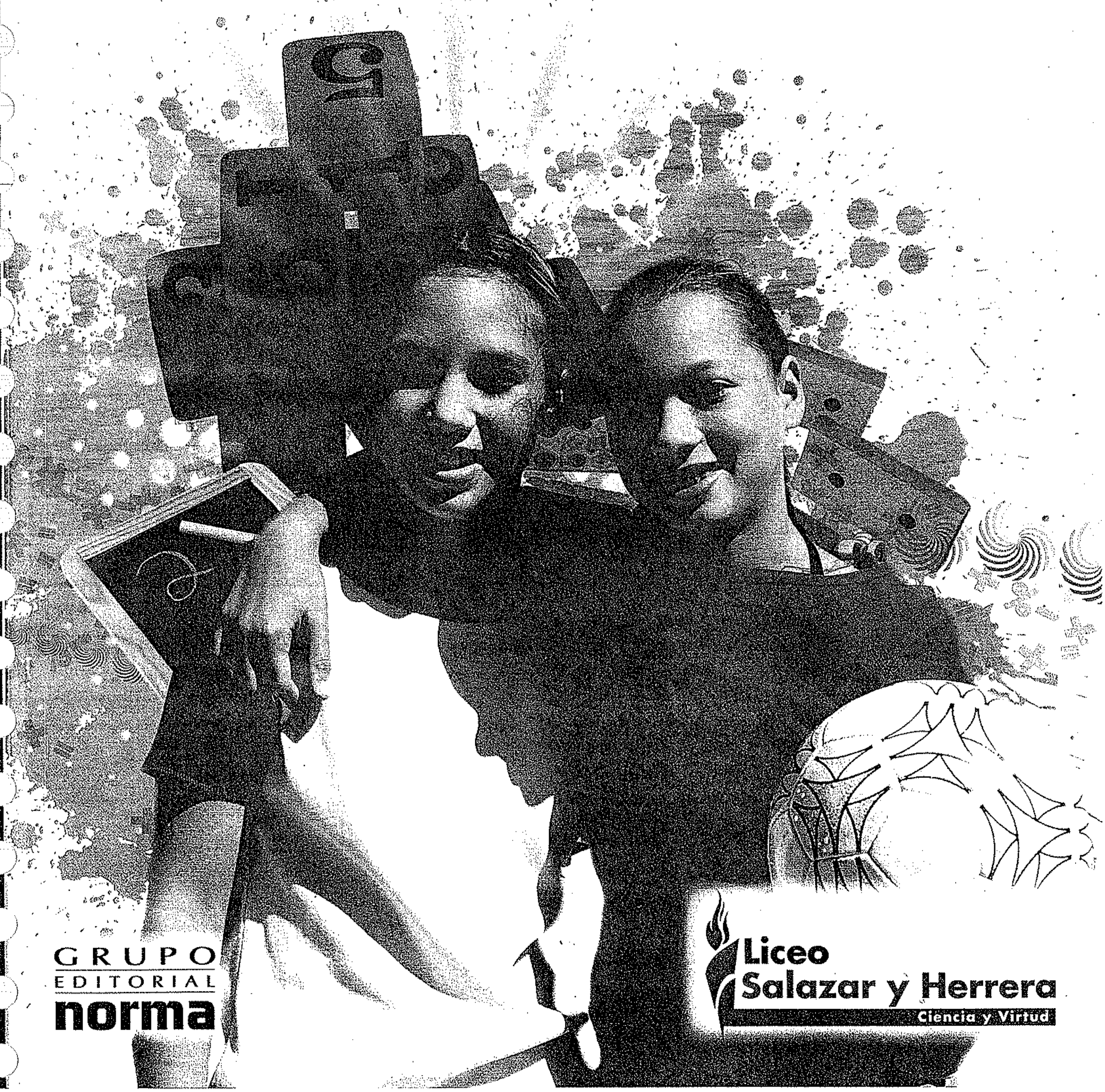
Matemáticas 10



GRUPO EDITORIAL norma

Liceo Salazar y Herrera
Ciencia y Virtud

DELTA 10

HÉCTOR ANDRÉS LÓPEZ OSPINA

VLADIMIR MORENO GUTIÉRREZ

MAURICIO RESTREPO LÓPEZ

GRUPO EDITORIAL norma

Visite nuestra página www.norma.com

Impreso por Disonex S.A.

Impreso en Colombia - Printed in Colombia
Noviembre 2011

Directora editorial: Patricia Ospina Rosero
Editora de área: Luz Marina Sierra Fajardo
Editora: María Claudia Malaver Fuentes
Editora junior: Diana Polanía Teatino
Dirección artística: Rocío Milena Marmolejo Cumbe
Diseño de la serie y cubierta:
Ignacio Martínez-Villalba Trillos
Diagramación: María Victoria Mora Hernández
Ilustración: Mauricio Restrepo López,
Ignacio Martínez-Villalba Trillos, Iván A. Lizcano Silva
Fotografías: Archivo gráfico Editorial Norma,
[Jupiterimages] / SLIDE-DEPOT

Depósito legal

ISBN del libro:
978-958-45-1296-3

Comunique sus comentarios al área de Matemáticas de Editorial Norma:
luz.sierra@norma.com
maria.malaver@norma.com

LOS AUTORES

HÉCTOR ANDRÉS LÓPEZ OSPINA
- Magíster en matemáticas, Universidad Nacional de Colombia.
- Profesor universitario.

VLADIMIR MORENO GUTIÉRREZ
- Magíster en matemáticas, Universidad Nacional de Colombia.
- Profesor de la Universidad Nacional de Colombia y de la Pontificia Universidad Javeriana, Colombia.

MAURICIO RESTREPO LÓPEZ
- Magíster en matemáticas, Universidad Nacional de Colombia.
- Profesor universitario.

Adecuación a la equidad de género y diversidad cultural
Fernando Carretero Socha

Investigación de campo
Ana Cristina Villamil

Conoce tu Libro

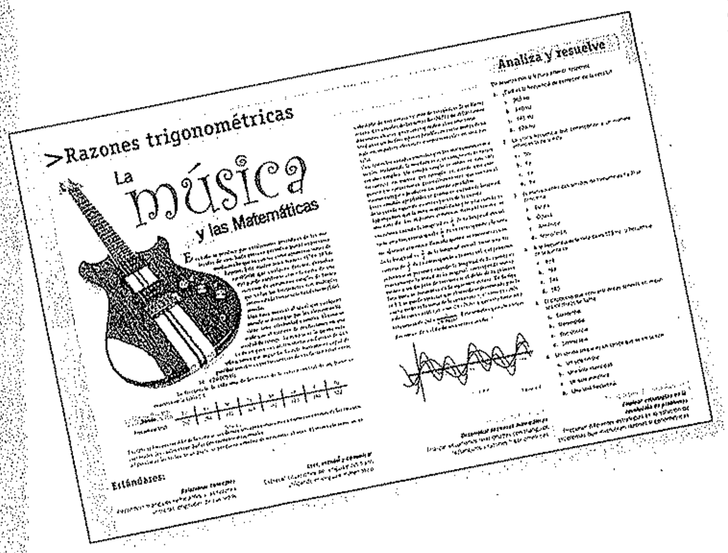
Cada unidad de **DELTA 10**, te invita a realizar un recorrido por el mundo matemático en el cual encontrarás distintas actividades que te ayudarán a reconocer, dentro de tu mundo, cómo y para qué sirven las matemáticas. La presentación llamativa de cada una de las secciones de la unidad te permitirá desarrollar tu pensamiento matemático y te llevará a ser una persona competente en el área. Aquí te presentamos las secciones que te apoyan en tu recorrido.

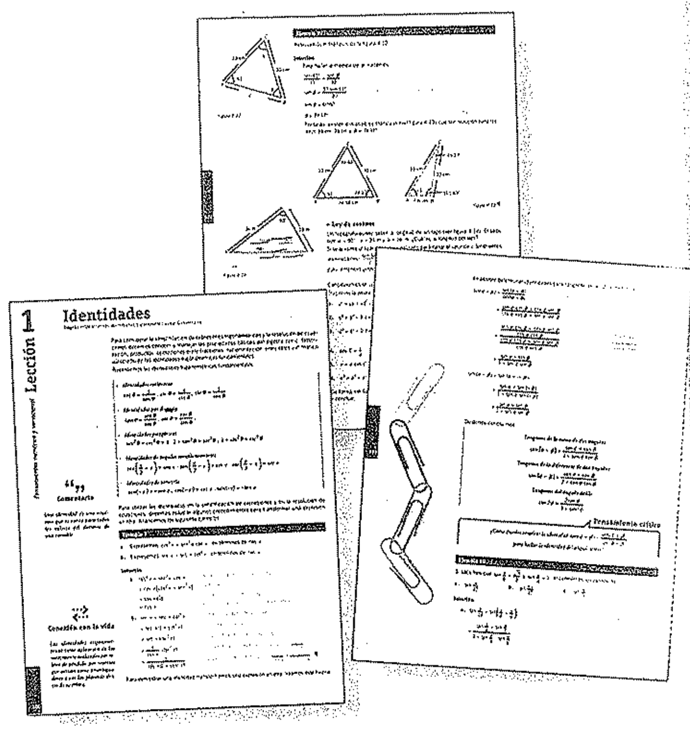
Al comenzar cada unidad encuentras el título de ella y el pensamiento al cual corresponden los temas de esa unidad.

En la misma página, encontrarás una situación actual en la cual se puede ver alguna aplicación del tema a desarrollar.

En la parte inferior de esta página, y de la siguiente, aparecen los estándares generales que se desarrollarán.

En la página enfrentada, encuentras la sección **Analiza y resuelve** cuya intención es analizar la información que se presenta en el contexto anterior, por medio de preguntas, que además, te ayudan a repasar algunos conceptos matemáticos que puedes necesitar en la comprensión de los temas de la unidad.





>Lecciones<

Las lecciones se hallan numeradas consecutivamente. En ellas se desarrollan los contenidos de manera clara y dinámica, y se destaca el concepto o proceso más relevante en el desarrollo de éstas. En algunas páginas del desarrollo de los temas, aparecen las secciones **Conexión con la vida, Comentario y Pensamiento crítico**. En la primera, se presentan situaciones de la vida real en las cuales se aplican los conceptos que se están trabajando. En los comentarios se hacen breves aclaraciones sobre algún aspecto del contenido, y en el Pensamiento crítico se plantean preguntas de análisis relacionadas con el tema desarrollado en la lección.

>Piensa y practica<

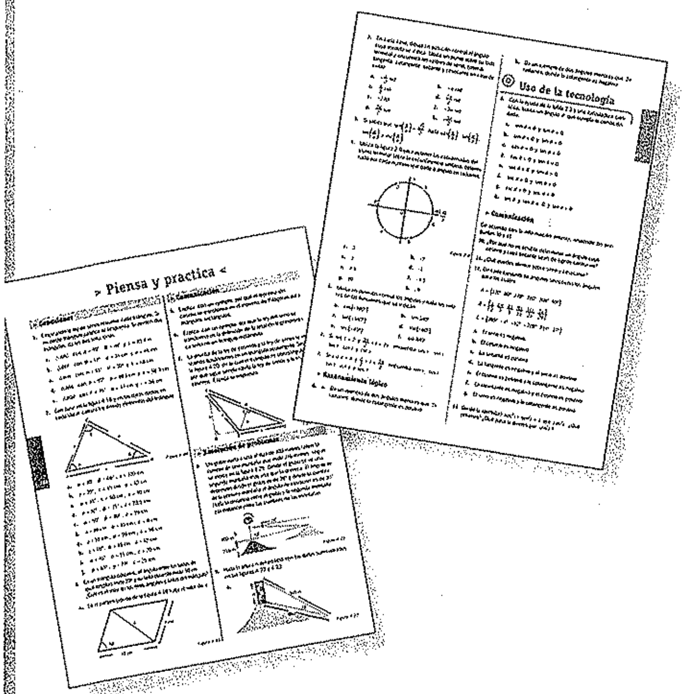
En esta sección se plantean actividades y ejercicios variados en los que aplicarás los conceptos vistos. Los ejercicios propuestos están clasificados de acuerdo con los procesos de Comunicación, Razonamiento lógico, Resolución de problemas y Conexiones.

Comunicación: actividades que te llevan a usar el lenguaje matemático para expresar ideas matemáticas de manera clara y precisa en distintos contextos.

Razonamiento lógico: actividades que te posibilitan desarrollar tus habilidades y competencias matemáticas, a la vez que te diviertes y afianzas tu ingenio.

Resolución de problemas: problemas variados que te permiten aplicar distintas estrategias y traducir representaciones matemáticas para solucionarlos.

Conexiones: situaciones que te ayudan a relacionar y aplicar las ideas matemáticas en contextos distintos a los escolares.



En algunas de estas páginas, también encontrarás la sección **Uso de la tecnología** donde se proponen actividades para realizar con calculadora o con algún programa de computador; y la sección **Formación ciudadana** con situaciones que involucran las competencias ciudadanas.

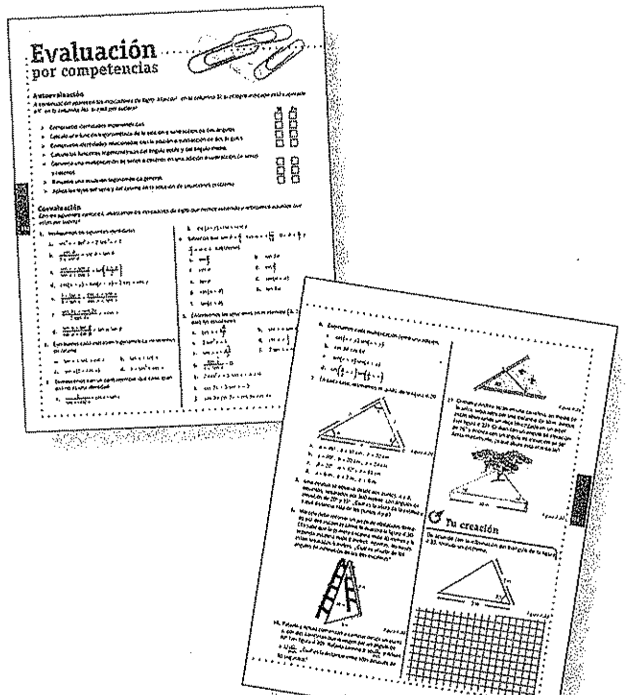
>Evaluación por competencias<

Al iniciar esta sección encontrarás una autoevaluación que te permitirá ser analítico y reflexivo contigo mismo(a).

Los ejercicios y actividades propuestos en la coevaluación te ayudarán a afianzar y a reforzar lo aprendido en el desarrollo de las lecciones de la unidad.

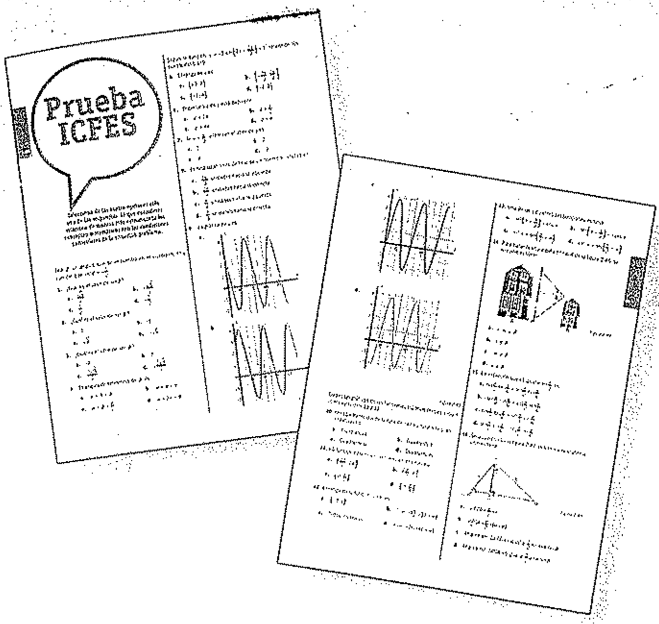
>Tu creación<

Es el espacio creado para que escribas, inventes o generes una situación o construyas modelos a partir de cierta información con el fin de desarrollar más las competencias matemáticas.



