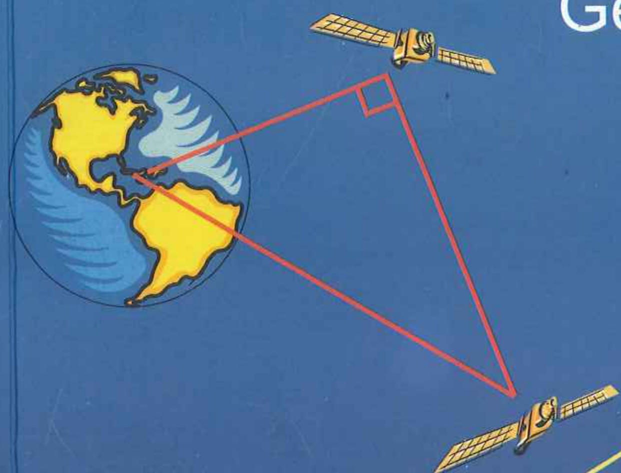
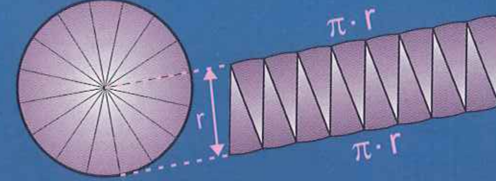
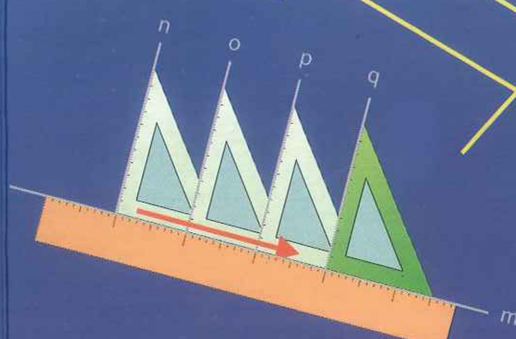
CON ESTÁNDARES PARA LA EXCELENCIA Y DESARROLLO DE COMPETENCIAS

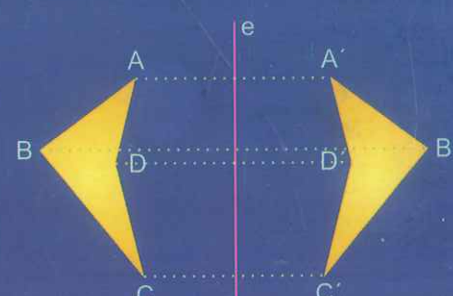
MATEMÁTICA EXPERIMENTAL 8

Geometría









Julio Alberto Uribe Cálad
Marco Tulio Ortiz Díez

UROS editores

Kelly Paola Álvarez López

CON ESTÁNDARES PARA LA EXCELENCIA Y DESARROLLO DE COMPETENCIAS

MATEMATICA EXPERIMENTAL

GEOMETRÍA

8

OCTAVO GRADO

EDUCACIÓN BÁSICA SECUNDARIA

SEGUNDA EDICIÓN ACTUALIZADA

2006

Julio Alberto Uribe Cálad

Marco Tulio Ortiz Díez

UROS editores

Este texto ha sido elaborado por los autores de acuerdo con los programas del Ministerio de Educación Nacional y bajo la responsabilidad de los siguientes integrantes:

AUTORES

JULIO ALBERTO URIBE CÁLAD

- Licenciado en Matemáticas y Física de la Universidad de Antioquia, año 1.980
- Posgraduado en Didáctica Universitaria en la misma universidad en el año 2002.
- Rector del colegio Calasanz de Medellín entre los años 1991 y 2002 y profesor de la misma institución desde el año 1971
- Profesor Asociado de la Universidad Nacional de Colombia, sede de Medellín, desde el año 1980
- Distinguido con el premio a la Docencia Excepcional por el Consejo Superior de la Universidad Nacional en los años 2000, 2001 y 2002.
- Coautor de la reconocida serie ELEMENTOS DE MATEMÁTICAS publicada por Editorial Bedout entre los años 1989 y 1999.
- Autor y coautor de más de 25 textos, incluidos dos de carácter universitario, uno de los cuales es actualmente el texto guía en el curso de GEOMETRÍA VECTORIAL, para estudiantes de ingeniería en la Universidad Nacional de Colombia, sede de Medellín.

MARCO TULIO ORTIZ DÍEZ

- Licenciado en Matemáticas y física de la Universidad de Antioquia, en el año 1982.
- Profesor del colegio Calasanz de Medellín, desde hace 25 años.
- Profesor del liceo Concejo de Medellín desde hace 15 años.
- Profesor del Instituto Nocturno de Bachillerato de la Universidad de Antioquia, durante 28 años.

COMITÉ TÉCNICO

Diseño y Diagramación: Isabel Consuelo Alvarez M.
Diseño de carátula: Juan Carlos Uribe Osorio.
Impresión y terminación: Termimpresos - Medellín

AGRADECIMIENTOS:

Al profesor Jesús Enrique Uribe Ángel, quien elaboró las preguntas correspondientes a las comprensiones de lectura de cada unidad.

ISBN: 958-97531-4-0

Contenido

MATEMÁTICA ERI

GE ÍA

es ra

ESTRUCTURAR Y DESARROLLAR NSAMIE

de

UN CULO

por

CONOCIM ESPECÍ

d

PEN TOS

PROCESOS GENERALES

como

- PLANTEAMIENTO Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
  - Enunciar el problema
  - Desarrollar estrategias de solución
  - Verificar los resultados
  - Generalizar las estrategias de solución
  - Utilizar significativamente la matemática para aplicarla en la solución de nuevos problemas
- RAZONAMIENTO
  - Cómo y por qué de los procesos
  - Justificar los procedimientos
  - Plantear hipótesis, exhibir contraejemplos y argumentos a partir de propiedades conocidas
  - Identificar patrones de comportamiento
- COMUNICACIÓN
  - Expresar oralmente ideas
  - Escribir procesos de solución de problemas
  - Enunciar e interpretar propiedades
  - Evaluar información
- MODELACIÓN
  - Identificar las partes de un problema
  - Escribir un modelo matemático para el enunciado de problemas
  - Resolver el modelo
  - Verificar las soluciones obtenidas
- EJERCITACIÓN
  - Desarrollar cálculos aritméticos, métricos, geométricos, analíticos y de rutina
  - Dibujar gráficas
  - Medir objetos
  - Realizar transformaciones en el plano y en el espacio

PENSAMIENTO ESPACIAL Y SISTEMAS GEOMÉTRICOS

a través de

- ESTRUCTURA LÓGICA DE LA GEOMETRÍA
  - Lenguaje de la geometría
  - Método axiomático
  - Método directo e indirecto de demostración
  - Método de contraejemplo
- RECTAS PARALELAS Y PERPENDICULARES: PROPIEDADES GENERALES.
- ÁNGULOS FORMADOS POR RECTAS PARALELAS Y CORTADAS POR TRANSVERSALES: PROPIEDADES GENERALES.
- TRIÁNGULOS
  - Líneas y puntos notables
  - Propiedades generales
- CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS
  - Definición
  - Casos de congruencia de triángulos
- CUADRILÁTEROS
  - Clasificación
  - Propiedades generales
- CONSTRUCCIONES GEOMÉTRICAS
  - Bisectriz de un ángulo
  - Recta paralela a otra desde un punto exterior
  - Recta perpendicular a otra desde un punto exterior a ella y por un punto de ella
  - Mediatriz de un segmento
  - Altura de un triángulo
  - Triángulo congruente a otro dado
- CUERPOS GEOMÉTRICOS
  - Poliedros: prisma y pirámide recta
  - Cuerpos de revolución: cilindro, cono y esfera.

llar

C CIAS

INTERPRETATIVA

P VA

evidencia ance de

DESTREZA OPERATIVA

APROPIACIÓN Y COMUNICACIÓN DE CONCEPTOS

A ERIMENTAL 8

GE ÍA

es ra

LLAR NSAMIENTO LÓGICO MATEMÁTICO

de

UN ULO

por

OCIM ESPECÍFICOS

CONTEXTO

como

- Ambiente social y familiar que rodea al estudiante.
- Situación sicológica propia de la adolescencia.
- Ambiente de motivación para el aprendizaje que pueda crear el docente.
- Reflexionar sobre los procesos de pensamiento.
- Activar la capacidad de pensamiento.
- Lograr la participación activa del estudiante.
- Preparar para resolver otros problemas de la ciencia y de la vida.

d

PEN TOS

PENSAMIENTO MÉTRICO Y SISTEMAS DE MEDIDA

a través de

- REVISIÓN DE MEDIDAS DE LONGITUD
  - Conversión de unidades de longitud
  - Congruencia de segmentos
  - Longitud de la circunferencia
- UNIDADES DE MEDICIÓN ANGULAR
  - El sistema sexagesimal: grados, minutos y segundos
  - Conversión de unidades en el sistema sexagesimal
  - El sistema circular: el redian
  - Conversión de unidades entre los sistemas sexagesimal y circular
  - Congruencia de ángulos
- MEDICIÓN DE REGIONES PLANAS
  - Concepto de área
  - Unidades de superficie: el metro cuadrado, múltiplos y submúltiplos. Conversiones de unidades de superficie
- ÁREAS DE LAS FIGURAS PLANAS
  - Área del rectángulo y del cuadrado
  - Área del paralelogramo y del triángulo
  - Área del rombo y de un polígono regular
  - Área del círculo y del sector circular
- VOLÚMENES DE LOS CUERPOS GEOMÉTRICOS
  - Concepto de volumen
  - Unidades de volumen: el m³, múltiplos y submúltiplos. Conversiones entre unidades de volúmen
  - Volumen del ortoedro, cubo, prima recto, pirámide recta, cilindro circular recto, cono circular recto y esfera

pillar

CCIAS

PIVA

ARGUMENTATIVA

denciadance de

CEPTOS

DIBUJO DE GRÁFICOS

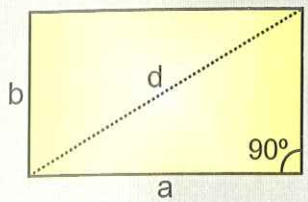
SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

GEOMETRÍA

1. ÁREAS DE FIGURAS PLANAS

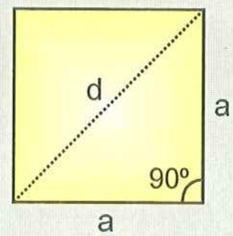
Rectángulo

Área: $A=a\cdot b$



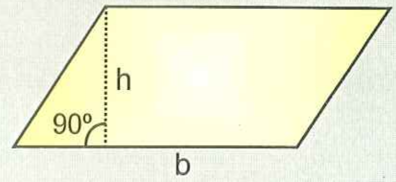
Cuadrado

Área: $A=a^2$



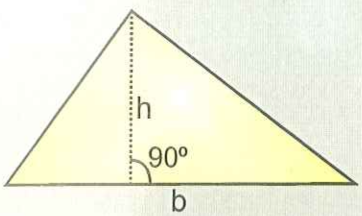
Paralelogramo

Área: $A=a\cdot h$



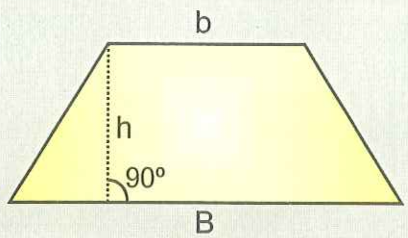
Triángulo

Área: $A=\dfrac{b\cdot h}{2}$



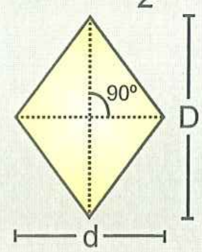
Trapecio

Área: $A=\dfrac{B+b}{2}\cdot h$



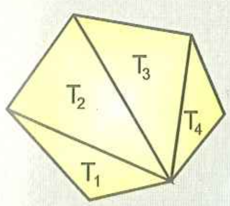
Rombo

Área: $A=\dfrac{D\cdot d}{2}$



Polígono

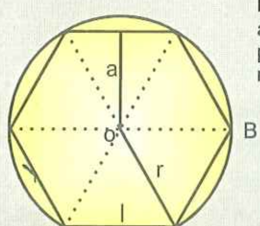
Área: $A = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$



Polígono regular: área

Área: $A = \dfrac{n\cdot l\cdot a}{2} = \dfrac{p\cdot a}{2}$

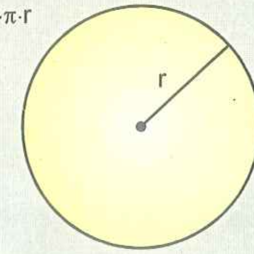
l = lado
a = apotema
p = perímetro
n = Nº de lados



Circunferencia - Círculo

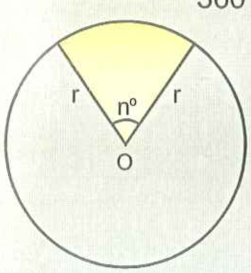
Longitud de la circunferencia
$L = 2\cdot\pi\cdot r$

Área del círculo
$A = \pi\cdot r^2$



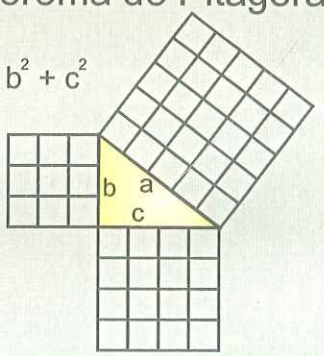
Sector circular

Área: $A = \pi\cdot r^2\cdot \dfrac{n^\circ}{360^\circ}$

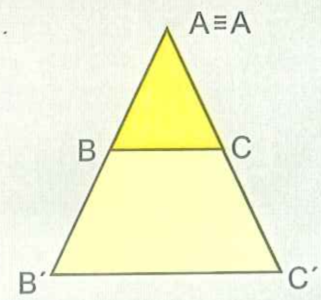


Teorema de Pitágoras

$a^2 = b^2 + c^2$



Teorema de Tales

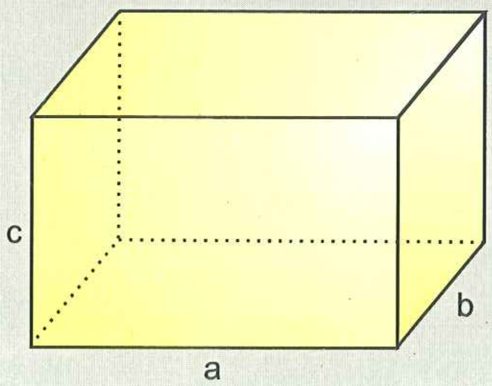


$\overline{BC} \parallel \overline{B'C'} \Leftrightarrow$ ABC y A´B´C´ semejantes

2. VOLÚMENES DE LOS CUERPOS GEOMÉTRICOS

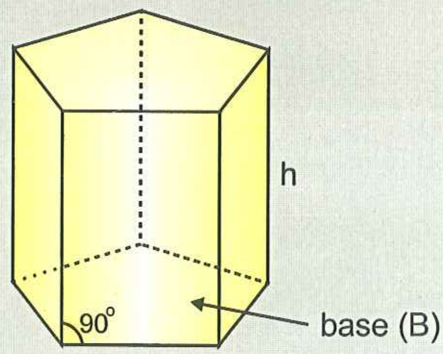
Ortoedro

$V = a \cdot b \cdot c$



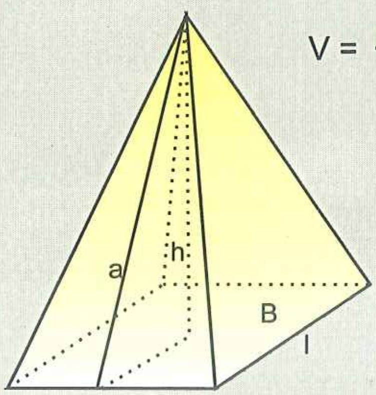
Prisma rectangular

$V = A_B \cdot h$, donde A_B = área de la base (B)



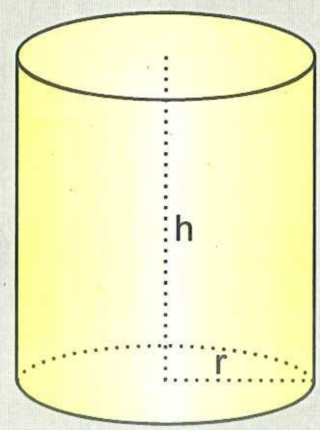
Pirámide rectangular

$V = \dfrac{B \cdot h}{3}$



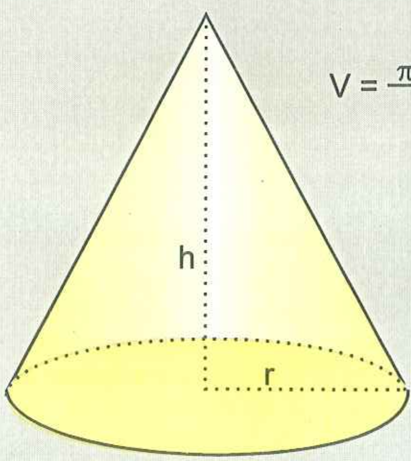
Cilindro

$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$



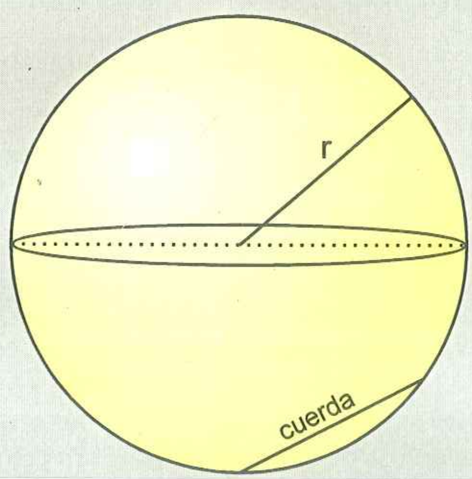
Cono

$V = \dfrac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$



Esfera

$V = \dfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$



Núcleo Temático

1

¿QUÉ SABEMOS DE GEOMETRÍA?

LOGRO GENERAL

Afianzar, ampliar e interiorizar los conocimientos adquiridos en los cursos anteriores creando espacios de duda y confrontación para los procesos y los resultados que de ellos se generen.

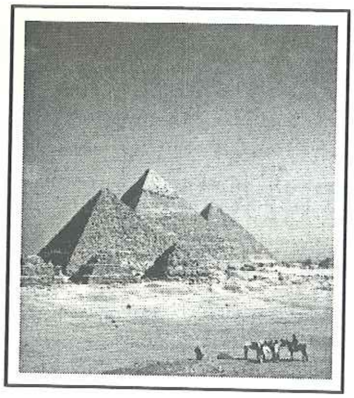
DIMENSIONES

LOGROS ESPECÍFICOS	INDICADORES DE LOGRO
Corporal: • Participar activamente en los talleres programados para realizar un repaso profundo y serio de los contenidos geométricos estudiados en 6o. y 7o. grados.	• Participa en actividades de destreza operativa y manejo conceptual.
Comunicativa: • Emplear correctamente el vocabulario geométrico. • Expresarse con seguridad delante de sus compañeros.	• Explica con sus propias palabras el significado de los conceptos geométricos. • Explica con claridad y precisión los procesos seguidos para la obtención de los resultados.
Cognitiva: • Repasar los conceptos básicos de ángulos, triángulos, cuadriláteros y la clasificación de estos polígonos. • Revisar las propiedades geométricas relacionadas con el cálculo de áreas.	• Clasifica ángulos, según su medida y según su posición. • Clasifica triángulos según la medida de sus lados y de sus ángulos. • Calcula áreas de figuras geométricas.
Estética: • Dibujar figuras que traduzcan enunciados de problemas geométricos.	• Ilustra mediante dibujos o gráficas el enunciado de un problema de tipo geométrico.
Ética-Actitudinal: • Reconocer la importancia de realizar un buen repaso, como punto de partida para adquirir nuevos conocimientos.	• Presenta sus trabajos, tareas e informes en el tiempo señalado

EVALUACIÓN

ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS

1.1 HISTORIA DE LA GEOMETRÍA (1)



Los pensadores griegos Herodoto y Aristóteles no quisieron arriesgarse a situar los orígenes de la geometría en una época anterior a la de la civilización egipcia, pero está claro que la geometría en la que ellos pensaban tenía sus raíces en una antigüedad mucho mayor. Herodoto sostenía que la geometría se había originado en Egipto, porque creía que dicha materia había surgido allí a partir de la necesidad práctica de volver a trazar los linderos de las tierras después de la inundación anual del valle del río del Nilo. Aristóteles, en cambio, sostenía que el cultivo y desarrollo de la geometría en Egipto se había visto impulsado por la existencia allí de una amplia clase sacerdotal ociosa. Podemos considerar que los puntos de vista de Herodoto y Aristóteles representan dos teorías opuestas acerca de los orígenes de la geometría, la primera defendiendo un origen basado en una necesidad práctica, y la segunda un origen basado en el ocio y el ritual sacerdotal. El hecho de que a los geómetras egipcios se les llamase a veces "los tensores de la cuerda" (o agrimensores) se puede utilizar para apoyar cualquiera de las dos teorías, porque las cuerdas se usaron tanto para bosquejar los planos de los templos como para reconstruir las fronteras borradas entre los terrenos.

EJERCICIO 1.1

COMPRENSIÓN DE LECTURA. Explicación: Vuelve a leer el fragmento anterior y luego encierra, en un círculo, la letra que corresponda a la respuesta correcta:

1. El propósito del autor en el escrito es:
   a. Sustentar la tesis de Aristóteles sobre la aparición de la geometría.
   b. Explicar cómo la clase sacerdotal egipcia impulsó el desarrollo de la geometría.
   c. Defender la posición de Herodoto y Aristóteles sobre los orígenes de la geometría.
   d. Exponer los diferentes puntos de vista sobre los orígenes de la geometría.

2. Uno de los siguientes enunciados no se deduce del texto:
   a. Las cuerdas fueron empleadas por los egipcios para medir distancias.
   b. El ocio de los sacerdotes egipcios obstaculizó el desarrollo de la geometría.
   c. Los orígenes de la geometría se deben buscar antes de la civilización egipcia.
   d. El pueblo egipcio contribuyó al desarrollo de la geometría en razón a desastres naturales.

3. El autor desarrolla su escrito principalmente con base en:
   a. Argumentaciones falsas.
   b. Especulaciones de pensadores griegos.
   c. Ejemplificaciones de sabios antiguos.
   d. Puntos de vista opuestos.

4. De acuerdo con el contenido del fragmento, éste se podría titular:
   a. Herodoto y Aristóteles: dos grandes del pensamiento griego.
   b. Punto de vista aristotélico sobre la aparición de la geometría.
   c. Los orígenes de la geometría.
   d. La geometría: una ciencia polémica.

5. La **agrimensura** que se menciona en el texto hace referencia a:
   a. El arte de medir la tierra.
   b. El cuidado de los suelos.
   c. La reconstrucción de fronteras borradas.
   d. Elaboración de planos de templos.

1.2 UNAS PALABRAS PARA EMPEZAR

- Cualquiera haya sido el origen de la geometría – Herodoto sostenía la teoría de la **necesidad práctica** de los egipcios de volver a trazar los linderos de las tierras después de las inundaciones anuales del valle del Río Nilo; en cambio, Aristóteles sostenía que su desarrollo se había visto impulsado por la existencia allí de una **amplia casta sacerdotal ociosa**– lo cierto es que nosotros, hasta este momento, hemos adquirido unos conocimientos en geometría que son equivalentes a los que adquirieron las antiguas culturas egipcia y babilónica, antes de que tales conocimientos fueran conocidos por los Griegos, hacia el siglo V a. de C. y los organizaran de una manera sistemática tal como se tienen hoy día.
- Vamos, pues, a comenzar el estudio de la geometría en este curso, partiendo de la base de lo que ya conocemos desde cursos anteriores. La metodología es sencilla: formularemos una pregunta sobre algún tema, la respondemos inmediatamente, presentamos algunos ejemplos ilustrativos y, una vez tengamos un buen número de preguntas y respuestas sobre un concepto determinado, planteamos un taller de ejercicios para ser resueltos por el alumno.

1.3 PREGUNTAS Y RESPUESTAS SOBRE LOS CONCEPTOS BÁSICOS DE GEOMETRÍA

Pregunta Nº 1

¿Qué significa la palabra GEOMETRÍA y cuál es su propósito?

Respuesta

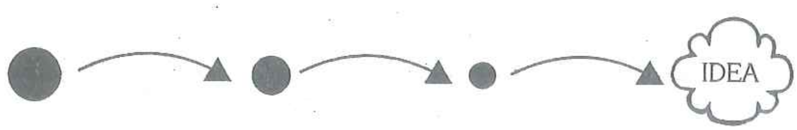
Etimológicamente, la palabra **Geometría** proviene de las raíces griegas **geo**, que significa **tierra**, y **metrón**, que significa **medida**; por lo tanto, **geometría** significa **medir la tierra**.
El propósito de la geometría es estudiar los **conjuntos de puntos** y establecer las relaciones y propiedades que pueden darse entre ellos.

Pregunta Nº 2

¿Cuáles son los conceptos geométricos de PUNTO, LÍNEA, LÍNEA RECTA, PLANO y ESPACIO?

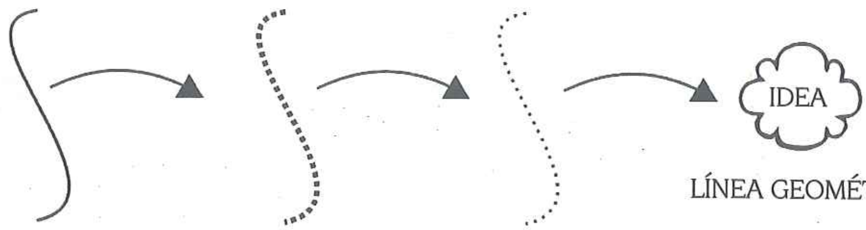
Respuesta

- Cuando decimos "dibujar un punto" lo que pretendemos es dibujar un PUNTO MATERIAL que nos represente la idea de PUNTO GEOMÉTRICO. Los puntos geométricos no tienen forma ni tamaño, sólo son IDEAS que representamos mediante un PUNTO MATERIAL.



PUNTO GEOMÉTRICO

- Una LÍNEA está formada por PUNTOS. También la LÍNEA GEOMÉTRICA es una IDEA, como lo es el PUNTO GEOMÉTRICO. Para representar esta idea dibujamos una LÍNEA MATERIAL.

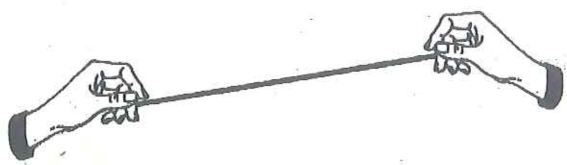


LÍNEA GEOMÉTRICA

- La LÍNEA RECTA y el PLANO son igualmente IDEAS que elaboramos en nuestra mente. Estas ideas las representamos materialmente así:
  - El PLANO mediante una hoja de papel bien extendida sobre la mesa.

nos dan la idea de plano

  - La LÍNEA RECTA mediante un hilo tenso.

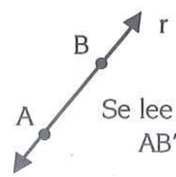


representación material de la idea de LÍNEA RECTA

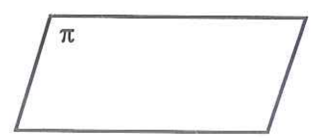
  - Un PUNTO se nombra mediante una letra mayúscula, una RECTA con una letra minúscula o dos puntos de la recta y un PLANO con una letra del alfabeto griego: α(alfa), β (beta), π (pi),θ (Theta),...

•P

Se lee "punto P"



Se lee "recta r" o "recta AB" y se escribe: $\overleftrightarrow{r}$ o $\overleftrightarrow{AB}$



Se lee "plano π"

Notemos que a la línea recta le dibujamos dos flechitas en los extremos, para indicar que no empieza ni termina allí, sino que continúa.

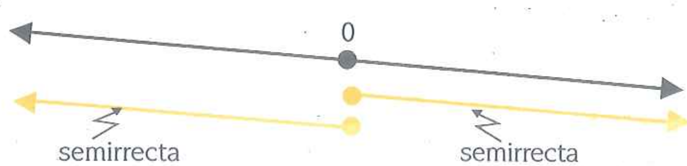
- El ESPACIO es el conjunto universal de todos los puntos. Para entender esto pensemos en una situación sencilla: cuando estamos en el campo, en una noche despejada, las estrellas son COMO PUNTOS del ESPACIO.

Pregunta Nº 3

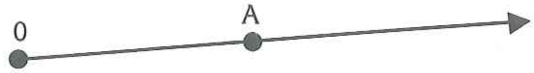
¿Qué es semirrecta y qué es segmento de recta?

Respuesta

- Todo punto de una recta divide a ésta en dos subconjuntos, cada uno de los cuales se denomina SEMIRRECTA.

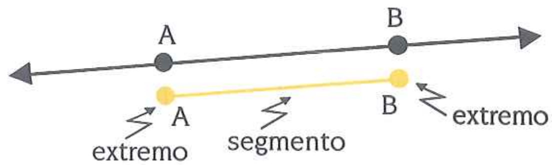


– El punto 0 se denomina ORIGEN de la SEMIRRECTA.
– Para nombrar una SEMIRRECTA utilizamos dos letras mayúsculas: la primera es la letra correspondiente al origen y la otra letra corresponde a otro punto cualquiera de la semirrecta; así:



Se lee "semirrecta 0A" y se escribe: $\overrightarrow{0A}$

- El conjunto de puntos de una recta formado por dos puntos A y B de la recta y todos los puntos de la recta comprendidos entre A y B se denomina SEGMENTO AB y se escribe $\overline{AB}$. Los puntos A y B se denominan EXTREMOS del segmento.



TALLER 1.1

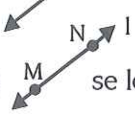
1 Completa:

a) M • se lee ______________________

b) Un punto ____________ no tiene forma ni tamaño.

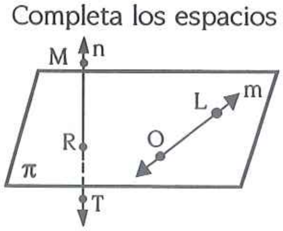
c) • es un punto ___________ que nos sirve para representar un punto ___________.

d)  es una línea recta _________ que nos sirve para representar una línea recta ________

e) 

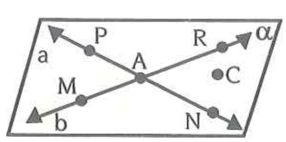
se lee _________________ o __________________.

2 Completa los espacios con los símbolos ∈ o ∉ de acuerdo con la siguiente figura:



a) R _____ π	b) M_____ π	c) L _____ $\overleftrightarrow{m}$
d) T _____ $\overleftrightarrow{n}$	e) R _____ $\overleftrightarrow{n}$	f) O _____ $\overleftrightarrow{m}$
g) L _____ π	h) O _____ π	i) T _____ π

3 Completa los espacios con los símbolos ∈ o ∉ de acuerdo con la siguiente figura:

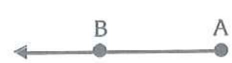


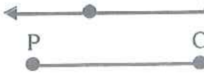
a) N _____ $\overleftrightarrow{a}$	b) N_____ α	c) N _____ $\overleftrightarrow{b}$
d) C _____ $\overleftrightarrow{a}$	e) A_____ α	f) A _____ $\overleftrightarrow{a}$
g) A _____ $\overleftrightarrow{b}$	h) A _____ $\overleftrightarrow{MR}$	i) C _____ $\overleftrightarrow{b}$
j) R _____ $\overleftrightarrow{AM}$	k) C _____ α	l) P _____ $\overleftrightarrow{AN}$

4 Completa:

a) $\overrightarrow{MR}$ se lee ___________ de origen ___________ .
b) $\overline{TP}$ se lee ___________ de extremos _______ y _______.

5 Responde:

a) ¿Cómo se lee y cómo se representa simbólicamente esta semirrecta:  ?

b) ¿Cómo se lee y cómo se representa simbólicamente este segmento:  ?

6 Contesta Falso o Verdadero a las siguientes afirmaciones que se hacen a partir de la siguiente figura:

a) $\overleftrightarrow{AB}=\overleftrightarrow{BA}$ b) $\overline{AB} \subset \overrightarrow{AB}$ c) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$

d) $\overline{AB} \subset \overrightarrow{BA}$ e) $\overline{AB} = \overline{BA}$ f) $\overline{AB} \subset \overleftrightarrow{r}$

7 Teniendo en cuenta la siguiente figura:

nombra cinco (5) segmentos

8 Teniendo en cuenta la siguiente figura completa:

a) $\overline{AB} \cap \overline{BT} =$ ___ b) $\overline{AB} \cap \overline{TR} =$ ___ c) $\overline{AB} \cup \overline{BT} =$ ___ d) $\overline{AB} \cup \overline{BT} \cup \overline{TR} =$ ___

e) $\overline{AB} \cap \overrightarrow{BR} =$ ___ f) $\overleftrightarrow{AB} \cap \overline{TR} =$ ___ g) $\overrightarrow{AB} \cap \overline{TR} =$ ___ h) $\overrightarrow{BA} \cap \overrightarrow{TR} =$ ___

9 Si A, B, C, y D son puntos distintos de una recta $\overleftrightarrow{r}$ tales que: B pertenece a $\overline{AC}$ y C pertenece a $\overline{BD}$, ¿cuáles de los siguientes enunciados son verdaderos?:

a) B está entre A y C

b) A pertenece a $\overline{BC}$

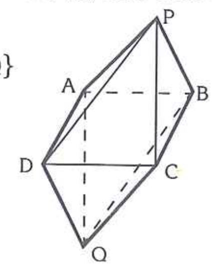
c) $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ se interceptan en B y C solamente

d) $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ no se interceptan

10 Teniendo en cuenta que: **tres o más puntos son COLINEALES o están ALINEADOS cuando pertenecen a una misma recta** y que: **cuatro o más puntos son COPLANARES cuando pertenecen a un mismo plano**, observa detenidamente la siguiente figura tridimensional (espacial) y decide si los puntos de los conjuntos indicados a continuación: (1) son colineales, (2) no están alineados, pero son coplanares o (3) no son coplanares.

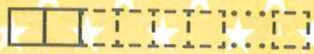
a) {A, B, C, D} b) {A, D, B} c) {P, D, Q}

d) {P, B, C} e) {A, B, C, Q}



DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 1

Como se muestra en la figura de abajo, es posible construir cuadrados con palillos. Usamos 7 palillos para construir 2 cuadrados y 10 para contruir 3.¿Cuántos palillos necesito para construir 20 cuadrados)


20 cuadrados

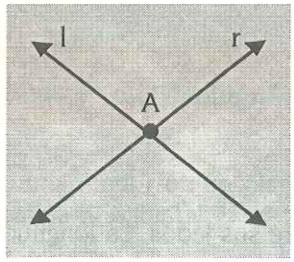
1.4 PREGUNTAS Y RESPUESTAS SOBRE ÁNGULOS

Pregunta Nº 4

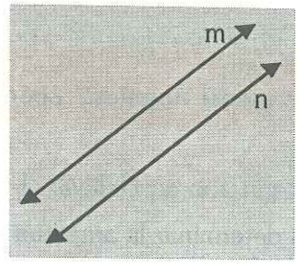
¿Cuáles son las posiciones que pueden adoptar dos rectas contenidas en un plano?

Respuesta

Dos rectas en un plano pueden ser SECANTES cuando su intersección es un punto, o pueden ser PARALELAS cuando su intersección es el conjunto vacío; es decir, cuando no tienen ningún punto común. El símbolo para indicar que dos rectas son paralelas es //.



$\overleftrightarrow{l}$ y $\overleftrightarrow{r}$ son SECANTES
$\overleftrightarrow{l} \cap \overleftrightarrow{r} = \{A\}$



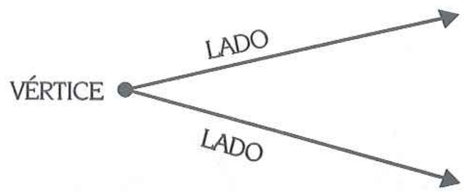
$\overleftrightarrow{m}$ y $\overleftrightarrow{n}$ son PARALELAS
$\overleftrightarrow{m} // \overleftrightarrow{n}$ porque $\overleftrightarrow{m} \cap \overleftrightarrow{n} = \varnothing$

Pregunta Nº 5

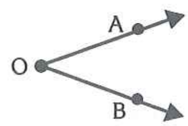
¿Qué es un ANGULO y cómo se nombra?

Respuesta

- ANGULO es la unión de dos semirrectas que tienen el mismo origen.
- Las semirrectas se denominan LADOS del ángulo y el origen común es el VÉRTICE.



- Hay cuatro formas de nombrar un ángulo:
  - **Usando tres letras:**



leemos: ángulo AOB
escribimos: $\measuredangle$ AOB o $\widehat{AOB}$

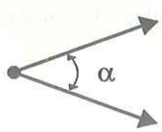
Una de las letras se coloca en el vértice: es la que leemos y escribimos en segundo lugar; las otras dos se ubican sobre puntos de cada lado del ángulo.

  - **Usando la letra del vértice:**

leemos: ángulo C
escribimos: $\measuredangle$C o $\widehat{C}$

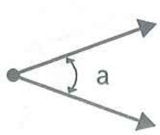
La letra con la que nombramos el ángulo es la que corresponde al vértice.

  - **Usando una letra griega:** las más comunes son α (alfa), β (beta) y θ (theta)

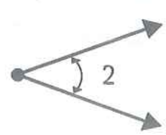


leemos: ángulo α
escribimos: $\measuredangle\alpha$ o $\widehat{\alpha}$

  - **Usando una letra minúscula de nuestro alfabeto o un número.**



Completa:
leemos:__________
escribimos:__________



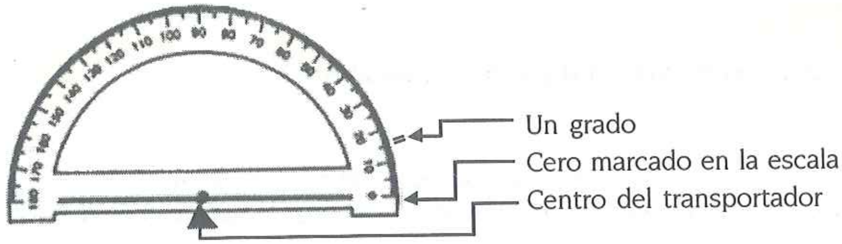
Completa:
leemos: __________
escribimos: __________

Pregunta Nº 6

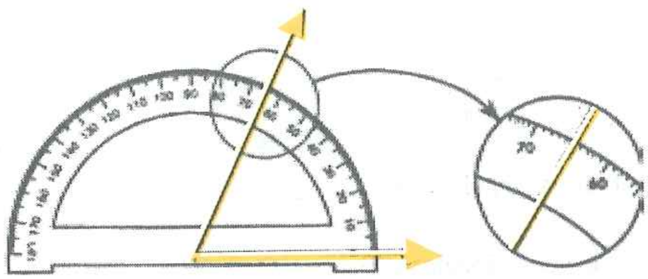
¿Qué es medir ángulos? ¿cómo se miden ángulos?

Solución

- **MEDIR** un ángulo es determinar la amplitud existente entre sus lados. La longitud de los lados no altera la medida de un ángulo.
- Para medir ángulos utilizamos un instrumento llamado transportador. Obsérvalo con detalle. Como vemos, un TRANSPORTADOR es un semicírculo graduado en 180 partes iguales. Cada una de estas partes se llama GRADO. Para indicar que **un ángulo a mide 65 grados** escribimos **med $\widehat{a}$ = 65º**



- A continuación vemos cómo medir un ángulo de 65º.



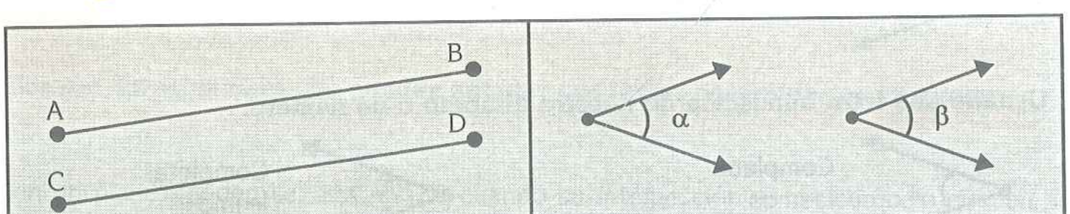
Colocamos el instrumento sobre el ángulo de forma que:
- un lado del ángulo coincida con la línea del cero en la escala del transportador.
- el vértice del ángulo coincida con el centro del transportador.
- el otro lado del ángulo marcará el número correspondiente a la MEDIDA DEL ÁNGULO en grados; es decir, la amplitud del ángulo es ese número en grados. (Si este lado no llega hasta el número de la escala del transportador, se debe prolongar para observar mejor el número de grados). En este caso, este lado marcará 65º.

Pregunta Nº 7

¿Cuándo dos ángulos o dos segmentos son CONGRUENTES?

Solución

Dos ángulos o dos segmentos son congruentes cuando sus medidas son iguales. El símbolo de la congruencia es $\cong$.



$\overline{AB} \cong \overline{CD}$ porque $m(\overline{AB}) = m(\overline{CD})$

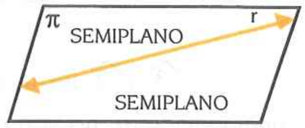
$\widehat{\alpha} \cong \widehat{\beta}$ porque med $(\widehat{\alpha})$ = med $(\widehat{\beta})$

Pregunta Nº 8

¿Qué es un SEMIPLANO?

Respuesta

Cuando trazamos una recta $\overleftrightarrow{r}$ en un plano π, este queda dividida en dos regiones. Cada una de estas regiones se denomina SEMIPLANO.



Pregunta Nº 9

¿Cómo se clasifican los ángulos de acuerdo con su medida?

Respuesta

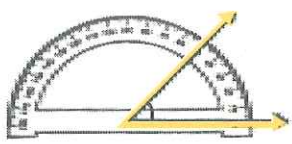
De acuerdo con su medida, los ángulos se clasifican en:

- ÁNGULO NULO: su medida es 0°.

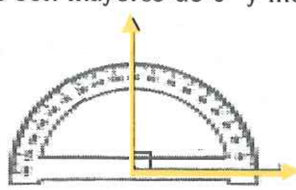
med $\measuredangle$ AOB) = 0°

- ÁNGULO AGUDO: es un ángulo que mide más de 0° y menos de 90°.
- ÁNGULO RECTO: es un ángulo que mide 90°.
- ÁNGULO OBTUSO: es un ángulo que mide más de 90° y menos de 180°.

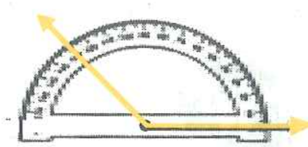
  En general, todos los ángulos que son mayores de 0° y menores de 180° se denominan ÁNGULOS CONVEXOS.



ÁNGULO AGUDO: Mide más de 0° y menos de 90°

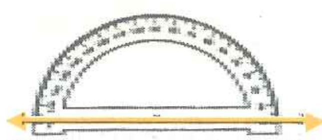


ÁNGULO RECTO: Mide 90°



ÁNGULO OBTUSO: Mide más de 90° y menos de 180°

- ÁNGULO LLANO: es un ángulo que mide 180°.
- ÁNGULO COMPLETO o DE VUELTA ENTERA: es un ángulo cuya medida es 360°.



ÁNGULO LLANO: mide 180°

ÁNGULO DE VUELTA ENTERA: mide 360°

En general, a los ángulos que tienen una medida mayor de 180° y menor de 360° se les denomina ÁNGULOS CÓNCAVOS. Dibuja un ángulo cóncavo.

Pregunta Nº 10

¿Cómo se clasifican los ángulos de acuerdo con su posición?

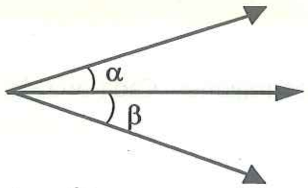
Respuesta

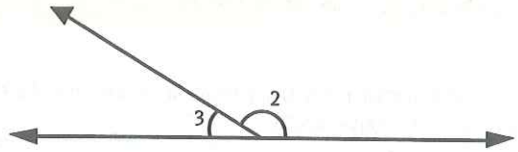
De acuerdo con su posición, los ángulos se clasifican en:

1. **ÁNGULOS CONSECUTIVOS O ADYACENTES:** Dos ángulos son consecutivos o adyacentes si cumplen las siguientes condiciones:
   - están ubicados en distintos semiplanos de un mismo plano.
   - tienen el mismo vértice.
   - tienen un lado común.

   La palabra ADYACENTE significa AL LADO DE.

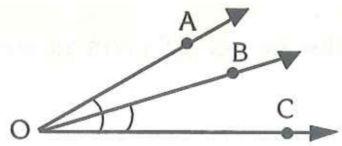
2. ÁNGULOS EN PAR LINEAL: Dos ángulos están en PAR LINEAL cuando son consecutivos y sus lados no comunes forman una línea recta.





$\widehat{\alpha}$ y $\widehat{\beta}$ son consecutivos $\qquad$ $\widehat{3}$ y $\widehat{2}$ forman un PAR LINEAL

¿Por qué los ángulos AOC y BOC de la figura siguiente no son consecutivos?

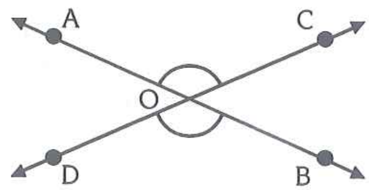


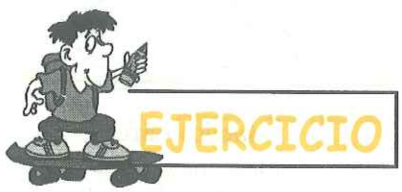
3. ANGULOS OPUESTOS POR EL VÉRTICE: Dos ángulos son OPUESTOS POR EL VÉRTICE si cumplen las siguientes condiciones:

- están contenidos en el mismo plano.
- tienen el mismo vértice.
- los lados de uno forman líneas rectas con los lados del otro.

∡ AOC y ∡ BOD son opuestos por el vértice

Nombra en la figura otro par de ángulos opuestos por el vértice.





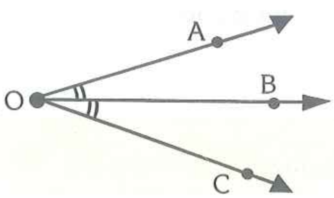
Elabora un MAPA CONCEPTUAL con la clasificación de los ángulos que acabamos de realizar.

Pregunta Nº 11

¿Qué es BISECTRIZ de un ángulo?

Respuesta

La bisectriz de un ángulo es una semirrecta cuyo origen coincide con el vértice del ángulo, está en el mismo plano del ángulo y lo divide en dos ángulos congruentes.



$\overrightarrow{OB}$ es bisectriz del ∡ AOC ya que:

- $\overrightarrow{OB}$ está en el mismo plano del ∡ AOC
- El vértice de $\overrightarrow{OB}$ y el origen del ∡ AOC coinciden
- ∡ AOB ≅ ∡ BOC

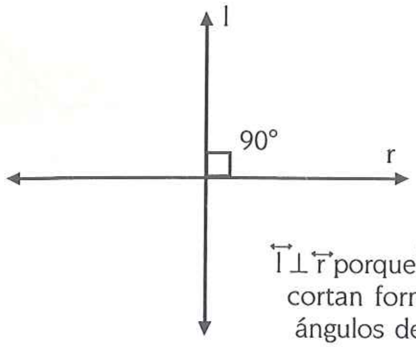
Pregunta Nº 12

¿Cuándo dos rectas son PERPENDICULARES? ¿Cómo se define la distancia de un punto a una recta?

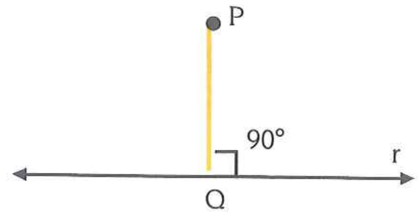
Respuesta

- Dos rectas $\overleftrightarrow{l}$ y $\overleftrightarrow{r}$ son PERPENDICULARES cuando son secantes y al cortarse forman ángulos rectos. Para indicar que $\overleftrightarrow{l}$ **es perpendicular a** $\overleftrightarrow{r}$ escribimos $\overleftrightarrow{l} \perp \overleftrightarrow{r}$.

- La DISTANCIA DE UN PUNTO P A UNA RECTA $\overleftrightarrow{r}$ es la medida del segmento perpendicular trazado desde el punto P a la recta $\overleftrightarrow{r}$.



$\overleftrightarrow{l} \perp \overleftrightarrow{r}$ porque $\overleftrightarrow{l}$ y $\overleftrightarrow{r}$ se cortan formando ángulos de 90°.



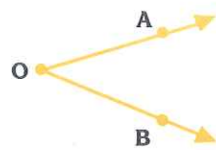
La medida del segmento $\overline{PQ}$, perpendicular a la recta $\overleftrightarrow{r}$, es la distancia del punto P a la recta $\overleftrightarrow{r}$.

TALLER 1.2

1 Completa:

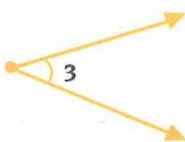
a) Entendemos por ángulo la ____________________ de ____________________ que tienen el mismo _______________.

b)



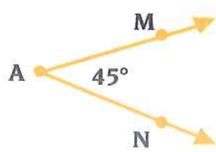
Se lee _____________ y se escribe ___________.

c)



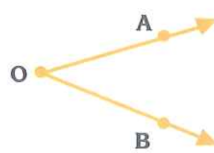
Se lee _____________ y se escribe ___________.

d)



med ___________ = 45°.

e) Los lados del ángulo



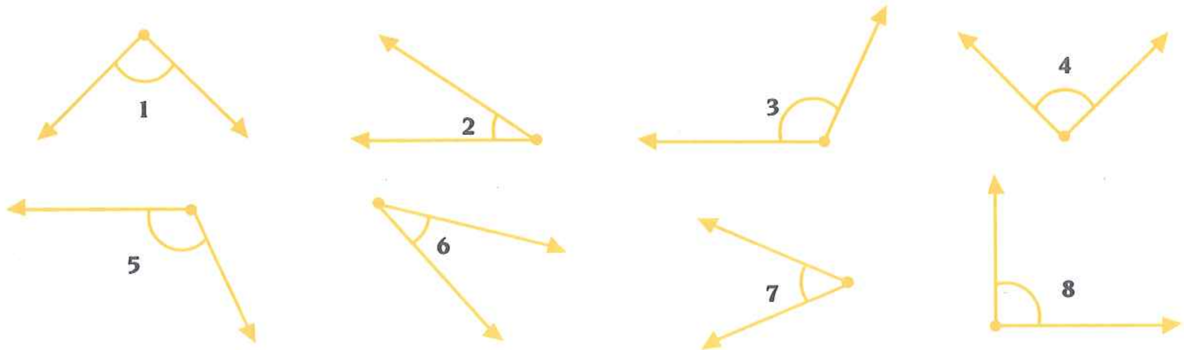
son ________ y __________, su vértice es el punto ________.

2 Nombra de cinco (5) formas diferentes el siguiente ángulo:

3 Mide los siguientes ángulos y completa la tabla en tu cuaderno

ÁNGULO	**1**	**2**	**3**
MIDE			

4 Observa con cuidado los siguientes ángulos:



Completa:

a) Los ángulos agudos son _______, _________ y _________
b) Los ángulos rectos son _______, _________ y _________
c) Los ángulos obtusos son _______ y _________

5 Halla la medida de cada uno de los ángulos del ejercicio anterior.

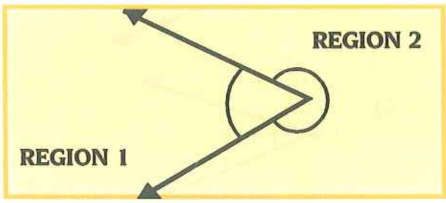
6 Completa:

a) $\measuredangle$ 1 ≅ _____ ≅ _____   b) $\measuredangle$ 2 ≅ _____   c) $\measuredangle$ 5 ≅ _____

7 Dibuja sin usar transportador, ángulos cuya medida sea aproximadamente:

a) 60°   b) 135°   c) 150°

8 Fíjate en este dibujo y contesta:



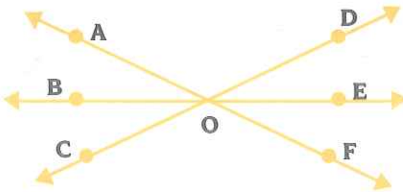
a) ¿Son las regiones 1 y 2 regiones angulares? ¿por qué?
b) ¿Cuál de las dos regiones representa un ángulo mayor de 180°?
c) ¿Qué nombre recibe el ángulo de la región 2?
d) ¿Cuántos grados mide el ángulo de la región 1? ¿Y el de la región 2?

9 Escribe dentro del paréntesis ( ) una **V** si el enunciado es Verdadero o una **F** si el enunciado es Falso:

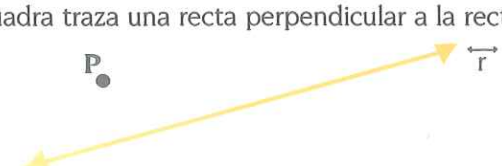
a) La medida de un ángulo llano es menor que la medida de un ángulo obtuso. ( )
b) Un ángulo recto mide más que un ángulo agudo. ( )
c) La medida de un ángulo depende de la longitud de sus lados. ( )
d) Dos ángulos adyacentes pueden formar un par lineal. ( )
e) Cuando dos ángulos forman un par lineal, la medida de sus ángulos es 180°. ( )
f) Un ángulo cóncavo mide más de 180°. ( )

10 Teniendo en cuenta la figura siguiente:

a) Escribe dos pares de ángulos opuestos por el vértice.
b) ¿Cuál es el opuetso por el vértice del $\measuredangle$ BOC?
c) ¿Cuál es el opuesto por el vértice del $\measuredangle$ AOD?
d) Escribe dos pares de ángulos que forman PAR LINEAL
e) ¿Con quiénes forma par lineal el $\measuredangle$ EOF?
f) ¿Con quién forma par lineal el $\measuredangle$ AOD?



11 Con la ayuda de una escuadra traza una recta perpendicular a la recta $\overleftrightarrow{r}$ que pase por el punto P.



12 Calcula en milímetros la distancia desde el punto P a la recta $\overleftrightarrow{r}$ en la figura del ejercicio anterior.

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 2

Halla un ángulo tal que sumando su complementario con su suplementario, dé un ángulo triple.

1.5 PREGUNTAS Y RESPUESTAS SOBRE POLÍGONOS

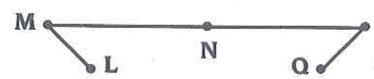
Pregunta Nº 13

¿Qué es LÍNEA POLIGONAL?

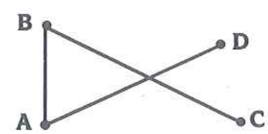
Respuesta

- Una LÍNEA POLIGONAL es una figura formada por segmentos de recta tales que:
  1. Dos segmentos consecutivos tienen un extremo común.
  2. Dos segmentos consecutivos no están contenidos en la misma línea recta.
  3. Dos segmentos cualesquiera nunca se cortan en un punto distinto de los extremos.
  4. No hay más de dos segmentos con un extremo común.

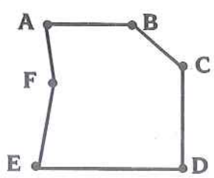
Línea Poligonal



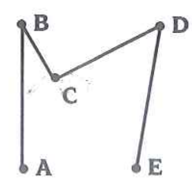
no es Línea Poligonal



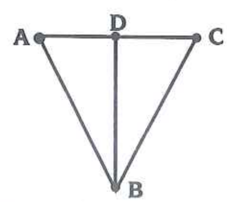
no es Línea Poligonal



Línea Poligonal



Línea Poligonal



No es Línea Poligonal

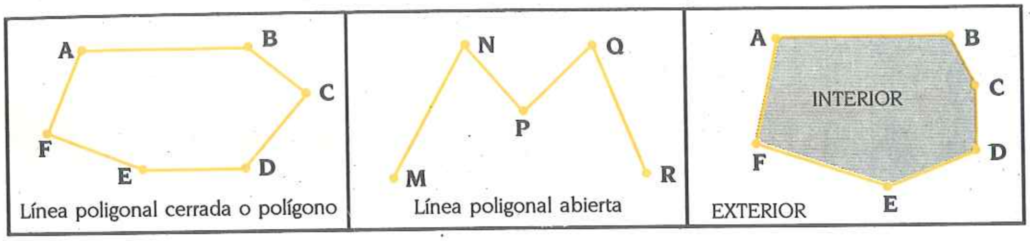
- Los segmentos que forman una línea poligonal se denominan LADOS y el extremo común de dos lados se denomina VÉRTICE.

Pregunta Nº 14

¿Qué es un POLÍGONO?

Solución

- Una LÍNEA POLIGONAL CERRADA, llamada también POLÍGONO, es aquella que termina en el mismo punto en el que comienza.
- Una LÍNEA POLIGONAL ABIERTA es aquella que tiene dos extremos libres.
- Todo polígono divide al plano que lo contiene en tres conjuntos de puntos: los del POLÍGONO, los de su INTERIOR y los de su EXTERIOR.
- Se llama REGIÓN POLIGONAL al conjunto de puntos formado por un polígono y su interior.



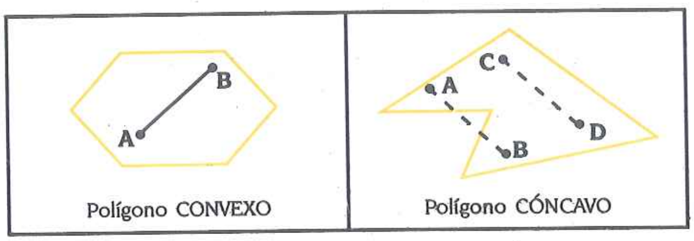
Línea poligonal cerrada o polígono — Línea poligonal abierta

Pregunta Nº 15

¿Cuándo un polígono es CONVEXO y cuándo es CÓNCAVO?

Respuesta

- Un polígono es CONVEXO si para cada par de puntos A y B del interior del polígono, el segmento $\overline{AB}$ **está totalmente contenido** en el interior del polígono.
- Un polígono es CÓNCAVO si es posible encontrar dos puntos A y B en el interior del polígono de modo que el segmento $\overline{AB}$ **no está totalmente contenido** en el interior del polígono.



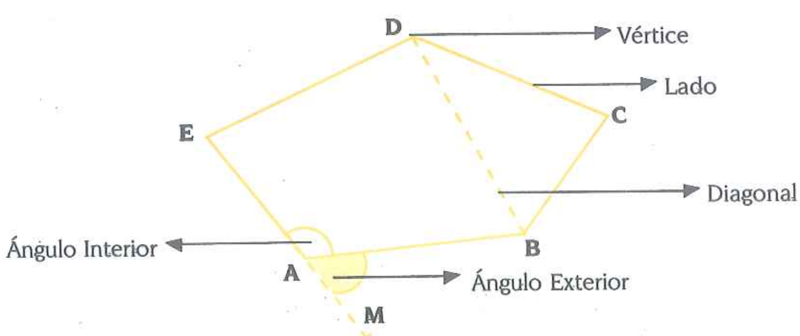
Polígono CONVEXO — Polígono CÓNCAVO

Pregunta Nº 16

¿Cuáles son los principales elementos de un polígono convexo?

Solución

Los elementos principales de un polígono convexo son los siguientes:



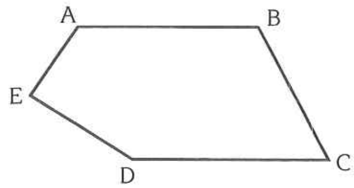
- LADOS: Son los segmentos que forman la línea poligonal.
- VÉRTICES: Son los extremos de cada lado.
- ANGULO INTERIOR: Es cualquier ángulo formado por dos lados consecutivos del polígono convexo.
- ANGULO EXTERIOR: Es cualquier ángulo que forma un par lineal con un ángulo interior dado.
- DIAGONALES: Son los segmentos que como $\overline{DB}$, unen dos vértices **no** consecutivos.

Pregunta Nº 17

¿Qué es PERÍMETRO de un polígono?

Respuesta

EL PERÍMETRO (P) de un polígono es la suma de las medidas de todos los lados del polígono.



$$P = m\,\overline{AB} + m\,\overline{BC} + m\,\overline{CD} + m\,\overline{DE} + m\,\overline{EA}$$

Pregunta Nº 18

¿Cómo se clasifican los polígonos de acuerdo con el número de sus lados?

Respuesta

De acuerdo con el número de lados, los polígonos se clasifican en:

- TRIÁNGULOS: Son polígonos de 3 lados.
- PENTÁGONOS: Son polígonos de 5 lados.
- HEPTÁGONOS: Son polígonos de 7 lados.
- ENEÁGONOS: Son polígonos de 9 lados.
- ENDECÁGONOS: Son polígonos de 11 lados.
- CUADRILÁTEROS: Son polígonos de 4 lados.
- HEXÁGONOS: Son polígonos de 6 lados.
- OCTÓGONOS: Son polígonos de 8 lados.
- DECÁGONOS: Son polígonos de 10 lados.
- DODECÁGONOS: Son polígonos de 12 lados.

Los demás polígonos se nombran diciendo simplemente el número de lados que tiene; así: **polígono de 13 lados, polígono de 15 lados, polígono de 20 lados,...**

1. Qué entiendes por:

   a) ¿Línea poligonal?
   b) ¿Línea poligonal abierta? ¿y cerrada?
   c) ¿Polígono?
   d) ¿Región Poligonal?

2. Dibuja:

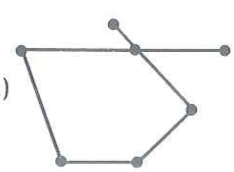
   a) Una línea que no sea poligonal.
   b) Una línea poligonal abierta y otra cerrada.

3. Explica por qué las siguientes figuras no son poligonales:

(a)

(b)

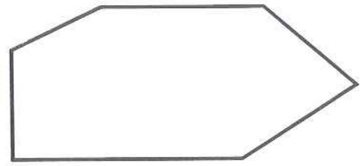
(c)



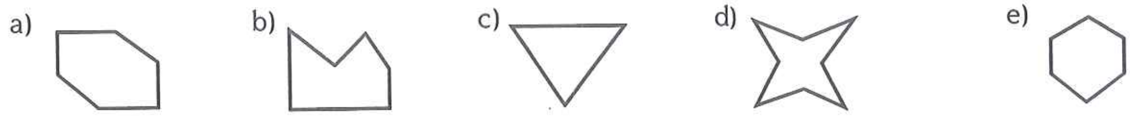
4 Indica cuál de las siguientes figuras es un polígono:

5 Con base en el siguiente polígono, responde:

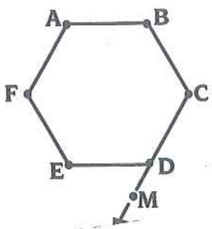
a) ¿Cuántos lados tiene? Nómbralos.
b) ¿Cuántos vértices tiene? Nómbralos.
c) Pinta de rojo la región poligonal.



6 Indica cuáles de los siguientes polígonos son convexos y cuáles son cóncavos.



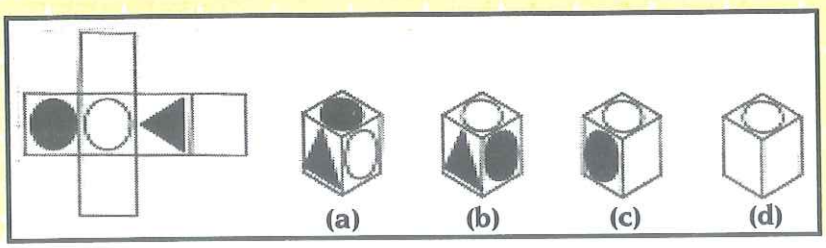
7 Dado el siguiente polígono convexo:



a) Clasifícalo de acuerdo con el número de lados.
b) Nómbralo.
c) Nombra cada uno de sus lados.
d) Nombra cada uno de sus ángulos interiores.
e) Nombra el ángulo exterior que corresponde a cada ángulo interior.

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 3

¿Cuál de estos cubos podría haber sido formado doblando la figura de la izquierda?



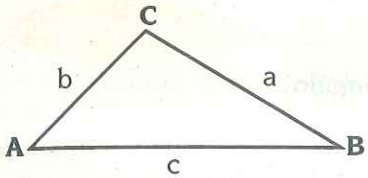
1.6 PREGUNTAS Y RESPUESTAS SOBRE TRIÁNGULOS, CUADRILÁTEROS Y LA CIRCUNFERENCIA

Pregunta Nº 19

¿Qué es un TRIÁNGULO? ¿Cómo se lee un triángulo? ¿Qué es LADO OPUESTO a un ángulo de un triángulo? ¿Qué es REGIÓN TRIANGULAR?

Respuesta

- TRIÁNGULO es un polígono de tres lados.
- Un triángulo se puede leer utilizando las tres letras de los vértices y en cualquier orden. El símbolo utilizado para nombrar un triángulo es $\triangle$.



Este triángulo se puede leer "TRIÁNGULO ABC" y se escribe ΔABC. También se puede leer "TRIÁNGULO ACB" y se escribe ΔACB.

- El LADO OPUESTO a un ángulo de un triángulo es el lado que no contiene al vértice del ángulo. Estos lados opuestos se representan por la letra minúscula correspondiente al vértice que no contiene. Así, en el ΔABC anterior, el lado $\overline{AB}$ se opone al ángulo C y se representa con la letra c; $\overline{AC}$ se opone al $\measuredangle B$ y se representa con la letra b.
- REGIÓN TRIANGULAR: Es el conjunto de puntos formado por el triángulo y su interior.

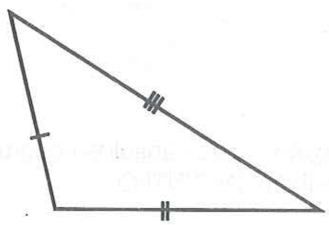
Pregunta Nº 20

¿Cómo se clasifican los triángulos?

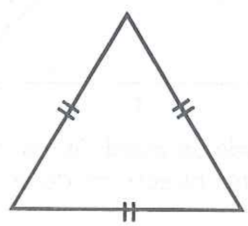
Respuesta

Los triángulos se clasifican teniendo en cuenta dos criterios: **de acuerdo con sus lados y de acuerdo con sus ángulos.**

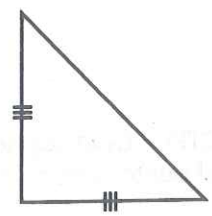
1. **DE ACUERDO CON SUS LADOS**, los triángulos se clasifican en:
   - TRIÁNGULOS ESCALENOS: Son los que tienen sus lados de distinta medida.
   - TRIÁNGULOS EQUILÁTEROS: Son los que tienen sus tres lados de igual medida.
   - TRIÁNGULOS ISÓSCELES: Son los que tienen dos lados de igual medida.



T. Escaleno

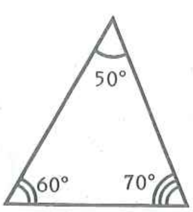


T. Equilátero

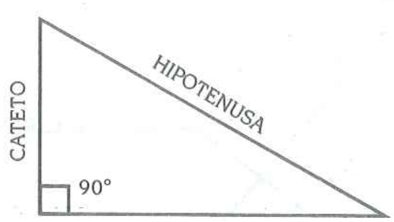


T. Isósceles

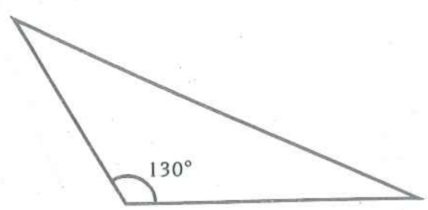
2. **DE ACUERDO CON SUS ANGULOS**, los triángulos se clasifican en:
   - TRIÁNGULOS ACUTÁNGULOS: Son los que tienen los tres ángulos agudos.
   - TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS: Son los que tienen un ángulo recto. En todo triángulo rectángulo, el lado opuesto al ángulo recto se llama **hipotenusa** y los lados que forman el ángulo recto se llaman **catetos**.
   - TRIÁNGULOS OBTUSÁNGULOS: Son los que tienen un ángulo obtuso.



T. Acutángulo



T. Rectángulo



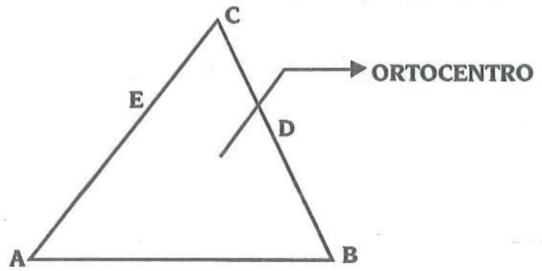
T. Obtusángulo

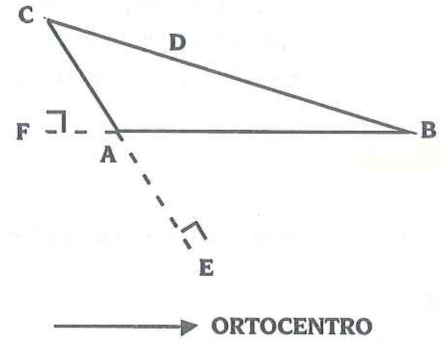
¿Cuáles son las líneas y los puntos notables de un triángulo?

Respuesta

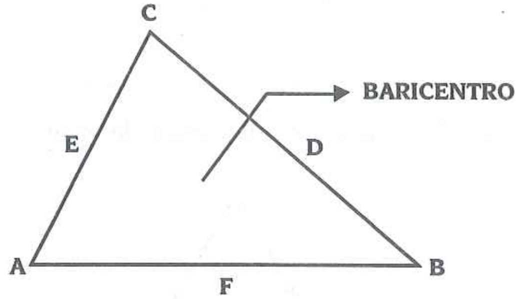
Las líneas y los puntos notables de un triángulo son los siguientes:

1. ALTURA: Es el segmento perpendicular trazado desde un vértice al lado opuesto o a su prolongación. El punto donde se cortan las tres alturas de un triángulo se llama ORTOCENTRO.

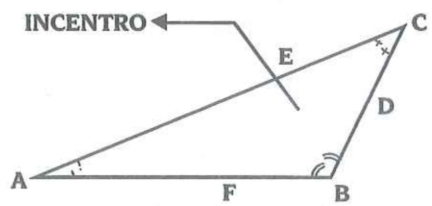




2. MEDIANA: Es un segmento que une un vértice del triángulo con el punto medio del lado opuesto. El punto donde se cortan las tres medianas de un triángulo se denomina BARICENTRO O CENTRO DE GRAVEDAD.

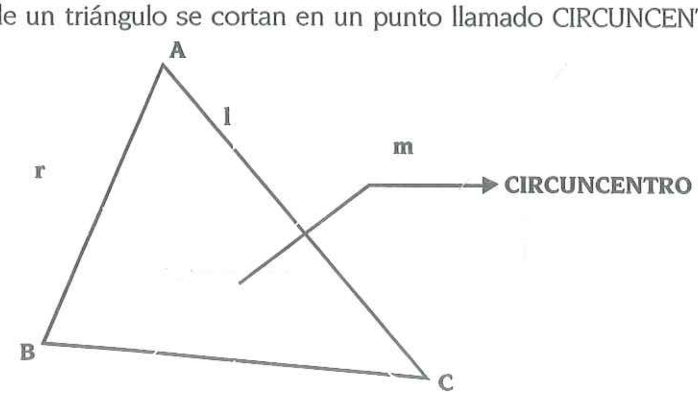


3. BISECTRIZ: Es el segmento que divide un ángulo interior de un triángulo en dos ángulos congruentes. El punto donde se cortan las tres bisectrices de un triángulo se llama INCENTRO.



4. MEDIATRIZ DE UN SEGMENTO: Es una recta que cumple dos condiciones:
   1. La recta es perpendicular al segmento.
   2. La recta pasa por el punto medio del segmento.

   Las tres mediatrices de un triángulo se cortan en un punto llamado CIRCUNCENTRO.

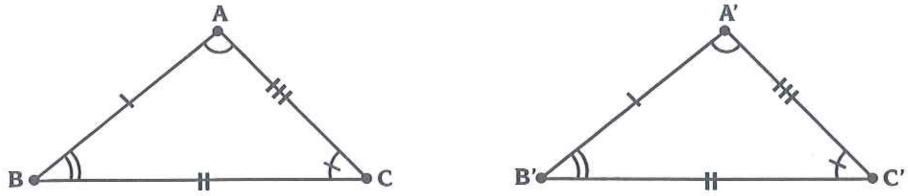


Pregunta Nº 22

¿Cuándo dos triángulos son congruentes?

Respuesta

Dos triángulos son CONGRUENTES cuando los tres ángulos de uno son respectivamente congruentes con los tres ángulos del otro y los tres lados de uno son respectivamente congruentes con los tres lados del otro. El símbolo de congruencia de triángulos también es $\cong$.



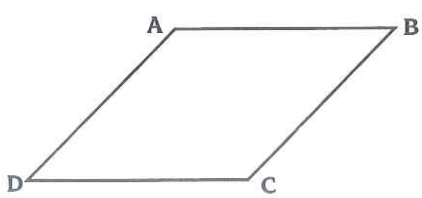
$$\Delta ABC \cong \Delta A'B'C' \text{ ya que } \begin{cases} \widehat{A} \cong \widehat{A'} \,,\, \widehat{B} \cong \widehat{B'} \,,\, \widehat{C} \cong \widehat{C'} \\ \overline{AB} \cong \overline{A'B'} \,,\, \overline{BC} \cong \overline{B'C'} \,,\, \overline{AC} \cong \overline{A'C'} \end{cases}$$

Pregunta Nº 23

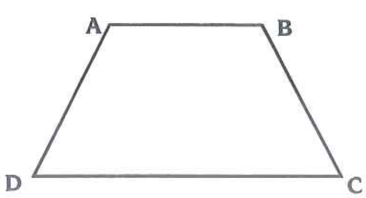
¿Qué es un cuadrilátero y como se clasifican los cuadriláteros convexos?

Respuesta

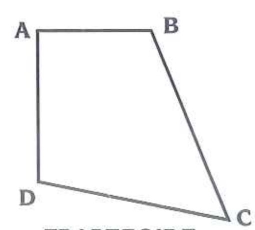
- Un CUADRILÁTERO es un polígono de 4 lados.
- Los cuadriláteros se clasifican de acuerdo con el número de lados paralelos que tengan; así:
  - PARALELOGRAMOS: Son cuadriláteros que tienen dos pares de lados paralelos.
  - TRAPECIOS: Son cuadriláteros que tienen un par de lados paralelos.
  - TRAPEZOIDES: Son cuadriláteros que no tienen ningún par de lados paralelos.



PARALELOGRAMO

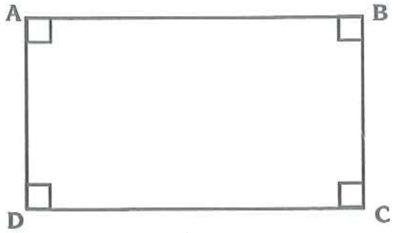


TRAPECIO

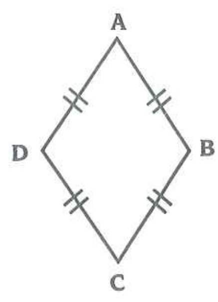


TRAPEZOIDE

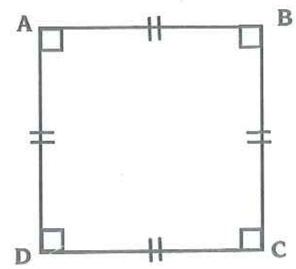
- Entre los paralelogramos podemos distinguir algunos que poseen características especiales:
  - RECTÁNGULO: Es un paralelogramo cuyos ángulos son rectos.
  - ROMBO: Es un paralelogramo cuyos cuatro lados son congruentes.
  - CUADRADO: Es un paralelogramo que tiene los cuatro lados congruentes y los cuatro ángulos rectos. El cuadrado es por lo tanto RECTÁNGULO Y ROMBO.



RECTÁNGULO

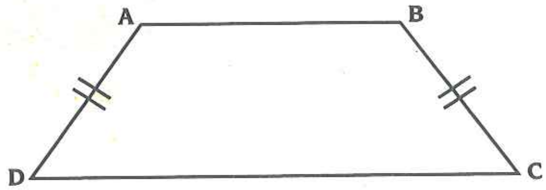


ROMBO

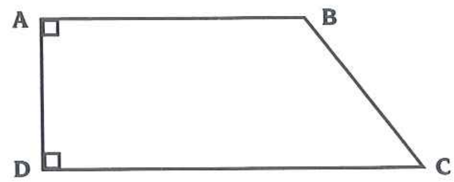


CUADRADO

- También, entre los trapecios, podemos identificar algunos con características particulares; así:
  - TRAPECIO ISÓSCELES: Es el trapecio cuyos lados no paralelos son congruentes.
  - TRAPECIO RECTÁNGULO: Es el trapecio en el cual uno de los lados no paralelos es perpendicular a los dos lados paralelos.



TRAPECIO ISOSCELES



TRAPECIO RECTÁNGULO

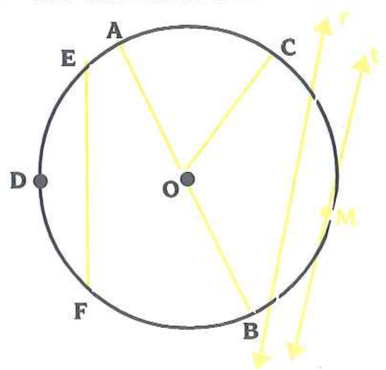
Recordemos que en un trapecio, los lados paralelos se llaman BASE MENOR y BASE MAYOR. Se llama ALTURA al segmento perpendicular trazado entre las bases.

Pregunta Nº 24

¿Qué es una circunferencia y cuáles son sus elementos y líneas más destacables?

Respuesta

- Una CIRCUNFERENCIA es el conjunto formado por todos los puntos de un plano que equidistan de otro punto del plano llamado CENTRO.
- Los elementos más destacados de una circunferencia son los siguientes:



- CENTRO: Es el punto O de la figura.
- RADIO: Es un segmento que une el centro con un punto cualquiera de la circunferencia; por ejemplo, $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ y $\overline{OC}$.
- DIÁMETRO: Es un segmento que une dos puntos de una circunferencia pasando por el centro. En la figura $\overline{AB}$ es un diámetro. Todo diámetro equivale a 2 radios.
- CUERDA: Es cualquier segmento que une dos puntos de la circunferencia. En la figura, $\overline{EF}$ es una cuerda. Todo diámetro es una cuerda.
- ARCO: Es una parte de la circunferencia determinada por dos puntos de la misma. En la figura, $\widehat{FDE}$ es un arco.
- ANGULO CENTRAL: Es cualquier ángulo cuyo vértice es el centro de la circunferencia y sus lados son dos radios de la misma. En la figura, el $\measuredangle AOC$ es un ángulo central.
- SECANTE: Es una recta coplanaria con la circunferencia y que la corta en dos puntos. En la figura, la recta $\overleftrightarrow{r}$ es una SECANTE a la circunferencia.
- TANGENTE: Es una recta coplanaria con la circunferencia y que tiene un solo punto común con esta. En la figura, la recta $\overleftrightarrow{t}$ es tangente a la circunferencia en el punto M.

! Elabora un mapa conceptual con la clasificación de los triángulos y otra con la clasificación de los cuadriláteros.

2. ¿Cuánto mide el perímetro de un triángulo equilátero cuyo lado mide 35 cm?

