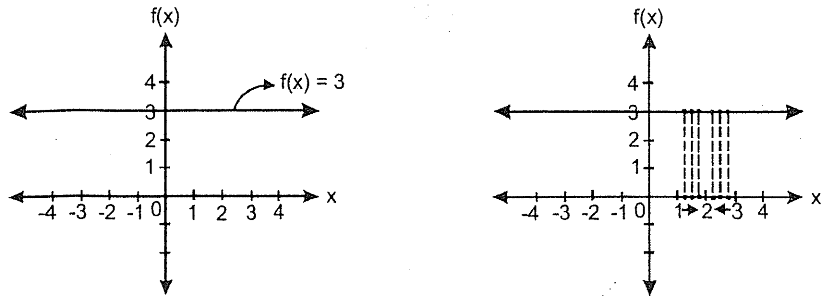
P-1: UNICIDAD DEL LÍMITE

Si el límite L de una función, cuando x tiende a un número a existe, entonces dicho límite es único; es decir:

$$\textbf{Si } \lim_{x \to a} f(x) = L \textbf{ existe, entonces L es ÚNICO.}$$

P-2: LIMITE DE UNA CONSTANTE

- La figura 4 - 20 (a) nos muestra la gráfica de la función definida por la propiedad $f(x) = 3$



(a) (b)

Figura 4 – 20

- En la figura 4 - 20 (b) vemos que cuando x toma valores próximos a 2, entonces f(x) toma siempre el valor de 3; es decir:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 3$$

- En general, si $f(x) = k$, con $k \in \mathbb{R}$, entonces $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} kx \to a = k$

- Por tanto:

> **P-2: LÍMITE DE UNA CONSTANTE**
>
> **Si f(x) = k, donde k es un número real, entonces:**
>
> $$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} k\, x \to a = k$$
>
> **es decir, el límite de una constante es la misma constante.**

P - 3 LÍMITE DE UNA FUNCIÓN POLINÓMICA

Experiencia

- Consideremos las funciones polinómicas definidas por:

  $f(x) = x^3 - 2x$ $g(x) = 2x^2 - 3x + 1$ $h(x) = 4x + 5$

  y hallemos f(2), g(-1) y h(-2).

- Ahora calculemos: $\lim_{x\to 2} f(x)$, $\lim_{x\to -1} g(x)$ y $\lim_{x\to -2} h(x)$

- Finalmente comparemos:

  $\lim_{x\to 2} f(x)$ con f(2); $\lim_{x\to -1} g(x)$ con g(-1) y $\lim_{x\to -2} h(x)$ con h(-2) ¿qué podemos concluir?

- En general, siempre que tengamos una FUNCIÓN POLINÓMICA f podemos comprobar que:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

es decir, si f es una función polinómica, para calcular el $\lim_{x\to a} f(x)$ basta sustituir x por a.

- En consecuencia:

P - 3 LÍMITE DE FUNCIONES POLINÓMICAS

Si f es una FUNCIÓN POLINÓMICA, entonces:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Ejemplo 1

$\lim_{x \to 2} (x^3 - 2x) = 2^3 - 2(2) = 8 - 4 = 4$

Ejemplo 2

$\lim_{x \to -1} (2x^2 - 3x + 1) = 2(-1)^2 - 3(-1) + 1 = 2 + 3 + 1 = 6$

Ejemplo 3

Sea f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función definida por la propiedad:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - x^2 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ 4x - 3 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

Hallemos el $\lim_{x \to 1} f(x)$.

SOLUCIÓN

- Para calcular el $\lim_{x \to 1} f(x)$ debemos analizar lo que pasa con las f(x) a medida que los valores de x se aproximan a 1.

- Analizando la función encontramos que cuando los valores de x se aproximan a 1 por la izquierda, las imágenes de la función las obtenemos en $f(x) = 2x - x^2$ y como esta función es polinómica entonces:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (2x - x^2) = 2(1) - 1^2 = 1$$

  De la misma forma, cuando los valores de x se aproximan a 1 por la derecha, las imágenes de la función las obtenemos en $f(x) = 4x - 3$. Como esta función también es polinómica, entonces:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (4x - 3) = 4(1) - 3 = 1$$

- Como en ambos casos, las imágenes de f se aproximan al mismo valor: a 1, entonces:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 1$$

P-4 ÁLGEBRA DE LÍMITE DE FUNCIONES

Esta propiedad nos mostrará qué ocurre cuando le aplicamos el límite a una suma, resta, producto y cociente de funciones. Empezaremos señalando que es indispensable que los límites de las funciones dadas existan para que los teoremas de límites de la suma, la resta, el producto y el cociente se puedan aplicar.

P-4 ÁLGEBRA DE LÍMITE DE FUNCIONES

Si $\lim_{x\to a} f(x) = L$, $\lim_{x\to a} g(x) = M$ y $c \in \mathbb{R}$ entonces:

1. **$\lim_{x\to a} c \cdot f(x) = c \cdot \lim_{x\to a} f(x) = c \cdot L$; es decir, el límite de una constante real (c) por una función es igual a la constante por el límite de la función.**

2. **$\lim_{x\to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = L \pm M$; es decir, el límite de una suma o resta de funciones es igual a la suma o resta de los límites.**

3. **$\lim_{x\to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x) = L \cdot M$; es decir, el límite de un producto de funciones es igual al producto de los límites.**

4. **$\lim \left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \dfrac{L}{M}$, siempre que $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$.**

El límite de un cociente de funciones es igual al cociente de los límites, siempre que el límite del denominador sea diferente de cero. Si el límite del numerador es distinto de cero y el límite del denominador es cero, entonces el límite del cociente no existe.

PREGUNTA: ¿Qué pasará con el $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ cuando el $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ y el $\lim_{x\to a} g(x) = 0$?

Para contestar esta pregunta, debemos estudiar la sección 4.5

Ejemplo 1

$$\lim_{x\to -2} (5x^3 - 3x^2 + 4x - 1) = \lim_{x\to -2} 5x^3 - \lim_{x\to -2} 3x^2 + \lim_{x\to -2} 4x - \lim_{x\to -2} 1 \text{.......................} \quad \text{P-4 (2.)}$$

$$= 5(-2)^3 - 3(-2)^2 + 4(-2) - 1 \text{.......................................} \quad \text{P-2 y P-3}$$

$$= -40 - 12 - 8 - 1 = -61$$

Ejemplo 2

Si f y g son dos funciones definidas por $f(x) = x^3 + 4$ y $g(x) = 3x - 2$, hallemos $\lim_{x\to 1} [f(x) \cdot g(x)]$

SOLUCIÓN

- En primer lugar, tengamos en cuenta que: $\lim_{x\to 1} f(x) = 1^3 + 4 = 5$ y $\lim_{x\to 1} g(x) = 3(1) - 2 = 1$; es decir, los límites de las funciones f y g existen cuando $x\to 1$.

- Por lo tanto:

$$\lim_{x\to 1} [f(x) \cdot g(x)] \quad \lim_{x\to 1} [f(x) \cdot g(x)]$$

$$= 5 \cdot 1$$
$$= 5$$

Ejemplo 3

Hallemos $\lim_{x\to 2} \dfrac{2x^2 - 1}{3x^3 + 5}$

SOLUCIÓN

- Como $\lim_{x \to 2} (2x^2 - 1) = 7$ y $\lim_{x \to 2} (3x^3 + 5) = 29 \neq 0$, entonces podemos aplicar la propiedad correspondiente al límite de un cociente.
- Por lo tanto:

$$\lim_{x \to 2} \frac{2x^2 - 1}{3x^3 + 5} = \frac{\lim_{x \to 2} (2x^2 - 1)}{\lim_{x \to 2} (3x^3 + 5)} = \frac{7}{29}$$

Ejemplo 4

Hallemos $\lim_{x \to 3} \frac{5x^2 - 4x}{x - 3}$

SOLUCIÓN

- Como $\lim_{x \to 3} (5x^2 - 4x) = 33$ y $\lim_{x \to 3} (x - 3) = 0$, entonces no podemos aplicar la propiedad del límite de un cociente (¿por qué?) y decimos que $\lim_{x \to 3} \frac{5x^2 - 4x}{x - 3}$ no existe.
- En la próxima unidad, denominaremos a esta clase de límites **LÍMITES INFINITOS**.

Ejemplo 5

Hallemos $\lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 2x - 15}{x - 5}$

SOLUCIÓN

- Tenemos: $\lim_{x \to 5} (x^2 - 2x - 15) = 0$ y $\lim_{x \to 5} (x - 5) = 0$
- Por lo tanto, al igual que en el ejemplo anterior, no podemos aplicar la propiedad del límite de un cociente porque el límite del denominador es igual a CERO. Ahora bien, a diferencia del ejemplo 4 donde afirmamos que el límite no existía, en este caso tenemos un problema adicional: el límite del numerador también es igual a 0; es decir, tenemos una expresión de la forma $\frac{0}{0}$ la cual se denomina **INDETERMINACIÓN** ya que **no** permite determinar si el límite existe o no. Si queremos saber si el límite existe o no, es necesario eliminar la indeterminación, para lo cual debemos simplificar la expresión cuyo límite estamos calculando. Aunque la sección siguiente la dedicaremos íntegramente a la eliminación de indeterminaciones de la forma $\frac{0}{0}$ (ya que hay otro tipo de indeterminaciones), veamos cómo se procede en este caso concreto:

$$\lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 2x - 15}{x - 5} = \lim_{x \to 5} \frac{(x - 5)(x + 3)}{(x - 5)} \quad \text{.......... factorizamos el numerador}$$

$$= \lim_{x \to 5} (x + 3) \quad \text{.......................... cancelamos el factor común } (x - 5)$$

$$= 5 + 3 = 8 \quad \text{.................................... ¿por qué?}$$

Notemos que fue posible cancelar el factor común $(x - 5)$ ya que $x \to 5$ significa que $x \neq 5$, con lo cual $x - 5 \neq 0$.

Un detalle interesante, que vale la pena tener en cuenta en este ejemplo, es que la función

$f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 15}{x - 5}$ es equivalente a la función $f(x) = x + 3$, con $x \neq 5$; es decir, la gráfica de

$f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 15}{x - 5}$ es la misma de la recta $g(x) = x + 3$ con un «hueco» en (5, 8); figura 4 - 21

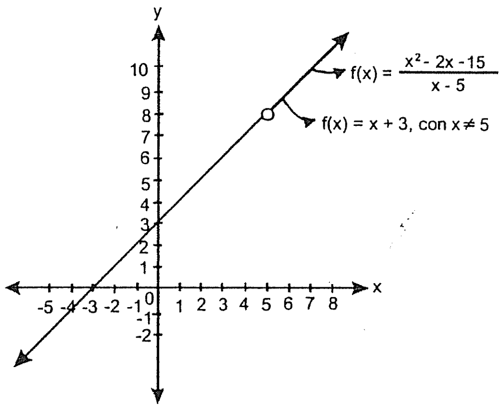


Figura 4 - 21

P-5 LÍMITE DE UNA POTENCIA

Si $n \in \mathbb{N}$ y $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ existe, entonces: $\lim\limits_{x \to a} [\, f(x)\,]^n = \left[\lim\limits_{x \to a} f(x) \right]^n = L^n$ es decir, el límite de una potencia es igual al límite de la base elevado al exponente.

Ejemplo

Calculemos $\lim\limits_{x \to -2} (x^3 + 2x^2 + 3)^4$

SOLUCIÓN

- Debemos calcular el $\lim\limits_{x \to a} [\, f(x)\,]^n$, donde $n = 4$ y $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3$
- Como el $\lim\limits_{x \to -2} (x^3 + 2x^2 + 3) = -8 + 8 + 3 = 3$ entonces el $\lim\limits_{x \to -2} (x^3 + 2x^2 + 3)^4 =$ $\left[\lim\limits_{x \to -2} (x^3 + 2x^2 + 3) \right]^4 = (3)^4 = 81$
- También podríamos obtener este límite elevando inicialmente la función base a la cuarta potencia y, luego, calculando el límite de la función resultante. Sin embargo, esta forma de trabajar no es práctica pues implica el uso de elementos algebraicos cuya aplicación es bastante laboriosa.

P-6 LÍMITE DE UNA RAÍZ

- **Si n es un número natural par y $\lim\limits_{x \to a} f(x) > 0$ entonces**

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$$

- **Si n es un número natural impar y el $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe, entonces**

$$\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$$

Es decir, el límite de una raíz de una función es igual a la raíz del límite de la función. Para el caso en que el índice de la raíz sea PAR es necesario, además, que el límite de la función sea POSITIVO; en caso contrario, el límite NO EXISTE.

Ejemplo 1

Calculemos el $\lim\limits_{x\to -1} \sqrt[3]{4x^2 + 8x}$

SOLUCIÓN

- Tenemos $n = 3$ y $\lim\limits_{x\to -1} (4x^2 + 8x) = -4$
- Por lo tanto, $\lim\limits_{x\to -1} \sqrt[3]{4x^2 + 8x} = \sqrt[3]{\lim\limits_{x\to -1} (4x2 + 8x)} = \sqrt[3]{-4}$

Ejemplo 2

Calculemos el $\lim\limits_{x\to -2} \sqrt[4]{4 - x^2}$

SOLUCIÓN

- Tenemos $n = 4$ y $\lim\limits_{x\to -2} \left(4 - x^2\right) = 0$
- Por lo tanto, de acuerdo con la primera parte de P-6, el $\lim\limits_{x\to -2} \sqrt[4]{4 - x^2}$ no existe.
- Conviene, de todas maneras, que profundicemos en la razón de la no existencia de este límite. Observemos que el dominio de la función $y = \sqrt[4]{4 - x^2}$ es el intervalo $[-2 ; 2]$; esto significa que x sólo puede tomar valores próximos a -2 por la derecha. En consecuencia, el $\lim\limits_{x\to -2^-} \sqrt[4]{4 - x^2}$ no existe y, por lo tanto, tampoco existe el $\lim\limits_{x\to -2} \sqrt[4]{4 - x^2}$.

PREGUNTA: ¿Existe el $\lim\limits_{x\to -2^+} \sqrt[4]{4 - x^2}$? ¿Cuál es su valor?

P-7 LÍMITE DE LA FUNCIÓN INTERMEDIA O TEOREMA DEL SANDUCHE

- En esta propiedad intervienen tres funciones f, g y h. Antes de enunciar formalmente la propiedad, conviene comprenderla a partir de una representación geométrica; figura 4 - 22:

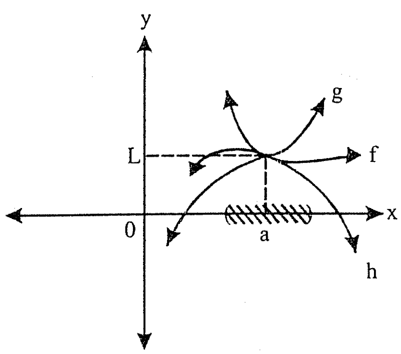


Figura 4 - 22

- La figura nos muestra tres funciones f, g, h, definidas en algún intervalo abierto que contiene a **a**, excepto posiblemente en **a**, y tal que f está **comprendida** entre g y h (g y h le están haciendo «sanduche» a la función f); además, podemos comprobar que $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x)$ y, por lo tanto, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$.

- El Teorema del Sanduche establece lo siguiente:

> **P - 7 TEOREMA DEL SANDUCHE**
>
> **Sean f, g y h tres funciones tales que:**
>
> **1. Si $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ para todo x perteneciente a un intervalo I que contiene al número real a, excepto quizás en a.**
>
> **y**
>
> **2. Si $\lim\limits_{x \to a} h(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = L$**
>
> **entonces, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$**

Ejemplo 1

Si $\leq g(x) \leq x^2 - 1$, hallemos $\lim\limits_{x \to 2} g(x)$

SOLUCIÓN

- Veamos que se cumplen las condiciones del Teorema del Sanduche:

  1. $3 \leq g(x) \leq x^2 - 1$; es decir, g(x) está comprendida entre $f(x) = 3$ y $h(x) = x^2 - 1$
  2. $\lim\limits_{x \to 2} (3) = 3$ y $\lim\limits_{x \to 2} (x2 - 1) = 3$

- Por lo tanto, el $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = 3$

Ejemplo 2

Si $\left| f(x) + 4 \right| < 2 (3 - x)^4$, para toda x, hallemos $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$.

SOLUCIÓN

- Como $\left| f(x) + 4 \right| < 2 (3 - x)^4$, entonces podemos aplicar la propiedad de $| x | < a$; así:

$$\left| f(x) + 4 \right| < 2 (3 - x)^4 \Leftrightarrow -2(3 - x)^4 < f(x) + 4 < 2(3 - x)^4$$

$$\Leftrightarrow -2(3 - x)^4 - 4 < f(x) < 2(3 - x)^4 - 4$$

- Si llamamos $g(x) = -2(3 - x)^4 - 4$ y $h(x) = 2(3 - x)^4 - 4$ entonces se cumple que:

$$g(x) < f(x) < h(x)$$

- Además:

$$\lim_{x \to 3} g(x) = -4 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 3} h(x) = -4$$

- En consecuencia, se cumplen todas las condiciones del Teorema del Sanduche y concluimos que $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = -4$.

Ejemplo 3

Calculemos el $\lim\limits_{x\to 0} \left| x \operatorname{Sen}\left(\frac{1}{x}\right) \right|$.

SOLUCIÓN

- Debemos construir una doble desigualdad en la cual $\left| x \operatorname{Sen}\left(\frac{1}{x}\right) \right|$ aparezca en el centro. Recordemos que para cualquier valor del ángulo θ se cumple que:

$$-1 \le \operatorname{Sen}(\theta) \le 1$$

Por lo tanto, para todo $x \neq 0$ se cumple igualmente que:

$$-1 \le \operatorname{Sen}\left(\frac{1}{x}\right) \le 1$$

$$\therefore \quad \left| \operatorname{Sen}\left(\frac{1}{x}\right) \right| \le 1 \text{ .... ¿por qué?}$$

$$\therefore \quad 0 \le \left| \operatorname{Sen}\left(\frac{1}{x}\right) \right| \le 1 \text{ ....} |\,a\,| \ge 0$$

$$\therefore \quad 0 \le |\,x\,| \left| \operatorname{Sen}\left(\frac{1}{x}\right) \right| \le |\,x\,| \text{ ....¿por qué?}$$

$$\therefore \quad 0 \le \left| x \operatorname{Sen}\left(\frac{1}{x}\right) \right| \le |\,x\,| \text{ ....} |\,a\,||\,b\,| = |\,ab\,| \text{... (1)}$$

- Además:

$$\lim_{x\to 0} 0 = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0} |\,x\,| = 0 \text{ .... (2)}$$

- Luego, de (1) y (2) vemos que se cumplen las condiciones del Teorema del Sanduche y concluimos que $\lim\limits_{x\to 0} \left| x \operatorname{Sen}\left(\frac{1}{x}\right) \right| = 0$

- Si usamos el DERIVE para dibujar las gráficas de $g(x) = 0$, $f(x) = \left| x \operatorname{Sen}\left(\frac{1}{x}\right) \right|$ y $h(x) = |\,x\,|$, podemos confirmar el trabajo que acabamos de realizar; figura 4 – 23.

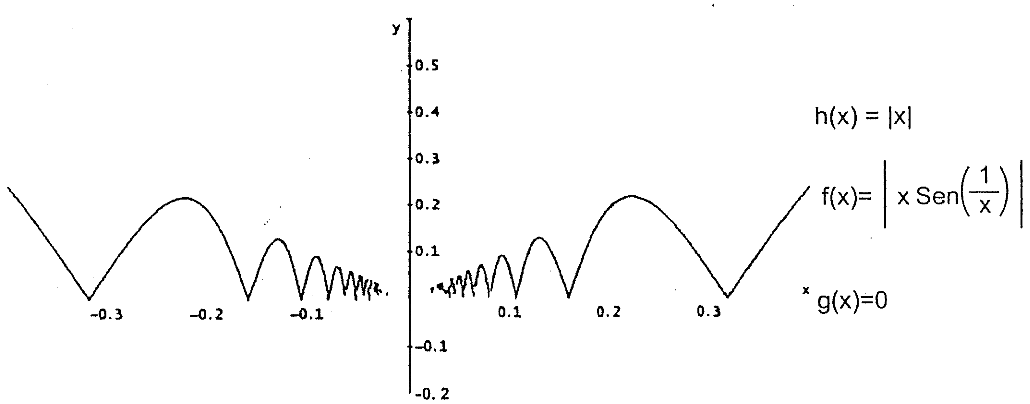


Figura 4 - 23

PREGUNTA: ¿Qué opina de ésta otra forma de solución:

$$\lim_{x \to 0} \left| x \operatorname{Sen}\left(\frac{1}{x}\right) \right| = \lim_{x \to 0} |x| \cdot \lim_{x \to 0} \left| \operatorname{Sen}\left(\frac{1}{x}\right) \right| = 0 \cdot \lim_{x \to 0} \left| \operatorname{Sen}\left(\frac{1}{x}\right) \right| = 0?$$

¿Es correcta? ¿Por qué?

Ejemplo 4

Demostremos que el $\lim_{\theta \to 0} \operatorname{Sen}(\theta) = 0$

SOLUCIÓN

- Consideremos una circunferencia con centro en el origen, radio igual a 1 y un ángulo θ, medido en radianes, tal que $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, figura 4 - 24:

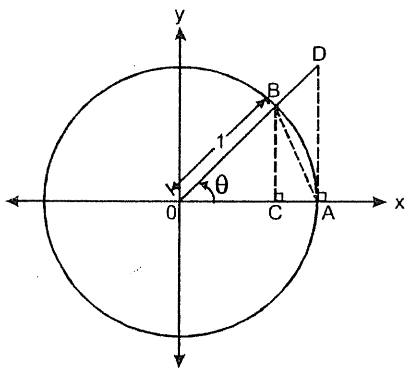


Figura 4 - 24

- La trigonometría nos enseña que:

$|\overline{OC}| = \operatorname{Cos}(\theta)$, $|\overline{CB}| = \operatorname{Sen}(\theta)$, $|\overline{CA}| = 1 - |\overline{OC}| = 1 - \operatorname{Cos}(\theta)$.. (1)

- Además, la geometría nos dice que la longitud de un arco es igual al producto del radio por la medida del ángulo central (en radianes). Por lo tanto, en la figura 4- 24, la longitud del arco $\widehat{AB}$ es igual a $1 \cdot \theta = \theta$.
- Ahora bien, en el triángulo rectángulo BCA se cumple que:

$$|\overline{AC}|^2 + |\overline{BC}| = |\overline{AB}|^2 \text{.......................} \quad (2)$$

Reemplazando (1) en (2) nos queda:

$$(1 - \operatorname{Cos}(\theta))^2 + (\operatorname{Sen}(\theta))^2 = |\overline{AB}|^2 \text{.......................} \quad (3)$$

Pero, la longitud de la cuerda $\overline{AB}$ es menor que la longitud del arco $\widehat{AB}$; es decir,

$$|\overline{AB}| < \widehat{AB} = \theta \text{.......................} \quad (4)$$

- Por lo tanto, reemplazando (4) en (3), nos queda:

$$(1 - \operatorname{Cos}(\theta))^2 + \operatorname{Sen}^2(\theta) < \theta^2 \text{.......................} \quad (5)$$

- Como el lado izquierdo de (5) es una suma de términos positivos entonces cada sumando es menor que la suma; es decir:

$$\operatorname{Sen}^2(\theta) < (1 - \operatorname{Cos}(\theta))^2 + \operatorname{Sen}^2(\theta) < \theta^2 \text{.......................} \quad (6)$$

$\therefore \operatorname{Sen}^2(\theta) < \theta^2$

$\therefore \sqrt{\operatorname{Sen}^2(\theta)} < \sqrt{\theta^2}$

$\therefore |\operatorname{Sen}(\theta)| < |\theta|$

$$\therefore -|\,\theta\,| < \text{Sen}(\theta) < |\,\theta\,| \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Y como $\theta > 0$, pues está en el I cuadrante, entonces $|\,\theta\,| = \theta$, con lo cual la desigualdad (7) se convierte en:

$$-\theta < \text{Sen}(\theta) < \theta$$

- Finalmente, como $\lim\limits_{\theta \to 0} (-\theta) = 0$ y $\lim\limits_{\theta \to 0} (-\theta) = 0$, entonces el $\lim\limits_{\theta \to 0} \text{Sen}(-\theta) = 0$
- Invitamos al lector a realizar esta demostración haciendo que $-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$ para probar que el $\lim\limits_{\theta \to 0^-} \text{Sen}(-\theta) = 0$. Esto completa la prueba de $\lim\limits_{\theta \to 0} \text{Sen}(-\theta) = 0$.

ATENCIÓN

Si en la desigualdad (5) tomamos el término $(1 - \text{Cos}(\theta))^2$, entonces podemos escribir:

$$(1 - \text{Cos}(\theta))^2 < \theta^2$$

$$\therefore \sqrt{(1 - \text{Cos}(\theta))^2} < \sqrt{\theta^2}$$

$$\therefore |\,1 - \text{Cos}(\theta)\,| < |\,\theta\,|$$

$$\therefore -|\,\theta\,| < 1 - \text{Cos}(\theta) < |\,\theta\,|$$

$$\therefore -|\,\theta\,| - 1 < -\text{Cos}(\theta) < |\,\theta\,| - 1$$

$$\therefore |\,\theta\,| + 1 > \text{Cos}(\theta) > 1 - |\,\theta\,| \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Como $\theta > 0$, entonces $|\,\theta\,| = \theta$ y la expresión (8) nos queda:

$$\theta + 1 > \text{Cos}(\theta) > 1 - \theta$$

Finalmente, como el $\lim\limits_{\theta \to 0^+} (\theta + 1) = 1$ y $\lim\limits_{\theta \to 0^+} (1 - \theta) = 1$, entonces el $\lim\limits_{\theta \to 0^+} \text{Cos}(\theta) = 1$

En forma similar se demuestra que $\lim\limits_{\theta \to 0^-} \text{Cos}(\theta) = 1$ y concluimos que $\lim\limits_{\theta \to 0} \text{Cos}(\theta) = 1$

P-8 LÍMITE DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS, EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICA

El ejemplo 4 nos mostró que el $\lim\limits_{\theta \to 0} \text{Sen}(x) = \text{Sen}(0) = 0$ y el $\lim\limits_{\theta \to 0} \text{Cos}(x) = \text{Cos}(0) = 1$. En el cuadro siguiente se ilustran las propiedades correspondientes a los límites de las funciones trascendentes.

P - 8 LÍMITE DE LAS FUNCIONES TRASCENDENTES

Si x se mide en radianes, entonces:

1. $\lim\limits_{x \to a} \text{Sen}(x) = \text{Sen}(a)$
2. $\lim\limits_{x \to a} \text{Cos}(x) = \text{Cos}(a)$
3. $\lim\limits_{x \to a} \text{Tan}(x) = \text{Tan}(a)$; con $a \neq (2n - 1)\frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$
4. $\lim\limits_{x \to a} \text{Cot}(x) = \text{Cot}(a)$; con $a \neq n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$

5. $\lim\limits_{x \to a} \operatorname{Sec}(x) = \operatorname{Sec}(a)$; con $a \neq (2n-1)\frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$

6. $\lim\limits_{x \to a} \operatorname{Csc}(x) = \operatorname{Csc}(a)$; con $a \neq n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$

7. Para todo $x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to b} a^x = a^{xb}$

8. Para todo $x > 0$, $\lim\limits_{x \to a} \log_b(x) = \log_b(a)$

¿Qué puede concluirse al analizar cada una de estas propiedades?

¿Cómo se calcula el límite de una función trigonométrica? ¿de una exponencial? ¿y de una logarítmica?

Ejemplo

Calculemos $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{1 - e^x}{\operatorname{Tan}(x)}$

SOLUCIÓN

- Debemos calcular el límite de un cociente de funciones. Veamos si podemos aplicar la propiedad correspondiente al límite de un cociente de funciones:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \left(1 - e^x\right) = 1 - e^{\frac{\pi}{4}} \quad \text{y} \quad \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \operatorname{Tan}(x) = \operatorname{Tan}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

- Por lo tanto, como el límite del denominador es diferente de 0, entonces podemos aplicar la propiedad del límite de un cociente de funciones; así:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{1 - e^x}{\operatorname{Tan}(x)} = \frac{1 - e^{\frac{\pi}{4}}}{\operatorname{Tan}\left(\frac{x}{4}\right)} = \frac{1 - e^{\frac{\pi}{4}}}{1} = 1 - e^{\frac{\pi}{4}}$$

EJERCICIO 4.3

1 Sabiendo que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -2$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ y $\lim\limits_{x \to a} h(x) = 5$ hallar los límites que existan. Si el límite no existe, explicar por qué.

a) $\lim\limits_{x \to a} [f(x) + g(x)]$

b) $\lim\limits_{x \to a} [h(x)]^3$

c) $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[3]{f(x)}$

d) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{2}{g(x)}$

e) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{h(x)}{f(x)}$

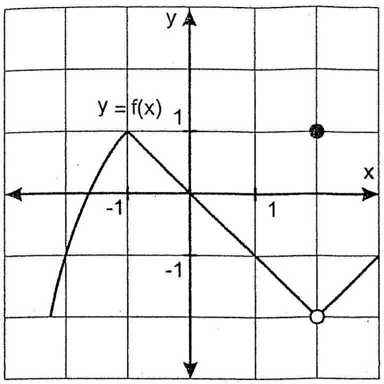
f) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{h(x)}{g(x)}$

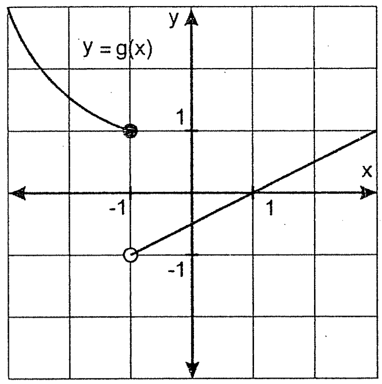
g) $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{g(x)}$

h) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{g(x)}{f(x)}$

i) $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{f(x)}$

2 Se tienen las gráficas de dos funciones f y g. Con base en ellas, calcule el límite pedido, en caso de que exista. Si el límite no existe, explique por qué.





a) $\lim\limits_{x \to -1} [f(x)+g(x)]$ b) $\lim\limits_{x \to 1} [f(x)\cdot g(x)]$ c) $\lim\limits_{x \to 2} [g(x)-f(x)]$

d) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ e) $\lim\limits_{x \to 2} x^2 f(x)$ f) $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt{7-f(x)}$

En los ejercicios **3** a **24** calcular el límite dado, si existe, e indicar las propiedades aplicadas.

3 $\lim\limits_{x \to 5} (3x - 7)$

4 $\lim\limits_{x \to 2} \left(x^2 + 2x - 1\right)$

5 $\lim\limits_{y \to -2} \left(y^3 + 8\right)$

6 $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 1 \\ -1 & \text{si } x = 1 \\ -3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$

b) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$

c) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

7 $f(x) = \begin{cases} x + 4 & \text{si } x \le -4 \\ 4 - x & \text{si } x > -4 \end{cases}$

a) $\lim\limits_{x \to -4^-} f(x)$

b) $\lim\limits_{x \to -4^+} f(x)$

c) $\lim\limits_{x \to -4} f(x)$

8 $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \le 2 \\ 8 - 2x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

a) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$

b) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$

c) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

9 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x < 2 \\ 4 & \text{si } x = 2 \\ 4 - x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

a) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$

b) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$

c) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

10 $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < -2 \\ \sqrt{4 - x^2} & \text{si } -2 \le x \le 2 \\ -2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

a) $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$

b) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

11 $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$

b) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$

c) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

12 $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{4x - 5}{5x - 1}$

13 $\lim\limits_{m \to 2} \dfrac{m^2 - 5}{2m^3 + 6}$

14 $\lim\limits_{y \to 1} \sqrt{\dfrac{8y + 1}{y + 3}}$

15. $\lim\limits_{x \to 4} \sqrt[3]{\dfrac{x^2 - 3x + 4}{2x^2 - x - 1}}$

16. $\lim\limits_{x \to 3} \left(5x^2 - 3x + 1\right)(x + 2)$

17. $\lim\limits_{x \to -1} \sqrt{\dfrac{4x^3 - 2x + 6}{x^2 + 5}}$

18. $\lim\limits_{x \to -3} \sqrt[3]{2x + 6}$

19. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 + 1}{2x^2 + x - 6}$

20. $\lim\limits_{x \to -3^+} \sqrt{2x + 6}$

21. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} (\mathrm{Tan}(x) - \mathrm{Cos}(x))$

22. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln(x) - 3}{2e^x}$

23. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x}{1 - \log_2 x}$

24. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2 - 5\mathrm{Cos}(x)}{2^x}$

25. Si $|f(x) - 2| \leq 3(x - 1)^2$, para todo x, emplear el Teorema del Sanduche para hallar el $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

26. Emplear el Teorema del Sanduche para calcular el $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \,\mathrm{Sen}\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)$

27. Emplear el Teorema del Sanduche para calcular el $\lim\limits_{x \to 0} x \,\mathrm{Cos}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

28. Sean f y g dos funciones reales definidas por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & \text{si } x \leq 1 \\ x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

a) Demostrar que $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ no existe.

b) Demostrar que $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$ no existe.

c) Hallar una expresión para $(f \cdot g)(x)$

d) ¿Existe el $\lim\limits_{x \to 1} [(f \cdot g)(x)]$? ¿por qué?

e) ¿Es el $\lim\limits_{x \to 1} [(f \cdot g)(x)] = \lim\limits_{x \to 1} f(x) \lim\limits_{x \to 1} g(x)$? ¿por qué?

29. Hallar el valor de c de manera que el $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ exista: $f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x \leq 2 \\ cx + 6 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

30. Hallar los valores de b y c de manera que existan el $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ y el $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$: $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } 1 < x < 3 \\ x^2 + bx + c & \text{si } |x - 2| \geq 1 \end{cases}$

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (10)

Una página rectangular contiene 96 cm² de texto impreso. Las márgenes superior e inferior tienen 3 cm de ancho y los laterales 2 cm. Si llamamos x el largo de la página y y el ancho de la página, se pide:

1. **Hacer una interpretación gráfica del enunciado del problema.**
2. **Hallar una expresión, en función de x, para calcular el área de la página en función del largo x.**
3. **Hallar el dominio de esta función donde el problema tiene sentido.**

4.5 INDETERMINACIONES DE LA FORMA $\frac{0}{0}$

- Cuando en la sección anterior quisimos calcular el $\lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 2x - 15}{x - 5}$ encontramos que no era posible aplicar la propiedad del límite de un cociente por que tanto el límite del denominador como el límite del numerador eran iguales a CERO. Se genera, de esta manera, una expresión de la forma $\frac{0}{0}$, la cual se denomina INDETERMINACIÓN ya que no permite decidir nada sobre la existencia o no del límite.

- Establecimos, también, que la expresión $\frac{x^2 - 2x - 15}{x - 5}$ se puede simplificar, ya que el numerador y el denominador tienen un factor común: (x - 5). En general, si al intentar aplicar las propiedades de los límites nos encontramos con una indeterminación, entonces debemos proceder a ELIMINARLA mediante algún proceso de simplificación.

- Los siguientes ejemplos nos muestran algunas estrategias para eliminar indeterminaciones.

Ejemplo 1

Hallemos el $\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$

SOLUCIÓN

- Como el $\lim_{x \to 1} (x^3 - 1) = 0$ y el $\lim_{x \to 1} (x - 1) = 0$ entonces la sustitución directa de x por 1 nos lleva a la indeterminación $\frac{0}{0}$. Esto significa que tenemos un factor común en el numerador y en el denominador: (x - 1).

- Por lo tanto:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{(x - 1)} \quad \text{.......... factorizamos el numerador.}$$

$$= \lim_{x \to 1} (x^2 + x + 1) \quad \text{.......... simplificamos } (x - 1) \text{ ya que } x - 1 \neq 0 \text{ por ser } x \neq 1$$

$$= 1 + 1 + 1 = 3$$

- Luego, el $\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3$

Ejemplo 2

Calculemos el $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x + 3} - \sqrt{3}}{x}$

SOLUCIÓN

- Por sustitución directa de x por 0 llegamos a la indeterminación $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x} \quad \begin{cases} \lim_{x\to 0}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{3}\right)=0 \\ \lim_{x\to 0} x = 0 \end{cases}$$

- Para eliminar la indeterminación debemos tener en cuenta que la función dada es irracional. Por lo tanto, debemos multiplicar el numerador y el denominador por el factor racionalizante de $\sqrt{x+3}-\sqrt{3}$ que es $\sqrt{x+3}+\sqrt{3}$; es decir:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{3}\right)}{x\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{3}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+3}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}{x\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{3}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x+3-3}{x\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{3}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{3}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{0+3}+\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

Ejemplo 3

Calculemos el $\lim_{h\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{x+h}-\dfrac{1}{x}}{h}$

SOLUCIÓN

- Sustituyendo directamente h por 0 llegamos a la indeterminación $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{1}{x+h}-\dfrac{1}{x}}{h} \quad \begin{cases} \lim_{h\to 0}\left(\dfrac{1}{x+h}-\dfrac{1}{x}\right)=0 \\ \lim_{h\to 0} h = 0 \end{cases}$$

- Para eliminar la indeterminación debemos, en primer lugar, resolver la diferencia de fracciones del numerador y, luego, simplificar la expresión resultante; así:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{1}{x+h}-\dfrac{1}{x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{x-(x+h)}{x(x+h)}}{h} \quad \text{.................................. resta de fracciones.}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{x-(x+h)}{hx(x+h)} \quad \text{.................................. ¿por qué?}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-h}{hx(x+h)} \quad \text{.......... ¿por qué?}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{x(x+h)} \quad \text{.......... ¿por qué?}$$

$$= \frac{-1}{x^2} \quad \text{.......... ¿por qué?}$$

Ejemplo 4

Calculemos el $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{|x-1|}{x-1}$

SOLUCIÓN

- Por sustitución directa de x por 1, llegamos a la indeterminación $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to 1} \frac{|x-1|}{x-1} \begin{cases} \longrightarrow \lim\limits_{x\to 1} |x-1| = 0 \\ \longrightarrow \lim\limits_{x\to 1} (x-1) = 0 \end{cases}$$

- En este caso, para eliminar la indeterminación, no factorizamos, ni racionalizamos, ni efectuamos una operación indicada de fracciones. La indeterminación se elimina, quitando las barras de valor absoluto mediante la aplicación de su definición. Veamos:

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{si } x \geq 1 \\ -(x-1) & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

Esto significa que la función $f(x) = \dfrac{|x-1|}{x-1}$ podemos reescribirla así:

$$f(x) = \frac{|x-1|}{x-1} = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x-1} & \text{si } x > 1 \\ \dfrac{x-1}{-(x-1)} & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 1 \\ -1 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

- Por lo tanto, para calcular el $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{|x-1|}{x-1}$ hallamos el límite por la izquierda de 1 y el límite por la derecha de 1; es decir:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} (-1) = -1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} (1) = 1 \end{array}\right\} \therefore \lim_{x\to 1} f(x) \text{ no existe}$$

CONCLUSIONES

1 **En general, cuando queramos calcular el límite de un cociente de funciones se recomienda, calcular, por aparte, el límite del dividendo y el límite del divisor.**

2. **Una vez realizados estos cálculos puede pasar una de estas tres cosas:**
   i. **Que obtengamos una expresión de la forma $\frac{a}{b}$, con b'0. En este caso, $\frac{a}{b}$ es el límite que estamos calculando.**
   ii. **Que obtengamos una expresión de la forma $\frac{a}{b}$, con $a \neq 0$ y $b = 0$. En este caso, decimos que el límite NO EXISTE.**
   iii. **Que obtengamos una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$. En este caso, debemos proceder a eliminar la indeterminación para decidir si el límite existe o no.**

3. **Para eliminar indeterminaciones de la forma $\frac{0}{0}$ podemos utilizar algunas herramientas tales como: la factorización, la racionalización, la simplificación de fracciones, la definición de valor absoluto. Pero la forma más general de eliminarlas es utilizando una propiedad denominada la Regla de L'Höpital.**

4 **Después de eliminar la indeterminación, se aplican de nuevo las propiedades de los límites y se sacan conclusiones.**

Ejemplo 5

Calculemos el $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1 - \sqrt{x}}{1 - \sqrt[3]{x}}$

SOLUCIÓN

- Al calcular los límites del dividendo y del divisor, obtenemos una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$ (¡comprobarlo!).

- Para eliminar la índeterminación debemos realizar una doble racionalización: una para $1 - \sqrt{x}$ y la otra para $1 - \sqrt[3]{x}$. El factor racionalizante de $1 - \sqrt{x}$ es $1 + \sqrt{x}$ y el factor racionalizante de $1 - \sqrt[3]{x}$ es $1 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}$. Por lo tanto, multiplicamos el numerador y el denominador de la fracción dada por $(1 + \sqrt{x})(1 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})$; así:

$$\lim_{x \to 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - \sqrt[3]{x}} = \lim_{x \to 1} \frac{\left(1 - \sqrt{x}\right)\left(1 + \sqrt{x}\right)\left(1 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}\right)}{\left(1 - \sqrt{x}\right)\left(1 + \sqrt{x}\right)\left(1 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(1-x)\left(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)}{(1-x)\left(1+\sqrt{x}\right)} \quad \text{..................} \qquad \text{¿por qué?}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}{1+\sqrt{x}} \quad \text{..................................}$$

simplificamos (1 - x)

$$= \frac{1+\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{1^2}}{1+\sqrt{1}} \quad \text{..} \qquad \text{¿por qué?}$$

$$= \frac{3}{2}$$

EJERCICIO 4.4

En los ejercicios **1** a **30**, hallar, si existen, los límites indicados.

1 $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x^2+7x}{x}$ **2** $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2+2x-3}$ **3** $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{x^2+x-6}{x^2-4}$

4 $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$ **5** $\displaystyle\lim_{t \to a} \frac{t^4-a^4}{t^2-a^2}$ **6** $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x^2+x-2}{(x-1)^2}$

7 $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$ **8** $\displaystyle\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{2x+3}-x}{x-3}$ **9** $\displaystyle\lim_{x \to -1} \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{2}}{x+1}$

10 $\displaystyle\lim_{x \to -2} \frac{\sqrt{4-x^2}}{x+2}$ **11** $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{9+2h}-3}{h}$ **12** $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{h^2}{\sqrt{4+3h^2}-2}$

13 $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{3x+h}-\sqrt{3x}}{h}$ **14** $\displaystyle\lim_{x \to 4} \frac{x^2-16}{x-4}$ $\displaystyle\lim_{m \to 0} \frac{m}{1/m}$

16 $\displaystyle\lim_{a \to 0} \frac{1}{a}\left[\frac{1}{a+2}-\frac{1}{2}\right]$ **17** $\displaystyle\lim_{t \to -2} \frac{2-3t-2t^2}{16+6t-t^2}$ **18** $\displaystyle\lim_{x \to 4} \frac{3m^2-8m-16}{2m^2-9m+4}$

19 $\displaystyle\lim_{y \to -2} \frac{y^3+8}{y+2}$ **20** $\displaystyle\lim_{t \to -3} \sqrt{\frac{t^2-9}{2t^2+7t+3}}$ **21** $\displaystyle\lim_{x \to 9} \frac{3-\sqrt{x}}{9-x}$

22 $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$ **23** $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[3]{h+1}-1}{h}$ **24** $\displaystyle\lim_{x \to -1} \frac{2x^2-x-3}{x^3+2x^2+6x+5}$

25 $\displaystyle\lim_{x \to 3} \frac{2x^3-5x^2-2x-3}{4x^3-13x^2+4x-3}$ **26** $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}$ **27** $\displaystyle\lim_{x \to 7} \frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$

28 $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{(x-1)^5}{x^5-1}$ **29** $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$ **30** $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{\sqrt{x-b}-\sqrt{a-b}}{x^2-a^2}$

En los ejercicios **31** a **34**, para cada una de las funciones f dadas, hallar el $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

31 $f(x) = x^2 - 3x + 4$ **32** $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

33. $f(x) = \sqrt{x-3}$

34. $f(x) = \sqrt[3]{x}$

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (11)

Se quiere construir una bodega con un volumen de 100 m³ que tenga techo plano y base rectangular cuyo ancho sea $\frac{3}{4}$ partes de su largo. El costo por m² de los materiales es de 1.8 dólares para el piso, de 2.7 dólares para los lados y de 1.35 dólares para el techo. Si llamamos x el largo de la bodega, se pide:

1. **Hacer una representación gráfica del enunciado del problema.**
2. **Escribir una expresión, en función de x, que permita calcular el costo total de la construcción de la bodega.**

4.6 CONTINUIDAD DE FUNCIONES

4.6.1. Continuidad en un punto

El concepto de continuidad es uno de los más importantes en el desarrollo del cálculo. Antes de presentar su definición precisa vamos a realizar algunas experiencias que nos facilitarán su comprensión.

Primera Experiencia

- Juan conduce tranquilamente su vehículo por una carretera cuando de pronto se encuentra con un tremendo hueco que lo obliga a frenar abruptamente, figura 4 - 25:

Figura 4 - 25

- El hueco ha impedido que Juan CONTINÚE normalmente su viaje. Tendrá que esperar a que tapen el hueco.

Segunda Experiencia

- Juan decidió cambiar de ruta para llegar a su destino. Sin embargo, a los pocos kilómetros se encontró con un derrumbe que se llevó por completo la banca de la carretera; figura 4 - 26:

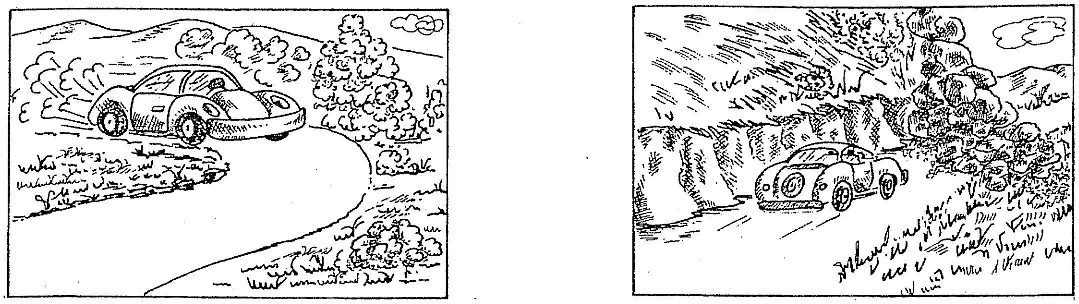


Figura 4 - 26

- De nuevo, Juan no puede CONTINUAR normalmente su camino. En este caso, la situación parece más grave ya que habrá que esperar a que reconstruyan la vía o a que hagan otra.

Tercera Experiencia

- Lina y Mariana están dibujando, en el tablero, las gráficas de dos funciones reales f y g, respectivamente; figura 4 - 26:

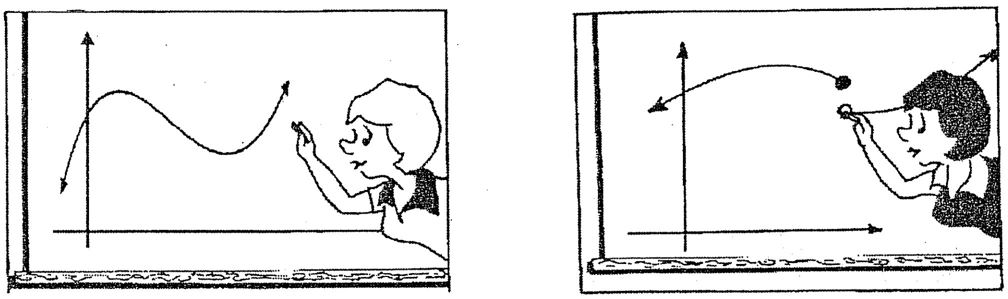


Figura 4 - 27

- Lina dibujó la gráfica de f de un solo trazo, sin levantar la mano, sin interrupciones, de manera CONTINUA. En cambio, Mariana tuvo que dibujar la gráfica de g en dos etapas: primero un tramo, levantó la mano y, luego, dibujó otro tramo; es decir, hay un punto de la función g donde la gráfica se interrumpe, donde g es DISCONTINUA.

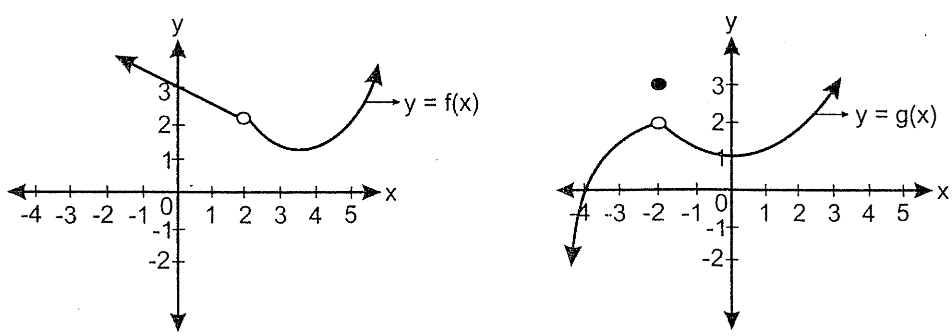
Las tres experiencias anteriores nos muestran que la idea de CONTINUIDAD (y por supuesto la de DISCONTINUIDAD) está vinculada a situaciones de la vida diaria y de la matemática.

Las dos experiencias siguientes nos permitirán aproximar estas ideas con el concepto matemático de CONTINUIDAD.

Cuarta Experiencia

- Observemos las gráficas de las funciones reales f, g, h y p de la figura 4 - 28 e indiquemos:

1. si la función es continua o discontinua en todo su dominio.
2. si la función es discontinua, identificar los valores de x donde se presenta la discontinuidad.



(a) (b)

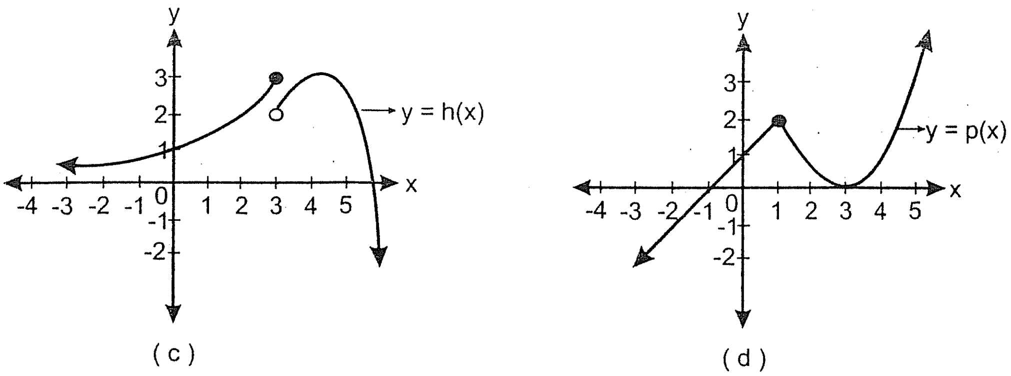


Figura 4 – 28

- La gráfica de la función f de la figura 4 - 28 (a) muestra un «hueco» en el punto correspondiente a x = 2. Por lo tanto, f es discontinua en x = 2.
- La gráfica de la función g de la figura 4 - 28 (b) también muestra un «hueco» en el punto correspondiente a x = -2. Por lo tanto, g es discontinua en x = -2
- La gráfica de la función h de la figura 4 - 28 (c) muestra un «salto» en el punto correspondiente a x = 3. Por lo tanto, h es discontinua en x = 3.
- Finalmente, la gráfica de la función p de la figura 4 - 28 (d) ha sido dibujada de un solo trazo, no presenta ninguna clase de interrupciones. Por lo tanto, la función p es CONTINUA en todos los puntos; en particular, en el punto x = 1 donde la gráfica «cambia» de forma (pasa de ser una recta a volverse una curva).

Quinta Experiencia

- Consideremos de nuevo las gráficas de la figura 4 - 28. Ya identificamos, en la experiencia anterior, los puntos de discontinuidad de las funciones f, g y h; así mismo, en la función p señalamos un punto donde, a pesar de presentarse un cambio en la forma de la gráfica, existe continuidad.
- Ahora queremos saber la(s) razón(es) matemática(s) por la(s) cual(es) las funciones f, g y h son discontinuas y la función p es continua. Estas razones tienen que ver con tres situaciones:

  1. La existencia o no de la imagen de la función en el punto.
  2. La existencia o no del límite de la función cuando x se aproxima al punto.
  3. La coincidencia entre los valores obtenidos en los numerales 1. y 2.

- Analizando la función f en x = 2 encontramos que f(2) no existe: por esta razón, f es discontinua en x = 2.
- Analizando la función g en x = -2, encontramos que g(-2) = 3, el $\lim_{x\to -2} g(x) = 2$; pero, $g(-2) \neq \lim_{x\to -2} g(x)$: por esta razón, g es discontinua en x = -2.
- Analizando la función h en x = 3 encontramos que h(3) = 3, pero el $\lim_{x\to 3} h(x)$ no existe pues el $\lim_{x\to 3^-} h(x) \neq \lim_{x\to 3^+} h(x)$: por esta razón, h es discontinua en x = 3.
- Finalmente, el análisis de la función p en x = 1 nos lleva a concluir que: p(1) = 2, el $\lim_{x\to 1} p(x) = 2$ y $p(1) = \lim_{x\to 1} p(x) = 2$; por lo tanto, p es continua en x = 1.
- Por todo lo anterior podemos formular la siguiente definición de continuidad de una función en x = a:

DEFINICIÓN

- **Una función f se dice CONTINUA en a si se cumplen las tres condiciones siguientes:**

  1. **f(a) existe.**
  2. **$\lim_{x\to a} f(x)$ existe.**
  3. **$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.**

- **Una función f se dice CONTINUA EN UN INTERVALO ABIERTO (a; b) si lo es en todos los puntos de ese intervalo.**

ATENCIÓN

1. Si falla alguna de las tres condiciones anteriores, entonces f NO ES CONTINUA en a; en este caso decimos que f es DISCONTINUA en **a**.
2. La definición anterior nos muestra que si f es CONTINUA en **a**, entonces **a** tiene que pertenecer al dominio de f; por lo tanto, el mayor conjunto candidato a que una función sea continua en él es el dominio de la función.
3. La expresión $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ es equivalente a la expresión $\lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$; es decir, f es continua, en **x = a** cuando a pequeños cambios de x le corresponden pequeños cambios de f(x): si x está próximo a **a**, f(x) debe estar próximo a **f(a).**

Ejemplo 1

Analicemos la continuidad de la función $f(x) = 5x^2 - x + 8$ en $x = -2$.

SOLUCIÓN

- Veamos si se cumplen las tres condiciones de la definición de continuidad:
  1. $f(-2) = 5(-2)^2 - (-2) + 8 = 30$
  2. $\lim_{x\to -2} f(x) = \lim_{x\to -2} (5x^2 - x + 8) = 30$
  3. $\lim_{x\to -2} f(x) = f(-2) = 30$
- Como se cumplen las tres condiciones de la definición, entonces concluimos que f es continua en $x = -2$.

Ejemplo 2

Analicemos la continuidad de la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

SOLUCIÓN

Como f no está definida en $x = 2$ (¿por qué?), entonces decimos que f es discontinua en $x = 2$.

Ejemplo 3

Analicemos la continuidad de la función g definida por: $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ 4 & \text{si } x = 2 \end{cases}$ en $x = 2$

SOLUCIÓN

- Tenemos:

  1. $g(2) = 4$
  2. $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x + 2)\cancel{(x - 2)}}{\cancel{(x - 2)}} = \lim\limits_{x \to 2} (x + 2) = 4$
  3. $g(2) = \lim\limits_{x \to 2} g(x) = 4$

- Por lo tanto, se cumplen las tres condiciones de la definición de continuidad. Luego, g es continua en $x = 2$.
- Conviene que cada lector dibuje la gráfica de esta función y verifique las conclusiones obtenidas.

Ejemplo 4

Analicemos la continuidad de la función h definida por: $h(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 8 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ en $x = 0$

SOLUCIÓN

- Tenemos:

  1. $h(0) = 8$
  2. $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} = \infty$ (no existe ¿por qué?)

- Por lo tanto, h es discontinua en $x = 0$
- Dibujar la gráfica de h y comprobar lo analizado.

Ejemplo 5

Analicemos la continuidad de la función p definida por: $p(x) = \begin{cases} 4 - 3x & \text{si } x < 2 \\ 10 & \text{si } x = -2 \\ x^2 + 6 & \text{si } x > -2 \end{cases}$ en $x = -2$

SOLUCIÓN

- Tenemos:

  1. $p(-2) = 10$
  2. Para hallar el $\lim\limits_{x \to -2} p(x)$ debemos calcular los límites a la izquierda y a derecha, así:

  $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -2^-} p(x) = \lim\limits_{x \to -2} (4 - 3x) = 10 \\ \\ \lim\limits_{x \to -2^+} p(x) = \lim\limits_{x \to -2} (x^2 + 6) = 10 \end{array}\right\} \therefore \lim\limits_{x \to -2} p(x) = 10$$

  3. $p(-2) = \lim\limits_{x \to -2} p(x) = 10$

- Por lo tanto, al cumplir las tres condiciones de la definición de continuidad, decimos que p es continua en $x = - 2$.
- Dejamos a cada lector la tarea de dibujar la gráfica de esta función y verificar las conclusiones obtenidas.

4.6.2. Clases de discontinuidad puntual

Experiencia

- Observemos las gráficas de las siguientes funciones y analicemos lo que ocurre en los puntos de discontinuidad, figura 4 - 29:

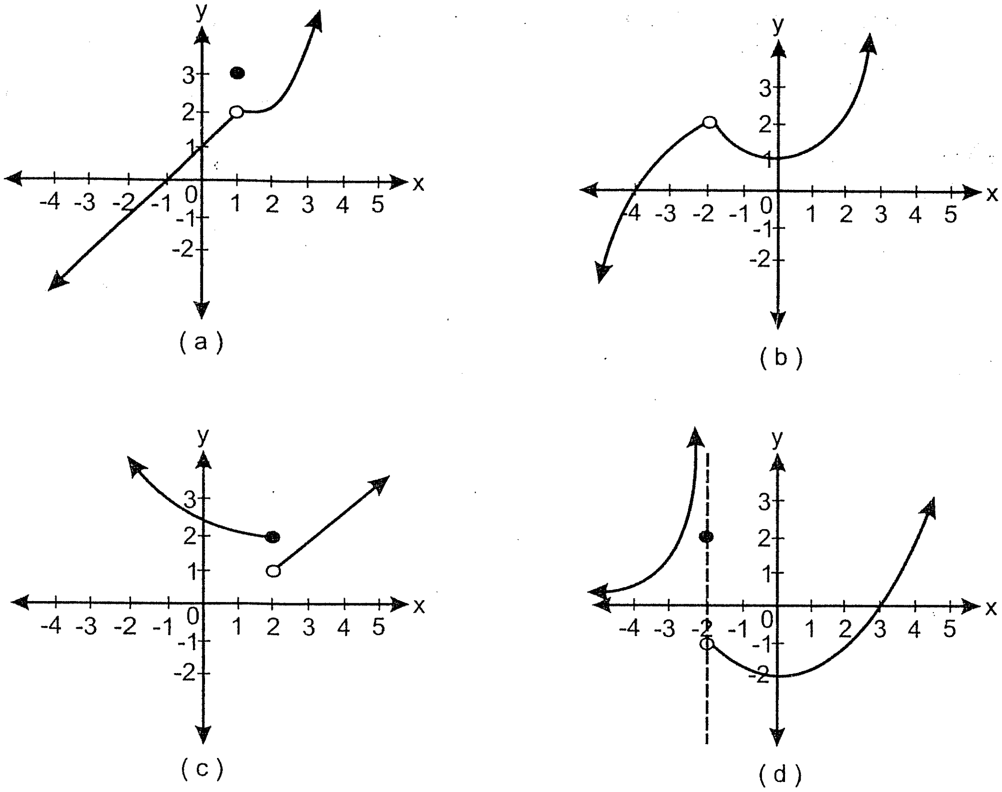


Figura 4 - 29

- La función de la figura 4 - 29 (a) es discontinua en x = 1. Su gráfica nos muestra un «hueco» en el punto (1, 2). Si analizamos las condiciones de la definición de continuidad encontramos que:

  1. $f(1) = 3$ 2. $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$ 3. Luego, $\lim_{x\to 1} f(x) \neq f(1)$

- La función de la figura 4 - 29 (b) es discontinua en x = -2. También su gráfica nos muestra un «hueco» en el punto (-2, 2). Analizando las condiciones de la definición de continuidad encontramos que:

  1. $f(-2)$ no existe (¿ por qué ?) 2. $\lim_{x\to -2} f(x) = 2$

- La función de la figura 4 - 29 (c) es discontinua en x = 2. Su gráfica nos muestra un «salto» en el punto x = 2. Si analizamos las condiciones de la definición de continuidad encontramos que:

  1. $f(2) = 2$ 2. $\lim_{x\to 2} f(x)$ no existe (¿por qué?)

- Finalmente, la función de la figura 4 - 29 (d) es discontinua en x = -2, su gráfica también nos muestra un «salto» en dicho punto. Si analizamos las condiciones de la definición de continuidad encontramos que:

  1. $f(-2) = 2$ 2. $\lim_{x\to -2} f(x)$ no existe (¿por qué?)

¿Qué diferencia conceptual existe entre una función cuya discontinuidad es un «hueco» y una cuya discontinuidad es un «salto»?. La diferencia es sólo una: en las funciones cuya discontinuidad es un «salto» , el $\lim_{x\to a} f(x)$ NO EXISTE. Matemáticamente, estas discontinuidades se denominan ESENCIALES y las de «hueco» se denominan EVITABLES o REMOVIBLES.

DEFINICIÓN

Sea f una función discontinua en x = a.

1. **f posee DISCONTINUIDAD EVITABLE o REMOVIBLE en x = a siempre que el $\lim_{x\to a} f(x)$ existe. En este punto, la gráfica de f tiene un «hueco». El valor que deberíamos dar a la función en dicho punto para que fuera continua se llama VERDADERO VALOR DE LA FUNCIÓN allí.**
2. **f posee DISCONTINUIDAD ESENCIAL (o INEVITABLE) en x = a cuando el $\lim_{x\to a} f(x)$ no existe. En este punto, la gráfica de f presenta un SALTO.**

Ejemplo 1

Analicemos qué clase de discontinuidad presenta la función definida por: $f(x) = \begin{cases} 4-2x & \text{si } x<3 \\ 8 & \text{si } x=3 \\ 7-x^2 & \text{si } x>3 \end{cases}$ en x = 3 .Si la discontinuidad es evitable, encontremos el verdadero valor de la función en x = 3.

SOLUCIÓN

Apliquemos la definición de continuidad en x = 3:

1. f(3) = 8
2. Para hallar el $\lim_{x\to 3} f(x)$ debemos calcular los límites laterales:

$$\left.\begin{array}{l} \text{a) } \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3} (4-2x) = -2 \\ \text{b) } \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3} (7-x^2) = -2 \end{array}\right\} \therefore \lim_{x\to 3} f(x) = -2$$

3. $\lim_{x\to 3} f(x) \neq f(3)$

- En consecuencia, f es discontinua en x = 3. Ahora bien, como el $\lim_{x\to 3} f(x)$ existe, entonces f presenta una DISCONTINUIDAD REMOVIBLE en x = 3.
- El verdadero valor de f en x = 3 es aquel en el cual f(3) coincide con el $\lim_{x\to 3} f(x)$; es decir, debemos hacer f(3) = -2.
- La nueva función F, definida a partir de f, pero continua en x = 3 sería:

$$F(x) = \begin{cases} 4-2x & \text{si } x<3 \\ -2 & \text{si } x=3 \\ 7-x^2 & \text{si } x>3 \end{cases}$$

- Invitamos al lector a dibujar las gráficas de las funciones f y F y observar sus diferencias.

Ejemplo 2

Determinemos los valores de las constantes **a** y **b** para que la función g definida por:

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq -2 \\ ax+b & \text{si } -2<x<2 \\ 2x-6 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

sea continua en $x = -2$ y en $x = 2$.

SOLUCIÓN

- Como $x = -2$ y $x = 2$ son valores donde la función cambia de forma, entonces allí se puede presentar: un hueco, un salto o ninguna ruptura. Esto depende de los valores que tomen a y b.

- La estrategia para solucionar el problema es la siguiente: primero, hallamos los valores de a y b tales que el $\lim\limits_{x\to -2} g(x)$ y el $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$ existan; luego, comprobamos si con los valores obtenidos se cumple que $g(-2) = \lim\limits_{x\to -2} g(x)$ y $g(2) = \lim\limits_{x\to 2} g(x)$. De esta manera garantizamos la continuidad en $x = -2$ y en $x = 2$.

- Veamos:

  * El $\lim\limits_{x\to -2} g(x)$ existe, si $\lim\limits_{x\to -2^-} g(x) = \lim\limits_{x\to -2^+} g(x)$:

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to -2^-} g(x) &= \lim_{x\to -2^-} x^2 = 4 \\ \lim_{x\to -2^+} g(x) &= \lim_{x\to -2^+} (ax+b) = -2a+b \end{aligned}\right\} \therefore\ \boxed{-2a + b = 4} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

  * El $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$ existe, si $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} g(x)$:

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 2^-} g(x) &= \lim_{x\to 2^-} (ax+b) = 2a+b \\ \lim_{x\to 2^+} g(x) &= \lim_{x\to 2^+} (2x-6) = -2 \end{aligned}\right\} \therefore\ \boxed{2a + b = -2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

  * Ahora resolvemos el sistema de ecuaciones formado por (1) y (2):

$$\begin{array}{r} -2a + b = 4 \\ 2a + b = -2 \\ 2b = 2 \\ \hline \therefore \quad b = 1 \end{array}$$

Reemplazando $b = 1$ en (2) nos queda: $2a + 1 = -2$; luego, $a = -\dfrac{3}{2}$

  * Por lo tanto, con $a = -\dfrac{3}{2}$ y $b = 1$ existen el $\lim\limits_{x\to -2} g(x)$ y el $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$. La función g queda así:

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \le -2 \\ -\dfrac{3}{2}x + 1 & \text{si } -2 < x < 2 \\ 2x - 6 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$$

- Finalmente, analicemos si g es continua en $x = -2$ y $x = 2$

  * **En x = -2**

1. $g(-2) = (-2)^2 = 4$
2. $$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to -2^-} g(x) &= \lim_{x\to -2^-} x^2 = 4 \\ \lim_{x\to -2^+} g(x) &= \lim_{x\to -2^+}\left(-\frac{3}{2}x + 1\right) = 4 \end{aligned}\right\} \therefore\ \lim_{x\to -2} g(x) = 4$$
3. $\lim\limits_{x\to -2} g(x) = g(-2) = 4$

Luego, g es continua en $x = -2$

* **En x = 2**

1. $g(2) = 2(2) - 6 = -2$

2. $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 2^-}\left(-\frac{3}{2}x + 1\right) = -2 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}(2x - 6) = -2 \end{array}\right\} \therefore \lim_{x\to 2} g(x) = -2$$

3. $\lim g(x) = g(2) = -2$

Luego, g es continua en $x = 2$

- **CONCLUSIÓN:** Los valores de las constantes a y b para las cuales la función dada g es continua en $x = -2$ y en $x = 2$ son $a = -\frac{3}{2}$ y $b = 1$.
- Dejamos como ejercicio dibujar la gráfica de la función g.

4.6.3. Propiedades de las funciones continuas

En lugar de aplicar cada vez la definición para comprobar la continuidad de una función en un punto, es mejor aplicar ciertas propiedades que nos agilizan el proceso de verificación. Veamos cuales son:

> **P - 1: ÁLGEBRA DE FUNCIONES CONTINUAS**
>
> **Si f y g son funciones continuas en x = a, entonces:**
>
> 1. **La SUMA (O RESTA) de f y g es continua en x = a; es decir, $f \pm g$ es continua en x = a.**
> 2. **El PRODUCTO de f y g es continuo en x = a; es decir, $f \cdot g$ es continua en x = a.**
> 3. **El COCIENTE entre f y g es continuo en x = a, siempre que $g(a) \neq 0$; es decir, f/g es continuo en x = a, con $g(a) \neq 0$.**

Esta propiedad establece que si f y g son funciones continuas en $x = a$, entonces la suma de $f + g$, la resta $f - g$, el producto $f \cdot g$ y el cociente $\frac{f}{g}$ (siempre que $g(a) \neq 0$) tambien son continuas en $x=a$.

Demostremos la parte 1.

1) Como f es continua en $x = a$, entonces $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

2) Como g es continua en $x = a$, entonces $\lim\limits_{x\to a} g(x) = g(a)$

3) Ahora bien:

$$\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} f(g)$$
$$= f(a) \pm g(a)$$

4) Por lo tanto, $f \pm g$ es continua en $x = a$.

P - 2: CONTINUIDAD DE CIERTAS FUNCIONES

Las siguientes clases funciones son continuas en todo número de su dominio:

1. **Las funciones polinómicas.**
2. **Las funciones racionales.**
3. **Las funciones raíz.**
4. **Las funciones trigonométricas.**
5. **Las funciones exponenciales.**
6. **Las funciones logarítmicas.**

Ejemplo 1

¿En dónde es continua la función $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2 - 4}$?

SOLUCIÓN

Puesto que f es una función racional, entonces, de acuerdo con el numeral 2. de P-2, f es continua en todo número de su dominio, el cual es $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$.

Ejemplo 2

¿En dónde es continua la función $\dfrac{\ln(x) + \cos(x)}{2x - 3}$?

SOLUCIÓN

Por P-2 sabemos que la función $y=\ln(x)$ es continua para todo $x > 0$ y que $y=\operatorname{Cos}(x)$ es continua para todo $x \in \mathbb{R}$. Luego; por el numeral 1. de P-1, $y= \ln(x) + \operatorname{Cos}(x)$ es continua en $(0 ; +\infty)$.

El denominador, $y=2x-3$, es una función polinómica; luego, es continua en todo $x \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, por el numeral 3. de P-1, f es continua en todos los números positivos, excepto donde $2x-3=0$; es decir, f es continua en $\left(0; \dfrac{3}{2}\right) \cup \left(\dfrac{3}{2} ; +\infty\right)$.

ATENCIÓN

Otra manera de combinar dos funciones continuas f y g para obtener otra función continua es construyendo la función compuesta f o g. Para probar la continuidad de una función compuesta es necesario enunciar el siguiente teorema:

TEOREMA: LÍMITE DE FUNCIONES COMPUESTAS

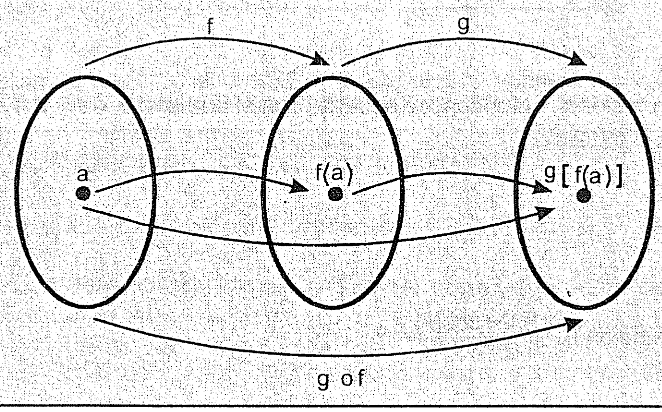
Si g es continua en b y $\lim_{x \to a} f(x) = b$, entonces el $\lim_{x \to a} g[f(x)] = g(b)$; es decir:

$$\lim_{x \to a} g[f(x)] = g\left[\lim_{x \to a} f(x)\right] = g(b)$$

Este teorema establece que para calcular el límite de una función compuesta gof $\left(\lim_{x \to a} g[f(x)]\right)$, donde g es la función principal y f es la función secundaria, hallamos primero el límite de la función secundaria (f) y, luego, hallamos la imagen de este resultado mediante la función principal (g).

P - 3: CONTINUIDAD DE LA FUNCIÓN COMPUESTA.

Si f es continua en a y g es continua en f(a), entonces la compuesta (gof) (x) = g [f(x)] es continua en a.



DEMOSTRACIÓN

1) Como f es continua en x = a, entonces $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

2) Teniendo en cuenta el Teorema anterior, podemos escribir que:

$$\lim_{x \to a} (gof)(x) = \lim_{x \to a} g[f(x)] = g\left[\lim_{x \to a} f(x)\right]$$

3) Y como $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ entonces $g\left[\lim_{x \to a} f(x)\right] = g[f(a)]$

4) Por lo tanto, $\lim_{x \to a} (gof)(x) = g[f(a)] = (gof)(a)$ y ésto prueba que la compuesta gof es continua en x = a.

Ejemplo 3

Calculemos el $\lim_{x \to -2} \log(x^2 - 3x + 1)$.

SOLUCIÓN

- La función y = $\log\left(x^2-3x+1\right)$ se compone de las funciones f(x) = x^2 - 3x + 1 (función secundaria) y g(x) = log(x) (función principal).
- Como el $\lim\limits_{x\to-2}\left(x^2-3x+1\right) = 11$ y $\lim\limits_{x\to-2}\log(x) = \log(11)$ entonces $\lim\limits_{x\to-2}\log\left(x^2-3x+1\right) = \log(11)$.
- En síntesis: $\lim\limits_{x\to-2}\log\left(x^2-3x+1\right) = \log\left[\lim\limits_{x\to-2}\left(x^2-3x+1\right)\right] = \log(11)$; es decir, **«el límite del logaritmo de una función es igual al logaritmo del límite de la función, siempre que el límite de esta función exista y esté dentro del dominio de la función logarítmica».**

Ejemplo 4

Sea f la función definida por f(x) = $\sqrt{4x-3}$. Determinemos los valores de **x** para los cuales f es continua.

SOLUCIÓN

- La función f es la compuesta de dos funciones h y g tales que: f(x) = (goh)(x) = $g\left[h(x)\right]$ donde h(x) = 4x - 3 y g(x) = $\sqrt{x}$; figura 4 - 30:

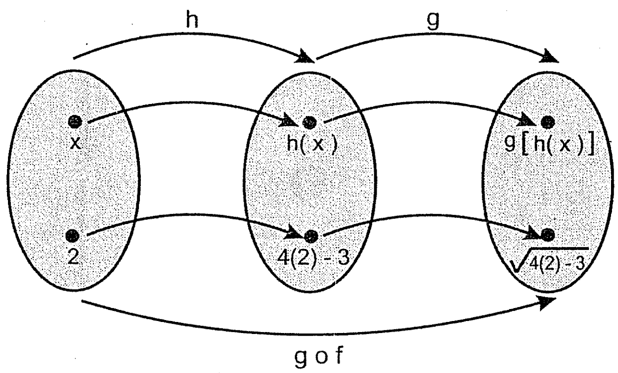


Figura 4 - 30

- Como h es continua en todos los reales (por ser polinómica) y g es continua para todo x > 0 (¿por qué no es continua en x = 0 ?), entonces f es continua para todos los x tales que h(x) > 0; es decir:

$$h(x) > 0 \iff 4x - 3 > 0$$
$$\iff x > \frac{3}{4}$$

- Por lo tanto, f es continua en el intervalo $\left(\frac{3}{4};+\infty\right)$.

Ejemplo 5

Hallemos todos los valores de x para los cuales la función f(x) = $\log_2\left(\frac{x-3}{x+1}\right)$ es continua.

SOLUCIÓN

- La función f es la compuesta de las funciones h(x) = $\left(\frac{x-3}{x+1}\right)$ y g(x) = $\log_2(x)$; así:

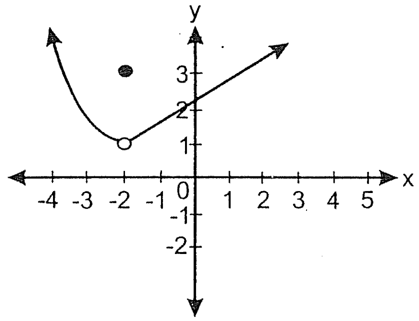
$$f(x) = (goh)(x) = g\left[h(x)\right].$$

- Como h es continua para todo $x \neq -1$ (por ser una función racional) y g es continua para todo $x > 0$, entonces f es continua para todo los x tales que $h(x) > 0$; es decir, cuando $\frac{x-3}{x+1} > 0$. La solución de esta inecuación es el conjunto $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$.
- Por lo tanto, f es continua en $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$.

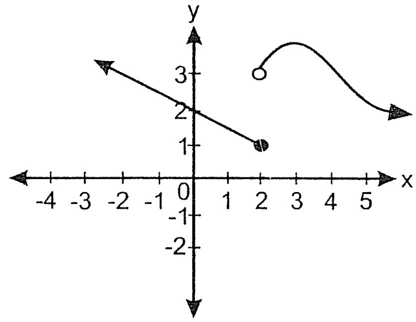
EJERCICIO 4.5

En los ejercicios 1 a 4 determinar los puntos de la gráfica donde f es discontinua, explicar a qué se debe la discontinuidad e indicar el tipo de discontinuidad que se presenta.

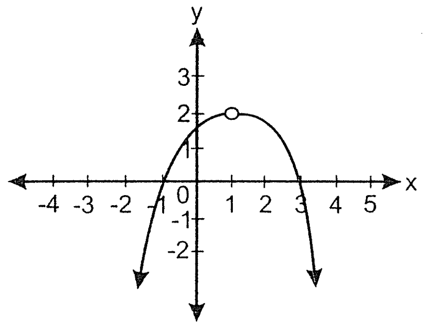
1



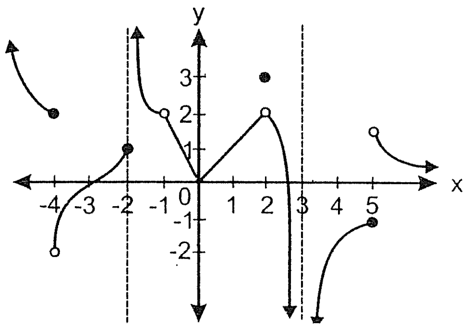
2



3



4



En los ejercicios 5 a 14, se pide:

a) Identificar los números en que la función dada es discontinua.

b) Verificar la discontinuidad en dicho número y el tipo de discontinuidad que se presenta.

c) Dibujar la gráfica de la función.

5 $f(x) = \dfrac{16x^2 - 9}{4x - 3}$

6 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x < 2 \\ x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

7 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+1} & \text{si } x \neq -1 \\ 4 & \text{si } x = -1 \end{cases}$

8 $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

9 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 7x + 6}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ -5 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

10 $f(x) = \dfrac{x+1}{|x+1|}$

11 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-6} & \text{si } x \geq 6 \\ 0 & \text{si } x < 6 \end{cases}$

12 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-27}{x-3} & \text{si } x \neq 3 \\ 9 & \text{si } x = 3 \end{cases}$

13 $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < 2 \\ 3 & \text{si } x = 2 \\ x^2-1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

14 $f(x) = \begin{cases} x^2-x+2 & \text{si } x < -1 \\ 6+2x & \text{si } -1 \leq x < 2 \\ x(x+3) & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

15 $f(x) = \begin{cases} 3x+7 & \text{si } x \leq 4 \\ ax-1 & \text{si } x > 4 \end{cases}$

16 $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 1 \\ ax+b & \text{si } 1 < x < 4 \\ -2x & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$

17 $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } 1 < x < 3 \\ x^2+ax+b & \text{si } |x-2| \geq 1 \end{cases}$

18 $f(x) = \begin{cases} a & \text{si } x \leq -3 \\ \dfrac{9-x^2}{4-\sqrt{x^2+7}} & \text{si } |x| < 3 \\ b & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

En los ejercicios **19** y **20** encontrar todos los valores de x para los cuales la función dada es continua.

19 $f(x) = \ln\left(x^4 - 1\right)$

20 $f(x) = \text{Cos}\left(e^{\sqrt{x}}\right)$

4.6.4. Continuidad en un intervalo

- Hasta el momento hemos estudiado la continuidad de una función en un punto y en un intervalo abierto. Queremos ahora extender este concepto a intervalos semicerrados y cerrados.
- El conocimiento de la continuidad de una función en un intervalo cerrado $[a ; b]$ aporta importantes resultados en el desarrollo del cálculo diferencial e integral.
- Vamos a motivar el concepto de continuidad de una función en un intervalo realizando la siguiente experiencia:

Experiencia

- Observemos la gráfica de la función f dibujada en la figura 4 - 31 y contestemos las siguientes preguntas:

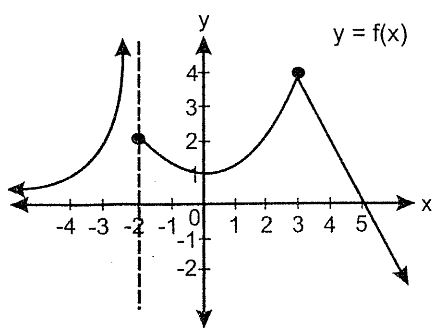


Figura 4 - 31

* ¿Cuál es el dominio de esta función?
* ¿En qué punto(s) es discontinua la función?
* ¿Qué clase de discontinuidad presenta la función en $x = -2$? ¿Por qué?

- Seguramente estaremos de acuerdo con que esta función presenta una discontinuidad en el punto correspondiente a $x = -2$. Esta discontinuidad es esencial.
- Ahora centremos nuestra atención en el intervalo cerrado $[-2;3]$. ¿Será la función continua en este intervalo? Para contestar la pregunta vamos por partes:

  * La función es continua en cada uno de los puntos del intervalo abierto $(-2\,;\,3)$; en efecto, notemos que allí no aparecen ni «huecos» ni «saltos».
  * ¿Qué pasa en el extremo izquierdo? Como sólo estamos mirando lo que ocurre en el intervalo $[-2;3]$, no nos interesa lo que pasa a la izquierda de -2 sino lo que pasa a la derecha de -2. En estas condiciones, podemos comprobar que:

    1. $f(-2) = 2$ 2. $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = 2$ 3. $f(-2) = \lim\limits_{x \to -2^+} f(x)$

    es decir, para analizar la continuidad de una función en el extremo izquierdo de un intervalo cerrado, debemos verificar el cumplimiento de tres condiciones:

    1. que $f(a)$ exista 2. que el $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ exista 3. que $f(a) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$

  * ¿Qué pasa en el extremo derecho? De nuevo, como sólo nos interesa lo que ocurre en $[-2\,;\,3]$, entonces nos olvidamos de los valores mayores que 3. Así pues, es fácil comprobar que:

    1. $f(3) = 4$ 2. $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 4$ 3. $f(3) = \lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$

    es decir, para analizar la continuidad de una función en el extremo derecho de un intervalo cerrado $[a\,;\,b]$, debemos verificar que se cumplan las tres condiciones siguientes:

    1. que $f(b)$ exista 2. que el $\lim\limits_{x \to b^-} f(x)$ exista 3. que $f(b) = \lim\limits_{x \to b^-} f(x)$

- Resumiendo:

DEFINICIÓN

- **Una función f es continua en un INTERVALO ABIERTO $(a\,;\,b)$ si y sólo si es continua en cada uno de sus puntos.**
- **Una función f es continua en un INTERVALO CERRADO $[a;b]$ si y sólo si:**
  1) f es continua en el intervalo abierto $(a\,;\,b)$
  2) f es continua a la derecha de a; es decir, $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$
  3) f es continua a la izquierda de b; es decir, $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$

ATENCIÓN

1. Notemos que es posible que una función f sea continua en un intervalo cerrado $[a;b]$ y, en cambio, sea discontinua en el punto $x = a$. Basta mirar la figura 4 - 31 en la cual f es continua en el intervalo $[-2;3]$ pero es discontinua en $x = -2$.

2. Todas las definiciones nos muestran que si f es CONTINUA en **a** entonces **a** tiene que pertenecer al dominio de f; por lo tanto, el mayor conjunto candidato a que una función sea continua en él es el dominio de la función.

Ejemplo 1

Sea f la función real definida por $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$. Demostremos que f es continua en el intervalo cerrado $[-2 ; 2]$.

SOLUCIÓN

- Sea $a \in (-2 ; 2)$, tenemos:

  1. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} \sqrt{4 - x^2} = \sqrt{4 - a^2} = f(a)$

     Luego, f es continua en $(-2 ; 2)$

  2. $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^+} \sqrt{4 - x^2} = \sqrt{4 - 4} = 0 = f(-2)$

     Luego, f es continua a la derecha de -2

  3. $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} \sqrt{4 - x^2} = \sqrt{4 - 4} = 0 = f(2)$

     Luego, f es continua a la izquierda de 2.

- De 1., 2. y 3. concluimos que f es continua en el intervalo cerrado $[-2 ; 2]$.

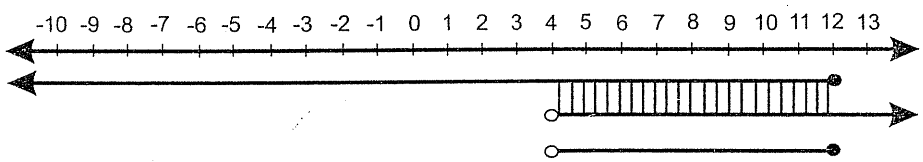
Ejemplo 2

Sea f la función real definida por $f(x) = \dfrac{\sqrt{12 - x}}{\sqrt{x - 4}}$. Encontremos el mayor subconjunto de $\mathbb{R}$ donde f es continua.

SOLUCIÓN

- En primer lugar, hallemos el dominio de f y, luego, investiguemos si f es continua en su dominio. Veamos:

$$
\begin{aligned}
f(x) \in \mathbb{R} \quad &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{12 - x}}{\sqrt{x - 4}} \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow 12 - x \geq 0 \quad \wedge \quad x - 4 > 0 \\
&\Leftrightarrow x \leq 12 \quad \wedge \quad x > 4 \\
&\Leftrightarrow x \in (-\infty ; 12] \cap (4 ; +\infty]
\end{aligned}
$$



Luego, $D_f = \{x / 4 < x \leq 12\} = (4 ; 12]$

- Ahora, investiguemos la continuidad de f en $\left(4 ; 12\right]$

$$
\left.
\begin{aligned}
&\lim_{x \to 12^-} f(x) = \lim_{x \to 12^-} \frac{\sqrt{12 - x}}{\sqrt{x - 4}} = \frac{0}{\sqrt{8}} = 0 \\
&f(12) = \frac{\sqrt{12 - 12}}{\sqrt{12 - 4}} = 0
\end{aligned}
\right\} \therefore \lim_{x \to 12^-} f(x) = f(12)
$$

Luego, f es continua por la izquierda de 12.

2. Sea $c \in (4\,;\,12)$

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} \frac{\sqrt{12-x}}{\sqrt{x-4}} = \frac{\lim_{x\to c}\sqrt{12-x}}{\lim_{x\to c}\sqrt{x-4}} = \frac{\sqrt{12-c}}{\sqrt{c-4}}$$

Como $f(c) = \dfrac{\sqrt{12-c}}{\sqrt{c-4}}$ entonces el $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$

Luego, f es continua en $(4\,;\,12)$

- De 1. y 2. concluimos que f es continua en $(4\,;\,12]$. Por lo tanto, el mayor subconjunto de $\mathbb{R}$ donde f es continua es su dominio.

4.6.5. Teorema del Valor Intermedio

- Vamos a terminar esta unidad enunciando e interpretando una importante propiedad de las funciones continuas en un intervalo cerrado.
- Esta propiedad se denomina Teorema del Valor Intermedio y dice:

TEOREMA DEL VALOR INTERMEDIO

Si f es continua en un intervalo cerrado $[\,a;b\,]$ tal que $f(a) \neq f(b)$ y k es un número entre f(a) y f(b), entonces existe al menos un número c en $(a\,;\,b)$ para el cual $f(c) = k$.

- La figura 4 - 32 nos ayuda a comprender el teorema:

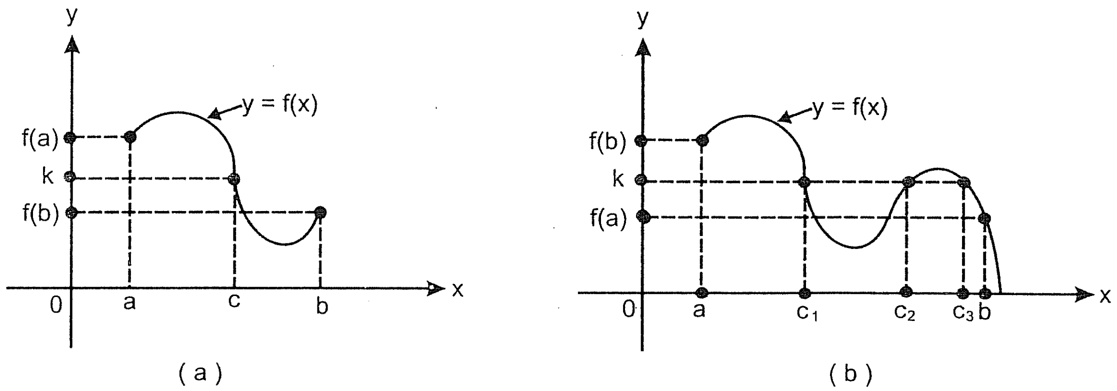


Figura 4 - 32

Si f es continua en [a ; b] y **x** recorre todos los valores desde **a** hasta **b**, entonces **f(x)** debe tomar todos los valores intermedios entre **f(a)** y **f(b).**

- Un detalle: el teorema del valor intermedio asegura la existencia de al menos un número c en el intervalo cerrado [a ; b], pero es posible que haya más de uno, como nos muestra la misma figura 4 - 32(b).

- Una interpretación sencilla de este hecho se ilustra en la figura 4 - 33: Si un joven medía 140 cm al cumplir 10 años y 180 cm al cumplir 15 años, entonces en algún momento entre estos dos cumpleaños medía 150 cm., ya que suponemos que la estatura de un ser humano varía en forma continua, sin cambios o saltos bruscos.

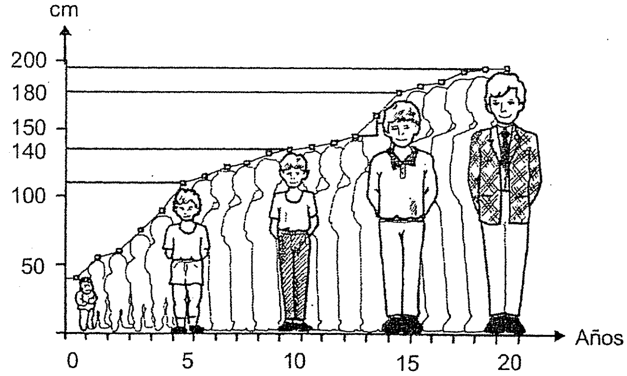
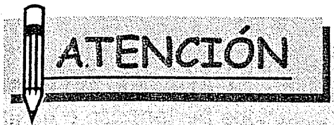


Figura 4 - 33



1. Una función discontinua en un intervalo [a; b] puede no poseer la propiedad del valor intermedio. Por ejemplo, la gráfica de la función discontinua de la figura 4 - 34 «salta» entre la recta horizontal y = k, sin que haya ningún valor c tal que f(c) = k.

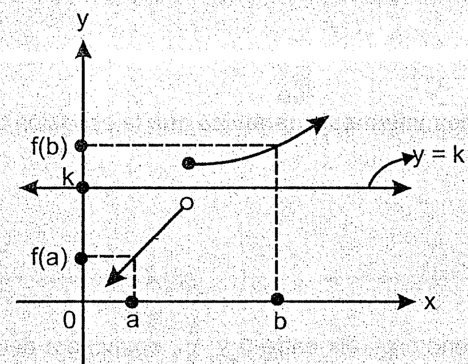


Figura 4 - 34

2. Una consecuencia muy importante del teorema del valor intermedio es el denominado **teorema de Bolzano o de las raíces**, el cual enunciamos a continuación:

> **TEOREMA DE BOLZANO**
>
> **Si una función es continua en un intervalo cerrado [a;b] y toma valores de signo opuesto en los extremos, (es decir, signo f(a) $\neq$ signo f(b)), entonces existe al menos un punto interior c $\in$ (a, b) del intervalo en el que f(c) = 0.**

Intuitivamente esta propiedad significa que la gráfica de la función corta al eje x, ya que pasa de un punto situado por «debajo» de él a otro que se encuentra «encima», o recíprocamente; figura 4 - 35:

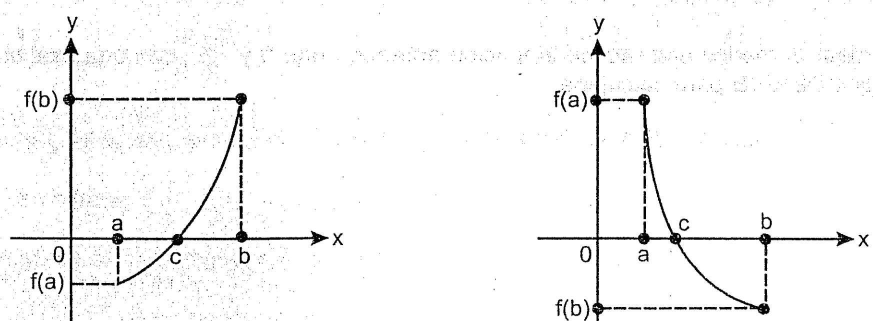


Figura 4 - 35

Ejemplo 1

Dada la función f definida por $f(x) = x^2$ en el intervalo $[2 ; 8]$:

a) Determinemos si f cumple las hipótesis del teorema del valor intermedio.
b) Si la parte a) es afirmativa, hallemos un valor para c en $[2 ; 8]$ tal que $f(c) = 16$

SOLUCIÓN

a) Como f es un polinomio y todo polinomio es continuo en $\mathbb{R}$, entonces f es continuo en $\mathbb{R}$ y, en particular, lo es en $[2 ; 8]$.

Además, $f(2) = 2^2 = 4$ y $f(8) = 8^2 = 64$; luego $f(2) \neq f(8)$.

CONCLUSIÓN: se cumplen las hipótesis del teorema del valor intermedio.

b) Como $f(2) < 16 < f(8)$, entonces 16 está entre f(2) y f(8); luego, existe al menos un $c \in (2, 8)$ tal que $f(c) = 16$. Como $f(c) = c^2 = 16$, entonces $c = \pm 4$. Finalmente, chequeamos si los valores obtenidos pertenecen o no al intervalo $(2 ; 8)$. Veamos: $4 \in (2 ; 8)$, pero $-4 \notin (2 ; 8)$; por lo tanto, el c que estamos buscando es $c = 4$.

Ejemplo 2

Demostremos que el teorema del valor intermedio garantiza que la ecuación $\text{Cos}(x) - x = 0$ tiene una raíz entre 0 y $\frac{\pi}{2}$.

SOLUCIÓN

- Demostrar que $\text{Cos}(x) - x = 0$ tiene una raíz entre 0 y $\frac{\pi}{2}$, equivale a demostrar que la función definida por $f(x) = \text{Cos}(x) - x$ tiene un cero entre 0 y $\frac{\pi}{2}$. Veamos si f cumple las hipótesis del teorema de Bolzano:

  1. f es continua en $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ ya que f es una diferencia de funciones continuas ($g(x) = \text{Cos}(x)$ y $h(x) = x$ son funciones continuas).
  2. $f(0) = \text{Cos}(0) - 0 = 1$ y $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \text{Cos}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$. Por lo tanto, $f(0) \neq f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ y además $f(0)$ y $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ tienen signo contrario.

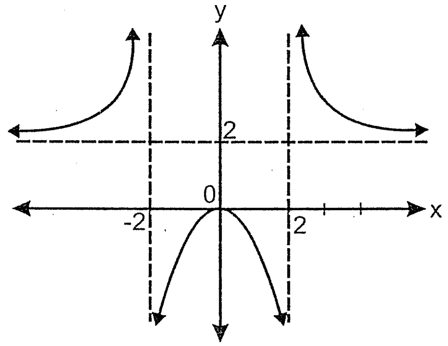
- Por lo tanto, f satisface las hipótesis del teorema de Bolzano y, en consecuencia, posee al menos una raíz **c** entre 0 y $\frac{\pi}{2}$, en la cual, $\text{Cos}(c) - c = 0$.

- **EJERCICIO**: Hallar al menos una raíz de la función anterior, entre 0 y $\frac{\pi}{2}$, con una exactitud de dos cifras decimales. Utilice DERIVE para calcularla.

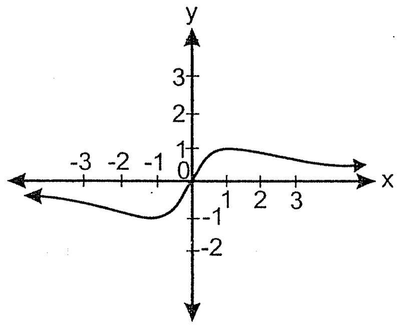
EJERCICIO 4.6

En los ejercicios 1 a 4 identificar los intervalos donde la función dada es continua.

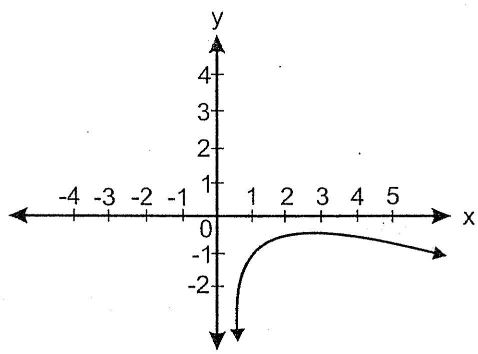
1



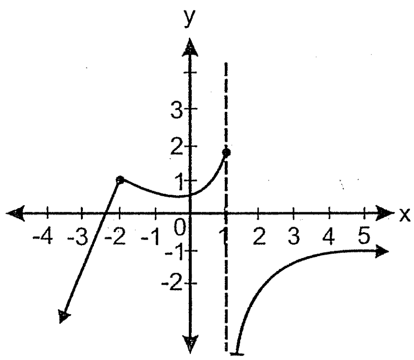
2



3



4



En los ejercicios 5 y 6, determinar si la función dada es continua o discontinua en los intervalos indicados (Recuérdese que el mayor intervalo donde una función es continua es su dominio).

5 $f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si } x < -2 \\ x - 5 & \text{si } -2 \leq x \leq 1 \\ 3 - x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a) $(-\infty ; 1)$ b) $(-2 ; +\infty)$

c) $(-2 ; 1)$ d) $[-2 ; 1]$

6 $f(x) = \sqrt{\dfrac{2-x}{x+3}}$

a) $(-3 ; 2)$ b) $[-3 ; 2)$

c) $[-3; 2]$ d) $(-3; 2]$

7 Dibujar la gráfica de una función g que cumpla todas las condiciones siguientes::

a) es continua en $(-\infty ; -3)$, $[-3 ; 5)$ y $(5 ; +\infty)$

b) $\lim\limits_{x \to -3^-} g(x) = 5$; $\lim\limits_{x \to 5^-} g(x) = 2$ y $\lim\limits_{x \to 5^+} g(x) = -3$

c) $g(-3) = -2$, $g(0) = g(5) = 1$, $g(-6) = 0$

8. Sea f la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2c & \text{si } x < -2 \\ 3cx + k & \text{si } -2 \le x \le 1 \\ 3x - 2k & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Hallar los valores de las constantes c y k para que f sea continua en todos los reales; luego, trazar la gráfica de f.

9. Comprobar que en la función dada por $f(x) = x^3 - x^2 + x - 2$, definida en el intervalo [0 ; 3] es aplicable el teorema del valor intermedio y hallar el valor de $c \in (0\ ;\ 3)$ tal que $f(c) = 4$.

10. Demostrar que la función definida por $f(x) = x^3 + 3x - 2$ tiene un cero en el intervalo [0 ; 1] y hallarlo con una exactitud de dos cifras decimales.

11. Demostrar que existe una raíz de la ecuación $\ln(x) = e^{-x}$ en el intervalo [1 ; 2].

12. Probar que la ecuación $e^x = 2 - x$ tiene por lo menos una raíz real.

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (12)

Dos números suman 20 y el cubo de uno de ellos se multiplica por el cuadrado del otro. Si uno de los números es x, se pide:

1. **Escribir una ecuación que permita expresar el producto de los dos números en función de x.**
2. **Hallar los interceptos, con el eje x, de la función obtenida.**

Taller de la Unidad 4

1 PREGUNTAS PARA REVISAR LA TEORÍA.

a) ¿Qué significa intuitivamente el $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$?

b) ¿En cualquier función f coinciden el $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ y f(a)? Explique.

c) ¿Qué significa la expresión $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$? ¿Y la expresión $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$?

d) ¿Qué ocurre con el límite de una función f si el $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to a^-} f(x)$

e) Indicar los casos en los cuales el $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ no existe.

$\dfrac{g(x)}{h(x)}$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$ y $\lim\limits_{x \to a} h(x) = 0$, ¿qué podemos afirmar del $\lim\limits_{x \to a} f(x)$?

g) Si $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$, y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = 0$, ¿qué podemos afirmar del $\lim\limits_{x \to a} f(x)$? ¿Cómo se procede en este caso?

h) Si $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ y $\lim\limits_{x \to a} h(x) \neq 0$, ¿qué podemos afirmar del $\lim\limits_{x \to a} f(x)$?

i) ¿Qué condiciones deben cumplirse para determinar que una función f es continua en x = a?

j) ¿Cuándo una función tiene discontinuidad esencial en x=a?

k) ¿Cuándo una función tiene discontinuidad evitable en x=a?

l) ¿Qué debe hacerse para que una función de discontinuidad evitable en x = a, se vuelva continua en x = a?

m) ¿Cuándo una función es continua en un intervalo abierto (a ; b)?

n) ¿Cuándo una función es continua en un intervalo semicerrado [a ; b)? ¿Y en un intervalo semicerrado (a ; b]?

o) ¿Cuándo una función es continua en el intervalo cerrado [a ; b]?

p) ¿Dónde son continuas las funciones polinómicas?

q) ¿Dónde son continuas las funciones racionales? ¿Las funciones trigonométricas? ¿Las funciones exponenciales? ¿Las funciones logarítmicas?

r) ¿Cuál es el mayor intervalo donde una función es continua?

s) ¿Qué establece el teorema del valor intermedio? ¿Y el teorema de Bolzano?

En los ejercicios **2** a **12** determinar si las proposiciones dadas son verdaderas o falsas y justificar las respuestas.

2 Si f es una función definida por $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & \text{si } x<2 \\ 5 & \text{si } x = 2 \\ 2x + 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ entonces el $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 5$

3 Existen funciones en las cuales el $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

4 Para que el $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ exista es necesario que f(a) exista.

5 El $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x^2} \cdot x\right) = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x^2}\right) \cdot \lim\limits_{x \to 0} (x)$

6 El $\lim\limits_{x \to 3} \begin{cases} x + 3 & \text{si } x \neq 3 \\ 8 & \text{si } x = 3 \end{cases}$ es 6

7 Si f es una función tal que el $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, entonces f es continua en x = a.

8 Si $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases}$, entonces f es discontinua en x = 1

9 La función $f: \mathbb{R} - \{3\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$ es continua en $x = 1$

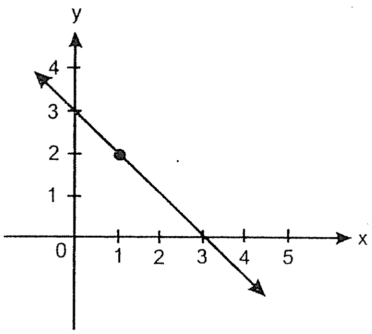
10 Si f es una función tal que el $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ y $f(a) = M$, con $L \neq M$, entonces f es de discontinuidad esencial en $x = a$.

11 Sea f una función cuyo dominio es el intervalo [-2 ;3]. Si f es continua en el intervalo [-2 ;1]., entonces f es continua en $x = 1$.

12 Si la suma de dos funciones es continua en $x = a$, entonces cada una de ellas es continua en $x = a$.

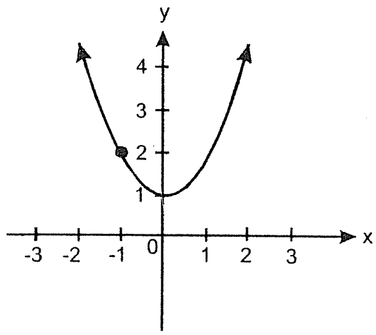
En los ejercicios **13** a **18** determinar a partir de la gráfica el límite indicado.

13



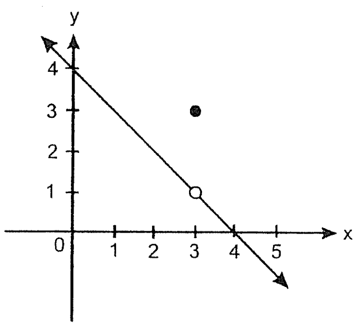
$\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

14



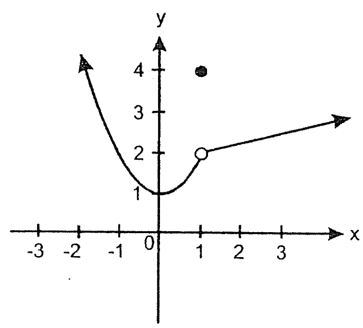
$\lim\limits_{x \to -1} f(x)$

15



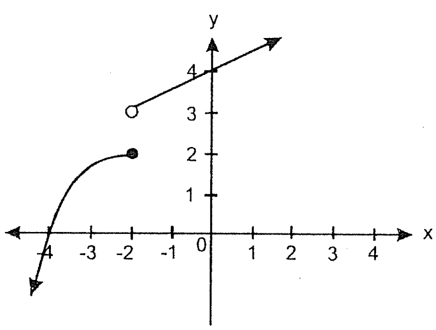
$\lim\limits_{x \to 3} f(x)$

16



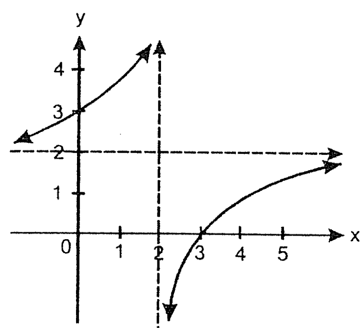
$\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

17



$\lim\limits_{x \to -2} f(x)$

18



$\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

En los ejercicios **19** a **26**, calcular los límites indicados sabiendo que el $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \frac{3}{2}$ y el $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \frac{1}{2}$.

19 $\lim\limits_{x \to a} [4 f(x)]$

20 $\lim\limits_{x \to a} [f(x) + g(x)]$

21 $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)]$

22 $\lim\limits_{x \to a} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]$

23 $\lim\limits_{x \to a} [f(x)]^3$

24 $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{g(x)}$

25 $\lim\limits_{x \to a} [3 g(x)]$

26 $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[3]{[f(x)]^2}$

En los ejercicios **27** a **51**, calcular, si existen, los siguientes límites:

27 $\lim\limits_{x \to -2} \left(3x^3 - 2x + 7\right)$

28 $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{2x^2 + 5x - 3}{6x^2 - 7x + 2}$

29 $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - x - 12}$

30 $\lim\limits_{t \to -2} \dfrac{2 - 3t - 2t^2}{16 + 16t - t^2}$

31 $\lim\limits_{y \to -2} \dfrac{y^3 + 8}{y + 2}$

32 $\lim\limits_{x \to 4} \sqrt[3]{\dfrac{x^2 - 3x + 4}{2x^2 - x - 1}}$

33 $\lim\limits_{y \to -3} \sqrt{\dfrac{y^2 - 9}{2y^2 + 7y + 3}}$

34 $\lim\limits_{t \to \frac{3}{2}} \sqrt{\dfrac{8t^3 - 27}{4t^2 - 9}}$

35 $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 8}{x^4 - 16}$

36 $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{2 - \sqrt{4 - t}}{t}$

37 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x + 2} - \sqrt{2}}{x}$

38 $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{4 + \sqrt{x}} - 2}$

39 $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(2 + h)^{-3} - 2^{-3}}{h}$

40 $\lim\limits_{x \to 8} \dfrac{\sqrt{7 + \sqrt[3]{x}} - 3}{x - 8}$

41 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1 - \sqrt{x}}{1 - \sqrt[3]{x}}$

42 $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3 - x^2 - x + 10}{x^2 + 3x + 2}$

43 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x < 2 \\ 4 & \text{si } x = 2 \\ 4 - x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

a) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

b) $\lim\limits_{x \to -4} f(x)$

c) $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$

44 $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x < -1 \\ x^2 & \text{si } -1 \le x \le 1 \\ 1 - x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a) $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$

b) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

c) $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$

45 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^n - 1}{x - 1}$

$\lim\limits_{x \to 7} \dfrac{2 - \sqrt{x - 3}}{x^2 - 49}$

47 $\lim\limits_{x \to 64} \dfrac{\sqrt{x} - 8}{\sqrt[3]{x} - 4}$

48 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 1}{(x - 1)^2}$

49 $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2x^3 - 5x^2 - 2x - 3}{4x^3 - 13x^2 + 4x - 3}$

50 $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{3 - x}{|3 - x|}$

51 $\lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{|x + 1|}{x^3 + 1}$

52 Sea f una función tal que $f(x) = \begin{cases} 2x - a & \text{si } x < -3 \\ ax + 2b & \text{si } -3 \le x \le 3 \\ b - 5x & \text{si } x > 3 \end{cases}$

Hallar los valores de a y b de tal manera que el $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ y el $\lim\limits_{x \to -3} f(x)$ existan.

53 Usar el teorema del sanduche para hallar el $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x}\, e^{\operatorname{Sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)}$

En los ejercicios **54** a **57**, determinar los valores de x en los cuales la función es discontinua; luego, mostrar por qué la definición de continuidad no se cumple en cada caso. Finalmente, dibujar la gráfica de la función.

54 $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2+x-2}$

55 $g(x) = \dfrac{x^4-1}{x^2-1}$

56 $h(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x \le -2 \\ x-2 & \text{si } -2 < x \le 2 \\ 2-x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

57 $p(x) = \begin{cases} |4-x| & \text{si } x \ne 4 \\ -2 & \text{si } x = 4 \end{cases}$

En los ejercicios **58** y **59**, definir correctamente cada función de modo que sea continua en todos los reales

58 $f(x) = \dfrac{2x^2-3x+1}{2x-1}$

59 $f(x) = \dfrac{2x^2+x-6}{2x-3}$

60 Dada la función f definida por $f(x) = \sqrt{\dfrac{9-x^2}{4-x}}$ se pide:

a) Hallar el mayor intervalo donde f es continua.

b) Determinar si f es continua o no en los siguientes intervalos: $(-\infty\,;\,-3)$; $(-3;3)$; $[-3;3]$;$[-3;3)$; $[3;4]$; $(3\,;\,4]$; $[4\,;\,+\infty)$ y $(4;\,+\infty)$

61 Determinar los valores de las constantes a y b que hacen que la función:

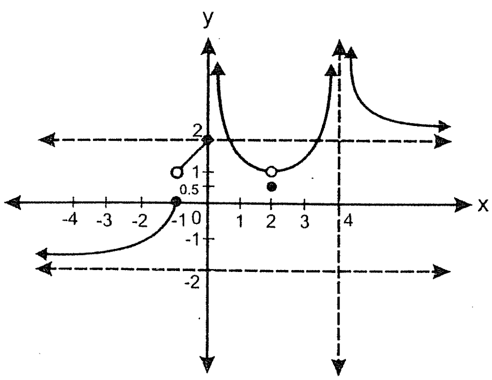
$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x \le 3 \\ ax+b & \text{si } 3 < x < 5 \\ x^2+2 & \text{si } x \ge 5 \end{cases}$$

sea continua en $(-\infty\,;+\infty)$ y dibujar la gráfica de f.

62 Demostrar que el teorema del valor intermedio garantiza que la ecuación $x^3-4x^2+x+3 = 0$ tiene una raíz entre 1 y 2. Hallar aproximadamente esa raíz con dos cifras decimales exactas.

63 Demostrar que la ecuación $e^{-x^2} = x$ tiene una raíz en el intervalo $(0\,;\,1)$.

64 Sea f una función cuya gráfica es la siguiente:



Si $f(2) = \frac{1}{2}$, $f(-1) = 0$ y $f(0) = 2$, contestar:

a) ¿Cuáles son el dominio y el rango de f?
b) ¿Cuáles son los interceptos con el eje x y con el eje y?
c) ¿Cuáles son los siguientes límites:

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x)$; $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$; $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

d) ¿En qué punto f es discontinua?
e) ¿Dónde la discontinuidad es removible?
f) ¿En qué intervalos la función es continua?

En los ejercicios **65** y **66** , determinar si las funciones dadas son continuas en el punto indicado. Si no son continuas, indicar los puntos donde la discontinuidad es esencial o removible.

65 $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{Sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } -1 < x < 1 \text{ y } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ en $x = 0$

66 $f(x) = \begin{cases} \frac{|x+3| - |x| - 3}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 4 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ en $x = 0$

67 Los cargos de envío, por correo, se basan en una fórmula que ofrece un costo inferior por unidad de peso cuando la magnitud del envío aumenta. Suponga que x es el peso, en gramos, de un envío y C(x) el costo total del mismo, donde:

$$C(x) = \begin{cases} 8x & \text{si } 0 < x \leq 50 \\ 7x & \text{si } 50 < x \leq 200 \\ 6.5x & \text{si } 0 > 200 \end{cases}$$

a) Dibujar la gráfica de C(x)

b) Calcular $\lim\limits_{x \to 50} C(x)$ y $\lim\limits_{x \to 200} C(x)$

c) Analizar continuidad en $x = 50$ y $x = 200$

68 En un parqueadero de la ciudad se cobra una tarifa de $3000 la primera hora (o fracción) y $2000 por cada hora (o fracción) subsiguiente, hasta un máximo diario de $10000. Se pide:

a) Graficar el costo de estacionar un carro en ese parqueadero, en función del tiempo de permanencia allí.
b) Analizar las discontinuidades de esta función y su significado para alguien que estacione su carro en ese parqueadero.