>Prueba ICFES<

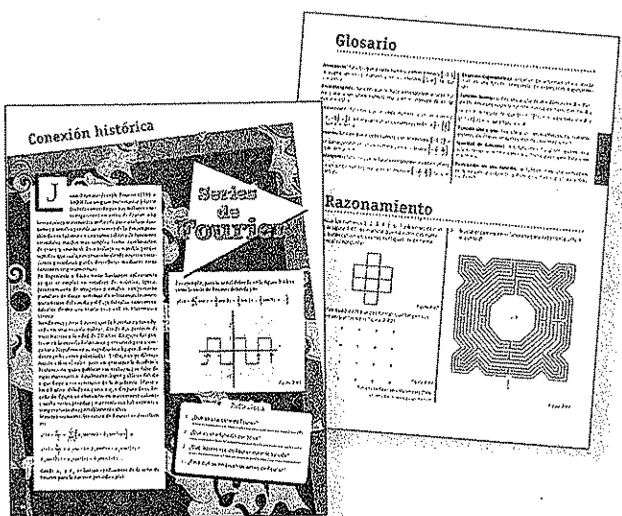
Se presentan diferentes contextos o situaciones a partir de las cuales se proponen preguntas de selección múltiple con única respuesta.



>Conexión histórica<

En esta sección encontrarás una lectura que contiene aspectos de la historia de la matemática relacionados con el tema de la unidad. Está acompañada de unas preguntas de reflexión que buscan afianzar tus habilidades lectoras.

Al final de cada unidad se presenta un **Glosario** con la definición de los términos más relevantes de la unidad y la sección **Razonamiento** que plantea actividades de lúdica matemática.



A continuación te presentamos una breve explicación de cada uno de los pensamientos que conforman tu libro.

Pensamiento numérico: se refiere a la comprensión del número, al sentido y uso que le asignas; a las relaciones y operaciones que puedes efectuar con ellos, en los diferentes sistemas numéricos.

Pensamiento espacial: está relacionado con las formas y figuras que se encuentran en espacios planos (de dos dimensiones) o en espacios de tres dimensiones, como el mundo en que vivimos. Descubrirás relaciones de semejanza y congruencia entre formas y figuras; además, comprenderás las nociones de perímetro, área y volumen de éstas. También podrás jugar a realizar transformaciones con las figuras.

Pensamiento métrico: estudia las características medibles de los objetos que te rodean y de algunos otros que, como el tiempo, aunque no los puedas observar y tocar, sí los percibes; puedes comprender y usar unidades y patrones o hacer estimaciones para realizar mediciones.

Pensamiento aleatorio: aunque la palabra suene extraña, este pensamiento está relacionado con la recolección, organización y análisis de datos. Aprenderás a leer y analizar datos en tablas y gráficas como los que aparecen en periódicos, revistas, noticieros; asimismo podrás presentar en tablas y gráficos datos que tú recolectes.

Pensamiento variacional: se refiere al conocimiento de procesos de cambio; puedes indagar por las diferentes significaciones de lo que cambia en una situación determinada, reconocer y usar regularidades, establecer patrones y dar sentido matemático a las relaciones que posibilitan las situaciones.

>Contenido

>Unidad 1<

>Unidad 2<

>Unidad 3<

>Unidad 4<

>Unidad 5<

>Unidad 6<

>Unidad 7<

>Unidad 8<

Unidad 1

>Razones trigonométricas

La música y las Matemáticas

El sonido se produce por oscilaciones periódicas de las moléculas de aire. Todo proceso periódico puede expresarse mediante lo que se conoce como aproximaciones de Fourier. Este matemático francés (1768-1830) estableció que cualquier función periódica $f(t)$ puede escribirse como la suma de una sucesión de armónicos simples de forma que todas las frecuencias son múltiplos enteros de la frecuencia fundamental del sonido.

Una nota musical al igual que cualquier sonido se distingue por los elementos básicos: tono, intensidad y timbre. El tono se mide con el número de oscilaciones en una unidad de tiempo. La nota la en la quinta octava de un piano es un fenómeno oscilatorio de 440 vibraciones por segundo. El oído humano es capaz de percibir sonidos cuyas frecuencias de oscilación están entre 16 y 20 000 Hz.

La frecuencia de cada una de las notas de la octava central de un piano se muestra en la tabla 1.1.

Sonido	Do	Re	Mi	Fa	Sol	La	Si	Do
Frecuencia (Hz)	262	294	330	349	392	440	494	523

Tabla 1.1

Excepto la frecuencia 440 de la nota la, las demás son aproximaciones a números enteros de las frecuencias reales, las cuales están dadas por números irracionales.

Al presionar las teclas de un piano se producen sonidos de diferentes alturas. El intervalo entre un so-

Estándares:

Relacionar conceptos

Reconocer triángulos semejantes y las razones entre las longitudes de sus lados.

Leer, escribir y comunicar

Expresar situaciones del lenguaje cotidiano utilizando el lenguaje matemático.

nido dado de frecuencia f y otro de frecuencia $2f$ se llama octava. Los sonidos de las notas do (262) y do (523) tienen diferentes alturas, pero corresponden al mismo tono.

Mediante un osciloscopio es posible convertir ondas de sonido en impulsos eléctricos y representarlos en una pantalla.

Casi todos los sonidos emitidos por los instrumentos musicales, incluyendo la voz humana, se componen de varios sonidos simples. Un sonido simple se emite en una sola frecuencia, en música, por ejemplo, un acorde está compuesto por varias notas, generalmente tres, que suenan al mismo tiempo y producen un sonido agradable.

Estos sonidos agradables se producen cuando la longitud de la cuerda equivale a ciertas partes de la cuerda.

Supongamos que la nota original dada por una cuerda es una nota do. Así, el primer armónico, llamado tercera, se encuentra cuando la longitud es $\frac{4}{5}$ de la longitud inicial, tiene una frecuencia igual a $\frac{5}{4}$ de f y corresponde a la nota mi; el tercer armónico, llamada quinta, se encuentra cuando la longitud es $\frac{2}{3}$ de la longitud inicial, tiene una frecuencia de $\frac{3}{2}$ de f y corresponde a la nota sol; y el próximo armónico se presenta cuando la longitud de la cuerda es exactamente la mitad de la original, corresponde nuevamente a un do pero de frecuencia el doble de la primera. Esta nota se encuentra en la siguiente octava. En la figura 1.1 se puede apreciar que el sonido representado por la curva verde es la suma de la curva roja $f_1(t) = \text{sen}(4\pi \times 262t)$, y de la curva azul $f_2(t) = \text{sen}(2\pi \times 262t)$ y que ésta tiene una frecuencia de $262 = \frac{1}{0{,}0038167}$. Este sonido equivale a tocar dos notas: do y el do de una octava arriba.

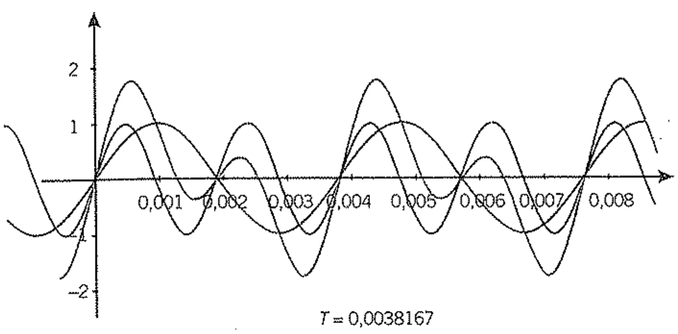


Figura 1.1

Analiza y resuelve

De acuerdo con la lectura anterior, responde.

1. ¿Cuál es la frecuencia de oscilación de la nota la?
   - **a.** 262 Hz.
   - **b.** 440 Hz.
   - **c.** 565 Hz.
   - **d.** 626 Hz.
2. La única frecuencia que corresponde a un número entero es la de la nota:
   - **a.** Sol
   - **b.** Fa
   - **c.** La
   - **d.** Re
3. El intervalo entre dos sonidos de frecuencias f y $2f$ se denomina:
   - **a.** Escala
   - **b.** Octava
   - **c.** Armónico
   - **d.** Monocordio
4. Si la frecuencia de la nota do es 523 Hz, la frecuencia de la quinta es:
   - **a.** 653
   - **b.** 784
   - **c.** 345
   - **d.** 562
5. El dispositivo que convierte ondas sonoras en impulsos eléctricos se llama:
   - **a.** Clavicordio
   - **b.** Monocordio
   - **c.** Osciloscopio
   - **d.** Sonoscopio
6. Un sonido simple es un sonido que se emite con:
   - **a.** Un solo timbre.
   - **b.** Una sola intensidad.
   - **c.** Un solo armónico.
   - **d.** Una sola frecuencia.

Razonamiento lógico

Desarrollar destrezas matemáticas

Analizar situaciones relacionadas con triángulos rectángulos y razones trigonométricas.

Resolución de problemas

Emplear estrategias en la resolución de problemas

Proponer diferentes estrategias en la solución de problemas que involucran razones trigonométricas.

1 Sistemas de medición de ángulos

Logro: establecer una correspondencia entre los sistemas de medición de ángulos (grados y radianes).

Determinamos un ángulo mediante dos rayos con un extremo común llamado vértice. Mientras uno de los rayos permanece fijo, el otro gira para determinar el ángulo. El rayo fijo lo denominamos lado inicial, mientras el rayo que gira lo llamamos lado terminal, como observamos en la figura 1.2.

Un ángulo está en ***posición normal*** *cuando el vértice coincide con el origen de un sistema de coordenadas y el lado inicial del ángulo con el semieje positivo X.*

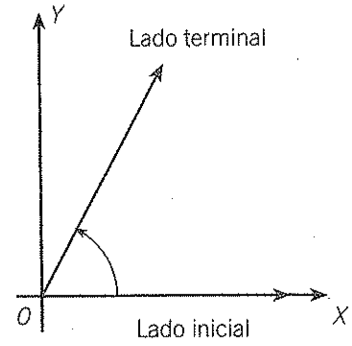


Figura 1.2

Dependiendo del sentido de rotación, clasificamos los ángulos en positivos y negativos.

Acostumbramos tomar el sentido positivo como el sentido inverso en el que giran las manecillas del reloj. En la figura 1.3 observamos un ángulo positivo y un ángulo negativo.

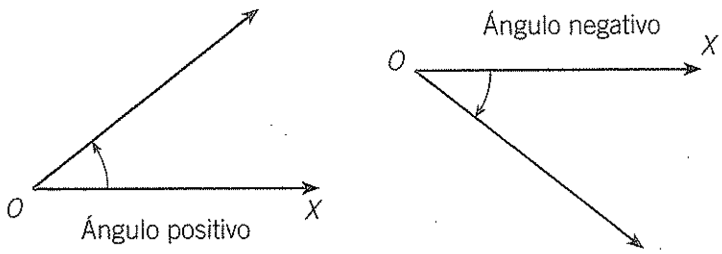


Figura 1.3

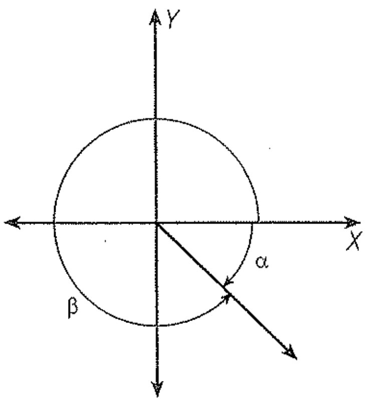


Figura 1.4

Vista desde arriba, si una persona gira a la izquierda describe un ángulo positivo para el observador y si gira a la derecha describe un ángulo negativo.

A los ángulos en posición normal que tienen el mismo lado terminal los denominamos **ángulos coterminales**. Los ángulos α y β de la figura 1.4 son coterminales.

Expresamos la medida de un ángulo mediante la magnitud de la rotación del lado terminal. Si a una rotación completa del lado terminal le asignamos el número 1 (que significa una vuelta o revolución), las medidas de los ángulos de la figura 1.5 serían 0, $+\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{4}$, $+\frac{1}{2}$ y +1. Los signos expresan el sentido negativo o positivo de la rotación y puesto que son números, el signo positivo puede ignorarse.

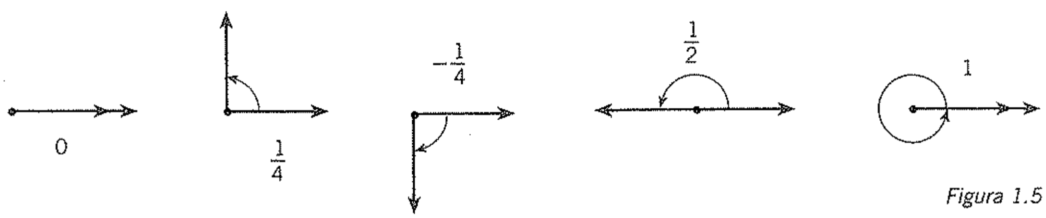


Figura 1.5

Para medir ángulos podemos emplear distintos sistemas de medición. Los más usuales son el **sistema sexagesimal** y el **sistema circular** cuyas unidades de medida son los **grados** y **radianes**, respectivamente.

Las calculadoras científicas aceptan en general tres tipos de medidas para ángulos: Deg (grados), Rad (radianes) y Grad (gradientes).

Para medir un ángulo en grados asignamos un valor de 360 al ángulo de una vuelta en sentido positivo. Mediante particiones de la unidad, asignamos los valores en grados de los respectivos ángulos, como se muestra en la figura 1.6.

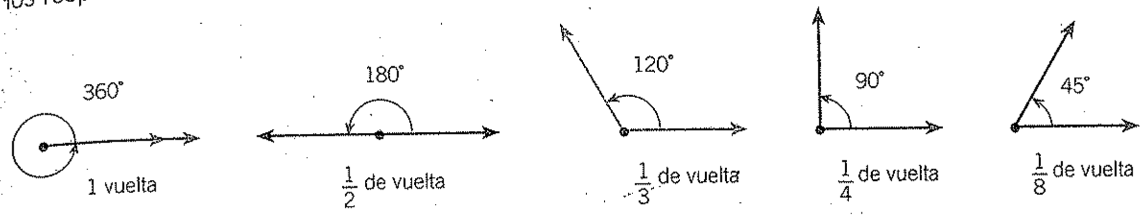


Figura 1.6

Para mayor exactitud en la medición de ángulos en el sistema sexagesimal, empleamos algunos submúltiplos del grado: el **minuto** (') y el **segundo** ("). Estos están definidos mediante las siguientes equivalencias:

$$60'' = 1'; 60' = 1°$$

Si un ángulo mide 68°40'5", leemos esa medida así: "68 grados, 40 minutos y 5 segundos". En otras ocasiones, para medir ángulos usamos la notación decimal: décimas, centésimas o milésimas de grado. Por ejemplo, un ángulo con medida 7,82°, indica que su medida es 7 grados y 82 centésimas de grado.

En el sistema sexagesimal se utilizan dos notaciones:

1. ***Decimal:*** *la cual emplea décimas, centésimas y milésimas para identificar la medida de un ángulo.*
2. ***Sexagesimal:*** *la cual emplea grados, minutos y segundos.*

"" Comentario

En una calculadora científica un ángulo escrito en grados, minutos y segundos se puede expresar en grados, décimas, centésimas y milésimas utilizando la tecla ° ' " *. La misma tecla sirve para el proceso inverso.*

Para hallar la equivalencia entre las dos notaciones utilizamos las equivalencias entre grados, minutos y segundos vistas anteriormente; es decir: $1' = \left(\frac{1}{60}\right)^{\circ}$ y $1'' = \left(\frac{1}{60}\right)' = \left(\frac{1}{3600}\right)^{\circ}$.