3. El perímetro de un triángulo equilátero es 81,6 cm. ¿Cuánto mide el lado?

4. ¿Puede un triángulo ser a la vez rectángulo e isósceles? Justifica tu respuesta.

5. Elabora un mapa conceptual con las líneas y puntos notables de un triángulo.

6. ¿Cae alguna altura por fuera de un triángulo acutángulo? ¿Y en un triángulo obtusángulo? Ilustra con dibujos.

7. En un triángulo rectángulo, dos alturas coinciden con dos lados del triángulo, ¿cuáles son estos lados? Comprueba con un dibujo.

8. Dibuja un triángulo acutángulo, un triángulo rectángulo y un triángulo obtusángulo. Traza dos alturas a cada uno de ellos. Explica si es posible o no construir la tercera altura, habiendo construido sólo esas dos.

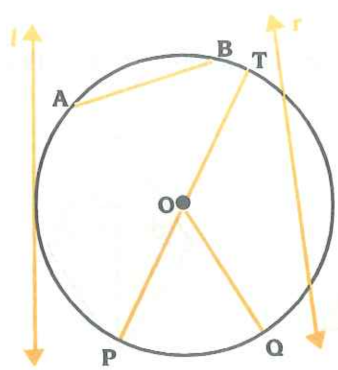
9. Repite el ejercicio anterior trazando dos medianas, dos bisectrices y dos mediatrices.

10. Traza tres segmentos de medidas 12 cm, 8 cm y 7 cm. Dibuja un triángulo cuyos lados sean estos tres segmentos utilizando sólo lápiz, regla y compás. Investiga: ¿qué condiciones deben cumplir tres segmentos para formar un triángulo?

11. Indica cuáles de las siguientes proposiciones siempre son verdaderas y cuáles no siempre son verdaderas.

a) Algunos trapecios tienen todos los ángulos congruentes.
b) Los dos pares de lados opuestos de un trapecio son paralelos.
c) Todo cuadrilátero tiene dos diagonales.
d) Todo cuadrado es paralelogramo.
e) Todo cuadrilátero es un rectángulo.
f) Todo rectángulo es un cuadrado.
g) El conjunto de los paralelogramos es subconjunto del conjunto de los rectángulos.
h) Todo polígono es cuadrilátero.
i) Todo cuadrilátero es polígono.
j) Todo cuadrilátero es un trapecio.

12. Teniendo en cuenta la figura, completa:



a) El centro de la circunferencia es el punto ________.
b) Un radio de la circunferencia es ________.
c) Un diámetro de la circunferencia es ________.
d) $\overline{AB}$ es una ______________ de la circunferencia.
e) La recta r es ______________ a la circunferencia.
f) La recta l es ______________ a la circunferencia.
g) Un ángulo central de la circunferencia es ________.

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 4

Hallar el número de lados de un polígono sabiendo que sus ángulos interiores suman 3.960°.

1.7 PREGUNTAS Y RESPUESTAS SOBRE ÁREAS Y EL TEOREMA DE PITÁGORAS

Pregunta Nº 29

¿Cómo se calcula:

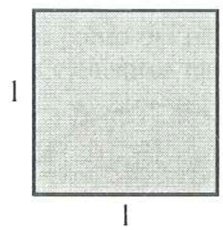
a) El área de un cuadrado
b) El área de un rectángulo?
c) El área de un triángulo
d) El área de un paralelogramo?
e) El área de un trapecio
f) El área de un rombo?
g) El área de un polígono regular?
h) La longitud de una circunferencia?
i) El área de un círculo?

Respuesta

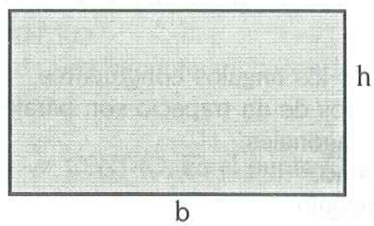
a) El AREA DE UN CUADRADO de lado l es igual al cuadrado del lado; es decir, $\mathbf{A = l^2}$

b) El AREA DE UN RECTÁNGULO de base b y altura h es igual al producto de la base por la altura; es decir, $\mathbf{A = b \cdot h}$

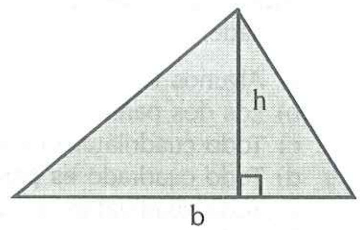
c) El AREA DE UN TRIÁNGULO de base b y altura h es igual al producto de la base por la altura dividido por 2; es decir, $\mathbf{A = \dfrac{b \cdot h}{2}}$



$\mathbf{A= l^2}$



$\mathbf{A= b \cdot h}$

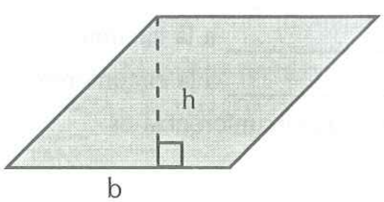


$\mathbf{A= \dfrac{b \cdot h}{2}}$

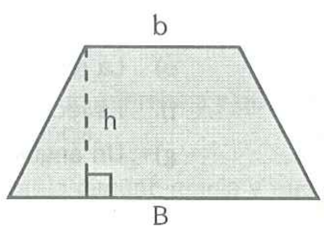
d) El AREA DE UN PARALELOGRAMO de base b y altura h es igual al producto de la base por la altura; es decir, $\mathbf{A = b \cdot h}$

e) El AREA DE UN TRAPECIO de base mayor B, base menor b y altura h es igual al producto de la semisuma de las bases por la altura; es decir, $\mathbf{A = \dfrac{(B+b) \cdot h}{2}}$

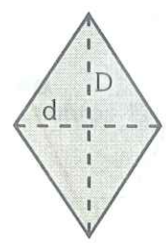
f) El AREA DE UN ROMBO de diagonal mayor D y diagonal menor d es igual al producto de las diagonales dividido por 2; es decir, $\mathbf{A = \dfrac{D \cdot d}{2}}$



$\mathbf{A= b \cdot h}$



$\mathbf{A= \dfrac{(B+b)}{2} \cdot h}$

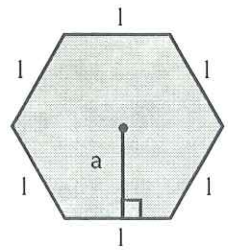


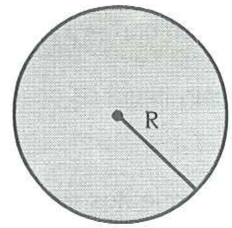
$\mathbf{A= \dfrac{D \cdot d}{2}}$

g) El AREA DE UN POLÍGONO REGULAR es igual al producto del perímetro del polígono por su apotema, dividido por 2. (Recordemos que apotema de un polígono regular es el segmento perpendicular trazado desde el centro del polígono a un lado cualquiera del polígono); es decir: $\mathbf{A= \dfrac{P \cdot a}{2}}$, donde P = perímetro y a = apotema.

h) La LONGITUD O PERÍMETRO de una circunferencia de radio R es igual al producto de 2π por R; es decir: $\mathbf{C=2\pi \bullet R}$

i) El AREA de un círculo de radio R es igual al producto de π por el radio al cuadrado; es decir, $\mathbf{A = \pi R^2}$.





$$A = \frac{P \bullet a}{2}$$

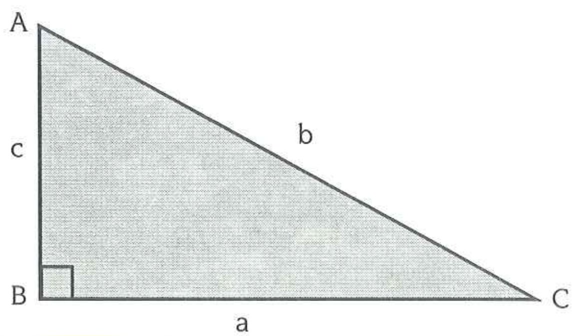
$C=2\pi \bullet R$ (longitud)
$A=\pi \bullet R^2$ (área)

Pregunta Nº 25

¿Qué establece el Teorema de Pitágoras?

Respuesta

El Teorema de Pitágoras establece que en todo triángulo rectángulo se cumple que el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos.



$$b^2 = a^2 + c^2$$

o

$$|\overline{AC}|^2 = |\overline{AB}|^2 + |\overline{BC}|^2$$

Pregunta Nº 26

¿En qué unidades se mide el área de una figura?

Respuesta

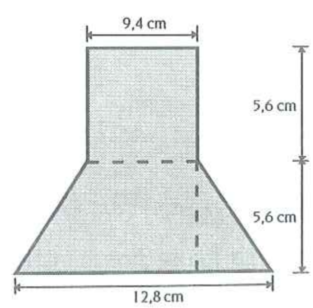
El área de una figura se mide en UNIDADES DE SUPERFICIE. La unidad fundamental en este sistema de medida es el METRO CUADRADO (m^2). Los múltiplos del m^2 son el DECÁMETRO CUADRADO (dam^2), el HECTÓMETRO CUADRADO (hm^2) y el KILÓMETRO CUADRADO (km^2), los submúltiplos son el DECÍMETRO CUADRADO (dm^2), el CENTÍMETRO CUADRADO (cm^2) y el MILÍMETRO CUADRADO (mm^2).

Para pasar de una unidad de superficie a otra inmediatamente inferior se multiplica por 100, y para pasar de una unidad de superficie a otra inmediatamente superior se divide por 100. Por ejemplo:

$$2{,}12\ dam^2 = 2{,}12 \times (100\ m^2) = 212\ m^2$$
$$38500\ mm^2 = (38500 \div 100)\ cm^2 = 385\ cm^2$$

Ejemplo 1

Calculemos el área de esta figura:



Solución

- Esta figura está compuesta por dos figuras conocidas: un rectángulo y un trapecio. Luego:

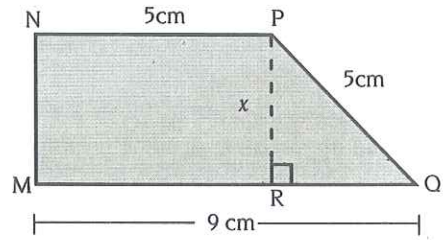
$$
\begin{aligned}
\text{A figura} &= \text{A rectángulo} + \text{A trapecio}\\
&= (\text{base} \bullet \text{altura}) + \left(\frac{\text{base mayor} + \text{base menor}}{2}\right) \bullet \text{altura}\\
&= (9{,}4 \text{ cm} \bullet 5{,}6 \text{ cm}) + \left(\frac{12{,}8 \text{ cm} + 9{,}4 \text{ cm}}{2}\right) \bullet 5{,}6 \text{ cm}\\
&= 52{,}64 \text{ cm}^2 + 62{,}16 \text{ cm}^2 = 114{,}8 \text{ cm}^2
\end{aligned}
$$

- Por lo tanto, el área de esta figura es de 114,8 cm^2.

Ejemplo 2

Teniendo en cuenta los datos que nos dan, hallemos el área del trapecio.

Solución



- Para calcular el área de este trapecio conocemos la longitud de la base mayor (9 cm), la longitud de la base menor (5 cm), pero desconocemos la longitud de la altura (x).
- La altura del trapecio coincide con el cateto $\overline{PR}$ del triángulo rectángulo PRQ. En este triángulo rectángulo conocemos la longitud de la hipotenusa ($|\overline{PQ}| = 5$ cm) y podemos hallar la longitud del otro cateto RQ; así:

$$|\overline{RQ}| = |\overline{MQ}| - |\overline{MR}| = |\overline{MQ}| - |\overline{NP}| = 9 \text{ cm} - 5 \text{ cm} = 4 \text{ cm}$$

- Ahora ya podemos calcular el valor de x en el triángulo rectángulo PRQ; así:

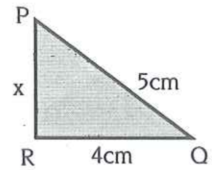
$|PQ|^2 = |PR|^2 + |RQ|^2$ ..... ¿por qué?

$\therefore\ (5 \text{ cm})^2 = x^2 + (4 \text{ cm})^2$

$\therefore\ 25 \text{ cm}^2 = x^2 + 16 \text{ cm}^2$

$\therefore\ x^2 = 25 \text{ cm}^2 - 16 \text{ cm}^2 = 9 \text{ cm}^2$

$\therefore\ x = 3 \text{ cm}$



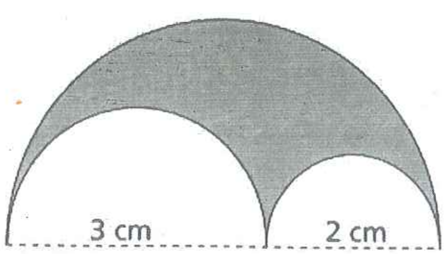
- Finalmente calculamos el área del trapecio MNPQ:

$$
\begin{aligned}
\text{Area de MNPQ} &= \left(\frac{\text{base mayor} + \text{base menor}}{2}\right) \bullet \text{altura}\\
&= \left(\frac{9 \text{ cm} + 5 \text{ cm}}{2}\right) \bullet 3 \text{ cm} = \frac{14 \text{ cm}}{2} \bullet 3 \text{ cm}\\
&= (7 \text{ cm}) \bullet (3 \text{ cm}) = 21 \text{ cm}^2
\end{aligned}
$$

- Luego, el área del trapecio es 21 cm^2.

Ejemplo 3

Calculemos el área de la parte sombreada de la siguiente figura.



Solución

- La figura nos muestra que la parte sombreada está comprendida entre un semicírculo de 5 cm de diámetro y dos semicírculos: uno de 3 cm de diámetro y otro de 2 cm de diámetro.

- Por lo tanto:

  A sombra = A semicírculo grande – A dos semicírculos pequeños

  A semicírculo grande $= \dfrac{\pi R^2}{2} = \dfrac{\pi\,(2{,}5\text{ cm})^2}{2} = 9{,}82\text{ cm}^2$

  A semicírculo pequeño **1** $= \dfrac{\pi R^2}{2} = \dfrac{\pi\,(1{,}5\text{ cm})^2}{2} = 3{,}53\text{ cm}^2$

  A semicírculo pequeño **2** $= \dfrac{\pi R^2}{2} = \dfrac{\pi\,(1\text{ cm})^2}{2} = 1{,}57\text{ cm}^2$

- Luego, A sombra $= 9{,}82\text{ cm}^2 - (3{,}53\text{ cm}^2 + 1{,}57\text{ cm}^2) = 4{,}72\text{ cm}^2$

TALLER 1.5

1 Contesta:

a) ¿Cómo se calcula el área de un rectángulo?
b) ¿Cómo se calcula el área de un paralelogramo?
c) ¿Cómo se calcula el área de un triángulo?
d) ¿Cómo se calcula el área de un trapecio?
e) ¿Cómo se calcula el área de un polígono regular?
f) ¿Cómo se calcula el área de un círculo?
g) ¿Qué dice el Teorema de Pitágoras?

2 Explica:

a) ¿Por qué no es correcto decir longitud de un círculo ni área de una circunferencia?
b) ¿Por qué cuando calculamos el área de una figura, sus dimensiones deben estar dadas en la misma unidad de longitud

3 Muchos problemas relacionados con áreas pueden resolverse por medio de ecuaciones. Veamos un ejemplo: El área de un rectángulo es 24 cm². Si su base mide 8 cm, ¿cuánto mide la altura?.

Solución: llamemos x cm la longitud de la altura. Por lo tanto: **Area = base x altura.**

$\therefore\ 24 = 8 \bullet x$............................ ¿por qué?

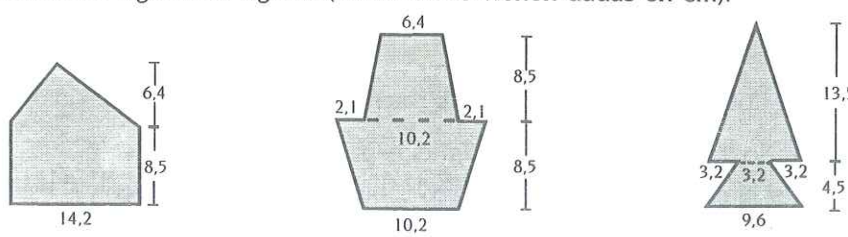
$\therefore\ x = \dfrac{24}{8}$ .... ¿por qué'

$\therefore\ x = 3$

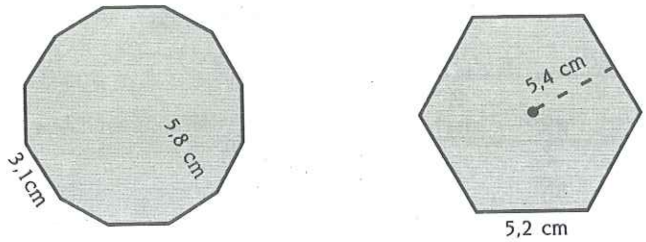
Resuelve los siguientes problemas utilizando ecuaciones:

a) El área de un paralelogramo es de 12 dm². La altura del paralelogramo mide 6 dm. ¿Cuánto mide la base?
b) El área de un triángulo es 24 cm². Si la base mide 8 cm. ¿Cuánto mide la altura?
c) El área de un trapecio es 27 cm². La base mayor mide 12 cm y la altura mide 3 cm. ¿Cuánto mide la base menor?

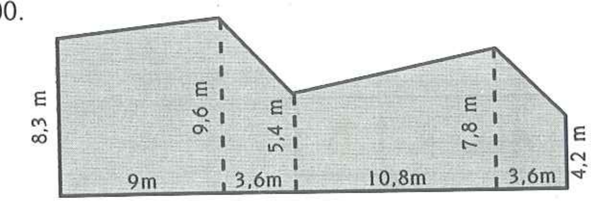
4 Calcula el área de las siguientes figuras (las medidas vienen dadas en cm).



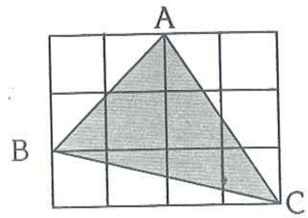
5 Calcula el área de los siguientes polígonos regulares.

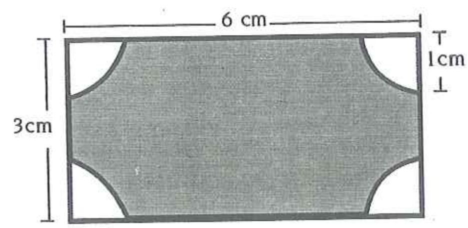


6 La figura representa la parte trasera de una fábrica. Calcula cuánto costará la pintura si pintar un metro cuadrado cuesta $3.500.



7 Calcula el área del ΔABC. (Utiliza un cuadrado como unidad de superficie)

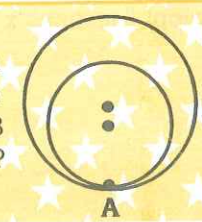




8 Calcula el área de la superficie sombreada.

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 5

Hay dos ruedas encajadas, como lo muestra la figura. Cuando la rueda mayor gira, la pequeña también gira manteniéndose siempre en la misma posición. Al cabo de 8 vueltas de la rueda mayor, ¿cuántas vueltas habrá dado la rueda menor? (las circunferencias son tangentes en el punto A).



1.8 PREGUNTAS Y RESPUESTAS SOBRE CUERPOS GEOMÉTRICOS Y SUS VOLÚMENES

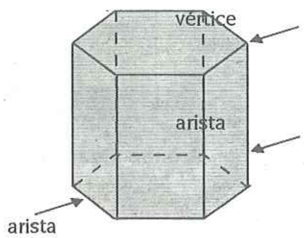
Pregunta Nº 27

¿Qué son: cuerpos, superficie de un cuerpo, cuerpos geométricos, poliedros y cuerpos redondos?

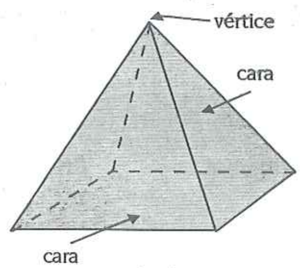
Respuesta

- **CUERPO:** es todo lo que ocupa un lugar en el espacio.
- **SUPERFICIE:** es la parte exterior de los cuerpos que está en contacto con el espacio que los rodea.

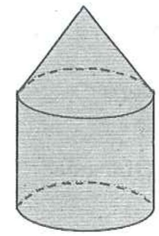
- **CUERPOS GEOMÉTRICOS:** son los cuerpos limitados por superficies planas poligonales o por superficies no planas y por superficies planas que no son polígonos.
- **POLIEDROS:** son cuerpos geométricos que están totalmente limitados por **POLÍGONOS.** Estos polígonos se llaman **CARAS** del poliedro. Sus lados y vértices se llaman respectivamente **ARISTAS** y **VÉRTICES** del poliedro.
- **CUERPO REDONDO:** son cuerpos geométricos limitados por superficies curvas o limitadas en parte por superficies curvas y en parte por superficies planas que no son polígonos.



Poliedro



Poliedro

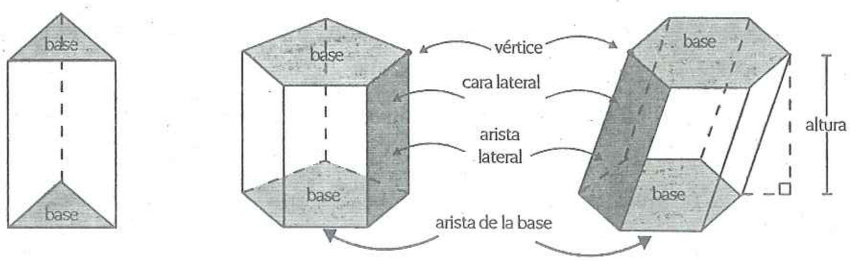

Cuerpo redondo

Pregunta Nº 28

¿Qué es un PRISMA y cuáles son sus elementos básicos? ¿Qué es una PIRÁMIDE y cuáles son sus elementos básicos?

Respuesta

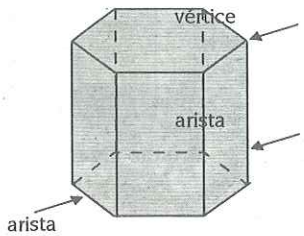
- Fíjate bien en los siguientes poliedros:



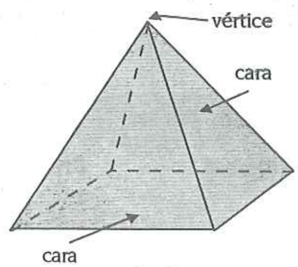
(1) (2) (3)

- Cada uno de ellos tiene: dos caras paralelas que son polígonos iguales y las caras restantes son rectángulos o paralelogramos.
- Estos poliedros se llaman **PRISMAS.** Las dos caras paralelas que son polígonos iguales se llaman **BASES.** Las caras que son rectángulos o paralelogramos se denominan **CARAS LATERALES.**
- Si en un prisma las caras laterales son perpendiculares a las bases, el prisma es un **PRISMA RECTO.** Si, en cambio, las caras laterales no son perpendiculares a las bases, el prisma es **OBLICUO**. Los prismas (1) y (2) son RECTOS y el prisma (3) es OBLICUO.
- La **ALTURA** de un prisma es el segmento perpendicular trazado entre las bases. En los prismas rectos, la altura coincide con las aristas laterales.
- Los prismas también se identifican por el número de lados que tienen los polígonos de las bases; así:
  - **PRISMA TRIANGULAR:** las bases son triángulos.

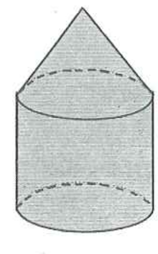
- **CUERPOS GEOMÉTRICOS:** son los cuerpos limitados por superficies planas poligonales o por superficies no planas y por superficies planas que no son polígonos.
- **POLIEDROS:** son cuerpos geométricos que están totalmente limitados por **POLÍGONOS.** Estos polígonos se llaman **CARAS** del poliedro. Sus lados y vértices se llaman respectivamente **ARISTAS** y **VÉRTICES** del poliedro.
- **CUERPO REDONDO:** son cuerpos geométricos limitados por superficies curvas o limitadas en parte por superficies curvas y en parte por superficies planas que no son polígonos.



Poliedro



Poliedro

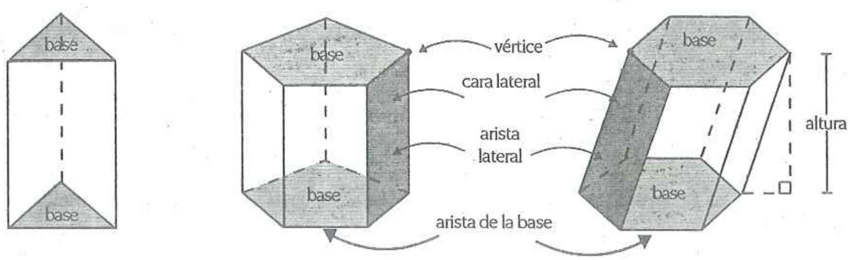

Cuerpo redondo

Pregunta Nº 28

¿Qué es un PRISMA y cuáles son sus elementos básicos? ¿Qué es una PIRÁMIDE y cuáles son sus elementos básicos?

Respuesta

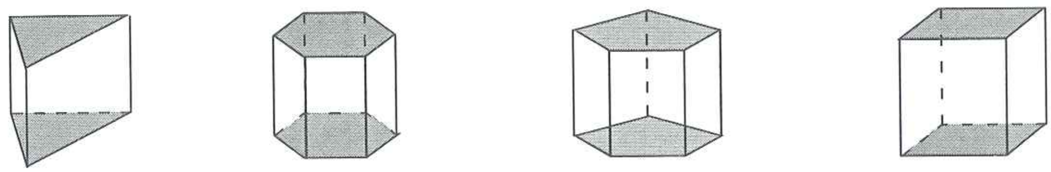
- Fíjate bien en los siguientes poliedros:



(1) (2) (3)

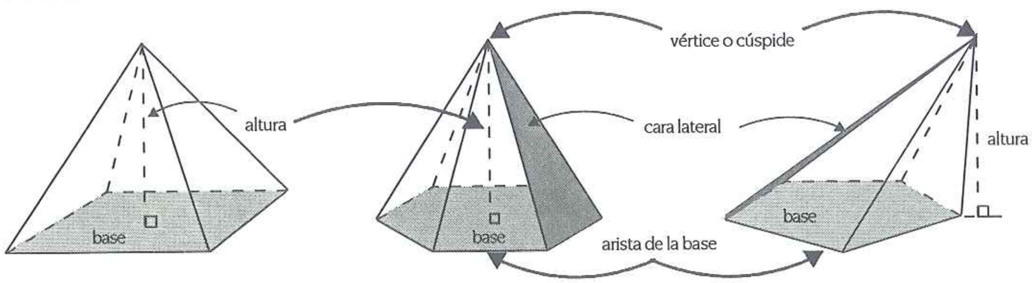
- Cada uno de ellos tiene: dos caras paralelas que son polígonos iguales y las caras restantes son rectángulos o paralelogramos.
- Estos poliedros se llaman **PRISMAS.** Las dos caras paralelas que son polígonos iguales se llaman **BASES.** Las caras que son rectángulos o paralelogramos se denominan **CARAS LATERALES.**
- Si en un prisma las caras laterales son perpendiculares a las bases, el prisma es un **PRISMA RECTO.** Si, en cambio, las caras laterales no son perpendiculares a las bases, el prisma es **OBLICUO**. Los prismas (1) y (2) son RECTOS y el prisma (3) es OBLICUO.
- La **ALTURA** de un prisma es el segmento perpendicular trazado entre las bases. En los prismas rectos, la altura coincide con las aristas laterales.
- Los prismas también se identifican por el número de lados que tienen los polígonos de las bases; así:
  - **PRISMA TRIANGULAR:** las bases son triángulos.

- **PRISMA CUADRANGULAR:** las bases son cuadriláteros. Si las bases son paralelogramos, el prisma cuadrangular se llama PARALEPÍPEDO (por ejemplo, una caja de fósforos, la caja donde empacan los cubos de azúcar, este libro, ...). Un prisma cuadrangular es un **CUBO** si todas sus caras son **CUADRADOS.**
- **PRISMA PENTAGONAL**: las bases son pentágonos.
- **PRISMA EXAGONAL**: las bases son exágonos.

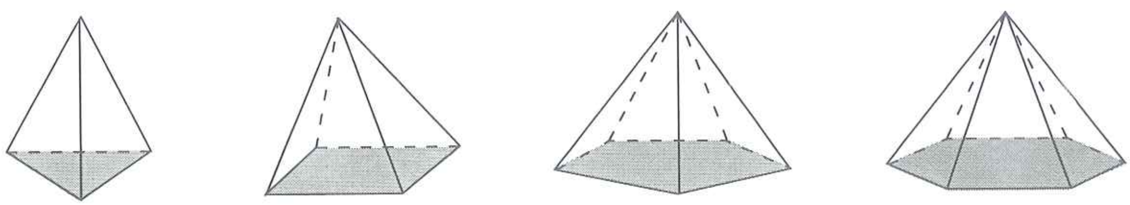


Prisma Triangular **Prisma Exagonal** **Prisma Pentagonal** **Prisma Cuadrangular**

- Ahora observemos estos poliedros:



- Estos poliedros se llaman **PIRÁMIDES**. Se caracterizan porque todas las **CARAS**, menos una, tienen un vértice común. Este vértice común se llama **VÉRTICE** o **CÚSPIDE** de la pirámide, y la cara que no tiene este vértice se llama BASE de la pirámide. Todas las caras diferentes a la base se llaman **CARAS LATERALES.**
- La **ALTURA** de una pirámide es el segmento perpendicular trazado desde el **VÉRTICE** hasta la base o desde el vértice hasta el plano que contiene a la base.
- Al igual que los prismas, las pirámides también se identifican por el número de lados que tiene el polígono de la base.



Pirámide triangular **Pirámide cuadrangular** **Pirámide pentagonal** **Pirámide exagonal**

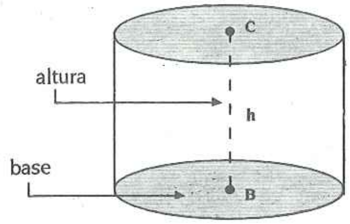
Pregunta Nº 29

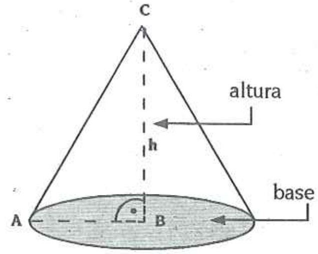
¿Cuáles son los cuerpos geométricos redondos y cuáles son sus elementos?

Respuesta

- Un rectángulo que gira alrededor de uno de sus lados describe un **CUERPO DE REVOLUCIÓN** denominado **CILINDRO.**

- Un triángulo rectángulo que gira alrededor de uno de sus catetos describe un **CUERPO DE REVOLUCIÓN** denominado **CONO.**
- Un semicírculo que gira alrededor de su diámetro describe un **CUERPO DE REVOLUCIÓN** denominada **ESFERA.**
- Las figuras siguientes indican los elementos principales de estos cuerpos geométricos.



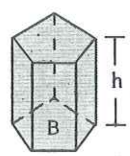


Pregunta Nº 30

¿Cómo se calculan los volúmenes de un prisma, un cilindro, una pirámide, un cono y una esfera?

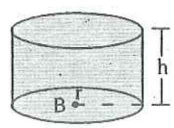
Respuesta

- El **VOLUMEN DE UN PRISMA** es igual al producto del área de la base por la altura.



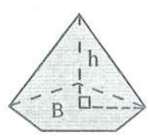
V = Area de la base x altura =B x h

- El **VOLUMEN DE UN CILINDRO** es igual al producto del área de la base (B) por la altura (h); es decir:



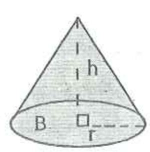
$$V = B \bullet h = \pi \bullet r^2 \bullet h$$

- El **VOLUMEN DE UNA PIRÁMIDE** es igual a un tercio del área de la base (B) por la altura (h); es decir:



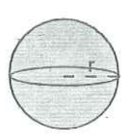
$$V = \frac{B \bullet h}{3}$$

- El **VOLUMEN DE UN CONO** es igual a un tercio del área de la base (B) por la altura (h); es decir:



$$V = \frac{B \bullet h}{3} = \frac{\pi \bullet r^2 \bullet h}{3}$$

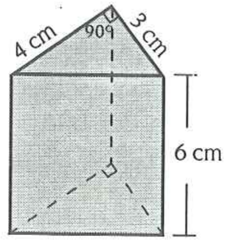
- El **VOLUMEN DE LA ESFERA** es igual a cuatro tercios del producto $\pi \bullet r^3$; es decir:



$$V = \frac{4}{3} \bullet \pi \bullet r^3$$

Ejemplo 1:

- Calculemos el volumen de este prisma:



  - El volumen de este prisma es igual al producto del área de la base por la altura.
  - Como la base es un triángulo rectángulo, entonces su área es:

$$B = \frac{\text{Base} \bullet \text{altura}}{2}$$

En este caso, la base y la altura son los dos catetos del triángulo. Por lo tanto:

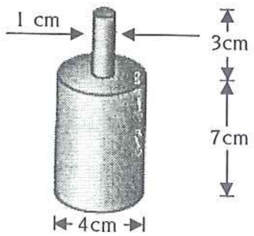
$$B = \frac{(4 \bullet 3)\ cm^2}{2} = 6\ cm^2$$

  - Y como la altura del prisma mide 6 cm (¿por qué?), entonces:

$$V = B \bullet h = (6 \bullet 6)\ cm^3 = 36\ cm^3$$

Ejemplo 2:

- Hallemos el volumen de la siguiente pieza mecánica:



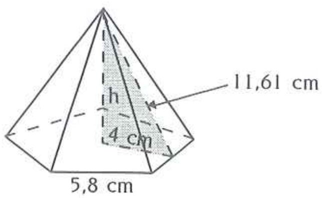
  - La pieza está formada por dos cilindros: uno grueso y otro delgado. El grueso tiene 7 cm de altura y 2 cm de radio de la base; el pequeño tiene 3 cm de altura y 0,5 cm de radio de la base.
  - Por lo tanto, el volumen de la pieza es la suma de los volúmenes de los cilindros que la forman:

V cilindro grande: $\pi \bullet r^2 \bullet h = 3{,}14 \bullet 2^2 \bullet 7\ cm^3 = 87{,}92\ cm^3$
V cilindro pequeño: $\pi \bullet r^2 \bullet h = 3{,}14 \bullet 0{,}5^2 \bullet 3\ cm^3 = 2{,}355\ cm^3$

  - Luego: V pieza $= 87{,}92\ cm^3 + 2{,}355\ cm^3 = 90{,}275\ cm^3$

Ejemplo 3:

- Hallemos el volumen, en m^3, de la siguiente pirámide:

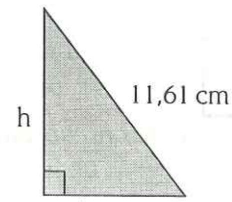


  - Esta es una pirámide de base pentagonal, cuyo lado de la base mide 5,8 cm y cuya apotema mide 4 cm.
  - El volumen de una pirámide es igual a $\frac{1}{3}$ del producto del área de la base por la altura.
  - El área de la base (B) es:

$$B = \frac{\text{Perímetro x apotema}}{2}$$

Perímetro $= 5 \bullet 5{,}8\ cm = 29\ cm$ y Apotema $= 4\ cm$
Luego: $B = \frac{29 \bullet 4}{2}\ cm^2 = 58\ cm^2$

- Para calcular la altura (h) de la pirámide, saquemos aparte el triángulo rectángulo sombreado:



La altura (h) es un cateto del triángulo rectángulo. Como conocemos la medida de la hipotenusa y la del otro cateto, entonces aplicamos el Teorema de Pitágoras para hallar h; así:

$$h^2 = (11{,}61\ cm)^2 - (4\ cm)^2$$
$$\therefore\ h^2 = 134{,}79\ cm^2 - 16\ cm^2$$
$$\therefore\ h^2 = 118{,}79\ cm^2$$
$$\therefore\ h = 10{,}9\ cm$$

- Ahora ya podemos calcular el volumen de la pirámide:

$$V = \frac{B \bullet h}{3} = \frac{58 \bullet 10{,}9cm^3}{3} = \frac{632{,}15cm^3}{3} = 210{,}73\ cm^3$$

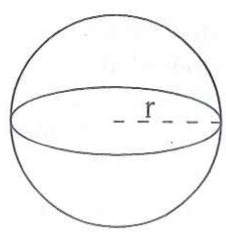
- Para convertir esta medida en m^3 debemos dividir primero por 1.000 para pasar a dm^3 y, luego, otra vez por 1.000 para pasar a m^3. Esto es lo mismo que correr la coma seis (6) lugares a la izquierda; así:

$$\mathbf{210{,}73\ cm^3 = 0{,}00021073\ m^3}$$

corrimos la (,) seis lugares a la izquierda

Ejemplo 4:

- Calculemos el volumen de una pelota de 10 cm de diámetro. ¿Su volumen es mayor o menor que medio decímetro cúbico?.



- Como el diámetro es 10 cm, entonces el radio r = 5 cm.
- Puesto que el volumen de una esfera es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, entonces:

$$V = \frac{4}{3} \bullet 3{,}14 \bullet 5^3\ cm^3$$
$$\therefore\ V = \frac{4}{3} \bullet 3{,}14 \bullet 125\ cm^3$$
$$\therefore\ V = 523{,}3\ cm^3$$

- Para transformar cm^3 en dm^3 debemos dividir por 1.000 o correr la coma tres (3) lugares a la izquierda. Por lo tanto: $\mathbf{523{,}3\ cm^3 = 0{,}5233\ dm^3}$.

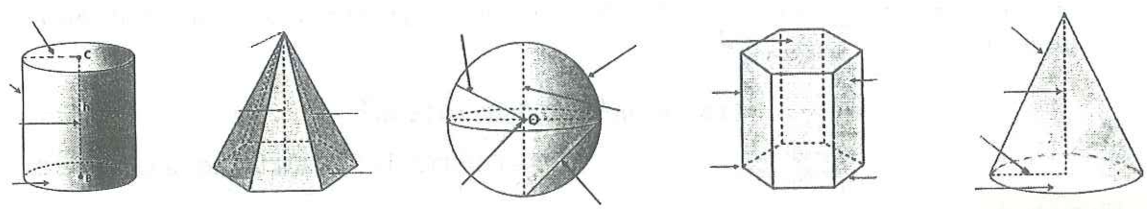
  Luego, $0{,}5233\ dm^3 > 0{,}5\ dm^3$ y el volumen de la pelota es mayor que medio decímetro cúbico.

TALLER 1.6

1 Contesta las siguientes preguntas:

a) ¿Qué es un poliedro?.
b) ¿Qué es un prisma? ¿Cuáles son sus elementos?.
c) ¿Qué es una pirámide? ¿Cuáles son sus elementos?.
d) ¿Qué es un ortoedro? ¿Y un cubo?.
e) ¿Qué es un cuerpo redondo?.
f) ¿Qué es un cilindro? ¿Cuáles son sus elementos?.
g) ¿Qué es un cono? ¿Cuáles son sus elementos?.
h) ¿Qué es una esfera? ¿Cuáles son sus elementos?.

2 Identifica los elementos señalados con flechas en cada uno de los siguientes cuerpos geométricos:



3 Indica si el volumen de los siguientes cuerpos o espacios es mayor o menor que 1 m^3:

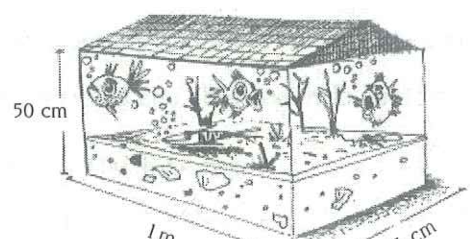
a) la papelera del salón
b) el aula de clase
c) tu zapato
d) un televisor
e) una lavadora
f) un automóvil

4 Indica si los siguientes cuerpos tienen un volumen mayor o menor que 1 cm^3:

a) un borrador de tablero
b) una abeja
c) una gota de agua
d) un grano de maíz

5 Calcula el volumen de la pecera en:

a) cm^3
b) dm^3
c) mm^3



6 Completa:

a) El volumen de un prisma es igual al producto del___________de la base por la_________ del prisma.

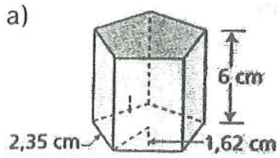
b) Si una pirámide tiene la misma base y la misma altura de un prisma, entonces el volumen de la pirámide es ___________del volumen del prisma.

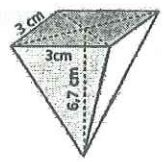
c) El largo de un ortoedro mide 10 cm, el ancho mide 15 cm y la altura mide 20 cm. El volumen de este ortoedro es________ mm^3.

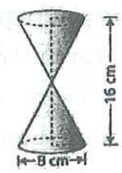
d) Un cilindro y un cono tienen la misma base y la misma altura, entonces el volumen del cono es___________del volumen del cilindro.

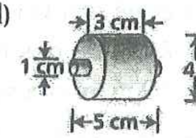
e) Si el diámetro de la base y la altura de un cilindro miden lo mismo que el diámetro de una semiesfera, entonces en el cilindro caben___________ porciones completas de aserrín de la semiesfera.

7 Calcula, en cm^3, el volumen de los cuerpos siguientes:

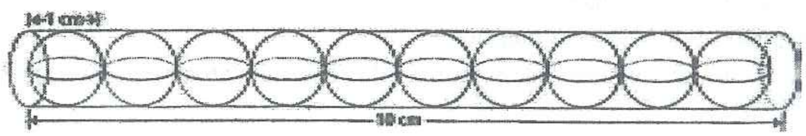
a) 

b) 

c) 

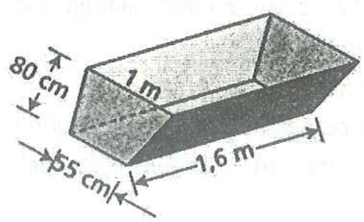
d) 

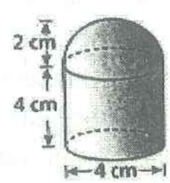
8 Un comerciante vende paquetes de 10 canicas envueltas en un tubo, como muestra la figura siguiente.



a) ¿Cuál es el volumen de cada canica?.
b) ¿Cuál es el volumen del tubo?.
c) ¿Cuál es el volumen del espacio que no está ocupado por las canicas?.

9 La figura representa una vagoneta en la que se puede transportar mezcla de cemento. ¿Cuántas vagonetas de cemento serán necesarias para tapar un pozo cilíndrico de 1,5 m de diámetro y 5 m de profundidad?



10 Calcula el volumen de los siguientes cuerpos: a) 

b) 

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 6

Se han construido cuatro cubos del mismo material, de aristas 6 cm, 8 cm, 10 cm y 12 cm. Hay que colocarlos en los platillos de una balanza de modo que ésta quede en equilibrio. ¿Cómo colocarlos?.

TALLER DE REPASO DE LA UNIDAD 1

1. Contesta en tu cuaderno:

a) ¿Qué es un punto geométrico? ¿y una línea geométrica? ¿cómo son sus representaciones materiales?

b) ¿Qué son la línea recta y el plano geométricos? ¿cómo se representan?

c) ¿Cuándo dos rectas son secantes? ¿y paralelas?

d) ¿Qué es una semirrecta? ¿cómo se simboliza?

e) ¿Qué es un segmento? ¿cómo se simboliza?

f) ¿Qué es origen de una semirrecta? ¿que son extremos de un segmento?

g) ¿Qué es un ángulo? ¿cuáles son los elementos de un ángulo?

h) Explica cómo se nombran los ángulos.

i) Explica cómo se mide un ángulo.

j) ¿Qué son segmentos y ángulos congruentes?

k) ¿Cómo se clasifican los ángulos según su medida? ¿y según su posición? ¿qué significa la palabra ADYACENTE?

l) ¿Qué son ángulos cóncavos?

m) ¿Qué es bisectriz de un ángulo?

n) ¿Cuándo dos rectas son perpendiculares?

o) ¿Cómo se halla la distancia de un punto a una recta?

p) ¿Qué es una línea poligonal? Dibuja dos.

q) ¿Qué es un polígono? Dibuja dos.

r) ¿Qué es un polígono convexo? ¿y uno cóncavo? Dibuja dos de cada uno.

s) ¿Qué es diagonal de un polígono?

t) ¿Qué es perímetro de un polígono?

u) ¿Cómo se clasifican los triángulos según sus lados y según sus ángulos?

v) ¿Cómo se llaman los lados que forman el ángulo recto de un triángulo rectángulo? ¿y el lado opuesto al ángulo recto?

w) ¿Qué establece el Teorema de Pitágoras?

x) ¿Cuáles son las líneas y puntos notables de un triángulo?

y) ¿Qué es un paralelogramo? ¿y un trapecio?

z) ¿Qué es un rectángulo? ¿un rombo? ¿un cuadrado?

a_1) ¿Qué es un trapecio isósceles? ¿y un trapecio rectángulo?

b_1) ¿Qué es un trapezoide?

c_1) ¿En qué se parecen y en qué se diferencian un cuadrado y un rectángulo?

d_1) ¿En qué se parecen y en qué se diferencian un cuadrado y un rombo?

e_1) ¿Cómo se halla la figura simétrica de un polígono con respecto a un punto y con relación a una recta?

f_1) ¿Qué cosas cambian y qué cosas no cambian en una simetría? ¿Qué es eje de simetría de una figura?

g_1) ¿Cómo se llama el eje de simetría de un segmento? ¿Y el de un ángulo?

h_1) ¿Qué es una traslación y cómo se realiza la traslación de un figura? Explica.

i_1) Si a una figura le realizas un número par de simetrías sucesivas sobre ejes de simetría paralelas, ¿obtienes una traslación de la figura? Explica tu respuesta.

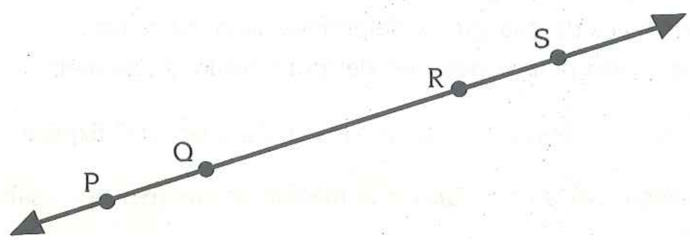
j_1) ¿Qué se necesita para rotar una figura ubicada en un plano dado?

k_1) ¿Cuál es el procedimiento para rotar un polígono respecto a un punto?

2. a) ¿En cuántos conjuntos "divide" a una recta, un punto de esa recta? ¿cómo se denominan estos conjuntos?

   b) ¿En cuántos conjuntos "divide" a una recta, dos puntos distintos de ella? descríbelos.

3. Teniendo en cuenta la figura siguiente contesta estas preguntas:



a) ¿Cuántos y cuáles segmentos hay en la figura?

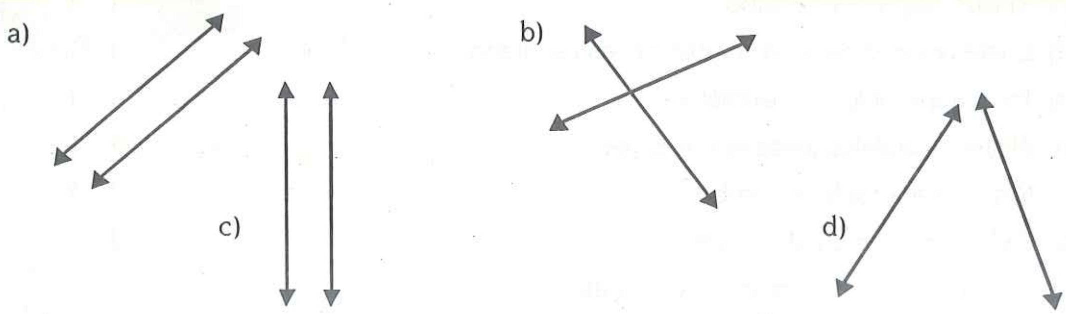
b) ¿Cuál es $\overline{PQ} \cup \overline{QR}$?

c) ¿Cuál es $\overline{PQ} \cap \overline{QR}$?

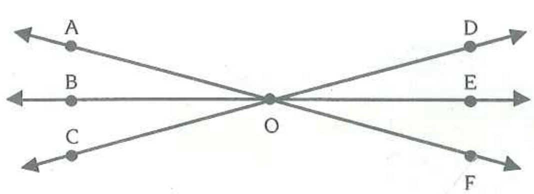
d) ¿Cuál es $\overline{PR} \cap \overline{RQ}$?

e) ¿Cuál es $\overline{PR} \cup \overline{QP}$?

4. Señala cuáles de las siguientes parejas de rectas son paralelas y cuáles son secantes?



Los ejercicios 5. a 9. se contestan con base en la siguiente figura:



5. Nombra todos los ángulos de la figura.

6. Halla la medida de los siguientes ángulos:

a) med (∡ AOB)	b) med (∡ BOC)	c) med (∡ EOD)	d) med (∡ EOF)
e) med (∡ AOD)	f) med (∡ COF)	g) med (∡ AOC)	h) med (∡ DOF)

7. Escribe parejas de ángulos que sean congruentes.

8. Escribe 8 parejas de ángulos que sean opuestos por el vértice.

9. Escribe 4 parejas de ángulos que formen un par lineal.

10. Utilizando regla y compás, dibuja un triángulo cuyos lados midan 10 cm, 15 cm y 8 cm. Se pide:
   a) Calcular el perímetro del triángulo.
   b) Trazar las tres alturas del triángulo y determinar su ortocentro.
   c) Trazar las tres medianas del triángulo y determinar su centro de gravedad o baricentro.
   d) Trazar las tres bisectrices del triángulo y determinar su incentro.
   e) Trazar las tres mediatrices del triángulo y determinar su circuncentro.
   f) ¿Son colineales los cuatro puntos notables de un triángulo? Comprueba.

11. ¿Hay triángulos que sean equiláteros y rectángulos al mismo tiempo? Explica.

12. El perímetro de un triángulo es 36 cm. Calcula la medida de sus tres lados sabiendo que son tres enteros consecutivos.

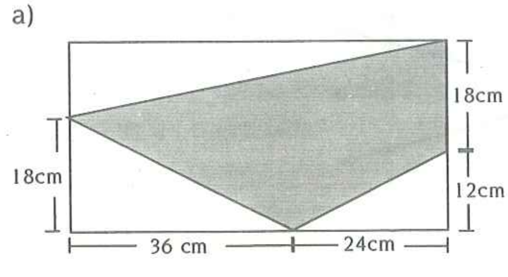
13. ¿Es rectángulo un triángulo cuyos lados miden 9 cm, 12 cm y 15 cm? ¿por qué?

14. Responde falso o verdadero a cada una de las siguientes proposiciones. Justifica tu respuesta.

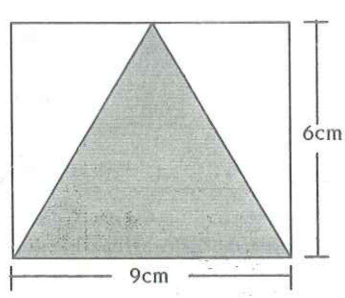
a) Todo cuadrado es paralelogramo	( )
b) Algunos trapecios son cuadrados	( )
c) Ningún trapecio es rombo	( )
d) Existe por lo menos un rombo que es cuadrado	( )
e) Todo trapezoide es cuadrilátero	( )
f) Algunos paralelogramos son rombos	( )
g) Ningún trapezoide es rombo	( )
h) Todo rombo es paralelogramo	( )
i) Ningún trapecio es trapecio rectángulo	( )
j) Todos los cuadrados son rombos	( )

15. Halla el área de la región sombreada en cada figura:

a)

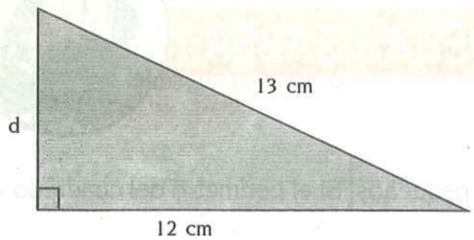


b)

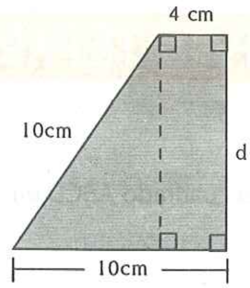


16. Calcula en cada figura la longitud del segmento d y luego, el área de la misma.

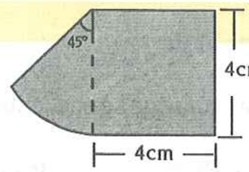
a)



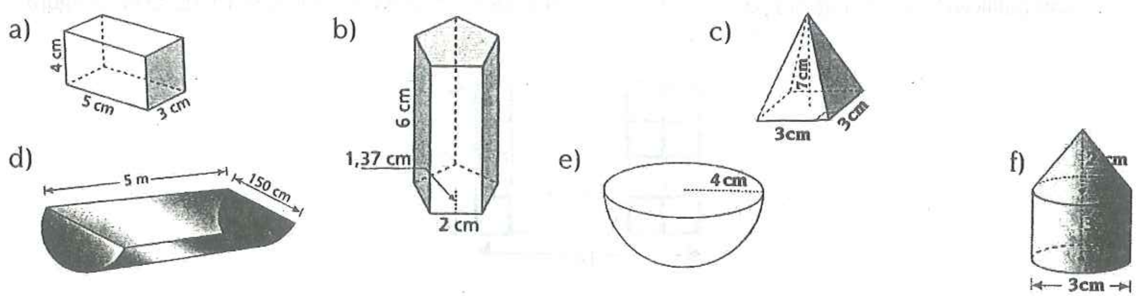
b)



17. La figura representa una pieza de metal. Calcula su área:



18. Hallar el volumen de cada uno de los siguientes cuerpos:

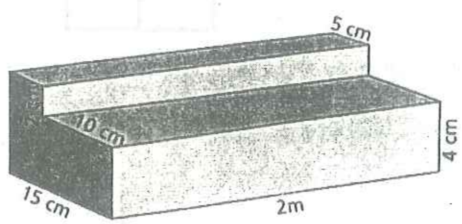


19. Una barra de acero tiene forma de prisma de base cuadrada. Sus dimensiones son 6,5 cm de lado de la base y 60 cmde altura:

a) Dibuja la barra
b) Calcula su volumen.
c) Halla su peso, sabiendo que 1 cm³ de acero pesa 8,2 gramos.

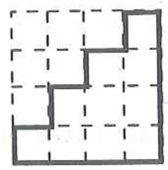
20. La pieza que muestra la figura está fabricada con un tipo de madera, tal que 1 cm³ pesa 0,95 gramos. Calcular:

a) el área total de la pieza.
b) el volumen de la pieza.
c) el peso total de la pieza.



PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS SABER

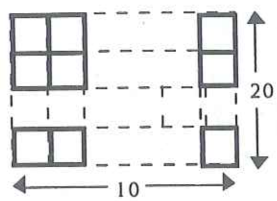
1. Se divide el cuadrado ABCD en 16 cuadrados más pequeños. Si el perímetro del cuadrado ABCD es 36 cm ;



El perímetro de la figura que se encuentra cerrada por la línea continua es:

a. 12 cm b. 18 cm c. 36 cm d. 48 cm

2. Se usan palillos de igual longitud para construir una retícula rectangular tal como se muestra en la figura.



Si la retícula tiene 20 palillos de altura y 10 palillos de ancho, entonces el número de palillos que se usaron en su construcción es:

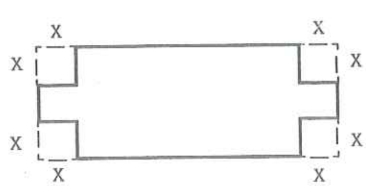
a) 430 b) 30 c) 200 d) 420

3. Si el área del cuadrado más grande es de 64 cm^2.

El área del cuadrito sombreado es:

a) $\frac{1}{64}$ cm^2 b) $\frac{1}{16}$ cm^2 c) $\frac{1}{4}$ cm^2 d) 1cm^2

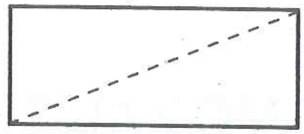
4. Si a un pedazo de rectángulo de cartulina de área A, se le cortan cuadrados de lado x en us esquinas



El área de la cartulina restante es:

a) a - x^2 b) A - 4 x^2 c) A - 4x d) A - 8x

5. Una cartulina de forma rectangular de 8 cm de largo por 6 cm de ancho, se recorta por la diagonal para obtener dos pedazos de forma triangular cada uno.



El perímetro de uno de estos pedazos es:

a) 24 cm c) 16 cm c) 10 cm d) 14 cm

Núcleo Temático

2

LA GEOMETRÍA COMO CIENCIA

LOGRO GENERAL

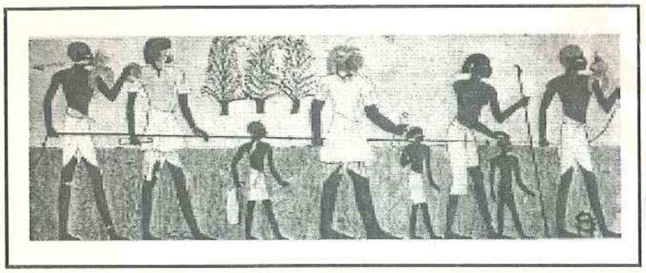
Identificar inferencias, métodos de demostración y refutaciones como formas de razonamiento lógico.

DIMENSIONES	LOGROS ESPECÍFICOS	INDICADORES DE LOGRO
Corporal:	• Realizar experiencias que faciliten el desarrollo de habilidades de pensamiento.	• En grupos de tres alumnos sacan conclusiones a partir de una información dada.
Comunicativa:	• Seguir instrucciones lógicamente estructuradas. • Expresar con fluidez sus conclusiones a sus compañeros. • Escribir enunciados en la forma **si p entonces q** o **p si y solo si q.**	• Explica con precisión la (s) conclusión (es) obtenida (s) a partir de un conjunto de proposiciones.
Cognitiva:	• Identificar la hipótesis y la tesis en enunciados de la forma p ŷ q. • Utilizar en el razonamiento las leyes de la lógica: Modus ponens, modus tollens y la ley del silogismo.	• A partir de hechos conocidos, el alumno reconoce la diferencia entre inferencias válidas y falacias. • Frente a proposiciones incoherentes, realiza y refutaciones por la vía del contraejemplo.
Estética:	• Elaborar en cartelera un mapa conceptual en donde describe las características de una teoría lógicamente estructurada.	• Socializa con sus compañeros las características de una teoría lógicamente estructurada.
Ética-Actitudinal:	• Reconocer las leyes de la lógica como una herramienta útil en el razonamiento.	• Reconoce y acepta sus fortalezas y debilidades en la actividad académica.

EVALUACIÓN

ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS

2.1 HISTORIA DE LA GEOMETRÍA (2)



No podemos rechazar con seguridad ni la teoría de Herodoto ni la de Aristóteles sobre los motivos que dieron origen a la geometría, pero lo que si está bien claro es que ambos subestimaron la edad de dicha ciencia. El hombre neolítico pudo haber disfrutado de escaso tiempo de ocio y haber tenido pocas necesidades de utilizar la agrimensura, y sin embargo sus dibujos y diseños revelan un interés en las relaciones espaciales que prepararon el camino a la geometría. La alfarería, la cestería y los tejidos muestran en sus dibujos ejemplos de congruencias y simetrías que son en esencia partes de la geometría elemental. No hay documentos disponibles de la época prehistórica y, por lo tanto es imposible seguir la pista a la evolución de la matemática de un diseño concreto a un teorema conocido; sin embargo, las ideas son como esporas muy resistentes, y a veces el presunto origen de un concepto puede no ser más que la reaparición de una idea mucho más antigua que había permanecido en estado latente.

El interés del hombre primitivo por los diseños y las relaciones espaciales puede haber surgido de su sentido estético, para disfrutar de la belleza de la forma, motivo que también anima frecuentemente al matemático de hoy día. Quien estas notas escribe quisiera pensar que por lo menos algunos de los geómetras primitivos realizaba su trabajo sólo por el puro placer de hacer matemáticas y no como una ayuda práctica para la medición.

EJERCICIO 2.1

COMPRENSIÓN DE LECTURA. Explicación: Lee nuevamente el fragmento anterior y luego encierra, en un círculo la letra que corresponda a la respuesta correcta.

1. Los siguientes enunciados son verdaderos, con excepción de:
   a. Tanto Herodoto como Aristóteles subvaloraron la antigüedad de la geometría.
   b. Los dibujos y diseños de los antiguos demuestran que éstos abrieron el camino a la geometría.
   c. La geometría, entre los antiguos, estuvo ligada a la belleza, a la estética.
   d. El hombre neolítico disfrutó de tiempo de ocio y poco necesitó de la agrimensura.

2. La idea central del escrito podría enunciarse como:
   a. A Herodoto y Aristóteles les faltó más objetividad en sus tesis sobre la geometría.
   b. Los orígenes de la geometría están estrechamente vinculados con la belleza y la estética del arte entre los antiguos.
   c. El padre de la geometría pudo haber sido un hombre del período neolítico.
   d. La geometría es tan antigua como la misma humanidad.

3. Cuando el autor dice al final del fragmento: "... algunos de los geómetras primitivos realizaban su trabajo sólo por el puro placer de hacer matemáticas", se debe entender como:
   a. Una afirmación categórica
   b. Una mera posibilidad.
   c. Un deseo porque así hubiera sido.
   c. Una dificultad para afirmar lo contrario.

4. En el texto se mencionan, la alfarería y la cestería. Estas se refieren a:
   a. El arte de trabajar la arcilla y las telas.
   b. La elaboración de artículos de cuero y de mimbre.

c. La fabricación de vasijas de barro y de canastos.
d. Dos artes antiguos ya desaparecidos.

5. Este escrito, por su estructura y contenido, podría catalogarse como:
   a. Un artículo   b. Un ensayo
   c. Una reseña   d. Una crónica

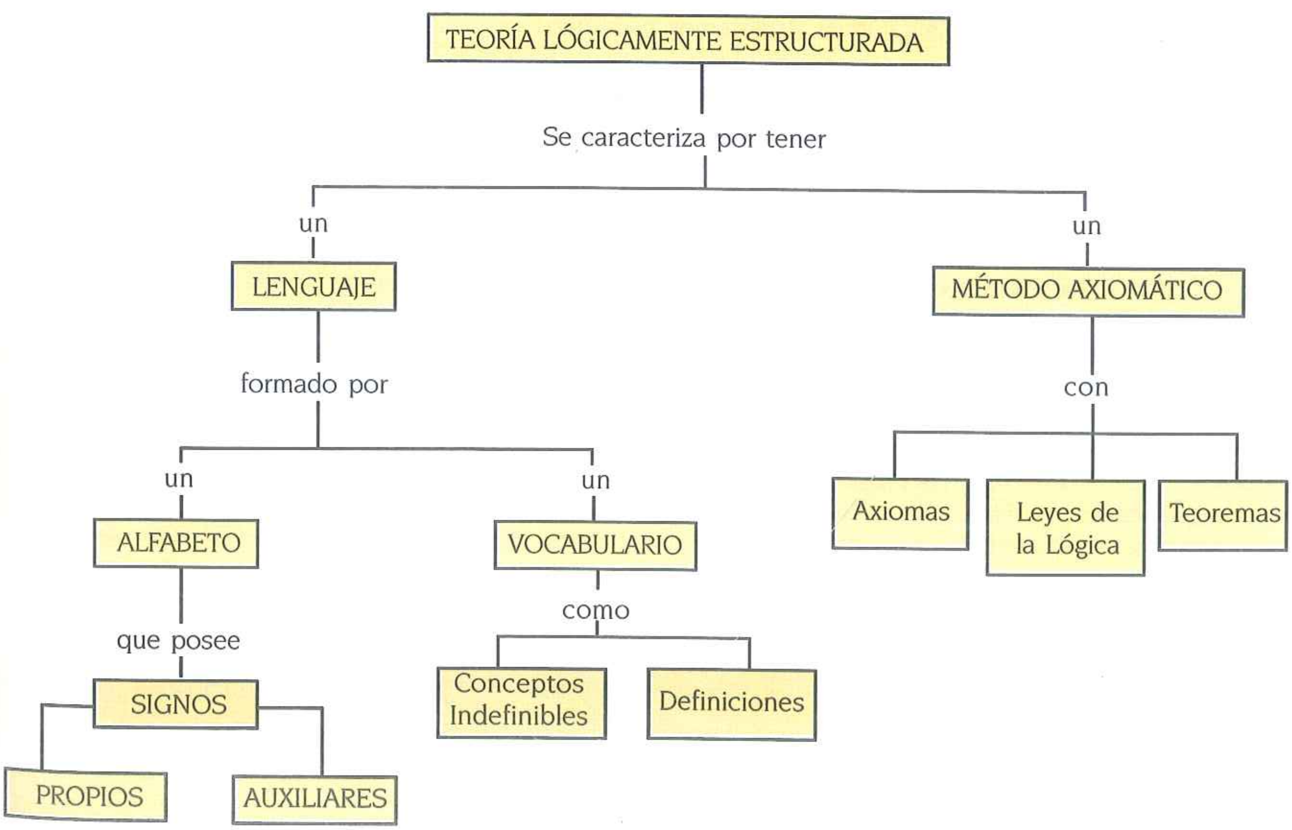
2.2 LA ESTRUCTURA LÓGICA DE LA GEOMETRÍA

En la unidad anterior vimos que la geometría tuvo su origen en las actividades prácticas y en los problemas de la vida cotidiana.

Los egipcios y los babilonios sabían determinar las áreas y los volúmenes más sencillos, conocían con gran precisión el valor del número pi (π); es decir, poseían una cantidad importante de conocimientos geométricos. Sin embargo, para ellos la geometría no era una **teoría científica** ya que, al igual que la aritmética, consistía sólo en una colección de reglas obtenidas de la experiencia diaria.

El desarrollo de la geometría como ciencia pura aparece en Grecia en el siglo V a. de C. Este desarrollo fue recopilado en un famoso libro llamado **ELEMENTOS**, escrito por el sabio EUCLIDES, en el siglo III a. de C. En este libro la geometría se presentó como un sistema tan bien construido que sus fundamentos no sufrieron ninguna alteración esencial hasta llegar a Nicolás Lobachevski, más de 2.000 años después. La mayoría de los textos escolares actuales (incluido éste) son reelaboraciones de la obra de Euclides. Muy pocos libros en el mundo han tenido una vida tan larga como los ELEMENTOS de Euclides. Naturalmente, la matemática continuó avanzando, y el conocimiento de los fundamentos de la geometría fue mejorando cada vez más; sin embargo, los ELEMENTOS de Euclides siguen siendo un buen modelo de un libro de matemática pura.

En esta unidad vamos a estudiar el desarrollo de la geometría como ESTRUCTURA LÓGICA. Pero, ¿cuáles son las características de una TEORÍA LÓGICAMENTE ESTRUCTURADA? El siguiente MAPA CONCEPTUAL nos ayudará a identificar estas características que, por supuesto, también tiene la geometría euclidiana. Veamos:



Antes de abordar el estudio de la geometría como una teoría lógicamente estructurada, vamos a presentar un caso sencillo que te permitirá comprender el esquema mostrado en el mapa conceptual. El caso es el siguiente: ¿Sabes porqué al AJEDREZ lo llaman el JUEGO CIENCIA? Probablemente porque cumple con los requisitos que debe tener una TEORÍA CIENTÍFICA o una TEORÍA LÓGICAMENTE ESTRUCTURADA. Veamos:

1. **CONCEPTOS PRIMITIVOS:** Los que intervienen en el juego: jugadores, tablero, fichas,...
2. **DEFINICIONES:** En el ajedrez se definen términos como estos: tipo de tablero, clases, color y número de fichas.
3. **AXIOMAS:** La palabra **axioma** es sinónima de **regla de juego**. En todo juego hay una serie de normas o reglas que deben ser aceptadas por los participantes, sin ninguna discusión. Estas normas son los AXIOMAS. En el ajedrez podemos identificar, entre otros, los siguientes axiomas o reglas de juego: comienza a jugar quien posea las fichas blancas, cada ficha se mueve de determinada manera, el jaque y el mate se dan en determinadas circunstancias,...
4. **LEYES DE LA LÓGICA:** En el ajedrez, las leyes de la lógica son las tácticas, estrategias o movimientos que cada jugador conoce o desarrolla a medida que se va perfeccionando en su juego.
5. **TEOREMAS:** En el ajedrez, los teoremas son los resultados que se obtienen cuando se ponen en práctica los conocimientos estratégicos de cada jugador y su capacidad para producir jugadas creativas, que le permitan vencer a su adversario o, al menos, lograr unas tablas.

2.3 EL LENGUAJE Y EL MÉTODO AXIOMÁTICO DE LA GEOMETRÍA

- En la sección anterior establecimos las condiciones que hacen que una teoría sea LÓGICAMENTE ESTRUCTURADA. ¿Por qué la geometría euclidiana cumple con estos requisitos? Veamos:
- EL LENGUAJE
  La geometría euclidiana posee un LENGUAJE, caracterizado por unos SIGNOS, unos CONCEPTOS INDEFINIBLES y unas DEFINICIONES. Analicemos cada uno:

1. **SIGNOS:** En geometría euclidiana usaremos dos clases de signos:
   a. **Auxiliares:** Son las letras mayúsculas y minúsculas de nuestro alfabeto: A, B, C, D, ..., a, b, c, ...; o de otros alfabetos, como el griego: $\alpha, \beta, \gamma, \theta, \phi, \Omega, \ldots$
   b. **Propios de la geometría:** $\measuredangle, \cong, \sim, \parallel, \perp, \ldots$ los cuales ya conocemos desde grados anteriores y otros que iremos conociendo a medida que avance el curso.

2. **CONCEPTOS INDEFINIBLES:** La geometría, como toda ciencia, necesita de un **vocabulario** propio. Para construir este vocabulario propio, comenzamos con unas palabras cuyo significado nos lo proporciona nuestra experiencia diaria, el mundo que nos rodea. Estas palabras, cuyo significado no es preciso se denominan CONCEPTOS INDEFINIBLES y en geometría euclidiana son: PUNTO, RECTA, PLANO, CONJUNTO y ELEMENTO.

3. **LAS DEFINICIONES:** Para completar el vocabulario de la geometría, necesitamos conocer el **significado preciso** de otras palabras: LAS DEFINICIONES. Para definir una palabra usamos los conceptos indefinibles u otras palabras que se definieron anteriormente.

¡ATENCIÓN!

En la unidad anterior elaboramos un listado de los conceptos indefinibles y de un buen número de las definiciones que vamos a necesitar en este texto, para desarrollar la geometría.

• El Método Axiomático

El mapa conceptual nos mostró que en una teoría lógicamente estructurada, el método axiomático se caracteriza por: **los axiomas, las leyes de la lógica y los teoremas.**

1. LOS AXIOMAS: Dijimos antes que los **axiomas** de una teoría son como las **reglas de un juego**, las cuales deben ser aceptadas por todos los jugadores. Si tú quieres ser un "jugador" de geometría, entonces debes someterte a las reglas que diseñó Euclides para este juego.
   En forma más precisa, un **axioma** es una proposición verdadera cuya verdad se acepta sin demostración.

APRENDAMOS

- Un AXIOMA de una teoría lógicamente estructurada es una proposición verdadera, cuya verdad se acepta sin demostración.
- Los axiomas de una teoría son como las reglas de un juego.

2. LAS LEYES DE LA LÓGICA: Las definiciones y los axiomas no servirían de nada si no supiéramos "encadenarlos" lógicamente para obtener nuevas proposiciones. Este encadenamiento se logra combinando dos elementos: LAS LEYES DE LA LOGICA y NUESTRA PROPIA CAPACIDAD DE PENSAMIENTO.

3. LOS TEOREMAS: Los teoremas son proposiciones verdaderas, cuya verdad es necesario probar. Esto lo logramos combinando las definiciones y los axiomas por medio de las leyes de la lógica.

APRENDAMOS

Un TEOREMA es una proposición verdadera, cuya verdad es necesario demostrar.

EJERCICIO 2.2

1. ¿Cuál fue el aporte de las culturas babilónica y egipcia al desarrollo de la geometría?
2. ¿Cuándo comenzó a desarrollarse la geometría como ciencia pura? ¿Quiénes realizaron este desarrollo?
3. ¿Por qué a esta geometría se le llama geometría euclidiana?
4. ¿Por qué se caracteriza una teoría lógicamente estructurada? Elabora un mapa conceptual que la describa.
5. ¿Qué son axiomas de una teoría? ¿Con qué podemos comparar los axiomas de una teoría?
6. ¿Qué es un teorema? ¿En qué se diferencian un axioma y un teorema?
7. ¿Qué es un concepto indefinible de una teoría? ¿Qué es una definición?
8. ¿Cuáles son los conceptos indefinibles de la geometría?
9. ¿Cómo está constituido el LENGUAJE de la geometría euclidiana?
10. Elige un juego y analízalo como una estructura lógica.

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 1

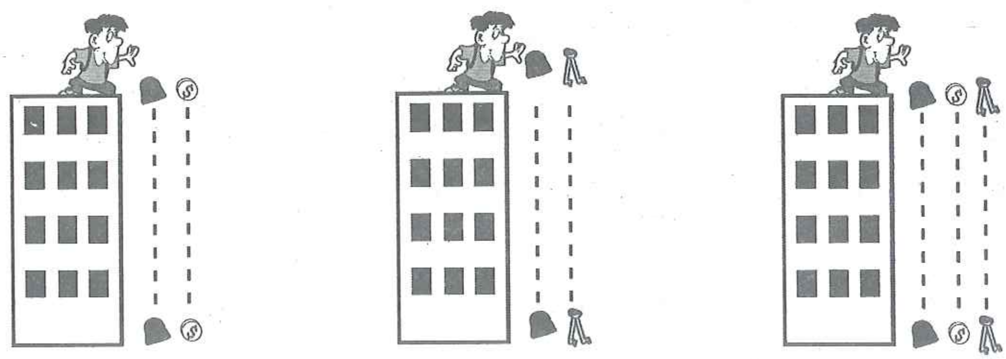
Nos dan el enunciado: "Sólo algunos dijeron la verdad". ¿Cuál de las siguientes proposiciones tiene sentido DIFERENTE?

a) No todos dijeron mentiras.
b) Algunos no dijeron la verdad.
c) Ninguno dijo mentiras.
d) No todos dijeron la verdad
e) La verdad fue dicha por unos pocos.

2.4 EL PROCESO DE RAZONAMIENTO EN MATEMÁTICAS. RAZONAMIENTO INDUCTIVO

PRIMERA EXPERIENCIA

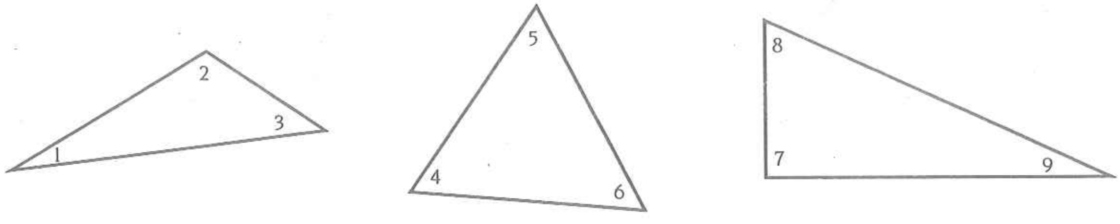
- Camilo sube a la azotea de un edificio de 20 m de altura y desde allí suelta hacia la calle dos objetos al mismo tiempo: primero, una piedra y una moneda; luego, una piedra y un llavero y, finalmente, los tres objetos simultáneamente.



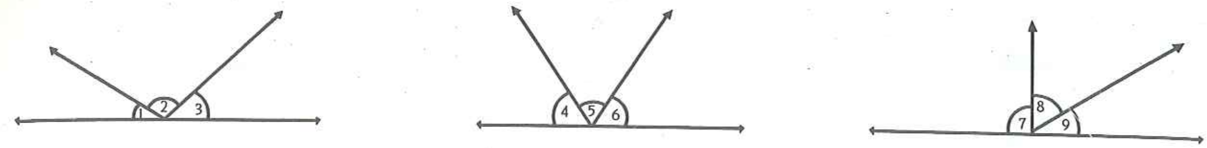
- ¿Será posible sacar una conclusión general a partir de la experiencia realizada por Camilo? ¿Cuál es esta conclusión? ¿Por qué es posible sacar esta conclusión?

SEGUNDA EXPERIENCIA

- Sara dibujó tres triángulos en una hoja de papel y luego los recortó:



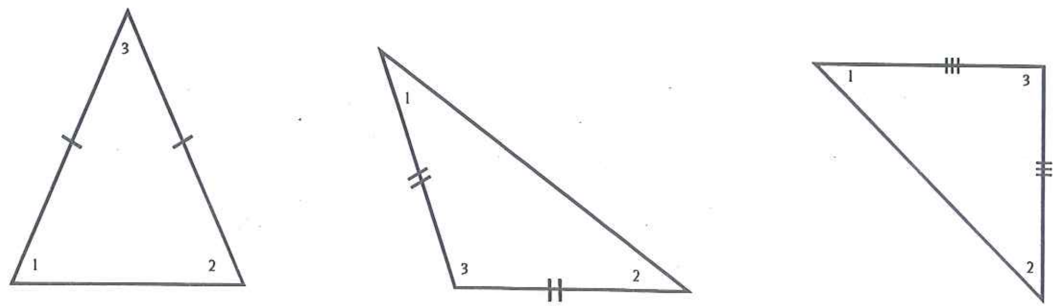
- A continuación, recortó las esquinas de cada triángulo y las juntó tal como se muestra a continuación.



- ¿Qué puede afirmar Sara acerca de la suma de las medidas de los ángulos? ¿Puede concluir que esto es cierto para todos los triángulos?
- Completa esta generalización:
  "La suma de la medidas de los ángulos interiores de un triángulo es ________".

TERCERA EXPERIENCIA

- Alejandro dibujó tres triángulos isósceles diferentes.



- A continuación midió los ángulos $\widehat{1}$ y $\widehat{2}$ de cada triángulo. Estos ángulos se oponen a los lados congruentes del triángulo.
- ¿Cómo son las medidas del $\widehat{1}$ y del $\widehat{2}$ en el primer triángulo? ¿Y en el segundo? ¿Y en el tercero?
- ¿Qué puede afirmar Alejandro acerca de los ángulos que se oponen a los lados congruentes de un triángulo isósceles? ¿Puede concluir que esto es cierto para todos los triángulos isósceles?
- Completa esta generalización
  "En todo triángulo isósceles, los ángulos opuestos a los lados congruentes son ________".

Los protagonistas de las tres experiencias anteriores (Camilo, Sara y Alejandro) realizaron procesos mediante los cuales sacaron conclusiones a partir de una información. Estos procesos se denominaron RAZONAMIENTOS. En ocasiones, las personas sacan conclusiones basadas en sus propias observaciones. Después de observar varias veces una acción y comprobar que produce el mismo resultado, se concluye, en general, que esa acción tendrá siempre el mismo resultado. A esta clase de razonamiento se le llama RAZONAMIENTO INDUCTIVO y a la conclusión que se obtiene de un razonamiento inductivo se le denomina GENERALIZACION.

APRENDAMOS

- Un RAZONAMIENTO es el proceso mediante el cual se sacan conclusiones a partir de una información.
- Un RAZONAMIENTO es INDUCTIVO cuando al observar varias veces que una acción produce el mismo resultado, se concluye que siempre será así.
- La conclusión que se obtiene de un razonamiento inductivo se llama GENERALIZACION.