Las preguntas 1. y 2. se responden con base en la siguiente información:

Un reloj de arena consta de dos conos idénticos y está contenido en un cilindro circular de igual radio y altura 6 cm. El cono superior está lleno de arena.

1. Competencia: Argumentativo; Ámbito; Aleatorio.

   Es correcto afirmar que:

   a) El volumen del reloj de arena es tres veces el del cilindro.
   b) El radio de la base es 3 cm.
   c) El volumen del reloj de arena es 20 cm^3
   d) El volumen del cilindro es 3 veces el del reloj de arena.

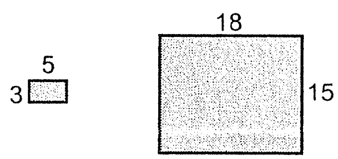
2. Competencia: Argumentativa; Ámbito: Aleatorio.

   Si en el reloj son las 6:00 p.m., entonces:

   a) Para que se acabe el día falta el 20%.
   b) Han transcurrido 360 minutos.
   c) Para que acabe el día falta $\frac{1}{3}$ de las horas que han pasado.
   d) Ha transcurrido el 75% del día.

3. Competencia: Argumentativa; Ámbito: Conteo.

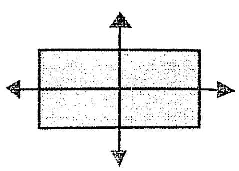
   Si queremos acomodar varias cajas de 5 x 3 en un estante de de 18 x 15, de tal forma que no quede ningún espacio libre, se puede verificar que:

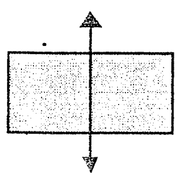


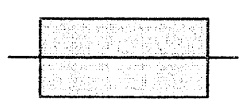
   a) Hay una sola forma de acomodarlas.
   b) La cantidad máxima de cajas que se pueden acomodar es 15.
   c) Se pueden acomodar 18 cajas.
   d) No hay forma de acomodarlas.

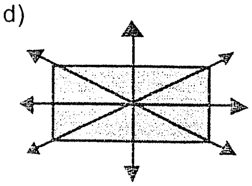
4. Competencia: Interpretativa; Ámbito: Medición.

   La figura que muestra todas las líneas de simetría que hay en un rectángulo es:

a)


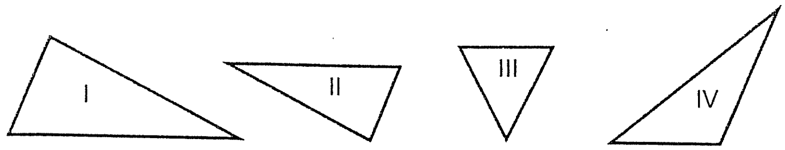
b)


c)


d)


5. Competencia: Argumentativa; Ámbito: Medición.

La pareja de triángulos semejantes es:



a) I y II
b) I y IV
c) II y III
d) III y IV

Núcleo Temático

Núcleo Temático 5

LÍMITES INFINITOS Y AL INFINITO - ASÍNTOTAS

Se desarrolla para alcanzar los siguientes logros generales

MANEJO DE CONCEPTOS

como

- $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ o $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$. Asíntota vertical.
- $\lim_{x\to +\infty} f(x) = L$ o $\lim_{x\to -\infty} f(x) = L$.
- Asíntota horizontal.
- Asíntota oblicua.
- Límites trigonométricos especiales.

para desarrollar competencia

ARGUMENTATIVA

DESTREZA OPERATIVA

a través de

- Calcular límites de la forma: $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ o $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$.
- Calcular límites de la forma $\lim_{x\to +\infty} f(x) = L$ o $\lim_{x\to -\infty} f(x) = L$.
- Eliminar indeterminaciones de la forma $\frac{\infty}{\infty}$ e $\infty - \infty$.
- Calcular límites trigonométricos especiales.
- Hallar asíntotas verticales, horizontaes u oblicuas.

para desarrollar competencia

PROPOSITIVA

DIBUJO DE GRÁFICAS

de

- Funciones Reales.

como

- Funciones polinómicas.
- Funciones racionales.
- Funciones trascendentes.
- Funciones por tramos.

a partir de

- Interceptos con los ejes.
- Simetrías con el eje y y con el origen.
- Dominio y continuidad de la curva.
- Asíntotas verticales, horizontales u oblicuas.

para desarrollar competencia

INTERPRETATIVA

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

relativos a

- Modelado de funciones.

para desarrollar competencias

- ARGUMENTATIVA
- PROPOSITIVA
- INTERPRETATIVA

LOS HOMBRES DEL CÁLCULO (5)
GOTTFRIED WILHELM LEIBNITZ

Ell genio multifacético de G. W. Leibnitz se proyectó luminosamente en la matemática. Perfeccionó el Cálculo y el Análisis Combinatorio uniendo el más elevado nivel del pensamiento en los conceptos de lo continuo y lo discontinuo.

Nació en 1646 en la ciudad de Leipzig, hijo de un profesor de Filosofía que si bien falleció cuando él tenía sólo seis años, alcanzó a sembrar en su hijo el interés por la Historia, el Derecho y la Filosofía. A la edad de 15 años entró a estudiar en la Universidad de Leipzig y se graduó en Derecho y Filosofía cinco años más tarde.

En 1672, a los 26 años de edad, conoce a Cristian Huygens quien lo orienta, con seriedad y profundidad, por el sendero matemático: Le enseña, le recomienda libros, lo estimula,... y he aquí al joven Leibnitz convertido en matemático, prácticamente autodidacta.

En 1673, en desarrollo de sus funciones como diplomático, visita la ciudad de Londres donde conoce a varios científicos y matemáticos ingleses (no a Newton, que vivía en Cambridge). Parece que no simpatizaron mayor cosa con el joven alemán, y esta primera impresión en algo debió influir, años más tarde, en la desafortunada controversia sobre la invención del Cálculo.

Entre 1674 y 1676, apasionado con el fascinante mundo de las matemáticas que acaba de descubrir, se dedica a investigar por su cuenta y es allí cuando nace el Cálculo Infinitesimal, si bien se toma diez años para publicar sus resultados, en 1684, en una revista científica fundada por él mismo, ganándole así a Newton «por una nariz».

Poco después se desata la controversia con sus poco amistosos colegas ingleses, que le amargó los últimos años de su vida.

En 1716 murió solo, pobre y abandonado...

COMPRENSIÓN DE LECTURA

EXPLICACIÓN: Lea detenidamente la anterior información y luego encierre, en un círculo la letra que corresponda a la respuesta correcta:

1. La controversia entre Leibnitz y los matemáticos ingleses fue motivada por:
   a. Viejas enemistades surgidas entre ellos en la ciudad de Londres.
   b. La rivalidad científica de la época entre Inglaterra y Alemania.
   c. La paternidad del Cálculo infinitesimal.
   d. Que Leibnitz, deslealmente, publicó en su revista, los trabajos de Newton, como si fueran suyos.

2. En la actividad intelectual de este científico se cuentan las siguientes realizaciones, con excepción de:
   a. Inventa el Cálculo Infinitesimal.
   b. Obtiene los títulos de jurisconsulto y filósofo.
   c. Perfecciona el Análisis Combinatorio y el Cálculo.
   d. Era huérfano de un profesor de filosofía.

3. Del contenido de ese fragmento se puede deducir que:
   a. Las rivalidades entre los científicos han conducido a grandes descubrimientos.
   b. Del apasionamiento del hombre por los números han surgido los grandes adelantos de las ciencias.
   c. Alemania e Inglaterra son cunas de hombres ilustres.
   d. La Filosofía despeja la mente del futuro científico.

4. De las siguientes ideas no se hace mención en el texto:
   a. La actividad creadora de los científicos europeos.
   b. El paso de Leibnitz por la administración pública de su país.
   c. La presencia de guías y tutores en la vida del futuro hombre de ciencia.
   d. Los contactos del filósofo alemán con intelectuales de otros países.

5. De las siguientes personas, quién(es) parece(n) haber ejercido mayor influencia en Leibnitz
   a. Su padre.
   b. Los profesores de la Universidad de Leipzig.
   c. Cristian Huygens.
   d. Los matemáticos ingleses.

5.1 LÍMITES INFINITOS

5.1.1. Concepto

Primera Experiencia

- En la unidad anterior estudiamos dos casos en los cuales el $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ no existe: uno, cuando el $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ y, el otro, cuando al calcular el $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ nos resulta una expresión de la forma $\frac{n}{0}$, siendo $n \neq 0$.

- Queremos ahora conocer el significado de este último tipo de límites. Consideremos la función f definida por:

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

Veamos qué ocurre con los **f(x)** cuando los valores de **x** se aproximan a 0; figura 5 - 1:

$x \to 0^-$ $\qquad\qquad$ $x \to 0^+$

x	-1	-0,5	-0,1	-0,01	-0,001	0,001	0,01	0,1	0,5	1
f(x)	1	4	100	10000	1000000	1000000	10000	100	4	1

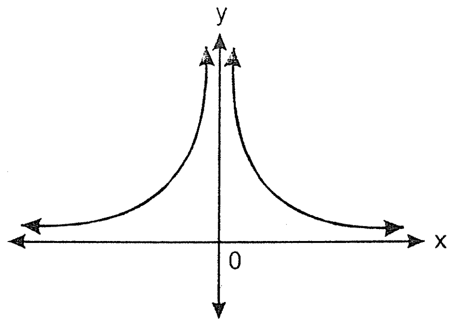


Figura 5 – 1

- La tabla y la gráfica nos muestran que cuando los valores de x se aproximan a 0 por la derecha, los valores de f(x) crecen sin límite. Escribimos:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

Así mismo, cuando x se acerca a 0 por la izquierda, los valores de f(x) también crecen sin límite y escribimos:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

- Como vemos, a medida que los valores de x se aproximan a 0 tanto por la izquierda como por la derecha, los valores de f(x) no se aproximan a ningún número real y, antes por el contrario, crecen sin ninguna limitación. En este caso, decimos que el límite NO EXISTE y escribimos:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty \text{ (no existe)}$$

Notemos que el símbolo $+\infty$ no es un número real y lo usamos sólo para indicar el comportamiento de los valores de la función que crecen sin control.

- Otro detalle: si tratamos de aplicar la propiedad del límite de un cociente a $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$, veremos que no es posible hacerlo ya que $\lim_{x \to 0} (x^2) = 0$, es decir; el límite del denominador es igual a 0. Como además, el $\lim_{x \to 0} (1) = 1$, entonces la sustitución de x por 0 nos conduce a la expresión $\frac{1}{0}$ a la cual le asignamos el símbolo ∞ para indicar tres cosas: primera, que el límite no existe; segunda, que los valores de f(x) crecen (o decrecen) sin control y tercera, que el denominador toma valores muy cercanos a cero, pero siempre diferentes de cero.

Segunda Experiencia

- Consideremos ahora la función g definida por $g(x) = \frac{-2}{(x-2)^2}$ y analicemos el comportamiento de **g(x)** cuando **x** está próximo a 2; figura 5 - 2:

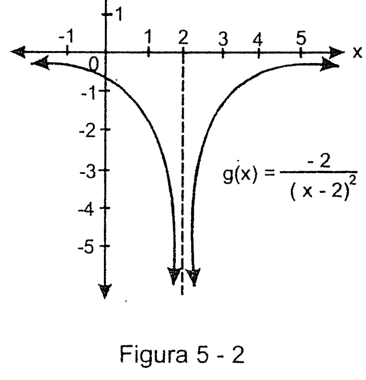


Figura 5 - 2

- La figura nos muestra que a medida que **x** toma valores próximos a 2, tanto por la derecha como por la izquierda, los valores de g(x) decrecen sin límite; es decir:

$$\lim_{x \to 2} \frac{-2}{(x-2)^2} = -\infty$$

- Si ahora sustituimos x por 2 nos queda la expresión $\frac{-2}{0}$ a la cual asignamos el símbolo $-\infty$ para indicar que el límite NO EXISTE y que los valores de g(x) decrecen sin límite a medida que los valores de x se aproximan a 2.

Tercera Experiencia

- Consideremos ahora la función h definida por $h(x) = \frac{2x}{x+3}$ y analicemos su comportamiento cuando los valores de x se aproximan a -3; figura 5 - 3:

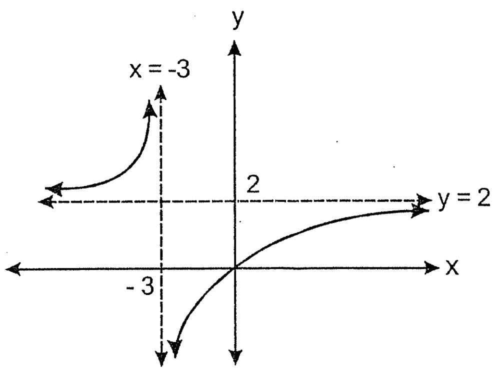


Figura 5 - 3

- La figura nos muestra que cuando los valores de x se aproximan a -3 por la izquierda, los valores de h(x) crecen sin límite. Escribimos:

$$\lim_{x \to -3^-} \frac{2x}{x+3} = +\infty$$

- Así mismo, cuando los valores de x se aproximan a -3 por la derecha, los valores de h(x) decrecen sin límite; es decir:

$$\lim_{x \to -3^+} \frac{2x}{x+3} = -\infty$$

- Si sustituyéramos x por -3, para calcular el $\lim_{x \to -3} \frac{2x}{x+3}$ nos quedaría $\frac{-6}{0}$. De nuevo, a esta expresión le asignamos el símbolo ∞ para indicar que el límite NO EXISTE y que los valores de h(x) crecen o decrecen sin límite a medida que los valores de x se aproximan a -3.

LÍMITES INFINITOS

Si al intentar calcular el $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ encontramos que $\lim_{x \to a} f(x) \neq 0$ y $\lim_{x \to a} g(x) = 0$, entonces dicho límite NO EXISTE y escribimos $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ ó $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$, según el caso.

5.1.2. Interpretación geométrica: asíntotas verticales

- Dibujemos de nuevo las gráficas de las funciones f, g y h analizadas en la sección 5.1.1:

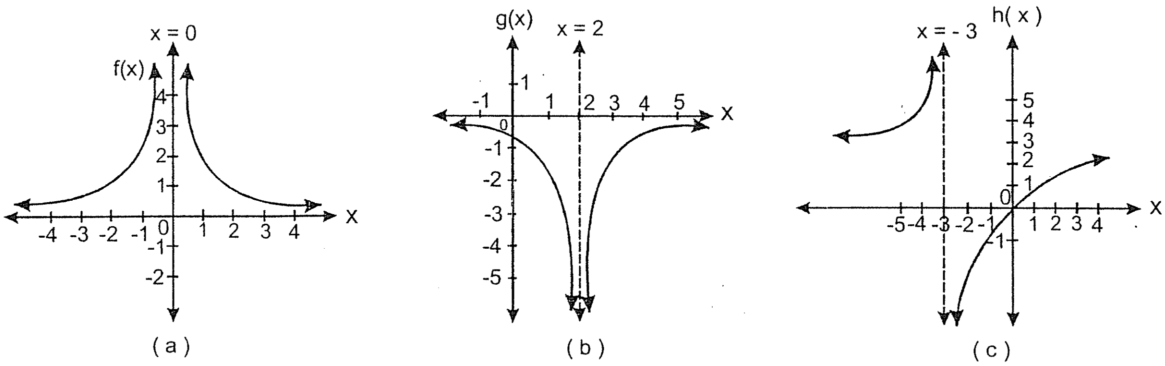


Figura 5 - 4

- La figura 5 - 4 (a) nos muestra que a medida que los valores de x se aproximan a 0, tanto por la izquierda como por la derecha, los valores de f(x) crecen sin limitación; por lo tanto:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$ **y decimos que la recta de ecuación x = 0 es una ASÍNTOTA VERTICAL**

- La figura 5 - 4 (b) nos muestra que a medida que los valores de x se aproximan a 2, tanto por la izquierda como por la derecha, los valores de g(x) decrecen sin limitación; es decir:

$$\lim_{x\to 0} \frac{-2}{(x-2)^2} = -\infty$$ **y decimos que la recta de ecuación x = 2 es una ASÍNTOTA VERTICAL**

- Finalmente, la figura 5 - 4(c) nos muestra que a medida que los valores de x se aproximan a -3 por la izquierda, los h(x) crecen sin limitación y a medida que los valores de x se aproximan a -3 por la derecha, los h(x) decrecen sin limitación. Por lo tanto:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -3^-} \dfrac{2x}{x+3} = +\infty \\ \text{y} \\ \lim\limits_{x\to -3^-} \dfrac{2x}{x+3} = -\infty \end{array}\right\}$$ **y decimos que la recta de ecuación x = -3 es una ASÍNTOTA VERTICAL**

- Los análisis anteriores nos muestran que si la distancia entre la gráfica de una función y una recta fija tiende a cero, cuando la gráfica se aleja del origen, se dice que la gráfica tiende a la recta asíntóticamente y que la recta es una ASÍNTOTA de la gráfica. Por lo tanto:

DEFINICIÓN DE ASÍNTOTA VERTICAL

Una recta x = a es una ASÍNTOTA VERTICAL de la gráfica de una función y = f(x) si se cumple por lo menos una de las siguientes proposiciones:

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$$

Ejemplo 1

Hallemos $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + 2x - 3}$ e interpretemos geométricamente el resultado.

SOLUCIÓN

- Si $f(x) = x^2 - x + 1$ entonces $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (x^2 - x + 1) = 1$

  Si $g(x) = x^2 + 2x - 3$ entonces $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (x^2 + 2x - 3) = 0$

- Por lo tanto, el límite del denominador es 0 y esta aproximación a 0 se hace a través de valores positivos de g(x), ya que por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } x = 1.5 \text{ entonces } g(x) = 2.25 \\ \text{Si } x = 1.2 \text{ entonces } g(x) = 0.84 \\ \text{Si } x = 1.1 \text{ entonces } g(x) = 0.41 \end{array}\right\} \therefore \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 2x - 3} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\overbrace{x^2 - x + 1}^{1}}{\underbrace{(x+3)}_{4}\underbrace{(x+1)}_{0^+}} = +\infty$$

$$4 \cdot 0^+$$

- En consecuencia: $\lim = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + 2x - 3} = \lim \dfrac{\overbrace{x^2 - x + 1}^{1}}{\underbrace{(x+3)(x+1)}_{0^+}} = +\infty$

- Geométricamente este resultado significa que x = 1 es una ASÍNTOTA VERTICAL de la función y cuando x se aproxima a 1 por la derecha, los valores de h(x) crecen sin limitación. Invitamos al lector a dibujar la gráfica de g y verificar esta conclusión.

Ejemplo 2

Hallemos $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{2x^2}{x^2 - 1}$ e interpretemos gráficamente el resultado.

SOLUCIÓN

- El $\lim\limits_{x\to 1^-} 2x^2 = 2$ y el $\lim\limits_{x\to 1^-} (x^2 - 1) = 0$

- Por lo tanto, el límite del denominador es 0 y esta aproximación a 0 se hace a través de valores negativos de $x^2 - 1$, ya que:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } x = 0.7 \text{ entonces } x^2 - 1 = -0.51 \\ \text{Si } x = 0.9 \text{ entonces } x^2 - 1 = -0.19 \end{array}\right\} \therefore \lim_{x\to 1^-} (x^2 - 1) = \lim_{x\to 1^-} (x+1)(x-1) = 2 \cdot 0^- = 0^-$$

- En consecuencia: $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{2x^2}{x^2 - 1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\overbrace{2x^2}^{2}}{\underbrace{(x+1)}_{2}\underbrace{(x-1)}_{0^-}} = -\infty$

- Geométricamente este resultado significa que x = 1 es una ASÍNTOTA VERTICAL de la función y cuando x se aproxima a 1 por la izquierda, los valores de la función decrecen sin limitación. La figura 5 - 5 nos muestra lo que pasa con la gráfica en las proximidades de x = 1:

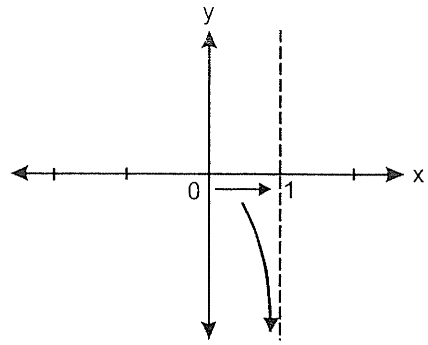


Figura 5 - 5

- Invitamos al lector a completar la gráfica de la función.

Ejemplo 3

Hallemos la(s) asíntota(s) vertical(es) de la función f definida por la regla $f(x) = \dfrac{4x-3}{x+1}$ y dibujemos un bosquejo de la gráfica.

SOLUCIÓN

- En la práctica, para hallar la(s) asíntota(s) vertical(es) de una función debemos determinar el (los) valor(es) de x que hacen 0 el denominador pero no hacen 0 el numerador. En este caso encontramos que x = -1 anula el denominador, sin anular el numerador; por lo tanto, x = -1 es una ASÍNTOTA VERTICAL.

- Para dibujar un bosquejo de la gráfica, analicemos lo que pasa cuando x se aproxima a -1 por la izquierda y por la derecha: +

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{\cancel{4x-3}^{\,-7}}{\cancel{x+1}_{\,0^-}} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{\cancel{4x-3}^{\,-7}}{\cancel{x+1}_{\,0^+}} = -\infty$$

Los símbolos 0^+ y 0^- indican lo que ocurre con el denominador cuando los valores de x se aproximan a -1 por la derecha o a -1 por la izquierda.

- La figura 5 - 6 nos muestra un bosquejo de la gráfica y lo que ocurre en las proximidades de -1:

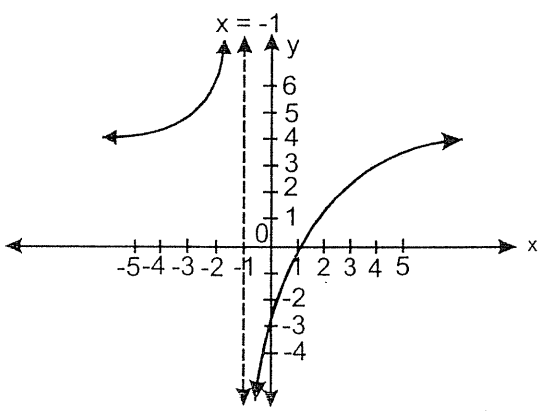
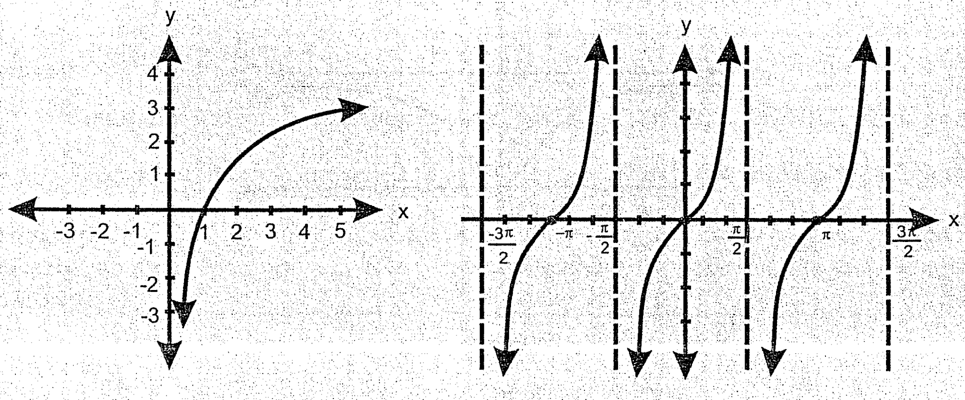


Figura 5 - 6

ATENCIÓN

- Dos funciones conocidas cuyas gráficas tienen asíntotas verticales son **y = ln(x)** y **y = tan(x).**

- La figura 5 – 7 (a) nos muestra que el $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ y, por lo tanto, la recta x = 0 (el eje y) es una asíntota vertical. Esto también es cierto para $y = \log_a(x)$, siempre que a > 1.



(a) (b)

Figura 5 - 7

- Así mismo, la figura 5 - 7(b) nos muestra que el $\lim\limits_{x\to \frac{\pi^-}{2}} \operatorname{Tan}(x) = +\infty$ y que el $\lim\limits_{x\to \frac{\pi^+}{2}} \operatorname{Tan}(x) = -\infty$; por lo tanto, la recta $x = \frac{\pi}{2}$ es una asíntota vertical. En general, las rectas $x = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$, con $n \in \mathbb{Z}$, son asíntotas verticales de y = tan(x).

Ejemplo 4

Hallemos el $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(\operatorname{sen}^2 x)$

SOLUCIÓN

- Debemos calcular el límite de una función compuesta cuya función principal es f(x) = ln(x) y la función secundaria es $g(x) = \operatorname{sen}^2(x)$.

- Como $\operatorname{sen}^2(x) \geq 0$ y el $\lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{sen}^2(x) = 0$, entonces: $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(\operatorname{sen}^2 x) = \ln\left[\lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{sen}^2(x)\right] = -\infty$

5.2 LÍMITES AL INFINITO

Hasta el momento hemos analizado el límite de una función **f** cuando **x** tiende a un número real **a**. Sin embargo, también es posible analizar el comportamiento de los valores de **f(x),** cuando **x** crece o decrece sin limitación; es decir, cuando $x \to +\infty$ o $x \to -\infty$. Estos límites revisten una gran importancia desde el punto de vista gráfico y se denominan LÍMITES AL INFINITO.

- Consideremos la función f definida por $f(x) = \dfrac{3x^2}{x^2+2}$ cuya gráfica aparece dibujada en la figura 5 - 8 y analicemos el comportamiento de los f(x) a medida que los valores de x crecen sin límite ($x \to +\infty$) y a medida que los valores de x decrecen sin límite ($x \to -\infty$) .

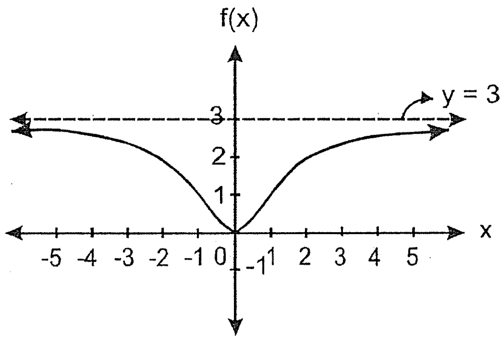


Figura 5 - 8

x decrece sin límite | x crece sin límite

x	...	-100	-20	-10	-5	-1	0	1	5	10	20	100	...
f(x)	...	2.9994	2.985	2.94	2.77	1	0	1	2.77	2.94	2.985	2.9994	...

- Si examinamos la gráfica de f y la tabla de valores, podemos deducir que a medida que x crece, tomando valores positivos, los valores de f(x) se acercan más y más a 3 de manera que mientras más grande sea x, más cerca estará f(x) a 3. Decimos, entonces, que:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 3$$

- De la misma forma, a medida que x decrece, tomando valores negativos, los valores de f(x) se acercan más y más a 3. Decimos, entonces, que:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 3$$

- La figura 5 - 8 nos muestra que la gráfica de f se aproxima a la recta y = 3, cuando x crece sin limitación (cuando $x \to +\infty$) o cuando x decrece sin limitación (cuando $x \to -\infty$). Decimos que la recta y = 3 es una ASÍNTOTA HORIZONTAL de la gráfica de f.

DEFINICIÓN DE ASÍNTOTA HORIZONTAL

Si el $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ o el $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$, entonces la recta y = L es una ASÍNTOTA HORIZONTAL de la gráfica de f.

ATENCIÓN

1. Es posible que la gráfica de una función f tenga dos asíntotas horizontales: una cuando $x \to +\infty$ y otra cuando $x \to -\infty$; figura 5 - 9

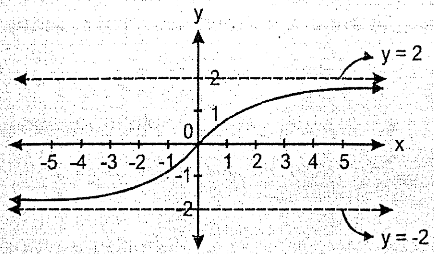


Figura 5 - 9

En este caso:

Como $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -2$ entonces la recta y = -2 es ASÍNTOTA HORIZONTAL de f.

Como $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$ entonces la recta y = 2 es ASÍNTOTA HORIZONTAL de f.

2. Los simbolos $+\infty$ y $-\infty$ no son números reales; por tanto, su álgebra no es la de los reales. Sin embargo, conviene conocer cómo «operan» con el ∞ y para comodidad del lector presentamos el siguiente cuadro:

1. $\infty + \infty = \infty$	2. $\infty + K = \infty$; con $K \in \mathbb{R}$
3. $K - \infty = -\infty$; con $K \in \mathbb{R}$	4. $K \cdot (+\infty) = \begin{cases} +\infty; \text{ con } K > 0 \\ -\infty; \text{ con } K < 0 \end{cases}$
5. $\infty \cdot \infty = \infty$	6. $\dfrac{0}{\infty} = 0$
7. $\dfrac{\infty}{0} = \infty$	8. $\dfrac{\infty}{\infty}$ es indeterminado
9. $\infty - \infty$ es indeterminado	10. $0 \cdot \infty$ es indeterminado

3. Hemos visto que el $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2}{x^2+2} = 3$ y el $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x^2}{x^2+2} = 3$ haciendo que los valores de x crezcan sin limitación $(x \to +\infty)$ o decrezcan sin limitación $(x \to -\infty)$. Pero, ¿qué pasa si aplicamos las propiedades de los límites? En primer lugar, digamos que las propiedades de los límites estudiadas en la sección 4 - 4 también son válidas si «$x \to a$» se reemplaza por «$(x \to +\infty)$» o por «$(x \to -\infty)$». En efecto:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2}{x^2+2} \quad \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} (3x^2) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} (x^2+2) = +\infty \end{cases}$$

es decir, al tratar de aplicar la propiedad del límite de un cociente hemos llegado a la expresión $\dfrac{\infty}{\infty}$ la cual es una INDETERMINACIÓN. De nuevo, es necesario eliminar la indeterminación para saber si el límite existe o no.

4. Una recomendación para eliminar indeterminaciones de la forma $\dfrac{\infty}{\infty}$ consiste en simplificar la fracción dada DIVIDIENDO EL NUMERADOR Y EL DENOMINADOR POR LA MAYOR POTENCIA DE LA VARIABLE QUE APAREZCA EN ELLA. En nuestro caso, haríamos lo siguiente:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2}{x^2+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{3x^2}{x^2}}{\dfrac{x^2}{x^2}+\dfrac{2}{x^2}}$$ .... dividimos numerador y denominador por la mayor potencia de x (que es x^2)

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{3}{1+\dfrac{2}{x^2}} \text{ .... simplificamos}$$

Como ya simplificamos, entonces aplicamos de nuevo las propiedades de los límites; así:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2}{x^2+2} = \frac{\lim\limits_{x\to+\infty} 3}{\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x^2}} \text{ .... aplicamos límite de un cociente y de una suma}$$

Tenemos: $\lim\limits_{x\to+\infty} 3 = 3$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 = 1$..................... Límite de una constante.

Nos queda faltando por evaluar el $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x^2}$. Este Límite podemos interpretarlo de la siguiente manera: tenemos una fracción cuyo numerador es una constante (2) y cuyo denominador se hace cada vez mayor; así:

$$\frac{2}{1^2}, \frac{2}{2^2}, \frac{2}{5^2}, \frac{2}{10^2}, \frac{2}{100^2}, \frac{2}{1000^2}, \frac{2}{10000^2}, \ldots$$

Si calculamos estos cocientes encontraremos que al permanecer el numerador constante y aumentar el denominador, el valor de la fracción se hace cada vez más próximo a CERO. En efecto:

$$\begin{array}{ccccccc} \dfrac{2}{1^2}, & \dfrac{2}{2^2}, & \dfrac{2}{5^2}, & \dfrac{2}{10^2}, & \dfrac{2}{100^2}, & \dfrac{2}{1000^2}, & \dfrac{2}{10000^2}, \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2, & 0.5, & 0.08, & 0.02, & 0.0002, & 0.000002, & 0.00000002, \ldots \end{array}$$

Por lo tanto, el $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2}{x^2+2} = \dfrac{3}{1+0} = 3$

Este resultado coincide con el que habíamos obtenido antes gráficamente.

5. En el ejercicio anterior hemos utilizado un caso particular de una importantísima propiedad relativa al límite de una función, cuando x tiende a infinito. En general, si f, g, h y j son funciones definidas por:

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad ; \quad g(x) = \frac{3}{x^2} \quad ; \quad h(x) = \frac{-4}{x^3} \quad ; \quad j(x) = \frac{-3}{x^{2/3}}$$

entonces:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \; ; \; \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x^2} = 0 \; ; \; \lim_{x\to-\infty} \frac{-4}{x^3} = 0 \; ; \; \lim_{x\to-\infty} \frac{-3}{x^{2/3}} = 0$$

La propiedad que nos permite asegurar la verdad de estas afirmaciones es la siguiente:

> **TEOREMA**
>
> **Si n es un número racional positivo, k es un número real cualquiera y x^n está definida cuando x < 0, entonces:**
>
> $$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{k}{x^n} = 0$$

6. Otras indeterminaciones que aparecen con frecuencia al tratar de hallar el $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ó el $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, mediante la aplicación de las propiedades de los límites, son $\infty-\infty$ y $0\cdot\infty$. Por ejemplo, al querer hallar el $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - x\right)$ encontramos que $\sqrt{x^2+x}$ crece positivamente sin control $\left(\sqrt{x^2+x} \to +\infty\right)$ y x

también crece positivamente sin control ($x \to +\infty$); por lo tanto, llegamos a una expresión de la forma $\infty - \infty$. Esta expresión es, como dijimos antes, una INDETERMINACIÓN. Para intentar eliminarla, y dado que la función es irracional, se recomienda multiplicarla y dividirla por su conjugada: $\sqrt{x^2 + x} + x$; así:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - x\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 + x} - x\right)\left(\sqrt{x^2 + x} + x\right)}{\left(\sqrt{x^2 + x} + x\right)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x}$$

Si a esta última expresión le aplicamos las propiedades de los límites, obtendríamos una indeterminación de la forma $\frac{\infty}{\infty}$ (¡comprobarlo!). Para eliminarla tengamos en cuenta que la mayor potencia de x, por la que debemos dividir el numerador y el denominador, es $\sqrt{x^2} = |x|$ y como $x \to +\infty$, entonces $x > 0$, por lo cual $|x| = x$.

En consecuencia:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - x\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x}{x}}{\frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} + \frac{x}{x}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2 + x}{x^2}} + 1}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + 0} + 1} = \frac{1}{2}$$

RESUMEN

- **Para eliminar una indeterminación de la forma $\frac{\infty}{\infty}$ procedemos así:**

  1. **Dividimos cada término del numerador y del denominador por la potencia de MAYOR EXPONENTE que aparezca en la expresión.**
  2. **Simplificamos la expresión resultante.**
  3. **Aplicamos de nuevo las propiedades de los límites.**

4. Aplicamos la propiedad $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{k}{x^n} = 0$ cuando sea necesario.

- Para eliminar una indeterminación de la forma $\infty - \infty$, cuando la expresión original es irracional, procedemos así:

1. Multiplicamos y dividimos la expresión dada por el FACTOR RACIONALIZANTE (puede ser la conjugada, el trinomio cuadrado imperfecto,...)
2. Simplificamos la expresión resultante.
3. Aplicamos de nuevo las propiedades de los límites. Si nos resulta una nueva indeterminación de la forma $\frac{\infty}{\infty}$, procedemos como en el punto anterior.

- En funciones algebraicas (no trascendentes), otras indeterminaciones como $0 \cdot \infty$ ó $\frac{\infty - \infty}{\infty - \infty}$ pueden llevarse a la forma $\frac{\infty}{\infty}$ y eliminarlas como en el primer punto.

6. La gráfica de la función exponencial $y = a^x$, con $0 < a < 1$ ó $a > 1$, tiene la recta $y = 0$ (el eje x) como asíntota horizontal; es decir:

- Si $a > 1$ entonces el $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$; figura 5 – 10(a)
- Si $0 < a < 1$ entonces el $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$; figura 5 – 10(b)

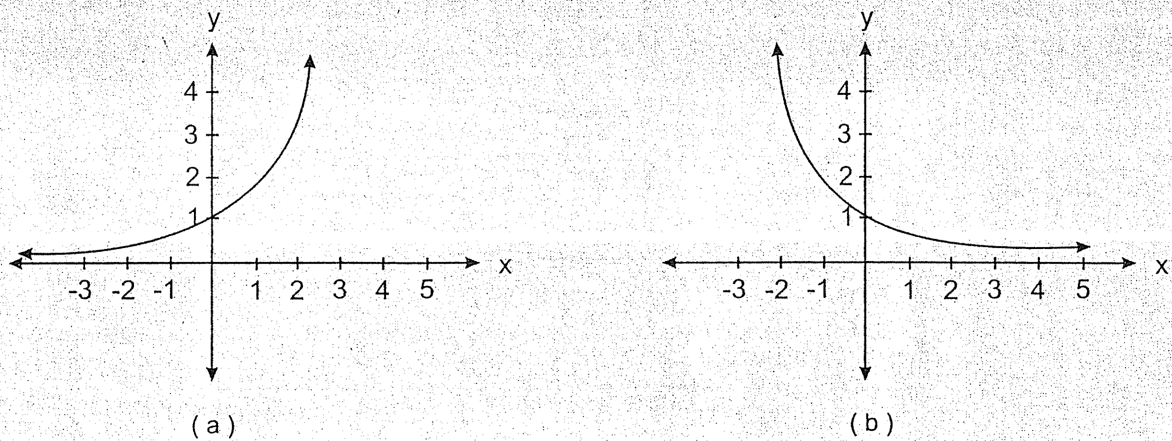


Figura 5 - 10

Ejemplo 3

Hallemos el $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{3x^2 - 8}}{2x^2 + 6}$

SOLUCIÓN

- Si calculamos los límites del numerador y del denominador cuando $x \to +\infty$, nos queda:

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{3x^2 - 8} = \sqrt{\lim_{x \to +\infty} (3x^2 - 8)} = +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} (x^2 + 6) = +\infty$$

- De nuevo, se genera una indeterminación de la forma $\frac{\infty}{\infty}$. Para eliminar esta indeterminación dividimos el numerador y el denominador por la mayor potencia de x que aparece en la expresión cuyo límite queremos calcular: x^2. Por lo tanto:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{3x^2-8}}{2x^2+6} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\sqrt{3x^2-8}}{x^2}}{\frac{2x^2+6}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{\frac{3x^2+8}{x^4}}}{\frac{2x^2+6}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{\frac{3x^2}{x^4}+\frac{8}{x^4}}}{\frac{2x^2}{x^2}+\frac{6}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{\frac{3}{x^2}+\frac{8}{x^4}}}{2+\frac{6}{x^2}} = \frac{\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{3}{x^2}+\frac{8}{x^4}}}{\lim_{x\to+\infty}\left(2+\frac{6}{x^2}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x^2}+\lim_{x\to+\infty}\frac{8}{x^4}}}{\lim_{x\to+\infty} 2+\lim_{x\to+\infty}\frac{6}{x^2}} = \frac{\sqrt{0+0}}{2+0} = \frac{0}{2} = 0$$

Ejemplo 2

Calculemos: a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$ y b) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$ e interpretemos gráficamente los resultados.

SOLUCIÓN

a) Cuando $x\to +\infty$, entonces $x\to +\infty$ y $\sqrt{x^2+2} \to +\infty$; de nuevo, llegamos a una indeterminación de la forma $\frac{\infty}{\infty}$. Para eliminar esta indeterminación tengamos en cuenta que la mayor potencia de x, por la que debemos dividir el numerador y el denominador, es $\sqrt{x^2} = |x|$ y como $x\to+\infty$, entonces $x > 0$, por lo cual $|x| = x$. Por lo tanto:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+2}}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2+2}{x^2}}}$$

$$o= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}} = \frac{\lim_{x\to+\infty} 1}{\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+0}} = \frac{1}{1} = 1$$

b) De nuevo, el cálculo de los límites del numerador y el denominador nos conduce a una indeterminación de la forma $\frac{\infty}{\infty}$. También, la mayor potencia de x es $\sqrt{x^2} = |x|$ pero, en este caso, como $x\to-\infty$, entonces $|x| = - x$. Por lo tanto:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x}{-x}}{\frac{\sqrt{x^2+2}}{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{\sqrt{\frac{x^2+2}{2}}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{\sqrt{1+\frac{x^2+2}{2}}} = \frac{\lim\limits_{x\to-\infty}(-1)}{\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{1+\frac{x^2+2}{2}}} = \frac{-1}{\sqrt{1+0}} = \frac{-1}{1} = -1$$

La interpretación geométrica de estos resultados es la siguiente:

* Como el $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} = 1$ entonces $y = 1$ es asíntota horizontal de $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$

* Como el $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} = -1$ entonces $y = -1$ es asíntota horizontal de $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$

La figura 5 - 11 nos muestra la gráfica de esta función. Observemos las dos asíntotas horizontales: $y = 1$ y $y = -1$ y el comportamiento de la curva con relación a ellas.

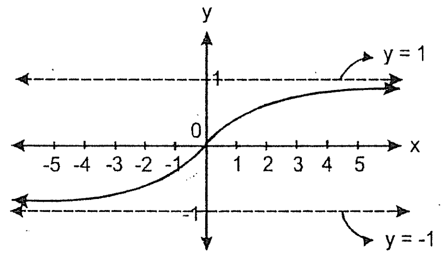


Figura 5 -11

Invitamos al lector a realizar el análisis completo de la curva y verificar la gráfica que acabamos de dibujar.

Ejemplo 3

Hallemos el $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^3+x^2} - x$

SOLUCIÓN

- Cuando x crece positivamente sin control $(x\to+\infty)$, las expresiones $\sqrt[3]{x^3+x^2}$ y x también crecen positivamente sin control; por lo tanto, llegamos a una indeterminación de la forma . Para eliminarla, multiplicamos y dividimos la función dada por el factor racionalizante de $\sqrt[3]{x^3+x^2} - x$ que es $\sqrt[3]{(x^3+x^2)^2} + x\sqrt[3]{x^3+x^2} + x^2$. Por tanto:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt[3]{x^3+x^2} - x\right)\left(\sqrt[3]{(x^3+x^2)^2} + x\sqrt[3]{x^3+x^2} + x^2\right)}{\left(\sqrt[3]{(x^3+x^2)^2} + x\sqrt[3]{x^3+x^2} + x^2\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+x^2-x^3}{\sqrt[3]{(x^3+x^2)^2} + x\sqrt[3]{x^3+x^2} + x^2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3+x^2)^2} + x\sqrt[3]{x^3+x^2} + x^2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^6+2x^5+4x^4} + \sqrt[3]{x^6+x^5} + x^2} \quad \text{............ ¿ por qué ?}$$

- Si a esta última expresión le aplicamos las propiedades de los límites, obtendríamos una indeterminación de la forma $\frac{\infty}{\infty}$ (¡comprobarlo!). Para eliminarla dividimos cada término del numerador y del denominador por la mayor potencia de x: $\sqrt[3]{x^6} = x^2$. Por lo tanto:

$$\lim_{x \to +\infty}\left(\sqrt[3]{x^3 + x^2} - x\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^6 + 2x^5 + x^4} + \sqrt[3]{x^6 + x^5} + x^2}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{\sqrt[3]{x^6 + 2x^5 + x^4}}{x^2} + \frac{\sqrt[3]{x^6 + x^5}}{x^2} + \frac{x^2}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{x^6 + 2x^5 + x^4}{x^6}} + \sqrt[3]{\frac{x^6 + x^5}{x^6}} + 1}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x}} + 1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{1 + 0 + 0} + \sqrt[3]{1 + 0} + 1} = \frac{1}{\sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{1} + 1} = \frac{1}{3}$$

Ejemplo 4

Hallemos el $\lim_{x \to 0^-} e^{1/x}$

SOLUCIÓN

- Si hacemos $f(x) = \frac{1}{x}$, entonces $y = e^{1/x}$ es una función compuesta, y podemos escribir que:

$$\lim_{x \to 0^-} e^{1/x} = e^{\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x}}$$

- Como el $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ entonces, por el ¡atención! 6. anterior, $\lim_{x \to 0^-} e^{1/x} = 0$.

EJERCICIO 5.1

En los ejercicios 1 a 13 determinar si el límite existe o no. Si no existe indicar la razón.

1. $\lim_{x \to 5^+} \frac{1}{x - 5}$
2. $\lim_{x \to 5} \frac{1}{(x - 5)^2}$
3. $\lim_{x \to 1^+} \frac{x + 2}{1 - x}$
4. $\lim_{x \to -1^+} \frac{x - 2}{x + 1}$
5. $\lim_{x \to -4^-} \frac{x}{x + 4}$
6. $\lim_{x \to -3^-} \frac{4x}{9 - x^2}$
7. $\lim_{y \to 2^+} \frac{y + 2}{y^2 - 4}$
8. $\lim_{y \to 2^-} \frac{y + 2}{y^2 - 4}$
9. $\lim_{x \to 0^-} \frac{\sqrt{3 + x^2}}{x}$

10 $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{\sqrt{x^2-9}}{x-3}$ 11 $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{4}{x}\right)$ 12 $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{2-4x^3}{5x^2+3x^3}$

13 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}-1}$

En los ejercicios 14 a 29 hallar, si existen, los límites indicados.

14 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x+1}{5x-2}$ 15 $\lim\limits_{a \to -\infty} \dfrac{4a^2+3}{2a^2-1}$ 16 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2-2x+5}{x^2-5x-3}$

17 $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2-2x+5}{8x^3+x+2}$ 18 $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x+4}{3x^2-5}$ 19 $\lim\limits_{y \to +\infty} \dfrac{2y^2-3y}{y+1}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \left(3x + \dfrac{1}{x^2}\right)$ 21 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+4}}{x+4}$ 22 $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-2x+3}}{x+5}$

23 $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$ 24 $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{3m^2+m}-2m\right)$ 25 $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+x}-\sqrt[3]{x^3+1}\right)$

26 $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2-x\right)$ 27 $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{Sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ 28 $\lim\limits_{x \to \frac{\pi^+}{2}} e^{\operatorname{Tan} x}$

29 $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{Sen}(x)$

En los ejercicios 30 a 35 hallar las asíntotas verticales y/o horizontales de la función dada. Luego dibujar la gráfica a partir de elementos como: los interceptos con los ejes, las simetrías con los ejes y con el origen, el dominio y el rango.

30 $f(x) = \dfrac{x-1}{x}$ 31 $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x^2-4}}$ 32 $f(x) = \dfrac{4x^2}{x^2-9}$

33 $f(x) = \dfrac{4x^2}{\sqrt{x^2-2}}$ 34 $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2+1}$ 35 $f(x) = \dfrac{x-9}{\sqrt{4x^2+3x+2}}$

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (13)

Dos casas A y B distan horizontalmente entre sí 30 metros y están situadas a un mismo lado de una tubería principal de agua y a distancia de 10 y 50 metros, respectivamente, de dicha tubería. Se les va a instalar agua, llevándola desde un mismo punto P de la tubería principal. Si x es la distancia desde P a uno de los puntos situados sobre la tubería, correspondientes a la distancia desde una de las dos casas a ella, se pide:

1. **Dibujar el problema.**
2. **Escribir una ecuación que permita hallar la longitud de la tubería en función de la x.**

5.3 ASÍNTOTAS OBLICUAS

- En la sección anterior utilizamos el concepto de límite para obtener las asíntotas verticales y/o horizontales de una función dada.

- Aparte de las asíntotas horizontales y verticales existe otro tipo de asíntotas, las cuales se denominan ASÍNTOTAS OBLICUAS, por ser rectas inclinadas respecto al eje x. Una mirada a la figura siguiente nos ayudará a reconocer este tipo de asíntotas:

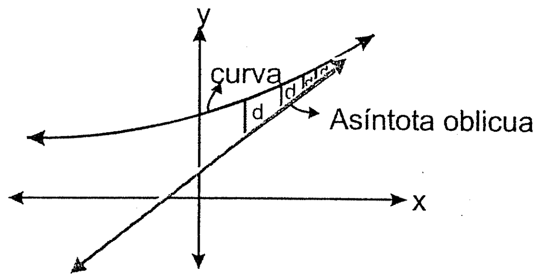
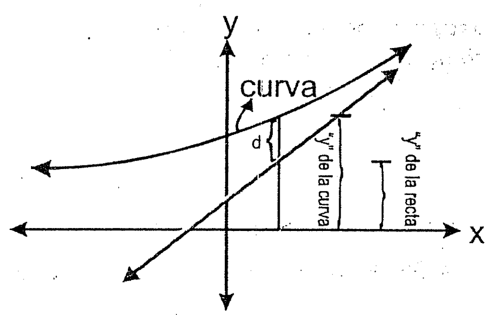


Figura 5 - 12

- Notemos que a medida que la recta y la curva se alejan más y más (hacia el infinito) la distancia (d) entre ellas es cada vez menor (tiende a 0). Por lo tanto, la recta es una asíntota de la curva. Como esta asíntota no es ni vertical ni horizontal, entonces se denomina ASÍNTOTA OBLICUA.

- Ahora una pregunta: ¿cómo determinamos la ecuación de una asíntota oblicua (en caso de que exista) cuando conocemos la función y = f(x) que supuestamente la tiene? Para contestar esta pregunta conviene tener en cuenta que la forma general de una recta oblicua es $y = mx + b$, donde $m \neq 0$ es la pendiente y b es el intercepto con el eje y. Debemos pues, hallar los valores de m y b. Con este fin observemos de nuevo la figura 5 - 12:



- Como vemos, la distancia d es la diferencia entre la ordenada **y** de la curva y la ordenada **y** de la recta; es decir:

$$d = f(x) - (mx + b) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$\therefore m = \frac{f(x)}{x} - \frac{b}{x} - \frac{d}{x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Como queremos saber el valor de m cuando x toma valores muy grandes, entonces aplicamos límites, cuando $x \to +\infty$, a ambos lados de la igualdad (2):

$$\therefore \quad \lim_{x\to+\infty} m = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} - \overset{=0}{\cancel{\lim_{x\to+\infty}\frac{b}{x}}} - \overset{=0}{\cancel{\lim\frac{d}{x}}}$$

$$\therefore \quad m = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} - 0 - 0$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{m = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}}$$

siempre que este límite exista y sea diferente de 0 (¿qué pasa si el límite es 0?)

Para hallar el valor de b, tomamos de nuevo la igualdad (1) y despejamos b; así:

$$d = f(x) - (mx + b)$$

$$\therefore \quad b = f(x) - mx - d \qquad (3)$$

$$\therefore \quad \text{Lim } b = \text{Lim } [f(x) - mx - d]$$

$$\therefore \quad b = \lim_{x \to +\infty} \left[(f(x) - mx) - d \right]$$

$$\therefore \quad b = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx) - \underbrace{\lim_{x \to +\infty} d}_{=0}$$

$$\therefore \quad b = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx) - 0$$

$$\therefore \quad \boxed{b = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx)}$$

¿Por qué el $\lim\limits_{x \to +\infty} d = 0$?

- De la misma manera, si en las igualdades (2) y (3) tomamos límite cuando $x \to -\infty$, llegamos a que:

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad y \qquad b = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - mx)$$

ATENCIÓN

Los valores de m y b pueden coincidir o ser diferentes cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$. Si son iguales significa que f tiene sólo una asíntota oblicua; si son diferentes, f tiene dos asíntotas oblicuas.

- **Una ASÍNTOTA OBLICUA es una recta cuya ecuación tiene la forma:**

$$y = mx + b$$

Si una función f tiene asíntota(s) oblicua(s), los valores de m y b se obtienen así:

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - mx)$$

Ejemplo 1

Determinemos si la función f definida por la regla $f(x) = \dfrac{x^2 + 2}{x}$ tiene asíntotas oblicuas y hallarlas. En caso de que las tenga, dibujemos un bosquejo de la gráfica mostrando el comportamiento de la curva y la recta en el infinito.

SOLUCIÓN

- Si f tiene asíntota(s) oblicua(s) son de la forma y = mx + b, donde:

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$\therefore \quad m = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{x^2+2}{x}}{x}$$

$$\therefore \quad m = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+2}{x^2}$$

$$\therefore \quad m = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{x^2+2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}}$$

$$\therefore \quad m = \lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{2}{x^2}\right)$$

$$\therefore \quad m = 1 + 0 = 1$$

Por lo tanto, $m = 1 \neq 0$. Ahora, hallemos el valor de b:

$$b = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - mx)$$

$$\therefore \quad b = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x^2+2}{x} - x\right)$$

$$\therefore \quad b = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+2-x^2}{x}$$

$$\therefore \quad b = \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{x}$$

$$\therefore \quad b = 0$$

Luego, una asíntota oblicua es y = x.

- Averiguamos si f tiene otra asíntota oblicua calculando los mismos límites anteriores cuando $x \to +\infty$. En este caso, cada lector podrá verificar que los valores de m y b son los mismos obtenidos antes; es decir, m = 1 y b = 0 (**¡Atención!**: no siempre dan los mismos límites cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$).

- **CONCLUSIÓN:** la función f definida por $f(x) = \frac{x^2+2}{x}$ tiene una asíntota oblicua: y = x.

- Para analizar el comportamiento de la curva respecto a la recta; es decir, para saber si la curva está por encima o por debajo de la recta, cuando $x \to +\infty$ o cuando $x \to -\infty$, podemos hacer lo siguiente:

  * Asignemos a x un valor relativamente grande positivo (por ejemplo, x = 100) y comparemos el valor de la **y** de la curva con el de la **y** de la recta:

$$\text{Si } x = 100 \text{ entonces } \begin{cases} y \text{ de la recta} = 100 \\ y \text{ de la curva} = \dfrac{100^2+2}{100} = \dfrac{10002}{100} = 100.02 \end{cases}$$

  Este análisis nos muestra que a medida que x toma valores positivos muy grandes, la **y** de la recta es menor que la **y** de la curva. Esto indica que cuando $x \to +\infty$, la recta queda por debajo de la curva.

* Ahora asignemos a x un valor relativamente grande negativo (por ejemplo, x = -100) y comparemos el valor de la **y** de la curva con el de la **y** de la recta:

$$\text{Si } x = -100 \text{ entonces } \begin{cases} y \text{ de la recta} = -100 \\ y \text{ de la curva} = \dfrac{(-100)^2+2}{-100} = -100.02 \end{cases}$$

Este análisis nos muestra que a medida que x toma valores negativos muy grandes, la **y** de la recta es mayor que la **y** de la curva. Esto indica que cuando $x \to -\infty$, la curva queda por debajo de la recta.

- Teniendo en cuenta las conclusiones anteriores, podemos dibujar el siguiente bosquejo de la curva:

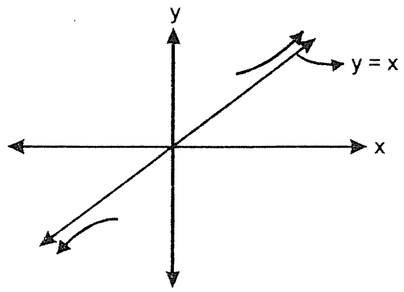


Figura 5 - 13

Ejemplo 2

Hallemos las asíntotas oblicuas de la función f definida por la regla $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x+1}$ y dibujemos un bosquejo de la gráfica mostrando el comportamiento de la curva y la recta en el infinito.

SOLUCIÓN

- Si trabajamos como en el ejemplo anterior, encontramos que y = x - 1 es una asíntota oblicua.
- Observemos un detalle: tanto en este ejemplo como en el anterior, la función f es racional con el GRADO DEL NUMERADOR UNA UNIDAD MAYOR QUE EL GRADO DEL DENOMINADOR. Si en ambos casos efectuamos la división, obtenemos:

$$\text{Si } f(x) = \frac{x^2+2}{x} \text{ entonces } f(x) = x + \frac{2}{x}$$

$$\text{Si } f(x) = \frac{x^2+3}{x+1} \text{ entonces } f(x) = x - 1 + \frac{4}{x+1}$$

PROPIEDAD

Si f es una función tal que $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$, donde g y h son funciones polinómicas, con el grado de g una unidad mayor que el grado de h, entonces f tiene una asíntota oblicua cuya ecuación es el cociente de dividir g(x) con h(x); es decir,

Si $\dfrac{g(x)}{h(x)} = c(x) + \dfrac{m(x)}{g(x)}$ entonces y = c(x) es la ASÍNTOTA OBLICUA de f.

- Analicemos si la curva queda por encima o por debajo de la recta cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$:

  * Si x toma un valor grande positivo; por ejemplo, x = 100, entonces:
$$\begin{cases} y \text{ de la recta} = 100 - 1 = 99 \\ y \text{ de la curva} = \dfrac{100^2 + 3}{100 + 1} = \dfrac{10003}{101} \approx 99.04 \end{cases}$$

  Este análisis nos muestra que a medida que **x** toma valores positivos muy grandes, la **y** de la recta es menor que la **y** de la curva; luego, la curva queda por encima de la recta.

  * Si x toma un valor grande negativo; por ejemplo, x = -100, entonces:
$$\begin{cases} y \text{ de la recta} = -100 - 1 = -101 \\ y \text{ de la curva} = \dfrac{(-100)^2 + 3}{(-100) + 1} = \dfrac{10003}{-99} \approx 101.04 \end{cases}$$

  Este análisis nos muestra que a medida que x toma valores negativos muy grandes, la **y** de la recta es mayor que la **y** de la curva; luego, la curva queda por debajo de la recta.

  * Con base en la información anterior, el lector dibujará un bosquejo de la gráfica de la función.

Ejemplo 3

Hallemos las asíntotas oblicuas de la gráfica de $y = \sqrt{x^2 - 25}$

SOLUCIÓN

- En primer lugar, hallemos el valor de la pendiente m:

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 25}}{x}$$

$$\therefore \quad m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\dfrac{\sqrt{x^2 - 25}}{\sqrt{x^2}}}{\dfrac{x}{\sqrt{x^2}}}$$

$$\therefore \quad m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\dfrac{\sqrt{x^2 - 25}}{|x|}}{\dfrac{x}{|x|}}$$

$$\therefore \quad m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\dfrac{\sqrt{x^2 - 25}}{-x}}{\dfrac{x}{-x}}$$

$$\therefore \quad m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{\dfrac{x^2 - 25}{x^2}}}{\dfrac{x}{-x}}$$

$$\therefore \quad m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{1 - \dfrac{25}{x^2}}}{-1}$$

$$\therefore \quad m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{1-0}}{-1}$$

$$\therefore \quad m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$$

- Ahora hallemos el valor de b:

$$b = \lim_{x \to -\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \to -\infty} \left[\sqrt{x^2 - 25} + x\right]$$

$$\therefore \quad b = \lim_{x \to -\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \to -\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 - 25} + x\right)\left(\sqrt{x^2 - 25} - x\right)}{\sqrt{x^2 - 25} - x}$$

$$\therefore \quad b = \lim_{x \to -\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 25 - x^2}{\sqrt{x^2 - 25} - x}$$

$$\therefore \quad b = \lim_{x \to -\infty} [f(x) - mx] = 0 \quad \text{(¡verificar el resultado!)}$$

- Por lo tanto: $y = -x + 0$ ó $y = -x$ es una asíntota oblicua.
- En forma similar podemos probar que si $x \to +\infty$, entonces $y = x$ es otra asíntota oblicua de $y = \sqrt{x^2 - 25}$.
- **CONCLUSIÓN**: La función $y = \sqrt{x^2 - 25}$ tiene dos asíntotas oblicuas: $y = x$ y $y = -x$
- La siguiente es la gráfica de esta función; figura 5 – 14:

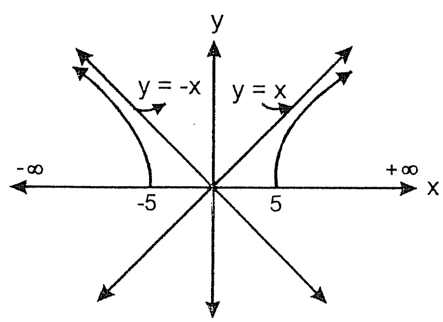


Figura 5 - 14

EJERCICIO 5.2

Para cada una de las funciones de los ejercicios 1 a 6 se pide:

a) Utilizar el concepto de límite para hallar, si existen, las asíntotas verticales, horizontales u oblicuas.

b) Hallar los interceptos con los ejes y analizar las simetrías de la función.

c) Hallar el dominio y el rango de la función.

d) Dibujar la gráfica de cada una.

1 $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ 2 $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$ 3 $f(x) = \sqrt{x^2 - 16}$

4 $f(x) = \dfrac{3x}{(x+8)^2}$ **5** $f(x) = \dfrac{2x^3 - 5x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1}$ **6** $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2 - x - 2}$

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (14)

Se dispone de un alambre de 1 m de longitud. Si lo partimos en dos trozos con el fin de formar un cuadrado y un triángulo equilátero y llamamos x la longitud del trozo con el cual vamos a construir el cuadrado, se pide:

1. **Dibujar el problema**
2. **Escribir una ecuación que permita hallar la suma de las áreas de las dos figuras en función de x.**
3. **¿Cuál es el dominio de la función donde el problema tiene sentido?**

5.4 LÍMITES ESPECIALES

Vamos a terminar esta unidad estudiando cuatro límites que juegan un papel muy importante en el desarrollo del concepto de DERIVADA de una función, que estudiaremos en la próxima unidad. Estos cuatro límites son los siguientes:

1. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Si f es una función definida por y = f(x) y el $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ existe, entonces obtenemos una nueva función denominada la DERIVADA de f. Esta nueva función se simboliza por **f'(x)**. En la unidad seis estudiaremos con detalle este concepto y la razón por la cual a este límite se le denomina la derivada de f. Por lo pronto, haremos un tratamiento puramente operativo.

Ejemplo 1

Si $f(x) = 3x^2 - 4x$, hallemos f'(x).

SOLUCIÓN

- Como $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ entonces debemos hallar f(x + h) y f(x).
- Tenemos: $f(x + h) = 3(x + h)^2 - 4(x + h)$ y $f(x) = 3x^2 - 4x$. Por lo tanto:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{3(x+h)^2 - 4(x+h) - (3x^2 - 4x)}{h}$$

$$\therefore \quad f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{3(x^2 + 2h + h^2) - 4x - 4h - 3x^2 + 4x}{h}$$

$$\therefore \quad f\,f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{3x^2 + 6hx + 3h^2 - 4x - 4h - 3x^2 + 4x}{h}$$

$$\therefore \quad f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{h(6x + 3h - 4)}{h}$$

$$\therefore \quad f'(x) = 6x - 4$$

- Luego, la derivada de $f(x) = 3x^2 - 4x$ es $f'(x) = 6x - 4$

Ejemplo 2

Hallemos g'(x) sabiendo que $g(x) = \sqrt{x-3}$

SOLUCIÓN

- Como $g'(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{g(x+h) - g(x)}{h}$ entonces $g(x+h) = \sqrt{x+h-3}$ y $g(x) = \sqrt{x-3}$
- Reemplazando g(x + h) y g(x) nos queda:

$$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h-3} - \sqrt{x-3}}{h}$$

$$\therefore\quad g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt{x+h-3} - \sqrt{x-3}\right)\left(\sqrt{x+h-3} + \sqrt{x-3}\right)}{h\left(\sqrt{x+h-3} + \sqrt{x-3}\right)}$$

$$\therefore\quad g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt{x+h-3}\right)^2 - \left(\sqrt{x-3}\right)^2}{h\left(\sqrt{x+h-3} + \sqrt{x-3}\right)}$$

$$\therefore\quad g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h-3) - (x-3)}{h\left(\sqrt{x+h-3} + \sqrt{x-3}\right)}$$

$$\therefore\quad g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}\left(\sqrt{x+h-3} + \sqrt{x-3}\right)}$$

$$\therefore\quad g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h-3} + \sqrt{x-3}}$$

$$\therefore\quad g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x-3} + \sqrt{x-3}} \qquad \frac{1}{2\sqrt{x-3}} \qquad \frac{\sqrt{x-3}}{2(x-3)}$$

- Luego, la derivada de $g(x) = \sqrt{x-3}$ es $g'(x) = \dfrac{\sqrt{x-3}}{2(x-3)}$

2. $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{\text{Sen}(\theta)}{\theta}$

Sea θ un ángulo en posición normal, medido en radianes. Debemos hallar el **límite del seno de un ángulo dividido por el ángulo, cuando el ángulo tiende a 0.**

- Si elaboramos una tabla de valores, haciendo que θ tome valores próximos a CERO por la izquierda y por la derecha, veremos que los valores de $\dfrac{\text{Sen}(\theta)}{\theta}$ se aproximan a 1:

$x \to 0^-$ $\qquad$ $x \to 0^+$

θ	-0.5	-0.4	-0.3	-0.2	-0.1	$\longrightarrow$	0		$\longleftarrow$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$f(\theta) = \dfrac{\text{Sen}(\theta)}{\theta}$	0.95	0.97	0.98	0.99	0.998	$\longrightarrow$	1	1	$\longleftarrow$	0.998	0.99	0.98	0.97	0.95

Tabla 5 - 1

Teniendo en cuenta los resultados de la tabla podemos afirmar que el $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{Sen}(\theta)}{\theta} = 1$

- Ahora demostremos la verdad de esta proposición. Con este fin consideremos de nuevo la figura 5 – 15:

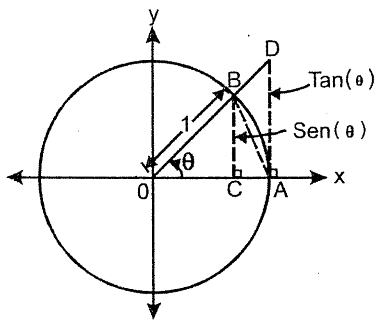


Figura 5 - 15

* De acuerdo con la figura podemos escribir que:

$$\underbrace{\text{Área del }\Delta\text{ AOB}} \le \underbrace{\text{Área del sector circular OAB}} \le \underbrace{\text{Área del }\Delta\text{ OAD}}$$

$$\underbrace{\frac{|\overline{OA}|\,|\overline{BC}|}{2}} \le \underbrace{\frac{\cancel{\pi}R^2\,\theta\,\cancel{rad}}{2\cancel{\pi}\,\cancel{rad}}} \le \underbrace{\frac{|\overline{OA}|\,|\overline{AD}|}{2}}$$

$$\underbrace{\frac{1\cdot\text{Sen}(\theta)}{2}} \le \underbrace{\frac{(1)^2\,\theta}{2}} \le \underbrace{\frac{1\cdot\text{Tan}(\theta)}{2}}$$

$$\frac{1\cdot\text{Sen}(\theta)}{\cancel{2}} \le \frac{\theta}{\cancel{2}} \le \frac{\text{Sen}(\theta)}{\cancel{2}\,\text{Cos}(\theta)}$$

* Tenemos, pues, la siguiente doble desigualdad:

$$\text{Sen}(\theta) \le \theta \le \frac{\text{Sen}(\theta)}{\text{Cos}(\theta)} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

* Si tomamos valores de θ próximos a cero, pero positivos, entonces Sen (θ) > 0 y podemos dividir ambos miembros de (1) por Sen (θ) para obtener:

$$\frac{\text{Sen}(\theta)}{\text{Sen}(\theta)} \le \frac{\theta}{\text{Sen}(\theta)} \le \frac{1}{\text{Cos}(\theta)}$$

$$\therefore \quad 1 \le \frac{\theta}{\text{Sen}(\theta)} \le \frac{1}{\text{Cos}(\theta)}$$

Y como todos los términos de esta última doble desigualdad son positivos entonces podemos escribir:

$$\text{Cos}(\theta) \le \frac{\text{Sen}(\theta)}{(\theta)} \le 1$$

* Si finalmente aplicamos el Teorema del Sanduche a esta última expresión nos queda:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\theta\to 0^+} \text{Cos}(\theta) = \text{Cos}(0) = 1 \\ \lim\limits_{\theta\to 0^+} (1) = 1 \end{array}\right\} \text{Luego, } \lim\limits_{\theta\to 0^+} \frac{\text{Sen}(\theta)}{(\theta)} = 1$$

* Nos falta demostrar que el $\lim\limits_{\theta \to 0^-} \dfrac{\text{Sen}(\theta)}{(\theta)} = 1$. Ya sabemos que $\text{Cos}(\theta) \leq \dfrac{\text{Sen}(\theta)}{(\theta)} \leq 1$, para valores de θ próximos a cero por la derecha. Veamos qué pasa si θ tiende a cero por la izquierda:

$$\text{Si } \theta < 0 \text{ entonces } -\theta > 0 \quad \text{y Cos}(-\theta) \leq \qquad \leq 1$$

Ahora bien, $\text{Cos}(-\theta) = \text{Cos}(\theta)$ y $\text{Sen}(\theta) = -\text{Sen}(\theta)$. Luego:

$$\therefore \text{Cos}(\theta) \leq \frac{-\text{Sen}(\theta)}{-\theta} \leq 1$$

$$\therefore \text{Cos}(\theta) \leq \frac{\text{Sen}(\theta)}{\theta} \leq 1$$

y aplicando de nuevo el teorema del sanduche nos queda que:

$$\lim_{\theta \to 0^-} \frac{\text{Sen}(\theta)}{\theta} = 1$$

* Queda pues demostrado que si q se mide en radianes, entonces el $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\text{Sen}(\theta)}{\theta} = 1$

EJERCICIO: Usar DERIVE para dibujar la gráfica de $f(x) = \dfrac{\text{Sen}(x)}{x}$ y observar su comportamiento en las proximidades de 0. ¿Qué puede concluir?

PARA TENER EN CUENTA

En la solución de algunos ejercicios conviene recordar las siguientes propiedades de la trigonometría:

1. IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS BÁSICAS.

$$\text{Tan } x = \frac{\text{Sen } x}{\text{Cos } x} \qquad \text{Cot } x = \frac{\text{Cos } x}{\text{Sen } x}$$

$$\text{Sec } x = \frac{1}{\text{Cos } x} \qquad \text{Csc } x = \frac{1}{\text{Sen } x}$$

2. IDENTIDADES DE ÁNGULOS DOBLES

$$\text{Sen}(2x) = 2 \text{ Sen } x \text{ Cos } x$$

$$\text{Cos}(2x) = \text{Cos}^2 x - \text{Sen}^2 x$$

$$\text{Tan}(2x) = \frac{2 \text{ Tan } x}{1 - \text{Tan}^2 x}$$

3. IDENTIDADES DE SUMA Y RESTA DE ÁNGULOS

$$\text{Cos}(x \pm y) = \text{Cos } x \text{ Cos } y \pm \text{Sen } x \text{ Sen } y$$

$$\text{Sen}(x \pm y) = \text{Sen } x \text{ Cos } y \pm \text{Sen } y \text{ Cos } x$$

$$\text{Sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \text{Cos } x$$

$$\text{Cos}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \text{Sen } x$$

Ejemplo 1

Hallemos el $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{Sen }(2x)}{x}$

SOLUCIÓN

- La sustitución directa de x por 0 nos conduce a una indeterminación de la forma $\dfrac{0}{0}$ (¡comprobarlo!). ¿Cómo eliminamos la indeterminación? Sencillo: aplicando el límite especial $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\text{Sen }(\theta)}{\theta}$. Pero, para aplicar este límite es necesario garantizar la coincidencia del ángulo en el argumento de la función Seno y en el denominador. Veamos:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{Sen}(2x)}{x} \quad \text{no coinciden}$$

- Para solucionar este inconveniente basta multiplicar el numerador y el denominador de la expresión dada por 2; así:

$$\lim \frac{\text{Sen }(2x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\text{Sen }(2x)}{2x}$$
$$= 2 \lim_{x \to 0} \frac{\text{Sen }(2x)}{2x}$$

Ahora sólo nos falta garantizar que $2x \to 0$. En general, si $x \to 0$ entonces $kx \to 0$, con $k \in \mathbb{R}$.

Por lo tanto:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{Sen}\left(2x\right)}{x} = 2 \lim_{2x \to 0} \frac{\text{Sen}\left(2x\right)}{2x}$$
$$= 2 \underbrace{\lim_{2x \to 0} \frac{\text{Sen}\left(2x\right)}{2x}}_{=1}$$
$$= 2 \cdot 1 = 2$$

Ejemplo 2

Hallemos el $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{Sen}\left(5x\right)}{\text{Sen}\left(3x\right)}$

SOLUCIÓN

- La sustitución directa de x por 0 nos conduce a una indeterminación de la forma $\dfrac{0}{0}$. Para eliminar esta indeterminación debemos «construir» en el numerador y en el denominador expresiones de la forma $\dfrac{\text{Sen}\left(\theta\right)}{\theta}$. Veamos cómo hacerlo:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{Sen}\left(5x\right)}{\text{Sen}\left(3x\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{\text{Sen}\left(5x\right)}{x}}{\dfrac{\text{Sen}\left(3x\right)}{x}} \quad \text{......................} \quad \text{dividimos numerador y denominador por x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{5\,\text{Sen}(5x)}{5x}}{\frac{3\,\text{Sen}(3x)}{3x}} \quad \text{......................} \quad \text{¿por qué?}$$

$$= \frac{5}{3} \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\text{Sen}(5x)}{5x}}{\frac{\text{Sen}(3x)}{3x}} \quad \text{......................} \quad \text{límite de una constante por una función.}$$

$$= \frac{5}{3} \cdot \frac{\overbrace{\lim_{5x \to 0} \frac{\text{Sen}(5x)}{5x}}^{=1}}{\underbrace{\lim_{3x \to 0} \frac{\text{Sen}(3x)}{3x}}_{=1}} \quad \text{.........} \quad \text{¿por qué?}$$

$$= \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{1} = \frac{5}{3}$$

- Luego, el $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\text{Sen}(5x)}{\text{Sen}(3x)} = \frac{5}{3}$

Ejemplo 3

Hallemos el $\lim\limits_{x \to \pi} \frac{\text{Sen}(x)}{x - \pi}$

SOLUCIÓN

- La sustitución directa de x por π nos conduce a una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$. Para eliminarla vamos a llevar la expresión dada a la forma $\lim\limits_{\theta \to \pi} \frac{\text{Sen}(\theta)}{\theta}$. Con este fin hacemos los siguientes cambios:

  1. Hacemos $u = x - \pi$; luego, $x = u + \pi$
  2. Como $x \to \pi$ y $x = u + \pi$ entonces $u + \pi \to \pi$, con lo cual $u \to 0$; es decir, si $x \to \pi$, entonces $u \to 0$

- Por lo tanto:

$$\lim_{x \to \pi} \frac{\text{Sen}(x)}{x - \pi} = \lim_{u \to 0} \frac{\text{Sen}(u + \pi)}{u}$$

$$= \lim_{u \to 0} \frac{\text{Sen}(u)\,\text{Cos}(\pi) + \text{Cos}(u)\,\text{Sen}(\pi)}{u} \quad \text{..........¿por qué?}$$

$$= \lim_{u \to 0} \frac{\text{Sen}(u) \cdot (-1) + \text{Cos}(u) \cdot (0)}{u} \quad \text{................¿por qué?}$$

$$a = \lim_{u \to 0} \frac{-\text{Sen}(u)}{u} = -1 \quad \text{.......................................¿por qué?}$$

3. $\lim_{\theta \to 0} \dfrac{1-\cos(\theta)}{\theta}$

- En este caso queremos calcular **el límite de 1 menos el coseno de un ángulo, dividida esta diferencia por el ángulo, cuando el ángulo tiende a 0.**
- Si intentamos sustituir θ por 0 en la expresión, obtenemos una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$. Observemos el proceso para eliminarla y calcular el límite:

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{1-\cos(\theta)}{\theta} = \lim_{\theta \to 0} \frac{(1-\cos(\theta))(1+\cos(\theta))}{\theta(1+\cos(\theta))} \text{ ...multiplicamos y dividimospor } 1 + \cos(\theta)$$

$$= \lim_{\theta \to 0} \frac{1-\cos^2(\theta)}{\theta(1+\cos(\theta))} \text{ ....¿por qué?}$$

$$= \lim_{\theta \to 0} \frac{\text{Sen}^2(\theta)}{\theta(1+\cos(\theta))} \text{ ....} 1 - \cos^2\theta = \text{Sen}^2\theta$$

$$= \lim_{\theta \to 0} \frac{\text{Sen}(\theta)\cdot \text{Sen}(\theta)}{\theta(1+\cos(\theta))} \text{ ....¿por qué?}$$

$$= \underbrace{\lim_{\theta \to 0} \frac{\text{Sen}\,\theta}{\theta}}_{=1} \cdot \underbrace{\lim_{\theta \to 0} \frac{\text{Sen}(\theta)}{1+\cos(\theta)}}_{=0} \text{ ....límite de un producto}$$

$$= (1)\cdot(0) = 0$$

- Por lo tanto: $\lim_{\theta \to 0} \dfrac{1-\cos(\theta)}{\theta} = 0$

Ejemplo 1

Hallemos el Lim $\dfrac{1 - \cos(3\theta)}{\text{Sen}(\theta)}$

SOLUCIÓN

- La sustitución directa de θ por 0 nos conduce a una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$.
- Observemos cómo se elimina la indeterminación. Conviene que el lector analice con cuidado cada paso realizado:

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{1-\cos(3\theta)}{\text{Sen}(\theta)} = \lim_{\theta \to 0} \frac{\dfrac{1-\cos(3\theta)}{\theta}}{\dfrac{\text{Sen}(\theta)}{\theta}} \text{ ....¿qué hicimos acá?}$$

$$= \lim_{\theta \to 0} \frac{\dfrac{3(1-\cos(3\theta))}{3\theta}}{\dfrac{\text{Sen}(\theta)}{\theta}} \text{ ....¿por qué?}$$

$$= \frac{\lim_{\theta \to 0} \dfrac{3(1-\cos(3\theta))}{3\theta}}{\lim_{\theta \to 0} \dfrac{\text{Sen}(\theta)}{\theta}} \text{ ....¿por qué?}$$

$$= \frac{3 \cdot \lim\limits_{3\theta \to 0} \overbrace{\frac{1-\text{Cos}(3\theta)}{3\theta}}^{=0}}{\lim\limits_{\theta \to 0} \underbrace{\frac{\text{Sen}(\theta)}{\theta}}_{=1}} \text{ ....¿por qué?}$$

$$= \frac{3 \cdot 0}{1} = \frac{0}{1} = 0$$

- Por lo tanto, el $\lim\limits_{\theta \to 1} \frac{1 - \text{Cos}(3\theta)}{\text{Sen}(\theta)} = 0$

Ejemplo 2

Hallemos $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\text{Sen}(x+h) - \text{Sen}(x)}{h}$; es decir, hallemos la derivada de f(x) = Sen(x).

SOLUCIÓN

- La sustitución directa de h por 0 nos conduce a una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$
- Veamos cómo eliminamos la indeterminación y calculemos el límite:

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{\text{Sen}(x+h) - \text{Sen}(x)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{\text{Sen}(x)\,\text{Cos}(h) + \text{Cos}(x)\,\text{Sen}(h) - \text{Sen}(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\text{Cos}(x)\,\text{Sen}(h) - (\text{Sen}(x) - \text{Sen}(x)\,\text{Cos}(h))}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\text{Cos}(x)\,\text{Sen}(h) - \text{Sen}(x)(1 - \text{Cos}(h))}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\text{Cos}(x)\,\text{Sen}(h)}{h} - \lim_{h \to 0} \frac{\text{Sen}(x)(1 - \text{Cos}(h))}{h} \\
&= \text{Cos}(x) \cdot \overbrace{\lim_{h \to 0} \frac{\text{Sen}(h)}{h}}^{=1} - \text{Sen}(x) \cdot \overbrace{\lim_{h \to 0} \frac{1 - \text{Cos}(h)}{h}}^{=0} \\
&= \text{Cos}(x) \cdot 1 - \text{Sen}(x) \cdot 0 \\
&= \text{Cos}(x)
\end{aligned}$$

- Por lo tanto, el $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\text{Sen}(x+h) - \text{Sen}(x)}{h} = \text{Cos}(x)$

ATENCIÓN

Este límite que acabamos de obtener corresponde a la derivada de la función f(x) = $\text{Sen}(x)$; es decir:

Si f(x) = Sen (x) entonces f '(x) = $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\text{Sen}(x+h) - \text{Sen}(x)}{h}$ = Cos (x)

en consecuencia, **la derivada de seno es coseno.**

4. $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{1/x}$

- Queremos calcular **el límite de una función exponencial cuya base es 1 más la variable x y cuyo exponente es el inverso multiplicativo de x, cuando la variable x tiende a cero.**

- La tabla siguiente nos muestra el comportamiento de la función $f(x) = (1 + x)^{1/x}$ cuando hacemos que x tome valores próximos a 0, tanto por la derecha como por la izquierda.

x	-0.9	-0.5	-0.4	-0.3	-0.2	-0.1	-0.01	0		0.01	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	1
$(1 + x)^{1/x}$	12.9	4	3.58	3.28	3.05	2.86	2.73	?	?	2.70	2.59	2.48	2.39	2.32	2.25	2

- Como vemos, cuando x toma valores próximos a 0, las imágenes de la función se aproximan a un número conocido: **e = 2.71**....
- Por lo tanto, el $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = e$

EJERCICIO: Usar DERIVE para dibujar la gráfica de $f(x) = (1 + x)^{1/x}$ y observar su comportamiento en las proximidades de 0. ¿Qué puede concluir?

ATENCIÓN

Si en la función $f(x) = (1 + x)^{1/x}$ hacemos el siguiente cambio de variable: $u = \frac{1}{x}$ entonces $x = \frac{1}{u}$ y como $x \to 0$ entonces $u \to \infty$. Por lo tanto:

$$\lim (1 + x)^{1/x} = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u = e$$

Ejemplo

Calculemos el $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x$

SOLUCIÓN

- Cuando x crece positivamente, la expresión $1 - \frac{2}{x}$ tiende a 1 y $\left(1 - \frac{2}{x}\right)^x$ toma la forma 1^∞, la cual es otra indeterminación.

- Para eliminar esta indeterminación procedemos así:

- Hacemos la sustitución $u = -\frac{2}{x}$, con lo cual $x = -\frac{2}{u}$. Además, si $x \to \infty$ entonces $u \to 0$.

- Por lo tanto: $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x = \lim (1 + u)^{-2/u}$

- Ahora bien:

$$\lim_{u \to 0} (1 + u)^{-2/u} = \lim_{u \to 0} \left[(1 + u)^{1/u}\right]^{-2} = \left[\lim_{u \to 0} (1 + u)^{1/u}\right]^{-2} = \frac{1}{e^2}$$

EJERCICIO 5.3

En los ejercicios 1 a 4 hallar la derivada de la función indicada.

1. $f(x) = 2x^2 - x^3$
2. $f(x) = \dfrac{2x-3}{x+1}$
3. $f(x) = \sqrt{x^2-1}$
4. $f(x) = \sqrt[3]{x}$

En los ejercicios 5 a 22 calcular los límites indicados.

5. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\text{Sen}(4x)}{x}$
6. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\text{Sen}(9x)}{\text{Sen}(7x)}$
7. $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\pi}{2} - x}{\text{Cos}(x)} \left(\text{haga } u = x - \frac{\pi}{2}\right)$
8. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 - \text{Cos}(x)}{x^2}$
9. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\text{Cos}(x) - 1}{\text{Sen}(3x)}$
10. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{3x}{1 - \text{Cos}^2\left(\frac{x}{2}\right)}$
11. $\displaystyle\lim_{x\to \pi} \frac{\text{Sen}(x)}{x - \pi} \left(\text{haga } u = x - \pi\right)$
12. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\text{Sen}(3x) - \text{Sen}(4x)}{x}$
13. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\text{Tan}\left(\frac{x}{2}\right)}{x}$
14. $\displaystyle\lim_{y\to a} \frac{\text{Cos}(y) - \text{Cos}(a)}{y - a} \left(\text{haga } u = y - a\right)$
15. $\displaystyle\lim_{\theta\to 0} \frac{\text{Csc}(2\theta)}{\text{Cot}(\theta)}$
16. $\displaystyle\lim_{y\to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \text{Sen}(y)}{\frac{\pi}{2} - y}$
17. $\displaystyle\lim_{y\to 0} \frac{\text{Sen}(y) - \text{Sen}(a)}{y - a}$

    $\left(\text{haga } u = y - a\right)$
18. $\displaystyle\lim_{z\to 1} \frac{\text{Sen}(\pi z)}{\text{Sen}(5\pi z)}$

    $\left(\begin{array}{l}\text{haga } u = \pi z \text{, con lo cual} \\ \text{si } z \to 1,\ u \to \pi\end{array}\right)$
19. $\displaystyle\lim_{y\to -2} \frac{\text{Tan}(\pi y)}{y + 2} \left(\text{haga } u = y + 2\right)$
20. $\displaystyle\lim_{y\to 0} \frac{\text{Sen}(\text{Sen } y)}{y}$

    $\left(\begin{array}{l}\text{divida numerador y denominador} \\ \text{por Sen y}\end{array}\right)$
21. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{2x+5}{2x}\right)^{3x-1}$
22. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x+3}{x+5}\right)^{x}$

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (15)

Se inscribe una esfera dentro de un cono circular recto. Si el radio de la esfera mide 8 cm y llamamos x el radio del cono y y su altura, se pide:

1. **Dibujar el problema.**
2. **Hallar el volumen del cono en función de y.**

Taller de la Unidad 5

1 Preguntas para revisar la teoría.

a) Si el $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$, ¿ qué significa gráficamente este resultado ?

b) Si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$, ¿ qué significa gráficamente este resultado ?

c) ¿Cómo sabemos si una función f tiene asíntota(s) horizontal(es)?

d) ¿Puede una función f tener dos asíntotas horizontales? Explique.

e) Si f es una función racional definida por $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$, con $h(x) \neq 0$, y el grado de g(x) es una unidad mayor que el grado de h(x), ¿ tiene f una asíntota oblicua ?

f) ¿Cómo se halla la asíntota oblicua de una función racional que la posea?

g) ¿Cómo se eliminan indeterminaciones de la forma $\frac{\infty}{\infty}$? ¿Y de la forma $\infty - \infty$?

h) ¿Cómo se halla la derivada de una función h definida por y = h(x)?

En los ejercicios **2** a **10** señalar la letra correspondiente a la ÚNICA respuesta correcta.

2 La función h definida por $h(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$:

a) Tiene asíntota oblicua: y = x - 2

b) Tiene asíntota vertical: x = -2

c) Tiene asíntota horizontal : y = 1

d) No tiene asíntotas

3 La función g definida por $g(x) = \frac{5}{(x - 3)^2}$:

a) Tiene una asíntota horizontal en y = 5

b) Tiene una asíntota vertical en x = 3

c) No tiene asíntota vertical

d) No tiene asíntota horizontal

4 El $\lim_{x \to 0} \frac{\text{Sen}\,(5x)}{x}$:

a) Es 1

b) Es $\frac{0}{0}$

c) Es 5

d) Es $\frac{1}{5}$

5 La función h definida por $h(x) = \frac{2x^3}{x^2 + 4}$:

a) Tiene una asíntota horizontal: y = 0

b) Tiene dos asíntotas verticales: x = 2 y x = -2

c) Tiene una asíntota oblicua: y = 2x

d) No tiene asíntotas.

6 El $\lim_{x \to 1^+} \frac{2x^2}{x^2 - 1}$:

a) Es 2

b) Es 0

c) Es $+\infty$

d) Es $-\infty$

7 La derivada de $f(x) = 5 - 3x + 4x^2$ es:

a) $f'(x) = 8x + 5$ b) $f'(x) = 8x - 3$

c) $f'(x) = 5 - 3x$ d) $f'(x) = 8x + 3$

8 La derivada de $f(x) = \sqrt{x-2}$ es:

a) $f'(x) = \dfrac{1}{2(x-2)^{1/2}}$ b) $f'(x) = -\dfrac{1}{2(x-2)^{1/2}}$

c) $f'(x) = \dfrac{1}{(x-2)^{1/2}}$ d) $f'(x) = -\dfrac{1}{(x-2)^{1/2}}$

En los ejercicios **9** a **28** calcular, si existen, los siguientes límites:

9 $\lim\limits_{x \to -4^-} \dfrac{x}{x+4}$ **10** $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\sqrt{3+x^2}}{x}$ **11** $\lim\limits_{x \to -3^-} \dfrac{4x}{9-x^2}$

12 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-3}}{\sqrt[3]{x^3+2}}$ **13** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$ **14** $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$

15 $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x+3}{x+\sqrt[3]{x}}$ **16** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{10+x\sqrt{x}}$ **17** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x+1}$

18 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$ **19** $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x+a} - \sqrt{x}\right)$

20 $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+x-1} - \sqrt{x^2-x+1}\right)$ **21** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+\text{Sen}(x)} - \sqrt{1-\text{Sen}(x)}}{x}$

22 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1-x^2}{\text{Sen}(\pi x)}$ **23** $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{1-2\,\text{Cos}(x)}{\pi - 3x}$ **24** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\sqrt{\text{Cos}(x)}}{x^2}$

25 $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{\text{Sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{1-2\,\text{Cos}(x)}$ **26** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \text{Sen}(3x)}{\text{Sen}(5x)}$ **27** $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{|x|}{3|x|+5}$

28 $\lim\limits_{x \to 0} (1+5x)^{3/2x}$

29 Sea f una función tal que $f(x) = \dfrac{x^3-4}{x^2}$. Se pide:

a) Hallar interceptos con los ejes.

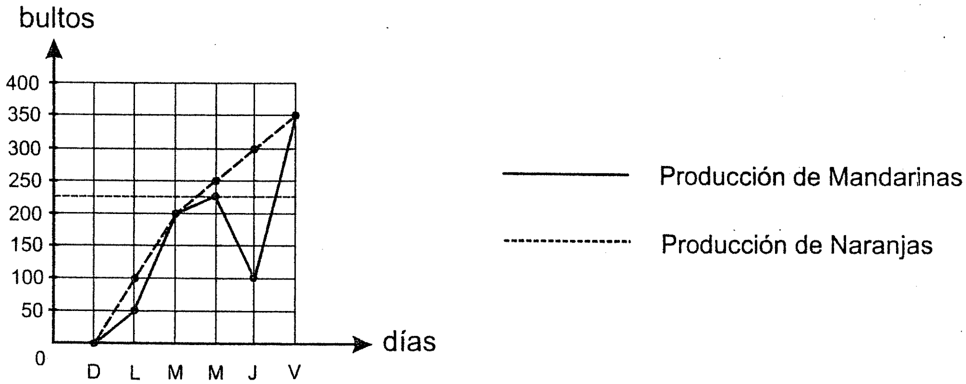
b) Analizar simetrías con el eje y y con el origen.

c) Hallar dominio de f.

d) Hallar asíntotas verticales, horizontales y/o oblicuas.

e) Utilizar la información anterior para dibujar la gráfica de f.

Las preguntas 1., 2. y 3. se contestan con base en la siguiente gráfica:



La gráfica muestra la producción total de mandarinas y naranjas, en bultos, entre domingo y viernes, de una finca.

1. Competencia: Interpretativa; Ámbito: Estadístico.

   Con relación a la producción de naranjas podemos concluir que:

   a) Alcanzó su más alto nivel de producción el día viernes.
   b) Entre lunes y miércoles la producción tuvo un aumento mayor o igual a 130 bultos.
   c) Entre domingo y martes hubo un aumento diario de 100 bultos, mientras que entre martes y miércoles la producción aumentó en 50 bultos.
   d) El lunes igualó la producción de trigo.

2. Competencia: Interpretativa; Ámbito: Estadístico.

   Suponiendo que el precio del bulto de Mandarinas es igual al precio del bulto de Naranjas, entonces si una persona quisiera invertir en uno de los dos productos:

   a) Invertiría en mandarinas porque entre jueves y viernes la producción fue superior a la de naranjas.
   b) Invertiría en naranjas ya que la producción siempre mantuvo un crecimiento, mientras que la producción de mandarinas en algunos días presentó altibajos.
   c) Invertiría en mandarinas, porque la producción semanal fue superior a la de naranjas.
   d) Invertiría en naranjas, ya que entre miércoles y jueves su producción aumentó en 75 bultos, mientras que la producción de mandarinas en este mismo período disminuyó en 125 bultos.

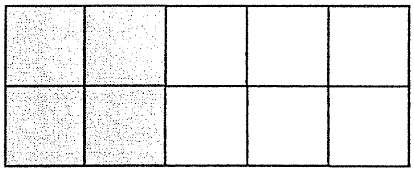
3. Competencia: Interpretativa; Ámbito: Estadístico.

   De acuerdo con el gráfico podemos concluir que:

   a) La producción de naranjas siempre fue superior o igual a la producción de mandarinas.
   b) El jueves la producción de mandarinas fue de 100 bultos.
   c) Entre lunes y miércoles la producción de mandarinas fue superior a la producción de naranjas.
   d) El miércoles la producción de naranjas igualó a la de mandarinas.

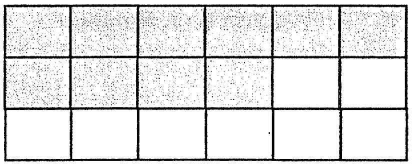
4. Competencia: Interpretativa; Ámbito: Conteo.

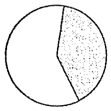
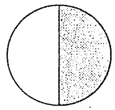
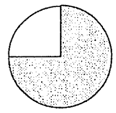
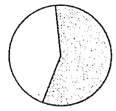
En la figura, ¿Cuántos cuadritos MÁS se requiere sombrear para que $\frac{4}{5}$ de los cuadros estén sombreados?



a) 5 b) 4 c) 3 d) 1

5. Competencia: Interpretativa; Ámbito: Conteo.



a)  b)  c)  d) 

Uno de los siguientes círculos tiene, aproximadamente, la misma región sombreada que tiene el rectángulo.

Núcleo Temático 6

LA DERIVADA

Se desarrolla para alcanzar los siguientes logros generales

MANEJO DE CONCEPTOS

como

- Recta Tangente y Normal a una curva.
- Velocidad instantánea.
- La derivada de una función en un número.
- La derivada como razón de cambio instantánea.
- Reglas de derivación.
- La regla de la cadena.
- Derivadas de orden superior.
- Derivación implícita.
- Derivación logarítmica.

para desarrollar competencia

ARGUMENTATIVA

DESTREZA OPERATIVA

a través de

- Calcular derivadas de funciones.
- Hallar pendientes de rectas tangentes a una curva y velocidades instantáneas de objetos que se mueven en línea recta.
- Aplicar la regla de la cadena.
- Hallar la segunda y la tercera derivadas de una función.
- Calcular derivadas de funciones implícitas.
- Calcular derivadas de funciones aplicando derivación logarítmica.

para desarrollar competencia

PROPOSITIVA

DIBUJO DE GRÁFICAS

de

- Funciones Reales.

como

- Funciones polinómicas.
- Funciones racionales.
- Funcion valor absoluto.
- Funciones por tramos.
- Derivada de f a partir de f.

a partir de

- Interceptos con los ejes.
- Simetrías con el eje y y con el origen.
- Dominio y continuidad de la curva.
- Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.
- Concepto de pendiente de la recta tangente en un punto.

para desarrollar competencia

INTERPRETATIVA

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

relativos a

- Modelado de funciones.
- Recta tangente y normal.
- Velocidad instantánea.
- Variación media e instantánea de una variable respecto a otra.

para desarrollar competencias

- ARGUMENTATIVA
- PROPOSITIVA
- INTERPRETATIVA

LOS HOMBRES DEL CÁLCULO (6)
ISAAC NEWTON

Isaac Newton nació en el pueblo de Woolsthorpe (Inglaterra) en la navidad de 1642. Hijo de campesinos, su padre murió antes de él nacer. A los 18 años, un tio suyo, graduado en la Universidad de Cambridge, convenció a la madre de que le permitiera ir a la misma universidad, en lugar de dejarlo ayudándole en la granja familiar, como era su intención.

Estudió en Cambridge y pagó sus estudios con trabajos domésticos en la universidad. Antes de cumplir 25 años había descubierto el **Método de las Fluxiones** (hoy Cálculo Diferencial), la **Ley de la Gravitación Universal** y la **Composición de la Luz Blanca.**

Entre 1665 y 1667 se presenta la terrible peste que azotó a Europa y por ello la Universidad de Cambridge cierra sus puertas y Newton regresa a su pueblo, donde alterna el cuidado de la granja familiar con la investigación de los temas de su interés: Astronomía, Óptica y Matemáticas.

En 1667 se reabre la universidad y Newton regresa a ella, ahora como profesor e investigador, y en ella permanecerá casi 30 años, hasta 1697. Durante este período decide publicar sus resultados, y en 1687 aparece su obra más célebre: los **Principios Matemáticos de la Filosofía Natural**; en ella presenta por primera vez el Cálculo de Fluxiones, sin saber que Leibnitz, tres años antes, en 1684, había publicado ya sus primeros resultados sobre el Cálculo Infinitesimal.

Desde 1696 hasta su muerte en 1727, Newton se dedicó a otras cosas, incluyendo la teología y la política (fue miembro del parlamento británico durante un breve período); recibió abundantes honores y reconocimientos públicos; título de Caballero (Sir) otorgado por la reina; presidente de la ROYAL SOCIETY,...

Murió en 1727, después de larga y penosa enfermedad. Está enterrado en La Abadía de Westminster, en Londres, junto con los grandes hombres de Inglaterra.

COMPRENSIÓN DE LECTURA

EXPLICACIÓN: Lea detenidamente la anterior información biográfica y luego encierre, en un círculo, la letra que corresponda a la respuesta correcta:

1. Aunque con algunos años de diferencia, Newton y Leibnitz coincidieron en sus estudios y trabajos sobre:
   a. La ley de la gravitación.
   b. El Cálculo Diferencial.
   c. La composición de la luz Blanca.
   d. El cálculo de fluidos.

2. En el campo de las ciencias, corresponden a Newton los siguientes trabajos, con excepción de:
   a. El Método de Fluxiones.
   b. Principios Matemáticos de la Filosofía Natural.
   c. Estudios de Agronomía para la granja de su familia.
   d. Investigaciones sobre óptica y Matemáticas.

3. Al elaborar un perfil personal y familiar de Newton, debemos excluir:
   a. Inglés, de origen campesino que ostentó el título de caballero.
   b. Los campos de Inglaterra perdieron un granjero; la humanidad ganó un científico.
   c. La Administración Pública Inglesa lo contó como uno de sus servidores.
   d. Murió sólo y pobre, después de una penosa enfermedad.

4. El propósito del autor de este escrito es:
   a. Destacar la constancia y el espíritu investigador de Newton.
   b. Mostrar, cómo la peste interrumpió la carrera universitaria de Newton.
   c. Demostrar cómo un humilde granjero se transforma en científico de renombre.
   d. Citar algunas realizaciones de Isaac Newton.

5. Del texto anterior se puede inferir que:
   a. En todo campesino se encuentra un hombre de ciencia.
   b. Generalmente los hombres de ciencia gozan del patrocinio, protección y estímulo de sus países de origen.
   c. Los hombres de la época descrita cultivaron las artes y las ciencias.
   d. Newton es el verdadero padre del cálculo infinitesimal.

6.1 EL POR QUÉ, EL CÓMO, EL CUANDO Y EL QUIÉN DE LA DERIVADA

- Cuando en la unidad cuatro desarrollamos el concepto de límite, nos referimos a los dos problemas típicos que dieron origen al CÁLCULO: el problema de **hallar el área de la región limitada por un segmento de parábola** y el problema de **determinar la recta tangente a una curva en un punto dado de la misma.** El primer problema lo resuelve el CÁLCULO INTEGRAL y el segundo lo resuelve el CÁLCULO DIFERENCIAL o LA DERIVADA. Vimos que la solución de ambos problemas requiere la utilización de la **operación del paso al límite** que ya estudiamos en la citada unidad cuatro.

- En esta unidad vamos a identificar, enunciar y resolver los dos problemas que originaron el concepto de DERIVADA (uno de estos problemas es el de la recta tangente); así mismo, desarrollaremos la mayor parte de la «maquinaria» en la que se fundamenta el CÁLCULO DIFERENCIAL.

- Señalaremos inicialmente que lo que hoy llamamos CÁLCULO DIFERENCIAL empezó a desarrollarse a mediados del siglo XVI, gracias al esfuerzo denodado de muchísimos matemáticos. Como dijimos antes, fueron dos los problemas iniciales, por cierto muy distintos el uno del otro, los que dieron lugar al concepto de **derivada:**

   1. **El problema de determinar la recta tangente a una curva en un punto dado de la misma.**

   2. **El problema de determinar la velocidad instantánea de un objeto que se mueve a lo largo de una línea recta (movimiento rectilíneo).**

   Estos problemas fueron resueltos de manera independiente por dos grandes personajes de la historia científica: Gottfried Wilhelm Leibnitz (1646 - 1716) resolvió el problema de la recta tangente, en 1684, e Isaac Newton (1642 - 1727) resolvió el problema de la velocidad instantánea en 1687. Lo sorprendente fue que estos dos problemas, tan distintos, tuvieron la misma solución. Esta situación hizo que Leibnitz, quien publicó sus resultados tres años antes, acusara a Newton de plagio. Este se defendió alegando que en 1665, cuando la Universidad de Cambridge cerró sus puertas debido a la Gran Peste que asoló a Europa, aprovechó para escribir los principios fundamentales de lo que denominó CÁLCULO DE FLUXIONES (hoy Cálculo diferencial) y que aunque no los publicó, sí se los contó por carta a Leibnitz a través de un misterioso mensaje cifrado que ni siquiera Edipo hubiera podido resolver. En fin, la historia, declaró empate y a los dos genios les asignó la paternidad del concepto de DERIVADA.

- En las secciones siguientes resolveremos estos dos problemas y mostraremos que muchos otros problemas pudieron resolverse en la misma forma. Y fue esta forma común de resolver todos estos problemas a lo que se denominó la DERIVADA.

6.2 EL PROBLEMA DE LA RECTA TANGENTE

- Dijimos en la unidad cuatro que los antiguos griegos habían establecido que la recta tangente a una circunferencia, en un punto P, es la recta que tiene un solo punto común con la circunferencia; figura 6 - 1.

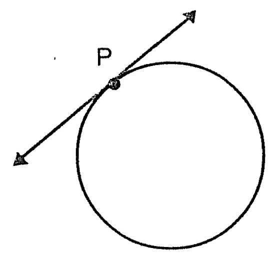
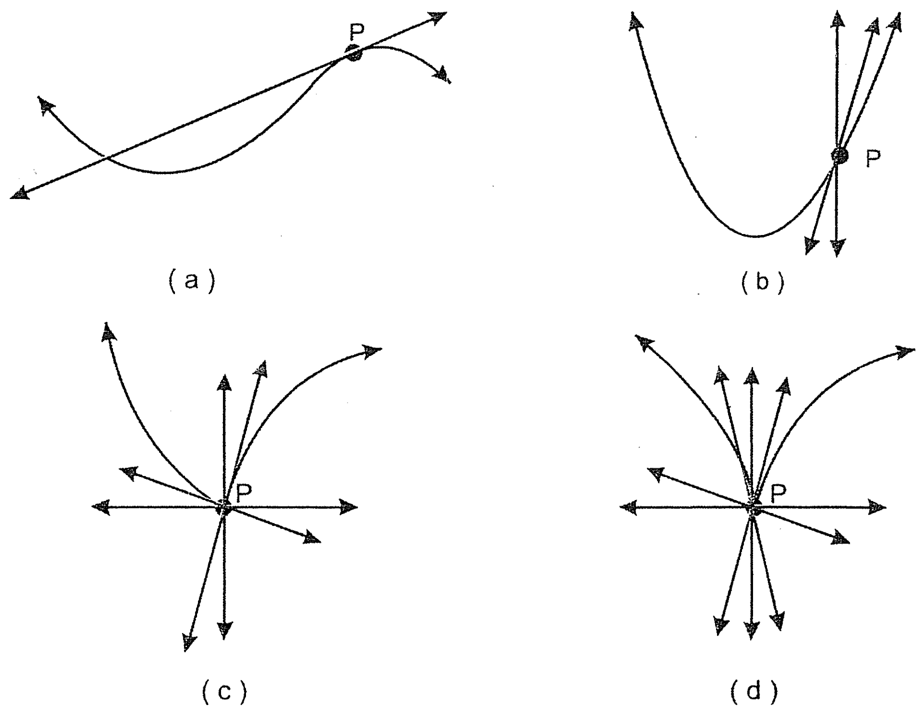


Figura 6 - 1

Sin embargo, analizando otras curvas encontrábamos que esta definición no era adecuada. Por ejemplo, la recta de la figura 6 - 2 (a) no sería tangente a la curva porque tendría dos puntos de contacto con ella; la parábola de la figura 6 - 2 (b) tendría al menos dos rectas tangentes en cada uno de sus puntos y, finalmente, las curvas de la figura 6 - 2 (c) y 6 - 2 (d) tendrían más de una tangente en los puntos donde la curva tiene «picos».



- El primer paso en la solución del problema consistió en precisar lo que debía entenderse gráficamente por recta tangente a una curva en un punto dado. Con este fin, G. W. Leibnitz hizo lo siguiente:

1. Dibujó una curva cualquiera, marcó un punto P en ella y tomó un pequeño arco de la curva en las proximidades de P; figura 6 - 3 (a):

Figura 6 - 3

2. A continuación, trazó una circunferencia que se «ajustara» al pequeño arco tomado; figura 6 - 3 (b). Este círculo recibe el nombre de CÍRCULO OSCULADOR.

3. Finalmente trazó la recta tangente a esta circunferencia, por el punto P. Esta tangente es precisamente la recta tangente a la curva en P.

Leibnitz se dio cuenta que, en general, la **dirección** de la recta tangente a una curva, en un punto dado P, es la misma que lleva la curva en dicho punto. Esto podemos comprenderlo fácilmente observando la figura 6 - 4:

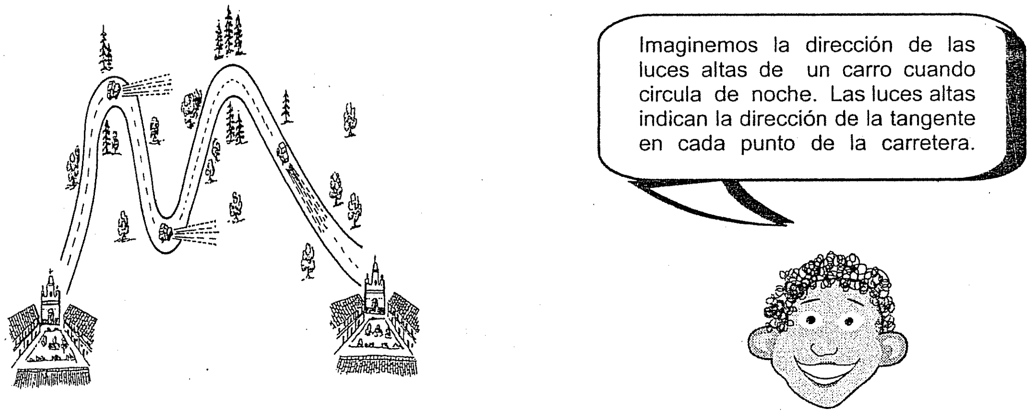


Figura 6 - 4

- El segundo paso dado por Leibnitz fue el siguiente: aprovechando que René Descartes había inventado la Geometría Analítica unos años antes, redujo el problema de hallar la ecuación de la recta tangente a determinar su **pendiente** , puesto que ya se conocían las coordenadas del punto P (recordemos que la ecuación de una recta puede obtenerse si conocemos un punto y su pendiente). Con esta certeza, Leibnitz encontró que esta pendiente podía **aproximarse** calculando la pendiente de otras rectas que pasan por P y por otro punto Q de la curva. Estas rectas reciben el nombre de **rectas secantes** (del latín ***secare*** que significa ***cortar***); figura 6 - 5:

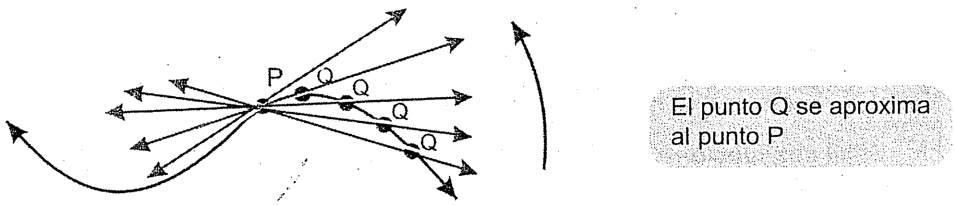


Figura 6 - 5

Concluyó, entonces, Leibnitz que: **«la pendiente de la tangente es el límite de la pendiente de la secante, cuando el punto Q se aproxima al punto P».**

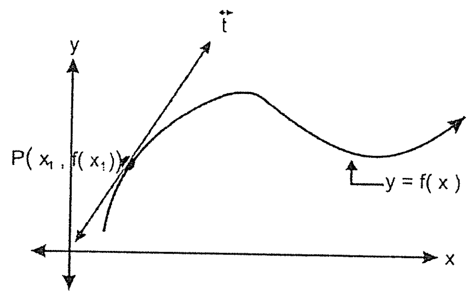
- La anterior es una descripción gráfica de la solución del problema de la recta tangente. Ahora, veamos la solución analítica.

HIPÓTESIS DEL PROBLEMA:

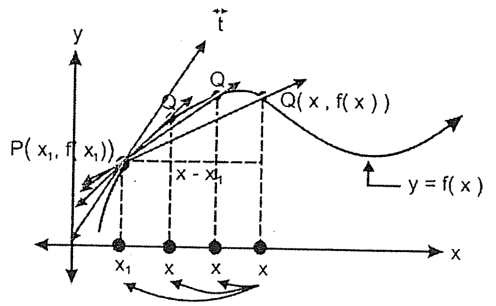
f es una función continua en el punto P(x_1, f(x_1)) y $\overleftrightarrow{t}$ es la recta tangente a y = f(x) en el punto P.

OBJETIVO o TESIS

Hallar la ecuación de la recta tangente $\overleftrightarrow{t}$ a f en el punto $P(x_1, f(x_1))$; figura 6 - 6 (a).



(a)



(b)

Figura 6 - 6

SOLUCIÓN

1. De acuerdo con la estrategia de Leibnitz tomamos otro punto arbitrario Q(x, f(x)) de la curva; figura 6 - 6 (b)
2. La pendiente de la recta secante $\overleftrightarrow{PQ}$ es:

$$m\overleftrightarrow{PQ} = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

siempre que la recta $\overleftrightarrow{PQ}$ no sea vertical.

3. Si ahora «movemos» el punto Q a lo largo de la curva de manera que cada vez se aproxime más al punto P, entonces podemos observar dos cosas:

   i. Que la abscisa x del punto Q se hace cada vez **más próxima** a la abscisa x_1 del punto P; es decir $x \to x_1$.
   ii. Que el valor de la pendiente de cada una de estas secantes se **aproxima** cada vez más a lo que debe ser la pendiente de la tangente.

4. Por lo tanto, la pendiente de la recta tangente $\overleftrightarrow{t}$ a la curva en el punto P es igual al **«límite de la pendiente de la recta secante $\overleftrightarrow{PQ}$ cuando x tiende a x_1»**; es decir:

$$m_{\overleftrightarrow{t}} = \lim_{x \to x_1} m_{\overleftrightarrow{PQ}} = \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

5. **CONCLUSIÓN:**

DEFINICIÓN DE RECTA TANGENTE

Sea f una función continua en x_1. La RECTA TANGENTE a f en el punto $P(x_1, f(x_1))$ es:

1. **La recta que pasa por P y cuya pendiente $m(x_1)$ está dada por:**

$$m(x_1) = \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

siempre que este límite exista

2. **La recta vertical $x = x_1$ siempre que:**

$$\lim_{x \to x_1^+} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \text{ es } +\infty \text{ ó } -\infty$$

y

$$\lim_{x \to x_1^-} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \text{ es } +\infty \text{ ó } -\infty$$

ATENCIÓN

1. Si ninguna de las dos partes de la definición anterior se cumple, entonces decimos que NO EXISTE una recta tangente a la gráfica de f en el punto $P(x_1, f(x_1))$.

2. La definición $m(x1) = \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$ puede escribirse de una forma equivalente si representamos la diferencia de las abscisas de los puntos P y Q por h; así:

$$h = x - x_1$$

$$\therefore \quad x = x_1 + h$$

Esto significa que podemos reescribir las coordenadas del punto «móvil» Q como: $(x_1 + h, f(x_1 + h))$; además, cuando $x \to x_1$ entonces $h \to 0$. Por lo tanto:

$$m(x_1) = \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

$$\boxed{m(x_1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}}$$

En la práctica, podemos utilizar cualquiera de las dos expresiones para hallar la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto $P(x_1, f(x_1))$

3. Con frecuencia debemos localizar la RECTA NORMAL a una curva en un punto de la misma. A continuación presentamos su definición.

