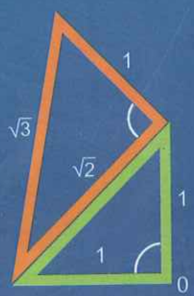
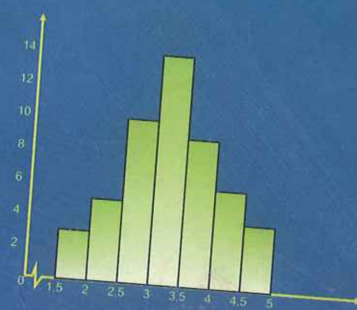
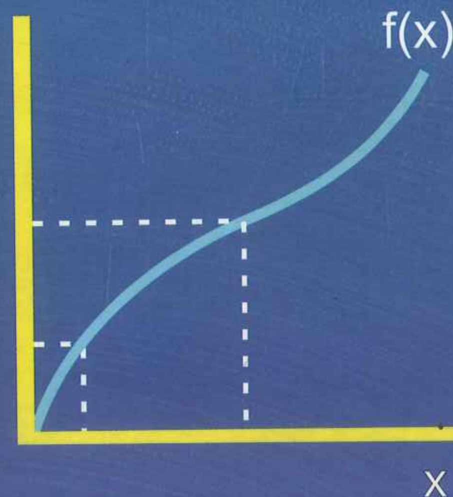
CON ESTÁNDARES
PARA LA EXCELENCIA
Y DESARROLLO DE COMPETENCIAS

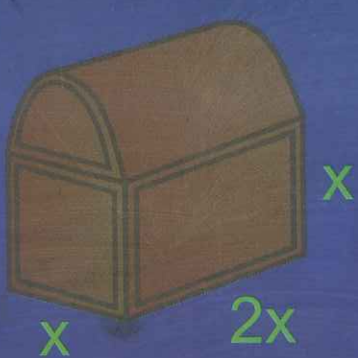
MATEMÁTICA EXPERIMENTAL 8

Álgebra y Estadística









UROS EDITORES

Julio Alberto Uribe Cálad
Marco Tulio Ortiz Díez

Maria Camila Arroyave López

CON ESTÁNDARES PARA LA EXCELENCIA Y DESARROLLO DE COMPETENCIAS

MATEMATICA EXPERIMENTAL

ÁLGEBRA Y ESTADÍSTICA

Maria Camila Arroyave

8

OCTAVO GRADO

EDUCACIÓN BÁSICA SECUNDARIA

Maria Camila Arroyave

SEGUNDA EDICIÓN ACTUALIZADA

2005

Julio Alberto Uribe Cálad
Marco Tulio Ortiz Díez

UROS editores

Este texto ha sido elaborado por los autores de acuerdo con los programas del Ministerio de Educación Nacional y bajo la responsabilidad de los siguientes integrantes:

AUTORES

JULIO ALBERTO URIBE CÁLAD

- Licenciado en Matemáticas y Física de la Universidad de Antioquia en el año 1.980
- Posgraduado en Didáctica Universitaria en la misma universidad en el año 2002.
- Rector del colegio Calasanz de Medellín entre los años 1991 y 2002 y profesor de la misma institución desde el año 1971
- Profesor Asociado de la Universidad Nacional de Colombia, sede de Medellín, desde el año 1980
- Distinguido con el premio a la Docencia Excepcional por el Consejo Superior de la Universidad Nacional en los años 2000, 2001 y 2002.
- Coautor de la reconocida serie ELEMENTOS DE MATEMÁTICAS publicada por Editorial Bedout entre los años 1989 y 1999.
- Autor y coautor de más de 25 textos, incluidos dos de carácter universitario, uno de los cuales es actualmente el texto guía en el curso de GEOMETRÍA VECTORIAL, para estudiantes de ingeniería en la Universidad Nacional de Colombia, sede de Medellín.

MARCO TULIO ORTIZ DÍEZ

- Licenciado en Matemáticas y física de la Universidad de Antioquia, en el año 1982.
- Profesor del colegio Calasanz de Medellín, desde hace 25 años.
- Profesor del Liceo Concejo de Medellín desde hace 15 años.
- Profesor del Instituto Nocturno de Bachillerato de la Universidad de Antioquia, durante 28 años.

COMITÉ TÉCNICO

Diseño y Diagramación: Isabel Consuelo Alvarez M.
Diseño de carátula: Sergio Alonso Molina Molina.
Diseño Desprendible:: Juan Carlos Uribe Osorio.
Impresión y terminación: Termimpresos - Medellín

AGRADECIMIENTOS:

Al profesor Jesús Enrique Uribe Ángel, quien elaboró las preguntas correspondientes a las comprensiones de lectura de cada unidad.

CRÉDITOS

Este texto recomienda el uso del paquete computacional DERIVE, propiedad de TEXAS INSTRUMENTS INCORPORATED. Si adquiere este material, hágalo de forma legal; recuerde que la piratería es un delito y, como tal, será sancionado según las leyes.

ISBN COLECCIÓN: 958 - 97531-3-2

Contenido

MATEMÁTICA

ÁLGEBRA Y

escrito para

ESTRUCTURAR Y DESARROLLAR EL

a través de

UN CURRÍCULO

mediado por

PROCESOS GENERALES

como

- PLANTEAMIENTO Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
  - Enunciar el problema
  - Desarrollar estrategias de solución
  - Verificar los resultados
  - Generalizar las estrategias de solución
  - Utilizar significativamente la matemática para aplicarla en la solución de nuevos problemas
- RAZONAMIENTO
  - Cómo y por qué de los procesos
  - Justificar los procedimientos
  - Plantear hipótesis, exhibir contraejemplos y argumentos a partir de propiedades conocidas
  - Identificar patrones de comportamiento
- COMUNICACIÓN
  - Expresar oralmente ideas
  - Escribir procesos de solución de problemas
  - Enunciar e interpretar propiedades
  - Evaluar información
- MODELACIÓN
  - Identificar las partes de un problema
  - Escribir un modelo matemático para el enunciado de problemas
  - Resolver el modelo
  - Verificar las soluciones obtenidas
- EJERCITACIÓN
  - Desarrollar cálculos aritméticos, métricos, geométricos, analíticos y de rutina
  - Dibujar gráficas
  - Medir objetos
  - Realizar transformaciones en el plano y en el espacio

CONOCIMIENTOS

dados en

PENSAMIENTOS

como

PENSAMIENTO NUMÉRICO

a través de

LÓGICA Y CONJUNTOS

como

- ESTRUCTURA LÓGICA DEL ÁLGEBRA
  - Lenguaje del álgebra
  - Método axiomático en álgebra
- MÉTODOS DE DEMOSTRACIÓN
  - Implicaciones y equivalencia
  - Hipótesis y tesis de una implicación
  - Métodos directo e indirecto de demostración.
  - Inducción y contraejemplo

LOS NÚMEROS REALES

como

- SUS ELEMENTOS
  - Números racionales
  - Números irracionales
- COMPARACIÓN DE REALES
- REPRESENTACIÓN GRÁFICA
- OPERACIONES EN R
  - Suma y resta
  - Multiplicación y división
  - El campo R
  - Propiedades de la igualdad
  - Consecuencias algebraicas
- POTENCIACIÓN Y RADICACIÓN EN R Y SUS PROPIEDADES

para desarrollar

COMPETENCIAS

INTERPRETATIVA

PROPOSITIVA

evidenciadas por el alcance de

LOGROS

como

DESTREZA OPERATIVA

APROPIACIÓN Y COMUNICACIÓN DE CONCEPTOS

EXPERIMENTAL 8

ESTADÍSTICA

PENSAMIENTO LÓGICO MATEMÁTICO

ESPECÍFICOS

CONTEXTO

como

- Ambiente social y familiar que rodea al estudiante.
- Situación sicológica propia de la adolescencia.
- Ambiente de motivación para el aprendizaje que pueda crear el docente.
- Reflexionar sobre los procesos de pensamiento.
- Activar la capacidad de pensamiento.
- Lograr la participación activa del estudiante.
- Preparar para resolver otros problemas de la ciencia y de la vida.

PENSAMIENTO ALEATORIO Y SISTEMAS DE DATOS

a través de

- REVISIÓN DE CONCEPTOS ESTADÍSTICOS
  - Población y muestra
  - Caracteres y variables estadísticas
  - Caracteres cualitativos y cuantitativos
  - Variables discretas y continuas
  - Recuento y elaboración de Tablas de Frecuencias
  - Agrupación de datos: intervalos o clases, marcas de clase, rango o recorrido de una distribución
  - Frecuencias absolutas, frecuencia absoluta acumulada, frecuencia relativa, frecuencia relativa acumulada
- REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UNA DISTRIBUCIÓN
  - Diagramas de barras
  - Diagramas de sectores
  - Histogramas
  - Polígono de frecuencias
  - Curva de frecuencias
  - Ojivas
- MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL
  - Media Aritmética
  - Media aritmética ponderada
  - Mediana. Cálculo de la mediana en una distribución con pocos datos y en una distribución de variable discreta con muchos datos o de variable continua con datos agrupados en intervalos o clases
  - Moda
  - Interpretación de las medidas de tendencia central. Curvas simétricas y curvas asimétricas o sesgadas.

PENSAMIENTO VARIACIONAL Y SISTEMAS ALGEBRAICOS Y ANALÍTICOS

a través de

- EXPRESIONES ALGEBRAICAS Y POLINOMIOS
  - Similitudes y diferencias
  - Polinomios en una indeterminada: grado, coeficiente principal, término independiente.
  - Polinomios en dos indeterminadas
  - Operaciones con polinomios: suma, resta, multiplicación y división. Regla de Ruffini.
  - Productos notables y su interpretación geométrica
  - Factorización
  - Ceros enteros de un polinomio
- CONCEPTO DE FUNCIONES
  - Formas diferentes de representar una función
  - La notación $y=f(x)$
  - Dominio y rango de una función
  - Gráfica de una función
  - Funciones lineales. Pendiente e intercepto "y" de una recta
- FRACCIONES RACIONALES
  - Simplificación
  - Suma, resta, multiplicación y división
  - Fracciones complejas
- ECUACIONES LINEALES CON UNA INCÓGNITA
  - Eliminación de signos de agrupación y denominadores
  - Análisis de solución
  - Solución de ecuaciones literales de primer grado
  - Problemas de aplicación

ARGUMENTATIVA

ce de

PTOS

DIBUJO DE GRÁFICOS

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

DIMENSIONES

Núcleo Temático

0

REVISIÓN DE CONCEPTOS Y REPASO

LOGRO GENERAL

Identificar e interpretar las propiedades de las operaciones básicas en Z y Q y utilizarlas para resolver problemas.

DIMENSIONES

LOGROS ESPECÍFICOS	INDICADORES DE LOGRO
Corporal: • Participar en actividades que faciliten el aprendizaje y favorezcan el desarrollo de habilidades de pensamiento.	• En grupos de 2 o 3 alumnos, utilizan los conceptos vistos y las operaciones básicas para realizar cálculos y resolver problemas.
Comunicativa: • Emplear correctamente el vocabulario matemático • Expresar con fluidez las ideas a los demás.	• Comprende y maneja las expresiones matemáticas utilizadas en la unidad. • Explica con claridad los procesos seguidos para la obtención de resultados.
Cognitiva: • Identificar los números enteros y los números racionales. • Ubicar números enteros y números racionales en la recta numérica. • Resolver problemas donde intervienen varias operaciones con números enteros y números racionales.	• Utiliza las propiedades de las operaciones básicas con números enteros y racionales para agilizar los cálculos numéricos. • Ubica un número entero y un número racional en la recta numérica.
Estética: • Elaborar tablas, fichas y diagramas en cartulina, donde muestra ejercicios con las cuatro operaciones básicas.	• Socializa los ejercicios escritos en las fichas, al interactuar con los compañeros.
Etica-Actitudinal: • Resaltar la contribución de la matemática en la solución de problemas prácticos.	• Demuestra interés por aprender

EVALUACIÓN

ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS

0.1 UNAS PALABRAS PARA EMPEZAR

- En esta unidad revisaremos algunos conceptos estudiados en el curso anterior y que consideramos indispensables para abordar con éxito éste que ahora comenzamos.
- Los contenidos que vamos a repasar son: **los números enteros, sus operaciones y propiedades; los números racionales, sus operaciones y propiedades; solución de ecuaciones en Z y en Q.**
- Para realizar este repaso, utilizaremos la siguiente estrategia:
  - En un recuadro presentamos los títulos de los conceptos que deben revisarse, las secciones del texto Matemática Experimental 7 donde pueden consultarse y las páginas correspondientes.
  - Cuando sea necesario, ilustraremos los conceptos con uno o más ejemplos.
  - Finalmente, proponemos un taller con ejercicios teórico-prácticos, para ser resuelto por los estudiantes.
- Nuestra experiencia docente nos permite sugerir a los colegas, realizar este repaso durante las dos o tres primeras semanas de clase, de manera que los estudiantes hagan una buena "pretemporada" en matemáticas.

0.2 LOS NÚMEROS ENTEROS

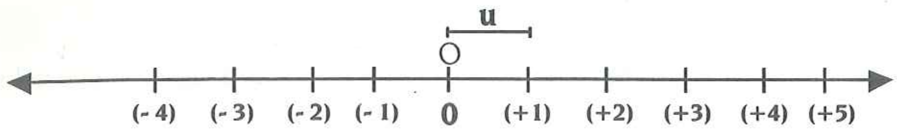
0.2.1 Representación Gráfica, Números Opuestos, Valor Absoluto, Suma y Resta

CONCEPTO	SECCIÓN DE MATEMÁTICA EXPERIMENTAL 7	PÁGINAS
LOS NÚMEROS ENTEROS - Representación gráfica - Números opuestos y valor absoluto - Orden en Z.	1.2.1 1.2.2 1.3.1	55 a 59 59 a 61 65
SUMA Y RESTA DE NÚMEROS ENTEROS - Suma de números enteros - Propiedades de la suma de enteros - Resta de números enteros	1.3.2 1.4 1.5	66 a 70 72 a 76 77 a 79

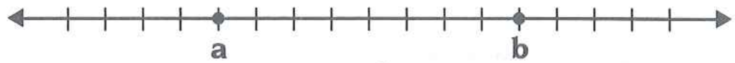
EJEMPLO 1

Para representar los números enteros utilizamos una recta en la cual:

- Marcamos un punto cualquiera al que llamamos **ORIGEN** y le asignamos el **CERO.**
- A los puntos ubicados a la derecha del origen les asignamos los números **+1, +2, +3...** y a los puntos ubicados a la izquierda del origen les asignamos los números **-1, -2, -3 ...**



- Esta recta se llama **RECTA NUMÉRICA** para los números enteros.
- Los números enteros se pueden ordenar y comparar.
- Un número entero **a** es **menor** que un número entero **b**, y escribimos $\mathbf{a<b}$, si **a** está a la izquierda de **b** en la recta numérica.



$\mathbf{a<b}$

- Cualquier número negativo es menor que cualquier positivo. El **0** es mayor que cualquier negativo y menor que cualquier positivo.

EJEMPLO 2

El opuesto de -5 es -(-5)

El opuesto de +5 es -(+5)

EJEMPLO 3

Para evitar la incomodidad del doble signo hacemos lo siguiente:

- El **signo +** delante de cualquier número es opcional y puede eliminarse.
- El **signo -** delante de cualquier número nos da su opuesto.

+5 es lo mismo que **5**

+ (+5) es lo mismo que **5**

+(-5) es lo mismo que **-5**

-(-5) es el opuesto de **-5.** Por lo tanto: **-(-5) = 5**

-(+5) es el opuesto de **5.** Por lo tanto: **-(+5) = -5**

¡ATENCIÓN! En general: dos signos consecutivos iguales se sustituyen por el signo **+** y dos signos consecutivos distintos se sustituyen por el signo **-**.

EJEMPLO 4

Así obtenemos el valor absoluto de un número entero:

$|+5| = +5$; $|0| = 0$; $|-7| = -(-7) = +7$

EJEMPLO 5

Para sumar y restar números enteros, podemos convertir cada doble signo en uno solo; así:

$(-12) + (+7) + (-4) = -12 + 7 -4 = -9$
$(-7) - (+6) + (+7) = -7 - 6 +7 = -6$
$(+8) + (-12) - (-3) = 8 - 12 + 3 = 1$

EJEMPLO 6

Calculemos: $(-2) + (-8) + (+3) + (-4) + (+1) + (-2) + (+5) + (+11)$

SOLUCIÓN

Podemos calcular esta suma de dos maneras:

PRIMERA MANERA:
* Sumamos los positivos: $(+3) + (+1) + (+5) + (+11) = +20$
* Sumamos los negativos: $(-2) + (-8) + (-4) + (-2) = -16$
* Sumamos un positivo con un negativo: $(+20) + (-16) = +4$

SEGUNDA MANERA:
* Teniendo en cuenta la regla de los signos, convertimos cada doble signo en uno solo: $(-2) + (-8) + (+3) + (-4) + (+1) + (-2) + (+5) + (+11) = -2-8+3-4+1-2+5+11$.
* A continuación, sumamos los números positivos aparte y los números negativos aparte; así

$$-2 -8 + 3 -4 +1 -2 +5 +11 \begin{cases} \xrightarrow{\text{POSITIVOS}} 3 + 1 + 5 + 11 = +20 \\ \xrightarrow{\text{NEGATIVOS}} -2 - 8 - 4 -2 = -16 \end{cases}$$

* Finalmente, sumamos un número entero positivo con un número entero negativo:

$$(+20) + (-16) = + (20-16) = +4$$

¡ATENCIÓN!

Toda expresión donde aparezcan sumas y restas combinadas de números enteros se denomina **SUMA ALGEBRAICA**, así: $-6+7-(-2) + (-9) - (+2)$ es una suma algebraica.

Para resolver una suma algebráica de números enteros, la transformamos en suma reemplazando los términos que deben restarse por sus inversos aditivos y efectuando después la suma resultante. En los cálculos numéricos deben realizarse primero las operaciones que están dentro de los signos de agrupación (paréntesis, corchetes o llaves). Éstos van por parejas: uno abre la expresión y el otro la cierra. Si hay signos de agrupación anidados (es decir, unos dentro de otros), se opera desde adentro hacia afuera.

En el cálculo de expresiones, cuando no hay paréntesis, siempre tiene preferencia, entre la suma y la resta, la operación que se encuentre más a la izquierda.

EJEMPLO 7

Al operar $7 - 2 + 4$ primero operamos (restamos) $7 - 2$ y al resultado le sumamos 4.

EJEMPLO 8

$$
\begin{aligned}
(-3) + (+9) - (-1) + (+6) - (+4) &= -3 + 9 + 1 + 6 - 4 \\
&= (9 + 1 + 6) + (-3 - 4) \\
&= 16 + (-7) \\
&= 9
\end{aligned}
$$

EJEMPLO 9

Eliminemos los signos de agrupación y hallemos el resultado de : $-3 + \{ -1 + [4 - (3-7)] + 3\}$

SOLUCIÓN

- Para resolver este ejemplo, recordemos las reglas para eliminar signos de agrupación que estudiamos en los dos grados anteriores.
- Primero eliminamos el paréntesis que está precedido del signo (-); así:

$$-3 + \{ -1 + [4- (3-7)] + 3\} = -3 + \{ -1 + [4 - 3 + 7] + 3\}$$

- Ahora eliminamos el corchete que está precedido del signo (+)

$$= -3 + \{ -1 + 4 - 3 + 7 + 3\}$$

- Finalmente, eliminamos las llaves que están precedidas del signo (+) y resolvemos las operaciones indicadas:

$$
\begin{aligned}
&= -3 -1 + 4 - 3 + 7 + 3 \\
&= 4 + 7 + 3 - 3 - 1 - 3 \\
&= 14 - 7 \\
&= 7
\end{aligned}
$$

EJERCICIO 0.1

1 Escribe dentro del paréntesis ( ) una V si la proposición es VERDADERA o una F si el enunciado es FALSO. Justifica tu respuesta.

a) El conjunto de los números naturales es subconjunto del de los números enteros. ( )

b) Los números enteros negativos se ubican a la izquierda del cero en la recta numérica. ( )

c) Los números enteros +7 y -7 son opuestos o inversos aditivos. ( )

d) $-(-3) = -3$ ( )

e) $+(-5) = -5$ ( )

f) $+(+6) = +6$ ( )

g) $|-15| = 15$ ( )

h) $|-5| = |+5|$ ( )

i) El valor absoluto de un número entero puede ser negativo. ( )

j) La suma de dos números enteros siempre da un número entero negativo. ( )

k) La suma de números enteros cumple la propiedad conmutativa. ( )

l) La suma de números enteros puede dar cero. ( )

m) Si m y n son dos números enteros, tales que m>n, entonces m está ubicado a la derecha de n en la recta numérica. ( )

n) La suma de un entero positivo con un entero negativo es siempre un número entero negativo. ( )

o) La suma de un número entero con su inverso aditivo es igual a cero. ( )

p) El inverso aditivo de (-13) es (+13) ( )

q) - (-11) = 11 ( )

r) -15 - (-15) = 0 ( )

s) La resta de números enteros cumple la propiedad clausurativa. ( )

2 Ubica los siguientes números en la recta numérica y escríbelos de menor a mayor

a) -7 , -1, -4, 2

b) +3, -2, -1, -6

c) -4, -2, -6, +4

d) +4, +7, -2, -7, +2

3 Elige el signo < ó > adecuado:

a) 5 $\square$ 7

b) -3 $\square$ -1

c) 5 $\square$ -4

4 Escribe dos números enteros comprendidos entre:

a) -5 y 0

b) -3 y 4

c) -7 y -2

5 Completa:

a	b	a+b	a-b	b-a
-7	+8			
-6	+7			
-3	+4			
0	+2			

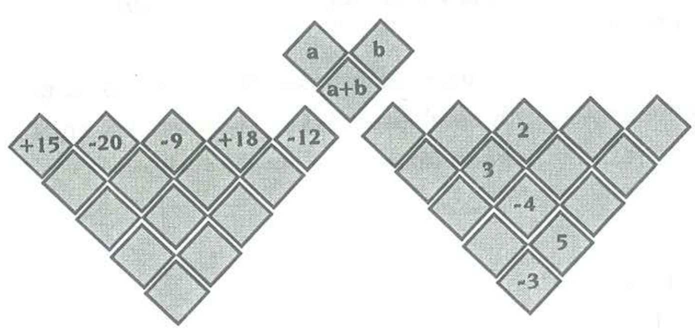
6 Calcula:

a) 5 - 8+10

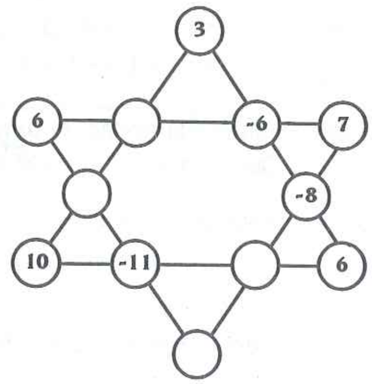
b) -4 + 11 - 7

c) (- 4) + (+9) - (- 5)

7 Completa los baldosines teniendo en cuenta la siguiente regla:



8 Completa la estrella sabiendo que cada línea debe sumar lo mismo:



9 Calcula mentalmente y con un poco de habilidad:

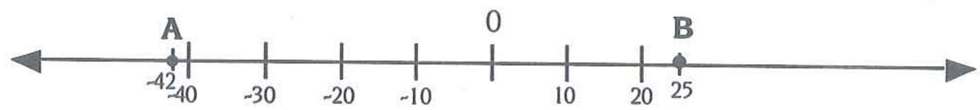
a) $35 + 12 - 1 - 12 - 35$

b) $-80 + 15 + 65$

c) $29 - 67 - 28 + 69$

d) $41 - 8 - 8 - 8 - 8 - 8$

10 Observa el segmento sobre la recta numérica y contesta:



Entre los extremos del segmento $\overline{AB}$, sin incluirlos:

a) ¿Cuántos números naturales hay ?
b) ¿Cuántos números enteros hay?
c) ¿Cuántos números enteros no naturales hay?

11 Elimina los signos innecesarios y halla el número que falta:

a) $30 + (-\square) = -20$

b) $8 - (+\square) = -6$

c) $(+7) + (+\square) = 4$

d) $(-6) - (-\square) + (-2) = 0$

12 Indica los tres números que siguen en cada serie:

a) -8, -2, 4, ...

b) 6, 5, 3, 0, -4 ,...

13 Realiza las siguientes restas:

a) $(-5) - (-7)$

b) $(-8) - (-9)$

c) $(-8) - (+13)$

d) $(-21) - (+25)$

e) $-17 - (-8)$

f) $17 - (-17)$

14 Fíjate en el modelo y calcula los demás:

a) $(+10) - (+6) - (+8) - (+1) = 10 - 6 - 8 - 1 = 10 - 15 = -5$

b) $(+5) - (+8) - (+10) - (+1)$

c) $(-6) + (+5) - (+12) - (+5)$

15 Resuelve las siguientes sumas algebraicas:

a) $-13 - (+21) + 73 - (-48) - 29$

b) $71 - (+19) - (-38) + 63 - 109$

c) $35 - 104 + (-96) - (-143) - 18$

d) $-131 + 219 - (+531) - (-217) + 37$

16 Suprime signos de agrupación y resuelve:

a) $9 - (12 - 6 + 2) + 4 + (-8 + 1)$

b) $8 - [10 - (-8 + 5) + (7 - 9)] + 6$

c) $-6 + [15 - \{(1+4) - (3 - 2) + 3\} + 7]$

d) $-1 + [4 - (3 - 2)] - [2 + (-7 + 4)]$

e) $-[7 - (-6+5) - 8 + (2+5)] + 6$

f) $1 - \{4 - [-2 + (5 - 1 - 9) - 1] + 2\} + 3$

17 El termómetro marca al atardecer -6°C. Durante la noche, la temperatura baja 6°C. En el curso de la mañana, hasta las 12 m, sube 13°C. ¿Qué temperatura hace al medio día?

18 Para realizar los siguientes ejercicios observa los ejemplos:

EJEMPLO 1:

Describamos por extensión y por comprensión el conjunto de números enteros comprendido entre -3 y 7, sin incluirlos.

SOLUCIÓN

a) Por extensión, el conjunto es: $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

b) Por comprensión, sería así: $\{x / -3 < x < 7, \text{ con } x \in Z\}$

EJEMPLO 2:

Describamos por extensión y por comprensión el conjunto de números enteros comprendido entre -4 y 3, incluidos ambos.

SOLUCIÓN

a) Por extensión: $\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

b) Por comprensión: $\{x / -4 \leq x \leq 3, \text{ con } x \in Z\}$

Escribe por extensión y por comprensión el conjunto de números enteros comprendido entre -10 y -3 tales que:

a) No se incluyen ni el -10 ni el -3

b) Se incluye el -10 pero no el -3

c) Se incluye el -3 pero no el -10

d) Se incluyen ambos.

19 Tenemos los siguientes conjuntos de números enteros.

$A = \{x / -5 \leq x \leq 3, \text{ con } x \in Z\}$; $B = \{x / -2 \leq x < 6, \text{ con } x \in Z\}$

Se pide:

a) Describir por extensión los conjuntos A y B

b) Hallar $A \cup B$

c) Hallar $A \cap B$

20 Calcula los datos que faltan en el siguiente extracto bancario del mes de noviembre:

FECHA	CONCEPTO	PAGOS	INGRESOS	SALDO
3 - 11	Saldo anterior			+230.000
5 - 11	Servicio de Energía Eléctrica			+123.000
12 - 11	Consignaciones			+240.000
17 - 11	Activos financieros			
29 - 11	Consignaciones		+750.000	+920.000

0.2.2 Multiplicación y División en Z

CONCEPTO	SECCIÓN DE MATEMÁTICA EXPERIMENTAL 7	PÁGINAS
MULTIPLICACIÓN DE ENTEROS		
- Estudio de los distintos casos	2.2	89 a 93
- Síntesis		
- Propiedades de la multiplicación de enteros	2.3	94 a 100
DIVISIÓN DE ENTEROS		
- Múltiplos y divisores de números enteros	2.4	102 a 104

EJEMPLO 1

$$\underbrace{(+2)\bullet(-3)\bullet(+6)\bullet(-5)} = +(2\bullet 3\bullet 6\bullet 5) = +180$$

Número Par de Factores Negativos

EJEMPLO 2

$$\underbrace{(-2)\bullet(+3)\bullet(-5)\bullet(-4)} = -(2\bullet 3\bullet 5\bullet 4) = -120$$

Número Impar de Factores Negativos

¡ATENCIÓN! En los ejercicios donde intervienen dos o más operaciones se procede así:

- Si hay signos de agrupación, en primer lugar se desarrollan las operaciones contenidas en los signos de agrupación más internos; es decir, trabajamos de adentro hacia afuera.
- Si no hay signos de agrupación o éstos ya fueron eliminados, se desarrollan primero las operaciones de multiplicación y división y, luego, las de suma y resta. En todo caso, tiene preferencia la operación situada más a la izquierda.

EJEMPLO 3

Para calcular el valor de $7 + 8 \bullet 9 \div 6$, la preferencia la tienen la multiplicación y la división y de éstas dos, la preferencia la tiene la multiplicación por estar a la izquierda. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} 7 + 8 \bullet 9 \div 6 &= 7 + 72 \div 6 \\ &= 7 + 12 \\ &= 19 \end{aligned}$$

EJEMPLO 4

Resolvamos: $\mathbf{-2 \bullet [6 \bullet (-7 + 5) - (6-4) \div (+2)\,] \div (-1)}$

SOLUCIÓN

- Desarrollemos en primer lugar el interior del corchete, así:

$$-2 \bullet [6 \bullet (-7 + 5) - (6-4) \div (+2)\,] \div (-1) = -2 \bullet [6 \bullet (-2) - 2 \div (+2)\,] \div (-1)$$
$$= -2 \bullet [\,(-12) - 1] \div (-1)$$

- Ahora realizamos la operación dentro del corchete:

$$= -2 \bullet [-12 - 1] \div (-1)$$
$$= -2 \bullet (-13) \div (-1)$$

- Finalmente realizamos la multiplicación y la división. Primero la multiplicación y luego la división:

$$= (+26) \div (-1)$$
$$= -26$$

EJEMPLO 5

Resolvamos: $\mathbf{[6-\ (-3+1-2)] \bullet \{2+(-3) \bullet [(-9+1)\ \div (-2)]\}}$

SOLUCIÓN

- Empecemos eliminando los signos de agrupación más internos:

$$[6-\ (-3+1-2)] \bullet \{2+(-3) \bullet [(-9+1) \div (-2)]\} = [6 + 3 - 1 + 2] \bullet \{2 - 3 \bullet [\,(-8) \div (-2)]\}$$
$$= [10] \bullet \{2 - 3 \bullet [4]\}$$
$$= [10] \bullet \{2 - 12\}$$
$$= [10] \bullet \{-10\}$$
$$= -100$$

EJERCICIO 0.2

1. Responde VERDADERO o FALSO a cada una de las siguientes afirmaciones. Justifica las respuestas falsas:

   a) El producto de dos números enteros negativos es un número entero positivo.

   b) $(+) \bullet (-) \bullet (+) \bullet (+) = (-)$

   c) La división de números enteros cumple la propiedad clausurativa.

   d) El elemento neutro de la multiplicación de números enteros es el 0.

   e) La multiplicación de números enteros es distributiva con respecto a la suma y a la resta.

f) Todo número entero multiplicado por cero es igual al mismo número entero.

g) 16 es múltiplo de 1

h) (- 9) es divisor de 54.

i) Si **a** es múltiplo de **b** entonces **b** es divisor de **a**.

j) 0 es divisor de algún número entero.

2 Halla el producto de:

a) (+ 1) • (+ 3)
b) (- 2) • (+ 5)
c) (- 3) • (- 3)
d) (+ 1) • 0 • (- 1)
e) (- 3) • (- 2) • (- 1)
f) (- 5) • 3 • (- 1) • (- 2)

3 Halla el cociente de:

a) (+24) ÷ (- 3)
b) (- 12) ÷ (- 4)
c) (-4) ÷ 2
d) (- 100) ÷ 5
e) (+51) ÷ (- 17)
f) (+135) ÷ (-15)

4 Elabora una cartelera con las propiedades de la multiplicación de números enteros.

5 Indica la propiedad de la multiplicación de números enteros que se aplica en cada uno de los siguientes ejercicios:

a) (- 7) • (+9) = (+9) • (- 7)
b) [(-5) • (+8)] • (- 4) = (-5) • [(+8) • (- 4)]
c) (-6) • 1 = 1 • (- 6) = - 6
d) (-7) • 0 = 0 • (- 7) = 0
e) (-5) • [(-3) + (+ 5)] = (- 5) • (- 3) + (-5) • (+5)

6 ¿Cuál propiedad estamos aplicando en el siguiente ejercicio?

[(-12) + (-24) - (+36)] ÷ (- 6) = (-12) ÷ (- 6) + (- 24) ÷ (- 6) - (+36) ÷ (- 6)

7 Resuelve los siguientes ejercicios:

a) - 5 • (3 - 2) + 4 • (-2 + 6) - (- 4) • (+6)
b) 2 • (- 5 - 4) - (- 6) • (- 1 + 3) - (+ 4) • (+ 2)
c) (- 6) • (- 2) • (- 3) • (- 1 - 2) - (- 5 + 1) • (- 4 + 2)
d) - 2 • (3 - 5) + 4 • (- 1 + 3) + 10
e) - 2 • (+ 7) - (+ 6) • (- 3) + (+2) • (- 9)

8 Resuelve los siguientes ejercicios:

a) (2 - 6) ÷ (- 4) + (1 - 9) ÷ (+ 4) + 6
b) (- 8 - 2) ÷ (+5) - (7 - 15) ÷ (- 4) + 4
c) [(32 - 2 • 3 + 4) ÷ (-3)] • (- 2 + 9 ÷ 3)
d) (8 - 9) • [6 - (- 4)] ÷ (-1 + 7 - 1)
e) - 5 - {[18 ÷ (- 3) + 4] • (- 1) + 4 } • (-2)

9 Resuelve los siguientes ejercicios:

a) [(-12) ÷ (-3) + (-6) • (-1)] • [(-4) • (+8) - (-9) • (+4)]
b) - [14 •(-6) + 6 • (-8)] ÷ 2 • (-7)
c) 8 - 4 - [(-4) • (-9) + 72 ÷ (-8)]• (- 3)
d) {[(-9) • (-4) ÷ (-4) • 3] - 1} • 25 + 107

10 Sobre los elementos del conjunto A= {x/ -3 ≤ x ≤ 3 ; con x ∈Z} se aplica el operador **2•x - 1 = y** : se pide:

a) ¿Qué representa la x en 2•x - 1 = y ?

b) ¿Qué representa la y en 2•x - 1 = y ?

c) ¿Cómo se obtienen los resultados de esta operación?

d) Elabora un diagrama sagital

e) Escribe el conjunto de parejas ordenadas

f) Elabora un diagrama cartesiano.

0.2.3 Potenciación y Radicación en Z.

CONCEPTO	SECCIÓN DE MATEMÁTICA EXPERIMENTAL 7	PÁGINAS
POTENCIACIÓN EN Z USANDO EL EXPONENTE ES UN ENTERO POSITIVO - Regla de los signos para la potenciación en Z.	3.3	112 y 113
PROPIEDADES DE LA POTENCIACIÓN - Producto de potencias de la misma base - Cociente de potencias de la misma base - Potencia de potencia - Potencia de un producto y de un cociente - Exponentes 1 y 0	3.4	114 a 116
RADICACIÓN EN Z	3.5	118 y 119

¡ATENCIÓN!

- Un error frecuente que se comete al trabajar con potencias de números enteros es no tener en cuenta el uso de los paréntesis. Por ejemplo, no es lo mismo $(-3)^2$ que -3^2.

En efecto, en $(-3)^2$, el exponente 2 afecta al signo y al número; es decir:

$$(-3)^2 = (-3)\cdot(-3) = 9$$

En cambio, en -3^2, el exponente 2 sólo está afectando al número 3; es decir:

$$-3^2 = -(3\cdot 3) = -9$$

- La potenciación **NO** es distributiva respecto a la suma ni a la resta; es decir:

$$(a+b-c)^m \neq a^m + b^m - c^m$$

- En los ejercicios donde aparecen combinadas la suma, la resta, la multiplicación, la división, la potenciación y la radicación se procede así:
  - Si hay signos de agrupación se desarrollan las operaciones contenidas en los signos de agrupación más internos; es decir, trabajando de adentro hacia afuera.

- Si no hay signos de agrupación o éstos ya fueron eliminados, se desarrollan primero las operaciones de potenciación y radicación, luegos las de multiplicación y división y, finalmente, las de suma y resta. En cada caso, tiene preferencia la operación situada más a la izquierda.

EJEMPLO 1

Apliquemos las propiedades de la potenciación en Z y hallemos el resultado de:

$$\frac{[(-2)^4]^2 \bullet (+3)^5 \bullet [(-2)^2]^3 \bullet [(+3)^4]^3}{[(+3)^2]^5 \bullet [(-2)^3]^4 \bullet [(+3)^5]^0}$$

SOLUCIÓN:

$\dfrac{[(-2)^4]^2 \bullet (+3)^5 \bullet [(-2)^2]^3 \bullet [(+3)^4]^3}{[(+3)^2]^5 \bullet [(-2)^3]^4 \bullet [(+3)^5]^0}$ .... Expresión dada

$\dfrac{(-2)^8 \bullet (+3)^5 \bullet (-2)^6 \bullet (+3)^{12}}{(+3)^{10} \bullet (-2)^{12} \bullet (+3)^0}$ .... Aplicamos potencia de una potencia varias veces

$\dfrac{[(-2)^8 \bullet (-2)^6] \bullet [(+3)^5 \bullet (+3)^{12}]}{(+3)^{10} \bullet (-2)^{12}}$ .... Aplicamos asociativa de la multiplicación y exponente cero

$\dfrac{(-2)^{14} \bullet (+3)^{17}}{(-2)^{12} \bullet (+3)^{10}}$ .... Producto de potencias de la misma base

$(-2)^{14-12} \bullet (+3)^{17-10}$ .... División de potencias de la misma base

$(-2)^2 \bullet (+3)^7 = (4) \bullet (2.187) = 8.748$

EJEMPLO 2

Calculemos el resultado de $(5-3)^2 \div 4 \bullet (2-5)^3 \div 9$

SOLUCIÓN:

- Primero resolvemos las operaciones indicadas dentro de los paréntesis:

  $(5-3)^2 \div 4 \bullet (2-5)^3 \div 9 = 2^2 \div 4 \bullet (-3)^3 \div 9$

- Como tenemos potenciación, multiplicación y división, resolvemos primero la potenciación:

  $= 4 \div 4 \bullet (-27) \div 9$

- Ahora sólo tenemos multiplicación y división. Como tiene preferencia la operación situada más a la izquierda, entonces primero realizamos la división, luego la multiplicaión y, finalmente, la otra división:

  $= 1 \cdot \bullet (-27) \div 9$

  $= (-27) \div 9$

  $= -3$

EJEMPLO 3

Así calculamos algunas raíces:

$\sqrt{25} = 5$; $\sqrt[4]{256} = 4$; $-\sqrt[4]{256} = -4$

$\sqrt[3]{-8} = -2$; $\sqrt[5]{32} = 2$; $\sqrt[3]{64} = 4$

$\sqrt[5]{-243} = -3$; $\sqrt{-9}$ no existe ; $\sqrt[4]{-81}$ no existe

EJERCICIO 0.3

En los ejercicios 1 a 3 resolver las operaciones indicadas:

1. $(-5)^2 \bullet (-3)^3 + (-2)^4 + 5$
2. $(24 \div 8)^2 \div (-3) \bullet (2-5)^3 \div (-9)$
3. $6^3 + (-12) \div (-4) \bullet (-5) - (-8) \div (-2)^2$
4. Simplifica y calcula: $\{[(-27+16-7) \div (5-8)^2] \bullet [(-6)+(+4)+(-3)]\} - [(-2)^3 + (-3)^2]$
5. Simplifica y calcula:
   a) $[(-5)^4 \div (-5)^3] \bullet (-5) \bullet (-5)^0$
   b) $\{[(-3)^2]^4 \div (-3)^7\} \bullet [(-3)^0 \bullet (-3)]^2$
   c) $\{(-2)^3 \bullet (-2)^0 \bullet (-2)\}^5 \div [(-2)^4]^5$
6. Halla el resultado de:
   a) $(-5)^2 - (+4)^3 + 3^5 - 2^4$
   b) $(-2)^3 + (-1)^4 + (-3)^3 - (-4)^2$
   c) $(-7)^2 \bullet [(-2)^3 - (-4)^2 + 6]$
   d) $[(-3)^2 - (+4)^3] \bullet [(-5)^3 + (+3)^4]$
   e) $[(-6) \bullet (+4) \bullet (+5)^2] \div [8 - (-8+11)]$
7. Simplifica y halla el resultado de:

   a) $$\frac{[(-2)^4]^2 \bullet (+3)^5 \bullet [(-2)^2]^3 \bullet [(+3)^4]^3}{[(+3)^2]^5 \bullet [(-2)^3]^4 \bullet [(+3)^5]^0 \bullet (+3)}$$

   b) $$\left\{ \frac{[(-3)^3]^2 \bullet [(+2)^4]^3 \bullet [(-3)^0]^4}{[(+2)^3]^2 \bullet [(-3)^1]^4 \bullet (-3) \bullet (+2)^5} \right\}^2$$

0.3 NÚMEROS RACIONALES

0.3.1 Concepto, Clasificación, Representación Geométrica, Suma, Resta, Multiplicación y División

CONCEPTO	SECCIÓN DE MATEMÁTICA EXPERIMENTAL 7	PÁGINAS
LOS NÚMEROS RACIONALES		
- Concepto de número racional	4.3	135 a 137
- Decimales finitos e infinitos periódicos	4.3	137 y 138
- Clasificación de los números racionales	4.3	137 y 138
- Representación en la recta numérica.	4.2	129 y 130
SUMA, RESTA, MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN		
- Suma y resta de números racionales	4.4	140
- Multiplicación y división de números racionales	4.4	140
- Propiedades de la suma y la multiplicación en Q.	4.4	142 a 144

EJEMPLO 1

¿Cuáles son los números racionales y cómo se clasifican?

SOLUCIÓN

- Un **NÚMERO RACIONAL** es el conjunto formado por una fracción cuyo numerador y denominador son números enteros y por todas sus fracciones equivalentes. Por ejemplo, el número racional $\left\{\frac{3}{4}\right\}$ está formado por la fracción $\frac{3}{4}$ y todas las fracciones equivalentes a ella; es decir:

$$\frac{3}{4} = \left\{\frac{3}{4}, \frac{6}{9}, \frac{9}{12}, \frac{12}{16}, ...\right\}$$

- Para identificar el conjunto de los números racionales usamos la letra **Q**. Descrito por extensión el conjunto **Q** queda así:

$$Q = \left\{..., \left\{-\frac{5}{3}\right\}, ..., \left\{-\frac{3}{1}\right\}, ..., \left\{\frac{2}{7}\right\}, ..., \left\{\frac{5}{1}\right\}, ...\right\}$$

- También lo podemos describir por comprensión; así:

$$Q = \left\{x/x = \frac{a}{b}, \text{ con } a, b \in Z \text{ y } b \neq 0\right\}$$

es decir; un número es racional cuando lo podemos escribir como **el cociente de dos números enteros.**

- De acuerdo con lo anterior, un **NÚMERO RACIONAL** puede ser:
  - Un **número entero:** $-4 = -\frac{4}{1}$; $-7 = -\frac{7}{1}$; $8 = \frac{8}{1}$; $12 = \frac{12}{1}$
  - Un **número decimal finito:** $0,375 = \frac{3}{8}$; $4,37 = \frac{437}{100}$; $-5,1 = -\frac{51}{10}$
  - Un **número decimal infinito periódico puro:** $-0,5454... = 0,\widehat{54} = -\frac{6}{11}$
  - Un **número decimal infinito periódico mixto:** $2,478787... = 2,47\widehat{87} = \frac{409}{165}$
- En síntesis:

NÚMEROS RACIONALES (Q)

Todos los números que pueden escribirse como el cociente de dos números enteros.

como

Números Enteros
Z ⊂ Q

Números Naturales
N ⊂ Q

Números Decimales Finitos
43,375 ; -0,42 ; 7,3946

Números Decimales Infinitos Periódicos

como

Puros
4,777..., -32,2424...
12,313313..., -0,0404...

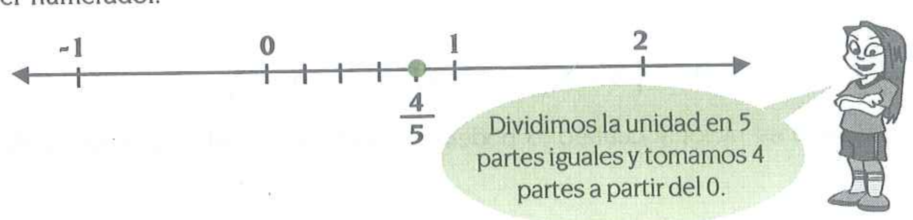
Mixtos
-2,723535...,
7,46788788,,,

EJEMPLO 2

Representemos en la recta numérica los números racionales correspondientes a las fracciones: $\frac{4}{5}$ y $-\frac{17}{7}$.

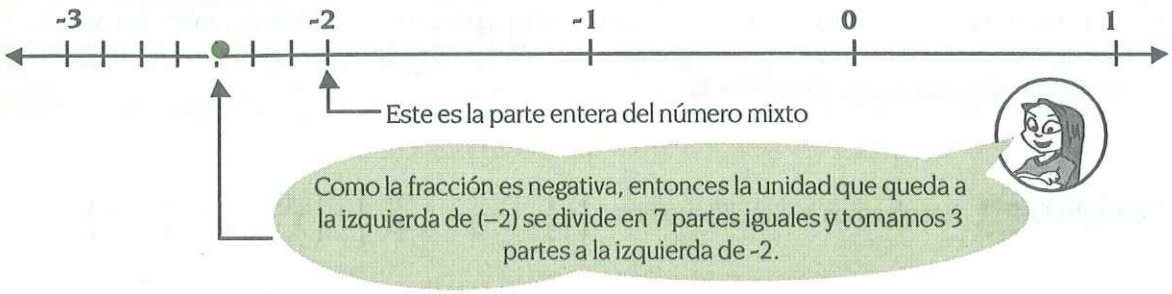
SOLUCIÓN

- La representación gráfica de un número racional es un punto de la recta numérica y se localiza de la siguiente manera:
  - Si la fracción es propia (menor que 1), se localiza entre el 0 y el 1 de la recta, si es positiva, o entre el 0 y el -1, si es negativa.
  - A continuación dividimos el segmento de extremos 0 y 1 (o de extremos 0 y -1) en tantas partes iguales como lo indica el denominador de la fracción y marcamos el punto en las partes que indica el numerador.



- Si la fracción es impropia, la expresamos en forma de número mixto; luego, tenemos en cuenta las unidades y el signo de la parte entera del número y en la unidad siguiente de la recta numérica se ubica la fracción propia del número mixto; así:

$$17 \,\underline{|\,7\quad}\; ; \qquad -\frac{17}{7} = -\left(2 + \frac{3}{7}\right) = -2 - \frac{3}{7}$$
$$3 \quad 2$$



- Para sumar o restar fracciones de igual denominador, sumamos o restamos los numeradores y escribimos el mismo denominador.

EJEMPLO 3

$$-\frac{4}{7} + \frac{9}{7} - \frac{3}{7} = \frac{-4 + 9 - 3}{7} = \frac{2}{7}$$

- Para sumar o restar fracciones de distinto denominador primero hallamos el mínimo común denominador (mínimo común múltiplo de los denominadores); luego, escribimos cada fracción de dicho mínimo común denominador y procedemos como en el ejemplo anterior.

EJEMPLO 4

$$\frac{-4}{9} + \frac{-6}{7} - \frac{-5}{21} = \frac{(-28)+(-54)-(-15)}{63} = -\frac{67}{63}$$

m.c.m (9,7,21) = 63

- Para multiplicar fraccionarios multiplicamos los numeradores entre sí y los denominadores entre sí.

EJEMPLO 5

$$\left(-\frac{4}{7}\right) \times \left(\frac{21}{24}\right) = -\frac{\overset{1}{\cancel{4}} \times \overset{3}{\cancel{21}}}{\underset{1}{\cancel{7}} \times \underset{6}{\cancel{24}}} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$$

- Para dividir números fraccionarios multiplicamos el dividendo por el inverso multiplicativo del divisor.

EJEMPLO 6

$$\frac{4}{5} \div \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{5} \times \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{\overset{6}{\cancel{12}}}{\underset{5}{\cancel{10}}} = -\frac{6}{5}$$

¡ATENCIÓN! • En los ejercicios donde intervienen dos o más operaciones procedemos así:

- Si hay signos de agrupación, se desarrollan las operaciones contenidas en los signos de agrupación más internos; es decir, trabajamos de adentro hacia afuera.
- Si no hay signos de agrupación o éstos ya fueron eliminados, se desarrollan primero las operaciones de multiplicación y división y, luego, las de suma y resta. En todo caso, tiene preferencia la operación ubicada más a la izquierda.

EJEMPLO 7 Resolvamos y simplifiquemos: $\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)\div\left(-\frac{21}{10}\right)\bullet\left(\frac{2}{3}-1\right)$

SOLUCIÓN

- Realizamos primero las operaciones entre paréntesis:

$$\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)\div\left(-\frac{21}{10}\right)\bullet\left(\frac{2}{3}-1\right)=\left(\frac{21-9-7}{63}\right)\div\left(-\frac{10}{21}\right)\bullet\left(\frac{2-3}{3}\right)$$

$$=\frac{5}{63}\div\left(-\frac{10}{21}\right)\bullet\left(-\frac{1}{3}\right)$$

- Como ahora sólo tenemos multiplicaciones y divisiones, entonces efectuamos las operaciones, empezando por la de la izquierda; así:

$$\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)\div\left(-\frac{21}{10}\right)\bullet\left(\frac{2}{3}-1\right)=\frac{5}{63}\bullet\left(\frac{21}{10}\right)\bullet\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$=\frac{\overset{1}{\cancel{5}}\times\overset{1}{\cancel{21}}\times 1}{\underset{3}{\cancel{63}}\times\underset{2}{\cancel{10}}\times 3}=\frac{1}{18}$$

EJEMPLO 8 Resolvamos y simplifiquemos: $-\frac{2}{5}+1\bullet\frac{3}{4}-1+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\div 6+\frac{9}{2}-\frac{4}{15}$

SOLUCIÓN

- En ausencia de signos de agrupación, resolvemos primero las multiplicaciones y divisiones y, luego, las sumas y restas:

$$-\frac{2}{5}+1\bullet\frac{3}{4}-1+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\div 6+\frac{9}{2}-\frac{4}{15}=-\frac{2}{5}+\frac{3}{4}-1+\frac{2}{3}-\frac{1}{12}+\frac{9}{2}-\frac{4}{15}$$

$$=\frac{-24+45-60+40-5+270-16}{60}$$

$$=\frac{\overset{25}{\cancel{250}}}{\underset{6}{\cancel{60}}}=\frac{25}{6}$$

EJERCICIO 0.4

1 Escribe el representante de cada uno de los siguientes números racionales:

a) $\left\{\frac{12}{28}, \frac{6}{14}, \frac{15}{35}, \frac{3}{7}, \frac{9}{21}, \frac{21}{49}, \dots\right\}$

b) $\left\{-\frac{12}{15}, -\frac{8}{10}, -\frac{16}{20}, -\frac{28}{35}, -\frac{4}{5}, \dots\right\}$

c) $\left\{\frac{14}{2}, \frac{21}{3}, \frac{28}{4}, \frac{35}{5}, \dots\right\}$

2 Completa:

a) Un número racional es el conjunto formado por ______________________________.

b) Usualmente representaremos un número racional por la fracción _____________________ de un conjunto de fracciones equivalentes.

c) Usamos la letra Q para representar al conjunto de los números ________________.

3 Representa sobre la recta cada uno de los siguientes números racionales:

a) $\left\{\frac{20}{36}, \frac{25}{45}, \frac{50}{90}, \frac{5}{9}, \frac{10}{18}, \dots\right\}$

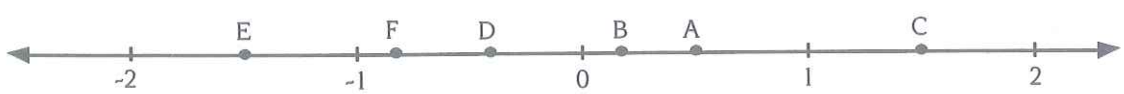
b) $\left\{-\frac{30}{40}, -\frac{15}{20}, -\frac{3}{4}, -\frac{9}{12}, \dots\right\}$

c) $\left\{\frac{27}{9}, \frac{18}{6}, \frac{12}{4}, \frac{6}{2}, \dots\right\}$

4 Escribe el número racional representado por cada una de las siguientes fracciones:

a) $-\frac{2}{7}$ b) $-\frac{4}{1}$ c) $-\frac{1}{1}$ d) $\frac{9}{5}$

5 Escribe debajo de cada punto de la recta el número racional que corresponda:



6 Responde:

a) ¿Es $0 = \frac{0}{1}$?.

b) ¿Es 0 un número racional? Explica.

c) ¿Es todo número entero un número racional? Explica.

d) ¿Es todo número fraccionario un número racional? Explica.

7 Halla el número decimal correspondiente a los siguientes números racionales:

a) $-\frac{7}{25}$ b) $\frac{14}{33}$ c) $2\frac{8}{9}$ d) -24

e) $-\frac{7}{90}$ f) $\frac{130}{33}$ g) $3\frac{1}{4}$ h) $\frac{18}{25}$

8 Clasifica los anteriores números racionales en enteros, decimales finitos, decimales infinitos periódicos puros o decimales infinitos periódicos mixtos.

9 Explica cómo se suman, restan, multiplican y dividen números racionales.

10 Responde:

a) ¿Cumple la suma de números racionales la propiedad clausurativa? Explica.
b) ¿Cumple la suma de números racionales la propiedad conmutativa? Explica.
c) ¿Cumple la suma de números racionales la propiedad asociativa? Explica.
d) ¿Existe un elemento neutro para la suma de números racionales? ¿Cuál es?
e) ¿Posee cada número racional un inverso aditivo? Explica.

11 Responde:

a) ¿Cumple la multiplicación de números racionales la propiedad clausurativa? Explica.
b) ¿Cumple la multiplicación de números racionales la propiedad conmutativa? Explica.
c) ¿Cumple la multiplicación de números racionales la propiedad asociativa? Explica.
d) ¿Existe en los números racionales un elemento neutro para la multiplicación? ¿Cuál es?
e) ¿Posee todo número racional un inverso multiplicativo? ¿Cuál es la excepción? ¿Por qué?

12 Sabiendo que para restar dos números racionales, al minuendo le sumamos el inverso aditivo del sustraendo; así: $\frac{3}{5}-\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{3}{5}+\frac{2}{3}=\frac{9+10}{15}=\frac{19}{15}$, resuelve:

a) $\frac{3}{4}-\frac{2}{3}$ b) $\frac{8}{5}-\left(-\frac{1}{4}\right)$ c) $\left(-\frac{3}{7}\right)-\left(-\frac{15}{14}\right)$ d) $(-5)-\frac{8}{9}$

13 Teniendo en cuenta el proceso para multiplicar números racionales, resuelve y simplifica cuando sea posible:

a) $\left(-\frac{2}{5}\right)\bullet\left(-\frac{5}{2}\right)$ b) $\frac{1}{3}\bullet\left(-\frac{1}{2}\right)$ c) $\frac{3}{4}\bullet\left(-\frac{5}{8}\right)\bullet\left(-\frac{4}{9}\right)$

d) $4\bullet\left(-\frac{9}{4}\right)\bullet\left(\frac{2}{45}\right)$ e) $\left(-\frac{9}{15}\right)\bullet\left(-\frac{11}{27}\right)\bullet\left(-\frac{3}{22}\right)$ f) $12\bullet(-4)\bullet\left(-\frac{15}{16}\right)\bullet\frac{4}{9}$

14 Halla los siguientes cocientes y simplifica si es posible:

a) $\left(-\frac{3}{8}\right)\div\left(-\frac{9}{4}\right)$ b) $\frac{13}{14}\div\left(-\frac{26}{7}\right)$ c) $\left(-\frac{30}{8}\right)\div\frac{6}{15}$

d) $18\div\left(-\frac{15}{9}\right)$ e) $\left(-\frac{44}{5}\right)\div(-4)$ f) $(-15)\div\left(\frac{45}{36}\right)$

15 a) Explica como hallar el resultado de $\frac{2}{5}\bullet\left(\frac{3}{2}+\frac{2}{3}\right)$

b) Calcula $\frac{2}{5}\bullet\frac{3}{2}+\frac{2}{5}\bullet\frac{2}{3}$.

c) ¿Es $\frac{2}{5} \bullet \left(\frac{3}{2} + \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{5} \bullet \frac{3}{2} + \frac{2}{5} \bullet \frac{2}{3}$? ¿Por qué?.

d) ¿Es la multiplicación de números racionales distributiva respecto a la suma? Explica.

0.3.2 Potenciación en Q - Propiedades

CONCEPTO	SECCIÓN DE MATEMÁTICA EXPERIMENTAL 7	PÁGINAS
POTENCIACIÓN EN Q		
- Cuando el exponente es un entero positivo	4.6	146
- Cuando el exponente es 0	4.6	146
- Leyes de los exponentes para la potenciación en Q.	4.6	146 y 147

EJEMPLO 1:

Calculemos las siguientes potencias:

a) $\left(+\frac{2}{3}\right)^2$ b) $\left(-\frac{4}{5}\right)^3$ c) $\left(-\frac{2}{7}\right)^2$ d) $\left(+\frac{1}{3}\right)^4$ e) $\left(-\frac{4}{5}\right)^0$

Solución:

a) $\left(+\frac{2}{3}\right)^2 = \left(+\frac{2}{3}\right) \bullet \left(+\frac{2}{3}\right) = +\frac{4}{9}$

b) $\left(-\frac{4}{5}\right)^3 = \left(-\frac{4}{5}\right) \bullet \left(-\frac{4}{5}\right) \bullet \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{64}{125}$

c) $\left(-\frac{2}{7}\right)^2 = \left(-\frac{2}{7}\right) \bullet \left(-\frac{2}{7}\right) = \frac{4}{49}$

d) $\left(+\frac{1}{3}\right)^4 = \left(+\frac{1}{3}\right) \bullet \left(+\frac{1}{3}\right) \bullet \left(+\frac{1}{3}\right) \bullet \left(+\frac{1}{3}\right) = +\frac{1}{81}$

e) $\left(-\frac{4}{5}\right)^0 = 1$

Si analizamos los signos de los resultados anteriores podemos afirmar que:

LEYES DE LOS SIGNOS PARA LA POTENCIACIÓN

1. Cuando un número racional **POSITIVO** o **NEGATIVO** lo elevamos a un número entero positivo **PAR** el resultado es un número racional **POSITIVO.**
2. Cuando un número racional **POSITIVO** lo elevamos a un número entero positivo **IMPAR** el resultado es un número racional **POSITIVO.**
3. Cuando un número racional **NEGATIVO** lo elevamos a un número entero positivo **IMPAR** el resultado es un número racional **NEGATIVO.**

EJEMPLO 2:

Simplifiquemos y hallemos el resultado:

a) $\left(-\frac{3}{5}\right)^3 \bullet \left(-\frac{3}{5}\right)^2$

b) $\left(-\frac{2}{3}\right)^5 \div \left(-\frac{2}{3}\right)^2$

c) $\left[\left(-\frac{1}{5}\right)^5 \bullet \left(-\frac{1}{5}\right)^2\right] \div \left[\left(-\frac{1}{5}\right) \bullet \left(-\frac{1}{5}\right)^4\right]$

d) $\left[\left(-\frac{2}{3}\right)^2\right]^3$

Solución

a) Tenemos un producto de potencias de la misma base. Por lo tanto:

$$\left(-\frac{3}{5}\right)^3 \bullet \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = \left(-\frac{3}{5}\right)^{3+2} = \left(-\frac{3}{5}\right)^5$$

Como nos quedó un número fraccionario negativo elevado a un exponente impar, entonces obtendremos otro número fraccionario negativo cuyo numerador y denominador se obtienen elevando el numerador y denominador dados al exponente 5; es decir, aplicamos la propiedad distributiva de la potenciación con respecto a la división; así:

$$\left(-\frac{3}{5}\right)^5 = -\frac{3^5}{5^5} = -\frac{243}{3.125}$$

b) Tenemos una división de potencias de la misma base. Por lo tanto:

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^5 \div \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \left(-\frac{2}{3}\right)^{5-2} = \left(-\frac{2}{3}\right)^3$$

De nuevo nos quedó un número fraccionario negativo elevado a un exponente impar; por lo tanto:

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^3 = -\frac{2^3}{3^3} = -\frac{8}{27}$$

c) En este ejercicio tenemos producto y división de potencias de la misma base. Realizamos primero los productos de potencias de la misma base; así:

$$\left[\left(-\frac{1}{5}\right)^5 \bullet \left(-\frac{1}{5}\right)^2\right] \div \left[\left(-\frac{1}{5}\right) \bullet \left(-\frac{1}{5}\right)^4\right] = \left[\left(-\frac{1}{5}\right)^{5+2}\right] \div \left[\left(-\frac{1}{5}\right)^{1+4}\right]$$

$$= \left[\left(-\frac{1}{5}\right)^7\right] \div \left[\left(-\frac{1}{5}\right)^5\right]$$

Ahora realizamos la división de potencias de la misma base:

$$= \left(-\frac{1}{5}\right)^{7-5} = \left(-\frac{1}{5}\right)^2$$

Finalmente, nos quedó un número fraccionario negativo elevado a un exponente par:

$$= +\frac{1^2}{5^2} = +\frac{1}{25}$$

d) Tenemos una potencia de potencia. Por lo tanto:

$$\left[\left(-\frac{2}{3}\right)^2\right]^3 = \left(-\frac{2}{3}\right)^{2 \bullet 3} = \left(-\frac{2}{3}\right)^6$$

¡ATENCIÓN!

- En los ejercicios donde aparecen combinadas la suma, la resta, la multiplicación, la división, la potenciación y la radicación de números racionales, procedemos así:

  - Si hay signos de agrupación, desarrollamos las operaciones contenidas en los signos de agrupación más internos; es decir, trabajamos de adentro hacia afuera.
  - Si no hay signos de agrupación o éstos ya fueron eliminados, desarrollamos primero las operaciones de potenciación y radicación, luego las de multiplicación y división y, finalmente, las de suma y resta. En todo caso, tiene preferencia la operación situada más a la izquierda.

EJEMPLO 3

Simplifiquemos y hallemos el resultado: $\left(-1+\frac{3}{2}\right)^4 \div \left[\left(-2+\frac{3}{4}\right)^3 \div \left(-\frac{5}{2}\right)^3\right] - \left(-1+\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\right)^2$

Solución

- En este ejercicio aparecen combinadas la suma, la resta, la multiplicación, la división y la potenciación e incluye signos de agrupación.
- Para resolver esta clase de ejercicios trabajamos en este orden:
  - Primero desarrollamos las operaciones incluidas dentro de los signos de agrupación (paréntesis, en este caso).
  - A continuación, efectuamos los ejercicios de potenciación.
  - Luego, realizamos las operaciones de multiplicación y división.
  - Y, finalmente, las operaciones de suma y resta.
- Explica cada paso que vamos realizando:

$$= \left(-1+\frac{3}{2}\right)^4 \div \left[\left(-2+\frac{3}{4}\right)^3 \div \left(-\frac{5}{2}\right)^3\right] - \left(-1+\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\right)^2$$

$$= \left(\frac{-2+3}{2}\right)^4 \div \left[\left(\frac{-8+3}{4}\right)^3 \div \left(-\frac{5}{2}\right)^3\right] - \left(\frac{-6+4-1}{6}\right)^2$$

$$= \left(+\frac{1}{2}\right)^4 \div \left[\left(-\frac{5}{4}\right)^3 \div \left(-\frac{5}{2}\right)^3\right] - \left(-\frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{2}{\cancel{6}}}\right)^2$$

$$= \left(+\frac{1}{16}\right) \div \left[\left(-\frac{125}{64}\right) \div \left(-\frac{125}{8}\right)\right] - \left(+\frac{1}{4}\right)$$

$$= \left(+\frac{1}{16}\right) \div \left[\left(-\frac{125}{64}\right) \cdot \left(-\frac{8}{125}\right)\right] - \left(+\frac{1}{4}\right)$$

$$= \left(+\frac{1}{16}\right) \div \left[+\frac{\overset{1}{\cancel{125}} \cdot \overset{1}{\cancel{8}}}{\underset{8}{\cancel{64}} \cdot \underset{1}{\cancel{125}}}\right] - \left(+\frac{1}{4}\right)$$

$$= \left(+\frac{1}{16}\right) \div \left(+\frac{1}{8}\right) - \left(+\frac{1}{4}\right)$$

$$= \left(+\frac{1}{16}\right) \cdot \left(+\frac{8}{1}\right) - \left(+\frac{1}{4}\right)$$

$$= \left(+\frac{\overset{1}{\cancel{8}}}{\underset{2}{\cancel{16}}}\right) - \left(+\frac{1}{4}\right) = \left(+\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{(+2)+(-1)}{4} = +\frac{1}{4}$$

EJEMPLO 4

Estas son algunas raíces de números racionales:

$$\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3} \quad ; \quad \sqrt[3]{-\frac{8}{125}}=-\frac{2}{5} \quad ; \quad \sqrt{\frac{-25}{36}} \text{ no existe} \quad ; \quad \sqrt[4]{-\frac{1}{10}} \text{ no existe}$$

Las raíces de índice par de números negativos no existen ya que no es posible hallar ningún número que elevado a un exponente par nos de un número negativo.

EJERCICIO 0.5

1 Contesta:

a) ¿Cómo se define $\mathbf{a^n}$ cuando $\mathbf{a \in Q}$ y $\mathbf{n \in N}$?.

b) ¿Es positivo o negativo el resultado de $\mathbf{a^n}$ cuando **a** es un número racional negativo y **n** es un número par?.

c) ¿Es positivo o negativo el resultado de $\mathbf{a^n}$ cuando **a** es un número racional negativo y **n** es un número impar?.

d) ¿Es distributiva la potenciación con respecto a la multiplicación de números racionales ? ¿Y a la división?.

e) ¿Es distributiva la potenciación con respecto a la suma de números racionales? ¿Y a la resta? Explica con un ejemplo.

2 Completa:

a) Un producto de potencias de la misma base es igual a ______________________.

b) Una división de potencias de la misma base es igual a ______________________.

c) Una potencia de potencia es igual a ______________________.

d) Una potencia de un producto es igual a ______________________.

e) Una potencia de un cociente es igual a ______________________.

f) Todo número racional, diferente de 0, elevado al exponente 0 es igual a ______________.

3 Lee y calcula:

a) $\sqrt[3]{125}$ b) $\sqrt[4]{16}$ c) $\sqrt[6]{64}$

d) $\sqrt[5]{-32}$ e) $\sqrt{1}$ f) $\sqrt[3]{-1}$

4 Responde:

a) ¿Existen raíces pares de números racionales negativos? ¿por qué?

b) ¿Existen raíces impares de números racionales negativos? ¿por qué?

c) ¿Es la radicación en Q una operación clausurativa? ¿por qué?

5 Un número es CUADRADO PERFECTO si tiene raíz cuadrada exacta; por ejemplo, 121 es un cuadrado perfecto porque $\sqrt{121}=11$. Escribe otros cinco cuadrados perfectos.

6 Un número entero es CUBO PERFECTO si tiene raíz cúbica exacta. Por ejemplo, -27 es cubo perfecto porque $\sqrt[3]{-27}=-3$. Escribe otros cinco cubos perfectos.

0.4 ECUACIONES EN Z Y EN Q.

CONCEPTO	SECCIÓN DE MATEMÁTICA EXPERIMENTAL 7	PÁGINAS
CONCEPTOS BÁSICOS - Proposición, forma proposicional, constante y variables - Ecuación, miembros de una ecuación	5.2	159 y 160
RESOLUCIÓN DE ECUACIONES - Ecuaciones equivalentes - Solución por la apliacación de la propiedad uniforme - Solución por trasposición de términos y factores - Solución de ecuaciones con términos que tienen denominadores.	5.3	162 a 165

EJEMPLO 1

El enunciado: **"un ángulo recto mide 90º"** es una proposición porque podemos afirmar que su valor de verdad es V.

EJEMPLO 2

El enunciado: **"el ángulo α es llano"** no es una proposición porque no podemos indicar su valor de verdad, ya que no conozco la medida del ángulo α.

EJEMPLO 3

- Consideremos el siguiente enunciado:

Un número sumado con $\boxed{7}$ nos da $\boxed{343}$

objeto desconocido — **objetos conocidos**

VARIABLE — **CONSTANTES**

- Este enunciado es una **forma proposicional** porque si reemplazamos el objeto desconocido por un número, se convierte en una proposición.
- Generalmente los objetos desconocidos de una forma proposicional se representan con letras; así:

$\boxed{X}$ sumado con **7** nos da **343**

esta letra reemplaza el objeto desconocido: en este caso, un número.

EJEMPLO 4

La forma proposicional $\underbrace{4X + 6}_{\text{primer miembro}} = \underbrace{18}_{\text{segundo miembro}}$ es una ecuación.

EJEMPLO 5

$z - 5 = 1$ y **$y + 8 = 14$** son ecuaciones equivalentes pues las variables **z** y **y** toman el mismo valor **(6)**.

EJEMPLO 6

Resolvamos la ecuación $-4t + 5 = 21$

SOLUCIÓN

- Para hallar el valor que debe tomar la incógnita **t** debemos quitar dos números: el **5**, que está sumando, y el **-4**, que está multiplicando. Veamos cómo hacerlo:

$-4t + 5 = 21$ .... ecuación dada.

$\therefore -4t = 21 - 5$ .... pasamos el 5 a restar.

$\therefore -4t = 16$ .... $21 - 5 = 16$

$\therefore t = \frac{16}{-4}$ .... pasamos el -4 a dividir.

$\therefore t = -4.$ .... $\frac{16}{-4} = -4$

- Por lo tanto, la solución de esta ecuación es $t = -4$. Comprobemos reemplazando este valor en la ecuación dada:

$$-4(-4) + 5 \stackrel{?}{=} 21$$

$$\therefore 16 + 5 \stackrel{\checkmark}{=} 21$$

EJEMPLO 7

Resolvamos la ecuación $2x - \frac{1}{2} + \frac{4}{3} = 3 + \frac{7}{4}x$

SOLUCIÓN

- Una primera dificultad que debemos eliminar son los denominadores de cada fracción. Para lograrlo hallamos el mínimo común múltiplo (m.c.m) de los denominadores y multiplicamos ambos miembros de la igualdad por ese m.c.m.; así:

m.c.m. (2, 3, 4) = 12 (¡comprobarlo!)

Luego:

$2x - \frac{1}{2} + \frac{4}{3} = 3 + \frac{7}{4}x$ .... ecuación dada.

$\therefore 12 \bullet (2x - \frac{1}{2} + \frac{4}{3}) = 12 \bullet (3 + \frac{7}{4}x)$ .... multiplicamos por 12 ambos miembros.

Ahora aplicamos la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma y simplificamos factores; así:

$12 \bullet (2x) - \overset{6}{\cancel{12}} \bullet (\frac{1}{\cancel{2}}) + \overset{4}{\cancel{12}} \bullet (\frac{4}{\cancel{3}}) = 12 \bullet 3 + \overset{3}{\cancel{12}} \bullet (\frac{7}{\cancel{4}}x)$ .... ¿por qué?

$\therefore 24x - 6 + 16 = 36 + 21x$ .... ¿por qué?

$\therefore 24x - 21x = 36 + 6 - 16.$ .... si hay varias cantidades con incógnitas, las llevamos todas a un mismo miembro de la ecuación

$\therefore 3x = 26$

$\therefore x = \frac{26}{3}$

EJERCICIO 0.6

1 Completa:

a) Dos o más ecuaciones son equivalentes cuando ______________________________.

b) Una ecuación se puede resolver aplicando la propiedad ____________________________ __________________ o por __________________ de cantidades.

c) La propiedad uniforme dice __________________.

d) La transposición de cantidades en una ecuación dice __________________________.

2 Resuelve las siguientes ecuaciones, utilizando la propiedad uniforme:

a) $z + 5 = 3$ b) $x + 8 = 16$ c) $3 + m = 4$ d) $t - 5 = 3$ e) $x - 8 = -20$

f) $\frac{x}{5} = 7$ g) $8m = -6$ h) $\frac{t}{4} = -3$ i) $3t = -5$

3 Utiliza el procedimiento de la trasposición de cantidades para resolver las ecuaciones del ejercicio anterior.

4 Utiliza el procedimiento de la trasposición de cantidades para resolver las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{x}{6} - 5 = \frac{1}{3} - x$ b) $\frac{x}{2} + 2 - \frac{x}{12} = \frac{x}{6} - \frac{x}{4}$ c) $\frac{x-4}{3} - 5 = 0$

d) $\frac{x}{3} + 1 = 3 + \frac{x-2}{6}$ e) $x + \frac{1}{3} - \frac{x}{2} = 3 + \frac{x}{4}$ f) $\frac{2x+3}{6} + 1 = \frac{x}{2} + \frac{x}{2}$

g) $\frac{4x-12}{-4} = x - 5$ h) $2 + \frac{3x-1}{15} + \frac{x-4}{5} = \frac{x+4}{3}$ i) $1 - \frac{x-5}{4} - \frac{x-3}{10} + \frac{x+3}{8} = 0$

TALLER DE REPASO DE LA UNIDAD 0

1. Determina el opuesto o inverso aditivo de:

a) -8 b) $-(-3)$ c) x d) $-x$ e) 9 f) $-(-(-x))$

2. Halla el resultado de:

a) $6 - 11 + 3 - 8 + 7$ b) $-8 - 17 + 60 - 47$
c) $5 + 13 - 30 - 5 + 21$ d) $-57 + 69 - 41 + 83$

3. Eliminar los signos de agrupación y simplifica:

a) $-18 - (+15) - 6 + (-7) - (-1) + 28 - 37$ b) $3 - [6 + (3 - 5)] - [2 + (-7 + 4)]$
c) $[0 - (6 - 10) - 4 + (7 - 10)] + 3$ d) $1 - \{4 - [-2 + (5 - 1 - 9) - 1] + 2\} + 3$

4. Halla el producto de:

a) $(+5)\bullet(-16)$ b) $(-3) \bullet (-15)$
c) $(-5) \bullet (-8) \bullet 6 \bullet (-1) \bullet (-2)$ d) $(+5) \bullet (-13) \bullet (-28) \bullet 0 \bullet (47) \bullet (57)$

5. Halla el cociente de:

a) $(+27) \div (+3)$ b) $(-18) \div (+6)$ c) $(-35) \div (-7)$ d) $(+42) \div (-6)$

6. Resuelve:

a) $-5 \bullet (3 + 2) + 4 \bullet (-2 - 6) - (-4)\bullet(+6)$ b) $(2 + 6) \div (-4) + (2 - 6) \div (-4) + 6$
c) $16 - 15 \div 3 + 4 - 2 \bullet (1 + 5)$ d) $(7 - 8) + (5 - 4 \bullet 6 - 9) \div (2 - 10 - 6) - 7$

7. Resuelve:

a) $(-4 + 1)^2 \bullet (3 - 6)^3 (-1-2)$ b) $(-1)^2 + (-2)^2 + (-3)^2 + (-4)^2$
c) $[(+6) (-3) - (+8) (-2)]^4 \div (-1 -1)$ d) $\{ [(+3) (-4) - (-4)]^2 \} \div [(-14) + \sqrt{36} \bullet \sqrt{9}]$
e) $[(-4) (+6) - (-1)^2] \div [\sqrt{49} - (-7 + 9)]$ f) $\left[\sqrt{(-8) (-5) - (-6)^2}\,\right]^3$

8. Efectúa las siguientes restas:

a) $-8 - (+4)$ b) $18 - (-7)$ c) $0 - (+5)$
d) $(-3) - (8)$ e) $17 - (-17)$ f) $18 - (+18)$

9. Resuelve aplicando la propiedad distributiva:

a) $(-4) \bullet (8 - 3 - 2 + 5)$ b) $(5) \bullet (-3 + 5 + 7 - 1)$ c) $(-7 + 4 + 2 - 1) \bullet (-3)$

10. Resuelve los siguientes ejercicios de dos maneras diferentes. Primero aplicando la propiedad distributiva; y luego, resolviendo aparte cada paréntesis.

Ejemplo: Resuelve $(-1 + 5 - 2 + 7) \bullet (+1 - 2 - 5)$

Solución:

Primera forma:

$$\begin{aligned}(-1+5-2+7)\bullet(+1-2-5) &= -1\bullet(+1-2-5) +5\bullet(+1-2-5) - 2\bullet(+1-2-5) +7\bullet(+1-2-5)\\ &= -1+ 2 + 5 + 5 - 10 - 25 - 2 + 4 + 10 + 7 -14 - 35\\ &= 33 - 87\\ &= 33 + (-87) = -54\end{aligned}$$

Segunda forma: $(-1 + 5 - 2 + 7)\bullet (1 - 2 - 5) = (9) (-6) = -54$

a) $(4 + 7 - 5) (3 - 2)$ b) $(5 - 7) (10 - 5)$

11. Calcula:

a) $(-1)^{60}$ b) -3^2 c) $(-2)^2$ d) $-(-3)^2$
e) -3^3 f) $-(-3^3)$ g) $-(-2^2)$ h) $-(-5)^3$

12. Resuelve

a) $\left[(12 - 4 + 3)^0 + (a - b)^0 \right] \div \left[(125 \div 25) \div (-5)\right]$ b) $\left(\frac{-3-8}{5} + 7\right)^0$

13. Efectúa, indicando en cada paso la propiedad aplicada:

a) Comprueba que $(-5)^3 \bullet (-5)^2 = (-5)^5$
b) Comprueba que $2^5 \div 2^2 = 2^3$
c) Comprueba que $[\,(-3)^2\,]^3 = (-3)^6$

14. $2^{(2^3)} \div (2^2)^3$ es igual a:

a) 0 b) $\frac{1}{4}$ c) 1 d) $\frac{4}{3}$ e) 4

15. $\frac{1}{2}[\,1 + (-1)^{11}\,]$ es igual a:

a) 6 b) 1 c) 0 d) $\frac{1}{2}$ e) -5

16. $(-1)^{5^2} + 1^{2^5}$ es igual a:

a) -7 b) -2 c) 0 d) 1 e) 57

17. Contesta FALSO o VERDADERO a cada una de las siguientes proposiciones. Justifica cada una de las respuestas.

a) Para indicar una temperatura de $8\frac{3}{4}$ °C bajo cero escribimos $-8\frac{3}{4}$ °C.
b) Al operar números fraccionarios positivos y negativos procedemos en la misma forma que con los números enteros en cuanto a los signos y en la misma forma que con las fracciones en cuanto a las operaciones.
c) Es lo mismo la fracción $-\frac{3}{5}$ que el número racional $-\frac{3}{5}$.
d) Los números decimales infinitos periódicos puros son números racionales.
e) La fracción $-\frac{12}{3}$ es impropia.
f) Para comparar dos números racionales escogemos un representante de cada uno, lo escribimos con el mismo numerador y comparamos sus denominadores.
g) Todo número entero es número racional.
h) El número $-83{,}2456262\ldots$ es un número racional.
i) El inverso multiplicativo de $-\frac{4}{5}$ es $\frac{5}{4}$.
j) El inverso multiplicativo de 0 no existe.
k) Para todo $x \in Q$ se cumple que $x^0 = 1$.
l) Si $a \in Q$ y $m,n \in N$ entonces $a^m + a^n = a^{m+n}$
m) $\left|-\frac{8}{3}\right| = -\left(-\frac{8}{3}\right)$

18. Contesta:

a) ¿Con qué número representamos el número racional $\left\{\frac{4}{3}, \frac{20}{5}, \frac{28}{21}, \frac{32}{24}, \ldots\right\}$
b) ¿Cómo se opera con números racionales?
c) ¿Cuándo una fracción es propia? ¿Cuándo es impropia?
d) ¿Cuándo dos fracciones son equivalentes? Escribe dos ejemplos.
e) ¿Cómo se representa en la recta numérica el número $-\frac{17}{5}$?

f) ¿Cuáles son el inverso aditivo y el inverso multiplicativo de $-\frac{3}{8}$?

g) ¿Todos los números racionales tienen inverso aditivo? ¿El inverso multiplicativo? Argumenta tu respuesta.

19. Escribe en forma de mixto las siguientes fracciones impropias:

a) $\frac{29}{5}$ b) $-\frac{17}{2}$ c) $\frac{35}{16}$ d) $-\frac{43}{28}$

20. Escribe la fracción impropia correspondiente a los siguientes mixtos:

a) $6\frac{2}{3}$ b) $-4\frac{7}{9}$ c) $9\frac{3}{7}$ d) $-7\frac{2}{5}$

21. Representa en la recta numérica los números racionales mixtos del ejercicio anterior.

22. Escribe tres fracciones equivalentes a cada una de las siguientes fracciones:

a) $\frac{9}{13}$ b) $\frac{6}{12}$ c) $-\frac{6}{11}$ d) $\frac{15}{4}$ e) $-\frac{45}{60}$

23. Escribe el número que falta para que las fracciones sean equivalentes:

a) $\frac{7}{9}=\frac{28}{\square}$ b) $\frac{9}{\square}=\frac{36}{20}$ c) $-\frac{18}{45}=-\frac{\square}{15}$ d) $\frac{\square}{5}=\frac{15}{75}$

24. Simplifica las siguientes fracciones:

a) $\frac{56}{63}$ b) $-\frac{48}{60}$ c) $\frac{126}{90}$ d) $-\frac{195}{165}$

25. Indica cuáles de las siguientes fracciones son irreducibles:

a) $\frac{7}{15}$ b) $\frac{46}{23}$ c) $\frac{17}{23}$ d) $-\frac{9}{4}$ e) $\frac{6}{49}$ f) $-\frac{84}{75}$

26. Escribe el signo > o < entre los siguientes pares de números racionales:

a) $\frac{5}{4}\ \square\ \frac{3}{7}$ b) $-\frac{2}{7}\ \square\ -\frac{5}{7}$ c) $\frac{8}{9}\ \square\ \frac{5}{6}$ d) $-8\ \square\ \frac{5}{3}$

27. Reduce al mínimo común denominador (m.c.d.) cada grupo de números racionales y ordénalos de mayor a menor:

a) $\frac{7}{2}$; $-\frac{3}{8}$; $\frac{7}{48}$ b) $-\frac{3}{4}$; $\frac{1}{16}$; $\frac{11}{32}$, $-\frac{1}{64}$ c) $\frac{2}{3}$; $\frac{7}{8}$; $\frac{1}{6}$

28. Responde falso o verdadero a cada una de las siguientes proposiciones. Justifica las respuestas.

a) En una fracción impropia el numerador es menor que el denominador.

b) Es lo mismo $-\frac{3}{5}$ que $\frac{-3}{5}$.

c) Es lo mismo $-\frac{3}{5}$ que $\frac{-3}{-5}$.

d) Es lo mismo $3\frac{4}{5}$ que $3 \times \frac{4}{5}$.

e) Es lo mismo una fracción que un número racional.

f) $Z \subset Q$.

g) El inverso multiplicativo de $\frac{0}{1}$ es $\frac{1}{0}$.

h) Todos los números racionales tienen inverso multiplicativo.

i) Todos los números racionales tienen inverso aditivo.

j) La resta y la división de números racionales cumplen la propiedad clausurativa.

29. Resuelve:

a) $\left[\left(\frac{1}{2}\times\frac{8}{3}\right)^2+\frac{1}{6}\right]\div\frac{7}{3}-\frac{1}{3}+\frac{1}{\sqrt{4}}$

b) $\left[\left(1-\frac{5}{4}\right)\cdot 2+\frac{5}{8}\div 5\right]\cdot\left(1-\frac{1}{5}\right)+\frac{13}{10}$

c) $\dfrac{\left(\frac{4}{3}-\frac{7}{12}\right)\left(-\frac{2}{9}\right)}{\left(-\frac{1}{5}-\frac{9}{5}\right)\div 8}+\frac{4}{3}$

d) $\dfrac{\left(-\frac{4}{3}+\frac{5}{6}-\frac{1}{2}\right)^2\left(-3\div\frac{1}{2}\right)^2}{2\cdot(-2)^2\cdot 6}$

e) $\left[2-1\frac{1}{3}\right]^3+\frac{1}{27}\left(\frac{9}{\sqrt{2^5-2^4}}\right)$

f) $\left(-\frac{1}{4}+1\right)^3+\left(-\frac{1}{8}\right)^2\div\frac{1}{5}$

g) $\left[-\frac{2}{9}\left(-1+\frac{1}{4}\right)-\frac{4}{15}\left(-2+\frac{1}{8}\right)\right]\div\left(-\frac{2}{3}\right)^2$

h) $\left[\frac{1}{(-2)^2}+\frac{1}{(-3)^2}-\frac{1}{(-2)^3}+\frac{1}{72}\right]\left(\frac{\sqrt{100}}{5}\div\frac{7}{4}\right)$

i) $\left[\frac{5}{12}\div\left(-4+\frac{10}{3}\right)-2\right]\div\frac{1}{8}$

j) $\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{3}-\dfrac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^3}+\left(\frac{1}{3}\right)^3$

30. A veces, para expresar la división de dos números racionales, en lugar de escribir $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}$ escribimos $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ y calculamos así: $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\dfrac{a\times d}{b\times c}$

a) $\dfrac{-\frac{11}{2}}{\frac{3}{4}}$

b) $\dfrac{\frac{7}{5}+\left(-\frac{3}{8}\right)}{\frac{8}{6}-\frac{1}{4}}$

c) $\dfrac{\frac{3}{7}}{\frac{2}{3}}-\frac{4}{5}$

d) $\dfrac{-8}{-\frac{3}{2}}$

31. Resuelve las siguientes ecuaciones utilizando el método de la trasposición de términos y factores.

a) $m+8=15$

b) $-3x=-15$

c) $4x=-24$

d) $\frac{y-3}{5}-4=2$

e) $p+\frac{1}{3}-\frac{p}{2}=3+\frac{p}{4}$

f) $\frac{2x+5}{12}-2=\frac{x}{4}-\frac{1}{3}$

PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS DEL ICFES

1. Un ama de casa quien quiere reducir la cantidad de energía eléctrica que consume su familia, hace tres arreglos sucesivos que permiten ahorrar, respectivamente un 20%, un 25% y un 55% de los costos de la luz. El porcentaje total ahorrado es:

a) $33\frac{1}{3}$

b) 27

c) 73

d) $66\frac{2}{3}$

e) 100

2. (x-1) - (1-x) + (x-1) es igual a:

a) 3x-3   b) x - 3   c) 3x - 1   d) x-1   e) x

3. En cada uno de dos años consecutivos, el precio del queso subió en un 10 por ciento. Al principio del primer año, un kilogramo de queso costaba $500. Al final del segundo año, ¿cuántos gramos de queso redondeado al gramo más próximo, podría comprarse con $1.000?

a) 1600   b) 2400   c) 1650   d) 1670   e) 1820

4. Los 14 dígitos del número de una tarjeta de crédito deben escribirse en las casillas que se muestran a continuación

			9				X				7		

Si la suma de tres dígitos consecutivos cualesquiera debe ser 20, entonces el valor de x es:

a) 3   b) 4   c) 5   d) 7   e) 9

5. Dos velas son de diferente longitud y diferente grosor. La más larga dura 7 horas en gastarse completamente y la más corta dura 10 horas.

Después de estar prendidas durante 4 horas, las dos velas tienen el mismo largo. La razón entre el largo original de la vela más corta y el de la vela más larga es:

a) $\frac{7}{10}$ b) $\frac{3}{5}$ c) $\frac{4}{7}$ d) $\frac{5}{7}$ e) $\frac{2}{3}$

Núcleo Temático

1

EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES

LOGRO GENERAL

Utilizar y reconocer los números reales elaborando con ellos las construcciones que favorezcan el desarrollo de procesos y habilidades de pensamiento.

LOGROS ESPECÍFICOS	INDICADORES DE LOGRO
Corporal: • Realizar experiencias que motiven a aprender en forma recreativa.	Realiza las distintas experiencias que permiten un aprendizaje activo de los números reales, sus relaciones y operaciones.
Comunicativa: • Expresar con precisión los conceptos relativos a los números reales, sus relaciones y operaciones.	Explica con claridad los procesos seguidos para el desarrollo de los conceptos relativos a los números reales, sus relaciones y propiedades.
Cognitiva: • Clasificar los números reales en racionales e irracionales. • Representar un número real en la recta numérica. • Realizar operaciones con números reales.	• Dado un número real, lo clasifica en racional o irracional. • Ubica un número real en la recta numérica. • Dados dos o más números reales, los suma, resta, multiplica y divide.
Estética: • Usar regla y compás para representar en la recta numérica algunos números irracionales como $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ ...	• Utiliza la regla y el compás para representar en la recta numérica un número irracional dado.
Etica-Actitudinal: • Resaltar la contribución de la matemática en el desarrollo de habilidades de pensamiento.	• Demuestra interés por aprender.

DIMENSIONES

EVALUACIÓN

ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS

1.1 HISTORIA DEL ÁLGEBRA (1): EGIPTO

Desafortunadamente, hasta la fecha, no tenemos ningún documento real que nos explique quien fue el primero en descubrir las matemáticas suficientes para construir, por ejemplo, las pirámides de Egipto; pues, es evidente, que tales edificaciones gigantescas requerían planos y modelos muy exactos.

Según Aristóteles, las matemáticas se originaron hacia el año 2000 a. de C. porque la clase sacerdotal de Egipto tenía mucho tiempo para dedicarse al estudio. Esta afirmación pudo comprobarse 2000 años más tarde cuando fue descubierto un papiro que actualmente se conserva en la colección Rhind del Museo Británico. Este documento, escrito por el sacerdote Ahmes, se titula: "Orientaciones para conocer todas las cosas oscuras" y contiene una colección de problemas de aritmética, álgebra y geometría. Los problemas aritméticos se refieren a problemas concretos y específicos relativos a las pesas y medidas de objetos como la cerveza y el pan. Por ello, el Papiro Rhind se ocupa mucho de la reducción de fracciones como $\frac{149}{308}$ a una suma de fracciones cada uno de cuyos numeradores es 1; así: $\frac{149}{308} = \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11}$.

Los problemas algebraicos contenidos en el Papiro Rhind no se refieren a objetos concretos y específicos como pan y cerveza, ni tampoco piden el resultado de operaciones con números conocidos, sino que piden lo equivalente a resolver ecuaciones lineales de la forma $x + ax = b$ o $x + ax + bx = c$, donde a, b y c son números conocidos y x es desconocido; a este número desconocido o incógnita se le llama "aha" o montón.

EJERCICIO 1.1

Comprensión de Lectura. Explicación: Lee nuevamente el fragmento anterior y luego encierra, en un círculo, la letra que corresponde a la respuesta correcta.

1. Este fragmento sobre la "Historia del Algebra", bien podría titularse como:
   a. Las pirámides de Egipto: todo un misterio.
   b. Revelaciones del Papiro Rhind.
   c. Orígenes de las matemáticas.
   d. Especulaciones aristotélicas.

2. El autor se propone, ante todo:
   a. Hacer una exaltación del manejo de las matemáticas que tenían los egipcios.
   b. Mostrar las dificultades que hay para esclarecer el origen de las matemáticas.
   c. Relievar la labor de la clase sacerdotal egipcia en el trabajo matemático.
   d. Precisar la época en que se descubrieron las matemáticas.

3. Del texto anterior podemos deducir que:
   a. Es difícil precisar quién fue el abanderado en los descubrimientos matemáticos.
   b. Aristóteles pudo determinar con mucha precisión quién descubrió las matemáticas.
   c. Las pirámides de Egipto pudieron ser obra de extraterrestres.
   d. El contenido del Papiro Rhind revolucionó el mundo de las matemáticas.

4. Uno de los siguientes enunciados es falso:

a. Aristóteles hizo una afirmación que fue comprobada más tarde.
b. Un sacerdote fue quien redactó el contenido del Papiro Rhind.
c. Los problemas de matemáticas hallados en el Papiro Rhind, hacen referencia a cierto tipo de comidas y bebidas.
d. El documento que se menciona trabaja el tema de la reducción de fracciones.

5. El autor desarrolla su escrito, principalmente con base en:

a. Argumentaciones
b. Ejemplificaciones
c. Hallazgos
d. Suposiciones

1.2 DE LOS NÚMEROS RACIONALES A LOS NÚMEROS REALES

1.2.1 Expresión Decimal de los Números Racionales

PRIMERA EXPERIENCIA

- Ya sabemos que todo número racional puede expresarse en la forma $\frac{a}{b}$, con a, b, $\in$ Z y b $\neq$ 0. Sin embargo, también sabemos que $\frac{a}{b} = a \div b$; luego, esta es otra manera de expresar un número racional.
- Por ejemplo, $\frac{3}{4} = 3 \div 4 = 0{,}75$. Esto significa que la fracción racional $\frac{3}{4}$ la puedo representar con la forma decimal 0,75.
- Responde: ¿Es posible representar la fracción $\frac{7}{2}$ con el número decimal 3,5? ¿por qué?
- Responde: ¿Es posible representar la fracción $\frac{7}{6}$ con el número decimal 1,166...? ¿por qué?
- Notemos que algunos números racionales podemos representarlos mediante NÚMEROS DECIMALES LIMITADOS O FINITOS o mediante NÚMEROS DECIMALES ILIMITADOS O INFINITOS.

SEGUNDA EXPERIENCIA

- Completa, escribiendo después del signo =, el número decimal correspondiente.

a) $\frac{7}{50} =$ b) $\frac{13}{40} =$ c) $\frac{19}{25} =$

d) $\frac{7}{8} =$ e) $\frac{7}{30} =$ f) $\frac{17}{6} =$

- Teniendo en cuenta el ejercicio anterior, escribe dentro del paréntesis una V o una F según que el enunciado sea verdadero o falso.

a) A una fracción racional irreducible le corresponde un número decimal finito, si tiene por denominador un producto de potencias de 2 y de 5 (   ).

b) A una fracción racional irreducible le corresponde un número decimal infinito, si tiene un divisor del denominador diferente de 2 y de 5 ( ).

EJERCICIO 1.2

1 Escribe dentro del paréntesis ( ) una V o una F si el enunciado correspondiente es verdadero o falso respectivamente. Explica cada una de tus respuestas

a. El período de un decimal finito es cero. (   ).

b. En todo número racional, al dividir el numerador entre el denominador obtenemos un decimal periódico (   ).

c. La expresión decimal, de una fracción racional irreducible, es un decimal periódico puro si ni 2 ni 5 son divisores del denominador y un decimal periódico mixto si tiene un divisor en el denominador diferente de 2 y de 5 ( ).

2 Calcula la cifra decimal que ocupa el lugar 2.300 a partir de la coma en: a) $\frac{13}{11}$ b) $\frac{13}{14}$

3 Sin hacer la división, decir por qué el número decimal correspondiente a las siguientes fracciones es finito:

a) $\frac{3}{8}$; b) $\frac{7}{5}$; c) $\frac{43}{125}$

4 Con solo observar la fracción, decir porque el número decimal de las siguientes fracciones es infinito:

a) $\frac{2}{9}$; b) $\frac{3}{7}$; c) $\frac{7}{6}$

5 Encuentra el número decimal de cada racional del ejercicio **4** y

a) Explica si es un decimal periódico puro o periódico mixto.
b) Encuentra el período en cada uno.
c) Explica cuáles son las cifras decimales que están antes del período.

6 Escribe:

a) La expresión decimal que tiene por parte entera 5, parte decimal no periódica (anteperíodo) 3 y período 8.
b) La expresión decimal menor que la unidad, de anteperíodo 7 y período 35.

7 Responde:

Cuántas cifras tiene el período en el número decimal de:

a) $\frac{5}{9}$; $\frac{39}{9}$; $\frac{125}{9}$; $\frac{708}{9}$; $\frac{1.501}{9}$ b) $\frac{5}{99}$; $\frac{39}{99}$; $\frac{125}{99}$; $\frac{708}{99}$; $\frac{1.501}{99}$

c) $\frac{5}{999}$; $\frac{39}{999}$; $\frac{125}{999}$; $\frac{708}{999}$; $\frac{1.501}{999}$

¿Qué conclusión sacas de lo anterior?

8 Completa: En una fracción racional que tenga por denominador a:

a) 9, el período de su cociente tiene ______ cifra.
b) ______, el período de su cociente tiene 4 cifras.
c) 999... 9 (n veces 9), el período de su cociente tiene______cifras.

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 1

Un vaso contiene vino y otro contiene agua, ambos en la misma cantidad. Se toma una cucharadita del vaso de vino y se vierte en el vaso del agua. Se remueve la mezcla y luego se toma una cucharadita de la misma y se vierte en el vaso de vino, ¿hay más vino en el agua que agua en el vino o viceversa?

1.2.2 Fracción Generatriz de un Número Decimal Periódico

Ya vimos que si tenemos un número racional y dividimos el numerador entre el denominador, obtenemos un decimal finito o un decimal infinito periódico. Ahora vamos a responder esta pregunta: ¿Todo número decimal infinito periódico será una fracción racional?

PRIMERA EXPERIENCIA

- Completa:
  a) Una fracción racional propia diferente de la fracción $\frac{0}{9}$, que tenga denominador 9, genera un decimal periódico de período ________.
  b) Una fracción racional propia diferente de la fracción $\frac{0}{99}$, que tenga denominador 99, genera un decimal periódico de período ________.
  c) Una fracción racional propia diferente de la fracción $\frac{0}{999}$, que tenga denominador 999, genera un decimal periódico de período ________.

- Teniendo en cuenta la experiencia anterior, encuentra la fracción racional que genera cada uno de los siguientes números decimales periódicos:

  a) $0,\overset{\frown}{1}$ b) $0,\overset{\frown}{2}$ c) 0,555... d) $0,\overset{\frown}{01}$ e) 0,050505...

- Completa:
  a) Una fracción racional, con numerador un número natural diferente de 0, menor que 99 y de denominador 99, tiene período ________.
  b) Una fracción racional, con numerador un número natural diferente de 0, menor que 999 y de denominador 999, tiene período ________.

- Utiliza la actividad anterior para encontrar la fracción racional de cada uno de los siguientes números decimales periódicos:

  a) $0,\overset{\frown}{10}$ b) $0,\overset{\frown}{87}$ c) $0,\overset{\frown}{98}$ d) $0,\overset{\frown}{010}$ e) $0,\overset{\frown}{098}$

- Contesta verdadero o falso:

  La fracción racional correspondiente a un decimal periódico puro, de parte entera 0, tiene por numerador al período y por denominador un número formado por tantos 9 como cifras tiene el período.

APRENDAMOS

- La fracción racional que corresponde a un número decimal periódico se llama FRACCIÓN GENERATRIZ.

- La FRACCIÓN GENERATRIZ de un número decimal periódico puro, cuya parte entera es 0, tiene:
  - Por numerador al período del número decimal.
  - Por denominador un número con todas sus cifras iguales a 9 y tantos 9 como cifras tiene el período.

Ejemplos

$$0,\overset{\frown}{378} = \frac{378}{999} \quad \begin{array}{l} \longrightarrow \text{Período: } 378 \\ \longrightarrow 3 \text{ nueves, } 3 \text{ cifras} \end{array} \quad ; \quad 0,\overset{\frown}{007} = \frac{007}{999} = \frac{7}{999}$$

SEGUNDA EXPERIENCIA

- Recordemos que cuando multiplicamos un número decimal por una potencia de 10 (10, 100, 1000,...), la coma se corre a la derecha tantas cifras como ceros tenga la potencia. Por ejemplo:

$$10 \times 2,4\overset{\frown}{5} = 24,\overset{\frown}{5} \quad ; \quad 1000 \times 0,375\overset{\frown}{81} = 375,\overset{\frown}{81}$$

- Vamos a utilizar este concepto para hallar la FRACCIÓN GENERATRIZ de un número decimal periódico mixto.

- Hallemos la fracción generatriz que corresponde a los números decimales: a) $3,2\overset{\frown}{51}$ y b) $15,32\overset{\frown}{5}$. Lo primero que debemos hacer es convertir el número decimal periódico mixto en número decimal periódico puro. Esto lo logramos multiplicando y dividiendo por potencias de 10 adecuadas. Veamos:

a)
$$3,2\overset{\frown}{51} = \frac{10 \times 3,2\overset{\frown}{51}}{10} = \frac{32,\overset{\frown}{51}}{10} = \frac{32 + 0,\overset{\frown}{51}}{10} = \frac{32 + \frac{51}{99}}{10} = \frac{\frac{3219}{99}}{10} = \frac{3219}{990}$$

Luego, $3,2\overset{\frown}{51} = \dfrac{3219}{990}$

b)
$$15,32\overset{\frown}{5} = \frac{100 \times 15,32\overset{\frown}{5}}{100} = \frac{1532,\overset{\frown}{5}}{100} = \frac{1532 + 0,\overset{\frown}{5}}{100} = \frac{1532 + \frac{5}{9}}{100} = \frac{\frac{13788+5}{9}}{100} = \frac{13793}{900}$$

Luego, $15,32\overset{\frown}{5} = \dfrac{13793}{900}$

APRENDAMOS

- Podemos encontrar la fracción generatriz de un número decimal periódico mixto así:

– Multiplicamos y dividimos el número decimal por una potencia de 10 que permita correr la coma hasta donde comienza el período. Por ejemplo: $-12{,}03\widehat{2} = \dfrac{100 \times (-12{,}03\widehat{2})}{100} = \dfrac{-1203{,}\widehat{2}}{100}$

– Hallamos la fracción que genera el período: $\dfrac{-1203{,}\widehat{2}}{100} = -\dfrac{1203 + 0{,}\widehat{2}}{100} = -\dfrac{1203 + \frac{2}{9}}{100}$

– Efectuamos las operaciones con fracciones que resultaron en el paso anterior:

$$-\frac{1203 + \frac{2}{9}}{100} = -\frac{10827 + 2}{900} = -\frac{10829}{900}$$

Luego, $-12{,}03\widehat{2} = -\dfrac{10829}{900}$

- Las dos experiencias anteriores nos permiten afirmar que: **TODO NÚMERO DECIMAL PERIÓDICO ES UN NÚMERO RACIONAL.**

1.2.3 Comparación de Números Decimales

¿Recuerdas cómo se comparan dos fracciones?

¡Claro! Las escribo con el mismo denominador. Será mayor la que quede con el mayor numerador.

¿Y cómo se comparan dos números decimales finitos?

Una forma de hacerlo es escribiendo sus fracciones generatrices con igual denominador y comparando sus numeradores.

Ejemplo

Comparemos los decimales 7,34 y 7,348

Solución

– En primer lugar, igualamos con ceros el número de cifras decimales; así:

7,34 = 7,340.................... ¿por qué?
7,348 = 7,348

– Ahora hallamos la fracción generatriz de cada uno:

$$7{,}340 = \frac{7340}{\underbrace{1000}} \quad ; \quad 7{,}348 = \frac{7348}{\underbrace{1000}}$$

igual denominador

7348 > 7340

APRENDAMOS

- Al comparar dos números decimales de igual signo, se comparan, de izquierda a derecha, las UNIDADES CORRESPONDIENTES hasta llegar a unidades diferentes.

Ejemplos: $7{,}63 > 5{,}98$; $-4{,}057 > -4{,}059$

$7>5$ $\qquad (-7) > (-9)$

- Si los dos números son positivos, es mayor el que tenga el mayor valor absoluto de la primera cifra en que difieren.
- Si los dos números son negativos, es mayor el que tenga el menor valor absoluto de la primera cifra en que difieren.

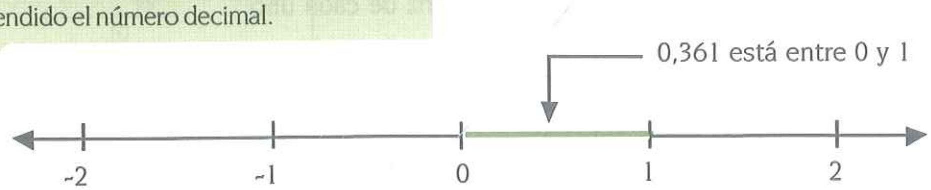
- ¿Qué pasa si los dos números decimales tienen diferente signo? ¿Quién es mayor? ¿Por qué?

1.2.4 Representación Gráfica de Números Decimales

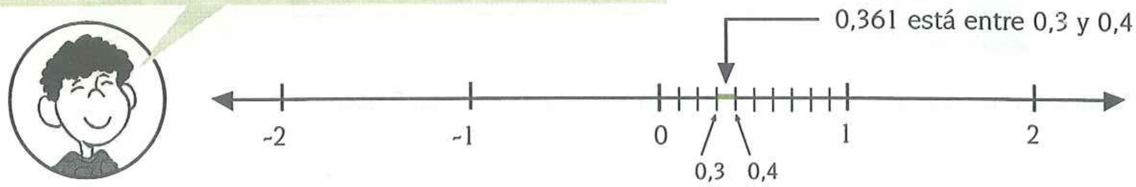
En la unidad anterior recordamos cómo se representa una fracción en la recta numérica. En esta sección vamos a aprender a representar un decimal finito o un decimal infinito periódico en la recta.

PRIMERA EXPERIENCIA

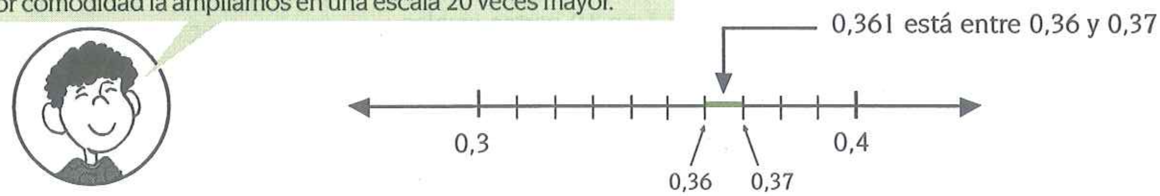
- Representemos el número 0,361 en la recta numérica.
- La fracción generatriz de 0,361 es $\frac{361}{1000}$ y no es simplificable. Como el denominador es muy grande, se dificulta dividir la unidad en 1000 partes iguales y tomar 361 de ellas. ¿Qué hacemos?



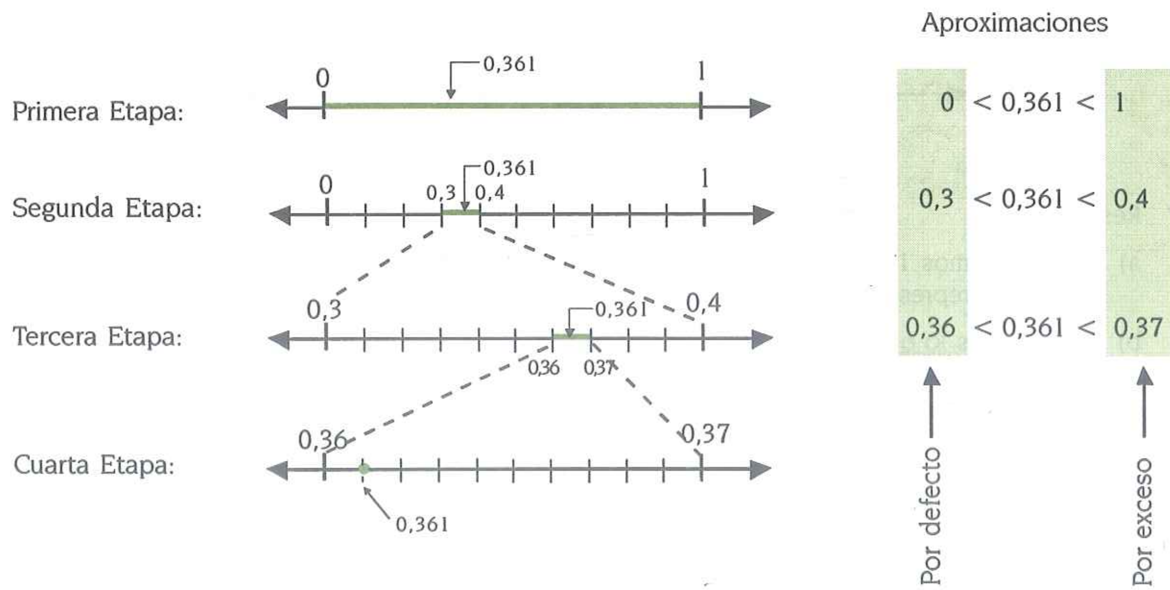
Luego, dividimos la unidad resaltada: 0 ├────┤ 1 en 10 unidades de igual longitud, tales que 0,3 < 0,361 < 0,4.



Como ninguna de estas 10 divisiones iguales: 0 ├┼┼┼┼┼┼┼┼┼┤ 1 coincide con el número decimal 0,361, entonces tomamos la nueva unidad ├─┤ (**0,3 0,4**) y la dividimos en otras 10 unidades de igual longitud. Por comodidad la ampliamos en una escala 20 veces mayor.



- Para que tengamos una visión de conjunto de todo el proceso realizado, vamos a representar en un solo esquema todas las etapas:

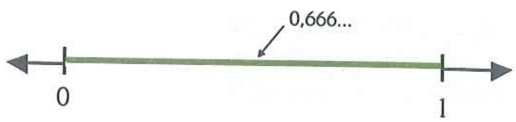


En 0,361

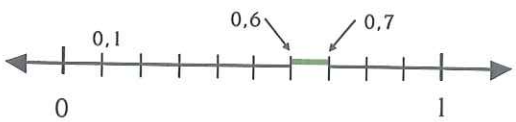
- 0 ; 0,3 ; 0,36 se llaman APROXIMACIONES DECIMALES POR DEFECTO
- 1 ; 0,4 ; 0,37 se llaman APROXIMACIONES DECIMALES POR EXCESO

SEGUNDA EXPERIENCIA

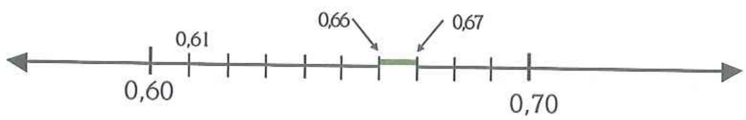
- Vamos a representar en la recta numérica el número decimal 0,666...
- Realicemos las siguientes etapas:
  - PRIMERA ETAPA: 0,666... está entre 0 y 1 (0 < 0,666...< 1)



  - SEGUNDA ETAPA: 0,666... está entre 0,6 y 0,7 (0,6 < 0,666...< 0,7)
    Dividimos la unidad de extremos 0 y 1 en 10 partes iguales.



  - TERCERA ETAPA: 0,666... está entre 0,66 y 0,67 (0,66 < 0,666... < 0,67)
    Para apreciar con claridad que 0,66 < 0,666... < 0,67 aumentamos 10 veces la magnitud de la unidad de extremos 0,6 y 0,7 y, luego, la dividimos en 10 partes iguales:



- Responde:

a) Si aumentamos 10 veces la magnitud de una de las 10 divisiones de la etapa anterior, ¿cómo quedará la representación aproximada de 0,666... en la cuarta etapa? ¿y en la quinta etapa?

b) Si repetimos lo que acabamos de hacer, en una etapa posterior, ¿coincidirá el número decimal 0,666... con una subdivisión de la unidad? Explica.

c) ¿Es racional el número decimal 0,666...? ¿cuál es su fracción generatriz? ¿la representación de 0,666... en la recta numérica es la misma que la de la fracción $\frac{2}{3}$? ¿por qué? Represéntala.

d) ¿Puedo representar mediante un punto de la recta numérica a la fracción $\frac{2}{3}$? ¿Puedo representar con un punto de la recta numérica a 0,666... sin utilizar su fracción generatriz? ¿por qué?

e) Los números 0; 0,6; 0,66 y 0,666 son APROXIMACIONES POR DEFECTO de 0,666..., ¿Es 0,66666 una aproximación por defecto de 0,666...? ¿Por qué? Escribe otra aproximación por defecto de 0,666...

f) Los números 1; 0,7; 0,67 y 0,667 son APROXIMACIONES POR EXCESO de 0,666..., ¿Es 0,66667 una aproximación por exceso de 0,666...? ¿Por qué?

EJERCICIO 1.3

1 Completa:

a) $0,\widehat{3} = \frac{?}{9}$; b) $0,\widehat{8} = \frac{8}{?}$; c) $0,\widehat{02} = \frac{?}{99}$; d) $0,\widehat{123} = \frac{123}{?}$

2 Encuentra la fracción generatriz de:
a) $5,1\widehat{7}$; b) $0,43\widehat{2}$; c) $3,\widehat{5}$; d) $60,32$; e) $8,777...$

3 Escribe dentro del paréntesis una V o una F si el enunciado correspondiente es verdadero o falso respectivamente.

a) $3,156 < 3,156000001 < 3,1560001 < 3,157$ ( )
b) $-2,541 < -2,5401 < -2,54001 < -2,54$ ( )

4 Escribe tres aproximaciones por defecto de:
a) $4,751$; b) $0,104$; c) $-2,153$; d) $-0,107$

5 Escribe tres aproximaciones por exceso de los números decimales del ejercicio anterior.

6 Sin hacer la división, halla el cociente de:
a) $\frac{37}{99}$ b) $\frac{458}{999}$ c) $\frac{3.815}{9999}$ d) $\frac{23}{99}$

7 Escribe tres números racionales que estén entre:
a) $8,13$ y $8,14$ b) $-5,83$ y $-5,82$ c) $-\frac{2}{3}$ y $-\frac{1}{2}$

8 Teniendo en cuenta las siguientes igualdades:

$$0,\widehat{9} = 0,\widehat{8} + 0,\widehat{1} = \frac{8}{9} + \frac{1}{9} = \frac{9}{9} = 1$$

$$3,4\widehat{9} = \frac{34,\widehat{9}}{10} = \frac{34 + 0,\widehat{9}}{10} = \frac{34 + 1}{10} = \frac{35}{10} = 3,5$$

$$2,72\widehat{9} = \frac{272,\widehat{9}}{100} = \frac{272 + 0,\widehat{9}}{100} = \frac{272 + 1}{100} = \frac{273}{100} = 2,73$$

Podemos concluir: todo decimal periódico de período 9 es un decimal exacto.

Ejemplos: $0,\widehat{9} = 1$; $3,4\widehat{9} = 3,5$; $2,72\widehat{9} = 2,73$

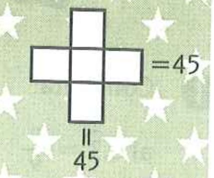
Escribe a qué es igual: a) $0,13\widehat{9}$; b) $1,018\widehat{9}$; c) $13,\widehat{9}$

9 Representa aproximadamente, utilizando papel milimetrado
a) $2,01$; b) $2,10$; c) $2,016$; d) $-2,01$ e) $-1,563$

10 ¿Cómo podrías representar en la recta numérica el número $0,\widehat{3}$ con total exactitud?

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 2

Hallar cinco números primos diferentes de tal manera que al colocar uno en cada una de las casillas de la cruz, tanto la suma de los tres números horizontales como la de los tres verticales sea igual a 45.



1.2.5 Operaciones con Números Decimales - Redondeo

- En la mayoría de los cálculos y mediciones no podemos trabajar con un número infinito de cifras decimales. Por esta razón, para operar con números decimales finitos o decimales infinitos periódicos podemos hacer una de éstas dos cosas:

  1. Escribir la fracción generatriz de cada número decimal y realizar la operación con números fraccionarios correspondiente, o
  2. Aproximar o redondear tomando un número conveniente de las primeras cifras decimales y descartando las otras.

- Los siguientes ejemplos nos muestran cómo redondear un número decimal:

EJEMPLO 1

Aproximemos el número decimal 45,37943 a las milésimas.

SOLUCIÓN

- Para aproximar a la cifra de las milésimas observamos la cifra de las diezmilésimas (en este caso **4**). Como esta cifra es menor que 5, entonces dejamos como cifra de las milésimas la que está, es decir **9.**
- Por lo tanto, al aproximar el número 45,37943 a las milésimas nos queda: 45,379. Esta es una aproximación por defecto, ya que **45,379 < 45,37943.**

EJEMPLO 2

Aproximemos el número decimal periódico -83,83535... a la cifra de las centésimas.

SOLUCIÓN

- Para aproximar la cifra de las centésimas, observamos la cifra de las milésimas (en este caso el **5**). Como esta cifra es mayor o igual a 5, entonces la nueva cifra de las centésimas la obtenemos sumando 1 a la cifra de las centésimas actual (3+1=4).
- Por lo tanto, al aproximar el número decimal -83,83535... a la cifra de las centésimas nos queda: **-83,84.**
- **PREGUNTA:** ¿Esta aproximación es por exceso o por defecto? ¿Por qué?
- El siguiente ejemplo nos muestra cómo operar números decimales.

EJEMPLO 3

Dados los números decimales $3{,}2\overparen{51}$ y $15{,}32\overparen{5}$, calculemos:

a) $3{,}2\overparen{51} + 15{,}32\overparen{5}$ b) $3{,}2\overparen{51} - 15{,}32\overparen{5}$

c) $3{,}2\overparen{51} \times 15{,}32\overparen{5}$ d) $3{,}2\overparen{51} \div 15{,}32\overparen{5}$

SOLUCIÓN

a)

PRIMER MÉTODO: usando las fracciones generatrices.	**SEGUNDO MÉTODO: aproximando cada número a una cifra decimal cualquiera; por ejemplo, a las milésimas.**
$3{,}2\overparen{51} = \dfrac{3219}{990}$; $15{,}32\overparen{5} = \dfrac{13793}{900}$ $\therefore 3{,}2\overparen{51} + 15{,}32\overparen{5} = \dfrac{3219}{990} + \dfrac{13793}{900}$ $= \dfrac{32190 + 151723}{9900}$ $= \dfrac{183913}{9900}$ $= 18{,}577070...$ $\therefore \mathbf{3{,}2\overparen{51} + 15{,}32\overparen{5} = 18{,}5\overparen{770}}$	$3{,}2\overparen{51} = 3{,}\ 25151... \approx 3{,}252$ $15{,}32\overparen{5} = 15{,}32555\ ... \approx 15{,}326$ $\therefore 3{,}2\overparen{51} + 15{,}32\overparen{5} \approx 3{,}252 + 15{,}326$ $\begin{array}{r} 3{,}252 \\ +\ 15{,}326 \\ \hline 18{,}578 \end{array}$ $\therefore \mathbf{3{,}2\overparen{51} + 15{,}32\overparen{5} \approx 18{,}578}$

b)

PRIMER MÉTODO: usando las fracciones generatrices.	**SEGUNDO MÉTODO: aproximando cada número a una cifra decimal cualquiera; por ejemplo, a las milésimas.**
$3{,}2\overparen{51} = \dfrac{3219}{990}$; $15{,}32\overparen{5} = \dfrac{13793}{900}$ $\therefore 3{,}2\overparen{51} - 15{,}32\overparen{5} = \dfrac{3219}{990} - \dfrac{13793}{900}$ $= \dfrac{32190 - 151723}{9900}$ $= -\dfrac{119533}{9900}$ $= -12{,}074040...$ $\therefore \mathbf{3{,}2\overparen{51} - 15{,}32\overparen{5} = 12{,}0\overparen{740}}$	$3{,}2\overparen{51} = 3{,}\ 25151... \approx 3{,}252$ $15{,}32\overparen{5} = 15{,}32525\ ... \approx 15{,}325$ $\therefore 3{,}2\overparen{51} - 15{,}32\overparen{5} \approx 3{,}252 - 15{,}325$ $\begin{array}{r} 15{,}325 \\ -\ \ 3{,}252 \\ \hline 12{,}073 \end{array}$ $\therefore \mathbf{3{,}2\overparen{51} - 15{,}32\overparen{5} \approx -12{,}073}$

c)

PRIMER MÉTODO: usando las fracciones generatrices.	**SEGUNDO MÉTODO: por aproximaciones:**
$3{,}2\overset{\frown}{51} \times 15{,}32\overset{\frown}{5} = \dfrac{3219}{990} \times \dfrac{13793}{900}$ $= \dfrac{3219 \times 13793}{990 \times 900}$ $= \dfrac{44399667}{891000}$ $= \dfrac{14799889}{297000}$ $= 49{,}831276074074...$ $\therefore$ **$3{,}2\overset{\frown}{51} \times 15{,}32\overset{\frown}{5} = 49{,}831276074\overset{\frown}{074}...$**	$3{,}2\overset{\frown}{51} \approx 3{,}252$ $15{,}32\overset{\frown}{5} \approx 15{,}326$ $\therefore\ 3{,}2\overset{\frown}{51} \times 15{,}32\overset{\frown}{5} \approx 3{,}252 \times 15{,}326$ $\begin{array}{r} 3{,}252 \\ \times\ 15{,}326 \\ \hline 19512 \\ 6504 \\ 9756 \\ 16260 \\ 3252 \\ \hline 49{,}840152 \end{array}$ $\therefore$ **$3{,}2\overset{\frown}{51} \times 15{,}32\overset{\frown}{5} \approx 49{,}840152$**

c)

PRIMER MÉTODO: usando las fracciones generatrices.	**SEGUNDO MÉTODO: por aproximaciones:**
$3{,}2\overset{\frown}{51} \div 15{,}32\overset{\frown}{5} = \dfrac{3219}{990} \div \dfrac{13793}{900}$ $= \dfrac{3219}{990} \times \dfrac{900}{13793}$ $= \dfrac{3219 \times \overset{10}{\cancel{900}}}{\underset{11}{\cancel{990}} \times 13793}$ $= \dfrac{32190}{151723}$ $\therefore$ **$3{,}2\overset{\frown}{51} \div 15{,}32\overset{\frown}{5} = 0{,}2\underbrace{\overset{\frown}{12162954...70}}_{636\ \text{cifras}}$** **¡El cociente tiene un período de 636 cifras!**	$3{,}2\overset{\frown}{51} \approx 3{,}252$ $15{,}32\overset{\frown}{5} \approx 15{,}325$ $\therefore\ 3{,}2\overset{\frown}{51} \div 15{,}32\overset{\frown}{5} \approx 3{,}252 \div 15{,}325$ $3{,}252 \,\lfloor\, 15{,}325$ $\begin{array}{l\|l} 32520 & 15325 \\ \hline 018700 & 0{,}21\underbrace{220228...605}_{51\ \text{cifras}}\ \underbrace{220228...605}_{51\ \text{cifras}}... \\ \ \ 033750 & \\ \ \ \ 031000 & \\ \ \ \ \ 0035000 & \\ \ \ \ \ \ \ 043500 & \\ \ \ \ \ \ \ \ 128500 & \\ \ \ \ \ \ \ \ \ 05900 & \end{array}$ $\therefore$ **$3{,}2\overset{\frown}{51} \div 15{,}32\overset{\frown}{5} \approx 0{,}212$**

Comparando los resultados, podemos comprobar que las diferencias son muy pequeñas. Por este motivo, la aproximación o redondeo es un método muy útil y práctico para realizar cálculos con números decimales periódicos.

EJERCICIO 1.4

1 Aproxima o redondea a las milésimas los siguientes números decimales:

a) - 35,2476	b) 0,0724	c) 249,79896
d) -0,532424...	e) 43,6777...	f) $-2,\overset{\frown}{356}$
g) $4,82\overset{\frown}{32}$	h) $-27,0\overset{\frown}{567}$	i) 3,42

2 Escribe la fracción generatriz de cada uno de los números decimales del ejercicio anterior.

3 Realiza los siguientes cálculos de dos maneras:

1) Operando con las fracciones generatrices
2) Usando las aproximaciones a las milésimas

a) $(-35,2476 + 249,79896) \times (-2,\overset{\frown}{356})$

b) $(3,42 - 27,0\overset{\frown}{567}) \div (4,82\overset{\frown}{32} + 0,0724)$

c) $43,6\overset{\frown}{7} \div (-27,0\overset{\frown}{567} \times 3,42) + (-0,53\overset{\frown}{24})$

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 3

Tenemos 21 piezas de idéntica apariencia. Una de ellas es ligeramente más pesada que las otras. ¿En cuántas pesadas comparativas puede encontrarse la pieza más pesada con la ayuda de una balanza de 2 platillos?

1.2.6 Los Números Irracionales y su Representación Gráfica

- Acabamos de estudiar que cualquier número decimal finito o decimal infinito periódico puro o mixto, corresponde a un **NÚMERO RACIONAL**, ya que todos ellos pueden escribirse en la forma $\frac{a}{b}$, siendo **a** y **b** números enteros y **b≠0.**
- Los números decimales infinitos no periódicos como: 7,32548912... ; -0,3141592... , 1,41421356... no son racionales y por esta razón se les denomina **NÚMEROS IRRACIONALES**. Al conjunto de los números irracionales lo representamos mediante el símbolo **Q'.**
- Dos números irracionales de utilización frecuente en los cursos de matemáticas son $\sqrt{2}$ y π. Su representación decimal es la siguiente:

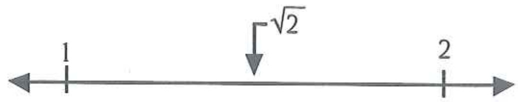
$$\sqrt{2} = 1,4142135623...$$
$$\pi = 3,14592635...$$

- La siguiente experiencia nos permitirá obtener la representación decimal de $\sqrt{2}$ y una explicación de por qué este número no es racional.

PRIMERA EXPERIENCIA

- Queremos saber a qué es igual $\sqrt{2}$.
- Si recordamos la definición de raíz cuadrada de un número, para hallar $\sqrt{2}$ debemos encontrar un número positivo que elevado al cuadrado nos de 2; es decir, debemos encontrar un número positivo **x** tal que $x^2=2$. Este número positivo **x** es precisamente $\sqrt{2}$.
- Empecemos buscando dos números enteros positivos consecutivos entre cuyos cuadrados esté 2. Estos números son 1 y 2 ya que:

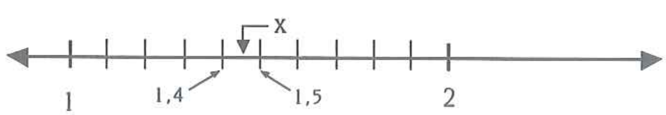
$$\left.\begin{array}{l} 1^2 = 1 \;:\; 1 < 2 \\ 2^2 = 4 \;:\; 2 < 4 \end{array}\right\} \therefore \sqrt{2} \text{ está entre } 1 \text{ y } 2.$$



Luego, la expresión decimal que $x = \sqrt{2}$ es **1,...**

- Como **x** debe estar entre 1 y 2, entonces probamos si es 1,1 ; 1,2 ; 1,3 ; 1,4 ; 1,5;... o 1,9 elevando estos números al cuadrado hasta obtener un resultado que sea menor o igual a 2:

$$\left.\begin{array}{l} (1{,}1)^2 = 1{,}21 \\ (1{,}2)^2 = 1{,}44 \\ (1{,}3)^2 = 1{,}69 \\ (1{,}4)^2 = 1{,}96 \\ (1{,}5)^2 = 2{,}25 \end{array}\right\} \therefore \sqrt{2} \text{ está entre } 1{,}4 \text{ y } 1{,}5$$



Luego, la expresión decimal que $x = \sqrt{2}$ es **1,4...**

- Como **x** debe estar entre 1,4 y 1,5, entonces probamos si es 1,41 ; 1,42; ..., 1,49

$$\left.\begin{array}{l} (1{,}41)^2 = 1{,}9881 \\ (1{,}42)^2 = 2{,}0164 \end{array}\right\} \therefore \sqrt{2} \text{ está entre } 1{,}41 \text{ y } 1{,}42$$

Luego, la expresión decimal que $x = \sqrt{2}$ es **1,41...**

- Procediendo del mismo modo podríamos obtener, teóricamente, el número de cifras decimales que deseemos de $x = \sqrt{2}$; por ejemplo, $\sqrt{2}$ podría ser 1,414213562373... ya que $(1{,}414213562373)^2 = 1{,}999999999$.

