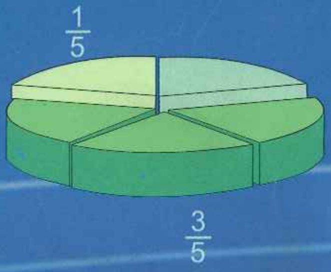
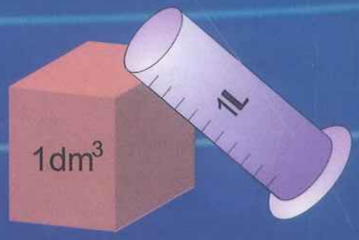
CON ESTÁNDARES
PARA LA EXCELENCIA
Y DESARROLLO DE COMPETENCIAS

MATEMÁTICA EXPERIMENTAL 7

Aritmética - Geometría - Estadística





UROS EDITORES

Julio Alberto Uribe Cálad
Marco Tulio Ortiz Díez

Manuela Pareja Cardona !

CON ESTÁNDARES
PARA LA EXCELENCIA
Y DESARROLLO DE COMPETENCIAS

MATEMATICA EXPERIMENTAL

7

SÉPTIMO GRADO
EDUCACIÓN BÁSICA SECUNDARIA

SEGUNDA EDICIÓN ACTUALIZADA
2007

Julio Alberto Uribe Cálad
Marco Tulio Ortiz Díez

UROS editores

Manuela Puerto Cardona L.

Este texto ha sido elaborado por los autores de acuerdo con los programas del Ministerio de Educación Nacional y bajo la responsabilidad de los siguientes integrantes:

AUTORES

JULIO ALBERTO URIBE CÁLAD

- Licenciado en Matemáticas y Física de la Universidad de Antioquia, año 1.980
- Posgraduado en Didáctica Universitaria en la misma universidad en el año 2002.
- Rector del colegio Calasanz de Medellín entre los años 1991 y 2002 y profesor de la misma institución desde el año 1971
- Profesor Asociado de la Universidad Nacional de Colombia, sede de Medellín, desde el año 1980
- Distinguido con el premio a la Docencia Excepcional por el Consejo Superior de la Universidad Nacional en los años 2000, 2001 y 2002.
- Coautor de la reconocida serie ELEMENTOS DE MATEMÁTICAS publicada por Editorial Bedout entre los años 1989 y 1999.
- Autor y coautor de más de 25 textos, incluidos dos de carácter universitario, uno de los cuales es actualmente el texto guía en el curso de GEOMETRÍA VECTORIAL, para estudiantes de ingeniería en la Universidad Nacional de Colombia, sede de Medellín.

MARCO TULIO ORTIZ DÍEZ

- Licenciado en Matemáticas y física de la Universidad de Antioquia, en el año 1982.
- Profesor del colegio Calasanz de Medellín, desde hace 25 años.
- Profesor del liceo Concejo de Medellín desde hace 15 años.
- Profesor del Instituto Nocturno de Bachillerato de la Universidad de Antioquia, durante 28 años.

COMITÉ TÉCNICO

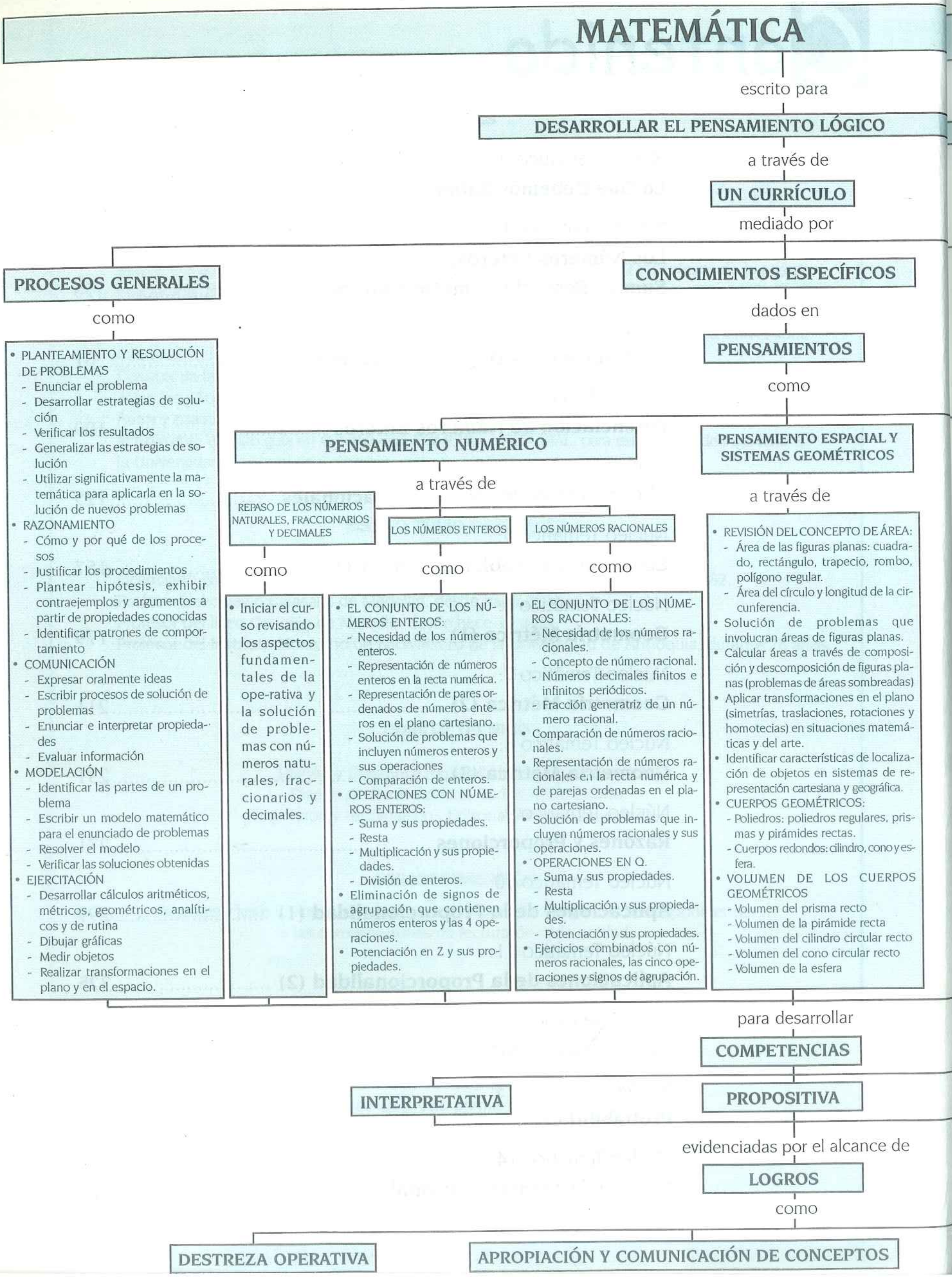
Diseño y Diagramación: Isabel Consuelo Alvarez M.
Diseño de Carátula: Juan Carlos Uribe Osorio
Impresión y terminación: Editorial Artes y Letras Ltda.

AGRADECIMIENTOS:

Al profesor Jesús Enrique Uribe Ángel, quien elaboró las preguntas correspondientes a las comprensiones de lectura de cada unidad.

ISBN: 958 - 97531-2-4

Contenido



MATEMÁTICA

escrito para

DESARROLLAR EL PENSAMIENTO LÓGICO

a través de

UN CURRÍCULO

mediado por

PROCESOS GENERALES

como

- PLANTEAMIENTO Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
  - Enunciar el problema
  - Desarrollar estrategias de solución
  - Verificar los resultados
  - Generalizar las estrategias de solución
  - Utilizar significativamente la matemática para aplicarla en la solución de nuevos problemas
- RAZONAMIENTO
  - Cómo y por qué de los procesos
  - Justificar los procedimientos
  - Plantear hipótesis, exhibir contraejemplos y argumentos a partir de propiedades conocidas
  - Identificar patrones de comportamiento
- COMUNICACIÓN
  - Expresar oralmente ideas
  - Escribir procesos de solución de problemas
  - Enunciar e interpretar propiedades
  - Evaluar información
- MODELACIÓN
  - Identificar las partes de un problema
  - Escribir un modelo matemático para el enunciado de problemas
  - Resolver el modelo
  - Verificar las soluciones obtenidas
- EJERCITACIÓN
  - Desarrollar cálculos aritméticos, métricos, geométricos, analíticos y de rutina
  - Dibujar gráficas
  - Medir objetos
  - Realizar transformaciones en el plano y en el espacio.

CONOCIMIENTOS ESPECÍFICOS

dados en

PENSAMIENTOS

como

PENSAMIENTO NUMÉRICO

a través de

REPASO DE LOS NÚMEROS NATURALES, FRACCIONARIOS Y DECIMALES

como

- Iniciar el curso revisando los aspectos fundamentales de la ope-rativa y la solución de problemas con números naturales, fraccionarios y decimales.

LOS NÚMEROS ENTEROS

como

- EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS ENTEROS:
  - Necesidad de los números enteros.
  - Representación de números enteros en la recta numérica.
  - Representación de pares ordenados de números enteros en el plano cartesiano.
  - Solución de problemas que incluyen números enteros y sus operaciones
  - Comparación de enteros.
- OPERACIONES CON NÚMEROS ENTEROS:
  - Suma y sus propiedades.
  - Resta
  - Multiplicación y sus propiedades.
  - División de enteros.
- Eliminación de signos de agrupación que contienen números enteros y las 4 operaciones.
- Potenciación en Z y sus propiedades.

LOS NÚMEROS RACIONALES

como

- EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS RACIONALES:
  - Necesidad de los números racionales.
  - Concepto de número racional.
  - Números decimales finitos e infinitos periódicos.
  - Fracción generatriz de un número racional.
- Comparación de números racionales.
- Representación de números racionales en la recta numérica y de parejas ordenadas en el plano cartesiano.
- Solución de problemas que incluyen números racionales y sus operaciones.
- OPERACIONES EN Q.
  - Suma y sus propiedades.
  - Resta
  - Multiplicación y sus propiedades.
  - Potenciación y sus propiedades.
- Ejercicios combinados con números racionales, las cinco operaciones y signos de agrupación.

PENSAMIENTO ESPACIAL Y SISTEMAS GEOMÉTRICOS

a través de

- REVISIÓN DEL CONCEPTO DE ÁREA:
  - Área de las figuras planas: cuadrado, rectángulo, trapecio, rombo, polígono regular.
  - Área del círculo y longitud de la circunferencia.
- Solución de problemas que involucran áreas de figuras planas.
- Calcular áreas a través de composición y descomposición de figuras planas (problemas de áreas sombreadas)
- Aplicar transformaciones en el plano (simetrías, traslaciones, rotaciones y homotecias) en situaciones matemáticas y del arte.
- Identificar características de localización de objetos en sistemas de representación cartesiana y geográfica.
- CUERPOS GEOMÉTRICOS:
  - Poliedros: poliedros regulares, prismas y pirámides rectas.
  - Cuerpos redondos: cilindro, cono y esfera.
- VOLUMEN DE LOS CUERPOS GEOMÉTRICOS
  - Volumen del prisma recto
  - Volumen de la pirámide recta
  - Volumen del cilindro circular recto
  - Volumen del cono circular recto
  - Volumen de la esfera

para desarrollar

COMPETENCIAS

INTERPRETATIVA

PROPOSITIVA

evidenciadas por el alcance de

LOGROS

como

DESTREZA OPERATIVA

APROPIACIÓN Y COMUNICACIÓN DE CONCEPTOS

EXPERIMENTAL 7

MATEMÁTICO

CONTEXTO

como

- Ambiente social y familiar que rodea al estudiante.
- Situación sicológica propias de la adolescencia
- Ambiente de motivaciónpara el aprendizaje que pueda crear el docente
- Reflexión sobre los procesos de pensamiento
- Motivación a la participación activa del estudiante
- Preparación para resolver otros problemas de la ciencia y de la vida

PENSAMIENTO MÉTRICO Y SISTEMAS DE MEDIAS

a través de

- Revisión de las unidades de longitud, superficie, capacidad, masa y volumen.
- Relación entre unidades de capacidad , masa y volumen.
- Unidades de medición de ángulos y del tiempo. Conversiones.
- Solución de problemas que involucran las distintas unidades de medida.
- Otras unidades de medida diferentes a las del Sistema Métrico Decimal.

PENSAMIENTO ALEATORIO Y SISTEMAS DE DATOS

a través de

- REVISIÓN DE ASPECTOS BÁSICOS DE ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA
  - Interpretación de tablas de frecuencias, diagramas de barras, circulares, de línea y polígonos de frecuencia, pictogramas
  - Frecuencia absoluta y frecuencia relativa
- MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL PARA DATOS NO AGRUPADOS
  - Media aritmética
  - Mediana
  - Moda
- AGRUPACIÓN DE DATOS
  - Rango o recorrido de una distribución.
  - Marca de clase
  - Frecuencia absoluta y frecuencia acumulada
  - Histogramas: histograma de frecuencias absolutas y de frecuencias acumuladas
  - Curvas de frecuencias absolutas y ojivas
  - Curvas asimétricas y simétricas
- MEDIA ARITMÉTICA Y MODA PARA DATOS AGRUPADOS
- PROBABILIDAD
  - Concepto de experimento
  - Hacer conjeturas acerca del resultado de un experimento aleatorio usando proporcionalidad y nociones básicas de probabilidad
  - Regla de Laplace

PENSAMIENTO VARIACIONAL Y SISTEMAS ALGEBRÁICOS ANALÍTICOS

a través de

- Revisar los conceptos de proporción, forma proposicional, constante y variable.
- Resolver ecuaciones de primer grado en los conjuntos Z y Q.
- Usar el concepto de proporción en el diseño de maquetas y mapas.
- Analizar las propiedades de variación directa e inversa en distintos contextos.
- Resolver problemas de regla de tres simple y compuesta.
- Resolver problemas de aritmética comercial.
- Aplicar a un conjunto dado de elementos, operadores de la forma (+a), (-a), x(+a), x(-a), ÷(+a), ÷(-a), siendo a ∈ Q. Obtener el conjunto de resultados, escribir el conjunto de pares ordenados, representar simbólicamente la operación y dibujar su gráfica cartesiana.
- Describir y representar situaciones de variación relacionando diferentes representaciones (diagramas sagitales, tablas, diagrama cartesiano).
- Identificar las características de las gráficas cartesianas (de puntos, continuas, formadas por segmentos, por curvas, etc.) en relación con la situación que representan.

ARGUMENTATIVA

DIBUJO DE GRÁFICOS

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Núcleo Temático

0

LO QUE DEBEMOS SABER

LOGRO GENERAL

- Afianzar y ampliar los conceptos relacionados con el conjunto de los números naturales, los números fraccionarios, los números decimales y sus operaciones básicas.

DIMENSIONES

LOGROS ESPECÍFICOS	INDICADORES DE LOGRO
Corporal: • Realizar actividades de aprendizaje que faciliten la destreza operativa con números naturales, fraccionarios y decimales y la solución de problemas con las cuatro operaciones en cada uno de estos conjuntos.	• En grupos de tres alumnos, utilizan los conceptos revisados y las operaciones básicas para resolver ejercicios y problemas.
Comunicativa: • Emplear correctamente el vocabulario matemático relativo a los números naturales, fraccionarios y decimales. • Redactar problemas que involucren las operaciones básicas con números naturales, fraccionarios y decimales.	• Comprende y aplica los conceptos matemáticos desarrollados en la unidad. • Explica con claridad los procesos seguidos para la obtención de resultados.
Cognitiva: • Resolver ejercicios en los cuales hay que eliminar signos de agrupación con números naturales, fraccionarios y decimales. • Formular y resolver problemas donde intervienen varias de las operaciones básicas con números naturales, fraccionarios y decimales.	• Utiliza las propiedades de las operaciones para agilizar los cálculos numéricos. • Resuelve ejercicios en los que es necesario eliminar signos de agrupación.
Estética: • Elaborar tablas, fichas y diagramas en cartulina donde muestra ejercicios con las cuatro operaciones básicas con números naturales, fraccionarios y decimales.	• Socializa los ejercicios escritos en las fichas, al interactuar con los compañeros.
Etica - Actitudinal: • Resaltar la contribución de la matemática en el desarrollo de habilidades de pensamiento.	• Demuestra interés por aprender.

EVALUACIÓN

ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS

0.1 CALENTANDO MOTORES

- Antes de comenzar este curso de 7° grado, es conveniente que pongas a punto tu cerebro, y nada mejor que revisando algunos de los contenidos estudiados en los grados anteriores, relativos a los diferentes pensamientos matemáticos: **pensamiento numérico, pensamiento geométrico, pensamiento métrico, pensamiento aleatorio y pensamiento variacional.**

- Esta revisión la haremos recordando los conceptos teóricos correspondientes a un determinado contenido, luego, presentando algunos ejemplos ilustrativos o ejercicios resueltos y finalmente, proponiendo un taller con ejercicios para ser resueltos por el estudiante.

- Los contenidos que vamos a revisar en esta unidad son los siguientes:

  1. **Pensamiento Numérico:**

     * **Números Naturales:** suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación. Eliminación de signos de agrupación.

     * **Números Fraccionarios:** suma, resta, multiplicación y división. Eliminación de signos de agrupación.

     * **Números Decimales:** suma, resta, multiplicación, división y potenciación. Eliminación de signos de agrupación.

  2. **Pensamiento Variacional:**

     * **Operaciones Unarias:** características de las operaciones unarias, diagramas sagitales, diagramas cartesianos y la representación simbólica f(x)= y de una operación unaria.

- Las revisiones correspondientes a los otros pensamientos las iremos realizando al comienzo de aquellos núcleos temáticos donde se vayan a trabajar sus contenidos.

0.2 NÚMEROS NATURALES Y SIGNOS DE AGRUPACIÓN

RECORDEMOS

- En matemáticas, los signos de agrupación más comunes son: el **parentesis:** ( ) , el **corchete:** [ ] y las **llaves:** { }.

- Los signos de agrupación se utilizan para indicar el orden en que deben realizarse ciertas operaciones.
- Cuando en una expresión aparecen varios signos de agrupación, ésta puede resolverse de dos formas distintas:

  1) Realizando primero las operaciones que aparecen en los signos de agrupación más internos y continuar trabajando de adentro hacia afuera.

  o

  2) Eliminando los signos de agrupación, empezando por los que están más internos y continuar trabajando de adentro hacia afuera. Esta segunda forma es la más práctica porque permite trabajar con expresiones que incluyen variables (letras).
- Cuando en un ejercicio aparecen las operaciones de suma, resta, multiplicación y división y **NO HAY SIGNOS DE AGRUPACIÓN**, las primeras operaciones que se realizan son la multiplicación y la división; luego, las sumas y las restas.
- Cuando en un ejercicio aparecen las operaciones de suma, resta, multiplicación y división y **HAY SIGNOS DE AGRUPACIÓN**, las primeras operaciones que se realizan son las que están dentro de los signos de agrupación más internos; es decir, trabajamos de adentro hacia afuera.

EJERCICIOS RESUELTOS

① **Teniendo en cuenta la siguiente expresión: $34 + \{5 + [3 - (4-1) + 5] - (7 - 6 + 1)\}$,**

Se pide:

a) Identificar los signos de agrupación internos.

b) Hallar el valor de la expresión realizando primero las operaciones contenidas en los signos de agrupación más internos y trabajando de adentro hacia afuera.

c) Hallar el valor de la expresión eliminando primero los signos de agrupación más internos y, luego, efectuando las operaciones.

Solución

a) $34 + \{5 + [3 - \boxed{(4 - 1)} + 5] - \boxed{(7 - 6 + 1)}\}$

Estos son los signos de agrupación más internos

b) $34 + \{5 + [3 - (4 - 1) + 5] - (7 - 6 + 1)\}$

$= 34 + \{5 + [3 - 3 + 5] - 2\}$

$= 34 + \{5 + 5 - 2\}$

$= 34 + 8$

$= 42$

RECUERDA: cuando eliminamos un signo de agrupación precedido del signo **-**, debemos cambiar los signos de los números que están dentro de él.

c) $34 + \{5 + [3 - (4 - 1) + 5] - (7 - 6 + 1)\}$

$= 34 + \{5 + [3 - 4 + 1 + 5] - 7 + 6 - 1\}$

$= 34 + \{5 + 3 - 4 + 1 + 5 - 7 + 6 - 1\}$

$= 34 + 5 + 3 - 4 + 1 + 5 - 7 + 6 - 1$

$= 42$

RECUERDA: cuando eliminamos un signo de agrupación precedido del signo **+**, no les cambiamos el signo a los números que están dentro de él.

② **Introduzcamos los tres últimos números de las expresiones:**

a) 13 + 4 - 2 + 1 - 3 + 5 **b) 9 - 3 + 2 + 5 - 2 + 1**

en un paréntesis precedido del signo +

Al agrupar los números en el paréntesis precedido del signo +, **NO** les cambiamos sus signos.

Solución

a) $13 + 4 - 2 + 1 - 3 + 5 = 13 + 4 - 2 + (1 - 3 + 5)$

b) $9 - 3 + 2 + 5 - 2 + 1 = 9 - 3 + 2 + (5 - 2 + 1)$

③ **Introduzcamos los tres últimos números de las expresiones:**

a) 13 + 4 - 2 - 4 - 3 + 5 **b) 9 - 3 + 2 - 7 + 2 - 1**

en un paréntesis precedido del signo -

Al agrupar los números en el paréntesis precedido del signo -, les cambiamos sus signos.

Solución

a) $13 + 4 - 2 - 4 - 3 + 5 = 13 + 4 - 2 - (4 + 3 - 5)$

b) $9 - 3 + 2 - 7 + 2 - 1 = 9 - 3 + 2 - (7 - 2 + 1)$

④ **Calculemos el valor de: 2 x 5 + 3 x 10 - 18 ÷ 3**

Solución

- Como en la expresión aparecen las operaciones de suma, resta, multiplicación y división y **NO HAY SIGNOS DE AGRUPACIÓN**, las primeras operaciones que se realizan son la multiplicación y la división; luego, la suma y la resta; así:

$$\underbrace{2 \times 5} + \underbrace{3 \times 10} - \underbrace{18 \div 3}$$

$$= 10 + 30 - 6$$

$$= 34$$

⑤ **Calculemos el valor de $80 + [\,3 \times (6 - 2 + 5) - 24 \div 8\,]$**

Solución

- Como en la expresión aparecen las operaciones de suma, resta, multiplicación y división y **HAY SIGNOS DE AGRUPACIÓN**, las primeras operaciones que se realizan son las que están dentro de los signos de agrupación más internos; es decir, trabajamos de adentro hacia afuera, así:

$$80 + [\,3 \times (6 - 2 + 5) - 24 \div 8\,]$$

Este paréntesis es el signo de agrupación más interno y por eso lo resolvemos primero

$$(6 - 2 + 5) = 9$$

$$= 80 + [\,3 \times 9 - 24 \div 8\,]$$

Como dentro del corchete aparecen una resta, una multiplicación y una división, entonces realizamos primero la multiplicación y la división y luego, la resta

$$[\,3 \times 9 - 24 \div 8\,] = [27 - 3]$$

$$= 80 + [\,27 - 3\,]$$

$$= 80 + \underset{\downarrow}{}\ 24$$

$$= 104$$

- **Pregunta:** ¿Cuál es la operación dominante en esta expresión? ¿Por qué?

EJERCICIO 0-1

① Resuelve: $6 \times 8 - 7 \times 4 + 3 \times 3$

② Resuelve: $14 \times 10 + 2 \times 5 - 32 \div 4 + 3 \times 7$

En los ejercicios ③ a ⑥ se pide:

a) Identificar los signos de agrupación más internos

b) Hallar el valor de la expresión realizando primero las operaciones contenidas en los signos de agrupación más internos y trabajando de adentro hacia afuera.

c) Hallar el valor de la expresión eliminando primero los signos de agrupación más internos y luego, efectuando las operaciones.

③ $120 - \{ 42 + 4 + [16 - 13 + (20 - 3)] + (19 - 12) \}$

④ $100 - \{ 2 + 5 - [7 - 3 + (6 + 9 + 2) - (14 + 2)] + 1 + 4\}$

⑤ $74 - 8 - \{ (17 + 14) - [(4+7) + 7 - 5 - (7 + 2 - 7)] + 4\}$

⑥ $21 + 6 - \{4+2-3+ [2+ 4 -1- (3+2) + 7] + 6 + 5 - 2\}$

⑦ Introduce, en las siguientes expresiones, los tres últimos números en un paréntesis precedido del signo (+).

a) $8 + 4 - 2 + 7 - 5 - 2$

b) $6 - 7 + 8 + 16 - 4 + 15 - 1$

⑧ Introduce, en las expresiones del ejercicio anterior, los tres últimos números en un paréntesis precedido del signo (-).

En los ejercicios ⑨ a ⑬ se pide:

a) Identificar la operación dominante

b) Resolver la expresión.

⑨ $(9 + 3) \div (6 - 2)$

⑩ $[(11 - 5) \times (7 - 2) + 10] - (4 + 3) \times 5$

⑪ $(72 \div 12) \times 7 - (66 \div 11) \times 4$

⑫ $[(9 + 3) \div (6 - 2)] + 8 - [2 \times (9 \div 3)] \div 3$

⑬ $\{5 \times [12 \div (4 - 2) + 3] - 5\} \times \{ 30 - [4 \times (10 - 3) + 2]\}$

0.3 POTENCIACIÓN Y RADICACIÓN EN N

0.3.1 Potenciación

RECORDEMOS

- La **POTENCIACIÓN** en el conjunto de los números naturales es la operación que consiste en multiplicar por sí mismo un número llamado **BASE**, tantas veces como lo indica otro número llamado **EXPONENTE.**

Ejemplo: $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = \underset{\text{Base}}{2}^{\overset{\text{Exponente}}{5}}$

- La potenciación es una operación **BINARIA**: los objetos por operar son la base y el exponente y el resultado es la potencia.
- La **POTENCIACIÓN** es el nombre de la operación y la **POTENCIA** es el resultado.
- 2^5 se lee "2 elevado a la 5" o "la quinta potencia de 2".
- Las potencias de exponente 2 se llaman **CUADRADOS** y las de exponente 3 se llaman **CUBOS.**

Ejemplos: 5^2 se lee "cuadrado de 5" o "5 al cuadrado"
6^3 se lee "cubo de 6" o "6 al cubo"

- Cuando tenemos una potencia de base 10, el resultado es la unidad (1) seguida de tantos ceros como indique el exponente.

Ejemplo: $10^3 = 1.000$; $10^2 = 100$; $10^5 = 100.000$

- Las propiedades de la potenciación son:

1. **PRODUCTO DE POTENCIAS DE IGUAL BASE:** escribimos la misma base y sumamos los exponentes: $7^2 \bullet 7^3 \bullet 7^5 = 7^{2+3+5} = 7^{10}$
2. **DIVISIÓN DE POTENCIAS DE IGUAL BASE**: escribimos la misma base y restamos los exponentes: $8^5 \div 8^3 = \frac{8^5}{8^3} = 8^{5\text{-}3} = 8^2$
3. **EXPONENTE 1 y EXPONENTE 0:**
   - Todo número natural elevado al exponente 1 es igual al mismo número natural:
     $3^1 = 3$, $4^1 = 4$, $7^1 = 7$.
   - Todo número natural, excepto el cero, elevado al exponente 0 es igual a 1:
     $5^0 = 1$, $7^0 = 1$, $8^0 = 1$.
4. **POTENCIA DE UNA POTENCIA:** para elevar una potencia a un exponente escribimos la misma base y multiplicamos los exponentes: $(2^3)^4 = 2^{3 \cdot 4} = 2^{12}$.
5. **POTENCIA DE UN PRODUCTO:** para elevar un producto a un exponente se eleva cada factor al exponente y, luego, efectuamos el producto: $(3 \cdot 4 \cdot 5)^4 = 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5^2$.

EJERCICIOS RESUELTOS

❶ Escribamos en forma abreviada los siguientes productos y, luego, identifiquemos el exponente, la base y la potencia:

a) $3 \times 3 \times 3 \times 3$ **b)** $5 \times 5 \times 5$ **c)** $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

Solución

a) $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4 = 81$. BASE: 3, EXPONENTE: 4, POTENCIA: 81

b) $5 \times 5 \times 5 = 5^3 = 125$. BASE: 5, EXPONENTE: 3, POTENCIA: 125

c) $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5 = 32$. BASE: 2, EXPONENTE: 5, POTENCIA: 32

② Simplifiquemos, aplicando las propiedades de la potenciación, y hallemos el resultado de:

$$\frac{(2^3)^7 \bullet 3^4 \bullet (2^0)^3 \bullet (3^2)^3 \bullet 7^5 \bullet 3}{(3^2)^2 \bullet 2^4 \bullet 3^6 \bullet (7^2)^2 \bullet (2^3)^5 \bullet 7}$$

Solución

$$\frac{(2^3)^7 \bullet 3^4 \bullet (2^0)^3 \bullet (3^2)^3 \bullet 7^5 \bullet 3}{(3^2)^2 \bullet 2^4 \bullet 3^6 \bullet (7^2)^2 \bullet (2^3)^5 \bullet 7} = \frac{2^{21} \bullet 3^4 \bullet 2^0 \bullet 3^6 \bullet 7^5 \bullet 3}{3^4 \bullet 2^4 \bullet 3^6 \bullet 7^4 \bullet 2^{15} \bullet 7} \;\ldots\ldots\ldots$$ aplicamos potencia de potencia varias veces.

$$= \frac{(2^{21} \bullet 2^0) \bullet (3^4 \bullet 3^6 \bullet 3) \bullet 7^5}{(2^4 \bullet 2^{15}) \bullet (3^4 \bullet 3^6) \bullet (7^4 \bullet 7)} \;\ldots\ldots\ldots$$ aplicamos las propiedades asociativa y conmutativa de la multiplicación.

$$= \frac{2^{21} \bullet 3^{11} \bullet 7^5}{2^{19} \bullet 3^{10} \bullet 7^5} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$ ¿qué propiedad aplicamos?

$$= 2^{21-19} \bullet 3^{11-10} \bullet 7^{5-5} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$ ¿qué propiedad aplicamos?

$$= 2^2 \bullet 3^1 \bullet 7^0$$

$$= 4 \bullet 3 \bullet 1 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$ ¿qué propiedad aplicamos?

$$= 12$$

③ Simplifiquemos, aplicando las propiedades de la potenciación, y hallemos el resultado de:

$$\left[\frac{(2^4)^5 \bullet 3^2 \bullet (5^4)^2 \bullet 2^4}{(2^6)^3 \bullet 2^6 \bullet 3 \bullet 5^6 \bullet 5}\right]^2$$

Solución

$$\left[\frac{(2^4)^5 \bullet 3^2 \bullet (5^4)^2 \bullet 2^4}{(2^6)^3 \bullet 2^6 \bullet 3 \bullet 5^6 \bullet 5}\right]^2 = \left[\frac{2^{20} \bullet 3^2 \bullet 5^8 \bullet 2^4}{2^{18} \bullet 2^6 \bullet 3 \bullet 5^6 \bullet 5}\right]^2 \;\ldots\ldots\ldots\ldots$$ ¿por qué?

$$= \left[\frac{(2^{20} \bullet 2^4) \bullet 3^2 \bullet 5^8}{(2^{18} \bullet 2^6) \bullet 3 \bullet (5^6 \bullet 5)}\right]^2 \;\ldots\ldots\ldots\ldots$$ ¿por qué?

$$= \left[\frac{2^{24} \bullet 3^2 \bullet 5^8}{2^{24} \bullet 3 \bullet 5^7}\right]^2 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$ ¿por qué?

$$= [\, 2^{24-24} \bullet 3^{2-1} \bullet 5^{8-7} \,]^2 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$ ¿por qué?

$$= [\, 2^0 \bullet 3 \bullet 5 \,]^2 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$ ¿por qué?

$$= (2^0)^2 \bullet (3)^2 \bullet (5)^2 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$ ¿por qué?

$$= 2^0 \bullet 3^2 \bullet 5^2 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$ ¿por qué?

$$= 1 \bullet 9 \bullet 25 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$ ¿por qué?

$$= 225 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$ ¿por qué?

0.3.2 Radicación

RECORDEMOS

- La RADICACIÓN es la operación inversa de la potenciación que permite hallar la base si se conocen el exponente y la potencia.

  Si $\boxed{?}^3 = 8$ entonces $\boxed{?} = \sqrt[3]{8}$

  Indice

  Radicando

  Raiz

- El signo de la operación **RADICACIÓN** es $\sqrt{}$ y se denomina **SIGNO RADICAL.**
- Si el índice de la raíz es 2, éste no se escribe. En consecuencia, $\sqrt{4}$, $\sqrt{16}$ y $\sqrt{19}$ tienen índice 2.
- Una raíz se lee según el índice; así: $\sqrt{4}$ se lee "raíz cuadrada de 4"; $\sqrt[3]{8}$ se lee "raíz cúbica de 8"; $\sqrt[5]{32}$ se lee "raíz quinta de 32"
- La raíz es exacta si es posible hallar un número natural que elevado al índice nos de el radicando.

  Ejemplo: $\sqrt{4}$ es exacta porque $2^2 = 4$; es decir, $\sqrt{4} = 2$

  $\sqrt[3]{125}$ es exacta porque $5^3 = 125$; es decir, $\sqrt[3]{125} = 5$

- La raíz de 1 en cualquier índice es 1: $\sqrt[5]{1} = 1$ porque $1^5 = 1$
- La raíz de 0 en cualquier índice es 0: $\sqrt[3]{0} = 0$ porque $0^3 = 0$
- La raíz es **INEXACTA** si no existe un número natural que elevado al índice nos de el radicando. $\sqrt[3]{2}$ es inexacta porque no existe un natural que elevado a la 3 nos de 2.

EJERCICIOS RESUELTOS

① **Escribamos en forma de radicación los siguientes ejercicios de potenciación:**

a) $5^2 = 25$; b) $1^7 = 1$.

Solución

a) $5^2 = 25$ es lo mismo que $\sqrt[2]{25} = 5$

b) $1^7 = 1$ es lo mismo que $\sqrt[7]{1} = 1$

② Determinemos cuáles de las siguientes raíces son exactas y por qué.

a) $\sqrt{16}$ **b)** $\sqrt[3]{1}$ **c)** $\sqrt{0}$ **d)** $\sqrt[6]{64}$ **e)** $\sqrt{6}$

Solución

a) $\sqrt{16}$ es exacta porque existe un número que elevado al índice 2 nos da el radicando 16. Este número es 4; es decir: $\sqrt{16} = 4$ porque $4^2 = 16$.

b) $\sqrt[3]{1}$ es exacta porque $\sqrt[3]{1} = 1$ ya que $1^3 = 1$.

c) $\sqrt{0}$ es exacta porque $\sqrt{0} = 0$ ya que $0^2 = 0$.

d) $\sqrt[6]{64}$ es exacta porque $\sqrt[6]{64} = 2$ ya que $2^6 = 64$.

e) $\sqrt{6}$ no es exacta porque no existe un número natural que elevado al índice 2 nos de el radicando 6.

③ Utilicemos la operación radicación para calcular el valor de la letra x en la igualdad $x^2 = 49$.

Solución

Tenemos: $x^2 = 49$ ← **Exponente** **Potencia** **Base**

En este ejercicio de potenciación desconocemos la BASE y conocemos el EXPONENTE y la POTENCIA. La operación que nos permite hallar la base conocidos el exponente y la potencia se llama RADICACIÓN. Por lo tanto:

$$x^2 = 49 \quad \text{es lo mismo que} \quad \sqrt{49} = x$$

Y como $\sqrt{49} = 7$ porque $7^2 = 49$, entonces $x = 7$

④ Hallemos el resultado de $5^2 - \left(\sqrt{(\sqrt{16}+1)^2 - 4^2}\right)^2$

Solución

Empezamos siempre resolviendo las raíces y potencias más internas; así:

$$\begin{aligned} 5^2 - \left(\sqrt{(\sqrt{16}+1)^2 - 4^2}\right)^2 &= 25 - \left(\sqrt{(4+1)^2 - 4^2}\right)^2 \\ &= 25 - \left(\sqrt{5^2 - 16}\right)^2 \\ &= 25 - \left(\sqrt{25 - 16}\right)^2 \\ &= 25 - \left(\sqrt{9}\right)^2 \\ &= 25 - (3)^2 \\ &= 25 - 9 \\ &= 16 \end{aligned}$$

EJERCICIO 0-2

❶ Nombra la base, el exponente y la potencia de:

a) 3^4 b) 5^2 c) 2^5 d) 0^3 e) 1^7

❷ Nombra la base y el exponente de:

a) 4 x 4 x 4 b) 6 x 6 x 6 x 6

❸ Escribe las siguientes potencias como producto de factores iguales:

a) 2^4 b) 1^5 c) 3^2

❹ Escribe en forma de potencia y calcula:

a) Cubo de 2 b) Cubo de c c) Cuadrado de 6 d) Cuadrado de c

❺ Completa:

a) $5^0 = \boxed{1}$ b) $1^0 = \boxed{1}$ c) $36^0 = \boxed{1}$ d) $7^1 = \boxed{7}$

e) $10^1 = \boxed{10}$ f) $10^0 = \boxed{1}$ g) $10^5 = \boxed{100000}$ h) $(3^2 \cdot 4^5 \cdot 6^7)^0 = \boxed{1}$

❻ Escribe en forma de potencia de 10:

Ejemplo: $\underbrace{10,000.000}_{\text{7 ceros}} = 10^7$

a) 1.000 b) 1,000.000 c) 100.000

❼ Escribe los siguientes números usando potencias de 10:

Ejemplo: $1,004.\underbrace{000}_{\text{termina en 3 ceros}} = 1.004 \times 10^3$

a) 30.000 b) 502.000 c) 40.100

❽ Escribe cada número eliminando la potencia de 10:

Ejemplo: $302 \times 10^5 = 30,200.000$

a) 4×10^4 b) 105×10^2 c) 401×10^3

❾ Cuando un número se descompone en unidades, decenas, centenas, etc., utilizando potencias de 10, se dice que el número se ha descompuesto en **forma polinómica.**

Ejemplo: $$2\underbrace{0.345}_{\text{4 cifras} \longleftrightarrow} = 2\underbrace{0.000}_{\text{4 ceros}} + 3\underbrace{00}_{\text{2 ceros}} + 4\underbrace{0}_{\text{1 cero}} + 5$$

$$20.345 = 2 \times 10^4 + 3 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 5$$

Escribe los siguientes números en forma polinómica usando potencias de 10:

a) 29 b) 637 c) 1.478 d) 405.671

⑩ Simplifica, escribiendo la propiedad de la potenciación utilizada, y calcula el resultado de:

a) $\dfrac{(3^2)^5 \cdot 2^2 \cdot (2^5)^2 \cdot 3^5 \cdot (5^2)^3}{(5^3)^2 \cdot 2^4 \cdot 3^5 \cdot 2^6 \cdot 3^{10}}$ b) $\left[\dfrac{(7^2)^0 \cdot (3^5)^2 \cdot (7^4)^2 \cdot 3^7}{3^4 \cdot (7^3)^2 \cdot (3^3)^4 \cdot (7^0)^5 \cdot 7^2}\right]^2$

⑪ En cada uno de los siguientes ejercicios de radicación, indica cuál es la raíz, cuál es el índice y cuál es el radicando:

a) $\sqrt{81} = 9$ b) $\sqrt[4]{16} = 2$ c) $\sqrt[5]{1} = 1$

⑫ Escribe en forma de radicación los siguientes ejercicios de potenciación:

a) $3^3 = 27$ b) $4^2 = 16$ c) $5^3 = 125$ d) $1^4 = 1$

⑬ Escribe en forma de potenciación los siguientes ejercicios de radicación:

a) $\sqrt{25} = 5$ b) $\sqrt[8]{1} = 1$ c) $\sqrt[3]{8} = 2$ d) $\sqrt[5]{32} = 2$

⑭ Cuáles de las siguientes raíces son exactas y cuáles no. Justifica la respuesta:

a) $\sqrt{9}$ b) $\sqrt[3]{64}$ c) $\sqrt{8}$ d) $\sqrt[4]{7}$

⑮ Justificando las respuestas, halla el resultado de:

a) $\sqrt{64}$ b) $\sqrt[3]{125}$ c) $\sqrt[3]{27}$ d) $\sqrt[5]{1}$

⑯ Halla el resultado de:

a) $\left[\left(\sqrt{64} - \sqrt[3]{8}\right)^2 \div 2^6\right]^2$ b) $\left[\sqrt{(\sqrt{9}+1)^2+3^2} - \sqrt{(\sqrt{4}+1)^2 + 4^2}\right]^2$

⑰ Calcula el valor de la letra en cada igualdad, indicando la operación que permite hallarlo. Luego, verifica que la igualdad se hace verdadera con el valor encontrado.

a) $x^3 = 27$ b) $y^2 = 36$

⑱ Decimos que un número es CUADRADO PERFECTO si tiene raíz cuadrada exacta. Escribe 5 números que sean cuadrados perfectos.

⑲ Decimos que un número es CUBO PERFECTO si tiene raíz cúbica exacta. Escribe 5 números que sean cubos perfectos.

0.4 OPERACIONES UNARIAS O UNITARIAS

0.4.1 Lo fundamental

RECORDEMOS

- En toda **OPERACION** intervienen tres elementos básicos:
  - a) El **OPERADOR**: indica la acción que se debe realizar.
  - b) Los **OBJETOS:** son los elementos sobre los cuales actúa el operador.
  - c) El **RESULTADO**: es lo que se obtiene una vez realizada la acción.
- Una **OPERACIÓN** puede ser:
  - a) **UNARIA** o **UNITARIA**: cuando el operador actúa sobre un objeto a la vez.
  - b) **BINARIA**: cuando el operador actúa sobre dos objetos a la vez.
  - c) **POLINARIA**: cuando el operador actúa sobre tres o más objetos a la vez.
- En general, el **PROCEDIMIENTO** que utilizamos cuando **ACTUAMOS** sobre uno o varios objetos para obtener un **RESULTADO** se llama **OPERACIÓN.**

EJERCICIO RESUELTO

Dadas las siguientes operaciones:

1) Sumar 5 y 10 para obtener 15 ; 2) Sumar 5 a 10 para obtener 15.

Se pide:

a) Identificar el operador, los objetos y el resultado.
b) Indicar si la operación es unitaria o binaria y por qué.

Solución

1) a) **Sumar** **5** y **10** para obtener **15**

$$\underset{\text{operador}}{\underset{\uparrow}{\textbf{Sumar}}}\quad \underbrace{\textbf{5}\ \text{y}\ \textbf{10}}_{\text{objetos}}\quad \text{para obtener}\quad \underset{\text{resultado}}{\underset{\uparrow}{\textbf{15}}}$$

b) Esta operación es BINARIA ya que el operador **SUMAR** actúa sobre dos objetos a la vez: 5 y 10

2) a)

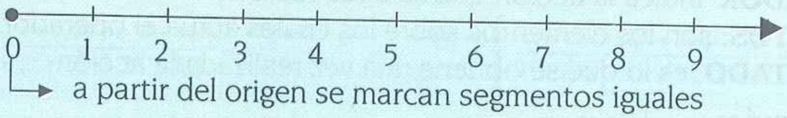
$$\underset{\text{operador}}{\underset{\uparrow}{\textbf{Sumar 5 a}}}\quad \underset{\text{objeto}}{\underset{\uparrow}{\textbf{10}}}\quad \text{para obtener}\quad \underset{\text{resultado}}{\underset{\uparrow}{\textbf{15}}}$$

b) Esta operación es UNITARIA ya que el operador **SUMAR 5 a** actúa sobre un solo objeto: 10

0.4.2 Gráfica y Representación Simbólica de Operaciones Unarias en N

RECORDEMOS

- Para **REPRESENTAR GEOMÉTRICAMENTE** los números naturales utilizamos la **SEMIRRECTA NUMÉRICA.**

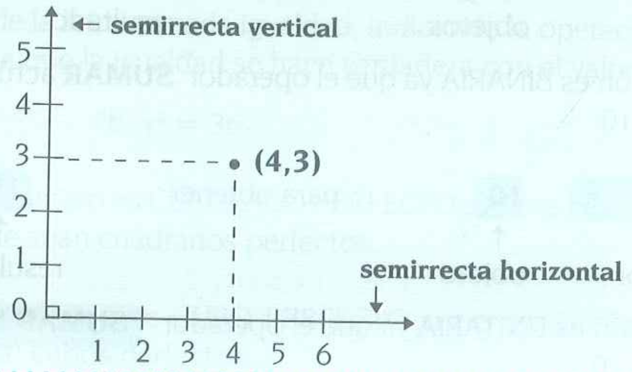


a partir del origen se marcan segmentos iguales

- La **SEMIRRECTA NUMÉRICA** es una semirrecta en la cual se ubican los números naturales.
- Un conjunto donde interesa el orden de sus elementos se denomina **CONJUNTO ORDENADO.** Si el conjunto ordenado consta de dos elementos se llama **PAR ORDENADO**, si consta de tres elementos se llama **TERNA ORDENADA.** Los elementos que componen un conjunto ordenado se denominan **COMPONENTES** o **COORDENADAS.**
- El conjunto (3,2) es el **PAR ORDENADO** 3,2 en la cual 3 y 2 son las componentes o coordenadas. El conjunto (5, 1, 2) es la **TERNA ORDENADA** 5, 1, 2 en la cual 5, 1 y 2 son las componentes o coordenadas.
- Las coordenadas de un conjunto ordenado pueden ser iguales.
- Los **PARES ORDENADOS** podemos representarlos gráficamente de dos formas:

1. Utilizando la **REPRESENTACION SAGITAL** o **DE FLECHAS.** Esta consiste en una flecha que va de la primera componente hasta la segunda; así:

2. Utilizando la **REPRESENTACION CARTESIANA.** Esta consiste en dos semirrectas numéricas que son perpendiculares en su **ORIGEN:** una horizontal y otra vertical.

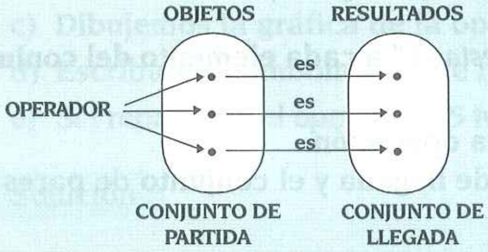


Si queremos representar, por ejemplo, el par ordenado (4,3) procedemos así:

- Sobre la semirrecta horizontal localizamos la primera componente de la pareja ordenada: 4 y por allí trazamos una línea recta punteada, perpendicular a la semirrecta horizontal.
- A continuación, sobre la semirrecta vertical localizamos la segunda componente de la pareja ordenada: 3 y por allí trazamos una línea recta punteada perpendicular a la semirrecta vertical.
- Estas dos líneas rectas punteadas se interceptan o cortan en un punto común. Este punto es la representación cartesiana del par (o pareja) ordenado (4,3).

- Para representar gráficamente una **OPERACION UNITARIA** podemos utilizar:

1. Un **DIAGRAMA SAGITAL o DE FLECHAS**



Este diagrama consta de:

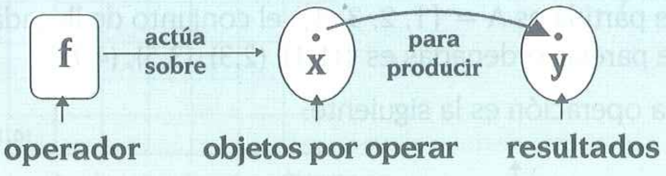
- El OPERADOR.
- Un CONJUNTO DE PARTIDA (donde van los objetos por operar).
- Un CONJUNTO DE LLEGADA (donde van los resultados).

2. Un DIAGRAMA CARTESIANO: donde se ubican las parejas ordenadas obtenidas de la aplicación de la operación. Las primeras componentes son los objetos por operar (conjunto de partida) y las segundas componentes son los resultados correspondientes (conjunto de llegada).

- Las operaciones unarias podemos representarlas simbólicamente, así:

$f(x) = y$, donde

* **f** representa el **operador**
* **x** representa el **objeto** por operar
* **y** representa el **resultado**



La expresión **f(x) = y** se lee **"f de x es igual a y"** y significa que **"el operador f actúa sobre x para producir y"**.

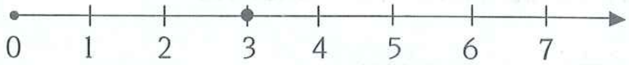
EJERCICIOS RESUELTOS

① **Representemos geométricamente el número 3.**

Solución

- Dibujamos una semirrecta numérica:

- Luego, sobre el número 3 marcamos un punto. Este punto es la representación geométrica del número 3.

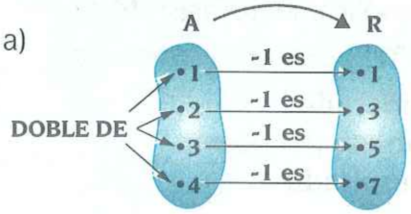


② **Apliquemos el operador "*doble de y luego restar* 1" a cada elemento del conjunto A = {1, 2, 3, 4} y, luego:**

a) Elaboremos el diagrama sagital de esta operación.
b) Escribamos el conjunto de partida, el de llegada y el conjunto de pares ordenados.
c) Dibujemos la gráfica de la operación.
d) Escribamos simbólicamente la operación.
e) Si el operador lo llamamos, f, responde: ¿Es $f(x) = 2x - 1$? ¿Por qué? ¿Es $f(3) = 5$? ¿Por qué?

Solución

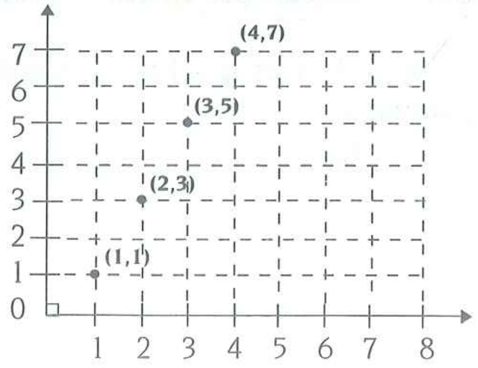
a)



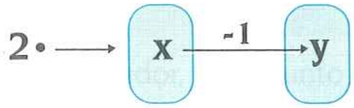
Operador: Doble de y luego restar 1.
Objetos: {1, 2, 3, 4}.
Resultados: {1, 3, 5, 7}.

b) El conjunto de partida es A = {1, 2, 3, 4}; el conjunto de llegada es R = {1, 3, 5, 7} y el conjunto de parejas ordenadas es {(1,1), (2,3), (3,5), (4,7)}.

c) La gráfica de la operación es la siguiente:



d) Decir "doble de" es lo mismo que decir "multiplicar por 2", por lo tanto:



el operador me dice que debo multiplicar por 2 el objeto (x) y luego restar 1 para obtener el resultado (y); es decir:

$$2 \cdot x - 1 = y$$

e) Sí, $\mathbf{f(x) = 2 \cdot x - 1}$ ya que f es el operador que actúa sobre x multiplicándolo por 2 y luego restándole 1 para obtener el resultado y; f(3) significa que debemos multiplicar el objeto 3 por 2 (nos da 6) y luego le restamos 1 (obtenemos 5). Por lo tanto, f (3) = 5.

③ Apliquemos el operador "hallar el cubo y restar 1" a cada elemento del conjunto A = {1, 2} y luego:

a) Elaboremos el diagrama de flechas.

b) Escribamos la operación como un conjunto de parejas ordenadas.

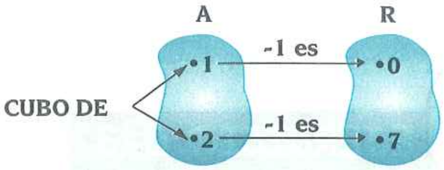
c) Dibujemos la gráfica de la operación.

d) Escribamos simbólicamente la operación.

e) Si f representa el operador y 5 fuera un objeto por operar, ¿a qué sería igual f(5)?

Solución

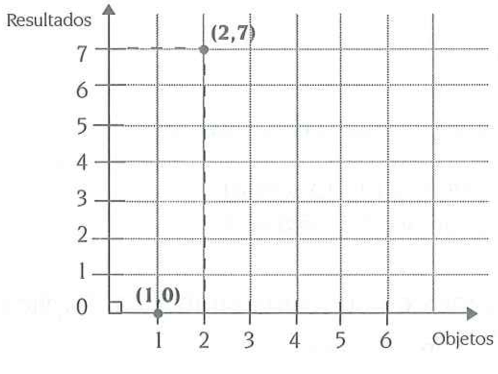
a) Este es el diagrama de flechas:



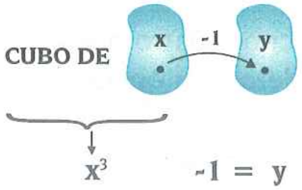
El cubo de 1 es $1^3 = 1$ y al restar 1 nos da 0
El cubo de 2 es $2^3 = 8$ y al restar 1 nos da 7

b) {(1, 0) , (2, 7)}

c) Esta es la gráfica de la operación:



d)



$$y = f(x) = x^3 - 1$$

e) f(5) = 124 porque $f(5) = 5^3 - 1 = 125 - 1 = 124$

④ Un operador f actúa sobre el conjunto de objetos {3, 6, 9} de la siguiente forma: $f(x) = \frac{x}{3} + 1$. Responde:

a) ¿Qué hace el operador?

b) ¿Es $y = \frac{x}{3} + 1$?

c) ¿A qué es igual f(6)? ¿Por qué?

Solución

a) Recordemos que para indicar la **división de a entre b** podemos hacerlo de varias formas:

$$a \,\underline{\big|\, b \quad} \quad , \quad a \div b \quad \text{ó} \quad \frac{a}{b}$$

Como $f(x) = \frac{x}{3} + 1$, entonces el operador significa: **"dividir por 3 y luego sumar 1".**

b) Como y es el nombre que le hemos dado a los resultados, entonces es verdad que $y = \frac{x}{3} + 1$; es decir:

$$y = f(x) = \frac{x}{3} + 1$$

c) Efectivamente, f(6) = 3 ya que al dividir 6 por 3 nos da 2 y al sumar 1 nos da 3:

$$f(6) = \frac{6}{3} + 1 \longrightarrow f(6) = 2 + 1 = 3$$

EJERCICIO 0-3

① Escribe dos ejemplos de operaciones unarias y dos ejemplos de operaciones binarias.

② Escribe cuatro operaciones de la vida diaria e identifica en cada una el operador, los objetos por operar y el resultado.

③ Representa geométricamente el conjunto {1, 4, 7}.

④ Representa simbólicamente las operaciones cuyos operadores son:

a) cuadruplicar

b) triplicar y luego sumar 4

c) duplicar y luego restar 2

d) dividir por 5 y restar 3

⑤ A continuación aparecen varias operaciones en su forma simbólica. Explica con tus palabras lo que dice el operador en cada una de ellas:

a) $f(x) = 5 \cdot x + 1$

b) $y = x + 4$

c) $y = f(x) = \frac{x}{2} + 5$

d) $f(x) = 2 \cdot x - 3$

e) $y = 3x$

f) $y = f(x) = 2 \cdot x^2 + 1$

⑥ Si $y = 2 \cdot x + 3$ y f es un operador que transforma cada objeto x en un resultado y, entonces halla:

a) f(0)

b) f(1)

c) f(5)

d) f(7)

7 El conjunto de pares ordenados de una operación es: { (1,0) , (2, 1) , (3, 2) , (4, 3) , (5, 4) }. Se pide:

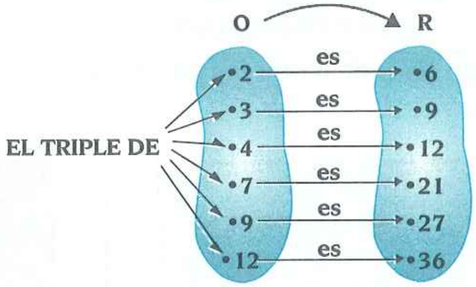
a) Determinar el operador, el conjunto de partida y el de llegada.

b) Elaborar el diagrama de flechas.

c) Dibujar la gráfica de la operación.

d) Escribir simbólicamente la operación.

8 Dado el siguiente diagrama sagital:



Se pide:

a) Identificar el operador.

b) Escribir la operación como un conjunto de parejas ordenadas.

c) Dibujar la gráfica de la operación.

d) Representar simbólicamente la operación.

9 Aplica el operador **"doble de, menos 3"** a los elementos del conjunto A = {2, 3, 4, 5,6} y luego:

a) Elabora el diagrama sagital.

b) Escribe el conjunto de parejas ordenadas.

c) Dibuja la gráfica de la operación.

d) Representa simbólicamente la operación.

10 Aplica el operador **"elevar al cuadrado y, luego, sumar 1"** a cada uno de los objetos del conjunto O = {0, 1, 2, 3} y luego:

a) Elabora el diagrama sagital.

b) Escribe todas las parejas ordenadas de la operación.

c) Dibuja la gráfica de la operación.

d) Escribe simbólicamente la operación.

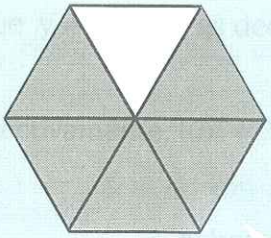
e) Si 7 fuera un objeto de esta operación y f representa al operador, ¿cuál sería el valor de f(7)? ¿por qué?

0.5 FRACCIONES

0.5.1 Conceptos Básicos

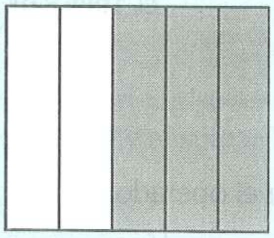
RECORDEMOS

- Las FRACCIONES se utilizan para describir las partes que se toman de un objeto que se divide en partes iguales.



Dividimos el polígono en 6 partes iguales y coloreamos 5 de ellas. Tenemos **cinco sextos del polígono** y lo escribimos

$$\frac{5}{6}$$



Dividimos el rectángulo en 5 partes iguales y coloreamos 3 de ellas. Tenemos **tres quintos del rectángulo** y lo escribimos

$$\frac{3}{5}$$

- En general, si un objeto (una unidad) se divide en **b** partes iguales y tomamos **a** de estas partes iguales, entonces usamos la fracción $\frac{a}{b}$ para indicar esta repartición.

- En la fracción $\frac{a}{b}$, el número **b** se llama **DENOMINADOR** e indica el número de partes en que se ha dividido la unidad y el número **a** se llama **NUMERADOR** e indica el número de partes que se toman.

- Una fracción cuyo numerador es MAYOR que el denominador se llama **FRACCIÓN IMPROPIA;** en caso contrario se llama **FRACCIÓN PROPIA**. Por ejemplo:

$\frac{5}{2}$ y $\frac{8}{3}$ son FRACCIONES IMPROPIAS

$\frac{4}{7}$ y $\frac{2}{9}$ son FRACCIONES PROPIAS

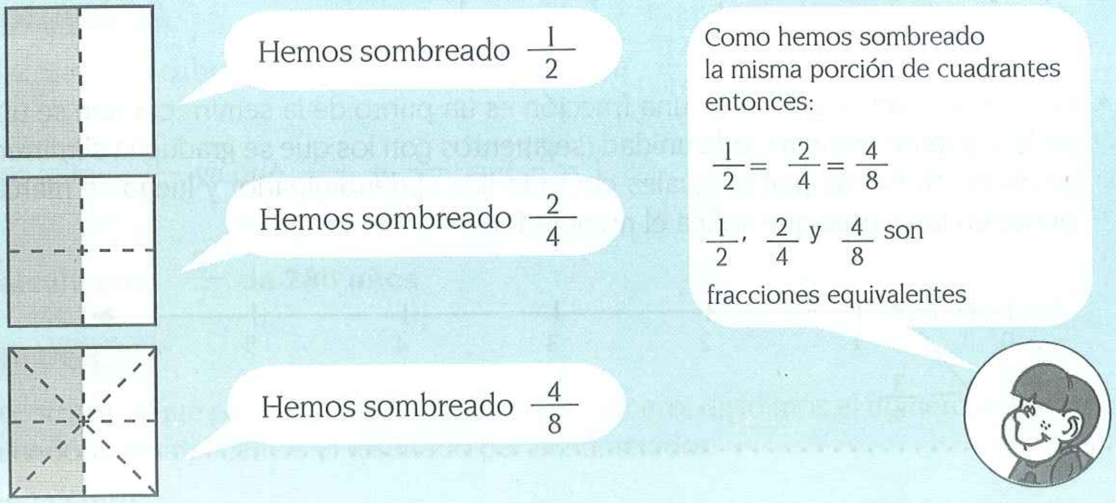
- Toda fracción IMPROPIA se puede transformar en una expresión MIXTA. Observemos cómo se hace y expliquemos el procedimiento:

FRACCIÓN IMPROPIA	DIVISIÓN REALIZADA	EXPRESIÓN MIXTA
$\frac{19}{5}$	$\begin{array}{r\|l} 19 & 5 \\ \cline{2-2} 4 & 3 \end{array}$	$3\frac{4}{5}$

- También podemos transformar expresiones mixtas en fracciones impropias. Observemos cómo se hace y expliquemos el procedimiento.

EXPRESIÓN MIXTA	PROCEDIMIENTO	FRACCIÓN IMPROPIA
$4\frac{2}{3}$	$\frac{(4\bullet 3) + 2}{3}$	$\frac{14}{3}$

- Dos o más fracciones son EQUIVALENTES cuando tienen el mismo valor. Observemos:



- Para obtener fracciones equivalentes a una fracción dada, basta multiplicar (o dividir) el numerador y el denominador por un mismo número. Por ejemplo:

$$\frac{3}{7} = \frac{3 \times 4}{7 \times 4} = \frac{12}{28} \quad ; \quad \frac{27}{39} = \frac{27 \div 3}{39 \div 3} = \frac{9}{13}$$

- Podemos verificar que dos fracciones son equivalentes multiplicando en cruz el numerador de una con el denominador de la otra y comprobando que los resultados son iguales. Por ejemplo:

$\frac{4}{7} \times \frac{12}{21}$ ya que **4 x 21 = 7 x 12**

- Un procedimiento corriente consiste en hallar la fracción de un número. Por ejemplo, para hallar los $\frac{3}{4}$ de 36, escribimos $\frac{3}{4}$ x 36, multiplicamos 36 x 3 y el producto lo dividimos por 4, es decir:

$$\frac{3}{4} \textbf{ de } 36 = \frac{3}{4} \times 36 = \frac{3 \times 36}{4} = \frac{108}{4} = 27$$

- Toda fracción puede considerarse como una división en la cual el numerador es el dividendo y el denominador es el divisor:

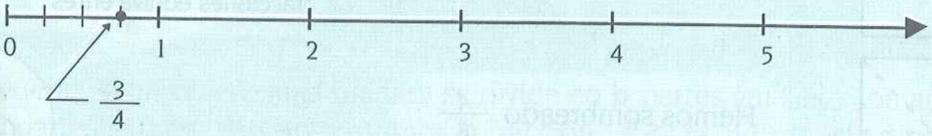
$$\frac{a}{b} = a \div b$$

Ejemplo: $\frac{6}{2} = 3$ porque $\begin{array}{r|l} 6 & 2 \\ \hline 0 & 3 \end{array}$

- Todo número natural es una fracción de denominador 1.

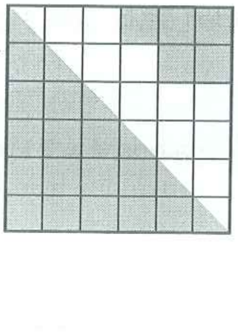
Ejemplo: $7 = \frac{7}{1}$; $\frac{12}{1} = 12$

- La representación gráfica de una fracción es un punto de la semirrecta que se ubica de la siguiente manera: cada unidad (segmentos con los que se graduó la semirrecta) se divide en tantas partes iguales como indica el denominador y luego se marca el punto en las partes que indica el numerador.



EJERCICIOS RESUELTOS

① **Escribamos la fracción correspondiente a la parte sombreada en la siguiente figura**



SOLUCIÓN:

- El cuadrado lo hemos dividido en 36 partes iguales.
- El triángulo sombreado ocupa la mitad del cuadrado; es decir, $\frac{18}{36}$ del cuadrado. El resto de la parte sombreada corresponde a $\frac{5}{36}$.
- Por lo tanto, la fracción correspondiente a la parte sombreada es $\frac{23}{36}$.

② ¿Cuántos quintos hay en 12 unidades?

SOLUCIÓN:

Para saber cuántos quintos hay en 12 unidades, basta multiplicar y dividir a 12 por 5; así:

$$\frac{12 \text{ x } 5}{5} = \frac{60}{5} \text{ (sesenta quintos)}$$

③ ¿Cuánto debemos añadir a la fracción $\frac{6}{14}$ para obtener la unidad (1)?

SOLUCIÓN:

- Necesitamos saber cuanto nos falta para llegar a $\frac{14}{14}(=1)$
- Nos falta: $\frac{8}{14}$, ya que $\frac{6}{14} + \frac{8}{14} = \frac{14}{14} = 1$

④ Calculemos $\frac{2}{7}$ de 280 años

SOLUCIÓN:

- Recordemos que para hallar la fracción de un número, dividimos el número por el denominador y multiplicamos el resultado por el numerador.
- Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \frac{2}{7} \text{ de 280 años} &= (280 \text{ años} \div 7) \text{ x } 2 \\ &= (40 \text{ años}) \text{ x } 2 \\ &= 80 \text{ años} \end{aligned}$$

⑤ Coloquemos el número que falta en el □ para obtener fracciones equivalentes:

$$\frac{4}{3} = \frac{\square}{12}$$

SOLUCIÓN:

- Si dos fracciones son equivalentes entonces los productos cruzados del numerador de una fracción con el denominador de la otra deben ser iguales; es decir:

$$\begin{aligned} \frac{4}{3} = \frac{\square}{12} \quad &\Leftrightarrow \quad 4 \times 12 = 3 \times \square \\ &\Leftrightarrow \quad 48 = 3 \times \square \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{48}{3} = \square \\ &\Leftrightarrow \quad \square = 16 \end{aligned}$$

- Luego, $\frac{4}{3} = \frac{16}{12}$

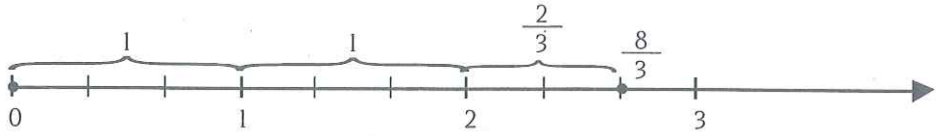
⑥ Representemos en la semirrecta numérica la fracción $\frac{8}{3}$

SOLUCIÓN:

- Como la fracción $\frac{8}{3}$ es impropia, entonces la convertimos en un número mixto; así:

$$\frac{8}{3} = \begin{array}{l|l} 8 & 3 \\ \cline{2-2} 2 & 2 \end{array} = 2\frac{2}{3}$$

- Por lo tanto, en la fracción $\frac{8}{3}$ tenemos 2 unidades y $\frac{2}{3}$ de la siguiente unidad y así la representamos en la semirrecta numérica:



0.5.2 Operaciones con Fracciones

RECORDEMOS

- El **MAYOR COMUN DIVISOR (M.C.D.)** de dos o más números es el mayor de los divisores comunes de dichos números.

EJEMPLO: El M.C.D. de 45 y 60 podemos hallarlo así:

D (45) = { 1, 3, 5, 9, 15, 45 }
D (60) = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60 }
D (45) ∩ D (60) = { 1, 3, 5, 15 }

Este es el mayor de los divisores comunes

Luego, el M.C.D. (45,60) = 15

Una forma práctica de hallar el M.C.D. de dos o más números es el siguiente:

PASO 1: Descomponer cada número en sus factores primos:

$$\begin{array}{r|l} 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$45 = 3^2 \text{ x } 5 \qquad 60 = 2^2 \text{ x } 3 \text{ x } 5$$

PASO 2: Tomamos los FACTORES COMUNES con su MENOR EXPONENTE: en este caso 3 y 5.

PASO 3: Por lo tanto, el M.C.D. (45 , 60) = 3 x 5 = 15

- El **MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO (m.c.m)** de dos o más números es el menor de los múltiplos comunes de dichos números.

EJEMPLO: El m.c.m de 4 y 6 podemos hallarlo así:

M (4) = { 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36... }

M (6) = {6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48,...}

$M(4) \cap M(6) = \{ \underset{\uparrow}{12}, 24, 36... \}$

Este es el menor de los múltiplos comunes

Luego, el m.c.m (4,6) = 12

Por el método práctico podemos obtener el m.c.m así:

PASO 1: Descomponemos cada número en sus factores primos:

PASO 2: tomamos los FACTORES COMUNES y NO COMUNES CON SU MAYOR EXPONENTE, así:

$$\begin{array}{r|l} 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$4 = 2^2 \qquad 6 = 2 \text{ x } 3$$

Factor común con su mayor exponente: 2^2

Factor no común con su mayor exponente: 3

PASO 3: Luego, el m.c.m (4,6) = 2^2 x 3= 12

- El **MÍNIMO COMÚN DENOMINADOR** (m.c.d) de varias fracciones es el mínimo común múltiplo (m.c.m) de los denominadores.
- Una fracción es **IRREDUCIBLE** cuando no se puede simplificar. En una fracción irreducible, el numerador y el denominador no tienen divisores comunes.
- Para **SUMAR** o **RESTAR** fracciones de igual denominador, sumamos o restamos los numeradores y escribimos el mismo denominador.

- Para **SUMAR** o **RESTAR** fracciones de distinto denominador hacemos dos cosas:
  - Hallamos el m.c.d (mínimo común denominador)
  - Dividimos el m.c.d. por cada denominador y el resultado lo multiplicamos por el numerador respectivo. Luego, simplificamos el resultado.
- Para **MULTIPLICAR** fracciones, multiplicamos los numeradores entre sí y los denominadores entre sí.
- El **INVERSO MULTIPLICATIVO** de la fracción $\frac{b}{a}$ es la fracción $\frac{a}{b}$. Por ejemplo, el inverso multiplicativo de la fracción $\frac{3}{7}$ es la fracción $\frac{7}{3}$.
- Para **DIVIDIR** fracciones, multiplicamos la primera fracción (el dividendo) por el **INVERSO MULTIPLICATIVO** de la segunda (el divisor).

EJERCICIOS RESUELTOS

① **Simplifiquemos completamente la fracción $\frac{210}{360}$**

SOLUCIÓN:

Para simplificar completamente una fracción buscamos el MÁXIMO COMÚN DIVISOR (M.C.D) del numerador y el denominador. Luego, dividimos el numerador y el denominador por este M.C.D. obtenido. Hagámoslo paso a paso:

Paso 1:

$$\begin{array}{r|l} 210 & 2 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 360 & 2 \\ 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \qquad 360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$$

Luego, el M.C.D. (210,360) = $2 \times 3 \times 5 = 30$

Paso 2: Dividimos el numerador y el denominador de la fracción dada por 30:

$$\begin{array}{r|l} 210 & 30 \\ \hline 0 & 7 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 360 & 30 \\ \hline 0 & 12 \end{array}$$

Luego,

$$\frac{210}{360} = \frac{210 \div 30}{360 \div 30} = \frac{7}{12}$$

- En la práctica, lo que hicimos fue lo siguiente:

$$\frac{210}{360} = \frac{\cancel{2} \times \cancel{3} \times \cancel{5} \times 7}{\cancel{2} \times 2 \times 2 \times \cancel{3} \times 3 \times \cancel{5}} = \frac{7}{2 \times 2 \times 3} = \frac{7}{12}$$

Tachamos los factores comunes al numerador y al denominador

La fracción simplificada tiene por numerador el producto de los factores primos no tachados y por denominador el producto de los factores primos no tachados.

② Reduzcamos las siguientes fracciones al mínimo común denominador:

$$\frac{3}{4}\ ,\ \frac{5}{6}\ ,\ \frac{1}{5}$$

SOLUCIÓN:

- Hallamos el mínimo común múltiplo (m.c.m) de los denominadores, así:

$$\begin{array}{r|l} 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 5 & 5 \\ 1 & \\ & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$4 = 2^2 \qquad 5 = 5 \qquad 6 = 2 \times 3$$

Luego el m.c.m $(4,5,6) = 2^2 \times 3 \times 5 = 60$

- A continuación dividimos el m.c.m obtenido por el denominador de cada fracción y amplificamos cada uno por el cociente obtenido:

En $\frac{3}{4}$: $60 \div 4 = 15 \longrightarrow \frac{3 \times 15}{4 \times 15} = \frac{45}{60}$

En $\frac{5}{6}$: $60 \div 6 = 10 \longrightarrow \frac{5 \times 10}{6 \times 10} = \frac{50}{60}$

En $\frac{1}{5}$: $60 \div 5 = 12 \longrightarrow \frac{1 \times 12}{5 \times 12} = \frac{12}{60}$

- Por lo tanto, las fracciones de menor denominador que son equivalentes a $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$ y $\frac{1}{5}$ son $\frac{45}{60}$, $\frac{50}{60}$ y $\frac{12}{60}$ respectivamente.

③ Hallemos el resultado y simplifiquemos: $\frac{3}{7} + \frac{4}{7} - \frac{2}{7} + \frac{6}{7} + \frac{13}{7} - \frac{1}{7}$

SOLUCIÓN

Tenemos una suma y resta de fracciones de igual denominador. Luego:

$$\frac{3}{7} + \frac{4}{7} - \frac{2}{7} + \frac{6}{7} + \frac{13}{7} - \frac{1}{7} = \frac{3 + 4 - 2 + 6 + 13 - 1}{7} = \frac{23}{7}$$

④ Hallemos el resultado y simplifiquemos: $\frac{3}{5} + \frac{2}{3} - \frac{1}{4} + \frac{5}{12} - \frac{2}{15}$

SOLUCIÓN:

- En primer lugar hallamos el mínimo común denominador

$$\begin{array}{r|l}5&5\\1&\\&\end{array}\qquad\begin{array}{r|l}3&3\\1&\\&\end{array}\qquad\begin{array}{r|l}4&2\\2&2\\1&\end{array}\qquad\begin{array}{r|l}12&2\\6&2\\3&3\\1&\end{array}\qquad\begin{array}{r|l}15&3\\5&5\\1&\end{array}$$

$5 = 5 \qquad 3 = 3 \qquad 6 = 2^2 \qquad 12 = 2^2 x\ 3 \qquad 15 = 3x5$

Luego, el m.c.m. (5, 3 , 4 , 12 , 15) = $2^2 x\ 3\ x\ 5 = 60$

- Ahora dividimos este m.c.m. por el denominador de cada fracción y multiplicamos el resultado obtenido por el numerador respectivo; así:

$$x\ \frac{3}{5} + \frac{2}{3} - \frac{1}{4} + \frac{5}{12} - \frac{2}{15} = \frac{36 + 40 - 15 + 25 - 8}{60} = \frac{78}{60}$$

$$\div$$

- Finalmente simplificamos la fracción resultante, dividiendo el numerador y el denominador por M.C.D. de éstos:

$$\begin{array}{r|l}78&2\\39&3\\13&13\\1&\\&\end{array}\qquad\qquad\begin{array}{r|l}60&2\\30&2\\15&3\\5&5\\1&\end{array}$$

$78 = 2\ x\ 3\ x\ 13 \qquad 60 = 2^2 x\ 3\ x\ 5$

El M.C.D. (78,60) = 2 x 3 = 6

Por lo tanto:

$$\frac{78}{60} = \frac{78 \div 6}{60 \div 6} = \frac{13}{10}$$

⑤ Hallemos el resultado y simplifiquemos:

a) $\frac{4}{5}\ x\ \frac{3}{7}$ **b)** $6\ x\ \frac{2}{5}$ **c)** $\frac{4}{7} \div \frac{2}{3}$ **d)** $\frac{6}{7} \div 8$

SOLUCIÓN:

a) Para multiplicar dos fracciones multiplicamos los numeradores entre sí y los denominadores entre sí. Por lo tanto:

$$\frac{4}{5}\ x\ \frac{3}{7} = \frac{4\ x\ 3}{5\ x\ 7} = \frac{12}{35}$$

Esta fracción no es simplificable (es irreducible) ya que el numerador y el denominador no tienen divisores comunes diferentes a 1.

b) Para multiplicar un número natural por una fracción basta convertir el número natural en fracción, escribiéndole 1 en el denominador y multiplicándolos como fracciones; así:

$$6 \text{ x } \frac{2}{5} = \frac{6}{1} \text{ x } \frac{2}{5} = \frac{6 \text{ x } 2}{1 \text{ x } 5} = \frac{12}{5}$$

La fracción $\frac{12}{5}$ es irreducible (¿por qué?)

c) Para dividir dos fracciones debemos multiplicar la primera fracción (el dividendo) por el INVERSO MULTIPLICATIVO de la segunda (el divisor); así:

$$\frac{4}{7} \div \frac{2}{3} = \frac{4}{7} \text{ x } \frac{3}{2} = \frac{4 \text{ x } 3}{7 \text{ x } 2} = \frac{12}{14}$$

Para simplificar esta fracción dividimos el numerador y el denominador por 2 y nos queda:

$$\frac{12}{14} = \frac{12 \div 2}{14 \div 2} = \frac{6}{7}$$

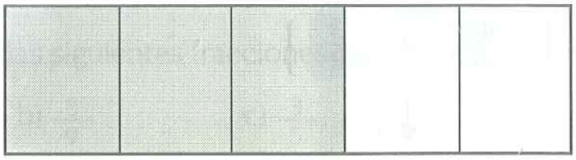
d) Para dividir una fracción por un número natural, convertimos el número natural en fracción dividiéndolo por 1 y procedemos como en el ejercicio anterior:

$$\frac{6}{7} \div 8 = \frac{6}{7} \div \frac{8}{1} = \frac{6}{7} \text{ x } \frac{1}{8} = \frac{6}{56} = \frac{3}{28}$$

⑥ Samuel vende los $\frac{3}{5}$ de una cosecha de naranjas y le sobran 80 naranjas. ¿Cuántas naranjas vendió?

SOLUCIÓN

- Representamos la cosecha de naranjas por un rectángulo, el cual dividimos en 5 partes iguales:



- La parte de la cosecha vendida está situada en el rectángulo: $\frac{3}{5}$

- Las naranjas que no se han vendido corresponde a la franja no sombreada: $\frac{2}{5}$

- Si $\frac{2}{5}$ de la cosecha son 80 naranjas, entonces $\frac{1}{5}$ será la mitad; es decir, 40 naranjas. Esto significa que cada fracción del rectángulo representa 40 naranjas.

40	40	40	40	40

- Por lo tanto, se vendieron 3 x 40 naranjas = 120 naranjas.

⑦ Calculemos el valor de $2\frac{3}{4} + \left[\left(\frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\right) \div \left(\frac{1}{2} \div 6\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)\right]$

SOLUCIÓN

- Como los signos de agrupación más internos son los paréntesis, entonces realizamos en primer lugar las operaciones dentro de ellos:

$$2\frac{3}{4} + \left[\left(\frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\right) \div \left(\frac{1}{2} \div 6\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)\right]$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$= 2\frac{3}{4} + \left[\left(\frac{1 \times 4}{2 \times 3}\right) \div \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{2+1}{4}\right)\right]$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$= 2\frac{3}{4} + \left[\frac{4}{6} \div \frac{1}{12} + \frac{3}{4}\right]$$

- Como dentro del corchete hay una suma y una división, sin otro signo de agrupación, entonces resolvemos primero la división y luego la suma:

$$= 2\frac{3}{4} + \left[\frac{4}{6} \times \frac{12}{1} + \frac{3}{4}\right]$$

$$\downarrow$$

$$= 2\frac{3}{4} + \left[\frac{4 \times 12}{6 \times 1} + \frac{3}{4}\right]$$

$$= 2\frac{3}{4} + \left[\frac{48}{6} + \frac{3}{4}\right]$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$= \frac{11}{4} + \frac{96+9}{12}$$

$$= \frac{11}{4} + \frac{105}{12} = \frac{33+105}{12} = \frac{\overset{23}{\cancel{138}}}{\underset{2}{\cancel{12}}} = \frac{23}{2}$$

- **Pregunta:** ¿Cuál es la operación dominante en esta expresión? ¿Por qué?

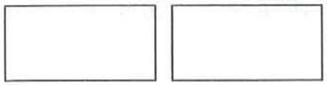
EJERCICIO 0-4

1 Dibuja un rectángulo y representa:

a) $\frac{3}{8}$ b) $\frac{5}{12}$ c) $\frac{2}{5}$

2 Cuántas fracciones de $\frac{1}{4}$ podemos sacar de:

a)



b)

3 Clasifica las siguientes fracciones en propias e impropias:

a) $\frac{4}{5}$ b) $\frac{17}{4}$ c) $\frac{3}{13}$

d) $\frac{7}{5}$ e) $\frac{19}{5}$ f) $\frac{6}{17}$

4 Escribe la expresión mixta correspondiente a las siguientes fracciones impropias:

a) $\frac{23}{5}$ b) $\frac{35}{4}$ c) $\frac{47}{6}$

d) $\frac{29}{2}$ e) $\frac{43}{7}$ f) $\frac{127}{13}$

5 Escribe las fracciones impropias correspondientes a las siguientes expresiones mixtas:

a) $7\frac{3}{5}$ b) $12\frac{3}{7}$ c) $9\frac{2}{5}$

d) $5\frac{7}{9}$ e) $15\frac{1}{2}$ f) $11\frac{2}{5}$

6 Halla los $\frac{7}{3}$ de :

a) 6 b) 12 c) 15

7 ¿Cuánto le falta a las siguientes fracciones para obtener la unidad?

a) $\frac{13}{17}$ b) $\frac{8}{9}$ c) $\frac{3}{5}$ d) $\frac{1}{4}$ e) $\frac{1}{2}$

8 Indica cuáles de las siguientes fracciones son equivalentes:

a) $\frac{12}{21}$ y $\frac{20}{35}$ b) $\frac{3}{8}$ y $\frac{12}{32}$ c) $\frac{20}{28}$ y $\frac{30}{42}$

9 Escribe tres fracciones equivalentes a cada una de las siguientes:

a) $\frac{9}{13}$ $\frac{18}{26}$ b) $\frac{6}{11}$ c) $\frac{15}{4}$ d) $\frac{45}{60}$

⑩ Escribe el número que falta para que las fracciones sean equivalentes:

a) $\frac{7}{9} = \frac{28}{\square\ 36}$ b) $5\ \frac{9}{\square} = \frac{36}{20}$ c) $\frac{18}{45} = \frac{\square\ 6}{15}$

108

d) $\frac{\square}{72} = \frac{18}{12}$ e) $\frac{8\ \square}{56} = \frac{1}{7}$ f) $\frac{1\square}{5} = \frac{15}{75}$

⑪ Simplifica completamente las siguientes fracciones:

a) $\frac{285}{513}$ b) $\frac{252}{441}$ c) $\frac{370}{444}$ d) $\frac{98}{147}$ e) $\frac{273}{637}$

En los ejercicios ⑫ a ㉔ realiza las opraciones indicadas y simplifica el resultado cuando sea posible. Recuerda tener en cuenta el orden de las operaciones cuando hay y cuando no hay signos de agrupación.

⑫ $\frac{7}{3} - \frac{5}{3} + \frac{2}{3} + \frac{1}{3}$

⑬ $\frac{1}{5} + \frac{7}{2} - \frac{3}{2}$

⑭ $\frac{9}{5} - \frac{7}{3} + \frac{3}{4}$

⑮ $\frac{11}{8} + \frac{5}{4} - \frac{5}{16} + \frac{13}{2}$

⑯ $\frac{15}{7} + \frac{11}{6} - \frac{9}{4}$

⑰ $\left(3 + \frac{5}{7}\right) \text{x } \frac{1}{2} -$

⑱ $\left(2 + \frac{1}{5}\right) \text{x } 3 \text{ x} \left(\frac{3}{4} + 2\right)$

⑲ $\left(1 + \frac{1}{5}\right) \div \left(\frac{1}{2} \text{ x } \frac{13}{4}\right)$

⑳ $\left(\frac{7}{8} + \frac{2}{9}\right) \text{x} \left(36 \text{ x} \frac{1}{79}\right)$

㉑ $\left(60 - \frac{1}{80}\right) \div \left(30 - \frac{1}{16}\right)$

㉒ $\left(1 \div \frac{1}{3} - 2 \text{ x } \frac{3}{8}\right) \text{x} \left(4 - \frac{4}{9}\right)$

㉓ $\left[\frac{3}{4} \text{ x} \left(1 - \frac{2}{3}\right) + \frac{5}{8} \text{ x} \left(1 - \frac{4}{15}\right)\right] \div \left(1 - \frac{7}{24}\right)$

㉔ $\left[\left(\frac{1}{2} \text{ x } \frac{4}{3}\right) \div \left(\frac{1}{2} \div 6\right) \div \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)\right]$

㉕ Se vendió un trozo de tela entre tres personas: la primera compró $\frac{12}{5}$ m; la segunda compró $\frac{8}{3}$ m y la tercera 5 m. ¿Cuántos metros tenía el trozo de tela?

0.6 LOS NÚMEROS DECIMALES Y SUS OPERACIONES

0.6.1 Conceptos Básicos

RECORDEMOS

- Se llaman **FRACCIONES DECIMALES** aquellas cuyo denominador es 10, 100, 1.000, 10.000, ...

EJEMPLO:

$\frac{3}{10}$ = tres décimas $\qquad$ $\frac{35}{100}$ = treinta y cinco centésimas

$\frac{7}{1000}$ = siete milésimas $\qquad$ $\frac{12}{1000}$ = doce milésimas

- Toda **FRACCIÓN DECIMAL** se puede escribir de otra forma equivalente mediante un número que consta de dos partes separadas por una **COMA (,)**. Esta coma separa las **unidades** de las cifras que quedan a su derecha. Esta forma equivalente de escribir una fracción decimal se llama **NÚMERO DECIMAL.**

Ejemplo: $\boxed{\frac{3}{10}} = 0{,}3 \rightarrow$ número decimal; $\rightarrow$ fracción decimal $\qquad$ $\boxed{\frac{489}{100}} = 4{,}89 \rightarrow$ número decimal; $\rightarrow$ fracción decimal

- Números como: 0,87 ; 4,05 ; 0,6 ; 35,5 se llaman números decimales.
- Los números decimales constan de dos partes separadas por una coma:
  - a) La parte ENTERA: que está antes de la coma
  - b) La parte DECIMAL: que está después de la coma

Ejemplo: En el número decimal: $4,\boxed{89}$ $\longrightarrow$ parte decimal: 89; $\longrightarrow$ parte entera: 4

- Todo número natural se puede representar con un número decimal cuya parte entera es el mismo número y la parte decimal es cero:

Ejemplo: $7 = \frac{70}{10} = 7{,}0$

- Para escribir el número decimal correspondiente a una **FRACCIÓN DECIMAL PROPIA,** se procede así:
  - Se escribe como **PARTE ENTERA** el 0 y luego la coma (,). Por ejemplo:

$$\frac{531}{100.000} = 0,$$

  - Después de la **COMA** se escriben tantos **CEROS** como la diferencia entre el número de ceros del denominador y el número de cifras del numerador. Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} \underline{\;531\;} \longrightarrow 3\text{ cifras} \\ 100.000 \longrightarrow 5\text{ cifras} \end{array}\right\} \therefore 5 - 3 = 2$$

de manera que, después de la coma, escribimos dos ceros. Por lo tanto:

$$\frac{531}{100.000} = 0{,}00\underbrace{\boxed{?}}$$

- Después de los ceros escribimos las cifras del numerador:

$$\frac{531}{100.000} = 0{,}00\underbrace{\boxed{531}} \longrightarrow \text{cifras del numerador}$$

- Para escribir el número decimal correspondiente a una FRACCIÓN DECIMAL IMPROPIA, se procede así:
  - Separamos del numerador tantas cifras, de derecha a izquierda, como ceros tiene el DENOMINADOR; así:

$$\begin{array}{l} \underline{3\textcircled{27}} \longrightarrow \text{separamos las } \textcircled{2} \text{ últimas cifras: 27} \\ 100 \longrightarrow \textcircled{2} \text{ ceros} \end{array}$$

  - A continuación colocamos una coma (,) a la izquierda de la última cifra separada; así:

$$\frac{327}{100} = 3{,}\,27$$

acá se coloca la coma: a la izquierda de 27, que son las dos cifras separadas

- Si agregamos ceros a la derecha de la parte decimal de un número, éste no cambia su valor. Por ejemplo: 22,4 = 22,40 = 22,400 = 22,4000 = ...
- Si suprimimos los ceros que están a la derecha de la parte decimal de un número, éste no cambia de valor.

Ejemplos: 0,0300 = 0,03 ; 2,5000 = 2,5 ; 31,06200 = 31,062

- En todo número decimal, el número de cifras decimales es igual al número de ceros que tiene el denominador de la fracción decimal correspondiente.

Ejemplos: $\frac{4}{\underbrace{10}_{❶}} = 0{,}\underbrace{4}_{❶}$; $\frac{328}{\underbrace{100}_{❷}} = 3{,}\underbrace{28}_{❷}$; $\frac{34}{\underbrace{10.000}_{❹}} = 0{,}\underbrace{0034}_{❹}$

EJERCICIOS RESUELTOS

❶ Escribe en forma de número decimal las siguientes fracciones decimales propias:

a) $\frac{37}{1.000}$ **b)** $\frac{31}{10.000}$ **c)** $\frac{4}{100}$

Solución

En todos los casos la parte entera del número decimal es 0. Veamos la parte decimal de cada uno:

a) $\dfrac{\textcircled{37}}{\underbrace{1.000}_{❸\ \text{3 ceros}}} = 0,\underbrace{0\textcircled{37}}_{❸\ \text{3 cifras decimales}}$

b) $\dfrac{\textcircled{31}}{\underbrace{10.000}_{❹\ \text{4 ceros}}} = 0,\underbrace{00\textcircled{3})}_{❹\ \text{4 cifras decimales}}$

c) $\dfrac{\textcircled{4}}{\underbrace{100}_{❷\ \text{2 ceros}}} = 0,\underbrace{0\textcircled{4}}_{❷\ \text{2 cifras decimales}}$

❷ **Escribamos en forma de número decimal las siguientes fracciones decimales impropias:**

a) $\dfrac{47}{10}$ **b)** $\dfrac{305}{100}$ **c)** $\dfrac{1467}{1.000}$ **d)** $\dfrac{80045}{100}$

Solución

a) $\dfrac{47}{10} = 4,7$ b) $\dfrac{305}{100} = 3,05$ c) $\dfrac{1.467}{1.000} = 1,467$ d) $\dfrac{80.045}{100} = 800,45$

En todos los casos, del numerador separamos, de derecha a izquierda, un número de cifras igual al número de ceros del denominador.

❸ **Escribamos como fracción decimal:**

a) 34,06 **b) 8,4** **c) 37,194** **d) 0,04**

Solución

a) $34,\underbrace{06}_{\downarrow\ \text{2 cifras}} = \dfrac{3.406}{\underbrace{100}_{\downarrow\ \text{2 ceros}}}$ b) $8,\underbrace{4}_{\downarrow\ \text{1 cifra}} = \dfrac{84}{\underbrace{10}_{\downarrow\ \text{1 cero}}}$ c) $37,\underbrace{194}_{\downarrow\ \text{3 cifras}} = \dfrac{37.194}{\underbrace{1.000}_{\downarrow\ \text{3 ceros}}}$ d) $0,\underbrace{04}_{\downarrow\ \text{2 cifras}} = \dfrac{4}{\underbrace{100}_{\downarrow\ \text{2 ceros}}}$

0.6.2 Suma y Resta de Números Decimales

RECORDEMOS

- Para **SUMAR** o **RESTAR** números decimales se recomienda:
  - a) Organizarlos en columna de tal forma que todos tengan el mismo número de cifras decimales (si hace falta se agregan ceros):
  - b) Al organizarlos en columna, las comas deben escribirse de tal forma que queden una debajo de la otra en la misma columna.
  - c) Finalmente, realizamos la operación como si fueran números naturales, colocando la coma al resultado debajo de las otras comas y en la misma columna.

Ejemplo 1: Sumemos 3,275 + 0,7 + 11,35 + 7,1456

Solución

- Escribimos los números en columna de tal manera que las comas queden en la misma columna y agregamos CEROS de manera que todos queden con las mismas cifras decimales.

$$\begin{array}{r l} 3{,}275\textcircled{0} & \\ 0{,}7\textcircled{000} & \longrightarrow \text{agregamos ceros} \\ 11{,}35\textcircled{00} & \\ \underline{7{,}1456} & \\ \uparrow & \text{las comas en la misma columna} \end{array}$$

- A continuación, sumamos los números como si fueran números naturales y colocamos la coma al resultado debajo de las otras comas, en la misma columna; así:

$$\begin{array}{r} 3{,}2750 \\ 0{,}7000 \\ 11{,}3500 \\ \underline{7{,}1456} \\ 22{,}4706 \end{array}$$

Ejemplo 2: De 64,3 restemos 7,024

Solución

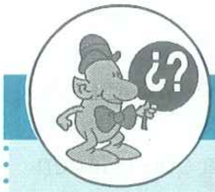
- Escribamos los números en columna, con las condiciones ya conocidas:

$$\begin{array}{r} 64{,}300 \\ -\ \underline{\ 7{,}024} \end{array}$$

- Restamos los números como si fueran números naturales y colocamos la coma al resultado debajo de las otras comas, en la misma columna; así:

$$\begin{array}{r} 64{,}300 \\ -\ \underline{\ 7{,}024} \\ 57{,}276 \end{array}$$

0.6.3 Multiplicación de Números Decimales por 10, 100, 1.000



RECORDEMOS

Utilizaremos dos formas de multiplicar un número decimal por una potencia de 10. Veamos:

Primera Forma

- Expresamos el número decimal como fracción decimal y luego realizamos la multiplicación. Por ejemplo:

a) $32{,}47 \times 100 = \frac{3.247}{100} \times 100 = \frac{324.700}{100}$

b) $0{,}027 \times 10 = \frac{27}{1.000} \times 10 = \frac{270}{1.000}$

c) $3{,}4 \times 1.000 = \frac{34}{10} \times 1.000 = \frac{34.000}{10}$

- Ahora simplificamos las fracciones obtenidas por potencias de 10; así:

a) $\frac{324.7\cancel{00}}{1\cancel{00}} = 3.247$ b) $\frac{27\cancel{0}}{1.00\cancel{0}} = \frac{27}{100}$ c) $\frac{34.00\cancel{0}}{1\cancel{0}} = 3.400$

Por lo tanto:

a) $32{,}47 \times 100 = 3.247$; b) $0{,}027 \times 10 = 0{,}27$; c) $3{,}4 \times 1.000 = 3.400$

Segunda Forma

- Cuando un número decimal se multiplica por una potencia de 10, la coma se corre a la derecha tantas cifras como ceros tiene la potencia de 10. Por ejemplo:

$$32{,}47 \times 1\underbrace{00}_{} = 3\,2\,4\,7$$

2 ceros: corremos la coma dos cifras a la derecha.

Acá quedaría la coma. Pero como hay que ubicarla después de la última cifra, entonces no se escribe.

$$0{,}027 \times 1\underbrace{0}_{} = 0{,}27$$

Un cero. Se corre la coma una cifra hacia la derecha.

- Si el número de ceros de la potencia de 10 es mayor que el número de cifras decimales, entonces se completa con CEROS.

$$\underset{\downarrow\ \text{1 cifra decimal}}{3{,}4} \times 1.\underbrace{000}_{\text{3 ceros}} = 3{,}\underbrace{400}_{③\text{cifras}} \times 1.\underbrace{000}_{③\text{ceros}} = 3.400$$

0.6.4 División de un Número Decimal por 10, 100, 1.000...

RECORDEMOS

También utilizaremos dos formas para dividir un número decimal por 10, 100, 1.000,...

Primera Forma

- Expresamos el número decimal como fracción decimal y, luego, se multiplica por el inverso multiplicativo de la potencia de 10. Por ejemplo:

a) $34{,}5 \div 10 = \frac{345}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{345}{100} = 3{,}45$

b) $3{,}56 \div 1.000 = \frac{356}{100} \times \frac{1}{1.000} = \frac{356}{100.000} = 0{,}00356$

Segunda Forma

- Cuando un número decimal se DIVIDE por una POTENCIA DE 10; debemos tener en cuenta tres casos:

Caso 1: EL NUMERO DE CEROS DE LA POTENCIA DE 10 ES MENOR QUE EL NUMERO DE CIFRAS DE LA PARTE ENTERA.
En este caso, corremos la coma a la izquierda tantas cifras como ceros tiene la potencia de 10. Por ejemplo:

$$\underbrace{485}_{\textbf{3 cifras}},32 \div \underbrace{100}_{\textbf{② ceros}} = 4{,}\underbrace{85}32$$

se corre la coma 2 lugares hacia la izquierda

Caso 2: EL NUMERO DE CEROS DE LA POTENCIA DE 10 ES IGUAL AL NUMERO DE CIFRAS DE LA PARTE ENTERA.
En este caso, se coloca un cero antes de la parte entera y la coma después del cero. Por ejemplo:

$$\underbrace{3}_{\textbf{1 cifra}},42 \div \underbrace{10}_{\textbf{① cero}} = 0,342 \quad ; \quad 0,45 \div 10 = 0,045 \quad ; \quad 0,008 \div 10 = 0,0008$$

Caso 3: EL NUMERO DE CEROS DE LA POTENCIA DE 10 ES MAYOR QUE EL NUMERO DE CIFRAS DE LA PARTE ENTERA.
En este caso, el resultado se obtiene así:

1) Escribimos por parte entera el CERO: 41,67 ÷ 10.000 = 0,
2) Después de la coma, escribimos tantos ceros como lo indique la diferencia entre el número de ceros del divisor y el número de cifras de la parte entera del dividendo:

$$\underbrace{41}_{②},67 \div \underbrace{10.000}_{④ \longrightarrow \textbf{4 - 2 = 2}} = 0,\underbrace{00}$$

3) Luego, se agrega el número decimal sin la coma: 41,67 ÷ 10.000 = 0,004167

0.6.5 Multiplicación de dos Números Decimales

RECORDEMOS

Hay dos formas de multiplicar números decimales:

1. Multiplicando las fracciones decimales correspondientes. Por ejemplo:
$3,5 \text{ x } 0,6 = \frac{35}{10} \text{ x } \frac{6}{10} = \frac{35 \text{ x } 6}{100} = \frac{210}{100} = 2,10$. Luego, 3,5 x 0,6 = 2,10

2. La forma práctica que consiste en multiplicar los números decimales en columna, "como si no tuvieran comas". Del resultado se separan de derecha a izquierda tantas cifras como lo indique la suma de cifras decimales de los dos factores. Por ejemplo:

$$\begin{array}{rl} 3{,}54 & \longrightarrow \text{2 cifras decimales} \\ \times\ \ 0{,}6 & \longrightarrow \text{1 cifra decimal} \\ \hline 2124 & \\ 000 & \\ \hline 2{,}\underbrace{124}_{③} & \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{l}a\\a\end{array}}\right\} \text{Total: 3 cifras decimales}$$

separamos ③ cifras decimales de derecha a izquierda

0.6.6 División de Decimales

RECORDEMOS

En la división de decimales se presentan tres casos:

Caso 1: DIVISION DE UN DECIMAL POR UN NUMERO NATURAL

Veamos cómo se divide 317,06 entre 5:

PASO 1

Primero divido la parte entera por 5

$$\begin{array}{r|l} 317 & 5 \\ \cline{2-2} 17 & 63 \\ 2 & \end{array}$$

PASO 2

A continuación escribo la coma en el cociente (después del 3), porque luego siguen décimas, centésimas,...

$$\begin{array}{r|l} 317 & 5 \\ \cline{2-2} 17 & 63, \\ 2 & \end{array}$$

PASO 3

Ahora bajamos la primera cifra decimal (0) y continuamos dividiendo como si fueran naturales: .

$$\begin{array}{r|l} 317{,}06 & 5 \\ \cline{2-2} 17 & 63{,}41 \\ 20 & \\ 06 & \\ 1 & \end{array}$$

PASO 4

Si deseo más cifras decimales en el cociente entonces agrego un cero al residuo (1) y continúo la división.

Ahora dividamos 3,2 por 9:

$$\begin{array}{r|l} 3{,}2 & 9 \\ \cline{2-2} 32 & 0{,}355 \\ 50 & \\ 50 & \\ 5 & \end{array}$$

Decimos: 9 en el 3 está 0 veces; escribimos 0 en el cociente y a continuación una coma. Seguimos dividiendo como si fueran naturales y agrego un 0 al residuo si quiero tener más cifras decimales en el cociente.

Caso 2: DIVISION DE UN DECIMAL POR UN DECIMAL

- Veamos cómo se divide 0,2 por 9,05:

- Primero buscamos que ambos decimales tengan el mismo número de cifras decimales. Esto lo logramos agregando ceros a la derecha de la parte decimal del que lo necesite: **0,20 |9,05**

- Luego, quitamos las comas y realizamos la división en forma normal:

$$\begin{array}{r|l} 20 & 905 \\ \hline & 0, \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r|l} 200 & 905 \\ \hline & 0,0 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r|l} 2.000 & 905 \\ \hline 190 & 0,02 \end{array}$$

- Dividamos 3,5 por 0,7.

Como tienen igual número de cifras decimales, entonces quitamos de ambos números la coma y dividimos como si fueran dos naturales: $\begin{array}{r|l} \mathbf{35} & \mathbf{7} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{5} \end{array}$

0.6.7 Potenciación de Números Decimales

RECORDEMOS

- Utilizaremos dos formas para elevar un número decimal a un exponente:

Primera Forma

- Se eleva la FRACCIÓN DECIMAL correspondiente del número dado al exponente. Por ejemplo:

$$(0,0042)^2 = \left(\frac{42}{10.000}\right)^2$$

- Escribimos el denominador de la fracción decimal como una potencia de base 10:

$$(0,0042)^2 = \left(\frac{42}{10^4}\right)^2$$

- Aplicamos potencia de un cociente: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$; luego

$$(0,0042)^2 = \frac{42^2}{(10^4)^2}$$

- Aplicamos potencia de potencia: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$; así:

$$(0,0042)^2 = \frac{42^2}{10^8} = \frac{1.764}{100_{'}000.000} = 0,00001764$$

Segunda Forma

- Elevamos la base, SIN LA COMA, al exponente: $\mathbf{42^2 = 1.764}$
- El número de cifras decimales del resultado es igual al producto del número de cifras decimales de la base por el exponente:

$(0,\underline{0042})^{②} \longrightarrow$ exponente:2

$\longrightarrow$ número de cifras decimales: 4 $\longrightarrow$ **② x 4 = 8**

$(0,0042)^2 = 0,\underbrace{00001764} \longrightarrow$ 8 cifras decimales

EJEMPLO:

Resolvamos de dos formas las siguientes potencias:

a) $(0,3)^4$ **b) $(0,002)^6$**

Solución

a) $(0,3)^4 = (\frac{3}{10})^4 = \frac{3^4}{10^4} = \frac{81}{10.000} = 0,0081$

También así: $(0,3)^4 \longrightarrow$ exponente: 4
$\longrightarrow$ 1 cifra decimal
} 1 x 4 = 4 cifras decimales tiene el resultado de la potencia.

$3^4 = 81$; luego, $(0,3)^4 = 0,0081$

b) $(0,002)^6 = \left(\frac{2}{1.000}\right)^6 = \frac{2^6}{(10^3)^6} = \frac{2^6}{10^{18}} = \frac{64}{\underbrace{1\,000...0}_{\textbf{18 ceros}}} = 0,\underbrace{00...\,064}_{\textbf{18 cifras decimales}}$

Otra forma: $(0,002)^6 \longrightarrow$ exponente: 6
$\longrightarrow$ Número de cifras decimales: 3
} 6 x 3 = 18: Total de cifras decimales del resultado.

$2^6 = 64$; luego, $(0,002)^6 = \underbrace{0,000...064}_{\textbf{18 cifras decimales}}$

EJERCICIO 0-5

① Escribe en la forma de número decimal las siguientes fracciones decimales propias:

a) $\frac{6}{1.000}$ b) $\frac{39}{1.000}$ c) $\frac{4}{100}$ d) $\frac{4.871}{100.000}$ e) $\frac{34}{10.000}$

② Escribe en la forma de número decimal las siguientes fracciones decimales impropias:

a) $\frac{845}{10}$ b) $\frac{387}{100}$ c) $\frac{4.461}{10}$ d) $\frac{80.053}{10.000}$

③ Escribe en forma de fracción decimal, los siguientes números decimales:

a) 3,005 b) 0,004 c) 13,67 d) 2,053

④ Calcula:

a) 0,3 + 0,5 - 0,17
b) 31 + 14,76 + 17 - 8,35 - 0,003
c) (8 + 5,19) + (15 - 0,03) + (80 - 14,784)
d) 50 - (6,31 + 14)

⑤ Calcula:

a) 0,1 x 10 b) 0,324 x 10 c) 0,4 x 100 d) 7,5 x 100
e) 0,1234 x 100 f) 0,1 x 1.000 g) 45,78 x 1.000 h) 3,4 x 1.000

⑥ Calcula:

a) 0,3 ÷ 10 b) 0,05 ÷ 10 c) 1,3 ÷ 10 d) 0,2 ÷ 100
e) 0,08 ÷ 100 f) 3,5 ÷ 100 g) 0,32 ÷ 1.000 h) 2,8 ÷ 1.000

⑦ Teniendo en cuenta las dos formas de multiplicar, realiza las siguientes operaciones:

a) 0,5 x 0,3 b) 0,17 x 0,83 c) 0,001 x 0,0001 d) 3 x 0,25
e) 0,25 x 4 f) 35 x 0,3 g) 42,3 x 1,3 h) 0,08 x 0,005

⑧ Calcula:

a) 0,645 ÷ 3 b) 13,48 ÷ 7 c) 485,17 ÷ 39
d) 46,081 ÷ 15 e) 4,75 ÷ 5 f) 1,006 ÷ 17

⑨ Calcula:

a) 84÷1,2 b) 3÷0,15 c) 185÷25,1
d) 48÷0,02 e) 30÷0,1 f) 406÷1,021

⑩ Calcula:

a) 4,2÷0,6 b)3,25 ÷ 0,5 c)8,27÷1,2
d) 35,02÷22,15 e) 304,6÷0,004 f) 1,278÷1,2

⑪ Calcula el número de cifras decimales del resultado de:

a) $(0,0001)^5$ b) $(0,00489)^2$ c) $(0,32)^8$

⑫ Calcula de las dos formas estudiadas, cada una de las siguientes potencias:

a) $(0,003)^2$ b) $(0,8)^2$ c) $(0,0001)^2$
d) $(0,02)^4$ e) $(0,03)^3$ f) $(0,02)^5$

⑬ Realiza las operaciones indicadas:

a) $[(0,52 - 0,12)^2 \div 10] \times [(0,05 + 0,001) \times 1.000]$
b) $[(0,2 \div 0,1)^3 \div 100] \times [(0,02 + 0,01)^3 \times 1.000]$
c) $\left[\left(\frac{5}{8} + 0,25\right) \div \left(4 - (0,25)^2\right)\right]^2$

⑭ Juan tiene un rollo de cuerda que mide 90,45 m, Luis tiene uno que mide 64,85 m y Marco tiene otro que mide 42,05 m. Si los juntan para formar un solo rollo, ¿qué longitud alcanza?

⑮ De una llave de acueducto salen 12,5 l de agua por minuto. ¿Cuánto tiempo debe estar abierta para llenar un tanque de 6.000 litros?

⑯ Tenía 437,25 kg de arroz y vendí 7 décimos. ¿Cuántos kg me quedan?

⑰ De cierta cantidad de agua que tenía almacenada gasté las siguientes cantidades: primero 45,25 litros, luego 36,45 litros. Estos gastos corresponden a los $\frac{3}{7}$ de lo que tenía. ¿Cuántos litros de agua tenía al principio?

TALLER DE REPASO DE LA UNIDAD 0

1. Suprime primero los signos de agrupación y luego resuelve:

a) $21 - 8 - \{ 7 - 3 + 4 - [5 + 2 - 1 - (4 - 3) + 7] - 3 + (9 - 2 + 3 - 1)\}$
b) $25 - \{10 + 6 - [2 + 6 - (4 +(3 - 2)) + (4 - 2) - 4] + 3 + 1\}$
c) $240 - (17 + 9 - 3) - \{ 91 + 72 + (15 - 9) - [34 + 4 - (4 + 17 + 3) + 72 + 15]\}$
d) $21 + 6 +\{ 4 + 2 - 3 - [2 + 4 - 1 - (3 + 2) + 7] + 6 + 5 - 2 \}$
e) $22 - \{ 8 + 3 - 4 +[8 - 3 - (6 - 5) + (8 + 5)]\} + 8$
f) $(24 - 4) - \{(8 - 2) - [4 - (3 + 3 - 5) + (3 + 4 - 5)]\}$

2. Resuelve los ejercicios anteriores realizando primero las operaciones indicadas en los signos de agrupación más internos y trabajando de adentro hacia afuera.

3. Dado el siguiente conjunto de parejas ordenadas: $S = \{(1,1) , (2,3) , (3,5) , (4,7) , (5,9), (6,11)\}$. Se pide:

a) Identificar el operador y escribirlo simbólicamente.
b) Elaborar el diagrama de flechas.
c) Escribir el conjunto de partida y el de llegada.
d) Dibujar la gráfica.

4. Representa geométricamente el conjunto $A = \{3, 5, 7\}$.

5. A continuación aparecen varios operadores escritos en forma simbólica. Escribe con tus palabras lo que hace cada uno.

a) $f(x) = 3x - 2$ b) $y = 2x$ c) $y = f(x) = x + 5$ d) $f(x) = x^3+1$

6. Si $y = f(x) = 3x + 1$ actúa sobre los elementos del conjunto $A=\{0,1,2,3,4,5\}$, halla:

a) $f(0)$ b) $f(1)$ c) $f(3)$

7. Completa:

a) $8^0 = \boxed{1}$ b) $35^0 = \boxed{1}$ c) $4^1 = \boxed{4}$ d) $(53 \bullet 82 \bullet 37)^0 = \boxed{1}$

8. Escribe en forma de potencia de 10:

a) 1,000.000 b) 10.000 c) 100

9. Escribe cada número usando potencias de 10:

a) 205.000 b) 30.000 c) 11020.000

10. Escribe cada número eliminando la potencia de 10:

a) 205×10^3 b) 3×10^4 c) 102×10^4

11. Escribe los siguientes números en forma polinómica usando potencias de 10:

a) 346 b) 8.042 c) 63.841

12. Utilizando las propiedades de la potenciación completa:

a) $a^m \cdot a^n = a^{\square + \square}$ se llama producto de ____________________

b) $\frac{a^m}{a^n} = a^{\square - \square}$ se llama cociente de ____________________

c) $(a^m)^n = a^{\square \cdot \square}$ se llama potencia de ____________________

d) $(a \cdot b \cdot c)^n = a^{\square} \cdot b^{\square} \cdot c^{\square}$ se llama potencia de ____________________

13. Simplifica las siguientes expresiones, escribiendo al frente de cada paso la propiedad de la potenciación que se está aplicando.

a) $\left[\frac{(2^2)^2 \bullet 3^5 \bullet 2 \bullet (3^2)^3}{(2^4)^2 \bullet 3^2 \bullet (3^4)^3}\right]^5$ b) $\frac{(2 \bullet 7 \bullet 4)^3}{(8 \bullet 7)^2}$ c) $\frac{(3 \bullet 4 \bullet 8)^2 \bullet (5 \bullet 2)^3}{(2 \bullet 6)^2 \bullet (4 \bullet 5)^3}$

14. En los ejercicios siguientes realiza las operaciones que se indican:

a) $\sqrt{\sqrt{225} - \sqrt{144} + \sqrt{36}}$ b) $\left(\sqrt{3^2 + 4^2} + \sqrt{6^2 + 8^2} - \sqrt{6^2 \bullet 2^2}\right)^2 - \sqrt[3]{8}$

c) $\sqrt{4} \bullet \sqrt{9} \bullet \sqrt{16}$ d) $\sqrt[3]{1.000} \bullet \sqrt{25} \bullet \sqrt{100}$

e) $\sqrt{\left[\sqrt{\sqrt{25} - 1} + 1\right]^2 + 7}$ f) $\sqrt{\sqrt{3^3 - \sqrt{4}} + \sqrt{5^3 - \sqrt{16}}}$

15. Escribe los números primos que hay entre 10 y 35.

16. Verifica cuáles de los siguientes números son primos.

a) 33 b) 39 c) 49 d) 191

17. ¿Cuántos quintos hay en:

a) 12 unidades? b) 4 unidades? c) 50 unidades? d) 1.000 unidades?

18. Completa:

a) $\frac{1}{4}$ de 2.000 = ☐ b) $\frac{9}{10}$ de 80 kg = ☐ c) $\frac{4}{3} = \frac{12}{\square}$

d) $\frac{4}{5} = \frac{\square}{10}$ e) $\frac{7}{5} \div \frac{1}{3} = \square$ f) $6 \div \frac{2}{5} = \square$

19. Realiza las siguientes operaciones:

a) $\frac{7}{3} - \frac{5}{3} - \frac{2}{3} + \frac{1}{3}$ b) $\frac{9}{5} + \frac{7}{3} - \frac{3}{4}$ c) $\frac{15}{7} - \frac{11}{6} + \frac{9}{4}$

d) $\frac{1}{5} + \frac{7}{2} + \frac{3}{2}$ e) $\frac{11}{8} - \frac{5}{4} + \frac{5}{16} + \frac{13}{2}$ f) $\frac{11}{6} - \frac{5}{3} - \frac{4}{5} + \frac{17}{10}$

g) $(3 - \frac{5}{7}) \div \frac{1}{2}$ h) $(2 - \frac{1}{5}) \div 3 \text{ x } (\frac{3}{4} + 2)$ i) $(1 + \frac{1}{5}) \text{ x } \frac{1}{2} \text{ x } \frac{13}{4}$

j) $\frac{3}{15} \div \frac{15}{7}$ k) $\left[\frac{3}{4} \bullet (1 - \frac{2}{3}) + \frac{8}{5} \bullet (1 - \frac{4}{15}) \div (1 - \frac{7}{24}) \right]$

l) $[(1 \div \frac{1}{3}) - (2 \bullet \frac{3}{8})] \bullet (4 - \frac{4}{9})$ m) $(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^5}) \bullet \frac{4^3}{3^2}$

$\frac{1}{2^{15} \cdot 3^{15}}$

20. Lee cada una de las siguientes fracciones:

a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{12}{5}$ c) $\frac{13}{1.000}$ d) $\frac{5}{100}$ e) $\frac{13}{10}$ f) $\frac{8}{1}$

21. Representa en la semirrecta numérica la fracción $\frac{7}{3}$.

22. Escribe en forma de número decimal:

a) $\frac{4}{100}$ b) $\frac{47}{10}$ c) $\frac{65}{100}$ d) $\frac{385}{100}$ e) $\frac{3.856}{1.000}$ f) $\frac{8}{10}$ g) $\frac{1.856}{100.000}$ h) $\frac{487}{1.000}$

23. Escribe como fracción decimal los siguientes números decimales:

a) 8,027 b) 0,036 c) 12,4 d) 0,0002 e) 487,02 f) 37,016

24. Una tela se parte en trozos: el primero mide $\frac{12}{5}$ m; el segundo mide $\frac{8}{3}$ m y el tercero mide 5m. ¿Qué longitud había de tela?.

25. Una calidad de queso vale los $\frac{2}{5}$ de \$30.000; una segunda calidad vale $\frac{1}{3}$ de \$24.000 y una tercera calidad vale el doble de un tercio de \$15.000. ¿Cuánto valen juntas las tres calidades de queso?.

26. Realiza las siguientes operaciones:

a) 469,25 + 19,06 + 3.057,3 b) 2.049,25 - 675,3 c) 3.047,62 x 1.000

d) 4,235 x 100 e) 12,5 ÷ 100 f) 135,6 ÷ 10

g) 3,85 ÷ 3 h) 4,85 ÷ 2,4 i) 846 ÷ 3,7

j) 0,027 ÷ 100

27. Resuelve las operaciones indicadas:

a) $[(0,5 + 1,3 - 0,075) \text{ x } 600 - (3,5 \text{ x } 10)]^2$

b) $[(0,01 + 2,4) \div (0,06 + 5,01)] \div 0,007$

c) $(2,25 - 0,5) \cdot 0,02 - [(0,41 - 0,01) \div 2^4]$

DIMENSIONES

Núcleo Temático

1

LOS NÚMEROS ENTEROS, SUMA Y RESTA DE NÚMEROS ENTEROS

LOGRO GENERAL

- Reconocer y utilizar los números enteros en diferentes situaciones de la vida diaria.
- Sumar y restar números enteros.
- Reconocer las propiedades de la suma de números enteros.

DIMENSIONES

LOGROS ESPECÍFICOS	INDICADORES DE LOGRO
Corporal: • Participar en actividades de desplazamientos en el plano que faciliten la comprensión de los números enteros y las operaciones de suma y resta de enteros.	• Realiza desplazamientos hacia la derecha, hacia la izquierda, hacia arriba o hacia abajo y los describe mediante números enteros positivos o negativos.
Comunicativa: • Manejar adecuadamente el lenguaje relacionado con los números enteros: opuesto, valor absoluto, suma y resta.	• Explica oralmente la manera de hallar el opuesto de un número entero y su valor absoluto.
Cognitiva: • Identificar el conjunto de los números enteros. • Hallar el opuesto y el valor absoluto de un número entero. • Sumar y restar números enteros. • Identificar las propiedades de los números enteros. • Resolver problemas en los que intervienen números enteros y sus operaciones suma y resta.	• Identifica los elementos del conjunto de los números enteros. • Halla el opuesto de un número entero y su valor absoluto. • Suma y resta números enteros. • Identifica las propiedades de la suma de enteros. • Resuelve problemas en los que intervienen enteros y sus operaciones de suma y resta.
Estética: • Representar, en la recta numérica, los números enteros. • Dibujar en el plano cartesiano, parejas de números enteros. • Elaborar carteleras con las propiedades de la suma en Z.	• Ubica números enteros en la recta numérica. • Dibuja, mediante puntos, parejas ordenadas de números enteros. • Socializa, delante de sus compañeros, el trabajo realizado con la cartelera.
Etica - Actitudinal: • Asumir una actitud solidaria y participativa frente al trabajo en grupo.	• Cuando realiza actividades grupales, asume una actitud solidaria y participativa.

EVALUACIÓN

ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS

1.1 ¿SABÍAS QUÉ...?

Las actividades comerciales han estado siempre presentes en el origen de muchas actividades matemáticas. ¿A quién podría interesar más saber de números que a un comerciante o a un prestamista?.

Se sabe que hace más de 4.000 años los babilonios usaron sus conocimientos matemáticos para calcular los intereses que debía pagar alguien que recibía un préstamo. Por cierto, parece que eran más bien usureros.

Durante siglos, los matemáticos fueron conscientes de que algunos problemas no podían resolverse sin recurrir a algún tipo de número que nadie había definido todavía y que son los que ahora llamamos **negativos.**

Uno de los primeros que fue capaz de dar algún significado a los negativos fue Leonardo de Pisa (siglo XII - XIII), también conocido como Fibonacci. La idea surgió cuando trataba de resolver un problema económico imposible de solucionar si no se admitía como resultado un número negativo. "El problema -dijo- no tiene solución a menos que se admita que el primer hombre tenía una deuda".

EJERCICIO 1-1

4.5

Explicación: Lee nuevamente el texto anterior y luego, responde el cuestionario siguiendo la instrucción: encierra en un círculo la letra F, si la proposición es falsa; la letra V, si es verdadera y la letra N si no aparece en el texto.

1. Leonardo de Pisa fue un conocido prestamista italiano. F V [✓ N]
2. Hace ya cuatro siglos que los babilonios usaban su conocimiento matemático para calcular los intereses que pagaba alguien por un préstamo. F [✓ V] N
3. Los babilonios fueron los creadores de los números negativos. F V [✓ N]

4. A los comerciantes y prestamistas antiguos poco o nada les interesó saber de números. [✓ F] V N ✓

5. Fibonacci dio un significado claro a los números negativos. F [✓ V] N ✓

6. Los prestamistas babilonios practicaron la usura. F [✓ V] N ✓

7. Muchas actividades matemáticas han estado ligadas al comercio. F [✓ V] N ✓

8. La actividad comercial, realmente es poco lo que ha contribuido al desarrollo de las matemáticas. [✓ F] V N ✓

9. El número negativo se puede utilizar para expresar por ejemplo, que uno tiene una deuda. F [✓ V] N ✓

10. Los matemáticos antiguos tuvieron muchas dificultades para manejar los préstamos que hacían a las personas. [✓ F] V N ✓

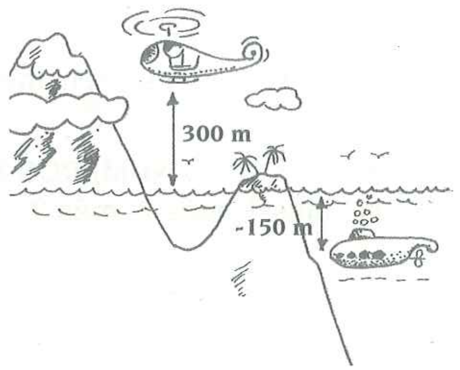
1.2 LOS NÚMEROS ENTEROS, REPRESENTACIÓN GRÁFICA, NÚMEROS OPUESTOS Y VALOR ABSOLUTO

1.2.1 Los Números Enteros y su Representación Gráfica

PRIMERA EXPERIENCIA

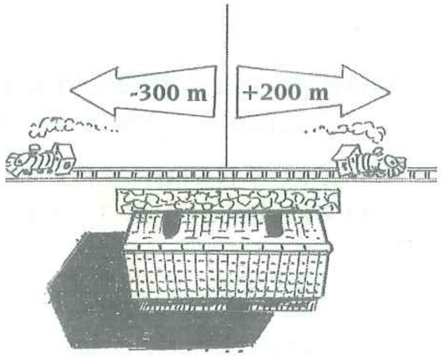
- Fíjate bien en las siguientes situaciones de la vida diaria:

1.



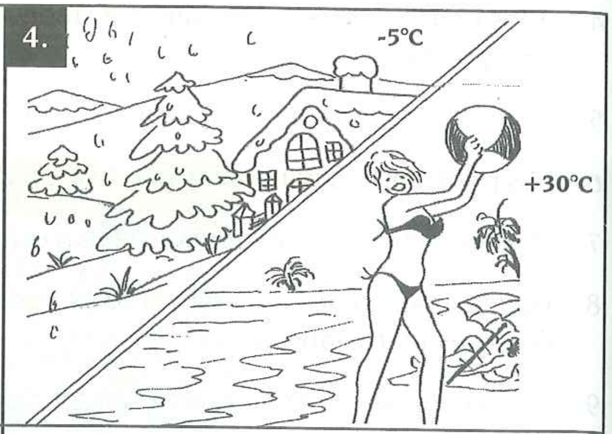
La posición del helicóptero y del submarino, respecto al nivel del mar, se representan con un número positivo y uno negativo, respectivamente.

2.



Un movimiento se puede considerar positivo o negativo según se produzca hacia la derecha o hacia la izquierda.

En contabilidad, los saldos a favor se indican con números positivos y las deudas con números negativos.



Para describir temperaturas muy elevadas, utilizamos números positivos y para describir temperaturas muy bajas, números negativos.

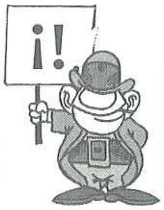
- Como ves, para describir estas situaciones no son suficientes los números naturales y es necesario introducir los **números con signo (positivos y negativos)** para representar situaciones en las que se pueden considerar dos sentidos opuestos: arriba o abajo, izquierda o derecha, ganancia o pérdida. Por ejemplo:
  - En la situación **1.** , para identificar que el helicóptero vuela a 300 metros sobre el nivel del mar, escribimos: **+300m** y para indicar que el submarino navega a 150 metros por debajo del nivel del mar escribimos **-150m**
  - En la situación **2.** , para indicar que un tren se desplazó 200 m a la derecha de la estación escribimos **+200m** y para indicar que el otro tren se desplazó 300 m a la izquierda de la estación escribimos **-300m.**
  - En la situación **3.** , para indicar que don Pedro ahorró 30.000 dólares escribimos **+30.000** y para indicar que don Juan tiene deudas por 30.000 dólares escribimos **-30.000.**
  - En la situación **4.** , para indicar que en la Sierra Nevada la temperatura es de 5 grados centígrados bajo cero escribimos **-5°C** y para indicar que en la playa la temperatura es de 30 grados centígrados escribimos **+30°C.**

- Los **NÚMEROS ENTEROS NEGATIVOS** son: **-1, -2, -3, -4, -5, ...** y se leen: **menos 1, menos 2, menos 3, menos 4, menos 5, ...**
- Los **NÚMEROS NATURALES**, sin el cero, los consideramos como **NÚMEROS ENTEROS POSITIVOS: +1, +2 , +3, +4, +5, ...** y se leen: **más 1, más 2, más 3, más 4, más 5,** ...
- El **0** queda ubicado entre los enteros positivos y los enteros negativos y se acostumbra llamársele **situación de origen**; por ejemplo:
  - En la temperaturas, el origen **0°** es la temperatura a la que se congela el agua.
  - En alturas terrestres, el origen **0** es el nivel del mar.
  - En asuntos de dinero, el origen **0** es no tener ni deber nada.
  - En el tiempo, el año **0** es el año del nacimiento de Cristo.

- El conjunto formado por los **NÚMEROS ENTEROS NEGATIVOS**, los **NÚMEROS ENTEROS POSITIVOS** y el **CERO** se denomina **CONJUNTO DE LOS NÚMEROS ENTEROS** y lo representamos por la letra **Z.**

APRENDAMOS...

- Los **NÚMEROS ENTEROS** se inventaron para describir situaciones en las que además de un número natural se requiere hacer referencia a un origen y por ello es necesario acompañar el número de un signo **(+)** o **(-).**
- Llamamos **NÚMERO ENTERO** a cualquiera de los **números positivos: +1, +2, +3, +4, ...** o de los **números negativos: -1, -2, -3, -4, ...** o al **0.**
- El conjunto de los números enteros se representa con la letra **Z={..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3...}**

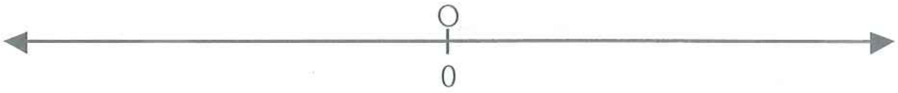


¡ATENCIÓN!

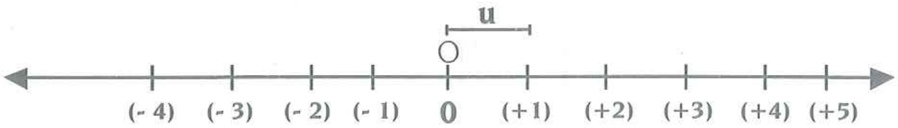
Observa que el conjunto **Z** contiene a los números naturales. Éstos se consideran como enteros positivos. Por lo tanto: **N ⊂ Z.**

SEGUNDA EXPERIENCIA

- Marquemos en una recta un punto O que llamaremos ORIGEN y al que le hacemos corresponder el CERO.



- A partir de este punto, desplacemos en ambos sentidos, a izquierda y a derecha del punto 0, un segmento unidad **u** que utilizaremos para graduar la recta; así:



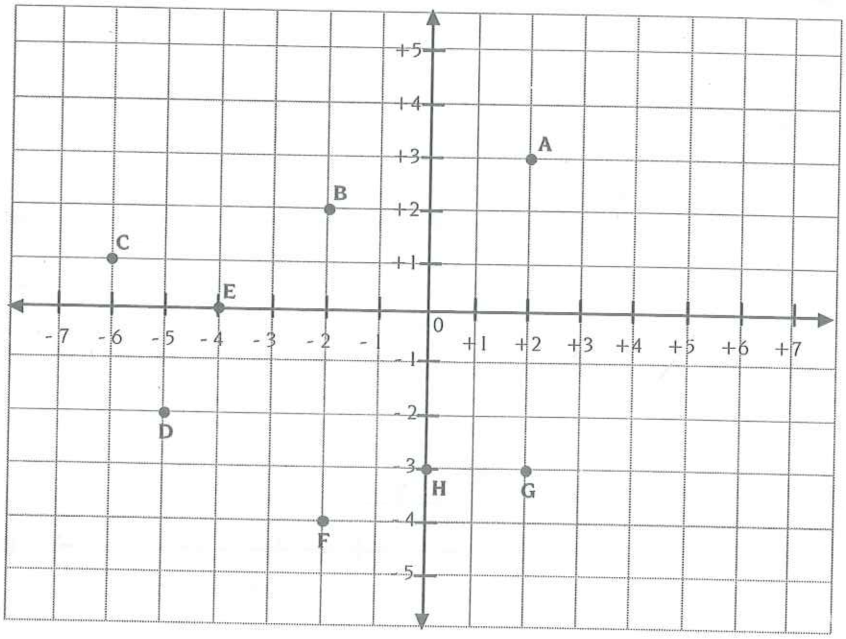
- Uno de los sentidos se elige como positivo (hacia la derecha de cero) y el otro como negativo (hacia la izquierda).
- Los puntos así obtenidos se numeran sucesivamente (+1) , (+2) , (+3), ... y (-1), (-2), (-3),...
- La figura anterior se llama RECTA NUMÉRICA para los números enteros.

APRENDAMOS...

- Representamos los números enteros sobre una recta en la cual marcamos un punto de ORIGEN. A este punto le asignamos el CERO.
- A los puntos ubicados a la derecha del origen les asignamos los números: +1, +2, +3, ...
- A los puntos ubicados a la izquierda del origen les asignamos los números: -1, -2, -3,...

TERCERA EXPERIENCIA

- En papel cuadriculado dibujemos dos rectas numéricas que se cortan perpendicularmente en el origen:



- Contesta estas preguntas:
  - ¿Dónde hemos ubicado los números positivos en la recta horizontal?
  - ¿Dónde hemos ubicado los números positivos en la recta vertical?
  - ¿Dónde hemos ubicado los números negativos en la recta horizontal?
  - ¿Dónde hemos ubicado los números negativos en la recta vertical?

- La figura formada por estas dos rectas numéricas, perpendiculares entre sí se llama DIAGRAMA CARTESIANO ENTERO y lo utilizaremos para representar PAREJAS ORDENADAS de números enteros.

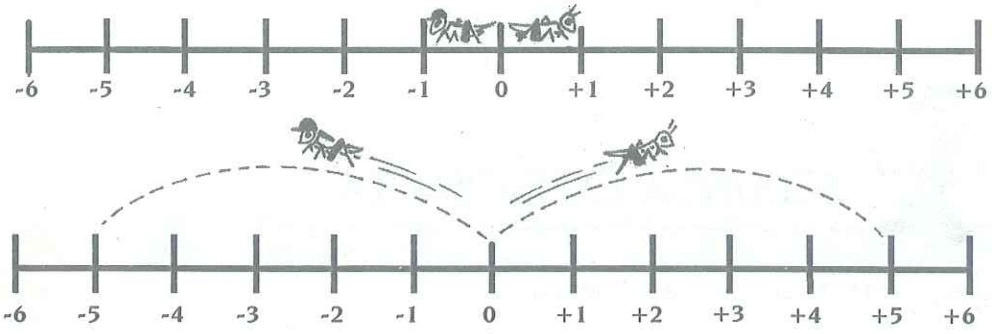
- ¿Cuáles son las coordenadas de cada uno de los puntos A, B, C, D, E, F, G y H marcados en este diagrama cartesiano?

1.2.2 Números Opuestos y Valor Absoluto

PRIMERA EXPERIENCIA

- En nuestra ciudad se celebró, en días pasados, un curioso concurso: el SALTO DEL GRILLO. A la final llegaron el GRILLO BRINCÓN y la GRILLA SALTARINA.

- Para conocer el ganador, ambos ejemplares fueron colocados en el origen de una recta numérica y obligados a saltar uno a la izquierda del origen y la otra a la derecha. La figura siguiente nos muestra cómo fue el primer salto:



- Contesta:

  a) ¿En qué posición de la recta numérica quedó ubicada la Grilla Saltarina? ¿Y el Grillo Brincón?

  b) ¿Quién ganó esta primera ronda? ¿Por qué?

  c) ¿Quedaron ambos competidores en la misma posición?

APRENDAMOS...

- Los numeros **-5** y **+5** se denominan **NÚMEROS OPUESTOS.**
- El opuesto de un número se obtiene cambiándole de signo. Pero también podemos indicarlo anteponiéndole un signo **menos.**

EJEMPLO

* El opuesto de - 5 es - (-5)
* El opuesto de +5 es - (+5)

- Para evitar la incomodidad del doble signo hacemos lo siguiente:

* El **signo +** delante de cualquier número es opcional y puede eliminarse.

EJEMPLO

+5 es lo mismo que **5**
+(+5) es lo mismo que **5**
+(-5) es lo mismo que **-5**

* El **signo -** delante de un número nos da su opuesto.

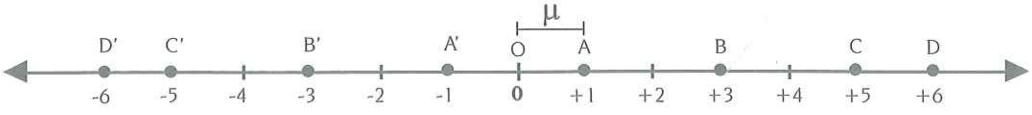
EJEMPLO

- (-5) es el opuesto de **-5**. Por lo tanto: **- (-5) = 5**
- (+5) es el opuesto de **5**. Por lo tanto: **- (+5) = -5**

- **En general:** dos signos consecutivos iguales se sustituyen por el signo **+** y dos signos consecutivos distintos se sustituyen por el signo **-**.

SEGUNDA EXPERIENCIA

- Fíjate bien en la siguiente recta numérica:



- Ahora responde estas preguntas:

1. Si la distancia entre dos puntos de la recta numérica la obtenemos contando el número de unidades μ que los separa, ¿cuál es la distancia entre los puntos C y O? ¿Y entre C' y O?