De esta manera $7°\,49'\,12'' = 7 + \frac{49}{60} + \frac{12}{360} = 7{,}82°$.

Otra unidad de medida para los ángulos es el gradiente, que equivale a 0,9 grados. En general es un sistema de medida que empleamos poco y que en las calculadoras se representa con "GRAD" y no debemos confundirla con los grados que en inglés se representa mediante la expresión "DEG".

Para definir la medida en radianes de un ángulo, consideramos dos circunferencias concéntricas de centro O y un ángulo α, cuyo vértice es el punto O, como muestra la figura 1.7.

El ángulo α determina dos arcos cuyas longitudes s_1 y s_2 son proporcionales a los respectivos radios. Es decir: $\frac{s_1}{r_1} = \frac{s_2}{r_2}$.

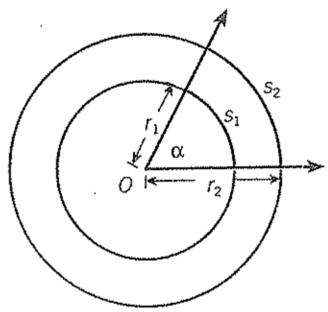


Figura 1.7

La magnitud del ángulo α no depende directamente de las magnitudes s_1, s_2, r_1 o r_2, sino del cociente entre la longitud del arco y del radio: $\frac{s}{r}$.

Podemos definir la medida en radianes del ángulo α (utilizaremos la abreviatura rad, para indicar que el ángulo α está medido en radianes), mediante el cociente $\frac{s}{r}$: es decir, $\alpha(\text{rad}) = \frac{s}{r}$ o $s = \alpha(\text{rad}) \cdot r$ (*ver* figura 1.8).

*Un **radián** es la medida de un ángulo cuyo cociente $\frac{s}{r}$ es uno, es decir, un ángulo cuya longitud de arco es igual al radio de la circunferencia. Para el ángulo de medida un radián $s = r$.*

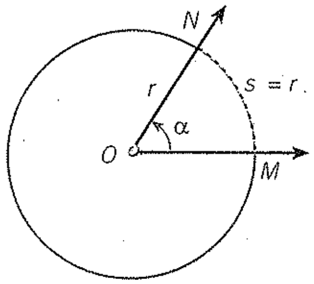


Figura 1.8

Teniendo en cuenta que un ángulo central en una circunferencia de radio r, al dar una vuelta completa, determina un arco de longitud $2\pi r$, la medida en radianes del ángulo de una vuelta es $s_\alpha = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$ radianes, y obtenemos la equivalencia fundamental: $360° = 2\pi$ radianes.

En forma proporcional podemos obtener, entre otras, las equivalencias que se muestran en la tabla 1.2.

Grados	360	180	120	90	60	45	30
Radianes	2π	π	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

Tabla 1.2

Para convertir grados en radianes, podemos establecer una proporcionalidad, mediante equivalencias.

*Para convertir **grados en radianes** multiplicamos por* $\frac{\pi}{180}$.

*Para convertir **radianes en grados** multiplicamos por* $\frac{180}{\pi}$.

Conexión con la vida

El movimiento de una partícula que se mueve con velocidad constante a lo largo de una trayectoria circular puede analizarse a partir de los conceptos de velocidad y velocidad angular. Si s *es la longitud del arco descrito por la partícula en un tiempo* t, *la velocidad está dada por* $v = \frac{\text{distancia}}{\text{tiempo}} = \frac{s}{t}$. *La velocidad angular de la partícula es* $w = \frac{\text{ángulo}}{\text{tiempo}} = \frac{\theta}{t}$ *y se mide en radianes por segundo (minuto, hora). La relación entre estas dos velocidades se establece mediante la relación arco-ángulo:* $s = \theta r$, *por tanto:* $v = \frac{s}{t} = \frac{\theta r}{t} = \frac{\theta}{t} r = wr$.

Algunas calculadoras incluyen un programa que mediante el uso de una tecla es posible transformar, en forma automática, radianes a grados y viceversa.

¿Cuál es la medida, en grados, de un ángulo de $\frac{5}{4}\pi$ radianes?

Solución

Para convertir la medida de un ángulo dado en radianes a grados, multiplicamos por el factor $\left(\frac{180°}{\pi}\right)$. Así $\frac{5\pi}{4}$ rad $= \frac{5\pi}{4}\left(\frac{180°}{\pi}\right) = \frac{5}{4}(180°) = 225°$.

> Longitud de arco

La fórmula para la medición de ángulos en radianes, $\theta = \frac{s}{r}$, podemos usarla en la medición de longitudes de arco en una circunferencia. La longitud s del arco de una circunferencia de radio r que comprende un ángulo θ es igual a $s = \theta r$.

Hallemos la longitud del arco de una circunferencia de radio 6 cm para ángulos de 1,5 rad y 30°.

Solución

Para el ángulo de 1,5 radianes calculamos el producto $s = 1{,}5 \times 6 = 9$ cm. Para el ángulo de 30°, debemos convertir esta medida en radianes: $30° = 30 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{6}$ rad. Por tanto, la longitud del arco correspondiente es $s = \frac{\pi}{6} \times 6 = \pi$ cm.

El Sol puede considerarse como una esfera de 695 000 km de radio. ¿Cuál es la distancia entre dos manchas solares cuya diferencia de latitud es 45°?

Solución

Un ángulo de 45° equivale a $\frac{\pi}{4}$ rad, entonces la distancia entre las manchas solares estará dada por la longitud del arco correspondiente.

$s = \frac{\pi}{4} \cdot 695\,000$ km $= 545\,851{,}7$ km , aproximadamente.

Ejemplo 4

Un motor de auto gira a 1500 revoluciones por minuto. ¿Cuál es su velocidad angular? Si la polea del motor tiene un radio 10 cm, ¿cuál es la velocidad de un punto que está en el extremo de la polea?

Solución

Cada revolución corresponde a un ángulo de 2π, por tanto la velocidad angular está dada por:

$w = \dfrac{1500 \times 2\pi}{1 \text{ min}} = 3000\pi$ rad/min.

La velocidad es igual a wr; así:

$v = wr = 3000\pi \times 10 = 94\,247{,}8$ cm/min.

Comentario

La capa exterior del Sol se llama fotosfera y tiene una temperatura promedio de 6000 °C. Las zonas más frías pueden tener temperaturas de 4000 °C y se llaman manchas solares. La temperatura del interior puede llegar a unos 15 millones de grados centígrados.

> Piensa y practica <

> Comunicación

1. Una persona gira media vuelta a la izquierda y luego un cuarto de vuelta a la derecha. Encuentra la medida de cada giro en grados y radianes.
2. Si la medida del ángulo de media vuelta es 1, escribe la medida de cada ángulo de la figura 1.9.

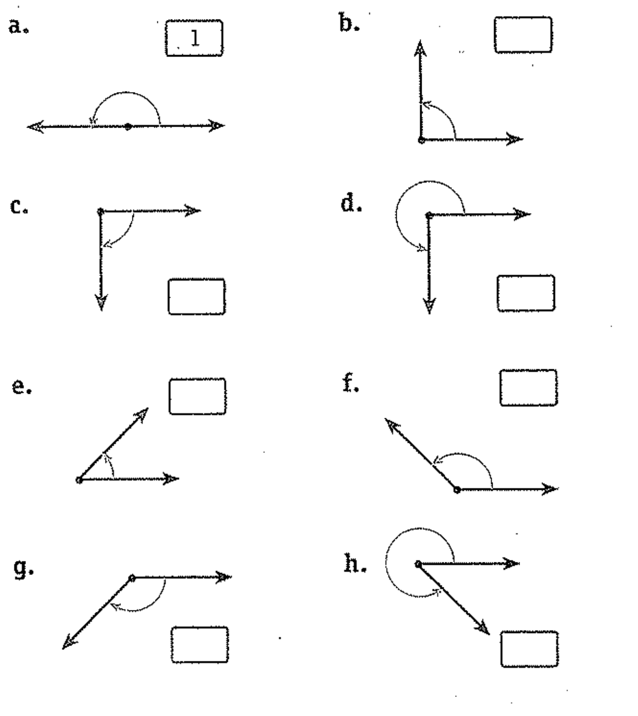


Figura 1.9

3. Escribe la medida, en grados, de cada ángulo de la figura 1.9.
4. Escribe la medida, en radianes, de cada ángulo de la figura 1.9.
5. Encuentra la medida en radianes de 1° y la medida en grados de 1 radián.
6. Completa la tabla 1.3.

Grados	Radianes	Revoluciones (vueltas)
360°	2π	1
		$\frac{3}{4}$
225°		
180°		
150°		
	$\frac{3\pi}{4}$	
	$\frac{2\pi}{3}$	
		$\frac{1}{4}$
	$\frac{\pi}{3}$	
45°		
30°		

Tabla 1.3

> Conexiones

7. Determina la longitud del arco de circunferencia cuando:

   a. $r = 12$ cm y $\theta = \frac{\pi}{4}$ rad.

   b. $r = 3{,}2$ m y $\theta = 30°$.

   c. $r = \frac{1}{2}$ m y $\theta = 1°$.

   d. $r = 1{,}2$ km y $\theta = \frac{\pi}{2}$ rad.

8. Si s representa la longitud del arco, determina la medida, en grados, de los ángulos para los radios dados.

   a. $s = 1$ cm y $r = 1$ cm.

   b. $s = \frac{\pi}{2}$ cm y $r = 3$ cm.

   c. $s = 2\pi$ cm y $r = 10$ cm.

   d. $s = 3{,}2$ m y $r = 1{,}6$ m.

> Resolución de problemas

9. Un péndulo de 35 cm describe un ángulo de 15°. ¿Cuál es la longitud del arco descrito?

10. Un ciclocomputador es un dispositivo que ayuda a los ciclistas a medir las distancias recorridas. Para usarlo en una determinada bicicleta, se debe introducir la distancia que recorre la bicicleta en una vuelta. ¿Qué número entero en centímetros se debe introducir si el radio de la bicicleta es 35 cm?

11. Un barco se encuentra a 33° latitud norte y otro a 12° latitud sur. Si ambos se encuentran sobre un mismo meridiano, ¿cuál es la distancia que separa a los barcos, si el radio de la Tierra es aproximadamente 6400 km?

12. Un objeto da 10 vueltas por segundo. ¿Cuál es su velocidad en radianes por segundo?

13. Las ciudades que se encuentran sobre un mismo meridiano tienen la misma hora. El ángulo central que abarca dos meridianos es 15 grados de longitud y la diferencia de tiempo es 1 hora.

    a. ¿Cuál es la diferencia de tiempo entre dos ciudades cuya diferencia de longitud es 60°?

    b. Si en Bogotá son las 12:00 m, y la diferencia de longitud con Madrid es de 90°, ¿qué hora es en Madrid?

    c. Si la hora en Colombia es +5 respecto al meridiano Greenwich, ¿cuál es la diferencia de longitud?

14. Un contador que registra el número de vueltas de un objeto circular en una máquina, ha sido calibrado para contar medias vueltas como unidad. ¿Cuál es la medida que asigna a cada uno de los siguientes ángulos de giro?

    a. 90° b. 180°

    c. –180° d. –140°

    e. 45° f. 60°

    g. π rad h. $\frac{3}{2}\pi$ rad

    i. $-\frac{3}{2}\pi$ rad j. $-\frac{7}{4}\pi$ rad

> Razonamiento lógico

15. Si un polígono regular tiene n lados, ¿cuál es la medida en grados y radianes de cada ángulo formado por los lados del polígono? Recuerda que la suma de los ángulos internos de un polígono de n lados corresponde a $180° \times (n - 2)$.

Uso de la tecnología

16. Digita en la calculadora cada ángulo.

    a. 105°25'3"

    b. 48°10'59"

    c. 3°5'39"

    d. 100°0'4"

17. Transforma la medida dada en grados, minutos y segundos a grados, décimas, centésimas y milésimas de grado o viceversa, según el caso.

    a. 180° 50' 2"

    b. 25° 9' 30"

    c. 59,522222°

    d. 89,5°

    e. 1°30"

    f. 0,016388°

Triángulos rectángulos

Logro: establecer relaciones entre las medidas de los lados de un triángulo rectángulo.

Podemos clasificar los triángulos según la medida de sus lados o según la medida de sus ángulos. Si los clasificamos según la medida de sus lados, obtenemos triángulos **equiláteros** (la medida de sus tres lados es igual), **isósceles** (la medida de dos de sus lados es igual) y **escalenos** (la medida de sus tres lados es diferente). Cuando clasificamos los triángulos según la medida de sus ángulos, obtenemos tres clases: **acutángulo**, **rectángulo** y **obtusángulo**. Un triángulo rectángulo es el que tiene un ángulo recto.

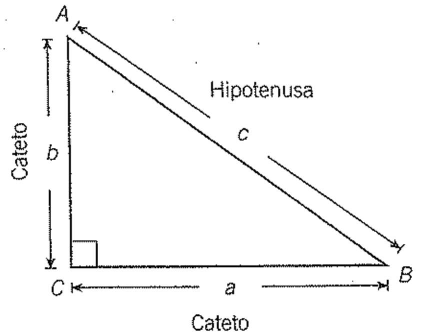


Figura 1.10

En el triángulo de la figura 1.10 el ángulo C es recto, mientras que A y B son agudos. El lado mayor (opuesto al ángulo recto) se llama **hipotenusa** y los otros dos lados se llaman **catetos**. Además:

$$m\measuredangle A + m\measuredangle B + m\measuredangle C = 180^\circ$$
$$m\measuredangle C = 90^\circ$$
$$m\measuredangle A + m\measuredangle B = 90^\circ$$

Entre los lados de un triángulo rectángulo podemos establecer diferentes relaciones. Una de las relaciones más importantes es el teorema de Pitágoras.

Comentario

*El teorema de Pitágoras aparece en el **Guinnes Records** como el teorema con mayor cantidad de pruebas publicadas.*

Teorema de Pitágoras

La suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos de un triángulo rectángulo equivale al área del cuadrado construido sobre la hipotenusa.

Si a y b son las longitudes de los catetos y c la longitud de la hipotenusa, esta relación se establece así: $c^2 = a^2 + b^2$.

Demostración

Podemos calcular el área del cuadrado de la figura 1.11 de dos formas. Primera, el área del cuadrado de lado $a + b$ y segunda, como la suma de las áreas del cuadrado de lado c y el área de los cuatro triángulos rectángulos de catetos a y b. Por tanto:

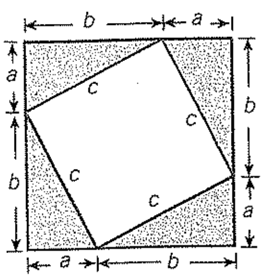


Figura 1.11

$(a + b)^2 = c^2 + 4\dfrac{ab}{2}$	Igualamos las áreas.
$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$	Calculamos el cuadrado de la suma.
$c^2 = a^2 + b^2$	Despejamos el valor de c^2. Obtenemos el resultado de la demostración.

Podemos ver la equivalencia entre las áreas en la figura 1.12.

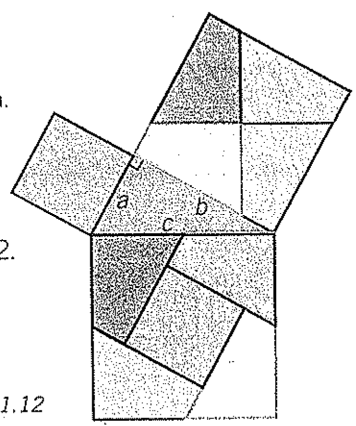


Figura 1.12

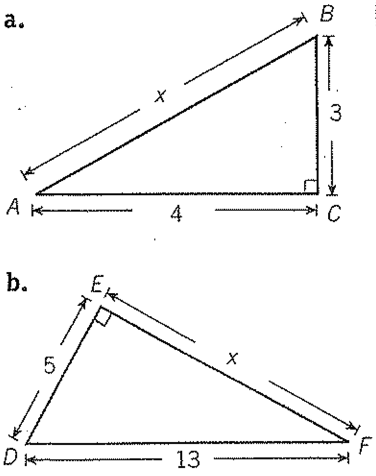


Figura 1.13

Ejemplo 5

Utilizando el teorema de Pitágoras, hallemos el valor de x en los triángulos de la figura 1.13.