- ¿Será posible que, en etapas sucesivas de cálculo, podamos obtener un decimal finito o un decimal infinito periódico de $\sqrt{2}$? Si $\sqrt{2}$ fuera un decimal finito o decimal infinito periódico, entonces podríamos representarlo como una fracción racional irreducible. Mostremos que no es posible.

PRUEBA OPCIONAL

- Supongamos que $\sqrt{2}$ es un número racional. Luego, existen enteros **a** y **b** tales que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$
- Por lo tanto:

$$(\sqrt{2})^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2$$

$$\therefore\ 2 = \frac{a^2}{b^2}$$

$$\therefore\ a^2 = 2b^2$$

- Al descomponer a **a** en sus factores primos puede ocurrir que **2** sea factor de **a** o que **2** no sea factor de **a**, y al descomponer a **b** en sus factores primos puede ocurrir que **2** sea factor de **b** o que no lo sea.
- Si 2 es factor de **a** y **b** entonces a^2 y b^2 tendrían un número par de doses (¿por qué?) y como $a^2=2b^2$ entonces el lado izquierdo tendría un número par de doses y el derecho tendría un número impar de doses (¿por qué?), lo cual es una contradicción.
- Si 2 no es factor de **a** ni de **b** entonces ni a^2 ni b^2 tendrían a 2 como factor por lo que la igualdad $a^2=2b^2$ no podría cumplirse (¿por qué?), presentándose de nuevo una contradicción.
- Igual conclusión obtendremos si suponemos que 2 es factor de uno de ellos y no del otro.
- La contradicción ocurre debido a la suposición que hicimos al principio de que $\sqrt{2}$ es un número racional. Por lo tanto esta suposición es **falsa** y, en consecuencia, $\sqrt{2}$ es un número irracional.

- Así pues, el proceso para encontrar los decimales de $\sqrt{2}$ podemos seguirlo indefinidamente sin obtener cifras periódicas.
- En forma similar, podemos comprobar que números como $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, ... también tienen un desarrollo decimal infinito no periódico y, por lo tanto, son **NÚMEROS IRRACIONALES.**

APRENDAMOS

- A los números decimales infinitos no periódicos se les denomina **NÚMEROS IRRACIONALES.**
- Las **RAÍCES INEXACTAS** son números irracionales; por ejemplo $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[3]{5}$,... son números irracionales.
- Los inversos aditivos u opuestos de las anteriores raíces como $-\sqrt{2}$, $-\sqrt{3}$, $-\sqrt{5}$, $-\sqrt{6}$, $-\sqrt[3]{2}$, $-\sqrt[3]{3}$, $-\sqrt[3]{4}$, $-\sqrt[3]{5}$,... también son números irracionales.
- El número $\pi=3{,}141592653589...$ que se define como el cociente entre la longitud de una circunferencia y su diámetro es otro ejemplo de número irracional.
- El conjunto de los **NÚMEROS IRRACIONALES** se simboliza con **Q'**.

SEGUNDA EXPERIENCIA

- En general, la ubicación precisa de un número irracional en la recta numérica es imposible. Pero podemos representar algunos de ellos (como $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$) utilizando una herramienta geométrica muy importante: **EL TEOREMA DE PITÁGORAS.**

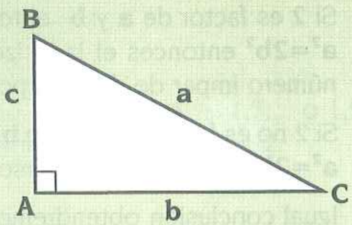
RECORDEMOS

TEOREMA DE PITÁGORAS

En todo triángulo rectángulo se cumple que el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos.

HIPÓTESIS:

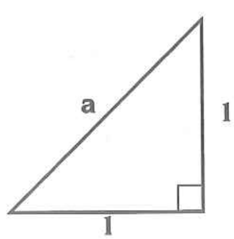
- El ΔABC es rectángulo en A.
- **a** es la longitud de la hipotenusa
- **b** y **c** son las longitudes de los catetos



TESIS:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

- Calculemos la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 1 cm cada uno.



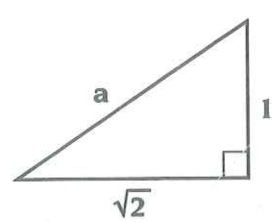
$a^2 = 1^2 + 1^2$ .... Teorema de Pitágoras

$\therefore\ a^2 = 1 + 1 = 2$ .... ¿por qué?

$\therefore\ a\ = \sqrt{2}$ .... ¿por qué?

CONCLUSIÓN: La longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 1cm cada uno es $\sqrt{2}$ cm.

- Ahora calculemos la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 1cm y $\sqrt{2}$ cm.
  - Para construir este triángulo rectángulo tomemos como cateto de longitud $\sqrt{2}$ cm, la hipotenusa **a** del triángulo rectángulo del ejercicio anterior:



  - A continuación, hallemos la hipotenusa de este triángulo:

$$a^2 = (\sqrt{2})^2 + 1^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{Teorema de Pitágoras}$$

$$\therefore\ a^2 = 2+1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\sqrt{2})^2 \text{ y } 1^2 = 1$$

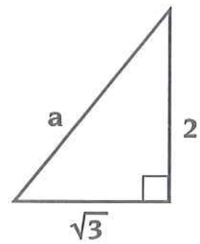
$$\therefore\ a^2 = 3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{¿por qué?}$$

$$\therefore\ a = \sqrt{3} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{¿por qué?}$$

- **CONCLUSIÓN:** La longitud de la hipotenusa de un triángulo cuyos catetos miden 1cm y $\sqrt{2}$ cm es $\sqrt{3}$ cm.

• Finalmente, calculemos la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 2 cm y $\sqrt{3}$ cm.

- Como uno de los catetos debe medir $\sqrt{3}$ cm, entonces aprovechamos la hipotenusa del triángulo rectángulo anterior, así;



- Ahora, hallemos la hipotenusa de este triángulo rectángulo.

$$a^2 = (\sqrt{3})^2 + 2^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{Teorema de Pitágoras}$$

$$\therefore\ a^2 = 3+4=7 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\sqrt{3})^3 = 3 \text{ y } 2^2 = 4$$

$$\therefore\ a = \sqrt{7} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{¿por qué?}$$

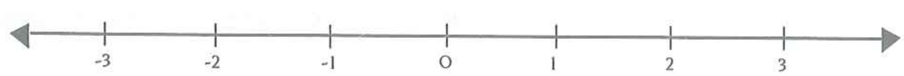
- **CONCLUSIÓN:** La longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 2 cm y $\sqrt{3}$ cm es $\sqrt{7}$ cm.

TERCERA EXPERIENCIA

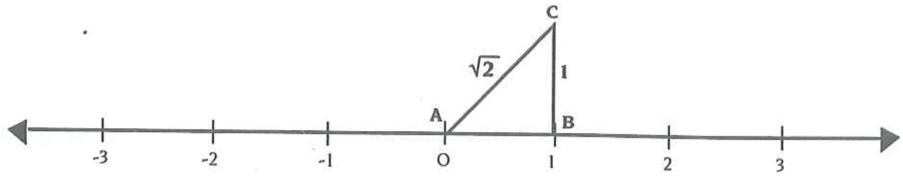
• En la experiencia anterior aprendimos a calcular las longitudes de las hipotenusas de algunos triángulos rectángulos. Estas longitudes están expresadas mediante números irracionales como $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ y $\sqrt{7}$. El procedimiento que utilizamos fue el Teorema de Pitágoras. Y lo vamos a aplicar nuevamente para representar números irracionales como $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{7}$, ... en la recta numérica.

• Para representar a $\sqrt{2}$ en la recta numérica hacemos lo siguiente:

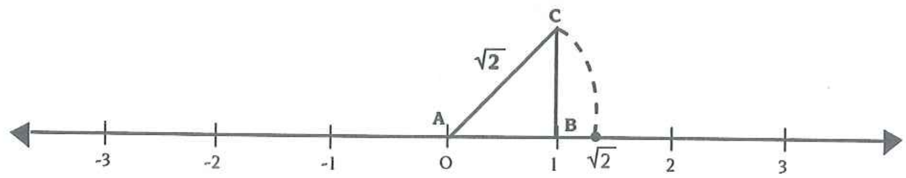
- Dibujamos una recta numérica y la graduamos eligiendo una unidad de medida conveniente (por ejemplo 15 mm)



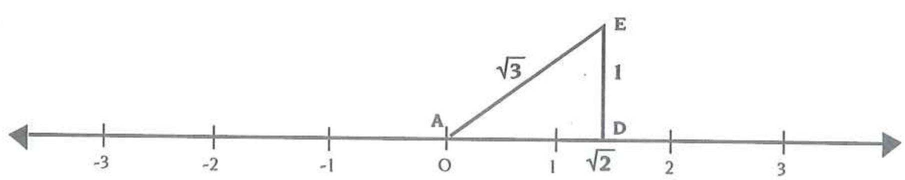
- Según vimos en la experiencia anterior, $\sqrt{2}$ es la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 1 unidad de longitud cada uno. Por esta razón, construimos el triángulo rectángulo ABC tomando el cateto $\overline{AB}=1$ unidad sobre la recta numérica y el cateto $\overline{BC}=1$ unidad, perpendicular a $\overline{AB}$. Luego trazamos la hipotenusa $\overline{AC}$:



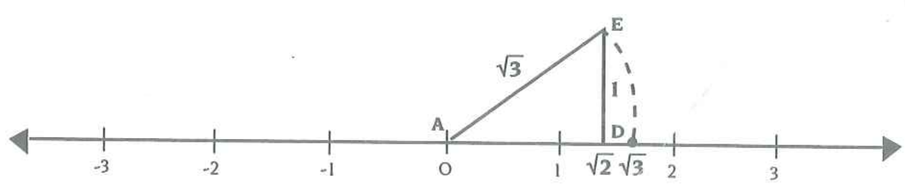
- Como la longitud de la hipotenusa es $|\overline{AC}| = \sqrt{2}$, entonces para ubicar este número en la recta numérica tomamos una abertura en el compás igual a $\overline{AC}$ y trazamos un arco que intercepta a la recta numérica. El punto de intersección de este arco con la recta numérica es el punto correspondiente a $\sqrt{2}$.



- Para representar a $\sqrt{3}$ en la recta numérica procedemos así:
  - Ya vimos que $\sqrt{3}$ es la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden $\sqrt{2}$ y 1, entonces dibujamos sobre la recta numérica un triángulo rectángulo de catetos $\sqrt{2}$ y 1. Como ya tenemos a $\sqrt{2}$ entonces trazamos sobre la recta numérica el segmento $\overline{AD}$ de longitud $\sqrt{2}$. Por el extremo D, trazamos $\overline{DE} \perp \overline{AD}$ tal que $|\overline{DE}| = 1$, y luego trazamos la hipotenusa $\overline{AE}$.



  - Como la longitud de la hipotenusa del ΔADE es $|\overline{AE}| = \sqrt{3}$, entonces para ubicar este número en la recta numética tomamos una abertura en el compás igual a $\overline{AE}$ y trazamos un arco que intercepte a la recta numérica. El punto de intersección de este arco con la recta numérica es el punto correspondiente a $\sqrt{3}$

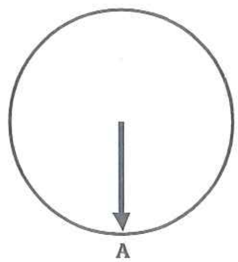


- Por un procedimiento similar podemos ubicar en la recta números irracionales como $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{11}$, ... Dejamos como ejercicio al lector realizar las experiencias correspondientes.

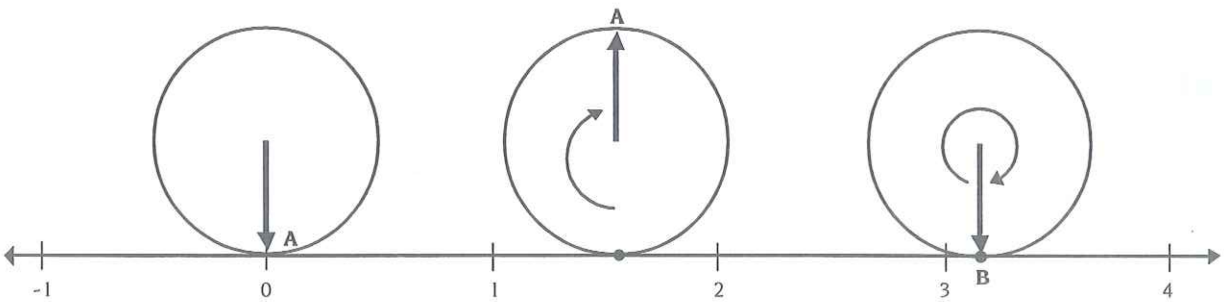
CUARTA EXPERIENCIA

- Representemos en la recta numérica el número π.
- Dibuja en tu cuaderno una línea recta y gradúala de tal manera que la unidad de medida sea de 3 cm:

- En un pedazo de cartulina, traza una circunferencia de $\frac{1}{2}$ unidad (1,5 cm) de radio, recórtala y señala un punto A sobre ella.



- Haz coincidir el punto A de la circunferencia con el 0 de la línea recta.



- Gira, sin dejar deslizar, el círculo sobre la recta numérica y llama B al punto de la recta que coincida con el punto A, cuando éste vuelve a estar en contacto con la recta después de dar una vuelta completa.
- Responde:
  - ¿Cómo se calcula la longitud de una circunferencia?
  - ¿Cuántas unidades de longitud tiene una circunferencia de $\frac{1}{2}$ unidad de radio?
  - Observando la recta, ¿aproximadamente con qué número de la misma coincide la longitud de esta circunferencia?
  - ¿Podemos garantizar, después de realizar esta experiencia, que es exacta la ubicación de π en la recta numérica? ¿por qué?

¡ATENCIÓN!

En general, la representación precisa, en la recta, de un número irracional presenta enormes dificultades. Sólo algunos de ellos, como los que acabamos de estudiar, pueden representarse recurriendo a métodos geométricos.

EJERCICIO 1.5

1 Escribe dentro del paréntesis (   ) una V o una F según corresponda. Justifica aquellas que sean falsas.

a) Un número irracional se puede expresar como el cociente de dos números enteros (   ).

b) $\sqrt[5]{32}$ es un número irracional (   ).

c) Las raíces inexactas son números racionales (   ).

d) 3,1011001110001... es un número racional (   ).

e) Algunos números racionales son decimales infinitos periódicos (   ).

f) Ningún número decimal infinito es irracional (   ).

g) Algunos números racionales son decimales infinitos no periódicos (   ).

h) Todo número decimal periódico es número racional (   ).

i) Existen algunos números que no son ni enteros ni racionales (   ).

j) Algunos números racionales son números enteros (   ).

2 Responde:

a) ¿A qué se llama número irracional? Escribe 10 números irracionales.

b) ¿Con qué letra nombramos el conjunto de los números irracionales?

3 a) Sabiendo que $\sqrt{5}$ consiste en encontrar un número x que elevado al cuadrado sea igual a 5, determinar los dos números enteros consecutivos entre cuyos cuadrados se encuentra 5 y utiliza esta información para hallar el desarrollo decimal de $\sqrt{5}$ hasta las milésimas.

b) Sabiendo que $\sqrt{7}$ consiste en encontrar un número x que elevado al cuadrado sea igual a 7, determina los dos números enteros consecutivos entre cuyos cuadrados se encuentra 7 y utiliza esta información para hallar el desarrollo decimal de $\sqrt{7}$ hasta las milésimas.

c) Sabiendo que $\sqrt[3]{2}$ consiste en encontrar un número x que elevado al cubo sea igual a 2, determina los dos números enteros consecutivos entre cuyos cubos se encuentra 2 y utiliza esta información para hallar el desarrollo decimal de $\sqrt[3]{2}$ hasta las milésimas.

4 Representa geométricamente, en la recta numérica, los siguientes números irracionales:

a) $\sqrt{5}$ (Sugerencia: $2^2 + 1^2 = 5$)   b) $\sqrt{7}$ (Sugerencia: $(\sqrt{3})^2 + 2^2 = 7$)

c) $\sqrt{29}$ (Sugerencia: $5^2 + 2^2 = 29$)   d) $\sqrt{37}$ (Sugerencia: $6^2 + 1^2 = 37$)

5 Teniendo en cuenta la representación geométrica de los números $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$, representa en la recta numérica los números $\sqrt{5}$ y $\sqrt{6}$.

6 Prueba que $\sqrt{3}$ no es un número racional (Sugerencia: supón que $\sqrt{3}$ es un número racional y argumenta que esto no es posible).

7 Indica cuáles de las siguientes relaciones son ciertas y cuáles son falsas:

a) $N \subset Z$ b) $Z \subset Q'$ c) $Q \cap Q' = \emptyset$

d) $Q \cup Z \cup N = Q$ e) $3 \in Q'$ f) $\sqrt{4} \in Q$

8 Indica entre cuáles números enteros consecutivos están ubicados en la recta numérica los siguientes números:

a) $\sqrt{10}$ b) $\sqrt{35}$ c) $\sqrt{19}$

9 Escribe dos números racionales y dos números irracionales que estén entre:

a) 7,34 y 7,35 b) $\frac{31}{13}$ y $\frac{18}{7}$ c) $0,\overset{\frown}{4}$ y $0,\overset{\frown}{45}$

10 Se sabe que $\sqrt[3]{31} = 3,141...$ y de ahí se deduce que: $(3,141)^3 < \sqrt[3]{31} < (3,142)^3$. ¿Cuál es la siguiente cifra decimal de $\sqrt[3]{31}$?

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 4

La madre de Juan tiene cinco hijos. El primero se llama Pa, el segundo Pe, el tercero Pi, el cuarto Po. ¿Cómo se llama el quinto?

1.4.7 El Conjunto de los Números Reales

- El conjunto de los números racionales (Q) es "insuficiente" para describir situaciones como las siguientes:
  - Hallar la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 1 y 2 unidades de longitud.
  - Averiguar qué número elevado al cuadrado es igual a 2.
  - Hallar el cociente entre la longitud de una circunferencia y su diámetro.
- Por esta razón, es necesario AMPLIAR el conjunto de los números racionales, añadiendo el conjunto de los NÚMEROS IRRACIONALES (Q'), para obtener el conjunto de los NÚMEROS REALES.
- El CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES resulta de UNIR los números racionales con los números irracionales y lo representamos con la letra **R**; es decir: $\mathbf{R = Q \cup Q'}$
- TODO NÚMERO REAL tiene un desarrollo decimal infinito periódico o decimal infinito no periódico. Por ejemplo: $\frac{3}{5}$; $\sqrt{7}$; π ; $\sqrt{2}$; 3, 51027143...; 4,67000... son números reales.
- No son números reales las expresiones fraccionarias cuyo denominador es cero ni las raíces pares de números negativos. Por ejemplo, $\frac{4}{0} \notin R$, $-\frac{5}{0} \notin R$, $\frac{\sqrt{5}}{0} \notin R$, $\sqrt{-9} \notin R$, $\sqrt[4]{-25} \notin R$.
- Existe una correspondencia uno a uno entre los puntos de una recta y el conjunto de los números reales de tal manera que a cada punto de la recta le corresponde un número real y a cada número real le corresponde un punto de la recta. Esta es una propiedad muy importante de los números reales y se denomina PROPIEDAD DE COMPLETEZ o PROPIEDAD DE CONTINUIDAD.

  Esta propiedad significa que si ubicamos todos los números reales sobre una línea recta, llegaríamos a la conclusión que después de ubicarlos todos, no quedaría ningún "hueco" en la recta.
- El siguiente cuadro sinóptico nos muestra un resumen de los distintos conjuntos numéricos.

NÚMEROS REALES
$R = Q \cup Q'$

NÚMEROS RACIONALES (Q)

- **Enteros:** ....., – 2, – 1, 0, 1, 2,...
- **Decimales Finitos:** – 4,3; 5,73
- **Decimales Infinitos Periódicos:** 83,666..., –0,8383... 57,322727..., –5,2345252...

NÚMEROS IRRACIONALES (Q')

- **Decimales Infinitos no Periódicos**
  $-\pi = -3{,}141592...$
  $-\sqrt{2} = -1{,}414213562...$
  $\sqrt{11} = 3{,}31662479...$
  0,1010010001...

NÚMEROS ENTEROS (Z)
$Z^- = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,...\}$

ENTEROS NEGATIVOS (Z^-)
$Z^- = \{..., -5, -4, -3, -2, -1\}$

NÚMEROS NATURALES (N)
$N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5,...\}$

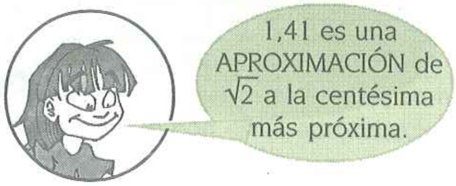
1.3 OPERACIONES Y RELACIONES CON NÚMEROS REALES - APROXIMACIONES

- Según vimos en la sección anterior, un número real podemos expresarlo como un número decimal con infinitas cifras decimales (racional si son decimales periódicos o irracional si son decimales no periódicos). De esta manera, trabajar con un un número real exige manipular infinitas cifras, lo cual es imposible. Por ejemplo: ¿Sabes la cifra decimal que ocupa el lugar 10 millones del número π?
- ¿Cómo sumamos o multiplicamos dos números reales representados por decimales infinitos? Las siguientes secciones nos ayudarán a contestar esta última pregunta.

1.3.1 Valores Aproximados - Errores

- Cuando en la sección **1.2.5** estudiamos las operaciones con los números racionales, vimos la necesidad de aproximarlos o redondearlos tomando un número conveniente de las primeras cifras decimales y descartando las otras. En estos casos, los resultados de las operaciones son aproximados por exceso o por defecto.
- En el caso de los números irracionales, la necesidad de aproximar es mayor, ya que estos números no pueden escribirse en forma de fracción de números enteros, lo que sí puede hacerse con los números racionales.
- Así pues, al trabajar con números irracionales debemos aproximar o redondear sus infinitas cifras decimales no periódicas a un número finito de cifras que nos convenga.

- Cuando truncamos el número decimal 1,4142... en la cifra de las centésimas obtenemos 1,41 y cuando lo truncamos en las milésimas obtenemos 1,414.



¡ATENCIÓN!

Si sustituimos $\sqrt{2}$ por 1,41 estamos cometiendo un ERROR. En efecto, 1,41 es una APROXIMACIÓN a $\sqrt{2}$ por defecto, con error menor o igual que 0,01:

$$1{,}41 \leq \sqrt{2} \leq \underline{1{,}41 + 0{,}01}$$

$$\underbrace{1{,}41} \leq \sqrt{2} \leq \underbrace{1{,}42}$$

Error: 1,42 - 1,41 = 0,01

- Responde:

  a) Si sustituimos $\sqrt{2}$ por 1,414, ¿cuál es el error que estamos cometiendo?

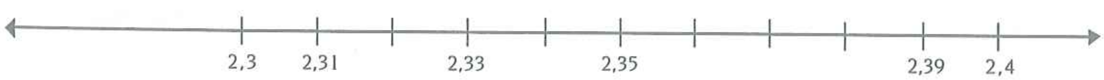
  b) ¿Qué obtenemos si truncamos 1,4142... en las diezmilésimas?

  c) ¿Qué entiendes por TRUNCAR una expresión decimal?

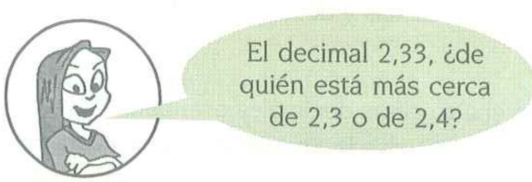
  La siguiente experiencia nos muestra que además de TRUNCAR un número decimal, también lo podemos REDONDEAR.

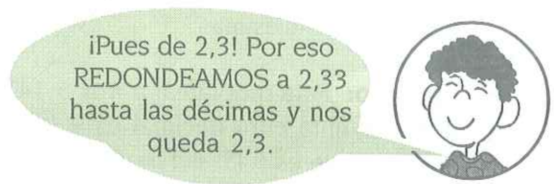
SEGUNDA EXPERIENCIA

- Fíjate bien en la siguiente figura y contesta:



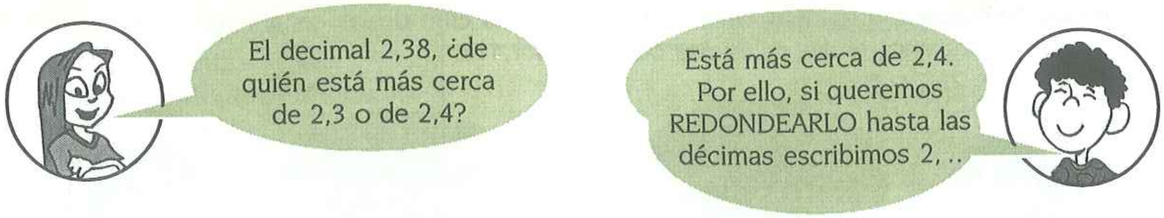
a)



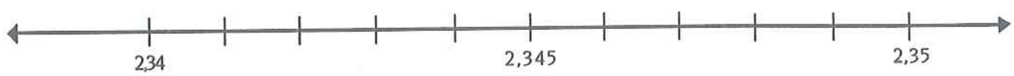


b)

c)



- Ahora fíjate en la siguiente figura y responde:



– ¿De cuál de los números decimales 2,34 y 2,35 está más cerca: a) el decimal 2,344? ; b) el decimal 2,345 ; c) el decimal 2,349? Explica cada caso.

– Al redondearlo hasta las centésimas, ¿cómo nos quedaría el número decimal: a) 2,344? b) 2,345? c) 2,349? Explica cada respuesta.

APRENDAMOS

- TRUNCAR una expresión decimal es simplemente tomar un número determinado de sus primeras cifras decimales y descartar las otras.

Ejemplo

Al truncar el número decimal 3,1415926... en las centésimas nos quedaría 3,14.

¡ATENCIÓN! Si decimos que π es igual a 3,14 estamos cometiendo un error, ya que 3,14 es sólo una APROXIMACIÓN de π por defecto con un error menor o igual que 0,01; es decir:

$$\underbrace{3,14} \leq \pi \leq \underbrace{3,15}$$

error: $3,15 - 3,14 = 0,01$

Además, tengamos en cuenta que π es un número irracional, mientras que 3,14 es un número racional.

- Una expresión decimal también se puede aproximar por REDONDEO. En este caso, debemos decidir con que precisión queremos hacerlo (si hasta las décimas, hasta las centésimas o hasta las milésimas). Para redondear, tengamos en cuenta lo siguiente:

  – Si, por ejemplo, queremos redondear hasta las milésimas y la cifra siguiente a las milésimas es 5 o mayor que 5, entonces le sumamos 1 a las milésimas y descartamos las demás que le siguen a las milésimas.

  Ejemplo: Para redondear a $\pi = 3,141592$ con cuatro cifras decimales escribimos 3,1416 ya que la quinta cifra decimal es 9 (mayor que 5) y por ello le sumamos 1 a la cuarta cifra decimal, que es 5 ($5 + 1 = 6$).

– Si, en cambio, queremos redondear hasta las milésimas y la cifra siguiente a las milésimas es menor que 5, entonces se descartan tanto esta cifra como las que le siguen.

Ejemplo: Para redondear a $\pi = 3{,}141592...$ con dos cifras decimales escribimos 3,14 (¿por qué?).

1.3.2 Operaciones con Números Reales

- Las operaciones con números reales se hacen, en la práctica, tomando sus aproximaciones decimales y operando con estas aproximaciones. Se pueden tomar por exceso o por defecto.
- Según el grado de aproximación deseado habrá que escoger más o menos cifras. Si queremos tener una idea del error cometido, elegimos dos números con **el mismo número de decimales.**

PRIMERA EXPERIENCIA

- Hallemos la suma de $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$.
- La suma de estos dos números se escribe $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.
- Si no nos piden ninguna aproximación debemos dejarlo escrito así, ya que no existe ningún símbolo para indicar esta suma.
- Si queremos hallar el valor aproximado, debemos expresar cada número en forma decimal aproximada, por exceso o por defecto y sumarlos.
- El error máximo viene dado por la diferencia entre el valor por exceso y el valor por defecto.

	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2} + \sqrt{3}$	**ERROR**
Por exceso	1,4143	1,7321	3,1464	0,0002
Por defecto	1,4142	1,7320	3,1462	

SEGUNDA EXPERIENCIA

- Hallemos el producto de $\sqrt{2}$ y π.
- El producto de estos dos números se escribe $\sqrt{2} \cdot \pi$.
- Si no nos piden ninguna aproximación debemos dejarlo escrito así, ya que no existe ningún símbolo para indicar este producto.

- Si queremos hallar el valor aproximado, debemos expresar cada número en forma decimal aproximada, por exceso o por defecto y multiplicarlos.
- El error máximo viene dado por la diferencia entre el valor por exceso y el valor por defecto.

	$\sqrt{2}$	π	$\sqrt{2} \cdot \pi$	ERROR
Por exceso	1,4143	3,1416	4,4431	0,0004
Por defecto	1,4142	3,1415	4,4427	

¡ATENCIÓN!

- A veces es posible operar directamente con estas formas reales sin necesidad de hallar sus valores aproximados. Por ejemplo para calcular $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$ podemos proceder así:

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = 4$$

- En cambio, en otros casos no es posible hacer esto y debemos recurrir a hallar sus valores aproximados. Por ejemplo, al calcular $\sqrt{12} + \sqrt{3}$, 8π, $\pi - \sqrt{5}$ debemos dejarlos escritos como están o tomamos las cifras decimales aproximadas de cada número con la cifra que sean necesarias.

APRENDAMOS

- Las mismas OPERACIONES BÁSICAS (suma, resta, multiplicación y división) que hemos definido para los números racionales, se definen para los números reales. En este caso, hemos desarrollado métodos para hacer los cálculos operativos, con la aproximación requerida.
- Los números reales también se pueden representar en la forma $\frac{a}{b}$, donde a y b no necesariamente son números enteros, sino también números irracionales. Por ejemplo, $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, $\frac{\sqrt{3}}{5}$, $-\frac{3}{\sqrt{2}}$, $-\frac{\pi}{5}$ son representaciones simbólicas de números reales.
- **¡ATENCIÓN!** Las expresiones NÚMERO RACIONAL y FRACCIÓN RACIONAL son sinónimas; en cambio, la palabra FRACCIÓN, sola, se emplea para denotar cualquier expresión que tenga un numerador y un denominador. Por ejemplo, son fracciones: $\frac{\sqrt{5}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, $\frac{3}{\sqrt{7}}$, $\frac{2\pi}{3}$.

EJERCICIO 1.6

1 Responde:

a) ¿Queda cubierta la recta numérica después de ubicar todos los números racionales? ¿por qué?
b) ¿Qué diferencia hay entre fracción racional y fracción?
c) ¿Por qué es insuficiente el conjunto de los números racionales?

d) ¿Cuáles son los números reales? ¿Cómo se representa geométricamente el conjunto de los números reales?
e) ¿Son clausurativas la suma, la multiplicación, la resta y la división en R? Justifique sus respuestas.

2 Completa:

a) $Q \cap Q' =$ ____; b) $Z \cap Q =$ ____ ; c) $Z \cup Q =$ ____ ; d) $R \cup Q =$ ____ ; e) $R \cap Q =$ ____

3 Responde:

a) ¿Qué dice la propiedad de completez o continuidad?
b) ¿Por qué es un error decir que $\pi = 3{,}14$?
c) ¿Qué es truncar un número decimal?

4 Redondea hasta las milésimas, los siguientes números decimales:

a) 7,5675 b) 89,1043 c) 2,5139

5 Escribe dentro del paréntesis ( ) una V si el enunciado correspondiente es verdadero o una F si es falso. Justifica las falsas.

a) Todo número real es número racional ....( ).
b) Todo número natural es número racional ....( ).
c) Todo número racional es número entero ....( ).
d) Todo número real es número irracional ....( ).
e) Existen algunos números reales que no son racionales ....( ).

6 Responde:

a. ¿Cuántas veces cabe el diámetro en la circunferencia? Este número, ¿es racional o irracional?
b. ¿Cuántas veces cabe el lado de un cuadrado en su diagonal? Este número, ¿es racional o irracional?

7 Dados los números: 0,9999... ; 0,4949... ; 0,141144111444... ; 0,123321123321...; son racionales o irracionales?

8 Halla cinco números reales comprendidos entre 0,237145621 y 0,237145622.

9 Redondea, por exceso y por defecto, a las milésimas los siguientes números reales:

a) $\sqrt{7}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{1}{7}$

10 Escribe un número racional que no sea entero y un número real que no sea racional.

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 5

Dos docenas de galletitas y un pan cuestan $920. Media docena de galletitas y dos panes cuestan $580. ¿Cuánto vale un pan?

1.4 UTILIZACIÓN DE LA TECNOLOGÍA: EL DERIVE

1.4.1 Introducción

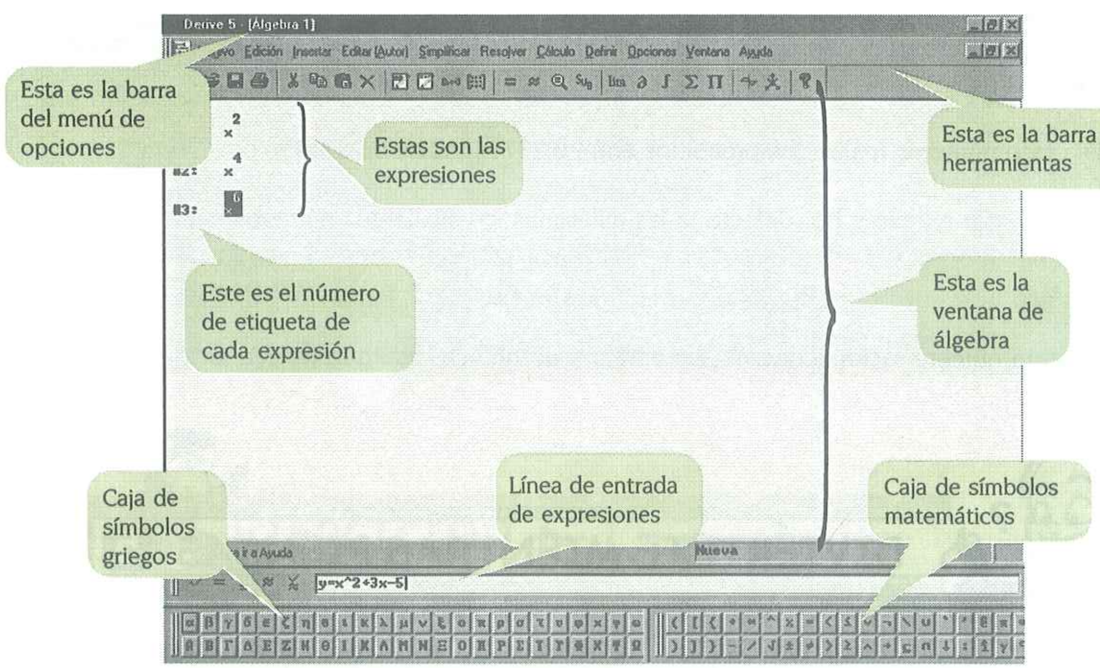
- El **DERIVE** es un programa computacional matemático que permite el procesamiento de variables algebraicas, expresiones númericas, tablas de valores, funciones, vectores y matrices. Su versatilidad le permite trabajar tanto en forma numérica como simbólica pudiendo actuar como una calculadora y realizar operaciones con expresiones algebráicas, factorizaciones, límites, derivadas, sumatorias e integrales. Además, con DERIVE es posible dibujar gráficos en 2 y 3 dimensiones.
- En este curso, usaremos el DERIVE como una herramienta para realizar cálculos que manualmente pueden resultar muy complicados. También para verificar o comprobar procesos que realizaremos manualmente. Finalmente, usaremos DERIVE para dibujar algunas gráficas de funciones.

1.4.2 El Entorno de Trabajo de Derive

- Una vez instalado el programa DERIVE en el computador, se busca el ícono del DERIVE, en el lugar donde haya sido instalado y se hace **doble click** sobre él.
- Inmediatamente después de hacer doble click, aparecerá la pantalla de trabajo de DERIVE. Esta pantalla contiene de arriba abajo las siguientes líneas o zonas:

¡ATENCIÓN!

DERIVE es un programa computacional, propiedad de TEXAS INSTRUMENTS INCORPORATED. Por lo tanto, sólo puede utilizarse cuando haya sido adquirido legalmente. Recuerde que la piratería es un delito, sancionado duramente por las autoridades.



- Para INGRESAR UNA EXPRESIÓN a la ventana de álgebra, hacemos **click** sobre la LÍNEA DE ENTRADA DE EXPRESIONES, digitamos la expresión dada y luego presionamos la tecla ENTER o el símbolo ubicado a la izquierda de la línea de entrada de expresiones. De inmediato, DERIVE nos mostrará la expresión deseada en la VENTANA DE ÁLGEBRA, antecedida de un número (**#1, #2, #3, ...**), denominado NÚMERO DE ETIQUETA de la expresión. El programa DERIVE queda listo para aceptar la próxima expresión (no es necesario borrar la expresión previamente resaltada en la línea de entrada de expresiones).

- Para SIMPLIFICAR UNA EXPRESIÓN previamente resaltada en la ventana de álgebra, hacemos **click** sobre el símbolo = ubicado a la izquierda de la línea de entrada de expresiones, u oprimimos la tecla **Ctrl** y enseguida la tecla **ENTER.**

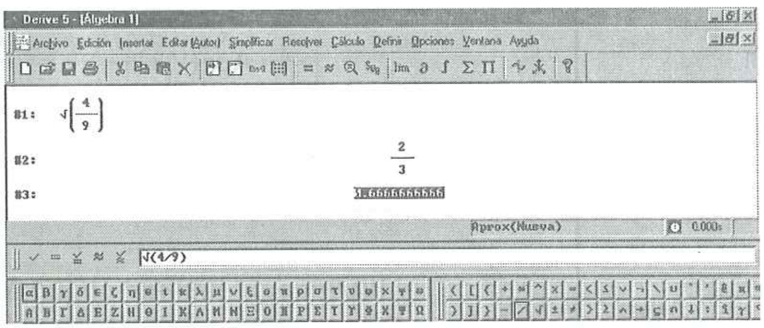
- Para APROXIMAR LA EXPRESIÓN hacemos lo mismo sobre el símbolo ≈ u opimimos la tecla **Shift** y enseguida la tecla **ENTER.**

EJEMPLO 1

Introduzcamos la expresión $\sqrt{\dfrac{4}{9}}$ en la línea de entrada de expresiones; luego, utilicemos las tres combinaciones y comparemos los resultados.

SOLUCIÓN

Teniendo en cuenta las tres instrucciones anteriores, la ventana del DERIVE nos mostrará lo siguiente:



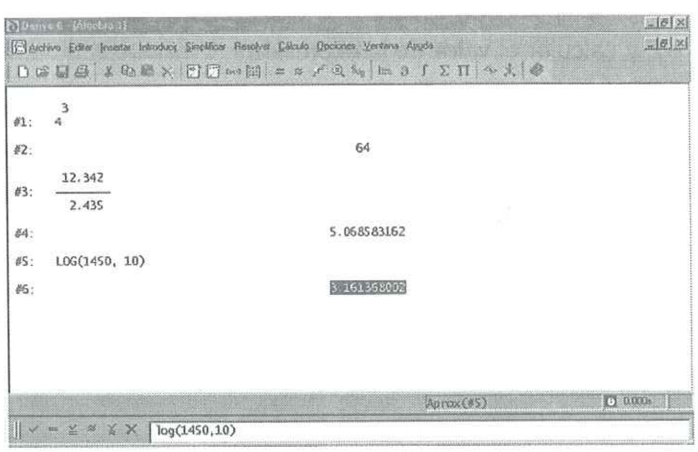
EJEMPLO 2

Usemos el DERIVE para introducir, simplificar y aproximar las expresiones siguientes:

a) 4^3 b) 12,342 ÷ 2.435 c) log (1450)

SOLUCIÓN

Si aplicamos las instrucciones anteriores a cada expresión obtenemos:



- Para BORRAR UNA EXPRESIÓN previamente resaltada en la ventana de álgebra, hacemos **click** sobre el botón × de la barra de herramientas.
- Para MOVER UNA EXPRESIÓN de una línea a otra de la ventana de álgebra basta arrastrarla con el mouse.
- Para CORREGIR una expresión resaltada en la ventana de álgebra, o para usarla como parte de otra expresión, señalamos con el puntero del mouse la línea de edición y a continuación presionamos la tecla F3. Esto hará que la expresión resaltada caiga a la línea de expresión.
- Para CANCELAR LA SELECCIÓN de un comando presionamos la tecla ESC.

- La siguiente tabla nos muestra cómo ingresar algunas expresiones con DERIVE.

EXPRESIÓN A INGRESAR	INGRESO A DERIVE
$\dfrac{(-4)^3 + 5\sqrt[3]{27}}{8 \times 0{,}01}$	((-4)^3 + 5*(27)^(1/3)) / (8*0.01)
$\sqrt[5]{\dfrac{2^3+\sqrt{9}}{(-4)^6} + \dfrac{0{,}25}{\sqrt{\frac{3}{2}+\frac{1}{5}}}}$	((2^3 +(9)^(1/2))/((-4)^6) + (0,25/ ((3/2)+(1/5))^(1/2)) ^(1/5)
$\left\| 5^3 - \sqrt{\frac{2}{3}} \right\| -8 \div 2^2+100$	abs(5^3 - (2/3)^(1/2)) - (8/2^2) + 100
$\text{Log}_2\,(128)$	Log(128,2)
$\dfrac{5x\,(x-3)^2}{(x+1)^2\,(x-5)^4}$	(5*x* (x-3)^2)/ ((x+1)^2* (x-5)^4)
$\dfrac{\sqrt[3]{\frac{4}{9}a+1} + a^4}{2^{a-3}}$	(((4/9)*a+1)^(1/3)+a^4)/ (2^(a-3))

¡ATENCIÓN! Al digitar la expresión es muy importante tener en cuenta que el número de paréntesis que se abren debe ser igual al número de paréntesis que se cierran. De lo contrario, la expresión estará mal ingresada y DERIVE no la podrá calcular.

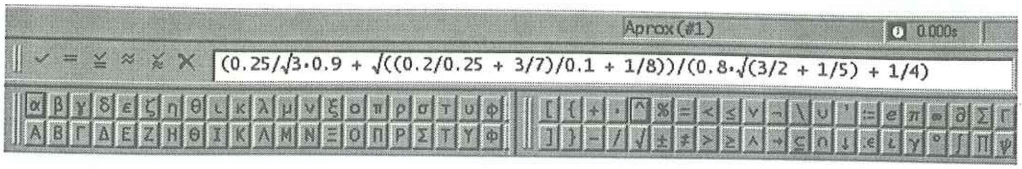
EJEMPLO 3

Para ingresar en el DERIVE y calcular el valor de la expresión

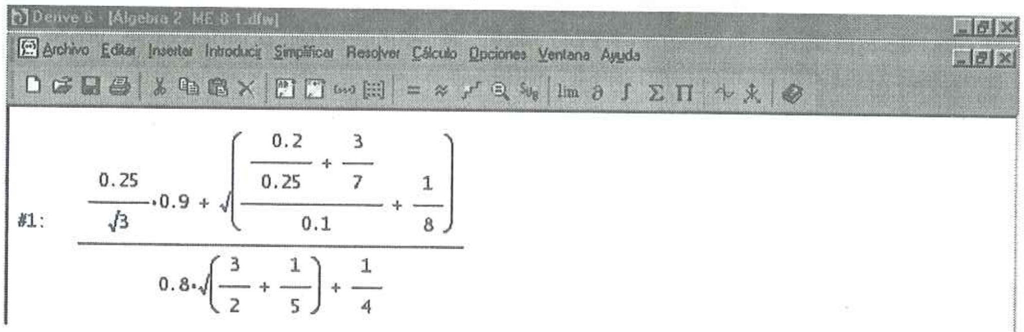
$$\frac{\left(\dfrac{\frac{1}{4}}{\sqrt{3}} \bullet 0{,}9 + \sqrt{\dfrac{\left(\frac{0{,}2}{0{,}25}+\frac{3}{7}\right)}{0{,}1}} + \dfrac{1}{8}\right)}{\left(0{,}8\ \sqrt{\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{5}}+\dfrac{1}{4}\right)}$$

Procedemos así:

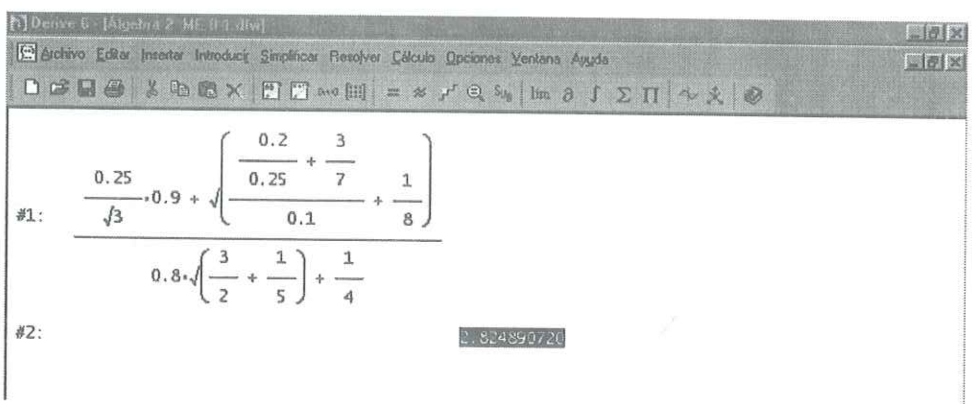
PASO 1: Ingresamos la expresión a través de la línea de entrada de expresiones, teniendo en cuenta el orden indicado en la tabla anterior. Si lo hacemos correctamente, la línea nos mostrará lo siguiente:



PASO 2: Una vez digitada la expresión, presionamos la tecla **ENTER** o el símbolo ✓, ubicado a la izquierda de la línea de entrada de expresiones. De inmediato DERIVE nos mostrará lo siguiente:



PASO 3: Para simplificar la expresión, hacemos **click** sobre el símbolo = u oprimimos la tecla **Ctrl** y en seguida la tecla **ENTER.** Para aproximar la expresión hacemos lo mismo sobre el símbolo ≈ u oprimimos la tecla **Shift** y enseguida la tecla **ENTER.** De inmediato aparece en la pantalla:



TALLER DE REPASO DE LA UNIDAD 1

1. Responde las siguientes preguntas y justifica cada respuesta:

   1.1 ¿Cómo se clasifican los números racionales?
   1.2 ¿Cómo se halla la fracción generatriz de un número decimal finito?
   1.3 ¿Cómo se halla la fracción generatriz de un número decimal infinito periódico puro?
   1.4 ¿Cómo se halla la fracción generatriz de un número decimal infinito periódico mixto?
   1.5 ¿Tienen los números enteros un desarrollo decimal? Explica
   1.6 ¿Cuál es el procedimiento para operar con dos números decimales infinitos periódicos cuando queremos que el resultado sea aproximado?
   1.7 ¿Cómo se aproxima el número -3,37425425... a las milésimas por defecto? ¿y por exceso?
   1.8 Cómo es el desarrollo decimal de los números irracionales?
   1.9 ¿Cómo está construído el conjunto de los números reales? ¿Cómo se representa simbólicamente este conjunto?
   1.10 ¿Cómo se representa geométricamente el número $\sqrt{11}$ en la recta numérica?
   1.11 ¿Cómo se representa geométricamente el número π en la recta numérica?
   1.12 ¿Cómo se calcula $\sqrt{5}+\pi$? ¿Y $\pi\cdot\sqrt{7}$?
   1.13 ¿Cuáles expresiones no representan números reales?

2. Llena cada cuadro con una x cuando el número de la fila superior corresponda al conjunto de la columna izquierda.

	-7	$3;14$	$\pi-\frac{2}{3}$	$-\frac{5}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{\frac{4}{9}}$	$\sqrt[3]{\frac{4}{27}}$	$-4{,}23\widehat{52}$	$4\frac{3}{5}$
N									✓
Z	✓		✓	✓	✓				✓
Q	✓			✓				✓	✓
Q'		✓	✓		✓				
R	✓	✓	✓	✓	✓			✓	✓

3. Escribe en orden creciente los siguientes números reales:

   -0,01234... ; -0,1234... ; 1,234 ... ; -4, 2310 ; 12,345

4. Escribe los decimales periódicos de $\frac{1}{7}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{6}{7}$.

5. Utiliza el teorema de Pitágoras para hallar $\sqrt{19}$ y luego ubica este número, en forma precisa, en la recta numérica (Sugerencia: dibuja un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 4 y $\sqrt{3}$ unidades).

6. Halla la expresión decimal de los siguientes números racionales:

a) $\frac{4}{3}$ b) $-\frac{7}{5}$ c) $\frac{14}{3}$ d) $\frac{7}{6}$ e) $-\frac{4}{7}$

Señala las expresiones decimales exactas, las periódicas puras y las periódicas mixtas.

7. Escribe tres números racionales que tengan una expresión decimal:

a) Exacta b) Periódica

8. Halla la fracción generatriz de las siguientes expresiones decimales:

a) 5,272727... b) 1,002002... c) 8,32727...

9. La siguiente propiedad nos permite construir una infinidad de números irracionales a partir de un número racional dado:

Sean a $\in$ Q' y b $\in$ Q , b $\neq$ 0. Entonces la suma, resta, multiplicación y división de a y b dan números irracionales. También (–a) y $\frac{1}{a}$ son irracionales.

Teniendo en cuenta esta propiedad, responde: De los siguientes números: $-\sqrt{3}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\sqrt{3}+5$, $3-\sqrt{3}$, $-3\sqrt{3}$, $\frac{\sqrt{3}}{7}$, $\frac{5}{\sqrt{3}}$, ¿cuáles son números racionales? Justifica tu respuesta.

10. Teniendo en cuenta el cuadro sinóptico de los números reales, responde:

a) ¿Es todo número decimal un número real?
b) ¿Es todo número decimal un racional? ¿o un irracional?
c) ¿Es todo entero un racional?

11. Explica porqué:

a) No son reales las raíces pares de números negativos; por ejemplo: $\sqrt{-4} \notin R$; $\sqrt[4]{-\frac{2}{3}} \notin R$; $\sqrt[12]{-18} \notin R$.

b) No son reales las fracciones cuyo denominador sea cero; por ejemplo: $\frac{4}{0} \notin R$; $-\frac{5}{0} \notin R$.

12. Explicar porqué sí son reales los siguientes números:

a) $\sqrt[3]{-8}$; b) $\sqrt[5]{-32}$; c) $\frac{0}{\sqrt{3}}$; d) $\frac{0}{\pi}$; e) $\frac{0}{-2}$

13. Determina los dos enteros consecutivos entre cuyos cuadrados se encuentra 11 y utiliza esta información para hallar el desarrollo decimal de $\sqrt{11}$ hasta las milésimas.

14. En el paréntesis de la izquierda, escribe una V o una F, según que el enunciado sea verdadero o falso.

a) ( ) Ningún decimal finito es irracional.
b) ( ) Algunos números racionales son números enteros.
c) ( ) Ningún número racional es decimal infinito no periódico.
d) ( ) Algunos números reales no son racionales.
e) ( ) El cociente entre dos números reales es un número racional.
f) ( ) $Q \cap Q' = \emptyset$

15. Sólo uno de los siguientes números es irracional:

a) 45,3254 b) $-5\frac{3}{7}$ c) $-\sqrt{36}$ d) $-\sqrt{15}$

16. Prueba que $\sqrt{5}$ es un número irracional (Sugerencia: utiliza la estrategia que usamos para probar que $\sqrt{2}$ es un número irracional.

17. Resuelve las operaciones indicadas y simplifica el resultado. Recuerda el orden en que hay que resolver las operaciones cuando hay signos de agrupación y cuando no los hay.

a) $(0{,}5 + 1{,}3 - 0{,}075) \times 600 - 3{,}5 \times 10$

b) $(0{,}5 \times 4 + 0{,}6 \times 5) \times (1 - 0{,}7) \times 0{,}2$

c) $(0{,}01 + 2{,}4 \div 0{,}06 - 5{,}01) \div 0{,}007$

d) $\frac{5}{8} + 0{,}25 \div 4 - 0{,}0625$

e) $[\frac{2}{3} \times 0{,}9 + \frac{0{,}16}{2} - 0{,}0625 \div 0{,}25]$

f) $[3\frac{1}{2} - 0{,}36 + \frac{1}{4}] \div [1 - \frac{1}{2}]$

g) $\dfrac{0{,}4 + 2\frac{1}{5} - 0{,}6}{0{,}01} \div \dfrac{1}{\frac{1}{2} - 0{,}4}$

Resuelve estos ejercicios con el DERIVE.

18. ¿Qué fracciones darán lugar a un decimal exacto?

a) $\frac{7 \cdot 3^2}{11 \cdot 5^2}$ b) $\frac{5 \cdot 2^5}{3}$ c) $\frac{7 \cdot 11}{2^2}$ d) $\frac{7 \cdot 13}{7 \cdot 5^2}$

19. Al dividir 8 entre 7 con la calculadora obtenemos el siguiente cociente: 1,1428571

Escribe, sin realizar el cálculo, las 5 siguientes cifras decimales del resultado.

20. Sabemos que: $\pi = 3{,}141592...$; $\sqrt{2} = 1{,}414213...$; $\sqrt{3} = 1{,}732050...$

Escribe las aproximaciones de estos números por defecto, por exceso y por redondeo, hasta:

a) Las centésimas b) Las milésimas c) Las diezmilésimas

21. Utiliza el teorema de Pitágoras para ubicar , en forma precisa, sobre la recta numérica los números irracionales $\sqrt{17}$, $\sqrt{18}$ y $\sqrt{26}$.

22. Escribe dentro del paréntesis ( ) una V si el enunciado correspondiente es verdadero, o una F, si es falso.

a) $\sqrt{a + b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ ( )

b) No hay ningún número racional entre 8,56 y 8,57 ( )

c) $\frac{4{,}37}{1{,}5}$ es un número irracional ( )

d) $\sqrt{-4} = -2$ ( )

23. Escribe dos números racionales y dos irracionales que estén comprendidos entre:

a) 5,47 y 5,48 b) $\frac{2}{3}$ y $\frac{13}{7}$ c) $0{,}\widehat{3}$ y $0{,}\widehat{34}$

24. Investiga qué significa que el conjunto de los números reales es un conjunto denso.

25. En las siguientes expresiones, escribe cada número en su forma fraccionaria y, luego, calcula el resultado de las operaciones indicadas:

a) $6{,}27 + 0{,}\widehat{4}$

b) $2{,}\widehat{08} + 3{,}\widehat{01}$

c) $(-0{,}63\widehat{12}) \bullet 0{,}8$

d) $\dfrac{0{,}\widehat{10} - 2{,}\widehat{3}}{6{,}\widehat{7}}$

e) $0{,}\widehat{1} - 0{,}\widehat{01} - 0{,}\widehat{001}$

f) $0{,}\widehat{9} \bullet 0{,}\widehat{8} \bullet 0{,}\widehat{7} \ldots \bullet 0{,}\widehat{1}$

PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS DEL ICFES

Los ejercicios 1 a 4 se responden de acuerdo con la siguiente paradoja enunciada por Zenón de Elea en el siglo V a. C. "Si Aquiles, el de los pies rápidos, compite con la tortuga en una carrera, dándole a ésta una ventaja, nunca logrará alcanzarla".

Suponte que Aquiles le da a la torguga 100 m de ventaja y que su velocidad es 10 metros por segundo, y la velocidad de la tortuga, 1 m por segundo.
Empieza la carrera:

1. Si Aquiles recorre los 100 m, no se puede afirmar que:
   a. Alcanza a la tortuga.
   b. La distancia que los separa es 10 m.
   c. Aquiles y la tortuga se han movido 10 segundos.
   d. La tortuga recorre 10 m.

2. Si después de recorrer los 100 m, Aquiles recorre otros 10 m, no se puede afirmar que:
   a. El tiempo gastado por Aquiles es (10 + 1) segundos.
   b. La distancia que los separa es 1 m.
   c. Alcanza a la tortuga.
   d. La tortuga recorre 11 m.

3. Si Aquiles recorre 1 m, después de recorrer los 110 m, se puede afirmar que:
   a. Alcanza a la tortuga.
   b. El tiempo gastado por Aquiles es $(10 + 1 + \frac{1}{10})$ segundos.
   c. La tortuga se mueve 1 segundo.
   d. La distancia recorrida por la tortuga es $\frac{1}{10}$ m.

4. Teniendo en cuenta la carrera, podemos afirmar:
   a. Aquiles nunca alcanzará la tortuga.
   b. El tiempo gastado por Aquiles para alcanzar a la tortuga es la suma infinita:

   $$10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \ldots \text{ segundos}$$

   y es por esto que nunca la alcanzará
   c. La alcanza a los $\frac{100}{9}$ segundos.
   d. Ninguna de las anteriores es cierta.

Núcleo Temático

2

LA ESTRUCTURA LÓGICA DEL ÁLGEBRA

LOGRO GENERAL

Utilizar e identificar las propiedades de campo e igualdad de los reales con sus consecuencias y sus respectivas interpretaciones.

DIMENSIONES

LOGROS ESPECÍFICOS	INDICADORES DE LOGRO
Corporal: • Participar en actividades que facilitan el aprendizaje y favorecen el desarrollo de habilidades de pensamiento.	• En grupos de dos o tres alumnos, utilizan las propiedades y definiciones básicas para obtener otras nuevas.
Comunicativa: • Seguir instrucciones lógicamente estructuradas. • Expresar con fluidez sus ideas a los compañeros.	• Explica con claridad los procesos seguidos en la demostración de un teorema.
Cognitiva: • Reconocer las propiedades de los axiomas de campo y de la igualdad de los números reales. • Utilizar las propiedades de campo e igualdad de números reales para justificar algunos teoremas relativos a los números reales.	• Utiliza los axiomas de campo y de la igualdad de números reales para simplificar expresiones.
Estética: • Elaborar carteleras que contengan los axiomas de campo y de la igualdad en R.	• Socializa las propiedades escritas en la cartelera, al interactuar con los compañeros.
Ética - Actitudinal: • Reconocer la contribución de la matemática en el desarrollo de habilidades de pensamiento.	• Realiza con interés las actividades de grupo. • Comparte con sus compañeros sus habilidades y conocimientos.

EVALUACIÓN

ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS

2.1 HISTORIA DEL ÁLGEBRA (2): BABILONIA

Al igual que en Egipto durante la primera dinastía, también en el Valle de Mesopotamia -formado entre los ríos Tigris y Éufrates- había ya por esa época (4.000 años antes de Cristo) un alto nivel de civilización.

Las tablillas de arcilla de escritura cuneiforme con contenido matemático, bastante numerosas, que han llegado hasta nosotros proceden en su mayor parte de Uruk, en la desembocadura del Tigris y el Éufrates.

El sistema de numeración babilonio se basa en la yuxtaposición lineal de UNIDADES cuneiformes ( ) y en DECENAS en forma de corchete ( ) por medio de los cuales se representan los números del 1 al 59. El número 60 se pinta otra vez con ( ) y los demás números se explican por sistema sexagesimal posicional.

Para los fraccionarios $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ y $\frac{5}{6}$ existen nombres propios y signos individuales. Los babilonios manejaron mucho mejor el arte de calcular que los egipcios si tenemos en cuenta el método laborioso como éstos utilizaban las fracciones. Una de las herencias más notables de los babilonios, que aún persiste, es el sistema de numeración sexagesimal en las unidades para medir el tiempo (horas, minutos y segundos) y los ángulos (grados, minutos y segundos), a pesar de la base esencialmente decimal de nuestra cultura.

Los aportes de los babilonios al álgebra fueron notables. Mientras el álgebra egipcia se centró casi exclusivamente en la solución de ecuaciones de primer grado, los babilonios resolvieron, además, sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, ecuaciones de segundo grado de la forma $x^2 + px = q$ y ecuaciones cúbicas, como $x^3 + x^2 = 4{,}12$ las cuales resolvían usando una tabla de cubos y raíces cúbicas que ellos mismos habían elaborado previamente.

EJERCICIO 2.1

Comprensión de Lectura. Explicación: Lee nuevamente el texto anterior y luego encierra, en un círculo, la letra que corresponde a la respuesta correcta:

1. La escritura cuneiforme que se menciona en el texto, debe su nombre a :
   a. Cierto tipo de arcilla con la cual se hacían las "tablillas".
   b. La piel del conejo empleada para escribir.
   c. Un pueblo asiático que estaba ubicado entre los ríos Tigris y Éufrates.
   d. Sus caracteres en forma de cuña.

2. El enunciado que mejor expresa el contenido del texto es:
   a. La ciencia en Asia fue difundida a través de la escritura cuneiforme.
   b. El pueblo babilonio fue el primer precursor del álgebra.
   c. Así como los egipcios, el pueblo babilonio, hizo grandes aportes al desarrollo del álgebra.
   d. Evolución del álgebra a través de las distintas épocas.

3. Las siguientes afirmaciones son falsas, con excepción de:
   a. Cuatro milenios antes de Cristo la cultura asiática apenas comenzaba.
   b. Los egipcios no fueron tan buenos para el cálculo como los babilonios.

c. Poco aportaron los hombres del Tigris y del Éufrates al desarrollo del álgebra.
d. El sistema de numeración sexagesimal para medir el tiempo, nace en Africa.

4. La solución de Ecuaciones de Primer Grado fue objeto fundamental de:

a. Los matemáticos de Uruk.
b. Los habitantes de las riberas del Tigris y del Éufrates.
c. Los egipcios.
d. Los babilonios.

5. Esta etapa en el desarrollo del álgebra podría denominarse:

a. La civilización babilónica y sus trabajos algebraicos.
b. Egipto: Tierra de grandes matemáticos.
c. Origen matemático de la escritura cuneiforme.
d. Egipto y Babilonia: las raíces del quehacer matemático.

2.2 ¿QUÉ ES EL ÁLGEBRA?

2.2.1 El Lenguaje del Álgebra

Uno de los objetivos centrales de este texto es desarrollar los conceptos básicos del ALGEBRA.
El álgebra es una **herramienta** indispensable para abordar otros cursos avanzados de matemáticas, ciencias naturales e ingeniería.

EXPERIENCIA

- En la sección anterior, señalamos que probablemente el álgebra se originó hacia el año 2000 a. de C, en Egipto, tal como lo revela el **Papiro Rhind**, cuando en uno de sus problemas pide la forma de resolver ecuaciones de la forma $x + ax = b$ o $x + ax + bx = c$, donde a, b y c son números conocidos y x es desconocido.
- El álgebra se desarrolló a partir de las leyes y operaciones básicas de la aritmética. El estudio de la aritmética comienza con las operaciones básicas: suma, resta, multiplicación y división de números. En álgebra, lo que hacemos es trabajar con letras como a, b, c, x, y, z,... para simbolizar números arbitrarios y construir con ellas expresiones generales.

EJEMPLO 1

Observemos como con una expresión algebraica podemos reducir y comprender mejor un enunciado cualquiera:

ENUNCIADO: "Tres veces la diferencia de un número con 5 multiplicado por la suma del cuadrado del número con 3".

EXPRESIÓN ALGEBRAICA: Si al número lo nombramos con la letra x, entonces la expresión algebraica correspondiente al enunciado es $3\,(x - 5) \bullet (x^2 + 3)$

EJEMPLO 2

Las expresiones algebraicas también se utilizan para generalizar muchas expresiones particulares. Veamos:

- **"El orden de los sumandos no altera la suma".**

Expresiones particulares	Expresión Algebraica
$3 + 5 = 5 + 3$ $(-6) + (-10) = (-10) + (-6)$ $\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{4}{5} + \frac{2}{3}$	Si x, y, son números racionales, entonces $x + y = y + z$

- **"Un libro cuesta 20 dólares; luego, 5 libros cuestan 100 dólares".**

Expresión particular	Expresión Algebraica
$5 \bullet 20 = 100$	Si C es el costo total, n es el número de libros y p es el precio de cada uno, entonces $n \bullet p = C$

- **"Describamos por comprensión el conjunto de los números impares".**

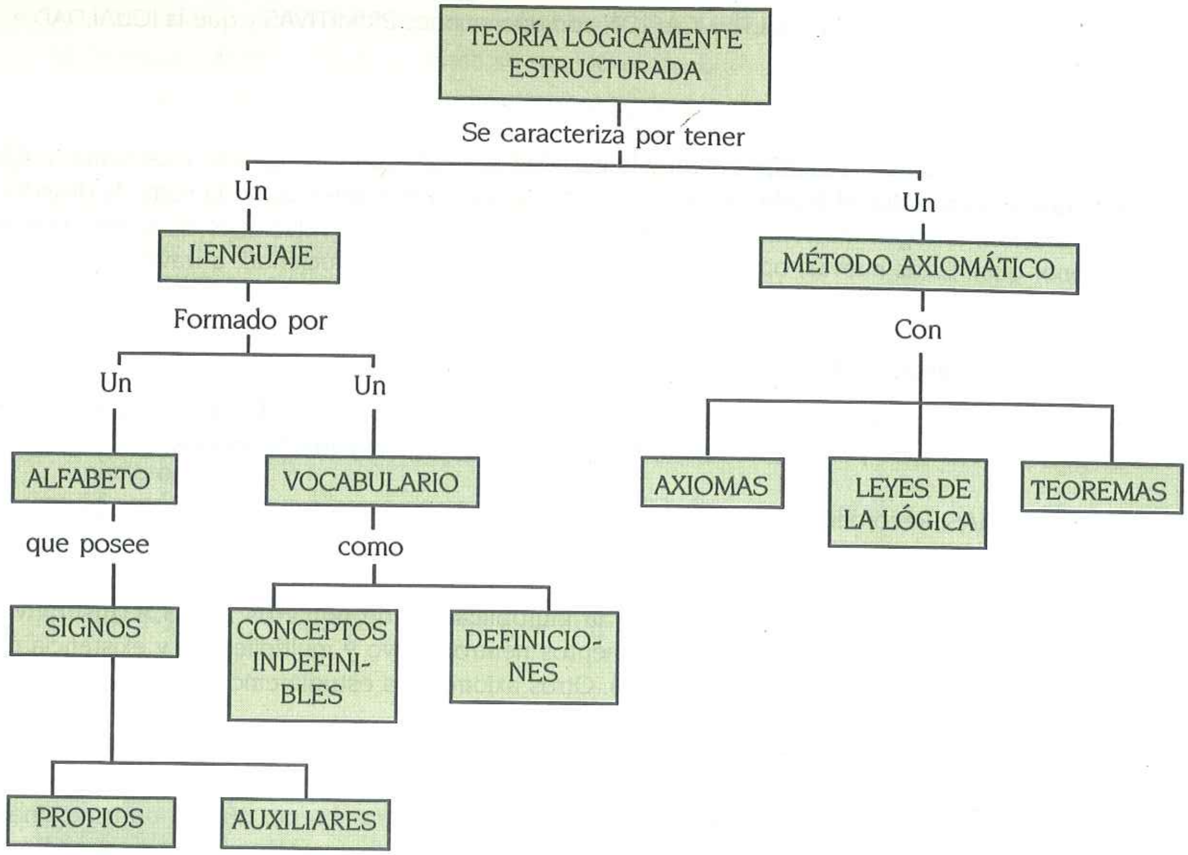
Recordemos que los números impares se obtienen multiplicando los números enteros (Z) por 2 y sumando o restando 1; es decir:

Descripción por Extensión Método Aritmético	Descripción por Comprensión Método Algebraico
$I = \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7, ...\}$	$I = \{ x/x = 2 \bullet n \pm 1, n \in Z\}$

- Los anteriores son algunos ejemplos que nos muestran lo sencillo que resulta utilizar los métodos algebraicos. Hay un número ilimitado de problemas en los cuales el enfoque simbólico puede conducirnos a conocimientos profundos y soluciones que no sería posible obtener con simples procesos numéricos.

2.2.2 La Estructura Lógica del Álgebra

- Tanto el álgebra como la geometría constituyen TEORÍAS LÓGICAMENTE ESTRUCTURADAS. Es probable que, en este momento, ya hayas estudiado la unidad 2 de geometría, de este mismo texto, y sepas qué es una teoría lógicamente estructurada. Sin embargo, queremos presentar el mismo Mapa Conceptual que aparece al principio de dicha unidad para ilustrar lo que vamos a desarrollar acá.



- En esta unidad vamos a contestar esta pregunta: ¿Cómo está conformada la ESTRUCTURA LÓGICA DEL ALGEBRA?

  Como la geometría, también el álgebra posee un LENGUAJE y un MÉTODO. Consideremos cada uno.

1. EL LENGUAJE

El lenguaje del álgebra se caracteriza por tener unos SIGNOS, unos CONCEPTOS PRIMITIVOS o INDEFINIBLES y unas DEFINICIONES. Analicemos cada uno de estos componentes.

1.1 LOS SIGNOS

El álgebra trabaja con dos clases de signos:

a) PROPIOS: Son signos propios los siguientes
   - Los números reales: -5, $-\sqrt{2}$, $-\pi$, 0, 4, $\sqrt[3]{7}$, $3+\sqrt{5}$,...
   - Los signos para operar: $+$, $-$, $\bullet$, $\div$, $\sqrt{\ }$,...
   - Los signos para relacionar: $=$, $<$, $>$, $\approx$, ...
   - Los signos para agrupar: $(\ \ )$, $[\ \ ]$, $\{\ \ \}$.

b) AUXILIARES: El álgebra se vale de signos ajenos como estos:
   - Las letras mayúsculas y minúsculas de nuestro alfabeto: A, B, C, D, ... , a, b, c, x, y, z; o de otros alfabetos, como el alfabeto griego: α, β, γ, θ, ϕ, Ω... Estos signos se utilizan, en la mayoría de los casos para representar números reales cualesquiera.
   - Símbolos de la teoría de conjuntos como: $\in$, $\subset$, $\cup$, $\cap$,...

1.2 LOS CONCEPTOS PRIMITIVOS

Para construir el álgebra necesitamos aceptar que los números reales se pueden OPERAR mediante la suma (+) y la MULTIPLICACION y se pueden RELACIONAR mediante la IGUALDAD (=); es decir, vamos a aceptar que la SUMA y la MULTIPLICACION son operaciones PRIMITIVAS y que la IGUALDAD es una relación también PRIMITIVA.

1.3 LAS DEFINICIONES:

¿Son suficientes la suma, la multiplicación y la igualdad para construir el álgebra? ¡Claro que no! A medida que se desarrolla, el álgebra va a requerir de nuevas operaciones como la resta, la división, la potenciación, la logaritmación,...y de nuevas relaciones, como las relaciones de orden (mayor que, menor que). Estas nuevas, operaciones y relaciones se van introduciendo, a través de DEFINICIONES, a medida que se necesiten.

2. EL MÉTODO AXIOMÁTICO

Al igual que la geometría, también el álgebra requiere de un MÉTODO para su desarrollo: EL MÉTODO AXIOMÁTICO, caracterizado por: **los axiomas, las leyes de la lógica y los teoremas**.

2.1 LOS AXIOMAS: Recordemos que los **axiomas** de una teoría son como las **reglas de un juego**: para "jugar" álgebra es necesario que conozcamos sus reglas básicas. Pero, ¿cuáles son los axiomas del álgebra? Algunos de ellos ya los estudiamos en la unidad anterior y son: la propiedad de completitud y las propiedades de la suma y la multiplicación de números reales (clausurativa, conmutativa, asociativa, existencia de los elementos neutro aditivo y multiplicativa y existencia de los elementos inversos aditivo y multiplicativo). Otros axiomas los estudiaremos un poco más adelante y corresponden a los AXIOMAS DE LA IGUALDAD.

2.2 LEYES DE LA LOGICA Y TEOREMAS: Como veremos más adelante, los axiomas, las definiciones y los conceptos primitivos pueden "encadenarse" lógicamente para obtener nuevas proposiciones. Estas nuevas proposiciones son los **TEOREMAS**. Por ejemplo, te has preguntado por qué:

* ¿$(-) \bullet (-) = (+)$?
* ¿$(+) \bullet (-) = (-)$?
* ¿Si $x + 3 = 5$ entonces $x = 5 - 3$?
* ¿$-(3 + 8 - 9 + \sqrt{2}) = -3 - 8 + 9 - \sqrt{2}$?

¿Aparecieron estas propiedades como por arte de magia?, ¿Salieron del sombrero de algún mago? ¡Por supuesto que NO! Todas ellas pueden justificarse plenamente a partir de los axiomas.

Nos debe quedar claro entonces que, tanto el álgebra como la geometría no surgen como producto del azar sino como resultado de la construcción y el esfuerzo de los hombres que han amado la matemática. Y a hacer esta contrucción te estamos invitando, querido lector.

EJERCICIO 2.2

1 Responde:

a) ¿Por qué el álgebra es una teoría lógicamente estructurada?
b) ¿Cuáles son los signos propios del álgebra?
c) ¿Cuáles son los conceptos primitivos del álgebra?
d) ¿Qué elementos caracterizan el método axiomático del álgebra?
e) ¿Qué son axiomas de una teoría lógica?
f) ¿Qué son teoremas de una teoría lógica?

g) ¿Qué diferencia hay entre los axiomas y los teoremas de una teoría lógica?

h) Probablemente, ¿cuándo y dónde se originó el álgebra?

i) ¿Por qué el álgebra es una herramienta más poderosa que la aritmética?

2 Escribe una expresión algebraica para los siguientes enunciados:

a) El costo de 5 cuadernos a x pesos cada uno.

b) La edad de Sara dentro de 10 años.

c) La edad de Juan hace 20 años.

d) La suma de dos números es 200. Si el número menor es x, ¿cómo expresamos el número mayor?

e) La diferencia de dos números es 35. Si m representa el número mayor, ¿cómo representas el número menor?

f) Si n representa un número entero, ¿cómo se describe por comprensión el conjunto de los números pares?

g) El producto de un número por otro que es 6 unidades mayor que él.

3 Escribe en lenguaje castellano cada una de las siguientes expresiones algebraicas:

a) $2 + 3 \bullet x$ b) $\frac{x+5}{6}$ c) $(y + 4)(y - 2)$ d) $x(x + 6)$

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 1

Dos vendedores de frutas estaban contando sus ingresos diarios. "Dame una de tus monedas y tendré tantas como tú", dijo Andrés. "¡Ni riesgos!, replicó Felipe. Mejor dame una de las tuyas y yo tendré el doble que tú". ¿Cuántas monedas tenía cada uno? (Hacerlo por reflexión lógica).

2.3 EL CAMPO DE LOS NÚMEROS REALES

- Para desarrollar el ALGEBRA DE LOS NÚMEROS REALES, partiremos del conocimiento que tenemos de los objetos con los que vamos a trabajar: Los NÚMEROS REALES (R), que ya estudiamos en la unidad anterior, y de las operaciones de SUMA (+) y MULTIPLICACIÓN (X) con sus axiomas o propiedades.

2.3.1 Axiomas de Campo en el Conjunto R

- Las propiedades o axiomas de la suma y la multiplicación de números reales son básicamente las mismas que ya conocemos de los números racionales. Veamos:

APRENDAMOS

AXIOMAS DE LA SUMA Y LA MULTIPLICACIÓN EN R.

P-1 PROPIEDADES CLAUSURATIVAS O DE CERRADURA

$$\text{Si } a, b \in R \text{ entonces} \begin{cases} a + b \in R \\ a \bullet b \in R \end{cases}$$

es decir, al sumar o multiplicar dos números reales obtenemos otro número real.

P-2 PROPIEDADES UNIFORMES RESPECTO A LA SUMA Y A LA MULTIPLICACIÓN

$$\textbf{Si } a, b, c \in R,\ a=b \text{ y } c=d \textbf{ entonces } \begin{cases} a + c = b + d \\ a \bullet c = b \bullet d \end{cases}$$

es decir, si sumamos o multiplicamos miembro a miembro dos igualdades, obtenemos otra igualdad. En particular, **si a=b entonces a+c=b+c y a•c = b•c;** es decir, si sumamos o multiplicamos ambos lados de una igualdad por un mismo número, la igualdad se mantiene.

P-3 PROPIEDADES ASOCIATIVAS

$$\textbf{Si } a, b, c \in R \textbf{ entonces } \begin{cases} a + b + c = a + (b + c) = (a + b) + c \\ a \bullet b \bullet c = a \bullet (b \bullet c) = (a \bullet b) \bullet c \end{cases}$$

es decir, podemos **ASOCIAR** tres números reales de dos maneras diferentes al sumarlos o multiplicarlos.

P-3 PROPIEDADES CONMUTATIVAS

$$\textbf{Si } a, b \in R \textbf{ entonces } \begin{cases} a + b = b + a \\ a \bullet b = b \bullet a \end{cases}$$

es decir, podemos cambiar el orden de dos números reales al sumar o multiplicar sin que se afecte el resultado de la operación.

P-4 PROPIEDADES DE EXISTENCIA DE ELEMENTOS NEUTROS

Para todo $a \in R$ se cumple que $a + 0 = 0 + a = a$
Para todo $a \in R$ se cumple que $a \bullet 1 = 1 \bullet a = a$

es decir, todo número real sumado con **0** produce el mismo número real, y todo número real multiplicado por **1** produce el mismo número real. El **0** se denomina **elemento neutro aditivo** y el **1** es el **elemento neutro multiplicativo.**

P-5 PROPIEDADES DE EXISTENCIA DE ELEMENTOS INVERSOS

Para todo $a \in R$ existe otro número real, el cual simbolizamos con $(-a)$, tal que $a + (-a) = (-a) + a = 0$

Para todo $a \in R$, $a \neq 0$, existe otro número real, el cual simbolizamos con a^{-1} o $\frac{1}{a}$, tal que $a \bullet a^{-1} = a^{-1} \bullet a = 1$

$(-a)$ se denomina INVERSO ADITIVO DE **a** y **a^{-1}** se denomina INVERSO MULTIPLICATIVO o RECÍPROCO DE **a**.

P-6 PROPIEDAD DISTRIBUTIVA DE LA MULTIPLICACIÓN RESPECTO A LA SUMA

$$\textbf{Si } a, b, c, \in R \textbf{ entonces } a \bullet (b + c) = a \bullet b + a \bullet c$$

es decir, podemos distribuir un factor entre cada término de una suma.

¡ATENCIÓN!

Cualquier conjunto cuyos elementos satisfagan estas 6 propiedades con la suma y la multiplicación se denomina **CAMPO.** En este caso, como el conjunto con el que estamos trabajando es el de los **NÚMEROS REALES**, entonces se le denomina **CAMPO DE LOS NÚMEROS REALES** y a las 7 propiedades (en realidad son 13 : 6 de la suma, 6 de la multiplicación y la propiedad distributiva) se les llama **AXIOMAS DE CAMPO.**

EJEMPLO 1:

¿Es $\sqrt{3} + \sqrt{31}\pi$ un número real? ¿Por qué?

Solución

La respuesta es SÍ, ya que:

* $\sqrt{3}$ es un número real (por ser irracional), $\sqrt{31}$ también es un número real (por ser irracional) y π también es un número real (por ser irracional).
* $\sqrt{31}\,\pi$ es un número real, por ser el producto de dos números reales (propiedad clausurativa de la multiplicación en R).
* Luego, $\sqrt{3} + \sqrt{31}\,\pi$ es un número real, por ser la suma de dos números reales (propiedad clausurativa de la suma en R).

EJEMPLO 2:

¿Es $2 + (3 + \pi) = 5 + \pi$? ¿Y $2 \bullet (3\pi) = 6\pi$? ¿Por qué?

Solución

- Veamos si $2 + (3 + \pi) = 5 + \pi$:
  $2 + (3 + \pi) = \underbrace{(2 + 3)} + \pi.$ .... Propiedad Asociativa de la suma en R.
  $\therefore 2 + (3 + \pi) = 5 + \pi$ .... Ya que $2 + 3 = 5$
  Luego, $2 + (3 + \pi) = 5 + \pi$ es cierto

- Ahora analicemos si $2 \bullet (3\pi) = 6\pi$:
  $2 \bullet (3\pi) = (2 \bullet 3)\pi$ .... ¿por qué?
  $\therefore 2 \bullet (3\pi) = 6\pi$ .... ¿por qué?
- Luego, $2 \bullet (3\pi) = 6\pi$ es cierto

EJEMPLO 3:

Si $x, y \in R$, ¿Es $x \bullet (2y) = 2 \bullet (xy)$? ¿por qué?

Solución

- Veamos porqué $x \bullet (2y) = 2 \bullet (xy)$:
  $x \bullet (2y) = (x \bullet 2)\, y$ .... Propiedad asociativa de la multiplicación en R.
  $\therefore x \bullet (2y) = (2 \bullet x)\, y$ .... Propiedad conmutativa de la multiplicación en R.
  $\therefore x \bullet (2y) = 2 \bullet (xy)$ .... Propiedad asociativa de la multiplicación en R.
- Luego, $x \bullet (2y) = 2 \bullet (xy)$

EJEMPLO 4:

Mostremos porqué $(-8) + 15 = 7$

Solución

- Escribe al frente de cada paso la propiedad que la justifica:
  1. $(-8) + 15 = (-8) + (8 + 7)$ .... propiedad asociativa

2. $\therefore (-8) + 15 = \underbrace{[(-8) + 8]} + 7$ .... ______________________

3. $\therefore (-8) + 15 = \quad 0 \quad + 7$ .... ______________________

4. $\therefore (-8) + 15 = \ 7$ .... ______________________

EJEMPLO 5:

¿Es $(-5)\bullet(-5)^{-1} = 0$? ¿Por qué?

Solución

- De acuerdo con lo que hemos visto, $(-5)^{-1}$ corresponde al INVERSO MULTIPLICATIVO O RECÍPROCO de (-5). Luego, $(-5)\bullet(-5)^{-1}$ es el producto de (-5) con su inverso multiplicativo y el resultado de este producto es 1.
- Por lo tanto, $(-5)\bullet(-5)^{-1} = 1$; luego, $(-5)\bullet(-5)^{-1} \neq 0$

EJEMPLO 6:

Probemos que $3x\bullet(x^{-1} + 2) = 3 + 6x$

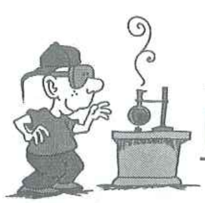
Solución

Escribe al frente de cada paso la propiedad de los números reales que lo justifica:

1. $3x\bullet(x^{-1} + 2) = (3x)\bullet x^{-1} + (3x)\bullet 2$ .... ______________________
2. $\therefore 3x\bullet(x^{-1} + 2) = 3\,\underbrace{(x\bullet x^{-1})} + \underbrace{(2\bullet 3)}\,x$ .... ______________________
3. $\therefore 3x\bullet(x^{-1} + 2) = 3\ (1)\ + \ (6)\ x$ .... ______________________
4. $\therefore 3x\bullet(x^{-1} + 2) = 3 + 6x$ .... ______________________

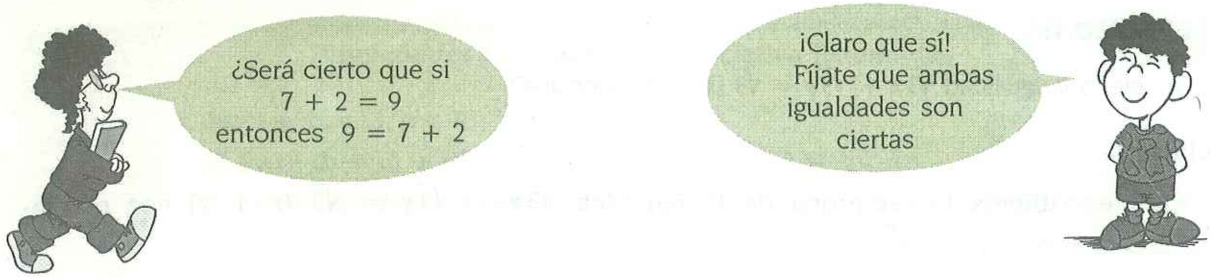
2.3.2 Propiedades o Axiomas de la Igualdad de Números Reales

- En la sección anterior estudiamos las propiedades o axiomas que caracterizan las operaciones primitivas de SUMA y MULTIPLICACIÓN de números reales.
- Ahora necesitamos enunciar otras propiedades que corresponden a la relación de IGUALDAD de números reales y que son indispensables para realizar cálculos y para el desarrollo lógico del álgebra.



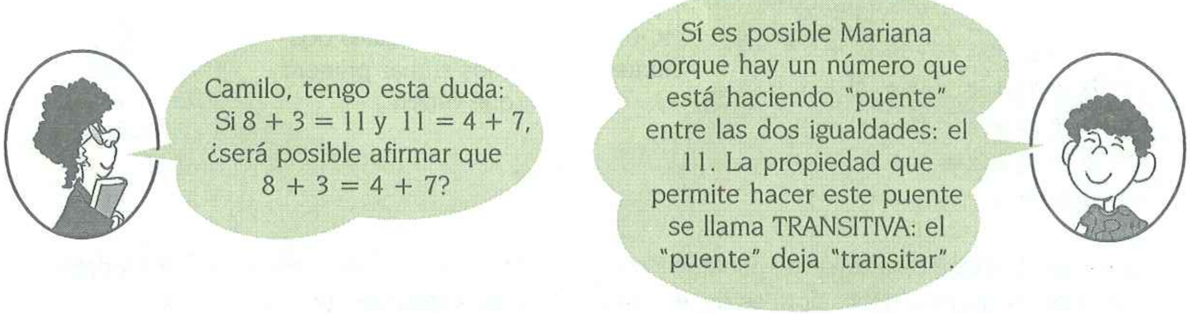
PRIMERA EXPERIENCIA

- Presta atención al diálogo que sostienen Mariana y Camilo:



- Esta situación particular podemos generalizarla, enunciando un axioma denominado PROPIEDAD RECÍPROCA de la igualdad y que dice así: **Dados a, b $\in$ R , si a = b entonces b = a.**
- Continúa el diálogo entre Mariana y Camilo:

- Tal como lo afirma Camilo, la propiedad REFLEXIVA de la igualdad nos dice que: **"Todo número real es igual a sí mismo"**; es decir: **Para todo a $\in$ R se cumple que a = a.**
- Mariana vuelve a la carga con sus preguntas



- La respuesta de Camilo a Mariana podemos resumirla en esta frase: **"Si dos números son iguales a un tercero, entonces son iguales entre sí"**. Esta frase se llama PROPIEDAD TRANSITIVA de la igualdad; es decir: **Dados a, b, c, $\in$ R , si a=b y b=c entonces a=c**

En esta propiedad, el número **b** hace las veces de "puente" o "tránsito" entre **a** y **c.**

APRENDAMOS

PROPIEDADES DE LA IGUALDAD EN LOS REALES

P-1 PROPIEDAD REFLEXIVA

Si a $\in$ R entonces a = a; es decir, **todo número real es igual a sí mismo**

P-2 PROPIEDAD SIMÉTRICA O RECÍPROCA

Para todo a, b $\in$ R , si a = b entonces b = a

P-3 PROPIEDAD TRANSITIVA

Para todo a, b, c $\in$ R , si a = b y b =c entonces a = c

EJEMPLO 1:

¿Es cierta la igualdad $\sqrt{3}x + \sqrt{3}y = \sqrt{3}(x + y)$? ¿Por qué?

Solución

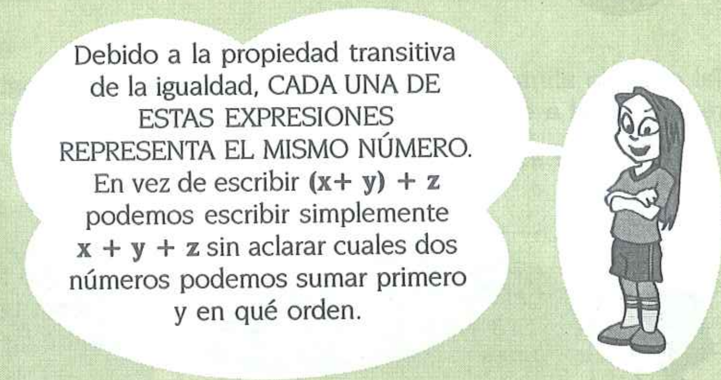
- Si escribimos la recíproca de la igualdad $\sqrt{3}x + \sqrt{3}y = \sqrt{3}(x + y)$ nos queda: $\sqrt{3}(x + y) = \sqrt{3}x + \sqrt{3}y$.
- Esta última igualdad es verdadera en virtud de la propiedad distributiva. Y como esta igualdad es verdadera, entonces también lo será su recíproca. Luego, se cumple que $\sqrt{3}x + \sqrt{3}y = \sqrt{3}(x + y)$.

¡ATENCIÓN!

1. La combinación de las propiedades conmutativa y asociativa de la suma y la multiplicación de números reales y de las propiedades de la igualdad, nos permite escribir las siguientes igualdades:

Si $x, y, z \in R$ entonces:

$$\begin{aligned}
&(x + y) + z = x + (y + z)\\
\therefore\ &(x + y) + z = x + (z + y)\\
\therefore\ &(x + y) + z = (z + y) + x\\
\therefore\ &(x + y) + z = (y + z) + x\\
\therefore\ &(x + y) + z = y + (z + x)\\
\therefore\ &(x + y) + z = y + (x + z)\\
\therefore\ &(x + y) + z = (x + z) + y\\
\therefore\ &(x + y) + z = (z + x) + y\\
\therefore\ &(x + y) + z = z + (x + y)\\
\therefore\ &(x + y) + z = z + (y + x)
\end{aligned}$$



Lo mismo podemos afirmar de cualquier combinación de los números reales x, y, z en presencia de la operación multiplicación; es decir: **Si $x, y, z \in R$ entonces $(x\,y)\,z = x\,y\,z$.**

Por lo tanto:

- Si $x, y, z \in \mathbb{R}$ entonces: $\begin{cases} \text{a) } (x + y) + z = x + y + z \\ \text{b) } (x \bullet y) \bullet z = x \bullet y \bullet z \end{cases}$

- Cualquier combinación de los números reales x, y, z en presencia de las operaciones suma y multiplicación deja intacto el resultado; es decir:

  a) $x + y + z = (x + z) + y = x + (z + y) = (x + y) + z = \ldots$

  b) $x\,y\,z = (x\,z)\,y = (y\,z)\,x = (z\,x)\,y = \ldots$

EJEMPLOS

$137 + 350 + 3 = (137 + 3) + 350 = 140 + 350 = 490$

$5 \bullet x \bullet (-8) = [\,(-8) \bullet 5\,] \bullet x = -40x$

2. Las siguientes propiedades son extensiones de las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva. Estas extensiones las utilizaremos para realizar el trabajo operativo del álgebra con mayor rapidez.

Propiedades Conmutativa y Asociativa Extendidas

Sean a, b, c, d, e $\in$ R

a) $[\,a + (b + c) + (d + e)\,] = a + b + c + d + e$

b) $[\,a \cdot (b \cdot c) \cdot (d \cdot e)\,] = a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e$

- Estas propiedades nos permiten escribir la suma o el producto de cuatro o más números reales sin colocar signos de agrupación.

EJEMPLO 1

1) $(3x) \bullet (-2y) \bullet (5z) \bullet 8 = (-2) \bullet 3 \bullet 5 \bullet 8 \bullet x \bullet y \bullet z = -240\,x\,y\,z$

2) $3 + x + 2 + y + z + w + 18 = 23 + x + y + z + w$

Propiedad Distributiva Extendida

El producto de un número real x por la suma de cualquier número finito de números reales es igual a la suma de los productos de x con cada uno de los sumandos; es decir: Sean x, a, b, c ,d $\in$ R:

$$x \cdot (a + b + c + d) = x \cdot a + x \cdot b + x \cdot c + x \cdot d$$

EJEMPLO 2

Escribamos al frente de cada paso la propiedad que nos permite probar que $(5x+7) + 7 \bullet (x+5) = 12x + 42$

Solución:

1. $(5x+7) + 7 \bullet (x+5) = (5x+7) + (7x + 35)$ .... ______________________
2. $= 5x + 7 + 7x + 35$ .... ______________________
3. $= (5x + 7x) + (7 + 35)$ .... ______________________
4. $= (5 + 7)x + (7 + 35)$ .... ______________________
5. $= 12x + 42$ .... ______________________

3. La expresión $12x + 42$ es la forma reducida de la expresión $(5x + 7) + 7\,(x + 5)$. Uno de los objetos del álgebra es reducir expresiones y para ello aplicamos las distintas propiedades de campo y de la IGUALDAD de los reales.

EJERCICIO 2.3

1 ¿Cuáles de los siguientes números son racionales y cuáles son irracionales?

a) $5\sqrt{16} - 3$ b) $3\sqrt{2} + 7$ c) $\frac{2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}}{5}$ d) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

e) La longitud de una circunferencia de radio $\frac{1}{2}$ cm.

f) El área de un cuadrado de lado 2 cm.

g) La hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 5 cm y 12 cm.

h) El volumen de un cilindro de altura 2 cm y radio de la base 1 cm

i) El área de un cono circular de radio $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ cm y de altura 3 cm.

j) $\frac{\pi\sqrt{3}+5}{2}$

2 Responde:

a) ¿Es Q un campo? ¿Por qué?

b) ¿Es Z un campo? ¿Por qué?

3 Se dice que una operación está BIEN DEFINIDA en un conjunto, cuando al operar dos elementos de dicho conjunto obtenemos siempre otro elemento del conjunto.

a) ¿Está bien definida la operación sustracción en N? ¿por qué?

b) ¿Está bien definida la operación sustracción en Z? ¿por qué?

4 Justifica cada una de las siguientes igualdades, teniendo en cuenta que a y b son números reales:

a) $a + b = 1 \bullet (a + b)$

b) $(-a) + [-(-a)] = 0$

c) $a^{-1} \bullet (a^{-1})^{-1} = 1,\ a \neq 0$

d) $a \bullet (2b) = 2\ (ab)$

e) $a \bullet (b + c) = ab + ac$

f) $a = 1 \bullet a$

5 Usa las propiedades del campo de los reales y la posibilidad de expresar un número real como la suma de otros dos para probar que:

a) $27 + (-9) = 18$

b) $8 \bullet [13 + (-3)] = 80$

6 Encuentra una expresión más simple en cada caso. Justifica cada paso:

a) $(7x)\ (8y)$

b) $3\ (5 + 4y)$

c) $[(3x)\ y] \bullet [2\ (zm)]$

d) $(2x) \bullet [(3y) \bullet (2z)]$

7 ¿Son verdaderas las siguientes igualdades? Justifica:

a) $2\ (a + b) = 2a + 2b$

b) $2\ (ab) = (2a)\ (2b)$

En los ejercicios **8** a **15** indica la propiedad de los números reales que se aplica en cada igualdad.

8 Si $\sqrt{5} = x$ entonces $x = \sqrt{5}$

9 Si $8 \bullet 5 = z$ y $x = z$ entonces $8 \bullet 5 = x$

10 $0 = 0$

11 Si $x + 3 = w$ y $x = z$ entonces $z + 3 = w$

12 Si $x = \sqrt{3}$ entonces $x + 5 = \sqrt{3} + 5$

13 Si $x = y$ entonces $\sqrt{3}\,x = \sqrt{3}y$

14 Si $x + y = 8$ y $x = -4$ entonces $-4 + y = 8$

15 Si $a + b = c$ y $c = x + y$ entonces $a + b = x + y$

En los ejercicios **16** a **21**, efectúa las operaciones dadas escribiendo los resultados en la forma más simple.

16 $(-3) \bullet [\,2x + 3y + (-2)\,z + 5]$

17 $(2xyz)\ (3abc)\ (5mw)$

18 $-(\sqrt{2}\,ab^3)\ (5xy)\ (\sqrt{2}z)$

19 $-2x\ (3y + 5z)$

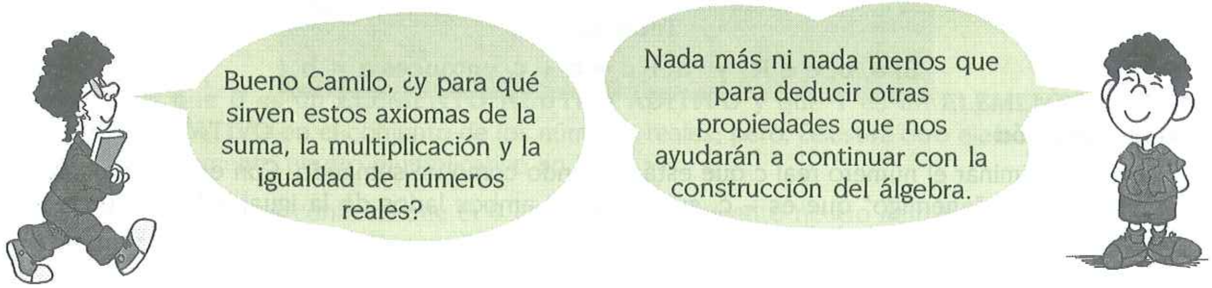
20 $xy\ (2z + 3)$

21 $3 + 2x + 3y + 5 + z + 7$

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 2

¿Cómo es posible que al salir dos padres y dos hijos de una población, su número de habitantes disminuya sólo en 3?

2.4 CONSECUENCIAS DE LOS AXIOMAS DE LOS NÚMEROS REALES: TEOREMAS



¡ATENCIÓN!

- ***Una sugerencia para los docentes:* Esta sección puede estudiarse detallando las demostraciones de los diferentes teoremas -como lo haremos en algunas de ellas- o sencillamente haciendo un listado de ellas pero realizando una adecuada interpretación de cada una. Si se opta por lo segundo, debe insistirse en que cada una de las propiedades de la lista puede deducirse a partir de los axiomas y, por lo tanto, no aparecen porque sí, como por arte de magia.**
- ***Una primera consecuencia de los axiomas del campo* R *es la posibilidad de* DEFINIR *las operaciones* INVERSAS *de la suma y la multiplicación. Estas operaciones son: la* RESTA *y la* DIVISIÓN*; las cuales definimos así:***

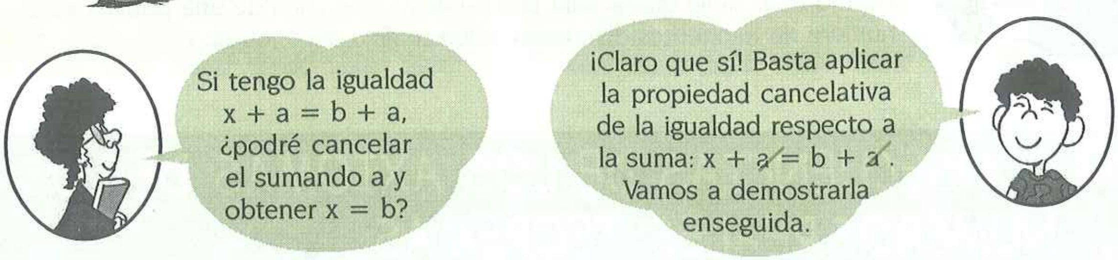
APRENDAMOS

DEFINICIÓN DE RESTA Y DIVISIÓN EN R

- **Si $a, b \in R$ entonces $a - b = a + (-b)$**; es decir, para **RESTAR** dos números reales, basta que al minuendo le sumemos el inverso aditivo del sustraendo.
- **Si $a, b \in R$ y $b \neq 0$ entonces $a \div b = a \cdot b^{-1}$**; es decir, para **DIVIDIR** dos números reales, basta multiplicar el dividendo por el inverso multiplicativo o recíproco del divisor.

- Ahora sí, veamos cuáles son esas propiedades (teoremas) que podemos deducir de los axiomas.

PRIMERA EXPERIENCIA



- La propiedad cancelativa de la igualdad con respecto a la suma establece lo siguiente:

Teorema 1
Si $a, b, c \in R$ y $a + c = b + c$ entonces $a = b$

Demostración

Queremos eliminar el número real c que está actuando como un sumando. Con este fin, le colocamos al lado su "enemigo" que es – c, sumándolo a ambos lados de la igualdad. Esto podemos hacerlo aplicando la propiedad uniforme de la suma:

1. $a + c = b + c$ .... ______________________________
2. $\therefore\ a + c + (-c) = b + c + (-c)$ ....Propiedad uniforme de la igualdad con respecto a la suma
3. $\therefore\ a + [c + (-c)] = b + [c + (-c)]$ .. ______________________________
4. $\therefore\ a + 0 = b + 0$ .... ______________________________
5. $\therefore\ a = b$ .... ______________________________

- En resumen, esta propiedad establece que cuando en los dos miembros de una igualdad se tiene igual sumando, éste se puede CANCELAR.
- En forma similar a como demostramos esta propiedad, podemos probar que: **Si $x + a = b$ entonces $x = b - a$**; es decir, **"si una cantidad está sumando a un lado de una igualdad, entonces pasará al otro lado restando".** Dejamos la demostración como ejercicio.

SEGUNDA EXPERIENCIA

- Ahora Sara pregunta: **"Camilo: Si tengo la igualdad $a \cdot x = a \cdot b$ con $a \neq 0$, ¿podré cancelar el factor a y obtener $x = b$?".**
- Camilo le contesta que, en la misma forma que en la propiedad anterior, cuando en los dos lados de una igualdad hay un FACTOR COMÚN este factor se puede CANCELAR; es decir:

Teorema 2
Si $a, b, c \in R$, $c \neq 0$ y $a \cdot c = b \cdot c$ entonces $a = b$

Demostración

Escribe al frente de cada paso la propiedad utilizada:

1. $a, b, c \in R, c \neq 0$ y $a \bullet c = b \bullet c$................ ____________

2. $\therefore (a \bullet c) \bullet c^{-1} = (b \bullet c) \bullet c^{-1}$........................ ____________

3. $\therefore a \bullet (c \bullet c^{-1}) = b \bullet (c \bullet c^{-1})$........................ ____________

4. $\therefore a \bullet 1 = b \bullet 1$.................................... ____________

5. $\therefore a = b$.. ____________

- En forma similar podemos demostrar que: **"Si $ax = b$ entonces $x = \frac{b}{a}$, con $a \neq 0$"**. Dejamos su demostración como ejercicio.

TERCERA EXPERIENCIA

- Sabemos que **0** es un **ELEMENTO NEUTRO ADITIVO** y que **1** es un **ELEMENTO NEUTRO MULTIPLICATIVO** en el conjunto de los números reales; pero, ¿existirá otro elemento neutro aditivo y otro elemento neutro multiplicativo en R?
- El siguiene teorema confirma que el **0** es el **ÚNICO** elemento neutro aditivo y que **1** es el **ÚNICO** elemento neutro multiplicativo en **R.**

Teorema 3

En R, el 0 es el ÚNICO elemento neutro aditivo y 1 es el ÚNICO elemento neutro multiplicativo.

CUARTA EXPERIENCIA

- Sabemos que un inverso aditivo de todo número real **a** es **(– a)**; pero, ¿tendrá **a** otro inverso aditivo diferente de **(– a)**?
- El siguiente teorema confirma que **(– a)** es el ÚNICO inverso aditivo de **a.**

Teorema 4

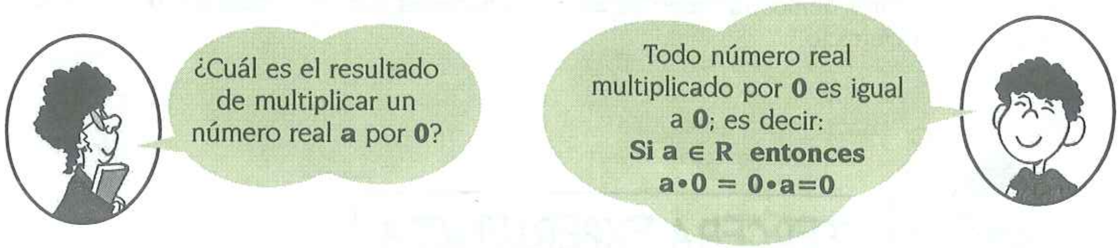
En R, – a es el ÚNICO inverso aditivo de a.

- Igualmente, podemos formular y demostrar el siguiente teorema:

Teorema 5

En R, a^{-1} es el ÚNICO inverso multiplicativo de $a \neq 0$.

QUINTA EXPERIENCIA



Demostración

Escribe al frente de cada paso la propiedad que lo justifica:

1. $0 + 0 = 0$ .... ______
2. $\therefore a \bullet (0 + 0) = a \bullet 0$ .... ______
3. $\therefore a \bullet 0 + a \bullet 0 = a \bullet 0$ .... ______
4. $\therefore a \bullet 0 + a \bullet 0 = 0 + a \bullet 0$ .... ______
5. $\therefore a \bullet 0 = 0$ .... ______

SEXTA EXPERIENCIA

- En el curso anterior tuvimos la oportunidad de estudiar las siguientes propiedades, comúnmente denominadas LEYES DE LOS SIGNOS:

$$(-a) \bullet b = -(a \bullet b); \text{ es decir, } (-) \bullet (+) = (-)$$
$$(-a) \bullet (-b) = a \bullet b; \text{ es decir, } (-) \bullet (-) = (+)$$

- Para demostrar, por ejemplo, la primera de estas propiedades, partiremos de un hecho conocido: que $a + (-a) = 0$ y, luego, multiplicamos ambos miembros de esta igualdad por b. Completa los detalles de la demostración:

1. $a + (-a) = 0$ .... ______
2. $\therefore [a + (-a)] \bullet b = 0 \bullet b$ .... ______
3. $\therefore a \bullet b + (-a) \bullet b = 0 \bullet b$ .... ______
4. $\therefore a \bullet b + (-a) \bullet b = 0$ .... ______
5. $\therefore -(a \bullet b) + [a \bullet b + (-a) \bullet b] = -(a \bullet b) + 0$ . . ______
6. $\therefore [-(a \bullet b) + a \bullet b] + (-a) \bullet b = -(a \bullet b) + 0$ .. ______
7. $\therefore 0 + (-a) \bullet b = -(a \bullet b) + 0$ .... ______
8. Luego, $(-a) \bullet b = -(a \bullet b)$ .... ______

- Para demostrar que $(-a) \bullet (-b) = a \bullet b$ (es decir, que $(-) \bullet (-) = (+)$) partimos de hecho de que $a + (-a) = 0$ y multiplicamos ambos lados de la igualdad por $(-b)$. La dejamos como ejercicio.

- En resumen, hemos demostrado el siguiente teorema:

Teorema 6

Si a, b $\in$ R entonces : $(-a) \bullet b = -(a \bullet b)$
Si a, b $\in$ R entonces : $(-a) \bullet (-b) = a \bullet b$

SÉPTIMA EXPERIENCIA

- Otra propiedad muy utilizada en álgebra y que ya hemos trabajado en los cursos anteriores es aquella que nos permite quitar signos de agrupación precedidos del signo menos. Recordemos:

$$-(5+3) = -5-3$$
$$-(6+8-4) = -6-8+4$$

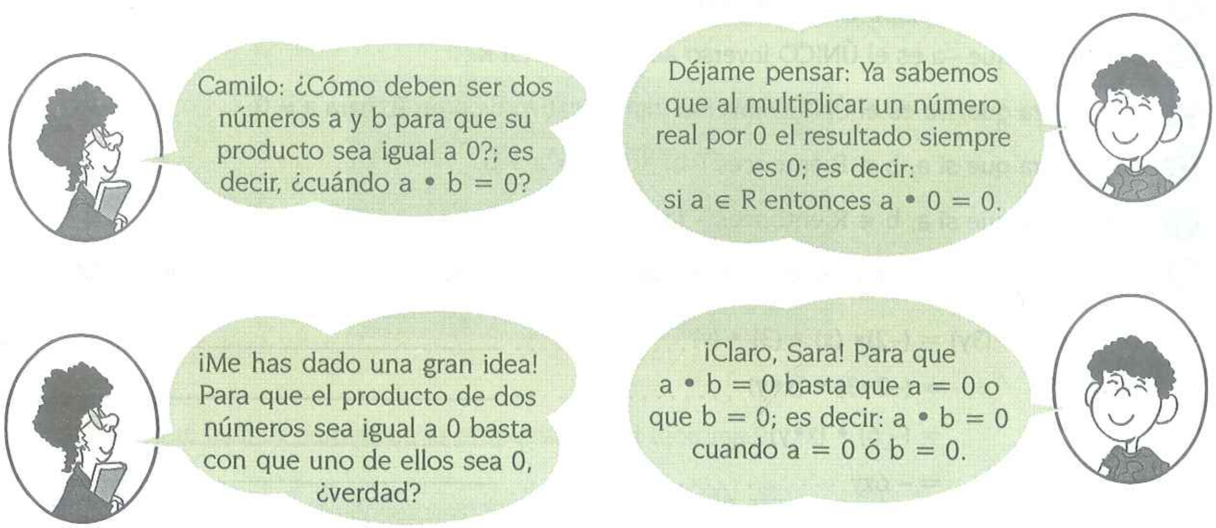
- En general:

Teorema 7

Si a, b $\in$ R entonces $-(a+b) = -a-b$

Es decir, para eliminar un signo de agrupación precedido del signo (–) debemos cambiar los signos de los números incluidos dentro de él.

OCTAVA EXPERIENCIA



- Para garantizar que las conclusiones de Camilo y Sara son ciertas vamos a probar el siguiente teorema.

Teorema 8
Si $a, b \in R$ y $a \bullet b = 0$ entonces $a = 0$ ó $b = 0$

Demostración

Vamos a analizar dos posibilidades: que $a = 0$ o que $a \neq 0$.

- Si $a = 0$, entonces de inmediato concluimos que $0 \bullet b = 0$ en virtud de Teorema 5 y hemos terminado la prueba.
- Si $a \neq 0$, entonces existe a^{-1} y podemos multiplicar ambos lados de la igualdad $a \bullet b = 0$ por a^{-1}; así: $\mathbf{a^{-1} \bullet (a \bullet b) = a^{-1} \bullet 0}$

De esta igualdad podemos concluir dos cosas. Veamos:

1) $a^{-1} \bullet (a \bullet b) = a^{-1} \bullet 0 = 0$ .... ya que $a^{-1} \bullet 0 = 0$

ó

2) $a^{-1} \bullet (a \bullet b) = (a^{-1} \bullet a) \bullet b$ .... P. Asociativa de la $(\bullet)$
$= 1 \bullet b$ .... P. Inverso Multiplicativo
$= b$ .... P. Existencia del Elemento Neutro Multiplicativo

De las conclusiones 1) y 2) podemos afirmar que $b = 0$ (¿por qué)
Finalmente, $a = 0$ ó $b = 0$

EJERCICIO 2.4

1. Demuestra que si $x + 5 = 12$ entonces $x = 12 - 5$
2. Demuestra que si $5x = 27$ entonces $x = \frac{27}{5}$
3. Demuestra que 1 es el ÚNICO elemento neutro multiplicativo en R.
4. Demuestra que $-a$ es el ÚNICO inverso aditivo de a en R.
5. Demuestra que $1/a$ es el ÚNICO inverso multiplicativo de a en R, para $a \neq 0$.
6. Demuestra que si $a, b \in R$ entonces $(-a) \bullet (-b) = a \bullet b$.
7. Demuestra que si $a, b \in R$ entonces $-(a + b) = -a - b$.
8. Escribe al frente de cada paso la propiedad que permite demostrar que $(-2x) \bullet (3y) = -6xy$

   1) $(-2x) \bullet (3y) = (-2) \bullet (x) \bullet (3) \bullet (y)$ .... ________________
   2) $= (-2 \bullet 3) \bullet (x \bullet y)$ .... ________________
   3) $= (-6) \bullet (x \bullet y)$ .... ________________
   4) $= -6xy$ .... ________________

9. ¿Es $(5x) \bullet (-3y) = -15xy$? ¿Por qué?
10. ¿Para cuáles valores de $m \in R$ se cumple que $(m - 5)(m + 2) = 0$?

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 3

Prueba tu habilidad con los números: ¿Cómo podrías obtener el número 10 empleando cinco nueves y las operaciones básicas? Hay dos formas de hacerlo.

2.5 ALGUNOS TEOREMAS RELATIVOS A LA DIVISIÓN DE FRACCIONES

- En la sección anterior definimos la división entre dos números reales a y b, la cual simbolizamos $a \div b$ o $\frac{a}{b}$, de la siguiente manera:

Definición de División en R

Si $a, b \in R$ y $b \neq 0$ entonces $\frac{a}{b} = a \bullet b^{-1} = a \bullet \frac{1}{b}$

- Esta definición y los axiomas y teoremas enunciados antes nos permiten presentar otros teoremas relacionados con la división y con las fracciones. Vamos a enunciarlos y a interpretarlos. Sólo demostraremos algunos.

PRIMERA EXPERIENCIA

- Las siguientes propiedades son consecuencias casi inmediatas de la definición de división:

Teorema 9

Si $x \in R$ y $x \neq 0$ entonces

1. $\frac{1}{x} = x^{-1}$ 2. $\frac{x}{x} = 1$

3. $\left(\frac{1}{x}\right)^{-1} = x$ 4. $\frac{y}{x} = y \bullet \frac{1}{x}$

- Miremos qué fácil se demuestra la propiedad 1 del teorema 9:

1. $\frac{1}{x} = 1 \bullet x^{-1}$ .... Por definición de $\frac{a}{b}$
2. $\therefore \frac{1}{x} = x^{-1}$ .... Propiedad de Existencia del Elemento Neutro Multiplicativo.

Esta propiedad significa que el INVERSO MULTIPLICATIVO DE x puede escribirse $\frac{1}{x}$ o x^{-1}.

- La propiedad 2: $\frac{x}{x} = 1$ significa que todo número real, diferente de 0, dividido por sí mismo es igual a 1.
- Para entender la propiedad 3 es necesario que primero entendamos qué significa la expresión $\left(\frac{1}{x}\right)^{-1}$:

  $\frac{1}{x}$ significa **"inverso multiplicativo de x"**

  $\left(\frac{1}{x}\right)^{-1}$ significa **"inverso multiplicativo del inverso multiplicativo de x".**

  Por lo tanto, $\left(\frac{1}{x}\right)^{-1} = x$ significa que **"si al inverso multiplicativo de x le volvemos a hallar el inverso multiplicativo, entonces nos dará de nuevo el número x".**

- Demostremos la propiedad 4:

  1. $\frac{y}{x} = y \cdot x^{-1}$ .... Definición de división en R
  2. $\therefore \frac{y}{x} = y \cdot \frac{1}{x}$ .... Porque $x^{-1} = \frac{1}{x}$

SEGUNDA EXPERIENCIA

- Completa:

  a) $\frac{4}{5} + \frac{3}{5} =$ __________ b) $\frac{3}{7} + \frac{4}{7} =$ __________

  c) $(-\frac{2}{3}) + (-\frac{5}{3}) =$ __________ d) $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} =$ __________

- ¿Cómo se suman fracciones del mismo denominador?
- El siguiente teorema generaliza lo que todos ya sabemos acerca de la suma de fracciones de igual denominador.

> **Teorema 10**
> **Si a, b, c ∈ R y c ≠ 0 entonces** $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$

- Vamos a demostrar esta propiedad:

  1. $a, b, c \in R$ y $c \neq 0$ .... Por hipótesis
  2. $\therefore \frac{a}{c} = a \cdot c^{-1}$ y $\frac{b}{c} = b \cdot c^{-1}$ .... ____________________
  3. $\therefore \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = a \cdot c^{-1} + b \cdot c^{-1}$ .... ____________________
  4. $\therefore \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = (a + b) \cdot c^{-1}$ .... ____________________
  5. $\therefore \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$ .... ____________________

- Otros teoremas relacionados con la división y con las fracciones son las siguientes.

> **Teorema 11**
> **1. Si x ≠ 0 , y ≠ 0 entonces** $\left(\frac{x}{y}\right)^{-1} = \frac{y}{x}$
> **2. Si y ≠ 0 , w ≠ 0 entonces** $\frac{x}{y} + \frac{z}{w} = \frac{wx + yz}{yw}$
> **3. Si y ≠ 0 , w ≠ 0 entonces** $\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \left(\frac{z}{w}\right) = \frac{xz}{yw}$

- La propiedad 1 del Teorema 11 dice que el inverso multiplicativo de una fracción se obtiene invirtiendo el numerador y el denominador de la fracción dada.
- La propiedad 2, es la conocida regla para sumar fracciones de distinto denominador.
- Finalmente, la propiedad 3 nos recuerda cómo se multiplican fracciones: multiplicando los numeradores entre sí y los denominadores entre sí.

APRENDAMOS

- La demostración de un teorema en álgebra sólo depende de las operaciones con los números reales, de sus relaciones entre ellos y de las propiedades que se establecen entre ellos y no de lo que representan las letras.
- En realidad, no hay mayor diferencia entre las matemáticas aprendidas en grados anteriores y el álgebra de los números reales. La estructura es la misma, lo que cambia es el grado de generalidad de los símbolos.
- Podemos comparar el ALGEBRA con el AJEDREZ: no basta conocer las reglas del juego (los axiomas) para ser un buen jugador. Se requiere, además, una gran destreza para saber combinarlas en forma adecuada y segura.

EJEMPLO 1: Hallemos el resultado de $5 \div \frac{1}{3}$

Solución

1. $5 \div \frac{1}{3} = 5 \bullet \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$ .... ______
2. $\therefore 5 \div \frac{1}{3} = 5 \bullet 3$ .... Porque $\left(\frac{1}{x}\right)^{-1} = x$
3. $\therefore 5 \div \frac{1}{3} = 15$ .... $5 \bullet 3 = 15$

EJEMPLO 2: Calculemos: a) $(\sqrt{3})^{-1}$ b) $(2 - \sqrt{5})^{-1}$ c) $\left(\frac{3 + 5\sqrt{2}}{-5}\right)^{-1}$

Solución

a) $(\sqrt{3})^{-1} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ b) $(2 - \sqrt{5})^{-1} = \frac{1}{2 - \sqrt{5}}$ c) $\left(\frac{3 + 5\sqrt{2}}{-5}\right)^{-1} = \frac{-5}{3 + 5\sqrt{2}}$

EJEMPLO 3: Interpretemos el significado de la propiedad siguiente: **si $x \neq 0$, $y \neq 0$ entonces $(xy)^{-1} = x^{-1} \bullet y^{-1}$**

Solución

Esta propiedad nos dice que **"el inverso multiplicativo de un producto se obtiene hallando el inverso multiplicativo a cada factor y multiplicando los resultados".**

EJEMPLO 4: Multipliquemos $(\pi)^{-1} \bullet (\sqrt{3})^{-1}$

Solución

Por la propiedad que acabamos de demostrar en el ejemplo anterior, tenemos:

$$(\pi)^{-1} \bullet \left(\sqrt{3}\right)^{-1} = \left(\pi \bullet \sqrt{3}\right)^{-1} \text{ .... Del ejemplo 3}$$

$$\therefore (\pi)^{-1} \bullet \left(\sqrt{3}\right)^{-1} = \frac{1}{\pi \bullet \sqrt{3}} \text{ .... Porque } x^{-1} = \frac{1}{x}$$

$$\therefore (\pi)^{-1} \bullet \left(\sqrt{3}\right)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{3} \bullet \pi} \text{ .... Propiedad conmutativa de la multiplicación en R.}$$

EJERCICIO 2.5

1 Completa:

a) $\frac{1}{a} =$ ______, si $a \neq$ ______

b) $\frac{a}{a} =$ ______, si $a \neq$ ______

c) $\left(\frac{1}{a}\right)^{-1} =$ ______, si $a \neq$ ______

d) $a \bullet \frac{1}{b} =$ ______, si $b \neq$ ______

e) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} =$ ______, si $a \neq$ ______ y $b \neq$ ______

2 Calcula:

a) $\left(\pi + \sqrt{5}\right)^{-1}$

b) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-1}$

c) $5 \bullet \left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$

d) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-1}$

e) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \bullet 3^{-1}$

f) $\frac{5}{4} \bullet 5^{-1}$

3 Coloca paréntesis en:

a) $75 \div 15 \div 5$ para que de 1

b) $75 \div 15 \div 5$ para que de 25

c) $80 \div 20 \div 2$ para que de 8

d) $80 \div 20 \div 2$ para que de 2

e) ¿Es asociativa la división de números reales? ¿Por qué?

4 Halla el inverso aditivo y el inverso multiplicativo de $\sqrt{3} - \sqrt{2}$

5 Demuestra que si $b \neq 0$ y $d \neq 0$ entonces $\left(\frac{a}{b}\right) \bullet \left(\frac{c}{d}\right) = \frac{ac}{bd}$

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 4

La diferencia de las edades de José y Sara es igual a la diferencia de edades de Sara y Luis. José es mayor que Sara y Sara es mayor que Luis. Si las edades de José y Luis suman 30 años, ¿cuál es la edad de Sara?

TALLER DE REPASO DE LA UNIDAD 2

1. Contesta en tu cuaderno las siguientes preguntas:

a) ¿Por qué el álgebra es una teoría lógicamente estructurada?
b) ¿Cuáles son los signos propios y los signos auxiliares del álgebra?
c) ¿Cuáles son los conceptos primitivos del álgebra?
d) Escribe 5 conceptos que debemos definir en álgebra.
e) ¿Cuáles son los axiomas del álgebra? Escribe al menos 10.
f) ¿Qué es un campo? ¿Por qué los reales constituyen un campo?
g) Escriba al menos 10 consecuencias (teoremas) que pueden deducirse de los axiomas de campo y de los axiomas de la igualdad.
h) ¿Por qué los números enteros no constituyen un campo?
i) ¿Qué es un grupo abeliano?
j) ¿Es el conjunto de los números enteros con la suma un grupo abeliano? ¿Por qué?

2. Indica la propiedad de los números reales que justifica cada una de las siguientes igualdades:

a) $a \bullet b = b \bullet a$
b) $(9 + \pi) + \sqrt{3} = 9 + (\pi + \sqrt{3})$
c) $b + 0 = 0 + b = b$
d) $m \bullet 1 = 1 \bullet m = m$
e) $5 \bullet (x \bullet y) = (5 \bullet x) \bullet y$
f) $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$
g) $(-p) + p = 0$
h) $b \bullet \frac{1}{b} = \frac{1}{b} \bullet b\,,\ b \neq 0$
i) $c \bullet (a + b) = (a + b) \bullet c$
j) $x \bullet (y + 0) = x \bullet y$
k) $ax + ay = a\,(x + y)$
l) $7 + b\,(x + y) = 7 + (bx + by)$

3. Indica la propiedad de la igualdad de números reales que se aplica en cada caso.

a) Si $a = b$ entonces $5a = 5b$
b) Si $m = 4$ entonces $m + 2 = 6$
c) Si $p = q$ entonces $q = p$
d) Si $x = y+3$ y $y+3 = w$ entonces $x=w$
e) Si $3x + y = 5$ y $x = 2$ entonces $6 + y = 5$

4. Encuentra una expresión más simple en cada caso. Justifica cada paso:

a) $(-3x)\,(-2y)$
b) $-5\,(3y - 2)$
c) $[(2a)\,b]\,[-3\,(cd)]$
d) $(-3x)\,[(-5y)\,(2z)]$

5. Demuestra que si $-3x + 5 = 14$ entonces $x = -3$.

6. ¿Para qué valores de a se cumple que $a\,(a - 2)\,(a + 5) = 0$?

7. El siguiente teorema se utiliza para simplificar fracciones:

Si $x, y, z \in R$, con $y \neq 0$, $z \neq 0$ entonces $\frac{xz}{yz} = \frac{x}{y}$. Demuéstralo y justifica cada paso de la demostración.

8. Completa cada paso de la siguiente demostración con la propiedad que se está aplicando:

$$\frac{2}{5} \div \frac{5}{3} = \frac{2}{5} \bullet \left(\frac{5}{3}\right)^{-1}$$

$$\therefore \frac{2}{5} \div \frac{5}{3} = \frac{2}{5} \bullet \frac{3}{5}$$

$$\therefore \frac{2}{5} \div \frac{5}{3} = \frac{2 \bullet 3}{5 \bullet 5}$$

$$\therefore \frac{2}{5} \div \frac{5}{3} = \frac{6}{25}$$

9. Completa cada paso de la siguiente demostración con la propiedad que se está aplicando.

$\frac{39}{26} = \frac{3 \bullet 13}{2 \bullet 13}$ .... ______________________________

$\therefore \frac{39}{26} = \frac{3}{2}$ .... ______________________________

10. Teniendo en cuenta los ejercicios 8. y 9. simplifica:

a) $\frac{7}{2} \div \frac{21}{4}$ b) $\frac{35}{2} \div 7$ c) $3 \div \frac{3}{5}$

En los ejercicios 11. a 14. interpreta cada una de las proposiciones dadas.

11. Si $a \in R$ entonces $(-1)\,a = -a$

12. Si $a \neq 0$ entonces $(a^{-1})^{-1} = a$

13. $-\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$, con $b \neq 0$

14. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$, con $b, d \neq 0$

PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS DEL ICFES

En las casas de María, Juana y Paula hay un total de 16 animales domésticos, entre los cuales hay 3 perros, doble número de gatos y, además, canarios y loros. En la casa de Juana aborrecen a los perros y a los loros, pero tienen cuatro gatos y 2 canarios (llenos de miedo). En la de Paula sólo hay un perro y otros dos animales, ambos gatos. En la de María tienen 3 canarios y algunos otros animales. ¿Qué otros animales y cuántos de cada uno hay en la casa de María?

Núcleo Temático

3

EXPRESIONES ALGEBRAICAS Y POLINOMIOS

LOGRO GENERAL

- Reconocer los polinomios algebraicos como casos particulares de las expresiones algebraicas.
- Operar con polinomios algebraicos.