2. Se dice que dos puntos son SIMÉTRICOS con respecto al origen, si están ubicados a igual distancia de éste. ¿Son C y C' simétricos con respecto al punto O? ¿Por qué?.
3. ¿Son A y A' simétricos con respecto al punto O? ¿Por qué?.
4. Son D y B' simétricos con respecto al punto O? ¿Por qué?.
5. Teniendo en cuenta el punto correspondiente al entero (+5) en la recta numérica, ¿cuál es su distancia al origen? ¿está a la derecha o a la izquierda del origen?.
6. Teniendo en cuenta el punto correspondiente al entero (-5) en la recta numérica, ¿cuál es su distancia al origen? ¿está a la izquieda o a la derecha del origen?.
7. Observemos que cada número entero está caracterizado por dos cosas:

   * Un SENTIDO en la recta numérica, que nos indica si está ubicado a la izquierda o a la derecha del origen. El sentido se identifica por medio del signo (+) o (-) ubicado delante del número.

   * El VALOR ABSOLUTO, que nos indica la distancia a la cual se encuentra el número del origen. Por ejemplo, el valor absoluto de -8 es 8 porque la distancia a la cual se encuentra -8 del origen es precisamente 8 unidades.

   * En la experiencia anterior la grilla y el grillo quedaron empatados porque recorrieron la misma distancia aunque en distintas direcciones.

   Teniendo en cuenta lo anterior contesta:

   a) ¿Cuál es el valor absoluto de +5? ¿y el de -5?.
   b) ¿Son iguales los valores absolutos de +5 y -5? ¿Por qué?.
   c) ¿Tienen +5 y -5 la misma posición en la recta numérica? ¿Porqué?.

8. Para indicar el VALOR ABSOLUTO de un número entero, lo escribimos entre dos barras verticales; así:

   |+5| se lee "valor absoluto de +5" ; |-8| se lee "valor absoluto de -8"

   Además: |+5| = 5 y |-8| =8

   Contesta:

   a) ¿Es |+7| = |-7|? ¿Por qué? b) ¿Es |-6| = -6? ¿Por qué?

APRENDAMOS...

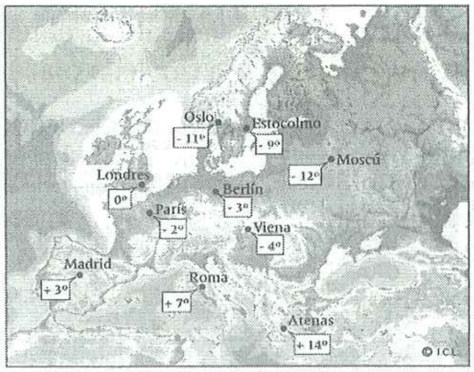
- Se llama **VALOR ABSOLUTO** de un número entero x a la distancia que lo separa del origen en la recta numérica. Lo representamos por | x |.
- El símbolo de **VALOR ABSOLUTO** es | | ; así: | x | se lee **"valor absoluto de x"**.
- Dos números son **OPUESTOS** o **SIMÉTRICOS** con respecto al origen de la recta numérica si tienen el **MISMO VALOR ABSOLUTO** pero **DISTINTO SIGNO.** Por ejemplo, -3 y +3 son opuestos o simétricos con respecto al origen de la recta numérica.

EJERCICIO 1-2

① En el mapa aparecen las temperaturas de algunas capitales:

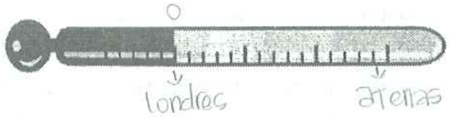
Negativa:
-11° (Oslo)
-9° (Estocolmo)
-12° (moscú)

Positiva:
+14° (atenas)
+7° (Roma)
+3° (Madrid)



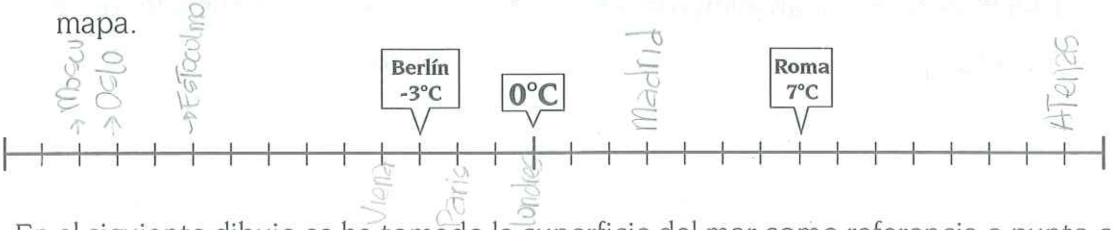
a) Cita tres ciudades con temperatura negativa y otras tres con temperatura positiva.

b) Dibuja un termómetro como éste y marca en él la temperatura registrada en Atenas, en Londres y en Oslo.

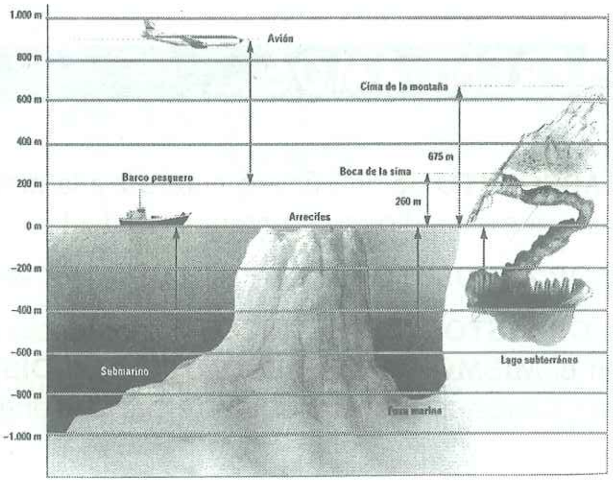


c) De todas las temperaturas que aparecen en el mapa, ¿cuál es la más baja? ¿y la más alta? Baja: -12° (moscú) alta: +14 (atenas)

d) Indica sobre la recta numérica, la posición de las temperaturas que aparecen en el mapa.



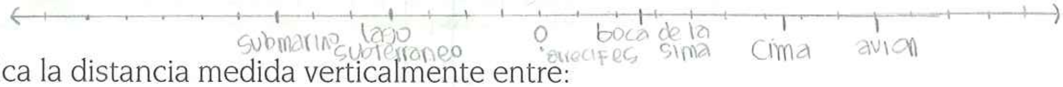
② En el siguiente dibujo se ha tomado la superficie del mar como referencia o punto cero.



a) Expresa las altitudes siguientes mediante un número positivo o negativo (ten en cuenta que una profundidad es una altitud negativa):

Cima	650m	Lago subterráneo	-400m
Arrecifes	0 m	Avión	900 m
Boca de la sima	250 m	Submarino	-700m

b) Representa en una recta convenientemente graduada, las seis cantidades anteriores.



c) Indica la distancia medida verticalmente entre:

- La fosa marina y el avión
- La boca de la sima y el lago
- El barco pesquero y el submarino
- La fosa marina y el submarino

3 Escribe los siguientes datos numéricos con el signo adecuado:

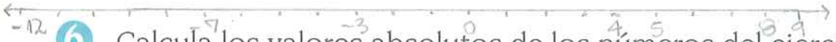
a) Arquímedes fue un matemático griego que nació en el año 640 a.C. -640
b) El nivel del mar Caspio, en Rusia, está situado a 30m por debajo del nivel del mar. -30
c) El agua hierve a 100°C y se congela a 39 grados bajo cero. -39
d) Camilo tiene 380 dólares. Santiago en cambio, debe 800. -800
e) Mariana vive en el segundo piso y deja su carro en el sótano 3. -3

4 Simplifica la escritura de modo que aparezca un signo como máximo:

a) +7 = 7	b) + (+9) = +9	c) - (-12) = -12	d) + (-15) = -15
e) + (-12) = -12	f) - (+7) = -7	g) - 0 = -0	h) - (+6) = -6

5 Traza una recta graduada y ubica sobre ella los siguientes números:

a) 5	b) - 7	c) -12	d) +8
e) -3	f) 0	g) 4	h) - (-9)



6 Calcula los valores absolutos de los números del ejercicio 5.

5 - 7 - 12 - 8 - 3 - 0 - 4 - 9

7 Halla los opuestos de los números del ejercicio 5.

-5 +7 +12 -8 +3 0 -4 -9.

8 Representa en una recta los siguientes desplazamientos:

a) 5 unidades hacia la derecha
b) 6 unidades hacia la izquierda
c) 3 unidades hacia la derecha, 4 unidades a la izquierda y luego 5 unidades la derecha.

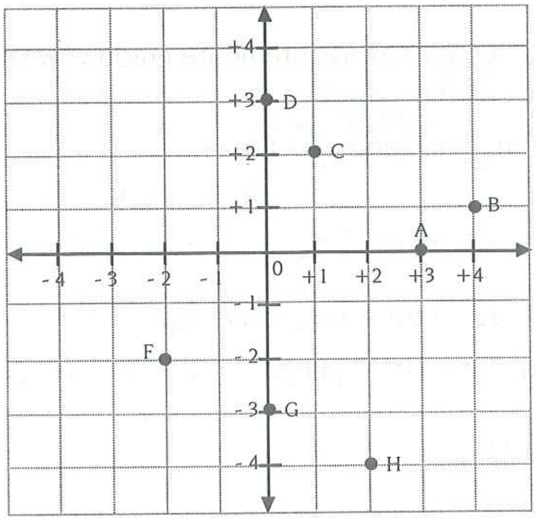
9 ¿Qué temperatura está marcando el termómetro si:

a) marcaba 15°C y disminuyó 12°C? 3°C
b) marcaba 10°C bajo cero y aumentó 7°C? 17°C Bajo Cero
c) marcaba 18°C y aumentó 7°C? 25°C
d) marcaba 6°C bajo cero y disminuyó 5°C? 1°C Bajo Cero

⑩ Ubica en el diagrama cartesiano de los enteros las siguientes parejas ordenadas:

A (2,4) B (4,-5) C (-6,3)
D (-5,-4) E (0,6) F (7,0)
G (0, -5) H (-5,0) I (0,0)

⑪ Indica la pareja ordenada que corresponde a cada uno de los siguientes puntos:



⑫ Calcula:

a) $|-12| =$
b) $|8 - 9| =$
c) $|-15| + |-3| =$
d) $|-15| - |-12| =$
e) $|+6| \times |-7| =$
f) $|-18| \div |-6| =$
g) $|-4| + |-2| - |0| =$
h) $(|0| + |-15|) \div |-3| =$

⑬ Aplica el operador "VALOR ABSOLUTO" sobre cada uno de los elementos del conjunto M = {-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 }

a) Elabora el diagrama de flechas.
b) Escribe simbólicamente la operación.
c) Escribe el conjunto de parejas ordenadas.
d) Representa gráficamente la operación en el diagrama cartesiano.

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 1

Un granjero tiene 20 cerdos, 40 vacas y 60 caballos. Pero si llamamos caballos a las vacas, ¿cuántos caballos tendrá?

1.3 ORDEN EN LOS ENTEROS, SUMA Y RESTA DE ENTEROS

1.3.1 Orden en Z

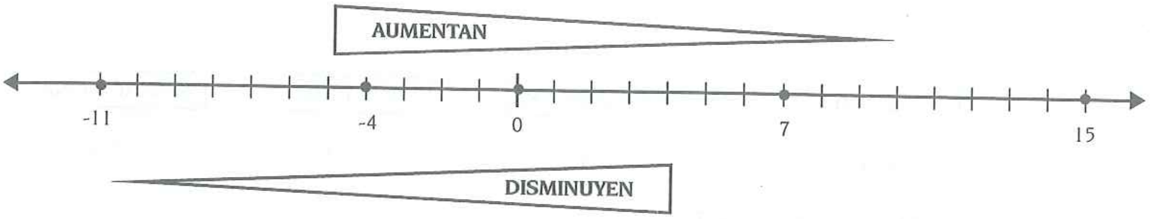
PRIMERA EXPERIENCIA

- Fíjate bien en las temperaturas de algunas ciudades europeas, en un día cualquiera.

CIUDAD	ROMA	OSLO	VIENA	LONDRES	ATENAS
TEMPERATURA	+7°C	-11°C	-4°C	0°C	+15°C

- Si ordenamos las temperaturas que aparecen en la tabla, de menor a mayor, obtenemos:

$$-11 < -4 < 0 < 7 < 15$$



- En la recta numérica, el menor de dos números siempre aparece a la izquierda del mayor; además, cualquier número negativo es menor que cualquier positivo.
- El 0 es mayor que cualquier negativo y menor que cualquier positivo.

APRENDAMOS...

- Los números enteros se pueden ordenar y comparar.
- Un número entero **a** es **menor** que un número entero **b,** y escribimos **a<b,** si **a** está a la izquierda de **b** en la recta numérica.

a<b

- Cualquier número negativo es menor que cualquier positivo. El 0 es mayor que cualquier negativo y menor que cualquier positivo.

1.3.2 Suma de Números Enteros

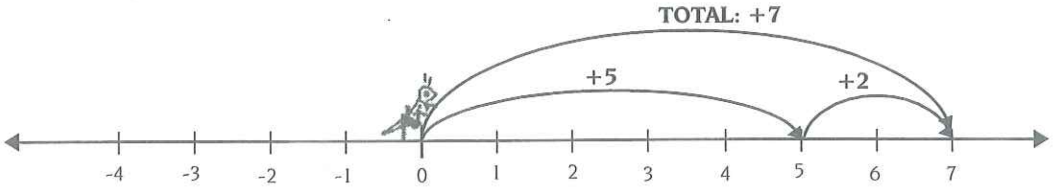
- Al sumar números enteros consideraremos tres casos:

a) Los dos números tienen el mismo signo.
b) Un número es positivo y el otro negativo.
c) Debemos sumar varios números enteros: unos positivos y otros negativos

a) LOS DOS NÚMEROS TIENEN EL MISMO SIGNO:

PRIMERA EXPERIENCIA

- En el concurso del salto del grillo, la Grilla Saltarina está situada inicialmente en el punto 0. Si salta 5 unidades a la derecha y luego salta 2 unidades a la derecha, ¿cuál será su posición final? Veamos:



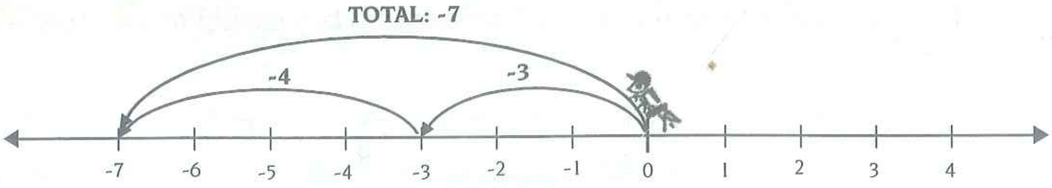
1er SALTO	SEGUIDO DE	2° SALTO		POSICIÓN FINAL
(+5)	+	(+2)	=	+7

- Por lo tanto: **(+5) + (+2) = +7**
- Contesta: ¿cómo se suman dos números enteros positivos?

SEGUNDA EXPERIENCIA

- En su segundo intento, el Grillo Brincón dió un salto de 3 unidades hacia la izquierda y luego otro de 4 unidades hacia la izquierda. ¿Cuál es su posición final?

Veamos:



1er SALTO	SEGUIDO DE	2° SALTO		POSICIÓN FINAL
(-3)	+	(-4)	=	- 7

- Por lo tanto: **(-3) + (-4) = (-7)**
- Contesta: ¿Cómo se suman dos números enteros negativos?

APRENDAMOS...

- Para **SUMAR** dos números enteros del **MISMO SIGNO:**
  - Se suman sus valores absolutos
  - Se escribe el signo que tienen.

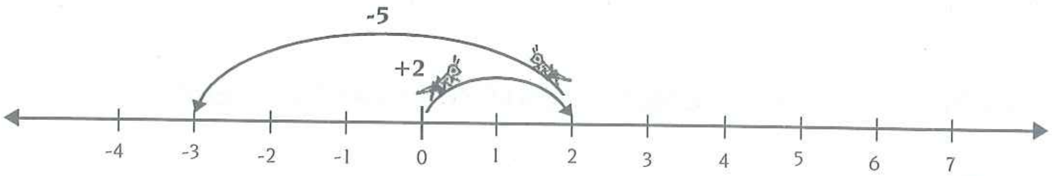
- Realiza las siguientes sumas:

a) (+2) + (+6)
b) (-3) + (-8)
c) (+9) + (+11)
d) (-7) + (-15)
e) (-9) + (-20)
f) (+8) + (+3)

b) LOS DOS NÚMEROS ENTEROS TIENEN DISTINTO SIGNO

PRIMERA EXPERIENCIA

- En su segundo intento, la Grilla Saltarina dió un brinco de 2 unidades hacia la derecha y, desde allí, brincó 5 unidades hacia la izquierda. ¿Dónde quedó ubicada la Grilla Saltarina?. Veamos:

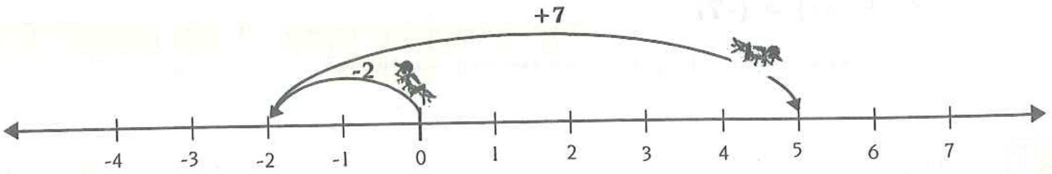


1^er SALTO	SEGUIDO DE	2° SALTO	POSICIÓN FINAL
(+2)	+	**(-5)** =	**(-3)**

- Por lo tanto: **(+2) + (-5) = (-3)**

SEGUNDA EXPERIENCIA

- En su último intento, el Grillo Brincón dió un salto de 2 unidades hacia la izquierda y, desde allí, brincó 7 unidades hacia la derecha. ¿Dónde quedó colocado el Grillo Brincón?. Veamos:



1er SALTO	SEGUIDO DE	2° SALTO		POSICIÓN FINAL
(-2)	+	(+7)	=	+5

- Por lo tanto: **(-2) + (+7) = +5**
- Contesta: ¿Cómo se suman dos números enteros de distinto signo?

APRENDAMOS...

- Para **SUMAR** dos números enteros de **DISTINTO SIGNO:**
  - Se restan sus valores absolutos.
  - Se escribe el signo del que tenga mayor valor absoluto.

- Representa las siguientes sumas de números enteros en una recta numérica y halla su resultado:

a) (-7) + (+8)
b) (+12) + (-9)
c) (+3) + (-15)
d) (-8) + (+3)

- Calcula:

a) (-18) + (+2)
b) (-15) + (+30)
c) (+3) + (-12)
d) (-24) + (+15)

c) SUMA DE TRES O MÁS NÚMEROS ENTEROS CUALESQUIERA

EXPERIENCIA

- En el concurso del Salto del Grillo, Saltarina y Brincón quedaron empatados. Para desempatar, ambos ejemplares deberán hacer 4 saltos consecutivos:
- El Grillo Brincón realizó estos saltos:

Primer salto:.................... 4 unidades hacia la derecha
Segundo salto:............... 7 unidades hacia la izquierda
Tercer salto:.................... 3 unidades hacia la izquierda
Cuarto salto:.................. 5 unidades hacia la derecha.

¿Cuál es la ubicación final del Grillo Brincón?

- Representamos los saltos a la derecha por: +4 y +5
  Representamos los saltos a la izquierda por: -7 y -3
- La posición final la obtenemos así:

  Suma de saltos a la derecha: (+4) + (+5) = +9
  Suma de saltos a la izquierda: (-7) + (-3) = -10
  Suma total: (+9) + (-10) = -1

  Por lo tanto, la posición final del Grillo Brincón es -1.

- Contesta: ¿Cómo se suman tres o más números enteros?

APRENDAMOS...

- Para **SUMAR TRES O MÁS** números enteros, hacemos lo siguiente:
  - **Sumamos** aparte los números enteros positivos
  - **Sumamos** aparte los números enteros negativos
  - **Sumamos** los dos números obtenidos: **uno positivo con otro negativo.**

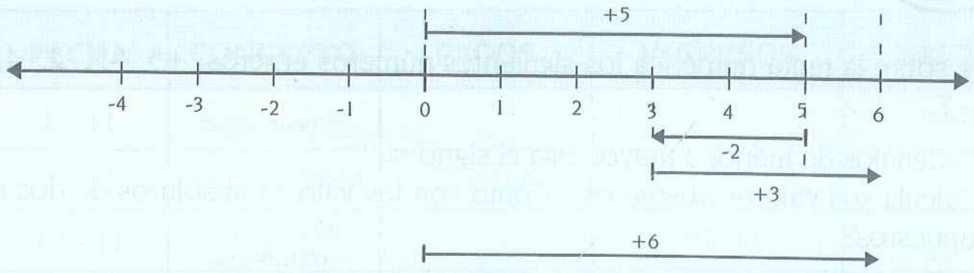
¡ATENCIÓN!

Es una regla de escritura que no aparezcan delante de un número dos signos consecutivos. Por esta razón, en lugar de la forma incorrecta **+ - 2,** escribimos **+ (-2).** Pero, mejor aún, es convertir el doble signo en uno solo, utilizando las reglas que ya sabemos:

- dos signos seguidos iguales se sustituyen por +
- dos signos seguidos distintos se sustituyen por -; así:

(+5) + (-2) + (+3) = 6

5 - 2 + 3 = 6



EJEMPLO 1:

(-12) + (+7) + (-4) = -12 + 7 - 4 = - 9
(-7) - (+6) + (+7) = -7 - 6 + 7 = -6
(+8) + (-12) - (-3) = 8 - 12 + 3 = -1

EJEMPLO 2:

Calculemos: (-2) + (-8) + (+3) + (-4) + (+1) + (-2) + (+5) + (+11)

Solución:

- Podemos calcular esta suma de dos maneras:

PRIMERA MANERA:
* Sumamos los positivos: (+3) + (+1) +(+5) + (+11) = +20
* Sumamos los negativos: (-2) + (-8) + (-4) + (-2) = -16
* Sumamos un positivo con un negativo: (+20) + (-16) = +4

SEGUNDA MANERA:
* Teniendo en cuenta la regla de los signos, convertimos cada doble signo en uno solo:
(-2) + (-8) + (+3) + (-4) + (+1) + (-2) + (+5) + (+11) = -2-8+3-4+1-2+5+11

* A continuación, sumamos los números positivos aparte y los números negativos aparte; así:

$$\begin{tikzcd}
 & 3 + 1 + 5 + 11 = +20 \\
-2 - 8 + 3 - 4 + 1 - 2 + 5 + 11 \arrow[ur, "\text{POSITIVOS}"] \arrow[dr, "\text{NEGATIVOS}"'] & \\
 & -2 - 8 - 4 - 2 = - 16
\end{tikzcd}$$

* Finalmente, sumamos un número entero positivo con un número entero negativo: (+20) + (-16) = + (20 - 16) = +4.

EJERCICIO 1-3

❶ Sitúa sobre la recta numérica los siguientes números enteros: +5 , -5, -2, -4, +7, -9, +1, -7.

a) Ordénalos de menor a mayor. Usa el signo <.
b) Calcula sus valores absolutos. ¿Cómo son los valores absolutos de dos números opuestos?

❷ Escribe cinco números más de cada serie:

a) -20, -16, -12, _____ , ______ , ______, ______, ______.
b) 9, 6, 3, _____ , ______ , ______, ______, ______.

3 Contesta:

a) ¿Qué signo tiene la suma de dos números positivos?
b) ¿Qué signo tiene la suma de dos números negativos?
c) ¿Qué signo tiene la suma de dos números de distinto signo?

4 Realiza las siguientes sumas:

a) (+9) + (+15)
b) (+2) + (-7)
c) (+15) + (-26)
d) (-12) + (+8)
e) (-15) + (+23)
f) (-8) + (-4)
g) (-7) + (-12)
h) (+6) + (-3)
i) (-9) + (-15)
j) (+20) + (-45)
k) (-12) + (-8)
l) (-3) + (-16)

5 Calcula las siguientes sumas algebraicas:

a) -5 + 13 - 8 - 3 +15
b) (-6) + (+9) - (-4)
c) -43 + 17 - 15 + 30
d) (-52) + (-35) + (+80) - (-15)
e) (-15) + (-8) + (+12)
f) (+10) + (-6) + (-12)

6 Andrés recibe $10.000 de un amigo, $12.000 de otro y pagó $7.000 a un tercero. ¿Cuánto dinero tiene en total?

7 Juan tiene una deuda con el banco de $207.400 y con un amigo de $160.500. ¿Cuánto dinero tiene Juan?

8 Desde el piso 2 subí 4 pisos y después bajé 9 para recoger el automóvil en el garaje. ¿A qué piso descendí?

9 Sobre los elementos del conjunto A={-3 , -2 , -1 , 0, 1, 2, 3 } aplicamos el operador "SUMAR (-3)". Se pide:

a) Elaborar un diagrama sagital para esta operación
b) Escribir el conjunto de parejas ordenadas
c) Escribir simbólicamente la operación
d) Representarla gráficamente en el diagrama cartesiano.

10 En el extracto de una cuenta corriente, los ingresos se anotan como cantidades positivas, y los pagos, como negativas. A veces, los pagos superan la cantidad de dinero disponible. En este caso, la deuda que el cliente contrae con el banco aparece con un saldo negativo. Se tiene el siguiente extracto:

FECHA	CONCEPTO	PAGOS	INGRESOS	SALDO
1 - 11	Saldo anterior			+850.000
7 - 11	Servicios Públicos	-$1,235.000		
19 - 11	Consignación en efectivo		+600.000	
25 - 11	Cheque girado	-$99.950		
30 - 11	Transferencia a su favor		+50.000	

a) Completa el saldo en cada día.
b) Escribe los pagos e ingresos como una suma de enteros.
c) Elimina paréntesis y calcula el saldo en el día 30-11.

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 2

Dos padres y dos hijos se sentaron a comer en una misma mesa en la cual habían 3 platos con 1 huevo cada uno. Si cada uno comió un huevo, ¿cómo fue posible esto?

1.4 PROPIEDADES DE LA SUMA DE ENTEROS

PRIMERA EXPERIENCIA

- Completa la siguiente tabla en tu cuaderno:

a	b	c	a + b	b + a	b + c	(a + b) +c	a + (b+c)
+8	+5	+4	+13	+13	+9	+17	+17
+9	-3	-5	+6	+6	-8	+1	+1
-12	+6	-8	-6	-6	-2	-14	-14
-15	-10	-7	-25	-25	-17	-32	-32

- Contesta:

a) ¿Se cumple que la suma de dos números enteros es otro número entero?
Si porque al sumar 2 #'s enteros el resultado es otro numero entero

positivo, negativo o 0

b) ¿Se cumple que **a+b=b+a** para los valores tomados? ¿Es verdad que para cualquier par de números enteros **a** y **b** se cumple que **a+b** y **b+a** tienen el mismo valor?
Si porque la suma de enteros es conmutativa

c) ¿Se cumple que **(a+b) +c = a+ (b+c)** para los valores tomados? ¿Es verdad que para cualquier tres números enteros **a, b** y **c** se cumple que **(a+b)+c** y **a+(b+c)** tienen el mismo valor?
Si porque la suma de enteros es asociativa

APRENDAMOS...

- **PROPIEDAD CLAUSURATIVA**

La suma de dos números enteros es otro número entero; es decir:

Si a,b ∈ Z entonces a+b ∈ Z

- **PROPIEDAD CONMUTATIVA**

  La suma de dos números enteros no depende del orden de los sumandos; es decir:

  Si a,b ∈ Z entonces a+b = b+a

- **PROPIEDAD ASOCIATIVA**

  Para sumar tres o más números enteros, podemos asociarlos de a dos; es decir:

  Si a,b, c ∈ Z entonces (a+b) +c = a+(b+c)

- **¡ATENCIÓN!**

  Las propiedades conmutativa o asociativa permiten realizar la suma de varios números enteros sin necesidad de introducir signos de agrupación y en cualquier orden.

  a+b+c = a+c+b = c+b+a

SEGUNDA EXPERIENCIA

- Realiza las siguientes sumas en tu cuaderno:

  (+5) + 0 = ; 0 + (+88) = ; (- 7) +0 = ; 0 + (- 7) =
  (+12)+0 = ; 0 + (+12) = ; (- 16) + 0 = ; 0 + (- 15) =

- ¿Qué observas?
- ¿Es verdad que si sumamos un número entero con CERO, obtenemos el mismo número entero?

APRENDAMOS...

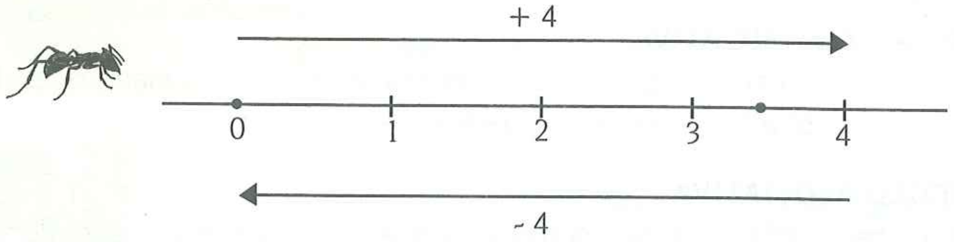
- La suma de un número entero cualquiera con el 0 es el mismo número entero, es decir:

  Si a ∈ Z entonces a + 0 = 0 +a = a

- Decimos que 0 es el **ELEMENTO NEUTRO** de la suma de enteros.

SEGUNDA EXPERIENCIA

- Una hormiga parte de su hormiguero en busca de comida. Camina 4 m hacia la derecha y regresa por el mismo camino.



- Al regresar al hormiguero, el animalito se encuentra en el punto de partida por lo cual su desplazamiento total es 0 (cero); así:

Primer desplazamiento: +4
Segundo desplazamiento: - 4
} Total: (+4m) + (- 4m) = 0 m

- Completa en tu cuaderno los siguientes desplazamientos de la hormiga:

(+2) + (- 2) =　　　(+6) + (- 6) =
(- 3) + (+3) =　　　(- 8) + (+8) =

En todos los casos el resultado es el mismo: 0; es decir, el elemento neutro de la suma

- Contesta: ¿Cuánto suman un número entero y su opuesto?
- Ahora completa los cuadritos en las siguientes sumas:

(+7) + □ = 0　　　□ + (+9) = 0　　　(- 12) + □ = 0
(+15) + □ = 0　　　□ + (- 3) = 0　　　□ + (- 8) = 0

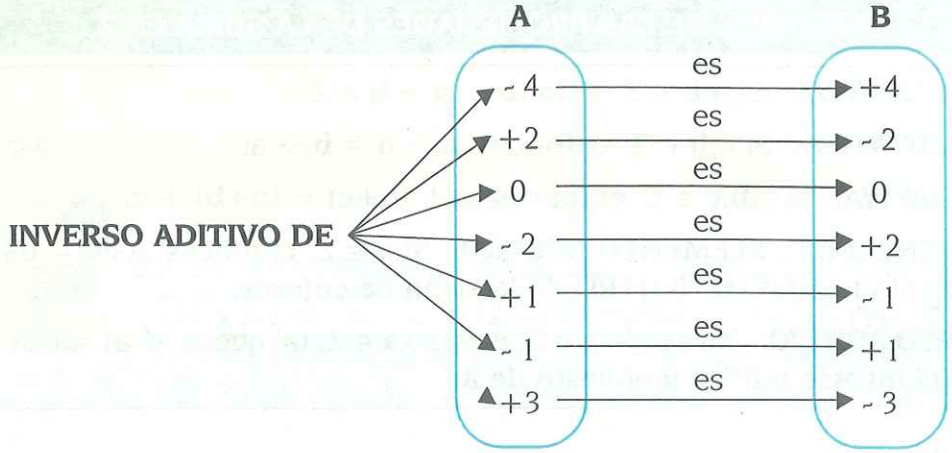
- Todo lo anteriormente realizado en esta experiencia nos permite concluir que:

APRENDAMOS...

- Para todo número entero **a**, existe un número entero **-a** llamado **OPUESTO** ó **INVERSO ADITIVO** de **a**.
- La suma de un número entero y su inverso aditivo es el número entero cero, es decir:

a +(- a) = (- a) +a = 0

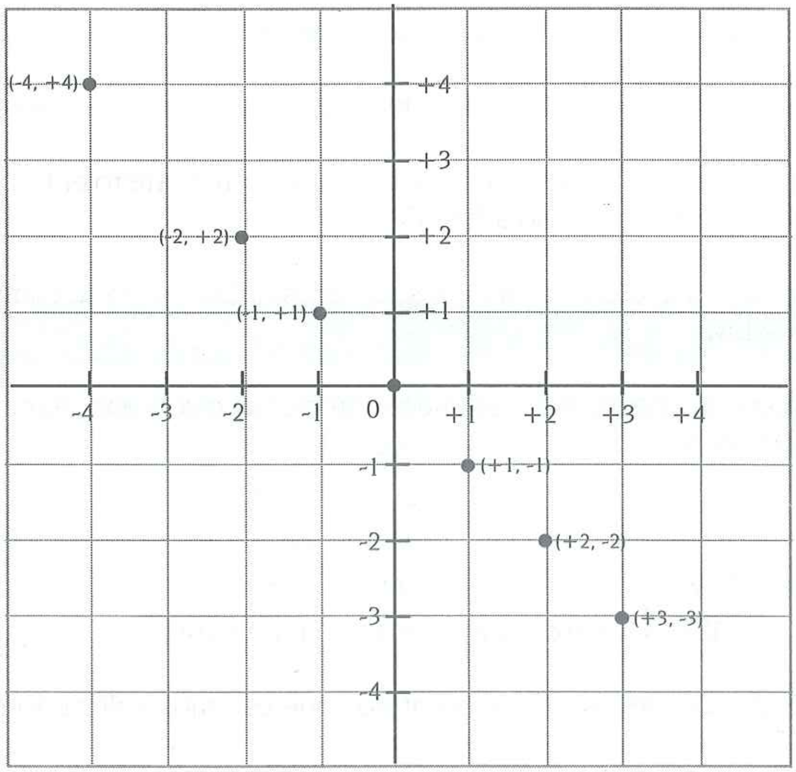
- Sobre los elementos del conjunto A={-4, +2, 0 , -2, +1, -1, +3 } apliquemos el operador "HALLAR EL INVERSO ADITIVO", escribamos el conjunto de parejas ordenadas y dibujemos el gráfico en el diagrama cartesiano:
- Este es el diagrama de flechas:



- Ahora escribamos el conjunto de parejas ordenadas:

{ (-4, +4) , (+2, -2) , (0,0) , (-2, +2) , (+1, -1), (-1, +1) , (+3, -3) }

- Finalmente, dibujamos la gráfica:



¡ATENCIÓN!

Dos números que son INVERSOS ADITIVOS tienen el MISMO VALOR ABSOLUTO pero SIGNO CONTRARIO

RESUMEN DE LAS PROPIEDADES DE LA SUMA EN Z

- **CLAUSURATIVA:** **Si a,b $\in$ Z entonces a + b $\in$ Z.**
- **CONMUTATIVA:** **Si a,b $\in$ Z entonces a + b = b + a.**
- **ASOCIATIVA:** **Si a,b,c $\in$ Z entonces a + (b+c) = (a+b) + c.**
- **EXISTENCIA DEL ELEMENTO NEUTRO:** **Si a $\in$ Z entonces a+0 = 0+a = 0.** **El 0 es el ELEMENTO NEUTRO de la suma de enteros.**
- **INVERSO ADITIVO:** **Para todo a $\in$ Z, existe -a $\in$ Z, tal que: a+(-a) = (-a)+a = 0** **-a es el inverso aditivo u opuesto de a.**

EJERCICIO 1-4

❶ ¿Por qué decimos que la suma de números enteros cumple la propiedad clausurativa?

❷ ¿Por qué decimos que la suma de números enteros es conmutativa? ¿Y asociativa?

❸ ¿Cuál es el elemento neutro o módulo de la suma de números enteros?

❹ ¿Cuándo un número entero es el inverso aditivo de otro número entero? ¿ Tienen todos los números enteros un inverso aditivo?

❺ Explica por qué en el conjunto N de los números naturales no se cumple la propiedad del inverso aditivo.

❻ Comprueba que las siguientes igualdades son ciertas resolviendo tanto el lado izquierdo como el derecho.

a) [(+12) + (- 7)] + (+9) = (+12) + [(- 7) + (+9)]
b) [(- 8) + (+6)] + (-7) = (- 8) + [(+6) + (- 7)]
c) [(+5) + (- 4)] + (- 1) = (+5) + [(- 4) + (- 1)]
d) [(+25) + (- 43)] + (+56) = (+25) + [(- 43) + (+56)]

❼ Indica la propiedad de los números enteros que estamos aplicando en los ejercicios siguientes:

a) (+5) + [(- 3) + (+12)] = [(+5) + (- 3)] + (+12)
b) (- 18) +(- 23) = (- 23) + (- 18)
c) (- 12) + 0 = 0 +(- 12) = (- 12)
d) (- 7) + (+7) = (+7) + (- 7) = 0

❽ Halla el inverso aditivo de los siguientes números enteros:

a) -15 b) +21 c) 0 d) -18 e) +35 f) -153

⑨ Realiza las siguientes sumas quitando los paréntesis y los signos (+) que no hagan falta:

a) (-8) + (-9) + (+30) + (-3) + (+6)
b) (8-57) + (+69) + (-41) + (-83)
c) (+60) + (-30) + (-20) + (-11)
d) (+35) + (-49) + (+28) + (-42)

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 3

Un alpinista entra en una noche de viento a un refugio de montaña y se da cuenta que tiene una sola cerilla. Sobre la mesa encuentra una vela y en la chimenea una antorcha. ¿Qué encendería primero?

1.5 RESTA DE NÚMEROS ENTEROS

PRIMERA EXPERIENCIA

- En el curso anterior vimos que la resta de números naturales sólo es posible cuando el MINUENDO es MAYOR que el SUSTRAENDO. Acá veremos que en Z la resta siempre es posible.

RECORDEMOS

Si MINUENDO - SUSTRAENDO = DIFERENCIA, entonces:
MINUENDO = SUSTRAENDO + DIFERENCIA

EJEMPLO:

Si 43 - 12 = 31 entonces 43 = 31 + 12
Si 54 - 25 = 29 entonces 54 = 29 + 25

- Ahora queremos saber cómo se resuleve una resta entre números enteros; por ejemplo, calculemos:

$$(-17) - (+8) = \boxed{}$$

Para resolver este problema, debemos encontrar un número que SUMADO con (+8) nos de (- 17), es decir:

$(-17) - (+8) = \boxed{}$ entonces $(-17) = \boxed{} + (+8)$

Con un poco de esfuerzo encontraremos que dicho número es (- 25) ya que:

$$(-17) = (-25) + (+8)$$

SEGUNDA EXPERIENCIA

- Teniendo en cuenta la relación existente entre la suma y la resta, completa en tu cuaderno. Observa el modelo:

(+6) - (+12) = (+6) + (- 12) ; (- 15) - (+3) = ; (- 18) - (- 4) =
(+16) - (+24) = ; (- 2) - (- 21) = ; (- 12) - (+34) =

- Como vemos, toda resta de números enteros podemos convertirla en una suma. Basta que al MINUENDO le sumemos el INVERSO ADITIVO DEL SUSTRAENDO.

APRENDAMOS...

- Para **RESTAR** dos números enteros, sumamos al minuendo el inverso aditivo del sustraendo; es decir:

a - b = a + (inverso aditivo de b)

- Realiza las siguientes restas de números enteros. Fíjate en el modelo:

(+15) - (+8) = (+15) + (- 8) = +7 ; (+6) - (- 7) = ; (+23) - (+15) =
(- 42) - (+12) = ; (- 37) - (- 17) = ; (- 12) - (+45) =

- Muchos ejercicios en matemáticas combinan la suma y la resta de números enteros. Estos ejercicios se denominan SUMAS ALGEBRAICAS.

¡ATENCIÓN!

Toda expresión donde aparezcan sumas y restas combinadas de números enteros se denomina **SUMA ALGEBRAICA,** así: -6 + 7 - (-2) + (-9) - (+2) es una suma algebráica.

Para resolver una suma algebráica de números enteros, la transformamos en suma reemplazando los términos que deben restarse por sus inversos aditivos y efectuando después la suma resultante.

EJEMPLO 1:

(-3) + (+9) - (- 1) + (+6) - (+4) = - 3 + 9 + 1 + 6 - 4
= (9 + 1 + 6) + (- 3 - 4)
= 16 + (- 7)
= 9

EJEMPLO 2:

- Elimina los signos de agrupación y halla el resultado:

$$-3 + \{ -1 + [4 - (3 - 7)] + 3 \}$$

SOLUCIÓN:

- Para resolver este ejemplo, recordemos las reglas para eliminar signos de agrupación que estudiamos en la unidad 2 del texto Matemática Experimental 6.
- Primero eliminamos el paréntesis que está precedido del signo (-); así:

$$-3 + \{ -1 + [4 - (3 - 7)] + 3 \} \;= -3 + \{ -1 + [4 - 3 + 7] + 3 \}$$

- Ahora eliminamos el corchete que está precedido del sihgno (+)

$$= -3 + \{ -1 + 4 - 3 + 7 + 3 \}$$

- Finalmente, eliminamos las llaves que están precedidas del signo (+) y resolvemos las operaciones indicadas:

$$\begin{aligned} &= -3 - 1 + 4 - 3 + 7 + 3 \\ &= 4 + 7 + 3 - 3 - 1 - 3 \\ &= 14 - 7 \\ &= 7 \end{aligned}$$

EJERCICIO 1-5

1. Transforma las siguientes restas en sumas y halla el resultado:

   a) $16 - (+20)$
   b) $(-10) - (+8)$
   c) $(-8) - (-5)$
   d) $(-7) - (-9)$
   e) $10 - (-3)$
   f) $12 - (+16)$
   g) $17 - (-20)$
   h) $4 - (+4)$

2. ¿Es clausurativa la resta de números enteros? ¿Por qué?

3. Realiza las siguientes restas:

   $(-7) - (+5) =$; $(+5) - (-7) =$

   a) ¿Son iguales los resultados?
   b) ¿Es conmutativa la resta de números enteros?

4. Realiza las siguientes restas:

   $[(-8) - (+6)] - (-12) =$; $(-8) - [(+6) - (-12)] =$

   a) ¿Son iguales los resultados?
   b) ¿Es asociativa la resta de números enteros?

5. Elimina los signos de agrupación y halla el resultado:

   a) $\{ 5 - [3 + (1 - 0) - 7 - 2] + 5 \}$
   b) $- \{ 2 + [-7 + (1 - 3 - 1)] - [6 - 5 + 3] \}$
   c) $-3 - \{ 5 - [10 - 5 + 0] + [- (3 - 4)] - 2 \} - 1$
   d) $\{ - [- (-3 + 5) + (-1 - 1) + 2] - 4 + 7 \}$
   e) $- \{ - [- (-4 + 8 - 1) + 2] - 3 \} + 2$

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 4

Juan, Sara y Lina reparten sus tardes entre el estudio y el cine.

- Si Juan se queda estudiando, Sara se va al cine.
- Cada tarde uno de los dos, Juan o Lina se queda estudiando, pero no los dos.
- Sara y Lina no van las mismas tardes al cine.

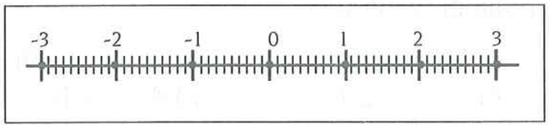
¿Quién crees que pudo haber ido ayer al cine y se haya quedado hoy estudiando?

RESUMEN DE LO PRINCIPAL

1. NÚMEROS

Naturales: $N = \{0,1,2,3,4,5,...\}$
Enteros: $Z = \{...-3,-2,-1,0,1,2,3...\}$
Opuestos: 4 y -4
Valor absoluto: $|-3| = 3$; $|+3| = 3$

Orden y representación
$... -3 < -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < 3 ...$



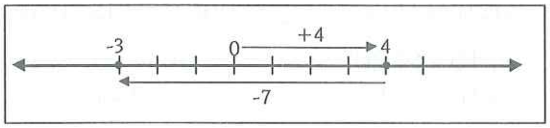
2. SUMA DE ENTEROS

simplificamos *calculamos aquí*

$(+2) + (+4) \longrightarrow 2 + 4 = 6$
$(-4) + (-3) \longrightarrow -4 - 3 = -7$
$(-3) + (+5) \longrightarrow -3 + 5 = 2$
$(+4) + (-7) \longrightarrow 4 - 7 = -3$

suma de enteros *suma algebraica*

Interpretación gráfica: $(+4) + (-7) = 4 - 7 = -3$



3. RESTA DE ENTEROS

Para RESTAR dos números enteros, sumamos al minuendo el inverso aditivo del sustraendo:

$$\mathbf{a - b = a + (\text{inverso aditivo de } b)}$$
$$\mathbf{= a + (-b)}$$

simplificamos *calculamos aquí*

$(-5) - (-11) \longrightarrow -5 + 11 = 6$
$5 - (-2) \longrightarrow 5 + 2 = 7$
$15 - (+7) \longrightarrow 15 - 7 = 8$

resta de enteros *suma algebraíca*

Recuerda: Debes sustituir dos signos consecutivos iguales por un signo + y dos signos distintos por un signo -.

TALLER DE REVISIÓN DE LA UNIDAD 1

1. Escribe dentro del paréntesis ( ) una V si la proposición es VERDADERA o una F si el enunciado es FALSO. Justifica tu respuesta.

a) El conjunto N de los números naturales es subconjunto de los números enteros. ( )

b) Los números enteros negativos se ubican a la izquierda del cero en la recta numérica. ( )

c) Los números enteros +7 y -7 son opuestos o inversos aditivos. ( )

d) $-(-3) = -3$ ( )

e) $+(-5) = -5$ ( )

f) $+(+6) = +6$ ( )

g) $|-15| = 15$ ( )

h) $|-5| = |+5|$ ( )

i) El valor absoluto de un número entero puede ser negativo. ( )

j) La suma de dos números enteros siempre da un número entero negativo. ( )

k) La suma de números enteros cumple la propiedad conmutativa. ( )

l) La suma de números enteros puede dar cero. ( )

m) Si m y n son dos números enteros, tales que $m>n$, entonces m está ubicado a la derecha de n en la recta numérica. ( )

n) La suma de un entero positivo con un entero negativo es siempre un número entero negativo. ( )

o) La suma de un número entero con su inverso aditivo es igual a cero. ( )

p) El inverso aditivo de (-13) es (+13) ( )

q) $-(-11) = 11$ ( )

r) $-15 - (-15) = 0$ ( )

s) La resta de números enteros cumple la propiedad clausurativa. ( )

2. Ubica los siguientes números en la recta numérica y escríbelos de menor a mayor

a) -7 , -1, -4, 2
b) +3, -2, -1, -6
c) -4, -2, -6, +4
d) +4, +7, -2, -7, +2

3. Elige el signo < ó > adecuado:

a) 5 ☐ 7　　b) -3 ☐ -1　　c) 5 ☐ -4

4. Escribe dos números comprendidos entre:

a) -5 y 0　　b) -3 y 4　　c) -7 y -2

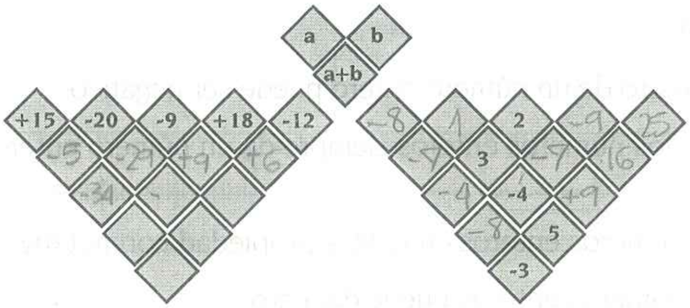
5. Completa:

a	b	a+b	a-b	b-a
-7	+8			
-6	+7			
-3	+4			
0	+2			

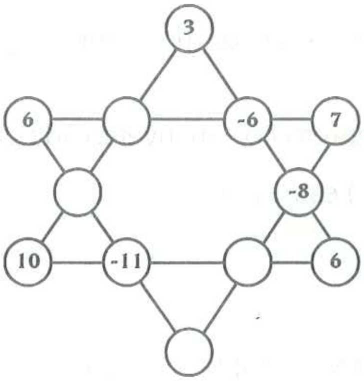
6. Calcula:

a) 5 - 8+10　　b) -4 + 11 - 7　　c) (- 4) + (+9) - (- 5)

7. Completa los baldosines teniendo en cuenta la siguiente regla:



8. Completa la estrella sabiendo que cada línea debe sumar lo mismo:

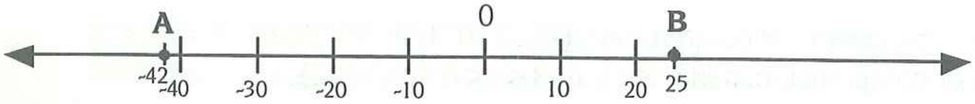


9. Calcula mentalmente y con un poco de habilidad:

a) 35 + 12 - 1 - 12 - 35　　b) -80 + 15 + 65

c) 29 - 67 - 28 + 69　　d) 41 - 8 - 8 - 8 - 8 -8

10. Observa el segmento sobre la recta numérica y contesta:



Entre los extremos del segmento $\overline{AB}$:

a) ¿Cuántos números naturales hay entre los extremos del segmento?
b) ¿Cuántos enteros hay?
c) ¿Cuántos enteros no naturales?

11. Elimina los signos innecesarios y halla el número que falta:

a) 30 + (- □) = -20
b) 8 - (+ □) = -6
c) (+7) + (+□) = 4
d) (-6) - (- □) + (-2) = 0

12. Indica los tres números que siguen en cada serie:

a) -8, -2, 4 ...
b) 6, 5, 3, 0, -4 ...

13. Realiza las siguientes restas:

a) (- 5) - (- 7)
b) (- 8) - (- 9)
c) (- 8) - (+13)
d) (- 21) - (+25)
e) -17 - (- 8)
f) 17 - (-17)

14. Fíjate en el modelo y calcula los demás:

a) (+10) - (+6) - (+8) - (+1) = 10 - 6 - 8 - 1
= 10 - 15 = -5

b) (+5) - (+8) - (+10) - (+1)
c) (- 6) + (+5) - (+12) - (+5)

15. Resuelve las siguientes sumas algebraicas:

a) -13 - (+21) + 73 - (-48) -29
b) 71 - (+19) - (-38) + 63 - 109
c) 35 - 104 + (-96) - (-143) - 18
d) -131 + 219 - (+531) - (-217) + 37

16. Suprime signos de agrupación y resuelve:

a) 9 - (12 - 6 + 2) + 4 +(-8 +1)
b) 8 - [10 - (-8 +5) + (7 - 9)] + 6
c) -6 + [15 - { (1+4) - (3 - 2) +3} + 7]
d) -1 + [4 -(3 - 2)] - [2+ (-7+4)]
e) - [7 - (-6+5) - 8+ (2+5)] +6
f) 1 - { 4 - [-2+(5-1-9) -1] +2 } +3

17. El termómetro marca al atardecer -6°C. Durante la noche, la temperatura baja 6°C. En el curso de la mañana, hasta las 12 m, sube 13°C. ¿Qué temperatura hace al medio día?

18. Para realizar los siguientes ejercicios observa los ejemplos:

EJEMPLO 1:

Describamos por extensión y por comprensión el conjunto de números enteros comprendido entre -3 y 7, sin incluirlos.

SOLUCIÓN

a) Por extensión, el conjunto es: {-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}
b) Por comprensión, sería así: { x/ -3<x<7, con x ∈Z}

EJEMPLO 2:

Describamos por extensión y por comprensión el conjunto de números enteros comprendido entre -4 y 3, incluidos ambos.

SOLUCIÓN

a) Por extensión: {-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 }
b) Por comprensión: { x/ -4 ≤ x ≤3, con x ∈Z}

Escribe por extensión y por comprensión el conjunto de números enteros comprendido entre -10 y -3 tales que:

a) No se incluyen ni el -10 ni el -3
b) Se incluye el -10 pero no el -3
c) Se incluye el -3 pero no el -10
d) Se incluyen ambos.

19. Tenemos los siguientes conjuntos de números enteros.

A= { x / -5 ≤ x ≤ 3, con x ∈ Z} ; B = { x / -2 ≤ x < 6, con x ∈ Z}

Se pide:

a) Describir por extensión los conjuntos A y B
b) Hallar A∪B
c) Hallar A∩B

20. Calcula los datos que faltan en el siguiente extracto bancario

FECHA	CONCEPTO	PAGOS	INGRESOS	SALDO
3 - 11	Saldo anterior			+230.000
5 - 11	Servicio de Energía Eléctrica			+123.000
12 - 11	Consignaciones			+240.000
17 - 11	Activos financieros			
29 - 11	Consignaciones		+750.000	+920.000

PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS SABER

1. Cuando la suma de dos números se multiplica por su diferencia, el resultado es 85. Si la diferencia no es igual a 1, entonces la suma es igual a:

a) 86 b) 17 c) 84 d) 11

2. Marcos y Julio son de la misma edad, pero si bien es cierto que Marcos es mayor que Sara, esta última nació después que Juan. Para saber si Marcos es mayor o menor que Juan, ¿cuál de los siguientes datos necesita?

a) Sara es menor que Julio
b) Juan nació antes que Julio
c) Marcos es mayor que Sara
d) Juan tiene más edad que Sara.

3. Tres mujeres, Margarita, Lina y Sara, tienen en conjunto 30 prendas de vestir, de las cuales 15 son blusas y el resto son faldas o pantalones. Margarita tiene 3 blusas y 3 faldas. Sara que tiene 8 prendas de vestir, tiene 4 blusas. El número de pantalones de Margarita es igual al de blusas que tiene Sara. Lina tiene tantos pantalones como blusas tiene Margarita. La cantidad de pantalones que posee Sara es la misma que la de blusas de Margarita. El número de faldas que tiene Lina es:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

4. Juan, Mario y Julio tienen 60 monedas entre los tres, en monedas de 200 pesos y de 500 pesos. Julio tiene cinco monedas, de las cuales dos son de 200 pesos y el resto de 500 pesos. Mario tiene cuatro monedas de 500 pesos y algunas de 200 pesos. En total tiene 25 monedas. Si entre Juan y Julio tienen 8 monedas de 500 pesos; el número de monedas de 200 pesos que tiene Juan es:

a) 21 b) 22 c) 25 d) 24

<3

Núcleo Temático

2

MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE NÚMEROS ENTEROS

LOGRO GENERAL

- Definir la multiplicación y división de números enteros, enunciar sus propiedades y aplicarlas en la solución de ejercicios de cálculo y problemas.

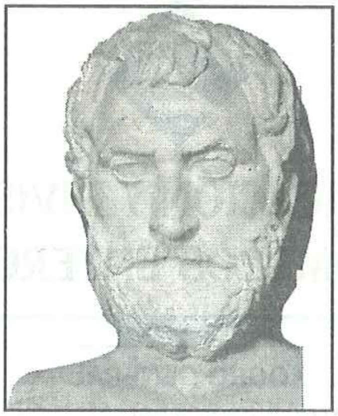
DIMENSIONES

LOGROS ESPECÍFICOS	INDICADORES DE LOGRO
Corporal: • Realizar desplazamientos en dos sentidos opuestos que permitan apropiarse de las operaciones de multiplicación y división en Z.	• A través de desplazamientos, se apropia de las leyes de signo para la multiplicación y división en Z.
Comunicativa: • Explicar cómo se multiplican o dividen dos números enteros de igual signo y de distinto signo. • Manejar adecuadamente el lenguaje de las propiedades de la multiplicación de números enteros.	• Delante de sus compañeros, argumenta cómo se multiplican y dividen dos números enteros de igual signo y de distinto signo. • Interpreta oralmente y por escrito las propiedades de la multiplicación en Z.
Cognitiva: • Hacer cálculos numéricos utilizando las propiedades de la multiplicación en Z. • Eliminar signos de agrupación que incluyen las 4 operaciones en Z. • Resolver problemas con las 4 operaciones en Z.	• Realiza multiplicaciones y divisiones con números enteros. • Elimina signos de agrupación que incluyen las 4 operaciones con números enteros. • Resuelve problemas en los que intervienen las 4 operaciones con números enteros.
Estética: • Representar conjuntos de números enteros en la recta numérica. • Representar gráficamente operaciones de la forma $f(x) = ax + b$ donde a y b son números enteros.	• Dado un conjunto de números enteros los representa en la recta numérica • Dado un conjunto de números enteros y una operación de la forma $f(x)=ax+b$, obtiene el conjunto de parejas ordenadas y las representa en el diagrama cartesiano.
Etica - Actitudinal: • Interiorizar la importancia de realizar tareas y trabajos y entregarlos cumplidamente.	• Es responsable con la realización y entrega oportuna de sus tareas y trabajos.

EVALUACIÓN

ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS

2.1 ¿SABÍAS QUE...?



Thales de Mileto, uno de los siete sabios de Grecia, tuvo que soportar durante años las burlas de quienes pensaban que sus muchas horas de trabajo e investigación eran inútiles. Pero un día decidió sacar provecho a sus conocimientos. Sus observaciones **meteorológicas**, por ejemplo, le sirvieron para saber antes que nadie que la siguiente cosecha de aceitunas sería excelente. Compró, pues, todas las prensas de aceitunas que había en Mileto. La cosecha fue, efectivamente, muy buena y todos los demás agricultores tuvieron que pagarle por usar sus prensas.

Thales era ya famoso desde que, en el año 585 a. de C., predijo con toda exactitud un eclipse de sol. Al parecer había aprendido a predecir los eclipses en sus viajes a Babilonia y Egipto, lugares donde ya sabían mucho de astronomía.

También se le deben importantes descubrimientos en Geometría. Los griegos posteriores lo consideraron el fundador de la ciencia griega.

EJERCICIO 2-1

COMPRENSIÓN DE LECTURA: Explicación: Lee nuevamente el texto anterior y luego, encierra en un círculo la letra que corresponde a la respuesta correcta.

1. Las siguientes afirmaciones, sobre Thales de Mileto, son ciertas, con excepción de:

    a. Predijo con exactitud un eclipse.
    b. Es considerado el fundador de la ciencia en Grecia.
    c. Aprendió a predecir eclipses fuera de su tierra. ✓
    [✓ d.] Sus muchas horas de trabajo e investigación eran inútiles.
    e. Fue famoso también por sus observaciones meteorológicas.

2. La Meteorología que se menciona en el texto se refiere a:

    [✓ a.] Parte de la física que estudia los meteoros como los vientos y las lluvias. ✓
    b. Parte de la agronomía que estudia el cultivo de aceitunas.

c. Ciencia que estudia la influencia del clima en los cultivos.
d. Área del conocimiento que permite presagiar los eclipses.
e. Ciencia del cultivo de la tierra.

3. El propósito específico del autor, con el texto anterior, es:

a. Demostrar que los sabios antiguos fueron objeto de muchas burlas.
b. Presentar a Thales de Mileto como el padre de la ciencia griega. ✓
c. Relacionar un sabio griego con la predicción de los eclipses.
d. Comprobar que la predicción de eclipses nació en Babilonia y Egipto.
[✓ e.] Resaltar las capacidades intelectuales de Thales de Mileto.

4. El título más adecuado para el texto anterior sería:

a. La cosecha de aceitunas.
[✓ b.] Tiempo, trabajo y dedicación, claves del éxito de un sabio.
c. Las observaciones de Thales. ✓
d. La predicción de los eclipses.
e. ¿Fue Thales sabio o comerciante?.

2.2 MULTIPLICACIÓN DE ENTEROS

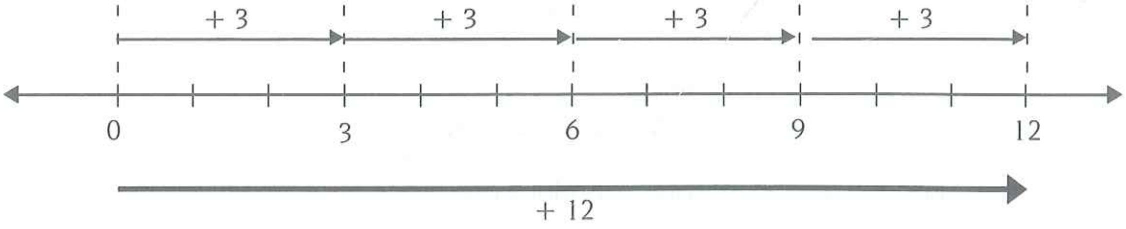
- Al multiplicar dos números enteros tendremos en cuenta cuatro casos:

Caso 1: Los dos números son positivos.
Caso 2: El primero es positivo y el segundo es negativo
Caso 3: El primero es negativo y el segundo es positivo
Caso 4: Los dos números son negativos.

CASO 1: LOS DOS NÚMEROS SON POSITIVOS

EXPERIENCIA

- En el concurso del salto del grillo, el Grillo Brincón realizó 4 espectaculares saltos de 3 unidades cada uno, hacia la derecha. Representemos lo que hizo Brincón en una recta:



- La figura nos muestra que:

$$\underbrace{(+3)+(+3)+(+3)+(+3)}_{} = +12$$

$$\underbrace{4 \text{ veces } (+3)}_{} = +12$$

$$4 \cdot (+3) = +12$$

- Ahora bien, como 4 = (+ 4), entonces podemos escribir lo siguiente:

$$\mathbf{(+4) \cdot (+3) = +12}$$

APRENDAMOS...

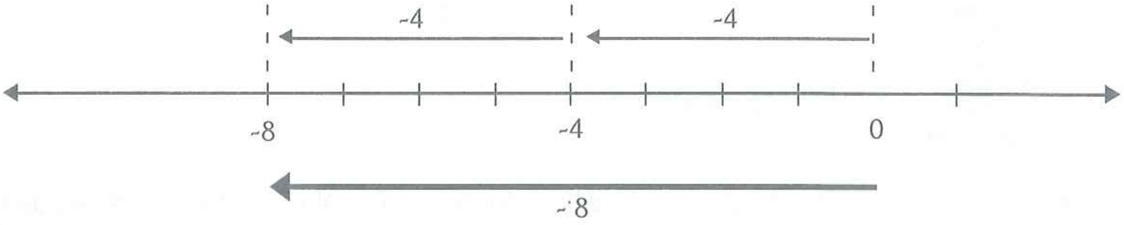
- Para **MULTIPLICAR DOS NÚMEROS ENTEROS POSITIVOS** multiplicamos sus valores absolutos y al resultado le colocamos el signo (+).

Ejemplos: $(+4) \cdot (+3) = +12$; $(+6) \cdot (+5) = +30$, $(+2) \cdot (+9) = +18$

CASO 2: UN NÚMERO ES POSITIVO Y EL OTRO ES NEGATIVO

EXPERIENCIA

- En el concurso del salto del grillo, la Grilla Saltarina realizó 2 saltos de 4 unidades cada uno hacia la izquierda. Veamos lo que hizo Saltarina:



- La figura nos muestra que:

$$\underbrace{(-4)+(-4)}_{} = (-8)$$

$$\underbrace{2 \text{ veces } (-4)}_{} = (-8)$$

$$2 \cdot (-4) = (-8)$$

- Y de nuevo, como 2 = (+ 2), entonces podemos escribir:

$$\mathbf{(+2) \cdot (-4) = (-8)}$$

APRENDAMOS...

- Para **MULTIPLICAR UN ENTERO POSITIVO por OTRO NEGATIVO** multiplicamos sus valores absolutos y al resultado le colocamos el signo (-).

Ejemplos: (+ 5) • (- 7) = (- 35)   (+ 8) • (- 4) = (- 32)

(+ 6) • (- 2) = (- 12)   (+) • (-) = (-)

CASO 3: UN NÚMERO ES NEGATIVO Y EL OTRO ES POSITIVO

EXPERIENCIA

- En la biblioteca del colegio tienen fichas en blanco para ser llenadas cada que entra un libro nuevo. Si gastamos 3 fichas cada mes, ¿en cuánto habrá variado dentro de 2 meses el número de fichas en blanco?
- Dentro de 2 meses tendremos 6 fichas menos. Veamos por qué:

Variación mensual: (- 3)
Meses transcurridos: (+2)
} Variación de fichas: (- 6)

- Por lo tanto:

(- 3) • (+ 2) = (- 6)

Al cabo de 2 meses tendremos 6 fichas blancas menos.

APRENDAMOS...

- Para **MULTIPLICAR UN ENTERO NEGATIVO con OTRO POSITIVO** multiplicamos sus valores absolutos y al resultado le colocamos el signo (-).

Ejemplos: (- 7) • (+ 6) = (- 42)   (- 5) • (+ 3) = (- 15)

(-) • (+) = (-)   (menos) • (más) = (menos)

CASO 4: LOS DOS NÚMEROS SON NEGATIVOS

EXPERIENCIA

- ¿Cuántas fichas en blanco había en la biblioteca hace 4 meses?
- Había 12 fichas más. Veamos por qué

Variación mensual: (- 3) } Variación de fichas: (+ 12)
Meses transcurridos: (- 4)

- Por lo tanto:

$$(-3)\cdot(-4)=(+12)$$

APRENDAMOS...

- Para **MULTIPLICAR DOS NÚMEROS ENTEROS NEGATIVOS** multiplicamos sus valores absolutos y al resultado le colocamos el signo (+).

Ejemplos: $(-8)\cdot(-6)=+48$ $(-5)\cdot(-3)=+15$

$(-)\cdot(-)=(+)$ (menos) • (menos) = (más)

RESUMEN

Para multiplicar dos números enteros procedemos así:

1. Multiplicamos sus valores absolutos
2. Al resultado le escribimos el signo que indica la siguiente REGLA DE LOS SIGNOS:

$$\left.\begin{array}{l}(+)\cdot(+)=(+)\\(-)\cdot(-)=(+)\end{array}\right\}\text{ Producto de signos iguales da }(+)$$

$$\left.\begin{array}{l}(+)\cdot(-)=(-)\\(-)\cdot(+)=(-)\end{array}\right\}\text{ Producto de signos distintos da }(-)$$

¡ATENCIÓN!

Para hallar el producto de varios números enteros hacemos lo siguiente:

* Calculamos el producto de los valores absolutos de todos los factores.

* Al resultado le colocamos el signo (+) si el número de FACTORES NEGATIVOS es PAR o el signo (—) si el número de FACTORES NEGATIVOS es IMPAR.

EJEMPLO 1

$$\underbrace{(+2)\cdot(-3)\cdot(+6)\cdot(-5)} = +(2\cdot3\cdot6\cdot5) = +180$$

Número Par de Factores Negativos

EJEMPLO 2

$$\underbrace{(-2)\cdot(+3)\cdot(-5)\cdot(-4)} = -(2\cdot3\cdot5\cdot4) = -120$$

Número Impar de Factores Negativos

EJERCICIO 2-2

❶ Calcula:

a) (+3) • (+5)
b) (+6) • (+8)
c) (+8) • (+9)
d) (- 8) • (- 2)
e) (+10) • (+1)
f) (- 6) • (- 7)
g) (+7) • (+6)
h) (- 10) • (+5)
i) (+9) • (+13)
j) (+7) • (- 9)

❷ Calcula el signo resultante:

a) (+) • (-) • (+) • (-) • (-) =
b) (-) • (+) • (-) • (-) • (+) =
c) (-) • (+) • (+) • (+) • (-) =
d) (+) • (-) • (+) • (-) • (+) =
e) (+) • (-) • (+) • (+) • (-) =
f) (+) • (-) • (+) • (+) • (+) =

❸ Completa el □:

a) (- 2) • □ = - 8
b) (+5) • □ = - 20
c) (- 6) • □ = +48
d) (+8) • □ = +72
e) (- 7) • □ = - 56
f) □ • (- 2) = 80
g) □ • (+6) = - 30
h) □ • (- 8) = - 104
i) (- 6) • □ = - 78
j) (- 3) • □ = 18

❹ Completa lo que falta en el □:

a) (+3) • (- 2)• □ = -30
b) (+3) • (- 2)• □ = +30
c) (- 3) • (+2)• □ = +6
d) □ • (- 8)• (- 9) = + 504
e) (- 3) • □ • (+5)= -30
f) □ • (- 7)• (- 1) = + 21

⑤ Completa lo que falta en el □

a) (+3) • (- 2)• □ • (+4) = -120

b) □ • (- 1)• (+3) • (- 2) = + 48

c) (- 1) • □ • (+3) • (- 2) = - 6

d) (- 2) • □ • (- 4) • (+5) • (- 7)= - 840

e) □ • (+5)• (- 7) • (- 1) = + 70

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 1

Sara compró 80 muñecas a $40.000. Vendió 30 a $45.000 y 25 a $48.000. ¿Cuánto debe obtener de la venta de las que le quedan para que la ganancia sea $40.000?

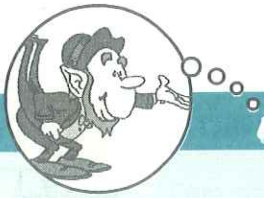
2.3 PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACIÓN DE ENTEROS

PRIMERA EXPERIENCIA

- Completa esta tabla en tu cuaderno:

a	b	a•b	¿Es a•b otro entero?
(+8)	(+3)	+24	SIP
(- 6)	(+5)	-30	SI
(+7)	(- 2)	-14	SI
(- 4)	(- 5)	+20	SI

- ¿Se cumple que **a•b** es otro entero para los valores tomados? SI
- Haz la prueba con otros números enteros.
- ¿Es verdad que para cualquier par de enteros **a** y **b** se cumple que **a•b** es otro número entero? SI



APRENDAMOS...

PROPIEDAD CLAUSURATIVA

- La multiplicación de dos números enteros es otro número entero, es decir:

Si a,b ∈ Z entonces a•b ∈ Z

- Esta propiedad se llama **PROPIEDAD CLAUSURATIVA** de la multiplicación en Z.

SEGUNDA EXPERIENCIA

- Completa esta tabla en tu cuaderno:

a	b	a•b	b•a
+5	+8	+40	+40
+6	- 3	- 18	-18
- 4	- 5	+ 20	+ 20
- 9	+7	- 63	-63
+4	- 9	- 36	-36.

- ¿Se cumple que **a•b = b•a** para todos los números de la tabla? SI.
- Haz la prueba con otros números enteros.
- ¿Es verdad que para cualquier par de números enteros **a** y **b** se cumple que **a•b** y **b•a** tienen el mismo valor? SI.

APRENDAMOS...

PROPIEDAD CONMUTATIVA

- El producto de dos números enteros no depende del orden de los factores, es decir:

Si a,b ∈ Z entonces a•b = b•a

- Esta propiedad se llama **PROPIEDAD CONMUTATIVA** de la multiplicación de números enteros.

TERCERA EXPERIENCIA

- Completa la siguiente tabla en tu cuaderno y compara los resultados de las dos columnas que aparecen sombreadas:

a	b	c	a • b	b • c	(a • b) • c	a • (b • c)
+5	+5	+7	+ 25.	+35	+ 175	+175.
+6	- 6	- 2	- 36.	+ 12	+ 72.	+ 72.
- 4	+4	+8	- 16	+ 32.	-128	-128
- 9	- 12	- 7	+ 108.	+ 84.	- 756	-756
+4	+1	- 4	+ 4.	- 4	- 16	-16.

- ¿Se cumple que **(a • b) • c = a •(b • c)** para los valores tomados? Si.
- Haz la prueba con otros números enteros.
- ¿Es verdad que para cualquier tres números enteros **a, b** y **c** se cumple que **(a•b)• c** y **a•(b•c)** tienen el mismo valor? Si

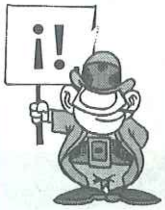
APRENDAMOS...

PROPIEDAD ASOCIATIVA

- La multiplicación de tres ó más números enteros no depende de la forma en que se asocien, es decir:

Si a, b, c ∈ Z entonces a•(b•c) = (a•b) • c

- Esta propiedad se llama **PROPIEDAD ASOCIATIVA** de la multiplicación en Z.



¡ATENCIÓN!

Las propiedades **conmutativa** y **asociativa** permiten realizar la multiplicación de varios números enteros sin necesidad de escribir signos de agrupación entre ellos y en el orden deseado.

EJEMPLO

Multipliquemos [(+7) • (- 5)] • (- 3)

SOLUCIÓN

- La propiedad asociativa nos permite eliminar el corchete, es decir:

[(+7) • (- 5)] • (- 3) = (+7) • (- 5)• (- 3)

- Ahora multipliquemos los signos de los factores:

(+) • (-)• (-) = (+)

- Y multipliquemos los valores absolutos de los factores:

7 • 5 • 3 = 105

- Por lo tanto: (+7) • (- 5)• (- 3) = +105

CUARTA EXPERIENCIA

- Realiza las siguientes multiplicaciones en tu cuaderno:

(+ 5) • 1 = +5 1 • (+9) +9 (- 7) • 1 = -7 1 • (- 7) = -7
(+12) • 1 = +12 1 • (+12) = +12 (- 16) • 1 = -16 1 • (- 15) = -15

- ¿Qué puedes concluir? Escríbelo en tu cuaderno.
- ¿Es verdad que si multiplicamos un número entero por **UNO**, obtenemos el mismo número entero?

APRENDAMOS...

PROPIEDAD MODULATIVA

- El producto de un número entero cualquiera por **1** es el mismo número entero, es decir:

$$\textbf{Si } a \in Z \textbf{ entonces } a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

- Decimos que el **1** es el **ELEMENTO NEUTRO** de la multiplicación de enteros.

QUINTA EXPERIENCIA

- Completa en tu cuaderno el siguiente cuadro:

a	b	c	b + c	a·(b+c)	a · b	a · c	a·b + a·c
+5	+2	+6					
- 3	+5	+1					
+8	- 4	+2	- 2	- 16	- 32	+ 16	- 16
- 7	- 5	+3					
- 7	+6	- 3					
- 2	- 4	- 5					

- Compara los resultados de las dos columnas que aparecen sombreadas.
- ¿Se cumple que **a · (b+c) = a · b + a · c** para los valores que hemos tomado?
- Haz la prueba con otros valores.
- ¿Será verdad que para tres números cualquiera a, b y c se cumple que **a·(b+c)** y **a · b +a · c** tienen el mismo valor?
- Observa que hemos "distribuido" o "repartido" el factor **a** entre los sumandos **b** y **c**. Por esta razón la propiedad se llama **DISTRIBUTIVA DE LA MULTIPLICACIÓN RESPECTO A LA SUMA.**

APRENDAMOS...

PROPIEDAD DISTRIBUTIVA

- La multiplicación en Z es **DISTRIBUTIVA** respecto a la suma (también respecto a la resta); es decir:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

$$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$$

EJEMPLO 1:

Para multiplicar $-5 \cdot (4 + 6)$ podemos hacerlo de dos maneras:

PRIMERA MANERA:

- Resolviendo primero el interior del paréntesis, así:

$$\begin{aligned} -5 \cdot (4 + 6) &= -5 \cdot 10 \\ &= -50 \end{aligned}$$

SEGUNDA MANERA:

- Aplicando la propiedad distributiva

$$\begin{aligned} -5 \cdot (4 + 6) &= (-5) \cdot 4 + (-5) \cdot 6 \\ &= (-20) + (-30) \\ &= -20 - 30 \\ &= -50 \end{aligned}$$

¡ATENCIÓN!

Como una igualdad puede escribrse y leerse en cualquiera de los dos sentidos sin que se altere, entonces podemos hacer lo siguiente a partir de la propiedad distributiva:

Si $\mathbf{a} \cdot (b+c) = \mathbf{a} \cdot b + \mathbf{a} \cdot c$ entonces $\mathbf{a} \cdot b + \mathbf{a} \cdot c = \mathbf{a} \cdot (b+c)$

En este caso el número **a** es un **FACTOR COMUN** de la expresión $\mathbf{a} \cdot b + \mathbf{a} \cdot c$.

EJEMPLO 2:

Escribamos las siguientes expresiones como el producto de un factor común por una suma (o resta) de números enteros.

a) $(-7) \cdot 6 + (-7) \cdot (-4) + (-7) \cdot 9$

b) $(+3) \cdot (-5) + (+3) \cdot (-6) - (+3) \cdot (+1)$

c) $(-4) \cdot (+7) - (-4) \cdot (+2) - (-4) \cdot (-8)$

SOLUCIÓN:

a) (- 7) • [6 + (- 4) + 9] : **(-7) es el FACTOR COMÚN**

b) (+3) • [(- 5) + (- 6) - (+1)] : **(+3) es el FACTOR COMÚN**

c) (- 4) • [(+7) - (+2) - (- 8)] : **(-4) es el FACTOR COMÚN**

2. Si en un mismo ejercicio aparecen las operaciones SUMA, RESTA y MULTIPLICACIÓN debemos proceder de la siguiente manera para resolverlo:

- Primero resolvemos lo que hay dentro de los paréntesis o eliminamos los signos de agrupación correctamente.
- Luego, efectuamos las multiplicaciones.
- Por último, efectuamos las sumas y restas.
- En ausencia de signos de agrupación, primero efectuamos la multiplicación y luego las sumas y restas.

EJEMPLO 3:

- Realicemos las siguientes operaciones teniendo en cuenta las recomendaciones anteriores:

$$(-9) \bullet [(+7) + (-6) - (-3)]$$

SOLUCIÓN

Podemos resolverlo de dos maneras:

PRIMERA MANERA:

Trabajando primero las operaciones indicadas dentro del corchete, así:

$$\begin{aligned}(-9) \bullet [(+7) + (-6) - (-3)] &= (-9)\bullet[+7 - 6 + 3] \\ &= (-9)\bullet(+4) \\ &= -36\end{aligned}$$

SEGUNDA MANERA:

Aplicando la propiedad distributiva, así:

$$\begin{aligned}(-9) \bullet [(+7) + (-6) - (-3)] &= (-9)\bullet(+7) + (-9)\bullet(-6) - (-9)\bullet(-3) \\ &= (-63) + (+54) - (+27) \\ &= -63 + 54 - 27 \\ &= -36\end{aligned}$$

UNA PROPIEDAD FINAL

SEXTA EXPERIENCIA

- Realiza las siguientes multiplicaciones en tu cuaderno:

$(+5) \bullet 0 =$; $0 \bullet (+9) =$; $(-7) \bullet 0 =$; $0 \bullet (-7) =$

$(+12) \bullet 0 =$; $0 \bullet (+12) =$; $(-16) \bullet 0 =$; $0 \bullet (-15) =$

- ¿Qué puedes concluir? Escríbelo en tu cuaderno.
- ¿Es verdad que si multiplicamos un número entero por **CERO**, el producto es igual a **CERO?**

APRENDAMOS...

MULTIPLICACIÓN POR 0 o ANULATIVA

- El producto de un número entero por **0** es igual a **0,** es decir:

Si $a \in Z$ entonces $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$

RESUMEN

Estas son las propiedades de la multiplicación de números entero:

1. **CLAUSURATIVA: Si $a, b \in Z$ entonces $a \cdot b \in Z$**
2. **CONMUTATIVA: Si $a, b \in Z$ entonces $a \cdot b = b \cdot a$**
3. **ASOCIATIVA: Si $a, b, c \in Z$ entonces $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$**
4. **MODULATIVA: Si $a \in Z$ entonces $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$**
   El 1 es el módulo de la multiplicación en Z.
5. **DISTRIBUTIVA: Si $a, b, c \in Z$ entonces $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$**
6. **MULTIPLICACIÓN POR 0 o ANULATIVA: Si $a \in Z$ entonces $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$**

EJERCICIO 2-3

① ¿Por qué decimos que la multiplicación de números enteros cumple la propiedad clausurativa?

② ¿Qué quiere decir que la multiplicación de números enteros es conmutativa? ¿Y asociativa?

③ ¿Cuál es el elemento neutro o módulo de la multiplicación de números enteros?

④ Comprueba que las siguientes igualdades son ciertas resolviendo tanto el lado izquierdo como el lado derecho:

a) $[(-7) \bullet (+4)] \bullet (-6) = (-7) \bullet [(+4) \bullet (-6)]$

b) $(-9) \bullet (+13) = (+13) \bullet (-9)$

c) $(-9) \cdot [(+4) + (-3)] = (-9) \cdot (+4) + (-9) \cdot (-3)$

d) $[(-8) - (+6)] \cdot (-3) = (-8) \cdot (-3) - (+6) \cdot (-3)$

5 Indica la propiedad de la multiplicación de los números enteros que estamos aplicando en los ejercicios siguientes:

a) $(-8) \cdot [(+6) \cdot (+5)] = [(-8) \cdot (+6)] \cdot (+5)$

b) $(-12) \cdot (+4) = (+4) \cdot (-12)$

c) $(-9) \cdot [(+4) + (-3)] = (-9) \cdot (+4) + (-9) \cdot (-3)$

d) $[(-8) + (+6)] \cdot (-3) = (-8) \cdot (-3) + (+6) \cdot (-3)$

e) $(-9) \cdot [(+4) - (-3)] = (-9) \cdot (+4) - (-9) \cdot (-3)$

f) $[(-8) - (+6)] \cdot (-3) = (-8) \cdot (-3) - (+6) \cdot (-3)$

6 Resuelve los siguientes ejercicios de dos maneras:

1) Trabajando primero las operaciones dentro del corchete.
2) Aplicando primero la propiedad distributiva.

a) $(-6) \cdot [(-5) + (+4) + (-3)]$

b) $(+5) \cdot [(-7) + (-2) - (-5)]$

c) $(-8) \cdot [(-1) - (+4) - (+6)]$

d) $[(+8) - (-5) - (+9)] \cdot (-7)$

7 Identifica y saca el factor común en los siguientes ejercicios:

a) $4 \cdot (-5) - 3 \cdot (-5) + 8 \cdot (-5)$

b) $6 \cdot (-3) + 6 \cdot (+8) - 6 \cdot (+12)$

c) $(-4) \cdot (-3) + (-4) \cdot (+7) - (-4) \cdot (+6) + (-4) \cdot (+2)$

d) $7 \cdot (-6) - 8 \cdot (-6) + (-2) \cdot (-6) - (+5) \cdot (-6)$

8 Calcula el valor de las siguientes expresiones:

a) $-3 \cdot (5 - 7 + 9) - 5 \cdot (-4) + 5 \cdot (8 - 7 - 6)$

b) $-7 \cdot (-5) + (-2 - 3 + 8) \cdot (+25) - 10 \cdot (-8 + 11 - 1)$

c) $-3 + 7 \cdot [(125 - 10 + 2) \cdot (-8) - (-3 + 7 - 15) \cdot (+6)] - 1$

d) $-5 \cdot \{-3 + 14 \cdot [(11 - 23 + 4) \cdot (-8) + 7 \cdot (-7) - 12]\}$

9 Sobre los elementos del conjunto $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ aplicamos el operador **TRIPLE DE y LUEGO RESTAMOS (- 3).**

a) Elabora el diagrama sagital correspondiente a esta operación.

b) Escribe el conjunto de parejas ordenadas.

c) Representa la operación en forma simbólica.

d) Dibuja la gráfica en el diagrama cartesiano

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 2

Compré 115 juguetes a $70.000 cada uno. Si se dañaron 15 y el resto los vendí a $80.000 cada uno. ¿Gané o perdí y cuánto?

2.4 DIVISIBILIDAD EN EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS ENTEROS

PRIMERA EXPERIENCIA

- ¿Es 40 múltiplo de 5 ó 5 divisor de 40?
  Sí, ya que: 5•8 = 40
- ¿Es (- 40) múltiplo de 5 ó 5 divisor de (- 40)?
  Sí, ya que: 5• (- 8) = - 40
- ¿Es (- 15) múltiplo de 7 ó 7 divisor de (-15)?
  No, ya que no hay ningún número entero que multiplicado por 7 de (- 15).

APRENDAMOS...

- Un número entero **a** es múltiplo de otro **b** (o **b** es divisor de **a**), si podemos encontrar otro número entero **x** tal que: **b • x = a**
- Para comprobar si **a** es múltiplo de **b** basta observar si la división del valor absoluto de **a** por el valor absoluto de **b** es exacta.

- Escribe VERDADERO o FALSO al lado de cada una de las siguientes proposiciones. Justifica las respuestas:

18 es múltiplo de - 6 (V)
-14 es múltiplo de 7 (V)
20 es múltiplo de 3 (F)
-15 es múltiplo de - 5 (V)

7 es divisor de -21 (V)
-7 es divisor de 20 (F)
9 es divisor de -54 (V)
-6 es divisor de 24 (V)

SEGUNDA EXPERIENCIA

- Ya vimos que 8 es divisor de (-40) porque $8 \bullet (-5) = -40$. También podemos escribir:

$$(-40) \div (-5) = 8$$

- Así mismo, 3 es divisor de (-24) porque $(-3) \bullet 8 = (-24)$. También podemos escribir:

$$(-24) \div (8) = -3$$

- Algunas veces, en lugar de escribir **a ÷ b**, escribimos $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$; así:

$$(-40) \div (-5) = \frac{-40}{-5} = 8 \qquad (-24) \div 8 = \frac{-24}{8} = -3$$

APRENDAMOS...

- Si un entero **b** es divisor de otro **a** entonces para dividir **a** entre **b** hacemos lo siguiente:

  1. Dividimos sus valores absolutos
  2. Al resultado le ponemos el signo que indica la siguiente **REGLA DE LOS SIGNOS:**

$$\left.\begin{array}{l}(+) \div (+) = (+)\\(-) \div (-) = (+)\end{array}\right\}\ \textbf{cociente de signos iguales da } (+)$$

$$\left.\begin{array}{l}(+) \div (-) = (-)\\(-) \div (+) = (-)\end{array}\right\}\ \textbf{cociente de signos distintos da } (-)$$

- Calcula:

$16 \div (-4) =$ $\qquad$ $\frac{16}{4} =$

$(-16) \div (-4) =$ $\qquad$ $\frac{-16}{4} =$

$8 \div 2 =$ $\qquad$ $6 \div (-3) =$

$\frac{6}{-2} =$ $\qquad$ $(-8) \div 2 =$

TERCERA EXPERIENCIA

- Recuerda los criterios de divisibilidad, que ya conoces para números naturales, desde cursos anteriores:

  * Un número es divisible por 2 cuando acaba en cifra par.

- * Un número es divisible por 3 cuando la suma de sus cifras es múltiplo de 3.
- * Un número es divisible por 5 cuando termina en 0 o en 5.

- Indica cuáles de los siguientes números son divisibles por 2, cuáles por 3 y cuáles por 6:

  216 ; -405 ; 63 ; -1.008 ; 246
- Indica cuáles de los siguientes números son divisibles por 5:

  3.105 ; -205 ; 70 ; -450 ; 30

EJERCICIO 2-4

❶ Escribe FALSO (F) o VERDADERO (V) al frente de cada una de las siguientes afirmaciones:

a) 35 es múltiplo de (- 5)
b) 48 es múltiplo de (- 8)
c) 9 es divisor de (- 63)
d) - 7 es divisor de 25
e) 34 es múltiplo de (- 7)
f) - 45 es divisor de (- 9)

❷ Calcula mentalmente:

a) (- 24) ÷ (+ 6) = −4
b) (- 36) ÷ (- 9) +4
c) (- 48) ÷ (+4) = −14
d) (+52) ÷ (-13) −4
e) (- 120) ÷ (+40) −3
f) (-160) ÷ (+80) −2

❸ a) ¿Es clausurativa la división de números enteros? ¿por qué?

b) ¿Es conmutativa la división de números enteros? ¿Es lo mismo (-15) ÷3 que 3 ÷ (-15)?

c) ¿Es asociativa la división de números enteros? ¿Por qué?

Comprueba que para dividir un polinomio aritmético de números enteros por un número entero dado, basta dividir cada término del polinomio por el número dado, así:

$$(8 - 12 + 16) \div (- 4) = 8 \div (- 4) - 12 \div (- 4) + 16 \div (- 4)$$

Esta propiedad se llama **PROPIEDAD DISTRIBUTIVA.**

❹ Aplica la propiedad ditributiva que acabas de estudiar en el ejercicio anterior y luego calcula el resultado:

a) (20 - 10 + 30 - 60) ÷ (- 5)
b) [(-9) + (-12) - (+6)] ÷ (- 3)
c) (24 - 18 + 12 - 36) ÷ (- 6)
d) [(+40) - (- 60) - (- 120)] ÷ (+5)
e) [(+120) - (-60) + (+80) - (-44) ÷ (+4)

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 3

Compré 216 docenas de lapiceros a $5.000 la docena. Si los vendo a $1.000 cada dos lapiceros, ¿cuánto me gano en el negocio?

EJERCICIOS RESUELTOS

Vamos a terminar esta unidad resolviendo dos ejercicios donde aparezcan las cuatro operaciones estudiadas sobre números enteros:

① Resolvamos: $-2 \cdot \left[6 \cdot (-7+5) - (6-4) \div (+2)\right] \div (-1)$

SOLUCIÓN

- Desarrollemos en primer lugar el interior del corchete, así:

$$-2 \cdot \left[6 \cdot (-7+5) - (6-4) \div (+2)\right] \div (-1)$$
$$= -2 \cdot \left[6 \cdot (-7) + 6 \cdot 5 - 6 \div (+2) + 4 \div (+2)\right] \div (-1)$$
$$= -2 \cdot \left[-42 + 30 - 3 + 2\right] \div (-1)$$

- Ahora realizamos las sumas y restas dentro del corchete:

$$= -2 \cdot \left[32 - 45\right] \div (-1)$$
$$= -2 \cdot \left[-13\right] \div (-1)$$

- Finalmente realizamos la multiplicación y la división:

$$= (+26) \div (-1)$$
$$= -26$$

② Resolvamos: $\left[6 - (-3+1-2)\right] \cdot \left\{2 + (-3) \cdot \left[(-9+1) \div (-2)\right]\right\}$

SOLUCIÓN

- Empecemos eliminando los signos de agrupación más internos:

$$\left[6 - (-3+1-2)\right] \cdot \left\{2 + (-3) \cdot \left[(-9+1) \div (-2)\right]\right\}$$
$$= \left[6 + 3 - 1 + 2\right] \cdot \left\{2 - 3 \cdot \left[(-8) \div (-2)\right]\right\}$$
$$= \left[10\right] \cdot \left\{2 - 3 \cdot \left[4\right]\right\}$$
$$= \left[10\right] \cdot \left\{2 - 12\right\}$$
$$= \left[10\right] \cdot \left\{-10\right\}$$
$$= -100$$

TALLER DE REVISIÓN DE LA UNIDAD 2

1. Responde VERDADERO o FALSO a cada una de las siguientes afirmaciones. Justifica las respuestas falsas:

a) El producto de dos números enteros negativos es un número entero positivo.
b) $(+) \bullet (-) \bullet (+) \bullet (+) = (-)$
c) La división de números enteros cumple la propiedad clausurativa.
d) El elemento neutro de la multiplicación de números enteros es el 0.
e) La multiplicación de números enteros es distributiva con respecto a la suma y a la resta.
f) Todo número entero multiplicado por cero es igual al mismo número entero.
g) 16 es múltiplo de 1
h) (-9) es divisor de 54.
i) Si **a** es múltiplo de **b** entonces **b** es divisor de **a**.
j) 0 es divisor de algún número entero.

2. Halla el producto de:

a) $(+1) \bullet (+3)$
b) $(-2) \bullet (+5)$
c) $(-3) \bullet (-3)$
d) $(+1) \bullet 0 \bullet (-1)$
e) $(-3) \bullet (-2) \bullet (-1)$
f) $(-5) \bullet 3 \bullet (-1) \bullet (-2)$

3. Halla el cociente de:

a) $(+24) \div (-3)$
b) $(-12) \div (-4)$
c) $(-4) \div 2$
d) $(-100) \div 5$
e) $(+51) \div (-17)$
f) $(+135) \div (-15)$

4. Elabora una cartelera con las propiedades de la multiplicación de números enteros.

5. Indica la propiedad de la multiplicación de números enteros que se aplica en cada uno de los siguientes ejercicios:

a) $(-7) \bullet (+9) = (+9) \bullet (-7)$
b) $[(-5) \bullet (+8)] \bullet (-4) = (-5) \bullet [(+8) \bullet (-4)]$
c) $(-6) \bullet 1 = 1 \bullet (-6) = -6$
d) $(-7) \bullet 0 = 0 \bullet (-7) = 0$
e) $(-5) \bullet [(-3) + (+5)] = (-5) \bullet (-3) + (-5) \bullet (+5)$

6. ¿Cuál propiedad estamos aplicando en el siguiente ejercicio ?

$[(-12) + (-24) - (+36)] \div (-6) = (-12) \div (-6) + (-24) \div (-6) - (+36) \div (-6)$

7. Resuelve los siguientes ejercicios:

a) $-5 \bullet (3-2) + 4 \bullet (-2+6) - (-4) \bullet (+6)$

b) $2 \bullet (-5-4) - (-6) \bullet (-1+3) - (+4) \bullet (+2)$

c) $(-6) \bullet (-2) \bullet (-3) \bullet (-1-2) - (-5+1) \bullet (-4+2)$

d) $-2 \bullet (3-5) + 4 \bullet (-1+3) + 10$

e) $-2 \bullet (+7) - (+6) \bullet (-3) + (+2) \bullet (-9)$

8. Resuelve los siguientes ejercicios:

a) $(2-6) \div (-4) + (1-9) \div (+4) + 6$

b) $(-8-2) \div (+5) - (7-15) \div (-4) + 4$

c) $\left[(32 - 2 \bullet 3 + 4) \div (-3)\right] \bullet (-2 + 9 \div 3)$

d) $(8-9) \bullet \left[6 - (-4)\right] \div (-1 + 7 - 1)$

e) $-5 - \left\{\left[18 \div (-3) + 4\right] \bullet (-1) + 4\right\} \bullet (-2)$

ATENCIÓN: si hay duda sobre cuál operación se realiza primero, ten en cuenta lo siguiente:

- Primero la multiplicación o división.
- Luego la suma o resta

9. Resuelve los siguientes ejercicios:

a) $\left[(-12) \div (-3) + (-6) \bullet (-1)\right] \bullet \left[(-4) \bullet (+8) - (-9) \bullet (+4)\right]$

b) $-\left[14 \bullet (-6) + 6 \bullet (-8)\right] \div 2 \bullet (-7)$

c) $8 - 4 - \left[(-4) \bullet (-9) + 72 \div (-8)\right] \bullet (-3)$

d) $\left\{\left[(-9) \bullet (-4) \div (-4) \bullet 3\right] - 1\right\} \bullet 25 + 107$

10. Sobre los elementos del conjunto $A = \{x / -3 \leq x \leq 3 \; ; \text{ con } x \in Z\}$ se aplica el operador $\mathbf{2 \cdot x - 1 = y}$: se pide:

a) ¿Qué representa la x en $2 \cdot x - 1 = y$?

b) ¿Qué representa la y en $2 \cdot x - 1 = y$?

c) ¿Cómo se obtienen los resultados de esta operación?

d) Elabora un diagrama sagital

e) Escribe el conjunto de parejas ordenadas

f) Elabora un diagrama cartesiano.

PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS SABER

1. El resultado de multiplicar un número natural por sí mismo es un número cuadrado. El año del siglo XX (de 1.900 a 2.000) que es cuadrado perfecto es:

a) 1.600	b) 2.500	c) 1.900	d) 1.936

2. Un cierto número natural es divisible por 3 y también por 5. Cuando el número se divide por 7, el residuo es 4. El menor número que satisface esta condición es:

a) 60	b) 390	c) 120	d) 340

3. Hace dos días fue domingo. A partir de hoy, dentro de 365 días será:

a) Lunes b) Martes c) Miércoles d) Jueves.

4. El total de números divisibles por 3 que podemos escribir con las cifras 1, 5, 7 y 8 usando cada cifra una vez es:

a) 6 b) 12 c) 20 d) 32

5. La cantidad de números que hay entre 100 y 1.000 tal que, al leerlos de izquierda a derecha o de derecha a izquierda nos da el mismo número es:

a) 50 b) 90 c) 40 d) 80

Núcleo Temático

3

POTENCIACIÓN DE NÚMEROS ENTEROS

LOGRO GENERAL

- Descubrir las propiedades de la potenciación en Z y utilizarlas para realizar cálculos numéricos.

DIMENSIONES

LOGROS ESPECÍFICOS	INDICADORES DE LOGRO
Corporal: • Realizar las actividades que permitan apropiarse de los conceptos básicos relacionados con la potenciación y la radicación en Z.	• En grupos de tres, los alumnos simplifican expresiones aritméticas utilizando las propiedades de la potenciación y la radicación en Z.
Comunicativa: • Expresar con claridad y seguridad una idea ante sus compañeros. • Manejar adecuadamente el lenguaje de las propiedades de la potenciación.	• Identifica, lee y escribe potencias en Z. • Interpreta oralmente y por escrito las propiedades de la potenciación.
Cognitiva: • Realizar cálculos numéricos utilizando las propiedades de la potenciación. • Identificar los objetos de las operaciones potenciación y radicación. • Interpretar el significado de la potenciación. • Hallar potencias y raíces.	• Halla la potencia de un número. • Identifica los elementos de la potenciación y la radicación en Z. • Identifica y aplica las propiedades de la potenciación.
Estética: • Elaborar diagramas cartesianos para representar la operación: **elevar al cuadrado un entero** cuando se aplica sobre un conjunto de números enteros.	• Dibuja la gráfica de $y= f(x) = x^2$, con $x \in Z$.
Etica - Actitudinal: • Desarrollar la capacidad para trabajar en grupo.	• Realiza con interés las actividades propuestas en grupo. • Comparte con el grupo sus habilidades y conocimientos.

EVALUACIÓN

ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS

3.1 ¿SABÍAS QUE...?

- Lee con atención el siguiente texto:

En su novela *De la Tierra a la Luna*, Julio Verne contaba, hace más de un siglo, los esfuerzos de un grupo de personas por ponerse en contacto con selenitas (los supuestos habitantes del satélite).

En un capítulo narra cómo un científico alemán proponía un curioso sistema para comunicarse con ellos. En las inmensas estepas de Siberia, dibujaría unos signos luminosos enormes para que los habitantes de la luna pudieran distinguirlos desde allí. Y ¿saben qué pensaba dibujar? La demostración del teorema de Pitágoras.

El sabio de la novela de Verne estaba convencido de que "todo ser inteligente debe entender el significado científico de dicha figura. Los selenitas, si existen, responderán con una figura similar y una vez que se haya establecido una comunicación de esta manera será fácil formar un abecedario que nos permitirá conversar con los habitantes de la luna".

EJERCICIO 3-1

COMPRENSIÓN DE LECTURA: Explicación: Lee nuevamente el texto anterior y luego encierra en un círculo la letra que corresponda a la respuesta correcta.

1. De la lectura anterior podemos deducir que:
   a) Julio Verne fue un gran visionario.
   b) Los alemanes son hábiles para crear sistemas de comunicación.
   c) El hombre siempre se ha interesado en la comunicación con seres extraterrestres.
   d) Los selenitas no conocen la interpretación del teorema de Pitágoras.
2. La idea central del texto puede enunciarse así:
   a) Todo ser inteligente debe entender el significado del teorema de Pitágoras.
   b) La comunicación entre terrícolas y Selenitas es posible a través de los números.
   c) Esfuerzos de un científico alemán para comunicarse con los selenitas.
   d) El teorema de Pitágoras es comprensible por todos los seres del universo.

3. Lo que el científico alemán proponía:
   a) Se hubiera podido conseguir si hubiera existido vida inteligente en la luna.
   b) Era muy práctico pero muy demorado y costoso.
   c) No era derroche de imaginación sino el resultado de estudios y cálculos.
   d) Aún hoy es imposible de lograr.
4. El mejor título para ese escrito podría ser:
   a) Los alemanes, pioneros en las Comunicaciones Interplanetarias.
   b) Julio Verne, todo un derroche de imaginación.
   c) "De la tierra a la luna": de la ficción a la realidad.
   d) Las locuras de un loco genial.

3.2 REVISIÓN DE LA POTENCIACIÓN EN N

- En la unidad cero de este texto repasamos la potenciación de números naturales. Antes de comenzar el estudio de la potenciación de números enteros realicemos la siguiente experiencia.

EXPERIENCIA

- Responde:

1. ¿Cuál es la operación que nos permite abreviar una multiplicación de factores iguales? Dar dos ejemplos.
2. ¿Es la potenciación en N una operación unaria o binaria?.
3. En la potenciación, ¿cuáles son los objetos por operar? ¿Qué indica cada uno de ellos? Dar dos ejemplos.
4. ¿Cómo se llama el resultado de la operación potenciación?.
5. ¿Cómo se escribe **cuadrado de 7**? ¿Y **cubo de 8**?.
6. ¿Cómo se llaman las potencias de exponente 2? ¿Y las de exponente 3?.
7. ¿A qué se denominan **potencias de 10** ?.
8. ¿Qué se hace cuando tenemos:
   a) un producto de potencias de la misma base? Dar dos ejemplos.
   b) un cociente de potencias de la misma base? Dar dos ejemplos.
   c) una potencia de una potencia? Dar dos ejemplos.
   d) una potencia de un producto? Dar dos ejemplos.
9. ¿Qué se obtiene cuando elevamos un número natural a la cero? Dar tres ejemplos.
10. ¿Qué se obtiene cuando elevamos un número natural a la uno? Dar tres ejemplos.

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 1

¿Cuál es el número que sumado con su duplo da 396?
¿Cuál es el número que sumado con su quíntuplo da 240?.

3.3 POTENCIACIÓN EN Z CON EXPONENTE UN NÚMERO NATURAL

PRIMERA EXPERIENCIA

- La potenciación en Z, cuando el exponente es un número natural, es análoga a la potenciación en N. Veamos por qué:

$3 \bullet 3 \bullet 3 \bullet 3 \bullet 3 = 3^5$
$(-5) \bullet (-5) \bullet (-5) = (-5)^3$

Estas dos multiplicaciones de números enteros son POTENCIAS CON EXPONENTE UN NÚMERO NATURAL porque tienen todos sus factores iguales.

- Responde:

a) En $3 \bullet 3 \bullet 3 \bullet 3 \bullet 3 = 3^5$, ¿cuáles son la base, el exponente y la potencia?.
b) En $(-5) \bullet (-5) \bullet (-5) = (-5)^3$, ¿cuáles son la base, el exponente y la potencia?.

SEGUNDA EXPERIENCIA

- Un error frecuente que se comete al trabajar con potencias de números enteros es no tener en cuenta los paréntesis. Recordemos que los paréntesis, y en general los signos de agrupación, cumplen la función de señalar el orden en que debemos realizar las operaciones. Por ejemplo:

-En $(-2)^4$, el exponente 4 afecta tanto al signo (-) como al número 2; es decir:

$$(-2)^4 = \underbrace{(-2) \bullet (-2) \bullet (-2) \bullet (-2)}_{\substack{\text{4 veces el signo (-)} \\ \text{4 veces el 2.}}} = +16.$$

-En -2^4 , el exponente afecta sólo al número 2; es decir:

$$-2^4 = -\underbrace{(2 \bullet 2 \bullet 2 \bullet 2)}_{16} = -16$$

- Calcula:

a) -3^3 b) $(-3)^3$ c) $(-3)^4$ d) -3^4
e) -5^2 f) $(-5)^3$ g) -1^8 h) $(-1)^8$

- Responde:

a) ¿Es $-(-2)^3 = -(-2^3)$? ¿Por qué?.
b) ¿Es $-(-1)^{17} = -(-1^{17})$? ¿Por qué?.
c) ¿Es $-(-2)^4 = -(-2^4)$? ¿Por qué?.
d) ¿Es $(-2)^5 = -2^5$? ¿Por qué?.

APRENDAMOS...

SIGNO DE UNA POTENCIA

- **Todo número entero negativo elevado a un exponente impar tiene por resultado un entero negativo.**
- **Todo número entero positivo o negativo elevado a un exponente par tiene por resultado un entero positivo.**
- **En $(-7)^2$, el exponente afecta tanto al signo (-) como al número 7:**

$$(-7)^2 = (-7)\bullet(-7)\text{: "2 veces el (-) y 2 veces el 7".}$$
$$= +49$$

- **En -7^2, el exponente afecta sólo al número 7:**

$$-7^2 = -(7 \bullet 7)\text{: "2 veces el 7 y 1 vez el signo (-)"}$$
$$= -49$$

Es decir, $(-7)^2 \neq -7^2$

EJERCICIO 3-2

❶ Escribe en forma de producto y calcula: a) $(-2)^4$ b) $(-4)^2$ c) $(-3)^3$ d) $(-5)^3$

❷ Escribe en forma abreviada y calcula:

a) $(-2)\bullet(-2)\bullet(-2)\bullet(-2)\bullet(-2)$
b) $(-3)\bullet(-3)\bullet(-3)$
c) $(-1)\bullet(-1)\bullet(-1)\bullet(-1)\bullet(-1)\bullet(-1)$
d) $(-a)\bullet(-a)\bullet(-a)\bullet(-a)$
e) $(-a)\bullet(-a)\bullet(-a)\bullet(-a)\bullet(-a)$
f) $(+a)\bullet(+a)\bullet(+a)\bullet(+a)$

❸ Indica, sin calcular, cuál es el signo del resultado de:

a) $(-7)^2$ b) $(-1)^5$ c) $(-2)^3$ d) $(-1)^8$ e) -1^5
f) -1^8 g) $-(-3)^5$ h) $-(-3)^2$ i) $-(-2)^8$ j) $-(-2^{15})$

④ Responde:

a) ¿Qué diferencia hay entre $-(-2)^4$ y $-(-2^4)$?

b) ¿Qué diferencia hay entre -2^2 y $(-2)^2$?

⑤ Calcula las siguientes potencias:

a) -2^3	b) $(-2)^3$	c) $(-3)^2$	d) -3^2	e) $+(-4)^2$
f) $+(-3)^3$	g) $-(-1)^6$	h) $-(-1)^5$	i) $(4-8)^2$	j) -3^3

⑥ Sobre los elementos del conjunto A={ -2, -1, 0, 1, 2,} aplicamos el operador **cubo de**. Se pide:

a) Elaborar el diagrama sagital.

b) Escribir el conjunto de parejas ordenadas que se forman.

c) Escribir simbólicamente la operación.

d) Dibujar la gráfica en el plano cartesiano.

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 2

638 excede en 14 unidades a la suma de un número con su quíntuplo, ¿cuál es el número?.

3.4 PROPIEDADES DE LA POTENCIACIÓN DE ENTEROS

PRIMERA EXPERIENCIA

- Observemos:

$$\underbrace{[(-2)\bullet(-2)\bullet(-2)]}_{\substack{\downarrow \\ (-2)^3}} \bullet \underbrace{[(-2)\bullet(-2)]}_{\substack{\downarrow \\ (-2)^2}} = \underbrace{(-2)\bullet(-2)\bullet(-2)\bullet(-2)\bullet(-2)}_{\substack{\downarrow \\ (-2)^{3+2} = (-2)^5}}$$

¿Cómo se multiplican potencias de la misma base, cuando ésta es un número entero?.

- Ahora observemos cómo se halla el resultado de la siguiente división: $(-5)^6 \div (-5)^4$

$$\frac{(-5)^6}{(-5)^4} = \frac{\cancel{(-5)} \bullet \cancel{(-5)} \bullet \cancel{(-5)} \bullet \cancel{(-5)} \bullet (-5) \bullet (-5)}{\cancel{(-5)} \bullet \cancel{(-5)} \bullet \cancel{(-5)} \bullet \cancel{(-5)}} = (-5)^2$$

Es decir: $\frac{(-5)^6}{(-5)^4} = (-5)^{6-4} = (-5)^2$

¿Cómo se dividen potencias de la misma base, cuando ésta es un número entero?.

SEGUNDA EXPERIENCIA

- Observemos la siguiente potencia: $\mathbf{[(-2)^2]^3}$. La base $\mathbf{(-2)^2}$ está elevada al exponente 3.
- Por lo tanto: $[(-2)^2]^3 = (-2)^2 \bullet (-2)^2 \bullet (-2)^2$

$$= (-2)^{2+2+2} = (-2)^{3\bullet 2} = (-2)^6$$

- ¿Cómo se calcula una potencia de potencia cuando la base es un número entero?.

TERCERA EXPERIENCIA

- Analiza detenidamente el siguiente desarrollo y explica cada paso realizado:

$$\begin{aligned}[(-3) \bullet 2 \bullet (-5)]^3 &= [(-3) \bullet 2 \bullet (-5)] \bullet [(-3) \bullet 2 \bullet (-5)] \bullet [(-3) \bullet 2 \bullet (-5)] \\ &= [(-3) \bullet (-3) \bullet (-3)] \bullet [\ 2 \bullet 2 \bullet\ 2] \bullet [(-5) \bullet (-5) \bullet (-5)] \\ &= [(-3)^3\ ] \bullet 2^3 \bullet (-5)^3\end{aligned}$$

- ¿Es la potenciación de números enteros distributiva con respecto al producto?.
- ¿Es cierto que si a, b y c son números enteros y n es un número natural entonces $(a \bullet b \bullet c)^n = a^n \bullet b^n \bullet c^n$?.

APRENDAMOS...

PROPIEDADES DE LA POTENCIACIÓN EN Z

Si $\mathbf{a, b \in Z}$ y $\mathbf{m, n \in N}$ entonces:

1. **Producto de Potencias de la Misma Base:** Un producto de potencias de la misma base se calcula escribiendo la misma base y sumando los exponentes; así:

$$\mathbf{a^m \bullet a^n = a^{m+n}}$$

2. **Division de Potencias de la Misma Base**: Una división de potencias de la misma base se calcula escribiendo la misma base y restando los exponentes; es decir:

$$\mathbf{a^m \div a^n = a^{m-n}, \text{ con } m > n}$$

3. **Potencia de una Potencia**: Para elevar una potencia a un exponente se escribe la misma base y se multiplican los exponentes; es decir:

$$\mathbf{[\ a^m\ ]^n = a^{m\bullet n}}$$

4. **Potencia de un Producto y un Cociente**: La potenciación es distributiva con respecto al producto y al cociente; es decir:

$$(\mathbf{a \cdot b})^{\mathbf{m}} = \mathbf{a}^{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{b}^{\mathbf{m}} \quad ; \quad \left(\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}\right)^{m} = \frac{\mathbf{a}^{\mathbf{m}}}{\mathbf{b}^{\mathbf{m}}}$$

5. **Exponente 0 y Exponente 1**: Al igual que en el conjunto de los números naturales, también en el conjunto de los números enteros se cumplen las propiedades del exponente cero (0) y del exponente uno (1); así:

- Todo número entero, excepto el cero, elevado al exponente cero es igual a 1; es decir: $\mathbf{a^0 = 1}$, siempre que $\mathbf{a \neq 0}$ y $\mathbf{a \in Z}$.
- Todo número entero elevado al exponente 1 es igual a ese mismo número; es decir: $\mathbf{a^1 = a}$, con $\mathbf{a \in Z}$.

EJERCICIO 3-3

❶ Completa:

a) Para calcular un producto de potencias de la misma base, escribimos la misma ________ y por exponente escribimos la ________ de los exponentes.

b) Para dividir potencias de la misma base, escribimos la misma________ y por exponente escribimos la ________ de los exponentes.

c) Para elevar una potencia a un exponente escribimos la misma ________ y por exponente escribimos el ________ de los exponentes.

d) Para elevar un producto o un cociente a un exponente elevamos cada ________ al ________ dado.

❷ Responde:

a) ¿Es lo mismo potencia de un producto que producto de potencias de igual base? Dar dos ejemplos.

b) ¿Es lo mismo potencia de un cociente que cociente de potencias de igual base? Dar dos ejemplos.

c) ¿Es $0^0 = 1$? ¿Por qué?.

d) ¿Cuál es el resultado de elevar un entero al exponente 1?.

e) ¿Cuál es el resultado de elevar un entero diferente de cero al exponente cero?.

f) ¿Con cuáles operaciones es distributiva la potenciación de números enteros?.

❸ Simplifica cada expresión y halla el resultado:

a) $(+1)^3 \bullet (+1)^2 \bullet (+1)$ b) $(-8) \bullet (-8)^4 \bullet (-8)^0$ c) $(-2)^6 \div (-2)^5$

d) $(-7)^3 \div (-7)$ e) $[\,(-2)^2\,]^2$ f) $[\,(-6) \div (+2)]^3$

g) $[\,(+3) \bullet (-2)\,]^2$ h) $[\,x \bullet y \div m]^4$

❹ La potenciación no es distributiva con respecto a la suma ni a la resta; por ejemplo:

$$\begin{array}{ccc} \underbrace{(6-3+1)^2}_{\downarrow} & \neq & \underset{\downarrow}{6^2}\ \underset{\downarrow}{-3^2}\ \underset{\downarrow}{+1^2} \\ \underset{\downarrow}{(4)^2} & \neq & \underbrace{36\ -9\ +1}_{\downarrow} \\ 16 & \neq & 28 \end{array}$$

Comprueba que:

a) $(4+5-2)^2 \neq 4^2+5^2-2^2$ b) $(5-1+3)^3 \neq 5^3-1^3+3^3$

c) $(4+2)^2 \neq 4^2+2^2$ d) $(7-4)^2 \neq 7^2-4^2$

❺ Completa:

a) $(+5)^3 \bullet (+5)^6 = (+5)^{\square}$ b) $a^5 \bullet a^3 \bullet a^2 = a^{\square}$ c) $a^m \bullet a^n = a^{\square+\square}$

d) $\dfrac{3^8}{3^5} = 3^{\square}$ e) $\dfrac{a^9}{a^7} = a^{\square}$ f) $\dfrac{(-2)^5}{(-2)^4} = (-2)^{\square}$

g) $\left[\,(-2)^3\right]^5 = (-2)^{\square}$ h) $\left[\,(-3)^5\right]^{\square} = (-3)^{10}$ i) $\left[\,(x^2)^4\right]^{\square} = (x)^{40}$

j) $a^{10} \bullet b^{10} \bullet c^{10} = (\square \bullet \square \bullet \square)^{10}$

k) $x^4 \bullet y^6 \bullet z^8 = (x^2 \bullet y^3 \bullet z^4)^{\square}$ l) $(3xy)^5 = \square^{\square} \bullet \square^{\square} \bullet \square^{\square}$

❻ Desarrolla los siguientes productos aplicando la propiedad distributiva. Mira el ejemplo:

$$\begin{aligned} x \bullet (x + 3 \bullet x^2) &= x \bullet x + 3 \bullet x^2 \bullet x \\ &= x^2 + 3x^3 \end{aligned}$$

a) $(5+x) \bullet 2$ b) $x \bullet (x^2 + 5x^3)$ c) $3 \bullet x \bullet (x + 2 \bullet x^2 + m \bullet x^4)$

d) $x^2 \bullet (3x-2)$ e) $5 \bullet (x-1)$ f) $(2a+b) \bullet x$

❼ Saca factor común x en las siguientes expresiones. Observa el ejemplo:

Ejemplo: $3x^5 + 4x = x \bullet (3x^4 + 4)$

a) $3x^2 + 5x$ b) $9x^3 + 2x^2 - 3x$ c) $6x - 41x^4$ d) $7x^2 - 12x$

❽ Sacar factor común p:

a) $5p^2 + 3p$ b) $8p^5 - 2p^3 + 5p^2 + 3p$

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 3

- La suma de dos números es 24 y su cociente es 5. Hallar los números.
- El duplo de la suma de dos números es 70 y el cuádruplo de su cociente es 24. Hallar los números.

3.5 RADICACIÓN DE NÚMEROS ENTEROS

PRIMERA EXPERIENCIA

- Como vemos, hay dos números enteros, 4 y -4, que elevados al cuadrado dan como resultado 16. Por lo tanto, 16 tiene dos raices cuadradas: una positiva y la otra negativa. Las representamos así:

Raíz cuadrada positiva de 16: $\sqrt{16} = 4$

Raíz cuadrada negativa de 16: $-\sqrt{16} = -4$

- En general, no existen las raíces pares (cuadradas, cuartas, sextas,...) de números enteros negativos.

SEGUNDA EXPERIENCIA

- Como vemos, es posible encontrar la raíz cúbica (y en general, la raíz impar) tanto de números enteros positivos como negativos. En nuestro caso:

La raíz cúbica de 27 es $\sqrt[3]{27} = 3$ porque $3^3 = 27$

La raíz cúbica de - 27 es $\sqrt[3]{-27} = -3$ porque $(-3)^3 = -27$

APRENDAMOS...

- Sea **a** un número entero y **n** un número natural mayor o igual que 2, decimos que el número entero **b** es la raíz n-sima de **a** si al elevar **b** al exponente **n** obtenemos **a**; es decir:

$$\sqrt[n]{a} = b \text{ si y sólo si } b^n = a$$

- No existen las raíces pares de números negativos.

$\sqrt{-9}$ no existe ; $\sqrt[4]{-81}$ no existe

- Las raíces de índice par de un número entero positivo, dan dos resultados de igual valor numérico y distinto signo; por ejemplo:

La raíz cuarta positiva de 256 es: $\sqrt[4]{256} = 4$

La raíz cuarta negativa de 256 es: $-\sqrt[4]{256} = -4$

- La raíces de índice impar, tienen un solo resultado y su signo coincide con el signo del número cuya raíz impar estamos calculando; por ejemplo:

$\sqrt[3]{-8} = -2$, $\sqrt[5]{32} = 2$, $\sqrt[3]{64} = 4$, $\sqrt[5]{-243} = -3$

- La radicación en Z no es una operación clausurativa, ya que el resultado no es siempre un número entero; por ejemplo:

$\sqrt{-25} \notin Z$, $\sqrt{12} \notin Z$, $\sqrt[3]{21} \notin Z$, $\sqrt[5]{-40} \notin Z$, $\sqrt[4]{280} \notin Z$, $\sqrt[5]{-8} \notin Z$

EJERCICIO 3-4

1 Contesta:

a) ¿Cuántas raíces pares puede tener un número entero?. 1+1=2

b) ¿Cuántas raíces impares puede tener un número entero?. ninguna

c) ¿Por qué no existe $\sqrt{-49}$?. porque no puede tener raiz negativa

d) ¿Todo número entero posee raíz cúbica? ¿Por qué?

e) ¿Por qué la radicación de enteros no es clausurativa?. ya que el resultado no es siempre 2

2 Calcula:

a) $\sqrt[5]{-32} = -2$ b) $\sqrt[4]{81} = 3$ c) $-\sqrt{64} = -8$ d) $\sqrt[4]{-16}$ = no esiste

A continuación presentamos dos ejercicios resueltos que nos muestran cómo se procede cuando tenemos expresiones con las distintas operaciones con números enteros.

Ejemplo 1: Simplifiquemos y calculemos:

$$\left\{\left|\left(-27 + 16 - 7\right) \div (5-8)^2\right| \bullet \left|(-6) + (+4) + (-3)\right|\right\} - \left|(-2)^3 + (-3)^2\right|$$

Solucion

$$\left\{\left|\left(-27 + 16 - 7\right) \div (5-8)^2\right| \bullet \left|(-6) + (+4) + (-3)\right|\right\} - \left|(-2)^3 + (-3)^2\right|$$

$$= \left\{\left|(-18) \div (-3)^2\right| \bullet \left|(-5)\right|\right\} - \left|(-8) + (+9)\right|$$

$$= \left\{\left|(-18) \div (+9)\right| \bullet (-5)\right\} - (+1)$$

$$= \left\{|-2| \bullet (-5)\right\} - (+1)$$

$$= \{+10\} - (+1) = (+10) + (-1) = +9$$

Ejemplo 2: Simplifiquemos y calculemos:

$$\left\{\frac{\left[(+5)^2\right]^6 \bullet (-2)^4 \bullet \left[(+5)^3\right]^0 \bullet \left[(-3)^2\right]^3 \bullet (-2)}{\left[(-2)^2\right]^2 \bullet \left[(+5)^4\right]^3 \bullet (-2)^0 \bullet (+5)^0 \bullet (-3)^5}\right\}^2$$

Solución

$$\left\{\frac{\left[(+5)^2\right]^6 \bullet (-2)^4 \bullet \left[(+5)^3\right]^0 \bullet \left[(-3)^2\right]^3 \bullet (-2)}{\left[(-2)^2\right]^2 \bullet \left[(+5)^4\right]^3 \bullet (-2)^0 \bullet (+5)^0 \bullet (-3)^5}\right\}^2$$ ....Expresión dada.

$$= \left\{ \frac{(+5)^{12} \bullet (-2)^4 \bullet (+5)^0 \bullet (-3)^6 \bullet (-2)}{(-2)^4 \bullet (+5)^{12} \bullet (-2)^0 \bullet (+5)^0 \bullet (-3)^5} \right\}^2 \cdots\cdots$$

Aplicamos potencia de una potencia.

$$= \left\{ \frac{[(+5)^{12} \bullet (+5)^0] \bullet [(-2)^4 \bullet (-2)] \bullet (-3)^6}{[(-2)^4 \bullet (-2)^0] \bullet [(+5)^{12} \bullet (+5)^0] \bullet (-3)^5} \right\}^2 \cdots\cdots$$

Propiedades Asociativa y Conmutativa de la multiplicación.

$$= \left\{ \frac{(+5)^{12} \bullet (-2)^5 \bullet (-3)^6}{(-2)^4 \bullet (+5)^{12} \bullet (-3)^5} \right\}^2 \cdots\cdots$$

Producto de potencias de la misma base.

$$= \left\{ \frac{(+5)^{12} \bullet (-2)^5 \bullet (-3)^6}{(+5)^{12} \bullet (-2)^4 \bullet (-3)^5} \right\}^2 \cdots\cdots$$

Propiedad Conmutativa de la multiplicación.

$$= \{ (+5)^0 \bullet (-2)^1 \bullet (-3)^1 \}^2 \cdots\cdots$$

División de potencias de la misma base.

$$= (+5)^0 \bullet (-2)^2 \bullet (-3)^2 = (1) \bullet (+4) \bullet (+9) = +36 \cdots$$

Potencia de un producto y potencia de potencia

3 Simplifica y calcula:

a) $[(-5)^4 \div (-5)^3] \bullet (-5) \bullet (-5)^0$

b) $\{[(-3)^2]^4 \div (-3)^7\} \bullet [(-3)^0 \bullet (-3)]^2$

c) $\{(-2)^3 \bullet (-2)^0 \bullet (-2)\}^5 \div [(-2)^4]^5$

4 Resuelve:

a) $(-5)^2 - (+4)^3 + 3^5 - 2^4$

b) $(-2)^3 + (-1)^4 + (-3)^3 - (-4)^2$

c) $(-7)^2 \bullet [(-2)^3 - (-4)^2 + 6]$

d) $[(-3)^2 - (+4)^3] \bullet [(-5)^3 + (+3)^4]$

e) $[(-6) \bullet (+4) \bullet (+5)^2] \div [8 - (-8+11)]$

5 Simplifica y halla el resultado de:

a) $$\frac{[(-2)^4]^2 \bullet (+3)^5 \bullet [(-2)^2]^3 \bullet [(+3)^4]^3}{[(+3)^2]^5 \bullet [(-2)^3]^4 \bullet [(+3)^5]^0 \bullet (+3)^6}$$

b) $$\left\{ \frac{[(-3)^3]^2 \bullet [(+2)^4]^3 \bullet [(-3)^0]^4}{[(+2)^3]^2 \bullet [(-3)^1]^4 \bullet (-3) \bullet (+2)^5} \right\}^2$$

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 4

800 excede en 60 unidades a la suma de dos números y en 727 a su cociente. Hallar los números.

TALLER DE REPASO DE LA UNIDAD 3

1. Calcula el valor de las siguientes potencias:

a) $(+2)^5$ b) $(+11)^2$ c) $(-10)^3$ d) $(-3)^2$ e) $(-5)^3$

f) $(-1)^5$ g) $(-2)^4$ h) $(-9)^2$ i) $(+1)^7$ j) $(-3)^4$

2. Simplifica y halla el resultado de:

a) $(+2)^4 \div (+2)^3$ b) $(-4)^5 \div -4$ c) $(-2)^4 \bullet (-2)^2$

d) $(-1)^7 \div (-1)^2$ e) $(-7)^9 \div (-7)^9$ f) $(+2)^3 \bullet (+2) \bullet (+2)^2$

3. Simplifica y calcula las siguientes potencias:

a) $[(-1)^5]^6$ b) $[(-2)^3]^2$ c) $[(-1)^5]^3$

4. Sabiendo que $a=-2$, $b=+3$, $c=-5$, comprueba que:

-2 x3 -5

a) $(a \bullet b \bullet c)^2 = a^2 \bullet b^2 \bullet c^2$ b) $(a + b - c)^2 \neq a^2 + b^2 - c^2$

5. Responde falso o verdadero a cada una de las siguientes proposiciones. Justifica las respuestas falsas.

a) Todo número negativo elevado a un exponente par es igual a un número negativo.

b) Es lo mismo -2^4 que $(-2)^4$

c) Es lo mismo -2^3 que $(-2)^3$

d) Para resolver una suma de potencias de la misma base escribimos la base y sumamos los exponentes.

e) Para resolver una potencia de una potencia escribimos la base y multiplicamos los exponentes.

f) La potenciación es distributiva con respecto a la resta.

g) Todo número entero elevado al exponente cero es igual al mismo número entero.

h) La potenciación es distributiva con respecto a la división.

i) Es lo mismo $-(-2)^4$ que 2^4.

j) Para resolver una división de potencias de la misma base escribimos la misma base y restamos los exponentes.

6. Escribe los siguientes productos en forma de potencia:

a) $(-4) \bullet (-4)$ b) $9 \bullet 9$

c) $(-3) \bullet (-3)$ d) $4 \bullet 4$

e) $(-7) \bullet (-7) \bullet (-7)$ f) $(-5) \bullet (-5) \bullet (-5)$

g) $2 \bullet 2 \bullet 2 \bullet 2$ h) $(-1) \bullet (-1) \bullet (-1)$

7. Indica, sin calcular, cuál es el signo de la potencia:

a) $(-8)^2$ b) $(-1)^3$ c) $(-3)^4$ d) $(-7)^6$
e) $(-1)^{12}$ f) $-(-3)^6$ g) $-(-2)^5$ h) -2^4
i) $(-2)^4$ j) $-(-3^2)$ k) $-(-5^3)$ l) $-(-2)^6$

8. Calcula el valor de las siguientes expresiones aplicando las propiedades de la potenciación:

a) $(-3)^2 \bullet (-3)$ b) $(-5)^8 \div (-5)^6$ c) $(-7) \bullet (-7)^9 \div (-7)^8$
d) $(-4)^5 \bullet (-4) \bullet (-4)^3 \div (-4)^9$ e) $[\,(-5)^2\,]^0$ f) $[\,(-1)^3\,]^7$ -1

9. Calcula el valor de las siguientes expresiones aplicando las propiedades de la potenciación:

a) $[\,(-7)^2 \bullet (-7)^4]^2 \div [(-7)^5]^2$
b) $(+3)^{12} \div [(+3)^2 \bullet (+3)^4 \div (+3)]^2$
c) $\{\,(+2)^2 \bullet [\,(+2) \bullet (+2)^5 \div (+2)^4]^2\}^2 \div (+2)^{11}$

10. Resuelve:

a) $(-4+1)^2 \bullet (3-6)^3 \bullet (-1-2)$ b) $(-1)^2 + (-2)^2 + (-3)^2 + (-4)^2$ 16
c) $[(+6) \bullet (-3) - (+8) \bullet (-2)\,]^4 \div (-1-1)$ d) $(-1-3)^2 \bullet (-6+2)^4 \div 2 \bullet (-2) \bullet (-4)^3$

11. Escribe los siguientes números como potencias de base 2: **4 ; 8 ; 1 ; 16 ; 2.**

12. Escribe los siguientes números como potencias de base -2: **-8 ; 4 ; 1 ; -2**

PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS SABER

1. Antonio multiplicó un número por $2\frac{1}{2}$ y obtuvo 50 como resultado. Sin embargo, él debería haber dividido el número por $2\frac{1}{2}$ para obtener la respuesta correcta. La respuesta correcta es:

a) 8 b) 50 c) 40 d) 16

2. Un reloj se atrasa 15 minutos cada hora. El reloj muestra la hora correcta a las 9:00 a.m. Cuando el reloj muestra por primera vez las 10:00 a.m., la hora es:

a) 10:10 a.m. b) 10:00 a.m. c) 10:20 a.m. d) 10:30 a.m.

3. Juan tiene 7 monedas en su bolsillo. Tiene monedas de $100, $200 y $500. Si se sabe que tiene más monedas de $200 que de $500, y más de $500 que de $100. El valor total de las 7 monedas es:

a) $3.900 b) $2.500 c) $3.500 d) $1.900

4. Si el número A se divide por el número B, el resultado es $\frac{3}{4}$. Si B se divide por C, el resultado es $\frac{5}{6}$. Cuando A se divide por C, el resultado es:

a) $\frac{5}{12}$ b) $\frac{5}{6}$ c) $\frac{5}{3}$ d) $\frac{5}{8}$

5. En los juegos intercolegiados, cada colegio puede inscribir 1, 2, 3 o máximo 4 equipos. Si se inscribieron en total 347 equipos en los juegos, el menor número de colegios que puede estar participando es:

a) 87 b) 86 c) 100 d) 116

Núcleo Temático

4

EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS RACIONALES

LOGRO GENERAL

- Identificar los números racionales y las propiedades de sus operaciones básicas.
- Usar las operaciones en Q para resolver ejercicios que incluyan signos de agrupación y problemas.

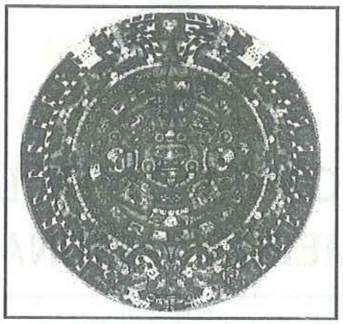
DIMENSIONES

LOGROS ESPECÍFICOS	INDICADORES DE LOGRO
Corporal: • Realizar actividades de composición y descomposición de figuras que permitan comprender el concepto de número racional.	• En grupos de 3 o 4, los estudiantes realizan actividades para apropiarse del concepto de número racional.
Comunicativa: • Explicar el concepto de número racional a los compañeros.	• Explica por qué un número racional puede escribirse como el cociente de dos números enteros.
Cognitiva: • Realizar cálculos numéricos utilizando las propiedades de las operaciones básicas en Q. • Graficar un número racional en la recta numérica. • Identificar los números racionales. • Formular y resolver problemas donde intervienen las operaciones básicas en Q.	• Realiza correctamente las operaciones con números racionales. • Utiliza las propiedades de las operaciones básicas en Q para realizar cálculos numéricos. • Resuelve problemas en los que debe utilizar los números racionales y sus operaciones.
Estética: • Elaborar diagramas sagitales y cartesianos de operaciones cuyos objetos y resultados son números racionales.	• Dibuja gráficas cartesianas de operaciones unarias cuyos elementos son números racionales.
Etica - Actitudinal: • Participa activamente en grupos de trabajo.	• Realiza con interés las actividades de grupo. • Comparte con los compañeros sus habilidades y conocimientos.

EVALUACIÓN

ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS

4.1 ¿SABÍAS QUE...?



Cada cultura ha tenido su propio calendario y ha empezado a contar los años a partir de un hecho muy destacado.

Los antiguos romanos tomaban como año cero el de la fundación de Roma. Escribían I AUC para indicar el primer año. La sigla AUC son las iniciales de "Ab urbe condita" que en latín significa "La fundación de la ciudad". Los cristianos hicieron su propio calendario ubicando el año cero en el nacimiento de Cristo. Es el sistema que se sigue utilizando en la actualidad en casi todo el mundo.

Los musulmanes iniciaron su propio calendario tomando como punto de partida una fecha muy importante: la Hégira o huida del profeta Mahoma desde La Meca a Medina; por ejemplo, escriben 5H para designar el año quinto "después de la Hégira".

Según nuestro calendario, la fundación de Roma sucedió en el año 753 antes de Cristo, y la Hégira en el 614 después de Cristo.

La fotografía muestra el calendario azteca.

EJERCICIO 4-1

COMPRENSIÓN DE LECTURA: Lee nuevamente el texto anterior y resuelve los ejercicios propuestos:

A. APAREAMIENTO: Escribe sobre el espacio de la izquierda el número correspondiente de la derecha.

——	Huída del profeta Mahoma.	1.	I. A.U.C.
——	"Ab Urbe Condita".	2.	Cristianos: año cero.
——	Nacimiento de Jesús.	3.	Antiguos Romanos: año cero.
——	Cada cultura lo tiene.	4.	La fundación de la ciudad.
——	Fundación de Roma.	5.	Musulmanes: año cero.
——	Primer año.	6.	El calendario.

B. F-V-N Encierra en un círculo la letra F, si la proposición es falsa; la V, si es verdadera; o la, N si no aparece en el texto.

7. Entre los musulmanes, la Hégira es la huída de Mahoma desde La Meca a la ciudad de Medina. **F-V-N.**
8. La expresión latina "Ab Urbe Condita" significa nacimiento de Cristo. **F-V-N.**
9. El calendario de los mahometanos arranca con la Hégira. **F-V-N.**
10. Rómulo y Remo fundaron a Roma 753 años antes de que apareciera Jesucristo. **F-V-N.**

4.2 NÚMEROS FRACCIONARIOS NEGATIVOS

PRIMERA EXPERIENCIA

- En las unidades anteriores utilizamos los números enteros negativos para representar deudas, temperaturas bajo cero, desplazamientos hacia la izquierda y profundidades bajo el nivel del mar. En la misma forma, podemos utilizar las fracciones negativas para representar situaciones parecidas. Por ejemplo:

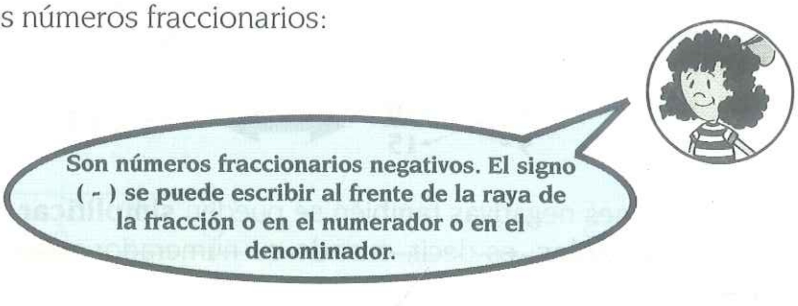
  - Para indicar que el ancla del barco quedó a $\frac{19}{3}$ m de profundidad, escribimos $\mathbf{-\frac{19}{3}}$ **m.**
  - Para indicar que la temperatura mínima en una ciudad europea fue de $\frac{23}{4}$ °C bajo cero, escribimos $\mathbf{-\frac{23}{4}}$ **°C.**
  - Para indicar que la Grilla Brincona saltó $\frac{4}{5}$ m hacia la izquierda, escribimos $\mathbf{-\frac{4}{5}}$ **m.**

- Fíjate bien en los siguientes números fraccionarios:

$$-\frac{2}{3} = \frac{-2}{3} = \frac{2}{-3}$$

$$-\frac{9}{4} = \frac{-9}{4} = \frac{9}{-4}$$

$$-\frac{7}{2} = \frac{-7}{2} = \frac{7}{-2}$$



- También las fracciones negativas pueden ser propias o impropias. Una fracción cuyo numerador es mayor que el denominador se llama fracción impropia; en caso contrario, se llama fracción propia.