Solución

En el triángulo (a), el cateto x representa la medida de la hipotenusa.

$x^2 = 4^2 + 3^2$

$x^2 = 16 + 9$

$x^2 = 25$

$x = 5$

En el triángulo (b), x representa la medida de uno de los catetos.

$13^2 = 5^2 + x^2$

$169 = 25 + x^2$

$x^2 = 169 - 25$

$x^2 = 144$

$x = 12$

Podemos ver que el teorema de Pitágoras corresponde a la siguiente proposición: "$\triangle ABC$ es rectángulo si y solo si $c^2 = a^2 + b^2$".

Es decir, el hecho de que $\triangle ABC$ sea rectángulo es equivalente a que sus lados cumplan la relación $c^2 = a^2 + b^2$. Esta proposición nos ayuda a determinar cuándo un triángulo dado es rectángulo; por ejemplo, podríamos decidir si dos paredes consecutivas de un cuarto forman un ángulo de 90° o no lo forman.

Pensamiento crítico

¿Por qué puedes garantizar que un triángulo es rectángulo si cumple la igualdad $c^2 = a^2 + b^2$?

Ejemplo 6

Una escalera de 5 m se apoya sobre una pared y alcanza una altura de 4 m. Si la base de la escalera está a 2,8 m de la pared, ¿podemos afirmar que la pared y el piso forman un ángulo recto?

Solución

Si la pared y el piso formaran un ángulo recto, debería cumplirse la relación $c^2 = a^2 + b^2$, donde c es la longitud de la escalera. Sin embargo, $5^2 \neq 4^2 + 2{,}8^2$ puesto que $25 \neq 16 + 7{,}84 = 23{,}84$. Por tanto, no podemos afirmar que la pared y el piso formen un ángulo recto. Al parecer, el constructor tuvo algún problema con la plomada.

> Triángulos especiales

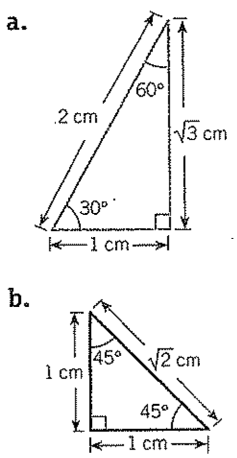


Figura 1.14

En la figura 1.14 se muestran dos triángulos rectángulos.

El triángulo (a) se obtiene a partir de un triángulo equilátero de lado 2 cm que se divide por la mitad. Tiene ángulos de 30°, 60° y 90° y las longitudes de los lados son 1 cm, $\sqrt{3}$ cm y 2 cm.

El segundo es un triángulo rectángulo isósceles (b) que se obtiene a partir de un cuadrado de lado 1. Sus ángulos miden 45°, 45° y 90° y las longitudes de los lados son 1 cm, 1 cm y $\sqrt{2}$ cm.

Encontremos una forma general para expresar las medidas de los lados de triángulos con ángulos 30°, 60°, 90° y 45°, 45°, 90°.

Una de las características de los triángulos semejantes es que las medidas de sus lados guardan la misma relación: 1, $\sqrt{3}$, 2 y 1, 1, $\sqrt{2}$. Lo cual significa que en cualquier otro triángulo semejante al primero, las medidas de sus lados son proporcionales a: 1, $\sqrt{3}$, 2.

Para el caso general, podemos construir un triángulo con ángulos de 30°, 60° y 90° a partir de un triángulo equilátero de lado $2a$, como se muestra en la figura 1.15.

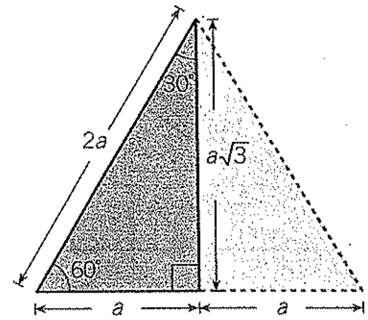


Figura 1.15

Tomando como eje de simetría el cateto de lado $a\sqrt{3}$, el cual corresponde a una altura del triángulo equilátero de lado $2a$, obtenemos dos triángulos rectángulos congruentes, con ángulos de 30°, 60° y 90°. Como la longitud del lado del triángulo equilátero es $2a$, las longitudes de los lados de cada uno de los nuevos triángulos son a, $a\sqrt{3}$ y $2a$.

El valor $a\sqrt{3}$ de la altura podemos obtenerlo mediante el teorema de Pitágoras, a partir de las longitudes $2a$ y a. Así, si h corresponde al valor de la altura tenemos:

$$h^2 = (2a)^2 - a^2$$
$$h^2 = 3a^2$$
$$h = a\sqrt{3}$$

Para el triángulo de ángulos 45°, 45° y 90° podemos tomar un cuadrado de lado a y, al trazar una de las diagonales, obtenemos dos triángulos rectángulos congruentes, como se muestra en la figura 1.16.

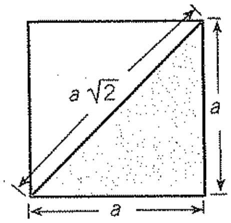


Figura 1.16

Las longitudes de los lados del triángulo son a, a y $a\sqrt{2}$.

El valor $a\sqrt{2}$ de la hipotenusa se obtiene mediante el teorema de Pitágoras.

Así, si d corresponde a la longitud de la hipotenusa tenemos que:

$$d^2 = a^2 + a^2$$
$$d^2 = 2a^2$$
$$d = a\sqrt{2}$$

Las longitudes de los lados de un triángulo que tiene ángulos de medidas 30°, 60° y 90° están en relación a, $a\sqrt{3}$ y $2a$, y en los triángulos que tienen ángulos de medidas 45°, 45° y 90°, la relación en la que están los lados es a, a y $a\sqrt{2}$.

Ejemplo

¿Cuál es la medida de los lados desconocidos en cada triángulo de la figura 1.17?

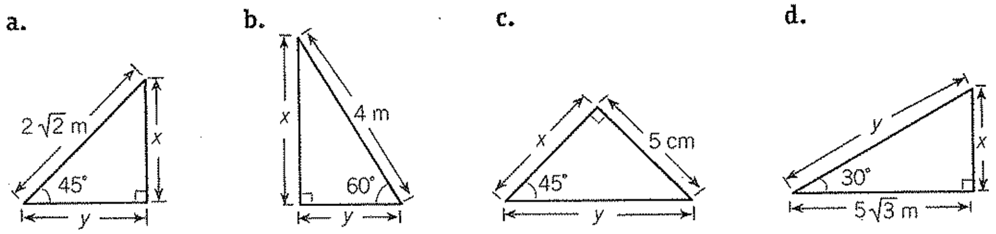


Figura 1.17

Solución

a. Como la medida de sus ángulos es 45°, 45° y 90°, el triángulo es isósceles, y puesto que la hipotenusa es $\sqrt{2}$ veces la longitud de cada lado, concluimos que $x = y = 2$ m.

b. Puesto que la medida de sus ángulos es 30°, 60° y 90°, la longitud de la hipotenusa es el doble que la longitud del cateto y. Así, tenemos que $y = 2$ m. Para obtener la relación 2, $2\sqrt{3}$, 4, el otro lado debe medir $2\sqrt{3}$.

c. En éste, con ángulos de medidas 45°, 45° y 90°, los lados están en relación a, a y $a\sqrt{2}$. Por tanto, los lados x y y deben medir 5 m y $5\sqrt{2}$ m, respectivamente, para obtener: 5, 5 y $5\sqrt{2}$.

d. Los lados y, $5\sqrt{3}$ m y x deben estar en la relación $2x$, $\sqrt{3}x$ y $1x$. Por tanto, $x = 5$ m y $y = 10$ m.

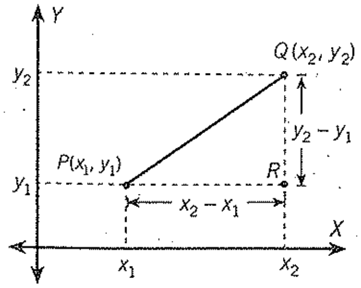


Figura 1.18

> Distancia entre dos puntos

El teorema de Pitágoras también podemos usarlo para encontrar la distancia entre dos puntos del plano.

Si $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ son dos puntos del plano cartesiano, podemos formar un triángulo rectángulo cuyos catetos son los $\overline{PR}$ y $\overline{QR}$ (*ver* figura 1.18).

Las medidas de los $\overline{PR}$ y $\overline{QR}$ son $x_2 - x_1$ y $y_2 - y_1$, respectivamente. Así obtenemos que:

*La **distancia** entre los puntos P y Q está dada por:*

$$(PQ)^2 = (PR)^2 + (RQ)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Pensamiento cr...

Emplea la fórmula de distancia entre dos puntos para comprobar que $PQ = QP$.

Comentario

Recuerda que:

$|x| = x, \text{ si } x \geq 0.$

$|x| = -x, \text{ si } x < 0.$

Calculemos la distancia entre los puntos de coordenadas $M(4, 0)$ y $N(1, 1)$.

Solución

Empleando la ecuación de distancia entre dos puntos obtenemos:

$MN = \sqrt{(4-1)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{(3)^2 + 1^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$

Luego, $MN = \sqrt{10}$.

Si los puntos M y N están en posiciones diferentes (otros cuadrantes) a las de la figura 1.18, es necesario usar el valor absoluto para la diferencia de abscisas $|x_2 - x_1|$ y las ordenadas $|y_2 - y_1|$, pues las distancias deben ser siempre positivas.

> Piensa y practica <

> Conexiones

1. Determina en cada caso si el triángulo es rectángulo.

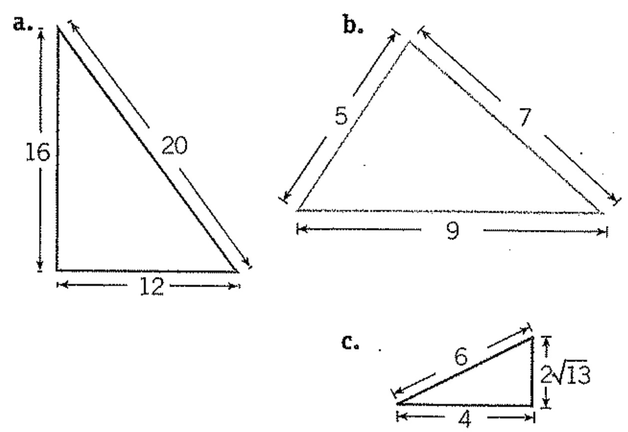


Figura 1.19

2. Usa el teorema de Pitágoras para encontrar el valor de x en cada caso.

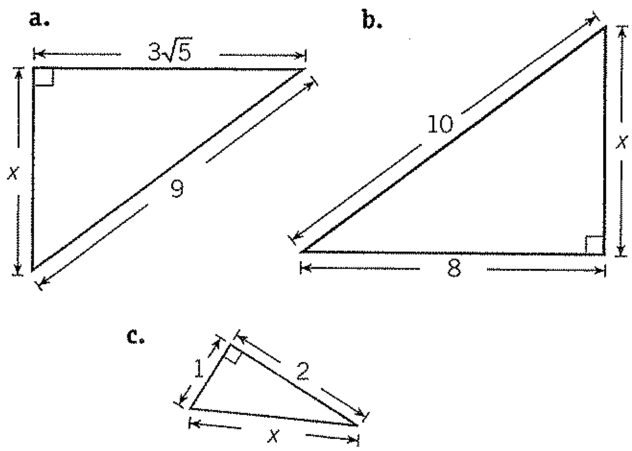


Figura 1.20

3. El lado mayor de un triángulo de ángulos 30°, 60° y 90° mide 4 cm. ¿Cuánto miden los otros lados?

4. La hipotenusa de un triángulo con ángulos 45°, 45° y 90° mide 10 cm. ¿Cuál es la medida de los dos catetos?

5. Calcula la distancia entre cada par de puntos.

a. $P(1, 1)$ y $Q(2, 2)$ **b.** $P(3, 4)$ y $Q(3, 6)$

c. $P(-2, 3)$ y $Q(-2, -5)$ **d.** $P(0, 0)$ y $Q\left(-\sqrt{2}, 1\right)$

e. $P\left(3\sqrt{2}, -\sqrt{7}\right)$ y $Q(0, 0)$ **f.** $P\left(0, 5\sqrt{3}\right)$ y $Q\left(-\sqrt{3}, 0\right)$

6. Determina cuál de los puntos $(0, 2)$, $(2, 2)$, $\left(-\sqrt{3}, 0\right)$ y $\left(\sqrt{2}, \sqrt{3}\right)$ está más cerca y cuál está más lejos del punto $(0, 0)$.

7. Determina si el triángulo *ABC* de la figura 1.21 es rectángulo.

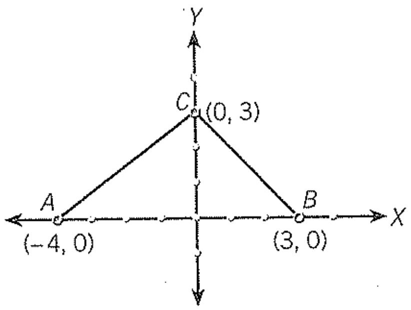


Figura 1.21

8. Un triángulo ubicado en un plano cartesiano tiene sus vértices en los puntos $P(0, 4)$, $Q(-2, -2)$ y $R(4, -4)$. Determina si es un triángulo rectángulo.

> Resolución de problemas

9. Un ingeniero civil desea saber si una calle y una carrera en la plaza central del pueblo forman un ángulo recto. Para tal fin mide 10 m sobre la calle, 20 m sobre la carrera, desde una misma esquina del parque y finalmente mide la diagonal (*ver* figura 1.22). ¿Cuál debe ser aproximadamente la medida de la diagonal para poder asegurar que las calles sí forman un ángulo de 90°?

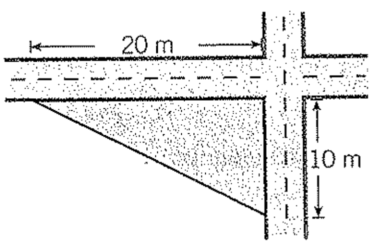


Figura 1.22

10. Una hoja de papel se dobla formando un ángulo recto, como en la figura 1.23. ¿Cuál es la longitud del doblez?

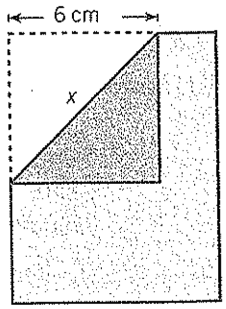


Figura 1.23

11. De una estación de automóviles salen dos autos, uno hacia el norte con una velocidad de 60 km/h y otro hacia el oriente con una velocidad de 30 km/h. ¿A qué distancia se encuentran los autos después de media hora? ¿1 hora? ¿2 horas?