DIMENSIONES

LOGROS ESPECÍFICOS	INDICADORES DE LOGRO
Corporal: • Utilizar expresiones algebráicas en la representación de enunciados.	• En grupos de dos o tres, los estudiantes modelan situaciones problemáticas que involucran expresiones algebraicas y polinomios.
Comunicativa: • Explicar a los compañeros cómo se opera con polinomios algebraicos.	• Dados dos o más polinomios, explica el proceso para operar con ellos.
Cognitiva: • Identificar expresiones algebraicas que son polinomios. • Realizar operaciones con polinomios utilizando las propiedades básicas en R.	• Dado un conjunto de expresiones algebraicas, identifica las que son polinomios. • Realiza correctamente operaciones con polinomios.
Estética: • Elaborar un cuadro sinóptico para clasificar polinomios según el número de términos.	• Diseña una cartelera con la clasificación de los polinomios según el número de términos.
Ética - Actitudinal: • Actuar de manera honesta en la presentación de trabajos y evaluaciones.	• Reconoce y acepta sus fortalezas y debilidades en la actividad académica.

EVALUACIÓN

ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS

3.1 HISTORIA DEL ÁLGEBRA (3): LOS GRIEGOS

(Año 800 a de C. al año 600 d. de C.)

DIOFANTO
(275 d.C. - 359 d.C.)

El período de la matemática elemental podemos dividirlo en dos partes, que se distinguen por su contenido básico: el del desarrollo de la geometría (hasta el siglo II d. de C.) y el del predominio del álgebra (desde los siglos II a XVII). Respecto a las circunstancias históricas puede dividirse en tres partes que las llamaremos: GRIEGA, ORIENTAL y del RENACIMIENTO EUROPEO. El período GRIEGO coincide con el comienzo de la cultura, hacia el siglo VII a. de C., en la época de los grandes geómetras (Euclides, Arquímedes y Apolonio). La matemática y en especial la geometría que se enseña hoy en la básica secundaria, tuvo un extraordinario desarrollo en Grecia. Los griegos estudiaron, además, las secciones cónicas: elipse, hipérbola y parábola; guiados por las necesidades de la astronomía desarrollaron la geometría esférica (en el siglo I d. de C.) y los elementos de la trigonometría (Hiparco en el siglo II a. de C. y Claudio Tolomeo).

Con el gigantesco progreso de la geometría griega, el "álgebra" incipiente se volvió "geometría". Las ecuaciones y las incógnitas se expresaron y se resolvieron "geométricamente". Diofanto de Alejandría (275 - 359) escribió un volumen de trece libros el cual denominó Aritmética (la palabra "álgebra" no se usaba en ese entonces) de los cuales se conocen sólo seis. Diofanto utilizó por primera vez "letras" y signos especiales para los cálculos. Desde entonces su "álgebra" se llamó **álgebra sincopada** que antecede al **álgebra simbólica** actual.

La sabiduría sobre la resolución de ecuaciones por parte de Diofanto, encontró una gran acogida en el mundo árabe, en donde se le llamó **ciencia de la reducción y el equilibrio** (la palabra **al-jabru**, que significa **reducción** es el origen de a palabra álgebra).

EJERCICIO 3.1

Comprensión de Lectura. Explicación: Lee nuevamente el texto anterior y luego encierra, en un círculo, la letra que corresponde a la respuesta correcta:

1. Los siguientes enunciados son verdaderos, con excepción de:
   a. El trabajo de la astronomía contribuyó al desarrollo de la geometría esférica.
   b. Hiparco y Tolomeo se destacaron en el campo de la Trigonometría.
   c. El empleo de letras y signos para calcular dió origen al álgebra.
   d. El vocablo Algebra está muy relacionado con el término reducción

2. La idea central que sintetiza el escrito anterior es:
   a. Historia de los grandes geómetras
   b. Origen de la palabra Algebra
   c. Una etapa importante en el desarrollo de la geometría.
   d. Nacimiento y evolución del álgebra.

3. Después de leer el texto se puede hacer la siguiente analogía: GEOMETRÍA: EUCLIDES :: ALGEBRA:

   a. Hiparco   b. Tolomeo   c. Arquímedes   d. Diofanto

4. Del texto anterior podemos deducir que:

   a. Los árabes fueron grandes abanderados del estudio de las matemáticas.
   b. Los griegos contribuyeron enormemente al desarrollo de la geometría.
   c. La geometría que se enseña hoy en la secundaria tiene sus raíces en los países islámicos.
   d. Los griegos no fueron tan originales en sus trabajos ya que copiaron a los árabes.

5. Al final del fragmento el autor:
   a. Nos habla del interés de los griegos por las secciones cónicas.
   b. Describe la sabiduría de los geómetras griegos
   c. Afirma que la geometría dio paso al álgebra simbólica
   d. Menciona el éxito de Diofanto, entre los árabes, por sus trabajos matemáticos.

3.2 EXPONENTES POSITIVOS Y RAÍCES

En la unidad anterior pusimos las bases para la construcción del gran edificio del ÁLGEBRA: desarrollamos el CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES, dos operaciones básicas: LA SUMA y la MULTIPLICACIÓN y una relación: LA IGUALDAD, junto con los axiomas de CAMPO y las consecuencias (teoremas) derivadas de tales propiedades.

En esta sección vamos a definir otras dos operaciones muy importantes en el desarrollo del álgebra de los números reales: LA POTENCIACIÓN CON EXPONENTES POSITIVOS y LA RADICACIÓN, junto con algunas de sus propiedades.

3.2.1. Exponentes Enteros Positivos

PRIMERA EXPERIENCIA

- Presta atención al diálogo que sostienen Felipe y Carolina:

- De acuerdo con la definición que nos dio Carolina, tenemos:

$$5^3 = 5 \bullet 5 \bullet 5 = 125$$
$$3^5 = 3 \bullet 3 \bullet 3 \bullet 3 \bullet 3 = 243$$
$$(-2)^4 = (-2)\bullet(-2)\bullet(-2)\bullet(-2) = 16$$
$$(-7)^3 = (-7)\bullet(-7)\bullet(-7) = -343$$
$$(2a)^3 = (2a)\bullet(2a)\bullet(2a) = 8 \bullet a^3 = 8a^3$$

Un error frecuente es suponer que $(a + b)^n = a^n + b^n$ y que $(a - b)^n = a^n - b^n$. Tales propiedades NO EXISTEN; es decir, $(a+b)^n \neq a^n + b^n$ y $(a-b)^n \neq a^n - b^n$. Invitamos al lector a verificar estas afirmaciones dando valores a a, b y n; por ejemplo: $a = 5$, $b = 3$ y $n = 2$

- Las leyes de los exponentes deben ser manejados con destreza por el estudiante para simplificar expresiones. Veamos algunos ejemplos:

EJEMPLO 3:

Simplifiquemos $(8a^4 b^3 z^2)(3a^2 b^4)$

Solución

$(8a^4 b^3 z^2)(3a^2 b^4) = (8 \bullet 3)(a^4 \bullet a^2)(b^3 \bullet b^4)z^2$ ..... Propiedades asociativa y conmutativa de la multiplicación en R.

$= 24a^6 b^7 z^2$ .... Propiedad $a^m \bullet a^n = a^{m+n}$

EJEMPLO 4:

Simplifiquemos $(-4x^2)^5$

Solución

$(-4x^2)^5 = (-4)^5 (x^2)^5$ .... Propiedad $(a\,b)^m = a^m b^m$

$= -1024\, x^{2 \bullet 5}$ .... Propiedad $(a^m)^n = a^{m \bullet n}$

$= -1024x^{10}$

Notemos que los factores numéricos también deben tenerse en cuenta al aplicar la propiedad $(x\,y)^m$; además, hay que tener cuidado al trabajar con el signo (–).

EJEMPLO 5:

Calculemos $(-x)^4$

Solución

$(-x)^4$ debe interpretarse como $(-1 \bullet x)^4$. Por lo tanto:

$(-x)^4 = (-1 \bullet x)^4$ .... ¿Por qué?

$\therefore (-x)^4 = (-1)^4 \bullet x^4$ .... ¿Por qué?

$\therefore (-x)^4 = 1 \bullet x^4$ .... ¿Por qué?

$\therefore (-x)^4 = x^4$ .... ¿Por qué?

Si no existe el paréntesis, entonces el signo (–) no está afectado por el exponente; es decir: **$-x^4$ NO ES LO MISMO QUE $(-x)^4$**

EJEMPLO 6:

$(-2)^2 = 16$ pero $-2^2 = -16$

EJEMPLO 7:

Simplifiquemos $\left(\dfrac{4x^3}{5y^2z^5}\right)^4$

Solución

$$\left(\frac{4x^3}{5y^2z^5}\right)^4 = \frac{(4x^3)^4}{(5y^2z^5)^4} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{¿Cuál propiedad aplicamos?}$$

$$\therefore \left(\frac{4x^3}{5y^2z^5}\right)^4 = \frac{4^4\,(x^3)^4}{5^4\,(y^2)^4\,(z^5)^4} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{¿Por qué?}$$

$$\therefore \left(\frac{4x^3}{5y^2z^5}\right)^4 = \frac{4^4\,x^{3\bullet 4}}{5^4\,y^{2\bullet 4}\,z^{5\bullet 4}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{¿Por qué?}$$

$$\therefore \left(\frac{4x^3}{5y^2z^5}\right)^4 = \frac{256\,x^{12}}{625\,y^8\,z^{20}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{¿Por qué?}$$

EJEMPLO 8:

Al simplificar $2^3 \bullet 2^6$ obtenemos $2^{3+6} = 2^9$. Notemos que no se obtiene 4^9; es decir, NO multiplicamos las bases. Para simplificar la expresión escribimos la misma base (2) y sumamos los exponentes.

EJEMPLO 9:

Para simplificar $5^3 \bullet 4^3$ no aplicamos la propiedad $a^m \bullet a^n$ porque las **bases no son iguales**; sin embargo, los exponentes sí son iguales y podemos simplificarla aplicando la propiedad $(a \bullet b)^n = a^n \bullet b^n$; así:

$$\mathbf{5^3 \bullet 4^3 = (5 \bullet 4)^3 = 20^3}$$

EJERCICIO 3.2

En los ejercicios 1 a 27 efectúa las operaciones indicadas, utilizando las leyes de los exponentes:

1. $7^6 \bullet 7^4$
2. $\dfrac{7^5}{7^2}$
3. $\dfrac{3^8}{3^2}$
4. $(2^4)^4$
5. $(3^0)^5$
6. $(3^2 \bullet 5^3)^2$
7. $(a^2) \bullet (-a^3)$
8. $(x^3) \bullet (-x)^4$
9. $(-x^3) \bullet (-x^4)$
10. $(-2a^5) \bullet (-5a^3)$
11. $(-6a^2b^2) \bullet (-4ab^3)$
12. $(-a^5)^2$
13. $(-5x^4)^3$
14. $(-4a^4b^2)^4$
15. $\dfrac{12x^5y^4}{3x^2y^3}$
16. $\dfrac{-21a^5y^4}{7a^3y^2}$
17. $\left(\dfrac{a^3b^2}{2c^3d^4}\right)^3$
18. $\left(-\dfrac{4x^3y^4}{3a^2b^3}\right)^5$
19. $\dfrac{15b^2c^5}{16d^3} \bullet \dfrac{4b^4d^3}{5c^6}$
20. $\dfrac{(5x^8)^2}{(2x^4)^3}$
21. $\dfrac{4p^5}{5q^4} \div \dfrac{8p^5}{15q^3}$
22. $\left(\dfrac{4x^2y^5}{z^3}\right)^2 \bullet \left(\dfrac{z^4}{12x^3y}\right)^3$
23. $\dfrac{(2x^2y)^4}{(-3xy)^4}$
24. $\dfrac{x^{3a+1}\,y^{a+3}}{x^{a+2}\,y^{a-1}}$
25. $\dfrac{(a^{b+3}\,d^{b+2})}{a^{3b}\,d^6}$
26. $\dfrac{(a^{3n+1}\,b^{2n-1})^4}{a^{6n+4}\,b^{2n-5}}$
27. $\dfrac{24(x+y)^3\,(x-y)^2}{30(x+y)^2\,(x-y)^3}$

En los ejercicios 28 a 38 , escribir el resultado en potencias de base 5.

28. $(5^3) \bullet (-5^4) \bullet (-5)^2$

29. $\dfrac{5^2 \bullet (-5)^7}{-5}$

30. $\dfrac{(-5)^3 \bullet 5^2}{5^3 \bullet (-5)^2}$

31. $(625) \bullet (125)$

32. $\dfrac{(-5)^{12}}{(-5)^{15}}$

33. $(-25)^3 \bullet (125)^2$

34. $\dfrac{25^2}{125^3}$

35. $\dfrac{(-125)^3}{-625}$

36. $\dfrac{5^{2a}}{25^{2a}}$, con $a \in N$

37. $5^p \bullet 25^p \bullet 625^{2p}$, con $p \in N$

38. $\dfrac{125^{2x}}{625^{3x} \bullet 25^x}$, con $x \in N$

39. La cantidad de luz que puede penetrar una profundidad de x metros en el océano está dada por la expresión $10 \bullet (0{,}4)^x$. ¿Qué cantidad de luz hay a 1 metro? ¿Y a 3 metros?

40. La cantidad de un medicamento en el cuerpo t horas después de una dosis inicial de 20 mg está dada por $20 \bullet (0{,}7)^t$. Determine la cantidad de medicamento que hay en el cuerpo 4 horas después de haberse ingerido.

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 2

Un subconjunto de los enteros 1, 2,..., 100 tiene la propiedad de que ninguno de sus elementos es igual al triple de otro elemento. ¿Cuál es el mayor número de elementos que un tal subconjunto puede tener?

3.3.2. Raíz Cuadrada

EXPERIENCIA

- ¿Existe algún número que elevado al cuadrado sea igual a 81?

  En realidad existen dos números cuyo cuadrado es 81, a saber: 9 y –9. En efecto:

  $$(9)^2 = 81$$
  $$(-9)^2 = 81$$

- En consecuencia, 9 y – 9 son dos RAÍCES CUADRADAS DE 81. A la raíz cuadrada positiva la llamaremos RAÍZ CUADRADA PRINCIPAL y la simbolizamos así:

  $$\sqrt{81} = 9$$

  y la raíz cuadrada negativa la representamos así:

  $$-\sqrt{81} = -9$$

- En general, si **b** es un número real positivo, entonces la raíz cuadrada positiva de **b** se escribe $\sqrt{\mathbf{b}}$ y la raíz cuadrada negativa de **b** se escribe $-\sqrt{\mathbf{b}}$.

APRENDAMOS

DEFINICIÓN DE RAÍZ CUADRADA

- Si **a** y **b** son números reales positivos, entonces $\sqrt{b} = a$ **si y sólo si** $a^2 = b$
- El número $\sqrt{b}$ se denomina la RAÍZ CUADRADA PRINCIPAL de **b** o simplemente la RAÍZ CUADRADA de **b**.

¡ATENCIÓN!

Es muy importante insistir en el hecho de que el símbolo $\sqrt{b}$ representa sólo el número real positivo cuyo cuadrado es b.

- Responde:
  a) ¿Cuáles son los dos números cuyo cuadrado es 121?
  b) ¿Cómo representamos la raíz cuadrada positiva de 121?

3.3.3. Raíz Cúbica y Raíz n-sima

PRIMERA EXPERIENCIA

- Observemos:

$4^3 = 64$ entonces $4 = \sqrt[3]{64}$: 4 es la raíz cúbica de 64

$2^3 = 8$ entonces $2 = \sqrt[3]{8}$: 2 es la raíz cúbica de 8

$(-2)^3 = -8$ entonces $-2 = \sqrt[3]{-8}$: -2 es la raíz cúbica de -8

$(-4)^3 = -64$ entonces $-4 = \sqrt[3]{-64}$: -4 es la raíz cúbica de -64

- En general: **Si $a^3 = b$ entonces $a = \sqrt[3]{b}$: a es la RAÍZ CÚBICA de b.**

APRENDAMOS

DEFINICIÓN DE RAÍZ CÚBICA

La RAÍZ CÚBICA de un número **b** es otro número **a** que elevado al cubo nos reproduce el número **b**; es decir:

$$\sqrt[3]{b} = a \quad \text{si y sólo si} \quad a^3 = b$$

- Completa:

a) $\sqrt[3]{1} =$ _____ porque _____	d) $\sqrt[3]{-8} =$ _____ y se lee _____
b) $\sqrt[3]{-1} =$ _____ porque _____	e) $\sqrt[3]{125} =$ _____ y se lee _____
c) $\sqrt[3]{-27} =$ _____ porque _____	f) $\sqrt[3]{0} =$ _____ porque _____

SEGUNDA EXPERIENCIA

- En forma similar a como lo hemos hecho con la raíz cuadrada y la raíz cúbica podemos, definir la raíz cualquiera (raíz n-sima) de un número dado. Veamos:

$\sqrt[4]{625} = 5$ porque $5^4 = 625$

$\sqrt[5]{-243} = -3$ porque $(-3)^5 = -243$

$\sqrt[6]{b} = a$ siempre que $a^6 = b$

$\sqrt[n]{b} = a$ siempre que $a^n = b$

APRENDAMOS

DEFINICIÓN DE RAÍZ n-sima

Si **a** y **b** son números reales y **n** es un número natural tal que $\mathbf{b^n = a}$, entonces **b** se llama RAÍZ n-SIMA de **a**; es decir: **Si** $\mathbf{b^n = a}$ **entonces** $\mathbf{b = \sqrt[n]{a}}$

$\sqrt[n]{a}$

ÍNDICE (n)
RADICAL ($\sqrt{\ }$)
RADICANDO (a)

- Completa:

a) $\sqrt[5]{32} =$ ______ porque ______

b) $\sqrt[4]{81} =$ ______ porque ______

c) $\sqrt[5]{-1} =$ ______ porque ______

d) $\sqrt[7]{0} =$ ______ porque ______

TERCERA EXPERIENCIA

- Ahora veamos la diferencia básica que existe entre las raíces de índice par y las raíces de índice impar. Observemos el siguiente cuadro:

RAICES DE INDICE IMPAR	RAICES DE INDICE PAR
$\sqrt[3]{64} = 4$	$\sqrt{169} = 13$ (no es -13 ni tampoco es ± 13)
$\sqrt[5]{243} = 3$	$-\sqrt{169} = -13$
$\sqrt[3]{-8} = -2$	$\pm\sqrt{169} = \pm 13$
$\sqrt[5]{-32} = -2$	$\sqrt{-144}$ no es número real
$\sqrt[7]{-128} = -2$	$\sqrt[4]{81} = 3$ (no es -3 ni ± 3)

- El cuadro nos muestra que las raíces de índice par de NÚMEROS NEGATIVOS no son números reales.

APRENDAMOS

- Las raíces de índice PAR están definidas (existen) sólo para los números reales positivos y el cero.
- Las raíces de índice IMPAR están definidas para cualquier número real.

- La siguiente tabla nos resume la definición de $\sqrt[n]{a}$

RADICANDO \ ÍNDICE	**n es par**	**n es impar**
a es positivo	$\sqrt[n]{a}$ es positivo	$\sqrt[n]{a}$ es positivo
$a = 0$	$\sqrt[n]{a} = 0$	$\sqrt[n]{a} = 0$
a es negativo	$\sqrt[n]{a}$ no existe	$\sqrt[n]{a}$ es negativo

- Notemos que no existe $\sqrt[n]{a}$ cuando **n** es par y **a** es un número real negativo. La razón es que un número real elevado a un exponente **par** siempre produce un resultado positivo o cero. En adelante, siempre que usemos el símbolo $\sqrt[n]{a}$ supondremos que la raíz existe.

- Responde:

a) ¿Son reales las raíces de índice par de números reales negativos? ¿por qué?
b) ¿Son reales las raíces de índice impar de números reales negativos? ¿por qué?
c) ¿Son siempre reales las raíces de cualquier índice de números reales positivos? ¿por qué?

CUARTA EXPERIENCIA

- Sabemos que: $\sqrt{4} = 2$ porque $(2)^2 = 4$

sustituimos ⟶ $(\sqrt{4})^2 = 4$

$\sqrt[5]{-243} = -3$ porque $(-3)^5 = -243$

sustituimos ⟶ $(\sqrt[5]{-243})^5 = -243$

Si $\sqrt{a} = b$ entonces $(b)^2 = a$

sustituimos ⟶ $(\sqrt{a})^2 = a$

APRENDAMOS

Siempre que $\sqrt[n]{a}$ exista se cumple, por definición, que: $\mathbf{(\sqrt[n]{a})^n = a}$

- Responde:

1. ¿A qué es igual:

a) $(\sqrt{5})^2$? ¿Por que?

b) $(\sqrt[3]{2})^3$? ¿Por que?

c) $(\sqrt[3]{x})^3$? ¿Por qué?

d) $(\sqrt[5]{a^3})^5$? ¿Por qué?

2. a) ¿A qué es igual $(\sqrt[4]{3})\bullet(\sqrt[4]{3})\bullet(\sqrt[4]{3})\bullet(\sqrt[4]{3})$? ¿Por qué?

b) Si x es un número real no negativo, ¿a qué es igual $(\sqrt[4]{x^3})^4$? ¿Por qué?

c) ¿Por qué no puedo decir que $(\sqrt{-4})^2 = -4$? ¿Por qué?

3.2.4. Significado de $\sqrt[n]{a^n}$, para todos los Reales

En la observación anterior vimos que $(\sqrt[n]{a})^n = a$, siempre que $\sqrt[n]{a}$ exista. Ahora queremos saber qué pasa con la expresión $\sqrt[n]{a^n}$. Tal vez un primer impulso nos lleve a escribir que $\sqrt[n]{a^n} = a$; sin embargo, la siguiente experiencia nos mostrará que no siempre ésto es verdad.

EXPERIENCIA

- Comprobemos si las igualdades:

1. $\sqrt{a^2} = a$ 2. $\sqrt[3]{a^3} = a$

se cumplen o no para los valores de $a = 2$ y $a = -2$

1. PARA a = 2	**PARA a = – 2**
$\sqrt{2^2} \stackrel{?}{=} 2$	$\sqrt{(-2)^2} \stackrel{?}{=} (-2)$
$\sqrt{4} \stackrel{?}{=} 2$	$\sqrt{4} \stackrel{?}{=} -2$
$2 \stackrel{\checkmark}{=} 2$	$2 \neq -2$

Como vemos, si **a** es negativo y queremos que se cumpla la igualdad debemos escribir: $\mathbf{\sqrt{a^2} = -a}$.
Por lo tanto, la igualdad es verdadera sólo cuando **a** es positivo o cero.

En general, si **n** es un número par, entonces:

$$\sqrt[n]{a^n} = |a| = \begin{cases} \mathbf{a} & \textbf{si a es positivo} \\ \mathbf{0} & \textbf{si a = 0} \\ \mathbf{-a} & \textbf{si a es negativo} \end{cases}$$

La expresión $|\mathbf{a}|$ se denomina VALOR ABSOLUTO de **a**.

2. **PARA a = 2**

$\sqrt[3]{2^3} \overset{?}{=} 2$

$\sqrt[3]{8} \overset{?}{=} 2$

$2 \overset{\checkmark}{=} 2$

PARA a = – 2

$\sqrt[3]{(-2)^3} \overset{?}{=} -2$

$\sqrt[3]{-8} \overset{?}{=} -2$

$-2 \overset{\checkmark}{=} -2$

Como vemos, en todos los casos se cumple que: $\sqrt[3]{a^3} = a$

- En general, si n es un número impar, entonces $\sqrt[n]{a^n} = a$

APRENDAMOS

INTERPRETACIÓN DE $\sqrt[n]{a^n}$

- Si **n** es un número par, entonces:

$$\sqrt[n]{a^n} = |a| = \begin{cases} a & \textbf{si a es positivo} \\ 0 & \textbf{si a = 0} \\ -a & \textbf{si a es negativo} \end{cases}$$

- Si **n** es un número impar, entonces: $\sqrt[n]{a^n} = a$

¡ATENCIÓN!

En adelante, y mientras no se diga lo contrario, supondremos que el radicando es un número real no negativo. Por lo tanto, si **n** es un entero positivo cualquiera y **a** es un número real no negativo se cumple que: $(\sqrt[n]{a})^n = a = \sqrt[n]{a^n}$

Usaremos frecuentemente esta propiedad en unidades posteriores.

Ejemplo

Calculemos el valor de:

a) $\sqrt[3]{-343}$ b) $\sqrt[5]{243}$ c) $\sqrt[4]{81}$

d) $\sqrt[4]{(-4)^4}$ e) $\sqrt[3]{b^6}$ f) $\sqrt[4]{a^4}$, si a es negativo

Solución

a) $\sqrt[3]{-343} = \sqrt[3]{(-7)^3} = -7$

b) $\sqrt[5]{243} = \sqrt[5]{3^5} = 3$

c) $\sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = |3| = 3$

d) $\sqrt[4]{(-4)^4} = |-4| = -(-4) = 4$

e) $\sqrt[3]{b^6} = \sqrt[3]{(b^2)^3} = b^2$

f) $\sqrt[4]{a^4} = |a| = -a$, por ser a negativo

¡ATENCIÓN!

En el ejercicio f), como **a** es negativo entonces **– a** es positivo.

EJERCICIO 3.3

En los ejercicios del 1 al 12, encuentra las raíces reales cuando sea posible.

1. $\sqrt{121}$
2. $-\sqrt[4]{81}$
3. $\sqrt[3]{-64}$
4. $\sqrt[5]{-243}$
5. $-\sqrt[6]{(-3)^6}$
6. $\sqrt[4]{256}$
7. $\sqrt{-625}$
8. $\sqrt[4]{-20}$
9. $\sqrt[6]{-50}$
10. $\sqrt[8]{256\ b^8}$, con b positivo
11. $\sqrt{9\ m^2}$, con m negativo
12. $\sqrt[5]{243\ p^5}$

En los ejercicios 13 a 18, escribe cada expresión dada utilizando radicales:

13. **a** es un número cuyo cuadrado es **p**.
14. **b** resulta de elevar **y** a la 3.
15. **t** es un número que elevado a la 5 da **–q**.
16. **a** y **b** son números cuya suma elevada al cubo da 125.
17. La raíz quinta de **x – y** es 6.
18. El cuadrado de la raíz cúbica de **a** es **b**.

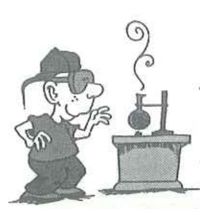
DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 2

Los números 1, 2, 3,..., 12 se escriben en dos filas y 6 columnas de tal modo que las sumas de los números en cada una de las dos filas son iguales entre sí, y las sumas de los números en cada una de las 6 columnas son también iguales entre sí. Si el número 8 aparece en la primera fila, ¿cuál es el número de números pares que debe tener la segunda fila?

3.3 CONCEPTOS BÁSICOS DEL ÁLGEBRA

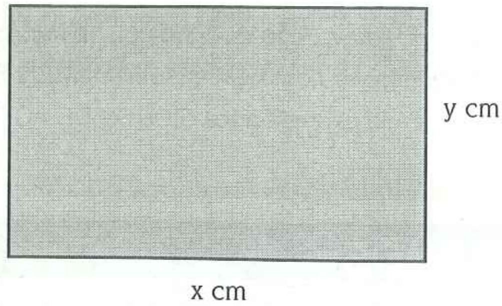
Conviene, desde un principio, conocer el significado de los conceptos básicos que vamos a emplear en el álgebra.

3.3.1. Variable y Constante



EXPERIENCIA

- El largo de un rectángulo mide **x cm** y el ancho mide **y cm**. ¿Cuál es el perímetro de este rectángulo?



- Como el perímetro de una región rectangular es la suma de las medidas de sus lados, entonces el perímetro del rectángulo es: $\mathbf{P = 2x + 2y}$
- Dependiendo de los valores que le demos a **x** y a **y** obtendremos diferentes valores para el perímetro **P**.
- En la fórmula $\mathbf{P = 2x + 2y}$, las letras **P**, **x** y **y** son VARIABLES, mientras que 2 es una constante. Las variables **P**, **x** y **y** toman valores en el conjunto de los números reales positivos y varían (cambian) de un rectángulo a otro.

APRENDAMOS

DEFINICIONES DE VARIABLE Y CONSTANTE

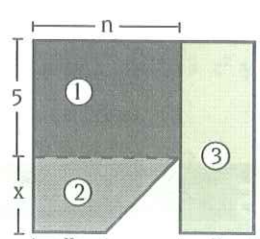
- Una VARIABLE es un símbolo utilizado para representar los elementos de un conjunto que contenga más de un elemento. En general, utilizaremos letras para representar variables.
- Una CONSTANTE, en cambio, es un símbolo que corresponde exactamente a un solo objeto.

- Responde:
  a) Si $3x + 2y = 5$, ¿cuáles son las variables? ¿y cuáles las constantes?
  b) En $x = 5t$ (distancia = velocidad x tiempo), ¿cuáles son las variables?

3.3.2. Expresiones Algebraicas, Términos y Factores

EXPERIENCIA

- Fíjate bien en la siguiente figura:



- Completa: El área de la figura ① es ______, el de la figura ② es ______ y el de la figura ③ es _____.
- Responde: ¿Representa la expresión $\mathbf{\frac{x\,(n + x)}{2} + 5n + (x + 5)\,x}$ el área total de la figura? Explica.
- Como no conocemos los valores de las variables (m, n, x) entonces, tendremos que dejar las operaciones indicadas en dicha expresión.

- Notemos que en la expresión $\frac{x\,(n+x)}{2} + 5n + (x+5)\,x$ aparecen números y letras enlazados por operaciones aritméticas. Expresiones como éstas se llaman EXPRESIONES ALGEBRAICAS. En muchos casos, también aparecen en la expresión los SIGNOS DE AGRUPACIÓN: ( ), [ ] o { }.

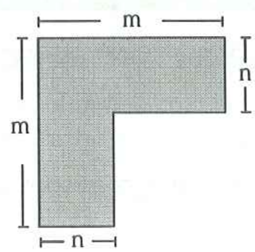
APRENDAMOS

- Una EXPRESIÓN ALGEBRAICA es una forma simbólica en la que intervienen constantes, variables, operaciones y signos de agrupación.
- Son ejemplos de expresiones algebraicas las siguientes:

$$\frac{2x}{x+y} \quad ; \quad \frac{a}{2} + \frac{4}{a} \quad ; \quad 4\,\{\,m - 3\,[\,m - (m+3)\,]\,\}.$$

- En la expresión algebraica $\frac{4x^2y}{3z}$ intervienen constantes (3 y 4), variables (x, y, z) y las operaciones multiplicación, división y potenciación.

- Escribe una expresión algebraica para representar el área de la siguiente figura:



SEGUNDA EXPERIENCIA

- Observa cuidadosamente la siguiente expresión algebraica y contesta:

$$\frac{4x^3y}{5} + \frac{2x^2y^2}{3} + (-3\sqrt[3]{x}) + 7$$

¿Cuántos sumandos tiene esta expresión? ¿Cuáles son?

- Cada uno de los sumandos de una expresión algebraica se llama TÉRMINO de la expresión:

$$\frac{4x^3y}{5} + \frac{2x^2y^2}{3} + (-3\sqrt[3]{x}) + 7$$

Términos

APRENDAMOS

TÉRMINOS Y FACTORES DE UNA EXPRESIÓN ALGEBRÁICA

- Dos o más expresiones algebraicas conectadas por un signo más (+) o por un signo menos (–) reciben el nombre de **TÉRMINOS.**

Ejemplo: En la expresión algebraica $\frac{7xy}{8} + x - 8$ tenemos tres términos: $\frac{7xy}{8}$, x , 8.

- Dos o más constantes o dos o más variables o dos o más expresiones que están conectadas sólo por multiplicaciones o divisiones se denominan **FACTORES.**

Ejemplo: $\dfrac{4x^2y}{3z}$ es un término en el cual 4, 3, x, y y z son factores del término.

EJEMPLO

La expresión $\underbrace{7\,(a + b)}_{\text{término}} - \underbrace{3\,(a + b)\,(a - b)}_{\text{término}}$ tiene dos términos: $7\,(a + b)$ y $3\,(a + b)\,(a - b)$.

A su vez, el término $7\,(a + b)$ tiene dos factores: 7 y $(a + b)$; y el término $3\,(a + b)\,(a - b)$ tiene tres factores: 3, $(a + b)$ y $(a - b)$.

¡ATENCIÓN! Notemos que el contenido de un signo de agrupación constituye un solo factor.

3.3.3. Coeficiente de un Término y Términos Semejantes

EXPERIENCIA

- Los factores numéricos de un término se denominan COEFICIENTES NUMÉRICOS de los otros factores. Por ejemplo, en el término $-6xy$ el coeficiente numérico es -6. Sin embargo, la palabra coeficiente se utiliza en un sentido más amplio y, en ocasiones, algún factor o grupo de factores de un término puede elegirse como el coeficiente de los restantes.

EJEMPLO:

En el término $-6abx^2$, el grupo de factores $-6ab$ puede considerarse como COEFICIENTE de x^2, siempre que a y b sean números reales.

- Muchos términos difieren entre sí sólo en su coeficiente numérico. Tales términos se denominan TÉRMINOS SEMEJANTES.
- Teniendo en cuenta los términos $-\dfrac{3}{4}\,\mathbf{x^2\,y\,z}$ y $\sqrt{3}\,\mathbf{x^2\,y\,z}$:

a) Escribe los factores que tiene cada término.

b) ¿En cuáles factores difieren estos dos términos?

c) ¿Son semejantes estos dos términos? ¿Por qué?

- Teniendo en cuenta los términos $-\,\mathbf{8\,(m + n)^2}$ y $\dfrac{4}{7}\,\mathbf{(m + n)^3}$:

a) Escribe los factores de cada término.

b) ¿En cuáles factores difieren estos dos términos?

c) ¿Son semejantes estos dos términos? ¿Por qué?

APRENDAMOS

COEFICIENTES Y TÉRMINOS SEMEJANTES

- Los **FACTORES NUMÉRICOS** de un término se denominan **COEFICIENTES NUMÉRICOS** del término.

Ejemplo: En $-\frac{3}{4}\mathbf{x^2\,y\,z}$, el coeficiente numérico es $-\frac{3}{4}$.

- Los términos que sólo difieren en sus coeficientes numéricos se denominan **TÉRMINOS SEMEJANTES.**

Ejemplo: Los términos $-\frac{3}{4}\mathbf{x^2\,y\,z}$ y $\sqrt{3}\,\mathbf{x^2\,y\,z}$ son semejantes porque sólo difieren en los coeficientes numéricos.

3.3.4. Valor Numérico de una Expresión Algebraica

En muchas ocasiones es necesario hallar el valor numérico de una expresión algebraica. Con este fin sustituimos sus variables por números reales particulares y resolvemos las operaciones indicadas. El resultado se denomina VALOR NUMÉRICO de la expresión algebraica.

EXPERIENCIA

- Hallemos el valor numérico de la expresión $32a^2 - 5xy$ cuando $a = 2$, $x = 4$, $y = 6$.
- Sustituyendo los valores dados a las variables en $32a^2 - 5xy$ nos queda:

$$32\,(2)^2 - 5\,(4)\,(6) = 128 - 120 = 8$$

EJERCICIO 3.4

En los ejercicios 1 a 6 escribe la expresión algebraica que corresponda al enunciado dado:

1. La suma del triple de a con la cuarta parte de b.
2. La diferencia entre los dos tercios de m con los cuatro séptimos de n.
3. El triple del cuadrado de la diferencia entre x y y.
4. Los dos tercios del cubo del producto de a y b.
5. El inverso multiplicativo de la suma del doble de p con el triple de q.
6. La raíz cúbica del cociente de la suma de x y y con la diferencia de a y b.

En los ejercicios 7 a 10 utiliza expresiones algebraicas para representar:

7. El precio de x bultos de cemento a \$5.000 el bulto.

8. El perímetro de un rectángulo cuya base mide a metros y cuya altura es 5 metros menor que la base.

9. El área de un rectángulo cuya base mide b metros y cuya altura mide 3 metros más que el doble de la base.

10. El volumen de un cono cuyo radio de la base mide 5 cm menos que su altura.

11. Indica el número de términos que tiene cada una de las siguientes expresiones algebraicas.

a) $7m^3 - 4m^2 + 5m + 6$　　b) $-7ab$　　c) $\frac{4}{a+b} - 7a^2b^3$

d) $\sqrt[3]{a^2 + b^2} - 3$　　e) $\frac{p^2 - q^2}{p + q^3} + 4p - \frac{3p}{q}$　　f) $5 - (a^2 - b)^3$

12. Indica si las parejas de términos dados son o no semejantes:

a) $-\frac{3}{4}a^2b^3c$; $2a^2b^3c$　　b) $-5y^2xz^3$; $\frac{4}{5}xy^2z^3$

c) $\frac{1}{5}mnp^2$; $-\frac{2}{3}m^2n^2p$　　d) $2\sqrt[3]{a^2b^2c}$; $-3\sqrt[5]{a^2b^2c}$

e) $7wz^2y^3$; $7z^2w^3y$　　f) $-\frac{4}{3}a^2b^3c$; $-\frac{4}{3}c^2b^3a^2$

13. Indica el coeficiente numérico de cada uno de los términos:

a) $-\frac{2}{3}x^2y^3z$　　b) $-5\sqrt{xy}$　　c) $-3ax^2y$

d) $\frac{4}{5}ab^2c^3$　　e) $-2\sqrt{3}mn^2c^3$　　f) $\frac{\sqrt{3}}{5}xy^3z$

14. Halla el valor numérico de las siguientes expresiones cuando $x = -6$, $y = -2$, $c = 5$:

a) $(x + c)(x - c)$　　b) $\frac{x^2 - y^2}{y^2 - x^2}$　　c) $x^2 + 2cx + c^2$

d) $\sqrt{c\left(\frac{x^2}{9} + \frac{y^4}{4}\right)}$　　e) $\sqrt[3]{\frac{c^3}{12x^2y^2}}$　　f) $(x + c)^{100} - (1 - x)^0$

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 3

Sara tiene 19 monedas más que Janeth. Las dos juntas tienen un total de 81 monedas.

a) Si x representa el número de monedas que tiene Janeth, ¿qué expresión algebraica representa el número de monedas que tiene Sara?

b) Escribe la expresión algebraica correspondiente a este problema.

c) Resuelve la ecuación y halla la cantidad de dinero que tiene cada una.

3.4 POLINOMIOS Y OPERACIONES CON POLINOMIOS

3.4.1 Concepto de Polinomio

En matemáticas, la palabra POLINOMIO se utiliza para designar ciertas expresiones algebraicas que presentan características especiales.

PRIMERA EXPERIENCIA

- Fíjate bien en las siguientes expresiones algebraicas:

$5x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 5x - 3 \quad ; \quad 4x^3y^2 + 5 \quad ; \quad 2x^7 - \frac{3}{2}x + 1 \quad ; \quad 6x^4y$

- Los términos de cada una de estas expresiones presentan dos características:

1. Los coeficientes numéricos son números reales.
2. Las variables están realizando operaciones de multiplicación y el exponente de cada una es un número entero no negativo.

Las expresiones con estas características se llaman **POLINOMIOS.**

Por ejemplo, la expresión algebraica $\frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{x^2} + 3x - \sqrt{2}$ no es un polinomio porque en el término $-\frac{5}{x^2}$, la variable x no está multiplicando sino dividiendo.

- Responde: ¿Por qué las expresiones $3x^{1/2} + x^2 + 1$ y $3x^{-1} + 2x$ no son polinomios? Explica.
- Los polinomios con sólo la variable **x** los nombramos, en general, así:

P (x) que se lee **P de x**
Q (x) que se lee **Q de x**
R (x) que se lee **R de x**

- Frecuentemente trabajaremos también con polinomios que poseen más de una variable. Por ejemplo:

$P(x, y) = 5x^2y^3 - 3x^3y + \frac{5}{9}xy^2 + 9$.......................... tiene dos variables: x y y

$R(a, b, c) = -8a^2b^5c^3 + \sqrt{5}a^5b^4 + 2$............................tiene tres variables: a, b y c

- Responde: ¿Cómo se leen P (x, y) y R (a, b, c)?

SEGUNDA EXPERIENCIA

- Algunos polinomios reciben nombres especiales de acuerdo con el número de términos; así:

Monomio: polinomio de un solo término; por ejemplo, $-3x^2$ es un monomio.

Binomio: polinomio de dos términos; por ejemplo, $\frac{4}{5}x^4 - \frac{1}{3}x^2$ es un binomio.

Trinomio: polinomio de tres términos; por ejemplo, $x^2 - 4x + 4$ es un trinomio.

- Como vemos un monomio es una expresión de la forma $\mathbf{ax^n}$, siendo **a** un número real cualquiera y **n** un entero no negativo.

¡ATENCIÓN!

Cuando un monomio no tiene coeficiente numérico:

a) Es 1 si delante no lleva signo. Por ejemplo: El coeficiente de x^2 es 1
b) Es -1 si delante lleva el signo menos. Por ejemplo: El coeficiente de $-x^2$ es -1

- Responde: ¿Cuál es el coeficiente de cada término del:

a) Binomio: $P(x) = x^4 - x^2$?　　　　b) Trinomio: $Q(x) = -x^3 + 5x^2 + x$?

TERCERA EXPERIENCIA

- GRADO DE UN POLINOMIO EN UNA VARIABLE es el exponente mayor de la variable.

EJEMPLO: El polinomio $Q(x) = \frac{3}{2}x^3 + 5x - 1$ es de grado 3

- GRADO DE UN POLINOMIO EN DOS O MÁS VARIABLES, es la mayor suma de los exponentes de las variables en cada término.

EJEMPLO: El polinomio $R(x, y) = 4x^5y^2 - x^3y^3 + 5xy^2$ es de grado 7 (¿por qué?).

¡ATENCIÓN!

Un número real puede considerarse como un monomio de grado 0.

Ejemplo: $7 = 7x^0$

APRENDAMOS

DEFINICIÓN DE POLINOMIO:

- La expresión algebraica:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots a_1 x + a_0$$

en la cual **n** es un entero no negativo, $a_n, a_{n-1}, a_{n-2} \ldots a_1, a_0$ son números reales y $a_n \neq 0$ se denomina POLINOMIO EN LA VARIABLE **x.**

- El mayor exponente de **x**; es decir, n, se denomina GRADO del polinomio.
- Los números $a_n, a_{n-1}, a_{n-2} \ldots a_1, a_0$ son los COEFICIENTES del polinomio.
- a_n es el COEFICIENTE PRINCIPAL y a_0 es el TERMINO INDEPENDIENTE.

EJEMPLO 1

La expresión x^2+3x^5+8 es un polinomio en el cual:

- 5 es el **grado.**
- 3 es el **coeficiente principal**
- 8 es el **término independiente**

EJEMPLO 2

Clasifiquemos cada uno de los siguientes polinomios e indiquemos su grado.

POLINOMIO	CLASE	GRADO
$5x^7 - 3x^4 - 6$	TRINOMIO	7
$x^4 - 63$	BINOMIO	4
$18y^2$	MONOMIO	2
63	MONOMIO	0
$x^4 - 3x^2 + 6x - 9$	POLINOMIO	4

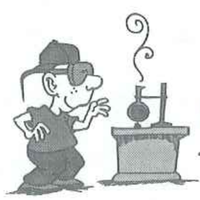
EJEMPLO 3

Para cada uno de los siguientes polinomios indiquemos el número de variables, su clase, sus coeficientes y su grado:

POLINOMIO	No. VARIABLES	CLASE	COEFICIENTES	GRADO
$x^3 + 64y^3$	2	BINOMIO	1, 64	3
$3x^2 - 10xy - 8y^2$	2	TRINOMIO	3, -10, -8	2
$35m^2n^4p$	3	MONOMIO	35	7
$t^4 - 3u^3v^2$	3	BINOMIO	1, -3	5

3.4.2 Suma de Polinomios

- En primer lugar, digamos que sólo pueden sumarse o restarse TÉRMINOS SEMEJANTES. El proceso de sumar o restar términos semejantes se denomina REDUCCIÓN DE TÉRMINOS SEMEJANTES.
- Como las variables en un polinomio representan números reales, al operar con polinomios se pueden emplear las propiedades conmutativa, asociativa, distributiva, las leyes de los signos y la eliminación de signos de agrupación.



PRIMERA EXPERIENCIA

- Sumemos los siguientes polinomios:

$$P(a) = 5a^3 - 3a^2 + 7a - 4 \quad ; \quad Q(a) = -3a^3 + 5a + 3$$

- Podemos sumarlos de dos maneras:

PRIMER MÉTODO

* Escribimos los polinomios uno a continuación del otro, agrupamos los términos semejantes (aplicando la propiedad asociativa de la suma) y reducimos dichos términos semejantes; así:

$P(a) + Q(a) = (5a^3 - 3a^2 + 7a - 4) + (-3a^3 + 5a + 3)$ .... ¿Por qué?

$\therefore P(a) + Q(a) = (5a^3 - 3a^3) - 3a^2 + (7a + 5a) + (-4 + 3)$ .... Agrupamos términos semejantes

$\therefore P(a) + Q(a) = 2a^3 - 3a^2 + 12a - 1$ .... Redujimos los términos semejantes

* Por lo tanto: $P(a) + Q(a) = 2a^3 - 3a^2 + 12a - 1$ es el polinomio suma.

SEGUNDO MÉTODO

* Escribimos los polinomios, uno debajo del otro, de manera que se ubiquen en la misma columna los términos que son semejantes. Si falta algún término, escribimos en su lugar un CERO; así:

$$\begin{aligned} P(a) &= 5a^3 - 3a^2 + 7a - 4 \\ Q(a) &= -3a^3 + 0 + 5a + 3 \end{aligned}$$

* A continuación, sumamos miembro a miembro las dos igualdades:

$$\begin{array}{rcl} P(a) & = & 5a^3 - 3a^2 + 7a - 4 \\ Q(a) & = & -3a^3 + 0 + 5a + 3 \\ \hline P(a) + Q(a) & = & 2a^3 - 3a^2 + 12a - 1 \end{array}$$

SEGUNDA EXPERIENCIA

- Sumemos los polinomios:

$$P(a, b) = \frac{2}{5} a^3+3b^3 - \frac{1}{3} a^2b-5 \ ; \quad Q(a, b) = \frac{5}{6} a^2b - \frac{2}{3} ab^2 \quad ; \quad R(a, b) = -\frac{1}{5}b^3 + \frac{5}{9}ab^2-7$$

- Escribimos los polinomios uno a continuación del otro, agrupamos los términos semejantes y, finalmente, los reducimos:

$$P(a, b) + Q(a, b) + R(a, b) = \left(\frac{2}{5}a^3+3b^3 - \frac{1}{3}a^2b-5\right)+\left(\frac{5}{6}a^2b - \frac{2}{3}ab^2\right)+\left(-\frac{1}{5}b^3 + \frac{5}{9}ab^2-7\right)$$

$$\therefore P(a, b) + Q(a, b) + R(a, b) = \frac{2}{5}a^3+\left(3b^3 - \frac{1}{5}b^3\right)+\left(-\frac{1}{3}a^2b+\frac{5}{6}a^2b\right)+\left(-\frac{2}{3}ab^2+\frac{5}{9}ab^2\right)+(-5-7)$$

$$\therefore P(a, b) + Q(a, b) + R(a, b) = \frac{2}{5}a^3+\frac{14}{5}b^3+\frac{1}{2}a^2b+\left(-\frac{1}{9}ab^2\right)+(-12)$$

$$\therefore P(a, b) + Q(a, b) + R(a, b) = \frac{2}{5}a^3+\frac{14}{5}b^3+\frac{1}{2}a^2b-\frac{1}{9}ab^2-12$$

3.4.3 Resta de Polinomios

- La resta de polinomios se fundamenta en la resta de números reales. Veamos:

APRENDAMOS

- RESTA DE NÚMEROS REALES: Si $a,b \in R$ entonces $a - b = a + (-b)$
- RESTA DE POLINOMIOS.: Si $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios, entonces:

$$\mathbf{P(x) - Q(x) = P(x) + (-Q(x))}$$

es decir, para RESTAR dos polinomios, al minuendo P(x) le sumamos el inverso aditivo del sustraendo Q(x).

- En la práctica, para restar dos polinomios escribimos el minuendo; a continuación, el sustraendo con los signos de sus términos cambiados y reducimos los términos semejantes.

EJEMPLO 1:

De $P(x) = 7x^3 - 6x^2 - 7$ restar $Q(x) = 5x^3 - 4x^2 + 7x + 2$

Solución

- Del enunciado del ejercicio concluimos que el minuendo es: $P(x) = 7x^3 - 6x^2 - 7$ y el sustraendo es $Q(x) = 5x^3 - 4x^2 + 7x + 2$
- Por lo tanto:

$$P(x) - Q(x) = (7x^3 - 6x^2 - 7) - (5x^3 - 4x^2 + 7x + 2)$$
$$\therefore\ P(x) - Q(x) = 7x^3 - 6x^2 - 7 - 5x^3 + 4x^2 - 7x - 2$$
$$\therefore\ P(x) - Q(x) = (7x^3 - 5x^3) + (-6x^2 + 4x^2) + (-7x) + (-7 - 2)$$
$$\therefore\ P(x) - Q(x) = 2x^3 + (-2x^2) + (-7x) + (-9)$$
$$\therefore\ P(x) - Q(x) = 2x^3 - 2x^2 - 7x - 9$$

EJEMPLO 2:

De $P(a, b, c) = 7a^2bc^3 + 4ac^2 - 5ac + 3abc$ restar $Q(a, b, c) = -9ac^2 + 6a^2bc^3 + 7ac$

Solución

- Tenemos:

$$P(a, b, c) - Q(a, b, c) = (7a^2bc^3 + 4ac^2 - 5ac + 3abc) - (-9ac^2 + 6a^2bc^3 + 7ac)$$
$$\therefore P(a, b, c) - Q(a, b, c) = 7a^2\cancel{bc^3} + \cancel{4ac^2} - 5\cancel{ac} + 3abc + \cancel{9ac^2} - 6a^2\cancel{bc^3} - 7\cancel{ac}$$
$$\therefore P(a, b, c) - Q(a, b, c) = a^2bc^3 + 13ac^2 - 12ac + 3abc$$

- Notemos que el cálculo mental hace posible eliminar algunos pasos intermedios. Esta forma de trabajar es la que debe aplicarse en la práctica.

EJEMPLO 3:

Restemos $5m^2 - 7m + 2$ de $-3m^2 + 5$

Solución

- En este caso, el minuendo es $-3m^2 + 5$ y el sustraendo es $5m^2 - 7m + 2$
- Por lo tanto: $(-3m^2 + 5) - (5m^2 - 7m + 2) = -3m^2 + 5 - 5m^2 + 7m - 2$

$$\therefore\ (-3m^2 + 5) - (5m^2 - 7m + 2) = -8m^2 + 7m + 3$$

EJEMPLO 4:

Eliminemos los signos de agrupación y reduzcamos los términos semejantes:

$$5a - \{-9b - [-(4a - 6b) + (6a - 11b)] + 8b\}$$

Solución

- Recordemos que para eliminar signos de agrupación procedemos así:
  - * Empezamos eliminando los más internos. En este caso, los paréntesis.
  - * Cambiamos los signos de los términos contenidos en un signo de agrupación precedido del signo (-) y dejamos iguales los signos de los términos contenidos en un signo de agrupación precedido del signo (+).

$5a - \{-9b - [-(4a - 6b) + (6a - 11b)] + 8b\}$ .... Expresión dada

$= 5a - \{-9b - [-4a + 6b + 6a - 11b] + 8b\}$ .... Eliminamos los paréntesis

$= 5a - \{-9b + 4a - 6b - 6a + 11b + 8b\}$ .... Eliminamos el corchete

$= 5a + 9b - 4a + 6b + 6a - 11b - 8b\}$ .... Eliminamos la llave

$= 7a - 4b$ .... Redujimos términos semejantes.

EJERCICIO 3.5

En los ejercicios **1** a **8** indicar cuales expresiones algebraicas son polinomios.

1 $-5x^2 + 3x - 4$

2 $-\frac{4}{5}x^2y$

3 $-2x^{2/3} + 3xy - 7$

4 $-5x^{-5} + 2xy^2 + 6x - 2$

5 $4x^5 - x^{1/2} + 2$

6 $\frac{2}{5}x^3 + \sqrt{2}\,x + 1$

7 $3x^3y^2$

8 $m^{4/3}n + 3m + 4$

En los ejercicios **9** a **12**, identifica el grado del polinomio:

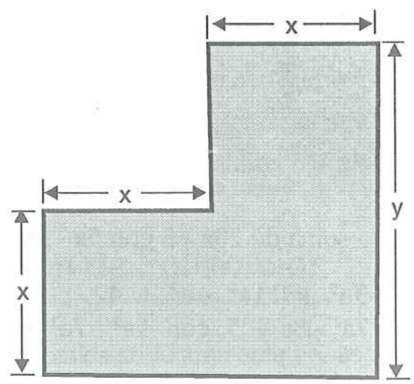
9 $3x^2y - 4x^2 - 2y + 4$

10 $4xy^3 + xy^2 - y^2 + y$

11 $2xy^3 - y^3 + 3x^2 - 2$

12 $\frac{3}{5}x^4 + 2x^2 - x - 1$

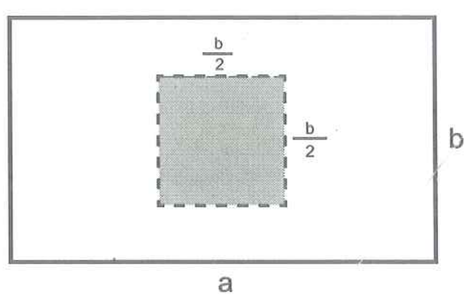
13 Un lote de terreno consta de un rectángulo y un cuadrado como se muestra en la figura siguiente:



Explicar qué representa cada una de las siguientes expresiones algebraicas:

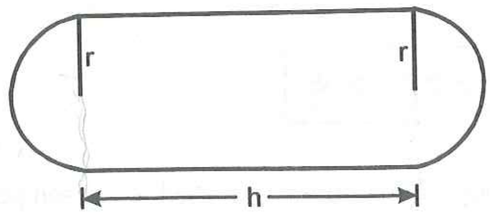
a) $x^2 + xy$ b) $2x + 2y$ c) $4x$ d) $4x + 2y$

14 Tengo un cartón rectangular de lados a y b; corto un cuadrado de lado $\frac{b}{2}$, como muestra la figura, para obtener un marco para una pintura. Escribe una expresión algebraica para calcular el área del marco.



15 Escribe una expresión algebraica para calcular:

a) El perímetro de la pista b) El área de la pista



En los ejercicios **16** a **19**, suma los siguientes polinomios:

16 $x^4 + 2x^2y^2 + \frac{2}{7}y^4$; $-\frac{5}{6}x^4 + \frac{3}{8}x^2y^2 - \frac{1}{6}xy^3 - \frac{1}{4}y^4$; $-\frac{5}{6}x^3y - \frac{1}{4}x^2y^2 + \frac{1}{7}y^4$

17 $x^5 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{5}x$; $-3x^5 + \frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{10}x$; $-\frac{2}{3}x^4 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^2$; $-\frac{1}{12}x^3 + \frac{3}{5}x - 4$

18 $\frac{2}{9}a^3 + \frac{5}{6}ax^2 - \frac{1}{3}x^3$; $-\frac{3}{7}a^2x - \frac{7}{8}ax^2 - \frac{1}{9}x^3$; $-\frac{2}{3}a^3 + \frac{1}{2}a^2x - \frac{1}{4}ax^2$

19 Escribir el inverso aditivo de cada polinomio:

a) $-4x + 9$ b) $5x^2 - x + 3$ c) $-7xy^2 + 3x^2y$

En los ejercicios **20** a **23** efectuar las restas:

20 $(3xy^2z - 4x^2yz + xy + 3) - (2xy^2z + x^2yz - yz + x - 2)$

21 $(-13w^5 + 4w^4 - w^3) - (-2w^5 - w^4 + 2w^3)$

22 $(7x^2y^2 + 2x^2y - 5) - (7xy + x^2y^2 - 2 - x^2y)$

23 $[2a - (8a - b)] - [-(a+4b) + 3a]$

24 De la suma de $8x^2 + 5$ con $7x^2 - 2$, restar la suma de $20x - 8$ con $5x - x^2$

25 Restar la suma de $7a^4 - a^6 - 8a$; $-3a^5 + 11a^3 - a^2 + 4$; $-6a^4 - 11a^3 - 2a + 8$; $-5a^3 + 5a^2 - 4a + 1$ de la suma de $-3a^4 + 7a^2 - 8a + 5$ con $5a^5 - 7a^3 + 41a^2 - 50a + 8$

26 De la suma de $\frac{3}{5}x^2 - \frac{5}{6}xy + \frac{2}{9}y^2$ con $-\frac{3}{2}xy - \frac{1}{3}y^2 + \frac{1}{4}$ restar la suma de $\frac{2}{9}x^2 - \frac{2}{3}y^2 + \frac{1}{9}xy$ con $\frac{17}{45}x^2 - \frac{22}{9}xy - \frac{3}{2}y^2 - \frac{1}{2}$

27 Restar $\frac{3}{8} - \frac{1}{12}a^3 + a^4$ de la suma de $\frac{1}{2}a^3 - \frac{3}{5}a + \frac{5}{6}a^4$; $-\frac{3}{8}a + 5 - \frac{2}{3}a^2$; $-\frac{3}{4}a^3 + \frac{1}{6}a^2 - \frac{2}{3}$; $-\frac{3}{8}a^4 + \frac{1}{6}a^3 + \frac{39}{40}a + \frac{3}{11}$

En los ejercicios **28** a **32** suprimir los signos de agrupación y reducir los términos semejantes:

28 $-4x - \{-3x - [(4x - 2y) - (2x + y)]\}$

29 $3x - 4y - \{x - (x + y) - [(-2x + y) - x] - 3y\}$

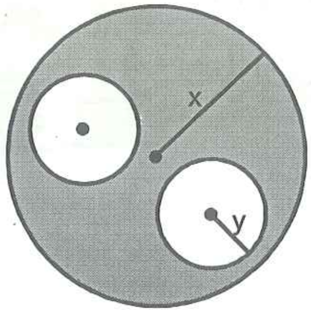
30 $(3a - 4b) - \{[a - (2a + b)] - a\}$

31 $2a + \{-[5b + (3a - c) + 2 - (-a + b - c - 4)] - (-a + b)\}$

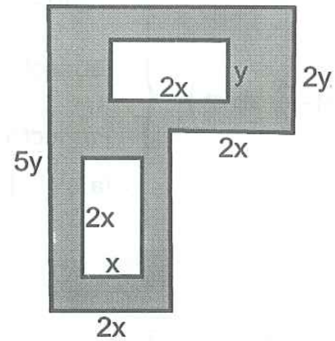
32 $-[3m + \{-m - (n - m - 2)\} + \{-(m+n) + (-2n + 3)\}]$

En los ejercicios 33 y 34, escribe el polinomio más simple que exprese el área de la región sombreada de cada figura:

33



34



35 De una baraja de 50 cartas, se saca primero x cartas y 5 más, la segunda vez se saca el doble de lo que había sacado y 2 más. Escribe un polinomio en la forma más simple que exprese las cartas que quedan.

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 4

Dos números impares consecutivos suman 56.

a) Si n representa al número impar menor, ¿qué expresión representa al mayor?
b) Escriba una ecuación algebraica que indique que la suma de los números es 56.
c) Resuelva la ecuación y halle luego ambos números.

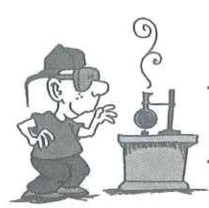
3.4.4. Multiplicación de Polinomios

- La multiplicación de polinomios se fundamenta en las siguientes propiedades de los números reales:
  - * Los axiomas de la multiplicación en R
  - * Las leyes de los signos de la multiplicación
  - * La propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma.
  - * El producto de potencias de la misma base: $a^m \bullet a^n = a^{m+n}$

- Para facilitar la comprensión del proceso de multiplicación de polinomios vayamos de lo sencillo a lo complejo; así:

  1) Multiplicación de monomios.
  2) Multiplicación de un monomio por un polinomio.
  3) Multiplicación de dos polinomios.

3.5.4.1 Multiplicación de Monomios



EXPERIENCIA

- Multipliquemos $-\frac{3}{5}a^2b^3c^2$ por $\frac{5}{6}ab^2c^4$

Solución

- Tenemos:

$$\left(-\frac{3}{5}a^2b^3c^2\right)\bullet\left(-\frac{5}{6}ab^2c^4\right)=\begin{cases}\text{Signo del producto: } (-)\bullet(-)=(+)\\ \text{Producto de los coeficientes: } \left(\frac{3}{5}\right)\bullet\left(\frac{5}{6}\right)=\frac{1}{2}\\ \text{Producto de las variables:}\\ (a^2b^3c^2)\bullet(ab^2c^4)=(a^2a)(b^3b^2)(c^2c^4)\\ \qquad\qquad\qquad\qquad =a^3b^5c^6\end{cases}$$

- Por lo tanto: $\left(-\frac{3}{5}a^2b^3c^2\right)\bullet\left(-\frac{5}{6}ab^2c^4\right)=-\frac{1}{2}a^3b^5c^6$

APRENDAMOS

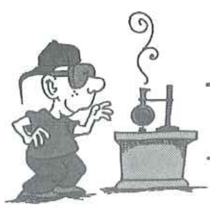
MULTIPLICACIÓN DE MONOMIOS

Para multiplicar monomios:

- Aplicamos las leyes de los signos: $\begin{cases}(+)\bullet(+)=(+) & (-)\bullet(+)=(-)\\ (+)\bullet(-)=(-) & (-)\bullet(-)=(+)\end{cases}$
- Multiplicamos los coeficientes como números reales que son.
- Aplicamos, a las variables, la propiedad PRODUCTO DE POTENCIAS DE LA MISMA BASE:

$$a^m\bullet a^n=a^{m+n}$$

3.5.4.2 Multiplicación de un Monomio por un Polinomio



EXPERIENCIA

Multipliquemos $-3x^2yz$ por $\frac{3}{5}xz-\frac{4}{5}y^3z^2+3$

- Para multiplicar un monomio por un polinomio basta aplicar la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma y, luego, proceder como en el caso anterior cuando multiplicamos monomios.
- Por lo tanto:

$$-3x^2yz\bullet\left(\frac{3}{5}xz-\frac{4}{5}y^3z^2+3\right)=\left(-3x^2yz\right)\left(\frac{3}{5}xz\right)+\left(-3x^2yz\right)\left(-\frac{4}{5}y^3z^2\right)+\left(-3x^2yz\right)(3)$$

$$\therefore\ -3x^2yz\bullet\left(\frac{3}{5}xz-\frac{4}{5}y^3z^2+3\right)=-\frac{9}{5}x^3yz^2+\frac{12}{5}x^2y^4z^3-9x^2yz$$

3.5.4.3 Multiplicación de dos Polinomios

EXPERIENCIA

- Multipliquemos $3x - 5$ por $9x + 3$
- Para multiplicar dos polinomios basta aplicar reiteradamente la propiedad distributiva, multiplicando cada término del primer polinomio por cada término del segundo.
- Es decir:

$$\begin{aligned}(3x - 5) \bullet (9x + 3) &= 3x \bullet (9x + 3) - 5 \bullet (9x + 3)\\ &= 27x^2 + 9x - 45x - 15\\ &= 27x^2 - 36x - 15\end{aligned}$$

APRENDAMOS

MULTIPLICACIÓN DE DOS POLINOMIOS

- Para multiplicar dos polinomios aplicamos reiteradamente la propiedad distributiva multiplicando cada término del primer polinomio por cada término del segundo polinomio; así:

$$\begin{aligned}\mathbf{(a + b) \bullet (c + d)} &= \mathbf{a \bullet (c + d) + b \bullet (c + d)}\\ &= \mathbf{a \bullet c + a \bullet d + b \bullet c + b \bullet d}\end{aligned}$$

- Si es posible, reducimos términos semejantes.

EJEMPLO 1:

Realicemos las operaciones indicadas en el siguiente ejercicio: $\left(\frac{x^2}{16} - \frac{xy}{8} + \frac{y^2}{4}\right) \bullet \left(\frac{x}{4} + \frac{y}{2}\right) - \frac{x^3}{64}$

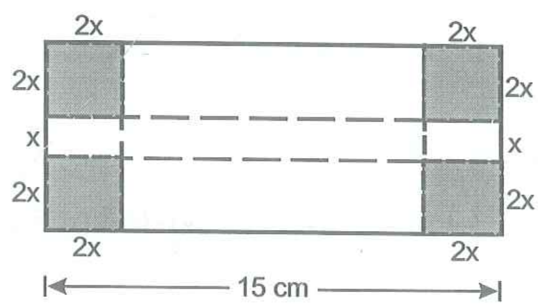
Solución

$$\left[\frac{x^2}{16} - \frac{xy}{8} + \frac{y^2}{4}\right]\left[\frac{x}{4} + \frac{y}{2}\right] - \frac{x^3}{64} = \cancel{\frac{x^3}{64}} + \cancel{\frac{x^2y}{32}} - \cancel{\frac{x^2y}{32}} - \cancel{\frac{xy^2}{16}} + \cancel{\frac{xy^2}{16}} + \frac{y^3}{8} - \cancel{\frac{x^3}{64}}$$

$$\therefore \left(\frac{x^2}{16} - \frac{xy}{8} + \frac{y^2}{4}\right)\left(\frac{}{4} + \frac{y}{2}\right) - \frac{x^3}{64} = \frac{y^3}{8}$$

EJEMPLO 2:

Las esquinas sombreadas de la siguiente figura se cortan y los lados se doblan para formar una caja. Escribamos un polinomio para el volumen de la caja.



Solución

- El volumen de una caja es igual al producto del área de la base por la altura.
- La base es un rectángulo cuyo largo mide (15 - 4x) cm y cuyo ancho mide x cm. La altura de la caja es 2x cm.
- Por lo tanto, el volumen de la caja es:

$$V = \text{Area de la base} \times \text{altura}$$
$$\therefore V = (\text{Largo} \times \text{ancho}) \times \text{altura}$$
$$\therefore V = [(15 - 4x) \bullet x] \bullet 2x$$
$$\therefore V = (15x - 4x^2) \bullet 2x$$
$$\therefore V = 30x^2 - 8x^3$$

EJERCICIO 3.6

En los ejercicios 1. a 6. multiplica los monomios:

1. $(4a^3b^5)\bullet\left(-\frac{1}{4}abc^2\right)$
2. $\left(-\frac{3}{4}ax^2\right)\bullet\left(-\frac{5}{6}a^2bx\right)$
3. $(2ab^3)\bullet(-5a^2b)\bullet(-3ab^2)$
4. $\left(-\frac{3}{4}x^2y\right)\bullet\left(-\frac{5}{6}xy^2\right)\bullet(-2x^2)$
5. $\left(\frac{2}{3}xyz\right)\bullet\left(-\frac{3}{2}x^2z^2\right)\bullet\left(-\frac{2}{3}ab^2c\right)\bullet\left(-\frac{7}{9}a^3c\right)$
6. $\left(-\frac{2}{3}x^4y\right)\bullet(-ab^3c)\bullet(4a^3bxy)\bullet\left(\frac{7}{9}a^2xy^3z\right)$

En los ejercicios 7. a 12. efectúa las multiplicaciones de un monomio por un polinomio:

7. $\left(-\frac{5}{4}bz\right)\bullet\left(-\frac{1}{5}x^2y-\frac{2}{3}yz^2+2a+\frac{1}{2}b^2\right)$
8. $\frac{2}{3}x^2y\bullet\left(\frac{1}{2}xy+x^2y^2-3xy^2\right)$
9. $\left(-\frac{5}{3}b^2cd\right)\bullet\left(\frac{3}{5}a^3bc^2-\frac{1}{6}a^3b^3+c^3\right)$
10. $\left(\frac{3}{5}x^3yz+\frac{1}{5}xyz+\frac{1}{3}x^2y^2z+\frac{2}{3}z^2\right)\bullet\left(-\frac{15}{2}yz^2tx\right)$
11. $\left(\frac{2}{3}y^2-\frac{1}{2}axy^2+\frac{2}{5}ay^2z\right)\bullet\frac{4}{3}abx^2$
12. $\left(-\frac{1}{2}x^2y-\frac{2}{3}ab^2c+2b^2z\right)\bullet\left(-\frac{6}{5}b^2cz\right)$

En los ejercicios 13. a 20. efectúa las multiplicaciones de los polinomios dados y reducir términos semejantes:

13. $(3a-2b)\bullet(a^2-3ab-4b^2)$
14. $\left(\frac{1}{3}x^2+\frac{3}{2}y^2\right)\bullet(ax+bx+ay)$
15. $\left(\frac{2}{3}x^3y+\frac{3}{2}x^2y^2+xy^3\right)\bullet\left(-y^2+\frac{1}{6}xy-x^2\right)$
16. $(x^2-2)\bullet(2x^2+1)\bullet(x^2-1)$
17. $\left(\frac{1}{2}a^2+2a\right)\bullet(a-1)\bullet(a^2+2)$
18. $\left(-\frac{1}{3}a^2b+1\right)\bullet\left(\frac{2}{3}x+ax\right)\bullet(bx+x^2-3ab)$
19. $\left(\frac{1}{2}ax+\frac{1}{3}a\right)\bullet\left(-\frac{3}{2}a^2+x\right)\bullet\left(6x-1+\frac{3}{2}ax\right)$
20. $\left(ab+\frac{1}{3}bc\right)\bullet\left(ab+\frac{1}{2}ac+bc\right)\bullet(a+1)$

En los ejercicios 21. a 25., efectúa las operaciones indicadas y reduce términos semejantes:

21 $-a(a-b)+(2a-b)(-b+2)+a(a+b)$

22 $(2a^2-a-1)(a^2+a+2)-[(a+2)(a-1)-(a-3)(a+1)](a^2-3)-2a^2(a^2-a)$

23 $\left(\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}y\right)\left(\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}y\right)+\left(\frac{1}{3}x+2y\right)\left(2x-3y\right)$

24 $\frac{1}{3}a\left(3b-\frac{1}{2}\right)-\left(2a+\frac{1}{2}b\right)\left(a-\frac{2}{3}b\right)-\frac{1}{6}a\left(11b-1\right)$

25 $\frac{1}{3}a^3-\left(a^2+\frac{2}{3}b^2\right)\left(\frac{1}{2}a+b^2\right)+b\left[\left(a^2-\frac{1}{2}b\right)+a\left(a+b^2\right)-a^2\right]+a\left(\frac{1}{6}a^2+ab^2+\frac{1}{3}b^2\right)-b^2\left(ab-\frac{2}{3}b^2-\frac{1}{2}\right)$

En los ejercicios 26. a 28., verificar cada una de las siguientes igualdades:

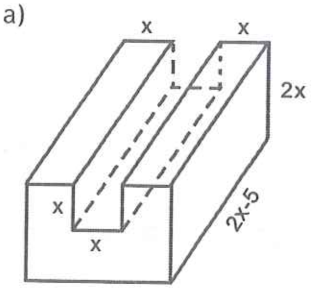
26 $(a-b)(b-c)(c-a) = ac(a-c)-ab(a-b)-bc(b-c)$

27 $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2) = a^4+a^2b^2+b^4$

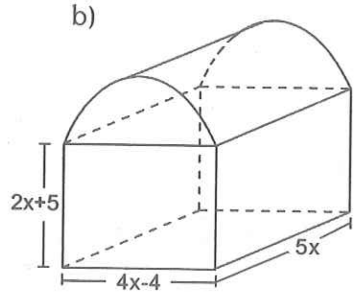
28 $(a^4+b^4)(a+b)-(a^3+b^3)ab = a^5+b^5$

29 Escribir un polinomio en x para calcular el volumen de las siguientes figuras:

a)

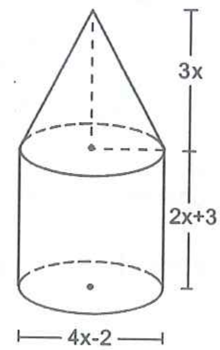


b)



Aproxime π a 3

c)



Aproxime π a 3

30 Una pieza rectangular de metal tiene 20 cm de largo por 15 cm de ancho. De cada esquina se corta un cuadrado de lado x de tal manera que, al doblar los lados, se pueda formar una caja.Se pide:

a) Dibujar la caja que se puede formar.
b) Escribir un polinomio para expresar el volumen de la caja.
c) Hallar el volumen de la caja cuando el lado del cuadrado que se recorta mide 2 cm.

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 5

Tres números impares consecutivos suman 45.

a) Si t representa el menor de los números impares, ¿qué expresión representa al número mayor que le sigue?
b) Escriba la expresión algebraica para el mayor de los tres números.
c) Escriba la ecuación algebraica que indique que la suma de los tres números es 45.
d) Resuelva la ecuación y halle los tres números.

3.5.5. División de Polinomios

- Al igual que la multiplicación, la división de polinomios se fundamenta en las propiedades de los números reales. Estas propiedades son las siguientes:
  - * La división de números reales.
  - * Las leyes de los signos para la división.
  - * La propiedad distributiva de la división con respecto a la suma.
  - * La división de potencias de la misma base: $a^m \div a^n = a^{m-n}$

- También en la división de polinomios vamos a considerar tres casos:

  1) División de dos monomios.
  2) División de un polinomio por un monomio.
  3) División de dos polinomios.

  Analicemos cada uno:

3.5.5.1 División de Monomios

- Dividamos $-\frac{2}{7}a^5x^4zu^3$ entre $-\frac{14}{3}a^4x^2zu^3$

- En primer lugar, indiquemos que la división de dos monomios se puede expresar de dos maneras:

$$\left(-\frac{2}{7}a^5x^4zu^3\right) \div \left(-\frac{14}{3}a^4x^2zu^3\right) \qquad \text{ó} \qquad \frac{-\frac{2}{7}\,a^5x^4zu^3}{-\frac{14}{3}\,a^4x^2zu^3}$$

- Para dividir estos dos monomios procedemos así:

  - * Aplicamos las leyes de los signos: En este caso: $(-) \div (-) = (+)$
  - * Dividimos los coeficientes numéricos: $\frac{2}{7} \div \frac{14}{3} = \frac{6}{98} = \frac{3}{49}$
  - * Dividimos las variables aplicando la propiedad de división de potencias de igual base:

$$\frac{a^5x^4zu^3}{a^4x^2zu^3} = a^{5-4}\,x^{4-2}\,z^{1-1}\,u^{3-3} = ax^2\,z^0\,u^0 = ax^2$$

- Por lo tanto:

$$\left(-\frac{2}{7}\,a^5x^4zu^3\right) \div \left(-\frac{14}{3}a^4x^2zu^3\right) = \frac{3}{49}ax^2$$

APRENDAMOS

DIVISIÓN DE MONOMIOS:

Para dividir dos monomios:

1. Dividimos los coeficientes numéricos, aplicando la ley de los signos para la división.
2. A las variables les aplicamos la propiedad para dividir potencias de la misma base: $a^m \div a^n = a^{m-n}$

3.5.5.2 División de un Polinomio por un Monomio.

PRIMERA EXPERIENCIA

- La división de un polinomio por un monomio se fundamenta en la propiedad distributiva de la división con respecto a la suma; por ejemplo:

$$\frac{5-9+15}{6}=\frac{5}{6}-\frac{9}{6}+\frac{15}{6} \quad ; \quad \frac{13-7+18}{8}=\frac{13}{8}-\frac{7}{8}+\frac{18}{8}$$

¡ATENCIÓN!

Es necesario tener cuidado de no cometer estos dos errores al dividir:

$$\cancel{\frac{\cancel{7}+4-6}{\cancel{7}}=1+4-6}$$

¡ ERROR !

$$\cancel{\frac{5}{6-9+7}=\frac{5}{6}-\frac{5}{9}+\frac{5}{7}}$$

¡ ERROR !

- Por lo tanto:

APRENDAMOS

DIVISIÓN DE UN POLINOMIO ENTRE UN MONOMIO

- Para dividir un polinomio entre un monomio (en ese orden) dividimos cada término del polinomio entre el monomio, aplicando sucesivamente las leyes de signos para la división y la propiedad de división de potencias de la misma base.
- No se puede dividir un monomio antre un polinomio, es decir:

$$\frac{P(x)}{Q(x)+R(x)} \neq \frac{P(x)}{Q(x)}+\frac{P(x)}{R(x)}$$

$$\frac{P(x)+Q(x)+R(x)}{T(x)}=\frac{P(x)}{T(x)}+\frac{Q(x)}{T(x)}+\frac{R(x)}{T(x)}$$

EJEMPLO 1:

Dividamos $-7a^2xz^4 + 21a^3z^3 + 14az^5$ entre $-7z^3$

Solución

$$\frac{-7a^2xz^4 + 21a^3z^3 + 14az^5}{-7z^3} = \frac{7a^2xz^4}{-7z^3} - \frac{21a^3z^3}{-7z^3} - \frac{14az^5}{-7z^3}$$

$$= a^2xz^{4-3} - 3a^3z^{3-3} - 2az^{5-3}$$

$$= a^2xz - 3a^3z^0 - 2az^2$$

$$= a^2xz - 3a^3 - 2az^2$$

EJEMPLO 2:

Dividamos $\frac{1}{7}a^2b^2c + \frac{1}{2}a^3b^3c - \frac{1}{7}a^2b^2cz$ entre $-\frac{3}{7}a^2bc$

Solución

$$\frac{\frac{1}{7}a^2b^2c + \frac{1}{2}a^3b^3c - \frac{1}{7}a^2b^2cz}{-\frac{3}{7}a^2bc} = \frac{\frac{1}{7}a^2b^2c}{-\frac{3}{7}a^2bc} - \frac{\frac{1}{2}a^3b^3c}{\frac{3}{7}a^2bc} + \frac{\frac{1}{7}a^2b^2cz}{\frac{3}{7}a^2bc}$$

$$\therefore \frac{\frac{1}{7}a^2b^2c + \frac{1}{2}a^3b^3c - \frac{1}{7}a^2b^2cz}{-\frac{3}{7}a^2bc} = -\frac{1}{3}b - \frac{7}{6}ab^2 + \frac{1}{3}bz$$

3.5.5.3 División de Polinomios

EXPERIENCIA DE REPASO

- El algoritmo (o procedimiento) para dividir dos polinomios se fundamenta en la división de números enteros. Recordemos cómo se realiza ésta y algunas propiedades que se derivan de ella. Por ejemplo, recordemos el proceso para dividir 45 entre 6:

$$\div$$

$$\begin{array}{r|l} 45 & \underline{6} \\ \underline{-42} & 7 \;\times \\ 3 & \end{array}$$

Por lo tanto: $\underbrace{45}_{\Uparrow} = \underbrace{6}_{\Uparrow} \cdot \underbrace{7}_{\Uparrow} + \underbrace{3}_{\Uparrow}$; con $3 < 6$

DIVIDENDO = DIVISOR • COCIENTE + RESIDUO

- En la misma forma, dividir un polinomio P entre otro polinomio Q consiste en hallar otros dos polinomios C y R, llamados respectivamente COCIENTE y RESIDUO, que cumplan la propiedad que acabamos de enunciar para la división de números enteros; es decir:

$$\begin{array}{r|l} P & \underline{Q} \\ R & C \end{array}$$

$\underbrace{P}_{\Uparrow} = \underbrace{Q}_{\Uparrow} \cdot \underbrace{C}_{\Uparrow} + \underbrace{R}_{\Uparrow}$; con grado de R < grado de Q

DIVIDENDO = DIVISOR • COCIENTE + RESIDUO

- Si el residuo $R = 0$, decimos que P es **divisible** por Q o que Q es un **factor** de P.
- Por lo tanto, al dividir polinomios tengamos en cuenta que:

APRENDAMOS

DIVISIÓN DE POLINOMIOS

1. En toda división se cumple que: **DIVIDENDO = DIVISOR • COCIENTE + RESIDUO**
2. Si el residuo es CERO la división es EXACTA.
3. En toda división exacta de polinomios, el primero y el último término del dividendo (ordenado por potencias decrecientes de la variable) deben ser divisibles, respectivamente, por el primero y el último término del divisor (ordenado igualmente en potencias decrecientes de la variable).

PRIMERA EXPERIENCIA

D
10 | 4 - D
2 2
R C

10 = 4x2+2
10 = 10
Dim = Disor • C+R

- Dados los polinomios:

$$P(x) = 4x + x^4 - 6x^2 + 1 + x^3$$
$$Q(x) = 2x - 3 + x^2$$
$$C(x) = x^2 - x - 1$$
$$R(x) = 3x - 2$$

Se pide:

a) Ordenarlos por potencias decrecientes de **x**.
b) Verificar la propiedad fundamental de la división.
c) Comprobar que el **grado de R(x) < grado de Q(x).**

- Realicemos la experiencia por partes

a) Ordenemos los polinomios en potencias decrecientes de x.

$$P(x) = x^4 + x^3 - 6x^2 + 4x + 1$$
$$Q(x) = x^2 + 2x - 3$$
$$C(x) = x^2 - x - 1$$
$$R(x) = 3x - 2$$

b) Debemos verificar que $P(x) = Q(x) \bullet C(x) + R(x)$

* Primero calculamos $Q(x) \bullet C(x)$:

$$\begin{aligned} Q(x) \bullet C(x) &= (x^2 + 2x - 3) \bullet (x^2 - x - 1) \\ &= x^4 - x^3 - x^2 + 2x^3 - 2x^2 - 2x - 3x^2 + 3x + 3 \\ &= x^4 + x^3 - 6x^2 + x + 3 \end{aligned}$$

* Ahora calculamos $Q(x) \bullet C(x) + R(x)$:

$$\begin{aligned} Q(x) \bullet C(x) + R(x) &= (x^4 + x^3 - 6x^2 + x + 3) + (3x - 2) \\ &= x^4 + x^3 - 6x^2 + 4x + 1 \end{aligned}$$

* Por lo tanto, hemos comprobado que $P(x) = Q(x) \bullet C(x) + R(x)$

c) El grado de Q(x) es 2 y el grado de R(x) es 1; por lo tanto: Grado de R(x) < Grado de Q(x)

SEGUNDA EXPERIENCIA

- Dados los polinomios:

  $P(x) = 24x - 25x^2 + 6x^3 - 35$; $Q(x) = 5 + 3x^2 - 2x$; $C(x) = 2x - 7$

Se pide:

a) Ordenarlos en potencias decrecientes de x.
b) Verificar, de dos maneras diferentes, que la división de P(x) entre Q(x) es exacta.

- De nuevo, vamos por partes:

a) Ordenemos los polinomios en potencias decrecientes de x.

$P(x) = 6x^3 - 25x^2 + 24x - 35$; $Q(x) = 3x^2 - 2x + 5$; $C(x) = 2x - 7$

b) **Primera manera:** Comprobando que se cumple la propiedad fundamental de la división:

DIVIDENDO = DIVISOR x COCIENTE

En efecto:

$$\begin{aligned}
Q(x) \bullet C(x) &= (3x^2 - 2x + 5) \bullet (2x - 7) \\
\therefore Q(x) \bullet C(x) &= 6x^3 - 21x^2 - 4x^2 + 14x + 10x - 35 \\
\therefore Q(x) \bullet C(x) &= 6x^3 - 25x^2 + 24x - 35 \\
\therefore Q(x) \bullet C(x) &= P(x)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $P(x) = Q(x) \bullet C(x)$

Segunda manera: Como el primero y último términos del dividendo, ordenado en potencias decrecientes de x, son divisibles, respectivamente, por el primero y último términos del divisor, ordenado en potencias decrecientes de x, entonces la división es exacta. En efecto:

$6x^3 \div 3x^2 = 2x$; $-35 \div 5 = -7$

3.5.5.3.1 Método para calcular el Cociente y el Residuo

Los siguientes ejemplos nos ilustran el proceso para calcular el **cociente** y el **residuo** obtenidos al dividir dos polinomios. Veamos:

EJEMPLO 1:

Dividamos $13x + 3x^2 - 10$ entre $3x - 2$

Paso 1 : $3x^2 + 13x - 10 \;\; \underline{|\, 3x - 2}$

Ordenamos ambos polinomios en potencias descendentes de la variable x.

Paso 2 : $3x^2 + 13x - 10 \;\; \underline{|\, 3x - 2}$ (÷)
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x$

Dividimos el primer término del dividendo entre el primer término del divisor (monomio entre monomio).

Paso 3 : $$\begin{array}{r|l} \cancel{3x^2}+13x-10 & 3x-2 \\ \cline{2-2} -\cancel{3x^2}+\ 2x & \bullet(x)\bullet \\ \cline{1-1} 15x-10 & \end{array}$$

Multiplicamos el cociente (x) por el divisor, ubicamos los términos semejantes como se indica, restamos y "bajamos" el -10.

Paso 4 : $$\begin{array}{r|l} 3x^2+13x-10 & 3x-2 \\ \cline{2-2} -3x^2+\ 2x & x+5 \\ \cline{1-1} \cancel{15x}-\cancel{10} & \\ -\cancel{15x}+\cancel{10} & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Repetimos los tres pasos anteriores hasta que el grado del residuo sea menor que el grado del divisor o hasta que el residuo sea cero.

Finalmente podemos verificar que:

$$\underbrace{3x^2+13x-10}_{\text{DIVIDENDO}} = \underbrace{(3x-2)}_{\text{DIVISOR}} \cdot \underbrace{(x+5)}_{\text{COCIENTE}} + \underbrace{0}_{\text{RESIDUO}}$$

EJEMPLO 2

Dividamos $3a^5 - 15a^2 + 11a^4 + 7a + 9$ entre $a^2 + 2a + 1$

Solución

- En primer lugar, ordenamos los polinomios en potencias decrecientes de a. Como en el dividendo falta el término de grado 3, entonces dejamos el espacio o escribimos un 0; así:

$$\begin{array}{r|l} 3a^5 + 11a^4 + 0 - 15a^2 + 7a + 9 & a^2 + 2a + 1 \\ \cline{2-2} \end{array}$$

- A continuación, dividimos el primer término del dividendo ($3a^5$) entre el primer término del divisor (a^2) y efectuamos todo el proceso descrito en el ejemplo anterior:

$$\begin{array}{r|l} 3a^5+11a^4+\ 0\ -15a^2+\ 7a+9 & a^2+2a+1 \\ \cline{2-2} -3a^5-\ 6a^4-\ 3a^3\qquad\qquad\qquad & 3a^3+5a^2-13a+6 \\ \cline{1-1} 5a^4-3a^3-15a^2\qquad\qquad & \\ -5a^4-10a^3-\ 5a^2\qquad\qquad & \\ \cline{1-1} -13a^3-20a^2+\ 7a\qquad & \\ +13a^3+26a^2+13a\qquad & \\ \cline{1-1} 6a^2+20a+9 & \\ -6a^2-12a-6 & \\ \cline{1-1} 8a+3 & \end{array}$$

- Acá finaliza la división ya que el grado del residuo ($8a + 3$) es menor que el grado del divisor ($a^2 + 2a + 1$); además:

$$\underbrace{3a^5+11a^4-15a^2+7a+9}_{\text{DIVIDENDO}} = \underbrace{\left(a^2+2a+1\right)}_{\text{DIVISOR}} \bullet \underbrace{\left(3a^3+5a^2-13a+6\right)}_{\text{COCIENTE}} + \underbrace{(8a+3)}_{\text{RESIDUO}}$$

APRENDAMOS

MÉTODO PARA DIVIDIR POLINOMIOS:

1. Ordenamos el dividendo y el divisor en forma descendente. Si en el dividendo falta algún término, se reemplaza por 0.
2. Dividimos el primer término del dividendo por el primer término del divisor, para obtener el primer término del cociente.
3. Multiplicamos este primer término del cociente por cada uno de los términos del divisor, el resultado lo restamos del dividendo y bajamos el siguiente término del dividendo.
4. El primer término del nuevo dividendo lo dividimos por el primer término del divisor y continuamos aplicando el procedimiento descrito en los pasos 2. y 3. anteriores.
5. La división termina cuando el grado del residuo sea menor que el grado del divisor. Si el residuo es CERO, la división es EXACTA.

EJERCICIO 3.7

En los ejercicios 1. a 8. efectuar las siguientes divisiones de monomios:

1. $\left(-8a^3bc^2\right)\div\left(4a^2b\right)$
2. $\left(-7a^4b^3c^2\right)\div\left(-4a^3b^3c\right)$
3. $\left(4a^6b^5c^2\right)\div\left(-\frac{1}{5}a^3b^4\right)$
4. $\dfrac{\frac{2}{9}a^2bx^5}{-\frac{4}{3}ax^3}$
5. $\dfrac{-\frac{5}{11}a^2b^3xz^2}{-\frac{35}{56}a^3b^3z^3}$
6. $\dfrac{-\frac{8}{15}x^4y^3z^4}{-\frac{4}{3}x^2yz}\div\left(-\frac{4}{25}xy^2z^2\right)$
7. $\dfrac{\frac{2}{7}a^3bc^3y^4}{-\frac{8}{35}a^3cy^2}\div\left(-\frac{15}{64}bcy\right)$
8. $\dfrac{-\frac{8}{9}a^4yz^5t^3}{-\frac{7}{3}az^2t}\div\left(-\frac{2}{21}ayz^3t\right)$

En los ejercicios 9. a 12. simplificar cada una de las siguientes expresiones:

9. $-2xy^3z^5\bullet\left(\frac{3}{2}y\right)\div\left(-\frac{3}{4}xz^3\right)$
10. $ab^3c\bullet\left(-\frac{1}{3}abc^2\right)\div\left(\frac{1}{3}a^2b^3c^3\right)$
11. $\left[\left(-\frac{3}{4}a^2b^3c\right)^2\div\left(-\frac{3}{2}ac\right)\right]^2\div\left(-\frac{3}{2}a^2b^2\right)^3$
12. $\left[\left(\frac{1}{2}a^3b^4xy^2\right)^2\div\left(-\frac{3}{4}ax^2y^3\right)\right]\div\left(-\frac{5}{3}a^2b^4\right)^2$

En los ejercicios 13. a 18., efectuar la división de un polinomio por un monomio:

13. $(5a^2b^3-10a^3b^2-15a^2)\div 5a^2$
14. $(20a^2b-5a^5b^3+15a^3b)\div(-5a^2b)$

15 $\left(16x^4y^3z^4 - 8x^3y^4z^2 + 8x^3y^3z^5\right) \div \left(-4x^3z^2\right)$

16 $\left(\frac{3}{4}x^4y - \frac{1}{5}x^3y^3z + \frac{2}{5}x^5yz^2\right) \div \left(-\frac{3}{5}x^3y\right)$

17 $\left(\frac{1}{7}a^2b^2c + \frac{1}{2}a^3b^3c - \frac{1}{7}a^2b^2cz\right) \div \left(-\frac{3}{7}a^2bc\right)$

18 $\left(-\frac{1}{2}x^2yzt + \frac{1}{4}x^3y^2zt^2 - \frac{2}{3}x^5yz^3t^4\right) \div \left(-\frac{1}{2}x^2yt\right)$

En los ejercicios 19. a 26., efectuar la división entre los dos polinomios dados:

19 $\left(5a^3 - 12a^2 + 7a - 6\right) \div \left(a - 2\right)$

20 $\left(x^4 - 2x^2 + 5x - 6\right) \div \left(x^2 - x + 2\right)$

21 $\left(4a^3 - 7a - 12a^2 - 3\right) \div \left(2a^2 + 1 - 3a\right)$

22 $\left(14x^5 + 21x^3y^2 - 27x^4y - 2xy^4 - 3x^2y^3\right) \div \left(-2x^2 + 3xy - 2y^2\right)$

23 $\left(3a^3b^2 - \frac{13}{2}a^2b^3 + \frac{15}{4}ab^4 - \frac{1}{2}b^5\right) \div \left(2a^2b - 3ab^2 + \frac{1}{2}b^3\right)$

24 $\left(a^4 - \frac{5}{4}a^3 + \frac{11}{8}a^2 - \frac{23}{4}a + 6\right) \div \left(-a^2 - \frac{3}{4}a + 1\right)$

25 $\left(x^4 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{7}{6}x^3 - 4\right) \div \left(x^2 - 2 - \frac{2}{3}x\right)$

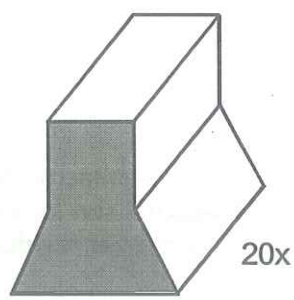
26 $\left(6x^4 + 8xy^3 - y^4 - 15x^3y + 7x^2y^2\right) \div \left(3x^2 + 2y^2 - 6xy\right)$

27 Restar el cociente de dividir $\frac{1}{4}a^3 - \frac{1}{9}ab^2$ entre $\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b$ de $\frac{1}{2}a^2 + ab + \frac{1}{5}b^2$

28 ¿ De qué expresión hay que restar $-18x^3 + 14x^2 + 84x - 45$ para que la diferencia dividida entre $x^2 + 7x - 5$ de como cociente $x^2 - 9$?

29 El polinomio $3x^3 - 2x^2 - 41x + 60$ tiene como factores tres binomios. Dos de ellos son $(x - 3)$ y $(x + 4)$. ¿ Cuál es el otro ?

30 Un ladrillo tiene la forma que muestra la figura siguiente. Su volumen es $(60x^3 + 280x^2)$ cm³. Si la longitud es $20x$ cm ¿ cuál es el área de la región sombreada ?



DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 6

Enuncia un problema para el cual se podría escribir la ecuación
$x + (x + 2) + (x + 4) = 69$

3.5.5.3.2 La División Sintética o Regla de Ruffini

- Cuando en una división el divisor es un binomio de la forma **x - a**, donde **x** es la variable del binomio y **a** es una constante, entonces el cálculo de los **coeficientes del cociente** y el **residuo** se facilita si aplicamos un procedimiento conocido con el nombre de DIVISIÓN SINTÉTICA O REGLA DE RUFFINI (en honor de Paolo Ruffini (1765 - 1822)).
- A continuación describimos el proceso de la división sintética para dividir $2x^3 + 10x^2 + 7x - 6$ entre $x + 3$:

PASO 1:

$$\boxed{2 \qquad +10 \qquad +7 \qquad -6}$$

Escribimos los coeficientes del dividendo, ya ordenado en potencias decrecientes.

$$\begin{array}{l} -3 \ \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \end{array}$$

HORIZONTAL

En la parte inferior izquierda, al lado de una línea horizontal, escribimos el (+3) que aparece en el divisor, pero con el signo cambiado (-3), para evitar la resta que se da al dividir.

PASO 2:

Para obtener los coeficientes del cociente, procedemos así:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & +10 & +7 & -6 \\ -3 & \downarrow & & & \\ \hline & 2 & & & \end{array}$$

El primer coeficiente es igual al primer coeficiente del dividendo y lo escribimos debajo de la raya.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & +10 & +7 & -6 \\ & & \downarrow + & \downarrow + & \downarrow + \\ -3 & & -6 & -12 & 15 \\ \hline & 2 & 4 & -5 & 9 \end{array}$$

Los demás coeficientes los obtenemos así:

* El -6 situado encima de la línea es el producto de -3 por 2.
* El -12, situado encima de la línea, es el producto de -3 por 4.
* El 15, situado encima de la línea, es el producto de -3 por -5.

PASO 3:

$$\begin{array}{rrrrr} & 2 & +10 & +7 & -6 \\ -3 & & & & \\ & & -6 & -12 & 15 \\ \hline & \multicolumn{3}{c}{\underbrace{2 \qquad 4 \qquad -5}_{\Uparrow\ \text{COEFICIENTES DEL COCIENTE}}} & \underbrace{9}_{\Uparrow\ \text{RESIDUO}} \end{array}$$

Los tres primeros números situados debajo de la raya horizontal son los coeficientes del **cociente** y el último número es el **residuo**

PASO 4:

Por lo tanto:

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 + 10x^2 + 7x - 6 & \underline{x + 3 \qquad} \\ 9 & 2x^2 + 4x - 5 \end{array}$$

o

$$2x^3 + 10x^2 + 7x - 6 = (x + 3)(2x^2 + 4x - 5) + 9$$

TERCERA EXPERIENCIA

- Dividamos $\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{18}x^2 + \frac{8}{3}x + 2$ entre $x + \frac{2}{3}$
- El divisor $x + \frac{2}{3}$ podemos escribirlo en la forma $x - \left(-\frac{2}{3}\right)$; luego podemos aplicar la Regla de Ruffini; así:

$$\begin{array}{c|cccc} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{18} & \frac{8}{3} & 2 \\ -\frac{2}{3} & & -\frac{4}{9} & \frac{1}{3} & -2 \\ \hline & \frac{2}{3} & -\frac{1}{2} & 3 & 0 \end{array}$$

- Por lo tanto:

COCIENTE: $\frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{2}x + 3$

RESIDUO: 0

- Luego:

$$\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{18}x^2 + \frac{8}{3}x + 2 = \left(x + \frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{2}x + 3\right)$$

CUARTA EXPERIENCIA

- Dividimos $4x^6 - 3x^3 + 2x - 2$ entre $x - 1$
- Aplicando división sintética y teniendo en cuenta que faltan los términos x^5, x^4 y x^2, los cuales reemplazamos por ceros, tenemos:

$$\begin{array}{c|ccccccc} & 4 & 0 & 0 & -3 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & & 4 & 4 & 4 & 1 & 1 & 3 \\ \hline & 4 & 4 & 4 & 1 & 1 & 3 & 1 \end{array}$$

- Por lo tanto: COCIENTE: $4x^5 + 4x^4 + 4x^3 + x^2 + x + 3$

RESIDUO: 1

- Luego: $4x^6 - 3x^3 + 2x - 2 = (x - 1)(4x^5 + 4x^4 + 4x^3 + x^2 + x + 3) + 1$

EJERCICIO 3.8

En los ejercicios 1. a 8., usa la DIVISIÓN SINTÉTICA para hallar el cociente y el residuo de las siguientes divisiones:

1. $\left(8x^3 + 13x^2 + 36x + 64\right) \div \left(x+2\right)$
2. $\left(8b^3 - 32b^2 + 10b + 2\right) \div \left(b - \frac{1}{2}\right)$
3. $\left(x^3 + x^2 + x + 1\right) \div \left(x+1\right)$
4. $\left(x^3 + 3x^2 + 5x + 7\right) \div \left(x + 1\right)$
5. $\left(-x^3 + \frac{11}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 1\right) \div \left(\frac{1}{2} - x\right)$
6. $\left(x^4 - 1 + 2x^3 - x\right) \div \left(1 - x\right)$
7. $\left(4x^5 + 12ax^4 - 3a^3x^2 - 10a^4x - 3a^5\right) \div \left(x + 3a\right)$
8. $\left(x^3 - \frac{1}{2}ax^2 - 2a^2x + a^3\right) \div \left(x - \frac{1}{2}a\right)$

En los ejercicios 9. a 14., determinar si el dividendo de cada división es múltiplo o no del divisor.

9. $\left(2a^4 - a^2 - 28\right) \div \left(a - 2\right)$
10. $\left(x^4 - x^3 - x + 1\right) \div \left(x - 2\right)$
11. $\left(2x^5 - 4x^3 - \frac{5}{8}x + \frac{3}{4}\right) \div \left(x + \frac{3}{2}\right)$
12. $\left(a^5 - 3a^4x + ax^4 - 3x^5\right) \div \left(a - 3x\right)$
13. $\left(\frac{1}{2}b^4 + \frac{7}{4}ab^3 + a^2b^2 - \frac{7}{4}a^3b - \frac{3}{2}a^4\right) \div \left(b + \frac{3}{2}a\right)$
14. $\left(a^3 + a^2 + a + 1\right) \div \left(a - 1\right)$

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 7

Sara es dos años mayor que Carlos. Cuando Carlos tenga la edad que Sara tiene ahora, la suma de sus edades sería 32. Se pide:

a) Si x es la edad de Sara, ¿qué expresión representa la edad de Carlos?
b) Escribe la ecuación algebraica que indique que la suma de las dos edades es 32.
c) Halla la edad de cada uno.

3.6 EL DERIVE EN ÁLGEBRA

En la sección **1.4** de este texto señalamos que el DERIVE es un programa computacional que permite realizar operaciones con expresiones algebraicas. A continuación mostraremos cómo hacerlo.

EJEMPLO 1:

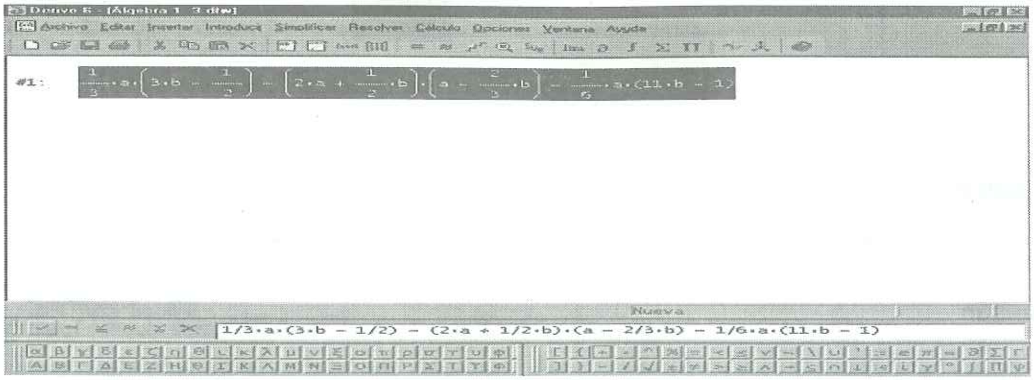
- Supongamos que queremos efectuar las operaciones indicadas y reducir semejantes en la expresión:

$$\frac{1}{3}a\left(3b - \frac{1}{2}\right) - \left(2a + \frac{1}{2}b\right)\left(a - \frac{2}{3}b\right) - \frac{1}{6}a\left(11b - 1\right)$$

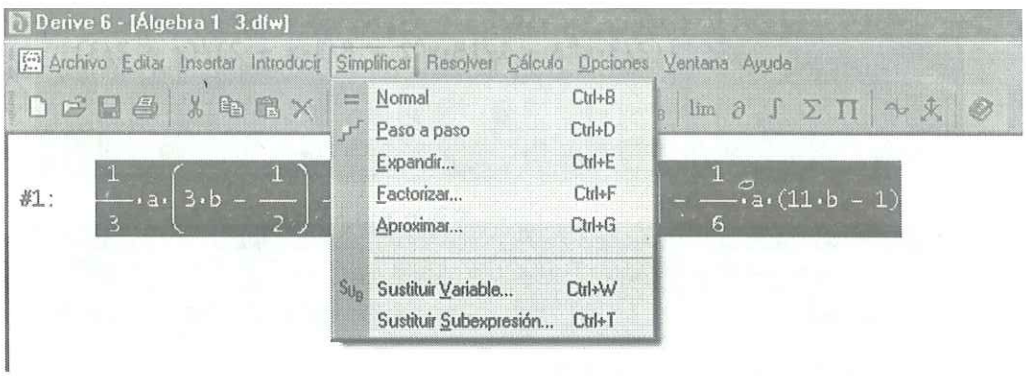
Solución

Los pasos son los siguientes:

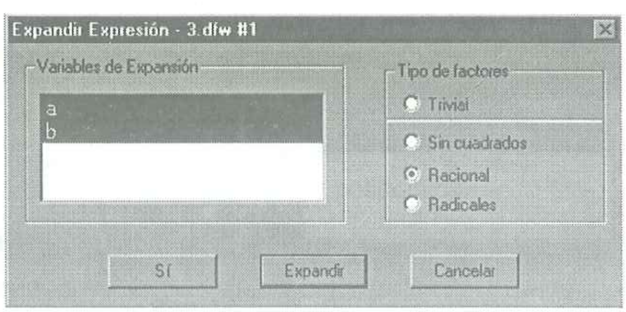
1. Llevamos el puntero del mouse sobre la **LÍNEA DE ENTRADA DE EXPRESIONES**, hacemos **click** y digitamos la expresión dada; luego, presionamos la tecla **ENTER** o el símbolo ubicado a la izquierda de la línea de entrada de expresiones. De inmediato, DERIVE nos mostrará la expresión deseada en la **VENTANA DE ÁLGEBRA**; así:



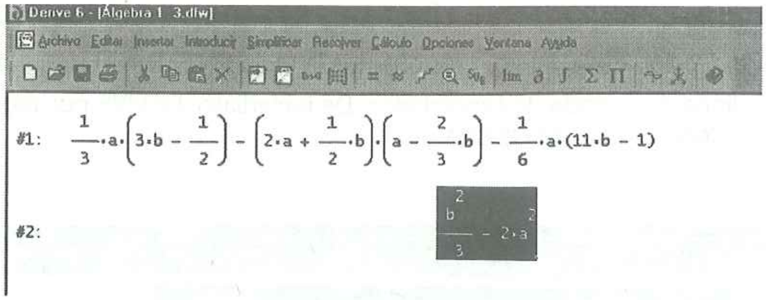
2. Vamos a la **BARRA DEL MENÚ DE OPCIONES** y hacemos **click** sobre el comando **SIMPLIFICAR.** Inmediatamente aparecerá una pequeña ventana, encima de la Ventana de Álgebra.



3. Sobre esta pequeña ventana, señalamos con el mouse la opción **EXPANDIR** y hacemos click. De inmediato aparece otra ventana. Señalamos la opción **RACIONAL**, hacemos **click**, resaltamos las variables (a y b, en este caso y hacemos click.



4. Finalmente, señalamos en la parte inferior de la ventana la opción **EXPANDIR**, hacemos **click** y la pantalla nos mostrará la expresión calculada y reducida.



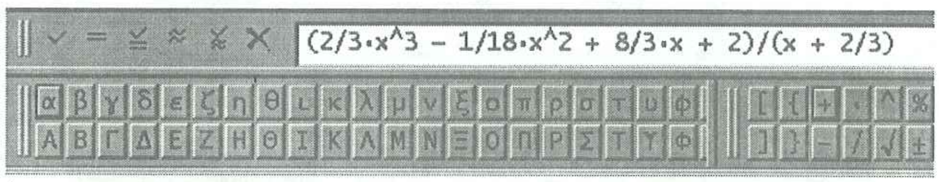
EJEMPLO 2:

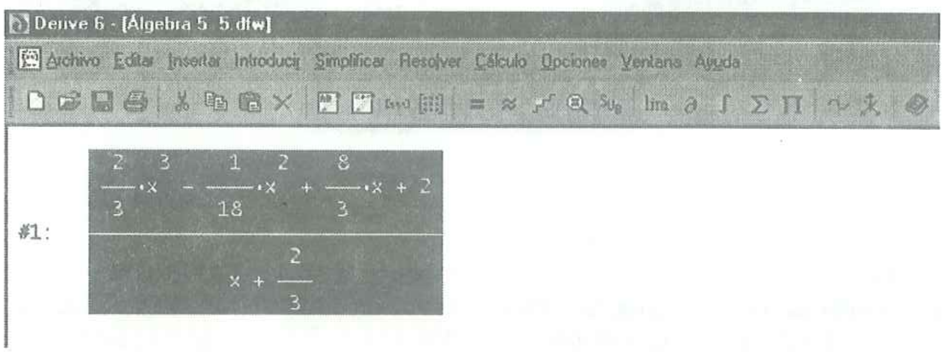
- Utilicemos DERIVE para dividir $\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{18}x^2 + \frac{8}{3}x + 2$ entre $x + \frac{2}{3}$.

Solución

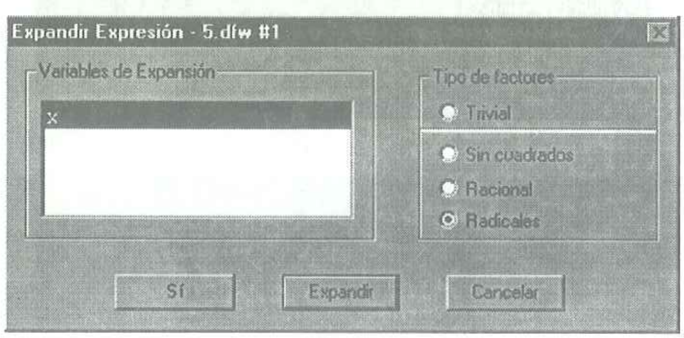
Los pasos para efectuar esta división son los mismos del ejemplo anterior, sólo hacemos un cambio: en el paso 3 anterior, después de que hacemos click sobre la opción **EXPANDIR** y aparece la segunda ventana, señalamos la opción **RADICAL**, hacemos click, resaltamos la variable (en este caso x) y hacemos de nuevo click. Éste es todo el proceso:

Pasos 1 y 2:

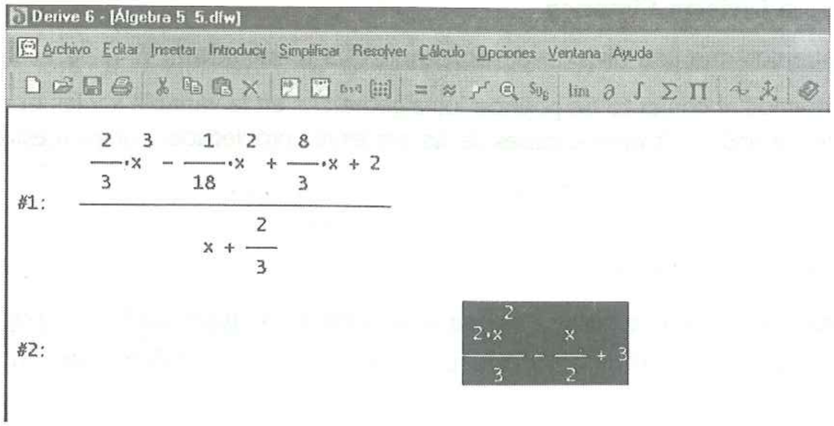




Paso 3:



Paso 4:



TALLER DE REPASO DE LA UNIDAD 3

1. a) ¿Cómo se define la potenciación cuando la base es un número real y el exponente es un número natural ?

   b) ¿Qué establece la propiedad $b^m \bullet b^n = b^{m+n}$? ¿Y la propiedad $b^m \div b^n = b^{m-n}$? ¿Y la propiedad $(b^m)^n = b^{m \bullet n}$?

   c) ¿Es distributiva la potenciación con respecto a la suma ? ¿a la resta ? ¿a la multiplicación? ¿a la división ?

   d) ¿ Es lo mismo $-a^4$ que $(-a)^4$? ¿ por qué ?

   e) Define raíz cuadrada y raíz cúbica de un número real.

   f) Define índice y radicando de una raíz.

   g) ¿ Es $\sqrt{25} = \pm 5$? ¿ por qué ?

   h) ¿ Es $\sqrt[n]{x^n} = x$, siendo n un número natural mayor que 1 ? ¿ por qué ?

   i) ¿ Es $(\sqrt[n]{x})^n = x$, siendo n un número natural mayor que 1 ? ¿ por qué ?

   j) ¿ Existe en los reales la raíz par de un número negativo? ¿Y la raíz impar de un número negativo? ¿ por qué ?

   k) ¿ Qué es una expresión algebraica ? ¿ Y un polinomio ? ¿ Qué diferencia existe entre expresión algebraica y polinomio ?

   l) Define los siguientes conceptos: grado, coeficiente principal y término independiente de un polinomio.

   m) Explica el procedimiento para sumar y restar polinomios.

   n) ¿ Cómo se multiplican polinomios ?

   o) ¿ Cómo se dividen polinomios ?

   p) ¿ Para qué se utiliza la **División Sintética** ?

q) Explica cómo se obtienen los coeficientes del cociente y el residuo de una división por el método de la **División Sintética**.

r) ¿Cómo sabemos que una división de polinomios ha terminado ?

s) Si consideramos el conjunto de polinomios algebraicos en la variable x y las operaciones suma, resta, multiplicación y división, ¿ cuáles de las siguientes propiedades cumplen estas operaciones ?

i) Clausurativa	ii) Conmutativa	iii) Asociativa
iv) Modulativa	iii) Invertida	vi) Distributiva

t) Teniendo en cuenta el ejercicio anterior:

i) ¿ Constituye la suma de polinomios en la variable x un grupo abeliano? ¿por qué ?

ii) ¿ Constituye la multiplicación de polinomios en la variable x un grupo abeliano ? ¿ por qué ?

2. En el paréntesis escribe V o F según que el enunciado sea verdadero o falso:

a) ( ) $x^m + x^n = x^{m-n}$	b) ( ) $(m+n)^t = m^t + n^t$	c) ( ) $-x^3 = (-x)^3$
d) ( ) $-x^4 = (-x)^4$	e) ( ) $\sqrt{a^2} = \lvert a \rvert$	f) ( ) $\sqrt[3]{a^3} = a$
g) ( ) $\sqrt[4]{-16} \notin R$	h) ( ) $\sqrt{-64} = \notin R$	i) ( ) $\pm\sqrt{64} = \pm 8$
j) ( ) $\sqrt[4]{16} = \pm 2$	k) ( ) $-\sqrt{25} = -5$	l) ( ) $\sqrt{(-7)^2} = -7$
m) ( ) $\sqrt{(a+b)^2} = \lvert a+b \rvert$	n) ( ) $\sqrt{a^2+b^2} = a+b$	

o) ( ) Expresión algebraica y polinomio algebraico son lo mismo.

p) ( ) Dos términos con distintos coeficientes numéricos pueden ser semejantes.

q) ( ) El coeficiente de un término siempre debe ser numérico.

r) ( ) Los términos semejantes sólo difieren en los exponentes.

s) ( ) Los términos ab^2xy^3 y $3b^2y^3xa$ son semejantes.

t) ( ) La reducción de términos sólo puede hacerse entre términos semejantes.

u) ( ) Al multiplicar dos términos debemos garantizar que sean semejantes.

v) ( ) La división de dos polinomios da como resultado otro polinomio.

En los ejercicios 3. a 10., efectuar las operaciones indicadas:

3. $\left(-\frac{1}{2}a^4bc^3\right)^3$

4. $\left(-\frac{2}{3}ab^2c^3\right)^4$

5. $\left[-\left(-\frac{1}{2}x^2yz^2\right)^2\right]^3$

6. $\left(-\frac{8}{9}a^3b^2c\right)\bullet\left(-\frac{1}{25}a^4c\right)$

7. $\left(-\frac{3}{4}x^2y\right)\bullet\left(-\frac{5}{6}xy^2\right)\bullet\left(-2x^2\right)$

8. $\left(-\frac{2}{7}a^5x^4zu^3\right)\div\left(-\frac{14}{3}a^4x^2zu^3\right)$

9. $\left(\frac{1}{9}axy^2\right)\bullet\left(3a^2x^2y\right)\div\left(a^3x^3y^3\right)$

10. $\left(-3a^4b^3c^4d^2\right)\bullet\left[(abd)^2\div(ab)^2\right]\bullet\left(\frac{1}{6}a^2b\right)$

En los ejercicios 11. a 16., eliminar signos de agrupación y reducir términos semejantes:

11. $\left[\frac{3}{2}xy+\left(-\frac{1}{3}x^2y^3+\frac{1}{2}xy^2-1\right)+\frac{1}{2}-\frac{3}{2}xy-\left(\frac{3}{5}x^3y^2+\frac{1}{2}x^2y^3+\frac{1}{2}xy^2\right)\right]+\frac{5}{6}x^2y^3$

12. $\frac{1}{2}a^2-\left\{\frac{2}{3}ab+b^2-\left[\frac{1}{2}ab+\frac{1}{3}b^2+\left(a^2-\frac{1}{2}ab\right)+\frac{1}{2}a^2-\left(\frac{2}{3}ab-b^2\right)\right]\right\}$

13. $-\frac{2}{3}xy\left(y^2+\frac{1}{3}y+2\right)-y^3\left(x^3+x^3y-2x\right)+x^3\left(\frac{2}{9}y^2+\frac{4}{3}y+y^4\right)$

14. $\left(2xy+y^2\right)x-(x+y)(2x-y^2+xy)-(y-2)(x^2+xy)$

15. $\left(\frac{1}{2}a^2+ab-2b^2\right)\left(2a^2-ab+\frac{1}{2}b^2\right)-\frac{3}{2}a^2\left(ab+\frac{5}{2}b^2\right)-\frac{1}{2}b^2\left(2a^2+2b^2\right)$

16. $\frac{1}{3}a^3-\left(a^2+\frac{2}{3}b^2\right)\left(\frac{1}{2}a+b^2\right)+b\left[\left(a^2-\frac{1}{2}b\right)+a(a+b^2)-a^2\right]+a\left(\frac{1}{6}a^2+ab^2+\frac{1}{3}b^2\right)-b^2\left(ab-\frac{2}{3}b^2-\frac{1}{2}\right)$

En los ejercicios 17. a 20., verifica las igualdades dadas:

17. $(3a+2)(3a-2)(9a^2+a)=9a^2(9a^2-2)+2(9a^2-16)+16$
18. $(a+2b)(a^2-2ab+4b^2)-16b^3=(a^2+2ab+4b^2)(a-2b)$
19. $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)=a^4+a^2b^2+b^4$
20. $(a^4+b^4)(a+b)-(a^3+b^3)ab=a^5+b^5$

En los ejercicios 21. a 28., efectúa las divisiones indicadas:

21. $(3a^5+11a^4-9a^3-3a^2-18a+4)\div(a+4)$

22. $\left(3xy^4-4x^2y^3+\frac{3}{2}x^3y^2-\frac{1}{2}x^4y\right)\div(-xy^2+x^2y)$

23. $\left(3a^3b^2-\frac{13}{2}a^2b^3+\frac{15}{4}ab^4-\frac{1}{2}b^5\right)\div\left(2a^2b-3ab^2+\frac{1}{2}b^3\right)$

24. $\left(-\frac{7}{6}x^3-\frac{1}{2}x-4+x^4+\frac{1}{3}x^2\right)\div\left(x^2-\frac{2}{3}x-2\right)$

25. $\left(-15x^3y-y^4+7x^2y^2+8xy^3+6x^4\right)\div(-6xy+2y^2+3x^2)$

26. $\left(\frac{3}{4}m^5+\frac{2}{3}m^2+\frac{1}{2}m^4-\frac{4}{5}+\frac{19}{30}m+\frac{37}{40}m^3\right)\div\left(2+2m^3-\frac{1}{3}m\right)$

27. $\left(\frac{79}{120}x^2+\frac{21}{40}x^4-\frac{1}{10}+\frac{3}{8}x^5-\frac{47}{120}x^3+\frac{1}{10}x\right)\div\left(\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}x^3\right)$

28. $(a^{2n}+2a^nb^{2r}-c^{2p})\div(a^n+b^{2r}+c^p)$, con $n, r, p \in Z^+$

En los ejercicios 29. a 33., efectúa cada división aplicando el proceso de la **División Sintética**:

29. $(8x^3+13x^2+26x+64)\div(x+2)$

30. $(8b^3-32b^2+10b+2)\div\left(b-\frac{1}{2}\right)$

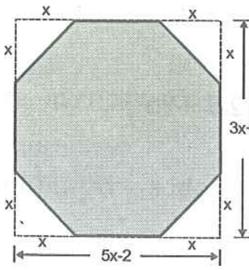
31. $\left(\frac{11}{2}x^2-x^3-\frac{1}{2}x-1\right)\div\left(\frac{1}{2}-x\right)$

32. $\left(a^5-a^4b+ab^4-b^5\right)\div\left(a-b\right)$

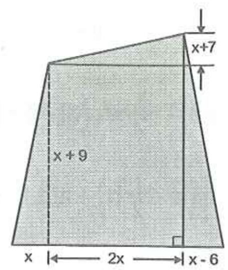
33. $(4x^5+12ax^4-3a^3x^2-10a^4x-3a^5)\div(x+3a)$

En los ejercicios 34. a 39., escribe un polinomio que exprese el área de la parte sombreada de cada figura:

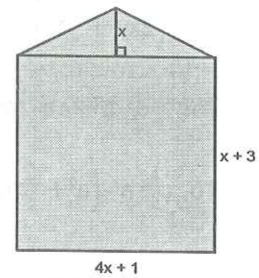
34.



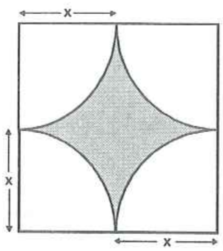
35.



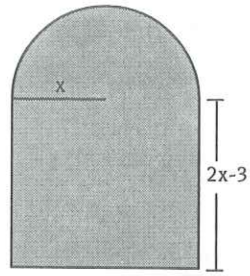
36.



37.

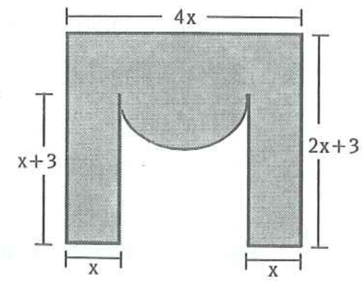


38.



Aproximar π a 3

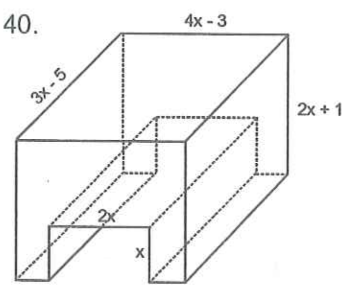
39.



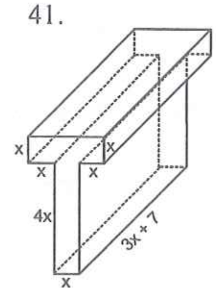
Aproximar π a 3

En los ejercicios 40 a 42, escribir un polinomio para calcular el volumen de cada figura:

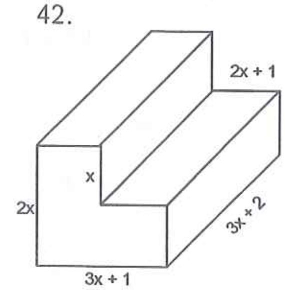
40.



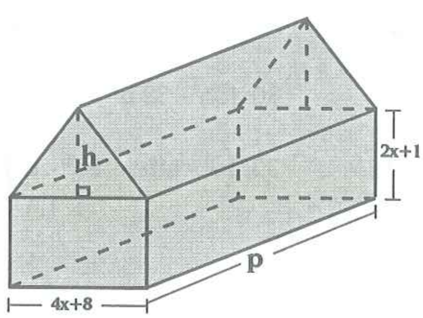
41.



42.



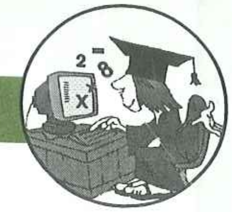
43. La figura muestra una bodega de almacenamiento de grano. Las medidas de longitud se dan en metros. La altura **h** mide 3 metros más que la mitad de la base y la profundidad **p** es el doble de la base.



Se pide:

a) Escribir un polinomio para expresar la altura h en términos de x.
b) Escribir un polinomio para expresar la profundidad p en términos de x.
c) Escribir un polinomio para expresar el área del frente de la bodega en términos de x.
d) Escribir un polinomio para expresar el volumen de la bodega en términos de x.

PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS DEL ICFES



Las preguntas 1. a 5. se responden teniendo en cuenta la siguiente información.

Un paquete pesa x libras, donde x es un número entero. Al colocar el paquete al correo, cobran 1,65 por las primeras cinco libras de peso y 12 centavos de dólar por cada libra adicional.

1. Si en el correo cobran 3,45 dólares, la ecuación que me permite calcular el peso del paquete es:

   a) $1{,}65 + 0{,}12\,x = 3{,}45$;   c) $5 - (1{,}65) + 0{,}12\,x = 3{,}45$
   b) $165 + 12\,x = 345$;   d) $1{,}65 + 0{,}12\,(x - 5) = 3{,}45$

2. Si en el correo cobran 3,45 dólares, el paquete pesa:

   a) 10 libras   b) 5 libras   c) 20 libras   d) 15 libras

3. Si el paquete pesa 15 libras, en el correo le cobran por el envío:

   a) 2,85 dólares   b) 24,75 dólares   c) 1,8 dólares   d) 2,475 dólares

4. Si el paquete pesa más de 5 libras ($x > 5$), la expresión algebraica que indica el pago de las libras adicionales es:

   a) $1{,}65\,x$ b) $12\,x$ c) $0{,}12\,x$ d) $0{,}12\,(x - 5)$

5. Si el paquete pesa menos de 6 libras, la expresión que me indica el pago por el paquete es:

   a) 1,65   b) $0{,}33\,x$ c) $6\,x$ d) $0{,}33 \bullet \frac{x}{6}$

Núcleo Temático

4

EL CONCEPTO DE FUNCIÓN

LOGRO GENERAL

Reconocer la importancia del concepto de función dentro de la matemática y su utilidad para modelar situaciones de la vida diaria.

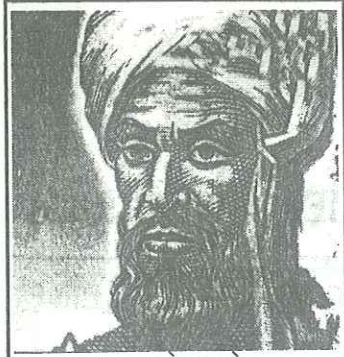
DIMENSIONES

LOGROS ESPECÍFICOS	INDICADORES DE LOGRO
Corporal: • Manipular diagramas, tablas y gráficas para representar relaciones que son funciones.	• Elabora diagramas de flechas de relaciones que son funciones. • Dibuja gráficas de relaciones que son funciones.
Comunicativa: • Explicar el significado de la notación funcional $y= f(x)$. • Escribir en el lenguaje de las funciones, situaciones de la ciencia o de la vida diaria.	• Interpreta con sus palabras el significado de la notación $y=f(x)$. • Traduce al lenguaje matemático, situaciones problemáticas de otras ramas de la ciencia o de la vida diaria, que pueden expresarse mediante funciones.
Cognitiva: • Identificar relaciones que son funciones. • Dibujar gráficas de relaciones que son funciones. • Hallar la pendiente de rectas de ecuación $y= mx + b$.	• Analiza, dibuja e interpreta gráficas de funciones. • Resuelve problemas cuyos enunciados corresponden a situaciones funcionales.
Estética: • Elaborar diagramas cartesianos para representar funciones lineales.	• Interpreta la gráfica de una función lineal mostrando la pendiente y la coordenada al origen.
Ética - Actitudinal • Actuar de manera honesta en la presentación de trabajos y evaluaciones.	• Reconoce y acepta sus fortalezas y debilidades en la actividad académica.

EVALUACIÓN

ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS

4.1 HISTORIA DEL ÁLGEBRA (4): LOS ARABES (750-1300)



AL-JWARIZMI
(770 - 840)

Con el final de la ciencia griega comienza en Europa un período de estancamiento científico, desplazándose el centro del desarrollo matemático a la India, Asia Central y los países árabes. Durante un período de aproximadamente mil años (de los siglos V al XV), la matemática se desarrolló principalmente en conexión con las necesidades del cálculo, en particular de los cálculos astronómicos, puesto que los matemáticos orientales fueron en su mayor parte también astrónomos. Pero los matemáticos indios, árabes y del Asia Central, lograron importantes éxitos en el campo de la aritmética y el álgebra.