EJERCICIO 2.3

1 Contesta:

a) ¿Qué es un razonamiento?
b) ¿Cuándo un razonamiento es inductivo?
c) ¿Qué es una generalización?

2 Dibuja estos tres triángulos en el cuaderno y traza sus medianas.

Completa la siguiente generalización:

"Las medianas de un triángulo se cortan en un __________".

3 Dibuja tres triángulos equiláteros: uno de 6 cm de lado, otro de 10 cm de lado y el tercero de 8 cm de lado. A continuación mide los ángulos de cada no. Completa esta generalización:

"Si un triángulo es equilátero, entonces sus ángulos miden __________".

4 Dibuja en tu cuaderno un triángulo, un cuadrilátero, un pentágono y un hexágono. Traza en cada uno las diagonales desde un mismo vértice. ¿Cuántas diagonales podemos trazar, en un polígono, desde un mismo vértice? Completa esta generalización:

"Si un polígono convexo tiene n lados, entonces el número de diagonales que podemos trazar desde un mismo vértice es __________".

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 2

"Es falso que no todos hayan asistido". ¿Cuál de las siguientes proposiciones conserva IGUAL sentido?

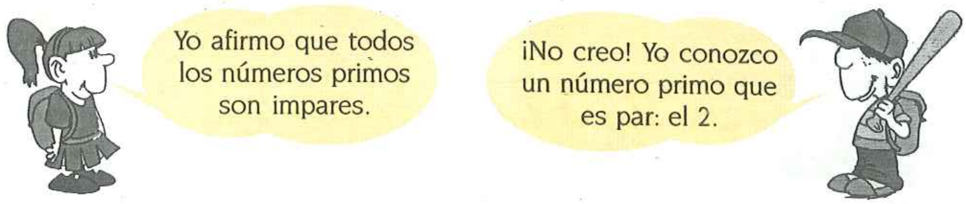
a) No es falso que no todos hayan asistido.
b) Es falso que todos hayan asistido.
c) No es falso que ninguno haya asistido.
d) No es cierto que no todos hayan asistido.
e) No es falso que todos hayan asistido.

2.5 GENERALIZACIONES FALSAS Y CONTRAEJEMPLOS

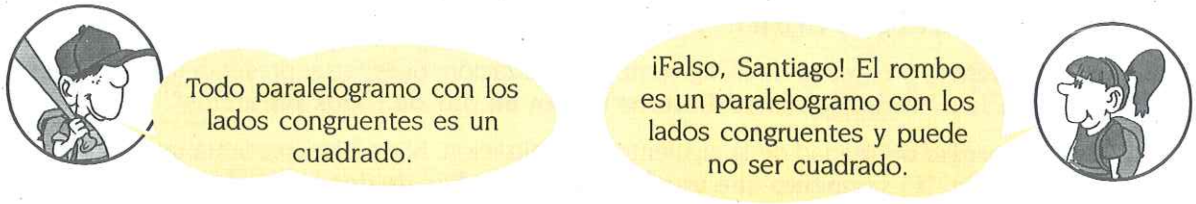
En muchas ocasiones ocurre que una generalización que considerábamos verdadera, resulta falsa. Veamos algunas situaciones:

EXPERIENCIA

- Camila y Santiago sostienen el siguiente diálogo:



- Ahora Santiago toma la iniciativa y dice:



- Para probar que una generalización es FALSA, basta mostrar al menos un caso para el cual no se cumple. Este caso se denomina CONTRAEJEMPLO.

APRENDAMOS

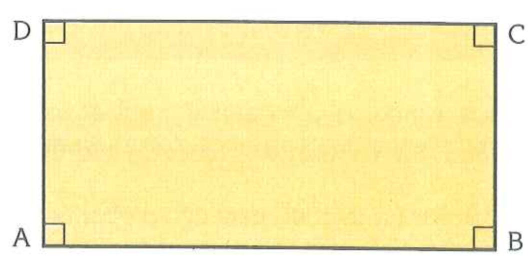
Un CONTRAEJEMPLO es un solo ejemplo que pone en evidencia la falsedad de una generalización.

Ejemplo 1

Mostrar la falsedad de la siguiente generalización: **"Si un cuadrilátero tiene los cuatro ángulos congruentes, entonces también tiene los cuatro lados congruentes".**

Solución

- Para demostrar que esta generalización es falsa, debemos presentar un cuadrilátero que tenga los cuatro ángulos congruentes y no tenga los cuatro lados congruentes.
- El cuadrilátero ABCD tiene los cuatros ángulos congruentes (todos son de 90°) y sin embargo no tiene todos los lados congruentes. Este es un CONTRAEJEMPLO.



Ejemplo 2

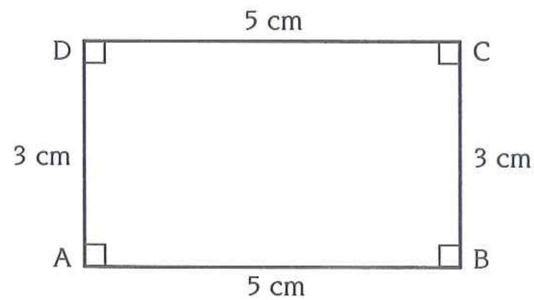
Mostrar la falsedad de la siguiente generalización: **"Todo número par es múltiplo de 4".**

Solución

- Para demostrar la falsedad de esta generalización debemos mostrar un número par que no sea múltiplo de 4.
- Este número es 10 ya que es par y no es posible encontrar un número entero que multiplicado por 4 nos de 10. Así, pues, 10 es un CONTRAEJEMPLO para esta generalización.

EJERCICIO 2.4

1. Contesta: ¿Qué es un contraejemplo?
2. Analiza la verdad o falsedad de la siguiente generalización. Si es falsa, presenta un contraejemplo: **"Si un cuadrilátero tiene un par de lados paralelos, entonces tiene un par de lados congruentes".**
3. Analiza la verdad o falsedad de la siguiente generalización. Si es falsa, presenta un contraejemplo: Generalización: **"Todos los cuadriláteros tienen un par de lados paralelos".**
4. Analiza la verdad o falsedad de la siguiente generalización. Si es falsa, presenta un contraejemplo: Generalización: **"El segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo, mide la mitad de la longitud del tercer lado".**
5. ¿Para cuál de las siguientes proposiciones sería un contraejemplo el cuadrilátero ABCD?
   a) Un polígono con ángulos congruentes es un polígono regular.
   b) Un polígono con lados congruentes es un polígono regular.
   c) Un cuadrilátero con ángulos congruentes es un cuadrilátero convexo.



DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 3

Dada la siguiente información: "No todos los A son B; algunos A son C". De acuerdo con lo anterior, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es CORRECTA?

a) Algún B que sea A puede ser C.
b) Todo B que sea A no puede ser C.
c) Algún B que sea A tiene que ser C.
d) Todo A que sea C no puede ser B.
e) Algún A que sea B no puede ser C.

2.6 EL RAZONAMIENTO DEDUCTIVO

- En las dos secciones anteriores usamos el razonamiento inductivo para descubrir generalizaciones. Y en este proceso de descubrimiento, encontramos contraejemplos que invalidaron algunas de esas generalizaciones.
- En esta sección vamos a desarrollar un método para comprobar que una generalización descubierta es verdadera para todos los casos. Este método se denomina RAZONAMIENTO DEDUCTIVO.
- La siguiente experiencia nos ayudará a comprender en qué consiste el método de razonamiento deductivo.

EXPERIENCIA

- Lee cuidadosamente la siguiente historieta:

E-mail: drabanal@cambio.net.co

* Contesta:
  - Según la historieta, ¿será fácil o difícil terminar la guerra en Colombia?
  - ¿Por qué razón cree el Señor que será difícil terminar la guerra en Colombia?
* Escribe tres razones por las cuales tú crees que se originó la guerra en Colombia.
* Haz una lista de acciones que contribuirían a lograr la paz en Colombia.
* Explica si la siguiente proposición resume o no el contenido de la historieta: **"Si no dejamos en claro porque empezó la guerra entonces no será posible terminarla".**

- Esta experiencia nos muestra que para descubrir una generalización (en este caso, la generalización es "no será posible terminarla") es necesario conocer algunas generalizaciones previas (en este caso, las generalizaciones previas son las causas que originaron el conflicto). En matemáticas, estas generalizaciones previas se denominan HIPÓTESIS y aquella que esperamos probar se llama TESIS o CONCLUSION.
- En el método de razonamiento deductivo partimos de las HIPÓTESIS (que son los axiomas, las definiciones y otros teoremas ya demostrados); luego, con un adecuado manejo de las LEYES DE LA LÓGICA, "encadenamos" dichas hipótesis para llegar a la CONCLUSIÓN o TESIS.
- El método de razonamiento deductivo consta de 3 pasos:

  Paso 1: Partimos de las **hipótesis** representadas en los **axiomas**, las **definiciones** y **otros teoremas** ya demostrados.

  Paso 2: Con un adecuado manejo de las **LEYES DE LA LÓGICA** (más adelante veremos cuales son) "encadenamos" las hipótesis.

  Paso 3: El proceso de encadenamiento nos lleva a la **tesis o conclusión.**

Ejemplo

Identifiquemos los 3 pasos del razonamiento deductivo para demostrar el siguiente teorema:
"Si dos ángulos son opuestos por el vértice, entonces son congruentes".

Solución

- El enunciado de este teorema consta de dos partes:

  Parte 1: "Dos ángulos son opuestos por el vértice".
  Esta primera parte se llama HIPÓTESIS DEL TEOREMA y en el proceso deductivo se agrega a las otras hipótesis que vamos a utilizar (es decir, los axiomas, las definiciones y otros teoremas ya demostrados).

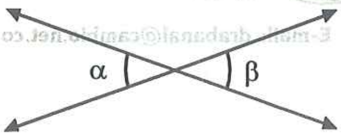
  Parte 2: "Son congruentes".
  Esta parte es la TESIS o CONCLUSIÓN y es la generalización a la que debemos llegar como resultado del proceso deductivo.

- Los tres pasos del razonamiento deductivo son los siguientes:

Paso 1

Empezamos con la información que nos dan (hipótesis).

HIPÓTESIS



$\widehat{\alpha}$ y $\widehat{\beta}$ son opuestos por el vértice

Paso 2

"Encadenamos" lógicamente las demás hipótesis (axiomas, definiciones u otros teoremas) para justificar una serie de pasos que den el resultado deseado.

Más adelante estudiaremos estos pasos y su justificación.

Paso 3

Llegamos a la conclusión o tesis.

TESIS

$\widehat{\alpha} \cong \widehat{\beta}$

2.7 PROPOSICIONES DE LA FORMA "SI - ENTONCES"

- La historieta y el ejemplo de la sección anterior, ilustran un tipo de proposición muy importante para el razonamiento deductivo: las proposiciones de la forma **"si - entonces"**.

– **Si** no dejamos en claro porque empezó la guerra **entonces** no será posible resolverla".

– **Si** dos ángulos son opuestos por el vértice **entonces** son congruentes.

- La siguiente definición describe las proposiciones de la forma **si – entonces.**

APRENDAMOS

- Una proposición de la forma **si – entonces** es una proposición de la forma **"si** p **entonces** q", donde p y q son proposiciones simples. A **p** se le llama HIPÓTESIS o DATO y **q** es la TESIS o CONCLUSIÓN.
- El símbolo $p \Rightarrow q$ se lee **"p implica q"** y se usa para representar una proposición **si p entonces q.**

Ejemplo 1

Identifiquemos la hipótesis y la tesis en la siguiente proposición: "Si Luis nació en Pasto entonces es Nariñense".

Solución HIPÓTESIS (p): Luis nació en Pasto.
TESIS (q): Luis es Nariñense.

Ejemplo 2

Escribamos la siguiente proposición en la forma "si p entonces q" e identifiquemos la hipótesis y la tesis: "Los números naturales son pares o impares".

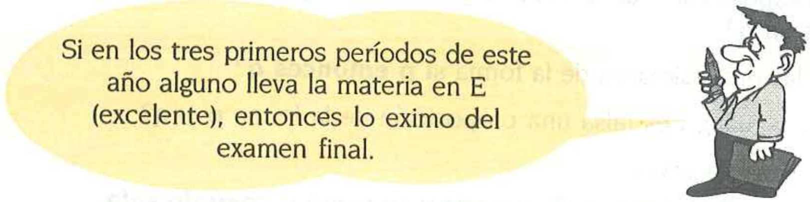
Solución

- Si un número es natural entonces es par o impar".
- Hipótesis (p): Un número es natural.
  TESIS (q): El número es par o impar

- Ahora queremos saber cuales proposiciones de la forma **si-entonces** son dignas de ser sometidas a un proceso de razonamiento deductivo; es decir, cuales son VERDADERAS. La siguiente experiencia nos ayudará a comprender esto.

EXPERIENCIA

- Para motivar a sus alumnos, el profesor de álgebra les hace el siguiente ofrecimiento:



- ¿En cuál de los siguientes casos un alumno puede considerar que el profesor le ha "jugado sucio"; es decir, no le ha dicho la verdad?

Caso 1:	En los tres primeros períodos el alumno obtuvo E (hipótesis verdadera).	El profesor lo eximió del examen final (conclusión verdadera).
Caso 2:	En los tres primeros períodos el alumno obtuvo E (hipótesis verdadera)	El profesor no lo eximió del examen final (conclusión falsa).
Caso 3:	El alumno no obtuvo E en los tres primeros períodos (Hipótesis falsa).	El profesor lo eximió del examen final (conclusión verdadera).
Caso 4:	El alumno no obtuvo E en los tres primeros períodos (Hipótesis falsa).	El profesor no lo eximió del examen final (conclusión falsa).

- Notemos que el profesor le "jugó sucio" al alumno sólo en el caso 2.
- Los resultados observados de esta experiencia nos permiten afirmar lo siguiente:

APRENDAMOS

- Una proposición **si – entonces** es verdadera si al ser la hipótesis verdadera, la conclusión también lo es. Esto también significa que una proposición **si–entonces** es falsa sólo cuando la hipótesis es verdadera y la conclusión es falsa.
- El siguiente cuadro, llamado tabla de verdad nos resume las observaciones anteriores.

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

EJERCICIO 2.5

1. ¿En qué consiste el método de razonamiento deductivo?

2. En el método de razonamiento deductivo, ¿qué es una hipótesis y qué es una tesis?

3. ¿Cuáles son los tres pasos que intervienen en el proceso de razonamiento deductivo?

4. ¿Cómo se llaman las proposiciones de la forma si **p entonces q**? ¿Qué nombre recibe la proposición **p**? ¿y la proposición **q**?

5. ¿Cómo se simbolizan las proposiciones de la forma **si p entonces q**?

6. ¿Cuándo es verdadera y cuándo es falsa una proposición de la forma $\mathbf{p} \Rightarrow \mathbf{q}$?

7. Lee con atención el siguiente texto:

   En una fiesta, Juliana recibió su vaso de helado y se sentó a comerlo sola. Metió la cuchara al helado, sacó una fresa y exclamó: "¡Qué fiesta más rica!"

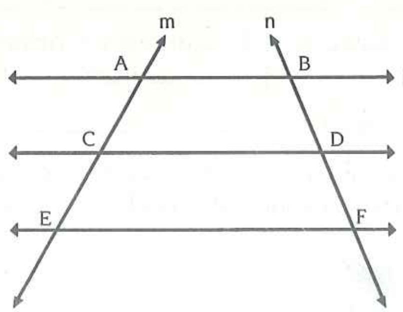
   De acuerdo con lo anterior, ¿cuáles de las siguientes conclusiones podrían aceptarse al leer el texto?

   a) Juliana comía un pedazo de bizcocho.
   b) Juliana afirmó que la fiesta era muy rica porque encontró una fresa.
   c) Juliana era una niña menor de 10 años.
   d) Juliana asistía a una fiesta de cumpleaños.
   e) Juliana comía helado con fresas.

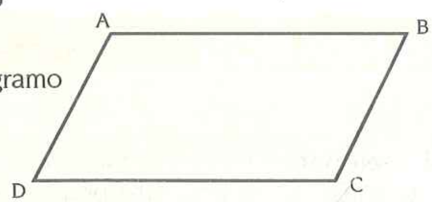
8. ¿Cuál o cuáles de las anteriores conclusiones son acertadas basándose únicamente en la información que proporciona la historia?

   En los ejercicios 9. y 10. se brinda una información y la conclusión basada en un razonamiento deductivo. Las proposiciones que llevan de la hipótesis a la conclusión no se incluyen. Escribe el teorema que se ha probado.

9. HIPÓTESIS: Las rectas $\overleftrightarrow{l}$, $\overleftrightarrow{r}$ y $\overleftrightarrow{t}$ son paralelas, $\overleftrightarrow{m}$ y $\overleftrightarrow{n}$ sus transversales y $\overline{AC} \cong \overline{CE}$
   CONCLUSIÓN: $\overline{BD} \cong \overline{DF}$



10. HIPÓTESIS: ABCD es un cuadrilátero
    $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ y $\overline{AB} \cong \overline{CD}$
    CONCLUSIÓN: ABCD es un paralelogramo



11. Escribe las siguientes proposiciones condicionales en la forma **"si p entonces q"** e identifica la hipótesis y la tesis en cada una.

    a) Una persona nacida en Quito es ecuatoriana.
    b) Los escritores de literatura tienen buena ortografía.
    c) Los ángulos agudos miden menos de 90°.
    d) Algunas frutas son naranjas.
    e) Frank no nació en Colombia, luego es extranjero.

12 Piensa y escribe un argumento lógico para convencer a alguien de que la distancia más corta de un punto a una recta es la medida del segmento perpendicular trazado desde el punto a la recta.

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 4

En un país, sólo existen monedas de \$5, \$15, \$25, \$35 y \$45. Si tengo dos monedas diferentes que suman \$30 y una de ellas no es de \$25, ¿cuáles son sus valores?

2.8 RECÍPROCA Y CONTRARRECÍPROCA DE UNA IMPLICACIÓN

- Cuando escribimos una proposición de la forma **si p entonces q**, también podemos escribir otras dos proposiciones que se desprenden de ella: la proposición **si q entonces p** y la proposición **si no q entonces no p**. Estas dos proposiciones se llaman la **RECÍPROCA** y la **CONTRARRECÍPROCA** de **si p entonces q**; es decir:

Proposición original	Proposición recíproca	Proposición Contrarrecíproca
Se escribe: **Si p entonces q**	Se escribe: **Si q entonces p**	Se escribe: **Si no q entonces no p**
Se simboliza: $p \rightarrow q$	Se simboliza: $q \rightarrow p$	Se simboliza: $\sim q \rightarrow \sim p$

- La pregunta que nos hacemos ahora es la siguiente: ¿Si sabemos que una proposición de la forma si p entonces q es verdadera, podemos afirmar que su recíproca y su contrarrecíproca siempre serán verdaderas?
- Para contestar esta pregunta, analicemos la siguiente proposición:

  $p \rightarrow q$: Si Lourdes nació en La Habana entonces es Cubana. ¿Es verdadera esta proposición? ¿Por qué?
- Ahora escribamos la recíproca:

  $q \rightarrow p$: Si Lourdes es Cubana entonces nació en La Habana. ¿Es la proposición recíproca verdadera? ¿Por qué? ¿Cuál sería un contraejemplo?
- Completa: La contrarrecíproca de $p \rightarrow q$ es: $\sim q \rightarrow \sim p$:____________________________________
  ¿Es la contrarrecíproca verdadera? ¿Por qué?

APRENDAMOS

- La RECÍPROCA de la proposición $p \rightarrow q$ es la proposición $q \rightarrow p$. Cuando la proposición $p \rightarrow q$ es verdadera **NO PODEMOS GARANTIZAR** que su recíproca $q \rightarrow p$ sea necesariamente verdadera.
- La CONTRARRECÍPROCA de una proposición $p \rightarrow q$ es la proposición $\sim q \rightarrow \sim p$. Cuando la proposición $p \rightarrow q$ es verdadera, su contrarrecíproca $\sim q \rightarrow \sim p$ también es verdadera.

¡ATENCIÓN! Cuando una proposición de la forma **si p entonces q** y su recíproca son verdaderas, pueden combinarse y formar una sola proposición por medio de la frase **si y sólo si**.

Ejemplo 1

Observemos cuidadosamente el siguiente cuadro:

$p \Rightarrow q$:	**Proposición dada** Si un triángulo es equilátero entonces sus tres lados son congruentes.
$q \Rightarrow p$:	**Recíproca** Si un triángulo tiene sus tres lados congruentes entonces es equilátero.
$p \leftrightarrow q$:	**Proposición si y sólo si** Un triángulo es equilátero si y sólo si tiene sus tres lados congruentes.

APRENDAMOS

- Escribir **p si y sólo si q** es lo mismo que escribir **si p entonces q, y, si q entonces p**.
- Cuando la proposición **p si y sólo si q** es verdadera se dice que **p** y **q** son **proposiciones equivalentes** y lo simbolizamos así: $p \leftrightarrow q$.

- Todas las DEFINICIONES en geometría pueden redactarse como una proposición de la forma **si y sólo si.**

EJERCICIO 2.6

1 Contesta:

a) ¿Cuál es la recíproca de la proposición si p entonces q? ¿Cómo se simboliza?
b) ¿Cuál es la recíproca de la proposición si p entonces q? ¿Cómo se simboliza?
c) ¿Si $p \Rightarrow q$ es verdadera, también lo será $q \Rightarrow p$? Explica con un ejemplo.
d) ¿Si $p \Rightarrow q$ es verdadera, puede serlo también $q \Rightarrow p$? Muestra un ejemplo diferente al de esta sección.
e) ¿Cuál es la contrarrecíproca de la proposición si p entonces q? ¿Cómo se simboliza?
f) ¿Si $p \Rightarrow q$ es verdadera, también lo será $\sim q \Rightarrow \sim p$? Explica con un ejemplo.
g) ¿Cómo se llama la proposición que resulta de combinar las proposiciones si p entonces q, y, si q entonces p, cuando ambas son verdaderas? ¿Cómo se simboliza?

En los ejercicios 2. a 5. escribe las recíprocas de cada proposición. ¿En cuál ejercicio son verdaderas la proposición dada y su recíproca?

2 Si $x + 3 = 5$ entonces $x = 2$.

3 Si ha llovido entonces las calles están mojadas.

4 Si dos rectas coplanares son paralelas entonces no tienen ningún punto común.

5 Si Carlos nació en Caracas entonces es Venezolano.

En los ejercicios 6. a 9. escribe las contrarrecíprocas de cada proposición. Muestra que si la proposición dada es verdadera, entonces su contrarrecíproca también lo es y que si la proposición dada es falsa entonces su contrarrecíproca también lo es.

6. Si dos ángulos son suplementarios, entonces la suma de sus medidas es 180°.
7. Un paralelogramo con sus 4 lados congruentes es un rombo.
8. Dos rectas perpendiculares se cortan formando ángulos rectos.
9. Dos ángulos opuestos por el vértice son congruentes.
10. Completa cada casilla del siguiente cuadro con V o F según que la proposición dada sea verdadera o falsa.

	PROPOSICIÓN	RECÍPROCA	CONTRARRECÍPROCA
Si Juan vive en Perú entonces vive en Lima.	F	V	
Si un cuadrilátero tiene dos lados congruentes entonces es un paralelogramo.	F		
Si un polígono es regular entonces tiene todos los lados congruentes.			

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 5

Las $\frac{2}{3}$ partes del cuerpo docente de un colegio son mujeres. 12 de los hombres son solteros y los $\frac{3}{5}$ de los hombres son casados; así, el total de hombres de la escuela es:

a) 30 b) 60 c) 80 d) 24

2.9 LAS LEYES DE LA LÓGICA EN EL RAZONAMIENTO DEDUCTIVO (OPCIONAL)

En la sección 2.6 indicamos que en el razonamiento deductivo, las LEYES DE LA LÓGICA juegan el papel de "encadenadoras" de las hipótesis del teorema que se quiere demostrar.
En esta sección vamos a identificar las leyes de la lógica utilizadas en el razonamiento deductivo y cómo funcionan.

PRIMERA EXPERIENCIA

- Presta mucha atención a la conversación que sostienen Andrés y Carolina.

- El diálogo entre Andrés y Carolina nos revela la primera de las LEYES DE LA LÓGICA utilizada en el razonamiento deductivo: **La Ley de la Afirmación de la Hipótesis** o en latín: **La Ley del Modus Ponens**. Para entender esta ley tomemos en forma simplificada el diálogo de la historieta:

$p \rightarrow q$:	Si Carolina es mayor de edad entonces puede votar.
p:	Carolina es mayor de edad.
$\therefore$ **q** :	Por lo tanto, Carolina puede votar.

(Los $\therefore$ se leen: **Por lo tanto, luego** o **en consecuencia**).

- La ley del Modus Ponens se fundamenta en el hecho de que **la hipótesis p de una proposición $p \rightarrow q$ verdadera también es verdadera**. Por lo tanto, si **$p \rightarrow q$ es verdadera** y **p es verdadera** entonces concluimos que **q es verdadera.**

APRENDAMOS

- La Ley de la AFIRMACIÓN DE LA HIPÓTESIS o MODUS PONENS establece que: siempre que **$p \rightarrow q$ sea verdadera** y **p sea verdadera**, podemos concluir que **q es verdadera.**
- Esquemáticamente es lo siguiente:

$p \rightarrow q$ es verdadera
p es verdadera

$\therefore$ **q** es verdadera

Ejemplo

Escribamos una conclusión correcta para el siguiente razonamiento:

1) La suma de dos números impares es un número par.
2) a y b son números impares.

Conclusión: ______________________________

Solución

- Si escribimos la primera proposición en la forma "si p entonces q", podemos facilitar las cosas:

1) Si a y b son números impares entonces a + b es par.
2) a y b son números impares.

- Como las proposiciones 1) y 2) cumplen con el esquema de la ley del Modus Ponens, entonces concluimos que: **a + b es par**

SEGUNDA EXPERIENCIA

Esta experiencia nos permitirá reconocer un segundo esquema de razonamiento lógico muy empleado en la realización de demostraciones. Veamos:

- Margarita le cuenta a Julio que desea estudiar ingeniería. Este es el diálogo que se establece entre los dos.

- Esta conversación nos plantea la segunda de las LEYES DE LA LÓGICA utilizada en el razonamiento deductivo: **LA REGLA DE LA CADENA** o **LEY DEL SILOGISMO**. Para entender en qué consiste esta ley, escribamos la conversación de la historieta en otra forma:

p Þ q:	Si Margarita fue admitida en ingeniería, entonces requiere aprender matemáticas.
q Þ r:	Si Margarita requiere aprender matemáticas entonces debe leer comprensivamente.
∴ **p Þ r**:	Si Margarita fue admitida en ingeniería, entonces debe leer compresivamente.

- La regla de la cadena permite "encadenar" proposiciones de la forma **si – entonces** en la demostración de un teorema. El esquema de la regla de la cadena es éste:

p Þ q es verdad
q Þ r es verdad

Concluimos que: **p Þ r** es verdad

APRENDAMOS

- La REGLA DE LA CADENA o LEY DEL SILOGISMO es un esquema de razonamiento que establece lo siguiente: si **p Þ q** es verdadera y **q Þ r** es verdadera entonces podemos concluir que **p Þr** es verdadera.
- Esquemáticamente:

p Þ q es verdadera
q Þ r es verdadera

Concluimos que: **p Þ r** es verdadera

Ejemplo

Escribamos una conclusión correcta para el siguiente razonamiento:

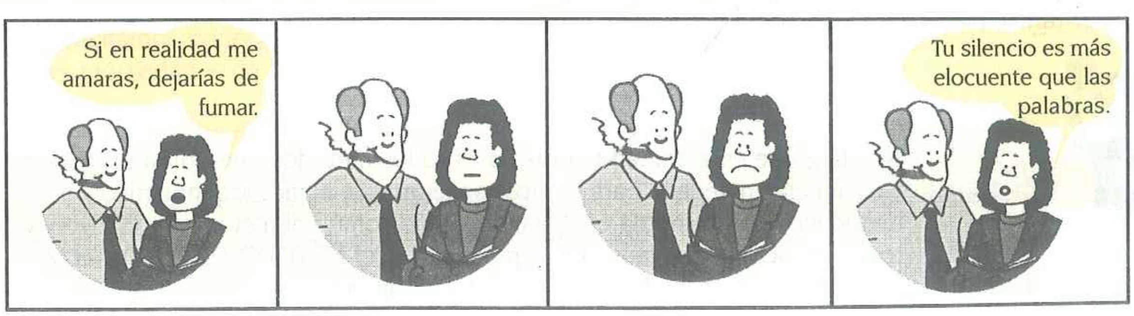
1) Si $x + 3 = 8$ entonces $x + 3 - 3 = 8 - 3$
2) Si $x + 3 - 3 = 8 - 3$ entonces $x = 8 - 3$

Solución

- La primera proposición podemos simbolizarla por **p Þ q** y la segunda por **q Þ r.**
- Como las proposiciones **p Þ q** y **q Þ r** cumplen las condiciones de la regla de la cadena entonces podemos concluir que: **p Þ r : Si $x + 3 = 8$ entonces $x = 8 - 3$**

TERCERA EXPERIENCIA

- La siguiente historieta nos ayudará a comprender un tercer esquema de razonamiento que se emplea en la demostración de teoremas. Observa con cuidado lo que ocurre entre Carlos y Dora:



- Responde:
  a) ¿Qué le dice Dora a Carlos en el primer cuadro?
  b) ¿Puedes escribir lo que le dice Dora a Carlos como una proposición de la forma **si–entonces**?
  c) ¿Dejó Carlos de fumar?
  d) ¿Qué quiere decir Dora cuando en el último cuadro de la historieta dice: "Tu silencio es más elocuente que las palabras"?

- El esquema de razonamiento planteado en la historieta es el siguiente:

$p \rightarrow q$:	**Si en realidad me amaras, entonces dejarías de fumar.**
$\sim q$:	**Carlos no dejó de fumar.**
$\therefore \sim p$:	**Por lo tanto, Carlos no ama a Dora**

- Este esquema de razonamiento se llama **LEY DE LA NEGACIÓN DE LA CONCLUSIÓN** o, en latín, la **LEY DEL MODUS TOLLENS** y lo sintetizamos así:

$p \rightarrow q$ es verdad
$\sim q$ (no se cumple q)

Concluimos que: $\sim p$ (tampoco se cumple p)

- La Ley del Modus Tollens es la base del **Método Indirecto** de demostración, el cual utilizaremos posteriormente.

APRENDAMOS

- La LEY DE LA NEGACIÓN DE LA CONCLUSIÓN o MODUS TOLLENS es un esquema de razonamiento que establece lo siguiente: Siempre que $p \rightarrow q$ sea verdadero y q sea falso entonces p será falso.
- Simbólicamente:

$p \rightarrow q$ es verdadero
$\sim q$ es verdadero (o sea, q es falso)

Concluimos que: $\sim p$ es verdadero (o sea, p es falso)

Ejemplo

Escribamos una conclusión correcta para el siguiente razonamiento:

1) Si salimos ya, entonces llegaremos a tiempo.
2) No llegamos a tiempo.

Solución

- La primera proposición podemos simbolizarla por **$p \rightarrow q$** y la segunda por **$\sim q$**.
- Así, pues, las proposiciones **$p \rightarrow q$** y **$\sim q$** cumplen las condiciones de la Ley del MODUS TOLLENS; por tanto, podemos concluir que: **$\sim p$: No salimos ya.**

¡ATENCIÓN! A lo largo de esta unidad hemos descrito los métodos que utilizan la matemática y la ciencia en general para demostrar teoremas: el método inductivo y el método deductivo. En geometría euclidiana es más común el método deductivo y dentro de este método hay dos modalidades de demostración: el MÉTODO DIRECTO y el MÉTODO INDIRECTO o REDUCCIÓN AL ABSURDO. El método directo se fundamenta en las leyes del

Modus Ponens y del Silogismo; en cambio, el método indirecto basa toda su estructuración en la ley del Modus Tollens, aunque también utiliza las otras dos leyes.

Aunque a lo largo del curso iremos adquiriendo cierta destreza en la aplicación de estos dos métodos de demostración, vamos a presentar algunos ejemplos que nos mostrarán su utilización.

Ejemplo 1

Demostremos que: **"Si a y b son números impares entonces a + b es un número par".**

Solución

- Vamos a demostrar este teorema utilizando el método directo.
- Para demostrar una proposición de la forma $p \to q$ por medio del método directo hacemos lo siguiente:
  1. **Suponemos que p es verdadera.**
  2. **Partiendo del hecho de que p es verdadero, buscamos dentro del conjunto de axiomas, definiciones y teoremas ya demostrados otras proposiciones de la forma si–entonces que podamos "encadenar" lógicamente por medio de la ley del modus ponens y de la regla de la cadena para obtener la proposición q.**
- El esquema del método directo es básicamente el siguiente:

Paso 1	Paso 2	Paso 3
Empezamos con la hipótesis dada en el teorema: p	Buscamos axiomas, definiciones u otros teoremas ya probados que se relacionen con el teorema que queremos probar. $p \to r$ $r \to t$ $m \to q$ $t \to m$	"Encadenamos" a p y a esta lista de proposiciones, por medio del Modus Ponens y la Regla de la Cadena, para llegar a q.

así disponemos la demostración:

1. Partimos de p .... Por hipótesis
2. Sabemos que $p \to r$ se cumple .... Por ser axioma, definición o teorema ya probado.
3. Sabemos que $r \to t$ se cumple .... Por ser axioma, definición o teorema ya probado.
4. Sabemos que $t \to m$ se cumple .... Por ser axioma, definición o teorema ya probado.
5. Sabemos que $m \to q$ se cumple .... Por ser axioma, definición o teorema ya probado.
6. Luego, q se cumple .... Porque encadenamos los pasos 1. a 5. por medio del modus ponens y la regla de la cadena.

- ¿Cuál es el listado de axiomas, definiciones o teoremas ya probados que necesitamos para probar el teorema de nuestro ejemplo? Veamos:
  - Necesitamos conocer las definiciones de número impar y de número par.
  - Las propiedades de la suma y de la multiplicación de números enteros.

- Este es el esquema de la demostración:

p	1.	Sean a y b dos números impares	Por hipótesis
$p \to r$	2.	Si a y b son impares entonces existen dos .... números enteros m y n tales que: $a = 2m + 1$ y $b = 2n + 1$	Por definición de número impar.

$r \rightarrow t$	3.	Si $a = 2m + 1$ y $b = 2n + 1$ entonces $a + b = (2m + 1) + (2n + 1)$	Por propiedad uniforme de la igualdad en Z.
$t \rightarrow m$	4.	Si $a + b = (2m + 1) + (2n + 1)$ entonces $a + b = 2m + 2n + 2$ en Z.	Propiedad asociativa y conmutativa de la suma
$m \rightarrow z$	5.	Si $a + b = 2m + 2n + 2$ entonces $a + b = 2\,(m + n + 1)$	Propiedad recíproca de la distributiva.
$z \rightarrow q$	6.	Si $a + b = 2\,(m + n + 1)$ entonces $a + b$ es par	Propiedad clausurativa de la suma en Z y definición de número par.
$\therefore q$	7.	Luego, $a + b$ es par	Aplicando sucesivamente el modus ponens y la regla de la cadena.

¡ATENCIÓN!

En la práctica, el "encadenamiento" de las proposiciones puede realizarse escribiendo, en cada paso de la demostración, únicamente la conclusión de la proposición **si – entonces** del paso anterior. En estas condiciones, la demostración anterior quedaría así:

p	1.	Sean a y b dos números impares	Por hipótesis
r	2.	Luego, existen dos números enteros m y n tales que $a = 2m + 1$ y $b = 2n + 1$	Por definición de número impar.
t	3.	Luego, $a + b = (2m + 1) + (2n + 1)$	Propiedad uniforme de la igualdad en Z.
m	4.	Luego, $a + b = 2m + 2n + 2$	Propiedad asociativa y conmutativa de la suma en Z.
z	5.	Luego, $a + b = 2\,(m + n + 1)$	Recíproca de la propiedad distributiva.
q	6.	Luego, $a + b$ es un número par.	Definición de número par.

Ejemplo 2

Demostremos que: **"si x^2 es un número par entonces x es un número par".**

Solución

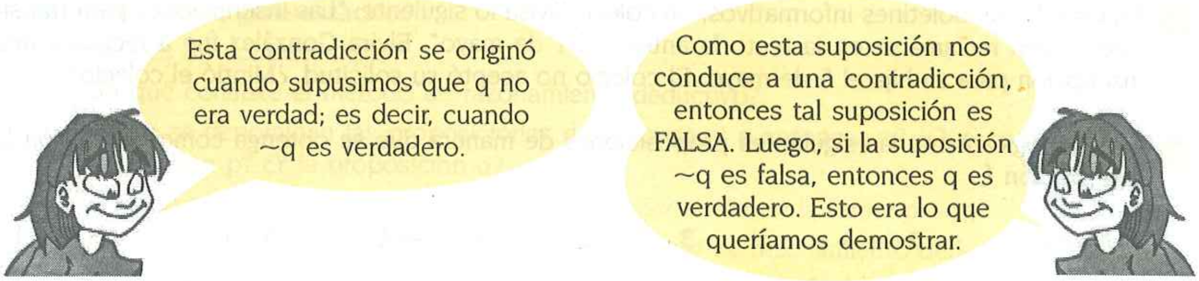
- Vamos a demostrar esta proposición utilizando el MÉTODO INDIRECTO o de REDUCCIÓN AL ABSURDO. Este método se fundamenta en el principio lógico según el cual no pueden ser ciertas la afirmación y la negación de una misma proposición. Este principio se denomina **principio de no contradicción**; por ejemplo, la proposición **2 es par y 2 no es par** es una contradicción y su valor de verdad es FALSO (f).
- El método de reducción al absurdo se fundamenta en la Ley del Modus Tollens; así:

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \quad \textbf{se cumple} \\ \sim q \quad \textbf{se cumple} \\ \hline \textbf{concluimos que } \sim p \textbf{ se cumple} \end{array}$$

En la práctica, lo que hacemos al aplicar el método de reducción al absurdo es lo siguiente:

- Queremos probar la verdad de $p \rightarrow q$.
- Pero, en lugar de comenzar la demostración con p, la comenzamos con la negación de q (con $\sim q$); es decir, comenzamos negando lo que queremos demostrar.

- El primer paso de la demostración es, pues, $\sim q$. De acá en adelante la demostración se desarrolla exactamente en la misma forma que en el método directo: haciendo "encadenamientos" y aplicando las leyes del modus ponens y del silogismo.
- En este proceso de "encadenamientos" vamos a llegar a una proposición que va a contradecir: o a la hipótesis p del teorema dado o a otra proposición que ya se haya establecido como verdadera.
- Una vez llegamos a la contradicción, entonces argumentamos así:



- Ahora sí vamos a demostrar el teorema: "Si x^2 es un número par entonces x es par".

$\sim q$	1.	Supongamos que x es impar	Negamos la tesis.
r	2.	Luego, existe un número entero m . . . . Tal que $x = 2m + 1$	Definición de número impar.
t	3.	Luego, $x^2 = (2m + 1)^2$.	Propiedad uniforme: elevamos ambos miembros al cuadrado.
m	4.	Luego, $x^2 = 4m^2 + 4m + 1$	Propiedad $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
n	5.	Luego, $x^2 = (4m^2 + 4m) + 1$	Propiedad asociativa de la suma.
a	6.	Luego, $x^2 = 4\,(m^2 + m) + 1$	Recíproca de la propiedad distributiva.
b	7.	Luego, $x^2 = 2 \bullet [2\,(m^2 + m)] + 1$	Hicimos $4 = 2 \bullet 2$
$\sim p$	8.	Luego x^2 es un número impar.	Porque la expresión $2 \bullet [2\,(m^2 + m)] + 1$ tiene la forma de un número impar.
p	9.	Pero, por hipótesis sabemos que x^2 es un número par.	
	10.	Las proposiciones 8. y 9. son contradictorias.	
	11.	Como esta contradicción se originó al suponer que x era impar, entonces esta suposición es falsa y, en consecuencia, la proposición "x es par" es verdadera. Y esto era lo que queríamos demostrar.	

EJERCICIO 2.7

En los ejercicios 1. a 4. escribe la conclusión correcta.

1. **p Þ q:** Si un cuadrilátero es rectángulo entonces es paralelogramo
   p: Un cuadrilátero es rectángulo

   Por tanto: ____

2. **p Þ q:** Si x^2 es par entonces x es par
   ~q: x no es par

   Por tanto: ____

3 $\mathbf{p \rightarrow q}$: Si la figura ABC es un triángulo entonces $m\widehat{A} + m\widehat{B} + m\widehat{C} = 180°$.
$\mathbf{\sim q}$: $m\widehat{A} + m\widehat{B} + m\widehat{C} \neq 180°$

Por tanto: ____

4 $\mathbf{p \rightarrow q}$ Si un número es entero entonces es racional.
$\mathbf{q \rightarrow r}$ Si un número es racional entonces es real.

Por lo tanto: ____

5 En uno de sus boletines informativos, un colegio avisa lo siguiente: "Las inscripciones para transición deben reclamarse en la rectoría antes del 1 de mayo". Elvira González fue a reclamar una inscripción para su hija el 5 de mayo. El colegio no aceptó su solicitud. ¿Mintió el colegio?

6 Ordena lógicamente las siguientes proposiciones de manera que se obtenga como conclusión la proposición f:

1. $d \rightarrow e$ **2.** $e \rightarrow c$ **3.** $a \rightarrow d$ **4.** $c \rightarrow b$ **5.** a **6.** $b \rightarrow f$

7 Ordena lógicamente las siguientes proposiciones de modo que se obtenga como conclusión la proposición n:

1. $q \rightarrow n$ 2. r 3. $s \rightarrow q$ 4. $r \rightarrow s$

8 Utiliza el método directo para demostrar que: "Si $3x = 15$ entonces $x = 5$".

9 Utiliza el método directo para demostrar que: "Si a y b son números reales entonces $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$".

10 Investiga cómo se demuestra, por el método de reducción al absurdo, el siguiente teorema: "Si $x \neq 0$, entonces $\frac{1}{x} \neq 0$".

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 6

Buscando la verdad

He aquí seis proposiciones, cada una de las cuales es cierta o falsa:

1. Las proposiciones 2 y 3 son ambas ciertas o falsas.
2. Exactamente una de las proposiciones 4 y 5 es cierta.
3. Exactamente una de las proposiciones 4 y 6 es cierta.
4. Exactamente una de las proposiciones 1 y 6 es cierta.
5. Las proposiciones 1 y 3 son ambas ciertas o falsas.
6. Exactamente una de las proposiciones 2 y 5 es cierta.

¿Cuáles de las seis proposiciones son ciertas?

TALLER DE REPASO DE LA UNIDAD 2

1. Contesta las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál cultura desarrolló la geometría como ciencia pura? ¿En qué época?

b) ¿Cuáles son las características de una teoría lógicamente estructurada? Elabora un mapa conceptual que la describa.

c) ¿Qué son axiomas de una teoría? ¿Con qué podemos comparar los axiomas de una teoría?

d) ¿Qué es un teorema? ¿En qué se diferencian un axioma y un teorema?

e) ¿Cuáles son los conceptos indefinibles de la geometría euclidiana?

f) ¿Qué es un razonamiento?

g) ¿Cuándo un razonamiento es inductivo?

h) ¿Qué es una generalización?

i) ¿Qué es un contraejemplo?

j) ¿En qué consiste el método de razonamiento deductivo?

k) ¿Cómo se denominan las proposiciones de la forma si p entonces q? ¿Qué nombre recibe la proposición p? ¿Y la proposición q?

l) ¿Cuándo es verdadera y cuando es falsa una proposición de la forma $p \rightarrow q$?

m) ¿Cuáles son los pasos que intervienen en el proceso de razonamiento deductivo?

n) ¿Cuáles son la recíproca y la contrarrecíproca de la proposición "si p entonces q"? ¿Cómo se simbolizan?

o) Si la proposición $p \rightarrow q$ es verdadera, ¿podemos asegurar que su recíproca siempre es verdadera? ¿Y la contrarrecíproca?

p) Cuando una proposición de la forma $p \rightarrow q$ y su recíproca son verdaderas, ¿Cómo se llama la proposición que resulta de combinar las dos? ¿cómo se simboliza esta proposición?

q) ¿En qué consiste la ley del Modus Ponens? ¿Y la ley del Silogismo?

r) ¿En qué consiste la ley del Modus Tollens?

s) ¿Cómo se desarrolla una demostración por el método directo?

t) ¿Cómo se desarrolla una demostración por el método de reducción al absurdo?

En los ejercicios 2. a 6. escribe cada proposición en la forma "si p entonces q", identifica la hipótesis y la tesis de cada una y determina si es verdadera o falsa.

2. Un triángulo es isósceles si tiene dos lados congruentes.

3. Todos los triángulos equiláteros tienen tres ángulos congruentes.

4. La intersección de dos planos es un punto.

5. Por dos puntos distintos pasan infinitas rectas.

6. Una recta divide al plano en dos semiplanos.

7. Lee la siguiente proposición: "Si dos ángulos son rectos, entonces son congruentes".

   a) Escribe la recíproca de la proposición.
   b) Escribe la contrarrecíproca de la proposición.
   c) ¿Es verdadera la proposición dada? ¿Es verdadera la recíproca? ¿Es verdadera la contrarrecíproca?

En los ejercicios 8. a 10. escribir una conclusión correcta para las hipótesis dadas.

8. Hipótesis:

- Los buenos trabajadores ganan sueldos altos.
- Jorge es buen trabajador.

Conclusión: ______________________________

9. Hipótesis:

- Los estudiantes que viven lejos se trasladan en bus.
- Roberto no se traslada en bus.

Conclusión: ____

10. Hipótesis:

- Si $5 \bullet x = 40$ entonces $\left(\frac{1}{5} \bullet 5\right) x = \frac{1}{5} \bullet 40$
- Si $\left(\frac{1}{5} \bullet 5\right) x = \frac{1}{5} \bullet 40$ entonces $x = \frac{40}{5}$

Conclusión: ____

11. Queremos demostrar la proposición: **"si a entonces m"** con este fin nos entregan un listado de hipótesis. Utiliza el método directo para encadenar lógicamente las hipótesis dadas de manera que partiendo de la proposición **a** podamos llegar a **m**.

HIPÓTESIS

b Þ h
a
h Þ z
z Þ k
c Þ m
p Þ b
kÞ c
a Þ p

12. Escribe un contraejemplo para la siguiente generalización falsa: "Por un punto de una recta pasa una y sólo una recta perpendicular a la recta dada".

13. Demuestra, utilizando el método directo, la siguiente proposición: "Si a es un número par y b es un número impar entonces a + b es un número impar".

14. Demuestra, utilizando el método directo, la siguiente proposición: "Si $a \bullet x = b$ y $a \neq 0$, entonces $x = \frac{b}{a}$ ".

15. Demuestra, utilizando el método de reducción al absurdo, la siguiente proposición: "Si a • b es un número par entonces a es par o b es par" (Sugerencia: la negación de la proposición "a es par o b es par" es "a es impar y b es impar".

PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS SABER

Crimen en la tabla redonda

En cierta ocasión el señor B, el señor G, el señor L y el señor P se hallaban sentados alrededor de la tabla redonda reparando fuerzas con un buen ágape cuando el señor P cayó muerto, envenenado. El detective A, llevando a cabo la investigación obtuvo las siguientes respuestas a sus preguntas:

El señor B dijo:

1. Yo estaba sentado al lado del señor G.
2. G o L se sentaba a mi derecha y tal persona no pudo haber envenenado a P.

El señor G dijo:

3. Yo me sentaba junto a L.
4. B o L se sentaba a la derecha de P y esa persona no pudo haber envenenado a P.

El señor L dijo:

5. Yo me sentaba enfrente de P.
6. Si solamente miente uno de nosotros, esa persona envenenó a P.

Tras mucho meditar, el detective A, que nunca mentía, les dijo –y él nunca mentía:

7. Solamente uno de vosotros ha mentido.
8. Uno de vosotros envenenó a P.

¿Quién envenenó a P?

¿Quién lo mató?

Ocho personas componían el grupo de sospechosos de un crimen. En el interrogatorio a que fueron sometidos, cada uno hizo una de las siguientes declaraciones:

1. Fernando: "Uno de los dos, Bernardo o Pedro, es el culpable"
2. Alberto: "Yo soy culpable"
3. Carlos: "Gonzalo dice la verdad"
4. Pedro: "Alberto y Damián son inocentes"
5. Emilio: "Déjenles libres, yo soy el culpable"
6. Bernardo: "Yo ví a Pedro cuando lo cometía"
7. Damián: "Fernando es inocente"
8. Gonzalo: "Damián miente"

Sabiendo que la mitad de los sospechosos mienten, ¿quién cometió el crimen?

DIMENSIONES

Núcleo Temático

3

PRIMEROS AXIOMAS Y TEOREMAS

LOGRO GENERAL

Enunciar y demostrar los primeros teoremas de la geometría euclidiana.

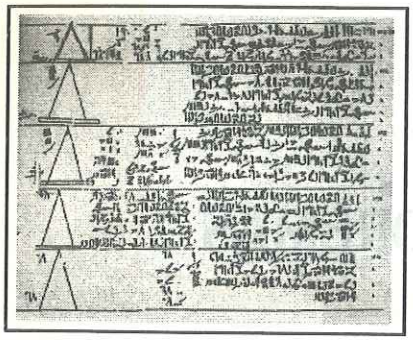
DIMENSIONES

LOGROS ESPECÍFICOS	INDICADORES DE LOGRO
Corporal: • Realizar experiencias que le permitan aplicar axiomas y definiciones en un razonamiento lógico.	• Partiendo de definiciones y axiomas, construye nuevas teorías.
Comunicativa: • Conseguir la participación activa de todos los alumnos por medio de sugerencias y preguntas dirigidas.	• Describe oralmente la manera como se demuestran teoremas.
Cognitiva: • Enunciar teoremas. • Aplicar las definiciones y los axiomas en la demostración de teoremas.	• Utiliza axiomas y definiciones para demostrar hipótesis siguiendo rigurosamente la demostración lógica.
Estética: • Elaborar una cartelera donde resume los primeros axiomas y teoremas de la geometría euclidiana.	• Socializa los primeros axiomas y teoremas de la geometría euclidiana al interactuar con sus compañeros.
Ética-Actitudinal: • Resaltar la contribución de la geometría en el desarrollo de habilidades de pensamiento.	• Demuestra interés por aprender.

EVALUACIÓN

ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS

3.1 HISTORIA DE LA GEOMETRÍA (3)



Durante muchos años se dio por descontado que los griegos habían aprendido los rudimentos de su geometría de los egipcios, y concretamente Aristóteles pensaba que la geometría había surgido en el valle del Nilo debido a que allí los sacerdotes disponían del ocio necesario, para desarrollar cualquier conocimiento teórico. Es muy probable que los griegos tomaran prestadas algunas partes de la matemática elemental de Egipto, ya que, por ejemplo, el uso de las fracciones unitarias fue persistente en Grecia y Roma, para llegar hasta el período medieval, pero evidentemente los griegos exageraron su deuda para con los egipcios, en parte sin duda por su respeto casi reverencial a la antigüedad de la cultura egipcia. El tipo de conocimientos que nos revelan los papiros egipcios que han llegado hasta nosotros (los papiros de Ahmes o Rhind y de Moscú) es en su mayor parte de carácter práctico, y el elemento principal en todas las cuestiones es el cálculo numérico. Incluso la tan alabada, en otros tiempos, geometría egipcia resulta haber sido casi exclusivamente una rama de la aritmética aplicada y su finalidad parece ser la de proporcionar nuevos recursos de medición más que la de un conocimiento más profundo; las reglas de cálculo raramente se justifican, y siempre se refieren sólo a casos concretos. La geometría pudo haber sido un regalo del Nilo, como creía Herodoto, pero los egipcios sacaron poco partido del regalo; en realidad, la matemática de Ahmes era la misma que la de sus antepasados y la de sus descendientes.

EJERCICIO 3.1

COMPRENSIÓN DE LECTURA. Explicación: Lee nuevamente el texto anterior y luego encierra, en un círculo la letra que corresponda a la respuesta correcta:

1. Herodoto creía que la geometría era "un regalo del Nilo". Con esa frase se quiere dar a entender que:
   a. Su origen se relaciona con los desastres causados por el río Nilo.
   b. Los sabios egipcios que habitaban las riberas del Nilo la obsequiaron a su pueblo.
   c. Cerca de la cuenca del Nilo se encontraron unos papiros con estudios y trabajos geométricos.
   d. Africa aportó a la humanidad, numerosos tratados de geometría.

2. Aristóteles atribuía el surgimiento de la geometría en Egipto a:
   a. La actividad investigativa de los sabios matemáticos.
   b. El estudio intenso de los sacerdotes.
   c. El tiempo libre que tenían los sacerdotes para el conocimiento científico.
   d. El intercambio científico entre griegos y egipcios.

3. La expresión "... se dio por descontado", que aparece al principio del fragmento, significa:
   a. Que no se sabía con certeza.
   b. Que se descartaba.
   c. Se podía suponer.
   d. Se daba como un hecho real.

4. Como tema central del fragmento anterior puede formularse:
   a. Los griegos no fueron tan originales en sus estudios matemáticos.
   b. Tanto egipcios como griegos hicieron grandes aportes al desarrollo de la geometría.

c. El Nilo y sus crecientes dieron origen a la geometría.
d. Es improbable que los griegos conocieran la geometría egipcia.

5. Una de las siguientes afirmaciones es falsa:
   a. Es improbable que los griegos hayan sido independientes en sus trabajos de matemáticas.
   b. Es posible que los matemáticos griegos hubieran tenido como base trabajos matemáticos egipcios.
   c. El desarrollo de la geometría egipcia tuvo mucho que ver con el comportamiento de la naturaleza.
   d. Los griegos fueron altamente respetuosos de la cultura egipcia.

3.2 LOS PRIMEROS AXIOMAS DE LA GEOMETRÍA EUCLIDIANA

En esta unidad vamos a comenzar a "jugar" geometría. Para ello es necesario plantear las "reglas de juego", que ya sabemos se llaman AXIOMAS. Adicionalmente, en la primera unidad pudimos reunir una cantidad importante de palabras con significado preciso (las definiciones) y en la unidad anterior hicimos referencia a los conceptos indefinibles o primitivos.

En el "juego de la geometría", los axiomas se aceptan como verdaderos y los usamos como ayuda en la demostración de los teoremas.

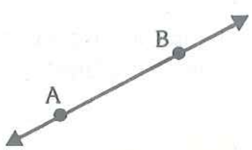
Estos primeros axiomas están relacionados con puntos, rectas y planos.

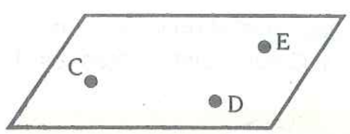
Axioma 1: Axioma de la Existencia de los Puntos

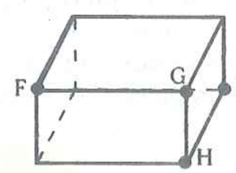
Este axioma nos brinda información sobre puntos, rectas y planos.

PRIMERA EXPERIENCIA

- Observa las siguientes figuras y contesta:







- Por lo menos, ¿cuántos puntos contiene una recta?
- Por lo menos, ¿cuántos puntos no alineados contiene un plano?
- Por lo menos, ¿cuántos puntos no coplanares contiene el espacio?

APRENDAMOS

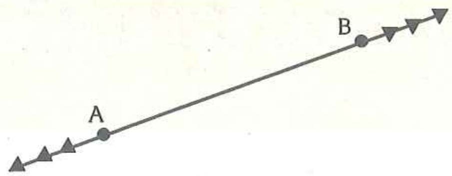
Axioma 1: AXIOMA DE LA EXISTENCIA DE LOS PUNTOS

- El espacio existe y contiene, por lo menos, cuatro puntos no coplanares.
- Un PLANO contiene, por lo menos, tres puntos no alineados.
- Una RECTA contiene, por lo menos, dos puntos diferentes.

Axioma 2: Axioma del Punto y la Recta

SEGUNDA EXPERIENCIA

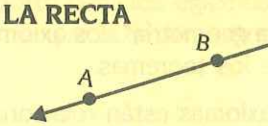
- Marca dos puntos distintos A y B.
- ¿Cuántas rectas distintas, que pasen por los puntos A y B, puedes dibujar? Explica tu respuesta.
- Argumenta en favor o en contra de la siguiente afirmación: "En la figura siguiente, las rectas que pasan por los puntos A y B son coincidentes; es decir, son la misma recta".



APRENDAMOS

Axioma 2: AXIOMA DEL PUNTO Y LA RECTA

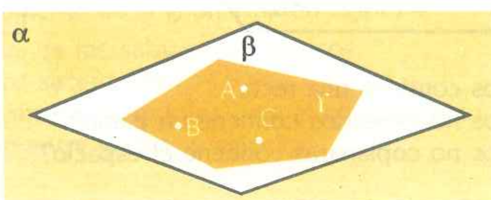
Dos puntos determinan una y sólo una recta.



Axioma 3: Axioma del Punto y el Plano

TERCERA EXPERIENCIA

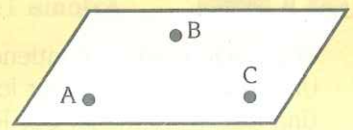
- Marca en una hoja de papel plana tres puntos no alineados A, B y C.
- ¿Cuántos planos distintos, aparte de la hoja donde los dibujaste, pueden pasar por esos tres puntos? Explica tu respuesta.
- Argumenta en favor o en contra de la siguiente afirmación: "En la siguiente figura, los planos que pasan por los puntos no alineados A, B y C son coincidentes; es decir, son el mismo plano".



APRENDAMOS

Axioma 3: AXIOMA DEL PUNTO Y EL PLANO

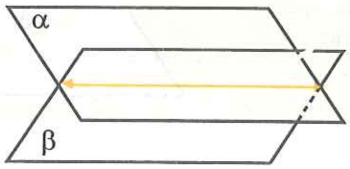
Tres puntos no alineados están contenidos en uno y sólo un plano. O también, tres puntos no alineados determinan un plano.

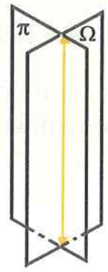


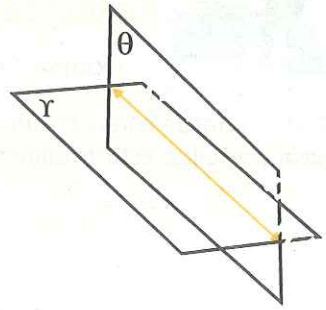
Axioma 4: Axioma de la Intersección de Planos

CUARTA EXPERIENCIA

- Observa las siguientes figuras:





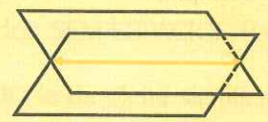


- Contesta:
  ¿Se interceptan los planos α y β? ¿Cuál es su intersección?
  ¿Se interceptan los planos π y Ω? ¿Cuál es su intersección?
  ¿Se interceptan los planos Υ y θ? ¿Cuál es su intersección?
- ¿Cuál es la intersección de dos planos que se cortan?

APRENDAMOS

Axioma 4: AXIOMA DE LA INTERSECCIÓN DE PLANOS

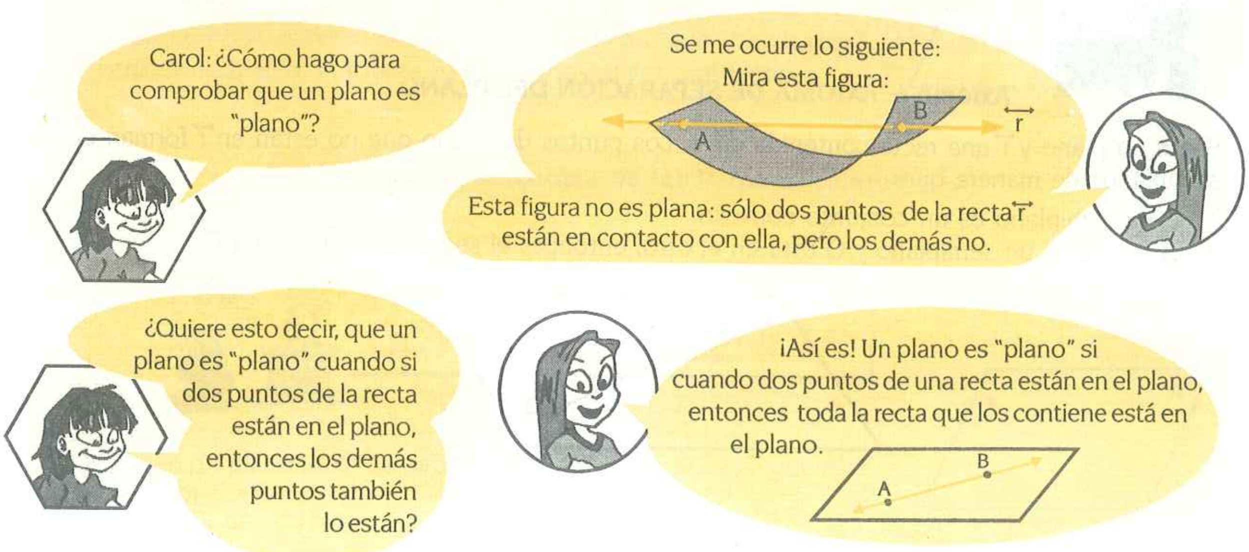
Si dos planos se interceptan, su intersección es exactamente una recta.



Axioma 5: Axioma de los Dos Puntos, la Recta y el Plano

QUINTA EXPERIENCIA

- Andrés y Carolina sostienen una conversación sobre un asunto de geometría. Este es el diálogo:

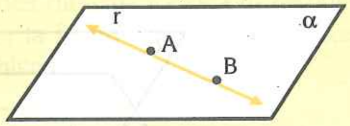


- Así, pues, para afirmar que un plano es "plano", se requiere un plano que contenga todos los puntos de una recta, si se sabe que contiene dos puntos de ella.

APRENDAMOS

Axioma 5: AXIOMA DE LOS DOS PUNTOS, LA RECTA Y EL PLANO

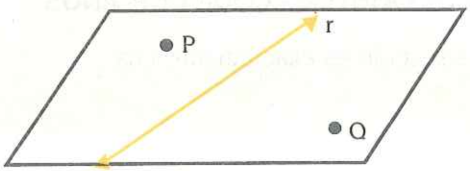
Si dos puntos están en un plano, entonces la recta que pasa por ellos está totalmente contenida en el plano.



Axioma 6: Axioma de la Separación de planos

SEXTA EXPERIENCIA

- En la unidad 1 de geometría estudiamos que se necesita una recta para dividir un plano en dos semiplanos.



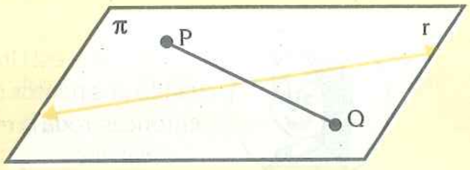
- ¿Cómo sabemos si dos puntos del plano están en el mismo lado de la recta $\overleftrightarrow{r}$ o en lados opuestos de ella?.
- El siguiente axioma, denominado AXIOMA DE SEPARACIÓN DEL PLANO, nos responde esta pregunta.

APRENDAMOS

Axioma 6: AXIOMA DE SEPARACIÓN DEL PLANO

Sea π un plano y $\overleftrightarrow{r}$ una recta contenida en π. Los puntos del plano que no están en $\overleftrightarrow{r}$ forman dos semiplanos de manera que:

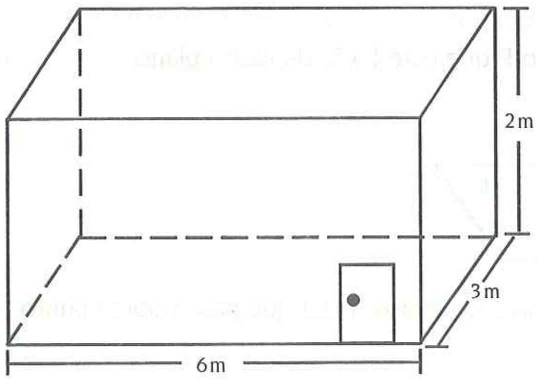
1. Cada semiplano es un conjunto convexo.
2. Si P está en un semiplano y Q está en el otro, entonces el segmento $\overline{PQ}$ corta a $\overleftrightarrow{r}$.

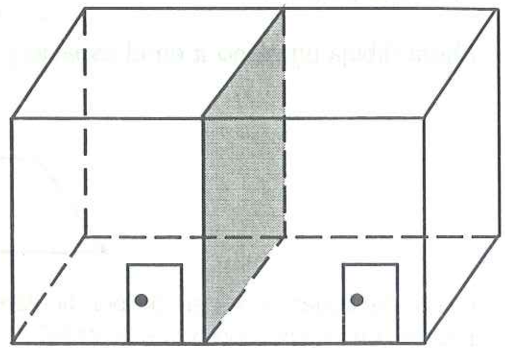


Axioma 7: Axioma de la Separación del Espacio

SÉPTIMA EXPERIENCIA

- Don Carlos tiene una bodega de 6 metros de largo por 3 metros de ancho por 2 metros de altura y desea dividirla en dos oficinas iguales. ¿Qué debe hacer?



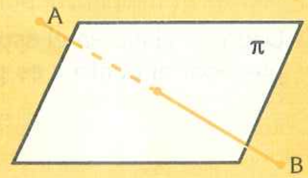


- Para dividir o SEPARAR la bodega en dos oficinas, don Carlos contrató los servicios de un albañil quien levanta un muro o tabique, tal como muestra la figura de la derecha.
- El muro o tabique es un PLANO que divide al ESPACIO (la bodega) en dos SEMIESPACIOS (las oficinas).
- El siguiente axioma, denominado AXIOMA DE LA SEPARACIÓN DEL ESPACIO le da plena significación a esta experiencia.

APRENDAMOS

Axioma 7: AXIOMA DE LA SEPARACIÓN DEL ESPACIO

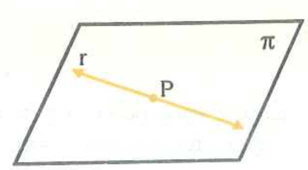
Sea π un plano en el espacio. Los puntos del espacio que no estén sobre π forman dos semi-espacios tales que:



1. Cada semiespacio es un conjunto convexo.
2. Si un punto A está en un semiespacio y otro punto B está en el otro semiespacio, entonces el segmento $\overline{AB}$ corta al plano π.

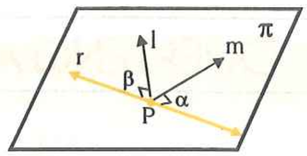
Axioma 8: Axioma de las Perpendiculares

OCTAVA EXPERIENCIA



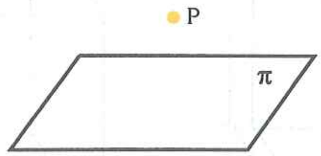
- Dibuja en un plano (hoja de papel) una recta $\overleftrightarrow{r}$ y un punto P que esté en la recta:

- Contesta: ¿Cuántas rectas perpendiculares a la recta $\overleftrightarrow{r}$ podemos trazar por el punto P y que estén contenidas en el plano π ? ¿Es posible una figura como la siguiente?

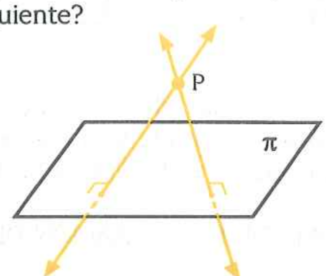


Mide los ángulos α y β con el transportador. ¿Son ángulos rectos? ¿Podemos concluir que las rectas $\overleftrightarrow{l}$ y $\overleftrightarrow{m}$ son perpendiculares?

- Ahora dibuja un plano π en el espacio y un punto P que esté fuera de dicho plano:



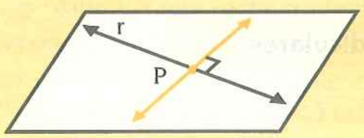
- Contesta: ¿Cuántas rectas perpendiculares al plano π podemos trazar que pasen por el punto P? ¿Es posible una figura como la siguiente?

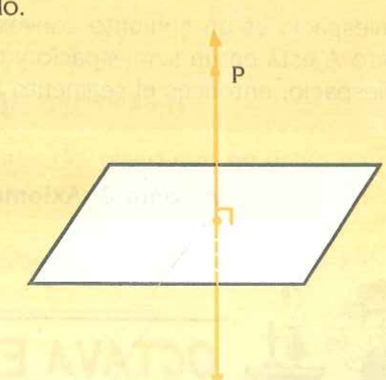


APRENDAMOS

Axioma 8: AXIOMA DE LAS PERPENDICULARES

- Dados una recta $\overleftrightarrow{r}$ y un punto P en ella, contenidos en un plano, hay una y sólo una recta, también contenida en el plano, que pasa por el punto dado y es perpendicular a la recta dada.
- Dado un plano en el espacio y un punto que no está en ese plano, hay una y sólo una recta que pasa por el punto y es perpendicular al plano dado.





- Estos son, pues, los primeros axiomas de la geometría euclidiana. En esta misma unidad y en las siguientes presentaremos otros axiomas en la medida que su presencia sea necesaria.

EJERCICIO 3.2

En los ejercicios 1. a 8., completa los enunciados con las palabras punto, recta, plano o espacio. Indica el axioma que corresponde a la proposición completa.

1. Si dos puntos están en un plano, entonces la_______ que los contiene está en el plano.
2. Un _______ contiene por lo menos tres puntos no colineales.
3. Si dos planos se cortan, su intersección es exactamente una_______ .
4. En un plano dado, hay exactamente una _______ que pasa por un punto dado y es perpendicular a una recta contenida en el plano.
5. Una recta separa _______ en dos semiplanos.
6. Dos puntos están contenidos en una y sólo en una_______ .
7. Por dos puntos pasa una y sólo una _______ .
8. Hay exactamente una _______ que pasa por un punto exterior a un plano dado y es perpendicular a dicho plano.

En los ejercicios 9. a 14., escribe un axioma que permita concluir que la proposición dada es verdadera.

9. Por dos puntos distintos A y B no pueden pasar dos rectas distintas $\overleftrightarrow{l}$ y $\overleftrightarrow{m}$.
10. Tres puntos no alineados A, B y C no pueden estar en dos planos distintos α y β.
11. Dados un punto P y un plano Ω, no puede haber dos rectas que pasen por P y sean perpendiculares al plano Ω.
12. Si P y Q son puntos del plano π, entonces la recta $\overleftrightarrow{PQ}$ no tiene ningún punto fuera del plano π.
13. El espacio puede contener más, pero no menos, de cuatro puntos no colineales y no coplanares.
14. Si los puntos M y N están en diferentes semiplanos determinados por una recta $\overleftrightarrow{r}$, entonces $\overline{MN}$ intercepta a $\overleftrightarrow{r}$.
15. Contesta:

    a) ¿Cuántos planos pueden pasar por dos puntos?
    b) ¿Cuántos planos pueden pasar por tres puntos que no están en línea recta?
16. Contesta: ¿Son todos los triángulos figuras planas? Dar las razones que justifiquen tu respuesta.
17. Contesta: ¿Por qué se usa un trípode (tres patas) para montar las cámaras fotográficas y los aparatos de topografía?
18. Dos puntos A y B están en un plano π. ¿Qué puede decirse acerca de la recta $\overleftrightarrow{AB}$?
19. Contesta las siguientes preguntas:

    a) ¿Cuántos puntos tiene una recta?
    b) ¿Cuántas rectas pueden pasar por un punto dado?
    c) ¿Cuántos planos pueden pasar por dos puntos distintos?
    d) ¿Pueden interceptarse tres planos en la misma recta?

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 1

Dibuja, en una hoja de papel, cuatro puntos de manera que no haya tres puntos colineales. Ahora une cada punto con los otros tres hasta formar seis segmentos. Muestra cómo se pueden distribuir los puntos para que ninguno de los segmentos se intercepten entre sí.

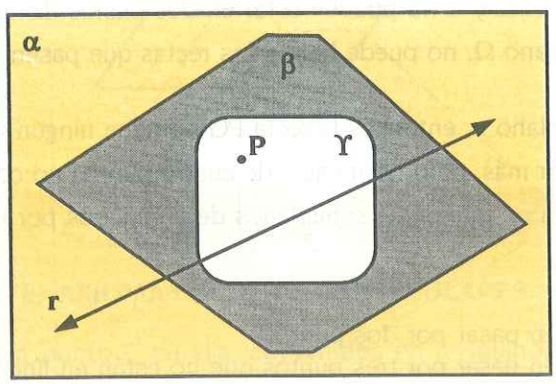
3.3 LOS PRIMEROS TEOREMAS

Con los axiomas formulados en la sección anterior ya podemos enunciar y demostrar los primeros teoremas de la geometría euclidiana.

PRIMERA EXPERIENCIA

- Dibuja en una hoja de papel una recta y un punto exterior a ella.

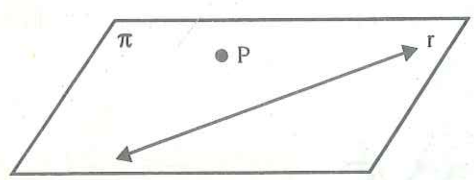
- ¿Cuántos planos distintos al de la hoja donde los dibujaste, pueden contener a la recta $\overleftrightarrow{r}$ y al punto P? Explica tu respuesta.
- Argumenta a favor o en contra de la siguiente afirmación: "En la figura siguiente, los planos que contienen a una recta y a un punto exterior a ella son coincidentes; es decir, son el mismo plano".



APRENDAMOS

Teorema 1
Si un punto P se encuentra fuera de una recta $\overleftrightarrow{r}$, entonces uno y sólo un plano contiene a la recta y al punto.

Hipótesis:
El punto P es exterior a la recta $\overleftrightarrow{r}$.



Tesis
π es el único plano que contiene a $\overleftrightarrow{r}$ y a P.

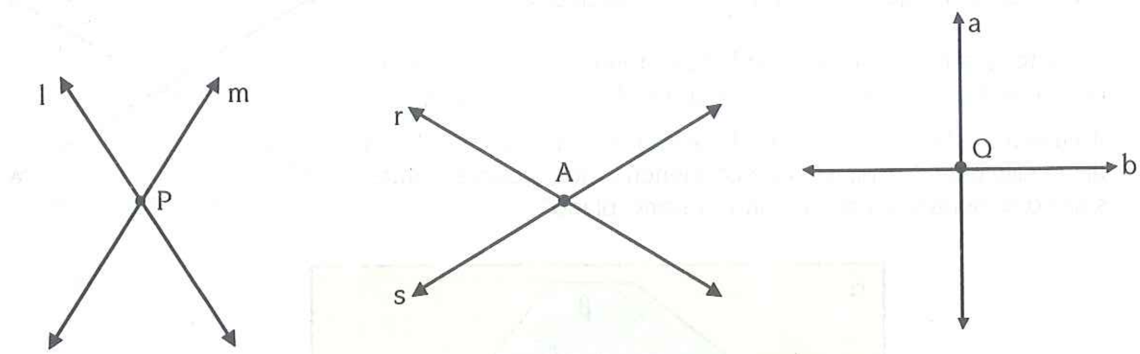
Demostración

Para demostrar este primer teorema utilizaremos los axiomas relacionados con puntos, rectas y planos; así mismo, vamos a utilizar el método directo de demostración. La estrategia consiste en formularte preguntas de modo que vayas argumentando a partir de la lista de hipótesis (axiomas o definiciones) ya conocidas.

1. ¿Cuál es la hipótesis de este teorema? ¿Qué sabemos de entrada?
2. ¿Cuántos puntos, por lo menos, contiene la recta $\overleftrightarrow{r}$? ¿Qué propiedad te permite afirmar esto? Nombra estos puntos.
3. ¿Cómo son entre sí el punto P y los puntos que nombraste de la recta $\overleftrightarrow{r}$?
4. ¿Cuántos planos contienen al punto P y a los puntos que nombraste de la recta $\overleftrightarrow{r}$?
5. ¿Con la argumentación anterior es posible concluir que una recta y un punto exterior a ella están contenidas en uno y sólo en un plano?

SEGUNDA EXPERIENCIA

- Fíjate bien en las siguientes figuras:

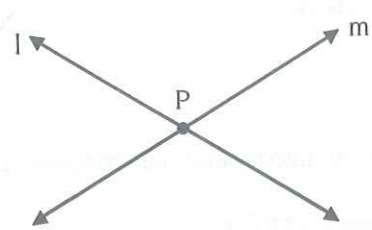


- ¿Qué posición tienen las rectas $\overleftrightarrow{l}$ y $\overleftrightarrow{m}$? ¿Y las rectas $\overleftrightarrow{r}$ y $\overleftrightarrow{s}$? ¿Y las rectas $\overleftrightarrow{a}$ y $\overleftrightarrow{b}$?
- Cuando dos rectas se interceptan, ¿cuál es su intersección?
- Las observaciones siguientes nos permiten formular nuestro segundo teorema.

APRENDAMOS

Teorema 2

Si dos rectas distintas se interceptan, entonces su intersección es uno y sólo un punto.



Hipótesis:

$\overleftrightarrow{l}$ y $\overleftrightarrow{m}$ son dos rectas distintas que se interceptan o cortan.

Tesis:

P es el único punto donde se interceptan $\overleftrightarrow{l}$ y $\overleftrightarrow{m}$.

Demostración

Para demostrar este teorema vamos a recurrir al método de reducción al absurdo o método indirecto. Contesta las preguntas que te ayudarán a argumentar.

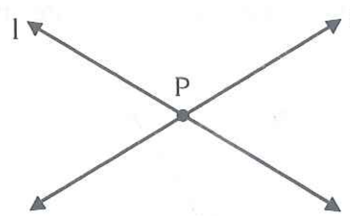
1. ¿Cómo se aplica el método de reducción al absurdo? ¿Cuál es la negación de la tesis?
2. ¿Refleja la figura de la derecha la negación de la tesis?
3. ¿Pueden pasar dos rectas distintas $\overleftrightarrow{l}$ y $\overleftrightarrow{m}$ por dos puntos distintos P y Q? ¿Por qué?
4. ¿Se ha originado una contradicción? ¿Por qué?
5. ¿Qué debemos concluir entonces? Escribe tu conclusión:

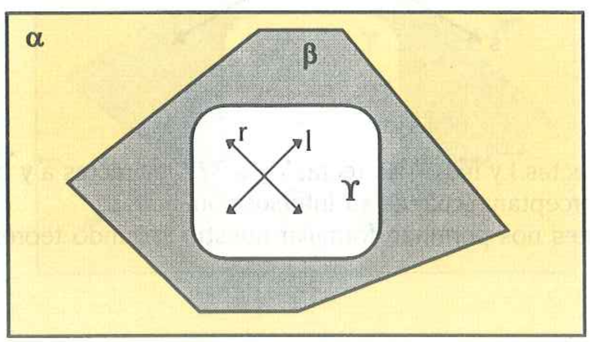
____

____

TERCERA EXPERIENCIA

- Dibuja en una hoja de papel dos rectas secantes.
- ¿Cuántos planos distintos al de la hoja donde los dibujaste pueden contener a las dos rectas secantes? Explica tu respuesta.
- Argumenta a favor o en contra de la siguiente afirmación: "En la figura siguiente, los planos que contienen a dos rectas secantes son coincidentes; es decir, son el mismo plano".





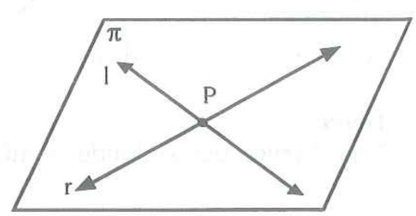
APRENDAMOS

Teorema 3
Si dos rectas son secantes, entonces hay uno y sólo un plano que las contiene.