12. Encuentra el valor de *x* en las ilustraciones de la figura 1.24.

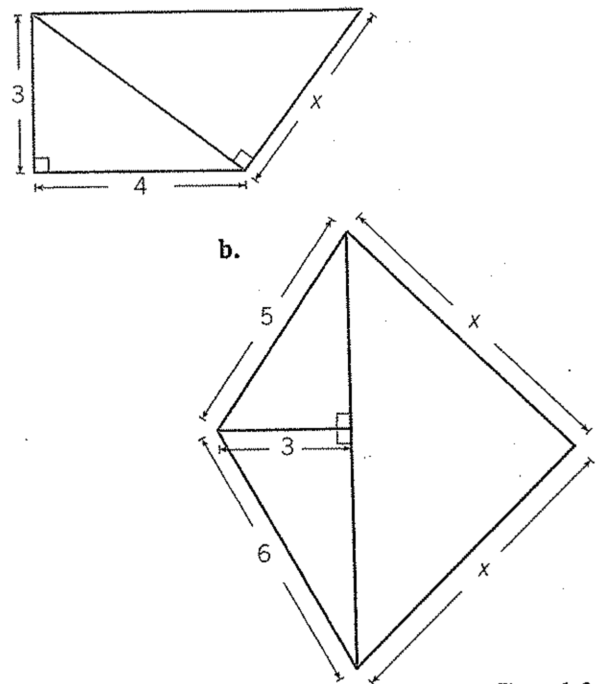


Figura 1.24

13. La distancia entre las dos torres de la figura 1.25 es 25 m. Si se quiere extender una cuerda desde el pie de uno de los edificios, y que alcance una altura de 30 m del otro, ¿cuál debe ser la longitud de la cuerda?

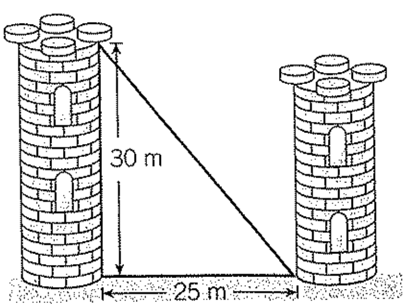


Figura 1.25

3 Razones trigonométricas

Logro: definir las distintas razones o cocientes entre las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo.

Lección — *Pensamientos métrico y espacial*

Un triángulo tiene tres lados y tres ángulos. En muchas aplicaciones debemos calcular algún elemento del triángulo conociendo otros. Para hacerlo empleamos las razones trigonométricas.

*Una **razón trigonométrica** es el cociente entre las longitudes de dos lados de un triángulo rectángulo.*

Existen seis razones diferentes entre los lados de un triángulo. Si las longitudes de los lados son a, b y c, las posibles razones son: $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{b}$ y $\frac{c}{a}$. Observemos que las tres últimas son las razones recíprocas de las primeras. Consideremos el triángulo rectángulo de la figura 1.26 de ángulos A, B, C con $C = 90°$. Como la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°, los ángulos A y B son complementarios. Es decir: $A + B = 90°$ o en forma equivalente: $B = 90° - A$.

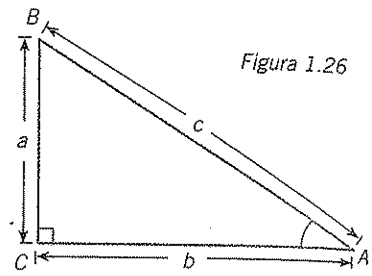


Figura 1.26

Comentario

El recíproco de $\frac{a}{b}$ es $\frac{b}{a}$.

En relación con el ángulo A, los lados a y b se llaman **cateto opuesto** y **cateto adyacente**, respectivamente. El cateto opuesto al ángulo B es el cateto adyacente de A y viceversa. El lado de mayor longitud se llama hipotenusa.

El cociente entre dos lados cualesquiera del triángulo ABC depende sólo del ángulo y no de la longitud de los lados. Analicemos este aspecto. Al construir un nuevo triángulo rectángulo $AB'C'$ con el mismo ángulo A ($\overline{B'C'} \parallel \overline{BC}$), como se muestra en la figura 1.27, obtenemos dos triángulos semejantes: $\triangle AB'C' \sim \triangle ABC$. Por tanto, sus lados resultan proporcionales: $\frac{a}{c} = \frac{a'}{c'}$; $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$. Es decir, cada par de lados del $\triangle ABC$ y sus correspondientes en el $\triangle AB'C'$ forman una proporción.

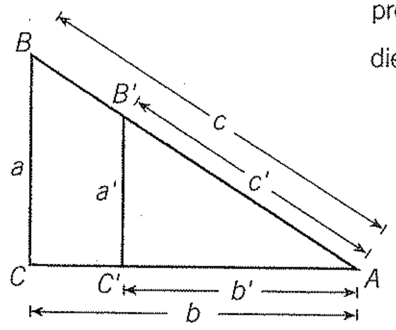


Figura 1.27

De las seis relaciones establecidas entre los lados del triángulo, las más importantes son: $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$ y $\frac{a}{b}$. Estas razones tienen como razones inversas las siguientes: $\frac{c}{a}$, $\frac{c}{b}$ y $\frac{b}{a}$.

La razón $\frac{a}{c}$ se denomina **seno de** A y corresponde al cociente entre el cateto opuesto al ángulo A y la hipotenusa. Abreviadamente, escribimos: $\operatorname{sen} A = \frac{a}{c}$.

La razón $\frac{b}{c}$ se denomina **seno de** B y corresponde al cociente entre el cateto opuesto al ángulo B y la hipotenusa. Abreviadamente escribimos $\operatorname{sen} B = \frac{b}{c}$.

La razón $\frac{a}{b}$ se denomina **tangente de** A y corresponde al cociente entre el cateto opuesto al ángulo A y el cateto adyacente del mismo ángulo. Abreviadamente escribimos $\tan A = \frac{a}{b}$.

Definimos el **coseno de** A (en forma abreviada escribimos $\cos A$) como el seno del ángulo complementario de A: $\cos A = \operatorname{sen} B = \frac{b}{c}$, es decir: coseno de A es el cociente entre el cateto adyacente del ángulo A y la hipotenusa.

*En un triángulo rectángulo, las **razones trigonométricas fundamentales** son:*

$$\operatorname{sen} A = \frac{a}{c},\ \cos A = \frac{b}{c},\ \tan A = \frac{a}{b}.$$

Las razones inversas de seno, coseno y tangente se llaman **cosecante (csc)**, **secante (sec)** y **cotangente (cot)**, respectivamente.

$$\csc A = \frac{1}{\operatorname{sen} A} = \frac{c}{a}, \qquad \sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{c}{b}, \qquad \cot A = \frac{1}{\tan A} = \frac{b}{a}$$

*Las seis **razones trigonométricas** correspondientes al **ángulo agudo** A de un triángulo rectángulo son:*

$$sen\ A = \frac{a}{c} = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} \qquad csc\ A = \frac{c}{a} = \frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto}$$

$$cos\ A = \frac{b}{c} = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} \qquad sec\ A = \frac{c}{b} = \frac{hipotenusa}{cateto\ adyacente}$$

$$tan\ A = \frac{a}{b} = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} \qquad cot\ A = \frac{b}{a} = \frac{cateto\ adyacente}{cateto\ opuesto}$$

El prefijo "co" que acompaña a las relaciones **co**seno, **co**tangente y **co**secante se debe a que corresponde a seno, tangente y secante del ángulo complementario y se tienen, por tanto, las siguientes relaciones:

$$cos\ B = sen\ (90° - B) = sen\ A$$
$$cot\ B = tan\ (90° - B) = tan\ A$$
$$csc\ B = sec\ (90° - B) = sec\ A$$

Encontremos los valores de las seis razones trigonométricas para los ángulos agudos de un triángulo rectángulo ABC con ángulo recto en C, $a = 1$ y $c = \sqrt{5}$.

Solución

Primero representamos la situación en la figura 1.28.

$b^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2 - 1^2$ Aplicamos el teorema de Pitágoras.

$b = \sqrt{5 - 1}$ Despejamos el valor de b.

$b = 2$ Simplificamos la expresión.

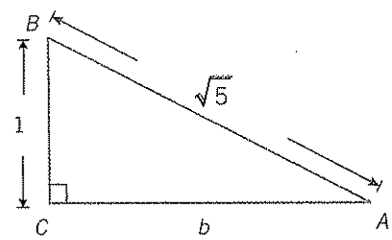


Figura 1.28

En consecuencia:

$$\text{sen } A = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} = \cos B \qquad \cot A = 2 = \tan B$$

$$\cos A = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} = \text{sen } B \qquad \sec A = \frac{\sqrt{5}}{2} = \csc B$$

$$\tan A = \frac{1}{2} = \cot B \qquad \csc A = \sqrt{5} = \sec B$$

Hallemos el valor de cos A, si sen $A = \frac{1}{x}$.

Solución

Como sen $A = \frac{1}{x}$, suponemos que el triángulo rectángulo tiene un cateto de longitud 1 y la hipotenusa de longitud x. Usamos el teorema de Pitágoras para hallar la longitud del otro cateto:

$a = \sqrt{x^2 - 1^2} = \sqrt{x^2 - 1}$.

Por tanto, como $\cos A = \frac{a}{c}$, $\cos A = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}$.

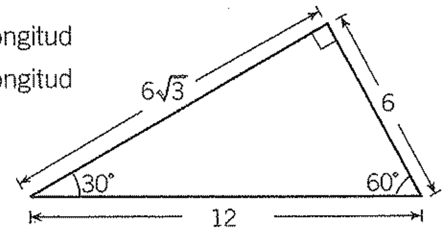


Figura 1.29

Utilizando las razones trigonométricas y la información dada en la figura 1.29, calculemos sen 60°, cos 60° y tan 60°.

Solución

Para el ángulo de 60° el cateto opuesto mide $6\sqrt{3}$, y el cateto adyacente 6. Por tanto:

$$\text{sen } 60° = \frac{6\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2};\ \cos 60° = \frac{6}{12} = \frac{1}{2};\ \tan 60° = \frac{6\sqrt{3}}{6} = \sqrt{3}.$$

Ejemplo

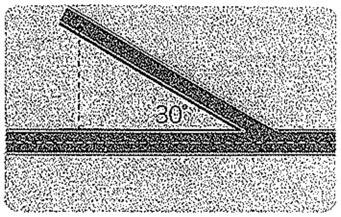


Figura 1.30a

Un autobús que viaja a 60 km/h toma un desvío por un camino recto que forma un ángulo de 30° con la avenida principal, como se muestra en la figura 1.30a. ¿Cuál es la distancia que lo separa de la avenida después de 1 hora de viaje?

Solución

Con una velocidad de 60 km/h, en 1 hora logra avanzar 60 km. Puesto que la distancia debe medirse en forma perpendicular, obtenemos un triángulo rectángulo como muestra la figura 1.30b.

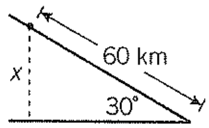


Figura 1.30b

Para hallar el valor de x, calculamos sen 30°.

$\text{sen } 30° = \dfrac{x}{60}$	Utilizamos una razón trigonométrica que involucre x y 60.
$x = 60 \cdot \text{sen } 30°$	Despejamos el valor de x.
$x = 60 \cdot 0{,}5$	Reemplazamos sen 30° = cos 60° = 0,5.
$x = 30$ km	Obtenemos el valor de x.

En calculadoras científicas podemos utilizar las teclas sen, cos y tan, para obtener aproximaciones de los valores de las razones trigonométricas de cualquier ángulo. Con la tecla $\frac{1}{x}$ o x^{-1} podemos calcular, además, aproximaciones de cosecante, secante y cotangente.

Es importante verificar los modos rad y deg de la calculadora, que empleamos para trabajar con radianes y grados, respectivamente. Si calculamos sen 10 en modo rad (radianes) el valor es −0,544 aproximadamente, ya que buscamos el seno de 10 radianes; pero si calculamos sen 10 en modo deg (grados) el valor es 0,174 aproximadamente, pues buscamos el seno de 10 grados. Concluimos que sen 10 en rad es distinto de sen 10 en grados.

Si recordamos las medidas de los lados correspondientes a los triángulos de 45°, 45° y 90° y las del triángulo de ángulos 30°, 60° y 90°, podemos construir la tabla 1.4 para las seis razones trigonométricas de los ángulos de 30°, 45° y 60°.

Ángulo		sen	cos	tan	cot	sec	csc
Grados	Radianes						
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Tabla 1.4

> Piensa y practica <

> Comunicación

1. Explica qué razón trigonométrica del ángulo θ relaciona los lados indicados en cada triángulo. Puede haber más de una opción.

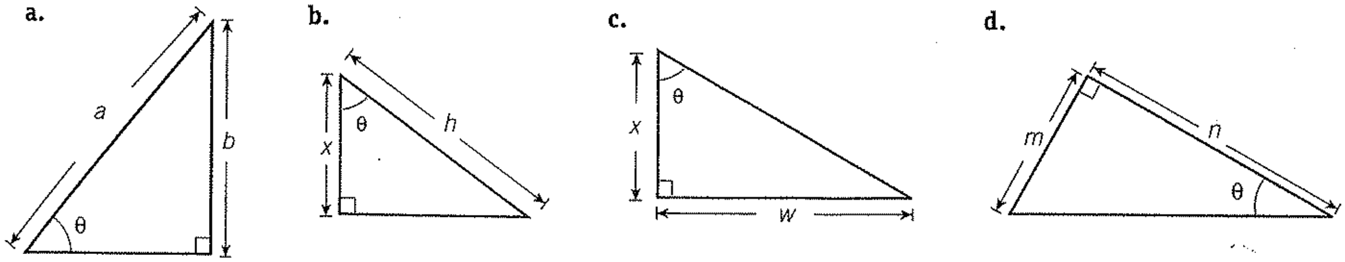


Figura 1.31

2. Decide si la afirmación es verdadera o falsa. Justifica tus respuestas.
   a. La razón inversa de seno es coseno.
   b. La razón inversa de secante es coseno.
   c. La razón inversa de tangente es cotangente.
   d. El coseno de un ángulo es igual a la secante de su complemento.
   e. La cosecante de un ángulo es igual a la secante de su complemento.

> Conexiones

3. Dibuja un triángulo rectángulo para la razón trigonométrica dada y encuentra las otras cinco razones.
   a. $\cos A = \frac{4}{5}$
   b. $\operatorname{sen} A = \frac{1}{\sqrt{2}}$
   c. $\cos A = 1$
   d. $\tan A = 3$
   e. $\cot A = \frac{3}{4}$
   f. $\sec A = 2$
4. Halla los valores exactos para seno, coseno y tangente del ángulo θ, en cada triángulo de la figura 1.32.

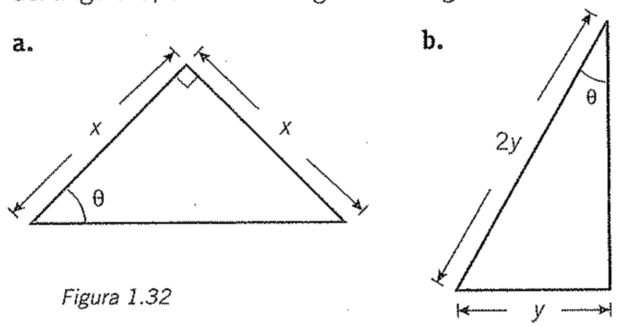


Figura 1.32

5. Halla todas las razones trigonométricas para los ángulos agudos de un triángulo, cuyos lados son 3 cm, 4 cm y 5 cm.
6. Recuerda que el seno de un ángulo es la razón entre la longitud del cateto opuesto (del ángulo) y la hipotenusa. Según lo anterior, explica por qué la razón debe ser menor que uno.
7. Recuerda que la tangente de un ángulo es la razón entre las longitudes de los catetos. Explica por qué la razón puede ser mayor que uno.
8. Si $\csc A = 3$ y B es el complemento de A, encuentra los valores de:
   a. $\operatorname{sen} A$
   b. $\sec A$
   c. $\tan B$
   d. $\tan (90° - B)$
   e. $\sec (90° - A)$
   f. $\operatorname{sen} (90° - B)$
9. Utiliza los valores dados en la tabla 1.4 para comparar los valores de las funciones trigonométricas. Escribe >, < o =, según corresponda.
   a. $\operatorname{sen} 30°$ ⬚ $\operatorname{sen} \frac{\pi}{3}$
   b. $\cos \frac{\pi}{4}$ ⬚ $\cos \frac{\pi}{6}$
   c. $\tan 30°$ ⬚ $\tan \frac{\pi}{4}$
   d. $\tan 30° \sec 60°$ ⬚ $\operatorname{sen} \frac{\pi}{6}$
   e. $\tan 60° \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}$ ⬚ $\cot 30° \cos \frac{\pi}{4}$
   f. $\csc 60° \cot \frac{\pi}{3}$ ⬚ $\operatorname{sen} 60° \tan \frac{\pi}{3}$
10. Halla el valor exacto de cada expresión.
   a. $(\operatorname{sen} 60° \tan 30°) + (\operatorname{sen} 30° \sec 60° \tan 45°) =$
   b. $\sqrt{2} \sec 45° - 3 \tan 30° \csc 60° =$
11. Dibuja un triángulo rectángulo con un ángulo tal que $\cos \beta = \frac{2x}{3}$. Calcula las demás razones trigonométricas para el ángulo β.
12. Calcula el valor de la expresión $\cos \theta + (\cot \theta \sec \theta) + \tan \theta$, sabiendo que $\cos \theta = \frac{1}{2}$.