El gran poeta y matemático Omar Khayyam (1048 - 1122), demostró que todo cociente de magnitudes racionales o irracionales puede ser llamado Número. La palabra **álgebra** proviene del nombre de un tratado del matemático y astrónomo Mohammed Ibn Al-Jwarizmi, que vivió en el siglo IX. Su tratado sobre **álgebra** llevaba por título **Al-Jebrwálmukabala**, que significa "transposición y eliminación". Por transposición (al-jebr) se entiende la transferencia de términos al otro lado de la igualdad, y por eliminación (al-mukabala) la cancelación de términos iguales en ambos miembros.

La palabra árabe **Al-jebr** se convirtió en **álgebra** al transcribirla al latín, mientras que **al-mukabala** fue desechada, lo cual explica el término moderno **álgebra** para esta disciplina.

EJERCICIO 4.1

Comprensión de Lectura. Explicación: Lee nuevamente el texto anterior y luego encierra, en un círculo, la letra que corresponde a la respuesta correcta:

1. El propósito del autor con el escrito anterior es:

   a. Explicar una etapa en el desarrollo del álgebra.
   b. Demostrar que los europeos no son los padres de las ciencias.
   c. Determinar la antiguedad de la ciencia algebraica.
   d. Destacar el papel de indios, árabes y asiáticos en el desarrollo de las matemáticas.

2. De la lectura del texto se desprende que:

   a. Durante 1000 años estuvo estancada la ciencia en Grecia.
   b. Los árabes fueron los pioneros de la actividad matemática antigua.
   c. Los poetas también están ligados al desarrollo de las ciencias.
   d. Las raíces de la ciencia también están regadas por el continente asiático.

3. Con la expresión "estancamiento científico", el autor quiere significar:

   a. Desplazamiento de la actividad científica en otro lugar.
   b. Detención del proceso evolutivo de las diferentes ciencias.
   c. "Envejecimiento" de teorías y estructuras científicas.
   d. Anquilosamiento de los saberes de la ciencia.

4. La palabra **álgebra**, como nombre para la ciencia matemática tuvo su origen en:

   a. El nombre de un matemático árabe.
   b. El paso del latín al castellano del término Al-Jebr.
   c. Un término árabe que significa eliminación.
   d. Parte del nombre de un tratado de matemáticas de un científico árabe.

5. Sólo uno de los siguientes enunciados es verdadero:

   a. El término "al-mukabala" fue desechado por considerarse impropio.
   b. La mayoría de cocientes de magnitudes recibe el nombre de número.
   c. El desarrollo de la Astronomía contribuyó al desarrollo del Cálculo matemático.
   d. Los matemáticos hindúes poco contribuyeron al desarrollo de esta ciencia.

4.2 REVISIÓN DEL CONCEPTO DE OPERACIÓN

• Tanto en el grado 6º como en el grado 7º tuvimos la oportunidad de estudiar el concepto de OPERACIÓN.

• Aprendimos que en toda operación intervienen tres elementos claves:

- **EL OPERADOR:** Corresponde a qué o a quién ejecuta la acción.
- **LOS OBJETOS A OPERAR:** Son los elementos que reciben la acción del operador.
- **El o LOS RESULTADOS:** Corresponde a lo que se obtiene una vez que el operador actúa sobre los objetos.

• También aprendimos que hay dos tipos de operaciones:

- **OPERACIÓN UNARIA:** Son aquellas en las que el operador actúa sobre un objeto cada vez.
- **OPERACIÓN BINARIA:** Son aquellas en las que el operador actúa sobre dos objetos (parejas de objetos) cada vez.

Ejemplo 1

Tenemos el conjunto de objetos $O = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ y el operador **"duplicar y luego sumar 3"**. Se pide:

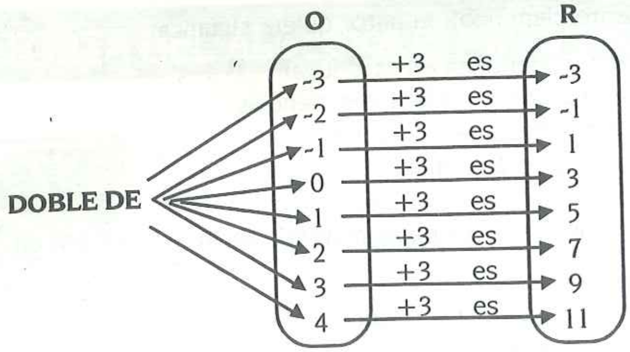
a) Determinar el tipo de operación.
b) Identificar los tres elementos básicos y elaborar un diagrama sagital.
c) Escribir el conjunto de parejas ordenadas de esta operación.
d) Dibujar la gráfica de esta operación.
e) Escribir simbólicamente la operación.

Solución

a) Esta operación es UNARIA ya que el OPERADOR actúa sobre UN OBJETO cada vez: primero sobre -3, después sobre -2, luego sobre -1 y así sucesivamente.

b) Los tres elementos básicos de esta operación son:

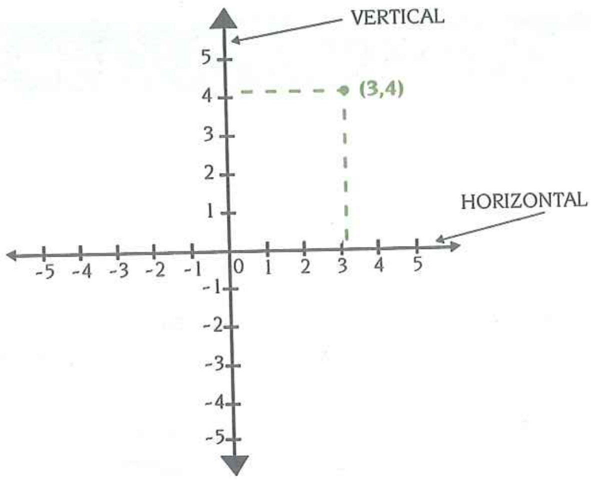
   – El Operador: **"duplicar y luego sumar 3"**.
   – Los Objetos a Operar: $\mathbf{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3}$ **y** $\mathbf{4}$.
   – Los Resultados: los que se obtienen cuando el operador actúa sobre los objetos. El siguiente diagrama sagital nos muestra el conjunto R de resultados:



c) De acuerdo con este diagrama sagital, el conjunto de parejas ordenadas de esta operación es el siguiente:

$$\{(-3,-3), (-2,-1), (-1,1), (0,3), (1,5), (2,7), (3,9), (4,11)\}$$

d) Para dibujar la gráfica de una operación unaria utilizamos el DIAGRAMA CARTESIANO que consiste en dos RECTAS NUMÉRICAS que se cortan perpendicularmente en el origen: una horizontal y otra vertical. Por ejemplo, la pareja ordenada (3, 4) la representamos así:

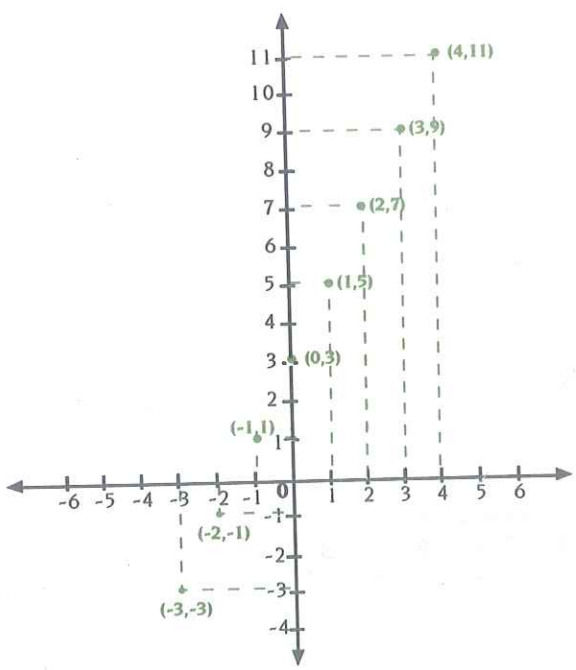


– Sobre la recta horizontal localizamos la primera componente de la pareja (3), llamada también **abscisa** y por allí trazamos una línea punteada perpendicular a la recta horizontal.

– Luego, hacemos lo mismo con la segunda componente (4), llamada también **ordenada,** sobre la recta vertical.

– Las dos líneas punteadas se cortan en un PUNTO común. Este punto es la representación gráfica de la pareja ordenada (3,4).

De acuerdo con la explicación anterior, la gráfica de nuestra operación es la siguiente:



e) Para representar simbólicamente la operación, convenimos en nombrar los objetos por operar con una letra; por ejemplo, la **x** y los resultados con otra letra, por ejemplo, la **y**. En estas condiciones, podemos escribir simbólicamente la operación así:

Doble de $\boxed{x}$ **+ 3 es** $\boxed{y}$

ó

$$2 \cdot x + 3 = y$$

Si, en general, designamos con la letra **f** al operador, con la letra **x** los objetos y con la letra **y** los resultados, entonces la representación simbólica de una operación unaria es la siguiente:

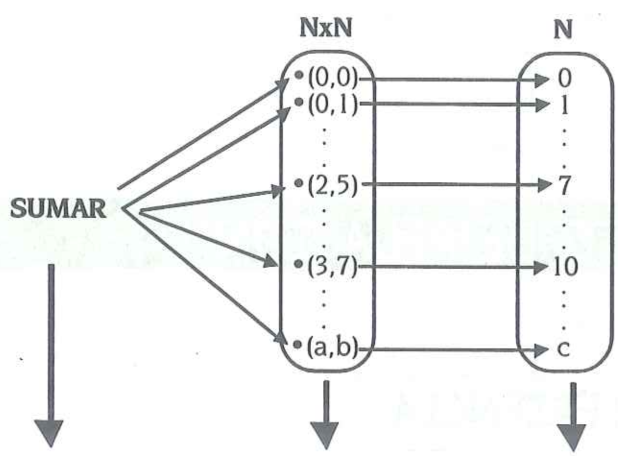
$$f(x) = y$$

Ejemplo 2

Expliquemos por qué la suma de números naturales es una operación binaria.

Solución

- La suma de números naturales es una operación binaria ya que el operador **SUMAR** actúa sobre dos objetos cada vez.
- En este caso, el conjunto de **OBJETOS POR OPERAR** es N x N; es decir, el **PRODUCTO CARTESIANO** del conjunto de los números naturales por sí mismo. Este conjunto N x N está formado por PARES ORDENADOS y el operador SUMAR actúa sobre este conjunto. Por eso decimos que la operación SUMAR es una operación BINARIA.



$$+ \xrightarrow[\text{sobre}]{\text{actúa}} (a, b) \xrightarrow{\text{para producir}} c$$

o

$$+ (a, b) = c \quad ó \quad a + b = c$$

EJERCICIO 4.2

1 En cada una de las siguientes operaciones indica el operador, el (o los) objeto(s) por operar y el (o los) resultado (s).

a) Cuadruplicar el 7 b) Multiplicar por 4 el 7 c) Multiplicar 4 y 7

d) Duplicar el 8 e) Multiplicar por 2 el 8 f) Multiplicar 2 y 8

2 ¿Cuáles de las operaciones del ejercicio anterior son unarias y cuáles son binarias?

3 Si **x** representa los objetos por operar y **y** los resultados, representa simbólicamente la operación cuyo operador es:

a) El doble de
b) El triple de, menos 2
c) El cuadrado de, más 1
d) El cubo de, menos 3

4 Sea $A = \{ x \in Z / -3 \leq x \leq 3 \}$, se pide:

a) Escribir el conjunto A por extensión.
b) Aplicar el operador "CUADRADO DE, MENOS 1" a los elementos del conjunto A.
c) Escribir por extensión el conjunto B de resultados de la operación.
d) Escribir el conjunto de parejas ordenadas de la operación.
e) Dibujar la gráfica de la operación.
f) Escribir simbólicamente la operación, si se representan con **x** los elementos del conjunto de objetos y con **y** los del conjunto de resultados.

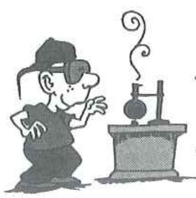
5 Sea $A = \{ x \in R / -3 \leq x \leq 3 \}$, se pide:

a) Aplicar el operador "CUADRADO DE, MENOS 1" a los elementos del conjunto A.
b) Elaborar un diagrama sagital para esta operación.
c) Escribir por comprensión el conjunto de resultados.
d) Escribir simbólicamente la operación.
e) Dibujar la gráfica de la operación. ¿Tienen alguna diferencia la gráfica de esta operación con la gráfica del ejercicio anterior? Argumenta tu respuesta.
f) Si representamos con f el operador, completa:

$f(-2{,}5) =$ $f(0) =$ $f(1{,}5) =$

$f(2{,}7) =$ $f(-0{,}3) =$ $f(-1{,}7) =$

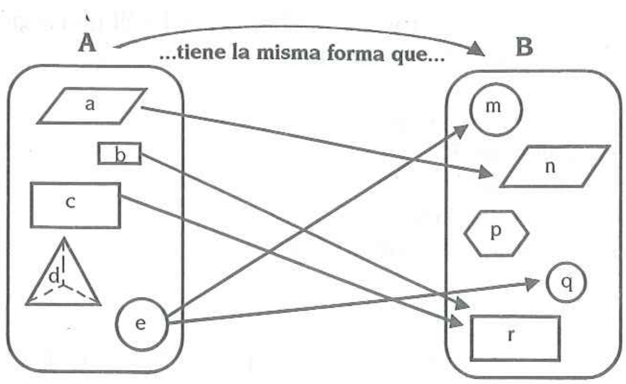
4.3 EL CONCEPTO DE RELACIÓN



EXPERIENCIA

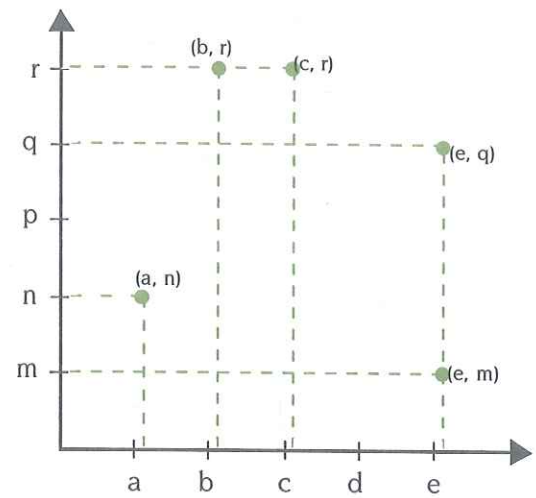
- Así como el concepto de **operación** está vinculado a numerosas situaciones de la vida diaria, también al de **relación** le ocurre lo mismo; por ejemplo:
  - Podemos **relacionar** los elementos de un conjunto de personas con sus estaturas respectivas.
  - Podemos **relacionar** los elementos de un conjunto de canicas con su respectivo color.
  - Podemos **relacionar** los países de Asia con sus capitales.
  - Podemos **relacionar** los elementos de un conjunto de números con el doble de cada uno.
  - Podemos **relacionar** los elementos de dos conjuntos de figuras geométricas por la forma que tienen.
- Si observamos con cuidado, encontraremos importantes coincidencias entre el concepto de **operación** y el concepto de **relación**. Analicemos, por ejemplo, lo que ocurre cuando relacionamos los dos conjuntos de figuras geométricas:
  - Tenemos dos conjuntos: un **conjunto de partida**, formado por uno de los dos conjuntos de figuras, un **conjunto** de **llegada**, formado por el otro conjunto de figuras y una **regla o propiedad** (equivalente al **operador**) que en este caso sería: **"tiene la misma forma que"**.

– También una relación podemos visualizarla mediante un diagrama sagital:



– Podemos escribir su conjunto de parejas ordenadas: **R = { (a, n) , (b, r) , (c, r) , (e, m) , (e, q) }**

– Finalmente, también podemos dibujar la gráfica de esta relación en un diagrama cartesiano; así:



- Notemos dos detalles en la relación anterior. Primero: el elemento **d** del conjunto de partida (la pirámide) no se relacionó con ninguno del conjunto de llegada y el elemento **p** del conjunto de llegada (el exágono) tampoco se relacionó con ninguno del conjunto de partida; segundo: el elemento **e** del conjunto de partida (el círculo) se relacionó con dos del conjunto de llegada (**m** y **q**).
- A los elementos del conjunto de partida que están relacionados con alguno del conjunto de llegada se le denomina DOMINIO de la relación. Y a los elementos del conjunto de llegada que están relacionados con alguno del conjunto de partida se le llama RANGO de la relación. Por ejemplo, en la relación anterior, el dominio (D) y el rango (I) son, respectivamente:

$$D = \{ a, b, c, e \}$$
$$I = \{ m, n, q, r \}$$

APRENDAMOS

- Una RELACIÓN queda definida si conocemos:

  – UN CONJUNTO DE PARTIDA.
  – UN CONJUNTO DE LLEGADA.
  – UNA REGLA QUE PERMITA HACER CORRESPONDER LOS ELEMENTOS DE AMBOS CONJUNTOS.

- Lo mismo que las operaciones, las relaciones pueden escribirse como un CONJUNTO DE PAREJAS ORDENADAS; además, es posible representarlas mediante un diagrama sagital y dibujarlas en un diagrama cartesiano.

Ejemplo 1:

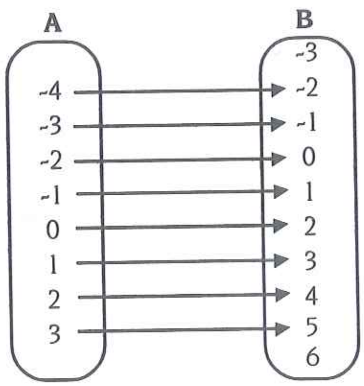
Sea $A = \{ x \in Z / -4 \leq x \leq 3 \}$ y $B = \{ y \in Z / -3 \leq y \leq 6 \}$ y $\mathfrak{R}$ una relación de A en B (se escribe $\mathfrak{R}: A \rightarrow B$) definida por la regla $x + 2 = y$. Se pide:

a) Describir los conjuntos A y B por extensión.
b) Elaborar un diagrama sagital de R.
c) Hallar el dominio y el rango de R.
d) Dibujar la gráfica de R en el diagrama cartesiano.
e) Escribir el conjunto de parejas ordenadas de R.

Solución

a) $A = \{ -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \}$ y $B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$

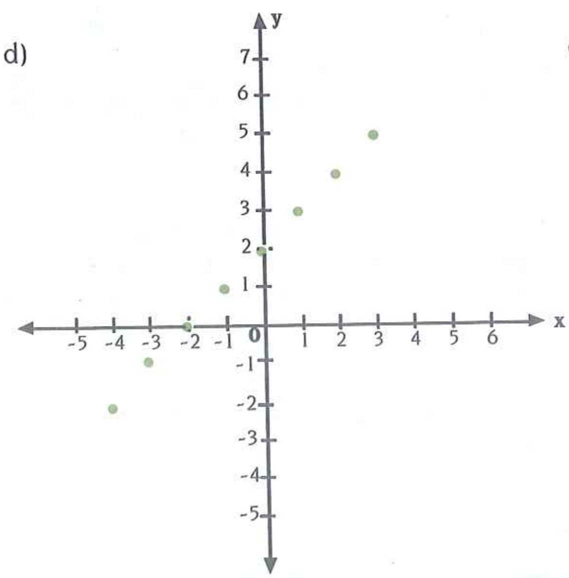
b)



c) $D_{\mathfrak{R}} = \{ -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

$I_{\mathfrak{R}} = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5 \}$

d)



e) $\mathfrak{R} = \left\{ \begin{array}{l} (-4, -2), (-3, -1), (-2, 0), (-1, 1), \\ (0, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 5) \end{array} \right\}$

PREGUNTA 1: ¿Por qué no pueden unirse los puntos de la gráfica anterior mediante una línea de trazo continuo?

PREGUNTA 2:

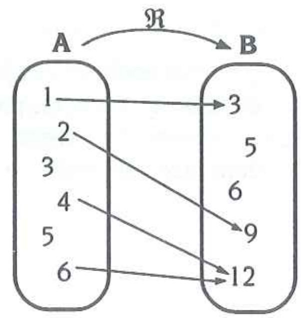
Si en el ejemplo anterior definimos los conjuntos A y B, así: $A = \{ x \in R / -4 \leq x \leq 3 \}$ y $B = \{ y \in R / -3 \leq x \leq 6 \}$ y mantenemos igual las demás condiciones, contesta:

a) ¿Cuáles son el dominio y el rango de $\mathfrak{R}$?
b) ¿Qué diferencia importante encuentras entre la gráfica de esta relación y la del ejemplo anterior?

EJERCICIO 4.3

En los ejercicios 1. a 8., escoge la letra correspondiente a la única respuesta correcta.

1 El conjunto de parejas ordenadas correspondiente a la relación $\Re$: A⟶B es:



a) { (3, 1) , (9, 2) , (12, 4) , (12, 6) }

b) { (1, 3) , (2, 9) , (6, 12) }

c) { (3, 5) , (5, 6) }

d) { (4, 12) , (2, 9) , (1, 3) , (6, 12) }

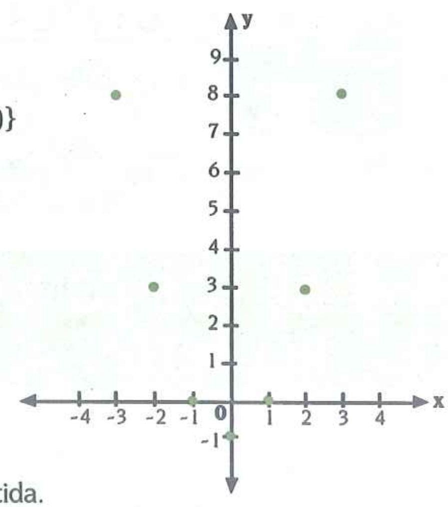
2 El dominio de la relación anterior es:

a) { 1, 2, 3, 4, 5, 6 } b) {1, 2, 4, 6} c) {3, 9, 12} d) {3, 5}

3 El rango de la misma relación es:

a) {3, 9, 12} b) {3, 5, 6, 9, 12} c) {1, 2, 4, 6} d) {1, 2, 3, 4, 5, 6}

4 El conjunto de parejas ordenadas correspondiente a la relación cuya gráfica se muestra a la derecha es:



a) {(8, – 3) , (8, 3) , (– 1, 0) , (0, 1) , (0, – 1)}

b) {(8, – 3) , (8, 3) , (– 1, 0) , (0, – 1) , (3, – 2) , (3, 2)}

c) {(– 3, 8) , (– 2, 3) , (– 1, 0) , (1, 0) , (2, 3) , (3, 8) , (0, – 1)}

d) Ninguna de las anteriores.

5 La regla correspondiente a esta relación es:

a) $x^2 - 1 = y$ b) $x + 1 = y^2$

c) $x - 1 = y$ d) $x^2 = y$

6 Señala la proposición verdadera:

a) En una relación, el dominio es igual al conjunto de partida.

b) En una relación, el rango es igual al conjunto de llegada.

c) En una relación, el conjunto de partida debe ser igual al conjunto de llegada.

d) En una relación, el dominio es un subconjunto del conjunto de partida.

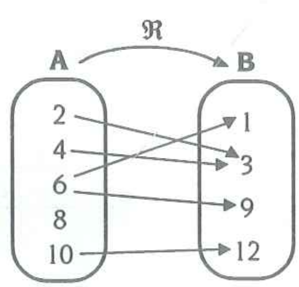
7 Señala la proposición verdadera:

a) $\Re$ (3) = 4

b) $\Re$ (1) = 8

c) $\Re$ (3) = 2

d) $\Re$ (6) = 9



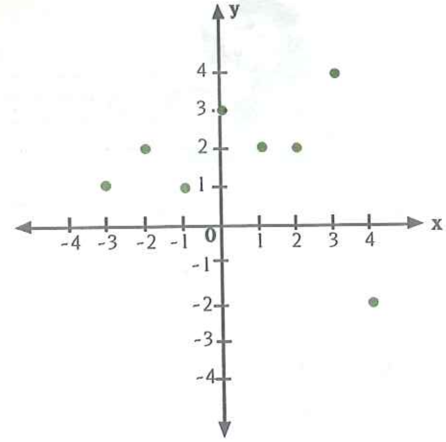
8. Señala la proposición verdadera:

a) El dominio es $\{ -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 \}$

b) El dominio es $\{ -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 \}$

c) El rango es $\{ -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 \}$

d) El rango es $\{ 1, 2, 3, 4 \}$



9. Sean $A = \{ -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5 \}$ y
$B = \{ x / -3 \leq x \leq 3 , x \in Z \}$
y $\mathfrak{R}$: $B \rightarrow A$ una relación cuya regla es $x^2 - 3 = y$. Se pide:

a) Describir por extensión el conjunto B.
b) Elaborar un diagrama sagital para $\mathfrak{R}$.
c) Escribir el conjunto de parejas ordenadas de $\mathfrak{R}$.
d) Hallar el dominio y el rango de $\mathfrak{R}$.
e) Dibujar la gráfica de $\mathfrak{R}$.

10. Sean $A = \{ y \in Z / -2 \leq y \leq 5 \}$ y $B = \{ x \in R / -3 \leq x \leq 3 \}$ y $\mathfrak{R}$: $B \rightarrow A$ cuya regla es $x^2 + 1 = y$. Se pide:

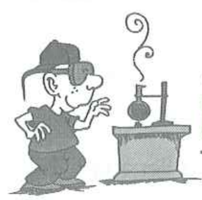
a) Obtener al menos 5 parejas ordenadas de esta relación.
b) Hallar el dominio y el rango de $\mathfrak{R}$.
c) Dibujar la gráfica de $\mathfrak{R}$.

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 1

Descubre el número que sigue:

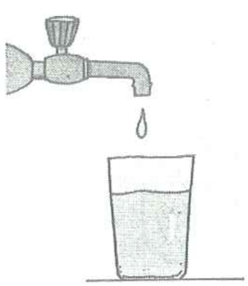
$19 \nearrow 13 \searrow 16 \nearrow 11 \searrow 13 \nearrow 9 \searrow \boxed{?}$

4.4 DE LOS CONCEPTOS DE OPERACIÓN Y RELACIÓN AL DE FUNCIÓN



PRIMERA EXPERIENCIA

- Una canilla está goteando. El nivel del agua que se alcanza en el vaso **depende** del tiempo que la canilla esté goteando. Esta **dependencia** o **relación** podemos observarla en la siguiente tabla:

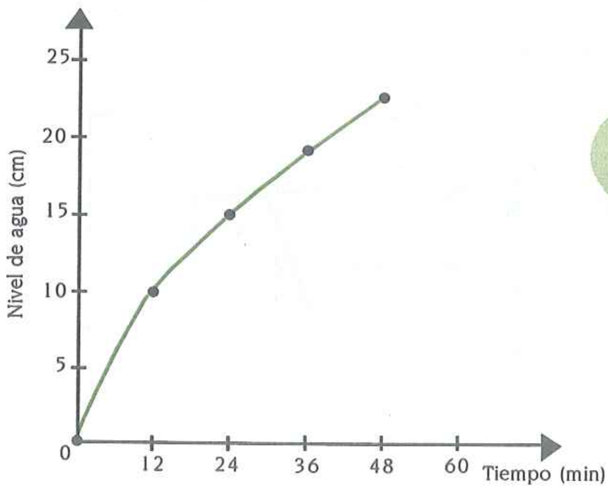


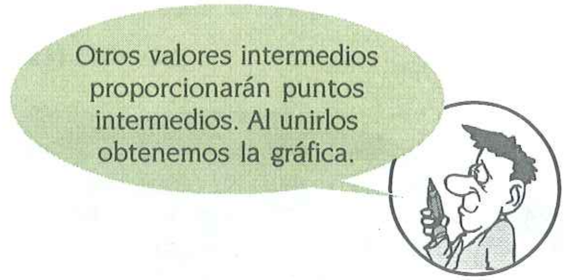
Tiempo (minutos)	Nivel de Agua (cm)
0	0
12	10
24	15
36	19
48	22

A la magnitud **tiempo** se le llama **variable independiente** y la magnitud **nivel de agua** es la **variable dependiente**.

- La tabla anterior nos permite visualizar, como si fuera un diagrama sagital, la relación existente entre los elementos de dos conjuntos: el conjunto **TIEMPO** y el conjunto **NIVEL DEL AGUA**.

  Por supuesto, también podemos representar en un diagrama cartesiano los pares de valores de la relación **tiempo - nivel del agua**: (0, 0) , (12, 10) , (24, 15) , (36, 19) , (48, 22); así:



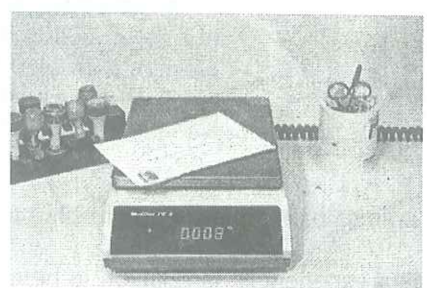


La gráfica nos da una **idea global de la relación de dependencia** que existe entre las dos magnitudes. Los valores de la variable independiente **tiempo** (0, 12, 24, ...) se representan en el eje horizontal o **eje de las abscisas** y los valores de la variable dependiente **nivel del agua** (0, 10, 15, 19, ...) se representan en el eje vertical o **eje de las ordenadas**.

SEGUNDA EXPERIENCIA

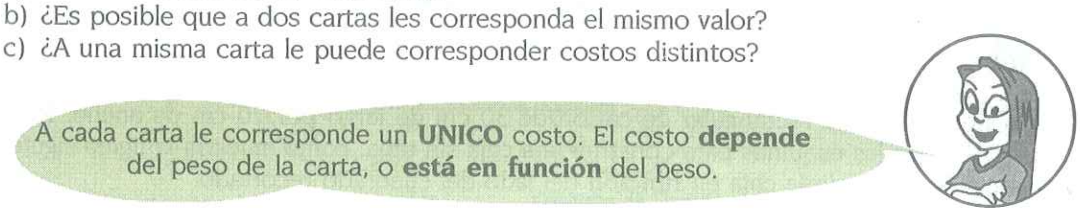
- En un cierto país el costo del correo se rige por la siguiente tabla:

Peso en Gramos	Costo
Hasta 20 g	U.S. $0,20
Entre 20 g y 50 g	U.S. $0,26
Entre 50 g y 100 g	U.S. $0,39
Entre 100 g y 250 g	U.S. $0,85
Entre 250 g y 500 g	U.S. $1,70
Entre 500 g y 1000 g	U.S. $2,35
Entre 1000 g y 2000 g	U.S. $3,20



- Marcos y Sara le escriben a sus amigos Julio, Margarita, Lina y Juan Carlos. La carta de Julio pesa 15 g, la de Margarita 80 g, la de Lina 90 g y la de Juan Carlos 500 g. Contesta:

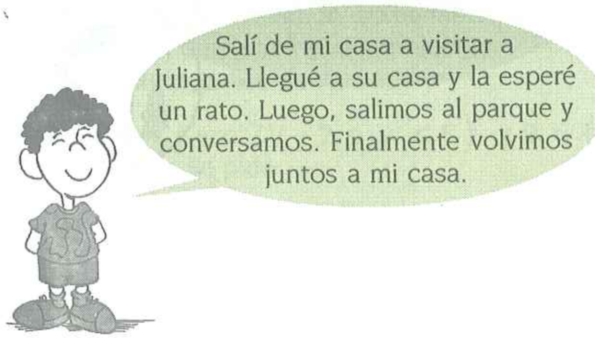
  a) ¿Cuánto cuesta poner cada carta?
  b) ¿Es posible que a dos cartas les corresponda el mismo valor?
  c) ¿A una misma carta le puede corresponder costos distintos?

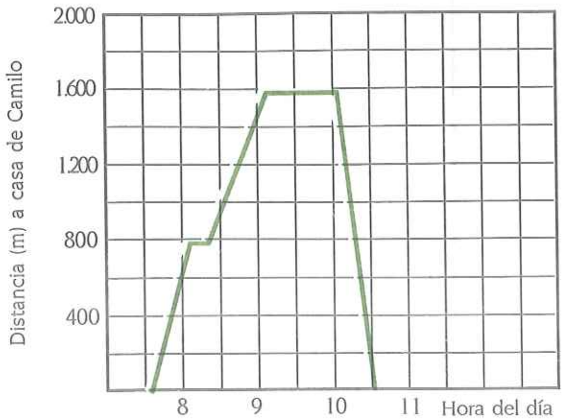


- En este caso hemos expresado la relación mediante una **tabla**.

TERCERA EXPERIENCIA

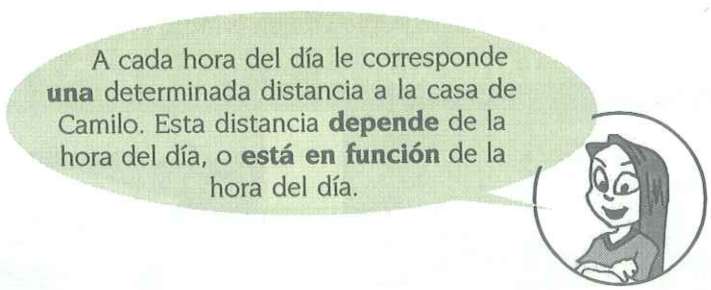
- Fíjate bien en la siguiente gráfica y en lo que dice Camilo:





- Contesta:

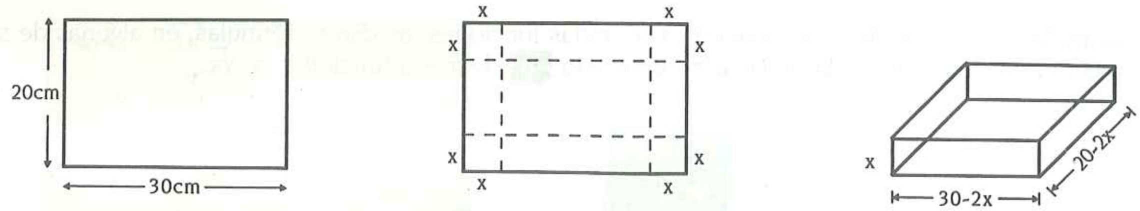
a) ¿A qué hora salió Camilo de su casa?
b) ¿Cuánto tiempo tardó en llegar a la casa de Juliana y qué distancia recorrió?
c) ¿Cuánto tiempo debió esperar a Juliana?
d) ¿Qué distancia hay de la casa de Juliana al parque? ¿Cuánto tiempo tardaron en ir de la casa de Juliana al parque?
e) ¿Cuánto tiempo permanecieron en el parque?
f) ¿Qué distancia hay del parque a la casa de Camilo? ¿Cuánto se demoraron en recorrer esta distancia?



- En esta experiencia, la relación la hemos expresado **mediante una gráfica**.

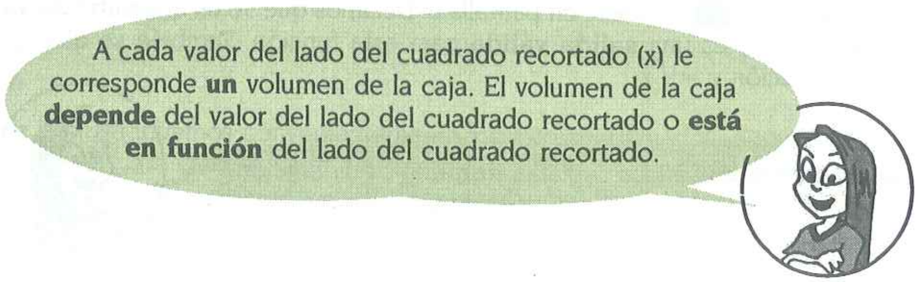
CUARTA EXPERIENCIA

- Santiago tiene una lámina rectangular de cartón de 30 cm de largo por 20 cm de ancho. Recorta cuatro cuadrados en las esquinas para construir una caja sin tapa, como muestra la figura siguiente. Expresemos el volumen de la caja en **función** del lado del cuadrado recortado.



- Si convenimos en llamar **x** al lado del cuadrado recortado, entonces las dimensiones de la caja serán: **alto: x ; largo: 30 - 2x ; ancho: 20 -2x**
- Por lo tanto, el volumen de la caja podemos expresarlo mediante la fórmula.

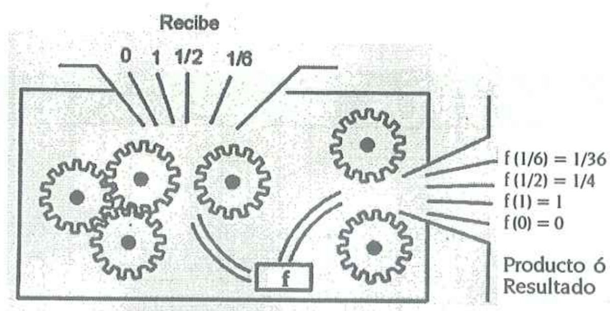
$$\mathbf{V(x) = x\,(30 - 2x)\,(20 - 2x)}$$



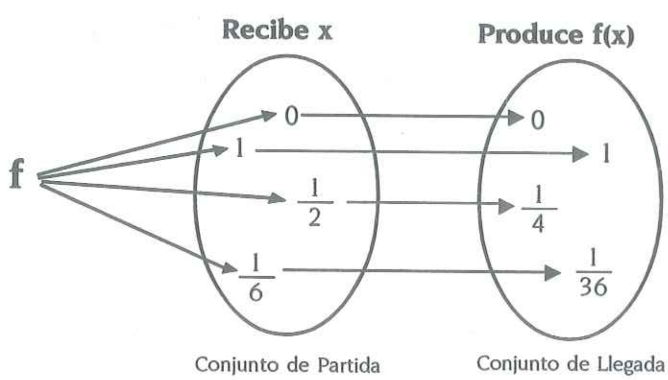
- En esta experiencia hemos expresado la relación **mediante una fórmula**.

EL CONCEPTO DE FUNCIÓN

- Las relaciones que hemos trabajado en las experiencias anteriores tienen una característica común: **A cada valor de la variable independiente le corresponde UNO y SOLO UNO de la variable dependiente**. Una relación de este tipo se llama **FUNCIÓN**.
- Las funciones son como máquinas **f** a las que les introducimos un elemento **x** y nos produce otro elemento **y** que suele designarse por **f (x)** (irecuerdas la representación simbólica de las operaciones unarias: es la misma!). Observemos, por ejemplo, el funcionamiento de la máquina siguiente:

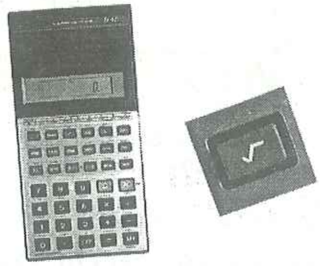


El proceso realizado por la máquina también podemos visualizarlo en el siguiente diagrama sagital o en una tabla de valores:



(x)	f (x)
0	0
1	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{36}$

- Las teclas de las calculadoras tienen incorporadas funciones, mediante fórmulas, en algunas de sus teclas; por ejemplo, la tecla de la **raíz cuadrada** $\boxed{\sqrt{\ }}$ define la función $\mathbf{y = \sqrt{x}}$.



- Si tecleamos 36 y pulsamos $\boxed{\sqrt{\ }}$, aparece en pantalla 6. Decimos que 36 es una **entrada válida** para la función $y = \sqrt{x}$ y que 6 es una **salida válida** para esta función. También se dice que 6 es la **imagen** de 36 en la función $y = \sqrt{x}$.

El conjunto de entradas válidas se llama **dominio** de la función.

- Si tecleamos – 9 y pulsamos $\boxed{\sqrt{\ }}$, aparece en pantalla E (ERROR). – 9 no es una entrada válida para la función $y = \sqrt{x}$.

  $y = -6$ no es una salida válida para la función $y = \sqrt{x}$, pues no existe ningún valor de entrada que luego de pulsar la tecla nos devuelva en pantalla a – 6.

El conjunto de salidas válidas se llama **rango** de la función.

APRENDAMOS

- **FUNCIÓN**: es la relación o correspondencia existente entre dos conjuntos, de tal manera que a cada elemento del conjunto de partida le corresponde un **único** elemento del conjunto de llegada, denominado **imagen** o **transformado**.
- **VARIABLE INDEPENDIENTE**: es la que corresponde a los elementos del conjunto de partida.
- **DOMINIO DE LA FUNCIÓN**: es el conjunto de todos los valores que toma la variable independiente.
- **VARIABLE DEPENDIENTE**: es la que corresponde a los elementos del conjunto de llegada.
- **RANGO**: es el conjunto de todos los valores que toma la variable dependiente.
- **GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN**: es la representación en el diagrama cartesiano, mediante puntos, de los pares ordenados obtenidos de un diagrama sagital o de una tabla de valores.

Ejemplo 1:

Don Pedro, el vendedor de frutas, tiene promoción de mangos y colocó un cartel con los precios según las docenas que le compren. Se pide:

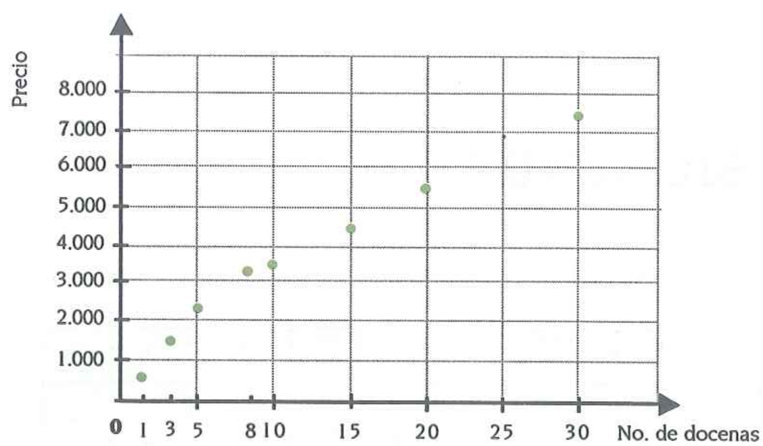
Número de Docenas de Naranjas	Precio
1	600
3	1.500
5	2.300
8	3.200
10	3.500
15	4.500
20	5.600
30	7.500

a) Dibujar la gráfica de la función dada por la tabla.

b) ¿Tiene sentido unir los puntos obtenidos?

Solución

a) En primer lugar, graduamos convenientemente los ejes coordenados. Recordemos que la unidad de medida utilizada para graduar cada eje puede ser diferente. A continuación, dibujamos las parejas ordenadas en el plano cartesiano y, así, obtenemos distintos puntos de la gráfica:



b) No tiene sentido unir los puntos obtenidos, pues en este caso sólo están en venta valores enteros de docenas de naranjas. ¿Tendría sentido vender, por ejemplo, 3,07 docenas de naranjas?

Ejemplo 2:

La fórmula que expresa el área de un cuadrado en función de su lado l es $A = l^2$. Tenemos, pues una función dada por una fórmula. Se pide:

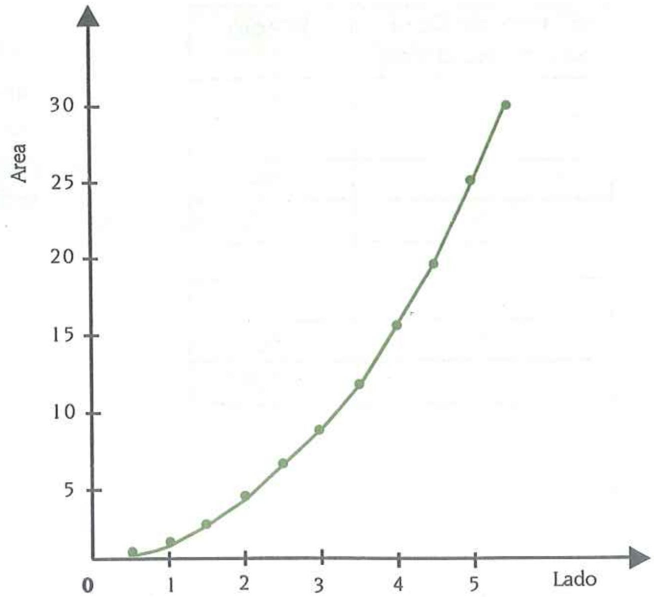
a) Dibujar la gráfica de dicha función.

b) ¿Tiene sentido unir los puntos obtenidos?

Solución

a) Para dibujar la gráfica de esta función, elaboramos una tabla, dando valores al lado y calculando, mediante la fórmula, las áreas correspondientes.

lado: l	Area = l^2
0,5	0,25
1	1
1,5	2,25
2	4
2,5	6,25
3	9
3,5	12,25
4	16
4,5	20,25
5	25
5,5	30,25



b) Si damos valores intermedios al lado, obtendremos valores intermedios del área. Por lo tanto, tiene sentido unir los puntos iniciales de la tabla.

EJERCICIO 4.4

1 Dadas las siguientes tablas, señala cuáles de ellas corresponden a funciones y cuales no.

a)

x	y
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25

b)

x	y
-3	4
-2	4
-1	4
0	4
1	4

c)

x	y
2	6
2	10
3	5
4	2
5	1

d)

x	y
-2	4
-1	5
0	6
-1	7
-2	8

2 Una función f: R→R asocia a cada número real el triple más uno.

a) Escribe su expresión algebraica

b) Calcula f (1) y f ($\frac{3}{5}$)

c) ¿Es posible hallar f (2)?

d) Halla el dominio y el rango de f

3 Una función g asocia a cada número real su mitad menos 3.

a) Escribe su expresión algebraica.

b) Completa la siguiente tabla:

x	-4	-3	-1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	4	5
g(x)											

c) Dibuja la gráfica de g en el diagrama cartesiano. ¿Podemos unir los puntos? ¿Por qué?

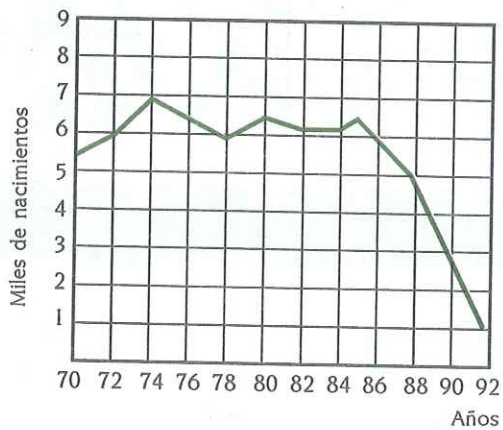
d) ¿Cuáles son el dominio y el rango de g?

4 Una función f de variable real se define de la siguiente manera:
$f(-5) = 26$, $f(-4) = 17$, $f(-3) = 10$, $f(-2) = 5$, $f(-1) = 2$, $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, $f(2) = 5$, $f(3) = 10$. ¿Cuál es la regla (o fórmula) algebraica que define la función f?

5 Expresa verbalmente la regla de cada una de las siguientes funciones:

a) $y = -x$
b) $y = 4x - 3$
c) $y = 5x^2$
d) $y = x^2 - 3x + 2$
e) $y = 2x^3 - 4$
f) $y = x(x - 2)$

6 La gráfica muestra la evolución del número de miles de niños que nacieron en una ciudad entre los años 1970 y 1992.



a) ¿Cuáles son las variables relacionadas?
b) ¿Cuál es la unidad de medida usada para cada variable?
c) ¿En qué año nacieron más niños?
d) ¿En qué período permanece constante el número de nacimientos?
e) ¿Entre 1987 y 1990 ha aumentado o disminuido la natalidad?

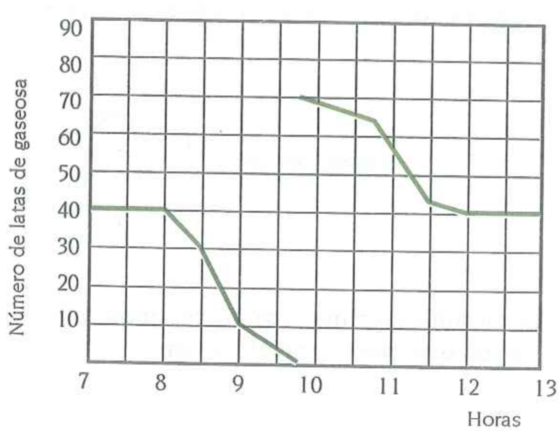
7 Santiago compró un carro por 10.000 dólares y sabe que este carro se deprecia a un ritmo del 20% anual con relación al precio inicial. Se pide:

a) Elaborar una tabla que exprese el precio del carro durante los 10 primeros años.
b) Dibujar esta situación en un diagrama cartesiano.
c) Hallar una fórmula que permita hallar el precio del carro en función de los años transcurridos.

8 La tarifa que permite obtener el precio de una carrera de taxi es de 1 dólar por banderazo (lo recorrido durante los primeros 500 metros) y $\frac{1}{4}$ de dólar por la distancia recorrida (en metros), a partir de esos 500 metros. Se pide:

a) Formar una tabla de valores de la función "distancia recorrida - precio".
b) Representar gráficamente los resultados obtenidos en la tabla anterior.
c) Encontrar una fórmula que permita hallar el precio de una carrera, cuando se conoce el número de cientos de metros recorridos. ¿Puedes unir los puntos que resultan? Explica.

9 En un colegio la jornada de estudios es de 7:00 a.m. a 1:00 p.m. El administrador de la cafetería escolar instaló un dispensador de gaseosas y un día realizó un estudio para saber cuántas latas había en el dispensador a lo largo de la jornada escolar. El estudio quedó representado en la siguiente gráfica. Contesta:

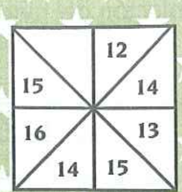


a) ¿Cuántas latas había en la máquina a las 7:00 a.m.?
b) ¿En qué períodos no se consumió ninguna lata?
c) ¿Cuántas latas se consumieron entre las 8:30 y las 9:00?
d) ¿A qué horas se llenó el dispensador?
e) ¿En cuál de los dos descansos hubo más consumo de gaseosa?

10 El mayordomo de una finca tiene 60 metros de malla para hacer un corral de gallinas de forma rectangular. Si la base del rectángulo mide x metros, escribe una ecuación, en función de x, para calcular el área del corral.

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 2

¿Cuál número debemos colocar en el triángulo vacío?



4.5 LA FUNCIÓN LINEAL

4.5.1 Repaso de la Proporcionalidad Directa

En el curso anterior estudiamos las **magnitudes directamente proporcionales**. Si recuerdas, este tipo de magnitudes dan lugar a una clase especial de funciones: **las funciones lineales**. Vamos a revisarlas.

EXPERIENCIA DE REPASO

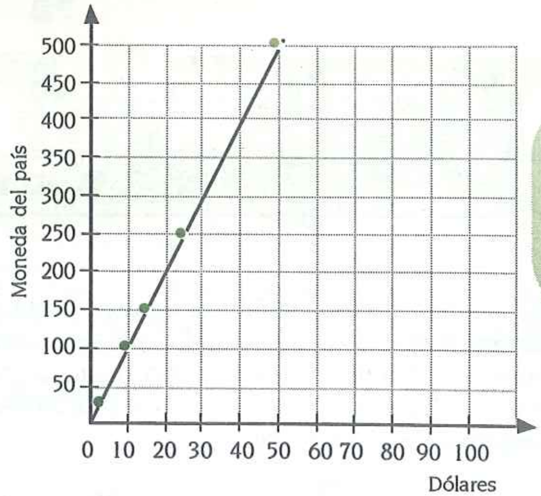
- En un cierto país, un dólar se cambia por 10 unidades de la moneda del país. ¿Cuánto costarán 50 dólares, 70 dólares, 90 dólares?
- Para responder estas preguntas podemos utilizar la siguiente tabla de valores:

DOLARES	1	10	15	25	50	70	80	90
MONEDA DEL PAÍS	10	100	150	250	500	700	800	900

- Fíjate bien que para pasar de DÓLARES a la MONEDA DEL PAÍS debemos multiplicar por 10; además, **a mayor cantidad de dólares, mayor número de unidades de la moneda del país tendremos que entregar**.

Las magnitudes **dólares** y **moneda del país** son directamente proporcionales.

- Si representamos los valores de la tabla como puntos de un diagrama sagital, veremos que los puntos se encuentran **alineados** y la **gráfica es una recta que pasa por el origen**.



Si llamamos **x** al número de dólares e **y** a la cantidad equivalente en moneda del país, entonces la fórmula **y = 10x** es la ecuación asociada a esta proporcionalidad.

RECORDEMOS

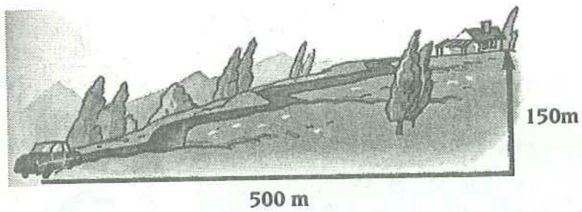
- Si dos magnitudes **x** e **y** son **directamente proporcionales**, la gráfica que expresa esta situación es una **línea recta que pasa por el origen**.
- La fórmula o ecuación que expresa la relación entre dos magnitudes directamente proporcionales **x** e **y** es **y = mx**. En esta ecuación **m** es la constante de proporcionalidad y se denomina **pendiente** de la recta.
- Las funciones que vienen dadas por una ecuación de la forma **y = mx** se llaman **FUNCIONES LINEALES**.

4.5.2. Pendiente

En la sección anterior mencionamos la palabra PENDIENTE y la vinculamos con la función lineal. Vamos a comprender el significado de este concepto.

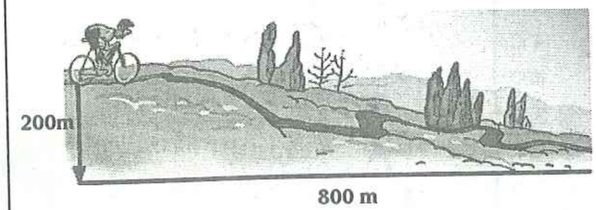
EXPERIENCIA

- Observa el trazado de estas dos carreteras:



Esta carretera es **ascendente** o **creciente** ya que a medida que se avanza horizontalmente, se produce un aumento vertical. Esta carretera tiene una **pendiente positiva** y se calcula así:

$$m = \frac{150}{500} = \frac{3}{10} = 0{,}3$$

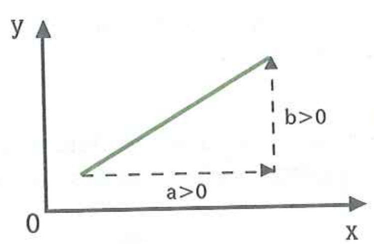


En cambio, esta carretera es **descendente** o **decreciente** ya que a medida que se avanza horizontalmente se produce una disminución vertical. Esta carretera tiene una **pendiente negativa** y se calcula así:

$$m = -\frac{200}{800} = -\frac{1}{4} = -0{,}25$$

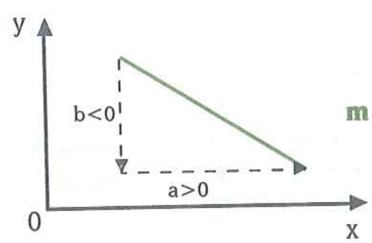
- Las líneas rectas podemos considerarlas como especies de carreteras ascendentes o descendentes. Observa:

Recta Creciente, Pendiente Positiva



$$m = \frac{b}{a}$$

Recta Decreciente, Pendiente Negativa



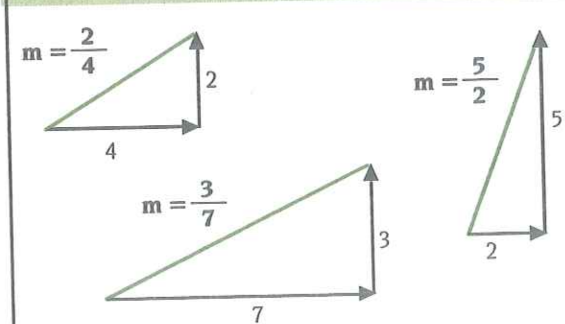
$$m = \frac{b}{a}$$

- La pendiente de una recta es, pues, la razón entre la variación vertical (b) y la variación horizontal (a), es decir:

$$m = \frac{b}{a}$$

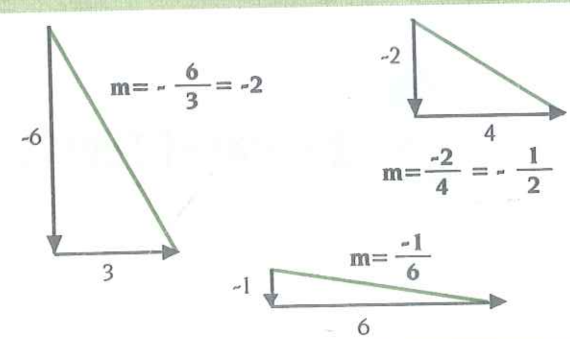
- Acá tenemos otros ejemplos de pendientes:

Pendientes Positivas



Líneas Rectas Crecientes

Pendientes Negativas



Líneas Rectas Decrecientes

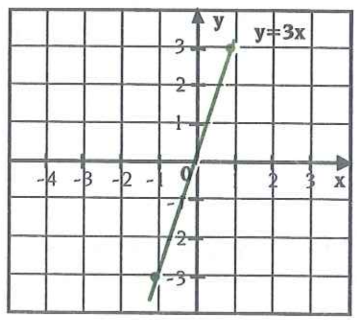
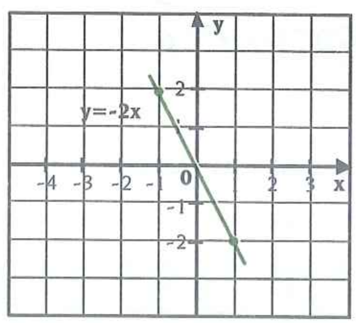
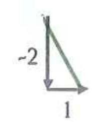
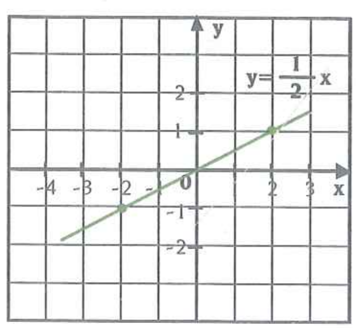
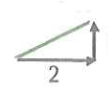
APRENDAMOS

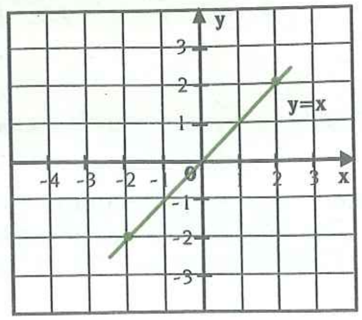
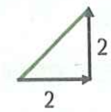
- La **PENDIENTE (m)** de una recta es la razón entre la variación vertical **(b)** y la variación horizontal **(a)**; es decir, $\mathbf{m = \frac{b}{a}}$
- Si la línea recta es **creciente**, entonces la **pendiente** de la recta es **positiva**.
- Si la línea recta es **decreciente**, entonces la **pendiente** de la recta es **negativa**.

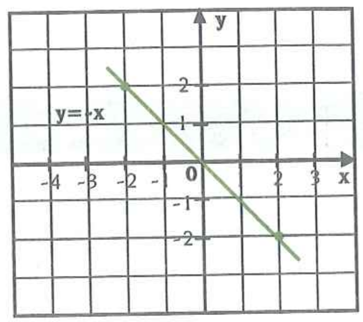
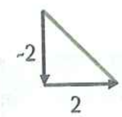
Ejemplo:

Recordemos que la geometría nos dice que para dibujar una línea recta sólo necesitamos dos puntos: **"por dos puntos pasa una y sólo una recta"**.

El siguiente cuadro nos muestra varias funciones lineales de la forma y = mx, una tabla de valores para cada una, su gráfica y su pendiente.

Ecuación	Tabla	Gráfica	Pendiente
$y = 3x$	<table><tr><th>x</th><th>y</th></tr><tr><td>-1</td><td>-3</td></tr><tr><td>1</td><td>3</td></tr></table>		$m= \frac{3}{1} =3$
$y = -2x$	<table><tr><th>x</th><th>y</th></tr><tr><td>-1</td><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>-2</td></tr></table>		 $m= \frac{-2}{1} =-2$
$y = \frac{1}{2} x$	<table><tr><th>x</th><th>y</th></tr><tr><td>-2</td><td>-1</td></tr><tr><td>2</td><td>1</td></tr></table>		 $m= \frac{1}{2}$

<table>
<tr><th>Ecuación</th><th>Tabla</th><th>Gráfica</th><th>Pendiente</th></tr>
<tr><td>y = x</td><td><table><tr><th>x</th><th>y</th></tr><tr><td>-2</td><td>-2</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td></tr></table></td><td>
</td><td>

$m= \frac{2}{2} =1$</td></tr>
<tr><td>y = – x</td><td><table><tr><th>x</th><th>y</th></tr><tr><td>-2</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>-2</td></tr></table></td><td>
</td><td>

$m= \frac{-2}{2} =-1$</td></tr>
</table>

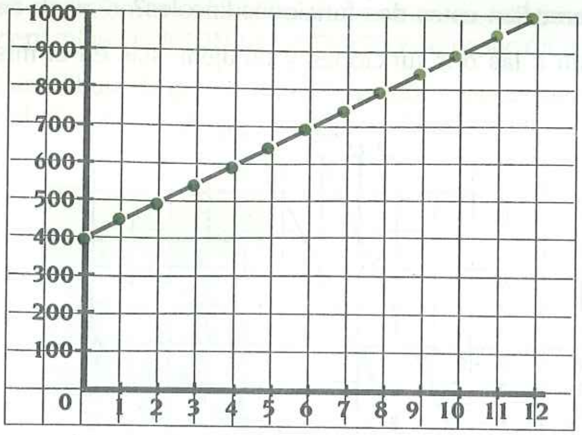
4.5.3. Funciones de Ecuación: y= mx+n

EXPERIENCIA

- La tarifa de los taxis en una ciudad es de $400 el banderazo y $50 por cada hm recorrido.
- Completa la siguiente tabla de valores:

Nº de hm	0	1	3	7	8	10	12
Costo en $	400			750		900	

- Si llamas **x** el número de hm recorridos e **y** el costo en pesos, comprueba que la ecuación que relaciona estas dos variables es **y = 400 + 50x**. Contesta:
  - ¿Qué representa el número 400 en esta ecuación?
  - ¿Qué representa el número 50 en esta ecuación?
- A continuación, representa los valores de la tabla en el diagrama cartesiano y contesta:



- ¿Qué clase de figura es la gráfica de esta función?
- ¿Pasa esta recta por el origen?
- ¿Tiene pendiente esta recta? ¿Cuánto vale?

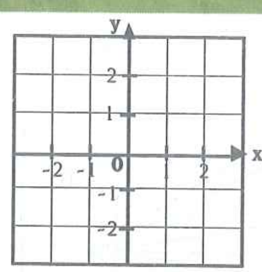
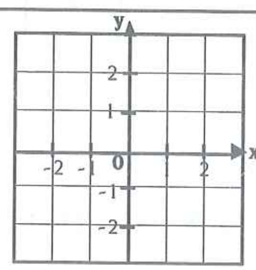
APRENDAMOS

- Las funciones cuyas ecuaciones tienen la forma **$y = mx + n$, ($n \neq 0$)** tienen por gráfica una **LÍNEA RECTA** que no pasa por el origen.
- En esta ecuación, **m** es la **pendiente** de la recta.
- El número **n** es el valor de la ordenada cuando $x = 0$ y por eso se llama **ordenada en el origen**.

4.5.4 Rectas Paralelas

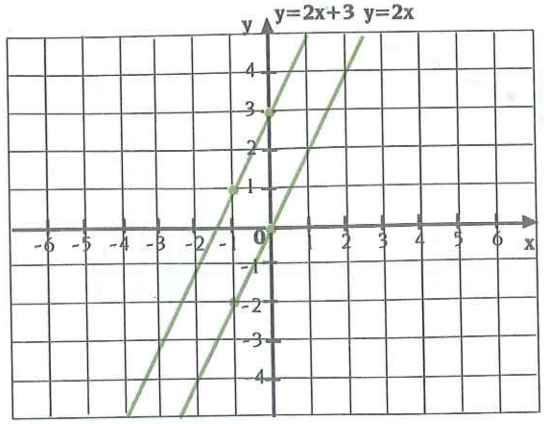
EXPERIENCIA

- Completa el siguiente cuadro donde aparecen las funciones lineales **$y = 2x$** y **$y = 2x + 3$**:

Ecuación	Tabla	Gráfica	Pendiente	Ordenada en el origen
a) y=2x	x | y -1 | 0 |		m=	n=
b) y=2x+3	x | y -1 | 0 |		m=	n=

- Contesta: ¿En qué se parecen y en qué se diferencian estas dos funciones lineales?
- Ahora elaboremos una tabla de valores común a las dos funciones y dibujémoslas en el mismo diagrama cartesiano:

	y=2x	y=2x+3
x	y	y
-1	-2	1
0	0	3



- Contesta:
  - ¿Cómo son las pendientes de las rectas $y = 2x$ e $y = 2x + 3$?
  - ¿Qué relación existe entre estas dos rectas? ¿Cómo son entre sí?

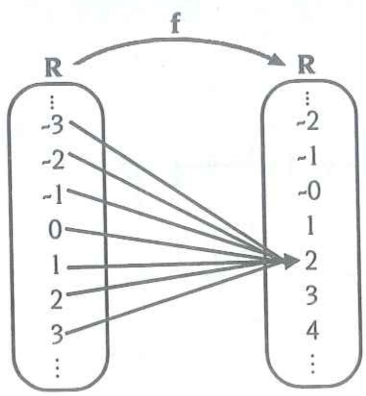
APRENDAMOS

Dos líneas rectas que tienen la misma pendiente son **PARALELAS**.

4.5.5 La Función Constante

EXPERIENCIA

- Fíjate bien en el diagrama sagital siguiente, correspondiente a una función f definida en el conjunto de los números reales.



- Esta función presenta una característica curiosa: **todos los elementos del conjunto de partida tienen la misma imagen: 2**. Observemos:

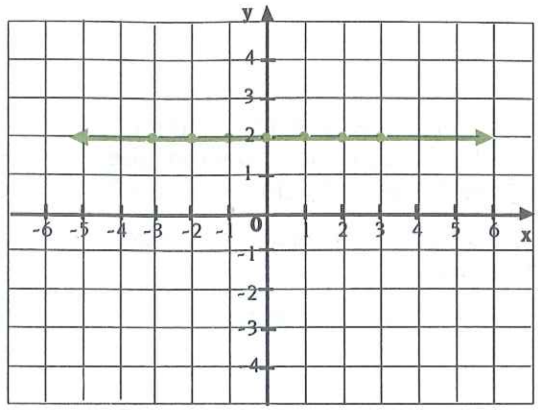
$f(-3) = 2$; $f(-2) = 2$; $f(-1) = 2$

$f(0) = 2$; $f(1) = 2$; $f(2) = 2$

es decir, en esta función el conjunto de imágenes es UNICO, es CONSTANTE. Por esta razón, se denomina FUNCION CONSTANTE y su ecuación es $\mathbf{y = f\ (x) = 2}$.

- Para dibujar la gráfica de esta función, construyamos una tabla de valores aprovechando los valores del diagrama sagital y, luego, los ubicamos en un diagrama cartesiano:

x	y
-3	2
-2	2
-1	2
0	2
1	2
2	2
3	2



- Contesta:
  - ¿Qué es la gráfica de una función constante?
  - ¿Cuál es la pendiente de estas rectas? ¿Y cuál es la ordenada en el origen?

APRENDAMOS

- La FUNCION CONSTANTE es aquella en la cual todos los elementos del conjunto de partida tienen por imagen un UNICO elemento del conjunto de llegada.
- La regla o ecuación de una función constante es $y = f\ (x) = k$, donde k es un número real fijo (constante).
- La gráfica de una función constante es una línea recta PARALELA al eje x. Su pendiente es $m = 0$ y la ordenada en el origen es $n = k$.

EJERCICIO 4.5

1 Dibuja las gráficas de las siguientes funciones lineales.

a) $y = f\ (x) = 3x$ b) $y = f\ (x) = 2x - 3$ c) $y = f\ (x) = -2x + 1$

d) $y = f\ (x) = \frac{1}{2}x - 1$ e) $y = f\ (x) = -3x - 2$ f) $y = f\ (x) = 4$

g) $y = f\ (x) = -3$ h) $y = f\ (x) = 4x - 5$ i) $y = f\ (x) = \pi$

2 Halla la ecuación de las siguientes rectas:

a) Pasa por el origen y tiene pendiente 3.

b) Pasa por el origen y tiene pendiente $-\frac{1}{2}$.

c) Tiene pendiente $\frac{2}{3}$ y su ordenada en el origen es -2.

d) Tiene pendiente -5 y su ordenada en el origen es 4.

e) Es paralela al eje x y su ordenada en el origen es -3.

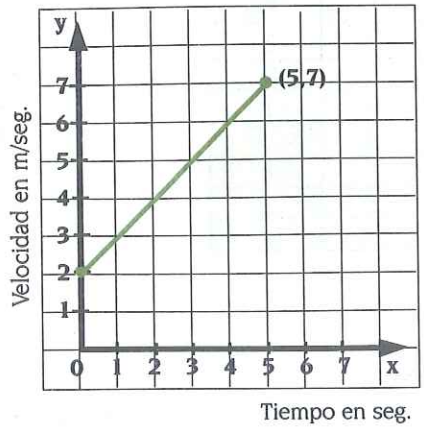
3 Halla la ecuación de una recta cuya ordenada en el origen es -2 y es paralela a la recta de ecuación $y = 3x + 1$.

4 Un carro avanza por una carretera de tal manera que cuando recorre 2 km horizontalmente, desciende 1 verticalmente. ¿Cuál es la pendiente de esta carretera?

5 La siguiente gráfica representa el movimiento de una motocicleta de prueba. Contesta:

- Si **y** es la velocidad y **x** es el tiempo transcurrido, ¿cuál es la ecuación que describe la velocidad en función del tiempo?
- ¿Qué representa la ordenada en el origen en esta ecuación?
- ¿Qué velocidad lleva la moto al cabo de 9 segundos?

316 7379372



6 A nivel del mar el agua hierve a 100°C. A esa temperatura se le llama **punto de ebullición**. Cuando se asciende a una montaña, el punto de ebullición cambia, en función de la altura, de acuerdo con la fórmula $\mathbf{t = 100 - 0{,}001\ h}$, donde **t** es la temperatura del punto de ebullición en grados centígrados y **h** es la altura alcanzada.

a) ¿Cuál es el punto de ebullición a 2.500 metros de altura?

b) ¿Cuál es el punto de ebullición en la cima del monte Everest? (h = 8.848 m)

c) Dibuja la gráfica de esta función.

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 3

De acuerdo con el siguiente gráfico:

SALARIO DE UN OBRERO EN UNA FÁBRICA DE PAPEL

1. El salario que alcanza el obrero en $5\frac{1}{4}$ horas es:

a) $ 11.000 b) $ 10.000
c) $ 12.000 d) $ 10.500

2. Sabiendo que el obrero trabaja de lunes a viernes, ¿cuál es el salario semanal alcanzado por éste si los días impares trabaja $6\frac{1}{4}$ horas y los días pares trabaja 8 horas diarias?

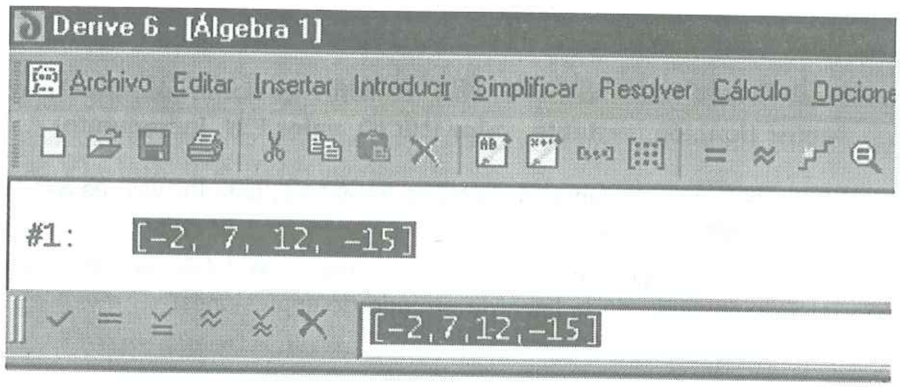
a) $ 69.500 b) $ 37.500
c) $ 32.000 d) $ 28.500

4.6 GRÁFICAS CON DERIVE

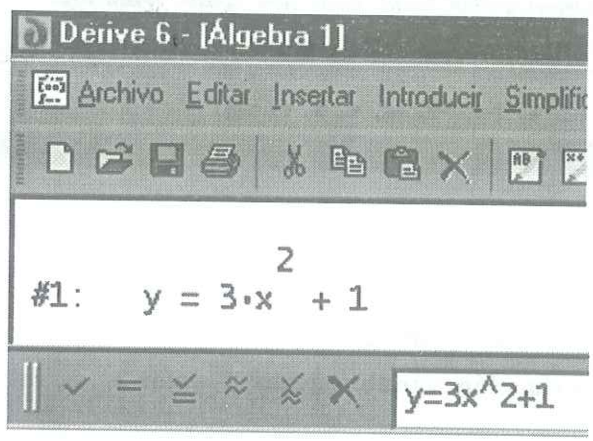
DERIVE es un programa bastante bueno para elaborar tablas de valores y dibujar gráficas de relaciones y funciones. Veamos porqué.

4.6.1 Ingreso de Funciones y Elaboración de Tablas de Valores

- Para ingresar un conjunto de valores como **[-2, 7, 12, 15]**, lo escribimos tal cual y presionamos **ENTER**. De inmediato aparecerá:



- Para ingresar una función como $y=3x^2+1$, basta escribirla con el teclado en la **LÍNEA DE ENTRADA DE EXPRESIONES,** presionamos **ENTER** y de inmediato aparecerá:

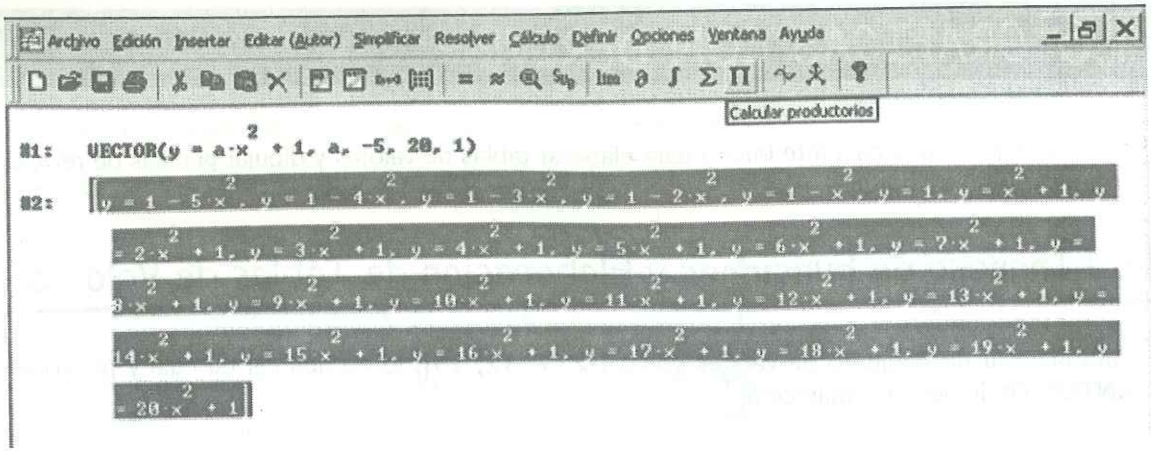


- Para obtener la familia de curvas de la forma $y=ax^2+1$, para los valores $-5 \leq a \leq 20$ y $a \in Z$, debemos emplear el comando **VECTOR:**
  - En la linea de entrada de expresiones escribimos:

    vector (y=ax²+1, a, -5, 20, 1)

  - Luego, oprimimos sucesivamente las teclas **ctrl** y **ENTER** y aparecerá la familia que estamos buscando, en forma de vector así:

$$[\ y=-5x^2+1,\ y=4x^2+1,\ y=-3x^2+1,\ y=-2x^2+1,\ldots,\ y=-20x^2+1]$$



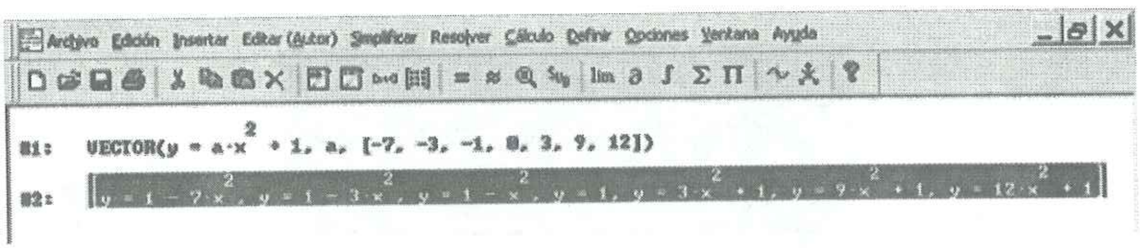
- En este caso, hemos empleado el comando **vector**; así:

vector (función, variable, valor INICIO, valor FIN, incremento)

- Si queremos obtener la familia de curvas de la forma $y=ax^2+1$, para los valores $a=-7, -3, -1, 0, 3, 9, 12$, hacemos lo siguiente:
  - Como los valores de **a** no siguen ninguna secuencia, entonces debemos utilizar una variación del comando vector, ingresando en la línea de entrada de expresiones:

    vector (y = a * x ^2 + 1, a, [-7, -3, -1, 0, 3, 9, 12])

  - Obtendremos el resultado deseado presionando las teclas Ctrl y ENTER.



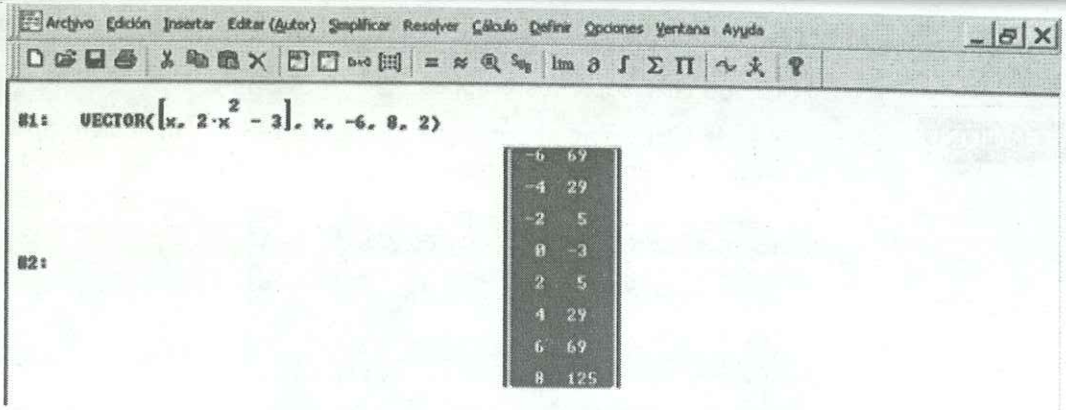
- En este caso, hemos utilizado la versión:

vector (función, variable, [valor 1, valor 2, ... , valor n])

- El comando vector también nos permite crear TABLAS DE VALORES. Si, por ejemplo, queremos una tabla de valores de la función $y=2x^2-3$, para valores de **x** entre –6 y 8 y de 2 en 2, escribimos lo siguiente:

vector ([x, 2 * x ^ 2 - 3], x, -6, 8, 2)

luego oprimimos Ctrl y ENTER y aparecerá en pantalla:



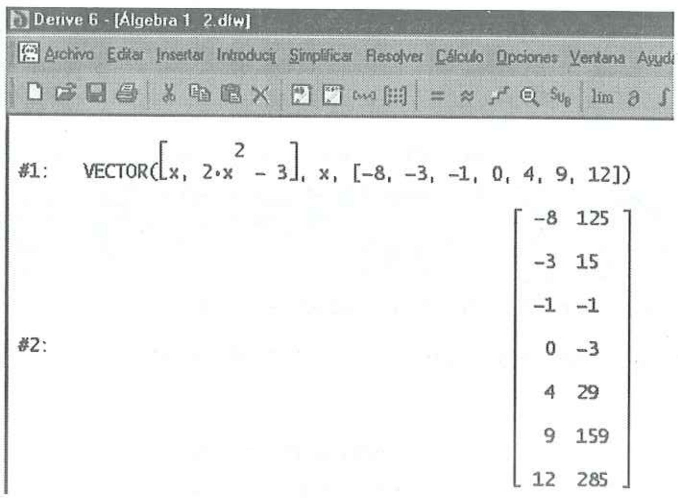
- El diseño general para producir tablas de valores es el siguiente:

vector ([variable, función], variable, valor INICIAL, valor FINAL, incremento)

- Si ahora queremos elaborar una tabla de valores para la misma función del punto anterior, pero con los valores: -8, -3, -1, 0 , 0, 4, 9, 12, ingresamos:

vector ([x, 2x^2, -3], x, [-8, -3, -1, 0, 4, 9, 12])

y luego oprimimos las teclas **ctrl** y **ENTER.**

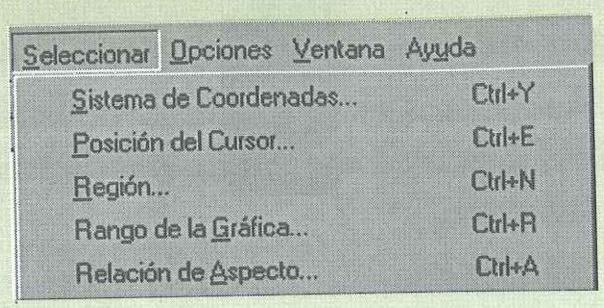


4.6.2 Dibujo de gráficas con DERIVE

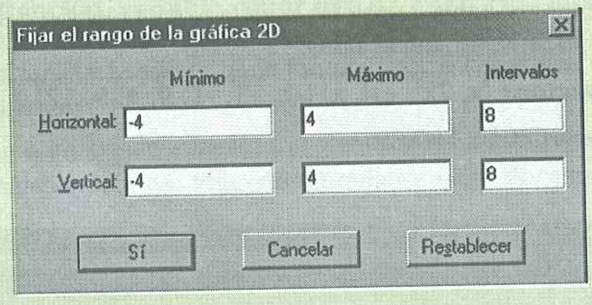
- Para dibujar la gráfica de **y=f(x)** o simplemente f(x), la ingresamos en la ventana de álgebra y la resaltamos.
- Abrimos la ventana 2D - plot haciendo click sobre el botón ubicado en la BARRA DE HERRAMIENTAS. De inmediato aparecerá una ventana de gráficas en dos dimensiones (plano cartesiano), en la cual la barra de herramientas ha cambiado.
- Hacemos de nuevo click sobre el botón , que ahora tiene una posición diferente y aparecerá la gráfica deseada.

- Es posible AMPLIAR o REDUCIR la o gráfica obtenida de dos maneras:

1. Haciendo click sobre los botones o .
2. Haciendo click sobre el comando SELECCIONAR. De inmediato aparecerá el siguiente menú de opciones:



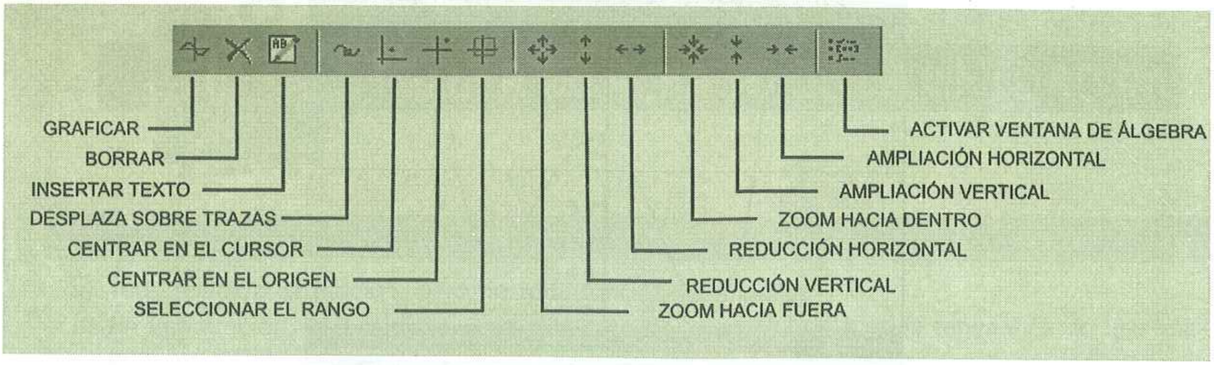
Hacemos click sobre el comando RANGO DE LA GRÁFICA y aparecerá el siguiente cuadro:



Los valores -4, 4 y 8 (horizontal y vertical) corresponden a la graduación automática de ejes que hace DERIVE. Si queremos modificar la graduación de los ejes y el número de intervalos, hacemos lo siguiente:

1. Llevamos el puntero del mouse hasta el extremo superior izquierdo del cuadro, borramos el número -4 con la tecla Supr, escribimos el nuevo valor mínimo y hacemos click.
2. Los demás valores se borran y se ingresan de la misma forma

- Otra forma de ingresar los datos es oprimiendo la tecla , anotando al mínimo y oprimiendo sucesivamente esta tecla hasta tener toda la información. Finalmente llevamos el puntero del mouse hasta el cuadro Sí y hacemos click. De inmediato aparecerá la gráfica solicitada.
- Para BORRAR la gráfica obtenida hacemos click sobre el botón , ubicado en la BARRA DE HERRAMIENTAS.
- Para REGRESAR A LA VENTANA DE ÁLGEBRA hacemos click sobre el último botón de la BARRA DE HERRAMIENTAS:
- Podemos GRAFICAR SIMULTÁNEAMENTE tres o más funciones entrándolas como un vector de funciones.
- Por ejemplo, entrando y graficando la expresión $[2x-3, x^2, 2-5x]$, tendremos simultáneamente las gráficas de $2x-3$, x^2, $2-5x$. (No pueden ser sólo dos funciones porque DERIVE asumirá que se quiere dibujar un tipo de curva llamada CURVA PARAMÉTRICA.)
- Antes de analizar algunos ejemplos veamos para qué sirven cada uno de los botones de la ventana para graficar en dos dimensiones:



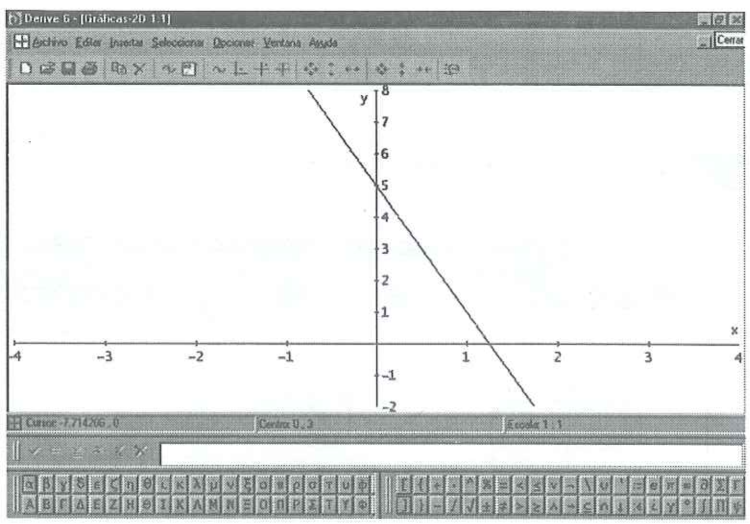
EJEMPLO 1

Dibujemos la gráfica de **y=-4x+5**, incluyendo variaciones a la graduación del eje **y** respecto a las que DERIVE hace automáticamente.

SOLUCIÓN

Hacemos lo siguiente:

1. Ingresamos y=-4x+5 a la ventana de álgebra, la resaltamos y hacemos **click** sobre el comando .
2. Abrimos la ventana para dibujar la gráfica en el plano cartesiano, haciendo **click** sobre el botón . Inmediatamente aparecerá el plano cartesiano.
3. Modificamos la graduación del eje y, dando valores entre -1 y 7 y para 8 divisiones o intervalos.
4. Hacemos de nuevo **click** sobre el comando y obtendremos la gráfica de esta función.

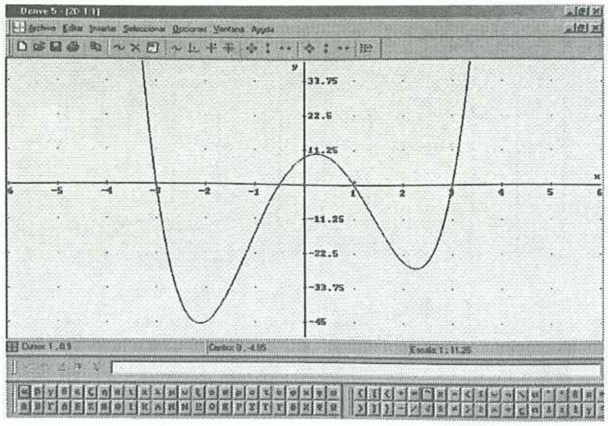


EJEMPLO 2

Dibujemos la gráfica de $y = 2x^4 - x^3 - 19x^2 + 9x + 9$ para valores de x entre –6 y 6 y 12 divisiones, y para valores de y entre –50 y 40 y 8 divisiones.

SOLUCIÓN

Aplicando los mismos pasos del ejemplo 1, obtendremos la siguiente gráfica:



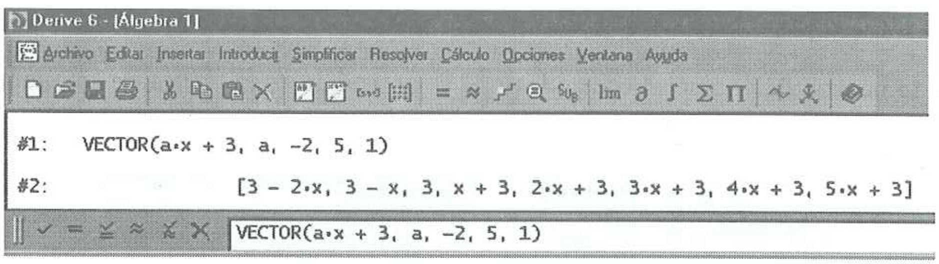
EJEMPLO 3

Dibujemos la gráfica de la familia de funciones definida por y = mx + 3 para m= -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5.

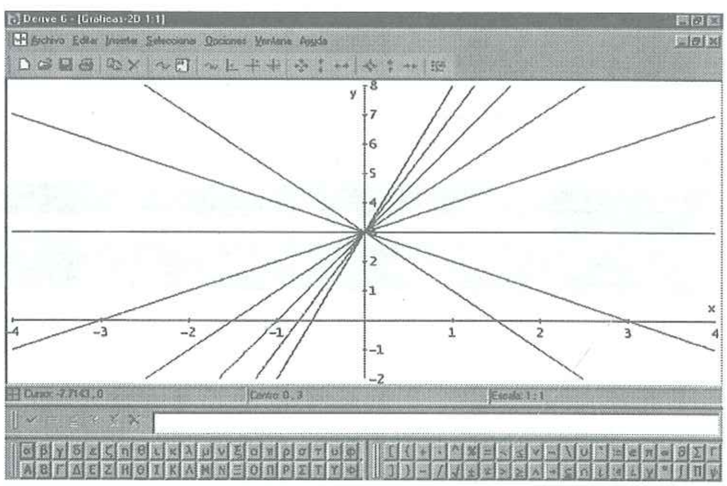
SOLUCIÓN

Ingresamos en DERIVE: **vector (mx+3, m, -2, 5, 1)**, donde **-2** es el primer valor de m, **5** es el último valor de m y **1** indica que los valores de m varían de 1 en 1.

- A continuación hacemos clic sobre el botón . De inmediato, quedan registrados la expresión que se quiere dibujar y el vector con las funciones obtenidas para cada valor de a.



- Luego, vamos a y repetimos el proceso anterior.



- **PREGUNTA:** ¿Cómo varía la gráfica a medida que m cambia de -2 hasta 5? ¿Qué pasa cuando m es negativo? ¿Cuándo m=0? ¿Cuándo m es positivo?

TALLER DE REPASO DE LA UNIDAD 4

1. Contesta FALSO o VERDADERO a cada una de las siguientes proposiciones. Justifica las respuestas.

a) Toda relación es función, pero no toda función es relación.
b) En una función, es posible que un elemento del conjunto de partida tenga más de una imagen.
c) En toda función, el dominio coincide con el conjunto de partida.
d) Es lo mismo $f(x) = x - 2$ que $y = x - 2$
e) En una función, todo elemento del conjunto de partida tiene al menos una imagen.
f) La gráfica de la función cuya ecuación es $y = f(x) = mx$ es una línea recta que pasa por el origen.
g) Las rectas de ecuación $y = -3x + 4$ y $y = -3x + 5$ son paralelas.
h) Las rectas paralelas al eje x pertenecen a un conjunto de funciones llamado FUNCIONES CONSTANTES.
i) Dos rectas paralelas tienen la misma pendiente.
j) La ordenada en el origen de la función lineal $y = f(x) = 4 - 3x$ es $n = -3$.

2. Escribe la ecuación de las funciones reales cuyas reglas son:

a) Sumar 5
b) Multiplicar por 3 y restar 2
c) Elevar al cuadrado y sumar 1
d) Restar 2 y elevar al cuadrado
e) La imagen siempre es -5

3. Lee la regla correspondiente a las funciones cuyas ecuaciones son:

a) $y = \frac{1}{2}x$
b) $f(x) = -7$
c) $y = 5x^2 + 2$
d) $f(x) = (x - 3)^2$
e) $y = x^2 - x + 1$
f) $y = 4 - 3x$

4. Completa las siguientes tablas de valores para las funciones reales cuyas ecuaciones se dan.

a)

$y = 2x^2$	
x	y
-2	
-1	
$-\frac{1}{2}$	
0	
$\frac{1}{2}$	
1	
2	

b)

$y = x^2 - 1$	
x	y
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

c)

$y = 2x + 4$	
x	y
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

d)

$y = -4$	
x	y
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

5. Dibuja en el diagrama cartesiano las gráficas de cada una de las funciones del ejercicio anterior.

6. Dada la función lineal de ecuación $y = f(x) = 5x + 4$:

a) Encuentra los números que faltan: $f(3) = \square$; $f(-5) = \square$; $f(4) = \square$

$f(\ ) = 1$; $f(\ ) = 6$; $f(\ ) = -2$

b) Dibuja la gráfica de la función dada.

7. Dadas las siguientes funciones lineales:

$f(x) = -3x + 2$; $g(x) = 4x - \frac{2}{3}$; $h(x) = \frac{1}{3}x - 2$

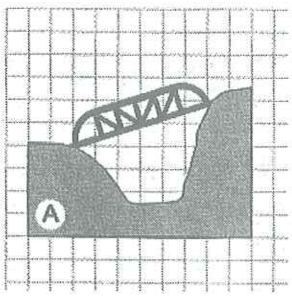
a) Determina la pendiente y la ordenada en el origen de cada una.
b) Elabora una tabla de valores para cada una.
c) Dibuja la gráfica de cada una.

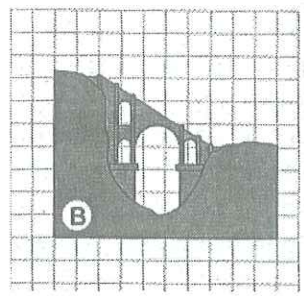
8. Escribe las ecuaciones de tres rectas paralelas a la que tiene por ecuación $y = 3 - 5x$.

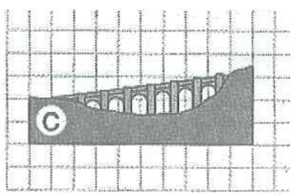
9. Halla la ecuación de las siguientes rectas:

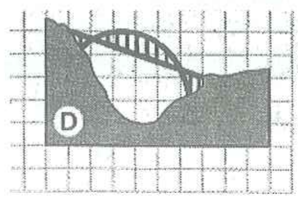
a) Tiene pendiente 4 y ordenada en el origen 2.
b) Tiene pendiente -3 y ordenada en el origen 6.
c) Tiene pendiente -1 y pasa por el origen.

10. Calcula las pendientes de los siguientes viaductos.

a)


b)


c)


d)


11. La cuota fija mensual por una línea telefónica es \$12.000 y cada impulso cuesta \$50.

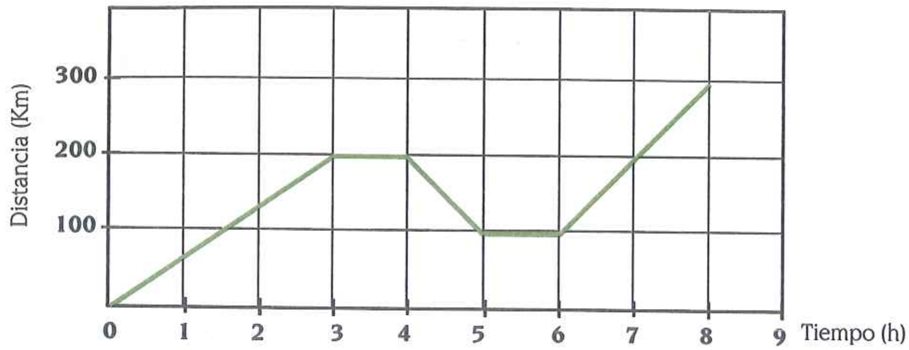
a) Escribe la ecuación correspondiente a esta función.
b) Dibuja su gráfica.

12. Cuando un obrero excava hacia el interior de la tierra la temperatura aumenta de acuerdo con la ecuación $\mathbf{t = 15 + 0{,}01d}$, donde **t** es la temperatura alcanzada en grados centígrados y **d** es la profundidad en metros desde la superficie terrestre:

a) ¿Qué temperatura se alcanza a los 100 m de profundidad?
b) ¿Cuántos metros hay que excavar para alcanzar una temperatura de 100°C?
c) Dibuja la gráfica de esta función.

PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS DEL ICFES

La gráfica describe lo sucedido en una excursión escolar:



1. El viaje duró en total:

   a) 8 horas b) 7 horas c) 9 horas d) 5 horas

2. Durante el viaje, los excursionistas descansaron:

   a) 1 hora b) 2 horas c) 3 horas d) No descansaron

3. El punto de llegada se encuentra del punto de partida a:

   a) 600 km b) 500 km c) 200 km d) 300 km

4. La mayor distancia recorrida por los excursionistas ocurrió entre:

   a) Las 3 primeras horas b) La 3ª y la 5ª hora
   c) La 6ª y la 8ª hora d) La 3ª y la 6ª hora

5. La distancia total recorrida fue:

   a) 500 km b) 300 km c) 200 km d) 400 km

Núcleo Temático

5

PRODUCTOS NOTABLES

LOGRO GENERAL

Identificar los productos notables para obtener los resultados por simple inspección.

DIMENSIONES

LOGROS ESPECÍFICOS	INDICADORES DE LOGRO
Corporal: • Mejorar la habilidad para realizar ciertos productos.	• Participa en actividades de destreza operativa y manejo conceptual.
Comunicativa: • Explicar con sus propias palabras cómo se obtiene: una suma por diferencia; el cuadrado de una suma; el cuadrado de una diferencia; el cuadrado de un polinomio; el cubo de una suma, el cubo de una diferencia, el producto de una suma o diferencia por su trinomio cuadrado imperfecto.	• Describe cómo se encuentra por simple inspección el resultado de: $(a \pm b)^2$; $(a\pm b)^3$; $(a+b)(a-b)$; $(a+b+c)^2$; $(a+b)^2(a - ab + b^2)$; $(a-b)^2(a^2 + ab + b^2)$
Cognitiva: • Reconocer: - Una suma por diferencia de términos iguales. - Un trinomio cuadrado perfecto. - Trinomio cuadrado imperfecto de la suma o diferencia de dos términos.	• Encuentra el resultado de la suma por la diferencia de dos términos iguales. • Transforma un trinomio cuadrado perfecto en un binomio al cuadrado.
Estética: • Elaborar un cuadro sinóptico de los productos notables.	• Diseña una cartelera con productos notables.
Ética - Actitudinal: • Actuar de manera honesta en la presentación de trabajos y evaluaciones.	• Reconoce y acepta sus fortalezas y debilidades en la actividad académica.

EVALUACIÓN

ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS

5.1 HISTORIA DEL ÁLGEBRA (5): EL ALGEBRA EN EUROPA

LEONARDO DE PISA
(El Fibonacci)
(1180 - 1250)

Después de Al-Jwarizmi, surge un grupo de algebristas, primero en Oriente y luego en España cuyas obras pasan al Medioevo a través de las versiones latinas hechas en la Escuela de Traductores de Toledo, fundada por el Arzobispo Don Raimundo, poco después de la conquista de la ciudad por Alfonso VI. Este hecho facilitó el cruzamiento de las culturas oriental y occidental, tan beneficioso para la atrasada Europa que despertó de la pereza en que estaba sumida desde que los bárbaros destruyeran la civilización grecorromana.

La difusión del álgebra en Europa trajo como consecuencia su democratización y la historia nos enseña que mientras más cultivadores tiene una disciplina científica, más ocasiones y motivos hay de inspiración.

La fundación de las universidades, colegios y escuelas y las expediciones de las cruzadas, contribuyeron a crear un clima favorable a la ciencia, que hizo posible los progresos de los siglos XVI y XVII. Durante la Edad Media -insuficientemente estudiada aún desde el punto de vista matemático- surgen algebristas tan notables como Leonardo Fibonacci -que trajo a Italia el álgebra de los árabes-, Jordano Namorario, Juan de Sacroborco y Nicolás Chuquet, que fue el que utilizó el signo radical con índices.

EJERCICIO 5.1

Comprensión de Lectura. Explicación: Lee nuevamente el texto anterior y luego encierra, en un círculo, la letra que corresponda a la respuesta correcta:

1. De acuerdo con lo afirmado por el autor:

   a. Al-Jwarismi sentó las bases para el trabajo científico en el Medioevo.
   b. La democratización del álgebra en Europa se debió a su difusión.
   c. La inspiración nace del auge del álgebra.
   d. El Medioevo matemático ha sido ámpliamente estudiado.

2. Por su estructura, el texto es de carácter:

   a. Argumentativo.
   b. Descriptivo.
   c. Narrativo.
   d. Expositivo.

3. Etimológicamente, el término **bárbaros** que se menciona en el texto significa:

   a. Hombres crueles, incultos, groseros.
   b. Pueblos ajenos a las culturas griega y romana.

c. Seres míticos de fuerza superior.
d. Tribus sedentarias que azotaron a Europa en el siglo V.

4. El tema central más exacto del fragmento es:

   a. La producción científica en la escuela de Toledo.
   b. Europa despierta de su letargo intelectual.
   c. El progreso de la Ciencia matemática por el cruce de las culturas oriental y occidental.
   d. La destrucción del Imperio Romano por los bárbaros.

5. La mezcla de las culturas oriental y occidental se dio, principalmente por:

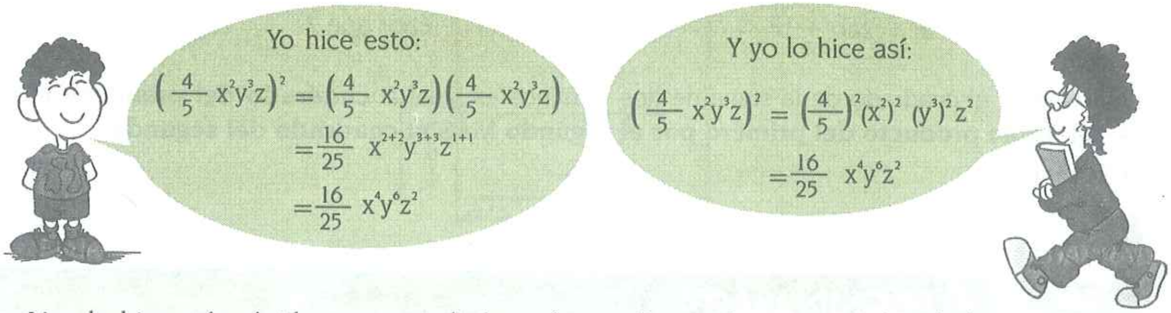
   a. La fundación de la escuela de traductores de Toledo.
   b. La acción científica del Arzobispo don Raimundo.
   c. La conquista de la ciudad de Toledo por Alfonso VI.
   d. El trabajo lingüístico en la escuela de Toledo y su difusión por Europa durante la Edad Media.

5.2 POTENCIA DE UN POLINOMIO

En matemáticas, reciben el nombre de NOTABLES ciertos PRODUCTOS cuyo desarrollo podemos obtener por SIMPLE INSPECCIÓN; es decir, sin necesidad de realizar operaciones previas. Llegaremos a los productos notables por medio de la potenciación de los polinomios.

EXPERIENCIA EXPLORATORIA

- Para hallar el cuadrado de $\frac{4}{5}x^2y^3z$, Juan y Lina hicieron lo siguiente:



Lina lo hizo más rápido porque aplicó, en forma directa, las propiedades de la potenciación; en cambio, Juan aplicó primero la definición de potenciación de un monomio, cuando el exponente es un número natural, y luego las propiedades de la potenciación.

- Si en lugar de hallar el cuadrado de un monomio, Lina y Juan desean hallar el cuadrado de un binomio, como $3x - 2y$, o de un polinomio, como $4a^2 - 3b + c$, ¿ qué tendrían que hacer ?

  En primer lugar, se preguntaron: **"¿ cómo se escribe el cuadrado de $3x - 2y$? ¿ Y el cuadrado de $4a^2 - 3b + c$?".** La respuesta fue inmediata:

  "EL CUADRADO DE $3x - 2y$ se escribe $(3x - 2y)^2$ "
  "EL CUADRADO DE $4a^2 - 3b + c$ se escribe $(4a^2 - 3b + c)^2$ "

A continuación, para calcular $(3x - 2y)^2$ y $(4a^2 - 3b + c)^2$ ambos aplicaron la definición de potenciación con exponente un número natural; así:

$(3x - 2y)^2 = (3x - 2y) \cdot (3x - 2y)$ .... Definición de potenciación con exponente un número natural

$\therefore \ (3x - 2y)^2 = (3x)^2 - (3x)(2y) - (2y)(3x) + (2y)^2$ .... Propiedad distributiva

$\therefore \ (3x - 2y)^2 = (3x)^2 - 2(3x)(2y) + (2y)^2$ .... ¿por qué ?

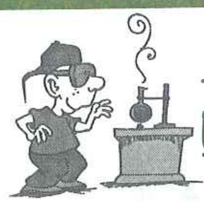
$(4a^2 - 3b + c)^2 = (4a^2 - 3b + c) \cdot (4a^2 - 3b + c)$ ...... ¿por qué ?

$\therefore \ (4a^2 - 3b + c)^2 = (4a^2)^2 - (4a^2)(3b) + (4a^2)(c) - (3b)(4a^2) + (3b)^2 - (3b)(c) + (c)(4a^2) - (c)(3b) + (c)^2$

$\therefore \ (4a^2 - 3b + c)^2 = (4a^2)^2 + (3b)^2 + (c)^2 - 2(4a^2)(3b) + 2(4a^2)(c) - 2(3b)(c)$

- ¿ Existe alguna relación entre los términos del binomio $(3x - 2y)$ y el resultado final del desarrollo de su cuadrado ? ¿ Y entre los términos del polinomio $(4a^2 - 3b + c)$ y el desarrollo de su cuadrado? La respuesta es SÍ, y el objetivo de esta unidad es descubrir esa relación.
- A continuación estudiaremos los productos notables.

5.3 CUADRADO DE LA SUMA DE DOS TÉRMINOS



EXPERIENCIA

- Hallemos el cuadrado de a + b:

$\therefore \ (a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b)$ .... ¿por qué ?

$\therefore \ (a + b)^2 = a^2 + ab + ba + b^2$.................... ¿por qué ?

$\therefore \ (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ .... ¿por qué ?

- Como vemos, el cuadrado de la suma de dos términos es igual al **cuadrado del primer término MÁS el doble producto del primero por el segundo MÁS el cuadrado del segundo.**
- Por lo tanto:

APRENDAMOS

CUADRADO DE LA SUMA DE DOS TÉRMINOS

$$(a + b)^2 = \underbrace{a^2}_{\text{CUADRADO DEL PRIMERO}} + \underbrace{2a \cdot b}_{\text{DOBLE PRODUCTO DEL PRIMERO POR EL SEGUNDO}} + \underbrace{b^2}_{\text{CUADRADO DEL SEGUNDO}}$$

El cuadrado de la suma de dos términos es igual al cuadrado del primero MÁS el doble producto del primero por el segundo MÁS el cuadrado del segundo

Ejemplo 1:

Calculemos $(3a + 2b)^2$

Solución

- Identificamos los términos:

Primer término......................................	**$3a$**
Cuadrado del primer término......................	**$9a^2$**
Doble producto de los términos.................	**$2(3a)(2b) = 12ab$**
Segundo término.....................................	**$2b$**
Cuadrado del segundo término...................	**$4b^2$**

- Por lo tanto: $(3a + 2b)^2 = 9a^2 + 12ab + 4b^2$

Ejemplo 2:

Calculemos $(5x^2 + 4y^3)^2$

Solución

$$(5x^2 + 4y^3)^2 = (5x^2)^2 + 2(5x^2)(4y^3) + (4y^3)^2$$
$$\therefore (5x^2 + 4y^3)^2 = 25x^4 + 40x^2y^3 + 16y^6$$

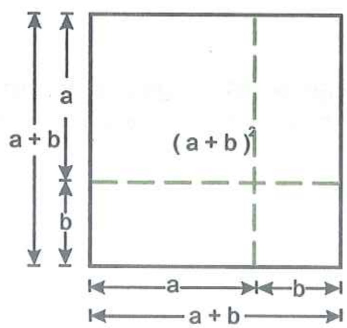
Ejemplo 3:

Calculemos $\left(\frac{2}{3}m^2 + \frac{1}{5}n^3\right)^2$

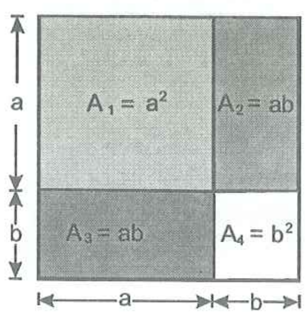
Solución

$$\left(\frac{2}{3}m^2 + \frac{1}{5}n^3\right)^2 = \left(\frac{2}{3}m^2\right)^2 + 2\left(\frac{2}{3}m^2\right)\left(\frac{1}{5}n^3\right) + \left(\frac{1}{5}n^3\right)^2$$
$$\therefore \left(\frac{2}{3}m^2 + \frac{1}{5}n^3\right)^2 = \frac{4}{9}m^4 + \frac{4}{15}m^2n^3 + \frac{1}{25}n^6$$

- Esta es la interpretación geométrica del cuadrado de una suma: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
  * $(a + b)^2$ podemos interpretarlo como el área de un cuadrado de lado $a + b$; así:



  * Y la expresión $a^2 + 2ab + b^2$ podemos interpretarla como la suma de las áreas de los cuadrados A_1 y A_4 y de los rectángulos A_2 y A_3; así:



$$A_1 = a^2$$
$$A_2 = ab$$
$$A_3 = ab$$
$$A_4 = b^2$$
$$\therefore A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = a^2 + ab + ab + b^2$$
$$\therefore \underbrace{A_1 + A_2 + A_3 + A_4}_{\Uparrow} = \underbrace{a^2 + 2ab + b^2}_{\Uparrow}$$
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

5.4 CUADRADO DE LA DIFERENCIA DE DOS TÉRMINOS

EXPERIENCIA

- Hallemos, ahora, el cuadrado de a - b:

$(a-b)^2 = (a-b) \bullet (a-b)$ .... ¿por qué?

$\therefore\ (a-b)^2 = a^2 - ab - ab + b^2$ .... ¿por qué?

$\therefore\ (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ .... ¿por qué?

- Como vemos, el cuadrado de la diferencia de dos números es igual al **cuadrado del primero MENOS el doble producto del primero por el segundo MAS el cuadrado del segundo.**
- Por lo tanto:

APRENDAMOS

CUADRADO DE LA DIFERENCIA DE DOS TÉRMINOS

$$(a-b)^2 = \underbrace{a^2}_{\text{CUADRADO DEL PRIMERO}} - \underbrace{2a \cdot b}_{\text{DOBLE PRODUCTO DEL PRIMERO POR EL SEGUNDO}} + \underbrace{b^2}_{\text{CUADRADO DEL SEGUNDO}}$$

El cuadrado de la diferencia de dos números es igual al cuadrado del primero MENOS el doble producto del primero por el segundo MAS el cuadrado del segundo.

Ejemplo 1:

Calculemos $(2p^2 - 3q^4)^2$

Solución

- En primer lugar, identifiquemos los términos:

Primer término	$2p^2$
Cuadrado del primer término	$4p^4$
Doble producto de los términos	$2(2p^2)(3q^4) = 12p^2q^4$
Segundo término	$3q^4$
Cuadrado del segundo término	$9q^8$

- Por lo tanto: $(2p^2 - 3q^4)^2 = 4p^4 - 12p^2q^4 + 9q^8$

Ejemplo 2:

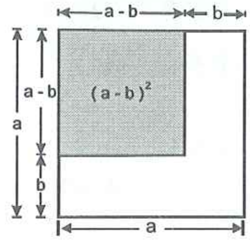
Calculemos $\left(\frac{4}{5}x^2y - 5y^2\right)^2$

Solución

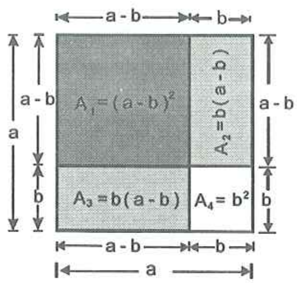
$$\left(\frac{4}{5}x^2y - 5y^2\right)^2 = \left(\frac{4}{5}x^2y\right)^2 - 2\left(\frac{4}{5}x^2y\right)^2\left(5y^2\right) + \left(5y^2\right)^2$$

$$\therefore \left(\frac{4}{5}x^2y - 5y^2\right)^2 = \frac{16}{25}x^4y^2 - 8x^2y^3 + 25y^4$$

- Esta es la interpretación geométrica del cuadrado de una diferencia:
  - * $(a - b)^2$ corresponde al área de un cuadrado de lado $a - b$; así:



- * Y esta es la interpretación geométrica de la expresión $a^2 - 2ab + b^2$. Consideremos las áreas de los rectángulos A_2 y A_3 y de los cuadrados A_1 y A_4, de la figura siguiente:



$A_1 = (a - b)^2$

$A_2 = b(a - b)$

$A_3 = b(a - b)$

$A_4 = b^2$

El área del cuadrado grande (a^2) es igual a la suma de las áreas de A_1, A_2, A_3 y A_4. Por lo tanto:

$$a^2 = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$

$$\therefore a^2 = (a - b)^2 + b(a - b) + b(a - b) + b^2$$

$$\therefore a^2 = (a - b)^2 + ab \cancel{- b^2} + ab - b^2 \cancel{+ b^2}$$

$$\therefore (a - b)^2 = a^2 - ab - ab + b^2$$

$$\therefore (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

¡ATENCIÓN!

1. El desarrollo del cuadrado de un binomio es un trinomio denominado **TRINOMIO CUADRADO PERFECTO.**
2. Con frecuencia se confunden estas dos expresiones:
   * Suma AL cuadrado: $(a + b)^2$
   * Suma DE cuadrados: $a^2 + b^2$
   Estas dos expresiones son DIFERENTES; es decir, $(a + b)^2 \neq a^2 + b^2$
3. También se confunden las expresiones:
   * Diferencia AL cuadrado: $(a - b)^2$
   * Diferencia DE cuadrados: $a^2 - b^2$
   Son igualmente diferentes; es decir, $(a - b)^2 \neq a^2 - b^2$
4. Las dos observaciones anteriores confirman que **la potenciación NO es distributiva con respecto a la suma ni a la resta.**

EJERCICIO 5.2

En los ejercicios 1. a 9. utilizar los productos notables vistos para hallar, por simple inspección, el resultado de:

1. $(a+3)^2$
2. $(5-y)^2$
3. $(2x-1)^2$
4. $\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}x^2\right)^2$
5. $\left(\frac{1}{2}a^3+1\right)^2$
6. $\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{2}a^3\right)^2$
7. $\left(2m^a-3n^b\right)^2$
8. $\left(-x+\frac{5}{2}x^2\right)^2$
9. $\left(-\frac{2}{3}a^2-\frac{1}{4}a^3\right)^2$

En los ejercicios 10. a 15. simplificar cada una de las expresiones dadas. Recordemos que en presencia de las operaciones de suma, resta, multiplicación, división y potenciación, primero se desarrolla la potenciación; luego, la multiplicación y división y, finalmente, la suma y resta.

10. $(x+2)\bullet(2x-1)-(-2x)^2+(x-1)^2$
11. $(x-3)^2+2x\bullet(x+4)-3(x-1)^2+6(x-1)$
12. $\frac{2}{5}x-\left(\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}\right)\bullet\left(-2x+4\right)-\left(x-\frac{3}{5}\right)^2-\left(\frac{1}{10}x-3\right)$
13. $\left(x-\frac{2}{3}\right)^2-2\left(\frac{1}{3}x+2\right)\left(x-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{2}{3}x+3\right)^2-10$
14. $\left[x\bullet(x+3)-2x\bullet(3x+5)+(x-2)^2+x-4(1-x^2)\right]^2-97x^2$
15. $\left[(x+4)^2+(-x)^2-2x\bullet(3x+5)+4\bullet(x^2-4)\right]^2-x(4x+3)$

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 1

$$\frac{\frac{9}{4}\pi-\pi}{\pi-\frac{3}{2}\pi}$$

Corresponde a un número:

a) Entero negativo
b) Racional negativo
c) Irracional positivo
d) Racional positivo

5.5 CUADRADO DE UN POLINOMIO

EXPERIENCIA

- Calculemos el cuadrado del polinomio $3a^2-2b+5$:

$$(3a^2-2b+5)^2=(3a^2-2b+5)\bullet(3a^2-2b+5)$$

$\therefore\ (3a^2 - 2b + 5)^2 = 3a^2(3a^2 - 2b + 5) - 2b(3a^2 - 2b + 5) + 5(3a^2 - 2b + 5)$

$\therefore\ (3a^2 - 2b + 5)^2 = (3a^2)^2 - (3a^2)(2b) + (3a^2)(5) - (2b)(3a^2) + (2b)^2 - 5(2b) + 5(3a^2) - 5(2b) + 5^2$

$\therefore\ (3a^2 - 2b + 5)^2 = (3a^2)^2 + (2b)^2 + 5^2 - 2(3a^2)(2b) + 2(3a^2)(5) - 2(2b)(5)$

- En consecuencia:

APRENDAMOS

CUADRADO DE UN POLINOMIO

$$(3a^2 - 2b + 5)^2 = \underbrace{(3a^2)^2}_{\text{CUADRADO DEL PRIMERO}} + \underbrace{(2b)^2}_{\text{CUADRADO DEL SEGUNDO}} + \underbrace{(5)^2}_{\text{CUADRADO DEL TERCERO}} - \underbrace{2(3a^2)(2b)}_{\text{DOBLE PRODUCTO DEL PRIMERO POR EL SEGUNDO}} + \underbrace{2(3a^2)(5)}_{\text{DOBLE PRODUCTO DEL PRIMERO POR EL TERCERO}} - \underbrace{2(2b)(5)}_{\text{DOBLE PRODUCTO DEL SEGUNDO POR EL TERCERO}}$$

El cuadrado de un polinomio es igual a la SUMA de los cuadrados de cada uno de los términos del polinomio MAS o MENOS los dobles productos que resulten al multiplicar cada término por cada uno de los que le siguen.

Ejemplo

Calculemos $\left(\frac{2}{3}x^2 - 2x + 4\right)^2$

Solución

$$\left(\frac{2}{3}x^2 - 2x + 4\right)^2 = \left(\frac{2}{3}x^2\right)^2 + (2x)^2 + 4^2 - 2\left(\frac{2}{3}x^2\right)(2x) + 2\left(\frac{2}{3}x^2\right)(4) - 2(2x)(4)$$

$$\therefore\ \left(\frac{2}{3}x^2 - 2x + 4\right)^2 = \frac{4}{9}x^4 + 4x^2 + 16 - \frac{8}{3}x^3 + \frac{16}{3}x^2 - 16x$$

$$\therefore\ \left(\frac{2}{3}x^2 - 2x + 4\right)^2 = \frac{4}{9}x^4 - \frac{8}{3}x^3 + \frac{28}{3}x^2 - 16x + 16$$

5.6 SUMA POR DIFERENCIA DE TÉRMINOS IGUALES

EXPERIENCIA

- La suma por la diferencia de los términos $4a^2$ y $3b^4$ es $(4a^2 + 3b^4)\bullet(4a^2 - 3b^4)$.
- El resultado de este producto podemos obtenerlo, así:

$\therefore\ (4a^2 + 3b^4)\bullet(4a^2 - 3b^4) = (4a^2)^2 - (4a^2)(3b^4) + (3b^4)(4a^2) - (3b^4)^2$

$\therefore\ (4a^2 + 3b^4)\bullet(4a^2 - 3b^4) = (4a^2)^2 - (3b^4)^2$

- Por simple inspección, el producto de una suma por una diferencia de dos términos iguales es igual **al cuadrado del primer término MENOS el cuadrado del segundo término.**

APRENDAMOS

SUMA POR DIFERENCIA

$$(4a^2 + 3b^4)\bullet(4a^2 - 3b^4) = \underbrace{(4a^2)^2}_{\substack{\Uparrow \\ \boxed{\text{CUADRADO DEL PRIMERO}}}} - \underbrace{(3b^4)^2}_{\substack{\Uparrow \\ \boxed{\text{CUADRADO DEL SEGUNDO}}}}$$

- **El producto de una suma por una diferencia de dos términos es igual al cuadrado del primer término MENOS el cuadrado del segundo término de la diferencia.**
- **El resultado del producto de una suma por una diferencia de términos iguales se denomina DIFERENCIA DE CUADRADOS.**

Ejemplo 1:

Calculemos, por simple inspección, el producto $\left(\frac{2}{3}x^3 + y^2\right)\left(\frac{2}{3}x^3 - y^2\right)$

Solución

- Como tenemos una suma por diferencia de términos iguales, entonces:

$$\left(\frac{2}{3}x^3 + y^2\right)\left(\frac{2}{3}x^3 - y^2\right) = \left(\frac{2}{3}x^3\right)^2 - \left(y^2\right)^2$$

$$\therefore \left(\frac{2}{3}x^3 + y^2\right)\left(\frac{2}{3}x^3 - y^2\right) = \frac{4}{9}x^6 - y^4$$

- Luego, $\left(\frac{2}{3}x^3 + y^2\right)\left(\frac{2}{3}x^3 - y^2\right) = \frac{4}{9}x^6 - y^4$

Ejemplo 2:

Calculemos, por simple inspección, el producto $(x^{a+1} - y^{b-2})(x^{a+1} + y^{b-2})$

Solución

- Como $(x^{a+1} - y^{b-2})(x^{a+1} + y^{b-2}) = (x^{a+1} + y^{b-2})(x^{a+1} - y^{b-2})$ entonces tenemos el producto de una suma por diferencia de términos iguales.

- Por lo tanto: $(x^{a+1} - y^{b-2})(x^{a+1} + y^{b-2}) = (x^{a+1})^2 - (y^{b-2})^2 = x^{2a+2} - y^{2b-4}$

Ejemplo 3:

Calculemos el resultado de $(2h - k + 3)(2h - k - 3)$

Solución

- Aparentemente este ejercicio no tiene la forma de ninguno de los productos notables que hemos estudiado. Sin embargo, si agrupamos convenientemente los términos de cada factor podemos escribir el producto de una suma por una diferencia. Veamos:

$$(2h - k + 3)(2h - k - 3) = \underbrace{[(2h-k) + 3]}_{\text{SUMA}}\ \underbrace{[(2h-k) - 3]}_{\text{DIFERENCIA}}$$

$$\therefore\ (2h - k + 3)(2h - k - 3) = \underbrace{(2h - k)^2}_{\text{DIFERENCIA AL CUADRADO}} - 3^2$$

$$\therefore\ (2h - k + 3)(2h - k - 3) = 4h^2 - 4hk + k^2 - 9$$

- Luego: $(2h - k + 3)(2h - k - 3) = 4h^2 - 4hk + k^2 - 9$

EJERCICIO 5.3

1 a) Escribe el cuadrado de la suma de $4x^3$ y $2y$

b) Escribe la suma de los cuadrados de $4x^3$ y $2y$

c) ¿ Coinciden los literales a) y b) ?

d) Escribe la diferencia de los cuadrados de $\frac{2}{3}a^2$ y $\frac{1}{5}b^3$

e) Escribe el cuadrado de la diferencia de $\frac{2}{3}a^2$ y $\frac{1}{5}b^3$

f) ¿ Coinciden los resultados de los literales d) y e) ?

g) ¿ Cuándo se obtiene un trinomio cuadrado perfecto ?

h) ¿ En qué se diferencian los resultados del desarrollo de $(a + b)^2$ y $(a - b)^2$?

i) ¿ Cómo se desarrolla, por simple inspección, el cuadrado de un polinomio?

En los ejercicios 2. a 18. calcular, por simple inspección, los siguientes productos:

2 $(a + b + c)^2$ **3** $(x + y - z)^2$ **4** $(p - q + r)^2$

5 $(a + 2b + 3c)^2$ **6** $(2x - y + z)^2$ **7** $(2p - 3q + 5r)^2$

8 $(3x^3 - 4x^2 + 2x)^2$ **9** $\left(\frac{2}{3}a^2 - \frac{4}{5}b^2 + 10\right)^2$ **10** $(2x + 3y - 4z - 2w)^2$

11 $(4x + 7)(4x - 7)$ **12** $(x^2 + z)(x^2 - z)$ **13** $(3a - b)(3a + b)$

14 $(x^3 + 5)(x^3 - 5)$ **15** $\left[(a+b) + 9\right]\left[(a+b) - 9\right]$ **16** $(4x - y + 3)(4x - y - 3)$

17 $\left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3}x\right)\left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3}x\right)$ **18** $\left(\frac{4}{5}a + \frac{2}{3}b + 5\right)\left(\frac{4}{5}a - \frac{2}{3}b + 5\right)$

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 2

Sea **f** la función definida por $\mathbf{f(x) = ax^2 - \sqrt{2}}$ para algún número entero positivo **a**. Si $\mathbf{f(f\,\sqrt{2}\,) = \sqrt{2}}$, entonces **a** es igual a:

a) $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ e) $2 - \sqrt{2}$

5.7 PRODUCTO DE UN BINOMIO POR SU TRINOMIO CUADRADO IMPERFECTO

EXPERIENCIA

- A un binomio de la forma **(a + b)** podemos asociarle dos trinomios: **un trinomio cuadrado perfecto: ($a^2 + 2ab + b^2$)** o **un trinomio cuadrado imperfecto ($a^2 - ab + b^2$).**
- ¿ Qué diferencia hay entre estos dos trinomios ? ¿ cuáles son las "imperfecciones" que presenta $a^2 - ab + b^2$ con relación a $a^2 + 2ab + b^2$?