  Toda fracción impropia se puede transformar en una expresión mixta. Observa cómo se hace y explica el procedimiento:

FRACCIÓN IMPROPIA	DIVISIÓN REALIZADA	EXPRESIÓN MIXTA
$-\frac{19}{5}$	$\begin{array}{r\|l} -19 & 5 \\ \cline{2-2} -4 & -3 \end{array}$	$-3 + \left(-\frac{4}{5}\right) = -3\frac{4}{5}$
$-\frac{27}{8}$	$\begin{array}{r\|l} -27 & 8 \\ \cline{2-2} -3 & -3 \end{array}$	$-3 + \left(-\frac{3}{8}\right) = -3\frac{3}{8}$
$-\frac{17}{4}$	$\begin{array}{r\|l} -17 & 4 \\ \cline{2-2} -1 & -4 \end{array}$	$-4 + \left(-\frac{1}{4}\right) = -4\frac{1}{4}$

- También podemos transformar expresiones mixtas en fracciones impropias. Explica con tus propias palabras cómo se hace:

EXPRESIÓN MIXTA	PROCEDIMIENTO	FRACCIÓN IMPROPIA
$-4\frac{2}{3}\ \cdot\ +$	$-\frac{(4 \cdot 3) + 2}{3}$	$-\frac{14}{3}$
$-8\frac{3}{5}\ \cdot\ +$	$-\frac{(8 \cdot 5) + 3}{5}$	$-\frac{43}{5}$

- Recordemos que para obtener **fracciones equivalentes** a una fracción dada, debemos multiplicar su numerador y su denominador por un mismo número; así:

$$-\frac{2 \text{ x } 2}{3 \text{ x } 2} = -\frac{4}{6} \quad ; \quad -\frac{2 \text{ x } 3}{3 \text{ x } 3} = -\frac{6}{9} \quad ; \quad -\frac{2 \text{ x } 5}{3 \text{ x } 5} = -\frac{10}{15}$$

Como vemos:

$$-\frac{4}{6} = -\frac{6}{9} = -\frac{10}{15}$$

- Un detalle importante: Si tomamos dos fracciones equivalentes y multiplicamos en cruz, podemos comprobar que los productos son iguales:

$$-\frac{6}{9} = -\frac{10}{15} \quad \Longleftrightarrow \quad -(6 \text{ x } 15) = -(9 \text{ x } 10)$$

- Las fracciones negativas también se pueden **simplificar** hasta convertirlas en **fracciones irreducibles**; es decir, cuando su numerador y denominador no tienen divisores comunes.

EJEMPLO:

Hallemos la fracción irreducible equivalente a $-\frac{45}{60}$

SOLUCIÓN:

- Hallamos el máximo común divisor de 45 y 60 y luego, dividimos el numerador y el denominador de la fracción dada por este número; así:

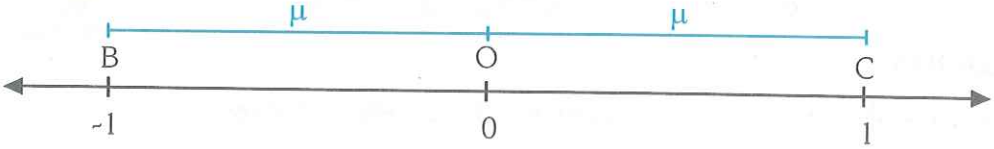
$$\begin{array}{r|l} 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \therefore \text{ M.C.D. } (45, 60) = 3 \cdot 5 = 15$$

$45 = 3^2 \cdot 5$ $\qquad$ $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$

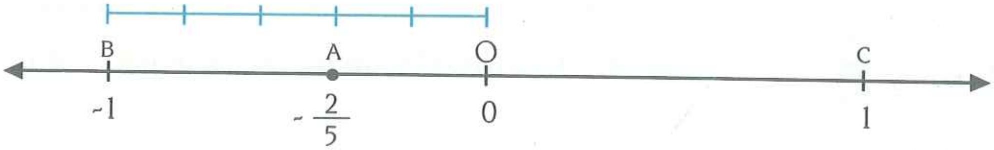
- Por lo tanto: $-\dfrac{45}{60} = -\dfrac{45 \div 15}{60 \div 15} = -\dfrac{3}{4}$

SEGUNDA EXPERIENCIA

- Ya sabemos cómo se representan números enteros (positivos y negativos) y números fraccionarios positivos en la recta numérica. Ahora veamos cómo se representan números fraccionarios negativos:
- Representemos el número $-\dfrac{2}{5}$:
  - Marcamos en la reta un punto cualquiera y le asignamos el 0 (cero):
  - Graduamos la recta tomando un segmento $\overline{OA}$ de longitud μ, que se considera como unidad, y lo aplicamos sucesivas veces a la izquierda y a la derecha del punto 0; así:



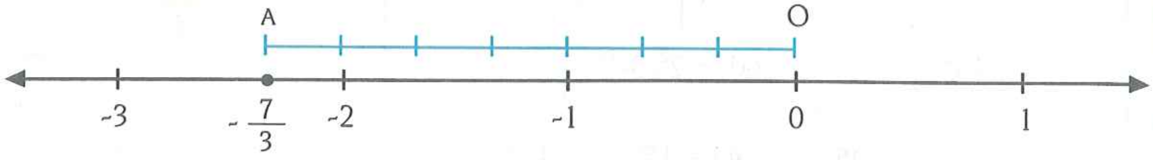
  - Como la fracción: $-\dfrac{2}{5}$ es propia, entonces se encuentra entre 0 y -1. Dividimos la unidad μ en 5 partes iguales y tomamos 2 de ellas en sentido negativo. El extremo A del segmento $\overline{OA}$ es el punto correspondiente al número $-\dfrac{2}{5}$.



- Ahora, representemos el número fraccionario $-\dfrac{7}{3}$.
  - Como es una fracción impropia, entonces la escribimos en forma de número mixto:

$$-\frac{7}{3} = -2\frac{1}{3} = -\left(2 + \frac{1}{3}\right) = -2 - \frac{1}{3}$$

- Esto significa que para representar a $-\frac{7}{3}$ primero marcamos sobre la recta numérica -2 y, luego, dividimos la tercera unidad a la izquierda en tres partes iguales y tomamos una de ella



TERCERA EXPERIENCIA

- Para comparar dos números fraccionarios tenemos en cuenta el siguiente criterio:

COMPARACIÓN DE NÚMEROS FRACCIONARIOS

Para comparar dos números fraccionarios los escribimos con el mismo denominador y comparamos los numeradores.

EJEMPLO 1

¿Quién es mayor $\frac{3}{8}$ ó $\frac{2}{6}$?

SOLUCIÓN:

- Primero escribimos las fracciones con el mismo denominador.
- El m.c.m (8,6) = 24. Por lo tanto:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{3}{8} = \frac{3 \times 3}{8 \times 3} = \frac{9}{24} \\ \\ \frac{2}{6} = \frac{2 \times 4}{6 \times 4} = \frac{8}{24} \end{array}\right\} \text{Como } 9 > 8 \text{ entonces } \frac{9}{24} > \frac{8}{24}$$

- Por lo tanto, $\frac{3}{8} > \frac{2}{6}$

EJEMPLO 2

¿Quién es mayor $-\frac{13}{5}$ ó $-\frac{12}{8}$?

SOLUCIÓN:

- El m.c. m (5 , 8) = 40

- Por lo tanto:

$$-\frac{13}{5} = -\frac{13 \times 8}{5 \times 8} = -\frac{104}{40}$$

$$-\frac{12}{8} = -\frac{12 \times 5}{8 \times 5} = -\frac{60}{40}$$

- Como, $-60 > -104$, entonces $-\frac{60}{40} > -\frac{104}{40}$

EJEMPLO 3

¿Quién es mayor $-\frac{4}{5}$ ó $\frac{2}{3}$?

SOLUCIÓN:

Entre dos números fraccionarios de distinto signo es mayor el positivo. Por lo tanto:

$$\frac{2}{3} > -\frac{4}{5}$$

¡ATENCIÓN!

Otra manera de comparar dos números fraccionarios consiste en ubicarlos en la recta numérica. Será mayor el que esté ubicado a la derecha del otro.

CUARTA EXPERIENCIA

- Las operaciones con números fraccionarios positivos y negativos se realizan teniendo en cuenta los siguientes criterios:

1. **Con relación a los signos se opera en la misma forma que con los números enteros.**
2. **La suma, resta, multiplicación y división se efectúa en la misma forma que se hace con números fraccionarios positivos.**
3. **Si en un mismo ejercicio aparecen las 4 operaciones debemos proceder así:**
    - **Si hay signos de agrupación, entonces efectuamos primero las operaciones dentro de los signos de agrupación, o si es posible, eliminamos primero los signos de agrupación.**
    - **Si no hay signos de agrupación, resolvemos primero las multiplicaciones y divisiones y, luego, las sumas y las restas.**

EJEMPLO 1

Resolvamos y simplifiquemos: $\left[\left(\frac{16}{3} - \frac{35}{8}\right)\left(-\frac{1}{12}\right)\right] + \left(-\frac{1}{2}\right)$

SOLUCIÓN:

- Como hay signos de agrupación, primero realizamos las operaciones indicadas dentro de ellos, empezando por los más internos:

$$\left[\left(\frac{16}{3} - \frac{35}{8}\right) \div \left(-\frac{1}{12}\right)\right] \underbrace{+\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

primero efectuamos esta resta

Y eliminamos este paréntesis

$$= \left[\left(\frac{128-105}{24}\right) \div \left(-\frac{1}{12}\right)\right] - \frac{1}{2}$$

$$= \left[\left(+\frac{23}{24}\right) \div \left(-\frac{1}{12}\right)\right] - \frac{1}{2}$$

Ahora resolvemos esta división

$$= \left[\left(+\frac{23}{24}\right) \bullet \left(-\frac{12}{1}\right)\right] - \frac{1}{2}$$

$$= \left[-\frac{23 \times \overset{1}{\cancel{12}}}{\underset{2}{\cancel{24}}}\right] - \frac{1}{2}$$

$$= \left[-\frac{23}{2}\right] - \frac{1}{2} = -\frac{23}{2} - \frac{1}{2} = \frac{-23-1}{2} = \frac{-24}{2} = -12$$

EJEMPLO 2

Resolvamos y simplifiquemos: $-8 \div \frac{4}{5} - 12 \div \frac{3}{4} + \frac{7}{12} \bullet \frac{-12}{7} \bullet \frac{3}{10}$

SOLUCIÓN:

- En ausencia de signos de agrupación, primero realizamos las multiplicaciones y divisiones y, luego, las sumas y las restas.
- Primero las multiplicaciones y divisiones:

$$-8 \div \frac{4}{5} = -8 \times \frac{5}{4} = -\frac{40}{4} = -10$$

$$12 \div \frac{3}{4} = 12 \times \frac{4}{3} = \frac{48}{3} = 16$$

$$\frac{7}{12} \bullet \frac{-12}{7} \bullet \frac{3}{10} = \frac{\overset{1}{\cancel{7}} \bullet (-\overset{-1}{\cancel{12}}) \bullet 3}{\underset{1}{\cancel{12}} \bullet \underset{1}{\cancel{7}} \bullet 10} = -\frac{3}{10}$$

- Ahora, realizamos las sumas y las restas:

$$-8 \div \frac{4}{5} - 12 \div \frac{3}{4} + \frac{7}{12} \bullet \frac{-12}{7} \bullet \frac{3}{10} = -10 - 16 + \left(-\frac{3}{10}\right)$$

$$= -26 - \frac{3}{10}$$

$$= \frac{-260 - 3}{10}$$

$$= -\frac{263}{10} = -26\,\frac{3}{10}$$

EJERCICIO 4-2

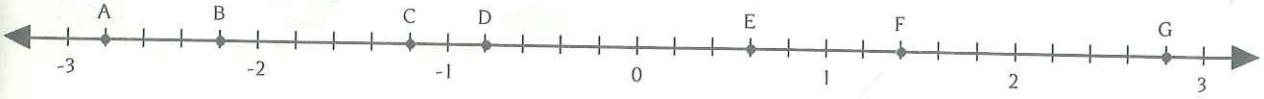
❶ Completa el siguiente cuadro:

FRACCIÓN	M.C.D. DEL NUMERADOR Y DEL DENOMINADOR	FRACCIÓN IRREDUCIBLE
$\frac{45}{75}$		
$-\frac{75}{105}$		
$\frac{54}{90}$		
$\frac{196}{144}$		
$-\frac{78}{108}$		

❷ Representa en la recta numérica los siguientes números fraccionarios:

a) $\frac{5}{9}$ b) $\frac{8}{3}$ c) $-\frac{3}{4}$ d) $-\frac{9}{5}$ e) $-\frac{7}{10}$ f) $-\frac{6}{3}$

❸ Escribe el número racional que corresponde a cada uno de los siguientes puntos de la recta:



❹ Escribe el signo ☐> o ☐< entre los siguientes pares de números fraccionarios:

a) $\frac{4}{5}$ ☐ $\frac{3}{7}$ b) $\frac{2}{7}$ ☐ $-\frac{5}{7}$ c) $-\frac{8}{9}$ ☐ $\frac{5}{6}$

d) $\frac{4}{7}$ ☐ $-\frac{2}{9}$ e) $-\frac{4}{7}$ ☐ $-\frac{2}{14}$ f) -7 ☐ $\frac{4}{5}$

⑤ Ordena de mayor a menor los siguientes números fraccionarios:

$$\frac{18}{25}, \ -\frac{3}{5}, \ \frac{1}{6}, \ -\frac{8}{3}, \ -\frac{1}{4}$$

⑥ Elimina los signos de agrupación, resuelve y simplifica:

a) $\frac{1}{5} - \left\{ - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) + \left[- \frac{2}{15} - \left(\frac{9}{20} - \frac{1}{5} \right) + 1 \right] \right\}$

b) $-\frac{2}{3} + \left(- \frac{1}{2} + \frac{4}{5} \right) - \left\{ - \left[- \left(- \frac{1}{2} - \frac{4}{7} + \frac{2}{5} \right) - \frac{6}{35} \right] - 1 \right\}$

⑦ a) De la suma de $\frac{2}{3}$ y $\frac{5}{12}$ restar $-\frac{5}{6}$

b) Restar $\frac{8}{5}$ de la suma de $\frac{5}{4}$ y $-\frac{3}{10}$

⑧ Calcula y simplifica:

a) $\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2} - 1 \right) \div \left(-3 - \frac{1}{4} \right) + \frac{2}{3} \bullet \left(- \frac{1}{2} \right) - 12 \div \left(- \frac{4}{5} \right) - \frac{77}{13}$

b) $\left[\left(-1 + \frac{5}{6} \right) \div \left(2 - \frac{13}{6} \right) + \frac{2}{3} \right] \bullet \left[1 + 3 \bullet \left(- \frac{2}{3} \right) \div \left(- \frac{4}{3} \right) \right]$

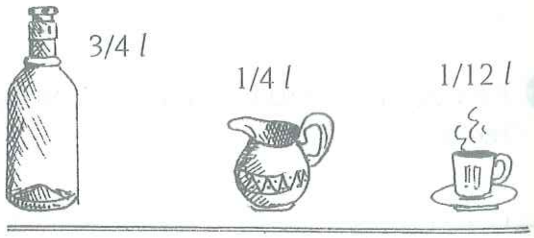
⑨ El número de estudiantes de un colegio disminuyó este año en $\frac{2}{11}$. El año pasado había 561. ¿Cuántos hay este año?

⑩ La carga máxima autorizada para un camión es de 12 toneladas. La policía de carretera lo sanciona por superar el máximo en $\frac{2}{7}$. ¿Cuál era el peso de la carga?

⑪ En una promoción, cobran sólo los $\frac{2}{3}$ de su precio.

a) Si el precio es $63.000, ¿cuánto rebajan?
b) Si pago $63.000, ¿cuánto costaba?

⑫ Disponemos de los tres recipientes siguientes:



Indica cómo podrían medirse: $\frac{1}{2} l$, $\frac{1}{6} l$, $\frac{1}{3} l$ y $\frac{5}{12} l$.

⑬ La distancia de un pueblo a otro es 10 km. Indica los kilómetros que nos quedan por recorrer:

a) Si ya hemos avanzado los $\frac{4}{5}$

b) Si ya hemos avanzado $\frac{4}{5}$ km.

⑭ Una hacienda tiene 8.500 hectáreas. Los $\frac{2}{5}$ son bosques y los $\frac{2}{7}$ del bosque es montañoso.

a) ¿Qué fracción de la hacienda representan los bosques montañosos?
b) ¿Cuántas hectareas ocupa el bosque plano?

⑮ Una bodega guarda 840 botellas de un lìquido, de las cuales $\frac{2}{5}$ son de $\frac{3}{4}$ litros, la tercera parte son de $\frac{18}{25}$ litros y el resto son de $\frac{3}{8}$ litros. Calcula los litros de líquido que guarda la bodega.

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 1

Tenía \$960.000. Con los $\frac{5}{12}$ de esta cantidad compré libros y con los $\frac{3}{8}$ de lo que me quedó compré ropa. ¿Cuánto me queda?.

4.3 NÚMEROS RACIONALES

PRIMERA EXPERIENCIA

$\frac{17.000}{7}$

- Tenemos los siguientes números racionales:

$\left\{\frac{3}{5}, \frac{18}{30}, \frac{12}{20}, \frac{9}{15}\cdots\right\}$ ....(1)

$\left\{-\frac{2}{7}, -\frac{10}{35}, -\frac{8}{28}, -\frac{6}{21}\cdots\right\}$ ....(2)

- Tomemos un elemento del conjunto (1) (por ejemplo, $\frac{9}{15}$) y uno del conjunto (2) (por ejemplo,$-\frac{6}{21}$) y sumémoslos:

$\frac{9}{15}+\left(-\frac{6}{21}\right)=\frac{63+(-30)}{105}=\frac{\overset{11}{\cancel{33}}}{\underset{35}{\cancel{105}}}=\boxed{\frac{11}{35}}$ ....Ⓐ

- Ahora tomemos otro elemento del conjunto (1) (por ejemplo, $\frac{18}{30}$) y otro elemento del conjunto (2) (por ejemplo $-\frac{10}{35}$) y sumémoslos:

$\frac{18}{30}+\left(-\frac{10}{35}\right)=\frac{126+(-60)}{210}=\frac{\overset{11}{\cancel{66}}}{\underset{35}{\cancel{210}}}=\boxed{\frac{11}{35}}$ ....Ⓑ

- Contesta:

a) ¿Coinciden los resultados Ⓐ y Ⓑ?.

b) ¿Al sumar los números racionales $\left\{\frac{3}{5}, \frac{18}{30}, \frac{12}{20}, \frac{9}{15}, \dots\right\}$ y $\left\{-\frac{2}{7}, -\frac{10}{35}, -\frac{8}{28}, -\frac{6}{21}, \dots\right\}$ podemos tomar cualquier elemento del primer conjunto y sumarlo con cualquier elemento del segundo conjunto? Explica.

c) Por comodidad, ¿cuál elemento de cada conjunto conviene tomar para sumar dos números racionales?.

- Explica:

a) ¿Cómo se restan dos números racionales? Usa los conjuntos (1) y (2) de esta experiencia.

b) ¿Cómo se multiplican dos números racionales? Usa los conjuntos (1) y (2) de esta misma experiencia.

c) ¿Cómo se dividen dos números racionales? Usa los conjuntos (1) y (2) de esta misma experiencia.

APRENDAMOS...

- Un **NÚMERO RACIONAL** es el conjunto formado por una fracción y por todas sus equivalentes. Por ejemplo, el número racional $\left\{\frac{3}{4}, \frac{6}{8}, \frac{9}{12}, \dots\right\}$ está formado por la fracción $\frac{3}{4}$ y todas sus fracciones equivalentes.

- Para representar un número racional usaremos la fracción irreducible del conjunto.

Por ejemplo, el número racional $\left\{\frac{3}{4}, \frac{6}{8}, \frac{9}{12}, \dots\right\}$ lo representaremos por $\left\{\frac{3}{4}\right\}$.

- Para identificar el conjunto de lo números racionales usaremos la letra Q; así:

$$Q = \left\{ \dots, \underbrace{\left\{-\frac{5}{3}, -\frac{10}{6}, -\frac{15}{9}, \dots\right\}}, \dots, \underbrace{\left\{-\frac{3}{1}, -\frac{6}{2}, -\frac{9}{3}, \dots\right\}}, \dots \underbrace{\left\{\frac{5}{1}, \frac{10}{2}, \frac{15}{3}, \dots\right\}}, \dots \right\}$$

$$Q = \left\{ \dots, \quad \left\{-\frac{5}{3}\right\} \quad, \dots, \quad \left\{-\frac{3}{1}\right\} \quad, \dots, \quad \left\{\frac{5}{1}\right\} \quad, \dots \right\}$$

- Descrito por comprensión, el conjunto de los números racionales queda así:

$$\mathbf{Q = \{ x/x = \frac{a}{b}\ , con\ a,b \in Z,\ b \neq 0 \}}$$

¡ATENCIÓN!

- No confundas **fracción** y **número racional.** Así, por ejemplo, $\frac{6}{7}$ es una fracción. En cambio si escribimos $\left\{\frac{6}{7}\right\}$ estamos indicando que se trata de la clase de fracciones equivalentes a la fracción $\frac{6}{7}$; es decir, se trata de un número racional.

- Cuando estudiamos los números enteros dijimos que todo número natural es un número entero; es decir, **N ⊂ Z.**

  Por lo anterior, cabe formular esta pregunta: ¿Qué relación existe entre los números enteros y los números racionales? Para contestar esta pregunta basta observar las siguientes fracciones equivalentes:

$$\frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{4}{4} \cdots = \textcircled{1}$$

$$\frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \frac{8}{4} \cdots = \textcircled{2}$$

$$-\frac{3}{1} = -\frac{6}{2} = -\frac{9}{3} = -\frac{12}{4} \cdots = \textcircled{-3}$$

$$-\frac{4}{1} = -\frac{8}{2} = -\frac{12}{3} = -\frac{16}{4} \cdots = \textcircled{-4}$$

$$\frac{0}{1} = \frac{0}{2} = \frac{0}{3} = \frac{0}{4} = \frac{0}{5} \cdots = \textcircled{0}$$

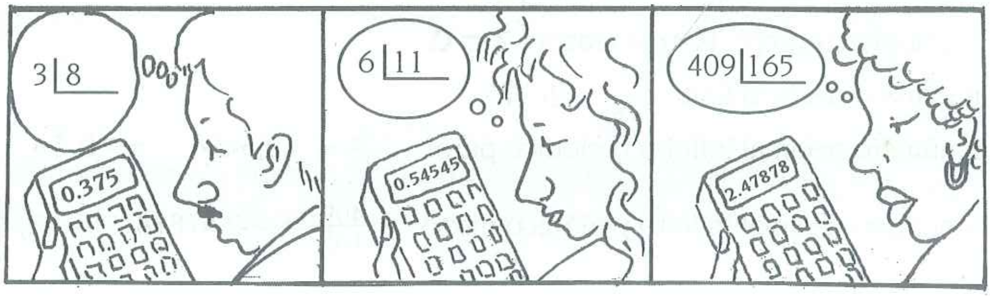
Estos son números enteros

Estas igualdades nos indican que a todo número entero le corresponde un conjunto de fracciones equivalentes. Por lo tanto, **todo número entero es un número racional** y podemos escribir que:

Z ⊂ Q

SEGUNDA EXPERIENCIA

- Cuando dividimos el numerador entre el denominador de una fracción racional, obtenemos ciertos números decimales con características especiales.
- Por ejemplo, Juan, Mariana y Sara utilizan la calculadora para hallar el cociente de dividir dos números enteros:



* Cuando Juan dividió **3** entre **8** obtuvo el número decimal **0,375**. Este es un **decimal finito** porque sus cifras decimales se terminan:

$$\frac{3}{8} = 0{,}375$$

* Cuando Mariana dividió **6** entre **11** obtuvo el número decimal **0,545454...** Este es un **decimal infinito periódico puro** porque las cifras decimales se repiten en bloques iguales empezando después de la coma. En este caso, el período es **54.** Para evitar la repetición del período 54, se acostumbra escribir el número, así:

$$0{,}\ 545454... = 0{,}\overset{\frown}{54}$$

* Cuando Sara dividió **409** entre **165** obtuvo el número decimal **2, 4787878...** Este es un **decimal infinito periódico mixto** porque las cifras del cociente se repiten en bloques iguales, pero no desde la coma.

- En síntesis: todo número racional es: o un **número entero** o un **número decimal finito** o un **número decimal finito periódico (puro o mixto).** Para pasar un número racional de la forma fraccionaria a la forma decimal basta dividir el numerador entre el deniminador.

EJEMPLO

$-\frac{5}{1} = -5$.. Todo número entero es racional

$\frac{3}{8} = 0{,}375$... Decimal finito

$-\frac{6}{11} = -0{,}5454... = -0\overset{\frown}{54}$ .... Decimal infinito periódico puro

$-\frac{409}{165} = -2{,}478787... = -2{,}4\overset{\frown}{78}$...................... Decimal infinito periódico mixto

APRENDAMOS...

- Todo **número racional** puede escribirse como el cociente de dos números enteros.
- Al dividir un número entero entre otro podemos obtener:
  - Otro número entero. Por esta razón, $\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$.
  - Un número decimal finito: $\frac{3}{8} = 0{,}375$
  - Un número decimal infinito periódico puro: $-\frac{6}{11} = -0{,}5454\ ... = -0{,}\ \overset{\frown}{54}$.
  - Un número decimal infinito periódico mixto: $-\frac{409}{165} = -2{,}47878\ ... = -2{,}\ 4\overset{\frown}{78}$

EJERCICIO 4-3

1 Escribe el representante de cada uno de los siguientes números racionales:

a) $\left\{ \frac{12}{28}, \frac{6}{14}, \frac{15}{35}, \frac{3}{7}, \frac{9}{21}, \frac{21}{49}, \dots \right\}$

b) $\left\{ ^-\frac{12}{15}, ^-\frac{8}{10}, ^-\frac{16}{20}, ^-\frac{28}{35}, ^-\frac{4}{5}, \dots \right\}$

c) $\left\{ \frac{14}{2}, \frac{21}{3}, \frac{28}{4}, \frac{35}{5}, \dots \right\}$

2 Completa:

a) Un número racional es el conjunto formado por __________________________.

b) Usualmente representaremos un número racional por la fracción ____________________ de un conjunto de fracciones equivalentes.

c) Usamos la letra Q para representar al conjunto de los números _______________.

3 Representa sobre la recta cada uno de los siguientes números racionales:

a) $\left\{ \frac{20}{36}, \frac{25}{45}, \frac{50}{90}, \frac{5}{9}, \frac{10}{18}, \dots \right\}$

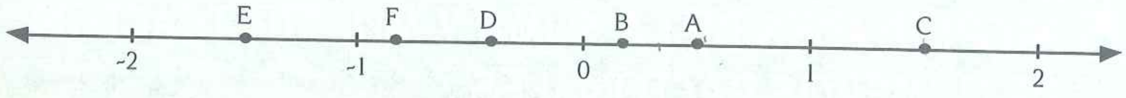
b) $\left\{ ^-\frac{30}{40}, ^-\frac{15}{20}, ^-\frac{3}{4}, ^-\frac{9}{12}, \dots \right\}$

c) $\left\{ \frac{27}{9}, \frac{18}{6}, \frac{12}{4}, \frac{6}{2}, \dots \right\}$

4 Escribe el número racional representado por cada una de las siguientes fracciones:

a) $^-\frac{2}{7}$ b) $^-\frac{4}{1}$ c) $^-\frac{1}{1}$ d) $\frac{9}{5}$

5 Escribe debajo de cada punto de la recta el número racional que corresponda:



6 Responde:

a) ¿Es $0 = \frac{0}{1}$?.

b) ¿Es 0 un número racional? Explica.

c) ¿Es todo número entero un número fraccionario? Explica.

d) ¿Es todo número fraccionario un número racional? Explica.

⑦ Hallar el número decimal correspondiente a los siguientes números racionales:

a) $-\frac{7}{25}$ b) $\frac{14}{33}$ c) $2\frac{8}{9}$ d) -24

e) $-\frac{7}{90}$ f) $\frac{130}{33}$ g) $3\frac{4}{4}$ h) $\frac{18}{25}$

⑧ Clasifica los anteriores números racionales en enteros, decimales finitos, decimales infinitos periódicos puros o decimales infinitos periódicos mixtos.

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 2

Tengo $9.000. Si presto los $\frac{3}{10}$ de esta cantidad, luego gasto una cantidad igual a los $\frac{4}{5}$ de lo que presté e invierto una cantidad igual a los $\frac{5}{9}$ de lo que gasté, ¿cuánto me quedará?.

4.4 SUMA, RESTA, MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN EN Q.

APRENDAMOS...

- Los procedimientos para sumar, restar, multiplicar y dividir números racionales son básicamente los mismos que para operar números fraccionarios.
- Naturalmente, al operar números racionales podemos escoger cualquier número fraccionario representante de la clase de equivalencia de los números racionales que vamos a operar; sin embargo, por comodidad, es preferible escoger la fracción irreducible.

4.5 PROPIEDADES DE LA SUMA Y MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS RACIONALES

PRIMERA EXPERIENCIA

- En cada uno de los siguientes ejercicios realiza las dos sumas propuestas y luego compara los resultados:

	Primera suma	**Segunda suma**
a)	$\left(-\frac{2}{5}\right)+\frac{2}{7}$	$\frac{2}{7}+\left(-\frac{2}{5}\right)$
b)	$\frac{9}{5}+\left[\frac{3}{2}+\left(-\frac{1}{7}\right)\right]$	$\left[\frac{9}{5}+\frac{3}{2}\right]+\left(-\frac{1}{7}\right)$
c)	$\left(-\frac{7}{3}\right)+\frac{0}{1}$	$\frac{0}{1}+\left(-\frac{7}{3}\right)$
d)	$\frac{4}{5}+\left(-\frac{4}{5}\right)$	$\left(-\frac{4}{5}\right)+\frac{4}{5}$

- Los ejercicios anteriores te han servido para comprobar que la suma de números racionales cumple las propiedades que describimos a continuación:

PROPIEDADES DE LA SUMA EN Q.

1. **CLAUSURATIVA:** La suma de dos números racionales es otro número racional; es decir:

$$\textbf{Si } \frac{a}{b} \textbf{ y } \frac{c}{d} \in Q \textbf{ entonces } \frac{a}{b}+\frac{c}{d} \in Q$$

2. **CONMUTATIVA:** Al sumar dos números racionales no importa el orden en que lo hagamos; es decir:

$$\textbf{Si } \frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in Q \textbf{ entonces } \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}$$

3. **ASOCIATIVA:** Al sumar tres o más números racionales podemos hacerlo agrupándolos de a dos en cualquier orden; es decir:

$$\textbf{Si } \frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \in Q \textbf{ entonces } \frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)=\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{e}{f}$$

4. **EXISTENCIA DEL ELEMENTO NEUTRO:** El número racional $\frac{0}{1}$ es el elemento neutro de la suma de números racionales ya que:

$$\frac{a}{b}+\frac{0}{1}=\frac{0}{1}+\frac{a}{b}=\frac{a}{b}$$

5. **EXISTENCIA DEL INVERSO ADITIVO:** Todo número racional $\frac{a}{b}$ posee un inverso aditivo $\left(-\frac{a}{b}\right)$ tal que:

$$\frac{a}{b}+\left(-\frac{a}{b}\right)=\left(-\frac{a}{b}\right)+\frac{a}{b}=\frac{0}{b}=0$$

- Como ves, las propiedades de la suma de números racionales son las mismas de la suma de números enteros.

SEGUNDA EXPERIENCIA

- En cada uno de los siguientes ejercicios realiza las dos multiplicaciones propuestas y luego compara los resultados.

	Primera multiplicación	**Segunda multiplicación**
a)	$\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot\frac{2}{7}$	$\frac{2}{7}\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)$
b)	$\frac{9}{5}\cdot\left[\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)\right]$	$\left[\frac{9}{5}\cdot\frac{3}{2}\right]\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)$
c)	$\left(-\frac{7}{3}\right)\cdot\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}\cdot\left(-\frac{7}{3}\right)$
d)	$\left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\left(-\frac{5}{4}\right)$	$\left(-\frac{5}{4}\right)\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)$

- ¿Qué propiedad de la multiplicación estamos aplicando en el ejercicio **a)**? ¿Y en el ejercicio **b)**? ¿Y en el **c)**? ¿Y en el **d)**?
- Fíjate bien: en el ejercicio d) los números $\left(-\frac{4}{5}\right)$ y $\left(-\frac{5}{4}\right)$ tienen el mismo signo pero sus numeradores y denominadores aparecen INVERTIDOS; además:

$$\left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\left(-\frac{5}{4}\right) = +\frac{4\cdot 5}{5\cdot 4}$$

$$= +\frac{20}{20}$$

$$= +1$$

Los números $\left(-\frac{4}{5}\right)$ y $\left(-\frac{5}{4}\right)$ son **INVERSOS MULTIPLICATIVOS** o **RECÍPROCOS** ya que su producto es igual a **1**.

- El siguiente cuadro nos resume las propiedades de la multiplicación de números racionales.

PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACIÓN EN Q.

1. CLAUSURATIVA: La multiplicación de dos números racionales es otro número racional; es decir:

$$\textbf{Si } \frac{a}{b} \textbf{ y } \frac{c}{d} \in Q \quad \textbf{entonces} \quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} \in Q$$

2. **CONMUTATIVA:** Al multiplicar dos números racionales no importa el orden en que lo hagamos; es decir:

$$\text{Si } \frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q} \text{ entonces } \frac{a}{b} \bullet \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \bullet \frac{a}{b}$$

3. **ASOCIATIVA:** Al multiplicar tres o más números racionales podemos hacerlo agrupándolos de a dos en cualquier orden; es decir:

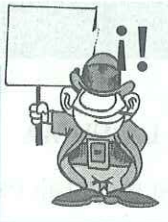
$$\text{Si } \frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \in \mathbb{Q} \text{ entonces } \frac{a}{b} \bullet \left(\frac{c}{d} \bullet \frac{e}{f} \right) = \left(\frac{a}{b} \bullet \frac{c}{d} \right) \bullet \frac{e}{f}$$

4. **EXISTENCIA DEL ELEMENTO NEUTRO:** El número racional $\frac{1}{1} = 1$ es el elemento neutro de la multiplicación de números racionales ya que:

$$\frac{a}{b} \bullet \frac{1}{1} = \frac{1}{1} \bullet \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$$

5. **EXISTENCIA DEL INVERSO MULTIPLICATIVO:** Todo número racional $\frac{a}{b}$, excepto el $\frac{0}{1}$, posee un inverso multiplicativo $\frac{b}{a}$ tal que:

$$\frac{a}{b} \bullet \frac{b}{a} = \frac{b}{a} \bullet \frac{a}{b} = \frac{1}{1}$$



¡ATENCIÓN!

El número racional $\frac{0}{1}$ (o sea, el 0) no posee inverso multiplicativo ya que la expresión $\frac{1}{0}$ **NO** es un número (no se puede dividir por cero).

- Halla el inverso aditivo y el inverso multiplicativo de los siguientes números racionales:

a) $+\frac{2}{3}$ b) $-\frac{4}{5}$ c) -7

d) $+9$ e) 0 f) -1

TERCERA EXPERIENCIA

- Completa en tu cuaderno el siguiente cuadro:

$\frac{a}{b}$	$\frac{c}{d}$	$\frac{e}{f}$	$\frac{c}{d}+\frac{e}{f}$	$\frac{a}{b}\bullet\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)$	$\frac{a}{b}\bullet\frac{c}{d}$	$\frac{a}{b}\bullet\frac{e}{f}$	$\frac{a}{b}\bullet\frac{c}{d}+\frac{a}{b}\bullet\frac{e}{f}$
$\frac{2}{5}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{4}{9}$					
$\frac{5}{7}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{8}{9}$					
-5	$\frac{4}{7}$	$-\frac{2}{3}$					
$\frac{4}{9}$	$-\frac{3}{8}$	-3					
-2	$+4$	$-\frac{3}{16}$					

- Compara los resultados de las dos columnas que aparecen sombreadas.
- ¿Se cumple que $\frac{a}{b}\bullet\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)=\frac{a}{b}\bullet\frac{c}{d}+\frac{a}{b}\bullet\frac{e}{f}$ para los valores que hemos tomado?
- Observa que hemos "distribuido" o "repartido" el factor $\frac{a}{b}$ entre los sumandos $\frac{c}{d}$ y $\frac{e}{f}$.

Por esta razón, esta propiedad se llama **DISTRIBUTIVA DE LA MULTIPLICACIÓN RESPECTO A LA SUMA.**

APRENDAMOS...

PROPIEDAD DISTRIBUTIVA DE LA MULTIPLICACIÓN RESPECTO A LA SUMA

La multiplicación en Q es distributiva respecto a la suma (también respecto a la resta); es decir:

$$\frac{a}{b}\bullet\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)=\frac{a}{b}\bullet\frac{c}{d}+\frac{a}{b}\bullet\frac{e}{f}$$

EJERCICIO 4-4

① Explica cómo se suman los números racionales:

$$\left\{\frac{1}{5},\frac{7}{35},\frac{10}{50},\frac{2}{10},\dots\right\}\text{ y }\left\{\frac{8}{3},\frac{40}{15},\frac{16}{6},\frac{32}{12},\dots\right\}$$

② Contesta:

a) ¿Cumple la suma de números racionales la propiedad clausurativa? Explica.

b) ¿Cumple la suma de números racionales la propiedad conmutativa? Explica.

c) ¿Cumple la suma de números racionales la propiedad asociativa? Explica.
d) ¿Existe un elemento neutro para la suma de números racionales? ¿Cuál es?
e) ¿Posee cada número racional un inverso aditivo? Explica.

3 Sabiendo que para restar dos números racionales al minuendo le sumamos el inverso aditivo del sustraendo; así: $\frac{3}{5} - \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{3}{5} + \frac{2}{3} = \frac{9+10}{15} = \frac{19}{15}$. Resuelve:

a) $\frac{3}{4} - \frac{2}{3}$ b) $\frac{8}{5} - \left(-\frac{1}{4}\right)$ c) $\left(-\frac{3}{7}\right) - \left(-\frac{15}{14}\right)$ d) $(-5) - \frac{8}{9}$

4 Teniendo en cuenta el proceso para multiplicar números racionales, resuelve y simplifica si es posible:

a) $\left(-\frac{2}{5}\right) \cdot \left(-\frac{5}{2}\right)$ b) $\frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$ c) $\frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{5}{8}\right) \cdot \left(-\frac{4}{9}\right)$

d) $4 \cdot \left(-\frac{9}{4}\right) \cdot \left(\frac{2}{45}\right)$ e) $\left(-\frac{9}{15}\right) \cdot \left(-\frac{11}{27}\right) \cdot \left(-\frac{3}{22}\right)$ f) $12 \cdot (-4) \cdot \left(-\frac{15}{16}\right) \cdot \frac{4}{9}$

5 Responde:

a) ¿Cumple la multiplicación de números racionales la propiedad clausurativa? Explica.
b) ¿Cumple la multiplicación de números racionales la propiedad conmutativa? Explica.
c) ¿Cumple la multiplicación de números racionales la propiedad asociativa? Explica.
d) ¿Existe en los números racionales un elemento neutro para la multiplicación? ¿Cuál es?
e) ¿Posee todo número racional un inverso multiplicativo? ¿Cuál es la excepción? ¿Por qué?

6 Responde:

a) ¿Cuál es el inverso multiplicativo de $\frac{3}{5}$? ¿Por qué?.
b) ¿Cuál es el inverso multiplicativo de $-\frac{2}{7}$? ¿Por qué?.
c) ¿Cómo se dividen dos números racionales? Explica.
d) ¿Cuál es el signo del cociente de dividir dos números racionales de igual signo? ¿Y de distinto signo? Explica con ejemplos.

7 Halla los siguientes cocientes y simplifica si es posible:

a) $\left(-\frac{3}{8}\right) \div \left(-\frac{9}{4}\right)$ b) $\frac{13}{14} \div \left(-\frac{26}{7}\right)$ c) $\left(-\frac{30}{8}\right) \div \frac{6}{15}$

d) $18 \div \left(-\frac{15}{9}\right)$ e) $\left(-\frac{44}{5}\right) \div (-4)$ f) $(-15) \div \left(\frac{45}{36}\right)$

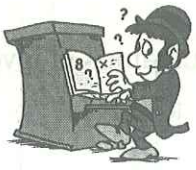
8 a) Explica como hallar el resultado de $\frac{2}{5} \cdot \left(\frac{3}{2} + \frac{2}{3}\right)$

b) Calcula $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{2} + \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3}$.

c) ¿Es $\frac{2}{5} \cdot \left(\frac{3}{2} + \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{2} + \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3}$? ¿Por qué?.

d) ¿Es la multiplicación de números racionales distributiva respecto a la suma? Explica.

e) Aplica la propiedad distributiva para comprobar cada una de las siguientes igualdades: $\frac{4}{3} \cdot \left(\frac{4}{5} + \frac{3}{2}\right) = \frac{46}{15}$; $\frac{5}{6} \cdot \left(\frac{1}{5} + \frac{3}{10}\right) = \frac{5}{12}$; $\frac{6}{7} \cdot \left(\frac{4}{5} - \frac{7}{9}\right) = \frac{2}{105}$



DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 3

¿Qué hora es cuando el reloj señala los $\frac{5}{4}$ de $\frac{1}{2}$ del triple de las 8 a.m.?.

4.6 POTENCIACIÓN EN Q CUANDO EL EXPONENTE ES UN NÚMERO NATURAL

- Comenzaremos esta sección afirmando que si **b** es un número racional y **n** es un número entero positivo, entonces la definición de $\mathbf{b^n}$ es exactamente la misma que ya conocemos; es decir: $\mathbf{b^n} = \underbrace{\mathbf{b \bullet b \bullet b \ldots b}}_{\mathbf{n\ veces}}$, donde **b** se denomina BASE y **n** es el exponente.

Ejemplo:

$$\left(+\frac{2}{3}\right)^4 = \left(+\frac{2}{3}\right) \bullet \left(+\frac{2}{3}\right) \bullet \left(+\frac{2}{3}\right) \bullet \left(+\frac{2}{3}\right)$$

$$\left(-\frac{3}{5}\right)^3 = \left(-\frac{3}{5}\right) \bullet \left(-\frac{3}{5}\right) \bullet \left(-\frac{3}{5}\right)$$

- Igualmente, siguen cumpliéndose las leyes de los exponentes y de los signos que ya estudiamos anteriormente en la potenciación en Z. Vamos a recordarlas:

LEYES DE LOS EXPONENTES

Si **a** y **b** son números racionales **(a, b ∈ Q)**, **b ≠ 0**, y **m** y **n** son números naturales **(m, n ∈ N)** entonces:

1. **Producto de Potencias de la Misma Base:** $\mathbf{a^m \bullet a^n = a^{m+n}}$: escribimos la misma base y sumamos los exponentes.
2. **División de Potencias de la Misma Base:** $\mathbf{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$: escribimos la misma base y restamos los exponentes.
3. **Potencia de una Potencia:** $\mathbf{(a^m)^n = a^{m \cdot n}}$: escribimos la misma base y multiplicamos los exponentes.
4. **Potencia de exponente 0: Si a ≠ 0 entonces $\mathbf{a^0 = 1}$**; es decir, todo número racional, diferente de cero, elevado al exponente 0 es igual a 1.

5. **Potencia de un Producto: $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$**: para elevar un producto a un exponente, elevamos cada factor al exponente. Esta propiedad significa que la potenciación es distributiva respecto al producto.

6. **Potencia de un Cociente: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$** para elevar un cociente a un exponente, elevamos tanto el numerador como el denominador al exponente. Esta propiedad significa que la potenciación es distributiva con respecto a la división.

7. **La Potenciación No es Distributiva con Respecto a la Suma y a la Resta; es decir: $(a+b)^n \neq a^n + b^n$ y $(a-b)^n \neq a^n - b^n$**

Ejemplo 1:

Calculemos las siguientes potencias:

a) $\left(+\frac{2}{3}\right)^2$ b) $\left(-\frac{4}{5}\right)^3$ c) $\left(-\frac{2}{7}\right)^2$ d) $\left(+\frac{1}{3}\right)^4$ e) $\left(-\frac{4}{5}\right)^0$

Solución:

a) $\left(+\frac{2}{3}\right)^2 = \left(+\frac{2}{3}\right) \cdot \left(+\frac{2}{3}\right) = +\frac{4}{9}$

b) $\left(-\frac{4}{5}\right)^3 = \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{64}{125}$

c) $\left(-\frac{2}{7}\right)^2 = \left(-\frac{2}{7}\right) \cdot \left(-\frac{2}{7}\right) = \frac{4}{49}$

d) $\left(+\frac{1}{3}\right)^4 = \left(+\frac{1}{3}\right) \cdot \left(+\frac{1}{3}\right) \cdot \left(+\frac{1}{3}\right) \cdot \left(+\frac{1}{3}\right) = +\frac{1}{81}$

e) $\left(-\frac{4}{5}\right)^0 = 1$

Si analizamos los signos de los resultados anteriores podemos afirmar que:

LEYES DE LOS SIGNOS PARA LA POTENCIACIÓN

1. Cuando un número racional **POSITIVO** o **NEGATIVO** lo elevamos a un número natural PAR el resultado es un número racional **POSITIVO.**
2. Cuando un número racional **POSITIVO** lo elevamos a un número natural **IMPAR** el resultado es un número racional **POSITIVO.**
3. Cuando un número racional **NEGATIVO** lo elevamos a un número natural **IMPAR** el resultado es un número racional **NEGATIVO.**

Ejemplo 2:

Simplifiquemos y hallemos el resultado:

a) $\left(-\frac{3}{5}\right)^3 \bullet \left(-\frac{3}{5}\right)^2$ b) $\left(-\frac{2}{3}\right)^5 \div \left(-\frac{2}{3}\right)^2$

c) $\left[\left(-\frac{1}{5}\right)^5 \bullet \left(-\frac{1}{5}\right)^2\right] \div \left[\left(-\frac{1}{5}\right) \bullet \left(-\frac{1}{5}\right)^4\right]$ d) $\left[\left(-\frac{2}{3}\right)^2\right]^3$

Solución

a) Tenemos un producto de potencias de la misma base. Por lo tanto:

$$\left(-\frac{3}{5}\right)^3 \bullet \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = \left(-\frac{3}{5}\right)^{3+2} = \left(-\frac{3}{5}\right)^5$$

Como nos quedó un número fraccionario negativo elevado a un exponente impar, entonces obtendremos otro número fraccionario negativo cuyo numerador y denominador se obtienen elevando el numerador y denominador dados al exponente 5; es decir, aplicamos la propiedad distributiva de la potenciación con respecto a la división; así:

$$\left(-\frac{3}{5}\right)^5 = -\frac{3^5}{5^5} = -\frac{243}{3.125}$$

b) Tenemos una división de potencias de la misma base. Por lo tanto:

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^5 \div \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \left(-\frac{2}{3}\right)^{5-2} = \left(-\frac{2}{3}\right)^3$$

De nuevo nos quedó un número fraccionario negativo elevado a un exponente impar; por lo tanto:

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^3 = -\frac{2^3}{3^3} = -\frac{8}{27}$$

c) En este ejercicio tenemos producto y división de potencias de la misma base. Realizamos primero los productos de potencias de la misma base; así:

$$\left[\left(-\frac{1}{5}\right)^5 \bullet \left(-\frac{1}{5}\right)^2\right] \div \left[\left(-\frac{1}{5}\right) \bullet \left(-\frac{1}{5}\right)^4\right] = \left[\left(-\frac{1}{5}\right)^{5+2}\right] \div \left[\left(-\frac{1}{5}\right)^{1+4}\right]$$

$$= \left[\left(-\frac{1}{5}\right)^7\right] \div \left[\left(-\frac{1}{5}\right)^5\right]$$

Ahora realizamos la división de potencias de la misma base:

$$= \left(-\frac{1}{5}\right)^{7-5} = \left(-\frac{1}{5}\right)^2$$

Finalmente, nos quedó un número fraccionario negativo elevado a un exponente par:

$$= +\frac{1^2}{5^2} = +\frac{1}{25}$$

d) Tenemos una potencia de potencia. Por lo tanto:

$$\left[\left(-\frac{2}{3}\right)^2\right]^3 = \left(-\frac{2}{3}\right)^{2\bullet 3} = \left(-\frac{2}{3}\right)^6$$

Y como nos quedó un número fraccionario negativo elevado a un exponente par, entonces:

$$\left[\left(-\frac{2}{3}\right)^2\right]^3 = + \frac{2^6}{3^6} = + \frac{64}{729}$$

Ejemplo 3:

Simplifiquemos y hallemos el resultado:

$$\left(-1 + \frac{3}{2}\right)^4 \div \left[\left(-2 + \frac{3}{4}\right)^3 \div \left(-\frac{5}{2}\right)^3\right] - \left(-1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{6}\right)^2$$

Solución

- En este ejercicio aparecen combinadas la suma, la resta, la multiplicación, la división y la potenciación e incluye signos de agrupación.
- Para resolver esta clase de ejercicios trabajamos en este orden:
  - Primero desarrollamos las operaciones incluidas dentro de los signos de agrupación (paréntesis, en este caso).
  - A continuación, efectuamos los ejercicios de potenciación.
  - Luego, realizamos las operaciones de multiplicación y división.
  - Y, finalmente, las operaciones de suma y resta.
- Explica cada paso que vamos realizando:

$$= \left(-1 + \frac{3}{2}\right)^4 \div \left[\left(-2 + \frac{3}{4}\right)^3 \div \left(-\frac{5}{2}\right)^3\right] - \left(-1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{6}\right)^2$$

$$= \left(\frac{-2+3}{2}\right)^4 \div \left[\left(\frac{-8+3}{4}\right)^3 \div \left(-\frac{5}{2}\right)^3\right] - \left(\frac{-6+4-1}{6}\right)^2$$

$$= \left(+\frac{1}{2}\right)^4 \div \left[\left(-\frac{5}{4}\right)^3 \div \left(-\frac{5}{2}\right)^3\right] - \left(-\frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{2}{\cancel{6}}}\right)^2$$

$$= \left(+\frac{1}{16}\right) \div \left[\left(-\frac{125}{64}\right)^3 \div \left(-\frac{125}{8}\right)^3\right] - \left(+\frac{1}{4}\right)^2$$

$$= \left(+\frac{1}{16}\right) \div \left[\left(-\frac{125}{64}\right) \cdot \left(-\frac{8}{125}\right)\right] - \left(+\frac{1}{4}\right)$$

$$= \left(+\frac{1}{16}\right) \div \left[\left(+\frac{\overset{1}{\cancel{125}} \cdot \overset{1}{\cancel{8}}}{\underset{8}{\cancel{64}} \cdot \underset{1}{\cancel{125}}}\right)\right] - \left(+\frac{1}{4}\right)$$

$$= \left(+\frac{1}{16}\right) \div \left[\left(+\frac{1}{8}\right)\right] - \left(+\frac{1}{4}\right)$$

$$= \left(+\frac{1}{16}\right) \cdot \left(+\frac{8}{1}\right) - \left(+\frac{1}{4}\right)$$

$$= \left(+\frac{\overset{1}{\cancel{8}}}{\underset{2}{\cancel{16}}}\right) - \left(+\frac{1}{4}\right) = \left(+\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{(+2) + (-1)}{4} = +\frac{1}{4}$$

EJERCICIO 4-5

1 Contesta:

a) ¿Cómo se define $\mathbf{a^n}$ cuando $\mathbf{a \in Q}$ y $\mathbf{n \in N}$?.

b) ¿Es positivo o negativo el resultado de a^n cuando a es un número racional negativo y n es un número par?.

c) ¿Es positivo o negativo el resultado de a^n cuando a es un número racional negativo y n es un número impar?.

d) ¿Es distributiva la potenciación con respecto a la multiplicación de números racionales ? ¿Y a la división?.

e) ¿Es distributiva la potenciación con respecto a la suma de números racionales? ¿Y a la resta? Explica con un ejemplo.

2 Completa:

a) Un producto de potencias de la misma base se simplifica ______________.

b) Una división de potencias de la misma base se simplifica ______________.

c) Una potencia de potencia se simplifica __________________________.

d) Una potencia de un producto es igual a __________________________.

e) Una potencia de un cociente es igual a __________________________.

f) Todo número racional, diferente de 0, elevado al exponente 0 es igual a __________.

3 Simplifica y halla el resultado:

a) $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^5$ b) $\left(+\frac{2}{3}\right)^2 \bullet \left(+\frac{2}{3}\right)$ c) $\left(-\frac{2}{3}\right)^5 \div \left(-\frac{2}{3}\right)^3$

d) $\left(-\frac{1}{2}\right)^7 \div \left(-\frac{1}{2}\right)^4$ e) $\left[\left(-\frac{2}{3}\right)^2\right]^3$ f) $\left[\left(+\frac{1}{4}\right)^2\right]^4$

4 Realiza las operaciones indicadas, simplifica cuando sea posible y halla el resultado:

a) $\left[\left(-\frac{2}{3}\right)^4 \bullet \left(-\frac{2}{3}\right)^2 \div \left(-\frac{2}{3}\right)^4\right]^3$ b) $\left[\left(+\frac{4}{5}\right)^5 \div \left(+\frac{4}{5}\right)^3 \bullet \left(+\frac{4}{5}\right)\right]^2$

c) $\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right]^3 \bullet \left[\left(-\frac{1}{2}\right)^4\right]^2 \div \left[\left(-\frac{1}{2}\right)^3\right]^4$

d) $\left(-\frac{2}{3}\right)^3 \bullet \left(-\frac{3}{4}\right)^3 + \left(-2-\frac{1}{2}+\frac{5}{4}\right)^2 \div \left(-\frac{5}{4}\right)^3 + \left(+\frac{27}{40}\right)$

e) $\left\{\left[\left(3-\frac{1}{2}\right) \bullet \left(-\frac{3}{5}+1\right) + \left(+\frac{1}{2}\right)^2\right] \div \left(-1+\frac{2}{3}\right)^2\right\} \bullet \left(-2+\frac{5}{3}\right)^2$

f) $\left\{\left[\left(-\frac{1}{5}+\frac{5}{4}+\frac{3}{10}\right) \bullet \left(+\frac{2}{3}\right)^3 + \frac{1}{5}\right] \div \left[\left(-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)^2 \bullet \left(-\frac{3}{5}+3\right)^2 + \frac{3}{5}\right]\right\} - \frac{17}{10}$

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 4

Hallar dos números cuya diferencia es 18 y cuya suma es el triple de su diferencia. (Este problema puede hacerse por lógica o por medio de una ecuación).

TALLER DE REPASO DE LA UNIDAD 4

1. FALSO o VERDADERO:

Contesta FALSO o VERDADERO a cada una de las siguientes proposiciones. Justifica cada una de las respuestas.

a) Para indicar una temperatura de $8\frac{3}{4}$ °C bajo cero escribimos $-8\frac{3}{4}$ °C.

b) Al operar números fraccionarios positivos y negativos procedemos en la misma forma que con los números enteros en cuanto a los signos y en la misma forma que con las fracciones en cuanto a las operaciones.

c) Es lo mismo la fracción $-\frac{3}{5}$ que el número racional $-\frac{3}{5}$.

d) Los números decimales infinitos periódicos puros son números racionales.

e $\frac{5}{4}$

e) La fracción $-\frac{12}{3}$ es impropia.

f) Para comparar dos números racionales escogemos un representante de cada uno, lo escribimos con el mismo numerador y comparamos sus denominadores.

g) Todo número entero es número racional.

h) El número $-83{,}2456262...$ es un número racional.

i) El inverso multiplicativo de $-\frac{4}{5}$ es $\frac{5}{4}$.

j) El inverso multiplicativo de 0 no existe.

k) Para todo $x \in Q$ se cumple que $x^0 = 1$.

l) Si $a \in Q$ y $m,n \in Z^+$ entonces $a^m + a^n = a^{m+n}$

m) $\left| -\frac{8}{3} \right| = -\left(-\frac{8}{3}\right)$

2. Contesta:

a) ¿Con qué número representamos el número racional $\left\{ \frac{4}{3}, \frac{20}{5}, \frac{28}{21}, \frac{32}{24}, ... \right\}$

b) ¿Cómo se opera con números racionales?

c) ¿Cuándo una fracción es propia? ¿Cuándo es impropia?

d) ¿Cuándo dos fracciones son equivalentes? Escribe dos ejemplos.

e) ¿Cómo se representa en la recta numérica el número $-\frac{17}{5}$?

f) ¿Cuáles son el inverso aditivo y el inverso multiplicativo de $-\frac{3}{8}$?

g) ¿Todos los números racionales tienen inverso aditivo? ¿El inverso multiplicativo? Argumenta tu respuesta.

3. Escribe en forma de mixto las siguientes fracciones impropias:

a) $\frac{29}{5}$ b) $-\frac{17}{2}$ c) $\frac{35}{16}$ d) $-\frac{43}{28}$

4. Escribe la fracción impropia correspondiente a los siguientes mixtos:

a) $6\frac{2}{3}$ b) $-4\frac{7}{9}$ c) $9\frac{3}{7}$ d) $-7\frac{2}{5}$

5. Representa en la recta numérica los números racionales mixtos del ejercicio anterior.

6. Escribe tres fracciones equivalentes a cada una de las siguientes fracciones:

a) $\frac{9}{13}$ b) $\frac{6}{12}$ c) $-\frac{6}{11}$ d) $\frac{15}{4}$ e) $-\frac{45}{60}$

7. Escribe el número que falta para que las fracciones sean equivalentes:

a) $\frac{7}{9}=\frac{28}{\square}$ b) $\frac{9}{\square}=\frac{36}{20}$ c) $-\frac{18}{45}=-\frac{\square}{15}$ d) $\frac{\square}{5}=\frac{15}{75}$

8. Simplifica las siguientes fracciones:

a) $\frac{56}{63}$ b) $-\frac{48}{60}$ c) $\frac{126}{90}$ d) $-\frac{195}{165}$

9. Indica cuáles de las siguientes fracciones son irreducibles:

a) $\frac{7}{15}$ b) $\frac{46}{23}$ c) $\frac{17}{23}$ d) $-\frac{9}{4}$ e) $\frac{6}{49}$ f) $-\frac{84}{75}$

10. Escribe el signo > o < entre los siguientes pares de números racionales:

a) $\frac{5}{4}\ \square\ \frac{3}{7}$ b) $-\frac{2}{7}\ \square\ -\frac{5}{7}$ c) $\frac{8}{9}\ \square\ \frac{5}{6}$ d) $-8\ \square\ \frac{5}{3}$

11. Reduce al mínimo común denominador (m.c.d.) cada grupo de números racionales y ordénalos de mayor a menor:

a) $\frac{7}{2}$; $-\frac{3}{8}$; $\frac{7}{48}$ b) $-\frac{3}{4}$; $\frac{1}{16}$; $\frac{11}{32}$, $-\frac{1}{64}$ c) $\frac{2}{3}$; $\frac{7}{8}$; $\frac{1}{6}$

12. Responde falso o verdadero a cada una de las siguientes proposiciones. Justifica las respuestas.

a) En una fracción impropia el numerador es menor que el denominador.

b) Es lo mismo $-\frac{3}{5}$ que $\frac{-3}{5}$.

c) Es lo mismo $-\frac{3}{5}$ que $\frac{-3}{-5}$.

d) Es lo mismo $3\frac{4}{5}$ que $3 \times \frac{4}{5}$.

e) Es lo mismo una fracción que un número racional.

f) $Z \subset Q$.

g) El inverso multiplicativo de $\frac{0}{1}$ es $\frac{1}{0}$.

h) Todos los números racionales tienen inverso multiplicativo.

i) Todos los números racionales tienen inverso aditivo.

j) La resta y la división de números racionales cumplen la propiedad clausurativa.

13. Resuelve y simplifica los siguientes ejercicios

a) $-\frac{4}{9}-\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)-\left[\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{3}+\frac{5}{9}\right)-\left(-3\frac{5}{2}\right)-\frac{1}{2}\right]$

b) $\left(-\frac{5}{6}+\frac{3}{4}+1\right)\bullet(-3)+2-4\bullet\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\right)$

c) $\left[\left(-1-\frac{4}{5}+2\right)\bullet\left(+3+\frac{4}{5}-2\right)-\frac{11}{5}-2\bullet\left(-3+\frac{19}{7}\right)\right]+\frac{97}{175}$

d) $\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}-1\right)\div\left(-3\frac{1}{4}\right)+\frac{2}{3}\bullet\left(-\frac{1}{2}\right)-12\div\left(-\frac{4}{5}\right)-\frac{77}{13}$

e) $\left(-1-\frac{1}{7}+\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\right)\div\left(-\frac{2}{49}\right)+\frac{1}{4}-2\bullet\left(+\frac{3}{4}\right)+\left(-\frac{2}{13}\right)\div\left(-\frac{8}{39}\right)$

f) $\left[\left(-1+\frac{5}{6}\right)\div\left(2-\frac{13}{6}\right)+\frac{2}{3}\right]\bullet\left[-1+3\bullet\left(-\frac{2}{3}\right)\div\left(-\frac{4}{3}\right)\right]$

g) $$\frac{\left(\frac{1}{4}+1\right)\bullet\frac{12}{5}+\frac{1}{3}\left[(-5)\bullet 2-4\right]}{(+9)\bullet(5)+\left(-\frac{3}{2}\right)\bullet(-2)^4-9\bullet\left(-\frac{1}{2^2}\right)\bullet\left(-\frac{2^3}{9}\right)+1}$$

n^8

14. A veces, para expresar la división de dos números racionales, en lugar de escribir $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}$ escribimos $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$. Calcula:

a) $\frac{-\frac{11}{2}}{\frac{3}{4}}$

b) $\frac{\frac{7}{5}+\left(-\frac{3}{8}\right)}{\frac{8}{6}-\frac{1}{4}}$

c) $\frac{\frac{3}{7}}{\frac{2}{3}}-\frac{4}{5}$

d) $\frac{-8}{-\frac{3}{2}}$

15. ¿Cuánto es los $\frac{3}{4}$ de los $\frac{2}{3}$ de 120?.

16. ¿Cuál es el doble de los $\frac{4}{5}$ de 360?.

17. Sobre los elementos del conjunto A= $\left\{-\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right\}$ se aplica el operador "duplicar y luego sumar $\frac{1}{6}$". Se pide:

a) Elaborar un diagrama sagital de la operación.
b) Escribir el conjunto de parejas ordenadas.

18. Completa los siguientes crucigramas:

a)

$-\frac{1}{24}$	x	$\frac{16}{3}$	=	$-\frac{1}{4}$
÷	$-\frac{32}{3}$	x	$-\frac{32}{3}$	÷
$-\frac{32}{3}$	÷	$-\frac{2}{3}$	=	$\frac{9}{256}$
=	$-\frac{32}{3}$	=	$-\frac{32}{3}$	=
	x		=	

b)

$\frac{1}{5}$	÷		=	-10
x	$-\frac{32}{3}$	x	$-\frac{32}{3}$	÷
	÷	1	=	
=	$-\frac{32}{3}$	=	$-\frac{32}{3}$	=
-10	x		=	

19. En una carrera de ciclismo, llegaron fuera del límite de tiempo $\frac{2}{7}$ de los participantes; es decir, 12. ¿Cuántos participaron?

20. En un juego de matemáticas gana quien escriba la mayor fracción menor que 1. ¿Existe tal fracción? ¿Por qué?

21. Sobre un dictado de 230 palabras donde se evalúa la correcta ortografía, Lina comete 6 faltas. Sobre otro dictado de 310 palabras, Sara comete 8 errores. ¿Cuál lo hizo mejor?

22. En la prueba atlética de marcha, un paso equivale a $\frac{3}{4}$ de metro. ¿Cuántos pasos se dan aproximadamente en 10 km?

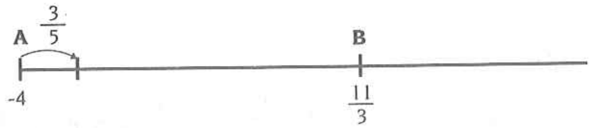
23. Camila y Santiago parten de sus respectivas casas en dirección al colegio. Santiago necesita 14 minutos para recorrer los $\frac{2}{3}$ de su trayecto. Camila para recorrer los $\frac{3}{4}$ necesita 18 minutos. ¿Cuál invierte más tiempo en llegar al colegio?

24. De las personas que integran un colegio, $\frac{8}{10}$ son estudiantes, $\frac{1}{25}$ son profesores y el resto lo forman el personal de administración y de servicio. ¿Cuántos alumnos hay por profesor?

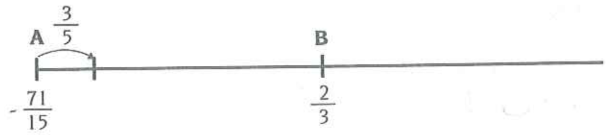
25. ¿En qué casos, de los tres siguientes, se puede ir desde A hasta B, dando un número entero de pasos de longitud $\frac{3}{5}$?

a)

b)



c)



PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS SABER

1. El número A55B es divisible por 36. Luego A+ B es igual a:

a) 5 b) 6 c) 7 d) 8

2. Se tiene una raza especial de conejos, con la siguiente propiedad: justamente al mes de nacidos ellos tienen su primera cría y en cada cría nacen 6 conejitos, los cuales forman parejas completas. Si se comienza con una pareja de conejos recién nacidos, al cabo de tres meses habrá:

a) 64 conejos
b) 128 conejos
c) 36 conejos
d) Ninguno de los anteriores

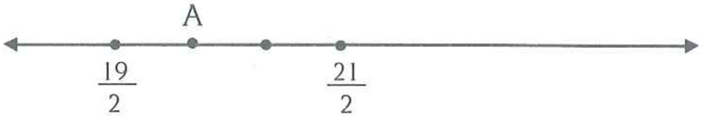
3. Se sabe que el peso de un hombre en la luna corresponde a la sexta parte de su peso en la tierra. Un astronauta y su equipaje pesan en la luna 20 kg; si el equipaje pesa en la tierra 40 kg, el peso del astronauta en la tierra es:

a) 80 kg
b) 20 kg
c) 100 kg
d) 120 kg

4. Marcos le dice a su hija: te voy a dar para que compres en el descanso del colegio $ 2.000 más la tercera parte de lo que me queda en la billetera. Si en total le da $ 5.000, el dinero que Marcos tenía en la cartera es:

a) $ 9.000
b) $ 11.000
c) $ 15.000
d) Ninguna de las anteriores

5. En la recta numérica



el número racional correspondiente al punto A está representado por el número:

a) $\frac{61}{3}$
b) $\frac{61}{6}$
c) $\frac{59}{6}$
d) $\frac{59}{3}$

Núcleo Temático

5

ECUACIONES Y PROBLEMAS EN Z Y Q

LOGRO GENERAL

- Formular, plantear y resolver problemas en Z y Q que permitan la aplicación de modelos matemáticos.

DIMENSIONES

LOGROS ESPECÍFICOS	INDICADORES DE LOGRO
Corporal: • Elaborar modelos que ayuden a resolver problemas prácticos.	• En grupos de tres, los estudiantes interpretan y analizan problemas matemáticos.
Comunicativa: • Redactar problemas que contienen una o varias operaciones básicas en Z y en Q. • Formular problemas que involucran ecuaciones.	• Comprende e interpreta correctamente los enunciados de los problemas. • Escribe los problemas en lenguaje matemático. • Explica con claridad los procesos en la solución de un problema.
Cognitiva: • Reconocer y resolver ecuaciones. • Formular y resolver problemas de aplicación.	• Sugiere problemas similares a los resueltos en clase. • Utiliza la propiedad uniforme de la igualdad en la solución de ecuaciones. • Resuelve problemas mediante ecuaciones.
Estética: • Interpretar gráficamente los problemas.	• Ilustra los enunciados de los problemas dibujando figuras que tengan que ver con el mismo.
Etica - Actitudinal: • Valorar el trabajo en grupo.	• Reconoce la ayuda de otros y está dispuesto a colaborar con los demás.

EVALUACIÓN

ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS

5.1 ¿SABÍAS QUE...?

Cada año se entregan en Estocolmo y Oslo los Premios Nobel, con los que se reconoce la labor de literatos y científicos así como la de las personas que más han luchado por la paz. Pero no la de los matemáticos. ¿Por qué?.

Este galardón lo creó a finales del siglo pasado un químico sueco llamado Alfred Nobel. Se concede en las modalidades de Física, Química, Biología o Medicina, Literatura y Paz. ¿Y las Matemáticas? ¿Fue que se le olvidaron a Nobel, a la hora de establecer los premios?.

No sólo no se le olvidaron sino que prohibió expresamente que se creara uno para esa disciplina. Algunos creen que Nobel tuvo fobia a las matemáticas desde pequeño, ya que esa asignatura no era precisamente su fuerte. Para otros la decisión de no premiar a los matemáticos se debió a razones familiares. Por uno u otro motivo, Alfred Nobel decidió que sus premios tuvieran siempre un insuficiente en Matemáticas.

EJERCICIO 5-1

COMPRENSIÓN DE LECTURA: Lee nuevamente el texto anterior y encierra en un círculo la letra que corresponda a la respuesta correcta:

1. El propósito específico del autor del escrito es:
   - a. Reprochar a A. Nobel por no haber tenido en cuenta a las matemáticas.
   - [✓ b.] Explicar las razones que pudo haber tenido en cuenta Nobel, para no incluir las matemáticas en la premiación anual.
   - c. Denunciar la discriminación existente contra las matemáticas.
   - d. Comprobar la ineptitud matemática de Alfred Nobel.
2. Con el premio Nobel se reconoce:
   - a. La labor de científicos y artistas.
   - b. El trabajo anual de sabios e inventores.
   - c. Y se premia a biólogos, químicos, físicos y literatos del mundo.
   - [✓ d.] La labor de pacifistas, científicos y hombres de letras.

3. Los premios Nobel se entregan anualmente en:

a. Dinamarca y Finlandia
b. Suecia y Francia
c. Suecia y Noruega
d. Francia y España

4. Las siguientes proposiciones son verdaderas, menos:

a. Nobel fue un famoso químico europeo.
b. Este científico no quiso que se reconociera con su premio la labor del matemático.
c. El premio Nobel fue creado en Europa, en el siglo XX.
d. Es posible que el famoso Nobel hubiera tenido fobia a las matemáticas.

52 REPASEMOS ALGUNOS CONCEPTOS

- En el grado anterior estudiamos algunos conceptos que ahora necesitamos utilizar en esta unidad. Estos conceptos son:

- Proposición **- Forma proposicional** **- Ecuación**

RECORDEMOS

- Una **PROPOSICION** es un enunciado del cual podemos decir que es **VERDADERO** o **FALSO**, pero no las dos cosas a la vez.
- Si una proposición es **VERDADERA** decimos que su **VALOR DE VERDAD** es **V** y si es **FALSO** decimos que su **VALOR DE VERDAD** es **F**.

Ejemplo: El enunciado: "un ángulo recto mide 90°" es una proposición porque podemos afirmar que su valor de verdad es V.

Ejemplo: El enunciado: "el ángulo α es llano" no es una proposición porque no podemos indicar su valor de verdad, ya que no conozco la medida del ángulo α.

- Una **FORMA PROPOSICIONAL** es una expresión que contiene al menos una variable y que se convierte en proposición cuando sustituimos esta(s) variable(s) por un elemento del conjunto referencial.

Ejemplo: **Un número** sumado con $\boxed{7}$ nos da $\boxed{343}$

objeto desconocido ↑ **objetos conocidos**

VARIABLE **CONSTANTES**

El enunciado de este ejemplo es una **forma proposicional** porque si reemplazamos el objeto desconocido por un número, se convierte en una proposición.

- Generalmente los objetos desconocidos de una forma proposicional se representan con letras; así: $\boxed{X}$ sumado con **7** nos da **343**

esta letra reemplaza el objeto desconocido: en este caso, un número.

- Una **ECUACIÓN** es una forma proposicional expresada mediante una **IGUALDAD.**
- Las partes separadas por el signo = se llaman **MIEMBROS** de la ecuación.

Ejemplo:

La forma proposicional $\underbrace{4X + 6}_{\text{primer miembro}} = \underbrace{18}_{\text{segundo miembro}}$ es una ecuación.

- **RESOLVER O SOLUCIONAR** una ecuación es encontrar el valor (o los valores) de la variable que hacen que la igualdad sea verdadera. En la ecuación anterior el valor de la variable es 3 (¿por qué?).

EJERCICIO 5-2

① Indica cuáles de los siguientes enunciados son proposiciones y cuáles son formas proposicionales. Determina el valor de verdad de aquellas que sean proposiciones.

a) $3 - 5 = -2$.
b) x es múltiplo de 10.
c) $\pi \approx 3,14$.
d) 1 dam = 10 dm.
e) 9 es un número impar.
f) 30° es el complemento de 60°.
g) 140° es el suplemento de 40°.
h) $5x + 4 = 8$.
i) El cuadrado de un número es 16.
j) x es mayor que 6.

② Explica por qué:

a) $x + 6 = 10$ es una forma proposicional.
b) $x + 6$ no es una forma proposicional.

③ En las siguientes formas proposicionales identifica: la variable y encuentra el valor de la variable de manera que se conviertan en proposición verdadera.

a) Un número multiplicado por (-5) nos da $\frac{5}{2}$.
b) $x - 7 = -5$
c) $y^2 = 9$
d) $-7 - y = -1$
e) $x < 4$

④ Escribe tres (3) ecuaciones.

⑤ Responde:

a) ¿Por qué la forma proposicional $4 + 2x < 8$ no es ecuación? Explica.
b) ¿Cuál es el primer miembro de la ecuación $x - 7 = 2$? ¿Y cuál es el segundo? Explica.
c) ¿Es $2 \cdot x = x + 5$ una ecuación? ¿Cuál es el primer miembro? ¿Y el segundo miembro?.

⑥ Fíjate bien en las operaciones que hemos realizado en cada igualdad:

$\underbrace{3+2}_{} = \underbrace{5}_{}$ .... igualdad verdadera $3+2+\mathbf{6} = 5+\mathbf{6}$ ..... sigue siendo una igualdad verdadera	$\underbrace{3+2}_{} = \underbrace{5}_{}$ .... igualdad verdadera $3+2-\mathbf{4} = 5-\mathbf{4}$ ..... sigue siendo una igualdad verdadera
$\underbrace{8-6}_{} = \underbrace{2}_{}$ .... igualdad verdadera $\left.\begin{array}{l}\mathbf{5}\cdot(8-6) = \mathbf{5}\cdot 2\\ \mathbf{5}\cdot 8-\mathbf{5}\cdot 6 = 10\end{array}\right\}$ ... propiedad distributiva $\underbrace{\mathbf{5}\cdot 8}_{\downarrow} - \underbrace{\mathbf{5}\cdot 6}_{\downarrow} = 10$ $40 - 30 = 10$ .... igualdad verdadera	$\underbrace{8-6}_{} = \underbrace{2}_{}$ .... igualdad verdadera $\frac{8-6}{\mathbf{2}} = \frac{2}{\mathbf{2}}$ ..... Propiedad distributiva $\downarrow \qquad \downarrow$ $\frac{8}{2} - \frac{6}{2} = 1$ $\downarrow \qquad \downarrow$ $4 - 3 = 1$

Contesta:

a) Si a ambos miembros de una igualdad le sumamos un mismo número, ¿nos da siempre una igualdad?.

b) Si a ambos miembros de una igualdad le restamos un mismo número, ¿nos da siempre una igualdad?.

c) Si ambos miembros de una igualdad los multiplicamos por un mismo número, ¿nos da siempre una igualdad?.

d) Si ambos miembros de una igualdad los dividimos por un mismo número, diferente de cero, ¿nos da siempre una igualdad?.

⑦ ¿Qué dice la propiedad que permite justificar las respuestas dadas en el ejercicio anterior? ¿Cómo se llama esta propiedad? Consulta en el texto Matematica Experimental 6.

⑧ Responde y justifica cada respuesta con un ejemplo:

a) Si a ambos miembros de una igualdad sumamos diferentes números, ¿obtenemos otra igualdad?.

b) Si a ambos miembros de una igualdad restamos diferentes números, ¿obtenemos otra igualdad?.

c) Si cada miembro de una igualdad lo multiplicamos por un número diferente, ¿obtenemos otra igualdad?.

d) Si cada miembro de una igualdad lo dividimos por un número distinto, ¿obtenemos otra igualdad?.

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 1

El número de caballos que tiene Marcos son la mitad de los míos, los de Juan son la tercera parte de los míos. Si al total de caballos de Marcos y Juan sumo los 50 caballos de Alejandro, resultarían los $\frac{7}{8}$ de los caballos que tengo yo. ¿Cuántos caballos tengo y cuántos tienen Marcos y Juan?.

5.3 SOLUCIÓN DE ECUACIONES LINEALES EN Z Y Q

5.3.1 Ecuaciones que contienen sólo suma o resta

PRIMERA EXPERIENCIA

- Observemos cómo se resuelve la ecuación $\mathbf{y + 8 = 3}$.
- Como queremos hallar el valor de la incógnita **y**, entonces debemos quitar el **8** del miembro izquierdo de la igualdad; así:

$y + 8 = 3$ ....ecuación dada

$\therefore\ y + 8 - 8 = 3 - 8$............restamos **8** a ambos miembros de la igualdad.

$\therefore\ y + 0 = 3 - 8$.......................porque $\mathbf{8 - 8 = 8 + (-8) = 0}$ (propiedad del inverso aditivo).

$\therefore\ y = 3 - 8$ ....porque $\mathbf{y + 0 = y}$ (propiedad modulativa).

- Resumiendo: **Si** $\mathbf{y \underbrace{+\ 8} = 3}$ **entonces** $\mathbf{y = 3 \underbrace{-\ 8}}$

Acá el 8 está sumando

Y al lado derecho pasó restando

SEGUNDA EXPERIENCIA

- Ahora vamos a resolver la ecuación $\mathbf{x - 2 = -13}$
- Como queremos hallar el valor de la incógnita (la variable) **x**, debemos quitar el 2 del miembro izquierdo de la igualdad; así:

$x - 2 = -13$. . . . . ecuación dada.

$\therefore\ x - 2 + 2 = -13 + 2$ · · sumamos **2** a ambos miembros de la igualdad (propiedad uniforme)

$\therefore\ x + 0 = -13 + 2$ · · · · · porque $\mathbf{-2 + 2 = 0}$ (inverso aditivo)

$\therefore\ x = -13 + 2$ · · · · · · · · · · porque $\mathbf{x + 0 = x}$ (propiedad modulativa)

$\therefore\ x = -11$

- Resumiendo: **Si** $\mathbf{x \underbrace{-\ 2} = -13}$ **entonces** $\mathbf{x = -13 \underbrace{+\ 2}}$

Acá el 2 está restando

Y al lado derecho pasó sumando

- Teniendo en cuenta estas dos experiencias, responde:

a) ¿Cuál es el valor que debe tomar la variable para que la igualdad $\mathbf{y + 8 = 3}$ sea verdadera? ¿y en la igualdad $\mathbf{x - 2 = -13}$?

b) ¿Las incógnitas en las ecuaciones $\mathbf{x + 2 = 4}$ y $\mathbf{z - 1 = 1}$ toman el mismo valor, para que las igualdades sean verdaderas? ¿Cuál es?.

c) Si a ambos miembros de una ecuación sumamos (o restamos) un mismo numero, ¿el valor de la variable en la ecuación cambia? Explica.

5.3.2 Ecuaciones que contienen multiplicación o división

PRIMERA EXPERIENCIA

- Resolvamos la ecuación $\mathbf{6 \cdot x = -12}$
- Como queremos hallar el valor de la variable (incógnita), entonces debemos quitar el factor **6** del miembro izquierdo de la ecuación; así:

$6 \cdot x = -12$ .....ecuación dada.

$\therefore \frac{6 \cdot x}{6} = -\frac{12}{6}$ ....dividimos por 6 ambos miembros de la ecuación (propiedad uniforme).

$\therefore 1 \cdot x = \frac{-12}{6}$ ..... $\frac{6}{6} = 1$ (¿por qué?)

$\therefore x = \frac{-12}{6}$ ....porque $\mathbf{1 \cdot x = x}$.

$\therefore x = -2$ ....¿por qué?.

- Resumiendo: **Si** $\underbrace{6 \cdot x}_{\text{Acá el 6 está multiplicando}} = -12$ **entonces** $x = \frac{-12}{\underbrace{6}_{\text{Y a este lado pasó dividiendo}}}$

SEGUNDA EXPERIENCIA

- Resolvamos la ecuación: $\frac{z}{5} = -1$
- Como queremos hallar el valor de la incógnita , entonces debemos quitar el , que está dividiendo en el lado izquierdo de la igualdad; así:

$\frac{z}{5} = -1$ .... ecuación dada.

$\therefore \cancel{5} \cdot \frac{z}{\cancel{5}} = 5 \cdot (-1)$ .... multiplicamos cada lado de la igualdad por 5.

$\therefore 1 \cdot z = 5 \cdot (-1)$.......... ¿por qué?.

$\therefore z = 5 \cdot (-1)$ .... ¿por qué?.

$\therefore z = -5$ .... ¿por qué?.

- Resumiendo: **Si** $\underbrace{\frac{z}{5}}_{\text{Acá el 5 está dividiendo}} = -1$ **entonces** $z = \underbrace{5 \cdot}_{\text{Y a este lado pasó multiplicando}} (-1)$

APRENDAMOS...

- Dos o más ecuaciones son **equivalentes** cuando la(s) variable(s) toma(n) el mismo valor.

Ejemplo: **$z - 5 = 1$** y **$y + 8 = 14$** son ecuaciones equivalentes pues las variables **z** y **y** toman el mismo valor **(6)**.

- Una **ecuación** se puede resolver de dos formas: utilizando la propiedad uniforme o utilizando la transposición de términos o factores.
- La **propiedad uniforme de la igualdad** establece que: si sumamos, restamos, multiplicamos o dividimos ambos miembros de una igualdad por un mismo número obtenemos otra igualdad equivalente a la primera.
- La **trasposición de números en una igualdad** establece que:

a) Si un número está **sumando**, en un miembro de una igualdad, entonces dicho número pasa al otro lado **restando.**

Si $x + a = b$ entonces $x = b - a$

b) Si un número está **restando**, en un miembro de una igualdad, entonces dicho número pasa al otro lado **sumando.**

Si $x - a = b$ entonces $x = b + a$

c) si un número está **multiplicando**, en un miembro de una igualdad, entonces dicho número pasa al otro lado **dividiendo.**

Si $a \cdot x = b$ entonces $x = \frac{b}{a}$, $a \neq 0$

d) Si un número está **dividiendo**, en un miembro de una igualdad, entonces dicho número pasa al otro lado **multiplicando.**

Si $\frac{x}{a} = b$ entonces $x = b \cdot a$.

TERCERA EXPERIENCIA

- Resolvamos la ecuación **$-4t + 5 = 21$**.
- Para hallar el valor que debe tomar la incógnita **t** debemos quitar dos números: el **5**, que está sumando, y el **-4**, que está multiplicando. Veamos cómo hacerlo:

$-4t + 5 = 21$........................ ecuación dada.

$\therefore -4t = 21 - 5$......................... pasamos el 5 a restar.

$\therefore -4t = 16$.............................. $21 - 5 = 16$

$\therefore\ t = \frac{16}{-4}$ ....pasamos el -4 a dividir.

$\therefore\ t = -4.$ .... $\frac{16}{-4} = -4$

- Por lo tanto, la solución de esta ecuación es t = -4. Comprobemos reemplazando este valor en la ecuación dada:

$$-4\,(-4) + 5 \overset{?}{=} 21$$

$$\therefore\ 16 + 5 \overset{\checkmark}{=} 21$$

CUARTA EXPERIENCIA

- Resolvamos la ecuación: $\mathbf{2x - \frac{1}{2} + \frac{4}{3} = 3 + \frac{7}{4}x}$
- Una primera dificultad que debemos eliminar son los denominadores de cada fracción. Para lograrlo hallamos el mínimo común múltiplo (m.c.m) de los denominadores y multiplicamos ambos miembros de la igualdad por ese m.c.m.; así:

m.c.m. (2, 3, 4) = 12 (¡comprobarlo!)

Luego:

$2x - \frac{1}{2} + \frac{4}{3} = 3 + \frac{7}{4}\ x$ .... ecuación dada.

$\therefore\ 12 \cdot \left(2x - \frac{1}{2} + \frac{4}{3}\right) = 12 \cdot \left(3 + \frac{7}{4}\ x\right)$ .... multiplicamos por 12 ambos miembros.

Ahora aplicamos la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma y simplificamos factores; así:

$12\cdot(2x) - \overset{6}{\cancel{12}} \cdot \left(\frac{1}{\cancel{2}}\right) + \overset{4}{\cancel{12}}\cdot\left(\frac{4}{\cancel{3}}\right) = 12 \cdot 3 + \overset{3}{\cancel{12}} \cdot \left(\frac{7}{\cancel{4}}x\right)$ · · · ¿por qué?

$\therefore\ 24x - 6 + 16 = 36 + 21x$ .... ¿por qué?

$\therefore\ 24x - 21x = 36 + 6 - 16.$ .... si hay varias cantidades con incógnitas, las llevamos todas a un mismo miembro

$\therefore\ 3x = 26$

$\therefore\ x = \frac{26}{3}$

APRENDAMOS...

- Cuando en una ecuación hay varios términos con denominadores, para resolverla procedemos así:
  1. Multiplicamos ambos miembros de la ecuación por el m.c.m. de los denominadores.
  2. Aplicamos la propiedad distributiva y simplificamos todas las fracciones.
- Si después de simplificar, en ambos miembros de la ecuación nos quedan incógnitas, entonces éstas se llevan a un solo miembro.

EJERCICIO 5-3

① Completa:

a) Dos o más ecuaciones son equivalentes cuando ______________________________.
b) Una ecuación se puede resolver aplicando la propiedad ______________________________
________________ o por ________________ de cantidades.
c) La propiedad uniforme dice ________________.
d) La transposición de cantidades en una ecuación dice ______________________________.

② Resuelve las siguientes ecuaciones, utilizando la propiedad uniforme:

a) $z + 5 = 3$ b) $x + 8 = 16$ c) $3 + m = 4$ d) $t - 5 = 3$ e) $x - 8 = -20$
f) $\frac{x}{5} = 7$ g) $8m = -6$ h) $\frac{t}{4} = -3$ i) $3t = -5$

③ Utiliza el procedimiento de la trasposición de cantidades para resolver las ecuaciones del ejercicio anterior.

④ Utiliza el procedimiento de la trasposición de cantidades para resolver las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{x}{6} - 5 = \frac{1}{3} - x$ b) $\frac{x}{2} + 2 - \frac{x}{12} = \frac{x}{6} - \frac{x}{4}$ c) $\frac{x-4}{3} - 5 = 0$
d) $\frac{x}{3} + 1 = 3 + \frac{x-2}{6}$ e) $x + \frac{1}{3} - \frac{x}{2} = 3 + \frac{x}{4}$ f) $\frac{2x+3}{6} + 1 = \frac{x}{2} + \frac{x}{2}$
g) $\frac{4x-12}{-4} = x - 5$ h) $2 + \frac{3x-1}{15} + \frac{x-4}{5} = \frac{x+4}{3}$ i) $1 - \frac{x-5}{4} - \frac{x-3}{10} + \frac{x+3}{8} = 0$

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 2

Un estanque se puede llenar con tres llaves. La primera lo puede llenar en 5 horas, la segunda en 10 horas y la tercera en 8 horas. ¿En cuánto tiempo se llenará el estanque, si estando vacío y cerrado el desagüe, se abren al mismo tiempo las tres llaves?.

5.4 SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

- Uno de los objetivos básicos de la matemática es la solución de problemas. En el texto Matematica Experimental 6 describimos cómo se puede abordar la solución de un problema. Recordemos algunos pasos que conviene tener en cuenta.

Paso 1: Leer y comprender el enunciado del problema
Este paso incluye identificar los datos conocidos, lo que debemos hallar y hacer un dibujo del problema, si es posible.

Paso 2: Elegir una estrategia
Algunos problemas podemos resolverlos por lógica y otros por medio de una ecuación que traduzca el enunciado del problema.

Paso 3: Resolver el problema
Una vez elegida la estrategia procedemos a resolver el problema.

Paso 4: Comprobar la solucion
Finalmente analizamos si la(s) solución(es) obtenida(s) está(n) de acuerdo con el enunciado del problema.

PRIMERA EXPERIENCIA

La suma de dos números es 106 y el mayor excede al menor en 8. Hallar los números.

- **Paso 1: leer y comprender el enunciado del problema**
  El problema nos dice que un número excede a otro en 8. Cuando decimos que un número excede a otro en 8 unidades, significa que si un número es 15, el otro puede ser $15 + 8 = 23$ ó $15 - 8 = 7$.
- **Paso 2: elegir una estrategia**
  Como no conocemos los números, vamos a identificarlos con una letra. Supongamos que uno de los números lo llamamos x . Si x es el número mayor, entonces el menor es $x - 8$; si, en cambio, x es el número menor, entonces el mayor es $x + 8$.
- **Paso 3: resolver el problema**
  Si tenemos en cuenta los razonamientos anteriores, este problema lo podemos resolver de dos maneras:

PRIMERA MANERA	SEGUNDA MANERA
1) Sea x = el número mayor $x - 8$ = el número menor	1) Sea x= el número menor $x+ 8$ = el número mayor
2) Como la suma de los dos números es 106 entonces: $x+ x - 8 = 106$	2) Como la suma de los dos números es 106 entonces: $x + x + 8 = 106$
3) Ahora resolvemos la ecuación $2x - 8 = 106$ $\therefore 2x = 106 + 8$ $\therefore 2x = 114$ $\therefore x = \frac{114}{2}$ $\therefore x = 57$	3) Ahora resolvemos la ecuación $2x + 8 = 106$ $\therefore 2x = 106 - 8$ $\therefore 2x = 98$ $\therefore x= \frac{98}{2}$ $\therefore x = 49$
4) Luego, los dos números son: $x = 57$ y $x- 8 = 49$	4) Luego, los dos números son: $x = 49$ y $x + 8 = 57$

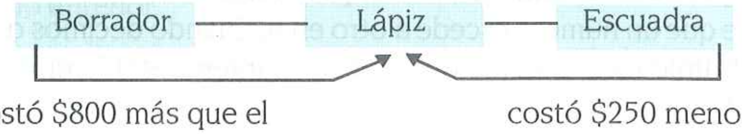
Paso 4: comprobar la solución
Como $57 + 49 = 106$ y 57 excede a 49 en 8 unidades, entonces se cumplen todas las condiciones del problema.

SEGUNDA EXPERIENCIA

Pagué \$3.250 por un borrador, un lápiz y una escuadra. El borrador costó \$800 más que el lápiz y la escuadra \$250 menos que el lápiz. Hallemos los precios de cada objeto.

Solución

Paso 1: leer y comprender el enunciado del problema.
En este problema se hace referencia a tres objetos: borrador, lápiz y escuadra. Y el enunciado nos muestra que uno de ellos, el lápiz, está relacionado con los otros dos.



Paso 2: elegir una estrategia.
Como el costo del lápiz está relacionado con el costo del borrador y de la escuadra, entonces vamos a representar con la letra x el costo del lápiz. Por lo tanto:

Precio del lápiz = x........................porque se relaciona con los otros dos.
Precio del borrador = x + 800......porque costó \$800 más que el lápiz.
Precio de la escuadra = x - 250.... porque costó \$250 menos que el lápiz.

Paso 3: resolver el problema.
Como nos dicen que los tres objetos costaron \$3.250 entonces escribimos:

$$x + x + 800 + x - 250 = 3.250$$

$\therefore\ x + x + x = 3.250 - 800 + 250$......... ¿Por qué?.

$\therefore\ 3x = 2.700$...................................... ¿Por qué?.

$$\therefore\ x = \frac{2.700}{3} = 900$$

Por lo tanto, el precio del lápiz es x = \$900; el precio del borrador es $x + 800 = 900 + 800 =$ \$1.700 y el precio de la escuadra es $x - 250 = 900 - 250 =$ \$650.

Paso 4: comprobar la solucion.
Observemos que las soluciones obtenidas: \$900, \$1.700 y \$650 suman \$3.250; en efecto: \$900 + \$1.700 + \$650 = \$3.250.

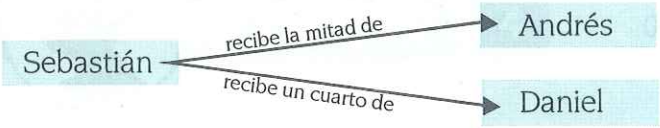
TERCERA EXPERIENCIA

Repartir 140 canicas entre Andrés, Sebastián y Daniel de modo que la parte de Sebastián sea la mitad de la de Andrés y un cuarto de la de Daniel.

Solución

Paso 1: leer y comprender el enunciado del problema.

El enunciado del problema nos dice que Sebastián recibe la mitad de canicas que recibe Andrés y que también Sebastián recibe un cuarto de las canicas que recibe Daniel. Por lo tanto, los datos del problema están relacionados con Sebastián:



Paso 2: elegir una estrategia.

Como la cantidad de canicas que recibe Sebastián está relacionado con el número de canicas que reciben Andrés y Daniel, entonces vamos a representar con la letra x el número de canicas que recibe Sebastián. Por lo tanto:

* Canicas que recibe Sebastián: x
* Canicas que recibe Andrés: 2x, porque si a Sebastián le corresponde la mitad de Andrés, entonces a Andrés le corresponde el doble de Sebastián.
* Canicas que recibe Daniel: 4x, porque si a Sebastián le corresponde una cuarta parte de Daniel, entonces a Daniel le corresponde cuatro veces lo que le corresponde a Sebastián.

Paso 3: resolver el problema.

Como se va a repartir 140 canicas entonces:

$$x + 2x + 4x = 140$$

$$\therefore\ 7x = 140$$

$$\therefore\ x = \frac{140}{7}$$

$$\therefore\ x = 20$$

es decir, a Sebastián le corresponden 20 canicas. Andrés recibe el doble de Sebastián; luego, Andrés recibe 40 canicas y Daniel recibe cuatro veces las que recibió Sebastián; es decir; 4 (20 canicas) = 80 canicas.

Paso 4: comprobar la solucion.

Como las soluciones obtenidas: 20, 40 y 80 suman 140, entonces las soluciones son coherentes con el enunciado del problema.

CUARTA EXPERIENCIA

La suma de dos números es 506 y el triple del menor excede en 50 al mayor aumentado en 100. Hallemos los números.

Solución

Paso 1: leer y comprender el enunciado del problema.
El enunciado del problema dice que dos números suman 506. Si un número fuera 80, el otro sería 506-80; si un número fuera 230, el otro sería 506-230. En general, si un número fuera x el otro sería 506-x. Si el menor es x entonces el triple del menor es 3x y el mayor aumentado en 100 es (506-x) + 100.

Paso 2: elegir una estrategia.
El problema podemos resolverlo de dos formas:

PRIMERA FORMA	SEGUNDA FORMA
Sea x : número menor 506 -x: número mayor Triple del menor: 3x Mayor aumentado en 100: 506 - x+100 $\boxed{3x}$ excede en 50 a $\boxed{506 - x+100}$ éste es mayor en 50 Luego: 3x- 50 = 506 - x + 100	Sea x: número mayor 506 - x: número menor Triple del menor: 3 (506 - x) Mayor aumentado en 100: x + 100 $\boxed{3\ (506 - x)}$ excede en 50 a $\boxed{x + 100}$ éste es mayor en 50 Luego: 3 (506 - x) - 50 = x + 100

Paso 3: resolver el problema.
Ahora resolvamos cada ecuación; así:

PRIMERA FORMA	SEGUNDA FORMA
$3x - 50 = 506 - x + 100$ $\therefore\ 3x + x = 506 + 100 + 50$ $\therefore\ 4x = 656$ $\therefore\ x = \frac{656}{4}$ $\therefore\ x = 164$ Luego: número menor: x = 164 número mayor: 506-x = 506-164 = 342	$3\ (506-x) - 50 = x + 100$ $\therefore\ 1.518 - 3x - 50 = x + 100$ $\therefore\ -3x - x = 100 + 50 - 1.518$ $\therefore\ -4x = -1.368$ $\therefore\ x = \frac{-1368}{-4} = 342$ Luego: número mayor: 342 número menor: 506 - x = 506 - 342 = 164

Paso 4: comprobar la solución.
Comprobemos que la solución del problema está de acuerdo con el enunciado:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Número menor:} & 164\\ \text{Número mayor:} & 342\end{array}\right\}\ \text{sumados dan } 506$$

Triple del menor: $3(164) = 492$

Mayor aumentado en 100: $342+100 = 442$

¿492 excede en 50 a 442? Si porque $492 - 50 = 442$

Luego, la solución del problema está de acuerdo con el enunciado.

EJERCICIO 5-4

① Juan tiene 14 años menos que Camilo y ambas edades suman 56 años. ¿Qué edad tiene cada uno?.

② Hallar cuatro números enteros consecutivos cuya suma sea -74.

③ Dividir el número 106 en dos partes tales que la mayor exceda a la menor en 24.

④ La suma de tres números es 200. El mayor excede al del medio en 32 y al menor en 65. Hallar los números.

⑤ La suma de las edades de tres personas es 88 años. La mayor tiene 20 años más que la menor y la del medio 18 años menor que la mayor. Hallar las edades respectivas.

⑥ Dividir 96 en tres partes tales que la primera sea el triple de la segunda y la tercera igual a la suma de la primera y la segunda.

⑦ El duplo de un número equivale al número aumentado en 111. Hallar el número.

⑧ La suma de dos números es 540 y el mayor excede al triple del menor en 88. Hallar los números.

⑨ En una clase hay 60 alumnos entre niños y niñas. El número de niñas excede en 15 al doble de los niños. ¿Cuántos niños y cuántas niñas hay?.

⑩ La suma de dos números es 100 y el duplo del mayor equivale al triple del menor. Hallar los números.

⑪ Se tienen tres números. El primero es igual a la mitad del segundo y el segundo es igual a $\frac{1}{3}$ del tercero. La diferencia entre el mayor y el menor de los números es igual a 45. ¿Cuáles son los tres números?

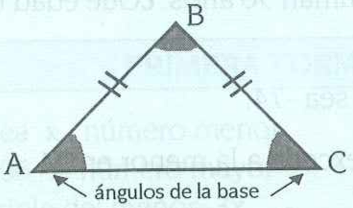
⑫ Hernán malgastó $\frac{7}{8}$ de su fortuna y perdió jugando a las maquinitas la mitad de lo que le quedaba. Si aún tiene 8 millones, ¿cuánto dinero tenía al principio?

5.5 PROBLEMAS DE TIPO GEOMÉTRICO

Antes de solucionar algunos problemas de tipo geométrico conviene recordar varios conceptos que ya conocemos.

RECORDEMOS

- En todo triángulo, la suma de las medidas de los tres ángulos interiores es igual a 180º.
- El triángulo equilátero tiene sus tres lados de igual longitud y sus tres ángulos miden 60º cada uno.
- El triángulo isósceles tiene dos lados de igual longitud y los ángulos formados por el lado desigual con los lados iguales son de igual medida.

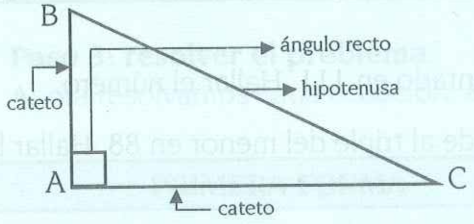


Δ ABC es **isósceles.**

Lado $\overline{AB}$ = lado $\overline{BC}$.

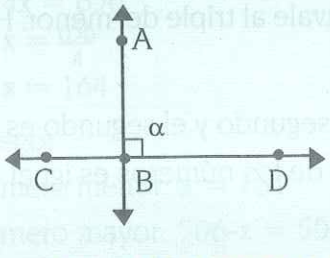
$m\widehat{A} = m\widehat{C}$: los ángulos de la base miden lo mismo.

- Se llama **perímetro** de un polígono a la suma de las longitudes de sus lados.
- Dos ángulos son **complementarios** si la suma de sus medidas es 90º.
- Dos ángulos son **suplementarios** si la suma de sus medidas es 180º.
- En todo triángulo rectángulo, un ángulo es **recto**.



Δ BAC es un triángulo rectángulo con $\widehat{A}$ recto.

- Dos líneas son **perpendiculares** si se cortan formando ángulos rectos.



Si $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}$ entonces $m\widehat{\alpha} = 90°$

símbolo de perpendicularidad

PRIMERA EXPERIENCIA

- En la figura, $|\overline{AB}| = |\overline{DE}| = 2\,|\overline{CD}|$, $|\overline{BC}| = |\overline{AB}| + 4$, $|\overline{AE}| = 25$ cm. Hallemos las medidas de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DE}$.

Solución

- Como $|\overline{AB}| = 2|\overline{CD}|$, $|\overline{DE}| = 2|\overline{CD}|$ y $|\overline{BC}| = |\overline{AB}| + 4$ entonces el que más se relaciona es $|\overline{CD}|$. Por lo tanto, vamos a llamar x la medida del segmento $\overline{CD}$.
- En consecuencia:

Sea x = medida del segmento $\overline{CD}$

$2x$ = medida del segmento $\overline{AB}$

$2x$= medida del segmento $\overline{DE}$

$2x + 4$ = medida del segmento $\overline{BC}$

- Como $\overline{AE}$ mide 25 cm y $|\overline{AE}| = |\overline{AB}| + |\overline{BC}| + |\overline{CD}| + |\overline{DE}|$ entonces:

$$\begin{array}{ccccccccc} |\overline{AB}| & + & |\overline{BC}| & + & |\overline{CD}| & + & |\overline{DE}| & = & 25 \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ (2x) & + & (2x + 4) & + & (x) & + & (2x) & = & 25 \end{array}$$

$\therefore\ 2x + 2x + 4 + x + 2x = 25$

$\therefore\ 2x + 2x + x + 2x = 25 - 4$

$\therefore\ 7x = 21$

$\therefore\ x = \frac{21}{7}$

$\therefore\ x = 3$

- Por lo tanto:

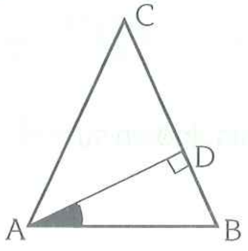
Medida del segmento $\overline{CD}$: $x = 3$ cm

Medida del segmento $\overline{AB}$: $2x = 2$ (3 cm) = 6 cm

Medida del segmento $\overline{DE}$: $2x = 2$ (3 cm) = 6 cm

Medida del segmento $\overline{BC}$: $2x + 4 = 2$ (3 cm) + 4 = 10 cm

SEGUNDA EXPERIENCIA



Datos: en el ΔABC , $|\overline{AC}| = |\overline{BC}|$

$\overline{AD} \perp \overline{BC}$, $m\widehat{BAD} = 25°$

Hallar: $m\widehat{C}$

Solución

- Como el Δ ABC tiene dos lados iguales $|\overline{AC}| = |\overline{BC}|$, entonces es un triángulo isósceles.
- Por lo tanto, m $\widehat{CAB}$ = m $\widehat{CBA}$..................... ¿Por qué?.
- Si llamamos x a la m $\widehat{B}$ entonces:

$$\begin{array}{lcccccccl} & m\,\widehat{BAD} & + & m\,\widehat{B} & + & m\,\widehat{ADB} & = & 180^\circ \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \therefore & 25^\circ & + & x & + & 90^\circ & = & 180^\circ \end{array}$$

$$\therefore \quad x = 180^\circ - 25^\circ - 90^\circ$$

$$\therefore \quad x = 65^\circ$$

- Y como $m\widehat{A} = m\widehat{B}$ entonces $m\widehat{A} = 65^\circ$
- Finalmente:

$$m\widehat{A} + m\widehat{B} + m\widehat{C} = 180^\circ$$

$$\therefore \; 65^\circ + 65^\circ + m\widehat{C} = 180^\circ$$

$$\therefore \; m\widehat{C} = 180^\circ - 65^\circ - 65^\circ$$

$$\therefore \; m\widehat{C} = 50^\circ$$

EJERCICIO 5-5

❶ Si $\overline{AM}$, $\overline{MN}$, y $\overline{NB}$ son segmentos consecutivos de una misma recta tales que: $|\overline{AM}| = 2x$, $|\overline{MN}| = x - 1$, $|\overline{NB}| = 3x + 1$ y $|\overline{AB}| = 24$, halla $|\overline{MA}|$, $|\overline{MN}|$ y $|\overline{NB}|$.

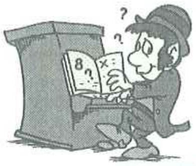
❷ Si $|\overline{AC}| = 4 \cdot |\overline{AB}|$ y $|\overline{BC}| = 12$. Halla $|\overline{AB}|$.

❸ En un triángulo isósceles, cada ángulo de la base mide el doble del ángulo del vértice. Halla las medidas de los tres ángulos del triángulo.

❹ En un triángulo ABC, el ángulo A mide el doble del ángulo C y la medida del ángulo A excede en 10° a la medida del ángulo B. ¿Cuál es la medida de los ángulos del triángulo?.

❺ Dos ángulos son suplementarios y uno de ellos excede al doble del otro en 30° ¿Cuánto mide cada ángulo?.

12x+180
2 x



DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 3

¿Cuál es el número que aumentado en sus $\frac{3}{5}$ y disminuido en sus $\frac{5}{7}$ equivale a 93?. (Resolverlo por lógica y usando una ecuación)

TALLER DE REPASO DE LA UNIDAD 5

1. Contesta:

a) ¿Qué es una proposición?.

b) ¿Qué es una forma proposicional?.

c) ¿Cómo se denominan los objetos conocidos en una forma proposicional? ¿Y los desconocidos?.

d) ¿Qué es una ecuación?.

e) ¿Qué es solución de una ecuación?.

f) ¿Cuándo dos ecuaciones son equivalentes?.

g) ¿Qué establece la propiedad uniforme de las igualdades?.

h) ¿Cómo se transponen cantidades en una ecuación?.

i) Si una ecuación tiene términos o factores que son fracciones, ¿cómo se eliminan los denominadores?.

j) ¿Cuáles son los pasos que conviene dar cuando se va a resolver un problema?.

2. Indica cuáles de los siguientes enunciados son proposiciones y cuáles son formas proposicionales:

a) $12 - 20 = -8$.

b) x es divisor de 12.

c) $\frac{2}{3} - \frac{4}{5} = -\frac{2}{15}$

d) 2 dam = 200 m.

e) 9 es múltiplo de 18.

f) 70° es el complemento de 20°.

g) $5 \cdot x + 6 = 14$.

h) El cubo de x es 27.

i) x es menor o igual que 3.

j) El triple de y es -45.

3. En las siguientes formas proposicionales identifica la variable y asígnale un valor de manera que se convierta en una proposición verdadera.

a) A un número le sumamos (-4) y obtenemos (-12)

b) $z + 9 = -6$

c) $x^2 = 16$

d) $m + 3 < 5$

4. Resuelve las siguientes ecuaciones utilizando el método de la trasposición de cantidades.

a) $m + 8 = 15$

b) $-3x = -15$

c) $4x = -24$

d) $\frac{y-3}{5} - 4 = 2$

e) $p + \frac{1}{3} - \frac{p}{2} = 3 + \frac{p}{4}$

f) $\frac{2x+5}{12} - 2 = \frac{x}{4} - \frac{1}{3}$

En los ejercicios 5 a 20 resuelve cada problema utilizando una ecuación o por lógica.

5. La suma de dos números es 106 y el mayor excede al menor en 8. Halla los números.

6. Tres números enteros consecutivos suman 204. Halla los números.

7. Divide el número 642 en dos partes tales que una exceda a la otra en 36.

8. En un hotel de dos pisos hay 48 habitaciones. Si las habitaciones del segundo piso son la mitad de las del primero, ¿Cuántas habitaciones hay en cada piso?.

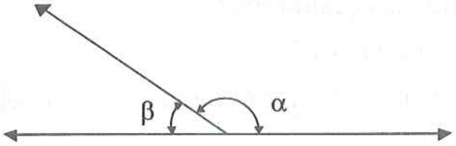
9. Carlos, Marcos y Margarita van a repartir 350 dulces. La parte que corresponde a Carlos es la mitad de la de Marcos y la de Margarita es el doble de la de Marcos. ¿Cuántos dulces tendrá cada uno?.

10. La suma de tres números es 72. El segundo es un quinto del tercero y el primero excede al tercero en 6. Halla los números.

11. El exceso de 8 veces un número con respecto a 60 equivale al exceso de 60 con respecto a 7 veces el número. Halla el número .

12. Dos ángulos son suplementarios. Si el doble de uno excede en 45º al otro, halla la medida de cada uno.

13.

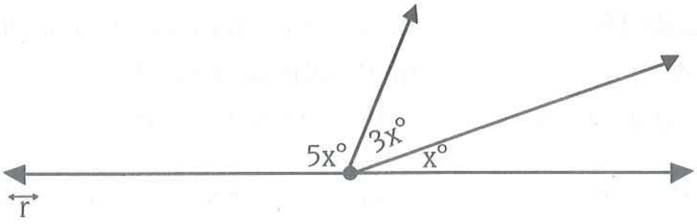


Datos: $m\widehat{\alpha} = 3\ m\widehat{\beta}$

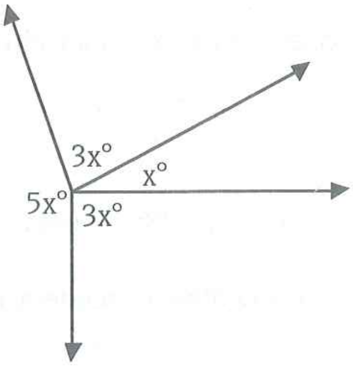
Hallar: $m\widehat{\alpha}$, $m\widehat{\beta}$

14. Halla un ángulo tal que sumando su complementario con su suplementario nos de un ángulo triple del que estamos buscando.

15. Halla la medida en grados de cada uno de los ángulos consecutivos formados alrededor del punto 0 de la recta $\overleftrightarrow{r}$ y cuyas medidas están expresadas en función de x.



16. Halla en grados el valor de cada uno de los ángulos de la siguiente figura:



17. La suma de dos ángulos es 180°. Uno de los ángulos es los $\frac{7}{8}$ del otro. Halla los ángulos.

18. En un Δ ABC, $m\widehat{A} = m\widehat{B} = 48°$. Halla la $m\,\widehat{C}$.

19. En un triángulo rectángulo, uno de los ángulos agudos mide 38°. Halla la medida del otro ángulo agudo.

20. Halla la medida de los tres ángulos interiores de un Δ ABC sabiendo que la medida del ángulo C es igual a los $\frac{3}{4}$ de la medida del ángulo A y que la medida del ángulo B excede en 4° a la medida del ángulo A.

PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS SABER

1. Si 5 veces un cierto número es 2, entonces 100 veces el recíproco (inverso multiplicativo) del número es:

   a) 2,5 b) 40 c) 50 d) 250

2. Vendí un carro en $\$8_{1}000.000$ más la tercera parte de lo que me había costado. En este negocio gané $\$2_{1}000.000$. El carro me costó:

   a) 7 millones b) 8 millones c) 10 millones d) 9 millones

3. La edad del padre es el cuádruplo de la de su hija. Si ambas edades suman 45 años. La edad de la hija es:

   a) 9 años b) 15 años c) 5 años d) 25 años

4. El lunes perdí 40 dólares, el martes gané 125 dólares, el miércoles gané el doble de lo que tenía el martes y el jueves después de perder la mitad de lo que tenía me quedan 465 dólares. El dinero que tenía al empezar a jugar era:

   a) 675 dólares b) 425 dólares c) 225 dólares d) 340 dólares

5. Un señor se gastó la sexta parte de su dinero en un libro y una cantidad tres veces superior a ésta en comer; además, pagó a un amigo \$500 dólares que le debía. Se ganó una cantidad igual a la que le quedaba. De vuelta a casa descubrió que había extraviado \$500 dólares, puesto que llegó con 100 dólares. El dinero que tenía al principio era:

   a) 3.000 dólares b) 4.300 dólares c) 3.500 dólares d) 2.400 dólares

Núcleo Temático

6

GEOMETRÍA MÉTRICA (1)

LOGRO GENERAL

- Utilizar, reconocer y hacer conversiones de unidades de longitud en el sistema métrico decimal, en el sistema sexagesimal y en las unidades para medir el tiempo.

LOGROS ESPECÍFICOS

Corporal:

- Manejar con habilidad instrumentos de medida como: regla, escuadra y compás.

Comunicativa:

- Interpretar el enunciado verbal de los problemas.
- Emplear correctamente el vocabulario empleado en el S.M.D. y en el sistema Inglés.

Cognitiva:

- Identificar los múltiplos y submúltiplos del metro.
- Realizar conversiones de unidades en los diferentes sistemas de medida.

Estética:

- Elaborar material didáctico para la clase.

Etica - Actitudinal:

- Resaltar la contribución de los diferentes sistemas de medida: S.M.D., Sistema sexagesimal, medidas de tiempo, etc., como herramientas útiles para resolver problemas.

INDICADORES DE LOGRO

- Mide longitudes y aberturas.
- Dibuja ángulos.
- Dibuja segmentos de medidas dadas.

- Comprende y maneja las expresiones matemáticas utilizadas en la unidad.
- Explica con claridad los procesos seguidos para pasar de una unidad de medida a otra.

- Realiza correctamente las operaciones para pasar de una unidad a otra en el S.M.D. y en el sexagesimal.
- Plantea las operaciones adecuadas para resolver problemas.
- Identifica la unidad de longitud fundamental en el S.M.D. y en el sistema sexagesimal.

- Utiliza el metro y la regla para tomar medidas.

- Muestra interés por aprender.

DIMENSIONES

EVALUACIÓN

ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS

6.1 ¿SABÍAS QUE...?

Cuentan que en una guerra ocurrida hace muchos siglos entre **mandarines** chinos, las tropas de uno de ellos debían cruzar un río. El mandarín recordaba haber leído que la profundidad promedio de ese río en aquella época del año era de un metro. "No hay problema, los soldados podrán atravesarlo a pie", pensó. Dio la orden de que así se hiciera. Cientos de soldados (todos los que no sabían nadar) se ahogaron tratando de llegar a la otra orilla. ¿Por qué? El mandarín no se dio cuenta que la profundidad promedio no es la misma en todos los puntos del río. En algunas zonas la profundidad era mucho mayor de un metro. Por eso se ahogaron los que no sabían nadar.

EJERCICIO 6-1

COMPRENSIÓN DE LECTURA: Lee nuevamente el texto anterior y luego, encierra en un círculo la letra que corresponda a la respuesta correcta:

1. El término **mandarín**, empleado en la lectura, hace referencia a:
   a. Un guerrero shaolín chino.
   b. Un gobernante o administrador de justicia en China.
   c. Un experto en artes marciales.
   d. Un estratega chino.

2. El error del mandarín consistió en:
   a. No haber empleado caballos para atravesar el río.
   b. Dejarse llevar por su prepotencia.
   c. Desconocer el significado de profundidad promedio.
   d. Ignorar que, en esa época el río bajaba crecido.

3. De la lectura anterior se puede deducir que:
   a. Para ganar batallas se deben manejar las matemáticas.
   b. Hay mandatarios muy tercos y llevados de su parecer.

c. Los militares deben tener formación matemática, humana y cristiana.
d. Es necesario el conocimiento de conceptos básicos de las matemáticas para la supervivencia humana.

4. Los soldados se ahogaron porque:

a. El mandarín no comprendió la lectura.
b. El dirigente creyó que todos sabían nadar.
c. No sabían nadar.
d. El mandarín, en un exceso de confianza, no calculó la longitud del río.

6.2 UNIDADES DE LONGITUD Y LA CIRCUNFERENCIA

6.2.1 Unidades de Longitud

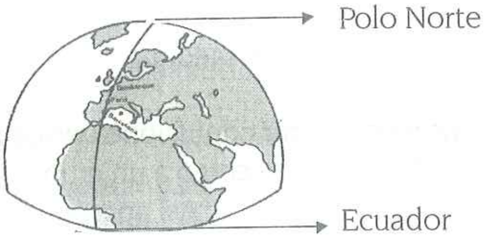
- Lee con cuidado la siguiente conversación:

Escenas como éstas eran frecuentes hace dos siglos. En cada país, incluso en cada región, se usaban unidades de diferente medida, por lo cual era difícil entenderse.

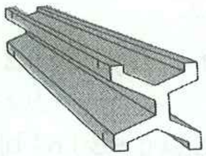
En esta unidad estudiaremos algunos sistemas de unidades desarrollados para que todo mundo estuviera de acuerdo al realizar medidas.

- Con el fin de unificar criterios y evitar confusiones respecto a la medida de una longitud, la Academia de Ciencias de Francia encargó a un grupo de científicos, en el siglo XVIII, el diseño de una unidad de longitud patrón. Así apareció **el metro**. Esta fue la historia:

- El **metro** corresponde aproximadamente a la diezmillonésima parte del cuadrante del meridiano terrestre; es decir, entre el Polo Norte y el Ecuador hay diez millones de metros o, lo que es lo mismo diez mil kilómetros.



- La longitud del metro se señaló mediante dos marcas en una barra en forma de X hecha de platino e iridio. Se conserva en la Oficina Internacional de Pesas y Medidas de París.



Este es el metro patrón o base

- El **metro** se expresa abreviadamente así: **1 metro = 1m**

RECORDEMOS

- Para medir **LONGITUDES** en el sistema métrico decimal (S.M.D.) tenemos las siguientes unidades:

  - La unidad principal: el **metro (m)**

  - Los múltiplos del metro:

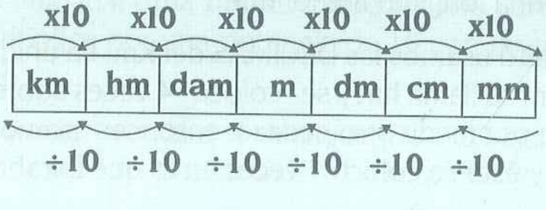
  * El **decámetro (dam) = 10 m**
  * El **hectómetro (hm) = 100 m**
  * El **kilómetro (km) = 1000 m**
  * El **miriámetro (Mm) = 10.000 m**

  - Los submúltiplos del metro:

  * El **decímetro (dm) = 0,1 m**
  * El **centímetro (cm) = 0,01 m**
  * El **milímetro (mm) = 0,001 m.**

- Los múltiplos del metro nos sirven para medir grandes longitudes; por ejemplo, la distancia entre Bogotá y Lima, la distancia entre la tierra y la luna. Los submúltiplos, en cambio, nos sirven para medir pequeñas longitudes: por ejemplo el ancho de esta hoja, el grueso de un libro.

- El siguiente cuadro de posiciones nos permite relacionar el metro, sus múltiplos y sus submúltiplos.



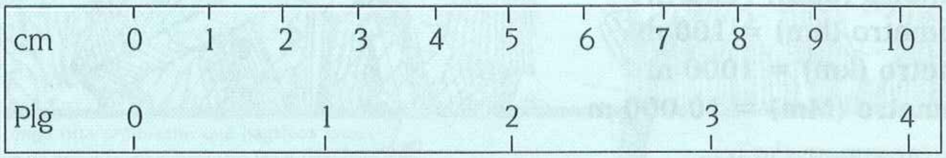
Cada unidad de longitud es 10 veces mayor que la de orden inmediatamente inferior y cada unidad de longitud es 10 veces menor que la de orden inmediatamente superior.

- **UNIDADES ASTRONÓMICAS DE LONGITUD**: se utilizan para medir grandes distancias; por ejemplo, para medir la distancia entre dos estrellas o entre el centro de dos galaxias usamos el AÑO LUZ y el PARSEC.
  - Un **Año Luz** es la distancia recorrida por un rayo de luz en el vacío en un año: 1 año luz ≈ $9_{2}461.000_{1}000.000$ km.
  - Un **Parsec**: 3,26 años luz; es decir, un parsec ≈ 30,84 billones de km.

- Otras unidades de longitud de uso común son:
  - La Milla Terrestre ≈ 1.609,34 km
  - La Milla Náutica o Nudo ≈ 1.853,2 km
  - La Legua ≈ 5.572 m
  - La Vara ≈ 80 cm
  - El Megámetro ≈ 10^6 m
  - El Micrómetro (M) = 10^{-6} m
  - El Nanómetro (n) = 10^{-9} m
  - La Unidad Angstrom (Å) = 10^{-10} m

- En los Estados Unidos, el sistema de medidas que se utiliza con mayor frecuencias es el Sistema Inglés. Las unidades más comunes son:
  - La Yarda: 1 yarda ≈ 0,9144m
  - El Pie: 1′ ≈ 30,48 cm
  - La Pulgada: 1 in = 1″ = 1 plg ≈ 2,54 cm

  La siguiente figura nos permite visualizar la diferencia entre centímetro y pulgada:



- Si la longitud de un objeto se expresa mediante un número decimal, entonces la coma se escribe inmediatamente después de la cifra(s) que indica(n) el número exacto de veces que utilizó la unidad para medir la longitud del objeto. La parte decimal corresponde a lo que falta por medir y es una fracción decimal propia de la unidad.

EJEMPLO: Cuando decimos que una carretera veredal mide 3,45 Km significa que:

1. La unidad de medida utilizada es el km
2. Se "colocó" 3 veces la unidad km a lo largo de la carretera y quedó una parte por medir ya que tiene una longitud menor que 1 km.
3. Para medir lo que faltó usamos las DÉCIMAS del Km. La unidad correspondiente a las décimas del Km se llama hm y se "colocó" 4 veces sobre la carretera. Como aún quedó faltando por medir otro pedazo, entonces usamos la CENTÉSIMA del Km, que es el dam y ésta se colocó 5 veces en lo que faltaba por medir.
4. Por lo tanto, la longitud del objeto es:

$$\mathbf{3\ km\ \frac{4}{10}\ km\ \frac{5}{100}\ km = 3\ km\ \ 4\ hm\ \ 5\ dam}$$

- El cuadro de posiciones de las unidades de longitud nos ayuda a pasar de una unidad a otra y a descomponer una unidad de longitud en las distintas unidades.

EJEMPLO:

Camilo midió la altura de una pared y anotó: 2 m 1 dm 7 cm y quiso expresarlo en dm y en m. Para mayor facilidad, Camilo ubicó los datos de la medida en un cuadro de posiciones.

Si tomo como unidad el decímetro, entonces separo con una coma los decímetros de las demás unidades de longitud que están a su derecha. Por lo tanto: 2 m , 1dm 7 cm = 21,7 dm

dam	m	dm	cm	mm
	2	1,	7	

Si tomo como unidad el metro, entonces separo con una coma los metros de las otras unidades de longitud que están a su derecha. Por lo tanto:
2m 1 dm 7 cm = 2,17 m

dam	m	dm	cm	mm
	2,	1	7	

- Cuando ubicamos una unidad de longitud en el cuadro de posiciones, debemos tener en cuenta dos cosas: la unidad en que nos piden expresar la longitud y llenar con ceros los espacios vacíos intercalados.

EJEMPLO:

Ubiquemos en el cuadro de posiciones y expresemos en hm la longitud 3m 6 mm.

hm	dam	m	dm	cm	mm
0,	0	3	0	0	6

3m 6 mm = 0,03006 hm

Posiciones Intercaladas; se reemplazan por ceros

Esta unidad se reemplaza por un CERO

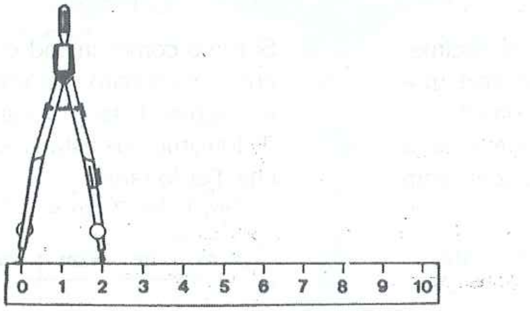
En esta unidad me piden expresar la longitud y como no aparece cifra, le coloco un CERO

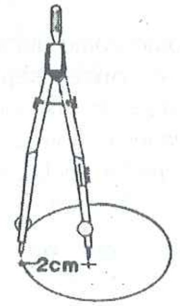
- Para pasar de una unidad a otra, que se encuentre a la derecha (→) en el cuadro de posiciones, se multiplica por una potencia de 10 con tantos ceros como unidades tenga que recorrer.
- Para pasar de una unidad a otra, que se encuentre a la izquierda (←) en el cuadro de posiciones, se divide por una potencia de 10 con tantos ceros como unidades tenga que recorrer.
- La coma se escribe SIEMPRE a continuación de la cifra correspondiente a la unidad elegida.

6.2.2 La Circunferencia y Longitud de la Circunferencia

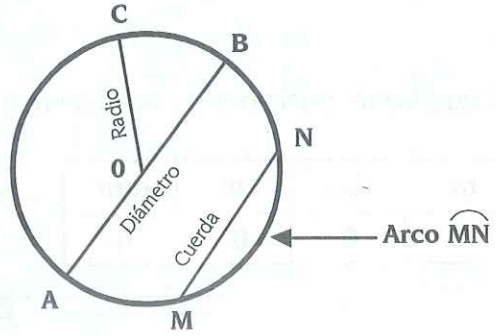
PRIMERA EXPERIENCIA

- Toma el compás y dibuja una circunferencia de 2 cm de radio. Fíjate cómo se hace.





- Comprueba que la distancia de cualquier punto de la circunferencia al centro 0 es siempre igual a 2 cm.
- Fíjate bien en la figura siguiente:



- El segmento $\overline{AB}$ es un DIÁMETRO de la circunferencia.
- El segmento $\overline{OC}$ es un RADIO de la circunferencia.
- El segmento $\overline{MN}$ es una CUERDA de la circunferencia.
- Toda CUERDA determina una porción de circunferencia llamada ARCO.

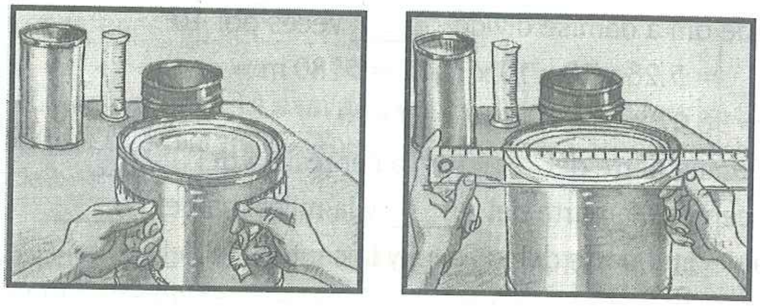
APRENDAMOS...

- Una **CIRCUNFERENCIA** es una línea curva plana cerrada cuyos puntos están a la misma distancia de otro punto fijo, del mismo plano, llamado **CENTRO.**
- La distancia del centro a cualquier punto de la circunferencia se llama **RADIO.**

- Un segmento que une dos puntos de la circunferencia se llama **CUERDA**. Si la cuerda pasa por el centro de la circunferencia se llama **DIÁMETRO.** La medida de un diámetro es igual a la medida de dos radios.
- Un **ARCO** es una porción de circunferencia determinada por dos puntos de ésta. Si estos dos puntos son los extremos de un diámetro, el arco se llama **SEMICIRCUNFERENCIA.**

SEGUNDA EXPERIENCIA

- Utiliza un metro para medir la longitud de la circunferencia de envases cilíndricos como vasos, botellas, ruedas o tubos de PVC, tal como muestra la figura siguiente:



- Anota los resultados de tus mediciones en el siguiente cuadro:

C: longitud de la circunferencia	d: diámetro	C ÷ d

- Teniendo en cuenta los resultados que anotaste en el cuadro, responde:
  a) ¿Obtienes, aproximadamente, el mismo valor al dividir la longitud de la circunferencia por su diámetro? ¿Cuál es este valor?
  b) Si multiplicas la longitud del diámetro por el número 3,14, ¿se obtiene en forma aproximada la longitud de la circunferencia?

APRENDAMOS...

- Si dividimos la longitud de una circunferencia entre su diámetro, obtenemos el número 3,141592... Este número se denomina **Pi** y lo representamos por la letra griega π, es decir: $\pi \approx$ **3,141592** (el símbolo $\approx$ se lee "aproximadamente")

- La longitud o perímetro de una circunferencia se obtiene multiplicando 3,14 por el diámetro, es decir: $\mathbf{L = \pi d = 2\pi r}$, donde $\mathbf{d = 2r}$.
- El número π es un número decimal cuya parte decimal es infinita **NO PERIÓDICA**. Por lo tanto, el número π no es un número racional.

EJERCICIO 6-2

❶ Completa:

a) Para pasar de metros a cm se multiplica ______ veces por 10.
b) Para pasar de km a dam se multiplica ______ veces por 10.
c) Para pasar de dm a dam se divide ______ veces por 10.
d) 5, 28 ______ = 5,28 x 10 x 10 x 10 m = 5280 m.
e) 38,07 hm = 38,07 x 10 x 10 x 10 x 10 x 10 ______ = 3$_1$807.000 ______.
f) 1 m es la décima parte del ______ y la centésima del ______.
g) 1 dm es la centésima parte del ______ y la milésima del ______ .
h) 1 mm es la décima parte del ______ y la centésima del ______.

❷ ¿Cuántos cm son: a) $\frac{1}{2}$ dm? b) 2,4 m? c) 47 mm?

❸ Utilizando el cuadro de posiciones:

a) Descompón en las distintas unidades las siguientes longitudes: 38,5 dam ; 0,05 km; 385,675 m.
b) Expresa cada longitud del ejercicio anterior en: hm; cm y dm.

❹ Sin utilizar la tabla de posiciones, expresa en las distintas unidades:

a) 305,678 m. b) 4,073 dam. c) 38,4 km. d) 0,057 hm.

❺ Sin mirar el cuadro de posiciones de unidades de longitud, indica cuántas unidades hay que recorrer de:

a) dam a mm b) km a cm c) km a dam d) cm a hm e) hm a km
f) dm a km g) hm a cm h) m a cm i) dam a dm

❻ Sin utilizar la tabla de posiciones (sólo multiplicando o dividiendo varias veces por 10, según corresponda), expresa:

a) 4,5 dm en dam. b) 4,5 dm en mm. c) 3,85 km en dam.
d) 804,37 m en km. e) 0,05 hm en dm. f) 4805,6 dm en hm.

❼ De todas las estrellas del firmamento, la que está más cerca al sol es Alpha del Centauro. Esta se encuentra a una distancia de 4,3 años luz. Expresa esta distancia en km.

⑧ ¿Qué unidad de longitud elegirías para medir:

a) el ancho de este libro?.
b) la punta de un lápiz?.
c) el largo de una hormiga?.
d) la distancia entre dos ciudades?.
e) el grueso de un vidrio?.
f) el largo del salón?.

⑨ Explica cuáles de las siguientes frases son lógicas:

a) Marcos mide 170 cm.
b) La altura de una pared del salón es 25 cm.
c) Julio mide 325 cm.
d) Mi pupitre mide 23 mm.

⑩ Escribe 1 km 5 dam 6 dm en: a) m b) dm c) hm d) mm

⑪ Juan mide 1.650 mm y Pedro mide 17 dm, ¿Quién es más alto? ¿Cuánto es más alto uno que otro? Escribe el resultado en mm.

⑫ En una carretera de 25 km 1.250 dm de longitud se han colocado retenes cada 100,5 dam. ¿Cuántos retenes hay?.

⑬ Un terreno rectangular tiene 14 dam de frente y $1\frac{3}{4}$ hm de fondo. Si queremos cercarlo con 180 árboles, ¿qué distancia debemos dejar entre árbol y árbol si deben quedar a igual distancia?.

⑭ Una persona debe llegar a un lugar distante 1,5 km. Recorre los $\frac{2}{3}$ de la distancia en carro y la quinta parte del resto a pie. ¿Cuántos metros le quedan por recorrer?.

⑮ Sólo uno de los siguientes enunciados es falso. Encierra en un círculo la letra correspondiente al enunciado falso.

a) Una circunferencia de centro A y radio r es el conjunto de todos los puntos de un plano cuya distancia a A siempre es r.
b) La unión de dos radios distintos de una misma circunferencia forman un diámetro, si los radios son segmentos de una misma recta.
c) La medida de un radio de una circunferencia es la mitad de un diámetro de la misma circunferencia.
d) En toda circunferencia existen cuerdas mayores que el diámetro.

⑯ Completa:

251.250

a) Un diámetro es la ______ cuerda de una circunferencia.
b) La longitud de un diámetro es ______ veces la longitud de un radio.
c) Al dividir la longitud de una circunferencia por el diámetro nos da ______.
d) La longitud de una circunferencia se calcula ______.
e) El valor aproximado de π es ______.

⑰ Un ciclista recorrió una pista circular de 34 cm de radio, ¿qué distancia hizo?.

⑱ En una cancha de fútbol el círculo central tiene como radio 9,15 m. ¿Cuánto mide la longitud de la circunferencia que hay que trazar?.

⑲ El radio de una rueda mide 30 cm. ¿Cuánto avanza en cada vuelta?.