> Resolución de problemas

13. En la figura 1.33, los puntos A y B están en las orillas opuestas de un lago. Desde el punto C se observa el punto A, con un ángulo de 50°. ¿Cuál es el ancho del lago (w)?

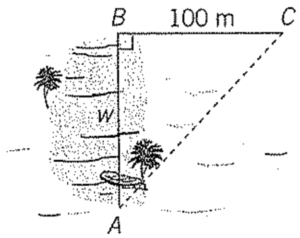


Figura 1.33

14. Una banda transportadora de 12 m de longitud sube las cajas de leche 1,5 m del suelo (*ver* figura 1.34). ¿Cuál es la tangente del ángulo que la banda forma con el suelo?

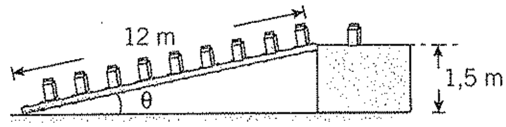


Figura 1.34

15. Un carro de bomberos eleva una escalera de 3,1 m que se apoya contra la pared de un edificio formando un ángulo de 40°, como se muestra en la figura 1.35. ¿Qué altura alcanzará la escalera si ésta se encuentra a 2 m del edificio y a 1,5 m del suelo?

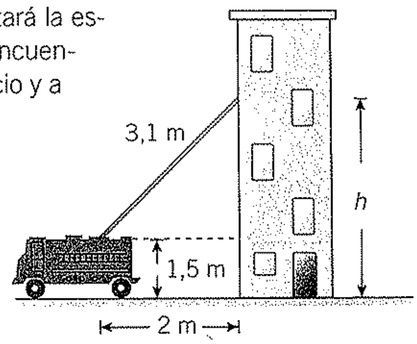


Figura 1.35

Identidades fundamentales

Logro: establecer identidades fundamentales entre expresiones que involucran razones trigonométricas.

Una ecuación algebraica es una igualdad entre dos expresiones que se cumple para ciertos valores. Por ejemplo, la ecuación $x^2 = 3x + 4$ se satisface únicamente para $x = 4$ y $x = -1$, pues $4^2 = 3 \times 4 + 4$ y $(-1)^2 = 3 \times (-1) + 4$. Decimos que $\{4, -1\}$ es el conjunto solución de la ecuación dada.

De otro lado, una identidad es una igualdad entre dos expresiones que se cumple para cualquier valor de x. Por ejemplo, para todo número real se cumple que $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$.

*Una **identidad trigonométrica** es una igualdad entre dos expresiones que contienen formas trigonométricas y que se satisface para todo valor del ángulo.*

Las identidades básicas podemos clasificarlas en las siguientes categorías:

1. Razones recíprocas

A partir de las definiciones de cosecante, secante y cotangente, obtenemos las siguientes identidades:

$$\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta},\ \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta},\ \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

2. Identidades por cociente

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \tan\theta,\ \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \cot\theta$$

3. Identidades pitagóricas

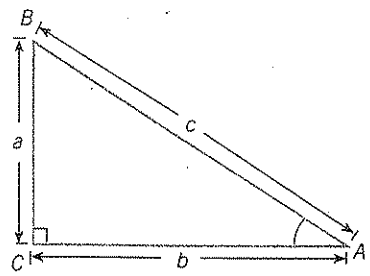


Figura 1.36

Si A es uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, podemos reescribir el teorema de Pitágoras en términos de $\operatorname{sen} A$ y $\cos A$. En la figura 1.36, observamos que $\operatorname{sen} A = \frac{a}{c}$ y $\cos A = \frac{b}{c}$; por tanto:

$$\operatorname{sen}^2 A + \cos^2 A = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1$$

Hemos usado el hecho de que en un triángulo rectángulo se cumple la relación: $c^2 = a^2 + b^2$, es decir, que a partir del teorema de Pitágoras se puede establecer la relación:

$$sen^2\, A + cos^2\, A = 1$$

Observemos que para escribir el cuadrado de seno de A utilizamos $\operatorname{sen}^2 A$, la cual es una simplificación de $(\operatorname{sen} A)^2$.

Esta última identidad es muy importante en trigonometría, pues con ésta podemos expresar $\operatorname{sen} A$ en términos de $\cos A$ y viceversa.

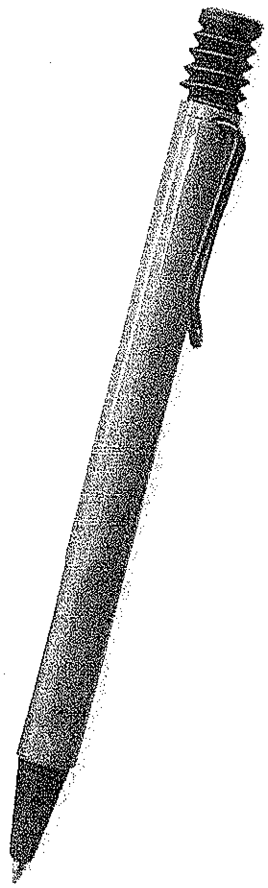
Pensamiento crític

$$¿\, sen^2\, A = sen\, A^2\, ?$$

Si $\cos A = \frac{3}{5}$, ¿cuál es el valor de $\operatorname{sen} A$?

Solución

$\operatorname{sen}^2 A + \cos^2 A = 1$	Consideramos la identidad Pitagórica.
$\operatorname{sen} A = \sqrt{1 - \cos^2 A}$	Despejamos $\operatorname{sen} A$ de la identidad fundamental.
$\operatorname{sen} A = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2}$	Reemplazamos el valor de $\cos A$.
$\operatorname{sen} A = \sqrt{1 - \frac{9}{25}}$	Calculamos la potencia de una fracción.
$\operatorname{sen} A = \sqrt{\frac{16}{25}}$	Realizamos la sustracción indicada.
$\operatorname{sen} A = \frac{4}{5}$	Utilizamos propiedades de la radicación, obtenemos la respuesta.



A partir de la identidad fundamental podemos establecer otras identidades que relacionan $\tan A$ con $\sec A$ y $\cot A$ con $\csc A$. Por ejemplo, si dividimos cada término por $\cos^2 A$, obtenemos:

$\operatorname{sen}^2 A + \cos^2 A = 1$	Consideramos la identidad pitagórica.
$\frac{\operatorname{sen}^2 A}{\cos^2 A} + \frac{\cos^2 A}{\cos^2 A} = \frac{1}{\cos^2 A}$	Dividimos cada lado de la igualdad por $\cos^2 A$.
$\left(\frac{\operatorname{sen} A}{\cos A}\right)^2 + 1 = \left(\frac{1}{\cos A}\right)^2$	Aplicamos la propiedad de la potenciación: $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$.
$\tan^2 A + 1 = \sec^2 A$	Empleamos la definición de tangente y secante. Obtenemos una nueva identidad.

$$\tan^2 A = \sec^2 A - 1$$

Hallemos el valor de $\sqrt{u^2 - 9}$ cuando reemplacemos u por $3\sec A$.

Solución

$\sqrt{u^2 - 9} = \sqrt{(3\sec A)^2 - 9}$	Reemplazamos u por $3\sec A$.
$= \sqrt{9\sec^2 A - 9}$	Aplicamos propiedades de la potenciación.
$= \sqrt{9(\sec^2 A - 1)}$	Utilizamos el factor común para factorizar 9.
$= \sqrt{9\tan^2 A}$	Utilizamos la propiedad fundamental $\tan^2 A = \sec^2 A - 1$.
$= 3\tan A$	Calculamos la radicación indicada. Obtenemos la solución.

De acuerdo con la figura 1.37, ¿cuál es el valor de $\cos A$ en términos de x?

Solución

$h = \sqrt{x^2 + 4^2}$	Utilizamos el teorema de Pitágoras.
$\cos A = \frac{4}{\sqrt{x^2 + 4^2}}$	Utilizamos la definición de $\cos A$.

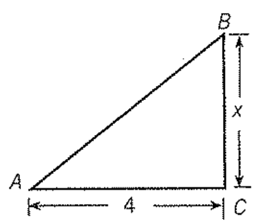


Figura 1.37

4. Identidades para ángulos complementarios

Si A y B son los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, sabemos que $A + B = 90°$, es decir, A y B son ángulos complementarios. Debido a que el cateto opuesto de uno es el cateto adyacente del otro y viceversa, podemos establecer las siguientes identidades.

$$\cos(90° - A) = \operatorname{sen} A$$
$$\cot(90° - A) = \tan A$$
$$\csc(90° - A) = \sec A$$

Establecer identidades puede ser de gran utilidad, puesto que algunas expresiones son más manejables que otras.

Demostrar o verificar una identidad significa comprobar que la igualdad es cierta. Existen diferentes formas de verificar una identidad, pero la idea fundamental es que uno de los lados de la igualdad debemos transformarlo en el otro. Es importante que justifiquemos cada paso que efectuemos.

Ejemplo 16

Verifiquemos que $\tan A + \cot A = \dfrac{1}{\operatorname{sen} A \cos A}$.

Solución

En este caso, vamos a partir del lado izquierdo de la igualdad, y por medio de transformaciones, obtendremos el lado derecho.

$\tan A + \cot A = \dfrac{\operatorname{sen} A}{\cos A} + \dfrac{\cos A}{\operatorname{sen} A}$ Escribimos el lado izquierdo de la igualdad en términos de sen A y cos A.

$= \dfrac{\operatorname{sen}^2 A + \cos^2 A}{\cos A \cdot \operatorname{sen} A}$ Efectuamos la adición.

$= \dfrac{1}{\cos A \cdot \operatorname{sen} A}$ Utilizamos la identidad fundamental. Verificamos la igualdad.

Comentario

Las identidades y el correcto manejo algebraico de las expresiones son útiles para simplificar ciertas expresiones.

Ejemplo 17

Simplifiquemos la expresión $\sec x - \sec x \operatorname{sen}^2 x$.

Solución

$\sec x - \sec x \operatorname{sen}^2 x = \sec x(1 - \operatorname{sen}^2 x)$ Sacamos factor común.

$= \sec x \cos^2 x$ Utilizamos la identidad fundamental.

$= \dfrac{1}{\cos x}\cos^2 x$ Utilizamos la definición de secante.

$= \cos x$ Aplicamos las reglas de la potenciación. Obtenemos la simplificación.

No existe una regla única para verificar identidades. Por lo general, de los dos miembros procuramos reducir la expresión más compleja a la más simple, teniendo en cuenta a dónde pretendemos llegar. Algunas veces es útil escribir la identidad en términos de senos y cosenos. También podemos trabajar separadamente cada uno de los lados de la igualdad y, en los dos casos, llegar a una expresión común. De todas formas, necesitamos practicar, conocer muy bien las identidades fundamentales y manejar de manera apropiada las reglas básicas del álgebra.

> Piensa y practica <

> Comunicación

1. Usa las definiciones de las razones trigonométricas para simplificar cada expresión.

   a. $\sec A \cot A$

   b. $\cot x \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$

   c. $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)\csc x$

   d. $\cos w(1 + \tan^2 w)$

2. Expresa.

   a. $\tan A$ en términos de $\cos A$.

   b. $\sec A$ en términos de $\operatorname{sen} A$.

   c. $\cot A$ en términos de $\sec A$.

   d. $\cos A$ en términos de $\csc A$.

3. Simplifica la expresión, empleando la sustitución dada.

   a. $\sqrt{1 - x^2}$, para $x = \cos A$

   b. $\frac{x}{2}\sqrt{4 + x^2}$, para $x = 2 \tan \theta$

   c. $\sqrt{25 - x^2}$, para $x = 5 \cos \theta$

   d. $\sqrt{9 - (x+1)^2}$, para $x = -1 + 3 \cos \theta$

4. Si $\operatorname{sen} A = \dfrac{3}{5}$ y B es tal que $A + B = 90°$, calcula todas las razones trigonométricas para B.

5. Efectúa las operaciones y simplifica.

   a. $(\tan A + \sec A)(\tan A - \sec A)$

   b. $(2 - 2\cos A)(3 + 3\cos A)$

   c. $\tan A - \dfrac{\sec^2 A}{\tan A}$

   d. $\dfrac{1}{1 - \operatorname{sen} A} + \dfrac{1}{1 + \operatorname{sen} A}$

6. Factoriza cada expresión y simplifica.

   a. $\operatorname{sen}^2 x - 2 \operatorname{sen} x + 1$

   b. $\cos^2 x - \cos^2 x \sec^2 x$

   c. $\cos^4 x - 2\cos^2 x \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^4 x$

   d. $\dfrac{\cos^2 x - 1}{\cos^4 x - 1}$

> Razonamiento lógico

7. Justifica cada paso en la deducción de la identidad.

$$\operatorname{sen}^2 A + \cos^2 A = 1$$

$$\frac{\operatorname{sen}^2 A}{\operatorname{sen}^2 A} + \frac{\cos^2 A}{\operatorname{sen}^2 A} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 A}$$

$$1 + \left(\frac{\cos A}{\operatorname{sen} A}\right)^2 = \left(\frac{1}{\operatorname{sen} A}\right)^2$$

$$1 + \cot^2 A = \csc^2 A$$

8. Encuentra el error en la cadena de igualdades. Escribe una justificación de lo que se hace en cada paso.

Supón que: $\operatorname{sen} A = \cos A$. Así:

$$\operatorname{sen} A \operatorname{sen} A = \operatorname{sen} A \cos A$$

$$\operatorname{sen}^2 A = \operatorname{sen} A \cos A$$

$$\operatorname{sen}^2 A - \cos^2 A = \operatorname{sen} A \cos A - \cos^2 A$$

$$(\operatorname{sen} A + \cos A)(\operatorname{sen} A - \cos A) = \cos A(\operatorname{sen} A - \cos A)$$

$$\operatorname{sen} A + \cos A = \cos A$$

$\cos A + \cos A = \cos A$, puesto que: $\operatorname{sen} A = \cos A$

$$2\cos A = \cos A$$

Por tanto: $2 = 1$.