  Al comparar $a^2 + 2ab + b^2$ con $a^2 - ab + b^2$ encontramos dos diferencias en el segundo término de $a^2 - ab + b^2$: la falta del 2 del DOBLE PRODUCTO y el cambio de signo de (+) por (-).
- En forma similar, al binomio **(a - b)** podemos asignarle dos trinomios: **un trinomio cuadrado perfecto: ($a^2 - 2ab + b^2$)** o **un trinomio cuadrado imperfecto ($a^2 + ab + b^2$).** ¿ Cuáles son las "imperfecciones" de $a^2 + ab + b^2$ respecto a $a^2 - 2ab + b^2$?
- Ahora realicemos el producto: **(a + b) ($a^2 - ab + b^2$)** . Este es el producto de un binomio **(a + b)** por **su** trinomio cuadrado imperfecto **($a^2 - ab + b^2$)** . Tenemos:

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a(a^2 - ab + b^2) + b(a^2 - ab + b^2)$$
$$\therefore\ (a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 - \cancel{a^2b} + \cancel{ab^2} + \cancel{a^2b} - \cancel{ab^2} + b^3$$
$$\therefore\ (a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

- Si ahora efectuamos el producto del binomio **(a - b)** por **su** trinomio cuadrado imperfecto **($a^2 + ab + b^2$)**, obtendremos: **(a - b) ($a^2 + ab + b^2$) = $a^3 - b^3$**.(¡Compruébalo!

APRENDAMOS

PRODUCTO DE UN BINOMIO POR SU TRINOMIO CUADRADO IMPERFECTO

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

CUBO DEL PRIMERO + CUBO DEL SEGUNDO

El producto de una suma de dos términos por su trinomio cuadrado imperfecto es igual al cubo del primer término MAS el cubo del segundo término; es decir, es igual a una SUMA DE CUBOS.

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

CUBO DEL PRIMERO - CUBO DEL SEGUNDO

El producto de la diferencia de dos términos por su trinomio cuadrado imperfecto es igual al cubo del primer término MENOS el cubo del segundo término; es decir, es igual a una DIFERENCIA DE CUBOS.

Ejemplo 1:

- El trinomio cuadrado imperfecto de $a^2b - 5$ es:

$$(a^2b)^2 + (5)(a^2b) + 5^2 = a^4b^2 + 5a^2b + 25$$

- El trinomio cuadrado imperfecto de $x^3y^2 + \frac{3}{4}mn^3$ es:

$$(x^3y^2)^2 - (x^3y^2)\left(\frac{3}{4}mn^3\right) + \left(\frac{3}{4}mn^3\right)^2 = x^6y^4 - \frac{3}{4}x^3y^2mn^3 + \frac{9}{16}m^2n^6$$

Ejemplo 2:

Desarrollemos por simple inspección el siguiente producto: $(4x^2 - 3y)(16x^4 + 12x^2y + 9y^2)$

Solución

- Es el producto de una diferencia de dos términos por su trinomio cuadrado imperfecto.
- Por lo tanto, $(4x^2 - 3y)(16x^4 + 12x^2y + 9y^2) = (4x^2)^3 - (3y)^3$

$$\therefore (4x^2 - 3y)(16x^4 + 12x^2y + 9y^2) = 64x^6 - 27y^3$$

Ejemplo 3:

Desarrollemos por simple inspección el producto: $(5a^2b^3 + 7)(25a^4b^6 - 35a^2b^3 + 49)$

Solución·

Es el producto de una suma de dos términos por su trinomio cuadrado imperfecto.

- Por lo tanto: $(5a^2b^3 + 7)(25a^4b^6 - 35a^2b^3 + 49) = (5a^2b^3)^3 + 7^3$

$$\therefore (5a^2b^3 + 7)(25a^4b^6 - 35a^2b^3 + 49) = 125a^6b^9 + 343$$

5.8 CUBO DE LA SUMA Y DE LA DIFERENCIA DE DOS TÉRMINOS

PRIMERA EXPERIENCIA

- ¿ Cómo se escribe el **cubo de la suma de a y b ?** Se escribe $(a + b)^3$
- Como $(a + b)^3 = (a + b)^2 \cdot (a + b)$ entonces:

$$(a + b)^3 = (a^2 + 2ab + b^2) \cdot (a + b)$$
$$\therefore (a + b)^3 = a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3$$
$$\therefore (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

- Por lo tanto:

APRENDAMOS

CUBO DE LA SUMA DE DOS TÉRMINOS

$$(a + b)^3 = \underbrace{a^3}_{\Uparrow} + \underbrace{3a^2b}_{\Uparrow} + \underbrace{3ab^2}_{\Uparrow} + \underbrace{b^3}_{\Uparrow}$$

CUBO DEL PRIMERO	+	TRES VECES EL CUADRADO DEL PRIMERO POR EL SEGUNDO	+	TRES VECES EL PRIMERO POR EL CUADRADO DEL SEGUNDO	+	CUBO DEL SEGUNDO

El cubo de una suma es igual al cubo del primer término, MÁS tres veces el cuadrado del primero por el segundo, MÁS tres veces el primero por el cuadrado del segundo, MÁS el cubo del segundo.

SEGUNDA EXPERIENCIA

- Para interpretar geométricamente el cubo de la suma de dos números, realiza la siguiente actividad:
  * fabrica en cartulina dos cubos: uno de 7 cm de arista y otro de 5 cm de arista.
  * ahora fabrica un cubo de 7 cm + 5 cm = 12 cm de arista.
  * a continuación fabrica tres (3) prismas de base cuadrada de 7 cm de lado y 5 cm de altura.
  * finalmente, fabrica tres (3) prismas de base cuadrada de 5 cm de lado y 7 cm de altura.
- Ahora acopla los dos cubos de 5 cm y 7 cm de arista y los dos prismas de base cuadrada de tal manera que se forme el cubo de 12 cm de arista.
- De esta manera habrás comprobado que: $(5+7)^3 = 5^3 + 3(5)^2 \bullet (7) + 3(5) \bullet (7)^2 + 7^3$

SEGUNDA EXPERIENCIA

- ¿ Cómo se escribe el **cubo de la diferencia de dos números ?** Se escribe $(a - b)^3$
- Como $(a - b)^3 = (a - b)^2 \bullet (a - b)$, entonces:

$$(a - b)^3 = \overbrace{(a^2 - 2ab + b^2)} \bullet \overbrace{(a - b)}$$

$$\therefore\ (a - b)^3 = a^3 - a^2b - 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 - b^3$$

$$\therefore\ (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

- Por lo tanto:

APRENDAMOS

CUBO DE LA DIFERENCIA DE DOS TÉRMINOS

$$(a - b)^3 = \underbrace{a^3}_{\text{CUBO DEL PRIMERO}} - \underbrace{3a^2b}_{\text{TRES VECES EL CUADRADO DEL PRIMERO POR EL SEGUNDO}} + \underbrace{3ab^2}_{\text{TRES VECES EL PRIMERO POR EL CUADRADO DEL SEGUNDO}} - \underbrace{b^3}_{\text{CUBO DEL SEGUNDO}}$$

El cubo de una diferencia es igual al cubo del primer término, MENOS tres veces el cuadrado del primero por el segundo, MÁS tres veces el primero por el cuadrado del segundo, MENOS el cubo del segundo

- Dejamos a la inventiva y creatividad de cada uno, hacer la interpretación geométrica de $(a - b)^3$.

Ejemplo 1:

$$(2x + 5y)^3 = (2x)^3 + 3 (2x)^2(5y) + 3 (2x) (5y)^2 + (5y)^3$$
$$\therefore\ (2x + 5y)^3 = 8x^3 + 3 (4x^2) (5y) + 3 (2x) (25y^2) + 125y^3$$
$$\therefore\ (2x + 5y)^3 = 8x^3 + 60x^2y + 150xy^2 + 125y^3$$

Ejemplo 2:

$$(a^x - b^{2y})^3 = (a^x)^3 - 3 (a^x)^2 (b^{2y}) + 3 (a^x) (b^{2y})^2 - (b^{2y})^3$$
$$\therefore\ (a^x - b^{2y})^3 = a^{3x} - 3a^{2x}b^{2y} + 3a^xb^{4y} - b^{6y}$$

EJERCICIO 5.4

1 a) Escribe en lenguaje matemático la expresión: **la diferencia de los cubos de $2a^3$ y $5b$.**

b) Escribe en lenguaje matemático la expresión: **el cubo de la diferencia de $2a^3$ y $5b$**

c) ¿Coinciden las expresiones de los literales a) y b) anteriores ?

d) ¿A qué es igual el cubo de una diferencia ? ¿ Y una diferencia de cubos?

e) ¿Es lo mismo una suma al cubo que una suma de cubos? ¿Cómo se escriben una y otra?

f) ¿Es la potenciación distributiva con respecto a la suma y a la resta? ¿por qué? Explica la respuesta con un ejemplo.

g) ¿Es la potenciación distributiva con respecto a la multiplicación y a la división? ¿por qué? Explica la respuesta con un ejemplo.

h) Escribe el trinomio cuadrado perfecto de $(3a - 4b)$

i) Escribe el trinomio cuadrado imperfecto de $(3a - 4b)$

En los ejercicios 2. a 17., desarrolla por simple inspección los siguientes productos notables:

2. $(a^2 - b^3)(a^4 + a^2b^3 + b^6)$
3. $(x^3 - 5)(x^6 + 5x^3 + 25)$
4. $\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}y^3\right)\left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^2y^3 + \frac{4}{9}y^6\right)$
5. $(a^x + b^y)(a^{2x} - a^xb^y + b^{2y})$
6. $(m + 2)^3$
7. $(p - 3)^3$
8. $(5 + z^2)^3$
9. $(p - 3q)^3$
10. $(2b + 3)^3$
11. $(0{,}5 + t)^3$
12. $\left(\frac{1}{3}x^3 - y\right)^3$
13. $\left(\frac{2}{5}a + \frac{3}{2}y\right)^3$
14. $(0{,}01 + m^2)^3$
15. $(a^{2x} - b^y)^3$
16. $(a^p + b^{3q})^3$
17. $[(x+y)-3z]^3$

En los ejercicios 18. a 20. escribir el trinomio cuadrado perfecto y el trinomio cuadrado imperfecto de cada binomio:

18. $3xy^3 - 6$
19. $\frac{3}{4}x - \frac{3}{4}y$
20. $2a^x + 3b^y$

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 3

El resultado de $4^3 + 4^3 + 4^3 + 4^3$ es igual a:

a) 4^4 b) 3^4 c) 16^3 d) 4^{12}

5.9 POTENCIA DE UN BINOMIO. BINOMIO DE NEWTON

- La expresión $(a + b)^n$ se denomina BINOMIO DE NEWTON. Vamos a descubrir la manera de desarrollar el Binomio de Newton cuando $n \in N$. Estudiaremos cómo obtener los exponentes, el signo y el coeficiente de cada término del desarrollo.
- Hasta el momento hemos desarrollado estos binomios:

$$(a + b)^1 = a + b$$
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

- Por multiplicaciones sucesivas de $(a + b)$ podemos llegar a:

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

- Una observación cuidadosa del desarrollo de estos binomios nos permite concluir que:

1. El número de términos del resultado es siempre uno más que el exponente del binomio.
2. El exponente del primer término del desarrollo es igual al del binomio.
3. El exponente de **a** disminuye de uno en uno en cada término; en cambio, el de **b** aumenta de uno en uno.
4. El exponente del último término es igual al del binomio.

5. Todos los términos del desarrollo de $(a + b)^n$ son positivos. Si el binomio fuera $(a - b)^n$, los signos se alternarían así: (+), (-), (+), (-),...
6. Para analizar los coeficientes, tomemos uno de los binomios que hemos desarrollado:

$$(a + b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5$$

Simétricos

Simétricos

Simétricos

- Los términos simétricos tienen los mismos coeficientes. La simetría de los términos nos permite disponer los coeficientes del binomio en forma de un triángulo conocido como **Triángulo de Pascal**. Este triángulo es el que nos permite obtener los coeficientes del binomio de una manera fácil. Construyamos el triángulo.

$(a + b)^0$	1	1
$(a + b)^1$	1a 1b	1 1
$(a + b)^2$	$1a^2$ 2ab $1b^2$	1 2 1
$(a + b)^3$	....	1 3 3 1
$(a + b)^4$	....	1 4 6 4 1
$(a + b)^5$	....	1 5 10 10 5 1
$(a + b)^6$	....	1 6 15 20 15 6 1

- El Triángulo de Pascal nos indica que:
  1. Los coeficientes de los términos de los extremos son iguales a **uno**.
  2. Sumando dos elementos consecutivos de una fila obtenemos un coeficiente de la fila siguiente; es decir, un coeficiente cualquiera puede obtenerse sumando los que están encima de él en la fila anterior.

Ejemplo 1

Desarrollemos $(a - 2b)^6$

Solución

Apliquemos cuidadosamente las sugerencias que acabamos de deducir.

$$\begin{aligned}(a - 2b)^6 &= a^6 - 6(a^5)(2b) + 15(a^4)(2b)^2 - 20(a^3)(2b)^3 + 15(a^2)(2b)^4 - 6(a)(2b)^5 + b^6\\ &= a^6 - 12a^5b + 60a^4b^2 - 160a^3b^3 + 240a^2b^4 - 192ab^5 + b^6\end{aligned}$$

Ejemplo 2

Hallemos el cuarto término de $(3x - 2y)^5$

Solución

- Analicemos coeficientes, signos y exponentes:

a) Coeficientes: En el Triángulo de Pascal vemos que el coeficiente del cuarto término de $(a + b)^5$ es 10.

b) Signos: Sabemos que los signos se alternan, así:

1°. término = + ; 2°.término = - ; 3°.término = + ; 4°. término = -

c) Exponentes:

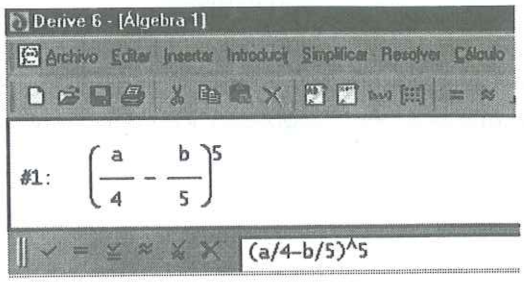
1°.término: $(3x)^5$; 2°.término: $(3x)^4(2y)$; 3°.término: $(3x)^3(2y)^2$; 4°.término: $(3x)^2(2y)^3$

- Luego, el cuarto término será: $-10(3x)^2(2y)^3 = -10(9x^2)(8y^3) = -720x^2y^3$

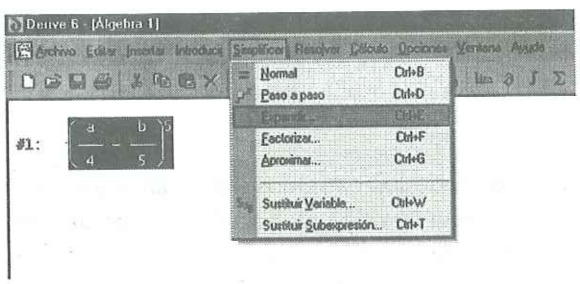
5.10 USO DEL DERIVE PARA DESARROLLAR UN BINOMIO DE NEWTON

- Para desarrollar el binomio $\left(\frac{a}{4}-\frac{b}{5}\right)^5$, usando el DERIVE, hacemos lo siguiente:

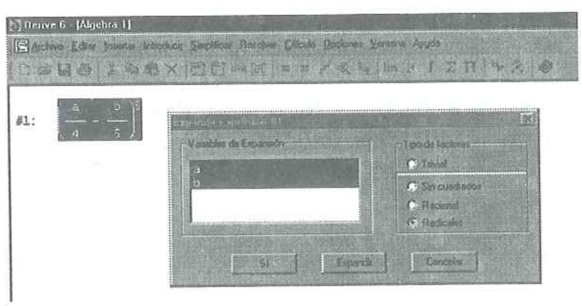
1. Digitamos el binomio en la LÍNEA DE ENTRADA DE EXPRESIONES y lo ingresamos a la VENTANA DE ALGEBRA de la misma manera como lo hemos hecho antes.



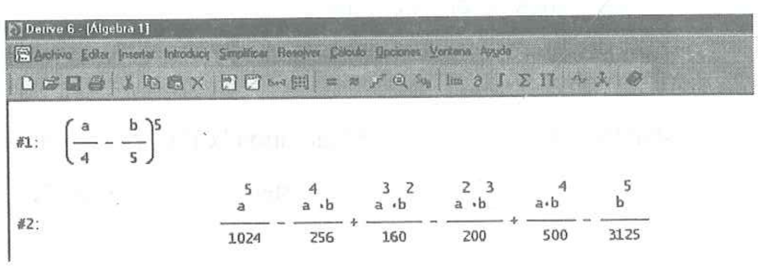
2. Llevamos el puntero del mouse a la BARRA DEL MENÚ DE OPCIONES, hacemos click sobre el comando SIMPLIFICAR. Inmediatamente aparecerá una pequeña ventana, encima de la Ventana de Algebra.



3. Sobre esta pequeña ventana, señalamos con el puntero del mouse la opción EXPANDIR y hacemos click. De inmediato aparece otra ventana, sobre la cual señalamos la opción RADICAL, hacemos click, resaltamos las variables (en este caso, **a** y **b**) y hacemos click.



4. Finalemente, señalamos en la parte inferior de la ventana la opción EXPANDIR, hacemos click y la VENTANA DE ALGEBRA nos mostrará el desarrollo del binomio.



EJERCICIO 5.5

En los ejercicios 1. a 9. desarrolla cada binomio:

1. $(a + 2b)^6$
2. $(2m^2 - 3n)^5$
3. $(4 - z^4)^3$
4. $(a^x - 1)^4$
5. $\left(\frac{a^3}{2} + b\right)^6$
6. $\left(\frac{a}{4} - \frac{b}{5}\right)^5$
7. $\left(\frac{3}{m} + \frac{m}{3}\right)^6$
8. $(b - mn)^8$
9. $\left(5 - \frac{a}{5}\right)^6$

En los ejercicios 10. a 15. halla el término indicado de cada binomio.

10. Quinto término de $(a^2 - 2b)^5$
11. Séptimo término de $(x + y^2)^7$
12. Sexto término de $\left(3x - \frac{y}{3}\right)^8$
13. Último término de $(4a^3 - 5b^2)^{10}$
14. Penúltimo término de $(5 - a^3)^7$
15. Último término de $\left(\frac{2}{3}x^2 - 6\right)^3$

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 4

No quise vender un carro cuando me ofrecían por él 3.840 dólares, negocio en el cual hubiera ganado el 28% del costo. Algún tiempo después tuve que venderlo por 3.750 dólares. ¿Qué porcentaje del costo gané al hacer la venta?

TALLER DE REPASO DE LA UNIDAD 5

1. Contesta las siguientes preguntas:

a) ¿Cómo se escribe en forma simbólica el enunciado: cuadrado de la suma de $2x^3$ y $4y^2$?
b) ¿ Cómo se escribe en forma simbólica el enunciado: suma de los cuadrados de $2x^3$ y $4y^2$?
c) ¿ Cuál es el desarrollo de una suma al cuadrado ?
d) ¿ Es una diferencia de cuadrados igual a una diferencia al cuadrado ?
e) ¿ Cuál es el trinomio cuadrado perfecto de $(2a - 3b)$ ¿ Y su trinomio cuadrado imperfecto?
f) ¿ Es lo mismo el cubo de la diferencia de dos términos que la diferencia de los cubos de esos mismos términos ? ¿ por qué ?
g) ¿ Cómo se llega a una suma de cubos ?
h) ¿ Cuántos términos tiene el desarrollo de $(a^2 - b^2)^7$?
i) ¿ Cómo se desarrolla el cuadrado de un polinomio ?
j) ¿ Cuál es el coeficiente del quinto término del desarrollo del binomio $(2x^3 - 4y^2)^7$

En los ejercicios 2. a 9., seleccionar la letra correspondiente a la única respuesta correcta.

2. El desarrollo del cuadrado de una diferencia es:

a) Un trinomio cuadrado perfecto.
b) Un trinomio cuadrado imperfecto.
c) El producto de una suma por una diferencia de términos iguales.
d) Una suma de cuadrados.

3. Una diferencia de dos cubos es igual a:

a) Una diferencia al cubo.
b) Un trinomio cuadrado imperfecto.
c) La diferencia de las raíces cúbicas por su trinomio cuadrado imperfecto.
d) Un trinomio cuadrado perfecto.

4. El número de términos del desarrollo de $(x - y)^n$ es:

a) $n - 1$ b) $n + 1$ c) n d) $2n$

5. Los signos del desarrollo de $(x + y)^n$ son:

a) Todos positivos b) Alternados empezando con (+)
c) Alternados empezando con (-) d) Todos negativos.

6. En el desarrollo de $(x + y)^n$, con $n \geq 1$, el coeficiente del segundo y del penúltimo término es:

a) n b) $n - 1$ c) $2n - 1$ d) $n + 1$

7. El resultado de $(x + y)^2 - 2xy$ es:

a) $x^2 - y^2$ b) $x^2 + y^2 + 4xy$ c) $x^2 + y^2$ d) $x^2 + y^2 - 4xy$

8. El resultado de: $(5+\sqrt{3})(5-\sqrt{3})$ es:

a) 28 b) $28 - 10\sqrt{3}$ c) 22 d) $28 + 10\sqrt{3}$

9. El resultado del desarrollo de $(a - b)^3 - (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ es:

a) $2a^3 - 2b^3$ b) $2a^3 + 2b^3$ c) $3ab^2 - 3a^2b$ d) $3a^2b - 3ab^2$

En los ejercicios 10. a 13. calcula las potencias indicadas:

10. $\left(-\frac{2}{3}x^2y^3z\right)^3$ 11. $\left(\frac{4}{5}x^3yz^2w^4\right)^3$

12. $\left(5mn^2p^3q^2\right)^4$ 13. $\left(-\frac{3}{4}a^2bc^3d\right)^3$

14. Desarrollar y simplificar el resultado: $\left[(x-y)^3 + (x+y)^3\right]^2$

15. Efectuar $(x + y + z)(x - z + y) - (x + y)^2$

En los ejercicios 16. a 35. efectua las operaciones indicadas, utilizando los productos notables:

16. $(x+y+z)^2$ 17. $(3b^2 + 6c^3)(3b^2 - 6c^3)$

18. $\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{5}\right)\left(\frac{x}{3}-\frac{y}{5}\right)$

19. $(m^3 + m^2 - 2m + 1)^2$

20. $(2x + 3y - 4z - 2w)^2$

21. $[3(a+b)-2][3(a+b)+2]$

22. $[(a^2+3)-a][(a^2+3)+a]$

23. $[(a^3-a)+(a^2-3)][(a^3-a)-(a^2-3)]$

24. $(x + y + z)(x + y - z)(x - y + z)(y + z - x)$

25. $(ax + by)^2(ax - by)^2$

26. $(3a - b)(9a^2 + 3ab + b^2)$

27. $(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$

28. $[(x+y)^2+2(x+y)+1][(x+y)^2-2(x+y)+1]$

29. $(x - 2y + 5z)(x + 2y + 5z)$

30. $(2x - 3y - 5z)(2x + 3y + 5z)$

31. $(-bu - v)(bu - v)$

32. $(a + 3b)^2(a^2 - 6ab + 9b^2)$

33. $(x + 2y)(x - 2y)(x^2 + 4y^2)$

34. $(2x - 5y)(4x^2 + 10xy + 25y^2)$

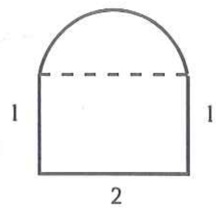
35. $(3a + 2b - c)(3a - 2b + c)$

PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS DEL ICFES

1. El perímetro de la figura es:

   a) $\pi + 6$ b) $\pi + 4$

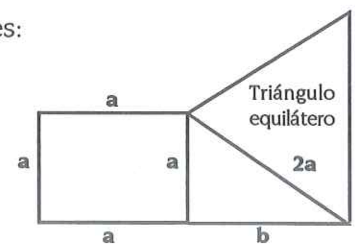
   c) $\pi + 3$ d) $\pi + 5$



2. La fórmula del perímetro de la figura es:

   a) 10 a + b b) 8a + b

   c) 7a + b d) 9a + b



3. Tenía \$200.000 y gasté los $\frac{3}{5}$ de ellos. ¿Cuánto me queda?

   a) \$12.000 b) \$80.000 c) \$40.000 d) \$60.000

4. Los $\frac{3}{4}$ del tanque de reserva de una bomba de gasolina se gastan llenando 5 tractomulas de igual capacidad. ¿Qué parte del tanque se gastó para llenar cada tractomula?

   a) $\frac{15}{4}$ b) $\frac{20}{3}$ c) $\frac{3}{20}$ d) $\frac{3}{5}$

5. Si un cuadrado de lado x se aumenta en cada lado un 20%, el área queda aumentada en:

   a) 144% b) 100% c) 40% d) 44%

Núcleo Temático

6

FACTORIZACIÓN

LOGRO GENERAL

Aplicar los diferentes casos de factorización para reducir expresiones algebraicas.

D I M E N S I O N E S

E V A L U A C I Ó N

LOGROS ESPECÍFICOS	INDICADORES DE LOGRO
Corporal: • Realizar experiencias que permitan reconocer los diferentes casos de factorización.	• Participa en actividades de destreza operativa y manejo conceptual.
Comunicativa: • Explicar con sus propias palabras como se factoriza una expresión algebraica en un conjunto numérico.	• Explica con sus propias palabras como se factoriza: - Una diferencia de cuadrados - Una diferencia y una suma de cubos - Un trinomio cuadrado perfecto. - Un trinomio de la forma $ax^{2n} + bx^n + c$.
Cognitiva: • Factorizar: diferencias de cuadrados, diferencias de cubos, suma de cubos, trinomios de la forma $ax^{2n} + bx^n + c$. • Factorizar trinomios por completación al trinomio cuadrado perfecto.	• Factoriza: diferencia de cuadrados, de cubos, suma de cubos, trinomios de la forma $x^{2n} + bx^n + c$ y de la forma $ax^{2n} + bx^n + c$.
Estética: • Dibujar figuras que traduzcan enunciados de expresiones algebraicas.	• Ilustra con dibujos la diferencia de cubos.
Ética - Actitudinal: • Valora la importancia del trabajo en grupo	• Realiza con interés las actividades propuestas en grupo. • Comparte con el grupo sus habilidades y conocimientos.

ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS

6.1 HISTORIA DEL ÁLGEBRA (6): LUCA PACIOLI (1445-1514)

LUCA PACIOLI
(1445 - 1514)

En la Europa del Renacimiento, el libro de álgebra más conocido se publicó en 1494 en Italia. El nombre de la obra es **summa de arithmética, geométrica, proportioni et proportionalita** del fraile Luca Pacioli. El camino que hizo posible la summa había sido preparado por una generación de algebristas, puesto que el Álgebra de Al - Jwarizmi ya había sido traducida al italiano para el año 1464 como muy tarde, fecha que aparece en una copia manuscrita de la colección Plimpton en New York. Summa es considerado hoy el primer libro de álgebra impreso y consiste en una impresionante recopilación de material de cuatro campos: aritmética, álgebra, geometría euclidea muy elemental y contabilidad de doble entrada.

La Summa resultó ser un compendio tanto de otras obras no publicadas que había compuesto anteriormente el mismo autor, como de conocimientos generales de la época. La parte relativa a la aritmética trata, con mucho detalle, diversos artificios para multiplicar y para hallar raíces cuadradas, y la sección dedicada al álgebra incluye las soluciones usuales de las ecuaciones lineales y cuadráticas. Por esta época ya se utilizaban ámpliamente en Italia las letras **p** y **m** para representar la suma y la resta, y Pacioli utilizó además **co, ce** y **ae** para **cosa** (es decir, la incógnita), **censo** (el cuadrado de la incógnita) y **aequalis** (el cubo de la incógnita). Para la cuarta potencia usó, de una manera natural, **cece** (o cuadrado del cuadrado). Pacioli creía, haciendo eco con ello a una idea que había formulado ya Omar Khayyam, que las ecuaciones cúbicas no podían ser resueltas algebraicamente. Finalmente, la parte geométrica de la Summa de Pacioli carece de importancia.

EJERCICIO 6.1

Comprensión de Lectura. Explicación: Lee nuevamente el texto anterior y luego encierra, en un círculo, la letra que corresponda a la respuesta correcta:

1. Los siguientes enunciados son verdaderos, con excepción de:

   a. El año de 1494 en Italia corresponde al Renacimiento.
   b. La traducción del álgebra de Al-Jwarizmi, al italiano se hizo en el Renacimiento.
   c. "La Summa", obra de Pacioli, es todo un compendio de ciencia matemática.
   d. Al-Jwarizmi alcanzó su apogeo durante el Renacimiento.

2. Del contenido del escrito se puede inferir que:

   a. El Renacimiento ha sido el movimiento que más aportes hizo a las matemáticas.
   b. Los científicos del modernismo han marcado la pauta en conocimientos matemáticos.
   c. Las ciencias matemáticas siempre han estado en continuo desarrollo.
   d. Al-Jwarizmi es el verdadero padre del álgebra.

3. De los 4 campos tratados en la obra de Pacioli, el de menor importancia fue:

   a. El de contabilidad de doble entrada.
   b. El de aritmética elemental.
   c. El de álgebra.
   d. El de Geometría Euclídea.

4. La palabra que sustituye al vocablo COMPENDIO, que se emplea en el texto es:

   a. Libro.
   b. Resumen.
   c. Conocimiento.
   d. Obra.

5. El propósito del autor en el escrito es:

   a. Mostrar la riqueza de contenido de la extensa obra de Pacioli.
   b. Explicar una fase del pensamiento matemático.
   c. Insinuar que los sabios medievales determinaron el saber matemático europeo.
   d. Hacer ver que los orientales sentaron las bases de la matemática occidental.

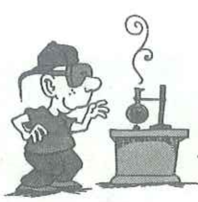
6.2 UNAS PALABRAS PARA EMPEZAR

- Desde los primeros grados escolares nos hemos familiarizado con la palabra FACTOR. Esta palabra la hemos vinculado con la operación de MULTIPLICACIÓN; por ejemplo, cuando escribimos:

  $$150 = 2 \bullet 3 \bullet 5^2$$

  decimos que 150 ha sido descompuesto en sus FACTORES PRIMOS: 2, 3 y 5.

- Así mismo, cuando escribimos $(-3a^2b)\bullet(4ab^3) = -12a^3b^4$, las expresiones $-3a^2b$ y $4ab^3$ son FACTORES del producto $-12a^3b^4$.
- En la unidad anterior estudiamos que $(a + 5)(a - 5) = a^2 - 25$; es decir, $(a + 5)$ y $(a - 5)$ son FACTORES del polinomio $a^2 - 25$.
- Antes de comenzar el estudio de la factorización de polinomios conviene revisar algunos conceptos, realizando la siguiente actividad.



EXPERIENCIA DE REPASO

1. ¿Qué es un número primo ? ¿ Qué es un número compuesto ?
2. Escribe diez (10) números primos y cinco (5) números compuestos.
3. Descompón en factores primos los siguientes números compuestos:

   a) 180 b) 630 c) 2100.

4. Halla el máximo común divisor (M. C. D.) y el mínimo común múltiplo (m. c. m.) de :
   a) 36 y 48 b) 90 y 120 c) 12, 18 y 54 d) $3a^2b$, $12ab^3$ y $15a^3$
5. Señala los factores de cada polinomio:
   a) $12x^3y - 8x^2y^2 + 20x^2y = 4x^2y(3x - 2y + 5)$ b) $4a^2b^2 - 9c^4 = (2ab + 3c^2)(2ab - 3c^2)$
6. Identifica un factor común en los siguientes polinomios:
   a) $4xy^2 - 7xz^3 + 9xw$ b) $5m^2n + 7mn^3 - 6m^3$
7. Desarrolla los siguientes productos notables:
   a) $(x + y)^2$ b) $(3a + 4b)^2$ c) $(x - y)^2$
   d) $(3a - 4b)^2$ e) $(x + y)(x - y)$ f) $(3a + 4b)(3a - 4b)$
   g) $(5x^2 - 3y^3)(5x^2 + 3y^3)$ h) $(1 - x)(1 + x)$ i) $(x^2 - 3y)(x^4 + 3x^2y + 9y^2)$
   j) $(mn^2 + 6)(m^2n^4 - 6mn^2 + 36)$

6.3 FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

- En la experiencia de repaso anterior vimos que el polinomio $4a^2b^2 - 9c^4$ puede escribirse como el producto de los polinomios $(2ab - 3c^2)$ y $(2ab + 3c^2)$; es decir,

$$4a^2b^2 - 9c^4 = (2ab - 3c^2)(2ab + 3c^2)$$

- Al proceso de expresar un polinomio como el producto de dos o más polinomios o como una potencia de otro polinomio se le denomina FACTORIZACIÓN.
- Como $a^2 - 9 = (a + 3)(a - 3)$ entonces $a + 3$ y $a - 3$ son **factores** de $a^2 - 9$
- Como $a^4 + a^3 - 6a^2 = a^2(a + 3)(a - 2)$ entonces a^2, $a + 3$ y $a - 2$ son **factores** de $a^4 + a^3 - 6a^2$.
- Como $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$ entonces $x - 2$ es un **FACTOR** de **multiplicidad 2** de $x^2 - 4x + 4$.
- Numerosos problemas del álgebra y de la matemática en general se simplifican al máximo si se realiza una adecuada factorización de las expresiones que intervienen en él.

APRENDAMOS

DEFINICIÓN DE FACTORIZACIÓN.

FACTORIZAR un polinomio en un cierto conjunto numérico es obtener otros polinomios cuyos coeficientes pertenecen al conjunto numérico indicado y cuyo producto sea igual al polinomio dado.

¡ATENCIÓN!

1. Antes de factorizar un polinomio es muy importante definir en cuál conjunto lo estamos haciendo: si en N, en Z, en Q o en R. Por ejemplo, si nos piden factorizar el polinomio $x^2 - 5$ es necesario precisar en cuál conjunto lo queremos hacer. Este polinomio no es factorizable en N, ni en Z, ni en Q , pero si en R. En efecto: $x^2 - 5 = (x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5})$

   es decir, $x^2 - 5$ es un polinomio con coeficientes racionales, pero no es factorizable en los racionales, ya que sus factores $x + \sqrt{5}$ y $x - \sqrt{5}$ no tienen TODOS sus coeficientes en el conjunto Q de los números racionales (¿ por qué ?).
2. Cuando un polinomio no puede factorizarse en un determinado conjunto numérico se dice que es PRIMO en dicho conjunto numérico.

3. Mientras no se indique lo contrario, **factorizaremos los polinomios en el conjunto Q de los números racionales.**

4. Las propiedades algebraicas más utilizadas en el proceso de factorización son:
   * La propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma.
   * Las propiedades asociativas de la suma y el producto.
   * Los productos notables estudiados en la unidad anterior.

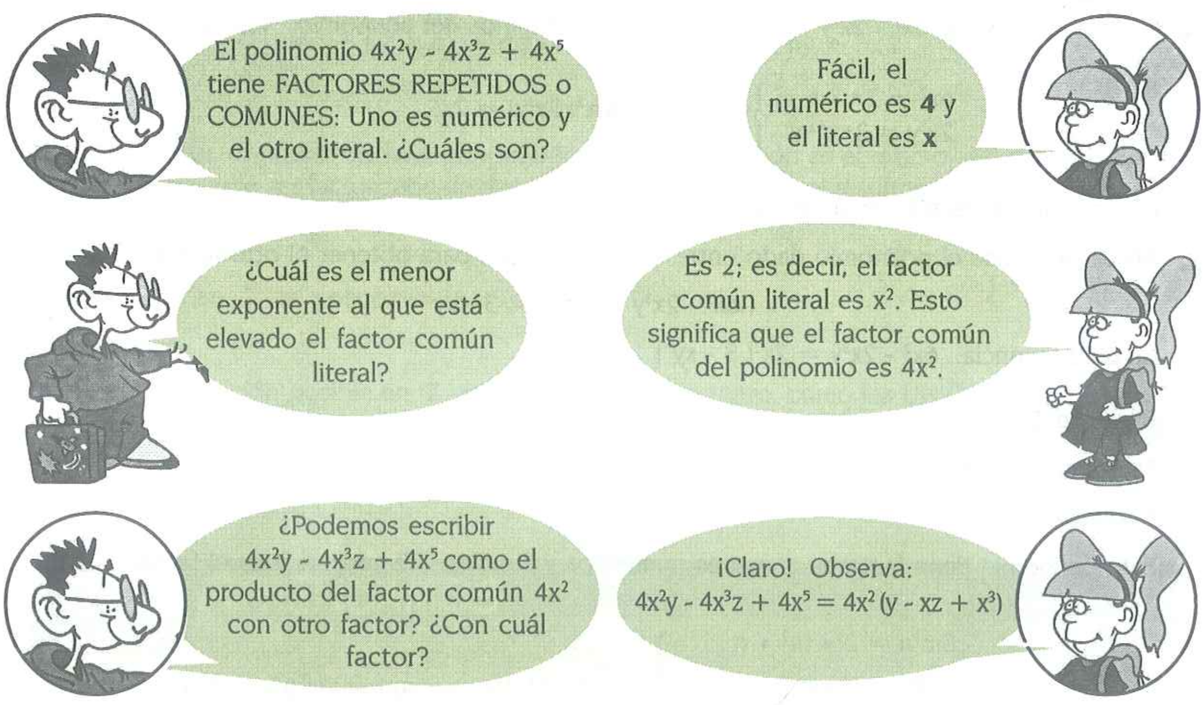
Ejemplo:

El polinomio $x^2 - 2$ es PRIMO en el conjunto de los números racionales, ya que no podemos escribirlo como producto de dos polinomios que tengan coeficientes racionales; sin embargo, en los REALES sí es factorizable ya que:

$$x^2 - 2 = (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$$

6.4 FACTORIZACIÓN POR FACTOR COMÚN

- Escuchemos el diálogo de Andrés y Carolina:



- ¿Cómo hizo Carolina para factorizar el polinomio $4x^2y - 4x^3z + 4x^5$?. Observemos:
  * Primero identificó el factor común numérico y el factor común literal; así:

FACTOR COMÚN → NUMÉRICO: 4

FACTOR COMÚN → LITERAL: x^2

Luego, el FACTOR COMÚN del polinomio dado es $4x^2$

* A continuación, dividió cada término del polinomio entre el factor común; así:

$$(4x^2y - 4x^3z + 4x^5) \div 4x^2 = y - xz + x^3$$

* Por lo tanto: $4x^2y - 4x^3z + 4x^5 = 4x^2(y - xz + x^3)$

- Notemos que el factor común del polinomio se obtiene formando el producto de los factores REPETIDOS Y ELEVADOS AL MENOR EXPONENTE; es decir, hallando el máximo común divisor (M.C.D.) de los términos del polinomio.

APRENDAMOS

DEFINICIÓN DE FACTOR COMÚN

- El FACTOR COMÚN de un polinomio es el máximo común divisor (M.C.D.) de los términos del polinomio.
- Para obtener el otro factor DIVIDIMOS el polinomio dado por el factor común.

Ejemplo 1:

Hallemos el factor común y factoricemos el polinomio $6x^2 - 2x^3y$.

Solución:

- El factor común de $6x^2 - 2x^3y$ es el M.C.D. de los términos del polinomio. Veamos:

$$\left.\begin{aligned} 6x^2 &= 2\bullet 3 \bullet x^2 \\ 2x^3y &= 2\bullet x^3\bullet y \end{aligned}\right\} \therefore \text{ M.C.D. } (6x^2, 2x^3y) = 2x^2$$

Por lo tanto, el factor común es $\mathbf{2x^2}$.

- Ahora dividimos el polinomio dado entre el factor común para obtener el otro factor:

$$(6x^2 - 2x^3y) \div 2x^2 = 3 - xy$$

- En consecuencia: $6x^2 - 2x^3y = 2x^2(3 - xy)$

Ejemplo 2:

Factoricemos $8m^2n - 4mn + 20m^3n^2$

Solución:

- Este polinomio tiene factores comunes numéricos y literales. Veamos cuál es el factor común:

$$\left.\begin{aligned} 8m^2n &= 2^3\bullet m^2 \bullet n \\ 4mn &= 2^2 \bullet m \bullet n \\ 20m^3n^2 &= 2^2 \bullet 5\bullet m^3 \bullet n^2 \end{aligned}\right\} \therefore \text{ M.C.D. } (8m^2n, 4mn, 20m^3 n^2) = 2^2 mn$$

Luego, el factor común es **4mn**

- Si dividimos el polinomio entre el factor común nos queda $2m - 1 + 5m^2n$ (¡comprobarlo!). Por lo tanto:

$$8m^2n - 4mn + 20m^3n^2 = 4mn (2m - 1 + 5m^2n)$$

El siguiente ejemplo nos muestra que el factor común puede ser no sólo un monomio sino también un binomio o un polinomio. Veamos:

Ejemplo 3:

Factoricemos : $a(x + y) + b(x + y)$.

Solución:

- Este polinomio tiene dos términos: $a(x + y)$ y $b(x + y)$. Estos dos términos tienen un factor común: $(x + y)$.
- Por lo tanto: $a(x + y) + b(x + y) = (x + y)(a + b)$.

También es posible factorizar algunos polinomios agrupando sus términos de manera conveniente, y obtener resultados parecidos a los del ejemplo anterior. Veamos:

Ejemplo 4:

Factoricemos el polinomio: $mx + ny + nx + my$

Solución:

- Podemos factorizar agrupando de dos formas:

PRIMERA FORMA

$$\begin{aligned} mx + ny + nx + my &= (mx + nx) + (ny + my) \\ &= x(m + n) + y(n + m) \end{aligned}$$

Observemos que aún no hemos factorizado porque sigue habiendo una suma; sin embargo, tenemos un factor común: $(m + n)$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} mx + ny + nx + my &= x(m + n) + y(m + n) \\ &= (m + n)(x + y) \end{aligned}$$

SEGUNDA FORMA

$$\begin{aligned} mx + ny + nx + my &= (mx + my) + (ny + nx) \\ &= m(x + y) + n(y + x) \\ &= (x + y)(m + n) \end{aligned}$$

- Notemos que de cualquier manera, el resultado de la factorización es el mismo. En general, cuando un polinomio puede ser factorizado de dos o más formas distintas, el resultado siempre es el mismo.

Ejemplo 5:

Factoricemos, en Z, el polinomio $7x - 3y$.

Solución:

- La única factorización posible en Z es $1 \bullet (7x - 3y)$; por lo tanto, como los ÚNICOS factores son 1 y el mismo polinomio $7x - 3y$, entonces el polinomio es PRIMO en Z

APRENDAMOS

- Un polinomio es PRIMO, en un conjunto dado, cuando sus ÚNICOS factores son 1 y él mismo.
- En un conjunto dado, un polinomio tiene factorización única o es primo.

- PREGUNTA: Si del polinomio $7x - 3y$ nos pidieran sacar el factor 7 o el factor 3, ¿cómo lo haríamos ?

EJERCICIO 6.2

En los ejercicios del 1. al 21. factoriza cada polinomio en el conjunto Q de los números racionales.

1. $3x + 3y$
2. $5m^2n + 10a^2$
3. $pq - 5qr$
4. $6m^2 - 3mn$
5. $7x^2y^2 - 14x^2y$
6. $12ab + 18ab^2$
7. $24p^2q^2 - 12pq$
8. $-6x^2yz - 3xyz$
9. $3x^2 - 9$
10. $\frac{1}{2}m - \frac{1}{2}n$
11. $14m^2n - 2n$
12. $5ab^2 - 7a^2b$
13. $3x^2m^2 + 24x^2m + 6xm^2$
14. $-5a^2b + 20ab^2$
15. $3x^3y^2 + 9x^2y^2 - 27xy$
16. $5xyz^2 - 10xy^2z - 25x^2yz$
17. $16a^2bc + 4ab^2c - 8abc^2$
18. $18a^3b - 9a^2b + 27a^2b^3$
19. $26x^4 - 39x^3m + 13x^3$
20. $51m^2n^2 - 34mn^2 - 17mn$
21. $24p^2q^3 - 9pq^2 + 18p^3q$

En los ejercicios 22. a 29., factoriza cada polinomio en el conjunto Q de los números racionales, sacando un factor común binomio o trinomio.

22. $a(x + y) + b(x + y)$
23. $3p(2a + 3) - 5q(2a + 3)$
24. $9x^2(a^2 + 2b) - 12xy(a^2 + 2b)$
25. $5a(2 - 7b) + 8ab(2 - 7b)$
26. $a(x^3 + y^3 + z^3) - b(x^3 + y^3 + z^3)$
27. $3(x + 3y) + p(x + 3y)$
28. $2(x - 2y) + m(x - 2y)$
29. $3a(a - 1) - 2b(a - 1) + c(a - 1)$

En los ejercicios 30. a 37. es necesario agrupar algunos términos antes de factorizar.

30. $a(x + 3) - x - 3 + 5(x + 3)$
31. $(x + y - 1)(x^2 + 1) - x^2 - 1$
32. $(2 - a)(5 + x) - 3(2 - a) - 2 + a$
33. $p(x + y)^2 - x^2 - 2xy - y^2$
34. $xz + yw - yz - xw$
35. $abc + adf + adc + abf$
36. $a - b + x(b - a) - cxb + cxa$
37. $(a + b)^2 - (2 - a)(a + b) + (a - 2)(a + b)^2$

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 1

Si agregamos un uno (1) a la izquierda y otro uno (1) a la derecha de un número de dos dígitos, este se incrementa en 1226. ¿De cuál número de dos dígitos estamos hablando?.

6.5 FACTORIZACIÓN DE TRINOMIOS CUADRADOS PERFECTOS

¡ATENCIÓN!

En esta sección y en las siguientes será necesario hallar la raíz cuadrada de expresiones algebraicas. Como ya sabemos que $\sqrt{4x^2y^2} = |2xy|$, entonces para evitar el uso de las barras de valor absoluto supondremos que las letras siempre representan números reales positivos; por lo tanto:

$$\sqrt{4x^2y^2} = 2xy$$

EXPERIENCIA

- Desarrolla los siguientes productos notables:

$(3x^2 + 2y)^2 =$ $\qquad$ $(7a - 3b)^2 =$

$(4z - \sqrt{5})^2 =$ $\qquad$ $\left(\frac{2}{3}m^3 + 5\right)^2 =$

- ¿ Qué se obtiene al desarrollar el cuadrado de un binomio ?
- Comprueba si las siguientes igualdades son ciertas y explica por qué.

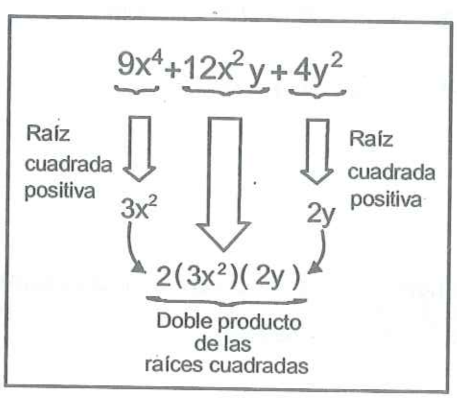
$9x^4 + 12x^2y + 4y^2 = (3x^2 + 2y)^2$ $\qquad$ $49a^2 - 42ab + 9b^2 = (7a - 3b)^2$

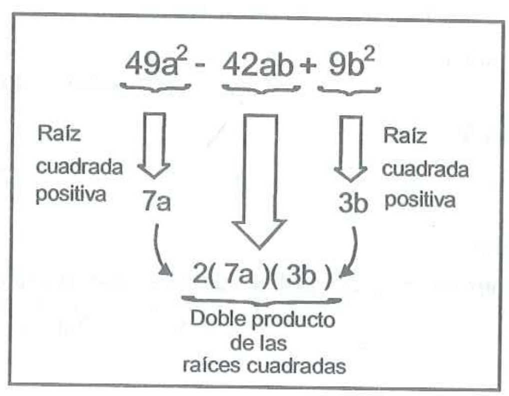
$16z^2 - 8\sqrt{5}\,z + 5 = \left(4z - \sqrt{5}\right)^2$ $\qquad$ $\frac{4}{9}m^6 + \frac{20}{3}m^3 + 25 = \left(\frac{2}{3}m^3 + 5\right)^2$

- Como vemos, todo TRINOMIO CUADRADO PERFECTO es idéntico al CUADRADO DE UN BINOMIO. Dicho en otras palabras:

la factorización de un trinomio cuadrado perfecto es el cuadrado de un binomio.

Pero, ¿ cómo sabemos cuándo un trinomio es cuadrado perfecto ? Para contestar la pregunta miremos de nuevo los trinomios $9x^4 + 12x^2y + 4y^2$ y $49a^2 - 42ab + 9b^2$:





- El análisis anterior nos permite concluir que todo trinomio cuadrado perfecto posee dos características:
  1. DOS de sus términos son POSITIVOS y poseen RAÍZ CUADRADA POSITIVA.
  2. El otro término puede ser positivo o negativo y es igual a DOS VECES (O EL DOBLE) el producto de las raíces cuadradas de los otros dos términos.

APRENDAMOS

FACTORIZACIÓN DE UN TRINOMIO CUADRADO PERFECTO

- Todo TRINOMIO CUADRADO PERFECTO es idéntico a un BINOMIO AL CUADRADO.
- Los dos términos que forman el binomio son las raíces cuadradas positivas de dos de los tres términos del trinomio.
- El signo del binomio coincide con el signo que antecede al doble producto de las dos raíces cuadradas obtenidas.

Ejemplo 1:

Factoricemos en Q el polinomio $16x^2 - 40x + 25$

Solución:

- En primer lugar, chequeemos si el polinomio tiene algún factor común. El M.C.D. de 16, 40 y 25 es 1; por lo tanto, no hay factor común numérico. Tampoco hay factor común literal porque la única letra es x y ésta no aparece en el tercer término.
- Ahora bien, el polinomio es un trinomio. ¿Será un trinomio cuadrado perfecto ? Veamos:

  $16x^2$ es el cuadrado de $4x$; 25 es el cuadrado de 5

  $40x$ es el doble producto de $4x$ por 5: $2(4x)(5) = 40x$

- Por lo tanto:

  $$16x^2 - 40x + 25 = (4x - 5)^2 \quad \text{o} \quad 16x^2 - 40x + 25 = (5 - 4x)^2$$

- Pregunta: ¿ Es este trinomio factorizable en Z ?.

Ejemplo 2:

Factoricemos en Q el polinomio $16m^4 + 56m^2n^3 + 49n^6$

Solución:

- ¿ Tiene el polinomio algún factor común ? Podemos comprobar que NO.
- ¿ Es el polinomio un trinomio cuadrado perfecto? Veamos si cumple con las condiciones:

  $16m^4$ es el cuadrado de $4m^2$; $49n^6$ es el cuadrado de $7n^3$

  $56m^2n^3$ es el doble producto de $4m^2$ por $7n^3$: $2(4m^2)(7n^3) = 56m^2n^3$

- Por lo tanto:

  $$16m^4 + 56m^2n^3 + 49n^6 = (4m^2 + 7n^3)^2$$

Ejemplo 3:

Factoricemos en Q el polinomio $36t + ta^2 - 12at$

Solución:

- Un primer examen del polinomio nos muestra que tiene un factor común: t. Por lo tanto:

  $$36t + ta^2 - 12at = t(36 + a^2 - 12a)$$

- ¿ Será posible factorizar el polinomio que nos quedó dentro del paréntesis ? Como es un trinomio, analicemos si es trinomio cuadrado perfecto. Veamos:

  36 es el cuadrado de 6 ; a^2 es el cuadrado de a

  12a es el doble producto de 6 por a: $2(6)(a) = 12a$

- Por lo tanto:

$$36 + a^2 - 12a = (6 - a)^2 \quad \text{y} \quad 36t + ta^2 - 12at = t(6 - a)^2$$

EJERCICIO 6.3

En los ejercicios 1. a 8. indica cuáles de los polinomios dados son trinomios cuadrados perfectos.

1. $x^2 + 5x + 9$
2. $a^4 + 14a^2 + 49$
3. $m^6 - 4m^3n^2 + 4n^4$
4. $z^4 + 5z^2 + 6$
5. $p^4 - 2\sqrt{5}\,p^2 + 5$
6. $x^6 + 6x^3 - 9$
7. $a^{10} + 2a^5b^4 + b^8$
8. $x^4 + 4x + 4$

En los ejercicios 9. a 18., completa el término que falta para que el trinomio sea cuadrado perfecto.

9. $a^2 + 4ab +$ ____
10. $m^6 +$ ____ $+ 64$
11. $16m^2 + 40mn^2 +$ ____
12. $p^4 -$ ____ $+ q^2$
13. $81x^2 - 18xy +$ ____
14. $16t^2 +$ ____ $+ 49$
15. ____ $+ 4xy + y^2$
16. $25z^2 + 30yz +$ ____
17. ____ $- 80a + 16$
18. $x^2 - 2\sqrt{3}\,x +$ ____

En los ejercicios 19. a 30., factorizar los polinomio dados en el conjunto Q

19. $25a^2 + 40ab + 16b^2$
20. $100 + 121m^2 + 220m$
21. $x^2y^2 + 81 - 18xy$
22. $12pq + 4q^2 + 9p^2$
23. $5a^2 + 10a + 5$
24. $2x^2 - 28x + 98$
25. $24a^2 - 24a + 6$
26. $9ay^2 + 6ay + a$
27. $(x + 1)^2 - 4(x + 1) + 4$
28. $(m + n)^2 + 6(p + q)(m + n) + 9(p + q)^2$
29. $20a^5b - 120a^3b^4 + 180ab^7$
30. $12x^3y^2a - 2x^5ya - 18xy^3a$

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 2

Qué debemos colocar en el □ : ¿ > , < , ó = ?

$$1 + 3 + 5 + \ldots 89 \;\square\; 2001$$

6.6 DIFERENCIA DE CUADRADOS

EXPERIENCIA

- Desarrolla los siguientes productos notables:

  $(a + 5)(a - 5) =$; $(2x - 3y)(2x + 3y) =$; $\left(\frac{2}{3}x^2 - 5\right)\left(\frac{2}{3}x^2 + 5\right) =$

- ¿ Cuál es el desarrollo del producto de una suma por una diferencia de dos términos ?
- Son ciertas las siguientes igualdades ?

  $a^2 - 25 = (a + 5)(a - 5)$; $4x^2 - 9y^2 = (2x - 3y)(2x + 3y)$; $\frac{4}{9}x^4 - 25 = \left(\frac{2}{3}x^2 + 5\right)\left(\frac{2}{3}x^2 - 5\right)$

  ¿ Por qué ?

- CONCLUSIÓN: toda diferencia de dos cuadrados es idéntica a la suma por la diferencia de las raíces cuadradas de los términos dados.

APRENDAMOS

FACTORIZACIÓN DE UNA DIFERENCIA DE CUADRADOS

Una DIFERENCIA DE CUADRADOS es igual al producto de la suma por la diferencia de las raíces cuadradas de los términos; es decir: $\mathbf{a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)}$

Ejemplo 1:

Factoricemos en Q el polinomio $144x^4 - 121y^6$

Solución:

- ¿ Factor común? No hay (¡comprobarlo!)
- ¿ Trinomio cuadrado perfecto ? No es porque sólo tiene dos términos.
- ¿ Diferencia de cuadrados ? Es posible. Veamos:

  $144x^4$ es el cuadrado de $12x^2$; $121y^6$ es el cuadrado de $11y^3$

- Por lo tanto, es una diferencia de cuadrados y, en consecuencia:

$$144x^4 - 121y^6 = (12x^2 + 11y^3)(12x^2 - 11y^3)$$

Ejemplo 2:

Factoricemos en Q el polinomio $\frac{m^2}{25} - \frac{n^2}{49}$

Solución:

- ¿ Factor común ? No tiene
- Trinomio cuadrado perfecto ? No es.
- ¿ Diferencia de cuadrados ? Analicemos:

$\frac{m^2}{25}$ es el cuadrado de $\frac{m}{5}$; $\frac{n^2}{49}$ es el cuadrado de $\frac{n}{7}$

- Luego, el polinomio es una diferencia de cuadrados y, por lo tanto:

$$\frac{m^2}{25} - \frac{n^2}{49} = \left(\frac{m}{5} + \frac{n}{7}\right)\left(\frac{m}{5} - \frac{n}{7}\right)$$

Ejemplo 3:

Factoricemos en Q el polinomio $a^2 - (3 + b)^2$

Solución:

- El polinomio es una diferencia de cuadrados en la cual:

a^2 es el cuadrado de a ; $(3 + b)^2$ es el cuadrado de $(3 + b)$

- Por lo tanto:

$$a^2 - (3 + b)^2 = [a + (3 + b)][a - (3 + b)]$$
$$\therefore a^2 - (3 + b)^2 = (a + b + 3)(a - b - 3)$$

Ejemplo 4:

Factoricemos en Q el polinomio $(x + y)^2 - (2x - 3y)^2$

Solución:

- De nuevo tenemos una diferencia de cuadrados en la cual:

$(x + y)^2$ es el cuadrado de $(x + y)$; $(2x - 3y)^2$ es el cuadrado de $(2x - 3y)$

- Por lo tanto:

$$(x + y)^2 - (2x - 3y)^2 = [(x + y) + (2x - 3y)][(x + y) - (2x - 3y)]$$
$$\therefore (x + y)^2 - (2x - 3y)^2 = [x + y + 2x - 3y][x + y - 2x + 3y]$$
$$\therefore (x + y)^2 - (2x - 3y)^2 = (3x - 2y)(4y - x)$$

Ejemplo 5:

Factoricemos en Q el polinomio $5x^3 - 125xy^2$

Solución:

- ¿ Tiene factor común ? Sí, es 5x. Por lo tanto: $5x^3 - 125xy^2 = 5x(x^2 - 25y^2)$
- ¿ Es posible factorizar el binomio $x^2 - 25y^2$? Sí, porque es una diferencia de cuadrados. Por lo tanto:

$$5x^3 - 125xy^2 = 5x(x + 5y)(x - 5y)$$

Ejemplo 6:

Factoricemos en Q el polinomio $(a^2 + 2ab + b^2) - (4x^2 - 12xy + 9y^2)$

Solución:

- Observemos que cada paréntesis contiene un trinomio cuadrado perfecto. Por lo tanto:

$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$; $4x^2 - 12xy + 9y^2 = (2x - 3y)^2$

- Luego:

$$(a^2 + 2ab + b^2) - (4x^2 - 12xy + 9y^2) = (a + b)^2 - (2x - 3y)^2$$

- Ahora bien, el proceso de factorización aún no se ha realizado ya que aparece la diferencia de dos términos. Y como estos términos son cuadrados, entonces tenemos una DIFERENCIA DE CUADRADOS; por lo tanto:

$$(a + b)^2 - (2x - 3y)^2 = [(a + b) + (2x - 3y)][(a + b) - (2x - 3y)]$$
$$\therefore (a + b)^2 - (2x - 3y)^2 = [a + b + 2x - 3y][a + b - 2x + 3y]$$

Ejemplo 7:

Factoricemos en Q y en R el polinomio $3a^2 - 5b^4$

Solución:

- Tenemos una diferencia de cuadrados. En efecto:

  $3a^2$ es el cuadrado de $\sqrt{3}a$; $5b^4$ es el cuadrado de $\sqrt{5}\,b^2$

- Por lo tanto:

$$3a^2 - 5b^4 = (\sqrt{3}\,a + \sqrt{5}\,b^2)(\sqrt{3}\,a - \sqrt{5}\,b^2)$$

- Ahora bien, cada uno de estos factores contiene coeficientes que no son números racionales ($\sqrt{3}$ y $\sqrt{5}$ son números irracionales). Esto significa que el polinomio $3a^2 - 5b^4$ es PRIMO en Q ; sin embargo, sí es factorizable en R.

EJERCICIO 6.4

En los ejercicios 1. a 30. factorizar los polinomios dados en el conjunto Q de los números racionales. Recordemos que todas las letras representan números reales POSITIVOS.

1. $a^2 - 36$
2. $x^2 - 9b^2$
3. $m^2 - \frac{4}{9}$
4. $36p^2 - 49q^2$
5. $m^2a^2 - n^2b^2$
6. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$
7. $a^{2x} - b^{2y}$
8. $m^4n^4 - 256p^8$ (3 factores)
9. $a^4 - 625$ (3 factores)
10. $81p^4 - q^4$ (3 factores)
11. $x^4a^2 - 625a^6$ (4 factores)
12. $(3a - 7)^2 - (2a - 7)^2$
13. $(z - p)^2 - (z + q)^2$
14. $(a^2 - 8a + 16) - b^2$
15. $9a^2b^2c^2 - 4x^2y^2z^2$
16. $(x^2 + 8x + 16) - (y^2 + 2y + 1)$
17. $9x^2 - (y^2 - 2my + m^2)$
18. $(36t^2 - 36ts + 9s^2) - 4m^2$
19. $(a^2b^2 - 2ab + 1) - (36x^2 - 12ax + a^2)$
20. $(4 - x)^2 - x^6$
21. $(x - y + 1)^2 - (1 - x - y)^2$
22. $x^2 - a^2 + 4a - 4$
23. $2xy - x^2 - y^2 + 1$
24. $x^2 - 9a^2 + 81y^2 + 24ab - 18xy - 16b^2$
25. $\frac{(a-b)^2}{25} - \frac{(a+b)^2}{36}$
26. $4(p - q)^2 - 16(p + q)^2$
27. $11x^4 - 30y^2$
28. $5a^2 - 13b^4$
29. $\frac{(x+y)^2}{15} - \frac{(x-y)^2}{12}$
30. $12(a + b)^2 - 16(a - b)^2$

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 3

Reconstruye la siguiente adición:

$$\begin{array}{rccc}
 & A & B & A \\
+ & B & C & C \\
+ & A & C & A \\
\hline
2 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

6.7 SUMA DE CUADRADOS

EXPERIENCIA

- En la sección anterior aprendimos a factorizar diferencias de cuadrados. Ahora queremos saber si es posible factorizar sumas de cuadrados como las siguientes:

$$a^2 + b^2 \quad ; \quad x^4 + 9y^4 \quad ; \quad 16x^8 + 25y^2$$

- En realidad, ninguno de los productos notables estudiados en la unidad anterior origina una suma de cuadrados. Por lo tanto, debemos recurrir un poco a la creatividad para dar respuesta a la inquietud planteada en el punto anterior.

- Una manera de abordar el problema es considerar una suma de cuadrados como un trinomio cuadrado perfecto al que le falta el término correspondiente al **DOBLE PRODUCTO DE LA RAÍZ CUADRADA DEL PRIMERO POR LA RAÍZ CUADRADA DEL SEGUNDO.** Consideremos cada caso:

* $a^2 + b^2$
  - Ambos términos tienen raíz cuadrada: a y b
  - El doble producto de las raíces cuadradas es 2ab

Si sumamos y restamos este término a $a^2 + b^2$ tendríamos:

$$a^2 + b^2 + 2ab - 2ab = (a^2 + 2ab + b^2) - 2ab = (a + b)^2 - 2ab$$

Pero, $(a + b)^2 - 2ab$ no se deja descomponer en factores que sean a su vez polinomios reales (¿ por qué ?). Por lo tanto, $a^2 + b^2$ es un polinomio primo en los reales.

* $x^4 + 9y^4$
  - Ambos términos tienen raíz cuadrada: x^2 y $3y^2$
  - El doble producto de las raíces cuadradas es $2(x^2) (3y^2) = 6x^2y^2$

Si sumamos y restamos $6x^2y^2$ a $x^4 + 9x^4$ nos quedaría:

$$x^4 + 9y^4 + 6x^2y^2 - 6x^2y^2 = (x^4 + 6x^2y^2 + 9y^4) - 6x^2y^2 = (x^2 + 3y^2)^2 - 6x^2y^2$$

Esta última expresión es una diferencia de cuadrados, la cual ya sabemos factorizar; así:

$$\begin{aligned}(x^2+ 3y^2)^2 - 6x^2y^2 &= \left[(x^2+ 3y^2) + \sqrt{6}\ xy \right] \left[(x^2+ 3y^2) - \sqrt{6}\ xy \right] \\ &= \left[x^2 + \sqrt{6}\ xy + 3y^2 \right] \left[x^2 - \sqrt{6}\ xy + 3y^2 \right]\end{aligned}$$

Notemos que el polinomio estaba definido en los enteros; en cambio, los factores resultantes son polinomios cuyos coeficientes no son ni enteros, ni racionales: son reales. Por lo tanto, este polinomio es factorizable en los reales, pero no en los enteros ni en los racionales.

* Dejaremos como ejercicio para el lector el análisis de la factorización del polinomio $16x^8 + 25y^2$.

- Por lo tanto:

APRENDAMOS

CRITERIO PARA FACTORIZAR SUMAS DE CUADRADOS

Para saber si una suma de cuadrados es factorizable (o no) al menos en el conjunto de los números reales, es necesario completar al trinomio cuadrado perfecto, sumando y restando el término correspondiente al doble producto de las raíces cuadradas de los términos dados. Si después de este proceso se obtiene una diferencia de cuadrados, entonces el polinomio es factorizable al menos en los reales; en caso contrario, el polinomio es primo.

EJERCICIO 6.5

Factoriza, cuando sea posible, los siguientes polinomios e indica los conjuntos en que se pueden factorizar y aquellos en los cuales son primos:

1. $9x^2 + 25y^2$
2. $16a^4b^4 + 1$
3. $36x^8 + 4y^8z^8$
4. $4x^6 + 9y^6$
5. $1 + 4x^2y^4$
6. $49x^6y^4 + x^2y^2$

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 4

¿Cuáles de los siguientes números enteros no son iguales al producto de tres números enteros consecutivos?

-6 , -1 , 0 , 1 , 6

6.8 TRINOMIOS DE LA FORMA $X^{2n} + bx^n + c$ con $n \in N$ y $b, c \in Z$

EXPERIENCIA

- Cuando multiplicamos ciertos binomios es posible identificar algunas características entre sus términos y los coeficientes del desarrollo. Por ejemplo:

$$(x + 3)(x + 4) = x^2 + (3 + 4)x + (3)\bullet(4)$$
$$(x^2 - 8)(x^2 + 3) = (x^2)^2 + (-8 + 3)x^2 + (-8)\bullet(3)$$
$$(a^3 + 5)(a^3 - 3) = (a^3)^2 + (5 - 3)a^3 + (5)\bullet(3)$$
$$(u^4 - 5)(u^4 - 2) = (u^4)^2 + (-5 - 2)u^4 + (-5)\bullet(-2)$$

- Observamos algunos detalles interesantes en estas igualdades:

  1. Los primeros términos de cada binomio son iguales.

2. Al multiplicar estos binomios obtenemos trinomios con las siguientes características
   * El primer término del trinomio resulta de elevar al cuadrado el primer término de cada binomio.
   * El segundo término del trinomio tiene por coeficiente la suma algebraica de los segundos términos de cada binomio y por variable el primer término de los binomios
   * El tercer término del trinomio es el producto de los segundos términos de cada binomio.

3. Todos los trinomios obtenidos presentan la forma:

$$\mathbf{x^{2n} + bx^n + c} \qquad (1)$$

¿ Qué son x^{2n}, b y c en estos trinomios ?

- Con el análisis que acabamos de realizar, ya estamos listos para factorizar trinomios de la forma (1). Escribamos las recíprocas de las igualdades anteriores:

$$x^2 + 7x + 12 = x^2 + (3+4)x + (3)\bullet(4) = (x + 3)(x+4)$$
$$x^4 - 5x^2 - 24 = (x^2)^2 + (-8+3)x^2 + (-8)\bullet(3) = (x^2 - 8)(x^2 + 3)$$
$$a^6 + 2a^3 - 15 = (a^3)^2 + (5 - 3)a^3 + (5)\bullet(-3) = (a^3 + 5)(a^3 - 3)$$
$$u^8 - 7u^4 + 10 = (u^4)^2 + (-5 - 2)u^4 + (-5)\bullet(-2) = (u^4 - 5)(u^4 - 2)$$

- Por lo tanto:

APRENDAMOS

FACTORIZACIÓN DE TRINOMIOS DE LA FORMA $x^{2n} + bx^n + c$

- Todo trinomio de la forma $\mathbf{x^{2n} + bx^n + c}$ que sea factorizable en los reales es idéntico al producto de dos binomios:

$$\mathbf{x^{2n} + bx^n + c = (\qquad)(\qquad)}$$

- El primer término de cada binomio es $\sqrt{x^{2n}} = x^n$ (recuerde que estamos suponiendo que x siempre es positivo).
- Los segundos términos de cada binomio son dos números **p** y **q** cuya suma es igual a **b** y cuyo producto es igual a **c**; es decir:

$$x^{2n} + \underbrace{(p+q)}_{b}x^n + \underbrace{(p\cdot q)}_{c} = \left(x^n + p\right)\left(x^n + q\right)$$

¡ATENCIÓN!

1. No siempre es fácil encontrar los dos números p y q que sumados den b y que multiplicados den c. Es más: posiblemente ni siquiera existan; esto se debe a que el trinomio dado no es factorizable en los enteros y, probablemente tampoco lo sea en los reales.
2. Más adelante daremos un criterio para saber cuándo un trinomio de la forma $\mathbf{x^{2n} + bx^n + c}$ es factorizable o no en los reales.
3. En los ejemplos siguientes factorizaremos trinomios de la forma $\mathbf{x^{2n} + bx^n + c}$ cuyos factores son polinomios de primer grado con coeficientes enteros.

Ejemplo 1:

Factoricemos en Z el polinomio $x^2 + 6x + 8$.

Solución:

- ¿ Tiene factor común ? No.
- ¿ Es trinomio cuadrado perfecto? Veamos:

x^2 es el cuadrado de x. ; 8 es el cuadrado de $\sqrt{8}$.

El doble producto de x por $\sqrt{8}$ es $2\sqrt{8}\,x \neq 6x$

Luego, no es un trinomio cuadrado perfecto.

- ¿ Es un trinomio de la forma $x^{2n} + bx^n + c$ en Z ? Veamos:
  - Expresemos el término independiente (8) como el producto de dos factores en todas las formas posibles: $8 = (8)\cdot(1) = (4)\cdot(2) = (-8)\cdot(-1) = (-4)\cdot(-2)$
  - Ahora analicemos cuál pareja de factores, al sumarlos, nos da como resultado el coeficiente de x (6 en este caso):

Productos posibles	Sumas obtenidas
$(8) \bullet (1) = 8$	$8 + 1 = 9$
$(4) \bullet (2) = 8$	$4 + 2 = 6$
$(-8) \bullet (-1) = 8$	$(-8) + (-1) = -9$
$(-4) \bullet (-2) = 8$	$(-4) + (-2) = -6$

  - En el cuadro resaltado aparecen los dos números que sumados dan 6 y cuyo producto es 8: son 4 y 2. Por lo tanto: $x^2 + 6x + 8 = (x + 4)(x + 2)$

Ejemplo 2:

Factoricemos en Z el polinomio $x^2 - 9x + 20$

Solución:

- El polinomio no tiene factor común ni es un trinomio cuadrado perfecto (¡comprobarlo!)
- Este polinomio es un trinomio de la forma $\mathbf{x^{2n} + bx^n + c}$. Debemos buscar dos números enteros cuyo producto es 20 y cuya suma es -9. El siguiente cuadro nos muestra todas las posibilidades:

Productos posibles	Sumas obtenidas
$(20) \bullet (1) = 20$	$20 + 1 = 21$
$(10) \bullet (2) = 20$	$10 + 2 = 12$
$(5) \bullet (4) = 20$	$5 + 4 = 9$
$(-20) \bullet (-1) = 20$	$(-20) + (-1) = -21$
$(-10) \bullet (-2) = 20$	$(-10) + (-2) = -12$
$(-5) \bullet (-4) = 20$	$(-5) + (-4) = -9$

- Los números buscados son (-5) y (-4). Por lo tanto: $x^2 - 9x + 20 = (x - 5)(x - 4)$

Ejemplo 3:

Factoricemos en Z el polinomio $z^2 + 4z - 12$

Solución:

- El polinomio no tiene factores comunes ni es un trinomio cuadrado perfecto (¡comprobarlo!).

- Este polinomio es un trinomio de la forma $x^{2n} + bx^n + c$. Debemos buscar dos números enteros cuyo producto es -12 y cuya suma es 4. Analicemos todas las posibilidades en el siguiente cuadro:

Productos posibles	Sumas obtenidas
$(12)\bullet(-1) = -12$	$12 + (-1) = 11$
$(6) \bullet (-2) = -12$	$6 + (-2) = 4$
$(4) \bullet (-3) = -12$	$4 + (-3) = 1$
$(-4) \bullet (3) = -12$	$(-4) + 3 = -1$
$(-6) \bullet (2) = -12$	$(-6) + 2 = -4$
$(-12) \bullet (1) = -12$	$(-12) + 1 = -11$

- Los números buscados son 6 y (-2). Por lo tanto: $z^2 + 4z - 12 = (z + 6)(z - 2)$

Ejemplo 4:

Factoricemos en Z el polinomio $m^4 - 3m^2 - 28$

Solución:

- El polinomio no tiene factores comunes ni es un trinomio cuadrado perfecto.
- Notemos que $m^4 - 3m^2 - 28$ podemos escribirlo en la forma $(m^2)^2 - 3(m^2) - 28$, con lo cual nos queda un trinomio de la forma $x^{2n} + bx^n + c$.
- Para factorizarlo debemos buscar dos números cuyo producto sea -28 y cuya suma sea -3. Como el producto es negativo, entonces los dos números deben tener signos contrarios. Por lo tanto:

Productos posibles	Sumas obtenidas
$(-28)\bullet(1) = -28$	$(-28) + 1 = -27$
$(-14)\bullet(2) = -28$	$(-14) + 2 = -12$
$(-7) \bullet (4) = -28$	$(-7) + 4 = -3$

- Luego, los números buscados son (-7) y 4. Por lo tanto: $m^4 - 3m^2 - 28 = (m^2 - 7)(m^2 + 4)$

¡ATENCIÓN!

En la práctica no es necesario elaborar una tabla para buscar los números que necesitamos. Podemos hallarlos por simple inspección o descomponiendo el número (28, en este caso) en factores primos; así:

$$\begin{array}{r|l} 28 & 2 \\ 14 & 2 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} 2 \\ 2 \end{array}\right\} \longrightarrow \text{un factor es } (2) \bullet (2) = 4 \\ 7 \} \longrightarrow \text{el otro factor es } (7) \end{array}$$

Ejemplo 5:

Factoricemos en Z el polinomio $y^6 + 15y^3 + 54$

Solución:

- El polinomio es un trinomio de la forma $x^{2n} + bx^n + c$ ya que podemos escribirlo así:

$$(y^3)^2 + 15(y^3) + 54.$$

- Debemos buscar dos números cuyo producto sea 54 y cuya suma sea 15. Es probable que no sea fácil obtenerlos por simple inspección. Por esta razón vamos a descomponer a 54 en factores primos; así:

54	2
27	3
9	3
3	3
1	

$\left.\begin{matrix}2\\3\end{matrix}\right\} \Rightarrow (2)\cdot(3) = 6$

$\left.\begin{matrix}3\\3\end{matrix}\right\} \Rightarrow (3)\cdot(3) = 9$

Estos dos números suman 15 y su producto es 54

- Por lo tanto, $y^6 + 15y^3 + 54 = (y^3 + 9)(y^3 + 6)$

Ejemplo 6:

Factoricemos en Z el polinomio $t^3 + 2t^2 - 63t$

Solución:

- ¿Tiene este polinomio un factor común? Sí: un factor común literal es t. Por lo tanto:

$$t^3 + 2t^2 - 63t = t(t^2 + 2t - 63)$$

- Como el factor $t^2 + 2t - 63$ es un trinomio de la forma $x^{2n} + bx^n + c$, debemos buscar dos números enteros cuyo producto es -63 y cuya suma sea 2. Estos números son 9 y -7. Por lo tanto:

$$t^3 + 2t^2 - 63t = t(t + 9)(t - 7)$$

Ejemplo 7:

Factoricemos en Z el polinomio $a^2b^2 + 4abc - 21c^2$.

Solución:

- El polinomio es un trinomio de la forma $x^{2n} + bx^n + c$ ya que podemos escribirlo así:

$$(ab)^2 + 4c(ab) - 21c^2.$$

- Debemos, pues, buscar dos números cuyo producto sea $-21c^2$ y cuya suma sea 4c. Como el producto es negativo, entonces los números buscados tienen signo contrario. Estos números son: 7c y -3c. Por lo tanto: $(ab + 7c)(ab - 3c)$

EJERCICIO 6.6

En los ejercicios 1. a 22. factorizar cada polinomio en el conjunto Z de los números enteros.

1. $x^2 + 12x + 32$
2. $w^2 + 14w + 45$
3. $y^2 - 2y - 63$
4. $m^2 - 13m - 68$
5. $p^2 + 2p - 15$
6. $-x^2 - 14x - 49$
7. $y^2 + 6y - 216$
8. $m^4 + 7m^2 + 10$
9. $x^2 - 8xy + 16y^2$
10. $t^4 + 6t^2 + 9$
11. $p^3 + 13p^2 + 42p$
12. $4a^3 + 20a^2 + 16a$
13. $a^2b^2 - 3abc - 10c^2$
14. $7^{2x} - 4(7^x) + 4$; con $x \in N$
15. $6^{2p} - 6^p - 20$; con $p \in N$
16. $5^{2t} + 2(5^t) + 1$; con $t \in N$
17. $m^2 - 12m^2n + 36m^2n^2$
18. $(x - y)^2 + 6(x - y) + 5$
19. $(a + b)^2 - 2(a + b) - 48$
20. $(p - 3)^2 + 5(p - 3) - 204$
21. $(3 - m)^4 + 24(3 - m)^2 - 25$
22. $(w + 5)^2 + 3(w + 5) - 108$

23. El área de un rectángulo es $x^2 - 2x - 35$ unidades cuadradas. Si su base mide $x - 7$ unidades de longitud, ¿ Cuánto mide su altura ?

24. El área de un triángulo mide $x^2 + 6x - 16$ unidades cuadradas. Si su altura mide $x + 8$ unidades de longitud. ¿ Cuánto mide su base ?

25. El área de un rectángulo mide $a^2 - 9a + 20$ unidades cuadradas. Si su base mide $a - 5$ unidades de longitud. ¿ Cuánto mide su altura ?

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 5

ABCDE es un número de cinco dígitos tales que $A<B<C<D<E$ y $A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + E^2 = 100$. ¿Cuál número es ABCDE?

6.9 TRINOMIOS DE LA FORMA $ax^{2n} + bx^n + c$ con $a,b,c \in Z$

EXPERIENCIA

- En la sección anterior factorizamos trinomios de la forma $x^{2n} + bx^n + c$. Estos trinomios se caracterizan porque el coeficiente del término x^{2n} es 1. En esta sección, vamos a factorizar trinomios en los cuales el coeficiente de x^{2n} es un número entero diferente de 1. Estos son algunos ejemplos:

$4x^2 + 23x + 15$; $2a^2 + 9a - 35$; $5x^4 - 17x^2 - 12$; $8m^6 - 26m^3 + 21$

- Vamos a estudiar dos maneras de factorizar (cuando sea posible) estos trinomios en el conjunto Z de los números enteros.

PRIMERA FORMA

- Estos trinomios se dejan factorizar en Z (cuando es posible) llevándolos a la forma $y^{2n} + by^n + c$; así:

Paso 1.: Multiplicamos y dividimos a $ax^{2n} + bx^n + c$ por el coeficiente de x^{2n} que es a; es decir:

$$ax^{2n} + bx^n + c = \frac{a(ax^{2n} + bx^n + c)}{a}$$

$$\therefore\ ax^{2n} + bx^n + c = \frac{a^2x^{2n} + abx^n + ac}{a}$$

Paso 2.: Como $a^2x^{2n} = (ax^n)^2$, entonces hagamos $ax^n = y$ (ésto se llama un CAMBIO DE VARIABLE). Por lo tanto:

$$ax^{2n} + bx^n + c = \frac{(ax^n)^2 + b(ax^n) + ac}{a}$$

$$\therefore\ ax^{2n} + bx^n + c = \frac{y^2 + by + ac}{a}$$

Paso 3.: El trinomio $y^2 + by + ac$ es de la forma $x^{2n} + bx^n + c$ y lo podemos factorizar como aprendimos en la sección anterior.

Paso 4.: ¿ Qué hacemos con el factor **a** del denominador ? La respuesta es la siguiente: Siempre será posible sacar un factor común numérico de uno de los dos factores del numerador o de los dos, de tal manera que simplifiquen el factor **a** del denominador.

- Los siguientes ejemplos nos aclararán todo el proceso que hemos descrito en los pasos anteriores.

Ejemplo 1:

Factoricemos en Z el polinomio $5x^2 + 29x + 20$

Solución:

- Tengamos en cuenta los pasos que acabamos de dar:

Paso 1: Multiplicamos y dividimos por 5 (que es el coeficiente de x^2) el trinomio dado:

$$5x^2 + 29x + 20 = \frac{5(5x^2 + 29x + 20)}{5}$$

$$\therefore\ 5x^2 + 29x + 20 = \frac{5^2x^2 + 29(5x) + 100}{5}$$

$$\therefore\ 5x^2 + 29x + 20 = \frac{(5x)^2 + 29(5x) + 100}{5}$$

Paso 2: Hagamos un cambio de variable. Sea $y = 5x$. Por lo tanto:

$$5x^2 + 29x + 20 = \frac{y^2 + 29y + 100}{5}$$

$$\therefore\ 5x^2 + 29x + 20 = \frac{(y + 25)(y + 4)}{5}$$

Paso 3: Devolvamos el cambio de variable:

$$5x^2 + 29x + 20 = \frac{(5x + 25)(5x + 4)}{5}$$

Paso 4: Como el factor ($5x + 25$) tiene factor común 5, entonces:

$$5x^2 + 29x + 20 = \frac{\cancel{5}(x + 5)(5x + 4)}{\cancel{5}}$$

$$\therefore\ 5x^2 + 29x + 20 = (x + 5)(5x + 4)$$

- Por lo tanto: $5x^2 + 29x + 20 = (x + 5)(5x + 4)$

Ejemplo 2:

Factoricemos en Z el polinomio $3x^2 + 20x - 32$

Solución:

- Aplicando los pasos descritos anteriormente, tenemos:

$$3x^2 + 20x - 32 = \frac{3^2x^2 + 20(3x) - 96}{3}$$ .... multiplicamos y dividimos por 3

$$\therefore 3x^2 + 20x - 32 = \frac{(3x)^2 + 20(3x) - 96}{3}$$ .... porque $3^2x^2 = (3x)^2$

$$\therefore 3x^2 + 20x - 32 = \frac{y^2 + 20y - 96}{3}$$ .... cambiamos 3x por y

$$\therefore 3x^2 + 20x - 32 = \frac{(y + 24)(y - 4)}{3}$$ .... ¿ por qué?

$$\therefore 3x^2 + 20x - 32 = \frac{(3x + 24)(3x - 4)}{3}$$ .... devolvemos el cambio $y = 3x$

$$\therefore 3x^2 + 20x - 32 = \frac{\cancel{3}(x + 8)(3x - 4)}{\cancel{3}}$$ .... sacamos factor común 3 del factor $3x+24$

- Luego, $3x^2 + 20x - 32 = (x + 8)(3x - 4)$

Ejemplo 3:

Factoricemos en Z el polinomio $15z^3 - 9z^2 - 6z$

Solución:

- En primer lugar, observemos que $15z^3 - 9z^2 - 6z$ tiene un factor común: 3z. Por lo tanto:

$$15z^3 - 9z^2 - 6z = 3z(5z^2 - 3z - 2)$$

Ahora aplicamos el trinomio $5z^2 - 3z - 2$ los pasos indicados anteriormente:

$$15z^3 - 9z^2 - 6z = \frac{3z\,[\,5^2z^2 - 3\,(5z) - 10]}{5} \;\cdots\cdots\cdots\cdots \text{¿ por qué ?}$$

$$\therefore 15z^3 - 9z^2 - 6z = \frac{3z\,[\,(5z)^2 - 3\,(5z) - 10]}{5} \;\cdots\cdots\cdots\cdots 5^2\,z^2 = (5z)^2$$

$$\therefore 15z^3 - 9z^2 - 6z = \frac{3z\,[\,(5z - 5)\,(5z + 2)]}{5} \;\cdots\cdots\cdots\cdots \text{¿ por qué ?}$$

$$\therefore 15z^3 - 9z^2 - 6z = \frac{3z\,[\cancel{5}(z - 1)\,(5z + 2)]}{\cancel{5}} \;\cdots\cdots\cdots\cdots \text{¿ por qué ?}$$

$$\therefore 15z^3 - 9z^2 - 6z = 3z(z - 1)(5z + 2) \;\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{¿ por qué ?}$$

- Por lo tanto: $15z^3 - 9z^2 - 6z = 3z(z - 1)(5z + 2)$

SEGUNDA FORMA

Debemos insistir en que la gran mayoría de trinomios **con coeficientes enteros** de la forma $x^{2n} + bx^n + c$ o $ax^{2n} + bx^n + c$ no tienen factores con coeficientes enteros y por lo tanto son primos en Z. En efecto, si a, b y c los elegimos al azar en el conjunto Z, la probabilidad de que el polinomio no tenga factores con coeficientes enteros es mucho más grande que la probabilidad de que los tenga. Entonces vale la pena saber si un polinomio en Z es primo antes de comenzar a buscar sus factores. Con este fin, describiremos un método, llamado **PRUEBA CON ac PARA LA FACTORIZACIÓN**, que no sólo nos indica si es posible factorizar con coeficientes enteros los polinomios, sino que también nos ofrece una forma directa de factorizar tales trinomios en Z, cuando es posible. La prueba consiste en lo siguiente:

Paso 1.: En el trinomio $ax^{2n} + bx^n + c$ hallamos el producto ac.

Paso 2.: Si el producto **ac** tiene dos factores enteros **p** y **q** tales que **p + q** sea igual a **b** (coeficiente del término central), entonces el trinomio puede descomponerse en dos factores de primer grado con coeficientes enteros. Si los factores p y q no pueden hallarse entonces el trinomio no tiene factores de primer grado con coeficiente enteros.

Paso 3.: Después de encontrar los enteros **p** y **q** necesarios para la prueba con ac, procedemos a escribir el trinomio $ax^{2n} + bx^n + c$ en la forma $ax^{2n} + px^n + qx^n + c$ y factorizamos por agrupación de términos.

Aclaremos todo este proceso con algunos ejemplos.

Ejemplo 1:

Factoricemos en Z, si es posible, el trinomio $2x^2 + 11x - 6$

Solución:

- Realicemos la prueba ac para la factorización: $ac = (2)(-6) = -12$

  Debemos encontrar dos factores enteros de (- 12) cuya suma sea $b = 11$. Veamos:

$$-12 = \begin{cases} (-3) \bullet 4 \rightarrow (-3) + 4 = 1 \neq 11 \\ 3 \bullet (-4) \rightarrow 3 + (-4) = -1 \neq 11 \\ (2)\bullet(-6) \rightarrow 2 + (-6) = -4 \neq 11 \\ (-2)\bullet 6 \rightarrow (-2) + 6 = 4 \neq 11 \\ (-1)(12) \rightarrow (-1) + 12 = 11 = 11 \quad \text{¡CUMPLE!} \\ (1)(-12) \end{cases}$$

  Luego, es posible factorizar a $2x^2 + 11x - 6$ en Z

- A continuación, escribimos el término $11x$ como la suma de $-1x$ y $12x$; es decir:

$$2x^2 + 11x - 6 = 2x^2 - x + 12x - 6$$

- A continuación, agrupamos convenientemente y factorizamos; así:

$$\begin{aligned} & 2x^2 + 11x - 6 = 2x^2 - x + 12x - 6 \\ \therefore\ & 2x^2 + 11x - 6 = (2x^2 - x) + (12x - 6) \\ \therefore\ & 2x^2 + 11x - 6 = x(2x - 1) + 6(2x - 1) \\ \therefore\ & 2x^2 + 11x - 6 = (2x - 1)(x + 6) \end{aligned}$$

- Luego, $2x^2 + 11x - 6 = (2x - 1)(x + 6)$

¡ATENCIÓN!

El procedimiento anterior puede reducirse a unos cuantos pasos si eliminamos los comentarios y realizamos mentalmente algunas operaciones. Hagámoslo más rápido.

Ejemplo 2:

Factoricemos: $6x^4 + 5x^2 - 4$ en Z

Solución:

- Calculemos ac: $(6)(-4) = -24$
- Ahora busquemos dos factores de -24 que sumen 5. Probando encontramos que son (8) y (-3). Por lo tanto:

$$\begin{aligned} & 6x^4 + 5x^2 - 4 = 6x^4 + 8x^2 - 3x^2 - 4 \\ \therefore\ & 6x^4 + 5x^2 - 4 = (6x^4 + 8x^2) - (3x^2 + 4) \\ \therefore\ & 6x^4 + 5x^2 - 4 = 2x^2(3x^2 + 4) - (3x^2 + 4) \\ \therefore\ & 6x^4 + 5x^2 - 4 = (3x^2 + 4)(2x^2 - 1) \end{aligned}$$

Ejemplo 3:

Factoricemos: $20a^2 + 48ab - 5b^2$ en Z

Solución:

- Calculemos ac: $(20)(-5b^2) = -100b^2$
- Luego, debemos buscar dos factores de $-100b^2$ que sumen $48b$. Veamos:

$$-100\,b^2 = \begin{cases} (-b)\,(100b) \rightarrow (-b) + (100b) = 99b \neq 48b \\ (-2b)\,(50b) \rightarrow (-2b) + (50b) = 48b \quad \text{¡CUMPLE!} \\ (-4b)\,(25b) \\ (-5b)\,(20b) \\ (-10b)\,(10b) \end{cases}$$

Los números buscados son (-2b) y (50 b). Por lo tanto:

$$20a^2 + 48ab - 5b^2 = 20a^2 - 2ab + 50ab - 5b^2 = (20a^2 - 2ab) + (50ab - 5b^2)$$

$$\therefore 20a^2 + 48ab - 5b^2 = 2a\,(10a - b) + 5b\,(10a - b) = (10a - b)\,(2a + 5b)$$

Ejemplo 4:

Factoricemos: $5x^2 + 7x - 8$ en Z

Solución:

- Calculemos ac: $(5)(-8) = -40$
- Debemos buscar dos factores de (-40) que sumados den 7:

$$-40 = \begin{cases} (-1)\cdot(40) \rightarrow (-1) + 40 = 39 \neq 7 \\ (-2)\cdot(20) \rightarrow (-2) + 20 = 18 \neq 7 \\ (-4)\cdot(10) \rightarrow (-4) + 10 = 6 \neq 7 \\ (-5)\cdot(8) \rightarrow (-5) + 8 = 3 \neq 7 \end{cases}$$

- Como vemos, ninguno de los posibles factores de - 40 da la suma requerida. Por lo tanto, el trinomio $5x^2 + 7x - 8$ no puede descomponerse en dos factores de primer grado con coeficientes enteros; es decir, $5x^2 + 7x - 8$ es un polinomio primo en Z.

EJERCICIO 6.7

Factoriza los siguientes polinomios en los enteros:

1. $(2m)^2 + 4(2m) - 21$
2. $(5a)^2 - 3(5a) - 54$
3. $8x^2 - 22x + 15$
4. $6x^2 - xy - 2y^2$
5. $8p^2 - 45p - 18$
6. $10m^2x^2 + 11m^2x - 35m^2$
7. $72a^2t + 93at - 45t$
8. $10x^4 + 5x^3 - 140x^2$
9. $30m^7 - 55m^5 - 175m^3$
10. $35p^{2x} + 23p^x - 72$
11. $15x^3y + x^2y^2 - 6xy^3$
12. $10m^2 + mp - 2p^2 - 2m - p$
13. $4(a + b)^2 - 5(a + b) - 6$
14. $6a^3b^2 + a^2b^3 - 2ab^4$

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 6

Halla el resultado de la siguiente multiplicación de fraccionarios. No puedes demorarte más de 30 segundos:

$$\frac{1}{100} \times \frac{2}{99} \times \frac{3}{98} \times \ldots \times \frac{99}{2} \times \frac{100}{1} = ?$$

6.10 FACTORIZACIÓN DE TRINOMIOS POR COMPLETACIÓN AL TRINOMIO CUADRADO PERFECTO

- En las dos secciones anteriores aprendimos a factorizar trinomios de la forma $x^{2n} + bx^n + c$ y $ax^{2n} + bx^n + c$, cuando sus factores eran de primer grado y con coeficientes enteros. En esta sección vamos a estudiar un método general que nos permitirá factorizar estos trinomios en el conjunto de los números reales (cuando sean factorizables en este conjunto). Este método general se denomina **completación a un trinomio cuadrado perfecto**. Ya habíamos mencionado este método cuando explicamos la manera de factorizar algunas sumas de cuadrados; en aquella ocasión, el trinomio se completaba sumando y restando el doble producto de las raíces cuadradas de los términos dados. Ahora, la completación la haremos con el tercer término del trinomio.
- Antes de describir el método, a partir de algunas actividades, conviene enunciar una propiedad que nos va a permitir determinar cuando un trinomio de la forma $ax^{2n} + bx^n + c$ es factorizable en los reales. La propiedad dice:

> **PROPIEDAD**
>
> **Un trinomio de la forma $ax^{2n} + bx^n + c$ es factorizable en R si y sólo si la expresión $b^2 - 4ac$ es positiva o cero; en caso contrario, el trinomio no es factorizable en los reales.**

PRIMERA EXPERIENCIA

- Tenemos la expresión $x^2 + 4x +$ ___ ¿ Qué término debemos escribir en el espacio para que la expresión sea un trinomio cuadrado perfecto ?
- Recordemos que el término 4x debe ser **el doble producto de las raíces cuadradas positivas de los otros dos términos;** es decir:

$$4x = 2 \bullet (x) \bullet ?$$

- 2: Dos veces.
- (x): La raíz cuadrada positiva de x^2.
- $?$: La raíz cuadrada positiva del término que falta.

$$\therefore\ ? = \frac{4x}{2x} = \frac{4}{2} = 2$$

- Por lo tanto, el cuadrado de este resultado, $2^2 = 4$, es el tercer término que buscábamos.
- CONCLUSIÓN: $x^2 + 4x + 4$ es un **trinomio cuadrado perfecto.**

SEGUNDA EXPERIENCIA

- Hallemos el término que falta para que $x^2 - 7x$ se convierta en un trinomio cuadrado perfecto.

- Como 7x debe ser **el doble producto de las raíces cuadradas de los otros dos términos,** entonces:

$$7x = 2 \bullet (x) \bullet ?$$

Dos veces
La raíz cuadrada de x^2
La raíz cuadrada del término que falta

$$\therefore\ ? = \frac{7x}{2 \bullet (x)} = \frac{7}{2}$$

- Como $\frac{7}{2}$ es la raíz cuadrada del tercer término, entonces el cuadrado de este resultado $\left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{49}{4}$, es el tercer término.
- CONCLUSIÓN: $x^2 - 7x + \frac{49}{4}$ es un **trinomio cuadrado perfecto**.
- Observemos que si $x^{2n} - bx^n + c$ es un **trinomio cuadrado perfecto**, entonces el tercer término, c, es igual al **cuadrado de la mitad del coeficiente de x^n**; es decir: $\mathbf{c} = \left(\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{2}}\right)^2$
Este término siempre es positivo.

Ejemplo:

Completemos al trinomio cuadrado perfecto las siguientes expresiones:

a. $x^2 + 8x +$ ___ b. $y^2 + 7y +$ ___ c. $x^4 + 10x^2 +$ ___ d. $z^6 + 5z^3 +$ ___

Solución:

- El tercer término es igual al cuadrado de la mitad del coeficiente del segundo término. Por lo tanto:

a) $c = \left(\frac{8}{2}\right)^2 = 4^2 = 16$ b) $c = \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{49}{4}$

c) $c = \left(\frac{10}{2}\right)^2 = 25$ d) $c = \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$

APRENDAMOS

Si el trinomio $x^{2n} + bx^n + c$ es CUADRADO PERFECTO y el coeficiente de x^{2n} es UNO, entonces el tercer término (c) es igual al CUADRADO DE LA MITAD DEL COEFICIENTE DE x^n; es decir:

$$\mathbf{c} = \left(\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{2}}\right)^2$$

TERCERA EXPERIENCIA

- Factoricemos el trinomio: $x^2 - 7x - 228$
- Como el trinomio no es cuadrado perfecto entonces procederemos a completarlo:

$$x^2 - 7x - 228 = (x^2 - 7x + ?) - 228$$

$$\therefore\ x^2 - 7x - 228 = \left[\, x^2 - 7x + \left(\frac{7}{2}\right)^2 \right] - 228 - \left(\frac{7}{2}\right)^2$$

Aquí hemos sumado y restado $\left(\frac{7}{2}\right)^2$ para que la expresión no cambie.

- Por lo tanto:

$$x^2 - 7x - 228 = \underbrace{\left(x^2 - 7x + \frac{49}{4}\right)}_{\text{TRINOMIO CUADRADO PERFECTO}} - \underbrace{228 - \frac{49}{4}}_{\frac{961}{4}}$$

$$\therefore\ x^2 - 7x - 228 = \underbrace{\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{961}{4}}_{\text{DIFERENCIA DE CUADRADOS}}$$

$$\therefore\ x^2 - 7x - 228 = \left(x - \frac{7}{2} + \frac{31}{2}\right)\left(x - \frac{7}{2} - \frac{31}{2}\right)$$

$$\therefore\ x^2 - 7x - 228 = (x + 12)(x - 19)$$

CUARTA EXPERIENCIA

- Factoricemos el trinomio: $3x^2 - 13x + 14$
- En primer lugar, necesitamos que el coeficiente de x^2 sea uno. Por lo tanto:

$$3x^2 - 13x + 14 = 3\left(x^2 - \frac{13}{3}x + \frac{14}{3}\right)$$

$$\therefore\ 3x^2 - 13x + 14 = 3\left[\left(x^2 - \frac{13}{3}x + ?\right) + \frac{14}{3}\right]$$

El cuadrado de la mitad de $\frac{13}{3}$ es: $\left(\frac{\frac{13}{3}}{2}\right)^2 = \left(\frac{13}{6}\right)^2 = \left(\frac{169}{36}\right)$

- Por lo tanto, sumemos y restemos $\frac{169}{36}$:

Ejemplo:

$$3x^2 - 13x + 14 = 3\left[\underbrace{\left(x^2 - \frac{13}{3}x + \frac{169}{36}\right)}_{\text{TRINOMIO CUADRADO PERFECTO}} + \underbrace{\frac{14}{3} - \frac{169}{36}}_{-\frac{1}{36}}\right]$$

$$\therefore\ 3x^2 - 13x + 14 = 3\left[\underbrace{\left(x - \frac{13}{6}\right)^2 - \frac{1}{36}}_{\text{DIFERENCIA DE CUADRADOS}}\right]$$

$$\therefore\ 3x^2 - 13x + 14 = 3\left(x - \frac{13}{6} + \frac{1}{6}\right)\left(x - \frac{13}{6} - \frac{1}{6}\right)$$

$$\therefore\ 3x^2 - 13x + 14 = 3\left(x - \frac{12}{6}\right)\left(x - \frac{14}{6}\right) = 3(x - 2)\left(x - \frac{7}{3}\right)$$

$$\therefore\ 3x^2 - 13x + 14 = \cancel{3}(x-2)\left(\frac{3x-7}{\cancel{3}}\right) = (x-2)(3x-7)$$

Ejemplo:

Factoricemos el trinomio: $3x^2 - 17ax - 28a^2$ en Z

Solución:

- Para completar al trinomio cuadrado perfecto necesitamos que el coeficiente de x^2 sea uno. Por lo tanto:

$$3x^2 - 17ax - 28a^2 = 3\left(x^2 - \frac{17}{3}ax - \frac{28}{3}a^2\right)$$

$$\therefore\ 3x^2 - 17ax - 28a^2 = 3\left[\left(x^2 - \frac{17}{3}ax + ?\right) - \frac{28}{3}a^2\right]$$

El valor de **?** es igual al cuadrado de la mitad de $\frac{17}{3}a$; es decir:

$$\left(\frac{\frac{17}{3}a}{2}\right)^2 = \left(\frac{17}{6}a\right)^2 = \frac{289}{36}a^2$$

- Por lo tanto, sumamos y restamos $\frac{289}{36}a^2$:

$$3x^2 - 17ax - 28a^2 = 3\Bigg[\underbrace{\left(x^2 - \frac{17}{3}ax + \frac{289}{36}a^2\right)}_{\substack{\Downarrow \\ \text{TRINOMIO} \\ \text{CUADRADO PERFECTO}}} \underbrace{- \frac{28}{3}a^2 - \frac{289}{36}a^2}_{\substack{\Downarrow \\ -\frac{625}{36}a^2 \\ \Downarrow}}\Bigg]$$

$$\therefore\ 3x^2 - 17ax - 28a^2 = 3\Bigg[\underbrace{\left(x - \frac{17}{6}a\right)^2 - \frac{625}{36}a^2}_{\text{DIFERENCIA DE CUADRADOS}}\Bigg]$$

$$\therefore\ 3x^2 - 17ax - 28a^2 = 3\left(x - \frac{17}{6}a + \frac{25}{6}a\right)\left(x - \frac{17}{6}a - \frac{25}{6}a\right)$$

$$\therefore\ 3x^2 - 17ax - 28a^2 = 3\left(x + \frac{8}{6}a\right)\left(x - \frac{42}{6}a\right) = 3\left(x + \frac{4}{3}a\right)(x - 7a)$$

$$\therefore\ 3x^2 - 17ax - 28a^2 = \cancel{3}\left(\frac{3x-4a}{\cancel{3}}\right)(x-7a) = (3x+4a)(x-7a)$$

EJERCICIO 6.8

1. Factoriza los trinomios de los ejercicios 6.6 y 6.7 utilizando el método de completación al trinomio cuadrado perfecto y compara los resultados.

En los ejercicios 2. a 7. utiliza la expresión $b^2 - 4ac$ para verificar si los polinomios dados son factorizables o no en los reales. Aquellos que lo sean, factorízalos por el método de completación al trinomio cuadrado perfecto.

2. $4x^2 - 7x + 8$	3. $5y^4 - 3y^2 - 4$	4. $2m^2 + 4mn + 7n^2$
5. $12x^4 - 3x^2y^2 + 4y^4$	6. $6x^2 + x - 15$	7. $8x^6 - 3x^3 + 1$

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 7

$\boxed{0}$ $\boxed{1}$ $\boxed{3}$ $\boxed{,}$

Utilizando cada vez las cuatro tarjetas, construye dos números decimales cuya diferencia sea:

a) Mínima   b) Máxima

6.11 SUMAS Y RESTAS DE CUBOS

EXPERIENCIA

- Recordemos los siguientes productos notables:

$$\underbrace{(x+y)}_{\text{Suma de dos números}} \cdot \underbrace{(x^2-xy+y^2)}_{\text{Trinomio cuadrado imperfecto de los números}} = \underbrace{x^3+y^3}_{\text{suma de los cubos}}$$

$$\underbrace{(x-y)}_{\text{Diferencia de dos números}} \cdot \underbrace{(x^2+xy+y^2)}_{\text{Trinomio cuadrado imperfecto de los números}} = \underbrace{x^3-y^3}_{\text{Diferencia de los cubos}}$$

- Si aplicamos la recíproca a estas igualdades nos queda:

$$\underbrace{x^3+y^3}_{\text{Suma de los cubos}} = \underbrace{(x+y)}_{\text{Suma de las raíces cúbicas de los números}} \cdot \underbrace{(x^2-xy+y^2)}_{\text{Trinomio cuadrado imperfecto de los números}}$$

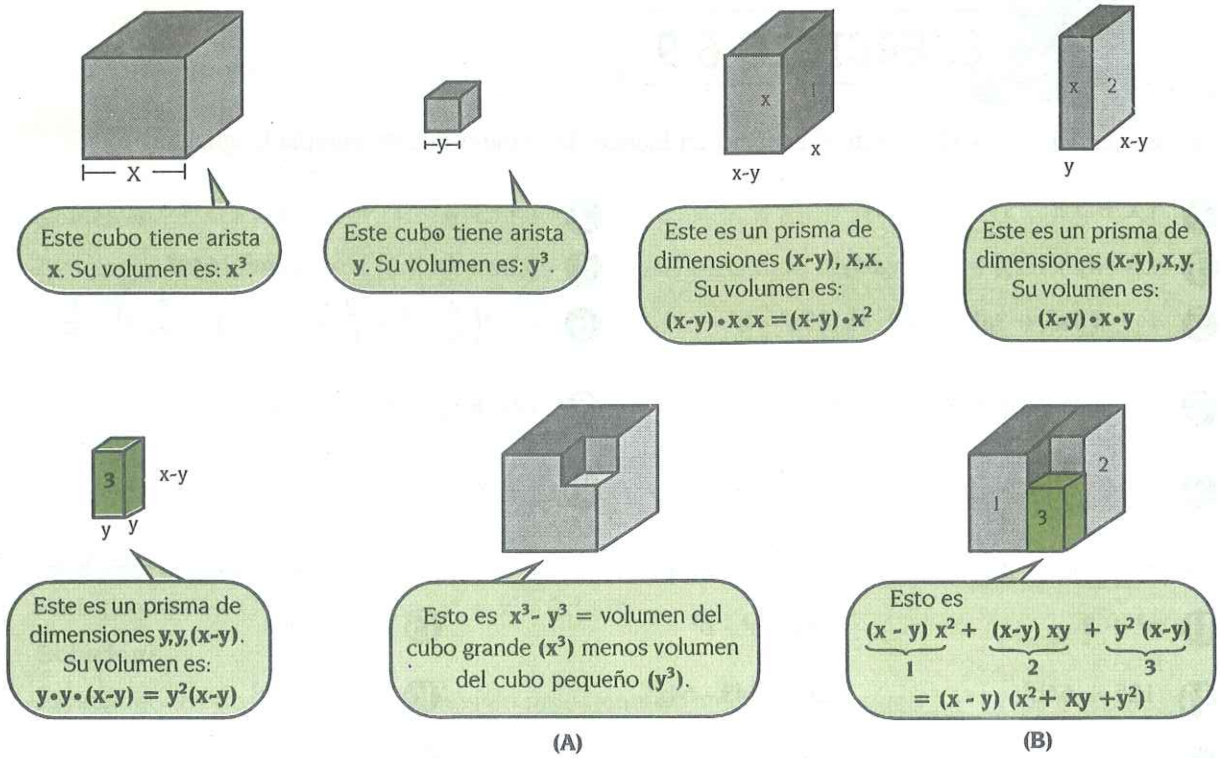
$$\underbrace{x^3-y^3}_{\text{Diferencia de los cubos}} = \underbrace{(x-y)}_{\text{Diferencia de las raíces cúbicas de los números}} \cdot \underbrace{(x^2+xy+y^2)}_{\text{Trinomio cuadrado imperfecto de los números}}$$

APRENDAMOS

FACTORIZACIÓN DE UNA SUMA O RESTA DE CUBOS

1. Una suma o una resta de cubos es igual al producto de un binomio por su trinomio cuadrado imperfecto.
2. El binomio está formado por las suma o la resta de las raíces cúbicas.
3. El trinomio consta de: cuadrado de la primera raíz; producto de las dos raíces y cuadrado de la segunda raíz.
4. Los signos del trinomio son:
   a. Para la suma de cubos: (+), (-), (+) $\longrightarrow x^3+y^3 = (x+y)(x^2-xy+y^2)$
   b. Para la resta de cubos: (+), (+), (+) $\longrightarrow x^3-y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$

- Veamos la interpretación geométrica de una diferencia de cubos:



Como las figuras (A) y (B) ocupan el mismo volumen nos queda que:

$$x^3 - y^3 = (x - y)\,(x^2 + xy + y^2)$$

Ejemplo 1:

Factoricemos en Q el polinomio : $a^3 - 125$

Solución:

- El polinomio es una diferencia de cubos y podemos escribirlo así: $a^3 - 125 = a^3 - 5^3$
- Por lo tanto: $a^3 - 125 = (a - 5)(a^2 + 5a + 25)$

Ejemplo 2:

Factoricemos en Q el polinomio $27m^6 + 8n^9$

Solución:

- Ahora tenemos una suma de cubos ya que: $27m^6 + 8n^9 = (3m^2)^3 + (2n^3)^3$
- Por lo tanto: $27m^6 + 8n^9 = (3m^2 + 2n^3)(9m^4 - 6m^2n^3 + 4n^6)$

Ejemplo 3:

Factoricemos en Q el polinomio $343x^{12}y^{18} + 216$

Solución:

- Como $343x^{12}y^{18} = (7x^4y^6)^3$ y $216 = 6^3$ entonces el polinomio es una suma de cubos.
- Por lo tanto: $343x^{12}y^{18} + 216 = (7x^4y^6 + 6)(49x^8y^{12} - 42x^4y^6 + 36)$

EJERCICIO 6.9

En los ejercicios 1. a 10. llenar el espacio en blanco de manera que se cumpla la igualdad.

1. $(x + 3)(\quad) = x^3 + 27$
2. $(4 - p)(\quad) = 64 - p^3$
3. $(5 - 4y)(\quad) = 125 - 64y^3$
4. $(3m - 4n)(\quad) = 27m^3 - 64n^3$
5. $(\quad)(9a^2 + 3ab + b^2) = 27a^3 - b^3$
6. $(\quad)\left(\frac{4}{9}x^2 + \frac{2}{15}x + \frac{1}{25}\right) = \frac{8}{27}x^3 - \frac{1}{125}$
7. $(\quad)(4x^2 - 6x + 9) = 8x^3 + 27$
8. $\left(2a + \frac{1}{2}b\right)(\quad) = 8a^3 + \frac{1}{8}b^3$
9. $(\quad)\left(\frac{16}{25}x^4 - \frac{12}{5}x^2y^3 + 9y^6\right) = \frac{64}{125}x^6 + 27y^9$
10. $\left(\frac{1}{3}x^3 - 3y^2\right)(\quad) = \frac{1}{27}x^9 - 27y^6$

En los ejercicios del 11. a 30. factorizar cada polinomio en el conjunto Q de los números racionales.

11. $x^3 + 8$
12. $a^3 - b^3$
13. $27x^3 + 1$
14. $125 + 64b^3$
15. $343 - 64x^9$
16. $1000 - m^3n^3$
17. $a^6 + b^6$
18. $\frac{8}{125} + t^3$
19. $\frac{a^3}{8} - \frac{1}{64}$
20. $m^6 - m^{12}$
21. $x^9 - x^3$
22. $(a - b)^3 - c^3$
23. $27 - (a + b)^3$
24. $\frac{1}{125} + \frac{1}{64}a^3$
25. $x^9 + y^9$
26. $a^{12} - b^{12}$
27. $a^{12} - (a^2 - 1)^3$
28. $a^{3x} - b^{6y}$; con $x, y \in N$
29. $(a - 2)^3 - (2 - a)^3$
30. $(a - b)^3 + (a + b)^3$

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 8

Escribe en cada cuadrito un dígito de tal manera que se cumpla la igualdad:

$3^{\square} - \square^5 = 7^{\square}$

6.12 FACTORIZACIÓN POR AGRUPACIÓN

Muchos polinomios no es posible factorizarlos en forma directa, utilizando algunos de los criterios que hemos estudiado en secciones anteriores. Un buen recurso que nos puede ayudar a salir del problema es agrupar (asociar) convenientemente los términos de manera que nos queden expresiones que sean fácilmente factorizables por los métodos ya conocidos. Pero, ¿cómo saber cuál es la agrupación más conveniente ? En realidad, no existe una "fórmula mágica" para acertar en la primera agrupación; incluso, es posible, sobre todo al principio, que nos equivoquemos muchas veces. Pero no importa: la experiencia adquirida nos irá dando la destreza suficiente para agrupar correctamente.

Los siguientes ejemplos nos ayudarán a aclarar el procedimiento de trabajo.

Ejemplo 1:

Factoricemos completamente en Q el polinomio $4x^2y^2 - 16x^2 - y^2 + 4$

Solución:

- Agrupando los dos primeros términos en un paréntesis precedido del signo (+) y los otros dos en un paréntesis precedido del signo (-); nos queda:

$$4x^2y^2 - 16x^2 - y^2 + 4 = (4x^2y^2 - 16x^2) - (y^2 - 4)$$
$$\therefore\ 4x^2y^2 - 16x^2 - y^2 + 4 = 4x^2(y^2 - 4) - (y^2 - 4)$$
$$\therefore\ 4x^2y^2 - 16x^2 - y^2 + 4 = (4x^2 - 1)(y^2 - 4)$$

- Como cada factor obtenido es una diferencia de cuadrados entonces podemos seguir factorizando; así:

$$4x^2y^2 - 16x^2 - y^2 + 4 = (2x + 1)(2x - 1)(y + 2)(y - 2)$$

Ejemplo 2:

Factoricemos en Q el polinomio $x^4 + x^3 - 9x^2 - 9x$

Solución:

- Agrupando los dos primeros términos en un paréntesis precedido del signo (+) y los otros dos en un paréntesis precedido del signo (-), nos queda:

$$x^4 + x^3 - 9x^2 - 9x = (x^4 + x^3) - (9x^2 + 9x)$$
$$\therefore\ x^4 + x^3 - 9x^2 - 9x = x^3(x + 1) - 9x(x + 1)$$
$$\therefore\ x^4 + x^3 - 9x^2 - 9x = (x + 1)(x^3 - 9x)$$

- Como el segundo factor ($x^3 - 9x$) tiene un factor común (x), entonces:

$$x^4 + x^3 - 9x^2 - 9x = (x + 1)\,x(x^2 - 9)$$

- El tercer factor es una diferencia de cuadrados. Luego:

$$x^4 + x^3 - 9x^2 - 9x = (x + 1)\,x(x + 3)(x - 3)$$

Ejemplo 3:

Factoricemos en Q el polinomio $x^2 + 5xy - 24y^2 + x - 3y$

Solución:

- Agrupando los tres primeros términos en un paréntesis precedido del signo (+) y los otros dos en un paréntesis precedido del signo (+) nos queda:

$$x^2 + 5xy - 24y^2 + x - 3y = (x^2 + 5xy - 24y^2) + (x - 3y)$$

- El polinomio contenido en el primer paréntesis es un trinomio de la forma $x^{2n} + bx^n + c$ y el otro paréntesis ya está factorizado (¿ por qué ?). Por lo tanto:

$$\therefore\ x^2 + 5xy - 24y^2 + x - 3y = (x + 8y)\underbrace{(x - 3y)} + \underbrace{(x - 3y)}$$

Factor común

$$\therefore\ x^2 + 5xy - 24y^2 + x - 3y = (x - 3y)[(x + 8y) + 1]$$
$$\therefore\ x^2 + 5xy - 24y^2 + x - 3y = (x - 3y)(x + 8y + 1)$$

Ejemplo 4:

Factoricemos en Q el polinomio $a^9 - a^6 - 64a^3 + 64$

Solución:

- Agrupando los dos primeros términos en un paréntesis precedido del signo (+) y los otros dos en un paréntesis precedido del signo (-), tenemos:

$$a^9 - a^6 - 64a^3 + 64 = (a^9 - a^6) - (64a^3 - 64)$$
$$\therefore\ a^9 - a^6 - 64a^3 + 64 = a^6(a^3 - 1) - 64(a^3 - 1)$$
$$\therefore\ a^9 - a^6 - 64a^3 + 64 = (a^3 - 1)(a^6 - 64)$$

- Como el primer factor es una diferencia de cubos y el segundo es una diferencia de cuadrados, entonces:

$$a^9 - a^6 - 64a^3 + 64 = (a - 1)(a^2 + a + 1)(a^3 + 8)(a^3 - 8)$$

- El tercer y cuarto factores son una suma y una diferencia de cubos. Por lo tanto:

$$a^9 - a^6 - 64a^3 + 64 = (a - 1)(a^2 + a + 1)(a + 2)(a^2 - 2a + 4)(a - 2)(a^2 + 2a + 4)$$

Ejemplo 5:

Factoricemos el polinomio : $a^4 - 25x^6 + 8a^2x^2 - 9 + 30x^3 + 16x^4$

Solución:

- Si agrupamos el primero, el tercero y el último términos en un paréntesis precedido del signo (+), obtenemos un trinomio cuadrado perfecto. Y si agrupamos el segundo, el cuarto y el quinto, en un paréntesis precedido del signo (-), también obtenemos un trinomio cuadrado perfecto. Veamos:

$$a^4 - 25x^6 + 8a^2x^2 - 9 + 30x^3 + 16x^4 = \underbrace{(a^4 + 8a^2x^2 + 16x^4)}_{\text{trinomio cuadrado perfecto}} - \underbrace{(25x^6 + 9 - 30x^3)}_{\text{trinomio cuadrado perfecto}}$$

$$\therefore\ a^4 - 25x^6 + 8a^2x^2 - 9 + 30x^3 + 16x^4 = (a^2 + 4x^2)^2 - (5x^3 - 3)^2$$

- Ahora tenemos una diferencia de cuadrados. Por lo tanto:

$$a^4 - 25x^6 + 8a^2x^2 - 9 + 30x^3 + 16x^4 = [(a^2 + 4x^2) + (5x^3 - 3)][(a^2 + 4x^2) - (5x^3 - 3)]$$
$$\therefore\ a^4 - 25x^6 + 8a^2x^2 - 9 + 30x^3 + 16x^4 = (a^2 + 4x^2 + 5x^3 - 3)(a^2 + 4x^2 - 5x^3 + 3)$$

EJERCICIO 6.10

En los ejercicios 1. a 10. factorizar cada polinomio en el conjunto Q, realizando una agrupación conveniente de los términos.

1. $pa^2 - 3qa^2 + 2pa - 6qa$
2. $4xy^3 - 12xyz - y^2 + 3z$
3. $3m^2 - 7n^2a + 3ma - 7mn^2$
4. $p^2 + q^2 + 2pq - 4$
5. $8ab - 16b^2 - a^2 + 25$
6. $x^2 + 4y^2 + 4xy - a^2 - 2ax - x^2$
7. $36 - 8x + 12a - x^2 - 16 + a^2$
8. $x^3 - y^3 + x^2 - y^2$
9. $10b - 50a + 5ax - by - bx + 5ay$
10. $a^5 + a^4 - 4a^3 - 4a^2 + 4a + 4$

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 9

Reconstruye la división:

```
1 2 4 □ | □ 3
- □ 6     2 □
  3 □ □
- 3 □ □
  0 0 0
```

6.13 UNAS PALABRAS PARA TERMINAR

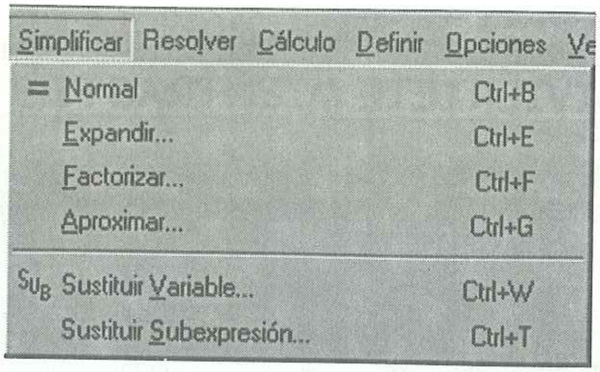
1. Los casos de factorización que hemos estudiado anteriormente son los más comunes en el trabajo matemático corriente.

2. No es fácil, sobretodo al principio, identificar cuál es el método o caso que debemos utilizar para factorizar un polinomio dado. Sólo el trabajo persistente y la experiencia que se va adquiriendo son la clave para alcanzar un buen dominio de este tema. Sin embargo, las siguientes sugerencias pueden resultar útiles, en particular para aquellos que apenas comienzan.

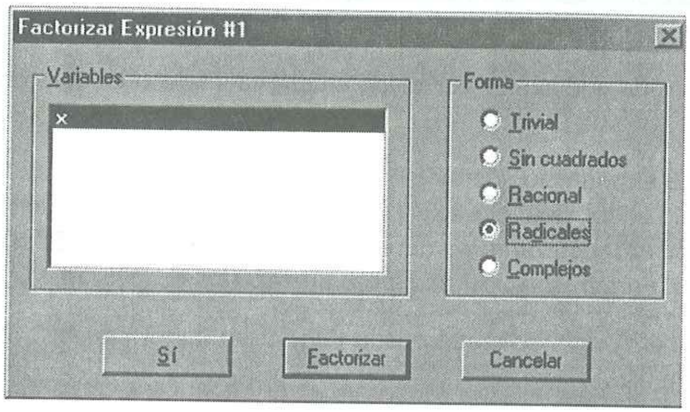
   - En primer lugar, analiza si el polinomio dado tiene o no factor común. Si lo tiene, factorízalo aplicando este criterio.
   - Si no tiene factor común se analiza si es un binomio y de qué tipo: diferencia de cuadrados, suma de cuadrados, suma de cubos o diferencia de cubos. Una vez identificado, se factoriza según el tipo de binomio.
   - Si el polinomio es un trinomio, se analiza de qué tipo es: primero, si es trinomio cuadrado perfecto; si no, miramos si es de la forma $x^{2n} + bx^n + c$ ó de la forma $ax^{2n} + bx^n + c$. Conviene chequear si estos dos últimos son o no factorizables en los reales (analizando el signo de $b^2 - 4ac$).
   - Si el polinomio tiene más de tres términos, muy probablemente será necesario agrupar éstos convenientemente, y aplicar alguno de los métodos conocidos antes de factorizar definitivamente.

6.14 USO DEL DERIVE PARA FACTORIZAR POLINOMIOS

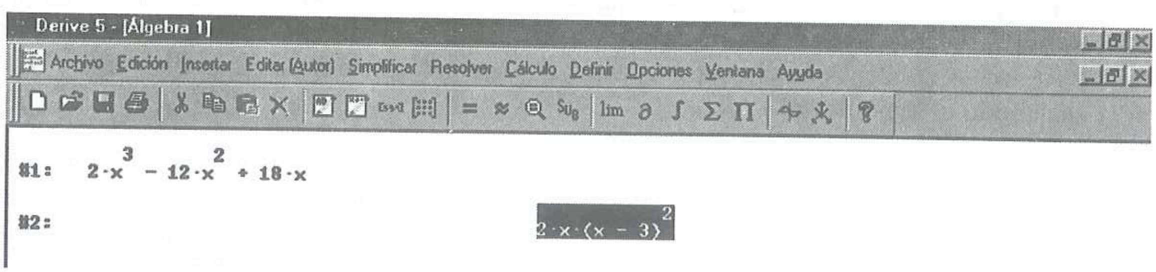
- Para FACTORIZAR, en los reales, una expresión previamente resaltada en la ventana de álgebra (por ejemplo, $2x^3 - 12x^2 + 18x$), hacemos lo siguiente:
  - Vamos al MENÚ DE OPCIONES y hacemos click sobre el comando SIMPLIFICAR.
  - Inmediatamente aparecerá esta pequeña ventana, encima de la ventana del DERIVE:



- Sobre esta pequeña ventana, señalamos con el mouse la opción FACTORIZAR y hacemos **click.** De inmediato aparece otra ventana. Señalamos la opción RADICALES, hacemos **click** y, luego, en la ventana señalamos, en la parte inferior, la opción FACTORIZAR.



- Finalmente, la ventana de álgebra del DERIVE nos mostrará la expresión factorizada; así:



En síntesis, los pasos para factorizar una expresión en los reales son los siguientes:

SIMPLIFICAR click, FACTORIZAR click, RADICALES click, FACTORIZAR click.

TALLER DE REPASO DE LA UNIDAD 6

1. **Contesta las siguientes preguntas:**

a) ¿Qué es factorizar un polinomio en un determinado conjunto numérico ?
b) ¿Cuándo un polinomio es primo en un determinado conjunto numérico ?
c) ¿En qué conjuntos es primo el polinomio $x^2 - 7$?
d) ¿Cómo se halla el factor común de un polinomio?
e) ¿Cómo se identifica un trinomio cuadrado perfecto? ¿Cómo se factoriza ?
f) ¿Es siempre factorizable una suma de cuadrados? ¿Cómo se analiza si es factorizable?
g) ¿Cómo se identifica una diferencia de cuadrados? ¿Y cómo se factoriza ?
h) ¿Qué diferencia hay entre una diferencia de cuadrados y una diferencia al cuadrado?.
i) ¿Qué características presenta un trinomio de la forma $x^{2n} + bx^n + c$?
j) ¿Cómo se factoriza un trinomio de la forma $x^{2n} + bx^n + c$?
k) ¿Cómo se identifica un trinomio de la forma $ax^{2n} + bx^n + c$?
l) Describe el método de análisis de ac para factorizar un trinomio de la forma $ax^{2n} + bx^n + c$
m) Explica el método de completación al trinomio cuadrado perfecto para factorizar trinomios de la forma $ax^{2n} + bx^n + c$.
n) ¿Cómo se identifica una suma de cubos ? ¿ Y una diferencia de cubos ?
o) ¿Cómo se factoriza una suma de cubos ? ¿ Y una diferencia de cubos ?
p) ¿Cuál es el trinomio cuadrado imperfecto de $x^2 - y^3$?
q) ¿ En qué caso se recomienda la agrupación de términos (o propiedad asociativa) para factorizar polinomios ?
r) ¿Cuál de los métodos de factorización es recomendable utilizar en primer lugar ? ¿por qué ?

2. **FALSO O VERDADERO.**
Contesta falso o verdadero a cada una de las siguientes proposiciones. Justifica cada respuesta .

a) Todo polinomio con coeficientes enteros es factorizable en los enteros.

b) El polinomio $4x^3 - y^3$ es primo en R.

c) El polinomio $4x^4 + 9y^4$ es factorizable en R.

d) El polinomio $4x^2 - 3x + 6$ es primo en R.

e) El trinomio cuadrado imperfecto de $2x^2 - 3z$ es $4x^4 - 6x^2z + 9z^2$

f) El término que falta para que $x^2 + 5x$ sea un trinomio cuadrado perfecto es $\frac{25}{4}$.

g) El término que falta para que $3x^2 + 7x$ sea un trinomio cuadrado perfecto es $\frac{49}{4}$.

h) El polinomio $x^6 - 1$ puede factorizarse como diferencia de cuadrados o como diferencia de cubos.

En los ejercicios del 3. al 94. factorizar los polinomios dados en el conjunto de los números racionales. Usar el DERIVE para confirmar los resultados obtenidos.