Hipótesis

$\overleftrightarrow{l}$ y $\overleftrightarrow{r}$ son secantes en P.

Tesis
π es el único plano que contiene a $\overleftrightarrow{l}$ y $\overleftrightarrow{r}$.



Demostración
Vamos a recurrir al método directo para demostrar este teorema.

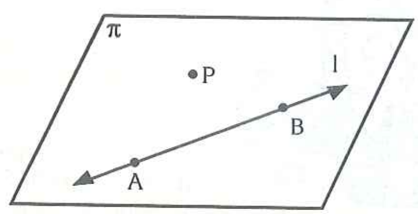
1. ¿De cuál proposición partimos? ¿Tienen $\overleftrightarrow{l}$ y $\overleftrightarrow{r}$ algún punto común? ¿cuál?.
2. ¿Al menos, cuántos puntos debe contener la recta $\overleftrightarrow{l}$? ¿Y la recta $\overleftrightarrow{r}$? ¿Por qué?
3. ¿Es P uno de esos puntos? Nombra los otros puntos que al menos deben contener $\overleftrightarrow{l}$ y $\overleftrightarrow{r}$.
4. ¿Cómo son entre sí el punto P y los otros puntos que nombraste?
5. ¿Cuántos planos contienen al punto P y a los otros puntos que nombraste? ¿Por qué?
6. ¿Puedes concluir que dos rectas secantes están contenidas en uno y sólo en un plano?

EJERCICIO 3.3

1 Escribe las tres maneras como se puede determinar un plano.

2 Esta es la demostración detallada del teorema 1: "Si un punto es exterior a una recta, entonces uno y sólo un plano contiene a la recta y al punto". Analiza cada paso de la demostración, realizada por el método directo, y escribe al frente de cada paso las razones que lo justifican.

Hipótesis: P es un punto exterior a $\overleftrightarrow{l}$.
Tesis: π es el único plano que contiene a P y a $\overleftrightarrow{l}$.

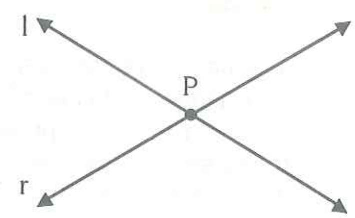


Demostración

- P es un punto exterior a $\overleftrightarrow{l}$ .... ____________________
- La recta $\overleftrightarrow{l}$ contiene por lo menos dos puntos distintos, por ejemplo, A y B.................................... ____________________
- Luego, como P es exterior a $\overleftrightarrow{l}$ entonces los puntos A, B y P no están alineados...................................... ____________________
- Luego, existe uno y sólo un plano π que pasa por la recta $\overleftrightarrow{AB}$ y el punto P... ____________________

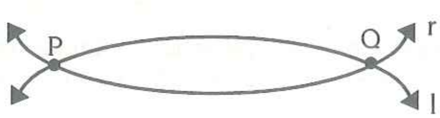
3 Esta es la demostración del teorema 2: "Si dos rectas distintas se interceptan, entonces su intersección es uno y sólo un punto". Analiza cada paso de la demostración, realizada por el método indirecto, y escribe al frente de cada paso las razones que lo justifican.

Hipótesis: $\overleftrightarrow{l}$ y $\overleftrightarrow{r}$ son dos rectas distintas que se cortan.
Tesis: P es el único punto donde se interceptan $\overleftrightarrow{l}$ y $\overleftrightarrow{r}$.



Demostración

- Supongamos que P no es el único punto donde se cortan $\overleftrightarrow{l}$ y $\overleftrightarrow{r}$.. ____________________
- Luego, existe al menos otro punto Q donde se cortan $\overleftrightarrow{l}$ y r.



.... ____________________

- Luego, $\overleftrightarrow{l}$ pasa por los puntos P y Q, y $\overleftrightarrow{r}$ también pasa por los puntos P y Q.. ______________________
- Luego, por dos puntos distintos P y Q pasan dos rectas distintas $\overleftrightarrow{l}$ y $\overleftrightarrow{r}$.. ______________________
- Pero, sabemos que por dos puntos distintos pasa una y sólo una recta.. ______________________
- Luego, las dos proposiciones anteriores se contradicen.. ______________________
- Esta contradicción se originó al suponer que P no era el único punto de intersección de l y $\overleftrightarrow{r}$..................... ______________________

- Por lo tanto, esta suposición es falsa y debemos concluir,entonces, que P es el único punto donde se cortan $\overleftrightarrow{l}$ y $\overleftrightarrow{r}$. Esto era lo que queríamos demostrar.

4 Realiza una demostración, por el método directo, para el teorema 3, similar a la que realizamos para el teorema 1.

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 2

Las siguientes palabras han sido codificadas así:
ALERO= 01602804, CERO= 202804 , MUDA= 705301 y RULO= 805604.
De acuerdo con esto, la palabra CARDO sería:

a) 2028304 b) 3016303 c) 7046022 d) 2018304 e) 3018205

TALLER DE REPASO DE LA UNIDAD 3

1. Elabora una lista de los axiomas y teoremas estudiados en esta unidad. Cada uno debe acompañarse de un dibujo ilustrativo.

2. Contesta:

   a) ¿Cuántos puntos tiene una recta?
   b) ¿Cuántas rectas pueden pasar por un punto dado?
   c) ¿Cuántos planos pueden pasar por dos puntos distintos?
   d) ¿Existe la posibilidad de que dos planos se intercepten en un solo punto?
   e) ¿Pueden interceptarse cinco planos en la misma recta?

3. Tenemos la siguiente información: P y Q son puntos distintos. La recta $\overleftrightarrow{l}$ contiene a los puntos P y Q; la recta $\overleftrightarrow{r}$ contiene a los puntos P y Q. ¿Qué podemos asegurar acerca de $\overleftrightarrow{l}$ y $\overleftrightarrow{r}$.

4. Dos puntos distintos A y B pertenecen a un plano π. ¿Qué podemos concluir acerca de $\overleftrightarrow{AB}$? ¿Qué axioma o teorema justifica la respuesta? Dibuja una figura que ilustre este ejercicio.

5. Dibuja un plano π cualquiera; luego, dibuja un segmento de recta que esté contenido en π. Finalmente, dibuja otro segmento de recta que intercepte al plano π en un solo punto y que no intercepte al otro segmento.

6. Una recta $\overleftrightarrow{AB}$ y un plano Ω tienen dos puntos P y Q en común. ¿Qué podemos concluir acerca de $\overleftrightarrow{AB}$ y de Ω? ¿Por qué?

7. Se sabe que tres puntos no alineados A, B y C están en el plano α y también están en el plano β. ¿Se podrá concluir que son el mismo plano? ¿Por qué?

8. De las siguientes proposiciones sólo una es FALSA:

a) Una recta tiene infinitos puntos.
b) Por un punto pasan infinitas rectas.
c) Dos puntos distintos determinan una recta.
d) Si una recta y un plano tienen un punto común, entonces la recta está necesariamente contenida en el plano.
e) Si una recta y un plano tienen dos puntos comunes, entonces la recta está totalmente contenida en el plano.

9. La proposición VERDADERA es:

a) Una recta y un punto siempre determinan un plano.
b) Tres puntos distintos determinan un plano.
c) Dos rectas que se cortan determinan un plano.
d) Dos rectas distintas determinan un plano.

10. ¿Qué condiciones deben cumplirse para determinar un plano?

PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS SABER

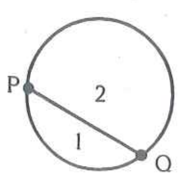
1. En un plano π hay marcados tres puntos no alineados y fuera de π hay un cuarto punto. Tomando esos cuatro puntos dos a dos, ¿cuántas rectas se pueden determinar?

a) 3 b) 4 c) 5 d) 6

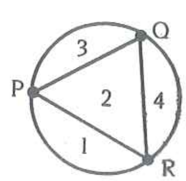
2. Todas las cuerdas determinadas por un conjunto de puntos de una circunferencia, dividen al interior de la circunferencia en regiones.

El número de regiones para 8 puntos es:

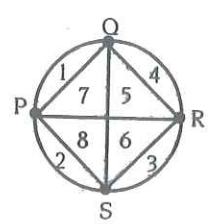
a)32 b) 64 c) 63 d) 128



2 puntos-2 regiones

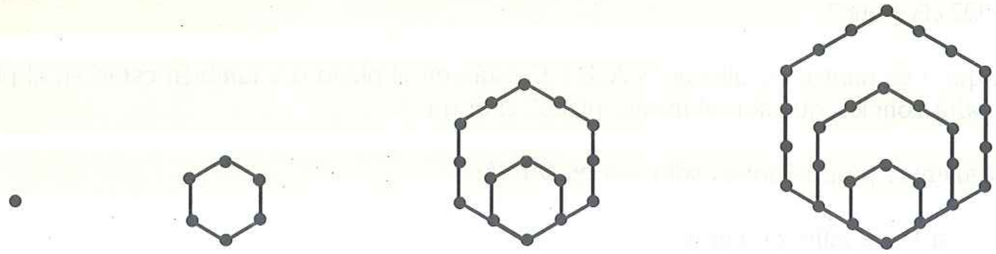


3 puntos-4 regiones



4 puntos-8 regiones

3. Las figuras muestran los cuatro primeros números hexagonales.

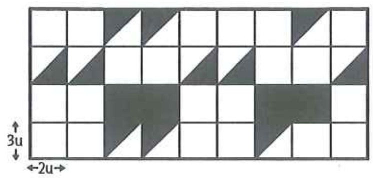


1 6 15 28

El sexto número hexagonal es:

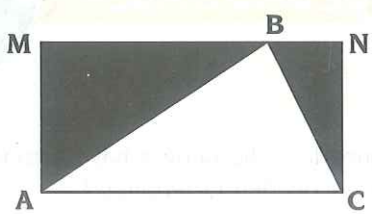
a)55 b) 60 c) 72 d) 66

4. De acuerdo a las dimensiones especificadas, el área sombreada es:



a) 38u b) $36u^2$ c) $38u^2$ d) 36u

5. El área del triángulo ABC es $10u^2$



El área de la parte sombreada es:

a) $10u^2$ b) $20u^2$ c) $8u^2$ d) Ninguna de las anteriores

Núcleo Temático

4

SEGMENTOS, ÁNGULOS Y MEDICIÓN

LOGRO GENERAL

Formular y demostrar teoremas sobre congruencia de segmentos de recta y de ángulos en diferentes contextos geométricos.

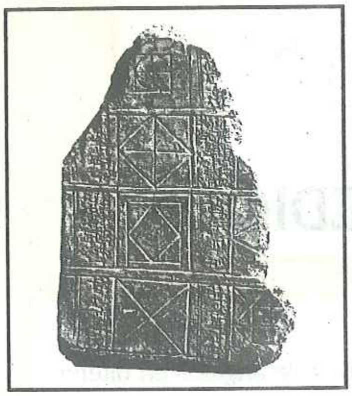
D I M E N S I O N E S

LOGROS ESPECÍFICOS	INDICADORES DE LOGRO
Corporal: • Manejar con habilidad instrumentos de medida como: regla, escuadra y compás.	• Mide longitudes y aberturas. • Dibuja ángulos de medidas dadas. • Dibuja segmentos de medidas dadas.
Comunicativa: • Interpretar el enunciado verbal de problemas geométricos. • Formular problemas que involucran ecuaciones. • Incorporar al vocabulario matemático nuevos términos.	• Describe en forma oral y escrita el proceso efectuado para la construcción de un ángulo congruente a otro dado y un segmento congruente a otro dado. • Utiliza adecuadamente las palabras **medida** y **congruencia.**
Cognitiva: • Elaborar modelos para hallar medidas de segmentos y medidas de ángulos.	• Resuelve problemas que requieren de las propiedades de los ángulos.
Estética: • Dibujar ángulos y trazar sus bisectrices.	• Ilustra los enunciados de los problemas dibujando figuras que tengan que ver con el mismo.
Ética-Actitudinal: • Resaltar la contribución de la matemática en la solución de problemas prácticos.	• Demuestra interés por aprender.

E V A L U A C I Ó N

ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS

4.1 HISTORIA DE LA GEOMETRÍA (4)



El núcleo de la geometría algebraica desarrollada por los babilonios lo constituyen los problemas de medición; sin embargo, un defecto importante aquí, lo mismo que en el caso de la geometría egipcia, fue el de que nunca estuvo clara la distinción entre medidas exactas y aproximadas. Por ejemplo, el área de un cuadrilátero se calculaba haciendo el producto de las medias aritméticas de los pares de lados opuestos, sin advertir que en la mayor parte de los casos ésta es una burda aproximación. No sabemos si los resultados que conocían tanto los egipcios como los babilonios fueron descubiertos independientemente, pero en cualquier caso los de los segundos fueron decididamente más extensos que los de los primeros, tanto en geometría como en álgebra. Así, por ejemplo, el teorema de Pitágoras no aparece en ninguna forma en los documentos que nos han llegado del antiguo Egipto, mientras que las tablillas cuneiformes que datan incluso del período babilónico antiguo muestran que en Mesopotamia se utilizó mucho este teorema. Las tablillas cuneiformes tienen un grado de permanencia con el que no pueden competir los documentos de otras civilizaciones, ya que ni el papiro ni el pergamino resisten con tanta facilidad los estragos del paso del tiempo. Por otra parte, los textos cuneiformes se continuaron escribiendo hasta comienzos de la Era Cristiana. El problema consiste, sin embargo, en contestar a la pregunta, ¿fueron leídos estos textos por las culturas vecinas, y en partícular por los griegos? El centro del desarrollo matemático se desplazó de Mesopotamia al mundo griego unos siete siglos antes del comienzo de nuestra era, pero la reconstrucción de la primitiva matemática griega es una tarea arriesgada debido a que prácticamente no hay documentos matemáticos anteriores a la época helénica.

COMPRENSIÓN DE LECTURA. Explicación: Lee nuevamente el texto anterior y luego encierra, en un círculo, la letra que corresponda a la respuesta correcta:

1. Sólo uno de los siguientes enunciados es verdadero.
   a. Los escritos cuneiformes finalizaron al comenzar la era Cristiana.
   b. El teorema de Pitágoras se conocía en el antiguo Egipto.
   c. Los problemas de medición dieron origen a la geometría algebraica.
   d. No tenemos escritos matemáticos que antecedieron a la época helénica.

2. Del texto anterior se puede inferir que:
   a. El pueblo egipcio fue más adelantado que el babilonio en asuntos de geometría.
   b. Los griegos fueron copistas de los babilonios.
   c. El centro de la actividad matemática, en esta época, fue Grecia.
   d. Los babilonios conocían y aplicaban a necesidades prácticas el teorema de Pitágoras.

3. El propósito específico del autor, en el fragmento anterior es:
   a. Explicar una etapa en el desarrollo de la geometría algebraica.
   b. Reivindicar el trabajo del pueblo babilonio en el desarrollo de la geometría.
   c. Demostrar que los griegos no fueron originales en sus trabajos matemáticos.
   d. Sembrar dudas acerca del trabajo científico de egipcios y griegos.

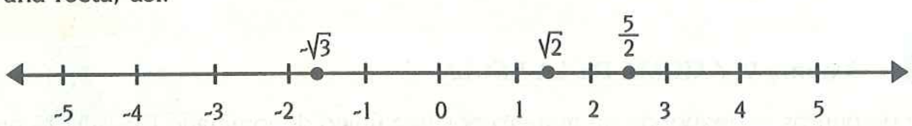
4. De acuerdo con el contenido y la forma del escrito, éste se considera:
   a. Un ensayo científico.
   b. Una crónica en prosa.
   c. Una descripción detallada.
   d. Un artículo periodístico.

5. La expresión **tablillas cuneiformes** hace referencia a:
   a. Escritos hechos sobre madera con caracteres en bajo relieve.
   b. Láminas de madera con códigos o letras en forma de cuña.
   c. Laminillas en cuero de cordero con diferentes caracteres.
   d. Papiros de algunos pueblos del Asia considerados incunables.

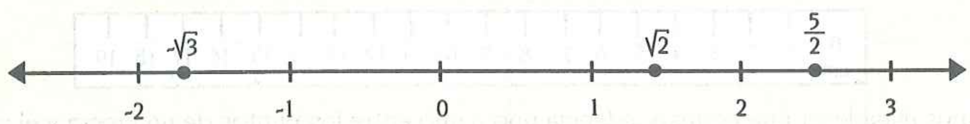
4.2 EL CONCEPTO DE DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

PRIMERA EXPERIENCIA

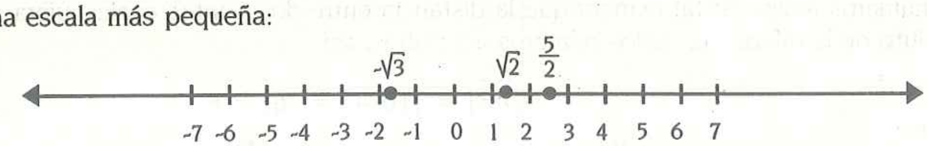
- En la unidad 1 de álgebra de este mismo texto, aprendimos a representar los NÚMEROS REALES sobre una recta; así:



Desde luego, pudimos haber utilizado una escala más grande:

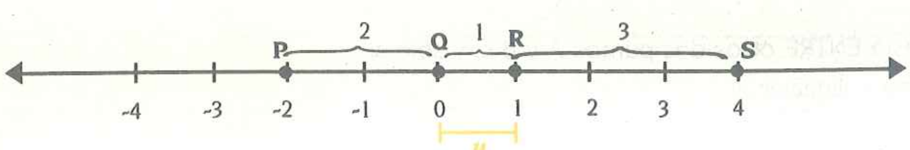


O una escala más pequeña:



- En todos los casos, el procedimiento para elegir la escala es el siguiente:
  – Escogemos una unidad de medida *u* arbitraria y la aplicamos, a partir del origen 0, tantas veces a la derecha y a la izquierda como deseemos.
  – También podemos utilizar la unidad de medida *u* para representar tantos números racionales, como números irracionales, tal como lo estudiamos en la unidad 1 de los números reales (conviene repasar esta unidad).

- De acuerdo con este procedimiento, el punto marcado con el 1 estará a la derecha del punto marcado con el 0, a una distancia de 1 unidad; el punto marcado con el –2 estará a la izquierda del punto marcado con el 0, a una distancia de 2 unidades, y así sucesivamente:



- De esta figura podemos leer directamente las distancias siguientes:

$$|\overline{RS}|=3 \qquad ; \qquad |\overline{PQ}|=2 \qquad ; \qquad |\overline{QS}|=4$$

Estas distancias también podemos obtenerlas RESTANDO; así:

$$|\overline{RS}|=4-1=3 \qquad ; \qquad |\overline{PQ}|=0-(-2)=2 \qquad ; \qquad |\overline{QS}|=4-0=4$$

- ¿Será siempre posible hallar la distancia entre dos puntos calculando la DIFERENCIA entre los números reales correspondientes a tales puntos? Para contestar esta pregunta, hallemos la distancia entre los puntos S y R calculando la diferencia entre el número correspondiente a R y el número correspondiente a S; es decir, $|\overline{SR}| = 1 - 4 = -3$; ¡Obtendríamos una distancia negativa! Para evitar este problema tomamos el VALOR ABSOLUTO de la diferencia de los números correspondientes. De esta manera garantizamos que la distancia entre dos puntos siempre es positiva:

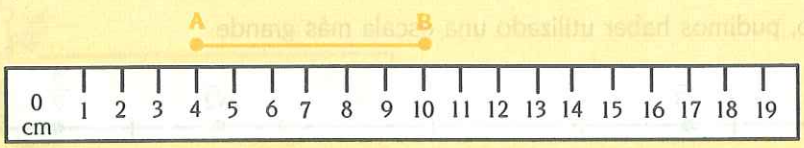
$$|\overline{RS}|=|4-1| = |\,3\,| = 3 \qquad ; \qquad |\overline{SR}| = |1-4| = |-3|=3$$

- Conclusión: La distancia entre dos puntos es el VALOR ABSOLUTO de la diferencia entre los números correspondientes.
- Todo lo que acabamos de desarrollar podemos resumirlo en un AXIOMA, llamado AXIOMA DE LA REGLA.

APRENDAMOS

Axioma 9: AXIOMA DE LA REGLA

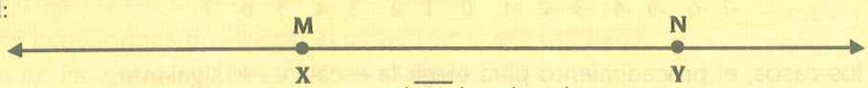
- A cada par de puntos corresponde un número positivo único denominado DISTANCIA entre los puntos.



- Podemos establecer una correspondencia uno a uno entre los puntos de una recta y el conjunto de los números reales de tal manera que la distancia entre dos puntos cualesquiera sea el valor absoluto de la diferencia de los números asociados; así:

$$|\overline{AB}| = |10-4| = |6| = 6$$

- En general:



$$|\overline{MN}| = |y-x|$$

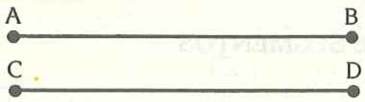
- El número asociado con un punto de la recta se denomina la COORDENADA del punto.
- El axioma de la regla motiva a definir el concepto de PUNTO ENTRE OTROS DOS. Esta es la definición.

APRENDAMOS

Un punto C está ENTRE otros dos puntos A y B si y sólo si:

1. A, B y C son colineales, y
2. $|\overline{AC}| + |\overline{CB}| = |\overline{AB}|$

- En este momento conviene recordar que dos segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son congruentes si sólo si tienen la misma medida. Los segmentos se miden en unidades de longitud (metros, decímetros, centímetros...). Para indicar que $\overline{AB}$ es CONGRUENTE con $\overline{CD}$ escribimos $\overline{AB} \cong \overline{CD}$



$\overline{AB} \cong \overline{CD}$ si y sólo si $|\overline{AB}| = |\overline{CD}|$

- Podemos combinar las definiciones de punto entre otros dos y segmentos congruentes para recordar el concepto de punto medio de un segmento.

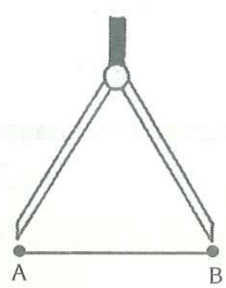
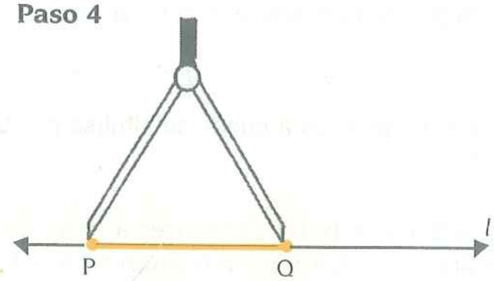
APRENDAMOS

M es el PUNTO MEDIO del segmento AB si y sólo si cumple las dos condiciones siguientes:

1. M está entre A y B, y
2. $\overline{AM} \cong \overline{MB}$

SEGUNDA EXPERIENCIA

- Queremos construir un segmento congruente a otro. El procedimiento es el siguiente:

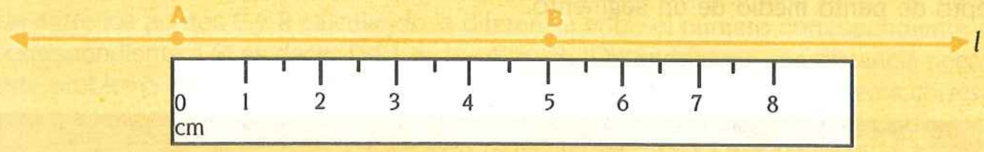
Paso 1  Este es el segmento dado $\overline{AB}$	**Paso 2**  Dibujamos una recta $\overleftrightarrow{l}$ y sobre ella marcamos un punto P.
Paso 3  Colocamos una de las puntas del compás en A y la otra en B. La abertura del compás es $\overline{AB}$.	**Paso 4**  Con la misma abertura del compás, hacemos centro en P y trazamos un arco que corta la recta $\overleftrightarrow{l}$ en Q. Ahora tenemos que: $\overline{AB} \cong \overline{PQ}$.

- Esta experiencia podemos resumirla en un nuevo axioma denominado AXIOMA DE LA CONSTRUCCIÓN DE SEGMENTOS; así:

APRENDAMOS

Axioma 10: AXIOMA DE LA CONSTRUCCIÓN DE SEGMENTOS

Dada una recta $\overleftrightarrow{l}$, un punto A en ella y un número real positivo n, existe uno y sólo un punto B en $\overleftrightarrow{l}$ tal que $|\overline{AB}| = n$.



En este caso, $|\overline{AB}| = 5$ cm

¡ATENCIÓN!

Como la medida de un segmento es un NÚMERO REAL POSITIVO, conviene tener en cuenta las propiedades de la suma, el producto y la igualdad de números reales estudiadas en la UNIDAD 2 de álgebra de este mismo texto. Recordemos las propiedades de la igualdad.

Propiedades de la igualdad de los Números Reales Positivos

Sean a, b, c números reales positivos:

1. Propiedades de la igualdad:

a) Propiedad Reflexiva

Todo número real positivo es igual a él mismo: $a = a$

b) Propiedad Simétrica

Si $a = b$ entonces $b = a$

c) Propiedad Transitiva

Si $a = b$ y $b = c$ entonces $a = c$

d) Propiedad Uniforme Aditiva

Si $a = b$ entonces $a + c = b + c$

2. Principios de Sustitución

Si $a = b$ entonces a puede sustituirse por b en cualquier expresión o enunciado.

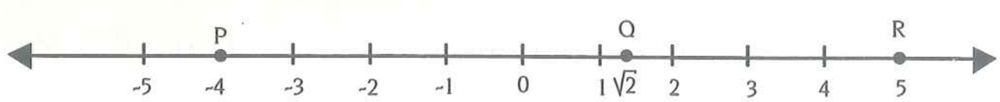
3. Propiedad Cancelativa

a) Si $a + c = b + c$, entonces $a = b$

b) Si $a \cdot c = b \cdot c$ y $c \neq 0$ entonces $a = b$

Ejemplo 1

¿Cuáles son las coordenadas de P, Q y R en la siguiente recta numérica? ¿Cuánto mide el segmento $\overline{PR}$?



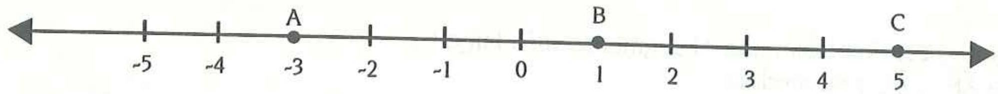
Solución

- La coordenada de P es -4
- La coordenada de Q es $\sqrt{2}$
- La coordenada de R es 5
- La medida del segmento $\overline{PR}$ coincide con la distancia entre los puntos P y R; es decir:

$$|\overline{PR}| = |5-(-4)| = |5+4| = |9| = 9$$

Ejemplo 2

Teniendo en cuenta la siguiente recta numérica, contesta:



a) ¿Por qué el punto B está entre A y C?
b) ¿Por qué B es el punto medio de $\overline{AC}$?

Solución

a) B está entre A y C ya que los puntos A, B y C son colineales y además:

$$\left.\begin{array}{l} |\overline{AB}| = 4 \\ |\overline{BC}| = 4 \\ |\overline{AC}| = 8 \end{array}\right\} \text{luego, } |\overline{AC}| = |\overline{AB}| + |\overline{BC}|$$

b) B es el punto medio de $\overline{AC}$ ya que B está entre A y C (por el literal a) y $\overline{AB} \cong \overline{BC}$.

Ejemplo 3

Vamos a demostrar una proposición relacionada con la medida de segmentos. Para ello vamos a aplicar algunas de las propiedades relacionadas con los números reales positivos que acabamos de recordar. Analiza cada paso de la demostración y escribe al frente de cada uno las razones que lo justifican.

Hipótesis: A, B, C y D son colineales
$\overline{AC} \cong \overline{BD}$

Tesis: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

DEMOSTRACIÓN

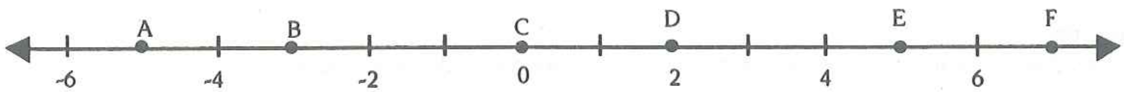
1. A, B, C y D son colineales y $\overline{AC} \cong \overline{BD}$............... ____________________
2. Luego, $|\overline{AC}| = |\overline{BD}|$ .... ____________________
3. Pero $\left\{\begin{array}{l} |\overline{AC}| = |\overline{AB}| + |\overline{BC}| \\ |\overline{BD}| = |\overline{BC}| + |\overline{CD}| \end{array}\right.$ .... ____________________
4. Luego, $|\overline{AB}| + |\overline{BC}| = |\overline{BC}| + |\overline{CD}|$............. ____________________
5. Finalmente, $|\overline{AB}| = |\overline{CD}|$............................. ____________________

EJERCICIO 4.2

1 Observa la siguiente figura y contesta:

a) ¿Cuántos centímetros mide el segmento más largo?
b) Halla $\overline{AB} \cup \overline{BC}$ y su medida.
c) Halla $\overline{AC} \cap \overline{BC}$ y su medida.

2 Contesta las siguientes preguntas con base en la siguiente figura:



a) ¿Cuál punto tiene coordenada –5?
b) ¿Cuánto mide la distancia entre A y D?
c) ¿Cuánto mide el segmento $\overline{CF}$?
d) ¿Cuánto mide el segmento $\overline{AD}$?
e) ¿Cuál es la coordenada del punto medio de $\overline{BF}$?
f) ¿Cuál es la medida de $|\overline{BC}| + |\overline{CD}| + |\overline{DE}|$? ¿Es la misma de $\overline{BE}$? ¿Por qué?
g) ¿Se cumple que $\overline{BD} \cong \overline{DF}$?

3 En la siguiente figura A, B, C y D son colineales y C es el punto medio de $\overline{AD}$.

Contesta:

a) ¿Equidista C de A y de D?
b) ¿Son colineales B, C y D?
c) ¿Pasa la recta $\overleftrightarrow{BC}$ por A?
d) ¿Es $|\overline{AB}| + |\overline{BC}| = |\overline{AC}|$
e) ¿Se halla C entre A y B?
f) ¿Son $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{CB}$ semirrectas opuestas?
g) ¿Se cumple que $C \in \overrightarrow{BD}$?
h) ¿Qué es $\overrightarrow{CA} \cap \overrightarrow{BD}$?

4 Utiliza regla y compás para construir segmentos congruentes a cada uno de los siguientes segmentos:

a) 

b) 

c) 

5 Dados los segmentos 

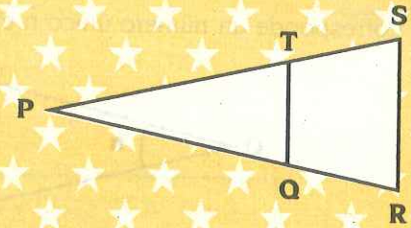
y 

Construye los siguientes segmentos usando regla y compás:

a) $|\overline{MN}| + |\overline{PQ}|$
b) $|\overline{MN}| + 2\,|\overline{PQ}|$
c) $2\,|\overline{MN}|$
d) $|\overline{PQ}| - |\overline{MN}|$

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 1

Completa la siguiente demostración:



Hipótesis: T está entre P y S
Q está entre P y R
$\overline{PS} \cong \overline{PR}$ y $\overline{TS} \cong \overline{QR}$

Tesis: $\overline{PT} \cong \overline{PQ}$

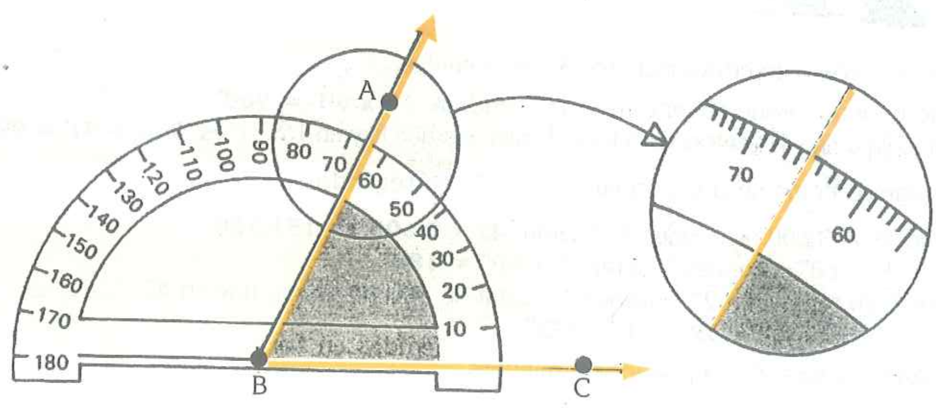
Demostración

1. T está entre P y S
   Q está entre P y R
   $\overline{PS} \cong \overline{PR}$ y $\overline{TS} \cong \overline{QR}$. .... ______________
2. Luego, $|\overline{PS}| = |\overline{PT}| + |\overline{TS}|$
   $|\overline{PR}| = |\overline{PQ}| + |\overline{QR}|$. .... ______________
3. Luego, $|\overline{PT}| + |\overline{TS}| = |\overline{PQ}| + |\overline{QR}|$ .... ______________
4. Luego, $|\overline{PT}| + |\overline{TS}| = |\overline{PQ}| + |\overline{TS}|$. .... ______________
5. Luego, $|\overline{PT}| = |\overline{PQ}|$ .... ______________
6. Por lo tanto, $\overline{PT} \cong \overline{PQ}$ .... ______________

¿Cuál método utilizamos en esta demostración?

4.3 MEDICIÓN, CONSTRUCCIÓN Y PROPIEDADES DE LOS ÁNGULOS

- En la unidad 1 de geometría de este texto utilizamos el TRANSPORTADOR para medir ángulos convexos. En este proceso de medición, lo que hacemos es asignarle a cada ángulo un número entre 0 y 180, utilizando como unidad de medida el GRADO SEXAGESIMAL. Por ejemplo, en la figura siguiente, la medida en grados del $\measuredangle$ ABC es 65°:



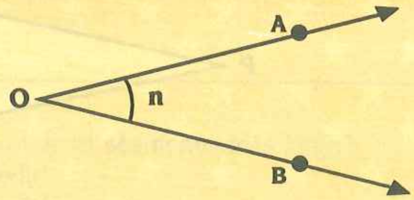
Escribimos: m $\measuredangle$ ABC = 65°

- Este proceso de medición de ángulos se basa en un axioma denominado, con justa razón, el AXIOMA DEL TRANSPORTADOR (así como antes, para medir segmentos, hablamos del AXIOMA DE LA REGLA):

APRENDAMOS

Axioma 11: AXIOMA DE LA MEDIDA DE ANGULOS

A cada ángulo le corresponde un número único n entre 0 y 180, llamado **medida del ángulo.**



m $\measuredangle$ AOB = n

¡ATENCIÓN!

1. Al igual que en la medición de segmentos, también en la medición de ángulos debemos tener en cuenta las propiedades de la suma, el producto y la igualdad de números reales.

2. Cuando hay que medir ángulos con mucha precisión, como ocurre en astronomía, navegación marítima y espacial, se utilizan también unidades más pequeñas que el grado. Estas unidades son:

   a) **El minuto:** es el resultado de dividir 1° (un grado) en 60 partes iguales. Para simbolizar un minuto escribimos 1'; es decir: **1° = 60'**

   b) **El segundo:** es el resultado de dividir 1' (un minuto) en 60 partes iguales. Para simbolizar un segundo escribimos 1"; es decir: **1' = 60"**

3. Como la medida de un ángulo es un número real, entonces podemos realizar operaciones con ángulos de igual forma que con números reales. Las siguientes experiencias te permitirán desarrollar destreza operativa con medidas angulares.

PRIMERA EXPERIENCIA

- Observemos cómo se convierten 16° 31' en minutos.
  - Como un grado tiene 60' entonces 16° tendrán: **16 x 60' = 960'**
  - Y como ya tengo 31', entonces el total de minutos que hay en 16° 31' es **960' + 31' = 991'**
- Ahora veamos cómo se transforman 42° 3' 52" en segundos.
  - Como 1° = 3.600" entonces 42° serán: **42 x 3.600" = 151.200"**
  - Como 1' = 60" entonces 3' serán: **3 x 60" = 180"**
  - Y como ya tenemos 52", entonces el total de segundos que hay en 42° 3' 52" es **151.200" + 180" + 52" = 151.432"**
- Convirtamos, ahora, 637' en grados y minutos

De minutos sobran minutos	**637'** **37'**	**60** **10°**	hay 10 grupos de 60 que son 10°

Luego, 637' = 10° 37'

- Convirtamos 27.859" en grados, minutos y segundos.

De segundos sobran segundos

27.859"	60		
385	464	60	
259	44'	7°	
19"			

Grupos de 60 segundos son minutos. Luego 464 son minutos

Luego, 27859" = 7° 44' 19"

SEGUNDA EXPERIENCIA

- Fíjate cómo calculamos 18° 47'45" + 43° 58'32"

Primero escribimos los números en forma vertical y sumamos aparte las unidades de cada clase.

Como el número de segundos es mayor o igual que 60 lo convertimos en minutos.

Como el número de minutos es mayor o igual que 60 lo convertimos en grados.

$$\begin{array}{rrrr} & 18^\circ & 47' & 45'' \\ + & 43^\circ & 58' & 32'' \\ \hline & 61^\circ & 105' & \cancel{77}'' \\ & & 1' & 17'' \\ \hline & 61^\circ & \cancel{106}' & 17'' \\ & 1^\circ & 46' & 17'' \\ \hline & 62^\circ & 46' & 17'' \end{array}$$

- Por lo tanto, 18° 47' 45" + 43° 58' 32" = 62° 46' 17"

TERCERA EXPERIENCIA

- Ahora calculemos esta resta: 17° 31' 43" - 2° 45' 53"

Colocamos los números en forma vertical y realizamos separadamente las restas de las unidades de la misma clase. La resta se realiza de derecha a izquierda; es decir, empezando por los segundos.

1' = 60"

$$\begin{array}{rrrr} & 17^\circ & \cancel{31}' & 43'' \\ - & 2^\circ & 45' & 53'' \end{array}$$

Cuando la resta no es posible entonces se transforman estas medidas de modo que pueda realizarse la operación.

1° = 60'

$$\begin{array}{rrrr} & \cancel{17}^\circ & 30' & 103'' \\ - & 2^\circ & 45' & 53'' \\ \hline & & & 50'' \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr} & 16^\circ & 90' & 103'' \\ - & 2^\circ & 45' & 53'' \\ \hline & 14^\circ & 45' & 50'' \end{array}$$

- Por lo tanto, 17° 31' 43" - 2° 45' 53" = 14° 45' 50"

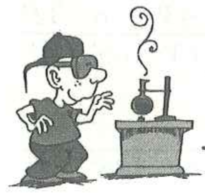
CUARTA EXPERIENCIA

- Así multiplicamos (47° 39' 28") x 4

> - Escribimos los números como lo hacemos ordinariamente en la multiplicación.
> - Cuando el número de minutos o segundos sea mayor de 60 hacemos lo mismo que en la suma .

$$\begin{array}{rrr} 47^\circ & 39' & 28'' \\ & & \times\ 4 \\ \hline 188^\circ & 156' & \cancel{11}2'' \\ & 1' & 52'' \\ \hline 188^\circ & \cancel{157}' & 52'' \\ 2^\circ & 37' & \\ \hline 190^\circ & 37' & 52'' \end{array}$$

- Luego, (47° 39' 28") x 4 = 190° 37' 52"



QUINTA EXPERIENCIA

- Finalmente vamos a dividir (73° 29' 47") ÷ 4

> - Empezamos dividiendo los grados entre 4. Si queda residuo, entonces lo convertimos en minutos y los sumamos con los minutos que ya tenemos.
> - A continuación, dividimos los minutos entre 4. Si queda residuo, los convertimos en segundos y los sumamos con los que ya tenemos.
> - Finalmente, dividimos los segundos por 4.

$$\begin{array}{llll|l} 73^\circ & 29' & 47'' & & 4 \\ \cline{5-5} -72^\circ & & & & 18^\circ\ 22'\ 26'' \\ \cline{1-1} 1^\circ = & 60' & & & \\ \cline{2-2} & 89' & & & \\ & 1' = & 60'' & & \\ \cline{3-3} & & 107'' & & \\ & - & 104'' & & \\ \cline{2-3} & & 3'' & & \end{array}$$

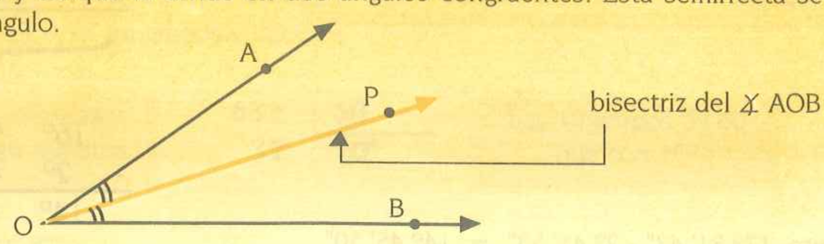
PREGUNTA: ¿Qué hacemos con estos 3" que sobraron?

- Por lo tanto, (73° 29' 47") ÷ 4 = 18° 22' 26"

4. Recordemos que dos o más ángulos son CONGRUENTES cuando tienen la misma medida; es decir:

$$\widehat{\alpha} \cong \widehat{\beta} \text{ si y sólo si } m\widehat{\alpha} = m\widehat{\beta}$$

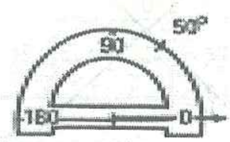
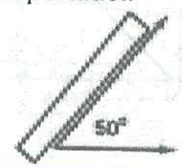
5. En la sección anterior dijimos que el PUNTO MEDIO de un segmento lo divide en dos segmentos congruentes. También en los ángulos hay un elemento que divide al ángulo en dos ángulos congruentes. Este elemento es una semirrecta, ubicada en el mismo plano del ángulo, cuyo origen es el vértice de éste y tal que lo divide en dos ángulos congruentes. Esta semirrecta se denomina BISECTRIZ del ángulo.



6. ¿Cómo construimos un ángulo cuya medida conocemos o un ángulo congruente con otro dado? A continuación describiremos dos procedimientos: el primero, usando el transportador y el segundo, utilizando el compás.

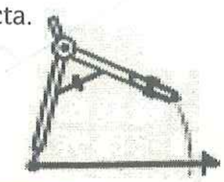
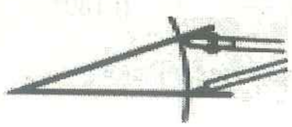
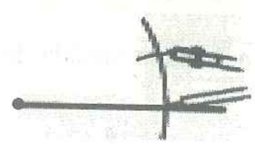
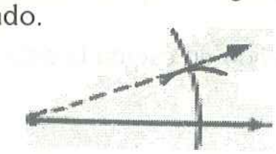
- **Método del Transportador:**

Para construir, por ejemplo, un ángulo de 50° procedemos así:

1. Dibujamos una semirrecta 	2. Hacemos coincidir la base del transportador con la semirrecta. 	3. Con una regla unimos el origen de la semirrecta con el punto 50° del transportador. 

- **Método del Compás:**

Si queremos construir un ángulo congruente con otro ángulo dado hacemos lo siguiente:

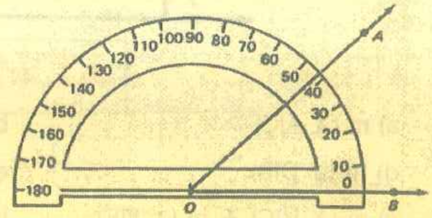
1. Trazamos un arco que corte ambos lados del ángulo dado.  ángulo dado	2. Trazamos una semirrecta que sirva como un lado del ángulo que queremos construir. 	3.Con la misma abertura del paso 1; trazamos un arco que corte a la semirrecta. 
4. Abrimos el compás a la misma medida de la abertura del ángulo dado.  ángulo dado	5. Con la nueva abertura en el compás trazamos un arco que corte al del paso 3. 	6.Finalmente, trazamos el segundo lado para completar el ángulo congruente con el ángulo dado. 

Estos dos procedimientos para construir ángulos se fundamentan en un nuevo axioma, denominado AXIOMA DE LA CONSTRUCCIÓN DE ÁNGULOS.

APRENDAMOS

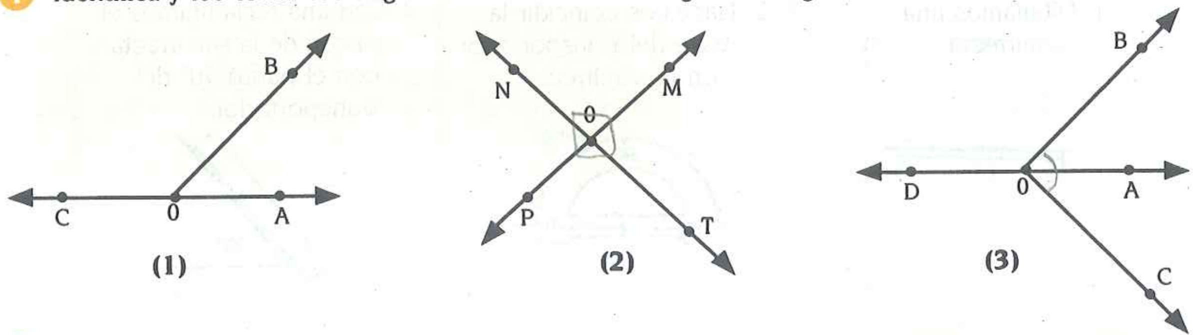
Axioma 12: AXIOMA DE LA CONSTRUCCIÓN DE ÁNGULOS

Dada una semirrecta $\overrightarrow{OB}$ y un número n comprendido entre 0 y 180, existe exactamente una semirrecta $\overrightarrow{OA}$ tal que m ∡ AOB = n



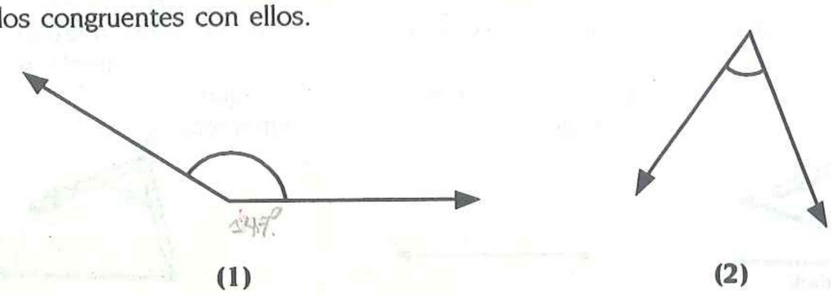
EJERCICIO 4.3

1. Identifica y lee todos los ángulos existentes en las siguientes figuras:



2. Mide con el transportador los ángulos del ejercicio anterior e indicar cuáles son congruentes.

3. Mide con el transportador los siguientes ángulos y, luego, utiliza el compás para dibujar otros ángulos congruentes con ellos.

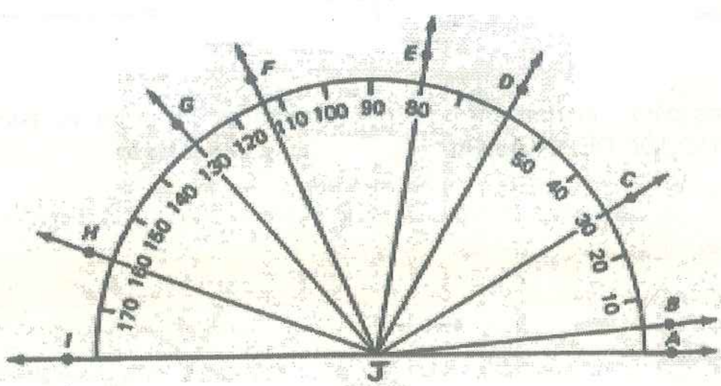


4. Señala en los ángulos del ejercicio anterior el ángulo cóncavo de cada uno.

5. Dibuja con el transportador los siguientes ángulos:

a) 60° b) 45° c) 82 d) $135\frac{1°}{2}$ e) $157\frac{1°}{2}$ f) 180°

6. Teniendo en cuenta la siguiente figura, halla la medida de los siguientes ángulos:

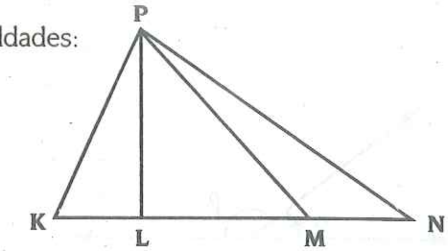


a) m (∡ AJC) b) m (∡ CJE) c) m (∡ HJC)

d) m (∡ DJB) e) m (∡ BJF) f) m (∡ CJD) + m (∡ GJD)

g) m (∡ HJC) + m (∡ FJE) h) m (∡ HJB) – m (∡ FJD) i) m (∡ DJG) – m (∡ BJC)

7 Teniendo en cuenta la figura, completa las siguientes igualdades:



a) m (∡ KPL) + m (∡ LPM) =

b) m (∡ MPN) + m (∡ LPM) =

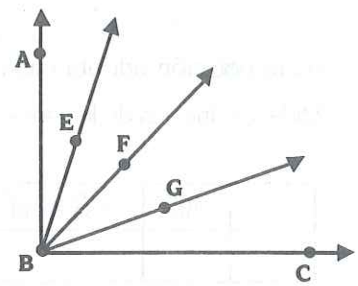
c) m (∡ KPM) – m (∡ LPM) =

d) m (∡ KPN) – m (∡ MPN) =

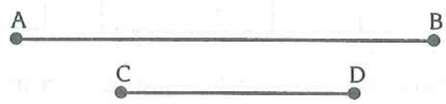
8 Realiza las siguientes operaciones:

a) 46° 12' 28" + 37° 17' 43" b) 67° 15' 19" – 42° 9' c) 4 x (25° 18' 4") d) (36° 27' 54") ÷ 3

9 En la figura de la derecha, $\overrightarrow{BF}$ biseca a ∡ EBG, m (∡ ABC) = 90°; m (∡ABE) = 20° y m (∡ GBC) = 24°. ¿Cuál es m (∡ ABF)?



10 Teniendo en cuenta los siguientes segmentos:



Construye un segmento de longitud $4\,|\overline{CD}| - \frac{1}{2}\,|\overline{AB}|$

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 2

Tres viajeros pagaron 30 dólares por la habitación de un hotel. Cada uno contribuyó con 10 dólares. Más tarde, el gerente del hotel se dio cuenta de que sólo debían haber pagado 25 dólares, por lo que llamó al botones y le dio 5 dólares para que le devolviera a los viajeros. El botones pensó que estos tendrían dificultades para repartir los 5 dólares y sólo les dio 3, quedándose los 2 dólares restantes. Así pues, cada viajero pagó por la habitación 10 dólares menos el dólar devuelto, es decir, 9 dólares. Como 9 x 3 = 27 dólares más los 2 con los que se quedó el botones suma 29 dólares. Pero la cuenta original era de 30 dólares. ¿Qué pasó con el otro dólar?

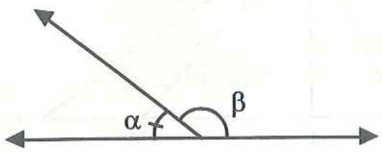
4.4 PROPIEDADES RELATIVAS A LOS ÁNGULOS

En la primera unidad de geometría de este texto realizamos una clasificación de los ángulos de acuerdo con dos criterios: **1) De acuerdo con su posición** y **2) De acuerdo con su medida.**

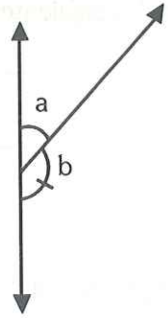
En esta sección vamos a estudiar algunas propiedades que cumplen estos ángulos. Veamos:

PRIMERA EXPERIENCIA

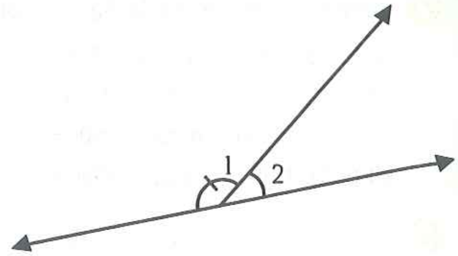
- Copia en tu cuaderno estas tres parejas de ángulos:



(1)



(2)



(3)

- ¿Qué posición adopta cada una de estas parejas de ángulos.
- Mide los ángulos de la pareja (1) y escribe el resultado en el cuadro. Haz lo mismo con las parejas (2) y (3):

$m\widehat{\alpha}$	$m\widehat{\beta}$	$m\widehat{\alpha} + m\widehat{\beta}$

$m\widehat{a}$	$m\widehat{b}$	$m\widehat{a} + m\widehat{b}$

$m\widehat{1}$	$m\widehat{2}$	$m\widehat{1} + m\widehat{2}$

- Contesta: ¿Cuánto suman las medidas de dos ángulos que forman un par lineal? ¿Son ángulos suplementarios?

APRENDAMOS

PROPIEDAD DE LOS ANGULOS QUE FORMAN UN PAR LINEAL

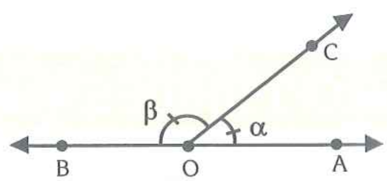
Si dos ángulos forman un par lineal, entonces la suma de sus medidas es 180°; es decir:

Si $\widehat{\alpha}$ y $\widehat{\beta}$ forman un par lineal entonces $m\widehat{\alpha} + m\widehat{\beta} = 180°$

- Para llegar a esta conclusión hemos utilizado un razonamiento inductivo. Sin embargo, recordemos que para garantizar la verdad de esta propiedad debemos acudir al razonamiento deductivo.

Hipótesis: $\widehat{\alpha}$ y $\widehat{\beta}$ forman un par lineal

Tesis: $m\widehat{\alpha} + m\widehat{\beta} = 180°$



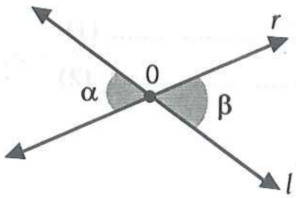
Demostración

Analiza cada paso de la demostración y escribe al frente de cada uno las razones que lo justifican:

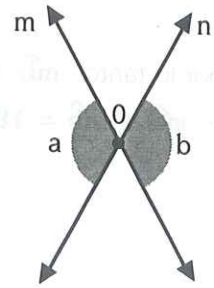
1. $\widehat{\alpha}$ y $\widehat{\beta}$ forman un par lineal .... ______________________
2. $m\widehat{\alpha} + m\widehat{\beta} = m\,(\measuredangle\ AOB)$.............................. ______________________
3. Pero, $\measuredangle$ AOB es llano.................................. ______________________
4. Luego, $m\,(\measuredangle\ AOB) = 180°$............................ ______________________
5. Luego, $m\widehat{\alpha} + m\widehat{\beta} = 180°$............................ ______________________

SEGUNDA EXPERIENCIA

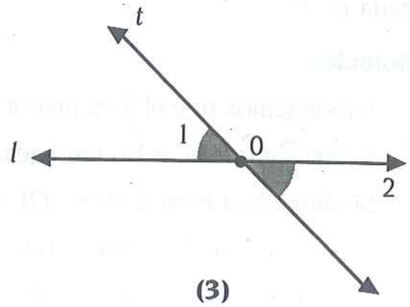
- Dibuja en tu cuaderno estas tres parejas de rectas secantes:



(1)



(2)



(3)

- ¿Qué nombre reciben los ángulos $\widehat{\alpha}$ y $\widehat{\beta}$ de la pareja (1)? ¿Y lo ángulos $\widehat{a}$ y $\widehat{b}$ de la pareja (2)? ¿Y los ángulos $\widehat{1}$ y $\widehat{2}$ de la pareja (3)?

- Mide los ángulos $\widehat{\alpha}$ y $\widehat{\beta}$ y escribe el resultado en el cuadro siguiente. Haz lo mismo con los ángulos de las parejas (2) y (3).

$m\widehat{\alpha} =$	$m\widehat{\beta} =$	$m\widehat{a} =$	$m\widehat{b} =$	$m\widehat{1} =$	$m\widehat{2} =$

- Contesta: ¿Dos ángulos opuestos por el vértice son congruentes?

APRENDAMOS

PROPIEDAD DE LOS ÁNGULOS OPUESTOS POR EL VÉRTICE

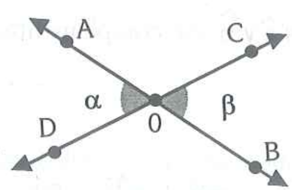
Si dos ángulos $\widehat{\alpha}$ y $\widehat{\beta}$ son opuestos por el vértice entonces $\widehat{\alpha}$ y $\widehat{\beta}$ son congruentes; es decir:

Si $\widehat{\alpha}$ y $\widehat{\beta}$ son opuestos por el vértice entonces $\widehat{\alpha} \cong \widehat{\beta}$

- Vamos a generalizar la verdad de esta proposición mediante la siguiente demostración. Escribe al frente de cada paso la razón que lo justifica.

Hipótesis: $\widehat{\alpha}$ y $\widehat{\beta}$ son opuestos por el vértice

Tesis: $\widehat{\alpha} \cong \widehat{\beta}$



Demostración

1. $\widehat{\alpha}$ y $\widehat{\beta}$ son opuestos por el vértice. . . . . ______________________
2. $m\widehat{\alpha} + m(\measuredangle AOC) = 180°$. ______________________
3. También, $m\widehat{\beta} + m(\measuredangle AOC) = 180°$. . . . . ______________________
4. Luego, $m\widehat{\alpha} + m(\measuredangle AOC) = m\widehat{\beta} + m(\measuredangle AOC)$ . . . ______________________

5. Luego, $m\widehat{\alpha} = m\widehat{\beta}$ .... __________________________________

6. Finalmente, $\widehat{\alpha} \cong \widehat{\beta}$............................ __________________________________

Ejemplo 1

Dos ángulos $\widehat{a}$ y $\widehat{b}$ forman un par lineal y uno de ellos mide 50° más que el otro. ¿Cuántos grados mide cada uno?

Solución

- Supongamos que el $\widehat{a}$ es menor que el $\widehat{b}$; por lo tanto: $\mathbf{m\widehat{b} = m\widehat{a} + 50°}$...................... **(1)**
- Como $\widehat{a}$ y $\widehat{b}$ forman un par lineal, entonces: $\mathbf{m\widehat{a} + m\widehat{b} = 180°}$ .... **(2)**
- Si ahora sustituimos (1) en (2) nos queda:

$$m\widehat{a} + (m\widehat{a} + 50°) = 180°$$

$$\therefore\ m\widehat{a} + m\widehat{a} + 50° = 180°$$

$$\therefore\ 2\,m\widehat{a} + 50° = 180°$$

$$\therefore\ 2\,m\widehat{a} = 180° - 50° = 130°$$

$$\therefore\ m\widehat{a} = \frac{130°}{2} = 65° \quad \text{.......................... } \mathbf{(3)}$$

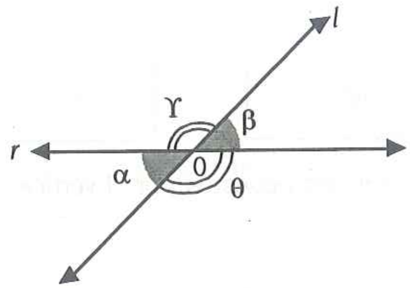
- Y como la $m\widehat{a} = 65°$, entonces vamos a (1), reemplazamos allí y nos queda $\mathbf{m\widehat{b} = 65° + 50° = 115°}$

Ejemplo 2

DATOS: $\overleftrightarrow{l}$ y $\overleftrightarrow{r}$ se cortan en O

$m\widehat{\alpha} = 70°$

HALLEMOS: $m\widehat{\beta}$, $m\widehat{\Upsilon}$ y $m\widehat{\theta}$



Solución

- Como $\widehat{\alpha}$ y $\widehat{\beta}$ son opuestos por el vértice, entonces $m\widehat{\alpha} = m\widehat{\beta}$. Por lo tanto, $m\widehat{\beta} = 70°$
- Como $\widehat{\alpha}$ y $\widehat{\Upsilon}$ forman un par lineal, entonces $m\widehat{\alpha} + m\widehat{\Upsilon} = 180°$. Ahora bien:

$$70° + m\widehat{\Upsilon} = 180°$$

$$\therefore\ m\widehat{\Upsilon} = 180° - 70°$$

$$\therefore\ m\widehat{\Upsilon} = 110°$$

- Y como $\widehat{\Upsilon} \cong \widehat{\theta}$, entonces $m\widehat{\theta} = 110°$

Ejemplo 3

Dos ángulos $\widehat{a}$ y $\widehat{b}$ son complementarios. Si la medida de uno de ellos es 43° 47' 32", ¿cuál es la medida del otro?

Solución

- Recordemos que dos ángulos son complementarios cuando la suma de sus medidas es 90°. Esto significa que: $\mathbf{m\widehat{a} + m\widehat{b} = 90°}$
- Si suponemos que la $m\widehat{a} = 43°\ 47'\ 32''$ entonces:

$$43°\ 47'\ 32'' + m\widehat{b} = 90°$$

$$\therefore\ m\widehat{b} = 90° - 43°\ 47'\ 32''$$

- Para efectuar la resta entre 90° y 43° 47' 32" debemos escribir a 90° en términos de grados, minutos y segundos; así: **90° = 89° 59' 60"**

Por lo tanto:

$$\begin{array}{r} 89^\circ\ 59'\ 60'' \\ -\ 43^\circ\ 47'\ 32'' \\ \hline 46^\circ\ 12'\ 28'' \end{array}$$

- Luego, el complemento de un ángulo que mide 43° 47' 32" es 46° 12' 28".

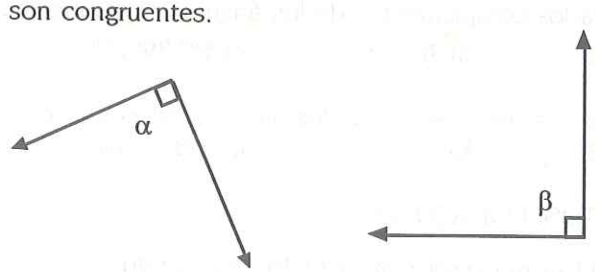
Ejemplo 4

Demostremos que todos los ángulos rectos son congruentes.

Solución

Hipótesis: $\widehat{\alpha}$ y $\widehat{\beta}$ son ángulos rectos

Tesis: $\widehat{\alpha} \cong \widehat{\beta}$



Demostración

Escribe al frente de cada paso de la demostración las razones que lo justifican.

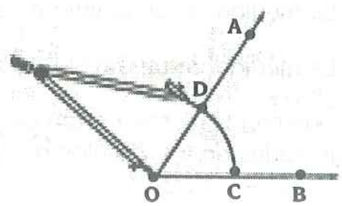
1. $\widehat{a}$ y $\widehat{b}$ son ángulos rectos .... ______________________
2. Luego, $m\widehat{a} = 90^\circ$ y $m\widehat{b} = 90^\circ$ ....______________________
3. Luego, $m\widehat{a} = m\widehat{b}$ .... ______________________
4. Por tanto, $\widehat{a} \cong \widehat{b}$ .... ______________________

Ejemplo 5

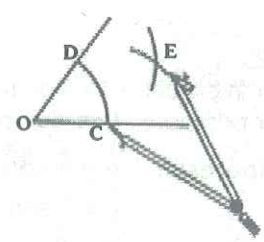
Utilicemos regla y compás para trazar la bisectriz de un ángulo.

Solución

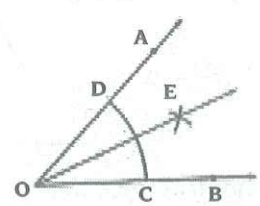
Paso 1: Hacemos centro en el vértice del ángulo y con radio cualquiera trazamos un arco $\overset{\frown}{CD}$ que corte ambos lados del ángulo.



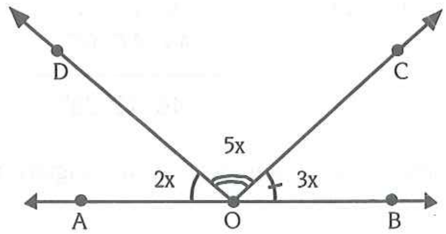
Paso 2: Con una abertura del compás un poco mayor que la longitud del arco $\overset{\frown}{CD}$ y haciendo centro primero en C y luego en D, trazamos dos arcos que se cortan en E.



Paso 3: Por último, trazamos la semirrecta $\overrightarrow{OE}$ que es la bisectriz del ángulo dado.



EJERCICIO 4.4



1 **DATOS:** A, O y B son puntos colineales

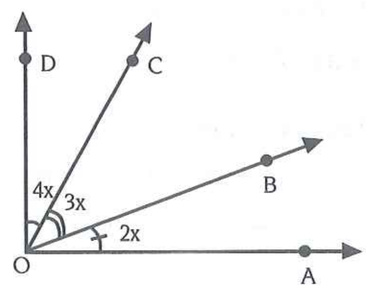
HALLA: m (∡AOD) , m (∡ DOC) y m (∡ BOC)

2 Halla los complementos de los ángulos cuyas medidas son:

a) 18° b) 36° 52' c) 48° 39' 15"

3 Halla los suplementos de los ángulos cuyas medidas son:

a) 78° b) 92° 15' c) 123° 9' 16"



4 **DATOS:** El ∡ AOD es recto

HALLA: m (∡DOC), m (∡ COB), m (∡ BOA)

5 Completa los siguientes enunciados.

a) Si $\widehat{\alpha}$ y $\widehat{\beta}$ son complementarios y la $m\widehat{\alpha} = 40°$, entonces $m\widehat{\beta} =$ ____________

b) Si $\widehat{\alpha}$ y $\widehat{\beta}$ son suplementarios y la $m\widehat{\beta} = 15°$ entonces $m\widehat{\alpha} =$ ____________

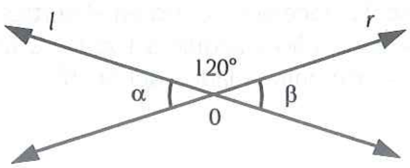
c) Si $\widehat{a}$ y $\widehat{b}$ forman un par lineal y $m\widehat{a} = 75°$, entonces $m\widehat{b} =$ ____________

d) Si $\widehat{1}$ y $\widehat{2}$ son opuestos por el vértice y $m\widehat{1} = 120°$ entonces $m\widehat{2} =$ ____________

6 La medida de un ángulo es el 80% de la medida de su complemento. ¿Cuánto mide el ángulo?

7 La medida de un ángulo es 5 veces la medida de su suplemento. ¿Cuánto mide el ángulo?

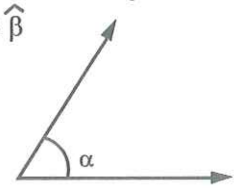
8 Dos rectas $\overleftrightarrow{l}$ y $\overleftrightarrow{r}$ se cortan en O. ¿Cuáles deben ser las medidas de los ángulos $\widehat{\alpha}$ y $\widehat{\beta}$?

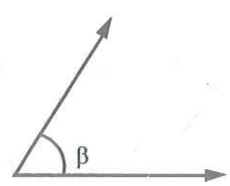


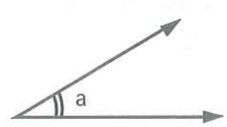
9 En la siguiente demostración, escribe al frente de cada paso las razones que la justifican.
Proposición: **"Los complementos del mismo ángulo son congruentes".**

Hipótesis: $\widehat{\alpha}$ y $\widehat{a}$ son complementarios
$\widehat{\beta}$ y $\widehat{a}$ son complementarios

Tesis: $\widehat{\alpha} \cong \widehat{\beta}$







Demostración

1. $\widehat{\alpha}$ y a son complementarios .... ____________
   $\widehat{\beta}$ y a son complementarios
2. Luego, $m\widehat{\alpha} + m\widehat{a} = 90°$
   $m\widehat{\beta} + m\widehat{a} = 90°$ .... ____________

3. Luego, $m\widehat{\alpha} + m\widehat{a} = m\widehat{\beta} + m\widehat{a}$........................... ______________________

4. Luego, $m\widehat{\alpha} = m\widehat{\beta}$.. ______________________

5. Por tanto, $\widehat{\alpha} \cong \widehat{\beta}$ .... ______________________

10 Demuestra la siguiente proposición: **"Los suplementos del mismo ángulo son congruentes".** Escribe la hipótesis, la tesis y las proposiciones con sus respectivas razones o justificaciones.

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 3

Dos mujeres, Juliana y Sara, y dos hombres Sebastián y Andrés son profesionales. Una de estas personas es ingeniero, otra es médico, otra es abogado y otra es educador. Un día se reunieron y se sentaron alrededor de una mesa cuadrada, así: (a) El ingeniero estaba a la izquierda de Juliana; b) El abogado estaba frente a Sebastián; c) Sara y Andrés se sentaron juntos y d) Una mujer se sentó al lado del médico. ¿Cuál de estas personas es el abogado?

TALLER DE REPASO DE LA UNIDAD 4

1. Contesta las siguientes preguntas:

a) ¿Qué establece el axioma de la regla?
b) ¿Qué es coordenada de un punto en la recta numérica?
c) ¿Cómo se determina la distancia entre dos puntos ubicados sobre una recta numérica?
d) ¿Qué establece el axioma de la medición de segmentos?
e) ¿Cuándo dos segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son congruentes?
f) ¿Cuándo un punto A está entre otros dos puntos B y C?
g) ¿Qué es punto medio de un segmento?
h) ¿Cómo se define un ángulo? ¿Cuáles son sus elementos?
i) ¿Qué son ángulos cóncavos?
j) ¿Qué establece el axioma del transportador? ¿Cómo se miden ángulos? ¿Qué son ángulos congruentes?
k) ¿Qué es bisectriz de un ángulo?
l) ¿Cómo se construye un ángulo congruente con un ángulo dado?
m) ¿Cómo se clasifican los ángulos de acuerdo con su medida? ¿Y de acuerdo con su posición?
n) ¿Qué condiciones deben cumplir dos ángulos para ser consecutivos o adyacentes?
o) ¿Cuándo dos ángulos forman un par lineal?
p) ¿Cuándo dos ángulos son opuestos por el vértice?
q) ¿Qué son ángulos complementarios? ¿Y suplementarios?
r) ¿Qué propiedad cumplen dos ángulos que forman un par lineal?
s) ¿Qué propiedad cumplen dos ángulos opuestos por el vértice?

2. Completa en tu cuaderno:

a) El AXIOMA DE LA REGLA establece que: ______________________________

b) Si un punto C está entre A y B entonces: ______________________________

c) El AXIOMA DEL TRANSPORTADOR establece que: ______________________________
d) Si la suma de las medidas de dos ángulos es 180°, entonces los ángulos son______________________
e) La ________________de un ángulo divide al ángulo en dos ángulos congruentes.
f) Si A, B y C son tres puntos no colineales y D ∈ $\overline{AC}$, entonces m (∡ ADB) + m (∡ BDC)=_______.
g) Si $\widehat{\alpha}$ y $\widehat{\beta}$ forman un par lineal y $m\widehat{\alpha}$= 55° entonces $m\widehat{\alpha}$=____________.
h) Si dos ángulos son complementarios, cada uno es un ángulo ____________.
i) Si dos ángulos son congruentes, entonces sus suplementos son _________.
j) Si los lados no comunes de dos ángulos consecutivos son semirrectas opuestas, entonces los ángulos forman__________________.
k) El ángulo cuya medida es igual a la de su suplemento es un ángulo___________.

3. Analiza las siguientes proposiciones y escribe una V si el enunciado es siempre verdadero o una F si el enunciado no siempre es verdadero.

a) Una semirrecta puede medir 50 cm de longitud. ( )
b) Dos ángulos son complementarios cuando la suma de sus medidas es igual a 90°. ( )
c) Dos ángulos opuestos por el vértice son congruentes. ( )
d) Dos ángulos congruentes son opuestos por el vértice. ( )
e) Todo ángulo posee una única bisectriz. ( )
f) La medida de un ángulo depende de la longitud de sus lados. ( )
g) Si a un ángulo obtuso se le traza la bisectriz, resultan dos ángulos agudos. ( )
h) Cuando se duplica un ángulo agudo, se forma un ángulo obtuso. ( )
i) Los lados de un ángulo llano son semirrectas opuestas. ( )
j) Dos ángulos adyacentes siempre forman un par lineal. ( )

4. Halla la distancia entre los pares de puntos cuyas coordenadas se dan.

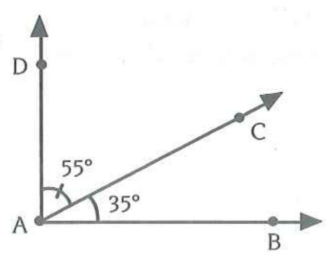
a) 3 y 12 b) – 5 y 13 c) 9 y – 2 d) – 3 y – 7

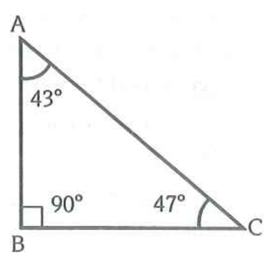
5. Los puntos A, B y C son colineales. Si se dan las longitudes de ciertos segmentos, ¿qué punto está entre los otros dos?

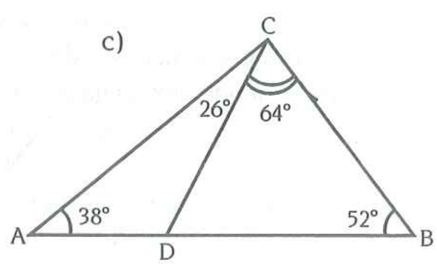
a) $|\overline{AC}| = 5$, $|\overline{CB}| = 9$, $|\overline{AB}| = 14$
b) $|\overline{BA}| = 9$, $|\overline{BC}| = 12$, $|\overline{AC}| = 3$
c) $|\overline{AC}| = 9{,}7$, $|\overline{CB}| = 7{,}2$, $|\overline{AB}| = 16{,}9$

6. Si A, B y C son puntos colineales, sus coordenadas son a, b y c respectivamente tales que b = – 7 , c=13 y A es el punto medio de $\overline{BC}$, halla la coordenada a del punto A.

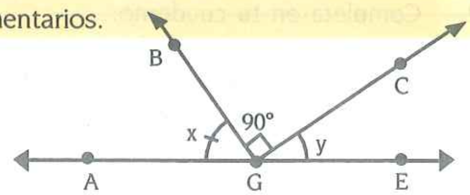
7. Nombra un par de ángulos complementarios en cada una de las figuras siguientes:

a) 

b) 

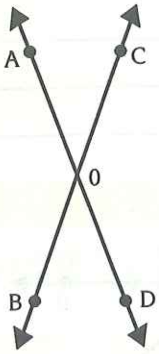
c) 

8. Explica por qué los ángulos $\widehat{x}$ y $\widehat{y}$ son ángulos complementarios.

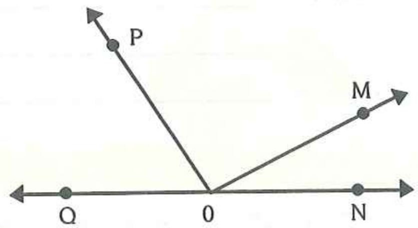


9. Nombra ángulos que forman un PAR LINEAL en cada una de las figuras siguientes.

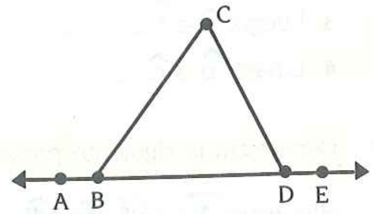
a)



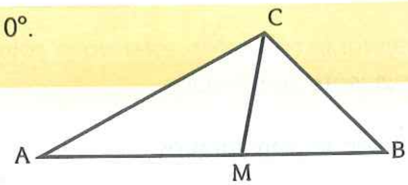
b)



c)



10. En la figura, $\overline{CM}$ es la bisectriz del $\widehat{C}$ y m$\widehat{C}$ = 110°.
¿Cuál es la medida del ∡ BCM?



11. Tenemos dos ángulos $\widehat{\alpha}$ y $\widehat{\beta}$ tales que $m\widehat{\alpha} = 78°$ y $m\widehat{\beta} = 40°$. Calcula:

a) $m\widehat{\alpha} + m\widehat{\beta}$ b) $m\widehat{\alpha} - m\widehat{\beta}$ c) $m\widehat{\alpha} + 2m\widehat{\beta}$ d) $2m\widehat{\alpha} - 3m\widehat{\beta}$

12. Las medidas de dos ángulos son 34° 15' 23" y 46° 17' 6". Halla el suplemento de la suma de las medidas de estos ángulos.

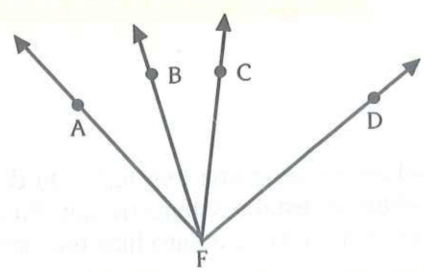
13. La medida de un ángulo es igual a $\frac{2}{3}$ de su complemento. ¿Cuánto mide el ángulo?

14. Dos ángulos forman un par lineal y uno de ellos es el triple del otro. ¿Cuánto mide cada ángulo?

15. Dibuja un ángulo de 82° y traza su bisectriz usando regla y compás.

Los ejercicios 16. y 17. se responden con base en la figura de la derecha.

16. Si m (∡ AFD) = 120° y m (∡ AFC) = 2 m (∡CFD),
halla m (∡ AFC) y m (∡ CFD)



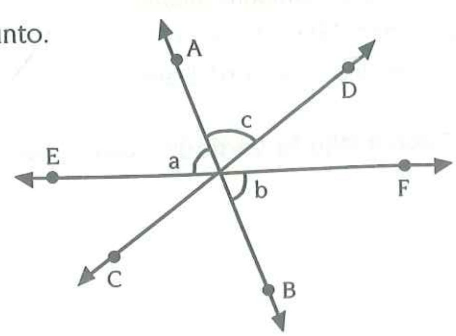
17. Si m (∡ AFC) = 3 m (∡ AFB) , $\overrightarrow{FC}$ es bisectriz
del ∡ AFD y m (∡ AFB) = 16° , halla m (∡ AFD)

18. En la siguiente demostración, escribe al frente de cada paso las razones que lo justifican.

Hipótesis: $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{CD}$ y $\overleftrightarrow{EF}$ se interceptan en un mismo punto.

$\widehat{a} \cong \widehat{c}$

Tesis: $\widehat{b} \cong \widehat{c}$



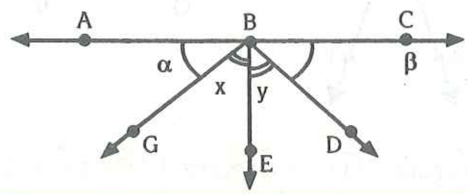
Demostración

1. $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{CD}$ y $\overleftrightarrow{EF}$ se interceptan en un mismo punto; a ≅ c
2. Pero, $\widehat{a}$ y $\widehat{b}$ son opuestos por el vértice........... ____________________
3. Luego, $\widehat{a} \cong \widehat{b}$.. ____________________
4. Luego, $\widehat{b} \cong \widehat{c}$... ____________________

19. Demuestra la siguiente proposición:

Hipótesis: $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BE}$, $\widehat{\alpha} \cong \widehat{\beta}$

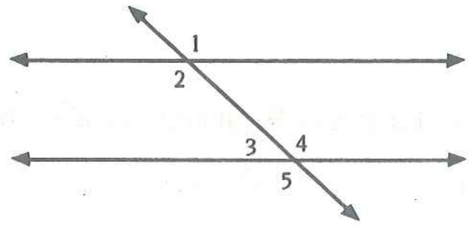
Tesis: $\widehat{x} \cong \widehat{y}$



20. Demuestra la siguiente proposición

Hipótesis: $\widehat{2}$ y $\widehat{3}$ son suplementarios

Tesis: $\widehat{1} \cong \widehat{4}$



21. Demuestra la siguiente proposición: "Las bisectrices de dos ángulos que forman un par lineal son perpendiculares".

PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS SABER

Sebastián tiene una ferretería. Un día se dio cuenta que le habían robado un juego de herramientas. Sebastián estaba seguro de que Amparo, Daniel, Inés o Carlos habían robado las herramientas. Cada persona en su momento hizo una declaración, pero sólo una de las cuatro declaraciones era verdadera.