⑳ Calcula la longitud de la circunferencia de la tuerca con el dato de la figura:

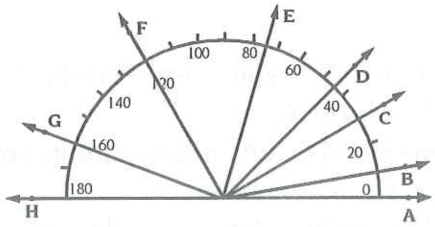
㉑ El diámetro de la luna mide 3.476 km. ¿Cuánto mide su ecuador? ¿y su radio?

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 1

Presté $\frac{2}{3}$ de los $\frac{5}{6}$ de mi dinero y me quedé con $100.000. ¿Cuánto tenía y cuánto presté?.

6.3 MEDICIÓN DE ÁNGULOS: EL SISTEMA SEXAGESIMAL

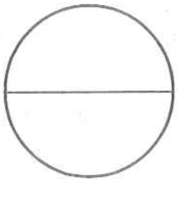
- En los cursos anteriores aprendimos que para medir ángulos usamos una unidad de medida llamada **grado** y un instrumento llamado **transportador.**



- Las siguientes experiencias te ayudarán a comprender lo que es un grado y a recordar cómo se utiliza el transportador.

PRIMERA EXPERIENCIA

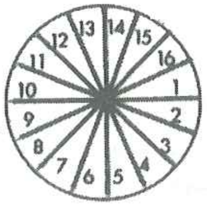
- Dibuja en una cartulina delgada una circunferencia de 2.2 cm de radio, trázale un diámetro y recórtala; así:



- Ahora dóblala por uno de los diámetros. Repite la operación de doblar, haciendo coincidir los pliegues, otras tres veces:

Primer doblado Segundo doblado Tercer doblado Cuarto doblado

- Ahora desdobla la hoja. Podrás comprobar que ha quedado dividida en 16 ángulos iguales. Si tomamos cada uno de ellos como unidad de medida, habremos elegido una amplitud base o patrón para medir otros ángulos.



Amplitud Base o Patrón

- Sin embargo, esta amplitud base o patrón la hemos inventado nosotros y no es la que se utiliza universalmente para medir ángulos. Si continuamos doblando la hoja hasta dividirla en 360 ángulos iguales, cada uno de ellos representa la unidad de medida aceptada universalmente. Esta unidad de medida se llama **grado sexagesimal** y lo representamos así: **1°**

- A veces es necesario emplear unidades más pequeñas que el grado para medir ángulos de una forma más precisa. Con este fin, se divide el grado sexagesimal en 60 partes iguales. Cada una de estas partes es un **minuto sexagesimal** y lo representamos así: **1'**. Por lo tanto: **1° = 60'**

  Así mismo, un minuto sexagesimal lo podemos dividir en 60 partes iguales. Cada una de éstas se llama **segundo sexagesimal** y lo representamos así: **1"**. Por lo tanto: **1' = 60"**

- Como podemos observar, las unidades de medida de este sistema varían de 60 en 60. Por esta razón, este sistema se denomina sistema sexagesimal.

$$\left.\begin{aligned} 1^\circ &= 60' \\ 1' &= 60'' \end{aligned}\right\} \therefore\ 1^\circ = 60 \times 60'' = 3.600''$$

¡ATENCION!

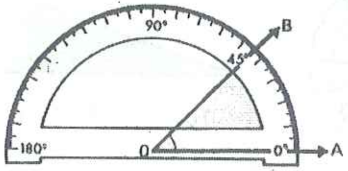
Conviene revisar en el texto Matemática Experimental 6 los siguientes conceptos:

1. ¿Qué es un ángulo?.
2. ¿Qué son lados de un ángulo? ¿Y vértice de un ángulo?.
3. ¿Cómo se nombra un ángulo?.
4. ¿Cómo se clasifican los ángulos de acuerdo con su medida y de acuerdo con su posición?.
5. ¿Qué es bisectriz de un ángulo?.

PARA INVESTIGAR: Además del sistema sexagesimal, hay otros sistemas para medir ángulos. Estos sistemas son: el **sistema circular, el sistema centesimal**. Averigua en qué consiste cada uno de estos sistemas.

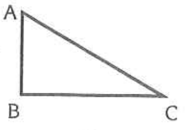
SEGUNDA EXPERIENCIA

- Para medir ángulos con el transportador hacemos coincidir el vértice con el centro del transportador y uno de los lados del ángulo con la semirrecta que une el centro con el 0°. El otro lado del ángulo señalará su medida. Observemos.

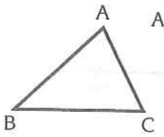


La medida del ángulo AOB de la figura anterior se representa $m\widehat{AOB}$. Por lo tanto: $m\widehat{AOB} = 45°$.

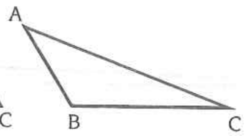
- Mide los ángulos de cada uno de los siguientes polígonos, suma las medidas y escribe el resultado en cada cuadro.



(1)

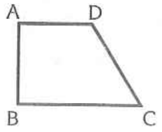


(2)



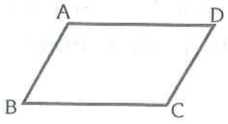
(3)

Triángulo	$m\hat{A}+m\hat{B}+m\hat{C}$
(1)	
(2)	
(3)	



(1)

(2)



(3)

Cuadrilátero	$m\hat{A}+m\hat{B}+m\hat{C}+m\hat{D}$
(1)	
(2)	
(3)	

EJERCICIO 6-3

❶ Completa

a) El grado es la unidad fundamental para medir ______ en el sistema ______.

b) 40° se lee ____.

c) 1 grado es igual a ______ minutos. 1′ es cada una de las 60 partes en que se divide el ______ .

d) 1 minuto es igual a _______ segundos. 1″ es cada una de las 60 partes en que se divide el __________________.

e) 28′ se lee ______ , 28″ se lee ______________ y 28° se lee ______________________.

f) 1 grado es igual a __________ segundos.

② Si el $\measuredangle$ A0B mide 6 grados 3 minutos 8 segundos, escribimos m $\widehat{AOB} = 6^\circ\, 3'\, 8''$.
Completa:

a) Si el $\widehat{\theta}$ mide 5 grados 2 minutos 1 segundo, se escribe __________.

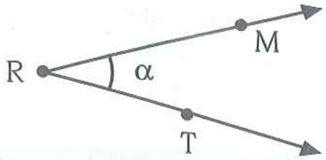
b) Si el $\widehat{2}$ mide 7 grados 9 minutos 4 segundos, se escribe __________.

c) Si el $\widehat{AMB}$ mide 13 grados 8 minutos, se escribe __________.

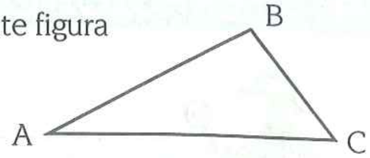
③ Responde:

a) ¿Qué es un ángulo?.
b) ¿Qué son lados de un ángulo?.
c) ¿Qué es vértice de un ángulo?.

④ Nombra de tres maneras diferentes el siguiente ángulo:



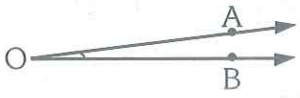
⑤ Nombra todos los ángulos que aparecen en la siguiente figura



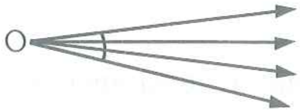
⑥ Contesta:

a) ¿Qué es ángulo agudo?.
b) ¿Qué es ángulo obtuso?.
c) ¿Qué es ángulo recto?.
d) ¿Qué es ángulo llano?.

⑦ Si el $\measuredangle$ ACB se toma como unidad de medida, ¿cuál es la medida del ángulo O?.

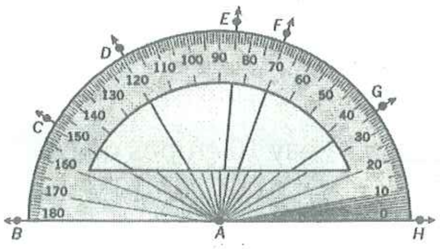


unidad de medida



⑧ Teniendo en cuenta la siguiente figura, halla:

a) m $\measuredangle$ HAF
b) m $\measuredangle$ DAF
c) m $\measuredangle$ HAG
d) m $\widehat{HAE}$
e) m $\widehat{HAC}$
f) m $\widehat{BAC}$



⑨ Dibuja y mide:

a) Un ángulo agudo
b) Un ángulo recto.
c) Un ángulo obtuso.
d) Un ángulo llano

⑩ Dibuja, con un transportador, ángulos cuyas medidas son:

a) 37° b) 65° c) 108° d) 135°

⑪ Dibuja, sin usar transportador, ángulos cuya medida sea aproximadamente:

a) 60° b)90° c)150°

⑫ Ahora, mide con el transportador los ángulos que dibujaste y comprueba que tan cerca estuviste de la realidad.

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 2

Los $\frac{2}{5}$ de mis lápices son blancos, $\frac{1}{3}$ son azules y los 12 restantes, verdes. ¿Cuántos lápices tengo?.

6.4 OPERACIONES CON MEDIDAS DE ÁNGULOS

PRIMERA EXPERIENCIA

- Observemos cómo se convierten 16° 31' en minutos.
  - Como un grado tiene 60' entonces 16° tendrán: **16 x 60' = 960'**
  - Y como ya tengo 31', entonces el total de minutos que hay en 16° 31' es **960' + 31' = 991'**
- Ahora veamos cómo se transforman 42° 3' 52" en segundos.
  - Como 1° = 3.600" entonces 42° serán: **42 x 3.600" = 151.200"**
  - Como 1' = 60" entonces 3' serán: **3 x 60" = 180"**
  - Y como ya tenemos 52", entonces el total de segundos que hay en 42° 3' 52" es **151.200"+ 180" + 52" = 151.432"**
- Convirtamos, ahora, 637' en grados y minutos

De estos minutos

637' | 60
37' 10°

hay 10 grupos de 60 que son 10°

sobran estos minutos

Luego, 637' = 10° 37'

- Convirtamos 27.859" en grados, minutos y segundos.

De estos segundos

$$\begin{array}{rr|l} 27.859'' & 60 & \\ \cline{2-2} 385 & 464 & \!\!\!\big| \; 60 \\ \cline{3-3} 259 & 44' & 7^\circ \\ 19'' & & \end{array}$$

sobran estos segundos

Grupos de 60 segundos son minutos. Luego 464 son minutos

Luego, 27859" = 7° 44' 19"

SEGUNDA EXPERIENCIA

- Sumemos 18° 47' 45'' con 43° 58' 32''

Primero escribimos los números en forma vertical y sumamos aparte las unidades de cada clase.

Como el número de segundos que obtuvimos es mayor o igual que 60 lo convertimos en minutos: 77" = 1' y 17"

Como el número de minutos es mayor o igual que 60 lo convertimos en grados.

$$\begin{array}{rrrr} & 18^\circ & 47' & 45'' \\ + & 43^\circ & 58' & 32'' \\ \hline & 61^\circ & 105' & \cancel{77}'' \\ & & 1' & 17'' \\ \hline & 61^\circ & \cancel{106}' & 17'' \\ & 1^\circ & 46' & 17'' \\ \hline & 62^\circ & 46' & 17'' \end{array}$$

TERCERA EXPERIENCIA

- De 17° 31' 43" restemos 2° 45' 53"

Colocamos los números en forma vertical y realizamos separadamente las restas entre las unidades de la misma clase. La resta se realiza empezando por los segundos.

$$\begin{array}{rrrr} & 17^\circ & 31' & 43'' \\ - & 2^\circ & 45' & 53'' \\ \hline \end{array}$$

Como de 43" no podemos restar 53" entonces vamos a los 31', le pedimos "prestado" 1', éste lo convertimos en 60" y éstos los sumamos a los 43" que ya tenemos: 60"+43"=103". Ahora ya podemos restar los segundos.

1" = 60"

$$\begin{array}{rrrr} & 17^\circ & \cancel{31}' & 43'' \\ - & 2^\circ & 45' & 53'' \\ \hline \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{rrrr} & 17^\circ & 30' & 103'' \\ - & 2^\circ & 45' & 53'' \\ \hline & & & 50'' \end{array}$$

Como de 30′ no podemos restar 45′ entonces vamos a los 17°, le pedimos "prestado" 1°, lo convertimos en 60′ y éstos los sumamos a los 30′ que ya tenemos: 60′+30′=90′. Ahora ya podemos restar con minutos

$$\begin{array}{rrrr} & \overset{1^\circ = 60'}{\cancel{17}^\circ} & 30' & 103'' \\ - & 2^\circ & 45' & 53'' \\ \hline & & & 50'' \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{rrrr} & 16^\circ & 90' & 103'' \\ - & 2^\circ & 45' & 53'' \\ \hline & 14^\circ & 45' & 50'' \end{array}$$

- Por lo tanto, 17° 31' 43" - 2° 45' 53" = 14° 45' 50"

CUARTA EXPERIENCIA

- Multipliquemos (47° 39' 28") x 4

- Escribimos los números como lo hacemos ordinariamente en la multiplicación.
- Cuando el número de minutos o segundos sea mayor de 60 hacemos lo mismo que en la suma

$$\begin{array}{rrr} 47^\circ & 39' & 28'' \\ & & \times\ 4 \\ \hline 188^\circ & 156' & \underbrace{\cancel{112}''} \\ & 1' & 52'' \\ \hline 188^\circ & \underbrace{\cancel{157}'} & 52'' \\ 2^\circ & 37' & \\ \hline 190^\circ & 37' & 52'' \end{array}$$

- Luego, (47° 39' 28") x 4 = 190° 37' 52"

QUINTA EXPERIENCIA

- Finalmente vamos a dividir (73° 29' 47") ÷ 4

- Empezamos dividiendo los grados entre 4. Si queda residuo, entonces lo convertimos en minutos y los sumamos con los minutos que ya tenemos.
- A continuación, dividimos los minutos entre 4. Si queda residuo, los convertimos en segundos y los sumamos con los que ya tenemos.
- Finalmente, dividimos los segundos por 4.

$$\begin{array}{rrr|l} 73^\circ & 29' & 47'' & 4 \\ \cline{4-4} -\ 72^\circ & & & 18^\circ\ 22'\ 26'' \\ \cline{1-1} 1^\circ = & 60' & & \\ \cline{2-2} & 89' & & \\ & 1' = & 60'' & \\ \cline{3-3} & & 107'' & \\ & & -\ 104'' & \\ \cline{2-3} & & 3'' & \end{array}$$

PREGUNTA: ¿Qué hacemos con estos 3" que sobraron?

- Por lo tanto, (73° 29' 47") ÷ 4 = 18° 22' $26\frac{3}{4}$"

EJERCICIO 6-4

❶ Convierte en minutos:

a) 27° 19'   b) 48° 38'   c) 242° 56'

❷ Convierte en segundos:

a) 38° 52'   b) 24° 27'   c) 63° 12' 15"

❸ Convierte en grados, minutos y segundos:

a) 387'   b) 57' 322"   c) 825.327"

d) 87' 894"   e) 3° 147' 398"   f) 39' 8468"

❹ Calcula:

a) 72° 38' 35" + 43° 58' 32"   b) 80° 57' 53" + 1° 52' 48"

c) 28° 16' 57" - 5° 27' 42"   d) 7° 32' - 2° 49"

e) 72° + 80.978" - 16° 58'   f) 95° - 12° 85" - 123' - 84"

❺ Calcula:

a) (54° 23' 42") x 5   b) (3° 28' 53") x 8

c) (27° 37' 48") ÷ 7   d) (45° 13' 56") ÷ 2

❻ ¿Cuánto mide un ángulo que es $\frac{3}{5}$ de otro que mide 46° 27' 30"?.

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 3

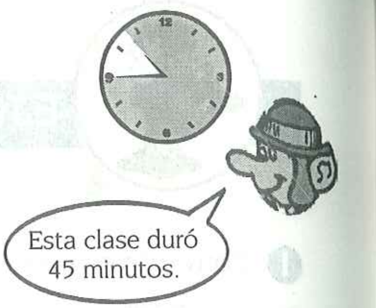
Un padre deja a su hijo mayor $\frac{3}{11}$ de su fortuna; al segundo $\frac{1}{11}$ de ella; al tercero, $\frac{1}{4}$ de lo que ha dado a los otros dos juntos, y al cuarto los $8ı400.000 restantes. ¿A cuánto ascendía la fortuna?.

6.5 EL TIEMPO Y SU MEDIDA

- El concepto de tiempo está estrechamente ligado con los conceptos de movimiento, acción, cambio, hechos que ocurren, eventos y sucesos.

PRIMERA EXPERIENCIA

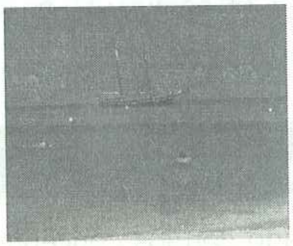
- Fíjate bien en lo que están conversando Andrés, Lina y Juan.



- La duración entre el principio de una acción y el final de la misma se denomina INTERVALO DE TIEMPO.
- Si tomamos como unidad de medida al minuto, ¿cuál fue el intervalo de tiempo de la clase de sociales?.
- Piensa y responde: ¿Cuáles de los siguientes intervalos de tiempo son probables y cuáles son improbables?.
  - a) Mario necesita 3 horas para lavarse los dientes.
  - b) Félix realiza los ejercicios de matemáticas en 1 hora.
  - c) Sara recorre 100 metros en 5 segundos.
  - d) El profesor de matemáticas puede contar desde 1 hasta 100 en 5 segundos.
- Pero, ¿cómo medimos el tiempo? Las siguientes experiencias nos ayudarán a comprender cómo se han determinado las unidades para medir el tiempo.

SEGUNDA EXPERIENCIA

- La TIERRA tiene forma aproximadamente ESFÉRICA, como lo prueban las siguientes situaciones:
  - La forma circular del horizonte.
  - El que los barcos se ocultan al alejarse de la costa.
  - Las fotografías que se obtienen desde los satélites artificiales.

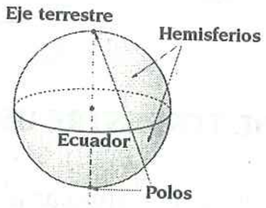


- Algunos elementos de la superficie terrestre son los siguientes:
  - **EJE TERRESTRE:** es la recta imaginaria alrededor de la cual gira la tierra en su movimiento de rotación. Este eje pasa por el centro de la tierra.
  - **POLOS:** son los puntos donde el eje terrestre intercepta a la superficie de la tierra. Son dos: el polo norte y el polo sur. Son los únicos puntos que permanecen inmóviles en la rotación de la tierra.
  - **ECUADOR:** es la circunferencia máxima, perpendicular al eje terrestre.

- **HEMISFERIOS**: son cada una de las dos mitades en que el ecuador divide a la tierra. El HEMISFERIO NORTE es el que contiene al polo norte y el HEMISFERIO SUR es el que contiene al polo sur.
- **LAS DIMENSIONES DE LA TIERRA** son:

  * Radio polar: 6.357 km, * Radio ecuatorial: 6.379 km, *Radio medio: 6.371 km

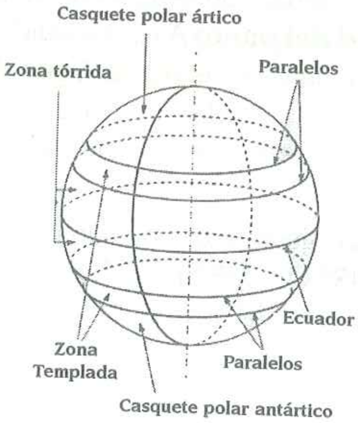
  La menor longitud del radio polar con relación al radio ecuatorial se debe a que la tierra es "achatada" en los polos.
- **LOS ACCIDENTES GEOGRÁFICOS DEL SUELO TERRESTRE**; por ejemplo, el Everest con casi 9.000 m de altura y la fosa de las Marianas, con casi 11.000 m de profundidad, resultan insignificantes frente a la magnitud del radio terrestre.



- **MERIDIANOS:** en la red geográfica, un meridiano es una semicircunferencia máxima cuyos extremos coinciden con los polos de la tierra. Representan un arco de circunferencia que mide 180°. El arco opuesto a un meridiano, que resulta de unir sus extremos de manera que se forme una circunferencia máxima se denomina ANTIMERIDIANO. Los meridianos son perpendiculares al ecuador. Por un punto de la superficie esférica pasa un solo meridiano, excepto en los polos, por donde pasan todos.
- **HUSO:** es cada una de las partes de la superficie esférica limitada por dos meridianos.
- **PARALELOS**: son circunferencias menores, paralelas al ecuador. El único paralelo que es circunferencia máxima es el **ecuador**. Por cualquier punto de la superficie terrestre, salvo por los polos, pasa un paralelo.
- **ZONA:** es la parte de la superficie terrestre comprendida entre dos paralelos. Las zonas de la Tierra son:

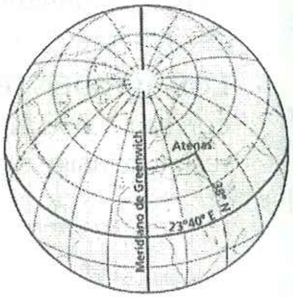
  * ZONAS TÓRRIDAS: están limitadas por el ecuador y los trópicos.

  * ZONAS TEMPLADAS: están limitadas por los trópicos y los círculos polares.
- **CASQUETE:** es la parte de la superficie terrestre determinada por un paralelo y el polo más cercano. En la Tierra los casquetes están determinados por dos paralelos llamados: CÍRCULO POLAR ÁRTICO y CÍRCULO POLAR ANTÁRTICO.



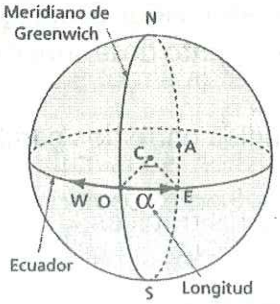
- **SISTEMA DE COORDENADAS GEOGRÁFICAS**: para determinar la posición de un punto sobre la superficie terrestre se utiliza una red, parecida a una cuadrícula, formada por meridianos y paralelos.

  Los elementos que determinan el **sistema de coordenadas geográficas** son similares a los del diagrama cartesiano que usamos para localizar puntos en el plano. Estos elementos son:

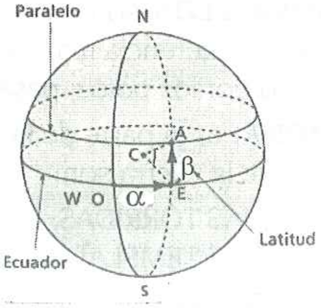


  - **LOS EJES**
    - * Se toma como eje horizontal el **ecuador**.
    - * Se toma como eje vertical el **meridiano** que pasa por **Greenwich.**
    - * El origen de coordenadas es el punto de intersección del **ecuador** con el meridiano de **Greenwich**.
    - * La unidad de medida es el **grado**.
  - **PARA LOCALIZAR UN PUNTO EN LA SUPERFICIE TERRESTRE USAMOS DOS COORDENADAS:** la **longitud** y la **latitud**.
    - * **LONGITUD**: los meridianos se nombran por su distancia angular al meridiano de Greenwich, diferenciando meridianos ubicados al este (a la derecha) y meridianos ubicados al oeste (a la izquierda). La longitud se mide de 0° a 180° en dirección este y de 0° a 180° en dirección oeste. Todos los puntos de un mismo meridiano tienen la misma longitud. Por ejemplo, en la figura (a), la longitud del punto E es la medida angular (α) del arco determinado sobre el ecuador por el meridiano que pasa por los dos puntos A y E y el meridiano de Greenwich.

(a)



(b)



    - * **LATITUD:** los paralelos se nombran por su distancia angular al **ecuador**, anotando si están por encima o por debajo de éste; es decir, paralelos al norte o paralelos al sur. Por ejemplo, la **latitud del punto A** es la medida angular (β) del arco determinado sobre el meridiano que pasa por el punto A por el ecuador y el paralelo que pasa por el punto A (figura (b)). La latitud se mide de 0° a 90° en dirección norte y de 0° a 90° en dirección sur. Todos los puntos de un mismo paralelo tienen la misma latitud.
  - Por ejemplo, las coordenadas geográficas de París y Río de Janeiro son: París (3.35° E, 48.85° N) ; Río de Janeiro (43° O , 23° S)

TERCERA EXPERIENCIA

EL DÍA Y LA NOCHE: Movimiento de Rotación.

- La tierra gira sobre sí misma en sentido antihorario (↺); sin embargo, da la sensación de que son los cuerpos celestes los que giran alrededor de ella. Este es el **movimiento aparente** que perciben nuestros sentidos. Entre estos cuerpos celestes los más importantes son el Sol y la Luna, los cuales han influenciado la vida en la Tierra desde su aparición.

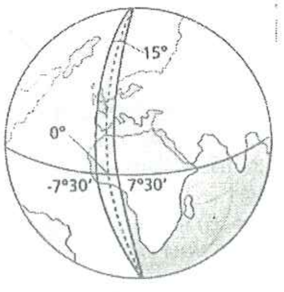
- El tiempo que tarda el Sol en dar una vuelta en su **movimiento aparente** alrededor de la Tierra se llama DÍA. Es el tiempo que tarda en pasar el sol dos veces seguidas por el meridiano del lugar donde se encuentra el observador. En realidad, este es el tiempo que tarda la Tierra en dar una vuelta completa sobre sí misma.

  Cuando el Sol pasa por encima del meridiano del lugar, estamos en el **mediodía** y cuando pasa por el antimeridiano, estamos en la **medianoche**.

- El tiempo que tarda la Tierra o el Sol (en su movimiento aparente) en dar una vuelta completa se ha dividido en 24 partes, llamadas HORAS. Si tomamos como hora cero el instante en que el Sol pasa por el antimeridiano, entonces las horas que marcan los relojes dependerán del lugar donde cada uno viva; por lo tanto, dos lugares muy próximos tendrían horas diferentes. Para evitar ésto se han inventado los HUSOS HORARIOS.

- La superficie terrestre se divide en 24 **husos horarios** de 15° cada uno. Estos husos horarios coinciden con los **husos esféricos** de 15° que obtenemos al dividir 360° entre 24.

  Como meridiano origen se toma el de **Greenwich**. Su huso horario se define tomando 7,5° en dirección este y 7,5° en dirección oeste. Todas las poblaciones ubicadas dentro de este huso adoptan la misma hora. Algunos países que pertenecen al huso horario de Greenwich son: Inglaterra, Alemania, parte de Francia, una parte muy pequeña de España, todos los países nórdicos (Noruega, Suecia, Finlandia y Dinamarca).



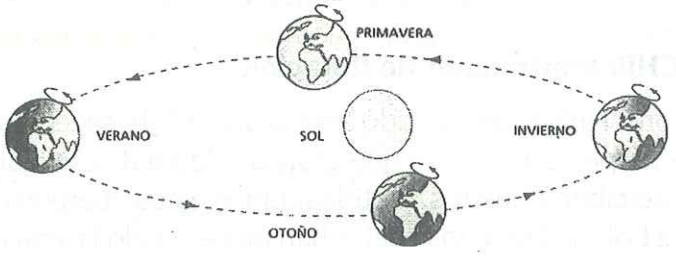
- A partir del huso horario de Greenwich se determinan los otros 23 husos horarios. Cuando se pasa de un huso horario a otro se adelanta una hora si se va hacia el este o se atrasa una hora si se va hacia el oeste.

Ejemplo: Cuando en Francia es **mediodía**, ¿qué hora es en una población cuyas coordenadas geográficas son (75° O, 35° N)?.

Solución: Como la tierra se mueve en sentido antihorario (es decir, de izquierda a derecha), entonces para que sea mediodía en ese punto, la Tierra debe girar 75° más desde el momento en que pasa por Greenwich (que es el meridiano de Francia). Estos 75° equivalen a cinco horas. Luego, en la población son las 7 de la mañana.

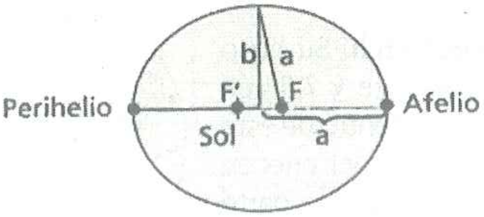
EL AÑO: Movimiento de Traslación.

- El movimiento aparente del Sol no es sino una consecuencia de **Movimiento de Traslación** de la Tierra alrededor del Sol. Es la Tierra la que en UN AÑO describe un giro completo alrededor del Sol.

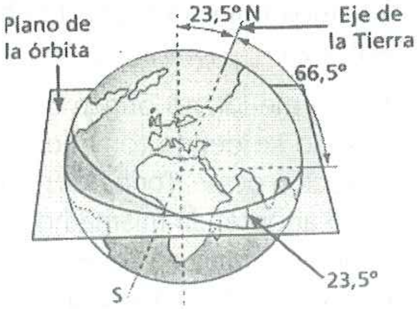


- La Tierra gira alrededor del Sol describiendo una trayectoria elíptica (⬭). En el siglo XVII el matemático J. Kepler afirmó: "Todos los planetas describen órbitas elípticas alrededor del Sol estando ubicado éste en uno de los focos". Así, pues, la órbita de la Tierra es una **elipse**.
- El punto más cercano de la Tierra al Sol se llama **perihelio** y se encuentra a unos 147'050.000 km y el punto más lejano se llama **afelio** y se encuentra a 152'140.000 km (ver la figura (a) siguiente).
- La duración de la traslación de la Tierra alrededor del Sol es 365,25 días.
- En su movimiento alrededor del Sol, la Tierra gira en un plano llamado ECLÍPTICA. El eje de giro de la Tierra no es perpendicular a la eclíptica sino que forma con la perpendicular al plano un ángulo de 23,5°. O lo que es igual: el ángulo que forman el plano ecuatorial y el plano de la eclíptica es 23,5° (Ver la figura (b) siguiente).

(a)



(b)



Al trasladarse la Tierra, esta inclinación determina las estaciones y la variación de los días y las noches.

APRENDAMOS...

- **El CONCEPTO DE TIEMPO** está estrechamente ligado con los MOVIMIENTOS de la Tierra.

- Las unidades básicas del tiempo están relacionadas con los movimientos de **ROTACIÓN y TRASLACIÓN** de la Tierra; así:
  - El tiempo que tarda la Tierra en dar una vuelta completa alrededor del Sol se denomina **AÑO.**
  - El tiempo que tarda la Tierra en dar una vuelta completa alrededor de su Eje se denomina **DÍA.**
  - Ya dijimos antes que 1 año = 365,25 días. Cada 4 años se completa un día más ya que 0,25 x 4 = 1. Por esta razón cada 4 años tenemos un año de 366 días, el cual se denomina AÑO BISIESTO. Este día de más se agrega al mes de Febrero.
- Otras unidades utilizadas para medir el tiempo son las siguientes:
  - El **MES**: son las 12 partes (no iguales) en que se divide el año. Recordemos que: **"30 días tienen noviembre con abril, junio y septiembre; de 28 sólo uno; los demás de 31"**.
  - La **HORA:** son las 24 partes iguales en que se divide un día.
  - El **MINUTO:** son las 60 partes iguales en que se divide una hora.
  - El **SEGUNDO**: son las 60 partes iguales en que se divide un minuto.
- El **SEGUNDO** es la unidad fundamental de medida del tiempo en el Sistema Internacional de Medidas (S.I.M.).

EJERCICIO 6-5

1 Completa:

a) La duración entre el principio de una acción y el final de la misma se denomina ______________________.

b) La forma de la tierra es aproximadamente ______________________

c) El concepto de tiempo está ligado con los ____________ de la Tierra que son __________ y __________ .

d) Se denomina AÑO el ______________________ .

e) Se denomina DÍA el ______________________ .

f) Las dos unidades fundamentales empleadas para medir el tiempo son el ___________ y el ___________.

g) La unidad fundamental para medir el tiempo, en el Sistema Internacional de Medida se llama ________________.

h) Un año equivale a _____ meses, un día equivale a _____ horas, una hora equivale a ______ minutos, un minuto equivale a ______ segundos y un año bisiesto tiene ______ días.

i) En su movimiento de traslación alrededor del Sol, la Tierra gira en un plano llamado ________________________________.

j) El ángulo que forman el plano ecuatorial y el plano de la eclíptica mide ___________.

② Responde: En la esfera terrestre:

a) ¿Qué son polos?. b) ¿Qué es el ecuador?.
c) ¿Qué son hemisferios?. d) ¿Qué son husos?.
e) ¿Qué son paralelos?. f) ¿Qué es zona?.
g) ¿Qué es meridiano?. h) ¿Qué es meridiano terrestre?.
i) ¿Cuáles son los ejes del sistema de coordenadas geográficas? ¿Y el origen?.
j) ¿Qué es latitud? ¿Y longitud?.
k) ¿Cómo se localiza un lugar en el sistema de coordenadas terrestres?.

③ Si en París, cuyas coordenadas geográficas son (3,35° E, 48,85 N) son las 10 de la mañana, ¿qué hora será en Nueva York cuyas coordenadas geográficas son (74° O y 40° N)?.

④ Utilizando una esfera terrestre, determina las coordenadas geográficas de:

a) Tu ciudad. b) Roma. c) México. d) Buenos Aires.

⑤ Localiza las ciudades cuyas coordenadas geográficas son:

a) (74° O, 41° N). b) (54° O, 35° S).

⑥ Cuando en Italia es mediodía, ¿qué hora es en un punto cuyas coordenadas geográficas son (45° O, 23° N)?.

⑦ Contesta:

a) ¿Todos los meridianos tienen el mismo radio? ¿Y los paralelos?.
b) ¿Qué lugar de la Tierra tiene 0° de longitud y 0° de latitud?.
c) Carlos dice que sólo existen 24 meridianos: los correspondientes a los husos horarios. ¿Es cierta esta afirmación? Justifica tu respuesta.
d) ¿Cuántos grados mide un huso horario?.
e) ¿Qué diferencia horaria hay entre dos husos horarios consecutivos?.
f) ¿Qué es un lustro? ¿Un siglo? ¿Una década? ¿Un milenio?.
g) ¿Cuántos minutos tiene un día? ¿Y cuántos segundos?.
h) ¿Cuántos minutos son media hora? ¿Un cuarto de hora? ¿Tres cuartos de hora?.

⑧ Responde: En 1.832 horas:

a) ¿Qué operación debo hacer para saber cuántos grupos de 24 horas hay? Explica.
b) ¿Cuántos días hay? Explica.
c) Si 1.832 h se divide entre 24, ¿cuál es la unidad del residuo? Explica.
d) ¿Son 1.832 h = 3d 8h (d: días, h: horas)? Explica.

⑨ Responde: En 200 minutos:

a) ¿Cuántas horas hay? Explica.
b) Al dividir 200 minutos por 60, ¿cuál es la unidad del residuo? Explica.
c) ¿Es 200 minutos = 3 h 20 min? Explica.

⑩ Transforma en horas, minutos y segundos. Observa un ejemplo:

Ejemplo: Transformemos 5.045 segundos en horas, minutos y segundos.

Solución :

5.045 segundos | 60
245 84 minutos | 60
5 segundos 24 minutos 1hora

Luego, 5.045 segundos = 1 h 24 min 5 segundos.

a) 6.423 segundos b) 13.004 segundos

⑪ Transforma en horas y minutos. Observa el ejemplo.

Ejemplo: Transformemos 4,5 horas en horas y minutos.

Solución

4,5 horas = 4h + 0,5 h = 4h + (0,5 x 60) min = 4h + 30 min = 4h 30 min

a) 7,2 h b) 13,05 h c) 1,7 h

⑫ Transforma en minutos y segundos.

a) 8,5 min b) 4,3 min c) 3,8 min

⑬ Transforma en minutos y luego en segundos.

a) 36 horas b) 7,2 horas

⑭ Resuelve:

a) 15 h 55 min + 47 min b) 2 h 39 min - 43 min

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 4

Ayer perdí los $\frac{3}{7}$ de mi dinero y hoy los $\frac{3}{8}$ de lo que me quedaba. Si todavía tengo $10.000; ¿cuánto tenía al principio?.

TALLER DE REPASO DE LA UNIDAD 6

1. Responde:

✓a) ¿Cuál es la unidad de medida patrón para medir longitudes en el sistema métrico decimal?.

✓b) ¿Cuál fue el origen del metro? ¿A qué equivale un metro?.

✓c) ¿Cuáles son los múltiplos del metro? ¿Y los submúltiplos?.

✓d) ¿Cómo varían las unidades de longitud?.

✓e) ¿Qué es una circunferencia? ¿Qué es un círculo?.

✓f) ¿Cuáles son los elementos de una circunferencia?.

✓g) ¿Qué es diámetro, arco y cuerda de una circunferencia?.

✓h) ¿Qué es una semicircunferencia?.

✓i) ¿Cómo se obtiene la longitud de una circunferencia?.

j) ¿Qué es un grado sexagesimal?.

k) ¿Qué es un radián?.

l) En el sistema sexagesimal de medición de ángulos, ¿qué es un minuto? ¿Y un segundo?.

m) ¿Cómo se mide con el transportador un ángulo de 140º?.

n) Si un ángulo mide 47,43º, ¿Cuántos grados, minutos y segundos tiene?.

o) ¿Por qué sabemos que la Tierra tiene forma esférica?.

p) ¿Qué es el Eje Terrestre? ¿Qué son los Polos? ¿Qué es Ecuador Terrestre? ¿Qué son Hemisferios? ¿Cuál es el radio medio de la Tierra?.

q) ¿Qué son los meridianos terrestres? ¿Qué son los antimeridianos terrestres? ¿Qué es un huso esférico? ¿Qué son los paralelos terrestres? ¿Cuáles son las zonas terrestres? ¿Qué son casquetes esféricos?.

r) En el Sistema de Coordenadas Geográficas: ¿cuáles son los ejes coordenados?, ¿cuál es el origen?, ¿qué es longitud?, ¿qué es latitud?, ¿cómo se localiza un punto en la superficie terrestre?.

s) ¿A qué se deben el día y la noche en la Tierra?, ¿a qué se debe el año?.

t) ¿Cuáles son las unidades fundamentales, en el Sistema Internacional de Medidas, para medir el tiempo? ¿Cómo varían estas unidades?.

✓ **2.** Utiliza una escuadra o una regla y dibuja un segmento de longitud:

a) 1,37 dm b) 0,89 dm c) 3,7 cm e) 1dm 2cm 3mm

3. Para ir al colegio, Luis da 723 pasos de 0,8 m cada uno, ¿cuántos km recorre durante un año escolar de 200 días, si hace el mismo trayecto dos veces al día?.

4. El largo máximo reglamentario de una cancha de fútbol es 120 m. Expresa esta longitud en:

a) km b) dam c) dm d) mm

5. Ordena las siguientes longitudes de menor a mayor:

2,5 dam ; 2400 dm; 0,075 km; 250000 mm

6. Suma la cantidad necesaria para completar una longitud de 1 metro:

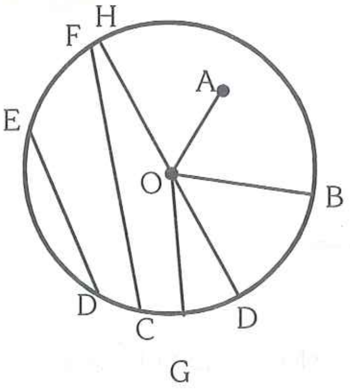
a) 5 cm + ☐ b) 225 mm + ☐ c) 7,5 dm + ☐ d) 0,0006 km + ☐

7. En la terraza de una casa se han colocado tres alambres para secar la ropa. El primero mide 3m 5dm; el segundo, 1 dam 7 dm y, el tercero 23 cm más que el primero. Responde:

a) ¿Cuántos metros de alambre necesitó la dueña de casa?.
b) ¿Cuántos decímetros de alambre hay?.
c) ¿Cuántos centímetros de alambre hay?.

8. El largo de una piscina es 2,5 dam y su ancho 12 m. Si un nadador da 10 vueltas a la piscina, ¿nada más o menos de 1 km?.

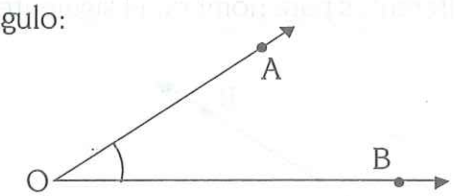
9. Teniendo en cuenta la siguiente figura, responde:



a) ¿Cuáles segmentos son cuerdas?.
b) ¿Cuál es diámetro? ¿Cuánto mide?.
c) ¿Cuánto mide la longitud de esta circunferencia?.
d) ¿Cuáles segmentos no son cuerdas?.
e) ¿Cuál es el arco limitado por el ángulo BOD? Píntalo de rojo.

10. Un ciclista recorrió una pista circular de 34 m de radio. ¿Qué distancia recorrió?.

11. a) Usando el transportador, dibuja un ángulo de 110,5°.
b) Mide el siguiente ángulo:



12. Calcula:

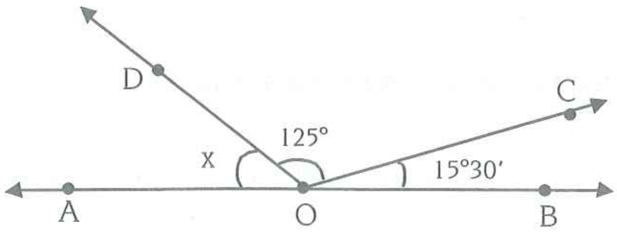
a) 36° 53' 48" + 12° 57' 58"
b) 12° 8′ 5″ - 3° 38′ 42″
c) (3° 27' 38") x 8
d) (13° 47' 10") ÷ 2

13. a) ¿Cuánto mide un ángulo que es los $\frac{7}{2}$ de otro que mide 15° 4' 42"?.

b) Dividimos un ángulo recto en 4 partes. La primera mide 8° 17'; la segunda, 18° 19' y las otras dos miden lo mismo. ¿Cuánto mide cada una de estas dos partes?.

c) Un ángulo mide 112° 24' 35". ¿Cuánto le falta para medir lo que mide un ángulo llano?.

14. Teniendo en cuenta la siguiente figura, calcula:



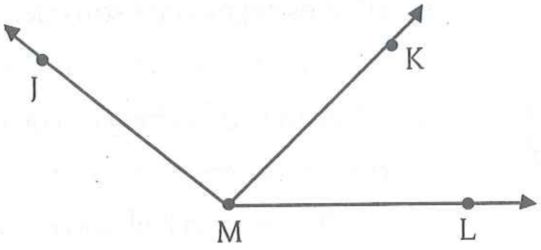
a) m $\widehat{AOB}$ b) m $\widehat{DOB}$ c) m $\widehat{AOD}$ d) m $\widehat{AOC}$

15. Se dice que dos ángulos son COMPLEMENTARIOS cuando la suma de sus medidas es 90°. Si un ángulo mide 68° 10' 42", ¿cuánto mide su complemento?.

16. Se dice que dos ángulos son SUPLEMENTARIOS cuando la suma de sus medidas es 180°. Si un ángulo mide 125° 38' 15", ¿cuánto mide su suplemento?.

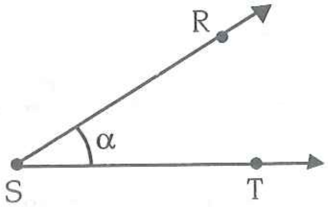
17. Un ángulo es el doble de su complemento. ¿Cuánto mide este ángulo?.

18. Teniendo en cuenta la siguiente figura, contesta:



a) ¿Cuántos ángulos diferentes aparecen en la figura? Nómbralos utilizando tres letras.
b) Mide dos ángulos obtenidos en el literal anterior.
c) ¿Cuál es el vértice de cada uno?.

19. Utiliza tres símbolos diferentes para nombrar el siguiente ángulo. A continuación, mídelo.



20. Cuando en Inglaterra es mediodía, ¿qué hora es en un país cuyas coordenadas son (70° E, 30 S)?.

21. En un momento dado, en la ciudad A son las 7 horas y en la B son las 19 horas. ¿Pueden estar A y B en mismo meridiano? ¿Y en el mismo paralelo? .

22. Un programa de radio dura 47 minutos. Si finaliza a las 21,36 horas, ¿a qué hora empezó?.

23. El reloj eléctrico de una casa quedó paralizado por un corte de luz a las 9,38 horas. Si ahora son las 12 horas 38 minutos 15 segundos, ¿cuántas horas, minutos y segundos estuvo parado el reloj?.

24. El hermano de Sara tiene hoy exactamente 400 días. ¿En qué año nació? ¿Y en qué mes?.

25. El campeón del Tour de Francia empleó un total de 97 horas. ¿cuántas días y horas pedaleó?.

26. Transforma las siguientes mediciones de tiempo en horas, minutos y segundos:

a) 2.854 seg. b) 1.900 seg c) 3.485 seg.

PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS SABER

1. Josefina y su hermana Constanza tienen entre ambas 30 años de edad. Dentro de 14 años la edad de Josefina será tres veces la edad que tiene Constanza hoy. La edad de Josefina es:

   a) 11 años b) 19 años c) 22 años d) Ninguna de las anteriores

2. Si 1+ 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55, entonces la suma 70+71+72+73+ ... +80 es:

   a) 55 b) 855 c) 825 d) Ninguna de las anteriores

3. Juan y Carlos trabajan en una fábrica de lápices. Juan empaca tres cajas de lápices en un minuto, mientras que Carlos empaca solamente dos. Se deben empacar 600 cajas de lápices. Si Carlos le ayuda a Juan durante una hora, el tiempo que tardan en empacar las 600 cajas es:

   a) 2 horas 40 min b) 1 hora 40 min c) 3 horas 30 min d) Ninguna de las anteriores.

4. El resultado de $\dfrac{2}{2+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2}}} - \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{3}}}$ es:

   a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{13}{30}$ c) $\frac{3}{2}$ d) Ninguna de las anteriores

5. Si N x N x N = 4.913, el valor de N es:

   a) 17 b) 19 c) 27 d) Ninguna de las anteriores

Núcleo Temático

7

GEOMETRÍA MÉTRICA (2)

LOGRO GENERAL

- Reconocer y utilizar las unidades de superficie en la solución de problemas que permitan la aplicación de modelos matemáticos para encontrar el área de una superficie.

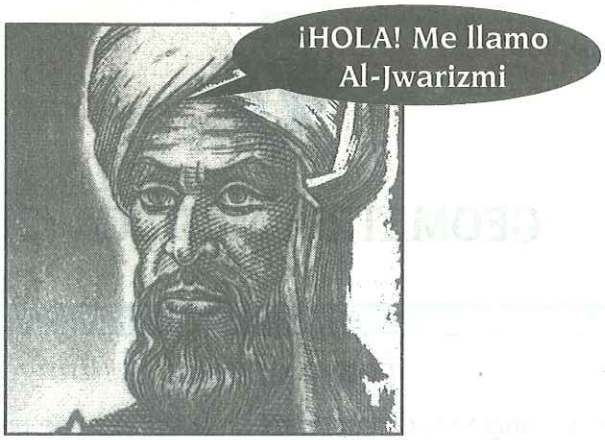
DIMENSIONES

LOGROS ESPECÍFICOS	INDICADORES DE LOGRO
Corporal: • Elaborar modelos que ayuden a resolver problemas prácticos.	• En grupos de dos o tres alumnos interpretan y analizan problemas matemáticos.
Comunicativa: • Formular problemas que involucran ecuaciones. • Incorporar al vocabulario matemático nuevos términos.	• Escribe los problemas en lenguaje matemático. • Utiliza adecuadamente las palabras **perímetro** y **área.** • Describe el proceso para hallar el área de un polígono. • Describe en forma oral y escrita el proceso efectuado al transformar unidades de superficie.
Cognitiva: • Elaborar modelos para hallar el área de algunos polígonos. • Transformar unidades de superficie.	• Halla el área de triángulos, cuadriláteros, polígonos, círculos y otras figuras que se pueden descomponer en las anteriores. • Resuelve problemas que requieren la transformación de unidades de superficie.
Estética: • Trazar y recortar figuras geométricas como triángulos, cuadriláteros y polígonos.	• Ilustra los enunciados de los problemas dibujando figuras que tengan que ver con el mismo.
Etica - Actitudinal: • Resaltar la contribución de la matemática en la solución de problemas prácticos.	• Demuestra interés por aprender.

EVALUACIÓN

ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS

7.1 ¿SABÍAS QUE...?



Todos los pueblos que se han preocupado por el avance de las ciencias han creado centros en los cuales los sabios pueden trabajar e intercambiar ideas, como en nuestras actuales universidades y academias.

En Bagdad, capital del mundo árabe, en el siglo IX, se reunieron artistas, científicos y escritores. Allí se escribieron, bajo el reinado del Califa Al Raschid, los cuentos de Las *Mil y Una Noches, Aladino y la Lámpara Maravillosa, Simbad el Marino,...* Años más tarde, el cargo de Califa lo ocupa su hijo Al Mamun. Cuentan que una noche Al Mamun tuvo un sueño en el que se le apareció el gran filósofo griego Aristóteles. Al despertar, Al Mamun, impresionado, mandó traducir al árabe todas las obras griegas que se habían encontrado hasta entonces. También mandó construir una casa de la sabiduría en la que se pudieran reunir los sabios para estudiar y hacer avanzar la ciencia. Entre estos sabios estuvo el matemático y astrónomo Al-Juarizmi, uno de los más famosos del mundo árabe, cuyo nombre mal pronunciado dio lugar a la palabra *algoritmo*.

EJERCICIO 7-1

COMPRENSIÓN DE LECTURA: Lee nuevamente el texto anterior y responde el cuestionario de completación. Usa lápiz.

1. El término matemático *Algoritmo* proviene de una mala pronunciación del nombre del sabio árabe: aljuarizmi. ✓
2. La capital del mundo árabe antiguo era: Bagdad ✓.
3. Famoso filósofo griego que se le apareció, en sueños, al Califa Al Mamun: aristoteles. ✓
4. Famosa colección de cuentos árabes escritos en el s. IX: mil y 1 noches, aladino y la lampara maravillosa, simbad el marino
5. Nuestras actuales universidades y academias equivalen a los: centros de la antigüedad y del medioevo. ✓

6. Todas las obras griegas que se conocían en la época de Al Mamun fueron traducidas al árabe por: al mamun.

7. En la casa de la sabiduria se reunían los sabios del mundo árabe en tiempos del Califa Al Mamun.

8. En los centros de la ciencia se reunían: artist, cient y escr.

9. ¿Al Raschid y Al Mamun fueron realmente, sabios o mecenas?: ______ X

10. ¿Por qué? ______________________________.

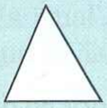
7.2 SUPERFICIE Y ÁREA

- Los conceptos de **Superficie** y **Área** ya los conocemos desde grados anteriores. Haremos una breve revisión de ellos y, luego, avanzaremos en su estudio.

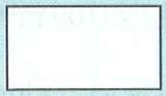
7.2.1 Unidades de Superficie y Áreas de los Polígonos

RECORDEMOS

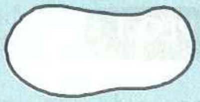
- Una SUPERFICIE es una porción de plano bien delimitada; por ejemplo:



Superficie triangular

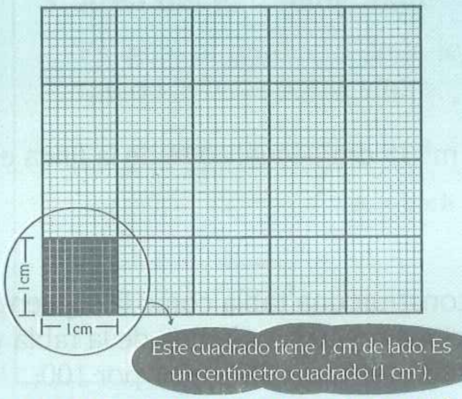


Superficie rectangular



Superficie sin forma definida

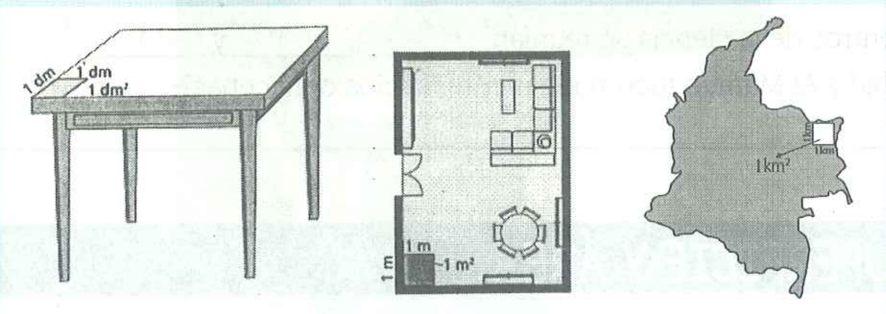
- Llamamos **ÁREA** de una figura plana a la medida de su **SUPERFICIE.**
- Para medir superficies elegimos como unidad la superficie de unos **CUADRADOS** cuyos lados son el metro, sus múltiplos o sus submúltiplos. Estos cuadrados se denominan **metro cuadrado, centímetro cuadrado, kilómetro cuadrado, etc.** Por ejemplo:



Este cuadrado tiene 1 cm de lado. Es un centímetro cuadrado (1 cm²).

Este cuadradito tiene 1 mm de lado. Es un milímetro cuadrado (1 mm²).

- Para medir superficies más grandes se utilizan otros cuadrados como unidad: dm^2, m^2, km^2.



También se utilizan el hectómetro cuadrado (hm^2) y el decámetro cuadrado (dam^2).

- Cada unidad de superficie equivale a 100 unidades de la inmediatamente inferior y a una centésima parte de la inmediatamente superior. Por esta razón decimos que las unidades de superficie varían de **100** en **100** :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Km^2} \arrow[r, bend left, "\times 100"] & \mathbf{hm^2} \arrow[r, bend left, "\times 100"] \arrow[l, bend left, "\div 100"] & \mathbf{dam^2} \arrow[r, bend left, "\times 100"] \arrow[l, bend left, "\div 100"] & \mathbf{m^2} \arrow[r, bend left, "\times 100"] \arrow[l, bend left, "\div 100"] & \mathbf{dm^2} \arrow[r, bend left, "\times 100"] \arrow[l, bend left, "\div 100"] & \mathbf{cm^2} \arrow[r, bend left, "\times 100"] \arrow[l, bend left, "\div 100"] & \mathbf{mm^2} \arrow[l, bend left, "\div 100"]
\end{tikzcd}$$

- Para pasar de una unidad de superficie a otra inmediatamente inferior se multiplica por 100.

EJEMPLO 1: $2{,}12\ dam^2 = 2{,}12 \times (100\ m^2) = 212\ m^2$.

- Para pasar de una unidad de superficie a otra inmediatamente superior se divide por 100.

EJEMPLO 2: $38.500\ mm^2 = (38.500 \div 100\ )\ cm^2 = 385\ cm^2$.

- No olvidemos que:

$$1\ km^2 = 100\ hm^2 = 10.000\ dam^2 = 1'000.000\ m^2$$
$$1\ m^2 = 100\ dm^2 = 10.000\ cm^2 = 1'000.000\ mm^2$$

EJEMPLO 3 :

- El terreno de una finca mide $27hm^2$ $16\ dam^2$ $23\ m^2$ $35\ dm^2$, ¿cuánto mide la finca en
  a) m^2 ? b) dm^2 ? c) cm^2 ?

  SOLUCIÓN

  Para facilitar la solución del problema vamos a construir una tabla como la siguiente, teniendo en cuenta que debemos reservar dos cifras en cada columna de la tabla ya que para pasar de una unidad a la siguiente, multiplicamos o dividimos por 100:

hm^2	dam^2	m^2	dm^2	cm^2
27	16	23,	35	

Si tomamos como unidad el m^2, entonces separamos con una coma los m^2 del resto de las unidades; por lo tanto, nos queda:

271623,35 m^2

hm^2	dam^2	m^2	dm^2	cm^2
27	16	23	35	

Si tomamos como unidad el dm^2, entonces separamos mediante una coma los dm^2 del resto de las unidades.Como después de los dm^2 no quedan más cifras, entonces la coma no se escribe; por lo tanto, nos queda:

27,162.335 dm^2

hm^2	dam^2	m^2	dm^2	cm^2
27	16	23	35	00

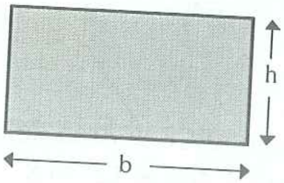
Si tomamos como unidad el cm^2, entonces en lugar de correr la coma debemos agregar dos ceros corresponientes a la casilla de los cm^2; por lo tanto, nos queda:

2.716,233.500 cm^2

- Cuando transformamos unidades de superficie, la coma se escribe a continuación de las dos cifras correspondientes a la unidad escogida.
- Recordemos, igualmente, cómo se calculan las áreas de algunas figuras planas: rectángulo, cuadrado, paralelogramo, triángulo, trapecio y polígono regular.

1. Área del rectángulo:

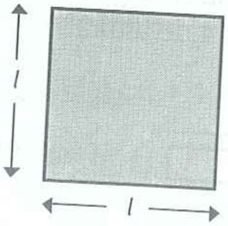
Es igual al producto de la longitud de la base por la altura.



$$A = b \times h$$

2. Área del cuadrado:

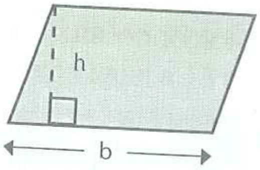
Es igual al resultado de elevar la longitud de su lado al cuadrado.



$$A = l \times l = l^2$$

3. Área del Paralelogramo:

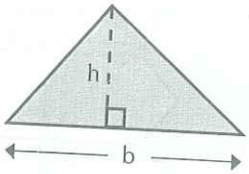
Es igual al producto de la longitud de la base por la altura.



$$A = b \times h$$

4. Área del Triángulo:

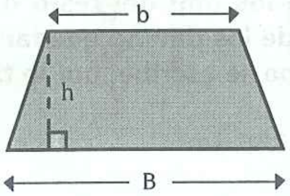
Es igual al producto de la longitud de la base por la altura dividido por 2.



$$A = \frac{b \times h}{2}$$

5. Área del Trapecio:

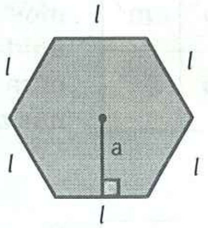
Es igual al producto de la semisuma de las bases por la altura.



$$A = \frac{(B+b)}{2} \text{ x } h$$

6. Área del Polígono Regular:

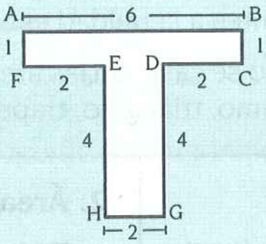
Es igual al producto de su perímetro por la apotema, dividido por 2.



$$A = \frac{P \text{ x } a}{2}$$

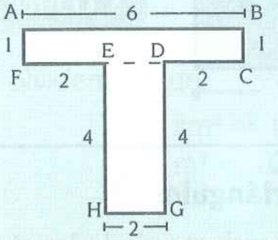
EJEMPLO:

- Teniendo en cuenta que las medidas vienen dadas en cm, calculemos el área de la letra siguiente:



Solución

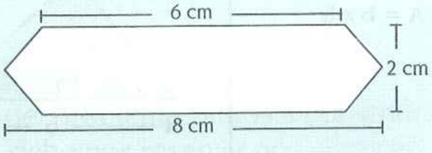
- La letra podemos descomponerla en dos rectángulos si unimos los puntos D y E. El rectángulo ABCF tiene 6cm de base y 1 cm de altura y el rectángulo EDGH tiene 2cm de base y 4 de altura.
- Por lo tanto:



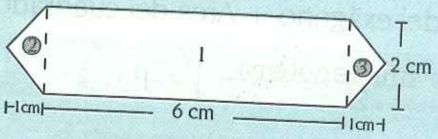
Area de la letra = Área de ABCF + Área de EDGH
= (6 cm x 1 cm) + (2 cm x 4 cm)
= $6\ cm^2 + 8\ cm^2$
= $14\ cm^2$

- En consecuencia, el área de la letra es $14\ cm^2$

- Ahora calculemos el área de esta figura:



- La figura podemos descomponerla en un rectángulo y dos triángulos; así:



Area de la figura = Area del rectángulo 1 + Areas de los triángulos 2 y 3

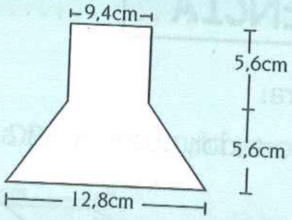
$$= (\text{base x altura}) + 2\left(\frac{\text{base x altura}}{2}\right)$$

$$= (6\text{ cm x }2\text{ cm}) + \cancel{2}\left(\frac{2\text{cm x }1\text{ cm}}{\cancel{2}}\right)$$

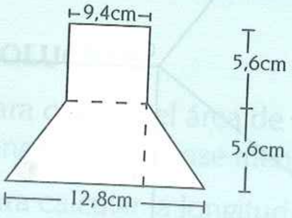
$$= 12\text{ cm}^2 + 2\text{ cm}^2 = 14\text{ cm}^2$$

- Luego, el área de la figura es 14 cm^2

- Calculemos, a continuación, el área de esta figura:



- Esta figura también podemos descomponerla en otras dos figuras conocidas: un rectángulo y un trapecio, así:



$$A = \text{Área del rectángulo} + \text{Área del trapecio}$$

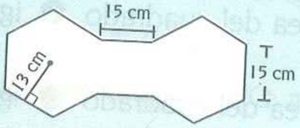
$$= (\text{base} \bullet \text{altura}) + \left(\frac{\text{base mayor} + \text{base menor}}{2}\right) \bullet \text{altura}$$

$$= (9{,}4\text{cm} \bullet 5{,}6\text{cm}) + \left(\frac{12{,}8\text{ cm} + 9{,}4\text{ cm}}{2}\right) \bullet 5{,}6\text{ cm}$$

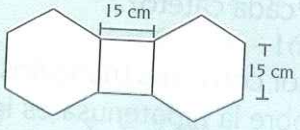
$$= 52{,}64\text{ cm}^2 + 62{,}16\text{ cm}^2 = 114{,}8\text{ cm}^2$$

- Por lo tanto, el área de esta figura es 114,8 cm^2

- Finalmente, calculemos el área de esta figura:



- Esta figura podemos descomponerla en dos exágonos regulares de lado 15 cm y apotema igual a 13 cm y un cuadrado de lado 15 cm; así:



Area de la figura $= 2 \cdot$ Area del exágono + Area del cuadrado

$$= 2 \left(\frac{\text{Perímetro x apotema}}{2} \right) + l^2$$

$$= \cancel{2} \left(\frac{6 \bullet 15 \text{ cm} \bullet 13 \text{ cm}}{\cancel{2}} \right) + (15 \text{ cm})^2$$

$$= 1.170 \text{ cm}^2 + 225 \text{ cm}^2$$

$$= 1.395 \text{ cm}^2$$

7.2.2 El Teorema de Pitágoras

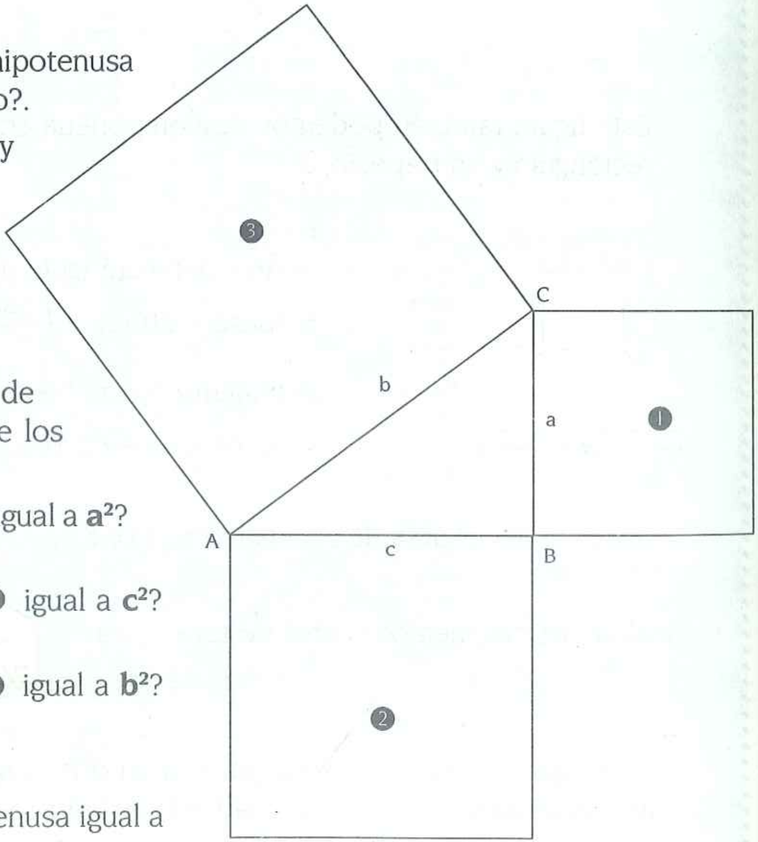
EXPERIENCIA

- Fíjate bien en la siguiente figura:
- Comprueba, usando el transportador, que el Δ ABC es rectángulo.
- Contesta:
  - a) ¿Cuáles son los catetos y la hipotenusa de este triángulo rectángulo?.
  - b) ¿Cuánto miden los catetos y la hipotenusa de este triángulo?.
  - c) ¿Qué figuras se han construido sobre los catetos y la hipotenusa?.
  - d) ¿Cuál es el área de cada una de estas figuras trazadas sobre los catetos y la hipotenusa.
  - e) ¿Es el área del cuadrado ① igual a **a²**? Explica.

    ¿Es el área del cuadrado ② igual a **c²**? Explica.

    ¿Es el área del cuadrado ③ igual a **b²**? Explica.

    ¿Es $b^2 = a^2 + c^2$? Explica.
  - f) ¿Es el cuadrado de la hipotenusa igual a la suma de los cuadrados de cada cateto?.

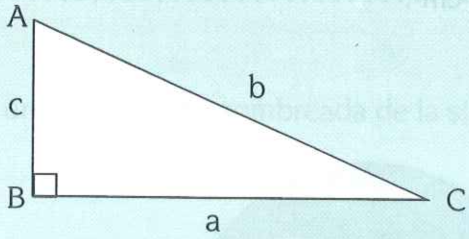


- Repite toda la experiencia anterior con otros triángulos rectángulos. ¿Puedes afirmar que siempre el área del cuadrado sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados sobre los catetos?.

APRENDAMOS...

TEOREMA DE PITAGORAS

- En todo triángulo rectángulo se cumple que el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

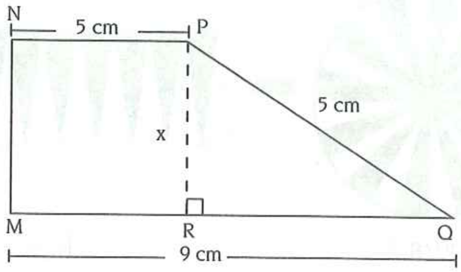


$$b^2 = a^2 + c^2$$

- Esta importantísima propiedad se conoce con el nombre de **TEOREMA DE PITÁGORAS.**

EJEMPLO:

- Hallemos el área del trapecio de la figura teniendo en cuenta los datos que nos dan:

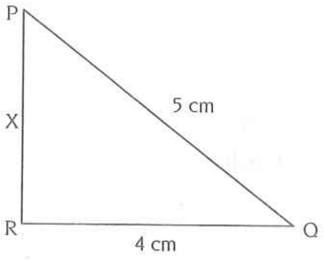


SOLUCION:

- Para calcular el área de este trapecio conocemos la longitud de la base mayor (9 cm), la longitud de la base menor (5 cm), pero no conocemos la longitud de la altura (x).
- Para calcular la longitud de la altura debemos tener en cuenta que ésta corresponde a la longitud del cateto $\overline{PR}$ del triángulo rectángulo PRQ. En este triángulo rectángulo conocemos la longitud de la hipotenusa PQ = 5 cm y podemos hallar la longitud del otro cateto $\overline{RQ}$ así: $|\overline{RQ}| = |\overline{MQ}| - |\overline{MR}|$; pero, $|\overline{MR}| = |\overline{NP}| = 5$ cm. Por lo tanto:

$$|\overline{RQ}| = |\overline{MQ}| - |\overline{NP}| = 9\text{ cm} - 5\text{ cm} = 4\text{ cm}$$

- Ahora ya podemos calcular el valor de x en el triángulo rectángulo PRQ; así:



$$|\overline{PQ}|^2 = |\overline{PR}|^2 + |\overline{RQ}|^2 \text{ .... Teorema de Pitágoras}$$

$$\therefore\ (5\text{ cm})^2 = x^2 + (4\text{ cm})^2$$

$$\therefore\ 25\text{ cm}^2 = x^2 + 16\text{ cm}^2$$

$$\therefore\ x^2 = 25\text{ cm}^2 - 16\text{ cm}^2$$

$$\therefore\ x^2 = 9\text{ cm}^2$$

$$\therefore\ x = 3\text{ cm}$$

- Finalmente, calculamos el área del trapecio MNPQ:

$$\text{Area de MNPQ}' = \left(\frac{\text{base mayor} + \text{base menor}}{2}\right) \bullet 3\text{ cm}$$

$$= \left(\frac{9\text{ cm} + 5\text{ cm}}{2}\right) \bullet 3\text{ cm} = \frac{14\text{ cm}}{2} \bullet 3\text{ cm}$$

$$= 7\text{ cm} \bullet 3\text{ cm} = 21\text{ cm}^2$$

- Luego, el área del trapecio es 21 cm^2.

7.2.3 Área del Círculo

- Camila dibujó un círculo y luego lo dividió en "cascos" (en geometría se llaman sectores circulares); figura 1:

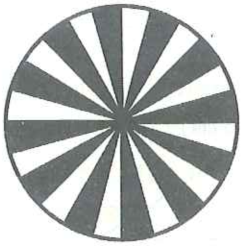


figura 1


figura 2

- Luego recortó los "cascos" y los colocó como muestra la figura 2. Al hacer ésto, Camila se dio cuenta que formó un "casi paralelogramo".
- ¿Cuál es el área de este "casi paralelogramo"? ¿Coincidirá con el área del círculo?.
- La respuesta es Sí: el área del círculo coincide con el área del "casi paralelogramo".
- Para hallar el área del "casi paralelogramo" contesta las siguientes preguntas:

a) ¿Cuánto mide el radio del círculo? ¿Coincide con la altura del "casi paralelogramo? . ¿Por qué?.

b) ¿Cuántos pequeños arcos comprenden la base del "casi paralelogramo"? ¿Coinciden con la mitad de la longitud de la circunferencia?.

c) ¿Cómo se mide la longitud de cualquier circunferencia?.

d) Por lo tanto: Area del círculo = Area del "casi paralelogramo"

$$= \underset{\downarrow}{\text{base}} \quad \text{x} \quad \underset{\downarrow}{\text{altura}}$$

$$= \left(\frac{\text{Logitud de la circunferencia}}{2}\right) \quad \text{x} \quad (\text{radio})$$

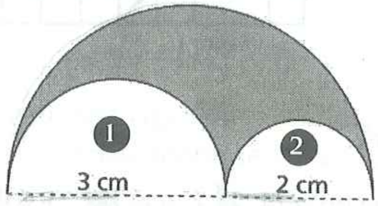
$$= \left(\frac{\cancel{2}\pi R}{\cancel{2}}\right) \quad \text{x} \quad (R) \quad = (\pi R)R = \pi R^2$$

APRENDAMOS...

El **ÁREA DE UN CÍRCULO** se calcula multiplicando el número π por el cuadrado del radio; es decir: $\mathbf{A = \pi \cdot R^2}$

EJEMPLO:

Calculemos el área de la parte sombreada de la siguiente figura:



SOLUCIÓN:

- La figura nos muestra que la parte sombreada está comprendida entre un semicírculo de 5 cm de diámetro y dos semicírculos: uno de 3 cm de diámetro y otro de 2 cm de diámetro.
- Por lo tanto:

A sombra = A semicírculo grande - A dos semicírculos pequeños

A semicírculo grande $= \dfrac{\pi R^2}{2} = \dfrac{\pi\,(2{,}5\ \text{cm})^2}{2} = 9{,}82\ \text{cm}^2$

A semicírculo pequeño ❶ $= \dfrac{\pi R^2}{2} = \dfrac{\pi\,(1{,}5\ \text{cm})^2}{2} = 3{,}53\ \text{cm}^2$

A semicírculo pequeño ❷ $= \dfrac{\pi R^2}{2} = \dfrac{\pi\,(1\ \text{cm})^2}{2} = 1{,}57\ \text{cm}^2$

- Luego: A sombra $= 9{,}82\ \text{cm}^2 - (3{,}53\ \text{cm}^2 + 1{,}57\ \text{cm}^2) = 4{,}72\ \text{cm}^2$

EJERCICIO 7-2

❶ Responde y explica cada respuesta:

a) ¿Es posible utilizar diferentes unidades para medir una misma superficie?.

b) Al medir una superficie, ¿obtenemos una mayor aproximación cuando la unidad se hace cada vez más pequeña?.

c) ¿A qué se llama km^2? ¿y dam^2?.

d) ¿Cómo se pasa de una unidad de superficie a una inmediatamente superior? ¿Y a una inmediatamente inferior?.

e) ¿Qué se llama área de una superficie?.

f) ¿Es lo mismo perímetro que área de una región? ¿Con qué unidades se mide cada uno?.

g) ¿Cuál es la unidad básica de longitud en el sistema métrico decimal? ¿Y la de superficie?.

h) ¿Con qué figura se representa el hm²?.

② Dibuja en tu cuaderno: a) 1 dm² b) 1 cm²
Responde: ¿Cuál es el área de cada una de las figuras dibujadas?

③ Dadas las siguientes figuras:

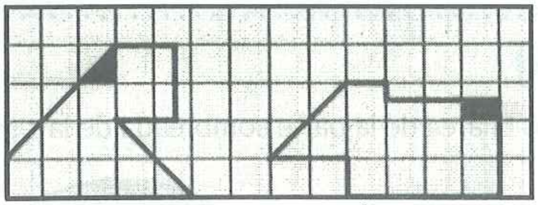


figura 1 **figura 2**

a) Pinta en cada figura un cm².

b) ¿Qué fracción de cm² representa el ◢ ? ¿y el ▬ ? Explica.

c) Explica por qué el área de ▬ es $\frac{1}{8}$ de cm².

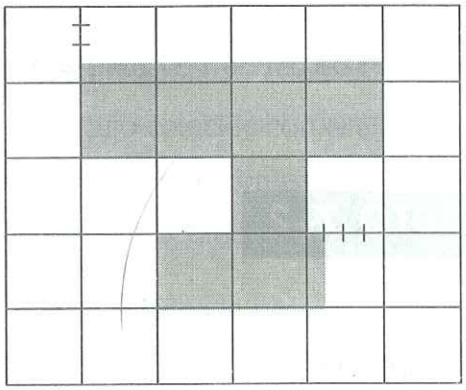
d) ¿Es el área del ◢ igual a 0,125 cm²? Explica.

e) ¿Cuál es el área de la figura 1 en mm²?.

f) ¿Es el área de la figura 2 igual a $3\,\frac{1}{8}$ cm²?. Explica.

g) ¿ Es $3\frac{1}{8}$ cm² = 312,5 mm²?.

④ Ayúdate de una escuadra o de una regla para expresar en cm² y en mm² el área de la siguiente figura:



Ahora responde:

a) Si el número asociado a la superficie es 8,25, ¿cuál fue la unidad utilizada para su medida?.

b) Si el número asociado fue 825, ¿cuál fue la unidad de medida?.

c) ¿Es $8\,\frac{1}{4}$ cm² = 825 mm²? Explica.

⑤ Dibuja en una hoja cuadriculada un cuadrado de 3 cm de lado y un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 3 cm y 4 cm. Ahora contesta:

a) ¿Cuánto mide la hipotenusa del triángulo rectángulo?.
b) ¿Cuánto miden los perímetros de cada figura? ¿Son iguales?.
c) ¿Cuánto miden las áreas de cada figura? ¿Son iguales?.

⑥ Ahora dibuja en una hoja cuadriculada un cuadrado de 2 cm de lado y un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 2 cm y 4 cm. Responde:

a) ¿Cuánto mide la hipotenusa del triángulo rectángulo?.
b) ¿Cuánto miden los perímetros de cada figura? ¿Son iguales?.
c) ¿Cuánto miden las áreas de cada figura? ¿Son iguales?.

⑦ Teniendo en cuenta los ejercicios 5 y 6 Responde:

a) ¿Pueden tener dos figuras planas igual área y diferente perímetro? Explica.
b) ¿Pueden tener dos figuras planas diferente área e igual perímetro? Explica.

⑧ Transforma:

a) 7,85 hm^2 en mm^2
b) 7,8924 km^2 en dam^2
c) 23,56 m^2 en km^2
d) 57 mm^2 a dm^2
e) 1089 m^2 a hm^2
f) 57 mm^2 a cm^2

⑨ El patio de una casa está siendo remodelado. Las baldosas que lo recubrirán son cuadrados de 40 cm de lado. El oficial encargado de la obra toma las medidas del patio que resulta ser un cuadrado de 5,2 metros de lado. ¿Cuántas baldosas necesitará el oficial?

196

⑩ Contesta:

a) ¿Cómo se calcula el área de un rectángulo?.
b) ¿Cómo se calcula el área de un paralelogramo?.
c) ¿Cómo se calcula el área de un triángulo?.
d) ¿Cómo se calcula el área de un trapecio?.
e) ¿Cómo se calcula el área de un polígono regular?.
f) ¿Cómo se calcula el área de un círculo?.
g) ¿Qué dice el Teorema de Pitágoras?.

⑪ Explica:

a) ¿Por qué no es correcto decir longitud de un círculo ni área de una circunferencia?.
b) ¿Por qué cuando calculamos el área de una figura sus dimensiones deben estar dadas en la misma unidad de longitud?.

⑫ Muchos problemas relacionados con áreas pueden resolverse por medio de ecuaciones. Veamos un ejemplo:

El área de un rectángulo es 24 cm^2. Si su base mide 8 cm, ¿cuánto mide la altura?.

Solución: Llamemos x cm la longitud de la altura. Por lo tanto:

Area = base x altura

$\therefore\ 24 = 8 \cdot x$.. ¿por qué?

$\therefore\ x = \frac{24}{8}$.. ¿por qué?

$\therefore\ x = 3$ cm

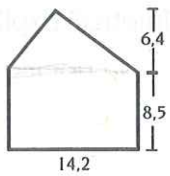
Resuelve los siguientes problemas utilizando ecuaciones:

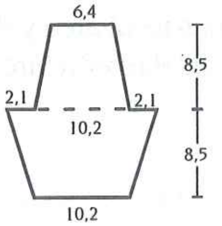
a) El área de un paralelogramo es 12 dm^2. La altura del paralelogramo mide 6 dm. ¿Cuánto mide la base?.

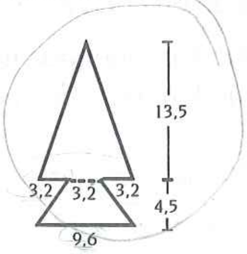
b) El área de un triángulo es 24 cm^2. Si la base mide 8 cm. ¿Cuánto mide la altura?.

c) El área de un trapecio es 27 cm^2. La base mayor mide 12 cm, y la altura mide 3 cm. ¿Cuánto mide la base menor?.

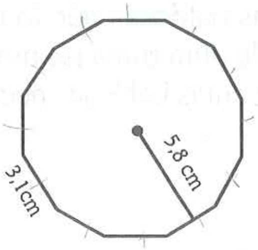
⑬ Calcula el área de las siguientes figuras (las medidas vienen dadas en cm).

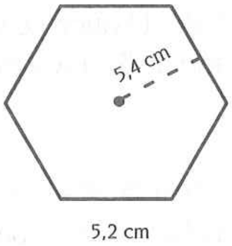




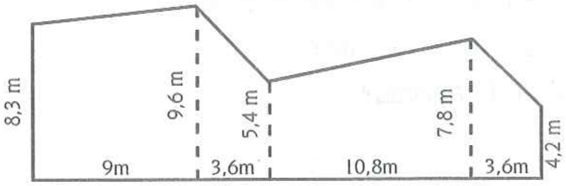


⑭ Calcula el área de los siguientes polígonos regulares.

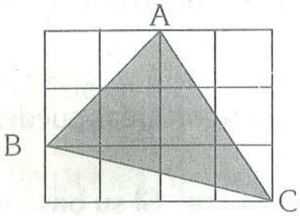




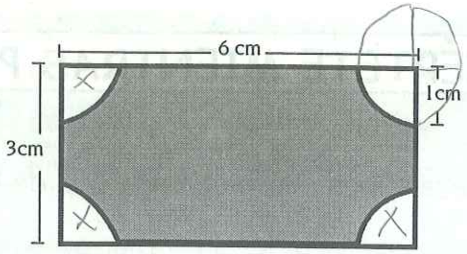
⑮ La figura representa la parte trasera de una fábrica. Calcula cuánto costará pintarla, si pintar un metro cuadrado cuesta $3.500.



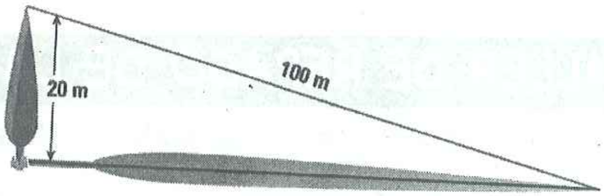
⑯ Calcula el área del Δ ABC. (utilizar un cuadrado como unidad de superficie)



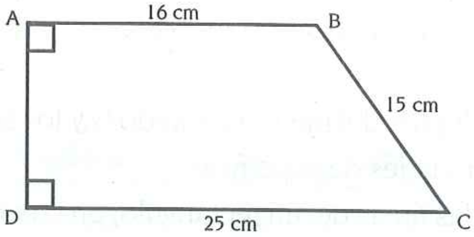
⑰ Calcula el área de la superficie sombreada.



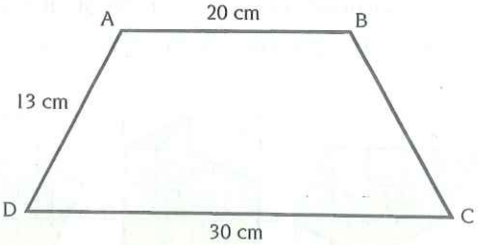
⑱ Calcula la longitud de la sombra del árbol teniendo en cuenta las medidas que se dan.



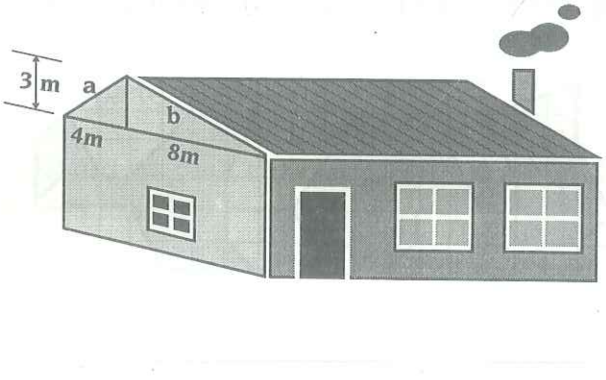
⑲ Calcula el área del trapecio rectángulo ABCD.



⑳ Calcula la altura, el perímetro y el área del trapecio isósceles ABCD.

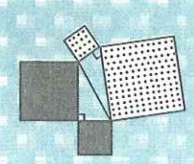


㉑ La sección de un techo tiene la forma de la figura. Calcula la longitud de los bajantes a y b.



DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 1

¿Cuál área es mayor, la de la superficie sombreada o la de la superficie punteada?.

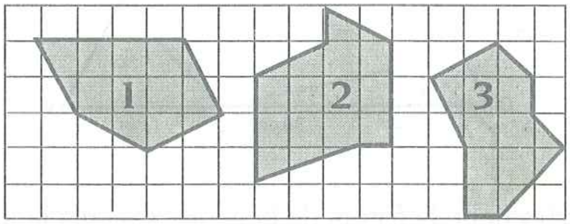


TALLER DE REPASO DE LA UNIDAD 7

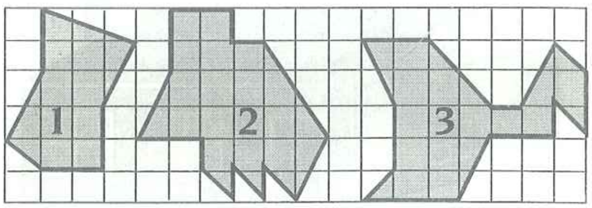
1. Contesta:

a) ¿Qué es una superficie?.
b) ¿Qué es área de una superficie?.
c) ¿Cuál es la unidad de medida patrón en el Sistema Métrico Decimal?.
d) ¿Qué es el m^2?.
e) ¿Cuáles son los múltiplos del metro cuadrado? ¿y los submúltiplos?.
f) ¿Cómo varían las unidades de superficie?.
g) ¿Cómo se calculan las áreas de: un rectángulo, un cuadrado, un paralelogramo y un triángulo?.
h) ¿Cómo se calculan las áreas de: un trapecio, un polígono regular y un círculo?.

2. Si cada cuadrito ▨ es una unidad de medida de superficie, determina el número de unidades cuadradas que tiene cada una de las siguientes superficies.



3. Si cada cuadrito ▨ representa un metro cuadrado (m^2), calcula el área de cada región sombreada.



4. Completa:

a) 1 dm^2 = ______ cm^2
b) 4 hm^2 = ______ m^2
c) 15 dam^2 = ______ dm^2
d) 204 km^2 = ______ dam^2
e) 0,01 dam^2 = ______ m^2
f) 4,3 dm^2 = ______ m^2
g) 45,83 m^2 = ______ hm^2
h) 0,035 dam^2 = ______ km^2

5. Una tabla como la siguiente nos ayuda a transformar unidades de superficie. Debemos tener en cuenta que es necesario reservar dos cifras en cada columna de la tabla ya que las unidades de superficie varían de 100 en 100. Veamos, por ejemplo, cómo transformar 35 hm^2 8 dam^2 37 m^2 4 cm^2 en m^2:

- Esta es la tabla que tenemos que llenar:

km^2	hm^2	dam^2	m^2	dm^2	cm^2	mm^2

- Cada columna debemos llenarla con dos cifras. Como sólo tenemos una cifra para los dam^2 entonces en esta columna escribimos 08. Lo mismo hacemos con los cm^2, donde escribimos 04. Y como no aparecen cifras para los dm^2, entonces allí escribimos 00; así:

km^2	hm^2	dam^2	m^2	dm^2	cm^2	mm^2
	35	08	37	00	04	

- Finalmente, como queremos expresar la medida en m^2 entonces escribimos una COMA inmediatamente después de las cifras correspondientes a los m^2; así:

350837,0004 m^2

a) Transforma 35 hm^2 8 dam^2 37 m^2 4 cm^2 en dm^2.
b) Transforma 35 hm^2 8 dam^2 37 m^2 4 cm^2 en hm^2.
c) Transforma 35 hm^2 8 dam^2 37 m^2 4 cm^2 en km^2.
d) Transforma 35 hm^2 8 dam^2 37 m^2 4 cm^2 en cm^2.

6. Transforma 87,073 m^2 en:

a) km^2
b) dam^2
c) cm^2
d) mm^2

7. Un lote cuadrado tiene un perímetro de 36 hm. Si se venden los $\frac{2}{3}$ a \$15.000 el m^2, ¿Cuál es el valor de la parte vendida?.

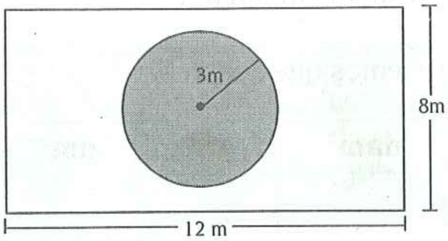
8. Gabriel compró un terreno de 2.300 dam^2 a \$1.200 el m^2. Si lo vende a \$150.000 el dam^2, ¿cuál es la ganancia?.

9. En nuestro país son corrientes dos unidades de superficie que no corresponden al Sistema Métrico Decimal: la HECTÁREA (ha) y la CUADRA o FANEGADA. Estas son sus equivalencias con las unidades del Sistema Métrico Decimal:

1 hectárea (ha) = 1 hm² = 10.000 m²
1 Cuadra (o Fanegada) = 6.400 m²

Una finca tiene 20 cuadras y otra tiene 12,8 hectáreas, ¿cuál de las dos es más extensa?.

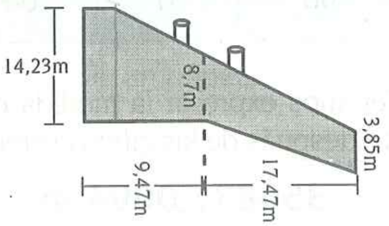
10. La figura siguiente nos muestra el plano de un parque que consta de un lago circular en el centro y zonas de recreación y jardines alrededor del lago. Halla el área del lago y el área de las zonas de recreación y jardines.



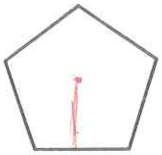
11. El perímetro de un rectángulo es de 72 cm. Si el largo es el triple del ancho; ¿cuál es el área del rectángulo?.

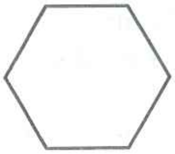
12. Para cubrir el piso de una sala se emplean 360 baldosas cuadradas de 20 cm de lado. ¿Cuántas baldosas de 30 cm de lado se necesitan para cubrir la misma sala?.

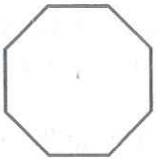
13. Calcula el área de un ala de un Jet cuyas medidas se dan:



14. Toma las medidas necesarias para calcular el área de los siguientes polígonos regulares.

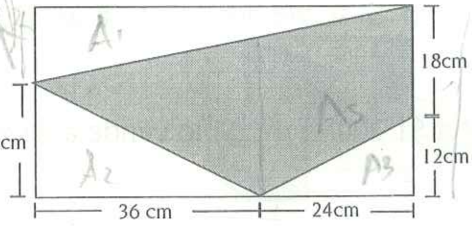




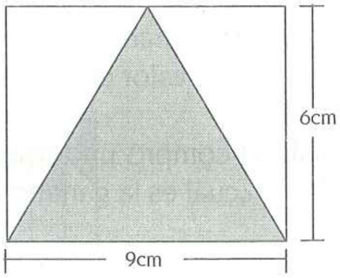


15. Halla el área de la región sombreada en cada figura: 45. 45

a)

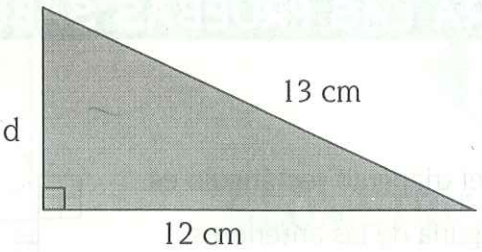


b)

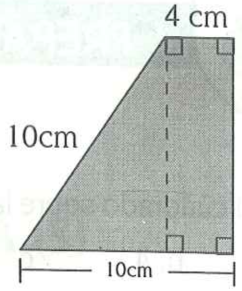


16. Calcula en cada figura la longitud del segmento d y, luego, el área de la misma.

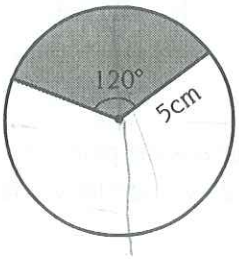
a)



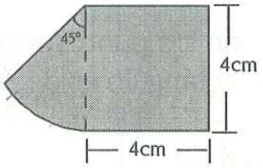
b)



17. Analiza cómo puede calcularse el área del sector circular de la figura siguiente (recuerda que en la circunferencia completa hay 360º).

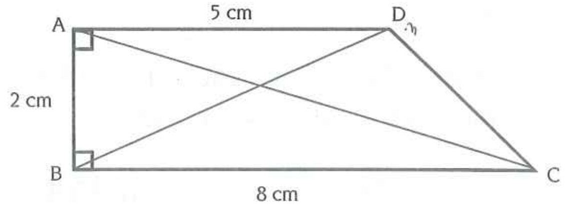


18. La figura representa una pieza de metal. Calcula su área

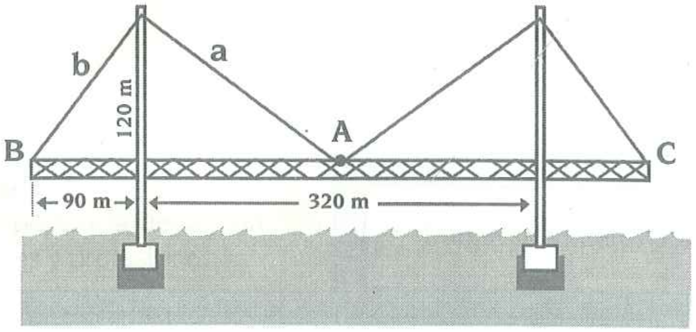


45
360

19. Calcula la longitud de las diagonales, el perímetro y el área del trapecio ABCD.



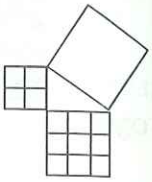
20. Calcula la longitud de los tirantes a y b del puente colgante de la figura siguiente, sabiendo que el punto A es su punto medio.



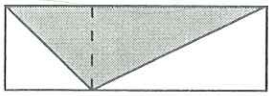
PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS SABER

1. El área del cuadrado sobre la hipotenusa del triángulo rectángulo es:

   a. 9 b. 4 c. 13 d. Ninguna de las anteriores.



2. Si el área del rectángulo es 20 cm², el área del triángulo sombreado es:

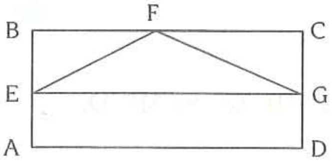


   a. 15 cm² b. 10 cm² c. 5 cm² d. Ninguna de las anteriores.

3. Se baldosina una sala de 3,5 m de ancho por 5,5 m de largo. Si en la fábrica solamente venden baldosines cuadrados de 20 cm de lado, de estos baldosines se deben comprar:

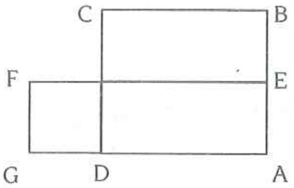
   a. 482 b. 459 c. 480 d. Ninguno de los anteriores

4. ABCD es un rectángulo; E, F y G son los puntos medios del lado del rectángulo en que ellos se encuentran. Si el área del rectángulo es de 36 cm², el área del triángulo es:



   a. 18 cm² b. 27 cm²
   c. 9 cm² d. Ninguna de las anteriores.

5. El cuadrado ABCD y el rectángulo AEFG tienen cada uno un área de 36 m². Si E es el punto medio del lado AB, el perímetro del rectángulo AEFG es:



   a. 18 m b. 30 m
   c. 9 m d. Ninguna de las anteriores.

Núcleo Temático

8

GEOMETRÍA MÉTRICA (3)

LOGRO GENERAL

- Resolver problemas de volumen, capacidad y peso de algunas figuras geométricas; utilizando los conceptos y expresiones que permiten calcularlas.

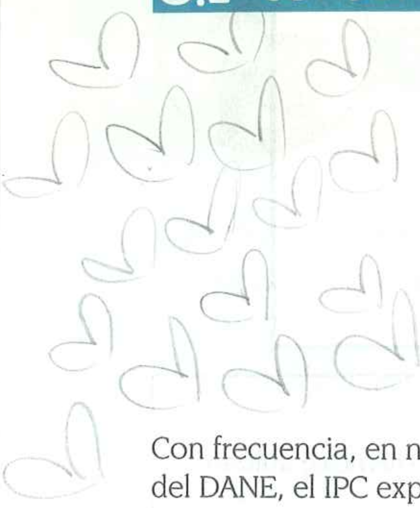
DIMENSIONES

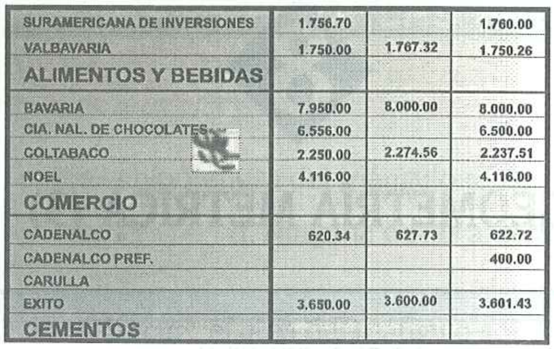
EVALUACIÓN

LOGROS ESPECÍFICOS	INDICADORES DE LOGRO
Corporal: • Aprender en forma recreativa.	• En grupos de tres o cuatro alumnos encuentra la capacidad que tiene un recipiente dado.
Comunicativa: • Utilizar adecuadamente el lenguaje relativo a las figuras geométricas. • Expresar correctamente las ideas de volumen, capacidad, peso y masa.	• Comprende y maneja las expresiones matemáticas utilizadas en la unidad. • Emplea el vocabulario adecuado para referirse a los procesos matemáticos.
Cognitiva: • Identificar poliedros. • Transformar unidades de área, volumen, capacidad y peso. • Calcular el volumen de algunos cuerpos geométricos.	• Diferencia las unidades de volumen, capacidad y peso. • Identifica correctamente las operaciones para transformar una unidad de volumen, capacidad y peso.
Estética: • Trazar, recortar y construir polígonos y poliedros.	• Expone sus trabajos. • Destaca vértices, aristas, caras laterales, bases.
Etica - Actitudinal: • Reconocer la importancia de la medición en muchas labores y profesiones.	• Demuestra interés por aprender.

ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS

8.1 ¿SABÍAS QUE...?





SURAMERICANA DE INVERSIONES	1.756.70		1.760.00
VALBAVARIA	1.750.00	1.767.32	1.750.26
ALIMENTOS Y BEBIDAS			
BAVARIA	7.950.00	8.000.00	8.000.00
CIA. NAL. DE CHOCOLATES	6.556.00		6.500.00
COLTABACO	2.250.00	2.274.56	2.237.51
NOEL	4.116.00		4.116.00
COMERCIO			
CADENALCO	620.34	627.73	622.72
CADENALCO PREF.			400.00
CARULLA			
EXITO	3.650.00	3.600.00	3.601.43
CEMENTOS			

Con frecuencia, en nuestro país, escuchamos noticias como ésta: "Según los últimos datos del DANE, el IPC experimentó en julio un alza de 1,3 puntos".

El DANE es el Departamento Administrativo Nacional de Estadística. Una de sus muchas tareas es comprobar de forma científica si los precios suben o bajan.

Para ello elabora cada mes el IPC o Indice de Precios al Consumidor.

El método usado por el DANE es muy curioso. Hacen una "lista de la compra" con un montón de productos (desde fríjoles o carne, hasta las entradas al fútbol, pasando por el valor de la gasolina). Luego compran cada mes todos esos artículos, siempre en los mismos sitios, y comparan lo que les ha costado en relación con el mes anterior.

Por eso cuando escuchemos que el IPC subió 1,3 puntos, quiere decir que si el mes pasado la lista de la compra costaba 100 pesos, hoy vale 101,3 pesos.

EJERCICIO 8-1

COMPRENSIÓN DE LECTURA: Lee nuevamente el texto anterior y luego, encierra en un círculo la letra que corresponda a la respuesta correcta:

1. El Indice de Precios al Consumidor está determinado por:

a. El alza en los productos de primera necesidad.
[✓ b.] Un estudio estadístico que realiza el DANE.
c. El aumento en el valor del combustible.
d. El incremento de los productos en los grandes supermercados nacionales.

2. Si en el periódico informan a los colombianos que el I.P.C. subió 5,5 puntos, quiere decir que:

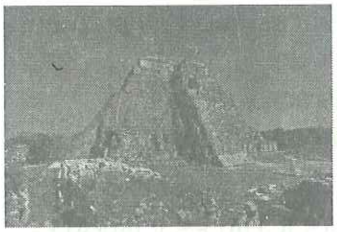
[✓ a.] El mercado del último mes se incrementó en 5.5% con respecto al mes anterior.
b. El último mercado hecho por los colombianos costo 5.500 pesos más.
c. En el último mes hubo un alza del 550% en la canasta familiar.
d. El aumento en el costo de la vida ha sido insignificante.

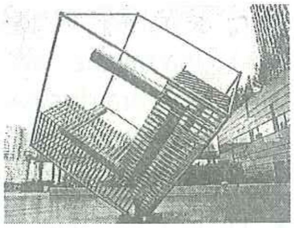
3. El propósito del autor en el texto anterior es:
   a. Demostrar que, en asuntos de estadística, estamos "en pañales".
   b. Mostrar la actividad laboral del DANE.
   c. Explicar cómo se determina el I.P.C. en Colombia.
   d. Exigir que se cambie el obsoleto método que tenemos en Colombia para determinar el I.P.C.

4. De la lectura anterior se puede deducir que:
   a. El DANE emplea métodos científicos para elaborar sus informes.
   b. Los colombianos no creen en los datos que publica el DANE.
   c. La canasta familiar en Colombia sube mes por mes de manera alarmante.
   d. Los datos que publica el DANE no son tan científicos, ni tan confiables.

8.2 CUERPOS GEOMÉTRICOS

La naturaleza, los edificios, las obras de arte y los utensilios que utiliza el hombre proporcionan muchas y variadas situaciones que nos permiten identificar CUERPOS GEOMÉTRICOS. Las fotos nos muestran algunos objetos limitados por superficies planas y otros por superficies curvas.

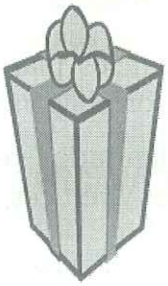


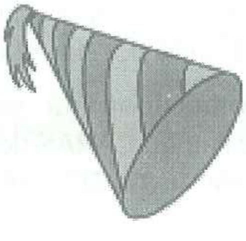


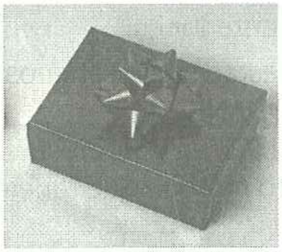
En esta unidad reconoceremos algunos cuerpos geométricos y sus propiedades y características más importantes.

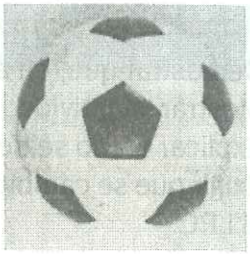
PRIMERA EXPERIENCIA

- Observa cuidadosamente los objetos que Camilo ha colocado en el piso:

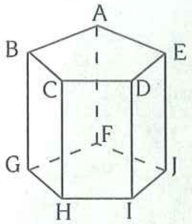








- Cada uno de ellos ocupa un lugar en el espacio y por ello reciben el nombre de **CUERPOS.**
- Los cuerpos geométricos que están totalmente limitados por superficies planas que son polígonos. Se denominan **POLIEDROS.**
- Los cuerpos geométricos que están totalmente limitados por superficies no planas o, en parte, por superficies no planas y por superficies planas que no son polígonos. Se denominan **CUERPOS REDONDOS**.
- Tanto los **POLIEDROS** como los **CUERPOS REDONDOS** se denominan **CUERPOS GEOMÉTRICOS.**
- Cada uno de los polígonos que conforman un **POLIEDRO** se denominan **CARAS**. Los lados y vértices de las caras son las **ARISTAS** y **VÉRTICES** del poliedro.
- Ahora observa el siguiente cuerpo geométrico y contesta:
  - a) ¿Es un poliedro? ¿Por qué?.
  - b) ¿Cuántas caras tiene?.
  - c) ¿Cuántos vértices tiene? Indica dos vértices que no estén en una misma cara.
  - d) Nombra dos caras paralelas y dos caras no paralelas.
  - e) ¿Cuántas aristas tiene el poliedro? Nombra dos aristas que no estén en caras paralelas.

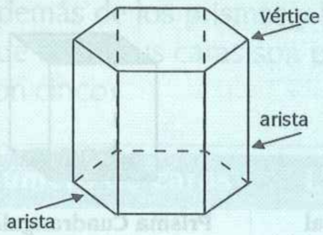


- Fíjate bien: este poliedro tiene DOS CARAS IGUALES y PARALELAS: los pentágonos ABCDE y FGHIJ. Estas caras se llaman **BASES** del poliedro. Las otras caras se denominan **CARAS LATERALES**. Nombra dos caras laterales.

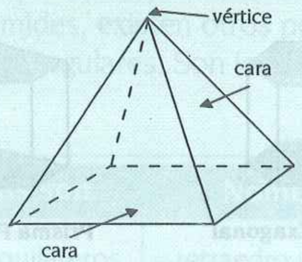
APRENDAMOS...

- **CUERPO:** es todo lo que ocupa un lugar en el espacio.
- **SUPERFICIE:** es la parte exterior de los cuerpos que está en contacto con el espacio que los rodea.
- **CUERPOS GEOMÉTRICOS:** son los cuerpos limitados por superficies planas poligonales o por superficies no planas y por superficies planas que no son polígonos.
- **POLIEDROS:** son cuerpos geométricos que están totalmente limitados por **POLÍGONOS.** Estos polígonos se llaman **CARAS** del poliedro. Sus lados y vértices se llaman respectivamente **ARISTAS** y **VÉRTICES** del poliedro.

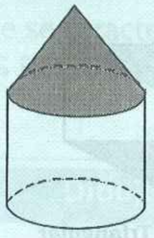
- **CUERPO REDONDO:** son cuerpos geométricos limitados por superficies curvas o limitadas en parte por superficies curvas y en parte por superficies planas que no son polígonos.



Poliedro



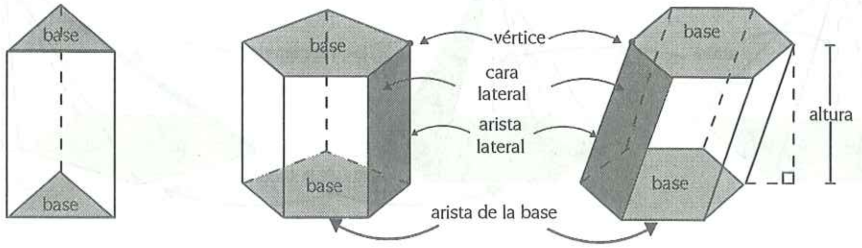
Poliedro



Cuerpo redondo

SEGUNDA EXPERIENCIA

- Fíjate bien en los siguientes poliedros:

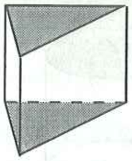


(1) (2) (3)

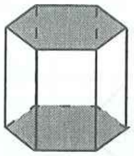
- Cada uno de ellos tiene: dos caras paralelas que son polígonos iguales y las caras restantes son rectángulos o paralelogramos.
- Estos poliedros se llaman **PRISMAS.** Las dos caras paralelas que son polígonos iguales se llaman **BASES.** Las caras que son rectángulos o paralelogramos se denominan **CARAS LATERALES.**
- Si en un prisma las caras laterales son perpendiculares a las bases, el prisma es un **PRISMA RECTO.** Si, en cambio, las caras laterales no son perpendiculares a las bases, el prisma es **OBLICUO**. Los prismas (1) y (2) son RECTOS y el prisma (3) es OBLICUO.
- La **ALTURA** de un prisma es el segmento perpendicular trazado entre las bases. En los prismas rectos, la altura coincide con las aristas laterales.
- Los prismas también se identifican por el número de lados que tienen los polígonos de las bases; así:
  - **PRISMA TRIANGULAR:** las bases son triángulos.
  - **PRISMA CUADRANGULAR:** las bases son cuadriláteros. Si las bases son paralelogramos, el prisma cuadrangular se llama PARALEPÍPEDO (por ejemplo, una

caja de fósforos, la caja donde empacan los cubos de azúcar, este libro, ...). Un prisma cuadrangular es un **CUBO** si todas sus caras son **CUADRADOS.**

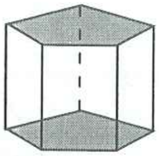
- **PRISMA PENTAGONAL**: las bases son pentágonos.
- **PRISMA EXAGONAL**: las bases son exágonos.



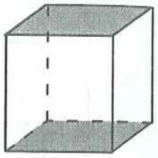
Prisma Triangular



Prisma Exagonal



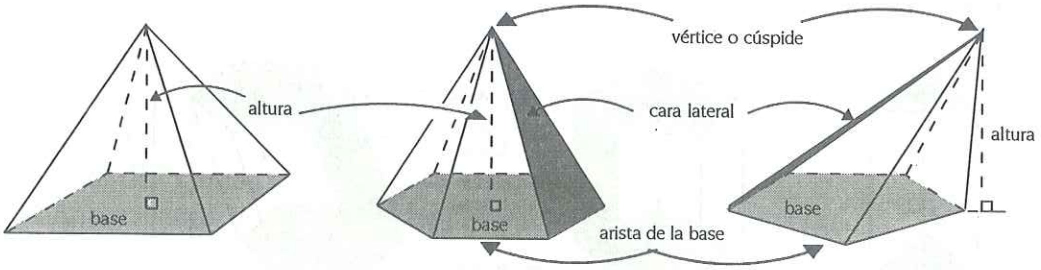
Prisma Pentagonal



Prisma Cuadrangular

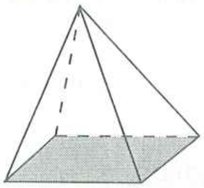
TERCERA EXPERIENCIA

- Ahora observemos estos poliedros:

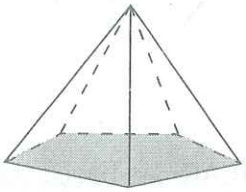


- Estos poliedros se llaman **PIRÁMIDES**. Se caracterizan porque todas las **CARAS**, menos una, tienen un vértice común. Este vértice común se llama **VÉRTICE** o **CÚSPIDE** de la pirámide, y la cara que no tiene este vértice se llama BASE de la pirámide. Todas las caras diferentes a la base se llaman **CARAS LATERALES.**
- La **ALTURA** de una pirámide es el segmento perpendicular trazado desde el **VÉRTICE** hasta la base o desde el vértice hasta el plano que contiene a la base.
- Al igual que los prismas, las pirámides también se identifican por el número de lados que tiene el polígono de la base.

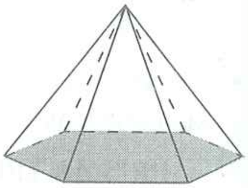
Pirámide triangular



Pirámide cuadrangular



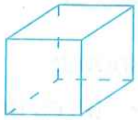
Pirámide pentagonal



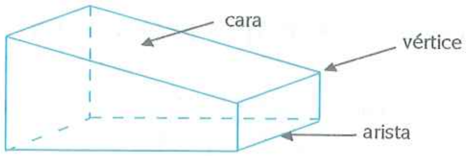
Pirámide exagonal

CUARTA EXPERIENCIA

- Además de los prismas y las pirámides, existen otros poliedros que se caracterizan porque todas sus caras son polígonos regulares. Son los **POLIEDROS REGULARES** y sólo son cinco:

Número de caras	Las caras son	Nombre	Dibujo
4	triángulos equiláteros	tetraedro regular	
6	cuadrados	cubo	
8	triángulos equiláteros	octaedro	
12	pentágonos regulares	dodecaedro	
20	triángulos equiláteros	icosaedro	

- Los elementos visibles de los poliedros son las caras, las aristas y los vértices.



¿Qué relación existe entre el número de caras, vértices y aristas de un poliedro regular? Si completamos el siguiente cuadro veremos que existe esta relación:

	TETRAEDRO	CUBO	OCTAEDRO	DODECAEDRO	ICOSAEDRO
Caras (c)	4	?	8	?	20
Vértices (v)	4	8	?	20	?
Aristas (a)	6	12	12	30	30
c + v - a	?	?	?	?	?

- Por lo tanto, la relación entre el número de caras (c), el número de vértices (v) y el número de aristas (a) es:

número de caras + número de vértices - número de aristas = 2

$$c + v - a = 2$$

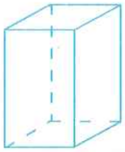
Esta relación fue descubierta por René Descartes, matemático francés en 1.640, y retomada por Leonardo Euler en 1.752 en su texto *Memorias sobre Poliedros*, y por ello se denomina Relación de Euler.

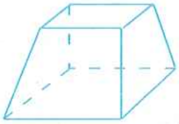
EJERCICIO 8-2

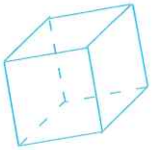
① Responde:

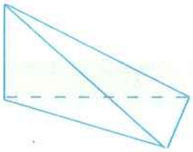
a) ¿Qué es un cuerpo? ¿Y un cuerpo geométrico?.
b) ¿Cómo se clasifican los cuerpos geométricos?.
c) ¿Qué es un poliedro?.
d) ¿Qué es un cuerpo redondo?.
e) ¿Qué es cara, arista y vértice de un poliedro?.
f) ¿Qué es un prisma?.
g) ¿Qué es altura de un prisma?.
h) ¿Qué es una pirámide?.
i) ¿Qué es altura de una pirámide?.
j) ¿Cuándo un prisma es exagonal?.
k) ¿Cuándo una pirámide es pentagonal?.
l) ¿Cuáles son los poliedros regulares?.
m) ¿Qué relación existe entre las caras, las aristas y los vértices de un poliedro?.

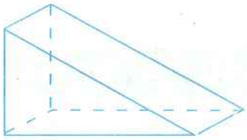
② Escribe el nombre de los siguientes cuerpos geométricos.

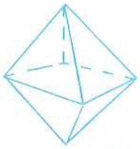
a)


b)


c)


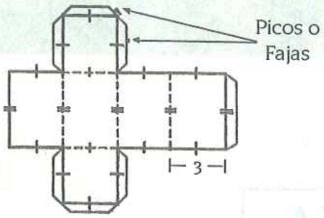
d)


e)


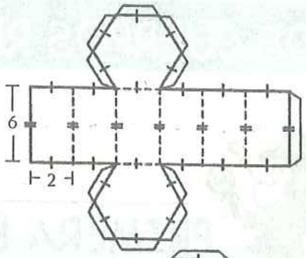
f)


③ Los siguientes dibujos son desarrollos de prismas. Las dimensiones se suponen en centímetros. Realiza estos dibujos en cartulina, recórtalos y construye los prismas.

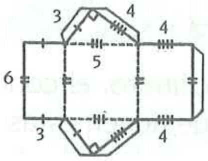
a)



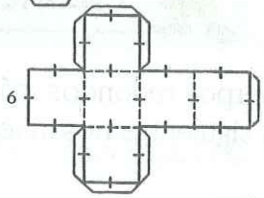
b)



c)

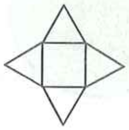


d)

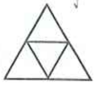


❹ Indica cuáles de los siguientes desarrollos corresponden a tetraedros:

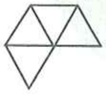
a)



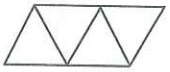
b)



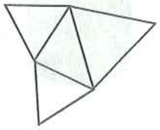
c)



d)

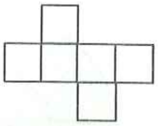


e)

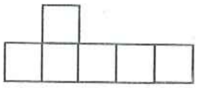


❺ Indica cuáles de los siguientes desarrollos corresponden a cubos:

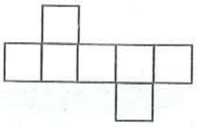
a)



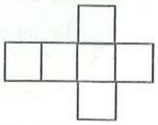
b)



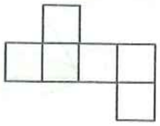
c)



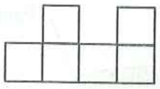
d)



e)



f)



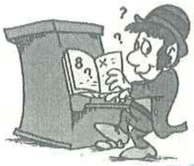
❻ Responde:

a) ¿Cuántos triángulos como mínimo se necesitan para construir un poliedro? ¿Cómo se llama?.

b) ¿Cuántos cuadrados se necesitan como mínimo para construir un poliedro? ¿Cómo se llama?.

c) ¿Cuántos pentágonos regulares se necesitan como mínimo para construir un poliedro? ¿Cómo se llama?.

❼ Un poliedro tiene 14 caras y 30 aristas, ¿cuántos vértices tiene?.



DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 1

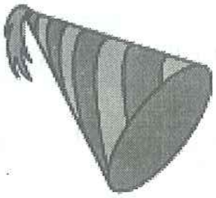
Un cubo de 8 cm de arista está formado juntando cubos blancos de 1 cm de lado. Si pintamos de negro por fuera el cubo grande:

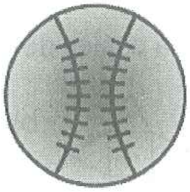
a) ¿Cuántos cubos hay totalmente blancos?
b) ¿Cuántos hay con una sola cara negra?
c) ¿Cuántos hay con solo dos caras negras?
d) ¿Cuántos hay con tres caras negras?

8.3 LOS CUERPOS REDONDOS

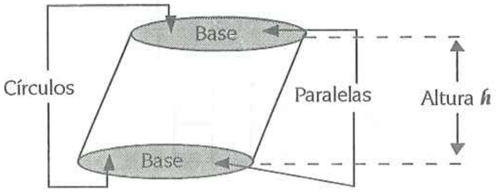
PRIMERA EXPERIENCIA

- Los cuerpos redondos más populares y simples son el cilindro, el cono y la esfera. Las figuras siguientes nos muestran objetos de la vida real que tienen estas formas.

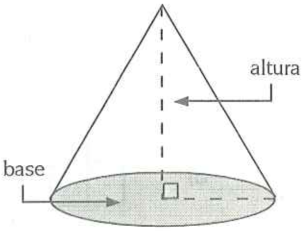




- Ahora observa estas figuras y contesta:



Cilindro

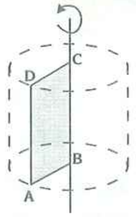


Cono

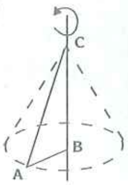
Esfera

a) ¿Cuántas bases tiene un cilindro? ¿Qué figuras son?.
b) ¿Cuántas bases tiene un cono? ¿Qué figura es?.
c) ¿Tiene la esfera alguna base? ¿Qué figura es?.
d) ¿Qué es la altura de un cilindro? ¿Y de un cono?.
e) ¿Cuáles elementos identificas en una esfera?.

SEGUNDA EXPERIENCIA



- Pega un rectángulo de cartulina a una varilla delgada. Haz girar la varilla rápidamente, como muestra la figura de la derecha, ¿qué cuerpo geométrico se forma? ¿Qué recorrido describe la varilla?

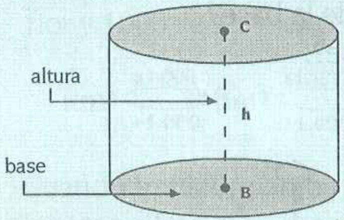


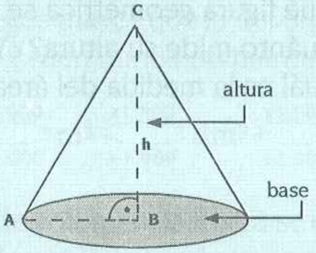
- Pega un triángulo rectángulo ABC a una varilla delgada. Haz girar la varilla rápidamente, como muestra la figura de la derecha, ¿qué cuerpo geométrico se forma?.

- Pega un semicírculo de cartulina a una varilla delgada. Haz girar la varilla rápidamente, como muestra la figura de la derecha,¿qué cuerpo geométrico se forma?.

APRENDAMOS...

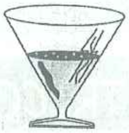
- Un rectángulo que gira alrededor de uno de sus lados describe un **CUERPO DE REVOLUCIÓN** denominado **CILINDRO.**
- Un triángulo rectángulo que gira alrededor de uno de sus catetos describe un **CUERPO DE REVOLUCIÓN** denominado **CONO.**
- Un semicírculo que gira alrededor de su diámetro describe un **CUERPO DE REVOLUCIÓN** denominada **ESFERA.**

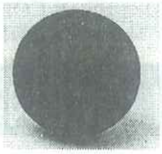




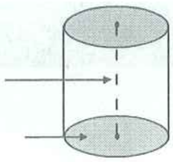
EJERCICIO 8-3

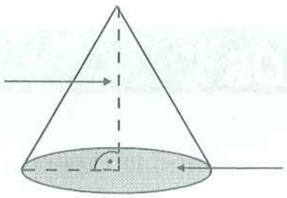
① ¿Qué cuerpo geométrico representa cada uno de los siguientes objetos?

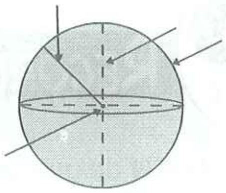




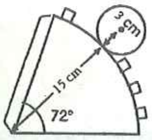
② Escribe el nombre de los elementos señalados con las flechas en cada uno de los siguientes cuerpos redondos.

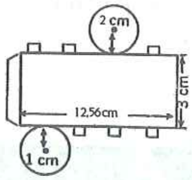






③ Las figuras ilustran los modelos de un cilindro y de un cono. Dibuja estos modelos, con las medidas indicadas, en cartulina. Luego, recórtalas y construye los dos cuerpos.





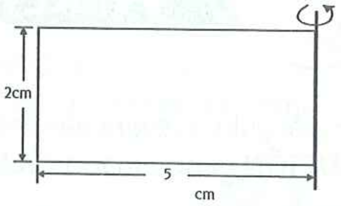
④ Al girar este rectángulo alrededor del lado menor:

a) ¿Qué figura geométrica se forma?.

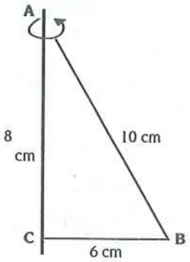
b) ¿Cuánto mide su altura?.

c) ¿Cuánto mide el radio de la base?.

d) ¿Cuál es el área del rectángulo? ¿Y la del área de la base del cilindro?.



⑤ Si giras este triángulo rectángulo alrededor de un cateto:



a) ¿Qué figura geométrica se forma?.

b) ¿Cuánto mide su altura? ¿Y el radio de la base?.

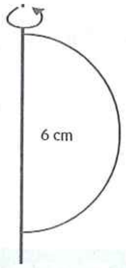
c) ¿Cuál es la medida del área de la base?.

⑥ Si giras este semicírculo alrededor del diámetro:

a) ¿Qué figura geométrica se forma?.

b) ¿Cuánto mide el radio del semicírculo?.

c) ¿Cuánto mide el área del semicírculo?.

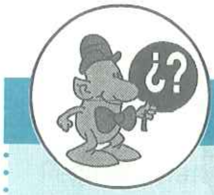


DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 2

¿Si cortas una esfera con un plano por cualquier parte, que figura forma el corte o sección? ¿Cuál es el corte o mayor sección que puede hacerse?.

8.4 VOLUMEN DE LOS CUERPOS GEOMÉTRICOS

8.4.1 Unidades de Volumen



RECORDEMOS

- El **VOLUMEN** de un cuerpo es la cantidad de espacio que ocupa.

- Hallar el volumen de un cuerpo consiste en contar el número de unidades (cúbicas) que ocupa el cuerpo.
- Para medir el **VOLUMEN** de un cuerpo en el sistema métrico decimal se utilizan CUBOS cuyas aristas se miden en metros, en sus múltiplos o en sus submúltiplos. Estas unidades son:

  - La unidad principal: el **metro cúbico (m^3)**

  - Los múltiplos del metro cúbico:
    * El **decámetro cúbico (dam^3)**
    * El **hectómetro cúbico (hm^3)**
    * El **kilómetro cúbico (Km^3)**

  - Los submúltiplos del metro cúbico:
    * El **decímetro cúbico (dm^3)**
    * El **centímetro cúbico (cm^3)**
    * El **milímetro cúbico (mm^3)**

- Una unidad de volumen es 1000 veces mayor que la del orden inmediatamente inferior y 1000 veces menor que la del orden inmediatamente superior; es decir:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{km^3} \arrow[r, bend left, "x1.000"] & \mathbf{hm^3} \arrow[l, bend left, "\div 1.000"] \arrow[r, bend left, "x1.000"] & \mathbf{dam^3} \arrow[l, bend left, "\div 1.000"] \arrow[r, bend left, "x1.000"] & \mathbf{m^3} \arrow[l, bend left, "\div 1.000"] \arrow[r, bend left, "x1.000"] & \mathbf{dm^3} \arrow[l, bend left, "\div 1.000"] \arrow[r, bend left, "x1.000"] & \mathbf{cm^3} \arrow[l, bend left, "\div 1.000"] \arrow[r, bend left, "x1.000"] & \mathbf{mm^3} \arrow[l, bend left, "\div 1.000"]
\end{tikzcd}$$

- Cuando transformamos unidades de volumen, la coma se escribe a continuación de las **tres** cifras correspondientes a la unidad elegida.

EJEMPLO 1:

Convirtamos $12m^3$ en cm^3

m^3			dm^3			cm^3		
	1	2	0	0	0	0	0	0

$12\ m^3 = 12{,}000.000\ cm^3$

Reservamos tres cifras para cada unidad de volumen. Escribimos las cifras correspondientes a la unidad dada (m^3) en las casillas correspondientes y completamos con ceros.

EJEMPLO 2:

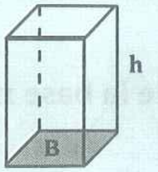
Convirtamos $57m^3$ en hm^3

hm^3			dam^3			m^3		
		0,	0	0	0	0	5	7

acá se escribe la coma

Como pasamos de una unidad menor a una mayor dividimos por 1.000 o completamos con tantos grupos de tres ceros a la izquierda como unidades haya entre la unidad dada y a la que debemos pasar.

- En 6o. grado aprendimos que para calcular el **VOLUMEN DE UN PRISMA RECTANGULAR** debemos multiplicar el área de la base por la altura; es decir:



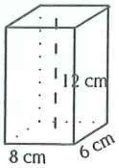
$V = \text{Área de la base x altura} = B \times h$

8.4.2 Volumen de Otros Cuerpos Geométricos

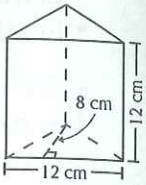
PRIMERA EXPERIENCIA

- Construye, en cartulina, estos dos prismas sin tapa, con las medidas indicadas.

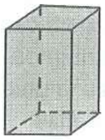
El área de la base de este prisma es $B = (8 \cdot 6)\ cm^2 = 48\ cm^2$
Su altura es h = 12 cm

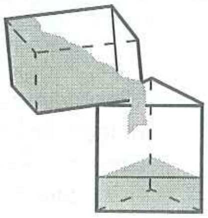


El área de la base de este prisma es $B = \frac{12 \bullet 8\ cm^2}{2} = 48\ cm^2$
Su altura es h = 12 cm



- Las bases y las alturas de estos prismas son iguales. Como el volumen del prisma de base rectangular es igual al producto del área de la base por la altura, entonces su volumen es: $V=48cm^2 \times 12\ cm=576\ cm^3$. ¿Cuál será el volumen del prisma de base triangular?
- Para contestar la pregunta, llenemos con polvo de aserrín seco el prisma de base rectangular. A continuación pasemos el polvo al prisma triangular:



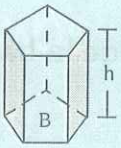


¿Qué observas?

- Esta experiencia nos permite comprobar que ambos prismas tienen el mismo volumen; pues ambos tienen igual área de la base e igual altura.
- En general, **el volumen de un prisma es igual al producto del área de la base por la atura.**

APRENDAMOS...

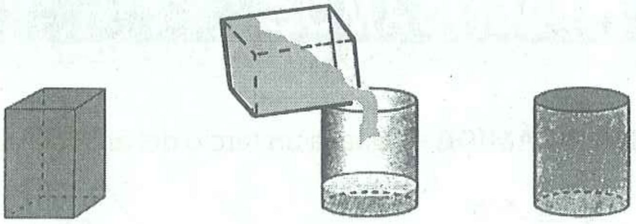
El **VOLUMEN DE UN PRISMA** es igual al producto del área de la base por la altura.



V = Area de la base x altura =B x h

SEGUNDA EXPERIENCIA

- Toma de nuevo el prisma rectangular de la experiencia anterior, construye un cilindro sin tapa cuyo radio de la base mide 3,91 cm y cuya altura es la misma del prisma.
- Contesta:
  a) ¿Cuánto mide el área de la base del cilindro?.
  b) ¿Coinciden el área de la base del prisma y el área de la base del cilindro? ¿Y las alturas?.
- Llena con aserrín en polvo seco el prisma. A continuación, vacia el aserrín en el cilindro, ¿qué observas?.

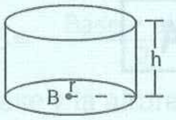


- Esta experiencia te ha permitido comprobar que un prisma y un cilindro que tienen la misma área de la base y la misma altura tienen igual volumen; es decir:

Volumen del cilindro = Volumen del prisma = B • h

APRENDAMOS...

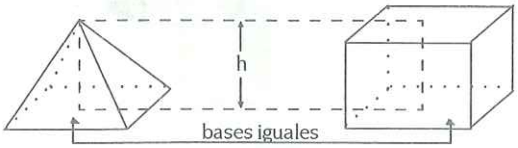
El **VOLUMEN DE UN CILINDRO** es igual al producto del área de la base (B) por la altura (h); es decir:



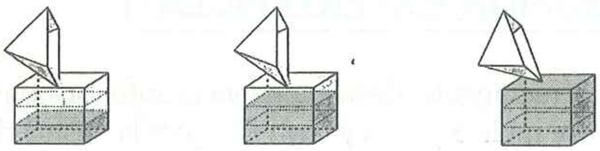
$$V = B \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

TERCERA EXPERIENCIA

- Construye en cartulina un prisma y una pirámide que tengan la misma base y la misma altura.



- Llena con polvo de aserrín seco la pirámide y, luego, la pasas al prisma. ¿Cuántas veces debes vaciar el aserrín de la pirámide para llenar el prisma? ¿Qué puedes concluir?.

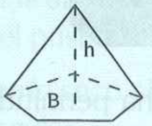


- Si repites esta experiencia con un cilindro y un cono de igual base e igual altura, ¿qué puedes concluir?.

APRENDAMOS...

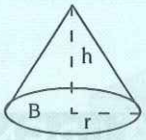
El **VOLUMEN DE UNA PIRÁMIDE** es igual a un tercio del área de la base (B) por la altura (h); es decir:

$$V = \frac{B \cdot h}{3}$$



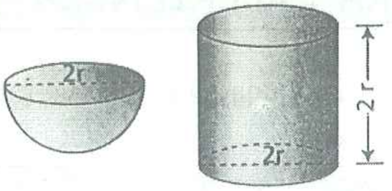
El **VOLUMEN DE UN CONO** es igual a un tercio del área de la base (B) por la altura (h); es decir:

$$V = \frac{B \cdot h}{3} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$$

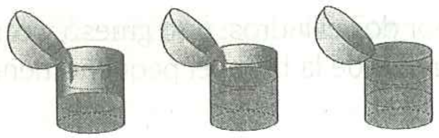


CUARTA EXPERIENCIA

- Corta por la mitad una pelota hueca de goma o de plástico para obtener una semiesfera.
- Ahora construye un cilindro de cartulina cuya altura coincida con el diámetro de la semiesfera (2r) y cuya base tenga el mismo diámetro que la semiesfera (2r).



- Llena con polvo de aserrín la semiesfera y pásala al cilindro. ¿Cuántas semiesferas de aserrín necesitas para llenar completamente el cilindro?.



- Has comprobado que el volumen de la semiesfera es igual a la tercera parte del volumen del cilindro. Por lo tanto:

$$\text{V cilindro: B} \cdot \text{h} = \pi\, r^2 \cdot (2r) = 2\pi \cdot r^3$$

$$\text{V semiesfera: } \frac{1}{3}\text{ V cilindro} = \frac{1}{3} \cdot 2\pi \cdot r^3 = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

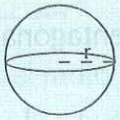
- El volumen de la esfera es el doble del volumen de la semiesfera. Luego:

$$\text{V esfera} = 2\text{ V semiesfera} = 2 \cdot \frac{2}{3}\pi \cdot r^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

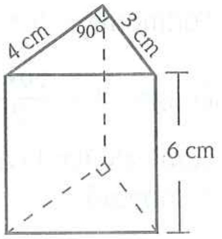
APRENDAMOS...