3. $9x^2y^2 - 36z^6$
4. $3ax - bx - 3ay + by$
5. $12x^2y^3 - 4x^3y^2$
6. $12a^2 - 4ab - 3ax^2 + bx^2$

7. $36t^8 - 25x^{10}$

8. $6x^2 + 3xy - 2ax - ay$

9. $4a^2 - 12ab + 9b^2$

10. $y^3 - y^2 + y - 1$

11. $a^{2n+1} + a^{n+2} + a^{n+1}$; con $n \in Z$

12. $x^2 - x - 2$

13. $6st^2 - 9s^2t - 2t^3 + 27s^3$

14. $x^2 - 26x + 165$

15. $x - 4y - x^3 + 64y^3$

16. $x^2 - 9x - 90$

17. $64x^6 - y^6$

18. $x^2y^2 + 34xy + 289$

19. $a^3 + 27b^3 + a + 3b$

20. $204 - 29x^2 + x^4$

21. $x^2 - a^2 - 6xy + 2ab + 9y^2 - b^2$

22. $110 - x - x^2$

23. $a^3 - 9b^2 - 27b^3 + a^2$

24. $x^4 - 14x^2 - 51$

25. $4(a + b)^2 - 5(a + b) - 6$

26. $a^2y^2 + 14ay - 240$

27. $18a^3 - 8a(x^2 + 8x + 16)$

28. $2x^2 + 3x + 1$

29. $9x^3 - 12x^2y + 4xy^2$

30. $10x^2 + 79x - 8$

31. $16x^4 - x^2 + 6xy - 9y^2$

32. $x^2 - 2xy - 323y^2$

33. $a^2 - 4b^2 + a^2b - 2ab^2$

34. $a^2 + 2ab + b^2 + a + b$

35. $4a^4 - a^2 - 4ab - 4b^2$

36. $x^3 + 12x^2y - 45xy^2$

37. $2x^3 - x^2 - 8x + 4$

38. $6x^2-31x+35$

39. $x^2 - 9 + y^2 - 2xy$

40. $20 - 9x - 20x^2$

41. $a^2 + 2ab + b^2 - a^3 - b^3$

42. $65 + 8xy - x^2y^2$

43. $u^3v - 9uv^3$

44. $3x^3 + 6x^2 - 189x$

45. $m^9 - 27n^{12}$

46. $x^3 + 5x^2 - x - 5$

47. $x^3 + x^2 - y^3 - y^2$

48. $3x^2 - 31xy + 56y^2$

49. $5^{2n} - 5^n - 20$; con $n \in N$

50. $x^2 + 5xy - 24y^2 + x - 3y$

51. $7^{2n} - 4(7^n) + 4$; con $n \in N$

52. $(x + 2y)^2 - a^2$

53. $9y^2 - 66y + 121$

54. $1 - (7a - 3b)^2$

55. $5x^3 - 65x^2 + 200x$

56. $-x^2 + 2x - 1 + x^4$

57. $3a^2b^2 - 12a^2bc + 18ab^2c$

58. $a^2 - 16 - 6ax + 9x^2$

59. $4^{2n} + 2(4^n) + 1$; con $n \in N$

60. $a^2 - 64$

61. $12a^6 - 27b^4$

62. $(a + b)^2 - 121$

63. $25a^2 - 10ab + b^2$

64. $a^4 - b^4$

65. $a^3 - 8b^3 + a - 2b$

66. $x^2 - 5x - 14$

67. $2x^2 - xy^n - y^{2n}$; con $n \in N$

68. $a^2 + 17ab + 60b^2$

69. $(y - x)^2 - y + x$

70. $x^2 + 2xy + y^2 - a^2$

71. $a^4b^4 + 4a^2b^2 - 96$

72. $x^2 - 4ax + 4a^2 - b^2 - 2by - y^2$

73. $a^3 - b + a - b^3$

74. $4x^2 - 12ax - c^2 - k^2 - 2ck + 9a^2$

75. $a^{2m+2} - a^2b^{2n}$; con $m,n \in N$

76. $14a^2 - 11a - 15$

77. $a^3 - 2a^2 + 2 - a$

78. $4x^2 - 4xy - 15y^2$

79. $(a^2 + a)^2 + 9(a^2 + a) + 20$

80. $(a + b)^6 - (a - b)^6$

81. $a^3 + a^2 + 2ab - 3b^2 - b^3$

82. $729x^3 - y^3$

83. $x^5 - 18x^3 + 81x$

84. $a^3 - 8b^{15}$

85. $a^{17} - a$

86. $x^{18} - y^{18}$

87. $64a^3 + 8b^3$

88. $250(a - b)^3 + 2$

89. $p^{12} - 1$

90. $x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$

91. $343x^6 - 27y^3$

92. $x^{5m} - 16x^{3m}y^2$; con $m \in N$

93. $y^7 - y^6 - y + 1$

94. $a^3 - 2a^2b - ab^2 + 2b^3$

Observemos que si al trinomio $a^4 + a^2 + 1$ le sumamos el término a^2, obtendríamos un trinomio cuadrado perfecto; pero, el a^2 que sumamos debemos restarlo para que la expresión no cambie; es decir:

$$\therefore a^4 + a^2 + 1 = a^4 + a^2 + 1 + a^2 - a^2$$
$$\therefore a^4 + a^2 + 1 = (a^4 + 2a^2 + 1) - a^2$$
$$\therefore a^4 + a^2 + 1 = (a^2 + 1)^2 - a^2$$
$$\therefore a^4 + a^2 + 1 = (a^2 + 1 + a)(a^2 + 1 - a)$$
$$\therefore a^4 + a^2 + 1 = (a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1)$$

Esta forma de completar al trinomio cuadrado perfecto es similar a la que utilizamos para factorizar sumas de cuadrados.

En los ejercicios 95. a 114. factorizar los polinomios dados sumando y restando un término para completar un trinomio cuadrado perfecto.

95. $a^4 + 5a^2 + 9$

96. $x^4 + 3x^2 + 4$

97. $a^8 + 64$

98. $81a^4 + 9a^2b^2 + b^4$

99. $9c^4 + 5c^2 + 1$

100. $4x^4 + 9y^4 - 93x^2y^2$

101. $a^4 + 4b^4$

102. $4m^4 + 9n^4 - 24m^2n^2$

103. $16x^4 - 28x^2y^2 + 9y^4$

104. $16a^4 + b^4 - 28a^2b^2$

105. $4a^{2p} + 16 + a^{4p}$; con $p \in N$

106. $729x^6 - y^6$

107. $y^2 + 9y - 36$

108. $a^4 - 2a^2 - 35$

109. $x^4 + x^2 - 156$

110. $2b^4 - 11b^2 - 21$

111. $3t^2 + t - 2$

112. $5x^2 + 7x - 6$

113. $6m^6 + 17m^3 - 45$

114. $z^2 - 18z + 17$

Los ejercicios 115. a 126. presentan un grado mayor de dificultad para su factorización. Los presentamos como un reto al lector.

115. $a(a-1)x^2 - (2a^2-1)x + a^2 + a$

116. $-8a^8 - 14a^4y^4 - 3y^8$

117. $a(b^2-c^2) - bc(b-c) + a^2c - a^2b$

118. $a(a-1)x^2 + (a-b-1)xy - b(b+1)y^2$

119. $a^3 + a^2 + 2ab - 3b^2 - b^3$

120. $a^2(c-b) + b^2(a-c) + c^2(b-a)$

121. $mnxy - 2(3n-4p)(n-p)y^2 + 2m^2x^2$

122. $a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b)$

123. $3a^2 - 6ab + 3b^2 - 10a + 10b + 3$

124. $x^2 - 6xy + 9y^2 - 7x + 21y + 12$

125. $m^2 + 9n^2 - 7m - 21n + 10 + 6mn$

126. $x^2 - 6x - 7 - y^2 - 8y$

PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS DEL ICFES

1. Si b y c son constantes y $(x+2)(x+b) = x^2 + cx + 6$, entonces el valor de c es:

a) -5 b) -3 c) -1 d) 3 e) 5

2. ¿Para cuántos enteros n entre 1 y 100 es posible factorizar $x^2 + x - n$ en dos factores lineales con coeficientes enteros?

a) 0 b) 1 c) 2 d) 9 e) 10

3. Si $x = \frac{a}{b}$, $a \neq b$ y $b \neq 0$, entonces $\frac{a+b}{a-b}$ es igual a:

a) $\frac{x}{x+1}$ b) $\frac{x+1}{x-1}$ c) 1 d) $x - \frac{1}{x}$ e) $x + \frac{1}{x}$

4. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ es igual a:

a) $\frac{3}{a+b+c}$ b) $\frac{a+b+c}{abc}$ c) $\frac{ab+ac+bc}{abc}$ d) $\frac{3}{abc}$ e) $\frac{3(a+b+c)}{abc}$

5. En 1987 el peaje para una motocicleta en una autopista entre una ciudad A y una ciudad B, se incrementó de \$5 a \$100. El porcentaje de ese incemento fue de:

a) 95 b) 20 c) 100 d) 1900 e) 2000

Núcleo Temático

7

FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS DE GRADO MAYOR QUE 2

LOGRO GENERAL

Factorizar polinomios en una variable y de grado mayor que 2.

D I M E N S I O N E S

LOGROS ESPECÍFICOS	INDICADORES DE LOGRO
Corporal: • Realizar experiencias que favorezcan el manejo del teorema del factor y de la división sintética.	• Utiliza la división sintética y el teorema del factor para factorizar polinomios.
Comunicativa: • Enunciar el teorema del residuo y el teorema del factor. • Describir el método de la división sintética.	• Explica cómo utilizar el teorema del residuo y el teorema del factor en la factorización de polinomios. • Describe el método de la división sintética.
Cognitiva: • Factorizar polinomios de grado mayor o igual que dos. • Hallar los ceros de un polinomio en una variable.	• Factoriza polinomios de grado mayor que dos. • Encuentra los ceros de un polinomio.
Estética: • Elabora material para la clase	• Ilustra los enunciados del teorema del factor y de los ceros de un polinomio con ejemplos.
Ética - Actitudinal: • Reconoce la importancia de la división sintética para factorizar polinomios.	• Cumple a tiempo con las tareas y trabajos que le son encomendados.

E V A L U A C I Ó N

E S T R A T E G I A S   M E T O D O L Ó G I C A S

7.1 HISTORIA DEL ÁLGEBRA (7): NICOLÁS TARTAGLIA (1506-1557)

NICOLÁS TARTAGLIA
(1506 - 1557)

Con el perfeccionamiento de la imprenta, **Los Elementos** de Euclides, impresos en 1482, se popularizaron en Europa. El desarrollo de la navegación por el intenso comercio del Mediterráneo, hizo que en Italia se concentraran los estudios matemáticos. La astronomía se desarrolló notablemente y con ella los cálculos trigonométricos.

La **ecuación de tercer grado** apasionó a los matemáticos. Un sabio "tartamudo" y autodidacta, Nicolás Tartaglia, natural de Brescia (1506-1557), encontró la solución y la mantuvo en secreto. Pero Cardán no guardó el secreto y cuando éste publicó la solución, Tartaglia protestó públicamente. Y dado que ningún ser humano debe mantener en secreto un descubrimiento que interese a toda la humanidad, la historia absolvió a Cardán por su falta de discresión.

Tartaglia publicó en Venecia (1556-1560) dos volúmenes de un **Tratado General** de los números que, en realidad, es un libro de **Álgebra.**

Tartaglia aplicó las matemáticas a la artillería y se anticipó, de esta manera, a los modernos matemáticos que han contribuído a la mejora de las armas atómicas (iqué pesar, la ciencia al servicio de la destrucción del ser humano!).

Nicolás Tartaglia fue un matemático profesional que aprendió por sí mismo. Por su estudio y constancia superó sus defectos físicos para ganarse la vida enseñando matemáticas. Su capacidad fue tal que en un desafío público con un tal Fior, en el cual cada uno debía resolver 30 ecuaciones, Tartaglia las resolvió en 2 horas, mientras su rival , en el mismo tiempo, no resolvió ninguna. Tartaglia resolvió la ecuación cúbica reducida $x^3 + px^2 + q = 0$ para la cual dio la siguiente fórmula general de resolución:

$$x = \sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right)} + \sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right)}$$

EJERCICIO 7.1

Comprensión de Lectura. Explicación: Lee nuevamente el fragmento anterior y luego encierra, en un círculo, la letra que corresponda a la respuesta correcta:

1. El título más adecuado para esta lectura podría ser:

   a. Multiplicación de la literatura científica.
   b. Tartaglia, un ejemplo de trabajo y superación.
   c. Italia: Centro de la cultura europea.
   d. Tratado General de los números.

2. De Nicolás Tartaglia se puede decir todo lo siguiente, menos:

   a. Aplicó sus conocimientos a la guerra.
   b. Fue un autodidacta.

c. Parte de su vida la dedicó a la enseñanza.
d. No participó nunca en duelos de inteligencia y conocimiento.

3. El propósito específico del autor en el escrito anterior es:

a. Destacar la actividad intelectual y creativa de un científico italiano.
b. Demostrar que Italia es la cuna de las ciencias y las artes en el Renacimiento.
c. Explicar como la imprenta contribuyó al desarrollo de la ciencia en Europa.
d. Detallar las grandes realizaciones del hombre a través de la historia.

4. De los siguientes personajes, no se hace mención en el texto:

a. Fior.
b. Jerónimo Cardán.
c. Omar Khayyán.
d. Euclides.

5. El término **artillería**, que se menciona en el texto se refiere a:

a. El arte de construir armas de guerra.
b. Conjunto de piezas bélicas empleadas para la guerra.
c. Acción de emplear el conocimiento en actividades de guerra.
d. Ciencia que trata sobre la construcción de trincheras.

7.2 INTRODUCCIÓN

- En la unidad anterior estudiamos distintos procedimientos para factorizar polinomios algebraicos con una o más variables. Sin embargo, estos procedimientos resultan poco eficaces cuando debemos factorizar polinomios que tienen una variable y cuyo grado es mayor que 2.
- Por ejemplo, ninguno de los métodos aprendidos nos permiten factorizar los siguientes polinomios.

$P(x) = 2x^3 - 6x^2 - 5x - 12$ $\qquad$ $Q(x) = 48x^4 - 52x^3 + 13x - 3$

$R(x) = 2x^4 + 5x^3 - 9x^2 - 15x + 9$ $\qquad$ $S(x) = x^5 - 3x^4 - 15x^3 + 35x^2 + 54x - 72$

- Dedicaremos esta unidad a estudiar las diferentes propiedades que nos llevarán a factorizar polinomios como los anteriores.

7.3 TEOREMA DEL RESIDUO

PRIMERA EXPERIENCIA

- Calculemos el residuo que resulta al dividir el polinomio $P(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$ entre $(x-1)$:

$$\begin{array}{rrrr|l}
\cancel{x^3} & -2x^2 & +x & -1 & x-1 \\ \cline{5-5}
-\cancel{x^3} & +x^2 & & & x^2 - x \\ \cline{1-2}
& -\cancel{x^2} & +\cancel{x} & & \\
& \cancel{x^2} & -\cancel{x} & & \\ \cline{2-3}
& & & -1 & \longleftarrow \text{RESIDUO}
\end{array}$$

- Ahora hallemos el valor del polinomio cuando $x=1$; es decir, hallemos P(1):

$$P(1) = 1^3 - 2(1)^2 + 1 - 1$$
$$\therefore P(1) = 1 - 2 + 1 - 1 = -1$$

Por lo tanto, $P(1) = -1$

- Notemos que el valor de P (1) es el mismo número del residuo obtenido cuando P (x) se dividió entre (x - 1).

SEGUNDA EXPERIENCIA

- Ahora hallemos el residuo de dividir el polinomio $P(x) = 4x^3 + 3x^2 - 1$ entre $x+3$ y comparemos el resultado con P (-3).
- Tenemos:

$$\begin{array}{rrrr|l}
4x^3 & +3x^2 & & -1 & x+3 \\ \cline{5-5}
-4x^3 & -12x^2 & & & 4x^2 - 9x + 27 \\ \cline{1-2}
 & -9x^2 & & & \\
 & +9x^2 & +27x & & \\ \cline{2-3}
 & & 27x & -1 & \\
 & & -27x & -81 & \\ \cline{3-4}
 & & & -82 & \longleftarrow \text{RESIDUO}
\end{array}$$

- Ahora $P(3) = 4(-3)^3 + 3(-3)^2 - 1$

$$= -108 + 27 - 1$$
$$= -108 + 26$$
$$= -82 \longleftarrow \text{VALOR DEL POLINOMIO EN } (-3)$$

- Como vemos, de nuevo el valor de P (-3) es el mismo número obtenido cuando P (x) se dividió entre x + 3.

En general:

APRENDAMOS

TEOREMA DEL RESIDUO

El residuo que se obtiene al dividir P (x) por (x - a) es igual al valor numérico del polinomio en $x=a$.

DEMOSTRACIÓN:

1. Debemos probar que cuando sustituímos **x** por **a** en P(x) obtenemos el residuo R de la división de P(x) entre x-a.
2. Sabemos que:

$$\begin{array}{ccccc} P(x) & = & Q(x) & \bullet\ (x-a) & +\ R \\ \text{Dividendo} & = & \text{divisor} & \bullet\ \text{cociente} & +\ \text{residuo} \end{array}$$

3. Para $x=a$ tenemos:

$$P(a) = Q(a) \bullet (a-a) + R$$
$$\therefore P(a) = Q(a) \bullet 0 + R$$
$$\therefore P(a) = 0 + R$$
$$\therefore P(a) = R$$

4. Luego, hemos probado que P (a) = R; es decir, al sustituir **x** por **a** en P (x) hemos obtenido R, que es precisamente el residuo de la división.

Ejemplo:

Hallemos el residuo de la división de $x^4 + 2x^3 + 6$ entre $x + 2$.

Solución:

- Según el Teorema del Residuo, cuando P (x) se divide por x + 2, el residuo coincide con el valor numérico del polinomio en x=-2.
- Por lo tanto:

$$\begin{aligned} P(-2) &= (-2)^4 + 2(-2)^3 + 6 \\ &= 16 - 16 + 6 \\ &= 6 \end{aligned}$$

- Luego, el residuo de la división de $x^4 + 2x^3 + 6$ entre $x + 2$ es 6.

7.4 CEROS DE UN POLINOMIO Y TEOREMA DEL FACTOR

PRIMERA EXPERIENCIA

- Hallemos el valor numérico del polinomio $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - x + 6$ cuando $x = -1$ y $x = \frac{3}{2}$.
- Veamos:

$\begin{aligned} P(-1) &= 2(-1)^3 - 5(-1)^2 - (-1) + 6 \\ &= -2 - 5 + 1 + 6 \\ &= 0 \end{aligned}$	$\begin{aligned} P\left(\frac{3}{2}\right) &= 2\left(\frac{3}{2}\right)^3 - 5\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{3}{2} + 6 \\ &= 2\left(\frac{27}{8}\right) - 5\left(\frac{9}{4}\right) - \frac{3}{2} + 6 \\ &= \frac{27}{4} - \frac{45}{4} - \frac{3}{2} + 6 \\ &= 0 \end{aligned}$

- En ambos casos, el polinomio se volvió CERO. Por eso decimos que $x = -1$ y $x = \frac{3}{2}$ son CEROS del polinomio $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - x + 6$

APRENDAMOS

CERO DE UN POLINOMIO

Si **P(x)** es un polinomio y **a** es un número real tal que **P(a)=0**, entonces **a** es un cero de **P(x)**.

SEGUNDA EXPERIENCIA

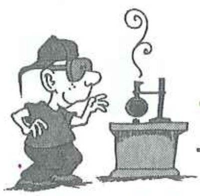
- Comprobemos que la división de $x^3 - 3x^2 - 4x + 12$ por $x - 3$ es exacta, usando:

a) División Sintética b) Teorema del Residuo

- En efecto, por cualquiera de los dos métodos podemos verificar que la división es exacta y podemos escribir que:

$$x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = (x - 3)(x^2 - 4)$$

- Aquí encontramos un detalle interesante: notemos que $x=3$ es cero de $P(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$ y que $(x-3)$ es un factor del polinomio.



TERCERA EXPERIENCIA

- Comprueba que $x=1$, $x=2$ y $x=-3$ son ceros del polinomio: $P(x) = x^3 - 7x + 6$
- Ahora comprueba que $x^3 - 7x + 6 = (x-1)(x-2)(x+3)$
- Contesta: ¿Es verdad que si $x=1$, $x=2$ y $x=-3$ son ceros de $P(x)$, entonces $(x-1)$, $(x-2)$ y $(x+3)$ son factores de $P(x)$?.
- El siguiente teorema, denominado **Teorema del Factor,** establece la relación existente entre los ceros de un polinomio y sus factores.

APRENDAMOS

TEOREMA DEL FACTOR

Si **P(x)** es un polinomio y **a** es un número real, entonces **(x-a)** es un factor de **P(x)** si y sólo si **P(a) = 0.**

DEMOSTRACIÓN:

El enunciado del teorema representa una condición de la forma **Si y sólo si**; por lo tanto, es necesario demostrar dos partes:

PRIMERA PARTE: Si $P(a) = 0$ entonces $(x-a)$ es factor de $P(x)$
SEGUNDA PARTE: Si $(x-a)$ es factor de $P(x)$ entonces $P(a) = 0$

PRIMERA PARTE

- Por la propiedad fundamental de la división sabemos que al dividir a $P(x)$ entre $(x-a)$ obtenemos un cociente $C(x)$ y un residuo R; es decir:

$$P(x) = (x-a) \bullet C(x) + R \text{ .... } (1)$$

- Pero, por el Teorema del Residuo sabemos que:

$$P(a) = R \text{ .... } (2)$$

- Luego, sustituyendo (2) en (1) nos queda:

$$P(x) = (x-a) \bullet C(x) + P(a) \text{ .... } (3)$$

- Ahora bien, por hipótesis sabemos que:

$$P(a) = 0 \text{ .... } (4)$$

- Luego, sustituyendo (4) en (3) queda:

$$P(x) = (x-a) \bullet C(x) \text{ .... } (5)$$

Esto demuestra que $(x-a)$ es un factor de $P(x)$.

SEGUNDA PARTE

- $(x-a)$ es factor de $P(x)$ .... ¿Por qué?
- Luego, el residuo de la división de $P(x)$ entre $(x-a)$ es cero. .... ¿ Por qué?
- Luego, por el Teorema del Residuo se deduce que $P(a) = 0$.

Ejemplo 1:

Probemos que $(x-4)$ es un factor de $2x^3 - 6x^2 - 5x - 12$

Solución:

- Si $(x-4)$ es un factor de $2x^3 - 6x^2 - 5x - 12$, entonces $x=4$ es un cero del polinomio.

Veamos:

$$\begin{aligned} P(4) &= 2(4)^3 - 6(4)^2 - 5(4) - 12 \\ &= 2(64) - 6(16) - 20 - 12 \\ &= 128 - 96 - 20 - 12 \\ &= 0 \end{aligned}$$

- Luego, de acuerdo con el Teorema del Factor, deducimos que $(x-4)$ es un factor del polinomio dado.

Ejemplo 2:

Hallemos un valor de k tal que $x+3$ sea un factor del polinomio: $3x^3 + kx^2 - 7x + 6$

Solución:

- Si $x+3$ es un factor de $3x^3 + kx^2 - 7x + 6$, entonces $x= -3$ es un cero del polinomio y, por lo tanto, $P(-3) = 0$.
- Luego, $P(-3) = 3(-3)^3 + k(-3)^2 - 7(-3) + 6 = 0$

$$\therefore P(-3) = 3(-27) + 9k + 21 + 6 = 0$$

$$\therefore P(-3) = -81 + 9k + 21 + 6 = 0 \text{ ; es decir, } 9k = 54 \Rightarrow k = 6$$

- Por lo tanto, $x+3$ es un factor de $P(x)$ cuando $k=6$.

EJERCICIO 7.2

1. Si $P(x) = 3x^3 - 4x^2 - 9x + 7$, halla $P(3)$ en dos formas distintas.
2. Usa el Teorema del Factor para mostrar que $x-3$ es un factor de $8x^3 - 25x^2 + 12x - 27$
3. Usa el Teorema del Factor para encontrar el valor real que debe tener k para que $x-4$ sea un factor de $9x^4 - 35x^3 + kx^2 - kx - 4$
4. Usa el Teorema del Factor para encontrar el valor de k para el cual $x-1$ es un factor de $x^{10} - kx^7 - x^6 + 7$.
5. Usa el Teorema del Factor para demostrar que $x-a$ es un factor de $x^n - a^n$, donde $a \in R^+$ y $n \in N$.
6. Usa el Teorema del Factor para demostrar que 2 es un cero de $P(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 - 2x^2 - 2x + 4$

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 1

La suma de dos números naturales es igual a 90. La suma del 25% del primero y del 75% del segundo es igual a 30. ¿Cuáles son los números?.

7.5 CEROS ENTEROS DE UN POLINOMIO

- Los ceros y los factores de polinomios de primero y segundo grado son relativamente fáciles de obtener. Los ceros y los factores de polinomios de grado 3 ó 4 también se pueden obtener por medio de ciertas fórmulas pero su procedimiento es bastante complicado. Finalmente, hay que decir que el gran matemático Karl F. Gauss demostró que no existe una fórmula general, escrita en términos de los coeficientes del polinomio, para obtener los ceros de polinomios de grado mayor que 4.
- El mismo Gauss enunció y demostró el siguiente teorema, llamado precisamente TEOREMA DE GAUSS:

Teorema de Gauss

En los reales, todo polinomio puede escribirse de forma única como producto de polinomios de primer grado y de segundo grado que sean primos en los reales.

- Por ejemplo, el polinomio $P(x) = 2x^4 - 11x^3 + 11x^2 + 15x - 9$ tiene por ceros a: $x = 3$, $x = -1$ y $x = \frac{1}{2}$ (¡Compruébalo!) y al factorizarlo nos queda:

$$P(x) = (x - 3)(x - 3)(x + 1)(2x - 1)$$
$$\therefore\ P(x) = (x - 3)^2(x + 1)(2x - 1)$$

En este caso, el polinomio quedó factorizado con cuatro factores de primer grado.

- En el caso del polinomio $Q(x) = 2x^3 - 3x^2 - 4x - 15$, sólo hay un cero real: $x = 3$ (¡Compruébalo!); por lo tanto, $x - 3$ es un factor de este polinomio. Esto significa que:

$$Q(x) = (x - 3) \bullet C(x)$$

¿Cómo obtenemos el otro factor C(x)? Sencillo: Dividiendo Q(x) entre $x - 3$. Esto podemos lograrlo utilizando el método de la división sintética; así:

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & -3 & -4 & -15 \\ 3 & & 6 & 9 & 15 \\ \hline & 2 & 3 & 5 & 0 \end{array}$$

Luego, $Q(x) = 2x^3 - 3x^2 - 4x - 15 = (x - 3)(2x^2 + 3x + 5)$

Y como el polinomio $C(x) = 2x^2 + 3x + 5$ es primo en los reales (¿por qué?), entonces el polinomio dado ha quedado factorizado como el producto de un factor lineal y otro de segundo grado, primo en los reales.

- Ahora tratemos de contestar la siguiente pregunta: ¿Cómo hallamos los ceros enteros de un polinomio con coeficientes enteros, en caso de que existan? Para contestar la pregunta, realicemos la siguiente experiencia.

EXPERIENCIA

- Consideremos un polinomio de tercer grado (aunque las conclusiones que vamos a obtener son válidas para cualquier otro polinomio).

Sea $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, con $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$.

- Si suponemos que $x = r$ es un cero entero de este polinomio, entonces:

$$P(r) = ar^3 + br^2 + cr + d = 0$$
$$\therefore\ d = -ar^3 - br^2 - cr \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (1)$$

- Si dividimos ambos miembros de la igualdad (1) por r, nos queda:

$$\frac{d}{r} = -\frac{ar^3}{r} - \frac{br^2}{r} - \frac{cr}{r}$$

$$\therefore \frac{d}{r} = -ar^2 - br - c \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(2)}$$

- Y como $-ar^2 - br - c$ es un número entero, por ser la suma y la multiplicación de números enteros, entonces concluimos que **r es un divisor de d**.
- Conclusión:

APRENDAMOS

CEROS ENTEROS DE UN POLINOMIO

Si un polinomio P(x) con coeficientes enteros tiene ceros enteros, entonces estos ceros son divisores del término independiente.

Ejemplo 1:

Hallemos los posibles ceros enteros del polinomio $P(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$ y, si existen, factoricémoslo.

Solución

- Los posibles ceros enteros son los divisores del término independiente del polinomio: ± 1 y ± 2.
- Empecemos a verificar si son o no son:

  * Para $x = -1 : (-1)^3 + 2(-1)^2 - (-1) - 2 = -1 + 2 + 1 - 2 = 0$ ¡Cumple!
  * Para $x = 1 : 1^3 + 2(1)^2 - 1 - 2 = 1 + 2 - 1 - 2 = 0$ ¡Cumple!
  * Para $x = -2 : (-2)^3 + 2(-2)^2 - (-2) - 2 = -8 + 8 + 2 - 2 = 0$ ¡Cumple!
  * Para $x = 2 : 2^3 + 2(2)^2 - 2 - 2 = 8 + 8 - 2 - 2 = 12 \neq 0$ ¡No cumple!

- Hemos encontrado que $x = -1$, $x = 1$ y $x = -2$ son ceros de P(x) y, de acuerdo con el teorema del factor, podemos garantizar que $(x + 1)$, $(x - 1)$ y $(x + 2)$ son factores de este polinomio.
- Como estos tres factores son de primer grado, al multiplicarlos de nuevo, obtendríamos un polinomio de tercer grado, como es el grado de P(x). Por lo tanto:

$$P(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 1)(x + 2)$$

Ejemplo 2:

Hallemos los posibles ceros enteros del polinomio $P(x) = 2x^3 + x^2 - 3x + 6$ y, si existen, factoricémoslo.

Solución

- Los posibles ceros enteros son los divisores del término independiente del polinomio: ± 1, ± 2, ± 3 y ± 6.
- Verifiquemos:

  * Para $x = -1 : 2(-1)^3 + (-1)^2 - 3(-1) + 6 = -2 + 1 + 3 + 6 = 8 \neq 0$
  * Para $x = 1 : 2(1)^3 + 1^2 - 3(1) + 6 = 2 + 1 - 3 + 6 = 6 \neq 0$
  * Para $x = -2 : 2(-2)^3 + (-2)^2 - 3(-2) + 6 = -16 + 4 + 6 + 6 = 0$
  * Para $x = 2 : 2(2)^3 + 2^2 - 3(2) + 6 = 16 + 4 - 6 + 6 = 20 \neq 0$
  * Para $x = -3 : 2(-3)^3 + (-3)^2 - 3(-3) + 6 = -54 + 9 + 9 + 6 = -30 \neq 0$
  * Para $x = 3 : 2(3)^3 + 3^2 - 3(3) + 6 = 54 + 9 - 9 + 6 = 60 \neq 0$
  * Para $x = -6 : 2(-6)^3 + (-6)^2 - 3(-6) + 6 = -432 + 36 + 18 + 6 = -372 \neq 0$
  * Para $x = 6 : 2(6)^3 + 6^2 - 3(6) + 6 = 432 + 36 - 18 + 6 = 456 \neq 0$

- Sólo encontramos un cero entero: $x = -2$. Por lo tanto $(x + 2)$ es un factor de $P(x) = 2x^3 + x^2 - 3x + 6$; es decir:

$$P(x) = 2x^3 + x^2 - 3x + 6 = (x + 2) \bullet C(x)$$

- Para encontrar a C(x), que debe ser un polinomio de segundo grado (¿por qué?), recurrimos al método de la división sintética:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 1 & -3 & 6 \\ -2 & & -4 & 6 & -6 \\ \hline & 2 & -3 & 3 & 0 \end{array}$$

Luego, $P(x) = (x + 2)(2x^2 - 3x + 3)$

- Pregunta: ¿Tiene el polinomio $2x^2 - 3x + 3$ ceros que no sean enteros? ¿Por qué?

EJERCICIO 7.3

1. Halla los ceros enteros de los siguientes polinomios:

   a) $P(x) = (x - 2)(x + 1)(x + 3)$ b) $P(x) = (2x - 3)(x + 2)(x - 5)$
   c) $P(x) = (3x + 2)(x - 1)(x + 4)$ d) $P(x) = (5x - 4)(x - 1)x$

2. Halla los ceros enteros de los siguientes polinomios:

   a) $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ b) $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$
   c) $P(x) = 8x^2 + 10x - 3$ d) $P(x) = 6x^3 + 7x^2 - 6x + 8$

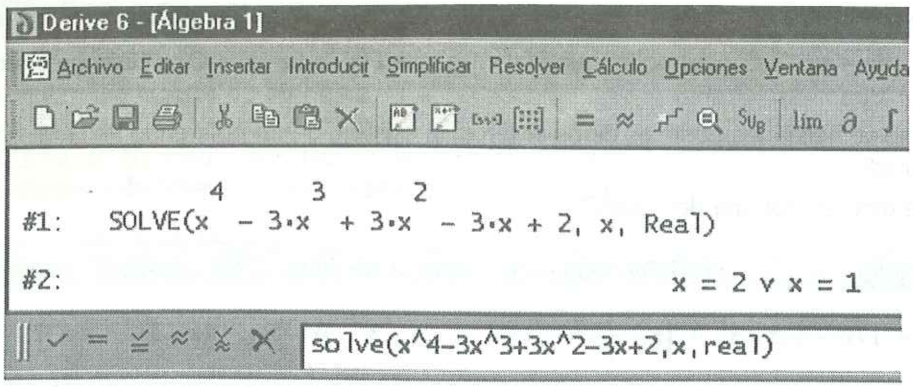
   Usa el DERIVE para comprobar los resultados obtenidos.

3. ¿Tiene ceros reales el polinomio $P(x) = 8x^2 + 10x - 3$? ¿Cuáles son? ¿Son enteros estos ceros?
4. Factoriza los polinomios del ejercicio 2.
5. Halla los ceros enteros y factoriza el polinomio $P(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x - 3$. Usa el DERIVE para comprobar los resultados obtenidos.

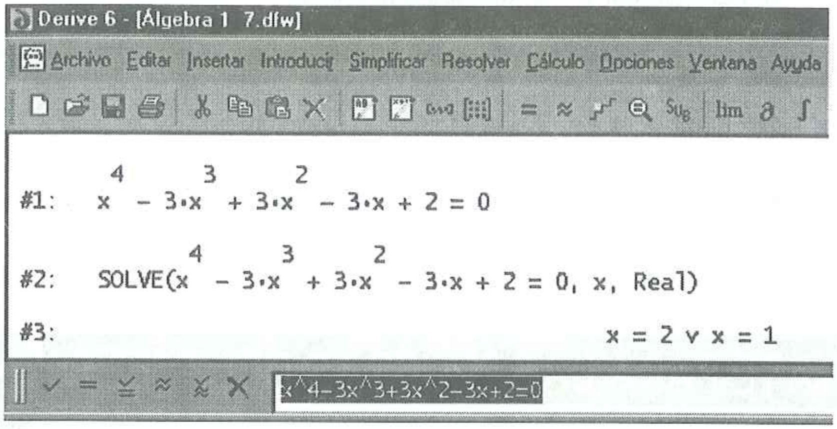
7.6 USO DEL DERIVE PARA HALLAR CEROS ENTEROS DE UN POLINOMIO

Para hallar los ceros de un polinomio; por ejemplo, $x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2$, tenemos dos alternativas:

1. Entrar y simplificar la expresión SOLVE (f(x), x); así:
   - Escribimos SOLVE (x^4 - 3*x^3 + 3*x^2-3*x+2,x, real).
   - Luego, oprimimos la tecla SHIFT y la tecla ENTER
   - De inmediato la Ventana de Álgebra del DERIVE nos mostrará lo siguiente:



2. Ingresar la ecuación $x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2 = 0$ a la Ventana de Algebra y, luego, hacer sucesivamente click donde el MENÚ DE OPCIONES en los comandos: RESOLVER click, EXPRESIÓN click, ALGEBRAICOS click, REAL click, RESOLVER. De inmediato aparecerá en la Ventana de Algebra lo siguiente:



DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 2

Andrés y Juan viven en la misma casa y trabajan en la misma empresa. Andrés tarda 20 minutos en ir de la casa al lugar de trabajo y Juan tarda 30 minutos para realizar el mismo recorrido, ¿cuánto tardará Andrés en alcanzar a Juan si este ha salido 5 minutos antes?

TALLER DE REPASO DE LA UNIDAD 7

1. Contesta las siguientes preguntas:

   a) ¿Qué establece el teorema del residuo?

   b) ¿Cuándo un número real es cero de un polinomio

c) ¿Qué establece el teorema del factor?

d) Si (x - a) es un factor del polinomio P(x) entonces $P(x) = (x - a) \bullet C(x)$. ¿Cómo se determina el factor C(x)?

e) ¿Cómo se hallan los posibles ceros enteros, si existen, de un polinomio P(x) con coeficientes enteros?

f) ¿Qué dice el teorema de Gauss?

En los ejercicios 2. a 5., halla el residuo sin hacer la división.

2. $2x^4 + 17x^3 - 68x - 32 \div \left(x - \frac{1}{2}\right)$
3. $5x^3 - 3x^2 - 4x - 3 \div (x - 3)$
4. $3a^3 + 5a^2 - 6a \div (a + 1)$
5. $-2x^4 + 5x^3 - 6x^2 + 7x \div \left(x - \frac{1}{2}\right)$

En los ejercicios 6. a 9., halla los CEROS enteros de cada polinomio:

6. $P(x) = x^3 - 12x + 16$
7. $P(m) = m^3 + m^2 - 13m - 28$
8. $P(x) = 2x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 7x + 6$
9. $P(t) = t^3 - 3t^2 - 4t + 12$

Usa el DERIVE para comprobar los resultados obtenidos.

En los ejercicios 10. a 15., factoriza cada polinomio en Z:

10. $P(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 4x - 4$
11. $P(x) = x^5 - 25x^3 + x^2 - 25$
12. $P(x) = 5x^3 - 37x^2 + 64x - 20$
13. $P(x) = x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 8x + 4$
14. $P(x) = x^4 - 5x^2 + 4$
15. $P(x) = x^3 - 5x^2 - 2x + 4$

PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS DEL ICFES

1. El producto de dos números es 200. Si uno de los factores se multiplica por 3 y el otro factor se multiplica por 2, entonces el producto queda:

   a) 2 veces mayor
   b) 6 veces mayor
   c) 5 veces mayor
   d) Igual

2. Un sastre tiene una pieza de paño de 12 metros de longitud y todos los días corta 2 metros. De acuerdo con esto, el sastre terminó de cortar la pieza de tela al cabo de:

   a) 3 días
   b) 5 días
   c) 4 días
   d) 6 días

En los ejercicios 3. a 5. responde así:

a) Si sólo necesitas la información 1.

b) Si sólo necesitas la información 2.

c) Si necesitas las informaciones 1. y 2.

d) Si cualquiera de las dos te sirve.

e) Si no es suficiente con las dos.

3. Para saber qué porcentaje de $\overline{AC}$ es $\overline{AB}$, necesitamos conocer:

   1. La longitud de $\overline{AB}$
   2. La longitud de $\overline{AC}$

4. Para conocer el peso de un libro que tiene 250 hojas se necesita conocer que:

   1. 100 hojas pesan 80 gr.
   2. Cada cuadernillo consta de 50 hojas.

5. Margarita tiene determinada cantidad de dinero entre billetes de 10 dólares y de 20 dólares. Para calcular el número de billetes de cada valor, es necesario saber:

   1. El número total de billetes
   2. La cantidad de dinero que tiene.

Núcleo Temático

8

FRACCIONES ALGEBRAICAS RACIONALES

LOGRO GENERAL

Operar y simplificar fracciones algebraicas racionales.

LOGROS ESPECÍFICOS	INDICADORES DE LOGRO
Corporal: • Realizar experiencias que permitan identificar fracciones complejas.	• Participa en actividades de destreza operativa y manejo de las operaciones con expresiones algebraicas.
Comunicativa: • Conseguir la participación activa de todos los alumnos por medio de sugerencias.	• Describe oralmente la manera como se simplifica una fracción racional.
Cognitiva: • Identificar fracciones complejas. • Aplicar la factorización para simplificar fracciones algebraicas racionales.	• Transforma fracciones algebraicas racionales complejas en otras más sencillas.
Estética: • Elaborar tablas y fichas en cartulina mostrando como se simplifican fracciones racionales.	• Socializa los ejercicios escritos en las fichas, al interactuar con los compañeros.
Ética-Actitudinal: • Valora el trabajo en grupo.	• Realiza con interés las actividades propuestas en grupo. • Comparte con el grupo sus habilidades y conocimientos.

DIMENSIONES

EVALUACIÓN

ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS

8.1 HISTORIA DEL ÁLGEBRA (8): JERÓNIMO CARDÁN (1501-1576)

JERÓNIMO CARDÁN
(1501 - 1576)

Jerónimo Cardán fue un hombre de contradicciones. Filósofo, astrólogo, médico: unas veces enseñaba en la Universidad de Bolonia y otras veces le encerraban en un manicomio.

La solución de la ecuación de tercer grado lleva hoy día el nombre de **solución de Cardán.** Entre sus descubrimientos algebraicos, Cardán logró reducir la ecuación general de tercer grado a la forma $x^3 + bx = c$, estudió las ecuaciones irreductibles, las raíces de la ecuación de tercer grado e inició la teoría de las funciones simétricas. En 1545 publicó un tratado en latín titulado **Ars Magna de rebus algebricis,** donde explica, en el capítulo que hace referencia a las ecuaciones de tercer grado, que su amigo Tartaglia le había comunicado la solución de las ecuaciones de la forma $x^3 + bx = c$, para un caso, y que él, Cardano, había encontrado soluciones para los otros dos casos. La publicación de esta obra enfureció a Tartaglia, pues consideró que Cardán había violado un secreto que le había compartido. Por esta razón empezó la enemistad entre Tartaglia y Cardán. Un discípulo de este, llamado **Ludovico Ferrari,** a quien se debe la resolución de las ecuaciones de cuarto grado, tomó muy a pecho la defensa de Cardán y desafió a Tartaglia repetidas veces. De estos combates intelectuales salió mal librado Tartaglia.

Cardán mezcló a su poderosa capacidad científica una desconcertante devoción por la magia y la astrología. Según el horóscopo, que él mismo se hizo, calculó su muerte y como no se efectuara en el día y hora que había previsto, desilusionado se dejó morir de hambre.

En 1589, Rafael Bembelli desarrolló una teoría sobre las **fracciones continuas** y otra sobre los **números imaginarios**. En esta última explicaba el **casus irreductibilis** de la ecuación de tercer grado que tuvo perplejo a Cardán.

EJERCICIO 8.1

Comprensión de Lectura. Explicación: Lee nuevamente el fragmento anterior y luego encierra, en un círculo, la letra que corresponda a la respuesta correcta:

1. El título más apropiado para el texto anterior podría ser:

   a. Cardán, entre la magia y la ciencia.
   b. Pensamiento científico de Jerónimo Cardán.
   c. Apuntes de un loco genial.
   d. Vida y Obra del astrólogo Jerónimo Cardán.

2. La enemistad entre Tartaglia y Cardán tuvo su origen en:

   a. Celos de Tartaglia por los grandes logros de Cardán.
   b. La divulgación de una carta que Tartaglia había enviado a Cardán.
   c. La defensa que hizo Ferrari de la obra de Cardán.
   d. Un acto de "deslealtad" de Cardán.

3. La muerte de Cardán está ligada con:

   a. Fallas en cálculos matemáticos.

b. Sus prácticas con la magia y la astrología.
c. Fracasos en algunas teorías enunciadas.
d. La enemistad con su antiguo amigo Tartaglia.

4. Corresponden a Cardán las siguientes realizaciones, menos:

a. Inició la teoría de las funciones simétricas.
b. Hizo traducciones del latín a otros idiomas.
c. Estudió las ecuaciones irreducibles.
d. Trabajó por los lados de la astrología y creó su propio horóscopo.

5. El propósito específico del autor, en el escrito anterior es:

a. Explicar el origen del conflicto entre dos grandes científicos.
b. Exponer las razones que llevaron a Cardán a la muerte.
c. Demostrar que Tartaglia estaba errado en sus planteamientos frente a Cardán.
d. Destacar aspectos contradictorios de un genio de las matemáticas.

8.2 FRACCIONES Y EXPRESIONES RACIONALES

EXPERIENCIA DE REPASO

- Recordemos que si a y b son números reales y $b \neq 0$, entonces la DIVISIÓN entre a y b se simboliza $\mathbf{a \div b}$; ó también $\mathbf{\frac{a}{b}}$. En este caso: $\mathbf{\frac{a}{b} = c}$ **si y sólo si** $\mathbf{a = b \cdot c}$

La razón de ser de la restricción $b \neq 0$ ya la analizamos en la unidad 1 cuando estudiamos el sistema de los números reales. Por lo tanto, conviene no olvidar que:

La división por cero no está definida en $\mathbb{R}$

- El numeral $\frac{a}{b}$ se denomina FRACCIÓN ; el número **a** se llama **numerador** y **b** se llama **denominador**. Si el numerador y el denominador de una fracción son **polinomios**, entonces la fracción se denomina **FRACCIÓN ALGEBRAICA RACIONAL.**

APRENDAMOS

DEFINICIÓN

- Un numeral de la forma $\mathbf{\frac{a}{b}}$ con $\mathbf{b \neq 0}$, se denomina **FRACCIÓN.**
- Si el numerador y el denominador de una fracción son polinomios, la fracción se denomina **FRACCIÓN ALGEBRAICA RACIONAL.**

Ejemplo:

Las fracciones: $\frac{4}{x-2}$; $\frac{2m+3}{m^2-1}$; $\frac{3z+4}{z^3+8}$; $\frac{-3}{6pq}$ son fracciones algebraicas racionales porque el numerador y el denominador son polinomios. Y puesto que el denominador no puede ser cero, es necesario hacer las siguientes restricciones: $x \neq 2$; $m \neq -1$ y $m \neq 1$; $z \neq -2$; $p \neq 0$ y $q \neq 0$.

- Como ocurre con las fracciones de números reales, las propiedades de éstas también se cumplen en el caso de las fracciones racionales. En particular, una fracción algebraica racional es **irreducible** o está en su **forma más simple** si el numerador y el denominador no tienen factor común diferente de 1 ó -1. Si una fracción algebraica racional dada no está en su forma más simple, entonces podemos sustituirla por una equivalente a ella factorizando el numerador y el denominador y, luego, dividiendo ambos (el numerador y el denominador) por los factores comunes. Este procedimiento se denomina **simplificación de una fracción algebraica racional** y se fundamenta en la siguiente propiedad de las fracciones:

$$\textbf{Si } c \neq 0 \textbf{ entonces } \frac{a \cdot \cancel{c}}{b \cdot \cancel{c}} = \frac{a}{b}$$

APRENDAMOS

- Una fracción algebraica racional es **irreducible** si sus únicos factores comunes son 1 ó -1.
- Para reducir una fracción algebraica racional a su forma más simple debemos SIMPLIFICARLA haciendo lo siguiente:
  * Factorizando el numerador y el denominador.
  * Cancelando los factores comunes.

¡ATENCIÓN!

1. En muchas ocasiones es importante no sólo simplificar una fracción sino también AMPLIFICARLA; es decir, obtener una fracción equivalente a la fracción dada pero MULTIPLICANDO el numerador y el denominador por un mismo número **diferente** de cero. Esto es posible gracias a que:

$$\textbf{Si } \frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b} \textbf{ entonces } \frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c} \text{ ; con } b \neq 0 \text{ y } c \neq 0$$

en virtud de la propiedad simétrica de la igualdad de números reales.

2. Es importante insistir en que para SIMPLIFICAR una fracción eliminamos TODOS LOS FACTORES COMUNES, diferentes de cero, del numerador y del denominador.

Ejemplo 1

Observemos atentamente :

- $\frac{4m}{5m} = \frac{4\cancel{m}}{5\cancel{m}} = \frac{4}{5}$; con $m \neq 0$ $\Rightarrow$ ¡Bien simplificado! Eliminamos FACTORES comunes.
- $\frac{4+m}{5+m} = \frac{4+\cancel{m}}{5+\cancel{m}} = \frac{4}{5}$; con $m \neq 0$ $\Rightarrow$ No hubo simplificación porque no se eliminaron FACTORES sino TÉRMINOS.

Ejemplo 2

Observemos cómo se simplifican las siguientes fracciones:

- $\frac{12m^2n}{15mn^2} = \frac{(\cancel{3mn})(4m)}{(\cancel{3mn})(5n)} = \frac{4m}{5n}$; con $m, n \neq 0$ $\Rightarrow$ Eliminamos FACTORES comunes.
- $\frac{x^2+5x+6}{x^2-4} = \frac{(x+3)\cancel{(x+2)}}{\cancel{(x+2)}(x-2)} = x + 3$; con $x \neq -2$ $\Rightarrow$ Eliminamos FACTORES comunes.

Notemos : $\dfrac{\cancel{x^2} + 5x + 6}{\cancel{x^2} - 4} \neq \dfrac{5x + 6}{-4}$ .... ¿Por qué no está bien simplificado?

- $\dfrac{\overset{1}{\cancel{x}} - \overset{1}{\cancel{2}}}{\underset{1}{\cancel{x}} + \underset{1}{\cancel{2}}} \overset{\text{ojo}}{\neq} \dfrac{1 - 1}{1 + 1}$ .... Mal simplificado porque de nuevo estamos eliminando TÉRMINOS y no FACTORES

- $\dfrac{\cancel{x^2} + \cancel{7x} + 12}{\cancel{x^2} + \cancel{7x} + 6} \overset{\text{ojo}}{\neq} \dfrac{1 + 1 + 12}{1 + 1 + 6}$ .... ¿Por qué no está bien simplificado?

- $\dfrac{\overset{1}{\cancel{4x}} + 9}{\underset{1}{\cancel{4x}}} \overset{\text{ojo}}{\neq} \dfrac{1 + 9}{1}$ .... ¿Por qué no está bien simplificado?

Ejemplo 3

Simplifiquemos la fracción $\dfrac{a^2 - 4a - 21}{49 - a^2}$

Solución:

- Tenemos:

$\dfrac{a^2 - 4a - 21}{49 - a^2} = \dfrac{a^2 - 4a - 21}{-(a^2 - 49)}$ .... ¿ por qué ?

$\therefore \dfrac{a^2 - 4a - 21}{49 - a^2} = \dfrac{\cancel{(a-7)}(a+3)}{-(a+7)\cancel{(a-7)}}$ .... Factorizamos numerador y denominador

$\therefore \dfrac{a^2 - 4a - 21}{49 - a^2} = -\dfrac{a + 3}{a + 7}$; con $a \neq 7$ .... Eliminamos el factor común (a-7) y aplicamos $\dfrac{(+)}{(-)} = (-)$

- En este ejemplo usamos dos propiedades importantes:

1. $a - b = -(b - a)$ 2. $\dfrac{-a}{b} = \dfrac{a}{-b} = -\dfrac{a}{b}$

Ejemplo 4

Simplifiquemos la fracción $\dfrac{3 - a}{2a^2 - a - 15}$

Solución:

- Tenemos:

$\dfrac{3 - a}{2a^2 - a - 15} = \dfrac{3 - a}{(2a + 5)(a - 3)}$ .... Factorizamos el denominador

$\therefore \dfrac{3 - a}{2a^2 - a - 15} = \dfrac{-\cancel{(a-3)}}{(2a + 5)\cancel{(a-3)}}$ .... $3 - a = -(a - 3)$

$\therefore \dfrac{3 - a}{2a^2 - a - 15} = \dfrac{-1}{2a + 5}$,con $a \neq 3$ .... Eliminamos el factor común (a - 3)

$\therefore \dfrac{3 - a}{2a^2 - a - 15} = -\dfrac{1}{2a + 5}$,con $a \neq 3$ ...... ¿ por qué ?

APRENDAMOS

SIMPLIFICACIÓN DE FRACCIONES

- Para **SIMPLIFICAR** fracciones, factorizamos el numerador y el denominador y "tachamos" los **FACTORES** (no los términos) **COMUNES.**
- Al simplificar fracciones conviene tener en cuenta las siguientes propiedades:

$$\mathbf{1.}\quad a - b = -(b - a) \qquad ; \qquad \mathbf{2.}\quad \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$$

- Una fracción también se puede **AMPLIFICAR**. Para ello basta multiplicar su numerador y su denominador por un factor conveniente diferente de cero.

EJERCICIO 8.2

En los ejercicios 1 a 8 simplifica completamente cada fracción:

1. $\frac{84}{36}$ 2. $\frac{24}{128}$ 3. $\frac{-50}{75}$ 4. $\frac{60}{135}$

5. $\frac{2x^3}{6x^5}$ 6. $\frac{9m^5}{3m^6}$ 7. $\frac{14x^3y}{21xy^2}$ 8. $\frac{24x^4y^6}{-15x^5y^2}$

En los ejercicios 9 a 17 indica cuáles igualdades son verdaderas y cuáles son falsas. Explica la razón.

9. $\frac{5+\cancel{6}}{\cancel{6}} = 5$ 10. $\frac{\cancel{x^2+y^2}}{\cancel{x^2+y^2}} = 0$ 11. $\frac{\cancel{m^2}+d^2}{\cancel{m^2}+c^2} = \frac{d^2}{c^2}$

12. $\frac{\cancel{4}p+\cancel{4}q}{\cancel{4}m+\cancel{4}n} = \frac{p+q}{m+n}$ 13. $\frac{\cancel{3a+2}}{\cancel{2+3a}} = 1$ 14. $\frac{5-a}{a-5} = -1$

15. $\frac{\cancel{5a}-7}{\cancel{5a}+2} = -\frac{7}{2}$ 16. $\frac{5}{15} = \frac{\cancel{5}}{3\cdot\cancel{5}} = \frac{1}{3}$ 17. $-\frac{a}{b} = \frac{-a}{-b}$

En los ejercicios 18. a 23. indica los valores de x para los cuales cada fracción no es un número real.

18. $\frac{3x+7}{x-2}$ 19. $\frac{x+3}{x+9}$ 20. $\frac{2x}{x^2+1}$

21. $\frac{x^2-4}{5x+3}$ 22. $\frac{8x-12}{x^2+2x-15}$ 23. $\frac{8x}{x^2-3x}$

En los ejercicios 24 a 26 completa el $\square$ con la expresión adecuada para que la igualdad sea verdadera:

24. $\frac{3}{2x} = \frac{\square}{8x^2y}$ 25. $\frac{5x}{3} = \frac{10x^3y^2}{\square}$ 26. $\frac{5u}{4v^2} = \frac{20u^3v}{\square}$

En los ejercicios 27 a 30 escribe fracciones equivalentes a las fracciones dadas pero que no tengan signo MENOS (-) en el numerador ni en el denominador:

27 $\dfrac{-7}{4}$ **28** $\dfrac{8}{-3}$ **29** $\dfrac{-4a - b}{a + b}$ **30** $\dfrac{-8x - 5}{-x}$

En los ejercicios 31. a 45. simplificar cada fracción.

31 $\dfrac{9a^3b}{6a^2bc^2}$ **32** $\dfrac{4a^3 b x^2}{8a^2 b^3 x^2}$ **33** $\dfrac{10a^4 b^3}{15a^2 b^2c}$

34 $\dfrac{3ab^2 + 3b^2x}{3ax^2 + 3x^3}$ **35** $\dfrac{10a^2 - 4ab}{12a^2}$ **36** $\dfrac{a^2+2ab + b^2}{ax + bx}$

37 $\dfrac{4a^2 - 8a + 4}{4a^4 - 4}$ **38** $\dfrac{x^3 - 1}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}$ **39** $\dfrac{x^2 + y^2 + 2xy- z^2}{x^2 + z^2 + 2xz- y^2}$

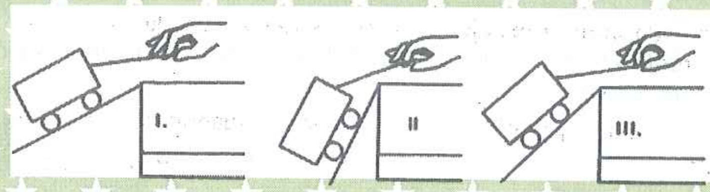
40 $\dfrac{a^6 - b^6}{a^3 b^3 - a^6}$ **41** $\dfrac{ab - 2a + 3b -6}{ab - 2a -3b +6}$ **42** $\dfrac{x^4 - a^4}{x^5 - a^2x^3}$

43 $\dfrac{a^5 - a^4b - ab^4 + b^5}{a^4 - a^3b - a^2b^2 + ab^3}$ **44** $\dfrac{16 + 32a + 16a^2}{24 - 48a^2 + 24a^4}$ **45** $\dfrac{x^3 + y^3}{(x - y)^2 + xy}$

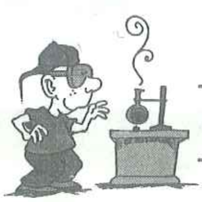
DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 1

El caucho que tira de los carritos, se estira más en la condición:

A. III
B. II
C. I
D. Por igual en las tres



8.3 MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE FRACCIONES ALGEBRAICAS



EXPERIENCIA

- El proceso de operar con fracciones algebraicas es completamente idéntico al de operar con fracciones aritméticas. Por esta razón vamos a recordar el proceso para multiplicar y dividir fracciones aritméticas.
- Resolvamos y simplifiquemos $\dfrac{4}{14} \bullet \dfrac{15}{24}$

* En primer lugar, simplificamos cada una de las fracciones dadas (si es posible):

$$\frac{\overset{2}{\cancel{4}}}{\underset{7}{\cancel{14}}} = \frac{2}{7} \quad ; \quad \frac{\overset{5}{\cancel{15}}}{\underset{8}{\cancel{24}}} = \frac{5}{8}$$

* Por lo tanto: $\frac{4}{14} \bullet \frac{15}{24} = \frac{2}{7} \bullet \frac{5}{8}$

* A continuación, multiplicamos numeradores entre sí y denominadores entre sí; es decir:

$$\frac{2}{7} \bullet \frac{5}{8} = \frac{2 \bullet 5}{7 \bullet 8} = \frac{10}{56}$$

* Finalmente simplificamos la fracción resultante: $\frac{\overset{5}{\cancel{10}}}{\underset{28}{\cancel{56}}} = \frac{5}{28}$

* Resumamos todo el proceso:

$$\frac{4}{14} \bullet \frac{15}{24} = \frac{2}{7} \bullet \frac{5}{8}$$

$$\therefore \frac{4}{14} \bullet \frac{15}{24} = \frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{7} \bullet \frac{5}{\underset{4}{\cancel{8}}}$$

$$\therefore \frac{4}{14} \bullet \frac{15}{24} = \frac{5}{28}$$

- Resolvamos y simplifiquemos $\frac{6}{15} \div \frac{8}{18}$

  * En primer lugar, simplificamos cada fracción (si es posible):

$$\frac{\overset{2}{\cancel{6}}}{\underset{5}{\cancel{15}}} = \frac{2}{5} \quad ; \quad \frac{\overset{4}{\cancel{8}}}{\underset{9}{\cancel{18}}} = \frac{4}{9}$$

  * Para dividir dos fracciones, multiplicamos la primera fracción por el INVERSO MULTIPLICATIVO de la segunda:

$$\frac{6}{15} \div \frac{8}{18} = \frac{2}{5} \div \frac{4}{9} = \frac{2}{5} \bullet \frac{9}{4}$$

$$\therefore \frac{6}{15} \div \frac{8}{18} = \frac{\overset{1}{\cancel{2}} \bullet 9}{5 \bullet \underset{2}{\cancel{4}}} = \frac{9}{10}$$

¡ATENCIÓN!

Es muy importante, antes de operar con fracciones, simplificarlas si es posible, ya que ésto reduce significativamente el proceso de trabajo.

APRENDAMOS

MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE FRACCIONES

- Antes de multiplicar o dividir fracciones debemos simplificarlas, si es posible.
- Para multiplicar dos fracciones procedemos así:
  1. Multiplicamos los numeradores entre sí y los denominadores entre sí, dejando indicados los productos.
  2. Simplificamos factores del numerador con factores del denominador, si es posible.
  3. Multiplicamos los factores resultantes del numerador y los factores resultantes del denominador.

- Para DIVIDIR dos fracciones procedemos así:
  1. Multiplicamos la primera fracción por el INVERSO MULTIPLICATIVO de la segunda.
  2. A continuación, procedemos exactamente lo mismo que en la multiplicación de fracciones.

Ejemplo 1

Multipliquemos y simplifiquemos $\dfrac{44}{35} \bullet \dfrac{28}{24}$

Solución:

- En primer lugar, simplificamos las fracciones dadas: $\dfrac{44}{35} \bullet \dfrac{\overset{7}{\cancel{28}}}{\underset{6}{\cancel{24}}} = \dfrac{44}{35} \bullet \dfrac{7}{6}$
- A continuación, multiplicamos numeradores entre sí y denominadores entre sí, pero dejamos indicados los productos:

$$\frac{44}{35} \bullet \frac{\overset{7}{\cancel{28}}}{\underset{6}{\cancel{24}}} = \frac{44}{35} \bullet \frac{7}{6} = \frac{44 \bullet 7}{35 \bullet 6}$$

- Ahora simplificamos factores del numerador con factores del denominador:

$$\frac{44}{35} \bullet \frac{28}{24} = \frac{\overset{22}{\cancel{44}}}{\underset{5}{\cancel{35}}} \bullet \frac{\overset{1}{\cancel{7}}}{\underset{3}{\cancel{6}}} = \frac{22 \bullet 1}{5 \bullet 3} = \frac{22}{15}$$

¡ATENCIÓN!

Es posible que alguien prefiera multiplicar los numeradores entre sí y los denominadores entre sí, sin haberlos simplificado antes. Veamos qué ocurre:

$$\frac{44}{35} \bullet \frac{28}{24} = \frac{44 \bullet 28}{35 \bullet 24}$$

$$\therefore\ \frac{44}{35} \bullet \frac{28}{24} = \frac{1232}{840}$$ .... Y ahora a simplificar ¿iqué pereza, verdad!?

Ejemplo 2

Multipliquemos $\left(-\dfrac{30a^2\,bc}{7\,xy}\right) \bullet \left(\dfrac{14x^3y}{6ab^2}\right) \bullet \left(-\dfrac{2\,ac^2}{5\,xy^2}\right)$

Solución:

Expliquemos cada paso realizado:

$$\left(-\frac{30a^2\,bc}{7\,xy}\right) \bullet \left(\frac{\overset{7}{\cancel{14}}x^3y}{\underset{3}{\cancel{6}}ab^2}\right) \bullet \left(-\frac{2\,ac^2}{5\,xy^2}\right) = \left(-\frac{30a^2\,bc}{7\,xy}\right) \bullet \left(\frac{7x^3y}{3\,ab^2}\right) \bullet \left(-\frac{2\,ac^2}{5\,xy^2}\right)$$

$$\therefore\ \left(-\frac{30a^2\,bc}{7\,xy}\right) \bullet \left(\frac{14x^3y}{6\,ab^2}\right) \bullet \left(-\frac{2\,ac^2}{5\,xy^2}\right) = \frac{(\overset{2}{\cancel{30}}a^2\,bc) \bullet (\cancel{7}x^3\cancel{y}) \bullet (2\cancel{a}c^2)}{(\cancel{7}\,x\cancel{y}) \bullet (\underset{1}{\cancel{3}}\cancel{a}b^2) \bullet (\underset{1}{\cancel{5}}xy^2)}$$

$$\therefore\ \left(-\frac{30a^2\,bc}{7\,xy}\right) \bullet \left(\frac{14x^3y}{6\,ab^2}\right) \bullet \left(-\frac{2\,ac^2}{5\,xy^2}\right) = \frac{4a^2\cancel{b}c^3\overset{x}{\cancel{x^3}}}{\underset{b}{\cancel{b^2}}\cancel{x^2}y^2}$$

$$\therefore\ \left(-\frac{30a^2\,bc}{7\,xy}\right) \bullet \left(\frac{14x^3y}{6\,ab^2}\right) \bullet \left(-\frac{2\,ac^2}{5\,xy^2}\right) = \frac{4a^2c^3x}{by^2}$$

Ejemplo 3

Multipliquemos y simplifiquemos $\dfrac{1-a^2}{a^2+2a} \bullet \dfrac{a^2-4}{a^2+a} \bullet \dfrac{2a}{a-1}$

Solución:

- Simplifiquemos cada fracción, si es posible:

$$\frac{1-a^2}{a^2+2a} \bullet \frac{a^2-4}{a^2+a} \bullet \frac{2a}{a-1} = \frac{(1-a)(1+a)}{a(a+2)} \bullet \frac{(a+2)(a-2)}{a(a+1)} \bullet \frac{2a}{a-1}$$

- Como las fracciones no son simplificables individualmente, entonces multipliquemos numeradores entre sí y denominadores entre sí:

$$\frac{1-a^2}{a^2+2a} \bullet \frac{a^2-4}{a^2+a} \bullet \frac{2a}{a-1} = \frac{(1-a)\cancel{(1+a)}\bullet\cancel{(a+2)}(a-2)\bullet 2\cancel{a}}{\cancel{a}\cancel{(a+2)}\bullet a\cancel{(a+1)}\bullet(a-1)} = \frac{2(1-a)(a-2)}{a(a-1)}$$

$$\therefore \frac{1-a^2}{a^2+2a} \bullet \frac{a^2-4}{a^2+a} \bullet \frac{2a}{a-1} = \frac{2[-(a-1)](a-2)}{a(a-1)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1-a) = -(a-1)$$

$$\therefore \frac{1-a^2}{a^2+2a} \bullet \frac{a^2-4}{a^2+a} \bullet \frac{2a}{a-1} = \frac{-2\cancel{(a-1)}(a-2)}{a\cancel{(a-1)}} = \frac{-2(a-2)}{a}$$

¡ATENCIÓN!

También es posible eliminar factores comunes desde el primer paso y hacer más simple el proceso; así:

$$\frac{1-a^2}{a^2+2a} \bullet \frac{a^2-4}{a^2+a} \bullet \frac{2a}{a-1} = \frac{(1-a)\cancel{(1+a)}}{a\cancel{(a+2)}} \bullet \frac{\cancel{(a+2)}(a-2)}{\cancel{a}\cancel{(a+1)}} \bullet \frac{2\cancel{a}}{(a-1)}$$

$$\therefore \frac{1-a^2}{a^2+2a} \bullet \frac{a^2-4}{a^2+a} \bullet \frac{2a}{a-1} = \frac{2(1-a)(a-2)}{a(a-1)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{¡mucho más simple!}$$

Ejemplo 4

Resolvamos y simplifiquemos $\dfrac{6x^2}{x+y} \bullet \dfrac{x^2-y^2}{3x} \div \dfrac{7x-7y}{5x+5y}$

Solución:

- Factoricemos el numerador y el denominador y simplifiquemos, si es posible, cada fracción:

$$\frac{6x^2}{x+y} \bullet \frac{x^2-y^2}{3x} \div \frac{7x-7y}{5x+5y} = \frac{6x^2}{x+y} \bullet \frac{(x+y)(x-y)}{3x} \div \frac{7(x-y)}{5(x+y)}$$

- Ahora aplicamos la definición de división de fracciones y, a continuación, eliminamos factores comunes como explicamos en el ejemplo anterior.

$$\frac{6x^2}{x+y} \bullet \frac{x^2-y^2}{3x} \div \frac{7x-7y}{5x+5y} = \frac{\cancel{(3x)}\bullet(2x)}{\cancel{(x+y)}} \bullet \frac{\cancel{(x+y)}\cancel{(x-y)}}{\cancel{(3x)}} \bullet \frac{5(x+y)}{7\cancel{(x-y)}} \ldots .6x = (3x)\bullet(2x)$$

$$\therefore \quad = \frac{10x(x+y)}{7}$$

EJERCICIO 8.3

En los ejercicios 1. a 20., simplificar y hallar el resultado.

1. $\dfrac{3a^2xz^3}{2b^3y^3} \cdot \dfrac{4b^2c^2}{15a^2z^3}$

2. $\left(-\dfrac{a^3z^2}{c^4}\right) \cdot \left(-\dfrac{2x^2}{a^2z^2}\right) \cdot \left(-\dfrac{3c^3}{4x^3}\right)$

3. $\dfrac{2x}{x-y} \cdot \dfrac{x^2-y^2}{8}$

4. $\dfrac{x^2-1}{3} \div \dfrac{x+1}{9}$

5. $\dfrac{5x+3y}{12x-3y} \cdot \dfrac{16x-4y}{15x+9y}$

6. $\dfrac{1}{a^3-b^3} \div \dfrac{a+b}{a^2-b^2}$

7. $\dfrac{a^2-b^2}{(a-b)^2} \cdot \dfrac{ab}{ax}$

8. $\dfrac{5a^3b}{a^2-5ab-3} \cdot \dfrac{2a^2-10ab-6}{15ab^2}$

9. $\dfrac{4x+12}{3x-x^2} \cdot \dfrac{9-3x}{x+3}$

10. $\dfrac{5x+15}{x^3-x^2} \cdot \dfrac{2x-2x^2}{x+3}$

11. $\dfrac{a^2-b^2}{x^2-z^2} \cdot \dfrac{2a-2b}{a^2c^2} \cdot \dfrac{2x^2-2z^2}{a+b}$

12. $\dfrac{x^2+5x+z^2+2xz}{2a^2-6a^3} \cdot \dfrac{a^2-b^2}{a+b} \cdot \dfrac{1-3a}{5x+(x+z)^2}$

13. $\dfrac{x^2-y^2}{x} \cdot \dfrac{1}{x+y} \div \dfrac{x-y}{x}$

14. $\dfrac{a^2b^2}{c^2} \div \dfrac{ab+ac}{bc} \cdot \dfrac{b^2-c^2}{abc}$

15. $\dfrac{x+1}{x^2+2x-3} \cdot \dfrac{x^2+3x}{x^2-1} \div \dfrac{x+1}{(x-1)^2}$

16. $\dfrac{b^2+b-6}{b^2+b-12} \div \dfrac{b^2+3b}{b^2-3b} \div \dfrac{b^2-2b}{b+4}$

17. $\dfrac{x-3y}{x^3-27y^3} \div \dfrac{x^2-3xy-10y^2}{4y^2-x^2} \cdot \dfrac{5y^2+4xy-x^2}{x-2y}$

18. $\dfrac{x(x-2)-3}{x-2} \div \dfrac{x(x+2)+1}{x(x-1)-2}$

19. $\dfrac{a^2-5a-14}{(a-2)^2} \div \dfrac{a^2-4}{a^2-11a+18} \div \dfrac{a^2-16a+63}{xa^3-4xa^2+4ax}$

20. $\dfrac{x(x-1)-2}{x(x-2)+1} \cdot \dfrac{x(x-2)-3}{x(x-3)-4} \div \dfrac{x+1}{x-1}$

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 2

Cuando el pedal baja se mueve:

A. La cadena
B. La rueda
C. Las dos simultáneamente
D. Ninguna de las anteriores

rueda

8.4 SUMA Y RESTA DE FRACCIONES ALGEBRAICAS

- El procedimiento para sumar y restar fracciones algebraicas es similar al usado para sumar y restar fracciones aritméticas.
- Empecemos recordando cómo se suman y restan fracciones de igual denominador.

$$\left.\begin{aligned} \frac{2}{5}+\frac{4}{5}+\frac{3}{5} &= \frac{2+4+3}{5} \\ \frac{2}{9}+\frac{4}{9}-\frac{5}{9} &= \frac{2+4-5}{9} \\ \frac{3}{4}-\frac{1}{4}+\frac{5}{4} &= \frac{3-1+5}{4} \end{aligned}\right\}$$

Para sumar o restar fracciones, de igual denominador, escribimos el mismo denominador y sumamos o restamos los numeradores

- Ahora recordemos que para sumar o restar fracciones de distinto denominador debemos expresar cada fracción con un DENOMINADOR COMÚN. Con este fin hallamos el MÍNIMO COMÚN DENOMINADOR. Por ejemplo, recordemos el procedimiento para calcular $\frac{2}{3}-\frac{1}{4}+\frac{7}{15}$:

  * El mínimo común denominador es el mínimo común múltiplo (m. c. m.) de 3, 4 y 15; es decir: m. c. m. (3, 4, 15) = 60
  * Por lo tanto:

$$\frac{2}{3}-\frac{1}{4}+\frac{7}{15}=\frac{2\cdot20}{3\cdot20}-\frac{1\cdot15}{4\cdot15}+\frac{7\cdot4}{15\cdot4}$$

$$\therefore \frac{2}{3}-\frac{1}{4}+\frac{7}{15}=\frac{40}{60}-\frac{15}{60}+\frac{28}{60}=\frac{40-15+28}{60}=\frac{53}{60}$$

  * Este procedimiento se puede agilizar mediante el siguiente esquema:

$$\times\frac{2}{3}-\times\frac{1}{4}+\times\frac{7}{15}=\frac{40-15+28}{60}=\frac{53}{60}$$

  * Resumiendo:

APRENDAMOS

SUMA Y RESTA DE FRACCIONES

Para sumar o restar fracciones procedemos así:

1. Hallamos el MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO (m. c. m.) de los denominadores.
2. Dividimos el m. c. m. encontrado entre el denominador de cada fracción y el resultado lo multiplicamos por el numerador respectivo.
3. Efectuamos las operaciones indicadas y simplificamos el resultado, si es posible.

Ejemplo 1

Calculemos $\frac{13x}{8x+5}+\frac{5x-3}{8x+5}-\frac{2x-13}{8x+5}$

Solución:

- Como las fracciones tienen el mismo denominador, entonces:

$$\frac{13x}{8x+5} + \frac{5x-3}{8x+5} - \frac{2x-13}{8x+5} = \frac{13x+5x-3-(2x-13)}{8x+5}$$

- Notemos que a la expresión $2x - 13$ la encerramos entre paréntesis ya que el signo menos (-) afecta a todos los términos y no sólo a $2x$. Por lo tanto:

$$\frac{13x}{8x+5} + \frac{5x-3}{8x+5} - \frac{2x-13}{8x+5} = \frac{13x+5x-3-2x+13}{8x+5} = \frac{16x+10}{8x+5}$$

- Finalmente, simplificamos el resultado:

$$\frac{13x}{8x+5} + \frac{5x-3}{8x+5} - \frac{2x-13}{8x+5} = \frac{2\,\cancel{(8x+5)}}{\cancel{8x+5}} = 2$$

Ejemplo 2

Calculemos $\frac{a}{x^2} + \frac{x}{ab} + \frac{b}{ax} - \frac{ab^2x^2}{a^2bx^3}$

Solución:

- Observemos que la última fracción se puede simplificar. Por lo tanto:

$$\frac{a}{x^2} + \frac{x}{ab} + \frac{b}{ax} - \frac{\cancel{ab^2x^2}}{\cancel{a^2bx^3}} = \frac{a}{x^2} + \frac{x}{ab} + \frac{b}{ax} - \frac{b}{ax}$$

- Como las fracciones son de distinto denominador, hallamos el m.c.m. $(x^2, ab, ax, ax) = abx^2$. Por lo tanto:

$$\frac{a}{x^2} + \frac{x}{ab} + \frac{b}{ax} - \frac{b}{ax} = \frac{a^2b + x^3 + \cancel{b^2x} - \cancel{b^2x}}{abx^2}$$

$$\therefore \frac{a}{x^2} + \frac{x}{ab} + \frac{b}{ax} - \frac{b}{ax} = \frac{a^2b + x^3}{abx^2}$$

- Notemos que, después de simplificar la última fracción, nos quedan dos términos semejantes: $\frac{b}{ax}$ y $-\frac{b}{ax}$ los cuales pueden eliminarse y nos queda una expresión mucho más sencilla de trabajar: $\frac{a}{x^2} + \frac{x}{ab}$ Esta reducción debe hacerse siempre que sea posible.

¡ATENCIÓN! Recordemos que: $\mathbf{a - b = -(b - a)}$ y $\mathbf{\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}}$

Ejemplo 3

Calculemos: $\frac{a+b}{2ab} - \frac{2a}{b^2-ab} - \frac{2b}{a^2-ab} - \frac{a-b}{4ab}$

Solución:

- Como todas las fracciones son irreducibles entonces hallamos el m.c.m. de los denominadores:

$$\left.\begin{array}{l} 2ab = 2ab \\ b^2 - ab = b\,(b - a) = -b\,(a - b) \\ a^2 - ab = a\,(a - b) \\ 4ab = 2^2\,ab \end{array}\right\} \quad \therefore \quad \text{m.c.m} = 4ab\,(a - b)$$

- Por lo tanto:

$$\frac{a+b}{2ab}-\frac{2a}{b^2-ab}-\frac{2b}{a^2-ab}-\frac{a-b}{4\,ab}=\frac{a+b}{2ab}-\frac{2a}{-b(a-b)}-\frac{2b}{a\,(a-b)}-\frac{a-b}{4\,ab}$$

$$\therefore\quad =\frac{a+b}{2ab}+\frac{2a}{b(a-b)}-\frac{2b}{a\,(a-b)}-\frac{a-b}{4\,ab}$$

$$\therefore\quad =\frac{2\,(a-b)\,(a+b)+8a^2-8b^2-(a-b)^2}{4\,ab\,(a-b)}$$

$$\therefore\quad =\frac{2a^2-2b^2+8a^2-8b^2-a^2+2ab-b^2}{4\,ab\,(a-b)}$$

$$\therefore\quad =\frac{9a^2+2ab-11b^2}{4\,ab\,(a-b)}=\frac{(9a+11b)\cancel{(a-b)}}{4\,ab\cancel{(a-b)}}=\frac{9a+11b}{4ab}$$

Ejemplo 4

Calculemos $\dfrac{a-1}{a^3}+\dfrac{a+1}{a^2-a^3}+\dfrac{3}{a^3-2a^2+a}$

Solución:

- En primer lugar factoricemos los denominadores:

$$\frac{a-1}{a^3}+\frac{a+1}{a^2-a^3}+\frac{3}{a^3-2a^2+a}=\frac{a-1}{a^3}+\frac{a+1}{a^2(1-a)}+\frac{3}{a\,(a^2-2a+1)}$$

$$\therefore\quad =\frac{a-1}{a^3}+\frac{a+1}{-(a-1)a^2}+\frac{3}{a\,(a-1)^2}$$

Notemos que en la segunda fracción hicimos uso de la propiedad $1-a=-(a-1)$. Por lo tanto:

$$\frac{a-1}{a^3}+\frac{a+1}{a^2-a^3}+\frac{3}{a^3-2a^2+a}=\frac{a-1}{a^3}-\frac{a+1}{a^2(a-1)}+\frac{3}{a\,(a-1)^2}$$

- Como ninguna de las fracciones es simplificable, procedemos a hallar el m.c.m. de los denominadores; así:

$$\left.\begin{array}{l} a^3 \\ a^2(a-1) \\ a\,(a-1)^2 \end{array}\right\}\ \therefore\ \text{m.c.m}=a^3(a-1)^2$$

$$\therefore\quad \frac{a-1}{a^3}+\frac{a+1}{a^2-a^3}+\frac{3}{a^3-2a^2+a}=\frac{(a-1)^3-a\,(a+1)(a-1)+3a^2}{a^3(a-1)^2}$$

$$\therefore\quad \frac{a-1}{a^3}+\frac{a+1}{a^2-a^3}+\frac{3}{a^3-2a^2+a}=\frac{\cancel{a^3}-\cancel{3a^2}+3a-1-\cancel{a^3}+a+\cancel{3a^2}}{a^3(a-1)^2}=\frac{4a-1}{a^3\,(a-1)^2}$$

¡ATENCIÓN!

En los ejercicios donde aparecen varias operaciones, el orden de trabajo es el siguiente:

1. Primero se realizan las operaciones incluidas dentro de los signos de agrupación.
2. En ausencia de signos de agrupación, primero se realizan las multiplicaciones y divisiones y, luego, las sumas y restas.

Ejemplo 5

Calculemos y simplifiquemos $\left(x + \frac{2-xy}{y-x}\right) \bullet \left(x - \frac{2-xy}{y-x}\right) + \frac{(2-xy)^2}{(y-x)^2}$

Solución:

- Primero resolvemos las operaciones incluidas dentro de los paréntesis:

$$\left(x + \frac{2-xy}{y-x}\right) \bullet \left(x - \frac{2-xy}{y-x}\right) + \frac{(2-xy)^2}{(y-x)^2} = \left(\frac{x(y-x)+2-xy}{y-x}\right) \bullet \left(\frac{x(y-x)-(2-xy)}{y-x}\right) + \frac{(2-xy)^2}{(y-x)^2}$$

$$\therefore \quad = \left(\frac{xy-x^2+2-xy}{y-x}\right) \bullet \left(\frac{xy-x^2-2+xy}{y-x}\right) + \frac{(2-xy)^2}{(y-x)^2}$$

$$\therefore \quad = \left(\frac{2-x^2}{y-x}\right) \bullet \left(\frac{2xy-x^2-2}{y-x}\right) + \frac{(2-xy)^2}{(y-x)^2}$$

- A continuación efectuamos la multiplicación:

$$\left(x + \frac{2-xy}{y-x}\right) \bullet \left(x - \frac{2-xy}{y-x}\right) + \frac{(2-xy)^2}{(y-x)^2} = \frac{(2-x^2)(2xy-x^2-2)}{(y-x)^2} + \frac{(2-xy)^2}{(y-x)^2}$$

$$\therefore \quad = \frac{4xy-2x^2-4-2x^3y+x^4+2x^2}{(y-x)^2} + \frac{(2-xy)^2}{(y-x)^2}$$

$$\therefore \quad = \frac{4xy-4-2x^3y+x^4}{(y-x)^2} + \frac{4-4xy+x^2y^2}{(y-x)^2}$$

- Finalmente realizamos la suma de fracciones de igual denominador y simplificamos:

$$\therefore \quad \left(x + \frac{2-xy}{y-x}\right) \bullet \left(x - \frac{2-xy}{y-x}\right) + \frac{(2-xy)^2}{(y-x)^2} = \frac{\cancel{4xy} - \cancel{4} - 2x^3y + x^4 + \cancel{4} - \cancel{4xy} + x^2y^2}{(y-x)^2}$$

$$\therefore \quad = \frac{x^4-2x^3y+x^2y^2}{(y-x)^2} = \frac{x^2(x^2-2xy+y^2)}{(y-x)^2}$$

$$\therefore \quad = \frac{x^2\cancel{(x-y)^2}}{\cancel{(y-x)^2}} = x^2$$

EJERCICIO 8.4

En los ejercicios 1. a 20. efectuar las operaciones indicadas y simplificar el resultado:

1. $\frac{2+3a}{5} + \frac{1-3a}{6} - \frac{2a-3}{15}$
2. $\frac{2a}{4b} + \frac{3a}{4b} + \frac{5a}{6b} + \frac{7a}{12b}$
3. $\frac{a-b}{ab} + \frac{c-a}{ac} + \frac{b-c}{bc}$
4. $\frac{2x-2z}{xz} + \frac{2x-2t}{xt} + \frac{2z-2t}{zt}$
5. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{3a+b}{ab}$
6. $\frac{a}{a+b} + \frac{a}{a-b} - \frac{2a^2}{a^2-b^2}$
7. $\frac{a^2}{a-b} + \frac{b^2}{a+b} - \frac{a^3+ab^2}{a^2-b^2}$
8. $\frac{4a}{a^2-1} - \frac{a+1}{a-1} + \frac{a-1}{a+1}$

9. $\dfrac{x-1}{2x+2} - \dfrac{3x-4}{3x+3} + \dfrac{2x-1}{6x+6} - \dfrac{4-x}{6x+6}$

10. $\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2} + \dfrac{y}{y-x} + \dfrac{y}{x+y}$

11. $\dfrac{1}{a^2-a} - \dfrac{1}{a^2+a} + \dfrac{1}{a} + \dfrac{a}{a^2-a^4}$

12. $-\dfrac{12}{9-x^2} + \dfrac{x-3}{x^2+3x} - \dfrac{x+3}{x^2-3x}$

13. $\dfrac{x}{xy+y^2} - \dfrac{y}{x^2+xy} + \dfrac{x+y}{xy}$

14. $\dfrac{a^2x-ax^2}{a^2-x^2} + \dfrac{a^3+a^2x}{a^2+2ax+x^2} + \dfrac{a^2-2ax}{x-a}$

15. $\dfrac{1}{1-a} + \dfrac{1}{a+1} + \dfrac{2a}{a^2-1}$

16. $\dfrac{5x-2}{x^2-4} - \dfrac{3}{x+2} + \dfrac{5}{2-x}$

17. $\dfrac{1}{a+b} + \dfrac{ab}{a^3+b^3} + \dfrac{a-b}{a^2-ab+b^2}$

18. $\dfrac{x}{1-x} - \dfrac{x^2}{(1-x)^2} - \dfrac{x^2(x-1)}{(1-x)^3}$

19. $\dfrac{1}{1-a} + \dfrac{1}{a+1} - \dfrac{4a^2}{1-a^4}$

20. $\dfrac{1}{a^2+ab} + \dfrac{2b}{a^3-ab^2} + \dfrac{a+b}{ab^2-a^2b}$

En los ejercicios 21. a 30. efectuar las operaciones indicadas y simplificar los resultados.

21. $\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right) \div \left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)$

22. $\left(\dfrac{x}{x-z}-1\right) \cdot \left(\dfrac{x}{z}-2+\dfrac{z}{x}\right)$

23. $\left(1-\dfrac{a}{b}\right) \div \left(\dfrac{a^2}{b-a}+a+b\right)$

24. $\left(a-3+\dfrac{5a}{2a-6}\right) \div \left(2a-1+\dfrac{15}{a-3}\right)$

25. $\left(\dfrac{a}{a+1}+\dfrac{a}{a-1}-1\right) \cdot (a^2-1)$

26. $\left(\dfrac{6ab}{3c-a}\right) \cdot \left(\dfrac{a+c}{4}-\dfrac{a}{3}\right)$

27. $\left(1+\dfrac{a-b}{a+b}\right) \cdot \left(2a-\dfrac{a(a-b)}{a-b}\right) \div \dfrac{a-2b}{a+b}$

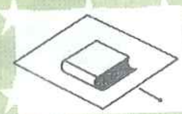
28. $a^2\left(\dfrac{1+a}{1-a}-\dfrac{1-a}{a+1}\right) \div \left[\left(\dfrac{a+1}{1-a}-1\right) \cdot \left(1-\dfrac{1}{a+1}\right)\right]$

29. $\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}-\dfrac{a}{xy}\right) \cdot (x+y+a) \div \left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{2}{xy}-\dfrac{a^2}{x^2y^2}\right)$

30. $\left[\left(\dfrac{x}{z}-\dfrac{z}{x}\right) \div \left(\dfrac{x-z}{z}+\dfrac{3x+z}{x}\right)\right] \cdot \left[\left(\dfrac{x}{z}+\dfrac{2x+z}{x}\right) \div \left(\dfrac{x}{z}-\dfrac{z}{x}\right)\right]$

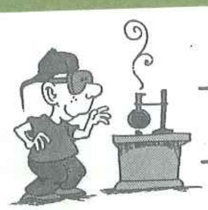
DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 3

Si se da un tirón rápido a la hoja como lo muestra la flecha, entonces el libro:



A. Queda en el mismo lugar.
B. Se desplaza un poco hacia adelante
C. Se desplaza hacia atrás.
D. Ninguna de las anteriores

8.5 FRACCIONES COMPLEJAS



EXPERIENCIA

- En muchas ocasiones el numerador o el denominador de una fracción pueden ser a su vez fracciones. Por ejemplo:

$$\frac{\frac{3}{2}}{7} \quad ; \quad \frac{\frac{4}{5}}{\frac{10}{3}} \quad ; \quad \frac{2x+\frac{x}{y}}{y} \quad ; \quad \frac{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}}{\frac{y}{x}-\frac{x}{y}}$$

- Estas expresiones reciben el nombre de FRACCIONES COMPLEJAS.

- Pero, ¿ cómo calculamos, por ejemplo, la fracción compleja $\dfrac{\frac{4}{5}}{\frac{10}{3}}$? Podemos hacerlo de dos maneras, como nos ilustra el siguiente cuadro:

PRIMERA MANERA	SEGUNDA MANERA
$\text{extremos}\ \dfrac{\frac{4}{5}}{\frac{10}{3}}\ \text{medios} = \dfrac{4\cdot 3}{5\cdot 10} = \dfrac{\text{Producto de extremos}}{\text{Producto de medios}}$ $= \dfrac{12}{50} = \dfrac{6}{25}$	$\dfrac{\frac{4}{5}}{\frac{10}{3}} = \dfrac{4}{5} \div \dfrac{10}{3}$ $= \dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{3}{10} = \dfrac{12}{50} = \dfrac{6}{25}$

- Por lo tanto:

APRENDAMOS

FRACCIONES COMPLEJAS

- Una **FRACCIÓN COMPLEJA** es aquella cuyo numerador o denominador son a su vez fracciones.
- Para simplificar una fracción compleja resolvemos por aparte las fracciones del numerador y las del denominador con el fin de llevarlas a la forma:

$$\frac{\frac{x}{y}}{\frac{z}{w}}$$

- A continuación, efectuamos una división de fracciones así:

$$\frac{\frac{x}{y}}{\frac{z}{w}} = \frac{x \cdot w}{y \cdot z} \quad \text{o} \quad \frac{\frac{x}{y}}{\frac{z}{w}} = \frac{x}{y} \div \frac{z}{w}$$

Ejemplo 1

Resolvamos y simplifiquemos $\dfrac{a-3+\frac{5a}{2a-6}}{2a-1-\frac{15}{3-a}}$

Solución:

- Resolvemos por aparte las fracciones del numerador y las del denominador; quedando así:

$$\frac{a-3+\dfrac{5a}{2a-6}}{2a-1-\dfrac{15}{3-a}}=\frac{\dfrac{2(a-3)^2+5a}{2(a-3)}}{\dfrac{(2a-1)(3-a)-15}{3-a}}=\frac{\dfrac{2(a^2-6a+9)+5a}{2(a-3)}}{\dfrac{6a-2a^2-3+a-15}{-(a-3)}}$$

$$\therefore\ \frac{a-3+\dfrac{5a}{2a-6}}{2a-1-\dfrac{15}{3-a}}=\frac{\dfrac{2a^2-12a+18+5a}{2(a-3)}}{\dfrac{-2a^2+7a-18}{-(a-3)}}=\frac{\dfrac{2a^2-7a+18}{2(a-3)}}{\dfrac{-(2a^2-7a+18)}{-(a-3)}}$$

- Ahora realizamos la división de las fracciones obtenidas y simplificamos los resultados; así:

$$\frac{a-3+\dfrac{5a}{2a-6}}{2a-1-\dfrac{15}{3-a}}=\frac{-\cancel{(a-3)}\,\cancel{(2a^2-7a+18)}}{-2\cancel{(a-3)}\,\cancel{(2a^2-7a+18)}}=\frac{1}{2}$$

Ejemplo 2

Resolvamos y simplifiquemos: $\dfrac{1}{a+\dfrac{1}{1+\dfrac{a+1}{3-a}}}$

Solución:

- El numerador de esta fracción compleja ya está simplificado: es el mismo 1.
- Para resolver el denominador vamos por partes:

$$\frac{1}{a+\dfrac{1}{\boxed{1+\dfrac{a+1}{3-a}}}}=\frac{1}{a+\dfrac{1}{\boxed{\dfrac{3-a+a+1}{3-a}}}}=\frac{1}{a+\dfrac{1}{\boxed{\dfrac{4}{3-a}}}}$$

$$\therefore\ \frac{1}{a+\dfrac{1}{1+\dfrac{a+1}{3-a}}}=\frac{1}{\boxed{a+\dfrac{3-a}{4}}}=\frac{1}{\boxed{\dfrac{4a+3-a}{4}}}$$

$$\therefore\ \frac{1}{a+\dfrac{1}{1+\dfrac{a+1}{3-a}}}=\frac{1}{\dfrac{3a+3}{4}}=\frac{4}{3a+3}=\frac{4}{3(a+1)}$$

EJERCICIO 8.5

En los ejercicios 1. a 20. resolver y simplificar cada fracción compleja.

1 $\dfrac{\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}}{\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}-2}$

2 $\dfrac{\left(1+\dfrac{x}{y}\right)\left(1+\dfrac{y}{x}\right)}{1+\dfrac{(x-y)^2}{4xy}}$

3 $$\frac{\frac{1}{1+x}+\frac{x}{1-x}}{\frac{1}{1-x}-\frac{x}{x+1}}$$

4 $$\frac{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2}-\frac{a}{a+b}$$

5 $$\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}}\div\frac{\frac{1}{b}-\frac{1}{a+c}}{\frac{1}{b}+\frac{1}{a+c}}$$

6 $$\frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}+\frac{1}{1+\frac{a}{b}}-\frac{1}{1-\frac{b}{a}}$$

7 $$\frac{a+\frac{1}{b}}{a+\frac{1}{b+\frac{1}{c}}}-\frac{1}{b(abc+a+c)}$$

8 $$\frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-1}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}\div\frac{a^3+b^3}{a^2-b^2}$$

9 $$\frac{1}{1+\frac{a}{b+c}}+\frac{1}{1+\frac{b}{a+c}}+\frac{1}{1+\frac{c}{a+b}}$$

10 $$\frac{1}{1+\frac{x}{1+x+\frac{2x^2}{1-x}}}$$

11 $$\frac{\frac{a}{a+b}\cdot\frac{a-b}{b+ab}}{\frac{1}{a+b}\div\frac{b}{a-b}}$$

12 $$\frac{\frac{x^2}{6+3x}\cdot\frac{x^2+6x+9}{x^2-3x}}{\frac{x^2-9}{x+2}\div(x^2-6x+9)}$$

13 $$1+\frac{m}{1+m+\frac{2m^2}{1-m}}$$

14 $$\frac{\frac{(1+a)^2}{a}-\frac{(1+b)^2}{b}-\frac{a^2b-ab^2}{ab}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}$$

15 $$\frac{\frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{2x+2y}-\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}}{\frac{2x}{x-1}-1}$$

16 $$\frac{\frac{b}{a^2+ab}-\frac{1}{a+b}+\frac{2(a+b)}{a^2+2ab+b^2}}{\frac{1-a}{a^2+a}}$$

17 $$\frac{\frac{1}{3a-2b}+\frac{1}{2a+3b}}{\frac{2a+3b}{3a-2b}+1}$$

18 $$\frac{2-\frac{1}{\frac{a}{b}-1}}{\frac{2}{1+\frac{b}{a}}-\frac{3}{\frac{a}{b}+1}}$$

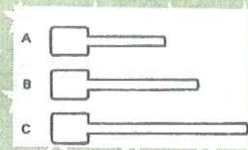
19 $$\frac{a-1}{2}\cdot\left(\frac{1}{a}-\frac{a+2}{2}\right)-1-\frac{1}{4a}\cdot\left[-2-a^2(a+1)\right]$$

20 $$\frac{\frac{1}{a^3+b^3}}{1-\frac{a}{a+\frac{b^2}{a-b}}}$$

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 4

Si queremos aplastar una caneca, es más fácil hacerlo con:

A. El martillo A. B. El martillo B.
C. El martillo C. D. Con cualquiera de los tres.



TALLER DE REPASO DE LA UNIDAD 8

1. **Preguntas para revisar la teoría:**

a). ¿ Qué es una fracción algebraica racional ?
b) ¿ Qué son restricciones de una fracción algebraica racional ?
c) ¿ Cuándo se dice que una fracción algebraica racional es irreducible ?
d) ¿ Cómo se simplifica una fracción algebraica racional ?
e) ¿ Qué es amplificar una fracción algebraica racional ?
f) ¿ Cómo se multiplican fracciones algebraicas racionales ? ¿ Y cómo se dividen ?
g) ¿ Conviene simplificar las fracciones algebraicas racionales antes de multiplicarlas o dividirlas? ¿ por qué ?
h) ¿ Cómo se suman y restan fracciones algebraicas racionales ?
i) ¿ Qué es una fracción compleja ?
j) ¿ Cómo se simplifica una fracción compleja ?

2. **FALSO O VERDADERO**

Escribe en el paréntesis de la izquierda una V si el enunciado es verdadero o una F si el enunciado es falso.

( ) a) La fracción $\dfrac{4x-3}{x^2-1}$ siempre es número real.

( ) b) La fracción $\dfrac{2x^2+6}{4x-x^3}$ es un número real para todos los valores de x diferentes de 0.

( ) c) Para simplificar una fracción eliminamos los términos comunes al numerador y al denominador.

( ) d) $\dfrac{5+p}{7+p} = \dfrac{5}{7}$

( ) e) $\dfrac{3x+5}{x-2} - \dfrac{x^2-1}{2x-3} = \dfrac{3x+5}{x-2} + \dfrac{1-x^2}{2x-3}$

( ) f) $-\dfrac{m}{n} = \dfrac{-m}{-n}$

( ) g) $\dfrac{-25a^2b}{35ab^2} = -\dfrac{5a}{7b}$; con $a \neq 0$ y $b \neq 0$

( ) h) $\dfrac{\frac{x}{3}}{2} = \dfrac{x}{6}$

( ) i) $\dfrac{m}{\frac{p}{q}} = \dfrac{mq}{p}$; con $q \neq 0$

En los ejercicios 3. a 32. efectuar las operaciones indicadas y simplificar los resultados.

3. $\dfrac{2a^3+54b^3}{2a^2+5ab+3y^2} + \dfrac{8ab-19b^2}{2a-b} - a - b$

4. $\dfrac{4xy+4y^2}{4x^2-8xy+3y^2} - \dfrac{15\,xy}{2x^2+3xy-9y^2} + \dfrac{4x+y}{2x-y}$

5. $\dfrac{y+z}{x^2-xz-xy+yz} + \dfrac{x+z}{y^2-yz-xy+xz} + \dfrac{x+y}{xz-yz-x^2+xy}$

6. $\dfrac{4}{x^4+x^2+1} + \dfrac{x^2+x-1}{x^2-x+1} + \dfrac{x^2-x-1}{x^2+x+1}$

7. $\dfrac{x^2}{y^2} - \dfrac{1-x^2}{1-y^2} + \dfrac{x-1}{y+y^2} + \dfrac{x+1}{y-y^2}$

8. $\dfrac{x^2-(y-z)^2}{(z+x)^2-y^2}+\dfrac{y^2-(z-x)^2}{(x+y)^2-z^2}+\dfrac{z^2-(x-y)^2}{(y+z)^2-x^2}$

9. $\dfrac{4a+6b}{a+b}+\dfrac{6a-4b}{a-b}+\dfrac{4a^2+6b^2}{b^2-a^2}+\dfrac{4b^2-6a^2}{a^2+b^2}-\dfrac{20b^4}{b^4-a^4}$

10. $\dfrac{a}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c}{(c-a)(c-b)}$

11. $\dfrac{x^2yz}{(x-y)(x-z)}+\dfrac{y^2zx}{(y-z)(y-x)}+\dfrac{z^2xy}{(z-x)(z-y)}$

12. $\dfrac{a^2-a-2}{a^2+a-6}\bullet\dfrac{(a-1)^2}{a^4-1}\bullet\left(\dfrac{a}{a-1}-\dfrac{1}{a+1}\right)$

13. $\dfrac{x^4-1}{x^3-1}\left(1-\dfrac{x}{(x+1)^2}\right)\div\left(\dfrac{1}{x}+x\right)$

14. $\dfrac{a^2-b^2}{a^3+b^3}\left(\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{b^2}\right)\bullet\dfrac{a^3b^3}{(a-b)^2}-\dfrac{a^2}{a-b}$

15. $\dfrac{a^4-b^4}{a^3+b^3}\bullet\left[1+\dfrac{ab}{(a-b)^2}\right]\div\left[\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\right]$

16. $\left(\dfrac{a^2-ax+x^2}{a-x}-\dfrac{a^2+ax+x^2}{a+x}\right)\div\dfrac{x^3}{a^2-x^2}$

17. $\left(\dfrac{x^4-a^4}{x^2-2ax+a^2}\div\dfrac{x^2+ax}{x-a}\right)\bullet\dfrac{x^5-a^2x^3}{x^3+a^3}\div\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{a}{x}\right)$

18. $\left[x^3-\dfrac{1}{x^3}-3\bullet\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\right]\div\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$

19. $\dfrac{9y^2-(4z-2x)^2}{(2x+3y)^2-16z^2}+\dfrac{16z^2-(2x-3y)^2}{(3y+4z)^2-4x^2}+\dfrac{4x^2-(3y-4z)^2}{(4z+2x)^2-9y^2}$

20. $\left(\dfrac{a+x}{a^2-ax+x^2}-\dfrac{a-x}{a^2+ax+x^2}\right)\div\left(\dfrac{a^2+x^2}{a^3-x^3}-\dfrac{a^2-x^2}{a^3+x^3}\right)$

21. $\dfrac{x^3+8x^2y+15xy^2}{(64x^3-y^3)(x^3+y^3)}\bullet\dfrac{16x^4-17x^2y^2+y^4}{4x^2+21xy+5y^2}\div\dfrac{x^2+2xy-3y^2}{x^3-x^2y+xy^2}$

22. $\dfrac{a+\dfrac{b-a}{1+ab}}{1-\dfrac{a(b-a)}{1+ab}}\bullet\dfrac{\dfrac{x+y}{1-xy}-y}{1+\dfrac{y(x+y)}{1-xy}}$

23. $\dfrac{x-2+\dfrac{6}{x+3}}{x-4+\dfrac{12}{x+3}}\bullet\dfrac{\dfrac{x+3}{4}+\dfrac{x+3}{x+1}}{\dfrac{x-3}{7}+\dfrac{x-3}{x-4}}$

24. $\dfrac{\dfrac{1+x}{1-x}+\dfrac{4x}{1+x^2}+\dfrac{8x}{1-x^2}-\dfrac{1-x}{1+x}}{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}+\dfrac{4x^2}{1-x^4}-\dfrac{1-x^2}{1+x^2}}$

25. $\dfrac{1}{x-\dfrac{2}{x+\dfrac{1}{2}}}\bullet\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{x}}\div\dfrac{x}{2x-\dfrac{x+4}{x+1}}$

26. $a\bullet\left(1-\dfrac{1-2a}{1-a^2}\right)\bullet\left(a+\dfrac{a-a^2}{1+3a}\right)\bullet\left(\dfrac{1-a}{2a-a^2}\right)$

27. $\dfrac{\dfrac{(a+b)^2+(a-b)^2}{b-a}-(a+b)}{\dfrac{1}{b-a}-\dfrac{1}{a+b}}\div\dfrac{(a+b)^3+(b-a)^3}{(a+b)^2-(a-b)^2}$

28. $\left[\dfrac{c-b}{(a-b)(a-c)}-\dfrac{c-a}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{b-a}{(c-a)(c-b)}\right]\div\dfrac{2(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$

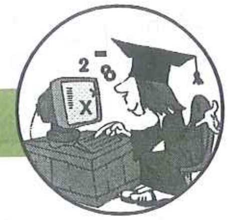
29. $\dfrac{x^2}{1-\dfrac{1}{x^2+\dfrac{\frac{1}{x}}{x+\frac{1}{x}}}} + \dfrac{x^2-2}{1-\dfrac{1}{x^2-\dfrac{\frac{1}{x}}{x-\frac{1}{x}}}}$

30. $\dfrac{2x^2+2x}{\dfrac{x}{\frac{x}{x-2}-1}-\dfrac{3}{2}} - \dfrac{3(x-1)}{\dfrac{x}{\frac{x}{x-4}-1}+\dfrac{3}{4}}$

31. $\left[\dfrac{b+\frac{a-b}{1+ab}}{1-\frac{(a-b)b}{1+ab}} - \dfrac{a-\frac{a-b}{1+ab}}{1+\frac{(a-b)a}{1+ab}}\right] \div \left(\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}\right)$

32. $\left[3-\dfrac{a+3}{a-\frac{2}{a-1}}\right]\cdot\left[\dfrac{a-\frac{2}{a-1}}{2a-3\left(\frac{a+1}{a-1}\right)}\right]$

PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS DEL ICFES



En los siguientes ejercicios responde así:

a) Si sólo necesita la información I.

b) Si sólo necesita la información II.

c) Si necesita las informaciones I y II.

d) Si cualquiera de las dos sirve.

e) Si no es suficiente con las dos.

1. Para hallar los valores de a y b necesitamos conocer que

   I. $a-b = 80$ II. $a \bullet b = 240$

2. A una venta de mangos llegan 3 señoras y los compran todos. Podría decirnos cuántos mangos estaban a la venta si:

   I. La tercera señora adquirió 4 mangos.

   II. La primera y la segunda compraron $\frac{1}{3}$ del total más 8 unidades

3. Camilo tiene x dinero. Podemos averiguar el valor de x si:

   I. Camilo tiene el doble de Santiago. II. $\frac{2}{3}$ de x equivale a $60

4. En 3 horas un carro va de una ciudad a otra. ¿A qué distancia se encuentran las ciudades si:

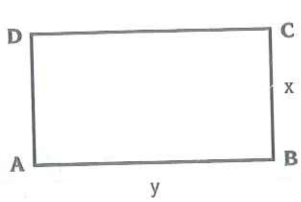
   I. 60 Km es $\frac{1}{4}$ de la distancia entre ellas.

   II. La velocidad del carro es de 80 Km/h.

5. De acuerdo con la figura podemos conocer el valor de x, si conocemos:

   I. El perímetro del rectángulo

   II. Que $y = 2x$:



Núcleo Temático

9

ECUACIONES ALGEBRÁICAS Y APLICACIONES

LOGRO GENERAL

Formular, plantear y resolver problemas que permitan la aplicación de modelos matemáticos.

DIMENSIONES

EVALUACIÓN

LOGROS ESPECÍFICOS	INDICADORES DE LOGRO
Corporal: • Elaborar modelos que ayudan a resolver problemas matemáticos.	• En grupos de tres alumnos, interpreta y analiza problemas matemáticos.
Comunicativa: • Formular problemas que involucren ecuaciones. • Conseguir la participación activa de todos los alumnos, por medio de sugerencias y preguntas dirigidas.	• Escribe los problemas en lenguaje matemático. • Explica con claridad los procesos en la solución de problemas.
Cognitiva: • Diferenciar entre identidad y ecuación. • Resolver ecuaciones en R. • Formular y resolver problemas de aplicación.	• Reconoce ciertas ecuaciones como identidades. • Resuelve ecuaciones que contienen fracciones. • Resuelve problemas mediante ecuaciones.
Estética: • Interpretar gráficamente los problemas.	• Ilustra los enunciados de los problemas haciendo figuras que tengan que ver con el mismo.
Ética-Actitudinal: • Valorar el trabajo en grupo.	• Valora la ayuda de otros y está dispuesto a colaborar con los demás.

ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS

9.1 HISTORIA DEL ÁLGEBRA (9): FRANCISCO VIÉTA (1540-1603)

FRANCISCO VIÉTA
(1540 - 1603)

Lugar especial en la historia del álgebra ocupa Francisco Viéta, abogado y miembro del Parlamento Francés, quien dedicó la mayor parte de su tiempo libre a las matemáticas. Es considerado el más grande matemático del siglo XVI. Poseía una desconcertante habilidad para interpretar claves, lo que le permitió descifrar un código secreto de 500 signos de gran valor para el gobierno francés.

Escribió un gran número de obras sobre álgebra, geometría y trigonometría, la mayoría de las cuales fueron impresas y distribuídas por su propia cuenta. La obra más famosa de Viéta, **In Artem,** hizo avanzar en forma significativa la notación algebraica. Fue el primero en hablar de "fórmulas" y "complejos matemáticos" orientados por símbolos. Con él se inició el **álgebra simbólica.** Utilizó letras para representar números, las minúsculas para las incógnitas y las mayúsculas para las letras conocidas. Creó el concepto de "coeficiente" e introdujo el "término" en la nomenclatura matemática. Antes de Viéta era común utilizar diferentes símbolos para representar varias potencias como x, x^2, x^3 y así sucesivamente. Viéta, al escribir en latín, utilizó la misma letra cualificada en forma apropiada para estas potencias; así: x, x quadratum (cuadrado), x cubum (cubo), etc.

Finalmente, hay que decir que Viéta superó los trabajos del alemán Michael Stifel quien había realizado investigaciones similares a las de Tartaglia y Cardán en Italia y mejoró los cálculos trigonométricos de Tolomeo.

EJERCICIO 9.1

Comprensión de Lectura. Explicación: Lee nuevamente el texto anterior y luego encierra, en un círculo, la letra que corresponda a la respuesta correcta:

1. La idea central del texto es:

   a. Biografía de Francisco Viéta.
   b. Los trabajos de Viéta fueron superiores a los de otros científicos.
   c. La actividad creadora e investigadora de Francisco Viéta.
   d. El descubrimiento de fórmulas y complejos matemáticos.

2. De la lectura del texto anterior se puede inferir que:

   a. Todo abogado es un científico en potencia.
   b. También los humanistas hacen ciencia.
   c. El derecho está íntimamente ligado a la ciencia.
   d. La ciencia requiere de grandes humanistas para su rápido desarrollo.

3. Sólo uno de los siguientes enunciados es verdadero:

   a. Viéta gastó dinero de su propio bolsillo en la difusión de su obra.
   b. Viéta perfeccionó el álgebra simbólica.
   c. Viéta inició el sistema de nomenclación en matemática.
   d. El matemático Viéta dedicaba sus ratos libres a servirle al parlamento francés.

4. De los siguientes científicos, uno no se menciona en el texto:

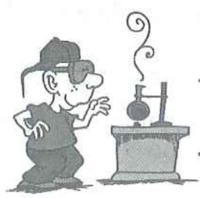
   a. Tolomeo.
   b. Stifel.
   c. Tartaglia.
   d. Newton.

5. En el fragmento se menciona la palabra **incógnitas**. En matemáticas, éste se refiere a:

   a. Algo desconocido.
   b. Persona que pasa desapercibida en una reunión.
   c. Una razón oculta.
   d. Cantidad desconocida de una ecuación o de un problema.

9.2 IDENTIDADES Y ECUACIONES

- Durante muchísimos años el álgebra se ha ocupado fundamentalmente de dos asuntos:
  1. Efectuar operaciones en los distintos conjuntos numéricos.
  2. Resolver ecuaciones.
- Debido a la amplitud de sus aplicaciones en matemáticas y otras ramas de la ciencia, dedicaremos esta unidad al estudio y solución de ecuaciones algebraicas.



EXPERIENCIA

- A continuación presentamos dos listas de igualdades: la LISTA A y la LISTA B.

LISTA A	LISTA B
1. $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$	1. $1+3x = x + 9$
2. $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$	2. $2x^2 = 5x + 3$
3. $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$	3. $3x^3 - 8x^2 = 5x - 6$
4. $\left(\frac{x}{y}\right)^3 = \frac{x^3}{y^3}$; con $y \neq 0$	4. $x+y = 3$
5. $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$; con $x, y \in R^+$	5. $2x = 3y+6$

- Comprobemos que cuando, en las igualdades de la lista A, reemplazamos la **x** y la **y** por cualquier número real, éstas siempre se hacen verdaderas; por ejemplo, reemplacemos **x** por -2 y **y** por 3 en la igualdad 3.; así:

$$(-2)^3 - 3^3 \stackrel{?}{=} (-2-3)\,((-2)^2 + (-2)(3) + 3^2)$$

$$\therefore\ -8 - 27 \stackrel{?}{=} (-5)(4 - 6 + 9)$$

$$\therefore\ -35 \stackrel{?}{=} (-5)(7)$$

$$\therefore\ -35 = -35$$

Ahora reemplaza x y y por otros dos números cualesquiera y comprueba que la igualdad se cumple.

- ¿ Por qué será que las igualdades de la lista A son verdaderas para cualquier valor que se asigne a las variables **x** y **y** ?

- Ahora tomemos las igualdades de la LISTA B.

¿ Qué pasará si en la igualdad 1. reemplazamos x por 3 ? ¿Y luego por -2 ? ¿y luego por 4? Veamos:

Si $x = 3$, entonces $1 + 3(3) \stackrel{?}{=} 3 + 9$

$$1 + 9 \stackrel{?}{=} 3 + 9$$
$$10 \neq 12$$

Si $x = -2$, entonces $1 + 3(-2) \stackrel{?}{=} -2 + 9$

$$1 - 6 \stackrel{?}{=} -2 + 9$$
$$-5 \neq 7$$

Si $x = 4$; entonces $1 + 3(4) \stackrel{?}{=} 4 + 9$

$$1 + 12 \stackrel{?}{=} 4 + 9$$
$$13 = 13$$

Como vemos, la igualdad no se cumple para cualquier valor que le asignemos a la variable. Sólo se cumple cuando la x toma el valor de 4.

- De la misma forma podemos comprobar que la igualdad 2. sólo se cumple cuando $x = -\frac{1}{2}$ ó $x = 3$; que la igualdad 3. sólo se cumple cuando $x = \frac{2}{3}$ ó $x = 3$ ó $x = -1$; que la igualdad 4. se cumple para $x = 1$, $y = 2$; para $x = 0$, $y = 3$; para $x = -4$, $y = 7$; pero no se cumple, por ejemplo, para $x=2$, $y=5$. Lo mismo podríamos decir de la igualdad $2x = 3y + 6$.

- La realización de esta experiencia nos permite identificar dos tipos de igualdades: aquellas que son verdaderas para CUALQUIER VALOR que se asigne a la(s) variable(es) (excepto las restricciones por ceros en el denominador o por raíces pares de números negativos) y aquellas que son verdaderas sólo para algún(os) valor(es) que se asignen a la(s) variable(s) dentro de un conjunto dado. Las igualdades del primer tipo se denominan IDENTIDADES y las del segundo tipo se denominan ECUACIONES. Así, pues:

$$\left.\begin{array}{l} (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 \\ (x+y)(x-y) = x^2 - y^2 \\ x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2) \\ \left(\frac{x}{y}\right)^3 = \frac{x^3}{y^3},\ \text{con } y \neq 0 \\ \sqrt{xy} = \sqrt{x}\,\sqrt{y},\ \text{con } x, y \in R^+ \end{array}\right\}\ \text{SON IDENTIDADES}$$

$$\left.\begin{array}{l} 1 + 3x = x + 9 \\ 2x^2 = 5x + 3 \\ 3x^3 - 8x^2 = 5x - 6 \\ x + y = 3 \\ 2x = 3y + 6 \end{array}\right\}\ \text{SON ECUACIONES}$$

- En una ecuación, la(s) variable(s) que aparece(n) en ella se denomina(n) INCÓGNITA(S).
- El conjunto de valores para el cual la igualdad que define la ecuación se hace verdadera se denomina CONJUNTO SOLUCIÓN O CONJUNTO DE RAÍCES de la ecuación. A menos que digamos lo contrario, el conjunto solución de una ecuación será un subconjunto del conjunto R de los números reales.

APRENDAMOS

IDENTIDADES Y ECUACIONES

- Una igualdad entre dos expresiones, en las que figuran una o más variables, es una **IDENTIDAD** si al sustituir en la igualdad las variables por cualquier elemento de un conjunto numérico dado, se obtiene **SIEMPRE** una proposición verdadera.
- Una igualdad entre dos expresiones, en las que figuran una o más variables, es una **ECUACIÓN** si al sustituir en la igualdad las variables por elementos de un conjunto numérico dado **NO SIEMPRE** se obtiene una proposición verdadera.
- En una ecuación, las variables se denominan generalmente **INCÓGNITAS** y los elementos del conjunto numérico que hacen la igualdad verdadera se denominan **SOLUCIONES** o **RAÍCES** de la ecuación.

Ejemplo 1

Indiquemos cuáles de las siguientes igualdades son identidades y cuáles son ecuaciones en el conjunto de los reales.

a) $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$　　　b) $x^3 + 1 = (x+1)^3$

c) $x - 1 = \frac{x-1}{2}$　　　d) $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$

Solución:

- La igualdad a) es una identidad
- La igualdad b) es una ecuación, ya que sólo es verdadera cuando $x = 0$ ó $x = -1$.
- La igualdad c) es una ecuación, ya que sólo es verdadera cuando $x = 1$
- La igualdad d) es una ecuación ya que sólo es verdadera para algunos valores que asignemos a las variables a, b y c.

Ejemplo 2

Identifiquemos la incógnita, las raíces y el conjunto solución de la ecuación $3x^3 - 8x^2 = 5x - 6$, si hacemos que la variable x tome valores en el conjunto de los números reales.

Solución:

- La incógnita de esta ecuación es la variable x .
- Según vimos al principio de esta unidad, las soluciones ó raíces de esta ecuación son $x = \frac{2}{3}$, $x = 3$ y $x = -1$; por lo tanto, el conjunto solución de esta ecuación es el conjunto $\left\{\frac{2}{3}, 3, -1\right\}$.
- Posteriormente, aprenderemos a encontrar estas raíces.

Ejemplo 3

¿ Tiene la ecuación $x^2 = -4$ alguna solución en el conjunto de los números reales?

Solución:

Como no existe ningún real que elevado al cuadrado sea igual a -4, entonces concluimos que esta ecuación no tiene solución en el conjunto de los números reales.

9.3 ECUACIONES ALGEBRAICAS Y ECUACIONES EQUIVALENTES

PRIMERA EXPERIENCIA

- Observemos las siguientes ecuaciones:

1. $2x + 3 = 5x - 2$
2. $x^2 + 15 = -8x$
3. $3x^3 - 9x = 4x^2 - 7$
4. $\dfrac{6}{3x-1} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{4}{x(3x-1)}$
5. $\sqrt{x-4} + 3 = \sqrt{x+11}$

- En cada una de ellas, tanto en el lado izquierdo como en el derecho de la igualdad aparecen expresiones algebraicas en la variable x. Por esta razón, estas ecuaciones se denominan ECUACIONES ALGEBRAICAS en x.
- Aunque todavía no sabemos cómo resolver estas ecuaciones, sí podemos preguntarnos lo siguiente: ¿ Cuáles números reales no pueden ser solución de ellas? Veamos:

  * En las ecuaciones 1., 2. y 3., la variable **x** podría tomar cualquier valor real ya que las expresiones algebraicas que las conforman no tienen restricciones ni por denominadores iguales a 0, ni por raíces pares de números negativos.
  * En la ecuación 4., tanto en la expresión del lado derecho como en la del lado izquierdo, la variable **x** aparece en el denominador; por lo tanto, **x** no puede tomar el valor de $\frac{1}{3}$ ni el valor de 0, puesto que estos valores anulan el denominador de alguna de las fracciones dadas.
  * En la ecuación 5., la variable **x** aparece dentro de una raíz cuadrada; por lo tanto, **x** no puede tomar valores que hagan negativo alguno de los radicandos de estas raíces . En este caso, **x** no puede tomar ningún valor menor que 4.

APRENDAMOS

ECUACIONES ALGEBRAICAS

- Una **ECUACIÓN ALGEBRAICA** en la variable (incógnita) **x** es una igualdad de la forma **P(x)=Q(x)** donde **P(x)** y **Q(x)** son expresiones algebraicas en x.
- Si la variable de una ecuación algebraica toma valores en el conjunto de los números reales, entonces su conjunto solución no podrá incluir aquellos valores para los cuales las expresiones algebraicas no sean números reales (como fracciones de denominador cero ó raíces pares de números negativos).

¡ATENCIÓN!

Entre las ecuaciones algebraicas debemos destacar las **ECUACIONES POLINÓMICAS** en la variable **x,** las cuales podemos escribir en la forma: **P(x) = 0** donde P(x) es un polinomio en la variable x. **El GRADO** de la ecuación es el grado del polinomio.

Ejemplo 1

1. $3x - 12 = 0$ es una ecuación polinómica de primer grado en la variable x.
2. $4y^2 - 3y = 6$ es una ecuación polinómica de segundo grado en la variable y.
3. $5z^3 - 2z^2 = 4z - 3$ es una ecuación polinómica de tercer grado en la variable z.

SEGUNDA EXPERIENCIA

- Algunas veces es posible resolver una ecuación por simple inspección; por ejemplo, la solución de la ecuación $x + 3 = 0$ es $x = -3$, ya que $(-3) + 3 = 0$. Sin embargo, en general, la cosa no es tan sencilla y se hace necesario desarrollar un método sistemático y práctico para resolverlas. Este método se fundamenta en el hecho de que las soluciones de una ecuación pueden ser las mismas de otra u otras ecuaciones. Cuando dos o más ecuaciones tienen las mismas soluciones se denominan ECUACIONES EQUIVALENTES.

APRENDAMOS

ECUACIONES EQUIVALENTES

Dos o más ecuaciones son **equivalentes**, si y sólo si tienen el mismo conjunto solución.

Ejemplo 1

Las ecuaciones $2x - 3 = 9$ y $x - 5 = 1$ son equivalentes ya que tienen el mismo conjunto solución : $\{6\}$

Ejemplo 2

Las ecuaciones $x^2 + x - 12 = 0$ y $2x - 5 = 1$ no son equivalentes porque, a pesar de tener una solución común: $x = 3$, la ecuación $x^2 + x - 12 = 0$ tiene otra solución $(x = -4)$ que no posee la ecuación $2x - 5 = 1$.

- La idea fundamental, al resolver ecuaciones, consiste en aplicar sobre ellas una serie de propiedades que produzcan ecuaciones equivalentes y más sencillas. Estas propiedades son las mismas que ya enunciamos en la unidad 2 cuando estudiamos las propiedades de la igualdad de números reales. Estas propiedades, aplicadas a una ecuación algebraica, $P(x) = Q(x)$, son las siguientes:

APRENDAMOS

TEOREMA:

Sean **P(x)** , **Q(x)** y **R(x)** expresiones algebraicas en la variable **x**, definidas en el conjunto de los números reales:

1. Si $P(x) = Q(x)$ entonces $P(x) + R(x) = Q(x) + R(x)$.
2. Si $P(x) = Q(x)$ entonces $P(x) - R(x) = Q(x) - R(x)$.
3. Si $P(x) = Q(x)$ entonces $P(x) \cdot R(x) = Q(x) \cdot R(x)$, con $R(x) \neq 0$
4. Si $P(x) = Q(x)$ entonces $\frac{P(x)}{R(x)} = \frac{Q(x)}{R(x)}$, con $R(x) \neq 0$

La interpretación de estas propiedades es la siguiente: la 1. establece que **podemos sumar la misma expresión a ambos lados de una igualdad y la igualdad se mantiene**; la 2. establece que **podemos restar la misma expresión a ambos lados de una igualdad y la igualdad se mantiene**; la 3. establece que **podemos multiplicar por una misma expresión, diferente de cero, ambos lados de una igualdad y la igualdad se mantiene**; finalmente, la 4. establece que **podemos dividir por una misma expresión, diferente de cero, ambos lados de una igualdad y la igualdad se mantiene.**

- Usaremos el teorema anterior para resolver, inicialmente, ecuaciones de primer grado con una incógnita.

9.4 SOLUCIÓN DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA

- Comenzaremos esta sección definiendo las ecuaciones de primer grado con una incógnita; así:

APRENDAMOS

ECUACIONES DE PRIMER GRADO

Una ecuación de la forma $ax + b = 0$, donde **a** y **b** son números reales y $a \neq 0$, o cualquier ecuación equivalente a ésta, se denomina **ECUACIÓN DE PRIMER GRADO EN LA INCÓGNITA x.**

- La estrategia para resolver este tipo de ecuación es la siguiente:

1. Eliminar los signos de agrupación (si los hay) que aparecen a ambos lados de la ecuación y reducir los términos semejantes.
2. Aplicar, a la ecuación resultante, las propiedades de la igualdad descritas en el teorema anterior de manera que podamos pasar todos los términos que tengan la incógnita a un lado de la ecuación (generalmente al lado izquierdo) y los términos que no tengan la incógnita al otro lado de la ecuación (generalmente al lado derecho). A continuación, se reducen de nuevo términos semejantes.
3. Finalmente, aplicamos las propiedades de la igualdad de modo que despejemos la incógnita y ésta quede con coeficiente 1.

Ejemplo 1

Resolvamos la ecuación $3x - 2(2x - 5) = 2(x - 3) - 8$

Solución:

$3x - 2(2x - 5) = 2(x - 3) - 8$ .... Ecuación dada.

$\therefore\ 3x - 4x + 10 = 2x - 6 - 8$ .... Quitamos paréntesis.

$\therefore\ -x + 10 = 2x - 14$ .... Reducción de términos semejantes.

$\therefore\ -x + 10 - 10 = 2x - 14 - 10$ .... Propiedad de la igualdad para la resta.

$\therefore\ -x = 2x - 24$ .... Reducción de términos semejantes.

$\therefore\ -x - 2x = 2x - 2x - 24$ . . . . Propiedad de la igualdad para la suma.

$\therefore\ -3x = -24$ . . . . Reducción de términos semejantes.

$\therefore\ \dfrac{-3x}{-3} = \dfrac{-24}{-3}$ . . . . Propiedad de la igualdad para la división.

$\therefore\ x = 8$ . . . . Simplificación de factores comunes.

CONCLUSIÓN: El conjunto solución de la ecuación es: $\{8\}$

¡ATENCIÓN!

En la práctica, muchos de estos pasos pueden eliminarse ya que podemos aplicar las propiedades de la igualdad de una manera mecánica siguiendo estos dos criterios:

1. Los términos que están sumando a un lado de la ecuación podemos pasarlos al otro lado restando, y los términos que están restando a un lado de la ecuación podemos pasarlos al otro lado sumando.
2. Los factores que están multiplicando a un lado de la ecuación podemos pasarlos al otro lado dividiendo, y los factores no nulos que están dividiendo a un lado de la ecuación podemos pasarlos al otro lado multiplicando.

- Si ponemos en práctica estos dos criterios en el ejemplo anterior tendremos algo mucho más simple. Veamos:

$3x - 2(2x - 5) = 2(x - 3) - 8$ . . . . Ecuación dada.

$\therefore\ 3x - 4x + 10 = 2x - 6 - 8$ . . . . Propiedad distributiva.

$\therefore\ 3x - 4x - 2x = -6 - 8 - 10$ . . . . Transposición de términos.

$\therefore\ -3x = -24$ . . . . Términos semejantes.

$\therefore\ x = \dfrac{-24}{-3}$ . . . . Transposición del factor -3

$\therefore\ x = 8$

- Como hemos podido comprobar, la ecuación que acabamos de resolver tiene una solución: $x = 8$. En general, toda ecuación de primer grado con una incógnita, $ax + b = 0$ con $a \neq 0$, tiene siempre una sola solución:

$\therefore\ ax + b = 0$

$\therefore\ ax = -b$

$\therefore\ x = -\dfrac{a}{b}$; con $a \neq 0$

- En general, es importante saber en qué condiciones se puede resolver una determinada ecuación y cuántas soluciones son posibles. Ya hemos resuelto estas dos cuestiones para el caso de las ecuaciones de la forma $ax + b = 0$, con $a \neq 0$. El próximo curso analizaremos otras ecuaciones que tienen varias soluciones. Por ejemplo, la ecuación $x^2 - 9 = 0$ tiene dos soluciones: $x = -3$ y $x = 3$

EJERCICIO 9.2

En los ejercicios 1. a 6., indica cuáles igualdades son identidades sabiendo que x toma valores en los reales.