DEFINICIÓN DE RECTA NORMAL

La RECTA NORMAL $\overleftrightarrow{n}$ de una curva en un punto dado es la PERPENDICULAR a la tangente en dicho punto; figura 6 - 7:

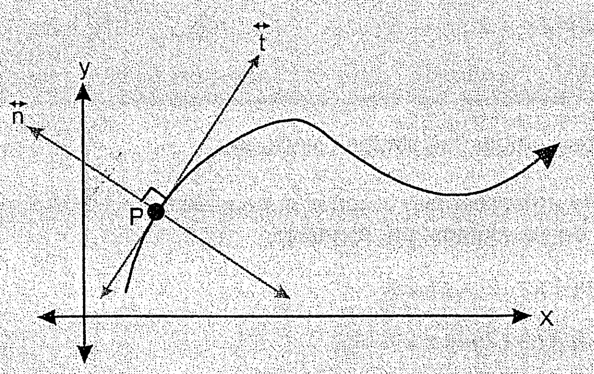


Figura 6 -7

Por lo tanto, la pendiente de la recta normal es: $m_{\overleftrightarrow{n}} = -\frac{1}{m_{\overleftrightarrow{t}}}$, siempre que la recta tangente no sea horizontal.

Ejemplo 1

Hallemos las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva definida por $f(x) = x^2 + 2x$ en el punto P(1, 3).

SOLUCIÓN

- En primer lugar, dibujemos la gráfica de f; figura 6 - 8:

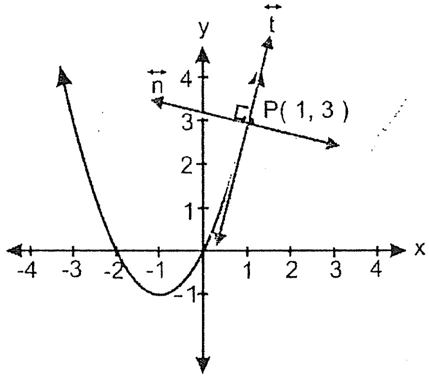


Figura 6 - 8

- A continuación hallemos la pendiente de la recta tangente a la curva en cualquier punto x_1. Hagámoslo utilizando las dos definiciones que ya conocemos:

PRIMERA DEFINICIÓN	SEGUNDA DEFINICIÓN
$m(x_1) = \lim\limits_{x \to x_1} \dfrac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$	$m(x_1) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$
$\therefore\ m(x_1) = \lim\limits_{x \to x_1} \dfrac{(x^2 + 2x) - (x_1^2 + 2x_1)}{x - x_1}$	$\therefore\ m(x_1) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x_1 + h)^2 + 2(x_1 + h) - (x_1^2 + 2x_1)}{h}$
$\therefore\ m(x_1) = \lim\limits_{x \to x_1} \dfrac{(x^2 - x_1^2) - (2x - 2x_1)}{x - x_1}$	$\therefore\ m(x_1) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{2x_1h + 2h + h^2}{h}$
$\therefore\ m(x_1) = \lim\limits_{x \to x_1} \dfrac{(x + x_1)(x - x_1) + 2(x - x_1)}{x - x_1}$	$\therefore\ m(x_1) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\cancel{h}(2x_1 + 2 + h)}{\cancel{h}}$
$\therefore\ m(x_1) = \lim\limits_{x \to x_1} \dfrac{\cancel{(x - x_1)}(x + x_1 + 2)}{\cancel{x - x_1}}$	$\therefore\ m(x_1) = \lim\limits_{h \to 0} (2x_1 + 2 + h)$
$\therefore\ m(x_1) = \lim\limits_{x \to x_1} (x + x_1 + 2) = 2x_1 + 2$	$\therefore\ m(x_1) = 2x_1 + 2$

Como podemos comprobar, ambos resultados coinciden.

- La igualdad $m(x_1) = 2x_1 + 2$ nos permite obtener la pendiente de TODAS las rectas tangentes a la curva $y = x^2 + 2x$, en cada uno de sus puntos; por ejemplo:

Si $x_1 = -2$ entonces $m(-2) = 2(-2) + 2 = -$

Si $x_1 = -1$ entonces $m(-1) = 2(-1) + 2 = 0$

Si $x_1 = 0$ entonces $m(0) = 2(0) = 2$

Si $x_1 = 1$ entonces $m(1) = 2(1) + 2 = 4$

Si $x_1 = 2$ entonces $m(2) = 2(2) + 2 = 6$

En particular, si $x_1 = 1$ entonces $m_t = 2(1) + 2 = 4$. Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente es:

$$y - y_1 = m_{\overleftrightarrow{t}} (x - x_1)$$

$$\therefore\ y - 3 = 4(x - 1)$$

$$\therefore\ y = 4x - 1 \quad \text{.............. ecuación de la recta tangente}$$

La pendiente de la recta normal es $m_{\overleftrightarrow{n}} = -\dfrac{1}{4}$ (¿por qué?); luego, su ecuación será:

$$y - y_1 = m_{\overleftrightarrow{n}} (x - x_1)$$

$$\therefore\ y - 3 = -\frac{1}{4}(x - 1)$$

$$\therefore\ 4y - 12 = -x + 1$$

$$\therefore\ 4y + x = 13 \quad \text{............ ecuación de la recta normal.}$$

Ejemplo 2

Hallemos las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva definida por la ecuación $y = f(x) = \sqrt{x+3}$ en el punto correspondiente a $x = 1$.

SOLUCIÓN

- Cuando $x = 1$, $y = \sqrt{1+3} = 2$. La gráfica de f es la siguiente; figura 6 - 9:

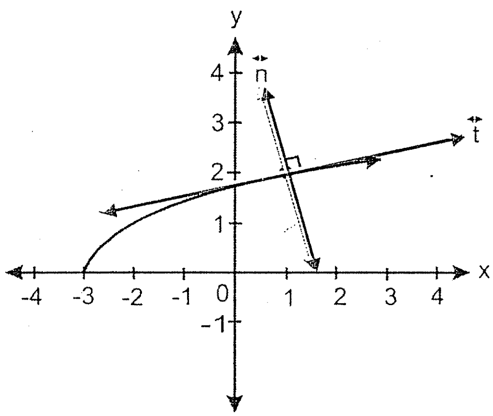


Figura 6 - 9

PRIMERA DEFINICIÓN	SEGUNDA DEFINICIÓN
$m(x_1) = \lim\limits_{x \to x_1} \dfrac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$	$m(x_1) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$
$\therefore\ m(x_1) = \lim\limits_{x \to x_1} \dfrac{\sqrt{x+3} - \sqrt{x_1+3}}{x - x_1}$	$\therefore m(x_1) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{x_1+h+3} - \sqrt{x_1+3}}{h}$
$\therefore\ m(x_1) = \lim\limits_{x \to x_1} \dfrac{(x+3) - (x_1+3)}{(x - x_1)\left(\sqrt{x+3} + \sqrt{x_1+3}\right)}$	$\therefore\ m(x_1) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x_1+h+3) - (x_1+3)}{h\left(\sqrt{x_1+h+3} + \sqrt{x_1+3}\right)}$

$\therefore\ m(x_1) = \lim\limits_{x \to x_1} \dfrac{(x - x_1)}{(x - x_1)\left(\sqrt{x+3} + \sqrt{x_1+3}\right)}$	$\therefore\ m(x_1) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h}{h\left(\sqrt{x_1+h+3} + \sqrt{x_1+3}\right)}$
$\therefore\ m(x_1) = \lim\limits_{x \to x_1} \dfrac{1}{2\sqrt{x_1+3}}$	$\therefore\ m(x_1) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{2\sqrt{x_1+3}}$

De nuevo, los resultados, por ambos métodos, coinciden. En adelante usaremos una u otra definición indistintamente. Sin embargo, es bueno reconocer que la segunda definición se usa con más frecuencia que la primera. Esta, como veremos en un ejemplo posterior, es muy útil cuando se trata de hallar el valor de la pendiente (y en general, de la derivada) en un punto donde cambia de forma una función por tramos.

- El valor de la pendiente de la recta tangente en $x_1 = 1$ es:

$$m(1) = \frac{1}{2\sqrt{1+3}} = \frac{1}{2(2)} = \frac{1}{4}$$

y el valor de la pendiente de la normal en ese mismo punto es $m_{\overleftrightarrow{n}} = -4$

- Finalmente, las ecuaciones de la recta tangente y la recta normal a la curva en el punto P(1, 2) son:

Recta tangente: $y - 2 = \frac{1}{4}(x - 1) \Leftrightarrow 4y - x = 7$

Recta normal: $y - 2 = -4(x - 1) \Leftrightarrow y + 4x = 6$

Ejemplo 3

Hallemos las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva $y = f(x) = x^{2/3}$ en el punto donde $x = 0$.

SOLUCIÓN

- En primer lugar, es fácil comprobar que f es continua en $x = 0$ (¡hacerlo!).
- La gráfica de f aparece dibujada en la figura 6 - 10:

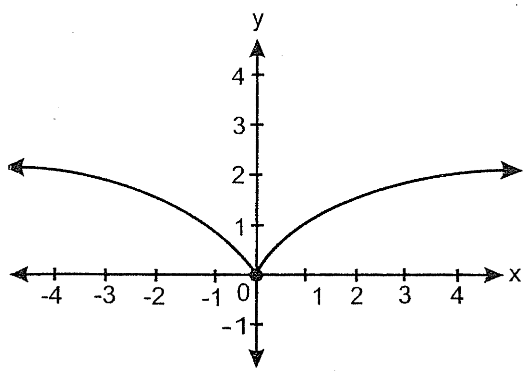


Figura 6 - 10

- Hallemos la pendiente de la recta tangente en cualquier punto:

$$m(x_1) = \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

$$\therefore\ m(x_1) = \lim_{x \to x_1} \frac{f^{2/3} - f_1^{2/3}}{x - x_1}$$

$$\therefore\ m(x_1) = \lim_{x \to x_1} \frac{\left(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x_1^2}\right)\left(\sqrt[3]{x^4} + \sqrt[3]{x^2 x_1^2} + \sqrt[3]{x_1^4}\right)}{(x - x_1)\left(\sqrt[3]{x^4} + \sqrt[3]{x^2 x_1^2} + \sqrt[3]{x_1^4}\right)}$$

$$\therefore\ m(x_1) = \lim_{x \to x_1} \frac{x^2 - x_1^{\,2}}{(x - x_1)\left(\sqrt[3]{x^4} + \sqrt[3]{x^2 x_1^{\,2}} + \sqrt[3]{x_1^{\,4}}\right)}$$

$$\therefore\ m(x_1) = \lim_{x \to x_1} \frac{(x + x_1)(x - x_1)}{(x - x_1)\left(\sqrt[3]{x^4} + \sqrt[3]{x^2 x_1^{\,2}} + \sqrt[3]{x_1^{\,4}}\right)}$$

$$\therefore\ m(x_1) = \frac{2x_1}{\sqrt[3]{x_1^{\,4}} + \sqrt[3]{x_1^{\,4}} + \sqrt[3]{x_1^{\,4}}} = \frac{2x_1}{3\sqrt[3]{x_1^{\,4}}} = \frac{2}{3\, x_1^{1/3}}$$

- En $x_1 = 0$, el valor de la pendiente es $m(0) = \dfrac{2}{3(0)} = \dfrac{2}{0}$ (no existe, es ∞)

  Esto significa que la recta tangente a la curva $y = x^{2/3}$ en $x = 0$ es el eje y (ecuación $x = 0$) y la recta normal en ese mismo punto es el eje x (ecuación $y = 0$).

Ejemplo 4

Hallemos las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva de ecuación:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x < 2 \\ \sqrt{x - 2} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

en el punto donde $x = 2$.

SOLUCIÓN

- Cada lector deberá comprobar que f es continua en $x = 2$. A continuación, presentamos la gráfica de f; figura 6 - 11:

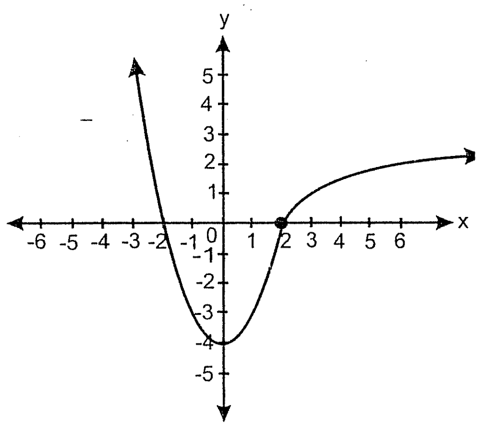


Figura 6 - 11

- Como la función f está definida de una manera a la izquierda de $x = 2$ y de otra manera a la derecha de $x = 2$, entonces para hallar la pendiente de la recta tangente en $x = 2$ debemos calcular el límite tanto a la izquierda como a la derecha de $x = 2$; así:

$$m(2^-) = \lim_{x \to 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \to 2^-} \frac{(x^2 - 4) - \sqrt{2-2}}{x-2}$$ .... ¿por qué $f(x) = x^2 - 4$?

$$= \lim_{x \to 2^-} \frac{x^2 - 4}{x-2}$$

$$= \lim_{x \to 2^-} \frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)}$$

$$= 4$$

$$m(2^+) = \lim_{x \to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x-2}$$

$$= \lim_{x \to 2^+} \frac{\sqrt{x-2} - \sqrt{2-2}}{x-2}$$ .... ¿por qué $f(x) = \sqrt{x-2}$?

$$= \lim_{x \to 2^+} \frac{\sqrt{x-2}}{x-2}$$

$$= \lim_{x \to 2^+} \frac{(x-2)}{(x-2)\sqrt{x-2}}$$

$$= \lim_{x \to 2^+} \frac{1}{\sqrt{x-2}} = \infty$$

- Los anteriores resultados significan que en $x = 2$, la curva tiene dos rectas tangentes: una a la izquierda de $x = 2$ con pendiente $m = 4$ y otra a la derecha de $x = 2$ con pendiente infinita. En consecuencia, en $x = 2$ no hay una ÚNICA recta tangente.

Ejemplo 5

Hallemos la ecuación de la recta normal a la curva $y = 2x - x^2$ de tal manera que forme un ángulo de 45^0 con el eje x.

SOLUCIÓN

- En primer lugar, tengamos en cuenta que si la recta normal forma un ángulo de 45^0 con el eje x, entonces la recta tangente, que es perpendicular a ella, formará un ángulo de 135^0 (¿por qué?). La figura 6 – 12 nos describe el problema:

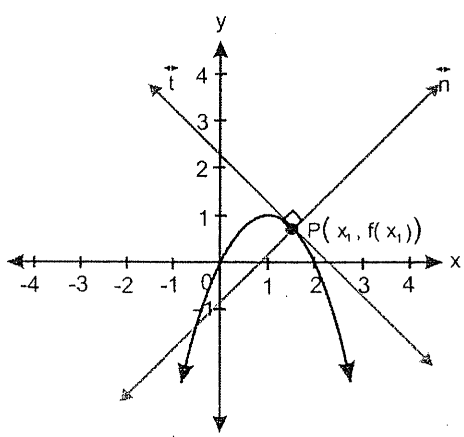


Figura 6 - 12

- En consecuencia, la pendiente de la recta tangente es $m_{\overleftrightarrow{t}} = \tan 135^0 = -1$ y la pendiente de la recta normal es $m_{\overleftrightarrow{n}} = 1$. Para determinar las coordenadas del punto $P(x_1\,,\,f(x_1))$, por donde pasan la recta tangente y la recta normal, calculamos la pendiente de la recta tangente a la curva en $x = x_1$; así:

$$m_{\overleftrightarrow{t}}(x_1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

$$\therefore \quad m_{\overleftrightarrow{t}}(x_1) = 2 - 2x_1 \quad \text{(¡comprobarlo!)}$$

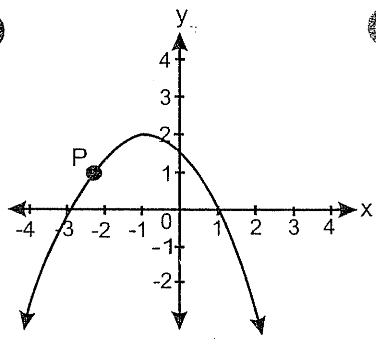
- Como $m_{\overleftrightarrow{t}}(x_1) = -1$ y $m_{\overleftrightarrow{t}}(x_1) = 2 - 2x_1$, entonces: $2 - 2x_1 = -1$; luego, $x_1 = \dfrac{3}{2}$

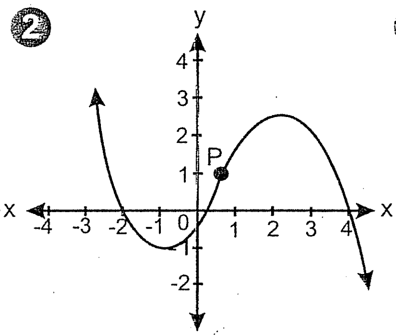
  Ahora, $f\left(\dfrac{3}{2}\right) = 2\left(\dfrac{3}{2}\right) - \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 = 3 - \dfrac{9}{4} = \dfrac{3}{4}$. Luego, el punto de tangencia es $\left(\dfrac{3}{2}\,,\,\dfrac{3}{4}\right)$.

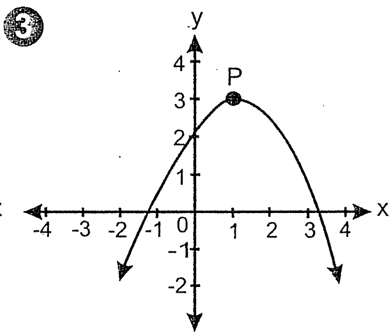
- Dejamos al lector escribir las ecuaciones de las rectas tangente y normal.

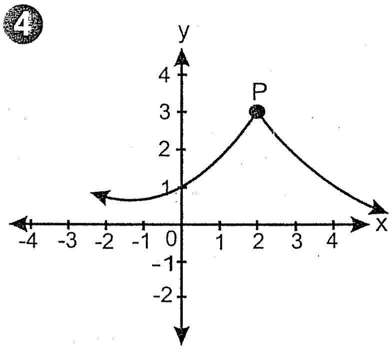
EJERCICIO 6.1

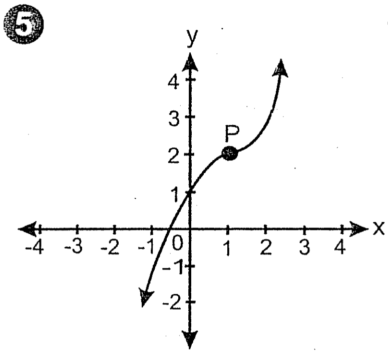
En los ejercicios 1 a 6, trazar, si existe, la única recta tangente a la curva dada en el punto P indicado. Si hay más de una recta tangente, dibújelas.

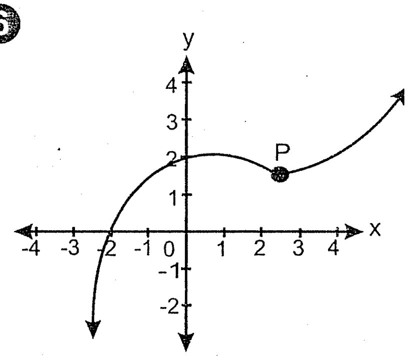
1


2


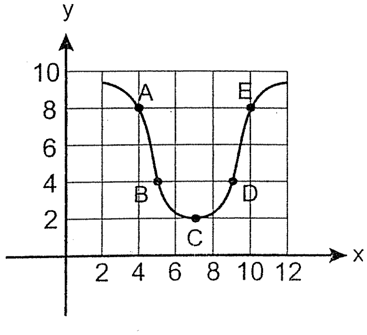
3


4


5


6


7. Estimar la pendiente de la curva dada en cada una de los cinco puntos que se muestran, enumerar estas cinco pendientes en orden decreciente y explicar el análisis.



En los ejercicios 8 a 17 hallar, si existen, las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva en el punto dado:

8 $y = x^2 - 3x$ en $P(-1 , 4)$

9 $y = 1 - 4x + 4x^2$ en $P(2 , 9)$

10 $y = \frac{2}{x}$ en $P\left(4 , \frac{1}{2}\right)$

11 $y = \frac{1}{x-1}$ en $P\left(3 , \frac{1}{2}\right)$

12 $y = x^3 + 1$ en $P(-1 , 0)$

13 $y = \sqrt{4 - x^2}$ en $P(0 , 2)$

14 $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x \le -4 \\ -x-6 & \text{si } x > -4 \end{cases}$ en $x = -4$

15 $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \le 0 \\ x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ en $x = 0$

16 $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < -1 \\ -1-2x & \text{si } x \ge -1 \end{cases}$ en $x = -1$

17 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 9 & \text{si } x < 3 \\ 6x - 18 & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$ en $x = 3$

18 a) Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^2 + 2x$ en el punto $(-3,3)$.

b) Usar el DERIVE para graficar la parábola y la recta tangente en dicho punto. Realizar varios zoom de aproximación al punto y observar lo que ocurre. Sacar conclusiones.

19 Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 2x^2 + 3$ si sabemos que es paralela a la recta $8x - y + 3 = 0$.

20 Una recta normal a la curva $y = 2 - \frac{1}{3}x^2$ es paralela a la recta $x - y = 0$. Hallar su ecuación.

21 Una recta tangente a la curva $y = \sqrt{4x-3} - 1$ es perpendicular a la recta $x+2y-11 = 0$. Hallar su ecuación.

22 Hallar las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto $A(2 , -6)$ y son tangentes a la curva $y = 3x^2 - 8$. (Sugerencia: cualquier punto P de la curva tiene coordenadas $(x1, 3x_1^2 - 8$. Hallar la pendiente de la recta que pasa por A y P y la pendiente de la curva en cualquier punto e iguale ambas pendientes).

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (16)

Un tanque semiesférico de 10 dm de radio contiene agua. El agua está saliendo por un orificio en el fondo a ritmo constante. Si en un momento dado, la profundidad del agua es y dm, escribir una ecuación que permita expresar el radio R de la superficie del agua en función de la profundidad y.

6.3 EL PROBLEMA DE LA VELOCIDAD INSTANTÁNEA

- El problema de la velocidad instantánea, ya dijimos, fue resuelto por Isaac Newton en 1687. Se preguntaban los científicos de la época lo siguiente: **«Si un objeto se mueve en línea recta (movimiento rectilíneo) y este movimiento podemos describirlo mediante una ecuación de la forma s = f(t), donde s representa la posición del objeto en cada instante t de su movimiento, ¿cuál será la VELOCIDAD INSTANTÁNEA del objeto en cada momento?».**

- Para que comprendamos el problema, consideremos una situación conocida: U**n saltador se lanza desde un trampolín situado a 10 metros de altura con una velocidad inicial de 5 m/seg.;** figura 6 - 13:

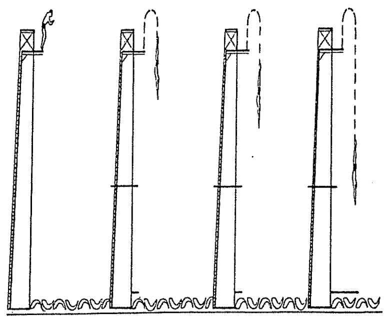


Figura 6 - 13

Si suponemos que la única fuerza que actúa sobre el saltador es la gravedad y que ésta es constante en las proximidades de la superficie de la tierra ($g \approx 10$ m/seg^2), entonces la posición s del saltador en cada instante de su movimiento está dada por la ecuación:

$$s = f(t) = s_o + v_o t - \frac{1}{2} gt^2 \text{.................} \qquad (1)$$

$$\therefore \quad s = f(t) = 10 + 5t - 5t^2$$

La ecuación (1) fue obtenida por Galileo Galilei (1564 - 1642) a principios del siglo XVII, como resultado de los muchos experimentos realizados sobre caída de los cuerpos.

- Dibujemos la gráfica de esta ecuación de movimiento; figura 6 - 14:

t	s
0	10
0.5	11.25
1	10
1.5	6.25
2	0

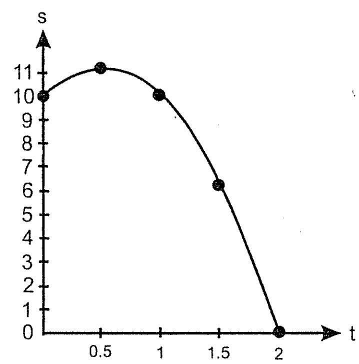


Figura 6 - 14

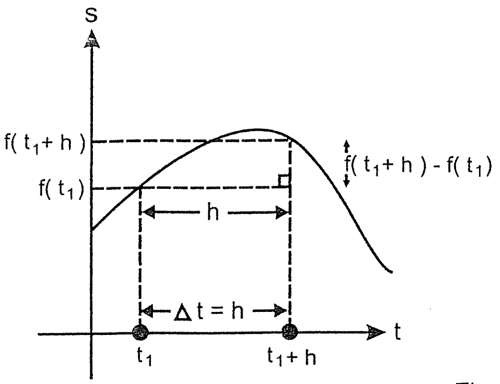
Observemos que, a pesar de que el saltador se mueve en línea recta, tanto la ecuación, como la gráfica que describen su POSICIÓN (no la distancia recorrida) en cada instante, corresponden a una parábola. Notemos, por ejemplo, que la posición del objeto cuando t = 0 seg. y cuando t = 1 seg. es s = 10 m; esto se debe a que después de partir del trampolín, el saltador sube hasta los 11.25 metros y luego, al bajar, pasa de nuevo por la posición inicial s = 10 metros cuando t = 1 segundo.

- ¿Cuál será la velocidad del saltador, por ejemplo, en t = 1 segundo? ¿Y en t = 2 segundos? ¿Y, en general, en $t = t_1$ segundos?

- Para contestar las anteriores preguntas, Newton se preguntó antes: **«¿Qué debo entender por velocidad en un instante?»**. Hasta ese momento se sabía lo que era la VELOCIDAD MEDIA: si en t = 1.5 segundos la posición es s = 6.25 metros, entonces la velocidad media del saltador en el intervalo de tiempo [1 ; 1.5] es:

$$\bar{v} = \frac{6.25 - 10}{1.5 - 1} = \frac{\text{variación de la posición}}{\text{variación del tiempo}} = -7.5 \text{ m/seg}$$

«Este resultado, sin embargo, no me autoriza», decía Newton, **«a concluir que *siempre*, durante ese medio segundo, el saltador se movió con la misma velocidad»**.
Generalizando, y de acuerdo con la figura 6 - 15, la velocidad media de un objeto que se mueve en línea recta, de acuerdo con una ecuación de la forma s = f(t), en el intervalo $[t_1, t_1 + h]$ está dada por la expresión:



$$\overline{V} = \frac{f(t_1+h)-f(t_1)}{h} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Figura 6 - 15

Para definir la velocidad instantánea en $t = t_1$, a Newton se le ocurrió tomar dos instantes cada vez más cercanos y determinar la velocidad media entre ellos. De esta manera se dio cuenta de que esas velocidades medias se iban acercando a un valor. Este valor fue lo que él definió como la VELOCIDAD INSTANTÁNEA en t_1. Por lo tanto:

$$\mathbf{v(t_1) = \lim_{x \to 0} \bar{v} = \lim_{x \to 0} \frac{f(t_1+h) - f(t_1)}{h}}$$

- Determinemos, por ejemplo, la velocidad del saltador de trampolín en $t_1 = 1$ segundo. Hallémosla de dos maneras: La primera, calculando la velocidad media en pequeños intervalos [1 ; 1 + h] como muestra la tabla siguiente:

h	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1	0.01	0.001
$\bar{v} = \frac{\Delta s}{h}$	-7.5	-7	-6.5	-6	-5.5	-5.05	-5.005

Tabla 6 - 1

Es razonable concluir, a partir de la tabla, que cuando t = 1 segundo, la velocidad que lleva el saltador es -5 m/seg.

La segunda manera es aplicando la definición de velocidad instantánea; así:

$$v(t_1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t_1+h)-f(t_1)}{h}$$

$$\therefore \quad v(t_1) = \lim_{h \to 0} \frac{\left[10+5(t_1+h)-5(t_1+h)^2\right]-\left(10+5t_1-5t_1^2\right)}{h}$$

$$\therefore \quad v(t_1) = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{10}+\cancel{5t_1}+5h-\cancel{5t_1^2}-10t_1h-5h^2-\cancel{10}-\cancel{5t_1}+\cancel{5t_1^2}}{h}$$

$$\therefore \quad v(t_1) = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(5-10t_1-5h)}{\cancel{h}}$$

$$\therefore \quad v(t_1) = 5 - 10t_1$$

Luego, v(1) = 5 - 10(1) = -5 m/seg.

Como vemos, ambos resultados coinciden.

- **CONCLUSIÓN:** La solución que Isaac Newton le dio al problema de la velocidad instantánea fue la siguiente:

DEFINICIÓN DE VELOCIDAD INSTANTÁNEA

Si $s = f(t)$ representa la posición de un objeto que se mueve en línea recta en cada instante t, entonces la VELOCIDAD del objeto en cualquier instante $t = t_1$ está dada por:

$$v(t_1) = \text{Lim} \frac{f(t_1 + h) - f(t_1)}{h}$$

si este límite existe.

ATENCIÓN

1. Para los matemáticos del siglo XVII resultó verdaderamente sorprendente (y también debería serlo para nosotros) que dos problemas tan diferentes como el de la recta tangente y el de la velocidad instantánea pudieran resolverse de la misma manera. Y más sorprendente aún fue comprobar cómo otros muchos problemas, diferentes a esos dos, pudieron resolverse igualmente; por ejemplo:

   * La rapidez con la cual se está vaciando o llenando una piscina, en un momento dado.
   * La velocidad con la que está aumentando, en un momento determinado, el número de bacterias presente en un alimento contaminado.
   * La rapidez con la que disminuye, en un momento determinado, el radio de un globo de caucho esférico que está perdiendo aire.

   En todos estos problemas nos piden hallar la RAZÓN DEL CAMBIO INSTANTÁNEO de una función (volumen de agua de la piscina, número de bacterias o volumen de aire del globo) con respecto a una variable independiente (el tiempo t). La solución común a todos estos problemas es la DERIVADA de la función, la cual definimos a continuación:

DEFINICIÓN DE LA DERIVADA

La DERIVADA de una función f es otra función, denotada por f', cuyo valor en un punto cualquiera x_1 del dominio de f está dado por:

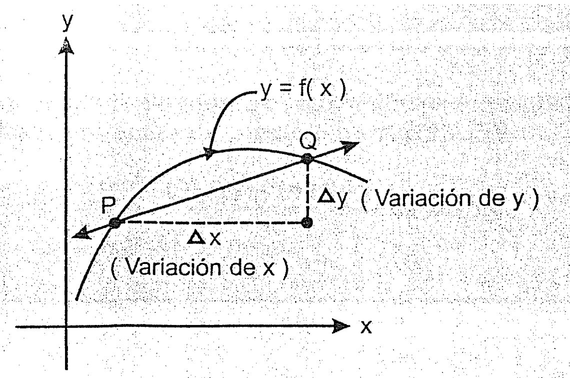
$$f'(x_1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

ó

$$f'(x_1) = \lim_{h \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

siempre que estos límites existan.

2. La notación **$y = f'(x)$** para la derivada de f, fue introducida por Joseph Louis Lagrange (1736 - 1813) para significar que f' es otra función que se obtiene de f. Una notación alternativa para la derivada se origina en la costumbre inicial de escribir **Δx** en lugar de **h** (para indicar que $h = \Delta x$ es una variación de x) y $\Delta y = f(x+h) - f(x)$, (para indicar la variación que experimenta **y**). Así pues, la pendiente de la recta secante $\overleftrightarrow{PQ}$ en la figura 6 - 16 es:



$$m_{\overleftrightarrow{PQ}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Figura 6 - 16

La pendiente de la recta tangente a la gráfica de y = f(x) en P, está definida por:

$$m_{\overleftrightarrow{t}} = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Por lo tanto, si y = f(x), escribimos $\mathbf{\frac{dy}{dx}}$ ó **f'(x)** para representar la derivada de f. La notación $\frac{dy}{dx}$ fue propuesta por G. W. Leibnitz quien llamó a **dy** y **dx infinitesimales** (hoy se llaman diferenciales) para indicar que Δy y Δx se hacían «muy pequeñitos» cuando Δx se aproximaba a 0.

3. Vale la pena tener en cuenta que la expresión $\frac{dy}{dx}$ es un símbolo único, que representa la derivada, y no el cociente de dos cantidades separadas dy y dx. De todas maneras, más adelante estudiaremos el significado de estos dos diferenciales, en forma independiente.

4. El cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ se denomina RAZÓN DE CAMBIO PROMEDIO de **y** con respecto a **x**

   y $\mathbf{\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}$ se llama RAZÓN DE CAMBIO INSTANTÁNEO de y con respecto a x.

5. En general, $f'(x_1)$ es el número de unidades a que tiende a cambiar f(x) cuando x cambia una unidad de x_1 hasta $x_1 + 1$. Para comprender ésto último, consideremos estas tres situaciones:

   a) Si f(t) denota la trayectoria, en metros, de un móvil en el tiempo t, en segundos, entonces f'(2) = 5 m/seg., significa que cuando t pasa de 2 a 3 segundos, la trayectoria o posición tiende a aumentar en 5m. Dicho de otro modo: si el móvil continuara 1 segundo más a la misma velocidad que en t = 2, recorrería 5 m en ese segundo.

   b) El costo de construir una cancha de x m^2 es C(x). ¿Cómo se interpreta C'(220) = 150.000? Se interpreta como que el costo extra por construir un m^2 más (el 221) tiende a ser \$150.000; es decir, después de construir 220 m^2, el costo de construir el siguiente m^2 tiende a ser \$150.000. A esta razón de cambio los economistas le llaman COSTO MARGINAL:$C'(x) \approx C(x+1) - C(x)$.

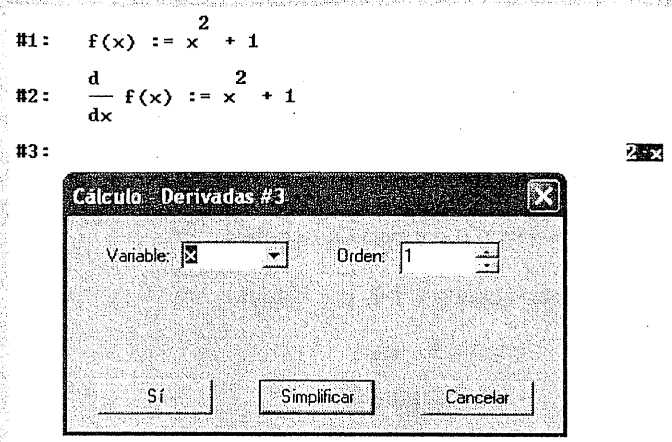
   c) Una ciudad tiene una epidemia de gripe. El número de personas infectadas t días después del comienzo está descrita por la ecuación $p(t) = 120\,t^2 - 2t^3$, $0 \le t \le 40$. Como p'(2) = 456 (¡ comprobarlo !), éste resultado se puede interpretar así: entre el segundo y el tercer día, el número de nuevas personas afectadas tenderá a ser de 456. Los epidemiólogos le llaman ÍNDICE DE DIFUSIÓN o tasa de crecimiento.

6. Una tercera notación para la derivada de una función f es $\mathbf{D_x[\,f(x)]}$. Fue inventada por el matemático francés Agustín L. Cauchy (1789 – 1857) y nos indica que la derivada es un operador D que actúa sobre la función f para producir otra función.

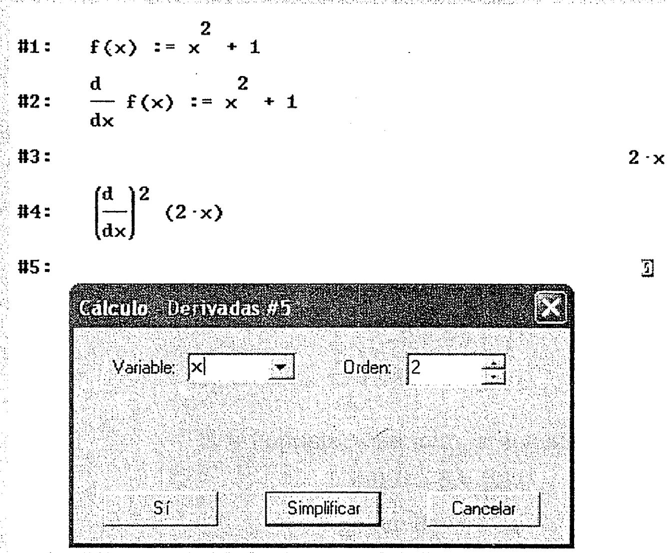
7. DERIVE también cuenta con un dispositivo para calcular la derivada de una función. Este dispositivo se encuentra ubicado en la BARRA DE HERRAMIENTAS. Si, por ejemplo, queremos calcular la derivada de $f(x) = x^2 + 1$ procedemos así:

i) Ingresamos la expresión f(x) = x ∧ 2 + 1

ii) Hacemos click sobre el botón $\boxed{\partial}$. De inmediato aparece un cuadro que nos pregunta cuál es la variable con respecto a la cual deseamos calcular la derivada y su orden: Para la primera derivada escribimos 1, para la segunda derivada escribimos 2, y así sucesivamente.



iii) Finalmente hacemos clic sobre $\boxed{\text{simplificar}}$ y aparecerá:



Para encontrar la segunda derivada, seleccionamos de nuevo la expresión f(x) y en lugar de escribir 1 en el ORDEN, escribimos 2 y el resultado será:

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^2 f(x)$$

$$2$$

Ejemplo 1

Teniendo en cuenta el problema del saltador que se lanza desde un trampolín, se pide:

a) Determinar su velocidad instantánea cuando t = 0.5 seg, t = 1 seg , t = 1.5 seg.

b) Hallar la altura máxima que alcanza.

c) Hallar su velocidad cuando hace contacto con el agua.

SOLUCIÓN

a) Sabemos que la posición del saltador en cada instante es $s = 10 + 5t - 5t^2$ y la velocidad instantánea es $v = s' = 5 - 10t$. Por lo tanto, la velocidad instantánea cuando t = 0.5 seg., t = 1 seg. y t = 1.5 seg. es:

$$v(0.5) = 5 - 10(0.5) = 0 \text{ m/seg.}$$

$$v(1) = 5 - 10(1) = -5 \text{ m/seg.}$$

$$v(1.5) = 5 - 10(1.5) = -10 \text{ m/seg.}$$

Estos resultados nos muestran que cuando el saltador esta subiendo (en el intervalo $(0\,;\,0.5)$) la velocidad es positiva; cuando el saltador alcanza su máxima altura (en t = 0.5 segundos) la velocidad es 0 y cuando el saltador está cayendo (cuando $t > 0.5$) la velocidad es negativa.

b) El saltador alcanza su altura máxima cuando v = 0; por lo tanto:

$$v = 0 = 5 - 10t$$

$$\therefore\ t = 0.5 \text{ segundos}$$

Luego, la altura máxima será la posición s del objeto cuando t = 0.5 segundos:

$$h_{máx} = s(0.5)$$

$$\therefore\ h_{máx} = 10 + 5(0.5) - 5(0.5)^2$$

$$\therefore\ h_{máx} = 10 + 2.5 - 1.25$$

$$\therefore\ h_{máx} = 11.25 \text{ metros}$$

c) El saltador hace contacto con el agua cuando s = 0.

Por lo tanto:

$$s = 0 = 10 + 5t - 5t^2$$

$$\therefore\ t^2 - t - 2 = 0$$

$$\therefore\ t = 2 \quad ó \quad t = -1$$

El valor t = -1 se descarta. Calculemos el valor de v cuando t = 2:

$$v(2) = 5 - 10(2)$$

$$\therefore\ v(2) = -15 \text{ m/seg.}$$

Ejemplo 2

Un cilindro circular recto tiene una altura constante de 10 cm. Si V cm^3 es el volumen de agua contenida en el cilindro y el radio r de la base está aumentando, se pide:

a) Calcular la razón del cambio promedio de V con respecto a r cuando r cambia de 5 cm a 5.1 cm.

b) Calcular la razón del cambio instantáneo de V con respecto a r cuando r = 5 cm.

SOLUCIÓN

- Antes de contestar las preguntas que nos plantea el problema debemos entenderlo. Tenemos un cilindro circular recto de altura constante 10 cm y cuyo radio varía; es decir, el cilindro está «engordando» ; figura 6 - 17:

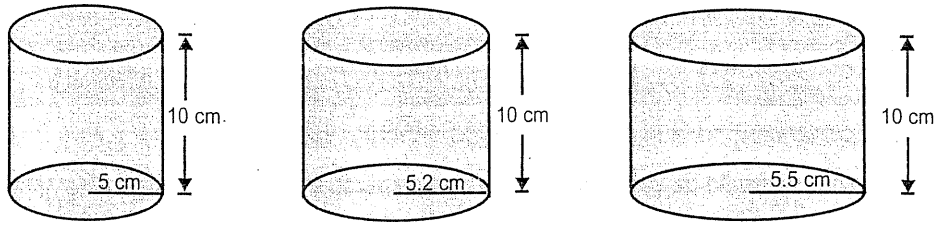


Figura 6 - 17

- Para una altura constante de 10 cm, el volumen del cilindro en función del radio es $V = \pi r^2(10)$ cm³.

- En la parte a) del problema nos piden determinar la variación media del volumen con relación al radio cuando r cambia de 5 a 5.1; es decir:

$$\frac{\Delta V}{\Delta r} = \frac{V(5.1) - V(5)}{5.1 - 5}$$

$$\therefore \quad \frac{\Delta V}{\Delta r} = \frac{10\pi(5.1)^2 - 10\pi(5)^2}{5.1 - 5}$$

$$\therefore \quad \frac{\Delta V}{\Delta r} = \frac{10\pi(26.01 - 25)}{0.1}$$

$$\therefore \quad \frac{\Delta V}{\Delta r} = \frac{10\pi(1.01)}{0.1} \approx 317.30 \frac{cm^3}{cm}$$

- Para determinar la variación instantánea del volumen con respecto al radio cuando r = 5 cm, hallamos el $\lim_{\Delta r \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta r}$:

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta r \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta r} &= \lim_{\Delta r \to 0} \frac{V(r + \Delta r) - V(r)}{\Delta r} \\
&= \lim_{\Delta r \to 0} \frac{10\pi(r + \Delta r)^2 - 10\pi r^2}{\Delta r} \\
&= \lim_{\Delta r \to 0} \frac{10\pi\left(r^2 + 2r\Delta r + \Delta r^2 - r^2\right)}{\Delta r} \\
&= \lim_{\Delta r \to 0} \frac{10\pi\left(2r\Delta r + \Delta r^2\right)}{\Delta r} \\
&= \lim_{\Delta r \to 0} \frac{10\pi\Delta r(2r + \Delta r)}{\Delta r} \\
&= 20\pi r \frac{cm^3}{cm}
\end{aligned}$$

Cuando r = 5 cm, la variación instantánea del volumen con respecto al radio es $20\pi(5) = 100\pi \frac{cm^3}{cm}$ $\approx 314.15 \frac{cm^3}{cm}$. ¿Qué significa este resultado?

- Notemos que la diferencia entre el cambio promedio y el cambio instantáneo es de aproximadamente $3.15 \frac{cm^3}{cm}$.

  Si estrechamos más el intervalo de variación del radio, por ejemplo, entre 5 cm y 5.01 cm, el valor del cambio promedio será aún más cercano al cambio instantáneo cuando r = 5 cm.

Ejemplo 3

El costo de producir x unidades de cierto artículo es $C(x) = 5000 + 10x + 0.05x^2$:

a) Encontremos la razón promedio de cambio del costo con respecto a x cuando el nivel de producción pasa de $x = 100$ a 105.

b) Encontremos la razón promedio de cambio del costo con respecto a x cuando el nivel de producción pasa de $x = 100$ a $x = 101$.

c) Hallemos la razón de cambio del costo respecto a x cuando $x = 100$.

d) ¿Qué significa que $C'(100) = 20$?

SOLUCIÓN

a) $\overline{C} = \dfrac{C(105) - C(100)}{105 - 100} = 20.25$ dólares por unidad

b) $\overline{C} = \dfrac{C(101) - C(100)}{101 - 100} = 20.05$ dólares por unidad

c) $C'(x) = 10 + 0.1(x)$; luego $C'(100) = 10 + 0.1\,(100) = 20$ dólares por unidad.

d) $C'(100) = 20$ predice el costo de producir la 101 unidad. El valor exacto lo dá b). El costo de producir la unidad 101 tiende a ser de 20 dólares.

Ejemplo 4

La temperatura, en grados centígrados, en una ciudad de nuestro país, se registró cada hora, a partir de la media noche y hasta el medio día, mediante una tabla así:

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
T	6.5	6.1	5.6	4.9	4.2	4.0	4.0	4.8	6.1	8.3	10	12.1	14.3

Se pide:

a) Hallar la razón de cambio promedio de la temperatura con respecto al tiempo de las 8:00 a.m. a las 11:00 a.m.

b) Hallar la razón de cambio promedio de la temperatura con respecto al tiempo de las 8:00 a.m. a las 10:00 a.m.

c) Hallar la razón de cambio promedio de la temperatura con respecto al tiempo de las 8:00 a.m. a las 9:00 a.m.

d) Estimar la razón de cambio instantáneo de la temperatura con respecto al tiempo, a las 8:00 a.m.

SOLUCIÓN

a) $\dfrac{\Delta T}{\Delta t} = \dfrac{T(11) - T(8)}{11 - 8} = \dfrac{12.1 - 6.1}{11 - 8} = \dfrac{6}{3} = 2^{0}C/h.$

Entre las 8:00 a.m. y las 11:00 a.m. la temperatura está aumentando a un ritmo de $2^{0}C$ por hora.

b) $\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{T(10) - T(8)}{10 - 8} = \frac{10 - 6.1}{10 - 8} = \frac{3.9}{2} = 1.95^{0}C/h$

Entre las 8:00 a.m. y las 10:00 a.m. la temperatura está aumentando a un ritmo de 19.5°C por hora.

c) $\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{T(9) - T(8)}{9 - 8} = \frac{8.3 - 6.1}{9 - 8} = \frac{2.2}{1} = 2.2^{0}C/h.$

Entre las 8:00 a.m. y las 9:00 a.m. la temperatura está aumentando a un ritmo de 2.2°C por hora.

d) La mayoría de los problemas de las ciencias sociales son discontinuos en su naturaleza (por ejemplo, no se puede vender 1.32 televisores). En este caso, podemos resolver el problema de dos maneras diferentes: utilizando herramientas discretas o modelarlos primero como curvas continuas. Hagámoslo de las dos maneras:

PRIMERA MANERA:

- Calculamos $T' \approx \frac{T(t+h) - T(h)}{h}$, donde h es la distancia constante entre dos datos consecutivos. En este caso, $T'(t) \approx \frac{T(t+1) - T(t)}{1}$; por ejemplo:

$$T'(8) \approx \frac{T(9) - T(8)}{9 - 8} = \frac{8.3 - 6.1}{9 - 8} = 2.2$$

- También podríamos hallar T´(8) no usando el punto de la derecha sino el de la izquierda; así:

$$T'(8) \approx \frac{T(8) - T(7)}{8 - 7} = \frac{6.1 - 4.8}{8 - 7} = 1.3$$

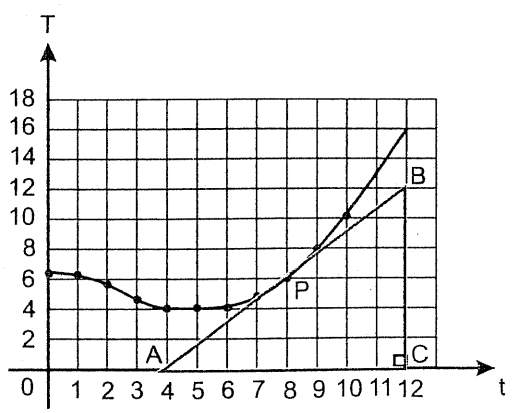
- Un resultado más preciso en este tipo de problemas sería promediar ambos resultados; así:

$$T'(8) \approx \frac{1}{2}(2.2 + 1.3) = \frac{3.5}{2} = 1.75^{0}C/h.$$

Estimamos pues, que la razón de cambio instantáneo de la temperatura con respecto al tiempo, a las 8:00 a.m. es de 1.75°C/h.

SEGUNDA MANERA:

- En la figura 6 – 18, situamos los datos que aparecen en la tabla y los usamos para trazar una curva suave que se aproxime a la gráfica de la función de temperatura. A continuación, trazamos la recta tangente en el punto P, donde t = 8 y, después de medir los lados del ΔACB, estimamos la pendiente de la recta tangente, la cual nos da:



$$m = \frac{|\overline{BC}|}{|\overline{AC}|} = \frac{12}{8} = 1.5^{0}C$$

Figura 6 - 18

❖ Por lo tanto, la razón instantánea del cambio de la temperatura con respecto al tiempo, a las 8 de la mañana, es alrededor de 1.5°C/h.

Notemos lo parecido que son los dos resultados, a pesar de haber utilizado estrategias diferentes para resolver el problema.

Ejemplo 5

Con base en la gráfica de la función f de la figura 6 - 19, dibujemos la gráfica de su derivada f'.

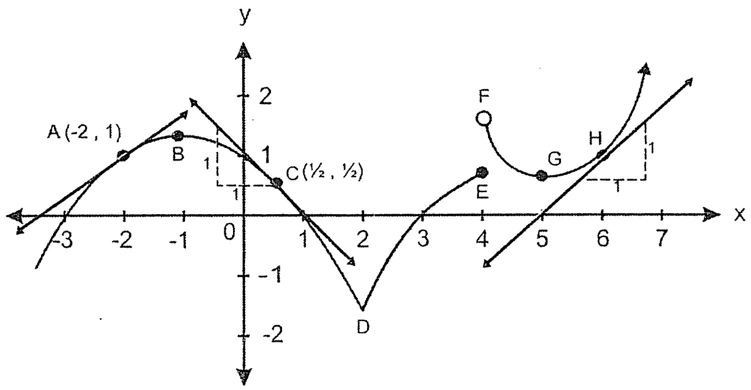


Figura 6 - 19

SOLUCIÓN

- Podemos estimar el valor de la derivada, en cualquier punto x, trazando la tangente en el punto (x , f(x)) y estimando su pendiente allí. Por ejemplo, en $x=\frac{1}{2}$, trazamos la tangente en el punto C y estimamos su pendiente aproximadamente igual a -1; por lo tanto, $f'\left(\frac{1}{2}\right)=-1$. Esto nos permite situar el punto $C'\left(\frac{1}{2},-1\right)$ en la gráfica de f'. De la misma forma, si por los puntos A (-2 , 1) y H (6 , 1) trazamos la recta tangente , podemos estimar sus pendientes en 0.7 y 1, respectivamente; es decir, f'(-2) = 0.7 y f'(6) = 1. Los puntos A' (-2 , 0.7) y H' (6 , 1) son puntos de la gráfica de f'.

- Observemos de nuevo la figura 6 - 19 y analicemos lo que ocurre en el punto B donde la gráfica de f tiene una cima «suave», en el punto D donde hay un «pico» , en el G donde hay una especie de «valle» y en los puntos E y F donde las función es discontinua esencial.

  - En B (donde x = -1), la recta tangente es horizontal, de manera que, allí la derivada es 0 y, en consecuencia, la gráfica f ' corta al eje x; es decir, el punto B'(-1 , 0) es un intercepto con el eje x de f'.

  - En D (donde x = 2), la recta tangente es vertical, de manera que allí la derivada no existe. Cuendo $x\to 2^-$, $f'(x)\to -\infty$ y cuando $x\to 2^+$, $f'(x)\to +\infty$; luego, la gráfica de f' tiene una asíntota vertical en x = 2.

  - En x = 4, f es discontinua y, por lo tanto, f' no existe. Si $x\to 4^-$, entonces $f'(x)\to\frac{1}{2}$ y si $x\to 4^+$, $f'(x)\to -2$.

    (Conviene que el lector verifique estos dos resultados trazando las rectas tangentes y estimando sus pendientes).

  - En G (donde x = 5), la recta tangente es horizontal. De nuevo, la derivada es cero allí y la gráfica de f' corta al eje x; es decir, el punto G' (5 , 0) es un intercepto con el eje x de f'.

- Finalmente, en $(-\infty,-1)$, en (2 , 4) y en $(5,+\infty)$, las rectas tangentes tienen pendiente positiva, por lo que f'(x) es positiva allí; pero en (-1 ; 2) y en (4 ; 5), las rectas tangentes tienen pendiente negativa, de modo que la gráfica de f' está ubicada debajo del eje x en estos intervalos . La figura 6 - 20 muestra una posible gráfica de f':

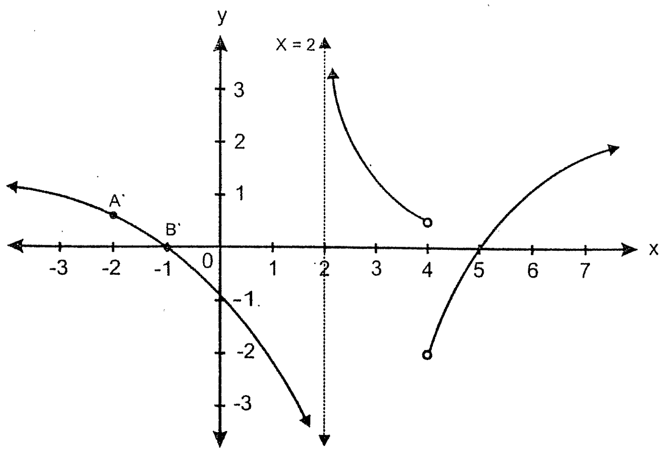


Figura 6 - 20

6.4 RELACIÓN ENTRE CONTINUIDAD Y DERIVADA

Existe una estrecha relación entre los conceptos de CONTINUIDAD Y DERIVABILIDAD. ¿Es toda función continua en un punto, también derivable en ese punto? ¿Es una función derivable en un punto continua en dicho punto? Antes de contestar estas preguntas, realicemos algunas experiencias que nos ayudarán a comprender las respuestas.

Primera Experiencia

- Consideremos la función f definida por $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < -1 \\ 1 - x^2 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$

  a) ¿Es f continua en x = -1?

  b) ¿Es f derivable en x = -1?

- Veamos:

  a) Para comprobar que f es continua en x = -1, verifiquemos si se cumplen las tres condiciones de la definición:

  i. $f(-1) = 1 - (-1)^2 = 0$

  ii. $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to-1} (1 - x^2) = 0 \\ \lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to-1} (x^2 - 1) = 0 \end{array}\right\} \therefore \lim\limits_{x\to-1} f(x) = 0$

  iii. $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = f(-1) = 0$

  Por lo tanto, f es continua en x = -1.

  b) Para probar la derivabilidad de f en x = -1 debemos calcular $f'_-(-1)$ y $f'_+(-1)$ y mostrar que son iguales. Veamos:

$$f'_-(-1) = \lim_{x\to-1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1}$$

$$= \lim_{x \to -1^-} \frac{(x^2 - 1) - 0}{x + 1}$$

$$= \lim_{x \to -1^-} \frac{x^2 - 1}{x + 1}$$

$$= \lim_{x \to -1^-} \frac{(x+1)(x-1)}{x+1}$$

$$= \lim_{x \to -1} (x - 1) = -2$$

$$f'_+(-1) = \lim_{x \to -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to -1^+} \frac{(1 - x^2) - 0}{x + 1}$$

$$= \lim_{x \to -1^+} \frac{-(x+1)(x-1)}{(x+1)}$$

$$= \lim_{x \to -1} -(x - 1) = 2$$

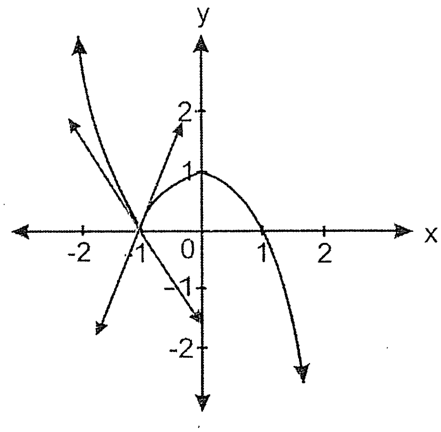


Figura 6 - 21

Como $f'_+(-1) \neq f'_-(-1)$, entonces $f'(-1)$ no existe y así f no es derivable en x = -1.

Tenemos, pues, una función continua en x = -1 pero que no es derivable en x = -1. Geométricamente, la función f tiene dos rectas tangentes a la curva en x = -1; figura 6 - 21.

Segunda Experiencia

- Dada la función g definida por $g(x) = x^{2/3}$, determinemos:

  a) La continuidad de g en x = 0

  b) La derivabilidad de g en x = 0

- Veamos:

  a) Como $\lim_{x \to 0} g(x) = x^{2/3} = 0 = g(0)$, entonces g es continua en x = 0

  b) $$g'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0}$$

  $$= \lim_{x \to 0} \frac{x^{2/3} - 0}{x}$$

  $$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^{1/3}} = +\infty$$

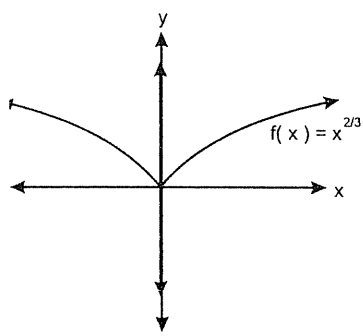


Figura 6 - 22

Por lo tanto, g no es derivable en x = 0. De nuevo, la función es continua en x = 0, pero no es derivable en x = 0. En este caso, la recta tangente a la curva es el eje y, figura 6 - 22.

Tercera Experiencia

- Consideremos la función h definida por $h(x) = \begin{cases} x-2 & \text{si } x<0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

  a) ¿Es h continua en x = 0?

  b) ¿Es h derivable en x = 0?

- Veamos

  a) Como $\lim\limits_{x\to 0^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 0} (x - 2) = -2$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$, entonces $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$ no existe y concluimos que h es discontinua en x = 0.

  b) Calculemos $h'_+(0)$ y $h'_-(0)$ para probar si h es derivable o no en x = 0:

$$h'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0}$$

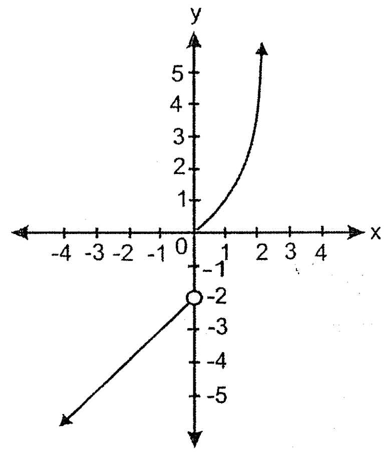
$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{(x-2) - 0}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{x-2}{x} = +\infty$$

$$h'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 - 0}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0^-} x = 0$$

Por lo tanto, h no es derivable en x = 0.



En este caso, h no es ni continua ni derivable en x = 0.

Figura 6 - 23

- Las actividades anteriores nos muestran dos asuntos importantes:

  1. El hecho de que una función sea continua en un punto NO IMPLICA que la función sea derivable en el punto.
  2. Las funciones discontinuas en un punto no son derivables en él.

- Pero, ¿Si una función es derivable en $x = x_1$, será continua en $x = x_1$?. El siguiente teorema nos responde esta pregunta:

TEOREMA

Si una función f es derivable en x_1, entonces f es continua en x_1

DEMOSTRACIÓN

1. Para probar que f es continua en $x = x_1$ debemos demostrar que el $\lim\limits_{x\to x_1} f(x) = f(x_1)$
2. Por hipótesis sabemos que $f'(x_1)$ existe; por lo tanto:

$$f'(x_1) = \lim_{x\to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

Luego, como este límite existe entonces $f(x_1)$ existe pues, de lo contrario, el límite anterior carecería de sentido.

3. Ahora consideremos la expresión $\lim\limits_{x \to x_1} [f(x) - f(x_1)]$:

$$\lim_{x \to x_1} [\, f(x) - f(x_1)\,] = \lim_{x \to x_1} \left[(x - x_1) \cdot \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \right]$$

$$= \lim_{x \to x_1} (x - x_1) \cdot \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

$$= 0 \bullet f'(x_1)$$

$$\therefore \lim_{x \to x_1} \left[f(x) - f(x_1) \right] = 0 \quad \text{............} \quad (1)$$

4. Pero, también:

$$\lim_{x \to x_1} f(x) = [\, f(x) - f(x_1) + f(x_1)\,]$$

0: por el paso 1.

$$\therefore \lim_{x \to x_1} f(x) = \lim_{x \to x_1} [\, f(x) - f(x_1)\,] + \lim_{x \to x_1} f(x_1)$$

$$\therefore \lim_{x \to x_1} f(x) = 0 + f(x_1)$$

$$\therefore \lim_{x \to x_1} f(x) = f(x_1)$$

5. Por lo tanto, $\lim\limits_{x \to x_1} f(x) = f(x_1)$ y concluimos que f es continua en $x = x_1$.

ATENCIÓN

Todo lo anterior nos muestra que una función puede no ser derivable en $x = x_1$ por una de estas tres razones:

1. f es discontinua en $x = x_1$ (figura 6 - 23)
2. f es continua en $x = x_1$, pero la derivada de f en $x = x_1$ es ∞ (en $x = x_1$ f tiene una recta tangente vertical, como en la figura 6 - 22)
3. f es continua en $x = x_1$, pero la derivada de f en $x = x_1$ no existe porque no es ÚNICA (a la izquierda de x_1 la gráfica de f tiene una recta tangente y a la derecha de x_1, tiene otra, como en la figura 6 - 21).

Ejemplo

Hallemos los valores de a y b de tal manera que la función f definida por $f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{si } x < 2 \\ 2x^2 - 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ sea derivable en $x = 2$.

SOLUCIÓN

- En primer lugar debemos garantizar que f sea continua en $x = 2$:

  i. $f(2) = 2(2)^2 - 1 = 7$

  ii. $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (ax + b) = 2a + b$

  iii. $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (2x^2 - 1) = 7$

Por lo tanto, para que f sea continua en x = 2 debe cumplirse que:

$$\mathbf{2a + b = 7} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

- Para que f sea derivable en x = 2 debemos garantizar que $f'_-(2) = f'_+(2)$:

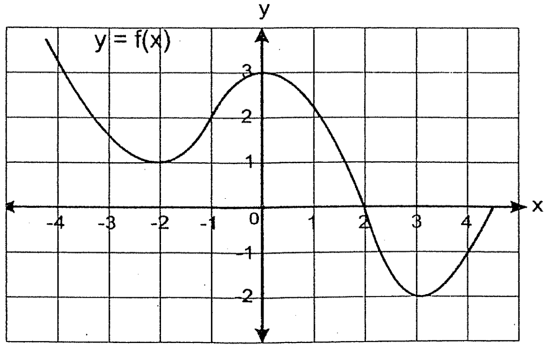
$$\begin{aligned}
f'_-(2) &= \lim_{x \to 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \\
&= \lim_{x \to 2^-} \frac{(ax + b) - 7}{x - 2} \\
&= \lim_{x \to 2^-} \frac{ax + 7 - 2a - 7}{x - 2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{sustituyendo } b = 7 - 2a \\
&= \lim_{x \to 2^-} \frac{ax - 2a}{x - 2} \\
&= \lim_{x \to 2^-} \frac{a(x - 2)}{x - 2} = a \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2) \\
f'_+(2) &= \lim_{x \to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \\
&= \lim_{x \to 2^+} \frac{2x^2 - 1 - 7}{x - 2} \\
&= \lim_{x \to 2^+} \frac{2x^2 - 8}{x - 2} \\
&= \lim_{x \to 2^+} \frac{2(x + 2)\cancel{(x - 2)}}{\cancel{(x - 2)}} = 8 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, para que $f'_-(2) = f'_+(2)$ debemos igualar (2) y (3), con lo cual a = 8. Reemplazando este valor en (1) nos queda que b = 7 - 2(8) = -9.

- Luego, f es derivable en x = 2 cuando a = 8 y b = -9.

EJERCICIO 6.2

1 Usar la gráfica de la función f para estimar el valor de cada derivada.



a) f'(-4)

b) f'(-3)

c) f'(-2)

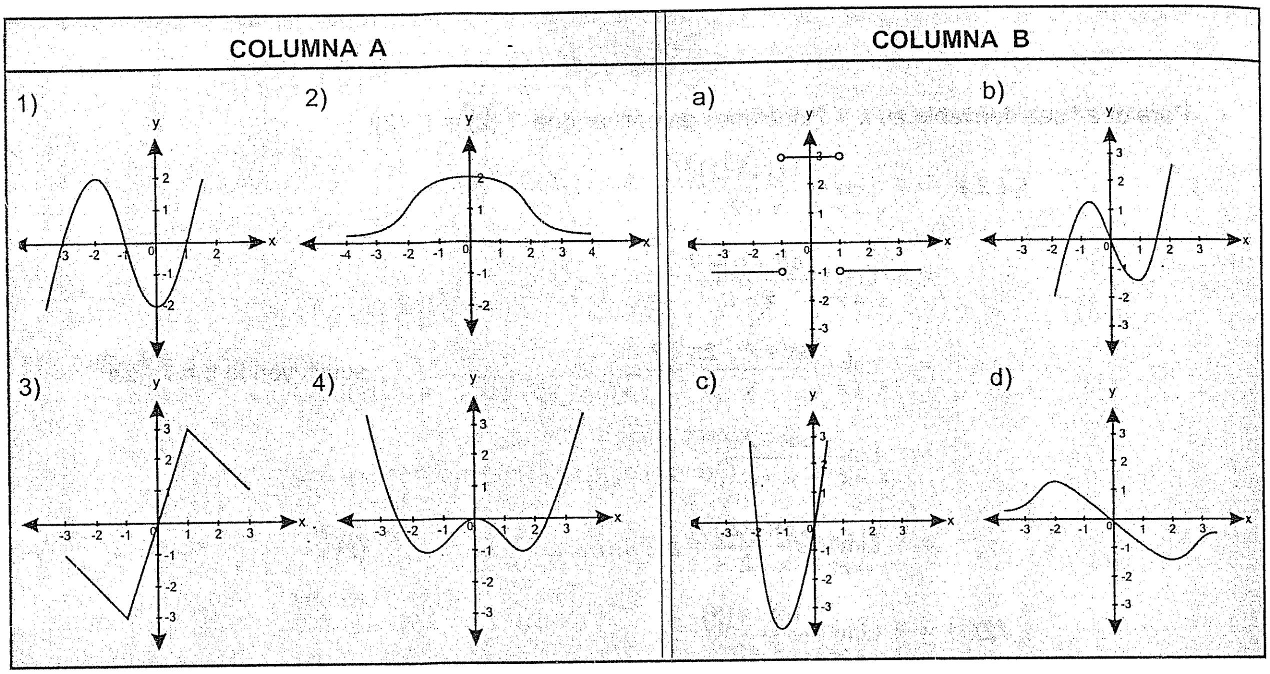
d) f'(-1)

e) f'(0)

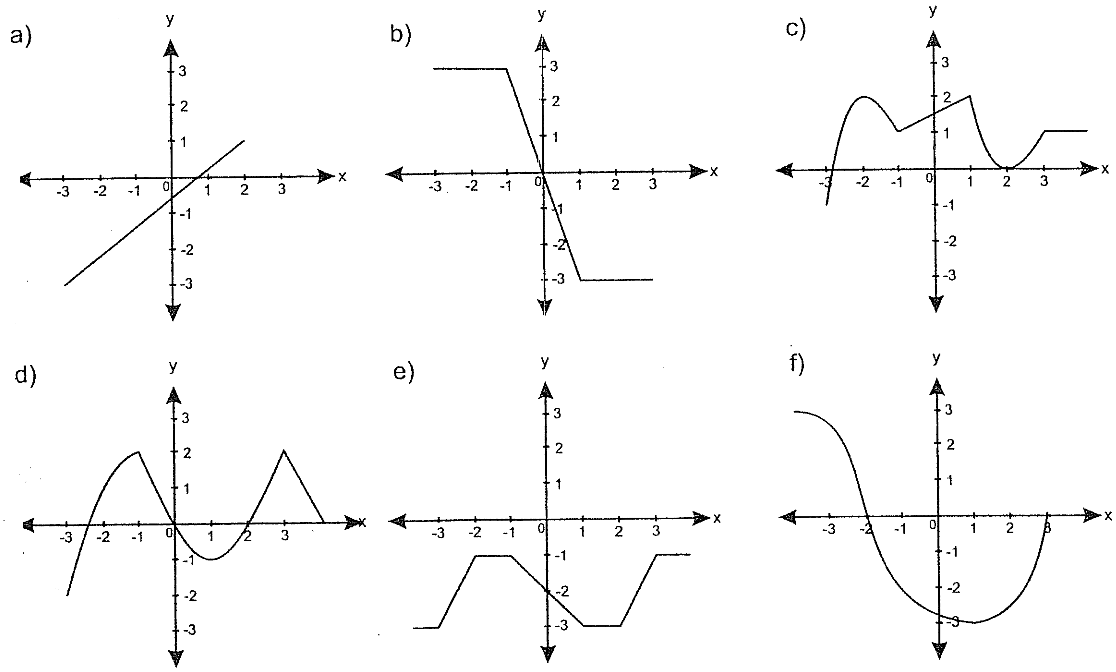
f) f'(1)

g) f'(4)

2 La columna A muestra las gráficas de cuatro funciones y la columna B, las gráficas de sus derivadas. Relacione cada número de la columna A con cada letra de la columna B.



3 Dibujar, encima de las gráficas de cada una de las siguientes funciones, las gráficas de sus derivadas.



4 Si la recta tangente a la gráfica de y=f(x) en el punto (-2 , 3) pasa por el punto (1 , 5), hallar f(-2) y f`(-2)

5 Dibujar la gráfica de una función g tal que g(0)=2, g`(0)=2, g`(1)=0 y g`(2)=1.

6 El porcentaje de desempleo D varía con el tiempo. La tabla siguiente muestra el porcentaje de desempleo de la fuerza laboral de cierto país europeo desde 1989 hasta 1996

t	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996
D(t)	8.9	8.2	7.6	6.9	6.5	5.8	6.3	7.0

a) ¿Cuál es el significado de D'(t)? ¿Cuáles son sus unidades?
b) Estimar los valores de D'(1993) y D'(1995)
c) Interpretar los resultados obtenidos en b).

7 Sea c(t) el precio del café en New York dado en dólares. Los precios se han ajustado respecto a la inflación y se dan en dólares constantes de 1990; así:

t	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992
c(t)	2.88	2.44	3.05	3.52	3.29	2.56	2.24	1.66	1.31	1.27	1.18	1.03

Se pide:

a) Estimar los valores de c´(1983) y c´(1990)

b) Interpretar los resultados obtenidos en a).

En los ejercicios **8** a **13**, se pide:

a) Determinar los valores de x en los cuales la función es discontinua.
b) Hallar la derivada de la función y determinar los valores de x en los cuales la función no es derivable.

8 $f(x)=x^2-3x$

9 $f(x)=1-4x+4x^2$

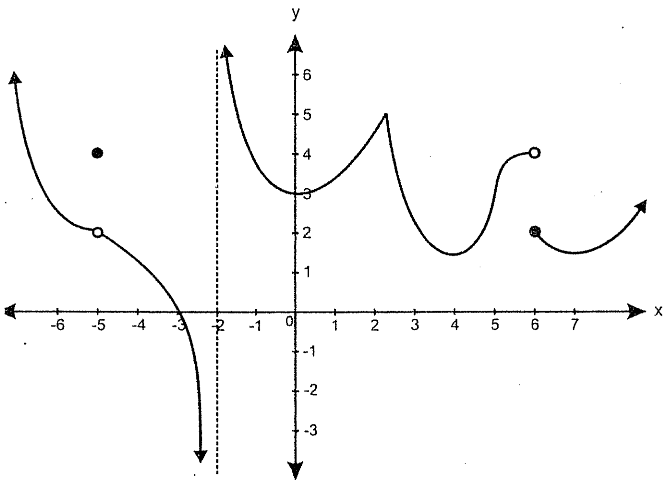
10 $f(x)=\frac{2}{x}$

11 $f(x)=\frac{1}{x-1}$

12 $f(x)=\frac{1}{x^2}$

13 $f(x)=\sqrt{4-x^2}$

14 La siguiente es la gráfica de una función g:



a) ¿En qué números g es discontinua?¿Por qué?
b) ¿En qué números g no es diferenciable?

En los ejercicios **15** a **18**, una partícula se mueve en línea recta. La posición de la partícula en cada instante t de su movimiento está dada por una ecuación de la forma s= f(t), donde s se mide en metros y t en segundos. Determinar la velocidad instantánea de la partícula en el momento t_1 indicado.

15 $s = f(t) = 3t^2 + 1$, en $t_1 = 3$ seg.

16 $s = f(t) = \sqrt{t+1}$, en $t_1 = 3$ seg.

17 $s = f(t) = \frac{2}{5t+6}$, en $t_1 = 2$ seg.

18 $s = f(t) = \begin{cases} t^2 & \text{si } 0 \le t < 1 \\ 2t-1 & \text{si } 1 \le t \le 3 \end{cases}$, en $t_1=1$ seg.

19 Una piedra se lanza verticalmente hacia arriba desde el suelo, con una velocidad inicial de 20 m/seg. Si el sentido positivo del movimiento es hacia arriba y suponemos que la única fuerza que actúa sobre el cuerpo es la gravedad, se pide:

a) Escribir la ecuación que permite determinar la posición s en metros de la piedra, en cada instante t de su movimiento.
b) Hallar la velocidad instantánea de la piedra en cada momento t, en t = 1 segundo y en t = 3 segundos.
c) Determinar la altura máxima que alcanza la piedra.
d) Determinar la rapidez de la piedra en los instantes 1 segundo y 3 segundos (recordemos que la rapidez es la magnitud de la velocidad).
e) Hallar la velocidad con la cual la piedra choca en el suelo.

20 Un jugador golpea una bola de billar, haciéndola mover en línea recta. Si s cm es la distancia de la bola desde su posición inicial a los t seg., entonces $s = f(t) = 100\,t^2 + 100\,t$. Si la bola da en una banda que se encuentra a 39 cm de su posición inicial, ¿con qué velocidad pega en la banda?

21 Una empresa estima que si se gastan 1000 x pesos en publicidad deberá vender **y** unidades de cierto artículo, donde $y = 5 + 400x - 2x^2$. Se pide:

a) Determinar el número de artículos que deben venderse cuando el gasto en publicidad es \$10000.
b) Determinar el cambio promedio de y con respecto a x, cuando el presupuesto en publicidad se incrementa de \$10000 a \$11000.
c) Hallar el cambio instantáneo de y con respecto a x, cuando el presupuesto en publicidad es de \$10000.

22 Sea f una función definida por $f(x) = \begin{cases} x^2 - 9 & \text{si } x < 3 \\ 6x - 18 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$, se pide:

a) Analizar la continuidad de f en x = 3
b) Hallar $f'_-(3)$ y $f'_+(3)$ y determinar si f es derivable en x = 3
c) Dibujar la gráfica de f y trazar, si existe, la recta tangente en x = 3.

23 Sea f la función definida por $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 1 \\ ax + b & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

Hallar los valores de a y b de manera que f sea continua y derivable en x = 1.

24 Sea f una función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{h(x) - h(a)}{x - a} & \text{si } x \neq a \\ h'(a) & \text{si } x = a \end{cases}$$

Probar que si h´(a) existe, entonces f es continua en a.

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (17)

Se inscribe un rectángulo en la parábola de ecuación $y = 4 - x^2$ de tal manera que dos de sus vértices son puntos de la parábola y los otros dos están sobre el eje x. Escribir una ecuación que permita calcular el área de dicho rectángulo, en función de x.

6.5 REGLAS DE DERIVACIÓN

La aplicación de la definición $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ para hallar la derivada de una función f puede convertirse, en la mayoría de las veces, en una labor larga y fatigosa. Por esta razón, vamos a enunciar una serie de propiedades que nos permitirán derivar funciones de una manera rápida, ágil y eficiente. Estas propiedades son las siguientes:

P - 1 DERIVADA DE UNA CONSTANTE

Si k es una constante real y f(x) = k, para toda x, entonces f'(x) = 0

Esta propiedad establece que **la derivada de una constante es igual a CERO.**

DEMOSTRACIÓN

1. Sabemos que $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$
2. Pero, por ser f una función constante tenemos que f(x + h) = k y f(x) = k
3. Luego, reemplazando 2. en 1. nos queda:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{k-k}{h}$$

$$\therefore \; f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h}$$

$$\therefore \; f'(x) = \lim_{h \to 0} (0) = 0$$

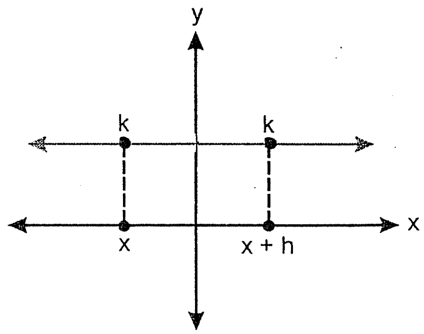


Figura 6 - 24

Geométricamente, el significado de esta propiedad es el siguiente: la gráfica de toda función constante es una línea recta paralela al eje x. La pendiente de esta recta es CERO y puesto que la derivada de una función es la pendiente de su gráfica en cada punto, entonces por esta razón la derivada de la función constante es CERO

Ejemplos

- Si f(x) = -4 entonces f'(x) = 0
- Si f(x) = 6 entonces f'(x) = 0
- Si $f(x) = \dfrac{4}{5}$ entonces f'(x) = 0
- Si $f(x) = -\sqrt{5}$ entonces f'(x) = 0

P - 2 DERIVADA DE UNA POTENCIA DE x

Si $n \in \mathbb{Q}$ y $f(x) = x^n$ entonces $f'(x) = nx^{n-1}$

Esta propiedad nos dice que **la derivada de una potencia es igual al exponente (n) por la base (x) elevada a la n - 1.** Haremos la demostración para el caso en que $n \in \mathbb{Z}^+$; pero antes, debemos recordar una propiedad

Si n es un entero positivo, entonces:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}a^{n-3}b^3 + \ldots + nab^{n-1} + b^n.$$

Con este resultado realicemos la demostración:

DEMOSTRACIÓN

1. $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

2. $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^n - x^n}{h}$ — $f(x+h) = (x+h)^n$; $f(x) = x^n$

3. $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\cancel{x^n} + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}x^{n-3}h^3 + \ldots + nxh^{n-1} + h^n - \cancel{x^n}}{h}$

4. $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\cancel{h}\left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}x^{n-3}h^2 + \ldots + nxh^{n-2} + h^{n-1}\right]}{\cancel{h}}$

5. Como todos los términos, excepto el primero, dependen de h, entonces al aplicarles el límite cuando h tiende a 0, cada uno de ellos será igual a 0. Por lo tanto:

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

Ejemplos

- Si $f(x) = x^4$ entonces $f'(x) = 4x^3$
- Si $f(x) = x$ entonces $f'(x) = 1x^{1-1} = x^0 = 1$
- Si $f(x) = \frac{4}{3}x^6$ entonces $f'(x) = (6)\left(\frac{4}{3}\right)x^5 = 8x^5$
- Si $f(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{2/3}$ entonces $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{2}{3x^{1/3}}$

P - 3 DERIVADA DE UNA SUMA O RESTA DE FUNCIONES

Si f y g son dos funciones de x tales que f'(x) y g'(x) existen, entonces:

$$D_x[f(x) \pm g(x)] = f'(x) \pm g'(x)$$

Esta propiedad nos dice que **la derivada de una suma (o resta) de funciones es igual a la suma (o resta) de las derivadas de cada función, siempre que estas derivadas existan.**

DEMOSTRACIÓN

Supongamos que $h(x) = f(x) + g(x)$ y que $f'(x)$ y $g'(x)$ existen. Entonces:

1. $h'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h(x+h)-h(x)}{h}$ .... definición de derivada

2. $h'(x) \;=\; \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h}$ .... ¿por qué?

3. $h'(x) \;=\; \lim_{h \to 0} \dfrac{[f(x+h)-f(x)]+[g(x+h)-g(x)]}{h}$ .... ¿por qué?

4. $h'(x) \;=\; \lim_{h \to 0} \left[\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} + \dfrac{g(x+h)-g(x)}{h} \right]$ .... ¿por qué?

5. $h'(x) \;=\; \underbrace{\lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}}_{\Downarrow} + \underbrace{\lim_{h \to 0} \dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}}_{\Downarrow}$ .... ¿por qué?

6. $h'(x) \;=\; f'(x) \;+\; g'(x)$..definición de derivada

7. Por lo tanto: $h'(x) = D_x\,[\,f(x) + g(x)\,] = f'(x) + g'(x)$

ATENCIÓN

Esta propiedad puede extenderse a una suma o resta de tres o más funciones; es decir:

Si $p(x) = f(x) + g(x) - h(x)$ entonces $p'(x) = f'(x) + g'(x) - h'(x)$

Ejemplo 1

Si $f(x) = 3x^2 - \dfrac{1}{5}x + 8$ entonces $f'(x) = 6x - \dfrac{1}{5} + 0 = 6x - \dfrac{1}{5}$

Ejemplo 2

Si $f(x) = 9x^{1/7} - 3x^{2/5} + \dfrac{1}{4}$ entonces $f'(x) = \dfrac{9}{7}x^{-6/7} - \dfrac{6}{5}x^{-3/5} + 0$

$$= \frac{9}{7}x^{-6/7} - \frac{6}{5}x^{-3/5}$$

Ejemplo 3

Sea f la función definida por $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 5 & \text{si } x \le 4 \\ 9 - x & \text{si } x > 4 \end{cases}$

Se pide:

a) Probar que f es continua en $x = 4$

b) Hallar $f'(x)$

SOLUCIÓN

a) $f(4) = 5$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 4} \left(x^2 - 4x + 5\right) = 5 \\ \lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 4} (9 - x) = 5 \end{array}\right\} \therefore \lim_{x \to 4} f(x) = 5$$

Luego, f es continua en x = 4

b) Para hallar la derivada de f debemos hacer tres cosas:

i. Hallar la derivada para x < 4
ii. Hallar la derivada para x > 4
iii. Hallar la derivada para x = 4

Veamos:

i. Cuando x < 4, $f(x) = x^2 - 4x + 5$; por lo tanto, $f'(x) = 2x - 4$
ii. Cuando x > 4, $f(x) = 9 - x$; por lo tanto, $f'(x) = -1$
iii. Para hallar la derivada en x = 4 debemos calcular $f'_-(4)$ y $f'_+(4)$; así:

$$f'_-(4) = \lim_{x \to 4^-} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4}$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{(x^2 - 4x + 5) - 5}{x - 4}$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 4x}{x - 4}$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{x\cancel{(x - 4)}}{\cancel{(x - 4)}} = 4$$

$$f'_+(4) = \lim_{x \to 4^+} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4}$$

$$= \lim_{x \to 4^+} \frac{9 - x - 5}{x - 4}$$

$$= \lim_{x \to 4^+} \frac{4 - x}{x - 4} = -1$$

Por lo tanto, $f'(4)$ no existe ya que $f'_-(4) \neq f'_+(4)$.
En consecuencia:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 4 & \text{si } x < 4 \\ \text{No existe} & \text{si } x = 4 \\ -1 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

ATENCIÓN

Como $f'(x) = 2x - 4$ cuando $x < 4$, entonces $f'_-(4) = 2(4) - 4 = 4$ y $f'(x) = -1$ cuando $x > 4$, entonces $f'_+(4) = -1$. Esta es una forma más rápida para hallar $f'(4)$, en lugar de aplicar el $\lim_{x \to 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4}$, siempre que se pruebe antes la continuidad de la función en el punto indicado (en este caso en x = 4).

Ejemplo 4

En una cierta reacción química, la cantidad de gramos g que se produce de una sustancia en t horas está dada por la ecuación $g(t) = 8t - 2t^2$, donde $0 < t \leq 2$. ¿A qué velocidad en gramos por hora se está produciendo la sustancia cuando t = 0.5 horas?

SOLUCIÓN

- La velocidad con la cual se está produciendo la sustancia es la derivada de g con respecto a t; es decir:

$$v(t) = \frac{dg}{dt} = 8 - 4t$$

- Por lo tanto, en el instante t = 0.5 horas, la velocidad es:

$$v(0.5) = 8 - 4(0.5) = 6 \text{ gramos/hora.}$$

P - 4 DERIVADA DE UN PRODUCTO DE FUNCIONES

Si f y g son funciones de x tales que f'(x) y g'(x) existen, entonces:

$$D_x[f(x) \cdot g(x)] = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x)$$

Esta propiedad establece que **la derivada de un producto de funciones es igual a la primera función por la derivada de la segunda MÁS la segunda función por la derivada de la primera.**

DEMOSTRACIÓN

Supongamos que $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ y tal que $f'(x)$ y $g'(x)$ existen. Entonces:

1. $h'(x) = D_x[f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h}$ .....Definición de derivada

2. Sumemos y restemos $f(x+h) \cdot g(x)$ al numerador de 1.:

$$h'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x) \cdot g(x)}{h}$$

3. Ahora, asociemos convenientemente y saquemos factor común:

$$h'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)[g(x+h) - g(x)] + g(x)[f(x+h) - f(x)]}{h}$$

4. A continuación aplicamos límite de una suma de funciones:

$$h'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)[g(x+h) - g(x)]}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x)[f(x+h) - f(x)]}{h}$$

5. Y ahora aplicamos límite de un producto de funciones:

$$h'(x) = \lim_{h\to 0} f(x+h) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + g(x) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(x)[f(x+h) - f(x)]}{h}$$

6. Si examinamos cada uno de los límites del paso anterior veremos que:

$\lim\limits_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$......................................Ya que f es continua y derivable en x.

$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{g(x+h) - g(x)}{h} = g'(x)$..........................Por definición de derivada.

$\lim\limits_{h\to 0} g(x) = g(x)$...En este caso g(x) no depende de h.

$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$..........................Por la definición de derivada.

7. Finalmente, reemplazando 6. en 5. nos queda:

$$h'(x) = D_x[f(x) \cdot g(x)] = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x)$$

Ejemplo 1

Hallemos la derivada de $f(x) = 8x^2 (3x + 7)$

SOLUCIÓN

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 8x^2 \cdot D_x (3x + 7) + (3x + 7) \times D_x (8x^2) \\
&= 8x^2 \cdot (3) + (3x + 7) \cdot (16x) \\
&= 24x^2 + 48x^2 + 112x \\
&= 72x^2 + 112x
\end{aligned}
$$

Ejemplo 2

Hallemos la derivada de $f(x) = (2x^2 - 4x + 1)(3x^3 - 4)$

SOLUCIÓN

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= (2x^2 - 4x + 1) \cdot D_x(3x^3 - 4) + (3x^3 - 4) \cdot D_x (2x^2 - 4x + 1) \\
&= (2x^2 - 4x + 1) \cdot (9x^2) + (3x^3 - 4) \cdot (4x - 4) \\
&= 18x^4 - 36x^3 + 9x^2 + 12x^4 - 12x^3 - 16x + 16 \\
&= 30x^4 - 48x^3 + 9x^2 - 16x + 16.
\end{aligned}
$$

P - 5 DERIVADA DE UN COCIENTE DE FUNCIONES

Si f y g son funciones de x tales que f'(x) y g'(x) existen y $g(x) \neq 0$, entonces:

$$D_x\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Esta propiedad establece que **la derivada de un cociente de funciones es igual al denominador por la derivada del numerador MENOS el numerador por la derivada del denominador dividido todo por el cuadrado del denominador.**

DEMOSTRACIÓN

Supongamos que $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, con $g(x) \neq 0$ y que $f'(x)$ y $g'(x)$ existen. Entonces:

1. $h'(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\dfrac{f(x + h)}{g(x + h)} - \dfrac{f(x)}{g(x)}}{h}$ .... Definición de derivada

2. $h'(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x + h) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x+h)}{h \cdot g(x+h) \cdot g(x)}$ .... ¿Por qué?

3. En el paso 2. sumando y restando $f(x) \cdot g(x)$ al numerador, nos queda:

$$h'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x + h) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x+h) + f(x) \cdot g(x)}{h \cdot g(x+h) \cdot g(x)}$$

4. Si ahora asociamos convenientemente en el numerador de la expresión anterior:

$$h'(x) = \lim_{x \to 0} \left[\frac{g(x) \cdot [f(x+h) - f(x)]}{h \cdot g(x+h) \cdot g(x)} - \frac{f(x) \cdot [g(x+h) - g(x)]}{h \cdot g(x+h) \cdot g(x)}\right]$$

5. Si en la expresión anterior aplicamos límite de una resta nos queda:

$$h'(x) = \lim_{h\to 0}\left[\frac{g(x)}{g(x+h)\cdot g(x)}\cdot\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right] - \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x)}{g(x+h)\cdot g(x)}\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]$$

6. Si en el paso 5. aplicamos límite de un producto y resolvemos cada uno de los límites resultantes, obtendremos:

$\lim_{h\to 0}\frac{g(x)}{g(x+h)\cdot g(x)} = \frac{g(x)}{g(x)\cdot g(x)} = \frac{g(x)}{[g(x)]^2}$ .... ¿Por qué?

$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$ .... Definición de derivada

$\lim_{h\to 0}\frac{f(x)}{g(x+h)\cdot g(x)} = \frac{f(x)}{g(x)\cdot g(x)} = \frac{f(x)}{[g(x)]^2}$ .... ¿Por qué?

$\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = g'(x)$ .... ¿Por qué?

7. Finalmente, reemplazando 6. en 5. nos queda:

$$h'(x) = \frac{g(x)}{[g(x)]^2}\cdot f'(x) - \frac{f(x)}{[g(x)]^2}\cdot g'(x)$$

$$\therefore\ h'(x) = \frac{g(x)\cdot f'(x) - f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

CONCLUSIÓN

$$h'(x) = D_x\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\cdot f'(x) - f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Ejemplo 1

Hallemos la derivada de $f(x) = x^{-5}$

SOLUCIÓN

- Como $x^{-5} = \frac{1}{x^5}$ entonces $f(x) = \frac{1}{x^5}$
- Para hallar la derivada, podemos aplicar derivada de un cociente; así:

$$f'(x) = \frac{x^5\cdot D_x(1) - 1\cdot D_x(x^5)}{(x^5)^2}$$

$$\therefore\ f'(x) = \frac{x^5\cdot 0 - 1\cdot(5x^4)}{x^{10}}$$

$$\therefore\ f'(x) = \frac{-5x^4}{x^{10}} = -\frac{5}{x^6}$$

Este resultado es el mismo si aplicamos la propiedad de la derivada de una potencia. En efecto:

Si $f(x) = x^{-5}$ entonces $f'(x) = -5x^{-5-1} = -5x^{-6} = -\frac{5}{x^6}$

Ejemplo 2

Hallemos las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva $y = \dfrac{x}{x-1}$ en el punto donde x = 2.

SOLUCIÓN

- La pendiente de cualquier recta tangente a la curva la hallamos derivando su ecuación; así:

$$\frac{(x-1)\cdot D_x(x) - x\cdot D_x(x-1)}{(x-1)^2}$$

$$\therefore \quad y' = \frac{(x-1)\cdot 1 - x\cdot 1}{(x-1)^2}$$

$$\therefore \quad y' = \frac{-1}{(x-1)^2}$$

- Por lo tanto, la pendiente de cualquier recta tangente a la curva es $m_{\overset{\leftrightarrow}{t}} = \dfrac{-1}{(x-1)^2}$. En x = 2, el valor de la pendiente es $m_{\overset{\leftrightarrow}{t}} = \dfrac{-1}{(2-1)^2} = -1$ y la pendiente de la normal es $m_{\overset{\leftrightarrow}{n}} = 1$.

- Para completar el punto de tangencia, reemplazamos x por 2 en la ecuación: $y = \dfrac{2}{2-1} = 2$; es decir, el punto de tangencia es P(2 , 2).

- Finalmente, las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva son:

  Recta tangente: $y - 2 = -1(x - 2)$ ó $y = 4 - x$
  Recta normal: $y - 2 = 1(x - 2)$ ó $y = x$

EJERCICIO 6.3

En los ejercicios 1 a 26, hallar la derivada de cada una de las funciones dadas.

1. $f(x) = -\dfrac{3}{4}$
2. $f(x) = \sqrt[3]{45}$
3. $f(x) = x$
4. $f(x) = x - 4$
5. $f(x) = x^2 + 6$
6. $f(t) = t^2 + 5t - 4$

$f(x) = x^3 - 2$

8. $f(t) = t^3 - t + 4$
9. $f(t) = -3t^2 + 5t - 6$
10. $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 2x - 7$
11. $f(x) = x^{5/3} + 2x^{4/3} - 3x^{-1/3}$
12. $f(x) = x^{-2/3} + x^{-4/3} - 2x^{4/7}$
13. $f(x) = \dfrac{3}{4}x^{4/3} + 2x^{1/2} - 2x^{-1}$
14. $f(x) = \dfrac{x^{3/2} - 2x^{1/2} + 4x^{-1/2}}{5}$
15. $f(x) = 2x\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x^2} - 5x\sqrt[5]{x^2}$
16. $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{2\sqrt{x}}$
17. $f(x) = (x^2 - 2x + 1)(x^3 - 1)$
18. $f(x) = \left(x^5 - 3x\right)\left(\dfrac{1}{x^2} + x\right)$

19. $f(x) = \dfrac{3 - 2x - x^2}{x^2 - 1}$

20. $f(x) = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x-1}$

21. $f(x) = \dfrac{3}{x^2 + x + 1}$

22. $f(t) = (t^2 + 1)(t^3 + t^2 + 1)$

23. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$

24. $f(t) = \dfrac{t - 1}{t^2 + 2t + 1}$

25. $f(x) = \dfrac{\dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2}}{\dfrac{2}{x^3} - \dfrac{3}{x^4}}$

26. $f(x) = \dfrac{2x^2}{3x - \dfrac{4}{5x^4}}$

27. Hallar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva $y = x^4 - 3x^2 + 2$ en el punto (1, 0).

28. Determinar, si existen, los puntos donde la recta tangente a la curva $y = x^3 + x$ es paralela al eje x.

29. El volumen de un cubo cuya arista es x cm es $V = x^3$. Hallar la razón de cambio del volumen respecto a x cuando x = 4 cm.

30. ¿En qué punto tiene la gráfica de la ecuación $y = \dfrac{x^2}{x - 1}$ una recta tangente paralela al eje x?

31. Se introduce una población de 500 bacterias en una sustancia. Después de t horas el número de bacterias presente en la sustancia está dado por la ecuación:

$$B(t) = 500\left(1 + \frac{4t}{50 + t^2}\right)$$

a) ¿Cuántas bacterias hay en la sustancia al cabo de 2 horas?

b) ¿A qué ritmo está creciendo la población de bacterias cuando t = 2 horas?

32. El tanque cónico de la figura 6 - 25 tiene un radio de 80 cm y una altura de 400 cm. El líquido sale por un pequeño orificio en el fondo del tanque. ¿Cuál es la razón de cambio del volumen con respecto a h, cuando h = 300 cm?

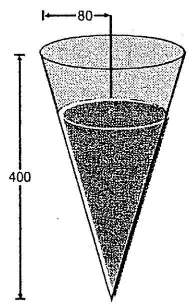


Figura 6 - 25

33. Determinar una ecuación de la recta que pasa por el punto (1,5) y es tangente a la curva $y=x^3$. (Sugerencia: nombre $(x_1\ ,\ x_1^3)$ el punto de tangencia y aplique pendiente de la recta que pasa por dos puntos).

34. Probar que si f es una función definida por y = f(x), entonces $D_x\,[f(x)]^3 = 3\,[f(x)]^2 \cdot f'(x)$
(Sugerencia: como $[f(x)]^3 = [f(x) \cdot f(x)] \cdot f(x)$, aplique derivada de un producto de funciones.

35 ¿Se puede generalizar el resultado anterior y afirmar que $D_x[f(x)]^n = n[f(x)]^{n-1} \cdot f'(x)$, cuando $n \in \mathbb{Z}^+$ y $f'(x)$ existe?

36 Utilizar el resultado del ejercicio anterior para calcular $D_x(3x^2 - 5)^{50}$.

37 Resolver el problema 20 del ejercicio 6 - 2, aplicando las propiedades de la derivada.

38 Resolver el problema 21 del ejercicio 6 - 2, aplicando las propiedades de la derivada.

39 Resolver el problema 22 del ejercicio 6 - 2, aplicando las propiedades de la derivada.

40 Resolver el problema 23 del ejercicio 6 - 2, aplicando las propiedades de la derivada.

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (18)

Una caja rectangular de base cuadrada de x cm de lado se fabrica de tal manera que el área de sus seis caras es de 18 m². Escribir una ecuación en función de x para calcular el volumen de la caja.

6.6 LA REGLA DE LA CADENA

- En la sección anterior estudiamos cómo se derivan funciones polinómicas y funciones racionales. Sin embargo, con frecuencia necesitamos derivar **potencias** de tales funciones. Por ejemplo, ¿cómo hallamos la derivada de $y = (3x^2 - 4x + 5)^3$? Si observamos con cuidado encontramos que esta expresión tiene la forma $y = [f(x)]^3$, donde $f(x) = 3x^2 - 4x + 5$, y podríamos hallar su derivada escribiendo como un producto de tres factores iguales y aplicando derivada de un producto; así:

$$\begin{aligned}
y' &= [f(x)]^3 = [f(x)\cdot f(x)\cdot f(x)] \\
\therefore\ y' &= [f(x)\cdot f(x)]\cdot D_x[f(x)] + f(x)\cdot D_x[f(x)\cdot f(x)] \\
\therefore\ y' &= [f(x)\cdot f(x)\cdot f'(x)] + f(x)\cdot[f(x)\cdot f'(x) + f(x)\cdot f'(x)] \\
\therefore\ y' &= [f(x)]^2\cdot f'(x) + f(x)\cdot[2f(x)\cdot f'(x)] \\
\therefore\ y' &= [f(x)]^2\cdot f'(x) + 2[f(x)]^2\cdot f'(x) \\
\therefore\ y' &= 3[f(x)]^2\cdot f'(x) \\
\therefore\ y' &= 3\left(3x^2 - 4x + 5\right)^2\cdot D_x\left(3x^2 - 4x + 5\right) \\
\therefore\ y' &= 3\left(3x^2 - 4x + 5\right)^2\cdot(6x - 4)
\end{aligned}$$

- Por lo tanto, la derivada de $[f(x)]^3$ no es solamente $3[f(x)]^2$, como sería de esperarse al aplicar la propiedad para derivar $y = x^3$. ¿Por qué aparece el factor adicional $f'(x)$? La razón es que la función $y = (3x^2 - 4x + 5)^3$ es la **compuesta** de dos funciones:

$g(x) = x^3$: esta es la función «principal»

$f(x) = 3x^2 - 4x + 5$: esta es la función «secundaria».

De tal manera que:

$$\begin{aligned}
y &= (g \circ f)(x) \\
\therefore\ y &= g[f(x)]
\end{aligned}$$

$$\therefore\ y = g(3x^2 - 4x + 5)$$

$$\therefore\ y = (3x^2 - 4x + 5)^3$$

Luego, para aplicar la derivada de $y = g[f(x)]$ debemos tener en cuenta tanto la derivada de la función «principal»: **g**, como la derivada de la función «secundaria» : **f**; así:

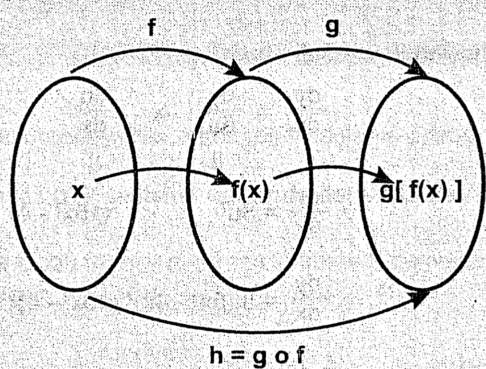
$$\text{Si } y = g[f(x)] \text{ entonces} \qquad y' = \underbrace{g'[f(x)]}_{\substack{\Uparrow \\ \boxed{\text{Derivada de la función principal}} \\ \Downarrow}} \cdot \underbrace{f'(x)}_{\substack{\Uparrow \\ \boxed{\text{Derivada de la función secundaria}} \\ \Downarrow}}$$

$$\text{Si } y = (3x^2 - 4x + 5)^3 \text{ entonces} \qquad y' = 3(3x^2 - 4x + 5)^2 \cdot D_x(3x^2 - 4x + 5)$$

REGLA DE LA CADENA

Supongamos que f es derivable en x y que g es derivable en f(x). Entonces la función compuesta h = g o f definida por h(x) = g[f(x)] es derivable en x y su derivada es:

$$h'(x) = \underbrace{g'[f(x)]}_{\substack{\Uparrow \\ \boxed{\text{Derivada de la función principal}}}} \cdot \underbrace{f'(x)}_{\substack{\Uparrow \\ \boxed{\text{Derivada de la función secundaria}}}}$$



ATENCIÓN

1. Al derivar una función compuesta es muy importante identificar cuál es la función «principal» y cuál la función «secundaria». Por ejemplo, en la función definida por $f(x) = Sen^3(x) = [Sen(x)]^3$, la función principal es la **potencia** y la secundaria es la función **Seno**; en cambio, en la función definida por $g(x) = Sen(2x^2 - 3x + 1)$, la función principal es la función **Seno** y la secundaria es la función $\mathbf{h(x) = 2x^2 - 3x + 1}$.

2. Otra forma de expresar la regla de la cadena es utilizando la notación diferencial inventada por G.W. Leibnitz; así:

$$\text{Si } y = [f(x)]^3 \text{ entonces hacemos } u = f(x) \text{ y } y = u^3$$

Por lo tanto:

$$\frac{dy}{du} = 3u^2 \quad y \quad \frac{du}{dx} = f'(x)$$

Con lo cual:

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{3u^2}_{\Downarrow} \cdot \underbrace{f'(x)}_{\Downarrow} \quad \text{.........................} \quad (1)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad \text{.........................} \quad (2)$$

La ecuación (2) es propiamente la REGLA DE LA CADENA y es válida para dos funciones derivables $y = g(u)$ y $u = f(x)$. La expresión de la ecuación (1) es el caso particular de la ecuación (2) cuando $g(u) = u^3$.

Ejemplo 1

Hallemos la derivada de $y = (5x^3 - 4x)^8$

SOLUCIÓN

- Tenemos que derivar una función compuesta. La función «principal» es la potencia: $y = [f(x)]^8$ y la «secundaria» es $f(x) = 5x^3 - 4x$.

  Por lo tanto:

$$y' = 8[f(x)]^7 \cdot f'(x)$$

$$\therefore \quad y' = 8(5x^3 - 4x)^7 \cdot (15x^2 - 4)$$

$$\therefore \quad y' = 8(15x^2 - 4)(5x^3 - 4x)^7$$

- También podemos derivar haciendo $u = 5x^3 - 4x$ y $y = u^8$; así:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 8u^7 \cdot (15x^2 - 4)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 8(5x^3 - 4x)^7(15x^2 - 4)$$

Ejemplo 2

Hallemos la derivada de $y = \dfrac{2x + 3}{\sqrt{x^2 + 3x + 4}}$

SOLUCIÓN

¿Qué tipo de función debemos derivar? La expresión $y = \dfrac{2x + 3}{\sqrt{x^2 + 3x + 4}}$ es el cociente de dos funciones:

$f(x) = 2x + 3$ y $g(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 4}$.

- Por lo tanto, debemos aplicar la propiedad correspondiente a la derivada de un cociente;

$$y' = D_x\left[\frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x+4}}\right]$$

$$\therefore \quad y' = \frac{\sqrt{x^2+3x+4}\cdot D_x(2x+3) - (2x+3)\,D_x\left[\sqrt{x^2+3x+4}\right]}{\left[\sqrt{x^2+3x+4}\right]^2}$$

$$\therefore \quad y' = \frac{(x^2+3x+4)^{1/2}\cdot 2 - (2x+3)\cdot \frac{1}{2}(x^2+3x+4)^{-1/2}\cdot(2x+3)}{x^2+3x+4}$$

$$\therefore \quad y' = \frac{(x^2+3x+4)^{-1/2}\left[2(x^2+3x+4) - \frac{1}{2}(2x+3)^2\right]}{x^2+3x+4}$$

$$\therefore \quad y' = \frac{2(x^2+3x+4) - \frac{1}{2}(2x+3)^2}{(x^2+3x+4)^{1/2}(x^2+3x+4)}$$

$$\therefore \quad y' = \frac{2x^2+6x+8-2x^2-6x-\frac{9}{2}}{(x^2+3x+4)^{3/2}}$$

$$\therefore \quad y' = \frac{7}{2(x^2+3x+4)^{3/2}}$$

6.7 DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

- Ya hemos visto que si f es una función derivable, entonces f' se llama **primera derivada de f.**
- Así mismo, si **f'** es derivable entonces **(f ')'** se llama **segunda derivada de f** y se simboliza $\mathbf{f^{(2)}}$
- En general, la n-ésima derivada de f, con $n \in \mathbb{N}$ y $n > 1$, es la primera derivada de la derivada de orden (n - 1) de f y la simbolizamos por $f^{(n)}$; es decir:

$$f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)', \text{ para } n > 1$$

- Si utilizamos la notación de Leibnitz, entonces las diferentes derivadas de una función las podemos simbolizar así:

$$\begin{array}{ccccccccc} f'(x) & , & f''(x) & , & f'''(x) & , & \dots & , & f^{(n)}(x) \\ \Updownarrow & & \Updownarrow & & \Updownarrow & & & & \Updownarrow \\ \dfrac{dy}{dx} & , & \dfrac{d^2y}{dx^2} & , & \dfrac{d^3y}{dx^3} & , & \dots & , & \dfrac{d^ny}{dx^n} \end{array}$$

- Así como geométricamente la primera derivada de una función nos proporciona la pendiente de todas las rectas tangentes a la gráfica correspondiente a la función, también la segunda derivada tiene un significado geométrico importante, el cual estudiaremos con detalle en la próxima unidad: **La segunda derivada nos proporciona información sobre la CONCAVIDAD de la curva.**

- Desde el punto de vista físico, la segunda derivada de una función nos permite determinar la ACELERACIÓN de una partícula que se mueve en línea recta.
- Podemos interpretar físicamente la tercera derivada de una función, cuando esta representa el desplazamiento de un objeto que se mueve en línea recta mediante una ecuación $s = f(t)$, así: Dado que $s''' = (s'')' = a'$, entonces la tercera derivada de la función de posición es la derivada de la función aceleración y se conoce con el nombre de TIRÓN; es decir:

$$j = \frac{da}{dt} = \frac{d^3s}{dt^3}$$

Este nombre es apropiado porque un gran tirón es un cambio súbito en la aceleración, el cual produce un cambio brusco en un vehículo.

Ejemplo 1

Probemos que la tercera derivada de la función $f(x) = x^3 + \frac{1}{x}$ es $f'''(x) = 6\left(1 - \frac{1}{x^4}\right)$.

SOLUCIÓN

- Si $f(x) = x^3 + \frac{1}{x}$ entonces $f'(x) = 3x^2 - \frac{1}{x^2}$
- Si $f'(x) = 3x^2 - \frac{1}{x^2}$ entonces $f''(x) = 6x + \frac{2}{x^3}$
- Si $f''(x) = 6x + \frac{2}{x^3}$ entonces $f'''(x) = 6 - \frac{6}{x^4} = 6\left(1 - \frac{1}{x^4}\right)$

Ejemplo 2

Una partícula se desplaza a lo largo de una recta horizontal de acuerdo con la ecuación $s = 3t^2 - t^3$. Determinemos:

a) Los intervalos en los cuales la aceleración es positiva, aquellos en los que la aceleración es negativa y los instantes en que la aceleración es igual a 0.

b) ¿Cómo es la velocidad de la partícula en tales intervalos?

c) ¿En cuáles intervalos el movimiento de la partícula es acelerado y en cuáles es desacelerado?

d) ¿Cuál es el tirón en t = 5 seg? ¿Cuáles son sus unidades?

SOLUCIÓN

a) Como $v = \frac{ds}{dt}$ entonces $v = 6t - 3t^2$.

Como $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$ entonces $a = 6 - 6t$.

Para contestar las preguntas, veamos cuándo $a = 0$:

$a = 0$ cuando $6 - 6t = 0$; es decir, cuando $t = 1$ seg.

Ahora analicemos como es la aceleración en los intervalos $(0 ; 1)$ y $(1 ; +\infty)$:

En $(0 ; 1)$, la aceleración es positiva $(a > 0)$.

En $(1 ; +\infty)$, la aceleración es negativa $(a < 0)$.

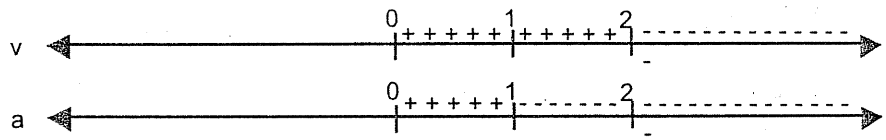
b) Como v = 0 cuando $6t - 3t^2 = 0$ ó $3t(2 - t) = 0$, entonces t = 0 ó t = 2; luego, analicemos lo que pasa en los intervalos (0 ; 1) (1 ; 2) y (2 ; +∞).

En (0 ; 1), la velocidad es positiva (v > 0) y está aumentando ya que la aceleración es positiva (a > 0).

En (1 ; 2), la velocidad es positiva (v > 0) pero está disminuyendo ya que la aceleración es negativa (a < 0).

En (2 ; +∞), la velocidad es negativa (v < 0) y sigue disminuyendo ya que la aceleración es negativa (a < 0).

c) El movimiento de una partícula es acelerado en aquellos intervalos en los que la velocidad y la aceleración tienen el mismo signo y es desacelerado en los que la velocidad y la aceleración tienen signos contrarios.



Por lo tanto, el movimiento es acelerado en los intervalos (0 ; 1) y (2; +∞) y es desacelerado en el intervalo (1 ; 2).

d) Como $j = \frac{da}{dt} = \frac{d^3s}{dt^3}$, entonces j = 6. Sus unidades son cm/seg^3

6.8 DERIVADAS DE LAS FUNCIONES TRASCENDENTES

6.8.1. Derivada de las funciones Trigonométricas

- En esta sección vamos a enunciar y demostrar las propiedades correspondientes a las derivadas de las funciones trigonométricas. Conviene recordar dos límites especiales que estudiamos en la unidad cinco:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\text{Sen}(x)}{x} = 1$ **2.** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\text{Cos}(x)}{x} = 0$

- Además, es necesario tener en cuenta las siguientes identidades trigonométricas:

1. $\text{Sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \text{Cos}(x)$ 2. $\text{Cos}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \text{Sen}(x)$

3. $\text{Tan}(x) = \frac{\text{Sen}(x)}{\text{Cos}(x)}$ 4. $\text{Cot}(x) = \frac{\text{Cos}(x)}{\text{Sen}(x)}$

5. $\text{Sec}(x) = \frac{1}{\text{Cos}(x)}$ 6. $\text{Csc}(x) = \frac{1}{\text{Sen}(x)}$

P- 1: DERIVADA DE LA FUNCIÓN SENO

Si f(x) = Sen(x) entonces f'(x) = Cos(x)

Esta propiedad establece que **la derivada de seno es coseno.**

DEMOSTRACIÓN:

1. $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ ....definición de derivada

2. $\left.\begin{array}{l} f(x) = \text{Sen}\, x \\ f(x+h) = \text{Sen}(x+h) \end{array}\right\}$ ....¿por qué?

3. Reemplazando 2. en 1., obtenemos: $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{Sen(x+h) - Sen(x)}{h}$

4. Ahora bien: Sen (x + h) = Sen(x) Cos(h) + Sen(h) Cos(x)............................ ¿por qué?

5. Reemplazando 4. en 3. obtenemos:

$$f'(x) \quad = \quad \lim_{h \to 0} \frac{Sen(x) \cdot Cos(h) + Cos(x) \cdot Sen(h) - Sen(x)}{h}$$

6. $f'(x) \quad = \quad \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{[Sen(x) \cdot Cos(h) - Sen(x)] + Cos(x) \cdot Sen(h)}{h}$ .... asociamos

7. $f'(x) \quad = \quad \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{Sen(x)[Cos(h) - 1] + Cos(x)\ Sen(h)}{h}$ .... factor común

8. $f'(x) \quad = \quad \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{Sen(x)[Cos(h) - 1]}{h} + \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{Cos(x) Sen(h)}{h}$ ....límite de una suma

9. $f'(x) \quad = \quad Sen(x) \cdot \overset{=0}{\cancel{\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{Cos(h) - 1}{h}}} + Cos(x) \cdot \overset{=1}{\cancel{\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{Sen(h)}{h}}}$ .... ¿por qué?

10. $f'(x) \quad = \quad Sen(x) \cdot 0 + Cos(x) \cdot 1 \; = \; Cos(x)$ ....¿por qué?

11. Por lo tanto, $\boxed{f'(x) = Cos(x)}$

OBSERVACIÓN

Si f(x) = Sen[g(x)] entonces f'(x) = Cos[g(x)] · g'(x); es decir, si el argumento de la función seno es a la vez una función, entonces tenemos una función compuesta y debemos derivarla como tal; aplicando la regla de la cadena.