El **VOLUMEN DE LA ESFERA** es igual a cuatro tercios del producto $\pi \cdot r^3$; es decir:

$$\mathbf{V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3}$$



QUINTA EXPERIENCIA



- Calculemos el volumen de este prisma:
  - El volumen de este prisma es igual al producto del área de la base por la altura.
  - Como la base es un triángulo rectángulo, entonces su área es:

$$\text{B} = \frac{\text{Base} \cdot \text{altura}}{2}$$

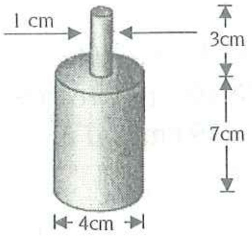
En este caso, la base y la altura son los dos catetos del triángulo. Por lo tanto:

$$\text{B} = \frac{(4 \cdot 3)\text{ cm}^2}{2} = 6\text{ cm}^2$$

  - Y como la altura del prisma mide 6 cm (¿por qué?), entonces:

$$\text{V} = \text{B} \cdot \text{h} = (6 \cdot 6)\text{ cm}^3 = 36\text{ cm}^3$$

- Hallemos el volumen de la siguiente pieza mecánica:

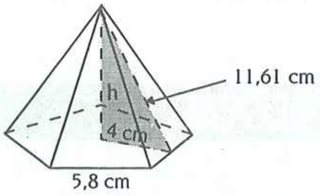


- La pieza está formada por dos cilindros: uno grueso y otro delgado. El grueso tiene 7 cm de altura y 2 cm de radio de la base; el pequeño tiene 3 cm de altura y 0,5 cm de radio de la base.
- Por lo tanto, el volumen de la pieza es la suma de los volúmenes de los cilindros que la forman:

  V cilindro grande: $\pi \cdot r^2 \cdot h = 3{,}14 \cdot 2^2 \cdot 7 \text{ cm}^3 = 87{,}92 \text{ cm}^3$
  V cilindro pequeño: $\pi \cdot r^2 \cdot h = 3{,}14 \cdot 0{,}5^2 \cdot 3 \text{ cm}^3 = 2{,}355 \text{ cm}^3$

- Luego: V pieza $= 87{,}92 \text{ cm}^3 + 2{,}355 \text{ cm}^3 = 90{,}275 \text{ cm}^3$

- Hallemos el volumen, en m³, de la siguiente pirámide:



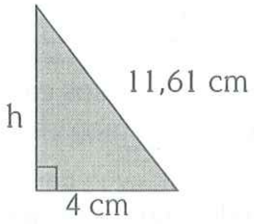
- Esta es una pirámide de base pentagonal, cuyo lado de la base mide 5,8 cm y cuya apotema mide 4 cm.
- El volumen de una pirámide es igual a $\frac{1}{3}$ del producto del área de la base por la altura.
- El área de la base (B) es:

$$B = \frac{\text{Perímetro x apotema}}{2}$$

Perímetro $= 5 \bullet 5{,}8 \text{ cm} = 29 \text{ cm}$ y Apotema $= 4 \text{ cm}$

Luego: $B = \frac{29 \bullet 4}{2} \text{ cm}^2 = 58 \text{ cm}^2$

- Para calcular la altura (h) de la pirámide, saquemos aparte el triángulo rectángulo sombreado:



La altura (h) es un cateto del triángulo rectángulo. Como conocemos la medida de la hipotenusa y la del otro cateto, entonces aplicamos el Teorema de Pitágoras para hallar h; así:

$$\begin{aligned} & h^2 = (11{,}61 \text{ cm})^2 - (4 \text{ cm})^2 \\ \therefore\ & h^2 = 134{,}79 \text{ cm}^2 - 16 \text{ cm}^2 \\ \therefore\ & h^2 = 118{,}79 \text{ cm}^2 \\ \therefore\ & h = 10{,}9 \text{ cm} \end{aligned}$$

- Ahora ya podemos calcular el volumen de la pirámide:

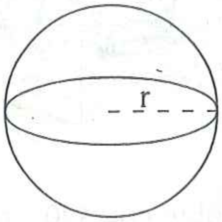
$$V = \frac{B \bullet h}{3} = \frac{58 \bullet 10{,}9\text{cm}^3}{3} = \frac{632{,}15\text{cm}^3}{3} = 210{,}73\ \text{cm}^3$$

- Para convertir esta medida en m^3 debemos dividir primero por 1.000 para pasar a dm^3 y, luego, otra vez por 1.000 para pasar a m^3. Esto es lo mismo que correr la coma seis (6) lugares a la izquierda; así:

$$\mathbf{210{,}73\ cm^3 = 0{,}\!\overset{\uparrow}{}00021073\ m^3}$$

└corrimos la (,) seis lugares a la izquierda

- Calculemos el volumen de una pelota de 10 cm de diámetro. ¿Su volumen es mayor o menor que medio decímetro cúbico?.



- Como el diámetro es 10 cm, entonces el radio r = 5 cm.
- Puesto que el volumen de una esfera es $V= \frac{4}{3}\pi r^3$, entonces:

$$V = \frac{4}{3} \bullet 3{,}14 \bullet 5^3\ \text{cm}^3$$

$$\therefore\ V = \frac{4}{3} \bullet 3{,}14 \bullet 125\ \text{cm}^3$$

$$\therefore\ V = 523{,}3\ \text{cm}^3$$

- Para transformar cm^3 en dm^3 debemos dividir por 1.000 o correr la coma tres (3) lugares a la izquierda. Por lo tanto: **523,3 cm³ = 0,5233 dm³.**

  Luego, 0,5233 $dm^3 > 0{,}5\ dm^3$ y el volumen de la pelota es mayor que medio decímetro cúbico.

EJERCICIO 8-4

① Indica si el volumen de los siguientes cuerpos o espacios es mayor o menor que 1 m^3:

a) la papelera del salón menor b) el aula de clase mayor c) tu zapato menor
d) un televisor menor e) una lavadora mayor f) un automóvil mayor

② Indica si los siguientes cuerpos tienen un volumen mayor o menor que 1 cm^3:

a) un borrador de tablero mayor b) una abeja mayor
c) una gota de agua menor d) un grano de maíz menor

③ Expresa en cm³ las siguientes cantidades:

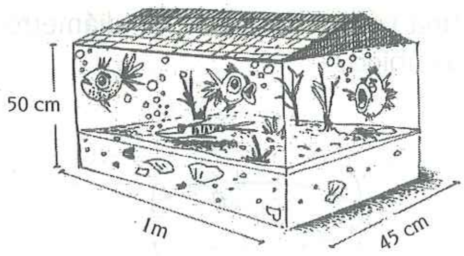
a) 8 dm³ b) 0,25 m³ c) 0,0056 km³ d) 31₁700.500 mm³

④ Expresa en m³ las siguientes cantidades:

a) 4 dam³ b) 6 hm³ c) 4 km³ d) 600 dm³ e) 0,035 hm³

⑤ Calcula el volumen de la pecera en:

a) cm³ b) dm³ c) mm³



225 dm³

⑥ La primera capa de una caja se cubre con 120 cm³. La caja se completa con 10 capas. ¿Es su volumen mayor o menor que 1 dm³?.

⑦ Completa los números y las unidades que faltan:

a) 465 cm³ = 0,465 ——— b) 0,83 dm³ = ——— cm³

c) 0,8 m³ = ——— dm³ d) 4₁000.000 cm³ = 4 ———

⑧ Completa:

a) El volumen de un prisma es igual al producto del____________de la base por la_________ del prisma.

b) Si una pirámide tiene la misma base y la misma altura de un prisma, entonces el volumen de la pirámide es ____________del volumen del prisma.

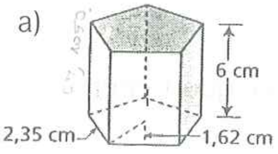
c) El largo de un ortoedro mide 10 cm, el ancho mide 15 cm y la altura mide 20 cm. El volumen de este ortoedro es_________ mm³.

d) Un cilindro y un cono tienen la misma base y la misma altura, entonces el volumen del cono es____________del volumen del cilindro.

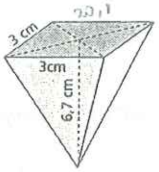
e) Si el diámetro de la base y la altura de un cilindro miden lo mismo que el diámetro de una semiesfera, entonces en el cilindro caben____________ porciones completas de aserrín de la semiesfera.

⑨ Calcula, en cm³, el volumen de los cuerpos siguientes:

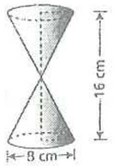
a)



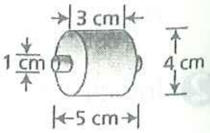
b)



c)



d)



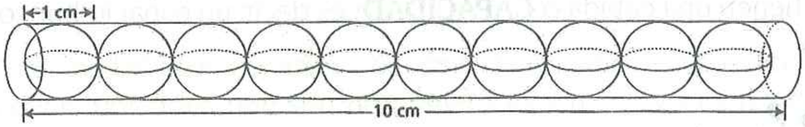
Amaracilta Muatalla

⑩ Calcula el volumen de una esfera de 2m de radio. Expresa el resultado en:

a) m^3 b) dm^3 c) cm^3

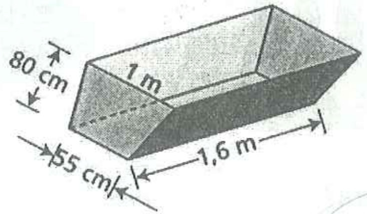
⑪ Un comerciante vende paquetes de 10 canicas envueltas en un tubo, como muestra la figura siguiente.

TITULO Vol y CAP

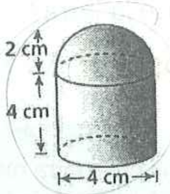


a) ¿Cuál es el volumen de cada canica?.
b) ¿Cuál es el volumen del tubo?.
c) ¿Cuál es el volumen del espacio que no está ocupado por las canicas?.

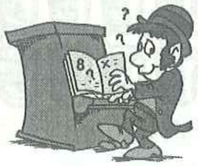
⑫ La figura representa una vagoneta en la que se puede transportar mezcla de cemento. ¿Cuántas vagonetas de cemento serán necesarias para tapar un pozo cilíndrico de 1,5 m de diámetro y 5 m de profundidad?



⑬ Calcula el volumen de los siguientes cuerpos: a)



b)



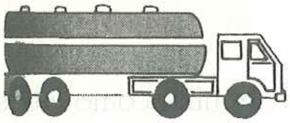
DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 3

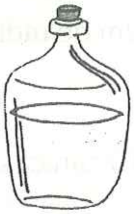
Sara comprobó que el suelo de su habitación mide 5 pasos de largo y 3 de ancho. Ella mide 1,25 m de alto y ésto es más o menos la mitad de la altura de la habitación. ¿Cuál es el volumen de la habitación si un paso de Sara mide 60 cm?.

8.5 VOLUMEN Y CAPACIDAD

PRIMERA EXPERIENCIA

- Los líquidos como el agua, la leche, el aceite... toman la forma de la vasija que los contiene. Obseva algunas de ellas:

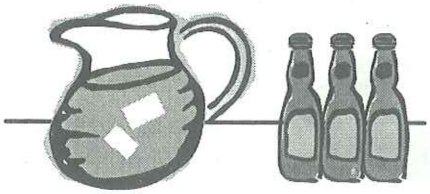


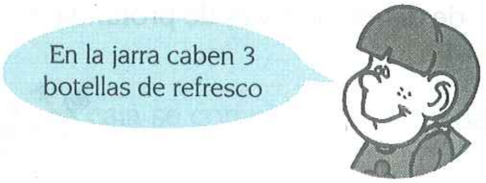


- Estas vasijas tienen una cabida o **CAPACIDAD;** es decir, un espacio hueco para contener a los líquidos.

SEGUNDA EXPERIENCIA

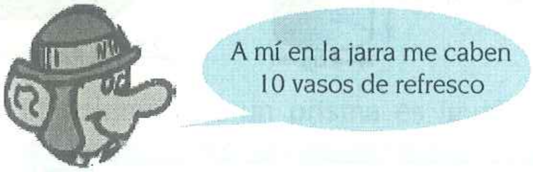
- Ahora fíjate bien en lo que hace Manuela:

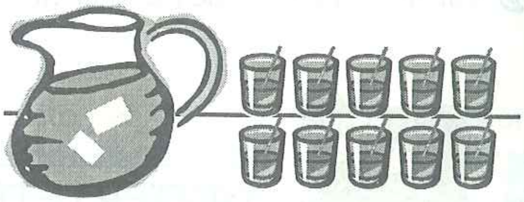




¿Cuál es la capacidad de la jarra?

- Y ésto nos dice Camilo:





¿Cuál es la capacidad de la jarra?.

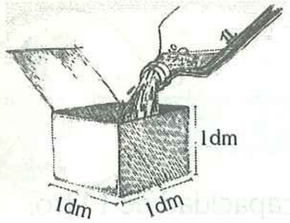
- Contesta:

a) ¿Qué unidad utilizó Manuela para medir la capacidad de la jarra? ¿Y qué unidad utilizó Camilo?.

b) ¿Por qué el resultado de la medida es distinta si la jarra es la misma? Explica.

TERCERA EXPERIENCIA

- En la experiencia anterior, Manuela y Camilo obtuvieron distintos resultados porque utilizaron distinta unidad de medida.
- Para evitar confusiones y poner a todo mundo de acuerdo, en el Sistema Internacional de Medidas (S.I.M) escogieron como **UNIDAD DE CAPACIDAD** al **LITRO.** Para que comprendas lo que es un litro observa la siguiente experiencia:



1 litro es la cantidad de líquido que cabe
en un cubo de 1 dm de arista; es decir:
$1l = 1\ dm^3$

- Para medir la capacidad de recipientes o depósitos muy grandes utilizamos los MÚLTIPLOS del litro; es decir, unidades que son un número exacto de veces mayores que el litro. Estos múltiplos son:

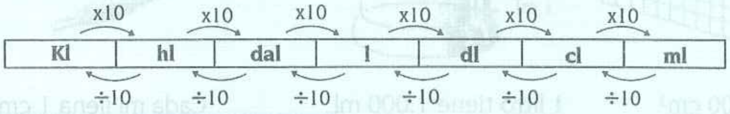
decalitro (dal) = 10 l
hectolitro (hl) = 100 l = 10 dal
kilolitro (kl) = 1.000 l = 100 dal = 10 hl

- Para medir la capacidad de recipientes pequeños como una jeringa, un frasco de perfume, una botella de gaseosa o un tetero utilizamos los SUBMÚLTIPLOS del litro; es decir unidades que son un número exacto de veces menores que el litro. Estos submúltiplos son:

decilitro (dl) = $\frac{1}{10}$ l = 0,1 l
centilitro (cl) = $\frac{1}{100}$ l = 0,01 l
mililitro (ml) = $\frac{1}{1.000}$ l = 0,001 l

- Como vemos, las unidades de capacidad varían de 10 en 10.

Cada unidad de capacidad es igual a 10 unidades del orden inmediatamente inferior. O también, cada unidad de capacidad es 10 veces menor que la de orden inmediatamente superior.



EJEMPLOS:

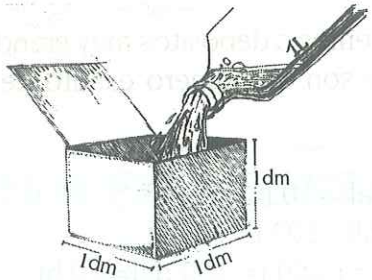
4,5 hl = (4,5 x 10) dal = 45 dal ; 0,07 cl = (0,07 ÷ 10) dl = 0,007 dl

- Completa:

a) 0,2 k l = ☐ hl
b) 20 dal = ☐ l
c) 2 hl = ☐ dal
d) 3,8 dl = ☐ cl
e) 35,42 dal = ☐ hl
f) 12,5 l = ☐ dal
g) 50 cl = ☐ dl
h) 2,8 ml = ☐ cl

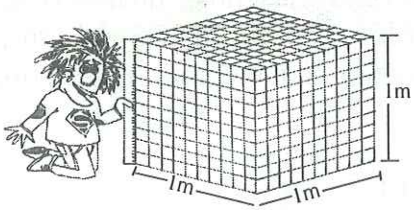
CUARTA EXPERIENCIA

- Ya comprobamos que un volumen de 1 dm^3 equivale a una capacidad de 1 litro:

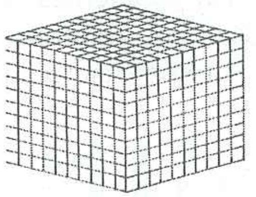


1 dm^3 = 1*l*

- ¿A qué capacidad equivale 1 m^3? Observemos:



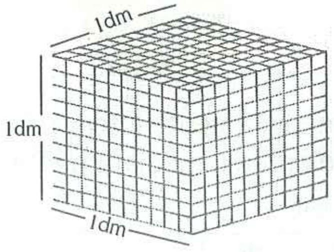
El m^3 tiene 1.000 dm^3



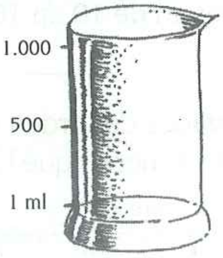
En el m^3 caben 1.000*l* , 1.000*l* = 1 Kl

1 m^3 = 1 Kl

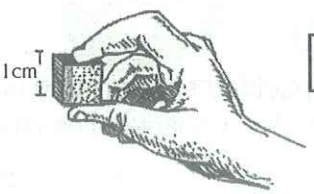
- ¿A qué capacidad equivale 1 cm^3? Observemos:



1 dm^3 tiene 1.000 cm^3



1 litro tiene 1.000 ml



Cada ml llena 1 cm^3

1cm^3 = 1 ml

- Estas son las equivalencias entre las unidades de volumen y las unidades de capacidad.

Capacidad	1 Kl	1 l	1 ml
Volumen	1 m^3	1dm^3	1 cm^3

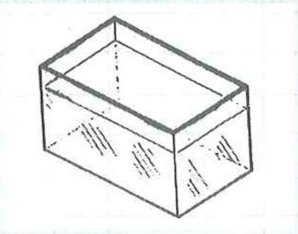
- ¿Cuántos cm^3 de una vasija necesitamos para depositar 25 cl de agua?
  Como 25 cl = 250 ml y 1 ml cabe en una vasija de 1 cm^3 **(1ml = 1 cm^3)**, entonces 250 ml = 250 cm^3

- ¿Cuántos litros caben en un recipiente cuyo volumen es 0,5m^3?
  Como 1l cabe en una vasija de 1 dm^3 **(1l = 1 dm^3)** y 0,5m^3 =0,5 x 1.000 dm^3= 500 dm^3, entonces 0,5 m^3 = 500 l.

MARTIN
GOMEZ 2
"FACE"

APRENDAMOS...

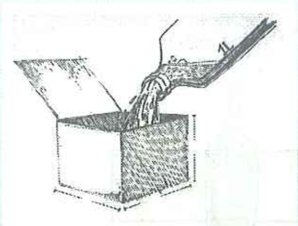
- La palabra **VOLUMEN** se utiliza en dos sentidos. Para comprenderlos imaginemos una pecera de paredes gruesas. Esta pecera tiene dos volúmenes:



- Un VOLUMEN INTERNO, que corresponde a la cantidad de líquido que es capaz de contener; es decir, el volumen interno es la CAPACIDAD del recipiente para contener líquido, arena, aserrín, etc.
- Un VOLUMEN EXTERNO, que es el espacio ocupado por la pecera.

- En el **Sistema Métrico Decimal**, la unidad básica de capacidad es el **LITRO (l)** que equivale a la cantidad de líquido, arena, aserrín, ... que cabe en un cubo de 1 dm de arista.

1 dm³ = 1 l



- Como vemos la **CAPACIDAD** es una magnitud que está estrechamente relacionada con el **VOLUMEN**, aunque sus unidades varían de manera diferente: **las de capacidad varían de 10 en 10 y las de volumen varían de 1.000 en 1.000.**

- Otras unidades de capacidad utilizadas frecuentemente y que no pertenecen al Sistema Métrico Decimal son:

- El **GALÓN** que equivale a 3,6 litros
- La **BOTELLA** que equivale a 0,7 litros

EJERCICIO 8-5

① Escribe dentro del paréntesis una V si el enunciado es verdadero o una F si es falso. Justifica tu respuesta.

a) Un litro se define como la capacidad de un cubo cuya arista tiene 1 dm de longitud (   ).
b) Si en un recipiente cabe más agua que en otro, la capacidad del primero es mayor que la del segundo (   ).
c) Dos recipientes de la misma altura pueden tener diferente capacidad (   ).
d) Dos recipientes de diferente forma pueden tener la misma capacidad (   ).
e) El litro es la unidad fundamental para medir la capacidad de un recipiente (   ).

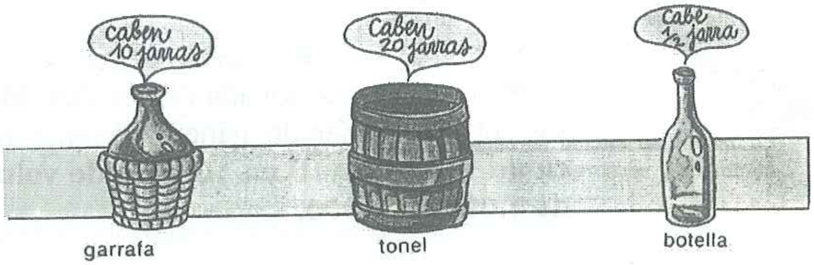
② Responde:

a) ¿Qué se quiere decir con que 1 litro es equivalente a 1 dm^3? Explica.
b) ¿Cuáles son los múltiplos del litro? ¿y los submúltiplos?.

③ Completa la siguiente tabla:

	dal	hl	kl	l	dl	cl	ml
dal	1	0,1					
hl		1			1.000		
kl							
l							
dl	0,01					10	
cl							
ml				0,001			

④ Teniendo en cuenta la siguiente figura, responde:



a) ¿Cuántas veces cabe el líquido de la garrafa en el tonel? Explica.
b) ¿Cuántas veces cabe el líquido de la botella en la garrafa? ¿Y en el tonel? Explica.
c) Si tomo como unidad la botella, ¿cuál es la capacidad de la garrafa? ¿Y la del tonel? Explica.
d) Si tomo como unidad la garrafa, ¿cuál es la capacidad del tonel? ¿Y de la botella? Explica.

⑤ Responde: Cómo se llama:

a) ¿La unidad de medida de capacidad que es igual a 10 veces 1 litro?.
b) ¿La unidad de medida de capacidad que es igual a 100 litros?.
c) ¿La unidad de medida de capacidad que es igual a $\frac{1}{10}$ dal?.
d) ¿La unidad de medida de capacidad que es igual a 0,001 l?.

⑥ Si con la gaseosa de una botella que contiene exactamente 1 litro, se llenan hasta el borde 10 vasitos iguales, responde:

a) ¿Es la capacidad de cada vasito igual a $\frac{1}{10}$ de litro? Explica.
b) ¿Es la capacidad de cada vasito 1 decilitro (dl)? Explica.

7 Responde: ¿Cuántos dl faltan para completar 1l, si tengo:

a) 3 dl? b) 5 dl? c) 2 dl? d) $\frac{1}{2}$ dl? e) $\frac{2}{10}$ dl?

8 En una fábrica, la cerveza se envasa en botellas de: $\frac{1}{2}$ l; $\frac{1}{4}$ l; $\frac{1}{5}$ l.

Contesta:

a) ¿Cuántos cl contiene cada botella?
b) ¿Cuántos dl contiene cada botella?.

9 Completa:

a) 3 l = ☐ ml.
b) 2.000 ml = ☐ l.
c) 5.000 ml = ☐ l.
d) 1 ml = ☐ cl.
e) 1 ml = ☐ dl.
f) 25 cl = ☐ ml.
g) 15 dl = ☐ ml.
h) 7.000 ml = ☐ dl.
i) 16.000 ml = ☐ cl.
j) $\frac{1}{2}$ cl = ☐ ml.
k) $\frac{1}{8}$ l = ☐ cl.
l) $\frac{2}{5}$ hl = ☐ l.

10 Expresa:

a) 32,4 cl en l
b) 245 dal en l
c) 293,7 dl en l
d) 3,2 l en cl
e) 4,52 dl en cl
f) 3.247 ml en cl
g) 8 kl 3 hl en dal
h) 1 kl 7 dal 8 dl en hl
i) 4 kl 2 hl 3l 7 ml en dl.

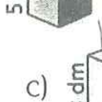
11 Para ubicar una medida de capacidad dada, en la tabla de posiciones, la cifra de las UNIDADES de la medida, se ubica en la unidad de capacidad dada. Observa el ejemplo:

	kl	hl	dal	l	dl	cl	ml	La cifra de las unidades en:
8,57 dl →					8 ,	5	7	→ 8,57 es 8 y se ubica en los dl.
0,4 l →				0 ,	4			→ 0,4 es 0 y se ubica en los l.
847,2 dal →	8	4	7 ,	2				→ 847,2 es 7 y se ubica en los dal.
385 cl →				3	8	5		→ 385 es 5 y se ubica en los cl.

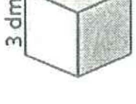
Ubica en la tabla de posiciones de capacidad las siguientes cantidades:

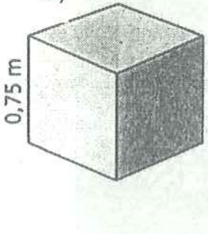
a) 401,6 l b) 0,382 dal c) 0,005 l d) 13,856 hl

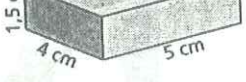
12 Expresa en cm³ y en litros el volumen y la capacidad de las siguientes cajas:

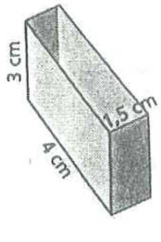
a)


b)

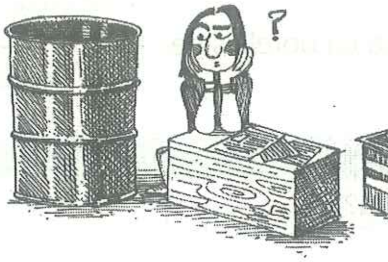

c)


d)


e)


f)


⑬ El volumen de una caneca es igual a cinco veces el de una lata. Entre los dos ocupan 12 dm³. ¿Cuántos litros de gasolina se necesitan para llenar cada recipiente?.



⑭ Un depósito contiene agua hasta los $\frac{2}{3}$ de su capacidad. Tiene forma de prisma de base rectangular cuyas dimensiones son 3 m, 2,5 m y 4 m. ¿Cuántos litros de agua contiene este depósito?.

⑮ Una piscina contiene agua hasta los $\frac{4}{5}$ de su capacidad. Sus dimensiones son: 14 m de largo, 6 m de ancho y 2,5 m de profundidad. ¿Cuántos litros de agua tiene la piscina?.

60.000

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 4

Se han construido cuatro cubos de aluminio, de aristas 6 cm, 8 cm, 10 cm y 12 cm y se llenan de agua. Si el agua se deposita en 2 recipientes de modo que queden con igual capacidad, ¿con qué dimensiones se construyen los dos recipientes?.

8.6 MASA, PESO Y VOLUMEN

Aunque **masa** y **peso** son conceptos totalmente diferentes, en el lenguaje ordinario se usan como si fueran sinónimas. La **masa** hace referencia a la **cantidad de materia** de un cuerpo; en cambio, el **peso** se refiere a la **fuerza** con que esa materia es atraída por la tierra. Un ejemplo sencillo nos ayuda a entender ésto: en la luna, los astronautas tienen la **misma masa** que en la tierra; sin embargo, **pesan menos** porque la luna atrae los cuerpos con menor fuerza que la tierra: por esta razón los astronautas parecen flotar en la luna.

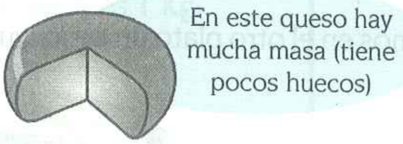
PRIMERA EXPERIENCIA

- Seguramente has tenido la oportunidad de escuchar expresiones como éstas:

- Cuando afirmamos que un objeto pesa **3 kilogramos** ó **1.924 kilogramos** ó **200 gramos** estamos expresando una acción: la acción de **PESAR**. Ls cosas PESAN porque la tierra (o la luna u otro planeta) las atrae con una FUERZA llamada FUERZA DE GRAVEDAD.

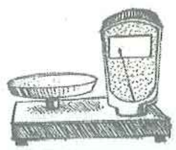
SEGUNDA EXPERIENCIA

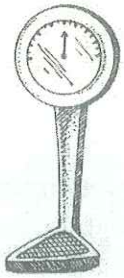
- Fíjate bien en este dibujo:

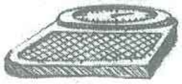


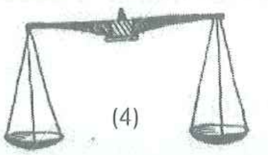
MASA es la cantidad de materia que tiene un cuerpo

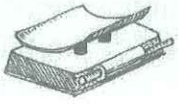
- En la vida práctica, las mediciones se realizan en el mismo lugar y por esta razón no hacemos diferencia entre masa y peso. Seguramente, en ciencias naturales, aprenderás a diferenciar entre PESO y MASA. Por ahora utilizaremos las mismas unidades de medida para ambos conceptos.
- Para medir la masa de los cuerpos se utiliza la **balanza**. Acá tenemos algunos modelos de balanzas:

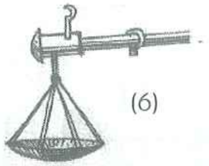

(1)

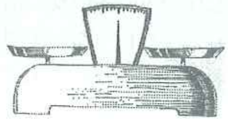

(2)


(3)

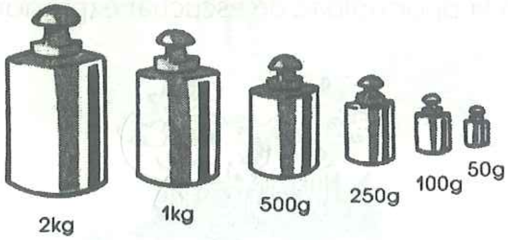

(4)


(5)

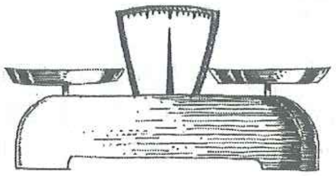

(6)


(7)

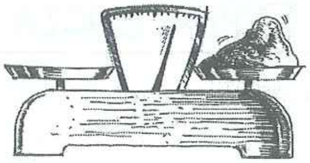
- Las balanzas (1), (2) y (3) son **automáticas** ya que el **fiel** (o aguja) señala directamente el peso del objeto que hemos colocado sobre el **plato**.
- Para reconocer el peso de un objeto con las balanzas (4) y (7) debemos usar unas **pesas**. Las pesas son unas piezas metálicas de peso conocido.



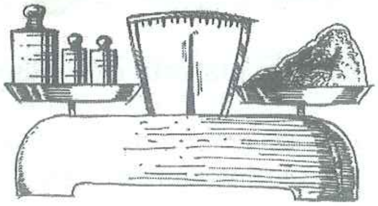
- Cuando no hay nada en los **platos**, decimos que la balanza está en **equilibrio**.



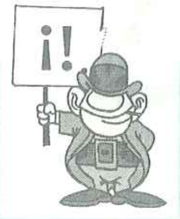
Si colocamos un objeto en un plato de la balanza, éste baja. La balanza se **desequilibra**.



- Si colocamos en el otro plato un peso igual al del objeto, la balanza se equilibra de nuevo.



Las balanzas (5) y (6) se equilibran con una sola pesa o **cursor**.
El cursor puede moverse a lo largo de una barra en la cual están señalados los pesos.
La **posición del cursor** indica el **peso**.

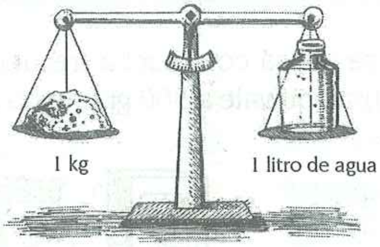


¡ATENCIÓN!

En la vida cotidiana utilizamos el verbo **pesar** para referirnos a la acción de medir la masa de los cuerpos; en nuestro lenguaje, el verbo **masar** no existe. En adelante vamos a convenir en hablar sólo de **peso**.

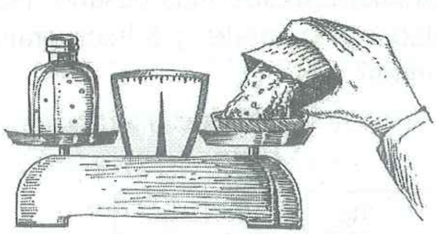
TERCERA EXPERIENCIA

- El **kilogramo** es la unidad básica para medir el peso de los cuerpos.
- Para saber lo que es **1 kilogramo** realiza el siguiente experimento:
  - Coloca en uno de los platos de una balanza un envase de plástico lleno con 1 litro de agua.
  - En el otro plato coloca porciones de otro material (arena, piedra, metal, ...) hasta que la balanza se equilibre.



  - En el momento en que logres el equilibrio tendrás **1 kilogramo** del material utilizado.
- Esta experiencia nos permite afirmar que **1 litro de agua** pesa **1 kilogramo**; es decir:

El peso de 1 litro de agua es 1 Kg:
1*l* de agua = 1 Kg



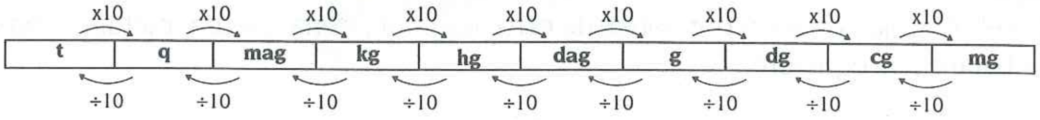
- El **gramo** es la otra unidad básica para medir el peso de los cuerpos. Mil gramos pesan un kilogramo; es decir:

1.000 gramos = 1 kilogramo.
1.000 g = 1 kg

- El peso de las vitaminas viene expresado en **miligramos (mg)**. El miligramo es una unidad de peso muy pequeña.
- El peso de cuerpos muy grandes, por ejemplo un camión, se expresa en **toneladas (t).**

- Así, pues, para pesar los cuerpos utilizamos las siguientes unidades:
  - La unidad principal .... el kilogramo (kg)
  - Sus múltiplos................................. el miriagramo (mag), el quintal (q) y la tonelada (t)
  - Sus submúltiplos........................... el hectogramo (hg), el decagramo (dag), el gramo (g), el decigramo (dg), el centigramo (cg) y el miligramo (mg)

- Las unidades de peso varían de 10 en 10; es decir, cada unidad de una clase equivale a diez unidades de la del orden inmediatamente superior.



- En nuestro medio, también se utiliza con mucha frecuencia otra unidad para pesar los cuerpos: la **libra (lb)**. Una libra equivale a 500 gramos o medio kilogramo.

1 libra = 500 gramos = $\frac{1}{2}$ kg

1 lb = 500 g = $\frac{1}{2}$ kg

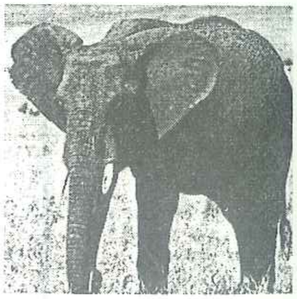
1 lb de arroz


1 lb de sal


1 lb de panela


1 lb de carne

CUARTA EXPERIENCIA



- El elefante africano es el animal terrestre más pesado. Puede pesar alrededor de 5 toneladas, 7 quintales y 8 hectogramos. ¿Cuál es su peso en kilogramos?
  - Si colocamos cada medida en la tabla de posiciones, nos queda:

t	q	mag	kg	hg	dag	g
5	7	0	0,	8		

  - Es decir, si queremos escribir esta medida en kilogramos, tendríamos que utilizar un número decimal: **5 t 7 q 8 hg = 5.700,8 kg**
  - Sin usar la tabla de posiciones, expresamos cada unidad en kg y, luego, sumamos los resultados; así:

5t = (5 x 10) q = (50 x 10) mag = (500 x 10) kg = 5.000 kg
7 q = (7 x 10) mag = (70 x 10) kg = 700 kg
8 hg = (8 ÷ 10) kg = 0,8 kg
5.700,8 kg

∴ 5t 7q 8 hg = 5.700,8 kg

- Una hamburguesa contiene 21 dag de carne. ¿Cuántos mg son? ¿y cuántos kg?.
  - Para pasar de dag a mg hay que multiplicar cuatro veces por 10; o sea, una vez por 10.000: 21 dag = (21 x 10.000) mg = 210.000 mg.
  - Para pasar de dag a kg hay que dividir dos veces por 10; o sea, una vez por 100: 21 dag = (21 ÷ 100) kg = 0,21 kg.
- Expresa en gramos:

a) 3 q 5 mag 4 dg 3 mg . b) 8 t 5 kg 4 dag 5 cg. c) 8,427 kg.

APRENDAMOS...

- **MASA:** es la cantidad de materia que tiene un cuerpo.
- **PESO:** es la fuerza con la cual un cuerpo es atraído por la tierra.
- **PESO** y **MASA:** son dos conceptos distintos. Mientras la MASA es la misma en cualquier lugar, el peso del cuerpo puede variar ya que la gravedad no es la misma en todas partes.
- **UNIDADES DE PESO:** La unidad fundamental es el **kilogramo (kg)**.

MÚLTIPLOS DEL KILOGRAMO	**SUBMÚLTIPLOS DEL KILOGRAMO**
- Miriagramo (mag) = 10 kg	- Hectogramo (hg) = 0,1 kg
- Quintal (q) = 100 kg	- Decagramo (dag) = 0,01 kg
- Tonelada (t) = 1.000 kg	- gramo (g) = 0,001 kg
	- decigramo (dg) = 0,0001 kg
	- centigramo (cg) = 0,00001 kg
	- miligramo (mg) = 0,000001 kg

- Las unidades de peso varían de 10 en 10.
- **UNIDADES DE PESO (MASA) NO DECIMALES:**
  1 onza (oz) = 31,25 g ; 1 libra (lb) = 500 g ; 1 arroba (@) = 25 lb = 12,5 kg.

EJERCICIO 8-6

① Escribe dentro del paréntesis una V si el enunciado correspondiente es VERDADERO o una F si es FALSO.

a) Un centímetro cúbico de agua pesa un gramo. ( )

b) El peso de un cuerpo depende de su volumen. ( )

c) Si el volumen interno de una vasija es 500 cm³, entonces la masa del agua que puede contener es 500 g. ( )

② Completa:

a) $\frac{1}{2}$ kg = ☐ g b) $\frac{1}{5}$ kg = ☐ g c) 3 t = ☐ kg = ☐ g

d) 5t = ☐ q = ☐ kg = ☐ g. e) 1 kg = ☐ t. f) 1 g = ☐ kg.

g) 0,1 t = ☐ q. h) 0,1 q = ☐ kg. i) t = ☐ q = ☐ g.

j) q = ☐ dag = ☐ mg.

③ Calcula el peso de: 550

a) 5.000 l de agua. b) 5,5 hl de agua. c) l de agua.

④ Escribe en el cuadro de posiciones de las unidades de peso (masa) las siguientes cantidades:

a) 35,82 dg. b) 8 kg 5 dag 3 dg. c) 457,3 kg.

⑤ Utilizando el cuadro de posiciones de las unidades de peso (masa), expresa:

a) 305,16 g en hg. b) 385 dg en dag.
c) 0,05 mag en g. d) 8 kg 3 hg 5 dg en dag.

⑥ Sin usar la tabla de posiciones, expresa:

a) 35 q en t. b) 675 g en dag.
c) 3 kg 5 dg 8 cg en g. d) 8 kg 3 hg 5 dg en dag.

⑦ Un trozo de carne pesa 8,235 kg. De él se vende el primer día 1,75 kg; el segundo día, 900 g y el tercer día, $\frac{1}{5}$ kg. ¿Cuánta carne queda?.

⑧ Se cargan tres contenedores con maíz. Cada contenedor vacío pesa 9,8 t. Una vez cargados pesan: 21,85 t, 22,395 t y 20,79 t. ¿Cuántos q de maíz se han cargado? ¿Cuántos kg pesan los tres contenedores y su carga de maíz juntos?.

⑨ Descompón las siguientes unidades:

a) 756 mg. b) 2206 kg. c) 8,4 g. d) 37,8 g.

⑩ Pasa a dg y calcula:

a) 72,8 kg + 34,5 g + 25 kg. b) 32 g + $\frac{2}{5}$ kg + 3,26 hg + 698 dg.
c) 5 ($\frac{5}{2}$ hg - 20 g)+ 0,19 q - 1,7 kg.

⑪ ¿Cuántas libras son:

a) 5 kg?. 10 b) 7 kg?. 14 c) 4.500 g?. 9 d) 12.500 g?. 25

⑫ Un boxeador pesa 140 lb. ¿Cuál es su peso en kg?.

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 5

Se han construido cuatro cubos del mismo material, de aristas 6 cm, 8 cm, 10 cm y 12 cm. Hay que colocarlos en los platillos de una balanza de modo que ésta quede en equilibrio. ¿Cómo colocarlos?.

TALLER DE REPASO DE LA UNIDAD 8

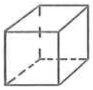
1. Contesta las siguientes preguntas:

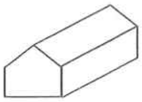
a) ¿Qué es un poliedro?.
b) ¿Qué es un prisma? ¿Cuáles son sus elementos?.
c) ¿Qué es una pirámide? ¿Cuáles son sus elementos?.
d) ¿Qué es un ortoedro? ¿Y un cubo?.
e) ¿Qué es un cuerpo redondo?.
f) ¿Qué es un cilindro? ¿Cuáles son sus elementos?.
g) ¿Qué es un cono? ¿Cuáles son sus elementos?.
h) ¿Qué es una esfera? ¿Cuáles son sus elementos?.
i) ¿Cuál es la unidad fundamental de volumen?.
j) ¿Cómo se halla el volumen de: un prisma?, un cubo?, una pirámide?.
k) ¿Cómo se halla el volumen de: un cilindro?, un cono?, una esfera?.
l) ¿Cuál es la unidad fundamental de capacidad? ¿Y de peso?.
m) ¿Cuánto pesa 1 dm³ de agua? ¿Y cuál es su capacidad?.
n) ¿Cuánto pesa 1 m³ de agua? ¿Y cuál es su capacidad?.
o) ¿Cuáles son los múltiplos y submúltiplos del m³?.
p) ¿Cuáles son los múltiplos y submúltiplos del kg?.
q) ¿Cuáles son los múltiplos y submúltiplos del l?.

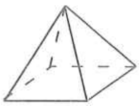
2. Completa:

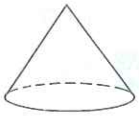
a) Las unidades de volumen varían de ________ en ________.
b) Las unidades de peso varían de ________ en ________.
c) Las unidades de capacidad varían de ________ en ________.

3. Escribe el nombre de los siguientes cuerpos geométricos:

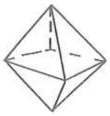
a) 

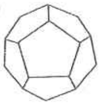
b) 

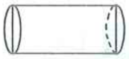
c) 

d) 

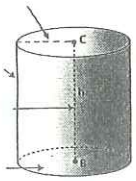
e) 

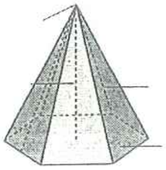
f) 

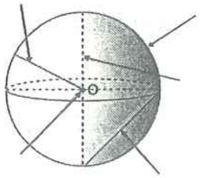
g) 

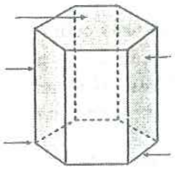
h) 

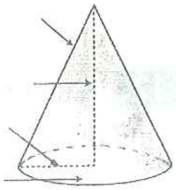
4. Identifica los elementos señalados con flechas en cada uno de los siguientes cuerpos geométricos:





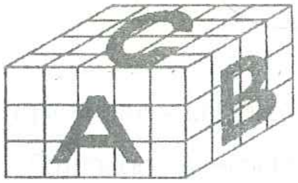




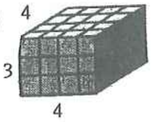


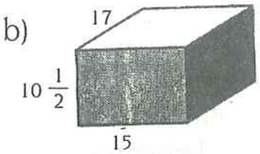
5. Se llama AREA TOTAL de un poliedro a la suma de las áreas de sus caras. En el caso del prisma y la pirámide, el área se obtiene sumando las áreas de las caras laterales con el (las) área(s) de la(s) base(s). Teniendo en cuenta la figura:

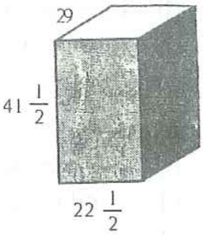
a) ¿Cuál es el área de la cara A?.
b) ¿Y la de la B?.
c) ¿Y la de la C?.
d) ¿Cuál es el área total del poliedro?.
e) ¿Cuál es el volumen?.

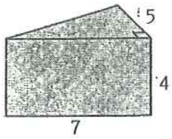


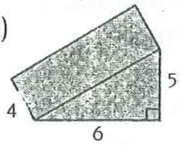
6. Calcula las áreas totales y los volúmenes de los siguientes poliedros.

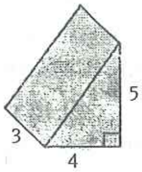
a)


b)


c)


d)


e)


f)


7. Completa las siguientes tablas:

	Ortoedro	Pirámide triangular	Prisma pentagonal	Prisma hexagonal
Caras (c)	6	4	6	8
Vértices (v)	8	4	6	8
Aristas (a)	12	6	10	18
c +v - a	2	2	2	2

	Tetraedro	Cubo	Octaedro	Dodecaedro	Icosaedro
Número de Caras (c)	4	6	8	12	20
Número de lados de cada cara (l)	3	4	3	5	3
C • l	12	24	24	60	60
Número de aristas (a)	6	12	12	30	30

8. Expresa en cm³:

a) 0,225 m³.
b) 0,5 m³.
c) 5,000.000 mm³.
d) 0,432 dam³.
e) 0,00054 km³.
f) 83,52 m³.

9. Expresa en litros:

a) 4 hl.
b) 10 dl.
c) 12 dal.
d) 0,25 kl.
e) 2,5 ml.
f) 0,75 cl.

10. Expresa en gramos:

a) 25 dag.
b) 17 dg.
c) 0,007 t.
d) 7,8 hg.
e) 0,1 cg.
f) 104,3 q.

11. ¿Cuántos litros son:

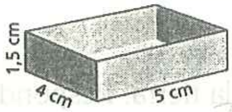
a) 0,47 m³ de agua?.
b) 43,42 hm³ de agua?.
c) $\frac{3}{4}$ dm³ de arena?.
d) 0,052 dam³ de aserrín?.

12. ¿Cuántos kg pesa:

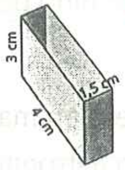
a) 0,07 m³ de agua?.
b) 32,4 dl de agua?.
c) 2,47 cm³ de agua?.
d) 0,425 dal de agua?.

13. ¿Cuántos litros de agua caben en las siguientes cajas?.

a)



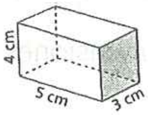
b)



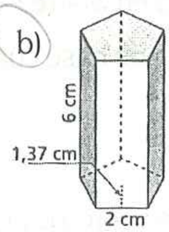
0,031

14. Hallar cuántos kg pesa el agua contenida en los siguientes depósitos:

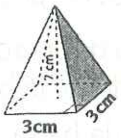
a)



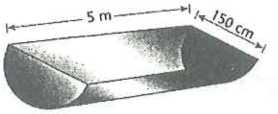
b)



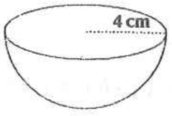
c)



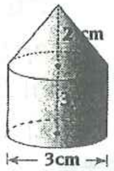
d)



e)



f)



15. Las dimensiones de un depósito con forma de ortoedro son: 9,43 m, 3,45 m y 2,07 m. ¿Cuántos cubos de 1 cm de arista se pueden meter en el depósito, si los cubos se apilan apoyándose en las caras?.

16. Una piscina mide 12 m de largo y 6 m de ancho. ¿Cuál debe ser su profundidad si para llenarla se necesitan 100.800 litros de agua?. 1,4

17. De una llave de agua mal cerrada sale una gota cada segundo. Quince gotas equivalen a 1 ml. ¿Cuántos litros de agua se perderán si el grifo está goteando una semana completa?.

40,320

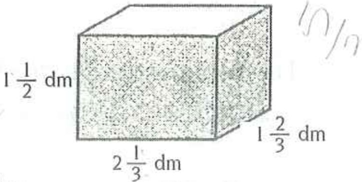
18. Una ballena azul pesa 120 toneladas. Si su esqueleto pesa $\frac{1}{5}$ de dicha cantidad, ¿cuántos kg pesa el esqueleto?.

19. Teniendo en cuenta la figura del sólido siguiente, calcula:

a) Su volumen en decímetros cúbicos. dm³

b) Su área total en decímetros cuadrados.

3/2



5/3

7/3

20. Un cubo tiene un volumen de 64 decímetros cúbicos, calcula:

a) la longitud de cada arista.

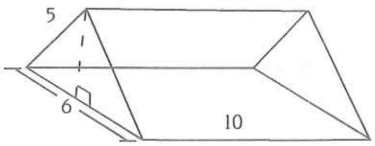
b) el área total del cubo.

c) la altura que debe tener una pirámide de igual volumen cuya base es una de las caras del cubo.

21. Una tienda de campaña tiene las dimensiones indicadas en decímetros:

a) ¿Cuántos decímetros cúbicos de aire contiene la tienda?.

b) Si la tienda tiene un piso y está completamente cerrada, ¿cuántos decímetros cuadrados de tela se necesitan para hacer la tienda?.



22. El peso de un objeto en la luna es $\frac{1}{6}$ de su peso en la tierra. Responde:

a) Si un astronauta pesa en la luna 11,3 kg, ¿cuál es su peso en la tierra?.

b) ¿Cuánto pesa 1 m³ de agua en la luna?.

c) Si en la tierra, un niño pesa 42,3 kg y un perro pesa 1,8 kg, ¿cuál es el peso total en la luna?.

23. El peso de un objeto en marte es 0,39 veces su peso en la tierra. Responde:

a) Si el peso de un astronauta en Marte es 32,21 kg, ¿cuál es su peso en la tierra?.

b) Si tenemos 1,3 kg de carne, 4,53 kg de papas, 2,27 kg de harina, 1,05 kg de uvas, ¿cuál es el "peso" de estos productos en Marte?.

24. Una barra de acero tiene forma de prisma de base cuadrada. Sus dimensiones son 6,5 cm de lado de la base y 60 cmde altura:

a) Dibuja la barra

b) Calcula su volumen.

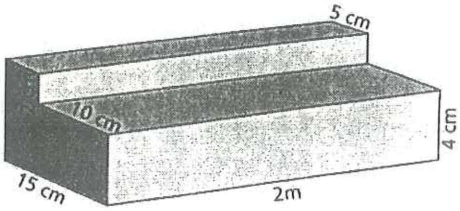
c) Halla su peso, sabiendo que 1 cm³ de acero pesa 8,2 gramos.

25. La pieza que muestra la figura está fabricada con un tipo de madera, tal que 1 cm³ pesa 0,95 gramos. Calcular:

a) el área total de la pieza.

b) el volumen de la pieza.

c) el peso total de la pieza.

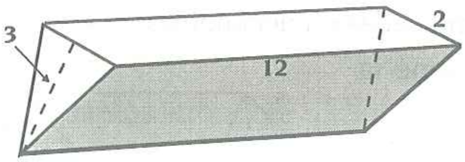


PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS SABER

1. Un decímetro cúbico de oro pesa aproximadamente 19,36 kg. El peso aproximado de un cubo de oro de 6 cm de lado es:

a. 696,96 kg b. 4,18 kg c. 418,1 kg d. Ninguno de los anteriores

2. Un recipiente tiene 12 m de largo y una sección transversal que tiene 2 m de ancho en su parte superior y 3 m de profundidad. El número de litros de agua que lo llenan es:



a. 36 l b. 360 l

c. 36.000 l d. Ninguno de los anteriores

3. Si cada dimensión de un prisma se duplica, el volumen se aumenta:

a. 2 veces b. 8 veces c. 4 veces d. Ninguna de las anteriores

4. Una esfera y un cubo tiene entre ambos 18 cm^3 de volumen. La cuarta parte de la esfera y la mitad del cubo tienen 7 cm^3. El volumen del cubo es:

a. 14 cm^3 b. 7 cm^3 c. 10 cm^3 d. Ninguno de los anteriores

5. Un cubo tiene un volumen de 64 dm^3. Si una pirámide tiene una base con la misma área de una de las caras del cubo, la altura que debería tener la pirámide para igualar el volumen del cubo es:

a. 12 dm b. 8 dm c. 4 dm d. Ninguno de los anteriores.

4. Una esfera [illegible] 16 cm de volumen. La cuarta parte de la esfera y la mitad [illegible] del volumen del cubo es

a. 16 cm³ [illegible]

5. Un cubo [illegible] de 64 [illegible] misma área de [illegible] men del [illegible]

6,5 m

a. 12 dm [illegible]

Núcleo Temático

9

RAZONES Y PROPORCIONES

LOGRO GENERAL

- Utilizar la idea de razón como una relación entre conjuntos, una relación entre magnitudes o como un operador.
- Profundizar en el concepto de proporción como la igualdad de dos razones.

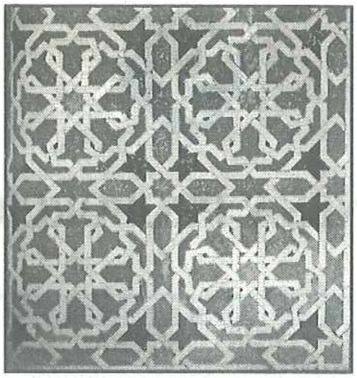
DIMENSIONES

LOGROS ESPECÍFICOS	INDICADORES DE LOGRO
Corporal: • Desarrollar procesos y habilidades de pensamiento.	• En grupos de dos o tres alumnos interpretan y analizan problemas.
Comunicativa: • Utilizar correctamente la razón como operador y como fracción. • Comprender el enunciado verbal de los problemas. • Redactar problemas que involucren la razón entre conjuntos y entre magnitudes.	• Comprende e interpreta correctamente los enunciados de los problemas. • Escribe en lenguaje matemático los enunciados del lenguaje corriente. • Explica con claridad los procesos seguidos para la obtención de resultados.
Cognitiva: • Hallar la razón entre dos cantidades de una magnitud. • Encontrar el término desconocido en una proporción. • Utilizar correctamente la escala para representar objetos materiales en un dibujo.	• Resuelve problemas haciendo uso de la proporcionalidad. • Escribe proporciones utilizando representaciones de una misma razón. • Dado un dibujo a escala, encuentra las dimensiones reales.
Estética: • Hacer dibujos a escala.	• Interpreta un dibujo hecho a escala, mostrando sus dimensiones reales.
Etica - Actitudinal: • Valorar la importancia de la escala y la proporcionalidad para resolver problemas cotidianos.	• Demuestra interés por aprender.

EVALUACIÓN

ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS

9.1 ¿SABÍAS QUE...?



Las normas de la religión islámica no permiten a los artistas reproducir figuras humanas. Por eso las paredes y techos de los palacios y templos musulmanes se decoran siempre con motivos geométricos.

Una buena muestra de este tipo de decoración es la Alhambra de Granada, la residencia real de la Dinastía Nazarí. Después de visitarla, Coexter, uno de los más importantes geómetras de este siglo, quedó impresionado y dijo: "el arte de llenar el plano por repetición de un motivo alcanzó su cenit en la España del siglo XIII, época en que los árabes utilizaron todo tipo de desplazamientos en su intrincada decoración de la Alhambra".

Los tres polígonos que más se encuentran en los mosaicos de la Alhambra se llaman "el hueso", "la pajarita" y "el pétalo". Se obtienen a partir del cuadrado, el triángulo equilátero y el rombo mediante el principio de variar la forma pero manteniendo una misma superficie.

EJERCICIO 9-1

COMPRENSIÓN DE LECTURA: Lee nuevamente el texto anterior y luego resuelve el cuestionario siguiendo la instrucción siguiente: Encierra en un círculo la letra F, si la proposición es falsa; encierra la V, si es verdadera; y la N, si no aparece en el texto:

1. Por amor al arte geométrico, los musulmantes decoran palacios y templos con este tipo de motivos o figuras. F - V - N
2. En muy pocos lugares, los islámicos, decoran con figuras humanas. F - V - N
3. El artista musulmán que decore un palacio con figuras humanas es condenado a muerte . F - V - N
4. Paredes y techos de la Alhambra de Granada están decorados con motivos geométricos. F - V - N

5. En la lectura, Cenit significa máximo apogeo. F - V - N
6. La Alhambra fue decorada en un tiempo récord . F - V - N
7. Coexter es un importante geómetra americano. F - V - N
8. La Dinastía Nazarí era árabe y estaba radicada en España. F - V - N
9. El "Hueso", "la Pajarita" y "el Pétalo" son nombres que corresponden a figuras geométricas F - V - N

9.2 LOS CONCEPTOS DE MAGNITUD Y CANTIDAD

EXPERIENCIA

- Analiza las siguientes situaciones y determina en cuál de ellas no es posible hacer mediciones:

a) La LONGITUD de un tubo **b) La IRA de una persona**
c) El PESO de un cuerpo **d) El TIEMPO que tarda en caer un objeto**

- Mariana se está pesando. La báscula marca 30 Kg
  - El PESO es una propiedad de los cuerpos que se puede MEDIR. Por esta razón el PESO es una MAGNITUD.
  - Cuando afirmamos que Mariana pesa 30 Kg estamos utilizando un NÚMERO (30) acompañado de una UNIDAD DE MEDIDA (Kg).
  - Los 30 Kg son una CANTIDAD de la magnitud PESO.

APRENDAMOS...

- Se llama **MAGNITUD** a toda propiedad de un cuerpo que es suceptible de medida.

EJEMPLO: A una persona se le pueden medir el peso, la estatura, la edad; pero no se le pueden medir la ira, la paciencia o el dolor. Por esta razón, el peso, la estatura y la edad son **magnitudes**; mientras que la ira, la paciencia y el dolor no lo son.

- Se llama **CANTIDAD** de una magnitud al número acompañado de una unidad de medida utilizados para expresar dicha magnitud.

EJEMPLO: 25 km es una **cantidad** usada para expresar la **magnitud de longitud.**

- Para comparar dos cantidades de una magnitud es necesario escribirlas en la misma unidad de medida.

EJEMPLO: Para comparar una longitud de 12 km y otra de 143 hm, debemos escribirlas con la misma unidad de medida; así:

12 km = 120 hm
143 hm = 143 hm

Luego, una longitud de 12 km es menor que una longitud de 143 hm.

EJERCICIO 9-2

① Explica por qué la masa, el tiempo, el dinero, la fuerza física, el volumen, la velocidad y la capacidad son magnitudes.

② Nombra otras tres magnitudes diferentes a las del ejercicio anterior.

③ Copia y completa la siguiente tabla:

CANTIDAD	MAGNITUD	UNIDAD DE MEDIDA	MEDIDA
5,2 km	Longitud	km	5,2
305 g			
35 días			
	Capacidad	dal	18
4 m²			

④ Responde:

a) ¿Qué es magnitud? ¿A qué se llama cantidad de una magnitud? Escribe tres ejemplos.
b) En un conjunto de cantidades de una misma magnitud, ¿es la suma una operación clausurativa? Explica. ¿Está definido el producto de un número por un elemento de este conjunto? Explica.
c) Investiga por qué no están definidas las operaciones multiplicación y división en este conjunto.

⑤ Sabiendo que CANTIDADES HOMOGÉNEAS son las cantidades de una misma magnitud. Di cuál es la magnitud y explica por qué son cantidades homogéneas las siguientes cantidades:

a) $35\ cm^3$; $\frac{2}{3}\ cm^3$; $1\ cm^3$
b) 8 l ; 50 dal ; 6 cl
c) $8\ m^2$; $4\ cm^2$; $3\ cm^2$
d) 9 hm ; $\frac{4}{5}$ hm ; 0,75 hm

⑥ Escribe cinco cantidades que sean homogéneas y tres que no lo sean.

⑦ Di cuáles de las siguientes operaciones son posibles. Las que no lo sean, explica por qué.

a) 8 horas + 2 horas　　b) 12 • 5 l　　c) 5•3 cm²

d) 7 cm + 4 cm²　　e) 5 cm•3 cm　　f) $\frac{8\text{ cm}}{2}$

⑧ Responde:

a) ¿Se puede sumar cantidades de igual magnitud? Explica.
b) ¿Se puede multiplicar cantidades de igual magnitud? Explica.
c) ¿Se puede dividir cantidades de igual magnitud? Explica.

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 1

Completa este cuadrado mágico utilizando los primeros 16 números naturales de modo que sumando por filas, columnas y diagonales se obtenga siempre el mismo resultado.

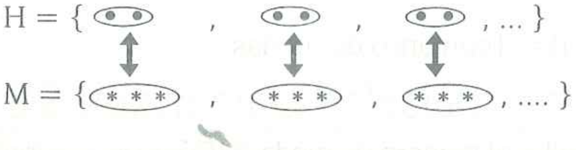
1			
	6		
		11	
			16

9.3 EL CONCEPTO DE RAZÓN

9.3.1 Razón en la Relación entre Conjuntos

EXPERIENCIA

- En una clase de gimnasia por cada 2 hombres (H) asisten 3 mujeres (M):



- Teniendo en cuenta esta relación existente entre hombres y mujeres:

1. Contesta: ¿de qué otra manera podemos reagrupar los elementos de los conjuntos H y M?. X cada 3h → 2m

2. Completa:

a) 2 hombres se relacionan con 3 mujeres.

b) 6 hombres se relacionan con 9 mujeres.

c) 8 hombres se relacionan con 12 mujeres.

3. Si tenemos en cuenta la fracción $\frac{\textbf{No. de hombres}}{\textbf{No. de mujeres}}$, escribe en esta forma la relación del ejercicio anterior. Por ejemplo, la relación del literal a) se escribe $\frac{2}{3}$. Escribe las correspondientes a los literales b) y c).

4. ¿Es $\frac{2}{3} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12}$? Explica. Si ya qe son equivalentes.

5. Responde:
   a) ¿Es el número de hombres igual a los $\frac{2}{3}$ del número de mujeres?.
   Si
   b) ¿Es el número de hombres igual a los $\frac{6}{9}$ del número de mujeres?.
   Si

6. Completa:

   El conjunto $\left\{ \frac{2}{3}, \frac{6}{9}, \frac{8}{12}, \cdots \right\}$ lo representamos con el número racional $\frac{\square}{\square}$. → $\frac{2}{3}$

APRENDAMOS...

- En el lenguaje de los números racionales, decimos que el número de hombres es $\frac{2}{3}$ del número de mujeres.
- También podemos usar otro lenguaje: usando la palabra RAZÓN; así: **"la RAZÓN del número de hombres al de mujeres es de 2 a 3"** y escribimos **2:3**

EJERCICIO 9-3

1 Se tienen los siguientes conjuntos:

A = { conjunto de automóviles}		B = {conjunto de ruedas}

Responde:

a) ¿Cuál es el razón del número de automóviles al número de ruedas? ¿Cómo se escribe?.

b) ¿Cuál es la razón del número de ruedas al número de autos? ¿Cómo se escribe?.

c) En la relación de estos dos conjuntos, ¿qué indica la razón 1 : 4?.

d) La fracción $\frac{1}{4}$ compara el número de automóviles con el número de ruedas. ¿Qué fracción compara el número de ruedas con el número de automóviles?.

e) ¿Con cuál razón podemos comparar el número de ruedas con el de automóviles?.

② Imagina que en un punto cualquiera de una carretera se encuentran 5 automóviles por cada 2 camiones. Esto significa que la razón del número de automóviles al de camiones es de 5 a 2. Responde:

a) ¿Cómo escribimos esta razón?.

b) ¿Cómo expresamos esta relación en el lenguaje de los números racionales?.

c) ¿Cuántos automóviles hay si se pueden contar 30 camiones? Explica.

d) ¿Cuántos camiones hay si se pueden contar 60 automóviles? Explica.

e) Escribe tres símbolos de razones de la forma 5 : 2 que permitan comparar el número de automóviles con el de camiones.

Ejemplo: 10 : 4 nos muestra la relación entre los elementos del conjunto de automóviles con los de los camiones.

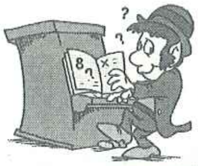
③ En un aula de 36 alumnos hay 16 niñas. La razón del número de niñas de la clase al número total de alumnos, expresada mediante un número racional, es $\frac{16}{36}$ ó $\frac{4}{9}$.

Responde:

a) Sin utilizar un número racional, ¿cómo escribimos la razón del número de niñas de la clase al número total de alumnos?.

b) ¿Qué indica la razón 4 : 9 ?.

c) ¿Son los $\frac{4}{9}$ de los alumnos de la clase niñas? Explica.



DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 2

Si la RAZÓN de automóviles a camiones es de 5 a 2, responde:

a) Si hay 30 automóviles más que camiones, ¿cuántos vehículos hay? Explica.

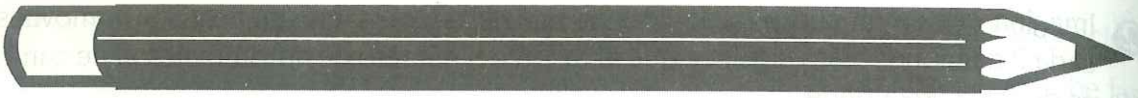
b) Si el total de vehículos es 280, ¿cuántos camiones hay? Explica.

9.3.2 Razón en la Relación entre Magnitudes

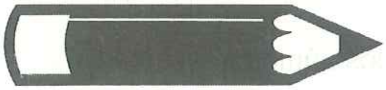
PRIMERA EXPERIENCIA

- Mide las longitudes de los lápices A y B de la figura siguiente:

A



B



- Comprueba que:
  El lápiz **A** mide 15 cm
  El lápiz **B** mide 5 cm
- Ahora comparemos las longitudes de estos lápices. Podemos hacerlo de dos maneras:

  - La primera es hallando la **diferencia** entre la longitud del lápiz **A** y la longitud del lápiz **B**; así:

$$15 \text{ cm} - 5 \text{ cm} = 10 \text{ cm}$$

Decimos: El lápiz A es 10 cm más largo que el lápiz B

  - La otra manera de comparar las longitudes es **dividiendo** entre sí las longitudes encontradas; así:

$$\frac{15 \text{ cm}}{5 \text{ cm}} = \frac{3}{1} \quad \text{ó} \quad \frac{5 \text{ cm}}{15 \text{ cm}} = \frac{1}{3}$$

El lápiz A es 3 veces más largo que el lápiz B

La longitud del lápiz B es la tercera parte de la longitud del lápiz A.

El cociente indicado $\frac{3}{1}$ se denomina **razón** entre la longitud del lápiz A y la del lápiz B.

El cociente indicado $\frac{1}{3}$ se denomina **razón** entre la longitud del lápiz B y la del lápiz A.

SEGUNDA EXPERIENCIA

- Los perímetros de dos rectángulos son 12 cm y 0.24 m respectivamente. Hallemos la razón de estos perímetros.

- Primero debemos expresar las cantidades en la misma unidad; así:

$$\begin{aligned} 12\text{ cm} &= 12\text{ cm} \\ 0.24\text{ m} &= 24\text{ cm} \end{aligned}$$

- Ahora calculemos el cociente entre estas medidas:

$$\frac{12\text{ cm}}{24\text{ cm}} = \frac{1}{2} \longrightarrow \boxed{\text{La razón es } \frac{1}{2}}$$

ó

$$\frac{24\text{ cm}}{12\text{ cm}} = 2 \longrightarrow \boxed{\text{La razón es } \frac{2}{1}}$$

APRENDAMOS...

- Cuando comparamos dos cantidades de una misma magnitud (como longitud, área, capacidad, peso, precios,...) debemos escribirlas en la misma unidad de medida. La comparación podemos hacerla por **diferencia (resta)** o por **cociente.**
- La comparación por **cociente** se llama **RAZÓN.**
- La **RAZÓN** entre dos **CANTIDADES**, escritas en la misma unidad de medida, es igual a la **RAZÓN DE SUS MEDIDAS.**

EJEMPLOS: $\frac{6\text{ cm}}{4\text{ cm}} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$; $\frac{5\text{ m}}{10\text{ m}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

- Se llama razón numérica al cociente indicado de dos números.
- Toda razón entre cantidades de una magnitud es igual a una razón numérica.

Razón entre cantidades de longitud ⟵ $\frac{6\text{ cm}}{4\text{ cm}} = \frac{3}{2}$ ⟶ **Razón numérica**

Razón entre cantidades de longitud ⟵ $\frac{5\text{ m}}{10\text{ m}} = \frac{1}{2}$ ⟶ **Razón numérica**

- La razón entre dos cantidades, escritas en la misma unidad de medida, o entre dos números **m** y **n,** con $\mathbf{n \neq 0}$, podemos simbolizarlo así:

$\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{n}}$ ó **m:n**, Ambas se leen "**m** es a **n**"

Los dos puntos **(:)** y la raya **(—)** se leen: "**es**"

- En la razón $\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{n}}$ el número **m** se llama **ANTECEDENTE** y el número **n** se llama **CONSECUENTE.**

EJERCICIO 9-4

① Escribe la razón y la razón numérica que corresponde a cada una de las siguientes situaciones:

a) La medida de 2 dm², tomando como unidad 3 dm².
b) La medida de 14 m, tomando como unidad 1 dam.
c) La medida de 1 dam, tomando como unidad 14 m.
d) La medida de 50 l, tomando como unidad el dal.
e) La medida de 2 m³, cuando se toma como unidad el dm³.
f) La medida de 5 kg, tomando como unidad 8 hg.

② Copia y completa la siguiente tabla:

A	**B**	**Medida de A con relación a B**	**Medida de B con relación a A**
5 dal	8 l	$\frac{5\text{ dal}}{8\text{ l}} = \frac{50\text{l}}{8\text{ l}} = \frac{50}{8}$	$\frac{8\text{ l}}{5\text{ dal}} = \frac{8\text{l}}{50\text{ l}} = \frac{8}{50}$
20 g	5 g		?
?	?	$\frac{9\text{ dm}^2}{8\text{ dm}^2} = ?$	?
?	?	?	$\frac{20\text{ minutos}}{1\text{ hora}} = ?$

③ Teniendo en cuenta que $\frac{30\text{ cm}}{5\text{ cm}} = 6$ se lee: "la medida de 30 cm es 6 cuando se toma como unidad 5 cm", lee cada una de las siguientes expresiones:

a) $\frac{2\text{ Km}}{10\text{ Km}} = \frac{1}{5}$ b) $\frac{7\text{ Kg}}{5\text{ Kg}} = \frac{7}{5}$

④ Los perímetros de dos triángulos son 8 cm y 0,16 m, respectivamente. Hallar la razón del perímetro del primer triángulo al perímetro del segundo.

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 3

Los antiguos matemáticos griegos llamaban NÚMEROS TRIANGULARES a los números: 1, 3, 6, 10, ... Observa por qué:

Responde:
a) ¿Cuáles son los cinco números triangulares que siguen?.
b) Suma dos números triangulares consecutivos; luego, suma otros dos. ¿Qué observas?.

9.3.3 La Razón como Operador

EXPERIENCIA

- Dibuja cuatro (4) cuadrados de 2 cm, 4 cm, 5 cm y 6 cm de lado, respectivamente.
- Halla, a continuación, el perímetro de cada cuadrado.
- Completa el siguiente cuadro:

Lado (cm)	2	4	5	6
Perímetro (cm)	8	?	20	?

- Teniendo en cuenta este cuadro:
  - a) Escribe la razón del perímetro de cada cuadrado con respecto al lado correspondiente. Escribe también la razón numérica.
  - b) ¿Cuál es el cociente obtenido en cada fracción anterior?.
  - c) Completa:

    $2 \xrightarrow{\textcircled{?}\ \mathbf{x}} 8$; $4 \xrightarrow{\textcircled{?}\ \mathbf{x}} 16$; $5 \xrightarrow{\textcircled{?}\ \mathbf{x}} 20$

  - d) ¿Cuál es el operador de la forma **ax** que aplicado a la longitud del lado en cada cuadrado nos da su perímetro?.
  - e) Todas las razones numéricas anteriores representan la misma razón como operador: la **razón CUÁDRUPLE** o **razón 4**:

    $\frac{8}{2} = 4$; $\frac{16}{4} = 4$; $\frac{20}{5} = 4$; $\frac{24}{6} = 4$

    Escribe tres cocientes indicados, diferentes a los anteriores, que representen la fracción "CUÁDRUPLE".

- Utilizando un operador de la forma **x**, completa:

  a) $4 \xrightarrow{\textcircled{?}\ \mathbf{x}} 2$ b) $8 \xrightarrow{\textcircled{?}\ \mathbf{x}} 4$ c) $16 \xrightarrow{\textcircled{?}\ \mathbf{x}} 8$ d) $20 \xrightarrow{\textcircled{?}\ \mathbf{x}} 10$

- Los cocientes indicados $\frac{2}{4}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{8}{16}$, $\frac{10}{20}$, ... representan la razón: ¿doble de? o ¿mitad de?.

- La razón **8 : 2** se lee **"8 es a 2"** e indica que **"por cada 8 se toman 2"**. Escribe cómo se leen y qué indican cada una de las siguientes razones:

  a) 4 : 2 b) 3 : 6 c) 7 : 5

- Como operador, la razón numérica **2 : 6** representa **"una tercera parte"**. ¿Qué operador representa cada una de las siguientes razones numéricas?.

a) 4 : 2　　　　b) 6 : 2　　　　c) 10 : 20

- Completa:

a) La razón de 1,2 a 0,6 es el operador ———— que al aplicarlo al 0,6 produce el 1,2.
b) La razón de 30 a 10 es el operador ———— que al aplicarlo al 10 nos da 30.

APRENDAMOS...

- La palabra **RAZÓN** puede utilizarse para designar cualquier división o para nombrar el operador multiplicativo que aplicado al divisor produce el dividendo.

Ejemplo: La razón **"5 es a 10"**, corresponde al operador **"UN MEDIO DE"** que aplicado al 10 lo transforma en 5. Esta razón **"UN MEDIO DE"**, se representa mediante una división indicada; así: 5 ÷ 10 , $\frac{5}{10}$ ó 5 : 10.

- La **RAZÓN** como **OPERADOR** puede representarse mediante distintas divisiones indicadas; por ejemplo: $\frac{5}{10}$, $\frac{10}{20}$, $\frac{7}{14}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{1}{2}$ representan la misma razón como operador: "un medio de".

- En la razón **"a : b"** , el número **a** se llama **ANTECEDENTE** y el número **b** se llama **CONSECUENTE.**

EJERCICIO 9-5

❶ Indica cuáles son el antecedente y el consecuente de las siguientes razones:

a) $\frac{3}{5}$　　　　b) 1 : 4　　　　c) 4 ÷ 7

❷ Teniendo en cuenta el siguiente cuadro:

Nº de guayabas	Nº vasos de jugo
2	1
4	2
6	3
8	4

a) ¿Cuál es la razón, como operador, del número de guayabas al número de vasos de jugo?.

b) Escribe, como cocientes indicados, tres razones que representen la razón del literal anterior.

c) ¿Cuántos vasos de jugo se pueden obtener con 40 guayabas? Explica.

d) Para preparar 16 vasos de jugo se necesitan 32 guayabas, ¿cuál es el operador que se aplica a 16 para obtener 32? Explica.

③ Responde:

a) ¿Cuál es la razón de la longitud de la circunferencia a la longitud del diámetro? Explica.
b) ¿Cuál es el resultado de aplicar el operador **πx** al diámetro de una circunferencia? Explica.
c) ¿Cuál es la razón del perímetro de un triángulo equilátero al lado? Explica.

④ Realiza la siguiente actividad:

a) Dibuja cuatro cuadrados cuyos lados tengan diferente longitud.
b) Traza la diagonal de cada uno.
c) Mide en mm. la longitud del lado y la diagonal de cada cuadrado.
d) Calcula el cociente entre la longitud de la diagonal y la longitud del lado respectivo.

⑤ Teniendo en cuenta el ejercicio anterior, responde:

a) ¿Cuál es la razón de la diagonal al lado en un cuadrado? Explica.
b) Investiga con cuál de las siguientes raíces se representa la razón de la diagonal al lado en un cuadrado: $\sqrt{5}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{2}$

9.4 PROPORCIÓN

EXPERIENCIA

- Se sabe que en una población infantil, por cada 12 habitantes hay 3 enfermos.
- Responde: ¿Cómo se escribe, en forma de cociente indicado, la razón del "número de enfermos" con respecto al "número total de habitantes".
- Completa:

a) Hay 6 enfermos por cada ________ habitantes.
b) Hay ________ enfermos por cada 48 habitantes.

- Responde:

  a) Las razones del número de enfermos respecto al número de habitantes, del ejercicio anterior, ¿representan el mismo cociente? Explica.

  b) ¿Podemos decir que $\frac{3}{12} = \frac{6}{24} = \frac{15}{60} = \frac{9}{36}$? ¿Por qué?.

  c) ¿Cuál es la razón que, como operador, representa a todas las razones anteriores?. Explica.

- Si se llama **PROPORCIÓN** a la igualdad de dos razones, contesta: ¿Son proporciones las siguientes igualdades?

  a) $\frac{3}{12} = \frac{3}{12}$.   b) $\frac{6}{24} = \frac{15}{60}$.   c) $\frac{3}{12} = \frac{9}{36}$.

  Explica cada respuesta.

APRENDAMOS...

- Una **PROPORCIÓN NUMÉRICA** es la igualdad de dos razones numéricas.
  La proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se puede escribir también así: **a : b : : c : d** y se lee **"a es a b como c es a d".**

  Los cuatro puntos (::) o el signo (=), en una proporción, se leen **COMO.**

- En toda proporción intervienen 4 términos llamados: **MEDIOS** y **EXTREMOS.**

  a : b :: c : d

  medios

  extremos

- **PROPIEDAD FUNDAMENTAL:** En toda proporción numérica el producto de extremos es igual al producto de medios.

$$\text{Si } \frac{5}{4} = \frac{10}{8} \text{ entonces } \underbrace{5 \bullet 8}_{40} = \underbrace{4 \bullet 10}_{40}$$

- **SERIE DE RAZONES IGUALES:** Es la igualdad de dos o más razones. Por ejemplo:
  $\frac{1}{3} = \frac{3}{9} = \frac{4}{12} = \frac{5}{15} = \frac{7}{21}$ es una serie de razones iguales.

- En toda serie de razones iguales, **la suma de los antecedentes es a la suma de los consecuentes como cada antecedente, de la serie, es a su consecuente.** Por ejemplo, en la serie: $\frac{1}{3} = \frac{3}{9} = \frac{4}{12} = \frac{5}{15} = \frac{7}{21}$ tenemos:

$$\begin{array}{l} \text{Suma de los antecedentes} \longrightarrow \\ \text{Suma de los consecuentes} \longrightarrow \end{array} \frac{1+3+4+5+7}{3+9+12+15+21} = \frac{20}{60}$$

La razón $\frac{20}{60}$ es igual a cualquiera de las razones de la serie; es decir:

$$\frac{20}{60} = \frac{1}{3} \quad ; \quad \frac{20}{60} = \frac{3}{9} \quad ; \quad \frac{20}{60} = \frac{7}{21}$$

EJERCICIO 9-6

❶ Contesta:

a) ¿Qué es una proporción?.

b) ¿Cómo se lee la proporción a : b : : c : d?.

c) ¿De qué otra forma se puede escribir la proporción a : b : : c : d?.

d) Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, ¿cómo se llaman los términos a y d? ¿Y los términos b y c?.

e) ¿Qué dice la propiedad fundamental de las proporciones?.

f) ¿Qué es una serie de razones iguales? Explica con un ejemplo.

❷ Lee las siguientes proporciones:

a) $\frac{3}{8} = \frac{6}{16}$ b) 1 : 7 : : 5 : 35 c) $\frac{5}{8} = \frac{15}{24}$

❸ ¿Cuáles son los extremos y los medios de las proporciones del ejercicio anterior?.

❹ Aplica la propiedad fundamental a las proporciones del ejercicio 2.

❺ Escribe una serie de razones iguales y verifica que la suma de los antecedentes es a la suma de los consecuentes como cada antecedente es a su consecuente.

❻ Escribe dos proporciones numéricas y responde:

a) Si intercambiamos los medios, ¿se obtiene otra proporción? Explica.

b) Si intercambiamos los extremos, ¿se obtiene otra proporción? Explica.

❼ Se dice que dos razones entre cantidades forman una proporción si son iguales las razones numéricas que las representan.

Dadas las razones: $\frac{48\text{ m}}{16\text{ m}}$ y $\frac{15\text{ l}}{5\text{ l}}$, responde:

a) ¿Cuál es la razón numérica que representa a cada una?.

b) ¿Es $\frac{48\text{ m}}{16\text{ m}} = \frac{15\text{ l}}{5\text{ l}}$? ¿Por qué?.

c) ¿Cuál es la razón, como operador, de ambas razones? Explica.

❽ Explica cada paso utilizado para hallar el valor de **x** en la proporción : $\frac{5x+1}{4-\frac{1}{3}} = \frac{3x}{0{,}2 \cdot 10}$

$\frac{5x+1}{4-\frac{1}{3}} = \frac{3x}{0{,}2 \cdot 10}$ .... proporción dada.

$\therefore \frac{5x+1}{\frac{11}{3}} = \frac{3x}{2}$ .... ¿por qué?.

$\therefore \frac{3}{11} \bullet (5x+1) = \frac{3x}{2}$ .... ¿por qué?.

$\therefore \frac{3 \bullet (5x+1)}{11} = \frac{3x}{2}$ .... ¿por qué?.

$\therefore \frac{15x+3}{11} = \frac{3x}{2}$ .... ¿por qué?.

$\therefore 2 \bullet (15x+3) = 11 \bullet (3x)$ ....¿por qué?.

$\therefore 30x + 6 = 33x$ ....¿por qué?.

$\therefore -3x = -6$

$\therefore x = \frac{-6}{-3} = 2$

⑨ Teniendo en cuenta el trabajo realizado en el ejercicio anterior, encuentra el valor de x en cada proporción:

a) $\frac{x}{7} = \frac{6}{3}$ b) $\frac{3x-2}{4} = \frac{6+4x}{8}$ c) $\frac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{\frac{6}{25}}{x}$

d) $\frac{x}{3} = \frac{1{,}4}{\frac{3}{4}}$ e) $\frac{1-\frac{2}{5}}{x} = \frac{2}{0{,}25 \cdot 10}$ f) $\frac{3}{4} = \frac{x}{x+1}$

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 4

Un equipo ha perdido 7 de 18 juegos y otro ha perdido 5 de 12 juegos. ¿Cuál de los dos equipos ha tenido mejor actuación?.

9.5 RAZONES Y PROPORCIONES EN LA CIENCIA. ESCALAS

9.5.1 Razones y Proporciones en la Ciencia

Muchas leyes de la física y la química pueden describirse mediante razones y proporciones. Estudiemos tres casos:

PRIMERA EXPERIENCIA

- Lee con atención esta noticia: **"En la pasada carrera atlética, el ganador corrió a una velocidad de 20 kilómetros por hora"**.
- ¿Qué significa esta información? Significa que para recorrer 20 kilómetros, el atleta necesitó 1 hora.
- La expresión "20 kilómetros por hora" se representa simbólicamente así: $20\frac{Km}{h}$; es decir, acá la palabra POR la usamos para indicar la RAZÓN de las medidas de dos cantidades físicas: kilómetros y horas.
- Supongamos que queremos saber cuál fue la velocidad del atleta expresada en "metros por minuto". Observa cómo hacemos la conversión:

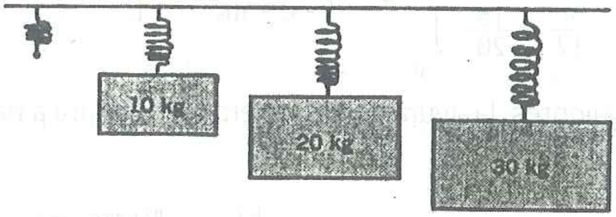
$$20\frac{Km}{h} = \frac{20\ Km}{1\ h} = \frac{20.00\cancel{0}\ m}{6\cancel{0}\ min} = 333{,}33\ \frac{m}{min}$$

- Convierte: a) $80\frac{dal}{min}$ a $\frac{l}{seg}$; b) $12\frac{m^3}{h}$ a $\frac{dm^3}{min}$

[illegible] $2\frac{dm^3}{min}$

SEGUNDA EXPERIENCIA

- Cierto peso colgado en un resorte puede estirarlo 1 cm. Un peso doble del anterior estirará el resorte 2 cm; uno triple lo estirará 3 cm y así sucesivamente, hasta que el resorte alcance su punto de ruptura (o límite de deformación).

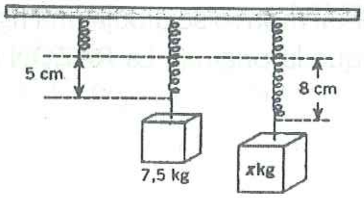


Decimos que el alargamiento del resorte es **proporcional** al peso que lo estira, mientras no se alcance el límite de deformación. Por lo tanto, de la figura anterior podemos escribir las siguientes proporciones:

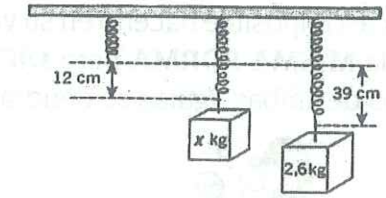
$\frac{10}{20} = \frac{1}{2}$, $\frac{10}{30} = \frac{1}{3}$, ... , $\frac{P_1}{P_2} = \frac{e_1}{e_2}$ donde $\frac{P_1}{P_2}$ es la razón de dos pesos y $\frac{e_1}{e_2}$ es la razón de los alargamientos correspondientes a estos dos pesos.

- Ahora, fíjate muy bien en las siguientes figuras y determina el valor de x.

a)

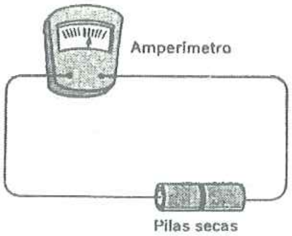


b)



TERCERA EXPERIENCIA

- En un circuito eléctrico, la intensidad de la corriente es proporcional a la **fuerza electromotriz (f·e·m)** o **voltaje**. Un voltaje más alto produce una corriente más intensa.
- En la práctica, una pila seca (Varta, Energizer, Duracel, ...) produce una f.e.m. de 1,5 voltios aproximadamente. Dos de ellas, conectadas como muestra la figura siguiente, producirían una f.e.m. de 3 voltios.



El **amperímetro** mide **intensidad** (cantidad) I de la corriente en **amperios** (amp). Si una f.e.m. de 6 voltios produce, en el mismo circuito, una corriente de 10 amp, entonces 9 voltios producirán 15 amp, y así sucesivamente:

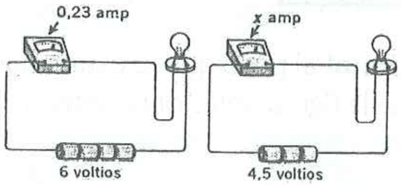
$$\text{f.e.m.} = 3 \rightarrow I = 5 \quad ; \quad \text{f.e.m.} = 6 \rightarrow I = 10$$
$$\text{f.e.m.} = 9 \rightarrow I = 15 \quad ; \quad \text{f.e.m.} = 12 \rightarrow I = 20$$

- Podemos, por lo tanto, escribir las siguientes proporciones:

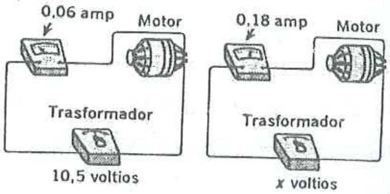
$$\left.\begin{matrix} \frac{3}{6} = \frac{5}{10} \\ \frac{9}{12} = \frac{15}{20} \end{matrix}\right\} \rightarrow \frac{f \bullet e \bullet m_1}{f \bullet e \bullet m_2} = \frac{I_1}{I_2}$$

- En los dos ejercicios siguientes, la figura de la izquierda te ayudará a hallar el valor de X de la figura de la derecha.

a)



b)

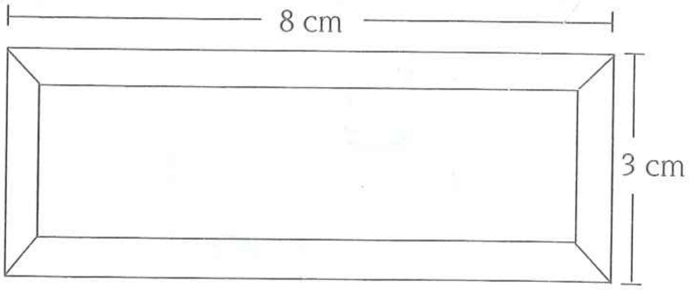


9.5.2 Escalas

En la práctica, para representar objetos materiales como casas, puentes, edificios, esculturas es casi imposible hacerlo en su verdadero tamaño. Por tal motivo se dibuja una figura que tenga la **MISMA FORMA** pero **DIFERENTE TAMAÑO** que la original. La **RAZÓN** entre el tamaño de ambas figuras se denomina **ESCALA.**

EXPERIENCIA

- Queremos representar en un plano un tablero de 200 cm de largo por 75 cm de ancho.
- Para ello dibujamos un rectángulo de manera que:
  - A los 75 cm de ancho del tablero le hacemos corresponder un ancho de 3 cm en el rectángulo.
  - A los 200 cm de largo del tablero le hacemos corresponder un largo de 8 cm en el rectángulo; así:



- Es decir: cada dimensión en el dibujo es 25 veces mayor que en la realidad: la **ESCALA** del dibujo es de $\frac{1}{25}$.

- Responde:
  - ¿Cuál es la razón numérica del ancho del rectángulo al ancho del tablero?
  - ¿Cuál es la razón numérica del largo del rectángulo al largo del tablero?
  - ¿Forman una proporción las razones $\frac{3}{7}$ y $\frac{8}{200}$? Explica.
  - ¿Es $\frac{1}{25} = \frac{3}{75} = \frac{8}{200}$? Explica.
  - ¿Es cierto que a 1 cm del dibujo corresponden 25 cm del tablero? Explica.
  - ¿Es la razón de la longitud del dibujo a la longitud del tablero igual a $\frac{1}{25}$? Explica.

APRENDAMOS...

- **ESCALA** es el cociente entre cada longitud del dibujo y la longitud real que representa; es decir:

$$\textbf{ESCALA} = \frac{\textbf{Longitud del dibujo}}{\textbf{Longitud real}} \quad \text{(ambas con la misma unidad)}$$

- Generalmente la escala se representa mediante una fracción de numerador **1**.

EJERCICIO 9-7

① La distancia entre dos ciudades A y B es 150 km. En un mapa, esta distancia está representada por 3 cm. Responde:

a) ¿Cuál es la escala del mapa?.
b) ¿Cuántas veces es más pequeño el mapa que en la realidad?.

② Un salón está representado en un plano a escala $\frac{1}{125}$ por un rectángulo de 6,4 cm de largo por 4,8 cm de ancho. Responde:

a) ¿Cuántas veces es más grande el salón en la realidad que en el dibujo?.
b) ¿Cuáles son el ancho y el largo reales?.

③ ¿Cuál es la escala en un plano en el que 1 cm representa 1 km?.

④ En un terreno la distancia entre dos puntos es 93 cm. ¿Cuál será la distancia entre estos mismos puntos en un plano hecho a escala $\frac{1}{100}$?.

⑤ Mide el largo y el ancho de tu salón de clase y dibuja un plano a escala $\frac{1}{50}$.

⑥ Completa en tu cuaderno:

Longitud en el dibujo	80 cm	9,60 m	22,5 m	80 m	9,6 km
Escala	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{1.250}$	$\frac{1}{50.000}$	$\frac{1}{80.000}$
Longitud real					

⑦ Completa en tu cuaderno:

Longitud en el dibujo	12 cm	96 mm	14,8 cm	56 mm	10,5 cm
Escala	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{1.250}$	$\frac{1}{50.000}$	$\frac{1}{80.000}$
Longitud real					

⑧ Completa en tu cuaderno:

Longitud real	2 m	10,4 m	95 m	4,8 hm	20,4 km
Longitud en el dibujo	4 cm	65 mm	7,6 cm	24 mm	8,5 cm
Escala					

⑨ Una fotografía ocupa un rectángulo de 10 cm por 16 cm. Se ha fotocopiado la fotografía a escala 150%, ¿cuáles son las dimensiones de la fotografía en la fotocopia?

⑩ El texto de una página ocupa un rectángulo de 18 cm por 27 cm. Si se fotocopia la página a escala 80%, ¿cuáles son las dimensiones del texto en la fotocopia?

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 5

Las letras **M, U, Ñ, E, C, A** y los dígitos **2,5,5, 1** rotan de forma cíclica de la siguiente manera:

	MUÑECA	**2 5 5 1**
Fila 1:	**UÑECAM**	**5 5 1 2**
Fila 2:	**ÑECAMU**	**5 1 2 5**
Fila 3:	**ECAMUÑ**	**1 2 5 5**

¿En qué fila aparecerá la combinación **MUÑECA 2551** por primera vez?

9.6 PROBLEMAS SOBRE RAZONES Y PROPORCIONES

- Ya vimos que muchos problemas de cálculo científico y de la vida diaria pueden resolverse utilizando razones y proporciones. Estudiemos otros dos modelos:

Problema 1

En un grupo de 7º, la razón de niños a niñas es de 2 a 3. Si hay 12 niñas, ¿cuántos alumnos hay en el grupo?.

Solución

- En primer lugar, determinemos el número de niños que hay en el grupo. Supongamos que hay x niños.
- Como la razón de niños a niñas es de 2 a 3, entonces:

$$\frac{x}{12} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore\ 3x = 24$$

$$\therefore\ x = \frac{24}{3} = 8.$$ Luego, en el grupo hay 8 niños

- Finalmente, como tenemos 12 niñas y 8 niños entonces hay, en total, 20 alumnos en el salón.

Problema 2

Las edades de un padre y su hijo están en la relación de 5 a 3. Si la suma de las edades es 56 años, ¿cuál es la edad de cada uno?.

Solución

- Llamemos **x** la edad del padre y **y** la edad del hijo, por lo tanto, $x + y = 56$
- Como la razón de la edad del padre a la dei hijo es de 5 a 3 entonces:

$$\frac{x}{y} = \frac{5}{3}$$

$\therefore\ \frac{x}{5} = \frac{y}{3}$ ....¿por qué?.

$\therefore\ \frac{x+y}{5+3} = \frac{x}{5}\ ,\ \frac{x+y}{5+3} = \frac{y}{3}$ .... ¿por qué?.

$\therefore\ \frac{56}{8} = \frac{x}{5}\ ,\ \frac{56}{8} = \frac{y}{3}$ .... ¿por qué?.

$\therefore\ 8 \cdot x = 280\ ,\ 8 \cdot y = 168$.................. ¿por qué?.

$\therefore\ x = 35$ años , $y = 21$ años

- Luego, el padre tiene 35 años y el hijo tiene 21 años.

EJERCICIO 9-8

① En una excursión, la razón del número de adultos al de niños es de 3 a 5. Si hay 21 adultos, ¿cuántos niños hay?.

8

② Si cada 3 niños se comen 10 mangos, ¿cuántos mangos necesitamos para 24 niños?.

③ En un juego de baloncesto, la razón del número de canastas anotadas con relación a los lanzamientos realizados es de 2 a 5. Si en total se efectuaron 80 lanzamientos, ¿cuántas canastas se anotaron?.

④ Hay 160 personas solicitando empleo. La razón de las personas que tendrán un trabajo a las que no lo tendrán es de 3 a 5. ¿Cuántas personas seguirán desempleadas?.

⑤ ¿Cuánto miden los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, sabiendo que están en la relación de 4 a 5?.

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 6

Resuelve el siguiente problema haciendo uso de las proporciones.
Un número excede a otro en 14 unidades. ¿Cuáles son los número si están en la razón de 5 a 7?.

TALLER DE REPASO DE LA UNIDAD 9

1. Contesta:

a) ¿Qué es una magnitud?.
b) ¿Qué es una cantidad?.
c) ¿Qué son cantidades homogéneas?.
d) ¿Se pueden sumar y restar cantidades de una misma magnitud?.
e) ¿Se pueden multiplicar y dividir cantidades de una misma magnitud?.
f) ¿Qué es la razón de dos cantidades?.
g) ¿A qué se denomina razón numérica?.
h) En la razón **"a : b"** , ¿cómo se llaman a y b?.
i) ¿Qué es una proporción?.

j) ¿Cómo se llaman los términos de una proporción?.

k) ¿Qué establece la propiedad fundamental de las proporciones?.

l) ¿Qué es una serie de razones iguales? ¿Cuál es la propiedad de toda serie de razones iguales?.

m) ¿Qué es una escala?.

2. Copia y completa la siguiente tabla:

CANTIDAD	MAGNITUD	UNIDAD DE MEDIDA	MEDIDA
32 cm^3			32
	superficie	km^2	235
87°			
	capacidad	dal	6
8 mm			

3. Escribe cuatro razones numéricas para el siguiente enunciado: "en este barrio por cada 5 casas tenemos 7 apartamentos".

4. Escribe dos proporciones utilizando los números de la igualdad $9 \cdot 4 = 3 \cdot 12$

5. En cada ☐ escribe el símbolo $>$, $<$, $=$ según corresponda:

a) 3 : 2 ☐ 2 : 3 b) 3 : 5 ☐ 2 : 3 c) 6 : 5 ☐ 1 : 1

d) 11 : 12 ☐ 6 : 5 e) 15 : 9 ☐ 20 : 12 f) 1 : 2 ☐ 50 : 100

6. En un grupo, la razón del número de hombres al de niños es de 3 : 5 y la razón del de mujeres al de niñas es de 5 : 8. En el grupo, ¿hay más personas del sexo masculino o del sexo femenino? ¿Por qué?.

7. En una escuela hay 7 niñas por cada 5 niños. Completa:

a) Hay 14 niñas por cada —— niños.

b) Hay —— niñas por cada 15 niños.

c) La razón del número de niñas al de niños es de —— a 50.

d) La razón del número de niñas al de niños es de 42 a ——.

8. La razón del número de elementos del conjunto X a los del conjunto Y es 3 : 4

a) ¿Cuál conjunto tiene más elementos?.

b) Si en un conjunto hay 5 elementos más que en el otro, ¿cuántos hay en cada uno?.

9. Escribe una proporción cuyos medios sean 9 y 5 y cuyos extremos sean 3 y 15.

10. En toda proporción, el valor de cualquier razón se denomina CONSTANTE DE PROPORCIONALIDAD. Escribe una proporción cuya constante de proporcionalidad sea 2.

11. Indica si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Explica tu respuesta con un ejemplo.

a) En toda proporción, un extremo es igual al producto de los medios dividido por el otro extremo.

b) En toda proporción, un medio es igual al producto de los extremos dividido por el otro medio.

12. Si tenemos una proporción como ésta: $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$ (es decir, con los medios iguales), se dice que x es MEDIA PROPORCIONAL entre a y b. Halla la media proporcional de cada uno de los siguientes pares de números y escribe la proporción correspondiente.

a) 3 y 12 b) 2 y 8 c) 4 y 25 d) 36 y 9

13. Escribe en forma de proporción:

a) 6 es media proporcional entre 4 y 9.
b) 3 es media proporcional entre 1 y 9.
c) x es media proporcional entre m y n.

14. La razón entre el número de cabezas de ganado de dos haciendas A y B es 5 : 4. Si la primera excede en 240 el número de cabezas de la segunda, ¿cuántas cabezas tiene cada una?.

15. En uno de los canales de televisión se transmiten 3 programas extranjeros por cada 7 nacionales. Determina el número de programas nacionales que se transmiten:

a) por cada 6 programas extranjeros.
b) por cada 18 programas extranjeros.
c) para a) y b), determina cuántos programas se transmiten en ese canal, si al finalizar el día se han transmitido 21 programas nacionales.

16. Halla los ángulos de un triángulo sabiendo que son proporcionales a los números 3, 5 y 7.

17. Para levantar una pared necesitamos hacer una mezcla de cemento y arena. Por cada 5 unidades de arena necesito 2 de cemento. ¿Cuántas unidades de cemento necesito para 6 de arena?

18. La escala de un mapa es $\frac{1}{5_1000.000}$. ¿Qué distancia (en km) hay entre dos ciudades separadas 9 cm en el mapa?.

19. Halla la razón numérica asociada a cada una de las siguientes razones:

a) $\frac{5\text{dam}}{7\text{m}}$ b) $\frac{8 \text{ horas}}{1 \text{ día}}$ c) $\frac{4\text{cm}^2}{5\text{m}^2}$ d) $\frac{3\text{hl}}{2\text{l}}$ e) $\frac{7 \text{ Kg}}{14 \text{ hg}}$

20. Expresa el significado de las siguientes razones y encuentra la razón numérica.

Ejemplo

$\frac{2 \text{ dm}}{5 \text{ cm}} = 4$ significa que la medida de 2 dm cuando se toma como unidad a 5 cm es 4.

a) $\frac{5 \text{ Kg}}{8 \text{ hg}}$ b) $\frac{7 \text{ días}}{12 \text{ horas}}$ c) $\frac{4\text{m}^2}{10\text{dm}^2}$ d) $\frac{8 \text{ hl}}{3 \text{ dl}}$

21. La receta de un pastel para 12 personas tiene los siguientes ingredientes: 250 gr de mantequilla; 3 huevos; 2 naranjas; 150 gr de azúcar y 250 gr de harina. Si queremos hacer el pastel para 60 personas, ¿qué cantidades necesitamos en cada caso?.

22. Para realizar la siguiente experiencia necesitamos dos varillas de madera de diferente longitud y que esté haciendo sol. La experiencia es la siguiente:

a) Coloca verticalmente los dos objetos.
b) Mide la sombra proyectada sobre el piso por cada varilla.
c) Encuentra la razón de la longitud de cada varilla a la longitud de su sombra proyectada en el suelo.
d) Observa si las dos razones son aproximadamente iguales.

Repite la experiencia con pares de objetos de distinta longitud. Responde: ¿son aproximadamente iguales las razones de las longitudes de objetos a las longitudes respectivas de sus sombras proyectadas en el suelo?.

23. Quiero saber la altura de un árbol. Con este fin coloco una vara de un metro que proyecta una sombra de 0,35 m. Si la sombra del árbol mide 0,91 m, se pide:

a) Hallar la medida del árbol.
b) Dibujar el problema a una escala de 1 : 10.

24. Se consiguen naranjas a 5 por $790. ¿Cuánto valen 15 naranjas? (utiliza una proporción para resolver este problema).

25. En un dibujo a escala $\frac{1}{4}$ cm representa 1 m. Indica la distancia representada por:

a) $\frac{3}{4}$ cm   b) $1\frac{1}{2}$ cm   3m 6m.

26. Los catetos de un triángulo rectángulo están en la razón de 2 : 5. Si el lado menor mide 6 cm, ¿cuál es el área del triángulo rectángulo?. 45cm².

27. Los radios de dos circunferencias miden 3 cm y 7 cm, respectivamente. ¿Cuál es la razón entre la longitud de la circunferencia mayor y la longitud de la circunferencia menor?.

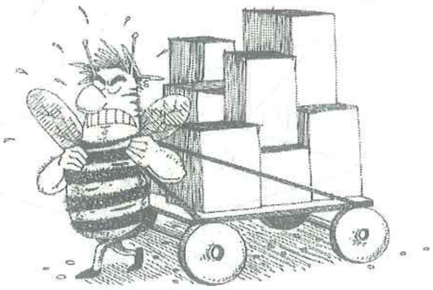
28. Dibuja a escala un salón que mide 15 m de ancho por 22,5 m de largo. Supón que 0,5 cm representa un metro.

29. a) Un tubo mide 80 cm. ¿Cuál es su longitud en un dibujo cuya escala es $\frac{1}{50}$?.
b) En un dibujo, un tubo mide 96 mm. ¿Cuál es la longitud real del tubo si tiene una escala $\frac{1}{50}$?.

30. El mapa de la tierra que ilustra la figura siguiente fue hecho en la escala 1: 500,000.000. Con esta información, calcula el diámetro de la tierra.

31. La razón del peso que puede arrastrar (sobre ruedas) una abeja al peso de su cuerpo es de 400 a 1.

a) ¿Cuánto arrastraría un hombre de 80 kg en las mismas proporciones?.
b) ¿A cuántas toneladas equivale?.
c) En esta proporción, ¿cuántos kilogramos podría arrastrar Jaime si pesa 58 kg?.



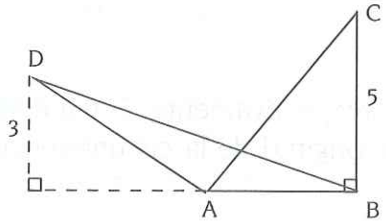
32. La diferencia entre el peso de un padre y el de su hija es 42,5 kg, siendo el peso del padre el triple del de su hija ¿Cuánto pesa cada uno?.

33. Calcula el valor de la x en las siguientes proporciones:

a) $\frac{2}{3} = \frac{8}{x}$ b) $\frac{21}{35} = \frac{x}{5}$ c) $\frac{x}{13} = \frac{10}{65}$ d) $\frac{x-3}{5} = \frac{2x}{7}$

PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS SABER

1. La razón entre el área del Δ ABC y el Δ ADB es:



a) $\frac{3}{5}$ b) $\frac{5}{3}$

c) $\frac{5}{2}$ d) Ninguna de las anteriores

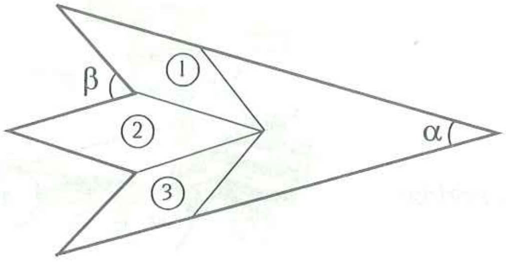
2. En un grupo de 45 jóvenes que asiste a una fiesta se sabe que hay 3 niños por cada 2 niñas. El número de niñas que hay en la fiesta es:

a) 27   b) 25   c) 18   d) Ninguna de las anteriores

3. En un colegio hay 158 estudiantes. Aunque hay más niñas que niños, solamente $\frac{1}{11}$ de las niñas usa gafas, mientras que $\frac{1}{7}$ de los niños las usa. El número de niños que hay es:

a) 88   b) 77   c) 70   d) Ninguna de las anteriores

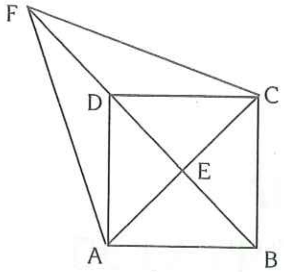
4. Si los tres rombos de la figura son congruentes (iguales) y su ángulo agudo mide 35°, entonces la razón de la medida del ángulo α a la medida del ángulo β es:



a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{1}{2}$

c) $\frac{3}{2}$ d) Ninguna de las anteriores

5. Sea ABCD un cuadrado, $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ sus dos diagonales. La diagonal $\overline{BD}$ se prolonga hasta F de tal manera que $\overline{ED} = \overline{DF}$. La razón del área del cuadrado ABCD al área del triángulo ACF es:



a) $\frac{1}{2}$ b) 1 c) 2

d) Ninguna de las anteriores

Núcleo Temático

10

APLICACIONES DE LA PROPORCIONALIDAD (1)

LOGRO GENERAL

- Analizar e interpretar la gráfica de la relación entre dos magnitudes como magnitudes directamente proporcionales o inversamente proporcionales.

DIMENSIONES

LOGROS ESPECÍFICOS	INDICADORES DE LOGRO
Corporal: • Descubir en forma activa la escala utilizada para graduar los ejes cartesianos.	• En grupos de 3 alumnos, encuentra la escala utilizada en el eje x y en el eje y de una gráfica en el plano cartesiano.
Comunicativa: • Comprender el enunciado verbal de los enunciados. • Escribir la ecuación y= f(x) de una función lineal. • Reconocer la gráfica de una función lineal.	• Identifica la constante de proporcionalidad en y= f(x) =mx. • Comprende e interpreta correctamente los enunciados. • Expresa matemáticamente los enunciados de magnitudes directamente proporcionales.
Cognitiva: • Distinguir las magnitudes directamente proporcionales de las directamente correlacionadas. • Identificar magnitudes directamente proporcionales y magnitudes inversamente proporcionales.	• Compara y contrasta magnitudes relacionadas directa o inversamente. • Elabora el diagrama sagital de magnitudes directamente o inversamente proporcionales. • En un diagrama cartesiano dibuja la gráfica de y= f(x) = mx.
Estética: • Elaborar diagramas cartesianos a escala para representar la relación de magnitudes directamente o inversamente proporcionales.	• Interpreta la gráfica de la relación de magnitudes como magnitudes directamente proporcionales o inversamente proporcionales.
Etica - Actitudinal: • Resaltar la contribución de la matemática en la interpretación de gráficas.	• Demuestra interés por aprender.

EVALUACIÓN

ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS

10.1 ¿SABÍAS QUE...?

"¡Eureka, Eureka! ¡Lo encontré!". Eso es lo que dicen que gritó un día el sabio Arquímedes mientras daba saltos desnudo en la bañera. No era para menos. Acababa de tener una idea genial, que le ayudaría a medir el volumen de los cuerpos por irregulares que fueran sus formas.

Medir volúmenes de cuerpos regulares, como un cubo, era algo que ya se sabía hacer en la época de Arquímedes, tres siglos antes de Cristo. Pero en volúmenes de formas irregulares como una corona, una joya o el cuerpo humano, nadie lo había conseguido.

Hasta que Arquímedes se dio cuenta de que cuando entraba en una bañera llena de agua hasta el mismo borde, se derramaba una cantidad de agua. Y tuvo la idea: si podía medir el volumen de esa agua habría hallado el volumen de su propio cuerpo.

Arquímedes nació en Siracusa, una colonia griega en Italia. A él le debemos inventos como la rueda dentada y la polea para subir pesos sin esfuerzo. También a él se le ocurrió usar grandes espejos para incendiar a distancia los barcos enemigos. Murió en el año 212 a. de C. en la toma de Siracusa por las tropas romanas.

EJERCICIO 10-1

COMPRENSIÓN DE LECTURA: Lee nuevamente el texto anterior y luego encierra en un círculo la letra que corresponda a la respuesta correcta:

1. De Arquímedes se puede decir todo lo siguiente, menos:
   a. Inventó la rueda dentada.
   b. Fue el creador de la polea.
   c. Descubrió la manera de medir el volumen de los cuerpos.
   d. Murió en una invasión que hicieron los romanos a la ciudad.
2. **¡Eureka!** es una expresión que equivale en el texto a:
   a. Interjección de alegría por un hallazgo.
   b. Una palabra soez (vulgar) para dar a entender felicidad.
   c. Solicitar la ropa para cubrir el cuerpo.
   d. Demostración de júbilo por un nuevo invento.

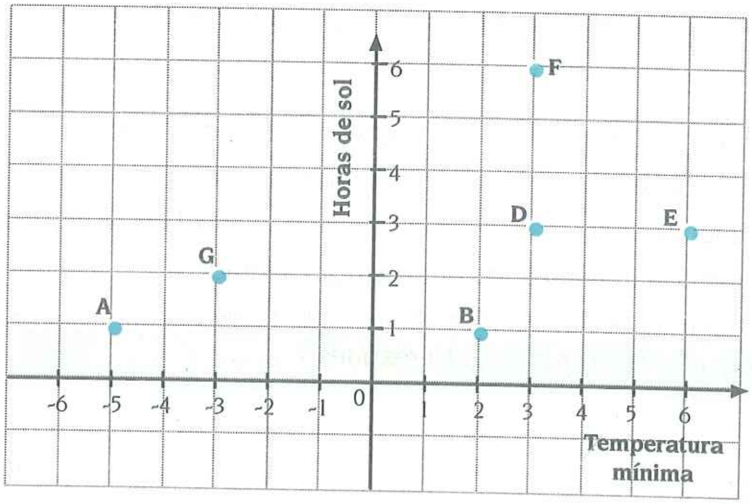
3. Lo que causó tanta satisfacción a Arquímedes en la bañera fue que:
   a. Encontró un nuevo método para medir volúmenes de cuerpos regulares.
   b. Descubrió que en la ciencia; él era un ser privilegiado.
   c. Sin querer había descubierto nuevas propiedades del agua.
   d. Descubrió la manera de medir el volumen de los cuerpos, de las más variadas formas.
4. El mejor título para el texto anterior podría ser:
   a. La constancia de un investigador.
   b. La observación, camino directo para el desarrollo científico.
   c. Curiosidades de la ciencia.
   d. La muerte de un gran científico.

10.2 INTERPRETACIÓN DE GRÁFICAS

- Tanto en este curso como en el anterior, aprendimos a dibujar gráficas de operaciones en un diagrama cartesiano.
- En esta unidad aprenderemos a interpretar gráficas y a dibujar ciertas magnitudes que se relacionan de manera directa o inversa.

PRIMERA EXPERIENCIA

- En el siguiente diagrama cartesiano están representadas con un punto la **temperatura mínima** y las **horas de sol** durante un día de invierno en varias capitales de Europa.



- Interpreta el diagrama contestando estas preguntas:

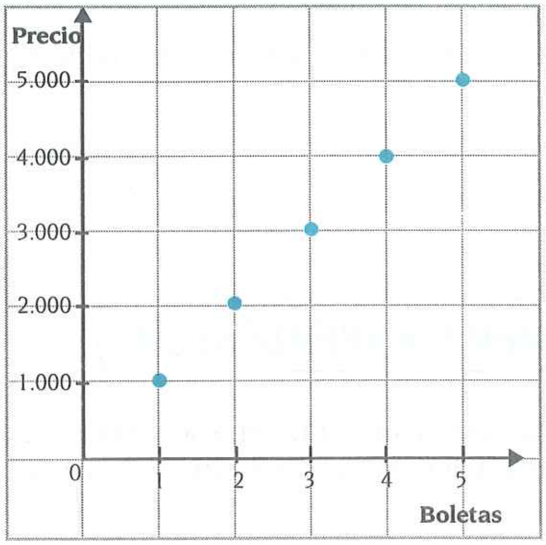
a) ¿Cuál ciudad tuvo menos temperatura? A ¿Cuál tuvo mayor temperatura? F
b) ¿Hay dos ciudades que tuvieron la misma temperatura? D – F
c) ¿Cuáles ciudades tuvieron el mismo número de horas de sol? D - E A - B
d) ¿Cuál ciudad tuvo más horas de sol? F

SEGUNDA EXPERIENCIA

- El encargado de vender boletas para un paseo elaboró la siguiente tabla de valores:

No. de boletas	1	2	3	4	5
Precio en pesos	1.000	2.000	3.000	4.000	5.000

- A continuación, dibujó un diagrama cartesiano y representó mediante puntos, los pares ordenados obtenidos en la tabla de valores:



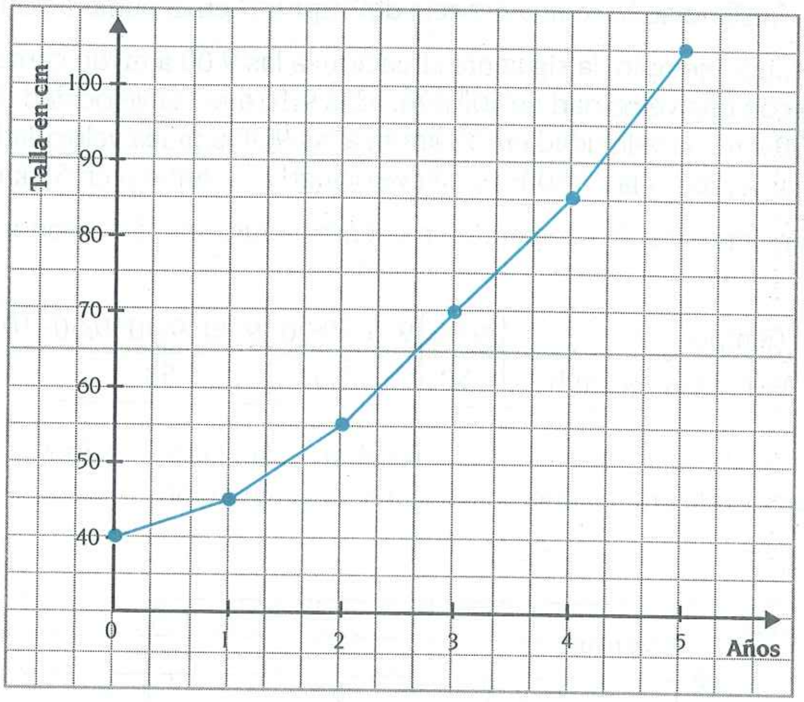
- Contesta:
  - ¿Cuáles son las magnitudes que intervienen en esta experiencia? cant dinero
  - ¿Cuál magnitud se representó sobre el eje horizontal? ¿Cuál sobre el eje vertical? cant dinero
  - ¿Con qué unidad se graduó el eje horizontal? de 1 en 1 ¿Con cuál el eje vertical? de 1000 en 1000
  - ¿Pueden unirse con una línea los puntos representados? Explica tu respuesta no
  - ¿Podría ser la pareja ordenada (6, 6.000) un punto de la gráfica de esta correspondencia entre magnitudes? Argumenta tu respuesta. Si ya que es lo que continua en la serie

TERCERA EXPERIENCIA

- La estatura, en centímetros de un niño durante sus primeros 5 años de vida viene dada por la siguiente tabla:

Años	0	1	2	3	4	5
Estatura en cm	40	45	55	70	85	105

- Si representamos los pares ordenados de la tabla, mediante puntos, sobre un diagrama cartesiano, obtenemos la siguiente gráfica:



- Contesta:
  - ¿Cuáles son las magnitudes que intervienen en esta experiencia? long tiempo.
  - ¿Cuál magnitud se representó sobre el eje horizontal? ¿Cuál sobre el eje vertical? ¿Cómo se graduó cada eje? l= 10 en 10
    t = 1 en 1
  - ¿Por qué pueden unirse con una línea los puntos representados? Argumenta tu respuesta. xqe tienen puntos intermedios y
    son exactas las medidas

APRENDAMOS...

- Para representar gráficamente una correspondencia entre magnitudes, formamos una tabla de valores y representamos los pares ordenados obtenidos mediante puntos aislados o mediante una línea sobre el plano cartesiano.
- Los puntos aislados obtenidos por una tabla de valores se pueden unir cuando existen los valores intermedios de una de las magnitudes -la del eje horizontal-, con sus valores correspondientes de la otra magnitud, la del eje vertical.

CUARTA EXPERIENCIA

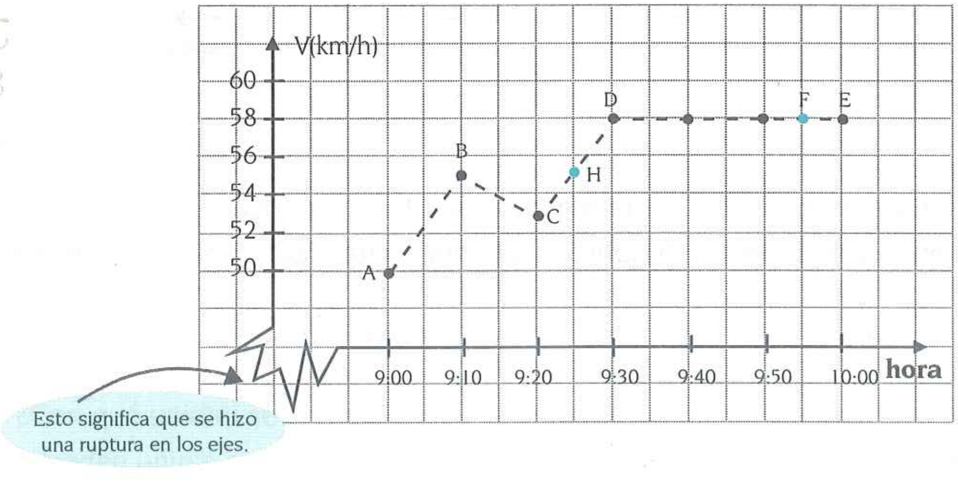
- Hay situaciones de la vida diaria, que se describen mediante gráficas, en las que los valores de dos magnitudes empiezan a partir de ciertos números "grandes". Por esta razón, en el diagrama cartesiano se hace una especie de "ruptura" en la numeración de los ejes.
- Consideremos, por ejemplo, la siguiente situación: a las 9:00 a.m. un carro avanzaba por una autopista con una velocidad de 50 km/h; a las 9:10 a.m., la velocidad del carro era 55 km/h; a las 9:20 a.m., la velocidad era 53 km/h; a las 9:30 a.m., la velocidad era 58 km/h y de ahí en adelante, hasta las 10:00 a.m., la velocidad se mantuvo en 58 km/h.
- Completa el siguiente cuadro, teniendo en cuenta la información anterior y contesta las preguntas:

Tiempo	9:00	9:10	9:20	9:30	9:40	9:50	10:00
Velocidad en km/h	50	55	53	58	58	58	58

a) ¿Cuáles son las parejas ordenadas que resultan hasta las 9:35 a.m.?.

b) Ahora dibujemos la gráfica que nos describe esta situación:

9:00, 50
9:10, 55
9:20, 53
9:30, 58



Esto significa que se hizo una ruptura en los ejes.

c) ¿Puede el punto F pertenecer a la gráfica? Explica ¿Cuál es la velocidad que llevaba el carro en el punto F? ¿Y qué hora era?. ← 58 km/h

d) ¿Puede el punto H pertenecer a la gráfica?. Explica.

10 en 10

e) ¿Cómo se graduó el eje horizontal? ¿Y el eje vertical? 2 en 2

f) ¿Cuáles son las coordenadas del punto H?. ← 9:25, 55

55 50

g) De 9:00 a.m. a 9:20 a.m., ¿cuál fue la mayor velocidad del carro? ¿Y la menor?.

58 53

h) De 9:10 a.m. a 10:00 a.m., ¿cuál fue la mayor velocidad? ¿Y la menor?.

9:00 - 9:10 9:20 - 9:30 9:10 - 920

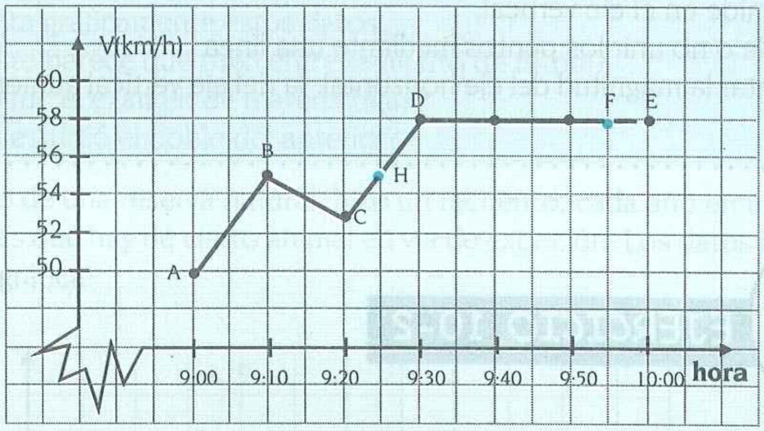
i) ¿De qué hora a qué hora la velocidad aumentó?, ¿Disminuyó? ¿Se mantuvo constante?.

j) ¿Podemos unir los puntos con una línea? Explica tu respuesta. [illegible]

[illegible]

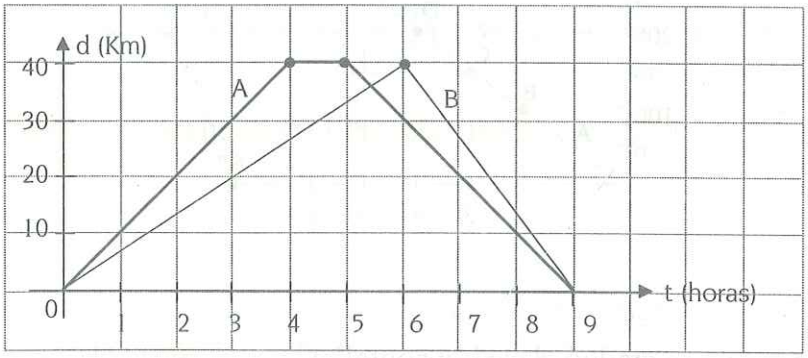
APRENDAMOS...

- En la gráfica de la segunda experiencia, NO PODEMOS UNIR los puntos, ya que si tomamos un valor intermedio; por ejemplo, 2,5 obtendríamos el punto de coordenadas (2,5 , 2.500); es decir: **"2 boletas y media valdrían $2.500"** y ésto no tiene sentido.
- En la gráfica de la cuarta experiencia SÍ PODEMOS UNIR los puntos con una línea porque a tiempos intermedios corresponden velocidades intermedias. Por ejemplo, la velocidad del carro a las 9:15 a.m. era de 54 km/h. Por lo tanto, después de unir los puntos, la gráfica nos queda así:



QUINTA EXPERIENCIA

- La siguiente gráfica nos muestra la distancia recorrida por dos móviles A y B que salen de un mismo lugar y al que regresan al cabo de 9 horas.



- Responde:

4 horas

a) ¿En cuánto tiempo recorrió el móvil A los primeros 40 km? ¿Y el móvil B?. 6 horas

b) ¿Cuál de los dos móviles se desplazó más rápido para recorrer los primeros 40 km?. A

c) ¿Qué hizo el móvil A entre las horas 4 y 5?. Recorrió 40 km

d) ¿Cuál de los dos móviles regresó primero?. Regresaron al mismo tiempo

e) ¿Cuántos kilómetros recorrió cada móvil? ¿Cuánto tiempo demoraron en hacer el viaje de ida y vuelta?.

APRENDAMOS...

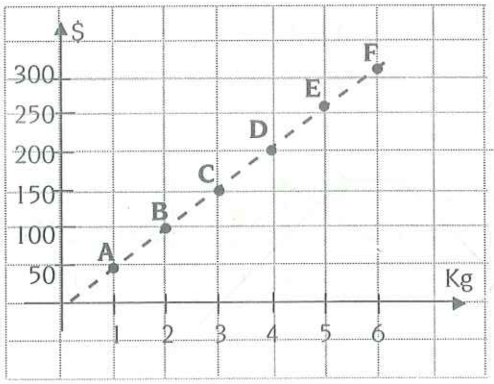
Para interpretar adecuadamente una gráfica debemos tener en cuenta:

- Lo que se mide en el eje horizontal.
- Lo que se mide en el eje vertical.
- Si es posible o no unir los puntos mediante una línea.
- Si al aumentar la magnitud del eje horizontal, la del eje vertical aumenta, disminuye o no varía.

EJERCICIO 10-2

❶ Gradúa en forma apropiada los ejes coordenados de un plano cartesiano y ubica en él los puntos correspondientes a los siguientes pares ordenados: A(1,15) ; B(2,30) ; C(12,180).

❷ Fíjate bien en la siguiente gráfica y contesta:

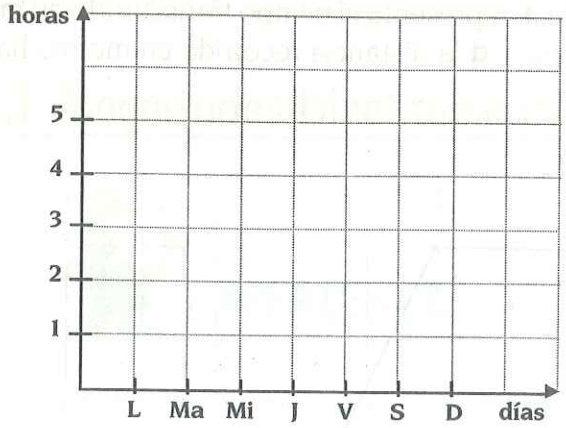


a) ¿Con qué escala se graduó el eje horizontal?

b) ¿Con qué escala se graduó el eje vertical?

c) ¿Cuáles son las coordenadas de los puntos A, B, C, D, E y F?

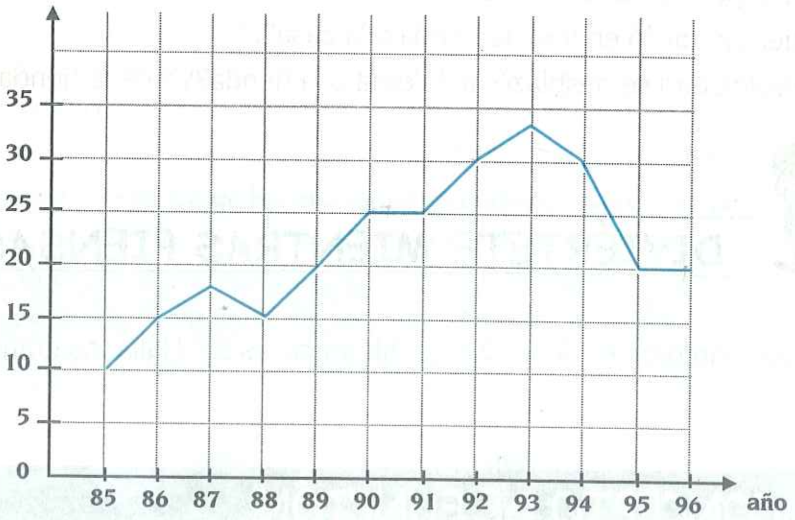
③ Juan Carlos anotó las horas que dedicó al estudio los días de la semana pasada.



día	horas
lunes	3,5
martes	1,5
miércoles	3
jueves	5
viernes	3,5
sábado	3

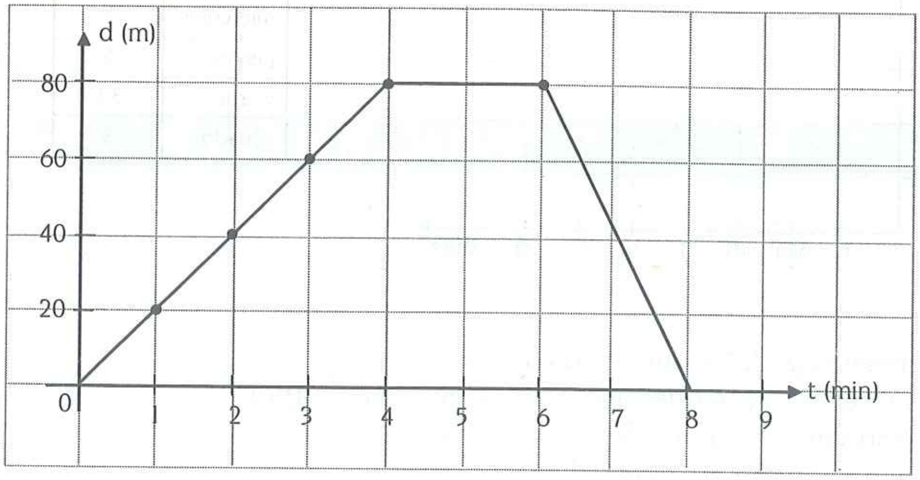
a) Representa gráficamente estos datos.
b) ¿Qué día te parece que tuvo entrenamiento de fútbol?
c) ¿Cuándo fue el examen de matemáticas?
d) ¿Qué día estudió el doble del anterior?

④ El encargado de una reserva natural, hizo un recuento, cada año en enero, del número de ejemplares que hay de cierto animal en vía de extinción. Los datos los representó en la siguiente gráfica:



a) ¿Cuántos ejemplares había en 1987? ¿En qué año (o años) se contaron exactamente 30 ejemplares?
b) ¿En qué año la población fue máxima?
c) ¿Cuántos ejemplares nacieron durante el año 1990?
d) ¿En qué porcentaje aumentó la población en 1991 respecto al año anterior?
e) ¿Cómo varió la población al finalizar el año 1996?
f) ¿Qué pasó en los años 1993 y 1994?

⑤ Un niño sale de su casa, camina hasta una tienda donde toma un refresco y, enseguida, regresa a su hogar. En la figura siguiente, **t** representa el tiempo transcurrido en minutos desde el instante en que salió de la casa y **d** la distancia recorrida en metros hasta su domicilio en cada instante:



Responde:

a) ¿Qué distancia hay de la casa del niño a la tienda y cuánto tarda en llegar a ella?.
b) ¿Cuánto tiempo permanece en la tienda?.
c) ¿Cuánto tiempo tardó en ir de la tienda a la casa?.
d) ¿Con qué velocidad se desplazó de la casa a la tienda? ¿Y de la tienda a la casa?.

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 1

La razón de dos números es de 8 a 3 y su diferencia es 55. Halla los números.

10.3 EL CONCEPTO DE FUNCIÓN

- Con frecuencia escuchamos expresiones como éstas:
  "El precio del fríjol DEPENDE de los kg que compre".
  "El área de un cuadrado DEPENDE de la medida de su lado".
  "El volumen de una esfera DEPENDE del valor de su radio".
- Como vemos, hay MAGNITUDES que DEPENDEN unas de otras.
- En esta sección estudiaremos que es posible encontrar OPERACIONES UNITARIAS mediante las cuales las cantidades de una magnitud DEPENDEN de una y sólo una cantidad de la otra magnitud. Estas operaciones unitarias reciben el nombre de **FUNCIONES.**

- En este curso estudiaremos dos tipos de funciones: la PROPORCIONALIDAD DIRECTA y la PROPORCIONALIDAD INVERSA.

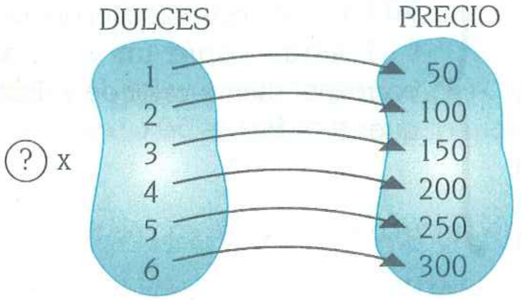
10.3.1 Magnitudes Directamente Proporcionales

- Sara va a la tienda a comprar dulces. Sabe que un dulce vale $50. Quiere saber el precio de 2, 3, 4, 5 y 6 dulces. ¿Cómo puede averiguarlo rápidamente?.
- Después de pensar un poco, Sara decidió que lo mejor era hacer una TABLA DE VALORES como la siguiente:

Nº de dulces	Precio
1	50
2	100
3	150
4	200
5	250
6	300

¿Estás de acuerdo, con la tabla que hizo Sara?.

- Responde: ¿Al aumentar el número de dulces, aumenta el precio? ¿Y al disminuirlos, disminuye el precio?.
- Se dice que dos magnitudes están DIRECTAMENTE RELACIONADAS cuando al AUMENTAR (o disminuir) una de ellas, la otra también AUMENTA (o disminuye).
- En esta experiencia, las magnitudes **número de dulces** y **precio** están DIRECTAMENTE RELACIONADAS.
- Más tarde, a Sara se le ocurrió representar la tabla anterior en forma de DIAGRAMA SAGITAL; así:



- Observando la tabla, Sara se dio cuenta que dividiendo el precio entre el número de dulces correspondiente, el resultado era siempre el mismo; es decir, CONSTANTE:

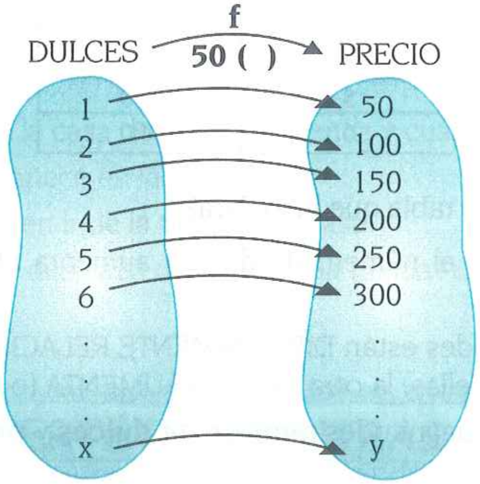
$$\frac{50}{1} = 50 \;;\quad \frac{100}{2} = 50 \;;\quad \frac{150}{3} = 50 \;;\quad \frac{200}{4} = 50 \;;\quad \frac{250}{5} = 50 \;;\quad \frac{300}{6} = 50$$

- Responde:
  - a) ¿Cuál es la razón del precio al número de dulces?.
  - b) En la razón anterior, ¿cuál es el operador que al actuar sobre el número de dulces nos produce el precio de compra?.
  - c) ¿Cuál es el operador multiplicativo en este diagrama? Explica.
  - d) Calcula rápidamente y explica cuál es el precio de 97 dulces.