1. $x^4 - 1 = (x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$
2. $(2x - 3)^2 = 4x^2 - 9$
3. $2x^2 - 3x = 4$
4. $\dfrac{3x + 6}{x} = \dfrac{5x - 2}{x^2 - 3}$
5. $x^2 - x + 1 = \dfrac{x^3 + 1}{x + 1}$; con $x \neq -1$
6. $\dfrac{3x}{x} = 3$; con $x \neq 0$

En los ejercicios 7. a 14. , la variable x puede tomar valores en el conjunto de los números reales. Determina cuáles elementos de este conjunto NO pueden ser solución de cada una de las siguientes ecuaciones:

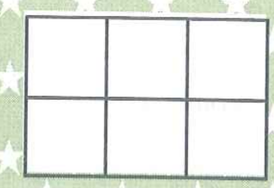
7. $3x - 2 = 7x + 8$
8. $\dfrac{2x - 5}{3} = \dfrac{6x + 2}{4}$
9. $3x^2 = 5x + 8$
10. $x^3 - 1 = 0$
11. $\dfrac{5}{2x} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{4}$
12. $\dfrac{1}{4 - x} + \dfrac{3}{x + 6} = 1$
13. $\sqrt{x} - 2 = x + 5$
14. $\sqrt{x} - 3 = 2x + 1$

En los ejercicios 15. a 24. resuelve cada una de las ecuaciones:

15. $x + 2x - 6 = 9$
16. $3x + 4 = 5x - 10$
17. $2x + 3 = 16 - 2x + 3$
18. $4(2 - 3x) = 8(6 + 2x) + 72$
19. $7(2x - 3) = 5 + 4(x - 2)$
20. $15(x - 1) + 4(x + 3) = 2(7 + x)$
21. $5x - 6(x - 5) = 2(x + 5) + 5(x - 4)$
22. $8(x - 3) - (6 - 2x) = 2(x + 2) - 5(5 - x)$
23. $x - 3 = \{3 + [x - (3+x)]\} = 5$
24. $5x - (3x - 7) - [4 - 2x - (6x-3)] = 10$

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 1

Un cuadrado tiene un área de $144cm^2$. Si el cuadrado se parte en seis rectángulos iguales, como se muestra en la siguiente figura, ¿cuál es el perímetro de uno de estos seis rectángulos?



9.5 ECUACIONES QUE INCLUYEN FRACCIONES

EXPERIENCIA

- Observemos las siguientes listas de ecuaciones:

LISTA A	LISTA B
1. $3x + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}x - 7$	1. $\frac{6}{3x-1} - \frac{1}{x} = \frac{4}{x(3x-1)}$
2. $7y - 9 = \frac{y}{4}$	2. $\frac{3}{y+1} - \frac{2}{y} = \frac{1}{y^2+y}$
3. $\frac{5m}{8} - 8 = \frac{2m}{3} - 11$	3. $\frac{m-1}{2m-8} - \frac{1}{2} = \frac{2m}{m^2-16}$
4. $\frac{2(3x-5)}{7} - \frac{5(x-1)}{5} = \frac{2(x+5)}{3}$	4. $\frac{5}{3x-12} = \frac{x-2}{2x-8} - 5$

- Las ecuaciones de la LISTA A se caracterizan por incluir fracciones cuyo denominador es una constante y las ecuaciones de la LISTA B por incluir fracciones en cuyo denominador aparece la incógnita.
- Para resolver ambos tipos de ecuaciones, la estrategia consiste en eliminar los denominadores. Esto se logra multiplicando ambos lados de la igualdad por el MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO (m.c.m.) de los denominadores. Esta estrategia se fundamenta en la propiedad multiplicativa de la igualdad que describimos anteriormente.

¡ATENCIÓN!

El procedimiento general para resolver una ecuación que incluye fracciones es el siguiente:

1. Eliminar los denominadores multiplicando ambos lados de la ecuación por el m.c.m. de los denominadores dados.
2. Quitar los signos de agrupación.
3. Transponer términos semejantes
4. Reducir términos semejantes.
5. Despejar la incógnita.

Ejemplo 1

Resolvamos la ecuación $\frac{x-5}{6} + \frac{1}{2} = \frac{4x+2}{9}$

Solución:

- En primer lugar, vamos a eliminar los denominadores. Con este fin, multiplicamos ambos lados de la ecuación por el m.c.m. de 6, 2 y 9; así:

$$\left.\begin{array}{l} 6 = 2 \bullet 3 \\ 2 = 2 \\ 9 = 3^2 \end{array}\right\} \therefore \text{ m.c.m. } (6, 2, 9) = 2 \bullet 3^2 = 18$$

- Por lo tanto:

$$18 \bullet \left(\frac{x-5}{6} + \frac{1}{2} \right) = 18 \bullet \left(\frac{4x+2}{9} \right) \text{....... Multiplicamos ambos lados por 18}$$

$$\therefore \overset{3}{\cancel{18}} \bullet \frac{x-5}{\underset{1}{\cancel{6}}} + \overset{9}{\cancel{18}} \bullet \frac{1}{\underset{1}{\cancel{2}}} = \overset{2}{\cancel{18}} \bullet \frac{4x+2}{\underset{1}{\cancel{9}}} \text{....... Aplicamos la propiedad distributiva.}$$

$$\therefore\ 3 \bullet (x-5) + 9 = 2 \bullet (4x+2) \text{............... Simplificamos.}$$

$$\therefore\ 3x - 15 + 9 = 8x + 4 \text{..................... Eliminamos paréntesis.}$$

$$\therefore\ 3x - 8x = 4 + 15 - 9 \text{..................... Transpusimos términos semejantes.}$$

$\therefore\ -5x = 10$ .... Reducción de términos semejantes.

$\therefore\ x = -2$ .... Despejamos la x

Ejemplo 2

Resolvamos la ecuación $\frac{1}{3} - \frac{x-2}{2x+4} = \frac{x+3}{3x+6}$

Solución:

- Hallemos el m.c.m. de los denominadores

$$\left.\begin{array}{l} 3 = 3 \\ 2x + 4 = 2\,(x+2) \\ 3x + 6 = 3\,(x+2) \end{array}\right\} \therefore \text{ m.c.m. } (3,\ 2x+4,\ 3x+6) = 3 \bullet 2 \bullet (x+2) = 6\,(x+2)$$

- A continuación, multiplicamos ambos lados de la igualdad por $6\,(x+2)$; así:

$$6\,(x+2) \bullet \left[\frac{1}{3} - \frac{x-2}{2\,(x+2)}\right] = 6\,(x+2) \bullet \left[\frac{x+3}{3\,(x+2)}\right]$$

$$\therefore\ \overset{2}{\cancel{6}}(x+2) \bullet \frac{1}{\underset{1}{\cancel{3}}} - \overset{3}{\cancel{6}}\,\cancel{(x+2)} \bullet \frac{x-2}{\underset{1}{\cancel{2}\,\cancel{(x+2)}}} = \overset{2}{\cancel{6}}\,\cancel{(x+2)} \bullet \frac{x+3}{\underset{1}{\cancel{3}\,\cancel{(x+2)}}}$$

$$\therefore\ 2\,(x+2) - 3\,(x-2) = 2\,(x+3) \quad ;\ \text{con } x \neq -2$$

¿ Por qué colocamos la condición $x \neq -2$?

- Ahora eliminemos los paréntesis:

$$\therefore\ 2x + 4 - 3x + 6 = 2x + 6\ ;\ \text{con } x \neq -2$$

$$\therefore\ 2x - 3x - 2x = 6 - 6 - 4\ ;\ \text{con } x \neq -2$$

$$\therefore\ -3x = -4\ ;\ \text{con } x \neq -2$$

$$\therefore\ x = \frac{4}{3}$$

- Dos preguntas:
  1) ¿ Cómo sabemos que $x = \frac{4}{3}$ es efectivamente la solución?
  2) ¿ Qué conclusión sacaríamos si la solución hubiera sido $x = -2$?

¡ATENCIÓN!

Notemos que la ecuación $\frac{1}{3} - \frac{x-2}{2x+4} = \frac{x+3}{3x+6}$ es equivalente a la ecuación $2(x+2) - 3(x-2) = 2(x+3)$, con $x \neq -2$; es decir, la aplicación de la propiedad multiplicativa de la igualdad nos permitió obtener una ecuación equivalente, pero más simple que la original.

Ejemplo 3

Resolvamos la ecuación $\frac{1}{x-1} + 1 = \frac{x^2}{x^2 + 3x - 4}$

Solución:

- La solución puede facilitarse si resolvemos, la suma del lado izquierdo de la igualdad, así:

$$\frac{1+x-1}{x-1} = \frac{x^2}{x^2+3x-4}$$

$$\therefore \frac{x}{x-1} = \frac{x^2}{x^2+3x-4} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

- Ahora hallamos el m.c.m. de los denominadores

$$\left.\begin{array}{l} x-1 = x-1 \\ x^2+3x-4=(x+4)\,(x-1) \end{array}\right\} \therefore \text{ m.c.m. } (x-1,\ x^2+3x-4) = (x-1)\,(x+4)$$

- A continuación, multiplicamos ambos lados de la ecuación (1) por (x - 1) (x + 4):

$$\therefore \cancel{(x-1)}\,(x+4)\bullet \frac{x}{\cancel{x-1}} = \cancel{(x-1)}\,\cancel{(x+4)}\bullet \frac{x^2}{\cancel{(x-1)}\cancel{(x+4)}}$$

$$\therefore (x+4)\bullet x = x^2 \text{ ; con } x \neq 1 \text{ y } x \neq -4$$

$$\therefore x^2+4x = x^2 \text{ ; con } x \neq 1 \text{ y } x \neq -4$$

$$\therefore \cancel{x^2}+4x - \cancel{x^2} = 0 \text{ ; con } x \neq 1 \text{ y } x \neq -4$$

$$\therefore 4x = 0 \text{ ; con } x \neq 1 \text{ y } x \neq -4$$

$$\therefore x = 0 \text{ ; con } x \neq 1 \text{ y } x \neq -4$$

- Por lo tanto, $x = 0$ es la solución de la ecuación ya que no coincide con ninguno de los dos valores "prohibidos" ó restringidos: $x = 1$ y $x = -4$. A propósito, ¿ por qué después de eliminar los denominadores (x - 1) y (x + 4) escribimos "con $x \neq 1$ y $x \neq -4$" ?

Ejemplo 4

Resolvamos la ecuación $\frac{3}{t-2} + \frac{2t}{2-t} = -3$

Solución:

- En primer lugar observemos que $2 - t = -(t-2)$
- Por lo tanto, la ecuación original es equivalente a:

$$\frac{3}{t-2} + \frac{2t}{-(t-2)} = -3$$

$$\therefore \frac{3}{t-2} - \frac{2t}{t-2} = -3$$

$$\therefore \frac{3-2t}{t-2} = -3 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{¿ por qué?}$$

- Ahora, multiplicando ambos lados por $t - 2$ y simplificando nos queda:

$$\therefore 3-2t = -3\,(t-2) \text{ ; con } t \neq 2$$

$$\therefore 3-2t = -3t+6 \text{ ; con } t \neq 2$$

$$\therefore t = 3 \text{ ; con } t \neq 2$$

- ¿Podemos garantizar que la solución $t = 3$ es correcta ? ¿por qué ?

Ejemplo 5

Resolvamos la ecuación $1 - \frac{2x-11}{x-2} = \frac{7}{x-2}$

Solución

- Si efectuamos en primer lugar la resta del lado izquierdo, podemos facilitar la solución de la ecuación. Veamos:

$$\frac{x - 2 - (2x - 11)}{x - 2} = \frac{7}{x - 2}$$

$$\therefore \quad \frac{x - 2 - 2x + 11}{x - 2} = \frac{7}{x - 2}$$

$$\therefore \quad \frac{9 - x}{x - 2} = \frac{7}{x - 2}$$

- Ahora multipliquemos ambos lados por $x - 2$ y simplifiquemos:

$$\cancel{(x - 2)} \bullet \frac{9 - x}{\cancel{x - 2}} = \cancel{(x - 2)} \bullet \frac{7}{\cancel{x - 2}}$$

$\therefore \quad 9 - x = 7 \; ; \;$ con $x \neq 2$
$\therefore \quad -x = -2 \; ; \;$ con $x \neq 2$
$\therefore \quad x = 2$

- ¿¡Pero, ésto qué es !? ¿ $x = 2$; con $x \neq 2$? ¿ Será posible ? La verdad es que no es posible, ya que estas dos afirmaciones son CONTRADICTORIAS. La conclusión que se obtiene es que la ecuación: $1 - \frac{2x - 11}{x - 2} = \frac{7}{x - 2}$. **NO TIENE SOLUCIÓN**. Notemos que si reemplazamos x por 2 , el denominador se haría cero, por lo tanto la división no estaría definida en R.

¡ATENCIÓN!

Al resolver una ecuación, en la que ha sido necesario hacer restricciones, es conveniente verificar si el valor obtenido es o no solución de la ecuación. Esto se logra reemplazándolo en la ecuación original.

Ejemplo 6

La ecuación $F = G \frac{m_1 m_2}{d^2}$ representa la fuerza gravitacional entre dos cuerpos de masas m_1 y m_2, separados una distancia d. Queremos resolver esta ecuación para G; es decir, deseamos despejar la incógnita G de esta ecuación.

Solución:

- En primer lugar, la ecuación dada es equivalente a la ecuación: $G \frac{m_1 m_2}{d^2} = F$ en virtud de la propiedad simétrica de la igualdad (si $a = b$ entonces $b = a$).
- Para despejar a G debemos transponer a d^2 , que está dividiendo y pasarlo al otro lado multiplicando, y a m_1 y m_2 que están multiplicando debemos pasarlos al otro lado dividiendo.
- Por lo tanto: $G = \frac{F \bullet d^2}{m_1 m_2}$
- En esta clase de ejercicios es importante identificar el tipo de operación que están realizando las cantidades que hay que transponer, para saber cómo van a pasar al otro lado de la ecuación.

EJERCICIO 9.3

En los ejercicios 1. a 10. resuelve las ecuaciones dadas, indicando en cada caso las restricciones y verificando la solución obtenida.

1. $5+\dfrac{2x}{x-3}=\dfrac{6}{x-3}$
2. $\dfrac{p-5}{6p-6}=\dfrac{1}{9}-\dfrac{p-3}{4p-4}$
3. $\dfrac{3x}{2-x}+\dfrac{6}{x-2}=3$
4. $\dfrac{2}{3x-4}=\dfrac{5}{6x-7}$
5. $\dfrac{2}{x^2+2x}+\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{1}{x}$
6. $\dfrac{2m+1}{m^2-4}-\dfrac{1}{m+2}=\dfrac{1}{m-2}$
7. $\dfrac{5}{x-3}=\dfrac{33-x}{x^2-6x+9}$
8. $\dfrac{5x-22}{x^2-6x+9}-\dfrac{11}{x^2-3x}-\dfrac{5}{x}=0$
9. $\dfrac{4}{25w^2-1}+\dfrac{3}{5w-1}=\dfrac{2}{5w-1}$
10. $\dfrac{1}{x^2-x-2}-\dfrac{3}{x^2-2x-3}=\dfrac{1}{x^2-5x+6}$

En los ejercicios 11. a 16. dada la fórmula, despeja la cantidad que se indica.

11. $V=\frac{1}{3}\pi R^2 h$; despejar h
12. $A=\frac{1}{2}(a+b)h$; despejar b
13. $m = n+(p-1)r$; despejar p
14. $C=\frac{5}{9}(F-32)$; despejar F
15. $y=\dfrac{2x+5}{x-2}$; despejar x, $x \neq 2$
16. $W=\dfrac{2z-4}{3-z}$; despejar z, $z \neq 3$

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 2

la figura muestra un cuadrado, el cual se ha dividido en cuatro rectángulos congruentes. Si el perímetro de uno de los rectángulos es 25 cm, ¿cuál es el perímetro del cuadrado?

9.6 RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

- Indudablemente uno de los objetivos básicos de la matemática es la solución de problemas. Son muchos y muy variados los problemas que pueden resolverse utilizando las herramientas que la matemática proporciona. Entre éstos, merecen destacarse aquellos que dan lugar al planteamiento y posterior solución de una ecuación. El objetivo de esta sección es resolver problemas cuya solución implica obtener y resolver ecuaciones de primer grado.
- Al respecto, el gran matemático y físico Isaac Newton (1642-1727) afirmó lo siguiente:

- Para resolver un problema referente a números o cantidades desconocidas, basta con traducir dicho problema de nuestro idioma particular, al lenguaje del álgebra.

- De acuerdo con lo expresado por Newton, un alto porcentaje del éxito en la solución de un problema tiene que ver con la capacidad para interpretar adecuadamente su enunciado; es decir, es un asunto de comprensión de lectura.
- Veamos, con un caso concreto, cómo sugería Newton que debía realizarse esta traducción.

LENGUAJE PARTICULAR	LENGUAJE DEL ÁLGEBRA
Hallar un número	 x
tal que su cuádruplo	.... $4x$
menos 7	.... $4x - 7$
sea igual a su triple	.... $4x - 7 = 3x$
más 11	.... $4x - 7 = 3x + 11$

Como el objetivo es hallar el número y éste está representado por la incógnita **x**, entonces bastará resolver la ecuación:

$$4x - 7 = 3x + 11$$
$$\therefore\ 4x - 3x = 11 + 7$$
$$\therefore\ x = 18$$

- En la solución de un problema por métodos algebraicos conviene tener en cuenta las siguientes recomendaciones:

1. Leer el problema cuidadosamente de manera que estemos seguros de comprender su enunciado.
2. Elaborar, de ser posible, un diagrama o dibujo que describa el enunciado del problema.
3. Identificar las cantidades, tanto las conocidas como las desconocidas, que intervienen en el problema. Luego, elegimos una de las cantidades desconocidas (incógnita) y la representamos con una letra (generalmente la x). Las demás cantidades desconocidas debemos expresarlas en términos de esta incógnita.
4. Traducir el enunciado del problema mediante una ecuación.
5. Resolver la ecuación obtenida en el paso anterior.
6. Comprobar la solución en el problema original. Este paso es clave, ya que queremos una solución del problema planteado y no de la ecuación que se resolvió

- Vamos a desarrollar algunos modelos de aplicación:

9.6.1 Primera Aplicación

Una barra de 60 cm de longitud se corta en dos pedazos, uno de ellos mide 5 cm más que el otro. Hallemos la longitud de cada pedazo.

Solución:

- **Elección de la Incógnita**

Llamemos x la longitud del pedazo más corto; por lo tanto, como el otro pedazo mide 5 cm más, su longitud podemos representarla por $x + 5$. Luego,

x = medida del pedazo más corto
$x + 5$ = medida del pedazo más largo.

- **Obtención de la Ecuación**

El enunciado del problema establece que la medida de los dos pedazos juntos es de 60 cm; es decir:

$$\underbrace{\text{LONGITUD DEL PEDAZO CORTO}}_{\Downarrow \; x} + \underbrace{\text{LONGITUD DEL PEDAZO LARGO}}_{\Downarrow \; (x+5)} = \underbrace{\text{LONGITUD DE LA BARRA}}_{\Downarrow \; 60}$$

- **Solución de la Ecuación**

$$\begin{aligned} & x + (x + 5) = 60 \\ \therefore\ & x + x + 5 = 60 \\ \therefore\ & 2x + 5 = 60 \\ \therefore\ & 2x = 60 - 5 \\ \therefore\ & 2x = 55 \\ \therefore\ & x = 27{,}5 \text{ cm} \\ \therefore\ & x + 5 = 32{,}5 \text{ cm} \end{aligned}$$

- **Análisis de la(s) solución(es)**

Las medidas de los pedazos son 27,5 cm y 32,5 cm. Uno de ellos mide 5 cm más que el otro y la suma de sus medidas es 60 cm. Por lo tanto, las soluciones son correctas.

9.6.2 Segunda Aplicación

La suma de tres números es -3. El segundo es la mitad del primero y el tercero es 28 unidades menos que el primero. ¿Cuáles son los números ?

- **Elección de la Incógnita**

El problema nos pide hallar tres números. El enunciado nos proporciona la información del segundo y el tercer números respecto al primero. Por lo tanto, la incógnita x se la asignamos al primer número; así:

$$\text{Sea} \begin{cases} x = \text{primer número} \\ \dfrac{x}{2} = \text{segundo número} \\ x - 28 = \text{tercer número} \end{cases}$$

- **Obtención de la Ecuación**

$$\underbrace{\text{Primer Número}}_{\Downarrow \; x} + \underbrace{\text{Segundo Número}}_{\Downarrow \; \frac{x}{2}} + \underbrace{\text{Tercer Número}}_{\Downarrow \; (x-28)} = -3$$

- **Solución de la Ecuación**

$$x + \frac{x}{2} + (x - 28) = -3 \Rightarrow x + \frac{x}{2} + x - 28 = -3$$

$$\therefore\ x + \frac{x}{2} + x = 28 - 3 \Rightarrow \frac{5}{2}x = 25$$

$$\therefore\ 5x = 50 \Rightarrow x = 10$$

$$\therefore\ \frac{x}{2} = \frac{10}{2} = 5 \quad y \quad x - 28 = 10 - 28 = -18$$

- **Análisis de la solución**

Como $10 + 5 - 18 = -3$, entonces las soluciones son correctas.

9.6.3 Tercera Aplicación

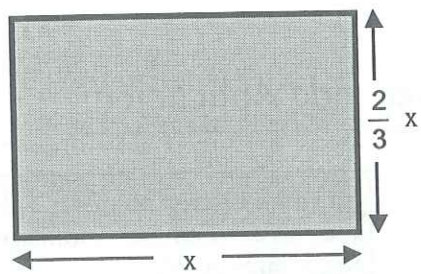
La altura de un rectángulo es dos tercios de su base. Si ambas dimensiones se aumentan en 2 cm, el área se aumentará en 64 cm². ¿Cuánto miden la base y la altura del rectángulo?

- **Elección de la Incógnita**

Como la altura es dos tercios de la base, entonces podemos llamar x la medida de la base; luego, la medida de la altura es $\frac{2}{3}$ x. Por lo tanto:

x = medida de la base

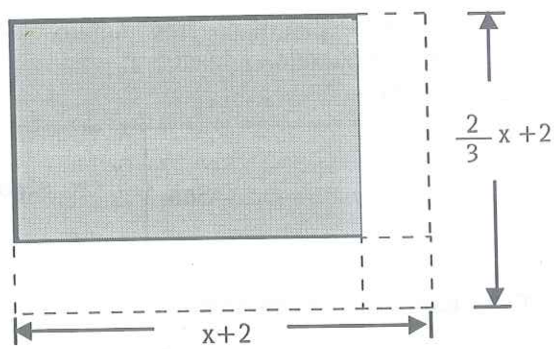
$\frac{2}{3}x$ = medida de la altura



Como el enunciado nos dice que ambas dimensiones se aumentan en 2 cm, entonces:

$x + 2$ = medida de la nueva base.

$\frac{2}{3}x + 2$ = medida de la nueva altura.



- **Obtención de la Ecuación**

El área inicial del rectángulo es: $A = b \cdot h = (x) \cdot \left(\frac{2}{3}x\right) = \frac{2}{3}x^2$

Después del aumento el área será: $A = b \cdot h = (x + 2) \cdot \left(\frac{2}{3}x + 2\right)$

Como el enunciado dice que después del aumento de 2 cm de las dimensiones, el área se aumenta en 64 m², entonces:

$$\underbrace{(x+2)\cdot\left(\frac{2}{3}x+2\right)}_{\text{ÁREA FINAL}} = \underbrace{\frac{2}{3}x^2}_{\text{ÁREA INICIAL}} + \underbrace{64}_{\text{AUMENTO}}$$

- **Solución de la Ecuación**

$$(x+2)\cdot\left(\frac{2}{3}x+2\right) = \frac{2}{3}x^2 + 64 \quad \Rightarrow \quad \cancel{\frac{2}{3}}x^2 + 2x + \frac{4}{3}x + 4 = \cancel{\frac{2}{3}}x^2 + 64$$

$$\therefore\ 2x + \frac{4}{3}x = 64 - 4 \quad \Rightarrow \quad \frac{10}{3}x = 60$$

$$\therefore\ x = 18 \ \text{ y } \ \frac{2}{3}x = \frac{2}{3}\cdot 18 = 12$$

Luego, la base mide 18 cm y la altura mide 12 cm.

- **Análisis de la Solución**

El área inicial es (18 cm) • (12 cm) = 216 cm^2.
El área final es (20 cm) • (14 cm) = 280 cm^2.
Por lo tanto, la diferencia entre las dos áreas es 280 cm^2 - 216 cm^2 = 64 cm^2.
Concluimos, pues, que las soluciones son correctas.

9.6.4 Cuarta Aplicación

Dos trenes salen al mismo tiempo de dos ciudades A y B separadas por una distancia de 500 km y se dirigen uno hacia el otro. Al cabo de cuántas horas se encontrarán, si el primero va a 75 km/h y el segundo a 50 km/h?

- **Elección de la Incógnita**

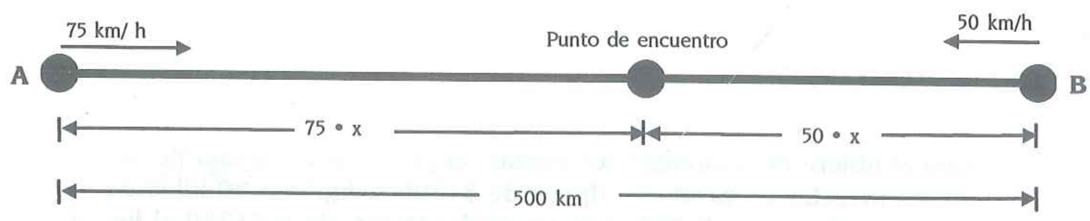
Sea x = número de horas que tardan en encontrarse los dos trenes

- **Obtención de la Ecuación**

Como la velocidad de cada tren es constante, entonces la distancia recorrida por cada uno se obtiene aplicando la ecuación de movimiento: **espacio = velocidad x tiempo (e = v • t)**

Por lo tanto, al cabo de x horas:
* El tren que partió de A habrá recorrido $75\,\frac{km}{h}\cdot xh = 75\cdot x km$.

* El tren que partió de B habrá recorrido $50\,\frac{km}{h}\cdot xh = 50\cdot x km$.



Luego:

$$\underbrace{\text{Recorrido del primer tren}}_{\Downarrow} + \underbrace{\text{Recorrido del segundo tren}}_{\Downarrow} = 500 \text{ Km}$$

$$75 \bullet x + 50 \bullet x = 500 \text{ Km}$$

- **Solución de la Ecuación**

$$75\,x + 50\,x = 500$$
$$\therefore\ 125\,x = 500$$
$$\therefore\ x = \frac{500}{125}$$
$$\therefore\ x = 4 \text{ horas}$$

- **Análisis de la Solución**

Los trenes tardan 4 horas en encontrarse. Cuando se encuentran, el primero ha recorrido $75 \bullet 4 = 300$ km y el segundo, $50 \bullet 4 = 200$km. Luego, entre los dos han recorrido 300 km + 200 km = 500 km.

9.6.5 Quinta Aplicación

Una bolsa contiene sólo monedas de \$500 y de \$1000. De \$500 hay tres monedas menos que de las de \$1000. Si el total de la bolsa es \$28500, ¿cuántas monedas de cada clase hay en la bolsa?

- **Elección de la Incógnita**

Sea x = número de monedas de \$1000
$x - 3$ = número de monedas de \$500

- **Obtención de la Ecuación**

* El dinero que hay en monedas de \$1000 es: $1000\,x$
* El dinero que hay en monedas de \$500 es: $500\,(x - 3)$
* El dinero que hay en monedas de \$1000 más el dinero que hay en monedas de \$500 es \$28500.

Por lo tanto:

$$1000\,x + 500\,(x - 3) = 28500 \quad \Rightarrow \quad 1000\,x + 500\,x - 1500 = 28500$$
$$\therefore\ 1500\,x = 30000 \quad \Rightarrow \quad x = 20 \quad \Rightarrow \quad x - 3 = 17$$

Luego, en la bolsa hay 20 monedas de \$1000 y 17 monedas de \$500

- **Análisis de la Solución**

20 monedas de \$1000 son \$20000 y 17 monedas de \$500 son \$8500. El total del dinero es \$20000 + \$8500 = \$28500

9.6.6 Sexta Aplicación

Con el objeto de aumentar sus ventas, el propietario de una tienda desea mezclar un producto tipo A de \$1200 el kg. con 30 kilos de producto tipo B de \$1500 el kg. y vender la mezcla a \$1380 el kg. ¿Cuántos kg. del producto tipo A necesita ? (Supongamos que el valor de la mezcla es la suma de los valores de sus componentes)

* **Elección de la Incógnita**

Sea x = número de kilos del producto tipo A que es necesario mezclar.
$x + 30$ = número de kilos de la mezcla.

* **Obtención de la Ecuación**

Queremos representar el valor de cada tipo del producto y el de la mezcla final mediante una ecuación en x ; así:

(Valor del producto tipo A) + (Valor del producto tipo B) = (Valor de la mezcla).

Como: VALOR = PRECIO x NÚMERO DE KILOS, entonces:

* Valor del producto tipo A = $1200 \bullet x$
* Valor del producto tipo B = $1500 \bullet 30$
* Valor de la mezcla = $1380 \bullet (x + 30)$

Por lo tanto:

$$\underbrace{\text{VALOR DEL PRODUCTO TIPO A}}_{\Downarrow \atop 1200 \bullet x} + \underbrace{\text{VALOR DEL PRODUCTO TIPO B}}_{\Downarrow \atop 1500 \bullet 30} = \underbrace{\text{VALOR DE LA MEZCLA}}_{\Downarrow \atop 1380 \bullet (x+30)}$$

* **Solución de la Ecuación**

$$1200\,x + 1500 \bullet 30 = 1380\,(x+30) \Rightarrow 1200\,x + 45000 = 1380\,x + 41400$$
$$\therefore\ 1380\,x - 1200\,x = 45000 - 41400 \quad \Rightarrow 180\,x = 3600$$
$$\therefore\ x = 20$$

Por lo tanto, debemos mezclar 20 kg. del producto tipo A con los 30 kg. del producto tipo B

* **Análisis de la Solución**

$$\left.\begin{array}{l} \text{20 kg a \$1200 valen \$24000} \\ \text{30 kg a \$1500 valen \$45000} \\ \text{50 kg a \$1380 valen \$69000} \end{array}\right\} \text{total \$69000}$$

9.6.7 Séptima Aplicación

Con una máquina guadañadora, un obrero puede podar un prado en 4 días. Otro obrero, en cambio, lo puede podar en 6 días. ¿ En cúantos días podrán podar el prado los dos juntos?

* **Elección de la Incógnita**

Sea x = número de días empleados por ambos obreros para podar el prado.
Ahora bien:

* En 1 día, el obrero más rápido podará $\frac{1}{4}$ del prado.
* En 1 día, el obrero más lento podará $\frac{1}{6}$ del prado.
* Por lo tanto, en 1 día ambos obreros podarán $\frac{1}{x}$ del prado.

* **Obtención de la Ecuación**

Como la parte podada por el obrero más rápido es $\frac{1}{4}$, la podada por el obrero más lento es $\frac{1}{6}$ y la podada entre los dos es $\frac{1}{x}$ entonces la ecuación buscada es: $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{1}{x}$

- **Solución de la Ecuación**

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{1}{x}$$

$\therefore \; 12x \bullet \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right) = 12x \bullet \frac{1}{x}$ .... Multiplicamos por el m.c.d. que es 12x

$\therefore \; 3x + 2x = 12$; con $x \neq 0$

$\therefore \; 5x = 12$

$\therefore \; x = \frac{12}{5} = 2{,}4$ días

- **Análisis de la Solución**

Los obreros podarán el campo en 2,4 días trabajando juntos; además, en un día completarán $\frac{1}{x} = \frac{1}{\frac{12}{5}} = \frac{5}{12}$ del trabajo. Veamos si es verdad:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{3+2}{12} = \frac{5}{12} \qquad \text{¡ correcto !}$$

9.6.8 Octava Aplicación

Una vasija contiene 10 litros de una mezcla de vino y agua. Si el 30% es agua, ¿ qué cantidad de mezcla debe eliminarse y reemplazarse por agua pura para que la mezcla resultante tenga 50% de agua ?

- **Elección de la Incógnita**

Sea x = número de litros de la mezcla que se van a eliminar.

- **Obtención de la Ecuación**

  * Después de eliminar los x litros de los 10 litros de la mezcla original nos quedarán (10 - x) litros. Como esta mezcla tiene una concentración del 30% de agua, entonces nos quedan: 30% (10 - x) = $\frac{30}{100}$ (10 - x) =0.3 (10 - x) litros.
  * A lo que nos quedó vamos a agregarle x litros de agua pura; es decir, 100% x = 1x litros.
  * Como la nueva mezcla, de 10 litros, debe tener 50% de agua, entonces la nueva mezcla tendrá 50% (10) = 0.5 (10) litros.

Por lo tanto:

$$\underbrace{\text{Mezcla original, menos la cantidad eliminada con 30\% de agua}} + \underbrace{\text{Agua pura}} = \underbrace{\text{Nueva mezcla con 50\% de agua.}}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$0.3\,(10 - x) + 1x = 0.5\,(10)$$

- **Solución de la Ecuación**

$$0.3\,(10 - x) + 1\,x = 0.5\,(10) \Rightarrow 3 - 0.3\,x + 1\,x = 5$$

$$\therefore 0.7\,x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{0.7} = \frac{20}{7} \text{ litros}$$

Por lo tanto, de la mezcla original es necesario eliminar $\frac{20}{7}$ litros.

- **Análisis de la Solución**

La dejamos como ejercicio al lector.

EJERCICIO 9.4

En cada uno de los problemas 1. a 25. se pide:

a) Elegir una letra para designar la incógnita.
b) Escribir una ecuación de primer grado que interprete adecuadamente el enunciado del problema.
c) Resolver la ecuación obtenida.
d) Analizar la(s) solución(es).

1. Un número es 25 unidades mayor que otro y el menor es igual a la mitad del mayor disminuido en 5 unidades. ¿Cuáles son los números ?.
2. ¿Cuántos años tenía yo hace 6 años, si en esa época mi edad era la mitad de la actual ?.
3. Hallar tres números consecutivos cuya suma sea 72.
4. Hallar dos números enteros pares consecutivos cuya suma sea 50.
5. Los $\frac{3}{5}$ de un número aumentado en 5 son 35. ¿ Cuál es el número?
6. Cuál es el número que disminuido en sus $\frac{3}{5}$, equivale al doble del número disminuido en 40 unidades.
7. Hallar un número tal que la diferencia entre sus $\frac{5}{4}$ y sus $\frac{7}{8}$ sea 30.
8. El triple de un número excede en 60 unidades a un tercio del mismo número. ¿ Cuál es el número?.
9. Hace 8 años la edad de un niño era los $\frac{2}{3}$ de la de su padre. Si la diferencia actual entre las edades es 17 años, hallarlas.
10. El denominador de una fracción es 3 unidades mayor que su numerador. Si el numerador se aumenta en 1 unidad y el denominador en 4 unidades, el valor de la fracción no cambia. ¿ Cuál es la fracción ?.
11. ¿Qué número hay que sumar al numerador y al denominador de la fracción $\frac{7}{13}$ para que se obtenga una fracción equivalente a $\frac{2}{3}$?
12. Un objeto A cuesta \$2800 más que un objeto B. Sabiendo que 10 objetos B y 20 objetos A cuestan \$ 176000, ¿ Cuánto cuesta un objeto de cada clase?
13. Una persona realizó ventas en tres días por \$ 585000. Las ventas del segundo día fueron la tercera parte de las del primero y las del tercero fueron la tercera parte de las del segundo. ¿ Cuáles fueron las ventas de cada día ?

14 Luis tiene \$ 50000 en monedas de \$ 100 y de \$ 200. Si el número de monedas de \$ 100 es la mitad del número de monedas de \$ 200.¿Cuántas monedas de cada denominación tiene Luis ?

15 Dos ciclistas parten de una ciudad y se mueven en direcciones opuestas. Después de 3 horas de iniciado el movimiento se encuentran distanciados 120 km. ¿ Cuál es la velocidad de cada uno si la diferencia de las velocidades es de 2 km./h ?

16 Andrés puede correr cierta distancia en 9 minutos y Lina en 6 minutos. Si comienzan en extremos opuestos y corren el uno hacia el otro. ¿ En qué tiempo se encontrarán ?

17 Un jumbo jet despegó de un aeropuerto al mismo tiempo que una pequeña avioneta. Ambos siguieron la misma ruta. La velocidad del jet era 5 veces la de la avioneta. Al cabo de una hora ya lo había adelantado 500 km. ¿ Qué velocidad llevaba el jumbo jet ?

18 Un muchacho monta su bicicleta colina abajo, hacia la farmacia, a una velocidad de 15 Km por hora, espera 10 minutos a que le surtan su receta y regresa colina arriba a 5 Km por hora. Si el tiempo total del viaje fue de 18 minutos, ¿qué tan lejos está su casa de la farmacia?

19 Gabriel puede podar las plantas de su finca en 75 minutos, mientras que Margarita puede hacer el mismo trabajo en 60 minutos. Si trabajan juntos, ¿ en cuánto tiempo terminarán el trabajo?

20 Una llave puede llenar un depósito en 4 minutos, otra llave en 8 minutos y un desagüe puede vaciarlo, estando lleno, en 20 minutos. ¿En cuánto tiempo se llenará el depósito si estando vacío y abierto el desagüe se abren las dos llaves?

21 Julio construyó una piscina en su casa y trata de llenarla abriendo una canilla grande. Esta canilla llena la piscina a una velocidad de 60 galones por minuto. Al cabo de 2 horas decide usar también una manguera que arroja agua a una velocidad de 15 galones por minuto. Si la capacidad de la piscina es de 30000 galones, ¿ qué tiempo se requiere para llenarla ?.

22 La base de un rectángulo es 6 cm más larga que su altura. Si la base se aumenta en 4 cm y la altura se disminuye en 2 cm, el área se aumenta en 8 cm^2. Hallar la base y la altura de este rectángulo.

23 Cierto país prohibe la exportación de su famosa bebida de uva a menos que contenga exactamente el 12 % de alcohol. Un exportador tiene 1000 litros de la bebida con sólo 10 % de alcohol. ¿ Cuántos litros de 16 % de alcohol tiene que agregar a sus 1000 litros para satisfacer las exigencias del gobierno ?

24 Un químico contiene 300 gramos de ácido clorhídrico al 20%. Si se desea aumentar su concentración al 25% sacando una parte para reemplazarla por una solución al 80%, ¿ cuántos gramos debe sacar y reemplazar con la solución al 80% ?

25 Un recipiente A contiene 9 litros de vino y 3 litros de agua. Otro recipiente B contiene 12 litros de vino y 18 de agua. ¿ Cuántos litros se deben sacar de cada recipiente para obtener una mezcla de 7 litros de vino y 7 litros de agua?.

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 3

Un conejo es seguido por un perro. El conejo lleva una ventaja inicial de 50 de sus saltos al perro. El conejo da 5 saltos mientras el perro da 2, pero el perro en 3 saltos avanza tanto como el conejo en 8 saltos. ¿Cuántos saltos debe dar el perro para alcanzar al conejo?.

TALLER DE REPASO DE LA UNIDAD 9

1. Preguntas para revisar la teoría:

   a) ¿Qué diferencia(s) existe (n) entre una ecuación y una identidad?
   b) ¿Qué nombre reciben las variables en una ecuación?
   c) ¿A qué se denomina raíces de una ecuación?
   d) ¿Qué es una ecuación algebraica? Escriba tres ejemplos.
   e) En una ecuación algebraica, ¿cuáles números reales no pueden ser solución de la ecuación?
   f) ¿Cómo se definen las ecuaciones polinómicas? Escriba cuatro ecuaciones polinómicas de distinto grado.
   g) ¿Cuándo dos ecuaciones son equivalentes?
   h) ¿Cuáles son las propiedades de la igualdad de dos números reales que al aplicarse a una ecuación algebráica nos produce una ecuación equivalente?
   i) ¿Cómo se define una ecuación de primer grado? ¿Cuántas soluciones tiene una ecuación de primer grado?
   j) Si una ecuación incluye fracciones, ¿qué estrategia debemos aplicar para resolverlas?
   k) ¿Cuáles son los pasos que debemos seguir para resolver un problema que involucra a una ecuación de primer grado?

En los ejercicios 2. a 11. resuelve las ecuaciones propuestas:

2. $3\left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{6}\right) - \frac{3}{4}(2x + 18) = -4$
3. $ax + \frac{b}{a} = bx + 1$
4. $a(x-2) - b(x-1) = b - a$
5. $\frac{cx + d^2}{d} - c = \frac{4dx - cd}{c}$
6. $\frac{x+4}{2} - \frac{5}{6} = \frac{2x-2}{3}$
7. $\frac{rx}{s} - \frac{sx}{r} = r - s$
8. $\frac{2}{x-2} - \frac{3}{2x-3} = \frac{6}{2x^2 - 7x + 6}$
9. $b(a+x) - (a+x)(b-x) = x^2 + \frac{bc^2}{a}$
10. $\frac{4x+1}{4x-1} + \frac{6}{1-16x^2} = \frac{4x-1}{4x+1}$
11. $\frac{b(x+a)}{x^2 - b^2} + \frac{2x + 3b - a}{x + b} = \frac{2(x^2 + bx - b^2)}{x^2 - b^2}$

En los ejercicios 12. a 16. despeja la letra que se indica.

12. $1 = \frac{3(d+b)}{2+d}$; despeja b
13. $L_2 = L_1(1 + at)$; despeja t
14. $p = \frac{W}{2gt}(V_1^2 - V_2^2)$; despeja t
15. $E = \frac{1}{2}mr^2w^2 - \frac{e^2}{s}$; despeja m
16. $M = \frac{L}{F}\left(\frac{25}{f} + 1\right)$; despeja f

En cada uno de los ejercicios 17 a 25 se pide:

a) Elegir una letra para designar la incógnita.
b) Escribir una ecuación de primer grado que interprete adecuadamente el enunciado del problema.
c) Resolver la ecuación obtenida.
d) Analizar la (s) solución (es).

17. Halla tres números consecutivos, tales que la suma del segundo con el tercero sea igual al triple del primero.

18. Si un lado de un triángulo mide las dos quintas partes del perímetro P, el segundo mide 70 cm y el tercero corresponde a la cuarta parte del perímetro, ¿cuánto mide el perímetro?

19. En una excursión, un grupo recorrió a caballo un tercio de la distancia, 6Km en barca y la mitad de la distancia a pie. ¿Cuántos kilómetros viajó dicho grupo?

20. Un tubo A puede llenar un depósito en 8 horas y un tubo B, en 6 horas. ¿Cuánto tardarán ambos tubos en llenar juntos el depósito?

21. Tres segundos después de disparar un fusil a cierto blanco, la persona oye el ruido del impacto. Si el sonido viaja a 335 metros por segundo y la bala a 670 metros por segundo, ¿a qué distancia está el blanco?.

22. Un concierto produjo 29.000 dólares en la venta de 4.000 entradas. Si las boletas se vendieron a 5 dólares y a 8 dólares, ¿qué cantidad de boletas se vendió a cada precio?

23. ¿Cuántos mililitros (ml) de agua destilada se debe agregar a 60 ml de una solución ácida a 70% para que esta se reduzca a una solución ácida a 60%?

24. ¿Cuántos centilitros (cl) de alcohol puro se deben añadir a 35 cl de una solución al 20% para obtener una solución de alcohol a 30%?

25. Un radiador de 9 litros de capacidad contiene una solución de anticoagulante a 50% en agua destilada. ¿Cuánto se le debe extraer para sustituirlo por anticoagulante puro, con el objeto de obtener una solución a 70%?.

26. Una liebre lleva una ventaja inicial de 60 de sus saltos a un perro, la liebre da 4 saltos mientras el perro da 3, pero el perro en 5 saltos avanza tanto como la liebre en 8. ¿Cuántos saltos debe dar el perro para alcanzar a la liebre?

27. ¿A qué hora, entre la 1 y las 2, están opuestas las agujas del reloj?

28. ¿A qué horas, entre las 10 y las 11, las agujas del reloj forman ángulo recto?

29. ¿A qué hora, entre las 4 y las 5, coinciden las agujas del reloj?

30. ¿A qué hora, entre las 10 y las 11, está el minutero exactamente a 6 minutos del horario?

PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS DEL ICFES

1. La diferencia de las edades de un padre y su hijo es 25 años. Hace 15 años la edad del hijo era los $\frac{3}{8}$ de la edad del padre. Las edades actuales son:

a) 55 y 30 años b) 20 y 45 años c) 49 y 32 años d) 95 y 40 años

2. Juan y Andrés empiezan a jugar con igual suma de dinero. Cuando Andrés ha perdido los $\frac{3}{4}$ del dinero con que empezó a jugar, lo que ha ganado Juan es \$24.000 más la tercera parte de lo que le queda a Andrés. Juan y Andrés empezaron a jugar con:

a) \$15.000 b) \$36.000 c) \$45.000 d) \$49.000

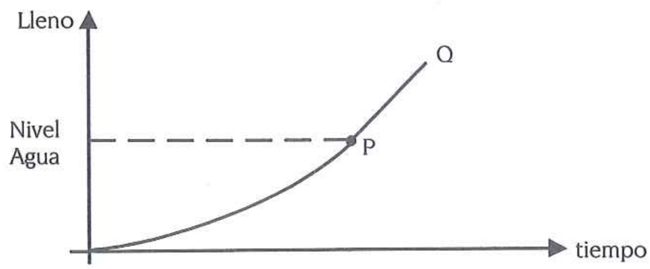
3. El largo de un barco es 800 pies y excede en 744 pies a los $\frac{8}{9}$ del ancho. El ancho es:

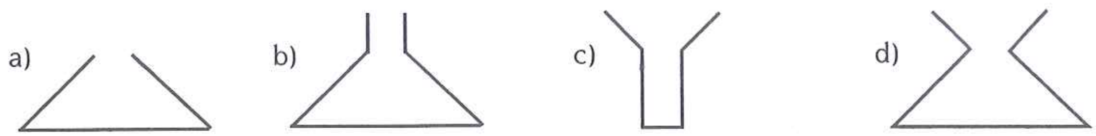
a) 15 pies b) 20 pies c) 48 pies d) 63 pies

4. Si x es un número real positivo y $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 7$, entonces $x^3 + \frac{1}{x^3}$ es igual a:

a) $4\sqrt{7}$ b) $7\sqrt{7}$ c) $5\sqrt{7}$ d) $6\sqrt{7}$

5. Se llena un recipiente completamente con agua que gotea uniformemente de un grifo. La gráfica muestra el nivel del agua en el recipiente en cualquier momento dado mientras que éste se está llenando. En ella el segmento $\overline{PQ}$ es recto. La forma de recipiente que corresponde a esta gráfica es:





Núcleo Temático

10

PENSAMIENTO ALEATORIO

LOGRO GENERAL

Calcular e interpretar la media aritmética, la mediana y la moda de una distribución de datos agrupados y no agrupados.

LOGROS ESPECÍFICOS	INDICADORES DE LOGRO
Corporal: • Recolectar información acerca de un tema concreto y consignarlo en tablas de valores, diagramas de barras, diagramas circulares o histogramas.	• Recogidos los datos de una muestra poblacional, los consigna en tablas de valores y los representa mediante diagramas de barras, diagramas circulares o histogramas.
Comunicativa: • Realizar encuestas entre sus compañeros o familiares, explicando los objetivos y el procedimiento para llevarlas a cabo.	• Explica los objetivos y alcances de una encuesta realizada a los compañeros de estudio o a familiares.
Cognitiva: • Recolectar, tabular y organizar datos. • Hallar las medidas de tendencia central: media aritmética, mediana y moda tanto de datos agrupados como no agrupados. • Determinar cuál medida de tendencia central es la adecuada para interpretar una situación problema.	• Dado un conjunto de datos de una muestra, los tabula y representa en diagramas, polígonos de frecuencias, histogramas o curvas de frecuencias. • Halla la media, la mediana y la moda de una distribución tanto de datos agrupados como no agrupados. • Determina cuál de las medidas de tendencia central es la adecuada para interpretar una información dada.
Estética: • Dibujar polígonos y curvas de frecuencias absolutas. • Dibujar polígonos y curvas de frecuencias acumulada.	• Dada una tabla de datos agrupados, dibuja los polígonos y las curvas de frecuencias absolutas y acumuladas.
Etica-Actitudinal: • Reconocer la importancia del trabajo en grupo para el éxito de una encuesta.	• Participa, se integra y coopera en las diferentes actividades programadas para la realización de una encuesta.

DIMENSIONES

EVALUACIÓN

ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS

10.2 REVISIÓN DE CONCEPTOS

10.2.1 Población y Muestra

- El coordinador del grado 10° de un colegio de la ciudad desea realizar un estudio acerca de **la profesión del padre o acudiente, del número de hermanos** y **del peso** de los alumnos de dicho grado. Pero tiene un inconveniente: son 750 alumnos en 10° grado. Por ello decide escoger 75 de ellos al azar.

- Para la **recolección de los datos** forma tres tablas: una para clasificar los alumnos según la profesión de su padre o acudiente; la segunda para clasificarlos según el número de hermanos y la tercera para clasificarlos según el peso. Los resultados de la recolección fueron los siguientes:

Clasificación según la profesión del padre	
Profesión del padre	**No. de alumnos**
Ingeniero	18
Médico	24
Economista	15
Administrador de Empresas	12
Profesor	6

Clasificación según número de hermanos	
No. de hermanos	**No. de alumnos**
0	9
1	18
2	26
3	8
4	6
5	5
7	3

Clasificación según el peso	
Peso (kg)	**No. de alumnos**
[35 - 39)	2
[39 - 43)	5
[43 - 47)	16
[47 - 51)	20
[51 - 55)	20
[55 - 59)	6
[59 - 63)	6

- El conjunto de todos los alumnos de 10° grado de este colegio se llama **POBLACIÓN**. El conjunto formado por los 75 alumnos, tomados al azar, con los que se realiza el estudio se llama **MUESTRA.** Por razones de costos, de tiempo y en ocasiones, por necesidad, en estadística se trabaja con **muestras** en vez de **poblaciones**. Por ejemplo, en una fábrica que confecciona camisas, el jefe de control de calidad escoge al azar algunas de ellas para determinar si tienen o no defectos de confección y, con base en el estudio de estas muestras, decide si toda la producción es aceptada o rechazada. En este caso, sería imposible estudiar una por una todas las camisas.

RECORDEMOS

- **POBLACIÓN:** es el conjunto de todos los elementos que cumplen determinada condición; por ejemplo, "ser alumnos de 10° grado de un cierto colegio".
- **MUESTRA:** es cualquier subconjunto o parte de la población; por ejemplo, "los 75 alumnos escogidos al azar del grado 10° de dicho colegio".

10.2.2 Caracteres y Variables Estadísticas

- En el ejemplo anterior estudiamos el grupo de los alumnos de 10° grado, con base en tres aspectos diferentes: **profesión de su padre o acudiente, número de hermanos** y **peso en kilogramos.**

Cada uno de estos aspectos se denomina **CARACTER ESTADÍSTICO.** Los caracteres estadísticos pueden ser **CUALITATIVOS** o **CUANTITATIVOS.**

- Son **cualitativos** los que **NO se pueden medir,** se refieren principalmente a atributos; por ejemplo el lugar de nacimiento, el estado civil de una persona, la profesión de alguien, el color del cabello.
- Son **Cuantitativos** los que **se pueden medir;** por ejemplo el número de hermanos, la nota obtenida en un examen de matemáticas, la estatura de una persona.

- El caracter estadístico cuantitativo **estatura** toma distintos valores: 1.53 m, 1.47 m, 1.73 m, 1.91 m,... El conjunto de estos valores se llama **variable estadística "estatura".** Las variables estadísticas pueden ser **discretas** o **continuas.** Son discretas cuando sólo pueden tomar valores aislados y son continuas cuando pueden tomar todos los valores posibles dentro de un intervalo.

- Los valores de la variable se representan por $x_1, x_2, x_3, \ldots x_i, \ldots x_n$.

RECORDEMOS

CARACTERES ESTADÍSTICOS

CUALITATIVOS (no se pueden medir)	**CUANTITATIVOS (se pueden medir) Dan lugar a variables estadísticas**	
	Variables discretas	**Variables continuas**
EJEMPLOS • Lugar de nacimiento. • Estado civil. • Candidato a Presidente. • Profesión del acudiente. • Color de la piel. • Religión	**EJEMPLOS** • Número de hermanos. • Número de personas que viven en un mismo edificio. • Número de alumnos de un colegio. • Número de asistentes al estadio un domingo. • Número de votos por un candidato en las elecciones presidenciales.	**EJEMPLOS** • Peso de un grupo de personas. • Estatura de los alumnos de un grupo. • Contenido de calcio en la sangre de un grupo de personas. • Cantidad de colesterol en la sangre por grupo de edades.

10.2.3 Elección de una Muestra y Qué hacer con ella

EXPERIENCIA

- Para elegir a cuáles alumnos de 10° va a consultar, el coordinador le asigna un número a cada estudiante y, luego, extrae al azar los 75 que conforman la muestra. Esta manera de escoger una muestra se denomina **MUESTREO ALEATORIO** y se considera **REPRESENTATIVA** de la población (porque fueron escogidos sin tener en cuenta ninguna preferencia).
- Una vez escogida la muestra el coordinador hace lo siguiente:

1. **RECOGER LOS DATOS:** Consiste en consultar a los estudiantes que componen la muestra y consignar sus respuestas.

2. **ORDENAR LOS DATOS:** Consiste en colocar los datos en orden creciente o decreciente.

3. **RECUENTO DE FRECUENCIAS:** Consiste en construir una tabla en cuya primera columna escribimos los nombres de los candidatos y en la segunda el "recuento". Por ejemplo, al realizar el recuento para clasificar a los estudiantes según la profesión del padre, el coordinador hará lo siguiente:

PROFESIÓN DEL PADRE	RECUENTO	
Ingeniero	⊠⊠⊠	= 18
Médico	⊠⊠⊠⊠	= 24
Economista	⊠⊠⊔	= 15
Administrador de Empresas	⊠⊠	= 12
Profesor	⊠	= 6

4. **AGRUPACIÓN DE DATOS:** Cuando el número de datos es grande, así la variable sea discreta o continua, los datos se agrupan en **intervalos** o **clases.** Por ejemplo, supongamos que el coordinador recogió la siguiente información sobre los pesos de los estudiantes de 10º grado:

57	49	60	47	42	48	52	62	48	51	46	53
51	50	41	52	51	47	57	52	54	59	46	48
43	55	53	48	53	49	48	49	50	52	45	59
50	52	49	50	51	46	45	61	39	44	50	45
40	48	47	42	46	61	49	38	51	45	58	57
45	43	52	53	50	54	51	44	52	54	49	46
43	37	55									

Como el número de datos es grande, conviene agruparlo en intervalos o clases, teniendo en cuenta estas recomendaciones:

- Cada intervalo o clase tiene un extremo inferior y un extremo superior. El extremo inferior de la primera clase es, en general, el menor dato de la muestra y el extremo superior de la última clase es el mayor valor de la muestra. A veces conviene tomar como extremo inferior un número menor que el de la muestra redondeado a un múltiplo de 5 o de 10 y como extremo superior un número mayor que el de la muestra redondeado igualmente a un múltiplo de 5 o de 10. Por ejemplo, si el menor valor de una muestra es 1,43 m, puede tomarse como extremo inferior 1,4 y si el mayor valor es 1,74 m, puede tomarse como extremo superior 1,8. A veces los extremos se eligen por conveniencia o por presentación adecuada.
- Es recomendable que todas las clases o intervalos tengan la misma amplitud.
- Los puntos medios de cada clase se llaman **marcas de clase.**
- No existe una regla única para fijar el número **k** de intervalos o clases en que se va a agrupar la muestra, pero generalmente varía entre 5 y 15, dependiendo del tamaño de la muestra. Una buena guía para tomar la decisión acerca del valor de k es la propuesta de **Herbert A. Sturges (1926)**, quien diseñó la siguiente tabla:

Números de Elementos de la Muestra	Números de Intervalos
n	k
De 6 a 11	4
De 12 a 22	5
De 23 a 45	6
De 45 a 90	7
De 91 a 181	8
De 182 a 362	9
De 363 a 724	10
De 725 a 1.448	11
De 1.449 a 2.896	12

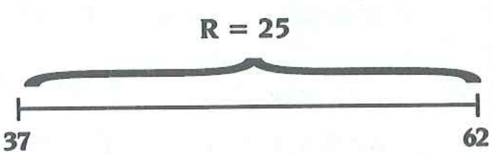
- Para determinar la amplitud de los intervalos o clases procedemos así:
  * Hallamos la diferencia entre el mayor valor y el menor valor de la muestra. Esta diferencia se denomina **RANGO** de la muestra y lo representamos por **R**; es decir:

$$R = X_{max} - X_{min}$$

  * Dividimos **R** entre **K** para hallar la amplitud **A** de cada intervalo:

$$A = \frac{R}{K}$$

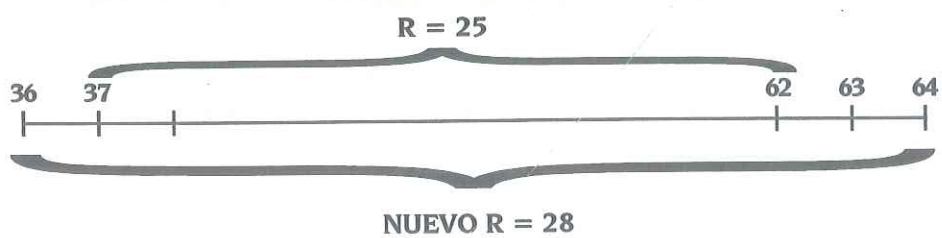
  * Como en este caso, el dato mayor es 62 y el menor es 37, entonces el rango de la muestra es **R=62-37=25:**



  * El número de intervalos, de acuerdo con la tabla de Sturges es **k=7** y la amplitud de cada intervalo será

$$A = \frac{25}{7} = 3{,}571...$$

Como los datos de la muestra son números enteros, entonces aproximamos este número al entero mayor más próximo; es decir a 4. Esto hace que el nuevo rango sea **7x4=28**; es decir **3** unidades más que el rango de los datos. Estas 3 unidades podemos repartirlas como mejor convenga: una por debajo y dos por encima (de 36 a 64) o dos por debajo y una por encima (de 35 a 63); así:



6

R = 25

NUEVO R = 28

5. **ELABORACIÓN DE LA TABLA DE FRECUENCIAS:** Debe contener los valores de la variable. Si estos valores vienen agrupados en clases, entonces deben aparecer el extremo superior, el extremo inferior, las marcas de clase, las frecuencias absolutas y relativas. En ocasiones también es conveniente incluir las frecuencias absolutas y relativas acumuladas y los porcentajes.

Antes de continuar revisemos los conceptos de **frecuencia absoluta, frecuencia absoluta acumulada, frecuencia relativa y frecuencia relativa acumulada.**

RECORDEMOS

- La **FRECUENCIA ABSOLUTA** de un valor x_i es el número de veces que se repite dicho valor. La frecuencia absoluta del valor x_i se representa por f_i.
- La **FRECUENCIA RELATIVA** de un valor x_i es el cociente entre su frecuencia absoluta y el número de datos la muestra. La frecuencia relativa de un dato o valor x_i la representamos por h_i.

$$h_i = \frac{f_i}{n}$$

siendo **n** el número total de datos; es decir,

$$n = f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_n$$

- La **FRECUENCIA ABSOLUTA ACUMULADA** de un valor x_i es la suma de las frecuencias absolutas de los valores menores o iguales a x_i. La frecuencia absoluta acumulada del valor x_i se representa por F_i.

$$F_i = f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_i$$

- La **FRECUENCIA RELATIVA ACUMULADA** de un valor x_i es el cociente entre la frecuencia absoluta acumulada del valor x_i y el número total de datos. La frecuencia relativa acumulada del valor x_i la representamos por H_i.

$$H_i = \frac{F_i}{n} = \frac{f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_i}{n}$$

La tabla estadística para la distribución de los pesos de los 75 estudiantes de 10º, eligiendo la segunda distribución (tomando los datos del 35 al 63), y es la siguiente:

PESO (kg)	RECUENTO	FRECUENCIA ABSOLUTA	FRECUENCIA ABSOLUTA ACUMULADA	FRECUENCIA RELATIVA	FRECUENCIA RELATIVA ACUMULADA	PORCENTAJE	PORCENTAJE ACUMULADO
x_i		f_i	F_i	$h_i = \frac{f_i}{n}$	$H_i = \frac{F_i}{n}$	$P_i = f_i \cdot \frac{100}{n}$	$P_i = F_i \cdot \frac{100}{n}$
[35 - 39)		2	2	$\frac{2}{75}$	$\frac{2}{75}$	$2,\widehat{6}\,\%$	$2,\widehat{6}\,\%$
[39 - 43)		5	7	$\frac{1}{15}$	$\frac{7}{75}$	$6,\widehat{6}\,\%$	$9,\widehat{3}\,\%$
[43 - 47)		16	23	$\frac{16}{75}$	$\frac{23}{75}$	$21,\widehat{3}\,\%$	$30,\widehat{6}\,\%$
[47 - 51)		20	43	$\frac{4}{15}$	$\frac{43}{75}$	$26,\widehat{6}\,\%$	$57,\widehat{3}\,\%$
[51 - 55)		20	63	$\frac{4}{15}$	$\frac{63}{75}$	$26,\widehat{6}\,\%$	84 %
[55 - 59)		6	69	$\frac{6}{75}$	$\frac{69}{75}$	8 %	92 %
[59 - 63)		6	75	$\frac{6}{75}$	$\frac{75}{75} = 1$	8 %	100 %
		75		1			

EJEMPLO 1

Un colegio matriculó 90 estudiantes en el grado 8º. El departamento de matemáticas desea saber el nivel de preparación que tenían en esa asignatura y escogió al azar 25 estudiantes para hacerles una evaluación que calificaría de 0 a 5. Los resultados obtenidos fueron los siguientes:

1, 1, 4, 1, 2, 2, 4, 3, 0, 3, 4, 5, 1, 2, 5, 3, 4, 0, 2, 3, 4, 4, 0, 1, 2

a) ¿Cuál es la población estadística?
b) ¿Cuál es la muestra?
c) ¿Cuál es la variable estadística?
d) ¿Cuáles son los datos estadísticos?
e) ¿Cuáles son la frecuencia absoluta y la frecuencia absoluta acumulada de cada dato?
f) ¿Cuáles son la frecuencia relativa y la frecuencia relativa acumulada de cada dato?

SOLUCIÓN

a) La población estadística está formada por los 90 estudiantes matriculados en el grado 8º.
b) La muestra corresponde a los 25 estudiantes evaluados.
c) La variable estadística es la **calificación** que se asigna **(de 0 a 5).**
d) Los datos estadísticos son las 25 calificaciones obtenidas.

Para contestar los literales e) y f), organizamos la información en la siguiente tabla de frecuencias. Completa la tabla y explica cómo se obtiene cada resultado.

DATOS	FRECUENCIA ABSOLUTA	FRECUENCIA ABSOLUTA ACUMULADA	FRECUENCIA RELATIVA			FRECUENCIA RELATIVA ACUMULADA		
			FRACCIÓN	DECIMAL	PORCENTAJE	FRACCIÓN	DECIMAL	PORCENTAJE
0	3	3	$\frac{3}{25}$	0,12	12%	$\frac{3}{25}$	0,12	12%
	5	8	$\frac{5}{25}$			$\frac{8}{25}$		
2						$\frac{13}{25}$		
3	4		$\frac{4}{25}$	0,16	16%			
			$\frac{6}{25}$					
5	2				8%		1,00	100%
	n = 25		1					

EJEMPLO 2

El médico del colegio anotó la estatura, en centímetros de los 40 alumnos del grupo 8ºA. Estos fueron los resultados:

160, 167, 163, 148, 151, 158, 166, 166, 157, 153, 151, 150, 155, 164, 162, 166, 171, 167, 165, 152, 150, 148, 152, 162, 155, 158, 158, 164, 157, 155, 160, 154, 153, 156, 160, 159, 159, 158, 163, 161.

Se pide:

a) Agrupar los datos en intervalos de clase y determinar las marcas de clase.
b) Elaborar una tabla en que figuren: frecuencias absolutas, frecuencias absolutas acumuladas, frecuencias relativas, frecuencias relativas acumuladas, porcentajes y porcentajes acumulados.

SOLUCIÓN

a) Como el número de datos es grande, conviene agruparlos formando intervalos o clases. En este caso, como el número de datos es 40, el dato menor es 148 y el dato mayor es 171; por lo tanto, el rango de la muestra, el número de clases y la amplitud de cada clase son

$$\begin{cases} R = 171 - 148 = 23 \\ k = 6 \text{ (teniendo en cuenta la tabla de Sturges)} \\ A = \dfrac{R}{K} = \dfrac{23}{6} = 3{,}833... \approx 4 \end{cases}$$

Puesto que $A \approx 4$ y $k=6$, entonces el nuevo rango será 4x6=24, es decir, 1 unidad más que el rango de datos. Esta unidad podemos agregarla por debajo (iniciando en el dato 147) o por encima (finalizando en 172). De esta manera los intervalos o clases serán:

[147-151) , [151-155) , [155-159) , [159-163), [163-167) , [167-171)

ó

[148-152) , [152-156) , [156-160) , [160-164) , [164-168) , [168-172)

b) Si escogemos la primera distribución, podemos elaborar la siguiente tabla:

Talla (cm)	Recuento	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Absoluta Acumulada	Frecuencia Relativa	Frecuencia Relativa Acumulada	Porcentaje	Porcentaje Acumulado
X_i		f_i	F_i	$h_i = \frac{f_i}{n}$	$H_i = \frac{F_i}{n}$	$P_i = f_i \cdot \frac{100}{n}$	$P_i = F_i \cdot \frac{100}{n}$
[147-151)		4	4	0,10	0,10	10%	10%
[151-155)		7	11	0,175	0,275	17,5%	27,5%
[155-159)		10	21	0,25	0,525	25%	52,5%
[159-163)		8	29	0,20	0,725	20%	72,5%
[163-167)		8	37	0,20	0,925	20%	92,5%
[167-171)		3	40	0,075	1	7,5%	100%
		40		1,000		100%	

PREGUNTA: Si elaboramos la tabla de frecuencias con la segunda distribución, ¿el cuadro de frecuencias absolutas sería el mismo? Explica.

6. **REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA DISTRIBUCIÓN:** Una distribución de datos puede representarse por medio de un diagrama de barras, un diagrama lineal, un pictograma, un histograma, un polígono de frecuencias o una curva de frecuencias.

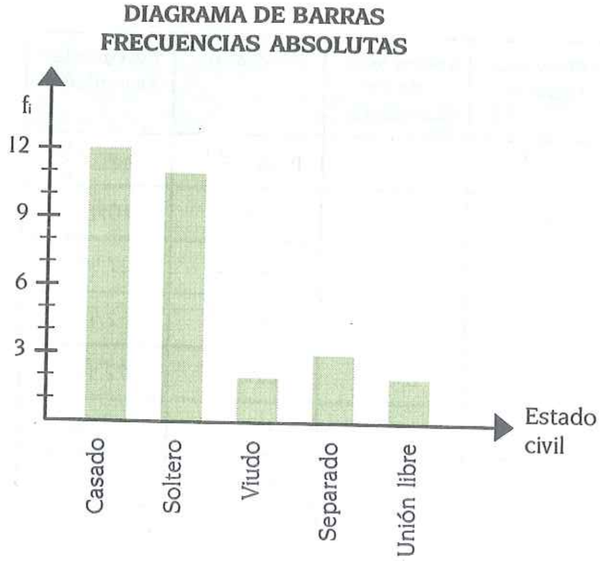
10.2.4 Representaciones Gráficas

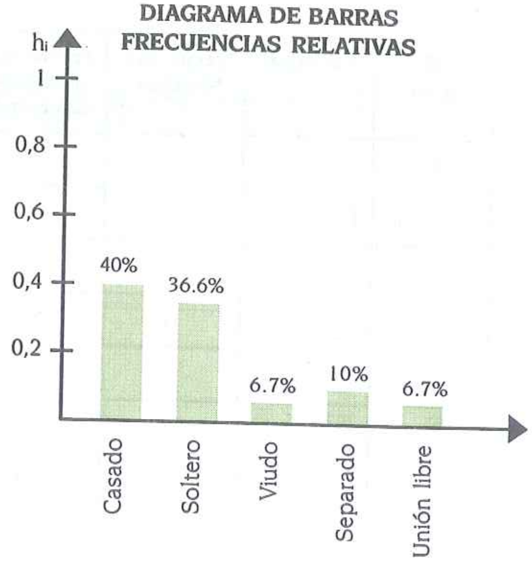
10.2.4.1 Para variables cualitativas

- Después de construir la tabla de frecuencias, generalmente se acostumbra presentar gráficamente los datos obtenidos de una encuesta o de un experimento. Los gráficos más comunes para representar datos cualitativos son el **diagrama de barras** y el **gráfico de sectores.**
- Por ejemplo, la tabla siguiente representa la información correspondiente al estado civil de 30 personas encuestadas:

Estado Civil	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa
Casado	12	0,400 = 40%
Soltero	11	0,366 = 36.6%
Viudo	2	0,067 = 6.7%
Separado	3	0,100 = 10%
Unión libre	2	0,067 = 6.7%
	30	1,000 = 100%

- El **diagrama de barras** consiste en un conjunto de barras de la misma amplitud y con alturas determinadas por la frecuencia absoluta (o relativa) de cada una de las categorías (casado, soltero,...) en que hemos clasificado la variable de interés. La figura siguiente presenta un diagrama de barras de frecuencias absolutas y otro de frecuencias relativas para la situación del estado civil de las 30 personas encuestadas.





Las barras también se pueden construir horizontalmente. En este caso, la frecuencia absoluta (o relativa) va sobre el eje horizontal y la variable estadística sobre el eje vertical.

- El **diagrama de sectores** consiste en un círculo dividido en sectores circulares cuyos ángulos obtenemos aplicando una regla de tres simple directa. En nuestro ejemplo tenemos:

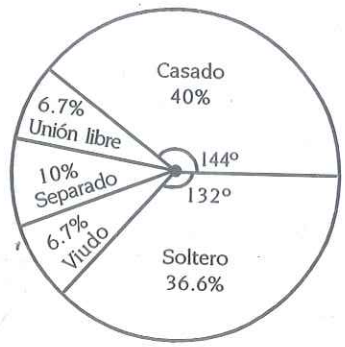
$$\left.\begin{array}{lll} \text{Si} & 30 \xrightarrow{\text{son}} 360^\circ \\ \text{entonces} & 12 \xrightarrow{\text{serán}} x \end{array}\right\} \therefore\ x = \frac{360^\circ \times 12}{30} = 144^\circ$$

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Si} & 30 \xrightarrow{\text{son}} 360^\circ \\ \text{entonces} & 11 \xrightarrow{\text{serán}} x \end{array}\right\} \therefore\ x = \frac{360^\circ \times 11}{30} = 132^\circ$$

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Si} & 30 \xrightarrow{\text{son}} 360^\circ \\ \text{entonces} & 2 \xrightarrow{\text{serán}} x \end{array}\right\} \therefore\ x = \frac{360^\circ \times 2}{30} = 24^\circ$$

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Si} & 30 \xrightarrow{\text{son}} 360^\circ \\ \text{entonces} & 3 \xrightarrow{\text{serán}} x \end{array}\right\} \therefore\ x = \frac{360^\circ \times 3}{30} = 36^\circ$$

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Si} & 30 \xrightarrow{\text{son}} 360^\circ \\ \text{entonces} & 2 \xrightarrow{\text{serán}} x \end{array}\right\} \therefore\ x = \frac{360^\circ \times 2}{30} = 24^\circ$$



A continuación, trazamos un radio cualquiera en el círculo y con ayuda de un transportador construimos el sector que representa la categoría **casado.** En forma similar construimos los demás sectores, tal como nos muestra la figura anterior.

10.2.4.2 Para variables cuantitativas

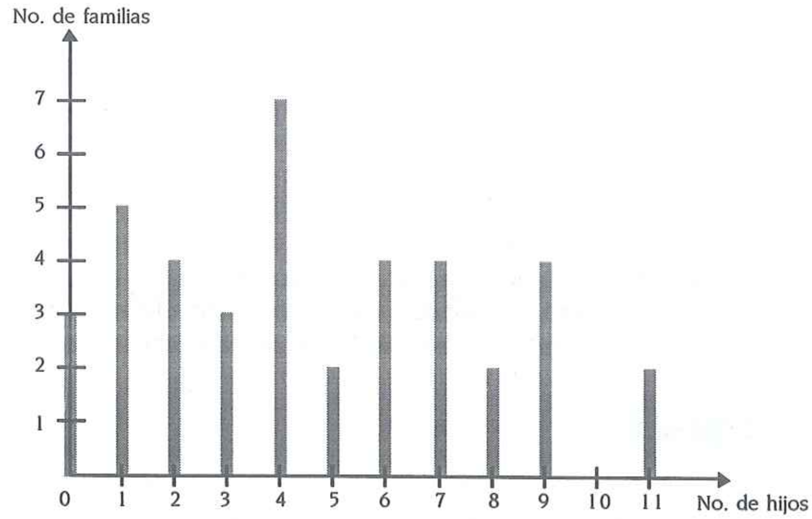
1. VARIABLES DISCRETAS

- En el caso de variables discretas, la representación gráfica usual es el diagrama de barras que se construye en forma similar al de las variables cualitativas; sólo que, en este caso, sobre el eje horizontal colocamos los diferentes valores de la variable.

EJEMPLO

Para obtener información sobre el número de hijos por familia en una región de Colombia, se tomó una muestra de 40 familias. Los resultado se presentan en una tabla de distribución de frecuencias y en un diagrama de barras; así:

No. de hijos por familia	Frecuencia Absoluta
x_i	f_i
0	3
1	5
2	4
3	3
4	7
5	2
6	4
7	4
8	2
9	4
10	0
11	2



2. VARIABLES CONTINUAS

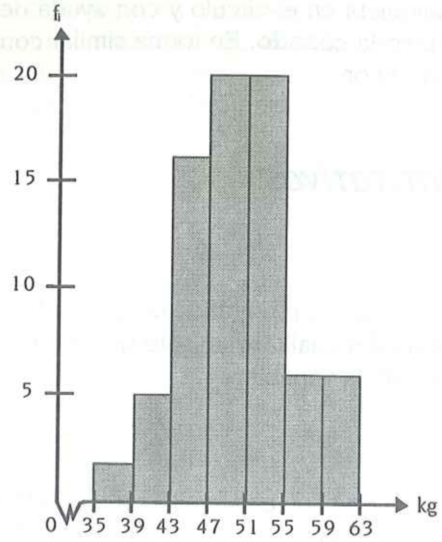
- Para los datos agrupados en intervalos, existen las siguientes representaciones gráficas : **histogramas, polígonos de frecuencias, polígonos de frecuencias acumuladas y curvas de frecuencias.**

  Histogramas
  Un histograma es un conjunto de rectángulos contiguos cuyas bases son los intervalos o clases sobre el eje horizontal y alturas iguales a las frecuencias absolutas o relativas correspondientes a cada clase sobre el eje vertical.

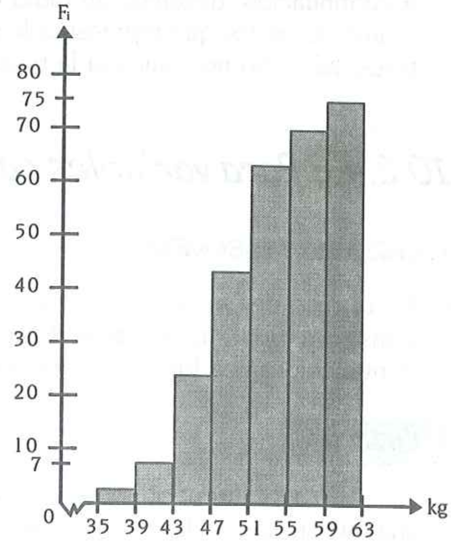
EJEMPLO

Si consideramos de nuevo el problema de los pesos de los 75 alumnos del grado 10°, en el cual los datos fueron agrupados en intervalos o clases, entonces podemos elaborar la tabla de frecuencias absolutas y acumuladas y los histogramas correspondientes, así:

Intervalos (kg)	f_i	F_i
[35-39)	2	2
[39-43)	5	7
[43-47)	16	23
[47-51)	20	43
[51-55)	20	63
[55-59)	6	69
[59-63)	6	75



HISTOGRAMA DE FRECUENCIAS ABSOLUTAS



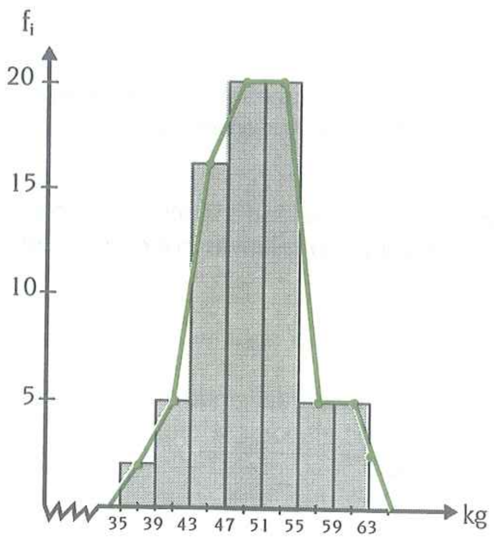
HISTOGRAMA DE FRECUENCIAS ABSOLUTAS ACUMULADAS

Polígono de Frecuencias

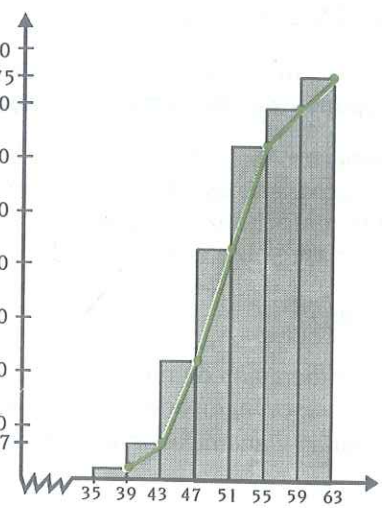
El polígono de frecuencias se construye uniendo con una línea poligonal los puntos medios de los lados superiores de cada rectángulo. En el caso de los histogramas, serán los puntos formados por las marcas de clases y con el fin de que el área encerrada bajo el polígono de frecuencia sea igual a la suma de las áreas de los rectángulos, unimos la marca de clase del primer rectángulo con el punto medio del lado vertical izquierdo, prolongando hasta el eje horizontal; de la misma forma procedemos con el último rectángulo. Si queremos construir el polígono de frecuencias acumuladas, unimos con segmentos los extremos derechos de cada clase.

EJEMPLO

- Los polígonos de frecuencia absoluta y frecuencia acumulada del problema de los pesos de los estudiantes de 10º grado son los siguientes:



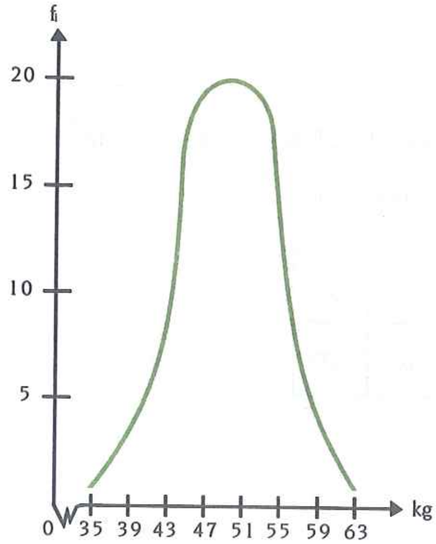
POLÍGONO DE FRECUENCIAS ABSOLUTAS



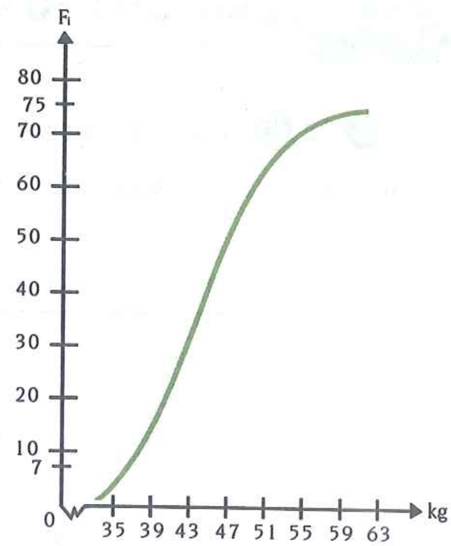
POLÍGONO DE FRECUENCIAS ACUMULADAS

Curvas de Frecuencias

El polígono de frecuencias (o el histograma) sugiere el dibujo de una curva suave como una representación idealizada de la distribución de la población. Si pudiéramos aumentar el tamaño de la muestra y disminuir la amplitud de cada intervalo, obtendríamos un polígono de frecuencias menos irregular cada vez y podríamos dibujar una curva suave y continua. La figura siguiente muestra las curvas de frecuencia absoluta y frecuencia acumulada del ejemplo anterior.



CURVA DE FRECUENCIAS ABSOLUTAS

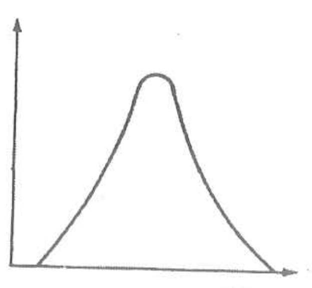


CURVA DE FRECUENCIAS ACUMULADAS (OJIVAS)

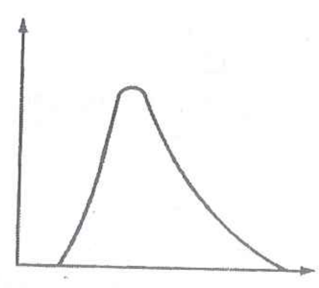
Este tipo de curvas reciben el nombre de **CURVAS DE FRECUENCIA.** Las curvas de frecuencias acumuladas se llaman **OJIVAS.**

¡ATENCIÓN!

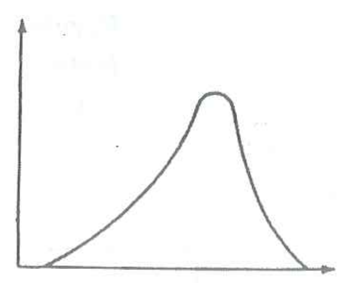
Ciertos tipos de poblaciones suficientemente estudiadas exhiben formas más o menos estables y conocidas. Por ejemplo, el peso de las personas y de los animales, la vida útil de las cosas y el coeficiente de inteligencia de las personas presentan curvas de forma simétrica, como muestra la figura (a). Otras, como los salarios, tienen una distribución asimétrica ya que un porcentaje alto de los trabajadores reciben bajos salarios; por lo cual, éstos tienden a agruparse en el extremo izquierdo de la distribución. Estas curvas se llaman **ASIMÉTRICAS A LA DERECHA** como la figura (b) o **ASIMÉTRICAS A LA IZQUIERDA** como la figura (c).



CURVA SIMÉTRICA
(a)



CURVA ASIMÉTRICA A LA DERECHA
(b)



CURVA ASIMÉTRICA A LA IZQUIERDA
(c)

PREGUNTAS: ¿Qué clase de curva representa las frecuencias absolutas correspondiente a los pesos de los 75 alumnos del grado 10º? ¿Y la del número de hijos de las 40 familias encuestadas de la región de Colombia?

EJERCICIO 10.1

En los ejercicios 1 a 15 marca la letra correspondiente a la UNICA respuesta correcta.

1. Al lanzar un dado 100 veces, se obtuvieron los siguientes resultados:

x_i	1	2	3	4	5	6
f_i	16	14	24	20	16	10

La frecuencia absoluta correspondiente al dato 3 fue:

a) 24 b) 0,24 c) 24% d) 54

2. En el ejercicio anterior, el porcentaje correspondiente al dato 6 es:

a) 5% b) 5 c) 0,1 d) 10%

Los ejercicios 3, 4 y 5 se resuelven con base en el siguiente enunciado: "El Instituto Tecnológico tiene 1.200 estudiantes matriculados. Para evaluar la gestión del Rector se escoge al azar el 10% de los estudiantes, Los criterios de evaluación son Exelente, Buena, Regular y Mala"

3. La población y la muestra de esta encuesta son respectivamente:

a) 12.000 y 1.200 b) 1.200 y 120 c) 1.200 y 12 d) 12.000 y 120

4. La variable estadística de esta encuesta es:

a) Cualitativa y discreta b) Cualitativa y continua
c) Cuantitativa y discreta d) Cuantitativa y continua

5. El rector fue calificado por sus alumnos, obteniendo el siguiente porcentaje:

Excelente	60%
Buena	20%
Regular	15%
Mala	☐

¿Cuántos encuestados dijeron que la gestión fue **Mala**?

a) 6 b) 5 c) 12 d) 10

6. En las siguientes tablas aparecen los intervalos con las frecuencias absolutas acumuladas.

Intervalo	[0-10)	[10-20)	[20-30)	[30-40)
Frecuencia Absoluta Acumulada	1	3	6	10

La frecuencia absoluta del intervalo [20-30) es:

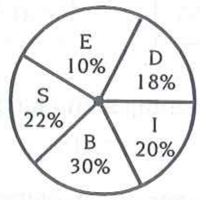
a) 6 b) 3 c) 0,6 d) 4

7 Con la tabla del ejercicio anterior, el tanto por ciento correspondiente al intervalo [10-20) es:

a) 0,3 b) 30% c) 20% d) 2

8 Las calificaciones obtenidas por los 500 alumnos de la básica secundaria en matemáticas fueron:

Exelente	50
Sobresaliente	110
Bueno	150
Insuficiente	100
Deficiente	90



El gráfico de sectores circulares:

a) No se corresponde con los resultados porque los porcentajes no son correctos.
b) No se corresponde con los resultados porque el reparto de los sectores no es correcto.
c) Se corresponde con los resultados
d) No se puede afirmar nada.

9 Al pesar los 600 alumnos de un colegio se obtuvieron los siguientes resultados:

Peso (kg)	[45-50)	[50-55)	[55-60)	[60-65)	[65-70)	[70-75)	[75-80)
No. de Alumnos	24	68	170	184	120	24	10

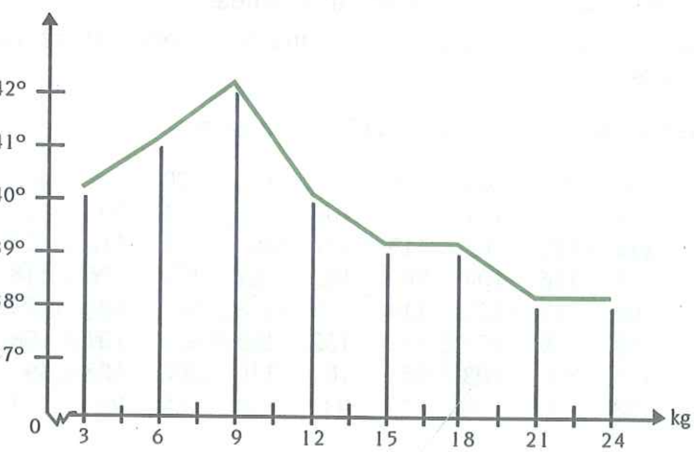
El número de alumnos que pesa menos de 70 kg es:

a) 120 b) 566 c) 154 d) 94%

10 Con los datos del problema anterior, ¿qué porcentaje de alumnos pesa entre 65 y 70 kg?

a) 0,2 b) 20% c) 60% d) 94%

11 Un enfermo tiene una infección. Se toma la temperatura cada 3 horas, obteniéndose la siguiente gráfica en un día:



De las siguientes afirmaciones es correcta:

a) La temperatura máxima la alcanza a las 9 horas
b) Al finalizar el día, el enfermo está sin fiebre
c) El enfermo ha desmejorado en las últimas horas
d) No se puede afirmar nada.

12 ¿Cuál de las siguientes tablas corresponde al diagrama circular?

a)

A	B	C	D
50	100	150	100

b)

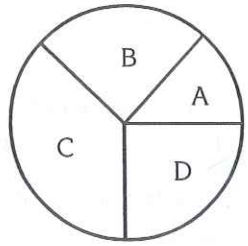
A	B	C	D
30	170	20	180

c)

A	B	C	D
10	150	90	150

d)

A	B	C	D
150	100	50	100



13 La suma de todos los porcentajes en cualquier tabla es:

a) 1 b) 100 c) 1% d) El número total de observaciones

14 La suma de todas las frecuencias absolutas en cualquier tabla es:

a) 1 b) 100 c) 1% d) El número total de observaciones

15 Se llama OJIVA a:

a) Un diagrama de sectores circulares
b) Una tabla de frecuencias absolutas
c) Una curva de frecuencias absolutas
d) Una curva de frecuencias acumuladas

16 Una de las preguntas de un cuestionario está diseñada para ser contestada de la siguiente forma: Si su vivienda:

Es propia sin deuda contesta............. 1
Es propia hipotecada contesta........... 2
La está pagando contesta............... 3
Es arrendada contesta................... 4
Es prestada contesta.................... 5

Recogida la informaciónn se obtienen los siguientes resultados:

4 3 3 4 4 4 1 3 4 3 3 3 2 4 3 4 2 3 3 5
3 4 4 2 3 2 4 4 1 3 5 4 4 3 4 3 1 3 3 2

a) Construye una tabla de frecuencias, el diagrama de barras y el gráfico de sectores
b) ¿Cuántas personas encuestadas tenían vivienda?
c) Una persona posee vivienda si marca una de las alternativas 1,2 o 3. ¿Qué porcentaje de personas posee vivienda?

17 El **COEFICIENTE DE INTELIGENCIA** (CI) de un grupo de estudiantes de 8° grado es el siguiente:

116	106	104	110	116	123	100	115	108	91
107	87	111	106	102	111	104	96	101	117
111	110	103	119	107	88	114	110	103	107
119	116	105	96	102	107	121	106	118	106
102	117	120	114	105	108	99	104	113	101
113	109	97	111	112	125	91	107	108	97
115	89	103	95	107	110	100	105	99	103
108	100	106	102	93	114	105	99	111	106

a) Agrupa este conjunto de datos en 8 intervalos
b) Construye la tabla de distribución de frecuencias
c) Construye el histograma, el polígono de frecuencias absolutas, el polígono de frecuencias absolutas acumuladas, la curva de frecuencias absolutas y la ojiva correspondiente.
d) ¿A partir de que CI tiene el 50% de los estudiantes el más alto coeficiente de inteligencia?
e) ¿Es la curva de frecuencias absolutas, simétrica o asimétrica?

18 Estas fueron las calificaciones definitivas obtenidas por un grupo de estudiantes universitarios en el curso de Matemáticas I.

2,0	3,5	3,0	2,5	2,4	1,6	3,6	3,2	3,7	3,7
3,4	3,3	3,2	1,7	2,3	3,4	2,6	3,4	3,2	3,1
1,3	3,0	3,3	4,5	3,1	3,2	3,7	2,4	3,3	2,8
3,0	3,4	3,7	3,4	2,3	3,1	1,8	3,6	2,5	3,4
2,0	2,8	3,1	3,0	1,0	2,5	4,3	1,4	3,7	3,3
3,8	3,1	3,3	4,3	3,0	3,9	3,9	3,0	2,2	3,0
3,1	4,2	3,5	3,6	3,2	2,6	2,6	3,2	1,5	2,8

a) Si el curso se aprueba con nota mayor o igual a 3,0, ¿qué porcentaje de estudiantes perdió el curso?

b) ¿Cuál fue la calificación más frecuente?

c) ¿Qué porcentaje de estudiantes obtuvo calificación entre 2,5 y 3,5?

d) Construye el histograma, el polígono de frecuencias absoluta y relativas, la curva de frecuencias absolutas y relativas.

e) ¿Es la curva de frecuencias absolutas simétrica o asimétrica?

19 Los jugadores de dos equipos **A** y **B** de baloncesto se clasifican por su estatura, según la siguiente tabla:

ESTATURA	No. de Jugadores Equipo A	No. de Jugadores Equipo B
[1,70 - 1,80)	3	5
[1,80 - 1,90)	4	5
[1,90 - 2,00)	5	6
[2,00 - 2,10)	9	5

Para cada grupo:

a) Representa el histograma de frecuencias absolutas y el de frecuencias absolutas acumuladas para cada equipo.

b) Dibuja el polígono de frecuencias absolutas y de frecuencias absolutas acumuladas para cada equipo.

c) Dibuja la curva de frecuencias absolutas de cada equipo, ¿son simétricas o asimétricas?

d) ¿Qué puedes deducir de esta información?

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 1

La tabla siguiente corresponde al total de espectadores que asistieron a los estadios de Bogotá, Medellín, Cali y Barranquilla durante una fecha del campeonato rentado:

Ciudad	Espectadores
Bogotá	35.000
Medellín	40.000
Cali	30.000
Barranquilla	35.000

Con respecto al total de espectadores en las 4 ciudades, el porcentaje de personas que ingresaron al estadio de Barranquilla fue:

a) 20% b) 25%

c) 30% d) 18%

10.3 MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL

10.3.1 La Cuantificación Estadística

- Las tablas de frecuencias y las representaciones gráficas son muy útiles para captar rápidamente detalles destacables de la distribución de los datos. Sin embargo, las gráficas presentan limitaciones para la descripción y análisis de un conjunto de datos y las conclusiones que se derivan de ellos pueden variar según el criterio de quien realiza la investigación.
- Si tenemos un grupo grande o pequeño de datos, debemos obtener algunos valores que lo representen, es decir, unas medidas que permitan hacer comparaciones u obtener conclusiones. Estos valores representativos de una población o de una muestra se denominan **MEDIDAS DESCRIPTIVAS DE LOS DATOS.**
- Un tipo de medidas descriptivas tiene como objetivo determinar **un valor central** para todos ellos. A esta categoría pertenecen las **MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL:** la media aritmética, la mediana y la moda.
- Otro tipo de medidas descriptivas buscan saber si los datos se encuentran muy agrupados respecto a un valor central, o por el contrario, están muy dispersos y con este fin se estudian las **MEDIDAS DE DISPERSIÓN:** la desviación media, la varianza, la desviación entándar y el coeficiente de variación.
- Por ejemplo si una persona consume 2 libras de carne a la semana y otra no consume nada, la media aritmética indicaría que cada uno come 1 libra. Pero esta conclusión sería engañosa y habría que añadir un segundo dato estadístico, la dispersión, que en el primer caso va a ser muy grande y en el segundo es nula.
- En síntesis, habrá medidas descriptivas que nos sirven para determinar alrededor de qué valor se concentran la mayoría de los datos (ocupando los lugares centrales); es decir, indicarán la **posición central.** Otras medidas nos dirán si los datos están muy repartidos, con relación a la posición central, dándonos la **dispersión** y otras medidas nos dirán si los datos u observaciones se reparten de manera sistemática respecto a los valores centrales dándonos la **simetría.**

APRENDAMOS

- Las **MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL** son valores estadísticos que permiten localizar el centro de la distribución de frecuencias.
- Las medidas de tendencia central más comunes son la **MEDIA**, la **MEDIANA** y la **MODA.**

10.3.2 La Media Aritmética

PRIMERA EXPERIENCIA

- El precio de la onza de oro en dólares americanos registrado en una semana fue de \$470, \$454, \$450, \$472, \$478, \$478. El valor promedio o media aritmética de la onza de oro durante esta semana fue:

$$\frac{470 + 454 + 450 + 472 + 478 + 478}{6} = \text{U.S.}\$\ \frac{2802}{6} = \text{U.S.}\ \$467$$

- U.S.$467 representa, por término medio, el valor de la onza de oro durante cada día de esta semana. Este valor se llama **MEDIA ARITMÉTICA O PROMEDIO.**
- Si la media aritmética la representamos por $\overline{x}$ y los datos por $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, entonces la media aritmética para **n** datos se expresa así:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$$

APRENDAMOS

- La **MEDIA ARITMÉTICA** de una muestra o conjunto de **n** datos es la suma de todos sus valores dividida por el número total de datos; es decir:

  Si $x_1, x_2, x_3, \ldots x_i \ldots x_n$ son los valores de los **n** datos, entonces la media aritmética $\overline{x}$ es:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$$

SEGUNDA EXPERIENCIA

- Las edades de los alumnos de un grupo de 8º son:

  13, 14, 15, 14, 13, 14, 13, 14, 15, 15, 15, 16, 14
  15, 16, 16, 17, 13, 14, 15, 15, 17, 14, 15, 13

- Notemos que hay datos que se repiten varias veces. Por esta razón no resulta práctico sumarlos todos y dividir por el número total de datos. Es más fácil multiplicar cada valor de la variable por el número de veces que aparece (su frecuencia absoluta), sumarlos todos y dividir por el número total de datos; así:

x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$
13	5	65
14	7	98
15	8	120
16	3	48
17	2	34
	n=25	$\Sigma f_i \cdot x_i = 365$

Luego, $\overline{x} = \frac{\Sigma f_i \cdot x_i}{n} = \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2 + \ldots + f_n x_n}{n} = \frac{365 \text{ años}}{25} = 14{,}6$ años

¡ATENCIÓN! • El símbolo Σ (sigma) se utiliza para indicar una suma.

- En consecuencia, la edad media de los alumnos de dicho grupo es 14,6 años. Los alumnos tienen edades alrededor de los 14,6 años.

TERCERA EXPERIENCIA

- Los pesos de los 25 alumnos de un grupo de 8º fueron consignados en la siguiente tabla:

Intervalo	**[30 - 38)**	**[38 - 46)**	**[46 - 54)**	**[54 - 62)**	**[62 - 70)**
f_i	3	5	8	5	4

- Como la variable **peso** es cuantitativa y continua, entonces tomamos la marca de clase x_i que representa a cada intervalo.
- Luego, la tabla de datos nos quedaría así:

Intervalo	x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$
[30-38)	34	3	102
[38-46)	42	5	210
[46-54)	50	8	400
[54-62)	58	5	290
[62-70)	66	4	264
		n=25	$\Sigma f_i \cdot x_i = 1.266$

y ya con las marcas de clase, procedemos como si se tratara de una variable discreta; es decir:

$$\overline{x} = \frac{f_1 \cdot x_1 + f_2 \cdot x_2 + f_3 \cdot x_3 + \ldots + f_n \cdot x_n}{f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_n}$$

$$= \frac{102+210+400+290+264}{3+5+8+5+4} = \frac{1.266}{25} = 50,64$$

¡ATENCIÓN!

Si comparamos este resultado con el que obtendríamos sumando los datos reales de los 25 compañeros de clase y dividiendo por 25, veríamos una pequeña diferencia. Sin embargo vale la pena dicha diferencia por el tiempo que nos ahorramos. Notemos que acá son sólo 25 datos, ¿qué tal que fueran 500 o 1.000?

CUARTA EXPERIENCIA

- En un prestigioso colegio de la ciudad, el área de matemáticas la componen tres asignaturas: álgebra con 4 horas semanales, geometría con 3 horas semanales y estadística con 1 hora semanal. Al finalizar cada período académico, los profesores responsables de cada asignatura deben reunirse para obtener la calificación del área. ¿Cómo obtienen la calificación?

- Como las asignaturas tienen distinta intensidad semanal, entonces el **peso** de la calificación será diferente. Este peso que tiene cada asignatura debido a su mayor o menor intensidad horaria se denomina **PONDERACIÓN** y la obtención de la calificación del período se denomina **MEDIA PONDERADA.**

- Supongamos que un estudiante obtuvo las siguientes calificaciones:

Algebra. 4,2
Geometría. 3,5
Estadística 2,3

Para obtener su definitiva, en el área de matemáticas, multiplicamos cada calificación por el número de horas de la asignatura, sumamos los resultados y dividimos por el total de horas; así:

$$\overline{x} = \frac{4 \times 4{,}2 + 3 \times 3{,}5 + 1 \times 2{,}3}{8}$$

$$\therefore \overline{x} = \frac{16{,}8 + 10{,}5 + 2{,}3}{8} = \frac{29{,}6}{8} = 3{,}7$$

- Si las tres asignaturas tuvieran el mismo número de horas, entonces la calificación media sería:

$$\therefore \overline{x} = \frac{4{,}2 + 3{,}5 + 2{,}3}{3} = \frac{10{,}0}{3} = 3{,}33...$$

APRENDAMOS

- En matemáticas, la **media aritmética ponderada** se aplica para calcular el valor promedio de cantidades cuando a cada una de ellas se les asocia un **peso** que las **pondera o valora de manera diferente.**

- La **media aritmética ponderada** de un conjunto de cantidades $x_1, x_2, \ldots x_n$ ponderadas por los pesos $p_1, p_2, \ldots p_n$ se obtiene sumando los productos de las cantidades por sus respectivas ponderaciones (o pesos) y dividiendo esta suma por la suma de los pesos; es decir:

$$\overline{x} = \frac{x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}$$

¡ATENCIÓN!

La media aritmética tiene una seria desventaja: se ve afectada por los extremos que quedan después de hacer la distribución. Como depende del valor de cada medida, los valores extremos pueden llevarla a representar defectuosamente los detalles.

EJEMPLO

- Un atleta ha participado en seis de los maratones más prestigiosos del país. Las posiciones que ocupó fueron las siguientes:

$$2,\ 4,\ 5,\ 7,\ 2,\ 78$$

- En la última carrera, en la que ocupó el puesto 78, corrió en el primer lugar los primeros 18 kilómetros pero le dieron calambres y debió caminar los últimos 6 kilómetros. Si usamos la media para describir la habilidad del corredor, entonces obtendríamos:

$$\frac{2+4+5+7+2+78}{6} = \frac{98}{6} = 16{,}3$$

sin embargo, como terminó antes del 8º lugar en las primeras 5 carreras, no parece razonable usar la media para medir su capacidad de correr. Tal vez es mejor usar la **mediana**, pues la media se afecta mucho por el valor extremo 78.

10.3.3 Mediana

RECORDEMOS

- La **MEDIANA** es otra medida de centralización y se define como el valor del dato que ocupa el punto central cuando los datos se ordenan en forma creciente o en forma decreciente; es decir, es el valor que divide los datos en dos partes porcentualmente iguales: 50% y 50%.
- La mediana de un conjunto de datos la representamos por **Me.**

- Lo primero que debemos hacer para determinar la mediana es ordenar los valores. Cuando el número de términos es impar tomamos como mediana el valor del centro y cuando es par, tomamos como mediana la semisuma de los dos valores centrales.

EJEMPLO 1

En las primeras 7 fechas del torneo de fútbol se anotaron las siguientes cantidades de goles:

$$6,\ 10,\ 3,\ 21,\ 0,\ 35,\ 14$$

La mediana de los goles anotados se obtiene ordenando los datos:

$$\underbrace{0\ ,\ 3\ ,\ 6}_{\text{3 datos}}\ ,\ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Este es} \\ \text{el dato} \\ \text{central}}}{\boxed{10}}\ ,\ \underbrace{14\ ,\ 21\ ,\ 35}_{\text{3 datos}}$$

Como el número de datos es 7 y el dato 10 ocupa la posición central, entonces:

$$\mathbf{Me = 10}$$

EJEMPLO 2

Si en la octava fecha del mismo torneo de fútbol, se anotaron 24 goles, entonces los 8 datos formarían la siguiente serie:

$$\underbrace{0\ ,\ 3\ ,\ 6}_{\text{3 datos}}\ ,\ \boxed{10\ ,\ 14}\ ,\ \underbrace{21\ ,\ 24\ ,\ 35}_{\text{3 datos}}$$

Estos son los datos centrales

Como el número de datos es par y los valores 10 y 14 ocupan las posiciones centrales, entonces la mediana es el promedio de éstos dos; así:

$$\mathbf{Me} = \frac{\mathbf{10+14}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{24}}{\mathbf{2}} = \mathbf{12}$$

¡ATENCIÓN! La **mediana** es un valor que deja por debajo un 50% de los datos y el otro 50% por encima.

- Cuando la distribución de datos es muy grande no podemos anotarlos todos en orden creciente porque sería muy aburridor. En este caso, recurrimos a la frecuencia absoluta acumulada para calcular la mediana. Veamos:

EJEMPLO 3

La siguiente tabla de frecuencias representa el número total de asistencia a las 36 secciones de clase de un grupo de geometría en la universidad:

Número de Faltas x_i	Frecuencia f_i	Frecuencia Acumulada F_i
0	9	9
1	7	16
2	8	24
3	4	28
4	8	36
	n = 36	

Para calcular la mediana de una distribución de datos como ésta, hacemos lo siguiente:

1. Calculamos $\frac{n}{2} = \frac{36}{2} = 18$ y lo situamos en la columna de frecuencias acumuladas.

x_i	f_i	F_i
0	9	9
1	7	16
2	8	24
3	4	28
4	8	36
	36	

$\frac{n}{2} = 18$

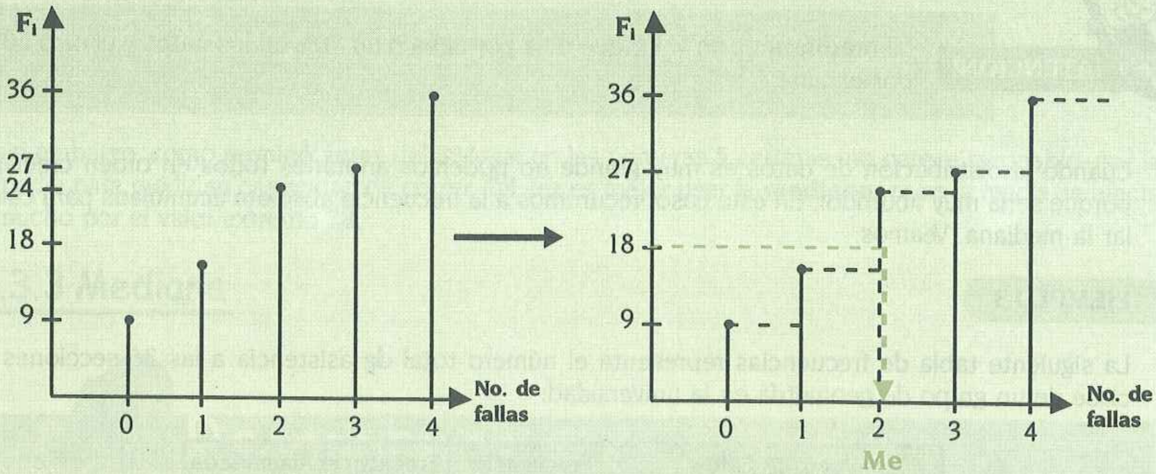
Como $\frac{n}{2} = 18$ entonces queda ubicado entre la frecuencia acumulada 16 y la frecuencia acumulada 24

2. La **Mediana** será el valor de la variable (número de faltas) correspondiente a la frecuencia absoluta acumulada inmediatamente superior a $\frac{n}{2} = 18$ .Si miramos la tabla de frecuencias absolutas acumuladas, ubicamos a 18 entre 16 y 24. Y como 24 es el valor inmediatamente superior a 18, observamos cuál es el valor de la variable cuya frecuencia absoluta acumulada es 24 y resulta ser **2.** Por lo tanto, **Me = 2.**

¡ATENCIÓN!

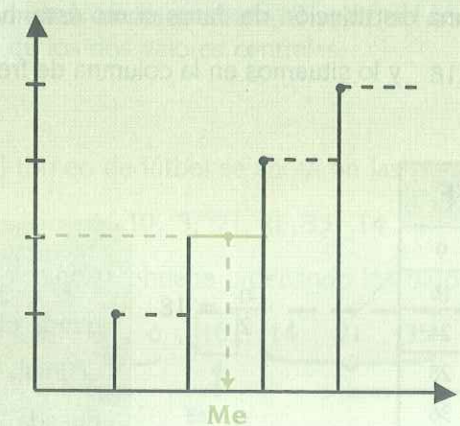
1. Una representación gráfica resulta muy útil para hallar la mediana. Veamos cómo hacerlo para el ejemplo anterior:

   - Dibujamos el diagrama de barras correspondiente a la frecuencia absoluta acumulada y después formamos una línea poligonal en forma de escalera; así:



   - Por $\frac{n}{2} = \frac{36}{2} = 18$ trazamos una paralela al eje horizontal y por donde intercepte a la escalera bajamos una perpendicular: el valor que esta perpendicular marque en el eje horizontal será el valor de la mediana.

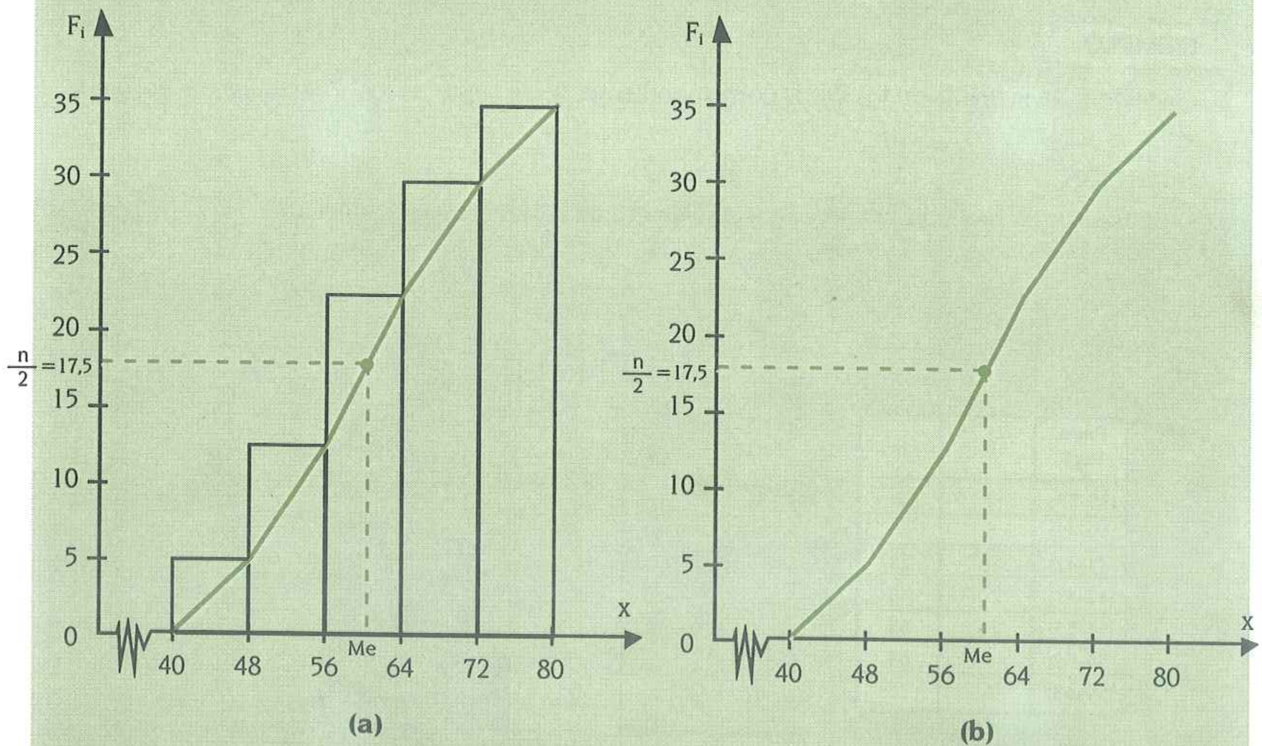
   - Si al trazar la paralela al eje horizontal ésta coincide con una "escalón" de la escalera, entonces la perpendicular al eje horizontal la trazamos por el punto medio y el valor de la mediana será un valor que no está entre los datos, pero que deja por encima el 50% y por debajo el otro 50%.



2. Cuando hay que encontrar la mediana de una distribución de datos en intervalos, podemos utilizar un procedimiento gráfico. Por ejemplo, los pesos de un grupo de personas se consignan en la siguiente tabla:

Intervalo	f_i	F_i
[40 - 48)	5	5
[48 - 56)	7	12
[56 - 64)	10	22
[64 - 72)	7	29
[72 - 80)	6	35
	35	

- Representemos estos datos sobre un **histograma de frecuencias acumuladas** y sobre él dibujamos el **polígono de frecuecuencias acumuladas**, el cual obtenemos uniendo los vértices superiores de los rectángulos; como lo muestra la figura (a):



- A continuación, por $\frac{n}{2} = \frac{35}{2} = 17,5$ trazamos una paralela al eje x y por donde corte a la poligonal, bajamos una perpendicular a este eje y el pie de esta perpendicular es la mediana (figura (b)). En este caso, Me=60.

3. Cuando el gráfico lo hacemos sobre papel milimetrado o cuadriculado es fácil calcular la mediana, ya que el valor será exacto. Pero cuando no contamos con este recurso, para calcular la mediana podemos aplicar la siguiente fórmula:

$$\mathbf{Me} = \mathbf{L_{I-1}} + \frac{\left(\frac{\mathbf{n}}{\mathbf{2}} - \mathbf{F_{I-1}}\right)}{\mathbf{fi}} \cdot \mathbf{A} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (1)$$

donde:

n = número de datos de la distribución

$\mathbf{L_{I-1}}$ = límite inferior del intervalo que contiene la mediana

$\mathbf{F_{I-1}}$ = frecuencia absoluta acumulada del intervalo anterior a donde se encuentra la mediana

$\mathbf{f_I}$ = frecuencia absoluta del intervalo donde está la mediana.

A = amplitud del intervalo donde está la mediana.

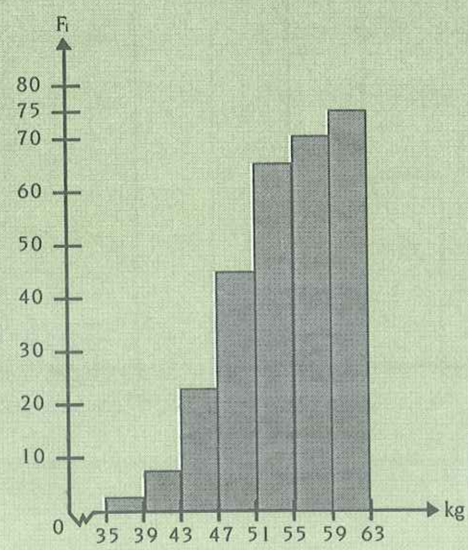
EJEMPLO

Calculemos la mediana de los datos correspondientes a los pesos de los 75 estudiantes del grado 10°.

SOLUCIÓN

- Estos son la tabla de frecuencias y el histograma de frecuencia acumulada:

Peso (kg)	f_I	F_I
[35-39)	2	2
[39-43)	5	7
[43-47)	16	23
[47-51)	20	43
[51-55)	20	63
[55-59)	6	69
[59-63)	6	75



HISTOGRAMA DE FRECUENCIAS ABSOLUTAS ACUMULADAS

- Como n= 75 entonces $\frac{n}{2} = \frac{75}{2} = 37{,}5$. Por lo tanto, la mediana debe caer en el intervalo [47 - 51) (¿por qué?)

- Aplicando la fórmula (1) tenemos:

$$Me = 47 + \frac{37,5 - 23}{20} \bullet 4 \approx 49,9$$

- Esto significa que el 50% de los estudiantes tienen un peso menor o igual a 49,9 kg.

4. La mediana también podemos utilizarla en distribuciones cualitativas. Basta con ordenar los distintos valores que toman los caracteres de la variable que se está analizando. Por ejemplo, un grupo de 30 estudiantes obtuvo las siguientes evaluaciones de carácter cualitativo, en el tercer período académico, en el área de matemáticas:

   DEFICIENTE 6
   INSUFICIENTE 4
   ACEPTABLE 12
   SOBRESALIENTE 5
   EXCELENTE 3

   Como estos datos se pueden ordenar, entonces el valor del caracter correspondiente a $\frac{n}{2} = \frac{30}{2} = 15$ es ACEPTABLE. Por lo tanto, la mediana del grupo en matemáticas es **ACEPTABLE.**

5. Es recomendable utilizar la mediana en lugar de la media aritmética cuando hay valores extremos que pueden afectar la media en forma excesiva. Por ejemplo, alguien que está estudiando el ingreso mensual de un grupo de trabajadores, , obtiene los siguientes valores: \$320.000, \$400.000, \$400.000, \$400.000, \$450.000, \$ 500.000, \$550.000, \$2'000.000 y \$2'900.000. En este caso:

   MEDIA = $\overline{x}$ = \$880.000 (¿por qué?)

   MEDIANA = Me = \$450.000 (¿por qué?)

   Notemos que sólo dos personas tienen ingresos altos y las siete restantes tienen salarios de \$550.000 o menos. En este caso, la mediana \$450.000 es más representativa, para esta distribución, que la media, pues los valores \$2'000.000 y \$2'900.000 la afectan significativamente.

6. También es recomendable utilizar la mediana en lugar de la media aritmética cuando estamos trabajando con intervalos y el primero dice "menos de..." y el último "más de..." ya que tendríamos dos extremos abiertos y sería imposible determinar las marcas de clase. Por ejemplo, la tabla siguiente presenta los salarios que cobran mensualmente los 50 empleados de una empresa:

Intervalo	f_i	F_i
Menos de 400.000	7	8
[400.000 - 600.000)	11	18
[600.000 - 800.000)	14	32
[800.000 - 1'000.000)	12	44
Más de 1'000.000)	6	50

   Como en el primer intervalo no hemos precisado cuál es el extremo inferior, podríamos suponer que es el salario mínimo, pero en el caso del último intervalo es más difícil porque no sabemos cuál es el salario máximo que gana el gerente de la empresa. Por lo tanto, acá conviene calcular la mediana, la cual queda ubicada en el intervalo [600.000 - 800.000) (¿por qué?) y cuyo valor podemos calcular aplicando la fórmula (1); así:

$$Me = 600.000 + \frac{25 - 18}{14} \times 200.000 = \$700.000$$

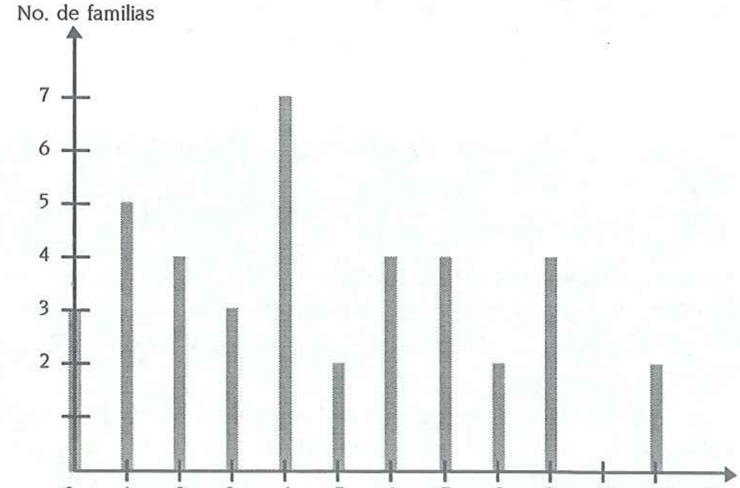
Para determinar la media aritmética tendríamos que "suponer" el extremo inferior del primer intervalo y el extremo superior del último, pero con un inconveniente: ¿quién nos asegura que ésos sí son los valores?

10.3.4 La Moda

EXPERIENCIA

- En la encuesta realizada para determinar el número de hijos por familia en una región de Colombia, obtuvimos estos resultados:

No. de hijos por familia	Frecuencia Absoluta
x_i	f_i
0	3
1	5
2	4
3	3
4	7
5	2
6	4
7	4
8	2
9	4
10	0
11	2



- Tanto en la tabla como en el diagrama de barras nos muestra que el dato que se presenta con mayor frecuencia es $x_5=4$; es decir, en esta región el número de hijos más frecuente por familia es de 4. Hemos identificado una nueva medida de centralización denominada **MODA.**

APRENDAMOS

- La **MODA** de una distribución es el dato que se presenta con mayor frecuencia y lo representaremos por **Mo.**

¡ATENCIÓN!

1. Si los datos han sido agrupados en intervalos, se toma como moda la marca de clase del intervalo que tenga la mayor frecuencia. Por ejemplo, al pesar los 600 alumnos de un colegio, se obtuvieron los siguientes resultados:

Peso (kg)	[45-50)	[50-55)	[55-60)	[60-65)	[65-70)	[70-75)	[75-80)
No. de Alumnos	24	68	170	184	120	24	10

Como el intervalo de mayor frecuencia es [60-65) con 184 alumnos, entonces esta es la clase moda. La moda será la marca de clase de este intervalo, es decir, 62,5 kg.

2. La moda puede no ser única, es decir, una distribución puede tener dos o más modas. Por ejemplo, en el conjunto de datos:

8 6 7 6 2 9 8 5 3

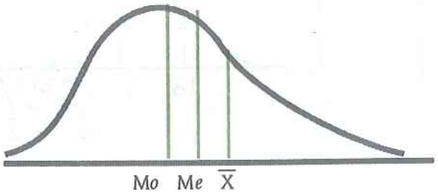
hay dos modas: Mo=6 y Mo = 8 porque ambos datos aparecen dos veces.

3. En general, cuando en un problema debamos obtener las medidas de tendencia central, casi siempre será posible determinar la media, mediana y moda; sin embargo, conviene recordar:

- Cuando se trate de intervalos y los intervalos primero y último quedan abiertos, debemos utilizar **mediana** y **moda.**
- Cuando se trate de caracteres cualitativos y los datos estén ordenados, debemos utilizar **mediana** y **moda.**
- Cuando se trate de calcular totales, la única medida es la **media aritmética**; por ejemplo, si basados en la experiencia queremos conocer el posible gasto futuro de energía eléctrica en una empresa, la única medida es la **media.**
- Cuando los valores extremos tiendan a descentrar el representante de la muestra, debemos utilizar: **mediana y moda.**
- Cuando queramos conocer el rendimiento académico de un estudiante con relación a su grupo, la **mediana** resulta la medida apropiada ya que permite determinar si la persona está por encima de la mitad o por debajo de ella.

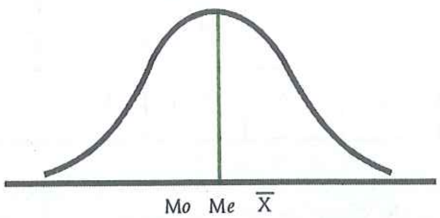
10.3.5 Interpretación Geométrica de las Medidas de Tendencia Central

- Las medidas de tendencia central tienen una interpretación geométrica sencilla. Obervemos la siguiente figura:

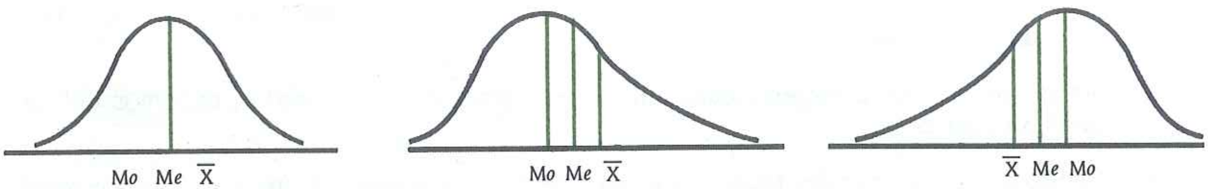


- La **moda (Mo)** es la abscisa correspondiente al punto máximo de la curva.
- La **mediana Me)** tiene la propiedad de que su ordenada divide al área bajo la curva en dos partes iguales.
- La **media aritmética ($\overline{x}$)** es un punto de equilibrio (semejante a un centro de gravedad).

- Si la curva es simétrica, las tres medidas coinciden y podemos tomar cualquiera de ellas como valor representativo de la distribución.



- Si la curva de la distribución no es simétrica, se denomina **ASIMÉTRICA O SESGADA.** En este caso, la moda no cambia, pero la mediana y la media se corren en la dirección de la asimetría. La asimetría es positiva hacia la derecha y negativa hacia la izquierda. En la asimetría positiva, la mediana aumenta (queda más a la derecha que la moda) debido al mayor número de frecuencias y la media aritmética aumenta aún más (queda más a la derecha que las otras dos) ya que hay un aumento en la frecuencia y en el valor de las observaciones. En las asimetrías negativas, ocurre lo contrario: la mediana disminuye y la media aritmética disminuye más que la mediana. La figura siguiente nos aclara todo lo anterior:

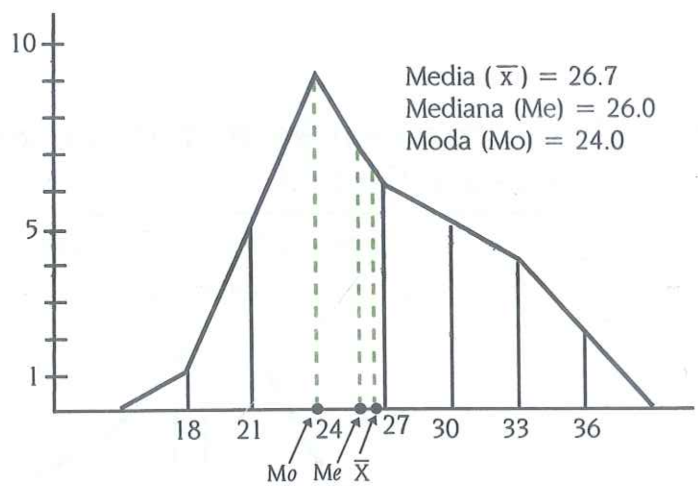


SIMÉTRICA — ASIMÉTRICA A LA DERECHA o POSITIVA — ASIMÉTRICA A LA IZQUIERDA o NEGATIVA

EJEMPLO

- La figura de la derecha corresponde al polígono de frecuencias de una distribución de frecuencias agrupadas como muestra la tabla de la izquierda.

Intervalo de clase	f
[16,5 - 19,5)	1
[19,5 - 22,5)	5
[22,5 - 25,5)	9
[25,5 - 28,5)	6
[28,5 - 31,5)	5
[31,5 - 34,5)	4
[34,5 - 37,5)	2
	32



- El polígono se construyó utilizando las ordenadas correspondientes a las marcas de cada clase y en él se muestra la posición de la media aritmética, la mediana y la moda.
- Como podemos comprobar, la curva de frecuencias presenta asimetría hacia la derecha y por ello la media aritmética ($\overline{x}$) está más a la derecha que la mediana (Me) y que la moda (Mo).