> Conexiones

9. Verifica las identidades, transformando uno de los lados en el otro.

   a. $(\cot \theta + \tan \theta)\cot \theta = \csc^2 \theta$

   b. $\sec^2 \theta \csc^2 \theta = \sec^2 \theta + \csc^2 \theta$

   c. $\tan \theta \cdot \operatorname{sen} \theta = \sec \theta - \cos \theta$

   d. $(1 - \operatorname{sen} \theta)(1 + \operatorname{sen} \theta) = \cos^2 \theta$

   e. $\dfrac{\cos y}{1 + \operatorname{sen} y} + \dfrac{\cos y}{1 - \operatorname{sen} y} = 2 \sec y$

   f. $\dfrac{1 + \cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} = \dfrac{\operatorname{sen} \theta}{1 - \cos \theta}$

   g. $\dfrac{1 + \operatorname{sen} \theta - \cos^2 \theta}{\cos \theta + \operatorname{sen} \theta \cos \theta} = \tan \theta$

   h. $\operatorname{sen}^2 x + 2\cos^2 x + \cos^2 x \cot^2 x = \csc^2 x$

Uso de la tecnología

10. Utiliza una calculadora para determinar si la igualdad es correcta.

   a. $\tan 45° \cot 45° = 1$

   b. $\operatorname{sen} \dfrac{60°}{3} = \dfrac{1}{3} \operatorname{sen} 60°$

   c. $\operatorname{sen} \dfrac{\pi}{2} \cos \dfrac{\pi}{2} = 1$

   d. $\dfrac{\cos 90°}{\cos 45°} = \cos 2°$

Aplicaciones

Logro: aplicar las razones trigonométricas en la resolución de triángulos rectángulos.

Dentro de la resolución de triángulos, los problemas más usuales son: cálculo de longitudes, distancias entre pueblos y ciudades, perímetros de polígonos regulares, direcciones en la aviación y rumbos en la navegación marítima.

Además, como en la antigüedad, la trigonometría sigue siendo una herramienta muy útil para satisfacer el afán del ser humano por desenredar los misterios del cielo y medir las distancias entre los astros.

***Resolver un triángulo rectángulo** significa calcular las medidas de sus ángulos y de sus lados, a partir de una información dada. Para lograrlo es necesario conocer por lo menos dos elementos del triángulo, donde alguno de ellos debe ser un lado.*

Por ejemplo, si sólo conocemos dos ángulos, no podemos determinar en forma única la longitud de sus lados, pues podemos construir triángulos semejantes (con la misma forma pero de distintos tamaños).

Familiaricémonos con las definiciones de las razones trigonométricas de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo, con el fin de encontrar eficientemente la razón que relaciona entre sí dos partes específicas del triángulo rectángulo.

> ¿Cómo resolver triángulos rectángulos?

1. **Conociendo dos lados**

   Mediante el teorema de Pitágoras podemos hallar el tercer lado. Luego, mediante cualquier razón trigonométrica (seno y coseno suelen ser las más usadas), encontramos la medida de alguno de los ángulos, consultando una tabla o con calculadora.

2. **Conociendo un ángulo y un lado**

   Si conocemos la medida de un ángulo podemos hallar la medida del otro, pues son complementarios. Utilizamos una razón trigonométrica que involucre el lado conocido y hallamos el segundo lado. El tercer lado se puede calcular con el teorema de Pitágoras o con otra razón trigonométrica.

Al momento de efectuar los cálculos, es indispensable que usemos una calculadora. Sin embargo, cuando el triángulo rectángulo tiene ángulos de 30°, 45° o 60°, acostumbramos dar los valores exactos que aparecen en la tabla 1.4, en vez de dar las aproximaciones obtenidas en la calculadora.

Ahora veamos una de las aplicaciones inmediatas de las razones trigonométricas. Las aplicaciones de las razones trigonométricas en un triángulo rectángulo incluyen ángulos de elevación, ángulos de depresión y rumbos usados en navegación marítima y aérea.

Supongamos que una persona observa un objeto que se encuentra por encima de la horizontal (línea imaginaria horizontal que se forma a la altura de los ojos del observador). El ángulo que forma la visual con la horizontal se llama **ángulo de elevación**. Si por el contrario el objeto se encuentra por debajo de la horizontal, el ángulo se llama **ángulo de depresión** (*ver* figura 1.38). Podemos usar las razones trigonométricas en muchas situaciones de la vida diaria.

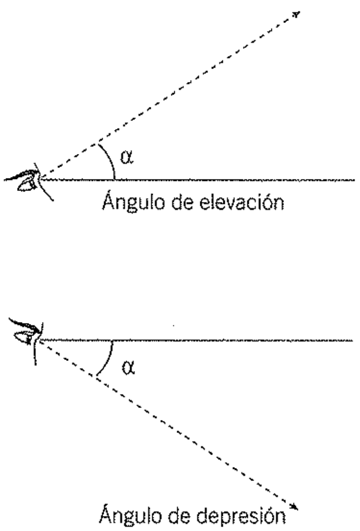


Figura 1.38

Desde una torre de 15 m de altura se observa un barco con un ángulo de depresión de 15°, como lo muestra la figura 1.39. ¿A qué distancia de la torre se encuentra el barco?

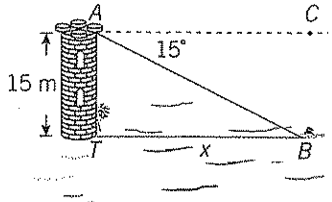


Figura 1.39

Solución

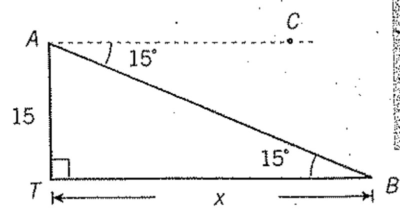


Figura 1.40

Para hallar el valor x consideramos el triángulo rectángulo formado por los extremos inferior y superior de la torre y el barco (*ver* figura 1.40). Como el segmento BT es paralelo a la línea visual horizontal AC, y los dos son cortados por una transversal, entonces los ángulos alternos internos son congruentes. De ahí que $m\ \angle B = 15°$.

Los datos del problema corresponden a los catetos del triángulo y las relaciones que involucran a los catetos son tangente y cotangente.

$\tan 15° = \dfrac{15}{x}$	Empleamos la tangente de 15°.
$\tan 15° = 0{,}27$	Calculamos el valor de tan 15°.
$0{,}27 = \dfrac{15}{x}$	Igualamos las dos ecuaciones.
$x = \dfrac{15}{0{,}27}$	Despejamos el valor de x.
$x = 55{,}55$	Obtenemos el valor de x.

El barco se encuentra a 55,55 m de la torre.

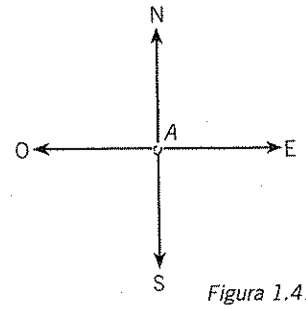


Figura 1.41

En la navegación marítima o aérea se emplea el término **rumbo** o **dirección**.

Consideremos dos rectas perpendiculares que se cortan en el punto A. La recta vertical se llama línea norte-sur y la horizontal este-oeste, como se observa en la figura 1.41.

El rumbo de un punto B es el ángulo agudo (su medida está entre 0° y 90°) que forma $\overline{AB}$ con el eje norte-sur. Para representar el rumbo, mencionamos primero la letra N o S según sea norte o sur, luego el ángulo agudo y finalmente O o E, según sea oeste o este. En la figura 1.42 los rumbos de los puntos, B, C y D son:

El rumbo de B es N 45° E, el de C es N 30° O, y el de D es S 50° O.

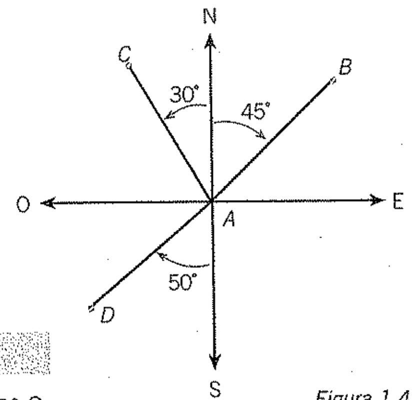


Figura 1.42

Dos barcos salen al mismo tiempo del puerto de Buenaventura: uno con rumbo N 30° O, con una velocidad de 60 km/h; el otro sale con rumbo S 60° O, a 40 km/h. ¿Qué distancia separa los barcos una hora después de partir?

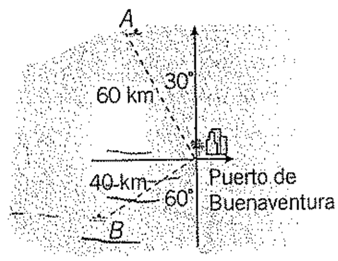


Figura 1.43

Solución

Observemos el diagrama de la figura 1.43 que representa la situación.

Al cabo de una hora el barco que va hacia el noreste ha avanzado 60 km, mientras que el otro ha avanzado 40 km. Puesto que el triángulo que determinan los desplazamientos es rectángulo (verifícalo), podemos calcular la distancia entre los barcos mediante el teorema de Pitágoras:

$$\overline{AB} = \sqrt{40^2 + 60^2} = \sqrt{1600 + 3600} \approx 72{,}11$$

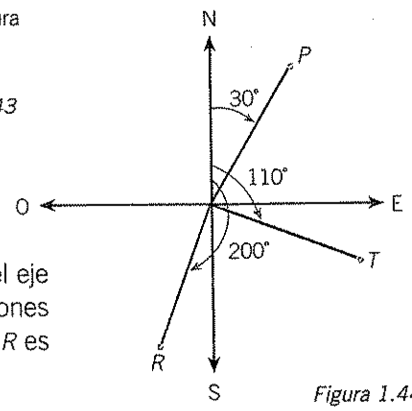


Figura 1.44

En la navegación aérea la dirección se mide con un ángulo entre 0° y 360° desde el eje norte-sur, medido en sentido de las manecillas del reloj. Por ejemplo, las direcciones de los puntos que se muestran en la figura 1.44 son: P 30°; la de T es 110° y la de R es 200°.

Un avión vuela con una velocidad de 350 km/h en dirección 30° hacia una ciudad (*ver* figura 1.45). ¿Cuánto tardará en llegar a la ciudad si ésta se localiza 900 km al norte?

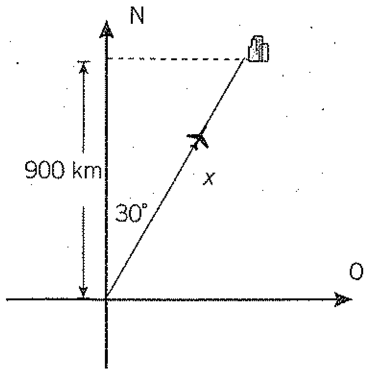


Figura 1.45

Solución

De acuerdo con la figura 1.45, primero calculamos la distancia x desde el aeropuerto hasta la ciudad.

$\cos 30° = \frac{900}{x}$	Escribimos el cos 30° en términos de los datos de la figura 1.45.
$x = \frac{900}{\cos 30°}$	Despejamos el valor de x.
$x = 1039{,}23$	Simplificamos y obtenemos la distancia del avión a la ciudad.

Para establecer el tiempo que empleará el avión en recorrer la distancia x, consideramos la fórmula de velocidad:

$v = \frac{s}{t}$	Empleamos la ecuación de velocidad respecto al desplazamiento y al tiempo.
$t = \frac{s}{v} = \frac{1039{,}23}{350}$	Reemplazamos valores. En este caso $s = x$.
$t = 2{,}97$	Obtenemos el resultado.

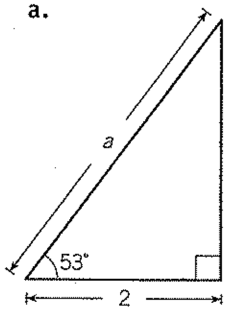
El tiempo empleado por el avión en llegar a la ciudad es de 2,97 horas que equivalen a 2 horas 58 minutos. ◁

> Piensa y practica <

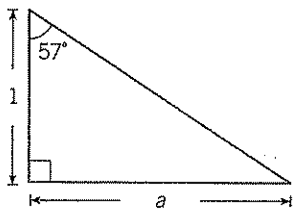
> Conexiones

1. Halla el valor de a en cada caso.

a.



b.



c.

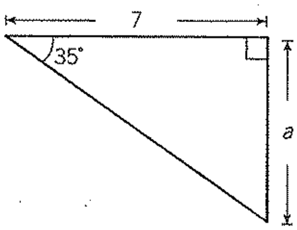
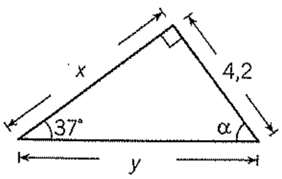


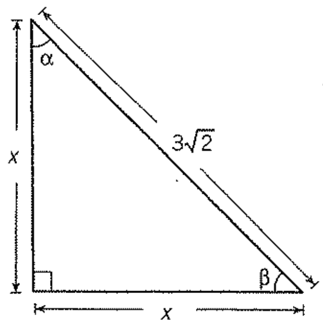
Figura 1.46

2. Resuelve los triángulos de la figura 1.47. Es decir, halla los valores de cada variable.

a.



b.



c.

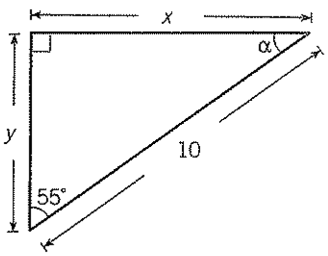


Figura 1.47

3. Cuando un objeto se mueve sobre un plano inclinado las fuerzas involucradas se descomponen sobre un sistema coordenado auxiliar que se traza en el centro de masa del objeto.

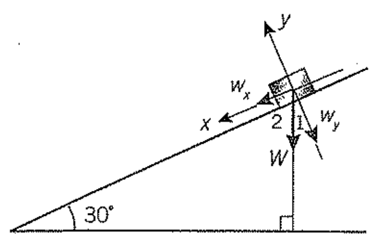


Figura 1.48

a. ¿Cuál es la medida del ángulo 2?

b. ¿Cuál es la medida del ángulo 1?

c. ¿Cuál es la magnitud de la componente W_x?

d. ¿Cuál es la magnitud de la componente W_y?

4. Halla los valores de a y b en la figura 1.49.

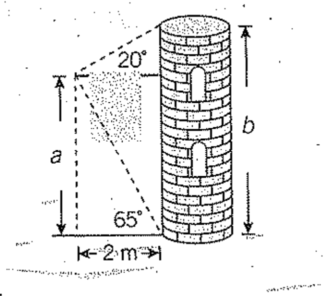


Figura 1.49

5. Halla el valor de y en la figura 1.50.

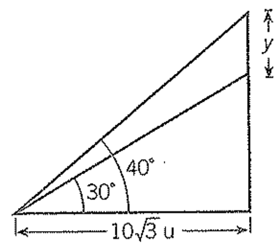


Figura 1.50

> Resolución de problemas

6. Calcula la longitud de la cuerda que determina un ángulo central de 60° en una circunferencia de radio 1 cm.
7. Calcula el perímetro de un cuadrado inscrito en una circunferencia de radio 12 cm.
8. Desde la azotea de un edificio de 45 metros de altura, se observa un automóvil con un ángulo de depresión de 20° (*ver* figura 1.51). ¿Cuál es la distancia del automóvil a la base del edificio, medida horizontalmente?

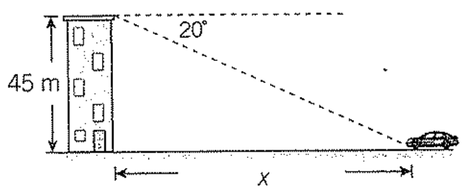


Figura 1.51

9. ¿Cuál es la longitud de la sombra que proyecta un árbol de 60 m de altura, cuando el Sol presenta un ángulo de elevación de 30° desde el punto más alto del árbol? (*ver* figura 1.52).

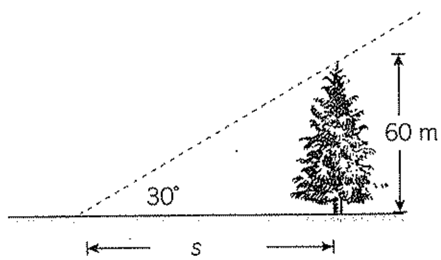


Figura 1.52

10. Un avión vuela horizontalmente sobre un observador a 300 km/h. Un minuto después, para ver el avión, el observador debe mirar con un ángulo de elevación de 28° (*ver* figura 1.53). ¿A qué altura viaja el avión?