Amparo dijo: "Yo no robé las herramientas"

Daniel dijo: "Amparo miente"

Inés dijo: "Daniel miente"

Carlos dijo: "Las robó Daniel"

¿Quién dijo la verdad? ¿Quién robó las herramientas?

Núcleo Temático

5

PARALELISMO Y PERPENDICULARIDAD

LOGRO GENERAL

Identificar y deducir las propiedades de los ángulos especiales obtenidos al interceptar dos rectas paralelas con una transversal.

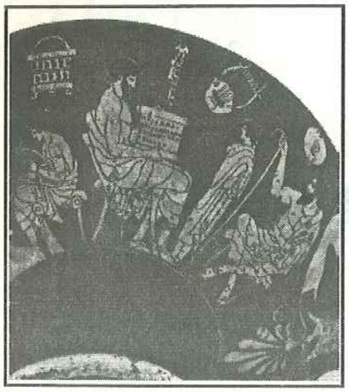
DIMENSIONES

LOGROS ESPECÍFICOS	INDICADORES DE LOGRO
Corporal: • Mejorar la habilidad en el manejo de instrumentos de medida como: regla, escuadra y compás.	• Traza rectas paralelas y perpendiculares.
Comunicativa: • Enunciar las propiedades relativas a los ángulos especiales al interceptar dos paralelas con una transversal. • Explicar con sus propias palabras la solución de un problema de ángulos especiales.	• Describe oralmente el procedimiento para hallar ángulos especiales obtenidos cuando se cortan dos rectas paralelas por una transversal. • Describe el proceso para trazar paralelas y perpendiculares.
Cognitiva: • Identificar los ángulos alternos internos, alternos externos, ángulos correspondientes y colaterales. • Identificar rectas paralelas y perpendiculares. • Enunciar las propiedades de dos rectas paralelas cortadas por una transversal.	• Dadas dos rectas cortadas por una transversal, identifica los ángulos alternos internos, los ángulos alternos externos y los ángulos correspondientes.
Estética: • Trazar rectas paralelas cortadas por una transversal.	• Pinta de un mismo color los ángulos especiales: alternos internos, alternos externos y los correspondientes.
Ética-Actitudinal: • Valorar el trabajo en grupo.	• Demuestra interés por aprender.

EVALUACIÓN

ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS

5.1 HISTORIA DE LA GEOMETRÍA (5)



Mucho tiempo antes de comenzar la Era Cristiana, la actividad intelectual de las civilizaciones que se desarrollaron en Egipto y Mesopotamia había perdido impulso, pero al mismo tiempo que declinaba el saber en los valles de los grandes ríos, comenzaron a surgir vigorosamente nuevas culturas a todo lo largo de las costas del mar Mediterráneo. A este nuevo período cultural, que se extiende aproximadamente desde el 800 a. de C. hasta el 800 d. de C., se le denomina a veces como la Edad Talásica (es decir, como la "edad del mar"). Para indicar de dónde provenía la fuente de la nueva inspiración, a la primera parte de la Edad Talásica se le denomina **era helénica**, y por ello a las culturas más antiguas se les conoce también cómo prehelénicas. Los griegos actuales aún siguen llamándose a sí mismo helenos, continuando así la tradición del nombre utilizado por sus lejanos antepasados que se establecieron a lo largo de las costas del Mediterráneo.

Con la aparición, en el siglo VI a. de C., de Tales de Mileto (624-548 a. de C.) y Pitágoras de Samos (580-500 a. de C.) comienza una era de gran esplendor de la matemática griega. Sin embargo, es necesario advertir que tanto Tales como Pitágoras son figuras un tanto indefinidas históricamente y de su aporte intelectual no nos ha quedado ninguna obra maestra de ninguno de los dos. No obstante, las primeras exposiciones griegas de la historia de la matemática, que desgraciadamente no han llegado hasta nosotros, atribuían a Tales y a Pitágoras un cierto número de descubrimientos matemáticos muy concretos. Por la ubicación geográfica de sus ciudades de origen, Tales y Pitágoras tuvieron la ventaja de poder viajar a los centros del antiguo saber y adquirir allí información de primera mano relativa a la astronomía y a la matemática. Se afirma que en Egipto aprendieron geometría, y en Babilonia, bajo el ilustrado rey Caldeo Nabucodonosor, Tales tomó contacto con las tablas y otros instrumentos astronómicos.

EJERCICIO 5.1

COMPRENSIÓN DE LECTURA. Explicación: Lee nuevamente el texto anterior y, luego, encierra en un círculo la letra que corresponda a la respuesta correcta.

1. La idea central del texto anterior es:

   a) Surgimiento y esplendor de la matemática griega.
   b) Decadencia de la ciencia en Egipto y Mesopotamia.
   c) "La Edad del Mar" marca el esplendor de la ciencia en Egipto y Mesopotamia.
   d) Viajes de Tales y Pitágoras a través de Asia y Africa.

2. Un título apropiado para este escrito podría ser:

   a) La Matemática: una ciencia universal.
   b) Las Costas del Mediterráneo: cuna de la matemática antigua.
   c) La Matemática a través de la historia.
   d) Grandes aportes griegos a las ciencias matemáticas.

3. Uno de los siguientes enunciados contradice el texto:

   a) La Edad Talásica estuvo íntimamente relacionada con el Mediterráneo
   b) No se conocen verdaderos tratados matemáticos ni de Pitágoras ni de Tales

c) Tales y Pitágoras conocieron de cerca los saberes egipcios y babilónicos.
d) La actual cultura griega prescinde del adjetivo helénico cuando tienen que referirse a ellos mismos.

4. Un sinónimo apropiado para la palabra declinaba que aparece al principio del escrito es:

a) Inclinaba
b) Entregaba
c) Descendía
d) Transfería

5. De Tales y Pitágoras se puede afirmar todo lo siguiente menos:

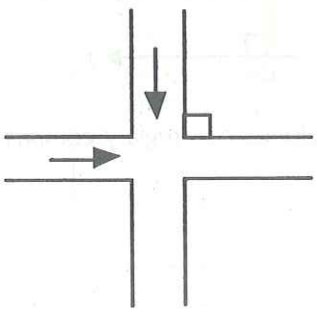
a) No hay mucha claridad sobre sus vidas y sobre sus trabajos.
b) Dejaron, a la posteridad, grandes tratados matemáticos.
c) Viajaron por Egipto y Babilonia y conocieron allí, trabajos matemáticos.
d) Contribuyeron al esplendor de la ciencia helénica.

5.2 RECTAS Y PLANOS PERPENDICULARES

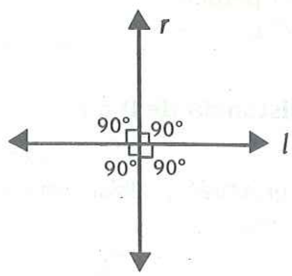
- El mundo que nos rodea nos proporciona numerosos ejemplos de rectas y planos perpendiculares. Algunos de estos ejemplos se emplean en las siguientes definiciones.

Situación de la vida real

El cruce de dos avenidas



Modelo geométrico



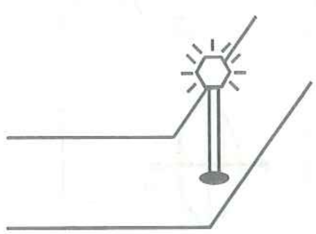
$\overleftrightarrow{l}$ es perpendicular a $\overleftrightarrow{r}$
escribimos: $\overleftrightarrow{l} \perp \overleftrightarrow{r}$

Definición de rectas perpendiculares

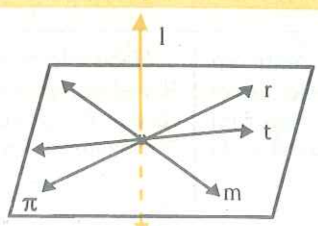
Dos rectas son PERPENDICULARES si al cortarse forman ángulos rectos.

Situación de la vida real

Una lámpara colocada en la parte superior de un poste vertical sobre una acera.



Modelo geométrico



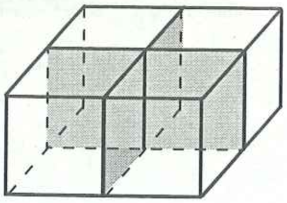
La recta $\overleftrightarrow{l}$ es perpendicular a las rectas $\overleftrightarrow{r}$, $\overleftrightarrow{t}$, $\overleftrightarrow{m}$ que están en el plano π; luego, $\overleftrightarrow{l}$ es perpendicular a $\overleftrightarrow{\pi}$.

Definición de recta perpendicular a un plano

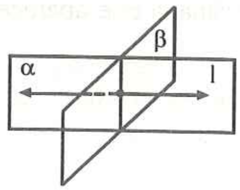
Una RECTA ES PERPENDICULAR A UN PLANO si es perpendicular a cada una de las rectas del plano que cortan a la recta dada.

Situación de la vida real

Un depósito dividido por paredes en cuatro oficinas iguales.



Modelo geométrico



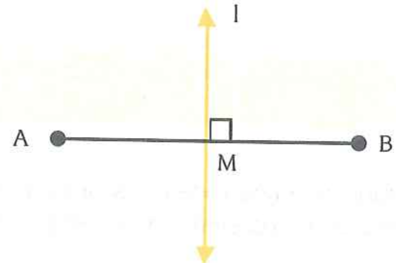
La recta $\overleftrightarrow{l}$ del plano α es perpendicular al plano β; luego, el plano α es perpendicular al plano β.

Definición de planos perpendiculares

Dos PLANOS SON PERPENDICULARES si en uno de ellos hay una recta que es perpendicular al otro plano.

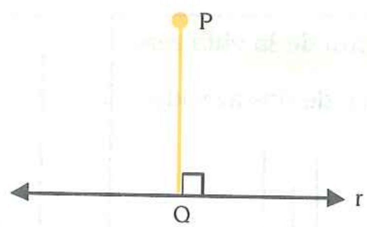
- También definimos antes la MEDIATRIZ de un segmento como la recta perpendicular al segmento que pasa por su punto medio.

$\overleftrightarrow{l}$ **es MEDIATRIZ DE $\overline{AB}$**



- Y definimos la DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA como la longitud del segmento perpendicular trazado desde el punto a la recta.

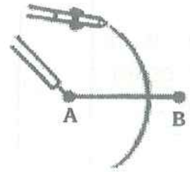
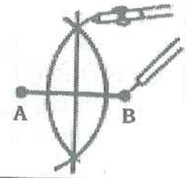
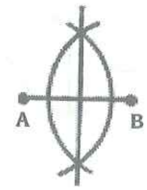
$|\overline{PQ}|$ es la distancia de P a $\overleftrightarrow{r}$.



- Las tres experiencias siguientes nos permitirán realizar algunas construcciones con regla y compás donde intervienen rectas perpendiculares.

PRIMERA EXPERIENCIA

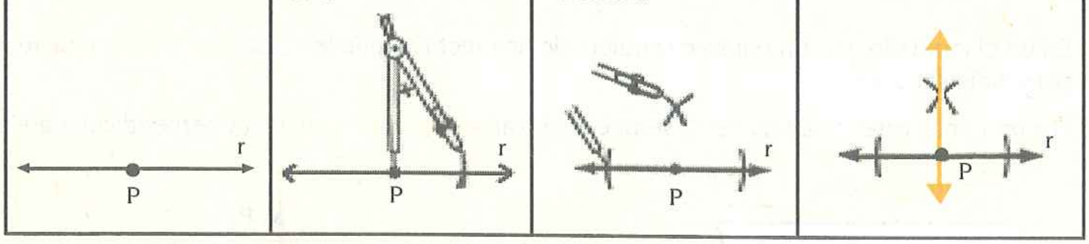
- Realiza en tu cuaderno cada uno de los pasos correspondientes a la **construcción de la mediatriz de un segmento dado.**

1. Dibujamos el segmento $\overline{AB}$ 	2. Haciendo centro en A y tomando en el compás una abertura mayor que la mitad de $\overline{AB}$, trazamos un arco semicircular. 	3. Haciendo centro en B y el compás con la misma abertura que en 2, trazamos otro arco que corte al primero trazado. 	4. Unimos los dos puntos de intersección para completar la construcción de la mediatriz de $\overline{AB}$. 

SEGUNDA EXPERIENCIA

Ahora realiza cada uno de los pasos que te permitirán **construir una perpendicular a una recta que pase por un punto dado de la recta**.

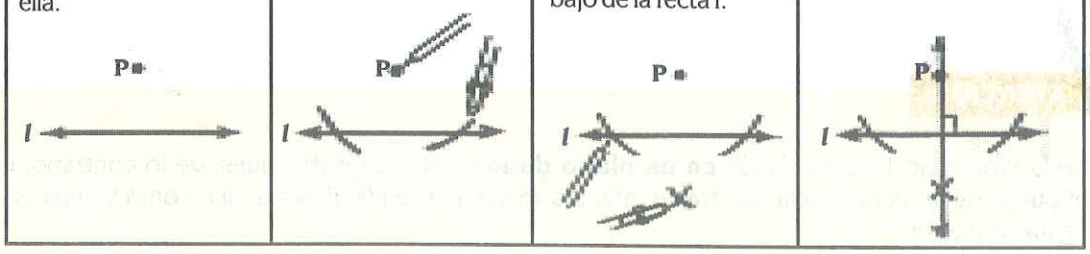
1. Tenemos una recta $\overleftrightarrow{r}$ y un punto P de $\overleftrightarrow{r}$.	2. Trazamos arcos que corten a $\overleftrightarrow{r}$ a cada lado de P.	3. Trazamos dos arcos que se corten arriba de la recta $\overleftrightarrow{r}$.	4. Trazamos la perpendicular a la recta $\overleftrightarrow{r}$ por P.



TERCERA EXPERIENCIA

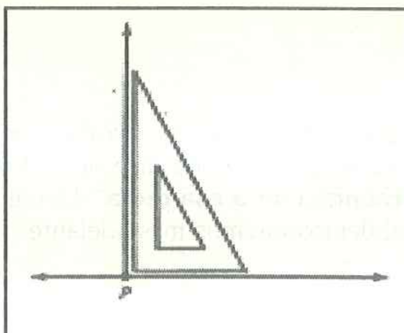
Finalmente realiza cada uno de los pasos que te permitirán **construir una perpendicular a una recta que pase por un punto exterior a ella**.

1. Dados una recta $\overleftrightarrow{l}$ y un punto P fuera de ella.	2. Trazamos dos arcos que corten la recta $\overleftrightarrow{l}$.	3. Trazamos dos arcos que se corten por debajo de la recta $\overleftrightarrow{l}$.	4. Trazamos la perpendicular a la recta $\overleftrightarrow{l}$, por P.

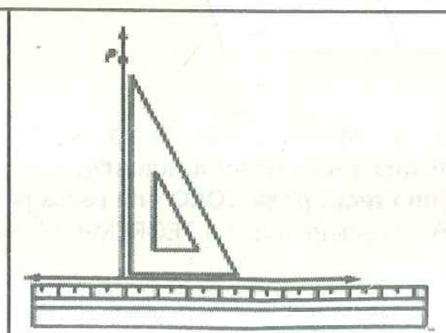


- También podemos trazar rectas perpendiculares a otra recta con la ayuda de una ESCUADRA. Una escuadra es una plantilla de plástico en forma de triángulo rectángulo.

  La figura siguiente nos muestra cómo debemos colocar la escuadra para trazar la perpendicular a una recta por uno de sus puntos o por un punto P fuera de ella.

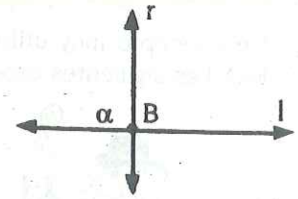


Por un punto de la recta

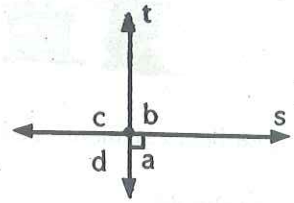


Por un punto exterior a la recta

EJERCICIO 5.2



1. Contesta: Si $\widehat{\alpha} \cong \widehat{\beta}$, ¿qué podemos afirmar acerca de las rectas $\overleftrightarrow{l}$ y $\overleftrightarrow{r}$?



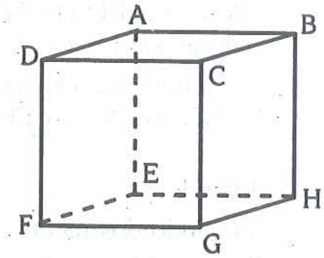
2. Contesta: Si $m\widehat{a} = 90°$, ¿qué podemos afirmar acerca de las rectas $\overleftrightarrow{t}$ y $\overleftrightarrow{s}$ y de los ángulos $\widehat{b}$, $\widehat{c}$ y $\widehat{d}$?

3. Dibuja un segmento $\overline{AB}$ de 8 cm de longitud y traza su mediatriz.

4. Traza una recta $\overleftrightarrow{r}$ y un punto A en ella; luego, usa regla y compás para construir una recta perpendicular a $\overleftrightarrow{r}$ por A.

5. Traza una recta $\overleftrightarrow{l}$ y un punto Q exterior a ella; luego, usa regla y compás para construir una recta perpendicular a $\overleftrightarrow{l}$ y que pase por Q.

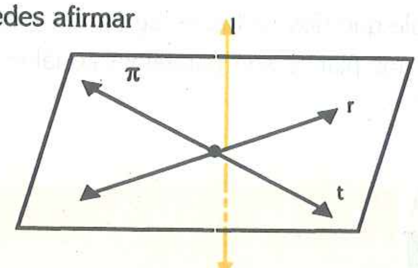
Los ejercicios 6 y 7 se responden con base en la figura de la derecha.



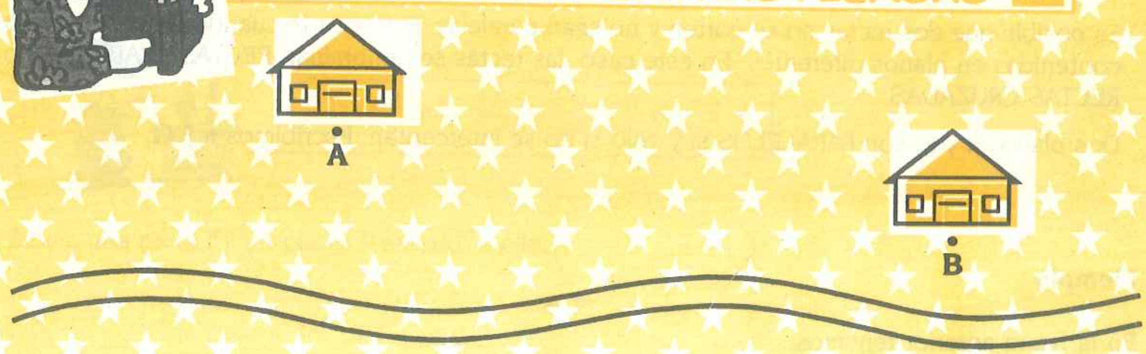
6. Escribe cuatro rectas perpendiculares al plano ABCD.

7. Escribe cuatro pares de planos perpendiculares entre sí.

8. La recta $\overleftrightarrow{l}$ es perpendicular al plano π. ¿Qué puedes afirmar sobre las rectas $\overleftrightarrow{l}$, $\overleftrightarrow{r}$ y $\overleftrightarrow{t}$?



DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 1



RIO

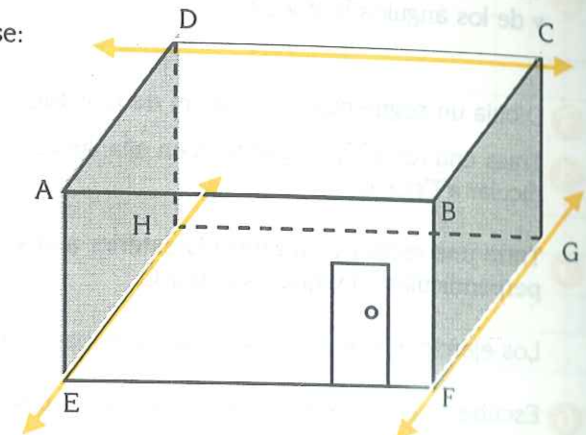
Los propietarios de dos casas A y B desean llevar agua desde un río cercano a ellas, construyendo un tanque junto al río. Cada propietario pagará la instalación de las tuberías que irán del tanque hasta cada casa. El tanque debe ubicarse a la misma distancia de las dos casas. Determina, mediante una construcción, el punto donde debe colocarse el tanque para lograr los dos propósitos.

5.3 RECTAS Y PLANOS PARALELOS

Un concepto muy utilizado tanto en la matemática como en la vida ordinaria es el de PARALELISMO. Las siguientes experiencias están relacionadas con rectas y planos paralelos y sus propiedades.

PRIMERA EXPERIENCIA

- La figura siguiente nos recuerda un salón de clase:



- Contesta:
  - ¿Son las rectas $\overleftrightarrow{EH}$ y $\overleftrightarrow{FG}$ coplanares? ¿Por qué? ¿Se cortan $\overleftrightarrow{EH}$ y $\overleftrightarrow{FG}$? ¿Son $\overleftrightarrow{EH}$ y $\overleftrightarrow{FG}$ rectas paralelas? ¿Por qué?
  - ¿Son las rectas $\overleftrightarrow{DC}$ y $\overleftrightarrow{FG}$ coplanares? ¿Por qué? ¿Se cortan $\overleftrightarrow{DC}$ y $\overleftrightarrow{FG}$? ¿Son $\overleftrightarrow{DC}$ y $\overleftrightarrow{FG}$ rectas paralelas? ¿Por qué?
  - ¿Se interceptan los planos ADHE y BCGF? ¿Y los planos BCGF y EFGH?
- Contesta:
  - ¿Cuándo dos rectas son paralelas?
  - ¿Es posible que dos rectas no se corten y no sean paralelas? Escribe un ejemplo.
  - ¿Cuándo dos planos son paralelos? ¿Cuál es la intersección de dos planos no paralelos?

APRENDAMOS

- Dos rectas $\overleftrightarrow{l}$ y $\overleftrightarrow{r}$ son PARALELAS si y sólo si son coplanares y no se cortan. Para indicar que l y r son paralelas escribimos $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{r}$.
- Es posible que dos rectas no se corten y no sean paralelas. Esto ocurre cuando las rectas están contenidas en planos diferentes. En este caso, las rectas se denominan RECTAS ALABEADAS o RECTAS CRUZADAS.
- Dos planos π y Ω son PARALELOS si y sólo si no se interceptan. Escribimos $\pi \parallel \Omega$.

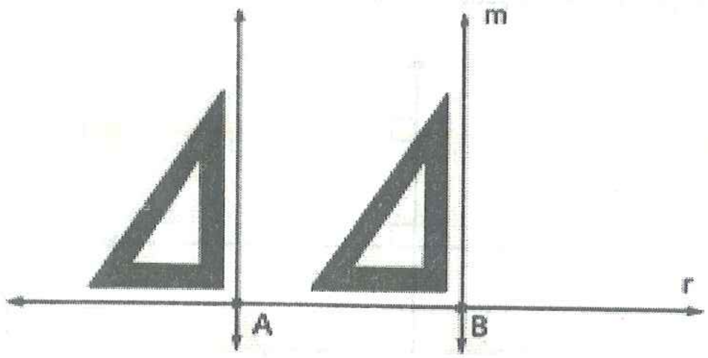
Ejemplo

- En la figura anterior tenemos:
  - $\overleftrightarrow{EH} \parallel \overleftrightarrow{FG}$ porque $\overleftrightarrow{EH}$ y $\overleftrightarrow{FG}$ están contenidas en el mismo plano EFGH y además no se interceptan.
  - $\overleftrightarrow{DC}$ y $\overleftrightarrow{FG}$ son rectas alabeadas ya que no se interceptan y están contenidas en dos planos distintos: DCGH y BCGF.
  - Los planos ADHE y BCGF son paralelos.

- Teniendo en cuenta la misma figura anterior escribe:
  - Otras dos rectas paralelas.
  - Otras dos rectas alabeadas.
  - Otros dos planos paralelos.

SEGUNDA EXPERIENCIA

- Dibuja en tu cuaderno una recta $\overleftrightarrow{r}$ y marca en ella dos puntos distintos A y B.
- Con la ayuda de la escuadra, traza dos rectas coplanares que sean perpendiculares a $\overleftrightarrow{r}$ y que pasen una por A y la otra por B. Compara tu dibujo con la figura siguiente:



- Contesta:
  - ¿Podrán cortarse en un punto las dos perpendiculares que trazaste? ¿Por qué?
  - Si se cortaran, ¿qué propiedad estaríamos contradiciendo?
  - ¿Cómo son entre sí las rectas $\overleftrightarrow{l}$ y $\overleftrightarrow{m}$?

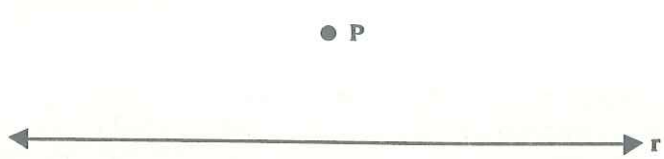
APRENDAMOS

Propiedad 1

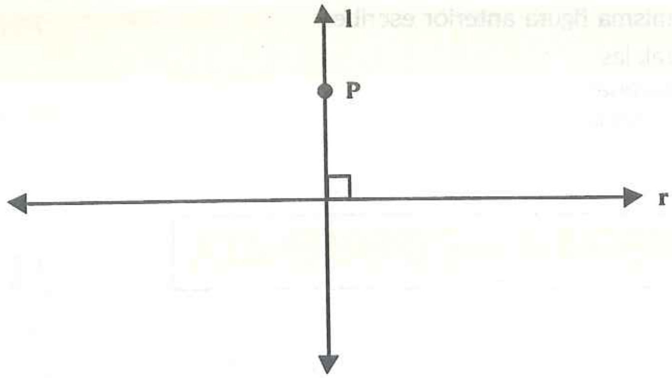
En un plano dado, dos rectas perpendiculares a una tercera son paralelas entre sí.

TERCERA EXPERIENCIA

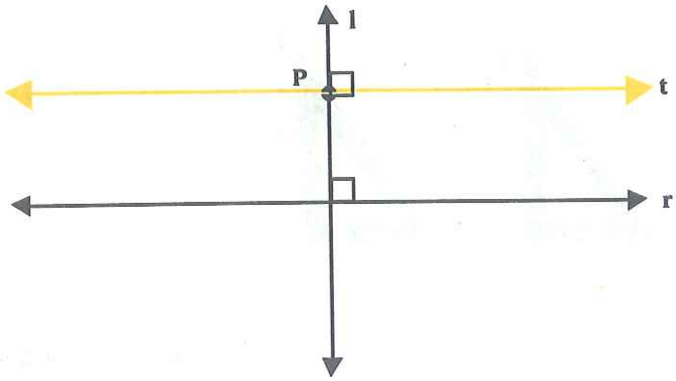
- Dibuja una recta $\overleftrightarrow{r}$ y un punto P exterior a ella.



- Traza con la escuadra la perpendicular a la recta $\overleftrightarrow{r}$ por el punto P y llámala $\overleftrightarrow{l}$. ¿Cuántas perpendiculares puedes trazar? ¿Por qué?



- Ahora dibuja la perpendicular a $\overleftrightarrow{l}$ por P que sea coplanar con $\overleftrightarrow{r}$. ¿Cuántas perpendiculares a $\overleftrightarrow{l}$ y coplanares con $\overleftrightarrow{r}$, que pasen por P puedes trazar? ¿Por qué?



- ¿Cómo son entre sí las rectas $\overleftrightarrow{t}$ y $\overleftrightarrow{r}$? ¿Por qué?
- Contesta: ¿Por un punto exterior a una recta cuántas rectas paralelas a ésta podemos trazar?

APRENDAMOS

Propiedad 2

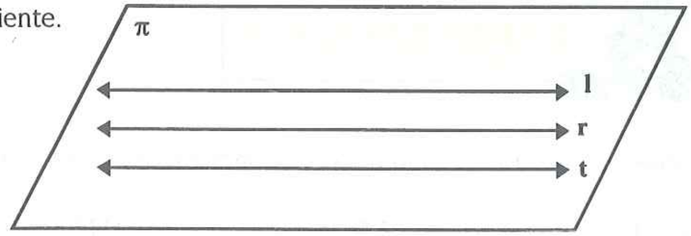
Por un punto exterior a una recta pasa una y sólo una recta paralela a la recta dada.

¡ATENCIÓN!

La propiedad anterior es un axioma denominado AXIOMA DE LAS PARALELAS y es la base de la GEOMETRÍA EUCLIDIANA. Durante siglos, los matemáticos intentaron demostrar que este axioma era un teorema; sin embargo, tales intentos fracasaron una y otra vez. A principios del siglo XIX, tres matemáticos, Karl Friedrich Gauss (1777-1855), Janos Bolyai (1802-1860) y Nicolai Y. Lobachevsky (1793-1856), trabajando independientemente, intentaron separar el axioma de las paralelas del sistema euclidiano de axiomas y probar que era un teorema. Con tal fin, utilizaron el método indirecto, pero en lugar de llegar a una contradicción, encontraron que esta suposición producía un conjunto totalmente nuevo de teoremas; es decir, una geometría totalmente nueva. Este importante descubrimiento dio lugar a lo que hoy conocemos con el nombre de GEOMETRÍAS NO EUCLIDIANAS.

CUARTA EXPERIENCIA

- Dibuja en tu cuaderno una recta $\overleftrightarrow{l}$ cualquiera.
- Ahora traza una recta $\overleftrightarrow{r}$ paralela a $\overleftrightarrow{l}$.
- A continuación traza otra recta $\overleftrightarrow{t}$, distinta de $\overleftrightarrow{r}$, que también sea paralela a $\overleftrightarrow{l}$ y tal que todas estén en el mismo plano.
- Compara tu dibujo con el siguiente.



¿Son parecidos este dibujo y el tuyo?

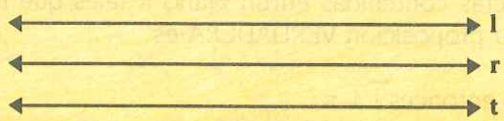
- Contesta: ¿Son paralelas entre sí las rectas $\overleftrightarrow{r}$ y $\overleftrightarrow{t}$? ¿Qué pasaría si suponemos que $\overleftrightarrow{r} \nparallel \overleftrightarrow{t}$ ($\nparallel$ se lee: **"no es paralela a"**)?
- Esta experiencia nos permite escribir la siguiente propiedad de las rectas paralelas:

APRENDAMOS

Propiedad 3

Si dos rectas son paralelas a una tercera, entonces son paralelas entre sí; es decir:

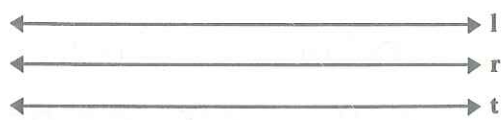
Si $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{r}$ y $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{t}$ entonces $\overleftrightarrow{r} \parallel \overleftrightarrow{t}$



- Para probar que esta generalización es verdadera vamos a demostrarla utilizando el método indirecto.

HIPÓTEIS: $\overleftrightarrow{l}$, $\overleftrightarrow{r}$ y $\overleftrightarrow{t}$ son tres rectas distintas; $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{r}$ y $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{t}$

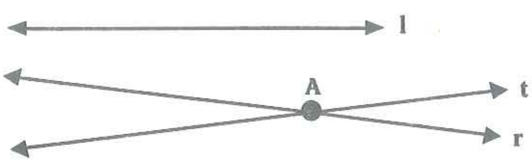
TESIS: $\overleftrightarrow{r} \parallel \overleftrightarrow{t}$



Demostración

Escribe al frente de cada paso la razón que lo justifica.

1. Supongamos que $\overleftrightarrow{r} \nparallel \overleftrightarrow{t}$ .... ______________________________
2. Luego, $\overleftrightarrow{r}$ y $\overleftrightarrow{t}$ se cortan en un punto. Llamémoslo A ..... ______________________________



3. Pero, $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{r}$ y $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{t}$ .... ______________________________

4. Luego, las rectas $\overleftrightarrow{t}$ y $\overleftrightarrow{r}$ son dos rectas distintas que pasan por A y son paralelas a $\overleftrightarrow{l}$ .... ________________________

5. La proposición 4. contradice el axioma de las paralelas .... ________________________

6. Esta contradicción se originó al suponer que $\overleftrightarrow{r} \nparallel \overleftrightarrow{t}$. Luego, esta suposición es FALSA y, en consecuencia, $\overleftrightarrow{r} // \overleftrightarrow{t}$. Esto era lo que se quería demostrar. .... ________________________

EJERCICIO 5.3

En los ejercicios 1. a 6. subraya la letra correspondiente a la UNICA respuesta correcta.

1 Si A es un punto, $\overleftrightarrow{r}$ es una recta y π es un plano, entonces la proposición que siempre es verdadera es:

a) Si $A \in \overleftrightarrow{r}$ y $\overleftrightarrow{r} \not\subset \pi$ entonces $A \notin \pi$.
b) Si $A \in \overleftrightarrow{r}$ y $\overleftrightarrow{r} \nparallel \pi$ entonces $A \in \pi$
c) Si $A \in \overleftrightarrow{r}$ y $\overleftrightarrow{r} \subset \pi$ entonces $A \in \pi$
d) Ninguna de las anteriores.

2 Si $\overleftrightarrow{r}$ y $\overleftrightarrow{s}$ son dos rectas y P es un punto, entonces la proposición que siempre es verdadera es:

a) Si $\overleftrightarrow{r} // \overleftrightarrow{s}$ entonces $\overleftrightarrow{r} \cap \overleftrightarrow{s} = \emptyset$
b) Si $\overleftrightarrow{r} \cap \overleftrightarrow{s} = \emptyset$ entonces $\overleftrightarrow{r} // \overleftrightarrow{s}$
c) Si $\overleftrightarrow{r} \cap \overleftrightarrow{s} = \emptyset$ entonces $\overleftrightarrow{r}$ y $\overleftrightarrow{s}$ son perpendiculares
d) Si $\overleftrightarrow{r} // \overleftrightarrow{s}$ entonces $\overleftrightarrow{r} \cap \overleftrightarrow{s} = \{P\}$
e) Ninguna de las anteriores.

3 Sean $\overleftrightarrow{m}$ y $\overleftrightarrow{n}$ dos rectas contenidas en un plano π tales que $\overleftrightarrow{m}$ y $\overleftrightarrow{n}$ se cortan en un punto A. De acuerdo con esto la proposición VERDADERA es:

a) Si $\overleftrightarrow{l} \perp \overleftrightarrow{m}$ y $\overleftrightarrow{l} \perp \overleftrightarrow{n}$, entonces $\overleftrightarrow{l} \perp \pi$
b) Si $\overleftrightarrow{m} \perp \overleftrightarrow{n}$ y $\overleftrightarrow{l} \perp \pi$ entonces $\overleftrightarrow{m} \perp \overleftrightarrow{l}$ y $\overleftrightarrow{n} \perp \overleftrightarrow{l}$
c) Si $\overleftrightarrow{l} \perp \overleftrightarrow{m}$ y $\overleftrightarrow{l} \perp \overleftrightarrow{n}$ entonces $\overleftrightarrow{l} \subset \pi$
d) Si $\overleftrightarrow{l} \perp \overleftrightarrow{m}$ y $\overleftrightarrow{l} \perp \pi$, entonces $\overleftrightarrow{l} \perp \overleftrightarrow{n}$

4 Si $\overleftrightarrow{r}$, $\overleftrightarrow{s}$ y $\overleftrightarrow{t}$ son rectas y π es un plano, entonces la proposición FALSA es:

a) Si $\overleftrightarrow{r} // \overleftrightarrow{t}$, $\overleftrightarrow{s} // \overleftrightarrow{t}$ y $\overleftrightarrow{r}$ y $\overleftrightarrow{s}$ son distintas entonces $\overleftrightarrow{r} // \overleftrightarrow{s}$.
b) Si $\overleftrightarrow{s} \subset \pi$ y $\overleftrightarrow{r} // \overleftrightarrow{s}$ entonces $\overleftrightarrow{r} \subset \pi$ o $\overleftrightarrow{r} // \pi$.
c) Si $\overleftrightarrow{s} \subset \pi$, $\overleftrightarrow{r} // \overleftrightarrow{s}$ y $\overleftrightarrow{r} \not\subset \pi$ entonces $\overleftrightarrow{r} // \pi$.
d) Si $\overleftrightarrow{r} // \pi$, $\overleftrightarrow{r} \subset \Omega$ y $\pi \cap \Omega = \overleftrightarrow{s}$ entonces $\overleftrightarrow{r} // \overleftrightarrow{s}$.
e) Ninguna de las anteriores.

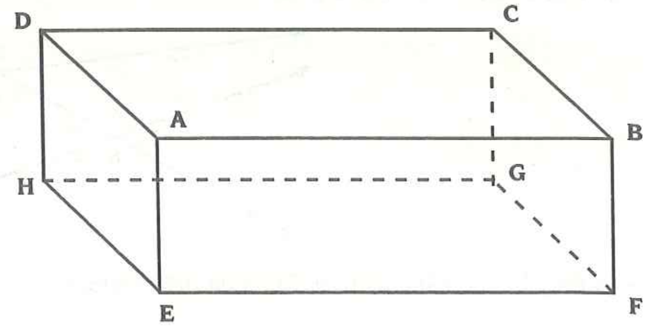
5 La proposición que siempre es verdadera es:

a) Si $\overleftrightarrow{r} // \overleftrightarrow{s}$ y $\overleftrightarrow{r} \cap \pi = \{A\}$ entonces $\overleftrightarrow{s} \cap \pi \neq \phi$
b) Si $\overleftrightarrow{r} // \overleftrightarrow{s}$ y $\overleftrightarrow{r} \subset \pi$ entonces $\overleftrightarrow{s} \subset \pi$.
c) Si $\overleftrightarrow{r} // \overleftrightarrow{s}$ y $\overleftrightarrow{r} \subset \pi$ entonces $\overleftrightarrow{s} // \pi$.
d) Si $\overleftrightarrow{r} // \pi$ entonces $\overleftrightarrow{s} // \pi$.
e) Ninguna de las anteriores es verdadera.

6 Si $\overleftrightarrow{r} \subset \pi$ y $A \in \overleftrightarrow{r}$, entonces es verdad que:

a) Existe una sola recta perpendicular a $\overleftrightarrow{r}$ en el punto A.
b) Existe una sola recta contenida en el plano π, perpendicular a la recta $\overleftrightarrow{r}$ en el punto A.
c) Cualquier recta perpendicular a $\overleftrightarrow{r}$ en el punto A es también perpendicular al plano π.
d) Existen dos rectas distintas perpendiculares al plano π en el punto A.

En los ejercicios 7. a 10. responde VERDADERO o FALSO a cada una de las proposiciones de acuerdo con la figura siguiente:



7 $\overleftrightarrow{DC}$ y $\overleftrightarrow{GF}$ son rectas paralelas.

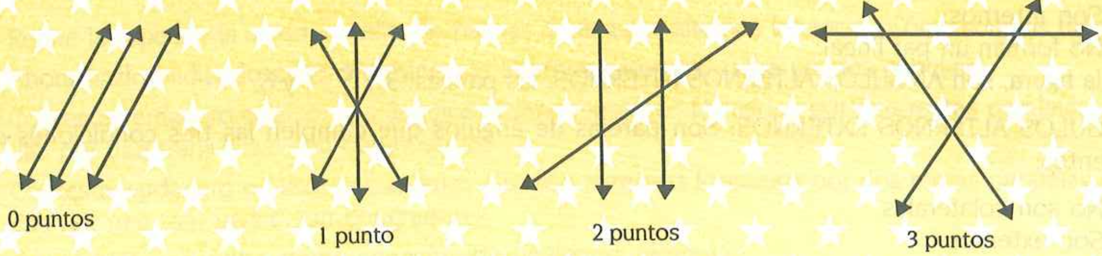
8 $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{HG}$ son rectas paralelas.

9 ADHE y FGCB son planos paralelos.

10 $\overleftrightarrow{EH}$ y $\overleftrightarrow{DC}$ son rectas alabeadas.

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 2

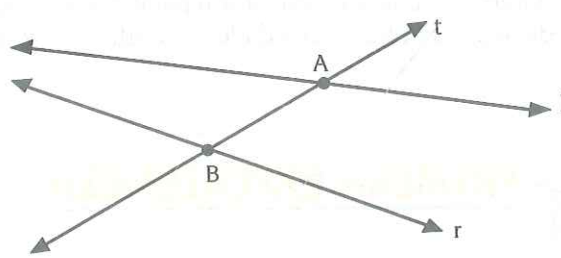
El número de puntos de intersección que puedes obtener con un número dado de rectas depende de las posiciones de unas con otras. Por ejemplo, con tres rectas podemos determinar:



Determina si puedes ubicar cuatro rectas para determinar 0 puntos, 1 punto, 2 puntos, 3 puntos, 4 puntos,..., más de 6 puntos de intersección.

5.4 RECTAS PARALELAS Y ÁNGULOS ESPECIALES

- Fíjate bien en la figura siguiente. Allí la recta $\overleftrightarrow{t}$ intercepta a dos rectas coplanares $\overleftrightarrow{l}$ y $\overleftrightarrow{r}$, a cada una en un punto distinto: a la recta $\overleftrightarrow{l}$ en A y a la recta $\overleftrightarrow{r}$ en B.

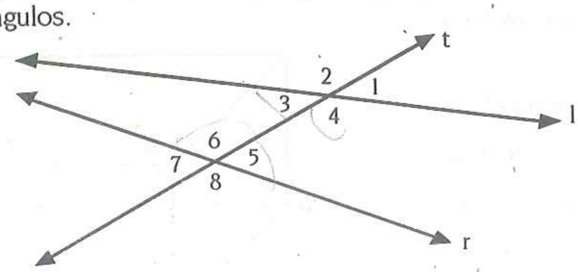


Cuando esto ocurre decimos que la recta $\overleftrightarrow{t}$ es una TRANSVERSAL de las rectas $\overleftrightarrow{l}$ y $\overleftrightarrow{r}$. Por lo tanto:

APRENDAMOS

Una TRANSVERSAL es una recta que intercepta a dos o más rectas coplanares, en puntos distintos.

- En la misma figura vemos que cuando dos rectas coplanares son cortadas o interceptadas por una transversal, se forman 8 ángulos.



Estos 8 ángulos se clasifican de la siguiente manera:

1. ANGULOS COLATERALES: Son los que están ubicados a un mismo lado de la transversal. En la figura, son ANGULOS COLATERALES: $\hat{1}$, $\hat{4}$, $\hat{5}$ y $\hat{8}$, por una parte, y $\hat{2}$, $\hat{3}$, $\hat{6}$ y $\hat{7}$, por la otra.
2. ANGULOS INTERNOS: Son los ángulos $\hat{3}$, $\hat{4}$, $\hat{5}$ y $\hat{6}$ de la figura.
3. ANGULOS EXTERNOS: Son los ángulos $\hat{1}$, $\hat{2}$, $\hat{7}$ y $\hat{8}$ de la figura.
4. ANGULOS ALTERNOS INTERNOS: Son parejas de ángulos que cumplen las tres condiciones siguientes:
   a) No son colaterales;
   b) Son internos;
   c) No forman un par lineal.
   En la figura, son ANGULOS ALTERNOS INTERNOS, las parejas: $\hat{3}$ y $\hat{5}$; $\hat{4}$ y $\hat{6}$.
5. ANGULOS ALTERNOS EXTERNOS: Son parejas de ángulos que cumplen las tres condiciones siguientes:
   a) No son colaterales.
   b) Son externos.
   c) No forman un par lineal.

   En la figura, son ANGULOS ALTERNOS EXTERNOS las parejas: $\hat{1}$ y $\hat{7}$; $\hat{2}$ y $\hat{8}$.
6. ANGULOS CORRESPONDIENTES: Son parejas de ángulos que cumplen las tres condiciones siguientes:
   a) Son colaterales.
   b) Uno es interno y el otro es externo.
   c) No forman un par lineal.

   En la figura, son ANGULOS CORRESPONDIENTES las parejas: $\hat{1}$ y $\hat{5}$; $\hat{4}$ y $\hat{8}$; $\hat{2}$ y $\hat{6}$; $\hat{3}$ y $\hat{7}$.

- Cuando las rectas que intercepta una transversal son paralelas, los ángulos alternos internos, alternos externos y correspondientes cumplen propiedades importantes. Vamos a estudiarlas:

PRIMERA EXPERIENCIA

- Dibuja dos rectas paralelas $\overleftrightarrow{l}$ y $\overleftrightarrow{r}$ e interceptalas con una recta transversal $\overleftrightarrow{t}$.
- Nombra una pareja de ángulos correspondientes y mídelos con el transportador. ¿Cómo son sus medidas?

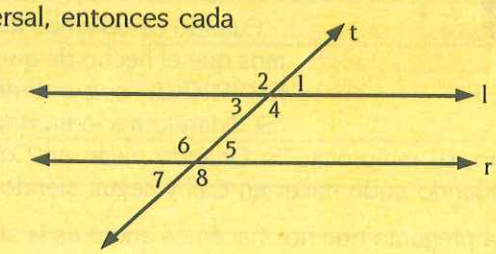
- Nombra otra pareja de ángulos correspondientes y mídelos con el transportador. ¿Qué puedes concluir?
- Verdadero o falso: **Los ángulos correspondientes formados por dos rectas paralelas interceptadas por una transversal son congruentes.**
- El siguiente AXIOMA resume todas las observaciones anteriores:

APRENDAMOS

Axioma 12: AXIOMA DE LOS ANGULOS CORRESPONDIENTES

Si dos rectas paralelas son cortadas por una transversal, entonces cada pareja de ángulos correspondientes es congruente.

Si $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{r}$ entonces: $\begin{cases} \hat{1} \cong \hat{5} \\ \hat{4} \cong \hat{8} \\ \hat{2} \cong \hat{6} \\ \hat{3} \cong \hat{7} \end{cases}$



SEGUNDA EXPERIENCIA

- Repite la experiencia anterior midiendo parejas de ángulos alternos internos. ¿Cómo son sus medidas?
- Ahora hazlo midiendo parejas de ángulos alternos externos. ¿Qué puedes concluir?
- Contesta verdadero o falso: Los ángulos alternos internos formados por dos rectas paralelas cortadas por una transversal son congruentes.
- Contesta verdadero o falso: Los ángulos alternos externos formados por dos rectas paralelas cortadas por una transversal son congruentes.
- Esta experiencia nos permite enunciar los siguientes teoremas:

APRENDAMOS

TEOREMA 1: Si dos rectas paralelas son cortadas por una transversal, entonces cada pareja de ángulos alternos internos es congruente.

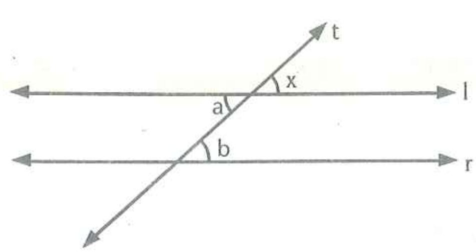
TEOREMA 2: Si dos rectas paralelas son cortadas por una transversal, entonces cada pareja de ángulos alternos externos son congruentes.

- Vamos a demostrar el primero de estos teoremas y dejamos el segundo como ejercicio.

HIPÓTESIS: $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{r}$

$\hat{a}$ y $\hat{b}$ son alternos internos

TESIS: $\hat{a} \cong \hat{b}$



Demostración

Escribe al frente de cada paso, la propiedad (axioma, definición o teorema) que lo justifica.

1. $\overleftrightarrow{l} // \overleftrightarrow{r}$; $\widehat{a}$ y $\widehat{b}$ son alternos internos........................ ______________________
2. $\widehat{a} \cong \widehat{x}$ .... ______________________
3. $\widehat{b} \cong \widehat{x}$ .... ______________________
4. Luego, $\widehat{a} \cong \widehat{b}$.. ______________________

¡ATENCIÓN!

Cuando estudiamos las proposiciones de la forma "si p entonces q" afirmamos que el hecho de que ésta fuera verdadera no nos permitía concluir que su RECÍPROCA "si q entonces p" también lo fuera. Por ejemplo, la proposición "Si Orlando nació en Bogotá entonces es Colombiano" es verdadera; en cambio, su recíproca: "Si Orlando nació en Colombia entonces es Bogotano" no es cierta, ya que Orlando pudo nacer en Cali y seguir siendo Colombiano.

La pregunta que nos hacemos ahora es la siguiente: ¿Serán verdaderas las proposiciones recíprocas de las propiedades que acabamos de estudiar? Por ejemplo, ¿será verdad que: Si dos rectas son cortadas por una transversal de tal manera que un par de ángulos correspondientes son congruentes, entonces las rectas son paralelas?

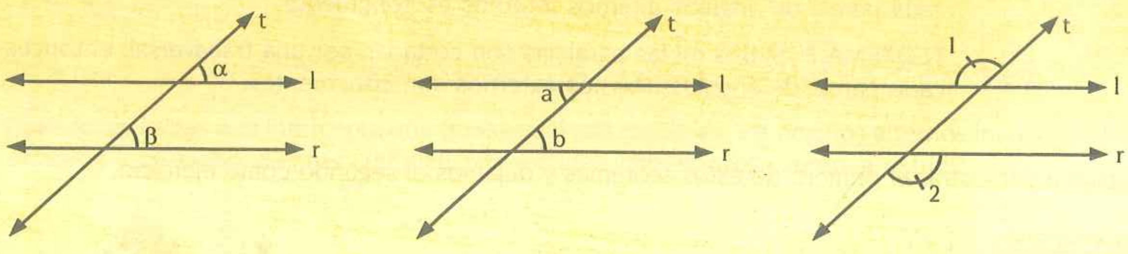
En la siguiente unidad, cuando hayamos adquirido un poco más de conocimientos, demostraremos que tanto esta proposición como las recíprocas de las otras dos, también son verdaderas y dan lugar, por lo tanto, a los siguientes teoremas.

APRENDAMOS

TEOREMA: Si dos rectas son cortadas por una transversal de tal manera que un par de ángulos correspondientes son congruentes, entonces las rectas son paralelas.

TEOREMA: Si dos rectas son cortadas por una transversal de tal manera que un par de ángulos alternos internos son congruentes, entonces las rectas son paralelas.

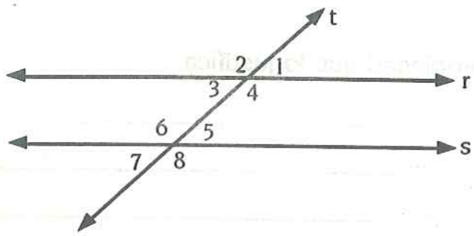
TEOREMA: Si dos rectas son cortadas por una transversal de tal manera que un par de ángulos alternos externos son congruentes, entonces las rectas son paralelas.



Si $\widehat{\alpha} \cong \widehat{\beta}$ entonces $\overleftrightarrow{l} // \overleftrightarrow{r}$ Si $\widehat{a} \cong \widehat{b}$ entonces $\overleftrightarrow{l} // \overleftrightarrow{r}$ Si $\widehat{1} \cong \widehat{2}$ entonces $\overleftrightarrow{l} // \overleftrightarrow{r}$

Ejemplo 1

Hallemos las medidas de los ángulos de la figura siguiente sabiendo que $\overleftrightarrow{r} // \overleftrightarrow{s}$ y que $m\widehat{1} = 50°$



Solución
Escribe al frente de cada paso la propiedad que lo justifica.

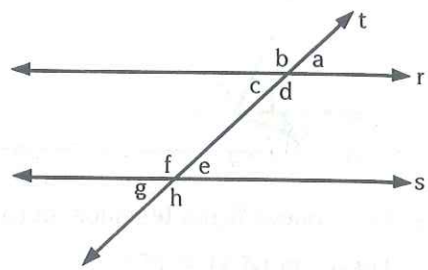
1. $\overleftrightarrow{r} \parallel \overleftrightarrow{s}$ y $m\hat{1}=50°$ .... hipotesis
2. $m\hat{1}=m\hat{3}$ .... Porque son ∧ opuestos por el vertise.
3. Luego, $m\hat{3} = 50°$ .... por $\hat{1} = 50°$ y su colateral $\hat{3}$ debe medir lo mismo
4. Ahora bien, $m\hat{1} + m\hat{2} = 180°$ .... si, ya que son angulos suplementarios y los dos miden 180°
5. Luego, $m\hat{2} = 180° - 50° = 130°$ .... si, ya que son suplementarios y la resta da el $\hat{2}$.
6. Pero, $m\hat{2}=m\hat{4}$ .... por que son ∧ opuestos por el vertise
7. Luego, $m\hat{4} = 130°$ .... si, porque la resta de $\hat{3} - 180° = 130° \to \hat{4}$
8. También, $m\hat{3} = m\hat{5}$ .... si, porque son ∧ alternos internos
9. Luego, $m\hat{5} = 50°$ .... si, porque $\hat{3}$ y $\hat{5}$ son iguales, ambos miden 50°

Las medidas de los demás ángulos se encuentran fácilmente y las dejamos como ejercicio.

Ejemplo 2

Datos: $\overleftrightarrow{r} \parallel \overleftrightarrow{s}$, $\overleftrightarrow{t}$ es una transversal
$m\hat{b} = 5x° + 60°$ y $m\hat{e} = 7x°$

Hallemos: La medida en grados de los 8 ángulos de la figura.



Solución
Escribe al frente de cada paso, la propiedad que lo justifica.

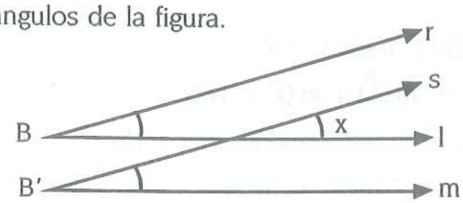
1. $\overleftrightarrow{r} \parallel \overleftrightarrow{s}$, $m\hat{b} = 5x° + 60°$ y $m\hat{e} = 7x°$ ...... hipotesis
2. $m\hat{b} = m\hat{f}$ .... Porque son angulos opuestos por el verti
3. Luego, $m\hat{f} = 5x° + 60°$ .... hambos forma un ∧ de 180°
4. Pero, $m\hat{f} + m\hat{e} = 180°$ .... ya que ambos son de la misma recta
5. Luego, $5x° + 60° + 7x° = 180°$ .... las tres rectas son suplementarias
6. Luego, $5x° + 7x° = 180° - 60°$ .... hay un ∧ de 60° y otro de 120°
7. Luego, $12x° = 120°$ .... significa que la variable faltante e190.
8. Luego, $x° = 120° \div 12 = 10°$ .... significa que la variable $x° = 10°$
9. Luego, $m\hat{b} = 5\,(10°) + 60° = 110°$ ..... significa que el angulo b mide 110°.
10. Luego, $m\hat{e} = 7\,(10°) = 70°$ .... significa que el angulo e = 70°

El lector podrá obtener las medidas de los demás ángulos de la figura.

Ejemplo 3

Datos: $\overleftrightarrow{r} \parallel \overleftrightarrow{s}$ y $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$

Demostremos que: ∡ B ≅ ∡ B'

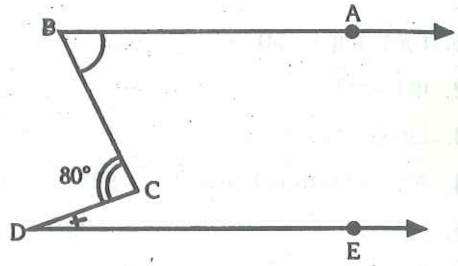


Solución

Escribe al frente de cada paso la propiedad que lo justifica.

1. $\overleftrightarrow{r} \parallel \overleftrightarrow{s}$ y $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$..................................... ____________________________________
2. $\measuredangle B \cong \measuredangle x$.. ____________________________________
3. $\measuredangle x \cong \measuredangle B'$.. ____________________________________
4. Luego, $\measuredangle B \cong \measuredangle B'$.............................. ____________________________________

Ejemplo 4



Datos: $\overrightarrow{BA} \parallel \overrightarrow{DE}$

$m(\measuredangle B) = 60°$ y $m(\measuredangle C) = 80°$

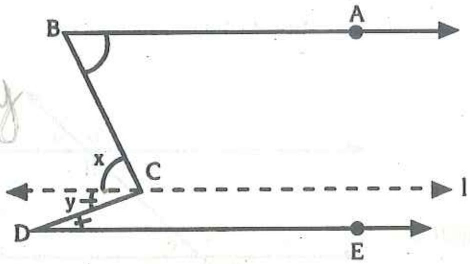
Hallemos: $m(\measuredangle D)$

Solución

Escribe al frente de cada paso la propiedad que lo justifica.

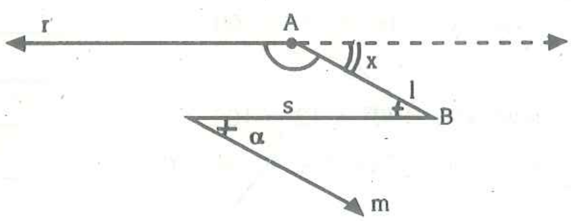
1. $\overrightarrow{BA} \parallel \overrightarrow{DE}$, $m(\measuredangle B) = 60°$ y $m(\measuredangle C) = 80°$........................ ____________________________________
2. Tracemos por el punto C una recta $\overleftrightarrow{l}$ paralela a $\overrightarrow{BA}$.. ____________________________________

hola soy yo



3. De la nueva figura tenemos: $m(\measuredangle B) = m(\measuredangle x)$............ ____________________________________
4. Luego, $m(\measuredangle x) = 60°$.. ____________________________________
5. Y como, $m(\measuredangle C) = m(\measuredangle x) + m(\measuredangle y)$.......................... ____________________________________
6. Entonces, $m(\measuredangle x) + m(\measuredangle y) = 80°$............................. ____________________________________
7. Luego, $m(\measuredangle y) = 80° - m(\measuredangle x) = 80° - 60° = 20°$....... ____________________________________
8. Pero, $m(\measuredangle y) = m(\measuredangle D)$.. ____________________________________
9. Luego, $m(\measuredangle D) = 20°$... ____________________________________

Ejemplo 5



Datos: $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$, $\overleftrightarrow{r} \parallel \overleftrightarrow{s}$

$m(\hat{A}) = 150°$

Hallemos: $m(\hat{\alpha})$

Solución

1. $\overleftrightarrow{r} \parallel \overleftrightarrow{s}$, $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$ y $m(\hat{A}) = 150°$.. ____________________________________
2. Ahora bien, $m(\hat{A}) + m(\hat{x}) = 180°$.................................. ____________________________________
3. Luego, $m(\hat{x}) = 180° - m(\hat{A}) = 180° - 150° = 30°$................ ____________________________________
4. $m(\hat{x}) = m(\hat{B})$ y $m(\hat{B}) = m(\hat{\alpha})$... ____________________________________

5. Luego, $m(\hat{x}) = m(\hat{\alpha})$..

6. Luego, $m(\hat{\alpha}) = 30°$..

EJERCICIO 5.4

1 Teniendo en cuenta la figura de la derecha, clasifica cada pareja de ángulos que te dan.

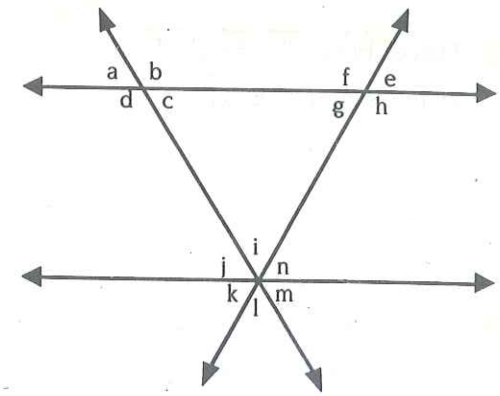
a) $\hat{g}$ y $\hat{k}$ b) $\hat{g}$ y $\hat{n}$

c) $\hat{e}$ y $\hat{k}$ d) $\hat{b}$ y $\hat{d}$

e) $\hat{e}$ y $\hat{h}$ f) $\hat{a}$ y $\hat{m}$

g) $\hat{j}$ y $\hat{c}$ h) $\hat{i}$ y $\hat{l}$

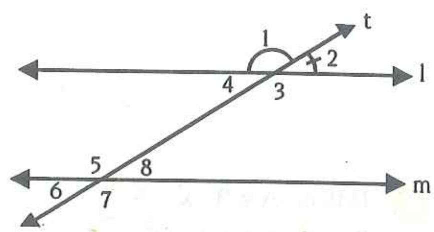
i) $\hat{a}$ y $\hat{c}$ j) $\hat{e}$ y $\hat{g}$



2 Datos: $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$, $\overleftrightarrow{t}$ es una transversal

$m\hat{1} = 120°$

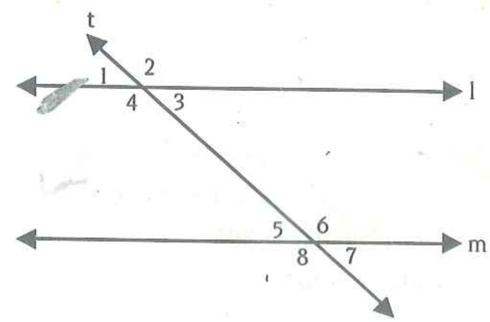
Halla: La medida de los demás ángulos de la figura.



3 Datos: $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$, $\overleftrightarrow{t}$ es una transversal

$m\hat{7} = \frac{1}{5} m\hat{8}$

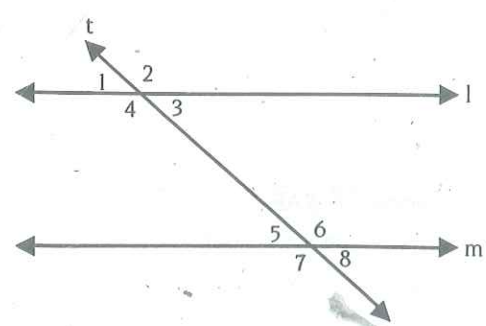
Halla: Las medidas de los otros ángulos de la figura



4 Datos: $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$, $\overleftrightarrow{t}$ es una transversal

$m\hat{1} = 5x°$, $m\hat{6} = 13x°$

Halla: Las medidas en grados de los otros ángulos de la figura.

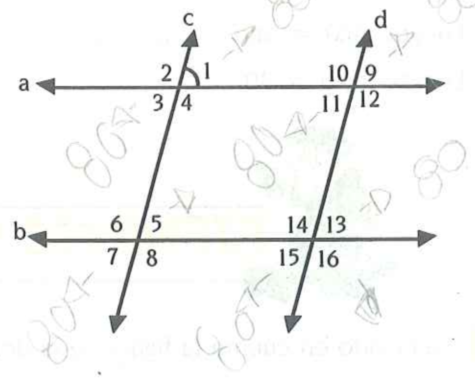


5 Datos: $\overleftrightarrow{a} \parallel \overleftrightarrow{b}$ y $\overleftrightarrow{c} \parallel \overleftrightarrow{d}$

Determina:

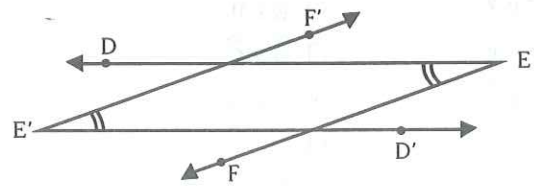
a) Los ángulos congruentes con $\hat{1}$

b) Los ángulos suplementarios con $\hat{1}$



6 Datos: $\overrightarrow{ED} \parallel \overrightarrow{E'D'}$, $\overrightarrow{EF} \parallel \overrightarrow{E'F'}$

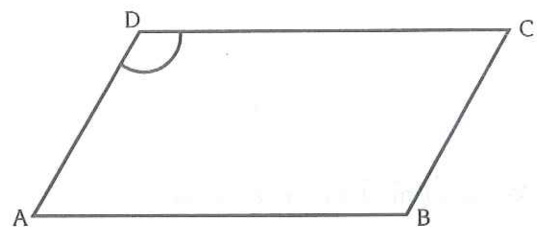
Demuestra que: $\hat{E} \cong \hat{E'}$



7 Datos: $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$, $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

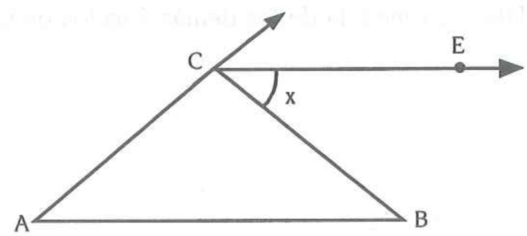
$m(\hat{D}) = 120°$

Halla: $m(\hat{A})$, $m(\hat{B})$ y $m(\hat{C})$



8 Datos: $\hat{A} \cong \hat{B}$, $\hat{x} \cong \hat{A}$

Demuestra que: $\overrightarrow{CE} \parallel \overleftrightarrow{AB}$

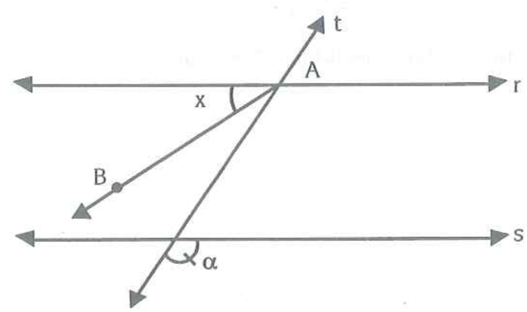


9 Datos: $\overleftrightarrow{r} \parallel \overleftrightarrow{s}$, $\overleftrightarrow{t}$ es una transversal

$\overrightarrow{AB}$ es bisectriz del $\hat{A}$

$m(\hat{x}) = 30°$

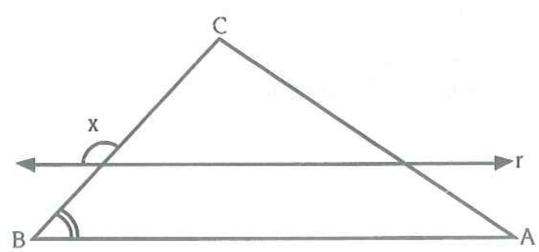
Halla: $m(\hat{\alpha})$



10 Datos: $\overleftrightarrow{r} \parallel \overline{AB}$

$m(\hat{x}) = 130°$

Halla: $m(\hat{B})$



DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 3

Un diseñador usa una regla T para trazar un par de rectas paralelas en una hoja de papel. ¿Cómo se tiene la seguridad de que las rectas son paralelas?

TALLER DE REPASO DE LA UNIDAD 5

1. Contesta en el cuaderno las siguientes preguntas:

   a) ¿Qué son rectas perpendiculares?
   b) ¿Cuándo una recta es perpendicular a un plano?
   c) ¿Cuándo dos planos son perpendiculares?
   d) ¿Cómo se utiliza la escuadra para trazar la recta perpendicular a una recta por un punto exterior a ella? ¿Y por un punto de la misma?
   e) Cuántas rectas perpendiculares a una recta dada se pueden trazar desde un punto exterior a ella? ¿Y cuántas por un punto de la recta dada?
   f) Cuándo dos rectas son paralelas? ¿Cuándo dos rectas son alabeadas? ¿En qué se diferencian dos rectas paralelas de dos rectas alabeadas?
   g) ¿Qué dice el axioma de las paralelas?
   h) ¿Cuándo una recta es transversal de otras dos o más rectas?
   i) ¿Cuántos ángulos se forman cuando dos rectas son cortadas por una transversal? ¿Cómo se llaman estos ángulos?
   j) ¿Cómo son las medidas de dos ángulos correspondientes formados por dos rectas paralelas cortadas por una transversal? ¿Y las de dos ángulos alternos internos? ¿Y las de dos ángulos alternos externos?
   k) Si dos rectas se cortan por una transversal de tal manera que formen parejas de ángulos correspondientes congruentes, ¿cómo son las rectas?

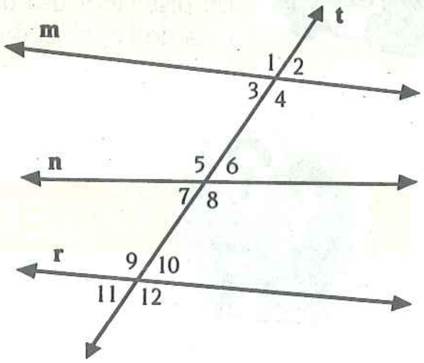
2. Responde verdadero o falso a cada una de las siguientes proposiciones. Justifica tu respuesta.

   a) Dos rectas perpendiculares a una tercera son paralelas entre sí.
   b) Dos rectas paralelas a una tercera son paralelas entre sí.
   c) Si una recta es paralela a un plano, entonces la recta es paralela a todas las rectas contenidas en el plano.
   d) Si $\overleftrightarrow{l}$, $\overleftrightarrow{m}$ y $\overleftrightarrow{n}$ son tres rectas tales que $\overleftrightarrow{l} \perp \overleftrightarrow{m}$ y $\overleftrightarrow{m} \perp \overleftrightarrow{n}$ entonces $\overleftrightarrow{l} \perp \overleftrightarrow{n}$.
   e) Si $\overleftrightarrow{l}$, $\overleftrightarrow{m}$ y $\overleftrightarrow{n}$ son tres rectas coplanares tales que $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$ y $\overleftrightarrow{l} \perp \overleftrightarrow{n}$, entonces $\overleftrightarrow{n} \perp \overleftrightarrow{m}$.
   f) Dos rectas coplanares nunca son alabeadas.
   g) Si dos segmentos son coplanares y no se cortan entonces son paralelos.
   h) Si un plano contiene una de dos rectas paralelas, entonces el plano contiene a la otra recta.
   i) Si se cortan dos rectas mediante una transversal, entonces los ángulos externos son congruentes.

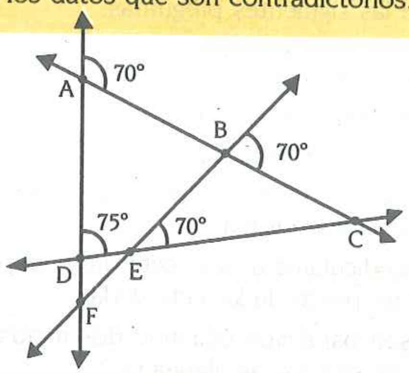
j) Si se cortan dos rectas coplanares mediante una transversal, entonces se forman exactamente cuatro parejas de ángulos alternos.

3. En los siguientes casos, ¿cuáles rectas podríamos concluir que son paralelas y cuál propiedad (teorema o axioma) justifica la respuesta?

a) $\hat{1} \cong \hat{9}$
b) $\hat{3} \cong \hat{6}$
c) $m\hat{8} + m\widehat{10} = 180°$
d) $\hat{4} \cong \hat{9}$
e) $\hat{8} \cong \widehat{12}$
f) $\hat{1} \cong \hat{8}$



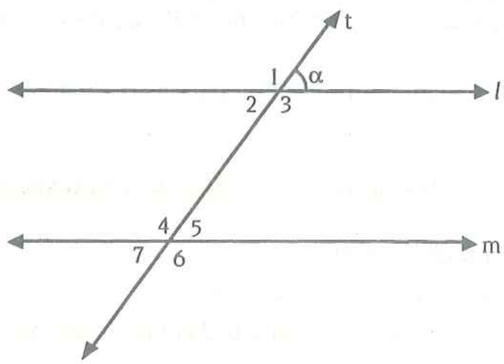
4. Fíjate bien en la figura y escribe todos los datos que son contradictorios.



5. Escribe cuatro formas de probar que dos rectas son paralelas.

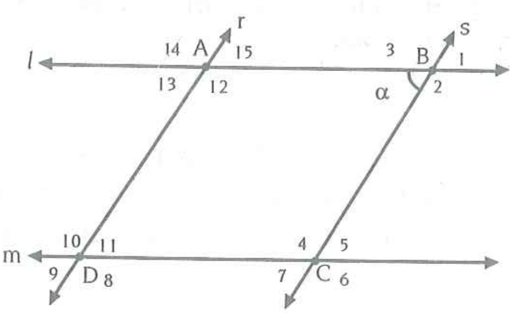
6. Datos: $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$, $m\hat{\alpha} = 63°$

Halla: La medida en grados de los otros ángulos de la figura.

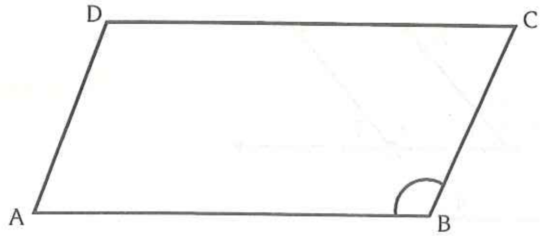


7. Datos: $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$ y $\overleftrightarrow{r} \parallel \overleftrightarrow{s}$

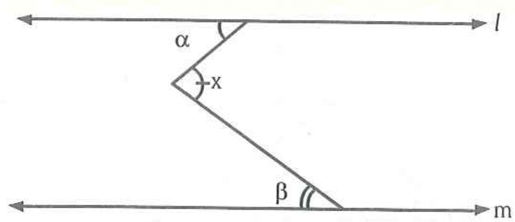
Determina: Cuáles ángulos son congruentes y cuáles son suplementarios del ángulo α.



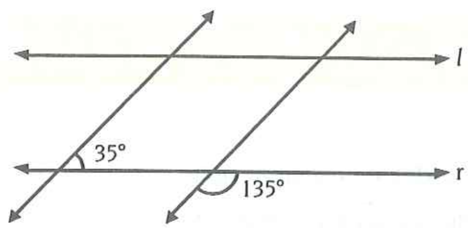
8. Datos: $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$; $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$; $m\widehat{B} = 110°$. Halla: $m\widehat{A}$, $m\widehat{C}$ y $m\widehat{D}$



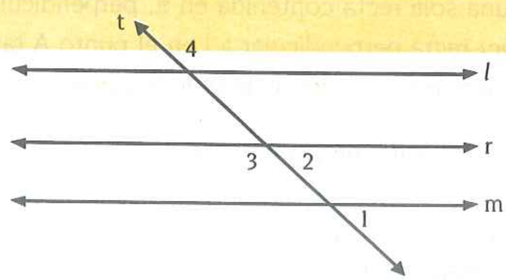
9. Datos: $m\widehat{\alpha} = 42°$, $m\widehat{\beta} = 36°$, $m\widehat{x} = 78°$. Demuestra que: $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$



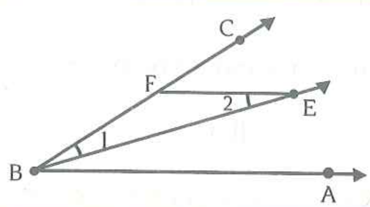
10. Teniendo en cuenta la figura de abajo, ¿será posible concluir que $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{r}$?



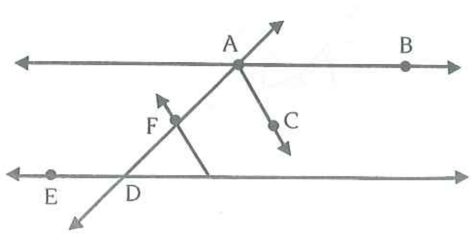
11. Datos: $\widehat{1} \cong \widehat{2}$, $\widehat{3} \cong \widehat{4}$. Demuestra que: $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{r}$



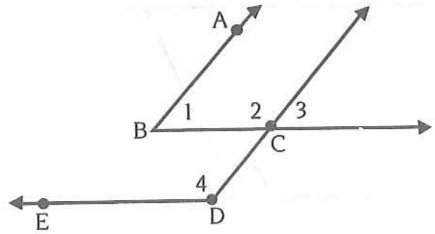
12. Datos: $\overline{EF} \parallel \overrightarrow{BA}$, $\widehat{1} \cong \widehat{2}$. Demuestra que: $\overrightarrow{BE}$ es bisectriz del $\widehat{B}$



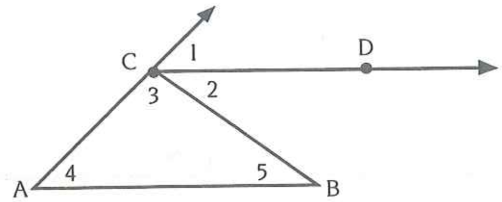
13. Datos: $\overleftrightarrow{AB} \parallel$ DE , $\overrightarrow{AC}$ biseca al ∡ BAD , $\overrightarrow{DF}$ biseca al ∡ ADE. Demuestra que: $\overrightarrow{AC} \parallel \overrightarrow{DF}$



14. Datos: $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$; $\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{DE}$. Demuestra que: $m\widehat{1} + m\widehat{4} = 180°$



15. Datos: $m\widehat{2} + m\widehat{3} + m\widehat{5} = 180°$, $\widehat{4} \cong \widehat{5}$. Demuestra que: $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$



PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS SABER

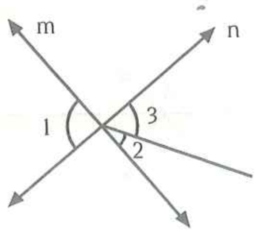
1. Si $\overleftrightarrow{l} \subset$ plano π y A $\in \overleftrightarrow{l}$, entonces podemos asegurar que:
   a) Existe una sola recta perpendicular a $\overleftrightarrow{l}$ en el punto P.
   b) Existe una sola recta contenida en π, perpendicular a $\overleftrightarrow{l}$ en el punto A.
   c) Cualquier recta perpendicular a l en el punto A también es perpendicular al plano π.
   d) Existen dos rectas distintas perpendiculares al plano π en el punto A.

2. Analiza las siguientes proposiciones:
   1) Si dos planos distintos son perpendiculares a la misma recta, entonces son paralelos entre sí.
   2) Si dos planos son paralelos, entonces toda recta perpendicular a uno de ellos también es perpendicular al otro.
   3) Si dos rectas distintas son perpendiculares al mismo plano, entonces son paralelas entre sí.
   4) Si dos rectas son paralelas, entonces todo plano perpendicular a una de ellas es perpendicular también a la otra.