EJERCICIO 10.2

En los problemas 1 a 12 elige la letra correspondiente a la única respuesta correcta:

1. Teniendo en cuenta la tabla siguiente, la media aritmética es:

x_i	f_i	F_i
1	2	2
2	4	6
3	6	12
4	4	16
5	2	18
	18	54

a) 3 b) 18
c) 5 d) 54

2. La siguiente tabla ha sido preparada para calcular la media aritmética, pero faltan algunos números. Los números que faltan son:

INTERVALO	x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$
[0-10)	5	1	
[10-20)	15	2	
[20-30)	25	3	
[30-40)	35	4	

a) 5, 15, 25, 35
b) 1, 2, 3, 4
c) 5, 30, 75, 140
d) 25

3. La media aritmética en el problema anterior es:

a) 15 b) 140 c) 25 d) 10

4. En la siguiente tabla falta un número, ¿cuál debe ser este número para que la media aritmética tenga un valor de 5?

X_i	1	x	5	7
f_i	1	2	3	4

a) 3 b) 4
c) 2 d) No se puede calcular

5. Las evaluaciones realizadas a 30 jóvenes en un grupo de 8° grado tuvieron los siguientes resultados:

E:5 S:12 A:8 I:3 D:2

La nota media o promedio es:

a) 7,0 b) 6,0 c) 6,5 d) No se pude calcular

6. La mediana del caso anterior:

a) No se puede calcular por ser una variable cualitativa
b) Sí se puede calcular porque las modalidades de la variable son ordenables
c) No porque sólo se puede determinar la mediana en variables cualitativas
d) No se puede calcular porque no hay datos suficientes

7 En este mismo problema, la moda es:

a) S b) 5 c) 8 d) A

8 La mediana de la distribución 1,4,7,2,5,3,8,2,9 es:

a) 2 b) 5 c) 4 d) No tiene

9 En la distribución anterior la moda es:

a) 2 b) 5 c) 4 d) No tiene

10 En una distribución asimétrica a la derecha:

a) $\overline{x} > Mo$ b) $\overline{x} < Mo$ c) $\overline{x} = Mo$ d) $\overline{x} = 0$

11 De los 200 alumnos que responden a una prueba de 12 preguntas, el 10% respondió correctamente a 3 preguntas, el 50% a 7, el 30% a 10 y el resto respondió a todas las preguntas. La media aritmética es:

a) 8 b) 50 c) 20% d) 6

12 La mediana y la moda en el caso anterior son:

a) 7 y 7 b) 100 y 7 c) 7 y 10 d) La mediana es 7 pero no tiene moda

13 Calcular la media, la mediana y la moda para cada una de las muestras siguientes:

a) 3,9,12,7,16,20,33,3 b) 5,7,22,17,5,7,20

c) 8,6,0,17,12,7,5 d) -4, 0, 13, 9, 4, 14, 20,15

14 Calcula la media, la mediana y la moda para cada una de las muestras siguientes:

a) 0,0,1,1,1,0,0,0 b) 3,3,3,2,2,2,4,5,3

c) 0,1,1,2,2,3,3,4,4 d) -1,0,0,0,-1,2,-2,3

15 Un profesor borra accidentalmente la calificación de uno de sus seis (6) estudiantes. Las cinco (5) calificaciones restantes son 76,85,43,89 y 65, y la media de las seis (6) es 70. Encontrar la calificación que se borró.

16 En un esfuerzo por reducir su consumo de cigarrillos, un maestro registra las cantidades de cigarrillos fumados durante un período de 20 días:

4 5 3 6 7 1 2 3 0 5
6 5 8 4 0 2 3 7 5 6

¿Cuál medida de tendencia central le servirá mejor a su objetivo? ¿Cuál es el valor numérico?

17 Considera de nuevo el problema **16** del ejercicio 10.1 de esta unidad y contesta:

a) ¿Cuáles son la mediana, la media aritmética y la moda?
b) ¿Cuál sería la medida adecuada para resumir en un valor único los datos de este problema?
c) ¿Cómo se interpreta dicha medida?

18 Teniendo en cuenta el problema **17** del ejercicio 10.1 de esta unidad:

a) Calcula la media, la mediana y la moda
b) Interpreta los resultados

19 Teniendo en cuenta el problema **18** del ejercicio 10.1 de esta unidad:

a) Calcula la media, la mediana y la moda
b) Interpreta los resultados

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 2

La gráfica muestra el total de licenciaturas y doctorados, en miles de diplomas, otorgados durante un período de años por una universidad:

De acuerdo con la gráfica, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

a) En 1950 hubo 50.000 doctorados y 60.000 licenciados.
b) En 1960 hubo 50.000 doctorados.
c) El número de licenciados fue siempre en aumento.
d) En 1980 hubo igual número de licenciados que de doctorados.

TALLER DE REPASO DE LA UNIDAD 10

1. **Preguntas para revisar la teoría**

1.1 En estadística, ¿qué es población? ¿qué es muestra?

1.2 ¿Qué son caracteres estadísticos?

1.3 ¿Cuándo un caracter estadístico es cualitativo? ¿Cuándo es cuantitativo?

1.4 ¿Cuándo una variable estadística es discreta? ¿Cuándo es continua?

1.5 Una vez escogida una muestra, ¿qué se hace con ella?

1.6 ¿Cómo se agrupan los datos de una distribución cuando la variable es discreta y hay muchos datos cuando la variable es continua?

1.7 ¿A qué se denomina MARCA DE CLASE?

1.8 ¿De qué maneras se puede representar gráficamente una distribución de datos?

1.9 ¿Cómo se diseña un diagrama circular?

1.10 ¿Cómo se diseña un histograma?

1.11 ¿Qué es frecuencia absoluta? ¿Frecuencia relativa? ¿Frecuencia absoluta acumulada? ¿Frecuencia relativa acumulada? ¿Cómo se obtienen cada uno de ellos?

1.12 ¿Qué es RANGO de una distribución de datos?

1.13 ¿Qué es un polígono de freuencia? ¿Cómo se construye el polígono de frecuencia correspondiente a un histograma?

1.14 ¿Qué es una curva de frecuencias? ¿Cómo se construye? ¿Qué es una OJIVA?

1.15 ¿Qué es una curva simétrica? ¿Qué es una curva asimétrica?

1.16 ¿Qué son medidas de tendencia central? ¿Cuáles son?

1.17 ¿Cómo se calcula la media aritmética de un conjunto de datos?

1.18 ¿Qué es la media aritmética ponderada? ¿Cómo se calcula?

1.19 ¿Qué es la mediana? ¿Cómo se obtiene la mediana cuando el número de datos es pequeño? ¿Y cuando es grande?

1.20 ¿Cómo se obtiene la mediana de una distribución de datos agrupados en intervalos?

1.21 ¿Qué es la moda de una distribución? En una curva de frecuencia, ¿cómo se determina la moda?

1.22 ¿Cómo es la ubicación de las medidas de tendencia central en una curva asimétrica hacia la derecha? ¿Y hacia la izquierda?

2. Halla la media de los siguientes conjuntos de datos:

a) 46, 85, 53, 76, 60

b) 0,25 ; 0,36 ; 0,83 ; 0,86 ; 0,90

3. Dos alumnos de un mismo curso obtuvieron las calificaciones que se indican a continuación. Las asignaturas tienen diferentes ponderaciones y sus valores se indican entre paréntesis. Halla el promedio de cada uno.

ASIGNATURA	ESTUDIANTE A	ESTUDIANTE B
ESPAÑOL (6)	4,0	3,0
HISTORIA (3)	3,0	4,0
FILOSOFIA (4)	4,0	5,0
INGLÉS (3)	5,0	3,0
MATEMÁTICAS (6)	3,0	4,0
FÍSICA (4)	4,0	4,0
QUÍMICA (4)	3,0	4,0
DIBUJO (2)	5,0	3,0

4. Halla la media, la mediana y la moda del conjunto de datos siguiente:

1, 2, 2, 3, 3, 5, 6, 6, 10, 12

5. Se tiene la siguiente lista de datos:

17	14	16	8	31	16	14	9	17	11
25	24	28	10	48	24	12	13	43	24
32	37	33	42	11	34	16	41	21	15

a) Construye un histograma de frecuencias para este conjunto
b) Dibuja un polígono de frecuencias para este conjunto de datos usando ocho puntos, incluidos los puntos finales.
c) Dibuja la curva de frecuencias para este conjunto de datos
d) Halla la media, la mediana y la moda de esta muestra

6. Las estaturas en centímetros de 50 mujeres son las siguientes:

157	155	171	150	163	150	172	161	154	174
163	147	152	163	149	158	175	164	157	153
169	161	160	164	155	162	151	167	167	167
154	170	158	163	175	169	169	158	150	156
157	174	162	150	151	165	170	156	170	153

a) Construye una tabla de frecuencias agrupadas.
b) Construye un histograma usando el resultado del literal a)
c) Dibuja una ojiva usando el resultado del literal a)
d) Halla la media, la mediana y la moda de esta distribución
e) ¿Cuál sería la medida adecuada para resumir en un valor único los datos de este problema?

7. En una investigación realizada por la secretaria de un médico para averiguar los tiempos de espera, en minutos, de los pacientes que visitan al doctor, una muestra de pacientes de un día arrojó estos resultados:

32	25	35	50	25	55	30	50	35	35	35
5	5	60	35	30	30	25	55	30	30	20
60	25	25	40	80	20	20	5	5	5	10

a) Construye una tabla de frecuencias agrupadas
b) Construye un histograma usando el resultado anterior
c) Dibuja la curva de frecuencias correspondiente
d) ¿La curva es simétrica o asimétrica?
e) Dibuja la ojiva para esta distribución
f) Calcula la media, la mediana y la moda de esta distribución
g) ¿Cuál sería la medida adecuada para resumir en un valor único los datos de este problema?

8. Se realizó un experimento para determinar el efecto de un cierto fármaco en los niveles de colesterol en la sangre, medido en mg por cada 100 ml, en hombres de 30 años y se obtuvieron estas medidas:

235	120	145	185	195	210	190	220
140	215	195	160	240	285	175	260
225	245	165	195	225	205	170	245
210	185	230	225	265			

a) Elabora una tabla de frecuencias agrupadas
b) Dibuja un histograma de frecuencias absolutas usando la tabla anterior
c) Dibuja la curva de frecuencias absolutas de esta distribución. ¿Es simétrica o asimétrica?
d) Dibuja la ojiva correspondiente a esta distribución
e) Calcula la media, la mediana y la moda de esta distribución
f) ¿Cuál sería la medida adecuada para resumir en un valor único los datos de este problema?

9. Escoge al azar el 20% de los estudiantes de 8º grado de tres colegios y recoge información acerca de sus estaturas medidas en centímetros. A continuación:

a) Elabora una tabla de frecuencias agrupadas
b) Dibuja un histograma de frecuencias absolutas usando la tabla anterior
c) Dibuja la curva de frecuencias absolutas de esta distribución. ¿Es simétrica o asimétrica?
d) Dibuja la ojiva correspondiente a esta distribución
e) Calcula la media, la mediana y la moda de esta distribución
f) ¿Cuál sería la medida adecuada para resumir en un valor único los datos de este problema?

PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS SABER

1. Al finalizar el año 1983, el promedio anual de lluvias en un pueblo para el período de 10 años, que entonces concluía, fue de 631 mm. Un año más adelante, al finalizar 1984, el promedio anual para el período de 10 años que entonces concluía fue de 601 mm. Si cayeron 450 mm de lluvia en 1984, ¿cuál fue el monto de lluvia, en mm, en 1974?.

   a) 750 b) 616 c) 1232 d) 480

2. Un estudiante anotó el porcentaje exacto de distribución de frecuencias para un conjunto de medidas, según la siguiente tabla. Sin embargo, se le olvidó indicar el valor de N, el número total de medidas. El valor mínimo posible de N es:

VALOR MEDIO	FRECUENCIA (%)
0	12,5
1	0
2	50
3	25
4	12,5

   a) 5 b) 8 c) 16 d) 25

Las preguntas 3, 4 y 5 se refieren a la siguiente tabla. Esta muestra las frecuencias de las calificaciones en matemáticas de una clase de 50 alumnos:

CALIFICACIÓN	FRECUENCIA RELATIVA
3,0	0,2
3,5	0,1
4,5	0,3
5,0	0,3
2,0	?

3. El número de alumnos que sacaron 5,0 fue:

   a) 10 b) 5 c) 15 d) 30

4. El número de alumnos que sacaron 3,0 o más fueron:

   a) 30 b) 40 c) 20 d) 45

5. El porcentaje de alumnos que sacaron 2,0 fueron:

   a) 10% b) 20% c) 1% d) 5%

Respuestas

NÚCLEO TEMÁTICO

0

EJERCICIOS

EJERCICIO 0.1

1) **a.** V **b.** V **c.** V **d.** F
e. V **f.** V **g.** V **h.** V
i. F **j.** F **k.** V **l.** V
m. V **n.** F **o.** V **p.** V
q. V **r.** V **s.** V

2) **a.** -7, -4, -1, 2
b. -6, -2, -1, +3
c. -6, -4, -2, +4
d. -7, -2, +2, +4, +7

3) **a.** < **b.** < **c.** >

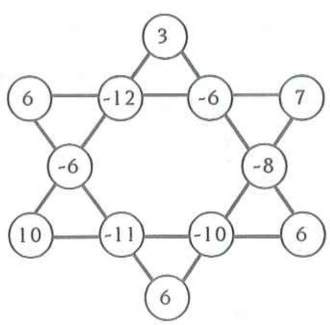
4) **a.** -3, -2
b. -1, 0
c. -5, -4

5)

a	b	a+b	a - b	b - a
-7	+8	+1	-15	+15
-6	+7	+1	-13	+13
-3	+4	+1	-7	+7
0	+2	+2	-2	+2

6) **a.** +7 **b.** 0 **c.** +10

8)



9) **a.** -1 **b.** 0 **c.** +3 **d.** +1

10) **a.** 3 **b.** 7 **c.** 4

11) **a.** 50 **b.** 14 **c.** -3 **d.** 8

12) **a.** 10, 16, 22...
b. -9, -15, -22,...

13) **a.** +2 **b.** +1 **c.** -21
d. -46 **e.** -9 **f.** 34

14) **a.** 5- 8 -10-1 = 5 -19 = -14
b. -6+5-12-5= 5-23= -18

15) **a.** 58 **b.** 44 **c.** -40 **d.** -189

16) **a.** -2 **b.** 3 **c.** 9
d. 3 **e.** -1 **f.** -10

17) 1°C

18) **a.** $\{-9,-8,-7,-6,-5,-4\}$,
$\{x/-10 < x < -3,\ x \in Z\}$
b. $\{-10,-9,-8,-7,-6,-5,-4\}$,
$\{x/-10 \leq x < 3,\ x \in Z\}$
c. $\{-9,-8,-7,-6,-5,-4,-3\}$,
$\{x/-10 < x \leq -3,\ x \in Z\}$
d. $\{-10, -9,-8,-7,-6,-5,-4,-3\}$,
$\{x/-10 \leq x \leq -3,\ x \in Z\}$

19) **a.** $A=\{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$,
$B= \{-2,-1,0,1,2,3,4,5\}$,
b. $A \cup B=\{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
c. $A \cap B=\{-2,-1,0,1,2,3\}$

20)

Fecha	Concepto	Pagos	Ingresos	Saldo
3-11	Saldo anterior			+230.000
5-11	Servicio de Energía Eléctrica	-107.000		+123.000
12-11	Consignación		+117.000	+240.000
17-11	Activos financieros	-70.000		+170.000
29-11	Consignaciones		+750.000	+920.000

EJERCICIO 0.2

1) **a.** V **b.** V **c.** F **d.** F
e. V **f.** F **g.** V **h.** V
i. V **j.** F

2) **a.** +3 **b.** -10 **c.** +9
d. 0 **e.** -6 **f.** -30

3) **a.** -8 **b.** +3 **c.** -2
d. -20 **e.** -3 **f.** -9

5) **a.** Conmutativa
b. Asociativa
c. Modulativa
d. Cancelativa
e. Distributiva

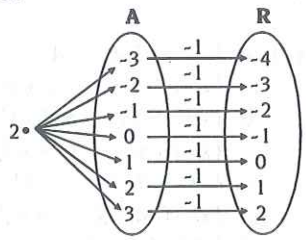
6) Distributiva con respecto a la división.

7) **a.** +35 **b.** -14 **c.** 100
d. 22 **e.** -14

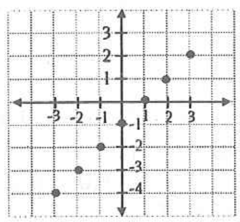
8) **a.** +5 **b.** 0 **c.** -10
d. -2 **e.** 7

9) **a.** 40 **b.** -462
c. 85 **d.** +7

10) **a.** Los objetos de A={-3,-2,-1,0,1,2,3}
b. Los resultados de multiplicar cada objeto de A por 2 y restarle 1.
c. Multiplicando por 2 cada objeto y luego restar 1.
d.



f.



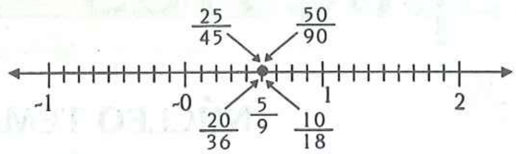
EJERCICIO 0.3

1) -654 2) -9
3) 203 4) 9
5) **a.** +25 **b.** -27 **c.** +1
6) **a.** 188 **b.** -50 **c.** -882
d. 2.420 **e.** -120
7) **a.** 2.916 **b.** 36

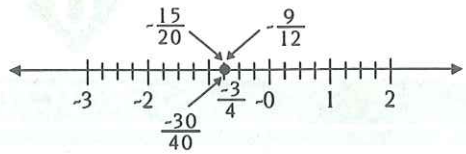
EJERCICIO 0.4

1) **a.** $\frac{3}{7}$ **b.** $-\frac{4}{5}$ **c.** $\frac{7}{1}$
2) **a.** Una fracción y por todas sus equivalentes.
b. Simplificada
c. Racionales

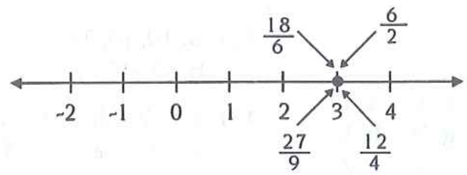
3) **a.**



b.



c.



4) **a.** $\left\{-\frac{2}{7}, -\frac{10}{35}, -\frac{14}{49}, \frac{-4}{14}, \ldots\right\}$
b. $\left\{-\frac{4}{1}, \frac{-8}{2}, \frac{-12}{3}, \ldots\right\}$
c. $\left\{-\frac{1}{1}, -\frac{2}{2}, -\frac{3}{3}, \ldots\right\}$
d. $\left\{\frac{9}{5}, \frac{18}{10}, \frac{27}{15}, \ldots\right\}$

5) E: $\frac{-3}{2}$, F: $\frac{-5}{6}$, D: $\frac{-1}{2}$,
B: $\frac{1}{6}$, A: $\frac{1}{6}$, C: $\frac{3}{2}$,

6) **a.** Sí **b.** Sí, porque $0=\frac{0}{1}$
c. Sí, porque todo entero se puede escribir como una fracción.
d. Sí

7) **a.** -0,28 **b.** $0,\widehat{42}$ **c.** $2,\widehat{8}$
d. -24,0 **e.** $-0,\widehat{07}$ **f.** $3,9\widehat{39}$
g. 3,25 **h.** 0,72

8) **a.** Decimal finito
b. Decimal infinito periódico puro
c. Decimal infinito periódico puro
d. Entero
e. Decimal infinito periódico mixto.
f. Decimal infinito periódico mixto
g. Decimal finito
h. Decimal finito

10) **a.** Sí **b.** Sí **c.** Sí
d. Sí, $\frac{0}{1}$ **e.** Sí

11) **a.** Sí **b.** Sí **c.** Sí
d. Sí, 1
e. No, $\frac{0}{1}$, porque la división por cero no está definida.

12) **a.** $\frac{9+(-8)}{12}=\frac{1}{12}$
b. $\frac{32+5}{20}=\frac{37}{20}$
c. $\frac{(-6)+(15)}{14}=\frac{9}{14}$
d. $\frac{(-45)+(-8)}{9}=\frac{-53}{9}$

13) **a.** 1 **b.** $\frac{-1}{6}$ **c.** $\frac{5}{24}$
d. $\frac{-2}{5}$ **e.** $\frac{-1}{30}$ **f.** 20

14) **a.** $\frac{1}{6}$ **b.** $\frac{-1}{4}$ **c.** $\frac{-75}{8}$
d. $\frac{-54}{5}$ **e.** $\frac{11}{5}$ **f.** -12

15) **a.** Aplicando la propiedad distributiva
b. $\frac{13}{15}$ **c.** Sí **d.** Sí

EJERCICIO 0.5

1) **a.** $a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{\text{n veces}}$
b. Positivo
c. Negativo
d. Sí
e. No, $(3+2)^2\neq 3^2+2^2$

EJERCICIOS 0

3) **a.** 5 **b.** 2 **c.** 2
d. -2 **e.** 1 **f.** -1

4) **a.** No **b.** Sí
c. No, porque una raíz inexacta no es racional

5) 1, 4, 9, 16, 25

6) -1, 1, 8, 27, 64

EJERCICIO 0.6

1) **a.** Tienen la misma solución
b. Uniforme, transposición
c. Cuando simamos, restamos, multiplicamos y dividimos por una misma cantidad diferente de cero a ambos lados de la igualdad nos da una igualdad.

2) **a.** $Z+5-5=3-5, Z=-2$
d. $t-5+5=3+5, t=8$
e. $x-8+8=-20+8, x=-12$
f. $5\bullet\frac{x}{5}=5\bullet 7, x=35$
g. $\frac{8m}{8}=-\frac{6}{8}, m=\frac{-6}{8}$

3) **a.** $z=3-5, z=-2$
d. $t=3+5, t=8$
f. $x=5\bullet 7, x=35$
g. $m=\frac{-6}{8}$

4) **a.** $\frac{x-30}{6}=\frac{1-3x}{3}$,
$3\bullet(x-30)=6\bullet(1-3x)$,
$3x-90=6-18x$,
$3x+18x=6+90, 21x=96$,
$x=\frac{32}{7}$
b. -4 **c.** 19 **d.** 10
e. $\frac{32}{3}$ **f.** $\frac{9}{4}$ **g.** 4
h. 3 **i.** 13

TALLER DE REPASO DE LA UNIDAD 0

1) **a.** 8 **b.** -3 **c.** -x
d. x **e.** -9 **f.** x

2) **a.** -3 **b.** -12
c. 4 **d.** 54

3) **a.** -54 **b.** 0 **c.** 0 **d.** -10

4) **a.** -80 **b.** +45
c. +480 **d.** 0

5) **a.** +9 **b.** -3
c. +5 **d.** -7

6) **a.** -33 **b.** +5
c. +3 **d.** -8

7) **a.** 729 **b.** 30
c. -8 **d.** -7
e. -5 **f.** 8

8) **a.** -12 **b.** 25
c. -5 **d.** -11
e. 34 **f.** 0

9) **a.** -32 **b.** 40
c. +6

10) **a.** 6 **b.** -10

11) **a.** 1 **b.** -9
c. 4 **d.** -9
e. -27 **f.** 27
g. 4 **h.** 125

12) **a.** -2 **b.** 1

14) e 15) c 16) c

17) **a.** V **b.** V **c.** F **d.** V
e. V **f.** F **g.** V **h.** V
i. F **j.** V **k.** F **l.** F
m. V

18) **a.** $\frac{4}{3}$
c. Cuando el numerador es menor que el denominador, cuando el numerador es mayor que el denominador.
d. Cuando tienen el mismo conjunto solución.
f. Inverso aditivo: $\frac{3}{8}$, inverso multiplicativo: $-\frac{8}{3}$
g. Todos tienen inverso aditivo, pero inverso multiplicativo no, por ejemplo el $\frac{0}{1}$ no tiene inverso multiplicativo.

19) **a.** $5\frac{4}{5}$ **b.** $-8\frac{1}{2}$
c. $2\frac{3}{16}$ **d.** $-1\frac{15}{28}$

20) **a.** $\frac{20}{3}$ **b.** $-\frac{43}{9}$
c. $\frac{66}{7}$ **d.** $-\frac{37}{5}$

22) **a.** $\frac{18}{26}, \frac{27}{39}, \frac{36}{52}$
b. $\frac{12}{24}, \frac{3}{6}, \frac{1}{2}$
c. $\frac{-12}{22}, \frac{-18}{33}, \frac{-30}{55}$
d. $\frac{30}{8}, \frac{45}{12}, \frac{60}{16}$
e. $\frac{-3}{4}, -\frac{6}{8}, -\frac{9}{12}$

23) **a.** 36 **b.** 5
c. 6 **d.** 1

24) **a.** $\frac{8}{9}$ **b.** $-\frac{4}{5}$
c. $\frac{7}{5}$ **d.** $-\frac{13}{11}$

25) **a.** Irreducible
b. Reducible
c. Irreducible
d. Irreducible
e. Irreducible
f. Reducible

26) **a.** > **b.** >
c. > **d.** <

27) **a.** $\frac{168}{48}, \frac{7}{48}, -\frac{18}{48}$
b. $\frac{22}{64}, \frac{4}{64}, \frac{-1}{64}, \frac{-48}{64}$
c. $\frac{21}{24}, \frac{16}{24}, \frac{4}{24}$

28) **a.** F **b.** V **c.** F
d. F **e.** F **f.** V
g F **h.** F **i.** V **j.** V

29) **a.** 1 **b.** 1 **c.** $\frac{2}{3}$
d. $\frac{3}{4}$ **e.** $\frac{41}{108}$ **f.** $\frac{1}{2}$
g. $\frac{3}{2}$ **h.** $\frac{4}{7}$ **i.** $\frac{-21}{8}$
j. $\frac{-9}{4}$

30) **a.** $\frac{-22}{3}$ **b.** $\frac{123}{130}$ **c.** $\frac{-11}{70}$ **d.** $\frac{16}{3}$

31) **a.** $m=7$ **b.** $x=5$ **c.** $x=-6$
d. $y=33$ **e.** $p=\frac{32}{3}$ **f.** $x=-15$

PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS DEL ICFES 0

1. c **2.** a **3.** c **4.** b **5.** d

NÚCLEO TEMÁTICO 1

EJERCICIOS

Ejercicio 1.1

1. b **2.** d **3.** a **4.** c **5.** c

Ejercicio 1.2

1. **a.** V **b.** V **c.** V
2. **a.** 8 **b.** 5
3. Porque los únicos divisores son 2 ó 5
4. Porque los denominadores tienen divisores diferentes de 2 o de 5.
5. **a.** $\frac{2}{9} = 0,\widehat{2}$: periódico puro,

   $\frac{3}{7} = 0,\widehat{428571}$: periódico puro,

   $\frac{7}{6} = 1,1\widehat{6}$: periódico mixto

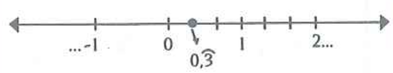
   b. En $\frac{2}{9}$ es 2, en $\frac{3}{7}$ es 428571 y en $\frac{7}{6}$ es 6.

   c. En $\frac{7}{6}$ es 1.
6. **a.** $5,3\widehat{8}$ **b.** $0,7\widehat{35}$
7. **a.** 1 en cada una de las fracciones.
   b. 2 en cada una de las fracciones
   c. 3 en cada una de las fracciones, conclusión: si todas las cifras del denominador de una fracción son iguales a 9, el período tiene tantas cifras como cifras tenga el denominador.
8. **a.** 1 **b.** 9.999 **c.** n

Ejercicio 1.3

1. **a.** $\frac{3}{9}$ **b.** $\frac{8}{9}$ **c.** $\frac{2}{99}$ **d.** $\frac{183}{999}$ **e.** $\frac{79}{9}$
2. **a.** $\frac{233}{45}$ **b.** $\frac{289}{200}$ **c.** $\frac{32}{9}$ **d.** $\frac{5429}{90}$ **e.** $\frac{79}{9}$
3. **a.** V **b.** V
4. **a.** 4; 4,7; 4,75
   b. 0; 0,1; 0,103
   c. -3; -2,2; -2,16
   d. -1; -0,2; -0,108
5. **a.** 5; 4,8; 4,76
   b. 1; 0,2; 0,105
   c. -2; -2,1; -2,15
   d. 0; -0,1; -0,106
6. **a.** $0,\widehat{37}$ **b.** $0,\widehat{458}$
   c. $0,\widehat{3815}$ **d.** $0,\widehat{23}$
7. **a.** 8,131; 8,132; 8,133
   b. -5,829 ; -5,828; -5,827
   c. -0,53; -0,52; -0,51
8. **a.** 0,14 **b.** 1,019 **c.** 14

10. Representamos en la recta numérica su fracción generatriz: $\frac{1}{3}$



Ejercicio 1.4

1. **a.** -35,248 **b.** 0,072
   c. 249,799 **d.** -0,532
   e. 43,678 **f.** -2,356
   g. 4,823 **h.** -27,057
   i. 3,420
2. **a.** $-\frac{88.119}{2.500}$ **b.** $\frac{181}{2.500}$
   c. $\frac{31.122.487}{12.500}$ **d.** $-\frac{5.271}{9.900}$
   e. $\frac{3.931}{90}$ **f.** $-\frac{2.354}{299}$
   g. $\frac{47.750}{9.900}$ **h.** $-\frac{270.297}{9.990}$
   i. $\frac{171}{50}$
3. **a.** -623,8629
   b. 4,8281 **c.** -1,0044

Ejercicio 1.5

1. **a.** F **b.** F **c.** F **d.** F **e.** F
   f. F **g.** F **h.** V **i.** V **j.** V
2. **a.** Al número real que no puede escribirse como el cociente de dos enteros, π, $\sqrt{3}$, $\sqrt{7}$, etc.
   b. Q'
3. **a.** 2 y 3; 2,236
   b. 2 y 3; 2,645
   c. 1 y 2; 1,259
7. **a.** V **b.** F **c.** V
   d. V **e.** F **f.** V
8. **a.** 3y 4 **b.** 5 y 6
   c. 4 y 5
9. **a.** Racionales: 7, 341 y 7, 3411, irracionales: 7, 34102135..., 7,34210314...
   b. Racionales: 2,385 y 2,3851; irracionales: 2,385142103... y 2,385010203...
   c. Racionales: 0,45 y 0,451; irracionales: 0,4101020304... y 0,41230234...
10. $\sqrt[3]{31} = 3,1413...$

EJERCICIOS 1

Ejercicio 1.6

1. **a.** No, quedan faltando los racionales.
   b. En la fracción, el numerador y/o el denominador puede tener raíces inexactas, mientras que en la fracción racional el numerador y el denominador tienen que ser enteros.
   c. Porque no siempre puedo representar, con sus elementos, una medida ; por ejemplo: la medida de la diagonal de un cuadrado de lado 1cm o 2 cm, etc.
   d. Son los números que se obtienen al unir Q con Q'(QUQ')
   e. La suma, la resta y la multiplicación son clausurativas en R y la división es clausurativa si el divisor es diferente de cero.

2. **a.** $\varnothing$ **b.** Z **c.** Q **d.** R **e.** Q

4. **a.** 7,568 **b.** 89, 104 **c.** 2, 514

5. **a.** F **b.** V **c.** F **d.** F **e.** V

6. **a.** π veces, irracional
   b. $\sqrt{2}$ veces, irracional

7. Los dos primeros son racionales y los dos últimos son irracionales.

8. 0,2371456211 ; 0,23714562111; 0,237145621111 ; 0,2371456211111; 0,23714562111111.

10. $\frac{3}{5}$, $\sqrt{2}$.

TALLER DE REPASO DE LA UNIDAD 1

3. -4,2310 < -0,1234... < -0,01234... < 1,234... < 12,345

4. $\frac{1}{7} = 0,\widehat{142857},$
   $\frac{2}{7} = 0,\widehat{285714},$
   $\frac{3}{7} = 0,\widehat{428571},$
   $\frac{4}{7} = 0,\widehat{571428},$
   $\frac{5}{7} = 0,\widehat{714285},$
   $\frac{6}{7} = 0,\widehat{857142}$

6. **a.** $1,\widehat{3}$; periódico puro
   b. -1,4; decimal exacto
   c. $4,\widehat{6}$; periódico puro
   d. $1,1\widehat{6}$; periódico mixto
   e. $-0,\widehat{571428}$; periódico puro

7. **a.** $\frac{2}{5}, \frac{1}{10}, \frac{3}{2}$
   b. $\frac{1}{3}, \frac{1}{7}, \frac{5}{3}$

8. **a.** $\frac{58}{11}$ **b.** $\frac{1001}{999}$ **c.** $\frac{458}{55}$

9. Ninguno es número racional

10. **a.** Sí
    b. Si es periódico o finito es racional, pero si es infinito no periódico es irracional.
    c. Sí

11. **a.** Porque un real negativo al cuadrado es positivo.
    b. Porque la división por cero no está definida en los reales.

12. **a.** Porque $\sqrt[3]{-8} = -2 \in R$
    b. $\sqrt[5]{-32} = -2 \in R$
    c. $\frac{0}{\sqrt{3}} = 0 \in R$
    d. $\frac{0}{\pi} = 0$
    e. $\frac{0}{-2} = 0$

14. **a.** V **b.** V **c.** V **d.** V **e.** F **f.** V

15. d

17. **a.** 1.000 **b.** 0,3 **c.** 5.000 **d.** $\frac{5}{8}$
    e. 0,43 **f.** 6,78 **g.** 20

18. c y d

22. **a.** F **b.** F **c.** F **d.** F

23. **a.** Racionales: 5,471 ; 5,472; irracionales: 5,47102134...; 5,471123015...
    b. Racionale: 0,67 ; 0,677, irracionales: 0,67810328...; 0,6791201...
    c. Racionales: 0,334 ; 0,335; irracionales: 0,338501206...; 0,336015...;

25. **a.** $6,71\widehat{4}$ **b.** $5,\widehat{09}$
    c. $\frac{-2.083}{4.525}$ **d.** $\frac{-221}{671}$
    e. $\frac{1.099}{10.989}$ **f.** $\frac{4.480}{531.441}$

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 1

1. La cantidad de agua que hay en el vino es igual a la cantidad de vino que hay en el agua.
2. 19, 23, 3, 5, 17
3. Máximo 3 pesadas
4. Juan
5. $ 200

PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS DEL ICFES 1

1. a 2. c 3. d 4. c.

NÚCLEO TEMÁTICO 2

EJERCICIOS

Ejercicio 2.1

1. d **2.** c **3.** b **4.** c **5.** a

Ejercicio 2.2

2. **a.** $5x$ **b.** $x+10$
c. $x-20$ **d.** $200-x$
e. $m-35$ **f.** $\{x/x=2n, n\in Z\}$
g. $x\cdot(x+6)$

3. **a.** Dos aumentado en tres veces un número.
b. La división por 6 de un número aumentado en 5.
c. El producto de un número aumentado en 4 por el mismo número disminuído en 2
d. El producto de un número por otro es 6 unidades mayor que él.

Ejercicio 2.3

1. **a.** Racional **b.** Irracional
c. Irracional **d.** Irracional
e. Irracional **f.** Racional
g. Racional **h.** Irracional
i. Irracional **j.** Irracional

2. **a.** Sí, por cumplir las 6 propiedades de la suma, 6 de la multiplicación y la propiedad distributiva.
b. Sí, por cumplir las propiedades de la suma, la multiplicación y la propiedad distributiva.

3. **a.** No, porque $(3-5)\notin N$
b. Sí, porque al restar dos enteros siempre da un entero.

4. **a.** 1 es neutro multiplicativo
b. Porque la suma de inversos aditivos nos da el neutro aditivo.
c. La multiplicación de inversos multiplicativos nos da el neutro multiplicativo.
d. Por ley asociativa y ley conmutativa.
e. Ley distributiva
f. Neutro multiplicativo

6. **a.** $56xy$ **b.** $15+12y$
c. $6xyzm$ **d.** $12xyz$

7. **a.** Verdadera
b. Falsa

8. **a.** Recíproca o simétrica

9. Transitiva

10. Reflexiva

11. Sustitución

12. Ley uniforme de la suma

13. Ley uniforme de la multiplicación

14. Sustitución

15. Transitiva

16. $-6x-9y+6z-15$

17. $30\,abcxyzmw$

18. $-10ab^3xyz$

19. $-6xy-10xz$

20. $2xyz+3xy$

21. $15+2x+3y+z$

Ejercicio 2.4

3. Supongamos que **a** es neutro multiplicativo en R. Luego, $a\cdot b=b$, $b\in R$.

Pero: $1\cdot b=b$	Por ser 1 neutro multiplicativo en R.
$\therefore a\cdot b=1\cdot b$	Por transitividad
$\therefore a\cdot b=b$	Por ser 1 neutro multiplicativo
$\therefore (a\cdot b)\cdot b^{-1}=b\cdot b^{-1}$	Por ley uniforme de la multiplicación
$\therefore a\cdot(b\cdot b^{-1})=b\cdot b^{-1}$	Asociatividad e
$\therefore a\cdot 1=1$	Inverso multiplicativo
$\therefore a=1$	Neutro multiplicativo

Por lo tanto 1 es el único neutro multiplicativo en R

6. $b+(-b)=0$
Inverso aditivo

$(-a)\cdot[b+(-b)]=(-a)\cdot 0$
Ley uniforme de la multiplicación

$(-a)\cdot(b)+(-a)\cdot(-b)=0$
Distributiva y multiplicación por cero

$-(a\cdot b)+(-a)\cdot(-b)=0$
Teorema ya demostrado: $(-a)\cdot b=-a\cdot b$

$ab+[-ab+(-a)\cdot(-b)]=ab+0$
Ley uniforme de la igualdad

$[ab+(-ab)]+(-a)\cdot(-b)=ab$
Asociativa y neutro aditivo

$0+(-a)(-b)=ab$
Inverso aditivo

$(-a)(-b)=ab$
Neutro aditivo

7. $-(a+b)=-[1\cdot(a+b)]$
Neutro multiplicativo

$-[1\cdot(a+b)]=(-1)\cdot(a+b)$
Teorema ya demostrado: $-ab=(-a)\cdot b$

$(-1)\cdot(a+b)=(-1)\cdot a+(-1)\cdot b$
Distributiva

$(-1)\cdot a+(-1)\cdot b=-(1\cdot a)+[-(1\cdot b)]$
Teorema ya demostrado: $-ab=(-a)\cdot b$

$-(1\cdot a)+[-(1\cdot b)]=-a+(-b)$
Neutro multiplicativo

$-a+(-b)=-a-b$
Definición: $a-b=a+(-b)$

$\therefore -(a+b)=-a-b$

Ejercicio 2.5

1. **a.** $a^{-1}, a\neq 0$ **b.** $1, a\neq 0$
c. $a, a\neq 0$ **d.** $a\cdot b^{-1}, b\neq 0$
e. $\frac{a}{b}, a\neq 0, b\neq 0$

EJERCICIOS 2

2. a. $\frac{1}{\pi+\sqrt{5}}$ b. $\frac{2}{\sqrt{3}}$
c. $5\cdot\frac{3}{2}=\frac{15}{2}$ d. $\sqrt{2}$
e. $2\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ f. $\frac{1}{4}$

3. a. $(75\div15)\div5$
b. $75\div(15\div5)$
c. $80\div(20\div2)$
d. $(80\div20)\div2$
e. No

4. Inverso aditivo; $-\sqrt{3}+\sqrt{2}$,
inverso multiplicativo: $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

TALLER DE REPASO DE LA UNIDAD 2

2. a. Conmutativa
b. Asociativa
c. Neutro aditivo
d. Neutro multiplicativo
e. Asociativa
f. Inverso aditivo
g. Inverso aditivo
h. Conmutativa
i. Conmutativa
j. Neutro aditivo
k. Recolectiva o factor común
l. Distributiva

3. a. Ley uniforme de la multiplicación
b. Ley uniforme de la suma y propiedad clausurativa
c. Recíproca o simétrica
d. Transitiva
e. Sustitución y clausurativa

4. a. 6xy b. $-15y+10$
c. $-6abcd$ d. 30 xyz

6. $a=2$ y $a=-5$

7. $\frac{xz}{yz}=\frac{x}{y}\cdot\frac{z}{z}$, $y\neq0, z\neq0$,
por teorema 11

$\frac{x}{y}\cdot\frac{z}{z}=\frac{x}{y}\cdot z\cdot\frac{1}{z}$, $y\neq0, z\neq0$,
por teorema 9

$\frac{x}{y}\cdot z\cdot\frac{1}{z}=\frac{x}{y}\cdot z\cdot z^{-1}$, $y\neq0, z\neq0$
por teorema 9

$\frac{x}{y}\cdot z\cdot z^{-1}=\frac{x}{y}\cdot1$, $y\neq0, z\neq0$
por inverso multiplicativo

$\frac{x}{y}\cdot1=\frac{x}{y}$, $y\neq0, z\neq0$
por neutro multiplicativo

$\therefore\ \frac{xz}{yz}=\frac{x}{y}$, $y\neq0, z\neq0$

8. Definición de división en R, teorema 11, teorema 11, clausurativa de la multiplicación.

10. a. $\frac{7}{2}\cdot\left(\frac{21}{4}\right)^{-1}$, por definición de división

$\frac{7}{2}\cdot\frac{4}{21}$, por teorema 11

$\frac{28}{42}$, clausurativa de la multiplicación

$\frac{2\cdot14}{3\cdot14}$, disociativa

$\frac{2}{3}$, simplificación

b) $\frac{5}{2}$ c) 5

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 2

1. Andrés 5 y Felipe 7
2. Salen 3 personas A y B y C: A padre de B y B padre de C.
3. $99\div99+9$; $99\div9-9\div9$
4. 15 años

PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS DEL ICFES 2

2 perros y 2 loros

EJERCICIOS

Ejercicio 3.1

1. c **2.** c **3.** d **4.** b **5.** d

Ejercicio 3.2

1. 7^{10} **2.** 7^3 **3.** 3^6
4. 2^{16} **5.** 3^0 **6.** $3^4 \bullet 5^6$
7. $-a^5$ **8.** x^7 **9.** x^7
10. $10a^8$ **11.** $24a^3b^5$ **12.** a^{10}
13. $-125x^{12}$ **14.** $256a^{16}b^8$
15. $4x^3y$ **16.** $-3a^2y^2$
17. $\frac{a^9\,b^6}{8c^9\,d^{12}}$ **18.** $-\frac{1024x^{15}\,y^{20}}{243a^{10}\,b^{15}}$
19. $\frac{3b^6}{4c}$ **20.** $\frac{25}{8}\,x^9$
21. $\frac{3}{2q}$ **22.** $\frac{y^7\,z^6}{108x^5}$
23. $\frac{16}{81}\,x^4$; **24.** $x^{2a-1}\,y^4$
25. $a^9\,d^{3b}$; **26.** $a^{6n}b^{6n+1}$
27. $\frac{4(x+y)}{5(x-y)}$; **28.** 5^9
29. 5^8 **30.** -1
31. 5^7 **32.** $\frac{1}{(-5)^3}$
33. -5^{12} **34.** $\frac{1}{5^5}$
35. 5^5 **36.** $\frac{1}{5^{2a}}$
37. 5^{11p} **38.** $\frac{1}{5^{8x}}$
39. 4; 0,64 **40.** 4,8

Ejercicio 3.3

1. 11 **2.** -3 **3.** -4
4. -3 **5.** -3 **6.** 4
7. No existe **8.** No existe
9. No existe **10.** $2b$
11. $-3m$ **12.** $3p$
13. $a^2 = p$ **14.** $b = y^3$
15. $t^5 = -q$ **16.** $(a+b)^3 = 125$
17. $\sqrt[5]{x-y} = 6$ **18.** $(\sqrt[3]{a})^2 = b$

Ejercicio 3.4

1. $3a + \frac{1}{4}b$ **2.** $\frac{2}{3}m - \frac{4}{7}n$
3. $3\,(x-y)^2$ **4.** $\frac{2}{3}\,(ab)^3$
5. $\frac{1}{2p+3q}$ **6.** $\sqrt[3]{\frac{x+y}{a-b}}$
7. $5000x$ **8.** $4a - 10$
9. $2b^2 + 3b$ **10.** $\frac{\pi\,(h-5)^2\,h}{3}$
11. a. 4 **b.** 1 **c.** 2
d. 2 **e.** 3 **f.** 2
12. a. Sí **b.** Sí **c.** No
d. No **e.** No **f.** Sí
13. a. $-\frac{2}{3}$ **b.** -5
c. -3 **d.** $\frac{4}{5}$
e. $-2\sqrt{3}$ **f.** $\frac{\sqrt{3}}{5}$
14. a. 11 **b.** -1
c. 1 **d.** 5
e. $\frac{5}{12}$ **f.** 0

Ejercicio 3.5

1. Sí **2.** Sí **3.** No
4. No **5.** No **6.** Sí
7. Sí **8.** No **9.** 3
10. 4 **11.** 4 **12.** 4
13. a. Suma de las áreas del rectángulo y el cuadrado
b. Perímetro del rectángulo
c. Perímetro del cuadrado
d. Perímetro del terreno.
14. $ab - \frac{b^2}{4}$
15. a. $2h + 2\pi r$ **b.** $2rh + \pi r^2$
16. $\frac{1}{6}\,x^4 - \frac{5}{6}\,x^3y + \frac{17}{8}x^2y^2 - \frac{1}{6}\,xy^3 + \frac{5}{14}\,y^4$
17. $-2x^5 - \frac{2}{3}\,x^4 - \frac{7}{12}x^3 + \frac{1}{8}\,x^2 + \frac{13}{10}\,x - 4$
18. $-\frac{4}{9}a^3 + a^2x - \frac{7}{24}ax^2 - \frac{4}{9}\,x^3$
19. a. $4x - 9$
b. $-5x^2 + x - 3$
c. $7xy^2 - 3x^2y$
20. $xy^2z - 5x^2yz + xy + yz - x + 5$
21. $-11w^5 + 5w^4 - 3w^3$
22. $6x^2y^2 + 3x^2y - 7xy - 3$
23. $5b - 8a$
24. $16x^2 - 25x + 11$
25. $a^6 + 8a^5 - 4a^4 - 2a^3 + 44a^2 - 44a + 16$
26. $\frac{37}{18}\,y^2 + \frac{3}{4}$
27. $-\frac{13}{24}a^4 - \frac{1}{2}\,a^2 + \frac{1117}{264}$
28. $5x - 3y$ **29.** y
30. $5a - 3b$ **31.** $-a - 5b - 6$
32. $-2m + 4n - 5$
33. $\pi x^2 - 2\pi y^2$ **34.** $12xy - 2x^2$
35. $33 - 3x$

Ejercicio 3.6

1. $-a^4b^6c^2$
2. $\frac{5}{8}\,a^3bx^3$
3. $30a^4b^6$
4. $-\frac{5}{4}\,x^5y^3$
5. $-\frac{14}{27}\,a^4b^2c^2x^3yz^3$
6. $-\frac{56}{27}\,a^6b^4cx^6y^5z$
7. $-\frac{1}{4}\,x^2yzb + \frac{5}{6}\,byz^3 - \frac{5}{2}\,abz - \frac{5}{8}\,b^3z$
8. $\frac{1}{3}\,x^3y^2 + \frac{2}{3}\,x^4y^3 - 2x^3y^3$
9. $-a^3b^3c^3d + \frac{5}{18}\,a^3b^5cd - \frac{5}{3}\,b^2c^4d$

10. $-\frac{9}{2}x^4y^2z^3t-\frac{3}{2}x^2y^2z^3t-$
$-\frac{5}{2}x^3y^3z^3t-5xyz^4t$

11. $\frac{8}{9}abx^2y^2-\frac{2}{3}a^2bx^3y^2+$
$+\frac{8}{15}a^2bx^2y^2z$

12. $\frac{3}{5}b^2cx^2yz+\frac{4}{5}ab^4c^2z-$
$-\frac{12}{5}b^4cz^2$

13. $3a^3-11a^2b-6ab^2+8b^3$

14. $\frac{1}{3}ax^3+\frac{1}{3}bx^3+\frac{1}{3}ax^2y+$
$+\frac{3}{2}axy^2+\frac{3}{2}bxy^2+\frac{3}{2}ay^3$

15. $-\frac{2}{3}x^5y-\frac{25}{18}x^4y^2-$
$-\frac{17}{12}x^3y^3-\frac{4}{3}x^2y^4-xy^5$

16. $2x^6-5x^4+x^2+2$

17. $\frac{1}{2}a^5+\frac{3}{2}a^4-a^3+\boxed{3a^2}-4a$

18. $\frac{1}{3}a^3bx^3+\frac{2}{9}a^2bx^3+ax^3+$
$+\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{3}a^3b^2x^2+$
$+\frac{2}{9}a^2b^2x^2+abx^2+\frac{2}{3}bx^2-$
$-a^4b^2x-\frac{2}{3}a^3b^2x-3a^2bx-$
$-2abx$

19. $\frac{3}{4}a^2x^3+3ax^3-\frac{9}{8}a^4x^2-$
$-\frac{9}{2}a^3x^2+\frac{1}{2}a^2x^2+\frac{3}{2}ax^2-$
$-\frac{3}{4}a^4x-\frac{9}{4}a^3x-\frac{1}{3}ax+$
$+\frac{1}{2}a^3$

20. $a^3b^2+\frac{1}{3}a^3bc+\frac{4}{3}a^2b^2c+$
$+\frac{1}{6}a^2bc^2+\frac{1}{3}ab^2c^2+a^2b^2+$
$+\frac{1}{2}a^2bc+\frac{4}{3}ab^2c+$
$+\frac{1}{6}abc^2+\frac{1}{3}b^2c^2$

21. $4a+b^2-2b$

22. a^2+6a+1

23. $\frac{5}{3}x^2+\frac{41}{12}xy-\frac{25}{4}y^2$

24. $-2a^2+\frac{1}{3}b^2$

25. a^2b

29. a. $10x^3+25x^2$ unidades cúbicas
b. $70x^3-70x$ unidades cúbicas
c. $36x^3-27x+9$ unidades cúbicas

30. b. $V=(4x^3-70x^2+300x)\ cm^3$
c. $352\ cm^3$

Ejercicio 3.7

1. $-2ac^2$ **2.** $\frac{7}{4}ac$

3. $-20a^3bc^2$ **4.** $-\frac{1}{6}abx^2$

5. $\frac{8x}{11az}$ **6.** $-\frac{5}{2}xz$

7. $\frac{16}{3}cy$ **8.** $-4a^2t$

9. $4y^4z^2$ **10.** $-b$

11. $\frac{1}{16}a^2b^8c^2$ **12.** $-\frac{3}{25}ay$

13. b^3-2ab^2-3

14. $-4+a^3b^2-3a$

15. $-4xy^3z^2+2y^4-2y^3z^3$

16. $-\frac{5}{4}x+\frac{1}{3}y^2z-\frac{2}{3}x^2z^2$

17. $-\frac{1}{3}b-\frac{7}{6}ab^2+\frac{1}{3}bz$

18. $z-\frac{1}{2}xyzt+\frac{4}{3}x^3z^3t^3$

19. $5a^2-2a+3$

20. x^2+x-3

21. Cociente: $2a-3$;
Residuo: $-18a$

22. $-7x^3+3x^2y+xy^2$

23. $\frac{3}{2}ab-b^2$

24. Cociente: $-a^2+2a-\frac{31}{8}$
Residuo $-\frac{341}{32}a+\frac{79}{8}$

25. Cociente: $x^2-\frac{1}{2}x+2$
Residuo: $-\frac{1}{6}x$

26. Cociente: $2x^2-xy-y^2$
Residuo: $4xy^3+y^4$

27. $\frac{4}{3}ab+\frac{1}{5}b^2$

28. x^4-11x^3+21x

29. $3x-5$

30. $(3x^2+14x)\ cm^2$

Ejercicio 3.8

1. Cociente: $8x^2-3x+42$
Re-siduo: -20

2. Cociente: $8b^2-28b-4$
Residuo: 0

3. Cociente: x^2+1
Residuo: 0 ;

4. Cociente: x^2+2x+3
Residuo: 4

5. Cociente: x^2-5x-2
Residuo: 0

6. Cociente: $-x^3-3x^2-3x-2$
Residuo: $+1$

7. Cociente: $4x^4-3xa^3-a^4$
Residuo: 0

8. Cocien-te: x^2-2a^2
Residuo: 0

9. Sí **10.** No
11. Sí **12.** Sí
13. Sí **14.** No

TALLER DE REPASO DE LA UNIDAD 3

2. **a.** F **b.** F **c.** V **d.** F
e. V **f.** V **g.** V **h.** F
i) V **j.** F **k.** V **l.**F
m.V, **n.** F **o.**F **p.**V
q.F **r.** F **s.**V **t.** V
u. F **v.** F

3. $-\frac{1}{8}a^{12}b^3c^9$

4. $\frac{16}{81}a^4b^8c^{12}$

5. $-\frac{1}{64}x^{12}y^6z^{12}$

6. $\frac{8}{225}a^7b^2c^2$

7. $-\frac{5}{4}x^5y^3$

8. $\frac{3}{49}ax^2$

9. $\frac{1}{3}$

10. $-\frac{1}{2}a^6b^4c^4$

11. $-\frac{3}{5}x^3y^2-\frac{1}{2}$

12. $2a^2-\frac{4}{3}ab+\frac{1}{3}b^2$

13. $\frac{4}{3}xy^3-x^3y^3-\frac{2}{9}xy^2-\frac{4}{3}xy+$
$+\frac{2}{9}x^3y^2+\frac{4}{3}x^3y$

14. y^3

15. $a^4-\frac{19}{2}a^2b^2+\frac{5}{2}ab^3-2b^4$

16. a^2b

21. Cociente: $3a^4-a^3-5a^2+17a-86$
Residuo: 348

22. Cociente: $-3y^2+xy-\frac{1}{2}x^2$
Residuo: 0

23. Cociente: $\frac{3}{2}ab-b^2$;
Residuo: 0

24. $x^2-\frac{1}{2}x+2$
Residuo: $-\frac{1}{6}x$

25. Cociente: $2x^2-xy-y^2$
Residuo: $4xy^3+y^4$

26. Cociente: $\frac{3}{8}m^2+\frac{1}{4}m+\frac{21}{40}$
Residuo: $\frac{37}{120}m-\frac{37}{20}$

27. Cociente: $\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{10}x-\frac{1}{5}$
Residuo: 0

28. Cociente: $a^n+b^{2r}-c^p$;
Residuo: $-b^{4r}$

29. Cociente: $8x^2-3x+32$;
Residuo: 0

30. Cociente: $8b^2-28b-4$;
Residuo: 0

31. Cociente: x^2-5x-2;
Residuo: 0

32. Cociente: a^4+b^4;
Residuo: 0

33. Cociente: $4x^4-3a^3x-a^4$;
Residuo: 0

34. $13x^2+14x-8$ unidades cuadradas

35. $\frac{9x^2+63x-96}{2}$ unidades cuadradas

36. $\frac{12x^2+27x+6}{2}$ unidades cuadradas

37. $4x^2-\pi x^2$ unidades cuadradas

38. $5{,}5x^2-6x$ unidades cuadradas

39. $7.5x^2+6x$ unidades cuadradas

40. $18x^3-36x^2+x+15$ unidades cúbicas

41. $21x^3+49x^2$ unidades cúbicas

42. $12x^3+11x^2+2x$ unidades cúbicas

43. **a.** $2x+7$ metros
b. $8x+16$ metros
c. $12x^2+42x+36$ metros cuadrados
d. $96x^3+528x^2+960x+576$ metros cúbicos

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS

1. 7 **2.** 76 **3.** 5

4. a) $x+19$; b) $x+(x+19)=81$; c) Sara: 50, Janet: 31

5. a) $n+2$; b) $n+(n+2)=56$; c) 27, 29

6. a) $t+2$; b) $t+4$; c) $t+(t+2)+(t+4)=45$; d) 13, 15, 17

8. a) $x-2$; b) $x+x+2=32$; c) Sara: 15, Carlos: 13

PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS DEL ICFES

1. d **2.** c **3.** a **4.** d **5.** a

NÚCLEO TEMÁTICO

4

EJERCICIOS

Ejercicio 4.1

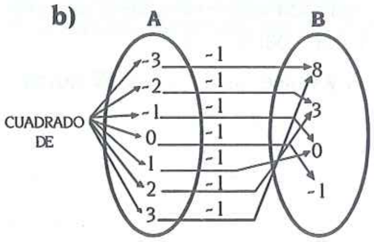
1. d **2.** d **3.** b **4.** d **5.** c

Ejercicio 4.2

1. **a)** Operador: cuadruplicar
   Objeto por operar: 7
   Resultado: 28
   b) Operador: Multiplicar por 4
   Objeto por operar: 7
   Resultado: 28
   c) Operador: Multiplicar
   Objetos por operar: 4 y 7
   Resultado: 28
2. Son operaciones unarias: a, b, d, e ; son operaciones binarias: c, f.
3. **a)** $y = 2x$; **b)** $y = 3x - 2$;
   c) $y = 4x + 1$; **d)** $y = x^3 - 3$

4. a) $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

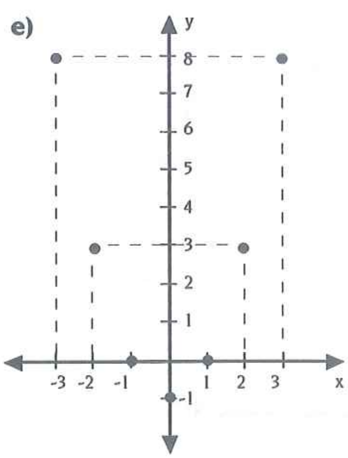
b)



c) $B = \{-1, 0, 3, 8\}$

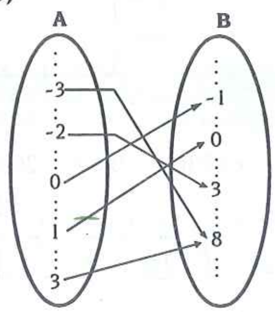
d) $= \{(-3, 8), (-2, 3), (-1, 0), (0, -1), (1, 0), (2, 3), (3, 8)\}$

e)



f) $y = x^2 - 1$

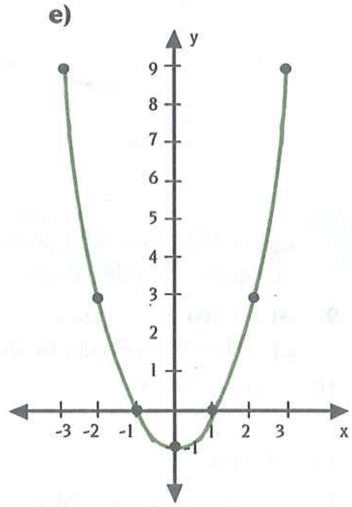
5. b)



c) $B = \{y \in R / y \geq -1\}$

d) $y = x^2 - 1$

e)



Esta gráfica se diferencia de la del ejercicio 4, en que se puede trazar con línea continua.

f) $f(-2, 5) = 5{,}25$;
$f(1{,}5) = 1{,}25$;
$f(-0, 3) = -0{,}91$;
$f(0) = -1$;
$f(2, 7) = 6{,}29$

Ejercicio 4 – 3

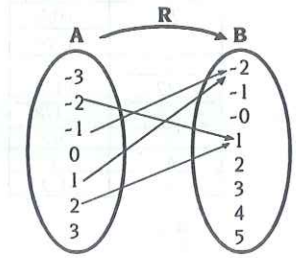
1. d , **2.** b , **3.** a

4. c , **5.** a , **6.** d,

7. d , **8.** a

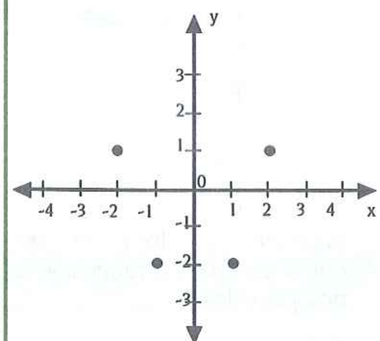
9. a) $B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$,

b)



c) $\{(-2, 1), (-1, -2), (1, -2), (2, 1)\}$

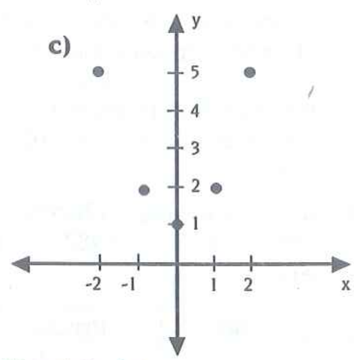
d) $D_R = \{-2, -1, 1, 2\}$,
$I_R = \{-2, 1\}$



10. a) $\{(-2, 5), (-1, 2), (0, 1), (1, 2), (2, 5)\}$

b) $D_R = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$,
$I_R = \{5, 2, 1\}$

c)



Ejercicio 4.4

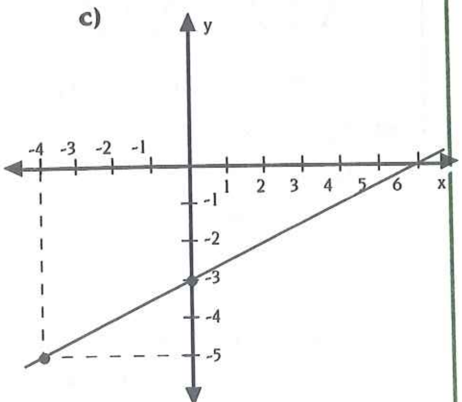
1. Son funciones a y b ;
2. **a)** $f(x) = 3x + 1$,
   b) $f(1) = 4$, $f(\frac{3}{5}) = \frac{14}{5}$
   c) Sí
   d) $D_f = R, I_f = R$;

3. **a)** $g(x) = \frac{x}{2} - 3$,

b)

x	g(x)
-4	-5
-3	-9/2
-1	-7/2
-2/3	-10/3
-1/2	-13/4
0	-3
1/2	-11/4
3/4	-21/8
1	-5/2
4	-1
5	-1/2

c)



Sí podemos unir los puntos porque el dominio y el rango son todos los reales.

d) $D_g = I_g = R$

4. $f(x) = x^2 + 1$;

5. **a)** El inverso aditivo del número; **b)** El cuádruplo del número menos 3, **c)** Cinco veces el cuadrado de un número, **d)** Al cuadrado de un número le resto tres veces el número y luego le sumo dos, **e)** Dos veces el cubo de un número menos 4, **f)** La multiplicación de un número con el número disminuido en 2. ;

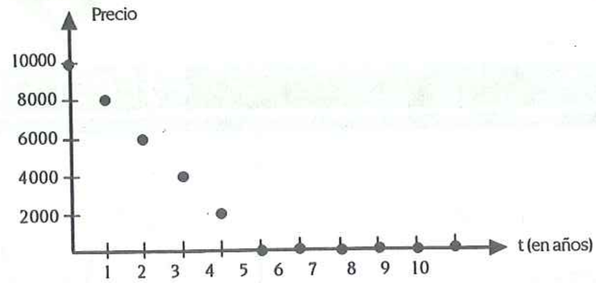
6. **a)** años y nacimientos, **b)** 5 mm, **c)** 1974 , **d)** Entre 1982 y 1984, **e)** disminuido;

7. **a)**

Años	Precio
0	10.000
1	8.000
2	6.000
3	4.000
4	2.000
5	0

A partir de los 5 años, el carro no tiene precio.

b)

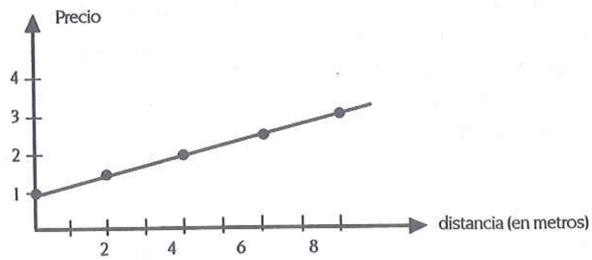


c) $P(t) = 10.000 - 2000t$

8. **a)**

d (en metros)	2	4	6	8	0
Precio ($)	3/2	2	5/2	3	1

b)



c) $y = f(x) = 1 + \frac{x}{4}$. Los puntos se pueden unir en la gráfica porque la distancia puede tomar cualquier valor a partir de 0.

9. **a)** 40, **b)** Entre las 7 y las 8 horas y entre las 12 y las 13 horas, **c)** 25 latas, **d)** En el primero

10. $A(x) = 30x - x^2$

Ejercicio 4.5

2. **a)** $y = f(x) = 3x$, **b)** $y = f(x) = -\frac{x}{2}$, **c)** $y = f(x) = \frac{2x}{3} - 2$; **d)** $y = f(x) = -5x + 4$; **e)** $y = f(x) = -3$

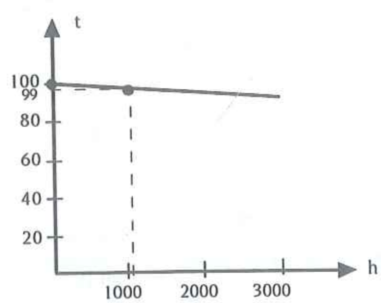
3. $y = f(x) = 3x - 2$,

4. $m = -\frac{1}{2}$

5. $y = f(x) = x + 2$; la velocidad inicial, 11 m/s;

6. **a)** 97,5° , **b)** 91,15° ,

c)



TALLER DE REPASO DE LA UNIDAD 4

1. Son falsas: a, b, j ; son verdaderas: c, d, e, f, g, h, i.
2. **d)** $y = f(x) = (x-2)^2$, **e)** $y = f(x) = -5$,
6. $f(3) = 19$; $f(-5) = -21$; $f(4) = 24$; $f(-\frac{3}{5}) = 1$; $f(\frac{2}{5}) = 6$; $f(-\frac{6}{5}) = -2$,
11. P (I) = 12.000 + 50I (I impulsos),
12. **a)** 16 m , **b)** 8500 m

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS

1) 10 , **2)** 17 , **3)** 1. d, 2. a, .

PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS DEL ICFES

1. a , **2.** b , **3.** d , **4.** a ó c , **5.** a

NÚCLEO TEMÁTICO

5

EJERCICIOS

Ejercicio 5.1

1. b **2.** c **3.** b **4.** c **5.** d

Ejercicio 5.2

1. $a^2 + 6a + 9$; **2.** $25 - 10y + y^2$;
3. $4x^2 - 4x + 1$; **4.** $\frac{9}{4} - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4$
5. $\frac{1}{4}a^6 + a^3 + 1$; **6.** $\frac{1}{9} + a^3 + \frac{9}{4}a^6$
7. $4m^{2a} - 12m^a n^b + 9n^{2b}$
8. $\frac{25}{4}x^4 - 5x^3 + x^2$
9. $\frac{4}{9}a^4 + \frac{1}{3}a^5 + \frac{1}{16}a^6$
10. $-x^2 + x - 1$; **11.** $14x$; **12.** $x - \frac{9}{25}$
13. $\frac{7}{9}x^2 - \frac{7}{6}x + \frac{4}{9}$
14. $3x^2$; **15.** $-3x$

Ejercicio 5.3

2. $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$
3. $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2xz - 2yz$
4. $p^2 + q^2 + r^2 - 2pq + 2pr - 2qr$
5. $a^2 + 4b^2 + 9c^2 + 4ab + 6ac + 12bc$
6. $4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy + 4xz - 2yz$
7. $4p^2 + 9q^2 + 25r^2 - 12pq + 20pr - 30qr$
8. $9x^6 + 16x^4 + 4x^2 - 24x^5 + 12x^4 - 16x^3$
9. $\frac{4}{9}a^4 + \frac{16}{25}b^4 + 100 + \frac{40}{3}a^2 - \frac{16}{15}a^2b^2 - 16b^2$
10. $4x^2 + 9y^2 + 16z^2 + 4w^2 + 12xy - 16xz - 8xw - 24yz - 12yw + 16zw$
11. $16x^2 - 49$; **12.** $x^4 - z^2$;
13. $9a^2 - b^2$; **14.** $x^6 - 25$
15. $a^2 + 2ab + b^2 - 81$
16. $16x^2 - 8xy + y^2 - 9$
17. $\frac{1}{16} - \frac{4}{9}x^2$
18. $\frac{16}{25}a^2 + \frac{16}{15}ab + \frac{4}{9}b^2 - 25$

Ejercicio 5.4

1. **a)** $(2a^3)^3 - (5b)^3$; **b)** $(2a^3 - 5b)^3$; **c)** No; **e)** No; **f)** No; **g)** Sí; **h)** $9a^2 - 24ab + 16b^2$; **i)** $9a^2 + 12ab + 16b^2$
2. $a^6 - b^9$; **3.** $x^9 - 125$
4. $\frac{1}{8}x^5 + \frac{8}{27}y^9$
5. $a^{3x} + b^{3y}$
6. $m^3 + 6m^2 + 12m + 8$
7. $p^3 - 9p^2 + 27p - 27$
8. $125 + 75z^2 + 15z^4 + z^6$
9. $p^3 - 9p^2q + 27pq^2 - 27q^3$
10. $8b^3 + 36b^2 + 54b + 27$
11. $0{,}125 + 0{,}75t + 1{,}5t^2 + t^3$
12. $\frac{1}{27}x^9 - \frac{1}{3}x^6y + x^3y^2 - y^3$
13. $\frac{8}{125}a^3 + \frac{18}{25}a^2y + \frac{27}{10}ay^2 + \frac{27}{8}y^3$
14. $0{,}000001 + 0{,}0003m^3 + 0{,}03m^4 + m^6$
15. $a^{6x} - 3a^{4x}b^y + 3a^{2x}b^{2y} + b^{3y}$
16. $a^{3p} + 3a^{2p}b^{3q} + 3a^pb^{6q} + b^{9q}$
17. $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 - 9x^2z - 18xyz - 9y^2z + 27xz^2 + 27yz^2 - 27z^3$

EJERCICIOS 5

18. T.C.P.: $9x^2y^6 - 36xy^3 + 36$
T.C.I.: $9x^2y^6 + 18xy^3 + 36$

19. T.C.P.: $\frac{16}{9}x^2 - 2xy + \frac{9}{16}y^2$
T.C.I.: $\frac{16}{9}x^2 + xy + \frac{9}{16}y^2$

20. T.C.P.: $4a^{2x} + 12a^xb^y + 9b^{2y}$
T.C.I.: $4a^{2x} - 6a^xb^y + 9b^{2y}$

Ejercicio 5.5

1. $a^6 + 12a^5b + 60a^4b^2 + 160a^3b^3 + 240a^2b^4 + 192ab^5 + 64b^6$
2. $32m^{10} - 240m^8n + 720m^6n^2 - 1080m^4n^3 + 810m^2n^4 - 243n^5$
3. $64 - 48z^4 + 12z^8 - z^{12}$
4. $a^{4x} - 4a^{3x} + 6a^{2x} - 4a^x + 1$
5. $\frac{1}{64}a^{18} + \frac{3}{16}a^{15}b + \frac{51}{16}a^{12}b^2 + \frac{5}{2}a^9b^3 + \frac{15}{4}a^6b^4 + 3a^3b^5 + b^6$
6. $\frac{1}{1024}a^5 - \frac{1}{256}a^4b + \frac{1}{160}a^3b^2 - \frac{1}{200}a^2b^3 + \frac{1}{500}ab^4 + \frac{1}{3125}b^5$
7. $\frac{729}{m^6} + \frac{486}{m^4} + \frac{135}{m^2} + 20 + \frac{5}{3}m^2 + \frac{2}{27}m^4 + \frac{1}{729}m^6$
8. $b^8 - 8b^7mn + 28b^6m^2n^2 - 56b^5m^3n^3 + 70b^4m^4n^4 - 56b^3m^5n^5 + 28b^2m^6n^6 - 8bm^7n^7 + m^8n^8$
9. $15625 - 3750a + 375a^2 - 20a^3 + \frac{3}{5}a^4 - \frac{6}{625}a^5 + \frac{1}{15625}a^6$

10. $80a^2b^4$; **11.** $7xy^{12}$

12. $-\frac{56}{9}x^3b^5$; **13.** $5^{10}b^{20}$

14. $35a^{18}$; **15.** -216

TALLER DE REPASO LA UNIDAD 5

2. a) ; **3.** c); **4.** b) ; **5.** a) ; **6.** a) ;
7. c); **8.** c) ; **9.** c) ;

10. $-\frac{8}{27}x^6y^9z^3$; **11.** $\frac{16}{25}x^6y^2z^4w^8$

12. $625m^4n^8p^{12}q^8$;

13. $-\frac{243}{1024}a^{10}b^5c^{15}d^5$

14. $4x^6 + 24x^4y^2 + 36x^2y^4$; **15.** $-z^2$

16. $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$

17. $9b^4 - 36c^6$; **18.** $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25}$

19. $m^6 + 2m^5 - 3m^4 - 2m^3 + 6m^2 - 4m + 1$

20. $4x^2 + 9y^2 + 16z^2 + 4w^2 + 12xy - 16xz - 8xw - 24yz - 12yw + 16zw$

21. $9a^2 + 18ab + 9b^2 - 4$

22. $a^4 + 5a^2 + 9$

23. $a^6 - 3a^4 + 7a^2 - 9$

24. $-x^4 - y^4 - z^4 + 2x^2y^2 + 2x^2z^2 + 2y^2z^2$

25. $a^4x^4 - 2a^2b^2x^2y^2 + b^4y^4$

26. $27a^3 - b^3$

27. $x^3 + 8$

28. $x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 - 2x^2 + 4xy^3 - 4xy - 2y^2 + y^4 + 1$

29. $x^2 + 10xz + 25z^2 - 4y^2$

30. $4x^2 - 9y^2 - 30yz - 25z^2$

31. $v^2 - b^2u^2$

32. $a^4 - 18a^2b^2 + 81b^4$

33. $x^4 - 16y^4$

34. $8x^3 - 125y^3$

35. $9a^2 - 4b^2 + 4bc - c^2$

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 5

1. b , **2.** c , **3.** a , **4.** 25%

PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS DEL ICFES 5

1. b , **2.** a , **3.** b , **4.** c , **5.** d.

NÚCLEO TEMÁTICO

6

EJERCICIOS

Ejercicio 6.1

1. d **2.** c **3.** d **4.** b **5.** a

Ejercicio 6.2

1. $3(x + y)$; **2.** $5(m^2n + 2a^2)$
3. $q(p - 5r)$; **4.** $3m(2m - n)$;
5. $7x^2y(y - 2)$; **6.** $6ab(2 + 3b)$;
7. $12pq(2pq - 1)$; **8.** $-3xyz(2x + 1)$;
9. $3(x^2 - 3)$; **10.** $\frac{1}{2}(m - n)$

11. $2n(7m^2-1)$ **12.** $ab(5b-7a)$
13. $3xm(xm+8x+2m)$
14. $-5ab(a-4b)$
15. $3xy(x^2y+3xy-9)$
16. $5xyz(z-2y-5x)$
17. $4abc(4a+b-2c)$
18. $9a^2b(2a-1+3b^2)$
19. $13x^3(2x-3m+1)$
20. $17mn(3mn-2n-1)$
21. $3pq(8pq^2-3q+6p^2)$
22. $(x+y)(a+b)$
23. $(2a+3)(3p-5q)$
24. $3x(a^2+2b)(3x-4y)$
25. $a(2-7b)(5+8b)$
26. $(x^3+y^3+z^3)(a-b)$
27. $(x+3y)(p+3)$
28. $(x-2y)(m+2)$
29. $(a-1)(3a-2b+c)$
30. $(a-1+5)(x+3)$
31. $(x^2+1)(x+y-2)$
32. $(2-a)(x+1)$
33. $(x+y)^2(p-1)$
34. $(x-y)(z-w)$
35. $a(b+d)(c+f)$
36. $(b-a)(x-cx-1)$
37. $(a+b)(a^2+ab-b-2)$

Ejercicio 6.3

1. No **2.** Sí **3.** Sí **4.** No **5.** Sí **6.** No
7. Sí **8.** No **9.** $4b^2$ **10.** $16m^3$
11. $25n^4$ **12.** $2p^2q$ **13.** y^2 **14.** $56t$
15. $4x^2$ **16.** $9y^2$ **17.** $100a^2$ **18.** 3
19. $(5a+4b)^2$ **20.** $(11m+10)^2$
21. $(xy-9)^2$ **22.** $(3p+2q)^2$
23. $5(a+1)^2$ **24.** $2(x-7)^2$
25. $6(2a-1)^2$ **26.** $a(3y+1)^2$
27. $(x-1)^2$ **28.** $(m+n+3p+3q)^2$
29. $20ab(a^2-3b^3)^2$
30. $-2axy(x^4-6x^2y+9y^2)$

Ejercicio 6.4

1. $(a+6)(a-6)$ **2.** $(x+3b)(x-3b)$
3. $(m+\frac{2}{3})(m-\frac{2}{3})$
4. $(6p+7q)(6p-7q)$
5. $(ma+nb)(ma-nb)$
6. $(\frac{x}{a}+\frac{y}{b})(\frac{x}{a}-\frac{y}{b})$
7. $(a^x+b^y)(a^x-b^y)$
8. $(m^2n^2+16p^4)(mn+4p^2)(mn-4p^2)$
9. $(a^2+25)(a+5)(a-5)$
10. $(9p^2+q^2)(3p+q)(3p-q)$
11. $a^2(x^2+25a^2)(x+5a)(x-5a)$
12. $a(5a-14)$
13. $-(2z-p+q)(p+q)$
14. $(a-4+b)(a-4-b)$
15. $(3abc+2xyz)(3abc-2xyz)$
16. $(x+y+5)(x-y+3)$
17. $(3x+y-m)(3x-y+m)$
18. $(6t-3s+2m)(6t-3s-2m)$
19. $(ab-a+6x-1)(ab+a-6x-1)$
20. $(x^3-x+4)(4-x-x^3)$
21. $4x(1-y)$
22. $(x+a-2)(x-a+2)$
23. $(1+x-y)(1-x+y)$
24. $(x-9y+3a-4b)(x-9y-3a+4b)$
25. $(\frac{11}{30}a-\frac{b}{30})(\frac{a}{30}-\frac{11}{30}b)$
26. $-4(3p+q)(p+3q)$
27. Es primo en Q
28. Es primo en Q
29. Es primo en Q
30. Es primo en Q

Ejercicio 6.5

1. Es primo en los reales
2. Es factorizable en R: $(4a^2b^2+2\sqrt{2}ab+1)(4a^2b^2-2\sqrt{2}ab+1)$
3. Es factorizable en R: $(6x^4+2\sqrt{6}x^2y^2z^2+2y^4z^4)(6x^4-2\sqrt{6}x^2y^2z^2+2y^4z^4)$
4. Es primo en los reales
5. Es primo en los reales
6. Es primo en los reales

Ejercicio 6.6

1. $(x+8)(x+4)$
2. $(w+5)(w+9)$
3. $(y+7)(y-9)$
4. $(m+4)(m-17)$
5. $(p+5)(p-3)$ **6.** $-(x+7)^2$
7. $(y+18)(y-12)$
8. $(m^2+5)(m^2+2)$ **9.** $(x-4y)^2$
10. $(t^2+3)^2$ **11.** $p(p+7)(p+6)$
12. $4a(a+4)(a+1)$
13. $(ab-5c)(ab+2c)$ **14.** $(7^x-2)^2$
15. $(6^p-5)(6^p+4)$
16. $(5^t+1)(5^t+1)=(5^t+1)^2$
17. $m^2(1-6n)^2$
18. $(x-y+5)(x-y+1)$
19. $(a+b-8)(a+b+6)$
20. $(p+14)(p-15)$
21. $(m^2-6m+34)(4-m)(2-m)$
22. $(w+17)(w-4)$

23. $x+5$ **24.** $2x-4$ **25.** $a-4$

Ejercicio 6.7

1. $(2m-3)(2m+7)$
2. $(5a+6)(5a-9)$
3. $(4x-5)(2x-3)$
4. $(3x-2y)(2x+y)$
5. $(8p+3)(p-6)$
6. $m^2(5x-7)(2x+5)$
7. $3t(3a+5)(8a-3)$
8. $5x^2(x+4)(2x-7)$
9. $5m^3(3m^2+5)(2m^2-7)$
10. $(7p^x-8)(5p^x+9)$
11. $xy(3x+2y)(5x-3y)$
12. $(2m+p)(5m-2p-1)$
13. $(a+b-2)(4a+4b+3)$
14. $ab^2(2a-b)(3a+2b)$

Ejercicio 6.8

2. No **3.** Sí **4.** No **5.** No
6. Sí **7.** No

Ejercicio 6.9

1. x^2-3x+9 **2.** $16+4p+p^2$
3. $25+20y+16y^2$
4. $9m^2+12mn+16n^2$
5. $3a-b$ **6.** $\frac{2}{3}x-\frac{1}{5}$
7. $2x+3$ **8.** $4a^2-ab+\frac{1}{4}b^2$
9. $\frac{4}{5}x^2+3y^3$
10. $\frac{1}{9}x^6+x^3y^2+9y^4$
11. $(x+2)(x^2-2x+4)$
12. $(a-b)(a^2+ab+b^2)$
13. $(3x+1)(9x^2-3x+1)$
14. $(5+4b)(25-20b+16b^2)$
15. $(7-4x^3)(49+28x^3+16x^6)$
16. $(10-mn)(100+10mn+m^2n^2)$
17. $(a^2+b^2)(a^4-a^2b^2+b^4)$
18. $(\frac{2}{5}+t)(\frac{4}{25}-\frac{2}{5}t+t^2)$
19. $(\frac{a}{2}-\frac{1}{4})(\frac{a^2}{4}+\frac{a}{8}+\frac{1}{16})$
20. $m^6(1-m)(1+m)(1-m+m^2)(1+m+m^2)$
21. $x^3(x+1)(x-1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)$

EJERCICIOS 6

22. $(a - b - c)(a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + +ac - bc)$

23. $(3 - a - b)(9 + 3a + 3b + a^2 + +2ab + b^2)$

24. $(\frac{1}{5} + \frac{1}{4}a)(\frac{1}{25} - \frac{1}{20}a + \frac{1}{16}a^2)$

25. $(x + y)(x^2 - xy + y^2)(x^6 - x^3y^3 + y^6)$

26. $(a^2 + b^2)(a + b)(a - b)(a^4 - a^2b^2 + +b^4)(a^2 - ab + b^2)(a^2 + ab + b^2)$

27. $(a^4 - a^2 + 1)(a^8 + a^6 + 2a^2 + 1)$

28. $(a^x - b^{2y})(a^{2x} + a^xb^{2y} + b^{4y})$

29. $2(a - 2)^3$

30. $2a(a^2 + 3b^2)$

Ejercicio 6.10

1. $a(p - 3q)(a + 2)$

2. $(y^2 - 3z)(4xy - 1)$

3. $(a + m)(3m - 7n^2)$

4. $(p + q + 2)(p + q - 2)$

5. $(5 + a - 4b)(5 - a + 4b)$

6. $(2x + 2y + a)(2y - a)$

7. $(a + x + 10)(a - x + 2)$

8. $(x - y)(x^2 + xy + y^2 + x + y)$

9. $(5a - b)(x + y - 10)$

10. $(a + 1)(a^2 - 2)^2$

TALLER DE REPASO DE LA UNIDAD 6

2. **a)** F **b)** F **c)** V **d)** V
e) F **f)** V **g)** F **h)** V

3. $9(xy + 2z^3)(xy - 2z^3)$

4. $(3a - b)(x - y)$ **5.** $4x^2y^2(3y - x)$

6. $(3a - b)(4a - x^2)$

7. $(6t^4 + 5x^5)(6t^4 - 5x^5)$

8. $(2x + y)(3x - a)$ **9.** $(2a - 3b)^2$

10. $(y - 1)(y^2 + 1)$

11. $a^{n+1}(a^n + a + 1)$

12. $(x - 2)(x + 1)$

13. $(3s - t)(2t^2 + 9s^2)$

14. $(x - 15)(x - 11)$

15. $(x - 4y)(1 - x^2 - 4xy - 16y^2)$

16. $(x - 15)(x + 6)$

17. $(2x + y)(2x - y)(4x^2 - 2xy + y^2)(4x^2 + 2xy + y^2)$

18. $(xy + 17)^2$

19. $(a + 3b)(a^2 - 3ab + 9b^2 + 1)$

20. $(x^2 - 17)(x^2 - 12)$

21. $(x - 3y + a - b)(x - 3y - a + b)$

22. $(x + 11)(10 - x)$

23. $(a - 3b)(a^2 + 3ab + 9b^2 + a + 3b)$

24. $(x^2 - 17)(x^2 + 3)$

25. $(4a + 4b + 3)(a + b - 2)$

26. $(ay + 24)(ay - 10)$

27. $2a(3a + 2x + 8)(3a - 2x - 8)$

28. $(2x + 1)(x + 1)$ **29.** $x(2x - 2y)^2$

30. $(x + 8)(10x - 1)$

31. $(4x^2 + x - 3y)(4x^2 - x + 3y)$

32. $(x - 19y)(x + 17y)$

33. $(a - 2b)(a + 2b + ab)$

34. $(a + b)(a + b + 1)$

35. $(2a^2 + a + 2b)(2a^2 - a - 2b)$

36. $x(x + 15y)(x - 3y)$

37. $(2x - 1)(x + 2)(x - 2)$

38. $(2x - 7)(3x - 5)$

39. $(x - y + 3)(x - y - 3)$

40. $(4x + 5)(4 - 5x)$

41. $(a + b)(a + b - a^2 + ab - b^2)$

42. $(13 - xy)(xy + 5)$

43. $uv(u + 3v)(u - 3v)$

44. $3x(x + 9)(x - 7)$

45. $(m^3 - 3n^4)(m^6 + 3m^3n^4 + 9n^8)$

46. $(x + 5)(x + 1)(x - 1)$

47. $(x - y)(x^2 + xy + y^2 + x + y)$

48. $(x - 8y)(3x - 7y)$

49. $5(5^{n-1} - 1)(5^n + 4)$

50. $(x - 3y)(x + 8y + 1)$

51. $(7^n - 2)^2$

52. $(x + 2y + a)(x + 2y - a)$

53. $(3y - 11)^2$

54. $(1 + 7a - 3b)(1 - 7a + 3b)$

55. $5x(x - 8)(x - 5)$

56. $(x^2 + x - 1)(x^2 - x + 1)$

57. $3ab(ab - 4ac + 6bc)$

58. $(3x - a + 4)(3x - a - 4)$

59. $(4^n + 1)^2$

60. $(a + 8)(a - 8)$

61. $3(2a^3 + 3b^2)(2a^3 - 3b^2)$

62. $(a + b + 11)(a + b - 11)$

63. $(5a - b)^2$

64. $(a^2 + b^2)(a + b)(a - b)$

65. $(a - 2b)(a^2 + 2ab + 4b^2 + 1)$

66. $(x - 7)(x + 2)$

67. $(y^n + 2x)(x - y^n)$

68. $(a + 12b)(a + 5b)$

69. $(y - x)(y - x - 1)$

70. $(x + y + a)(x + y - a)$

71. $(a^2b^2 + 12)(a^2b^2 - 8)$

72. $(x - 2a + b + y)(x - 2a - b - y)$

73. $(a - b)(a^2 + ab + b^2 + 1)$

74. $(2x - 3a + c + k)(2x - 3a - c - k)$

75. $a^2(a^m + b^n)(a^m - b^n)$

76. $(2a - 3)(7a + 5)$

77. $(a + 1)(a - 1)(a - 2)$

78. $(2x - 5y)(2x + 3y)$

79. $(a^2 + a + 4)(a^2 + a + 5)$

80. $4ab(a^2 + 3b^2)(b^2 + 3a^2)$

81. $(a - b)(a^2 + ab + b^2 + a + 3b)$

82. $(9x - y)(81x^2 + 9xy + y^2)$

83. $x(x + 3)^2(x - 3)^2$

84. $(a - 2b^5)(a^2 + 2ab^5 + 4b^{10})$

85. $a(a^8 + 1)(a^4 + 1)(a^2 + 1)(a + 1)(a - 1)$

86. $(x + y)(x - y)(x^2 - xy + y^2)(x^2 + xy + y^2)(x^6 - x^3y^3 + y^6)(x^6 + x^3y^3 + y^6)$

87. $8(2a + b)(4a^2 - 2ab + b^2)$

88. $2(5a - 5b + 1)[25(a - b)^2 - - 5(a - b) + 1]$

89. $(p^2 + 1)(p + 1)(p - 1)(p^4 - p^2 + 1)(p^2 + p + 1)(p^2 - p + 1)$

90. $(x + y)^3$

91. $(7x^2 - 3y)(49x^4 + 21x^2y + 9y^2)$

TALLER DE REPASO DE LA UNIDAD 6

92. $x^{3m}(x^m + 4y)(x^m - 4y)$
93. $(y-1)^2(y+1)(y^2-y+1)(y^2+y+1)$
94. $(a-2b)(a+b)(a-b)$
95. $(a^2+a+3)(a^2-a+3)$
96. $(x^2+x+2)(x^2-x+2)$
97. $(a^4+4a^2+8)(a^4-4a^2+8)$
98. $(9a^2+3ab+b^2)(9a^2-3ab+b^2)$
99. $(3c^2+c+1)(3c^2-c+1)$
100. $(2x^2+9xy-3y^2)(2x^2-9xy-3y^2)$
101. $(a^2+2ab+2b^2)(a^2-2ab++2b^2)$
102. $(2m^2+6mn+3n^2)(2m^2-$
$-6mn+3n^2)$
103. $(4x^2+2xy-3y^2)(4x^2-2xy-3y^2)$
104. $(4x^2+6ab+b^2)(4a^2-6ab+b^2)$
105. $(a^{2p}+2a^p+4)(a^{2p}-2a^p+4)$
106. $(3x+y)(3x-y)(9x^2+y^2+$
$+3xy)(9x^2+y^2-3xy)$
107. $(y+12)(y-3)$
108. $(a+\sqrt{7})(a-\sqrt{7})(a^2+5)$
109. $(x^2+13)(x+2\sqrt{3})(x-2\sqrt{3})$
110. $(b+\sqrt{7})(b-\sqrt{7})(2b^2+3)$
111. $(t+1)(3t-2)$
112. $(x+2)(5x-3)$
113. $(2m^3+9)(3m^3-5)$
114. $(z-17)(z-1)$
115. $(ax+a+1)(ax-x+a)$
116. $-(2a^4+3y^4)(4a^4+y^4)$
117. $(b-c)(a-b)(c-a)$
118. $(ax+by+y)(ax-x-by)$
119. $(a-b)(a^2+ab+b^2+a+3b)$
120. $(b-c)(a-c)(b-a)$
121. $[2mx-(3n-4p)y][mx+$
$+2(n-p)y]$
122. $(a-c)(b-c)(a-c)(a+b+c)$
123. $(a-b-3)(3a-3b-1)$
124. $(x-3y-4)(x-3y-3)$
125. $(m+3n-2)(m+3n-5)$
126. $(x+y+1)(x-y-7)$

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS

1. 25 ; **2.** > ; **3.** A = 5 , B = 9 , C = 0 ; **4.** -1 y 1 ; **5.** 13457 ; **6.** 1 ; **7.** a. 0,31 y 0,13 , b. 3,10 y 0,13 ; **8.** $3^4 - 2^5 = 7^2$; **9.** 1247÷ 43

PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS DEL ICFES

1. e , **2.** d , **3.** b , **4.** c , **5.** d.

NÚCLEO TEMÁTICO 7

EJERCICIOS

Ejercicio 7.1

1. b , **2.** d , **3.** a , **4.** c , **5.** a

Ejercicio 7.2

1. P(3) = 25 , **3.** k = -5 , **4.** k = 7

Ejercicio 7.3

1. **a)** 2 , -1 , -3 **b)** $\frac{3}{2}$, -2, 5
c) $-\frac{2}{3}$, 1, -4 **d)** $\frac{4}{5}$, 1,0

2. **a)** 1, -2, 3 **b)** -1, 3, $\frac{1}{2}$
c) $-\frac{3}{2}$, $\frac{1}{4}$

3. Si: el $-\frac{3}{2}$ y $\frac{1}{4}$

5. $P(x) = (x+1)(x-3)(x^2+1)$

TALLER DE REPASO DE LA UNIDAD 7

2. $\frac{-255}{4}$, **3.** 93 , **4.** 8 , **5.** $\frac{41}{16}$,
6. 2 y -4 , **7.** 4 , **8.** 2 , -3, -1 , $\frac{1}{2}$,
9. 3, 2 y -2
10. $P(x) = (x-1)(x+1)(x-2)^2$,
11. $P(x) = (x+1)(x+5)(x-5)$
(x^2-x+1),
12. $P(x) = (x-2)(x-5)(5x-2)$,
13. $P(x) = (x-1)^2(x^2+4)$,
14. $P(x) = (x-2)(x+2)(x-1)$
$(x+1)$
15. $P(x) = (x+1)(x^2-6x+4)$

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 7

1. 75 y 15 , **2.** 10 minutos

PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS DEL ICFES 7

1. b , **2.** b , **3.** c , **4.** a , **5.** c.

NÚCLEO TEMÁTICO

8

EJERCICIOS

Ejercicio 8.1

1. a , **2.** d , **3.** c , **4.** b , **5.** d.

Ejercicio 8.2

1. $\frac{7}{3}$ **2.** $\frac{3}{16}$ **3.** $-\frac{2}{3}$ **4.** $\frac{4}{9}$ **5.** $\frac{1}{3x^2}$

6. $\frac{3}{m}$ **7.** $\frac{2x^2}{3y}$ **8.** $-\frac{4y^4}{3x}$

9. F **10.** F **11.** F **12.** V **13.** V

14. V **15.** F **16.** V **17.** F **18.** 2

19. -9 **20.** Ninguno **21.** $-\frac{3}{5}$

22. -5 y 3 **23.** 0 y 3 **24.** $12xy$

25. $6x^2y^2$ **26.** $16u^2v^3$ **27.** $-\frac{7}{4}$

28. $-\frac{8}{3}$ **29.** $-\frac{4a+b}{a+b}$

30. $\frac{8x+5}{x}$ **31.** $\frac{3a}{2c^2}$ **32.** $\frac{a}{2b^2}$

33. $\frac{2a^2b}{3c}$ **34.** $\frac{b^2}{x^2}$ **35.** $\frac{5a-2b}{6a}$

36. $\frac{a+b}{x}$ **37.** $\frac{a-1}{(a^2+1)(a+1)}$

38. $\frac{x^2+x+1}{(x-1)^2}$ **39.** $\frac{x+y-z}{x-y+z}$

40. $-\frac{a^3+b^3}{a^3}$ **41.** $\frac{a+3}{a-3}$

42. $\frac{x^2+a^2}{x^3}$ **43.** $\frac{a^2+b^2}{a}$

44. $\frac{2}{3(1-a)^2}$ **45.** $x+y$

Ejercicio 8.3

1. $\frac{2c^2x}{5by^3}$ **2.** $-\frac{3a}{2cx}$ **3.** $\frac{x(x+y)}{4}$

4. $3(x-1)$ **5.** $\frac{4}{9}$ **6.** $\frac{1}{a^2+ab+b^2}$

7. $\frac{b(a+b)}{x(a-b)}$ **8.** $\frac{2a^2}{3b}$

9. $\frac{12}{x}$ **10.** $-\frac{10}{x}$ **11.** $\frac{4(a-b)^2}{a^2c^2}$

12. $\frac{a-b}{2a^2}$ **13.** 1 **14.** $\frac{b^2(b-c)}{c^2}$

15. $\frac{x}{x+1}$ **16.** $\frac{1}{b}$

17. $\frac{x+y}{x^2+3xy+9y^2}$ **18.** $x-3$

19. ax **20.** $\frac{(x-2)(x-3)}{(x-1)(x-4)}$

Ejercicio 8.4

1. $\frac{23-a}{30}$ **2.** $\frac{8a}{3b}$ **3.** 0

4. $\frac{4(x-t)}{xt}$ **5.** $-\frac{2}{b}$ **6.** 0

7. b **8.** 0 **9.** 0 **10.** 1

11. $\frac{a}{a^2-1}$ **12.** 0 **13.** $\frac{2}{y}$

14. $\frac{ax}{a-x}$ **15.** $\frac{2}{a+1}$ **16.** $\frac{3}{2-x}$

17. $\frac{2a^2}{a^3+b^3}$ **18.** $\frac{x}{1-x}$

19. $\frac{2}{a^2+1}$ **20.** $\frac{1}{b(b-a)}$

21. $\frac{a+b}{b-a}$ **22.** $\frac{x-z}{x}$ **23.** b

24. $\frac{1}{2}$ **25.** a^2+1 **26.** $\frac{ab}{2}$

27. $\frac{2a^2}{a-2b}$ **28.** $2a$ **29.** xy

30. 1

Ejercicio 8.5

1. $\frac{x+y}{x-y}$ **2.** 4 **3.** 1

4. $-\frac{b}{a+b}$ **5.** $\frac{b+c-a}{a+c-b}$

6. 0 **7.** 1 **8.** -1 **9.** 2

10. $\frac{x^2+1}{x+1}$ **11.** $\frac{a}{a+1}$

12. $\frac{x^2+3x}{3}$ **13.** $\frac{m+1}{m^2+1}$

14. 1 **15.** $\frac{1}{2}$

16. $\frac{a+1}{1-a}$ **17.** $\frac{1}{2a+3b}$

18. $\frac{a+b}{a-b}$ **19.** 0

20. $\frac{1}{(a+b)b^2}$

TALLER DE REPASO LA UNIDAD 8

2. **a)** F **b)** F **c)** F **d)** F **e)** V **f)** F **g)** V **h)** V **i)** V

3. $\frac{ab}{2a-b}$ **4.** $\frac{2x+y}{x+3y}$

5. $\frac{x+y}{(x-y)(z-y)}$ **6.** 2

7. $\frac{(x+y)^2}{y^2(1-y^2)}$ **8.** 1

9. $\frac{4ab}{a^2-b^2}$ **10.** 0 **11.** 0

12. $\frac{1}{(a+1)(a+3)}$ **13.** $\frac{x}{x+1}$

14. -a **15.** $\frac{a^2b^2}{a-b}$ **16.** 2

17. $\frac{ax^2(x^2+a^2)}{x^3+a^3}$

18. $\left(\frac{x^2-1}{x}\right)^2$ **19.** 1

TALLER DE REPASO DE LA UNIDAD 8

20. $\frac{(2a^2+x^2)(a-x)}{a^2x}$

21. $\frac{x^2}{16x^2+4xy+y^2}$ **22.** bx

23. $\frac{7(x+5)(x-4)}{4(x-1)(x-3)}$ **24.** $\frac{2+x^2}{x}$

25. $\frac{1}{x+1}$ **26.** $\frac{2a^2}{1+3a}$

27. a + b **28.** 1 **29.** $2x^2$

30. 4 **31.** $\frac{ab}{(a+b)}$ **32.** 1

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS

1. b , **2.** c , **3.** A , **4.** A

PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS DEL ICFES

1. c, **2.** c , **3.** b , **4.** d , **5.** c.

NÚCLEO TEMÁTICO

9

EJERCICIOS

Ejercicio 9.1

1. c , **2.** b , **3.** a , **4.** d , **5.** d.

Ejercicio 9.2

Son identidades: **1, 5, 6 , 7, 8, 9 y 10** sin restricciones. Los ejercicios del **11** al **14** con restricciones: **11**. $x\neq0$, **12**. $x \neq 4$, $x\neq-6$, **13**. $x \nleq 0$, **14**. $x \nleq 3$, **15**. $x=5$, **16**. $x=7$, **17**. $x=4$, **18**. $x=-4$, **19**. $x=\frac{9}{5}$ **20**. $x=1$, **21**. $x=5$, **22**. $x=3$, **23**. $x=8$, **24**. $x=1$

Ejercicio 9.3

1. No tiene solución, $x\neq3$

2. $p=\frac{53}{11}$, $p\neq1$

3. No tiene solución $x\neq2$

4. $x=2$, $x\neq\frac{7}{6}$, $x\neq\frac{4}{3}$

5. Solución: todos los reales menos 0 y -2

6. No tiene solución, $m\neq2$, $m\neq-2$,

7. $x=8$, $x\neq3$,

8. $x=-4$, $x\neq0$, $x\neq3$

9. $w=-1$, $w\neq\frac{1}{5}$, $w=-\frac{1}{5'}$ $w=-\frac{1}{5}$

10. $x=\frac{2}{3}$, $x\neq3$, $x\neq2$, $x\neq-1$,

11. $h=\frac{3V}{\pi r^2}$, **12.** $b=\frac{2A}{h}-a$,

13. $p=\frac{m-n}{r}+1$,

14. $F=\frac{9C}{5}+32$,

15. $x=\frac{2y+5}{y-2}$, $y\neq2$,

16. $z=\frac{3w+4}{2+w}+w$, $w\neq-2$, $z\neq3$.

Ejercicio 9.4

1. 20 y 45 , **2.** 6 , **3.** 23, 24, 25,
4. 24, 26, **5.** 50, **6.** 25, **7.** 80 ,
8. 22,5 , **9.** 59 y 42 , **10.** $\frac{1}{4}$,
11. 5 , **12.** \$4.000, \$6.800 ,
13. \$405.000, \$135.000 , \$ 45.000,
14. 200 monedas de \$ 200 y 100 de \$100 ,
15. 19 km/h , 21 km/h ,
16. 3,6 min , **17.** 625 km/h ,
18. $\frac{1}{2}$km ,
19. 33 min. 20 seg. ,
20. $3\frac{1}{13}$min , **21.** 304 min,
22. base 20 cm y altura 14 cm ,
23. 500 litros , **24.** 25 gramos ,
25. 4 litros de A y 10 litros de B.

TALLER DE REPASO LA UNIDAD 9

2. $x=18$, **3.** $x=\frac{1}{a}$, $a\neq b$,

4. $x=\frac{a}{a-b}$, $a\neq b$,

5. $x=\frac{cd}{c+2d}$, $c\neq\pm2d$,

6. $x=11$,

7. $x=\frac{rs}{r+s}$, $r\neq s$, $r\neq0$, $s\neq0$,

8. $x=6$, **9.** $x=\frac{bc^2}{a^{2'}}$ $a\neq0$,

TALLER DE REPASO DE LA UNIDAD 9

10. $x = \frac{3}{8}$

11. $x = 2b - \frac{b^2}{a}, a \neq 0$

12. $b = \frac{2-2d}{3}$, **13.** $t = \frac{L_2 - L_1}{a L_1}$

14. $t = \frac{w}{2gp}(V_1^2 - V_2^2)$,

15. $m = \frac{2(E \bullet S + e^2)}{Sr^2w^2}$

16. $f = \frac{25L}{FM - L}$, **17.** 3, 4, 5,

18. 200 cm, **19.** 36 km,

20. $3\frac{3}{7}$ horas, **21.** 670 metros

22. 3.000 boletas de 8 dólares y 1.000 boletas de 5 dólares,

23. 10 ml de agua destilada,

24. 5 cl, **25.** 3,6 litros,

26. 225 saltos,

27. 1 y $38\frac{2}{11}$ min

28. A las 10 y $5\frac{5}{11}$ min y a las 10 y $38\frac{2}{11}$ min.,

29. A las 4 y $21\frac{9}{11}$ min,

30. A las 10 y 48 min.

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS

1. 20 cm, **2.** 40 cm, **3.** 300 saltos

PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS DEL ICFES

1. a, **2.** b, **3.** d, **4.** a, **5.** b

NÚCLEO TEMÁTICO

10

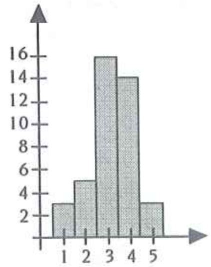
EJERCICIOS

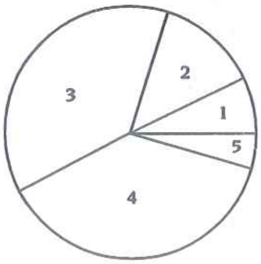
Ejercicio 10.1

1. a) **2.** d) **3.** b) **4.** a) **5.** a) **6.** b) **7.** c) **8.** b) **9.** b) **10.** b) **11.** a) **12.** a) **13.** b)

14. d) **15.** d) **16.** a)

Datos	f_i	F_i
1	3	3
2	5	8
3	16	24
4	14	38
5	2	40



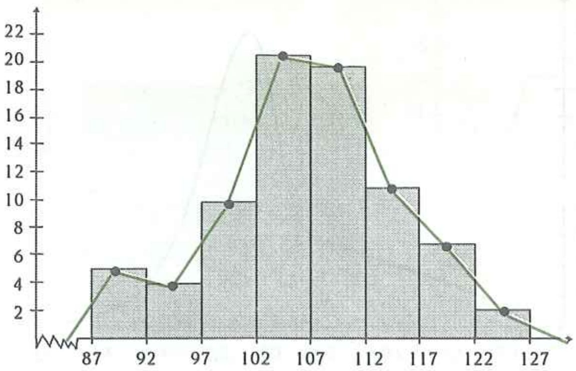


b) 24 c) 60%

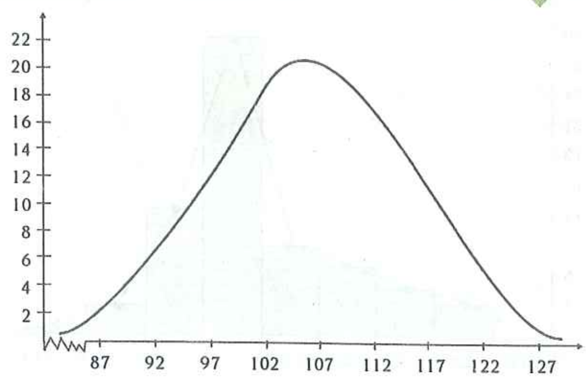
17.a. [87-92), [92-97), [97-102), [102-107), [107-112), [112-117), [117-122), [122-127)

b.

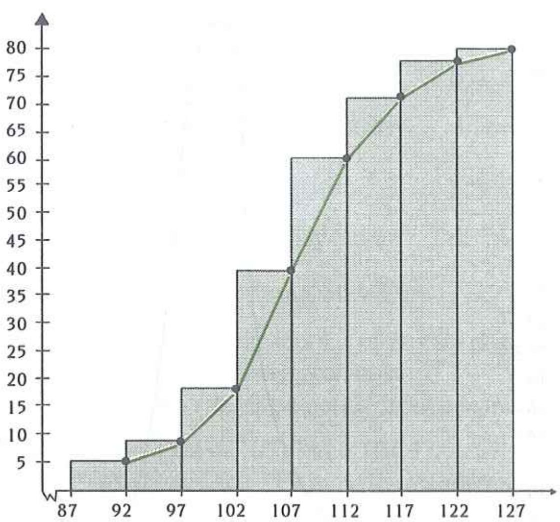
Coeficiente de inteligencia (CL)	Frecuencia absoluta	Frecuencia absoluta acumulada	Frecuencia relativa	Frecuencia relativa acumulada	Porcentaje
[87 - 92)	5	5	0,062	0,062	6,2%
[92 - 97)	4	9	0,050	0,112	5%
[97 - 102)	10	19	0,125	0,237	12,5%
[102 - 107)	21	40	0,262	0,500	26,2%
[107 - 112)	20	60	0,250	0,750	25%
[112 - 117)	11	71	0,137	0,887	13,7%
[117 - 122)	7	78	0,087	0,975	8,7%
[122 - 127)	2	80	0,025	1,0	2,5%



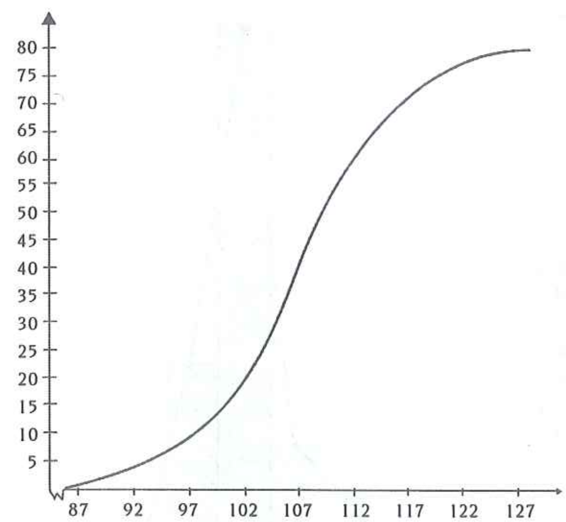
HISTOGRAMA DE FRECUENCIAS ABSOLUTAS
Y POLÍGONO DE FRECUENCIAS ABSOLUTAS



CURVA DE FRECUENCIAS ABSOLUTAS



HISTOGRAMA DE FRECUENCIAS ABSOLUTAS ACUMULADAS
Y POLÍGONO DE FRECUENCIAS ABSOLUTAS ACUMULADAS



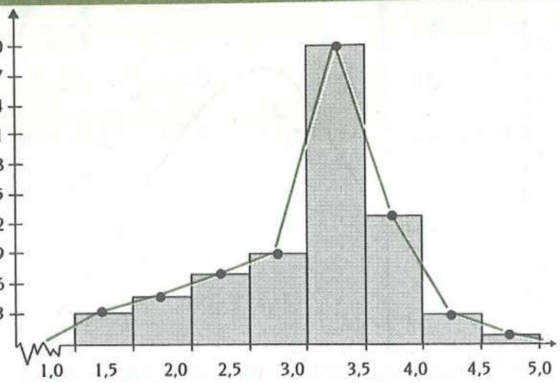
CURVA DE FRECUENCIAS (OJIVA)

d. 107 **e.** Simétrica

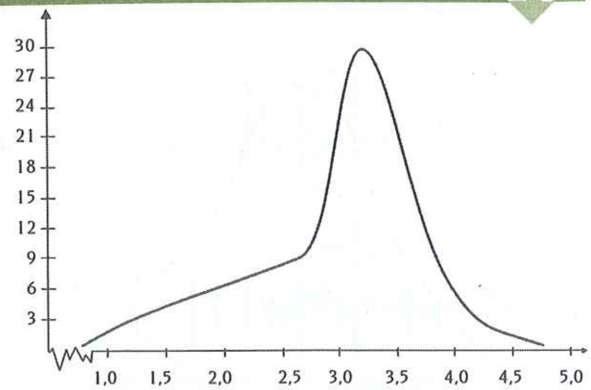
18.a. 32,86% **b.** 3,0 **c.** 58,6%

d.

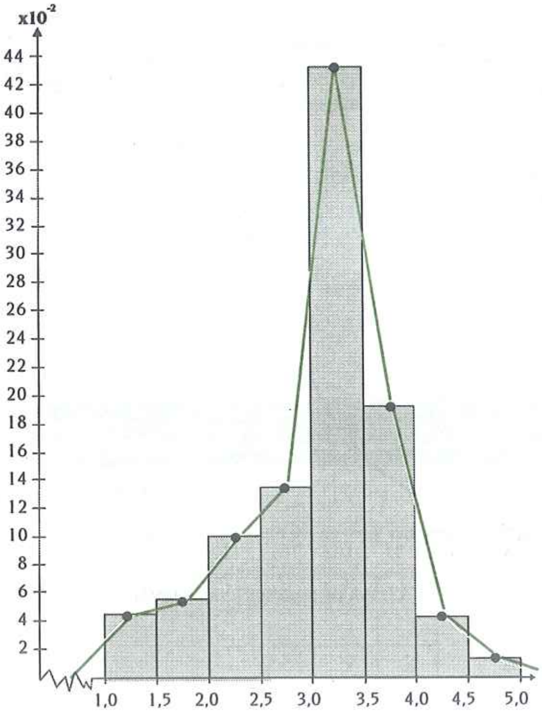
Calificación x_i	Frecuencia absoluta f_i	Frecuencia relativa	Porcentaje
[1,0 - 1,5)	3	0,043	4,3 %
[1,5 - 2,0)	4	0,057	5,7 %
[2,0 - 2,5)	7	0,100	10 %
[2,5 - 3,0)	9	0,129	12,9 %
[3,0 - 3,5)	30	0,429	42,9 %
[3,5 - 4,0)	13	0,186	18,6 %
[4,0 - 4,5)	3	0,043	4,3 %
[4,5 - 5,0)	1	0,013	1,3 %



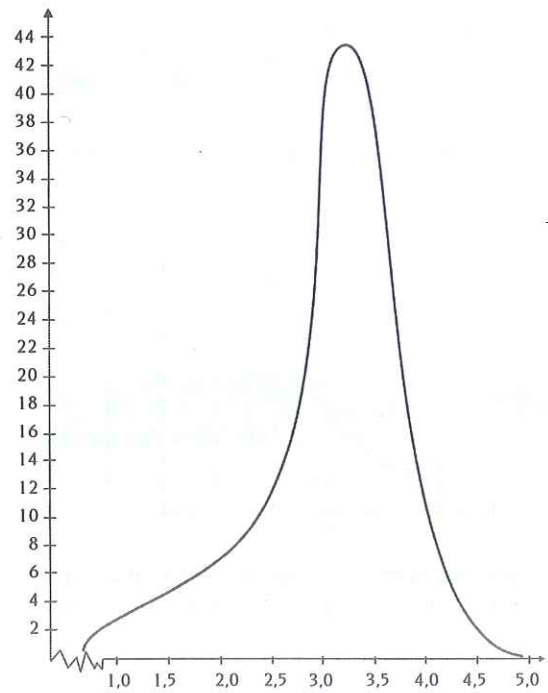
HISTOGRAMA DE FRECUENCIAS ABSOLUTAS ACUMULADAS Y POLÍGONO DE FRECUENCIAS ABSOLUTAS ACUMULADAS



CURVA DE FRECUENCIAS ABSOLUTAS

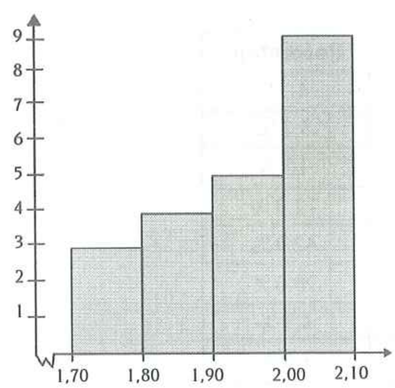


HISTOGRAMA Y POLÍGONO DE FRECUENCIAS RELATIVAS

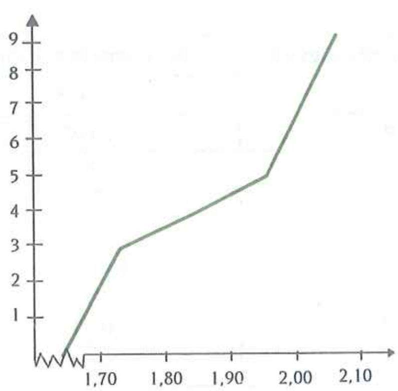


CURVA DE FRECUENCIAS RELATIVAS

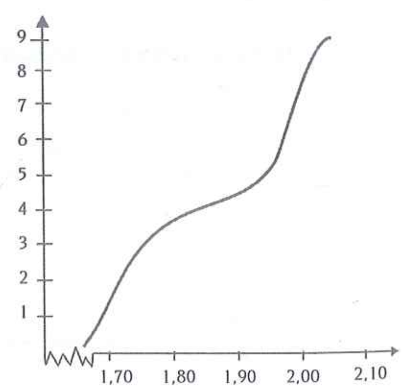
19. EQUIPO A:



HISTOGRAMA DE FRECUENCIAS ABSOLUTAS

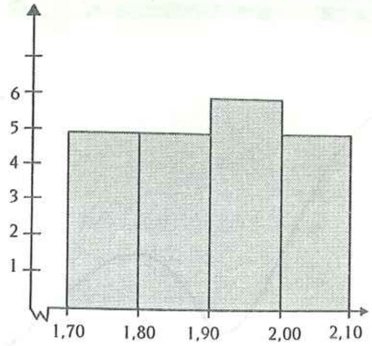


POLÍGONO DE FRECUENCIAS ABSOLUTAS

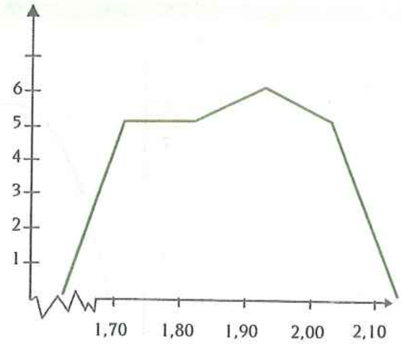


CURVA DE FRECUENCIAS ABSOLUTAS

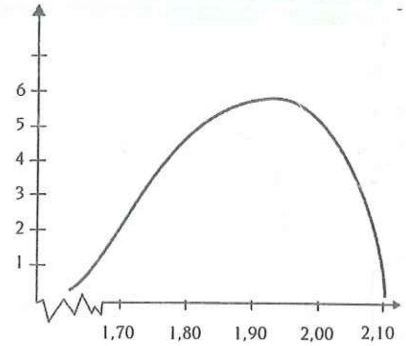
19. EQUIPO B:



HISTOGRAMA DE FRECUENCIAS ABSOLUTAS



POLÍGONO DE FRECUENCIAS ABSOLUTAS



CURVA DE FRECUENCIAS ABSOLUTAS

c. La curva del equipo A es asimétrica y la del equipo B es simétrica

Ejercicio 10.2

1. a) **2.** c) **3.** d) **4.** a) **5.** d) **6.** b) **7.** a) **8.** 4 **9.** a) **10.** a) **11.** a) **12.** a)

13. a. $\overline{x} \approx 12{,}9$ Me= 10,5, Mo=3 **b.** $\overline{x} = 11{,}86$, Me= 7 , Mo=5, Mo=7

c. $\overline{x} = 7{,}86$, Me= 7. No hay moda **d.** $\overline{x} \approx 8{,}9$ Me=11 , No hay moda

14. a. $\overline{x} \approx 0{,}38$, Me= 0 , Mo=0 **b.** $\overline{x}$ =Me= Mo=3

c. $\overline{x} \approx 7{,}86$, Me= 7. No hay moda **d.** $\overline{x} \approx 0{,}13$ Me=0 , Mo=0

15. 62 **16.** La mediana, Me=4,5

17. a. Me= 3 (la está pagando), $\overline{x} \approx 3$ (la está pagando), Mo=3

b. La media aritmética o promedio

c. El promedio de las personas están pagando la casa.

18. a. $\overline{x} \approx 109{,}4$; Me=107 , Mo= 104,5

c. Esto significa que el 50% de los estudiantes tienen el coeficiente de inteligencia (CI) a partir de 107.

19. a. $x \approx 3{,}1$; Me $\approx 3{,}1$; Mo=3,25 **b.** Más del 50% tienen una nota a partir de 3,0.

TALLER DE REPASO DE LA UNIDAD 10

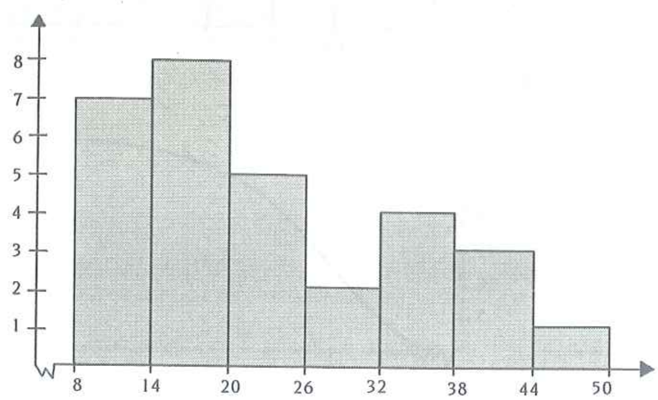
10

2. a. 64 **b.** 0,64

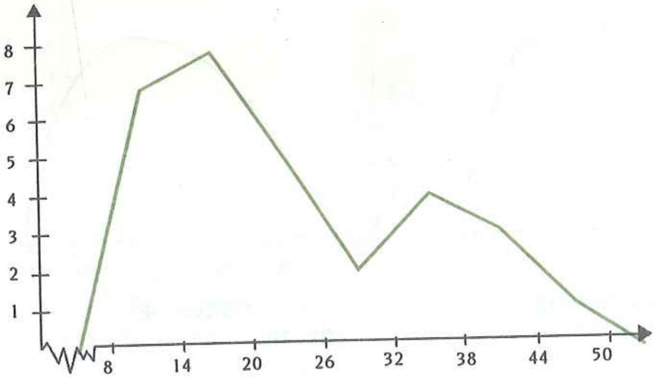
3. Promedio del alumno A: $\overline{x}_A \approx 3{,}8$, promedio del alumno A: $\overline{x}_B \approx 3{,}8$

4. $\overline{x} = 5$, Me= 4 , La moda son 2, 3 y 6

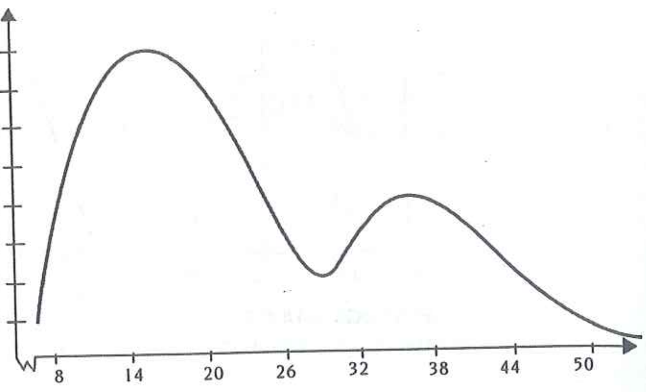
5. a.



b.



c.

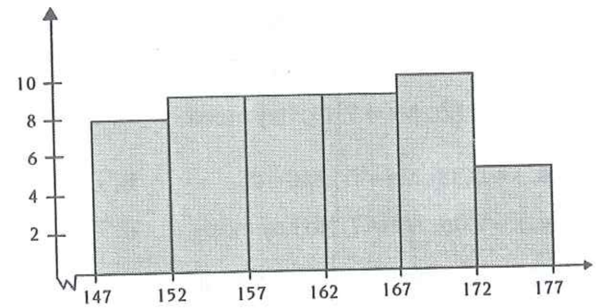


d. $\overline{x} \approx 27{,}87$, Me = 17 , Mo=17

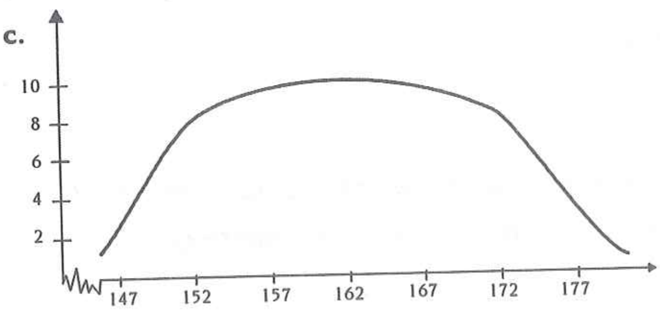
6. a.

Intervalo	x_i	f_i	F_i
[147 - 152)	149,5	8	8
[152 - 157)	154,5	9	17
[157 - 162)	159,5	9	26
[162 - 167)	164,5	9	35
[167 -172)	169,5	10	45
[172 - 177)	174,5	5	50

b.



c.



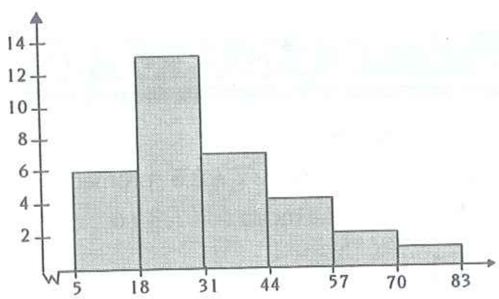
d. $\overline{x} \approx 161{,}4$; Me $\approx$ 161,4 , Mo = 169,5

e. La media aritmética o promedio que es 161,4

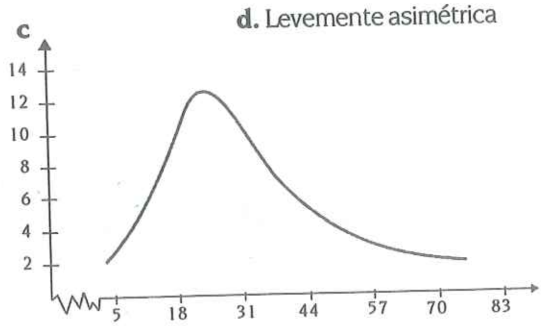
7. a.

Intervalo	x_i	f_i	F_i
[5 - 18)	11,5	6	6
[18 - 31)	24,5	13	19
[31 - 44)	37,5	7	26
[44 - 57)	50,5	4	30
[57 - 70)	63,5	2	32
[70 - 83)	76,5	1	33

b.

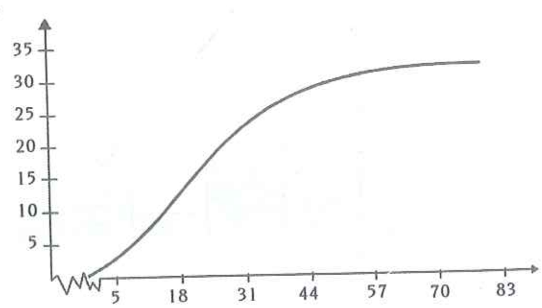


c



d. Levemente asimétrica

e.

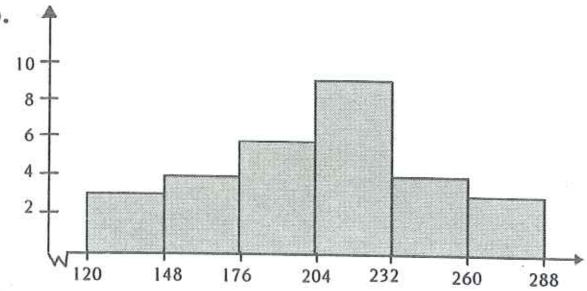


f. $\overline{x} \approx 32$, Me= 28,5 , Mo=24,5   g. La mediana

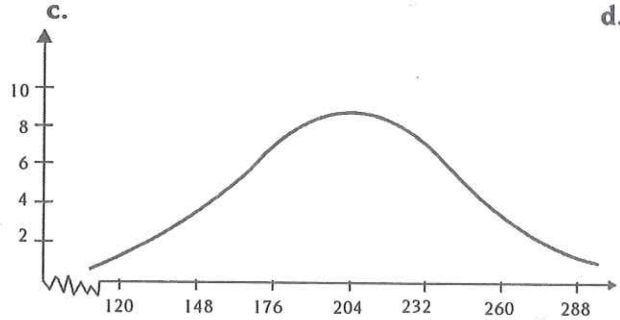
8. a.

Intervalo	x_i	f_i	F_i
[120 - 148)	134	3	3
[148 - 176)	162	4	7
[176 - 204)	190	6	13
[204 - 232)	218	9	22
[232 - 260)	246	4	26
[260 - 288)	274	3	29

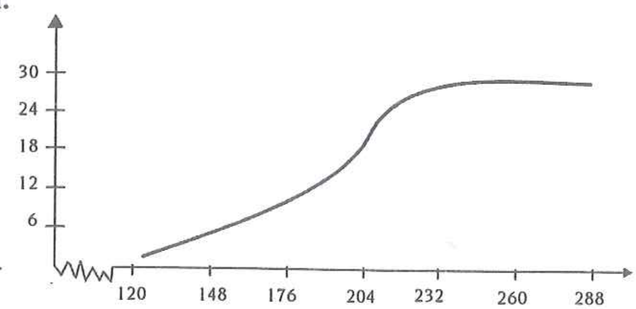
b.



c.



d.



e. $\overline{x} \approx 205{,}4$ Me=208,7 , Mo=218,

f. La mediana

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 10

1. b)   2. d)

PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS DEL ICFES 10

1. a)   2. b)   3. b)   4. d)   5. a)