Ejemplo 1

Hallemos la derivada de y = Sen(5x)

SOLUCIÓN

$$y' = Cos(5x) \cdot D_x(5x)$$

$$\therefore\ y' = Cos(5x) \cdot 5$$

$$\therefore\ y' = 5\,Cos(5x)$$

P – 2 DERIVADA DE LA FUNCIÓN COSENO

Si f(x) = Cos(x) entonces f'(x) = - Sen(x)

- Esta propiedad nos dice que **la derivada de Coseno es MENOS Seno**
- Para demostrar esta propiedad conviene recordar las siguientes identidades trigonométricas:

1. $Cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = Sen(x)$

2. $Sen\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = Cos(x)$

DEMOSTRACIÓN

1. $f(x) = Cos(x) = Sen\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ .... identidad 2.

2. Luego, $f'(x) = Cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot D_x\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ .... derivada de Seno.

3. $f'(x) = Cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot (-1)$ .... $D_x = -1$

4. $f'(x) = -Cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ .... ¿por qué?

5. Pero, $Cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = Sen(x)$ .... ¿por qué?

6. Luego, reemplazando 5. en 4., nos queda que $f'(x) = -Sen(x)$

ATENCIÓN

Si $f(x) = Cos[g(x)]$ entonces $f'(x) = -Sen[g(x)] \cdot g'(x)$

Ejemplo 2

Hallemos la derivada de $f(x) = Cos^3\left(\sqrt{4x^2 - 3}\right)$.

SOLUCIÓN

- En primer lugar $f(x) = Cos^3\left(\sqrt{4x^2 - 3}\right) = Cos^3\left[\left(\sqrt{4x^2 - 3x}\right)\right]^3$
- Por lo tanto:

$$f(x) = 3Cos^2\left(\sqrt{4x^2 - 3}\right) \cdot D_x\left[Cos\left(\sqrt{4x^2 - 3x}\right)\right]$$

$$\therefore\ f(x) = 3Cos^2\left(\sqrt{4x^2 - 3}\right) \cdot \left[-Sen\left(\sqrt{4x^2 - 3x}\right)\right] \cdot D_x\left(\sqrt{4x^2 - 3}\right)$$

$$\therefore\ f(x) = -3Cos^2\left(\sqrt{4x^2 - 3}\right) \cdot Sen\left(\sqrt{4x^2 - 3x}\right) \cdot \frac{1}{2}\left(4x^2 - 3\right)^{-1/2} \cdot D_x\left(4x^2 - 3\right)$$

$$\therefore\ f(x) = -3Cos^2\left(\sqrt{4x^2 - 3}\right) \frac{1}{2}\left(4x^2 - 3\right)^{-1/2} \cdot Sen\left(4x^2 - 3\right)\left(8x\right)$$

$$\therefore\ f(x) = \frac{-12x\, Cos^2\left(\sqrt{4x^2 - 3}\right) Sen\left(\sqrt{4x^2 - 3}\right)}{\sqrt{4x^2 - 3}}$$

ATENCIÓN

1. Las derivadas de las otras funciones trigonométricas son las siguientes:

$$D_x(Tan\,(f(x))) = Sec^2(f(x)) \cdot f'(x)$$

$$D_x(Cot\,(f(x))) = -\,Csc^2(f(x)) \cdot f'(x)$$

$$D_x\,(Sec\,(f(x))) = Sec\,(f(x)) \cdot Tan\,(f(x)) \cdot f'(x)$$

$$D_x\,(Csc\,(f(x))) = -Csc\,(f(x)) \cdot Cot\,(f(x)) \cdot f'(x)$$

2. Para su demostración, basta recordar que:

$$\text{Tan}(x) = \frac{\text{Sen}(x)}{\text{Cos}(x)} \quad ; \quad \text{Cot}(x) = \frac{\text{Cos}(x)}{\text{Sen}(x)}$$

$$\text{Sec}(x) = \frac{1}{\text{Cos}(x)} \quad ; \quad \text{Csc}(x) = \frac{1}{\text{Sen}(x)}$$

por lo tanto, sólo necesitamos aplicar la derivada de un cociente y las derivadas de Seno y Coseno. (¡ Hacerlo !).

Ejemplo 3

Hallemos la derivada de $f(x) = \sqrt[3]{\text{Cot}^2(2x+\pi)}$

SOLUCIÓN

Como $f(x) = \sqrt[3]{\text{Cot}^2(2x+\pi)} = [\text{Cot}(2x+\pi)]^{2/3}$ entonces:

$$f'(x) = \frac{2}{3}[\text{Cot}(2x+\pi)]^{-1/3} \cdot D_x[\text{Cot}(2x+\pi)]$$

$$\therefore\ f'(x) = \frac{2}{3}[\text{Cot}(2x+\pi)]^{-1/3} \cdot [-\text{Csc}^2(2x+\pi)] \cdot D_x(2x+\pi)$$

$$\therefore\ f'(x) = -\frac{2}{3}[\text{Cot}(2x+\pi)]^{-1/3} \cdot \text{Csc}^2(2x+\pi) \cdot 2$$

$$\therefore\ f'(x) = \frac{-4\,\text{Csc}^2(2x+\pi)}{3\sqrt[3]{\text{Cot}(2x+\pi)}}$$

6.8.2. Derivada de la función Logarìtmica

- En la deducción de la regla para derivar una función logarítmica es necesario recordar tres propiedades que ya conocemos:

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$ 2. $\text{Log}_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$ 3. $\text{Log}_a e = \dfrac{1}{\ln a}$

- Para hallar la derivada de la función $f(x) = \log_a(x)$, aplicamos, como en todos los casos anteriores, la definición de derivada. Justifiquemos cada paso de la deducción.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h) - \log_a(x)}{h}$$

$$\therefore\ f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\log_a\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h}$$

$$\therefore\ f'(x) = \lim_{h\to 0}\left[\frac{h}{x}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)\right] = \lim_{h\to 0}\left[\frac{1\cdot x}{h\cdot x}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)\right]$$

$$\therefore\ f'(x) = \lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{h}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)\right] = \lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{x}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)^{x/h}\right]$$

Si hacemos $u = \frac{h}{x}$ entonces $h = ux$ y si $h \to 0$ entonces $u \to 0$
Por lo tanto:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{x}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)^{x/h}\right] = \frac{1}{x}\lim_{u\to 0}\left[\log_a(1+u)^{1/u}\right]$$

$$\therefore\ f'(x) = \frac{1}{x}\log_a\left[\underbrace{\lim(1+u)^{1/u}}_{=e}\right] = \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x\ln a}$$

- Por lo tanto, si $f(x) = \log_a(x)$ entonces $f'(x) = \frac{1}{x\ln a}$.

- **En general:**

$$y = f(x) = \log_a[g(x)] \text{ entonces: } f'(x) = \frac{1}{g(x)\ln a}\cdot g'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)\ln a}$$

- **Dos consecuencias de esta propiedad:**

  - C - 1: Si $y = \ln(x)$ entonces $y' = \frac{1}{x}\ln e = \frac{1}{x}$, con $x > 0$.

  - C – 2: Si $y = \ln|x| = \begin{cases}\ln(x) & \text{si } x > 0\\ \ln(-x) & \text{si } x < 0\end{cases}$ entonces $y' = \begin{cases}\frac{1}{x} & \text{si } x > 0\\ -\frac{1}{x}(-1) = \frac{1}{x} & \text{si } x < 0\end{cases} = \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$

Ejemplo 1

Si $f(x) = \log_3\left(\frac{x}{x+1}\right)$, hallemos el dominio de f, los valores de x para los cuales $f'(x) > 0$ y los valores de xpara los cuales $f''(x) < 0$.

SOLUCIÓN

- El dominio de f está formado por aquellos valores de x para los cuales $\frac{x}{x+1} > 0$. La solución de esta inecuación es el conjunto $D_f = \{x / x \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty)\}$.

- Ahora hallemos f'(x) y determinemos cuando $f'(x) > 0$:

$$f'(x) = \frac{x}{x\ln 3}\left[\frac{x+1-x}{(x+1)^2}\right] = \frac{1}{x(x+1)\ln 3}$$

$f'(x) > 0$ cuando $\frac{1}{x(x+1)\ln 3} > 0$. La solución de esta desigualdad es igualmente el conjunto

$(-\infty ; -1) \cup (0; +\infty)$

- Finalmente, calculamos f''(x) y los valores de x para los cuales $f''(x) < 0$.

$$f''(x) = \frac{1}{\ln 3}\left[-\frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}\right] = -\frac{2x+1}{\ln 3\, x^2(x+1)^2}$$

$f''(x) < 0$ cuando $-\dfrac{2x+1}{\ln 3\, x^2(x+1)^2} < 0$; o sea, cuando $\dfrac{2x+1}{\ln 3\, x^2(x+1)^2} > 0$. Como el denominador de esta fracción es positivo para todo $x \neq -1$, entonces para que la fracción sea positiva, debe cumplirse que $2x + 1 > 0$; luego, $x > -\dfrac{1}{2}$. De estos valores, están en el dominio de f los $x \in (0 ; +\infty)$.

CONCLUSIÓN: $f''(x) < 0$ cuando $x \in (0; +\infty)$

6.9 DERIVACIÓN IMPLÍCITA

- Hasta el momento hemos hallado la derivada de funciones de la forma y = f(x), en las cuales la variable **y** está «despejada» en términos de **x:** este tipo de funciones se denominan EXPLÍCITAS. Por ejemplo, si nos preguntamos cómo hallar la derivada de $x^2 + y^2 = 4$, seguramente contestaríamos que lo mejor es despejar la **y**. En efecto:

$$\text{Si } x^2 + y^2 = 4 \text{ entonces } y = \pm\sqrt{4 - x^2}$$

Esto significa que existen dos funciones: $y = f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ y $y = f(x) = -\sqrt{4 - x^2}$ que satisfacen la ecuación $x^2 + y^2 = 4$; es decir, $x^2 + y^2 = 4$ es fácilmente explicitable.

- Sin embargo, existen ecuaciones como $x^3 + y^4 = 8xy$ en los cuales no es fácil despejar **y** en términos de **x** y pueden existir una o más funciones y = f(x) que cumplan la ecuación; es decir, funciones f tales que:

$$x^3 + [f(x)]^4 = 8x\, f(x) \text{...} \quad (1)$$

para todo x en el dominio de f.

En este caso, decimos que la función está definida IMPLÍCITAMENTE por la ecuación (1).

La derivada de **y con respecto a x**; es decir, y' ó f'(x) se obtiene por DERIVACIÓN IMPLÍCITA. La derivada del lado izquierdo de (1) debe ser igual a la derivada del lado derecho de (1). Por lo tanto:

$$D_x\left[x^3 + (f(x))^4\right] = D_x\,[8x\, f(x)]$$

$$\therefore \quad \underbrace{D_x\left(x^3\right)}_{\Downarrow} + \underbrace{D_x[f(x)]^4}_{\Downarrow} = \underbrace{D_x[8x\, f(x)]}_{\Downarrow}$$

$$\therefore \quad 3x^2 \quad + \quad 4[f(x)]^3 \cdot f'(x) = 8x \cdot f'(x) + 8\, f(x)$$

Notemos que, en el paso anterior, para derivar $[f(x)]^4$ aplicamos la **regla de la cadena** y para derivar $[8x\, f(x)]$ aplicamos **derivada de un producto** a las funciones 8x y f(x). Sigamos...

Ahora despejamos f'

$$4[f(x)]^3 \cdot f'(x) - 8x \cdot f'(x) = 8\, f(x) - 3x^2$$

$$\therefore \quad f'(x)\,[4\,(f(x))^3 - 8x] = 8\, f(x) - 3x^2$$

$$\therefore \quad f'(x) = \frac{8\, f(x) - 3x^2}{4(f(x))^3 - 8x} = \frac{8y - 3x^2}{4y^3 - 8x}$$

Esta última expresión es la DERIVADA IMPLÍCITA de y con respecto a x de $x^3 + y^4 = 8xy$. Notemos que la derivación implícita puede producir una expresión para f'(x) que contiene tanto a x como a y.

RESUMEN

Para derivar implícitamente, con respecto a x, una expresión de la forma E(x , y) = 0 procedemos así:

1. **Derivamos ambos miembros de la igualdad con respecto a x.**
2. **Tenemos en cuenta que y = f(x) y que para hallar Dx[f(x)]n debemos aplicar la regla de la cadena; así:**

$$D_x[f(x)]^n = n[f(x)]^{n-1} \bullet f'(x)$$

ó

$$D_x(yn) = ny^{n-1} \bullet y'$$

3. **Resolvemos la ecuación resultante despejando f'(x) $\left(o \dfrac{dy}{dx}\right)$**

Ejemplo 1

Hallemos las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva $y^3 + y^2 - 5y - x^2 = -4$ en el punto P(2 , 0).

SOLUCIÓN

- En la figura 6 - 26 hemos dibujado la curva y las rectas tangente y normal en el punto P(2 , 0)

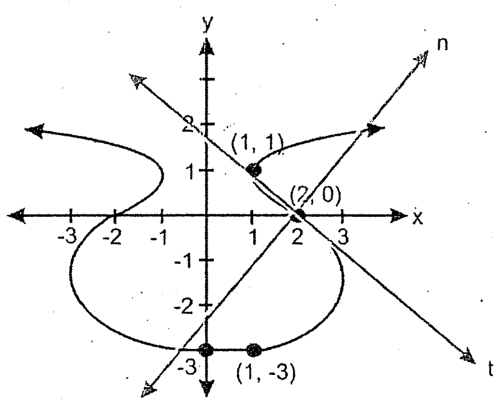


Figura 6 - 26

- Para hallar las ecuaciones pedidas necesitamos un punto (ya lo tenemos: P(2 , 0) y la pendiente. La pendiente de la tangente es $\dfrac{dy}{dx}$ evaluada en P; por lo tanto, debemos derivar implícitamente a y con respecto a x:

$$D_x(y^3 + y^2 - 5y - x^2) = D_x(-4)$$

$$D_x(y^3) + D_x(y^2) - D_x(5y) - D_x(x^2) = 0$$

$$3y^2\, y' + 2y\, y' - 5y' - 2x = 0$$

$$3y^2\, y' + 2y\, y' - 5y' = 2x$$

$$y'(3y^2 + 2y - 5) = 2x$$

$$\therefore\ y' = m_{\underset{t}{\leftrightarrow}} = \frac{2x}{3y^2 + 2y - 5}$$

- El valor de la pendiente de la tangente en P(2 , 0) es:

$$y' = m_{\underset{t}{\leftrightarrow}} = \frac{2(2)}{3(0)^2 + 2(0) - 5} = -\frac{4}{5}$$

y el valor de la pendiente de la normal en el mismo punto es $m_{\underset{n}{\leftrightarrow}} = \frac{5}{4}$.

- Finalmente tenemos:
  - * Ecuación de la tangente: $y - 0 = -\frac{4}{5}(x - 2)$ ó $5y + 4x = 8$
  - * Ecuación de la normal: $y - 0 = \frac{5}{4}(x - 2)$ ó $4y - 5x = -10$

6.10 DERIVACIÓN LOGARÍTMICA

Con frecuencia, el cálculo de derivadas de funciones complejas que comprenden productos, cocientes o potencias se puede simplificar tomando logaritmos a ambos lados de la ecuación dada.

Por esta razón, el método que utilizamos en esta sección se llama DERIVACIÓN LOGARÍTMICA.

Ejemplo

Usemos derivación logarítmica para hallar la derivada de $y = \frac{(x+1)^4 (x-5)^3}{(x-3)^8}$

SOLUCIÓN

- Como esta función es negativa para x < 5, entonces **ln y** no está definido, pero podemos escribir

$\ln|y| = \ln\left|\frac{(x+1)^4 (x-5)^3}{(x-3)^8}\right|$ y aplicar la propiedad para derivar $y = \ln|x|$; así:

$$y = \frac{(x+1)^4 (x-5)^3}{(x-3)^8}$$

$$\therefore\ \ln|y| = \ln\left|\frac{(x+1)^4 (x-5)^3}{(x-3)^8}\right|$$

- Pero, antes de derivar, apliquemos las propiedades de los logaritmos para simplificar la expresión del lado derecho. Veamos:

$$\ln|y| = 4\ln|x+1| + 3\ln|x-5| - 8\ln|x-3|$$

A continuación, derivamos implícitamente con respecto a x:

$$\frac{y'}{y} = \frac{4}{x+1} + \frac{3}{x-5} - \frac{8}{x-3}$$

$$\therefore\ y' = y\left(\frac{4}{x+1} + \frac{3}{x-5} - \frac{8}{x-3}\right)$$

$$\therefore\ y' = \frac{(x+1)^4 (x-5)^3}{(x-3)^8}\left[\frac{4}{x+1} + \frac{3}{x-5} - \frac{8}{x-3}\right]$$

$$\therefore\ y' = \frac{4(x+1)^3 (x-5)^3}{(x-3)^8} + \frac{3(x+1)^4 (x-5)^2}{(x-3)^8} - \frac{8(x+1)^4 (x-5)^3}{(x-3)^9}$$

$$\therefore\ y' = \frac{4(x-3)(x+1)^3(x-5)^3 + 3(x-3)(x+1)^4(x-5)^2 - 8(x+1)^4(x-5)^3}{(x-3)^9}$$

6.11 DERIVADA DE FUNCIONES EXPONENCIALES

- Para deducir la expresión para calcular la derivada de una función exponencial, utilizaremos dos recursos:

  a) La relación existente entre exponenciación y logaritmación.

  b) La derivada implícita.

- Como $y = a^x$ es equivalente a $x = \log_a y$, entonces para hallar la derivada de $y = a^x$, derivamos a $x = \log_a y$; así:

$$x = \log_a y$$
$$\therefore\ D_x(x) = D_x(\log_a y)$$
$$\therefore\ 1 = \frac{1}{y \ln a} \cdot y \ldots\ldots\ldots \text{¿por qué?}$$
$$\therefore\ y' = y \ln a \ldots\ldots\ldots \text{¿por qué?}$$
$$\therefore\ y' = a^x \ln a \ldots\ldots\ldots \text{ya que } y = a^x$$

- **CONCLUSIÓN**

Si $y = a^x$ entonces $y' = a^x \ln a$

ATENCIÓN

Si $y = e^x$ entonces $y' = a^x \cdot \underbrace{\ln e}_{=1} = e^x$; es decir, la derivada de e^x es la misma e^x.

Ejemplo 1

Hallemos la derivada de $y = 5^{3x^2+4}$

SOLUCIÓN

- La función que debemos derivar es compuesta. Las funciones que la componen son $f(x) = 5^x$ (función principal) y $g(x) = 3x^2 + 4$ (función secundaria).

- Aplicando la regla de la cadena, tenemos:

$$y' = 5^{3x^2+4} \cdot \ln 5 \cdot D_x(3x^2+4)$$
$$\therefore\ y' = \ln 5 \cdot 5^{3x^2+4} \cdot (6x)$$
$$\therefore\ y' = 6x \cdot \ln 5 \cdot 5^{3x^2+4}$$

Ejemplo 2

Hallemos la derivada de $y = (\text{Cos } x)^{\sqrt{x}}$.

SOLUCIÓN

- La función $y = (\text{Cos } x)^{\sqrt{x}}$ está definida para $x \geq 0$

  Como, Cos x toma valores que oscilan entre -1 y 1, entonces, debemos tomar valor absoluto a ambos lados de la igualdad, para garantizar que la base, Cos x, sea positiva; así:

$$|y| = \left|\text{Cos } x^{\sqrt{x}}\right| = |\text{Cos } x|^{\sqrt{x}}$$

- Como esta función no es exponencial, no podemos aplicar la fórmula de la conclusión de la sección 6.11. Apliquemos derivación logarítmica; así:

$$\ln|y| = \ln|\text{Cos } x|^{\sqrt{x}}$$

$$\therefore \quad \sqrt{x}\,\ln|\text{Cos } x|$$

- Ahora, derivemos implícitamente a ambos lados de la igualdad:

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \sqrt{x}\cdot\frac{1}{\text{Cos } x}\cdot(-\text{Sen } x) + \ln|\text{Cos } x|\cdot\frac{1}{2}x^{-1/2}$$

$$\therefore \quad y' = y\left(\frac{\ln|\text{Cos } x|}{2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}\,\text{Sen } x}{\text{Cos } x}\right)$$

$$\therefore \quad y' = (\text{Cos } x)^{\sqrt{x}}\left(\frac{\ln|\text{Cos } x|}{2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}\,\text{Sen } x}{\text{Cos } x}\right)$$

EJERCICIO 6.4

ejercicios 1 a 14, hallar la derivada de la función dada.

1. $f(x) = (x^2 + 2x + 3)^{3/2}$
2. $f(x) = (2x^3 - 3x^2 + 3x - 1)^{-1/3}$
3. $f(x) = \sqrt[3]{(x^3 + 3x + 2)^2}$
4. $f(x) = \dfrac{(x^2 + x - 3)\sqrt{x + x - 3}}{5}$
5. $f(x) = (2x + 3)^4\,(3x - 2)^{7/3}$
6. $f(x) = (2x - 1)^{5/2}\,(7x - 3)^{3/7}$
7. $f(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2}\;\sqrt{x - 1}$
8. $f(x) = \dfrac{\sqrt{2 + 6x}}{x}$
9. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$
10. $f(x) = \dfrac{\sqrt{1 + 4x^2}}{x^2}$
11. $f(x) = \dfrac{4x + 6}{\sqrt{x^2 + 3x + 4}}$
12. $f(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt[3]{3x^2 - 1}}$

13. $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}}$

14. $f(x) = \dfrac{\sqrt{3-x}}{\sqrt[3]{x-3}}$

En los ejercicios 15 a 36, hallar la derivada de cada función.

15. $f(x) = 3\,\text{Sen}(x)$

16. $f(x) = x\text{Sen}(x)$

17. $f(x) = \dfrac{\text{Sen}(x)}{x}$

18. $f(x) = 2x^2\,\text{Sen}^2(x)$

19. $f(x) = x\,\text{Cos}(x) + \text{Sen}(x)$

20. $f(x) = \text{Tan}(x^2 + 5x)$

21. $f(x) = \dfrac{\text{Sen}(x)}{2 - \text{Cos}(x)}$

22. $f(x) = \sqrt{\text{Sen}(x)}$

23. $f(x) = \dfrac{\text{Sen}^3(x)}{\text{Sec}(2x)}$

24. $f(x) = 2\,\text{Sec}^2\sqrt{x}$

25. $f(x) = 2\,\text{Tan}\left(\dfrac{1}{2}x\right) - x$

26. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+\text{Cos}^2(2x)}}$

27. $f(x) = \dfrac{e^x}{1+x^2}$

28. $f(x) = x\,e^{-\frac{1}{x}}$

29. $f(x) = \ln(x^2 e^x)$

30. $f(x) = 5^{x\tan x}$

31. $f(x) = \log_{10}(x^2 - x)$

32. $f(x) = \ln(\text{Sen}\,x) - \dfrac{1}{2}\text{Sen}^2(x)$

33. $f(x) = e^{\text{Cos}\,x} + \text{Cos}(e^x)$

34. $f(x) = e^{e^x}$

35. $f(x) = x^{e^x}$

36. $f(x) = x^{\ln x}$

En los ejercicios 37 a 42 hallar la derivada que se indica de la función dada.

37. $f''(x)$, si $f(x) = 3x^2 - 4x + 6$

38. $f''(x)$, si $f(x) = 7 - 6x$

39. $f'''(x)$, si $f(x) = \dfrac{1}{4}x^4 - 2x^3$

40. $f^{(4)}(x)$, si $f(x) = x^2 - \dfrac{1}{x} + 3$

41. $f'''(x)$, si $f(x) = \dfrac{5}{(3x)^2}$

42. $f'''(x)$, si $f(x) = 2x(x-1)^2$

En los ejercicios 43 a 52, hallar $\dfrac{dy}{dx}$.

43. $x^2 + y^2 = 16$

44. $x^2y^2 = x^2 + y^2$

45. $x + \sqrt{y} = 0$

46. $x + y = xy$

47. $x^3 + y^3 = 6$

48. $3x^2 - x^2y + xy^2 + 4y^2 = 5$

49. $\text{Sen}(x+y) + \text{Sen}(x-y) = 1$

50. $\text{Sec}^2(y) + \text{Cot}(x-y) = \text{Tan}^2(x)$

51. $x\,e^y = y - 1$

52. $y = \ln(x^2 + y^2)$

53. Hallar una ecuación de la recta tangente a la curva $y = (7x-6)^{-1/3}$ que sea perpendicular a la recta $12x - 7y + 2 = 0$

54 Determinar la ecuación de la recta normal a la curva $y = x\sqrt{16+x^2}$ en el origen.

55 Hallar una ecuación de la recta tangente a la curva $y = \dfrac{\ln x}{x}$ en el punto donde $x = 1$.

56 Hallar la ecuación de la recta normal a la curva $x^2 + xy + y^2 - 3y = 10$ en el punto $(2, 3)$.

57 ¿En qué punto de la curva $x + xy + y = 1$ la recta tangente es paralela al eje x?

58 Dada $x^3 + y^3 = 1$, demostrar que $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{-2x}{y^5}$.

59 Suponga que $h(x) = f[g(x)]$, $g(3) = 6$, $g'(3) = 4$, $f'(3) = 2$ y $f'(6) = 7$. Hallar $h'(3)$.

60 Utilizar la tabla siguiente para estimar el valor de $h'(0.5)$, sabiendo que $h(x) = f[g(x)]$.

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
f(x)	12.6	14.8	18.4	23.0	25.9	27.5	29.1
g(x)	0.58	0.40	0.37	0.26	0.17	0.10	0.05

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (19)

Una fábrica hace 10.000 jabones semanalmente, cobrando \$50 por cada jabón. Si el gerente desea aumentar las ventas debe rebajar \$1 en cada jabón para vender 1000 jabones más. Si llamamos x el descuento que se hace a cada jabón, escribir una ecuación para calcular el ingreso semanal por ventas en función de x.

Taller de la Unidad 6

1 FALSO O VERDADERO

Responder falso o verdadero a cada una de las siguientes proposiciones y justificar las respuestas:

a) La recta tangente a una curva en un punto sólo puede interceptar la curva en ese punto.

b) Si f es derivable en x=2, entonces la pendiente de la gráfica de $y = f(x)$ en el punto $(2, f(2))$ es $m = f'(2)$.

c) Si la derivada de una función continua en un punto es infinita, entonces la recta tangente en dicho punto es paralela al eje y.

d) Las funciones cuyas ecuaciones son $f(x) = x^3$ y $g(x) = x^3 - 6$ tienen la misma derivada.

e) Si la tangente a la gráfica de una función f es paralela al eje x en el punto $(a, f(a))$, entonces $f'(a) = 0$

f) Si $f'(x) = g'(x)$ entonces $f(x) = g(x)$

g) Si f y g son dos funciones tales que $f(x) = g(x) + c$, entonces: $f'(x) = g'(x)$.

h) Si $y = \dfrac{1}{3x}$, entonces $y' = -3x^{-2}$

i) Si $y = \pi^3$, entonces $\dfrac{dy}{dx} = 3\pi^2$

j) Si $y = \dfrac{x}{\pi}$ entonces $D_x y = \dfrac{1}{\pi}$

k) Si f(x) es un polinomio de grado n, entonces $f^{(n)}(x) = 0$

l) La rapidez de un objeto siempre es positiva aunque su velocidad sea negativa.

m) Si la velocidad de un objeto es constante, su aceleración es cero.

n) Toda función continua en x = a, es derivable en x = a.

o) Si una función es derivable en x = c entonces es continua en x = c

p) Si $y = (3 - x)^{1/2}$ entonces $y' = \dfrac{1}{2}(3 - x)^{-1/2}$

q) $D_x(10^x) = x\,10^{x-1}$

r) $D_x(\ln 10) = \dfrac{1}{10}$

s) $D_x\left|x^2 - x\right| = \left|2x - 1\right|$

t) Si $g(x) = x^5$ entonces $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{g(x) - g(2)}{x - 2} = 80$

En los ejercicios **2** a **10**, señalar la letra correspondiente a la ÚNICA respuesta correcta:

2 Geométricamente la derivada de una función en un punto significa:

a) La ecuación de la recta normal a la curva en dicho punto.
b) La ecuación de la recta tangente a la curva en dicho punto.
c) La pendiente de una recta secante a la curva que pasa por dicho punto.
d) La pendiente de la recta tangente a la curva en dicho punto.

3 Una función f es derivable en cierto punto x = a, si cumple la siguiente condición:

a) f(a) existe y $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe.

b) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$

c) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

d) $\lim\limits_{x\to a^-} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$

4 La proporción FALSA es:

a) La derivada de una constante es 0
b) La derivada de un monomio de grado uno es igual al coeficiente del monomio.

c) La derivada de una suma de funciones es igual a la suma de las derivadas de cada función, siempre que estas derivadas existan.

d) La derivada de un producto de funciones es igual al producto de las derivadas de cada una, siempre que estas derivadas existan.

5 Si $g(x) = c \cdot f(x)$, donde c es constante, y f(x) es derivable en x, entonces:

a) $g'(x) = 0$ b) $g'(x) = f'(x)$

c) $g'(x) = c \cdot f'(x)$ d) $g'(x) = c$

6 La derivada de $f(x) = \dfrac{6}{(3x+4)^3}$ es:

a) $-\dfrac{18}{(3x+4)^3}$ b) $-\dfrac{54}{(3x+4)^4}$

c) $\dfrac{54}{(3x+4)^3}$ d) $-\dfrac{18}{(3x+4)^4}$

7 La ecuación de la recta tangente a la curva $y = 1 + x^2$ en el punto (0 , 1) es:

a) $x = 1$ b) $y = 1$

c) $x = -1$ d) $y = 2x + 1$

8 La ecuación de la recta normal a la curva del ejercicio anterior en el punto (0 , 1) es:

a) $x = 1$ b) $y = 0$

c) $x = 0$ d) $y = -\dfrac{1}{2}x + 1$

9 La pendiente de la recta tangente a la curva $x^3 - 3xy^2 + y^3 = 1$ en el punto (2 , -1) es:

a) -1 b) 0 c) 1 d) $-\dfrac{3}{5}$

10 Si la distancia s a un punto P desde el origen, en un tiempo t, está dada por: s = a Sen(wt) + b Cos(wt), con a, b y w constantes reales, la velocidad en t = 5 segundos es:

a) v = aw Cos(5w) + bw Sen(5w) b) v = w [a Cos(5w) - b Sen(5w)]

c) v = a Cos(5w) - b Sen(5w) d) v = a Cos(5w) + b Sen(5w)

11 Si el costo en pesos de construir una cancha de x metros cuadrados es C(x), entonces C` (220) = 800000 significa que:

a) El costo de construir $220m^2$ de cancha es 800000 pesos.

b) El ritmo de construcción es de $220m^2$ por cada 800000 pesos.

c) El costo de cada m^2 de construcción es de 800000 pesos .

d) El costo extra de construir el metro cuadrado 221 será de unos 800000 pesos.

Los ejercicios **12** a **14** se contestan con base en la siguiente gráfica de una función f.

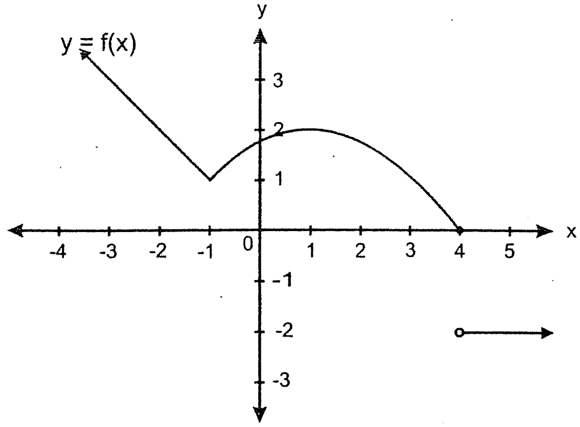


Figura 6 - 27

12 Con respecto a la derivada f' de esta función es cierto que:

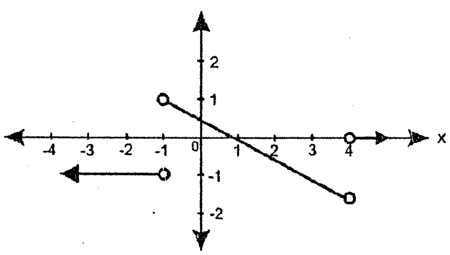
a) Es 0 en x = -1
b) Es creciente en el intervalo (-1 , 1)
c) Es -1 en el intervalo $(-\infty\,;-1)$
d) Es -2 en el intervalo $(4\,;+\infty)$

13 La proposición FALSA es:

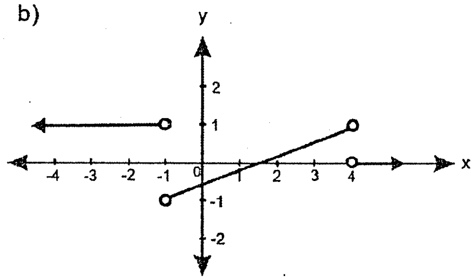
a) f es continua en el intervalo $(-\infty\,;4)$
b) f' es positiva en el intervalo (-1 ; 1)
c) f'' es negativa en el intervalo (-1 ; 4)
d) f' es continua en x = -1.

14 La gráfica que corresponde a la derivada f' de f es:

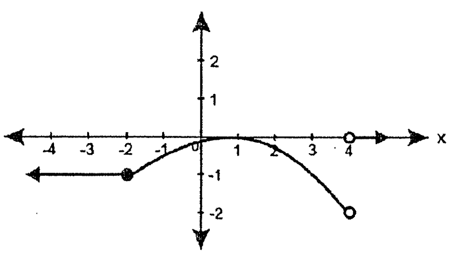
a)



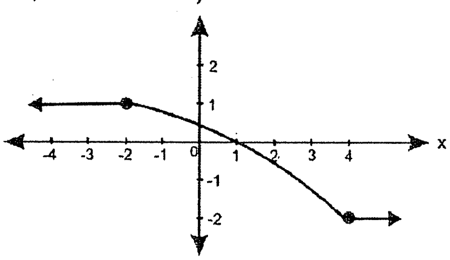
b)



c)



d)



15 Si $f(x)= e^{x}\cdot g(x)$, con g(0) = 2 y g'(0) = 5, entonces la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en x = 0 es:

a) 7y + x - 2 = 0 b) y = 7x -14 c) y = 7x + 2 d) 7y + x - 14 = 0

En los ejercicios **16** a **21**, hallar $\frac{dy}{dx}$:

16 $y = \frac{4}{x^2} - \frac{3}{x^4}$

17 $y = \frac{x^3 + 1}{x^3 - 1}$

18 $y = \sqrt{\frac{x}{x^3 + 1}}$

19 $y = \sqrt{\text{Sen}(x) + 1}$

20 $y = (x + 1)\,\text{Sen}(x) - x\,\text{Cos}(x)$

21 $4x^2 + 4y^2 - y^3 = 0$

22 Si $x^2 + 25y^2 = 1$, probar que $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{625\,y^3}$

23 Si $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2$, probar que $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x^{3/2}}$

24 Hallar las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = 2x^3 + 4x^2 - x$ que tienen pendiente $\frac{1}{2}$.

25 Un objeto se desplaza a lo largo de una línea recta de acuerdo con la ecuación $s = 5 - 2\,\text{Cos}^2(t)$, donde s cm es la posición del objeto desde el origen a los t segundos. Hallar la velocidad y la aceleración del objeto en términos de s.

26 Si una pelota es lanzada verticalmente hacia arriba desde lo alto de una casa de 35 m de altura, su posición s en cualquier instante t está dado por la ecuación $s = -5t^2 + 30t$. Se pide:

a) Hallar la velocidad instantánea al cabo de los 2 segundos.

b) ¿A qué altura máxima sube?

c) ¿Cuánto tarda en caer al suelo?

d) Hallar la velocidad con la cual la pelota choca en el suelo.

Hallar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva $y = 8\,\text{Sen}^3(2x)$ en el punto donde $x = \frac{\pi}{12}$.

28 Hallar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva $2x^3 + 2y^3 - 9xy = 0$ en el punto (2 , 1).

29 Demostrar que la recta tangente a la curva $y = -x^4 + 2x^2 + x$ en el punto (1 , 2) también es tangente a la curva en otro punto y hallarlo.

En los ejercicios **30** a **35** hallar f'(x) en términos de g'(x).

30 $f(x) = x^2\,g(x)$

31 $f(x) = g(e^x)$

32 $f(x) = g\,[g(x)]$

33 $f(x) = e^{g(x)}$

34 $f(x) = \ln|g(x)|$

35 $f(x) = g(\ln x)$

36 ¿En qué punto de la curva $y = [\,\ln(x + 4)]^2$ la recta tangente es horizontal?

37 La figura 6 - 28 muestra la función posición s = f(t) de una partícula que se mueve en línea recta, horizontalmente. Suponga que la dirección positiva es hacia la derecha.

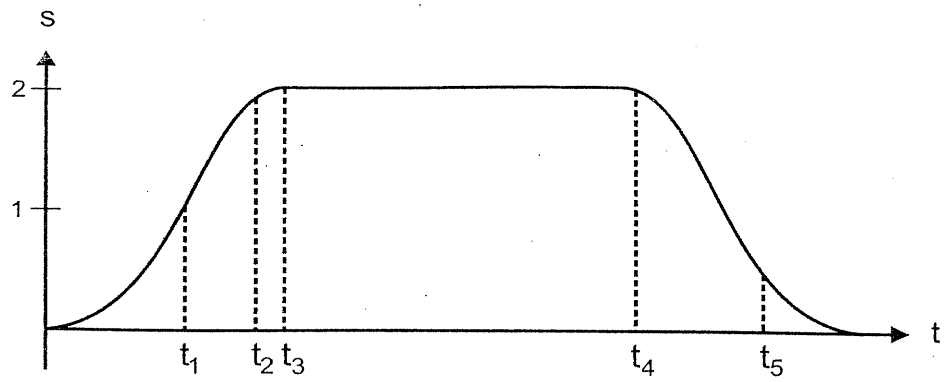


Figura 6 - 28

a) ¿En qué intervalo de tiempo la partícula se mueve hacia la derecha? ¿Hacia la izquierda?
b) ¿Estime cuál fue la velocidad inicial?
c) ¿En cuál de los instantes t_1 o t_2 la partícula se movió más rápido?
d) ¿Qué ocurrió durante el intervalo de tiempo $[t_3, t_4]$?
e) ¿En cuál instante es más rápida la partícula,en t_1 o en t_5?

38 Una partícula se mueve a lo largo del eje x y su posición en un momento t está dada por la ecuación $x(t) = \dfrac{t}{1+t^2}$; $t \geq 0$, donde t se mide en segundos y x se mide en metros.

a) Hallar la velocidad de la partícula en cualquier instante t.
b) ¿Cuándo se mueve la partícula hacia la derecha y cuándo hacia la izquierda?
c) Hallar la distancia total recorrida durante los primeros 4 segundos.
d) Hallar la aceleración en cualquier instante t.
e) ¿Cuándo se acelera y cuándo se desacelera la partícula?

39 Un fabricante produce rollos de una tela con ancho fijo. La cantidad q de esta tela (medida en yardas) que se vende es función del precio de venta p (en dólares por yarda), de modo que podemos escribir $q = f(p)$. En estas condiciones, el ingreso obtenido con el precio de venta p es $I(p) = p\, f(p)$. Se pide:

a) ¿Qué significa decir que $f(20) = 10.000$ y que $f'(20) = -350$?
b) Con base en los valores que se dan en el literal (a), encontrar $I'(20)$ e interpretar la respuesta.

40 Demostrar que las rectas tangentes a las curvas $4y^3 - x^2y - x + 5y = 0$ y $x^4 - 4y^3 + 5x + y = 0$, en el origen, son perpendiculares.

41 Hallar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva $y^3 = \ln(x^2 - y^3)$ en el punto (1, 0).

42 Dada la función definida por $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + 8x + 2$, ¿para qué valores de x se cumple que $f''(x) > 0$?

43 Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{si } x \leq 3 \\ 20 - x^2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

a) Dibujar la gráfica de f.

b) Determinar si f es continua en 3.

c) Determinar si f es derivable en 3.

Dada la función $f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{si } x \le 1 \\ \dfrac{1}{|x|} & \text{si } x > 1 \end{cases}$, calcular los valores de a y b tales que f'(1) exista.

Dada la función definida por $f(x) = 4 - |x - 2|$. Se pide:

a) Dibujar la gráfica de f

b) ¿Es f continua en x = 2? ¿por qué?

c) ¿Es f derivable en x = 2? ¿por qué?

Dada la función f definida por $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 2 & \text{si } x < -2 \\ 1 - 4x - x^2 & \text{si } x \ge -2 \end{cases}$

a) Dibujar la gráfica de f

b) ¿Es f continua en x = -2? ¿por qué?

c) ¿Es f derivable en x = -2? ¿por qué?

Hallar los valores de las constantes a y b de manera que la función $f(x) = \begin{cases} \operatorname{Sen}(x) & \text{si } x < \pi \\ ax + b & \text{si } x \ge \pi \end{cases}$ sea continua y diferenciable en $x = \pi$

Mostrar que la función $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{Sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \ne 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ es diferenciable en x = 0.

a) Calcular $f'(x)$ para $x \ne 0$

b) ¿Es f´ continua en x = 0? ¿Por qué?

Sea f una función que satisface las siguientes dos condiciones para a y b:

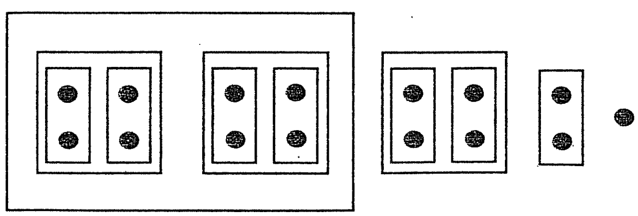
a) $f(a + b) = f(a)\, f(b)$

b) $f(a) = 1 + ag(a)$, donde $\lim\limits_{a \to 0} g(a) = 1$

Probar que f '(a) existe y que f '(a) = f(a)

Prepárate para las Pruebas ICFES

1. Competencia: Interpretativa; Ámbito: Conteo.



a) Se están realizando agrupaciones de a dos.

b) Se están realizando agrupaciones de a cuatro.

c) El punto que sobra no pertenece a ningún conjunto.

d) El conjunto tiene $1101_{(2)}$ puntos.

2. Competencia: Interpretativa; Ámbito: Conteo.

Las bombas de las piñatas están hechas de látex. El látex siempre es flexible. Algunas veces el látex es blanco. Entre las siguientes proposiciones, sólo dos son ciertas. ¿Cuáles son?

2.1 Todas las bombas son flexibles y blancas.

2.2 Todas las bombas son blancas.

2.3 Sólo algunas bombas están hechas de látex.

2.4 Todas las bombas son flexibles.

2.5 Todas las bombas son flexibles y están hechas de látex.

a) 2.1 y 2.4　　b) 2.3 y 2.5　　c) 2.2 y 2.3　　d) 2.4 y 2.5

Las preguntas 3., 4. y 5 se contestan con base en la siguiente información:

Un grupo de 25 estudiantes se inscribe en varios cursos así: 7 se inscribieron en matemáticas, 6 se inscribieron en física y 6 se inscribieron en español; 4 se inscribieron en matemáticas y física; 1 en física y español; 3 en matemáticas y español y 1 en los tres cursos.

3. Competencia: Interpretativa; Ámbito: Conteo.

El número de alumnos que no se inscribió en ningún curso fue:

a) 10　　b) 9　　c) 13　　d) 12

4. Competencia: Interpretativa; Ámbito: Conteo.

El número de alumnos que se inscribió en por lo menos dos cursos fue:

a) 5　　b) 6　　c) 12　　d) 11

5. Competencia: Interpretativa; Ámbito: Conteo.

El número de alumnos inscritos exactamente en un curso fue:

a) 6　　b) 5　　c) 12　　d) 11

Núcleo Temático 7

APLICACIONES DE LA DERIVADA (1)

Se desarrolla para alcanzar los siguientes logros generales

MANEJO DE CONCEPTOS

como

- Máximos y mínimos relativos y absolutos de una función.
- Números críticos de una Función.
- Teorema del valor medio y del valor extremo.
- Crecimiento y Decrecimiento de Funciones.
- Criterios de la primera y segunda derivada para extremosRelativos.
- Concavidad y Puntos de Inflexión.
- Criterio de Concavidad.

para desarrollar competencia

ARGUMENTATIVA

DESTREZA OPERATIVA

a través de

- Hallar máximos y mínimos relativos y absolutos de una función.
- Obtener valores críticos de una función.
- Determinar intervalos de crecimiento y decrecimiento de funciones.
- Determinar intervalos de concavidad y puntos de inflexión de funciones.

para desarrollar competencia

PROPOSITIVA

DIBUJO DE GRÁFICAS

de

- Funciones Reales.

como

- Funciones polinómicas.
- Funciones racionales.
- Función valor absoluto.
- Funciones por tramos.
- Funciones trascendentes.
  La función f' de f.

a partir de

- Interceptos con los ejes.
- Simetrías con el eje y y con el origen.
- Dominio y continuidad de la curva.
- Asíntotas verticales, horizontales u oblicuas.
- Calcular las pendientes de las rectas tangentes a la gráfica de f.

para desarrollar competencia

INTERPRETATIVA

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

relativos a

- Modelado de funciones.
- Teoremas del valor medio y del valor extremo.

para desarrollar competencias

- ARGUMENTATIVA
- PROPOSITIVA
- INTERPRETATIVA

LOS HOMBRES DEL CÁLCULO (7)
ISAAC BARROW

La vida de Isaac Barrow (1630 - 1677) está estrechamente ligada a la de su tocayo y paisano Isaac Newton. Tal como éste, estudió en el Trinity College de la Universidad de Cambridge, al cual ingresó a los 14 años, cuando Newton era un bebé de 2 años.

Además de las Matemáticas era un gran conocedor de los idiomas griego y árabe y, poco después de su grado fue nombrado profesor de griego en el Trinity College, y poco después, en 1663, de Matemáticas; allí tuvo como alumno a Isaac Newton, a quien cedió su puesto de profesor en 1669.

Sin duda alguna, maestro y discípulo debieron congeniar muy bien: ¿quién influyó más en quién? No lo sabemos, pero el hecho es que en 1670 Barrow publicó un libro titulado **Lecciones de Geometría** en el cual aparece, sin la notación ni terminología actuales, por supuesto, pero clara y correctamente enunciado, el prodigioso **teorema fundamental del Cálculo**. ¿Sería que Newton ya lo había descubierto y se lo comunicó a su maestro? ¿O sería que el maestro se lo comunicó al discípulo y éste se dio cuenta de su trascendencia y lo hizo parte de su Cálculo de Fluxiones?

En todo caso, en algún episodio de la agria controversia con Leibnitz, el propio Newton declaró que los resultados de Leibnitz respecto al Cálculo Integral (y debía estarse refiriendo al teorema fundamental) eran algo ya conocidos por su maestro Barrow.

Desde el año en que Barrow abandona su cátedra de Matemáticas, hasta su muerte en 1677, diez años antes de que los **Principios Matemáticos** de Newton vieran la luz, Barrow se dedica exclusivamente a la Teología (había recibido órdenes religiosas de la Iglesia Anglicana): la Iglesia Anglicana ganó un exégeta pero la Matemática perdió un genio.

COMPRENSIÓN DE LECTURA

EXPLICACIÓN: Lea detenidamente la anterior síntesis biográfica y luego encierre, en un círculo, la letra que corresponda a la respuesta correcta:

1. En la polémica entre Newton y Leibnitz, Newton afirma que:
   a. Leibnitz copió los trabajos de Barrow.
   b. Barrow fue más original y respetuoso que Newton.
   c. Antes que Leibnitz, ya Barrow, su maestro, había trabajado el Teorema Fundamental.
   d. Sin duda alguna, el padre del Cálculo Integral es Isaac Barrow.

2. De la lectura anterior se puede inferir que:
   a. Los intelectuales de esa época tendieron al enciclopedismo.
   b. Leibnitz no fue del todo original en sus publicaciones científicas.
   c. Newton tenía un odio enfermizo hacia Leibnitz.
   d. Barrow se dedicó a la Teología por orden de los anglicanos.

3. El término exégeta, empleado en el texto, quiere dar a entender que Barrow se dedicó:
   a. Al estudio de los Evangelios.
   b. A interpretar y exponer las Sagradas Escrituras.
   c. A leer la Biblia.
   d. A diferentes oficios religiosos.

4. Fueron grandes realizaciones de I. Barrow, en el mundo de las ciencias, las siguientes, menos:
   a. Profesor de Matemáticas de un importante centro educativo.
   b. Publicó un libro de geometría.
   c. Realizó trabajos importantes de Cálculo Integral.
   d. Era un políglota, incluso dictó cátedra de Griego.

5. En el fragmento anterior se afirma que:
   a. Newton influyó notablemente en el trabajo científico de Barrow.
   b. Al contrario. Fue Barrow quien dejó su huella en los trabajos de Newton.
   c. El influjo intelectual fue recíproco.
   d. Ni lo uno ni lo otro. El autor del texto deja la duda planteada.

7.1 MÁXIMOS Y MÍNIMOS DE UNA FUNCIÓN

7.1.1. Extremos absolutos y teorema del valor absoluto

Muchos problemas del cálculo tienen que ver con la localización de puntos máximos y mínimos de una función, de la determinación de los intervalos donde la función crece o decrece, de los intervalos donde la función es cóncava o convexa y de los puntos donde la función cambia de cóncava a convexa y viceversa. Todos éstos problemas pueden ser resueltos recurriendo a la derivada. Para lograrlo necesitamos un conjunto de definiciones y propiedades que vamos a plantear en las secciones siguientes:

Primera Experiencia

- Un grupo de aficionados observa las características de la próxima etapa de la Vuelta a Colombia; figura 7 - 1:

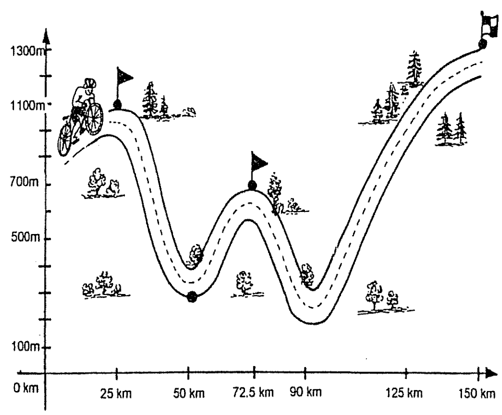


Figura 7 - 1

- Esta etapa tiene 150 Km. y cuenta con tres premios de montaña: uno de primera categoría a los 25 Km. de la partida, otro de segunda categoría a 72.5 Km. de la partida y otro «fuera de categoría» en la línea de meta. Además, presenta dos peligrosísimas «descolgadas»: una que termina en el kilómetro 50 y otra en el kilómetro 90.
- Si nos preguntaran, ¿cuál es el punto más alto de la etapa?, seguramente responderíamos: «el que está en el kilómetro 150» y ¿cuál es el punto más bajo?, contestaríamos: «el que está en el kilómetro 90». Es decir, esta etapa tiene un punto más alto que todos y un punto más bajo que todos, en el intervalo [0 Km.; 150 Km.].
- Si pensamos en la etapa como una función f definida en un intervalo dado, podemos definir el punto «más alto» y el punto «más bajo» como los puntos MÁXIMO y MÍNIMO ABSOLUTO de la función en ese intervalo; así:

DEFINICIÓN

MÁXIMO Y MÍNIMO ABSOLUTO DE UNA FUNCIÓN

Sea f una función definida en un intervalo cualquiera I y c un valor de dicho intervalo:

- **f(c) es el MÍNIMO ABSOLUTO de f en I, si $f(c) \leq f(x)$ para todo $x \in I$.**
- **f(c) es el MÁXIMO ABSOLUTO de f en I, si $f(c) \geq f(x)$ para todo $x \in I$.**

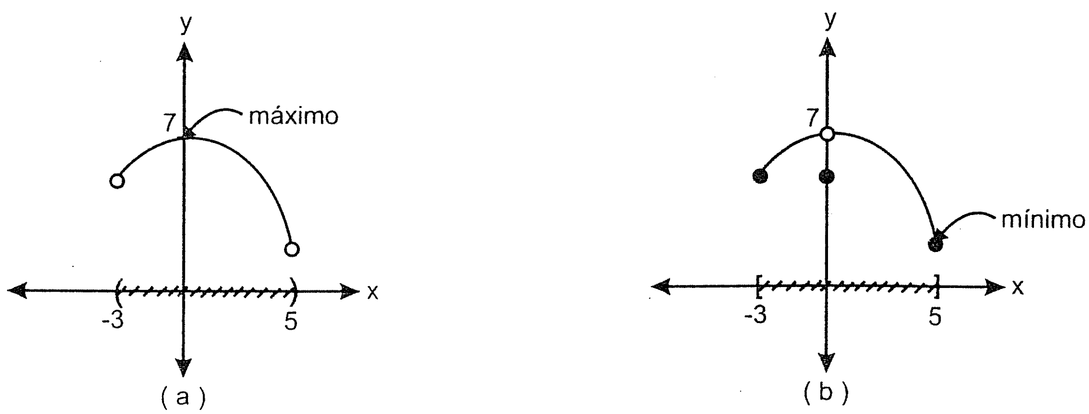
- En nuestra etapa de la Vuelta a Colombia, f(90) es el mínimo absoluto y f(150) es el máximo absoluto en el intervalo [0 ; 150]; notemos, además que la gráfica de la etapa es CONTINUA en [0 ; 150].

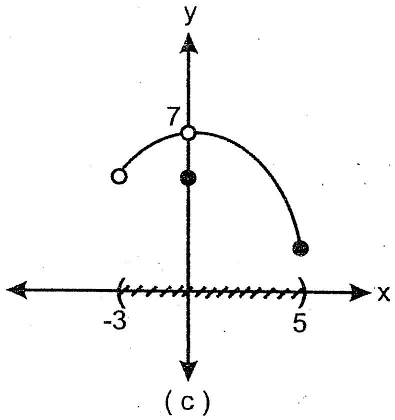
ATENCIÓN

La función presenta otros dos máximos y otro mínimo en el intervalo [0 Km. ; 150 Km.]. Estos máximos y este mínimo son RELATIVOS o LOCALES y los definiremos más adelante.

Segunda Experiencia

- Observemos cuidadosamente las gráficas de la figura 7 - 2 y contestemos las siguientes preguntas:





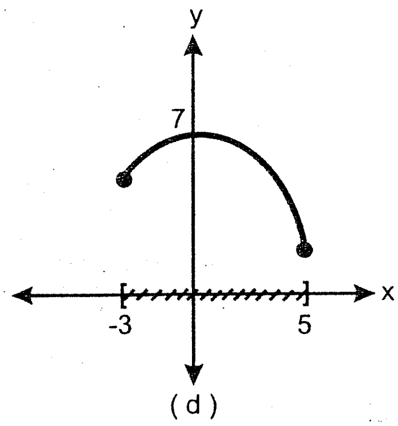


Figura 7 - 2

* ¿En qué intervalo está definida la gráfica de la figura 7 - 2 (a)?. ¿Es continua allí?. ¿Tiene máximo y/o mínimo en dicho intervalo?
* ¿En qué intervalo está definida la gráfica de la figura 7 - 2 (b)?. ¿Es continua allí?. ¿Tiene máximo y/o mínimo en dicho intervalo?
* ¿En qué intervalo está definida la gráfica de la figura 7 - 2 (c)?. ¿Es continua allí?. ¿Tiene máximo y/o mínimo en dicho intervalo?
* ¿En qué intervalo está definida la gráfica de la figura 7 - 2 (d)?. ¿Es continua allí?. ¿Tiene máximo y/o mínimo en dicho intervalo?
* ¿En cuál de éstas cuatro gráficas podemos garantizar que la función tiene un máximo y un mínimo?. ¿Qué característica especial presenta esta función?.

- Seguramente habrá comprobado que la función de la figura 7 - 2(d) es la única que tiene un máximo y un mínimo en el intervalo [-3 ; 5] y que esta función es continua en el intervalo cerrado [-3 ; 5].
- El siguiente teorema nos confirma esta observación:

TEOREMA DEL VALOR EXTREMO

Si f es continua en un intervalo cerrado [a ; b] entonces f tiene (al menos) un máximo y un mínimo absolutos en dicho intervalo cerrado [a ; b].

Este es un TEOREMA DE EXISTENCIA, pues nos dice que existen el máximo y el mínimo pero no cómo calcularlos.

- **PREGUNTA:** ¿Puede una función continua en un intervalo abierto tener máximo y mínimo absoluto en dicho intervalo? Ilustre su respuesta.

7.1.2. Extremos relativos

- La gráfica de la etapa de la Vuelta a Colombia nos muestra que además del máximo y el mínimo absoluto pueden presentarse otros máximos o mínimos en ciertos puntos. Tales máximos o mínimos se denominan MÁXIMOS o MÍNIMOS RELATIVOS o LOCALES y los definimos así:

DEFINICIÓN

MÁXIMO y MÍNIMO LOCAL o RELATIVO DE UNA FUNCIÓN

1. **Una función f tiene un VALOR MÁXIMO RELATIVO en $x = c$ si existe un intervalo abierto I, que contiene a c, y tal que $f(c) \geq f(x)$, para toda x en I.**
2. **Una función f tiene un VALOR MÍNIMO RELATIVO en $x = c$ si existe un intervalo abierto I, que contiene a c, y tal que $f(c) \leq f(x)$, para toda x en I**

Ejemplo 1

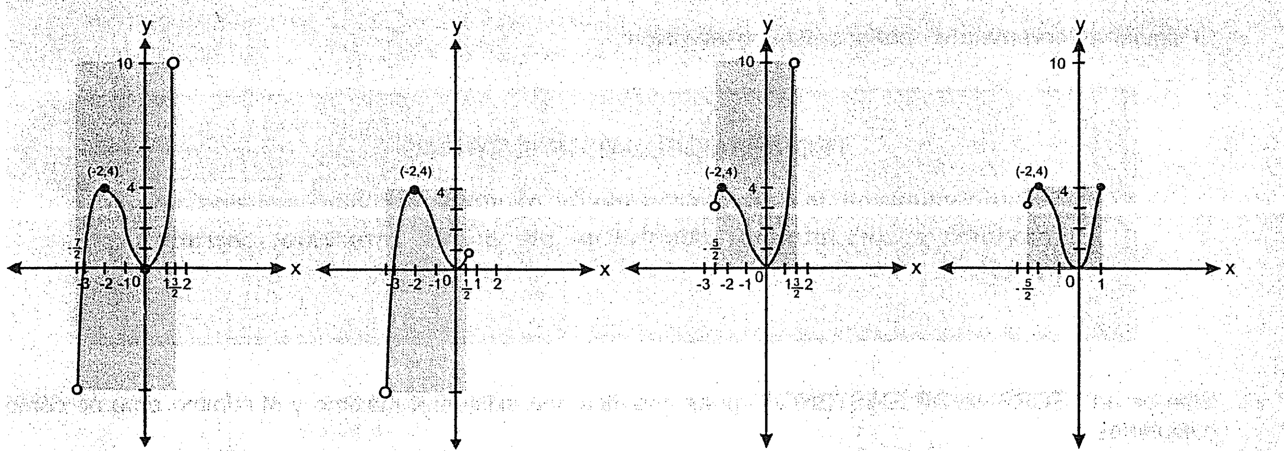
En la etapa a la vuelta a Colombia, en c = 25 Km hay un valor máximo relativo ya que $c \in$ (24 Km ; 26 Km) y $f(25) \geq f(x)$ para cualquier x que se encuentre en el intervalo (24 Km ; 26 Km)

Ejemplo 2

Ya sabemos que en la etapa a la vuelta a Colombia el valor de c = 150 Km es un valor MÁXIMO ABSOLUTO. Pero, ¿es también c = 150 Km un valor MÁXIMO RELATIVO? La respuesta es NO porque este valor se presenta en un extremo del intervalo.

ATENCIÓN

1. Un extremo relativo $x = c$ es un valor interior al intervalo I.
2. Analizando la figura 7 - 3, encontramos que una función f puede tener puntos de máximo absoluto o puntos de mínimo absoluto con respecto a ciertos intervalos abiertos y a otros no.



En $(-\frac{7}{2};\frac{3}{2})$, la función no tiene máximo absoluto ni mínimo absoluto

En $(-3;\frac{1}{2})$, la función tiene máximo absoluto en $x = -2$ pero no tiene mínimo absoluto

En $(-\frac{5}{2};\frac{3}{2})$, la función tiene mínimo absoluto en $x = 0$ pero no tiene máximo absoluto

En $(-\frac{5}{2};1)$, la función tiene un máximo absoluto en $x = -2$ y un mínimo absoluto en $x = 0$.

Figura 7 - 3

En la práctica, la manera de «obligar» a estos dos puntos a ser extremos es escoger intervalos suficientemente pequeños para producir una colina o un valle. Esta es la idea de extremo relativo o local; figura 7 - 4:

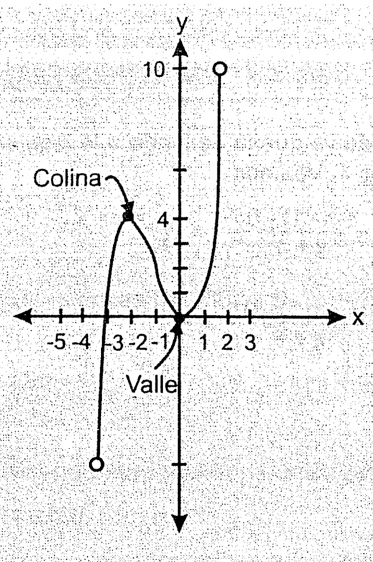


Figura 7 - 4

Ejemplo 3

Dibujemos las gráficas de las funciones reales definidas por:

a) $f(x) = 4x - x^2$ en (0 ; 4) b) $g(x) = | x + 1 |$ en (-3 ; 1) c) $h(x) = x^{2/3}$ en (-2 ; 2)

Identifiquemos los puntos de estos intervalos donde la función tiene máximos o mínimos relativos y determinemos cómo es la derivada en cada uno de tales puntos.

SOLUCIÓN

- La figura 7 - 5 nos muestra las gráficas de las tres funciones:

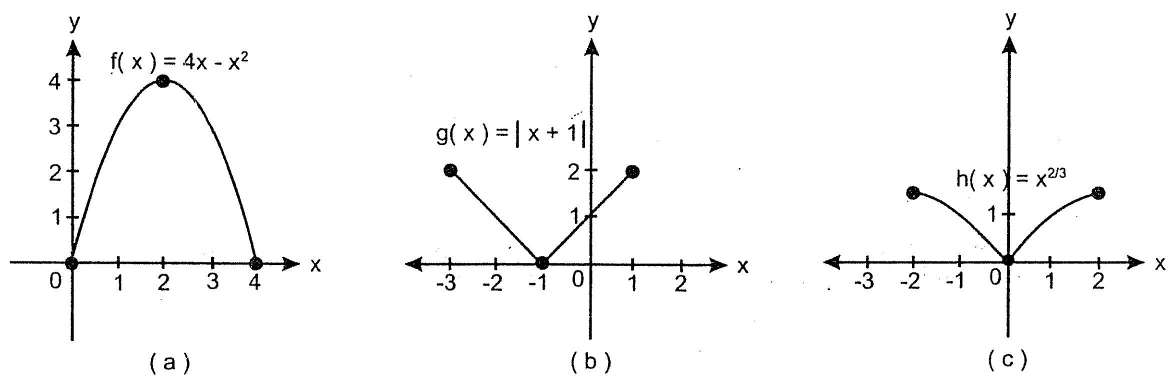


Figura 7 - 5

- La función $f(x) = 4x - x^2$ tiene un máximo relativo en $x = 2$.

  La función $f(x) = | x + 1|$ tiene un mínimo relativo en $x = -1$

  La función $f(x) = x^{2/3}$ tiene un mínimo relativo en $x = 0$.

- Ahora analicemos como es la derivada de cada función en los puntos donde hay máximo o mínimo relativo:

  * $f(x) = 4x - x^2 \Rightarrow f'(x) = 4 - 2x$

  $\Rightarrow f'(2) = 4 - 4 = 0$

  Luego, en $x = 2$, la derivada de f es igual a 0.

* $f(x) = |x + 1| = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \geq 1 \\ -x - 1 & \text{si } x < 1 \end{cases}$

En x = -1, la derivada de f no existe ya que la derivada a la izquierda de -1 es –1 que es diferente a la derivada a la derecha de –1 que es 1. Veamos:

$$f'_{+}(-1) = \lim_{x \to -1^{+}} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \to -1^{+}} \frac{(-x - 1) - 0}{x + 1} = -1$$

$$f'_{-}(-1) = \lim_{x \to -1^{-}} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \to -1^{-}} \frac{(x + 1) - 0}{x + 1} = 1$$

* $f(x) = x^{2/3} \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{3} x^{-1/3}$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{2}{3x^{-1/3}}$$

$\Rightarrow f'(0)$ no existe (es ∞)

Luego, en x = 0, la derivada de f no existe.

- ¿Cómo es la derivada de una función f en los puntos donde f presenta máximos o mínimos relativos en el interior de un intervalo abierto? Si nos atenemos a las conclusiones anteriores, la respuesta es sencilla: **en los puntos donde una función presenta un máximo o un mínimo relativo, la derivada de la función es igual a cero o no existe.**

- Antes de enunciar y demostrar un teorema que nos concreta estas conclusiones, presentamos la definición de VALOR CRÍTICO de una función.

> **DEFINICIÓN**
>
> **Si f está definida en x = c, decimos que c es un NÚMERO o VALOR CRÍTICO de f si f'(c) = 0 o f'(c) no existe.**

- El siguiente es un teorema de existencia que nos señala lo que pasa con la derivada en los puntos donde hay extremos relativos:

> **TEOREMA**
>
> **Si f está definida en un intervalo abierto que contiene a c y f tiene un extremo relativo en x = c, entonces f'(c) = 0 ó f'(c) no existe; es decir, x = c es un valor crítico de f.**

DEMOSTRACIÓN

1. Debemos probar dos cosas: f'(c) = 0 ó f'(c) no existe.
2. Si f'(c) no existe, la prueba queda lista pues no habría nada que demostrar.
3. Si f'(c) existe, entonces probemos que f'(c) = 0.
   - Supongamos que f(c) es un máximo relativo.
   - Luego, $f(c) \geq f(x)$, para todo x en un intervalo abierto que contenga a c.
   - Por lo tanto, $f(x) \leq f(c)$, para todo x en el intervalo indicado.
   - Pero: $f'(c) = \lim \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$ (¿por qué?)

- Y como f'(c) existe, entonces:

$$\lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

- Ahora bien:

$$x \to c^- \iff x < c \iff x - c < 0$$
$$x \to c^+ \iff x > c \iff x - c > 0$$

y como sabemos que: $f(c) \geq f(x)$ entonces $f(x) - f(c) \leq 0$.

Por lo tanto, se cumple que:

$$\lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \quad y \quad \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$$

- Pero como ambos límites tienen que ser iguales, la única posibilidad de que esto ocurra es cuando ambos sean iguales a 0. Por lo tanto, $f'(c) = 0$

4. En forma similar se prueba que $f'(c) = 0$, considerando que f(c) es un mínimo relativo.

ATENCIÓN

1. La figura 7 - 5 nos muestra dos tipos de extremos relativos: unos «suaves», como el de la figura 7 - 5 (a) y otros en forma de «pico», como los de las figuras 7 - 5 (b) y 7 - 5 (c). En el de la figura 7 – 5 (a), la derivada es igual a 0; en cambio, en los de las figuras 7 - 5(b) y 7 - 5 (c), la derivada no existe.

   PREGUNTA: ¿Cómo son las rectas tangentes a las curvas en la figura 7 - 5 (a) y en las figuras 7 - 5 (b) y 7 - 5 (c)?

2. El recíproco del teorema anterior es falso. En efecto: es posible que en x = c se tenga que f'(c) = 0 o que f'(c) no exista (pero que f sea continua en x = c) y, sin embargo, que en x = c no haya ni un máximo ni un mínimo relativo. El caso típico es el de la función definida por $f(x) = x^3$, en x = 0; figura 7 - 6. Veamos:

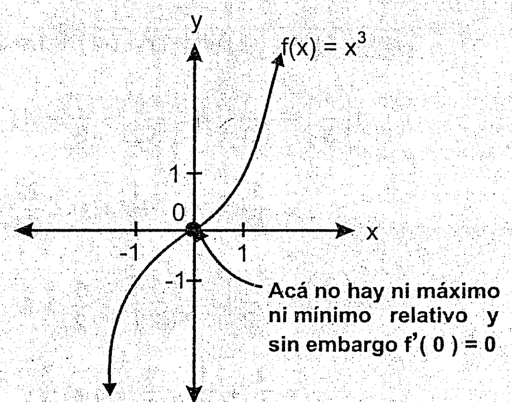


Figura 7 - 6

   Si $f'(x) = 3x^2$ entonces $f'(0) = 3(0)^2 = 0$; sin embargo, x = 0 no es ni máximo ni mínimo relativo.

3. Combinando el teorema del VALOR EXTREMO con el teorema que acabamos de enunciar, podemos dar un criterio para hallar extremos absolutos en un intervalo cerrado:

CRITERIO PARA HALLAR EXTREMOS ABSOLUTOS EN UN INTERVALO CERRADO [a ; b]

1. **Hallar los valores críticos de f en (a ; b).**
2. **Hallar las imágenes de f de los valores críticos obtenidos.**

3. **Hallar f(a) y f (b).**
4. **Comparar los resultados de los pasos 2. y 3.: el menor de tales valores es el mínimo absoluto y el mayor es el máximo absoluto.**

Ejemplo 4

Dada la función definida por $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$, encontremos sus extremos absolutos en $\left[-2\,;\frac{1}{2}\right]$.

SOLUCIÓN

- Como f es continua en $\left[-2\,;\frac{1}{2}\right]$ entonces podemos aplicar el Teorema del Valor Extremo: f tiene extremos absolutos en este intervalo.
- Hallemos los valores críticos de f:

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$$

Como f '(x) existe para todos los valores de x, entonces sus valores críticos serán aquellos para los cuales f '(x) = 0. Por lo tanto,

$$3x^2 + 2x - 1 = 0$$
$$\therefore\quad (3x - 1)(x + 1) = 0$$
$$\therefore\quad x = \frac{1}{3} \quad ó \quad x = -1$$

Luego, los valores críticos de f son $x = \frac{1}{3}$ y $x = -1$ y ambos se encuentran en el intervalo $\left[-2\,;\frac{1}{2}\right]$.

- Ahora hallemos las imágenes de f en los valores críticos y en los extremos del intervalo:

$$f(-2) = (-2)^3 + (-2)^2 - (-2) + 1 = -1$$

$$f(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 - (-1) + 1 = 2$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3} + 1$$
$$= \frac{1}{27} + \frac{1}{9} - \frac{1}{3} + 1 = \frac{22}{27}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + 1$$
$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{7}{8}$$

- Por lo tanto, el valor máximo absoluto corresponde al punto (-1 , 2) y el valor mínimo absoluto corresponde al punto (-2 , -1). La gráfica de la función, mostrada en la figura 7 - 7, confirma todas nuestras observaciones:

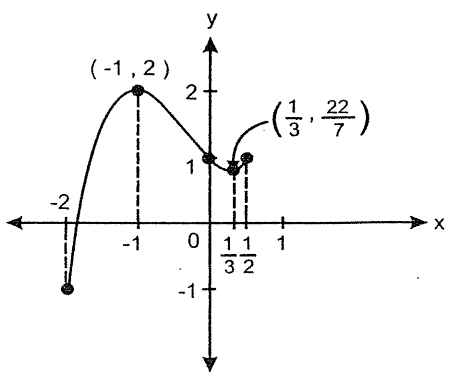


Figura 7 - 7

Ejemplo 5

Hallemos los extremos absolutos de la función $f(x) = 2x - 3x^{2/3}$ en el intervalo [-1 ; 3]

SOLUCIÓN

- Como f es continua en [-1 ; 3] entonces existirán un máximo y un mínimo absoluto de f en [-1 ; 3].
- Hallemos la derivada de f:

$$f'(x) = 2 - 2x^{-1/3} = 2 - \frac{2}{x^{1/3}} = \frac{2(x^{1/3}-2)}{x^{1/3}} = \frac{2(x^{1/3}-1)}{x^{1/3}}$$

- La derivada es cero cuando $x^{1/3} - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$.

  La derivada no existe cuando $x^{1/3} = 0 \Rightarrow x = 0$

  Luego, x = 0 y x = 1 son los valores críticos de f.

- Calculando f en estos valores y en los extremos de [-1 ; 3] nos queda:

$f(-1) = -5$
$f(0) = 0$
$f(1) = -1$
$f(3) = 6 - 3\sqrt[3]{9} \approx -0.24$

El mínimo absoluto es -5 que tiene lugar en x = -1

El máximo absoluto es 0 que tiene lugar en x = 0

- La gráfica de la función nos confirma estas conclusiones; figura 7 - 8

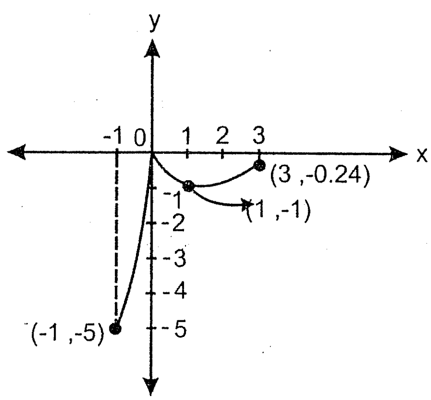


Figura 7 - 8

Ejemplo 6

Sea f: ℝ→ℝ una función definida por la propiedad:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 7 & \text{si } -1 \leq x \leq 2 \\ 1 - x^2 & \text{si } 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

a) ¿Cumple f las condiciones del Teorema del Valor Extremo en el intervalo [-1 ; 4]? ¿por qué?

b) Hallar, si existen, los valores críticos de f en el intervalo [-1 ; 4]

c) Hallar, si existen, los extremos absolutos de f en [-1 ; 4]

d) Dibujar la gráfica de f en [-1 ; 4]

SOLUCIÓN

a) Debemos probar que f es continua en [-1 ; 4]. Veamos:

* En el extremo izquierdo -1 : $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} (2x - 7) = -9$

  $f(-1) = 2(-1) - 7 = -9$

  Luego, f es continua en el extremo x = -1

* En el extremo derecho 4 : $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 4^-} (1 - x^2) = -15$

  $f(4) = 1 - 16 = -15$

  Luego, f es continua en el extremo x = 4

* En (-1 ; 4) sólo nos queda la duda en x = 2 (¿por qué?)

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (2x - 7) = -3 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (1 - x^2) = -3 \end{array}\right\} \therefore \lim\limits_{x \to 2} f(x) = -3$$

$f(2) = 2(2) - 7 = -3$

CONCLUSIÓN: f es continua en el intervalo [-1 ; 4]

b) Los valores críticos de f son aquellos del dominio donde la derivada es igual a 0 o donde la derivada no existe. Hallemos f'(x).

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } -1 \le x < 2 \\ \text{No existe} & \text{si } x = 2 \\ -2x & \text{si } 2 < x \le 4 \end{cases}$$

* Para saber cuando f'(x) = 0 igualamos cada tramo de f'(x) a 0; así: 2 = 0 ó -2x = 0 como 2 = 0 es absurdo y -2x = 0 implica que x = 0 y este valor no está en el tramo $2 < x \le 4$, al cual pertenece -2x, entonces no hay valores de x para los cuales f'(x) = 0.

* El único valor sospechoso donde f'(x) no existe es x = 2 (¿por qué?). Veamos:

$$\left.\begin{array}{l} f'_+(2) = -2(2) = -4 \\ f'_-(2) = 2 \end{array}\right\} \therefore \text{ en } x = 2, f'(x) \text{ no existe.}$$

CONCLUSIÓN: x = 2 es el único valor crítico de f.

c) Hallamos f(-1), f(4), f(2) y comparamos los résultados:

$f(-1) = 2(-1) - 7 = -9$

$f(4) = 1 - 4^2 = -15$

$f(2) = 2$

Como vemos, f(4) es el mínimo absoluto y f(2) es el máximo absoluto.

d) La gráfica de la función aparece dibujada en la figura 7 - 9:

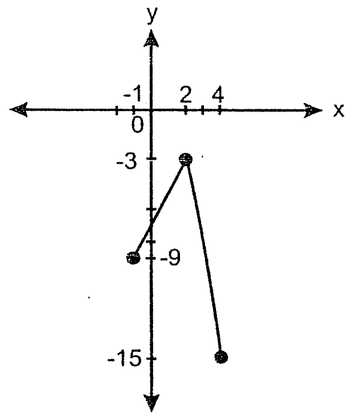
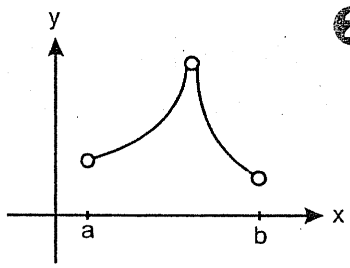
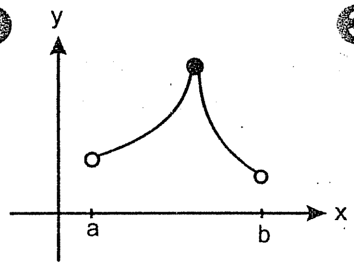


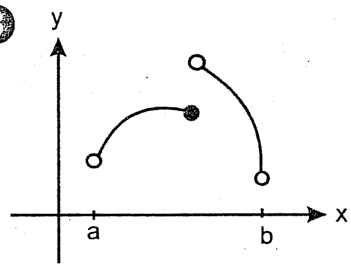
Figura 7 - 9

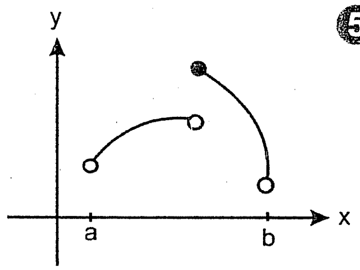
EJERCICIO 7.1

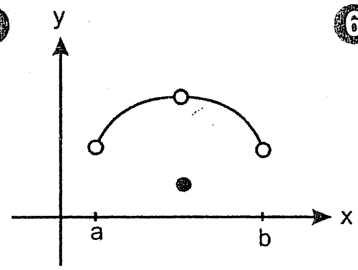
En los ejercicios 1 a 6 determinar si la función f cuya gráfica se muestra tiene máximo o mínimo en el intervalo (a ; b)

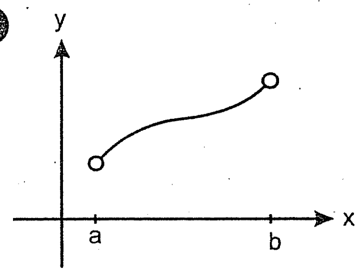
1


2


3


4


5


6


En los ejercicios 7 a 10, localizar los extremos absolutos y relativos de la función (si los hay) en el intervalo indicado. Dibuje la gráfica para ayudarse.

7. $f(x) = 3x - 2$ en: a) $[-1 ; 3]$ b) $[-1 ; 3)$ c) $(-1 ; 3]$ d) $(-1 ; 3)$

8. $f(x) = 4 - x$ en: a) $[0 ; 5]$ b) $[0 ; 5)$ c) $(0 ; 5]$ d) $(0 ; 5)$

9. $f(x) = x^2 + 3x$ en: a) $[-3 ; 1]$ b) $[-3 ; 1)$ c) $(-3 ; 0)$ d) $[-1.5 ; 1]$

10. $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ en: a) $[-3 ; 3]$ b) $[-3 ; 0)$ c) $(-3 ; 3)$ d) $[1 ; 3)$

En los ejercicios 11 a 20, hallar los extremos de la función dada en el intervalo que se indica. Dibujar la gráfica de f en el intervalo.

11. $f(x) = 6 - 2x$ en $[-2 ; 1]$

12. $f(x) = 4x - x^2$ en $[0 ; 4]$

13. $f(x) = x^3 - 5x^2$ en $[-1 ; 5]$

14. $f(x) = 3x^{2/3} - 2x$ en $[-1 ; 1]$

15. $f(x) = \dfrac{1}{x - 2}$ en $[0 ; 1]$

16. $f(x) = \dfrac{4}{(x + 3)^2}$ en $[2 ; 5]$

17. $f(x) = x^3 + 5x - 4$ en $[-3 ; -1]$

18. $f(x) = \dfrac{x}{x + 2}$ en $[-1 ; 2]$

19. $f(x) = \begin{cases} 3x - 4 & \text{si } -3 \leq x < 1 \\ x^2 - 2 & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$ en $[-3 ; 3]$

20. $f(x) = (x + 1)^{2/3}$ en $[-2 ; 1]$

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (20)

Tres puntos A, B y C se hallan situados de modo que la medida del $\angle ABC = 60^\circ$. Un automóvil sale del punto A y en el mismo instante parte del punto B un tren. El automóvil avanza hacia el punto B a 80 Km./h y el tren se dirige hacia el punto C a 50 Km./h. Teniendo en cuenta que $|\overline{AB}|$ = 200 Km., escribir una ecuación, en función del tiempo t, que permita hallar la distancia que separa en un momento dado el automóvil y al tren.

7.2 LA DERIVADA Y SU RELACIÓN CON LA FORMA DE LAS CURVAS

7.2.1. El Teorema del Valor Medio

- En esta sección y en las siguientes estudiaremos la estrecha relación existente entre la primera y la segunda derivada de una función f y su gráfica.

- El hilo conector entre la derivada de una función y su gráfica es el TEOREMA DEL VALOR MEDIO, formulado por primera vez por Joseph Louis Lagrange (1736 - 1813), nacido en Italia, de padre francés y de madre Italiana.
  La idea del Teorema del Valor Medio es que en una curva continua y sin picos que va desde A hasta B, hay algún punto intermedio en el que la recta tangente es paralela al segmento $\overline{AB}$. El teorema dice lo siguiente:

TEOREMA DEL VALOR MEDIO

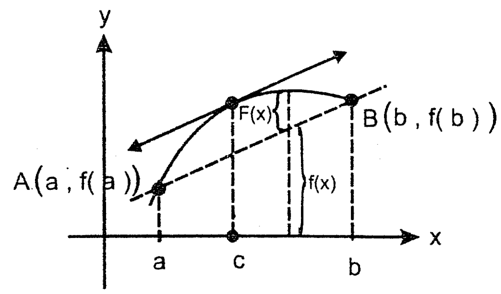
Sea f una función que cumple las siguientes condiciones:

- **f es continua en el intervalo cerrado [a ; b]**
- **f es derivable en el intervalo abierto (a ; b)**

Entonces existe al menos un número c $\in$ (a ; b) tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

- Geométricamente, el Teorema del Valor Medio, podemos interpretarlo de la siguiente manera; figura 7 - 10:



La pendiente de la recta secante que pasa por los puntos (a , f(a)) y (b , f(b)) es:

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

y el teorema del Valor Medio afirma que existe algún punto (al menos uno) en la curva entre A y B, donde la recta tangente es paralela a la recta secante que pasa por A y B; es decir, existe al menos un número c en (a ; b) tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Ejemplo 1

Hallemos los valores de x en el intervalo (-1 ; 2) que satisfacen el teorema del valor medio para la función f definida por $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x$

SOLUCIÓN

- Como f es una función polinómica, cumple las hipótesis del teorema del valor medio.
- Por lo tanto, existe al menos un $c \in (-1 ; 2)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} \quad \dots\dots\dots (1)$$

Donde:

$$f'(c) = 4c^3 - 6c^2 + 2c - 2 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$f(2) = 16 - 16 + 4 - 4 = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$f(-1) = 1 + 2 + 1 + 2 = 6 \quad \dots\dots\dots (4)$$

- Si ahora reemplazamos (2), (3) y (4) en (1) nos queda:

$$4c^3 - 6c^2 + 2c - 2 = \frac{0 - 6}{2 + 1}$$

$$\therefore\ 4c^3 - 6c^2 + 2c - 2 = -2$$

$$\therefore\ 4c^3 - 6c^2 + 2c = 0$$

$$\therefore\ 2c(2c^2 - 3c + 1) = 0$$

$$\therefore\ c = 0 \quad ó \quad c = \frac{1}{2} \quad ó \quad c = 1$$

- Todos los valores obtenidos cumplen ya que pertenecen al intervalo (-1 ; 2).

Ejemplo 2

Probemos que en la parábola $f(x) = cx^2 + dx + e$; con $c, d, e \in \mathbb{R}$ se cumple que la cuerda que une los puntos para los cuales $x = a$ y $x = b$ es paralela a la tangente en el punto para el cual $x = \dfrac{a+b}{2}$

SOLUCIÓN

- Debemos probar según el teorema del valor medio que $c = \dfrac{a+b}{2}$; es decir:

$$f'\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

- Veamos:

$$f'\left(\frac{a+b}{2}\right) = 2c\left(\frac{a+b}{2}\right) + d$$

$$\therefore\ f'\left(\frac{a+b}{2}\right) = c(a+b) + d \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Y :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = \frac{cb^2 + db + e - ca^2 - da - e}{b-a}$$

$$= \frac{(cb^2 - ca^2) + (db - da)}{b-a}$$

$$= \frac{c(b^2 - a^2) + d(b-a)}{b-a}$$

$$= \frac{c(b+a)(b-a) + d(b-a)}{b-a}$$

$$= \frac{(b-a)[c(b+a) + d]}{b-a}$$

$$\therefore\ \frac{f(b) - f(a)}{b-a} = c(b+a) + d \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

- Como (1) = (2) entonces es cierto que $f'\left(\dfrac{a+b}{2}\right) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$

ATENCIÓN

1. En términos de razones de cambio, el Teorema del Valor Medio afirma que hay un punto c en (a ; b) en el cual la razón de cambio instantánea es igual a la razón de cambio promedio en $[a ; b]$. El ejemplo 3 nos ilustra esta afirmación.

2. La importancia del Teorema del Valor Medio radica en que nos permite obtener información acerca de una función a partir de la información de su derivada. En la próxima sección veremos cómo el Teorema del Valor Medio nos permite relacionar los conceptos de función creciente o decreciente con los de derivada.

Ejemplo 3

Dos contadores de velocidad, en una autopista, están separados entre sí 9 km. La velocidad máxima permitida es de 90 Km./h. Cuando un motociclista pasa junto al primer controlador, éste le mide una velocidad de 80 Km./h y, cinco minutos después, al pasar junto al otro controlador, éste le mide una velocidad de 60 Km./h. Probemos que en algún momento, en esos cinco minutos, el motociclista ha superado el límite de velocidad.

SOLUCIÓN

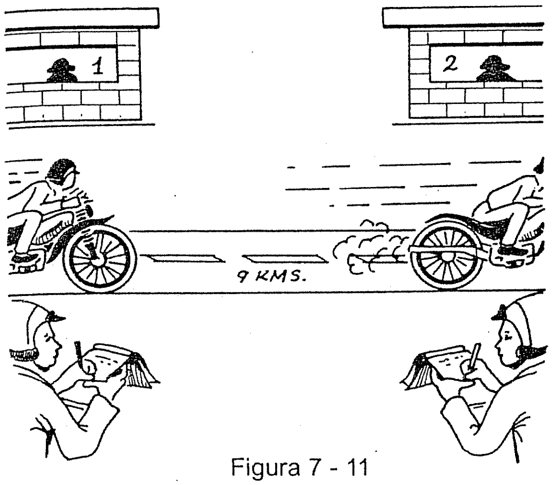


Figura 7 - 11

- Sea t = 0 el instante en que el motociclista pasó por el primer control. Luego, por el segundo control pasa en $t = \frac{5}{60} = \frac{1}{12}$ horas.
- Sea s(t) la distancia (en Km.) recorrida de manera que $s(0) = 0$ y $s\left(\frac{1}{12}\right) = 9$. Esto significa que la velocidad media del motociclista en estos cinco minutos fue

$$\bar{v} = \frac{s\left(\frac{1}{12}\right) - s(0)}{\left(\frac{1}{12}\right) - 0} = \frac{9}{\frac{1}{12}} = 108\text{vKm./h}$$

- Si suponemos que la función velocidad es derivable, el Teorema del Valor Medio permite concluir que en algún instante el motociclista viajó a 108 Km./h, violando así la velocidad máxima permitida de 90 Km./h.

EJERCICIO 7.2

1 Comprobar que las hipótesis del Teorema del Valor Medio se cumplen para la función dada en el intervalo señalado; luego, hallar un valor que satisfaga la conclusión del teorema.

a) $f(x) = x^3 + x^2 - x$ en $[-2 ; 1]$ b) $f(x) = x^{2/3}$ en $[0 ; 1]$

c) $f(x) = \sqrt{1 + \text{Cos}x}$ en $\left[-\frac{1}{2}\pi; \frac{1}{2}\pi\right]$

2 Calcular un valor de x que cumpla la conclusión del Teorema del Valor Medio y trazar la gráfica en el intervalo indicado mostrando las rectas tangente y secante.

a) $f(x) = x^2$ en $[3 ; 5]$ b) $f(x) = 2\,\text{Cos}(x)$ en $\left[\frac{1}{3}\pi; \frac{2}{3}\pi\right]$

3 Indicar cuál(es) de la(s) hipótesis del Teorema del Valor Medio no se cumple(n). Trazar la gráfica de $y = f(x)$ y la recta que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$

a) $f(x) = \frac{4}{(x-3)^2}$, con a = 1 y b = 6 b) $f(x) = 3(x - 4)^{2/3}$, con a = -4 y b = 5

c) $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x < 3 \\ 15 - 2x & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$, con a = -1 y b = 5

4 Si $f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x$ demostrar, utilizando el Teorema del Valor Medio, que la ecuación $4x^3 - 6x^2 + 4x - 1 = 0$ tiene por lo menos una raíz real en el intervalo (0 ; 1).

5 Demostrar con el Teorema del Valor Medio, que la ecuación $x^3 + 2x + k = 0$, donde k es cualquier constante, no puede tener más de una raíz real.

6 La altura de una piedra, t segundos después de ser lanzada, se expresa mediante la ecuación $s = f(t) = -5t^2 + 15t + 10$. Se pide:

a) Comprobar que $f(1) = f(2)$
b) Según el Teorema del Valor Medio, ¿qué velocidad ha llevado en algún momento del intervalo [1;2]?

7 La posición de un objeto, t segundos después de haberse soltado desde una altura de 100 metros es $s = f(t) = -5t^2 + 100$. Se pide:

a) Hallar la velocidad media en los 3 primeros segundos
b) Usar el Teorema del Valor Medio para comprobar que en algún instante en esos tres segundos de caída, la velocidad instantánea iguala a la velocidad media. ¿En qué instante?.

8 Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$. Probar que en cualquier intervalo [p;q], el valor c, garantizado por el Teorema del Valor Medio, es el punto medio del intervalo.

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (21)

Un rectángulo se inscribe en la elipse de ecuación $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. Si los lados del rectángulo son paralelos al eje mayor y al eje menor de la elipse, hallar una ecuación que permita calcular el área del rectángulo en función de x.

7.2.2. ¿Qué dice f' de f ?: Crecimiento o Decrecimiento y Extremos Relativos

- Ya hemos visto que $f'(x)$ representa, geométricamente, la pendiente de la recta tangente a la curva en cada uno de sus puntos y esta información nos permite conocer la dirección con la cual avanza la curva en cada punto. Así mismo, $f'(t)$ representa, fisicamente, la velocidad que lleva una partícula que se mueve en línea recta en cada instante t y esta información nos permite saber cuando la partícula va más rápida o va más lenta. En síntesis, resulta lógico pensar que la información acerca de f' nos dé información sobre f.

- En particular, la derivada de una función puede informarnos donde crece o decrece una función (recordemos que las funciones crecientes y decrecientes fueron definidas en la unidad 3). En efecto, si observamos la figura 7 - 12 veremos que entre A y B y entre C y D, las rectas tangente tienen pendiente positiva, por lo que $f'(x)>0$; y entre B y C, las rectas tangentes tienen pendiente negativa, por lo que $f'(x)<0$. En consecuencia, parece que f es creciente cuando $f'(x)$ es positiva y decreciente cuando $f'(x)$ es negativa.

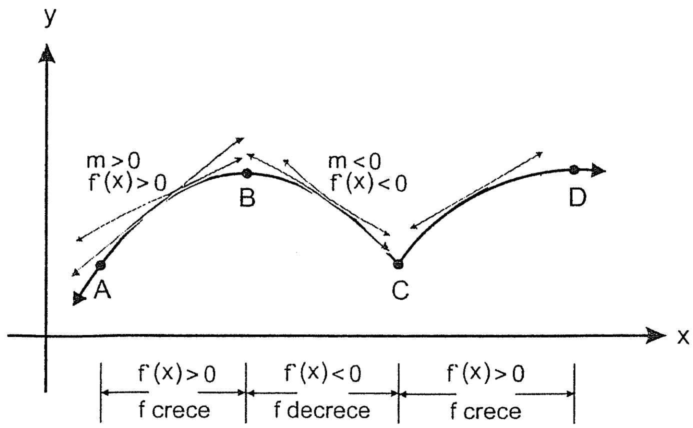


Figura 7 - 12

- Estas observaciones que acabamos de hacer con respecto a la relación entre el signo de $f'(x)$ y el crecimiento o decrecimiento de la gráfica de f, podemos sintetizarlas en el siguiente teorema, denominado PROPIEDAD DE LAS FUNCIONES CRECIENTES Y DECRECIENTES, cuya demostración se fundamenta en el teorema del Valor Medio.

TEOREMA

Sea f una función continua en el intervalo cerrado [a ; b] y derivable en el intervalo abierto (a ; b):

- **Si $f'(x) > 0$ para todo x en (a ; b), entonces f es CRECIENTE en [a ; b].**
- **Si $f'(x) < 0$ para todo x en (a ; b) entonces f es DECRECIENTE en [a ; b].**
- **Si $f'(x) = 0$ para todo x en (a ; b), entonces f es CONSTANTE en [a ; b].**

- La figura 7 - 11 también nos muestra que el punto B es un MÁXIMO RELATIVO y el punto C es un MÍNIMO RELATIVO. Notemos que $f'(x)$ es positiva antes de B y es negativa justo después de B; y que $f'(x)$ es negativa antes de C y positiva después de C. Esta observación nos pone en condiciones de saber cuando un valor crítico corresponde a un máximo relativo, a un mínimo relativo o a ninguno de los dos. La siguiente propiedad, denominada CRITERIO DE LA PRIMERA DERIVADA PARA EXTREMOS RELATIVOS, nos proporciona esta información.

TEOREMA

CRITERIO DE LA PRIMERA DERIVADA PARA MÁXIMOS Y MÍNIMOS

Supongamos que f es continua en el intervalo (a ; b) y derivable en (a ; b), excepto quizás en x = c. Sea c un punto crítico de f en (a ; b), entonces:

- **Decimos que f tiene un MÁXIMO RELATIVO en x = c, si antes de c la función es creciente y después de c la función es decreciente; es decir, si $f'(x)$ pasa de positiva a negativa en x = c.**
- **Decimos que f tiene un MÍNIMO RELATIVO en x = c, si antes de c la función es decreciente y después de c la función es creciente; es decir, si $f'(x)$ pasa de negativa a positiva en x = c.**
- **Si f´no cambia de signo en x = c, entonces f no tiene extremo relativo en x = c.**

ATENCIÓN

En la práctica, para hallar los máximos y/o los mínimos relativos de una función recomendamos tener en cuenta los siguientes pasos:

1. Determinar la continuidad de f.
2. Hallar la derivada de f.
3. Determinar los valores críticos de f (aquellos $x \in D_f$ donde la derivada es igual a cero o donde la derivada no existe).
4. Con los valores críticos se forman intervalos abiertos cuyos extremos son dichos valores críticos. Para formar estos intervalos incluimos los valores donde f es discontinua.
5. Determinar el signo de $f'(x)$ en cada uno de los intervalos.
6. Finalmente, determinar, de acuerdo con la variación de los signos, si los valores críticos, corresponden a valores máximos o mínimos relativos.

7.2.3. ¿Qué dice f`` de f ?: Concavidad y Puntos de Inflexión

7.2.3.1. Concavidad

- Geométricamente la segunda derivada de una función f nos brinda información acerca de su concavidad.

- La CONCAVIDAD está relacionada con el comportamiento de la curva cuando se trazan las rectas tangentes a ella en un intervalo dado. Observemos, por ejemplo, la figura 7 - 13:

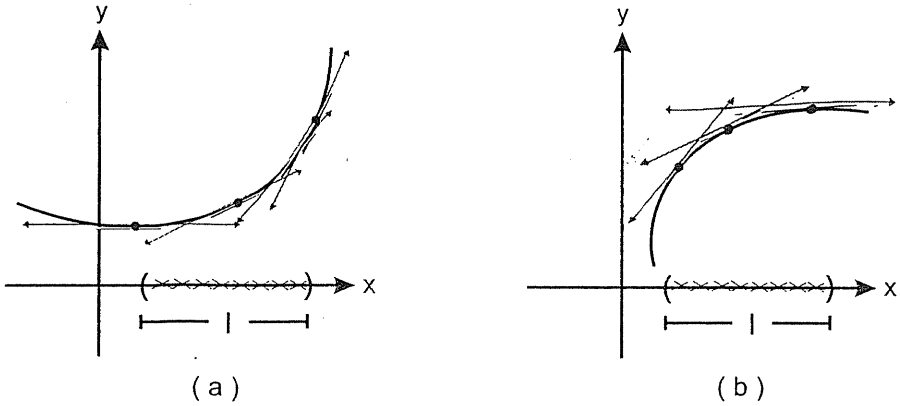


Figura 7 - 13

- En la figura 7 – 13(a), la curva es derivable en un intervalo I y queda ubicada por encima de las rectas tangentes a ella: decimos que la curva es CONCAVA HACIA ARRIBA (U).

- En la figura 7 – 13(b), la curva es derivable en un intervalo I y queda ubicada por debajo de las rectas tangentes a ella: decimos que la curva es CONCAVA HACIA ABAJO ($\cap$).

> **DEFINICIÓN DE CONCAVIDAD**
>
> - **Una función derivable en un intervalo abierto I es CÓNCAVA HACIA ARRIBA (U), en I, si la curva queda por encima de las rectas tangentes a ella en I.**
> - **Una función derivable en un intervalo abierto I es CÓNCAVA HACIA ABAJO ($\cap$), en I, si la curva queda por debajo de las rectas tangentes a ella en I.**

- Pero, ¿qué relación hay entre la concavidad de una función y la derivada? Para contestar la pregunta analicemos de nuevo la figura 7 - 13:

  * En la figura 7 - 13(a), las pendientes de las rectas tangentes a la curva (es decir, f'(x)) forman una función CRECIENTE porque al aumentar x, en I, también aumenta el valor de f'(x). Por lo tanto, f'(x) es creciente y su derivada (segunda derivada de f) será POSITIVA.

  * En la figura 7 - 13(b), las pendientes de las rectas tangentes a la curva (es decir, f'(x)) forman una función DECRECIENTE porque al aumentar x, en I, disminuye el valor de f'(x). Por lo tanto, f'(x) es decreciente y su derivada (segunda derivada de f) será NEGATIVA.

El análisis que acabamos de realizar vamos a resumirlo en el siguiente teorema denominado CRITERIO DE CONCAVIDAD.

> **TEOREMA - CRITERIO DE CÓNCAVIDAD**
>
> **Sea f una función cuya segunda derivada existe en un intervalo abierto I.**
>
> 1. **Si $f''(x) > 0$ para todo $x \in I$, entonces f´ es creciente en I y la gráfica de f es CÓNCAVA HACIA ARRIBA (U), en I.**
> 2. **Si $f''(x) < 0$ para todo $x \in I$, entonces f´ es decreciente en I y la gráfica de f es CÓNCAVA HACIA ABAJO ($\cap$), en I.**
> 3. **Si $f''(x) = 0$ para todo $x \in I$, entonces f´ es constante en I y f es una función lineal en I.**

ATENCIÓN

1. Para una función f continua, podemos hallar los intervalos de concavidad hacia arriba o hacia abajo, así:
   a) Determinamos los valores de x en los que f"(x) = 0 ó f"(x) no existe.
   b) Con tales valores formamos intervalos abiertos consecutivos desde $-\infty$ hasta $+\infty$
   c) Determinamos el signo de f"(x) en cada uno de estos intervalos.
2. Para las funciones discontinuas, los intervalos de prueba deben formarse tomando TANTO LOS PUNTOS DE DISCONTINUIDAD como los puntos donde f"(x) = 0 ó f"(x) no existe.

7.2.3.2. Puntos de inflexión

- Observemos ahora la figura 7 - 14. Ella nos muestra la gráfica de cuatro funciones continuas en un intervalo abierto (a ; b):

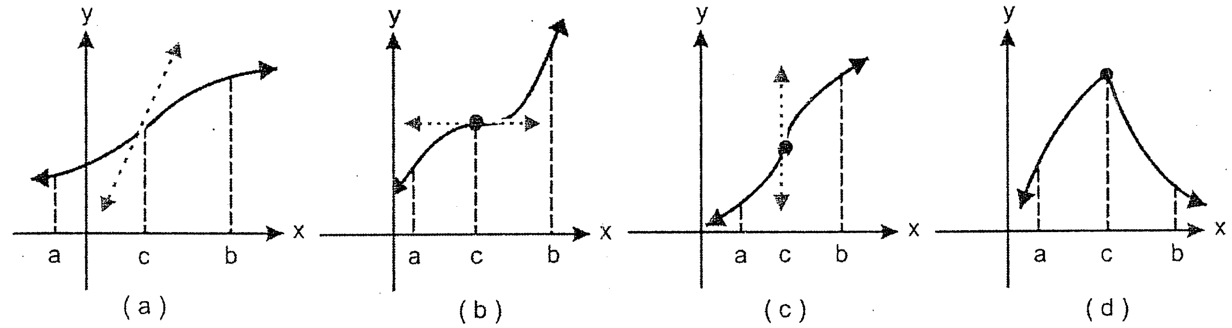


Figura 7 - 14

- Teniendo en cuenta estas gráficas, vamos a contestar estas preguntas:
  * ¿Es derivable la función de la figura 7 - 14(a) en el punto donde x = c? ¿Tiene recta tangente allí?
  * ¿Es derivable la función de la figura 7 - 14(b) en el punto donde x = c? ¿Tiene recta tangente allí?
  * ¿Es derivable la función de la figura 7 - 14(c) en el punto donde x = c? ¿Tiene recta tangente allí?
  * Es derivable la función de la figura 7 - 14(d) en el punto donde x = c? ¿Tiene recta tangente allí?
  * ¿Cómo es la concavidad de cada función en el intervalo (a ; c) y en el intervalo (c ; b)? ¿Hay cambio de concavidad?
  * ¿En cuáles de estas funciones la recta tangente «atraviesa» a la curva?
- Seguramente habremos contestado que, en todas las funciones, la concavidad en el intervalo (a ; c) es diferente a la concavidad en el intervalo (c ; b) y que las funciones de las figuras a), b) y c) poseen una recta tangente en el punto correspondiente a x = c; en cambio, la función de la figura 7 - 14(d) no posee una recta tangente en x = c, a pesar de que antes y después de este punto su gráfica cambia de concavidad.
- Afirmaremos, entonces, que los puntos de una curva donde la concavidad cambia de sentido y donde la curva posee recta tangente se denominan PUNTOS DE INFLEXIÓN.

DEFINICIÓN DE PUNTO DE INFLEXIÓN

- **Si la gráfica de una función continua posee recta tangente en un punto donde la concavidad cambia de sentido, tal punto se denomina PUNTO DE INFLEXIÓN.**
- **Notemos que en un punto de inflexión la recta tangente cruza o atraviesa a la gráfica.**

ATENCIÓN

1. Como los puntos de inflexión se localizan donde la concavidad cambia de sentido, entonces debe ocurrir que en tales puntos el signo de f'' debe cambiar. Así pues, para localizar posibles puntos de inflexión basta determinar los valores de x en los cuales f''(x) = 0 o en los que f''(x) no existe (pero donde f tiene recta tangente). Este procedimiento es similar al que describimos para localizar los extremos relativos de f.

2. Teniendo en cuenta la observación anterior, enunciamos el siguiente teorema que relaciona la segunda derivada con los puntos de inflexión.

TEOREMA

Si $(c\,;f(c))$ es un PUNTO DE INFLEXIÓN de f entonces f''(c) = 0 ó f''(c) no existe.

El recíproco de este teorema es FALSO. En efecto, es posible que f''(c) = 0 en un punto que NO es de INFLEXIÓN; por ejemplo, la gráfica de $f(x) = x^4$ (figura 7 - 15) muestra que f''(0) = 0, pero el punto (0 ; 0) no es punto de inflexión.

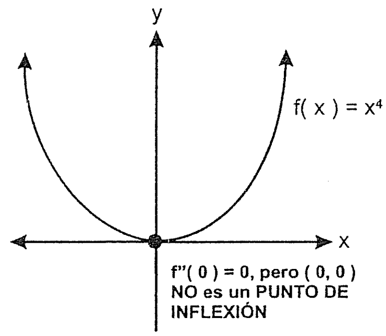


Figura 7 - 15

3. Por lo tanto, en la práctica, para determinar los puntos de inflexión de una función f seguimos el mismo procedimiento ya descrito para determinar los intervalos de concavidad. Una vez analizada la concavidad verificamos dos cosas: Primera, el cambio de concavidad en dos intervalos consecutivos y, segunda, la existencia de recta tangente en el punto donde se produce el cambio de concavidad.

Ejemplo 1

La figura 7 - 16 corresponde a la gráfica de la derivada f' de una función f. Sabiendo que f pasa por el origen y que es continua en todos los reales, dibujemos una posible gráfica de f.

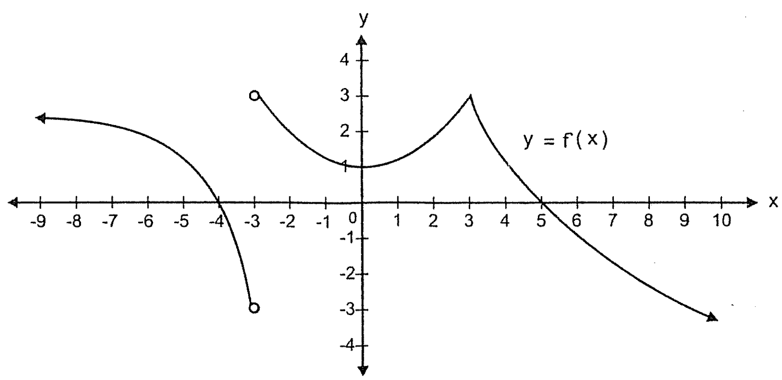


Figura 7 - 16

SOLUCIÓN

- En muchas aplicaciones del cálculo será necesario obtener información de una función F a partir de los datos que nos brinda su derivada f'. Esta función F, si existe, se denomina ANTIDERIVADA de f y, según estudiaremos en la unidad 9, no es única. En otras palabras, una antiderivada de f es una función F tal que F '= f. El objetivo de este ejemplo es dibujar una antiderivada f de la función dada f', sabiendo que es continua en ℝ y que pasa por el origen.

- Para dibujar la gráfica de f, analizaremos la gráfica de f ' por intervalos; así:

INTERVALO $(-\infty\,;\,-3)$

- En el intervalo $(-\infty\,;\,-4)$, $f'(x)$ es positiva y decreciente; es decir, $f'(x) > 0$ y $f''(x) < 0$. Esto significa que, en este intervalo, f es creciente y cóncava hacia abajo: .
- En el intervalo $(-4\,;\,-3)$, $f'(x)$ es negativa y decreciente; es decir, $f'(x)<0$ y $f''(x) < 0$. Esto significa que, en este intervalo, f es decreciente y cóncava hacia abajo: .
- Como $f'(-4)=0$ y f pasa de creciente a decreciente, entonces en $x=-4$ hay un MÁXIMO RELATIVO.
- Cuando $x \to -\infty$, $f'(x) \to 2$. Este dato nos ayuda a comenzar el dibujo de la gráfica de f con una pendiente igual a 2.
- Finalmente, cuando $x \to -3^-$, $f'(x) \to -3$. Esto significa que a la izquierda de -3, la recta tangente a la gráfica de f tiene pendiente negativa igual a -3.
- La figura 7 - 17, muestra una posible gráfica de f en el intervalo $(-\infty\,;\,-3)$:

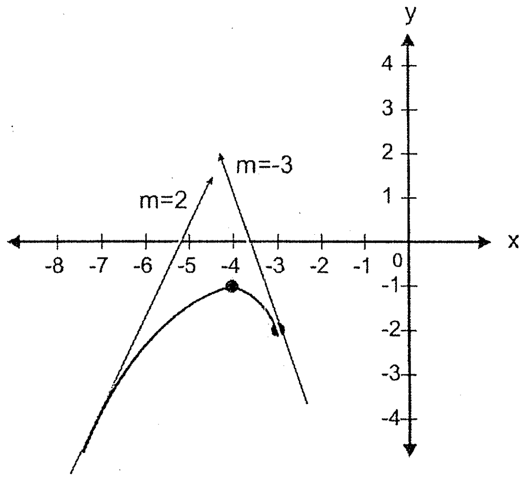


Figura 7 - 17

INTERVALO $(-3\,;\,3)$

- En $(-3\,;\,0)$, $f'(x)$ es positiva y decreciente; es decir, $f'(x) > 0$ y $f''(x) < 0$. Esto significa que, en este intervalo, f es creciente y cóncava hacia abajo: .
- En $(0\,;\,3)$, $f'(x)$ es positiva y creciente; es decir, $f'(x) > 0$ y $f''(x) > 0$. Esto significa que, en este intervalo, f es creciente y cóncava hacia arriba: .
- Como en $x=0$ se produce un cambio de concavidad (ya que f pasa de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba) y $f'(0) = 1$ (con lo cual, en $x=0$, f tiene recta tangente) entonces en $x=0$ hay un PUNTO DE INFLEXIÓN y allí la curva hace una especie de «zig - zag».
- Cuando $x \to -3^+$, $f'(x) \to 3$. Esto significa que a la derecha de -3, la recta tangente a la curva de f tiene pendiente positiva igual a 3.
- Como en $x = -3$, f es continua y la curva pasa de creciente a decreciente, entonces en $x = -3$ hay un MÍNIMO RELATIVO en forma de «pico».
- Cuando $x \to 3^-$, $f'(x) \to 3$. Esto significa que a la izquierda de 3, la recta tangente a la curva de f tiene pendiente positiva igual a 3.

- La figura 7 - 18, muestra una posible gráfica de f en el intervalo $(-\infty\ ;\ 3)$. Recordemos que debe pasar por el origen.

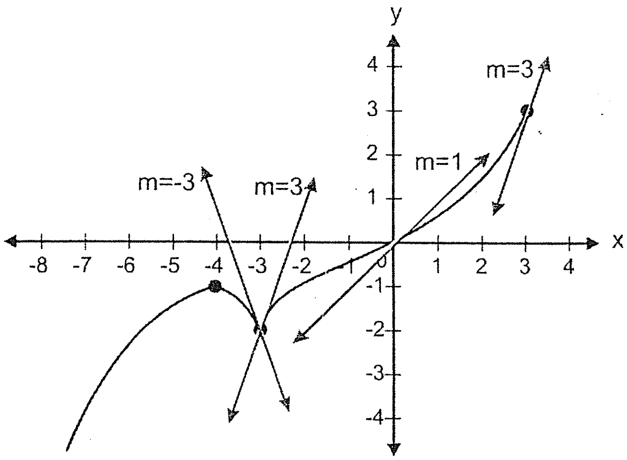


Figura 7 - 18

INTERVALO $(3\ ;\ +\infty)$

- En el intervalo $(3\ ;\ 5)$, $f'(x)$ es positiva y decreciente; es decir, $f'(x) > 0$ y $f''(x) < 0$. Esto significa que, en este intervalo, f es creciente y cóncava hacia abajo: .
- En el intervalo $(5\ ;\ +\infty)$, $f'(x)$ es negativa y decreciente; es decir, $f'(x) < 0$ y $f''(x) < 0$. Esto significa que, en este intervalo, f es decreciente y cóncava hacia abajo: .
- Como $f'(5) = 0$ y f pasa de creciente a decreciente, entonces en x=5 hay un MÁXIMO RELATIVO.
- Cuando $x \to 3^-$, $f'(x) \to 3$. Luego, cuando $x \to 3$, $f'(x) \to 3$; esto significa que en x=3 hay recta tangente cuya pendiente es 3; además, como f es cóncava hacia arriba en $(0\ ;\ 3)$ y cóncava hacia abajo en $(3\ ;\ +\infty)$, entonces en x=3 se presenta otro PUNTO DE INFLEXIÓN.
- Finalmente, como en $(3\ ;\ 5)$ la función f es creciente, en $(5\ ;\ +\infty)$ es decreciente y $f'(5) = 0$, entonces en x=5 hay un MÁXIMO RELATIVO «SUAVE».