   De acuerdo con esta información, el número de proposiciones que son verdaderas es:

   a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

3. Las rectas m y n determinan el ángulo 1 cuya medida es 10°. Si el ángulo 2 mide 20°, el ángulo 3 mide:



a) 50° b) 10° c) 90°

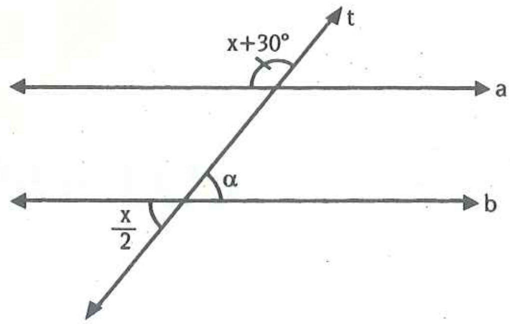
d) 170° e) Ninguna de las anteriores

4. Sabiendo que $\overleftrightarrow{a} \parallel \overleftrightarrow{b}$, entonces $m\widehat{\alpha}$ es:

a) 50° b) 100°

c) 130° d) 80°

e) Ninguna de las anteriores

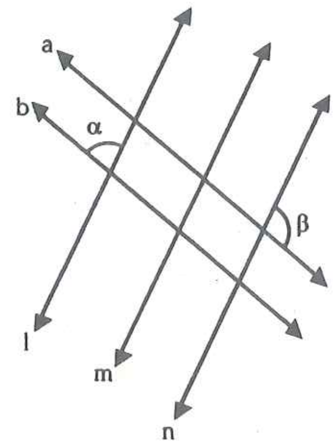


5. Si $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m} \parallel \overleftrightarrow{n}$, $\overleftrightarrow{a} \parallel \overleftrightarrow{b}$ y $m\widehat{\alpha} = 48°$, entonces $m\widehat{\beta}$ es:

a) 48° b) 96°

c) 132° d) 68°

e) Ninguna de las anteriores



Núcleo Temático

6

TRIÁNGULOS

LOGRO GENERAL

Enunciar y demostrar propiedades relativas a los triángulos.

LOGROS ESPECÍFICOS	INDICADORES DE LOGRO
Corporal: • Utilizar material concreto para favorecer el desarrollo de procesos y habilidades de pensamiento.	• En grupos de 2 ó 3, deducen propiedades relacionadas con los triángulos.
Comunicativa: • Interiorizar el proceso necesario para deducir propiedades de los triángulos.	• Explica con claridad los procesos requeridos para deducir propiedades de los triángulos.
Cognitiva: • Nombrar polígonos según el número de lados. • Nombrar los triángulos según la medida de sus lados y de sus ángulos. • Resolver problemas utilizando las propiedades de los triángulos	• Nombra los polígonos según el número de lados. • Clasifica los triángulos según la medida de sus lados y de sus ángulos. • Resuelve problemas aplicando las propiedades de los triángulos.
Estética: • Dibujar un triángulo utilizando 3 de sus 6 elementos (mínimo un lado).	• Expone sus trabajos. • Destaca lados, vértices y ángulos interiores y exteriores.
Ética-Actitudinal: • Asumir una postura respetuosa frente a la forma de pensar de los demás.	• Toma conciencia de las limitaciones propias y de las diferencias con los demás, para lograr una convivencia armónica en su grupo social.

DIMENSIONES

EVALUACIÓN

ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS

6.1 HISTORIA DE LA GEOMETRÍA (6)

TALES DE MILETO

Lo que se sabe realmente sobre la vida y la obra de Tales es bien poco. Las fechas de su nacimiento y su muerte se calculan a partir del hecho de que el eclipse del año 585 a. de C. probablemente ocurrió cuando Tales estaba en la flor de la edad, digamos que alrededor de los cuarenta años, y de que al parecer a su muerte tenía setenta y ocho años. La opinión antigua es unánime en considerar a Tales como un hombre excepcionalmente inteligente y como el primer filósofo, el primero de los Siete Sabios griegos, por acuerdo general, considerándolo además como "discípulo de los egipcios y de los caldeos", hipótesis completamente plausible. La proposición que ahora conocemos como teorema de Tales, es decir, la de que un ángulo inscrito en una semicircunferencia es un ángulo recto, muy bien la pudo aprender Tales durante sus viajes a Babilonia, pero la tradición griega va más lejos y le atribuye algún tipo de demostración de este teorema. Por este motivo se ha aclamado a Tales frecuentemente como el primer matemático auténtico, es decir, como el padre de la organización deductiva de la geometría. Esta tradición o leyenda se vio adornada al añadirse a este teorema otros cuatro de los que también se dice que fueron demostrados por Tales:

1. Todo círculo queda dividido en dos partes iguales por un diámetro.
2. Los ángulos de la base de un triángulo isósceles son iguales.
3. Los ángulos opuestos por el vértice que se forman al cortarse dos rectas, son iguales.
4. Si dos triángulos son tales que dos ángulos y un lado de uno de ellos son respectivamente iguales a dos ángulos y un lado del otro, entonces los dos triángulos son congruentes.

No hay, desde luego, ningún documento antiguo que pueda aportarse como prueba evidente de estos descubrimientos, pero aun así la tradición ha sido persistente.

EJERCICIO 6.1

COMPRENSIÓN DE LECTURA. Explicación: Lee nuevamente el texto anterior y luego encierra, en un círculo, la letra que corresponda a la respuesta correcta:

1. El título más apropiado para el fragmento anterior podría ser:
   a. Vida de Tales de Mileto.
   b. Especulaciones en torno a la vida de Tales.
   c. Tales de Mileto: un verdadero genio.
   d. El verdadero padre del pensamiento griego.

2. El propósito específico del autor, en el anterior fragmento es:
   a. Presentar pruebas para declarar a Tales como el padre de la matemática griega.
   b. Destacar la labor científica del matemático griego.
   c. Demostrar que los teoremas atribuidos a Tales, realmente pertenecen a él.
   d. Explicar cómo la tradición considera a Tales como una de las figuras más representativas del saber en la antigüedad.

3. Las palabras **tradición** y **persistente** que aparecen en el último renglón pueden sustituirse, exactamente, por:

   a. Pueblo - Continua
   b. Costumbre - constante
   c. Transmisión - esporádica
   d. Doctrina - incansable

4. De Tales de Mileto se dice lo siguiente, con excepción de:

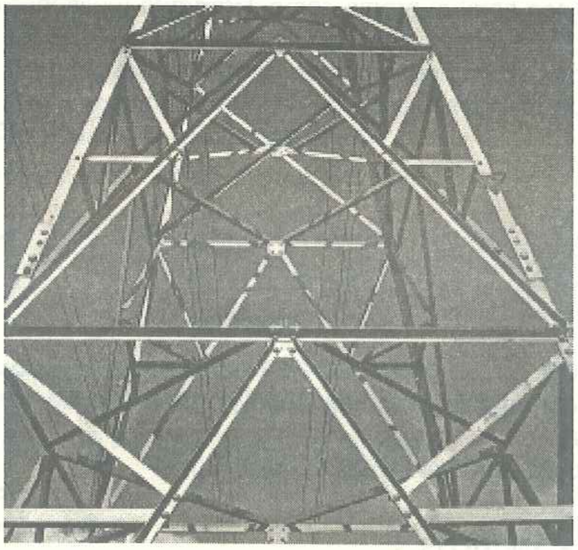
   a. Fue maestro de egipcios y caldeos.
   b. Sus trabajos matemáticos se mueven entre la realidad y la leyenda.
   c. No existen pruebas que demuestren que todos esos trabajos matemáticos son suyos.
   d. No hay precisión sobre las fechas de su nacimiento y muerte.

5. De acuerdo al contenido de ese fragmento se puede afirmar que es un escrito:

   a. De carácter especulativo.
   b. De tipo descriptivo - científico.
   c. Que recoge la tradición oral.
   d. Argumentativo.

6.2 POLÍGONOS Y TRIÁNGULOS

- El triángulo es el polígono más sencillo, pero no por ello el menos interesante. Desde su simplicidad, nadie pensaría que tuviera tanta utilidad en el desarrollo de casi todos los asuntos geométricos.



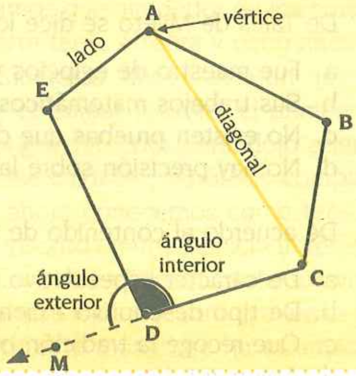
Su estructura rígida, indeformable, lo hace insustituible en las estructuras metálicas como puentes, torres eléctricas, vehículos... A pesar de su apariencia frágil, muchas de estas estructuras poseen una belleza serena y espectacular al mismo tiempo.

- Estudiaremos en esta unidad las propiedades de los polígonos, en general, y de los triángulos, en particular; pero antes, conviene hacer un repaso de algunos conceptos que aunque ya vimos en la unidad 1, conviene recordar ahora.

■ POLÍGONOS

RECORDEMOS

- Un POLÍGONO es la unión de segmentos que se juntan sólo en sus extremos de tal manera que:
  1) Como máximo, dos segmentos se encuentran en un punto.
  2) Cada segmento se intercepta exactamente con otros dos.



- La figura nos muestra los principales elementos de un polígono: lados, vértices, ángulo interior, ángulo exterior y diagonal. Conviene recordar el significado de cada uno de estos conceptos.

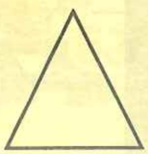
■ CLASIFICACIÓN DE LOS POLÍGONOS

RECORDEMOS

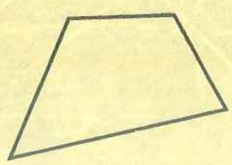
Los polígonos se clasifican:

- **SEGÚN EL NÚMERO DE LADOS**

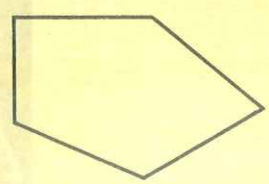
Algunos tienen nombre propio como: **triángulo** (polígonos de 3 lados), **cuadrilátero** (polígonos de 4 lados), **pentágono** (polígono de 5 lados), **exágono** (polígono de 6 lados),...Los que no tienen nombre propio se designan así: polígono de 13 lados, de 14 lados, de 15 lados,...



Triángulo

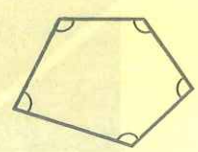


Cuadrilátero

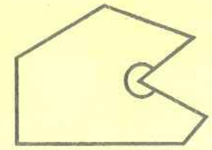


Pentágono

- **SEGÚN LOS ÁNGULOS**
  * **Polígonos Convexos:** cuando todos los ángulos interiores son convexos.
  * **Polígonos Cóncavos:** Cuando al menos un ángulo interior es cóncavo.

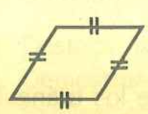


Polígono Convexo

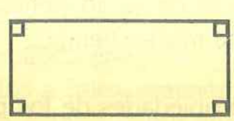


Polígono Cóncavo

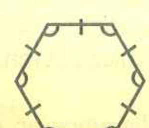
- **SEGÚN LOS LADOS Y ÁNGULOS**
  * **Polígonos equiláteros:** todos los lados son congruentes.
  * **Polígonos equiángulos**: todos los ángulos son congruentes.
  * **Polígonos regulares:** todos los lados y ángulos son congruentes.



Polígono Equilátero



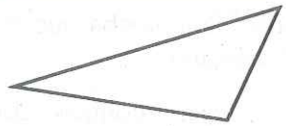
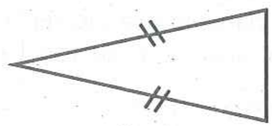
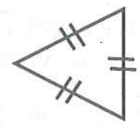
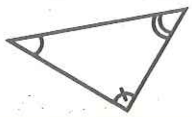
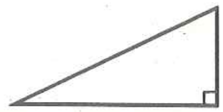
Polígono Equiángulo



Polígono Regular

RECORDEMOS

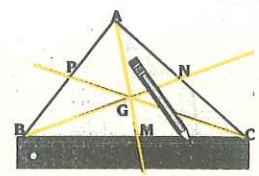
- Los triángulos se clasifican de acuerdo con la medida de sus lados y de sus ángulos.

De acuerdo con sus lados	 **Escalenos** 3 lados desiguales	 **Isósceles** Al menos 2 lados congruentes	 **Equiláteros** 3 lados congruentes
De acuerdo con sus ángulos	 **Acutángulos** Los 3 ángulos agudos	 **Rectángulos** 1 ángulo recto	 **Obtusángulos** 1 ángulo obtuso

- Las líneas y puntos notables de un triángulo son las siguientes:

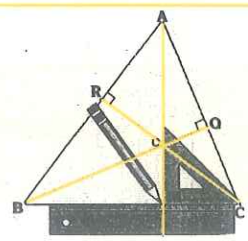
– **Medianas:** Segmentos que pasan por un vértice y el punto medio del lado opuesto.

El punto de intersección de las medianas se llama BARICENTRO.



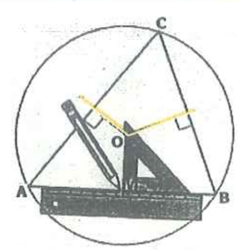
– **Alturas:** Segmentos perpendiculares trazados desde cada vértice al lado opuesto o a su prolongación.

El punto de intersección de las alturas se llama ORTOCENTRO.



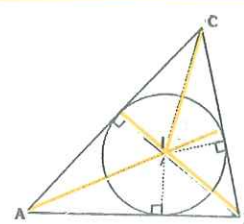
– **Mediatrices:** Rectas perpendiculares por el punto medio de cada lado del triángulo.

El punto de intersección de las mediatrices se llama CIRCUNCENTRO.



– **Bisectrices:** Son las bisectrices de cada uno de los ángulos interiores del triángulo.

El punto de intersección de las bisetrices se llama INCENTRO.

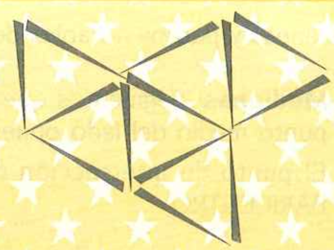


EJERCICIO 6.2

1. Traza las tres mediatrices de un triángulo escaleno con regla y compás. Comprueba que el circuncentro es el centro de una circunferencia que pasa por los tres vértices del triángulo.
2. Dibuja un triángulo rectángulo y traza sus tres mediatrices. ¿Donde queda el circuncentro?
3. Traza las bisectrices de un triángulo usando regla y compás. Comprueba que el incentro es el centro de una circunferencia tangente a los tres lados del triángulo.
4. Dibuja un triángulo obtusángulo y traza las alturas usando regla y compás. ¿Dónde queda el ortocentro de este triángulo?
5. Dibuja un triángulo cualquiera y traza sus medianas usando regla y compás.

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 1

El dibujo muestra 13 palillos colocados de tal manera que se forman 6 triángulos. Quita sólo 3 palillos para que queden únicamente 3 triángulos.

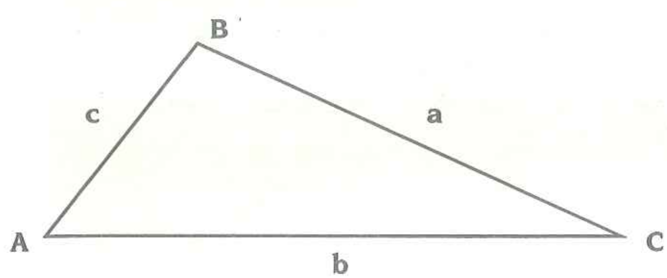


6.3 PROPIEDADES DE LOS TRIÁNGULOS Y DE LOS POLÍGONOS

Primera Propiedad: Desigualdad Triangular

EXPERIENCIA

- Dibuja en tu cuaderno un triángulo como el siguiente:



- Mide con una regla los lados a, b, y c y completa el cuadrito $\square$ con los signos $<$, $=$, $>$ según corresponda:

a $\square$ b + c b $\square$ a + c c $\square$ a + b

¿Qué relación hay entre la medida de un lado de un triángulo y la suma de las medidas de los otros dos?

- Ahora completa el cuadrito $\square$ con los signos $<$, $=$, $>$:

a $\square$ b - c b $\square$ a - c c $\square$ b - a

¿Qué relación hay entre la medida de un lado de un triángulo y la diferencia de las medidas de los otros dos?

- Las actividades realizadas en esta experiencia nos permiten enunciar la siguiente propiedad denominada la **Desigualdad Triangular**

APRENDAMOS

P-1: Desigualdad Triangular

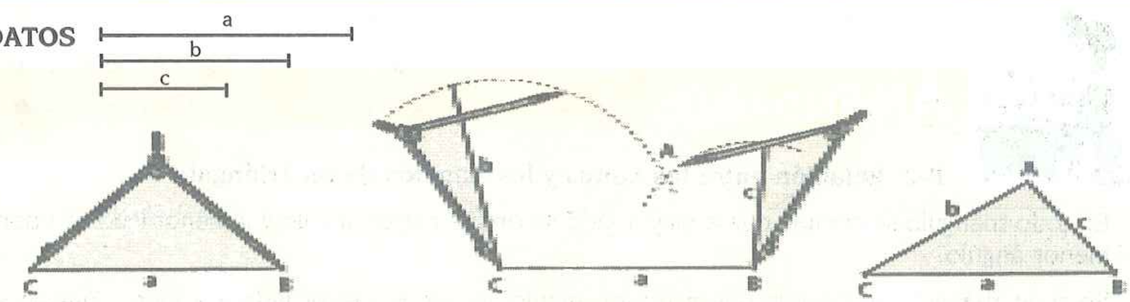
En todo triángulo se cumple que la longitud de cualquier lado siempre es MENOR que la SUMA de los otros dos y MAYOR que su DIFERENCIA.

¡ATENCIÓN!

- Esta propiedad me indica que no siempre tres segmentos de longitud conocida pueden determinar un triángulo; por ejemplo, tres segmentos cuyas longitudes son 12 cm, 5 cm, y 4 cm no pueden formar un triángulo ya que $12 > 4 + 5$.

- A continuación, describiremos el procedimiento para construir un triángulo, usando regla y compás, cuando se conocen sus tres lados:

DATOS



Tomamos sobre una recta el lado a. Sus extremos, C y B, serán dos vértices del triángulo.

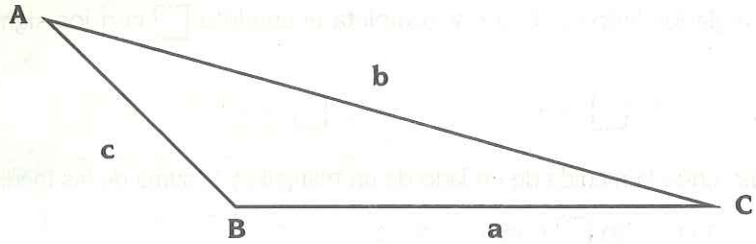
Con centro en C, trazamos un arco de radio b y con centro en B otro radio c. Los arcos se cortan en un punto común: A.

Unimos el punto A con C y con B, obteniendo así el triángulo ABC.

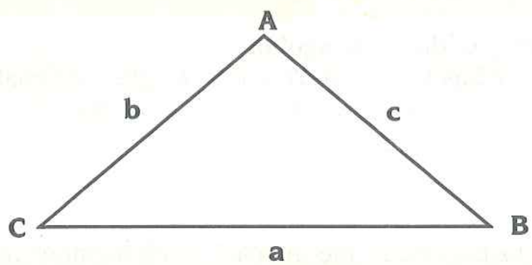
Segunda Propiedad: Relación entre los lados y los ángulos

EXPERIENCIA

- Dibuja en tu cuaderno un triángulo como el siguiente:



- Utiliza el transportador para hallar la medida de cada uno de los ángulos del triángulo y completa:
  El ángulo mayor es______; el ángulo menor es______
- A continuación, mide las longitudes de los lados y completa:
  El lado mayor es ______; el lado menor es ______
- Contesta: ¿Qué relación existe entre los ángulos de un triángulo y los lados opuestos a dichos ángulos?
- Ahora dibuja en tu cuaderno el siguiente triángulo y mide sus lados y sus ángulos:

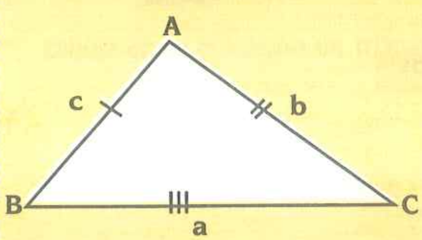


- Completa: $|\overline{AB}| =$______ ; $|\overline{AC}| =$ ______ ; $m\widehat{C} =$______ ; $m\widehat{B} =$ ______
- Contesta:
  a) ¿Qué clase de triángulo, de acuerdo con sus lados, es ΔABC?
  b) ¿Cómo son las medidas de los ángulos de un triángulo que se oponen a dos lados congruentes?

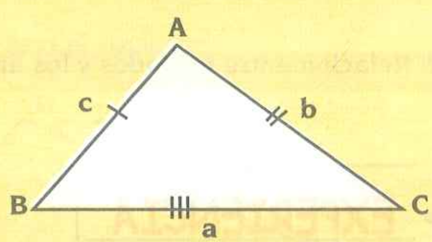
APRENDAMOS

P-2: Relación entre los Lados y los Angulos de un Triángulo

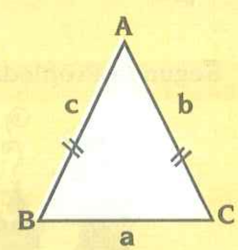
- En todo triángulo se cumple que a mayor lado se opone mayor ángulo y a menor lado se opone menor ángulo.
- En todo triángulo se cumple que a mayor ángulo se opone mayor lado y a menor ángulo se opone menor lado.
- En un triángulo isósceles los ángulos opuestos a los lados congruentes también son congruentes.



Si a>c entonces $m\widehat{A} > m\widehat{C}$
Si c<a entonces $m\widehat{C} < m\widehat{A}$



Si $m\widehat{A} > m\widehat{B}$ entonces a>b
Si $m\widehat{B} < m\widehat{A}$ entonces b<a



Si b = c entonces $m\widehat{B} = m\widehat{C}$

Tercera Propiedad: Propiedad Fundamental de los Triángulos

EXPERIENCIA

- Dibuja 5 triángulos de distinto tipo y tamaño y nombra sus vértices siempre con las letras A, B y C.
- Mide con el transportador los tres ángulos interiores de cada triángulo, calcula la suma de sus medidas y anota los resultados en el cuadro siguiente.

Angulos / Triángulo	$m\widehat{A}$	$m\widehat{B}$	$m\widehat{C}$	$m\widehat{A} + m\widehat{B} + m\widehat{C}$
Primero				
Segundo				
Tercero				
Cuarto				
Quinto				

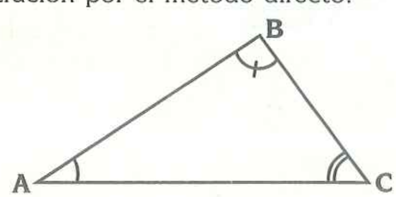
- Contesta: ¿Cuánto suman las medidas de los tres ángulos interiores de un triángulo?

APRENDAMOS

P-3 Propiedad Fundamental de los Triángulos
En todo triángulo se cumple que la suma de las medidas de los tres ángulos interiores es igual a 180°.

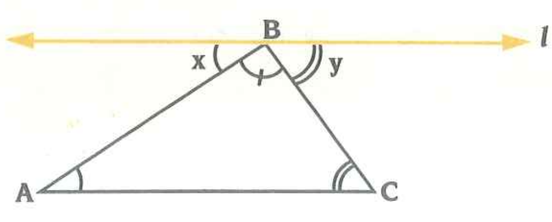
- Vamos a generalizar este razonamiento realizando una demostración por el método directo.

Hipótesis: ΔABC es un triángulo cualquiera
Tesis: $m\widehat{A} + m\widehat{B} + m\widehat{C} = 180°$



Demostración
Escribe al frente de cada paso, la propiedad que lo justifica.

1. ΔABC es un triángulo cualquiera........................... ______________________
2. Por el punto B trazamos $\overleftrightarrow{l} \parallel \overline{AC}$ .... ______________________

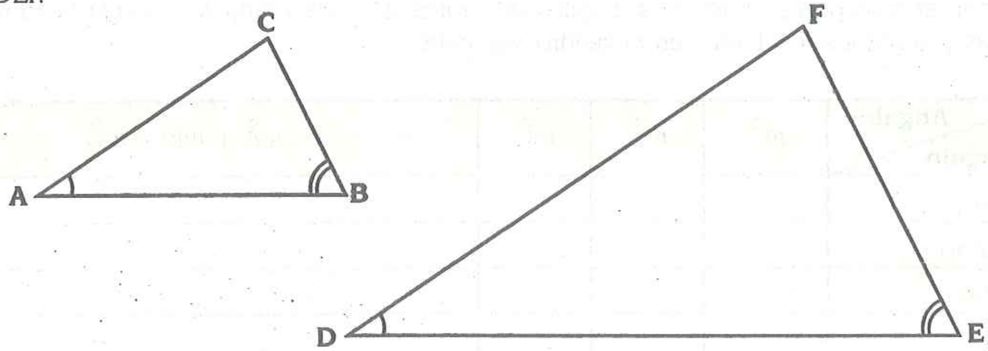


3. Ahora bien: $m\widehat{x} + m\widehat{B} + m\widehat{y} = 180°$.......................... ______________________
4. Pero, $m\widehat{x} = m\widehat{A}$ y $m\widehat{y} = m\widehat{C}$................................ ______________________
5. Luego, $m\widehat{A} + m\widehat{B} + m\widehat{C} = 180°$.......................... ______________________

Cuarta Propiedad: Consecuencias de la Propiedad Fundamental

EXPERIENCIA

- Mide con el transportador los ángulos interiores A y B del ΔABC. Igualmente mide los ángulos D y E del ΔDEF.

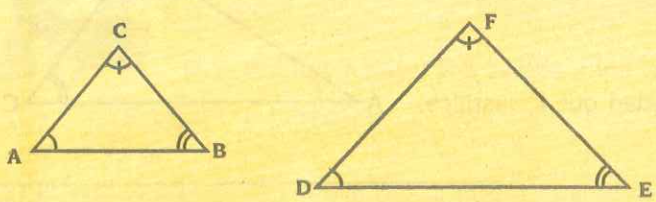


- Completa: $m\widehat{A} =$ ________ ; $m\widehat{B} =$ ________
  $m\widehat{D} =$ ________ ; $m\widehat{E} =$ ________

- Contesta:
  a) ¿Cuánto miden los ángulos C y F?
  b) Si dos ángulos de un triángulo son respectivamente congruentes con dos ángulos de otro triángulo, ¿serán congruentes los terceros ángulos?

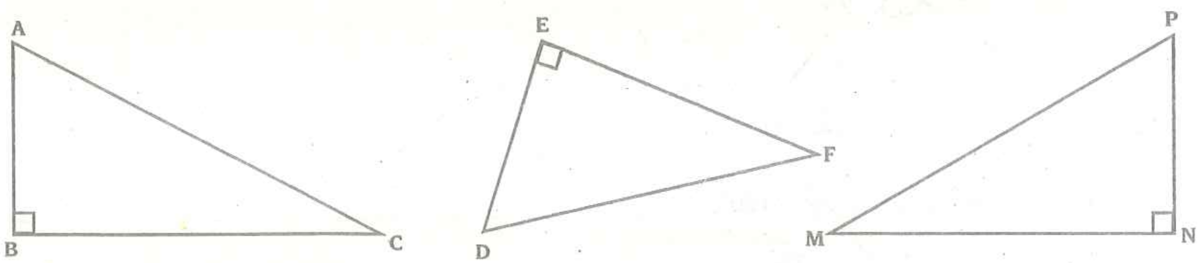
APRENDAMOS

C-1: Si dos ángulos de un triángulo son congruentes a dos ángulos de otro triángulo, entonces los terceros ángulos también son congruentes.



Si $\widehat{A} \cong \widehat{D}$ y $\widehat{B} \cong \widehat{E}$ entonces $\widehat{C} \cong \widehat{F}$

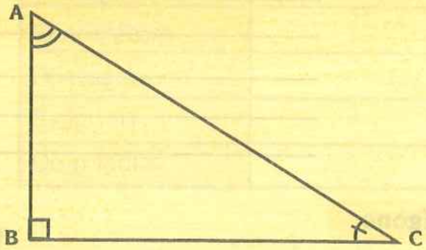
- Ahora dibuja en tu cuaderno tres triángulos rectángulos como estos y mide sus ángulos agudos.



- Contesta: ¿Cuánto suman las medidas de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo.

APRENDAMOS

C-2: Los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios.



Hipótesis: ΔABC es rectángulo en B.

Tesis: $m\widehat{A} + m\widehat{C} = 90°$

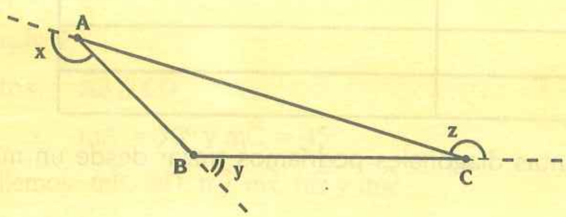
- Ahora volvamos de nuevo a los 5 triángulos que utilizamos en la propiedad fundamental y traza en cada uno el **ángulo exterior** correspondiente al $\widehat{C}$.
- Mide con el transportador este ángulo exterior en cada triángulo, halla $m\widehat{A} + m\widehat{B}$ y anota los resultados de tus mediciones en el siguiente cuadro:

Angulos / **Triángulo**	$m\widehat{A}$	$m\widehat{B}$	Medida del ángulo exterior al $\widehat{C}$	$m\widehat{A} + m\widehat{B}$
Primero				
Segundo				
Tercero				
Cuarto				
Quinto				

- Contesta: ¿Qué relación existe entre la medida de un ángulo exterior de un triángulo y la suma de las medidas de los interiores no adyacentes?

APRENDAMOS

C-3: En todo triángulo, la medida de un ángulo exterior es igual a la suma de las medidas de los dos interiores no adyacentes.



$m\widehat{x} = m\widehat{B} + m\widehat{C}$

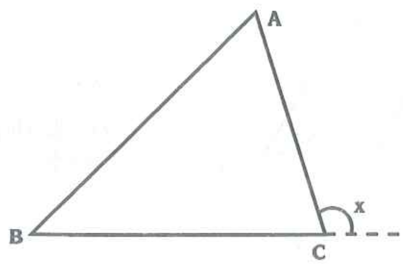
$m\widehat{y} = m\widehat{A} + m\widehat{C}$

$m\widehat{z} = m\widehat{A} + m\widehat{B}$

- Vamos a demostrar esta propiedad

Hipótesis: ΔABC es un triángulo cualquiera, $\widehat{x}$ es exterior al ángulo C

Tesis: $m\widehat{x} = m\widehat{A} + m\widehat{B}$



Demostración

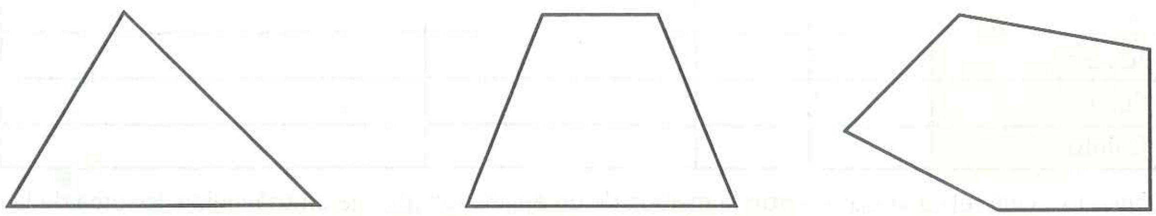
Escribe al frente de cada paso la propiedad que lo justifica.

1. ΔABC es un triángulo cualquiera, $\widehat{x}$ es exterior al ángulo C ..... ______________________
2. Luego, $\widehat{x}$ y $\widehat{C}$ forman un par lineal .... ______________________
3. Luego, $m\widehat{x} + m\widehat{C} = 180^{o}$. .... ______________________
4. Pero, $m\widehat{A} + m\widehat{B} + m\widehat{C} = 180^{o}$ .... ______________________
5. Luego, $m\widehat{x} + m\widehat{C} = m\widehat{A} + m\widehat{B} + m\widehat{C}$.. .... ______________________
6. Luego, $m\widehat{x} = m\widehat{A} + m\widehat{B}$. .... ______________________

Quinta Propiedad: Número de Diagonales de un Polígono

¿Cuántas diagonales es posible trazar en un polígono desde un mismo vértice? ¿Y cuántas es posible trazar en total? La siguiente experiencia nos ayudará a resolver estas preguntas.

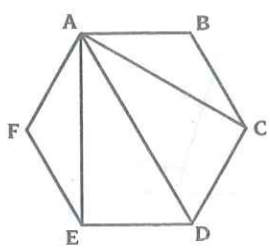
- ¿Cuántas diagonales podemos trazar en un triángulo, desde un mismo vértice? ¿En un cuadrilátero? ¿En un pentágono? ¿Y en un exágono?



- Completa el siguiente cuadro:

Polígono	Número de lados	Número de diagonales desde un vértice
Triángulo		
Cuadrilátero		
Pentágono		
Exágono		
De n lados		

- Contesta: Si un polígono tiene n lados, ¿cuántas diagonales podríamos trazar desde un mismo vértice?.
- Ahora vamos a determinar cuántas diagonales en total podemos trazar en un polígono. Tomemos, por ejemplo, un exágono y contesta:



– ¿Cuántas diagonales podemos trazar desde el vértice A?

– ¿Es la diagonal trazada desde A hasta C la misma trazada desde C hasta A?

– ¿Al contar todas las diagonales del exágono, cuántas veces podemos contar a $\overline{AC}$? ¿Y a $\overline{AD}$?

- Completa el siguiente cuadro:

Polígono	Número de diagonales desde un vértice	Número total de diagonales
Triángulo		
Cuadrilátero		
Pentágono		
Exágono		
De n lados		

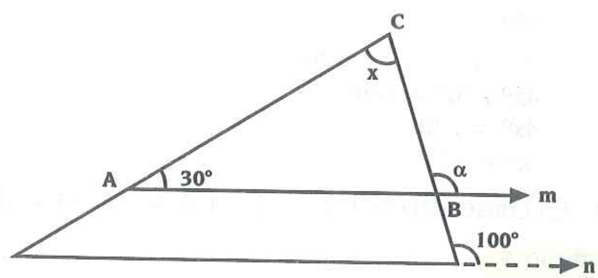
APRENDAMOS

P-5: En un POLÍGONO CONVEXO de n lados, el número de diagonales que pueden trazarse desde un mismo vértice es **n − 3** y el número total de diagonales es $\frac{\mathbf{n\,(n-3)}}{\mathbf{2}}$

Ejemplo 1

Datos: $\overleftrightarrow{m} \parallel \overleftrightarrow{n}$

Hallemos: $m\widehat{\alpha}$ y $m\widehat{x}$



Solución

Escribe al frente de cada paso, la proposición que lo justifica.

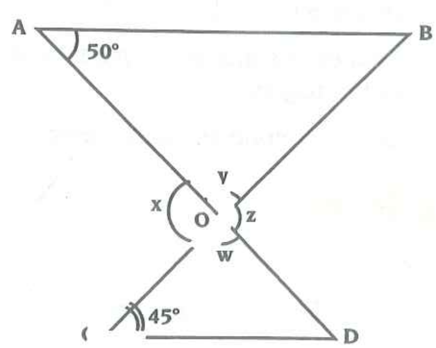
1. Como $\overleftrightarrow{m} \parallel \overleftrightarrow{n}$, entonces $m\widehat{\alpha} = 100°$............................ ____________________
2. Ahora bien, el $\widehat{\alpha}$ es exterior al $\triangle ABC$; luego, $m\widehat{\alpha} = m\widehat{x} + 30°$............................ ____________________
3. Por lo tanto, $100° = m\widehat{x} + 30°$ con lo cual, $m\widehat{x} = 100° - 30° = 70°$ .... ____________________

Ejemplo 2

Datos: $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

$m\widehat{A} = 50°$ y $m\widehat{C} = 45°$

Hallemos: $m\widehat{B}$, $m\widehat{D}$, $m\widehat{y}$, $m\widehat{x}$, $m\widehat{z}$ y $m\widehat{w}$



Solución

Escribe al frente de cada paso, la proposición que lo justifica.

1. Como $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ entonces $m\widehat{A} = m\widehat{D}$ y $m\widehat{C} = m\widehat{B}$......................... ____________________
2. Luego, $m\widehat{D} = 50°$ y $m\widehat{B} = 45°$.. ____________________

3. Ahora bien, en el ΔCOD tenemos:

$m\widehat{C} + m\widehat{w} + m\widehat{D} = 180^\circ$ .... ____________________

$\therefore\ 45^\circ + m\widehat{w} + 50^\circ = 180^\circ$. .... ____________________

$\therefore\ m\widehat{w} = 180^\circ - 45^\circ - 50^\circ = 85^\circ$. .... ____________________

4. Además, $m\widehat{y} = m\widehat{w}$; luego, $m\widehat{y} = 85^\circ$. .... ____________________

5. Finalmente, como $\widehat{y}$ y $\widehat{z}$ forman un par lineal, entonces

$m\widehat{y} + m\widehat{z} = 180^\circ$. .... ____________________

6. Luego, $m\widehat{z} = 180^\circ - m\widehat{y} = 180^\circ - 85^\circ = 95^\circ$ .... ____________________

7. Como $\widehat{x}$ y $\widehat{z}$ son opuestos por el vértice, entonces $m\widehat{x} = 95^\circ$. . . ____________________

Ejemplo 3

En un ΔABC, el ángulo $\widehat{A}$ mide el doble del ángulo $\widehat{B}$ y el $\widehat{C}$ mide 20° menos que el ángulo $\widehat{B}$. ¿Cuál es la medida en grados de cada ángulo?

Solución

1. Vamos a llamar x° a la medida del ángulo $\widehat{B}$.
   Por lo tanto: $m\widehat{B} = x^\circ$, $m\widehat{A} = 2x^\circ$ y $m\widehat{C} = x^\circ - 20^\circ$
2. En el ΔABC se cumple que: $m\widehat{A} + m\widehat{B} + m\widehat{C} = 180^\circ$....................... ¿por qué?
3. Luego:

$2x^\circ + x^\circ + x^\circ - 20^\circ = 180^\circ$ ....¿por qué?

$\therefore\ 4x^\circ - 20^\circ = 180^\circ$

$\therefore\ 4x^\circ = 200^\circ$

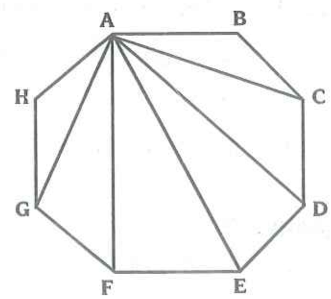
$\therefore\ x^\circ = 50^\circ$

4. En consecuencia, $m\widehat{B} = 50^\circ$; $m\widehat{A} = 2\,(50^\circ) = 100^\circ$ y $m\widehat{C} = 50^\circ - 20^\circ = 30^\circ$

Ejemplo 4

Hallemos la suma de las medidas de los ángulos interiores de un octógono y la medida de un ángulo interior de un octógono regular.

Solución



1. Tracemos todas las diagonales desde un mismo vértice.
2. El octógono ha quedado dividido en 6 triángulos y como la suma de las medidas de los ángulos interiores de cada uno es 180°, entonces la suma de los ángulos interiores de los 6 triángulos será: $6 \times 180^\circ = 1080^\circ$.

   Esta es la suma de las medidas de los ángulos interiores del octógono.
3. Si el octógono es regular, entonces cada ángulo interior medirá $\dfrac{1080^\circ}{8} = 135^\circ$.

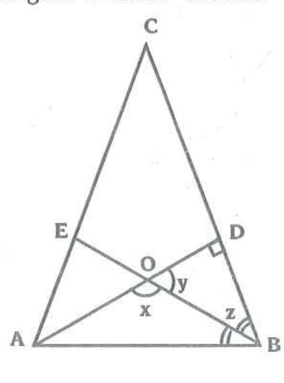
Ejemplo 5

Datos: $\overline{AD}$ es altura sobre $\overline{BC}$

$\overline{BE}$ es bisectriz del $\widehat{B}$

$m\widehat{A} = 64^\circ$ y $m\widehat{C} = 42^\circ$

Hallemos: $m\widehat{x}$



Solución

1. Puesto que conocemos las medidas de $\widehat{A}$ y $\widehat{C}$ entonces podemos hallar la medida del ángulo $\widehat{B}$ del ΔABC; así

   $m\widehat{A} + m\widehat{B} + m\widehat{C} = 180^\circ$

   $\therefore\ 64^\circ + m\widehat{B} + 42^\circ = 180^\circ$.

   $\therefore\ m\widehat{B} = 180^\circ - 64^\circ - 42^\circ = 74^\circ$

2. Como $\overline{AD}$ es altura, entonces $m\ \widehat{ADB} = 90^\circ$

3. Y como $\overline{BE}$ es bisectriz, entonces:

   $m\widehat{z} = \dfrac{m\widehat{B}}{2} = \dfrac{74^\circ}{2} = 37^\circ$.

4. En el ΔODB tenemos:

   $m\widehat{z} + m\ \widehat{ODB} + m\widehat{y} = 180^\circ$

   $\therefore\ 37^\circ + 90^\circ + m\widehat{y} = 180^\circ$

   $\therefore\ m\widehat{y} = 180^\circ - 37^\circ - 90^\circ = 53^\circ$

5. Finalmente, como $\widehat{x}$ y $\widehat{y}$ forman un par lineal entonces:

   $m\widehat{x} + m\widehat{y} = 180^\circ$.

   $\therefore\ m\widehat{x} = 180^\circ - m\widehat{y}$

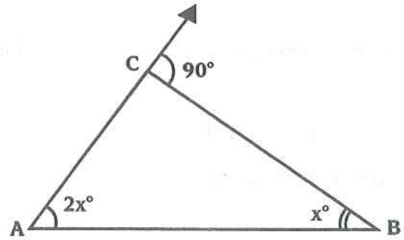
   $\therefore\ m\widehat{x} = 180^\circ - 53^\circ = 127^\circ$

EJERCICIO 6.3

En los ejercicios 1. a 10 responde las preguntas formuladas y justifica las respuestas.

1. ¿Será posible construir un triángulo con tres segmentos cuyas medidas son 12 cm, 15 cm y 27 cm? Si es posible, constrúyalo usando regla y compás.
2. ¿Será posible construir un triángulo con tres segmentos cuyas medidas son 9 cm, 6 cm y 12 cm? Si es posible, constrúyalo usando regla y compás.
3. Tres ángulos A, B y C miden 80°, 70° y 50° respectivamente. ¿Será posible construir un triángulo con estos tres ángulos?
4. Los lados de un triángulo ABC miden $a = 15$ cm, $b = 12$ cm y $c = 10$ cm. ¿Cuál de los ángulos del triángulo tiene mayor medida? ¿Cuál tiene menor medida?
5. Dos ángulos de un triángulo miden 37° y 71°. ¿Cuánto mide el tercer ángulo?
6. Los ángulos interiores de un ΔABC miden: $m\widehat{A} = 60^\circ$, $m\widehat{B} = 80^\circ$ y $m\widehat{C} = 40^\circ$. ¿Cuánto miden los ángulos exteriores de dicho triángulo?
7. ¿Puede un triángulo tener dos ángulos rectos? Explica.
8. ¿Puede un triángulo tener dos ángulos agudos? Explica.
9. Los lados de un triángulo ABC tienen las siguientes medidas: $a = 10$ cm, $b = 12$ cm y $c = 10$ cm. ¿Qué podemos afirmar de los ángulos $\widehat{A}$ y $\widehat{C}$?
10. Un triángulo tiene sus tres ángulos congruentes. ¿Cuánto mide cada ángulo? ¿Cómo se llama este triángulo?

11 Halla las medidas de los ángulos $\widehat{A}$ y $\widehat{B}$ del $\triangle ABC$.

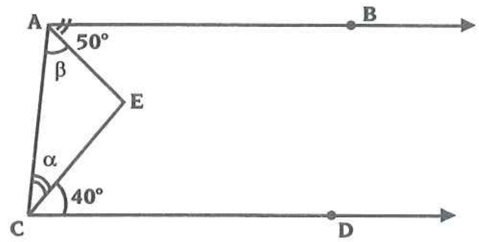


12 Datos: $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$

$m\,\widehat{BAE} = 50°$

$m\,\widehat{DCE} = 40°$

Halla: $m\widehat{\alpha} + m\widehat{\beta}$

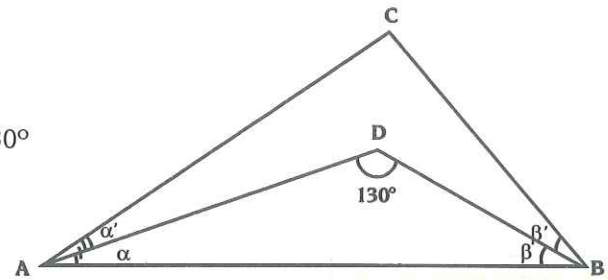


13 Datos: $\widehat{\alpha} \cong \widehat{\alpha}'$

$\widehat{\beta} \cong \widehat{\beta}'$

$m\widehat{D} = 130°$

Halla: $m\widehat{C}$

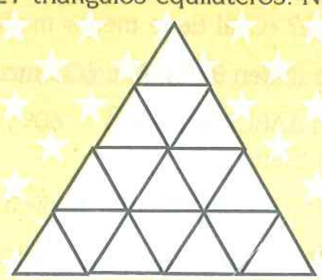


14 Halla la suma de las medidas de los ángulos interiores de un decágono. Si el polígono es regular, ¿cuánto mide cada ángulo interior?

15 Uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo mide 55°. Se traza la altura correspondiente a la hipotenusa. Halla la medida de los ángulos formados en el ángulo recto.

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 2

En esta figura hay 27 triángulos equiláteros. Nómbralos todos.



TALLER DE REPASO DE LA UNIDAD 6

1. Contesta en tu cuaderno las siguientes preguntas:

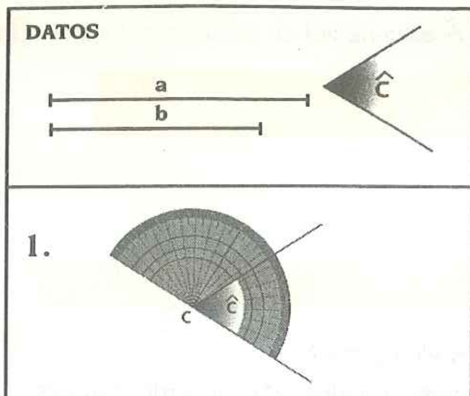
a) ¿Cómo se define un polígono y cuáles son sus principales elementos?
b) ¿Cómo se clasifican los polígonos de acuerdo con el número de lados? ¿De acuerdo con sus ángulos? ¿Y de acuerdo con sus lados y sus ángulos?
c) ¿Qué es perímetro de un polígono?
d) ¿Cuántas diagonales pueden trazarse, en un polígono de n lados, desde un mismo vértice? ¿Y cuántas en total?
e) ¿Cómo se clasifican los triángulos de acuerdo con sus lados y de acuerdo con sus ángulos?
f) ¿Cómo se llaman los lados de un triángulo rectángulo?
g) En un triángulo, ¿qué es altura?, ¿qué es mediana? ¿qué es mediatriz?, ¿qué es bisectriz?
h) ¿Qué es ortocentro, incentro, baricentro y circuncentro de un triángulo?
i) ¿Qué establece la propiedad de desigualdad triangular?
j) ¿Se puede construir un triángulo con tres segmentos de cualquier medida? ¿Por qué?
k) ¿Qué establece la propiedad fundamental de los triángulos?
l) En un triángulo escaleno, ¿qué relación existe entre los lados y los ángulos?

2. Responde FALSO o VERDADERO a las siguientes proposiciones. Justifica las respuestas.

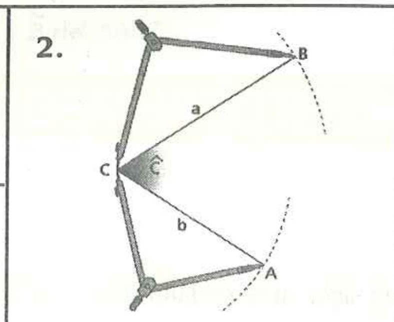
a) Un triángulo es un polígono de tres lados.
b) Si un polígono convexo tiene 9 lados, entonces el número de diagonales que pueden trazarse desde un mismo vértice es 6.
c) Si en un polígono de 11 lados trazamos las diagonales desde un mismo vértice, entonces el número de triángulos que resultan es 8.
d) En todo triángulo, la medida de un lado es mayor que la suma de las medidas de los otros dos lados.
e) Un ángulo exterior de un triángulo siempre es un ángulo obtuso.
f) La medida de un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de las medidas de los dos interiores que no formen par lineal con él.
g) En todo triángulo obtusángulo hay dos ángulos agudos.
h) Las bisectrices de un triángulo se cortan en un punto llamado ortocentro.
i) La mediana de un triángulo es un segmento perpendicular trazado desde un vértice al punto medio del lado opuesto.
j) En todo triángulo rectángulo, el lado de mayor longitud es la hipotenusa.
k) En todo triángulo se cumple que a lado mayor se opone ángulo mayor.

3. Utiliza regla y compás para construir un triángulo cuyos lados miden 8 cm, 10 cm y 12 cm.

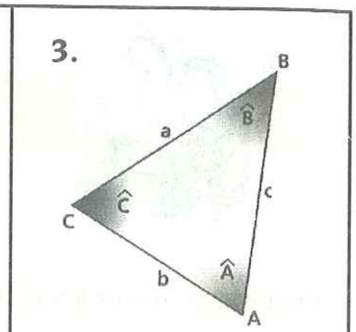
4. Observa cómo se construye un triángulo cuando conocemos dos de sus lados y el ángulo formado por estos dos lados.



Con el transportador o con el compás construimos un ángulo Ĉ congruente con el dado



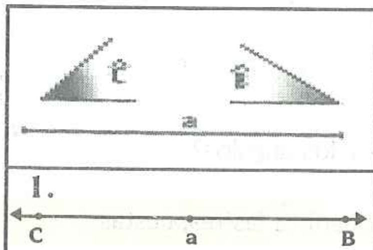
A partir del vértice C, marcamos, con el compás, sobre los lados del Ĉ, segmentos de igual longitud que a y b y marcamos los puntos B y A respectivamente.



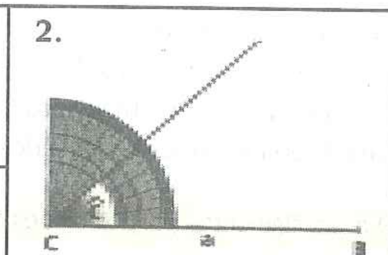
Finalmente, unimos los puntos A y B para formar el ΔABC.

Construye un triángulo que tenga un ángulo de 120° y los lados que lo forman miden 7 cm y 9 cm.

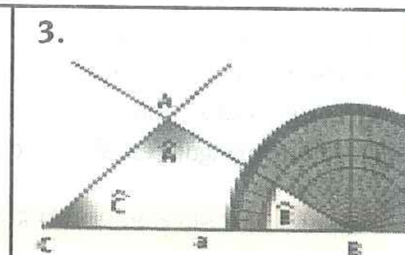
5. Observa cómo se construye un triángulo cuando conocemos un lado y los ángulos cuyos vértices son los extremos de este lado.



Sobre una recta tomamos el lado dado a. Sus extremos B y C serán dos vértices del triángulo.



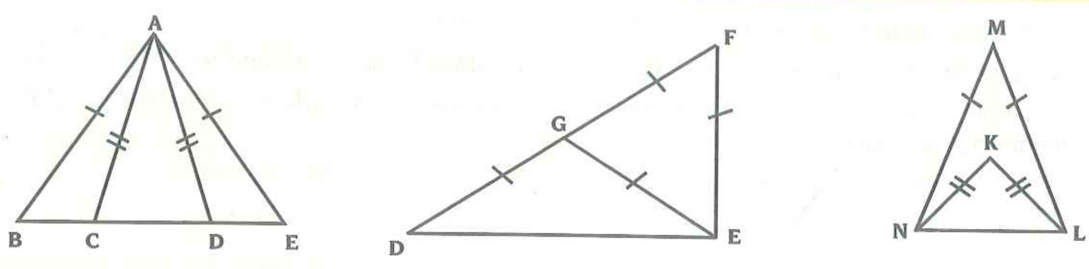
Con el transportador o con un compás, construimos el ángulo Ĉ teniendo como vértice el punto C y como lado a a.



En B y con lado a, construimos el ángulo B̂. El punto común de estos lados es el punto A. Para cerrar el triángulo unimos los puntos A y B.

Construye un triángulo que tenga un lado que mida 8 cm y los dos ángulos cuyos vértices están en los extremos de este lado midan 40° y 80°. Traza las alturas de este triángulo y marca el ortocentro.

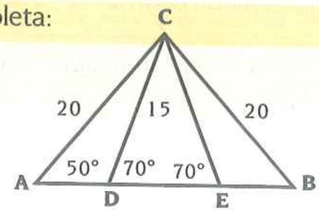
6. En los ejercicios siguientes, los segmentos que tienen marcas iguales se consideran congruentes. Nombra todos los pares de ángulos que son congruentes.



7. Teniendo en cuenta la figura de la derecha, completa:

a) m (∡ABC) = __________

b) $|\overline{CE}|$ = __________



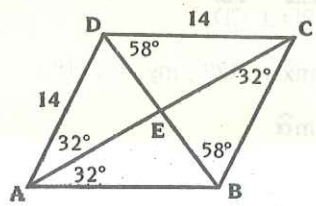
8. Teniendo en cuenta la figura de la derecha, completa:

a) m ($\measuredangle$ACD) = ________

b) $|\overline{BC}|$ = ____________

c) $|\overline{AB}|$ = ____________

d) m ($\measuredangle$ADB) = ________



9. En un ΔDEF, $\overline{DE} \cong \overline{EF}$. Si $|\overline{DE}| = 4x + 15$, $|\overline{EF}| = 2x + 45$ y $|\overline{DF}| = 3x + 15$, halla el perímetro del triángulo.

10. En un ΔABC, $\widehat{A} \cong \widehat{C}$. Si $|\overline{AB}| = 4x + 25$, $|\overline{BC}| = 2x + 45$ y $|\overline{AC}| = 3x - 15$, halla el perímetro del triángulo.

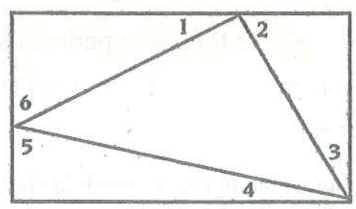
11. Halla las medidas de los tres ángulos de un ΔABC sabiendo que $m\widehat{C} = \frac{3}{4}\, m\widehat{A}$ y que la $m\widehat{B}$ excede en 4° a la $m\widehat{A}$.

12. En un ΔABC, $m\widehat{A} = m\widehat{B} = 64°$. Halla las medidas de los tres ángulos exteriores del triángulo.

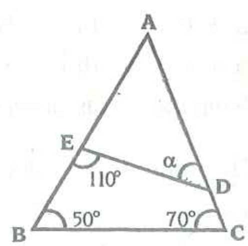
13. En un ΔABC, $m\widehat{B} = 4x° - 10°$, $m\widehat{C} = 45°$ y la medida del ángulo exterior en $\widehat{A}$ es $5x° + 15°$. Halla en grados las medidas de $\widehat{A}$ y $\widehat{B}$.

14. Las medidas de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo están en la razón de 7 a 8. Halla la medida de estos ángulos.

15. Dentro de un rectángulo hemos dibujado un triángulo. Calcula la suma de los ángulos $\widehat{1}$, $\widehat{2}$, $\widehat{3}$, $\widehat{4}$, $\widehat{5}$ y $\widehat{6}$.



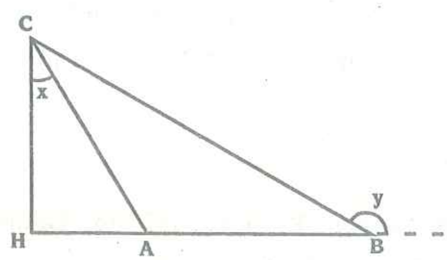
16. Teniendo en cuenta la información dada por la figura de la derecha, halla la $m\widehat{\alpha}$.



17. Datos: $\overline{AB} \cong \overline{AC}$; $\overline{CH} \perp \overline{AB}$

$m\widehat{y} = 138°$

Halla: $m\widehat{x}$



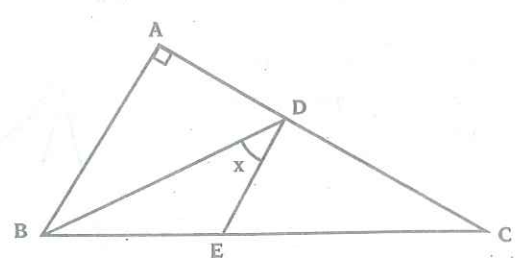
18. Datos: ΔABC es rectángulo en A

$\overline{BD}$ es bisectriz del $\widehat{B}$

$\overline{DE} \mathbin{/\!/} \overline{AB}$

$m\widehat{x} = 28°$

Halla: $m\widehat{B}$ y $m\widehat{C}$

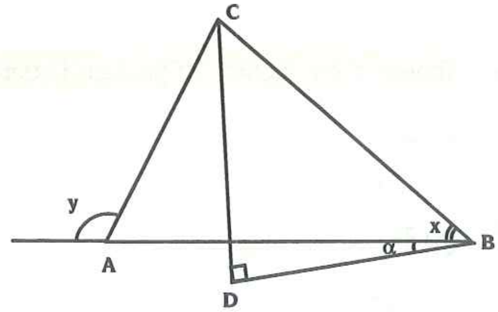


19. Datos: $\overline{CD}$ es bisectriz del $\widehat{C}$

$\overline{BD} \perp \overline{CD}$

$m\widehat{x} = 42°$, $m\widehat{y} = 111°$

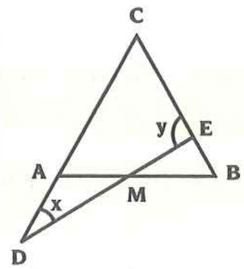
Halla: $m\widehat{\alpha}$



20. Datos: $\overline{AC} \cong \overline{BC}$

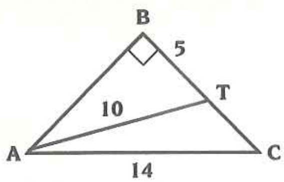
$\overline{AD} \cong \overline{AM}$

Demuestra que: $m\widehat{y} = 3m\widehat{x}$



PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS SABER

1.

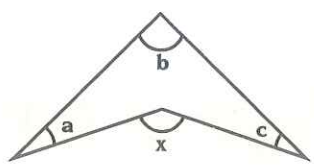


Si $m\widehat{B} = 90°$, entonces el perímetro del ΔATC es:

a) $5\sqrt{3} + 24$ b) $24 + 3\sqrt{3}$ c) 29 d) 30 e) 31

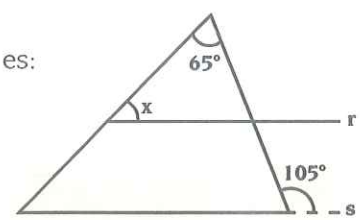
2. En la figura siguiente la medida del ángulo x es:

a) a + b b) a + b + c
c) a + c d) b + c
e) Ninguna de las anteriores



3. Si $\overleftrightarrow{r} \parallel \overleftrightarrow{s}$, entonces podemos afirmar que el valor de x en la figura es:

a) 80° b) 75° c) 70° d) 55° e) 40°

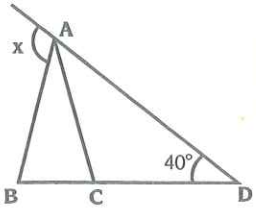


4. Dos ángulos de un triángulo miden (45° + x) y (45° - x). La medida del tercer ángulo es:

a) 45° b) 60° c) 30° d) 90° e) 120°

5. En la figura siguiente se sabe que $\overline{AB} \cong \overline{AC} \cong \overline{CD}$. Luego, la $m\widehat{x}$ es:

a) 90° b) 100°
c) 120° d) 110°
e) 130°



Núcleo Temático

7

CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

LOGRO GENERAL

Formular y demostrar propiedades sobre congruencia de triángulos a partir de la congruencia de ángulos y de segmentos.

DIMENSIONES

LOGROS ESPECÍFICOS	INDICADORES DE LOGRO
Corporal: • Utilizar material concreto para favorecer el desarrollo de procesos y habilidades de pensamiento.	• En grupos de 2 ó 3, deducen propiedades que se empleen en triángulos congruentes.
Comunicativa: • Interiorizar el proceso necesario para deducir propiedades de triángulos congruentes. • Incorporar al vocabulario matemático nuevos términos.	• Explica con claridad los procesos requeridos para deducir propiedades de algunos polígonos.
Cognitiva: • Enunciar los criterios de congruencia de triángulos. • Aplicar los criterios de congruencia de triángulos en la solución de problemas.	• Nombra y enuncia los criterios de congruencia de triángulos. • Aplica los criterios de congruencia de triángulos en la solución de problemas.
Estética: • Trazar y recortar triángulos.	• Utiliza los criterios L-A-L, A-L-A y L-L-L para verificar la congruencia de triángulos.
Ética-Actitudinal: • Resaltar la contribución de la geometría en la solución de problemas prácticos.	• Demuestra interés por aprender.

EVALUACIÓN

ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS

7.1 HISTORIA DE LA GEOMETRÍA (7)

PITÁGORAS

Pitágoras es universalmente conocido gracias al teorema que lleva su nombre y que relaciona los tres lados de un triángulo rectángulo. Pero su obra es mucho más amplia y va más allá de las matemáticas (geometría y aritmética) para adentrarse en la música, la astronomía, la religión y la magia. Para Pitágoras, el número natural era algo mágico y la base de todo el Universo. Tenía la convicción de que la armonía, la belleza y toda la naturaleza podían expresarse por relaciones entre los números naturales. Incluso sostuvo que los planetas girando sobre sus órbitas producían una armonía celeste fundamentada en dichos números.

Fundó una secta cuyos miembros -los pitagóricos- se comprometían a no revelar los secretos y las enseñanzas de la escuela. La hermosa estrella pentagonal fue el distintivo de la hermandad.

Uno de los mayores secretos de los pitagóricos, ya que destruía completamente la base de sus propias creencias, fue la existencia de números irracionales, como la relación entre las medidas de la diagonal y el lado de un cuadrado ($\sqrt{2}$) o la relación entre la longitud de una circunferencia y su diámetro (π).

El culto de los números mágicos dio la vuelta a todo el mundo antiguo, se mantuvo a lo largo de los siglos y ha llegado hasta nosotros. Por ejemplo, el número 666 o "número de la bestia" se identifica con el Anticristo, y muchos hombres de ciencia notables del pasado, como Newton y Neper, han intentado descubrir su identidad por medio de este número.

EJERCICIO 7.1

COMPRENSIÓN DE LECTURA. Explicación: Lee nuevamente el fragmento anterior; luego, analiza cada una de las preguntas que se te proponen a continuación y escoge la letra que corresponde a la UNICA respuesta correcta.

1. Cuando el autor habla de "armonía celeste" se refiere a:
   a. Incidencia de los números en la mecánica celeste.
   b. Descompensación en el itinerario de los planetas.
   c. Funcionamiento perfecto de los astros en el universo.
   d. Ciertas leyes que rigen el destino de los planetas en el universo.

2. De Pitágoras se dice todo lo siguiente, con excepción de:
   a. Fundó una cofradía que tenía cierto perfil cabalístico.
   b. Utilizó la magia y la superstición para enunciar sus postulados geométricos.
   c. Su obra también "tocó" la magia, la religión y la música.
   d. Su reconocimiento se debe a un famoso teorema de un polígono.

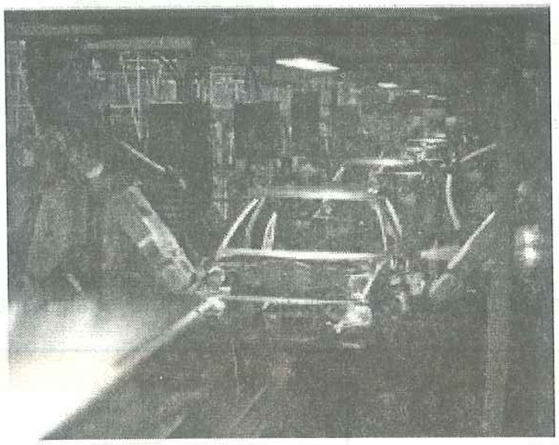
3. De la lectura anterior se puede deducir que:
   a. Pitágoras fue un farsante pues trabajó a la luz de la magia.
   b. Este científico notable fue un hombre inquieto, observador y polifacético.
   c. La geometría está ligada a las ciencias ocultas.
   d. Las ciencias humanísticas están muy ligadas a las ciencias matemáticas.

4. La idea central del fragmento anterior es:
   a. Pitágoras fue un hombre cabalístico.
   b. El trabajo serio de Pitágoras se desarrolló en el campo geométrico.
   c. También los hombres de ciencia le trabajaron a la magia.
   d. La obra de Pitágoras no puede circunscribirse sólo al campo geométrico.

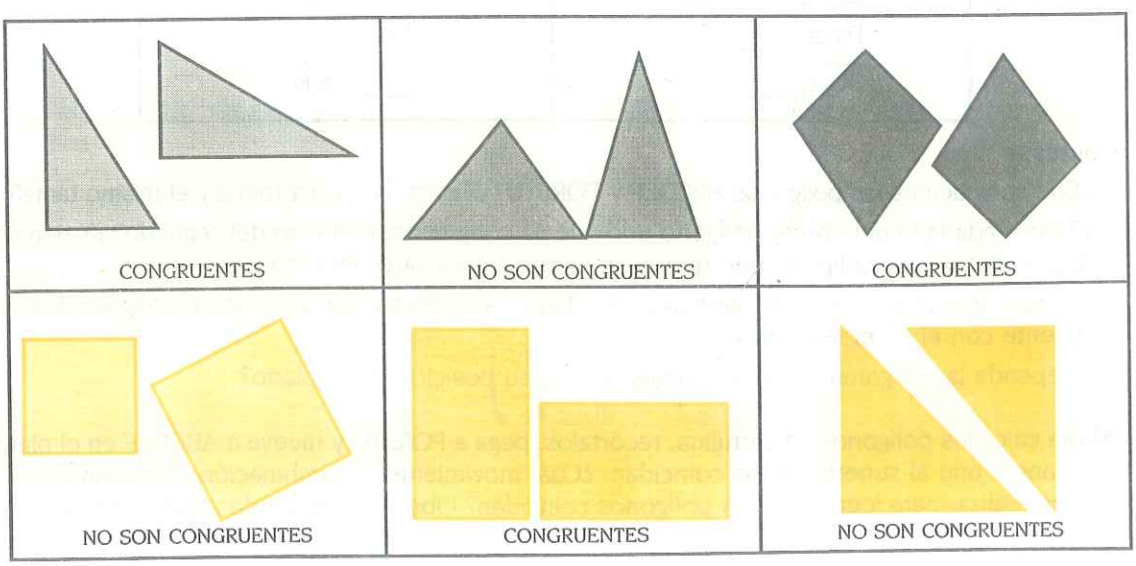
5. El escrito anterior tiene una "fuerte dosis" de contenido:
   a. Objetivo.
   b. Descriptivo.
   c. Religioso.
   d. Esotérico.

7.2 FIGURAS CONGRUENTES

- Los electrodomésticos (neveras, estufas, lavadoras, televisores, equipos de sonido) y los automóviles se fabrican utilizando la PRODUCCION EN SERIE. Ciertas piezas producidas deben ser de la MISMA FORMA y el MISMO TAMAÑO con el fin de utilizarlas en cualquier producto de la línea de montaje. Los repuestos también deben ser idénticos.



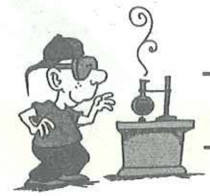
- En geometría, a las figuras que tienen el mismo tamaño y la misma forma se les llama FIGURAS CONGRUENTES. A continuación, mostramos algunas parejas de figuras que son congruentes y otras que no lo son.



APRENDAMOS

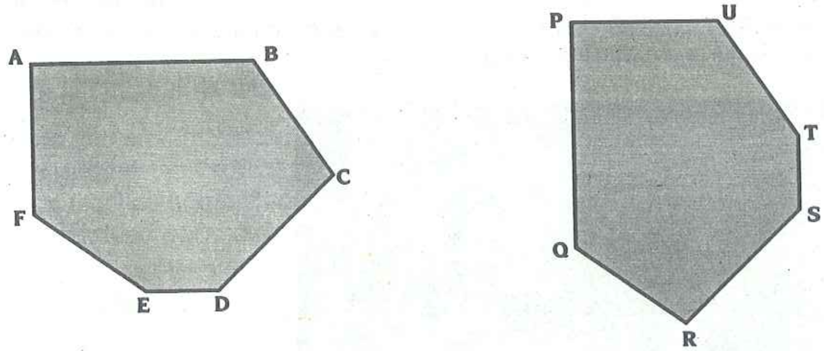
Dos figuras son **CONGRUENTES** cuando tienen la misma forma y el mismo tamaño.

- La siguiente experiencia nos ayudará a identificar la relación existente entre los lados y los ángulos de dos polígonos congruentes.



EXPERIENCIA

- Dibuja los dos polígonos de la figura siguiente y mide sus lados y sus ángulos.

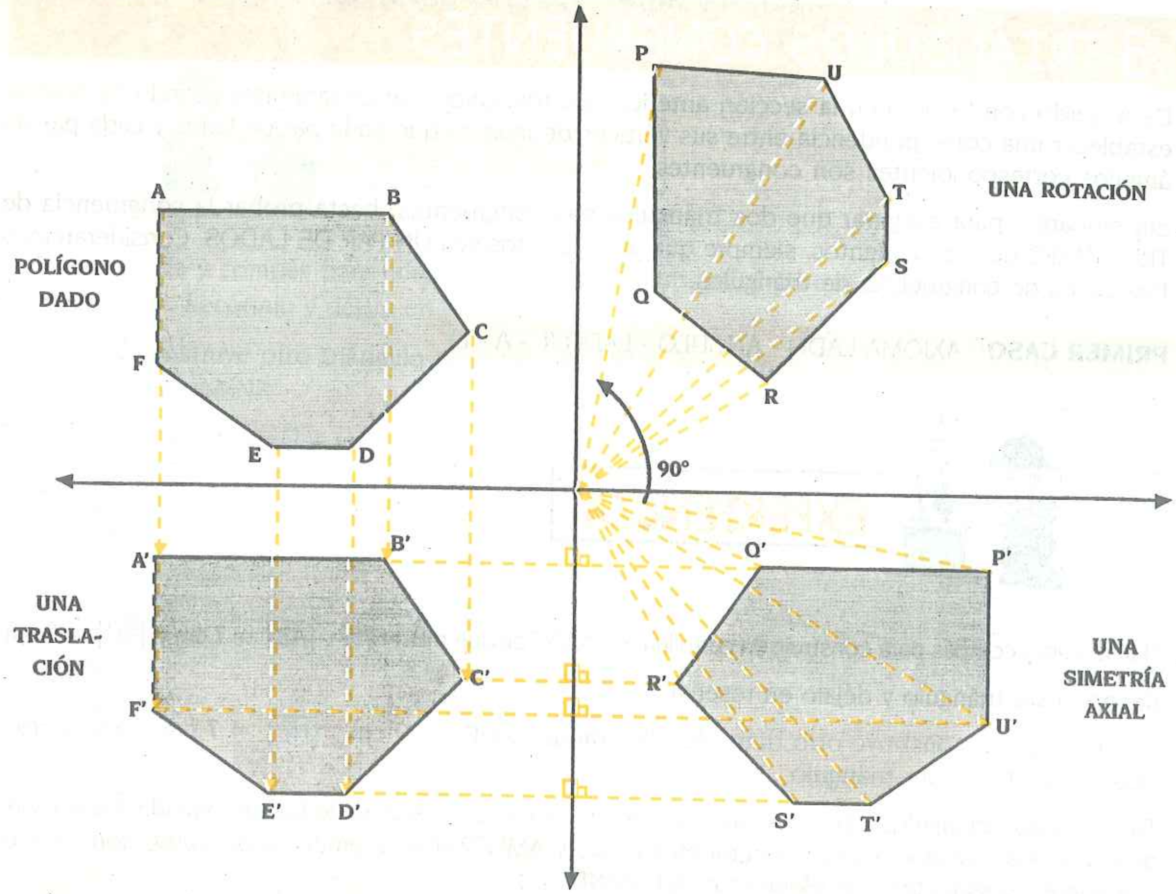


- Teniendo en cuenta los resultados de estas mediciones, completa el siguiente cuadro:

LADOS	ÁNGULOS
$\overline{AB} \cong$ _____	$\widehat{A} \cong$ _____
_____ $\cong \overline{TU}$	_____ $\cong \widehat{S}$
$\overline{CD} \cong$ _____	_____ $\cong \widehat{E}$
_____ $\cong \overline{ST}$	$\widehat{Q} \cong$ _____
$\overline{PU} \cong$ _____	$\widehat{F} \cong$ _____
$\overline{BC} \cong$ _____	_____ $\cong \widehat{R}$

- Contesta:
  - ¿Son congruentes los polígonos ABCDEF y PQRSTU? ¿Tienen la misma forma y el mismo tamaño?
  - ¿Tiene cada lado del primer polígono uno que es congruente con otro del segundo? ¿Y tiene cada ángulo del primer polígono uno que es congruente con otro del segundo?
  - Cuando dos polígonos son congruentes, ¿tiene cada elemento del primer polígono otro congruente con él en el segundo?
  - ¿Depende la congruencia de dos polígonos de su posición en el plano?

- Ahora calca los polígonos en cartulina, recórtalos, pega a PQRSTU y mueve a ABCDEF en el plano de tal manera que al superponerlos coincidan. ¿Cuál movimiento o combinación de movimientos podemos realizar para lograr que los polígonos coincidan? Observa y recuerda algunos de estos movimientos.



- Los movimientos de traslación, simetría y rotación determinan POLÍGONOS CONGRUENTES con el original.

APRENDAMOS

- Dos POLÍGONOS SON CONGRUENTES si hay una correspondencia entre sus vértices de manera que cada par de lados y cada par de ángulos correspondientes sean congruentes.
- En el caso que nos ocupa, el polígono ABCDEF es congruente con el polígono PQRSTU y escribimos:

$$\text{ABCDEF} \cong \text{PQRSTU} \longleftrightarrow \begin{cases} \overline{AB} \cong \overline{PQ} \; ; & \hat{A} \cong \hat{P} \\ \overline{BC} \cong \overline{QR} \; ; & \hat{B} \cong \hat{Q} \\ \overline{CD} \cong \overline{RS} \; ; & \hat{C} \cong \hat{R} \\ \overline{DE} \cong \overline{ST} \; ; & \hat{D} \cong \hat{S} \\ \overline{EF} \cong \overline{TU} \; ; & \hat{E} \cong \hat{T} \\ \overline{FA} \cong \overline{UP} \; ; & \hat{F} \cong \hat{U} \end{cases}$$

7.3 TRIÁNGULOS CONGRUENTES

- De acuerdo con lo visto en la sección anterior, dos triángulos son congruentes cuando es posible establecer una correspondencia entre sus vértices de manera que cada par de lados y cada par de ángulos correspondientes son congruentes.
- Sin embargo, para asegurar que dos triángulos son congruentes, basta probar la congruencia de TRES PARES de sus elementos, siempre que uno de estos sea UN PAR DE LADOS. Consideraremos tres casos de congruencia de triángulos.

PRIMER CASO: AXIOMA LADO - ANGULO - LADO (L - A - L)

EXPERIENCIA

- Utiliza regla y compás para construir, en cartulina, un ΔABC tal que $m\widehat{B} = 75°$, $|\overline{AB}| = 7$ cm y $|\overline{BC}| = 9$ cm.
- Recorta este triángulo y déjalo en reserva.
- A continuación, construye otro triángulo MNP tal que $|\overline{MP}| = 9$ cm, $|\overline{NP}| = 7$ cm y $m\widehat{P} = 75°$. Recorta también este triángulo.
- Toma los dos triángulos y trata de superponerlos. Contesta. ¿Es posible hacer coincidir los vértices de estos dos triángulos? ¿Son congruentes ΔABC y ΔMNP? ¿Qué elementos del ΔABC son respectivamente congruentes con elementos del ΔMNP?
- Completata:

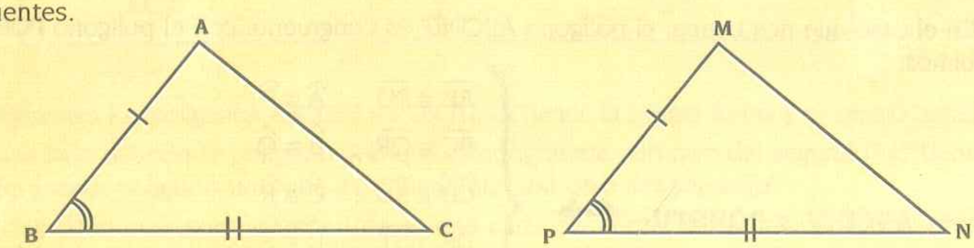
$\overline{AB} \cong$ ____ ; $\overline{AC} \cong$ ____ ; $\overline{BC} \cong$ ____

$\widehat{A} \cong$ ____ ; $\widehat{B} \cong$ ____ ; $\widehat{C} \cong$ ____

APRENDAMOS

CASO 1: AXIOMA LADO-ANGULO-LADO (L-A-L)

Si dos lados y el ángulo formado por estos dos lados de un triángulo son respectivamente congruentes con dos lados y el ángulo comprendido de otro triángulo, entonces los dos triángulos son congruentes.



$$\text{Si} \left\{ \begin{array}{l} \overline{AB} \cong \overline{MP} \\ \widehat{B} \cong \widehat{P} \\ \overline{BC} \cong \overline{PN} \end{array} \right. \quad \text{entonces } \Delta ABC \cong \Delta MPN$$

SEGUNDO CASO: CRITERIO ANGULO-LADO -ANGULO (A-L-A)

- Utiliza regla y compás para construir, en cartulina, un ΔABC tal que $|\overline{AC}| = 10$ cm , $m\widehat{A} = 60°$ y $m\widehat{C} = 70°$. Recórtalo y déjalo en reserva.
- Ahora, construye otro triángulo MNP tal que $|\overline{NP}| = 10$ cm, $m\widehat{N} = 70°$ y $m\widehat{P} = 60°$. Igualmente recorta este ΔMNP.
- Toma los dos triángulos y trata de superponerlos. Contesta: ¿Es posible hacer coincidir los vértices de estos dos triángulos? ¿Son congruentes el ΔABC y el ΔMNP? ¿Qué elementos del ΔABC son respectivamente congruentes con elementos del ΔMNP?
- Completa:

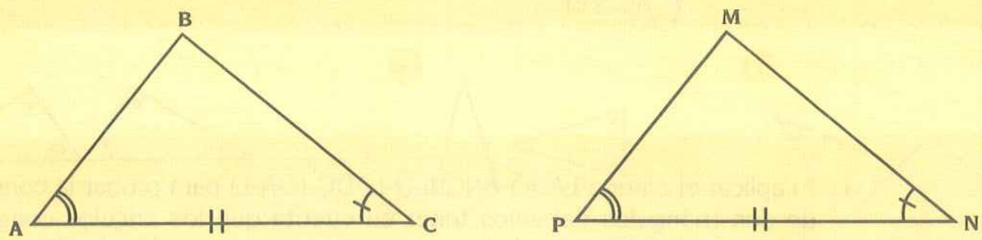
$\overline{MN} \cong$ ____ ; $\overline{NP} \cong$ ____ ; $\overline{AB} \cong$ ____

$\widehat{M} \cong$ ____ ; $\widehat{C} \cong$ ____ ; $\widehat{P} \cong$ ____

APRENDAMOS

CASO 2: CRITERIO ANGULO-LADO-ANGULO (A-L-A)

Si dos ángulos y el lado común a estos dos ángulos de un triángulo son respectivamente congruentes con dos ángulos y el lado común a estos dos ángulos de otro triángulo, entonces los dos triángulos son congruentes.



$$\text{Si} \left\{ \begin{array}{l} \widehat{A} \cong \widehat{P} \\ \overline{AC} \cong \overline{PN} \\ \widehat{C} \cong \widehat{N} \end{array} \right. \quad \text{entonces } \Delta ABC \cong \Delta PMN$$

TERCER CASO: CRITERIO LADO-LADO-LADO (L-L-L)

- Utiliza regla y compás para construir, en cartulina, un ΔABC tal que $|\overline{AB}| = 12$ cm , $|\overline{BC}| = 10$ cm y $|\overline{AC}| = 15$ cm. Recórtalo y déjalo en reserva.