- Si representamos por **x** el número de dulces y por **y** el precio pagado, entonces decimos que **y** depende de **x** o que **y** es función de x y escribimos: **$y = f(x)$.**
- ¿A qué es igual $\frac{y}{x}$? ¿Coincide este cociente con el número asociado al operador?

¡ATENCIÓN!

En matemáticas y en la ciencia no sólo basta saber que **$y = f(x)$**, sino que además es importante saber la regla que relaciona a **y** con **x**; es decir, como se obtiene **y** de **x**. Veamos:

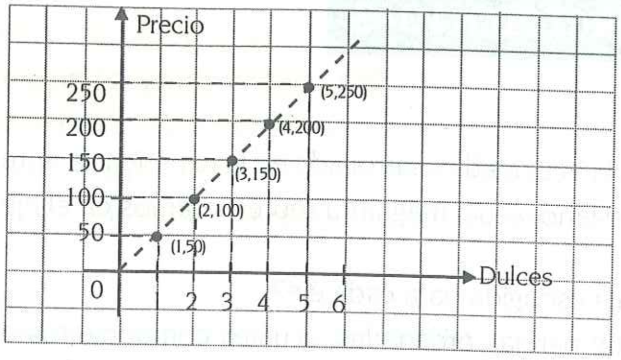


$$
\begin{aligned}
x &\xrightarrow{f} f(x) = y\\
&\vdots\\
1 &\xrightarrow{50(\ )} 50(1) = 50\\
2 &\xrightarrow{50(\ )} 50(2) = 100\\
3 &\xrightarrow{50(\ )} 50(3) = 150\\
4 &\xrightarrow{50(\ )} 50(4) = 200\\
5 &\xrightarrow{50(\ )} 50(5) = 250\\
6 &\xrightarrow{50(\ )} 50(6) = 300
\end{aligned}
$$

50 ( ) es, en este caso, el operador **f**. Cuando **50 ( )** actúa sobre un valor **x** se obtiene el correspondiente valor de **y**. Por esto escribimos que: **$y = f(x) = 50x$**

- Decimos que la operación unitaria cuya regla es **$y = f(x) = 50x$** es una FUNCIÓN DE PROPORCIONALIDAD DIRECTA y el número 50 se llama CONSTANTE DE PROPORCIONALIDAD DIRECTA.
- De acuerdo con el diagrama sagital, el conjunto de parejas ordenadas de esta función es el siguiente: { (1, 50) , (2, 100) , (3, 150) , (4, 200) , (5, 250) , (6, 300) }.

- Ahora dibujemos estas parejas ordenadas en un diagrama sagital:



La gráfica nos muestra que los puntos están ubicados formando una LÍNEA RECTA. Por esta razón, la función de proporcionalidad directa también se llama FUNCIÓN LINEAL.

- **PREGUNTA:** ¿Pueden los puntos de esta función lineal unirse con una línea recta continua? ¿Por qué?

APRENDAMOS...

- Dos magnitudes están **DIRECTAMENTE RELACIONADAS** cuando al **AUMENTAR** (o disminuir) una de ellas, la otra también **AUMENTA** (o disminuye).
- Una operación unitaria que asigna a cada número **x**, el resultado de multiplicar dicho número por otro número **k**, distinto de cero, se denomina **FUNCIÓN LINEAL** o **FUNCIÓN DE PROPORCIONALIDAD DIRECTA.**
- La regla que permite relacionar un elemento **x** del conjunto de partida con un elemento **y** del conjunto de llegada en una función lineal es **y=k·x.** El número **k** se denomina **CONSTANTE DE PROPORCIONALIDAD.**
- Dos magnitudes son **DIRECTAMENTE PROPORCIONALES** cuando cumplen dos condiciones:
  - a) Las magnitudes están directamente relacionadas.
  - b) El cociente entre dos cantidades que se corresponden es siempre el mismo (constante).
- Si **x** y **y** son dos valores de dos magnitudes directamente proporcionales, entonces

  y = k·x, donde **k** es una constante llamada **CONSTANTE DE PROPORCIONALIDAD DIRECTA.**
- La gráfica de una **FUNCIÓN DE PROPORCIONALIDAD DIRECTA** es un conjunto de puntos ubicados a lo largo de una **LÍNEA RECTA QUE PASA POR EL ORÍGEN.** Por esta razón también se le llama **FUNCIÓN LINEAL.**

EJERCICIO 10-3

❶ Teniendo en cuenta la actividad desarrollada en la experiencia anterior, responde:

a) En el plano cartesiano, ¿cuál magnitud representamos en el eje horizontal? ¿Y en el eje vertical?.

b) ¿Cuál fue la escala escogida para cada eje?.

c) En el conjunto de parejas ordenadas, ¿cuáles componentes escribimos en primer lugar? ¿Y cuáles en segundo lugar?.

d) Si en el diagrama sagital, **x** representa el número de dulces y **y** representa el precio correspondiente, ¿podemos afirmar que y = f (x) = 50x? Explica.

e) Halla el valor de 102 dulces; es decir, halla f(102) y explica como lo haces.

f) ¿Por qué esta relación se llama FUNCIÓN DE PROPORCIONALIDAD DIRECTA?.

g) ¿Por qué esta relación también se denomina FUNCIÓN LINEAL?.

❷ Responde:

a) ¿Cuándo dos magnitudes están directamente relacionadas?.

b) ¿Cuándo dos magnitudes son directamente proporcionales?.

c) ¿Qué es una función de proporcionalidad directa?.

d) ¿Cómo se halla la constante de proporcionalidad de dos magnitudes que son directamente proporcionales?.

e) ¿Cuál es la regla o propiedad que permite relacionar los valores de dos magnitudes directamente proporcionales?.

f) Dado un conjunto de parejas ordenadas, ¿cómo se sabe que dicho conjunto corresponde a una función de proporcionalidad directa?.

❸ Escribe dentro de un paréntesis una V si el enunciado es verdadero o una F si es falso. Explica cada respuesta.

a) Las segundas componentes de los pares ordenados de una función lineal se obtienen multiplicando las primeras componentes por una misma constante (√).

b) En una función lineal, las variables usadas para designar las magnitudes que intervienen son directamente proporcionales (√).

c) Toda función definida en un conjunto dado de números, mediante la regla y = kx , donde k es un número diferente de CERO, se denomina FUNCIÓN LINEAL (√).

❹ Cuando escribimos la expresión **y = f(x)** entendemos que "**y depende de x**" o que "**y es una función de x**". Contesta:

a) Si **p** representa el perímetro de un cuadrado y **l** representa el lado del cuadrado, ¿es correcto escribir **l = f (p)**? ¿Por qué? ¿Cómo lo escribirías?.

b) Si **A** representa el área de un círculo y **r** representa su radio, ¿es correcto escribir **A = f(r)**? ¿Por qué?.

⑤ Definamos la función f sobre el conjunto $\{1, 4, 6, 7, 10\}$ de acuerdo con la regla: $y = f(x) = \frac{1}{2}x$. Se pide:

a) Hallar $f(1)$, $f(4)$, $f(6)$, $f(7)$ y $f(10)$.

b) Escribir f como un conjunto de pares ordenados.

c) Dibujar la gráfica de f. ¿Qué escala usarías en cada eje?.

d) ¿Es f una función lineal? ¿Por qué? ¿Cuál es el operador multiplicativo?.

e) Teniendo en cuenta la gráfica, ¿están sus puntos sobre una línea recta que pasa por el origen?.

⑥ Se sabe que un litro de leche pesa 1,2 kg. ¿Cuánto pesan 2 litros? ¿4 litros? ¿10 litros?.

a) Elabora una tabla de valores tomando el peso hasta 10 litros.

b) ¿Están las magnitudes **litros** y **peso total** directamente relacionadas? ¿Por qué?.

c) ¿Son estas magnitudes directamente proporcionales? ¿Por qué?.

d) Si la respuesta en c) es sí, ¿cuál es la constante de proporcionalidad?.

e) Si **x** es una cantidad de la magnitud litros y **y** es la cantidad correspondiente de la magnitud peso, ¿es $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$? ¿Por qué? ¿a qué es igual $\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{x}}$? ¿Cuál ecuación relaciona a **y** con **x**?.

f) La función que relaciona estas magnitudes, ¿es una función lineal? ¿Por qué? ¿Cuál es el operador multiplicativo?.

g) Calcula rápidamente, ¿cuál es el peso de 37 litros de leche? Explica cómo lo haces.

h) Si representamos esta función mediante la regla $y = f(x) = 1{,}2x$, halla $f(100)$.

i) Dibuja la gráfica de esta función. ¿Qué escala tomarías en el eje x? ¿Y en el eje y?.

j) ¿Están los puntos de la gráfica sobre una misma línea recta que pasa por el origen? ¿Se pueden unir estos puntos? ¿Por qué?

⑦ Un carretillero recoge envases de vidrio vacíos. El siguiente cuadro nos muestra el número de envases que recoge en cada viaje que realiza:

NÚMERO DE VIAJES	1	2	3	4	5	6	7
CANTIDAD DE ENVASES	3	5	6	9	12	17	25

Responde:

a) ¿Están las magnitudes NÚMERO DE VIAJES y CANTIDAD DE ENVASES directamente relacionadas? ¿Por qué?.

b) ¿Son estas magnitudes directamente proporcionales? ¿Por qué?.

⑧ El siguiente cuadro nos muestra los resultados de una encuesta realizada a cinco personas acerca de su edad en años y su peso en kilogramos.

EDAD	15	20	25	30	35
PESO	45	57	48	70	66

Responde:

a) ¿Están las magnitudes EDAD y PESO directamente relacionadas? ¿Por qué?.

b) ¿Son directamente proporcionales? ¿Por qué?.

⑨ Suponiendo que, en el cuadro siguiente, A y B son dos magnitudes directamente proporcionales, escribe los números que corresponden a los cuadritos vacíos:

A	5	3			7	9	
B	20		100	4			40

Responde: ¿Cuál es la constante o razón de proporcionalidad?.

⑩ La expresión y = f(x) = kx la podemos considerar como una regla que nos dice cómo encontrar el valor correspondiente de x.

Ejemplo:

La regla de la expresión y = f(x) = 2x significa que: el valor de y se obtiene multiplicando por 2 el correspondiente valor de x; así: para x = 5, el valor de y es 10 porque f(5)=2•5=10.

Explica el significado de cada una de las reglas siguientes y, luego, encuentra el valor de **y** correspondiente al valor dado **x**:

a) y = f(x) = 3x ; halla f(0) , f(3) , f(5).   b) y = f(x) = x ; halla f(0) , f(3) , f(5).

⑪ Teniendo en cuenta que f es una función lineal y que:

a) f(7) = - 2   f(x) = -2
7   y.
b) (- 4 , 16) ∈ f
x   y

Responde: ¿en el literal a), cuál es la constante de proporcionalidad? ¿Y en el literal b)? ¿Cuál es la regla que define la función del literal a)? ¿Y en el literal b)?.

⑫ En cada uno de los siguientes enunciados, se pide:

- Identificar las magnitudes que intervienen.
- Indicar si son o no directamente proporcionales.

Y. K= y

a) La velocidad constante (v) de un carro y el tiempo que emplea en recorrer una distancia (d).
b) La longitud (L) de un corte de tela en metros y su valor (P) en pesos.
c) El número de obreros (n) de la misma habilidad y el tiempo (t) que tardan en hacer un trabajo.
d) El peso (P) de una persona y su edad (E).
e) El número de vueltas (N) que da la rueda de una bicicleta y la distancia (D) recorrida.

⑬ En el lenguaje científico para indicar que dos magnitudes **x** y **y** son directamente proporcionales escribimos **x** ∝ **y** y se lee "**x** es proporcional a **y**". Teniendo en cuenta el ejercicio ⑫, responde:

a) ¿Es correcto escribir que L ∝ P? ¿Por qué?
b) ¿Es N ∝ D? ¿Por qué? ¿Cómo se lee?
c) ¿Es n ∝ t? ¿Por qué?

⑭ Decimos que un objeto se desplaza con MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORME cuando se mueve con VELOCIDAD CONSTANTE y en LÍNEA RECTA. En este caso, la distancia recorrida **d** es **directamente proporcional** al tiempo **t** (d ∝ t), siendo la constante de proporcionalidad igual a la velocidad **v.** Responde: ¿Con qué velocidades recorrieron los móviles A y B, de la figura de la quinta experiencia de la sección **10.2,** los primeros 40 km?

⑮ Las ecuaciones de los movimientos de dos objetos M y N son d = f (t) = 60 t y d = g (t) = 80 t respectivamente. Responde:

a) ¿Es d $\propto$ t en ambos movimientos? ¿Por qué?.

b) ¿Cuál es la velocidad del objeto M? ¿Y la del objeto N?.

c) ¿Son ambos movimientos funciones lineales? ¿Por qué?.

d) ¿Son líneas rectas las gráficas de ambos movimientos? ¿Por qué? ¿Cuál forma mayor ángulo con el eje horizontal? ¿Por qué?.

e) Completa:

Móvil M
d = f (t) = 60 t
f (0) =   f (1) =   f (2) =   f (10) =

Móvil N
d = g (t) = 80 t
f (0) =   f (1) =   f (2) =   f (10) =

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 2

Halla los lados de un triángulo sabiendo que su perímetro mide 120 m y que sus lados son proporcionales a 4, 5 y 6.

10.3.2 Magnitudes Inversamente Proporcionales

En muchas ocasiones, en la vida real, al aumentar la cantidad de una magnitud, la cantidad correspondiente de otra magnitud disminuye y viceversa. Veamos.

EXPERIENCIA

- La siguiente tabla muestra el número de obreros con la misma capacidad de trabajo para hacer una obra y el número de días trabajados.

Nº de OBREROS	1	2	3	4	6	12
Nº DE DÍAS TRABAJADOS	12	6	4	3	2	1

Responde:

a) ¿Están directamente relacionadas estas magnitudes? ¿Por qué?.

b) ¿Son directamente proporcionales estas magnitudes? ¿Por qué?.

c) ¿Es constante el cociente entre el número de obreros y el número de días, para cantidades correspondientes?.

- Se dice que dos magnitudes están INVERSAMENTE RELACIONADAS cuando al AUMENTAR una de ellas, la otra DISMINUYE y al contrario.
- Responde: ¿Están las magnitudes NÚMERO DE OBREROS y NÚMERO DE DÍAS inversamente relacionadas? ¿Por qué?.
- Escribamos la RELACIÓN de la tabla anterior en un DIAGRAMA SAGITAL. ¿Es una función? ¿Por qué?
- Esta RELACIÓN también es una FUNCIÓN. Sin embargo, en esta función encontramos una característica especial: **el producto de dos cantidades correspondientes es constante e igual a 12: 1 x 12 = 2 x 6 = 3 x 4 = 4 x 3 = 6 x 2 = 12 x 1 = 12.**
- Ahora encontremos la RAZÓN entre dos cantidades de una MISMA magnitud y la razón entre las cantidades correspondientes en la otra magnitud:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend left] & 12 \\ 2 \arrow[r, bend left] \arrow[d] & 6 \arrow[d] \\ \frac{1}{2} \arrow[r, phantom, "\neq"] & \frac{12}{6} \end{tikzcd}$$

Pero si la invertimos queda:

$$\frac{1}{2} = \frac{6}{12}$$

$$\begin{tikzcd} 4 \arrow[r, bend left] & 3 \\ 6 \arrow[r, bend left] \arrow[d] & 2 \arrow[d] \\ \frac{4}{6} \arrow[r, phantom, "\neq"] & \frac{3}{2} \end{tikzcd}$$

Pero si la invertimos queda:

$$\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

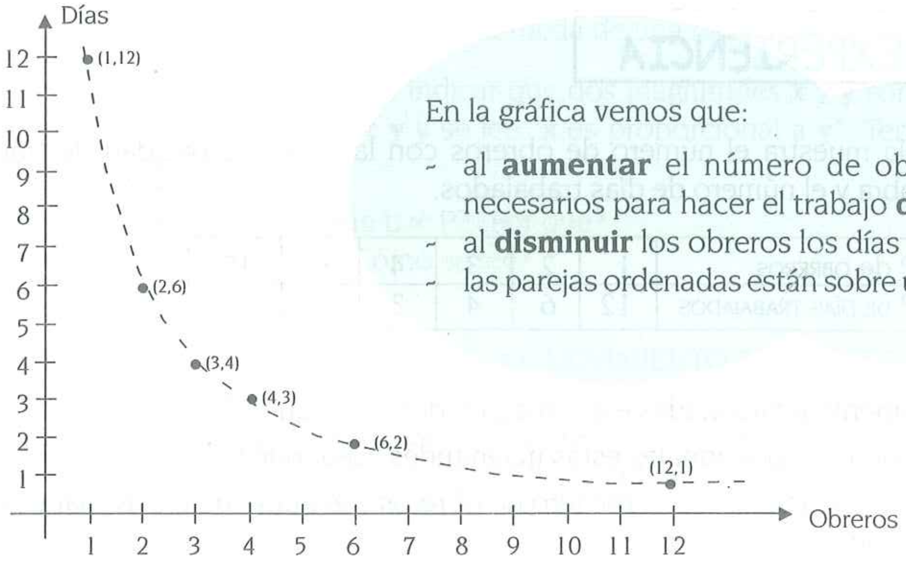
Por esto llamamos RAZÓN INVERSA de la razón $\frac{a}{b}$ a la razón $\frac{b}{a}$; es decir:

$\frac{a}{b}$ es la razón inversa de $\frac{b}{a}$

- Por lo tanto:

> La razón entre dos cantidades cualesquiera del conjunto de partida es igual a la RAZÓN INVERSA de la razón de las cantidades correspondientes del conjunto de llegada.

- Lo anteriormente analizado nos lleva a concluir que podemos formar una PROPORCIÓN al INVERTIR una de las razones. Por ésto se dice que las magnitudes OBREROS y DÍAS son INVERSAMENTE PROPORCIONALES.
- Finalmente, dibujemos la gráfica de esta FUNCIÓN INVERSA. Primero formemos el conjunto de parejas ordenadas: { (1, 12) , (2, 6) , (3, 4) , (4, 3) , (6, 2) , (12, 1)}.



En la gráfica vemos que:

- al **aumentar** el número de obreros, los días necesarios para hacer el trabajo **disminuyen**.
- al **disminuir** los obreros los días **aumentan**.
- las parejas ordenadas están sobre una **línea curva.**

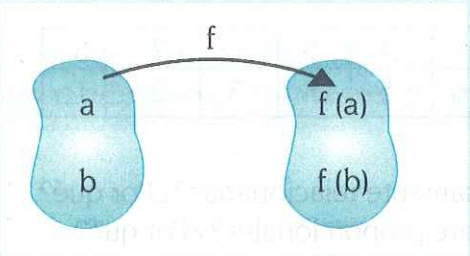
9

APRENDAMOS...

- Dos magnitudes están **INVERSAMENTE RELACIONADAS** cuando al **AUMENTAR** una de ellas, la otra **DISMINUYE** y al contrario.
- Dos magnitudes son **INVERSAMENTE PROPORCIONALES** cuando cumplen las dos condiciones siguientes:

  1. están inversamente relacionadas, y
  2. el producto de sus valores correspondientes es siempre el mismo (constante).

- Si **x** y **y** son dos cantidades correspondientes de dos magnitudes inversamente proporcionales, entonces se cumple que: $\mathbf{x \cdot y = k}$, donde **k** se llama **CONSTANTE DE PROPORCIONALIDAD INVERSA.**
- Si dos magnitudes son inversamente proporcionales, la razón de dos cantidades cualesquiera de la primera es igual a la razón inversa de las cantidades correspondientes de la segunda.



$$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{f(b)}}{\mathbf{f(a)}}$$

- Si **a** y **b** son diferentes de cero, entonces la razón inversa de $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$ es $\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}$.

EJERCICIO 10-4

❶ Un grupo de 20 estudiantes organiza un paseo y cuenta con comida suficiente para 12 días. A última hora sólo deciden viajar 4 alumnos. Responde:

a) ¿Están estas magnitudes inversamente relacionadas? ¿Por qué?.

b) Si viajaran 10 estudiantes, ¿para cuántos días les alcanzaría la comida? Explica.

c) Completa la tabla:

Nº de estudiantes	20	10	4	1
Nº de días	12	24		

d) ¿Son estas magnitudes inversamente proporcionales?.

e) ¿Cuál es la constante de proporcionalidad?.

f) Dibuja la gráfica correspondiente a la situación anterior. ¿Con qué escala se graduó el eje horizontal? ¿Y el vertical?.

g) ¿Están los puntos de la gráfica sobre una línea recta o sobre una línea curva?.

h) Si **x** representa el número de alumnos y **y** representa la cantidad de días correspondientes, ¿cuál es la ecuación que relaciona a **x** con **y**?.

2 Suponiendo que A y B son dos magnitudes inversamente proporcionales, escribe los números que faltan en los espacios vacíos del siguiente cuadro:

A	6	3			8	60		30	
B	24		5	15			120		40

Responde:

a) ¿Cuál es la constante de proporcionalidad?.

b) Si **x** es una cantidad de la magnitud A y **y** es la cantidad correspondiente de la magnitud B, ¿cuál es la ecuación que las relaciona?.

c) Dibuja la gráfica. ¿Qué escala utilizarías en cada eje?.

3 El siguiente cuadro nos muestra las cantidades correspondientes a dos magnitudes A y B:

A	1	2	3	4	5	6	7	8
B	8	7	6	5	4	3	2	1

Responde:

a) ¿Están las magnitudes A y B inversamente relacionadas? ¿Por qué?.

b) ¿Son A y B magnitudes inversamente proporcionales? ¿Por qué?.

c) Escribe el conjunto de parejas ordenadas y dibuja la gráfica. ¿Están los puntos sobre una línea curva o sobre una línea recta que pasa por el origen?.

4 Un camión puede transportar 3.000 kg. Responde:

a) ¿Cuántas cajas de 1 kg, de 2 kg, de 3 kg, de 10 kg y de 25 kg puede transportar?.

b) Completa el siguiente cuadro:

Peso de cada caja (en Kg)	1	2	3	10	25
Nº de cajas	3.000				

c) ¿Son las magnitudes directa o inversamente proporcionales? ¿Por qué?.

d) ¿Cuál es la constante de proporcionalidad? Explica cómo encontrarla.

e) Escribe el conjunto de parejas ordenadas.

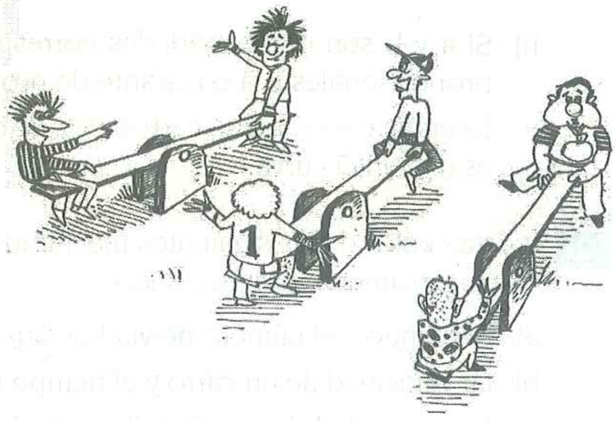
f) Dibuja la gráfica en el plano cartesiano. ¿Cuál escala utilizas en cada eje?.

g) Los puntos de la gráfica, ¿están sobre una línea recta o sobre una línea curva?.

h) Si **x** representa el peso y **y** el número de cajas correspondiente, ¿cuál es la ecuación que las relaciona?.

FFvvvvv Fv

⑤ La figura siguiente muestra a varios niños jugando en el balancín:



a) Consulta y responde: ¿qué es BRAZO del balancín?.

b) Si un niño quiere jugar con otro que pesa el doble, ¿cuál debe ser la posición de ambos niños en el balancín para que estén en equilibrio?. Explica.

c) Si el niño pesa 25 kg, el mayor pesa 50 kg, el brazo del menor mide x m y el brazo del mayor mide 2 m, ¿cuánto mide x?. Explica.

d) ¿Son las magnitudes PESO de los niños y LONGITUD del brazo del balancín directa o inversamente proporcionales?. Explica.

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 3

Las parejas ordenadas (4,7) , (12, a) y (14, b) están ubicadas sobre una línea recta que pasa por el origen. ¿Cuáles son los valores de a y b?.

TALLER DE REPASO DE LA UNIDAD 10

1. Escribe dentro del paréntesis una V si el enunciado correspondiente es verdadero o una F si es falso. Justifica las respuestas.

F a) Si dos magnitudes son directamente proporcionales, entonces al multiplicar una por 3, la otra queda dividida por 3 ( ).

F b) Si dos magnitudes están inversamente relacionadas, entonces al disminuir una, la otra también disminuye ( ).

V c) Si dos magnitudes son inversamente proporcionales, entonces al dividir una de ellas por 2, la otra queda multiplicada por 2 ( ).

V d) La longitud de una circunferencia es directamente proporcional a su diámetro ( ).

V e) El tiempo empleado para hacer una obra y el número de obreros requeridos para realizarla son magnitudes inversamente proporcionales ( ).

V f) El lado de un cuadrado y su perímetro son magnitudes directamente proporcionales ( ).

V g) Si dos magnitudes son directamente proporcionales, entonces el cociente de cantidades correspondientes es constante ( ).

F h) Si a y b son dos cantidades correspondientes de dos magnitudes directamente proporcionales y la constante de proporcionalidad es 8, entonces a · b = 8 ( ).

√ i) La gráfica, en el plano cartesiano, de dos magnitudes inversamente proporcionales es una línea curva ( ).

2. Indica cuáles de las siguientes magnitudes son directamente proporcionales y cuáles son inversamente proporcionales:

a) El tiempo y el número de vueltas que da una rueda.

b) La velocidad de un carro y el tiempo que tarda en hacer su recorrido.

c) La capacidad de una botella y el número de botellas necesarias para envasar 80 litros de gaseosa.

D d) El precio de la carne en el mercado y su peso en libras.

e) Tengo 360 dulces para repartir. Cómo son las magnitudes número de niños y número de dulces que le corresponde a cada uno.

3. 40 Soldados tienen comida para 80 días.

a) ¿Para cuántos soldados alcanzará la comida si se quiere que dure 40 días, 20 días, 10 días, 160 días, 320 días?.

I b) ¿Cómo son las magnitudes NÚMERO DE SOLDADOS Y DÍAS QUE DURA LA COMIDA?.

c) Completa el siguiente cuadro:

NÚMERO DE SOLDADOS	40	80	160	320	20	10
DÍAS QUE DURA LA COMIDA	80	40	20	10	160	320

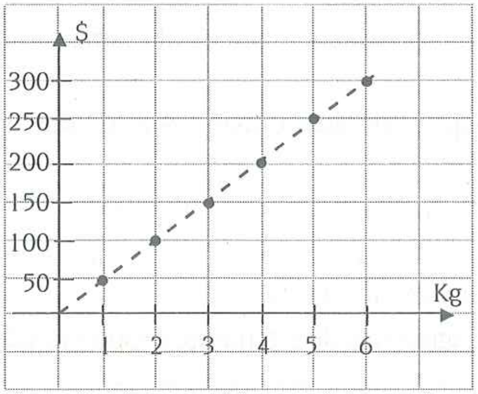
d) ¿Cuál es la constante o razón de proporcionalidad?.

e) Escribe el conjunto de parejas ordenadas.

f) Escribe la ecuación correspondiente a esta situación.

g) Dibuja la gráfica en el plano cartesiano. ¿Qué ESCALA utilizas en cada eje? ¿Es la gráfica de una función lineal?.

4. Fíjate en el siguiente gráfico:



a) ¿Cuáles son las magnitudes?. $ Kg

b) ¿Son las magnitudes directa o inversamente proporcionales? ¿Por qué?. D

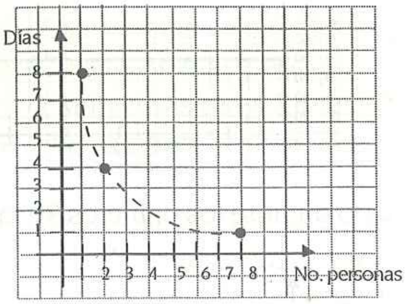
c) ¿Cuál es la constante de proporcionalidad?. 50

d) Escribe el conjunto de parejas ordenadas.

e) Escribe la ecuación de proporcionalidad. $y = f(x) = 50.x$

f) ¿Corresponde la gráfica a una función lineal?. Si

5. Fíjate bien en la siguiente gráfica:



cant = tiempo

a) ¿Cuáles son las magnitudes?.

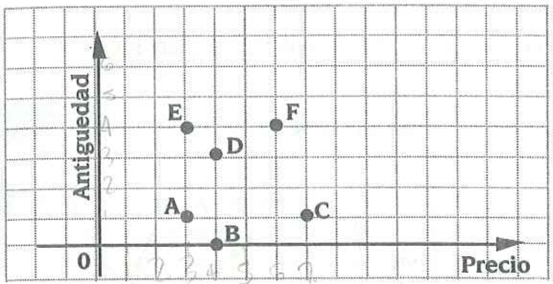
b) ¿Cómo son las magnitudes: directa o inversamente proporcionales? ¿Por qué?. 1 D

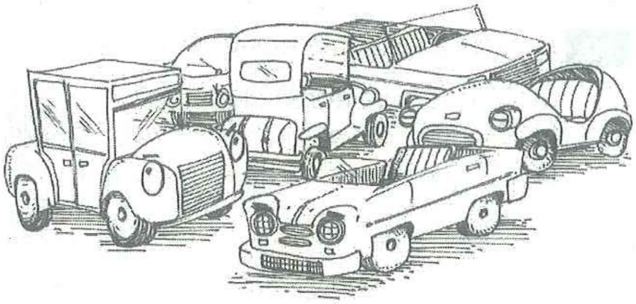
c) ¿Cuál es la constante de proporcionalidad?. 8

d) Escribe el conjunto de parejas ordenadas.

e) Escribe la ecuación que expresa la proporcionalidad. y = f(x) = x

6. El diagrama cartesiano siguiente nos muestra la antigüedad y el precio de seis autos A, B, C, D, E y F.





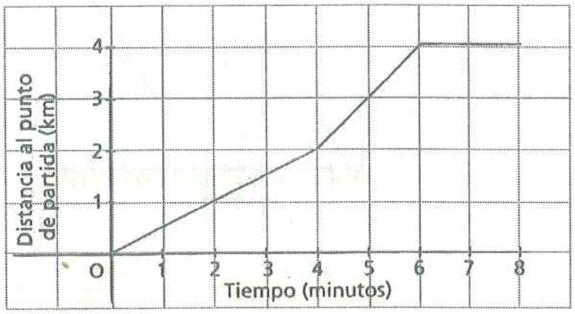
¿Cuál es el más caro?.

¿Cuál es el más nuevo?.

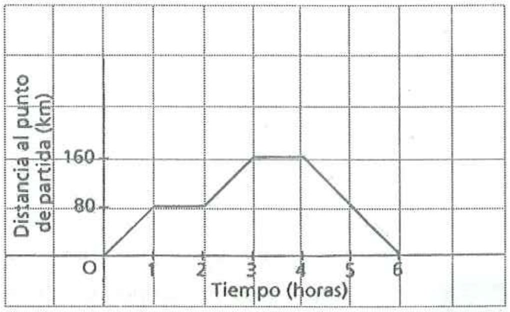
¿Qué autos tienen el mismo precio?.

¿Qué autos tienen la misma antigüedad?.

7. Las dos gráficas siguientes describen un viaje realizado por Juan en bicicleta y uno realizado por Sara en carro.



JUAN



SARA

Contesta:

a) ¿Cuál fue la distancia recorrida por Juan al cabo de 3 minutos? ¿Y la recorrida por Sara al cabo de 3 horas?.

b) ¿Realizó Juan su recorrido a la misma velocidad? ¿Y Sara?.

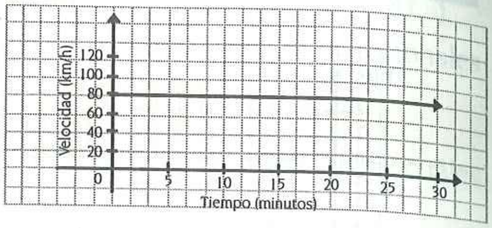
c) ¿Cuál fue la velocidad de Juan en los primeros 4 minutos? ¿Y en los dos siguientes?.

8. La gráfica muestra la velocidad de un carro durante los primeros 30 minutos.

a) ¿Con qué velocidad salió?.

b) ¿Qué velocidad tenía a los 10 minutos?.

c) ¿Y a los 20? ¿y a los 30?.

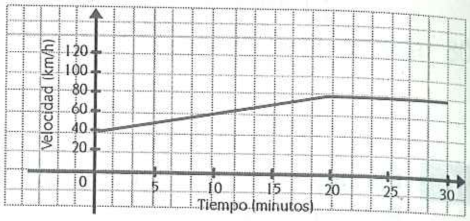


9. La gráfica nos muestra la velocidad de un carro antiguo durante los primeros 30 minutos.

a) ¿Con qué velocidad salió?.

b) ¿Cuánto tiempo tardó para alcanzar los 80 km/h?.

c) ¿Qué velocidad tenía a los 25 minutos?.

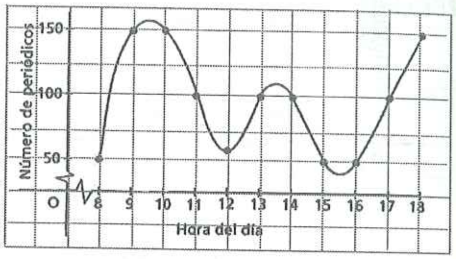


10. La gráfica siguiente nos muestra el número de periódicos vendidos en un kiosco:

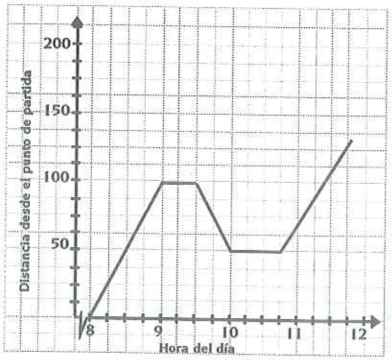
a) ¿A qué hora abren el kiosco?.

b) ¿ A qué hora se vendieron más periódicos?.

c) ¿ A qué hora se vendieron menos?.



11. Describe verbalmente la gráfica del siguiente viaje:

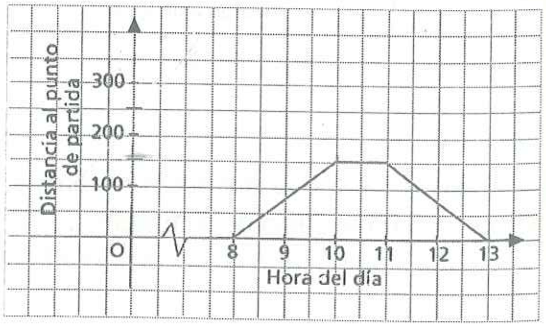


12. La gráfica de un viaje fue la siguiente:

a) ¿Cuántos kilómetros se recorrieron de 8 a 10?.

b) ¿Cuánto tiempo duró la parada a partir de las 10?.

c) ¿A qué hora iniciaron el regreso? ¿Cuánto tiempo duró la vuelta?.

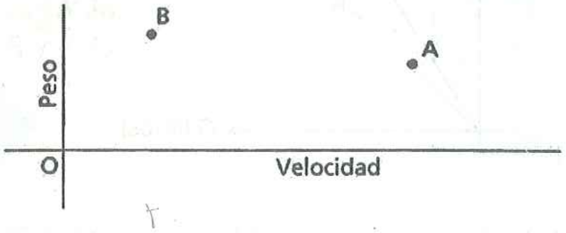


distancia
tiempo

A
B
1R

13. El diagrama siguiente muestra la velocidad y el peso de dos atletas A y B.

a) ¿Cuál es más veloz?.
b) ¿Cuál tiene más peso?.
c) ¿Están estas magnitudes directa o inversamente relacionadas?.



14. Lina salió de paseo en bicicleta con sus amigas. Así nos contó su experiencia: "Salimos a las 10:00 de la mañana, pedaleamos con velocidad constante hasta las 12:00 y recorrimos 10 km. Descansamos media hora y luego regresamos pedaleando también a velocidad constante, llegando a las 3:00 de la tarde".

a) Dibuja la gráfica del viaje de Lina y sus amigas.
b) ¿Cuál fue la velocidad desarrollada por el grupo en el viaje de ida? ¿Y cuál en el viaje de venida?.
c) Escribe la función que representa el viaje de ida y la función que representa el viaje de venida.

15. ¿Qué significa decir que una magnitud es función de otra? Escribe tres ejemplos.

16. Suponga que dos magnitudes, **x** y **y**, están relacionadas de manera que cuando el valor de **x** se multiplica por un número **a**, el valor de **y** también se vuelve **a** veces mayor.

x 5

a) ¿Qué tipo de relación hay entre **x** y **y**?.
b) ¿Cómo se expresa matemáticamente la misma?.
c) Conforme varían **y** y **x**, ¿qué sucede con el cociente $\frac{y}{x}$?.
d) ¿Cómo se denomina este cociente?.
e) Cite por lo menos un ejemplo de dos magnitudes que se relacionen de esta manera.
f) Haga un dibujo donde se muestre (cualitativamente) cómo es la gráfica.

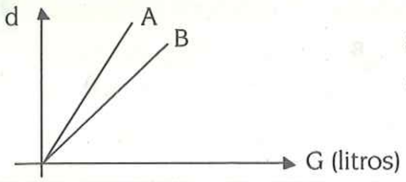
17. Dos magnitudes, **x** y **y**, se relacionan por la ecuación $y = \frac{2}{x}$.

$20 = \frac{12}{10}$

a) ¿Cómo se denomina este tipo de relación?.
b) Cuando el valor de x se multiplica por el número 5, ¿qué sucede con el valor de y?.
c) Realice un dibujo que muestre la forma de la gráfica.
d) Cite por lo menos un ejemplo de dos magnitudes que se relacionen de esta manera.

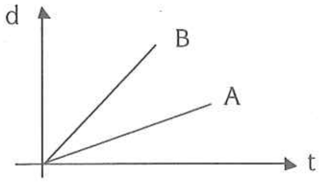
PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS SABER

1. La figura de este problema muestra la gráfica de la distancia recorrida, d, en función del consumo de gasolina, G, para dos autos A y B. El auto más económico es:



a) A
b) B
c) A y B
d) Ninguno de los anteriores

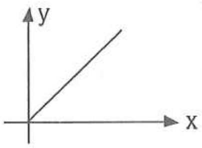
2. La figura de este problema muestra la gráfica de la distancia recorrida, d, en función del tiempo, t, para dos autos A y B. Si V_A representa la velocidad del auto A y V_B la del auto B, entonces se cumple que:



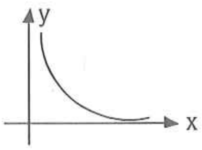
a) $V_B > V_A$
b) $V_A > V_B$
c) $V_A = V_B$
d) Ninguna de las anteriores

3. Con las magnitudes x y y se cumple que el valor de y permanece constante, mientras que el valor de x aumenta. El siguiente dibujo que muestra esta situación es:

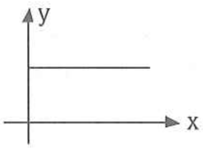
a)



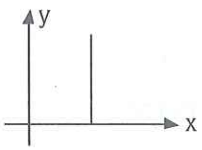
b)



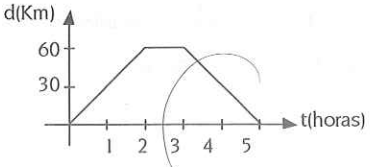
c)



d)



4. Teniendo en cuenta el gráfico de un móvil que recorre una distancia d y, luego, regresa. La velocidad con que regresa es:



a) igual
b) menor
c) mayor
d) Ninguna de las anteriores.

5. Sabemos que la longitud de una circunferencia y el radio son magnitudes directamente proporcionales. El valor de la constante de proporcionalidad entre estas dos magnitudes es:

a) π
b) 2π
c) 2
d) Ninguna de las anteriores.

Núcleo Temático

11

APLICACIONES DE LA PROPORCIONALIDAD (2)

LOGRO GENERAL

- Formular, analizar y resolver problemas donde intervienen magnitudes directa o inversamente proporcionales.

DIMENSIONES

LOGROS ESPECÍFICOS	INDICADORES DE LOGRO
Corporal: • Utilizar operadores en la solución de problemas con dos o más magnitudes directa y/o inversamente proporcionales.	• En grupos de dos o tres alumnos analizan y resuelven problemas con dos o más magnitudes directa y/o inversamente proporcionales.
Comunicativa: • Dar ejemplos de situaciones en la que se involucra terminología de las finanzas como: capital, interés, rata, etc. • Redactar problemas que contienen magnitudes directa y/o inversamente proporcionales.	• Comprende e interpreta correctamente los enunciados de los problemas. • Identifica el (los) operador (es) que se utiliza (n) al resolver un problema con dos o más magnitudes.
Cognitiva: • Identificar el % como un operador multiplicativo representado por una fracción de denominador 100. • Identificar la tasa de interés como un porcentaje del capital por unidad de tiempo. • Resolver problemas sobre interés simple como regla de tres compuesta.	• Utiliza correctamente los operadores para resolver problemas con dos o más magnitudes directa y/o inversamente proporcionales.
Estética: • Elaborar material útil para la clase.	• Elabora una cartelera utilizando los porcentajes de los resultados académicos del grupo al finalizar un período.
Etica - Actitudinal: • Resaltar la importancia de la matemática en los negocios.	• Demuestra interés por aprender.

EVALUACIÓN

ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS

11.1 ¿SABÍAS QUE...?

Euclides está reconocido como el matemático más importante de la Grecia Clásica. De él sólo se sabe que enseñó y fundó una escuela en Alejandría hacia el año 30 a. de C., en la época del rey Ptolomeo I. Se cuenta que una vez el rey le preguntó si no había un método más sencillo para aprender geometría y que Euclides contestó: "no hay un camino real para la geometría".

Otra anécdota sobre Euclides se refiere a uno de sus discípulos, el cual, después de aprender la primera proposición de geometría, le preguntó qué iba a ganar con eso; entonces Euclides ordenó que le dieran una moneda "ya que debe obtener un beneficio de todo lo que aprende".

No obstante, Euclides es conocido como autor de una de las obras más importantes de la geomertía, *Los Elementos*. Prácticamente, hasta que en el siglo XIX se desarrollaron las geometrías no euclidianas, "Los Elementos" fueron la obra de geometría. Una idea de su importancia es el hecho de que toda la geometría escolar se encuentra contenida en ese libro. Euclides recopiló en "Los Elementos" toda la geometría conocida en su época, pero no se limitó a reunir todo el conocimiento geométrico, sino que lo ordenó y le dió estructura de ciencia.

EJERCICIO 11-1

Lee nuevamente la anterior información y luego, encierra en un círculo la letra que corresponda a la respuesta correcta:

1. En las respuestas que acostumbraba dar Euclides podemos encontrar:
   - [✓ a.] Genialidad y contradicción.
   - b. Agudeza mental y fina ironía.
   - c. Talento e inteligencia precoz.
   - d. Suspicacia y sarcarsmo.

2. De "los Elementos", obra de Geometría escrita por Euclides podemos decir que:
   - [✓ a.] Allí aparece ordenado y estructurado todo el conocimiento de geometría.
   - b. Es todo un compendio de la ciencia.

c. No ha sido posible sustituirla por otra.
d. Su importancia se extendió a todo lo largo del siglo XIX.

3. De Euclides se puede afirmar todo lo siguiente, con excepción de:
   a. Fue maestro y fundador de una importante institución en Alejandría.
   b. Tenía vínculos con personas notables de la Grecia Antigua.
   c. Su obra de Geometría ha sido estudiada por muchos siglos.
   d. Tiene la reputación de ser el matemático más importante del mundo antiguo.

4. El propósito del autor, en el escrito anterior es:
   a. Comparar la geometría euclidiana con otras geometrías.
   b. Destacar la importancia de Euclides y su obra en el campo científico.
   c. Demostrar que Euclides es el creador y padre de la geometría.
   d. Mostrar la evolución de la geometría, desde Euclides hasta nuestros días.

5. Según Euclides:
   a. Todos los caminos que conducen a la geometría son falsos.
   b. Sólo hay una vía directa a la geometría.
   c. A la geometría se puede acceder por diferentes caminos.
   d. Todos los caminos conducen a la geometría.

11.2 REGLA DE TRES SIMPLE

11.2.1 Regla de Tres Simple Directa

PRIMERA EXPERIENCIA

- Lee con cuidado el siguiente problema:

  El precio de 5 m de tela es $6.850. ¿Cuánto costarán 9 m de la misma tela?

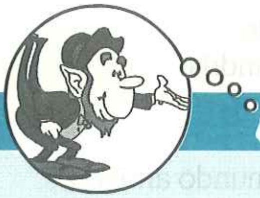
  En este problema intervienen dos magnitudes (metros y pesos) y cuatro cantidades, de las cuales conocemos tres y desconocemos una.

- Ahora, lee este otro problema:

  En una fábrica de productos de papel, de cada 8 kg de madera se obtienen 5,2 kg de papel. ¿Cuánta madera se necesita para fabricar 10 kg de papel?

  También en este problema intervienen dos magnitudes (kg de madera y kg de papel) y cuatro cantidades, de las cuales conocemos tres y desconocemos una.

- El procedimiento que nos permite hallar la cantidad desconocida se llama **REGLA DE TRES SIMPLE.** Como en los dos problemas anteriores, las magnitudes que intervienen son **DIRECTAMENTE PROPORCIONALES**, entonces la **REGLA DE TRES SIMPLE** es **DIRECTA.**



APRENDAMOS...

- La **REGLA DE TRES SIMPLE** es un procedimiento que nos permite hallar una cantidad desconocida de un problema donde intervienen dos magnitudes proporcionales.
- La **REGLA DE TRES SIMPLE** es **DIRECTA** si las magnitudes son directamente proporcionales.

SEGUNDA EXPERIENCIA

- Resolvamos el siguiente problema:

  Si con 80 litros de leche se hacen 4,5 kg de mantequilla, ¿cuántos litros de leche se necesitan para hacer 90 kg de mantequilla?

- Si llamamos **x** a la cantidad desconocida, podemos plantear el problema así:

$$\text{Si con } \mathbf{80\ litros} \xrightarrow{\text{se hacen}} \mathbf{4{,}5\ kg}$$

$$\text{entonces con } \mathbf{x\ litros} \xrightarrow{\text{se harán}} \mathbf{90\ kg}$$

- Esta forma de presentar o plantear el problema nos permite analizar que para producir **más** kg de mantequilla necesitamos **más** litros de leche. Por lo tanto, las magnitudes **litros** y **kilogramos** son directamente proporcionales y, entonces, el **cociente** o **razón** entre cantidades correspondientes es constante; es decir:

$$\frac{80\ \text{l}}{4{,}5\ \text{kg}} = \frac{x}{90\ \text{kg}}$$

$$\therefore\ x = \frac{80\ \text{l} \cdot 90\ \text{kg}}{4{,}5\ \text{kg}}$$

$$\therefore\ x = \frac{7.200\ \text{l}}{4{,}5}$$

$$\therefore\ x = 1.600\ \text{l}$$

- Por lo tanto, son necesarios 1.600 litros de leche para hacer los 90 kg de mantequilla.

TERCERA EXPERIENCIA

- Resolvamos el siguiente problema:

  Un motorista recorre 180 km en 2 horas, ¿cuántos km recorre en 7 horas?

- Llamemos **x** a los km que recorre en las 7 horas. Por lo tanto, podemos escribir el siguiente planteamiento:

$$\text{Si } \mathbf{180\ km} \xrightarrow{\text{los recorre en}} \mathbf{2\ h}$$

$$\text{entonces } \mathbf{x\ km} \xrightarrow{\text{los recorrerá en}} \mathbf{7\ h}$$

- Mientras **más** horas transcurran, **más** kilómetros recorrerá. Por lo tanto, las magnitudes **km** y **h,** son directamente proporcionales y podemos ecribir:

$$\frac{\mathbf{180\ km}}{\mathbf{2\ h}} = \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{7\ h}} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \text{¿Por qué?}$$

$$\therefore \mathbf{x} = \frac{\mathbf{180\ km \bullet 7}\cancel{\mathbf{h}}}{\mathbf{2}\cancel{\mathbf{h}}} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \text{¿Por qué?}$$

$$\therefore \mathbf{x} = \frac{\mathbf{1.260\ km}}{\mathbf{2}}$$

$$\therefore \mathbf{x} = \mathbf{630\ km}$$

- Luego, en 7 horas, el motorista recorrerá 630 km.

CUARTA EXPERIENCIA

- Sara tiene 8 años y mide 1,20 m de altura. ¿Cuánto medirá a los 16 años?

En este caso, las magnitudes **años** y **metros** no son directamente proporcionales ya que al duplicarse la edad no se duplica la altura. Luego, no puede aplicarse una regla de tres para resolver el problema.

11.2.2 Regla de Tres Simple Inversa

PRIMERA EXPERIENCIA

- Resolvamos el siguiente problema:

Una casa se construye en 10 meses empleando 20 obreros, ¿cuánto tiempo se emplearía si fueran 30 obreros?

- Llamemos **x** al número de meses que se gastaría si fueran 30 obreros.

$$\text{Si } \mathbf{20\ obreros} \xrightarrow{\text{la construyen en}} \mathbf{10\ meses}$$

$$\text{entonces } \mathbf{30\ obreros} \xrightarrow{\text{la construirán en}} \mathbf{x\ meses}$$

- Analicemos el problema: Como tenemos **más** obreros, entonces gastaremos **menos** tiempo para construir la casa; es decir, las magnitudes **obreros** y **meses** son **inversamente proporcionales.** Por lo tanto, el producto de cantidades correspondientes es constante y podemos escribir:

$$\mathbf{20\ obreros \cdot 10\ meses = 30\ obreros \cdot\ x\ meses}$$

$$\therefore\ x = \frac{\mathbf{20\ \cancel{obreros} \cdot 10\ meses}}{\mathbf{30\ \cancel{obreros}}}$$

$$\therefore\ x = \frac{\mathbf{200\ meses}}{\mathbf{30}} = \mathbf{6\frac{2}{3}\ \ meses\ = 6\ meses\ y\ 20\ días}$$

SEGUNDA EXPERIENCIA

- Resolvamos el siguiente problema:

Un campesino tiene cuido para alimentar 12 vacas durante 60 días. Si compra 8 vacas más, ¿cuánto tiempo durará el cuido?

- Como el campesino compra 8 vacas más, entonces ahora tiene 20 vacas. Si llamamos **x** el tiempo que le durará el cuido para alimentar estas 20 vacas, entonces podemos escribir:

$$\text{Si para } \mathbf{12\ vacas} \xrightarrow{\text{el cuido dura}} \mathbf{60\ días}$$

$$\text{para } \mathbf{20\ vacas} \xrightarrow{\text{durará}} \mathbf{x\ días}$$

o también:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{v} & & \mathbf{d} \\ \mathbf{12} & \xrightarrow{\hspace{2cm}} & \mathbf{60} \\ \mathbf{20} & \xrightarrow{\hspace{2cm}} & \mathbf{x} \end{array}$$

- Mientras **más** vacas haya, **menos** días durará el cuido. Por lo tanto:

$$\mathbf{12\ v \cdot 60\ d = 20\ v \cdot x\ d}$$ .... ¿por qué?

$$\therefore\ x = \frac{\mathbf{12\cancel{v} \cdot 60\ d}}{\mathbf{20\cancel{v}}}$$ .... ¿por qué?

$$\therefore\ x = \frac{\mathbf{720\ d}}{\mathbf{20}} = \mathbf{36\ d}$$

- Luego, el cuido le durará 36 días, para alimentar las 20 vacas.

APRENDAMOS...

- Una **REGLA DE TRES SIMPLE** es **INVERSA** cuando las dos magnitudes que intervienen son inversamente proporcionales.

15 20
90 x

EJERCICIO 11-2

120

① La aguja grande de un reloj recorre un ángulo de 90° en 15 minutos. ¿Qué ángulo recorre en 20 minutos?.

6

② En un viaje, el conductor observa que a una velocidad de 60 km por hora emplearon 8 horas en el recorrido. ¿Qué tiempo hubieran tardado si viajan a 80 km por hora?.

③ En una compra de $450.000 nos descontaron $90.000. ¿Cuánto nos descontarán en una compra de $100.000?.

6 000

④ Para pintar una valla, 3 obreros tardan 16 horas. ¿Cuántas horas tardarán 8 obreros para pintar una valla igual?.

⑤ El consumo promedio de un carro es de 3 galones de gasolina cada 100 km. ¿Cuántos galones necesita para recorrer 483 km?.

14,49

⑥ Dos llaves de agua llenan una piscina en 10 horas. ¿Cuánto tiempo tardarán en llenarla 5 llaves iguales?.

4

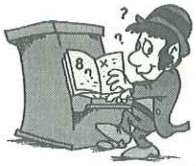
⑦ El costo mensual de la energía eléctrica de un negocio es $34.000. ¿Cuál será el costo mensual si elimina 4 de las 17 bombillas que tenían encendidas?.

26 000

⑧ En una hacienda hay 4.500 reses que tienen pasto para 4 meses. Si se venden en un día 500 reses. ¿Para cuánto tiempo tendrán las restantes?.

⑨ Si un tronco de madera que mide 2,15 m de longitud da una sombra de 6,45 m. ¿Cuál será la altura de una torre cuya sombra, a la misma hora, es de 51 m?.

⑩ Los $\frac{3}{7}$ de la capacidad de un estanque son 8.136 litros. Halla la capacidad del estanque.



DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 1

Dos números son uno el recíproco del otro. Uno de ellos es 4 veces el otro. ¿Cuáles son los números?.

11.3 REGLA DE TRES COMPUESTA

APRENDAMOS...

- Una regla de tres es **COMPUESTA** cuando en el problema intervienen tres o más magnitudes directa o inversamente proporcionales.

PRIMERA EXPERIENCIA

- Resolvamos el siguiente problema:

6 personas en 4 días recogen 960 kg de papel; ¿cuántos kg recogerán 11 personas en 10 días?

- Llamemos **x** los kg que recogerán las 11 personas en los 10 días. Por lo tanto, podemos escribir lo siguiente:

$$6 \text{ personas} \xrightarrow{\text{en}} 4 \text{ días} \xrightarrow{\text{recogen}} 960 \text{ kg}$$

$$11 \text{ personas} \xrightarrow{\text{en}} 10 \text{ días} \xrightarrow{\text{recogerán}} x \text{ kg}$$

- Ahora comparemos la magnitud **kg** (donde aparece la incógnita) con las otras dos magnitudes (personas y días); así:
  - A **más** personas, **más** kg de papel recogidos. Luego, estas magnitudes son directamente proporcionales.
  - A **más** días, **más** kg de papel recogidos. Luego, estas magnitudes son directamente proporcionales.
  - Conclusión: la magnitud **kg** es directamente proporcional a las magnitudes **personas** y **días.**
- Para resolver el problema lo descomponemos en **dos reglas de tres simples directas:**

PRIMERA

$$6 \text{ personas} \xrightarrow{\text{recogen}} 960 \text{ kg}$$

$$11 \text{ personas} \xrightarrow{\text{recogerán}} \mathbf{x'}$$

Por lo tanto:

$$\frac{6}{960} = \frac{11}{\mathbf{x'}}$$

$$\therefore \mathbf{x'} = \frac{960 \text{ kg} \bullet 11 \cancel{\text{ personas}}}{6 \cancel{\text{ personas}}}$$

$$\therefore \mathbf{x'} = 1.760 \text{ kg}$$

SEGUNDA

Ahora relacionamos **días** y **kg** utilizando el resultado que acabamos de obtener:

$$\text{En 4 días} \xrightarrow{\text{recogen}} 1.760 \text{ kg}$$

$$\text{En 10 días} \xrightarrow{\text{recogerán}} \mathbf{x}$$

Por lo tanto:

$$\frac{4}{1.760} = \frac{10}{\mathbf{x}}$$

$$\therefore \mathbf{x} = \frac{1.760 \text{ kg} \bullet 10 \cancel{\text{ días}}}{4 \cancel{\text{ días}}}$$

$$\therefore \mathbf{x} = 4.400 \text{ kg}$$

- Luego, las 11 personas recogerán 4.400 kg de papel en los 10 días.

SEGUNDA EXPERIENCIA

- Resolvamos el siguiente problema:

  36 reses tienen cuido para 30 días, consumiendo 3 raciones diarias. ¿Para cuántos días alcanzará el cuido si ahora hay 27 reses pero consumiendo 4 raciones diarias?

- En primer lugar organicemos los datos de cada magnitud y representemos con una **x** el dato desconocido:

RESES	**DÍAS**	**RACIONES**
36	30	3
27	**x**	4

- Ahora comparemos la magnitud **días** (donde aparece la incógnita) con las otras dos magnitudes (**reses y raciones**); así:

  - Mientras **menos** reses haya, **más** días durará el cuido; por lo tanto, estas magnitudes son inversamente proporcionales.
  - Mientras **más** raciones se consuman, **menos** días durará el cuido; por lo tanto, estas magnitudes son inversamente proporcionales.

- Para resolver el problema lo descomponemos en **dos reglas de tres simples inversas;** así:

PRIMERA

RESES **DÍAS**

$$36 \xrightarrow{\text{tienen cuido para}} 30$$

$$27 \xrightarrow{\text{tendrán para}} \mathbf{x'}$$

Por lo tanto:

$36 \cdot 30 = 27 \cdot x'$ .... ¿por qué?

$\therefore\ \mathbf{x'} = \dfrac{36\,\cancel{\text{reses}} \cdot 30 \text{ días}}{27\,\cancel{\text{reses}}}$ .... ¿por qué?

$\therefore\ \mathbf{x'} = 40 \text{ días}$

SEGUNDA

Ahora relacionemos las magnitudes **días** y **raciones** utilizando el resultado que acabamos de obtener:

$$\begin{array}{lcc} & \textbf{RACIONES} & \textbf{DÍAS} \\ & \text{Con } 3 \xrightarrow{\text{el cuido dura}} & 40 \\ & \text{Con } 4 \xrightarrow{\text{durará}} & \mathbf{x} \end{array}$$

Por lo tanto:

$$3 \bullet 40 \ = 4 \bullet x \quad \text{.. ¿por qué?}$$

$$\therefore \ x = \frac{3 \cancel{\text{raciones}} \bullet 40 \text{ días}}{4 \cancel{\text{raciones}}} \quad \text{.................................... ¿por qué?}$$

$$\therefore \ x = \ 30 \text{ días}$$

- Luego, las 27 reses tendrán cuido para 30 días consumiendo 4 raciones diarias.

TERECERA EXPERIENCIA

- Resolvamos el siguiente problema:

Un curso de 60 alumnos planea salir de excursión llevando 30 kg de alimentos para 9 días. A última hora deciden acompañarlos 30 alumnos, quienes colaboran con 10 kg de provisiones. ¿Para cuántos días les alcanzarán las provisiones?

- Organicemos los datos de cada magnitud y representemos con una **x** el dato desconocido:

ALUMNOS	kg	DÍAS
60	30	9
90	40	**x**

- Comparemos la magnitud **días** (donde aparece la incógnita) con las otras dos magnitudes (**alumnos y kg)**; así:
  - Mientras **más** alumnos vayan a la excursión, **menos** días durará la comida, por lo tanto, las magnitudes días y alumnos son inversamente proporcionales.
  - Mientras **más** kilogramos de comida lleven, **más** días les durará; por lo tanto, las magnitudes kg y días son directamente proporcionales.
- Para resolver el problema lo descomponemos en **dos reglas de tres simples: una directa y otra inversa,** así:

PRIMERA

$$\begin{array}{lc} \textbf{ALUMNOS} & \textbf{DÍAS} \\ 60 \xrightarrow{\text{tienen comida para}} & 9 \\ 90 \xrightarrow{\text{tendrán comida para}} & \mathbf{x'} \end{array}$$

Por lo tanto:

$60 \bullet 9 = 90 \bullet \mathbf{X'}$ .... ¿por qué?

$\therefore\ \mathbf{x'} = \dfrac{60\ \cancel{\text{alumnos}} \bullet 9\ \text{días}}{90\ \cancel{\text{alumnos}}}$ .... ¿por qué?

$\therefore\ \mathbf{x'} = 6\ \text{días}$

SEGUNDA

Ahora relacionemos las magnitudes **kg** y **días** utilizando el resultado que acabamos de obtener:

$$\begin{array}{ccc} \textbf{kg} & & \textbf{DÍAS} \\ 30 & \xrightarrow{\text{duran}} & 6 \\ 40 & \xrightarrow{\text{durarán}} & \mathbf{x} \end{array}$$

Por lo tanto:

$\dfrac{30}{6} = \dfrac{40}{x}$ .... ¿por qué?

$\therefore\ \mathbf{x} = \dfrac{40\ \text{kg} \bullet 6\ \text{días}}{30\ \text{kg}}$ .... ¿por qué?

$\therefore\ \mathbf{x} = 8\ \text{días}$

- Luego, los 90 alumnos podrán estar de paseo 8 días con los 40 kg de provisiones.

APRENDAMOS...

- La **REGLA DE TRES COMPUESTA** es un procedimiento para encontrar una cantidad desconocida en un problema donde intervienen tres o más magnitudes.
- La regla de tres compuesta puede ser:
  - * Directa en todas sus partes
  - * Inversa en todas sus partes
  - * Directa en unas partes e inversa en otras
- Para resolver un problema de regla de tres compuesta lo descomponemos en dos (o más) reglas de tres simples.

EJERCICIO 11-3

❶ Se emplearon 20 hombres durante 15 días en hacer 450 m de cierta obra. ¿Cuánto harán 24 hombres trabajando 25 días?.

❷ Para terminar una casa se empleó a 24 albañiles durante 28 días a razón de 8 horas diarias. ¿Cuántos días hubieran necesitado 6 albañiles trabajando también 8 horas diarias para hacer el mismo trabajo?.

❸ Con 16,25 Kg de hilo se ha tejido una pieza de tela de 65 m de largo por 1,12 m de ancho. ¿Cuánto hilo se necesitará para tejer otra pieza de 42 m de largo por 1,24 m de ancho?.

❹ Un contratista puede construir un puente en 90 días con 120 obreros en jornada de 8 horas, pero se ve obligado a terminarlo en 60 días. ¿En cuántos obreros tendrá que aumentar su equipo si decide trabajar 10 horas diarias?.

❺ En 10 días, 15 obreros hacen los $\frac{2}{3}$ de una obra. En ese instante 3 de ellos se enferman. ¿Cuántos días necesitarán los demás para hacer el resto?.

❻ 10 hombres trabajando en la construcción de un puente hacen $\frac{3}{5}$ de la obra en 8 días. Si retiran 8 hombres, ¿cuánto tiempo gastarán los restantes para terminar la obra?.

❼ 6 hombres trabajando durante 9 días, 8 horas diarias han hecho los $\frac{3}{8}$ de una obra. Si se refuerzan con 4 hombres y los obreros trabajan ahora 6 horas diarias, ¿en cuántos días terminarán la obra?.

❽ 50 hombres tienen provisiones para 20 días a razón de 3 raciones diarias. Si las raciones se disminuyen en $\frac{1}{3}$ y se aumentan 10 hombres, ¿cuántos días durarán los víveres?.

❾ 30 hombres se comprometen a hacer una obra en 15 días. Al cabo de 9 días sólo han hecho los $\frac{3}{11}$ de la obra. Si el capataz refuerza la cuadrilla con 42 hombres, ¿podrán terminar la obra en el tiempo fijado? Si no es posible, ¿cuántos días más necesitarán?.

❿ Un oficial de la construcción contrata una obra que debe comenzar el 1 de junio y terminar el 5 de julio. El día 1 de junio pone a trabajar 20 hombres, los cuales trabajan hasta el día 14 inclusive a razón de 6 horas diarias. Ese día el propietario le dice que necesita la obra terminada el día 24 de junio. Entonces a partir del día 15, coloca más obreros y trabajan 9 horas diarias, en lugar de las 6, y logra complacer al propietario. ¿Cuántos obreros aumentó el capataz a partir del día 15?.

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 2

Tenemos las siguientes divisiones Ⓐ y Ⓑ :

Ⓐ : $n \begin{array}{|l} 15 \\ \hline ? \end{array}$ con residuo 13. ; Ⓑ : $n \begin{array}{|l} 18 \\ \hline ? \end{array}$ con residuo 1.

El número n del problema A es el mismo que el del problema B. El cociente en A es también el mismo que el de B. Halla n y el cociente que falta.

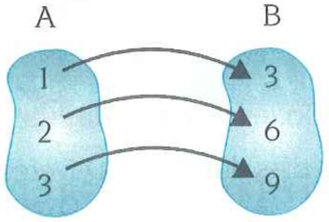
11.4 REPARTOS PROPORCIONALES

Muchos problemas prácticos se refieren a la forma como una cantidad de una magnitud (dinero, superficie, volumen, ...) debe repartirse en partes directa o inversamente proporcionales a otras cantidades dadas.

11.4.1 Repartos en partes Directamente Proporcionales

EXPERIENCIA

- El siguiente diagrama sagital muestra la relación existente entre dos magnitudes A y B:



- ¿Son las magnitudes A y B directa o inversamente proporcionales? ¿Por qué?.
- ¿Es posible formar la siguiente serie de razones iguales $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9}$? ¿Por qué?.

- Como $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9}$, decimos que las cantidades 1, 2 y 3 son **PROPORCIONALES** a las cantidades 3, 6 y 9 respectivamente.
- Teniendo en cuenta la SERIE DE RAZONES IGUALES de A a B, responde si son correctas las siguientes igualdades y decir por qué:

$$\frac{\mathbf{1} + 2 + 3}{\mathbf{3} + 6 + 9} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} \quad ; \quad \frac{1 + \mathbf{2} + 3}{3 + \mathbf{6} + 9} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{6}} \quad ; \quad \frac{1 + 2 + \mathbf{3}}{3 + 6 + \mathbf{9}} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{9}}$$

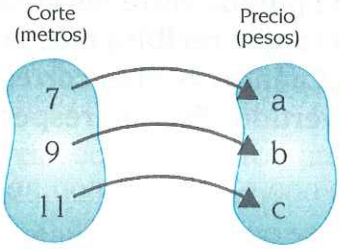
En toda serie de razones iguales la suma de los antecedentes dividida por la suma de los consecuentes es igual a cada una de las razones de la serie.

- Una aplicación:

Entre 3 modistas compran un corte de tela por $81.000. La primera se queda con 7 m; la segunda, con 11 m y la tercera con 9 m. ¿Cuánto pagará cada una?.

Solución:

- Es claro que la modista que más tela lleva, más dinero debe aportar. Las magnitudes CANTIDAD DE TELA Y PRECIO son directamente proporcionales.
- Como no sabemos el dinero que pagó cada modista, supongamos que a, b y c es la cantidad de dinero pagado por cada una.



* $a + b + c = \$81.000$ ....¿Por qué?

* a, b y c son respectivamente proporcionales a 7, 9 y 11 ....¿Por qué?

* $\frac{a}{7} = \frac{b}{9} = \frac{c}{11}$ ....¿Por qué?

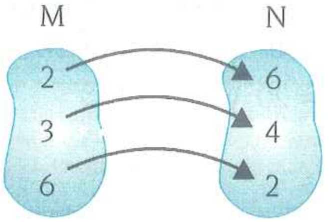
$\frac{a+b+c}{7+9+11} = \frac{a}{7}$ ....¿Por qué?

$\therefore a = \frac{81.000 \times 7}{27} = \$21.000$ ....¿Por qué?

11.4.2 Repartos en partes Inversamente Proporcionales

EXPERIENCIA

- El siguiente diagrama sagital nos muestra la relación existente entre las cantidades correspondientes a dos magnitudes M y N.



- ¿Son las magnitudes M y N directa o inversamente proporcionales? ¿Por qué?.
- ¿Es verdad o falso que:

$$\begin{array}{ccccc} 2 \cdot 6 & = & 3 \cdot 4 & = & 6 \cdot 2 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \frac{2}{1/6} & = & \frac{3}{1/4} & = & \frac{6}{1/2} \end{array}$$

? ¿Por qué?

- Responde si son ciertas o falsas las siguientes igualdades y justificar por qué:

$$\frac{2+3+6}{\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}}=\frac{2}{\frac{1}{6}}=12 \quad ; \quad \frac{2+3+6}{\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}}=\frac{3}{\frac{1}{4}}=12 \quad ; \quad \frac{2+3+6}{\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}}=\frac{6}{\frac{1}{2}}=12$$

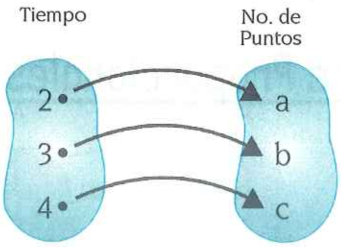
Repartir una cantidad en partes INVERSAMENTE PROPORCIONALES a 6,4 y 2 es lo mismo que repartirla en partes directamente proporcionales a $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{2}$ que son los inversos multiplicativos de 6, 4 y 2.

- Una aplicación:

En una carrera ciclística contra el reloj se reparten 62 puntos entre los competidores que ocupen los 3 primeros puestos de tal manera que recibirá más puntos quien menos tiempo demore en hacer el recorrido. ¿Cuántos puntos corresponden a los tres primeros corredores si los tiempos invertidos fueron, respectivamente, 2, 3 y 5 minutos?.

Solución:

- Como recibe MÁS quien MENOS tiempo demore, entonces las magnitudes NÚMERO DE PUNTOS y TIEMPO son inversamente proporcionales.
- Llamemos a, b y c los puntos que recibe cada uno. Tenemos:



* $a + b + c = 62$ .... ¿por qué?.

* $a \bullet 2 = b \bullet 3 = 5 \bullet c$ .... ¿por qué?.

* $\frac{a}{\frac{1}{2}} = \frac{b}{\frac{1}{3}} = \frac{c}{\frac{1}{5}}$ ....¿por qué?.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{31}{30}$$

* Luego, $\frac{a+b+c}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}=\frac{62}{\frac{31}{30}}$ .... ¿por qué?.

* Luego, $\frac{62}{\frac{31}{30}}=a\cdot2$, $\frac{62}{\frac{31}{30}}=b\cdot3$, $\frac{62}{\frac{31}{30}}=c\cdot5$

* Luego, a = 30 , b = 20 y c = 12.

EJERCICIO 11-4

① Juan, Lina y David juegan 10.000, 15.000 y 30.000 pesos respectivamente al chance. Ganan y reciben 3'300.000 pesos. ¿Cómo se los tienen que repartir?.

② Repartir 3'600.000 pesos en partes directamente proporcionales a los números 2, 3 y 7.

③ Por un trabajo pagan 500.000 pesos. Rubén trabajó 6 horas y Mauricio 19 horas. ¿Cuánto cobrará cada uno?.

④ Repartir 200 mangos en partes inversamente proporcionales a 4, 10 y 20.

⑤ Entre tres niños de 4, 5 y 10 años respectivamente se reparten 2'750.000 pesos en partes inversamente proporcionales a sus edades. ¿Cuánto le toca a cada uno?.

⑥ Luis va a repartir 100'000.000 de pesos en partes directamente proporcionales a las edades de sus hijos. Si las edades son 20, 29, 35 y 36 años respectivamente. ¿Cuánto dinero recibe cada uno?.

⑦ Tres socios montaron un negocio aportando los siguientes capitales: $100'000.000, $25'000.000 y $30'000.000. Al cabo de un año se han obtenido ganancias por $100'000.000. ¿Cómo se las reparten?.

⑧ En una carrera participan 3 corredores entre los que se reparten $11'840.000. Los tiempos que demoraron fueron 4, 5 y 6 minutos respectivamente. ¿Cuánto dinero le toca a cada uno?.

⑨ En un estadero, los camareros se reparten las propinas proporcionalmente al número de años de servicio. Hay 3 que llevan 6 años de servicio, y los otros dos llevan 5. Si las propinas recogidas en una semana ascienden a 2'000.000 de pesos. ¿Cuánto le toca a cada uno?.

11.5 RAZÓN Y TANTO POR CIENTO

Con frecuencia leemos o escuchamos expresiones como éstas:

ALMACÉN EL CHICHÓN EN LIQUIDACIÓN
20% DE DESCUENTO
Esto significa que te rebajarán 20 de cada 100 pesos.

Un jugador de baloncesto ha encestado el 50% de los lanzamientos triples. Significa: 50 de cada 100.

En un barrio han votado para decidir si hacen una piscina o un jardín. La votación quedó así: Jardín: 60 personas de cada 100., Piscina: 40 personas de cada 100.

Resultados de la votación: Jardín: 60 %
Piscina: 40 %

Por situaciones como éstas es importante que tengamos una idea clara del significado de frases como: "60 **de cada 100**" o "**60%**" y muchas otras que se utilizan dentro del movimiento comercial, industrial y económico. Realicemos la siguiente experiencia.

EXPERIENCIA

- La expresión **POR CIENTO** viene del latín **PER CENTUM**, que significa **POR CADA CIEN**, y de ella se deriva la palabra **PORCENTAJE.**
- Cuando se dice que el "90 **POR CIENTO**" de las respuestas de una evaluación son correctas, queremos decir que:

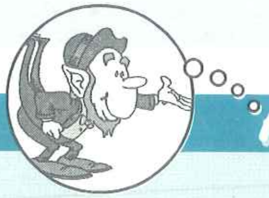
90 **de cada 100** respuestas son correctas.

- El lenguaje de los **PORCENTAJES** o **POR CIENTOS** es una forma especial del lenguaje de las **RAZONES**. Veamos:

Podemos usar la razón $\frac{90}{\mathbf{100}}$ en lugar de la frase "90 **por ciento**" o "90 **de cada 100**"

- Es decir, la frase "**por ciento**" debemos usarla cuando una razón está expresada con denominador **100**. 90 **por ciento** = $\frac{90}{\mathbf{100}}$
- En lugar de la expresión "**por ciento**" usamos el símbolo **%.**
  90 **por ciento** = 90 **%** = $\frac{90}{\mathbf{100}}$
- Escribe en forma de fracción los siguientes porcentajes:

a) 15% b) 1% c) 50% d) 100%



APRENDAMOS...

- Las razones cuyo consecuente (o denominador) es 100 se llaman **PORCENTAJES** o **TANTO POR CIENTO.**
- El **PORCENTAJE** es, pues, una **FRACCIÓN** de denominador 100:

$$3 \text{ por ciento} = 3\% = \frac{3}{\mathbf{100}}$$

- La expresión **POR CIENTO** se simboliza **%** y significa **por cada cien**. Por ejemplo, 3% se lee el **3 por ciento** y significa **3 de cada 100.**

EJERCICIO 11-5

❶ Fíjate bien en el siguiente cuadrado y responde:

	1	1	1	1	1	1			
2		2	2	2		2	2	2	
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
3		3		3		3			
	4								
5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
5	5	5	5	5	5	5	5	5	5

a) ¿Qué porcentaje de los cuadrados pequeños está marcado con 1, con 2, con 3, con 4, con 5?.

b) ¿Cuál es la razón de los cuadrados numerados al total de cuadrados? ¿Qué tanto por ciento está marcado?.

c) ¿Cuál es la razón de los cuadrados en blanco al total de cuadrados? ¿Qué porcentaje está en blanco?.

❷ Utilizando papel cuadriculado, dibuja un cuadrado grande cuyo interior esté dividido en 100 cuadrados pequeños. Escribe la letra A en 10 cuadrados pequeños; la letra B en 20% de los cuadrados; la letra C en el 35% de los cuadrados; la letra D en 30 de los cuadrados y la letra X en los cuadrados restantes.

a) ¿En qué fracción del total de los cuadrados está la letra A?.
b) ¿En qué porcentaje del total de los cuadrados está la letra A?.
c) ¿En cuántos cuadrados está la letra B?.
d) ¿En qué fracción del total de los cuadrados está la letraB?.
e) ¿En cuántos cuadrados está la letra C?.
f) ¿En qué fracción del total de los cuadrados está la letra C?.
g) ¿En qué fracción del total de los cuadrados está la letra D?. – 3/10
h) ¿Qué porcentaje del total de los cuadrados ocupa la letra D?. – 30%
i) ¿En qué fracción del total de los cuadrados está la letra X?. – 1/20
j) ¿Qué porcentaje del total de los cuadrados ocupa la letra X?. 5%

❸ ¿Cuánto suman los números obtenidos como respuesta en los literales (a), (d), (f), (g), (i), del problema anterior?.

❹ ¿Cuánto suman los porcentajes de los cuadrados que contienen las letras A, B, C, D y X?.

❺ Utilizando el símbolo de porcentaje (%), escribe las siguientes razones:

a) $\frac{1}{100}$ b) $\frac{78}{100}$ c) $\frac{45}{100}$ d) $\frac{19}{100}$

❻ Escribe en forma de razón los siguientes porcentajes:

a) 41%   b) 3%   c) 23%   d) 88%

❼ Lee los numerales del ejercicio anterior.

⑧ Teniendo en cuenta que 4% significa "4 de cada 100", escribe el significado de cada uno de los ejercicios del problema 6.

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 3

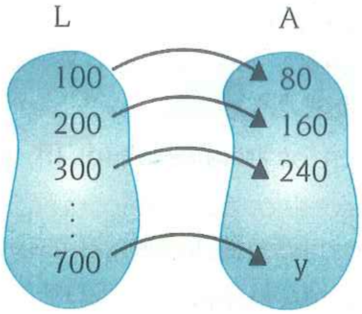
Un cuadrado tiene 100 m² de área. Si se disminuye cada lado del cuadrado en un 10%, ¿en qué porcentaje se disminuye el área?.

11.6 CÁLCULO DEL PORCENTAJE DE UNA CANTIDAD DADA

EXPERIENCIA

- En los partidos de fútbol, los comentaristas acostumbran hacer comentarios como éste:

- Ayudémosle al comentarista a contestar la pregunta:
  - En este problema intervienen dos magnitudes: **penales lanzados** y **penales marcados**.
  - El comentarista nos dice que de 100 penales lanzados, el jugador anota 80 (¿por qué?). ¿Si lanza 700, cuántos anotó?.
  - Para entender mejor observemos el siguiente diagrama sagital y contesta:



a) ¿Es la magnitud L directamente proporcional a la magnitud A? ¿Por qué?.

b) ¿Cuál es la razón de los elementos de A a los elementos de L?.

c) ¿Es $\frac{80}{100}$ x el operador multiplicativo de esta operación?. ¿Por qué?.

d) ¿Representa esta operación una función lineal? Si es así dibuja su gráfica.

e) Si **x** representa los penales lanzados y **y** los penales anotados, ¿es **y = f(x)**? ¿cuál es la ecuación matemática de esta función?.

- Por lo tanto, tenemos un problema de regla de tres simple directa:

$$\left.\begin{array}{ll} L & A \\ 100 \longrightarrow & 80 \\ 700 \longrightarrow & y \end{array}\right\}$$

- A **más** penales lanzados hay **más** penales anotados.
- Las magnitudes L y A son directamente proporcionales.

- Por lo tanto: $\frac{100}{80} = \frac{700}{y}$ ó $y = \frac{80}{100} \times 700 = 560$

es decir, 560 es el 80% de 700 y escribimos:

$$\mathbf{80\%\ de\ 700 = \frac{80}{100} \times 700}$$

APRENDAMOS...

- Para calcular el % de una cantidad, se multiplica la cantidad por la fracción correspondiente al porcentaje; así: El 8% de 75 es 6: $75 \times \frac{8}{100} = \frac{75 \times 8}{100} = 6$
- Cuando se halla el % de una determinada magnitud, se está aplicando un OPERADOR FRACCIONARIO que puede expresarse mediante una fracción de denominador 100.
- Los porcentajes por ser operadores multiplicativos son FUNCIONES LINEALES.

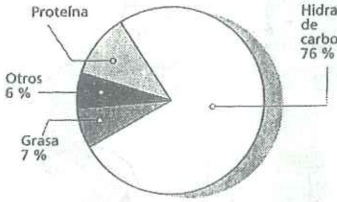
EJERCICIO 11-6

❶ Un depósito de 250 litros sólo contiene el 23% de agua de su capacidad total. ¿Cuántos litros de agua hay en el depósito?.

❷ Sara ha ido a dar una vuelta en su carro, pero se estacionó en un lugar no permitido. A los pocos días le llega una multa de $50.000, en la que le informan que si paga antes de la fecha le hacen un descuento del 30% y si paga después de la fecha le aplican un recargo del 20%. Sara paga antes de la fecha. ¿Cuánto tiene que pagar?.

❸ Si en el ejercicio anterior, Sara paga después de la fecha, ¿cuánto tendrá que pagar?.

❹ El gráfico muestra el porcentaje de grasa, de hidratos de carbono y de otros componentes de un alimento de cereales para niños. Calcula los gramos de proteínas que hay en 25 gramos de este producto.



❺ Un artículo cuesta $320.000. Pero si se paga de contado hay un descuento del 15%. ¿Cuánto cuesta el artículo pagado de contado?.

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 4

La razón del número de varones al de niñas, en un grupo era de 3 a 5. Después se retiraron 24 niñas y llegaron 24 varones, con lo que la nueva razón de varones a niñas es de 5 a 3. ¿Cuántos varones y niñas había en el grupo original?.

11.7 MODELOS DE PROBLEMAS CON PORCENTAJES

Los siguientes problemas de tanto por ciento se resuelven aplicando la regla de tres simple directa.

Problema 1: **¿Qué porcentaje es 8 de 40?.**

Solución:

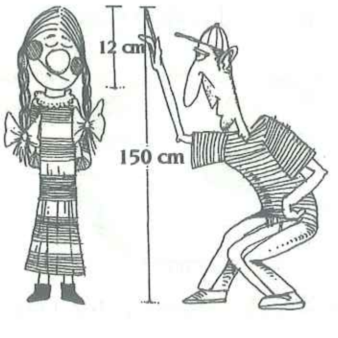
- Nos piden hallar el porcentaje de una cantidad: 40. Esta cantidad es el total; es decir, es el 100%.
- Por lo tanto, podemos plantear la siguiente regla de tres simple directa:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Si } 40 \xrightarrow{\text{es el}} 100\% \\ \text{entonces } 8 \xrightarrow{\text{será el}} x\,\% \end{array}\right\}$$

- A **menor** número, el % será **menor.**
- Las magnitudes número y porcentaje son directamente proporcionales.

- Por lo tanto: $\frac{\mathbf{40}}{\mathbf{100}} = \frac{\mathbf{8}}{\mathbf{x}}$ ó $\mathbf{x} = \frac{\mathbf{8 \cdot 100\%}}{\mathbf{40}} = \mathbf{20\%}$
- Luego, 8 es el 20% de 40.

Problema 2: **La estatura de una niña es de 150 cm y la longitud de su cabeza es de 12 cm. ¿Qué porcentaje de la estatura corresponde a la cabeza?.**



Solución

- Acá 150 cm es el 100% y queremos saber que tanto por ciento de esos 150 cm es 12 cm; es decir:
- $$\begin{array}{lll}\text{Si} & 150 \text{ cm} & \xrightarrow{\text{es el}} 100\% \\ \text{entonces} & 12 \text{ cm} & \xrightarrow{\text{será}} x\,\% \end{array}$$

ó

$$\frac{150}{100} = \frac{12}{x} \quad \text{ó} \quad x = \frac{12 \cdot 100\%}{150} = 8\,\%$$

- En consecuencia, la longitud de la cabeza es el 8% de su estatura.

Problema 3: **¿De qué número es 30 el 25%?.**

Solución

- Este problema es contrario a los dos anteriores. En este caso conocemos un número (30) y su porcentaje (25%) y debemos encontrar el número (x) que corresponde al 100%.
- Por lo tanto:

$$\text{Si el } 25\% \xrightarrow{\text{es}} 30$$

$$\text{entonces el } 100\% \xrightarrow{\text{será}} x$$

- Como las magnitudes son directamente proporcionales (¿por qué?) entonces:

$$\frac{25}{30} = \frac{100}{x} \quad \text{ó} \quad x = \frac{30 \bullet 100}{25} = 120$$

- Luego, 120 es el número del cual 30 es el 25%.

Problema 4 **:Se incendia una casa que estaba asegurada en el 86% de su valor y se cobra $43,000.000 por el seguro. ¿Cuál era el valor de la casa?.**

Solución:

- Planteamos la siguiente regla de tres simple directa:

$$\text{Si } \$43{,}000.000 \longrightarrow 86\%$$

$$\text{entonces } x \longrightarrow 100\%$$

- De nuevo estas magnitudes son directamente proporcionales y por lo tanto:

$$\frac{43{,}000.000}{86} = \frac{x}{100} \quad \text{ó} \quad x = \frac{43{,}000.000 \bullet 100}{86} = \$50{,}000.000$$

- Luego, el valor de la casa era $50,000.000.

Problema 5: **¿De qué número es 252 el 5% más?.**

Solución:

- Primero entendamos el problema: nos piden encontrar un número (x), del cual 252 es un 5% mayor.
- Esto significa que x es el 100% y 252 es el 105%. Por lo tanto, podemos plantear la siguiente regla de tres simple directa; así:

$$\text{Si } 252 \longrightarrow 105\%$$

$$\text{entonces } x \longrightarrow 100\%$$

- Por lo tanto:

$$\frac{252}{105} = \frac{x}{100} \quad \text{ó} \quad x = \frac{\overset{\overset{\cancel{12}}{\cancel{84}}}{\cancel{252}} \bullet \overset{\cancel{20}}{\cancel{100}}}{\underset{\underset{\cancel{7}\ 1}{\cancel{21}}}{\cancel{105}}} = 240$$

- En consecuencia, 252 es el 105% de 240.

Problema 6: Al vender una casa en $63ˌ600.000 se gana el 6% sobre el precio de compra. ¿Cuánto había costado la casa?.

Solución:

- Los $63ˌ600.000 representan el 106% (¿por qué?).
- Por lo tanto:

$$\left.\begin{aligned} \$63{,}600.000 &\longrightarrow 106\% \\ x &\longrightarrow 100\% \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = \frac{100 \bullet \$\,63{,}600.000}{106} = \$60{,}600.000$$

- Luego, la casa había costado $60ˌ000.000.

Problema 7: ¿De qué número es 442 el 35% menos?.

Solución:

- Como 442 es el 35% menos, entonces 442 es el 65% (¿por qué?).
- El número que tenemos que encontrar (x) es el 100%.

Por lo tanto:

$$\left.\begin{aligned} 442 &\longrightarrow 65\ \% \\ x &\longrightarrow 100\ \% \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = \frac{100 \bullet 442}{65} = 680$$

- Luego, 442 es el 35% menos de 680.

EJERCICIO 11-7

① Un campesino que tenía 120 gallinas vendió 40. ¿Qué porcentaje de sus gallinas vendió y qué % le queda?.

② Un hombre ahorró el año pasado $1ˌ690.000, que fue el 13% de sus ingresos totales. ¿Cuánto ganó en el año?.

③ Si me aumentaran mi sueldo en un 10% ganaría $1ˌ375.000. ¿Cuál es mi sueldo actual?.

④ Si me rebajan el sueldo en un 20%, quedo ganando $1ˌ040.000 mensuales. ¿Cuál es mi sueldo actual?.

⑤ Un ganadero vendió el 36% de sus reses y se quedó con 160. ¿Cuántas tenía?.

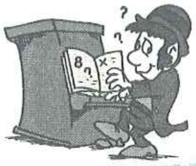
⑥ ¿A cómo hay que vender lo que ha costado $210.000 para ganar el 15% del precio de compra?.

⑦ Se vende un reloj en $150.000. Si se hubiera vendido en $15.000 más se hubiera ganado $20.000. ¿Cuál ha sido el porcentaje de ganancia sobre el precio de venta?.

⑧ ¿Cuál es el % de ganancia sobre el costo cuando se vende en $900.000 lo que ha costado $800.000?.

⑨ Un equipo A ganó 15 partidos de los 20 que jugaron. Otro equipo B ganó 18 de los 25 partidos jugados. Responde:

a) ¿Qué porcentaje, de los partidos jugados, ganó el equipo A?.
b) ¿Qué porcentaje, de los partidos jugados, ganó el equipo B?. n.5
c) ¿Cuál de los dos equipos tiene el mayor porcentaje?.
d) ¿A cuál de los dos equipos le fue mejor? ¿Por qué?.



DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 5

Entre 1980 y 1990, la población de una ciudad creció un 20%. Si en 1990, la población tenía 60.000 habitantes, ¿cuál era en 1.980?.

11.8 ARITMÉTICA COMERCIAL - INTERÉS SIMPLE

- Cuando una persona presta dinero (a otra persona, a un banco, a una corporación o a una empresa) deja de recibir los beneficios que hubiera podido obtener por aquel dinero. Por eso, quien recibe el dinero (**capital**) compensa al que lo presta con cierta cantidad que se llama **INTERÉS.**
- En los problemas que vamos a resolver en esta sección intervienen los siguientes datos:
  - El **CAPITAL:** es la suma prestada. Lo simbolizamos por **C.**
  - El **INTERÉS:** es la ganancia producida por el capital. Lo simbolizamos por **i.**
  - El **RÉDITO** o **TASA DE INTERÉS:** es el interés que producen $100 en un año. Lo simbolizamos por **r.**
  - El **TIEMPO:** es la duración del préstamo.Lo simbolizamos por **t.**
- Para facilitar los cálculos se considera el año de 360 días y el mes de 30 días.

EJEMPLO:

Un REDITO 4 significa que un capital de 100 pesos produce, al cabo de un año, un interés de 4 pesos.

Se dice indistintamente que el rédito es 4, o que el tanto por ciento a que ha sido colocado el capital es 4%.

PRIMERA EXPERIENCIA

- El problema de hallar el **interés (i)** que produce un **capital (C)**, depositado en un banco o prestado durante un **tiempo (t)** a un **rédito (r)** es un problema de **REGLA DE TRES COMPUESTA** y podemos plantearlo así:

$$\text{Si 100 pesos} \xrightarrow{\text{en}} \text{1 año} \xrightarrow{\text{ganan}} r$$

$$\text{entonces C pesos} \xrightarrow{\text{en}} \text{t años} \xrightarrow{\text{ganarán}} \text{ⓘ}$$

Esta es la incógnita

- En este caso, la magnitud desconocida **(i)** es directamente proporcional a las otras dos magnitudes **(capital y tiempo)**. Descompongamos la regla de tres compuesta en dos reglas de tres simples; así:

PRIMERA

$$\text{Si \$ 100} \xrightarrow{\text{ganan}} r$$

$$\text{entonces \$ C} \xrightarrow{\text{ganarán}} i$$

$$\therefore \quad \frac{100}{r} = \frac{C}{i}$$

$$\therefore \quad \boxed{i = \frac{C \cdot r}{100}}$$

SEGUNDA

$$\text{Si en 1 año} \xrightarrow{\text{ganan}} \boxed{\frac{C \cdot r}{100}}$$

$$\text{entonces en t años} \xrightarrow{\text{ganarán}} i$$

$$\therefore \quad \frac{1}{t} = \frac{\frac{C \cdot r}{100}}{i}$$

$$\therefore \quad 1 \cdot i = t \cdot \left(\frac{C \cdot r}{100}\right)$$

$$\therefore \quad \mathbf{i = \frac{C \cdot t \cdot r}{100}}$$

¡ATENCIÓN!

- La ecuación anterior nos permite calcular el interés cuando el tiempo está expresado en años.
- Si eltiempo está expresado en meses, entonces la ecuación quedaría así:

$$i = \frac{C \cdot t \cdot r}{1.200}$$

- Si eltiempo está expresado en días, entonces la ecuación quedaría así:

$$i = \frac{C \cdot t \cdot r}{36.000}$$

SEGUNDA EXPERIENCIA

- Hallemos el interés que gana un capital de $450.000 al 36% anual en 4 años.

Aplicamos la ecuación para calcular el interés (i) con 100 porque el tiempo viene dado en años; es decir:

$$i = \frac{C \cdot t \cdot r}{100} \quad \text{, con} \left\{ \begin{array}{ll} \text{Capital:} & C = 450.000 \\ \text{rédito:} & r = 36\% \\ \text{tiempo:} & t = 4 \text{ años} \end{array} \right.$$

$$\therefore\ i = \frac{450.0\cancel{00} \cdot 36 \cdot 4}{1\cancel{00}}$$

$$\therefore\ i = 4.500 \cdot 36 \cdot 4$$

$$\therefore\ i = 648.000 \text{ pesos}$$

- Hallemos el interés que han producido $600.000 colocados al 2,5% mensual durante 2 años 8 meses y 6 días.

  - En primer lugar, hay que pasar los 2 años a días y los 8 meses a días; así:

2 años	=	2 x 360 días	=	720 días
8 meses	=	8 x 30 días	=	240 días
6 días	=		=	6 días
		TOTAL:		966 días

  - Ahora tenemos que escribir el % en años. Como es 2,5% mensual, entonces lo multiplicamos por 12 y tendremos:

$$2{,}5 \ \text{x} \ 12 = 30\% \text{ anual}$$

- Por lo tanto:

$$\therefore\ i = \frac{C \cdot r \cdot t}{100}$$

$$\therefore\ i = \frac{600.\cancel{000} \cdot 30 \cdot 966}{36.\cancel{000}}$$

$$\therefore\ i = 483.000 \text{ pesos}$$

- El 12 de mayo, Carlos presta \$480.000 al 5% anual y recobra el dinero el 15 de julio del mismo año. ¿Cuánto recibirá de interés?
  - Primero calculamos el número exacto de días que hay del 12 de mayo al 15 de julio:

En mayo........hay 19 días
En junio........hay 30 días
En julio.........hay 15 días
Total: 64 días

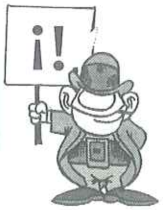
  - Por lo tanto:

$$\therefore\ i = \frac{C \cdot r \cdot t}{36.000}$$

$$\therefore\ i = \frac{480.\cancel{000} \cdot 5 \cdot 64}{36.\cancel{000}}$$

$$\therefore\ i = 4.266,66 \text{ pesos}$$

TERCERA EXPERIENCIA



¡ATENCIÓN!

En esta actividad, si no se dice lo contrario, el % es anual.

- **¿Cuál es la suma que colocada al 24% ha producido \$10.400 en 8 meses?**
  - En primer lugar, escribamos los datos del problema:

$$\begin{cases} C = ? \\ i = \$10.400 \\ r = 24\% \\ t = 8 \text{ meses} \end{cases}$$

  - Como el tiempo está dado en meses entonces aplicamos la ecuación:

$$\therefore\ i = \frac{C \cdot t \cdot r}{1.200}$$

- Y reemplazando los datos nos queda:

$$\therefore\ 10.440 = \frac{C \cdot 8 \cdot 24}{1.200}$$

$$\therefore\ 10.440 \cdot 1.200 = C \cdot 8 \cdot 24$$

$$\therefore\ C = \frac{10.400 \cdot 1.200}{8 \cdot 24}$$

$$\therefore\ \boxed{C = 65.000 \text{ pesos}}$$

- Por lo tanto, la suma prestada fue 65.000 pesos.

- **Por $530.000 que se prestaron al 1,5% mensual se recibieron intereses por $7.950. ¿Cuánto tiempo duró el préstamo?**
  - Los datos del problema son los siguientes:

$$\begin{cases} C = 530.000 \\ r = 1{,}5\% \text{ mensual} = 1{,}5 \text{ x } 12 = 18\% \text{ anual} \\ i = 7.950 \\ t = ? \end{cases}$$

  - Por lo tanto:

$$\therefore\ i = \frac{C \cdot t \cdot r}{100}$$

$$\therefore\ 7.950 = \frac{530.0\cancel{00} \cdot t \cdot 18}{1\cancel{00}}$$

$$\therefore\ t = \frac{7.950}{5.300 \cdot 18}$$

$$\therefore\ t = 0{,}083\ldots \text{ años}$$

$$\therefore\ \boxed{t = 1 \text{ mes}}$$

  - Luego, el préstamo duró 1 mes.

APRENDAMOS...

- El **INTERÉS**, el **TIEMPO** y la **TASA DE INTERÉS** son **MAGNITUDES**.
- El interés es directamente proporcional al capital y al tiempo; es decir, $\mathbf{I \propto C}$ y $\mathbf{I \propto t}$.

- El Interés (I) se relaciona con el capital (C), el tiempo (t) y la tasa de interés (r) mediante la expresión: $I = \frac{C \cdot t \cdot r}{100}$.
- Cuando en un problema no se especifica si la tasa de interés es anual, mensual o diaria, se supone ANUAL.
- En los problemas, el tiempo y la tasa de interés deben estar en las mismas unidades: ambos en días, meses, años, etc.
- Para efectos comerciales, los años son de 360 días y los meses de 30 días.

EJERCICIO 11-8

① Completa:

a) Un 7% de tasa de interés anual significa que por 100 pesos reciben un interés de ________ en un año.

b) Si se presta un dinero al 4.5% mensual, la tasa de interés es ________.

c) Se llama rédito o ________ al interés que producen ________ pesos en un determinado tiempo.

d) Se llama interés ____.

e) Se llama capital____.

② Observa la siguiente regla de tres simple:

Capital	Interés
100	r
C	Ⓘ

esta es la incógnita

r: es el interés producido por los 100 pesos.

I: es el interés producido por una cantidad de dinero C.

Explica por qué $I = \frac{C\ x\ r}{100}$.

③ Supongamos que le prestas a un amigo $5.000 al 10% mensual:

a) ¿Cuál es la tasa de interés?.

b) Por ese mismo capital, cuál es el interés, ¿en un 1 mes?, ¿en 2 meses?, ¿en 3 meses?, ¿en 4 meses?.

c) Se dice que un interés es SIMPLE, cuando el interés se recibe al final de períodos iguales de tiempo, sin que el capital varíe. Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en el literal b), completa:

Interés (I)	Meses (t)
500	1
?	2
?	3
2.000	4

I es directamente proporcional a t porque ____________________.
I = f (t) porque ____.
I = k • t, en donde k es igual a ______________________________.

④ Teniendo en cuenta el ejercicio anterior ¿es $I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100}$?.

⑤ Se prestan $480.000 al 36%. ¿Cuánto hay que pagar al mes de intereses?.

⑥ ¿Qué suma colocada al 24%, en 60 días, produce $120.000?.

⑦ ¿A qué % se colocaron $8,000.000, que en 5 años produjeron $400.000?.

⑧ ¿Cuánto tiempo han estado colocados $5,600.000 que al 18% han producido $392.000?.

⑨ ¿Cuánto producirán $450.000 al 12% en 3 años, 5 meses y 8 días?.

⑩ He comprado un televisor a plazos. De esta forma puedo pagarlo en 4 años, pero con interés del 7%. Si el televisor de contado vale $700.000, ¿a cuánto ascienden los intereses? ¿Cuánto me costó realmente el televisor?.

⑪ Una cooperativa ha prestado $1,000.000 al 10%. ¿Al cabo de cuánto tiempo se ha cancelado la deuda, si lo que se ha devuelto es el doble de lo que se prestó?.

⑫ Una persona coloca $\frac{1}{3}$ de su capital al 4% y, el resto, es decir, $600.000 al 3%. Halla los intereses que obtiene en 8 meses.

⑬ ¿Qué es más ventajoso, colocar $480,000.000 al 7.5% en un año o comprar con ellos una casa de campo que se puede alquilar por $2,000.000 mensuales?.

⑭ ¿Qué cantidad hay que colocar al 6% durante 10 meses para pagar con sus intereses los $4,578.000 que gasté en un arreglo de la casa?.

⑮ ¿A qué porcentaje anual hay que prestar $500.000 para que en 2 años el capital se duplique?.

⑯ Una suma de $2,700.000 se presta al 36% y se convierte en $3,000.000. ¿Cuánto tiempo duró el préstamo?.

⑰ Teniendo en cuenta que:
C: representa un capital cualquiera.
r: representa una tasa de interés anual.
t: representa un tiempo cualquiera en meses.

C	**t (meses)**	**I**
100	12	r
C_1	t_1	x

Contesta falso (f) o verdadero (v) a cada una de las siguientes proposiciones:

a) Si t_1 es igual a 12 y $C_1 > 100$ entonces x tomará un valor mayor que r.

b) Si t_1 es igual a 12 y $C_1 > 100$ entonces $\frac{C_1}{100}$ es un operador que actúa sobre r.

c) Si t_1 es igual a 12 y $C_1 < 100$ entonces x tomará un valor mayor que r.

d) Si t_1 es igual a 12 y $C_1 < 100$ entonces $\frac{C_1}{100}$ es un operador que actúa sobre r.

e) Si C_1 es igual a 100 y $t_1 < 12$ entonces x tomará un valor menor que r.

f) Si C_1 es igual a 100 y $t_1 < 12$ entonces $\frac{t_1}{12}$ es un operador que actúa sobre r.

g) Si la tasa de interés y el tiempo se dan en meses, entonces $x = \frac{C \bullet t \bullet r}{1.200}$.

h) Si la tasa de interés y el tiempo se dan en días, entonces $x = \frac{C \bullet t \bullet r}{3.100}$.

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 6

Hay un método sencillo para hallar el cuadrado de números que terminan en 5; así:

$15 \cdot 15 = 10 \cdot 20 + n$; $25 \cdot 25 = 20 \cdot 30 + n$

$45 \cdot 45 = 40 \cdot 50 + n$; $65 \cdot 65 = 60 \cdot 70 + n$

a) Halla el valor que debe tomar el número n.

b) Sin usar lápiz ni papel, calcula los productos siguientes:

$75 \bullet 75$; $85 \bullet 85$; $35 \bullet 35$; $95 \bullet 95$

TALLER DE REPASO DE LA UNIDAD 11

1. Responde:

a) ¿Qué es una regla de tres simple?.

b) ¿Cuándo una regla de tres simple es directa? ¿Y cuándo es inversa?.

c) ¿Qué es una regla de tres compuesta?.

d) ¿Qué es tanto por ciento o porcentaje?.

2. ¿Qué es mayor:

a) $\frac{1}{2}$ ó $\frac{1}{2}$%? b) 0,1 ó 0,1%? c) 0,2 ó 2%? d) $\frac{1}{10}$ ó 1%?

3. Escribe una fracción simplificada correspondiente a cada porcentaje. Por ejemplo, $30\% = \frac{30}{100} = \frac{3}{10}$.

a) 25% b) 2% c) 100% d) 50% e) 10% f) 25% g) $2\frac{1}{3}$ %

4. Calcula:

a) $16\frac{2}{3}$ % de 12 b) $37\frac{1}{2}$ % de 40

5. Sustituye cada porcentaje por un decimal y calcula el producto. Por ejemplo:

$2\frac{1}{4}$ % de 8 = 0,0225 x 8 = 0,18.

a) 20% de 340 b) 0,3% de 54,2 c) $8\frac{1}{2}$ % de 4 d) 5,4% de 25

6. Teniendo en cuenta que: 50% = $\frac{1}{2}$, 25% = $\frac{1}{4}$; 20% = $\frac{1}{5}$, calcula:

a) 50% de 220 b) 25% de 720 c) 20% de 1200

7. Halla el porcentaje correspondiente a cada número. Por ejemplo:

$\frac{5}{4} = \frac{125}{100} =$ 125% ; $0,25 = \frac{25}{100} =$ 25%

a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{4}{5}$ c) $\frac{8}{50}$ d) $2\frac{1}{2}$ e) 2,15 f) 0,43 g) 0,06

8. Transforma los porcentajes a decimales. Por ejemplo: 48,5% = $\frac{48,5}{100}$ = 0,485

a) 41,2% b) 316% c) 0,0025% d) 0,31% e) 7%

9. En ocasiones, para transformar fracciones a porcentajes es más fácil sustituir las fracciones por decimales. Ejemplo: $\frac{5}{6} = 0,\overset{\frown}{83} = 83,\overset{\frown}{3}\,\%$.

a) $\frac{3}{8}$ b) $\frac{5}{16}$ c) $\frac{1}{6}$ d) $\frac{1}{9}$ e) $\frac{218}{30}$

10. Una forma interesante de cambiar fracciones a porcentajes, consiste en multiplicar el numerador y el denominador por 100 y, después, dividir ambos por el número que haga el denominador 100. Por ejemplo:

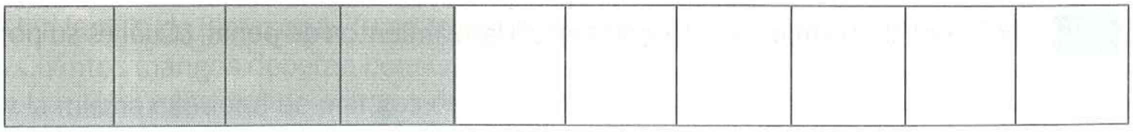
$\frac{1}{3} = \frac{100}{300} \overset{\div 3}{\underset{\div 3}{=}} \frac{33\frac{1}{3}}{100} = 33\frac{1}{3}\,\%$; $\frac{5}{6} = \frac{500}{600} \overset{\div 6}{\underset{\div 6}{=}} \frac{83\frac{1}{3}}{100} = 83\frac{1}{3}\%$

Emplea este procedimiento para transformar cada fracción en un porcentaje:

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{17}{13}$ c) $\frac{23}{41}$ d) $\frac{5}{11}$ e) $\frac{11}{7}$

11. La distancia de la tierra al sol es de unos 148,000.000 km. La distancia de la tierra a la luna es de unos 384.000 km. Estime la distancia a la luna como un tanto por ciento de la distancia al sol.

12. ¿Qué porcentaje de la barra está sombreada? ¿Y en blanco? ¿Cuál es la suma de estos porcentajes?.



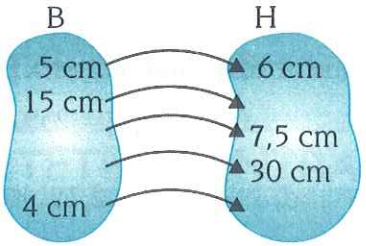
13. En un grupo de 500 personas; 35 son mayores de 70 años:

a) ¿Cuál es la razón del número de personas mayores de 70 años al total del grupo?.
b) De cada 100 personas, ¿cuántas son mayores de 70 años?.
c) ¿Qué porcentaje de personas son mayores de 70 años?.

14. De un total de 600 plantas de tomate, se secaron 30. ¿Qué porcentaje de plantas se secaron?.

15. Sara gastó el 40% del dinero que tenía y aún le quedaron 9 dólares. ¿Cuánto tenía originalmente?.

16. Un conjunto de rectángulos tiene 30 cm^2 de superficie. Llamamos f a la correspondencia que asocia a la base (B) de cada rectángulo con su altura (H).



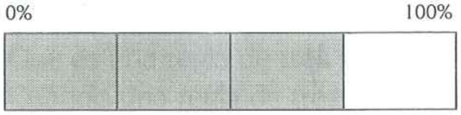
a) Completa el siguiente diagrama sagital.
b) ¿Es f una función? ¿Por qué?.
c) Si b es la base y h su altura, ¿es $b \propto h$? ¿Por qué?.
d) ¿Cuál es la constante de proporcionalidad?.
e) ¿Cuál es la ecuación matemática que relaciona a b y h?.
f) ¿Cuál es la gráfica de esta correspondencia?.

17. Explica lo que significan las siguientes frases:

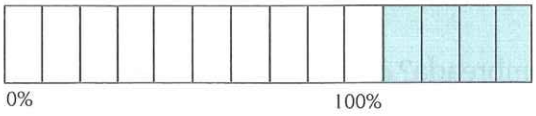
a) En el año 1.850, el 75% de una población no sabía leer ni escribir.
b) En el año 1.930, el 50% de una población vivía en el campo.

18. Observa las siguientes figuras:

a) La parte no coloreada representa un descuento. ¿Cuál es su valor?.

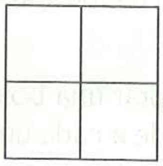


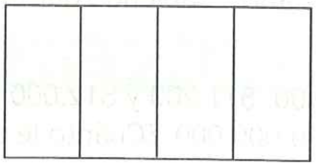
b) La parte coloreada de azul representa un recargo. ¿Cuál es su porcentaje?.



19. Un futbolista ha marcado 15 goles en 20 lanzamientos de penal. ¿Cuál es su porcentaje de aciertos?.

20. Colorea un 25% de cada una de las siguientes figuras:

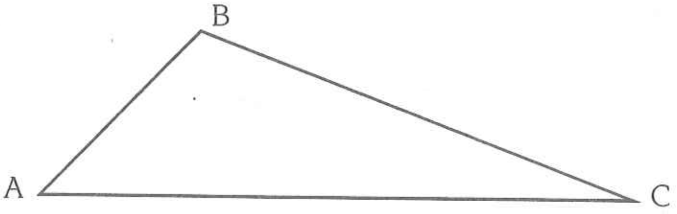


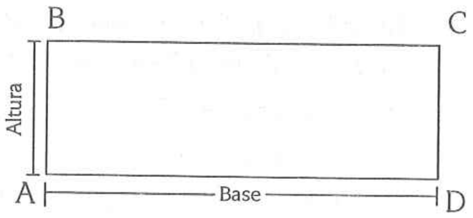


21. Resolver.

a) El lado AC del triángulo mide 8 cm; AB mide el 40% de AC, y BC mide el 75% de AC. ¿Cuánto mide el perímetro del triángulo?.

b) El perímetro del rectángulo ABCD mide 28 cm. La longitud del lado AB es el 12% de la longitud del perímetro. Calcula la longitud de cada lado.





22. La edad de Luisa es el 50% de la edad de su hermano José. La suma de sus edades es 21años. ¿Cuál es la edad de cada uno?.

23. Un equipo ganó 3 de los 5 primeros partidos jugados.

a) ¿Qué porcentaje de los primeros 5 partidos ganó el equipo?.
b) ¿Qué porcentaje de los primeros 5 partidos perdió el equipo?.

24. Posteriormente, el mismo equipo anterior y en la misma temporada, ganó 8 de los16 partidos jugados.

a) ¿Cuál es el % de partidos que ha ganado esta vez?.
b) ¿Ha aumentado o disminuido el % de partidos ganados?.

25. Al final de la temporada el equipo de los ejercicios anteriores, había ganado 26 de los 40 partidos jugados.

a) ¿Qué porcentaje de los partidos ganó el equipo?.
b) Compara este porcentaje con los dos anteriores.

26. Una cuerda mide 120 m y la vamos a partir en partes directamente proporcionales a los números 2, 3 y 7. ¿Cuánto mide cada pedazo?.

27. Para construir 2 máquinas en 30 días hacen falta 40 obreros. ¿Cuántos obreros se necesitarán para fabricar 6 máquinas en 20 días?.

28. Una familia de 8 personas tiene mangos para 27 días, consumiendo 10 mangos al día. ¿Cuántos mangos deberán consumir diariamente, si la familia aumenta en 2 personas y la misma cantidad de mangos debe durar para 24 días?.

29. Varios amigos se reparten cierta cantidad en partes inversamente proporcionales a sus edades: 20 años, 40 años y 60 años. Sabiendo que el más joven recibe 400.000 pesos, ¿cuánto dinero se reparten?.

30. Tres amigos aportaron \$16.800, \$11.200 y \$12.000 para comprar una boleta de una rifa en la que se ganaron \$150,000.000. ¿Cuánto le corresponde a cada uno?.

31. Cuatro llaves tardan 12 horas en llenar un tanque de agua de 60.000 litros. ¿Cuánto tiempo tardarán 6 llaves, iguales a las anteriores, en llenar un depósito de 80.000 litros?.

32. Indica si las siguientes proposiciones son VERDADERAS o FALSAS justifica las respuestas falsas.

a) 30% significa 3 de cada 10.
b) 8 de cada 80 equivale a 10%.
c) 7% equivale a 7 de cada 10.
d) $\frac{1}{25}$ equivale a 25%.
e) $\frac{7}{10}$ equivale a 7%.
f) 12 de cada 10 equivale a 120%.
g) Si el 50% de los alumnos tiene menos de 11 años, entonces la mitad tiene 11 años o más.
h) Si el 90% de los alumnos ganó el examen, entonces sólo 10 alumnos lo perdió.
i) Para hallar el 25% de un número basta dividirlo por 5.
j) Es lo mismo 60% que 3 de cada 5.

33. Una guarnición de 500 hombres tiene víveres para 20 días a razón de 3 raciones diarias. ¿Cuántas raciones diarias tomará cada hombre si se quiere que los víveres duren 5 días más?.

34. 6 hombres trabajando durante 9 días, a razón de 8 horas diarias han hecho los $\frac{3}{8}$ de una obra. Si se refuerzan con 4 hombres, y los obreros trabajan ahora 6 horas diarias, ¿en cuántos días terminarán la obra?.

35. Mario hizo un préstamo de 8'000.000 pesos al 6% y pagó de intereses 360.000 pesos, y Julio hizo otro préstamo de 7'000.000 pesos al 5% y pagó de intereses \$350.000. ¿Cuál de los dos tardó más tiempo en devolver el dinero y cuánto tiempo más?.

36. Se toman 9'000.000 pesos a préstamo el 9 de junio y el capital prestado se devuelve el 20 de diciembre del mismo año, pagando 169.750 pesos de intereses. ¿Cuál fue el % de interés?.

PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS SABER

1. Si a un artículo que cuesta $5.000 se le aumenta primero el 10% y luego el 5%, entonces el porcentaje total que se aumentó al artículo es:

   a) 15% b) 15,5 % c) 14,5 % d) Ninguna anterior

2. Marcos dijo: " $\frac{1}{8}$ de los alumnos de este colegio están conmigo". El % de alumnos que está en la clase de Marcos es:

   a) $\frac{1}{8}$ % b)$12\frac{1}{8}$ % c)$12\frac{1}{2}$ % d) Ninguna anterior

3. El precio de un vestido que valía originalmente $100.000 fue reducido en un 30%. Más tarde este precio reducido fue rebajado en un 20% más. El precio final es:

   a) $50.000 b) $70.000 c) $56.000 d) Ninguna anterior

4. El 1% de 5% es:

   a) 0,05% b) 0,5% c) 5% d) Ninguna anterior

5. En una ciudad, el 40% de los habitantes van al cine una vez al mes. El número de habitantes que van de cada cinco es:

   a) 4 b) 1 c) 2 d) Ninguna anterior

Núcleo Temático

12

SISTEMAS DE DATOS

LOGRO GENERAL

- Analizar, interpretar y calcular la frecuencia absoluta, la moda, la media aritmética y la mediana de un conjunto de datos no agrupados en intervalos o clases y la frecuencia absoluta, la moda y la media aritmética de un conjunto de datos agrupados en intervalos o clases.

DIMENSIONES

EVALUACIÓN

LOGROS ESPECÍFICOS	INDICADORES DE LOGRO
Corporal: • Conseguir la participación activa de todos los estudiantes a través de la realización de encuestas.	• Redacta una encuesta y la aplica a un grupo de alumnos del colegio seleccionado al azar.
Comunicativa: • Incorporar al lenguaje matemático palabras como intervalo o clase, marcas de clase e histograma, polígonos de frecuencias, curvas de frecuencias y ojivas.	• Define en forma precisa los conceptos de intervalo o clase, marcas de clase e histograma. • Describe el procedimiento para calcular la media aritmética y la moda de un conjunto de datos agrupados en intervalos o clases.
Cognitiva • Recolectar y presentar datos agrupados en intervalos o clases mediante tablas, polígonos de frecuencias, histogramas, polígonos de frecuencias y curvas de frecuencias. • Sacar conclusiones estadísticas. • Hallar medidas de tendencia central: moda, media aritmética y mediana en un conjunto de datos no agrupados y la moda, la media aritmética en un conjunto de datos agrupados.	• A partir de una encuesta dada, recolecta la información y la presenta en tablas, histogramas, polígonos de frecuencias y curvas de frecuencias. • Halla la moda y la media aritmética de un conjunto de datos agrupados y saca conclusiones a partir de la información recogida.
Estética: • Diseñar histogramas y polígonos de frecuencia de un conjunto de datos agrupados en intervalos.	• Diseña histogramas, polígonos de frecuencias y curvas de frecuencias y los expone delante de sus compañeros.
Ética-actitudinal: • Valorar la importancia de trabajar en grupo.	• Participa, se integra y coopera en actividades de aplicación de encuestas donde es importante el trabajo grupal.

ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS

12.1 ¿SABÍAS QUE...?

El sistema binario de computación, es decir en base dos, ya se conocía en China unos 3.000 años a.C. según consta en manuscritos de la época. Cuarenta y seis siglos después Leibniz redescubre el sistema binario. Queriendo ver en la utilización de los dos símbolos únicos, 0 y 1, un significado místico, Leibniz asignó al 0 la nada y representó a Dios con el 1. Mas no se detuvo allí, sino que dedujo que la combinación entre ambos símbolos representaba el universo.

Su colaborador, el jesuita Grimaldi, creyó que esto era una demostración innegable de la existencia de Dios, por lo que se dirigió al Gran Tribunal de Matemáticos de China con el fin de que el emperador reflexionara sobre el hecho y, abandonando el budismo, aceptara a un Dios capaz de crear al Universo de la nada.

Lamentablemente no ha quedado registrado el resto de la historia. No se sabe si el argumento llegó a los oídos del emperador y, en caso de que así hubiera sido, qué le contestó al jesuita Grimaldi.

EJERCICIO 12-1

COMPRENSIÓN DE LECTURA: Explicación. Lee nuevamente el texto anterior y luego encierra en un círculo la letra que corresponda a la respuesta correcta:

1. En el escrito anterior se afirma que:
   - a. El Emperador Chino nunca contestó la carta al jesuita Grimaldi.
   - b. La comunicación del jesuita nunca llegó a manos del Emperador Chino.
   - c. La anécdota completa sobre esa misiva no quedó para la posteridad.
   - d. Los matemáticos chinos no se enteraron de las reflexiones de Leibniz.

2. Para el jesuita Grimaldi, una prueba contundente de la existencia de Dios se fundamenta en:
   - a. Las conclusiones científicas del matemático alemán Leibniz.
   - b. La asociación ingeniosa que hizo Leibniz de los símbolos únicos con Dios y la nada.

c. El fanatismo religioso de Leibniz.
d. El deseo de combatir el ateismo de los matemáticos chinos.

3. El escrito anterior gira en torno de:

a. El redescubrimiento del sistema binario.
b. Los chinos y el descubrimiento del sistema binario.
c. Dios y las matemáticas.
d. El sistema binario y la creación del universo.

4. El término Budismo, empleado en el texto, hace referencia a:

a. Una filosofía china de la época de Leibniz.
b. La fusión de fe y ciencia entre los chinos.
c. Los seguidores de las doctrinas del padre Grimaldi.
d. Religión practicada por el emperador.

5. Del texto anterior podemos deducir:

a. La ciencia siempre ha estado ligada a Dios.
b. Algunos sabios matemáticos han tenido ideas claras del concepto de Dios.
c. Los chinos han sido un pueblo ateo.
d. Dios ocupa un lugar importante en la vida de los científicos.

12.2 REVISIÓN DE ALGUNOS CONCEPTOS GENERALES

Las siguientes experiencias tienen el propósito de revisar algunos de los conceptos básicos de estadística aprendidos en los grados anteriores.

12.2.1 Tablas de Frecuencias, Gráficos y Conceptos Básicos

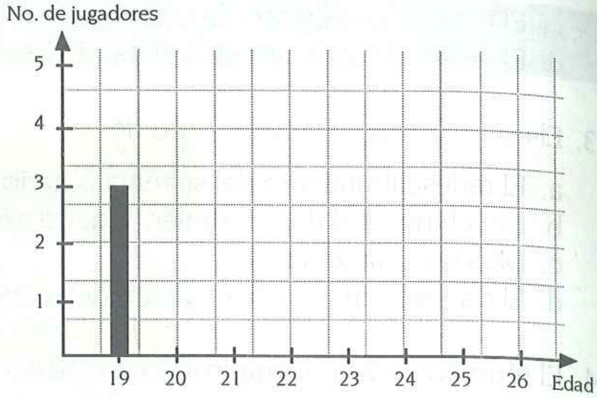
PRIMERA EXPERIENCIA

- El Club de Fútbol Maracaná contrató un nuevo técnico.Lo primero que quiere saber es la edad de todos los jugadores que integran el equipo. Esto es lo que anota en su cuaderno:

  20 - 25 - 19 - 21 - 21 - 19 - 22 - 23 - 20 - 22 - 21 - 22 - 20 - 25 - 21 - 23 - 20 - 22 - 19 - 23 - 22

- Terminada la clase con sus nuevos pupilos, el técnico organiza esos datos en una **tabla** y en un **diagrama de barras.** Ayúdale a completarlos:

EDAD	N° DE JUGADORES
19	3
20	
21	
22	
23	
24	
25	



- Contesta:

  a) ¿Cuál es la edad más frecuente?

  b) ¿Qué porcentaje representan los menores de 21 años?

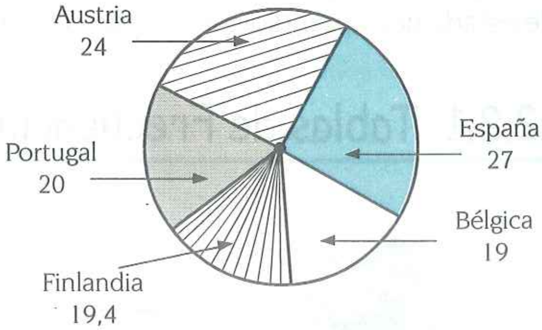
  c) Si se retiran al cumplir 29 años, ¿cuántos habrán colgado los guayos dentro de 5 años?

  d) El técnico reparte los vestideros en los camerinos por orden de edad. El vestidero del medio le tocó a "El Pibe". ¿Qué edad tiene?

SEGUNDA EXPERIENCIA

- España es el país de Europa con mayor número de donantes de órganos. La **tabla** y el **diagrama circular** siguientes muestran los cinco países de mayor número de donantes de Europa.

PAÍS	No. de donantes por millón de personas
España	27
Austria	24
Portugal	20
Finlandia	19,4
Bélgica	19



- Contesta:

  a) ¿Qué nombre recibe la representación de los datos de la derecha?

  b) ¿Cómo se determinan las zonas que conforman un diagrama circular?

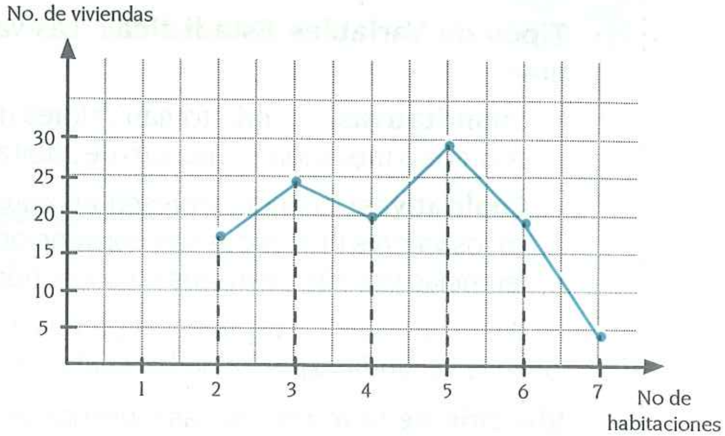
  c) ¿Cuál es el porcentaje de donantes de España con relación al total de donantes?

TERCERA EXPERIENCIA

- En un pueblo se realizó un estudio acerca de las características de sus viviendas. Una de las variables investigadas fue el **número de habitaciones.**

- Por razones de rapidez y economía, sólo se recogió información de 120 viviendas, seleccionadas entre todas las de la ciudad. Los datos recogidos se resumen en la siguiente tabla y gráfica denominada **polígono de frecuencia.**

TABLA DE FRECUENCIAS	
No. de habitaciones	**No. de viviendas**
2	18
3	25
4	22
5	30
6	20
7	5



- Contesta:

a) ¿Cómo se construye el polígono de frecuencia?

b) ¿Se recogió información sobre todas las viviendas del pueblo? ¿Por qué?

c) ¿Cuál es la población estadística?

d) ¿Cuál fue la muestra recolectada?

e) ¿Cuál es la variable estadística?

f) ¿Cuál es la frecuencia absoluta de la variable cuando el valor es 5 habitaciones?

APRENDAMOS...

Las tres experiencias anteriores nos han permitido revisar algunos de los conceptos estadísticos básicos:

- Para representar los datos que nos brinda una cierta información podemos utilizar una tabla de frecuencias, un diagrama de barras, un diagrama circular o un polígono de frecuencias.
- **Población Estadística**: Es el conjunto de elementos (personas u objetos) en los que se quiere estudiar alguna característica que varía. Por ejemplo, en la tercera experiencia la población está formada por todas las viviendas del pueblo.
- **Muestra:** Cuando la población es demasiado grande, sólo se recogen datos de un subconjunto de la misma, llamado **muestra.** El tamaño de la muestra se representa por **n.** Por ejemplo, en nuestra tercer experiencia la muestra son las **n=120** viviendas seleccionadas.
- **Variable Estadística:** Es la característica que se investiga. Los valores distintos que pueden tomar se simbolizan por $x_1, x_2, x_3, \dots x_n$. En nuestro caso, la variable es el **número de habitaciones.** Sus valores $x_1, x_2, x_3, \dots x_n$ forman la primera columna de la tabla.

- **Frecuencia absoluta** de un valor o dato es el número de veces que se repite el valor o dato. Por ejemplo, el valor $x_3=4$ aparece con una frecuencia de 22. La frecuencia absoluta del dato x_i se denota $\mathbf{f_i}$.
- **Tipos de Variables Estadísticas**: Las variables estadísticas pueden ser de dos tipos:
  - **Cuantitativas:** cuando toman valores numéricos que resultan cuando se hacen conteos o mediciones (número de habitaciones, edad, estatura, calificaciones,...)
  - **Cualitativas:** cuando representan categorías, clasificaciones o designaciones cuyos valores numéricos son convencionales (por ejemplo, ciudades, países, preferencias por algo, estratos socioeconómicos...)

  Por ejemplo, en la experiencia primera y tercera, las variables son cuantitativas y en la segunda experiencia la variable es cualitativa.
- **Elección de la muestra:** Las muestras seleccionadas deben ser **representativas** de toda la población, para que los resultados obtenidos con ellas tengan validez general. Por ejemplo, las 120 viviendas de nuestra tercera experiencia no serían representativas si las hubiéramos escogido todas del mismo barrio o del mismo estrato socieconómico o fueran todas modernas. Lo ideal es que estén elegidas al **azar**, es decir, que todas y cada una de las viviendas tenga la misma oportunidad de ser seleccionadas de la muestra.

12.2.2 Frecuencia Relativa

- La frecuencia de un valor de una variable estadística es más significativa cuando la comparamos con el número total de datos. Con este fin, definiremos un nuevo concepto llamando **frecuencia relativa**, simbolizado por $\mathbf{f_i}$.

RECORDEMOS

- La **Frecuencia Relativa** de un dato es el cociente entre su frecuencia absoluta y el número de datos de la muestra. La frecuencia relativa de un dato x_i la representamos por $\mathbf{h_i}$; es decir:

$$\textbf{frecuencia relativa : } h_i = \frac{\textbf{frecuencia de un dato}}{\textbf{número total de datos}}$$

- La frecuencia relativa de un dato se puede dar en forma decimal o en forma porcentual.

EJEMPLO:

Un colegio matriculó 90 estudiantes en el grado 7°. El departamento de matemáticas quería saber el nivel que tenían en esta asignatura y escogió al azar 25 estudiantes para hacerles una evaluación que calificaría de 0 a 5. Los resultados obtenidos fueron los siguientes:

1, 1, 4, 1, 2, 2, 4, 3, 0, 3, 4, 5, 1, 2, 5, 3, 4, 0, 2, 3, 4, 4, 0, 1, 2

Queremos saber:

a) ¿Cuál fue la población estadística?
b) ¿Cuál es la muestra?
c) ¿Cuál es la variable estadística?
d) ¿Cuáles son los datos estadísticos?
e) ¿Cuál es la frecuencia absoluta de cada dato?
f) ¿Cuál es la frecuencia relativa de cada dato?

SOLUCIÓN

a) La población estadística está constituída por los 90 estudiantes matriculados en el grado 7°.
b) La muestra corresponde a los 25 estudiantes evaluados.
c) La variable estadística es la calificación que se asigna (0,1,2,3,4,5).
d) Los datos estadísticos son las distintas calificaciones 0,1,2,3,4 y 5.

Vamos a contestar los literales e) y f), organizando la información en la siguiente **tabla de frecuencias.** Completa la tabla y explica como se obtiene cada resultado.

DATOS	FRECUENCIA ABSOLUTA	FRECUENCIA RELATIVA		
		FRACCIÓN	DECIMAL	PORCENTAJE
0	3	$\frac{3}{25}$	0,12	12%
	5			
2				
3	4	$\frac{4}{25}$	0,16	16%
		$\frac{6}{25}$		
				8%
	SUMA: 25	SUMA:	SUMA:	SUMA:

12.2.3 Media, Moda y Mediana

- Cuando tenemos un conjunto de datos o muestra de observaciones y queremos identificar los datos más representativos, que nos permitan tener una visión del comportamiento de la variable que estamos analizando, definimos los **VALORES CENTRALES.** Los más importantes son: la **media aritmética o promedio,** la **mediana** y la **moda.** Recordemos:
  - **MODA: es el dato de mayor frecuencia**. En el ejemplo anterior, una vez completada la tabla de frecuencias, podemos verificar que el dato que más se repite es el 4. Este es el dato de **moda.** Puede ocurrir que varios datos tengan la mayor frecuencia. En este caso, habría varias modas.

- **MEDIANA:** De un conjunto impar de datos numéricos, **organizados de menor a mayor,** es el dato que ocupa la posición central; por lo tanto, divide el conjunto de datos en dos mitades: 50% a la izquierda y 50% a la derecha. En el ejemplo anterior tenemos:

$$0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, \boxed{2}, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5$$

Esta es la **MEDIANA**, ¿por qué?

¿Cómo se halla la mediana de un conjunto par de datos? Por ejemplo, si al conjunto de datos anterior le agregamos otro 5, ¿cuál será la mediana del nuevo conjunto de datos?

- **MEDIA O PROMEDIO:** La media aritmética condensa en un único número la información contenida en una serie de datos . Por ejemplo, la **edad media** de un equipo deportivo nos indica si se trata de un conjunto predominantemente joven, o más bien "veterano". La nota media de los exámenes de un grupo de estudiantes nos revela el rendimiento académico de ese grupo. En nuestro ejemplo, la nota media o promedio se obtiene sumando las notas obtenidas por los estudiantes y dividido por 25, así:

$$\text{nota media} = \frac{0+0+0+1+1+1+1+1+2+2+2+2+2+3+3+3+3+4+4+4+4+4+4+5+5}{25}$$

$$= \frac{3 \times 0 + 5 \times 1 + 5 \times 2 + 4 \times 3 + 6 \times 4 + 2 \times 5}{25}$$

$$= \frac{0 + 5 + 10 + 12 + 24 + 10}{25} = \frac{61}{25} = 2{,}44$$

Luego, el promedio del grupo es 2,44: un resultado bastante flojo.

EJERCICIO 12-2

① Un entrenador de fútbol le pregunta la edad a 15 de sus 40 jugadores y las anota en su agenda. Esto fue lo que escribió el entrenador: 11, 10, 11, 10, 11, 11, 12, 11, 12, 11, 11, 12, 11, 10, 11. Se pide:

a) Hallar la población estadística y la muestra estadística.

b) Indicar cuál es la variable estadística y cuáles son los datos.

c) Construir la tabla de frecuencias absolutas y relativas y los gráficos correspondientes: diagrama de barras, diagrama circular y polígono de frecuencias.

d) ¿Qué porcentaje de la muestra tiene 11 años?

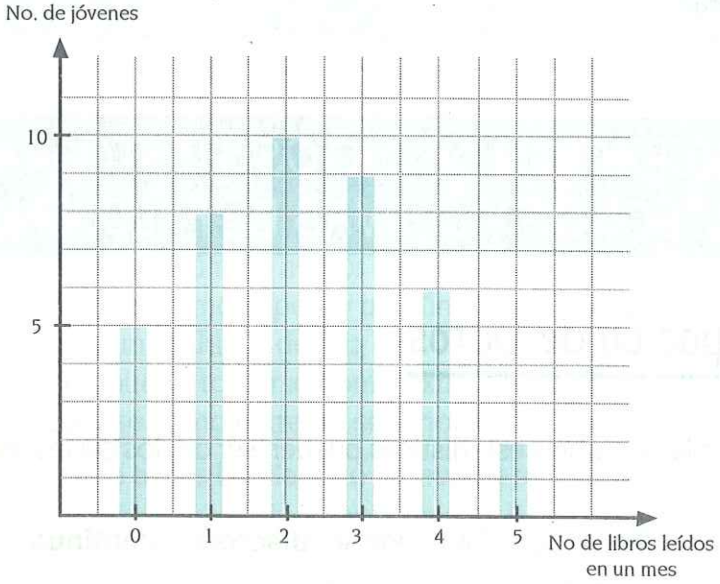
e) Hallar la moda, la mediana y la media aritmética.

② A un grupo de 240 personas se les preguntó por su grupo sanguíneo. La tabla siguiente nos muestra los resultados:

GRUPO SANGUÍNEO	A	B	AB	O
No. DE PERSONAS	30	45	75	90

a) ¿Cuál es la variable estadística? ¿Cuáles son los datos?
b) Dibuja el diagrama de sectores.
c) ¿Cuál es el porcentaje de personas que tiene grupo sanguíneo AB?

③ La biblioteca del colegio realizó una encuesta a una grupo de estudiantes, cuyos resultados se muestran en el siguiente diagrama de barras:



a) ¿Cuál es la variable? ¿Qué tamaño tiene la muestra? ¿Cuántos valores distintos toma la variable?
b) ¿Escribe la tabla de frecuencias.

④ Un colegio tiene 800 estudiantes, de los cuales 600 están en Primaria y 200 en Básica Secundaria. Además, 500 son muchachos y 300 muchachas. Se va a realizar una encuesta a una muestra de 100 alumnos. Para que la encuesta sea representativa, ¿cuántos alumnos de Básica Secundaria debe contener? ¿Y cuántas alumnas?