La figura 7 - 19 muestra la gráfica completa de la función f que queríamos dibujar:

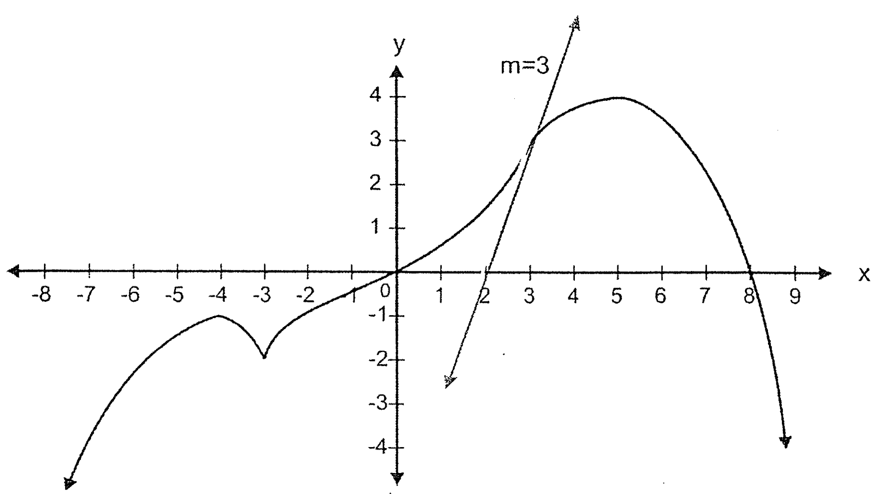


Figura 7 - 19

Ejemplo 2

La figura 7 - 20 muestra la posición s=f(t) de un objeto que se mueve hacia adelante y hacia atras sobre una recta numérica. Se pide:

a) Determinar cuándo se aleja el objeto del origen.

b) Determinar cuándo el objeto se dirige al origen.

c) Aproximadamente, ¿En qué instante la velocidad es igual a cero?

d) Determinar cuándo la aceleración es positiva, cuándo es negativa y cuándo es cero.

e) Determinar en qué intervalo(s) el movimiento es acelerado.

f) Dibujar la gráfica de la aceleración de la partícula.

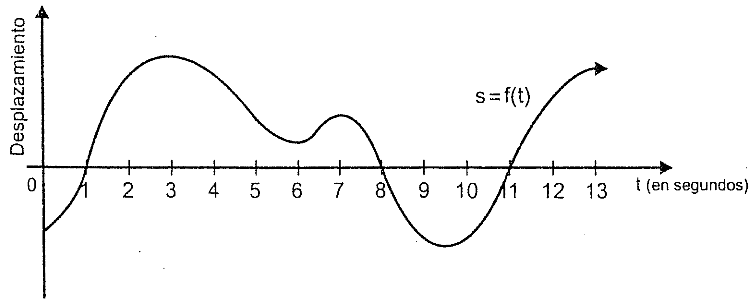


Figura 7 - 20

SOLUCIÓN

a) El objeto se aleja del origen cuando su velocidad es positiva; es decir, cuando $f'(t)$ es positiva. Esto ocurre cuando s es creciente: en los intervalos (0 ; 3), (6 ; 7) y (9.5 ; 13)

b) El objeto de dirige al origen cuando su velocidad es negativa; es decir, cuando $f'(t)$ es negativa. Esto ocurre cuando s es decreciente: en los intervalos (3 ; 6) y (7 ; 9.5).

c) La velocidad es cero cuando $f'(t) = 0$; es decir, en los instantes t = 3 seg, t = 6 seg, t = 7 seg y t = 9.5 seg.

d) La aceleración es positiva cuando $f''(t) > 0$. Esto ocurre cuando s es cóncava hacia arriba; es decir, en los intervalos (0 ; 1), (5 ; 6.5) y (8 ; 11).

La aceleración es negativa cuando $f''(t) < 0$. Esto ocurre cuando s es cóncava hacia abajo; es decir, en los intervalos (1 ; 5), (6.5 ; 8) y (11 ; 13).

La aceleración es 0 en los instantes en que $f''(t)$ cambia de positiva a negativa y donde $f'(t)$ existe o $f'(t)$ es ∞. Estos instantes son t = 1 seg, t = 5 seg, t = 6.5 seg, t = 8 seg, t = 11 seg.

e) Una partícula se mueve aceleradamente en aquellos intervalos donde la velocidad y la aceleración tienen el mismo signo.

* $f'(t) > 0$ y $f''(t) > 0$ en los intervalos (0 ; 1) y (9.5 ; 11).
* $f'(t) < 0$ y $f''(t) < 0$ en los intervalos (3 ; 5) y (7 ; 8).

Por lo tanto, el objeto se mueve aceleradamente en los intervalos (0 ; 1), (9.5 ; 11) , (3 ; 5) y (7 ; 8).

f) Para dibujar la gráfica de la función aceleración analizamos el comportamiento de s=f(t) en los intervalos: (0 ; 1), (1 ; 5), (5 ; 6.5), (6.5 ; 8), (8 ; 11) y (11 ; 13); así:

- s=f(t) es creciente cóncava hacia arriba en los intervalos (0 ; 1), (5 ; 6.5) y (8 ; 11). Por lo tanto, $f''(t) > 0$ en estos intervalos y su gráfica quedará dibujada por encima del eje x.

- s=f(t) es cóncava hacia abajo en los intervalos (1 ; 5), (6.5 ; 8) y (11 ; 13). Por lo tanto $f``(t) < 0$ en estos intervalos y su gráfica quedará dibujada por debajo del eje x.

- En los instantes t=1, t=5, t=6.5, t=8, t=11 y t=13 se produce un cambio de concavidad y existe recta tangente allí; por lo tanto, $f''(t) = 0$ en tales instantes.

Esta información nos permite dibujar una gráfica aproximada de $a=f``(t)$; figura 7 - 21:

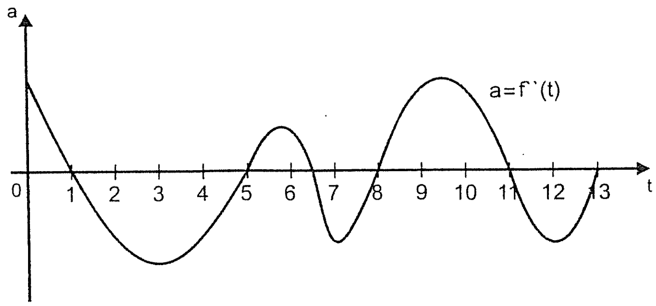


Figura 7 - 21

Ejemplo 3

La figura 7 - 22 nos muestra la gráfica de una población b de bacterias, presentes en un alimento en descomposición, como función del tiempo.

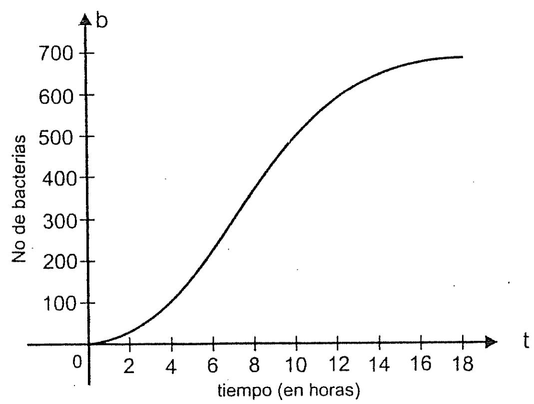


Figura 7 - 22

a) ¿Cómo varía la razón de aumento de la población?

b) ¿Cuándo es más alta esta razón?

c) ¿En qué intervalos la función de población es cóncava hacia arriba o hacia abajo?

d) Estimar las coordenadas del punto de inflexión.

SOLUCIÓN

a) Al observar la pendiente de la curva cuando t crece, vemos que la razón de aumento de la población es muy pequeña en el comienzo; luego, se incrementa hasta alcanzar el máximo hacia las 8 horas, y decrece a medida que la población empieza a nivelarse.

b) La razón de aumento de la población es más alta en el instante en que t = 8 horas.

c) La función de población es cóncava hacia arriba en el intervalo (0 ; 8) y cóncava hacia abajo en el intervalo (8 ; 18).

d) Las coordenadas del punto de inflexión son (8,350)

7.2.4. Criterio de la Segunda Derivada para extremos relativos

- Observemos bien las gráficas de las funciones de la figura 7 - 23 y contestemos estas preguntas:

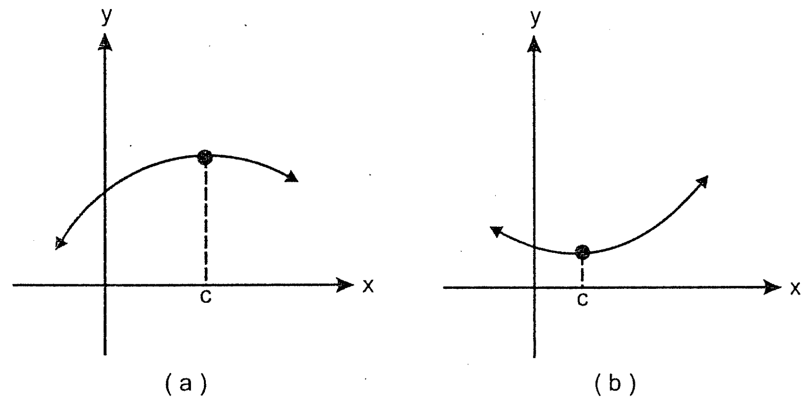


Figura 7 - 23

* ¿Existe la primera derivada de cada función en $x = c$? ¿Cuánto vale $f'(c)$ en cada gráfica? ¿Es $x = c$ un valor crítico en cada función?

* ¿Qué signo tiene $f''(c)$ en la función de la figura 7 - 23(a)? ¿Y en la función de la figura 7 - 23(b)?

* ¿Qué relación hay entre el signo de $f''(c)$ y el hecho de que en $x = c$ haya un máximo o un mínimo relativo?

- Esperamos que la observación de cada figura y la respuesta a las preguntas formuladas nos permitan concluir lo siguiente:

  * En la figura 7 - 23(a), la función f tiene un máximo relativo en $x = c$, allí $f'(c) = 0$ y $f''(c) < 0$.

  * En la figura 7 - 23(b), la función f tiene un mínimo relativo en $x = c$, allí $f'(c) = 0$y $f''(c) > 0$.

- De todas estas observaciones, podemos intuir un criterio sencillo, usando la segunda derivada, para determinar máximos y mínimos relativos. Este criterio, denominado CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA PARA EXTREMOS RELATIVOS, dice lo siguiente:

CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA

Sea f una función tal que $f'(c) = 0$, y f' existe para todos los valores de x en algún intervalo abierto que contenga a c y $f''(c)$ existe:

- **Si $f''(c) > 0$, entonces f tiene un valor mínimo relativo en $x = c$.**
- **Si $f''(c) < 0$, entonces f tiene un valor máximo relativo en $x = c$.**
- **Si $f''(c) = 0$, entonces el criterio no decide nada (considerar de nuevo la función $f(x) = x^4$ en $x = 0$). En este caso hay que recurrir al criterio de la primera derivada para determinar los extremos relativos.**

Ejemplo

Consideremos de nuevo la función f definida por la propiedad:

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$$

y hallemos los extremos relativos utilizando el criterio de la segunda derivada.

SOLUCIÓN

- En primer lugar, hallemos los valores donde $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 0$$

$$\therefore \quad x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$\therefore \quad (x - 2)(x - 1) = 0$$
$$\therefore \quad x = 2 \quad \text{ó} \quad x = 1$$

- Ahora, hallemos f''(x) y determinemos el signo de ésta en x = 2 y en x = 1:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 12x - 18 \\ \therefore \quad f''(1) &= 12(1) - 18 \\ &= -6 < 0 \Rightarrow x = 1 \text{ es un valor máximo relativo.} \\ \therefore \quad f''(2) &= 12(2) - 18 \\ &= 6 > 0 \Rightarrow x = 2 \text{ es un valor mínimo relativo.} \end{aligned}$$

- **CONCLUSIÓN:**

$$\begin{aligned} f(1) &= 2(1)^3 - 9(1)^2 + 12(1) - 3 \\ &= 2 - 9 + 12 - 3 = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(2) &= 2(2)^3 - 9(2)^2 + 12(2) - 3 \\ &= 16 - 36 + 24 - 3 = 1 \end{aligned}$$

Luego, $P_1(1, 2)$ es un punto de máximo relativo y $P_2(2, 1)$ es un punto de mínimo relativo.

- Verifiquemos estas conclusiones observando la figura 7 – 24.

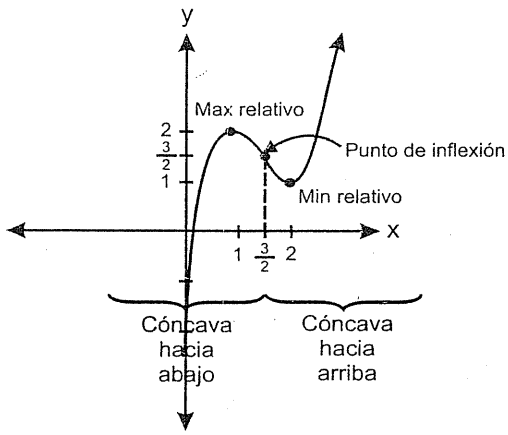


Figura 7 - 24

7.2.5. Análisis y dibujo de la gráfica de una función

- Desde que Renato Descartes, en el siglo XVII, introdujo el dibujo de gráficas en matemáticas, el avance de ésta y otras ramas de la ciencia fue rápido y seguro. Al respecto el matemático francés Joseph-Louis Lagrange (1736 - 1813) manifestó lo siguiente: **«Mientras el álgebra y la geometría caminaron por separado, su avance fue lento y sus aplicaciones limitadas. Pero cuando ambas se unieron, sacaron cada una de la otra vitalidad nueva y desde entonces avanzaron con paso rápido hacia la perfección».**
- Tanto en esta unidad como en las anteriores hemos desarrollado varios conceptos útiles a la hora de dibujar la gráfica de una función. Veamos cuáles son:

1. Interceptos con los ejes.
2. Simetrías con el eje y y con el origen.
3. Dominio y rango.
4. Puntos de discontinuidad.
5. Asíntotas verticales, horizontales u oblicuas.
6. Valores críticos, intervalos de crecimiento y/o decrecimiento, puntos de máximo y/o mínimo relativo.
7. Intervalos de concavidad y puntos de inflexión.

En esta sección vamos a resolver varios ejercicios en los cuales utilizaremos estos conceptos y con base en ellos dibujaremos la gráfica de la función.

Ejemplo 1

Analicemos y dibujemos la gráfica de $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si } x < 1 \\ x^2 + 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

SOLUCIÓN

- INTERCEPTOS CON LOS EJES.

  a) **Con el eje x:**

  Si $y = 0$ entonces $4 - x^2 = 0$ ó $x^2 + 2 = 0$

  Si $4 - x^2 = 0$ entonces $x = 2$ ó $x = -2$ (se descarta $x = 2$, pues no está en el intervalo $(-\infty\ ;\ 1)$)

  Si $x^2 + 2 = 0$ entonces $x = \sqrt{-2} \notin \mathbb{R}$

  Luego, el único intercepto con el eje x es (-2 , 0).

  b) **Con el eje y**

  Si $x = 0$ entonces $y = 4 - 0^2 = 4$. Luego, el intercepto con el eje y es (0 , 4).

- DOMINIO

  El dominio de f es $\mathbb{R}$.

- CONTINUIDAD

  El único punto donde se sospecha que f puede ser discontinua es $x = 1$. Veamos:

  i. $f(1) = 1^2 + 2 = 3$

  ii. $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (4 - x^2) = 3 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (x^2 + 2) = 3 \end{array}\right\} \therefore \lim_{x \to 1} f(x) = 3$$

  iii. $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$

  Luego, f es continua en $x = 1$

- SIMETRÍAS

  f no presenta ningún tipo de simetrías.

- ASÍNTOTAS

  Como los tramos que forman la función son polinomios y f es continua en todos los reales, entonces f no presenta asíntotas de ninguna clase.

- VALORES CRÍTICOS

  Los valores críticos de f son aquellos donde $f'(x) = 0$ ó $f'(x)$ no existe. Hallemos $f'(x)$:

  $$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 1 \\ \text{No existe} & \text{si } x = 1 \\ 2x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

  $f'(x) = 0$ cuando $x = 0$ (¿ por qué ?) y $f'(x)$ no existe cuando $x = 1$.

- INTERVALOS DE CRECIMIENTO Y/O DECRECIMIENTO.

  Con los valores críticos obtenidos formamos los intervalos $(-\infty\,;0)$, $(0\,;\,1)$ y $(1\,;+\infty)$ y analizamos el signo de f'(x) en cada uno de ellos; así:

	$-\infty$	0		1	$+\infty$
Signo de f´(x)	+ + + + + +		- - - - - - - - - - - - -		+ + + + + + + +
f(x)	+ Crece		- Decrece		Crece

  Luego, f es creciente en los intervalos $(-\infty\,;0)$ y $(1\,;+\infty)$ y es decreciente en el intervalo (0 ; 1)

- MÁXIMOS Y MÍNIMOS RELATIVOS.

  * Como f es continua en x = 0 y pasa de creciente en $(-\infty\,;0)$ a decreciente en (0 ; 1), entonces f tiene un valor máximo relativo en x = 0.

  PREGUNTA: ¿Podemos hallar este valor máximo utilizando el criterio de la segunda derivada?

  * Como f es continua en x = 1 y pasa de decreciente en (0 ; 1) a creciente en $(1\,;+\infty)$, entonces f tiene un valor mínimo relativo en x = 1.

  PREGUNTA: ¿Podemos hallar este valor mínimo utilizando el criterio de la segunda derivada?

  * Las imágenes de estos valores son:

  $f(0) = 4 - (0)^2 = 4$; luego, A(0 , 4) es un punto máximo relativo.

  $f(1) = 1^2 + 2 = 3$; luego, B(1, 3) es un punto mínimo relativo.

- CONCAVIDAD Y PUNTOS DE INFLEXIÓN

  Los intervalos de concavidad los formamos con los valores para los cuales f''(x) = 0 ó f''(x) no existe. Hallemos f''(x):

$$f''(x) = \begin{cases} -2 & \text{si} \quad x < 1 \\ \text{No existe} & \text{si} \quad x = 1 \\ 2 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

  * No existe ningún valor de x para el cual f''(x) = 0 (¿por qué?)

  * Como $f''_-(1) = -2$ y $f''_+(1) = 2$ entonces f''(1) no existe.

  Con este único valor (x = 1) formamos dos intervalos: $(-\infty\,;1)$ y $(1\,;+\infty)$ y analizamos el signo de f''(x):

	$-\infty$	1	$+\infty$
Signo de f``(x)	- - - - - - - - - - - - - - - - $\cap$		+ + + + + + + + + + + + + U

  Luego, f es cóncava hacia abajo en $(-\infty\,;1)$ y cóncava hacia arriba en $(1\,;+\infty)$. El único punto de inflexión posible es x = 1, porque allí se presenta cambio de concavidad; sin embargo, como $f'_+(1) \neq f'_-(1)$ entonces f no posee recta tangente en x = 1. Por lo tanto, x = 1 no es punto de inflexión.

- DIBUJO DE LA GRÁFICA:

  Con toda la información anterior procedemos a dibujar la gráfica de la función, marcando sobre ella los puntos claves; figura 7 - 26:

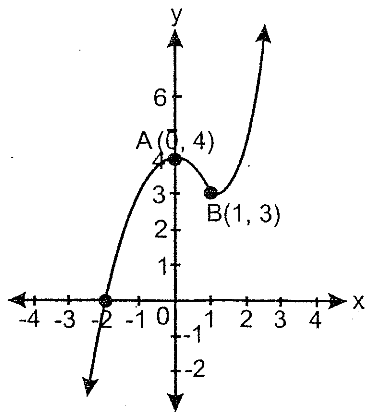


Figura 7 - 26

Ejemplo 2

Analicemos y dibujemos la gráfica de la curva cuya ecuación es: $y = \dfrac{2x^2}{x^2 + x - 2}$

SOLUCIÓN

- Con el fin de ganar un poco de tiempo, vamos a presentar un cuadro resumen que contiene el análisis de: Interceptos con los ejes, simetrías, dominio, rango, continuidad, asíntotas verticales y/o horizontales. Esperamos que el lector verifique cada uno de estos resultados:

RESUMEN Nº 1

1. INTERCEPTOS
   $P(0, 0)$
2. SIMETRÍAS
   No tiene simetrías
3. DOMINIO
   $\mathbb{R} - \{2, -1\}$
   Discontinua en $x = -1$ y $x = 2$
4. RANGO
   $(-\infty; 0) \cup [1.\overline{7}; +\infty)$
5. ASÍNTOTAS VERTICALES
   $x = -1$ y $x = 2$
   Si $x \to -1^-$, $y \to +\infty$
   Si $x \to -1^+$, $y \to -\infty$
   Si $x \to 2^-$, $y \to +\infty$
   Si $x \to 2^+$, $y \to +\infty$
6. ASÍNTOTAS HORIZONTALES
   $y = 2$
   Si $x \to +\infty$, $y \to 2^+$
   Si $x \to -\infty$, $y \to 2^-$
7. PUNTOS ESPECIALES
   La curva y la asíntota horizontal se cortan en el punto $A(-2, 2)$.

Ahora, continuamos con el análisis de los demás aspectos que intervienen en el proceso de graficación:

- VALORES CRÍTICOS:

$$f'(x) = \frac{(x^2 - x - 2)\,4x - 2x^2\,(2x - 1)}{(x^2 - x - 2)^2}$$

$$\therefore \quad f'(x) = \frac{2x\left(2x^2 - 2x - 4 - 2x^2 + x\right)}{\left(x^2 - x - 2\right)^2}$$

$$\therefore \quad f'(x) = \frac{2x\left(-x-4\right)}{\left(x^2 - x - 2\right)^2} \qquad -\frac{2x\left(x+4\right)}{\left(x-2\right)^2\left(x+1\right)^2}.$$

Ahora bien:

* $f'(x) = 0$ cuando $2x(-x - 4) = 0$; es decir, cuando $x = 0$ ó $x = -4$
* $f'(x)$ no existe cuando $x^2 - x - 2 = 0$; es decir, cuando $x = 2$ ó $x = -1$. Aunque en estos dos valores, f es discontinua, de todas maneras los incluimos en el análisis del signo de $f'(x)$.

Los intervalos para analizar el signo de f'(x) son: $(-\infty; -4)$, $(-4; -1)$, $(-1; 0)$, $(0; 2)$ y $(2; +\infty)$
Veamos:

	$-\infty$ a -4	-4 a -1	-1 a 0	0 a 2	2 a $+\infty$
Signo de f '(x)	- - - - - -	+ + + + + + + + + +	+ + +	- - - - - - - - - -	- - - - - - - - - - - - - - -
f(x)	Decrece	+ Crece	Crece	Decrece	Decrece

Luego, f es creciente en los intervalos (-4 ; -1) y (-1 ; 0) y es decreciente en los intervalos $(-\infty; -4)$, $(0; 2)$ y $(2; +\infty)$.

* MÁXIMOS Y MÍNIMOS RELATIVOS.

  * Como f es continua en x = -4 y la función es decreciente en $(-\infty; -4)$ y creciente en $(-4; -1)$, entonces x = -4 es un valor mínimo relativo.
  * Como f es discontinua en x = -1, entonces allí no hay ni máximo, ni mínimo relativo.
  * Como f es continua en x = 0 y la función es creciente en (-1 ; 0) y decreciente en (0 ; 2), entonces x = 0 es un valor máximo relativo.
  * Como f es discontinua en x = 2, entonces allí no hay ni máximo, ni mínimo relativo.
  * Las imágenes de estos valores son:

$$f(-4) = \frac{2(-4)^2}{(-4)^2 - (-4) - 2} = \frac{16}{9} = 1.\overline{7}$$ luego el punto P $\left(-4; 1.\overline{7}\right)$ es un mínimo relativo.

$$f(0) = \frac{0}{0 - 0 - 2} = 0,$$ luego, el punto Q(0 ; 0) es un punto de máximo relativo.

* CONCAVIDAD Y PUNTO DE INFLEXIÓN.

$$f''(x) = \frac{\left(x^2 - x - 2\right)^2(-4x - 8) + \left(2x^2 + 8x\right)2\left(x^2 - x - 2\right)(2x - 1)}{\left(x^2 - x - 2\right)^4}$$

$$\therefore \quad f''(x) = \frac{4\left(x^2 - x - 2\right)\left[-(x+2)\left(x^2 - x - 2\right) + \left(x^2 + 4x\right)(2x - 1)\right]}{\left(x^2 - x - 2\right)^4}$$

$$\therefore \quad f''(x) = \frac{4\left(-x^3 - x^2 + 4x + 4 + 2x^3 + 7x^2 - 4x\right)}{\left(x^2 - x - 2\right)^3} = \frac{4\left(x^3 + 6x^2 + 4\right)}{(x-2)^3\,(x+1)^3}$$

Ahora bien:

* $f''(x) = 0$ cuando $x^3 + 6x^2 + 4 = 0$; es decir, cuando $x \approx -6 \cdot 1$

* f''(x) no existe cuando x = 2 ó x =-1 (recordemos que acá f es discontinua).

Los intervalos para analizar el signo de f''(x) son: (-∞; 6·1), (-6·1; -1), (-1 ; 2) y (2; +∞)

	-∞	-6.1		-1		2	+∞
Signo de f``(x)	- - - - - -		+ + + + + + + + + + + + + + + + + + + +		- - - - - - - - - - - - - - -		+ + + + + +
f(x) es	∩	+	U		∩		U

Luego, f es cóncava hacia abajo en los intervalos (-∞;-6·1) y (-1 ; 2) y es cóncava hacia arriba en los intervalos (-6·1; - 1) y (2; +∞).

En x = -1 y x = 2 no hay puntos de inflexión ya que allí f es discontinua. En x = $-6\cdot 1$ hay cambio de concavidad ya que f es cóncava hacia abajo en (-∞;-6·1) y cóncava hacia arriba en (-6·1; -1); además, f '(-6·1) ≈ 0.015 ∈ ℝ. Luego, existe recta tangente en x = - 6·1. En consecuencia, x= - 6·1 es un punto de inflexión. Como f(- 6·1) = 1.8, entonces el punto R(-6.1 ; 1.8) es un punto de inflexión.

Antes de dibujar la gráfica de f, hagamos un nuevo resumen con la información que acabamos de obtener.

RESUMEN Nº 2

1. CRECIMIENTO Y/O DECRECIMIENTO

   Crece en (-4 ; -1) y (-1 ; 0)
   Decrece en (-∞ ;- 4), (0 ; 2) y (2; +∞)

2. MÁXIMOS Y/O MÍNIMOS

   Máximo: Q(0 ; 0)
   Mínimo: P (-4 ; $1.\overline{7}$)

3. CONCAVIDAD

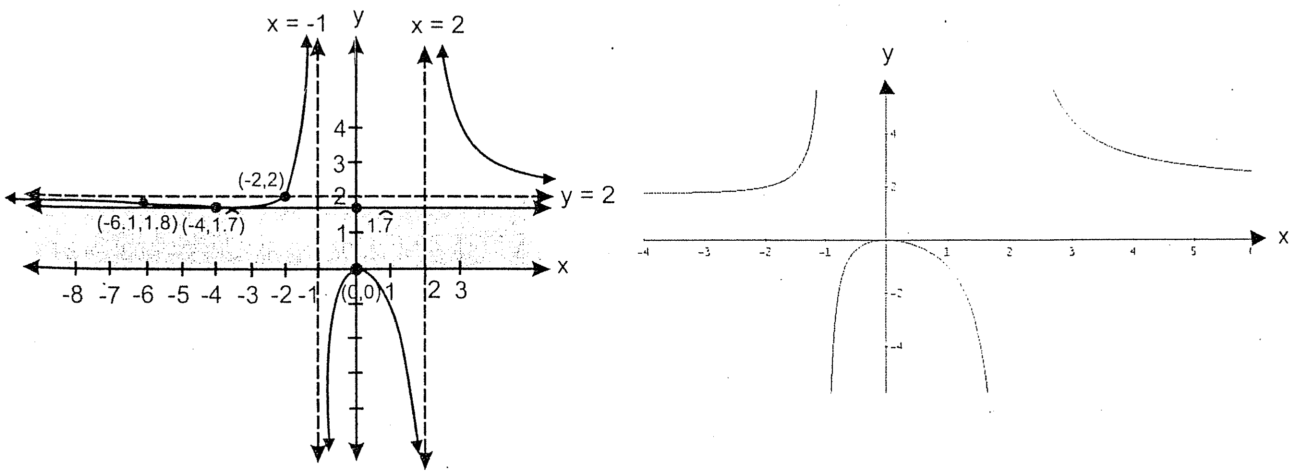
   ∩ en (-∞ ;-6·1) y (-1 ; 2)
   U en (-6·1; -1) y (2; +∞)

4. PUNTO DE INFLEXIÓN

   R(- 6·1 ; 1.8)

DIBUJO DE LA GRÁFICA

La figura 7 - 27(a) nos muestra la gráfica de la función. Sobre ella hemos marcado y dibujado los puntos y líneas claves. La figura 7 - 27(b) corresponde a la gráfica de la misma función, dibujada con DERIVE.



(a) (b)

Figura 7 - 25

Ejemplo 3

Analicemos y dibujemos la gráfica de la curva cuya ecuación es:

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$$

SOLUCIÓN

- De nuevo, presentaremos un resumen de los siguientes elementos: interceptos con los ejes, simetrías, dominio, continuidad, rango y asíntotas. Cada lector debe verificarlas.

RESUMEN Nº 3	
1. INTERCEPTOS P(0, 0)	2. SIMETRÍAS Con el origen
3. DOMINIO Y CONTINUIDAD D = $\mathbb{R}$ - {1, -1} Discontinua en x = 1 y x = -1	4. RANGO $\mathbb{R}$
5. ASÍNTOTAS VERTICALES x = -1 y x = 1 Si $x \to -1^-$, $y \to -\infty$ Si $x \to -1^+$, $y \to +\infty$ Si $x \to 1^-$, $y \to -\infty$ Si $x \to 1^+$, $y \to +\infty$	6. ASÍNTOTAS OBLICUAS y = x Si $x \to +\infty$, $y_{curva} > y_{recta}$ Si $x \to -\infty$, $y_{curva} < y_{recta}$

Ahora, continuemos analizando los demás aspectos relativos a la graficación:

- VALORES CRÍTICOS:

$$f'(x) = \frac{(x^2 - 1)\,3x^2 - x^3\,(2x)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2}$$

$$\therefore \quad f'(x) = \frac{x^4\,(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^2\,(x + \sqrt{3})\,(x - \sqrt{3})}{(x^2 - 1)^2}$$

Ahora bien:

* f'(x) = 0 cuando x = 0, $x = -\sqrt{3}$ ó $x = \sqrt{3}$

* f'(x) = no existe cuando x = 1 ó x = -1; además, en estos valores, f es discontinua.

Los intervalos para analizar el signo de f'(x) son: $\left(-\infty ; -\sqrt{3}\right)$, $\left(-\sqrt{3} ; -1\right)$, (-1 ; 0), (0 ; 1), $\left(1 ; \sqrt{3}\right)$ y $\left(\sqrt{3} ; +\infty\right)$

$$-\infty \qquad -\sqrt{3} \qquad -1 \qquad 0 \qquad 1 \qquad \sqrt{3} \qquad +\infty$$

Signo de f´(x)	+ + + + +	- - - - - - - - -	- - - - - - - - - -	- - - - - - - - - -	- - - - - - -	+ + + + + + +
f(x)	+ Crece	- Decrece	Decrece	Decrece	Decrece	+ Crece

Luego, f es creciente en los intervalos $\left(-\infty ; -\sqrt{3}\right)$ y $\left(\sqrt{3} ; +\infty\right)$ y es decreciente en los intervalos $\left(-\sqrt{3} ; -1\right)$, (-1 ; 0) , (0 ; 1) y $\left(1 ; \sqrt{3}\right)$.

- MÁXIMOS Y MÍNIMOS RELATIVOS
  - Como f es continua en $x = -\sqrt{3}$ y la función es creciente en $\left(-\infty ; -\sqrt{3}\right)$ y decreciente en $\left(-\sqrt{3} ; -1\right)$, entonces $x = -\sqrt{3}$ es un valor máximo relativo.
  - Como f es discontinua en x =-1, entonces allí no hay ni máximo ni mínimo relativo.
  - Como f es continua en x = 0 y la función es decreciente en (-1 ; 0) y sigue siendo decreciente en (0 ; 1), entonces x = 0 no es un valor máximo ni mínimo relativo.
  - Como f es discontinua en x = 1, entonces allí no hay ni máximo ni mínimo relativo.
  - Como f es continua en $x = \sqrt{3}$ y la función es decreciente en $\left(1; \sqrt{3}\right)$ y creciente en $\left(\sqrt{3} ; +\infty\right)$, entonces $x = \sqrt{3}$ es un valor mínimo relativo.

Las imágenes de estos valores son:

$$f\left(-\sqrt{3}\right) = \frac{\left(-\sqrt{3}\right)^3}{\left(-\sqrt{3}\right)^2 - 1} = \frac{-3\sqrt{3}}{2}$$

$$f\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\left(\sqrt{3}\right)^3}{\left(\sqrt{3}\right)^2 - 1} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Por lo tanto, $P\left(-\sqrt{3}\,, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ es un MÁXIMO RELATIVO y $Q\left(\sqrt{3}\,, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ es un MÍNIMO RELATIVO.

- CONCAVIDAD Y PUNTOS DE INFLEXIÓN

$$f''(x) = \frac{\left(x^2-1\right)^2\left(4x^3-6x\right) - \left(x^4-3x^2\right)2\left(x^2-1\right)2x}{\left(x^2-1\right)^4}$$

$$\therefore \quad f''(x) = \frac{2x\left(x^2-1\right)\left[\left(x^2-1\right)\left(2x^2-3\right) - 2\left(x^4-3x^2\right)\right]}{\left(x^2-1\right)^4}$$

$$\therefore \quad f''(x) = \frac{2x\left(x^2+3\right)}{\left(x^2-1\right)^3}$$

Ahora bien:

- $f''(x) = 0$ cuando $2x(x^2 + 3) = 0$; o sea, cuando x = 0.
- $f''(x)$ no existe cuando $x^2 - 1 = 0$; es decir, cuando x = 1 ó x = -1

Los intervalos para analizar el signo de f''(x) son:

	$-\infty$ a -1	-1 a 0	0 a 1	1 a $+\infty$
Signo de f''(x)	- - - - - - - - - -	+ + + + + + +	- - - - - - - - - -	+ + + + + + +
f(x) es	$\cap$	U	$\cap$	+ U

Luego, f es cóncava hacia abajo en los intervalos $(-\infty; -1)$ y (0 ; 1) y es cóncava hacia arriba en los intervalos (-1 ; 0) y $(1; +\infty)$.

En x = -1 y x = 1 no hay puntos de inflexión, ya que allí f es discontinua. En x = 0 hay cambio de concavidad ya que f es cóncava hacia arriba (U) en (-1 ; 0) y cóncava hacia abajo ($\cap$) en (0 ; 1); además $f'(0) = 0 \in \mathbb{R}$, lo cual significa que f tiene recta tangente en x = 0. Por lo tanto, x = 0 en un punto de inflexión. Como f(0) = 0, entonces el punto R(0 ; 0) es un punto de inflexión de la gráfica de f.

- El siguiente cuadro nos resume la información que acabamos de obtener.

RESUMEN Nº 4

1. CRECIMIENTO Y/O DECRECIMIENTO

   Crece en $\left(-\infty ; -\sqrt{3}\right)$ y $\left(\sqrt{3} ; +\infty\right)$

   Decrece en $\left(-\sqrt{3} ; -1\right)$, (-1 ; 0), (0 ; 1) y $\left(1 ; \sqrt{3}\right)$

2. MÁXIMOS Y/O MÍNIMOS

   Máximo: $P\left(-\sqrt{3} ; \dfrac{-3\sqrt{3}}{2}\right)$

   Mínimo: $Q\left(\sqrt{3} ; \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

3. CONCAVIDAD

   $\cap$ en $\left(-\infty ; -1\right)$ y (0 ; 1)

   $\cup$ en (-1 ; 0) y $\left(1 ; +\infty\right)$

4. PUNTO DE INFLEXIÓN

   P(0 ; 0)

DIBUJO DE LA GRÁFICA

Con la información recogida en los cuadros resumen Nº 3 y Nº 4 podemos dibujar la gráfica de la curva; figura 7 - 28:

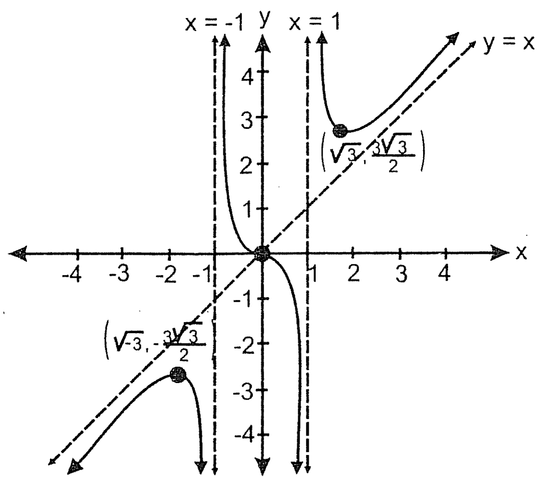


Figura 7 - 28

EJERCICIO 7.3

1. La figura 7 - 29 corresponde a la gráfica de la derivada f' de una función f. Se pide

   a) Dibujar la gráfica de f''.
   b) Dibujar una posible gráfica de f que pase por el origen.

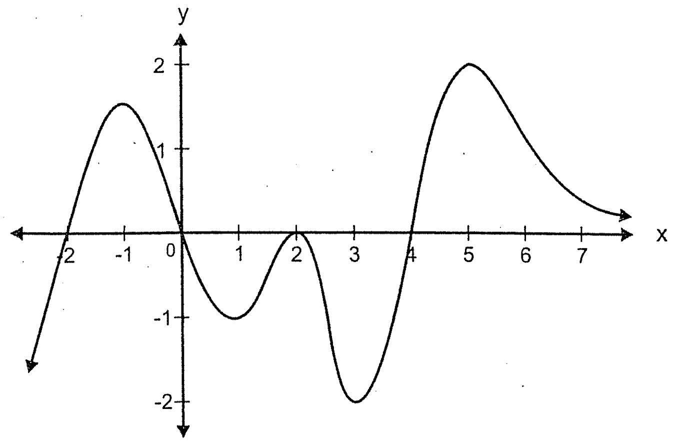


Figura 7 - 29

2 Con base en la gráfica de y = f(x) de la figura 7 - 30, estimar los intervalos en que crece o decrece su derivada f'.

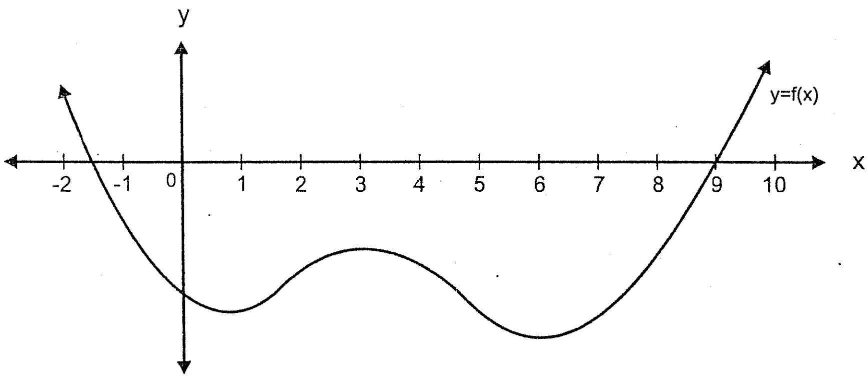
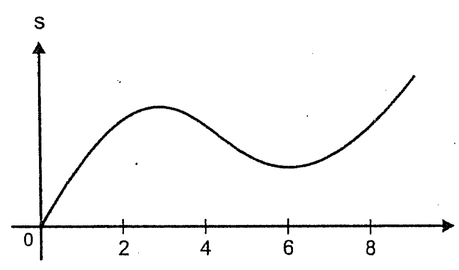


Figura 7 - 30

3 a) Dibujar una curva cuya pendiente siempre sea negativa y decreciente.
b) Dibujar una curva cuya pendiente siempre sea negativa y creciente.

4 El costo de la vida sigue aumentando, pero a una tasa decreciente. En términos de una función y sus derivadas, ¿qué quiere decir esta afirmación?

5 Una partícula se mueve a lo largo de una recta horizontal. La gráfica de su función de posición aparece a continuación. Si el sentido positivo del movimiento es hacia la derecha, se pide:

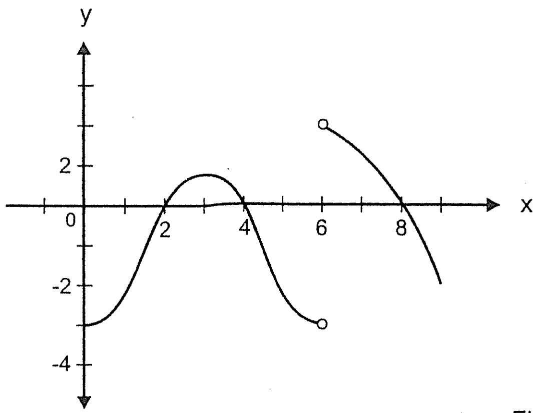


a) ¿Cuándo se mueve la partícula hacia la derecha y cuándo hacia la izquierda?
b) ¿Cuándo tiene aceleración positiva la partícula y cuándo negativa?

En los ejercicios **6** y **7** se muestra la gráfica de la derivada f' de una función f.

a) ¿En qué intervalos f crece o decrece?
b) En cuáles valores de x, la función f tiene un máximo o un mínimo locales?
c) ¿En qué intervalos f es cóncava hacia arriba o hacia abajo?
d) Escribir las coordenadas de los puntos de inflexión.
e) Suponga que f es continua en f(0) = 0 y grafique f.

6



7

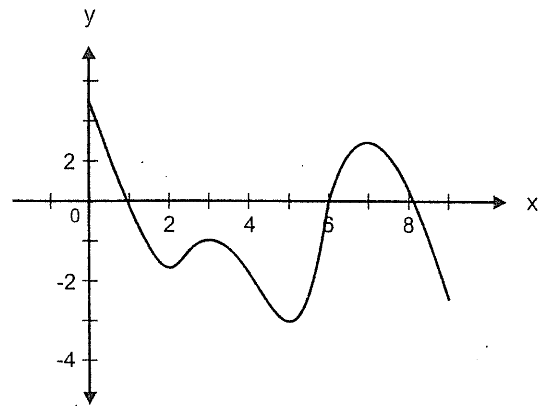


Figura 7 - 32

8 Graficar una función cuya primera derivada sea positiva y cuya segunda derivada sea negativa

9 Trazar la gráfica de una función que cumpla todas las condiciones siguientes:
$f'(-1) = f'(1) = 0$; $f'(x) < 0$ si $|x| < 1$; $f'(x) > 0$ si $|x| > 1$; $f(-1) = 4$, $f(1) = 0$; $f''(x) < 0$ si $x<0$, $f''(x) > 0$ si $x>0$.

10 Trazar la gráfica de una función que satisfaga todas las condiciones siguientes:
$f(0) = 0$; $f'(-2) = f'(1) = f'(9) = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to 6} f(x) = -\infty$; $f'(x) < 0$ en $(-\infty ; -2)$, $(1 , 6)$ y $(9 ; +\infty)$; $f'(x) > 0$ en $(-2 ; 1)$ y $(6 ; 9)$; $f''(x) > 0$ en $(-\infty ; 0)$ y $(12 ; +\infty)$; $f''(x) < 0$ en $(0 ; 6)$ y $(6 ; 12)$

Para cada una de las funciones 11 a 16 se pide:

a) Hallar los interceptos con los ejes.
b) Hallar los valores críticos.
c) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
d) Hallar los puntos de máximo y/o mínimo relativo.
e) Determinar los intervalos de concavidad.
f) Hallar los puntos de inflexión.
g) Dibujar la gráfica

11 $f(x) = x^3 - \frac{21}{4}x^2 + 9x - 4$

12 $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2$

13 $f(x) = x^{5/3} + 5x^{2/3}$

14 $f(x) = \begin{cases} 3x+5 & \text{si } x < -1 \\ x^2+1 & \text{si } -1 \le x < 2 \\ 7-x & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$

15 $f(x) = \begin{cases} (x+9)^2 - 8 & si\ x < -7 \\ -\sqrt{25-(x+4)^2} & si\ -7 \le x \le 0 \\ (x-2)^2 - 7 & si\ x > 0 \end{cases}$

16 $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 7x + 10}$

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (22)

Un viaje organizado por una escuela puede llevar hasta 250 estudiantes. Si viajan 150 estudiantes o menos, el costo será de $15.000 por estudiante. Sin embargo, el costo por persona se reduce $50 por cada alumno que exceda en número a 150 hasta que el costo llegue a $10.000 por alumno. Si x es el número de estudiantes que viajan, escribir una expresión en función de x para calcular los ingresos que recibe la escuela por el viaje.

Taller de la Unidad 7

1 Preguntas para revisar la teoría:

1.1 ¿Cuándo un valor $x = c$ es máximo absoluto de una función f? ¿Y cuándo es mínimo absoluto?

1.2 ¿Cuándo una función f tiene un valor máximo relativo en $x = c$? ¿Y mínimo relativo?

1.3 ¿Qué diferencia hay entre un máximo (o mínimo) absoluto y un máximo (o mínimo) relativo?

1.4 ¿Qué establece el teorema del valor extremo?

1.5 ¿Puede una función discontinua en un intervalo [a ; b], tener un máximo y un mínimo en [a ; b]? Ilustre su respuesta.

1.6 ¿Qué es un número o valor crítico de una función?

1.7 ¿Todo valor máximo o mínimo relativo de una función es valor crítico de la función? ¿Y todo valor crítico de una función corresponde a un valor máximo o mínimo relativo de la función? Ilustre ambas respuestas.

1.8 ¿Cuál es el criterio para hallar máximos o mínimos absolutos de una función en un intervalo cerrado [a ; b]?

1.9 ¿Qué establece el Teorema del Valor Medio?

1.10 ¿Cuándo una función es creciente y cuándo decreciente en un intervalo dado?

1.11 ¿Qué relación existe entre los conceptos de crecimiento o decrecimiento con el de derivada?

1.12 ¿Qué dice y cómo se aplica el criterio de la primera derivada para extremos relativos?

1.13 ¿Cuándo una función es cóncava hacia arriba y cúando es cóncava hacia abajo en un intervalo dado?

1.14 ¿Qué relación existe entre la derivada de una función y su concavidad?

1.15 ¿Cuándo un punto $P(c , f(c))$ es punto de inflexión de una función f?

1.16 ¿Cómo se analizan la concavidad y se obtienen los posibles puntos de inflexión de una función f?

1.17 ¿Qué establece el criterio de la segunda derivada para extremos relativos?

1.18 ¿Cuáles son los aspectos que deben tenerse en cuenta al dibujar la gráfica de una función?

1.19 Completar: si $f''(x) > 0$ en I entonces $f'(x)$ es__________ en I y f es __________en I.

1.20 Completar: si $f''(x) = 0$ en I entonces $f'(x)$ es _________ en I y f es __________en I.

Falso o Verdadero

Contestar Falso o Verdadero a cada una de las siguiente proposiciones. Justificar cada respuesta.

2.1 Toda función continua en un intervalo cerrado [a ; b] tiene un valor máximo y mínimo absolutos en [a ; b].

2.2 En todo punto crítico de una función, f tiene un valor de máximo o de mínimo relativo.

2.3 Todo valor máximo o mínimo relativo de una función tiene lugar un valor crítico de la función.

2.4 La función f definida por $f(x) = 2x + \mathrm{Cos}(x)$ es siempre creciente.

2.5. El Teorema del Valor Medio establece que si una función continua en $[a ; b]$ y derivable en $(a ; b)$, entonces existe al menos un $c \in (a ; b)$ tal que la pendiente de la recta secante que pasa por $(a ; f(a))$ y $(b ; f(b))$ es igual a la pendiente de la recta tangente que pasa por $(c ; f(c))$.

2.6 Una función f es creciente y derivable en todo su dominio. Es posible que exista un valor $x = c$ tal que $f'(c) = 0$.

2.7 Una función f es tal que $f'(a) = 0$ y $f''(a) = 0$. Por lo tanto, f puede presentar un máximo relativo en $x = a$.

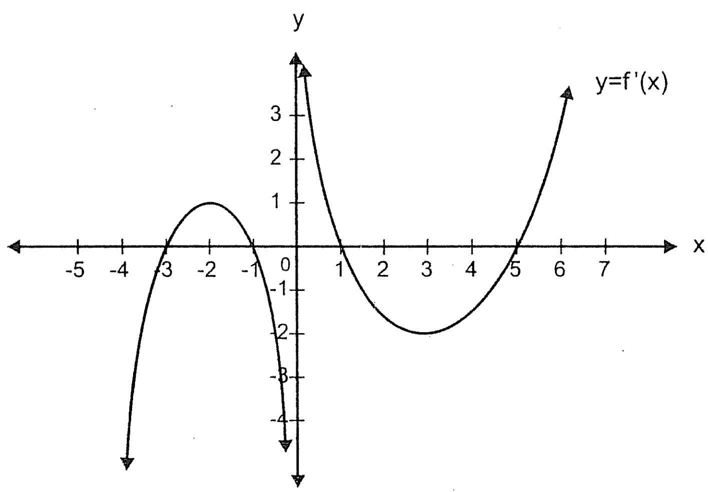
2.8 La gráfica de una función cuadrática nunca puede tener puntos de inflexión.

2.9 La gráfica de una función cuadrática es siempre cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo en su dominio.

2.10 Si f es cóncava hacia arriba en $[a; c)$, cóncava hacia abajo en $(c ; b]$ y continua en $x = c$, entonces $(c, f(c))$ es un punto de inflexión de f.

En los ejercicios **3** a **7**, encierre en un círculo la letra correspondiente a la única respuesta correcta.

La siguiente gráfica corresponde a la derivada f` de cierta función f continua en $(-\infty ; +\infty)$



3 La gráfica de f es creciente en:

a) $(-\infty ; -3)$ y $(3 ; 5)$
b) $(-3 ; -1)$, $(0 ; 1)$ y $(5 ; +\infty)$
c) $(-\infty ; 0)$ y $(0 ; 3)$
d) $(-\infty ; -2)$ y $(3 ; +\infty)$

4 En x=0, la gráfica de f:

a) Tiene un mínimo local (relativo) en forma de «pico» o «esquina».
b) Tiene un máximo local (relativo) en forma de «pico» o «esquina».
c) Tiene una asíntota vertical.
d) Presenta una discontinuidad esencial o inevitable.

5 La gráfica de f tiene puntos de inflexión en:

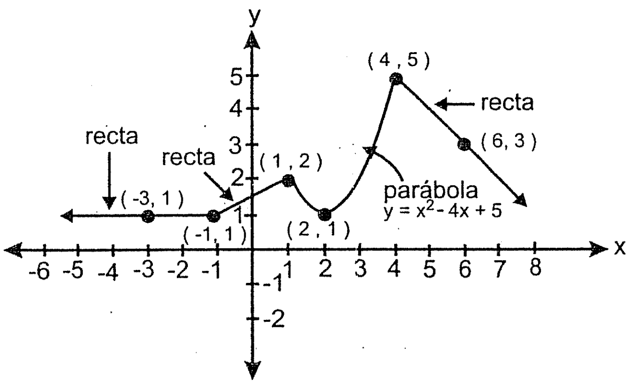
a) $(-3 ; f(-3))$, $(-1 ; f(-1))$

b) (0 ; f(0)) , (1 ; f(1)) y (5 ; f(5))
c) Ningún punto.
d) (-2 ; f(-2)) y (3 ; f(3))

6 En x = 1 la gráfica de f tiene:
a) Un intercepto con el eje x.
b) Un punto de inflexión.
c) Un mínimo local (relativo).
d) Un máximo local (relativo).

7 La gráfica de f es cóncava hacia arriba en:
a) $(0 ; +\infty)$
b) $(-\infty ; 0)$
c) $(-\infty ; \infty)$
d) $(-\infty ; -2)$ y $(3 ; +\infty)$

8 A continuación tenemos la gráfica de una función f continua en todos los reales.



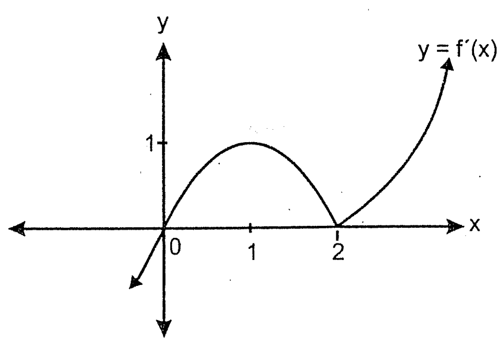
Se pide:

a) Dibujar la gráfica de f'(x)
b) Si hay algún punto donde f' no existe, señalarlo claramente en la gráfica.

9 Si un objeto se lanza verticalmente hacia arriba desde el techo de una casa y al cabo de 10 segundos pasa nuevamente por el techo hacia abajo, ¿ qué teorema nos garantiza que el objeto en algún instante tiene velocidad nula? Justifique su respuesta. (NOTA: suponga que la función que define la posición del objeto con respecto al tiempo es continua y derivable para todo $t \geq 0$).

10 Si se tiene una función f continua y derivable en todos los reales y la recta $y = 2x$ corta su gráfica exactamente 13 veces. Como mínimo, ¿en cuántos puntos la función f tendrá derivada igual a 2? Justifique su respuesta e identifique claramente cuál teorema le permite sustentar su respuesta.

11 A continuación se presenta la gráfica de la derivada f' de una función f. Determinar:



a) ¿En qué intervalo(s) la función f es creciente?.
b) ¿En qué punto(s) la función f tiene un mínimo relativo?.
c) ¿En qué punto(s) la función f tiene un punto de inflexión?.

12 La figura 7 - 33 representa la gráfica de la derivada f' de cierta función f. Con esta información determinar, si existen, máximo relativo, mínimo relativo o punto de inflexión en los puntos de abscisa x = 1 y x = 2.

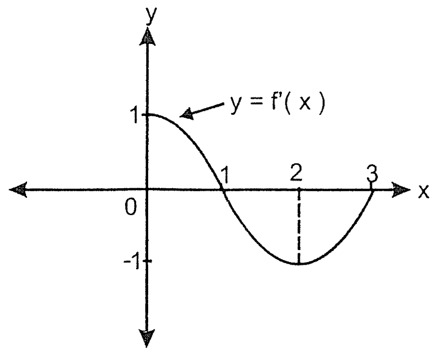
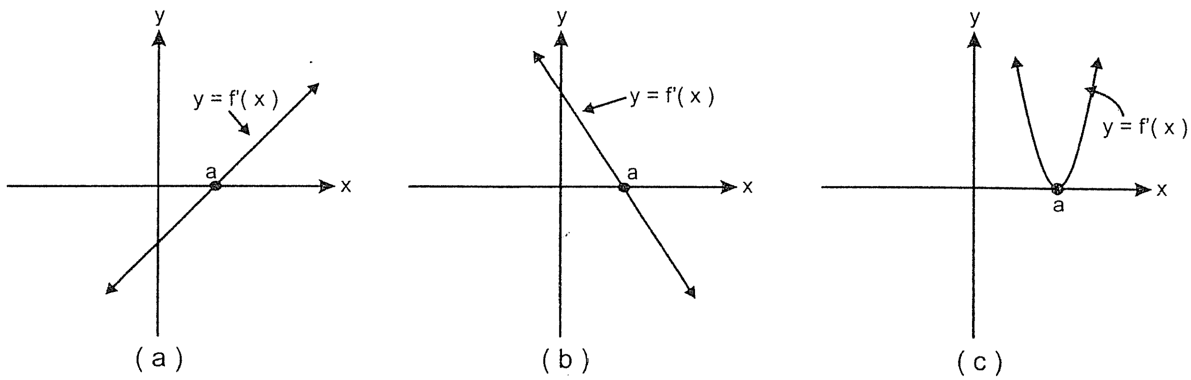
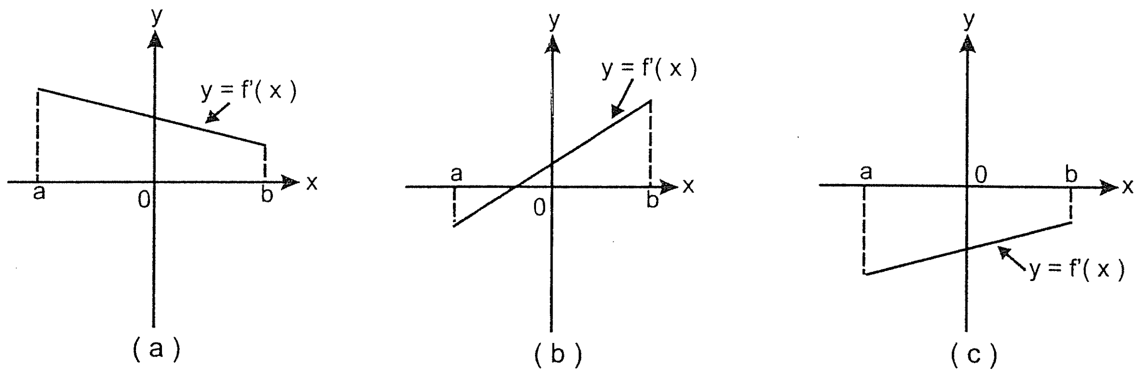


Figura 7 - 33

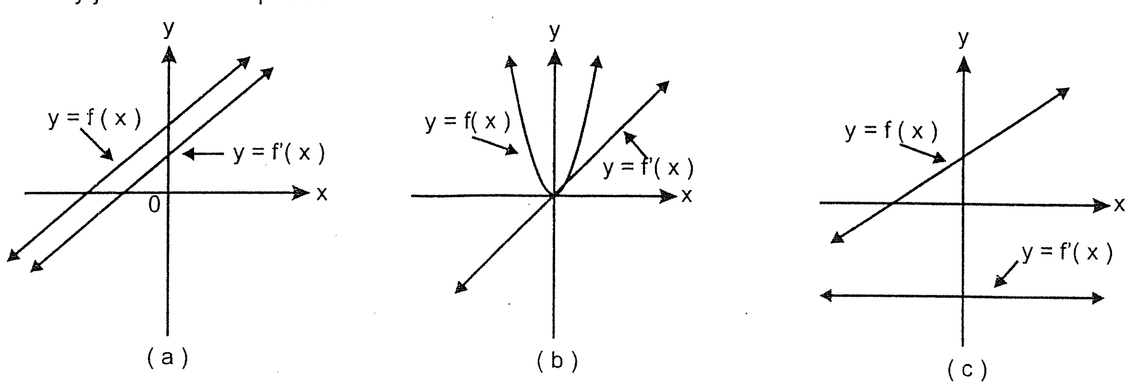
13 Indicar cuál de las siguientes gráficas corresponde a la derivada de una función que tiene un máximo en el punto de abscisa x = a. Justificar la respuesta:



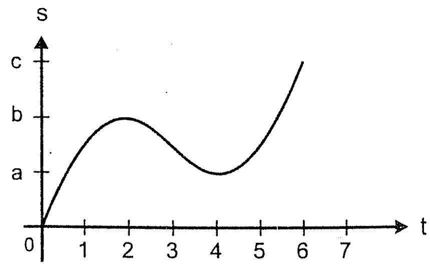
14 Las siguientes gráficas corresponden a la derivada de una función. ¿En cuál de ellas la función es creciente en el intervalo (a ; b)?



15 Junto a la función f dada, se ha dibujado la derivada f'(x). Sólo una de las respuestas es correcta. Indicar cuál es y justificar la respuesta.



16 Una partícula se mueve a lo largo de una recta horizontal. La gráfica de su función y posición se muestra en la siguiente figura. Se pide:



a) ¿Cuándo se mueve la partícula hacia la derecha y cuándo se desplaza hacia la izquierda?

b) ¿Cuándo la partícula tiene aceleración positiva y cuándo negativa?

17 La figura 7 - 34 muestra la gráfica de la derivada de una función f, continua en todo $\mathbb{R}$.

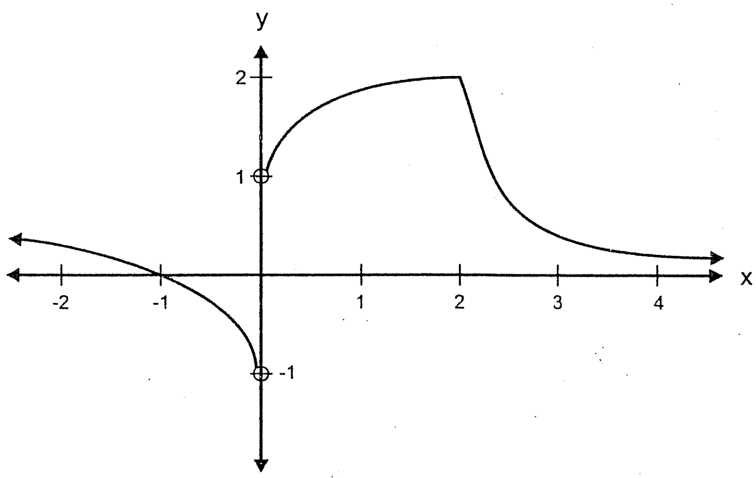


Figura 7 - 34

a) Hallar los intervalos en los que f es creciente y en los que f es decreciente.
b) Hallar los intervalos donde la gráfica de f es cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo.
c) Si se sabe que f(0) = 0, trazar una posible gráfica de f indicando en ella los puntos de inflexión (si los hay).

18 La figura 7 - 35 muestra la gráfica de la derivada f' de una función f.

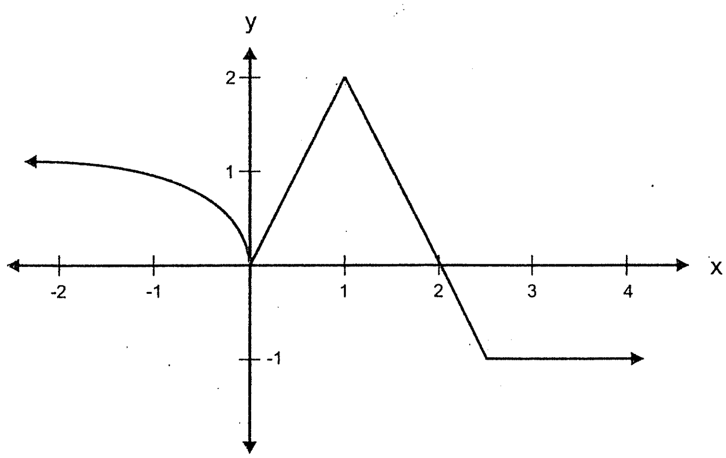


Figura 7 - 35

a) Dibujar la gráfica aproximada de f, si se sabe que f(1) = 0.
b) Dibujar la gráfica de f ''.

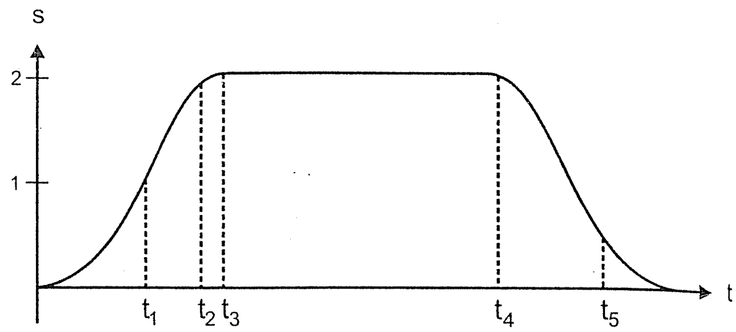
19 La figura 7 - 36 muestra la función posición s=f(t) de una partícula que se mueve horizontalmente en línea recta. Si el sentido positivo del movimiento es hacia la derecha:

a) ¿Cuándo la partícula se mueve hacia la derecha y cuándo hacia la izquierda?

b) ¿Cuándo la aceleración de la partícula es positiva y cuándo es negativa?

c) ¿Cuándo el movimiento de la partícula es acelerado y cuándo desacelerado?

d) ¿Qué pasa con el movimiento en t_1, en $(t_3 ; t_4)$ y en t_5?



20 Sea f una función continua en todos los reales, excepto en -2 y 3. La siguiente tabla presenta información sobre las funciones f, f' y f''.

a) Completar la columna de conclusiones de la tabla.

b) Con base en la información de las tablas, dibujar una posible gráfica de f, indicando las coordenadas de los puntos en los cuales la gráfica de f presenta extremos locales y puntos de inflexión. Dibujar las asíntotas, indicando la ecuación correspondiente.

x	f(x)	f'(x)	f''(x)	Conclusiones acerca de f
$-\infty < x < -2$		+	+	
x = -2	No existe	No existe	No existe	
$-2 < x < 1$		+	-	
x = 1	1	0	-	
$1 < x < 3$		-	-	
x = 3	No existe	No existe	No existe	
$3 < x < 5$		-	+	
x = 5	4	0	+	
$5 < x < 7$		+	+	
x = 7	4.5	+	0	
$7 < x < +\infty$		+	-	

Además se tiene que :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$ $\qquad \lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = \infty$ $\qquad \lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = -\infty$

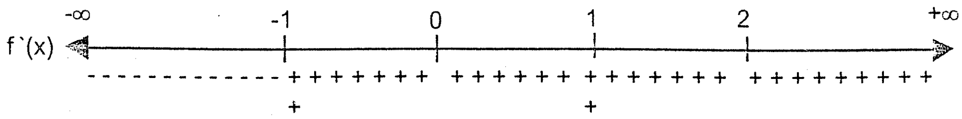
$\lim\limits_{x\to3^-} f(x) = -\infty$ $\qquad \lim\limits_{x\to3^+} f(x) = \infty$ $\qquad f(0) = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{3}$ $\qquad \lim\limits_{x\to+\infty} \left[f(x) - \frac{1}{3}x \right] = 3$ $\qquad f(2) = 0$ $\qquad f(4) = \frac{13}{3}$

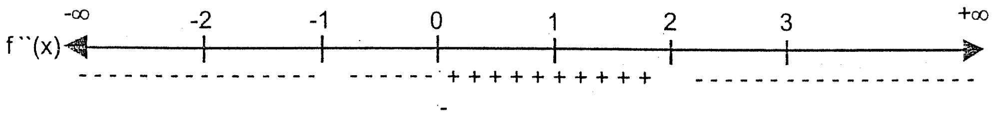
En los ejercicios **21** y **22** dibujar la gráfica de una función f que cumpla con todas las condiciones dadas.

21 a) $D_f = \mathbb{R}$, f es continua en su dominio, f(-1) = -3, f(0) = 0, f(2) = 1, f(3) = 2, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0^-$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3^-$

b) f'(x) existe y es continua en todos los puntos, excepto en –1, $\lim\limits_{x\to-1^+} f'(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-1^-} f'(x) = -\infty$, el signo de f' está dado por el siguiente esquema:



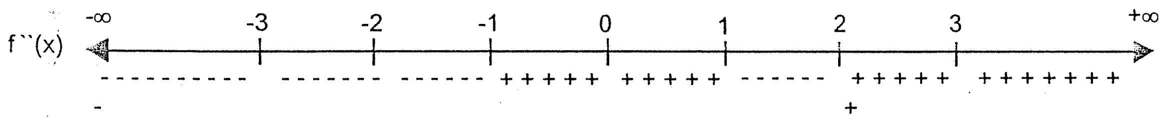
c) f``(x) existe y es continua en todos los puntos, excepto –1, el signo de f``(x) está dado por el esquema:



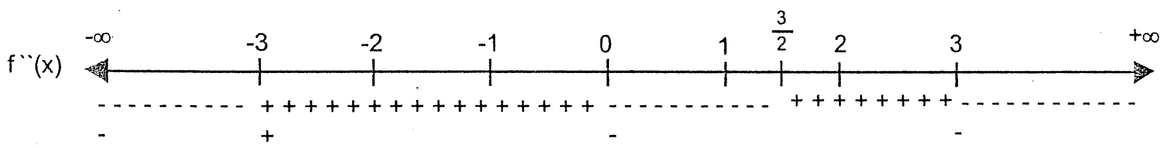
22 a) $D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$, continua en su dominio, $f(-3) = 2$, $f(-1) = -2$, $f(0) = 0$, $f(1) = 2$, $f(2) = 1$, $f(3) = \frac{5}{2}$, $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = 0^+$,

$\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 3$, $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to +\infty} [f(x) - x] = 0$

b) f`(x) existe y es continua excepto en -2 y 0, $\lim\limits_{x\to 0} f`(x) = +\infty$, el signo de f`(x) está dado por el siguiente esquema:



c) f``(x) existe y es continua, excepto en -2 y 0, su signo está dado por el siguiente esquema:



Para cada una de las funciones de los ejercicios **23** a **32** se pide:

a) Hallar interceptos con los ejes, determinar continuidad, hallar dominio y rango (si es posible), analizar simetrías y verificar la existencia de asíntotas verticales, horizontales u oblicuas.

b) Hallar valores críticos, determinar intervalos de crecimiento y/o decrecimiento y localizar puntos de máximo y/o mínimo relativo.

c) Determinar intervalos de concavidad y puntos de inflexión.

d) Con base en la información anterior, dibujar la gráfica de la función y hallar su rango

23 $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{2 - x}$

24 $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 2}}$

25 $f(x) = \dfrac{-x^3 + x^2 + 4}{x^2}$

26 $f(x) = \dfrac{2 + x - x^2}{(x-1)^2}$

27 $f(x) = x^{2/3} - 2x^{1/3}$

28 $f(x) = x^{4/3} + 4x^{1/3}$

29 $f(x) = \dfrac{x^2 - 8}{x - 3}$

30 $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$

31 $f(x) = \dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$

32 $f(x) = \sqrt[3]{6x^2 - x^3}$

1. Competencia: Argumentativa; Ámbito: Conteo.

Ningún menor de edad puede votar. Todos los habitantes de un pueblo pueden votar. Según esto, cuál o cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas.

1.1 Ningún habitante del pueblo es menor de edad.

1.2 Todos los habitantes del pueblo son mayores de edad.

1.3 Algunos habitantes del pueblo son menores de edad.

1.4 Algunos menores de edad pueden votar.

a) 1.1 solamente
b) 1.1 y 1.2 únicamente
c) 1.3 solamente
d) 1.3 y 1.4 únicamente.

2. Competencia: Argumentativa; Ámbito: Conteo.

Se define la diferencia entre dos conjuntos A y B, y se escribe A – B, como el conjunto formado por los elementos del conjunto A que no están en B. Según esto podemos afirmar que:

a) $A - B = \{x/x \in A \vee x \in B\}$
b) $A - B = \{x/x \in A \wedge x \notin B\}$
c) $A - B = \{x/x \notin A \vee x \in b\}$
d) $A - B = \{x/x \in A \vee x \notin B\}$

3. Competencia: Argumentativa; Ámbito: Conteo.

Las letras M, U, Ñ, E, C, A y los dígitos 2, 5, 5, 1 se rotan de forma cíclica de la siguiente manera:

		MUÑECA	2551
FILA	1.	UÑECAM	5512
FILA	2.	ÑECAMU	5125
FILA	3.	ECAMUÑ	1255

La fila en que aparecerá la combinación MUÑECA 2551 por primera vez es:

a) 6.
b) 10
c) 12
d) 18

4. Competencia: Propositiva; Ámbito: Conteo.

Otra forma de escribir la expresión $-\frac{x}{y} - \frac{z}{w}$ es:

a) $-\frac{x}{y} - \left(-\frac{z}{w}\right)$
b) $-\left(\frac{x}{y} - \frac{z}{w}\right)$
c) $\frac{x}{y} + \frac{z}{w}$
d) $-\left(\frac{z}{w} + \frac{x}{y}\right)$

5. Competencia: Argumentativa; Ámbito: Conteo.

Una balanza está en equilibrio. En un platillo hay medio ladrillo y una pesa de 1 kg. En el otro platillo hay un ladrillo. El peso del ladrillo es:

a) 0.5 kg.
b) 1 kg.
c) 2 kg.
d) 3 kg.

Núcleo Temático 8

APLICACIONES DE LA DERIVADA (2)

Se desarrolla para alcanzar los siguientes logros generales

MANEJO DE CONCEPTOS

como

- Linealización de funciones y el diferencial.
- Variables relacionadas con el Tiempo.
- Problemas de optimización.

para desarrollar competencia

ARGUMENTATIVA

DESTREZA OPERATIVA

a través de

- Hallar la razón de cambio promedio de y respecto a x.
- Hallar la aproximación lineal de una función en un punto.
- Calcular los Diferenciales de y y de x en una función dada.
- Derivar una función, que describe un modelo matemático, para optimizarla. Derivar dos o más variables de una
- función dada con respecto al tiempo.

para desarrollar competencia

PROPOSITIVA

DIBUJO DE GRÁFICAS

de

- Funciones Reales.

como

- Funciones polinómicas.
- Funciones racionales.
- Funciones trascendentes.
- Funciones especiales.

a partir de

- Utilizar el DERIVE.
- Los diferentes aspectos que facilitan su graficación (Interceptos, simetrías,...)
- Los criterios de la primera y la segunda derivada.

para desarrollar competencia

INTERPRETATIVA

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

relativos a

- Linealización de funciones y el diferencial.
- Variables relacionadas con el tiempo.
- Máximos y mínimos (optimización).

para desarrollar competencias

- ARGUMENTATIVA
- PROPOSITIVA
- INTERPRETATIVA

LOS HOMBRES DEL CÁLCULO (8)
KARL FRIEDRICH GAUSS

El «Príncipe de los Matemáticos», «la cima imponente que domina el siglo XVIII» son sólo algunos de los elogios dados a Karl Friedrich Gauss nacido en Brunswick, Alemania, en 1777, en el hogar de un hombre humilde y dominante, quien sólo aspiraba a que su hijo lo acompañara y sucediera como capataz de obreros de la construcción. Fue un «niño prodigio» que aprendió a contar antes de hablar correctamente. Se cuenta que en una ocasión, el maestro de su escuela quiso poner a sus alumnos un problema que los mantuviera ocupados un buen rato: sumar los cien primeros números naturales: 1 + 2 + 3 +...+ 99 + 100; Gauss, que tenía ocho (8) años, dió la respuesta correcta en unos pocos minutos; así:

escribió	1 + 2 + 3+ ...+ 99 + 100
y debajo	100 + 99 + 98+ ...+ 2 + 1
y sumó	101 +101 + 101+ ...+101 + 101

de esta forma dedujo que 100 veces 101 era igual al doble de la suma pedida.

Debido a sus aptitudes, logró ganarse el aprecio y la protección del Duque de Brunswick durante sus brillantes estudios. Con tan sólo 18 años enunció su teoría de los números primos y la ley de reciprocidad cuadrática. A los 22 años se doctoró en la Universidad de Gotinga con una tesis titulada: **«Una nueva prueba de que toda función algebraica racional entera de una variable puede ser descompuesta en factores reales de primero o segundo grado»**. Esta prueba se conoció más tarde con el nombre de Teorema de Gauss. También en álgebra desarrolló un método para resolver sistemas de ecuaciones lineales denominado ELIMINACION GAUSSIANA, el cual se estudia en un curso de Algebra Lineal.

Tanto o más que matemático, Gauss fue un científico universal: se ocupó de Astronomía, Geodesia, Física; fue el precursor de la Matemática Actuarial (calculó un fondo para las viudas de profesores de la Universidad de Gotinga); en Matemáticas se ocupó de Teoría de Números, Geometría no Euclidiana, Funciones de Variable Compleja, etc.

Este genial personaje murió en la ciudad de Gotinga en 1855.

COMPRENSIÓN DE LECTURA

EXPLICACIÓN: Lea detenidamente la anterior información biográfica y luego encierre, en un círculo, la letra que corresponda a la respuesta correcta.

1. En el texto anterior, el propósito del escritor es:
   a. Probar que Gauss fue un niño prodigio.
   b. Destacar la humildad de Gauss a pesar de su sabiduría.
   c. Exponer las razones por las cuales se le considera a Gauss «El Príncipe de las Matemáticas».
   d. Relevar la capacidad inventiva del genio en el «Teorema de Gauss».

2. Uno de los siguientes enunciados contradice el texto:
   a. En plena adolescencia, Gauss ya era Doctor en Ciencias Matemáticas.
   b. También trabajó la teoría de los números y la Geometría no Euclidiana.
   c. Algunas mujeres de su época se vieron beneficiadas, económicamente con los trabajos de Gauss.
   d. La pasión del genio por las matemáticas, lo privaron de incursionar en el estudio del universo y, en particular, de la tierra.

3. Las aptitudes de K. F. Gauss para la matemática:
   a. Fueron de procedencia innata.
   b. Afloraron en la ocasión en que solucionó un problema, en la escuela, a la edad de 8 años.
   c. Se desarrollaron cuando se dedicaba al trabajo de la construcción.
   d. Fueron estimuladas por su padre.

4. Se dice que Gauss fue un científico de carácter universal, porque:
   a. Manejó varios idiomas.
   b. Combinó, magistralmente, sus estudios de Matemáticas con Geodesia y Química.
   c. Se ocupó en sus estudios e investigaciones, de muchas ciencias.
   d. Gozó del protectorado y patrocinio de la realeza.

En la unidad anterior estudiamos que la derivada nos proporciona información fundamental para dibujar la gráfica de una función: intervalos de crecimiento o decrecimiento, puntos de máximo o mínimo relativo, intervalos de concavidad y puntos de inflexión.

En esta unidad consideraremos otras aplicaciones prácticas como las siguientes: **linealización de funciones, el diferencial, solución de problemas de variables relacionadas con el tiempo y problemas de optimización (máximos y mínimos).**

8.1 LINEALIZACIÓN Y DIFERENCIALES

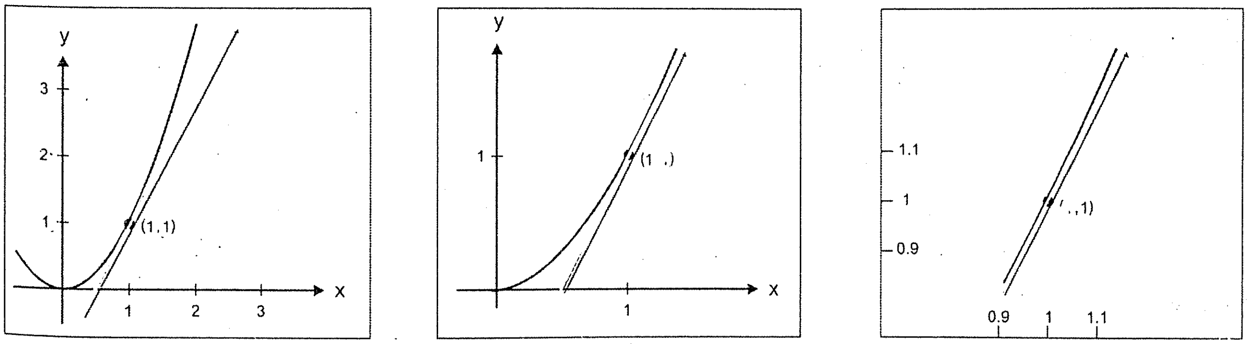
8.1.1. Linealización

- Hemos visto que una curva se encuentra muy próxima a su recta tangente, en las cercanías del punto de tangencia. Esta observación constituye la base de un método para hallar **valores aproximados** de funciones, denominado **linealización**. Por ejemplo, es fácil obtener f(1) en la función $f(x) = 2^x$, pero puede resultar difícil obtener f(1.01) en esta misma función; con este fin, «linealizamos» la función $f(x) = 2^x$ por medio de su recta tangente en x=1. A continuación, estudiaremos el proceso de linealización de una función.

- Realicemos la siguiente experiencia.

Experiencia

- Observemos con cuidado la secuencia de pantallazos de la figura 8 - 1



$y = x^2$ y su tangente $y = 2x - 1$ en (1 , 1).

Tangente y curvas muy próximas en (1 , 1)

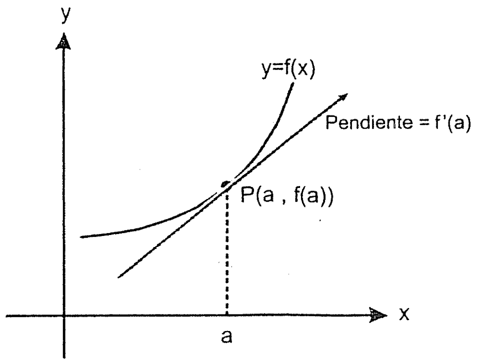
Tangente y curvas muy próximas a través del intervalo (0.9 ; 1.1)

Figura 8 - 1

- En cada pantalla hemos dibujado la gráfica de $y=x^2$ y su recta tangente $y=2x-1$ en el punto (1 , 1).

- Notemos que a medida que la gráfica de la curva se amplifica en la cercanía del punto de tangencia, dicha gráfica se vuelve más lineal y más parecida a su tangente.

- En general, la ecuación de la recta tangente a la curva $y=f(x)$ en el punto $P(a\ ,\ f(a))$ es:



$$y - f(a) = f'(a)\,(x-a)$$
$$\therefore\ y = f(a) + f'(a)\,(x-a)$$

Figura 8 - 2

- Por lo tanto, la recta tangente es la gráfica de la función:

$$L(x) = f(a) + f'(a)\,(x - a)$$

y la aproximación

$$f(x) \text{ » } f(a) + f'(a)\,(x - a)$$

se llama aproximación lineal de f en a, pues mientras la recta permanezca cercana a la gráfica de f, L(x) da una buena aproximación a f(x).

- En general:

DEFINICIÓN DE LINEALIZACIÓN DE UNA FUNCIÓN

- Si f es derivable en $x=a$, entonces la función de aproximación

$$L(x) = f(a) + f'(a)\,(x - a)$$

es la **linealización** de f en a.

- La aproximación $f(x)$ » $L(x)$ de f en L es la **aproximación lineal de** f en a. El punto $x=a$ es el **centro** de la aproximación.t

Ejemplo 1

a) Hallemos la linealización de $f(x)\ \sqrt{x+1}$ en $x=0$ y en $x=3$.
b) Utilicemos la linealización de $f(x)\ \sqrt{x+1}$ en $x=0$ para hallar un valor aproximado de $\sqrt{1.001}$, y en $x=3$ para hallar un valor aproximado de $\sqrt{4.2}$

SOLUCIÓN

a) La linealización de f en $x=0$ es: $L(x) = f(0) + f'(0)\,(x - 0)$, donde:

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x+1} & y \qquad f(0) = \sqrt{0+1} \\ f'(x) = \frac{1}{2}(x+1)^{-1/2} & y \qquad f'(0) = \frac{1}{2}\,(0+1)^{-1/2} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Por lo tanto:

$$L(x) = 1 + \frac{1}{2}\,(x-0) = 1 + \frac{1}{2}x$$

La linealización de f en x=3 es $L(x) = f(3) + f'(3)\,(x - 3)$, donde $f(3)= \sqrt{3+1} = 2$ y $f'(3) = \frac{1}{2}\,(3+1)^{-1/2} = \frac{1}{4}$.
Por tanto:

$$L(x) = 2 + \frac{1}{4}\,(x-3) = \frac{1}{4}\,x + \frac{5}{4}$$

La figura 8 - 3 muestra la gráfica de $f(x)= \sqrt{x+1}$ y sus lineaciones en x=0 y x=3.

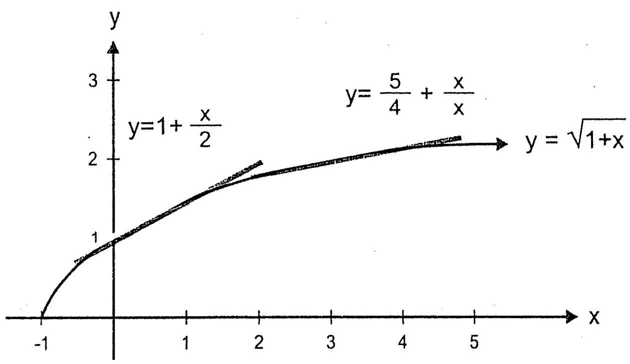


Figura 8 - 3

b) La aproximación $\sqrt{x+1} \approx 1 + \frac{x}{2}$ nos permite calcular el valor de $\sqrt{1.001} = \sqrt{1+0.001}$; así:

$$\sqrt{1.001} \approx 1 + \frac{0.001}{2} = 1.0005$$

La aproximación $\sqrt{x+1} \approx \frac{1}{4}\,x + \frac{5}{4}$ nos permite calcular el valor de $\sqrt{4.2} = \sqrt{3.2+1}$; así:

$$\sqrt{4.2} \approx \frac{1}{4}x + \frac{5}{4} = \frac{1}{4}(3.2) + \frac{5}{4} = \frac{8.2}{4} = 2.05$$

Pregunta: ¿Qué tanto difieren estos resultados con los que puede proporcionarnos una calculadora?

8.1.2. Diferenciales

Acabamos de estudiar que si f es diferenciable en x=a, entonces la función $L(x) = f(a) + f'(a)\,(x - a)$ es la **linealización** de f en a y que $f(x) \approx f(a) + f'(a)\,(x - a)$ es la aproximación lineal de f en a.

Si ahora partimos de esta última expresión, podemos obtener lo siguiente:

$f'(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a)$ ....expresión dada

$\therefore \quad f(x) - f(a) \approx f'(a)(x-a)$

$\therefore \quad f'(a) \approx \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ ....(1)

El lado derecho de (1) corresponde al valor de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ en x=a, con lo cual: $f'(a) \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Y como $\Delta x \neq 0$, entonces:

$$\Delta y \approx f'(a)\Delta x \text{...}(2)$$

El lado derecho de (2) recibe el nombre de **la diferencial de** y **en** x=a y se representa por **dy**; es decir,

$$dy = f'(a)\,\Delta x$$

En general:

> **DEFINICIÓN DE LAS DIFERENCIALES dy y dx**
>
> **Sea $y = f(x)$ una función derivable en un intervalo abierto que contiene a x.**
>
> - **La DIFERENCIAL DE y, denotada dy, se define como:**
>
> $$dy = f'(x)\,\Delta x \text{.......................................} (3)$$
>
> - **La DIFERENCIAL DE x, denotada dx, es cualquier número real no nulo y se define como:**
>
> $$dx = \Delta x$$

ATENCIÓN

- Como $\Delta y \approx f'(x)\,\Delta x$ y $dy = f'(x)\,\Delta x$, entonces $\Delta y \approx dy$. La aproximación entre estos resultados será tanto mayor cuanto menor sea el incremento Δx; además, el **error** que se comete se aproxima a 0 cuando Δx (o dx) se haga más próximo a 0. Dicho error es $|\Delta y - \Delta y|$

- La figura 8 - 4 nos muestra la interpretación geométrica del diferencial:

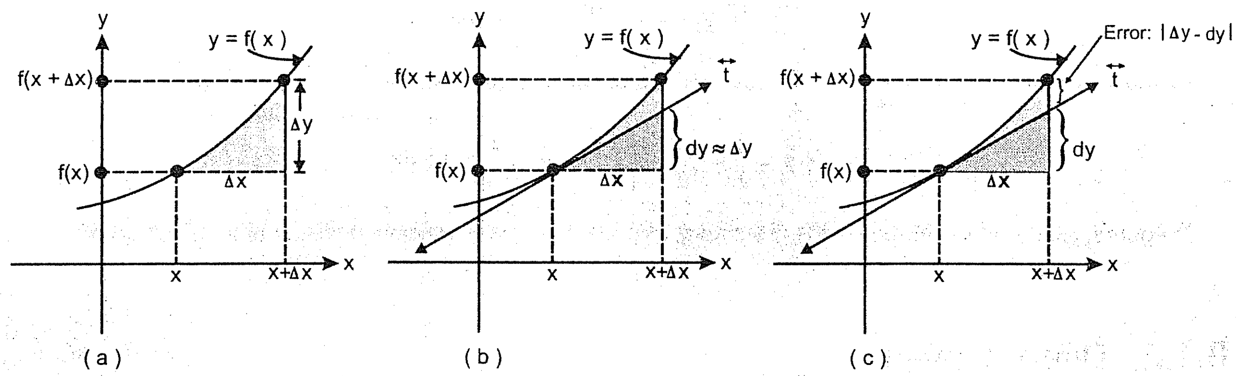


Figura 8 - 4

* La figura 8 - 4(a) nos muestra la variación de la función (Δy) cuando la variable pasa del punto x al punto $x + \Delta x$:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

* En la figura 8 - 4(b) hemos trazado la recta tangente a la curva en el punto (x, f(x)), cuya pendiente es f'(x). El cambio que experimenta la tangente al pasar de x a $x+\Delta x$, lo denotamos por dy y es aproximadamente igual al valor de $\Delta y (dy \approx \Delta y)$.

Por tanto:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(x)$$
$$\therefore \ \Delta y \approx f'(x) \cdot \Delta x$$

* En la figura 8 - 4(c), denotamos por $dx = \Delta x$ al cambio de la variable x y por dy al cambio de la tangente. Como dy es una aproximación de Δy, entonces; $\Delta y \approx dy = f'(x)\, dx$

Por lo tanto, para cualquier valor de x tenemos que:

$$\mathbf{dy = f'(x)\, dx}$$

Ejemplo 2

Una lámina cuadrada tiene 10 cm de lado. Al calentarse, su lado experimenta un aumento de 1mm.

Hallar:

a) La variación que experimenta el área.
b) La diferencial del área.
c) El error cometido.

SOLUCIÓN

- La función que nos proporciona el área del cuadrado es $A(x)=x^2$ y su derivada es $A'(x) = 2x$. Como 1mm = 0.1 cm, entonces:

  a) La variación que experimenta el área es:

$$\Delta A = A(x + \Delta x) - A(x)$$
$$\therefore \ \Delta A = A(10 + 0.1) - A(10)$$
$$\therefore \ \Delta A = A(10.1) - A(10)$$
$$\therefore \ \Delta A = (10.1)^2 - 10^2$$
$$\therefore \ \Delta A = 102.01 - 100 = 2.01 \text{ cm}^2$$

  Por lo tanto, la variación que experimenta el área de la lámina al calentarse fue de 2.01 cm^2.

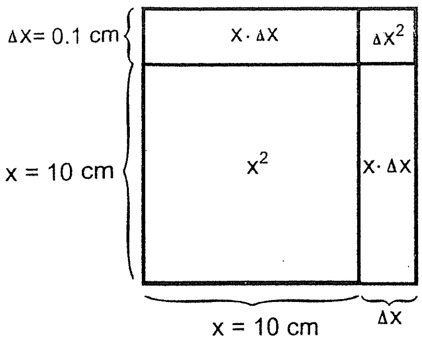
  b) La diferencial del área dA es:

$$dA = A'(x) \cdot dx \text{...............con } A'(x) = 2x \text{ y } dx = 0.1$$
$$\therefore \ dA = 2(10) \cdot (0.1)$$
$$\therefore \ dA = 2 \text{ cm}^2$$

  c) El error cometido es el valor absoluto de la diferencia entre el valor exacto (ΔA) y el valor aproximado (dA):

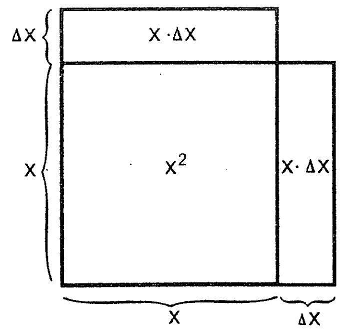
$$\text{ERROR COMETIDO} = \Delta A - dA$$
$$= 2.01 \text{ cm}^2 - 2 \text{ cm}^2 = 0.01 \text{ cm}^2$$

- La figura 8 - 5 nos muestra la diferencia entre ΔA y dA y cual fue el error cometido al trabajar con dA y no con ΔA:



$$\begin{aligned} \Delta A &= (x+\Delta x)^2 - x^2 \\ &= (10+0.1)^2 - 10^2 \\ &= 2.01 \end{aligned}$$

a)



$\Delta A \approx dA = A'(x) \cdot \Delta x$

Acá se desprecia Δx^2: éste es el error cometido al trabajar con dA y **no** con ΔA

b)

Figura 8 - 5

Ejemplo 3

Al medir el radio de una bola obtuvimos 7 cm.; figura 8 - 6. Si la medida es correcta con un margen de error de 0.1 cm. Determinar:

a) Aproximadamente, el máximo error que puede cometerse al hallar el volumen de la bola.
b) Exactamente, el máximo error que puede cometerse al hallar su volumen.
c) Hallar aproximadamente el error relativo.
d) Hallar aproximadamente el error porcentual.

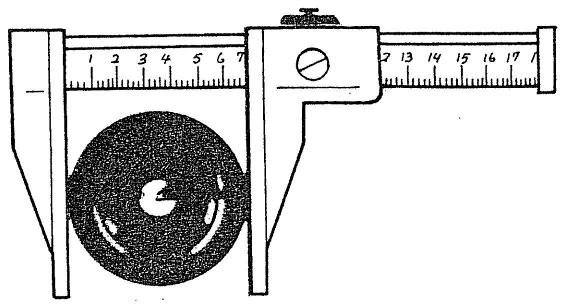


Figura 8 - 6

SOLUCIÓN

a) Nos están preguntando por el valor de dV:

- La fórmula para calcular el volumen de una esfera es $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, donde R es el radio de la bola.
- De acuerdo con el problema: R = 7 cm y $-0.1 \le \Delta R \le 0.1$
- Para determinar, aproximadamente, el error cometido al calcular el volumen aplicamos:

$$\begin{aligned} & dV \approx V'(R) \cdot \Delta R \\ \therefore\ & dV \approx 4\pi R^2 \cdot \Delta R \\ \therefore\ & dV = 4\pi(0.7)^2 \cdot (\pm 0.1) = \pm\, 61.58 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

- Luego, el error producido al calcular el volumen es, por exceso o por defecto, a lo más, igual a 61.58 cm^3.

b) Nos están preguntando por ΔV:

$$\begin{aligned} \Delta V &= V(7.1) - V(7) \\ &= 1498.45 - 1436.02 = 62.43 \text{ por exceso} \end{aligned}$$

ó

$$\Delta V = V(7) - V(6.9)$$
$$= 1436.2 - 1375.36 = 61.66 \text{ por defecto.}$$

Luego, $-61.66 \leq \Delta v \leq 62.43$

c) Aproximadamente, el error relativo es $E_R \approx \frac{dV}{V}$:

$$E_R \approx \frac{dV}{V} = \frac{61.58}{1436.02} = 0.04218$$

d) Aproximadamente, el error porcentual es $E_{\%} \approx \frac{dV}{V} \cdot 100$:

$$E_{\%} \approx \frac{dV}{V} \cdot 100 = 4.218\%$$

Ejemplo 4

El radio de un cascarón esférico es 1m y su espesor es de 5cm. Hallar:

a) El volumen exacto del cascarón.
b) El volumen aproximado del cascarón.

SOLUCIÓN

a) El volumen exacto del cascarón es igual a la diferencia entre el volumen de la esfera con radio 1m + 5cm = 1.05m y el volumen de la esfera con radio 1m; es decir:

$$\begin{aligned} V_{exacto} &= V(1.05) - V(1) = \frac{4}{3}\pi(1.05)^3 - \frac{4}{3}\pi(1)^3 \\ &= \frac{4}{3}\pi(1.157625 - 1) = \frac{4}{3}\pi(0.157625) \\ &= 0.2101\overline{16}\pi m^3 \end{aligned}$$

b) El volumen aproximado del cascarón es igual a la diferencia entre el volumen aproximado de la esfera con radio 1.05m y el volumen de la esfera de radio 1m. Para calcular el volumen aproximado de la esfera con radio 1.05, podemos realizar la linealización de la función volumen en 1.05; así:

$$\begin{aligned} V(1.05) \approx L(1.05) &= V(1) + V'(1)(1.05 - 1) \\ &= \frac{4}{3}\pi + 4\pi(0.05) \\ &= \frac{4}{3}\pi + 0.2\pi \end{aligned}$$

Por lo tanto, el valor aproximado del cascarón es:

$$V_{aproximado} = \left(\frac{4}{3}\pi + 0.2\pi\right) - \frac{4}{3}\pi = 0.2\pi m^3$$

ATENCIÓN

Otra manera de resolver la parte b) de este problema es tener en cuenta que el volumen aproximado del cascarón corresponde a un diferencial de volumen cuando el diferencial del radio (dr) es 0.05m. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} dV &= V'(1)\,dr \\ dV &= 4\pi(0.05) = 0.2\pi\ m^3 \end{aligned}$$

Notemos que ambos resultados coinciden.

EJERCICIO 8.1

En los ejercicios **1** a **6**, se pide:

a) Hallar la linealización de cada función en x=0

b) Hallar la diferencial dy de cada función.

1 $y = 5 - 2x^2$

2 $y = 3x^2 - \dfrac{4}{x^2}$

3 $y = \dfrac{x+1}{2x-1}$

4 $y = x - \sqrt{4 - x^3}$

5 $y = \text{Cos}\left(\sqrt{x}\right)$

6 $y = \dfrac{\text{Sen}(2x)}{3x}$

7 Si $y = x^2$, tomar x = 2 y usar el valor $\Delta x = dx$ para completar la tabla:

$dx = \Delta x$	dy	Δy	$\Delta y - dy$	$\dfrac{dy}{\Delta y}$
0.5				
0.1				
0.01				

En los ejercicios **8** a **10** usar la linealización de una función conveniente para estimar el número dado.

8 $\sqrt[4]{15}$

9 Cos(43º)

10 Sen(88º)

11 Al medir el radio de un tronco de madera hemos obtenido 28 cm., con un margen de error de 0.25 cm. Aproximar, usando diferenciales, el máximo error «posible» cometido al calcular el área de la sección del tronco.

12 El radio de una semiesfera se mide en 100 m con un error máximo de 1 cm. ¿ Cuál es el máximo error resultante al calcular el área de su superficie ?

8.2 VARIABLES RELACIONADAS CON EL TIEMPO

- Con frecuencia es necesario resolver problemas en los cuales tanto una función como la variable independiente asociada a ella **varían** con el tiempo. Este tipo de problemas se denominan problemas de **variables relacionadas con el tiempo**. Las siguientes experiencias nos ayudarán a entenderlas.

Primera Experiencia

Un niño está jugando con arena y forma montones cónicos como el de la figura 8 - 7.

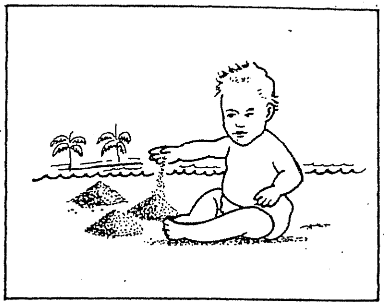


Figura 8 - 7

A medida que pasa el **tiempo,** podemos comprobar que cambian varias magnitudes en el montón de cono: el volumen, la altura y el radio de la base. Por eso decimos, que todas ellas son **variables relacionadas con el tiempo.**

Segunda Experiencia

Cuando inflamos un globo esférico (de los que se usan en las fiestas), figura 8 - 8, hay varias magnitudes que cambian con el tiempo, dos de estas magnitudes son: **el volumen y el radio.**

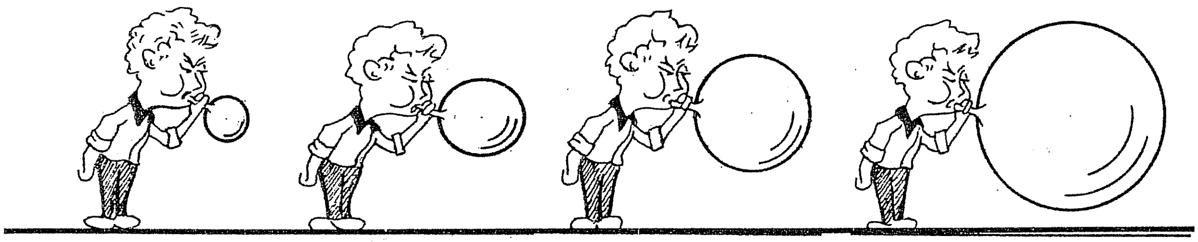


Figura 8 - 8

Decimos que el VOLUMEN y el RADIO son **variables que cambian con el tiempo.**

VARIABLES RELACIONADAS CON EL TIEMPO

Cuando en un problema determinado dos o más magnitudes cambian con el tiempo, dicho problema es de VARIABLES RELACIONADAS CON EL TIEMPO.

- En la práctica, para resolver un problema de variables relacionadas con el tiempo, recomendamos hacer lo siguiente:

1. Elaborar, si es posible, un dibujo que interprete el enunciado del problema.

2. Asignar símbolos tanto a las variables conocidas como a las desconocidas.

3. Escribir los datos y la pregunta del problema de acuerdo con las variables escogidas.

4. Escribir una ecuación que relacione a las variables cuyas razones de cambio están dadas o deben hallarse.

5. Usando la regla de la cadena, derivar implícitamente ambos lados de la ecuación con *respecto al tiempo*.

6. Sustituir en la ecuación obtenida todos los valores conocidos de las variables y sus razones de cambio.

7. Finalmente, despejar la razón de cambio pedida.

Ejemplo 1

Una escalera de 7 m de longitud está apoyada en una casa, como indica la figura 8 - 9. Si la base de la escalera se separa de la pared a razón de 0.5 m/seg. Se pide:

a) ¿A qué velocidad está bajando su extremo superior cuando la base está a 2 m de la pared?

b) ¿A qué ritmo varía el ángulo formado por la escalera y el suelo cuando la base está a 2 m de la pared?

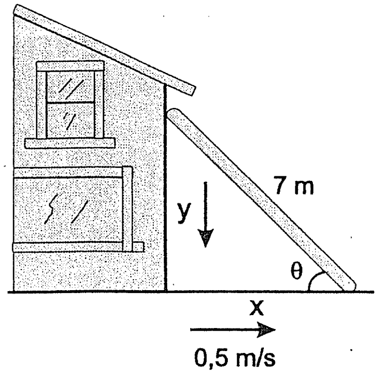


Figura 8 - 9

SOLUCIÓN

a) * Si tenemos en cuenta las recomendaciones dadas anteriormente, ya hemos cumplido con la primera de ellas: El dibujo.

* La segunda recomendación nos habla de asignar símbolos a las variables conocidas y a las desconocidas. Sea:

t: el tiempo transcurrido desde que la escalera empezó a resbalar por el muro.

y: distancia en metros desde el piso hasta la parte superior de la escalera a los t segundos.

x: distancia en metros desde la base de la escalera hasta el muro a los t segundos.

Datos: $\frac{dx}{dt}$ **= 0.5 m/seg.**: porque nos dicen que la escalera se separa de la pared a una velocidad de 0.5 m/seg.

Pregunta: **¿cuánto es $\frac{dy}{dt}$ cuando x = 2m?** Debemos calcular con qué velocidad baja la escalera en el instante en que x = 2 m.

* Si queremos relacionar la longitud de la escalera (7m) con las distancias **x** y **y** sobre el muro y el piso, debemos aplicar el teorema de Pitágoras.

$$7^2 = x^2 + y^2$$

$$\therefore \; 49 = x^2 + y^2 \quad \text{.......................................} \; (1)$$

* Ahora derivamos implícitamente con respecto al tiempo a ambos lados de la ecuación (1); así:

$$0 = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} \quad \text{..............................} (2)$$

* Finalmente, sustituyamos en la ecuación (2) los valores conocidos de las variables y sus razones de cambio; así:

$$0 = 2(2)(0.5) + 2(y)\frac{dy}{dt}$$

Nos falta hallar **y** cuando **x = 2m** y, luego, despejar $\frac{dy}{dt}$. Reemplazando en (1) tenemos:

$$49 = 2^2 + y^2$$

$$\therefore \; y^2 = 45$$

$$\therefore \; y = \sqrt{45}$$

Luego:

$$0 = 2(2)(0.5) + 2\left(\sqrt{45}\right)\frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{2}{2\sqrt{45}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{45}}{45} \approx$$

Por lo tanto, la parte superior de la escalera resbala por el muro a razón de -0.15 m/seg., cuando su base se encuentra a 2 metros de la pared. El signo negativo significa que **y** disminuye cuando **t** aumenta.

ATENCIÓN

Un error que se comete con frecuencia es el de reemplazar el valor conocido de alguna de las variables (por ejemplo, x = 2m en este caso) antes de derivar implícitamente con respecto al tiempo.

Es importante insistir en que los reemplazos, por valores conocidos, deben hacerse después de derivar.

b) * Las variables siguen siendo t, x, y; además, θ, que es el ángulo formado por la escalera y el suelo en cualquier tiempo t.

* Datos: $\frac{dx}{dt} = 0.5$ m/seg; si x = 2, $y = \sqrt{45}$; $\frac{dx}{dt} = -\frac{\sqrt{45}}{45}$ (cuando x = 2) (Ver parte a)).

Pregunta: ¿Cuánto es $\frac{d\theta}{dt}$, cuando x = 2?

* La ecuación que nos relaciona θ, y, x es: $\text{Tan}(\theta) = \frac{y}{x}$ ....(1)

Si derivamos con respecto a t nos queda:

$$\text{Sec}^2(\theta)\,\frac{d\theta}{dt} = \frac{x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}}{x^2}$$

$$\therefore \frac{d\theta}{dt} = \frac{x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}}{x^2\,\text{Sec}^2(\theta)}$$

$$\therefore \frac{d\theta}{dt} = \frac{2\left(-\frac{\sqrt{45}}{45}\right) - \sqrt{45}\cdot\frac{1}{2}}{4\cdot\left(\frac{7}{2}\right)^2} = \frac{\frac{-4\sqrt{45} - 45\sqrt{45}}{90}}{49} = \frac{\sqrt{45}}{90}$$

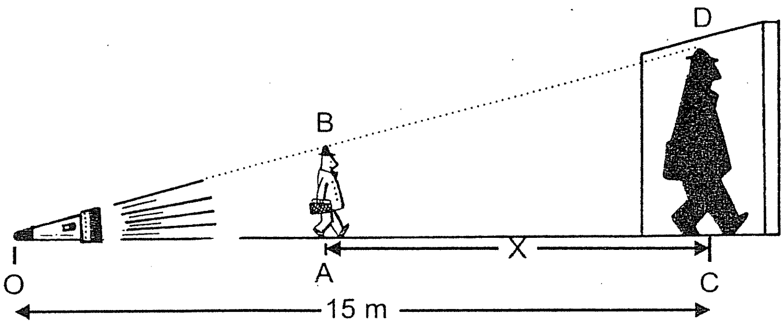
* CONCLUSIÓN: en el instante en que la escalera está a 2 m de la pared, el ángulo está disminuyendo a una velocidad de $\frac{\sqrt{45}}{90}$ rad/seg.

Ejemplo 2

Un hombre de 1.8 metros de estatura, camina hacia un edificio a una velocidad de 1.5 m/seg. Si hay una lámpara en el suelo a 15 metros del edificio, ¿con qué rapidez se acorta la sombra del hombre sobre el edificio, cuando está a 9 metros del mismo?

SOLUCIÓN

- La figura 8 - 10 nos muestra lo que ocurre con la sombra en el edificio a medida que el hombre se aproxima a él.



- Llamemos **x** la distancia a la cual se encuentra el hombre del edificio en un momento dado y **y** el tamaño de la sombra para ese valor de **x**; figura 8 - 10.

- Tenemos, pues, la siguiente información:

  x: distancia a la que se encuentra el hombre del edificio.

  y: tamaño de la sombra en un momento dado.

  $\frac{dx}{dt}$ **= -1.5 m/seg.**: velocidad con que el hombre se acerca al edificio.

  $\frac{dy}{dt}$: velocidad con que se acorta la sombra.

  15m: distancia que separa la lámpara de la base del edificio.

  9m: distancia a la que se encuentra el hombre del edificio en el instante indicado.

- Para encontrar una relación entre **x** y **y** basta tener en cuenta que los triángulos OAB y OCD son semejantes. Por lo tanto:

$$\frac{y}{1.8} = \frac{15}{15 - x}$$

$$\therefore \ (15 - x)y = 27$$

$$\therefore \ 15y - xy = 27 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \ (1)$$

- A continuación derivamos implícitamente con respecto al tiempo ambos lados de la ecuación (1); así:

$$15\frac{dy}{dt} - x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \ (2)$$

  Como el hombre se encuentra a 9 metros del edificio, en el instante que deseamos analizar, busquemos el tamaño de la sombra (**y**) en ese momento. Reemplazando **x** por 9 en (1) y despejando **y** nos queda:

$$15y - 9y = 27$$

$$\therefore \ 6y = 27$$

$$\therefore \ y = 4.5m.$$

- Finalmente, reemplazamos valores en la ecuación (2) y despejamos $\frac{dy}{dt}$:

$$15\frac{dy}{dt} - 9 - (4.5)(-1.5) = 0$$

$$\therefore\ 6\frac{dy}{dt} = -6.75$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dt} = -\frac{6.75}{6} = -1.125 \text{ m/seg}$$

Por lo tanto, cuando el hombre se encuentra a 9m del edificio, la sombra se está acortando a una velocidad de -1.125 m/seg. De nuevo, el signo menos significa que la sombra disminuye a medida que el tiempo aumenta.

Ejemplo 3

Un depósito horizontal tiene 16m de largo y sus extremos son trapecios isósceles con una altura de 4m., una base inferior de 4m y una base superior de 6m. El líquido entra al depósito con flujo constante de 10 m^3/min ¿Con qué rapidez se estará elevando el nivel del líquido cuando tenga una profundidad de 2 metros?

SOLUCIÓN

- En primer lugar, hagamos un dibujo de la situación del problema; figura 8 - 11:

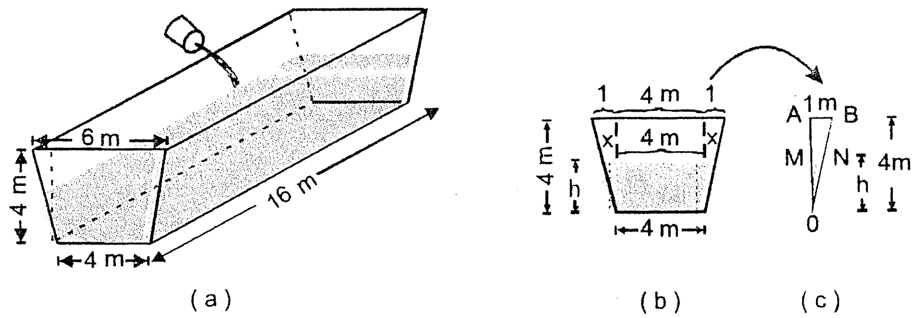


Figura 8 - 11

- Llamemos **h** la profundidad del líquido en un instante dado y **(4 + 2x)** la medida de la base mayor del trapecio que forma el nivel del líquido en ese momento; figura 8 - 11(b).

  Tenemos, pues, la siguiente información:

  h: profundidad o altura del liquido en cualquier momento.

  x: nivel horizontal del líquido en el ΔOAB en cualquier momento.

  $\mathbf{\frac{dV}{dt} = 10\ m^3/min}$: velocidad con la que entra el líquido al depósito.

  $\mathbf{\frac{dh}{dt}}$ **en h = 2m**: velocidad con la cual se eleva la profundidad cuando h = 2m.

- Ahora debemos encontrar una expresión que nos permita determinar el volumen de líquido existente en el depósito en cualquier momento. Como el depósito es un prisma cuyas bases son trapecios entonces el volumen es:

$$V = A_{BASE} \cdot \text{altura del prisma.}$$

$$\therefore\ V = \frac{(\text{base mayor} + \text{base menor}) \cdot \text{altura del trapecio}}{2} \cdot \text{altura del prisma}$$

En este caso tenemos:

- **base mayor = 4 + 2x**
- **base menor = 4**
- **altura del trapecio = h**
- **altura del prisma = 16**

$$V = \frac{[(4 + 2x) + 4]}{2} \cdot h \cdot 16$$

$$\therefore\ V = 8h(8 + 2x) \quad \text{...} \quad (1)$$

Antes de derivar implícitamente con respecto al tiempo, debemos escribir a **x** en función de **h**. Para ello veamos la figura 8 - 11(c) en la cual el $\Delta OAB \sim \Delta OMN$; por tanto:

$$\frac{1}{x} = \frac{4}{h}$$

$$\therefore\ x = \frac{h}{4} \quad \text{...} \quad (2)$$

Reemplazando (2) en (1) nos queda:

$$V = 8h\left(8 + 2\left(\frac{h}{4}\right)\right) = 64h + 4h^2 \quad \text{...} (3)$$

- Ahora sí, derivemos ambos lados de la ecuación (3) con respecto al tiempo:

$$\frac{dV}{dt} = 64\frac{dh}{dt} + 8h\frac{dh}{dt}$$

Sustituyendo valores conocidos y despejando $\frac{dh}{dt}$ nos queda:

$$10 = 64\frac{dh}{dt} + 8(2)\frac{dh}{dt}$$

$$\therefore\ 10 = 64\frac{dh}{dt} + 16\frac{dh}{dt}$$

$$\therefore\ 10 = 80\frac{dh}{dt}$$

$$\therefore\ \frac{dh}{dt} = \frac{1}{8}\ \text{m/min}$$

- Por lo tanto, cuando el nivel del líquido es de 2 metros, la rapidez con la cual éste aumenta es $\frac{1}{8}$ m/seg.

Ejemplo 4

Un barco A navegaba hacia el sur a 12 Km./h y otro barco B navegaba hacia el este a 16 Km./h. A las cuatro de la tarde el segundo cruzó la ruta del primero en el punto donde éste había pasado dos horas antes.