- Ahora construye otro triángulo DEF tal que $|DF| = 12$ cm, $|FE| = 15$ cm y $|DE| = 10$ cm. Recorta también este ΔDEF.
- Toma los dos triángulos y trata de superponerlos. Contesta: ¿Es posible hacer coincidir los vértices de estos dos triángulos? ¿Son congruentes el ΔABC y el ΔDEF? ¿Qué elementos del ΔABC son respectivamente congruentes con elementos del ΔDEF?
- Completa:

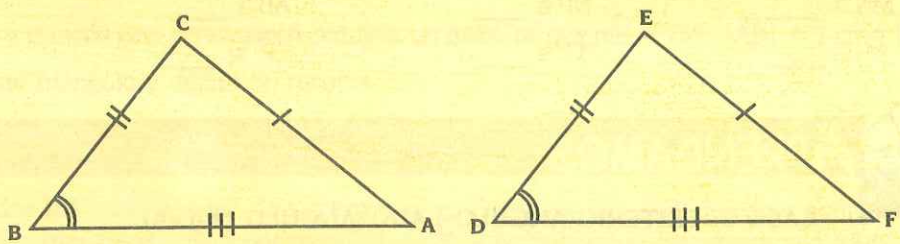
$\overline{BC} \cong$ ____ ; $\overline{DF} \cong$ ____ ; $\overline{EF} \cong$ ____

$\widehat{F} \cong$ ____ ; $\widehat{B} \cong$ ____ ; $\widehat{E} \cong$ ____

APRENDAMOS

CASO 3: CRITERIO LADO-LADO-LADO (L-L-L)

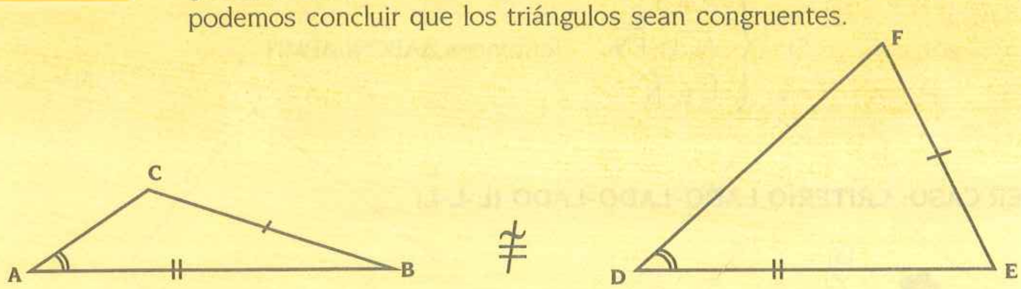
Si los tres lados de un triángulo son respectivamente congruentes con los tres lados de otro triángulo, entonces los dos triángulos son congruentes.



$$\text{Si} \begin{cases} \overline{AB} \cong \overline{DF} \\ \overline{BC} \cong \overline{DE} \\ \overline{AC} \cong \overline{EF} \end{cases} \text{ entonces } \Delta ABC \cong \Delta DEF$$

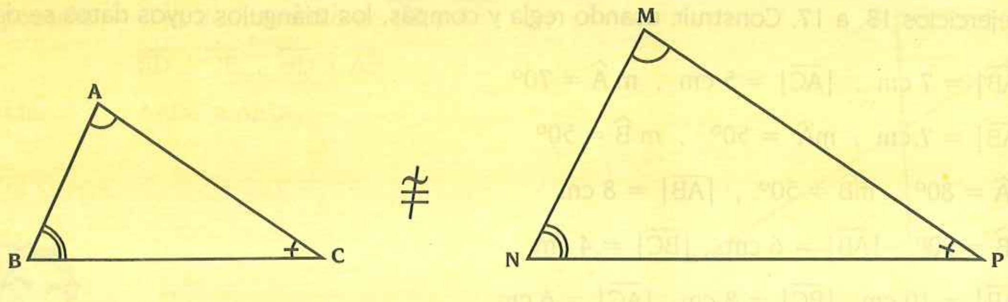
¡ATENCIÓN!

1. Al aplicar el criterio LADO-ANGULO-LADO (L-A-L) para probar la congruencia de dos triángulos debemos tener en cuenta que los ángulos congruentes deben estar **ENTRE** los lados congruentes. Si, en cambio, los ángulos congruentes no se encuentran entre los dos lados congruentes, entonces no podemos concluir que los triángulos sean congruentes.



Esto significa que NO existe un criterio de congruencia LADO-LADO-ANGULO (L-L-A)

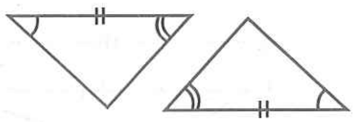
2. El hecho de que los tres ángulos de un triángulo sean respectivamente congruentes con los tres ángulos de otro triángulo NO IMPLICA que los dos triángulos sean congruentes.

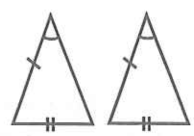


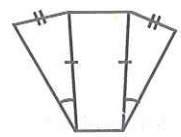
Esto significa que tampoco existe un criterio de congruencia ANGULO-ANGULO-ANGULO (A-A-A)

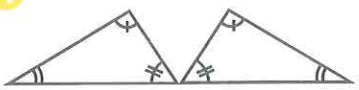
EJERCICIO 7.2

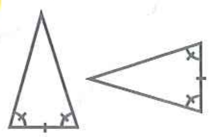
En cada pareja de triángulos de los ejercicios 1. a 12., las marcas similares indican los elementos que son congruentes entre sí. Determina el criterio **L-A-L, A-L-A** o **L-L-L** que pruebe la congruencia de los triángulos, en caso de que lo sean.

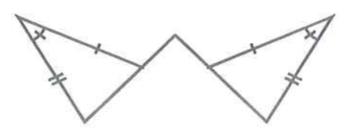
1.


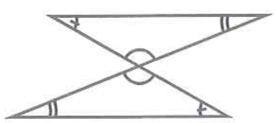
2.


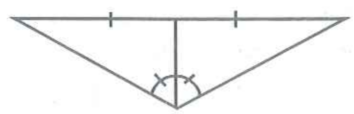
3.


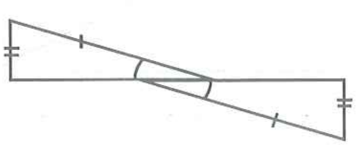
4.


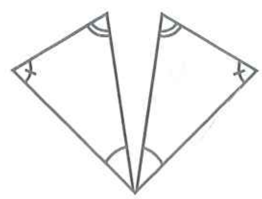
5.


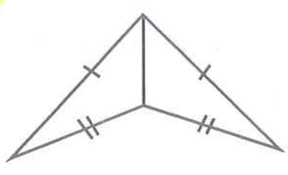
6.


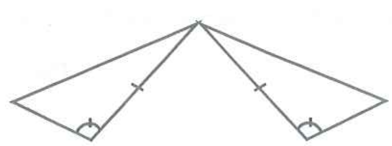
7.


8.


9.


10.


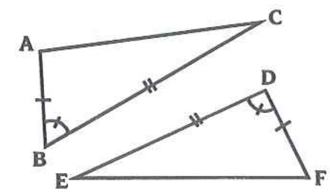
11.


12.


En los ejercicios 13. a 17. Construir, usando regla y compás, los triángulos cuyos datos se dan:

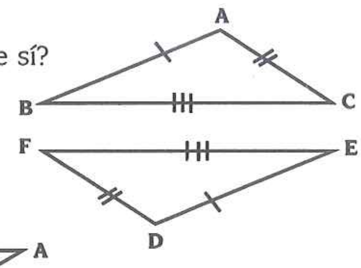
13. $|\overline{AB}| = 7$ cm , $|\overline{AC}| = 5$ cm , $m\,\widehat{A} = 70^\circ$
14. $|\overline{AB}| = 7$ cm , $m\widehat{A} = 50^\circ$, $m\,\widehat{B} = 50^\circ$
15. $m\widehat{A} = 80^\circ$, $m\widehat{B} = 50^\circ$, $|\overline{AB}| = 8$ cm
16. $m\widehat{B} = 90^\circ$, $|\overline{AB}| = 6$ cm , $|\overline{BC}| = 4$ cm
17. $|\overline{AB}| = 10$ cm , $|\overline{BC}| = 8$ cm , $|\overline{AC}| = 6$ cm
18. Contesta: ¿Por qué dos triángulos rectángulos que tienen sus dos pares de catetos congruentes son congruentes?
19. Contesta: ¿Por qué dos triángulos rectángulos que tienen un par de catetos y un ángulo agudo respectivamente congruentes son congruentes?
20. En la figura de la derecha se sabe que $\overline{AB} \cong \overline{DF}$, $\overline{BC} \cong \overline{DE}$ y $\widehat{B} \cong \widehat{D}$. Contesta:

    a) ¿Es $\Delta ABC \cong \Delta DEF$? ¿Por qué?
    b) ¿Cuál ángulo es congruente con el $\widehat{A}$?
    c) ¿Cuál ángulo es congruente con el $\widehat{C}$?



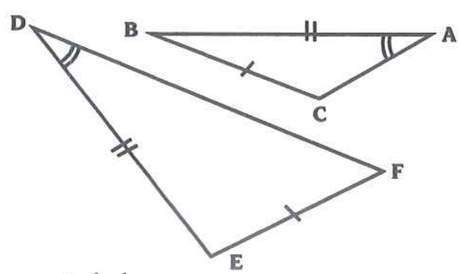
21. Observa con cuidado los triángulos de la figura y contesta:

    a) ¿Son congruentes? ¿Por qué?
    b) En caso de ser congruentes, ¿qué ángulos son congruentes entre sí?



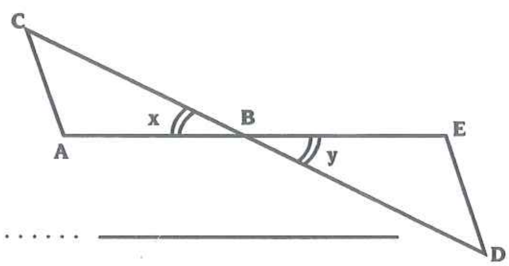
22. En los triángulos de la figura de la derecha hemos marcado de la misma manera los elementos congruentes entre sí.

    Contesta: ¿Son congruentes los triángulos? ¿Por qué?



23. Al frente de cada paso escribe la propiedad que lo justifica en la siguiente demostración.

    Hipótesis: B es punto medio de $\overline{AE}$ y de $\overline{CD}$
    Tesis: $\Delta ABC \cong \Delta BDE$

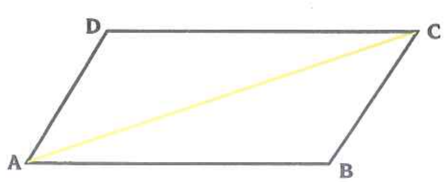


DEMOSTRACIÓN

1. B es punto medio de $\overline{AE}$ y $\overline{CD}$ .... ______________________
2. Luego, $\overline{AB} \cong \overline{BE}$ y $\overline{BC} \cong \overline{BD}$ .... ______________________
3. Además, $\widehat{x} \cong \widehat{y}$. .... ______________________
4. Por lo tanto, $\Delta ABC \cong \Delta BDE$ .... ______________________

En los ejercicios 24. y 25. realiza una demostración de las proposiciones cuyas hipótesis y tesis se presentan.

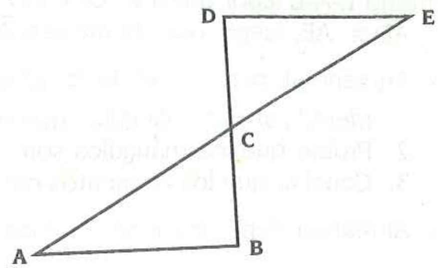
24. **Hipótesis:** $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$, $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$
    Tesis: $\Delta ABC \cong \Delta ADC$



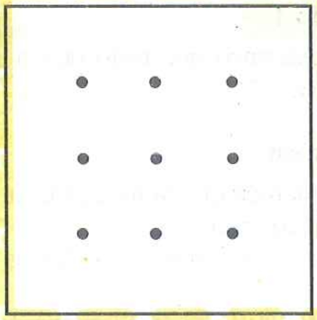
25 **Hipótesis:** C es punto medio de $\overline{DB}$ y $\overline{AE}$

$\overline{BD} \perp \overline{DE}$, $\overline{BD} \perp \overline{AB}$

Tesis: $\Delta ABC \cong \Delta EDC$



DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 1



En una hoja cuadriculada dibuja puntos de 3x3 como muestra la figura y traza:

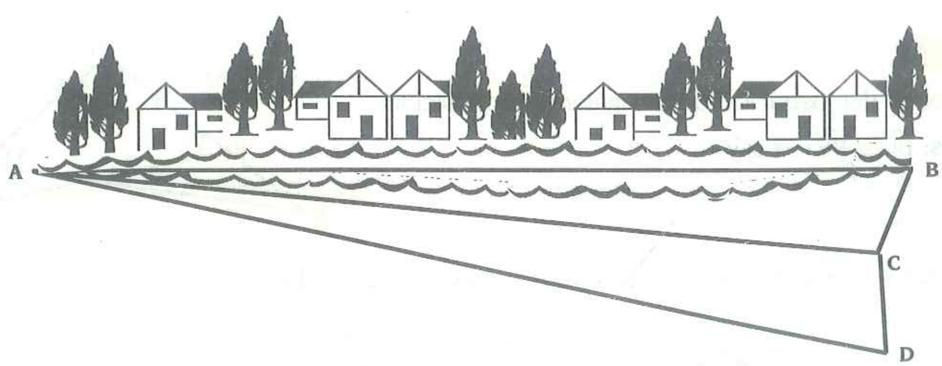
1. Segmentos de 5 longitudes diferentes.
2. Angulos de 10 tamaños diferentes.
3. Triángulos de 7 tamaños y formas diferentes.

7.4 APLICACIONES DE LA CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

- La congruencia de triángulos proporciona una de las herramientas más valiosas que posee la geometría para resolver problemas de la vida real. Consideremos, por ejemplo el siguiente problema:

  "Un equipo de topógrafos desea encontrar la distancia entre dos puntos A y B de un lago. Con tal fin deciden construir dos triángulos así: **"escogen un punto cualquiera C sobre la playa, miden el ángulo $\widehat{ACB}$ y ubican un cuarto punto D de tal manera que $\widehat{ACD} \cong \widehat{ACB}$ y que $\overline{CD} \cong \overline{CB}$".**

  Trata de hacer un dibujo que traduzca fielmente el enunciado del problema. Compara tu dibujo con el siguiente:



Contesta: ¿Son congruentes los triángulos ΔACD y ΔACB? ¿Cómo puede ayudar este hecho a encontrar la distancia requerida?

- Con frecuencia se prueba que un par de segmentos o ángulos son congruentes probando antes que son partes de dos triángulos congruentes. En este problema, por ejemplo, el $\Delta ACD \cong \Delta ACB$ por el criterio L-A-L (¿por qué?) y como $\overline{AD}$ y $\overline{AB}$ son partes correspondientes de estos triángulos, entonces $\overline{AD} \cong \overline{AB}$; luego, bastará medir a $\overline{AD}$ para saber cuanto mide $\overline{AB}$.

- En general, para probar la congruencia de ángulos o segmentos se recomienda.
  1. Identificar dos triángulos que tengan estos segmentos o ángulos como elementos.
  2. Probar que los triángulos son congruentes.
  3. Concluir que los elementos cuya congruencia queremos probar hacen parte de estos triángulos.
- Al realizar demostraciones, damos la siguiente justificación para el tercer paso:

"Las partes correspondientes de triángulos congruentes son congruentes"

Esta justificación la abreviamos así: **PCTCC**

Ejemplo 1

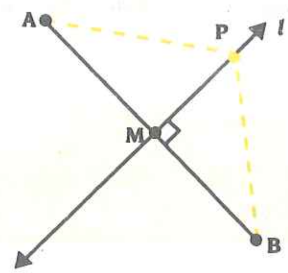
Demostremos que todo punto de la mediatriz de un segmento equidista de los extremos del segmento.

Solución

- Recordemos que la mediatriz de un segmento es la recta perpendicular al segmento y que pasa por su punto medio.
- De acuerdo con esto, podemos plantear una hipótesis, una tesis y realizar una demostración; así:

Hipótesis: $\overleftrightarrow{l}$ es mediatriz de $\overline{AB}$
M es el punto medio de $\overline{AB}$
P es un punto de $\overleftrightarrow{l}$

Tesis: $\overline{PA} \cong \overline{PB}$



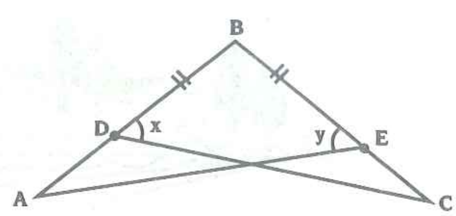
Demostración

1. $\overleftrightarrow{l}$ es mediatriz de $\overline{AB}$, M es punto medio de $\overline{AB}$ y P es un punto de $\overleftrightarrow{l}$ ....Por hipótesis
2. Luego, $\overline{AM} \cong \overline{MB}$ ....Por ser M punto medio de $\overline{AB}$
3. Además, $\overline{PM} \cong \overline{PM}$ ....Todo segmento es congruente a sí mismo
4. $\measuredangle AMP \cong \measuredangle BMP$ ....Por ser ángulos rectos
5. Luego, $\Delta AMP \cong \Delta BMP$...Criterio L-A-L
6. Por lo tanto, $\overline{AP} \cong \overline{BP}$...Porque PCTCC

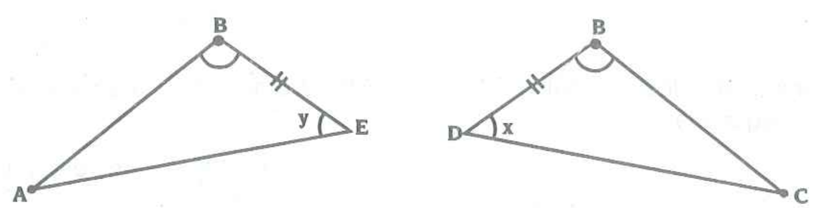
Ejemplo 2

Realicemos la demostración de la siguiente proposición:

Hipótesis: $\overline{BD} \cong \overline{BE}$, $\widehat{x} \cong \widehat{y}$
Tesis: $\widehat{A} \cong \widehat{C}$



Solución
Para facilitar la demostración separemos los triángulos ABE y BDC.

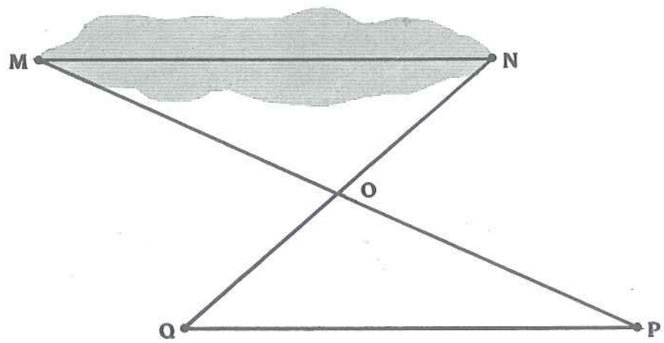


Demostración

1. $\overline{DB} \cong \overline{BE}$...Por hipótesis
2. $\hat{x} \cong \hat{y}$..Por hipótesis
3. $\hat{B} \cong \hat{B}$ ....Todo ángulo es congruente consigo mismo.
4. Luego, $\Delta ABE \cong \Delta CBD$..................................Por criterio A-L-A
5. Por lo tanto, $\hat{A} \cong \hat{C}$ ....Porque PCTCC

Ejemplo 3

Hallemos la distancia entre los puntos M y N ubicado en los extremos de un lago, sabiendo que: $\overline{OM} \cong \overline{OP}$, $\overline{ON} \cong \overline{OQ}$ y $|\overline{PQ}| = 50$ metros.



Solución

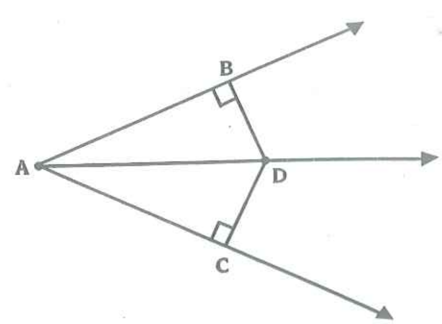
Escribamos al frente de cada paso la proposición que lo justifica.

1. $\overline{OM} \cong \overline{OP}$, $\overline{ON} \cong \overline{OQ}$ y $|\overline{PQ}| = 50$ m..............................Por hipótesis
2. $\measuredangle MON \cong \measuredangle POQ$ ....______________________________
3. Luego $\Delta MON \cong \Delta POQ$ ....______________________________
4. Luego, $\overline{MN} \cong \overline{PQ}$ ....______________________________
5. Por lo tanto, $|\overline{MN}| = 50$ m...______________________________

En algunos de los siguientes ejercicios es conveniente "desbaratar" la figura para observar con mayor claridad las relaciones entre lados o ángulos. Hazlo si lo requieres.

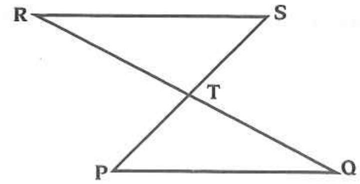
1 **Hipótesis:** $\overline{AD}$ es bisectriz del $\hat{A}$
$\overline{BD} \perp \overline{AB}$ y $\overline{DC} \perp \overline{AC}$

Tesis: $\overline{BD} \cong \overline{DC}$



2. **Hipótesis:** T es punto medio de $\overline{QR}$ y $\overline{SP}$

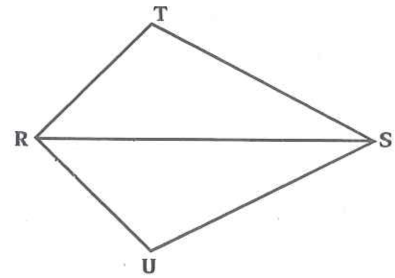
Tesis: $\widehat{R} \cong \widehat{Q}$



3. **Hipótesis:** $\overline{TR} \cong \overline{RU}$ y $\overline{TS} \cong \overline{SU}$

Tesis: a) $\overline{RS}$ es bisectriz de $\widehat{TRU}$

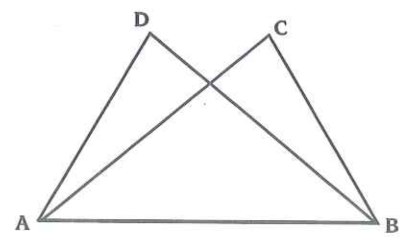
b) $\overline{RS}$ es bisectriz de $\widehat{TSU}$



4. **Hipótesis:** $\widehat{DAB} \cong \widehat{CBA}$

$\widehat{CAB} \cong \widehat{DBA}$

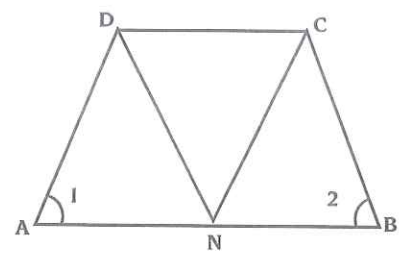
Tesis: $\overline{AD} \cong \overline{BC}$



5. **Hipótesis:** $\overline{AD} \cong \overline{BC}$, $\widehat{1} \cong \widehat{2}$

N es punto medio de $\overline{AB}$

Tesis: ΔCND es isósceles

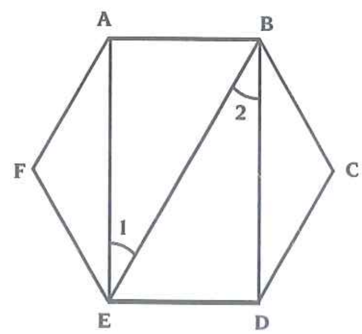


En los ejercicios 6. a 10. es necesario probar que hay más de un par de triángulos congruentes.

6. **Hipótesis:** ABCDEF es un exágono regular

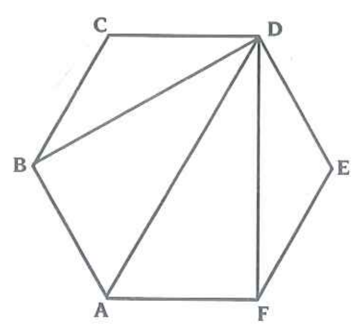
Tesis: $\widehat{1} \cong \widehat{2}$

(Sugerencia: pruebe primero que $\overline{AE} \cong \overline{BD}$



7. **Hipótesis:** ABCDEF es un exágono regular

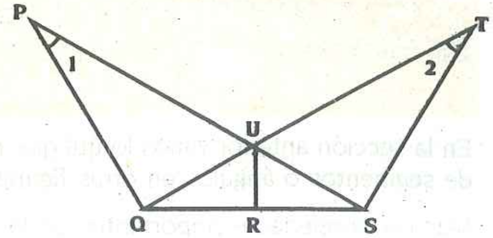
Tesis: $\Delta ABD \cong \Delta AFD$



8 **Hipótesis:** $\hat{1} \cong \hat{2}$, $\overline{UR}$ es mediatriz de $\overline{QS}$, $\overline{PU} \cong \overline{TU}$

$\measuredangle PUQ \cong \measuredangle TUS$

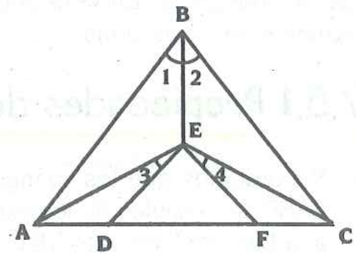
Tesis: $\triangle QRU \cong \triangle SRU$



9 **Hipótesis:** $\overline{AB} \cong \overline{BC}$, $\overline{ED} \cong \overline{EF}$

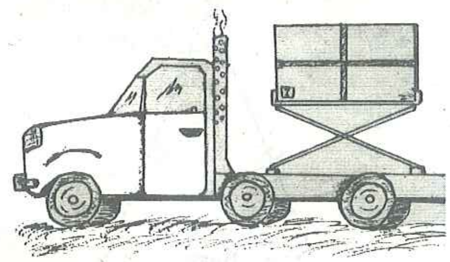
$\hat{1} \cong \hat{2}$, $\hat{3} \cong \hat{4}$

Tesis: $\overline{AD} \cong \overline{CF}$



10 Esta fotografía muestra las "tijeras" de una plataforma de camión abiertas, alzando la plataforma a su altura máxima. Los soportes de la plataforma se bisecan.

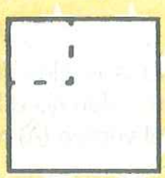
Explica por qué en estas condiciones la plataforma del camión está paralela a la estructura base del camión.



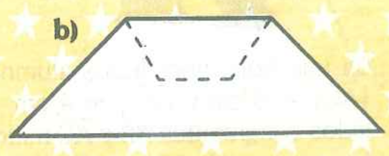
DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 2

Dibuja estas figuras y traza las líneas punteadas de manera que cada figura se pueda dividir en cuatro partes idénticas, todas de la misma forma que la original.

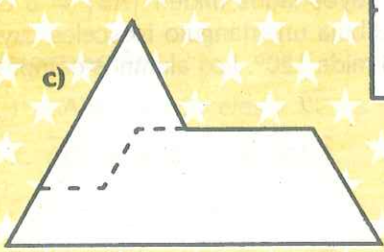
a)



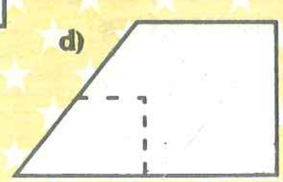
b)



c)



d)



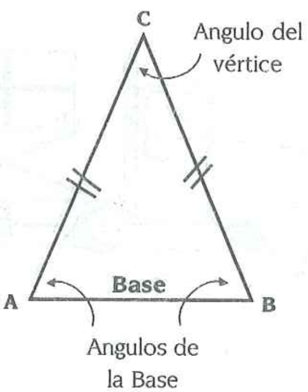
7.5 ALGUNAS CONSECUENCIAS DE LA CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

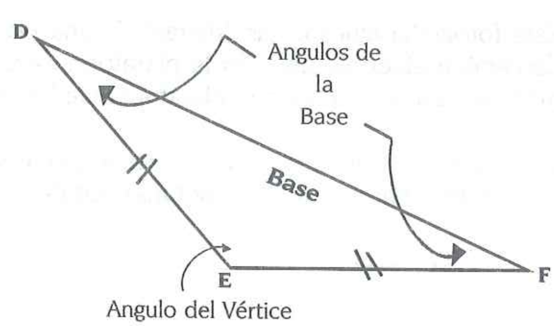
En la sección anterior vimos lo útil que resulta la congruencia de triángulos para probar la congruencia de segmentos o ángulos en otras figuras.

Muchas propiedades importantes de la geometría pueden demostrarse haciendo uso de la congruencia de triángulos. En esta sección vamos a estudiar algunas de estas propiedades y en la unidad siguiente veremos otras.

7.5.1 Propiedades de los Triángulos Isósceles

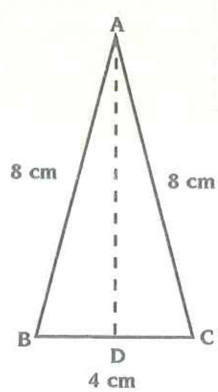
- Recordemos que los triángulos isósceles tienen dos lados congruentes. El lado desigual se llama BASE, los ángulos de los extremos de la base se llaman ANGULOS DE LA BASE y el ángulo opuesto a la base se llama ANGULO DEL VÉRTICE.

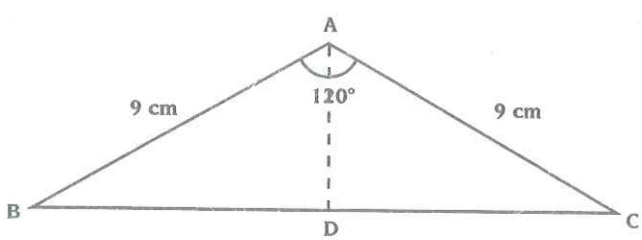




- La siguiente experiencia nos ayudará a reconocer las propiedades especiales de los triángulos isósceles y nos preparará el camino para su deducción.
- Para realizar esta experiencia, los alumnos se reunirán por parejas.

- En una hoja, uno de los alumnos dibuja un triángulo isósceles cuyos lados miden $|\overline{AB}| = 8$ cm, $|\overline{AC}| = 8$ cm y $|\overline{BC}| = 4$ cm. Mientras tanto, el otro alumno dibuja un triángulo isósceles cuyos lados congruentes $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ miden 9 cm y el ángulo del vértice ($\hat{A}$) mide 120°. Los alumnos comprueban si sus triángulos son semejantes a éstos.





- A continuación, cada alumno traza la bisectriz del ángulo del vértice ($\widehat{A}$) y la llama $\overline{AD}$.
- Ahora, cada uno recorta su triángulo, lo dobla usando como eje la bisectriz $\overline{AD}$ y contesta las siguientes preguntas:
  - ¿Coinciden los triángulos ADB y ADC? ¿Son congruentes?
  - ¿Cómo son los ángulos de la base $\widehat{B}$ y $\widehat{C}$? ¿Son congruentes?
  - ¿Es $\overline{BD} \cong \overline{DC}$? ¿Es D punto medio de $\overline{BC}$?
  - Además de ser bisectriz, ¿qué otra línea es $\overline{AD}$?
  - ¿Cuánto miden los ángulos $\widehat{ADB}$ y $\widehat{ADC}$? ¿Es $\overline{AD} \perp \overline{BC}$?
  - Además de ser bisectriz y mediana, ¿qué otra línea es $\overline{AD}$?
  - ¿Es $\overline{AD}$ un eje de simetría del ΔABC?
- Compara tus respuestas con las que aparecen a continuación como propiedades de los triángulos isósceles

APRENDAMOS

Propiedades de los Triángulos Isósceles

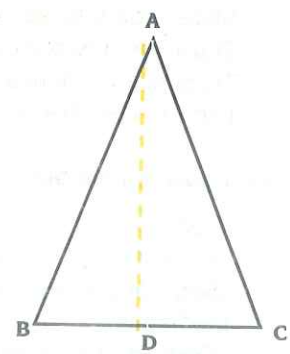
En todo triángulo isósceles se cumple que:

1. Los ángulos de la base son congruentes.
2. La bisectriz del ángulo del vértice también es mediana del triángulo.
3. La bisectriz del ángulo del vértice también es altura del triángulo.
4. La bisectriz del ángulo del vértice también es mediatriz del triángulo.

- Ahora demostremos que estas importantes propiedades son verdaderas para todos los triángulos isósceles.

Hipótesis: ΔABC es isósceles
$\overline{BC}$ es la base
$\overline{AD}$ es la bisectriz del ángulo del vértice

Tesis: a) $\widehat{B} \cong \widehat{C}$
b) $\overline{AD}$ es mediana
c) $\overline{AD}$ es altura
d) $\overline{AD}$ es mediatriz



Demostración

a) 1. ΔABC es isósceles y $\overline{BC}$ es la base......................Por hipótesis
2. $\overline{AD}$ es la bisectriz del $\widehat{A}$......................................Por hipótesis
3. Pero, $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ ....Por ser ΔABC isósceles
4. También, $\angle BAD \cong \angle CAD$ ....Por ser $\overline{AD}$ bisectriz
5. Y $\overline{AD} \cong \overline{AD}$ ....Todo segmento es congruente consigo mismo
6. Luego, $\Delta ADB \cong \Delta ADC$...Criterio L-A-L
7. Por lo tanto, $\widehat{B} \cong \widehat{C}$...Porque PCTCC

b) Escribe al frente de cada paso la proposición que la justifica:

1. $\Delta ADB \cong \Delta ADC$. . . . . Ya demostrado en la parte a)
2. Luego $\overline{BD} \cong \overline{DC}$ . . . . ______________________
3. Por lo tanto, $\overline{AD}$ es mediana del ΔABC . . . . ______________________

c) Escribe al frente de cada paso la proposición que la justifica:

1. $\Delta ADB \cong \Delta ADC$. . . . . ______________________
2. Luego, $\measuredangle BDA \cong \measuredangle CDA$. . . . . ______________________
3. Pero, $m(\measuredangle BDA) + m(\measuredangle CDA) = 180°$. . . . . . . ______________________
4. Luego, $m(\measuredangle BDA) + m(\measuredangle BDA) = 180°$. . . . . . . ______________________
5. Luego, $2m(\measuredangle BDA) = 180°$. . . . . ______________________
6. Luego, $m(\measuredangle BDA) = \frac{180°}{2} = 90°$ . . . . ______________________
7. Luego, $\overline{AD} \perp \overline{BC}$. . . . . ______________________
8. Por lo tanto, $\overline{AD}$ es altura del ΔABC. . . . . ______________________

d) Dejamos la demostración de esta parte como ejercicio para el lector.

7.5.2 Propiedades de los Triángulos Equiláteros

EXPERIENCIA

- Construye con regla y compás un triángulo equilátero de 10 cm de lado y realiza estas actividades.
  - Mide cada uno de sus ángulos interiores.
  - Traza sus tres bisectrices y mídelas.
  - Traza sus medianas, alturas y mediatrices y mídelas.
  - Escribe tus observaciones.

- Con base en las observaciones realizadas contesta estas preguntas.
  - ¿Cuánto mide cada ángulo interior de un triángulo equilátero?
  - ¿Es un triángulo equilátero también equiángulo?
  - ¿Son congruentes las tres bisectrices de un triángulo equilátero? ¿Y las tres alturas? ¿Y las tres medianas?
  - ¿Coinciden la bisectriz, la altura y la mediana de un triángulo equilátero, trazadas desde un mismo vértice?

APRENDAMOS

Propiedades de los Triángulos Equiláteros

En todo triángulo equilátero se cumple que:

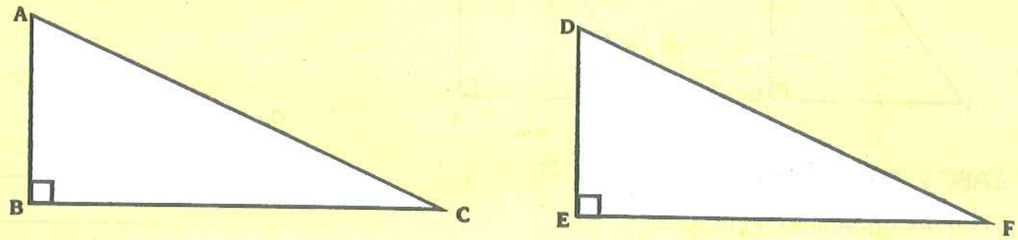
1. Es equiángulo. Cada ángulo interior mide 60°.
2. Todas las líneas notables son congruentes.
3. Las líneas notables trazadas desde un mismo vértice coinciden.

- Dejamos como ejercicio probar estas propiedades particulares del triángulo equilátero.

7.5.3 El Criterio de Congruencia Hipotenusa-Cateto

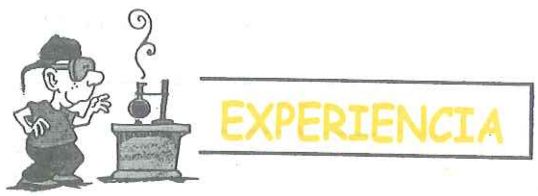
- Los triángulos rectángulos tienen un criterio de congruencia muy particular: el criterio de congruencia HIPOTENUSA-CATETO (H-C). Este criterio de congruencia establece lo siguiente:

"Si dos triángulos rectángulos tienen sus hipotenusas y un par de catetos respectivamente congruentes entonces los triángulos rectángulos son congruentes".



$$\text{Si} \begin{cases} \overline{AC} \cong \overline{DF} \\ \text{y} \\ \overline{BC} \cong \overline{EF} \end{cases} \quad \text{entonces } \Delta ABC \cong \Delta DEF$$

- Para verificar la verdad de esta proposición vamos a realizar la siguiente experiencia y, luego, demostraremos que es verdadera siempre.

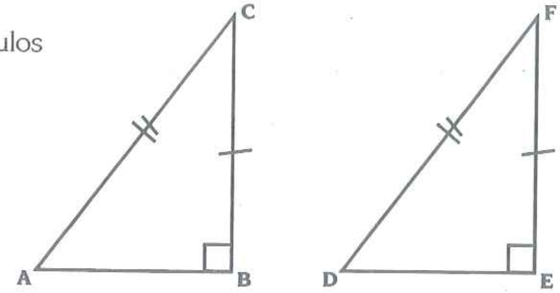


- Para realizar esta experiencia cada alumno estará provisto de un trozo de cartulina del tamaño de una hoja de cuaderno, una regla, un compás, dos lápices de colores, uno rojo y otro negro y unas tijeras.
- Los alumnos forman parejas. Uno de ellos va a construir, utilizando la regla y el compás, un triángulo rectángulo ABC tal que la hipotenusa $\overline{AC}$ mida 15 cm y el cateto $\overline{BC}$ mida 9 cm; luego, la pinta de negro y lo recorta. El otro alumno realiza la misma actividad para construir un triángulo rectángulo DEF tal que la hipotenusa $\overline{DF}$ mida 15 cm y el cateto $\overline{EF}$ mida 9 cm; luego, lo pinta de rojo y lo recorta.
- A continuación, uno de los alumnos toma ambos triángulos y los superpone tratando de hacerlos coincidir. ¿Lo logra? ¿Son los triángulos rectángulos ABC y DEF congruentes?
- ¿Será cierta esta proposición para todos los casos? Veamos:

Hipótesis: ΔABC y ΔDEF son rectángulos

$\overline{BC} \cong \overline{EF}$ y $\overline{AC} \cong \overline{DF}$

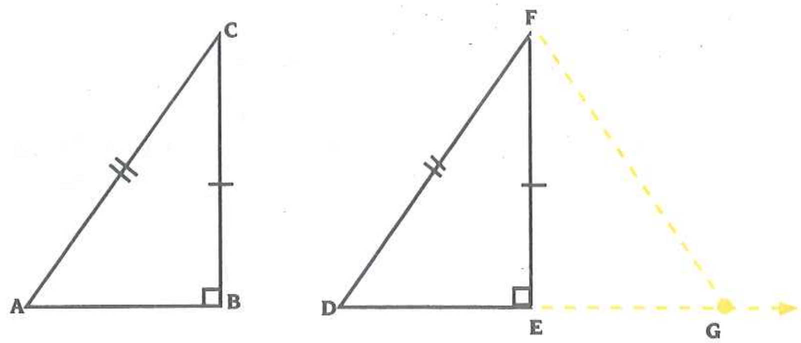
Tesis: $\Delta ABC \cong \Delta DEF$



Demostración

Al frente de cada paso escribe la proposición que lo justifica.

1. Dibujamos la semirrecta $\overrightarrow{DE}$ y sobre ella marcamos el punto G tal que $\overline{EG} \cong \overline{AB}$ ....Axioma de la construcción de segmentos.



2. $\measuredangle ABC$ y $\measuredangle DEF$ son ángulos rectos .... ________________
3. $\measuredangle GEF$ es un ángulo recto.................... ________________
4. Luego, $\measuredangle ABC \cong \measuredangle DEF \cong \measuredangle GEF$................ ________________
5. Además, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$.......................... ________________
6. Luego, $\Delta ABC \cong \Delta GEF$. .... ________________
7. Luego, $\overline{AC} \cong \overline{GF}$. .... ________________
8. También, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ .... ________________
9. Luego, $\overline{GF} \cong \overline{DF}$. .... Propiedad transitiva entre 7 y 8.
10. Luego, $\measuredangle FDE \cong \measuredangle FGE$ .... Los ángulos de la base de un Δ isósceles son $\cong$s.
11. Y como $\overline{EF} \cong \overline{EF}$ .... ________________
12. Entonces $\Delta DEF \cong \Delta GEF$ .... ________________
13. Por lo tanto, $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ .... ________________

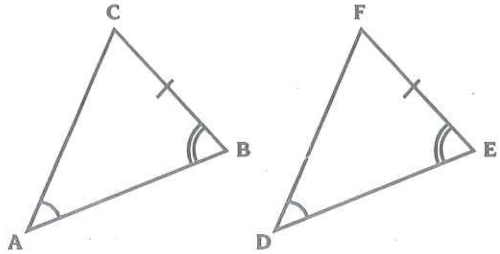
7.5.4 El Criterio de Congruencia L-A-A

El segundo criterio de congruencia de triángulos establece que dos triángulos son congruentes cuando un lado de uno es congruente con un lado del otro y los dos ángulos de los extremos de este lado en un triángulo son respectivamente congruentes con los dos ángulos de los extremos del lado en el otro triángulo. Este criterio es ANGULO - LADO - ANGULO (en ese orden).

¿Será posible que exista un criterio de congruencia LADO - ANGULO - ANGULO?; es decir, ¿será posible que si en un triángulo, dos ángulos y un lado opuesto a uno de los ángulos son congruentes con dos ángulos y el lado correspondiente de un segundo triángulo, entonces los dos triángulos son congruentes? La respuesta es SÍ y se denomina el CRITERIO DE CONGRUENCIA LADO-ANGULO-ANGULO (L-A-A), el cual demostraremos a continuación.

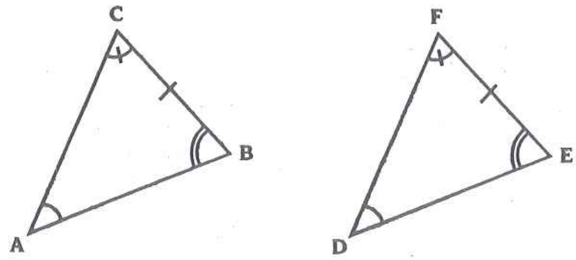
Hipótesis: En ΔABC y ΔDEF se tiene que:
$\widehat{A} \cong \widehat{D}$, $\widehat{B} \cong \widehat{E}$ y $\overline{BC} \cong \overline{EF}$

Tesis: $\Delta ABC \cong \Delta DEF$



Demostración

La estrategia de la demostración es sencilla y te vamos a ayudar a comprenderla. Contesta: ¿Si sabemos que dos pares de ángulos son congruentes, es posible garantizar que el tercer par también lo es? ¿Por qué? Aceptando que esto es cierto, la figura anterior nos queda así:

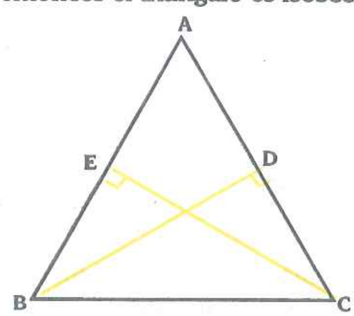


Contesta: ¿Podemos afirmar que estos dos triángulos cumplen el criterio de congruencia A-L-A? ¿Por qué? Luego, ¿es $\triangle ABC \cong \triangle DEF$?

Ahora, cada uno de nuestros lectores puede redactar los pasos de la demostración y justificar cada uno ¡Animo, pues!

Ejemplo 1

Demostremos que si dos alturas de un triángulo son congruentes entonces el triángulo es isósceles.



Solución

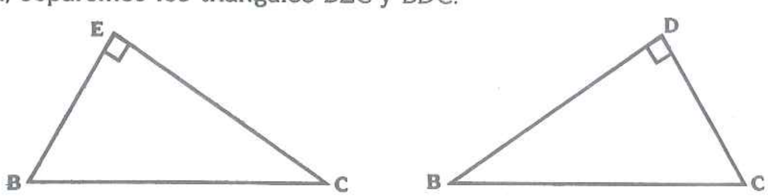
Hipótesis: En el $\triangle ABC$, $\overline{BD}$ y $\overline{CE}$ son alturas tales que $\overline{BD} \cong \overline{CE}$

Tesis: $\triangle ABC$ es isósceles

Demostración

Escribe al frente de cada paso la propiedad que lo justifica.

1. $\overline{BD}$ y $\overline{CE}$ son alturas del $\triangle ABC$, $\overline{BD} \cong \overline{CE}$. .... __________________
2. Por comodidad, separemos los triángulos BEC y BDC:



$\measuredangle BEC \cong \measuredangle BDC$ .... __________________

$\overline{BC} \cong \overline{BC}$.. __________________

3. Luego, $\triangle BEC \cong \triangle BDC$ .... __________________
4. Luego, $\hat{B} \cong \hat{C}$ .... __________________
5. Luego $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ .... __________________
6. Por lo tanto, el $\triangle ABC$ es isósceles .... __________________

¡ATENCIÓN!

También es posible realizar esta demostración tomando los triángulos ADB y AEC y aplicando el criterio de congruencia A-A-L. Lo dejamos como ejercicio.

Ejemplo 2

Demostremos que todo punto de la bisectriz de un ángulo equidista de los lados del ángulo.

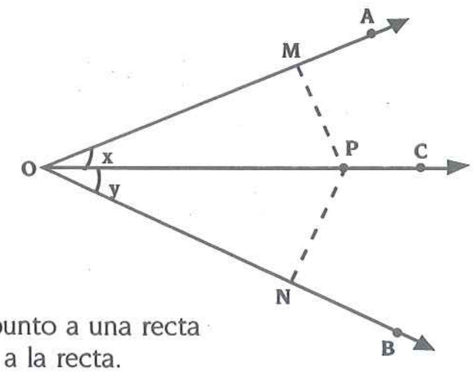
Solución

Hipótesis: $\overrightarrow{OC}$ es bisectriz de $\measuredangle AOB$

P es un punto de $\overrightarrow{OC}$

$\overline{PM}$ y $\overline{PN}$ son las distancias desde P a los lados $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ del ángulo.

Tesis: $\overline{PM} \cong \overline{PN}$



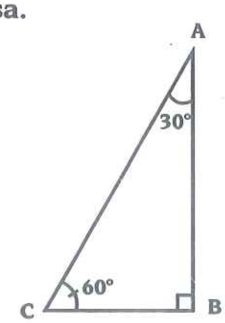
Demostración

Recordemos, en primer lugar, que la distancia de un punto a una recta es el segmento perpendicular trazado desde el punto a la recta. Escribe al frente de cada paso la propiedad que lo justifica.

1. $\overrightarrow{OC}$ es bisectriz de $\measuredangle AOB$, P es un punto de $\overrightarrow{OC}$ tal que $\overline{PM} \perp \overrightarrow{OA}$ y $\overline{PN} \perp \overrightarrow{OB}$. . . . . ______________________
2. $\measuredangle x \cong \measuredangle y$. . . . . ______________________
3. $\overline{OP} \cong \overline{OP}$. . . . . ______________________
4. m ($\measuredangle OMP$) = m ($\measuredangle ONP$) = 90° . . . . ______________________
5. Luego, $\Delta OMP \cong \Delta ONP$. . . . . Por el criterio A-A-L
6. Por lo tanto, $\overline{PM} \cong \overline{PN}$. . . . . Porque PCTCC

Ejemplo 3

Demostremos que si los ángulos agudos de un triángulo rectángulo miden 30° y 60°, entonces el cateto opuesto al ángulo de 30° mide la mitad de la hipotenusa.



Solución

Hipótesis: ΔABC es rectángulo en $\hat{B}$ con $m\hat{A} = 30°$ y $m\hat{C} = 60°$

Tesis: $|\overline{BC}| = \frac{1}{2}|\overline{AC}|$

Demostración

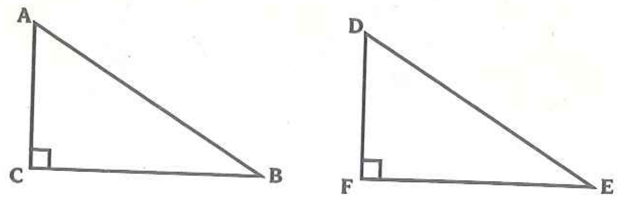
En lugar de una demostración formal, vamos a darte unas pistas para que tú mismo puedas escribirla. Estas son las pistas:

1. Dibuja el simétrico del ΔABC tomando como eje de simetría el cateto $\overline{AB}$. Llama este nuevo triángulo ΔABD. ¿Cuáles axiomas te permiten construir a $\overline{BD}$ y $\overline{AD}$?
2. ¿Qué clase de triángulo es el ΔACD? ¿Por qué?
3. ¿Qué línea es $\overline{AB}$ en el ΔACD?
4. ¿Cuánto mide $\overline{BC}$ comparado con $\overline{CD}$? ¿Y con $\overline{AC}$? ¿Por qué?

EJERCICIO 7.4

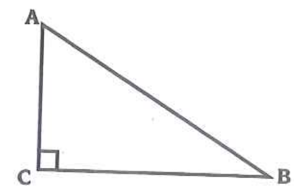
En los ejercicios 1. a 4. Determina si la información dada permite garantizar la congruencia de los triángulos por los criterios L-A-A, A-L-A o H-C (Hipotenusa - Cateto)

1. Datos: $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$
2. Datos: $\measuredangle A \cong \measuredangle D$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$
3. Datos: $\measuredangle B \cong \measuredangle E$, $\overline{AB} \cong \overline{DE}$
4. Datos: $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, $\measuredangle A \cong \measuredangle D$

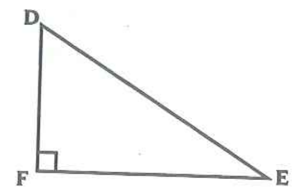


Para resolver los ejercicios 5. y 6., se sabe que $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ y $\overline{AC} \cong \overline{DF}$.

5. Si $|\overline{BC}| = 3x - 5$ y $|\overline{EF}| = 2x + 8$, halla las longitudes de $\overline{BC}$ y $\overline{EF}$

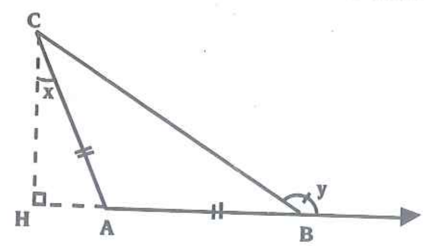


6. Si $m\hat{A} = 4x^o - 5^o$ y $m\hat{D} = 2x^o + 25^o$, halla $m\hat{B}$ y $m\hat{E}$

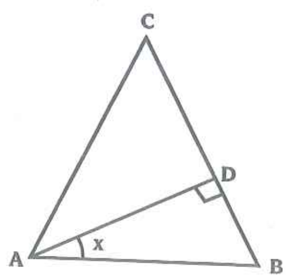


7. En un triángulo isósceles, cada ángulo de la base es el doble del ángulo del vértice. Halla la medida de los tres ángulos del triángulo.

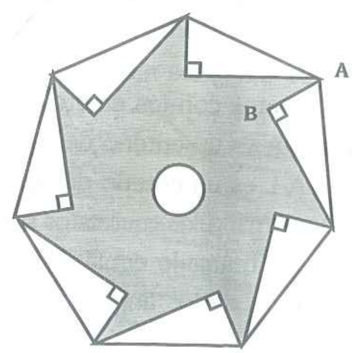
8. Datos: En el ΔABC, $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, $\overline{CH} \perp \overline{AB}$, $m\hat{y} = 138^o$
   Halla: $m\hat{x}$



9. Datos: $\overline{AC} \cong \overline{BC}$, $\overline{AD} \perp \overline{BC}$
   $m\hat{x} = 25^o$
   Halla: $m\hat{C}$

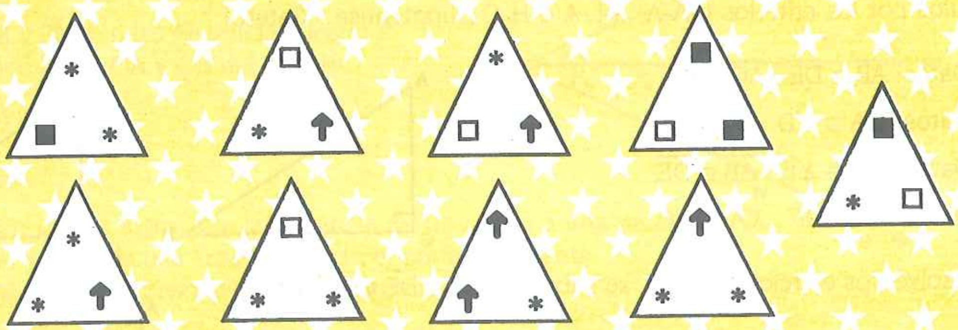


10. Una sierra circular de siete dientes se hace cortando siete triángulos rectángulos de un heptágono regular. Si $\overline{AB}$ se corta con la misma longitud para cada diente, ¿por qué todos los puntos salientes de la sierra tienen un ángulo de igual medida?



DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 3

Coloca estos 9 triángulos para formar uno solo de manera que los vértices que se toquen tengan el mismo símbolo.



TALLER DE REPASO DE LA UNIDAD 7

1. Contesta las siguientes preguntas:

   a) ¿Cuándo dos figuras planas son congruentes?
   b) ¿Cuándo dos triángulos son congruentes?
   c) ¿Para probar que dos triángulos son congruentes será necesario probar que los tres lados y los tres ángulos de uno son respectivamente congruentes con los tres lados y los tres ángulos del otro?
   d) Enuncia todos los casos de congruencia de triángulos que conozcas.
   e) ¿Existe un criterio de congruencia de triángulos L-L-A? ¿Y un criterio A-A-A? ¿Y uno L-A-A?
   f) ¿Qué son PARTES CORRESPONDIENTES DE TRIANGULOS CONGRUENTES?
   g) ¿Cuáles son las propiedades particulares que tienen los triángulos isósceles? ¿Y los triángulos equiláteros?
   h) ¿Qué establece el criterio de congruencia HIPOTENUSA-CATETO (H-C)?

2. Responde FALSO o VERDADERO a cada una de las siguientes proposiciones. Justifica tus respuestas.

   a) Dos triángulos congruentes tienen sus lados respectivamente congruentes.
   b) Dos triángulos que tienen sus ángulos respectivamente congruentes necesariamente son congruentes.
   c) Dos triángulos rectángulos son congruentes, si los catetos de uno son respectivamente congruentes con los catetos del otro.
   d) L-L-A es un criterio de congruencia de triángulos.
   e) L-A-L es un criterio de congruencia de triángulos.
   f) Dos triángulos equiláteros son congruentes si un lado de uno es congruente con un lado del otro.
   g) Todo triángulo equiángulo es equilátero.
   h) Si uno de los ángulos interiores de un triángulo isósceles mide 60° entonces el triángulo es equilátero.

i) Si un ángulo agudo de un triángulo rectángulo mide 30°, entonces el cateto opuesto a dicho ángulo mide la mitad de la hipotenusa.

j) Si los lados congruentes de un triángulo isósceles son respectivamente congruentes con los lados congruentes de otro triángulo isósceles entonces estos triángulos isósceles son congruentes.

k) Si un ángulo agudo y la hipotenusa de un triángulo rectángulo son respectivamente congruentes con un ángulo agudo y la hipotenusa de otro triángulo rectángulo entonces estos dos triángulos rectángulos son congruentes.

l) Cualquiera de las bisectrices de un triángulo isósceles coincide con la mediana y con la altura.

3. Dibuja en un diagrama cartesiano el pentágono ABCDE cuyos vértices tienen las siguientes coordenadas: A (-2, 2), B (-6, 2) , C (-7, 4) , D (-5, 7) y E (-3, 5). A continuación:

a) Realiza una traslación del pentágono mediante un vector de magnitud 9 unidades y en dirección vertical. Al polígono resultante de esta traslación nómbralo A'B'C'D'E'.

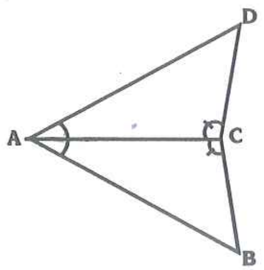
b) Luego, realiza una simetría de este pentágono con respecto al eje y. Llama al polígono resultante de esta simetría A"B"C"D"E".

c) Finalmente, realiza una rotación de 90° del pentágono A"B"C"D"E", en sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj, y alrededor del origen del sistema cartesiano. Nombra este polígono MNPQR.

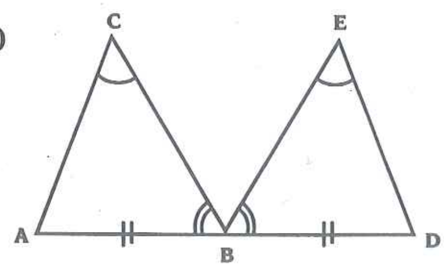
d) Contesta: ¿Son congruentes los pentágonos ABCDE, A'B'C'D'E', A"B"C"D"E" y MNPQR? ¿Por qué? ¿Qué los diferencia?

4. Los triángulos de cada uno de los polígonos siguientes están marcados de la misma manera para mostrar los lados y los ángulos congruentes. ¿Cuáles de estas parejas de triángulos son congruentes de acuerdo con los criterios L-A-L, A-L-A, L-L-L, A-A-L e H-C.

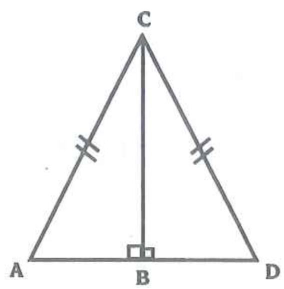
a)



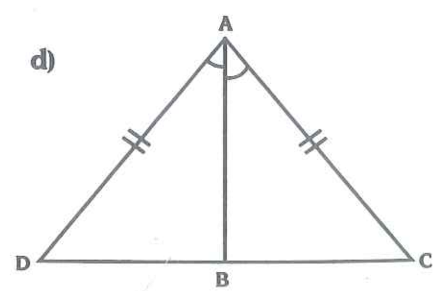
b)



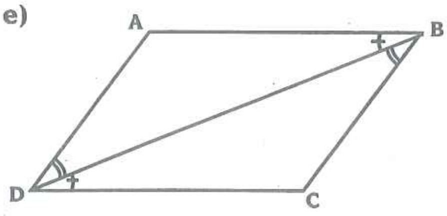
c)



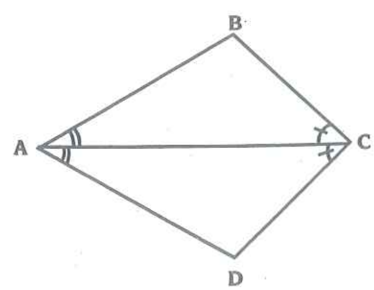
d)



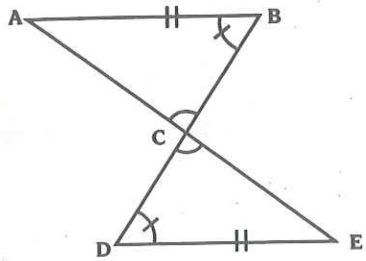
e)



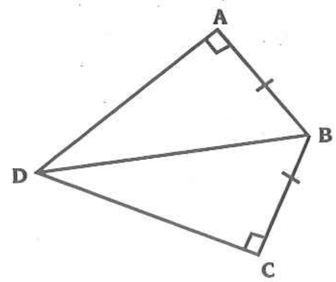
f)



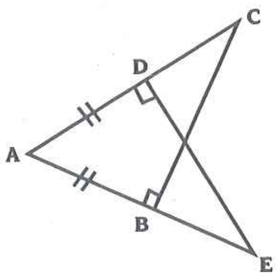
g)



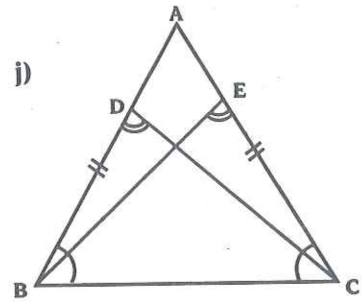
h)



i)

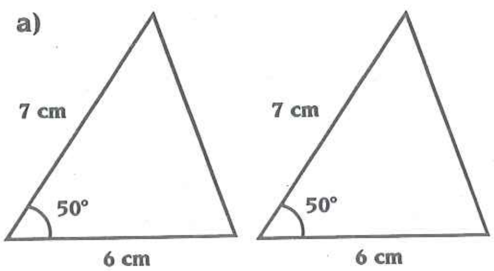


j)

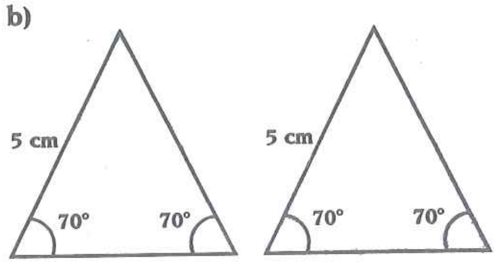


5. En cada caso, determina si los triángulos son o no congruentes. En caso de ser congruentes indica el criterio que justifica dicha congruencia.

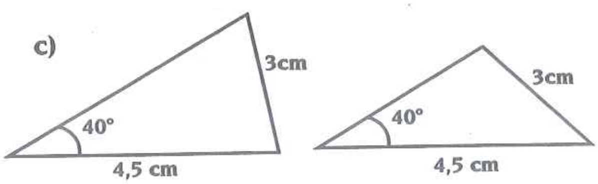
a)



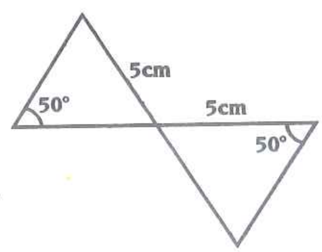
b)



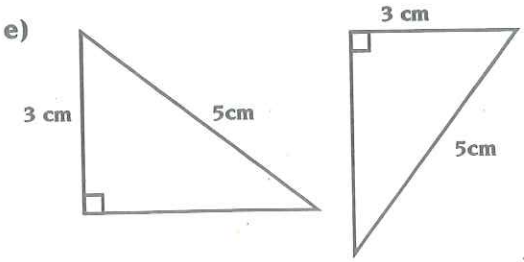
c)



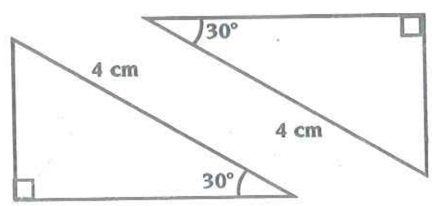
d)



e)



f)

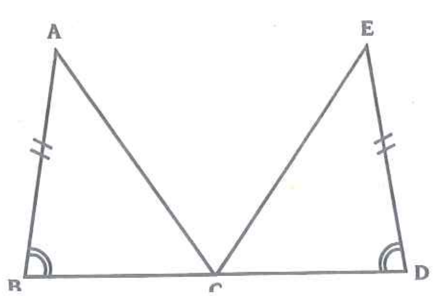


6. Datos: $\hat{B} \cong \hat{D}$

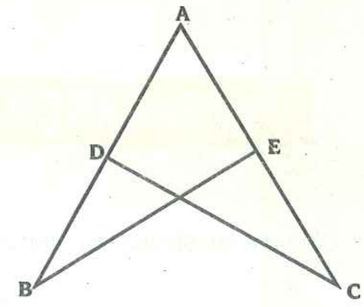
$\overline{AB} \cong \overline{DE}$

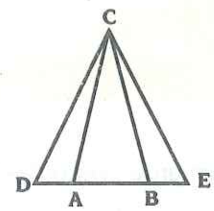
C es punto medio de $\overline{BD}$

Demostrar que: $\Delta ABC \cong \Delta ECD$

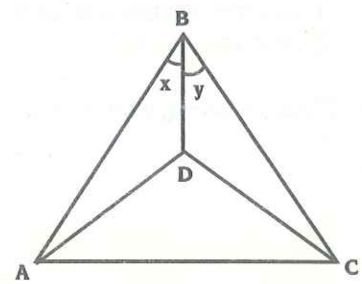


7. Datos: $\overline{CD} \perp \overline{AB}$
$\overline{BE} \cong \overline{CD}$
$\overline{BE} \perp \overline{AC}$
Demostrar que: $\Delta ADC \cong \Delta AEB$



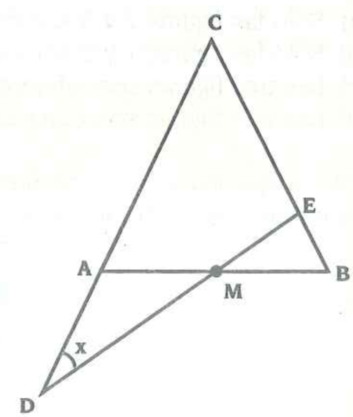


8. Datos: $\overline{AC} \cong \overline{BC}$ y $\overline{AD} \cong \overline{BE}$
Demostrar que: El ΔDCE es isósceles



9. Datos: $\overline{AB} \cong \overline{BC}$
$\overline{AD} \cong \overline{DC}$
Demostrar que: $\hat{x} \cong \hat{y}$

10. Datos: $\overline{AC} \cong \overline{BC}$
M es punto medio de $\overline{AB}$
$\overline{AD} \cong \overline{AM}$, $m\hat{x} = 30°$
Demostrar que: $\overline{DE} \perp \overline{BC}$



11. Demuestra que las medianas trazadas hacia los dos lados congruentes de un triángulo isósceles son congruentes.

12. Demuestra que si un punto ubicado en la base de un triángulo isósceles equidista de los puntos medios de los lados congruentes, entonces dicho punto es el punto medio de la base.

PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS SABER

1. Observa las siguientes figuras

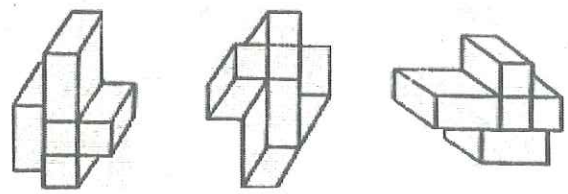


Figura 1 Figura 2 Figura 3

De acuerdo con estas figuras podemos afirmar que:

a) Las tres figuras son congruentes.
b) Sólo las figuras 1 y 2 son congruentes.
c) Las tres figuras son diferentes.
d) Sólo las figuras 1 y 3 son congruentes.

2. Observa las siguientes figuras:

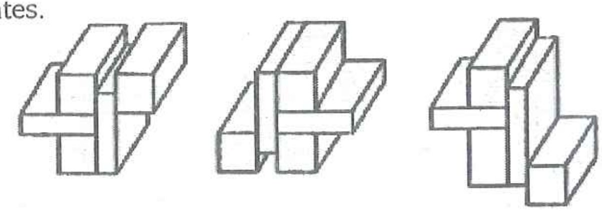
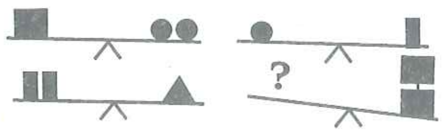


Figura 1 Figura 2 Figura 3

De acuerdo con las figuras podemos afirmar que:

a) Sólo las figuras 2 y 3 son congruentes.
b) Sólo las figuras 1 y 2 son congruentes.
c) Las tres figuras son diferentes.
d) Las tres figuras son congruentes.

En los ejercicios 3. y 4. se presentan 4 balanzas de las cuales 3 están en equilibrio. Se busca, con ayuda de estas 3 balanzas, hallar los elementos que se requieran para equilibrar la cuarta balanza.



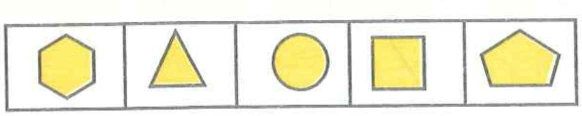
3. ¿Con cuántos triángulos se puede equilibrar la balanza?

a) 3 b) 1 c) 2 d) 4

4. ¿Con cuántos rectángulos se puede equilibrar la balanza?

a) 4 b) 3 c) 5 d) 2

5. En este ejercicio se dan 5 figuras de las cuales todos tienen una propiedad común excepto una. ¿Cuál es?



a) b) c) d) e)

Núcleo Temático

8

CUADRILÁTEROS

LOGRO GENERAL

Formular y demostrar propiedades de los paralelogramos y de los trapecios a partir de la congruencia de triángulos.

LOGROS ESPECÍFICOS	INDICADORES DE LOGRO
Corporal: • Utilizar material concreto para favorecer el desarrollo de procesos y habilidade de pensamiento.	• En grupos de dos o tres, deducen propiedades que se empleen en paralelogramos y en trapecios.
Comunicativa: • Interiorizar el proceso necesario para deducir las propiedades de los paralelogramos y de los trapecios.	• Explica con fluidez y en forma organizada los procesos requeridos para deducir propiedades de paralelogramos y de trapecios.
Cognitiva: • Enunciar las propiedades de paralelogramos y trapecios. • Resolver problemas utilizando las propiedades de los paralelogramos y los trapecios.	• Explora y enuncia las propiedades de los paralelogramos y los trapecios. • Resuelve problemas sobre paralelogramos y sobre trapecios.
Estética: • Utilizar las propiedades de triángulos congruentes para determinar las propiedades de los paralelogramos y de los trapecios.	• Utiliza los criterios de congruencia de triángulos y las escuadras para deducir las propiedades de los paralelogramos y de los trapecios.
Ética-Actitudinal: • Resaltar la importancia de los criterios de congruencia de triángulos en la deducción de las propiedades de los paralelogramos y de los trapecios.	• Demuestra interés por aprender.

D I M E N S I O N E S

E V A L U A C I Ó N

ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS

8.1 HISTORIA DE LA GEOMETRÍA (8)

EUCLIDES

Euclides está reconocido como el matemático más importante de la Grecia clásica. De él sólo se sabe que enseñó y fundó una escuela en Alejandría hacia el año 300 a. de C., en la época del rey Ptolomeo I. Se cuenta que, una vez, el rey le preguntó si no había un método más sencillo para aprender geometría y que Euclides contestó: "No hay un camino real para la geometría".

Otra anécdota de Euclides se refiere a uno de sus discípulos, el cual, después de aprender la primera proposición de geometría, le preguntó qué iba a ganar con eso. Entonces Euclides ordenó que le dieran una moneda "ya que debe obtener un beneficio de todo lo que aprende".

No obstante, Euclides es conocido como autor de una de las obras más importantes de la geometría: **Los Elementos**. Prácticamente, hasta que en el siglo XIX se desarrollaron las llamadas **geometrías no euclídeas**, los Elementos fueron **La Obra** de geometría. Puede dar idea de su importancia el hecho de que toda la geometría elemental se encuentra contenida en este libro.

EJERCICIO 8.1

COMPRENSIÓN DE LECTURA. Explicación: Lee nuevamente el fragmento anterior; luego, analiza cada una de las preguntas que se te proponen y escoge la letra que corresponde a la UNICA respuesta correcta.

1. El propósito específico del autor, en texto anterior es:

   a. Demostrar que Euclides es el padre de la geometría en la Grecia clásica.
   b. Destacar la obra de Euclides como compilación de toda la geometría elemental.
   c. Exaltar la labor de Euclides en el campo de la geometría.
   d. Explicar la actividad creadora de un científico griego.

2. Euclides afirma que:

   a. Todos los caminos que conducen a la geometría son ficticios.
   b. No todos los caminos conducen a la geometría.
   c. Al conocimiento geométrico se puede acceder por diferentes métodos.
   d. Sólo hay un método correcto para el aprendizaje de la geometría.

3. El título más apropiado para el texto anterior es:

   a. ¿Fue Euclides un científico práctico?.
   b. Euclides: matemático y geómetra genial.
   c. Vida y obra de Euclides.
   d. Anécdotas de Euclides.

4. "Los Elementos", expresión que aparece en el texto, hace referencia a:

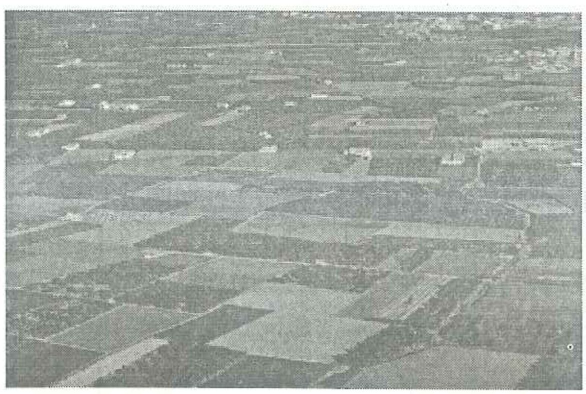
   a. Una serie finita de demostraciones geométricas.
   b. El conjunto de teoremas ideados por Euclides.

c. Las partes que constituyen la geometría euclidiana.
d. Un tratado de Ciencia geométrica elaborado por Euclides.

5. El autor nos dice de Euclides todo lo siguiente, menos:
   a. Fue maestro en una escuela de Alejandría.
   b. Es autor de una célebre obra de geometría.
   c. Es uno de los matemáticos más importantes del período clásico griego.
   d. Vivió en la época del Rey Ptolomeo I.

8.2 CUADRILÁTEROS

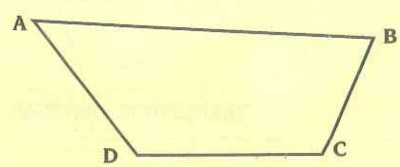
Los cuadriláteros -polígonos de 4 lados- componen, al igual que los triángulos, un gran grupo de figuras geométricas de considerable importancia en la matemática. Una simple mirada a nuestro alrededor nos permitirá ver que los cuadriláteros, y en especial los paralelogramos, constituyen una forma geométrica básica de nuestra civilización.



CUADRILÁTEROS

RECORDEMOS

- Un CUADRILATERO es un polígono de cuatro lados.

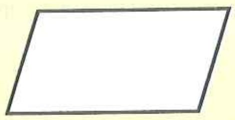


- Los ELEMENTOS importantes de un cuadrilátero son:
  - LADOS OPUESTOS: Son aquellos que no tienen un vértice común, como $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ o como $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$.
  - LADOS ADYACENTES o CONTIGUOS: Son los que tienen un vértice común, como $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ o como $\overline{AD}$ y $\overline{DC}$.
  - ANGULOS OPUESTOS: Son los que no tienen un lado común, como $\widehat{B}$ y $\widehat{D}$.
  - ANGULOS ADYACENTES o CONTIGUOS: Son los que tienen un lado común, como $\widehat{A}$ y $\widehat{D}$ que tienen común el lado $\overline{AD}$.

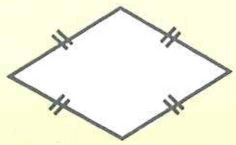
RECORDEMOS

Los CUADRILATEROS se clasifican de acuerdo con el paralelismo de sus lados; así:

PARALELOGRAMOS: Son cuadriláteros con 2 pares de lados paralelos.

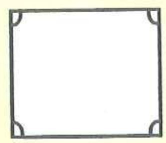


ROMBOIDE: 2 ángulos desiguales y 2 lados desiguales



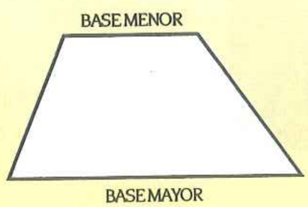
ROMBO: Los 4 lados congruentes

RECTANGULO: Los 4 ángulos congruentes

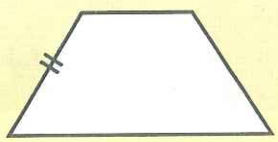


CUADRADO: 4 lados y 4 ángulos congruentes

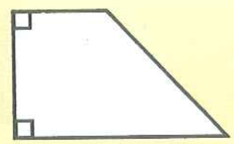
TRAPECIOS: Son cuadriláteros con 1 par de lados paralelos



TRAPECIO GENERAL

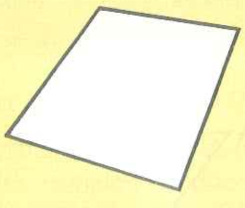


TRAPECIO ISÓSCELES: 2 lados congruentes

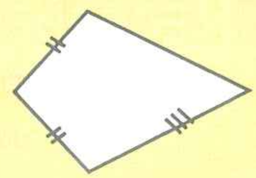


TRAPECIO RECTÁNGULO: 2 ángulos rectos

TRAPEZOIDES: Son cuadriláteros con 0 pares de lados paralelos

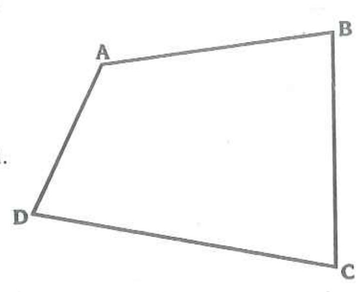


TRAPEZOIDE GENERAL



COMETA: 2 pares de lados congruentes

EJERCICIO 8.2



Los ejercicios 1. a 4. se responden con base en la figura de la derecha.

1. ¿Cuál es el lado opuesto al $\overline{AB}$?
2. ¿Cuáles son los ángulos adyacentes al $\widehat{C}$?