⑤ Observa la siguiente tabla y contesta:

NÚMERO DE HIJOS	0	1	2	3	4	5
FAMILIAS	7	10	12	6	3	2

a) ¿Qué información se quiere obtener según los datos consignados en la tabla?
b) ¿Cuál es la población estadística? ¿Y el tamaño de la muestra?

c) ¿Cuál es la variable estadística?

d) Elabora un diagrama de barras, un diagrama circular y un polígono de frecuencias para esta información.

e) Calcula las frecuencias relativas y porcentuales de la variable.

f) Si la muestra representa correctamente a una población de 3.500 familias, ¿cuántas de éstas no tendrán ningún hijo?

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 1

Un obrero tarda $12\frac{3}{5}$ días en hacer $\frac{7}{12}$ de una obra. ¿Cuánto tiempo necesitará para terminar la obra?.

12.3 AGRUPACIÓN DE DATOS, HISTOGRAMAS, POLÍGONOS Y CURVAS DE FRECUENCIAS

12.3.1 Agrupación de Datos

- Ya sabemos que las variables estadísticas pueden ser de dos clases: **cualitativas** o **cuantitativas.**
- A su vez, una variable cuantitativa puede ser **discreta** o **continua:**
  - * **Discreta:** cuando sólo toma valores aislados, generalmente enteros. Por ejemplo, el número de hijos de una familia o las edades de los alumnos de un grupo de 7º grado.
  - * **Continua:** cuando puede tomar cualquier valor dentro de un cierto intervalo. Por ejemplo, el peso de un grupo de personas, la estatura de los alumnos de un grupo, la cantidad de colesterol en la sangre por grupo de edades.

    También se consideran continuas las variables que pueden tener **muchos valores distintos**, aunque sean todos enteros como, por ejemplo, los salarios de un grupo de personas.
- En las variables continuas, donde el número de datos seguramente es muy grande, éstos se agrupan en **intervalos** o **clases.** La siguiente experiencia nos ayudará a comprender en qué consiste este proceso:

EXPERIENCIA

- El médico de un colegio anotó la estatura, en centímetros, de los 40 alumnos del grupo 7°A. Estos fueron los resultados:

160, 167, 163, 148, 151, 158, 166,
166, 157, 153, 151, 150, 155, 164,
162, 166, 171, 167, 165, 152, 150,
147, 152, 162, 155, 158, 158, 164,
157, 155, 160, 154, 153, 156, 160,
159, 159, 158, 163, 161.

- Como el número de datos es grande, los agrupa en intervalos o clases de la siguiente manera:
    - Cada intervalo o clase tiene un extremo inferior y un extremo superior. El extremo inferior de la primera clase es, en general, el menor dato de la muestra y el extremo superior de la última clase es el mayor valor de la muestra. A veces conviene tomar como extremo inferior un número menor que el de la muestra redondeado a un múltiplo de 5 o de 10 y como extremo superior un número mayor que el de la muestra redondeado igualmente a un múltiplo de 5 o de 10. Por ejemplo, si el menor valor de una muestra es 1,43 m, puede tomarse como extremo inferior 1,4 y si el mayor valor es 1,74 m, puede tomarse como extremo superior 1,8.
    - Es recomendable que todas las clases o intervalos tengan la misma amplitud.
    - Los puntos medios de cada clase se llaman **marcas de clase.**
    - No existe una regla única para fijar el número **k** de intervalos o clases en que se va a agrupar la muestra, pero generalmente varía entre 5 y 15, dependiendo del tamaño de la muestra. Una buena guía para tomar la decisión acerca del valor de **k** es la propuesta de **Herbert A. Sturges (1926)**, quien diseñó la siguiente tabla:

Números de Elementos de la Muestra	Números de Intervalos
n	k
De 6 a 11	4
De 12 a 22	5
De 23 a 45	6
De 45 a 90	7
De 91 a 181	8
De 182 a 362	9
De 363 a 724	10
De 725 a 1.448	11
De 1.449 a 2.896	12

- Para determinar la amplitud de los intervalos o clases procedemos así:

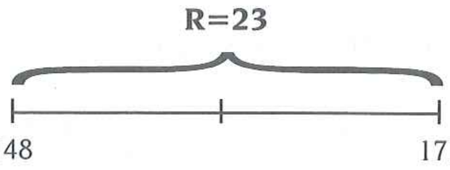
  * Hallamos la diferencia entre el mayor valor y el menor valor de la muestra. Esta diferencia se denomina **RANGO** o **RECORRIDO** de la muestra y lo representamos por **R.** Por lo tanto:

$$R = x_{max} - x_{min}$$

  * Dividimos **R** entre **k** para hallar la amplitud **A** de cada intervalo; es decir:

$$A = \frac{R}{k}$$

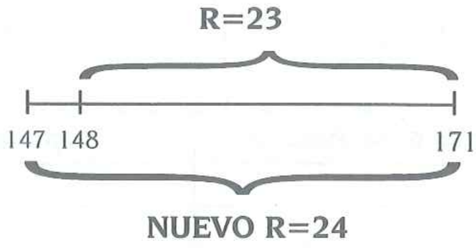
  * Como en este caso, el dato mayor es 171 y el menor es 148, entonces el rango de la muestra es: **R=171 - 148 = 23**



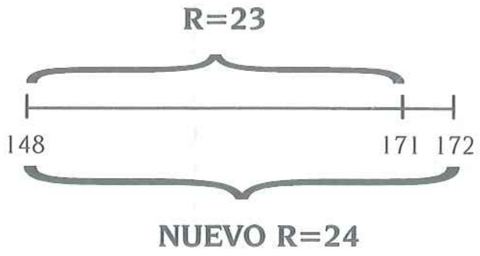
  * El número de intervalos de acuerdo con la tabla de Sturges es **k=6** y la amplitud de cada intervalo será:

$$A = \frac{23}{6} = 3,8333...$$

Como los datos de la muestra son números enteros, entonces aproximamos este número al entero mayor más próximo; es decir, a **4**. Esto hace que debamos ampliar nuestro rango de **23** a **6x4=24**; es decir, **1** unidad más que el rango de los datos. Esta unidad podemos agregarla por debajo (adicionando el dato 147) o por encima (adicionando el dato 172)



o



* Si escogemos esta última alternativa, entonces los 6 intervalos o clases que podemos conformar son los siguientes:

[148-152) , [152-156) , [156-160), [160-164) , [164-168) , [168-172)

Para hallar la **marca de clase** de un intervalo se suman los extremos y se divide por 2. Por ejemplo, la marca de clase del segundo intervalo es:

$$\frac{152+156}{2} = 154$$

- A continuación, elaboramos la tabla de frecuencias absolutas para esta distribución de datos:

Talla (cm)	Marca de Clase	Recuento	Frecuencia Absoluta
[148-152)	150	☒	6
[152-156)	154	☒ ┌	8
[156-160)	158	☒ ⊓	9
[160-164)	162	☒ ┌	8
[164-168)	166	☒ ┌	8
[168-172)	170	|	1
			40

Por ejemplo, en el intervalo [152-156) hemos agrupado todas las tallas desde 152 cm (incluído este valor) hasta las tallas por debajo de los 156 cm, ya que 156 cm se contabiliza en el tercer intervalo.

APRENDAMOS...

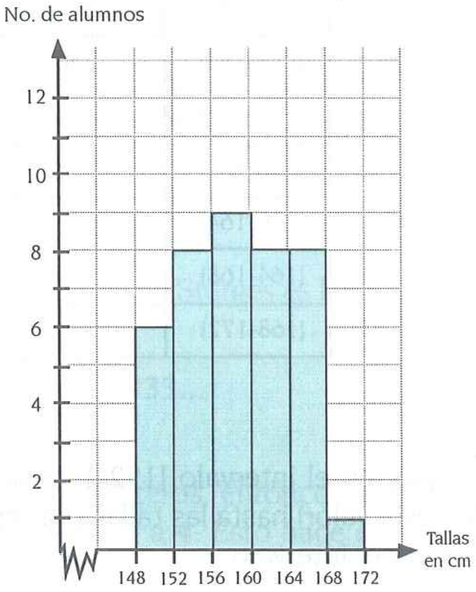
- Cuando el número de datos de una muestra es grande, mayor que 20, conviene agruparlos en **intervalos o clases.**
- El número de intervalos es variable; sin embargo la **tabla de Sturges** es una buena guía para determinar el número de estos intervalos.
- Todos los intervalos deben tener la misma amplitud.
- El **RANGO** de la distribución es la diferencia entre el mayor valor y el menor valor de la muestra.
- Para saber la amplitud A de cada intervalo calculamos: $\mathbf{A} = \frac{\mathbf{R}}{\mathbf{k}} = \frac{\textbf{Rango}}{\textbf{N}^{\textbf{o}}\textbf{ de intervalo}}$
- El resultado de A nos indicará si es necesario ampliar el rango original, agregando algunos datos por debajo o por encima de los que ya tenemos.

12.3.2 Histogramas, Polígonos de Frecuencias y Curvas de Frecuencias

PRIMERA EXPERIENCIA

- Vamos a representar gráficamente la situación que nos muestra la tabla de la experiencia anterior con relación a la estatura de los 40 estudiantes de 7° grado. Veamos:

TALLAS (en cm)	FRECUENCIA ABSOLUTA
[148 - 152)	6
[152 - 156)	8
[156 - 160)	9
[160 - 164)	8
[164 - 168)	8
[168 - 172)	1



- Este tipo de gráfico se llama **histograma de frecuencias absolutas.**

APRENDAMOS...

- Para construir un **histograma** representamos sobre el eje horizontal los extremos de los intervalos o clases. A continuación, construímos unos rectángulos cuya base es la amplitud del intervalo y cuya altura es la frecuencia absoluta.

SEGUNDA EXPERIENCIA

- Cuando los datos se encuentren agrupados en intervalos, el polígono de frecuencia se obtiene al unir los puntos medios de los lados superiores de cada rectángulo (Figura 1).

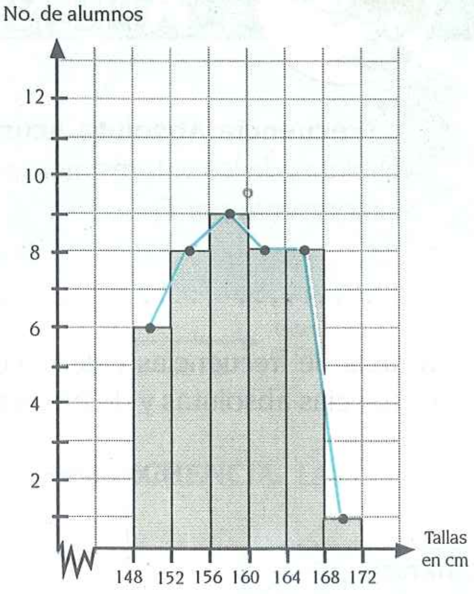


Figura 1

- Con el fin de que el área encerrada bajo el polígono de frecuencias sea igual a la suma de las áreas de los rectángulos, unimos la marca de clase del primer rectángulo con el punto medio de su lado vertical izquierdo, prolongando hasta el eje horizontal. De la misma forma procedemos con el último rectángulo (Figura 2).

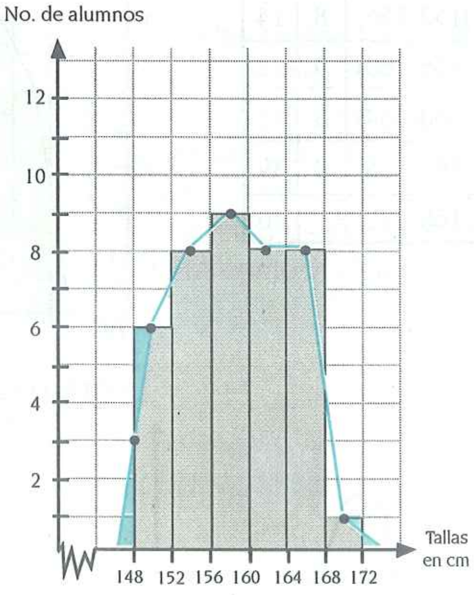


Figura 2

TERCERA EXPERIENCIA

- ¿Cuántos estudiantes de 7ºA tienen una estatura inferior a 160 cm? Si miramos la tabla de frecuencias absolutas podemos contestar que 6+8+9 = 23.
- ¿Cuántos estudiantes de 7ºA tienen una estatura inferior a 168 cm? Si de nuevo miramos la tabla de frecuencias absolutas encontraremos que son 6+8+9+8+8=39.

- Acabamos de obtener una nueva frecuencia que se llama **frecuencia absoluta acumulada.**

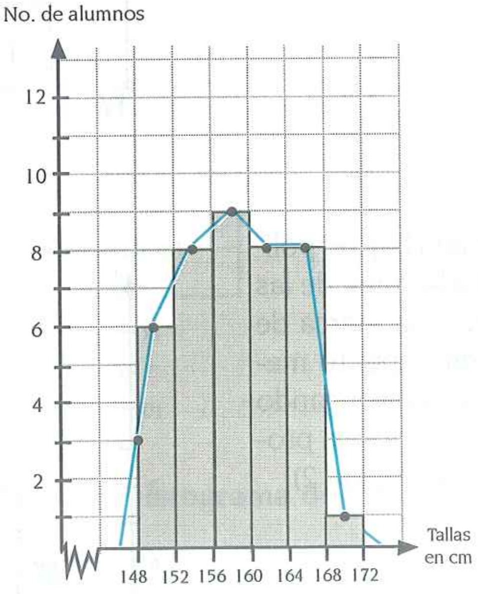
APRENDAMOS...

- La **Frecuencia Absoluta Acumulada** de un valor $\mathbf{x_i}$ es la suma de las frecuencias absolutas de los valores menores o iguales a $\mathbf{x_i}$. La frecuencia absoluta acumulada se representa por $\mathbf{F_i}$.

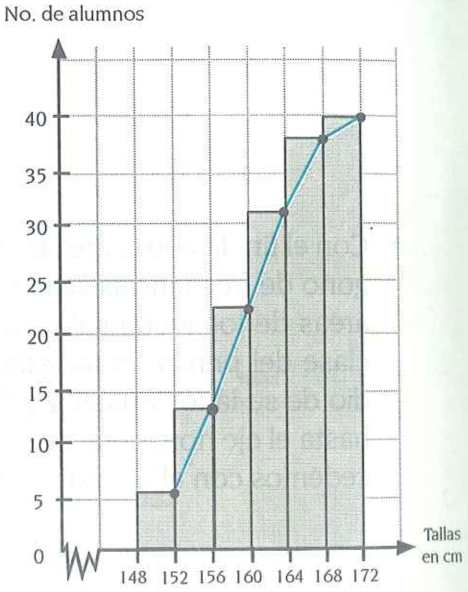
$$\mathbf{F_i = f_1 + f_2 + f_3 + \ldots f_i}$$

- La tabla de frecuencias y de frecuencias acumuladas, y los histogramas y polígonos de frecuencias absolutas y de frecuencias absolutas acumuladas son las siguientes:

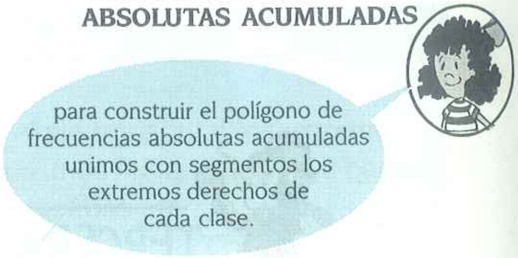
ESTATURAS (en cm)	$\mathbf{f_i}$	$\mathbf{F_i}$
[148-152)	6	6
[152-156)	8	14
[156-160)	9	23
[160-164)	8	31
[164-168)	8	39
[168-172)	1	40



POLÍGONO DE FRECUENCIAS ABSOLUTAS

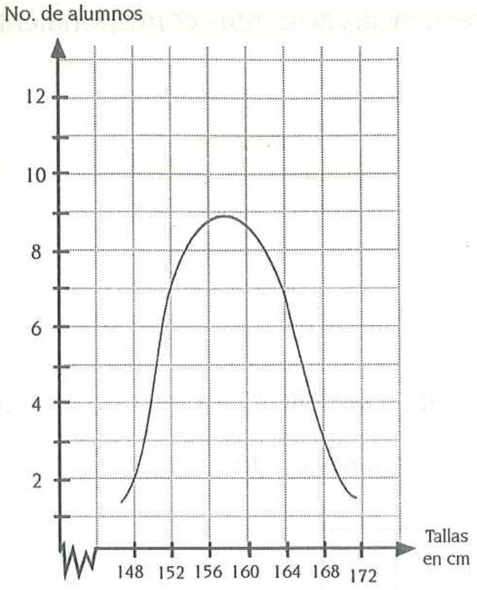


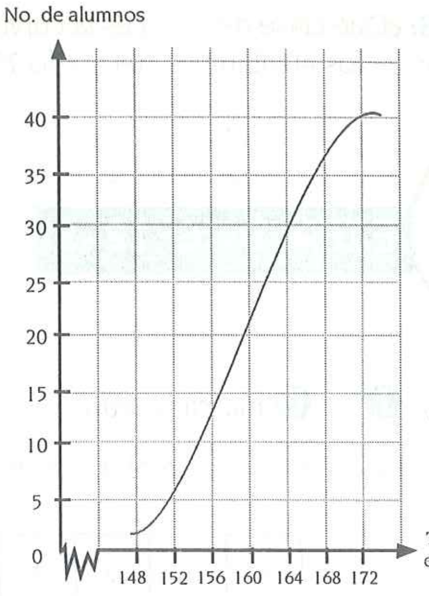
POLÍGONO DE FRECUENCIAS ABSOLUTAS ACUMULADAS



para construir el polígono de frecuencias absolutas acumuladas unimos con segmentos los extremos derechos de cada clase.

- El histograma y su polígono de frecuencias sugieren el dibujo de una curva suave como representación idealizada de la distribución de la muestra. Si disminuyéramos la amplitud de cada intervalo, obtendríamos un polígono de frecuencias menos irregular cada vez y podríamos dibujar una curva suave y continua. Por ejemplo, las curvas de frecuencias absolutas y de frecuencias absolutas acumuladas de nuestro problema de las estaturas de los estudiantes de 7ºA las siguientes:

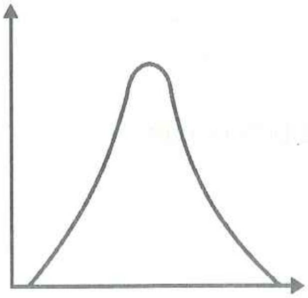




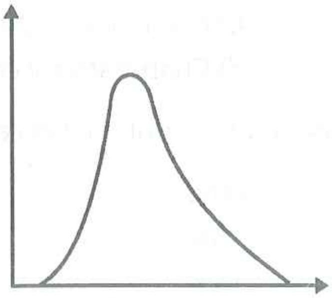
- Este tipo de curvas reciben el nombre de **CURVAS DE FRECUENCIA.** Las curvas de frecuencias acumuladas se llaman **OJIVAS.**

¡ATENCIÓN!

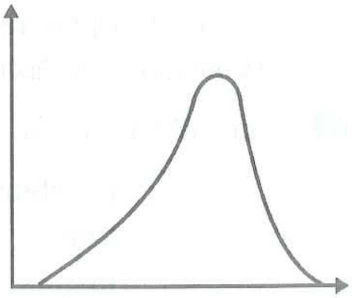
Ciertos tipos de poblaciones suficientemente estudiadas exhiben formas más o menos estables y conocidas. Por ejemplo, el peso de las personas y de los animales, la vida útil de las cosas y el coeficiente de inteligencia de las personas presentan curvas de forma **SIMÉTRICA**, como la **figura (a).** Otras, como los salarios, tienen una distribución asimétrica ya que un porcentaje alto de los trabajadores reciben bajos salarios; por lo cual, éstos tienden a agruparse en el extremo izquierdo de la distribución. Estas curvas se llaman **ASIMÉTRICAS A LA DERECHA** como la **figura (b)** o **ASIMÉTRICAS A LA IZQUIERDA** como la **figura (c).**



CURVA SIMÉTRICA
Figura (a)



CURVA ASIMÉTRICA A LA DERECHA
Figura (b)



CURVA ASIMÉTRICA A LA IZQUIERDA
Figura (c)

PREGUNTAS: ¿Qué clase de curva es la curva de frecuencias absolutas correspondiente a las estaturas de los 40 alumnos del grado 7º?

EJERCICIO 12-3

En los ejercicios ❶ a ⑮ marca la letra correspondiente a la UNICA respuesta correcta.

❶ Al lanzar un dado 100 veces, se obtuvieron los siguientes resultados:

x_i	1	2	3	4	5	6
f_i	16	14	24	20	16	10

La frecuencia absoluta correspondiente al dato 3 fue:

a) 24 b) 0,24 c) 24% d) 54

❷ En el ejercicio anterior, el porcentaje correspondiente al dato 6 es:

a) 5% b) 5 c) 0,1 d) 10%

Los ejercicios ❸, ❹ y ❺ se resuelven con base en el siguiente enunciado: "El Instituto Tecnológico tiene 1.200 estudiantes matriculados. Para evaluar la gestión del Rector se escoge al azar el 10% de los estudiantes. Los criterios de evaluación son Exelente, Buena, Regular y Mala"

❸ La población y la muestra de esta encuesta son respectivamente:

a) 12.000 y 1.200 b) 1.200 y 120 c) 1.200 y 12 d) 12.000 y 120

❹ La variable estadística de esta encuesta es:

a) Cualitativa y discreta b) Cualitativa y continua
c) Cuantitativa y discreta d) Cuantitativa y continua

❺ El rector fue calificado por sus alumnos, obteniendo el siguiente porcentaje:

Excelente	60%
Buena	20%
Regular	15%
Mala	☐

¿Cuántos encuestados dijeron que la gestión fue **Mala**?

a) 6 b) 5 c) 12 d) 10

6 En las siguientes tablas aparecen los intervalos con las frecuencias absolutas acumuladas.

Intervalo	[0-10)	[10-20)	[20-30)	[30-40)
Frecuencia Absoluta Acumulada	1	3	6	10

La frecuencia absoluta del intervalo [20-30) es:

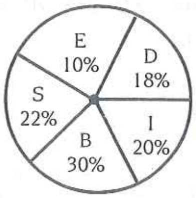
a) 6　　b) 3　　c) 0,6　　d) 4

7 Con la tabla del ejercicio anterior, el tanto por ciento correspondiente al intervalo [10-20) es:

a) 0,3　　b) 30%　　c) 20%　　d) 2

8 Las calificaciones obtenidas por los 500 alumnos de la básica secundaria en matemáticas fueron:

Exelente	50
Sobresaliente	110
Bueno	150
Insuficiente	100
Deficiente	90



El gráfico de sectores circulares:

a) No se corresponde con los resultados porque los porcentajes no son correctos.
b) No se corresponde con los resultados porque el reparto de los sectores no es correcto.
c) Se corresponde con los resultados
d) No se puede afirmar nada.

9 Al pesar los 600 alumnos de un colegio se obtuvieron los siguientes resultados:

Peso (kg)	[45-50)	[50-55)	[55-60)	[60-65)	[65-70)	[70-75)	[75-80)
No. de Alumnos	24	68	170	184	120	24	10

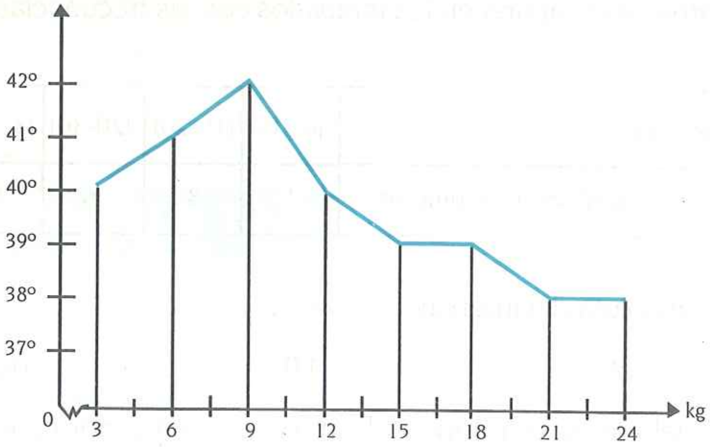
El número de alumnos que pesa menos de 70 kg es:

a) 120　　b) 566　　c) 154　　d) 94%

10 Con los datos del problema anterior, ¿qué porcentaje de alumnos pesa entre 65 y 70 kg?

a) 0,2　　b) 20%　　c) 60%　　d) 94%

11 Un enfermo tiene una infección. Se toma la temperatura cada 3 horas, obteniéndose la siguiente gráfica en un día:



De las siguientes afirmaciones es correcta:

a) La temperatura máxima la alcanza a las 9 horas
b) Al finalizar el día, el enfermo está sin fiebre
c) El enfermo ha desmejorado en las últimas horas
d) No se puede afirmar nada.

⑫ ¿Cuál de las siguientes tablas corresponde al diagrama circular?

a)

A	B	C	D
50	100	150	100

b)

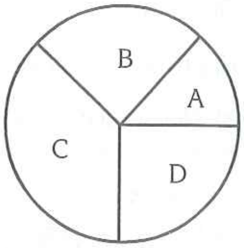
A	B	C	D
30	170	20	180

c)

A	B	C	D
10	150	90	150

d)

A	B	C	D
150	100	50	100



⑬ La suma de todos los porcentajes en cualquier tabla es:

a) 1 b) 100 c) 1% d) El número total de observaciones

⑭ La suma de todas las frecuencias absolutas en cualquier tabla es:

a) 1 b) 100 c) 1% d) El número total de observaciones

⑮ Se llama OJIVA a:

a) Un diagrama de sectores circulares
b) Una tabla de frecuencias absolutas
c) Una curva de frecuencias absolutas
d) Una curva de frecuencias acumuladas

⑯ Una de las preguntas de un cuestionario está diseñada para ser contestada de la siguiente forma: Si su vivienda:

Es propia sin deuda contesta 1
Es propia hipotecada contesta 2
La está pagando contesta 3
Es arrendada contesta 4
Es prestada contesta 5

Recogida la información se obtienen los siguientes resultados:

4 3 3 4 4 4 1 3 4 3 3 3 2 4 3 4 2 3 3 5
3 4 4 2 3 2 4 4 1 3 5 4 4 3 4 3 1 3 3 2

a) Construye una tabla de frecuencias, el diagrama de barras y el gráfico de sectores

b) ¿Cuántas personas encuestadas tenían vivienda?

c) Una persona posee vivienda si marca una de las alternativas 1,2 o 3. ¿Qué porcentaje de personas posee vivienda?

17 El **COEFICIENTE DE INTELIGENCIA** (CI) de un grupo de estudiantes de 8º grado es el siguiente:

116	106	104	110	116	123	100	115	108	91
107	87	111	106	102	111	104	96	101	117
111	110	103	119	107	88	114	110	103	107
119	116	105	96	102	107	121	106	118	106
102	117	120	114	105	108	99	104	113	101
113	109	97	111	112	125	91	107	108	97
115	89	103	95	107	110	100	105	99	103
108	100	106	102	93	114	105	99	111	106

a) Agrupa este conjunto de datos en 8 intervalos

b) Construye la tabla de distribución de frecuencias

c) Construye el histograma, el polígono de frecuencias absolutas, el polígono de frecuencias absolutas acumuladas, la curva de frecuencias absolutas y la ojiva correspondiente.

d) ¿A partir de que CI tiene el 50% de los estudiantes el más alto coeficiente de inteligencia?

e) ¿Es la curva de frecuencias absolutas, simétrica o asimétrica?

18 Estas fueron las calificaciones definitivas obtenidas por un grupo de estudiantes universitarios en el curso de Matemáticas I.

2,0	3,5	3,0	2,5	2,4	1,6	3,6	3,2	3,7	3,7
3,4	3,3	3,2	1,7	2,3	3,4	2,6	3,4	3,2	3,1
1,3	3,0	3,3	4,5	3,1	3,2	3,7	2,4	3,3	2,8
3,0	3,4	3,7	3,4	2,3	3,1	1,8	3,6	2,5	3,4
2,0	2,8	3,1	3,0	1,0	2,5	4,3	1,4	3,7	3,3
3,8	3,1	3,3	4,3	3,0	3,9	3,9	3,0	2,2	3,0
3,1	4,2	3,5	3,6	3,2	2,6	2,6	3,2	1,5	2,8

a) Si el curso se aprueba con nota mayor o igual a 3,0, ¿qué porcentaje de estudiantes perdió el curso?

b) ¿Cuál fue la calificación más frecuente?

c) ¿Qué porcentaje de estudiantes obtuvo calificación entre 2,5 y 3,5?

d) Construye el histograma, el polígono de frecuencias absoluta y relativas, la curva de frecuencias absolutas y relativas.

e) ¿Es la curva de frecuencias absolutas simétrica o asimétrica?

⑲ Los jugadores de dos equipos de baloncesto se clasifican por su estatura, según la siguiente tabla:

ESTATURA	No. de Jugadores Equipo A	No. de Jugadores Equipo B
[1,70 - 1,80)	3	5
[1,80 - 1,90)	4	5
[1,90 - 2,00)	5	6
[2,00 - 2,10)	9	5

Para cada equipo:

a) Representa el hitograma de frecuencias absolutas y el de frecuencias absolutas acumuladas.

b) Dibuja el polígono de frecuencias absolutas y el de frecuencias absolutas acumuladas.

c) Dibuja la curva de frecuencias absolutas de cada equipo, ¿son simétricas o asimétricas?

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 2

Se emplean 14 días en hacer una obra de 15 m de largo, 8 m de ancho y 4,75 m de alto, a razón de 6 horas de trabajo cada día. Si se emplean 8 días en hacer otra obra del mismo ancho y de doble largo, trabajando 7 horas diarias, y siendo la dificultad de esta obra los $\frac{3}{4}$ de la anterior, ¿cuál es la altura de la obra?.

12.4 MEDIA Y MODA DE DATOS AGRUPADOS

12.4.1 Media Aritmética

EXPERIENCIA

- En un colegio, cada área se evalúa con notas de 1 a 10. Las notas de Ciencias Naturales del grupo 7°C, en el tercer período, se muestran en la tabla siguiente. ¿Cuál es la nota media del grupo?

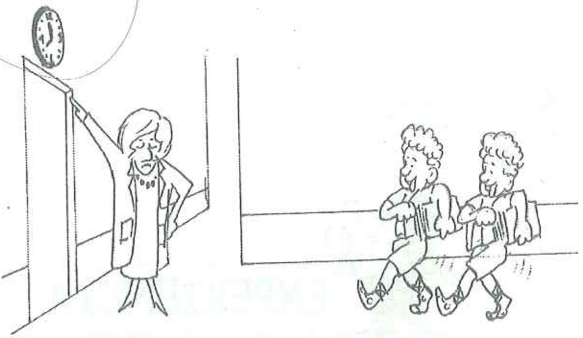
NOTA	No. DE ALUMNOS
1	1
2	3
3	3
4	7
5	7
6	10
7	5
8	3
9	1
	40

Completo esta tabla con una tercera columna en la que calculo el producto de cada dato por su frecuencia absoluta respectiva. La nota media es $\frac{207}{40} = 5{,}175$

NOTA	No. DE ALUMNOS (Frec. absoluta)	NOTA x FREC. ABSOLUTA
1	1	1
2	3	6
3	3	9
4	7	28
5	7	35
6	10	60
7	5	35
8	3	24
9	1	9
	40	207

- La coordinadora de disciplina del colegio está preocupada por el retraso de algunos alumnos a la primera hora de clase. Para averiguar el retraso medio, elaboró la siguiente tabla:

MINUTOS DE RETRASO	No. DE ALUMNOS
[0 - 5)	19
[5 - 10)	7
[10 - 15)	3
[15 - 20)	1
	30



Para hallar la **media aritmética,** la coordinadora elaboró la siguiente tabla con las marcas de clase:

Minutos de retraso	Marcas de Clase (Datos)	No. de alumnos (Frec. absoluta)	Datos x Frec. absoluta
[0 - 5)	2,5	19	47,5
[5 - 10)	7,5	7	52,5
[10 - 15)	12,5	3	37,5
[15 - 20)	17,5	1	17,5
		30	**155**

El retraso medio es

$\frac{155}{30} = 5{,}17$ minutos

APRENDAMOS...

- La **MEDIA ARITMÉTICA** se considera como el valor más representativo de una muestra o conjunto de datos. Por esta razón, también se le denomina **VALOR ESPERADO** de la variable estadística que está siendo estudiada. La media aritmética es el valor alrededor del cual se concentran la mayoría de datos.
- Para hallar la **MEDIA ARITMÉTICA:**
  - Se multiplican los datos por sus frecuencias absolutas respectivas.
  - Se suman estos productos.
  - El resultado de la suma se divide entre el total de datos, que es la suma de las frecuencias absolutas.
- Si los datos están agrupados, se toman como datos las **marcas de clase.**

12.4.2 Moda

EXPERIENCIA

- Ya sabemos que la **moda** es el dato de mayor frecuencia; es decir, el dato que más se repite. Por ejemplo, en la evaluación de Ciencias Naturales de la experiencia anterior la nota de moda fue 6 porque fue la obtenida por el mayor número de alumnos (10).
- Ahora queremos saber cómo determinar la moda en un conjunto de datos agrupados en intervalos. Consideremos la siguiente situación: Se realizó un test, compuesto de 10 preguntas, a 40 alumnos de un grupo, con los siguientes resultados:

No. de respuestas	**No. de alumnos**
[0 - 2)	4
[2 - 4)	9
[4 - 6)	15
[6 - 8)	7
[8 -10)	5

- ¿En cuál intervalo se encuentra el número de respuestas más frecuente?
- A la clase que representa la mayor frecuencia se le llama **clase modal.**
- En estos casos, se toma como moda la marca de la clase modal. Por lo tanto, la moda será 5 respuestas.

APRENDAMOS...

- La **MODA** de un conjunto de datos es el dato que tiene mayor frecuencia.
- Si los datos se encuentran agrupados, se toma como moda la marca de la clase que tiene mayor frecuencia (clase modal).
- Es posible que la moda no exista (cuando todos los datos tienen igual frecuencia), puede ser única (**unimodal**), tener dos modas **bimodal**), etc.

EJERCICIO 12-4

En los problemas ① a ⑫ elige la letra correspondiente a la ÚNICA respuesta correcta.

① Teniendo en cuenta la tabla siguiente, la media aritmética es:

x_i	f_i	F_i
1	2	2
2	4	8
3	6	18
4	4	16
5	2	10
	18	54

a) 3 b) 18

c) 5 d) 54

② La siguiente tabla ha sido preparada para calcular la media aritmética, pero faltan algunos números. Los números que faltan son:

INTERVALO	x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$
[0-10)	5	1	
[10-20)	15	2	
[20-30)	25	3	
[30-40)	35	4	

a) 5, 15, 25, 35

b) 1, 2, 3, 4

c) 5, 30, 75, 140

d) 25

③ La media aritmética en el problema anterior es:

a) 15 b) 140 c) 25 d) 10

④ En la siguiente tabla falta un número, ¿cuál debe ser este número para que la media valga 5?

X_i	1	x	5	7
f_i	1	2	3	4

a) 3 b) 4

c) 2 d) No se puede calcular

❺ Las evaluaciones realizadas a 30 jóvenes en un grupo de 8º grado tuvieron los siguientes resultados:

E:5	S:12	A:8	I:3	D:2

La nota media es:

a) 7,0 b) 6,0 c) 6,5 d) No se pude calcular

❻ La mediana del caso anterior:

a) No se puede calcular por ser una variable cualitativa
b) Sí se puede calcular porque las modalidades de la variable son ordenables
c) No porque sólo se puede determinar la mediana en variables cualitativas
d) No se puede calcular porque no hay datos suficientes

❼ En este mismo problema, la moda es:

a) 12 b) A c) 8 d) S

❽ La mediana de la distribución 1,4,7,2,5,3,8,2,9 es:

a) 2 b) 5 c) 4 d) No tiene

❾ En la distribución anterior la moda es:

a) 2 b) 5 c) 4 d) No tiene

❿ En una distribución asimétrica a la derecha:

a) $\overline{x} > Mo$ b) $\overline{x} < Mo$ c) $\overline{x} = Mo$ d) $\overline{x} = 0$

⓫ De los 200 alumnos que responden a una prueba de 12 preguntas, el 10% respondió correctamente a 3 preguntas, el 50% a 7, el 30% a 10 y el resto respondió a todas las preguntas. La media aritmética es:

a) 8 b) 50 c) 20% d) 6

⓬ La mediana y la moda en el caso anterior son:

a) 7 y 7
b) 100 y 7
c) 7 y 10
d) La mediana es 7 pero no tiene moda

⓭ Calcular la media, la mediana y la moda para cada una de las muestras siguientes:

a) 3,9,12,7,16,20,33,3
b) 5,7,22,17,5,7,20
c) 8,6,0,17,12,7,5
d) -4, 0, 13, 9, 4, 14, 20,15

⓮ Calcula la media, la mediana y la moda para cada una de las muestras siguientes:

a) 0,0,1,1,1,0,0,0
b) 3,3,3,2,2,2,4,5,3
c) 0,1,1,2,2,3,3,4,4
d) -1,0,0,0,-1,2,-2,3

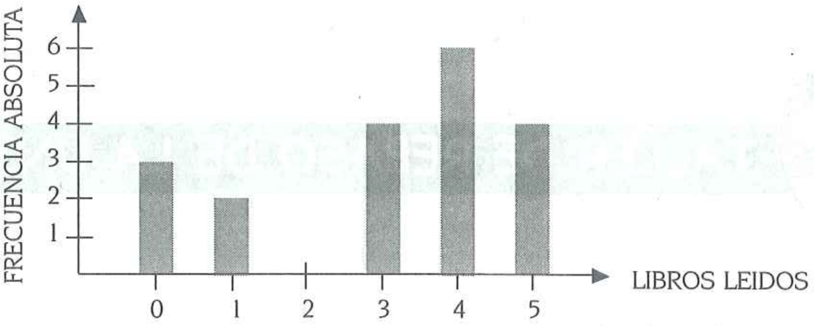
⓯ Un profesor borra accidentalmente la calificación de uno de sus seis (6) estudiantes. Las cinco (5) calificaciones restantes son 76,85,43,89 y 65, y la media de las seis (6) es 70. Encontrar la calificación que se borró.

⑯ ¿Cuáles son la media aritmética y la moda de la distribución del problema ⑯ del Ejercicio 12-3 de esta unidad?

⑰ ¿Cuáles son la media aritmética y la moda de la distribución del problema ⑰ del Ejercicio 12-3 de esta unidad?

⑱ ¿Cuáles son la media aritmética y la moda de la distribución del problema ⑱ del Ejercicio 12-3 de esta unidad?

⑲ El siguiente diagrama corresponde al número de libros leídos por un grupo de 19 alumnos.



a) ¿Cuántos han leído 3 libros?.
b) ¿Qué porcentaje de la muestra ha leído 5 libros?.
c) ¿Cuántos alumnos del grupo leyeron 1 libro?.
d) ¿Cuál es el dato de moda?
e) ¿Cuál es la media aritmética de libros leídos?

⑳ Lina tiene una colección de C.D. y anota la duración, en minutos, de cada uno de ellos, obteniendo los siguientes resultados:

67, 63, 57, 52, 45, 49, 53, 51, 59, 66, 68, 54, 48, 40, 43, 47, 53, 54, 44, 46, 42, 47, 43, 46, 41, 49, 44, 48, 43, 47, 42, 41, 47, 42, 44, 40

a) Agrupa los datos en clases
b) Forma la tabla de frecuencias absolutas y añade una columna con las marcas de clase.
c) Halla la moda y calcula la media aritmética
d) Forma la tabla de frecuencias absolutas y añade una columna con las frecuencias absolutas acumuladas.
e) Dibuja el polígono de frecuencias absolutas, el polígono de frecuencias absolutas acumuladas, la curva de frecuencias absolutas y la ojiva de esta distribución.

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 3

En un balancín de 6 metros de longitud se equilibran dos niños en posición horizontal. Sus pesos son 20 kg y 40 kg.

a) ¿En qué punto del balancín deberá estar el apoyo?

b) ¿Dónde estaría el promedio del peso de los niños?

TALLER DE REPASO DE LA UNIDAD 12

1. Preguntas para revisar la teoría

1.1 En estadística, ¿qué es población? ¿qué es muestra?

1.2 ¿Qué son caracteres estadísticos?

1.3 ¿Cuándo un caracter estadístico es cualitativo? ¿Cuándo es cuantitativo?

1.4 ¿Cuándo una variable estadística es discreta? ¿Cuándo es continua?

1.5 Una vez escogida una muestra, ¿qué se hace con ella?

1.6 ¿Cómo se agrupan los datos de una distribución cuando la variable es discreta y hay muchos datos o cuando la variable es continua?

1.7 ¿A qué se denomina MARCA DE CLASE?

1.8 ¿De qué maneras se puede representar gráficamente una distribución de datos?

1.9 ¿Cómo se diseña un diagrama circular?

1.10 ¿Cómo se diseña un histograma?

1.11 ¿Qué es frecuencia absoluta? ¿Frecuencia relativa? ¿Frecuencia absoluta acumulada? ¿Frecuencia relativa acumulada? ¿Cómo se obtienen cada una de ellas?

1.12 ¿Qué es RANGO de una distribución de datos?

1.13 ¿Qué es un polígono de frecuencias? ¿Cómo se construye el polígono de frecuencias correspondiente a un histograma?

1.14 ¿Qué es una curva de frecuencias? ¿Cómo se construye? ¿Qué es una OJIVA?

1.15 ¿Qué es una curva simétrica? ¿Qué es una curva asimétrica?

1.16 ¿Qué son medidas de tendencia central? ¿Cuáles son?

1.17 ¿Cómo se calcula la media aritmética de un conjunto de datos?

1.18 ¿Qué es la mediana? ¿Cómo se obtiene la mediana cuando el número de datos es impar? ¿Y cuándo es par?

1.19 ¿Qué es la moda de una distribución? En una curva de frecuencia, ¿cómo se determina la moda?

2. En una encuesta acerca de gustos musicales, 45 individuos prefieren la ópera, lo que significa una frecuencia relativa de 0, 225. ¿Cuál es el tamaño de la muestra? ¿Si la población total es de 500.000 personas, cuántas prefieren la ópera?

3. Un parqueadero es ocupado el 48% por buses, el 32% por automóviles y el 20% por motos. ¿Cuáles son las frecuencias relativas, decimales y fraccionarias? ¿Cuál es el valor esperado o media? ¿Tiene sentido este resultado? ¿Qué tipo de variable estadística está siendo considerada?

4. Transportes "El Rápido" preguntó a 400 personas cuántos viajes en bus hicieron ayer. Estas fueron las respuestas:

VIAJES	0	1	2	3	4
PERSONAS	160	40	100	20	80

a) Dibuja el diagrama de barras y el polígono de frecuencias correspondientes.

b) Halla la moda, la mediana y la media.

c) La ciudad tiene 270.000 habitantes. Si la muestra ha sido representativa, ¿cuántos de ellos viajan 4 trayectos diarios en autobús?

d) Interpreta la forma de esta distribución estadística.

e) Dibuja el diagrama de sectores circulares.

5. Observa las notas de un examen realizado a 40 alumnos:

a) Completa la tabla con la frecuencia relativa de cada dato y los porcentajes correspondientes.

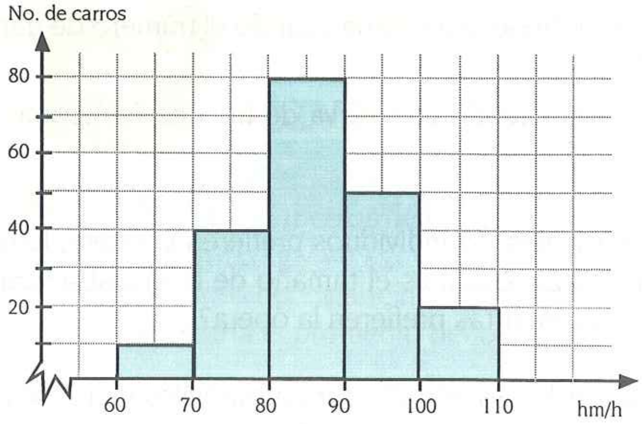
b) Dibuja el diagrama de barras y el polígono de frecuencia.

c) Calcula la media aritmética.

d) Se dice que esta variable es bimodal. ¿Por qué?

Nota	No. de alumnos
3	4
4	8
5	5
6	5
7	8
8	6
9	4

6. La Policía de Carreteras mide con su radar la velocidad de una muestra de carros cuando cruzan por cierto lugar de una autopista. Los resultados se recogen en este histograma:



a) Elabora una tabla con las frecuencias absolutas, las frecuencias relativas y los porcentajes.

b) Calcula la media y sitúala en el histograma.

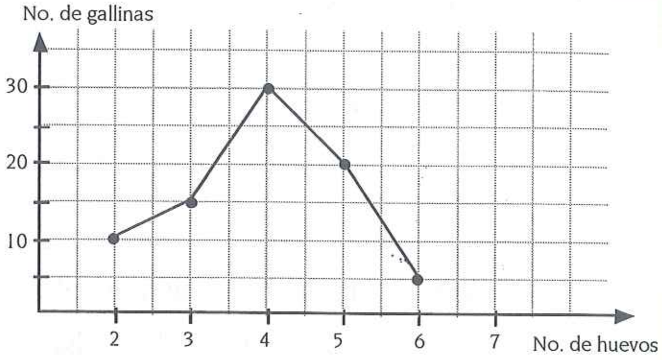
c) ¿Qué porcentaje de los carros serán sancionados por sobrepasar los 90 km/h?

7. Una granja cuenta con 17.000 gallinas ponedoras. Se toman 80 de ellas como muestra para investigar la puesta semanal de huevos. Los resultados se registran en el siguiente polígono de frecuencias:

a) Calcula el número medio de huevos puestos por una gallina en una semana.

b) ¿Cuántos huevos ponen todas las gallinas de la granja en una semana?

c) Se toma la decisión de sacrificar a las que no lleguen a 4 huevos semanales. ¿Cuántas sacrificarán en total?



8. El nivel de colesterol en la sangre de 40 pacientes es el siguiente:

215, 220, 231, 219, 274, 179, 183, 192, 196, 199
229, 214, 216, 205, 191, 193, 195, 175, 185, 194
193, 210, 196, 199, 191, 205, 173, 184, 195, 196
194, 195, 179, 184, 198, 185, 210, 221, 213, 197

a) Agrupa los datos en clases

b) Forma la tabla de frecuencias absolutas y añade una columna con las marcas de clase.

c) Halla la moda y calcula la media aritmética

d) Forma la tabla de frecuencias absolutas y añade una columna con las frecuencias absolutas acumuladas.

e) Elabora el histograma de frecuencias absolutas, el de frecuencias absolutas acumuladas, los polígonos y curvas de frecuencias absolutas y absolutas acumuladas.

9. Las edades en años, de los pacientes que van a un consultorio odontológico se muestran en la siguiente tabla:

Edades (en años)	**No. de personas**
[0 - 5)	6
[5 - 10)	13
[10-15)	11
[15 - 20)	2
[20 - 25)	1
[25 - 30)	3

a) Representa gráficamente el histograma, el polígono de frecuencias absolutas y las curvas de frecuencias absolutas.

b) Halla la media aritmética y la moda.

c) ¿Es la curva de frecuencias absolutas, simétrica o asimétrica?

10. Los pesos de 30 paquetes de azúcar etiquetados con 500 gramos han sido los siguientes:

492, 486, 495, 498, 485, 482, 497, 495, 501, 505
498, 501, 497, 501, 499, 497, 482, 498, 499, 502
501, 504, 500, 490, 494, 501, 498, 481, 503, 499

a) Agrupa los datos en 5 clases, formando la tabla de frecuencias absolutas y la de frecuencias absolutas acumuladas.

b) Halla la media y la moda.

c) Dibuja los histogramas y los polígonos de frecuencias absolutas y absolutas acumuldas.

d) ¿Qué porcentaje de paquetes tienen a lo sumo 500 gramos?

e) Dibuja la curva de frecuencias absolutas. ¿Es simétrica o asimétrica?

PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS SABER

Teniendo en cuenta la siguiente tabla, en los ejercicios 1. a 5., encierra en un círculo la respuesta correspondiente a la información dada:

PREPARACIÓN DEL JUGO DE GUAYABA CON LECHE

En la cafetería del colegio se tiene la siguiente receta que muestra las cantidades de azúcar, guayabas y leche para preparar un jugo de guayaba en leche:

Azúcar (cucharadas)	No. de guayabas	Leche (litros)	Agua (litros)	Jugo de guayaba en leche (litros)
13	7	2	1	3
15	9	4	2	6
17	11	6	3	9

1. a) A más agua es necesario agregar más leche.
   b) A menos leche mayor cantidad de jugo en leche.
   c) La relación entre los litros de leche y los litros de agua es de 4 a 5.
   d) La relación entre las cucharadas de azúcar y el número de guayabas es de 5 a 3.

2. Teniendo en cuenta que se mantiene la regularidad en la tabla, para preparar 15 litros de jugo de guayaba en leche sería necesario:

   a) Mezclar 8 litros de leche con 7 litros de agua.
   b) Utilizar 17 guayabas y 23 cucharadas de azúcar.
   c) Emplear más cucharadas de azúcar que guayabas.
   d) Utilizar más litros de agua que cucharadas de azúcar.

3. Para preparar el jugo de guayaba en leche, se debe usar:

   a) Igual cantidad de agua que de leche.
   b) Más agua que leche.
   c) Más leche que agua.
   d) El doble de litros de leche que de agua.

4. Si deseo saber cuántas guayabas y cuántos litros de agua necesito para preparar el jugo de guayaba en leche, debo conocer:

   a) La cantidad en litros de jugo de guayaba en leche que quiero preparar.
   b) La calidad de los vasos donde voy a servir el jugo.
   c) Que tan grandes son las cucharadas empleadas para medir la cantidad de azúcar.
   d) El tipo de azúcar y la marca de leche que se van a utilizar.

5. Teniendo en cuenta que se mantiene la regularidad en la tabla, si se tienen preparados 33 litros de jugo de guayaba en leche, entonces:

   a) La cantidad de leche que se utilizó es 11 litros.
   b) La cantidad de agua que se utilizó es 22 litros.
   c) La cantidad de leche que se utilizó es 22 litros.
   d) No se puede saber cuántos litros de agua y cuántos de leche se utilizó.

Núcleo Temático

13

PROBABILIDAD

LOGRO GENERAL

- Determinar la probabilidad de ocurrencia de un suceso cuando todos los resultados son igualmente posibles.

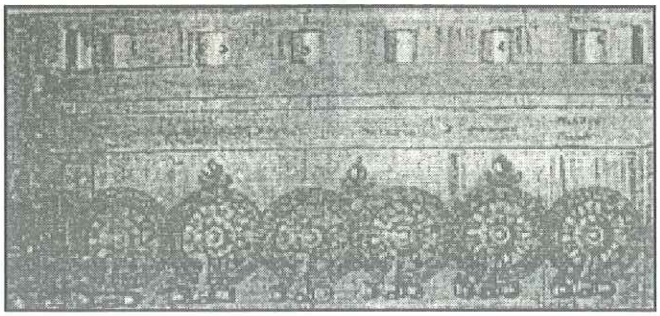
DIMENSIONES

LOGROS ESPECÍFICOS	INDICADORES DE LOGRO
Corporal: • Realizar lanzamientos de monedas y dados, jugar a la ruleta y al tiro al blanco.	• Realiza lanzamientos, un número dado de veces, de monedas, dados, dardos o ruletas y anota el número de veces que ocurre un determinado suceso.
Comunicativa: • Explicar cuando un suceso es imposible, seguro, poco probable o bastante probable. • Enuncia la Regla de Laplace para determinar la probabilidad de un suceso.	• Dado un conjunto de sucesos, explica cuáles son imposibles, seguros, poco probables o bastante probables. • Enuncia y analiza el significado de la Regla de Laplace para determinar la probabilidad de un suceso.
Cognitiva • Definir los conceptos de azar, espacio muestral, suceso y sucesos equiprobables. • Determinar la posibilidad de un suceso cuando en un experimento todos los resultados son equiprobables. • Relacionar los conceptos de frecuencia relativa y probabilidad de un suceso.	• Define en forma precisa los conceptos de azar, espacio muestral, suceso y sucesos equiprobables. • Aplica la Regla de Laplace para hallar la probabilidad de un suceso cuando en un experimento todos los resultados son equiprobables.
Estética: • Diseñar ruletas, dados y tiros al blanco para realizar experimentos aleatorios.	• Utiliza materiales como cartulina, madera y plastilina para diseñar ruletas, dados y tiros al blanco que le ayuden a realizar experimentos aleatorios.
Ética-actitudinal: • Valorar la importancia de trabajar en grupo.	• Aporta sus mejores esfuerzos para trabajar en grupo.

EVALUACIÓN

ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS

13.1 ¿SABÍAS QUE...?



Seguramente el primer instrumento utilizado por el hombre para calcular fue su mano; luego, apareció el ábaco con el cual se podía contar en diferentes bases (año 3.000 a.C.). Su empleo se ha mantenido hasta nuestra época.

En el siglo XVI, J. Neper, descubridor de los logaritmos, tuvo la idea de aplicar éstos a un instrumento que ayudara en los cálculos: la regla de cálculo. La primera fue construida en 1.971 por Gunter.

En 1.620 surgió la máquina de calcular de Blas Pascal, que tenía ruedas dentadas con números del cero al nueve. En 1.671, G.W. Leibniz construyó una máquina que realizaba multiplicaciones. En 1.833, Charles Babbage inventó una máquina procesadora de datos que estaba provista de un sistema de tarjetas perforadas para "leer" la información.

En los primeros años de la década de 1.940 Howard Aiken, un matemático de la Universidad de Harvard, creó la máquina que está considerada como la primera computadora digital, la MARK I, que después fue seguida por las computadoras MARK II y MARK III, cada vez más rápidas. Eran aparatos enormes, pues funcionaban con tubos de radio.

En 1.946 se creó en EEUU la ENIAC, que realizaba operaciones en milésimas de segundo. Gracias a John Von Newman fue construida la primera computadora con memoria, la ENDIVAC que podía almacenar los programas y, por tanto, procesar la información que le era suministrada de modo casi inmediato al no tener que serle introducido también el programa de procesamiento. Gracias a los avances de la microelectrónica ha sido posible convertir aquellas monstruosas máquinas en prácticos modelos de sobremesa y volverlos en algo tan cotidiano como el automóvil o el teléfono.

EJERCICIO 13-1

COMPRENSIÓN DE LECTURA: Explicación. Lee nuevamente el texto anterior y luego encierra en un círculo la letra que corresponda a la respuesta correcta:

1. El título más apropiado para el escrito anterior es:

   a. Historia del computador.
   b. Evolución de los instrumentos para calcular.

c. Los procesos de la matemática.
d. Del ábaco a la computadora.

2. De la lectura anterior se puede inferir que:

a. Las máquinas aparecen como respuesta a las necesidades del hombre en el campo de la matemática.
b. Antes del computador, los diferentes instrumentos que empleó el hombre para calcular, presentaban fallas protuberantes.
c. El hombre siempre ha buscado la manera de agilizar procesos lógicos y de pensamiento a través de la tecnología,
d. El automóvil y el teléfono tiene mucho que "agradecer" al ábaco y las reglas de cálculo.

3. Una de las siguientes afirmaciones es falsa:

a. Aún hoy, se emplea el ábaco para contar.
b. Se puede suponer que los dedos de la mano fueron el primer instrumento utilizado por el hombre para contar.
c. Blas Pascal, con su invento, dio origen al primer aparato eléctrico para calcular.
d. La computadora Mark del siglo XX, a pesar de lo aparatosa, es rápida y de manejo digital.

4. Respecto de la REGLA DE CÁLCULO, la lectura nos dice que:
a. Se inventó en las tres últimas décadas del siglo XVI.
b. Fue consecuencia directa del descubrimiento de los logaritmos.
c. Fue ideada y construida por J. Neper en el siglo XVII.
d. Aparece de la necesidad de aplicar los logaritmos a un instrumento que ayudara a calcular.

5. El autor de la lectura afirma, finalmente que:

a. Muchas comodidades que tenemos en la actualidad han sido posibles gracias a los adelantos de la microelectrónica.
b. El automóvil y el teléfono son el resultado de la transformación de enormes máquinas.
c. La computadora ENIAC fue la primera en su género, dotada de memoria.
d. Gracias a la aparición de aparatos como el teléfono y el automóvil, el hombre ha mejorado su calidad de vida.

13.2 AZAR Y PROBABILIDAD

RECORDEMOS

- Un experimento es **ALEATORIO** o de **AZAR** cuando no podemos determinar el resultado que se va a obtener al realizarlo.

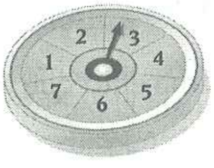
- Se llama **ESPACIO MUESTRAL** al conjunto de todos los reultados posibles de un experimento aleatorio. Este conjunto se denota con la letra **E.**

EJEMPLO:

Observemos los siguientes experimentos aleatorios y sus espacios muestrales.

EXPERIMENTO	ESPACIO MUESTRAL
	E = { cara, sello}
Lanzar una moneda	2 resultados posibles

EXPERIMENTO	ESPACIO MUESTRAL
	$E = \{1,2,3,4,5,6\}$
Lanzar un dado cúbico	6 resultados posibles

EXPERIMENTO	ESPACIO MUESTRAL
	$E=\{1,2,3,4,5,6,7\}$
Se gira la aguja	7 resultados posibles

EXPERIMENTO	ESPACIO MUESTRAL
	Las 40 cartas de la baraja española
Se extrae una carta de una baraja española	40 resultados posibles

- A los subconjuntos del espacio muestral se les llama **SUCESOS.**

EJEMPLO:

En el experimento que consiste en lanzar un dado con las caras numeradas del 1 al 6, el espacio muestral es

$$E=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

y algunos subconjuntos de este espacio muestral son:

Salir par: $A=\{2,4,6\}$; Salir impar: $B=\{1, 3, 5\}$
Salir múltiplo de 3: $C=\{3,6\}$; Salir mayor que 4: $D=\{5,6\}$

Los conjuntos A,B,C y D se llaman **SUCESOS** o **SUCESOS ALEATORIOS.**

- Dos sucesos son **EQUIPROBABLES** cuando tienen la misma **oportunidad** o **posibilidad** de ocurrir.

EJEMPLO:

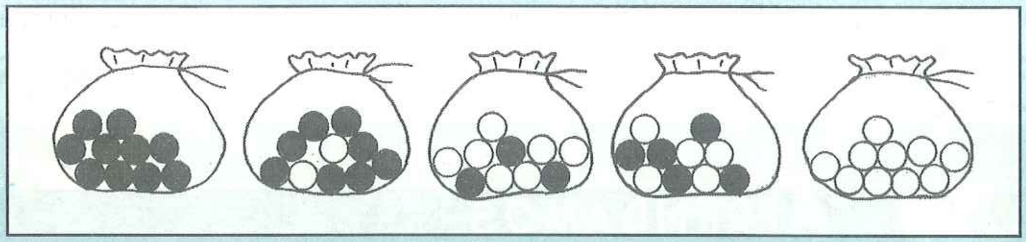
- Si lanzamos una moneda balanceada al aire, los sucesos **"sale cara"** y **"sale sello"** son equiprobables.
- Si lanzamos un dado exagonal balanceado numerado del 1 al 6, los sucesos **"sale par"** y **"sale impar"** son equiprobables.

- Un suceso es:

IMPOSIBLE: si sabemos que no puede suceder; es decir , que no tiene ninguna probabilidad de ocurrir.
SEGURO: si sabemos que siempre ocurre; es decir, que tiene toda la probabilidad de ocurrir.
POCO PROBABLE: si tenemos poca confianza en que ocurra
BASTANTE PROBABLE: si tenemos mucha confianza en que ocurra.

EJEMPLO:

Tenemos las siguientes bolsas con balotas de colores negro o blanco:



- ¿De cuál bolsa es **IMPOSIBLE** que salga una balota negra?
- ¿De cuál bolsa es **POCO PROBABLE** que salga una balota blanca?
- ¿De cuál bolsa es **BASTANTE PROBABLE** que salga una balota negra?
- De cuál bolsa es **SEGURO** que salga una balota blanca?

13.3 PROBABILIDAD DE UN SUCESO, REGLA DE

PRIMERA EXPERIENCIA

- Entre los jugadores y jugadoras de baloncesto, hay que elegir el representante del colegio para una competición de tiros libres.
- Camilo, Mariana, Lina y Sergio hacen distinto número de lanzamientos. Estos son los resultados:

- Para saber a quien elegir el entrenador hace una tabla de frecuencias:

JUGADORES	Camilo	Mariana	Lina	Sergio
Frecuencia absoluta	40	60	63	36
Frecuencia relativa	$\frac{40}{60} = 0{,}66$	$\frac{60}{80} = 0{,}75$	$\frac{63}{90} = 0{,}70$	$\frac{36}{50} = 0{,}72$

- El entrenador elegirá a Mariana porque tiene mejor frecuencia relativa y eso da más confianza en ella.

APRENDAMOS...

- Cuanto mayor es la **frecuencia relativa** de un hecho, mayor es la **probabilidad** de que ocurra.

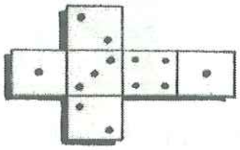
SEGUNDA EXPERIENCIA

- En una rifa se vendieron 100 boletas con los números 00 al 99. Contesta:
  - ¿Hay algún número que tenga mayor probabilidad de ganar que otro?
  - Si compro 5 boletas, ¿cuál será la probabilidad que tengo de ganar?
- Como todos los números son **EQUIPROBABLES** (es decir, igualmente probables), entonces una persona que compró 1 boleta tendrá **1** oportunidad de **100** de ganar o que **la probabilidad de ganar** es la fracción $\frac{1}{100}$.
- Por lo tanto, si compro 5 boletas, mi probabilidad de ganar será de **5** de **100;** es decir, $\frac{5}{100}$.

¿En cuáles de ellas los colores gris y blanco tienen la misma probabilidad de salir?

② Supongamos que han construído un dado con estas caras:

a) ¿Qué resultados pueden salir?
b) ¿Cuáles de ellos tienen la misma probabilidad de salir?



③ De los siguientes carteles, elige el más adecuado para cada uno de estos hechos:

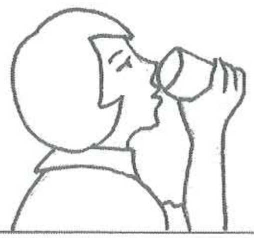
IMPOSIBLE

POCO PROBABLE

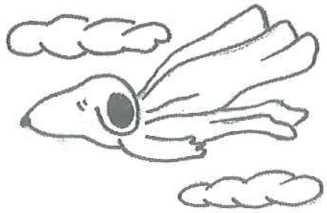
BASTANTE PROBABLE

SEGURO

Hoy beberás al menos un vaso de agua.

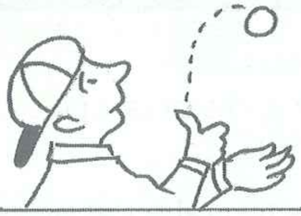


Verás volar a un perro.

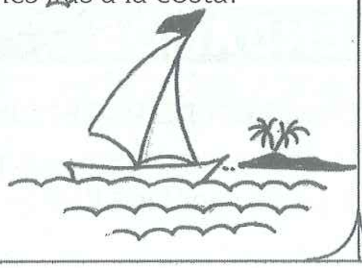


Este año, un familiar tuyo ganará el Baloto.

Si lanzas al aire una moneda cinco veces, al menos una vez saldrá cara.



En las próximas vacaciones irás a la costa.



Encontrarás un bolígrafo por la calle.

④ Una empresa tienen que elegir la marca de bombillas que va a comprar. Sus expertos han probado varias marcas durante un mes y han obtenido estos resultados:

MARCAS	A	B	C
No. de Bombillas	68	65	80
Bombillas fundidas	11	9	12

¿Cuál marca de bombillas comprará la empresa? ¿por qué?

⑤ Se lanza una chincheta varias veces. Ha salido 297 veces con la punta hacia arriba y 503 con la punta hacia abajo. Calcula la frecuencia relativa en cada caso. ¿Cuál de los dos resultados es más probable?

⑥ Cuatro amigos van a jugar al tiro al blanco con dardos. En el entrenamiento consiguieron estos resultados:

	Mariana	**Sara**	**Juan**	**Camilo**
No. de Lanzamientos	18	22	21	28
No. de Aciertos	3	5	4	6

a) Calcula las frecuencias relativas de aciertos para cada uno.
b) Ordena a los amigos según sea mayor o menor la probabilidad de estos resultados.

⑦ Indica la probabilidad de estos resultados:

a) Obtener un número par al lanzar un dado.
b) Conseguir el premio de un sorteo habiendo comprado todas las boletas.
c) Sacar sello al echar una moneda al aire.

⑧ Juan, Mariana y Camilo lanzan varias veces una moneda al aire y ésto es lo que obtuvieron:

Juan: **"mi frecuencia relativa de caras fue $\frac{18}{40}$ ".**

Mariana: **"la mía fue $\frac{42}{80}$ ".**

Lina: **"la mía, $\frac{97}{200}$ ".**

Camilo: **"Obtuve $\frac{540}{1000}$ ".**

a) ¿Cuántas veces realizó la experiencia cada uno?
b) ¿Quién obtuvo más éxito al sacar caras?

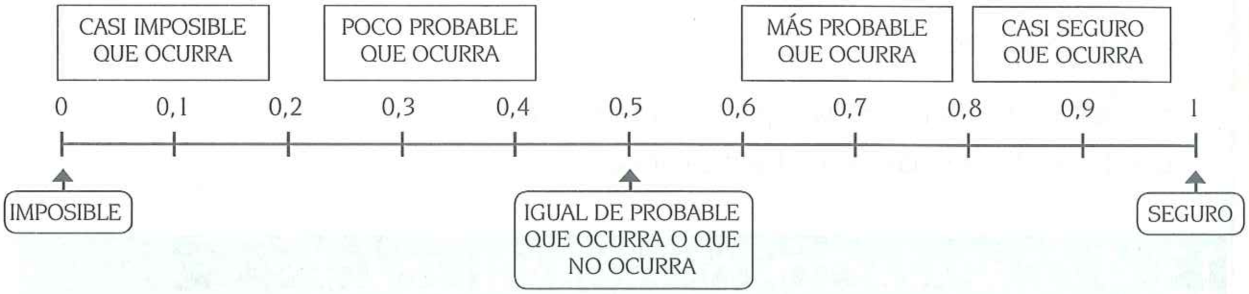
13.4 COMPARACIÓN DE PROBABILIDADES

PRIMERA EXPERIENCIA

- Santiago y Camila van a jugar parqués. Para comenzar el juego, Santiago dice que hay que sacar 6 en el dado; pero, Camila dice que ella prefiere sacar 3, porque piensa que de este modo tiene ventaja. ¿Tiene razón Camila? ¿Podemos dejar que Camila comience a mover las fichas cuando le salga un 3, o es necesario que los dos jueguen a sacar el mismo número?
- Daniel, que está observando el juego, les propone hacer un experimento para resolver la discusión. Piensa que así podrá saberse quién tiene ventaja.
- Con este fin, les pide que traten de adivinar cuántas veces aproximadamente, saldrá el 3 y cuántas el 6, si lanzan el dado 24 veces. Les pide que completen la siguiente tabla:

RESULTADO	RECUENTO	FRECUENCIA ABSOLUTA	FRECUENCIA RELATIVA	NÚMERO ESPERADO DE VECES
1				
2				
3				
4				
5				
6				
TOTAL	**24**	**24**	**1**	**24**

- Ahora, lanzan el dado 24 veces y anotan los resultados en la tabla. Calcula la frecuencia relativa de obtener 6 y la de obtener 3. ¿Cuál es mayor? Completa todas las columnas de la tabla.
- Para medir la mayor o menor posibilidad de que ocurra un suceso en un experimento, le asignamos un número entre 0 y 1, llamado su **probabilidad**. Asignamos una **probabilidad 0** a un suceso que nunca puede ocurrir, por ejemplo, que salga un 7 al lanzar el dado. Asignamos una **probabilidad 1** a un suceso que ocurre siempre que se realiza el experimento; por ejemplo, al lanzar una moneda es seguro que saldrá **"cara"** o **"sello".** A cualquier otro suceso distinto del **"imposible"** o del **"seguro"** se le asigna un número entre 0 y 1: Observa la siguiente recta donde se ha distribuído la probabilidad de un evento entre 0 y 1.



- ¿Cuál de las siguientes afirmaciones te parece verdadera cuando lanzamos un dado?

  a) La probabilidad de obtener un 3 es mayor que la de obtener un 5.
  b) La probabilidad de obtener un 5 es mayor que la de obtener un 3.
  c) La probabilidad de obtener un 1 es mayor que la de obtener un 5.
  d) La probabilidad de obtener un 5 es igual que la de obtener un 3.
  e) La probabilidad de obtener un 1 es mayor que 0,5.
  f) La probabilidad de obtener un 1 es menor que 0,5.

APRENDAMOS...

- La **PROBABILIDAD** de un suceso cualquiera es un número comprendido entre 0 y 1.
- La probabilidad de ocurrencia de un suceso coincide con su frecuencia relativa después de repetir la experiencia un número grande de veces.

SEGUNDA EXPERIENCIA

- Para realizar esta experiencia, los alumnos formarán grupos de 3, uno de ellos tendrá una moneda de $200; el segundo, una tabla como la siguiente para el suceso "sello"

No. DE LANZAMIENTOS	SALE "SELLO"	SALE "SELLO"	SALE "SELLO"
	RECUENTO	FRECUENCIA ABSOLUTA	FRECUENCIA RELATIVA
20			
40			
60			
80			
100			
120			
140			
160			
180			
200			

y el tercer alumno, otra tabla similar a la anterior, pero para el suceso "cara".

- Empieza el juego. El alumno encargado de la moneda la lanza y los otros dos compañeros anotan los resultados de los sucesos "cara" o "sello", después de 20, 40, 60... 200 lanzamientos

- Terminado el experimento, el profesor solicita a uno de los grupos que presente su informe. Este fue el resultado:

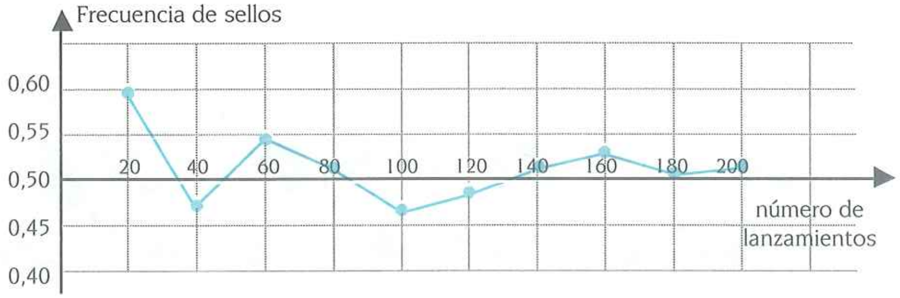
No. DE LANZAMIENTOS	SALE "SELLO"		SALE "CARA"	
	FRECUENCIA ABSOLUTA	FRECUENCIA RELATIVA	FRECUENCIA ABSOLUTA	FRECUENCIA RELATIVA
20	12	0,6	8	0,4
40	17	0,425	23	0,575
60	33	0,55	27	0,45

No. DE LANZAMIENTOS	SALE "SELLO"		SALE "CARA"	
	FRECUENCIA ABSOLUTA	FRECUENCIA RELATIVA	FRECUENCIA ABSOLUTA	FRECUENCIA RELATIVA
80	41	0,5125	39	0,4875
100	47	0,47	53	0,53
120	58	0,483	62	0,516
140	73	0,521	67	0,479
160	84	0,525	76	0,475
180	91	0,505	89	0,494
200	102	0,51	98	0,49

- ¿A qué valor se aproximan, por exceso o por defecto, la frecuencias relativas de los sucesos "cara" y "sello"? ¿Le ocurre lo mismo a los demás grupos de la clase?
- Cuando todos los alumnos presentaron sus tablas, observamos que las frecuencias relativas de los sucesos **SELLO** y **CARA** tomaron valores aproximados, por exceso o por defecto, al número **0,5** con variaciones cada vez más pequeñas.
- Este número al que se acerca la frecuencia relativa de un suceso cuando el número de pruebas es muy grande, lo denominamos **probabilidad del suceso.**
- Como vemos, los sucesos "sale cara" o "sale sello" al lanzar una moneda tienen la **misma probabilidad** de salir y escribimos:

$$\mathbf{P(cara)} = \frac{1}{2} = \mathbf{0{,}5} \quad ; \quad \mathbf{P(sello)} = \frac{1}{2} = \mathbf{0{,}5}$$

- El primer grupo que presentó el informe de la tabla de frecuencias absolutas y relativas elaboró este gráfico, correspondiente al **polígono de frecuencias relativas** del suceso "sello":



- Luego, el profesor escoge al azar los polígonos de frecuencias relativas de otros 2 grupos:

- Como vemos, en todos los trabajos presentados, los valores tienden a estabilizarse al rededor de 0,5 y el polígono de frecuencias se hace "menos brusco" en sus cambios a medida que el número de pruebas es más grande.

APRENDAMOS...

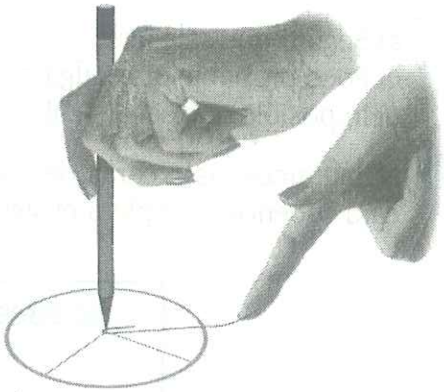
PROBABILIDAD DE UN SUCESO

- La **FRECUENCIA RELATIVA** de un suceso se aproxima a su **PROBABILIDAD** a medida que el número de experimentos aumenta.

EJERCICIO 13-3

① Realiza el siguiente experimento:

- Dibuja una circunferencia de radio 5cm, en un pedazo de cartulina y divídela en 4 sectores circulares iguales; luego, pinta 3 de azul y 1 de gris.
- Desenrolla un clip, dejando intacta la última curva, coloca la punta de un lápiz sobre el centro de la circunferencia y el clip a su alrededor. Has construído una ruleta, como la que muestra la figura siguiente.
- Para que la ruleta funcione basta darle un golpe al extremo del clip con el dedo índice.



- Sin hacer girar la ruleta, ¿cuál es la frecuencia esperada para el suceso "azul" y cuál para el suceso "gris"?
- Ahora, gira la ruleta 50 veces y confirma tu pronóstico completando la tabla siguiente:

No. DE GIROS	FRECUENCIA RELATIVA DEL AZUL	FRECUENCIA RELATIVA DEL GRIS	P (A)	P (G)
5				
10				
15				
20				
25				
30				

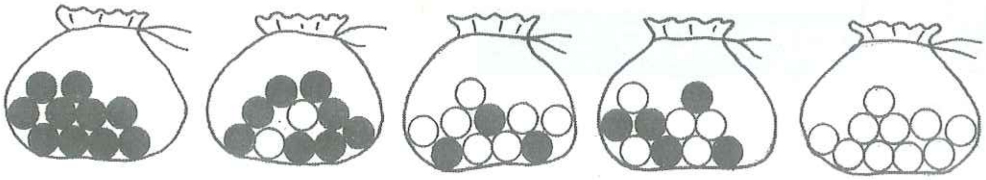
- Dibuja en un mismo diagrama, el polígono de frecuencias relativas (probabilidad) de ambos sucesos. ¿Hacia dónde tiende a estabilizarse la gráfica del suceso "azul"? ¿Y hacia dónde tiende a estabilizarse la gráfica del suceso "gris"?

② Hemos tirado 5 veces una moneda de $500. Salieron 5 caras. ¿Qué es más probable que salga en el sexto lanzamiento: cara o sello?

③ Una urna tiene 10 bolas azules y 4 blancas. Se extrae al azar una bola. Halla las siguientes probabilidades:

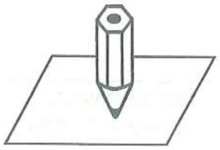
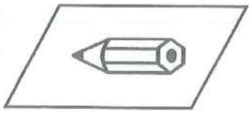
a) P (verde)
b) P (azul)
c) P (blanca)
d) P (no azul)
e) P (no blanca)

④ Las siguientes bolsas contienen bolas azules o blancas. Indica a cuál bolsa se le puede asociar la frase:



a) Seguro que sale azul
b) Casi imposible que salga blanca
c) Poco probable que salga azul
d) Más probable que salga blanca
e) Imposible que salga azul
f) Igual de probable que salga azul o blanca

⑤ Numeramos las 6 caras de un lápiz. Lo hacemos rodar y observamos el número de la cara superior. Completa el siguiente cuadro:

SUCESO	PROBABILIDAD
0	
Par	
Menor que 5	
Obtener 1 ó 6	
El lápiz quedará así 	
El lápiz quedará así 	

TALLER DE REPASO DE LA UNIDAD 13

1. Contesta:

a) ¿Qué es un experimento aleatorio?
b) ¿Qué es un espacio muestral?
c) ¿Cuándo dos sucesos son equiprobables?
d) ¿Cuándo un suceso es seguro? ¿Imposible? ¿Poco probable? ¿Poco seguro?
e) Si en un experimento aleatorio todos los n sucesos son equiprobables, ¿qué valor toma la probabilidad de un suceso? ¿cuál es la probabilidad del suceso seguro? ¿Y la del suceso imposible?
f) ¿Qué relación existe entre la probabilidad de un suceso y su frecuencia relativa?
g) ¿Qué dice la Regla de Laplace?
h) Si lanzamos 200 veces un dado y dibujamos el diagrama del polígono de frecuencias relativas del evento "sale 5", ¿en qué valor tiende a estabilizarse la gráfica? ¿por qué?

2. Una ruleta como la de los casinos tiene 37 agujeros numerados del 0 al 36. Teniendo en cuenta los siguientes sucesos:

A = "salir el 15" ; **B = "salir múltiplo de 11"**
C = "salir par" ; **D = "salir divisor de 3"**

Determina el espacio muestral E y calcula:

a) P (A) b) P (B) c) P (C) d) P (D) e) P (E)

3. Se extrae, sin mirar, una carta de la baraja española. Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) Sea una copa
b) Sea un caballo
c) Sea un caballo de copa

4. Una bolsa contiene 5 bolas rojas, 3 verdes y 2 azules. Si extraemos una bola sin mirar, halla el espacio muestral E y calcula:

a) P (azul) b) P (roja) c) P (verde)
d) P (no azul) e) P (no roja) f) P (no verde)

5. En una bolsa hay guardadas 10 bolas numeradas del 1 al 10. Se saca una bola al azar. Determina el espacio muestral y halla la probabilidad de los siguientes sucesos:

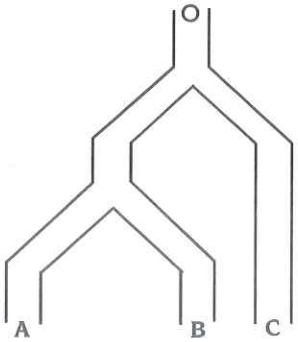
a) Que salga un número múltiplo de 2. b) Que salga un número múltiplo de 3.
c) Que salga un número múltiplo de 5. d) Que salga un número mayor que 5.
e) Que salga un número menor que 5.

6. Al lanzar una chincheta puede ocurrir que caiga con la punta hacia arriba o con la punta hacia abajo. Efectúa 100 lanzamientos de una chincheta y completa la siguiente tabla:

NÚMERO DE LANZAMIENTOS	NÚMERO DE CHINCHETAS CON LA PUNTA HACIA ARRIBA	FRECUENCIA RELATIVA DE LA PUNTA HACIA ARRIBA
10		
20		
30		
40		
50		
60		
70		
80		
90		
100		

Ahora, dibuja el polígono de frecuencias relativas. ¿Qué observas? Justifica tu respuesta.

7. Por la parte superior del laberinto se introduce una bola.



Contesta Verdadero o Falso a las siguientes afirmaciones:

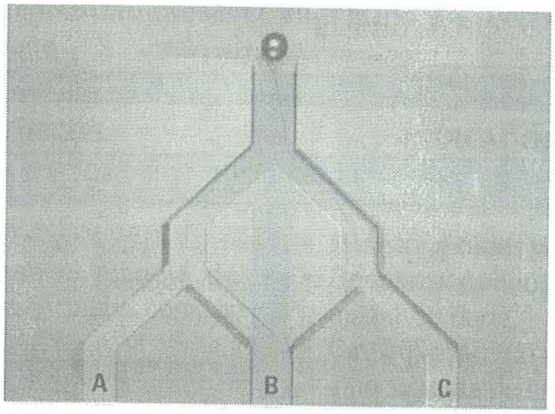
a) Es igualmente probable que la bolsa recorra los caminos A y B.
b) La tercera parte de las veces la bola recorrerá el camino C.
c) El 25% de las veces recorrerá el camino B.

PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS SABER

Los ejercicios 1 a 5 se resuelven con base en el siguiente enunciado:

EL LABERINTO

Dejamos caer una bolsa por el laberinto y observamos qué salida toma:



1. Escribe el espacio muestral.
2. ¿Cuántos caminos conducen a A? ¿a B? ¿a C?
3. Del total de caminos, indica la fracción de los que conducen a cada salida.
4. Completa:

SUCESO	PROBABILIDAD
A	
B	
C	

5. Introducimos 500 bolas. Se espera que, aproximadamente:

   - acaben en A: ☐
   - acaben en B: ☐
   - acaben en C: ☐

Núcleo Temático

14

GEOMETRÍA TRANSFORMACIONAL

LOGROS GENERALES

- Revisar algunos movimientos rígidos en el plano, tales como simetrías, traslaciones y rotaciones y las propiedades que se conservan en cada uno.
- Identificar la homotecia como un movimiento en el plano que produce una figura de la misma forma pero distinto tamaño

DIMENSIONES

LOGROS ESPECÍFICOS	INDICADORES DE LOGRO
Corporal: • Mejorar la habilidad en el manejo de instrumentos como: regla, escuadra, compás y transportador.	• Mide longitudes y ángulos. • Desplaza polígonos en una dirección y magnitud dada. • Gira polígonos un ángulo dado con respecto a un sistema de referencia.
Comunicativa: • Describir las características de movimientos rígidos en el plano tales como: simetrías, traslaciones, rotaciones y homotecias.	• Dado un movimiento rígido en el plano, explica las características del movimiento y los resultados que se producen.
Cognitiva • Dibujar la figura simétrica de otra con respecto a un punto y a una recta. • Efectuar traslaciones y rotaciones de figuras. • Identificar homotecias y polígonos semejantes. • Formular y resolver problemas en los que deba aplicarse el teorema de Thales.	• Dada una figura plana, dibuja su simétrica respecto a un punto y a una recta. • Dada una figura y las condiciones adecuadas, la traslada y la gira. • Determina la figura semejante de otra con un factor de conversión dado.
Estética: • Interpretar gráficamente problemas de simetría, traslaciones, rotaciones y semejanza. • Dibujar polígonos semejantes en el plano usando el concepto de homotecia.	• Ilustra los enunciados de los problemas dibujando figuras que tengan que ver con los mismos. • Identifica los elementos homólogos en dos polígonos semejantes.
Ética-actitudinal: • Reconocer la contribución de la matemática en el desarrollo de habilidades de pensamiento.	• Demuestra interés por aprender. • Presenta sus trabajos a tiempo y en orden. • Comparte con sus compañeros sus habilidades y conocimientos.

EVALUACIÓN

ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS

14.1 ¿SABÍAS QUE...?

Hasta el año 1200 después de Cristo, se usó en Europa la numeración romana. Por esa época, un mercader de Pisa, Leonardo Pisano, más conocido como Fibonacci, al volver de un largo viaje por Africa y Oriente Medio, escribió su libro titulado *Liber Abaci* donde exponía y proponía emplear el sistema de numeración utilizado por los árabes, que a su vez lo habían aprendido de los hindúes. Sus ventajas más importantes eran la utilización del cero y el sistema posicional de numeración.

La obra de Leonardo Pisano tuvo que esperar a la invención de la imprenta para que llegara a ser conocida en toda Europa. Es interesante señalar que ya los mayas, en el siglo V, tenían la noción del cero, número que empleaban en su sistema de numeración vigesimal.

El número cero es una de las más grandes invenciones del genio humano, ya que facilita la ejecución de las operaciones aritméticas. Su introducción en Europa permitió el progresivo abandono de la numeración romana vigente hasta la Edad Media.

EJERCICIO 14-1

COMPRENSIÓN DE LECTURA: Explicación. Lee nuevamente el fragmento anterior y luego, encierra en un círculo la letra que corresponda a la respuesta correcta:

1. El sistema de numeración arábigo realmente fue ideado por:

   a. Los mayas.
   b. Los romanos.
   c. Los hindúes.
   d. Los musulmanes.

2. Respecto del **número cero,** en la lectura se dice todo lo siguiente, menos:

   a. Es una de las grandes creaciones de la mente humana.
   b. Los mayas lo utilizaron en su primitivo sistema de numeración.

c. Hace más fáciles los trabajos con operaciones matemáticas.
d. Pudo propagarse su uso a través de la imprenta.

3. De Leonardo de Pisa podemos decir que:

   a. Trajo de la India a Europa un nuevo sistema de numeración.
   b. Introdujo en Europa el sistema de numeración arábigo.
   c. Antes de la aparición de la Imprenta dio a conocer su obra en oriente.
   d. Por su condición de mercader conoció Africa, Europa y Asia.

4. Del texto anterior podemos inferir que:

   a. La numeración arábiga es más funcional que la romana.
   b. Los mayas poseían un conocimiento profundo de las matemáticas.
   c. Ya no se considera a los romanos como los precursores del sistema numérico.
   d. Hay serias coincidencias entre los conocimientos matemáticos de una culturas con otras.

5. En el escrito anterior el autor trata de relievar:

   a. Los conocimientos matemáticos de los mayas.
   b. El contenido científico de la obra de Leonardo de Pisa.
   c. La importancia del número cero en el cálculo mercantil.
   d. La trayectoria matemática de Leonardo de Pisa.

14.2 SIMETRÍAS, TRASLACIONES Y ROTACIONES EN EL PLANO

- En cursos anteriores estudiamos algunos movimientos de figuras planas cuyo resultado es otra figura plana que tiene la **misma forma** y el **mismo tamaño** de la figura original; es decir, la figura original y la que resulta después de realizar el movimiento son **congruentes**. Estos movimientos son: las **simetrías**, las **traslaciones** y las **rotaciones.**

1. SIMETRÍAS:

RECORDEMOS

- Existen dos tipos de simetrías: **Simetría Central** y **Simetría Axial.**
  - **Simetría Central:** es toda simetría respecto a un **punto** llamado **Centro de Simetría.**
  - **Simetría Axial:** es la que se realiza con relación a una **recta** llamada **Eje de Simetría.**
- Dos figuras simétricas con relación a un punto o con relación a una recta son **CONGRUENTES.**

- Lo único que varía cuando se realiza una simetría es la posición de las figuras.
- En una **simetría axial**, los segmentos que unen puntos simétricos son **perpendiculares** al eje de simetría.
- La figura simétrica de otra también se llama su **IMAGEN.**

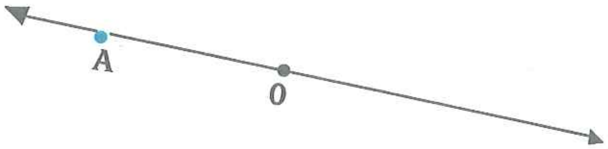
EJEMPLO 1:

Determinemos el simétrico del punto A con respecto al centro de simetría 0.

SOLUCIÓN:

El procedimiento es el siguiente:

1. Trazamos la recta que pasa por los puntos A y 0

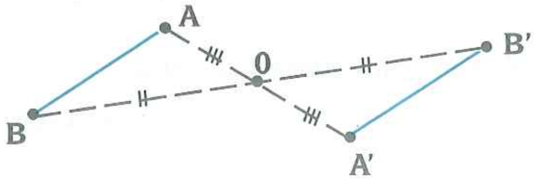


2. Luego, con el compás o con la regla, localizamos un punto A', sobre la semirrecta opuesta a $\overrightarrow{0A}$ y de tal manera que $\overline{0A} \cong \overline{0A'}$.

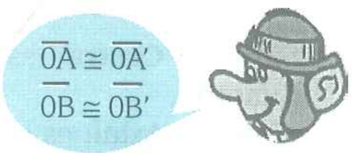
EJEMPLO 2:

Hallemos el simétrico de un segmento $\overline{AB}$ con relación a un punto 0.

SOLUCIÓN:



$\overline{A'B'}$ es el simétrico de $\overline{AB}$



- Primero hallamos el simétrico de A con relación al punto 0. Este punto es A'.
- A continuación, hallamos el simétrico de B con relación al punto 0. Este punto es B'.

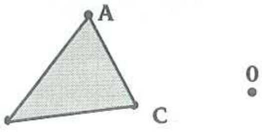
- Finalmente trazamos $\overline{A'B'}$ que es el simétrico de $\overline{AB}$ con relación al punto 0. Compruebe que $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$.

EJEMPLO 3:

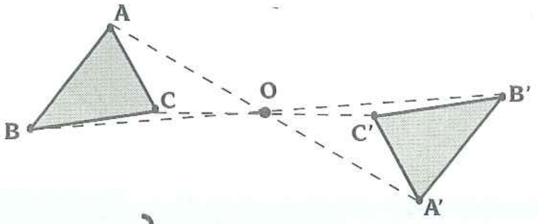
Hallemos el simétrico del ΔABC con relación al punto 0.

SOLUCIÓN:

- Queremos hallar el simétrico del ΔABC con relación al punto 0.



Es fácil: basta que hallemos el simétrico de cada vértice del triángulo con respecto al punto 0; así:



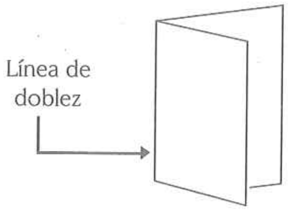
$$\left.\begin{array}{l} \text{A' es el simétrico de A: } \overline{A0} \cong \overline{0A'} \\ \text{B' es el simétrico de B: } \overline{B0} \cong \overline{0B'} \\ \text{C' es el simétrico de C: } \overline{C0} \cong \overline{0C'} \end{array}\right\} \Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$$

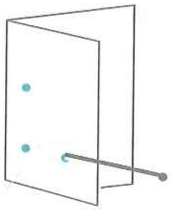
EJEMPLO 4:

Hallemos el simétrico de un polígono con relación a una recta.

SOLUCIÓN:

- Coge una hoja de papel y dóblala. Hazle tres huecos con un alfiler.



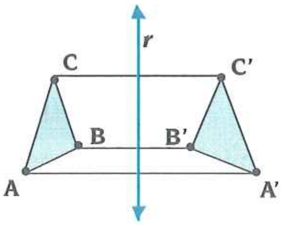


- Desdobla la hoja, marca la línea del doblez de color y nombra los huecos con las letras A, B, C, A', B' y C'.
- A continuación, haz lo siguiente:
  1. Traza los triángulos ABC y A'B'C' y píntalos.
  2. Utiliza nuevamente la línea de doblez, dobla la hoja y responde:

a) ¿Es med $\overline{AB}$ = med $\overline{A'B'}$, med $\overline{BC}$ = med $\overline{B'C'}$ y med $\overline{AC}$ = med $\overline{A'C'}$?

b) ¿Es el $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$?

3. Pega en tu cuaderno la figura con los dos triángulos y la línea de doblez. Compárala con esta figura:



- La línea que pintaste de color es el EJE DE SIMETRÍA.
- Los triángulos ABC y A'B'C' son simétricos respecto a la línea pintada de color.

4. Responde:
   a) ¿Es $\overline{CC'} \perp \overleftrightarrow{r}$? ¿$\overline{BB'} \perp \overleftrightarrow{r}$? ¿$\overline{AA'} \perp \overleftrightarrow{r}$?
   b) ¿Divide $\overleftrightarrow{r}$ en parte iguales a $\overline{AA'}$, a $\overline{BB'}$ y a $\overline{CC'}$? Explica.
   c) ¿Cómo se halla el simétrico de un punto con respecto a una recta? ¿Y el simétrico de un polígono con respecto a una recta?

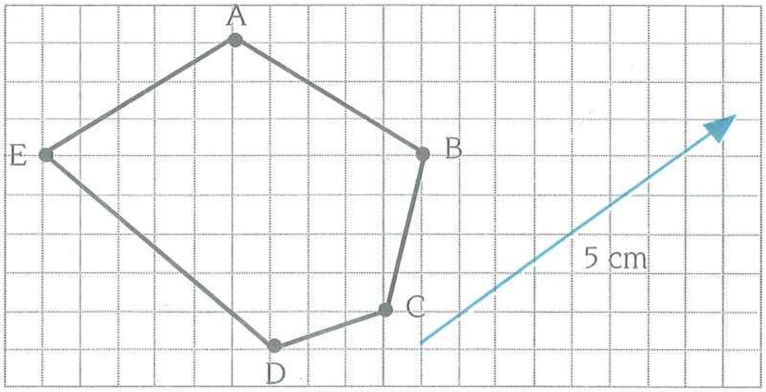
2. TRASLACIONES

RECORDEMOS

- Una **TRASLACIÓN** es un desplazamiento de un objeto en línea recta, sin giros.
- Para realizar una traslación de una figura, utilizamos **FLECHAS PARALELAS** de igual longitud y del mismo sentido. Estas flechas se llaman **VECTORES DE TRASLACIÓN.**
- La figura que se obtiene al trasladar otra es **CONGRUENTE** con ésta.

EJEMPLO:

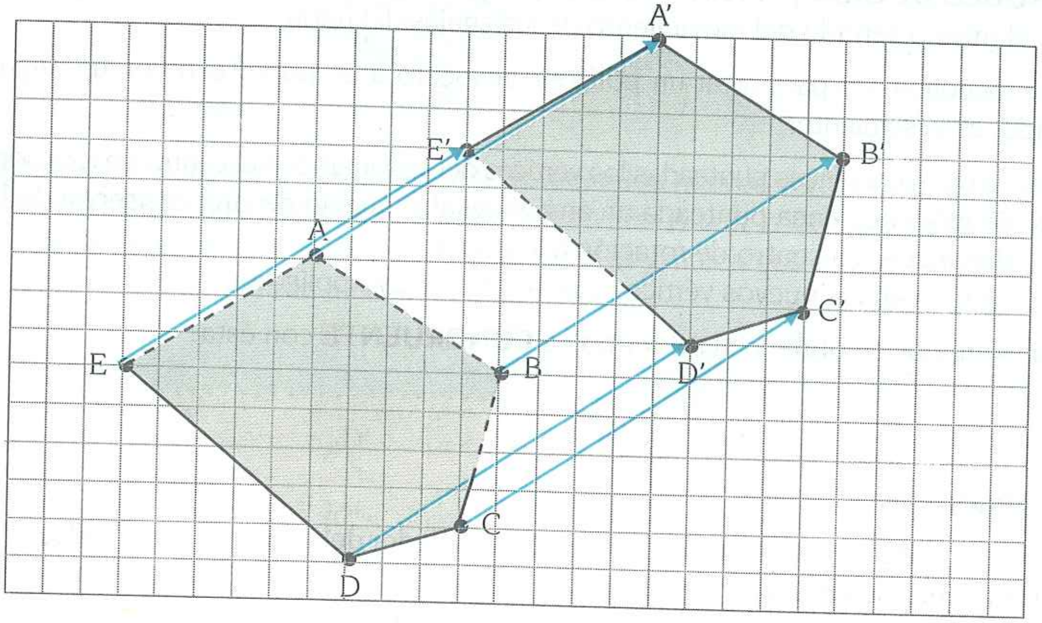
Traslademos el polígono ABCDE en la dirección y longitud indicadas por el vector.



SOLUCIÓN:

Procedemos así:

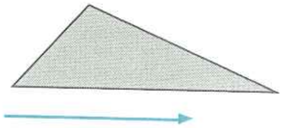
- Llevamos el vector moviéndolo paralelamente a sí mismo, de manera que su origen coincida con cada vértice del polígono:



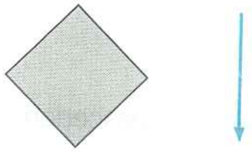
- En el punto extremo de cada flecha, escribimos las letras A', B', C', D' y E' según corresponda. Finalmente unimos los puntos A', B', C', D' y E' para formar el polígono A'B'C'D'E'. Este polígono es la **TRASLACIÓN** del polígono ABCDE en la dirección y longitud indicadas por el vector.

- Traslada cada una de las siguientes figuras 5 cm en la dirección indicada por la flecha:

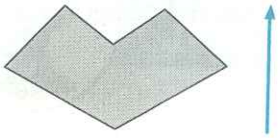
a)



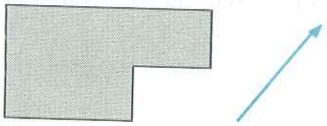
b)



c)



d)



3. ROTACIONES

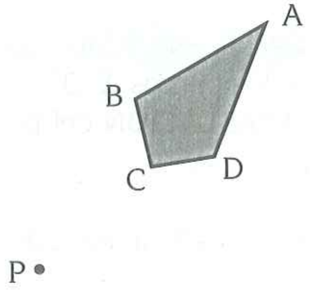
RECORDEMOS

- **ROTAR** una figura, en su propio plano, consiste en girarla un ángulo dado alrededor de un punto fijo determinado.

- El punto fijo se llama **CENTRO DE ROTACIÓN** y puede ser un punto de la figura o exterior a ella.
- Para **ROTAR** un polígono es necesario conocer el **CENTRO DE ROTACIÓN**, el **ÁNGULO DE GIRO** y el **SENTIDO** (contrario al movimiento de las agujas del reloj o en el mismo sentido del movimiento de las agujas del reloj).
- El procedimiento para rotar un polígono respecto a un punto exterior, un ángulo dado, es el siguiente:
  a) Se unen con líneas punteadas los vértices del polígono con el centro de rotación.
  b) Se rota cada línea punteada un ángulo igual al ángulo de giro, conservando las distancias del centro de rotación a los vértices.
  c) Se marcan los nuevos vértices y se traza el nuevo polígono.
- La figura que se obtiene al rotar otra es **CONGRUENTE** con ésta.

EJEMPLO:

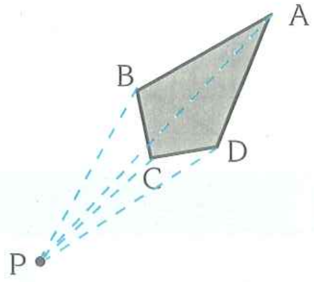
Giremos el polígono ABCD un ángulo de 120° alrededor del punto P y en sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj.



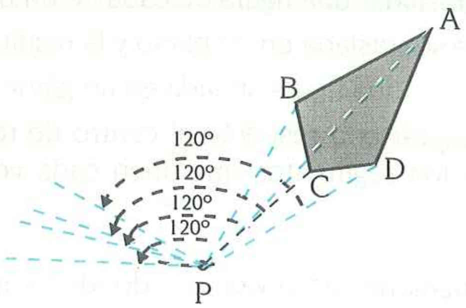
SOLUCIÓN:

Para resolver el problema procedemos así:

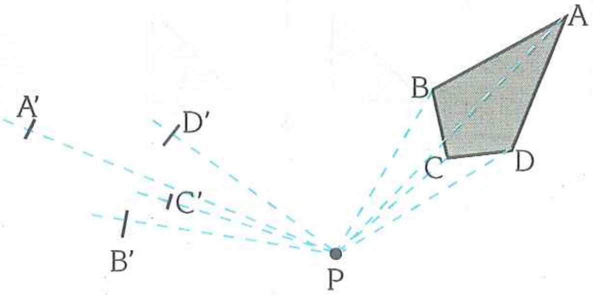
- Trazamos segmentos desde el punto P a cada uno de los vértices del polígono.



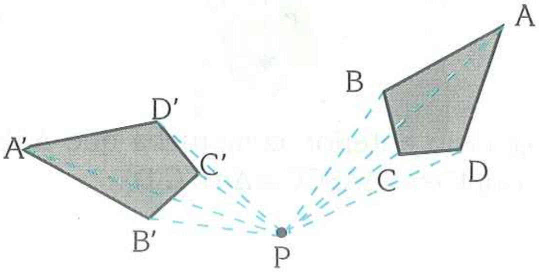
- El ángulo de 120° para rotar cada vértice lo medimos con el transportador tomando como base los segmentos que acabamos de trazar.



- Luego, trazamos las rectas sobre las que estarían los nuevos vértices después de realizar la rotación. Con el compás hacemos centro en P, con la otra punta del compás medimos la distancia de P a cada uno de los vértices y marcamos esta distancia en cada una de las rectas donde van a estar las imágenes.



- Finalmente, trazamos los segmentos que unen los vértices A', B', C' y D' y tendremos el polígono resultante mediante la rotación indicada.



EJERCICIO 14-2

❶ Responde:

a) ¿Cuántos tipos de simetría existen y cuáles son?.

b) ¿Qué entiendes por simetría central? ¿y por simetría axial?.

c) ¿Cómo son entre sí dos figuras simétricas respecto a un punto 0? ¿Y respecto a un eje de simetría?.

d) ¿Qué es lo único que varía en las simetrías?.

e) ¿Cómo es el segmento que une dos puntos simétricos respecto al eje de simetría?

f) ¿A qué se llama IMAGEN de una figura respecto a un punto o a un eje de simetría?

g) ¿Qué se necesita para trasladar una figura ubicada en un plano dado?

h) ¿Cómo son la figura que se traslada en un plano y la resultante?

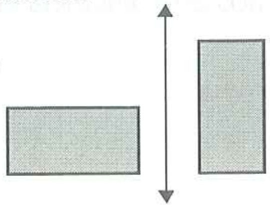
i) ¿Qué se necesita para rotar una figura situada en un plano dado?

j) Si un polígono se hace girar con respecto al centro de rotación un ángulo de 70°, ¿con qué ángulo rotan los segmentos que unen cada vértice del polígono con el centro de rotación?

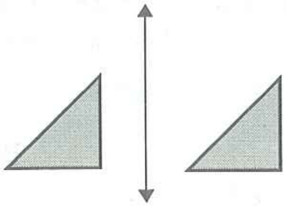
2 Nombra tres objetos o situaciones de la vida real donde se aprecie la simetría central y tres donde se aprecie la simetría axial.

3 Indica cuáles de las siguientes figuras son simétricas con relación al eje de simetría indicado.

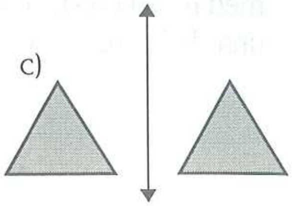
a)



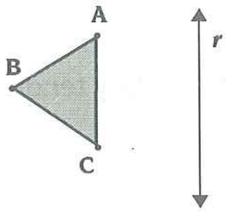
b)

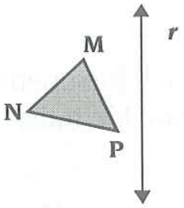


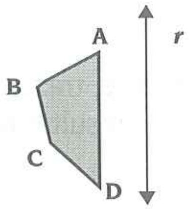
c)



4 Halla la figura simétrica de las siguientes, respecto a la recta $\overleftrightarrow{r}$:





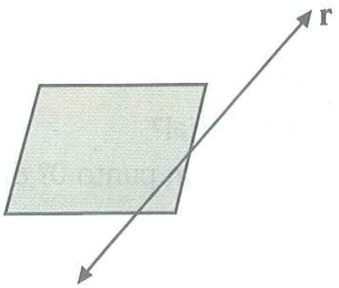


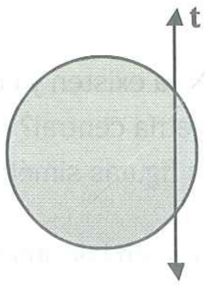
5 Teniendo en cuenta el ejercicio anterior, comprueba que $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$, que el $\Delta MNP \cong M'N'P'$ y que el cuadrilátero $\Delta ABCD \cong \Delta A'B'C'D'$.

6 Responde:

¿Si un polígono se hace girar con respecto al centro de rotación un ángulo de 110°, ¿cuánto rotan los segmentos que unen cada vértice del polígono con el centro de rotación?.

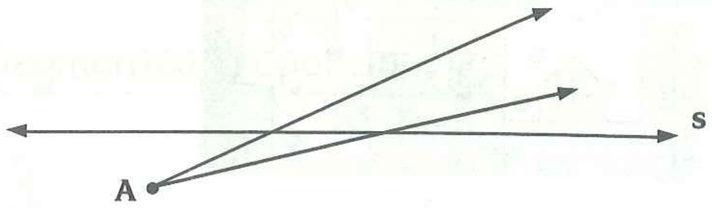
7 Dibuja las figuras simétricas respecto de las rectas dadas:



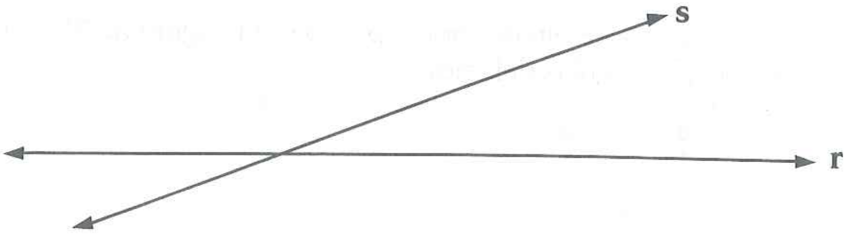


¿Tiene el conjunto formado por una figura y su simétrica un eje de simetría?

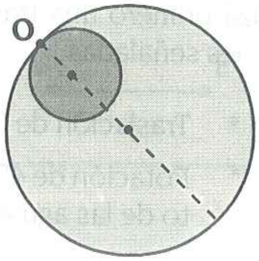
⑧ Dibuja el simétrico del ángulo A con respecto a la recta $\overleftrightarrow{s}$:



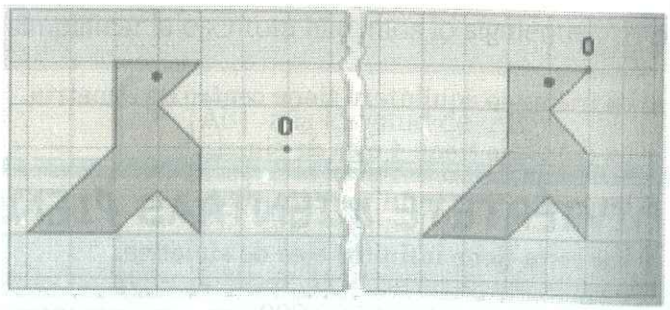
⑨ Dibuja la recta simétrica de **s** respecto de **r**, sólo con regla y compás.
Idea: **s** y su simétrica forman con **r** el mismo ángulo.



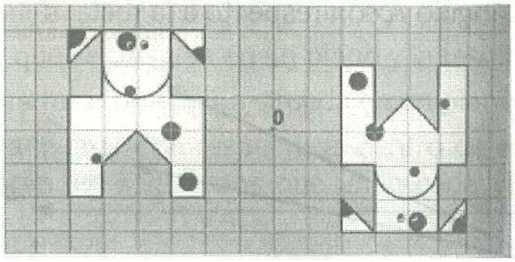
⑩ Dibuja la figura simétrica con respecto al punto O. Comienza hallando el simétrico del centro de la circunferencia grande.



⑪ En cada caso dibuja la figura simétrica respecto de O:



⑫ Al dibujar el simétrico del perro de la izquierda respecto de O, Mariana cometió varios errores. Señala los errores y dibuja la figura de forma correcta.



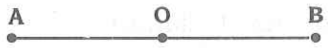
13 Los vértices de un cuadrilátero ABCD son los puntos A(2,3), B(4,-1), C(-1,-3) y D(-2,1). Trasladar este cuadrilátero en la dirección indicada por un vector de longitud 5 cm y que forma con la horizontal un ángulo de 120°. Los ejes cartesianos fueron graduados en centímetros.

14 En cada caso, gira el segmento $\overline{AB}$ alrededor del punto 0 un ángulo de 30°, en sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj.

a)

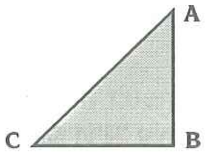
b)

c)



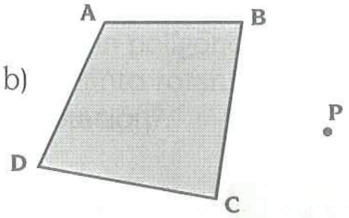
15 En los siguientes ejercicios realiza primero una traslación y luego una rotación de las figuras indicadas en las condiciones señaladas.

a)



- * Traslación de 5 cm hacia la derecha
- * Rotación de 45° en sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj.

b)



- * Rotación de 60°, en el mismo sentido del movimiento de las agujas del reloj, alrededor del punto P.
- * A continuación, una traslación de 6 cm vertical hacia abajo.

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 1

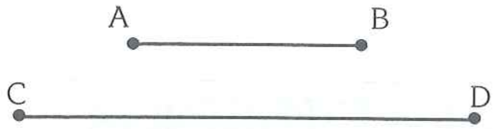
Un benefactor hace una donación de $4'500.000 para repartir entre tres instituciones. La primera recibe $\frac{2}{9}$ de esa cantidad, la segunda, recibe $\frac{1}{5}$ parte de lo que recibió la primera y la tercera recibe el resto. ¿Cuánto recibirá cada una? .

14.3 HOMOTECIA Y SEMEJANZA

14.3.1. Segmentos Proporcionales

PRIMERA EXPERIENCIA

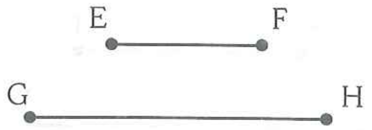
- Mide en mm las longitudes de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ de la figura siguiente:



- Halla la razón:

$$\frac{\text{longitud de } \overline{AB}}{\text{longitud de } \overline{CD}} = \underline{\qquad\quad} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

- Ahora mide en mm las longitudes de los segmentos $\overline{EF}$ y $\overline{GH}$ de la figura siguiente:



- Halla la razón:

$$\frac{\text{longitud de } \overline{EF}}{\text{longitud de } \overline{GH}} = \underline{\qquad\quad} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

- Comprueba que las razones (1) y (2) son iguales.
- Ahora bien, para simplificar la escritura hagamos lo siguiente:

Llamemos:
- $|\overline{AB}|$ a la longitud de $\overline{AB}$
- $|\overline{CD}|$ a la longitud de $\overline{CD}$
- $|\overline{EF}|$ a la longitud de $\overline{EF}$
- $|\overline{GH}|$ a la longitud de $\overline{GH}$

- Como las razones (1) y (2) son iguales, entonces podemos escribir que:

$$\frac{|\overline{AB}|}{|\overline{CD}|} = \frac{|\overline{EF}|}{|\overline{GH}|}$$

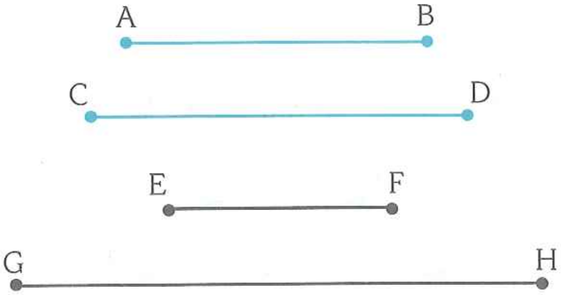
y decimos que los segmentos $\overline{\mathbf{AB}}$ y $\overline{\mathbf{CD}}$ son **PROPORCIONALES** a los segmentos $\overline{\mathbf{EF}}$ y $\overline{\mathbf{GH}}$.

APRENDAMOS...

Dos segmentos $\overline{\mathbf{AB}}$ y $\overline{\mathbf{CD}}$ son **PROPORCIONALES** a los segmentos $\overline{\mathbf{EF}}$ y $\overline{\mathbf{GH}}$ si la razón $\frac{|\overline{AB}|}{|\overline{CD}|}$ es igual a la razón $\frac{|\overline{EF}|}{|\overline{GH}|}$; es decir si $\frac{|\overline{AB}|}{|\overline{CD}|} = \frac{|\overline{EF}|}{|\overline{GH}|}$ es una proporción.

SEGUNDA EXPERIENCIA

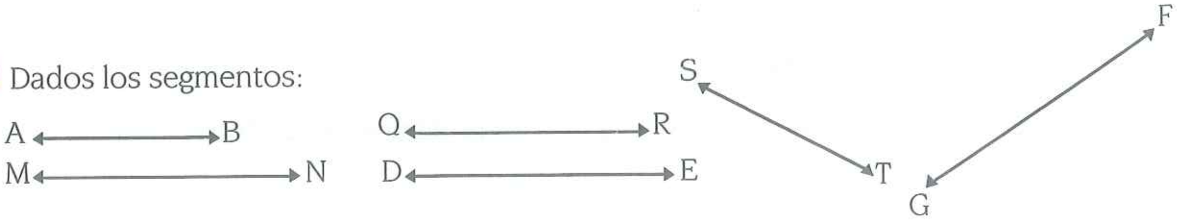
- Mide los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$ y $\overline{GH}$ de la figura siguiente.



- Calcula las razones $\frac{|\overline{AB}|}{|\overline{CD}|}$ y $\frac{|\overline{EF}|}{|\overline{GH}|}$. ¿Son iguales estas razones?
- ¿Son proporcionales los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ con los segmentos $\overline{EF}$ y $\overline{GH}$? ¿Por qué?
- Dibuja dos segmentos $\overline{MN}$ y $\overline{PQ}$ que sean proporcionales a otros dos segmentos $\overline{RS}$ y $\overline{XY}$.

EJERCICIO 14-3

① Dados los segmentos:



Completa: a) $|\overline{AB}|$ =____ mm c) $|\overline{QR}|$ =____ mm e) $|\overline{ST}|$ =____ mm

b) $|\overline{MN}|$ =____ mm d) $|\overline{DE}|$ =____ mm f) $|\overline{GF}|$ =____ mm

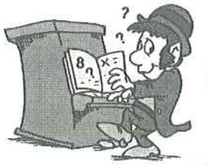
② Responde:

a) ¿Por qué los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{MN}$ no son proporcionales a los segmentos $\overline{QR}$ y $\overline{DE}$?. Explica.

b) ¿Son los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{MN}$ proporcionales a los segmentos $\overline{ST}$ y $\overline{GF}$? ¿Por qué?.

c) ¿Cuándo dos segmentos son proporcionales a otros dos?.

③ Dibuja dos segmentos $\overline{LN}$ y $\overline{PQ}$ que sean proporcionales a los segmentos $\overline{QR}$ y $\overline{DE}$. del problema ①.



DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 2

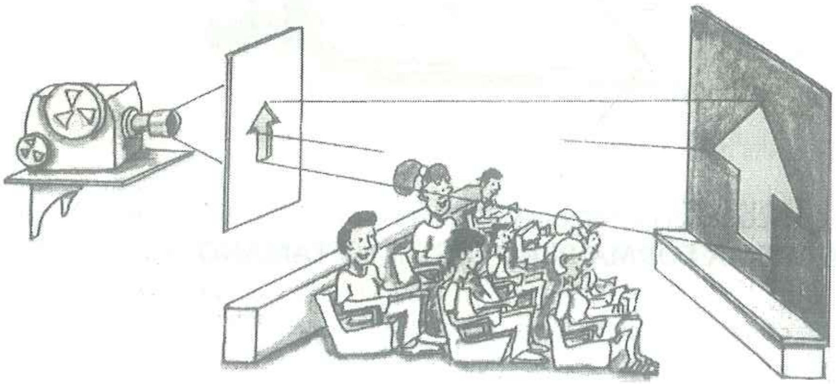
En un partido de baloncesto, Andrés y Sara alcanzaron un total de 19 puntos. Sara y Carlos tuvieron 14 puntos en total. Sara obtuvo los mismos puntos que Andrés y Carlos juntos. ¿Cuántos puntos alcanzó cada uno?.

14.3.2 El Concepto de Homotecia

Al principio de esta unidad revisamos algunas transformaciones en el plano donde se conservan la **forma** y el **tamaño**. Ahora estudiaremos una transformación donde se mantiene la forma, pero puede cambiar el tamaño.

PRIMERA EXPERIENCIA

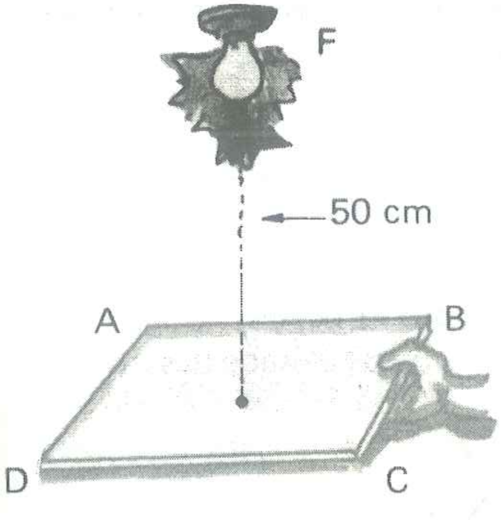
- Fíjate bien lo que hace un proyector de cine:



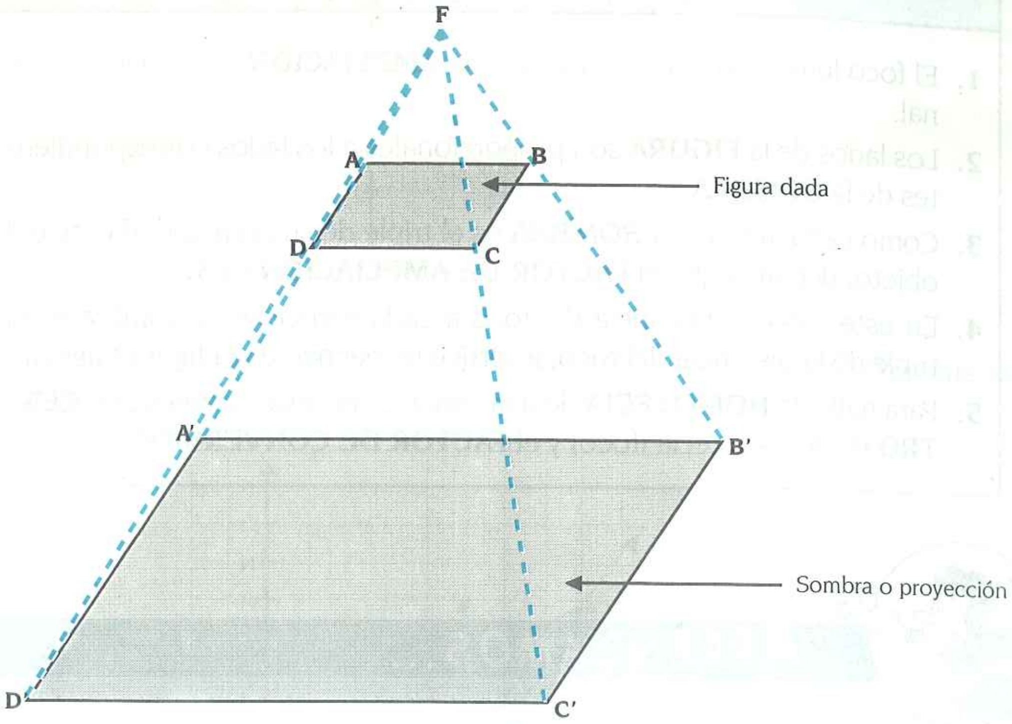
- Un proyector de cine consta, básicamente, de una bombilla que emite una luz muy intensa y de un reflector que envía la luz hasta una pantalla. Muy cerca a la luz se ubica un objeto (diapositiva o transparencia) cuya imagen aparecerá en la pantalla, tal como nos lo muestra la figura anterior.
- La imagen que se proyecta en la pantalla es varias veces más grande que el objeto pero **NO SE HA DEFORMADO**; es decir, que existe una proporcionalidad entre los elementos del objeto y sus correspondientes de la imagen.
- En general, si una figura se **AMPLÍA** o se **REDUCE** sin que se produzcan deformaciones, es decir, manteniendo las proporciones entre los elementos correspondientes, el proceso utilizado se llama **HOMOTECIA**. ¿Podrías nombrar algunos casos de la vida real donde se observe el fenómeno que hemos descrito?

SEGUNDA EXPERIENCIA

- Reúnete con otro compañero. Recorten en cartulina un rectángulo de 15 cm de largo por 10 cm de ancho y hagan lo siguiente:
  - Uno de los dos coloca el rectángulo recortado exactamente debajo de un bombillo encendido, a unos 50 cm de distancia y tal que los rayos luminosos incidan perpendicularmente al centro de la figura como se muestra a continuación:



  - Observen que como el rectángulo se refleja o proyecta en el suelo, entonces la sombra **TIENE LA MISMA FORMA PERO DISTINTO TAMAÑO**; así:



- El otro alumno marca con una tiza el borde de la sombra o proyección y luego traza la figura resultante. Esta figura puede ser recortada en cartulina o en papel periódico.
- ¿Qué relación habrá entre la figura dada y la sombra o proyección?
- Para que puedan contestar esta pregunta les sugerimos hacer lo siguiente:
  - a) Hallen la razón entre el largo de la sombra y el largo de la figura dada.
  - b) Hallen la razón entre el ancho de la sombra y el ancho de la figura dada.
  - c) Comparen los resultados obtenidos en a) y b). ¿Qué pueden concluir?
- Como han podido comprobar, los lados de la sombra y los de la figura original son **PROPORCIONALES.**

- Ahora vamos a trabajar con las figuras ABCD y A'B'C'D':
  - Hallen la razón entre el largo de la sombra y el largo de la figura dada.
  - Hallen la razón entre el ancho de la sombra y el ancho de la figura dada.
  - Hallen la razón entre la distancia del bombillo F y el vértice de A' con la distancia del bombillo F y el vértice A. Repitan esta actividad con los demás vértices.
  - Comparen todos los resultados obtenidos, ¿qué pueden concluir?

- Observemos que el foco luminoso F ha producido una **AMPLIACIÓN** de la figura original. El factor de ampliación es **3;** es decir, cada lado de la sombra es el **TRIPLE** de cada lado correspondiente del rectángulo original y la distancia del foco luminoso a cada vértice de la sombra es el **TRIPLE** de la distancia del foco luminoso al vértice correspondiente en la figura original.

CONCLUSIONES:

1. El foco luminoso F ha producido una **AMPLIACIÓN** de la figura original.
2. Los lados de la **FIGURA** son proporcionales a los lados correspondientes de la **SOMBRA.**
3. Como cada lado de la **SOMBRA** es el triple de su correspondiente del objeto, decimos que el **FACTOR DE AMPLIACIÓN** es **3.**
4. En este caso, la distancia del foco a cada vértice de la sombra es el triple de la distancia del foco al vértice respectivo en la figura original.
5. Para hallar la **HOMOTECIA** de una figura, es necesario conocer el **CENTRO** de la homotecia (foco) y el **FACTOR DE CONVERSIÓN.**

APRENDAMOS...

HOMOTECIA DE UNA FIGURA

- El procedimiento mediante el cual una figura se **AMPLÍA** o se **REDUCE**, conservando la **FORMA**; es decir, manteniendo las proporciones entre parejas de segmentos correspondientes, se conoce con el nombre de **HOMOTECIA.**
- En nuestro caso, la imagen o resultado del cuadrilátero ABCD mediante la homotecia **h** es el cuadrilátero A'B'C'D' y escribimos: **h (ABCD) = A'B'C'D'.**
- Dicha homotecia tiene como **CENTRO** (o foco luminoso) el punto **F** y como **FACTOR DE CONVERSIÓN 3.** Notemos que la distancia del centro a un punto de la sombra es el **TRIPLE** de la distancia del centro al punto correspondiente en la figura.

¡ATENCIÓN!

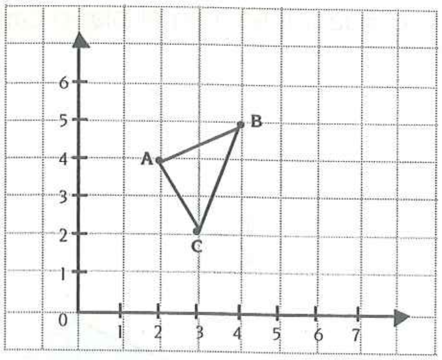
Para hallar la imagen de un polígono mediante una homotecia es necesario conocer el **FACTOR DE CONVERSIÓN** (es decir, qué tanto hay que ampliar o reducir el polígono) y el **CENTRO** de la homotecia.

EJEMPLO:

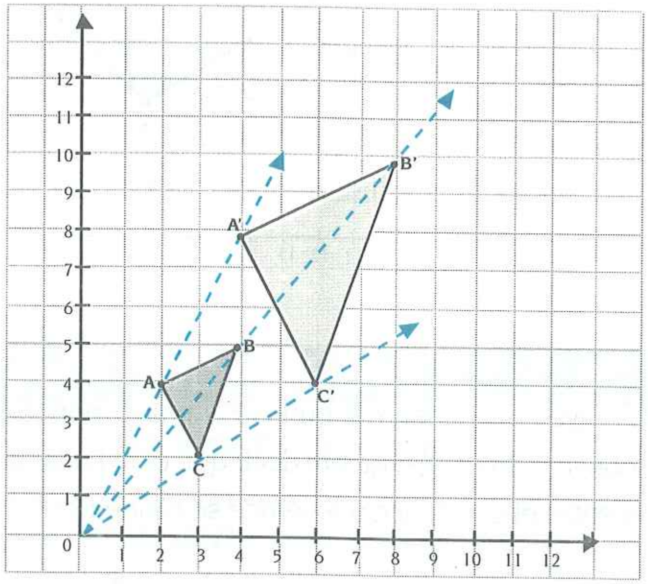
Los vértices de un Δ ABC son los puntos A (2,4), B (4,5), C (3,2). Hallar su imagen mediante una homotecia cuyo centro es el origen y cuyo factor de conversión es 2.

SOLUCIÓN:

- En primer lugar dibujamos el Δ ABC en el plano cartesiano.



- Para hallar la imagen del Δ ABC mediante la homotecia trazamos los rayos que salen del centro y pasan por cada uno de los vértices del triángulo



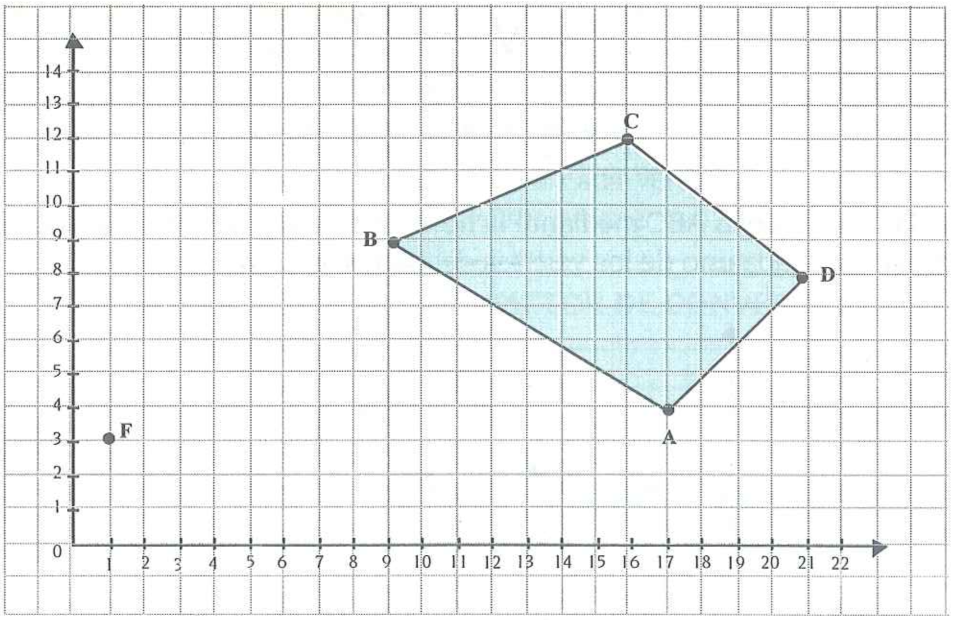
- A continuación medimos la distancia entre el centro y cada vértice; luego, duplicamos esa distancia y medimos a partir del centro sobre cada uno de los rayos para hallar la imagen del respectivo vértice. Por lo tanto, **h (ABC) = A'B'C'**.
- En este caso, la imagen es una ampliación de la figura. El triángulo ABC conserva la **FORMA** y la medida de los **ÁNGULOS**, pero las distancias entre puntos de las figuras varían en la misma razón.

14.3.3 Semejanza de Polígonos

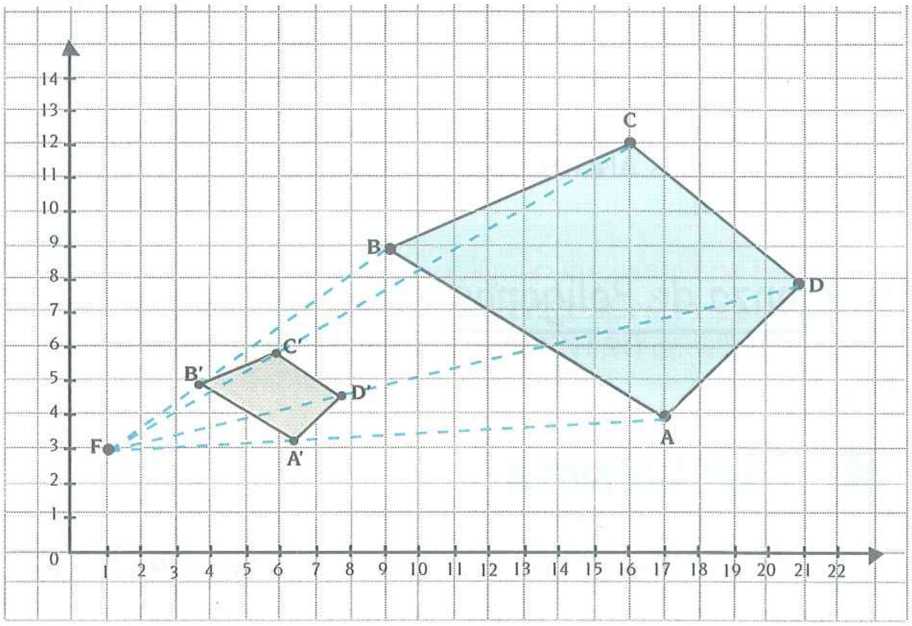
EXPERIENCIA

- Los vértices de un cuadrilátero ABCD son los puntos A (17,4), B (9,9), C(16,12) y D (21,8). Hallemos su imagen mediante una homotecia cuyo centro es el punto (1,3) y cuyo factor de conversión es $\frac{1}{3}$.

- En primer lugar dibujamos el cuadrilátero en el plano cartesiano y marcamos el foco o centro (1,3):



- Ahora trazamos los rayos que salen del punto F y pasan por cada uno de los vértices. Como el factor de conversión es $\frac{1}{3}$, quiere decir que para hallar la imagen del respectivo vértice, la distancia entre el centro y cada vértice se divide por 3.



Por lo tanto, **h(ABCD) = A'B'C'D'.**

- Calcula las siguientes razones:

a) $\frac{|\overline{AB}|}{|\overline{A'B'}|}$ b) $\frac{|\overline{BC}|}{|\overline{B'C'}|}$ c) $\frac{|\overline{CD}|}{|\overline{C'D'}|}$ d) $\frac{|\overline{AD}|}{|\overline{A'D'}|}$

¿Es cierto que $\frac{|\overline{AB}|}{|\overline{A'B'}|} = \frac{|\overline{BC}|}{|\overline{B'C'}|} = \frac{|\overline{CD}|}{|\overline{C'D'}|} = \frac{|\overline{AD}|}{|\overline{A'D'}|}$?

- Compara la medida de los siguientes ángulos:

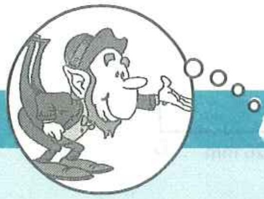
a) $\widehat{A}$ con $\widehat{A'}$ b) $\widehat{B}$ con $\widehat{B'}$ c) $\widehat{C}$ con $\widehat{C'}$ d) $\widehat{D}$ con $\widehat{D'}$

¿Que puedes concluir?

- Como los polígonos ABCD y A' B' C' D' son tales que:
  - sus lados correspondientes son proporcionales
  - sus ángulos correspondientes son iguales

decimos que son **POLÍGONOS SEMEJANTES** y escribimos **ABCD ~ A'B'C'D'.**

El signo ~ significa **SEMEJANTE CON** y es equivalente a decir **TIENE LA MISMA FORMA QUE.**



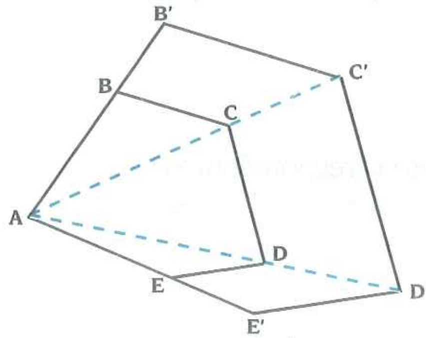
APRENDAMOS...

POLÍGONOS SEMEJANTES

- Las fotocopiadoras, videos y proyectores producen figuras semejantes.
- Dos **POLÍGONOS** son **SEMEJANTES** cuando podemos establecer una correspondencia entre sus lados y sus ángulos de tal manera que:
  - sus lados correspondientes son proporcionales.
  - sus ángulos correspondientes son iguales
- Los lados que se corresponden cuando dos polígonos son semejantes se llaman lados **HOMÓLOGOS.**
- Para indicar que un polígono **ABCD** es **SEMEJANTE** a un polígono **A'B'C'D'** escribimos **ABCD ~ A'B'C'D'** .
- Cuando a una figura le aplicamos una homotecia, la imagen que se obtiene es **SEMEJANTE** a la figura dada.

EJEMPLO 1:

- ¿Son semejantes los polígonos ABCDE y A'B'C'D'E'? ¿Por qué?