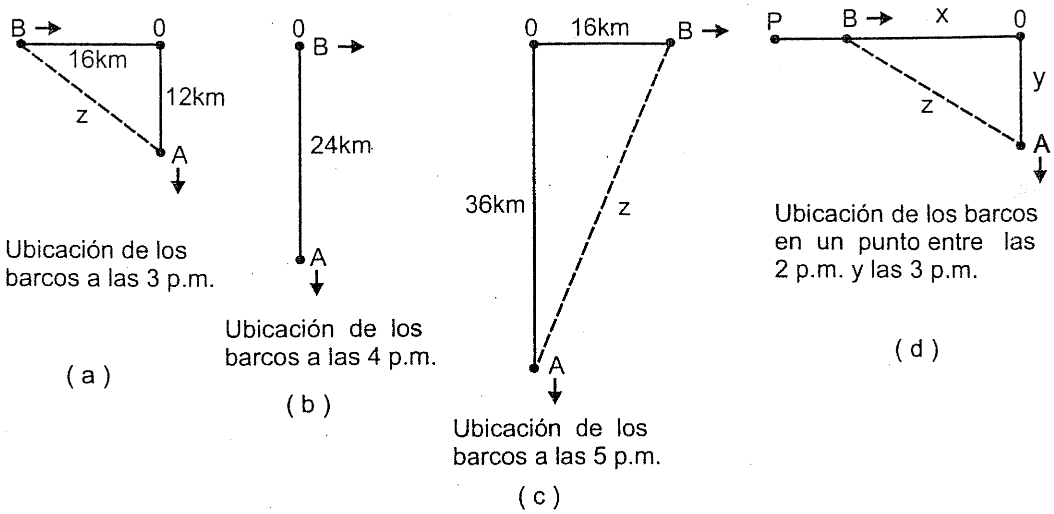
a) ¿Cómo variaba la distancia entre los barcos a las 3 p.m.?

b) ¿Cómo a las 5 p.m.?

c) ¿En qué momento no variaba la distancia entre ellos?

SOLUCIÓN

- Observemos la figura 8 - 12 en la cual 0 es el punto de cruce de ambos barcos y **z** es la distancia que los separa. La figura 8 -12(a) nos muestra la ubicación de los barcos a las 3 p.m.; es decir, en el instante t = 1 hora (ya que las mediciones comienzan a las 2 p.m.: 2 horas antes de que B cruce por el punto 0).



Ubicación de los barcos a las 3 p.m.

(a)

Ubicación de los barcos a las 4 p.m.

(b)

Ubicación de los barcos a las 5 p.m.

(c)

Ubicación de los barcos en un punto entre las 2 p.m. y las 3 p.m.

(d)

Figura 8 - 12

La figura 8 - 12(b) nos muestra la ubicación de los barcos a las 4 p.m., la figura 8 - 12(c) nos la muestra a las 5 p.m. y la figura 8 - 12(d) nos la muestra en un punto entre las 2 p.m. y las 3 p.m.

- Presentación de variables:

  De la figura 8 - 12(d), tenemos:

$$x = \text{distancia } \overline{BO}$$

$$y = \text{distancia } \overline{AO}$$

$$z = \text{distancia } \overline{AB}$$

- Datos: $\dfrac{dx}{dt} = \begin{cases} -16\text{ Km./h, cuando } 0 \le t \le 2 \\ 16\text{ Km./h, cuando } t \ge 2 \end{cases}$

  $\dfrac{dy}{dt}$

- Preguntas del problema:

  a) $\dfrac{dz}{dt}$ en $t = 1$ b) $\dfrac{dz}{dt}$ en $t = 3$ c) ¿En qué t, $\dfrac{dz}{dt} = 0$?

- La ecuación que relaciona las variables es: $z^2 = x^2 + y^2$.............................. (1)'

  Derivando con respecto a t nos queda:

$$2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$$

$$\therefore \; z\frac{dz}{dt} = x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}$$

$$\therefore \; \frac{dz}{dt} = \frac{x}{z}\frac{dx}{dt} + \frac{y}{z}\frac{dy}{dt} \qquad \text{.........................} \qquad (2)$$

- Contestemos las preguntas:

  a) A las 3 p.m.: $t = 1$, $x = 16$, $y = 12$ y $z = \sqrt{16^2 + 12^2} = 20$

  Reemplazando en (2) nos queda:

$$\frac{dz}{dt}=\frac{16}{20}(-16)+\frac{12}{20}(12)=-\frac{112}{20}=-5.6\text{ Km./h}$$

b) A las 5 p.m.: t = 3, x = 16, y = 36 y z = $\sqrt{16^2+36^2}=\sqrt{1552}\approx 39.4$ Km.

Reemplazando en (2) nos queda:

$$\frac{dz}{dt}=\frac{16}{39.4}(16)+\frac{36}{39.4}(12)=\frac{688}{39.4}\approx 17.46\text{ Km./h}$$

c) $\frac{dz}{dt}=0$ cuando $x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}=0$. Pero, x = $\begin{cases}32-16t, & \text{si } 0\le t\le 2\\ 16t-32, & \text{si } t\ge 2\end{cases}$ y y = 12t. Por tanto, reemplazando en (1) nos queda:

$$x^2+y^2=z^2$$

$$\therefore\ (16t-32)^2+(12t)^2=z^2$$

$$\therefore\ 2(16t-32)\cdot(16)+2(12t)\cdot(12)=2z\frac{dz}{dt}$$

$$\therefore\ \frac{dz}{dt}=\frac{256t-512+144t}{z}=0$$

$$\therefore\ 400t=512$$

$$\therefore\ t=\frac{512}{400}=1.28\text{ horas}=1\text{ hora y }19\text{ minutos}$$

Por tanto, a las 3 de la tarde y 19 minutos, la distancia entre los barcos no varía.

Ejemplo 5

En un depósito de forma cónica se está vertiendo líquido a razón de 225 litros por minuto. El cono tiene 6 metros de profundidad y 3 metros de diámetro. Si hay una fuga en la base y el nivel del líquido sube a razón de 2.5 cm/min. Cuando el líquido tiene 4.8 m de profundidad, ¿con qué rapidez escapa el líquido del depósito?

SOLUCIÓN

- En primer lugar, recordemos que 1 litro = 1000 cm³

  La figura 8 - 13 nos muestra el depósito con una cantidad de líquido contenida en él, en un momento dado.

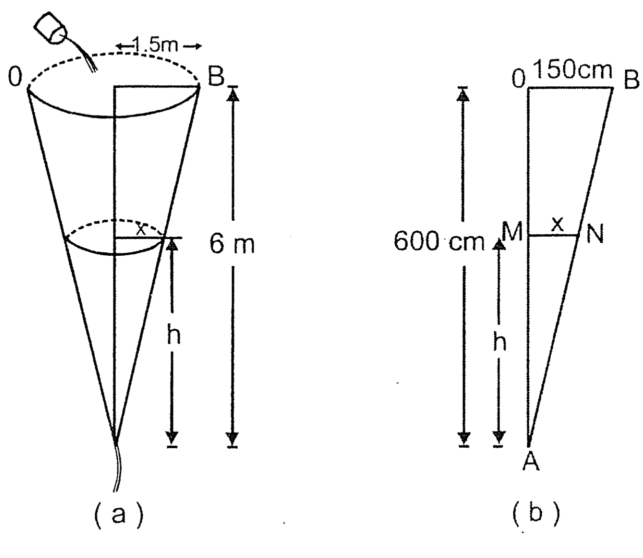


Figura 8 - 13

- Escribamos todos los datos en términos de centímetros:

$$225 \text{ litros/min.} = 225000 \text{ cm}^3\text{/min.}$$

$$6\text{m} = 600 \text{ cm}$$

$$3\text{m} = 300 \text{ cm}$$

$$4.8\text{m} = 480 \text{ cm}$$

El volumen de líquido V presente en cualquier momento t es:

$$V = \text{Volumen de líquido que entra - Volumen de líquido que sale.}$$

$$\therefore\ V = Ve - Vs$$

$$\therefore\ Vs = Ve - V \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Como el volumen de un cono es $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$, entonces para una altura h y un radio x el volumen será $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$.

Para expresar el volumen sólo en términos de h tengamos en cuenta la figura 8 - 13(b) en la cual los triángulos AOB y OMN son semejantes y, por tanto:

$$\frac{150}{x} = \frac{600}{h}$$

$$\therefore\ x = \frac{150h}{600} = \frac{h}{4}$$

Así pues, el volumen de líquido contenido en el depósito, en un momento dado, en términos de h es:

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{4}\right)^2 h$$

$$\therefore\ V = \frac{1}{48}\pi h^3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

- Reemplazando (2) en (1) nos queda:

$$Vs = Ve - \frac{1}{48}\pi h^3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

- Derivando implícitamente con respecto al tiempo la ecuación (3) obtenemos:

$$\frac{dVs}{dt} = \frac{dVe}{dt} - \frac{1}{16}\pi h^2 \frac{dh}{dt} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

donde:

$$\frac{dVe}{dt} = 225000 \text{ cm}^3\text{/min.}$$

$$\frac{dh}{dt} = 2.5 \text{ cm/min., cuando } h = 480 \text{ cm}$$

- Finalmente, reemplazamos estos datos en (4):

$$\frac{dVs}{dt} = 225000 \text{ cm}^3\text{/min} - \frac{1}{16}\pi\ (480 \text{ cm})^2\ (2.5 \text{ cm/min.})$$

$$\therefore \quad \frac{dVs}{dt} = 225000 \text{ cm}^3/\text{min.} - 113097.6 \text{ cm}^3/\text{min}$$

$$\therefore \quad \frac{dVs}{dt} = 111902.4 \text{ cm}^3/\text{min.} = 0.1119 \text{ m}^3/\text{min.}$$

- Por lo tanto, el líquido está escapando del depósito con una velocidad de 0.1119 m³/min.

EJERCICIO 8.2

1. Sabiendo que $y = \sqrt{x}$ y que $\frac{dx}{dt} = 3$, hallar $\frac{dy}{dt}$ cuando x = 3.

2. Un punto se mueve sobre la curva $y = \frac{1}{x^2+1}$ de modo que $\frac{dx}{dt} = 2$ cm/min. Hallar $\frac{dy}{dt}$ cuando x = -2.

3. Una partícula se mueve sobre la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 1$. Si $\frac{dx}{dt} = -1$ en el punto $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$, hallar $\frac{dy}{dt}$.

4. El aire contenido en un globo esférico se escapa a razón de 1000 cm³/min. En el instante en que el radio es 25 cm.:

   a) ¿Con qué rapidez está disminuyendo el radio?

   b) ¿Con qué rapidez disminuye el área de la superficie?

5. Un tanque cónico con el vértice hacia abajo se llena a razón de 1 m³/min. Si la base del tanque tiene un radio de 5m y la altura es de 10 m, ¿Con qué rapidez está subiendo el nivel del agua cuando la profundidad es de 5 m?

6. Una cometa está volando a una altura de 40 metros, figura 8 - 14. El niño que la sostiene suelta la cuerda y la cometa se mueve horizontalmente a razón de 3 m/seg. ¿Con qué rapidez se desliza la cuerda cuando la longitud de la cuerda suelta es de 50 metros?

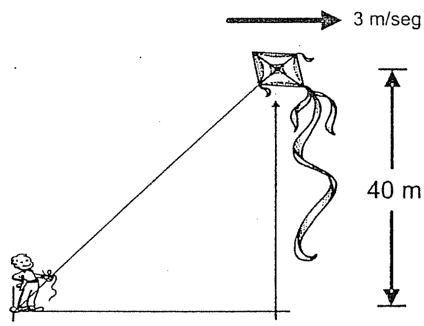


Figura 8 - 14

7. Un beisbolista batea una bola baja sobre la línea de tercera base con una velocidad de 50 pies/seg. La cancha de béisbol es un cuadrado de 90 pies de lado.

   a) ¿Con qué rapidez está cambiando la distancia entre la bola y la primera base en el momento en que la bola pasa por tercera base?.

   b) Si un jugador está corriendo desde la primera hasta la segunda base a 20 pies/seg., ¿con qué velocidad está cambiando su distancia a la caja de bateo cuando se encuentra a 10 pies de la segunda base?

Reemplazando (2) en (1) nos queda:

$$A(r) = 2\pi r\left(\frac{350}{\pi r^2}\right) + 2\pi r^2$$

$$\therefore\ A(r) = \frac{700}{r} + 2\pi r^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (3)$$

4. **Es importante determinar el dominio de la función obtenida donde el problema tiene sentido. Si el dominio es un intervalo cerrado y la función es continua allí, entonces la función tendrá un valor máximo y un valor mínimo absoluto en dicho intervalo (recordemos el teorema del valor extremo). En este caso, hay que analizar si el valor buscado está en un extremo o en un punto interior.**

   En este caso, tanto A como r deben ser positivas; luego, el dominio de A(r) es el intervalo $\left(0\,;+\infty\right)$.

5. **Calcular la primera derivada de la función y determinar el (o los) valor(es) crítico(s). A continuación, calcular la segunda derivada; luego, reemplazar el valor crítico obtenido en la segunda derivada y comprobar si el resultado es positivo o negativo, para decidir si el valor corresponde a un mínimo o a un máximo. Si en el punto crítico la derivada no existe tendrá que aplicar el criterio de la primera derivada, aunque en estos problemas es raro que esto suceda (ver ejemplo 4)**

   En nuestro problema tenemos:

$$A'(r) = -\frac{700}{r^2} + 4\pi r \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

$$A''(r) = \frac{1400}{r^3} + 4\pi \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

De (4): $A'(r) = 0$ cuando $4\pi r^3 = 700 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\dfrac{350}{2\pi}}$

En (5): $A''\left(\sqrt[3]{\dfrac{350}{2\pi}}\right) = \dfrac{1400}{\left(\sqrt[3]{\dfrac{350}{2\pi}}\right)^3} + 4\pi$

$$= 8\pi + 4\pi = 12\pi > 0$$

Por tanto, el valor crítico $r = \sqrt[3]{\dfrac{350}{2\pi}}$ es un mínimo.

6. **Calcular el valor de las otras variables que intervienen en el problema y analizar si los resultados obtenidos son correctos.**

   En nuestro ejemplo, reemplazando en (2) el valor obtenido para r, nos queda $h = \dfrac{350}{\pi r^2} = \sqrt[3]{\dfrac{1400}{\pi}} = 2r$.

   Por tanto, el envase de área mínima (el menos costoso) es aquel cuya altura es igual al doble del radio.

ATENCIÓN

Al principio del texto se encuentra un desprendible que contiene las fórmulas para hallar las áreas y los volúmenes de los sólidos geométricos.

Ejemplo 1

Hallemos dos números positivos cuya suma sea 20 y tal que su producto sea máximo.

SOLUCIÓN

- En la solución de este problema y en los siguientes vamos a tener en cuenta las recomendaciones que dimos anteriormente:

  1. No es posible dibujar el problema.
  2. Las variables son: x es un número; $20 - x$ es el otro número.
  3. La función que vamos a maximizar la nombramos con la letra **P** de producto.
  4. Así pues, la función **P** está escrita en términos de una sola variable:

     $$P(x) = x(20 - x) = 20x - x^2$$

  5. Como los números deben ser positivos, entonces el producto debe serlo. Por tanto:

     $$20x - x^2 > 0$$
     $$\therefore\ x(20 - x) > 0$$
     $$\therefore\ x \in (0\ ;\ 20)$$

     Esto significa que el dominio de la función donde el problema tiene sentido es el intervalo (0 ; 20).

  6. Hallamos la primera derivada de P, sus valores críticos y la segunda derivada.

     $$P'(x) = 20 - 2x$$
     $$P'(x) = 0 \text{ cuando } 20 - 2x = 0 \Rightarrow x = 10$$
     $$P''(x) = -2. \text{ En particular, } P''(10) = -2.$$

     Como $P''(10) < 0$ entonces, de acuerdo con el criterio de la segunda derivada para extremos relativos, P tiene en $x = 10$ un valor máximo relativo.

     El otro número es $20 - x = 20 - 10 = 10$. Esto significa que el máximo producto se obtiene cuando los dos números son 10 y 10 y el producto es $P = 10 \cdot 10 = 100$.

ATENCIÓN

El programa DERIVE nos muestra gráficamente la solución del problema; figura 8 - 18:

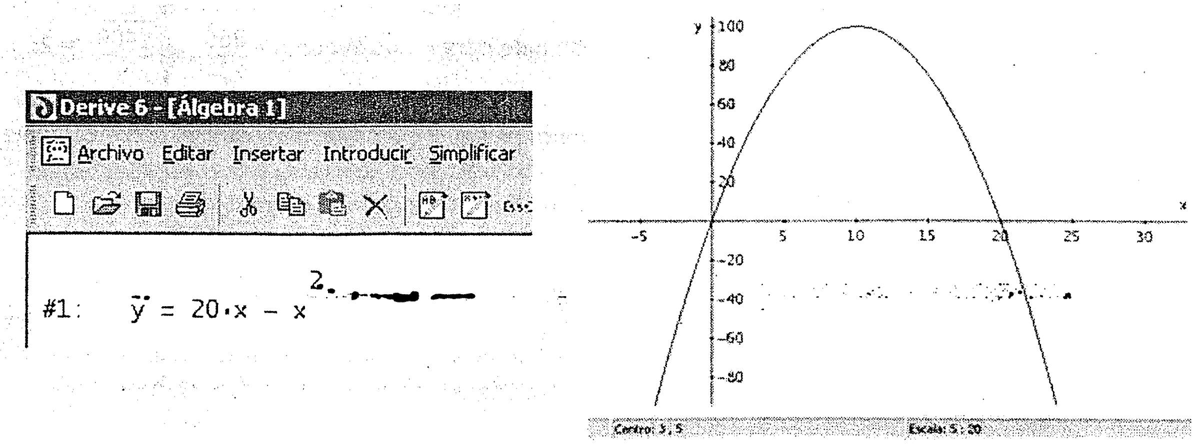


Figura 8 - 18

Ejemplo 2

Un campesino quiere cercar un campo rectangular de 3600 m^2 para usarlo como potrero. ¿Cuáles deben ser las dimensiones del campo rectangular que resulta más barato?

SOLUCIÓN

1. La figura 8 - 19 nos muestra un rectángulo típico en el cual las letras **x** y **y** representan las dimensiones del rectángulo (la base y la altura).

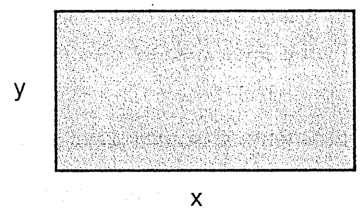


Figura 8 - 19

2. Variables: x es la base del rectángulo.
   y es la altura del rectángulo.

   Dato: Área = xy = 3600m^2

3. Queremos que la cerca del terreno salga lo más barata posible. Por lo tanto, la función que debemos minimizar es el perímetro:

$$P = 2x + 2y \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Esta función tiene dos variables. Queremos que sólo dependa de una, y como xy = 3600, entonces $y = \dfrac{3600}{x}$. Reemplazando este valor en (1) nos queda:

$$P(x) = 2x + \frac{7200}{x}$$

$$\therefore\ P(x) = \frac{2x^2 + 7200}{x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

4. Como el perímetro siempre debe ser positivo, entonces el dominio de la función P, donde el problema tiene sentido, consistirá en el conjunto de todos los x para los cuales:

$$\frac{2x^2 + 7200}{x} > 0$$

$$\therefore\ x > 0 \text{ ¿Por qué?}$$

$$\therefore\ D = (0\,;+\infty)$$

5. Hallamos la primera derivada de P, sus valores críticos y la segunda derivada:

$$P'(x) = \frac{2x^2 - 7200}{x^2}$$

Los valores críticos de P son:

$$P'(x) = 0 \Rightarrow 2x^2 - 7200 = 0$$

$$\Rightarrow x = -60 \quad ó \quad x = 60$$

P'(x) no existe cuando x = 0

De estos valores críticos sólo se tiene en cuenta x = 60 ya que los otros dos valores no pertenecen al dominio de P.

$$P''(x) = \frac{14400}{x^3}$$

Como $P''(6) = \frac{14400}{216000} > 0$, entonces en x = 60 m el perímetro es un valor mínimo relativo.

6. Para hallar la medida de y basta reemplazar x = 60 m en la ecuación $y = \frac{3600}{60}$; así:

$$y = \frac{3600}{60} = 60 \text{ m}$$

Por tanto, el rectángulo de área 3600 m² cuyo perímetro es mínimo es un cuadrado de lado 60 m.

ATENCIÓN

El programa DERIVE nos muestra gráficamente la solución del problema; figura 8 - 20:

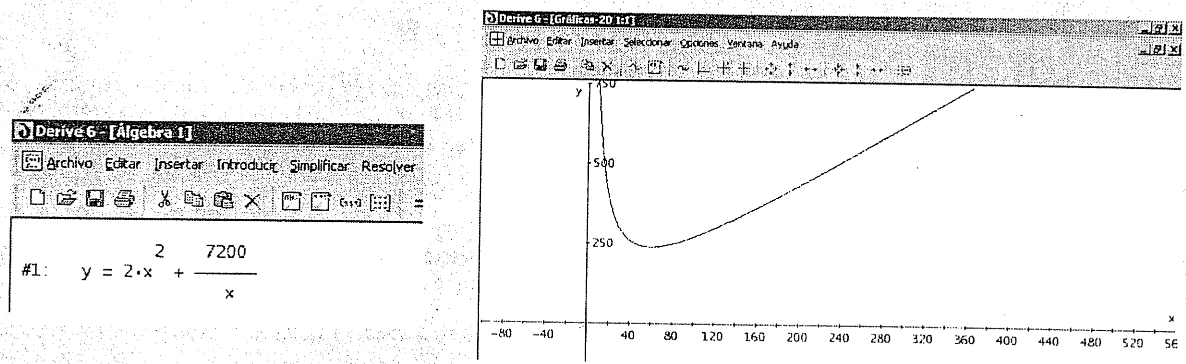


Figura 8 - 20

Ejemplo 3

Una página rectangular debe contener 96 cm² de texto impreso. Las márgenes superior e inferior tienen 3 cm de ancho y las laterales 2 cm. ¿Qué dimensiones de la página hacen que la cantidad de papel requerida sea mínima?

SOLUCIÓN

1. La figura 8 - 21 interpreta el enunciado del problema.

2. Estas son las variables:

   x = largo de la página
   y = ancho de la página
   A = Área de la página

3. Dato: El ancho de la parte impresa es **(y - 4)**, el largo es **(x - 6)** y el área es 96 cm²

   Por tanto:

$$96 = (x - 6)(y - 4)$$

$$\therefore \; y - 4 = \frac{96}{x - 6}$$

$$\therefore \; y = 4 + \frac{96}{x - 6}$$

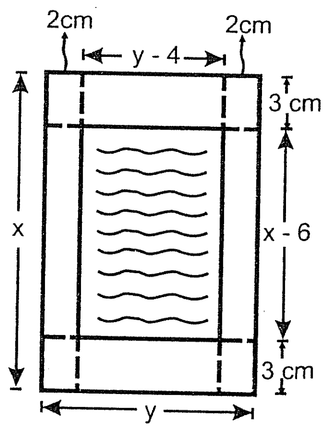


Figura 8 -21

$$\therefore\ y = \frac{4x + 72}{x - 6} \quad \text{...} \quad (1)$$

La función a minimizar en el área de la página A = x · y .... (2)

4. Como el área de la página es A = x · y, entonces reemplazado el valor de **y** obtenido en (1), en esta ecuación, nos queda:

$$A(x) = x\left(\frac{4x + 72}{x - 6}\right) \quad \text{...} \quad (3)$$

El dominio de A está constituido por los valores de x tales que:

$$x\left(\frac{4x + 72}{x - 6}\right) > 0$$

$$\therefore\ x \in (6\ ;\ +\infty)\ \ (¡\text{ comprobarlo }!)$$

6. Ahora hallamos la primera y la segunda derivada de A y sus valores críticos:

$$A'(x) = 4 \cdot \frac{x2 - 12x - 108}{(x - 6)^2}$$

$$A''(x) = \frac{1152}{(x - 6)^3}$$

Los valores críticos se obtienen cuando A'(x)= 0 ó cuando A'(x) no existe. Veamos:

$$A'(x) = 0 \ \Rightarrow\ x^2 - 12x - 108 = 0$$

$$\Rightarrow\ x = 18 \ \text{ ó } \ x = -6$$

A'(x) no existe cuando x = 6

De estos valores críticos, sólo consideramos x = 18 (¿por qué?).

Reemplazando este valor en la segunda derivada de A nos queda:

$$A''\ (18) = \frac{1152}{(18 - 6)^3} > 0$$

Por tanto, en x = 18 cm el área tiene un mínimo relativo.

Para calcular el valor de y basta que reemplacemos x = 18 cm en la ecuación (1), así:

$$y = \frac{4\ (18) + 72}{18 - 6} = 12 \text{ cm.}$$

7. **CONCLUSIÓN:** Las dimensiones de la página que requiere la menor cantidad de papel son: largo = 18 cm. y ancho = 12 cm.

Conviene usar el DERIVE para comprobar estos resultados.

Ejemplo 4

Dos casas A y B distan horizontalmente entre sí 30 metros y están situadas a un mismo lado de una tubería principal de agua y a distancias de 10 y 50 metros, respectivamente, de dicha tubería. Se les va a instalar agua, llevándola desde un mismo punto de la tubería principal. Si el costo de cada metro de tubería instalada es de 200 dólares, ¿desde qué punto de la tubería principal deben partir las instalaciones, para que el costo de éstas sea mínimo?

SOLUCIÓN

1. La figura 8 - 22 nos describe el enunciado del problema. Sea P el punto sobre la tubería principal desde el cual se va a tender la instalación y **x** la distancia entre P y el pie de la perpendicular trazada desde A hasta el punto O sobre la tubería principal.

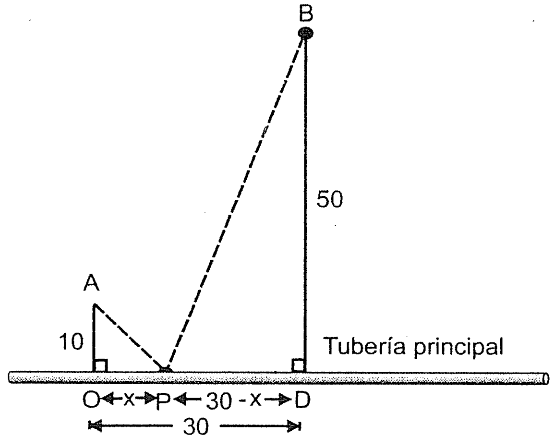


Figura 8 - 22

2. La longitud de la tubería para la instalación del agua para la casa A es:

$$\left|\overline{AP}\right| = \sqrt{100 + x^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

La longitud de la tubería para la instalación del agua para la casa B es:

$$\left|\overline{BP}\right| = \sqrt{2500 + (30 - x)^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

El costo de la instalación para la casa A es:

$$C_A = 200\sqrt{100 + x^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

El costo de la instalación para la casa B es:

$$C_B = 200\sqrt{2500 + (30 - x)^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Por lo tanto, el costo total de la tubería será el que resulta de sumar las ecuaciones (3) y (4):

$$C(x) = C_A + C_B$$

$$\therefore \quad C(x) = 200\left[\sqrt{100 + x^2} + \sqrt{2500 + (30 - x)^2}\right] \ldots\ldots\ldots (5)$$

El dominio de esta función es el intervalo cerrado [0 ; 30] ya que el punto P de la figura 8 - 22 puede estar también en O ó en D.

3. La primera derivada de C y sus valores críticos son:

$$C'(x) = 200\left[\frac{x}{\sqrt{100 + x^2}} - \frac{30 - x}{\sqrt{2500 + (30 - x)^2}}\right] \quad \text{(¡comprobarlo!)}$$

$$C'(x) = 0 \text{ cuando } \frac{x}{\sqrt{100 + x^2}} - \frac{30 - x}{\sqrt{2500 - (30 - x)^2}} = 0$$

Resolviendo esta última ecuación obtenemos x = 5 ó x = -7.5. Como $-7.5 \notin [0 ; 30]$ entonces C '= 0 cuando x = 5. Vamos a usar el criterio de la primera derivada para saber si x = 5 es un máximo o un mínimo relativo (no usamos el criterio de la segunda derivada porque la obtención de ésta es bastante complicada) :

	[0 ; 5)	(5 ; 30]
C'(x)	-	+
	Decrece	Crece

Por lo tanto, x = 5 m es un valor mínimo relativo. Sin embargo, aún no podemos garantizar que sea un mínimo absoluto ya que el intervalo donde estamos analizando la función es cerrado y dicho mínimo absoluto puede estar en alguno de los extremos. Evaluemos, pues, la función C en 0, en 5 y en 30:

$$C(0) = 200[10 + 58.3] = 13660 \text{ (ocurre cuando P está en 0)}$$

$$C(5) = 200\left[\sqrt{125} + \sqrt{3125}\right] = 13416$$

$$C(30) = 200\left[\sqrt{1000} + \sqrt{2500}\right] = 16324 \text{ (ocurre cuando P está en D)}$$

Por lo tanto, el costo C es mínimo cuando x = 5; es decir, cuando P está a 5 metros de 0.

Ejemplo 5

Se desea construir una ventana rectangular rematada por un semicírculo. Si el perímetro de la ventana mide 5 metros, ¿cuáles deben ser sus dimensiones para que la cantidad de luz que pase por ella sea máxima?

SOLUCIÓN

1. La figura 8 - 23 interpreta adecuadamente el enunciado del problema:

2. Las variables de este problema son:

x = ancho de la ventana

$\frac{x}{2}$ = radio del semicírculo

y = altura de la ventana

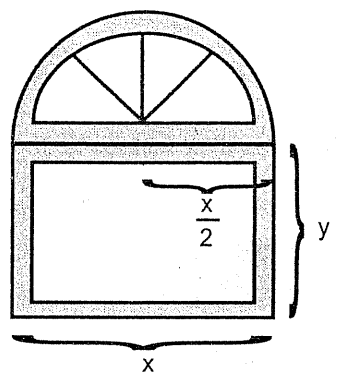


Figura 8 – 23

La cantidad de luz que entra por la ventana depende de su área. Por tanto, si C representa la cantidad de luz, entonces:

$$C = xy + \frac{\pi x^2}{8} \quad \dots\dots\dots\dots (1)$$

3. Necesitamos que C dependa de una sola variable. Como el perímetro de la ventana es 5 m, entonces:

$$5 = x + 2y + \frac{\pi x}{2}$$

$$\therefore \; y = \frac{10 - 2x - \pi x}{4} \quad \dots\dots\dots\dots (2)$$

Reemplazando (2) en (1) nos queda:

$$C(x) = \frac{20x - 4x^2 - \pi x^2}{8} \quad \dots\dots\dots\dots (3)$$

4. Dejamos, como ejercicio, comprobar que el dominio de C es el intervalo $\left(0 ; \frac{10}{\pi + 2}\right)$.

5. Hallemos, a continuación, la primera y la segunda derivada de C y sus valores críticos:

$$C'(x) = \frac{1}{8}(20 - 8x - 2\pi x)$$

$$C'(x) = 0 \Rightarrow 20 - 8x - 2\pi x = 0$$

$$\Rightarrow (8 + 2\pi)x = 20$$

$$\Rightarrow x = \frac{20}{8 + 2\pi} = \frac{10}{4 + \pi}$$

$$C''(x) = \frac{1}{8}(-8 - 2\pi) < 0, \text{ para todo } x \in \left(0; \frac{10}{\pi + 2}\right)$$

Por lo tanto, $C''\left(\frac{10}{4+\pi}\right) < 0$ y concluimos que $x = \frac{10}{4+\pi}$ es un valor máximo relativo.

6. Reemplazando este valor de x en (2) nos queda que:

$$y = \frac{10 - 2\left(\frac{10}{4+\pi}\right) - \pi\left(\frac{10}{4+\pi}\right)}{4}$$

$$\therefore\ y = \frac{10(4+\pi) - 20 - 10\pi}{4(4+\pi)}$$

$$\therefore\ y = \frac{20}{4(4+\pi)} = \frac{5}{4+\pi}$$

Luego, las dimensiones de la ventana que maximizan el área son:

$$\text{ancho} = x = \frac{10}{\pi + 4}\ \text{m, altura} = y = \frac{5}{4+\pi}\ \text{m}$$

Ejemplo 6

Se dispone de un alambre de 1 metro de longitud. Si lo partimos en dos trozos con el fin de formar un cuadrado y un triángulo equilátero, ¿dónde debe cortarse el alambre para que la suma de las áreas de las dos figuras sea: a) máxima? b) mínima?

SOLUCIÓN

1. De la figura 8 - 24 tenemos:

x = longitud del pedazo para construir el cuadrado.

1 - x = longitud del pedazo para construir el triángulo equilátero.

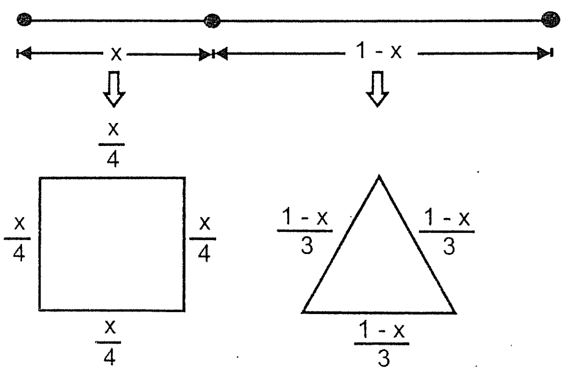


Figura 8 - 24

2. La función que vamos a maximizar o a minimizar es la suma S de las áreas del cuadrado y del triángulo; es decir:

$$S = A_{\text{cuadrado}} + A_{\text{triángulo equilátero}} \qquad (1)$$

donde:

$$A_{\text{cuadrado}} = \left(\frac{x}{4}\right)^2 = \frac{x^2}{16} \qquad (2)$$

$$A_{\text{triángulo equilátero}} = \frac{\left(\frac{1-x}{3}\right)^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{(1-x)^2\sqrt{3}}{36} \qquad (3)$$

Reemplazando (2) y (3) en (1) nos queda:

$$S(x) = \frac{x^2}{16} + \frac{(1-x)^2\sqrt{3}}{36} \qquad (4)$$

3. El dominio de la función, donde el problema tiene sentido, es el intervalo cerrado [0 ; 1]. Se incluyen los extremos ya que es posible utilizar todo el alambre para construir sólo el cuadrado o sólo el triángulo equilátero:

4. Hallemos, ahora, la primera derivada de S, los valores críticos y la segunda derivada:

$$S'(x) = \frac{x}{8} - \frac{\sqrt{3}}{18}(1 - x)$$

$$S'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x}{8} - \frac{\sqrt{3}}{18}(1 - x) = 0$$

$$\Rightarrow 18x = 8\sqrt{3} - 8\sqrt{3}\,x$$

$$\Rightarrow 18x + 8\sqrt{3}\,x = 8\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow x\left(18 + 8\sqrt{3}\right) = 8\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow x = \frac{8\sqrt{3}}{18 + 8\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow x \approx 0.43 \text{ m.}$$

$$S''(x) = \frac{1}{8} + \frac{\sqrt{3}}{18} > 0, \text{ para todo } x \in [0 ; 1]$$

Por lo tanto, $x \approx 0.43$ m es un valor mínimo relativo.

Para contestar las preguntas, debemos tener en cuenta dos cosas: que el dominio de la función es un intervalo cerrado y que sólo hay un valor crítico. Por lo tanto, debemos calcular las imágenes del valor crítico ($x = 0.43$) y de los extremos del intervalo ($x = 0$ y $x = 1$) para determinar los valores máximo y mínimo de la función. Veamos:

$$S(0) = 0 + \frac{\sqrt{3}}{36} = \frac{\sqrt{3}}{36} \approx 0.048$$

$$S(1) = \frac{1}{16} \approx 0.0625$$

$$S(0.43) \approx \frac{0.43^2}{16} + \frac{(1-0.43)^2\sqrt{3}}{36} = 0.027$$

Estos resultados nos muestran que para $x = 0.43$ la suma de las áreas es mínima (valor mínimo absoluto) y para $x = 1$, la suma de las áreas es máxima; es decir, no partiendo el alambre, sino empleándolo todo para construir el cuadrado de lado $\frac{x}{4}$.

La figura 9- 25(a) nos muestra la gráfica de la función S, su máximo y su mínimo, dibujada a mano y la figura 8 - 25(b) nos muestra la misma gráfica dibujada con el programa DERIVE:

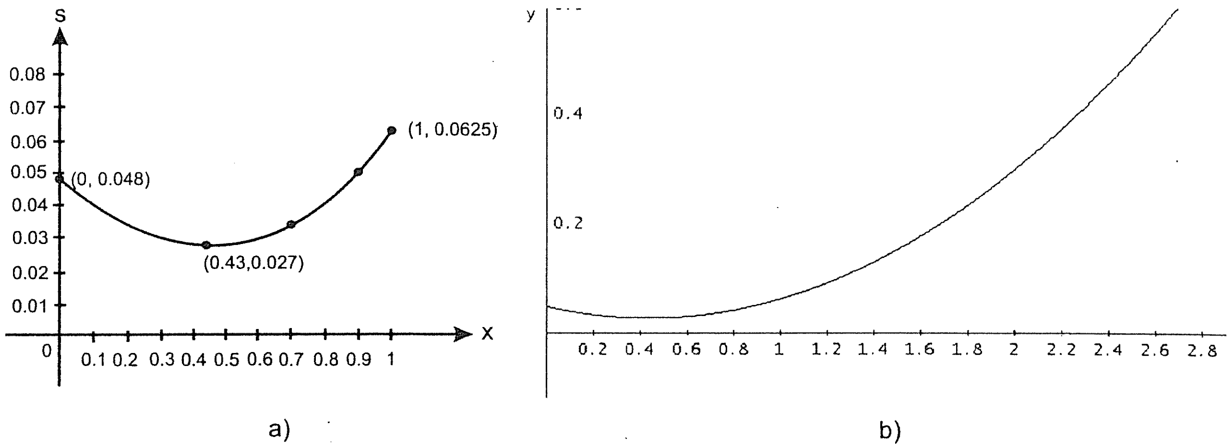
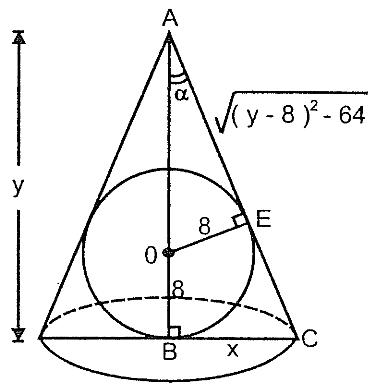


Figura 8 - 24

Ejemplo 7

Hallemos las dimensiones del cono circular recto de volumen mínimo que se puede circunscribir en una esfera de 8 cm de radio.

SOLUCIÓN



1. En la figura 8 - 26 tenemos:

   x = radio de la base del cono

   y = altura del cono

2. La función que debemos minimizar es el volumen V del cono; es decir:

$$V = \frac{1}{3}\pi x^2 y \text{ .... (1)}$$

3. Para escribir la función V en términos de una sola variable tengamos en cuenta que los triángulos AEO y ABC son semejantes por tener un ángulo agudo (α) común.

   Por lo tanto:

$$\frac{\sqrt{(y-8)^2-64}}{y} = \frac{8}{x} \text{: en triángulos semejantes los lados son proporcionales}$$

$$\therefore\ x = \frac{8y}{\sqrt{(y-8)^2-64}} \text{ .... (2)}$$

   Reemplazando (2) en (1) nos queda:

$$V(y) = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{8y}{\sqrt{(y-8)^2-64}}\right)^2 y$$

$$\therefore\ V(y) = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{64y^2}{y^2-16y}\right) y$$

$$\therefore \; V(y) = \frac{64}{3}\pi\left(\frac{y^2}{y-16}\right) \text{ .... } (3)$$

4. El dominio de la función, donde el problema tiene sentido, es el conjunto formado por todos los **y** tales que V > 0; es decir, cuando y > 16 (¡ comprobarlo !).]

5. Hallemos, ahora, la primera derivada de V y sus valores críticos:

$$V'(y) = \frac{64}{3}\pi\left[\frac{2y(y-16)-y^2}{(y-16)^2}\right] = \frac{64}{3}\pi\left[\frac{y^2-32y}{(y-16)^2}\right]$$

$$\therefore \; V'(y) = 0 \;\Rightarrow\; y^2 - 32y = 0$$

$$\Rightarrow\; y(y-32) = 0$$

$$\Rightarrow\; y = 0 \text{ ó } y = 32$$

El valor y = 0 lo descartamos (¿ por qué ?). Analicemos el valor y = 32, usando el criterio de la primera derivada:

	(16 ; 32)	(32 ; +∞)
V'(y)	-	+
	Decrece	Crece

Por lo tanto, y = 32 es un valor mínimo relativo.

6. Reemplazando este valor de y en (2) nos queda que:

$$x = \frac{8(32)}{\sqrt{(32-8)^2-64}}$$

$$\therefore \; x = \frac{256}{16\sqrt{2}} = 8\sqrt{2}$$

Por lo tanto, las dimensiones del cono de volumen mínimo son:

altura: y = 32 cm.

radio: $x = 8\sqrt{2}$ cm.

Ejemplo 8

Una compañía ofrece instalar bombillas a un costo de $300 cada una si el pedido es de 40 unidades o menos. Para conseguir mejores contratos reduce en $5 el costo de cada bombilla siempre que se compre más de 40 bombillas. ¿Cuántas bombillas por encima de las 40 deben negociarse para que la venta sea la mayor posible?

SOLUCIÓN

1. Sea x el número de bombillas, por encima de las 40, que deben negociarse.

2. La función que vamos a maximizar es la función VENTAS y la representamos con la letra V. Las ventas totales se obtienen multiplicando **el número de bombillas vendidas por el precio de cada una**; es decir:

VENTAS = NÚMERO DE BOMBILLAS X PRECIO UNITARIO

Si se venden x bombillas por encima de las 40, entonces el total de bombillas es: 40 + x.

Cada bombilla por encima de las 40, rebaja el precio de cada una en \$5; por lo tanto, x bombillas por encima de las 40 rebajarán el precio en \$5x, con lo cual cada bombilla costará: 300 - 5x pesos. En consecuencia, la función VENTA total, cuando se venden x bombillas por encima de las 40, es:

$$V(x) = (40 + x)(300 - 5x)$$

$$\therefore \; V(x) = 12000 + 100x - 5x^2 \ldots\ldots\ldots\ldots \;(1)$$

3. El dominio de la función donde el problema tiene sentido es cuando $V(x) > 0$; es decir, cuando $12000 + 100x - 5x^2 > 0$. Veamos:

$$12000 + 100x - 5x^2 > 0$$

$$\therefore \; (40 + x)(300 - 5x) > 0$$

Resolviendo esta desigualdad obtenemos que $x \in (0 \, ; \, 60)$.

4. Hallemos la primera derivada, los valores críticos y la segunda derivada de la función:

$$V'(x) = 100 - 10x$$

$$V'(x) = 0 \Rightarrow x = 10$$

$$V''(x) = -10$$

$$\therefore \; V''(10) = -10$$

Como la segunda derivada de V, evaluada en 10, es negativa, entonces el valor crítico x = 10 corresponde a un máximo relativo. Esto significa que la venta que mayores beneficios reporta a la compañía es cuando se venden 10 bombillas por encima de las 40; es decir, 50 bombillas.

ATENCIÓN

El problema también puede resolverse si llamamos x el número total de bombillas que van a instalarse. En este caso, la función VENTA sería:

$$V(x) = x[300 - 5(x - 40)]$$

Después del análisis correspondiente obtendríamos que x = 50 bombillas. Conviene que el lector verifique estos resultados.

Ejemplo 9

Una viga de acero de 27 pies de longitud es transportada horizontalmente a lo largo de un pasaje de 8 pies de ancho hasta un corredor perpendicular al pasaje. ¿Qué anchura debe tener el corredor para que la viga pueda doblar la esquina? (Desprecie el ancho horizontal de la viga).

SOLUCIÓN

1. La figura 8 - 27 nos ayuda a entender el significado del problema:

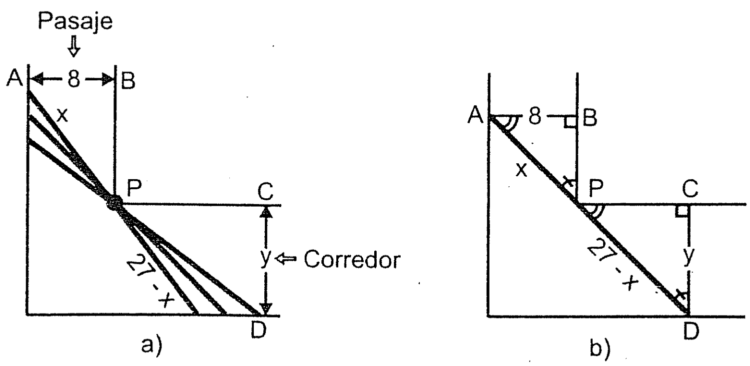


Figura 8 - 27

La esquina P es clave en la solución del problema. En efecto, notemos que la viga se apoya allí en el momento de realizar el giro para pasar del pasaje al corredor y, dependiendo del ancho **y** del corredor, el punto P dividirá a la viga en dos pedazos: **x** y **27 - x**. Se trata de determinar el mayor valor que puede tomar **x** de manera que la viga pueda doblar la esquina P. Naturalmente, el valor de **x** nos permitirá obtener la medida del ancho del corredor.

2. Consideremos una posición cualquiera de la viga en el momento de doblar la esquina; figura 8 – 26(b): Como los triángulos ABP y PCD son semejantes por tener los ángulos respectivamente congruentes, entonces podemos establecer proporcionalidad entre los lados correspondientes; así:

$$\frac{|\overline{AB}|}{|\overline{PC}|} = \frac{|\overline{BP}|}{|\overline{CD}|} = \frac{|\overline{AP}|}{|\overline{PD}|}$$

De estas tres razones sólo nos interesan dos: aquellas donde aparezcan los elementos motivos de análisis: **x** y **y**. Estas razones son:

$$\frac{|\overline{BP}|}{|\overline{CD}|} = \frac{|\overline{AP}|}{|\overline{PD}|} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

donde:

$$|\overline{BP}| = \sqrt{x^2 - 64}\,, \quad |\overline{CD}| = y\,, \quad |\overline{AP}| = x\,, \quad |\overline{PD}| = 27 - x$$

Reemplazando estos valores en la ecuación (1) nos queda:

$$\frac{\sqrt{x^2 - 64}}{y} = \frac{x}{27 - x}$$

$$\therefore \; y = \frac{(27 - x)\sqrt{x^2 - 64}}{x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

3. El dominio de esta función corresponde a todos los valores de **x** para los cuales y > 0; es decir, el intervalo (8 ; 27) (¡comprobarlo!).
4. La primera derivada de esta función y los valores críticos son:

$$y' = \frac{1728 - x^3}{x^2\sqrt{x^2 - 64}} \quad \text{(¡comprobarlo!)}$$

$$y' = 0 \Rightarrow 1728 - x^3 = 0$$
$$\Rightarrow x^3 = 1728$$
$$\Rightarrow x = 12$$

Analicemos el valor x = 12, usando el criterio de la primera derivada:

	(8 ; 12)	(12 ; 27)
y'	+	-
	Crece	Decrece

Por lo tanto, x = 12 es un valor máximo relativo.

5. Reemplazando este valor en (2) nos queda:

$$y = \frac{(27 - 12)\sqrt{144 - 64}}{12}$$

$$\therefore \quad y = \frac{15\sqrt{80}}{12} = 5\sqrt{5} \text{ pies}$$

Por lo tanto, el ancho del corredor necesario para que la viga pueda doblar la esquina es 5 pies.

EJERCICIO 8.3

1. Hallar dos números positivos cuya suma sea 110 y cuyo producto sea máximo.
2. Hallar dos números positivos **x** y **y** tales que su suma sea 6 y el producto de uno por el cuadrado del otro sea máximo.
3. La diferencia de dos números es 20. Seleccionar estos números de modo que su producto sea lo más pequeño posible.
4. ¿Cuál es el número positivo que al ser sumado con su inverso multiplicativo produce la suma mínima posible?
5. Hallar dos números tales que sumados den 32 y la suma de sus cuadrados sea mínima.
6. Hallar un número que exceda a su cubo en la mayor cantidad.
7. Hallar las dimensiones del rectángulo de área máxima cuyo perímetro mide 50 m.
8. Un granjero tiene 1000 metros de malla para cercar tres lados de un potrero rectangular. El cuarto lado está limitado por un río recto. Hallar las dimensiones del potrero de área máxima que el granjero puede cercar.
9. Un terreno rectangular va a ser enmallado. El material que se necesita para dos de sus lados paralelos cuesta 120 dólares el metro. Los otros dos lados paralelos serán enmallados con un material que cuesta 200 dólares el metro. Hallar las dimensiones del terreno que puede enmallarse con 18000 dólares.
10. Una caja rectangular de base cuadrada tiene un volumen de 36 dm^3. ¿Cuáles deben ser sus dimensiones de manera que el material empleado en su fabricación sea mínimo?
11. Un cono circular recto tiene un volumen de 120 cm^3. ¿Cuáles deben ser sus dimensiones para que su área lateral sea mínima?
12. Hallar el área máxima del rectángulo inscrito en una circunferencia de 4 cm de radio.
13. ¿Cuánto miden los catetos de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 5 cm., si al girar alrededor de uno de los catetos debe generar un cono de volumen máximo?
14. Una caja rectangular de base cuadrada se fabrica de tal manera que el área de sus caras es de 18 m^2. ¿Cuáles son las dimensiones de la caja que hacen que su volumen sea máximo?
15. Hallar las dimensiones del cilindro de mayor área lateral que puede inscribirse en una esfera de radio 6 cm.
16. Hallar los puntos de la gráfica de $y = 4 - x^2$ que quedan más próximos al punto (0 ; 2).
17. Los naranjos que crecen en una finca producen 600 naranjas al año, si no se plantan más de 20 árboles por cuadra de terreno. Por cada árbol que se plante de más, el rendimiento de cada árbol disminuye en 15 naranjas. ¿Cuántos árboles por cuadra deben plantarse con el fin de obtener el mayor número de naranjas?
18. Para que un paquete sea aceptado por un servicio de mensajería, la suma de la longitud del paquete más el perímetro de la sección transversal no debe ser mayor que 100 cm. Si un paquete va a tener la forma de caja rectangular con una sección transversal cuadrada, determine las dimensiones del paquete de mayor volumen posible que pueda ser enviado.
19. Un automóvil que se desplaza a razón de 30 pies/seg. se aproxima a una intersección. Cuando el automóvil se encuentra a 120 pies de la intersección, un camión que viaja a razón de 40 pies/seg. cruza

dicha intersección. El automóvil y el camión se encuentran en caminos que forman un ángulo recto. ¿Cuándo estarán lo más cerca posible uno del otro después de que el camión ha pasado por el cruce?

20 Encontrar las dimensiones del rectángulo de área máxima con dos de sus vértices en el eje **x** y los otros dos arriba del eje x sobre la curva $y = 4 - x^2$.

Taller de la Unidad 9

1 **PREGUNTAS PARA REVISAR LA TEORÍA:**

1.1 ¿Cómo se define la linealización de f en x = a?
1.2 ¿A qué es igual la aproximación lineal de f en a?
1.3 ¿Cómo se define la diferencial de la variable x de una función y = f(x)?
1.4 ¿Cómo se define la diferencial de y de una función f definida por y = f(x)?
1.5 ¿A qué es igual Δy en la función f definida por y = f(x)?
1.6 ¿Por qué $\Delta y \approx f'(x) \cdot \Delta x$?
1.7 ¿Es $dy = f'(x)\,dx$? ¿Por qué?
1.8 ¿Es $\Delta x = dx$? Explique.
1.9 ¿Qué diferencia hay entre dy y Δy?
1.10 Describa el procedimiento para resolver un problema de variables relacionadas con el tiempo.
1.11 ¿Por qué si y = f(x) y tanto y como x dependen de t, entonces $\frac{dy}{dt} = f'(x) \cdot \frac{dx}{dt}$?
1.10 Describa el procedimiento para resolver un problema de optimización (máximos ó mínimos).

2 Determinar dy y Δy para los valores que se indican de x y Δx: $y = x^2$; $x = 2$ y $\Delta x = 1$

3 Determinar dy y Δy para los valores que se indican de x y Δx: $y = \sqrt[3]{x}$; $x = 8$ y $\Delta x = 2$.

4 Determinar: a) Δy; b) dy; c) $\Delta y - dy$ si $y = x^3 - x^2$

5 Determinar: a) Δy; b) dy; c) $\Delta y - dy$ si $y = \frac{2}{x-1}$

6 Calcular: a) Δy; b) dy; c) $\Delta y - dy$; si $y = x^2 - 3x$, $x = 2$, $\Delta x = 0.03$

7 La medida de la arista de un cubo es 15 cm., con un error posible de 0.01 cm. Empleando diferenciales, hallar el error aproximado al calcular: a) el volumen b) el área de una de las caras.

8 Un tanque cilíndrico abierto tendrá un revestimiento de 2 cm de espesor. Si el radio interior tiene 6m y la altitud es de 10 m., calcular mediante diferenciales la cantidad aproximada de material de revestimiento que se usará.

9 Un punto se mueve a lo largo de la curva $y = \sqrt{x}$ de tal manera que el valor de y está aumentando a razón de 2 unidades por segundo. ¿A qué ritmo está cambiando x cuando: a) $x = \frac{1}{2}$? b) x = 1? c) x = 4?

10 Sobre un montón cónico cae arena a razón de 10 cm^3/min. El diámetro de la base del cono es tres veces su altura. ¿A qué ritmo está cambiando la altura del montón cuando su altura es 15 cm?

11 Todas las aristas de un cubo están creciendo a un ritmo de 3 cm/seg. ¿Con qué rapidez cambia el volumen cuando cada arista tiene 10 cm?

12 Un pescador recoge hilo a una velocidad de 1.5 dm/seg desde una piedra que tiene 2 metros de altura sobre el agua (Figura 8 - 28). ¿A qué velocidad cambia el ángulo θ cuando faltan por recobrar 30 dm de hilo?

13 Un puente está a 10 metros sobre un canal. Un bote a motor que se desplaza a 3 m/seg. pasa bajo el centro del puente en el mismo instante en que un hombre, que camina a 2 m/seg. por el puente, llega al centro de éste. ¿A qué velocidad se estarán separando 3 segundos después?

14 Los extremos de un abrevadero de 3 metros de largo tienen la forma de un triángulo equilátero con lados de 60 cm. (figura 8 - 29). Si se bombea agua al abrevadero a razón de 20 litros/min. ¿Cuál es la razón de cambio del nivel del agua cuando la profundidad es 20 cm?

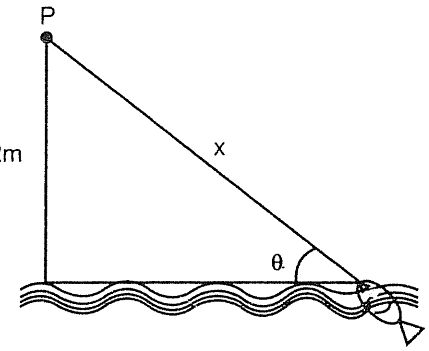


Figura 8 - 28

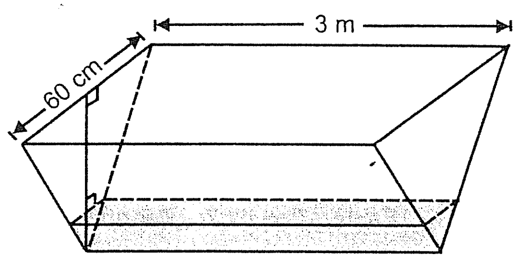


Figura 8 - 29

15 Una escalera de 7 metros de largo está apoyada contra un edificio vertical. Si la base de la escalera se separa de la pared a razón de 0.5 m/seg., ¿A qué velocidad está bajando su extremo superior cuando la base está a 2 metros de la pared?

16 De una hoja de cartón de 8 cm x 5 cm se deben recortar cuadrados iguales en cada esquina, de tal manera que al doblar los lados se construya una caja sin tapa. Encontrar la longitud de los lados del cuadrado que se deben recortar para que la caja tenga volumen máximo.

17 Tres puntos A, B y C se hallan situados de modo que la medida del $\angle ABC = 60^0$. Un automóvil sale del punto A y en el mismo instante parte del punto B un tren. El automóvil avanza hacia el punto B a 80 Km./hora y el tren se dirige hacia el punto C a 50 Km./hora. Teniendo en cuenta que

$\left|\overline{AB}\right|$ = 200 Km., ¿en qué momento, después de comenzar el movimiento, será mínima la distancia entre el automóvil y el tren?

18 Un rectángulo se inscribe en la elipse de ecuación $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$. Si los lados del rectángulo son paralelos al eje mayor y al eje menor de la elipse, ¿cuánto miden sus lados de manera que el área sea máxima?

19 Un hombre está en un bote a 3 Km. del punto A más cercano de la costa y quiere ir a un punto M que está 5 Km. a lo largo de la costa, hacia la derecha, y 2 Km. al interior de la tierra (figura 8 - 30). Si el hombre puede navegar a 4 Km./hora y caminar a 2 Km./hora, ¿en qué punto 0 de la costa debe desembarcar para alcanzar el punto M en el menor tiempo posible?

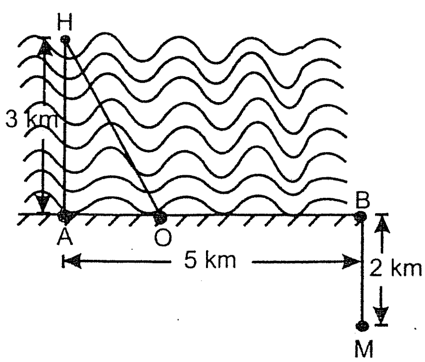


Figura 8 - 30

20 Un viaje organizado por una escuela puede llevar hasta 250 estudiantes. Si viajan 150 estudiantes o menos, el costo será de \$15000. Sin embargo, el costo por persona se reduce \$50 por cada alumno que exceda en número a 150 hasta que el costo llegue a \$10000 por alumno. ¿Cuántos estudiantes deben hacer el viaje para que la escuela reciba los mayores ingresos?

21 Una compañía estima que el costo en dólares para producir x artículos es: $C(x) = 2600 + 2x + 0.001x^2$

a) Encontrar el costo, el costo promedio y el costo marginal para producir: 1000, 2000, 3000 unidades.

b) ¿A qué nivel de producción el costo promedio será el más bajo y cuál es el costo promedio mínimo?

c) Dibujar las gráficas del costo promedio $\frac{C(x)}{x}$ y del costo marginal $C'(x)$. ¿Cuándo se cortan las dos gráficas?

d) Demostrar que si el costo promedio es mínimo, entonces el costo marginal es igual al costo promedio.

Prepárate para las Pruebas ICFES

1. Competencia: Propositiva; Ámbito: Nivel de Profundización.

Se incrementa el número de patos perteneciente a un cierto grupo de tal modo que la diferencia entre la población en el año n + 2 y la población en el año n es directamente proporcional a la población en el año n + 1. Si tenemos en cuenta la siguiente tabla:

AÑO	1994	1995	1996	1997
POBLACIÓN	36	60		123

La población en 1996 fue de:

a) 81 b) 84 c) 60 d) 102

2. Competencia: Propositiva; Ámbito: Nivel de Profundización

El volumen de una esfera de hielo disminuye a razón de 24 cm^3/seg. La velocidad con que disminuye el radio cuando este mide 2 cm es:

a) 3π cm/seg b) $\frac{3}{\pi}$ cm/seg c) $\frac{2\pi}{3}$ cm/seg d) $\frac{3}{2\pi}$ cm/seg

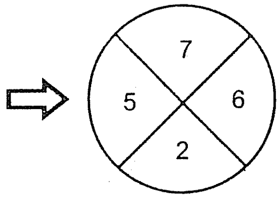
3. Competencia: Argumentativa; Ámbito: Nivel de Profundización.

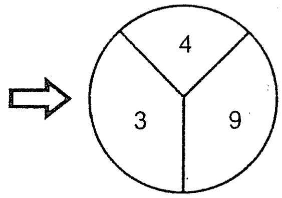
Al resolver $4^{3t} = 8^{t-2}$ se obtiene el valor t = -2. Para obtener este resultado debimos:

a) Aplicar logaritmo natural a ambos lados de la ecuación.
b) Expresar 8 como 2^3 y aplicar la definición de función exponencial.
c) Expresar 4 como 2^2 y 8 como 2^3 e igualar exponentes.
d) Aplicar la función exponencial a ambos lados de la ecuación.

4. Competencia: Interpretativa; Ámbito: Conteo.

Cada vez que se giran las dos ruedas de la figura, las flechas seleccionan un número en cada una. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los dos números indicados sea par?





a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{4}{5}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{1}{9}$

5. Competencia: Interpretativa; Ámbito; Conteo.

En la meta, la diferencia entre dos autos de carrera fue de 1457 milésimas de segundo. En segundos, este valor equivale a:

a) 0,1457 b) 14,57 c) 134,5 d) 1,457

Núcleo Temático 9

INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO INTEGRAL

Se desarrolla para alcanzar los siguientes logros generales

MANEJO DE CONCEPTOS

como

- Antiderivada, primitiva o integral indefinida de una función y sus propiedades.
- Ecuación diferencial.

para desarrollar competencia

ARGUMENTATIVA

DESTREZA OPERATIVA

a través de

- Resolver antiderivadas.
- Resolver algunas ecuaciones diferenciales.

para desarrollar competencia

PROPOSITIVA

DIBUJO DE GRÁFICAS

de

- Funsiones Reales.

como

- Representación de Soluciones de Inecuaciones con Valor Absoluto.
- Líneas Rectas y Circunferencias.

a partir de

- Interceptos con los ejes.
- Simetrías con los ejes y con el origen.
- Dominio y continuidad.
- Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.
- Interceptos con los ejes.
- Los criterios de la primera y segunda derivada.

para desarrollar competencia

INTERPRETATIVA

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

relativos a

- Movimiento en el plano.
- Ecuaciones diferenciales

para desarrollar competencias

- ARGUMENTATIVA
- PROPOSITIVA
- INTERPRETATIVA

LOS HOMBRES DEL CÁLCULO (10)
AGUSTIN LUIS CAUCHY

Los hombres pasan, pero sus obras quedan», fueron las últimas palabras de Agustin Luis Cauchy, matemático francés nacido en París en 1789, seis semanas después del estallido de la Revolución Francesa.

Su padre, de origen humilde, escaló algunas posiciones durante la Epoca del Terror y se ocupó de que su hijo recibiera una esmerada educación; la cual terminó con un diploma como Ingeniero de Caminos. Sin embargo, pocos años después abandonó su trabajo de ingeniero y se dedicó a la investigación y la enseñanza de la ciencia pura.

A los 27 años es miembro de la Academia Francesa y profesor de Matemáticas de la Ecole Politechnique. Sus tres grandes obras sobre el Cálculo riguroso surgieron como apuntes preparados para sus alumnos en esa época.

Entre este material merece mencionarse una original memoria sobre la integral definida como un número complejo como límite, la cual reformó la teoría de la variable compleja. Sus definiciones rigurosas del límite y de continuidad son usadas hoy por los autores modernos del Cálculo Diferencial.

Escribió a lo largo de su vida más de setecientas memorias sobre temas científicos. Murió en 1857.

COMPRENSIÓN DE LECTURA

EXPLICACIÓN: Lea atentamente el anterior texto y luego encierre, en un círculo, la letra que corresponda a la respuesta correcta:

1. Las obras más significativas que hizo Cauchy, sobre el cálculo riguroso, son el fruto de:
   a. Sus trabajos sobre Ingeniería.
   b. Un trabajo realizado a la Ecole Politechnique de Francia.
   c. Sus observaciones sobre límites y derivadas.
   d. Las clases que preparó para sus discípulos en ese tiempo.

2. Agustín Luis Cauchy provenía de:
   a. Un hogar campesino, sencillo y pobre.
   b. Franceses que participaron al lado del gobierno en la época del terror.
   c. Una familia que empezó pobre y terminó muy rica.
   d. Un hogar humilde y trabajador.

3. De la lectura del fragmento se puede deducir que:
   a. Francia ha hecho aportes significativos a las Ciencias Matemáticas.
   b. Hay hombres que nacen para entregar su vida a la ciencia.
   c. El genio investigativo y creador surge en los hogares más pobres.
   d. Es mejor un espíritu disciplinado que un nombre famoso.

4. De las siguientes afirmaciones, sólo una es falsa:
   a. Ejerció la cátedra de Matemáticas en un politécnico francés.
   b. Algunos autores actuales usan conceptos del Cálculo Diferencial de Cauchy.
   c. Cauchy fue profesor y director de la Academia Francesa.
   d. Este hombre que calculaba gozó del patrocinio paterno. Por eso llegó tan lejos.

5. La «Teoría de la variable compleja»:
   a. Fue enunciada por primera vez por Cauchy.
   b. Revolucionó el concepto de límites complejos que regían en aquella época.
   c. Fue reformada por unos trabajos que hizo Cauchy sobre la integral definida.
   d. Apareció pocos meses antes de morir el ilustre matemático.

9.1 LA ANTIDERIVADA O INTEGRAL INDEFINIDA

9.1.1. Concepto de antiderivada y notación

- En las unidades anteriores hemos visto cómo puede obtenerse la **función derivada** a partir de una función dada. Ahora nos plantearemos el problema recíproco; es decir, **dada una función f, ¿existe otra función F tal que F'(x) = f(x)?**

- Los siguientes ejemplos nos ayudarán a responder esta pregunta:
  * Una antiderivada de $f(x) = 5x$ es $F(x) = \frac{5}{2}x^2$ ya que $F'(x) = 5x$.

    Una antiderivada de $g(x) = 3x^2$ es $G(x) = x^3 + 6$ ya que $G'(x) = 3x^2$.

    Una antiderivada de $h(x) = 2x^2 + x$ es $H(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 4$ ya que $H'(x) = 2x^2 + x$.

  * De acuerdo con lo anterior, $F(x) = x^2$ es ANTIDERIVADA de $f(x) = 5x$ porque al derivar $F(x)$ obtenemos $f(x)$. Lo mismo podemos concluir en los otros dos casos.

- Por lo tanto:

> **DEFINICIÓN DE ANTIDERIVADA O PRIMITIVA**
>
> **Una función F es ANTIDERIVADA o PRIMITIVA de una función f, si para todo x en el dominio de f se cumple que:**
>
> $$F'(x) = f(x)$$

- Notemos, sin embargo, que una función f puede tener **varias** antiderivadas. Así, por ejemplo, podemos considerar como primitivas de la función $f(x) = 3x^2$, las siguientes funciones:

$$F_1(x) = x^3 \ ; \ F_2(x) = x^3 - 4 \ ; \ F_3(x) = x^3 + 5 \ ; \ F_4(x) = x^3 + \sqrt{2} \ ; \ \ldots$$

- Esta observación nos permite enunciar el siguiente teorema:

TEOREMA

1. Si F(x) es antiderivada de f(x), también lo es F(x) + C, donde C es una constante.

2. Si F(x) y G(x) son antiderivadas de f(x), entonces G(x) = F(x) + C donde C es una constante.

ATENCIÓN

1. La antiderivada de f es una **familia** de funciones que difieren sólo en una constante.
2. Para indicar la antiderivada o integral indefinida de f usaremos la siguiente notación:

$$\mathbf{f\,(x)\,dx = F(x) + C} \quad \text{...} \quad \mathbf{(1)}$$

que se lee: **«La antiderivada o integral indefinida o primitiva de la función f es la función F + C, donde C es una constante arbitrara».**

3. El símbolo $\int$ es una **s** alargada y se llama INTEGRAL INDEFINIDA; la expresión **f(x)dx** se denomina el INTEGRANDO.

4. La expresión $\int f(x)\,dx = F(x)\,dx$ equivale a: $\frac{d}{dx}\,[F(x) + C] = f\,(x)$. Por lo tanto:

$$d\,[\,F(x) + C] = f(x)\,dx$$

Luego:

$$\mathbf{\int d\,[\,F(x) + C\,] = \int f\,(x)\,dx} \quad \text{...} \quad \mathbf{(2)}$$

De (1) y (2) concluimos que:

$$\mathbf{\int d\,[\,F(x) + C\,] = \quad F\,(x) + C} \quad \text{.......................................} \quad \mathbf{(3)}$$

La expresión (3) nos dice que la antiderivada o integral indefinida del diferencial de una función es dicha función más una constante arbitraria.

5. También es cierto que:

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)\,dx\right] = \frac{d}{dx}\,[\,F(x) + C\,]$$

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)\,dx\right] = F'\,(x)$$

$$\therefore \quad \mathbf{\frac{d}{dx}\left[\int f(x)\,dx\right] = f\,(x)} \quad \text{...} \mathbf{(4)}$$

Las igualdades (3) y (4) nos muestran la naturaleza inversa de la derivación y la integración indefinida (llamada, por esa razón, también antiderivada).

9.2 REGLAS BÁSICAS PARA ANTIDERIVAR DIRECTAMENTE

La característica de inversas de la derivada y la integral indefinida nos permite obtener algunas expresiones para antiderivar directamente a partir de las reglas de la derivación que ya conocemos. El siguiente cuadro nos resume las fórmulas más comunes de derivación e integración directa:

	FÓRMULA DE DERIVACIÓN	FÓRMULA DE INTEGRACIÓN
CONSTANTE	$D_x [Kx] = K$	$\int K\, dx = Kx + C$
CONSTANTE POR UNA FUNCIÓN	$D_x [K f(x)] = K f'(x)$	$\int K f(x)\, dx = K\ f(x)\, dx$
SUMA O RESTA DE FUNCIONES	$D_x [f(x) \pm g(x)] = f'(x) \pm g'(x)$	$\int [f(x) \pm g(x)]\, dx = f(x)dx \pm\ g(x)dx$
POTENCIAS	$D_x \left[x^n\right] = n\, x^{n-1}$	$\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$
TRIGONOMÉTRICAS	$D_x [Sen(x)] = Cos(x)$ $D_x [Cos(x)] = - Sen(x)$ $D_x [Tan(x)] = Sec^2 (x)$ $D_x[Sec(x)]=Sec(x)Tan(x)$ $D_x [Cot(x)] = - Csc^2 (x)$ $D_x[Csc(x)]=-Csc(x)\, Cot(x)$	$\int Cos(x)\, dx = Sen(x) + C$ $\int Sen(x)\, dx = -Cos(x) + C$ $\int Sec^2(x)\, dx = Tan(x) + C$ $\int Sec(x)\, Tan(x)dx = Sec(x) + C$ $\int Csc^2(x)\, dx = -Cot(x) + C$ $\int Csc(x)\, Cot(x)dx = -Csc(x) + C$
EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS	$D_x \left[\ln \lvert x\rvert \right] = \frac{1}{x}$ $D_x \left[e^x \right] = e^x$ $D_x \left[a^x \right] = a^x \ln a$	$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln \lvert x\rvert + c$ $\int e^x\, dx = e^x + c$ $\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$

Ejemplo 1

Hallemos dx

SOLUCIÓN

$$\int\left(2\sqrt[3]{x^4} - 4\sqrt{x^3} + 5\right) dx = \int\left(2x^{4/3} - 4x^{3/2} + 5\right) dx$$

$$= 2\int x^{4/3}\, dx - 4\int x^{3/2}\, dx + 5\int dx$$

$$= 2\frac{x^{7/3}}{\frac{7}{3}} - 4\frac{x^{5/2}}{\frac{5}{2}} + 5x + C$$

$$= \frac{6}{7}x^{7/3} - \frac{8}{5}x^{5/2} + 5x + C$$

$$= \frac{6}{7}x^2\sqrt[3]{x} - \frac{8}{5}x^2\sqrt{x} + 5x + C$$

ATENCIÓN

Al resolver cada integral indefinida debe aparecer una constante, la cual no hemos escrito por simplificar el proceso. Más cómodo resulta, una vez halladas todas las integrales indefinidas, agregar una constante C al final. No hay falta de rigor en esto, ya que la suma de constantes es otra constante.

Ejemplo 2

Hallemos $\int\left(\frac{5}{x^2} - \frac{2}{\sqrt[5]{x}}\right)dx$

SOLUCIÓN

$$\int\left(\frac{5}{x^2} - \frac{2}{\sqrt[5]{x}}\right)dx = \int\left(5x^{-2} - 2x^{-1/5}\right)dx$$

$$= 5\frac{x^{-1}}{-1} - 2\frac{x^{4/5}}{\frac{4}{5}} C = -\frac{5}{x} - \frac{5}{2}\sqrt[5]{x^4} + C$$

Ejemplo 3

Hallemos $\int\frac{x+3x^2}{\sqrt{x}}dx$

SOLUCIÓN

$$\int\frac{x+3x^2}{\sqrt{x}}dx = \int\left(x^{1/2} + 3x^{3/2}\right)dx$$

$$= \frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} + 3\frac{x^{5/2}}{\frac{5}{2}} + C = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + \frac{6}{5}x^2\sqrt{x} + C$$

Ejemplo 4

Usemos dos métodos distintos para calcular la derivada con respecto a x de:

$$\int\frac{7}{2\sqrt[3]{x^2}}dx$$

SOLUCIÓN

MÉTODO 1:

$$D_x\left[\int \frac{7}{2\sqrt[3]{x^2}}\,dx\right] = \frac{7}{2\sqrt[3]{x^2}} \quad \text{¡ y listo !}$$

MÉTODO 2:

- Este método consiste en hallar primero la integral indefinida y luego derivarla; así:

$$\int \frac{7}{2\sqrt[3]{x^2}}\,dx = \int \frac{7}{2}x^{-2/3}\,dx = \frac{7}{2}\frac{x^{1/3}}{\frac{1}{3}}+C = \frac{21}{2}x^{1/3}+C$$

- Ahora derivemos:

$$D_x\left[\frac{21}{2}x^{1/3}+C\right] = D_x\left[\frac{21}{2}x^{1/3}\right] + D_x[C]$$

$$= \frac{21}{2}\cdot\frac{1}{3}x^{-2/3}+0 = \frac{7}{2}x^{-2/3} = \frac{7}{2\sqrt[3]{x^2}}$$

- Notemos que el resultado obtenido es el mismo, aunque resultó más «económico» el primer método.

Ejemplo 5

Hallemos $\int \frac{x^2+x+1}{x}\,dx$

SOLUCIÓN

$$\int \frac{x^2+x+1}{x}\,dx = \int\left(x+1+\frac{1}{x}\right)dx$$

$$= \frac{x^2}{2}+x+\ln|x|+C$$

Ejemplo 6

Hallemos $\int\left(e^{\theta}+\mathrm{Sec}(\theta)\mathrm{Tan}(\theta)\right)d\theta$

SOLUCIÓN

$$\int\left(e^{\theta}+\mathrm{Sec}(\theta)\mathrm{Tan}(\theta)\right)d\theta = \int e^{\theta}\,d\theta + \int \mathrm{Sec}(\theta)\,\mathrm{Tan}(\theta)\,d\theta$$

$$= e^{\theta}+\mathrm{Sec}(\theta)+C$$

9.3 ANTIDERIVADAS POR SUSTITUCIÓN

- El papel de la sustitución en la antiderivada es comparable al de la regla de la cadena en la derivación. Recordemos que:

$$\textbf{Si } y = F(u) \textbf{ y } u = g(x) \textbf{ entonces } \frac{d}{dx}\left[F\left(g\left(x\right)\right)\right] = F'(g(x))\, g'(x)$$

Por lo tanto:

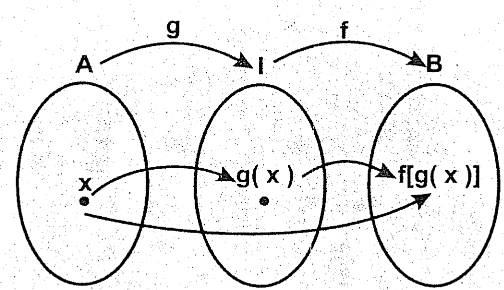
TEOREMA:

REGLA DE LA CADENA PARA LA ANTIDERIVACIÓN

Sea g una función derivable de x, con $g(x) \in I$.

Si f está definida en I y F es una antiderivada de f en I, entonces:

$$\int f\,[\,g(x)]\, g'\,(x)\, dx = F\,[\,g(x)\,] + C \text{ .... (1)}$$



DEMOSTRACIÓN

1. $F'(g(x)) = f(g(x))$.. Por hipótesis
2. Pero, $D_x[F(g(x))] = F'(g(x)) \cdot g'(x)$ .... ¿Por qué?
3. Luego, $D_x[F(g(x))] = f(g(x)) \cdot g'(x)$ .... Sustituyendo 1. en 2.
4. Por lo tanto: $\int D_x\,[F\,(g\,(x))\,] = \int f(g(x)) \cdot g(x)\, dx$ .... ¿Por qué?
5. Luego: $F[g(x)] + C = \int f\,(\,g(x)) \cdot g'(x)\, dx$.. ¿Por qué?
6. Conclusión: $\int f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = F\,[\,g\,(x)\,] + C$

- En la práctica, el método de antiderivación por sustitución consiste en hacer un CAMBIO DE VARIABLE, reexpresando el integrando completamente en términos de u y du. A pesar de que este proceso involucra más pasos escritos, es útil para integrandos complejos. El método del cambio de variable se basa en el hecho de que si $u = g(x)$ entonces $du = g'(x)dx$, con lo cual la expresión (1) quedaría así:

$$\int f\,[\,g(x)\,]\,g'(x)\,dx = \int f\,(u)\,du = F(u) + C$$

- Hagamos un resumen del procedimiento:

PROCEDIMIENTO PARA ANTIDERIVAR POR SUSTITUCIÓN

1. **Elegimos una sustitución $u = g(x)$. En general, escogemos la parte «interna» de una función compuesta (por ejemplo, una cantidad que esté elevada a una potencia).**
2. **Hallamos $\frac{du}{dx} = g'(x)$ y despejamos dx: $dx = \frac{du}{g'(x)}$.**
3. **Reescribimos el integrando en la forma f(u) du.**
4. **Evaluamos la integral resultante en términos de u.**
5. **Deshacemos la sustitución para obtener la autoderivada en términos de x.**

Ejemplo 1

Hallemos $\int x^2 \text{Cos}\left(x^3\right)dx$

SOLUCIÓN

- Hagamos $u = x^3$. Por lo tanto:

$$\frac{du}{dx} = 3x^2 \Rightarrow dx = \frac{du}{3x^2}$$

- En consecuencia:

$$\int x^2 \text{Cos}\left(x^3\right)dx = \int \cancel{x^2}\text{Cos}(u)\frac{du}{3\cancel{x^2}} = \int \frac{1}{3}\text{Cos}(u)\,du$$

- Notemos que el integrando nos quedó en términos de la nueva variable u. Esto significa que la sustitución ha sido correcta. Sigamos...

$$\int x^2 \text{Cos}\left(x^3\right)dx = \frac{1}{3}\int \text{Cos}(u)\,du \quad \text{............ ¿por qué?}$$

$$= \frac{1}{3}\text{Sen}(u) + C \quad \text{............ ¿por qué?}$$

$$= \frac{1}{3}\text{Sen}\left(x^3\right) + C \quad \text{............ ¿por qué?}$$

Ejemplo 2

Resolvamos $\int 5\,\text{Sen}(x)\left[4 - \text{Cos}(x)\right]^3 dx$

SOLUCIÓN

- Hagamos u = 4 - Cos(x). Por lo tanto:

$$\frac{du}{dx} = \text{Sen}(x) \Rightarrow dx = \frac{du}{\text{Sen}(x)}$$

- En consecuencia:

$$\int 5\,\text{Sen}(x)[4-\text{Cos}(x)]^3\,dx = \int 5\,\cancel{\text{Sen}(x)}u^3\,\frac{du}{\cancel{\text{Sen}(x)}}$$

$$= \int 5u^3\,du = \frac{5}{4}u^4 + C = \frac{5}{4}(4-\text{Cos}\,x)^4 + C$$

ATENCIÓN

Hay antiderivadas en las cuales no es fácil la elección de u, como en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3

Resolvamos $\int \frac{\sqrt{x-x^2}}{x^4}\,dx$

SOLUCIÓN

- Analicemos cada paso realizado:

$$\int \frac{\sqrt{x-x^2}}{x^4}\,dx = \int \frac{\sqrt{x-x^2}}{x\cdot x^3}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{x^3}\cdot\frac{\sqrt{x-x^2}}{x}\,dx = \int \frac{1}{x^3}\cdot\sqrt{\frac{x-x^2}{x^2}}\,dx = \int \frac{1}{x^3}\cdot\sqrt{\frac{1}{x}-1}\,dx$$

- Ahora hagamos $u = \frac{1}{x} - 1$ .... (1)

Por lo tanto, $du = -\frac{dx}{x^2}$ .... (2)

Como necesitamos tener $\frac{dx}{x^3}$ en términos de u y du, entonces de (1): $u + 1 = \frac{1}{x}$ .... (3)

Multiplicando miembro a miembro (2) y (3) tenemos: $(u + 1)\,du = -\frac{dx}{x^3}$ .... (4)

- Si sustituimos (4) en la última antiderivada escrita nos queda:

$$\int \frac{1}{x^3}\cdot\sqrt{\frac{1}{x}-1}\,dx = -\int (u+1)u^{1/2}\,du = -\int\left(u^{3/2}+u^{1/2}\right)du$$

$$= -\frac{u^{5/2}}{\frac{5}{2}} - \frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}} + C = -\frac{2}{5}\left(\frac{1}{x}-1\right)^{5/2} - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{x}-1\right)^{3/2} + C$$

Ejemplo 4

Hallemos $\int \frac{2^{\ln x}}{x}\,dx$

SOLUCIÓN

- Hagamos u = ln x. Por lo tanto:

$$\frac{du}{dx}=\frac{1}{x}$$
$$\therefore \quad dx = x\,du$$

- En consecuencia:

$$\begin{aligned}\int \frac{2^{\ln x}}{x}\,dx &= \int \frac{2^u}{x}\cdot x\,du\\ &= \int 2^u\,du\\ &= \frac{2^u}{\ln 2}+C\\ &= \frac{2^{\ln x}}{\ln 2}+C\end{aligned}$$

9.4 ECUACIONES DIFERENCIALES Y MOVIMIENTO RECTILÍNEO

- Observemos las siguientes ecuaciones:

$$\frac{dy}{dx}=4x \quad\text{.......... (1)}$$
$$3y^2dy = 5x\,dx \quad\text{.......... (2)}$$
$$\frac{d^2y}{dx^2}=5x-2 \quad\text{.......... (3)}$$

- Cada una de ellas contiene DERIVADAS o contiene DIFERENCIALES. Por esta razón, se denominan ECUACIONES DIFERENCIALES.

DEFINICIÓN

Una ECUACIÓN DIFERENCIAL es aquella que contiene derivadas o diferenciales de una función desconocida.

- El ORDEN de una ecuación diferencial es el orden de la derivada de mayor grado que aparezca en la ecuación. Por ejemplo, las ecuaciones (1) y (2) son ecuaciones diferenciales de primer orden y la ecuación (3) es de segundo orden.

- Supongamos que nos dan la ecuación $\frac{dy}{dx}=f(x)$, donde y es la función desconocida de x que debemos hallar.

Para resolver esta ecuación, lo primero que hacemos es escribir la ecuación en forma diferencial; así:

$$\frac{dy}{dx}=f(x) \Rightarrow dy = f(x)\,dx$$

La solución de esta ecuación está constituida por todas las funciones y = G(x) que satisfagan la ecuación. De esta manera, si F es una antiderivada de f, entonces todas las funciones G se definen como

G(x) = F(x) + C, donde C es una constante arbitraria; es decir, la función y = F(x) + C se conoce como la SOLUCIÓN COMPLETA de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = f(x)$. Esta ecuación representa una FAMILIA DE FUNCIONES que dependen de la constante arbitraria C. Veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1

Resolvamos la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = 2x$

SOLUCIÓN

- En primer lugar, escribamos la ecuación en forma diferencial y separemos variables; así:

$$\frac{dy}{dx} = 2x \Rightarrow dy = 2x\,dx$$

- Ahora antiderivemos a ambos lados de la igualdad:

$$\int dy = \int 2x\,dx \Rightarrow y = 2\int x\,dx = x^2 + C$$

- Por tanto, $y = x^2 + C$ es la **solución general** de la ecuación diferencial dada. Esta ecuación representa una familia de funciones que difieren en una constante. La figura 9-1 ilustra la solución para algunos valores de la constante: C = -2, C = 0, C = 2

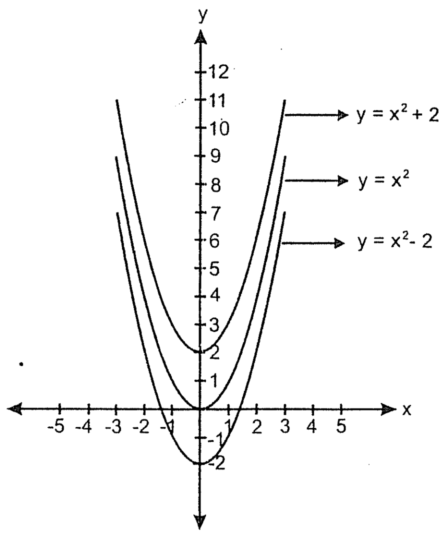


Figura 9 - 1

- La solución es una **familia de parábolas**. Para un mismo valor de x, estas funciones tienen la misma pendiente y, por tanto, sus rectas tangentes en el punto de abscisa x son paralelas.

ATENCIÓN

Si estamos interesados en una solución particular de una ecuación diferencial, debemos dar condiciones, que suelen llamarse CONDICIONES INICIALES o CONDICIONES DE FRONTERA, las cuales nos permiten hallar el valor de la constante C y, por lo tanto, determinar un miembro particular de dicha familia.

Ejemplo 2

Si y es una función tal que $\frac{dy}{dx} = 2x$, hallemos **y** si cuando x = 0, y = 1.

SOLUCIÓN

- Ya vimos en el ejemplo anterior que $y = x^2 + C$.

- Cuando x = 0, y = 1; por lo tanto, reemplazando estos valores en la ecuación $y = x^2 + C$ nos queda:

$$1 = 0 + C \Rightarrow C = 1$$

- Luego, $y = x^2 + 1$ es la solución particular de la ecuación diferencial para las condiciones iniciales dadas.

Ejemplo 3

Resolvamos la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{3x\sqrt{1+y^2}}{y}$.

SOLUCIÓN

- Debemos garantizar que en cada miembro de la ecuación queden una misma variable y su diferencial. Veamos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x\sqrt{1+y^2}}{y} \quad \Rightarrow \quad y\,dy = 3x\sqrt{1+y^2}\;dx$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\,dy = 3x\,dx$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\,dy = 3\int x\,dx$$

- Sea $u = 1 + y^2$, entonces $du = 2y\,dy$. Luego:

$$\int \frac{1}{2}u^{-1/2}\,du = 3\int x\,dx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\,\frac{u^{1/2}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}x^2 + C$$

$$\Rightarrow \quad u^{1/2} = \frac{3}{2}x^2 + C$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{1+y^2} = \frac{3}{2}x^2 + C$$

Ejemplo 4

Resolvamos la ecuación $\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{2x-3}$

SOLUCIÓN

- Como es una ecuación diferencial de orden 2, entonces hagamos $z = \frac{dy}{dx}$; luego:

$$\frac{dz}{dx} = \sqrt{2x-3}$$

$$\therefore \; dz = \sqrt{2x-3}\;dx$$

$$\therefore \; \int dz = \int \sqrt{2x-3}\;dx$$

$$\therefore \; z = \frac{1}{2}\,\frac{(2x-3)^{3/2}}{\frac{3}{2}} + C_1$$

$$\therefore \quad z = \frac{1}{3}(2x-3)^{3/2} + C_1$$

Ahora bien, como $z = \frac{dy}{dx}$ entonces:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}(2x-3)^{3/2} + C_1$$

$$\therefore \quad dy = \left[\frac{1}{3}(2x-3)^{3/2} + C_1\right] dx$$

$$\therefore \quad \int dy = \int \left[\frac{1}{3}(2x-3)^{3/2} + C_1\right] dx$$

$$\therefore \quad y = \frac{1}{6}\,\frac{(2x-3)^{5/2}}{\frac{5}{2}} + C_1x + C_2$$

$$\therefore \quad y = \frac{1}{15}(2x-3)^{5/2} + C_1x + C_2$$

- Observemos que aparecen dos constantes de integración C_1 y C_2. Esto se debió a que por ser una ecuación diferencial de segundo orden, hubo necesidad de integrar dos veces para hallar la función. Si deseamos hallar una solución particular, entonces es necesario dar dos condiciones iniciales.

Ejemplo 5

Una curva de ecuación y = f(x) pasa por el origen y la pendiente de la recta tangente es $m = 3x^2$. Hallar la ecuación de la curva.

SOLUCIÓN

- Sabemos que la pendiente de la recta tangente a una curva y = f(x) es $m = \frac{dy}{dx}$. Por lo tanto:

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 \Rightarrow dy = 3x^2\,dx$$

$$\Rightarrow \int dy = \int 3x^2\,dx$$

$$\Rightarrow y = \frac{3x^3}{3} + C$$

$$\Rightarrow y = x^3 + C$$

- Como la curva pedida pasa por el origen; es decir, por (0, 0), entonces para x = 0, y = 0; por lo tanto: $0 = 0^3 + C \Rightarrow C = 0$. Luego, la ecuación pedida es $y = x^3$.

Ejemplo 6

Se lanza una piedra verticalmente hacia arriba desde una altura de 15 metros, con una velocidad inicial de 20 m/seg. Se pide:

a) Determinar la posición de la piedra s(t) en cada momento.

b) La altura máxima alcanzada por la piedra, con relación al punto de partida.

c) La velocidad con que la piedra llega al suelo.

SOLUCIÓN

a) Para contestar la pregunta a), tomemos como origen el punto donde se inició el movimiento y como sentido positivo aquel con el cual se inició el movimiento (es decir, hacia arriba); figura 9 - 2:

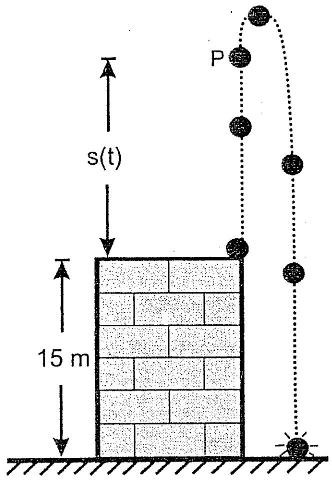


Figura 9 - 2

- Sea s(t) la función de posición que nos indica la distancia dirigida entre el punto de partida 0 y un punto P. Así mismo, v(t) indica la velocidad en cualquier tiempo t, con lo cual v(0) = 20. Finalmente, sea a(t) la aceleración en cualquier tiempo t (en este caso, la aceleración es debida a la gravedad).

- Puesto que $a = \frac{dv}{dt}$ y a medida que t aumenta, v disminuye entonces a < 0 y nos queda:

$$\frac{dv}{dt} = -9.8 \text{ (9.8 m/seg}^2 \text{ es la gravedad)}$$

$$\therefore \; dv = -9.8\, dt$$

$$\therefore \; \int dv = \int -9.8\, dt$$

$$\therefore \; v = -9.8t + C_1$$

Para hallar C_1 tengamos en cuenta que v = 20 cuando t = 0. Por lo tanto:

$$20 = -9.8(0) + C_1 \Rightarrow C_1 = 20$$

CONCLUSIÓN: La velocidad en cualquier tiempo t es:

$$v(t) = -9.8t + 20$$

- Ahora bien, como $v = \frac{ds}{dt}$ entonces:

$$\frac{ds}{dt} = -9.8t + 20$$

$$\therefore \; ds = (-9.8t + 20)\, dt$$

$$\therefore \; \int ds = \int (-9.8t + 20)\, dt$$

$$\therefore \; s = -4.9t^2 + 20t + C_2$$

Para hallar C_2 sabemos que s = 0 cuando t = 0. Por lo tanto:

$$0 = 0 + 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = 0$$

CONCLUSIÓN: La posición en cualquier tiempo t es:

$$s(t) = -4.9t^2 + 20t$$

- Ahora podemos contestar las otras preguntas:

b) La piedra alcanza su altura máxima cuando la velocidad se reduce a cero; es decir, cuando v(t) = 0; por lo tanto:

$$0 = -9.8t + 20 \Rightarrow t = \frac{20}{9.8} \text{ seg} \approx 2 \text{ seg.}$$

$$\begin{aligned} \text{Luego, } h_{máx.} = s(2) &\approx -4.9(2)^2 + 20(2) \\ &\approx -4.9(4) + 40 \\ &\approx 20 \text{ m.} \end{aligned}$$

c) La piedra llega al suelo cuando está 15 metros por debajo de 0; es decir, cuando s(t) = -15; por lo tanto:

$$\begin{aligned} &-15 = -4.9t^2 + 20t \\ \therefore\ &4.9t^2 - 20t - 15 = 0 \\ \therefore\ &t \approx 4.7 \text{ seg.} \end{aligned}$$

Luego, la velocidad con que llega al suelo es:

$$v(4.7) = (-9.8)(4.7) + 20 \approx -26 \text{ m/seg.}$$

El signo (-) significa que la piedra se está moviendo en sentido contrario al positivo; es decir, la piedra está bajando en ese momento.

Ejemplo 7

Si los frenos permiten que un automóvil adquiera una aceleración negativa constante de 8 m/seg², ¿ qué velocidad debe llevar el auto de manera que pueda detenerse 25 m después de aplicar los frenos ?

SOLUCIÓN

- Tenemos que a = -8 m/seg². Y como $a = \frac{dv}{dt}$, entonces:

$$\frac{dv}{dt} = -8$$

$$\therefore\ dv = -8\, dt$$

$$\therefore\ v = -8t + C_1 \quad \text{.....................................} \quad (1)$$

- Ahora bien, $v = \frac{ds}{dt}$; luego:

$$ds = v\, dt \text{...} \quad (2)$$

$$\therefore\ ds = (-8t + C_1)\, dt \text{.................................} \quad (1) \text{ en } (2)$$

$$\therefore\ s = -4t^2 + C_1 t + C_2 \quad \text{..........................} \quad (3)$$

- De acuerdo con el enunciado del problema, cuando t = 0 se cumple que s = 0; por lo tanto, reemplazando en (3) nos queda:

$$0 = -4(0)^2 + C_1(0) + C_2$$

$$\therefore\ C_2 = 0$$

Luego, la ecuación (3) se convierte en:

$$s = -4t^2 + C_1 t \quad \text{..................................} \quad (4)$$

- Si en la ecuación (1) despejamos C_1 nos queda:

$$C_1 = v + 8t$$

y reemplazando esta expresión en la ecuación (4) tenemos:

$$s = -4t^2 + (v + 8t)\,t$$

$$\therefore\ s = -4t^2 + 8t^2 + vt$$

$$\therefore\ s = 4t^2 + vt \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (5)$$

- También, el enunciado del problema nos dice que cuando el auto se detiene (es decir, cuando la velocidad v = 0), ha recorrido 25 metros. Por lo tanto, reemplazando en (5) estos valores, tenemos:

$$25 = 4t^2 + 0t$$

$$\therefore\ t^2 = \frac{25}{4}$$

$$\therefore\ t = \frac{5}{2}\ \text{seg.}$$

- Ahora podemos hallar C_1. En la ecuación (4) reemplazamos s por 25 y t por $\frac{5}{2}$:

$$25 = -4\left(\frac{25}{4}\right) + \frac{5}{2}\,C_1 = -25 + \frac{5}{2}\,C_1$$

$$\therefore\ 50 = \frac{5}{2}\,C_1 \ \Rightarrow\ C_1 = 20$$

Luego, $s = -4t^2 + 20t$ y $v = -8t + 20$

- Finalmente, determinamos el valor de v cuando t = 0:

$$V = -8(0) + 20 = 20\ \text{m/seg.}$$

Por lo tanto, la velocidad que debe llevar el auto para detenerse 25 metros más adelante es 20 m/seg.

EJERCICIO 9.1

1 Hallar las siguientes integrales indefinidas:

a) $\displaystyle\int\left(\frac{3}{\sqrt[3]{x}} - \frac{\sqrt[3]{x}}{3} + 2\right)dx$ b) $\displaystyle\int\left(z - \frac{1}{z}\right)^2 dz$ c) $\displaystyle\int(5x-1)(2x+3)\,dx$

d) $\displaystyle\int\frac{3x^2-5x+1}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$ e) $\displaystyle\int\frac{x^5-32}{x-2}\,dx$ f) $\displaystyle\int\frac{2x^3-4x^2-10x+12}{x+2}\,dx$

g) $\displaystyle\int\frac{\operatorname{Cos}\left(2\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\,dx$ h) $\displaystyle\int\left(4\operatorname{Cos}(2\theta) - 3\operatorname{Sen}(3\theta)\right)d\theta$ i) $\displaystyle\int\operatorname{Sen}^6(5x)\cdot\operatorname{Cos}(5x)\,dx$

j) $\displaystyle\int\frac{\operatorname{Cos}(4x)}{\sqrt{4-3\operatorname{Sen}(4x)}}\,dx$ k) $\displaystyle\int\frac{5x}{(2-x)^{12}}\,dx$ l) $\displaystyle\int\frac{dz}{\sqrt{z}\left(2+\sqrt{z}\right)^3}$

m) $\int \frac{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^{10}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$ n) $\int \left(x^3+x\right)\sqrt{x^2+1}\,dx$ o) $\int \left(z+z^{-1}\right)^{2/5}\left(\frac{z^2-1}{z^2}\right)dz$

p) $\int \left(x^3+2\right)^{7/3}\cdot x^5\,dx$ q) $\int 7^{\,\text{Cos}\,x}\,\text{Sen}\,x\,dx$ r) $\int \frac{\log_{10} x}{x}\,dx$

2 Resolver cada uno de los ejercicios siguientes por dos métodos distintos:

a) $\frac{d}{dx}\left[\int x^5\sqrt{x^6+3}\,dx\right]$ b) $D_x \int (2x+1)^{10}\,dx$

3 Calcular:

a) $\int D_x \frac{x}{\sqrt[3]{x+1}}\,dx$ b) $\int D_x \sqrt{x^2+1}\,dx$

4 Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{x}+x}{\sqrt{y}-y}$ b) $\frac{dy}{dx}=\frac{x^4\sqrt{x^5-1}}{y^2}$

c) $\frac{dy}{dx}=(x+1)(x+2)$, si $y=-\frac{3}{2}$ cuando $x=-3$ d) $y''=\text{Sen}(3x)+\text{Cos}(3x)$

e) $y''=x^2+3x$, si cuando $x=1$, $y=2$ y $y'=1$ f) $y'''=6x$, si $y''(0)=2$, $y'(0)=1$ y $y(0)=4$

g) $f''(x)=3e^x+5\,\text{Sen}\,x$, con $f(0)=1$ y $f'(0)=2$

5 La pendiente de todas las rectas tangente a una curva de ecuación $y = f(x)$ es $m(x) = x\sqrt{1-x^2}$. Hallar la ecuación de la curva que pasa por el punto $\left(0, \frac{7}{3}\right)$.

6 Se lanza una piedra verticalmente hacia abajo desde una altura de 300m, con una velocidad de 10 m/seg. Encuentre la altura sobre el suelo t segundos después del lanzamiento. ¿Cuál es su velocidad 5 segundos después del lanzamiento? ¿Cuándo llegará al suelo?

7 Un proyectil se dispara verticalmente hacia arriba desde una altura s_0 con una velocidad v_0. Demuestre, que despreciando la resistencia del aire, la altura s(t) desde el suelo, al tiempo t, está dada por:

$$s(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + s_0,$$ siendo g la gravedad.

8 Si un automóvil parte del reposo (es decir, si s = 0 y v = 0 cuando t = 0), ¿qué aceleración constante se le debe imprimir para que recorra 100 m en 10 seg.?

9 ¿Qué aceleración constante (negativa) debe imprimirse a un automóvil que viaja a 100 Km./h para que se detenga en 9 segundos?

10 ¿Cuál es la aceleración constante (negativa) que permite a un conductor disminuir su velocidad de 140 Km./h a 80 Km./h mientras recorre una distancia de 120 m?

11 En cualquier punto (x, y) de una curva, su segunda derivada es $\frac{d^2y}{dx^2} = 4 - x^2$ y una ecuación de la recta tangente a la curva en su punto (1, -1) es 2x - 3y = 5. Hallar la ecuación de la curva.

12 En los primeros diez (10) días del mes de diciembre una célula vegetal creció en tal forma que t días después del 1 de diciembre el volumen de la célula aumentaba a razón de $(12 - t)^{-2}$ micrómetros cúbicos por día. Si el 3 de diciembre el volumen de la célula era 3m m^3, ¿Cuál fue el volumen el 8 de diciembre?

Taller de la Unidad 9

1 PREGUNTAS PARA REVISAR LA TEORÍA:

a) Si dos funciones F(x) y G(x) son primitivas de la misma función f(x), ¿qué relación hay entre F(x) y G(x)?

b) Se sabe que puede haber dos funciones con la misma derivada. ¿Puede haber dos funciones con la misma primitiva?

c) Una primitiva de una función es $F(x) = x^2$, ¿qué transformación geométrica debemos realizar para dibujar todas las curvas de las restantes primitivas? ¿Cuál es, en este caso, la integral?

d) Si dos funciones diferentes tienen las mismas derivadas, ¿en cuántos puntos se pueden cortar sus gráficas?

e) Si F(x) y G(x) son primitivas de f(x) en un intervalo, ¿cuál de las siguientes igualdades es verdadera?

1) $F(x) = 2G(x)$ 2) $F(x) = C \cdot G(x)$

3) $F(x) = 5 + G(x)$ 4) $F(x) = C - G(x)$

f) ¿Hay funciones cuyas primitivas son ellas mismas? Si es cierto, escribir algunas.

g) Si $f(x) = x^a$, se puede aplicar la propiedad de la integral de una potencia para todos los valores de a, excepto uno, ¿cuál es?

h) Si F(x) +C es la integral indefinida de f(x) y además F(a) = b, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

1) La constante de integración es siempre b. 2) Una primitiva de f(x) pasa por el punto (a , b).

3) No puede ocurrir que f(a) = f(b). 4) Siempre C = f(b).

2 $\int \frac{x^5 - 2x + 5}{x^3\,dx}$ **3** $\int \sqrt[3]{9 + 4x}\,dx$ **4** $\int \frac{(1 + x)^2}{\sqrt{x}}\,dx$

5 $\int x\sqrt[3]{1 - x^2}\,dx$ **6** $\int x^2\sqrt{x + 5}\,dx$ **7** $\int \frac{x^2 + 2x}{(x + 1)^2}\,dx$

8 $\int (7\text{Cos } 5x - 5\text{ Sen } 7x)\,dx$ **9** $\int \text{Sen}^3(2\theta)\text{ Cot }(2\theta)\,d\theta$ **10** $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4 - x^2}}$ (haga $x = \frac{1}{z}$)

11 $\int \frac{x\,dx}{\text{Cos}^2 x^2}$ **12** $\int \frac{\text{Sen}(2\theta)}{\text{Cos}^2(2\theta)}\,d\theta$ **13** $\int \left(\sqrt{x} + 1\right)\left(x - \sqrt{x} + 1\right)dx$

14 Las funciones $F_1(x) = \frac{1}{1 - x}$ y $F_2(x) = \frac{x}{1 - x}$ son diferentes y ambas son primitivas de $f(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$. ¿Cuál es la relación que existe entre $F_1(x)$ y $F_2(x)$?

En los ejercicios **15** a **18**, hallar la solución completa de la ecuación diferencial.

15 $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2 + 2x - 7$

16 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x\sqrt{1+y^2}}{y}$

17 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\operatorname{Cos}(2x)}{\operatorname{Sen}(3y)}$

18 $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 5x^2 + 1$

En los ejercicios **19** a **22**, resolver cada ecuación diferencial con las condiciones iniciales dadas.

19 $\dfrac{dy}{dx} = (x-2)^3$; con $y = 1$ cuando $x = 2$

20 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$; con $y = -1$ cuando $x = 2$

21 $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 4(1+3x)^2$; con $y = -1$ y $\dfrac{dy}{dx} = -2$ cuando $x = -1$

22 $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{3}{x^4}$; con $y = \dfrac{1}{2}$ y $\dfrac{dy}{dx} = -1$ cuando $x = 1$

23 Una curva pasa por el punto (3 ; 2) y la pendiente de la recta tangente a la curva en cualquier punto es $m = 2x - 3$. Hallar la ecuación de la curva.

24 La segunda derivada de una función es $y'' = 1 - x^2$ y la recta tangente a la curva de esta función en el punto (1 , 1) es $y = 2 - x$. Hallar la ecuación de la curva.

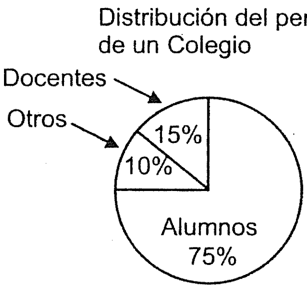
25 En el momento en que el semáforo se pone verde, un automóvil inicia su recorrido con aceleración constante de $2 m/seg^2$. En ese mismo momento un camión que lleva velocidad 20m/s le adelanta:

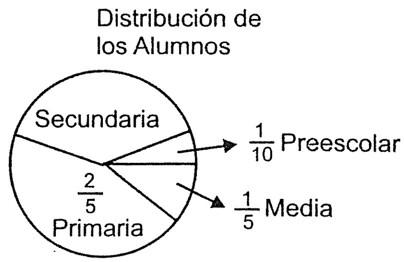
a) ¿A qué distancia alcanzará más adelante el automóvil al camión?

b) ¿A qué velocidad irá en ese instante?

Prepárate para las Pruebas ICFES

Las siguientes preguntas se responden con base en los siguientes diagramas circulares:





1. Competencia: Interpretativa; Ámbito: Estadístico.

   La fracción del personal distinto a docentes y alumnos es:

   a) $\dfrac{1}{10}$ b) $\dfrac{9}{10}$ c) $\dfrac{3}{4}$ d) $\dfrac{15}{100}$

2. Competencia: Interpretativa; Ámbito: Estadístico.

   Si en el colegio permanecen diariamente 1600 personas, el número de alumnos de media es:

   a) 500 b) 1200 c) 250 d) 240

3. Competencia: Interpretativa; Ámbito: Estadístico.

   Del total de personas presentes diariamente en el colegio, ¿qué porcentaje corresponde a los alumnos de secundaria?

   a) 25% b) 22.5% c) 20% d) 17.5%

4. Competencia: Interpretativa; Ámbito: Estadístico.

   Si x representa el número de alumnos de preescolar, el número de alumnos de la media es:

   a) $\frac{1}{x+5}$ b) $\frac{1}{x-5}$ c) $2x$ d) $\frac{x}{2}$

5. Competencia: Interpretativa; Ámbito: Estadístico.

   ¿Cuántos grados del círculo debemos emplear para representar los docentes?

   a) 54^0 b) 36^0 c) 90^0 d) 15^0

Núcleo Temático

Núcleo Temático 10

PENSAMIENTO ALEATORIO

Se desarrolla para alcanzar los siguientes logros generales

MANEJO DE CONCEPTOS

como

- Análisis combinatorio.
  - Principio fundamental del conteo.
  - Variaciones.
  - Permutaciones.
  - Combinaciones.
- Probabilidades.
  - Regla de Laplace.
  - Comparación de probabilidades.
  - Sucesos compatibles, incompatibles y contrarios.
- Unión e intersección de sucesos.
  - Probabilidad de la unión.
  - Probabilidad del suceso contrario.

para desarrollar competencia

ARGUMENTATIVA

DESTREZA OPERATIVA

a través de

- Hallar variaciones, permutaciones y combinaciones.
- Calcular la probabilidad de un evento.
- Hallar la probabilidad de la unión de dos eventos.
- Calcular la probabilidad del suceso contrario.
- Calcular probabilidades de sucesos dependientes e independientes y contrarios.

para desarrollar competencia

PROPOSITIVA

DIBUJO DE GRÁFICAS

como

- Diagramas de árbol y de Venn.

para

- Interpretar situaciones de recuento: variaciones, permutaciones y combinaciones.
- Representar enunciados de problemas de probabilidad de la unión y condicionada.

a partir de

- La información dada por el enunciado de un problema de análisis combinatorio o de probabilidades.

para desarrollar competencia

INTERPRETATIVA

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

relativos a

- Análisis combinatorio.
- Probabilidades simples, compuestas y condicionadas.

para desarrollar competencias

- ARGUMENTATIVA
- PROPOSITIVA
- INTERPRETATIVA

LOS HOMBRES DEL CÁLCULO (10)
BERNHARD RIEMANN

Bernhard Riemann nació en Hannover, Alemania, en 1826. Su padre, era pastor protestante, y quería que su hijo siguiera sus pasos. Así, entró a la Universidad de Gotinga a estudiar Teología y Filosofía. Yanis era profesor de Matemáticas de la misma Universidad y Bernhard, después de escucharle ocasionalmente una conferencia, se interesó tanto por las Matemáticas que decidió, con aprobación de su padre, cambiar de carrera.

Y en 1851, con el propio Gauss, como director de tesis, recibió su doctorado en Matemáticas. Dicha tesis versó sobre el Cálculo de variable compleja y se constituyó en un importantísimo aporte a este campo, ya iniciado por Cauchy.

En 1857 fue nombrado «profesor extraordinario» de la Universidad de Gotinga, y en 1859 sucedió a Dirichlet en la misma universidad.

En 1862 se casó y, apenas un mes después contrajo una grave enfermedad que lo apartó de la cátedra y lo llevó a Italia a tratar de recuperarse en un clima más suave.

Sin embargo, falleció allí, en 1866, apenas con 39 años.

Un tema del cual se ocupó intensamente durante su breve vida, fue el de las funciones reales, y las condiciones necesarias y suficientes para que fueran integrables. En un artículo escrito en 1854, inventa una función que es discontinua en un conjunto infinito de puntos (pero enumerable) y muestra como por ello no deja de ser integrable.

COMPRENSIÓN DE LECTURA

EXPLICACIÓN: **Lea con mucha atención la anterior síntesis biográfica y luego encierre, en un círculo, la letra que corresponda a la respuesta correcta:**

1. B. Riemann decide cambiar de carrera profesional:
   a. Porque no quería seguir los pasos de su padre, que era pastor protestante.
   b. Porque por encima de la teología estaba su gran pasión por la matemática.

c. Por recomendación del profesor Yanis, quien enseñaba matemáticas.
d. Por una disertación que, sobre Matemáticas, le escuchó a un catedrático universitario.

2. Fueron temas matemáticos trabajados por Bernhard los siguientes, menos:
   a. Funciones Reales.
   b. Cálculo de variable compleja.
   c. Teoría de Probabilidades.
   d. Funciones discontinuas en conjuntos infinitos de puntos.

3. El propósito del autor, en este artículo es:
   a. Criticar a los padres que pretenden determinar el futuro profesional de sus hijos.
   b. Destacar los grandes aportes hechos por este científico en el campo de la matemática.
   c. Explicar que la matemática es más importante que la Filosofía y la Teología.
   d. Lamentar el fallecimiento de un científico a temprana edad.

4. En la lectura se puede ver claramente:
   a. Que la verdadera vocación de B. Riemann eran las ciencias exactas.
   b. El descontento del padre ante la decisión del hijo.
   c. El futuro profesional del científico lo determinó el catedrático Gauss.
   d. El matrimonio interrumpió la producción matemática de Bernhard.

5. Con la muerte temprana de este alemán:
   a. El mundo humanista perdió un gran teólogo.
   b. Su esposa quedó deshecha en una profunda tristeza.
   c. Su padre aceptó con resignación el designio de Dios.
   d. La universidad perdió uno de sus más preclaros doctores.