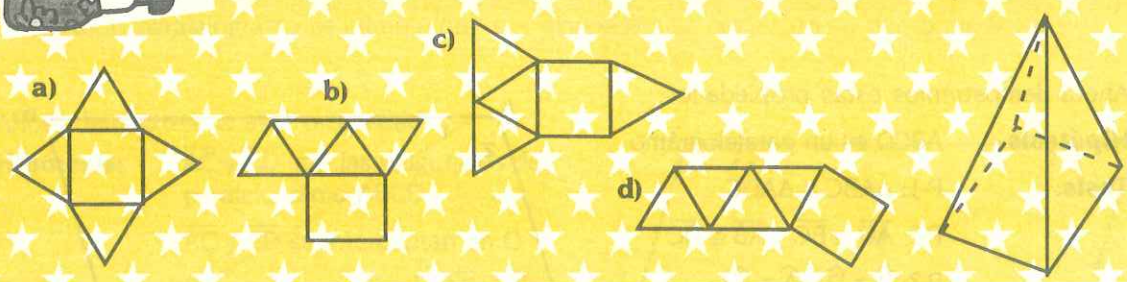
3. ¿Cuáles son los lados adyacentes a $\overline{BC}$?
4. ¿Cuál es el ángulo opuesto a $\widehat{D}$?
5. Indica cuáles de las siguientes proposiciones siempre son verdaderas

   a) Algunos trapecios tienen todos los ángulos congruentes.
   b) Los lados opuestos de un trapecio son paralelos.
   c) Todo cuadrilátero tiene dos diagonales.
   d) Las medidas de los ángulos interiores de un cuadrilátero suman 360°.
   e) Todo cuadrado es paralelogramo
   f) Todo cuadrilátero es rectángulo.
   g) Todo rectángulo es cuadrado.
   h) El conjunto de los paralelogramos es subconjunto del conjunto de los rectángulos.
   i) Todo polígono es cuadrilátero.
   j) Todo cuadrilátero es polígono.

6. Dibuja un paralelogramo con un ángulo de 60°. ¿Cuánto miden los otros 3 ángulos?
7. Dibuja un rombo con un ángulo de 30° y cuyo lado mida 8 cm.
8. Dibuja un trapecio con dos ángulos rectos y señala la base menor y la base mayor.
9. Dibuja un rectángulo cuyo ancho mida la tercera parte del largo.
10. Dibuja un trapecio con un par de ángulos de 60° en una base.
11. Considerando el conjunto de los cuadriláteros como conjunto universal, elabora un diagrama de Venn que relacione cuadriláteros, paralelogramos, trapecios y trapezoides.
12. Elabora un cuadro sinóptico clasificando los cuadriláteros.

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 1

¿Cuáles de estos modelos pueden doblarse para construir la pirámide?

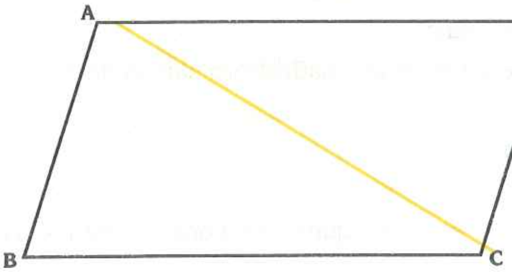


8.3 PROPIEDADES DE LOS PARALELOGRAMOS

- La congruencia de triángulos nos proporciona una poderosa herramienta para probar las propiedades fundamentales de los paralelogramos.
- Las siguientes experiencias nos ayudarán a descubrirlas y comprenderlas. Posteriormente las demostraremos.

PRIMERA EXPERIENCIA

- Dibuja en un trozo de cartulina un paralelogramo como el de la figura siguiente y traza una de sus diagonales.



- Luego, recórtalo a través de la diagonal de manera que te resulten dos triángulos.
- Contesta:
  - ¿Es posible superponer los dos triángulos de manera que coincidan? ¿Son congruentes estos dos triángulos?
  - ¿Cuáles elementos son respectivamente congruentes en los triángulos ABC y ADC? Escríbelos.
  - ¿Son congruentes los lados opuestos de un paralelogramo? ¿Por qué?
  - ¿Son congruentes los ángulos opuestos de un paralelogramo? ¿Por qué?
- Como resultado de esta experiencia podemos escribir las siguientes conclusiones:

APRENDAMOS

PROPIEDADES DE LOS PARALELOGRAMOS

En todo paralelogramo se cumple que:

P-1 Una diagonal lo divide en dos triángulos congruentes.

P-2 Los lados opuestos son congruentes.

P-3 Los ángulos opuestos son congruentes.

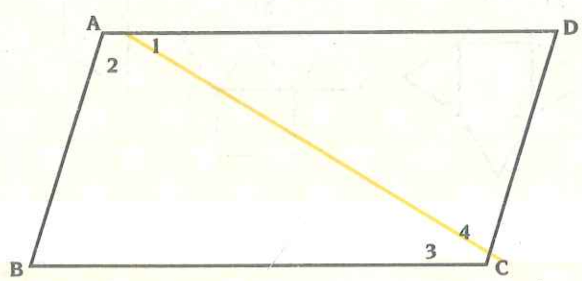
- Ahora demostremos estas propiedades:

Hipótesis: ABCD es un paralelogramo

Tesis: P-1: $\Delta ABC \cong \Delta ADC$

P-2: $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ y $\overline{AB} \cong \overline{DC}$

P-3: $\widehat{B} \cong \widehat{D}$ y $\widehat{A} \cong \widehat{C}$



Demostración

Escribe al frente de cada paso la propiedad que la justifica.

1. ABCD es un paralelogramo .... ____________________
2. Trazamos la diagonal $\overline{AC}$ .... ____________________
3. $\overline{AD} // \overline{BC}$ y $\overline{AB} // \overline{DC}$ .... ____________________

4. Luego, $\widehat{1} \cong \widehat{3}$ y $\widehat{2} \cong \widehat{4}$. .... ________________

5. Además, $\overline{AC} \cong \overline{AC}$ .... ________________

6. Luego, $\Delta ABC \cong \Delta ADC$: P-1 .... ________________

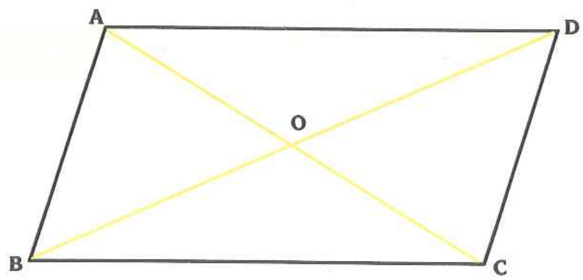
7. Luego, $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ y $\overline{AB} \cong \overline{DC}$: P-2 .... ________________

8. También, $\widehat{D} \cong \widehat{B}$: P-3 .... ________________

¿Como demuestras que $\widehat{A} \cong \widehat{C}$?

SEGUNDA EXPERIENCIA

- Dibuja de nuevo el paralelogramo ABCD, traza ambas diagonales y llama O su punto de intersección.



- Mide las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$. ¿Son congruentes?
- Ahora mide los segmentos $\overline{AO}$, $\overline{OC}$, $\overline{BO}$ y $\overline{OD}$. ¿Cuáles son congruentes?
- Contesta: ¿Es el punto O, donde se cortan las diagonales de un paralelogramo, punto medio de ambas? ¿Se cortan las diagonales de un paralelogramo en su punto medio?

APRENDAMOS

PROPIEDAD DE LAS DIAGONALES DE UN PARALELOGRAMO

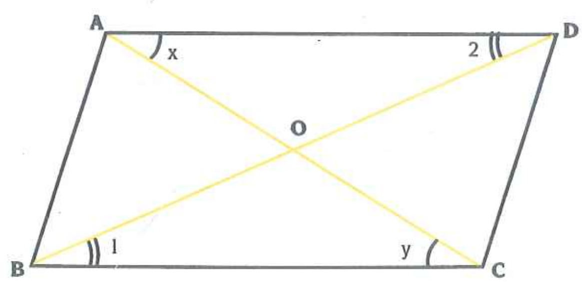
P-4 En todo paralelogramo se cumple que sus diagonales se cortan en su punto medio.

- Ahora demostremos esta propiedad:

Hipótesis: $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ son las diagonales del paralelogramo ABCD

$\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ se interceptan en O

Tesis: O es punto medio de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$



Demostración

Escribe al frente de cada paso la propiedad que lo justifica.

1. $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ son las diagonales del paralelogramo ABCD y se interceptan en O. .... ________________

2. Luego, $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ .... ________________

3. También, $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ .... ____________

4. Luego, $\hat{x} \cong \hat{y}$ y $\hat{1} \cong \hat{2}$ .... ____________

5. Luego, $\Delta AOB \cong \Delta DOC$........................... ____________

6. Por lo tanto, $\overline{AO} \cong \overline{OC}$ y $\overline{BO} \cong \overline{OD}$ .... ____________

7. En consecuencia, O es punto medio de $\overline{BD}$ y punto medio de $\overline{AC}$ .... ____________

¡ATENCIÓN! Las proposiciones recíprocas de las propiedades P-2, P-3 y P-4 también son verdaderas y, por ello, constituyen nuevas propiedades. A continuación las enunciamos y dejamos a cada lector realizar su demostración.

APRENDAMOS

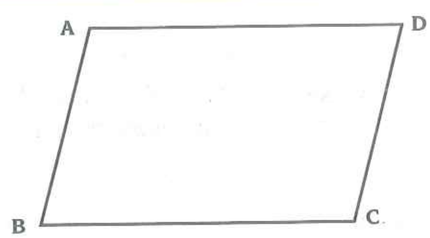
P-5 Si los dos pares de lados opuestos de un cuadrilátero son congruentes, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.

P-6 Si los dos pares de ángulos opuestos de un cuadrilátero son congruentes, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.

P-7 Si las diagonales de un cuadrilátero se dividen mutuamente en segmentos congruentes, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.

- Pregunta: ¿Por qué la proposición recíproca de P-1 no es verdadera? (Sugerencia: analiza el cuadrilátero denominado COMETA).
- La siguiente proposición nos brinda un criterio adicional para determinar cuando un cuadrilátero es paralelogramo. Dice así:

P-8 Si un cuadrilátero tiene un par de lados paralelos y congruentes, entonces dicho cuadrilátero es un paralelogramo.



Hipótesis: ABCD es un cuadrilátero

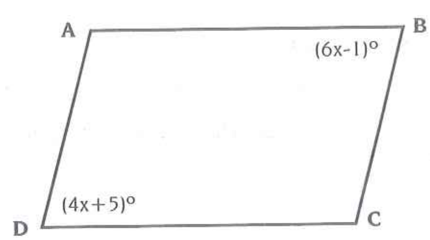
$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ y $\overline{AD} \cong \overline{BC}$

Tesis: ABCD es un paralelogramo

Dejamos al lector escribir los detalles de la demostración. Sugerimos trazar una de las diagonales del cuadrilátero.

Ejemplo 1

Si ABCD es un paralelogramo, hallemos la medida de todos sus ángulos interiores.



Solución

- Como ABCD es un paralelogramo y $\widehat{D}$ y $\widehat{B}$ son ángulos opuestos, entonces $\widehat{D} \cong \widehat{B}$.
- Luego, $m\widehat{D} = m\widehat{B}$ y, por tanto, $4x + 5 = 6x - 1$
- Resolviendo esta ecuación nos queda:

$$\begin{aligned} & 4x + 5 = 6x - 1 \\ \therefore\ & 5 + 1 = 6x - 4x \\ \therefore\ & 6 = 2x \\ \therefore\ & x = 3 \end{aligned}$$

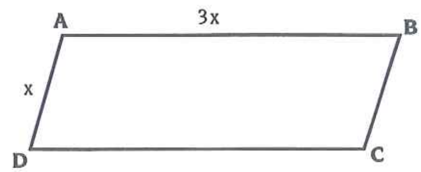
- En consecuencia, $m\widehat{D} = 4(3) + 5 = 17^\circ$ y $m\widehat{B} = 6\,(3) - 1 = 17^\circ$
- El $\widehat{C}$ es suplementario con el ángulo $\widehat{D}$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} & m\widehat{D} + m\widehat{C} = 180^\circ \\ \therefore\ & 17^\circ + m\widehat{C} = 180^\circ \\ \therefore\ & m\widehat{C} = 180^\circ - 17^\circ = 163^\circ \end{aligned}$$

Y como $m\widehat{C} = m\widehat{A}$, entonces también $m\widehat{A} = 163^\circ$

Ejemplo 2

Un lado de un paralelogramo es 4 cm más largo que el otro y el lado mayor mide el triple del menor. ¿Cuál es el perímetro del paralelogramo.



Solución

- Llamemos x la medida del lado menor; luego, el lado mayor mide 3x.
- Como, además, el lado mayor es 4 cm más largo que el menor, entonces:

$$\begin{aligned} & \text{Lado mayor} = \text{Lado menor} + 4 \\ \therefore\ & 3x = x + 4 \\ \therefore\ & 2x = 4 \\ \therefore\ & x = 2 \end{aligned}$$

- Esto significa que el lado menor mide 2 cm y el lado mayor medirá $3 \bullet (2\text{cm}) = 6$ cm
- El perímetro de un polígono es la suma de las medidas de sus lados; es decir:

$$\begin{aligned} & P = |\overline{AB}| + |\overline{BC}| + |\overline{CD}| + |\overline{DA}| \\ \therefore\ & P = 6\text{ cm} + 2\text{ cm} + 6\text{ cm} + 2\text{ cm} = 16\text{ cm} \end{aligned}$$

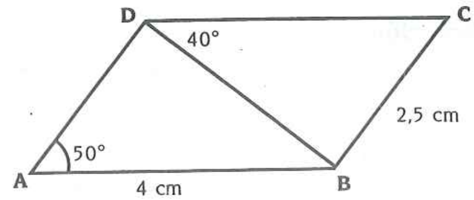
EJERCICIO 8.3

1. Responde FALSO o VERDADERO a cada una de las siguientes proposiciones. Justifica las respuestas.
   a) Los lados opuestos de un paralelogramo son congruentes.
   b) Si un cuadrilátero tiene un par de lados congruentes entonces es un paralelogramo.
   c) Si una diagonal de un cuadrilátero lo divide en dos triángulos congruentes, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.
   d) Las diagonales de un paralelogramo se bisecan en su punto de intersección.
   e) Si un cuadrilátero tiene un par de lados congruentes y paralelos, entonces es un paralelogramo.

2. Demuestra la siguiente proposición: "En todo paralelogramo dos ángulos consecutivos son suplementarios".

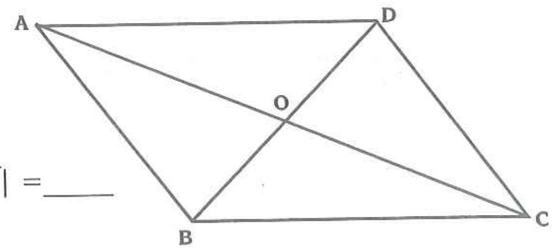
En los ejercicios 3. a 10. supón que el cuadrilátero ABCD es un paralelogramo y completa:

3. $m\widehat{C} =$ ——
4. $m\widehat{ABC} =$ ——
5. $m\widehat{ABD} =$ ——
6. $m\widehat{ADB} =$ ——
7. $m\widehat{DBC} =$ ——
8. $m\widehat{ADC} =$ ——
9. $|\overline{AD}| =$ ——
10. $|\overline{CD}| =$ ——



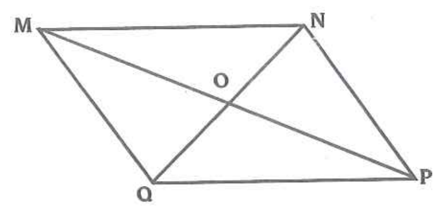
Los ejercicios 11. a 16. se responden con base en el paralelogramo ABCD de la figura siguiente. Completa:

11. Si $m\widehat{A} = 60°$ entonces $m\widehat{C} =$_____
12. Si $|\overline{AD}| = 12$ cm entonces $|\overline{BC}| =$_____
13. Si $m\widehat{B} = 120°$ entonces $m\widehat{D} =$_____
14. Si $|\overline{AD}| = 12$ cm y $|\overline{CD}| = 8$ cm entonces $|\overline{BC}| + |\overline{AB}| =$_____
15. Si $|\overline{AO}| = 7$ cm , entonces $|\overline{OC}| =$_____
16. Si $|\overline{BD}| = 18$ cm , entonces $|\overline{OB}| =$_____



Los ejercicios 17. a 21. se responden con base en el paralelogramo MNPQ de la figura siguiente. Completa:

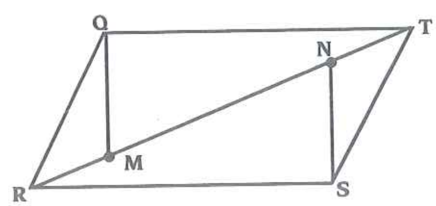
17. $\overline{OQ} \cong$ _____
18. $\overline{MQ} \parallel$ _____
19. $\Delta MOQ \cong$ _____
20. $\widehat{Q} \cong$ _____
21. $\overline{MN} \cong$ _____



22. Las medidas de dos ángulos opuestos $\widehat{A}$ y $\widehat{C}$ de un paralelogramo ABCD miden $5x° - 16°$ y $4x°$. Halla en grados las medidas de los cuatro ángulos del paralelogramo.

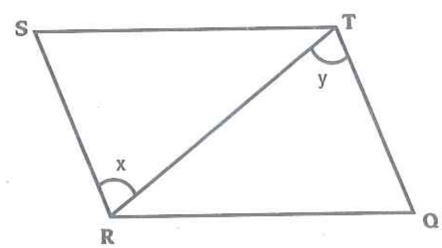
23. **Datos:** QRST es un paralelogramo, $\overline{RM} \cong \overline{NT}$

    Demuestra que: $\overline{QM} \cong \overline{SN}$



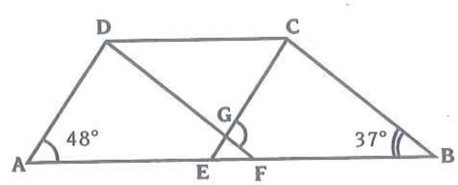
24. **Datos:** $\overline{QR} \parallel \overline{ST}$, $\widehat{x} \cong \widehat{y}$

    Demuestra que: QRST es un paralelogramo



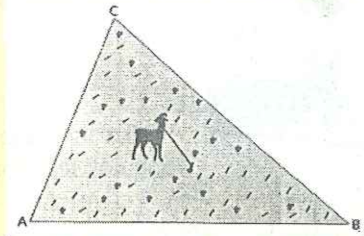
25. **Datos:** $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, $\overline{DF} \parallel \overline{CB}$, $\overline{AD} \parallel \overline{EC}$

    Halla: $m\widehat{CGF}$



DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 2

Camilo tiene un potrero sin cerca en forma triangular y una cabra. Quiere amarrar la cabra a una estaca de modo que la cabra pueda desplazarse lo más lejos posible pero sin comerse el pasto del vecino. ¿Dónde debe colocar la estaca?



8.4 PARALELOGRAMOS ESPECIALES: RECTÁNGULO, ROMBO, CUADRADO Y SUS PROPIEDADES

Por su calidad de paralelogramos, el rectángulo, el rombo y el cuadrado tienen las mismas propiedades que aquellos, pero gozan de otras propiedades adicionales. Veamos cuáles son:

PRIMERA EXPERIENCIA

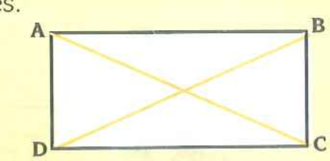
- Dibuja un rectángulo y traza sus diagonales.
- A continuación, mídelas con una regla que esté graduada en milímetros.
- Contesta: ¿Cómo son las medidas de las diagonales de un rectángulo?

APRENDAMOS

P-9 Las diagonales de un rectángulo son congruentes.

Hipótesis: ABCD es un rectángulo.
$\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ son diagonales.

Tesis: $\overline{AC} \cong \overline{BD}$



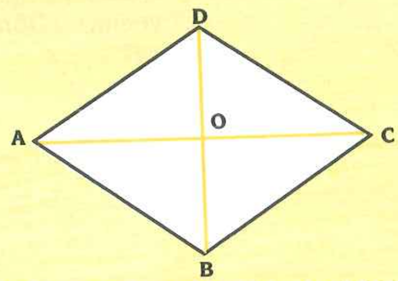
SEGUNDA EXPERIENCIA

- Dibuja un rombo, nómbralo ABCD, traza sus diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ y llama O al punto donde se interceptan.
- Mide con el transportador cada uno de los cuatro ángulos que las diagonales forman alrededor del punto O. ¿Cuánto miden?.
- ¿Cómo son entre sí las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$? ¿Por qué?.

- Ahora mide los ángulos en que la diagonal $\overline{AC}$ divide a los ángulos $\widehat{A}$ y $\widehat{C}$. Haz lo mismo con los ángulos en que la diagonal $\overline{BD}$ divide a los ángulos $\widehat{B}$ y $\widehat{D}$.
- ¿Qué función realiza la diagonal $\overline{AC}$ en los ángulos $\widehat{A}$ y $\widehat{C}$? ¿Y la diagonal $\overline{BD}$ en los ángulos $\widehat{B}$ y $\widehat{D}$? ¿Por qué?

APRENDAMOS

P-10 Las diagonales de un rombo son perpendiculares y son bisectrices de los ángulos interiores del rombo.



Hipótesis: ABCD es un rombo
$\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ son sus diagonales

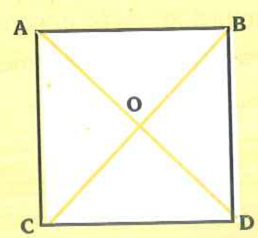
Tesis: a) $\overline{AC} \perp \overline{BD}$
b) $\overline{AC}$ es bisectriz de $\widehat{A}$ y $\widehat{C}$
$\overline{BD}$ es bisectriz de $\widehat{B}$ y $\widehat{D}$

¡ATENCIÓN!

Puesto que el cuadrado es rectángulo y rombo al mismo tiempo entonces posee las propiedades de ambos; es decir:

APRENDAMOS

P-11 En todo cuadrado se cumple que:



a) Por ser rectángulo, sus diagonales son congruentes.

b) Por ser rombo, sus diagonales son perpendiculares y son bisectrices de sus ángulos interiores.

EJERCICIO 8.4

1 Contesta FALSO o VERDADERO a cada una de las siguientes proposiciones. Justifica tus respuestas.

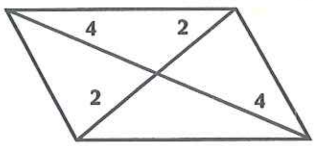
a) Todo rectángulo es un paralelogramo.
b) Las diagonales de todo paralelogramo son congruentes.
c) Todo rombo es un rectángulo.
d) Todo cuadrado es un rombo.
e) Algunos rombos son cuadrados.
f) Existen rombos que siendo rectángulos no son cuadrados.
g) Si las diagonales de un cuadrilátero son congruentes, entonces la figura es un rectángulo.

h) Hay cuadrados que no son rombos.

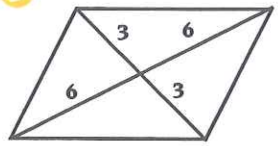
i) Las diagonales de un cuadrado son perpendiculares.

En los ejercicios 2. a 7. se quiere saber cuáles paralelogramos son rectángulos. Supón que la información que te dan es correcta; a pesar de que la figura parezca deformada.

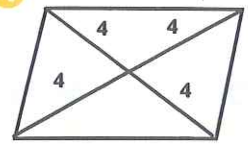
2



3

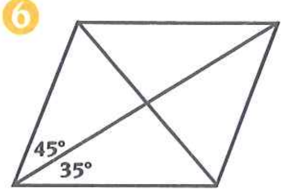


4

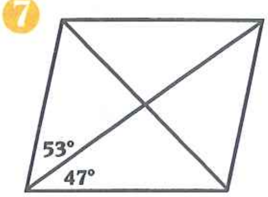


5

6

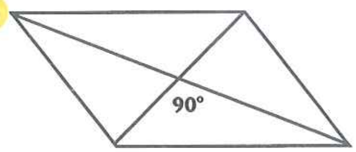


7

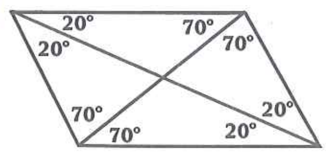


En los ejercicios 8. a 10., se quiere saber cuáles paralelogramos son rombos. Supón que la información que te dan es verdadera a pesar de que la figura parezca deformada.

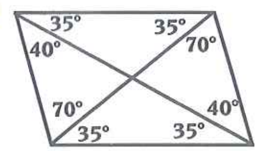
8



9



10



11 Demuestra que las diagonales de un rectángulo son congruentes.

12 Demuestra que la diagonales de un rombo son perpendiculares.

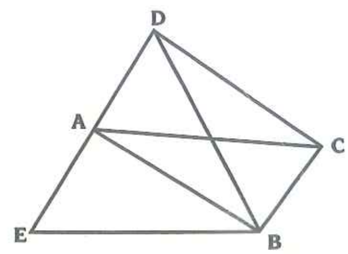
13 Construye un paralelogramo ABCD sabiendo que sus diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ miden 10 cm y 6 cm, respectivamente, y que forman un ángulo de 50°.

14 Construye un rectángulo ABCD sabiendo que la diagonal $\overline{AC}$ mide 6 cm y el lado $\overline{AB}$ mide 4 cm.

15 **Datos:** ABCD es un rectángulo

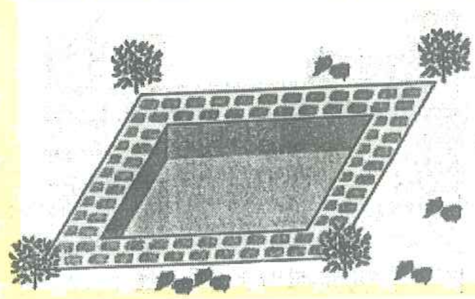
AEBC es un paralelogramo

Demuestra que: ΔDBE es isósceles



DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 3

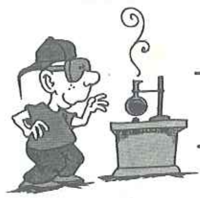
Se tiene un estanque cuadrado. Cerca de sus vértices crecen cuatro arbustos. Hay que ensanchar el estanque de manera que su superficie sea el doble, pero conservando su forma cuadrada y sin tocar los cuatro arbustos. ¿Cómo agrandar el estanque de la manera deseada, quedando los robles fuera del agua, en las orillas del nuevo estanque.



8.5 DOS CONSECUENCIAS DE LAS PROPIEDADES DE LOS PARALELOGRAMOS

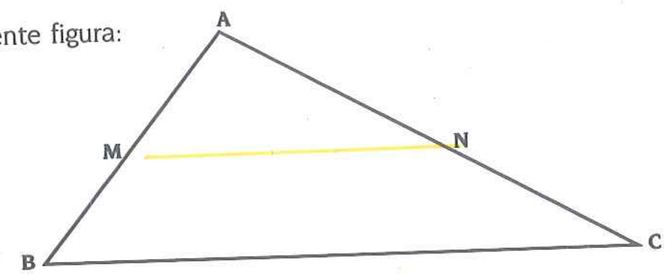
- En las dos secciones anteriores estudiamos una buena cantidad de propiedades que se cumplen en los distintos tipos de paralelogramos que es posible considerar.
- En esta sección, vamos a estudiar dos propiedades de los triángulos que son consecuencia directa de las propiedades de los paralelogramos.

8.5.1 Base Media de un Triángulo



EXPERIENCIA

- Dibuja un ΔABC, determina los puntos medios de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$, nómbralos con las letras M y N y traza el segmento $\overline{MN}$.
- Compara lo que has hecho con la siguiente figura:

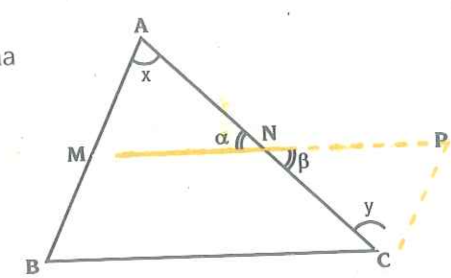


- Comprueba que $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$
- Mide los segmentos $\overline{BC}$ y $\overline{MN}$. Completa: $|\overline{BC}|$ =_____ y $|\overline{MN}|$ = _____.
- Contesta: ¿Es la medida de $\overline{MN}$ la mitad de la medida del lado $\overline{BC}$?
- El segmento $\overline{MN}$ se llama BASE MEDIA del triángulo.
- Repite esta actividad dibujando triángulos de distinta forma y tamaño.

APRENDAMOS

- Se llama BASE MEDIA de un triángulo al segmento que une los puntos medios de dos lados del triángulo.
- La BASE MEDIA de un triángulo cumple dos propiedades:
  1. La base media es paralela al tercer lado del triángulo.
  2. Su medida es la mitad de la medida de dicho tercer lado.

- Vamos a dar unas pistas que permitan a cada lector hacer una demostración de esta propiedad.



Hipótesis: $\overline{MN}$ es base media del ΔABC.

Tesis: a) $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$

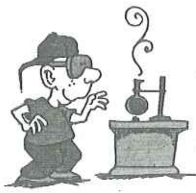
b) $|\overline{MN}| = \frac{1}{2}\, |\overline{BC}|$

Pistas para la demostración:

- Sobre la prolongación de $\overline{MN}$ se toma un punto P tal que $\overline{NP} \cong \overline{MN}$ y se traza $\overline{PC}$ (¿por qué?).
- Luego, se prueba que el $\Delta AMN \cong \Delta NPC$. De la congruencia de estos triángulos se concluye que $\widehat{P} \cong \widehat{AMN}$.
- La congruencia de estos ángulos permite afirmar que $\overline{AB} \parallel \overline{PC}$. También de la congruencia de los triángulos AMN y NPC se concluye que $\overline{AM} \cong \overline{PC}$ y como $\overline{AM} \cong \overline{MB}$ entonces $\overline{MB} \cong \overline{PC}$.
- De todo lo anterior es posible afirmar que MBCP es un paralelogramo. De acá ya es fácil concluir lo que se quiere.

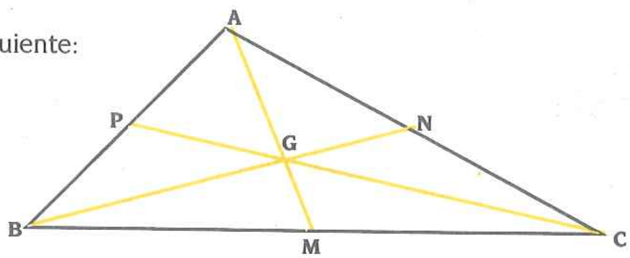
8.5.2 Propiedad del Baricentro de un Triángulo

Recordemos que el baricentro es el punto donde se cortan las tres medianas del triángulo. Vamos, inicialmente, a descubrir una propiedad que tiene este punto; luego, daremos unas pistas para su demostración. Realiza la siguiente experiencia.



EXPERIENCIA

- Dibuja un triángulo cualquiera ABC, traza las medianas $\overline{AM}$, $\overline{BN}$ y $\overline{CP}$ y nombra el baricentro con la letra G.
- Compara tu dibujo con el siguiente:



- A continuación, mide la distancia del vértice A al baricentro G y la distancia del baricentro G al punto medio M. Repite este procedimiento con las otras dos medianas.
- Completa:

$|\overline{AG}|$ = _____ y $|\overline{GM}|$ = _____ . Luego, $|\overline{AG}|$ = _____ $|\overline{GM}|$

$|\overline{BG}|$ = _____ y $|\overline{GN}|$ = _____ . Luego, $|\overline{BG}|$ = _____ $|\overline{GN}|$

$|\overline{CG}|$ = _____ y $|\overline{GP}|$ = _____ . Luego, $|\overline{CG}|$ = _____ $|\overline{GP}|$

- Esta experiencia nos permite concluir que:

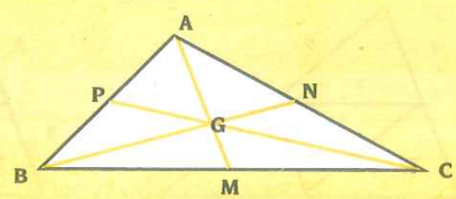
APRENDAMOS

PROPIEDAD DEL BARICENTRO

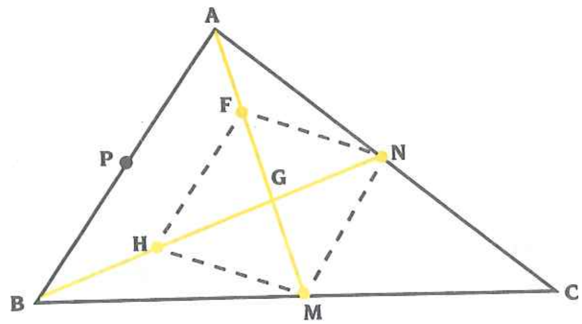
El BARICENTRO de un triángulo divide a cada mediana en dos segmentos tales que uno mide el doble del otro.

Hipótesis: $\overline{AM}$, $\overline{BN}$ y $\overline{CP}$ son medianas del ΔABC y G es el baricentro.

Tesis: $|\overline{AG}| = 2\,|\overline{GM}|$
$|\overline{BG}| = 2\,|\overline{GN}|$
$|\overline{CG}| = 2\,|\overline{GP}|$



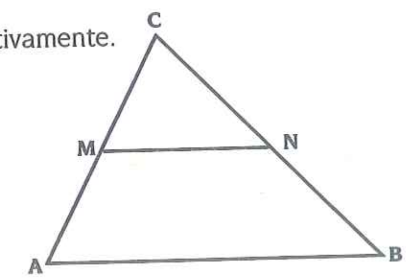
- Estas son algunas pistas para demostrar esta propiedad:
  - Se comienza trabajando con dos medianas, $\overline{AM}$ y $\overline{BN}$, y marcamos los puntos medios de $\overline{AG}$ y $\overline{BG}$. Los denominamos F y H, respectivamente.



  - Nótese que $\overline{HF}$ es base media del ΔAGB y $\overline{MN}$ es base media del ΔACB. De acá se deduce que MHFN es un paralelogramo y, por lo tanto, que $\overline{FG} \cong \overline{GM}$ y que $\overline{HG} \cong \overline{GN}$.
  - Como sabemos que H es punto medio de $\overline{BG}$ entonces $\overline{BH} \cong \overline{HG}$; luego, $\overline{BH} \cong \overline{HG} \cong \overline{GN}$. De acá deducimos que $|\overline{BG}| = 2\ |\overline{GN}|$. De la misma manera, se deduce que $|\overline{AG}| = 2\ |\overline{GM}|$.
  - En forma similar procedemos, trazando la otra mediana, para probar que $|\overline{CG}| = 2\ |\overline{GP}|$.

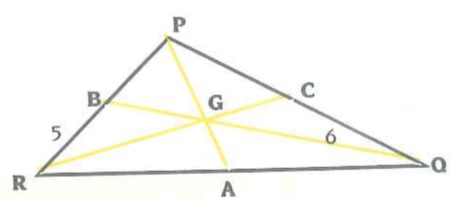
EJERCICIO 8.5

En los ejercicios 1. a 4. M y N son puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$, respectivamente.



1. Si $|\overline{AB}| = 10$ entonces $|\overline{MN}| =$ _____
2. Si $|\overline{AC}| = 15$ entonces $|\overline{AM}| =$ _____
3. Si $|\overline{BN}| = 6$ entonces $|\overline{BC}| =$ _____
4. Si $|\overline{MN}| = 11$ entonces $|\overline{AB}| =$ _____

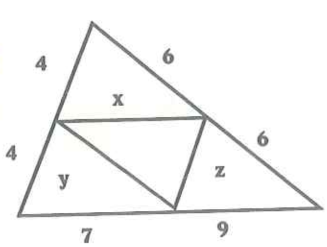
Los ejercicios 5. a 7. se responden con base en el ΔPQR en el cual $\overline{PA}$, $\overline{QB}$ y $\overline{RC}$ son medianas.

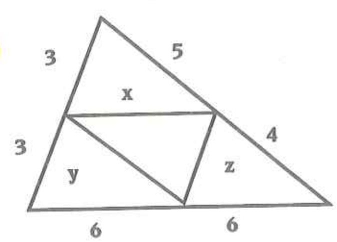


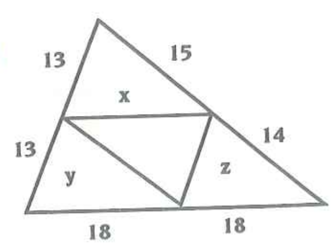
5. Si $|\overline{BR}| = 5$ entonces $|\overline{BP}| =$ ——
6. Si $|\overline{QG}| = 6$ entonces $|\overline{QB}| =$ ——
7. Si $\overline{PR} \cong \overline{RC}$, entonces $|\overline{RG}| =$ ——

8. Contesta: Si $\overline{AM}$ es mediana de un ΔABC y G es su baricentro, ¿qué relación hay entre $\overline{AM}$ y $\overline{AG}$?

   En los ejercicios 9. a 11. sólo uno de los números x , y ó z puede hallarse:

9. 

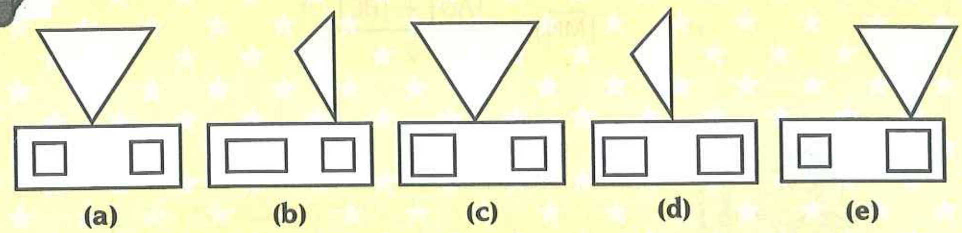
10. 

11. 

12 Demuestra la siguiente proposición: "Si ABCD es un cuadrilátero cualquiera, M es punto medio de $\overline{AB}$, N es punto medio de $\overline{BC}$, P es punto medio de $\overline{CD}$ y R es punto medio de $\overline{AD}$, entonces el cuadrilátero MNPQ es un paralelogramo". (Sugerencia: traza las diagonales de ABCD y aplica la propiedad de la base media resultantes).

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 4

Fíjate en las siguientes figuras:



Cual de ellas corresponde a la siguiente descripción:

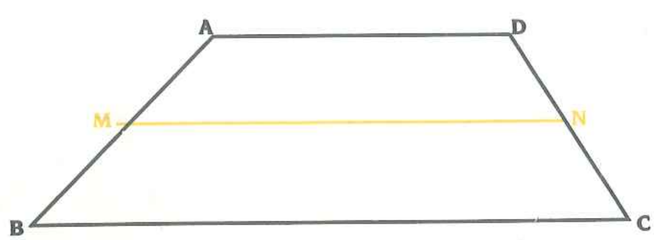
"La figura consta de un rectángulo, un triángulo y dos cuadrados. Dentro del rectángulo que sirve de base, y en cada uno de sus extremos, se hallan dos pequeños cuadrados de distinto tamaño. En el punto medio del lado superior del rectángulo se apoya un vértice de un triángulo equilátero".

8.6 PROPIEDADES DE LOS TRAPECIOS

Hay dos propiedades de los trapecios que merecen destacarse. La primera, se refiere a un trapecio cualquiera y la segunda es una propiedad específica de los trapecios isósceles. Veamos.

PRIMERA EXPERIENCIA

- Dibuja un trapecio ABCD como el de la figura siguiente:



- Traza el segmento que une los puntos medios de los lados no paralelos y llámalo $\overline{MN}$. Este segmento se denomina BASE MEDIA del trapecio.
- Comprueba que $\overline{AD} \parallel \overline{MN} \parallel \overline{BC}$.
- Mide la base media $\overline{MN}$.
- Mide las bases $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ y suma los resultados.
- Compara los resultados de $|\overline{MN}|$ y de $|\overline{AD}| + |\overline{BC}|$. ¿Qué puedes concluir?

APRENDAMOS

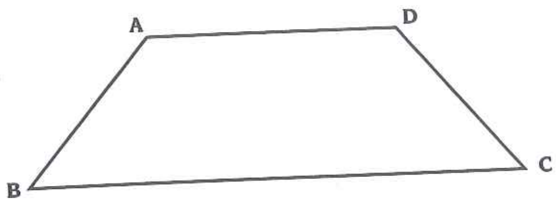
El segmento que une los puntos medios de los lados no paralelos de un trapecio se llama BASE MEDIA y cumple las siguientes propiedades:

1. Es paralela a las bases del trapecio: $\overline{AD} \parallel \overline{MN} \parallel \overline{BC}$.
2. Su medida es igual a la semisuma de las medidas de las bases; es decir:

$$|\overline{MN}| = \frac{|\overline{AD}| + |\overline{BC}|}{2}$$

SEGUNDA EXPERIENCIA

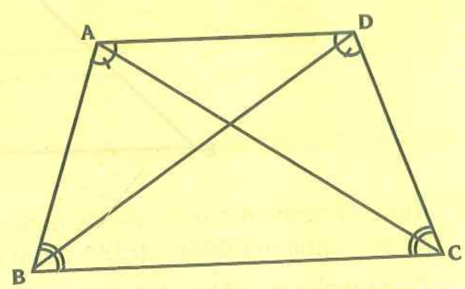
- Dibuja un trapecio isósceles como el de la figura siguiente:



- Mide los ángulos cuyos vértices son los puntos B y C. ¿Qué puedes concluir?
- Ahora mide los ángulos cuyos vértices son los puntos A y D. ¿Qué puedes concluir?
- Finalmente, traza las diagonales y mídelas. ¿Qué puedes concluir?

APRENDAMOS

PROPIEDAD DEL TRAPECIO ISOSCELES



En todo trapecio isósceles se cumple que:

1. Los ángulos de los extremos de cada base son congruentes.
2. Las diagonales son congruentes.

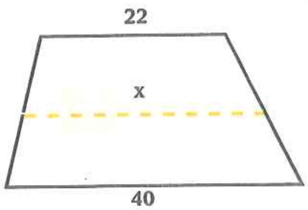
Hipótesis: ABCD es un trapecio isósceles, $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ son las diagonales.

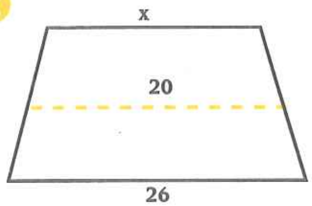
Tesis: 1. $\widehat{B} \cong \widehat{C}$, $\widehat{A} \cong \widehat{D}$

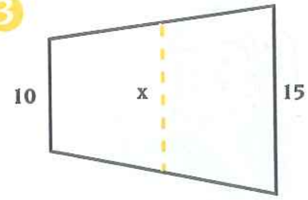
2. $\overline{AC} \cong \overline{BD}$

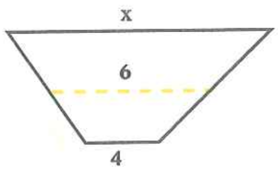
EJERCICIO 8.6

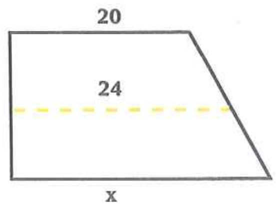
En los ejercicios 1. a 6., la línea punteada es la base media de un trapecio. Halla el valor de x.

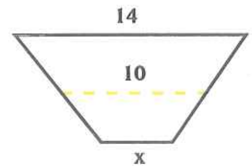
1


2


3


4


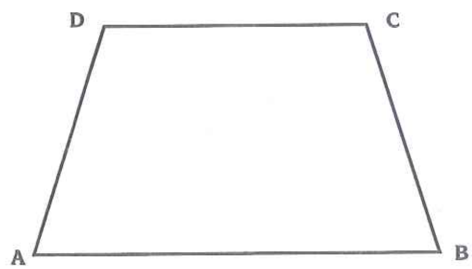
5


6


7 **Hipótesis:** ABCD es un trapecio isósceles, $\overline{DC} \parallel \overline{AB}$

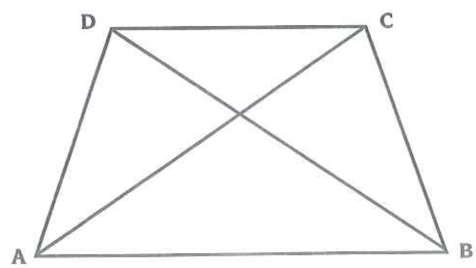
Tesis: $\widehat{A} \cong \widehat{B}$ y $\widehat{D} \cong \widehat{C}$

(Sugerencia: Traza perpendiculares a $\overline{AB}$ desde los vértices D y C).



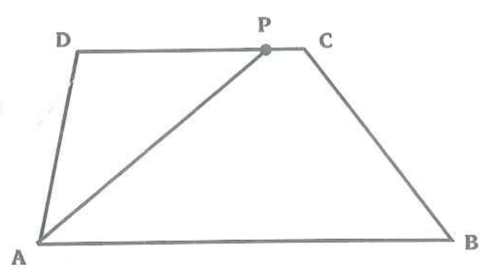
8 **Hipótesis:** ABCD es un trapecio isósceles, $\overline{DC} \parallel \overline{AB}$, $\overline{DB}$ y $\overline{AC}$ son diagonales.

Tesis: $\overline{DB} \cong \overline{AC}$



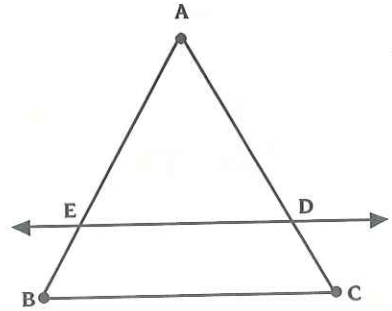
9 **Hipótesis:** ABCD es un trapecio con $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$; $\overline{AP}$ es bisectriz del $\widehat{A}$.

Tesis: ΔADP es isósceles



10 **Hipótesis:** $\triangle ABC$ es isósceles , $\overline{AB} \cong \overline{AC}$,
$\widehat{AED} \cong \widehat{B}$.

Tesis: BCDE es un trapecio isósceles con $\overline{BE} \cong \overline{CD}$



DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 5

- Dibuja tres exágonos regulares y recórtalos para formar:
  - 6 triángulos equiláteros
  - 2 trapecios isósceles
  - 3 rombos congruentes
- Dibuja un triángulo equilátero y recórtalo de modo que puedas formar 3 cuadriláteros congruentes.

TALLER DE REPASO DE LA UNIDAD 8

1. Contesta en tu cuaderno las siguientes preguntas:

a) ¿Cómo se clasifican los cuadriláteros?
b) ¿Cómo se clasifican los paralelogramos?
c) ¿Cómo se clasifican los trapecios?
d) ¿Cuánto suman los ángulos interiores de un cuadrilátero convexo?
e) ¿Cuáles son las propiedades básicas de todo paralelogramo?
f) ¿Cuáles son las propiedades particulares del rectángulo?
g) ¿Cuáles son las propiedades especiales del rombo? ¿Y del cuadrado?
h) ¿Cuál es la propiedad del baricentro de un triángulo?
i) ¿Qué es base media de un triángulo y qué propiedad cumple?
j) ¿Qué es base media de un trapecio y qué propiedad cumple?

2. Indica si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Justifica tus respuestas:

a) Todo paralelogramo es rectángulo.
b) Si las diagonales de un paralelogramo son perpendiculares entre sí, entonces es un cuadrado.
c) Un cuadrilátero es paralelogramo si sus diagonales son perpendiculares.
d) Las diagonales de un rombo son perpendiculares.
e) Las diagonales de un paralelogramo son congruentes.
f) Las diagonales de un trapecio isósceles son congruentes.
g) La suma de las medidas de los ángulos interiores de un cuadrilátero es 360°.
h) Las diagonales de un trapecio se cortan en su punto medio.
i) Todo rombo puede descomponerse en cuatro triángulos rectángulos congruentes.
j) La base media de un triángulo mide la mitad de la longitud de uno de los lados del triángulo.

11. En un paralelogramo ABCD, los ángulos $\widehat{B}$ y $\widehat{D}$ son opuestos y el ángulo exterior al ángulo $\widehat{B}$ mide los $\frac{5}{13}$ del ángulo $\widehat{D}$. Halla la medida de los cuatro ángulos del paralelogramo.

12. ¿Cuánto mide el lado de un rombo si su perímetro es igual al de un triángulo equilátero de 24 cm de lado?

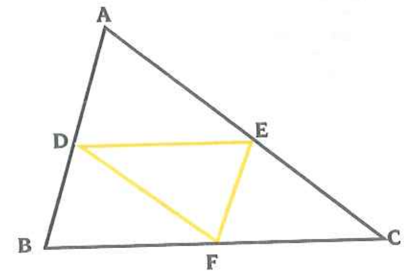
13. ¿Cuánto miden los lados congruentes y la base media de un trapecio isósceles cuyo perímetro mide 34 cm, si la base mayor es el triple de la base menor y ésta mide 6 cm?

14. **Datos:** D, E y F son puntos medios

$|\overline{AB}| = 8$ cm , $|\overline{AC}| = 10$ cm

y $|\overline{BC}| = 12$ cm

Halla: El perímetro del ΔDEF

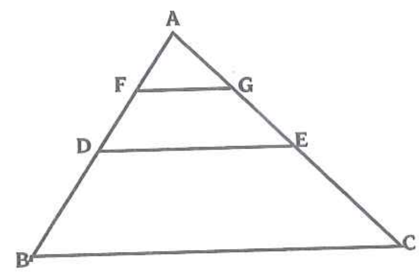


15. **Datos:** $\overline{AD} \cong \overline{DB}$, $\overline{AE} \cong \overline{EC}$

$\overline{AF} \cong \overline{FD}$, $\overline{AG} \cong \overline{GE}$

Demuestra que: a) $\overline{FG} \,//\, \overline{BC}$

b) $|\overline{FG}| = \dfrac{|\overline{BC}|}{4}$



16. **Datos:** D y E son puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ respectivamente

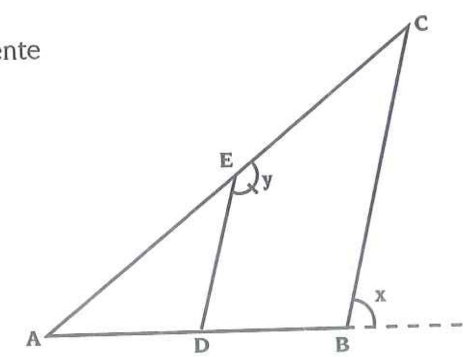
Completa:

a) Si $m\widehat{A} = 33°$ y $m\widehat{C} = 45°$ entonces

$m\widehat{x} =$ ______ y $m\widehat{y} =$ ______

b) Si $|\overline{BC}| = 6$ cm, entonces $|\overline{DE}| =$______

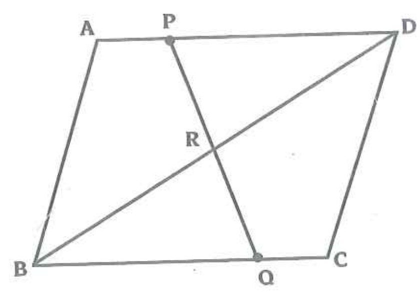
c) El cuadrilátero DBCE es un ________________



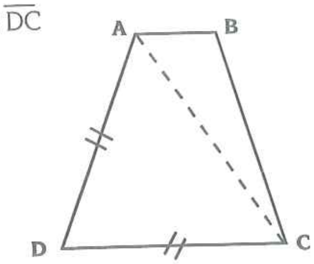
17. **Hipótesis:** ABCD es un paralelogramo

$\overline{AP} \cong \overline{QC}$

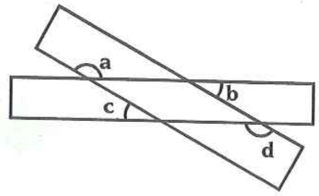
Demuestra que: R es punto medio de $\overline{BD}$ y $\overline{PQ}$



18. **Hipótesis**: $\overline{AB} \,//\, \overline{DC}$, $\overline{AD} \cong \overline{DC}$
Tesis: $\overline{AC}$ biseca al $\widehat{A}$



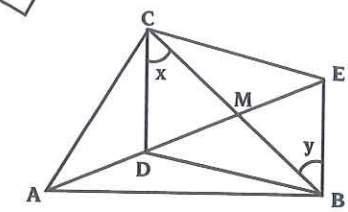
19. Las figuras siguientes son dos rectángulos coplanares. Halla la suma $m\hat{a} + m\hat{b} + m\hat{c} + m\hat{d}$



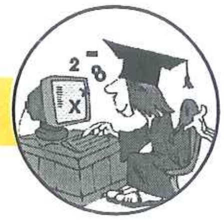
20. **Hipótesis:** $\overline{AM}$ es mediana del ΔABC

$\hat{x} \cong \hat{y}$

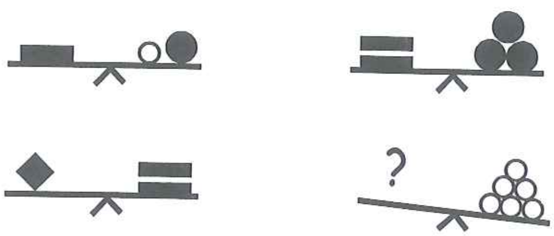
Tesis: DBEC es un paralelogramo



PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS SABER



Los ejercicios 1 y 2. se resuelven de acuerdo con la siguiente figura:



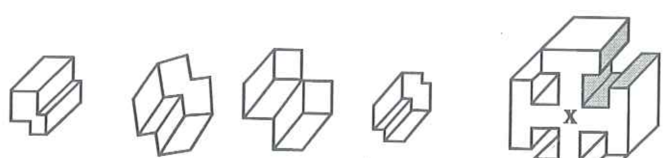
1. ¿Con cuántos rombos se equilibra la balanza?

a) 1 b) 2 c) 4 d) 5

2. ¿Con cuántos circulos negros se equilibra la balanza?

a) 4 b) 1 c) 3 d) 5

3. ¿Cuál de las figuras a), b), c) o d) encaja perfectamente en la parte sombreada de la figura x?

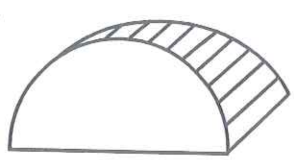


a) b) c) d)

4. ¿Cuántas caras tiene esta figura?

a) 16 b) 15

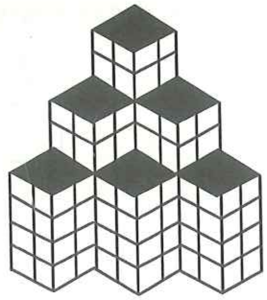
c) 4 d) 7



5. ¿De cuántos bloques está formada esta torre?

a) 160 b) 140

c) 128 d) 104



Respuestas

NÚCLEO TEMÁTICO

1

TALLERES

Ejercicio 1.1

1. d, **2.** b , **3.** d , **4.** c, **5.** a.

Taller 1.1

1. **b)** Geométrico, **c)** material ; geométrico, **d)** material ; geométrico

2. **a)** $\in$, **b)** $\notin$, **c)** $\in$, **d)** $\in$, **e)** $\in$ **f)** $\in$, **g)** $\in$, **h)** $\in$, **i)** $\notin$

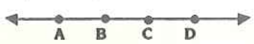
3. **a)** $\in$, **b)** $\in$, **c)** $\notin$, **d)** $\notin$, **e)** $\in$, **f)** $\in$, **g)** $\in$, **h)** $\in$, **i)** $\notin$, **j)** $\in$, **k)** $\in$, **l)** $\in$

5. **a)** $\overrightarrow{AB}$, **b)** $\overline{PQ}$

6. **a)** V , **b)** V , **c)** F , **d)** V , **e)** V , **f)** V

8. **a)** {B} , **b)** $\emptyset$, **c)** $\overline{AT}$, **d)** $\overline{AR}$, **e)** {B} , **f)** $\overline{TR}$, **g)** $\overline{TR}$, **h)** $\emptyset$

9. **a)** V , **b)** F , **c)** F ,

d) F: 

10. **a)** No están alineados, pero son coplanares, **b)** No están alineados, pero son coplanares, **c)** No son coplanares en cuanto no pertenecen a una misma cara de la figura dada, **d)** No están alineados, pero son coplanares, **e)** No son coplanares

Taller 1.2

3. $m\hat{1} = 38°$, $m\hat{2} = 90°$, $m\hat{3} = 125°$

4. **a)** $\hat{2}, \hat{6}$ y $\hat{7}$, **b)** $\hat{1}, \hat{4}$ y $\hat{8}$, **c)** $\hat{3}$ y $\hat{5}$

9. **a)** F , **b)** V , **c)** F , **d)** V , **e)** F , **f)** V

10. **a)** $\measuredangle$ DOE y $\measuredangle$ BOC ; $\measuredangle$ COF y $\measuredangle$ AOD , **b)** $\measuredangle$DOE , **c)** $\measuredangle$ COF, **d)** $\measuredangle$ AOB y $\measuredangle$BOF ; $\measuredangle$ EOF y $\measuredangle$ FOB , **e)** $\measuredangle$ FOB , **f)** $\measuredangle$ DOF

Taller 1.4

2. 105 cm , **3.** 27,6 cm , **4.** Sí ,

11. **a)** F , **b)** F , **c)** V , **d)** V , **e)** F , **f)** F, **g)** F , **h)** F , **i)** V , **j)** F

Taller 1.5

3. **a)** 2 dm , **b)** 6 cm , **c)** 6 cm ,

4. 166,14 cm^2 , 175,1 cm^2, 93,6 cm^2

5. 107,88 cm^2 , 84,24 cm^2 ,

6. $701,505 , **7.** 5 cuadrados ,

8. $(18 - \pi)$ cm^2

Taller 1.6

5. **a)** 225000 cm^3
b) 225 dm^3
c) 225,000.000 mm^3

7. **a)** 57,105 cm^3
b) 20,1 cm^3
c) 268,1 cm^3
d) 39,27 cm^3 aprox

8. **a)** 0,52 cm^3
b) 7,85 cm^3
c) 2,65 cm^3 aprox

9. Aprox. 9.

10. **a)** 67 cm^3 aprox
b) 25,35 cm^3 aprox

TALLER DE REPASO DE LA UNIDAD 1

3. **a)** 6 segmentos: $\overline{PQ}$, $\overline{PR}$, $\overline{PS}$, $\overline{QR}$, $\overline{QS}$, $\overline{RS}$, **b)** $\overline{PR}$, **c)** {Q} , **d)** $\overline{RQ}$, **e)** $\overline{PR}$

11. No ; **12.** 11 cm, 12 m, 13 cm

13. Si, porque $15^2 = 12^2 + 9^2$

14. **a)** V , **b)** F , **c)** V , **d)** V , **e)** V , **f)** V , **g)** V , **h)** V , **i)** F , **j)** V

15. **a)** 972 cm^2 , **b)** 27 cm^2

16. **a)** 5 cm , 30 cm^2 ,
b) 8 cm , 56 cm^2

17. $(16 + 2\pi)$ cm^2

18. **a)** 60 cm^3
b) 41,1 cm^3
c) 21 cm^3
d) 4415625 cm^3
e) 134 cm^3
f) 26 cm^3

19. **b)** 2535 cm^3 ,
c) 20787 kg

20) **a)** 8540 cm^2
b) 14000 cm^3
c) 13300 g

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 1

1. 61 **2.** 54º **3.** C **4.** 24 **5.** 16

6. Colocar en un lado los cubos de aristas 6,8 y 10 cm y en el otro solamente el cubo de 12 cm de arista.

PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS DEL ICFES 1

1. c , **2.** a , **3.** d , **4.** b , **5.** a

NÚCLEO TEMÁTICO 2

EJERCICIOS

Ejercicio 2.1:

1. d, **2.** b , **3.** c , **4.** c, **5.** b.

Ejercicio 2.3

2. Punto ; **3.** 60º ; **4.** n - 3

Ejercicio 2.4

2. F, el trapecio, **3.** F, el trapezoide,

4. V, ; **5.** a

Ejercicio 2.5

4. Condicionales, p se llama hipótesis o antecedente, q se llama consecuente o tesis.

5. $p \rightarrow q$

6. Es falsa cuando p es V y q es F, en los otros casos es V.

7. d y e ; **8.** e

9. Si varias paralelas determinan segmentos congruentes en una de dos transversales, determinarán también segmentos congruentes en la otra transversal.

10. Si un cuadrilátero tiene un par de lados congruentes y paralelos, el cuadrilátero es un paralelogramo.

TALLER DE REPASO DE LA UNIDAD 2

2. Si un triángulo tiene dos ángulos congruentes entonces es isósceles , V.

3. Si un triángulo es equilátero entonces tiene los tres ángulos congruentes, V.

4. Si dos planos se interceptan entonces su intersección es un punto, F.

7. c) V , No , No.

11. $a, a \rightarrow p, p \rightarrow b, b \rightarrow h, h \rightarrow z, z \rightarrow k, k \rightarrow c, c \rightarrow m$.

12. Existen rectas que no pertenecen a un plano y que son perpendiculares a rectas del plano.

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 2

1. c , **2.** d ; **3.** a , **4.** \$ 5 y \$ 25 , **5.** a , **6.** 2 y 5.

PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS DEL ICFES 2

El crimen en la tabla redonda lo cometió el señor L, Pedro cometió el crimen.

NÚCLEO TEMÁTICO

3

EJERCICIOS

Ejercicio 3.1

1. a, **2.** c , **3.** d , **4.** b, **5.** a.

Ejercicio 3.2

1. La recta, **2.** plano, **3.** recta,

4. recta, **5.** plano, **6.** recta,

7. recta, **8.** recta, **9.** axioma 2,

10. axioma 3, **11.** axioma 8,

12. axioma 5, **13.** axioma 1,

14. axioma 6,

15. a) infinitos, b) uno y sólo uno,

16. sí,

18. $\overleftrightarrow{AB}$ está contenida en el plano,

TALLER DE REPASO DE LA UNIDAD 3

2. **a)** infinitos, **b)** infinitas, **c)** infinitos, **d)** No, **e)** Sí.

3. Que son iguales,

6. AB está contenida en Ω,

7. Sí,

8. d, **9.** c

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS

2. d)

PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS DEL ICFES

1. d, **2.** d, **3.** d, **4.** c, **5.** a

NÚCLEO TEMÁTICO

4

EJERCICIOS

Ejercicio 4.1

1. d, **2.** d , **3.** b , **4.** a, **5.** b.

Ejercicio 4.2

2. **a)** A, **b)** 7, **c)** $|\overline{CF}| = 7$, **d)** $|\overline{AD}| = 7$, **e)** 2, **g)** Sí

3. **a)** Sí, **b)** Sí, **c)** Sí, **d)** Sí, **f)** No, **g)** Sí, **h)** $\overline{BC}$

Ejercicio 4.3

7. **a)** m ($\measuredangle$ KPM), **b)** m ($\measuredangle$ KPN), **c)** m ($\measuredangle$ KPL), **d)** m ($\measuredangle$ KPM)

8. **a)** $83° 30'11''$, **b)** $25° 6'19''$, **c)** $101°12'16''$, **d)** $12°9'18''$

9. 43°

Ejercicio 4.4

1. 36°, 90°, 54°

2. **a)** 72°, **b)** 53° 8', **c)** 41°20'45"

3. **a)** 102°, **b)** 87°45', **c)** 56°50'44"

4. 80°, 60°, 40°

5. **a)** 50°, **b)** 165°, **c)** 105°, **d)** 120°

6. 40° ; **7.** 150° ; **8.** 60°

TALLER DE REPASO DE LA UNIDAD 4

2. **d)** Suplementarios, **e)** bisectriz, **f)** 180°, **g)** 125°, **h)** agudo, **i)** congruentes, **j)** un par lineal, **k)** recto.

3. **a)** V, **b)** V, **c)** V, **d)** F, **e)** V, **f)** F, **g)** V, **h)** F, **i)** V, **j)** F

4. **a)** 9, **b)** 18, **c)** 11, **d)** 4

5. **a)** C, **b)** A, **c)** C

6. 3

7. **a)** $\measuredangle$ DAC y $\measuredangle$CAB, **b)** $\measuredangle$ A y $\measuredangle$ C, **c)** $\measuredangle$ ACD y $\measuredangle$ DCB, $\measuredangle$ A y $\measuredangle$ B

TALLER DE REPASO DE LA UNIDAD 4

13. 36°
14. 45° y 135°

16. 80°, 40°
17. 96°

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS

1. Método directo, **3.** Sara

PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS DEL ICFES

Daniel dijo la verdad y Amparo se robó las herramientas.

NÚCLEO TEMÁTICO

5

EJERCICIOS

Ejercicio 5.1

1. a, **2.** b , **3.** d , **4.** c, **5.** b.

Ejercicio 5.2

1. $\overleftrightarrow{l} \perp \overleftrightarrow{r}$, **2.** $\overleftrightarrow{t} \perp \overleftrightarrow{s}$, $\widehat{b} \cong \widehat{c} \cong \widehat{d} \cong \widehat{a}$,

6. $\overleftrightarrow{DF}$, $\overleftrightarrow{CG}$, $\overleftrightarrow{BH}$, $\overleftrightarrow{AE}$,

7. Plano ABCD ⊥ plano BCGH; plano ABCD ⊥ plano FDCG; plano ABCD ⊥ plano ADFE; plano ABCD ⊥ plano ABHE,

8. $\overleftrightarrow{l} \perp \overleftrightarrow{r}$, $\overleftrightarrow{l} \perp \overleftrightarrow{t}$.

Ejercicio 5.3

1. c, **2.** a, **3.** a, **4.** e, **5.** a **6.** b,
7. Falso, **8.** Verdadero, **9.** Verdadero,
10. Verdadero.

Ejercicio 5.4

1. **a)** Correspondientes,
b) Alternos internos,
c) Alternos externos,
d) Opuesto por el vértice,
e) Par lineal, **f)** Alternos externos, **g)** Alternos internos,
h) Opuestos por el vértice,
i) Opuestos por el vértice,
j) Opuestos por el vértice.

2. $m\widehat{2} = m\widehat{4} = m\widehat{8} = m\widehat{6} = 60°$, $m\widehat{1} = m\widehat{3} = m\widehat{5} = m\widehat{7} = 120°$

3. $m\widehat{8} = m\widehat{5} = m\widehat{3} = m\widehat{1} = 150°$, $m\widehat{2} = m\widehat{4} = m\widehat{6} = m\widehat{7} = 30°$

4. $m\widehat{1} = m\widehat{3} = m\widehat{5} = m\widehat{8} = 50°$, $m\widehat{6} = m\widehat{7} = m\widehat{4} = m\widehat{2} = 130°$

5. **a)** $\widehat{1} \cong \widehat{3} \cong \widehat{5} \cong \widehat{7} \cong \widehat{9} \cong \widehat{11} \cong \widehat{13} \cong \widehat{15}$
b) $\widehat{2}, \widehat{4}, \widehat{6}, \widehat{8}, \widehat{10}, \widehat{12}, \widehat{14}, \widehat{16}$

7. $m\widehat{A} = 60°$, $m\widehat{B} = 120°$, $m\widehat{C} = 60°$

9. $m\widehat{\alpha} = 120$

10. $m\widehat{B} = 50°$

TALLER DE REPASO DE LA UNIDAD 5

2. **a)** V, **b)** V, **c)** F, **d)** F, **e)** V, **f)** V, **g)** F, **h)** F, **i)** F, **j)** V.

3. **a)** $\overleftrightarrow{m} \parallel \overleftrightarrow{r}$ por tener ángulos correspondientes congruentes.

b) $\overleftrightarrow{m} \parallel \overleftrightarrow{n}$ por tener ángulos alternos internos congruentes.

c) $\overleftrightarrow{n} \parallel \overleftrightarrow{r}$ por tener ángulos correspondientes congruentes.

d) $\overleftrightarrow{m} \parallel \overleftrightarrow{r}$ por tener ángulos alternos internos congruentes.

e) $\overleftrightarrow{n} \parallel \overleftrightarrow{r}$ por tener ángulos correspondientes congruentes.

f) $\overleftrightarrow{m} \parallel \overleftrightarrow{n}$ por tener ángulos alternos externos congruentes.

4. El ángulo exterior en A del Δ ABC no puede medir 70° ya que debería sumar 145° ($m\widehat{B} + m\widehat{D}$); en el Δ EBC, $m\widehat{B} + m\widehat{E} + m\widehat{C} > 180°$

6. $m\widehat{\alpha} = m\widehat{2} = m\widehat{5} = m\widehat{7} = 63°$, $m\widehat{1} = m\widehat{3} = m\widehat{4} = m\widehat{6} = 117°$

7. $\widehat{\alpha} \cong \widehat{1} \cong \widehat{5} \cong \widehat{7} \cong \widehat{13} \cong \widehat{15} \cong \widehat{11} \cong \widehat{9}$

Suplementarios con el ángulo α: $\widehat{2}, \widehat{3}, \widehat{4}, \widehat{6}, \widehat{12}, \widehat{14}, \widehat{10}$ y $\widehat{8}$

8. $m\widehat{D} = 110°$, $m\widehat{A} = m\widehat{C} = 70°$

10. No

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 5

1. Sugerencia: Traza la mediatriz del $\overline{AB}$, **2.** Con las cuatro rectas puedes determinar 0, 1, 3, 4, 5 y hasta 6 puntos. No puedes ubicar 2 ni más de 6.

PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS DEL ICFES 5

1. b, **2.** c, **3.** c, **4.** a, **5.** c

NÚCLEO TEMÁTICO 6

EJERCICIOS

Ejercicio 6.1

1. b, **2.** d , **3.** b , **4.** a, **5.** c.

Ejercicio 6.3

1. No, **2.** Sí, **3.** No,

4. Tiene mayor medida el ∡ A y menor medida el ∡ C,

5. 72°, **6.** 120°, 100°, 140°,

7. No, **8.** Sí, **9.** $\widehat{A} \cong \widehat{C}$, 10,

10. 60°, equilátero,

11. $m\widehat{A} = 60°$, $m\widehat{B} = 30°$,

12. 90°, **13.** 80°,

14. 1440°, 144°,

15. 55° y 35°.

TALLER DE REPASO DE LA UNIDAD 6

2. **a.** V, **b.** V, **c.** F, **d.** F, **e.** F, **f.** V, **g.** V, **h.** F, **i.** F, **j.** V, **k.** V.

6. ∡ ABE ≅ ∡AEB, $\widehat{ACD} \cong \widehat{ADC}$; ∡ FGE ≅ ∡ FEG, ∡ GFE ≅ ∡ EGF, ∡ GFE ≅ FEG, ∡ GDE ≅ ∡ GED; ∡ MNL ≅ ∡MLN, ∡ KNL ≅ ∡ KLN.

7. **a)** 20°, **b)** 15

8. **a)** 32°, **b)** 14, **c)** 14, **d)** 58°

9. 210

10. 145

11. $m\widehat{A} = 64°$, $m\widehat{B} = 68°$, $m\widehat{C} = 48°$

12. 116°, 116°, 128°

13. $m\widehat{A} = 65°$, $m\widehat{B} = 70°$

14. 42° y 48°

15. 270°

16 $m\widehat{\alpha} = 50°$

17. $m\widehat{x} = 6°$

18. $m\widehat{B} = 56°$, $m\widehat{C} = 34°$

19. $m\widehat{\alpha} = 13{,}5°$

PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS DEL ICFES 6

1. d, **2.** b, **3.** e, **4.** d, **5.** c

NÚCLEO TEMÁTICO 7

EJERCICIOS

Ejercicio 7.1

1. c, **2.** b , **3.** b, **4.** d, **5.** d

Ejercicio 7.2

1. A-L-A **2.** No son congruentes,

3. No son congruentes,

4. No son congruentes,

5. A-L-A, **6.** L-A-L,

7. No son congruentes,

EJERCICIOS 7

8. No son congruentes,
9. No congruentes,
10. No congruentes,
11. L-L-L,
12. No congruentes.
18. Por L-A-L,
19. Por A-L-A,
20. a) Sí, por L-A-L,
b) $\widehat{F}$, **c)** $\widehat{E}$,

21. a) Sí, por L-L-L,
b) $\widehat{B} \cong \widehat{E}$, $\widehat{C} \cong \widehat{F}$, $\widehat{A} \cong \widehat{D}$,
22. No, porque no cumplen ningún criterio de congruencia.

Ejercicio 7.4

1. Sí, H – C, **2.** Sí, L-A-A,
3. Sí, L-A-A, **4.** Sí, A-L-A,
5. $|\overline{BC}| = |\overline{EF}| = 34$,
6. $m\widehat{B} = m\widehat{E} = 35°$,
7. 72°, 72°, 36°, **8.** $m\widehat{x} = 6°$,
9. 50°,
10. Todos los ángulos interiores del heptágono regular son congruentes, los triángulos rectángulos de hipotenusa el lado del heptágono son congruentes por H – C.

TALLER DE REPASO DE LA UNIDAD 7

2. **a)** V, **b)** F, **c)** V, **d)** F, **e)** V, **f)** V, **g)** V, **h)** V, **i)** V, **j)** F, **k)** V, **l)** F.
4. **a)** Son ≅s, A - L - A, **b)** ≅s, A - A - L, **c)** ≅s, L - L - L, **d)** ≅s, L - A - L, **e)** ≅s, A - L - A, **f)** ≅s, A - L - A, **g)** ≅s, A - A - L, **h)** ≅s, H - C, **i)** ≅s, A - A - L, **j)** ≅s, L - A - L.
5. **a)** ≅ s, L - A - L, **b)** ≅ s, A - A - L, **c)** ≇ s, **d)** ≅s, A - A - L, **e)** ≅ s, H - C, **f)** ≅s, A - A - L

PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS DEL ICFES

1. d, **2.** b, **3.** c, **4.** a, **5.** c

NÚCLEO TEMÁTICO 8

EJERCICIOS

Ejercicio 8.1

1. c, **2.** c , **3.** b , **4.** d, **5.** c

Ejercicio 8.2

1. $\overline{DC}$, **2.** $\widehat{B}$ y $\widehat{D}$, **3.** $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$, **4.** $\widehat{B}$,
5. Son siempre verdaderas: la c, d, e y j, **6.** 60°, 120°, 120°

Ejercicio 8.3

1. **a)** V, **b)** F, **c)** V, **d)** V, **e)** V, **3.** 50°,
4. 130°, **5.** 40°, **6.** 90°, **7.** 90°,
8. 130°, **9.** $|\overline{AD}| = 2{,}5$ cm,
10 $|\overline{CD}| = 4$ cm, **11.** 60°,
12. 12 cm, **13.** 120°, **14.** 20 cm,
15. 7 cm, **16.** 9 cm, **17.** $\overline{ON}$,
18. $\overline{NP}$, **19.** Δ NOP, **20.** $\widehat{N}$,
21. $\overline{OP}$, **22.** 64°, 64°, 116°, 116°,
25. 85°

Ejercicio 8.4

1. **a)** V, **b)** F, **c)** F, **d)** V, **e)** V, **f)** F, **g)** F, **h)** F, **i)** V,
2. No, **3.** No, **4.** Sí, **5.** Sí, **6.** No,
7. No, **8.** Sí, **9.** Sí, **10.** No

Ejercicio 8.5

1. 5, **2.** 7,5 **3.** 12, **4.** 22, **5.** 5,
6. 9, **7.** $\frac{20}{3}$,
8. $|\overline{AM}| = \frac{3}{2}|\overline{AG}|$,
9. $x = 8$,
10. $y = 4{,}5$, **11.** $y = 14{,}5$

Ejercicio 8.6

1. 31, **2.** 14, **3.** 12,5, **4.** 8, **5.** 28, **6.** 6

TALLER DE REPASO DE LA UNIDAD 8

2. **a)** F, **b)** F, **c)** F, **d)** V, **e)** F, **f)** V, **g)** V, **h)** F, **i)** V, **j)** F

TALLER DE REPASO DE LA UNIDAD 8

8

Cuadrilátero	Todos los lados son $\cong$ s	Los lados opuestos son		Las diagonales se cortan en su punto medio	Las diagonales bisecan los $\angle$s del cuadrilátero	Los $\angle$s opuestos son $\cong$ s	Las diagonales son	
		$\cong$s	//				$\cong$	$\perp$
Paralelogramo		x	x	x		x		
Rectángulo		x	x	x		x	x	
Rombo	x	x	x	x	x	x		x
Cuadrado	x	x	x	x	x	x	x	x
Trapecio								
Trapecio Isósceles							x	

10. 64°, 64°, 116°, 116°

11. 130°, 130°, 50°, 50°

12. 18 cm

13. base media = 12 cm, lados congruentes = 5 cm

14. 15 cm

16. a) $m\widehat{x} = 78°$, $m\widehat{y} = 135°$,
b) $|\overline{DE}| = 3$ cm,
c) Trapecio

19. 360°

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS

8

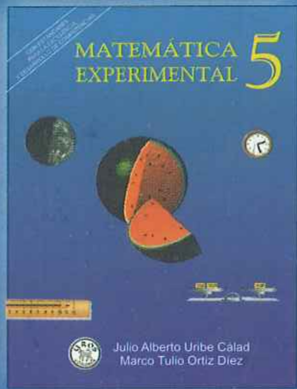
1. a, y c, **2.** En el incentro, **3.** Se forma el nuevo cuadrado trazando las paralelas a las diagonales del cuadrado por sus vértices. **4.** c

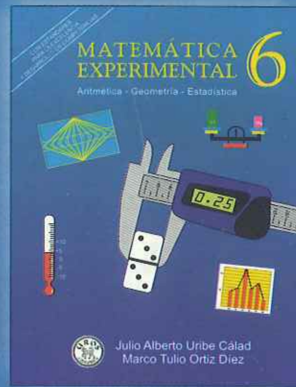
PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS DEL ICFES

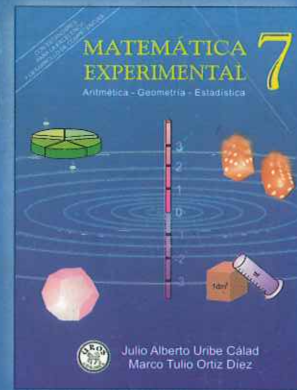
8

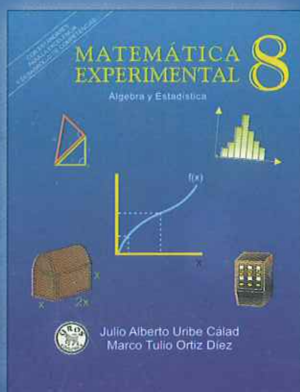
1. a, **2.** c, **3.** a, **4.** a, **5.** c

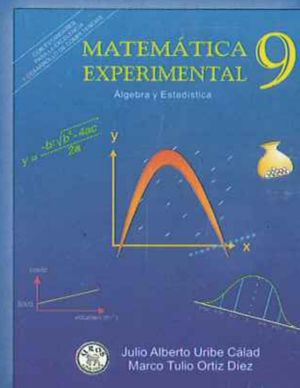
Kelly Paola Alvarez lópez

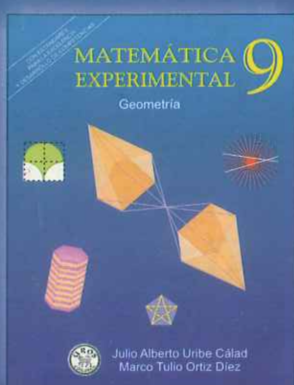


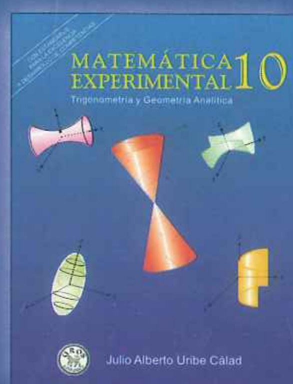


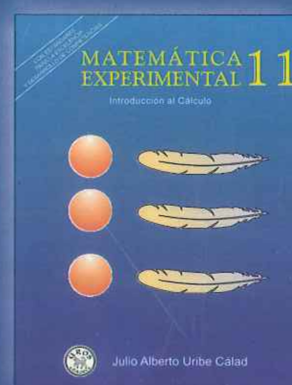












ISBN 958-97531-4-0
9 789589 753149