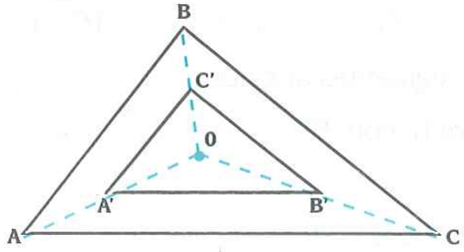


¿Cuál es el factor de ampliación o reducción? ¿Cuál es la razón de semejanza?

- Comprueba que $\overline{BC} // \overline{B'C'}$; $\overline{CD} // \overline{C'D'}$ y $\overline{DE} // \overline{D'E'}$.

EJEMPLO 2:

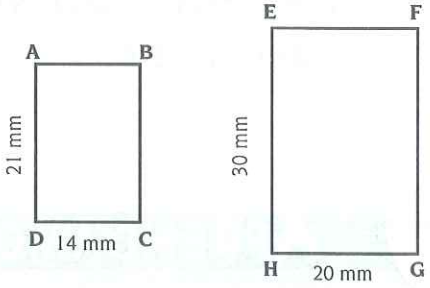
- Comprobemos que los triángulos ABC y A'B'C' son semejantes.



¿Cuál es el factor de ampliación (o reducción) o la razón de semejanza? ¿Cuál es el centro de homotecia?

EJEMPLO 3:

- ¿Son semejantes estos rectángulos?

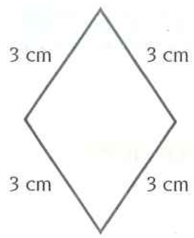


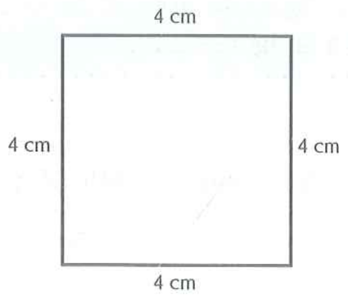
Sí, ya que:

- Los ángulos son congruentes: todos son rectos.
- Los lados son proporcionales: $\frac{20}{14} = \frac{30}{21}$.
- El rectángulo EFGH es una ampliación del rectángulo ABCD. La razón de semejanza es $\frac{10}{7}$.

EJEMPLO 4:

- Fíjate bien en los siguientes cuadriláteros:



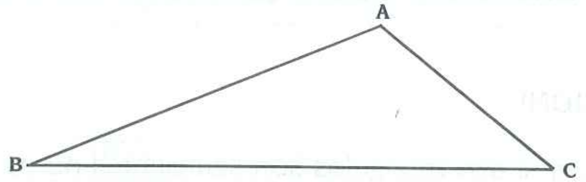


- ¿Son proporcionales sus lados correspondientes?
  ¿Son congruentes sus ángulos correspondientes?
  ¿Son estos polígonos semejantes? ¿por qué?

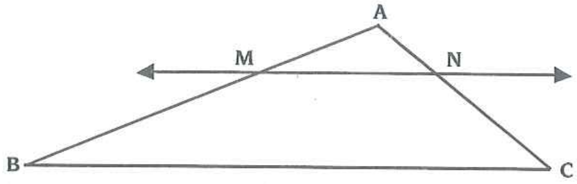
14.3.4 Semejanza de Triángulos y el Teorema de Thales

EXPERIENCIA

- Utiliza regla y compás para dibujar un triángulo cuyos lados miden 3 cm, 5 cm y 7 cm.
- Compara tu dibujo con el siguiente:



- Ahora traza una paralela a uno de los lados, por ejemplo al mayor, y que corte a los otros dos lados.



- Comprueba que los lados del triángulo pequeño **son proporcionales** a los del triángulo grande. Completa:

$$\left.\begin{array}{l}|\overline{AB}| = \square \\ |\overline{AM}| = \square\end{array}\right\} \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{AM}|} = \underline{\qquad}$$

$$\left.\begin{array}{l}|\overline{AC}| = \square \\ |\overline{AN}| = \square\end{array}\right\} \frac{|\overline{AC}|}{|\overline{AN}|} = \underline{\qquad}$$

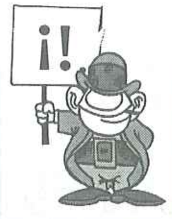
$$\left.\begin{array}{l}|\overline{BC}| = \square \\ |\overline{MN}| = \square\end{array}\right\} \frac{|\overline{BC}|}{|\overline{MN}|} = \underline{\qquad}$$

- Comprueba que los ángulos correspondientes son congruentes; es decir, que: $\widehat{A} \cong \widehat{A}$; $\widehat{M} \cong \widehat{B}$ y $\widehat{N} \cong \widehat{C}$.
- Esta experiencia se basa en una de las propiedades más importantes de la semejanza de figuras, conocida con el nombre de **Teorema de Thales**, en honor a uno de los siete sabios de Grecia.

APRENDAMOS...

TEOREMA DE THALES

- **"Toda paralela a un lado de un triángulo que corta a los otros dos lados, determina un triángulo pequeño semejante al grande".**
- El Teorema Recíproco también se cumple y dice así: **"si una recta corta a dos lados de un triángulo y los lados del triángulo pequeño son proporcionales a los del grande, entonces la recta es paralela al tercer lado".**

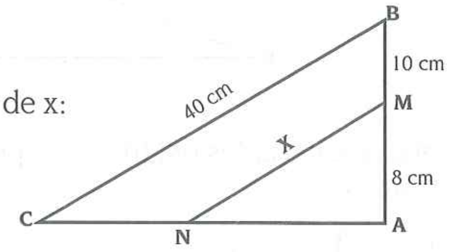


¡ATENCIÓN!

Para saber si dos triángulos son semejantes no es necesario comprobar todas las condiciones que establece la definición de semejanza de polígonos que enunciamos anteriormente. El Teorema de Thales permite reducir el número de condiciones para saber si un triángulo es semejante a otro o no. Esto facilita la comprobación.

EJEMPLO 1:

Sabiendo que $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$, calculemos el valor de x:



SOLUCIÓN

- Como $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$ entonces podemos aplicar el Teorema de Thales y escribir la proporcionalidad entre los lados; así:

$$\frac{|\overline{AM}|}{|\overline{AB}|} = \frac{|\overline{MN}|}{|\overline{BC}|}$$

$$\therefore \quad \frac{8}{10+8} = \frac{x}{40}$$

$$\therefore \quad \frac{8}{18} = \frac{x}{40}$$

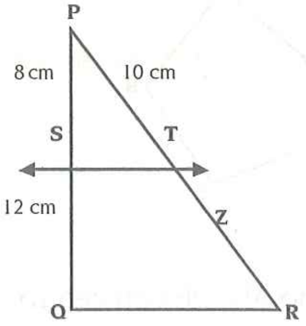
$$\therefore \quad 40 \cdot 8 = 18 \cdot x$$

$$\therefore \quad x = \frac{40 \cdot 8}{18} = \frac{320}{18} \approx 17,\ 78 \text{ cm}$$

- Luego, la medida del lado **x** es 17,78 cm

EJEMPLO 2:

Sabiendo que $\overleftrightarrow{ST} \,//\, \overline{QR}$, calculemos el valor de z:



SOLUCIÓN

- Como $\overline{ST} \,//\, \overline{QR}$ entonces podemos aplicar el Teorema de Thales y escribir la proporcionalidad entre los lados, así:

$$\frac{|\overline{PS}|}{|\overline{PQ}|} = \frac{|\overline{PT}|}{|\overline{PR}|}$$

$$\therefore \quad \frac{8}{8+12} = \frac{10}{10+z}$$

$$\therefore \quad \frac{8}{20} = \frac{10}{10+z}$$

$$\therefore \quad 8 \cdot (10 + z) = 20 \cdot 10 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{¿Por qué?}$$

$$\therefore \quad 80 + 8z = 200$$

$$\therefore \quad 8z = 200 - 80$$

$$\therefore \quad 8z = 120$$

$$\therefore \quad z = \frac{120}{8} = 15 \text{ cm}$$

- Luego, la medida de $\overline{\mathbf{TR}} = \mathbf{z}$ es 15 cm.

EJERCICIO 14-3

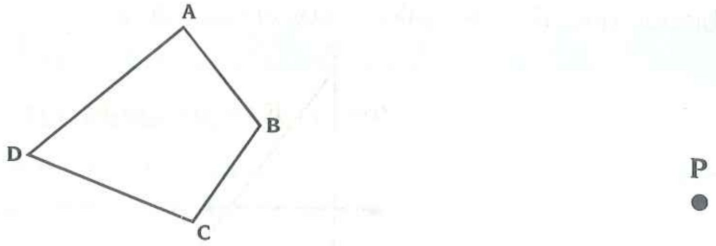
① Las medidas de cuatro segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$ y $\overline{GH}$ son las siguientes:
$|\overline{AB}| = 5$ cm ; $|\overline{CD}| = 8$ cm ; $|\overline{EF}| = 12$ cm ; $|\overline{GH}| = 18$ cm

a) Dibuja los cuatro segmentos

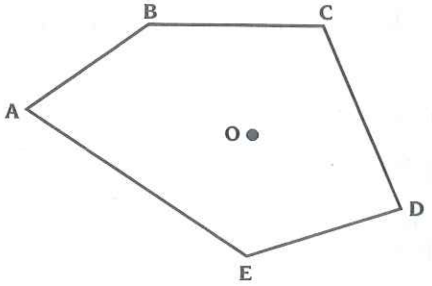
b) Calcula $\dfrac{|\overline{AB}|}{|\overline{CD}|}$ y $\dfrac{|\overline{EF}|}{|\overline{GH}|}$.

c) ¿Son $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ proporcionales con $\overline{EF}$ y $\overline{GH}$? ¿Por qué?

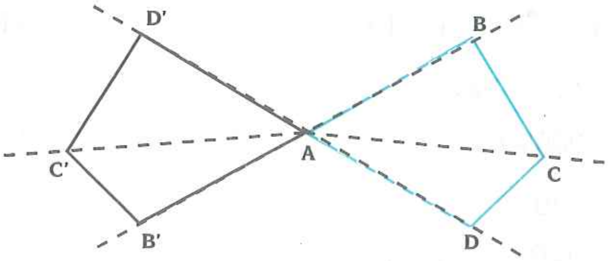
② Realiza una homotecia del polígono ABCD con centro en el punto P y factor de reducción igual a $\frac{1}{3}$.



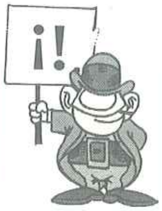
③ Realiza una homotecia del polígono ABCDE con centro en el punto O y factor de ampliación igual a 4.



④ Fíjate bien en la figura siguiente:



a) ¿Es ABCD una homotecia de AB'C'D'?
b) ¿Cuál es el factor de conversión? ¿Cuál es el centro de homotecia?



¡ATENCIÓN!

Al aplicarle una homotecia a una figura también puede obtener una imagen congruente con ella. En este caso, el factor de conversión es 1.

c) Comprueba que los cuadriláteros ABCD y A'B'C'D' son congruentes.

En los ejercicios ⑤ a ⑦ te dan un polígono ABCD cuyos vértices son los puntos A (-3,5); B (4,10); C (12,9) y D (11,2). Halla en cada caso la imagen que se obtiene cuando le aplicamos las siguientes homotecias:

⑤ Con centro en (2, -3) y factor de conversión igual a $\frac{4}{5}$.

⑥ Con centro en (6,6) y factor de conversión igual a $\frac{3}{2}$.

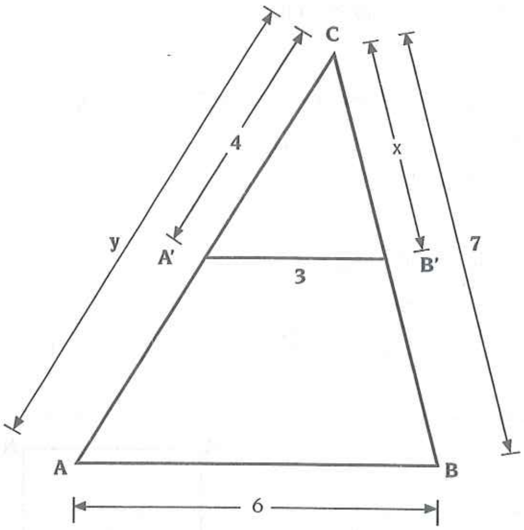
⑦ Con centro en (-3,5) y factor de conversión igual a 1.

⑧ ¿Es semejante al polígono ABCD la imagen obtenida en el ejercicio 5? ¿Por qué?

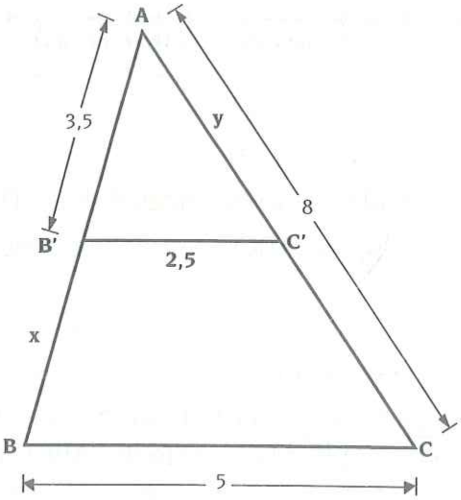
⑨ ¿Es semejante al polígono ABCD la imagen obtenida en el ejercicio 6? ¿Por qué?

⑩ ¿Es semejante al polígono ABCD la imagen obtenida en el ejercicio 7? ¿Es congruente? ¿Por qué?

⑪ Dados los triángulos ABC y A'B'C' completa las medidas que faltan de manera que el $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$. ¿Debe ser $\overline{A'B'}$ // $\overline{AB}$? Explica.



⑫ Dados los triángulos ABC y AB'C' completa las medidas que faltan de manera que el $\Delta ABC \sim \Delta AB'C'$. ¿Deber ser $\overline{B'C'}$ // $\overline{BC}$? Explica.



TALLER DE REPASO DE LA UNIDAD 14

1. Dado el triángulo cuyos vértices son A (1,1), B (1,3) y C (2,1), se pide:

a) Hallar su imagen mediante una homotecia cuyo centro es el origen y con factor de conversión 3.

b) Si el $\Delta A'B'C'$ es la imagen mediante la homotecia del literal anterior, ¿es $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$? ¿Por qué?.

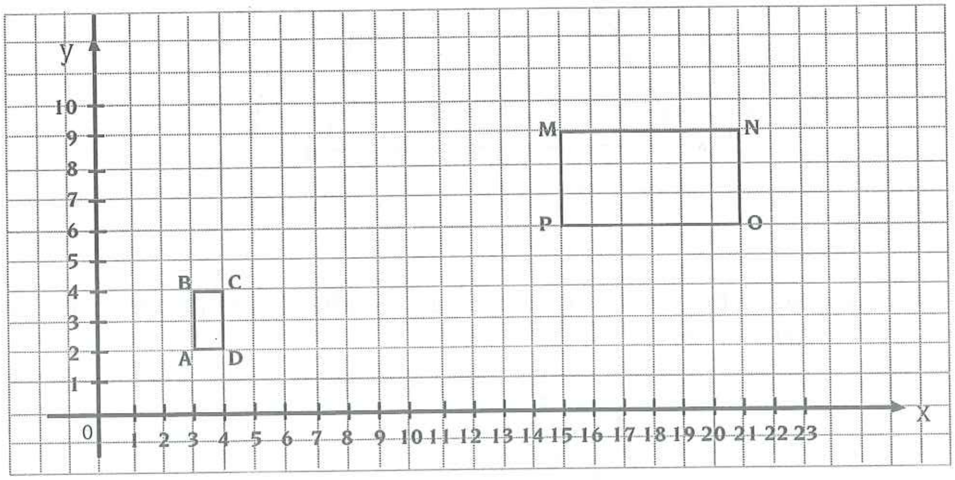
c) ¿Cuál es la razón de semejanza del $\Delta A'B'C'$ al ΔABC?.

2. Dado el polígono cuyos vértices son A (-5,5), B (-3, 3), C (-1,3) y D (-2,5), la homotecia de centro O (2,4) y factor de conversión 2:

a) Halla la imagen.

b) Si A'B'C'D' es la imagen del polígono ABCD mediante la homotecia, ¿cuál es la razón de semejanza entre un lado del polígono A'B'C'D' y el lado correspondiente del polígono ABCD? ¿Por qué?

3. Teniendo en cuenta la siguiente figura:



Responde:

a) ¿Cuáles son las coordenadas de los vértices A, B, C, D, M, N, O y P?.

b) ¿Son los ángulos del polígono ABCD respectivamente congruentes a los ángulos del polígono MNOP?.

c) ¿Cuánto hay que rotar el polígono ABCD y en que sentido para que adopte la misma posición del polígono MNOP? ¿Cuál centro de rotación tomarías?.

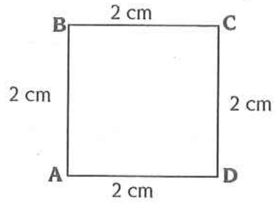
d) Como los dos polígonos tienen la misma forma, son semejantes. Si son semejantes existe una homotecia que aplicada al polígono ABCD produce como imagen el polígono MNOP. ¿Cuál es el factor de conversión de esta homotecia y cuál es la razón de semejanza?. Explica.

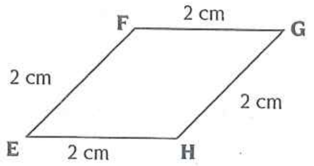
e) Si tomamos como foco a 0 (0,0) y factor de conversión a 3, ¿cuáles son las coordenadas de los vértices del polígono A'B'C'D' que se obtiene como imagen de esta homotecia?.

4. Si dos polígonos son congruentes, responde:

a) En una homotecia de centro 0 (0,0), ¿cuál debe ser el factor de conversión de la homotecia que siendo aplicada a un polígono nos de una imagen congruente con el otro? ¿Por qué?.
b) Dos polígonos congruentes, ¿siempre serán semejantes? ¿Por qué?.

5. Dados los polígonos:





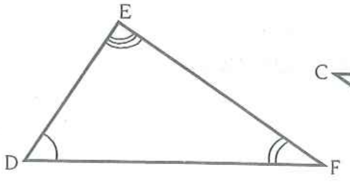
Responde:

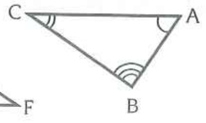
a) ¿Son rectos los ángulos del polígono ABCD? ¿Y los del polígono EFGH?.
b) ¿Son proporcionales los lados de los dos polígonos? ¿Por qué?.
c) ¿Tienen los dos polígonos igual forma? ¿Por qué?.
d) ¿Son semejantes los dos polígonos? ¿Por qué?.

6. Escribe dentro del paréntesis una V si el enunciado es verdadero o una F si es Falso. Justifica cada respuesta.

a) Dos polígonos son semejantes si tienen sus lados proporcionales ( ).
b) Dos polígonos son semejantes si tienen sus ángulos respectivamente congruentes ( ).
c) Dos polígonos son semejantes si tienen sus ángulos respectivamente congruentes y proporcionales sus lados homólogos ( ).
d) Lados homólogos en dos polígonos semejantes, son los lados opuestos a ángulos respectivamente congruentes ( ).
e) Se llama razón de semejanza de dos polígonos semejantes, al valor constante de las razones de sus lados homólogos ( ).
f) Dos triángulos congruentes son semejantes y su razón de semejanza es 1 ( ).
g) Dos triángulos equiláteros siempre son semejantes ( ).
h) Cuando dos figuras tienen la misma forma son semejantes ( ).

7. Si $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ y los ángulos marcados del mismo modo son congruentes, escribir la proporcionalidad de sus lados homólogos.





8. Dado un triángulo cuyos lados miden a = 4,5 cm., b = 2,7 cm., c = 3 cm., construir el semejante cuya razón de semejanza a aquel sea $\frac{2}{3}$.

Responde:

a) ¿Cuál es el perímetro del primer triángulo? ¿Y el del segundo?.
b) ¿Cuál es la razón del perímetro del primer triángulo al perímetro del segundo? ¿Es esta razón igual a la razón de un lado del primero a su lado homólogo del segundo?.
c) Se llaman ALTURAS HOMÓLOGAS en dos triángulos semejantes a las alturas trazadas sobre lados homólogos. ¿Es la razón de las alturas homólogas igual a la razón de los lados homólogos? (Traza las alturas y mídelas).

9. Dos triángulos ABC y A’B’C’ tienen $\measuredangle A \cong \measuredangle A'$, $\measuredangle B \cong \measuredangle B'$, $\measuredangle C \cong \measuredangle C'$. Si los lados de estos triángulos miden: a = 24 mm, b = 16 mm, c = 36 mm, a’ = 18 mm, b’ = 12 mm, c’ = 27 mm; decir si son semejantes y hallar la razón de semejanza del primero al segundo.

10. Construye los dos triángulos ABC y A’B’C’ del ejercicio anterior y responde:

a) ¿Cuál es el perímetro de cada triángulo?.

b) ¿Es la razón del perímetro del Δ ABC al perímetro del Δ A’B’C’ igual a la razón de un lado del Δ ABC a su lado homólogo del Δ A’B’C’?.

c) ¿Es la razón de las alturas homólogas igual a la razón de los lados homólogos?.

d) ¿Qué son medianas homólogas?

e) ¿Es la razón de las medianas homólogas igual a la razón de los lados homólogos?. (Traza las alturas y las medianas y mídelas).

11. Dos triángulos ABC y A’B’C’ son semejantes. Si a = 25 mm, b = 10 mm, c = 30 mm, a’ = 30 mm, b’ = 12 mm ; se pide:

a) Hallar la medida de c’.
b) Dibujar los dos triángulos.
c) Hallar los perímetros de los dos triángulos.
d) Verificar que la razón de los perímetros es igual a la razón de los lados homólogos.
e) Dibujar las medianas y medirlas.
f) Verificar que la razón de las medianas homólogas es igual a la razón de los lados homólogos.

12. Los lados de un triángulo miden 48 m, 56 m y 32 m, respectivamente. Si el perímetro de un triángulo semejante a éste es de 51 m, hallar las longitudes de los lados.

13. Los lados de un triángulo miden 36 m, 42 m y 54 m respectivamente. Si en un triángulo semejante a éste, el lado homólogo del primero mide 24 m, hallar los otros dos lados de este triángulo.

14. La razón de semejanza del Δ ABC al Δ A’B’C’ es $\frac{3}{4}$. Si los lados del primero son 18 cm; 21 cm y 31 cm, hallar los lados del segundo.

15. Los lados de un triángulo rectángulo miden 6 m, 8 m y 10 m respectivamente. ¿Cuánto medirán los catetos de un triángulo semejante al primero si su hipotenusa mide 15 m?

16. Los lados de un triángulo miden 2 cm, 1,5 cm y 3 cm. Construir sobre un segmento de 2,5 cm, homólogo del primer lado de este triángulo, un triángulo semejante a aquél.

17. La base de un triángulo isósceles mide 6 cm y la de otro triángulo semejante 18 cm. Si el lado del primer triángulo mide 8 cm, ¿cuánto mide el lado del segundo?.Explica.

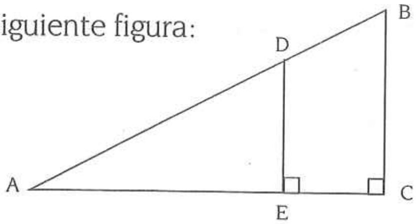
18. Los perímetros de dos triángulos semejantes miden 36 m y 9 m. ¿Cuánto medirá el homólogo del lado del primero que mide 10 m?

19. Se sabe que el ΔGHI es un triángulo equilátero y que $\Delta\, XYZ \sim \Delta\, GHI$. ¿Cuánto mide el $\angle X$?. ¿Por qué?.

20. Sabemos que $\Delta\, JKL \sim \Delta\, PQR$ y que $m\angle J = 27^\circ$, $m\angle L = 63^\circ$. ¿Cuánto miden cada uno de los ángulos del $\Delta\, PQR$? . Explica.

21. Se tienen dos triángulos rectángulos. En uno de ellos un ángulo agudo mide 25° y en el otro la medida de uno de los ángulos agudos es 65°. ¿Son semejantes estos dos triángulos? ¿Por qué?.

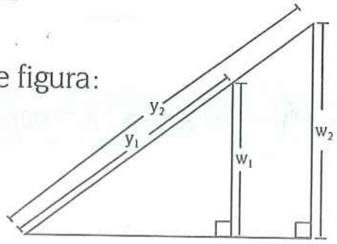
22. Teniendo en cuenta la siguiente figura:



Responde: a) ¿Son semejantes los triángulos ACB y AED? ¿Por qué?.
b) ¿Cuál es el homólogo del lado AC? ¿Por qué?.

Completa: $\dfrac{|\overline{AC}|}{|\overline{AE}|} = \dfrac{?}{?} = \dfrac{?}{?}$

23. Teniendo en cuenta la siguiente figura:



Completa: $\dfrac{W_1}{W_2} = \dfrac{?}{?}$ porque____.

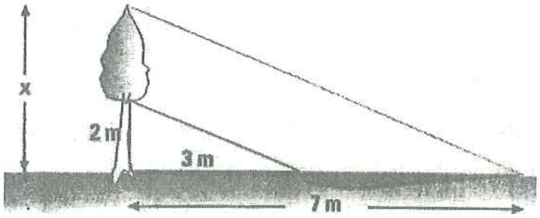
Aplicaciones:

Las figuras semejantes son de variadas aplicaciones prácticas en Ingeniería, en Arquitectura, en Geografía, etc. Los planos de piezas de maquinaria y de la fachada de un edificio son planos de figuras semejantes a las piezas reales y a la fachada real. Lo mismo ocurre con un mapa de un país y el territorio real que representa. Los planos y los mapas son una reducción de la realidad que representan. En estos casos, la razón de semejanza es la ESCALA. A continuación, algunas de estas aplicaciones.

24. Dos amigos proyectan hacer una excursión de una ciudad a otra siempre que su distancia no fuera superior a 30 km. Consultando un mapa cuya escala era de 1:1,000.000, midieron la distancia entre los puntos correspondientes a las ciudades y ésta resultó igual a 2,5 cm. ¿Cuál es la distancia real que existe entre las dos ciudades?.

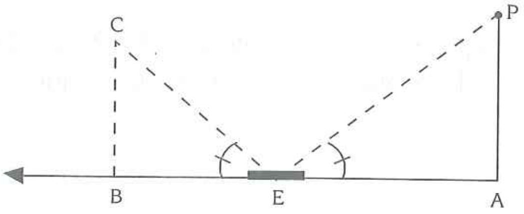
25. Un maestro albañil está dirigiendo la construcción de una casa siguiendo los planos dibujados por un arquitecto. La escala del plano es 1:100. El hueco señalado en el plano para una puerta mide 1,5 cm. ¿Qué distancia debe tener el hueco de dicha puerta en la construcción?. Si la longitud de la fachada en el plano es de 12 cm, ¿cuánto medirá realmente la fachada de la casa?.

26. La siguiente figura se hizo a escala y las medidas que aparecen representan las medidas reales. La sombra proyectada por el árbol es de 7 m. y de una parte de él es de 3 m. ¿Cuál es la altura del árbol?.



27. ¿Cuál es la altura de una torre si su sombra mide 4,5 m?. ¿Y la sombra de un bastón de 2 m mide 2,5 m?.

28. Un método muy ingenioso para medir alturas de árboles, edificios, etc., aparece explicado en la *Óptica de Euclides*.



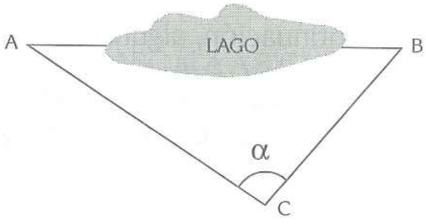
Se traza una semirrecta $\overrightarrow{AB}$ en el suelo, que parte del pie A de la altura que se quiere medir; después se coloca un espejo, E, en el suelo sobre la misma línea y el observador se retira del espejo, siguiendo la semirrecta $\overrightarrow{AB}$, hasta que vea reflejado en él el punto P y allí se detiene (supongamos que ésto ha ocurrido en el punto B). Los ángulos ∡ CEB y ∡ PEA son iguales por una ley que estudiarás en física.

Responde:

a) ¿Cómo serán los triángulos rectángulos PAE y EBC?.

b) Si BE = 1,50 m, CB = 1,8 m, EA = 2,20 m, ¿cuánto mide AP ?.

29. Supongamos que se quiere medir la distancia entre los puntos A y B y que podemos medir las distancias $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ y el ángulo α .



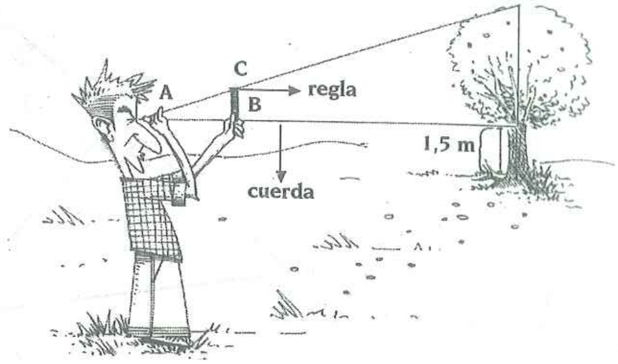
Responde:

a) Si en la realidad, la medida de $\overline{AC}$ es 56 m y la de $\overline{BC}$ es 82 m, ¿cuál es la medida en un dibujo de los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ si tomamos la escala 1:500?

b) En la realidad dos segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ forman un ángulo de 105°. Si en el dibujo tomamos este mismo ángulo, responde: ¿cuál es la medida de $\overline{AB}$ en la escala 1:500? ¿Y cuál la medida de $\overline{AB}$ en la realidad?.

30. Juan puede obtener una buena aproximación de la altura de un árbol mediante el procedimiento siguiente: Primero, se coloca junto al árbol y hace una señal en él a 1,5 metros del suelo. Entonces, se aleja 40 pasos (30 metros) del árbol, y, volviéndose hacia él, manteniendo vertical una regla de 15 centímetros frente a sus ojos, la mueve hasta lograr que la regla le tape exactamente la vista de la parte del árbol que queda por encima de la señal. Mediante una cuerda, pasando por un agujero en el extremo inferior de la regla, mide en centímetros la distancia $\overline{AB}$, desde su ojo a la regla. Después, resulta ya fácil calcular la altura del árbol por medio de la fórmula.

$$h = 30 \cdot \frac{0,15}{AB} + 1.5$$

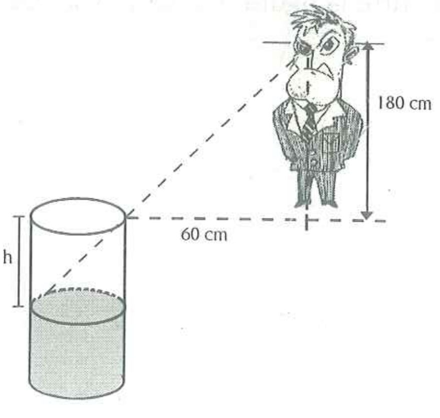


a) Explicar por qué la fórmula da la altura del árbol. ¿Cuál es la unidad de medida?.

b) Si la cuerda mide 20 centímetros, ¿cuál es la altura del árbol?.

PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS SABER

1. El diámetro de un pozo cilíndrico es 30 cm. Una persona se va acercando al pozo y justo a 60 cm del borde es capaz de ver el agua.



Si la altura de la persona es hasta los ojos de 180 cm, entonces la profundidad **h** a la que se encuentra el agua es:

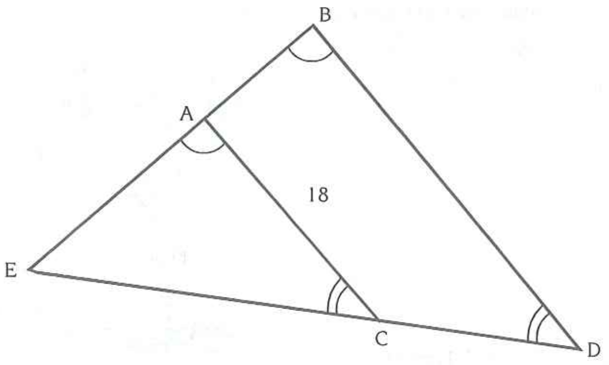
a) 180 cm b) 120 cm c) 90 cm d) 45 cm

2. La razón de semejanza de dos triángulos semejantes es $\frac{5}{8}$. Si la altura correspondiente a un lado del primero mide 15 cm, la altura homóloga del otro triángulo mide:

a) 24 cm b) 8 cm c) 120 cm d) 5 cm

3. En la siguiente figura se cumple que $\measuredangle C \cong \measuredangle D$, $\measuredangle A \cong \measuredangle B$ y que AE = 12 unidades, EB = 28 unidades, CE = 15 unidades, AC = 18 unidades. La medida de $\overline{BD}$ en unidades es:

a) 35 b) 42 c) 20 d) 24



4. Dos figuras semejantes son las que tienen:

a) El mismo tamaño (la misma extensión).
b) La misma forma.
c) La misma forma y el mismo tamaño.
d) El mismo número de vértices.

5. La escala de un plano es:
a) La longitud del plano.
b) El cociente de dividir dos segmentos del plano.
c) La razón de semejanza entre la figura del plano y la real.
d) Ninguna de las anteriores.

Respuestas

NÚCLEO TEMÁTICO

0

EJERCICIOS

EJERCICIO 0.1

1. 29
2. 163
3. a. Los paréntesis **b.** 47
4. a. Paréntesis **b.** 93
5. a. Paréntesis **b.** 42
6. a. Paréntesis **b.** 8
7. a. 8+4-2+(7 - 5-2)
b. 6-7+8+16+(-4+15-1)
8. a. 8+4-2-(-7+5+2)
b. 6-7+8+16-(4-15+1)
9. a. La división **b.** 3
10. a. La sustracción **b.** 5
11. a. La sustracción **b.** 18
12. a. La sustracción **b.** 9
13. a. La multiplicación **b.** 0

EJERCICIO 0.2

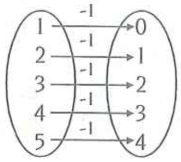
2. a. Base:4 ; exponente: 3
3. a. 2 x 2 x 2 x 2
4. a. $2^3= 8$ **b.** c^3 **d.** c^2
5. a. 1 **b.** 1 **c.** 1 **d.** 7
e. 10 **f.** 1 **g.** 100.000
h. 1
6. a. 10^3 **b.** 10^6 **c.** 10^5
7. a. 3×10^4 **b.** 502×10^3
c. 401×10^2
8. a. 40.000 **b.** 10.500
c. 401.000
9. a. 2 x 10 + 9
c. $1 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 7 \times 10 + 8$
d. $4 \times 10^5 + 5 \times 10^3 + 6 \times 10^2 + 7 \times 10 + 1$
10. a. 4 **b.** 9
12. a. $\sqrt[3]{27} = 3$ **d.** $\sqrt[4]{1} = 1$
13. a. $5^2=25$ **d.** $2^5=32$
14. Son raíces exactas:
$\sqrt{9}$ ($\sqrt{9}=3$ porque $3^2=9$) y
$\sqrt[3]{64}$ ($\sqrt[3]{64}=4$ porque $4^3=64$)
15. a. $\sqrt{64}=8$, porque $8^2=64$
16. a. $\frac{81}{16}$ **b.** 0

17. a. La operación radicación, ($\sqrt[3]{27}=x$), x=3
b. La radicación (y= $\sqrt{36}$) , y = 6
18. 1, 4, 9, 16, 25
19. 1, 8, 27, 64, 125.

EJERCICIO 0.3

4. a. y= f(x) = 4x
b. y= f(x) = 3x+4
c. y= f(x) = 2x - 2
d. y= f(x) = $\frac{x}{5}$ - 3
5. a. Multiplicar por 5 y luego sumar 1
b. Sumar 4
c. Dividir por 2 y luego sumar 5
f. Elevar al cuadrado, duplicar y luego sumar 1
6. a. f(0)= 2x(0)+3=3
d. f(7) = 2 x 7 + 3 = 17
7. a. El operador es: restar 1, el conjunto de partida es {1,2,3,4,5} y el de llegada es {0,1,2,3,4}.

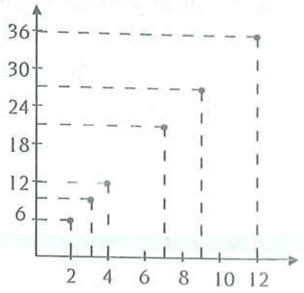
b.



c.

d. y= f(x) = x - 1

8. a. El operador es "triplicar"
b. {(2,6) , (3,9) , (4,12), (7,21), (9,27), (12,36)}
c.



d. y= f(x) = 3x
9. b. {(2,1), (3,3), (4,5), (5,7), (6,9)}
d. y = f(x) = 2x - 3
10. b. {(0,1), (1,2), (2,5), (3,10)}
d. y = f(x) = x^2+1
e. f(7) = 7^2+1 = 50

EJERCICIO 0.4

2. a. $\frac{8}{4}$ **b.** $\frac{12}{4}$
4. a. $4\frac{3}{5}$ **c.** $7\frac{5}{6}$ **f.** $9\frac{10}{13}$
5. a. $\frac{38}{5}$ **f.** $\frac{57}{5}$
6. a. 14 **b.** 28 **c.** 35
7. a. $\frac{4}{17}$ **b.** $\frac{1}{9}$ **c.** $\frac{2}{5}$
d. $\frac{3}{4}$ **e.** $\frac{1}{2}$
8. Son equivalentes: a, b y c.
10. a. 36 **b.** 5 **c.** 6
11. a. $\frac{5}{9}$ **b.** $\frac{4}{7}$ **c.** $\frac{5}{6}$
d. $\frac{2}{3}$ **e.** $\frac{3}{7}$
12. $\frac{5}{3}$ **13.** $\frac{11}{5}$ **14.** $\frac{13}{60}$
15. $\frac{141}{16}$ **16.** $\frac{145}{84}$ **17.** $\frac{13}{7}$
18. $\frac{363}{20}$ **19.** $\frac{48}{65}$ **20.** $\frac{1}{2}$

EJERCICIOS 0

21. $\frac{4.799}{2.395}$ **22.** 8 **23.** 1

24. $\frac{32}{3}$ **25.** $10\frac{1}{15}$ m

EJERCICIO 0.5

1. a. 0,006 **b.** 0,039 **e.** 0,0034

3. a. $\frac{3.005}{1.000}$ **b.** $\frac{4}{1.000}$ **d.** $\frac{2.053}{1.000}$

4. a. 0,63 **c.** 93,376
d. 29,69

5. a. 1 **c.** 40
f. 100 **h.** 3.400

6. a. 0,03 **b.** 0,005
e. 0,13 **h.** 0,0028

11. a. 20 **b.** 10 **c.** 16

13. a. 0,816 **b.** 0,00216
c. $\frac{4}{81}$

14. 197,35 m

15. 8 horas

16. 131,175 kg de arroz

17. 190,63 litros aprox.

TALLER DE REPASO DE LA UNIDAD 0

1. a. 11 **b.** 6 **c.** 149
d. 46 **e.** 6 **f.** 19

3. a. Duplicar y luego restar 1, y= f(x) 2x - 1

6. a. f(0) = 1 **b.** f(1) = 4
c. f(3) = 10

13. a. $\frac{1}{2^{15}\bullet 3^{15}}$ **b.** 56 **c.** 8

14. a. 3 **b.** 7 **c.** 24
d. 500 **e.** 4 **f.** 4

15. 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31

16. 191 es primo

17. a. 60 **b.** 20
c. 250 **d.** 5.000

18. a. 500 **b.** 72 **c.** 9
d. 8 **e.** $\frac{21}{5}$ **f.** 15

19. a. $\frac{1}{3}$ **b.** $\frac{203}{60}$ **c.** $\frac{215}{84}$
d. $\frac{26}{5}$ **e.** $\frac{107}{16}$ **f.** $\frac{13}{5}$
g. $\frac{32}{7}$ **h.** $\frac{33}{20}$ **i.** $\frac{39}{20}$
j. $\frac{7}{75}$ **k.** $\frac{3.241}{1.700}$ **l.** 8
m. 2

25. $30.000

NÚCLEO TEMÁTICO

1

EJERCICIOS

EJERCICIO 1.1

1. N **2.** F **3.** N **4.** F **5.** V
6. V **7.** V **8.** F **9.** V **10.** F

EJERCICIO 1.2

3. a. -640 **b.** -30 m
c. +100°C, - 39°C
d. Camilo: +380 dólares, Santiago: -800 dólares.
e. Mariana vive en el piso (+2) y su carro lo deja en el piso (-3).

4. a. 7 **c.** 12 **d.** -15
f. -7 **g.** 0

6. a. 5 **b.** 7 **c.** 12 **d.** 8
e. 3 **f.** 0 **g.** 4 **h.** 9

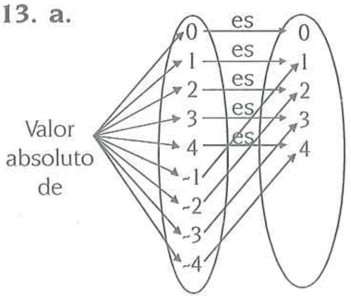
7. a. -5 **b.** - (-7) ó 7
c. - (-12) o 12 **d.** -8
e. 3 **f.** 0 **g.** -4 **h.**-9

9. a. +3°C **b.** -3°C
c. 27°C **d.** -11°C

11. A (+3,0) B (+4,0)
C (+1,+2) D (0,+3)
F (-2, -2) G (0, -3)
H (+2, -4)

12. a. 12 **b.** 1 **c.** 18 **d.**3
e. 42 **f.** 3 **g.** 6 **h.** 5

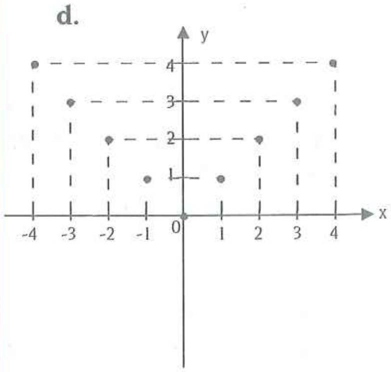
13. a.



b. y= f(x) = |x|

c. {(0,0), (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (-1,1), (-2,2),(-3,3), (-4,4)}

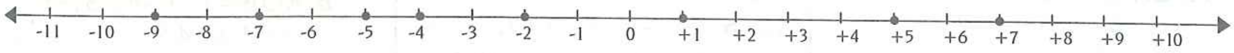
d.



EJERCICIOS 1

EJERCICIO 1.3

1.



a. - 9 < - 7 < - 5 < - 4 < -2<+1<+5<+7

b. |-9| = 9, |-7| = 7, |-5|=5, |-4| = 4, |-2| = 2, |+1|=1, |+5|=5, |+7|=7, Son iguales.

3. **a.** + **b.** -
c. puede ser + o -

4. **a.** (+24) **b.** (-5) **e.** (+8)
f. (-12) **j.** (-25)

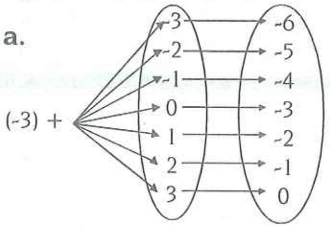
5. **a.** 12 **b.** 7 **c.** -11
d. 8 **e.** -11 **f.** -8

6. Tiene $15.000

7. -$367.900

8. -3

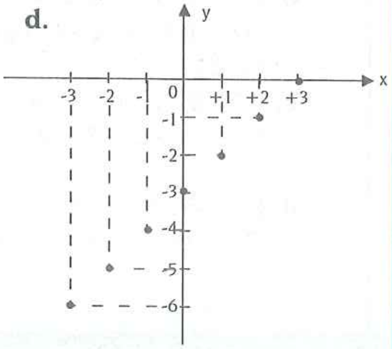
9. **a.**



b. {(-3,-6), (-2,-5), (-1,-4), (0,-3), (+1,-2), (+2,-1), (+3,0)}

c. y = f(x) = (-3) + x

d.



10. **a.** Saldo: fecha: del 1 - 11, es +$850.000; del 7-11 es -$385.000; del 19-11 es $215.000; del 25-11 es +$115.050; de 30-11 es +$165.050.

b. (+850.000) + (-1,235.000) + (+600.000) +(-99.950) + (+50.000)

c. 850.000 - 1,235.000 + 600.000 - 99.950 + 50.000 = 165.050

EJERCICIO 1-4

4. Cuando al sumarlos el resultado es 0, Sí.

7. **a.** Asociativa
b. Conmutativa
c. Modulativa
d. Inverso aditivo

8. **a.** - (-15) ó 15
b. - 21 **c.** 0 **d.** 18

9. **a.** - 8 - 9 + 30 - 3 + 6 = 36 - 20 = 16

b. 8 - 57 + 69 - 41 - 83 = 77 - 181 = (77) + (-181)= -104

c. 60 -30 -20 -11=60-61= -1

d. 35 - 49+ 28 - 42 = 63 -91= -28

EJERCICIO 1-5

1. **a.** 16+ (-20)= -4
b. (-10) + (-8) = -18
d. (-7) + (+9) = +2
h. (4) + (-4) = 0

2. Sí, porque al restar dos enteros siempre da un número entero.

3. **a.** (-7) + (-5) = - 12, (+5) + (+7) = +12,
a. No **b.** No.

4. [(-8) + (-6)]+(+12) = (-14)+ (+12) = -2, (-8) - [(+6) + (+12)]= (-8) - (+18) =(-8)+ (-18) = -26
a. No, **b.** No.

5. **a.** 5 - 3 - 1 + 0 + 7 + 2 + 5 = 19 - 4 = 15

b. -2 + 7 - 1 + 3 + 1 + 6 - 5 + 3 = 20 - 8 = 12

c. -3 - 5 + 10 - 5 + 0 + 3 - 4 +2 - 1 = 15 - 18 = (15) + (- 18) = -3

d. -3 + 5 + 1 +1 - 2 - 4 + 7 = 5

e. 4 - 8 + 1 + 2 + 3 + 2 = 4

TALLER DE REPASO DE LA UNIDAD 1

1. **a.** V **b.** V **c.** V **d.** F
e. V **f.** V **g.** V **h.** V
i. F **j.** F **k.** V **l.** V
m. V **n.** F **o.** V **p.** V
q. V **r.** V **s.** V

3. **a.** < **b.** < **c.** >

6. **a.** 7 **b.** 0 **c.** 10

10. **a.** Recordar que 0∈N, hay 25 naturales (sin contar al natural extremo 25).

b. Hay 66 (sin contar los extremos (-42) y (25).

c. 41 sin contar el extremo (-42))

11. **a.** -50 **b.** 14 **c.** -3 **d.** 8

TALLER DE REPASO DE LA UNIDAD 1

12. a. 10, 16, 22
b. -9, -15, -22

13. a. (-5) + (+7) = +2
c. (-8) + (-13) = -2
e. (-17) + (+8) = -9

14. b. 5 - 8 - 10 - 1 = 5 - 19 =-14
c. -6+5-12-5=5-23=-18

15. a. -2 **b.** 44
c. -40 **d.** -189

16. a. 9-12+6-2+4-8+1=-2
b. 8-10-8+5-7+9+6=3
c. -6+15-1-4+3-2-3+7=9
d. -1+4-3+2-2+7-4=3
e. -7-6+5+8-2-5+6=-1
f. 1-4-2+5-1-9-1-2+3=-10

17. +1°C

18. a. {-9,-8,-7,-6,-5,-4} = {x/-10<x<-3, con x∈Z}
b. {-10,-9,-8,-7,-6,-5,-4} = {x/-10 ≤ x ≤ -3, con x ∈ Z}
c. {-9, -8, -7, -6, -5, -4,-3} = {x/-10 < x ≤-3, con x ∈ Z}
d. {-10, -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3} = {x/-10 ≤ x ≤-3, con x ∈ Z}

19. a. A = {-5, -4, -3, -2, -1,0,1,2,3}
B={-2,-1,0,1,2,3,4,5}
b. A∪B = {-5,-4,-3,-2, -1,0,1,2,3,4,5}
c. A∩B={-2,-1,0,1,2,3}

20. Del 5-11: pagos por servicios de energía eléctrica: -$107.000, del 12-11, Ingresos por consignaciones: +$117.000, Del 17-11, pagos por activos financieros: -$70.000, Del 29-11, ingresos por consignaciones: +$750.000.

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 1

1. 60
2. Abuelo con su hijo y nieto se sentaron a comer
3. La cerilla
4. Sara

PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS SABER 1

1. b **2.** b **3.** a **4.** c

NÚCLEO TEMÁTICO

2

EJERCICIOS

EJERCICIO 2.1

1. d **2.** a **3.** e **4.** b

EJERCICIO 2.2

1. a. (+15) **d.** (+16)
h. (- 50) **j.** (- 63)

2. a. (-) **b.** (-) **c.** (+)
d. (+) **e.** (+)

3. a. (+4) **b.** (- 4) **c.** (-8)
d. (+9) **e.** (+8) **f.** (-40)
g. (- 5) **h.** (+13) **i.** (+13)

4. a. (+5) **b.** (-5) **c.** (-1)
d. (+7) **e.** (+2) **f.** (+3)

5. a. (+5) **b.** (+8) **c.** (-1)
d. (+3) **e.** (+2)

EJERCICIO 2.3

5. a. Asociativa
b. Conmutativa
c. Distributiva
d. Distributiva
e. Distributiva
f. Distributiva

6. a. (-6) • [(-8) + (+4)] = (-6) • (-4) = + 24
(-6) • (-5) + (-6) • (-3) = +30 - 24 + 18 = 48 - 24 = 24
c. (-4) • [(-3) + (+7) - (+6) + (+2)]
d. [(+8) + (+5) + (-9)] • (-7) = [(+13) + (-9)] • (-7) = (+4)• (-7) = -28,
(+8)•(-7)- (-5)•(-7)- (+9)• (-7) = (-56) - (+35) - (-63) = -56 - 35 + 63 = -28

7. a. [4-3+8]•(-5)
b. 6•[(-3) + (+8)-(+12)]
c. (-4) • [(-3) + (+7) - (+6)+(+2)]

EJERCICIOS

d. [7 - 8 + (-2)-(+5)]•(-6)

8. **a.** 26 **b.** 90
c. -6.094 **d.** -195

9. **b.** {(-3,-6), (-2,-3), (-1,0), (0,3), (1,6), (2,9), (3,12)}
c. y= f(x)= 3•x - (-3) ó y=f(x)= 3•x +3

EJERCICIO 2.4

1. **a.** V **b.** V **c.** V
d. F **e.** F **f.** F

2. **a.** (-4) **b.** (+4) **c.** (-12)
d. (-4) **e.** (-3) **f.** (-2)

3. **a.** No, porque al dividir dos enteros, no siempre da entero.
b. No
c. No, (48÷8)÷2 ≠ 48÷(8÷2)

4. **a.** 20÷(-5) - 10 ÷(-5)+30÷(-5) - 60÷(-5) = (-4) - (-2) + (-6) - (-12) = (-4) + (+2) + (-6) + (+12) = (+14) + (-10) = (+4)
b. (-9) ÷(-3) + (-12) ÷(-3) - (+6) ÷(-3)= (+3)+(+4) - (-2) = (+3) + (+4) + (+2) = (+9)
c. 24÷(-6) - 18 ÷(-6)+12 ÷ (-6)- 36 ÷(-6) = (-4) - (-3) + (-2) - (-6) = (-4) +(+3)+(-2)+(+6) = (-6) + (+9) = (+3)
e. (+120) ÷(+4) - (-60) ÷(+4)+ (+80) ÷(+4) - (-44) ÷(+4) = (+30) - (-15) + (+20) - (-11) = (+30) + (+15) + (+20) + (+11) = (+76)

TALLER DE REPASO DE LA UNIDAD

1. **a.** V **b.**V **c.** F **d.** F
e. V **f.** F **g.** V **h.** V
i. V **j.** F

2. **a.** (+3) **b.** (-10)
c. (+9) **d.** 0
e. (-6) **f.** (-30)

3. **a.** (-8) **b.** (+3)
c. (-2) **d.** (-20)
e. (-3) **f.** (-9)

5. **a.** Conmutativa
b. Asociativa
c. Neutro multiplicativo
d. Cancelativa
e. Distributiva

6. Distributiva con respecto a la división

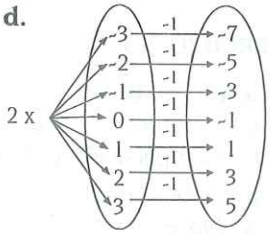
7. **a.** 35 **b.** (-14) **c.**116
d. 22 **e.** (- 14)

8. **a.** 5 **b.** 0 **c.** (-10)
d. -2 **e.** 7

9. **a.** 40 **b.** -462
c. 85 **d.** -593

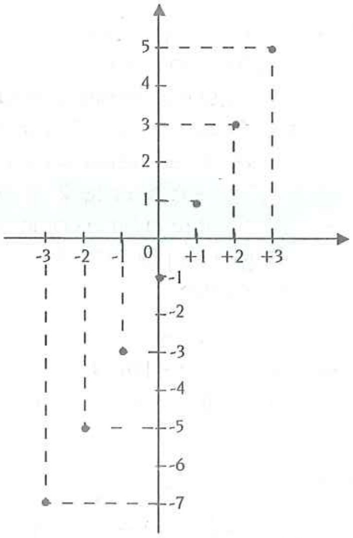
10. **a.** x∈{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3} y representan los objetos de la operación.
b. El resultado, y∈{-7, -5, -3, -1, 1, 3, 5}
c. Duplicando y luego restando uno

d.



e. {(-3,-7), (-2,-5), (-1,-3), (0,-1), (1,1), (2,3), (3,5)}

f.



DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS

1. $690.000 **2.** Perdí $50.000 **3.** Gano $216.000

PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS SABER

1. d **2.** a **3.** c **4.** d **5.** b

NÚCLEO TEMÁTICO

3

EJERCICIOS

EJERCICIO 3.1

1. c **2.** a **3.** d **4.** b

EJERCICIO 3.2

1. **a.** $(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(2)= (+16)$
d. $(-5)\cdot(-5)\cdot(-5) = (-125)$

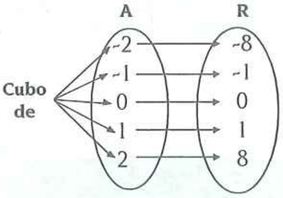
2. **c.** $(-1)^6 = (+1)$
d. $(-a)^4= (+a^4)$
e. $(-a)^5 = (-a^5)$
f. $(+a)^4 = (+a^4)$

3. **a.** Negativo **b.** Negativo
e. Negativo **f.** Negativo
g. Positivo **h.** Negativo
i. Negativo **j.** Positivo

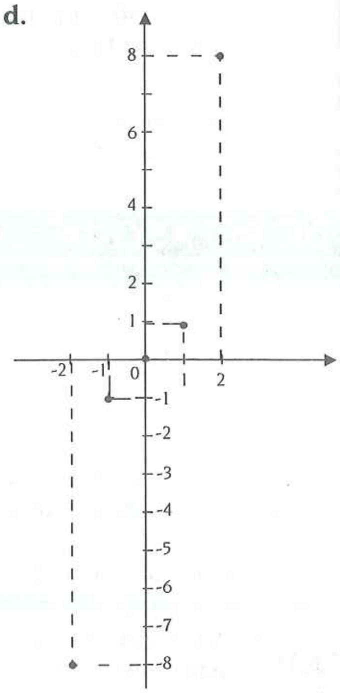
4. **a.** $-(-2)^4$ es negativo y $-(-2^4)$ es positivo
b. En -2^2, el exponente 2 actúa solo sobre la base 2, por lo tanto -2^2 es negativo y en $(-2)^2$, el exponente 2 actúa tanto sobre la base como en el signo (-), por lo tanto, $(-2)^2$ es positivo.

5. **a.** -8 **b.** -8 **c.** (+9)
d. (-9) **e.** (+16) **f.** (-27)
g. (- 1) **h.** (+1) **i.** (+16)
j. (- 27)

6. **a.**



b. {(-2,-8), (-1,-1), (0,0), (1,1), (2,8)}
c. $y = f(x) = x^3$
d.



EJERCICIO 3.3

2. **a.**No **b.** No **c.** No
d. El entero **e.** 1
f. Multiplicación y división

3. **a.** $(+1)^6 = (+1)$
b. $(-8)^5= (+32.768)$
c. (-2) **d.** $(-7)^2=(+49)$
e. $(-2)^4= (+16)$
f. $(-3)^3= (-27)$
g. $(-6)^2= (+36)$
h. $(x^4\cdot y^4) \div m^4$

5. **a.** $(+5)^9$ **c.** a^{m+n} **d.** 3^3
g. $(-2)^{15}$ **h.** $[(-3)^5]^2$ **i.** $[(x^2)^4]^5$
j. $(a\cdot b\cdot c)^{10}$ **k.** $(x^2y^3z^4)^2$
l. $3^5\cdot x^5\cdot y^5$

6. **a.** $5\cdot 2+x\cdot 2=10+2\cdot x$
b. $x\cdot x^2+5\cdot x^3\cdot x=x^3+5\cdot x^4$
c. $3\cdot x\cdot x+3\cdot 2\cdot x\cdot x^2+3\cdot m\cdot x^4\cdot x=3\cdot x^2+6\cdot x^3+3\cdot m\cdot x^5$
d. $3\cdot x\cdot x^2-2\cdot x^2=3\cdot x^3-2\cdot x^2$
e. $5\cdot x-5$ **f.** $2\cdot a\cdot x+b\cdot x$

7. **a.** $x\cdot(3\cdot x+5)$
b. $x\cdot(9\cdot x^2+2\cdot x-3)$
c. $x\cdot(6-41\cdot x^3)$
d. $x\cdot(7x-12)$

8. **a.** $p(5p+3)$
b. $p(8p^4-2p^2+5p+3)$

EJERCICIO 3.4

2. **a.** -2 **b.** 3
c. -8 **d.** No existe

3. **a.** 25 **b.** (-27) **c.** 1

4. **a.** 188 **b.** (-50)
c. (-882) **d.** 2.420
e. (-120)

5. **a.** (+12) **b.** (+36)

TALLER DE REPASO DE LA UNIDAD 3

1. **a.** (+32) **b.** (+121)
c. (-1.000) **d.** (+9)
f. (-1) **g.** (+16)
j. (+81)

2. **a.** (+2) **b.** (+256)
c. (+64) **d.** (-1)
e. 1 **f.** (+64)

3. **a.** (+1) **b.** (+64) **c.** (-1)

5. **a.** F **b.** F **c.** V
d. F **e.** V **f.** F
g. F **h.** V **i.** F
j. V

6. **a.** $(-4)^2$ **b.** 9^2 **c.** $(-3)^2$
f. $(-5)^3$ **h.** $(-1)^3$

7. **a.** Positivo **b.** Negativo
c. Positivo **d.** Positivo
f. Negativo **g.** Positivo
h. Negativo **i.** Positivo
j. Positivo **k.** Positivo
l. Negativo

8. **a.** (-27) **b.** (+25)

TALLER DE REPASO DE LA UNIDAD 3

c. (+49) **d.** 1
e. 1 **f.** (-1)
9. a. (+49) **b.** (+9) **c.**(+2)

10. a. 729 **b.** 30
c. (-8) **d.** (+16)

11. 2^2, 2^3, 2^0, 2^4, 2^1
12. $(-2)^3$, $(-2)^2$, $(-2)^0$, $(-2)^1$

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 3

1. 132, 40 **2.** 104 **3.** 4 y 20; 5 y 30 **4.** 730 y 10

PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS SABER 3

1. a **2.** c **3.** d **4.** d **5.** b

NÚCLEO TEMÁTICO

4

EJERCICIOS

EJERCICIO 4.1

A. 5,4,2,6,3,1
B. 7. V **8.** F **9.**V **10.**N

EJERCICIO 4.2

1. $\frac{45}{75} = \frac{3}{5}$, $-\frac{75}{105} = -\frac{5}{7}$,
$\frac{54}{90} = \frac{3}{5}$, $\frac{196}{144} = \frac{49}{36}$,
$-\frac{78}{108} = -\frac{13}{18}$

3. $A\left(-\frac{14}{5}\right)$, $B\left(-\frac{11}{5}\right)$, $C\left(-\frac{6}{5}\right)$,
$D\left(-\frac{4}{5}\right)$, $E\left(+\frac{3}{5}\right)$, $F\left(+\frac{7}{5}\right)$,
$G\left(+\frac{14}{5}\right)$

4. a. > **b.** > **c.** < **d.** >
e. < **f.** <

5. $\frac{18}{25} > \frac{1}{6} > -\frac{1}{4} > -\frac{3}{5} > -\frac{8}{3}$

6. a. $\left(-\frac{13}{20}\right)$ **b.** $\frac{17}{15}$

7. a. $\frac{23}{12}$ **b.** $\left(\frac{-13}{20}\right)$

8. a. 9 **b.** $\frac{25}{6}$

9. 459 **10.** $15\frac{2}{7}$ toneladas

11. a. $21.000
b. $94.500

13. a. 2 km **b.** $\frac{46}{5}$ km

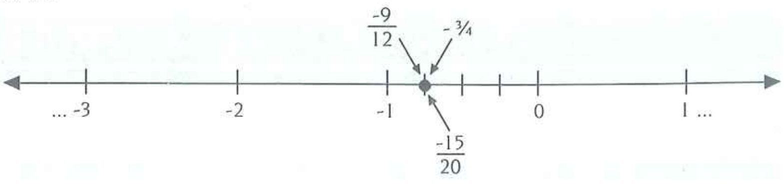
14. a. $\frac{4}{35}$ **b.** $\frac{17000}{7}$

15. $537\ \frac{3}{5}$ litros

EJERCICIO 4.3

1. a. $\left\{\frac{3}{7}\right\}$ **b.** $\left\{-\frac{4}{5}\right\}$ **c.** $\left\{\frac{7}{1}\right\}$

3. b.



4. a. $\left\{-\frac{2}{7}\right\}$ **d.** $\left\{\frac{9}{5}\right\}$

6. a. Sí **b.** Sí **c.** Sí **d.** Sí

7. a. (-0,28) **b.** $0{,}\widehat{42}$
c. $2{,}\widehat{8}$ **d.** -24,0
e. $(-0{,}0\widehat{7})$ **f.** $3{,}\widehat{93}$
g. 3,0 **h.** 0,72

8. a. Decimal finito
b. Decimal infinito periódico puro.
e. Decimal infinito periódico mixto

EJERCICIOS 4

EJERCICIO 4.4

2. **a.** Sí **b.** Sí **c.** Sí
d. Sí, el $\frac{0}{1}$ **e.** Sí

3. **a.** $\frac{3}{4}+\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{9+(-8)}{12}=\frac{1}{12}$

b. $\frac{8}{5}+\frac{1}{4}=\frac{37}{20}$

c. $\left(-\frac{3}{7}\right)+\left(+\frac{15}{14}\right)=\frac{9}{14}$

d. $-5+\left(-\frac{8}{9}\right)=\left(\frac{-53}{9}\right)$

4. **a.** 1 **b.** $\left(-\frac{1}{6}\right)$ **c.** $\frac{5}{24}$

d. $\left(-\frac{2}{5}\right)$ **e.** $\left(-\frac{1}{30}\right)$ **f.** 20

5. **a.** Sí **b.** Sí **c.** Sí
d. Sí, $\frac{1}{1}$ **e.** No, $\frac{0}{1}$

6. **a.** $\frac{5}{3}$ **b.** $\left(-\frac{7}{2}\right)$, porque
$\left(-\frac{2}{7}\right)\bullet\left(-\frac{7}{2}\right)=1$

7. **a.** $\frac{1}{6}$ **b.** $\left(-\frac{1}{4}\right)$ **c.** $\left(\frac{-75}{8}\right)$

d. $\left(\frac{-54}{5}\right)$ **e.** $\frac{11}{5}$ **f.** (-12)

7. **a.** $\frac{1}{6}$ **b.** $\left(-\frac{1}{4}\right)$ **c.** $\left(\frac{-75}{8}\right)$

d. $\left(\frac{-54}{5}\right)$ **e.** $\frac{11}{5}$ **f.** (-12)

8. **b.** $\frac{3}{5}+\frac{4}{15}=\frac{13}{15}$

c. Sí
d. Sí

EJERCICIO 4.5

1. **b.** Positivo **c.** Negativo
d. Sí, sí **e.** No, no.

2. **a.** Colocando la misma base y sumando los exponentes.
b. Colocando la misma base y restando los exponentes.

d. Producto de las potencias
e. Cociente de las potencias

3. **a.** $\left(-\frac{1}{128}\right)$ **b.** $\frac{8}{27}$ **c.** $\frac{4}{9}$

d. $\left(-\frac{1}{8}\right)$ **e.** $\frac{64}{729}$ **f.** $\frac{1}{65.536}$

4. **a.** $\frac{64}{729}$ **b.** $\frac{4.096}{15.625}$ **c.** $\frac{1}{4}$

d. $\left(-\frac{1}{4}\right)$ **e.** $\frac{5}{4}$ **f.** $\frac{-173}{190}$

TALLER DE REPASO DE LA UNIDAD 4

1. **a.** V **b.** V **c.** F **d.** V
e. V **f.** F **g.** V **h.** F
i. F **j.** V **k.** F **l.** F
m. V

3. **a.** $5\frac{4}{5}$ **b.** $-8\frac{1}{2}$

c. $2\frac{3}{16}$ **d.** $-1\frac{15}{28}$

4. **a.** $\frac{20}{3}$ **b.** $\left(-\frac{43}{9}\right)$

c. $\frac{66}{7}$ **d.** $-\frac{37}{5}$

9. **a.** $\frac{18}{26}$, $\frac{36}{52}$, $\frac{27}{39}$

e. $\left(-\frac{9}{12}\right)$, $\left(-\frac{3}{4}\right)$, $\left(-\frac{6}{8}\right)$,

?. **a.** 36 **b.** 5 **c.** 6 **d.** 1

8. **a.** $\frac{8}{9}$ **b.** $\left(-\frac{4}{5}\right)$

c. $\frac{7}{5}$ **d.** $\left(-\frac{13}{11}\right)$

9. a,c, d y e.
10. **a.** > **b.** > **c.** > **d.** <

11. **a.** $\frac{168}{48}$, $\frac{7}{48}$, $-\frac{18}{48}$
b. $\frac{22}{64}$, $\frac{4}{64}$, $\frac{-1}{64}$, $\frac{-48}{64}$
c. $\frac{21}{24}$, $\frac{16}{24}$, $\frac{4}{24}$

12. **a.** F **b.** V **c.** F
d. F **e.** F **f.** V
g. F **h.** F **i.** V
j. F

13. **a.** $\left(\frac{-16}{3}\right)$ **b.** $\frac{5}{4}$

c. $\left(\frac{-5}{7}\right)$ **d.** (- 1)

e. 3 **f.** $\frac{5}{6}$

g. $\left(\frac{-1}{12}\right)$

14. **a.** $\left(\frac{-22}{3}\right)$ **b.** $\frac{123}{130}$

c. $\left(\frac{-11}{70}\right)$ **d.** $\frac{16}{3}$

15. 60 **16.** 576
19. 42 **20.** No
21. Sara
22. 13.333 pasos aprox.
23. Camila **24.** 20
25. en C.

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 4

1. $350.000 **2.** $2.940 **3.** 3p.m. **4.** 18 y 36

PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS SABER 4

1. d **2.** b **3.** a **4.** b **5.** c

NÚCLEO TEMÁTICO

5

EJERCICIOS

EJERCICIO 5.1

1. b **2.** d **3.** c **4.** c

EJERCICIO 5.2

1. a. Proposición, valor de verdad (v)
  - **b.** Forma proposicional
  - **c.** Proposición, valor de verdad (v)
  - **d.** Proposición, valor de verdad (f)
  - **f.** Proposición, valor de verdad (v)
  - **g.** Proposición, valor de verdad (v)
  - **i.** Forma proposicional
  - **j.** Forma proposicional.

3. a. El número, $\frac{-1}{2}$
  - **b.** x, 2
  - **c.** y, $-3y + 3$
  - **d.** y, -6
  - **e.** x, $\{3,2,1,0,-1,...\}$

6. a. Sí **b.** Sí **c.** Sí **d.** Sí

8. a. No **b.** No **c.** No **d.** No

EJERCICIO 5.3

1. a. Tienen la misma solución
  - **b.** Uniforme; trasposición

4. a. $x = \frac{32}{7}$ **b.** $x = -4$
  - **c.** $x = 19$ **d.** $x = 10$
  - **e.** $x = \frac{32}{3}$ **f.** $x = \frac{9}{4}$
  - **g.** $x = 4$ **h.** $x = 3$
  - **i.** $x = 13$

EJERCICIO 5.4

1. Juan:21 años, Camilo 35 años

2. -20,-19,-18,-17

3. 41, 65

4. 99, 67, 34

5. 42 años, 24 años, 22 años

6. 36, 12, 48

7. 111

8. 113, 427

9. 45 niñas, 15 niños

10. 60, 40

11. 9, 18, 54

12. 128 millones

EJERCICIO 5.5

1. $m\,\overline{AB} = 8$, $m\,\overline{MN} = 3$, $m\,\overline{NB} = 13$

2. $m\,\overline{AB} = 4$

3. 36°, 72°, 72°

4. 38°, 76°, 66°

5. 130°, 50°.

TALLER DE REPASO DE LA UNIDAD

2. a. Proposición
  - **b.** Forma proposicional
  - **c.** Proposición
  - **d.** Proposición
  - **e.** Proposición
  - **g.** Forma proposicional
  - **h.** Forma proposicional
  - **i.** Forma proposicional
  - **j.** Forma proposicional

3. a. El número, -8
  - **b.** Z, -15
  - **c.** x, $-4 + 4$

4. a. $m = 7$ **b.** $x = 5$
  - **c.** $x = -6$ **d.** $y = 33$
  - **e.** $p = \frac{32}{3}$ **f.** $x = -15$

5. 49,57

6. 67, 68, 69

7. 303, 339

8. 32, 16

9. 50, 100, 200

10. 36, 3, 30

11. 8

12. 65°, 115°

13. $m\widehat{\alpha} = 135°$, $m\widehat{\beta} = 45°$

14. 54°

15. 20°, 60°, 100°

16. 30°, 90°, 150°, 90°

17. 96°, 84°

18. 84°

19. 52°

20. 64°, 68°,48°

DIVIERTETE MIENTRAS PIENSAS

1. Tengo: 1200 caballos, Marcos: 600 caballos, Juan: 400 caballos **2.** $2\frac{6}{17}$ horas **3.** 105

PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS SABER

1. b **2.** d **3.** a **4.** c **5.** d

NÚCLEO TEMÁTICO

6

EJERCICIOS

EJERCICIO 6.1

1. b **2.** c **3.** d **4.** c

EJERCICIO 6.2

1. a. 2 **b.** 2
c. 2 **d.** Km
e. mm.mm **f.** dam, hm
g. dam, hm **h.** cm, dm

2. a. 10 **b.** 240 **c.** 4,7cm

3. a. 38,5 dam = 3 hm 8 dam 5m, 0,05Km= 5 dam
385,675 m= 3hm 8 dam 5 m 6 dm 7 cm 5 mm
b. 3,85 hm= 38500 cm = 3.850 dm
0,05 km= 0,5hm = 500 dm = 5.000 cm
385,678 m = 3,85678 hm = 3.856,78 dm.

4. a. 305,678 m = 3 hm 5m 6 dm 7 cm 8 mm
d. 0,057 dm = 5m 7dm

5. a. 4 **b.** 5 **c.** 2 **d.** 4

6. a. 4,5 dm =(4,5÷10) m = (0,45 ÷10) dam = 0,045 dam
e. 0,05 hm = (0,05x10)dam = (0,5 x 10)m = (5x10) dm = 50 dm.

7. 406.823 x 10^8 Km

10. a. 1.050,6m
b. 10.506 dm
c. 10,506 hm
d. 1050.600 mm

11. a. Es más alto Pedro y es más alto en 50 mm

12. 25 retenes

13. 3.5 **14.** 400 m

15. d

16. a. mayor **b.** 2
c. π **d.** Calculando 2πr

17. 68π cm **18.** 18,3 πm

19. 60 πcm **20.** 1,23 πcm

21. 3.476 πkm, 1.738 km

EJERCICIO 6.3

4. <α, <MRT, <TRM, <R

7. m<0=3m< AOB

8. a. 70° **b.** 50° **c.** 35°
d. 85° **e.** 150° **f.** 30°

EJERCICIO 6.4

1. a. 1.639′ **b.** 2.918′
c. 14.576′

2. a. 139.920″ **b.** 88.020″
c. 227.535″

3. a. 6° 27′0″ **b.** 1° 2′ 22″
c. 229° 15′ 27″ **d.** 1°41′54″
e. 5°33′38″ **f.** 0°53′6″

4. a. 116°37′7″ **b.** 82°50′40″
c. 22°49′15″ **d.** 5°31′11″
e. 77°31′38″ **f.** 80°54′11″

5. a. 271°58′30″ **b.** 27°51′4″
c. 3°56′49″ **d.** 22°36′58″
e. 27°52′30″

TALLER DE REPASO DE LA UNIDAD 6

3. 231, 36 km

4. a. 0,120 km

5. 2,5 dam < 0,075 km < 2.400 dm < 250.000 mm

6. a. 95 cm **b.** 775 mm
c. 25 dm **d.** 0,0004 km

7. a. 17,93 m **b.** 179,3 dm
c. 1.793 cm

8. Menos

9. a. $\overline{ED}$, $\overline{FC}$, $\overline{HD}$
b. HD, HD=3,8 cm
c. 3,8π cm
d. $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OB}$, $\overline{OD}$, $\overline{OH}$

10. 68πm

12. a. 49°51′46″ **b.** 8°22′43″
c. 27°41′4″ **d.** 6°53′35″

13. a. 52°46′27″ **b.** 31°42′
c. 67°35′25″

14. a. 180° **b.** 140°30′
c. 39°30′ **d.** 164°30′

15. 21°49′18″

16. 54°21′45″

17. 60°

18. a. <JMK, <JML, <KML
c. M

20. 4 de la tarde y 40 minutos

21. No, Si **22.** 20h 34′36″

23. 3h16′27″

24. 4 días, 1hora

26. a. 47′34″ **b.** 31′40″
c. 58′5″

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 6

1. Tenía \$225.000 y presté \$125.000 **2.** 45 **3.** \$15,400.000 **4.** \$28.000

PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS SABER 6

1. b **2.** c **3.** a **4.** b **5.** a

NÚCLEO TEMÁTICO

7

EJERCICIOS

EJERCICIO 7.1

1. Aljuarizmi
2. Bagdad
3. Aristóteles
4. Las Mil y una Noche
5. Centros
6. Al Mamun
7. Casa de la sabiduría
8. Artistas, científicos y escritores
9. Mecenas

EJERCICIO 7.2

1. a. Sí **b.** Sí
  c. A un cuadrado de lado 1 km, a un cuadrado de lado 1 dam
  d. Dividiendo por 100, multiplicando por 100
  e. A la medida de la superficie
  f. No, el perímetro se mide con unidades de longitud y el área con unidades de superficie.
  g. El metro, el metro cuadrado.
2. a. 1dm² **b.** 1 cm²
3. b. $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{8}$, porque cuatro cuadritos representan 1 cm²
  d. Sí, porque $\frac{1}{8} = 0{,}125$
  e. 312,5 mm²
  f. Sí
  g. Sí
4. a. cm² **b.** mm² **c.** Sí
5. a. 5cm
  b. El perímetro del cuadrado es 12 cm y del triángulo rectángulo es 12 cm, Sí.
  c. Del cuadrado es 9 cm² y del triángulo rectángulo es 30 cm², No.
6. a. 4,47 cm
  b. El perímetro delcuadrado es 8 cm y del triángulo rectángulo es aproximadamente 10,47cm, No.
  c. El área del cuadrado es 4 cm² y del triángulo rectángulo es 4 cm², Sí.
7. a. Sí **b.** Sí
8. a. 78500000000 mm²
  b. 78.924 dam²
  c. 0,00002356 km²
  d. 0,0057 dm²
  e. 0,1089 hm²
  f. 0,57 cm²
9. 169 baldosas
12. a. 2 dm **b.** 6 cm **c.** 6cm
13. 166,14 cm², 192,95 cm², 93,6 cm²
14. 11,6 cm², 84,24 cm²
15. $701.505
16. 5 cuadrados
17. $(18 - \pi)$ cm²
18. $40\sqrt{6}$
19. 246 cm2
20. Altura= 12cm,
Perímetro=76 cm,
Área = 300 cm²

TALLER DE REPASO DE LA UNIDAD

7

2. 10 unidades, 13 unidades, 11 unidades
3. 12m², 20,5 m², 18,5 m²
4. a. 100 **b.** 40.000
  c. 150.000 **d.** 2.040.000
  e. 1 **f.** 0,043
  g. 0,004583 **h.** 0,0000035
5. a. 35,083700 **b.** 35,08370004
  c. 0,3508370004
  d. 3.508,370.004
6. a. 0,000087073 **b.** 0,87073
  c. 870.730 **d.** 87,073.000
7. $810.000
8. $69,000.000
9. Ambas tiene la misma extensión
10. 9πm², (96-9π)m²
11. 243 cm²
12. 160 baldosas
13. 175,82m²
15. a. 972 cm² **b.** 27 cm²
16. a. 5cm, 30cm² **b.**8cm, 56cm²
17. $\frac{25}{3}\pi$cm²
18. 2πcm² + 16 cm²
19. $|\overline{AC}| = \sqrt{68}$ cm
$|\overline{BD}| = \sqrt{29}$ cm
$|\overline{DC}| = \sqrt{13}$ cm, perímetro = 15 cm + $\sqrt{13}$cm; área = 13 cm²

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS

7

1. Ambas son iguales

PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS SABER

7

1. c **2.** b **3.** d **4.** c **5.** b

NÚCLEO TEMÁTICO

8

EJERCICIOS

EJERCICIO 8.1

1. b; **2.** a ; **3.** c ; **4.** d

EJERCICIO 8.2

2. a. Prisma recto
  b. Poliedro
  c. Cubo
  d. Poliedro
  e. Poliedro
  f. Tetraedro
4. b,c,d
5. a,d,e
6. a. 4, tetaedro
  b. 6, cubo
  c. 12, dodecaedro
7. 18

EJERCICIO 8.3

4. a. Cilindro **b.** 2 cm
  c. 5 cm
  d.10 cm^2,25πcm^2
5. a. Un cono
  b. 8 cm, 6cm
  c. 36 πcm^2
6. a. Una esfera **b.** 3 cm
  c. $\frac{9\pi}{2}$ cm^2

EJERCICIO 8.4

3. a. 8000 **b.** 250.000
  c. $5_{2}600.000_{1}000.000$
  d. 31.700,5
4. a. 4.000 **b.** 61000.000
  c. $4.000_{1}000.000$
  d. 0,6 **e.** 35.000
5. a. 225.000 cm^3
  b. 225 dm^3
  c. $225_{1}000.000$ mm^3
6. Mayor
7. a. dm^3 **b.** 830
  c. 800 **d.** m^3
9. a. 57,105 cm^3 **b.** 20,1 cm^3
  c. 268,1 cm^3
  d. 39,27 cm^3 aprox
10. a. 33,5 m^3
  b. 33.500 dm^3
  c. $33_{1}500.000$ cm^3
11. a. 0,52 cm^3
  b. 7,85 cm^3
  c.2,65 cm^3 aprox
12. aprox 9
13. a. 67 cm^3 aprox
  b. 25,35 cm^3 aprox

EJERCICIO 8.5

1. Todas son verdaderas
4. a. 2 **b.** 20, 40
  c. 20 botellas, 40 botellas
  d. 2 garrafas, 0,5 garrafas
5. a. dal **b.** hl
  c. l **d.** ml
6. a. Sí **b.** Sí
7. a. 7 dl **b.** 5 dl **c.** 8 dl
  d. 9,5 dl **e.** 9,8 dl
8. a. 50,25,20
  b. 5, 2.5, 2
9. a. 3000 **b.** 2 **c.** 5
  d. 0,1 **e.** 0,01 **f.** 250
  g. 1.500 **h.** 70 **i.** 1.600
  j. 5 **k.** 12,5 **l.** 40
10. a. 0,324 **b.** 2.450
  c.29,37 **d.** 320
  e.45,2 **f.** 324,7
  g.830 **h.** 10,708
  i. 420.30,07
12. a. 125cm^3, 0,125 *l*
  b. 64 cm^3, 0,064 *l*
  c.27.000 cm^3, 27 *l*
  d. 421.875 cm^3, 421875 *l*
  e.30 cm^3, 0,03 *l*
  f. 18 cm^3, 0,018 *l*
13. La caneca se llena con10 litros y la lata con 2 litros.
14. 20.000
15. 168.000

EJERCICIO 8.6

1. a. V **b.** F **c.** V
2. a. 500 **b.** 200
  c. 3.000, $3_{1}000.000$
  d. 50, 5.000, $5_{1}000.000$
  e. 0,001 **f.** 0,001
  g. 1 **h.** 10
  i. 10, $1_{1}000.000$
  g. 10.000 , $100_{1}000.000$
3. a. 5.000 kg **b.** 550 kg
  c. 1 kg
5. a. 3,0516 **b.** 3,85
  c. 500 **d.** 830,05
6. a. 3,5 **b.** 67,5
  c. 3000,58 **d.** 830,05
7. 3,938 kg
8. 356,35 q, $65.0_{1}35$ kg
9. a. 7dg 5cg 6 mg
  b. 2t 2q 6 kg
  c. 8g 4dg
  d. 3 dag 7g 8dg
10. a. 978.345 dg
  b. 8.278 dg
  c.184.500 dg
11. a. 10 **b.** 14
  c.9 **d.** 25
12. 70

TALLER DE REPASO DE LA UNIDAD 8

3. a. Cubo
  b. Poliedro
  c. Pirámide
  d. Cono
  e. Icosaedro regular
  f. Octaedro regular
  g. Dodecaedro regular
  h. Cilindro
5. a. 15 cuadros
  b. 12 cuadros
  c. 20 cuadros
  d. 94 cuadros
  e. 60 cubos
6. a. área total=80 cuadros; volumen = 48 cubos
  b. área total=1.182 unidades cuadradas; volumen = 2.677,5 unidades cúbicas

TALLER DE REPASO DE LA UNIDAD 8

- **c.** área total=5.579,5 unidades cuadradas;volumen=27.078,75 unidades cúbicas.
- **d.** área total= 111 unidades cuadradas; volumen = 70 unidades cúbicas.
- **e.** área total= 105,24 unidades cuadradas; volumen = 60 unidades cúbicas.
- **f.** área total= 66,21 unidades cuadradas; volumen = 30 unidades cúbicas.

8. a. 225.000 cm³
  b. 500.000 cm³
  c. 5.000 cm³
  d. 432,000.000

9. a. 400 **b.** 1
  c. 120 **d.** 250
  e. 0,0025 **f.** 0,0075

10. a. 250 **b.** 1,7
  c. 7.000 **d.** 780
  e. 0,001 **f.** 10,430.000

11. a. 470 *l* **b.** $4.342 \times 10^7 l$
  c. 0,75*l* **d.** 52.000 *l*.

12. a. 70 **b.** 3,24
  c. 0,00247 **d.** 4,25

13. a. 0,03 **b.** 0,018

14. a. 0,06 **b.** 0,041
  d. 4.417,86
  e. 0,134 **f.** 0,026

15. 67,344.345

16. 1,4 m

17. 40,320

18. 24.000

19. a. 5,83 dm³
  b. 19,8 dm²

20. a. 4 dm **b.** 96 dm²
  c. 12 dm

21. a. 120 **b.** 184

22. a. 67,8
  b. 166,67 kg aprox
  c. 7,35 kg

23. a. 82,6 kg aprox
  b. 3, 57 kg aprox

24. b. 2.535 cm³
  c. 20.787 kg

25. a. 8.540 cm²
  b. 14.000 cm³
  c. 13.300 g

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 8

1. a. 216 **b.** 216 **c.** 72 **d.** 8
2. Un círculo, cuando la corta en la mitad
3. 13,5 m³
4. En cada recipiente se deposita 1.728 ml y los dos recipientes son cubos de 12 cm de arista
5. Colocar en un lado tres cubos de aristas 6,8 y 10 cm y en el otro solamente el cubo de 12 cm de arista.

PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS SABER 8

1. b **2.** c **3.** b **4.** c **5.** a

NÚCLEO TEMÁTICO

9

EJERCICIOS

EJERCICIO 9.1

1. F **2.** F **3.** N **4.** V
5. V **6.** N **7.** N **8.** V **9.** V

EJERCICIO 9.2

5. a. Volumen, son cantidades homogéneas porque están dadas en la misma magnitud.
  b. Capacidad, porque están dadas en la misma magnitud.
  c. Superficie, porque están dadas en la misma magnitud.
  d. Longitud, porque están dadas en la misma magnitud.

6. 3cm, 7 hm, 2 m, 3 mm, 1 km son cantidades homogéneas 3l, 4 hm, 6cm² no son cantidades homogeneas.

7. a. Es posible
  b. Es posible
  c. Es posible
  d. No es posible, porque no son cantidades de la misma magnitud, es decir; cantidades homogéneas.
  e. No es posible, porque la multiplicación no es clausurativa en un conjunto de cantidades homogéneas.

EJERCICIOS 9

f. Es posible.

8. a. Sí

b. No, no está definida la multiplicación entre cantidades de una misma magnitud

c. No, la división no es clausurativa en un conjunto de cantidades homogéneas.

EJERCICIO 9.3

1. a. 1 a 4, 1:4

b. 4 a 1, 4:1

c. Por cada automóvil hay 4 ruedas

d. $\frac{4}{1}$ **e.** 4:1

2. a. 5:2 **b.** $\frac{5}{2}$

c. 75 automóviles

d. 24 camiones

e. 10:4 , 20:8, 60:24

3. a. 16:36

b. 9 alumnos se relacionan con 4 niñas, es decir, por cada 9 alumnos hay 4 niñas.

c. Si, porque $\frac{4}{9}$ de 36 son 16 niñas.

EJERCICIO 9.4

1. a. $\frac{2\ dm^2}{3\ dm^2} = \frac{2}{3}$

b. $\frac{14\ m}{14\ dam} = \frac{14\ m}{140\ m} = \frac{1}{10}$

c. $\frac{1\ dam}{14\ m} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$

d. $\frac{50\ l}{1\ dal} = \frac{5}{1}$

e. $\frac{2m^3}{1\ m^3} = \frac{2.000}{1}$

f. $\frac{5\ kg}{8\ hg} = \frac{25}{4}$

4. $\frac{8\ cm}{0{,}16\ m} = \frac{8\ cm}{16\ cm} = \frac{1}{2}$

EJERCICIO 9.5

1. a. 3: antecedente, 5: consecuente

c. 4: antecedente, 7: consecuente

2. a. $\frac{2}{1}$

b. $\frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{6}{3}$

c. 20 vasos **d.** $\frac{2}{1}$

3. a. $\frac{2\pi \cdot r}{2r} = \pi$

b. π x (2•r) = $2\pi r$, la longitud de la circunferencia.

c. $\frac{3\ l}{l} = 3$

5. a. $\sqrt{2}$ **b.** $\sqrt{2}$

EJERCICIO 9.6

2. b. 1 es a 7 como 5 es a 35

4. a. 3x16=8.6

b. 1x35= 7x5;

7. a. $\frac{3}{1}$ **b.** Sí **c.** $\frac{3}{1}$

9. a. x=14 **b.** x=5 **c.** x= $\frac{2}{5}$

d. x=5,6 **e.** x=0,75

f. x=3

EJERCICIO 9.7

1. a. $\frac{1}{5{,}000.000}$

b. 5,000.000 de veces

2. a. 125 veces

b. 800 cm de largo y 600 cm de ancho

3. $\frac{1}{100.000}$

4. 0,93 cm

9. 15 cm por 24 cm

10. 14,4 cm por 21,6 cm.

EJERCICIO 9.8

1. 35 niños **2.** 80 mangos

3. 32 canastas **4.** 100

5. 50° y 40°

TALLER DE REPASO DE LA UNIDAD 9

4. 9 : 3 : : 12 : 4,

9 : 12 : : 3 : 4

5. a. > **b.** < **c.** >

d. < **e.** = **f.** =

6. Hay más personas del sexo femenino

7. a. 10 **b.** 21 **c.** 70 **d.** 30

8. a. El conjunto Y. **b.** 15, 20

9. 15 : 9: : 5 : 3

10. 6 : 3 : : 12 : 6

11. a. Verdadera

b. Verdadera

12. a. 6,3 : 6 : : 6 : 12

b. 4, $\frac{2}{4} = \frac{4}{8}$

c. 10, $\frac{4}{10} = \frac{10}{25}$

d. 18, $\frac{36}{18} = \frac{18}{9}$

13. a. $\frac{4}{6} = \frac{6}{9}$

b. $\frac{1}{3} = \frac{3}{9}$

c. $\frac{m}{x} = \frac{x}{n}$

14. En la hacienda A hay 1.200 cabezas y en la B, 960 cabezas.

15. a. 14 **b.** 42 **c.** 30,30

16. 36°, 84°, 60°

17. $\frac{12}{5}$ **18.** 450 km

19. a. $\frac{50}{7}$ **b.** $\frac{1}{3}$ **c.** $\frac{1}{12.500}$

d. $\frac{150}{1}$ **e.** $\frac{5}{1}$

21. 1.250 gr de mantequilla, 15 huevos, 10 naranjas, 750 gr de azúcar, 1.250 gr de harina.

23. a. 2.6 m **24.** $2.370

25. a. 3m **b.** 6 cm

26. 45 cm2 **27.** 7:3

29. 1,6 cm^2

31. a. 32.000 kg

b. 32 toneladas

c. 23.200 kg

32. 63,75 kg, 21,25 kg

33. a. x=12 **b.** x=3

c. x=2 **d.** x=-7

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 9

2. a. 70 vehículos, **b.** 80 camiones
3. a. 15, 21, 28, 36, 45 **b.** La suma es un cuadrado perfecto
4. El primero
5. Fila 12
6. 35 y 49

PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS SABER 9

1. b **2.** c **3.** c **4.** b **5.** b

NÚCLEO TEMÁTICO

10

EJERCICIOS

EJERCICIO 10.1

1. c **2.** a **3.** d **4.** b

EJERCICIO 10.2

4. a. 18 **b.** 1993
c. No nacieron durante este año
d. 0%
e. Se murieron 3 ejemplares
5. a. 80m. **b.** 2 minutos
c. 2 minutos **d.** $\frac{20m}{min}$, $\frac{40m}{min}$

EJERCICIO 10.3

3. a. V **b.** V **c.** V
4. a. No, P=f(l) **b.** Sí
5. a. $f(1)=\frac{1}{2}$, $f(4)=2$
$f(6)=3$, $f(7)=\frac{7}{2}$
$f(10)=5$
b. $f=\{ (1,\frac{1}{2}), (4,2), (6,3), (7,\frac{7}{2}), (10,5) \}$
d. Sí, $\frac{1}{2}$ **e.** Sí
6. b. Sí, porque al aumentar el número de litros, aumenta el peso.
c. Sí, porque las magnitudes **litros** y **peso total** están directamente relacionadas y porque el cociente entre dos valores relacionados es una constante.
d. 1,2
e. Sí, $\frac{y}{x}=1,2$; $y=f(x)=1,2x$
f. Sí, porque la ecuación es de la forma $y=f(x)=kx$, el operador es **1, 2x**
g. 44,4 kg
h. f(100)=120 kg **j.** Sí
7. a. Sí, porque al aumentar el número de viajes la cantidad de envases aumenta.
b. No, porque el cociente entre dos cantidades correspondientes de las magnitudes no es constante.
8. a. No **b.** No
9.

A	5	3	25	1	7	9	10
B	20	12	100	4	28	36	40

La constante de proporcionalidad es 4
10. a. f(0)=0, f(3)= 9, f(5)=15
b. f(0)=0, f(3)=3, f(5)=5
11. a. $\frac{-2}{7}$
b. -4 , $y=f(x)=\frac{-2}{7}$, $y=f(x)=-4$
12. a. El tiempo y la distancia, son directamente proporcionales.
b. La longitud y el valor, son directamente proporcionales.
c. El número de obreros y el tiempo, son inversamente proporcionales.
d. El peso y la edad, no son directamente proporcionales.
e. El número de vueltas y la distancia recorrida, son directamente proporcionales.
13. a. Sí, porque son magnitudes directamente proporcionales.
b. Sí, porque son magnitudes directamente proporcionales, $N \propto D$ se lee "N es directamente proporcional a D".
c. No, porque no son magnitudes directamente proporcionales.
14. $10\frac{km}{h}$

EJERCICIOS 10

15. a. Sí, porque en ambas ecuaciones, d y t son magnitudes directamente proporcionales.
b. La velocidad del objeto M es 60 y de N, 80.
c. Sí.
d. Sí, porque son funciones lineales, la del objeto N, por tener mayor velocidad.

EJERCICIO 10.4

1. a. Sí, porque al aumentar una magnitud, la otra disminuye.
b. 24 días
d. Sí **e.** 240
g. Sobre una linea curva
h. x•y= 240

2. a. 144 **b.** x•y= 144

3. a. Sí, porque al aumentar los valores de una magnitud, los valores correspondientes de la otra disminuyen.
b. No, porque el producto entre valores correspondientes no es constante.

4. a. 3.000,1.500,1.000,300,120
c. Inversamente proporcionales porque cumple las 2 condiciones de magnitudes inversamente proporcionales.
d. 3.000
e. {(3.000,1)(1.500,2), (1.000,3),(300,10), (120,25)}
g. Sobre una línea curva.
h. x•y=3.000

5. b. El que pesa menos debe utilizar doble longitud en su brazo.
c. 4m
d. Son inversamente proporcionales, porque el producto de valores correspondientes del peso y la longitud del brazo es constante.

TALLER DE REPASO DE LA UNIDAD 10

1. a. F **b.** F **c.** V
d. V **e.** V **f.** V
g. V **h.** F **i.** V

2. a. Son directamente proporcionales.
b. Son inversamente proporcionales.
c. Inversamente proporcionales.
d. Son directamente proporcionales
e. Son inversamente proporcionales.

3. a. 80, 160, 320, 20, 10
b. Inversamente proporcionales
d. 3.200
e. {(40,80), (80,40), (160,20), (320,10), (20,160), (10,320)}

4. a. $ y kg
b. Directamente proporcionales
c. 50
d. {(1,50), (2,100), (3,150), (4,200), (5,250), (6,300) }
e. y= f(x)= 50•x
f. Sí.

5. a. Días y No. de personas
b. Inversamente proporcionales, ya que cumple las dos condiciones de magnitudes inversamente proporcionales.
c. 8
d. {(1,8), (2,4), (4,2), (8,1)} **e.** x•y=8

6. El más caro es C, el más nuevo es B, tienen el mismo precio A y E, B y D, tienen la misma antiguedad A y C y también E y F.

7. a. Por Juan: 1,5 km y por Sara: 160km
b. Juan no realizó su recorrido a la misma velocidad y Sara sí.
c. 0,5 $\frac{km}{h}$, $\frac{1km}{h}$

8. a. 80 $\frac{km}{h}$ **b.** 80 $\frac{km}{h}$ **c.** 80 $\frac{km}{h}$, 80 $\frac{km}{h}$

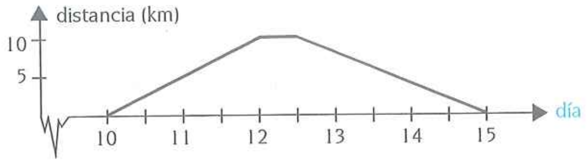
9. a. 40 $\frac{km}{h}$ **b.** 20 minutos **c.** 80 $\frac{km}{h}$

10. a. 8 a.m. **b.** Entre las 9 y las 10 horas
c. Entre las 15 y las 16 horas

12. a. 150 **b.** 1 hora **c.** a las 11 a.m., 5 horas

13. a. A **b.** B **c.** Inversamente relacionadas

14. a.



b. 5 $\frac{km}{h}$, - 4 $\frac{km}{h}$

c. d= f(t) = 5t ; d= f(t) = -4t

16. a. Son directamente proporcionales **b.** y= kx
c. Es constante
d. Constante de proporcionalidad directa

17. a. Inversamente proporcionales
b. Queda dividido por 5.

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 10

1. 88, 33 **2.** 32 m , 40m , 48m **3.** a =21 , b = $\frac{49}{2}$

PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS SABER 10

1. a **2.** a **3.** c **4.** a **5.** b

NÚCLEO TEMÁTICO

11

EJERCICIOS

EJERCICIO 11.1

1. b **2.** a **3.** d **4.** b **5.** c

EJERCICIO 11.2

1. 120° **2.** 6 horas
3. $20.000 **4.** 6 horas
5. 14,49 galones **6.** 4 horas
7. $26.000
8. 4 meses y 15 días
9. 17m **10.** 18.984 litros

EJERCICIO 11.3

1. 900 m **2.** 112 días
3. 11.625 kg **4.** 24 obreros
5. 6 días 6 horas
6. 26 días 16 horas
7. 12 días **8.** 25 días
9. 10 días **10.** 8 obreros

EJERCICIO 11.4

1. A Juan le toca $600.000, a Lina $900.000 y a David $1ˌ.800.000

2. $600.000, $900.000, $2ˌ100.000

3. Rubén $120.000,
Mauricio $380.000

4. 125, 50, 25

5. $1ˌ250.000, $1ˌ000.000, $500.000

6. $\frac{5}{3}$ x 10^7 pesos,
$\frac{725}{3}$ x 10^5 pesos,
$\frac{875}{3}$ x 10^5 pesos, $30ˌ000.000

8. Al de 4 minutos le toca $4ˌ800.000, al de 5 minutos: $3ˌ840.000 y al de 6 minutos le toca: $3ˌ200.000.

9. $ $\frac{3ˌ000.000}{7}$ le toca a cada uno de los que llevan 6 años, $ $\frac{2ˌ500.000}{7}$ le toca a los dos que llevan 5 años

EJERCICIO 11.5

1. a. $\frac{60}{7}$ %, 10%, 20%,
$\frac{10}{7}$ %, $\frac{200}{7}$ %
b. $\frac{24}{35}$ **c.** $\frac{11}{35}$, $\frac{220}{7}$ %
2. a. $\frac{1}{10}$ **b.** 10% **c.** 20
d. $\frac{1}{5}$ **e.** 35 **f.** $\frac{7}{20}$
g. $\frac{3}{10}$ **h.** 30% **i.** $\frac{1}{20}$
j. 5%
3. $\frac{100}{100}$ **4.** 100%

EJERCICIO 11.6

1. 57,5 litros
2. $35.000
3. $60.000
4. 2,75 gramos
5. $272.000

EJERCICIO 11.7

1. 33 $\frac{1}{3}$ %, 66 $\frac{2}{3}$ %
2. $13ˌ000.000
3. $1ˌ250.000
4. $1ˌ300.000
5. 250 reses **6.** $241.500
7. 3 $\frac{1}{3}$ % **8.** 12,5 %
9. a. 75% **b.** 72%
c. El equipo A
d. El equipo A

EJERCICIO 11.8

1. a. 7 pesos
b. 4,5 pesos por cada 100 pesos
3. a. 10%
b. $500, $1.000, $1.500, $2.000
4. Sí **5.** $14.400
6. 3ˌ000.000 **7.** 1%
8. 4 meses, 20 días
9. $185.700
10. $196.000, $896.000
11. 10 días **12.** $24.000
13. Colocar el dinero a interés ya que gana $3ˌ000.000
14. $91ˌ560.000 **15.** 50%
16. 3 meses 21 días 2 horas 40 minutos
17. Son falsos únicamente c y h.

TALLER DE REPASO DE LA UNIDAD 11

2. a. $\frac{1}{2}$ **b.** 0,1
c. 0,2 **d.** $\frac{1}{10}$

3. g. $\frac{3}{7}$

4. a. 2 **b.** 15

7. a. 75% **b.** 80% **c.** 16%
d. 250% **e.** 215% **f.** 43%
g. 6%

8. a. 0,412 **c.** 0,000025

9. a. 37,5% **e.** 726,6%

10. a. 50% **b.** 130 $\frac{10}{13}$ %
e. 157 $\frac{1}{7}$%

11. $\frac{48}{185\%}$

12. 40%, 60%, 100%

13. a. $\frac{7}{100}$ **b.** 7 **c.** 7%

14. 5%

15. 15 dólares

16. b. Sí **c.** No
d. 30 **e.** b•h= 30 cm²

18. a. 75% **b.** 40%

19. 75%

21. a. 17,2 cm
b. AB = CD =3,36 cm
AD = BC = 10,64 cm

22. Luisa tiene 7 años y José 14 años

23. a. 60% **b.** 40%

24. a. 50% **b.** Ha disminuido

25. a. 65%

26. 20 m, 30 m, 70 m

27. 180

28. 9

29. $\frac{2,200.000}{3}$ pesos

30. $63,000.000, $42,000.000, $45,000.000

31. 10 horas 40 minutos

32. Son verdaderas: a, b, f, g, j

33. 2 $\frac{2}{5}$

34. 12 días

35. Julio, 3 meses más

36. 3,5 %

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 11

1. 2 y $\frac{1}{2}$ ó -2 y - $\frac{1}{2}$

2. n= 73; cociente:4

3. 19%

4. Varones 36, niñas 60

5. 50.000 habitantes

6. a•n= 25

PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS SABER 11

1. b **2.** c **3.** c **4.** a **5.** c

NÚCLEO TEMÁTICO

12

EJERCICIOS

EJERCICIO 12.1

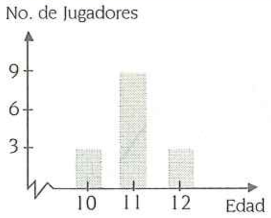
1. c **2.** b **3.** d **4.** d **5.** b

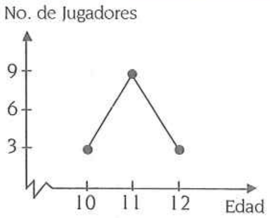
EJERCICIO 12.2

1. a. Población estadística: los 40 jugadores, Muestra estadística: 15 jugadores entrevistados.
b. La variable estadística: la edad y los datos son: 11, 10 y 12

c.

Datos (edad)	Frecuencia absoluta	Frecuencia Relativa		
		FRACCIÓN	DECIMAL	PORCENTAJE
10	3	3/15 = 1/5	0,2	20%
11	9	3/5	0,6	60%
12	3	1/5	0,2	20%
	SUMA: 15	5/5 = 1	1,0	100%





d. 60% **e.** Moda: 11 años ; Mediana: 11 años ; Media aritmética: 11 años

2. a. Variable estadística: grupo sanguíneo; Datos estadísticos: A, B, AB, O

c. 31,25%

3. a. La variable estadística es el número de libros leídos en un mes, el tamaño de la muestra es 40 jóvenes, la variable toma 6 valores distintos: 0, 1, 2, 3, 4 y 5.

b.

Datos	**Frecuencia absoluta**	**Frecuencia Relativa**		
		FRACCIÓN	**DECIMAL**	**PORCENTAJE**
0	5	$^{5}/_{40}$	0,125	12,5%
1	8	$^{8}/_{40}$	0,2	20%
2	10	$^{10}/_{40}$	0,25	25%
3	9	$^{9}/_{40}$	0,225	22,5%
4	6	$^{6}/_{40}$	0,15	15%
5	2	$^{2}/_{40}$	0,05	5%
	SUMA: 40	**SUMA:** $\frac{40}{40}$	**SUMA: 1,00**	**SUMA: 100%**

5. a. Número de hijos que hay en una familia.

b. Las familias de una población, el tamaño de la muestra es n=40 familias.

c. Número de hijos

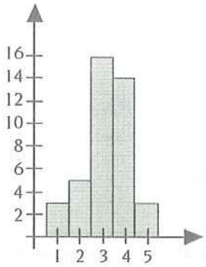
f. 3.460 familias

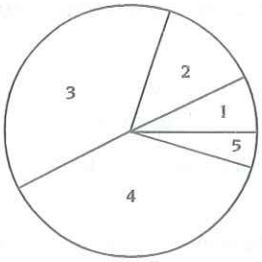
EJERCICIO 12.3

1. a) **2.** d) **3.**b) **4.** a) **5.** a) **6.** b) **7.** c) **8.** b) **9.** b) **10.** b) **11.** a) **12.** a) **13.**b) **14.** d)

15.d) **16.**

Datos	**f_i**	**F_i**
1	3	3
2	5	8
3	16	24
4	14	38
5	2	40



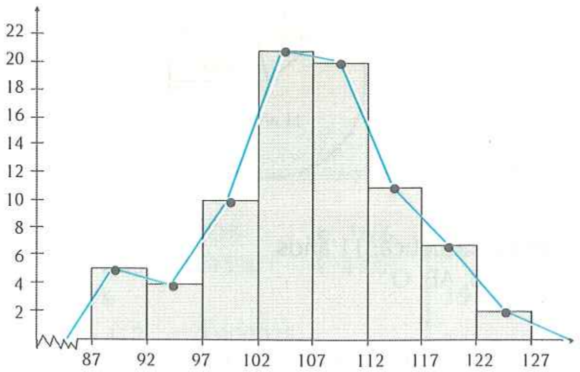


b. 24 **c.** 60%

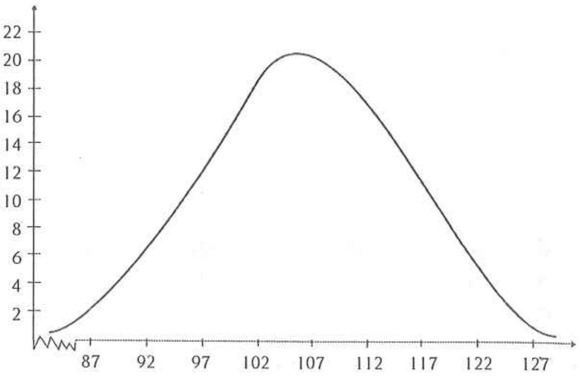
17. a. [87-92) , [92-97) , [97-102) , [102-107) , [107-112) , [112-117) , [117-122) , [122-127)

b.

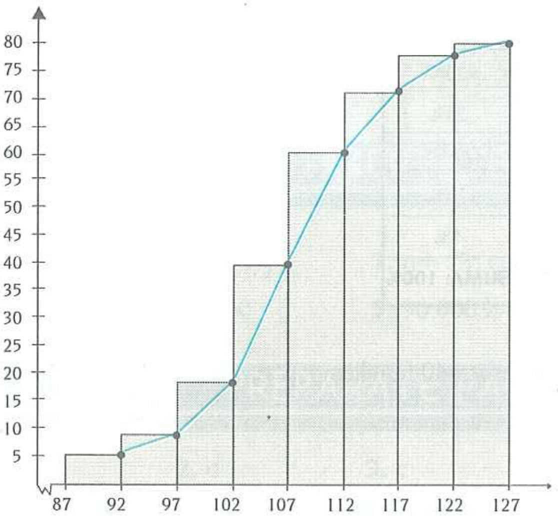
Coeficiente de inteligencia (CL)	**Frecuencia absoluta**	**Frecuencia absoluta acumulada**	**Frecuencia relativa**	**Frecuencia relativa acumulada**	**Porcentaje**
[87 - 92)	5	5	0,062	0,062	6,2%
[92 - 97)	4	9	0,050	0,112	5%
[97 - 102)	10	19	0,125	0,237	12,5%
[102 - 107)	21	40	0,262	0,500	26,2%
[107 - 112)	20	60	0,250	0,750	25%
[112 - 117)	11	71	0,137	0,887	13,7%
[117 - 122)	7	78	0,087	0,975	8,7%
[122 - 127)	2	80	0,025	1,0	2,5%



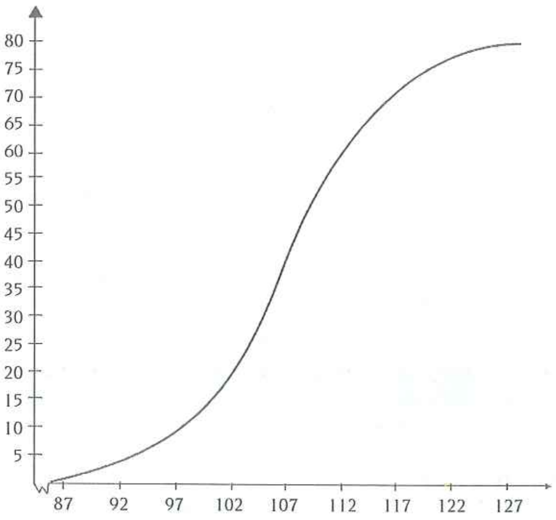
HISTOGRAMA DE FRECUENCIAS ABSOLUTAS
Y POLÍGONO DE FRECUENCIAS ABSOLUTAS



CURVA DE FRECUENCIAS ABSOLUTAS



HISTOGRAMA DE FRECUENCIAS ABSOLUTAS ACUMULADAS
Y POLÍGONO DE FRECUENCIAS ABSOLUTAS ACUMULADAS



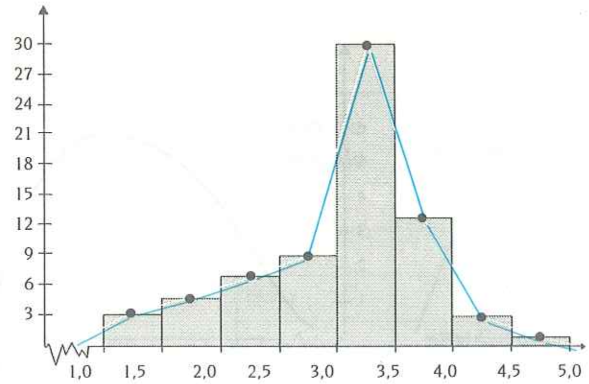
CURVA DE FRECUENCIAS (OJIVA)

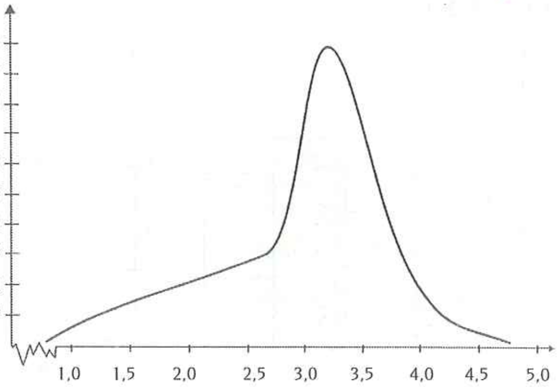
d. 107 **e.** Simétrica

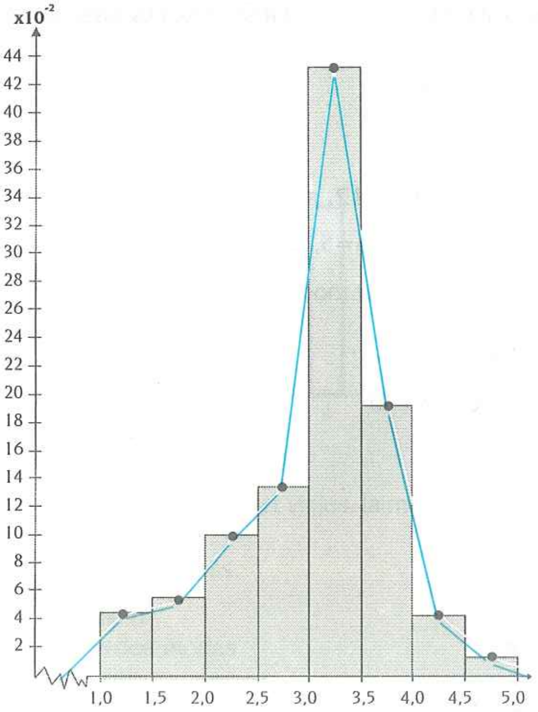
18. **a.** 32,86% **b.** 3,0 **c.** 58,6%

d.

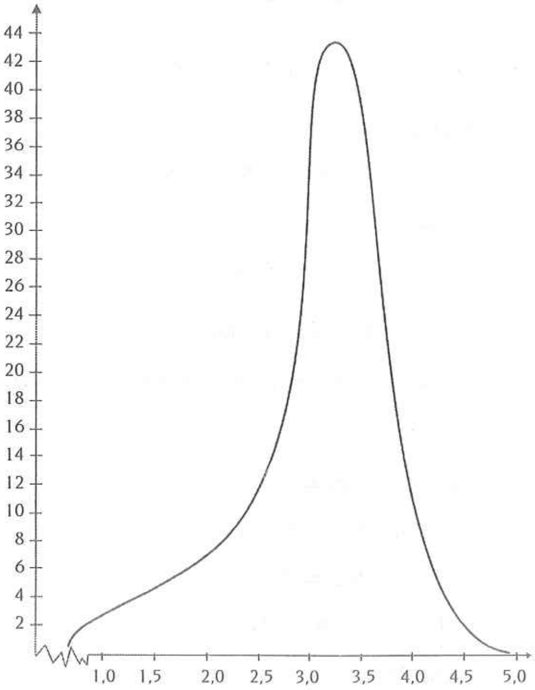
Calificación x_i	Frecuencia absoluta f_i	Frecuencia relativa	Porcentaje
[1,0 - 1,5)	3	0,043	4,3 %
[1,5 - 2,0)	4	0,057	5,7 %
[2,0 - 2,5)	7	0,100	10 %
[2,5 - 3,0)	9	0,129	12,9 %
[3,0 - 3,5)	30	0,429	42,9 %
[3,5 - 4,0)	13	0,186	18,6 %
[4,0 - 4,5)	3	0,043	4,3 %
[4,5 - 5,0)	1	0,013	1,3 %





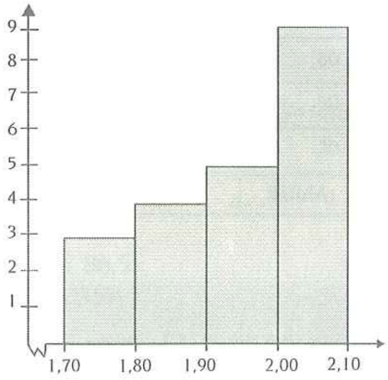


HISTOGRAMA Y POLÍGONO DE FRECUENCIAS RELATIVAS

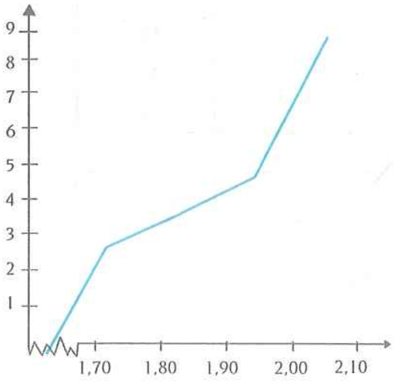


CURVA DE FRECUENCIAS RELATIVAS

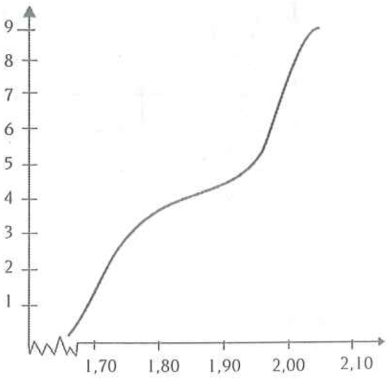
19. EQUIPO A:



HISTOGRAMA DE FRECUENCIAS ABSOLUTAS

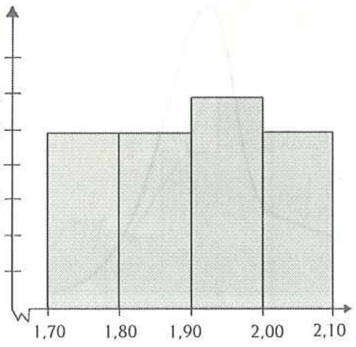


POLÍGONO DE FRECUENCIAS ABSOLUTAS

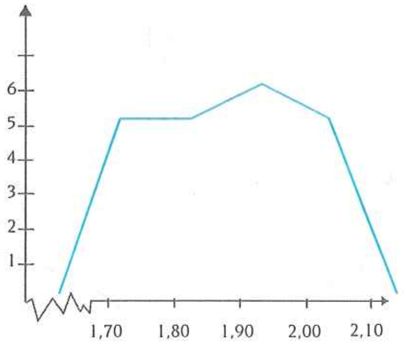


CURVA DE FRECUENCIAS ABSOLUTAS

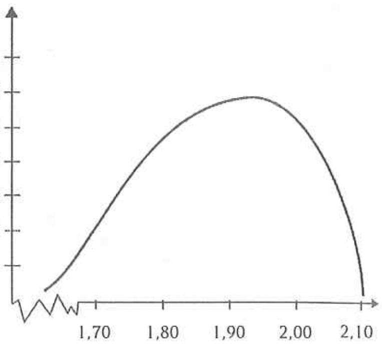
19. EQUIPO B:



HISTOGRAMA DE FRECUENCIAS ABSOLUTAS



POLÍGONO DE FRECUENCIAS ABSOLUTAS



CURVA DE FRECUENCIAS ABSOLUTAS

c. La curva del equipo A es asimétrica y la del equipo B es simétrica

EJERCICIO 12.4

1. a) **2.** c) **3.**d) **4.** a) **5.** d) **6.** b) **7.** d) **8.** 4 **9.** a) **10.** a) **11.** a) **12.** a)

13. **a.** $\overline{x} \approx 12{,}9$ Me= 10,5, Mo=3 **b.** $\overline{x} = 11{,}86$, Me= 7 , Mo=5, Mo=7

c. $\overline{x} = 7{,}86$, Me= 7. No hay moda **d.** $\overline{x} \approx 8{,}9$ Me=11 , No hay moda

14. **a.** $\overline{x} \approx 0{,}38$, Me= 0 , Mo=0 **b.** $\overline{x}$ =Me= Mo=3

c. $\overline{x} \approx 7{,}86$, Me= 7. No hay moda **d.** $\overline{x} \approx 0{,}13$ Me=0 , Mo=0

15. 62

16. $\overline{x} \approx 3$, Mo = 3

17. $\overline{x} \approx 109$, Mo =104,5

18. $\overline{x} \approx 3{,}1$, Mo = 3,25

19. **a.** 4 **b.** 21% **c.** 2 **d.** 4 **e.** 3

20. **a.** [40, 46) , [46,58) , [58, 64) , [64,70)

b y d.

Tiempo (en minutos)	Frecuencia absoluta	Frecuencia Absoluta Acumulada	Marcas de Clase
[40,46)	14	14	43
[46,52)	11	25	49
[52,58)	6	31	55
[58,64)	2	33	61
[64,70)	3	36	67

c. La moda es 43 y la media aritmética es 49,83 minutos

e. 49

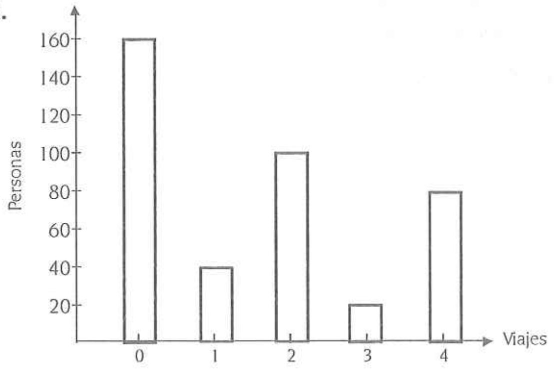
2. El tamaño de la muestra es 200, si la población es 500.000, 112.500 prefieren la ópera.

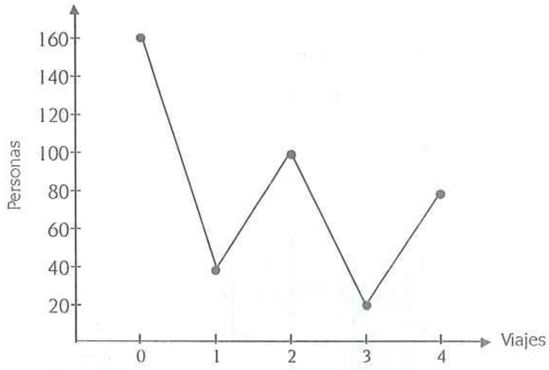
3.

Tipo de vehículo	Frecuencia absoluta	Frecuencia Relativa		
		FRACCIÓN	DECIMAL	PORCENTAJE
Bus	12	$\frac{12}{25}$	0,48	48%
Automóvil	8	$\frac{8}{25}$	0,32	32%
Moto	5	$\frac{5}{25}$	0,2	20%
	SUMA: 25	**SUMA:** 25/25	**SUMA:** 1,00	**SUMA: 100%**

Acá no tiene sentido hablar de media, la variable es cualitativa, la variable es el tipo de vehículo

4. a.

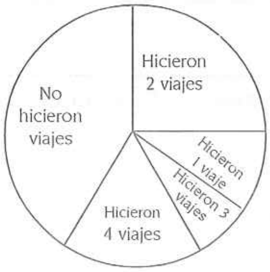




b. La moda es no hacer viajes, la mediana es hacer 2 viajes y la media es 1,55.

c. 54.000 personas.

e.



5. c. aprox. 6

d. tiene dos modas

6. a.

Velocidad (en Km/h)	Frecuencia absoluta	Frecuencia Relativa	
		FRACCIÓN	PORCENTAJE
[60, 70)	10	10/200	5%
[70,80)	40	40/200	20%
[80,90)	80	80/200	40%
[90,100)	50	50/200	25%
[100,110)	20	20/200	10%
	SUMA: 200	**SUMA:** 200/200	**SUMA: 100%**

b. 86,5

c. 35%

7. a. aprox. 4 huevos por semana

b. 315 huevos

c. 55 gallinas de 80

TALLER DE REPASO DE LA UNIDAD 12

8. a. [173,193) , [193,213) , [213,233) , [233,253) [253, 273)

b.

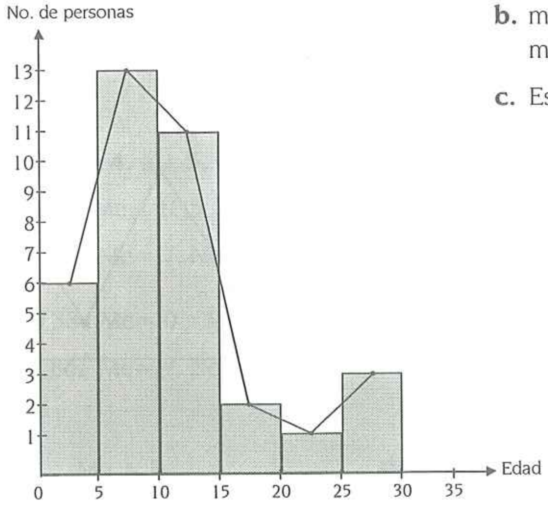
Nivel de colesterol	Frecuencia absoluta	Marcas de clase
[173,193)	12	183
[193,213)	18	203
[213,233)	9	223
[233,253)	0	243
[253, 273)	1	263
	SUMA: 40	

c. La moda es 203, la media es 203

d.

Nivel de colesterol	Frecuencia absoluta	Frecuencia absoluta acumulada
[173,193)	12	12
[193,213)	18	30
[213,233)	9	39
[233,253)	0	39
[253, 273)	1	40
	SUMA: 40	

9. a.



b. media ≈ 10.8
moda = 7,5

c. Es asimétrica

10. a.

Datos	Frecuencia absoluta	Frecuencia absoluta acumulada
[481,486)	4	4
[486,491)	2	6
[491,496)	4	10
[496,501)	11	21
[501,506)	9	30
	30	

b. media ≈ 496,7 gramos ; moda = 498,5

d. 70%

DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS 12

1. 9 días

2. $2\frac{1}{9}$m

3. a. 2m ; **b.** 3 m

PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS SABER 12

1. a

2. c

3. c

4. a

5. a

NÚCLEO TEMÁTICO

13

EJERCICIOS

EJERCICIO 13.1

1. d **2.** c **3.** c **4.** d **5.** a

EJERCICIO 13.2

1. En donde hay: 4 blancas y 4 de color gris, 2 blancas y 2 de color gris y 6 blancas y 6 de color gris.

4. La B, porque su frecuencia relativa es menor que en las marcas A y C.

5. El número de veces que se lanzó es 800. Ahora, la frecuencia relativa:

Del número de veces que ha salido con la punta hacia arriba es: $\frac{297}{800}$

Del número de veces que ha salido con la punta hacia abajo es: $\frac{503}{800}$

Es más probable de que salga con la punta hacia abajo.

6. a. Mariana: $\frac{3}{18}$, Sara: $\frac{5}{22}$

Juan: $\frac{4}{21}$, Camilo: $\frac{6}{28}$

b. Ordenado de mayor a menor: Sara, Camilo, Juan y Mariana.

7. a. $\frac{1}{2}$ **b.** 1 **c.** $\frac{1}{2}$

8. a. Juan: 40 veces, Mariana: 80 veces, Lina: 200 veces y Camilo: 1000 veces.

b. Camilo

EJERCICIO 13.3

2. La probabilidad de que salga cara o sello es la misma.

3. a. 0 **b.** $\frac{5}{7}$ **c.** $\frac{2}{7}$

d. $\frac{2}{7}$ **e.** $\frac{5}{7}$

5. La probabilidad para el: suceso cero es 0, suceso par es $\frac{1}{2}$, suceso "menor que 5" es $\frac{5}{6}$, suceso "obtener 1 ó 6 es $\frac{1}{3}$, suceso "el lápiz quedar vertical apoyado en la punta" es 0, el suceso "el lápiz con una cara horizontal" es 1.

TALLER DE REPASO DE LA UNIDAD 13

1. e. $\frac{1}{n}$, 1 , 0

h. $\frac{1}{6}$, porque los seis sucesos que se puede dar son equiprobables.

2. E={salir:0,1,2,3,...36}

a. P(A)= $\frac{1}{37}$ **b.** P(B)= $\frac{3}{37}$

c. P(C)= $\frac{19}{37}$ **d.** P(D)= $\frac{2}{37}$

e. P(E)= 1

4. a. P(azul) = $\frac{1}{5}$

b. P(roja) = $\frac{1}{2}$

c. P(verde) = $\frac{3}{10}$

d. P(no azul) = $\frac{4}{5}$

e. P(no rojo) = $\frac{1}{2}$

f. P (no azul) = $\frac{7}{10}$

5. E={1, 2, 3, ... 10}

a. $\frac{1}{2}$ **b.** $\frac{3}{10}$ **c.** $\frac{1}{5}$

d. $\frac{1}{2}$ **e.** $\frac{2}{5}$

7. a. V **b.** F **c.** V

PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS SABER 13

1. E={A, B, C }

2. a **A** conduce 1 camino, a **B** conducen 2 caminos, a **C** conduce 1 camino

3. a A: $\frac{1}{4}$, a B: $\frac{1}{2}$, a C: $\frac{1}{4}$

4. P(A)= $\frac{1}{4}$, P(B)= $\frac{1}{2}$, P(C)= $\frac{1}{4}$

5. En A: 125 bolas, en B: 250 bolas y en C: 125 bolas

NÚCLEO TEMÁTICO

14

EJERCICIOS

EJERCICIO 14.1

1. c **2.** d **3.** b **4.** a **5.** b

EJERCICIO 14.2

3. c **7.** Sí

EJERCICIO 14.3

1. b. $\frac{5}{8}$, $\frac{2}{3}$

c. No, porque $\frac{5}{8} \neq \frac{2}{3}$

8. Sí, porque le aplicó una homotecia.

9. Sí, porque le aplicó una homotecia.

10. Sí, porque le aplicó una homotecia.

11. y=4, x=7

12. x=3,5 ; y=4

TALLER DE REPASO DE LA UNIDAD

1. b. Sí, porque ΔA'B'C' es la imagen del ΔABC obtenida mediante una homotecia.

c. 3

2. b. La razón de semejanza es 2

a. A(3,2), B(3,4), C(4,4), M(15,9); N(21,9), O(21,6), P(15,6)

b. Sí

c. Rotar 90° en sentido horario o también en sentido horario, el punto A.

d. 3

4. a. 1

b. Sí, porque cumplen las dos condiciones de semjanza.

5. a. Sí, No

b. Sí, porque son iguales las razones de los lados.

c. No, los ángulos no son congruentes

d. No, porque sus ángulos no son congruentes respectivamente.

6. a. F **b.** F **c.** V **d.** V

e. V **f.** V **g.** V **h.** F

7. $\frac{|\overline{DF}|}{|\overline{AC}|} = \frac{|\overline{ED}|}{|\overline{AB}|}$; $\frac{|\overline{EF}|}{|\overline{BC}|} = \frac{|\overline{ED}|}{|\overline{AB}|}$

8. a. 10,2 cm, 6,8 cm

b. $\frac{2}{3}$, sí

c. Sí

9. Sí son semejantes y la razón es $\frac{4}{3}$

10. a. 76 mm, 57

b. Sí **c.** Sí

11. a. c = 36 mm

c. 65mm, 78 mm

12. 18m, 12m, 21m

13. 28 m, 36m

14. 24cm, 28 cm, $\frac{124}{3}$ cm

15. 9m, 12m

17. 24cm

18. 2,5m

19. 60° porque todo triángulo semejante a un triángulo equilátero es equilátero

20. 90°, 63°, 27°

21. Sí

22. a. Sí, por tener los lados respectivamente paralelos.

b. $\overline{AE}$, porque se opone al ángulo $\widehat{D}$ que es congruente con el ángulo $\widehat{B}$.

c. $\frac{|\overline{AC}|}{|\overline{AE}|} = \frac{|\overline{BC}|}{|\overline{DE}|} = \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{AD}|}$

23. $\frac{y_1}{y_2}$ porque los dos triángulos son semejantes y los lados homólogos son proporcionales.

24. 25km

25. El hueco debe tener una distancia de 150 cm, la longitud de la fachada es 1.200 cm

26. $4\frac{2}{3}$m

27. 3,6 cm

28. a. Semejantes

b. 2,64m

29. a. $|\overline{AC}|$ =0,112 m

$|\overline{BC}|$ = 0,164m

b. Aprox. 220 m, aprox. 110m

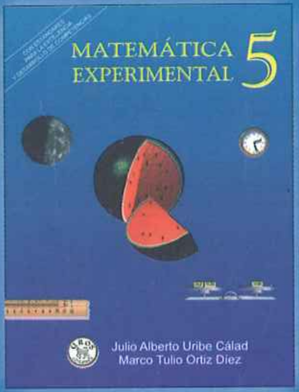
DIVIÉRTETE MIENTRAS PIENSAS

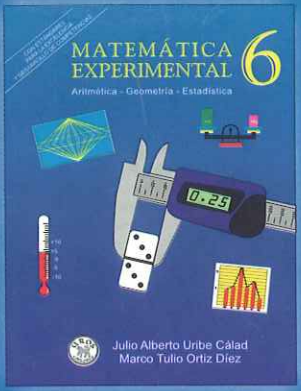
1. La primera : $1,000.000, la segunda: $200.000, la tercera: $3,300.000

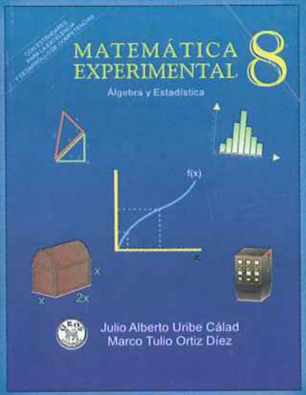
2. Carlos: 3 puntos, Sara: 11 puntos, Andrés: 8 puntos.

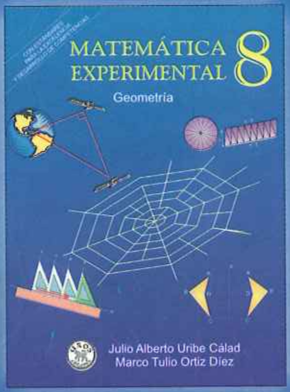
PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS SABER

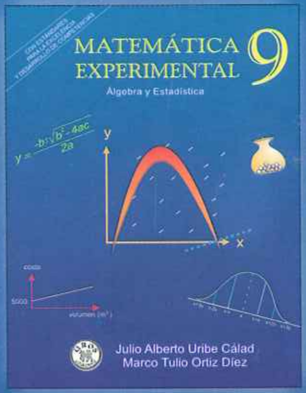
1. c **2.** a **3.** b **4.** c **5.** c

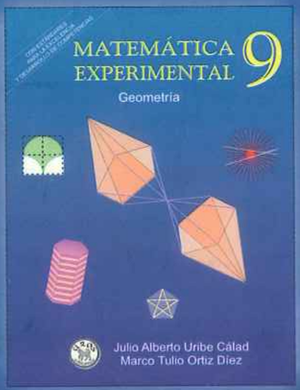

MATEMÁTICA EXPERIMENTAL 5
Julio Alberto Uribe Cálad
Marco Tulio Ortiz Díez

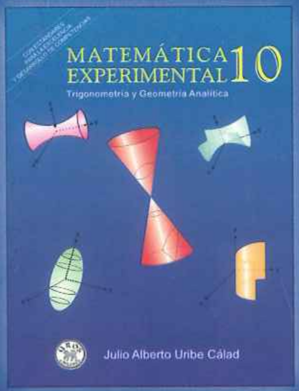

MATEMÁTICA EXPERIMENTAL 6
Aritmética - Geometría - Estadística
Julio Alberto Uribe Cálad
Marco Tulio Ortiz Díez

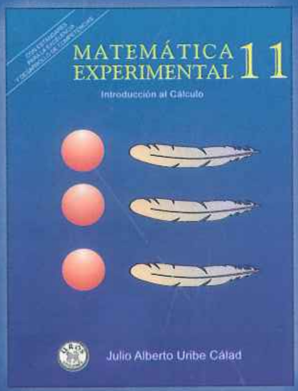

MATEMÁTICA EXPERIMENTAL 8
Álgebra y Estadística
Julio Alberto Uribe Cálad
Marco Tulio Ortiz Díez


MATEMÁTICA EXPERIMENTAL 8
Geometría
Julio Alberto Uribe Cálad
Marco Tulio Ortiz Díez


MATEMÁTICA EXPERIMENTAL 9
Álgebra y Estadística
Julio Alberto Uribe Cálad
Marco Tulio Ortiz Díez


MATEMÁTICA EXPERIMENTAL 9
Geometría
Julio Alberto Uribe Cálad
Marco Tulio Ortiz Díez


MATEMÁTICA EXPERIMENTAL 10
Trigonometría y Geometría Analítica
Julio Alberto Uribe Cálad


MATEMÁTICA EXPERIMENTAL 11
Introducción al Cálculo
Julio Alberto Uribe Cálad

ISBN 958-97531-2-4
9 789589 753125