10.1 ANÁLISIS COMBINATORIO

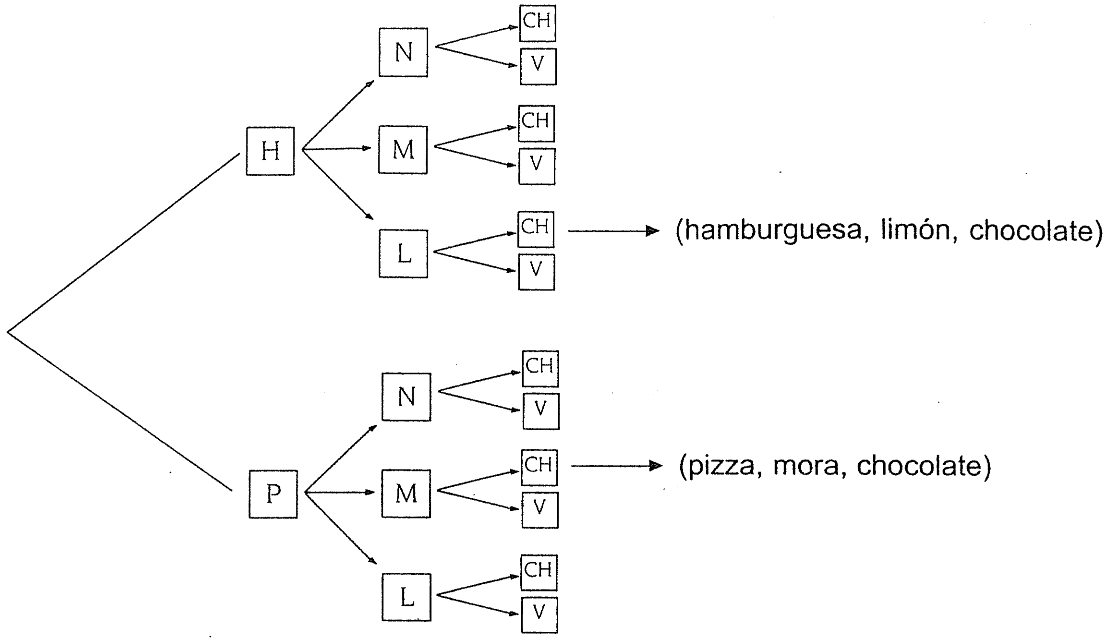
10.1.1 Principio fundamental del conteo

Primera Experiencia

- En un establecimiento de comidas rápidas ofrecen por el precio de 1 dólar, un menú a elegir entre:

PLATO FUERTE	REFRESCO	HELADO
Hamburguesa o Pizza	Naranja Mora o Limón	De chocolate o De vainilla

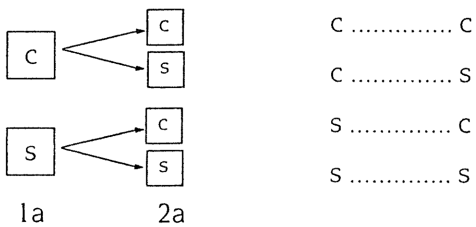
- El proceso de elección de un menú consta de tres etapas (elección del plato fuerte, elección del refresco y elección del helado), en cada una de las cuales disponemos de varias alternativas.
- ¿Cuántas elecciones distintas podemos hacer?
- Para facilitar la elección se utiliza frecuentemente un **diagrama de árbol.**



- Para el plato fuerte (1ª etapa del proceso de elección) hay dos posibilidades; para el refresco , 3; y para el helado, 2. De esta manera, el número total de elecciones distintas es: 2•3•2 = 12

Segunda Experiencia

- ¿De cuántas maneras pueden caer al piso dos monedas que se lanzan al aire?
- Sabemos que cada moneda puede caer de dos maneras diferentes: Cara (c) o Sello (s).
- Si la primera moneda cae CARA, la segunda puede caer cara o sello; y, si la primera moneda cae SELLO, la segunda puede caer cara o sello; es decir:



- Por lo tanto, el número de maneras diferentes como pueden caer simultáneamente las dos monedas es: 2 x 2 = 4

Tercera Experiencia

- Si se lanzan al aire una moneda y un dado (tiene seis caras numeradas del 1 al 6), ¿de cuántas maneras pueden caer?
- El dado puede caer de seis maneras diferentes, puesto que tiene seis caras diferentes; y la moneda puede caer de dos maneras diferentes: cara o sello.
- Por cada número que salga, al caer el dado, la moneda puede caer de dos maneras y como el dado tiene seis caras, entonces el total de maneras como puede caer SIMULTANEAMENTE el dado y la moneda es: 6 x 2 = 12

PRINCIPIO FUNDAMENTAL DEL CONTEO - REGLA DEL PRODUCTO.

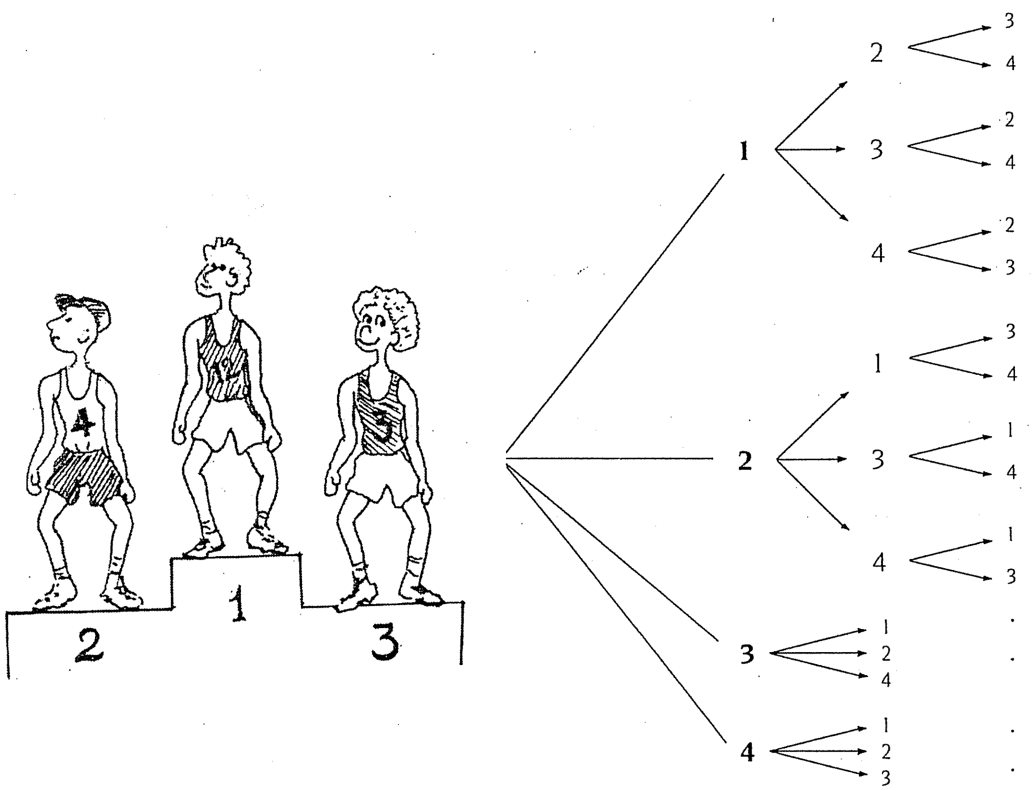
Si un suceso **A** se puede presentar de **x** maneras diferentes y, una vez se ha cumplido este suceso, un segundo suceso **B** puede presentarse de **y** maneras diferentes, entonces el número total de maneras diferentes como puede darse simultaneamente los dos sucesos es **x•y.**

10.1.2 Variaciones

10.1.2.1 Variaciones Simples o sin Repetición

Primera Experiencia

- En la final de los 400 metros planos en pista cubierta participan 4 atletas. ¿De cuántas maneras distintas puede resultar el podio?
- Observemos el siguiente diagrama de árbol para esta situación:



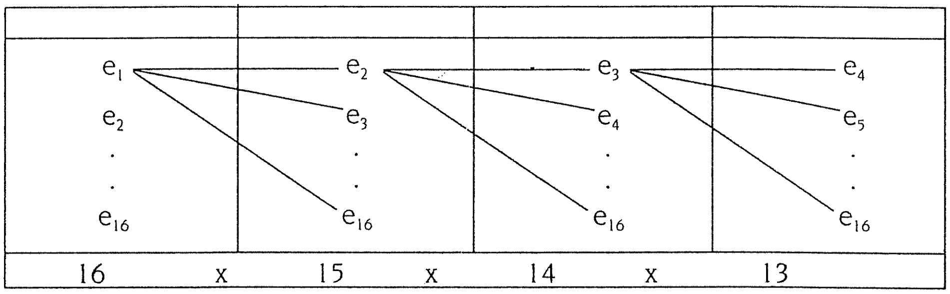
- El proceso de formación del podio se efectúa en 3 etapas: ORO, PLATA y BRONCE. Para la primera etapa (oro) hay cuatro alternativas (los 4 atletas que compiten), mientras que para elegír la medalla de plata sólo hay tres alternativas (los tres atletas que no alcanzan el oro). Una vez señalados el campeón y el subcampeón sólo quedan dos atletas para cubrír el tercer puesto.

GRUPO A FORMAR:	ORO	PLATA	BRONCE
ALTERNATIVAS :	4	3	2

- En total hay: 4•3•2= 24 podios distintos que se pueden formar.

Segunda Experiencia

- La liga profesional de fútbol de cierto país tiene 16 equipos. ¿ De cuántas formas diferentes pueden quedar clasificados al final de la temporada los 4 primeros equipos?
- Para la primera posición (campeón) hay 16 posibilidades; para la segunda posición (subcampeón) hay 15 posibilidades, para el tercer puesto hay 14 posibilidades y para el 4° puesto, 13 posibilidades. Vamos al siguiente diagrama de árbol:



- A las distintas ordenaciones que acabamos de obtener se les llama **VARIACIONES DE 16 ELEMENTOS TOMADOS DE 4** en **4**, y se escribe $\mathbf{V_{16,4}}$.
- Por lo tanto, hay **16 x 15 x 14 x 13 = 43680** formas distintas de clasificarse.

VARIACIONES SIMPLES O SIN REPETICION

- Si tenemos un conjunto de **m** elementos diferentes y los agrupamos de **n** en **n** elementos (con $m \geq n$), de tal manera que dos agrupaciones se consideran distintas cuando:

  a) Se diferencian por lo menos en un elemento

  ó

  b) Se diferencian en el órden de colocación de ellos

  entonces dichas agrupaciones se denominan VARIACIONES SIMPLES O SIN REPETICIÓN

- El número de **VARIACIONES SIMPLES** de **m** elementos tomadas de **n** en **n** se representa por $\mathbf{V_{m,n}}$ y es igual a n factores decrecientes consecutivos:

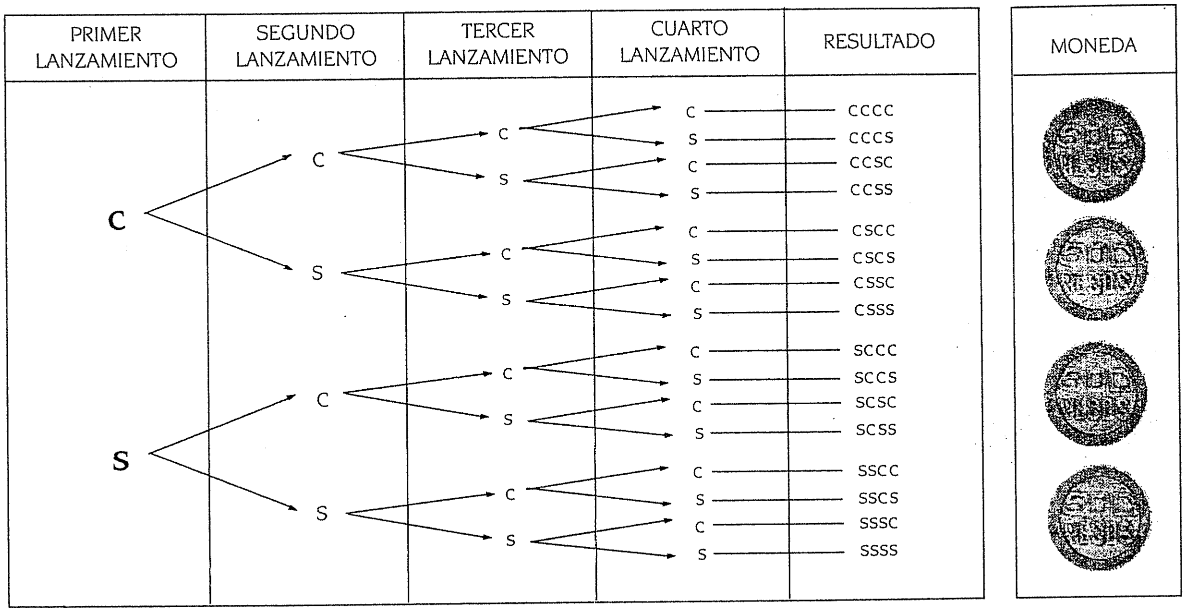
$$V_{m,n} = \underbrace{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}_{\text{n factores}}$$

- Notemos que el cálculo en la experiencia del podio en $V_{4,3}$ y que el cálculo en la experiencia de los finalistas del torneo de fútbol es $V_{16,4}$

10.1.2.2 Variaciones con Repetición

Experiencia

- Si lanzamos 4 veces seguidas una moneda, ¿cuántos resultados distintos podemos obtener?
- Si representamos por C salir cara y por S salir sello, entonces el diagrama del árbol correspondiente será:



Por lo tanto, hay 2•2•2•2 = 16 resultados distintos.

- A las distintas ordenaciones que acabamos de obtener se les llama **VARIACIONES CON REPETICION DE 2 ELEMENTOS TOMADOS DE 4 en 4** y se escribe $VR_{2,4}$.
- En este caso, sigue influyendo el orden, pero los elementos se pueden repetir.

VARIACIONES CON REPETICION

- Las **VARIACIONES CON REPETICION** de **m** elementos, tomados de **n** en **n**, son todos los grupos que se pueden formar con estas características:

  - Un elemento puede aparecer repetido en cada grupo;por ejemplo, ccss.
  - Si se cambia el orden de los elementos resulta un grupo distinto; por ejemplo, cccs y cscc.
  - Si se sustituye un elemento por otro resultan grupos distintos; por ejemplo, cccc y cccs.

- El número de variaciones con repetición de m elementos tomados de n en n se representa por $\mathbf{VR_{m,n}}$ y es igual a:

$$\mathbf{VR_{m,n} = \underbrace{m \cdot m \cdot m \ldots m}_{n\ veces} = m^n}$$

ATENCIÓN

1. Dado un grupo de **m** elementos, puede ocurrir:
   a) Que los elementos sean distintos. En este caso, a los grupos se les denomina **AGRUPACIONES SIMPLES.**
   b) Que los elementos sean iguales. En este caso, a los grupos se les denomina **AGRUPACIONES CON REPETICION.**
2. Considerando la naturaleza de los elementos (sean iguales o distintos), las agrupaciones recibirán el nombre de **VARIACIONES, PERMUTACIONES** o **COMBINACIONES** (simples o con repetición).

Ejemplo 1

Si lanzamos dos dados de diferentes colores una vez, ¿cuántos resultados distintos se pueden obtener? ¿y si se lanzan 3 dados?

SOLUCIÓN

- En ambos casos tenemos una variación con repetición.
- En el primer caso tenemos 6 elementos tomados de 2 en 2; por lo tanto, el número de resultados que podemos obtener es: $6 \cdot 6 = 6^2 = 36$
- En el segundo caso tenemos 6 elementos tomados de 3 en 3; por lo tanto, el número de resultados que podemos obtener es: $6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3 = 216$

Ejemplo 2

¿Cuántos números de 3 cifras podemos formar con los dígitos: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9, pudiéndose repetir las cifras ?

SOLUCIÓN

- Tenemos una variación con repetición de 9 elementos tomados de 3 en 3.
- Por lo tanto, serán $9^3 = 9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$ números distintos.

EJERCICIO 10.1

1. Calcula: a) $V_{4,3}$ b) $V_{5,2}$ c) $V_{10,4}$ d) $VR_{5,2}$ e) $VR_{2,5}$
2. ¿Cuántos números de 4 cifras distintas o no pueden escribirse utilizando sólo cifras impares?
3. A una pensión que tiene 6 habitaciones llegan 3 viajeros, ¿de cuántas formas pueden distribuirse?

Los ejercicios de 4 a 8 se resuelven con base en el siguiente enunciado:

Un estudiante que ingresa a la Universidad debe tomar cursos en las áreas de: Matemáticas, Humanidades, Sociales y Lenguas Modernas. Si puede elegir entre tres (3) cursos de matemáticas, dos (2) de Lenguas Modernas, cuatro (4) de Sociales y tres (3) de Humanidades. ¿De cuántas maneras puede hacer su programa de estudio si:

4. Debe tomar un curso en cada área?
5. Debe tomar un curso en cada área y aprobar un examen con el cual no necesitaría tomar Lenguas Modernas?
6. Únicamente puede tomar un curso en Matemáticas, uno en Lenguas Modernas y uno en Humanidades?

7. Debe tomar dos (2) cursos de Matemáticas y uno (1) de cada una de las áreas restantes, si importa el orden de la elección?.

8. Debe tomar dos (2) cursos de Matemáticas, tres (3) de Sociales y dos (2) de Humanidades, si importa el orden de la elección?

10.1.3 Permutaciones simples

Experiencia

- Juan, Lina y Sara llegaron a la final de un concurso de trova. Luego de la prueba final, el jurado decidirá en qué orden otorgará los tres primeros premios. ¿ Cuáles son todas las clasificaciones finales posibles?
- Analicemos el siguiente diagrama de árbol:

1o.	2o.	3o.
J	L	S
	S	L
L	J	S
	S	J
S	J	L
	L	J

Grupo	1	2	3
Posibilidades	3	2	1

- Por lo tanto, hay 3•2•1 = 6 posibilidades.
- En este caso, tenemos un conjunto de 3 elementos y hacemos agrupaciones de 3 en 3 elementos de manera que en ninguna de ellas se repiten elementos. Este tipo de agrupaciones se denominan PERMUTACIONES SIMPLES.

PERMUTACIONES SIMPLES

- Las **PERMUTACIONES** de **n** elementos son las distintas agrupaciones que se pueden realizar de manera que:
  - en cada grupo estén los **n** elementos.
  - dos grupos son distintos sólo cuando difieren en el orden de colocación.
- El número de permutaciones de **n** elementos se representa por P_n y es igual a:

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \ldots 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

- Al producto $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \ldots 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ se le llama **FACTORIAL** de **n** y se representa por **n!**

Las permutaciones son variaciones simples de **m** elementos agrupados de **n** en **n**, de tal manera que **m = n**; es decir: $P_n = V_{n,n}$

Ejemplo

¿De cuántas maneras pueden sentarse tres damas y dos caballeros en una fila de cinco (5) asientos, de modo que:

a) puedan hacerlo en cualquier sitio?
b) las damas y los caballeros no se separan?

c) se sientan alternados?
d) una dama y un caballero insisten en sentarse juntos?

SOLUCIÓN

a) Como hay cinco asientos para ubicar cinco personas, una forma de ocupar los asientos se diferencia de otra sólo en el orden de colocación de las mismas; por lo tanto:

$$V_{5,5} = P_5 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

son todas las formas posibles de sentarse cinco personas en una fila de cinco asientos

b) Como las damas y los caballeros no se separan, podemos saber que existen dos grupos perfectamente distintos:

- el grupo de las damas (3), y
- el grupo de los caballeros (2)

además, estos dos grupos pueden permutarse; por lo tanto:

GRUPO A	GRUPO B	PERMUTACIONES DE A Y B
3!	2!	2!

2! → Permutaciones de A y B
2! → Permutaciones de los caballeros
3! → Permutaciones de las damas

Por tanto: $3! \times 2! \times 2! = 24$ son las maneras como pueden sentarse tres damas y dos caballeros en cinco asientos ubicados en una fila, con la condición de que las damas y los caballeros no se separen.

c) Como las damas y los caballeros deben sentarse alternados, siempre habrá una dama al principio y al final de la fila; es decir:

$$\underline{D}\ \underline{C}\ \underline{D}\ \underline{C}\ \underline{D}$$

Por lo tanto, el número total de maneras de sentarse alternadamente será:

$$P_3 \times P_2 = 3! \times 2! = 12$$

d) Como una dama y un caballero insisten en sentarse juntos, podemos considerarlos como un solo elemento. Por lo tanto, tenemos cuatro (4) elementos para permutar; además, la dama y el caballero que desean sentarse juntos, pueden permutarse entre sí de P_2 maneras; es decir:

$$P_4 \times P_2 = 4! \times 2! = 48$$

EJERCICIO 10.2

Los ejercicios 1. a 3., se responden con base en el siguiente enunciado:

«Cuatro postales estan diseñadas de tal manera que al juntarlas en cualquier orden se obtienen un bonito paisaje»

1. ¿Cuántos paisajes diferentes se podrán formar juntando las cuatro postales?

2. ¿Cuántos paisajes diferentes se podrán formar, de tal manera que una de las cuatro postales se coloca de primera a la izquierda?

3. ¿ Cuántos paisajes de cuatro postales diferentes podríamos formar con 24 postales diferentes?

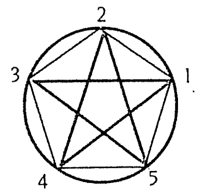
4. Calcula P_6, P_4 y P_5

5. Si reordenamos las letras de la palabra PESCA de todas las maneras posibles, ¿cuántas palabras distintas se pueden formar, tanto si tienen sentido como si no lo tienen?

10.1.4 Combinaciones simples

Primera Experiencia

- Sobre una circunferencia marcamos 5 puntos. ¿Cuántos triángulos distintos, cuyos vértices sean 3 de esos puntos, podemos dibujar?
- Nombremos cada punto con los números 1, 2, 3, 4 y 5. Cada triángulo lo representamos por sus tres vértices y para escribir todos los triángulos, sin repetir ni olvidar ninguno, anotamos solo los grupos de tres vértices en que los números aparezcan en su orden natural:



123, 124, 125, 134, 135, 145,

234, 235, 245,

345

- Así, pues, podemos dibujar 10 triángulos distintos.

Segunda Experiencia

- En una oficina, 20 personas están conectadas entre sí mediante una línea telefónica. ¿cuántas líneas telefónicas directas hubo que instalar?
- Estudiemos el problema con menos personas; por ejemplo, con 4 y con 5:
  - Si tenemos 4 personas, entonces la figura 1 nos muestra que es necesario instalar 6 líneas telefónicas.

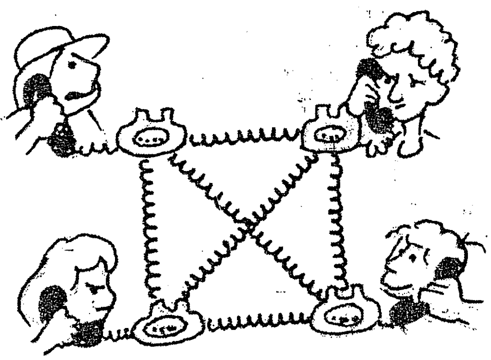


FIGURA 1

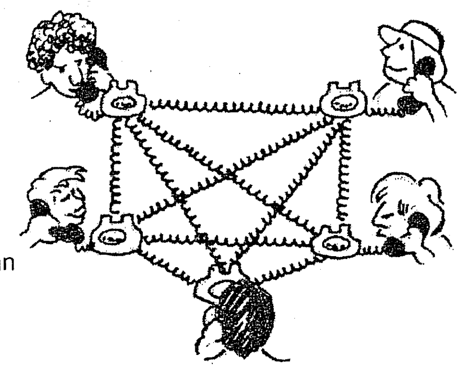


FIGURA 2

- En el caso de 5 personas tenemos lo siguiente (figura 2): como cada persona se conecta con las cuatro restantes, habrá, en principio, 5•4 = 20 líneas; pero de ellas solo podemos considerar la mitad, ya que la que une a Juan con Lina es la misma que une a Lina con Juan. Por lo tanto, para el caso de 5 personas tenemos:

$$\text{N° de líneas} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$

- Y razonando de manera similar, podemos afirmar que para 20 personas tendremos:

$$\text{N° de líneas} = \frac{20 \cdot 19}{2} = 190$$

Estas 190 ordenaciones se les llama **COMBINACIONES DE 20 ELEMENTOS TOMADOS DE 2 EN 2** y escribimos $\mathbf{C_{20,2}}$

COMBINACIONES ORDINARIAS O SIMPLES

- Las **COMBINACIONES ORDINARIAS** de **m** elementos tomados de **n** en **n** (con m ≥ n) son los distintos grupos que se pueden formar con los **m** elementos de manera que:
  - Un mismo elemento no puede aparecer repetido. Por ejemplo, en la primera experiencia, el triángulo 224 carece de sentido.
  - Si se cambia el orden, resulta el mismo grupo (el triángulo 235 es el mismo 532)
  - Si sustituímos un elemento por otro, resulta un grupo distinto (si en 125 cambiamos el 2 por el 3, resulta el triángulo 135).

Tercera Experiencia

- Queremos saber cuántos elementos tiene una combinación de m elementos agrupados de n en n.
- Para aproximarnos a la respuesta, consideremos de nuevo los resultados de la primera experiencia de esta sección. Escribamos debajo de cada combinación de tres vértices, todas sus posibles ordenaciones:

$C_{5,3}$ (columnas); P_3 (filas)

123	124	125	134	135	145	234	235	245	345
132	142	152	143	153	154	234	253	254	354
213	214	215	314	315	415	324	325	425	435
231	241	251	341	351	451	342	352	452	453
312	412	512	413	513	514	423	523	524	534
321	421	521	431	531	541	432	532	542	543

- Obtenemos una tabla rectangular en la que aparecen todas las **variaciones**. Por lo tanto

$$V_{5,3} = C_{5,3} \cdot P_3$$

$$\therefore\ C_{5,3} = \frac{V_{5,3}}{P_3} = \frac{5\cdot4\cdot3}{3\cdot2\cdot1} = 10$$

- En general, $C_{m,n} = \dfrac{V_{m,n}}{P_n}$

El NÚMERO DE COMBINACIONES SIMPLES de **m** elementos tomados de **n** en **n** se representa por $C_{m,n}$ y es igual a:

$$C_{m,n} = \frac{V_{m,n}}{P_n}$$

Ejemplo

Una pareja invita a una fiesta a nueve parejas más:

a) ¿Cuántos saludos de mano son posibles si todas las personas lo hacen?
b) ¿Cuántos saludos de mano son posibles si en la fiesta hay tres personas que no se saludan?

c) ¿Cuántas parejas de baile se pueden formar si todas las parejas están dispuestas a hacerlo?
d) ¿Cuántas parejas de baile son posibles, si tres caballeros insisten en bailar sólo con su pareja?
e) ¿Cuántas parejas de baile pueden formarse, si en el momento de iniciar el baile están ausentes tres caballeros y dos damas?
f) ¿Cuántas parejas de baile son posibles, si un caballero insiste en bailar sólo con la anfitriona?

SOLUCIÓN

a) El total de personas en la fiesta es de 20. Si la persona **x** le da la mano a la persona **y** es lo mismo que si la persona **y** le da la mano a la persona **x**; por lo tanto, debemos hallar los grupos de 2 personas tomadas del conjunto de 20 elementos, donde dos grupos se diferencian por tener por lo menos una persona diferente. En consecuencia:

$$C = \frac{20!}{18!\ 2!} = \frac{20 \times 19 \times 18!}{18! \times 2!} = 190$$

b) El número de personas que se saludan es:

$$C_{20,2} - C_{3,2} = 190 - 3 = 187$$

c) Las parejas de baile que pueden formarse con 20 personas (10 caballeros y 10 damas) equivalen a formar los grupos de una persona elegidos entre las 10 damas y los grupos de 1 persona elegidos entre los 10 caballeros y luego formar las parejas (una dama y un caballero, utilizando el principio fundamental; así:

$$\underbrace{C_{10,1}}_{\text{elegir una dama de 10}} \times \underbrace{C_{10,1}}_{\text{elegir un caballero de 10}} = 10 \times 10 = 100$$

d) Como 3 caballeros insisten en bailar sólo con sus parejas, entonces nos quedan 7 caballeros y 7 damas para formar las parejas restantes; es decir:

$$\underbrace{\underbrace{C_{7,1}}_{\text{damas}} \times \underbrace{C_{7,1}}_{\text{caballeros}}}_{\text{parejas formadas}} \times \underbrace{C_{1,1} \times C_{1,1} \times C_{1,1}}_{\text{parejas fijas}}$$

$$= 7 \times 7 \times 1 \times 1 \times 1$$
$$= 49$$

e) Si hay ausentes 3 caballeros, entonces quedan 7 para elegir grupos de 1 en 1. Si hay presentes sólo 8 damas, entonces formamos las combinaciones de 1 en 1 de ocho elementos; por lo tanto, las parejas para el baile se formarán así:

$$C_{7,1} \times C_{8,1} = 7 \times 8 = 56$$

f) Puesto que un caballero insiste en bailar con la anfitriona, entonces quedan 9 damas y 9 caballeros para formar las parejas. Por lo tanto:

$$\underbrace{C_{9,1} \times C_{9,1}}_{\text{parejas formadas}} \times \underbrace{C_{1,1}}_{\text{pareja fija}} = 9 \times 9 \times 1 = 81 \text{ parejas}$$

EJERCICIO 10.3

1. Con 7 personas, ¿cuántos comités distintos de 5 personas pueden formarse?

2. De entre 8 candidatos, ¿cuántas ternas se pueden escoger?

3. Un equipo de fútbol compite con 1 arquero y 10 jugadores de campo. Si el equipo dispone de 20 jugadores: 18 de campo y 2 arqueros, ¿cuántas selecciones podrán hacerse para jugar un partido si 3 jugadores son

fijos, los jugadores de campo pueden actuar en cualquier puesto menos el de arquero, y los arqueros no pueden jugar en el campo?

4. Un comité de científicos está formado por 2 químicos y 1 físico. ¿Cuántos comités pueden formarse con 4 químicos y 3 físicos?

5. Un equipo de fútbol disputó 12 partidos en un torneo. ¿De cuántas maneras puede terminar la temporada del equipo con:

   a) 7 victorias? b) 3 derrotas? c) 7 victorias, 3 derrotas y 2 empates?

6. ¿Cuántas formas hay de seleccionar a 5 candidatos de un total de 10 recién graduados y con las mismas capacidades para ocupar vacantes en una firma contable?

7. Al reunirse un número n de personas se dan la mano para saludarse. ¿Cuántas personas se saludan?

10.2 CÁLCULO DE PROBABILIDADES

10.2.1 Revisión de conceptos

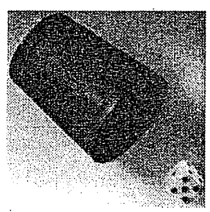
RECORDEMOS

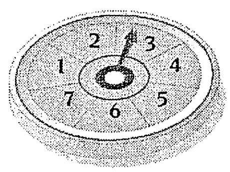
- Un experimento es **ALEATORIO** o de **AZAR** cuando no podemos determinar el resultado que se va a obtener al realizarlo o cuando aún sabiendo los posibles resultados del experimento no es posible establecer cuál de ellos aparecerá al realizarlo.
- Se llama **ESPACIO MUESTRAL** al conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio. Este conjunto se denota con la letra **E.**

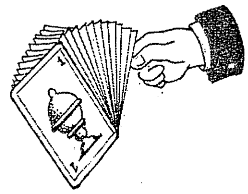
EJEMPLO:

Observemos los siguientes experimentos aleatorios y sus espacios muestrales.

EXPERIMENTO	ESPACIO MUESTRAL
	E = { cara, sello}
Lanzar una moneda	2 resultados posibles

EXPERIMENTO	ESPACIO MUESTRAL
	E = {1,2,3,4,5,6}
Lanzar un dado cúbico	6 resultados posibles

EXPERIMENTO	ESPACIO MUESTRAL
	E={1,2,3,4,5,6,7}
Se gira la aguja	7 resultados posibles

EXPERIMENTO	ESPACIO MUESTRAL
	Las 40 cartas de la baraja española
Se extrae una carta de una baraja española	40 resultados posibles

- A los subconjuntos del espacio muestral se les llama **SUCESOS** o **EVENTOS.**

EJEMPLO:

En el experimento que consiste en lanzar un dado de 6 caras numeradas del 1 al 6, el espacio muestral es:

$$E=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

y algunos subconjuntos de este espacio muestral son:

Salir par: A={2,4,6} ; Salir impar: B={1, 3, 5}
Salir múltiplo de 3: C={3,6} ; Salir mayor que 4: D={5,6}

Los conjuntos A,B,C y D se llaman **SUCESOS** o **EVENTOS.**

- Dos sucesos son **EQUIPROBABLES** cuando tienen la misma **oportunidad** o **posibilidad** de ocurrir.

EJEMPLO:

- Si lanzamos una moneda balanceada al aire, los sucesos **"sale cara"** y **"sale sello"** son equiprobables.
- Si lanzamos un dado exagonal balanceado numerado del 1 al 6, los sucesos **"sale par"** y **"sale impar"** son equiprobables.

- Un suceso es:

IMPOSIBLE: si sabemos que no puede suceder; es decir, si no tiene ninguna probabilidad de ocurrir.

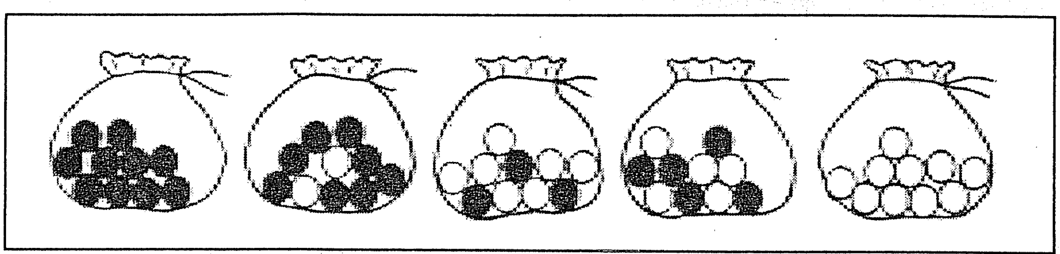
SEGURO: si sabemos que siempre ocurre; es decir, que tiene toda la probabilidad de ocurrir.

POCO PROBABLE: si tenemos poca confianza en que ocurra

BASTANTE PROBABLE: si tenemos mucha confianza en que ocurra.

EJEMPLO:

Tenemos las siguientes bolsas con balotas de colores negro o blanco:



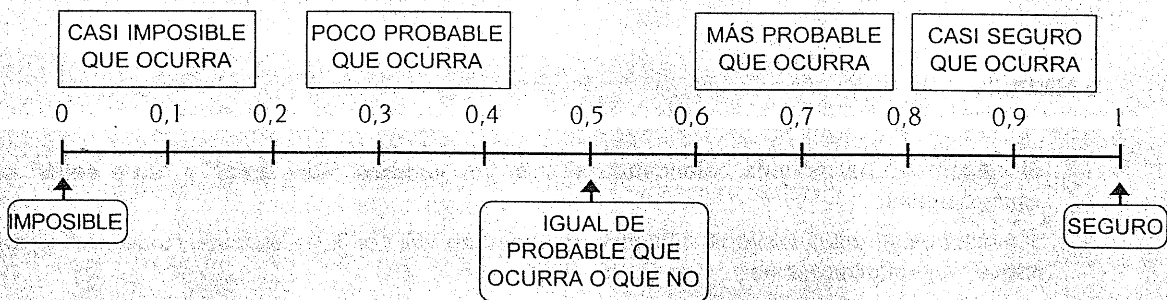
- ¿De cuál bolsa es **IMPOSIBLE** que salga una balota negra?
- ¿De cuál bolsa es **POCO PROBABLE** que salga una balota blanca?
- ¿De cuál bolsa es **BASTANTE PROBABLE** que salga una balota negra?
- De cuál bolsa es **SEGURO** que salga una balota blanca?

- La **probabilidad de un suceso** es el número al que tiende la **frecuencia relativa** de dicho suceso, cuando el número de pruebas realizadas es muy grande. Cuanto mayor es la frecuencia relativa de un hecho mayor es la probabilidad de que ocurra.
- Si es un experimento todos los resultados son equiprobables, entonces la probabilidad de que ocurra un **suceso A**, denotado **p (A)** se define así:

$$\textbf{Probabilidad de un suceso A} = p(A) = \frac{\textbf{N° de casos favorables al suceso}}{\textbf{N° total de casos posibles}}$$

Esta definición de probabilidad la enunció el matemático francés Pierre Simón de Laplace en 1812 y por eso se denomina REGLA DE LAPLACE.

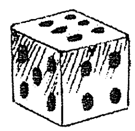
- La **PROBABILIDAD** de un suceso cualquiera es un número comprendido entre 0 y 1. La probabilidad de ocurrencia de un suceso coincide con su frecuencia relativa después de repetir la experiencia un número grande de veces. La siguiente recta nos muestra como se distribuye la probabilidad de un suceso:



10.2.2 Sucesos compatibles, incompatibles y contrarios

Experiencia

- En el experimento que consiste en lanzar un dado cúbico con las caras numeradas del 1 al 6, consideramos los sucesos.

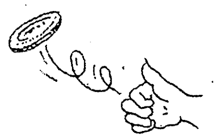
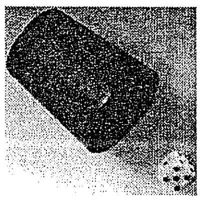
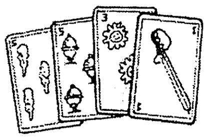


A = {1, 3, 5} y B = {2, 6}

¿Se pueden verificar a la vez ambos sucesos?

- La respuesta es no. Los sucesos A y B no se pueden verificar simultáneamente. En este caso, los sucesos A y B son **incompatibles.**

- Ahora analiza los siguientes exprimentos:

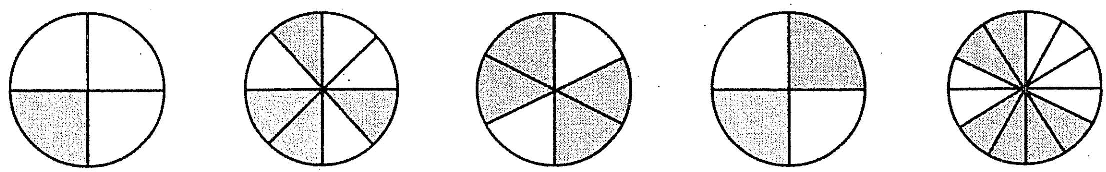
Experimento	Espacio muestral	Algunos sucesos	Y sus contrarios
 Se lanza una moneda	E = {cara, sello}	A = {cara} B = {sello} E = {cara, sello} ∅	A´ = {sello} B´ = {cara} E´ = ϕ ϕ´ = {cara, sello} = E
 Se lanza un dado cúbico	E = {1,2,3,4,5,6}	A = {1, 3, 5} B = {2, 6} C = {3} D = {3, 4, 5, 6} E = {1, 2, 3, 4, 5, 6} ϕ	A´ = {2, 4, 6} B´ = {1, 3, 4, 5} C´ = {1, 2, 4, 5, 6} D´ = {1, 2} E´ = ϕ ϕ´ = {1, 2, 3, 4, 5, 6} = E
 Se extrae una carta de una baraja española	E = {todas las cartas de la baraja española}	A = {salir el rey} B = {salir oro} C = {salir el as de copas}	A´ = {no salir el rey} B´ = {no salir oro} C´ = {no salir el as de copas}

- ¿Que puedes concluir después de analizar estos experimentos?

> - Dos sucesos A y B son **INCOMPATIBLES** si no se pueden realizar a la vez. En caso contrario, los sucesos son **COMPATIBLES.**
> - Dado un suceso cualquiera A, se llama **SUCESO CONTRARIO** de A, simbolizado por A´, al que no se verifica cuando se verifica A, y viceversa.

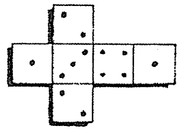
EJERCICIO 10.4

1 Fíjate en estas ruletas:



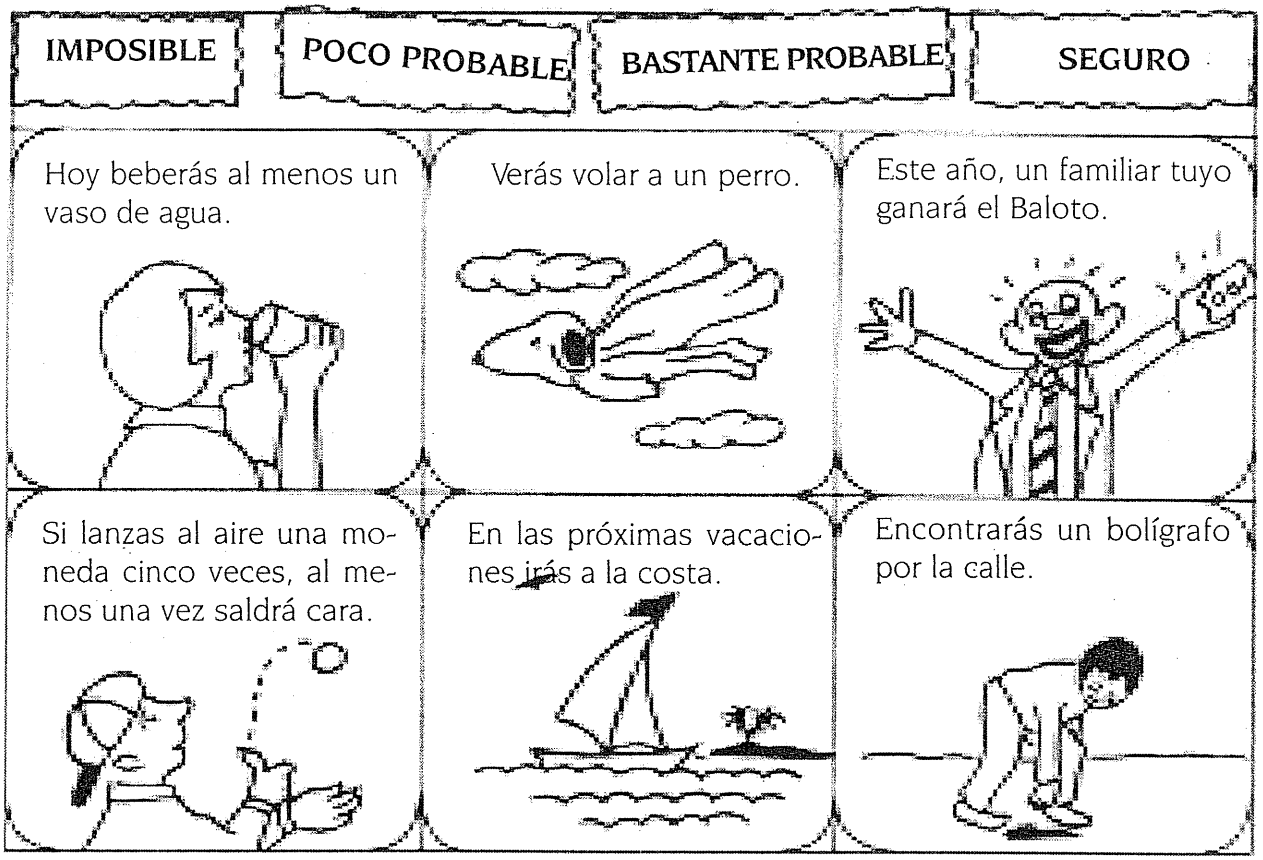
¿En cuáles de ellas los colores gris y blanco tienen la misma probabilidad de salir?

2. Supongamos que han construído un dado con estas caras:



a) ¿Qué resultados pueden salir?
b) ¿Cuáles de ellos tienen la misma probabilidad de salir?

3. De los siguientes carteles, elige el más adecuado para cada uno de estos hechos:



4. Una empresa tiene que elegir la marca de bombillas que va a comprar. Sus expertos han probado varias marcas durante un mes y han obtenido estos resultados:

MARCAS	A	B	C
No. de Bombillas	68	65	80
Bombillas fundidas	11	9	12

¿Cuál marca de bombillas comprará la empresa? ¿por qué?

5. Se lanza una chincheta varias veces. Ha salido 297 veces con la punta hacia arriba y 503 con la punta hacia abajo. Calcula la frecuencia relativa en cada caso. ¿Cuál de los dos resultados es más probable?

6. Cuatro amigos van a jugar al tiro al blanco con dardos. En el entrenamiento consiguieron estos resultados:

	Mariana	Sara	Juan	Camilo
No. de Lanzamientos	18	22	21	28
No. de Aciertos	3	5	4	6

a) Calcula las frecuencias relativas de aciertos para cada uno.
b) Ordena a los amigos según sea mayor o menor la probabilidad de estos resultados.

7 Indica la probabilidad de estos resultados:

a) Obtener un número par al lanzar un dado.
b) Conseguir el premio de un sorteo habiendo comprado todas las boletas.
c) Sacar sello al echar una moneda al aire.

8 Juan, Mariana y Camilo lanzan varias veces una moneda al aire y ésto es lo que obtuvieron:

Juan: **"mi frecuencia relativa de caras fue $\frac{18}{40}$".**

Mariana: **"la mía fue $\frac{42}{80}$".**

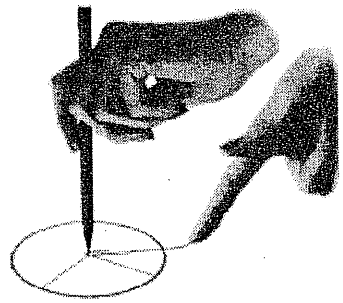
Lina: **"la mía, $\frac{97}{200}$".**

Camilo: **"Obtuve $\frac{540}{1000}$".**

a) ¿Cuántas veces realizó la experiencia cada uno?

b) ¿Quién obtuvo más éxito al sacar caras?

9 Realiza el siguiente experimento:



- Dibuja una circunferencia de radio 5cm, en un pedazo de cartulina y divídela en 4 sectores circulares iguales; luego, pinta 3 de azul y 1 de gris.
- Desenrolla un clip, dejando intacta la última curva, coloca la punta de un lápiz sobre el centro de la circunferencia y el clip a su alrededor. Has construído una ruleta, como la que muestra la figura siguiente.
- Para que la ruleta funcione basta darle un golpe al extremo del clip con el dedo índice.
- Sin hacer girar la ruleta, ¿cuál es la frecuencia esperada para el suceso "azul" y cuál para el suceso "gris"?
- Ahora, gira la ruleta 50 veces y confirma tu pronóstico completando la tabla siguiente:

No. DE GIROS	FRECUENCIA RELATIVA DEL AZUL	FRECUENCIA RELATIVA DEL GRIS	P (A)	P (G)
5				
10				
15				
20				
25				
30				

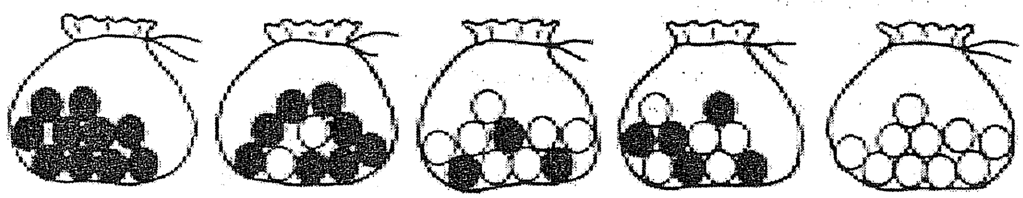
- Dibuja en un mismo diagrama, el polígono de frecuencias relativas (probabilidad) de ambos sucesos. ¿Hacia dónde tiende a estabilizarse la gráfica del suceso "azul"? ¿Y hacia dónde tiende a estabilizarse la gráfica del suceso "gris"?

10 Hemos tirado 5 veces una moneda de $500. Salieron 5 caras. ¿Qué es más probable que salga en el sexto lanzamiento: cara o sello?

11 Una urna tiene 10 bolas **negras** y 4 blancas. Se extrae al azar una bola. Halla las siguientes probabilidades:

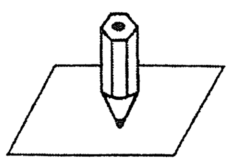
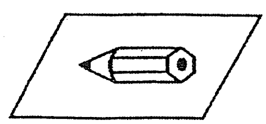
a) P (verde) b) P (negra) c) P (blanca)
d) P (no negra) e) P (no blanca)

12 Las siguientes bolsas contienen bolas **negras** o blancas. Indica a cuál bolsa se le puede asociar la frase:



a) Seguro que sale negra
b) Casi imposible que salga blanca
c) Poco probable que salga negra
d) Más probable que salga blanca
e) Imposible que salga negra
f) Igual de probable que salga negra o blanca

13 Numeramos las 6 caras de un lápiz. Lo hacemos rodar y observamos el número de la cara superior. Completa el siguiente cuadro:

SUCESO	PROBABILIDAD
0	
Par	
Menor que 5	
Obtener 1 ó 6	
El lápiz quedará así 	
El lápiz quedará así 	

10.2.3 Unión e intersección de sucesos

10.2.3.1. Unión de sucesos

- En el experimento aleatorio que consiste en lanzar un dado cúbico con las caras numeradas del 1 al 6, consideremos los siguientes sucesos:

A = "salir par" = { 2,4,6 }

B = "Salir número primo" = { 2,3,5 }

- Queremos formar el suceso:

  C = ¨salir par o número primo¨ = { 2,3,4,5,6 }

- A este suceso lo llamamos **Unión de A y B.**

> **SUCESO UNIÓN**
>
> - Dados dos sucesos A y B de un mismo experimento aleatorio, se llama **suceso unión de A y B** al suceso que se realiza cuando se verifica A o se verifica B o se verifican ambos.
> - El suceso **A unión B** se representa por **AUB**

10.2.3.2 Intersección de sucesos

- Consideremos nuevamente los sucesos A y B de la sección anterior:

  A = ¨salir par¨ = { 2,4,6 }

  B = ¨Salir número primo¨ = { 2,3,5 }

- Ahora queremos formar el suceso:

  C = ¨salir par y número primo¨ = { 2 }

- A este nuevo suceso lo llamamos **Intersección de A y B**

> **SUCESO INTERSECCIÓN**
>
> - Dados dos sucesos A y B de un mismo experimento aleatorio, se llama **suceso intersección de A y B** al suceso que se realiza cuando A y B se verifican simultáneamente.
> - El suceso **A intersección B** se representa por **A∩B**

Ejemplo

Consideremos el experimento consistente en la extracción de una carta de un poker y los siguientes sucesos:

A = ¨salir diamantes¨ ; B = ¨salir K¨ ; C = ¨salir as¨

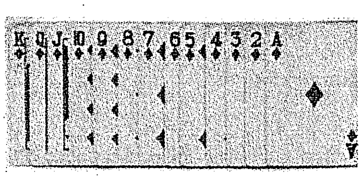
Expresemos el significado de los siguientes sucesos:

a) AUB   b) AUC   c) BUC   d) A∩B   e) A∩C   f) B∩C

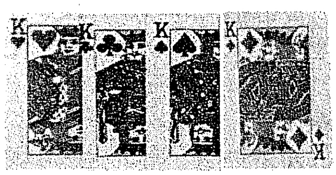
SOLUCIÓN

- Poker es un juego que consta de 54 cartas distribuidas en 4 grupos de 13 cartas y 2 joker o «comodines». Cada uno de los 4 grupos se denominarán «pintas» y son: Diamante (♦), Corazón rojo (♥), Trébol (♣) y Pica o Corazón negro (♠).
- Este es el significado de los sucesos:

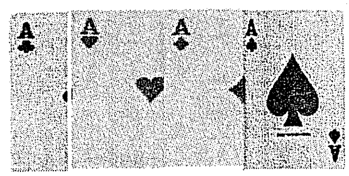
A = ¨salir diamantes¨ ;



B = ¨salir K¨ ;



C = ¨salir as¨



a) **AUB = «salir diamantes o K»**. Este suceso se verifica si sale cualquiera de los 13 diamantes o cualquiera de las K de pica, trébol o corazón rojo. En total, 16 cartas favorables.

b) **AUC = «salir diamantes o as»**. Este suceso se verifica si sale cualquiera de los 13 diamantes o cualquiera de los ases de pica, trébol o corazón rojo. En total, 16 cartas favorables.

c) **BUC = «salir K o as»**. Este suceso se verifica con cualquiera de las 4 K o de los 4 ases. En total, 8 cartas favorables.

d) **A∩ B = «salir diamantes y K» = «salir la K de diamantes»**: 1 sola carta favorable.

e) **A∩C = «salir diamantes y as» = «salir el as de diamantes»**: 1 sola carta favorable.

f) **B∩ C = «salir K y as»** = ∅. No hay ninguna carta que sea a la vez K y as.

10.2.4 Probabilidad de la unión

Experiencia

- Realicemos un experimento consistente en extraer una carta de poker y consideremos que de nuevo, los siguientes sucesos:

A = «salir K» **B = «salir as»** **C = «salir diamante»**

Vamos a determinar las probabilidades de los sucesos AUB y AUC

- Como **AUB = «salir K o as»**, entonces hay 8 cartas favorables a este suceso (4 K, 4 ases) de las 54 posibles.

Por tanto:

$$p(AUB) = \frac{8}{54}$$

- En este caso, los sucesos A y B son **Incompatibles**, pues no pueden verificarse a la vez. Notemos que:

$$p(AUB) = p(A) + p(B) = \frac{4}{54} + \frac{4}{54}$$

- Como **AUC = ¨salir K o diamante¨**, entonces hay 16 cartas favorables a este suceso (las 13 diamantes y las 3 K), ya que tenemos que descartar la K de diamantes que ya estaba contada. Por tanto:

$$p(AUC) = \frac{16}{54}$$

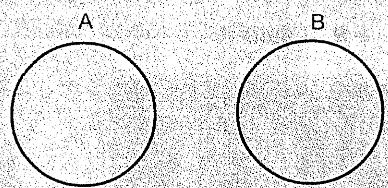
- En este caso, los sucesos A y C son **Compatibles**, pues pueden verificarse a la vez. Notemos que:

$$p(AUC) = p(A) + p(C) - p(A \cap C) = \frac{4}{54} + \frac{13}{54} - \frac{1}{54} = \frac{16}{40}$$

PROBABILIDAD DE LA UNIÓN

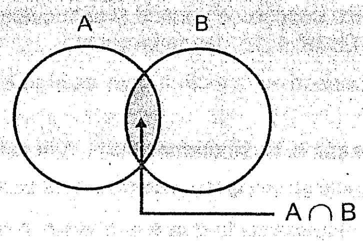
- Si A y B son dos **sucesos incompatibles** de un mismo experimento aleatorio, se verifica que la probabilidad de la unión de A y B es igual a la suma de las probabilidades de cada una de ellas; es decir:

Si A y B son incompatibles entonces p(AUB) = p(A) + p(B)



- Si A y B son dos **sucesos compatibles** de un mismo experimento aleatorio, se verifica que la probabilidad de la unión de A y B es igual a la suma de las probabilidades de cada una de ellas, menos la probabilidad del suceso intersección de A y B; es decir:

Si A y B son compatibles entonces p(AUB) = p(A) + p(B) - p(A ∩ B)



10.2.5 Probabilidad del suceso contrario

Experiencia

- Si en el experimento aleatorio consistente en lanzar un dado con las caras numeradas del 1 al 6 consideramos el suceso:

A = «salir multiplo de 3»

entonces se verifica que:

$$A = \text{«salir multiplo de 3»} = \{ 3,6 \} \Rightarrow p(A) = \frac{2}{6}$$

$$A' = \text{«no salir multiplo de 3»} = \{ 1,2,4,5 \} \Rightarrow p(A') = \frac{4}{6}$$

Notemos que:

p(A) + p(A') = 1 o que **p(A') = 1 - p(A)**

- Si en el experimento aleatorio consistente en extraer una carta del Poker, consideremos el suceso:

B = «salir diamantes»

entonces se verifica que:

$$B = \text{«salir diamantes»} \Rightarrow p(B) = \frac{13}{54}$$

$$B' = \text{«no salir diamantes»} \Rightarrow p(B') = \frac{41}{54}$$

Notemos que:

p(B) + p(B') = 1 o que **p(B') = 1 - p(B)**

- En una bolsa hay 6 bolas negras y 4 blancas. La relación existente entre las probabilidades de los sucesos:

A = «extraer bola negra»

A' = «extraer bola blanca»

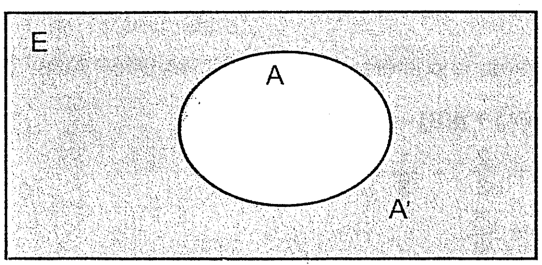
es la siguiente:

$$A = \text{«extraer bola negra»} \Rightarrow p(A) = \frac{6}{10}$$

$$A' = \text{«extraer bola blanca»} \Rightarrow p(A') = \frac{4}{10}$$

por tanto: **p(A') = 1 - p(A)**

- En general:



$\therefore$ AUA' = E

$\therefore$ p(AUA') = p(E) .... tomando probabilidad a ambos lados de la igualdad

$\therefore$ p(A) + p(A') = p(E) .... ¿por qué?

$\therefore$ p(A') = 1 - p(A) .... despejando

PROBABILIDAD DEL SUCESO CONTRARIO

La **probabilidad del suceso contrario** de A es igual a la unidad menos la probabilidad del suceso A:

$$p(A') = 1 - p(A)$$

ATENCIÓN

Las siguientes propiedades de las probabilidades deben tenerse en cuenta al resolver problemas:

P - 1 **$p(A \cup B)' = p(A' \cup B')$:** la probabilidad del suceso contrario de la unión de dos eventos es igual a la intersección de las probabilidades de los sucesos contrarios a dichos eventos.

P - 2 **$p(A \cap B') = p(A) - p(A \cap B)$:** la probabilidad de la intersección de un suceso A con el contrario de un suceso B es igual a la probabilidad del suceso A menos la probabilidad de la intersección de los sucesos A y B.

Ejemplo 1

Al finalizar las actividades normales del año escolar, un estudiante de grado 11, queda reforzando dos áreas: Matemáticas y Filosofía. El alumno debe presentar 2 pruebas, una de cada área, empezando con Matemáticas. La probabilidad de que gane la primera prueba es de $\frac{2}{3}$, la probabilidad de que gane la segunda prueba es de $\frac{1}{4}$ y la probabilidad de que gane ambas pruebas es $\frac{1}{6}$ ¿Cúal es la probabilidad de que:

a) gane por lo menos una de las dos pruebas?

b) no gane la prueba de Filosofía?

c) no gane ninguna de las dos pruebas?

d) Gane la primera y pierda la segunda?

SOLUCION

- Sean:

A: ganar la primera prueba; $p(A) = \frac{2}{3}$

B: ganar la segunda prueba; $p(B) = \frac{1}{3}$

$A \cap B$: ganar la primera y la segunda prueba; $p(A \cap B) = \frac{1}{6}$

- Ahora podemos contestar las preguntas:

a) Ganar por lo menos una prueba, es ganar la primera o la segunda; es decir: AUB. Por tanto:

$$\begin{aligned} p(A \cup B) &= p(A) + p(B) - p(A \cap B) \\ &= \frac{2}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} \\ &= \frac{5}{6} \end{aligned}$$

b) No ganar la prueba de Filosofía es no ganar la segunda; es decir, B'. Por tanto:

$$\begin{aligned} p(B') &= 1 - p(B) \\ &= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

c) No ganar ninguna de las dos pruebas, lo podemos indicar de la siguiente manera:

A': no ganar la primera prueba

B': no ganar la segunda prueba

A' B': no ganar la primera y no ganar la segunda

Por tanto:

$\therefore$ $p(A' \cap B') = p(A \cup B)'$ .... por P - 1

$\therefore$ $p(A' \cap B') = 1 - p(A \cup B)$ .... probabilidad del suceso contrario

$\therefore$ $p(A' \cap B') = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$

Luego, la probabilidad de no ganar ninguna de las 2 pruebas es: $\frac{1}{6}$

d) Ganar la primera y perder la segunda es $A \cap B'$. Por tanto:

$\therefore$ $p(A \cap B') = p(A) - p(A \cap B)$ .... por P - 2

$\therefore$ $p(A \cap B') = \frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

Ejemplo 2

Una urna contiene 5 bolas rojas, 4 amarillas, 6 verdes y 3 negras. Se extrae una bola al azar. Hallemos las siguientres probabilidades:

a) Que sea roja; que sea amarilla; que sea verde; que sea negra.

b) Que sea roja o amarilla

c) Que no sea verde

d) Que no sea ni verde ni negra

e) Que sea roja o verde o amarilla

SOLUCION

a) Como la urna contiene 18 bolas, entonces la probabilidad de que salgan bolas de un determinado color es la siguiente:

$$p(\text{roja}) = \frac{5}{18} \quad ; \quad p(\text{amarilla}) = \frac{4}{18} \quad ; \quad p(\text{verde}) = \frac{6}{18} \quad ; \quad p(\text{negra}) = \frac{3}{18}$$

b) $p(\text{roja o amarilla}) = p(\text{roja}) + p(\text{amarilla}) = \frac{5}{18} + \frac{4}{18} = \frac{9}{18}$

c) $p(\text{no verde}) = 1 - p(\text{verde}) = 1 - \frac{6}{18} = \frac{12}{18}$

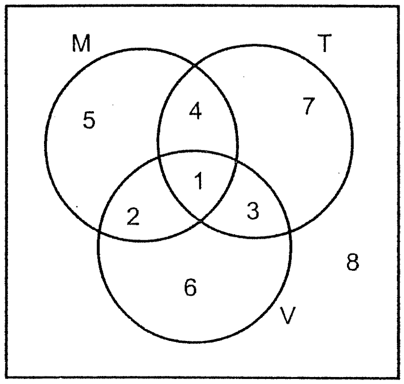
d)
$$\begin{aligned} p(\text{ni verde ni negra}) &= p(\text{no verde y no negra}) \\ &= p(\text{verde o negra})' \\ &= 1 - p\,(\text{verde o negra}) \\ &= 1 - (p(\text{verde}) + p(\text{negra})) \\ &= 1 - p(\text{verde}) - p(\text{negra}) \\ &= 1 - \frac{6}{18} - \frac{3}{18} \\ &= \frac{9}{18} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned} p(\text{roja o verde o amarilla}) &= p(\text{roja}) + p(\text{verde}) + p(\text{amarilla}) \\ &= \frac{5}{18} + \frac{6}{18} + \frac{4}{18} = \frac{15}{18} \end{aligned}$$

EJERCICIO 10.5

1 Suponga que una familia sale de vacaciones de verano en su casa rodante y que M es el evento: «sufrirán problemas mecánicos», T es el evento: «sufrirán una infracción por faltas de tránsito» y V es el evento: «llegarán a un campamento lleno». Teniendo en cuenta el siguiente diagrama de Venn, describa los eventos correspondientes a las siguientes regiones:

1.1 Región 5
1.2 Región 3
1.3 Regiones 1 y 2
1.4 Regiones 3,6,7 y 8 juntas
1.5 Regiones 4 y 7
1.6 Regiones 2 y 3
1.7 Regiones 1 y 4



2 Una tómbola contiene 3 bolas blancas y 4 bolas negras. Si sólo difieren en su color, ¿cuál es la probabilidad de que al extraer una bola de la tómbola, sea de color blanco?

3 Una urna contiene 5 esferas marcadas con los números 1,2,3,4 y 5. Para formar números de tres cifras, se extraen al azar 3 esferas. Halle la probabilidad de que el número formado sea par.

4 Cinco novios con sus respectivas novias, se van a acomodar al azar en una fila de 10 asientos. Hallar la probabilidad de que:

a) Queden alternados novios y novias   b) Las novias queden juntas

5 Una urna contiene 6 balotas blancas, 4 balotas rojas y 5 azules. Si sólo difieren en el color y se extrae una de ellas al azar, cuál es la probabilidad de que la balota sea:

a) Roja   b) Roja o azul   c) No sea azul

6 Una planta recibe reguladores de voltaje de dos proveedores diferentes, B1 y B2. El 75% de los reguladores se compra a B1 y el resto a B2. El porcentaje de reguladores defectuosos que se reciben de B1 es 8% y el de B2 es 10%. Determinar la probabilidad de que funcione un regulador de voltaje de acuerdo con las especificaciones (es decir, el regulador no está defectuoso).

7 En un colegio, todos los alumnos están cursando las asignaturas de matemáticas y lengua materna. La probabilidad de que un alumno seleccionado al azar repruebe matemáticas es 0.29, la probabilidad de que repruebe lengua materna es 0.18 y la probabilidad de que repruebe ambas asignaturas es 0.10.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que apruebe matemáticas y lengua materna?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que apruebe matemáticas y repruebe lengua materna?

c) Si sabemos que un alumno reprobó matemáticas, ¿cuál es la probabilidad de que repruebe lengua materna?

d) Si sabemos que un alumno reprobó lengua materna, ¿cuál es la probabilidad de que apruebe matemáticas?

8 Se lanza una moneda 3 veces. Calcule la probabilidad de obtener 3 caras o 3 sellos.

9 Se lanzan un par de dados balanceados. Si el número que aparece en la parte superior de cada dado es diferente, halle la probabilidad de que:

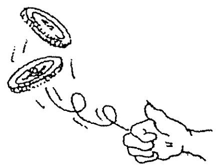
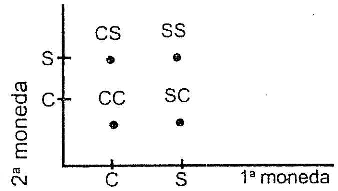
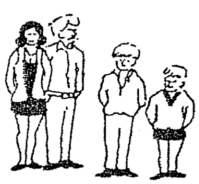
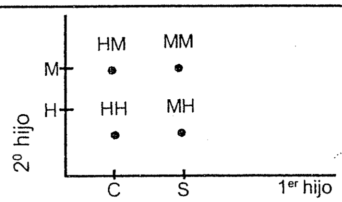
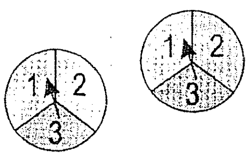
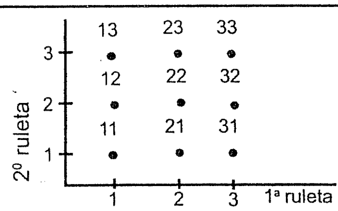
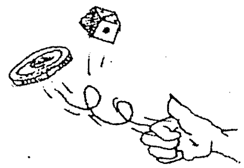
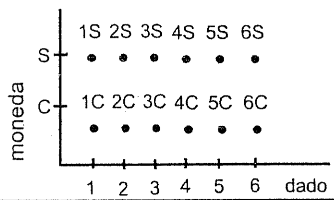
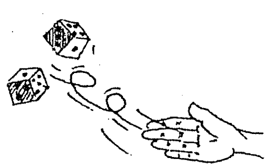
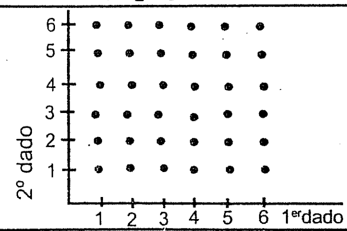
a) La suma sea 6 y no aparezca un 1   b) La suma sea mayor que 4   c) No aparezca 1 ni 6 probabilidad de que un artículo sea defectuosos es 0.06 para la máquina A, 0.02 para la máquina B y 0.01 para la máquina C. De la producción de un día se elige una caja al azar y de ella se extrae, igualmente al azar, un artículo, ¿cuál es la probabilidad de que el artículo salga defectuoso?

11. Supóngase que hay un grupo de 500 profesionales recién graduados de los cuales: 175 se especializaron en educación, 150 en comercio, 100 en una de las humanidades y 75 en ciencias de la salud. Supóngase, también, que se elige al azar una persona de este grupo. ¿Cuál es la probabilidad de que la persona elegida se haya especializado en educación o en comercio?

10.3 PROBABILIDAD CONDICIONADA

- Hasta el momento nos hemos referido a probabilidades en las que el denominador de la fracción es todo el espacio muestral E. Sin embargo, hay situaciones en las que nuestro interés se localiza en un subconjunto del espacio muestral, pues debemos tratar con eventos o sucesos **dependientes** o **condicionados**, donde la ocurrencia o no de un evento se ve afectado por la ocurrencia del otro.
- A continuación vamos a realizar experimentos compuestos formados por dos o tres experimentos simples y la forma de obtener los resultados posibles.

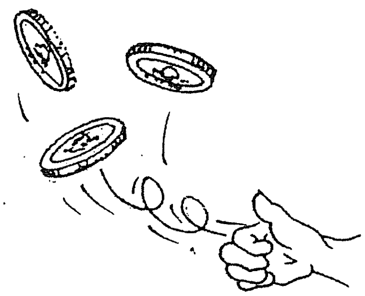
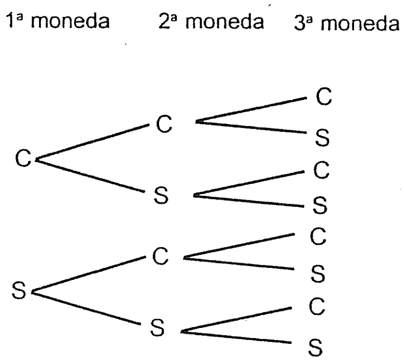
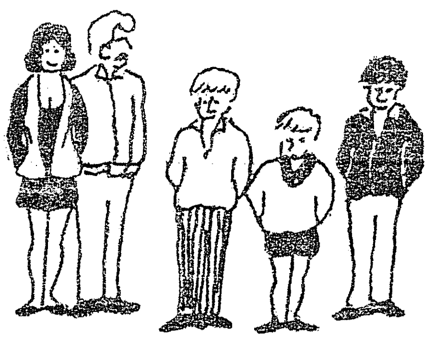
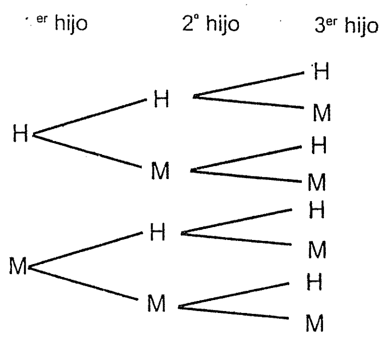
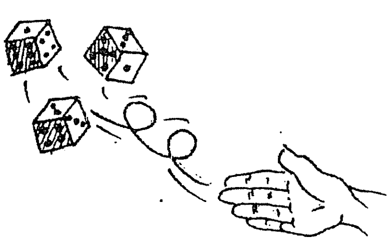
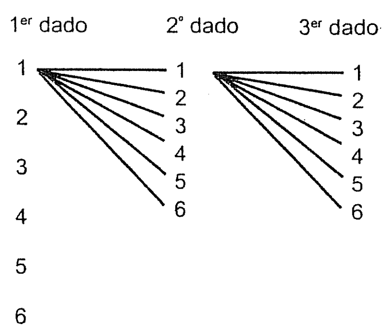
10.3.1 Formados por dos experimentos simples

Experimento	Diagrama cartesiano	Espacio muestral
 Se lanzan dos monedas		E = {CC, CS, SC, SS}
 Familias con dos hijos		E = {HH, HM, MH, MM}
 Se giran las agujas de dos ruletas		E = {11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33}
 Se lanzan un dado y una moneda		E = {1C, 2C, 3C, 4C, 5C, 6C, 1S, 2S, 3S, 4S, 5S, 6S}
 Se lanzan dos dados		E = {11, 12,13, 14, 15, 16, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 61, 62, 63, 64, 65, 66}

- Observemos los siguientes experimentos:
- Una forma de obtener todos los resultados posibles en experimentos compuestos formados por dos experimentos simples y, por tanto, su espacio muestral es utilizando **diagramas cartesianos.**

10.3.2 Formados por tres o mas experimentos simples

- Ahora observemos estos experimentos

Experimento	Diagrama de árbol	Espacio muestral	Nº de resultados
 Se lanzan tres monedas		CCC CCS CSC CSS SCC SCS SSC SSS	$2^3 = 8$
 Familias con tres hijos		HHH HHM HMH HMM MHH MHM MMH MMM	$2^3 = 8$
 Se lanzan tres dados		111 112 113 114 666	$6^3 = 216$

- Cuando un experimento compuesto está formado por tres o más experimentos simples, podemos utilizar **diagramas de árbol** para obtener el conjunto de resultados posibles; es decir, el espacio muestral.

10.3.3 Probabilidad de sucesos en experimentos compuestos

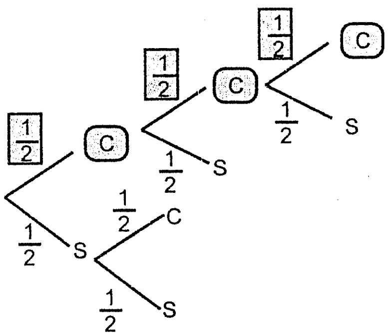
- Veamos cómo hallar la probabilidad de un suceso de un experimento compuesto, a partir de las probabilidades de los sucesos de los experimentos simples que lo componen.
- Con tal fin, realizaremos las siguientes experiencias, aplicando primero la regla de Laplace y luego calculando el producto de las probabilidades de los sucesos de los experimentos simples.

Primera Experiencia

- Lancemos tres veces una moneda. Hallemos la probabilidad **de obtener tres caras:**
- El espacio muestral es: E = {ccc,ccs,csc,css,scc,scs,ssc,sss}

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Casos favorables:} & 1\\ \text{Casos posibles:} & 8\end{array}\right\} \therefore\ p(c\ y\ c\ y\ c) = p(ccc) = \frac{1}{8}$$

- Observando el diagrama de árbol, podemos obtener la probabilidad calculando el producto de las probabilidades de cada suceso; así:



$$\mathbf{p\,(c\ y\ c\ y\ c) = p(c)\,.\,p(c)\,.\,p(c) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8}}$$

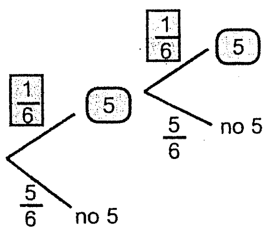
Segunda Experiencia

- Lanzamos dos dados. Hallemos la probabilidad de obtener un 5 en cada dado.
- El espacio muestral es: E = {(1,1),(1,2),...,(1,6),...,(6.1),(6,2),...,(6,6)}

  Sea A = "obtener un 5 en cada dado" = {(5,5)}

$$\left.\begin{array}{l}\text{Casos favorables del suceso A: 1}\\ \text{Casos posibles del experimento: 36}\end{array}\right\} \therefore\ p(5\ y\ 5) = \frac{1}{36}$$

- El diagrama del árbol nos muestra que podemos calcular la probabilidad multiplicando las probabilidades de cada suceso:



$$\mathbf{p\,(5\ y\ 5) = p(5)\cdot p(5) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{36}}$$

- En los experimentos compuestos, cada resultado viene dado por un camino del diagrama de árbol, si indicamos sobre cada rama el cálculo de su probabilidad.

Estas dos experiencias nos muestran que la probabilidad del camino la podemos obtener multiplicando las probabilidades de las ramas del camino. Este resultado se conoce con el nombre de la **REGLA DEL PRODUCTO** y dice así:

REGLA DEL PRODUCTO

La probabilidad de un camino es igual al producto de las **probabilidades** de las ramas de dicho camino.

10.3.4 Extracciones con devolución y sin devolución

Usemos diagramas de árbol para realizar las siguientes experiencias.

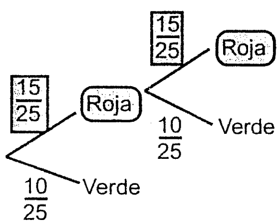
Primera Experiencia

- En una bolsa hay 15 bolas rojas y 10 verdes. Extraemos 2 bolas de la bolsa. Halla la probabilidad de que ambas sean rojas:

  a) Devolviendo la bola después de la primera extracción

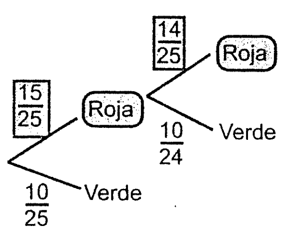
  b) Sin devolverla

- **Con devolución:** Formamos el diagrama de árbol:



$$\textbf{p(roja y roja)} = \frac{15}{25} \cdot \frac{15}{25} = \frac{9}{25}$$

- **Sin devolución:** Formamos el diagrama de árbol:



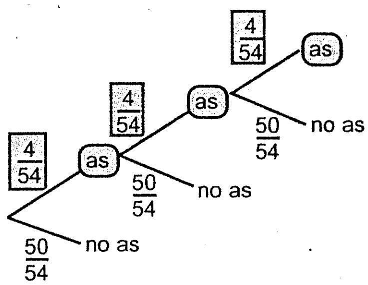
$$\textbf{p(roja y roja)} = \frac{15}{25} \cdot \frac{14}{24} = \frac{7}{20}$$

Segunda Experiencia

- Extraemos de una baraja de poker 3 cartas. Hallemos la posibilidad de que sean 3 ases.

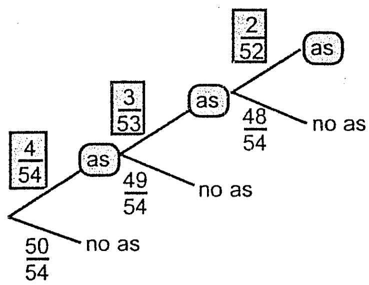
  a) Con devolución
  b) Sin devolución

- **Con devolución:** Formamos el diagrama de árbol:



$$p(\text{as y as y as}) = \frac{4}{54} \cdot \frac{4}{54} \cdot \frac{4}{54} = \frac{8}{19683}$$

- **Sin devolución:** Formamos el diagrama de árbol:



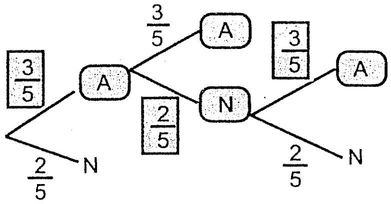
$$\mathbf{p(as\ y\ as\ y\ as)} = \frac{4}{54} \cdot \frac{3}{53} \cdot \frac{2}{52} = \frac{1}{6.201}$$

Tercera Experiencia

- En una urna hay 5 letras: 3 AES (A) y 2 ENES (N). Extraemos una letra, anotamos lo que sale y repetimos el procedimiento dos veces más. ¿Cúal es la probabilidad de obtener las letras de la palabra ANA, en ese orden?

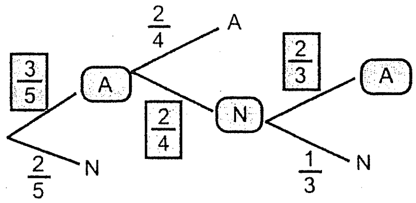
  a) Con devolución
  b) Sin devolución

- **Con devolución:** Formamos el diagrama de árbol:



$$\mathbf{p\ (ANA)} = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{18}{125}$$

- **Sin devolución:** Formamos el diagrama de árbol:



$$p(ANA) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{12}{60} = \frac{1}{5}$$

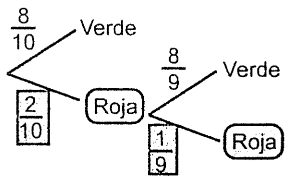
> - En las **EXTRACCIONES CON DEVOLUCIÓN** el resultado de la primera extracción no influye o condiciona el resultado de la segunda.
> - En las **EXTRACCIONES SIN DEVOLUCIÓN** el resultado de la primera extracción influye o condiciona el resultado de la segunda.

10.3.5 Probabilidad condicionada: sucesos dependientes e independientes

Primera Experiencia

- En una bolsa hay 10 bolas, de las que 8 son verdes y 2 son rojas. Se eligen 2 bolas, al azar. Hallemos la probabilidad de que ambas sean rojas.

- Si formamos el diagrama de árbol tenemos:



$$p(\text{roja y roja}) = \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{45}$$

- Notemos que $\frac{1}{9}$ es la probabilidad de que la segunda bola sea roja, condicionada a que la primera también sea roja. Esta probabilidad se acostumbra expresar así:

$$p(\text{bola roja la } 2^a \mid \text{bola roja la } 1^a)$$

y se denomina **probabilidad condicionada**, por tanto:

$$p(\text{bola roja la } 1^a \text{ y bola roja la } 2^a) = p(\text{bola roja la } 1^a) \cdot p(\text{bola roja la } 2^a \mid \text{bola roja la } 1^a)$$

y despejando:

$$p(\text{bola roja la } 2^a \mid \text{bola roja la } 1^a) = \frac{p(\text{bola roja la } 1^a \text{ y bola roja la } 2^a)}{p(\text{bola roja la } 1^a)}$$

- En general:

PROBABILIDAD CONDICIONADA

- Dados dos sucesos A y B, se llama **probabilidad de B condicionada a A,** y se expresa **p(B|A),** al cociente:

$$p(B|A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}, \text{ con } p(A) > 0$$

- De manera análoga, $p(A|B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$, con $p(B) > 0$

- De la definición anterior se deduce que: $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B|A) = p(B) \cdot p(A|B)$
- Esta definición de probabilidad condicionada permite formular las siguientes definiciones:

SUCESOS DEPENDIENTES E INDEPENDIENTES

- Dos sucesos A y B son **INDEPENDIENTES** si la realización de A no condiciona la realización de B, es decir:

$$p(B|A) = p(B) \quad \text{o} \quad p(A|B) = p(A)$$

- Dos sucesos A y B son **DEPENDIENTES** si la realización de A condiciona la realización de B, es decir:

$$p(B|A) \neq p(B)$$

- En las **extracciones con devolución** los sucesos son siempre **independientes.**

  En las **extracciones sin devolución** los sucesos son siempre **dependientes.**

- Si A y B son **independientes:** $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$

Ejemplo 1

A los habitantes de una ciudad se les hizo una encuesta con el proposito de determinar el número de lectores de los periodicos A y B. Los resultados de las encuestas fueron los siguientes: 20% de los habitantes lee A, el 16% lee B y un 1% lee ambos periodicos. Si se selecciona al azar un lector de A, ¿Cúal es la probabilidad de que tambien lea B?

SOLUCIÓN

- Sean

  E_1 : lectores de A
  E_2 : lectores de B

- Puesto que: $p(E_1) = 0.2$; $p(E_2) = 0.16$ y $p(E_1 \cap E_2) = 0.01$ entonces: $p(E_2|E_1) = \dfrac{p(E_1 \cap E_2)}{p(E_1)} = \dfrac{0.01}{0.2} = 0.05$

Ejemplo 2

Una caja contiene 6 balones blancos y 4 negros. Calculemos la probabilidad de que al extraer dos balones de la caja:

a) Ambos sean del mismo color
b) Sean de diferente color
c) Al menos uno sea negro

Resolvamos el problema considerando las extracciones con devolución y sin devolución:

SOLUCIÓN

- Consideremos los siguientes sucesos:

B1: Obtener un balón blanco en la primera extracción
B2: Obtener un balón blanco en la segunda extracción
N1: Obtener un balón negro en la primera extracción
N2: Obtener un balón negro en la segunda extracción

- **Sin devolución:**

a) Sea E1 el evento: "obtener dos balones del mismo color". Luego los balones pueden ser blancos o negros:

$p(E1) = p[(B1 \cap B2) \cup (N1 \cap N2)]$ .... por ser sucesos incompatibles

$\therefore p(E1) = p(B1 \cap B2) + p(N1 \cap N2)$

$\therefore p(E1) = p(B1) \cdot p(B2/B1) + p(N1) \cdot p(N2/N1)$.......... por ser sucesos dependientes

$$\therefore p(E1) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} + \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{7}{15}$$

b) Sea E2 el evento: "obtener dos balones de color diferente". Puede ocurrir que el primer balón sea de color blanco y el segundo de color negro, o el primero sea negro y el segundo sea blanco; por tanto:

$\therefore p(E2) = p(B1 \cap N2) + p(N1 \cap B2)$............................... ¿por qué?

$\therefore p(E2) = p(B1) \cdot p(N2/B1) + p(N1) \cdot p(B2/N1)$.......... ¿por qué?

$$\therefore p(E2) = \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} + \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{8}{15}$$

c) Sea E3 el evento: "obtener al menos un balón negro". Puede ocurrir que el primer balón sea negro y el segundo blanco, o el primero sea blanco y el segundo sea negro o que los dos sean negros; por tanto:

$\therefore p(E3) = p(N1 \cap B2) + p(B1 \cap N2) + p(N1 \cap N2)$.. ¿por qué?

$\therefore p(E3) = p(N1) \cdot p(B2/N1) + p(B1) \cdot p(N2/B1) + p(N1) \cdot p(N2/N1)$............ ¿por qué?

$$\therefore p(E3) = \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} + \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} + \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{2}{3}$$

Con devolución

Se regresa a la caja el primer balón extraído, antes de realizar la segunda extracción.

a) $p(E1) = p(B1 \cap B2) + p(N1 \cap N2)$ .... ¿por qué?

$\therefore p(E1) = p(B1) \cdot p(B2/B1) + p(N1) \cdot p(N2/N1)$

$$\text{Como: } \begin{cases} p(B2/B1) = p(B2) = \dfrac{6}{10} \\ p(N2/N1) = p(N2) = \dfrac{4}{10} \end{cases}$$ .... ¿por qué?

$$\therefore p(E1) = \frac{6}{10} \cdot \frac{6}{10} + \frac{4}{10} \cdot \frac{4}{10} = \frac{13}{25}$$

b) $p(E2) = p(B1 \cap N2) + p(N1 \cap B2)$

$\therefore p(E2) = p(B1) \cdot p(N2/B1) + p(N1) \cdot p(B2/N1)$

$$\therefore p(E2) = \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{10} + \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{10} = \frac{12}{25}$$

c) $p(E3) = p(N1 \cap B2) + p(B1 \cap N2) + p(N1 \cap N2)$

$\therefore p(E3) = p(N1) \cdot p(B2/N1) + p(B1) \cdot p(N2/B1) + p(N1) \cdot p(N2/N1)$

$$\therefore p(E3) = \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{10} + \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{4}{10} = \frac{16}{25}$$

EJERCICIO 10.6

1 Se seleccionó un grupo de 100 personas adultas y se clasificó según el sexo y el factor RH. Los resultados obtenidos aparecen en la siguiente tabla:

Factor RH	RH^+	RH^-	TOTAL
Hombre	50	10	60
Mujer	35	5	40
Total	85	15	100

Si se elige una persona de este grupo al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea hombre?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea hombre y tenga factor RH^-?
c) Si la persona elegida es una mujer, ¿cuál es l probabilidad de que tenga factor RH^-?

2. Si $p(A) = 0.6$, $p(A \cap B) = 0.25$ y $p(B') = 0.7$:

a) ¿A qué es igual $p(B/A)$?

b) ¿Son A y B eventos independientes? ¿por qué?

c) ¿A qué es igual $p(A')$?

3. Un bombardero debe destruir un campamento enemigo utilizando para ello tres misiles. La posibilidad de destruir el campamento con cualquiera de los misiles es $\frac{1}{3}$. Hallar la probabilidad de que el campamento quede destruido si el bombardero utiliza los tres misiles.

4. Dos niños, Santiago y Camilo, forman parte de un grupo de 6 personas que han colocado su cuaderno de matemáticas sobre la mesa. Cada niño selecciona un cuaderno al azar. Hallar la probabilibad de que:

a) Santiago elija su propio cuaderno.

b) Tanto Santiago como Camilo elijan sus propios cuadernos.

5. Tres atletas X, Y y Z, participan en cuatro competencias de los 100 metros libres y las probabilidades de ganar cada uno de ellos son respectivamente 0.4,0.5,0.1. ¿Cúal es la probabilidad de que:

a) el atleta Y llegue primero en las cuatro competencias?

b) el atleta Y llegue primero en dos y X y Z lleguen de primero cada uno, en una competencia?

6. En un colegio los alumnos de 10° y 11° están cursando las asignaturas de Geometría y Estadística. La probabilidad de que un alumno escogido al azar repruebe Geometría es 0.29, la probabilidad de que repruebe Estadística es 0.18 y la probabilidad de que repruebe ambas es 0.10

a) ¿Son independientes los eventos reprobar Geometría y reprobar Estadística? ¿Por qué?

b) ¿Cúal es la probabilidad de que apruebe Geometría y Estadística?

c) ¿Cúal es la probabilidad de que apruebe Geometría y repruebe Estadística?

d) Si sabemos que un alumno reprobó Geometría, ¿cúal es la probabilidad de que repruebe Estadística?

e) Si sabemos que un alumno reprobó Estadística, ¿cúal es la probabilidad de que apruebe Geometría?

7. La Secretaría de Educación de una ciudad recibe 25 solicitudes para una vacante existente para un cargo de coordinador académico de un colegio. Entre las solicitudes, 10 corresponden a hombres y las restantes a mujeres. Diecisiete de los aspirantes acreditan título de Maestría y ocho acreditan certificados de Licenciados en Educación. La elección para llenar la vacante se hace al azar entre las 25 solicitudes.

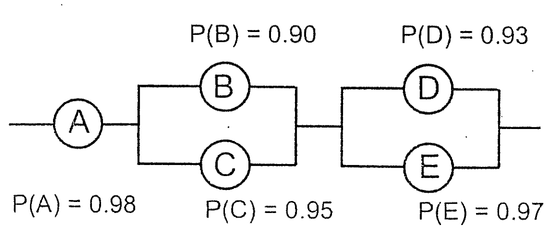
a) ¿Cúal es la probabilidad de que la solicitud escogida corresponda a un aspirante con certificado de Licenciado en Educación?

b) ¿Cúal es la probabilidad de que una mujer sea seleccionada si se sabe que hay que hacer la elección al azar solamente entre los aspirantes que acreditan certificado de Licenciado en Educación?

c) ¿Cúal es la probabiliad de que una elección al azar dé como resultado una mujer y una persona con certificado de Licenciado en Educación?

8. Se hace entrega de una encuesta a un grupo de personas para conocer su opinión acerca de un proyecto. Del total de encuestados, el 46% estuvo en desacuerdo con el proyecto. Entre los que se opusieron, el 57% eran menores de 30 años. De todas las encuestas elaboradas se eligió una al azar. ¿Cúal es la probabilidad de que la encuesta elegida corresponda a una persona que está en desacuerdo con el proyecto y que esta persona sea menor de 30 años?

9. Un sistema contiene 5 componentes que se encuentran conectados entre sí como se muestra en la figura, donde las probabilidades indican la seguridad de que la componente funcione adecuadamente. Si se supone que el funcionamiento de una componente en particular es independiente del de las démas, ¿cuál es la probabilidad de que el sistema funcione?



10 Una planta recibe reguladores de voltaje de dos proveedores diferentes, B1 y B2; el 75% de los reguladores se compra a B1 y el resto a B2. El porcentaje de reguladores defectuosos que se reciben de B1 es 8% y el de B2 es 10%. Determinar la probabilidad de que funcione un regulador de voltaje de acuerdo con las especificaciones (es decir, el regulador no está defectuoso).

Taller de la Unidad 10

1 Responde en tu cuaderno a las siguientes preguntas:

1.1 En las técnicas de recuento, ¿ qué establece la regla del producto?

1.2 ¿Qué es una variación simple? ¿Cómo se calcula el número de variaciones simples de m elementos tomados de n en n?

1.3. ¿Qué es una variación con repetición? ¿Cómo se calcula el número de variaciones con repetición de m elementos tomados de n en n?

1.4. ¿Qué son permutaciones de n elementos? ¿Cómo se calcula el número de permutaciones de n elementos?

1.5 ¿Qué es una combinación simple? ¿ Cómo se calcula el número de combinaciones simples de m elementos tomados de n en n?

1.6 ¿Qué son fenómenos o experiencias aleatorias?

1.7 ¿Qué es un espacio muestral? ¿Qué es un suceso? ¿Cuándo un suceso es elemental?

1.8 ¿Cuándo se dice que un suceso es seguro o cierto? ¿Cuándo se dice que un suceso es imposible?

1.9 ¿Qué es probabilidad de un suceso?

1.10 ¿Qué establece la Regla de Laplace?

1.11 ¿Cómo se calcula la probabilidad de la unión de dos sucesos A y B cuando A y B son incompatibles?

1.12 ¿Cómo se calcula la probabilidad del suceso contrario A´ de un suceso A?

1.13 ¿A qué es igual la $p(A \cup B)'$? ¿ Y $p(A \cap B')$.

1.14 ¿Qué se entiende por probabilidad condicionada?

1.15 ¿En qué consiste la regla del producto para calcular el resultado de un experimento compuesto?.

1.16 ¿Qué es una extracción con devolución y una extracción sin devolución?

1.17 ¿Cómo se obtiene la probabilidad de un suceso B condicionada a la ocurrencia de un suceso A?

1.18 ¿Cuándo dos sucesos son independientes? ¿y cuándo son dependientes?

2 ¿Cuántos números de tres cifras se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3, 4 y 5 si :

a) no se permiten repeticiones?

b) Se permiten repeticiones?.

3 ¿Cuántos números se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3 y 4 si no se permiten repeticiones?

4 ¿Si en un torneo de basquetbol toman parte ocho equipos, determinar el número de formas diferentes en que se pueden decidir los lugares primero, segundo y tercero, si los empates no son posibles.

5 Una joven tiene cuatro faldas y seis blusas. ¿Cuántas combinaciones diferentes de falda y blusa puede vestir?

6 Las placas de automóvil en un cierto lugar empiezan con una letra del alfabeto seguida por cinco números, usando los dígitos 0, 1, 2, . . . , 9. Determinar cuántas placas diferentes es posible hacer si:

a) el primer dígito que sigue a la letra no puede ser 0.

b) la letra no puede ser o ó i y el primer dígito no puede ser 0.

(Suponga que tenemos 27 letras en el alfabeto).

7 Se va a llenar una fila de seis asientos de un salón de clases, mediante la elección de un grupo de 10 estudiantes:

a) ¿De cuántas maneras diferentes pueden ocuparse los asientos ?

b) Si hay seis hombres y cuatro mujeres en el grupo y se deben alternar los varones y las mujeres, ¿cuántos arreglos diferentes pueden obtenerse cuando se sientan?

8 Una fábrica de carros puede fabricar 5 tipos de motores distintos, 3 tipos de carrocerías distintas y de 6 colores distintos. ¿Cuántos carros distintos podría producir la fábrica ?

9 Si hay 5 carreteras de la ciudad P a la ciudad Q, ¿de cuántas maneras diferentes puede ir un conductor de P a Q y regresar, si :

a) no debe ir y volver por la misma carretera?

b) Debe ir y volver por la misma carretera?

c) puede ir y volver por la ruta que elija.

10 Un estudiante que ingresa a la Universidad debe tomar cursos en las áreas de Matemáticas, Sociales, Humanidades e Idiomas. Si puede elegir entre tres (3) cursos de Matemáticas, dos (2) de Idiomas, cuatro (4) de Sociales y tres (3) de Humanidades, ¿de cuántas maneras puede hacer su programa de estudio, si:

a) debe tomar un curso en cada área?

b) Debe tomar un curso en cada área y gana un examen con el cual no necesita tomar Idiomas?

c) Sólo puede tomar un curso en Matemáticas, uno en Idiomas y uno en Humanidades.

d) Debe tomar dos (2) cursos de Matemáticas y uno (1) de cada una de las áreas restantes, e importa el orden de elección.

e) Debe tomar dos (2) cursos de Matemáticas, tres (3) en Sociales y dos (2) en Humanidades, e importa el orden de elección.

11 ¿De cuántas maneras pueden sentarse tres damas y dos caballeros en una fila de cinco (5) asientos, de tal manera que :

a) pueden hacerlo en cualquier sitio?
b) Las damas se sientan aparte de los caballeros?
c) Se sientan alternados?
d) Una dama y un caballero insisten en sentarse juntos?

12 ¿Cuál de las siguientes combinaciones te parece más probable como resultado del sorteo del LOTO?

a) 1, 2, 3, 4, 5, 6 b) 5, 10, 15, 20, 25, 30
c) 38, 40, 42, 44, 46, 48 d) 5, 13, 17, 29, 37, 41

13 En una bolsa hay 10 bolas numeradas del 0 al 9. Se extrae una. Halla la probabilidad de que:

a) Sea 1 b) sea un número par
c) Sea impar y múltiplo de 3 d) no sea el 5

14 Se elige al azar una de las páginas de este libro:

a) ¿De cuántos elementos consta el espacio muestral?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea una página de esta unidad ?

15 Lanzamos dos dados idénticos y anotamos la suma obtenida.

a) ¿Cuál es el espacio muestral de puntajes y cuál el de pares ordenados?
b) Calcula la probabilidad de que la suma sea 2 y de que sea 7.
c) ¿Son los puntajes 2 y 7 equiprobables?. ¿Por qué?

16 Una urna contiene 5 bolas blancas, 3 verdes y 4 rojas. Sacamos una bola, anotamos su color y la devolvemos a la urna. Después efectuamos una segunda extracción. Halla la probabilidad de que las dos bolas sean del mismo color.

17 Resuelve el mismo problema anterior, pero sin devolver la primera bola (sin reemplazo).

18 En una bolsa hay tres cartones con las letras E, L y E. Extraemos, uno a uno, los tres cartones. Calcula la probabilidad de que obtengamos precisamente la palabra ELE.

19 Santiago tiene en el bolsillo dos monedas de $ 500, 3 de $ 200 y 2 de $ 100. Saca 2 monedas. Calcula la probabilidad de que saque:

a) $ 1000 b) $ 700 c) $ 300.

20 Liste un espacio muestral para cada uno de los siguientes experimentos:

a) Lanzar una moneda de \$200 y otra de \$ 500, en ese orden, y registrar la forma en que caen.

b) Lanzar un dado y una moneda de \$ 200, en ese orden, y registrar el orden en que caen.

c) Seleccionar al azar a un estudiante universitario y preguntarle si posee automóvil.

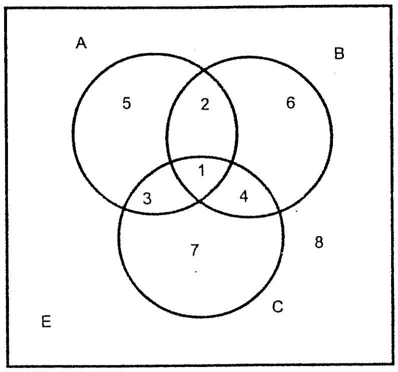
21 Describa al menos dos espacios muestrales diferentes para el experimento de seleccionar a dos estudiantes de 5 y registrar los resultados.

22 Sea A el evento «el clima de mañana será caluroso», y B «mañana lloverá». Describa los siguientes eventos compuestos:

a) $A \cup B$ c) $A' \cap B'$

b) $A \cap B$ d) $A' \cup B'$

23 El siguiente diagrama de Venn describe la ocurrencia de tres eventos A, B y C:



$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$A = \{1, 2, 3, 5\}$

$B = \{1, 2, 4, 6\}$

$C = \{1, 3, 4, 7\}$

Hacer una lista de los números que corresponden a los siguientes eventos:

a) $A' \cap B$ c) $(A \cup B)' \cap C$

b) $(A' \cup B) \cap C$ d) $(A \cap B) \cup (C' \cap A)$

24 Se lanzan tres dados sobre una superficie lisa y plana. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los puntos obtenidos sea:

a) Igual a 3?   b) Menor que 3?   c) Mayor que 3?

25 Se lanzan dos dados sobre una superficie liza y plana. ¿Cuál es la probabilidad de que la diferencia entre el mayor y el menor de los puntos respectivos sea mayor o igual que 3?

26 Se escogen al azar dos dígitos del 1 al 9, incluyendo estos números. Si la suma es par, hallar la probabilidad de que ambos números sean impares.

27 Muchas instituciones bancarias emplean modelos computarizados de crédito con el propósito de dar un determinado puntaje a todas las solicitudes de préstamo. Este puntaje se emplea como ayuda para decidir cuándo se otorga el crédito. Supóngase que el 3% de todos los préstamos que se otorgan presentan problemas por incumplimiento de pago y que los modelos de crédito son precisos en un 80% al predecir menos créditos. Si el 85% de todas las solicitudes reciben puntuaciones favorables por los modelos computarizados y se les otorga el préstamo, determinar la probabilidad de que una solicitud que recibe una puntuación favorable y a la que se el otorga el préstamo, no presente ningún problema para el pago de éste.

28 Durante los últimos años mucho se ha escrito sobre la posible relación entre el fumar y el cáncer pulmonar. Supóngase que en un centro médico, de todos los fumadores de quienes se sospecha que tenían cáncer pulmonar, el 90% lo tenía mientras que únicamente el 5% de los no fumadores lo padecía. Si la proporción de fumadores es de 0.45, ¿cuál es la probabilidad de que un paciente con cáncer pulmonar, seleccionado al azar, sea fumador?

29 Los empleados de la compañía El Antojo, se encuentran separados en tres divisiones: administración (A), operación de planta (O) y ventas (V). La siguiente tabla indica el número de empleados en cada división clasificados por sexo:

	Mujer (M)	Hombre (H)	Totales
Administración	20	30	50
Operación de planta	60	140	200
Ventas	100	50	150
Totales	**180**	**220**	**400**

a) Si se elige al azar un empleado:
   1. ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer?
   2. ¿Cuál es la probabilidad de que trabaje en ventas?
   3. ¿Cuál es la probabilidad de que sea hombre y trabaje en la división de administración?
   4. ¿Cuál es la probabilidad de que trabaje en la división de planta, sí es mujer?
   5. ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer, si trabaja en la división de operación de planta?

b) ¿Son los eventos V y H estadísticamente independientes?

c) ¿Son los eventos A y M estadísticamente independientes?

d) Determinar las siguientes probabilidades:

1. P (AUM) 2. P(AUM´) 3. P(O∩H)

30 Una familia tiene 3 hijos. Determinar todas las posibles permutaciones, respecto al sexo de los hijos. Bajo suposiciones adecuadas.

a) ¿cuál es la probabilidad de que, exactamente, dos de los hijos tengan el mismo sexo?

b) ¿cuál es la probabilidad de tener un varón y dos mujeres?,

c) ¿cuál es la probabilidad de tener tres del mismo sexo?

31 Se lanza una moneda diez veces y en todos los lanzamientos el resultado es cara.

a) ¿Cuál es la probabilidad de este evento?,

b) ¿Cuál es la probabilidad de que en el decimoprimero lanzamiento el resultado sea sello?

32 La tabla adjunta muestra las frecuencias para el daltonismo, donde *D* representa el evento de que una persona sea daltónica y *D´* el evento de cuando no lo sea. *H* significa que una persona sea hombre y *H´* que sea mujer.

	H	*H'*
D	0.042	0.007
D'	0.485	0.466

¿Son eventos independientes *D* y *H?*

Prepárate para las Pruebas ICFES

1 Una fábrica de autos ofrece a sus posibles compradores una selección de 4 colores, 3 diferentes sistemas hidráulicos, un parabrizas polarizado o normal, y compuertas dobles o sencillas. ¿Cuántos diseños diferentes están disponibles para un comprador?

a) 12 b) 24 c) 48 d) 18

2 Se tiene un libro de Literatura, uno de Ciencias, uno de Filosofía, uno de Sicología y uno de Ëtica. ¿De cuántos modos pueden disponerse en un estante si el de Etica siempre es el último?

a) 120 b) 2 c) 24 d) 35

3 ¿Cuántos titulares de 11 futbolistas pueden hacerse con 22 jugadores si cada jugador puede jugar en cualquier posición?

a) 11! b) $\frac{22!}{11!\ 11!}$ c) $\frac{22!}{11!}$ d) 22!

4 Se lanzan dos dados y una moneda. ¿Cuál es la probabilidad de que salga 6 y 6 en los dados y sello en la moneda?

a) $\frac{1}{71}$ b) $\frac{1}{72}$ c) $\frac{1}{73}$ d) $\frac{1}{74}$

5 En un baile de disfraces se reúnen 10 matrimonios. Si se eligen dos personas al azar, entonces la probabilidad de que dos personas sean esposos es:

a) $\frac{1}{10}$ b) $\frac{1}{100}$ c) $\frac{10}{19}$ d) $\frac{1}{200}$

RESPUESTAS

NÚCLEO TEMÁTICO 1

COMPRENSIÓN DE LECTURA: **1.** a., **2.** d., **3.** b., **4.** b., **5.** c.

EJERCICIO 1 – 1

2. a) V b) F c) F d) F e) F f) V
3. a) V b) V c) V d) F e) F f) V g) V
4. a) $\{x/x \le 5\} = (-\infty;5]$ b) $\{x/-4 < x < 4\} = (-4;4)$ c) $\{x/x < -4 \text{ o } x \ge 4\} = (-\infty;-4) \cup [4;+\infty)$
d) $\{x/-2 < x < 7\} = (-2;7)$
7. a) $[-3;7]$ b) $[2;10]$ c) $[7;9]$ d) $[2;6]$ e) $(-\infty;-8) \cup [-5;0]$ f) $(-2;10]$

8. $(-2;+\infty)$ **9.** $\left(-\infty;\frac{3}{4}\right]$ **10.** $[4;8]$ **11.** $\left(-\frac{5}{3};\frac{4}{3}\right]$ **12.** $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right) \cup (0;+\infty)$

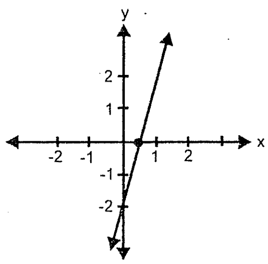
13. $(-\infty;-1) \cup \left(\frac{1}{3};3\right)$ **14.** $(-\infty;-2) \cup (2;+\infty)$ **15.** $(-\infty;-5) \cup (3;+\infty)$ **16.** $\left[-1;\frac{1}{2}\right]$ **17.** $\left(-3;\frac{3}{4}\right)$

18. $\left(-\infty;\frac{3}{2}\right) \cup \left(-\frac{3}{2};1\right)$ **19.** $(-3;-1] \cup \left[-\frac{1}{2};2\right]$ **20.** $\left[\frac{5}{8};+\infty\right)$ **21.** $(-2;5)$ **22.** $(-\infty;1] \cup [4;+\infty)$ **23.** $\left(2;\frac{13}{4}\right]$

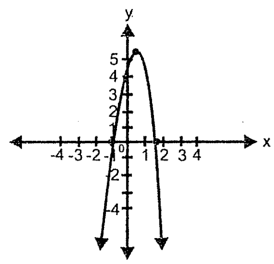
EJERCICIO 1 – 2

1. d) **2.** a) **3.** b) **4.** b) **5.** a) **6.** a) **7.** c) **8.** a)
9. b) **10.** a) **11.** c)

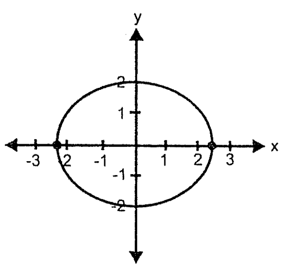
$\left(\frac{2}{5},0\right),(0,-2)$
b) No tiene simetrías
c) D = R , I = R



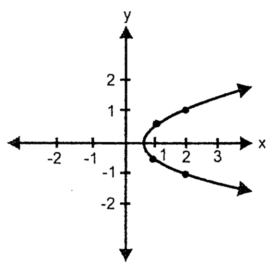
13. a) $\left(\frac{5}{3},0\right),(-1,0),(0,5)$
b) No es simétrica
c) D = R , I = $\left(-\infty;\frac{16}{3}\right]$



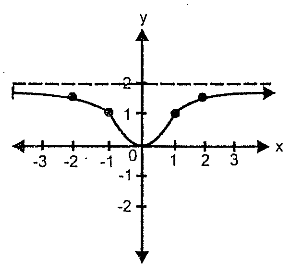
14. a) $(-\sqrt{5},0),(\sqrt{5},0),(0,2),(0,-2)$
b) Tiene todas las simetrías
c) D = $[-\sqrt{5},\sqrt{5}]$, I = $[-2,2]$



15. a) $\left(\frac{2}{3},0\right)$
b) Simétrica con el eje x
c) D = $\left[\frac{2}{3},+\infty\right)$, I = $\mathbb{R}$



16. a) (0 , 0)
b) Simétrica con el eje y
c) D = $\mathbb{R}$, I = [0 ; 2)



17. a) (-2 , 0) , (2 , 0)
b) Tiene todas las simetrías
c) D = $(-\infty;-2] \cup [2;+\infty)$; I = $\mathbb{R}$

18. $P = 10\sqrt{2} + 2\sqrt{26} \approx 24.34$ unidades de longitud. **19.** $y = 5x - 11$; $7y + x - 7 = 0$

20. G(2.33 , 0.65) **21.** $y + 5x - 11 = 0$; $y + x - 1 = 0$ **22.** C(2 , -1) ; $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 26$

23. $y = -5x - 17$ **24.** 24 unidades cuadradas.

PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS ICFES: **1.** d), **2.** b), **3.** c), **4)** d), **5)** c).

NÚCLEO TEMÁTICO 2

COMPRENSIÓN DE LECTURA: **1.** b. **2.** d., **3.** d., **4.** c., **5.** d.

EJERCICIO 2 – 1

1. **a)** 3 **b)** $-\frac{45}{2}$ **c)** $|-5| = 5$ **d)** $\frac{1}{2}$ **2.** **a)** -36 **b)** $-\frac{20}{9}$ **c)** 4 **d)** 6

3. **a)** $\begin{cases} 4-5x & \text{si } x \le \frac{4}{5} \\ 5x-4 & \text{si } x > \frac{4}{5} \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x^2-10x-8 & \text{si } x \in \left(-\infty;-\frac{2}{3}\right] \cup [4;+\infty) \\ -3x^2+10x+8 & \text{si } x \in \left(-\frac{2}{3};4\right) \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x^2-9 & \text{si } x \in (-\infty;-3] \cup [3;+\infty) \\ 9-x^2 & \text{si } x \in (-3;3) \end{cases}$

d) $\begin{cases} 6x+9 & \text{si } x \in (-\infty;-3] \\ 2x-3 & \text{si } x \in (-3;3) \\ 4x-9 & \text{si } x \in [3;+\infty) \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} x^2+4x+2 & \text{si } x \in (-\infty;-6] \\ x^2+2x-10 & \text{si } x \in (-6;-2] \cup [2;+\infty) \\ -x^2+2x-2 & \text{si } x \in (-2;2) \end{cases}$

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (1)
$y = 5x - 6$
Una línea recta.

EJERCICIO 2 – 2

1. $\left\{-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right\}$ **2.** $\left\{\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right\}$ **3.** $\left\{\frac{14}{3}, -\frac{16}{3}\right\}$ **4.** $\left\{-\frac{3}{4}, \frac{7}{10}\right\}$ **5.** $\{3, -3\}$ **6.** $\left\{-\frac{13}{2}, -\frac{17}{4}\right\}$

7. (-5 , 3) **8.** (-4 ; -1) **9.** $\left(-\frac{13}{5}, -\frac{11}{5}\right)$ **10.** $\left(-\infty; -\frac{11}{2}\right) \cup \left(-\frac{5}{6}; +\infty\right)$ **11.** $\left(-\frac{1}{3}; 7\right)$

12. (-2 ; 2)

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (2)
$x^2 + y^2 = 25$
Una circunferencia

EJERCICIO 2 – 3

3. $\left\{\frac{4}{3}, -\frac{14}{3}\right\}$ **4.** $\{0\}$ **5.** $\left\{\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right\}$ **6.** $\left(-2; \frac{2}{3}\right)$ **7.** $(-\infty;-9] \cup (-5;+\infty)$ **8.** $\left[-1, \frac{1}{5}\right]$

9. $\left(-\frac{1}{2}; 1\right) \cup (1;4)$ **10.** $(-\infty;12)$ **11.** (-2 ; 2) **12.** $[-7;+\infty)$

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (3)
$x^2 = 16y$
Una parábola

TALLER DE LA UNIDAD 2

2. **a)** Falso **b)** Verdadero **c)** Verdadero **d)** Verdadero **e)** Verdadero **f)** Falso
g) Falso **h)** Verdadero **i)** Falso **j)** Falso

3. **a)** 4. **b)** 6. **c)** 2. **d)** 1. **e)** 3. **f)** 5.

4. $p(x)=\begin{cases} x^2+x-4 & \text{si } x\in(-\infty;-1]\cup[1;+\infty) \\ -x^2+x-2 & \text{si } x\in(-1;1) \end{cases}$ 5. $p(x)=\begin{cases} x^2-2x-1 & \text{si } x\le \frac{1}{2} \\ x^2+2x-3 & \text{si } x>\frac{1}{2} \end{cases}$ 6. $p(x) = x^2+3x+2$

7. $p(x)=\begin{cases} -1 & \text{si } x<1 \\ 1 & \text{si } x>1 \end{cases}$ 8. $(-\infty;-3)\cup(1;+\infty)$ 9. $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$ 10. $\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$

11. $(-\infty;1]\cup[1+\sqrt{6};+\infty)$ 12. $\left(-\infty;-\frac{1}{5}\right)\cup(5;+\infty)$ 13. $\left[-1;\frac{1}{5}\right]$ **14.** $\mathbb{R}-\{-1,1\}$ **15.** ϕ

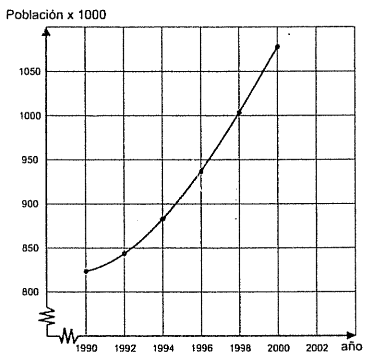
PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS ICFES: 1. b), **2.** d), **3.** a), **4.** b), **5.** a)

NÚCLEO TEMÁTICO 3

COMPRENSIÓN DE LECTURA: 1. c., **2.** c., **3.** d., **4.** c., **5.** b.

EJERCICIO 3 – 1

1. a) Es función **b)** Es función **c)** No es función **d)** No es función
2. a) A= [-4;5] , B= [-3;3] **b)** Si **c)** f(-4) = -3, f(1) ≈ 1.4 **d)** f(-2) = -2, f(0)=0 **f)** Creciente en (-4 ; 3) y Decreciente en (3 ; 5) **g)** x = 0 , x = 5
3. a) 30 **b)** Entre las 17 horas y las 11horas del día siguiente **c)** 25 **d)** 12:15 p.m. **e)** 17 horas **f)** Entre las 11:00 y las 12:00 horas
4. Los atletas A y B terminaron la prueba; el atleta A demoró 210 seg; el B demoró 240 seg y el C sólo recorrió 750 m.
5. a) Aumenta entre las 0:00 y las 6:00 horas y entre las 12:00 y las 18:00 horas; disminuye entre las 6:00 y las 12:00 horas y entre las 18:00 y las 24:00; **b)** El máximo se producirá a las 6:00 horas y a las 18 horas y el mínimo a las 12:00 horas.
6. a)



7. b) Es función; D = $\mathbb{R}$; I = $\mathbb{R}$
c) Es función; D = $\mathbb{R}$ -{0}; I = $\mathbb{R}$ -{0}
f) Es función; D = $\mathbb{R}$; I = [-2;+∞)

8. No, f: $[0;+\infty)\to\mathbb{R}$ por la regla $f(x)=\sqrt{x}$
9. No , f: $\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}$ por la regla $f(x)=\frac{1}{x}$
10. Sí **11.** Sí **12.** No, f: $\mathbb{R}-\{0\}$ $\mathbb{R}$ por la regla $f(x)=\frac{2}{x}$
13. No, f: $[-1;1]$ $\mathbb{R}$ por la regla $f(x)=\sqrt{1-x^2}$

b) Unos 828000 habitantes.

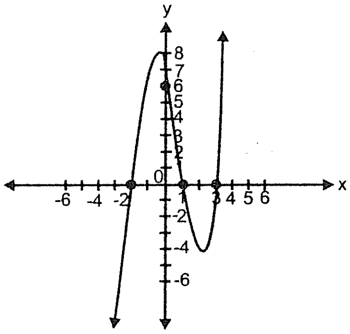
14 $D_f=\mathbb{R}$ -{1 , -6} 15. $D_g=\mathbb{R}$ **16.** D_h = [-3 ; 3]
17. a) -4 **b)** -4 **c)** 6 **d)** $(a+b)^2+3(a+b)-4$ **e)** $a^2+3a-4+b^2+3b-4$ **f)** $2x_1+h+3$; con $h\neq 0$
18. a) No está definido **b)** No está definido **c)** 0 **d)** **e)** $\sqrt{a-2}+\sqrt{b-2}$ **f)** $\dfrac{1}{\sqrt{x_1+h-2}+\sqrt{x_1-2}}$; con $h\neq 0$
19. a) -3 **b)** 0 **c)** 2 **d)** a + b **e)** a + b **f)** 1; con $h\neq 0$
20. a) No está definido **b)** $\frac{2}{3}$ **c)** $\frac{4}{5}$ **d)** $\frac{a+b+2}{a+b+3}$ **e)** $\frac{a+2}{a+3}+\frac{b+2}{b+3}$ **f)** $\frac{1}{(x_1+3)(x_1+h+3)}$; con $h\neq 0$
21. a) -27 **b)** 0 **c)** 8 **d)** $(a+b)^3$ **e)** a^3+b^3 **f)** $3x_1^2+3x_1h+h^2$; con $h\neq 0$
22. a) 8 **b)** 8 **c)** 8 **d)** 8 **e)** 16 **f)** 0; con $h\neq 0$
25. Par **26.** Ninguna de las dos. **27.** Impar **28.** Impar **29.** Par **30.** Ninguna de las dos

EJERCICIO 3 – 2

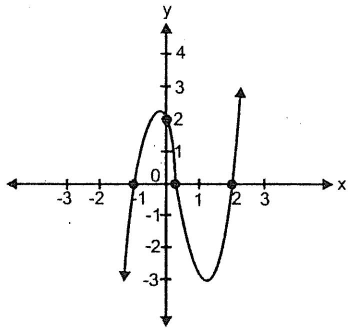
1. Polinómica
2. Exponencial
3. Racional
4. Trigonométrica
5. Exponencial
6. Racional
7. Por tramos
8. Polinómica
9. Valor absoluto
10. Exponencial

11. Logarítmica
12. Logarítmica

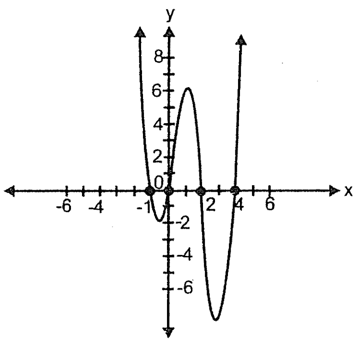
13. (-2 , 0) , (1 , 0) , (3 , 0) , (0 , 6)



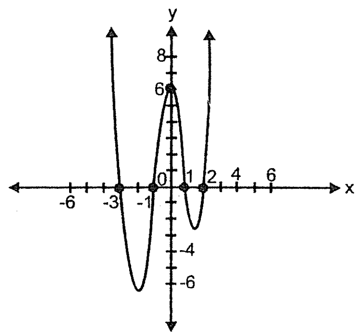
14. (-1 , 0) , (2 , 0) , $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$, (0 , 2)



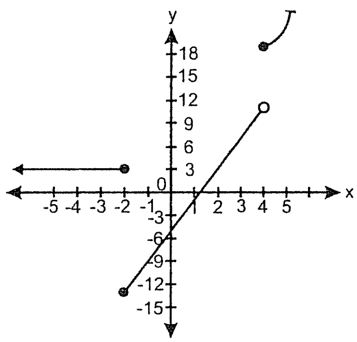
15. (-1 , 0) , (0 , 0) , (2 , 0) , (4 , 0)



16. (-3 , 0) , (-1 , 0) , (1 , 0) , (2 , 0) , (0 , 6)

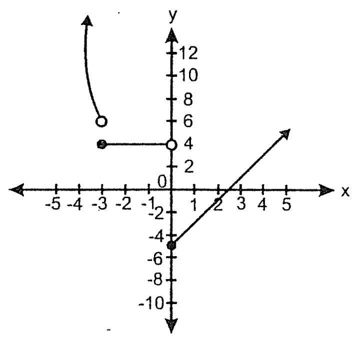


17.



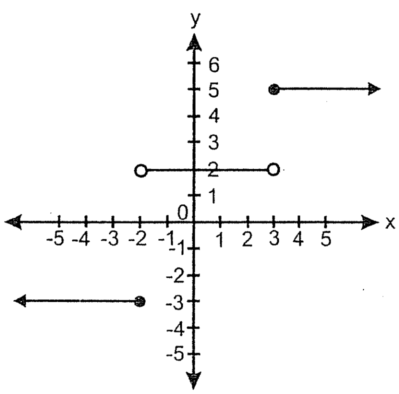
D = ℝ ; I = [-13 ; 11) U [17 ; + ∞)

18.



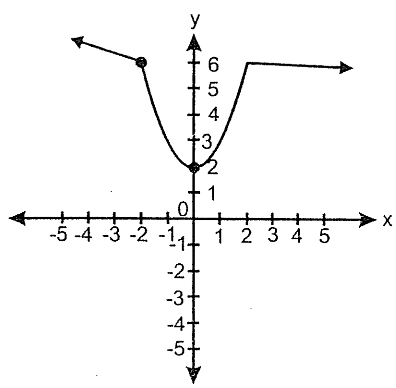
D = ℝ , I = [-5 ; + ∞)

19.



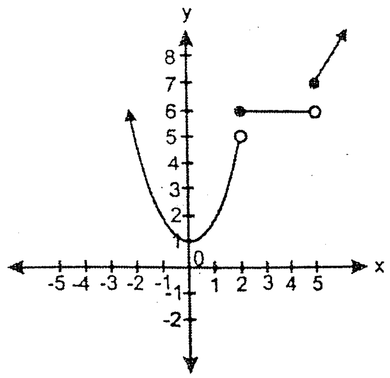
D = ℝ ; I = {-3 , 2 , 5}

20.



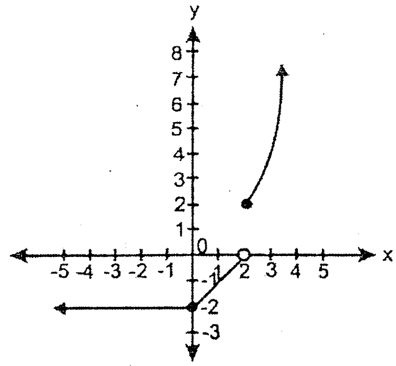
D = ℝ ; I = [2 ; + ∞)

21.



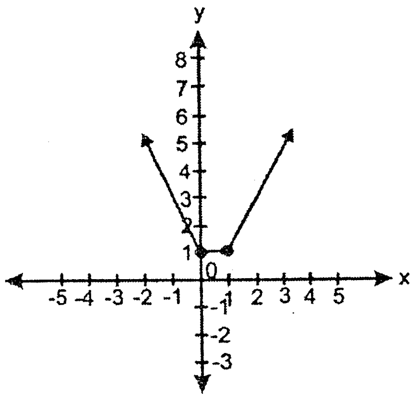
D = ℝ , I = [1 ; + ∞)

22.



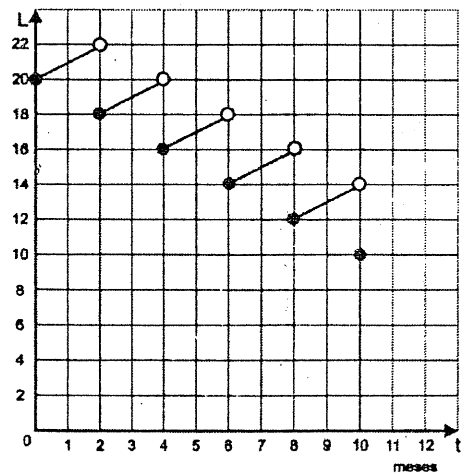
D = ℝ , I = [-2 ; 0) ∪ [2 ; + ∞)

23.



D = ℝ , I = [1 ; + ∞)

24. a) Longitud del cabello en cm



b) En el 7º mes

25. a) 38ºC ; 41ºC a las 20 horas **b)** Paco antes de las 18 horas; a las 24 horas

c)

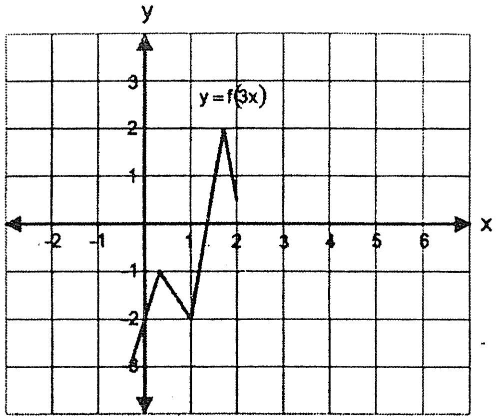
$$T(t)=\begin{cases} -\dfrac{1}{2}t + 38 & \text{si } 0 \le t < 4 \\ 36 & \text{si } 4 \le t < 6 \\ \dfrac{1}{2}t + 33 & \text{si } 6 \le t < 12 \\ -\dfrac{1}{2}t + 45 & \text{si } 12 \le t < 16 \\ -\dfrac{1}{2}t^2 + 10t - 59 & \text{si } 16 \le t \le 24 \end{cases}$$

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (4)
$x^2 + y^2 + 6x - 4y + 4 = 0$.
Es una circunferencia

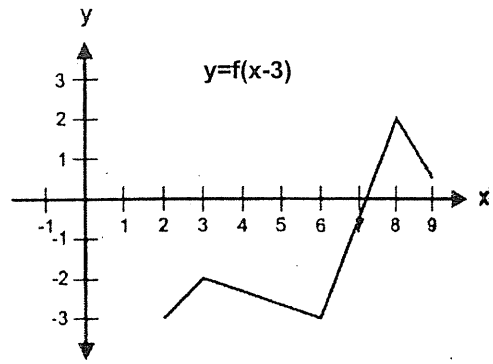
EJERCICIO 3 - 3

1. **a)** y= f(x)+5 **b)** y= f(x)-5 **c)** y= f(x - 4) **d)** y= f(x+4) **e)** y = -f(x)
   f) y= f(-x) **g)** y= 2 f(x) **h)** y= f(3x)
2. **a)** Alargándola verticalmente un factor de 3
   b) Trasladándola 5 unidades hacia la derecha
   c) Dibujando su simétrica respecto al eje x
   d) Alargándola verticalmente un factor de 3 y dibujando su simétrica respecto al eje x
   e) Contrayéndola horizontalmente un factor de 3
   f) Alargándola verticalmente un factor de 3 y luego trasladándola verticalmente 5 unidades hacia abajo

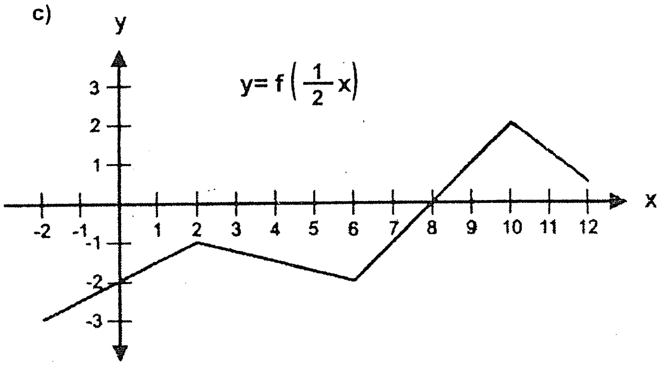
3. a)



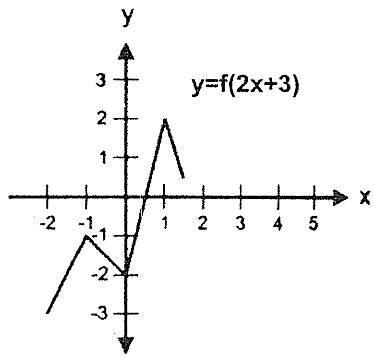
b)



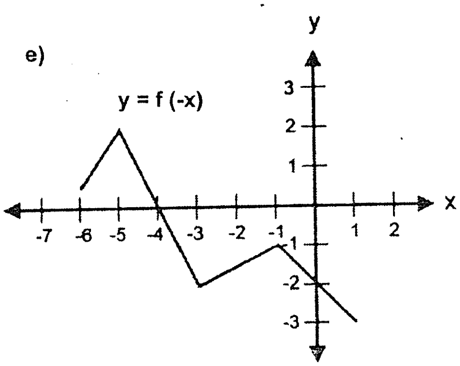
c)



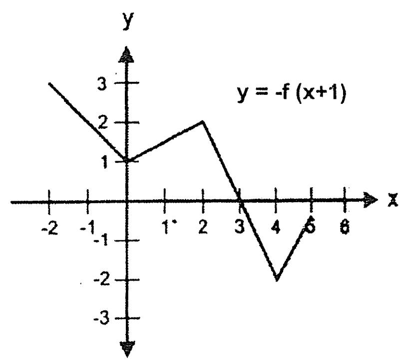
d)



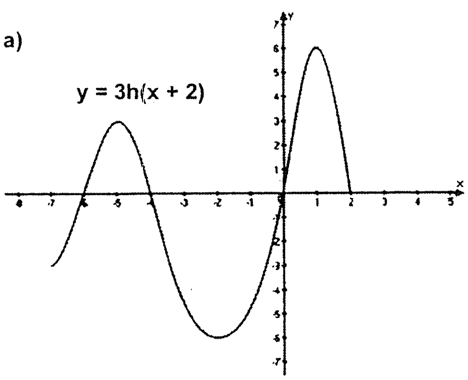
e)



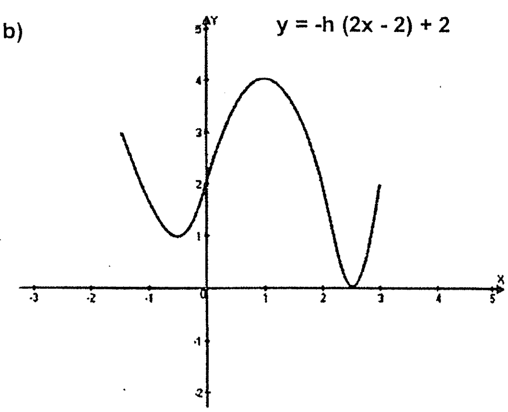
f)



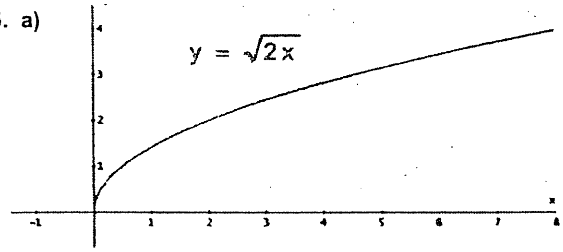
4. a)



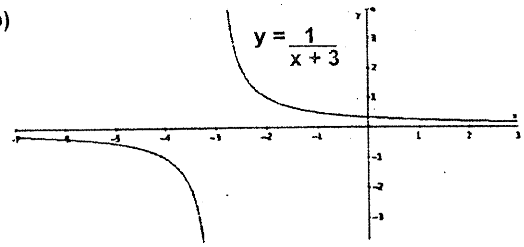
b)



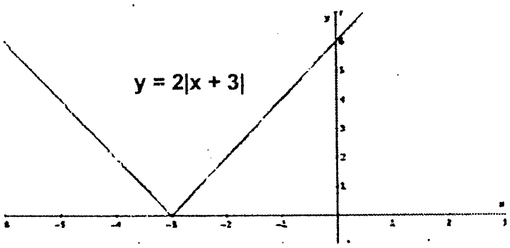
5. a)



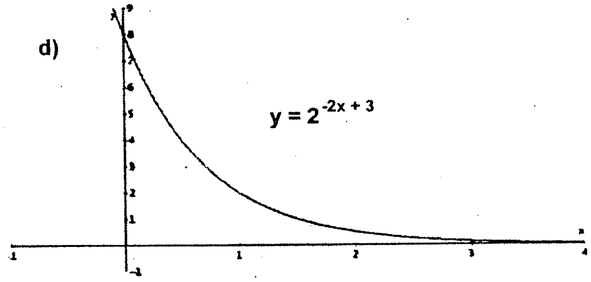
b)



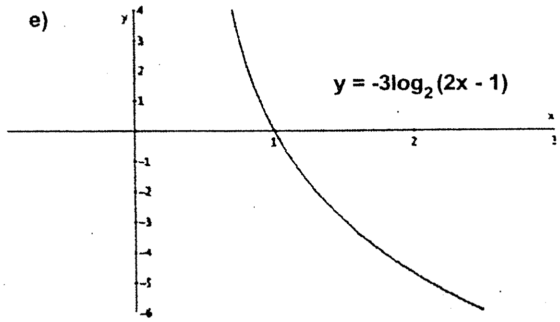
c)



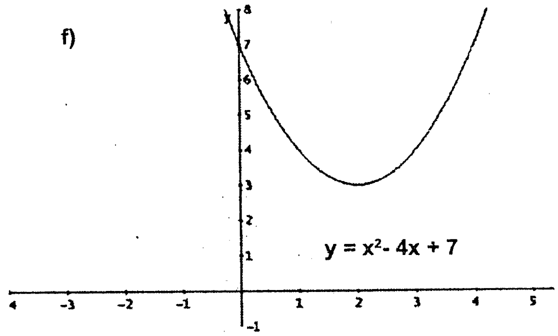
d)



e)



f)



SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (5)
$y^2 - 4y + 12x + 4 = 0$: una parábola

EJERCICIO 3 - 4

1. **a)** $D_f = \mathbb{R}$, $D_g = \mathbb{R} - \{1\}$

   b) $(f + g)(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$, $D_{f+g} = \mathbb{R} - \{1\}$; $(f - g)(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{x - 1}$, $D_{f-g} = \mathbb{R}-\{1\}$; $(f \cdot g)(x) = 1$, $D_{f \cdot g} = \mathbb{R} - \{1\}$;

   $(f/g)(x) = (x - 1)^2$, $D_{f/g} = \mathbb{R} - \{1\}$

   c) $(f + g)(-3) = -\dfrac{17}{4}$, $(f - g)(a + 1) = \dfrac{a^2 - 1}{a}$; $(f \cdot g)(1)$ no está definido; $(f/g)(m - 1) = (m - 2)^2$

2. **a)** $D_f = \mathbb{R}$, $D_g = [0 ; +\infty)$

   b) $(f + g)(x) = 4x + 2\sqrt{x}$, $D_{f+g} = [0 ; +\infty)$; $(f - g)(x) = 4x - 2\sqrt{x}$, $D_{f-g} = [0 ; +\infty)$; $(f \cdot g)(x) = 8x\sqrt{x}$,

   $D_{f \cdot g} = [0 ; +\infty)$; $(f/g)(x) = 2\sqrt{x}$; $D_{f/g} = (0 ; +\infty)$

   c) $(f + g)(-3)$ no está definido ; $(f - g)(3) = 12 - 2\sqrt{3}$; $(f \cdot g)(a + 1) = 8(a + 1)\sqrt{a + 1}$; $(f/g)(p^2) = 2|p|$

3. **a)** $D_f = [-2 ; +\infty)$, $D_g = \mathbb{R}$ **b)** $(gof)(x) = -1-2x$, $D_{gof} = [-2 ; +\infty)$

c) $(fog)(x) = \sqrt{10 - 2x^2}$, $D_{fog} = \left[-\sqrt{5} ; \sqrt{5}\right]$

d) (fog) (-3) = no está definida; (fog)(4) = no está definida; $(fog)(0) = \sqrt{10}$; $(fog)(2) = \sqrt{2}$; (gof)(-5) = no está definida; (gof)(1) = -3; (gof)(6) = -13; (gof)(0) = -1

4. a) $(fog)(x) = -12x^2 + 52x - 56$, $D_{fog} = R$; $(fof)(x) = -27x^4 + 36x^3 - 18x^2 + 4x$, $D_{fof} = R$, $(gog)(x) = 4x - 12$, $D_{gog} = R$

b) $(fog)(x) = \sqrt{-x}$; $D_{fog} = [-\infty; 0]$, $(fof)(x) = \sqrt{x^2 - 8}$; $D_{fof} = [-\infty; -2\sqrt{2}] \cup [2\sqrt{2}; +\infty]$, $(gog)(x) = \sqrt{4 - \sqrt{4-x}}$; $D_{gog} = [-12; 4]$

c) $(fog)(x) = -\frac{x+1}{2}$; $D_{fog} = R - \{-1\}$, $(fof)(x) = \frac{x-1}{2-x}$; $D_{fof} = R - \{1,2\}$, $(gog)(x) = -\frac{1}{x}$; $D_{gog} = R - \{-1,0\}$

5. a) $f(x) = x^4$, $g(x) = x - 2$ **b)** $f(x) = Cos(x)$, $g(x) = \sqrt[3]{x}$

c) $f(x) = \log_2(x)$, $g(x) = x^2 - 3$ **d)** $f(x) = \frac{x}{x-1}$, $g(x) = x^3$

6. $f(x) = \frac{\sqrt{8x+1} - 3}{2}$ ó $f(x) = \frac{-3 - \sqrt{8x+1}}{2}$ **7.** $h(x) = \sqrt{2x^2 + 5}$ ó $h(x) = -\sqrt{2x^2 + 5}$

8. a) -2 **b)** 1 **c)** 1.7 **d)** No está definido **e)** -1

9. f [g(-5)] = -2 ; f [g(-4)] = -1 ; f [g(-3)] = -2
f [g(-2)] ≈ -1.8 ; f [g(-1)] = -2 ; f [g(0)] ≈ -1.7
f [g(1)] = -2 ; f [g(2)] = -2 ; f [g(3)] = -1
f [g(4)] = -1 ; f [g(5)] = -1

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (6)
$9x^2 + 16y^2 = 225$: Es una elipse

EJERCICIO 3 - 5

2. Sí **3.** Sí **4.** Sí **5.** No **6.** No **7.** Sí **8.** No **9.** No

10. Sí **11.** Sí **12.** No

17. f: [0 ; ∞] → (-∞ ; 2] por la regla : $y = f(x) = 2 - x^2$
f^{-1}: (-∞ ; 2] → (0 ; +∞) por la regla: $y = f^{-1}(x) = \sqrt{2 - x}$

18. $y = f^{-1}(x) = \sqrt[3]{3x+3}$

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (7)
$3y^2 - x^2 + 24y + 10x = 25$
Es una hipérbola

EJERCICIO 3 - 6

1. $p = kq^2$ **2.** $t = \frac{k}{r}$ **3.** $a = kbc^3$ **4.** $m = k\frac{n}{p^2}$

5. 18 **6.** $\frac{24}{5}$ **7.** 135 **8.** $\frac{5}{9}$

9. $\frac{72\sqrt{3}}{5}$ **10.** 2816 cm^3 **11. a)** c(x) = 45000x **b)** $ 675000

12. 20 kg. **13.** La intensidad a 5m es $\frac{49}{25}$ de la intensidad a 7m

14. a) $f(x) = \frac{9x}{490000}(5000 - x)$ **b)** 17.6 personas por día **15.** $\frac{4}{9}$

16. a) $L(x) = kx\left[200 - x\left(2 + \frac{\pi}{2}\right)\right]$ **b)** $\left(0 ; \frac{400}{\pi + 4}\right)$ ó (0 ; 56.02) **c)** ≈ 28 cm

17. a) $V(x) = \frac{9}{2}x - \frac{1}{2}x^3$ **b)** $D_v = (0 ; 3)$ **18.** 3 cm

19. 125m x 250m con cercas intermedias paralelas al lado más corto.

20. a) $V(x) = 4x^3 - 48x^2 + 144x$ **b)** [0 ; 6]

TALLER DE LA UNIDAD 3

2. a) Falso b) Falso c) Falso d) Falso e) Verdadero f) Falso
g) Verdadero h) Falso i) Verdadero j) Verdadero k) Falso l) Verdadero
m) Falso n) Verdadero o) Falso p) Verdadero q) Falso r) Falso
s) Verdadero t) Verdadero u) Falso v) Falso w) Verdadero x) Falso
y) Verdadero

3. La 3. y la 4. **4.** La 1 **5.** La 7. y la 8. **6.** La 5. y la 6. **7.** La 9 **8.** La 7.
9. La 3. y la 4 ; la 5. y la 6. **10.** La 7. y la 8. **11.** La 1. y la 2 ; la 9. y la 10
12. **a)** $f(-3) = 1$ **b)** $f(-2.5) \approx 1.7$ **c)** 2.5 y 3.5 **d)** $D_f = [-5 ; 4]$; $I_f = [-2 ; 2]$
e) Creciente; (-5 ; -3) y (0 ; 3) ; Decreciente: (-3 ; 0) y (3 ; 4) **f)** No **g)** Ninguna de las dos
13. **a)** 4 **c)** $g^{-1}(3) \approx 2.7$ **d)** $D_{g-1} = [-2 ; 4]$
14. $f(a) = 3a^2 - a + 2$, $f(-a) = 3a^2 + a + 2$, $-f(a) = -3a^2 + a - 2$ $f(a + h) = 3(a + h)^2 - (a + h) + 2$,

$f(a) + f(h) = 3a^2 - a + 3h^2 + h + 4$, $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = 6a + 3h - 1$; con $h \neq 0$

15. $f(a) = \dfrac{1}{a^2+1}$, $f(-a) = \dfrac{1}{a^2+1}$, $-f(a) = -\dfrac{1}{a^2+1}$, $f(a+h) = \dfrac{1}{a^2+2ah+h^2+1}$, $f(a) + f(h) = \dfrac{a^2+h^2+2}{(a^2+1)(h^2+1)}$

$\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = -\dfrac{2a+h}{(a^2+1)\left[(a+h)^2+1\right]}$; con $h \neq 0$

16. $\left[\dfrac{5}{3} ; +\infty\right]$ **17.** $\left(-\infty ; \dfrac{7}{2}\right]$ **18.** [-2 ; 2] **19.** $(-\infty ; -3] \cup [3 ; +\infty)$

20. R - {0 , -3 , 3} **21.** R - $\left\{-\dfrac{5}{2} , \dfrac{1}{3}\right\}$ **22.** $(1 + \infty)$ **23.** $(-\infty ; -1] \cup (1 + \infty)$

24. $(f + g)(x) = x^2 + x - 4$, $D_{f+g} = R$; $(f - g)(x) = -x^2 + x - 2$, $D_{f-g} = R$; $(f \cdot g)(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$, $D_{f \cdot g} = R$;

$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{x-3}{x^2-1}$, $D_{f/g} = R - \{-1 , 1\}$

25. $(f+g)(x) = x^2 + \sqrt{x} + 1$, $D_{f+g} = [0 ; +\infty)$; $(f-g)(x) = -x^2 + \sqrt{x} - 1$, $D_{f-g} = [0 ; +\infty)$; $(f \cdot g)(x) = \sqrt{x}\,(x^2+1)$, $D_{f \cdot g} = [0 ; +\infty)$;

$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2+1}$; $D_{f/g} = [0 ; +\infty)$

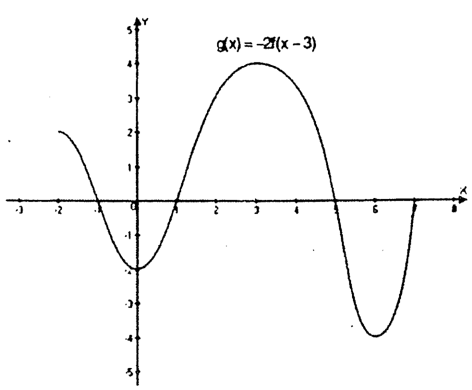
26. $(f + g)(x) = x^2 + \sqrt{2x+5} + 4$, $D_{f+g} = \left[-\dfrac{5}{2} ; +\infty\right)$; $(f - g)(x) = x^2 - \sqrt{2x+5} + 4$, $D_{f-g} = \left[-\dfrac{5}{2} ; +\infty\right)$;

$(f \cdot g)(x) = x^2 \cdot \sqrt{2x+5} + 4 \cdot \sqrt{2x+5}$, $D_{f \cdot g} = \left[-\dfrac{5}{2} ; +\infty\right)$; $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{x^2+4}{\sqrt{2x+5}}$, $D_{f/g} = \left(-\dfrac{5}{2} ; +\infty\right)$

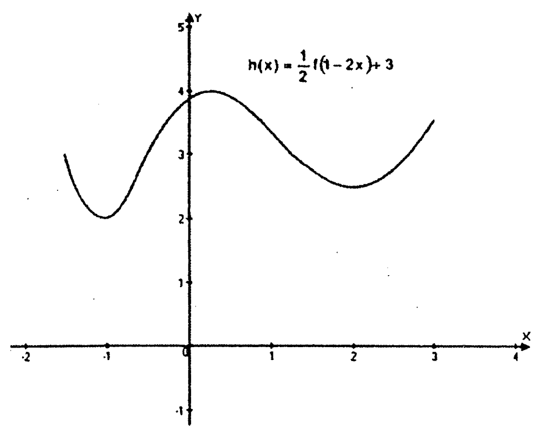
27. $(f + g)(x) = 2\sqrt{x+3}$; $D_{f+g} = [-3 ; +\infty)$; $(f - g)(x) = 0$, $D_{f-g} = [-3 ; +\infty)$; $(f \cdot g)(x) = x + 3$; $D_{f \cdot g} = [-3 ; +\infty)$;

$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = 1$, $D_{f/g} = (-3 ; +\infty)$

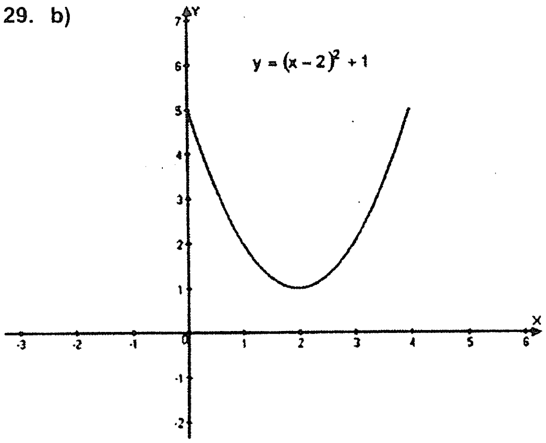
28. a)



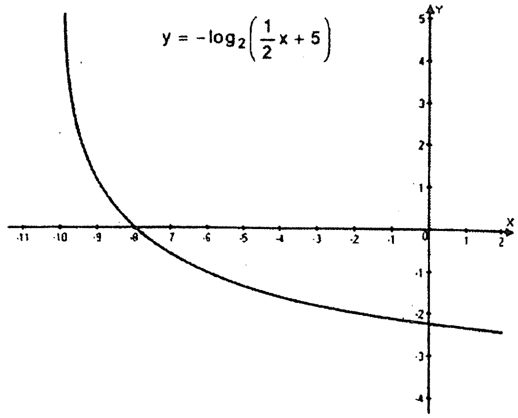
b)



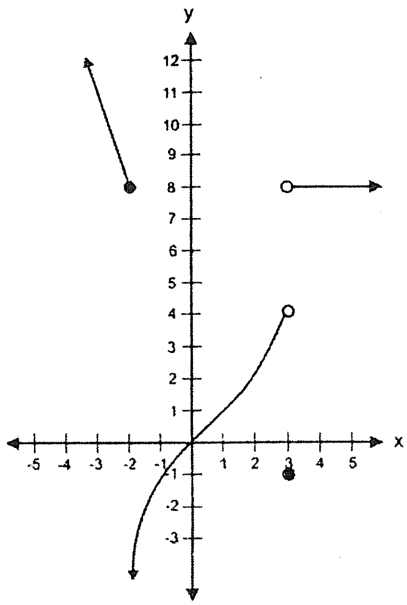
29. b)



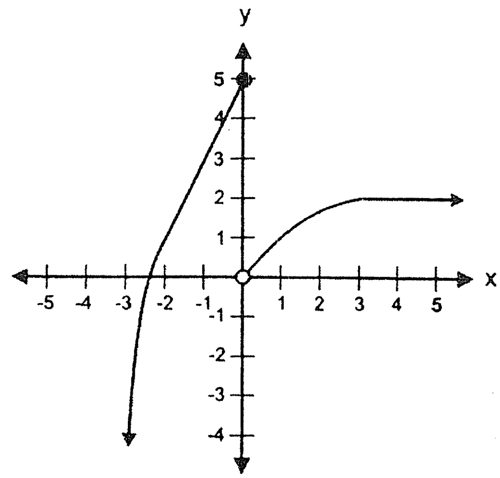
e)



30.



32.



34. $(fog)(x) = \sqrt{4 - x^2}$, $D_{fog} = [-2\,;\,2]$; $(gof)(x) = 4 - x$, $D_{gof} = [0\,;+\infty)$

35. $(fog)(x) = \dfrac{1}{x}$, $D_{fog} = (0\,;+\infty)$; $(gof)(x) = \dfrac{1}{|x|}$; $D_{fog} = \mathbb{R} - \{0\}$

36. $(fog)(x) = \dfrac{x-2}{2x-2}$, $D_{fog} = \mathbb{R} - \{1\,;\,2\}$; $(gof)(x) = \mathbb{R} - \left\{-1\,;-\dfrac{1}{2}\right\}$

37. $(fog)(x) = x - 4$; $D_{fog} = [-5\,;+\infty)$; $(gof)(x) = \sqrt{x^2 - 4}$, $D_{gof} = (-\infty\,;-2] \cup [2\,,+\infty)$

38. Posee inversa, $f^{-1}(x) = \dfrac{4-x}{3}$

39. No posee inversa; f: $[0\,;+\infty) \to (-\infty\,;4]$ por $f(x) = 4 - x^2$. Una inversa es f^{-1}: $(-\infty\,;4] \to [0\,;+\infty)$ por $f^{-1}(x) = \sqrt{4-x}$

40. Posee inversa, $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-2}$

41. No posee inversa; f : $\left(-\infty\,;-\dfrac{3}{2}\right] \to \left[-\dfrac{9}{4}\,;+\infty\right)$ por $f(x) = 3x + x^2$. Una inversa es f^{-1}: $\left[-\dfrac{9}{4}\,;+\infty\right) \to \left(-\infty\,;-\dfrac{3}{2}\right]$

por $f^{-1}(x) = \dfrac{\sqrt{9+4x} - 3}{2}$

42. **b)** 50.000 babillas ; 3125 babillas **c)** Sí ; $b^{-1}(t) = -\log_2\left(\dfrac{t}{50000}\right)$

43. **a)** $\dfrac{1}{16}$ g **b)** $m(t) = 2^{-t/4}$

c) $t(m) = -4\log_2(m)$, el tiempo transcurrido cuando hay un gramo de sustancia **d)** Aproximadamente 26.6 días

44. 12 **45.** 3 **46.** 6400 libras **47.** Debe ser 4L **48.** $A = \dfrac{h^2\sqrt{3}}{3}$

49. $A = x^2 + \dfrac{64000}{x}$ **50.** $A = r - \pi r^2$ **51.** $\dfrac{\pi}{27}h^3$

52. **a)** $G(x) = \begin{cases} 8000x & \text{si } 40 \leq x \leq 80 \\ 11200x - 40x^2 & \text{si } 80 < x \leq 280 \end{cases}$ **b)** [40 ; 280] **c)** 140 sillas.

PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS ICFES: **1.** b), **2.** d), **3.** b), **4)** d), **5)** d).

NÚCLEO TEMÁTICO 4

COMPRENSIÓN DE LECTURA: **1.** a. **2.** b., **3.** c., **4.** d., **5.** c.

EJERCICIO 4 – 1

1. $\lim_{x\to 3} f(x) = 3$; $f(3) = 3$ **2.** $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$; $f(1) = 1$

3. $\lim_{x\to -2} f(x) = 2$, $f(-2)$ no existe; $f(2) = -2$, $\lim_{x\to 2} f(x)$ no existe; $\lim_{x\to 4} f(x) = 3$, $f(4) = 3$

4. $\lim_{x\to -2} f(x)$ no existe ; $\lim_{x\to -1} f(x) = 2$, $f(-1) = 2$ **5.** $\lim_{x\to 4}(3x - 1) = 11$, $f(4) = 11$ **6.** $\lim_{x\to 1}(3 - x) = 2$, $f(1) = 2$

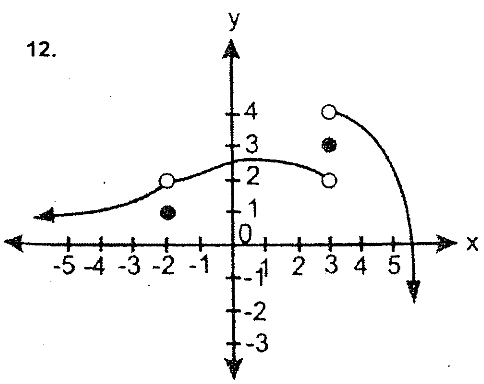
7. $\lim_{x\to -1}(x^2 + 1) = 2$; $f(-1) = 2$ **8.** $\lim_{x\to 2}(x^3 + 3) = 11$, $f(2) = 11$

9. $\lim_{x\to -4}(3 - x) = 7$, $f(-4) = 7$; $\lim_{x\to -2} f(x)$ no existe, $f(-2) = 5$; $\lim_{x\to 1}(x^2 + 2x) = 3$, $f(2) = 3$

10. $\lim_{x\to -3}(x^2 + 2x) = 3$, $f(-3) = 3$; $\lim_{x\to -1} f(x)$ no existe ; $\lim_{x\to 3}(3 - x) = 0$, $f(3) = 0$

11. **a)** No **b)** No **c)** No existe **d)** No existe

12.



13. **a)** 2.71

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (8)

$V = \dfrac{4}{75}\pi h^3$

EJERCICIO 4 - 2

1. 8, $\delta = 0.0033$	**2.** 10, $\delta = 0.005$	**3.** 7, $\delta = 0.002$	**4.** -4 , $\delta = 0.01$
5. 15	**6.** 4	**7.** 5	**8.** 2

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (9)

$V = \sqrt{3}\, h^2$ metros cúbicos

EJERCICIO 4 - 3

1. a) -2	**b)** 125	**c)** $\sqrt[3]{-2}$	**d)** No existe	**e)** $-\frac{5}{2}$	
f) No existe	**g)** No existe	**h)** 0	**i)** No existe		
2. a) No existe	**b)** 0	**c)** 2.5	**d)** No existe	**e)** -8	**f)** 3
3. 8	**4.** 7	**5.** 0			
6. a) 2	**b)** -3	**c)** No existe			
7. a) 0	**b)** 8	**c)** No existe			
8. a) 4	**b)** 4	**c)** 4			
9. a) 0	**b)** 0	**c)** 0			
10. a) No existe	**b)** No existe				
11. a) 0	**b)** 0	**c)** 0			
12. $\frac{1}{2}$	**13.** $-\frac{1}{22}$	**14.** $\frac{3}{2}$	**15.** $\frac{2}{3}$	**16.** 185	**17.** $\frac{2\sqrt{6}}{6}$
18. 0	**19.** No existe	**20.** 0	**21.** $\sqrt{3} - \frac{1}{2}$	**22.** $-\frac{3}{2e}$	
23. No existe	**24.** $\frac{2 - 5\,\mathrm{Cos}(2)}{4}$	**25.** 2	**26.** 0	**27.** 0	
28. d) No	**e)** No	**29.** $c = -\frac{1}{2}$			
30. $b = -3$, $c = 4$					

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (10)

2. $A(x) = \dfrac{4x^2+72x}{x-6}$

3. $D_A = (6\,;\,+\infty)$

EJERCICIO 4 - 4

1 7	**2.** $\frac{1}{4}$	**3.** $\frac{5}{4}$	**4.** $\frac{1}{2}$	**5.** $2a^2$	**6.** No existe
7. $\frac{1}{4}$	**8.** $-\frac{2}{3}$	**9.** $\frac{\sqrt{2}}{4}$	**10.** No existe	**11.** $\frac{1}{3}$	**12.** $\frac{4}{3}$
13. $\frac{1}{2\sqrt{3x}}$	**14.** 8	**15.** 0	**16.** $-\frac{1}{4}$	**17.** $\frac{1}{2}$	**18.** $\frac{16}{7}$
19. 12	**20.** $\sqrt{\frac{6}{5}}$	**21.** $\frac{1}{6}$	**22.** $\frac{1}{2\sqrt{2}}$	**23.** $\frac{1}{3}$	**24.** -1
25. $\frac{11}{17}$	**26.** $-\frac{1}{x^2}$	**27.** $-\frac{1}{56}$	**28.** 0	**29.** 3	**30.** $\frac{1}{4a\sqrt{a-b}}$

31. $f'(x) = 2x - 3$ **32.** $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$ **33.** $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-3}}$ **34.** $F'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}$

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (11)

2. $c(x) = 2.3625x^2 + \frac{1260}{x}$

EJERCICIO 4 - 5

1. Discontinua en $x = -2$ porque $\lim\limits_{x \to -2} f(x) \neq f(-2)$. Discontinuidad evitable.
2. Discontinua en $x = 2$ porque $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ no existe. Discontinuidad esencial.
3. Discontinua en $x = 1$ porque $f(1)$ no existe. Discontinuidad evitable.
4. En x= -4: discontinuidad esencial ; x= -2 : discontinuidad esencial; x= -1: discontinuidad removible o evitable ; x=2: discontinuidad removible; x=3: discontinuidad esencial; x=5: discontinuidad esencial.

5. a) $x = \frac{3}{4}$ **b)** Removible **6. a)** $x = 2$ **b)** Esencial

7. a) $x = -1$ **b)** Esencial **8. a)** $x = 0$ **b)** Esencial

9. a) Es continua en todos los reales **10. a)** $x = -1$ **b)** Esencial

11. a) Es continua en todos los reales **12. a)** $x = 3$ **b)** Removible

13. a) Es continua en todos los reales. **14. a)** Es continua en todo R **15.** a = 5 **16.** a= -3, b = 4

17. a= -3 , b= 4 **18.** a=b=8 **19.** $x > 1$ **20.** $x > 0$

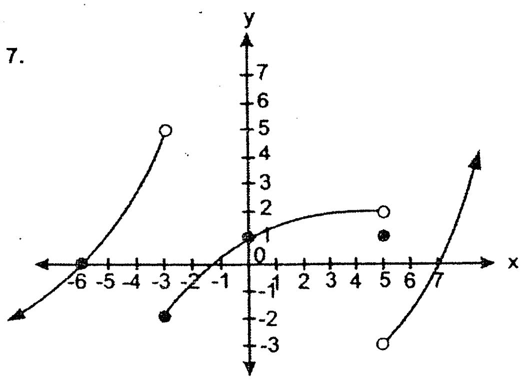
EJERCICIO 4 - 6

1. $(-\infty; -2)$, $(-2; 2)$, $(2; +\infty)$ **2.** $(-\infty; +\infty)$ **3.** $(0; +\infty)$ **4.** $(-\infty; 1]$, $(1; +\infty)$

5. a) Continua **b)** Discontinua **c)** Continua **d)** Continua

6. a) Continua **b)** Discontinua **c)** Discontinua **d)** Continua

7.



8. $C = \frac{1}{3}$, $K = \frac{2}{3}$ **9.** C = 2 **10.** $f(0) \cdot f(1) < 0$

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (12)

1. $P(x) = 400x^3 - 40x^4 + x^5$
2. (0 , 0) y (20 , 0)

TALLER DE LA UNIDAD 4

2. Falso **3.** Verdadero **4.** Falso **5.** Falso **6.** Verdadero **7.** Verdadero

8. Verdadero **9.** Verdadero **10.** Falso **11.** No necesariamente **12.** Falso

13. 2 **14.** 2 **15.** 1 **16.** 2 **17.** No existe **18.** No existe

19. 6 **20.** 2 **21.** $\frac{3}{4}$ **22.** 3 **23.** $\frac{27}{8}$ **24.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

25. $\frac{3}{2}$ **26.** $\sqrt[3]{\frac{9}{4}}$ **27.** -13 **28.** -7 **29.** $\frac{1}{7}$ **30.** 0

31. 12 **32.** $\frac{2}{3}$ **33.** $\sqrt{\frac{6}{5}}$ **34.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ **35.** $-\frac{3}{8}$ **36.** $\frac{1}{4}$

37. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ **38.** 4 **39.** $-\frac{3}{16}$ **40.** $\frac{1}{72}$ **41.** $\frac{3}{2}$ **42.** -15

43. **a)** 0 **b)** 12 **c)** -5 **44.** **a)** No existe **b)** 0 **c)** -2

45. n **46.** $-\frac{1}{56}$ **47.** 3 **48.** $\frac{1}{9}$ **49.** $\frac{11}{17}$ **50.** -1

51. 1 **52.** a = -3 , b = -6 **53.** 0

54. En x = -2 es de discontinuidad removible; en x = 1 es de discontinuidad esencial

55. En x = -1 y en x = -1 es de discontinuidad removible.

56. En x = -2 es de discontinuidad esencial

57. En x = 4 es de discontinuidad removible

58. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x^2-3x+1}{2x-1} & \text{si } x \neq \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2} & \text{si } x = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ **59.** $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x^2+x-6}{2x-3} & \text{si } x \neq \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{7}{2} & \text{si } x = \dfrac{3}{2} \end{cases}$

60. En $(-\infty\,;-3)$ es discontinua ; En (-3 ; 3) es continua ; En $[-3\,;3]$ es continua

En $[-3\,;3)$ es continua ; En $[3\,;4]$ es discontinua ; En $(3\,;4]$ es discontinua

En $[4\,;+\infty)$ es discontinua ; En $(4\,;+\infty)$ es continua

61. a = 10 , b = -23

64. **a)** $D_f = \mathbb{R} - \{4\}$; $I_f = (-2;0] \cup \{0.5\} \cup (1\,;+\infty)$ **b)** (-1,0) y (0, 2)

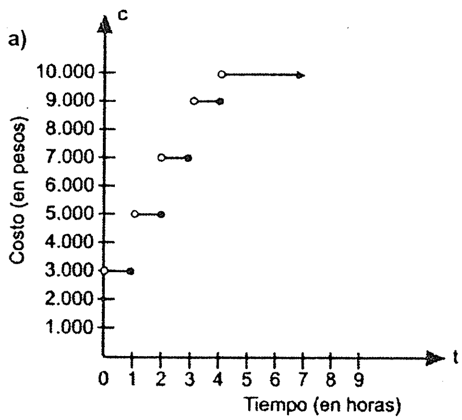
c) $\lim_{x\to -1^-} f(x) = 0$, $\lim_{x\to -1^+} f(x) = 1$, $\lim_{x\to 2} f(x) = 1$

d) En x = -1, x= 0, x= 2 y x= 4 **e)** En x = 2

f) En (-∞ ; -1] ; (-1 ; 0] ; (0 ; -2) ; (2 ; 4) y (4 ; +∞) **65.** Continua en x = 0

66. Discontinua esencial en x = 0 **67.** **b)** No existen **c)** Ambas presentan discontinuidad esencial

68. **a)**



b) Es discontinua es t=1, 2, 3 y 4

PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS ICFES: **1.** d), **2.** c), **3.** c), **4)** a), **5)** a).

NÚCLEO TEMÁTICO 5

COMPRENSIÓN DE LECTURA: **1.** c. **2.** d., **3.** b., **4.** a., **5.** c.

EJERCICIO 5 – 1

1. $+\infty$	**2.** $+\infty$	**3.** $-\infty$	**4.** $-\infty$	**5.** $+\infty$
6. $+\infty$	**7.** $+\infty$	**8.** $-\infty$	**9.** $-\infty$	**10.** $+\infty$
11. $-\infty$	**12.** $+\infty$	**13.** $-\infty$	**14.** $\frac{2}{5}$	**15.** 2
16. 3	**17.** 0	**18.** 0	**19.** No existe	**20.** No existe
21. 1	**22.** -1	**23.** 0	**24.** $-\infty$	**25.** 0
26. $+\infty$	**27.** 0	**28.** 0	**29.** No existe	**30.** $x = 0$, $y = 1$

31. $x = -2$, $x = 2$, $y = 0$ **32.** $x = -3$, $x = 3$, $y = 4$ **33.** $x = \sqrt{2}$, $x = -\sqrt{2}$

34. $y = 2$ **35.** $y = -\frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (13)

2. $c(x) = \sqrt{100+x^2} + \sqrt{x^2 - 60x + 3400}$

EJERCICIO 5 - 2

1. a) $x = -1$, $x = 1$, $y = 1$ **2. a)** $x = -1$, $x = 1$, $y = x$ **3. a)** $y = x$, $y = -x$

4. a) $x = -8$, $y = 0$ **5. a)** $x = -1$, $x = 1$, $y = 2x - 5$ **6. a)** $x = -1$, $x = 2$, $y = 2$

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (14)

2. $S(x) = \frac{1}{16}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{36}(1-x)^2$

3. $D = [0;1]$

EJERCICIO 5 - 3

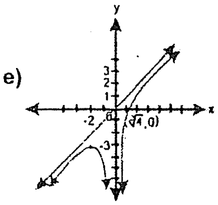
1. $f'(x) = 4x - 3x^2$	**2.** $f'(x) = \frac{5}{(x+1)^2}$	**3.** $f'(x) = \frac{x}{(x^2-1)^{1/2}}$	**4.** $f'(x) = \frac{1}{3x^{2/3}}$
5. 4	**6.** $\frac{9}{7}$	**7.** 1	**8.** $\frac{1}{2}$
9. 0	**10.** No existe	**11.** -1	**12.** -1
13. $\frac{1}{2}$	**14.** -Sen(a)	**15.** $\frac{1}{2}$	**16.** 0
17. Cos(a)	**18.** $\frac{1}{5}$	**19.** π	**20.** 1
21. $\sqrt{e^{15}}$			

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (15)

2. $V(y) = \frac{64\pi}{3}\left(\frac{y^2}{y-16}\right)$

2. a)	**3.** b)	**4.** c)	**5.** c)	**6.** c)	**7.** b)	**8.** a)
9. $+\infty$	**10.** $-\infty$	**11.** $+\infty$	**12.** 1	**13.** 1	**14.** -1	**15.** 2
16. $+\infty$	**17.** 0	**18.** 0	**19.** 0	**20.** 1	**21.** 1	**22.** $\frac{2}{\pi}$
23. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$	**24.** $\frac{1}{4}$	**25.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$	**26.** $-\frac{2}{5}$	**27.** $\frac{1}{3}$	**28.** $\sqrt{e^{15}}$	

29. a) $\left(\sqrt[3]{4}\,,0\right)$ **b)** No hay simetrías **c)** R - {0} **d)** Vertical: x=0; Oblicua: y=x **e)**



PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS ICFES: **1.** c), **2.** c), **3.** c), **4)** a), **5)** d).

NÚCLEO TEMÁTICO 6

COMPRENSIÓN DE LECTURA: **1.** b. **2.** b., **3.** d., **4.** a., **5.** b.

EJERCICIO 6 – 1

7. $m_A = -2$, $m_B = -\infty$, $m_C = 0$, $m_D = +\infty$, $m_E = 2$

8. Tangente: y + 5x + 1 = 0; Normal: 5y – x – 21 = 0

9. Tangente: y = 12x – 15; Normal: 12y + x – 110 = 0

10. Tangente: 8y + x – 8 = 0 ; Normal: 2y – 16x + 63 = 0

11. Tangente: 4y + x – 5 = 0 ; Normal: 2y – 8x + 23 = 0

12. Tangente: y = 3x + 3 ; Normal: 3y + x + 1 = 0

13. Tangente: y = 2 ; Normal: x = 0

14. Tangente: No hay ; Normal: No hay

15. Tangente: No hay ; Normal: No hay

16. Tangente: y = -2x – 1 ; Normal: 2y – x – 3 = 0

17. Tangente: y = 6x – 18 ; Normal: 6y + x = 3

18. y= 4x + 9

19. 8x - y - 5 = 0

20. 4x - 4y - 1 = 0

21. 2x - y - 2 = 0

22. $\left(12-2\sqrt{30}\right)x - y - 30 + 4\sqrt{30} = 0$; $\left(12+2\sqrt{30}\right)x - y - 30 - 4\sqrt{30} = 0$

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (16)

$$R = \sqrt{20y - y^2}$$

EJERCICIO 6 - 2

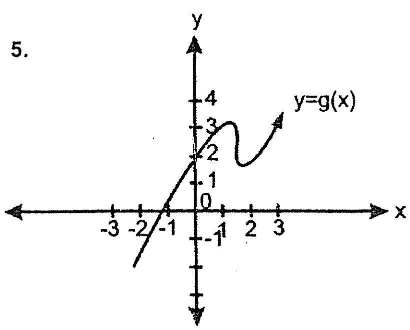
1. **a)** f'(-4) ≈ -3.5 **b)** f'(-3) ≈ -1.17 **c)** f'(-2) = 0 **d)** f'(-1) ≈ 3

e) f'(0) = 0 **f)** f'(1) ≈ -2 **g)** f'(4) ≈ 2

2. 1) con c) ; 2) con d) ; 3) con a) ; 4) con b)

4. f(-2) = 3 ; $f'(-2) = \frac{2}{3}$

5.



6. **a)** La variación del porcentaje de desempleo por año. Sus unidades son %/año

b) D' (1993) ≈ -0.55 %/año ; D'(1995) ≈ 0.6 %/año

c) En 1993, el porcentaje de desempleo esá disminuyendo y en 1995 está aumentando.

7. **a)** $c'(1983) = 0{,}54$ U.S.$/kg. al año ; $c'(1990) = -0.065$ U.S.$/kg. al año

b) En 1983 el precio está subiendo; en 1990 el precio está bajando.

8. **a)** No tiene puntos de discontinuidad **b)** $f'(x) = 2x - 3$; es derivable en todo $x \in \mathbb{R}$

9. **a)** No tiene puntos de discontinuidad; **b)** $f'(x) = 8x - 4$; es derivable en todo $x \in \mathbb{R}$.

10. **a)** Es discontinua en $x = 0$; **b)** $f'(x) = -\dfrac{2}{x^2}$; no es derivable en $x = 0$

11. **a)** Es discontinua en $x = 1$; **b)** $f'(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$; no es derivable en $x = 1$

12. **a)** Es discontinua en $x = 0$; **b)** $f'(x) = -\dfrac{2}{x^3}$; no es derivable en $x = 0$

13. **a)** Es discontinua en $(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$ **b)** $f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$; no es derivable en $(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$

14. **a)** En $x = -5$, $x = -2$, $x = 6$ **b)** En $x = -5$, $x = -2$, $x = 2.5$, $x = 5$, $x = 6$

15. $v(t) = 6t$, $v(3) = 18$ m/seg. **16.** $v(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t+1}}$, $v(3) = \dfrac{1}{4}$ m/seg.

17. $v(t) = -\dfrac{10}{(5t+6)^2}$, $v(2) = -\dfrac{5}{128}$ m/seg. **18.** $v(t) = \begin{cases} 2t & \text{si } 0 \le t < 1 \\ 2 & \text{si } t = 1 \\ 2 & \text{si } 1 < t \le 3 \end{cases}$, $v(1) = 2$ m/seg.

19. **a)** $s(t) = 20t - 5t^2$ **b)** $v(t) = 20 - 10t$, $v(1) = 10$, $v(3) = -10$ **c)** 20 m

d) $|v(1)| = 10$, $|v(3)| = 10$ **e)** -20 m/seg.

20. 160 cm/seg. **21.** **a)** 3805 **b)** 358 **c)** 360

22. **a)** Es continua en $x = 3$ **b)** Es derivable en $x = 3$, $f'(3) = 6$ **c)** La recta tangente en $x = 3$ es $y = 6x - 18$

23. $a = 2$ y $b = -1$

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (17)
$A(x) = 4x - x^3$

EJERCICIO 6 - 3

1. $f'(x) = 0$ **2.** $f'(x) = 0$ **3.** $f'(x) = 1$ **4.** $f'(x) = 1$ **5.** $f'(x) = 2x$

6. $f'(t) = 2t + 5$ **7.** $f'(x) = 3x^2$ **8.** $f'(t) = 3t^2 - 1$ **9.** $f'(t) = -6t + 5$ **10.** $f'(x) = 6x^2 - 10x + 2$

11. $f'(x) = \dfrac{5}{3}x^{2/3} + \dfrac{8}{3}x^{1/3} + x^{-4/3}$ **12.** $f'(x) = -\dfrac{2}{3}x^{-5/3} - \dfrac{4}{3}x^{-7/3} - \dfrac{8}{7}x^{-3/7}$ **13.** $f'(x) = x^{1/3} + x^{-1/2} + 2x^{-2}$

14. $f'(x) = \dfrac{1}{5}\left(\dfrac{3}{2}x^{1/2} - x^{-1/2} - 2x^{-3/2}\right)$ **15.** $f'(x) = 3x^{1/2} + 2x^{-1/3} - 7x^{2/5}$ **16.** $f'(x) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{2}x^{1/2} - \dfrac{3}{2}x^{-1/2} - x^{-3/2}\right)$

17. $f'(x) = 5x^4 - 8x^3 + 3x^2 - 2x + 2$ **18.** $f'(x) = 6x^5 + 3x^2 - 6x + \dfrac{3}{x^2}$ **19.** $f'(x) = \dfrac{2}{(x+1)^2}$

20. $f'(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2} - \dfrac{1}{(x+1)^2}$ **21.** $f'(x) = -\dfrac{3(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}$ **22.** $f'(t) = 5t^4 + 4t^3 + 3t^2 + 4t$

23. $f'(x) = \dfrac{16x}{(x^2+4)^2}$ **24.** $f'(t) = \dfrac{3-t}{(t+1)^3}$ **25.** $f'(x) = \dfrac{4x^3 - 13x^2 + 12x}{(2x-3)^2}$

26. $f'(x) = \dfrac{30x^5(5x^5 - 8)}{(15x^5 - 4)^2}$ **27.** Tangente: $y + 2x - 2 = 0$; Normal: $2y - x + 1 = 0$

28. No existen **29.** 48 cm^3/cm **30.** (0 , 0) y (2 , 4)

31. a) 574 bacterias **b)** 31.56 bacterias/hora

32. 3600 $\pi cm^3/cm$

33. $y = 3x + 2$

35. Sí

36. $300x\,(3x^2 - 5)^{49}$

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (18)

$$V(y) = \frac{64\pi}{3}\left(\frac{y^2}{y-16}\right)$$

EJERCICIO 6 - 4

1. $f'(x) = 3(x+1)\,(x^2+2x+3)^{1/2}$

2. $f'(x) = -\,(2x^2 - 2x + 1)\,(2x^3 - 3x^2 + 3x - 1)^{-4/3}$

3. $f'(x) = 2(x^2+1)\,(x^3+3x+2)^{-1/3}$

4. $f'(x) = \frac{3}{10}\,(2x+1)\,(x^2+x-3)^{1/2}$

5. $f'(x) = (2x+3)^3\,(3x-2)^{4/3}\,(38x+5)$

6. $f'(x) = \dfrac{(2x-1)^{3/2}\,(41x-18)}{(7x-3)^{4/7}}$

7. $f'(x) = \dfrac{7x-1}{6(x-1)^{1/2}\,(x+1)^{1/3}}$

8. $f'(x) = \dfrac{-2(1+2x)}{x^2\,(2+6x)^{2/3}}$

9. $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}$

10. $f'(x) = -\dfrac{4x^2+2}{x^3\sqrt{1+4x^2}}$

11. $f'(x) = \dfrac{7}{(x^2+3x+4)^{3/2}}$

12. $f'(x) = \dfrac{x^2(7x^2-3)}{(3x^2-1)^{4/3}}$

13. $f'(x) = -\dfrac{x}{3(x^2+1)^{7/6}}$

14. $f'(x) = \dfrac{1}{6(3-x)^{5/6}}$

15. $f'(x) = 3\,\text{Cos}(x)$

16. $f'(x) = x\,\text{Cos}(x) + \text{Sen}(x)$

17. $f'(x) = \dfrac{x\,\text{Cos}(x) - \text{Sen}(x)}{x^2}$

18. $f'(x) = 4x^2\,\text{Sen}(x)\,\text{Cos}(x) + 4x\,\text{Sen}^2(x)$

19. $f'(x) = -x\,\text{Sen}(x) + 2\,\text{Cos}(x)$

20. $f'(x) = (2x+5)\,\text{Sec}^2(x^2+5x)$

21. $f'(x) = \dfrac{2\,\text{Cos}(x) - 1}{(2 - \text{Cos}(x))^2}$

22. $f'(x) = \dfrac{\text{Cos}(x)}{2\sqrt{\text{Sen}(x)}}$

23. $f'(x) = \dfrac{\text{Sen}^2(x)\left[3\,\text{Cos}(x) - 2\,\text{Sen}(x)\,\text{Tan}(2x)\right]}{\text{Sec}\,(2x)}$

24. $f'(x) = \dfrac{2\,\text{Sec}^2(\sqrt{x})\,\text{Tan}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$

25. $f'(x) = \text{Tan}^2\left(\dfrac{x}{2}\right)$

26. $f'(x) = \dfrac{2\,\text{Sen}\,(2x)\,\text{Cos}\,(2x)}{\left[1+\text{Cos}^2(2x)\right]^{3/2}}$

27. $f'(x) = \dfrac{(1-x)^2 e^x}{(1+x^2)^2}$

28. $f'(x) = \dfrac{x+1}{x\,e^{1/x}}$

29. $f'(x) = \dfrac{x+2}{x}$

30. $f'(x) = \ln 5\,(x\,\text{Sec}^2 x + \text{Tan}\,x)\,5^{x\tan x}$

31. $f'(x) = \dfrac{2x-1}{(x^2-x)\ln 10}$

32. $f'(x) = \text{Cot}\,x - \text{Sen}\,x\,\text{Cos}\,x$

33. $f'(x) = -e^{\text{Cos}x}\,\text{Sen}\,x - e^x\,\text{Sen}(e^x)$

34. $f'(x) = e^{x+e^x}$

35. $f'(x) = e^{2x}\,(1 + x\ln|x|)$

36. $f'(x) = \dfrac{2}{x}x^{\ln x}\ln x$

37. $f''(x) = 6$

38. $f''(x) = 0$

39. $f'''(x) = 6x - 12$

40. $f^{(4)}(x) = -\dfrac{24}{x^5}$

41. $f'''(x) = -\dfrac{40}{3x^5}$

42. $f'''(x) = 12$

43. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$

44. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x - xy^2}{yx^2 - y}$

45. $y' = -2\sqrt{y}$

46. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y-1}{1-x}$

47. $y' = -\dfrac{x^2}{y^2}$

48. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2xy - 6x - y^2}{2xy - x^2 + 8y}$

49. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\mathrm{Cos}(x+y) + \mathrm{Cos}(x-y)}{\mathrm{Cos}(x-y) - \mathrm{Cos}(x+y)}$

50. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2\mathrm{Tan}(x)\mathrm{Sec}^2(x) + \mathrm{Csc}^2(x-y)}{2\mathrm{Tan}(y)\mathrm{Sec}^2(y) + \mathrm{Csc}^2(x-y)}$

51. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{e^y}{xe^y - 1}$

52. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x}{x^2 + y^2 - 2y}$

53. $12y + 7x = 8\sqrt{2} + 6$

54. $x + 4y = 0$

55. $y = 0$

56. $5x - 7y + 11 = 0$

57. No existe ningún punto

58. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{-2x}{y^5}$

59. 28

60. $h'(0.5) = -17.4$

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (19)

$I(x) = 500.000 + 40.000x - 1000x^2$

TALLER DE LA UNIDAD 6

1.

a) Falso	**b)** Verdadero	**c)** Verdadero	**d)** Verdadero	**e)** Verdadero
f) Falso	**g)** Verdadero	**h)** Falso	**i)** Falso	**j)** Verdadero
k) Falso	**l)** Verdadero	**m)** Verdadero	**n)** Falso	**o)** Verdadero
p) Falso	**q)** Falso	**r)** Falso	**s)** Falso	**t)** Verdadero

2. d) **3.** d) **4.** d) **5.** c) **6.** b)

7. b) **8.** c) **9.** d) **10.** b) **11.** d)

12. c) **13.** d) **14.** a) **15.** c) **16.** $y' = -\dfrac{8}{x^3} + \dfrac{12}{x^5}$

17. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{6x^2}{(x^3 - 1)^2}$

18. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1 - 2x^3}{3x^{2/3}(x^3 + 1)^{4/3}}$

19. $y' = \dfrac{\mathrm{Cos}(x)}{2\sqrt{\mathrm{Sen}(x) + 1}}$

20. $\dfrac{dy}{dx} = (x + 1)\,\mathrm{Sen}(x) + x\,\mathrm{Cos}(x)$

21. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{8x}{3y^2 - 8y}$

24. $y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{7}{54}$; $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{9}{2}$

25. $v = 2\sqrt{(5 - s)(s - 3)}$; $a = 16 - 4s$

26. **a)** 10 m/seg. **b)** 45 m **c)** 7 seg. **d)** -40 m/seg.

27. Tangente: $y = 6\sqrt{3}\,x + 1 - \dfrac{\sqrt{3}\,\pi}{2}$ Normal: $18y + \sqrt{3}x = 18 + \dfrac{\sqrt{3}\pi}{12}$

28. $5x - 4y - 6 = 0$; $4x + 5y - 13 = 0$

29. $(-1, 0)$

30. $f'(x) = x^2 g'(x) + 2x\, g(x)$

31. $f'(x) = e^x \cdot g'(e^x)$

32. $f'(x) = g'(g(x)) \cdot g'(x)$

34. $f'(x) = \dfrac{g'(x)}{g(x)}$

35. $f'(x) = \dfrac{g'(\ln x)}{x}$

36. En $(-3, 0)$

37. **a)** En $(0; t_3)$; En $(t_4 ; t_6)$ **b)** $v(0) = 0$ **c)** En t_1

d) La partículo está en reposo **e)** Desaceleró

38. **a)** $v(t) = x'(t) = \dfrac{1 - t^2}{(1+t^2)^2}$ **b)** Hacia la derecha: (0;1) ; hacia la izquierda: para t>1

c) $\frac{13}{17}$ metros   d) $a(t) = \frac{2t\,(t^2 - 3)}{(t^2 + 1)^3}$

e) Acelera en $(1 ; \sqrt{3})$; Desacelera en $(0 ; 1)$ y en $(\sqrt{3} + \infty)$

39. f(20)= 10.000 significa que se vendieron 10.000 yardas de tela a 20 dólares la yarda.

f'(20) = -350, significa que cuando el precio de venta es 20 dólares, la cantidad de yardas de tela vendida está disminuyendo a razón de 350 yardas / dólares por yardas.

41. Recta tangente: x=1 ; Recta normal: y=0

42. $(-\infty ; -3) \cup (-1 ; +\infty)$ **43. b)** Sí **c)** No   **44.** $a= -\frac{1}{2}$; $b=\frac{3}{2}$

45. b) Sí   **46. a)** No **b)** No   **47.** a= -1 , b = π

48. $f'(x) = \begin{cases} 2x\,\mathrm{Sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \mathrm{Cos}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS ICFES: **1.** a), **2.** d), **3.** c), **4.** b), **5.** a)

NÚCLEO TEMÁTICO 7

COMPRENSIÓN DE LECTURA: **1.** c. **2.** a., **3.** b., **4.** d., **5.** d.

EJERCICIO 7 – 1

1. Ni máximo ni mínimo   **2.** Máximo   **3.** Ni máximo ni mínimo

4. Máximo   **5.** Mínimo   **6.** Ni máximo ni mínimo

7. **a)** Mínimo: (-1 , -5) ; máximo: (3 , 7)   **b)** Mínimo: (-1 , -5)
c) Máximo: (3 , 7)   **d)** No tiene ni máximo, ni mínimo.

8. **a)** Máximo: (0 , 4) ; Mínimo: (5 , -1)   **b)** Máximo: (0 , 4)
c) Mínimo: (5 , -1)   **d)** No tiene ni máximo ni mínimo.

9. **a)** Máximo: P(1 , 4), Mínimo: $P\left(-\frac{3}{2}, -\frac{9}{4}\right)$ **b)** Mínimo: $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{9}{4}\right)$

c) Mínimo: $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{9}{4}\right)$ **d)** Máximo (1 , 4); Mínimo: $P\left(-\frac{3}{2}, -\frac{9}{4}\right)$

10. **a)** Mínimo: (-3 , 0) y (3 , 0); Máximo: (0 , 3)   **b)** Mínimo (-3 , 0) , Máximo: no hay

c) Máximo: (0 , 3) , Mínimo: no hay   **d)** Máximo: $\left(1, \sqrt{8}\right)$, Mínimo: no hay

11. Máximo: (-2 , 10) ; Mínimo: (1 , 4)   **12.** Mínimo: (0 , 0) y (4 , 0) ; Máximo: (2 , 4)

13. Máximo: (0 , 0) ó (5 , 0) ; Mínimo: $\left(\frac{10}{3}, -\frac{500}{27}\right)$ **14.** Máximo: (-1 , 5) ; Mínimo: (1 , 1)

15. Máximo: $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$, Mínimo: (1 , -1)   **16.** Máximo: $\frac{4}{25}$; Mínimo $\frac{4}{64}$

17. Máximo: (-1 , -10) , Mínimo: (-3 , -46)   **18.** Máximo: $\left(2, \frac{1}{2}\right)$; Mínimo: (-1 , -1)

19. Máximo: (3 , 7) ; Mínimo: (-3 , -13)   **20.** Máximo: $\left(1, \sqrt[3]{4}\right)$, Mínimo: (-1 , 0)

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (20)
$D(t)= \sqrt{40000 - 42000\,t + 12900\,t^2}$

EJERCICIO 7 - 2

1. a) i) Continua en [-2; 1] , ii) Derivable en (-2 ; 1), $c = \frac{-1 \pm \sqrt{7}}{3}$

   b) i) Continua en [0 ; 1], ii) derivable en (0 ; 1), $c = \frac{8}{27}$

   c) i) Continua en $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, ii) Derivable en $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, c = 0

2. **a)** x = 4 **b)** $x = \text{Sen}^{-1}\left(\frac{\pi}{3}\right)$

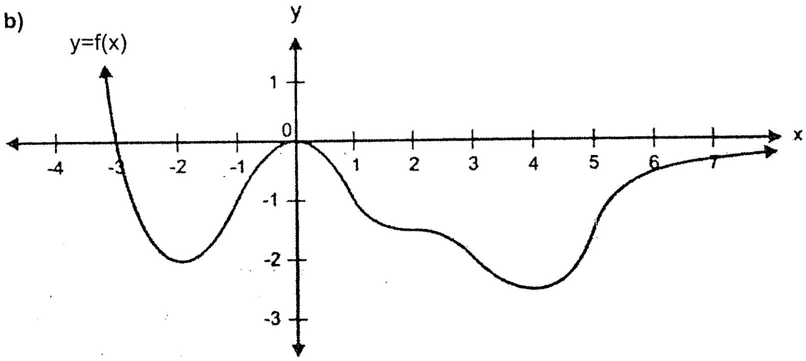
3. **a)** Es discontinua en x = 3 **b)** No es derivable en x = 4 **d)** No es derivable en x = 3

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (21)

$A(x)= \frac{8}{3}x\sqrt{9-x^2}$

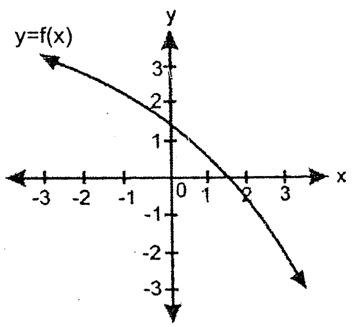
EJERCICIO 7 - 3

1. **b)**

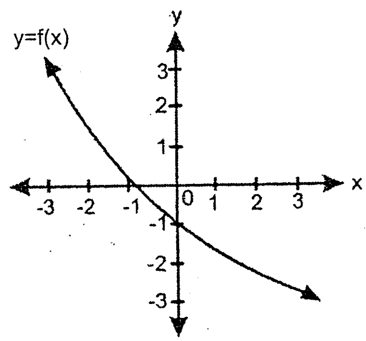


2. **a)** f´ crece en (-∞ ; 1.5) y en (5 ; +∞) ; f´ decrece en (1.5 ; 5)

3. **a)**



b)



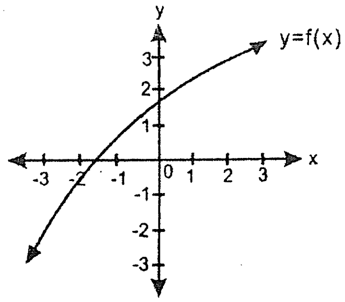
4. La función es creciente y cóncava hacia abajo.

5. **a)** Hacia la derecha en (0;3) y en (6 ; +∞) ; hacia la izquierda en (3 ; 6)
   b) Aceleración positiva en (4 ; +∞) y aceleración negativa en (0;4)

6. **a)** Crece en (2 ; 4) y en (6 ; 8) ; decrece en (0 ; 2) , (4 ; 6) y (8; +∞)
   b) Máximo relativo en x=4 y en x=8 ; mínimo relativo en x=2 y en x=6
   c) U↑ en (0; 3) ; ∩↓ en (3; 6) y (6 ; +∞)
   d) Punto de inflexión en x=3

7. **a)** Crece en (0;1) y en (6;8) ; decrece en (1;8) y en (8; +∞)
   b) Máximo relativo en x=1 y en x=8 ; Mínimo relativo en x=6
   c) U↑ en (-2; 3), en (5;7) ; ∩↓ en (0; 2), en (3;5) y en (7; +∞)
   d) Punto de inflexión en x=2, x=3, x=5 y x=7.

8.



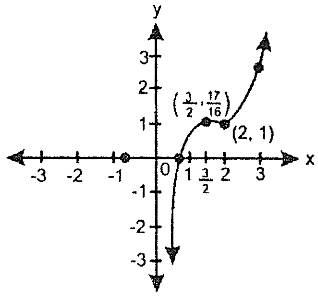
11. **a)** (0.65 , 0) , (0 , -4) **b)** $x = \frac{3}{2}$, x = 2

c) Crece en: $\left(-\infty ; \frac{3}{2}\right)$ y (2 ; +∞); Decrece en: $\left(\frac{3}{2} ; 2\right)$

d) Máximo: $\left(\frac{3}{2}, \frac{17}{16}\right)$; Mínimo: (2 , 1)

e) $\cap : \left(-\infty ; \frac{7}{4}\right)$; $\cup : \left(\frac{7}{4} ; +\infty\right)$

f) P. de inflexión: $\left(\frac{7}{4}, \frac{33}{32}\right)$



12. **a)** (0 , 0) , (-2.45 , 0) , (2.45 , 0)

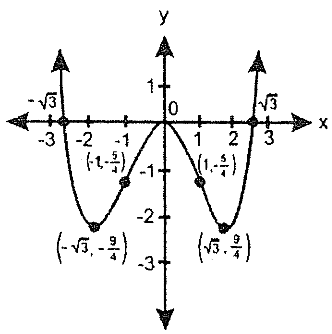
b) $x = -\sqrt{3}$, x = 0 , $x = \sqrt{3}$

c) Crece en: $\left(-\sqrt{3} , 0\right)$ y $\left(\sqrt{3} ; +\infty\right)$; Decrece en: $\left(-\infty ; -\sqrt{3}\right)$ y $\left(0 ; \sqrt{3}\right)$

d) Máximo: (0 , 0) ; Mínimos: $\left(-\sqrt{3} , -\frac{9}{4}\right)$, $\left(\sqrt{3} , -\frac{9}{4}\right)$

e) $\cap$: (-1 ; 1) ; $\cup$: (-∞; -1) y (1 ; +∞)

f) P. de inflexión: $\left(-1, -\frac{5}{4}\right)$ y $\left(1, -\frac{5}{4}\right)$



13. **a)** (0 , 0) , (-5 , 0)

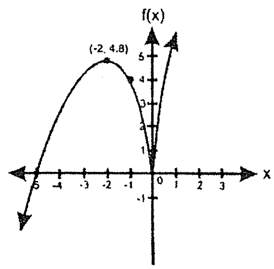
b) x = -2 , x = 0

c) Crece en: (-∞; -2) y (0 ; +∞) ; Decrece en: (-2 ; 0)

d) Máximo: (-2 , 4.8) ; Mínimo: (0 , 0)

e) $\cap$: (- ∞; + ∞) ; $\cup$: no es

f) P. de inflexión: no tiene



14. **a)** $\left(-\frac{5}{3} ; 0\right)$, (7 , 0) , (0 , 1)

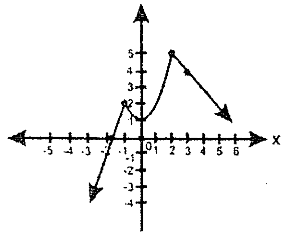
b) x = -1 , x = 0 , x = 2

c) Crece en: (- ∞; 1) ; (0 ; 2) ; Decrece: (-1 ; 0) ; (2 ; +∞)

d) Máximos: (-1 , 2) y (2 , 5) ; Mínimo: (0 , 1)

e) U en (-1;2)

f) No tiene puntos de inflexión



15. a) $\left(-2\sqrt{2}-9\,,0\right)$; $\left(2+\sqrt{7}\,,0\right)$; (0 , -3)

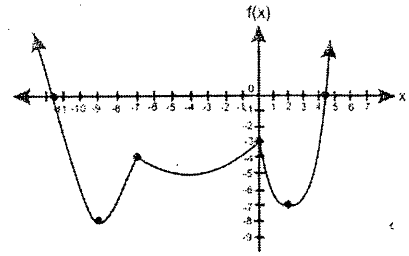
b) x = -9 , x = -7 , x = -4 , x = 0 , x = 2

c) Crece: (-9 ; -7) ; (-4 , 0) ; (2 , +∞) ; Decrece: (-∞; -9) ; (-7 , -4) , (0 , 2)

d) Máximos: (-7 , -4) ; (0 , -3) ; Mínimos: (-9 , -8) ; (-4 , -5) ; (2 , -7)

e) ∪ : (-∞ ; -7) , (-7 ; 0) y (0 ; +∞)

f) No tiene punto de inflexión



SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (22)

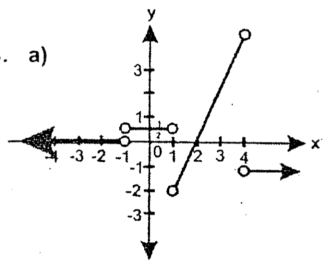
$$I(x) = \begin{cases} 15000\,x & \text{si } 0 < x \le 150 \\ x\left[15000 - 50(x-150)\right] & \text{si } 150 < x \le 250 \end{cases}$$

TALLER DE LA UNIDAD 7

2. **2.1)** Verdadero **2.2)** Falso **2.3)** Verdadero **2.4)** Verdadero **2.5)** Verdadero
2.6) Verdadero **2.7)** Verdadero **2.8)** Verdadero **2.9)** Verdadero **2.10)** Falso

3. b) **4.** a) **5.** d) **6.** d) **7.** d)

8. a)



b) f´ no existe en x = -1 , x = 1 y x = 4

9. El teorema del Valor Medio

10. En 11 puntos. Por el Teorema del Valor Medio

11. a) En (0 ; 2) y (2 ; +∞) **b)** En x = 0 **c)** En x = 1

12. x = 1 es un valor máximo relativo; x = 2 es un punto de inflexión

13. b) **14.** a) **15.** b)

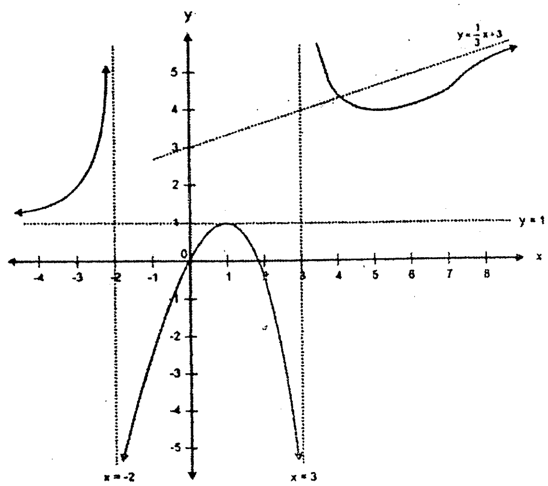
16. a) Hacia la derecha en (0;2) y en (4; +∞) ; Hacia la izquierda en (2;4)
b) Aceleración positiva: en (3; +∞) y aceleración negativa en (0; 3)

17. a) Creciente: En (-∞ ; -1) y en (0 ;+∞)
b) U↑en (0;2) ;∩↓ en (-∞ ; 0) y (2 ; +∞)
c) Puntos de inflexión: En x = 2

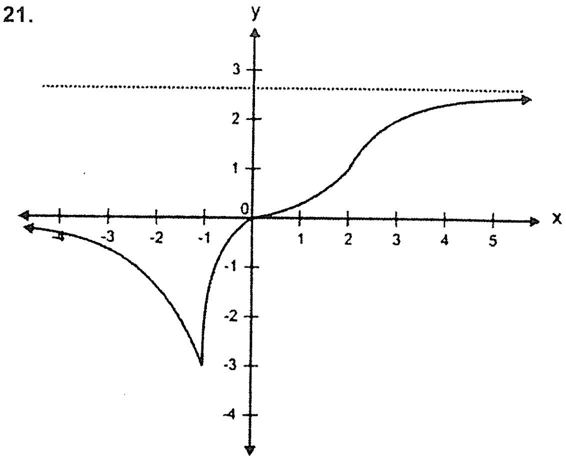
19. a) Hacia la derecha: En (0; t_3) ; Hacia la izquierda: para t > t_4
b) Aceleración positiva: En (0 ; t_1) y después de un instante antes de t_5 (donde la curva cambia de concavidad)
Aceleración negativa: En (t_1 ; t_3) y entre t_4 y un instante antes de t_5 (donde la curva cambia de concavidad)
c) Acelerado: En (0;t_1) y entre t_4 y un instante antes de t_5 (donde la curva cambia de concavidad)
Desacelerado: En (t_1 ; t_3) y después de un instante antes de t_5 (donde la curva cambia de concavidad)
d) En t= t_1, la aceleración es 0 ; en (t_3; t_4), la partícula está en reposo (v=0) ; en un instante antes de t_5, la aceleración es 0
e) En t= t_5

20.

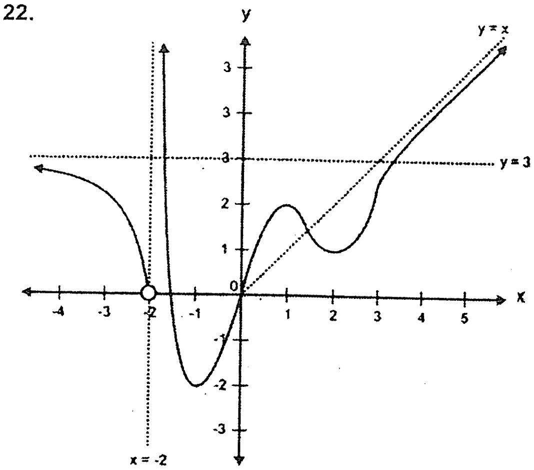
x	Conclusiones acerca de f
- ∞ < x < -2	Creciente y cóncava hacia arriba
x = -2	Asíntota vertical
-2 < x < 1	Creciente y cóncava hacia abajo
x = 1	Máximo relativo en (1,1)
1 < x < 3	Decreciente y cóncava hacia abajo
x = 3	Asíntota vertical
3 < x < 5	Decreciente y cóncava hacia arriba
x = 5	Mínimo relativo en (5,4)
5 < x < 7	Creciente y cóncava hacia arriba
x = 7	Punto de inflexión en (7,4.5)
7 < x < ∞	Creciente y cóncava hacia abajo



21.



22.



23. a) Interceptos: (-1 , 0) , $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

Discontinua en x = 2 ; D = ℝ - {2}

I = (- ∞; -12] ∪ [0 ; + ∞); sin simetrías

Asíntotas: vertical: x = 2; oblicua: y = -x - 4

b) Valores críticos: x = -1, x = 2, x = 5

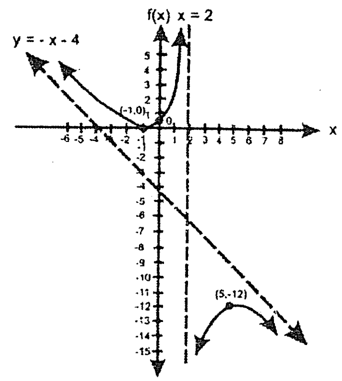
Crece en: (-1 ; 2) y (2 ; 5)

Decrece en: (-∞; -1) y (5 ; +∞)

Mínimo: (-1 ; 0) ; Máximo: (5 ; -12)

c) ∪ : (-∞; 2) ; ∩ : (2 ; +∞)

No hay punto de inflexión



24. a) Interceptos: (0, 0); continua en ℝ.

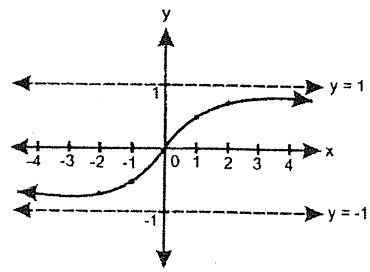
D = ℝ; I = (-1 , 1); simétrica con el origen

Asíntotas horizontales: y = -1 y y = 1

b) No hay valores críticos; creciente en todo ℝ

c) ∪ : (-∞; 0) ; ∩ : (0 ; +∞)

Punto de inflexión: (0 ; 0)



25. a) Intercepto: (2, 0). Discontinua en x = 0

D = ℝ - {0} ; I = ℝ ; sin simetrías

Asíntotas: verticales: x = 0, oblicua: y = 1 - x

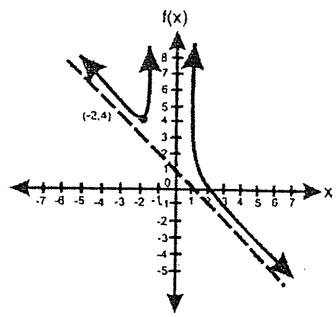
b) Valores críticos: x = -2, x = 0

Crece en (-2 ; 0); Decrece en (- ∞; -2) y (0 ; + ∞)

Mínimo: (-2 , 4)

c) ∪ : (-∞; 0) y (0 ; +∞)

No hay puntos de inflexión



26. a) Interceptos: (-1 , 0) , (2 , 0) y (0 , 2)

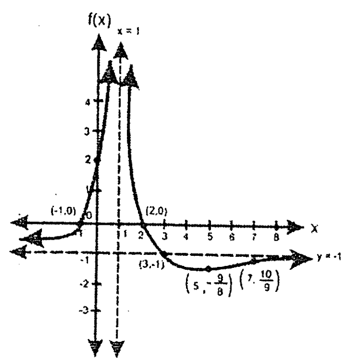
Discontinua en x = 1. D = ℝ - {1}

$I = \left[-\frac{9}{8} ; +\infty\right)$. No tiene simetrías

Asíntotas: vertical: x = 1; horizontal: y = -1

b) Valores críticos: x = 1 y x = 5

Crece en: (-∞ ; 1) y (5 ; +∞)



Decrece en: (1 ; 5)

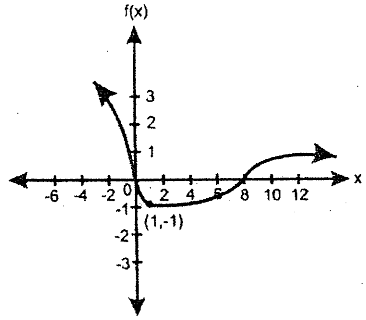
Mínimo: $\left(5, -\frac{9}{8}\right)$

c) $\cup$: (- ∞; 1) , (1 ; 7)

$\cap$: (7 ; +∞)

Punto de inflexión: $\left(7, -\frac{10}{9}\right)$

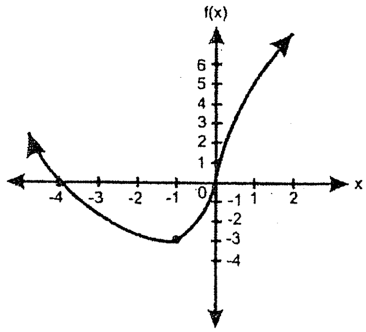
La curva corta a la asíntota horizontal en (3 , -1)



27. a) Interceptos: (0 , 0) y (8 , 0) continua en R.
D = R , I = [-1; +∞) . Sin simetrías.
No tiene asíntotas.

b) Valores críticos: x = 0 y x = 1
Decrece en: (-∞; 1) ; Crece en: (1 ; +∞)
Mínimo en: (1 ; -1)

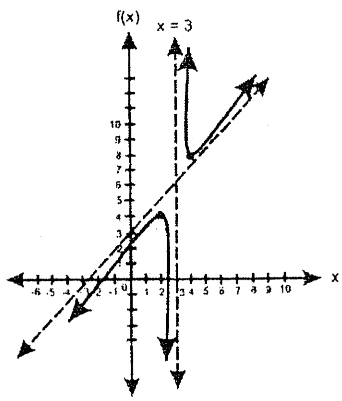
c) $\cap$: (-∞; 0) y (8 ; +∞)
$\cup$: (0 ; 8)
Puntos de inflexión: (0 ; 0) y (8 , 0)



28. a) Interceptos: (-4 , 0) y (0 , 0). Continua en R
D = R , I = [-3 ; +∞). Sin simetrías
No tiene asíntotas

b) Valores críticos: x = -1 y x = 0
Decrece en: (-∞ ; -1), Crece en (-1 ; +∞)
Mínimos: (-1 , -3)

c) $\cup$: (-∞ ; 0); $\cap$: (0 ; +∞)
Punto de inflexión: (0 , 0)

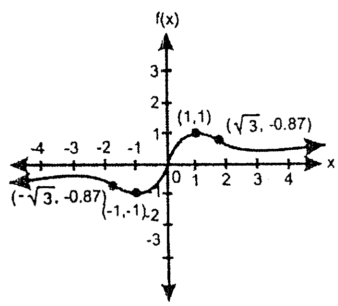


29. a) Interceptos: $\left(-2\sqrt{2}, 0\right)$, $\left(2\sqrt{2}, 0\right)$, $\left(0, \frac{8}{3}\right)$

Discontinua en x = 3 ; D = R - { 3 }
I = (-∞; 4] $\cup$ [8 ; +∞). No tiene simetrías
Asíntotas: vertical x = 3; oblicua: y = x + 3

b) Valores críticos: x = 2 y x = 4
Crece en: (-∞; 2) y (4 ; +∞)
Decrece en: (2 ; 3) y (3 ; 4)
Máximo: (2 , 4); Mínimo: (4 , 8)

c) $\cap$: (-∞; 3) ; $\cup$: (3 ; +∞)
No tiene puntos de inflexión



30. a) Interceptos: (0 , 0). Continua en R
D = R , I = [-1 ; 1]. Simetría con el origen
Asíntota horizontal: y = 0

b) Valores críticos: x = -1 y x = 1
Crece en: (-1 ; 1) ; Decrece en: (- ∞; -1) y (1 ; +∞)
Mínimo: (-1 ; -1) ; Máximo: (1 ; 1)

c) $\cap$: $\left(-\infty; -\sqrt{3}\right)$ y $\left(0; \sqrt{3}\right)$; $\cup$: $\left(-\sqrt{3}; 0\right)$ y $\left(\sqrt{3}; +\infty\right)$

Puntos de inflexión: $\left(-\sqrt{3}; -0.87\right)$; (0 ; 0) y $\left(\sqrt{3}, 0.87\right)$

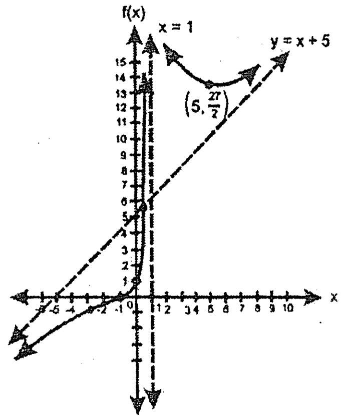
31. a) Interceptos: (-1 , 0) y (0 , 1). Sin simetrías
Discontinua en x = 1, D = $\mathbb{R}$ - { 1 }, I = $\mathbb{R}$
Asíntotas: vertical x = 1, oblicuas: y = x + 5

b) Valores críticos: x = -1 , x = 1, x = 5
Crece en: (-∞ ; 1) y (5 ; +∞)

Decrece en: (1 ; 5). Mínimo en $\left(5, \frac{27}{2}\right)$

c) $\cup$ en (-1 ; 1) y (1 ; +∞)
$\cap$ en: (-∞; -1)
Punto de inflexión (-1 ; 0)

La asíntota corta a la curva en $\left(\frac{1}{3}, \frac{16}{3}\right)$



32. a) Interceptos: (0 ; 0) y (6 , 0). Sin simetrías
Continua en R . D = $\mathbb{R}$, I = $\mathbb{R}$
Asíntota oblicua: y = 2 - x

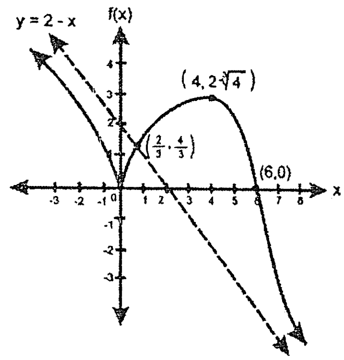
b) $f'(x) = \dfrac{12-3x}{3\sqrt[3]{x(6-x)^2}}$. Valores críticos: x = 0, x = 4, x = 6

Crece en (0 ; 4); Decrece en: (-∞ ; 0) y (4 ; +∞)
Mínimo en (0 , 0) y máximo en $\left(4, 2\sqrt[3]{4}\right)$

c) $f''(x) = \dfrac{-72}{9x^{4/3}(6-x)^{5/3}}$. $\cap$: (-∞ ; 0) y (0 , 6)

$\cup$: (6 ; +∞). Punto de inflexión: (6 , 0)

La asíntota corta a la curva en $\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$



PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS ICFES: **1.** b) **2.** b) **3.** c) **4.** d) **5.** c)

NÚCLEO TEMÁTICO 8

COMPRENSIÓN DE LECTURA: **1.** c. **2.** d., **3.** a., **4.** c., **5.** d.

EJERCICIO 8 – 1

1. -4x dx

2. $(6x + 8x^{-3})\,dx$

3. $-\dfrac{3}{(2x-1)^2}\,dx$

4. $\left[1+\frac{3}{2}x^2\left(4-x^3\right)^{-1/2}\right]dx$

5. $-\frac{1}{2}x^{-1/2}\operatorname{Sen} x^{1/2}\,dx$

6. $\left(\frac{2}{3}x^{-1}\operatorname{Cos}(2x)-\frac{1}{3}x^{-2}\operatorname{Sen}(2x)\right)dx$

7.

dx= Δx	dy	Δy	Δy - dy	$\frac{dy}{\Delta y}$
0.5	2	2.25	0.25	0.889
0.1	0.4	0.41	0.01	0.976
0.01	0.04	0.04	0	1

8. $2 - \frac{1}{32} \approx 1.969$

9. $\dfrac{1+\frac{\pi}{90}}{\sqrt{2}} \approx 0.7318$

10. Sen $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{90}$ Cos $\frac{\pi}{2} = 1$ 11. $\pm 7\pi cm^2$ 12. $4\pi \approx 12.57\ m^2$

EJERCICIO 8 - 2

1. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 2. $\frac{8}{25}$ cm/min. 3. $\frac{3}{4}$ 4. a) $-\frac{2}{5\pi}$ cm/min. b) -80 cm^2/min

5. $\frac{4}{25\pi}$ m/min. 6. $\frac{9}{5}$ m/seg. 7. a) 25 $\sqrt{2}$ p/seg. b) $\frac{32\sqrt{145}}{29}$ pies/seg.

8. $\frac{1}{\pi}$ m/min. 9. $\frac{1}{6}$ m/min. 11. a) 24.6% b) $\frac{1}{64}$ dm/min.

12. $\frac{1}{194}\left(3\sqrt{97}+97\right)$ pies/seg. 13. Crece a un ritmo de $\frac{27\sqrt{2}}{4}$ cm^2/seg

14. $\left(\frac{27}{2}, \frac{737}{12}\right)$ 15. 7.2 mi/h 16. 875 unidades por mes 17. $\frac{428}{17}$ Km./h

18. $-\sqrt{3}$ dm/seg. 19. a) 2 Km./h b) 3.7 Km./h c) 5 Km./h 20. $\frac{66}{7}$ cm^2/seg

---

EJERCICIO 8 - 3

1. 55 y 55 2. 2 y 4 3. 10 y -10 4. 1 5. 16 y 16 6. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

7. 12.5 m , 12.5 m 8. 250 m, 500 m 9. 37.5 m, 22.5 m 10. Un cubo de 4 dm de arista

11. $\sqrt[6]{\frac{(360)^3}{2\pi^2}}$ cm, $\sqrt[3]{\frac{720}{\pi}}$ cm 12. 32 cm^2 13. $\frac{5\sqrt{3}}{3}$, $\frac{5\sqrt{6}}{3}$ 14. Un cubo de $\sqrt{3}$ cm

15. 3 $\sqrt{2}$ cm y 6 $\sqrt{2}$ cm 16. $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{5}{2}\right)$ y $\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{5}{2}\right)$ 17. 30

18. $\frac{50}{3}$ cm, $\frac{50}{3}$ cm, $\frac{100}{3}$ cm. 19. $\frac{36}{25}$ seg. 20. Alto: $\frac{8}{3}$, ancho: $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

TALLER DE LA UNIDAD 8

2. 4, 5 3. $\frac{1}{6} \approx 0.167$, $\sqrt[3]{10} - 2 \approx 0.154$

4. a) $(3x^2 - 2x)\,\Delta x + (3x - 1)\,(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$ b) $(3x^2 - 2x)\Delta x$ c) $(3x - 1)\,(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$

5. a) $\frac{-2\Delta x}{(x-1)(x+\Delta x-1)}$ b) $\frac{-2\Delta x}{(x-1)^2}$ c) $\frac{2(\Delta x)^2}{(x-1)^2\,(x+\Delta x-1)}$

6. a) 0.0309 b) 0.03 c) 0.0009

7. a) 6.75 cm^3 b) 0.3 cm^2

8. $\frac{12}{5}\pi m^3$ 9. a) $2\sqrt{2}$ unidades/seg. b) 4 unidades/seg. c) 8 unidades/seg.

10. $\frac{8}{405\pi}$ cm/min. 11. 900 cm^3/seg 12. $-\frac{3}{2}$ dm/ seg.

13. $\dfrac{39}{\sqrt{217}}$ m/seg. **14.** $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ dm/min. **15.** $-\dfrac{\sqrt{5}}{15}$ m/seg.

16. 3 cm **17.** $1\dfrac{27}{43}$ horas = 1 hora 38 minutos **18.** $3\sqrt{2}$ y $2\sqrt{2}$

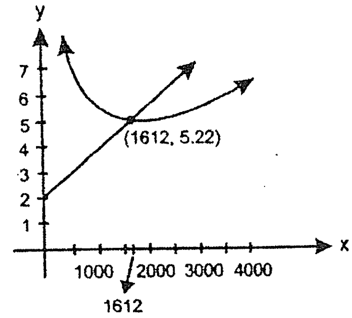
19. A $\sqrt{3}$ Km. del punto A **20.** 225 estudiantes

21. a)

x	c(x)	$\dfrac{c(x)}{x}$	c´(x)
1000	5600	5.6	4
2000	10600	5.3	6
3000	17600	5.87	8

b) $x \approx 1612$
Costo promedio mínimo
\$5.22/ artículo

c)



PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS ICFES: **1.** b) **2.** d) **3.** c) **4.** c) **5.** d)

NÚCLEO TEMÁTICO 9

COMPRENSIÓN DE LECTURA: **1.** d. **2.** d., **3.** b., **4.** c., **5.** c.

EJERCICIO 9 – 1

1. a) $y = \dfrac{9}{2}x^{2/3} - \dfrac{1}{4}x^{4/3} + 2x + c$ **b)** $y = \dfrac{1}{3}z^3 - 2z - \dfrac{1}{z} + c$ **c)** $y = \dfrac{10}{3}x^3 + \dfrac{13}{2}x^2 - 3x + c$

d) $y = \dfrac{9}{7}x^{7/3}x - \dfrac{15}{4}x^{4/3} + 3x^{1/3} + c$ **e)** $y = \dfrac{1}{5}x^5 + \dfrac{1}{2}x^4 + \dfrac{4}{3}x^3 + 4x^2 + 16x + c$ **f)** $y = \dfrac{2}{3}x^3 - 4x^2 + 6x + c$

g) $y = \text{Sen}\left(2\sqrt{x}\right) + c$ **h)** $y = 2\,\text{Sen}\,(2\theta) + \text{Cos}\,(3\theta) + c$ **i)** $y = \dfrac{1}{35}\text{Sen}^7(5x) + c$

j) $y = -\dfrac{1}{6}\sqrt{4 - 3\text{Sen}(4x)} + c$ **k)** $y = \dfrac{42 - 11x}{22(2 - x)^{11}} + c$ **l)** $y = -\dfrac{1}{\left(2 + \sqrt{z}\right)^2} + c$

m) $y = \dfrac{3}{11}\left(1 + \sqrt[3]{x}\right)^{11} + c$ **n)** $y = \dfrac{1}{2}\left(x^2 + 1\right)^{5/2} + c$ **o)** $y = \dfrac{5}{7}\left(z + z^{-1}\right)^{7/5} + c$

p) $y = \dfrac{1}{13}\left(x^3 + 2\right)^{13/3} - \dfrac{1}{5}\left(x^3 + 2\right)^{10/3} + c$ **2. a)** $x^5\sqrt{x^6 + 3}$ **b)** $(2x + 1)^{10}$

3. a) $y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x + 1}}$ **b)** $y = \sqrt{x^2 + 1}$

4. a) $\dfrac{2}{3}\left(y^{3/2} - x^{3/2}\right) - \dfrac{1}{2}\left(y^2 + x^2\right) + c = 0$ **b)** $\dfrac{y^3}{3} = \dfrac{2}{15}\left(x^5 - 1\right)^{3/2} + c$ **c)** $y = \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{3}{2}x^2 + 2x$

d) $y = -\dfrac{1}{9}\text{Sen}(3x) - \dfrac{1}{9}\text{Cos}(3x) + c_1x + c_2$ **e)** $y = \dfrac{1}{12}x^4 + \dfrac{1}{2}x^3 - \dfrac{5}{6}x + \dfrac{9}{4}$ **f)** $y = \dfrac{1}{4}x^4 + x^2 + x + 4$

5. $y = -\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2} + \frac{8}{3}$

6. **a)** $s = 300 + 10t - 5t^2$ **b)** -40 m/seg **c)** 8.81 seg

8. 2 m/seg² **9.** -3.08 m/seg² **10.** -4.37 m/seg²

11. $y = -\frac{1}{12}x^4 + 2x^2 - 3x + \frac{1}{12}$ **12.** 3.1 μm³

TALLER DE LA UNIDAD 9

2. $\frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{x} - \frac{5}{2x^2} + c$ **3.** $\frac{3}{16}(4x+9)^{4/3} + c$ **4.** $2\sqrt{x} + \frac{4}{3}x\sqrt{x} + \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + c$

5. $-\frac{3}{8}(1-x^2)^{4/3} + c$ **6.** $\frac{2}{7}(x+5)^{7/2} - 4(x+5)^{5/2} + \frac{50}{3}(x+5)^{3/2} + c$

7. $\frac{x^2+2x+2}{x+1} + c$ **8.** $\frac{7}{3}\text{Sen}(5x) + \frac{5}{7}\text{Cos}(7x) + c$ **9.** $\frac{1}{6}\text{Sen}^3(2\theta) + c$

10. $-\frac{\sqrt{4-x^2}}{4x} + c$ **11.** $\frac{1}{2}\tan(x^2) + c$ **12.** $\frac{1}{2\text{Cos}(2\theta)} + c$

13. $x^{5/2} + x + c$ **14.** $F_2(x) = F_1(x) - 1$ **15.** $y = x^3 + x^2 - 7x + c$

16. $2\sqrt{1+y^2} = 3x^2 + c$ **17.** $\frac{1}{2}\text{Sen}(2v) + \frac{1}{3}\text{Cos}(3u) + c = 0$ **18.** $y = \frac{5}{12}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + c_1x + c_2$

19. $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 8x + 5$ **20.** $y = 2\sqrt{x+2} - 5$ **21.** $y = 3x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 2x$

22. $y = -\frac{1}{2x^2} - 2x + 3$ **23.** $y = x^2 - 3x + 2$ **24.** $12y = x4 + 6x^2 - 20x + 27$

25. a) 400 m **b)** 40 m/seg

PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS ICFES:1. a) **2.** d) **3.** b) **4.** c) **5.** a)

NÚCLEO TEMÁTICO 10

COMPRENSIÓN DE LECTURA: **1.** d. **2.** c., **3.** b., **4.** a., **5.** d.

EJERCICIO 10 – 1

1. **a)** 24 **b)** 20 **c)** 5040 **d)** 25 **e)** 32

2. 120 **3.** 120 **4.** 72 **5.** 36 **6.** 18 **7.** 144 **8.** 864

EJERCICIO 10 – 2

1. 24 **2.** 6 **3.** 255024 **4.** $P_6 = 720$, $P_4 = 24$, $P_5 = 120$ **5.** 120

EJERCICIO 10 – 3

1. 21 2. 56 3. 12.870 4. 18 5. a) 792 b) 220 c) 7920

6. 252 7. $\frac{n}{2}(n-1)$

EJERCICIO 10 – 4

1. En donde hay: 4 blancas y 4 grises, 2 blancas y 2 grises, 6 blancas y 6 grises
4. La B, porque su frecuencia relativa es menor que en las marcas A y C.
5. El número de veces que se lanzó es 800. La frecuencia relativa del número de veces que ha salido con la punta hacia arriba es $\frac{297}{800}$ y del número de veces que ha salido hacia abajo es $\frac{503}{800}$. Es más probable que salga con la punta hacia abajo.
6. a) Mariana: $\frac{3}{18}$; Juan: $\frac{4}{21}$; Camilo: $\frac{6}{28}$; Sara: $\frac{5}{22}$

   b) Ordenado de mayor a menor: Sara, Camilo, Juan y Mariana.
7. a) $\frac{1}{2}$ b) 1 c) $\frac{1}{2}$
8. a) Juan: 40 veces ; Mariana: 80 veces ; Lina: 200 veces y Camilo: 1000 veces. b) Camilo
10. La probabilidad de que salga cara o sello es la misma.
11. a) 0 b) $\frac{5}{7}$ c) $\frac{2}{7}$ d) $\frac{2}{7}$ e) $\frac{5}{7}$
13. La probabilidad para el: suceso cero es 0; suceso par es $\frac{1}{2}$, suceso "mayor que 5" es $\frac{5}{6}$, suceso "obener 1 ó 6" es $\frac{1}{3}$; suceso "el lápiz queda vertical apoyado en la punta" es 0, el suceso "el lápiz con una cara horizontal" es 1.

EJERCICIO 10 – 5

2. $\frac{3}{7}$ 3. $\frac{2}{5}$ 4. a) $\frac{1}{126}$ b) $\frac{1}{126}$ 5. $\frac{4}{15}$, $\frac{9}{15}$, $\frac{2}{3}$

6. a) 0.63 b) 0.08 c) $\frac{10}{29}$ d) $\frac{4}{9}$

7. $\frac{1}{4}$ 8. a) $\frac{3}{36}$ b) $\frac{30}{36}$ c) $\frac{16}{36}$

9. 0.65

EJERCICIO 10 – 6

1. a) $\frac{3}{5}$ b) $\frac{1}{10}$ c) $\frac{5}{40}$ 2. a) $\frac{5}{12}$ b) No porque $\frac{5}{12} \neq \frac{3}{10}$ c) 0.4

3. $\frac{4}{27}$ 4. a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{30}$ 5. a) 0.0625 b) 0.12

6. a) No b) 0.63 c) 0.08 d) 0.344 e) 0.444

7. a) 0.32 b) 0.6 c) 0.192 8. 0.26 9. 0.973 10. 0.915

TALLER DE LA UNIDAD 10

2. **a)** 125 **b)** 60 **3.** 4! = 24 **4.** $V_{8,3} = 336$ **5.** 24

6. **a)** 243×10^4 **b)** 225×10^4 **7.** **a)** 151.200 **b)** 5760

8. 90 **9.** **a)** 20 **b)** 5 **c)** 25

10. **a)** 72 **b)** 36 **c)** 18 **d)** 144 **e)** 864

11. **a)** 120 **b)** 24 **d)** 48

12. Todas son igualmente probables

13. **a)** $\frac{1}{10}$ **b)** $\frac{5}{10}$ **c)** $\frac{2}{10}$ **d)** $\frac{9}{10}$

15. **a)** {2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12} **b)** $P(7) = \frac{1}{6}$ y $P(2) = \frac{1}{36}$ **c)** No son equiprobables

$p(2)=\frac{1}{36}$

$$\begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 \\ 31 & 32 & 33 & 34 & 35 & 36 \\ 41 & 42 & 43 & 44 & 45 & 46 \\ 51 & 52 & 53 & 54 & 55 & 56 \\ 61 & 62 & 63 & 64 & 65 & 66 \end{bmatrix}$$

suman 7

$p(7)=\frac{6}{36}$

16. $\frac{50}{144}$ **17.** $\frac{19}{66}$ **18.** $\frac{1}{3}$ **19.** **a)** $\frac{1}{21}$ **b)** $\frac{2}{7}$ **c)** $\frac{2}{7}$

23. **a)** { 4,6} **b)** {4} **c)** {7} **d)** {1,2,5}

24. **a)** $\frac{1}{216}$ **b)** 0 **c)** $\frac{215}{216}$

25. $\frac{1}{3}$ **26.** $\frac{25}{41}$ **27.** 0.9129 **28.** 0.9364

29. **a)** $\frac{9}{20}, \frac{3}{8}, \frac{3}{40}, \frac{1}{3}, \frac{3}{10}$ **b)** No **c)** No **d)** $\frac{3}{5}, \frac{21}{40}, \frac{3}{120}$

30. **a)** $\frac{3}{4}$ **b)** $\frac{3}{8}$ **c)** $\frac{1}{4}$ **31.** **a)** $\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$ **b)** $\frac{1}{2}$

32. No

PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS ICFES: **1.** c) **2.** c) **3.** c) **4.** b) **5.** c)

BIBLIOGRAFÍA

- Apostol, Tom M. Calculus. Volumen I, 2ª Edición. Editorial Reverté, S.A. 1973
- Edwards, C.H. Jr.; Penney, David E. Cálculo con Geometría Analítica. Cuarta edición. Editorial Prentice Hall Hispanoamericana, S.A. México, 1994.
- Larson, Hostetler, Edwards. Cálculo y Geometría Analítica. Volumen 1. Quinta edición. McGraw Hill 1996.
- Lehmann, Charles. Geometría Analítica. Segunda Edición. Unión Tipográfica Editorial Hispano Americana. 1967.
- Leithold, Louis. El Cálculo. Séptima ddición. Oxford University Press México, S.A. de C. V. 1998.
- Obregón, Iván. Al Cálculo con la Pandilla. Susaeta Ediciones. 1991.
- Protter, Murray y Morrey, Charles. Cálculo con Geometría Analítica. Tercera edición. Fondo Educativo Interamericano. 1980
- Stewart, James. Cálculo, conceptos y contextos. Internacional Thomson Editores. 1999
- Swokowski, Earl. Cálculo con Geometría Analítica. Segunda edición. Grupo Editorial Iberoamericano. 1989.
- Thomas Jr, George B y Ross L. Finney. Cálculo, una variable. Addison Wesley Longman. Novena Edición. 1998.
- Uribe Cálad, Julio Alberto. Matemática, una propuesta curricular 11. Sexta edición, Bedout Editores. 1996.
- Villegas de Arias, Celia. Cálculo Diferencial, teoría y aplicaciones. Primera edición. 1999. Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín.

Esta obra se terminó de imprimir en los talleres
de la Editorial Artes y Letras S.A.S.
en el mes de febrero del año 2011