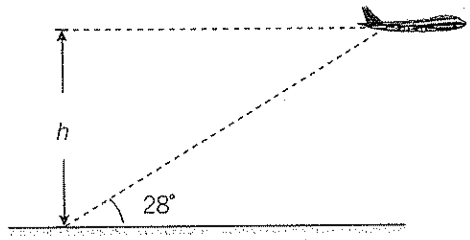


Figura 1.53

11. Un buque navega 30 km al norte y 30 km al oeste. ¿Cuál es el rumbo que debe tomar el buque para regresar al punto de partida?
12. Un barco recorre 15 mi con rumbo S 56° E; luego recorre 31 mi al S 34° O. ¿A qué distancia se encuentra del punto de partida? Si desea regresar, ¿en qué dirección debe ir?
13. El ángulo de depresión de la terraza de un edificio es 22° respecto a un punto situado a 50 metros de su base. ¿Cuál es la altura del edificio?
14. Las diagonales de un rombo miden 8 cm y 6 cm. ¿Cuál es el perímetro del rombo?

Formación ciudadana

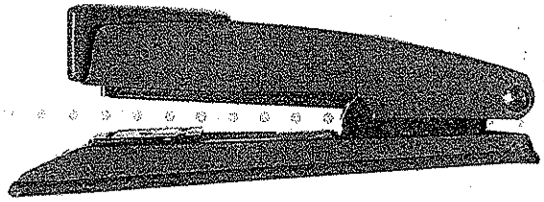
Analizo críticamente la situación de los derechos humanos en Colombia y en el mundo y propongo alternativas para su promoción y defensa.

Colombia es uno de los países con mayor cantidad de secuestros en el mundo. En los últimos 11 años se registraron 22 000 casos y en la década de los 90 se llegó a un pico de 3000 anuales.

Estas cifras se han reducido dramáticamente, pero el fenómeno no ha desaparecido.

15. Investiga cuál es la población actual colombiana y determina cuál es la razón entre la gente no secuestrada y secuestrada en Colombia.
16. ¿Cuál crees que sería un mecanismo para erradicar definitivamente el secuestro en Colombia?

Evaluación por competencias



Autoevaluación

A continuación aparecen los indicadores de logro. Marco con ✔ en la columna Sí, si el logro indicado está superado o ✘ en la columna No, si está por superar.

	Sí	No
Conozco y aplico la equivalencia entre los diferentes sistemas de medición de ángulos.		
Resuelvo problemas que involucran ángulos, circunferencias y longitudes de arco.		
Aplico el teorema de Pitágoras para el cálculo de longitudes.		
Reconozco las diferentes razones entre los lados de un triángulo rectángulo como razones trigonométricas.		
Establezco relaciones entre las razones trigonométricas de ángulos complementarios.		
Establezco y verifico la equivalencia entre dos expresiones que involucran razones trigonométricas.		
Resuelvo problemas que requieran la aplicación de las diferentes razones trigonométricas.		

Coevaluación

Con los siguientes ejercicios, afianzamos los indicadores de logro que hemos superado y reforzamos aquellos que están por superar.

1. Expresemos en radianes cada ángulo medido en grados.

a. 15° **b.** 75° **c.** 120° **d.** 270°

2. Expresamos en grados cada ángulo dado en radianes.

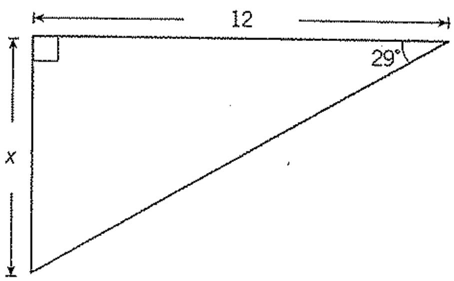
a. $\frac{2\pi}{3}$ **b.** $\frac{2\pi}{5}$ **c.** $\frac{4\pi}{3}$ **d.** $\frac{3\pi}{4}$

3. Una circunferencia tiene 40 cm de radio. ¿Cuántos grados mide un ángulo central que determina un arco de $\frac{10\pi}{3}$ cm?

4. Los lados de un triángulo miden 8 cm, 9 cm y 12 cm. Determinemos si es un triángulo rectángulo.

5. Hallemos el valor de x en cada caso.

a.



b. **c.**

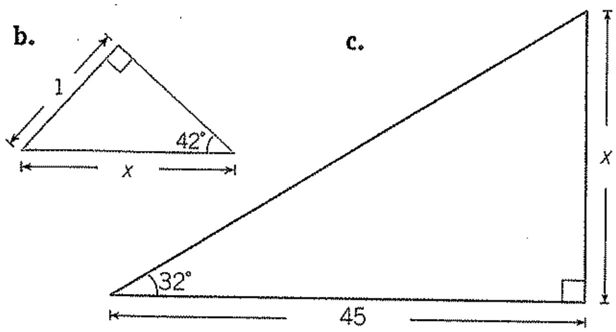


Figura 1.54

6. Transformemos la medida dada en grados, minutos y segundos a grados, décimas, centésimas y milésimas de grado o viceversa, según el caso.

a. 120°30' **b.** 24° 15'

c. 32,45° **d.** 25,42361111°

e. 15,2541666° **f.** 59° 59' 59"

7. Hallemos la suma indicada.

a. 59°1'30" + 12°59'5" =

b. 3°5" + 39°5'38" =

c. 50'3" + 1°10'15" =

d. 35'19" + 8°53" =

8. En el ejercicio 6 realizamos una conversión para ángulos. Expliquemos analíticamente este proceso sin usar calculadora.

9. Un triángulo rectángulo isósceles ubicado sobre el plano cartesiano tiene uno de los vértices en el punto (0, 0) y el otro en (a, 0). Encontremos el otro vértice y verifiquemos que forma un triángulo rectángulo. (Nota: podemos encontrar varias respuestas).

10. Hallemos el tercer vértice de un triángulo rectángulo ubicado en el plano cartesiano, de vértices (3, 1) y $\left(\sqrt{2}, 4\right)$, y verifiquemos que sea triángulo rectángulo.

11. Una bicicleta tiene ruedas de 30 cm de radio. ¿Cuál es la rapidez (revoluciones por minuto) con la que gira la rueda cuando la bicicleta se mueve a 20 km/h?

12. ¿Cuál es la velocidad en radianes por segundo del segundero de un reloj? Si la longitud de éste es 3 cm, ¿con qué velocidad se mueve el punto extremo?

13. Una tuerca hexagonal tiene 1 cm de lado. Si se dispone de un juego de llaves milimétricas desde la 10 hasta la 20, ¿cuál es la llave apropiada para aflojar la tuerca?

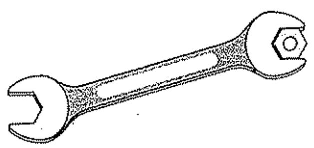


Figura 1.55

14. Las medidas de un trapecio isósceles se dan en la figura 1.56. ¿Cuál es el área y el perímetro del trapecio?

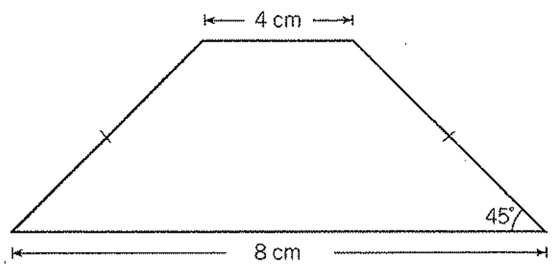


Figura 1.56

15. Suponiendo que la Tierra es una esfera de radio 6400 km, hallemos la diferencia de latitud entre ciudades sobre un mismo meridiano cuya distancia es:

a. 1600 km

b. 320 km

c. 200 km

d. 800 km

16. ¿Cuánto tiempo tardará en llegar un barco que está a 7° de latitud norte, al puerto que está a 2° de latitud sur sobre el mismo meridiano, si viaja con velocidad de 34,55 mi/h (64 km/h)? (Radio de la Tierra: 6400 km).

17. Simplifiquemos cada expresión.

a. $\tan^2 A - \tan^2 A \operatorname{sen}^2 A$

b. $(\operatorname{sen} A + \cos A)(\sec A - \csc A) -$
$(\operatorname{sen} A - \cos A)(\sec A + \csc A)$

18. Verifiquemos la identidad:

$$\frac{1}{1 - \operatorname{sen} A} + \frac{1}{1 + \operatorname{sen} A} = 2 \sec^2 A.$$

Tu creación

Utiliza la información de la figura 1.57 e inventa una situación que involucre razones trigonométricas.

Durante un aterrizaje en el aeropuerto Eldorado, el ángulo de descenso del avión es 10°. El piloto pasa 100 m arriba de una torre y toca tierra 2000 m más allá de la torre.

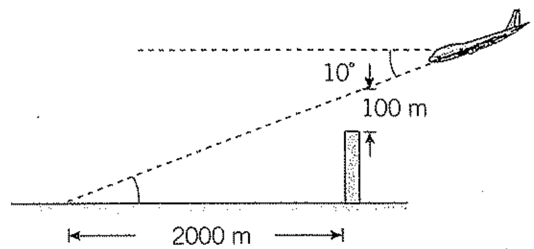


Figura 1.57

Prueba ICFES

Selecciona de las cuatro opciones sólo una de las respuestas, la que consideres relaciona de manera más estructurada los conceptos matemáticos con las condiciones particulares de la situación problema.

Desde la terraza de un edificio el ángulo de elevación para ver la terraza de otro es 15°, y la diferencia de altura entre los edificios es 8 m.

1. La distancia que los separa es:

a. $x = 8 \tan 15°$

b. $x = 8 \cot 15°$

c. $x = 8 \cos 15°$

d. $x = \dfrac{\cot 15°}{8}$

2. Si se tiende un cable entre los dos edificios, la longitud de éste es:

a. $s = 8 \text{ sen } 15°$

b. $s = 8 \cos 15°$

c. $s = 8 \csc 15°$

d. $s = 8 \sec 15°$

Desde un puente se observa un barco con un ángulo de depresión de 20°.

3. Si el puente está a 10 m sobre el nivel del agua, la distancia de la base del puente al barco es:

a. $x = 10 \tan 20°$

b. $x = \dfrac{10}{\tan 20°}$

c. $x = 10 \cos 20°$

d. $x = \dfrac{\tan 20°}{10}$

4. Si el barco avanza la mitad de la distancia que lo separa del puente, la tangente del nuevo ángulo de depresión es:

a. $2 \tan 20°$

b. $5 \tan 20°$

c. $10 \cot 20°$

d. $2 \cot 20°$

Después de un viaje, un avión se ha desplazado 100 km al norte y 100 km al oeste del punto de partida.

5. La dirección que tomó el avión durante el viaje si éste se hizo en línea recta es:

a. 45°

b. 135°

c. 315°

d. 225°

6. La distancia que recorrió el avión durante el viaje es:

a. 200 km

b. $100\sqrt{2}$ km

c. $\sqrt{200}$ km

d. 100 km

7. Una persona que mide 1,8 m se encuentra a 4 m de un poste de luz. Si la sombra de la persona mide 2,4 m, la altura del poste se puede obtener usando la razón trigonométrica:

a. seno

b. coseno

c. tangente

d. cosecante

8. Desde un satélite artificial se observa la horizontal con un ángulo α medido desde el centro hasta la vertical $\overline{SP}$ (*ver* figura 1.58). El ángulo STO es recto porque $\overline{ST}$ es tangente a la circunferencia y $\overline{OT}$ es un radio. La altura h a la que se encuentra en satélite puede expresarse mediante:

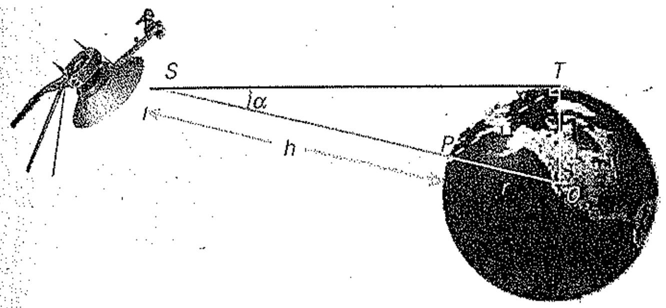


Figura 1.58

a. $h = ST$

b. $h = \dfrac{r}{\operatorname{sen}\alpha} - r$

c. $h = \dfrac{ST}{\cos\alpha}$

d. $h = ST\operatorname{sen}\alpha$

9. Si el satélite cae verticalmente y α_0 es el ángulo inicial, puede afirmarse que el ángulo α:

a. Disminuye desde h hasta 0.

b. Aumenta desde α_0 hasta π.

c. Disminuye desde $\frac{\pi}{2}$ hasta α_0.

d. Aumenta desde α_0 hasta $\frac{\pi}{2}$.

Una polea tiene radio r cm y se encuentra atada a un soporte S. Un objeto de masa m se cuelga de la polea. Desde la posición de equilibrio, al aplicar una fuerza F el objeto de masa m logra subir una altura h y la polea gira un ángulo α (*ver* figura 1.59).

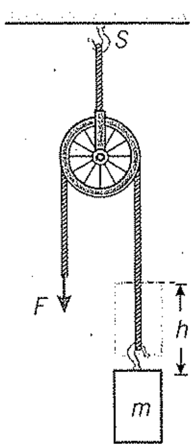


Figura 1.59

10. Para determinar el ángulo de rotación de la polea se requiere conocer:

a. El radio y la altura.

b. El radio y la masa.

c. La altura y la masa.

d. Las tres cosas.

11. Si la polea gira a w revoluciones por minuto, la velocidad de la masa que cuelga, en centímetros por minuto, es:

a. $v = wr$

b. $v = 2\pi wr$

c. $v = 2\pi r$

d. $v = \pi wr$

12. El área del triángulo OPT de la figura 1.60 es igual a:

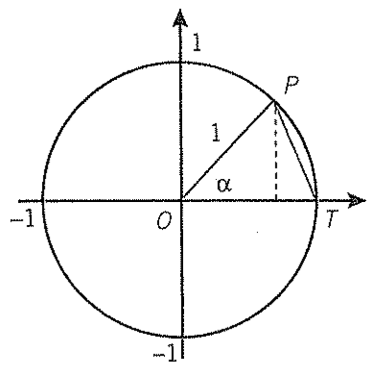


Figura 1.60

a. $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{2}$

b. $\dfrac{\tan\alpha}{2}$

c. $\tan\alpha$

d. $\cos\alpha$

13. Si $w = \operatorname{sen}\alpha$, entonces el valor de $2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$ puede expresarse como:

a. $2w$

b. $2\sqrt{w^2-1}$

c. $2w\sqrt{1-w^2}$

d. $\sqrt{1-w^2}$

14. Supóngase que $x = 3\tan\theta$, entonces la expresión $\dfrac{\sqrt{9+x^2}}{x}$ se puede escribir como:

a. $3\cos\theta$

b. $\sec\theta$

c. $\csc\theta$

d. $3\tan\theta$

Conexión histórica

La evolución de la trigonometría

Desde la antigüedad, los egipcios y babilonios habían utilizado propiedades relativas a razones entre los lados de triángulos semejantes, a pesar de no tener un desarrollo formal. Por ejemplo, durante la construcción de las pirámides un problema que debieron resolver era mantener una pendiente uniforme en cada una de las caras de las pirámides y la misma en las cuatro. La unidad de longitud que usaban los egipcios para medir en vertical era el codo, y la unidad para medir en horizontal era la mano. La palabra "*seqt*" que usaron los griegos para representar la separación horizontal de una recta, respecto al eje vertical, por cada unidad de variación en la altura, corresponde a lo que hoy conocemos con el nombre de cotangente. Así, el *seqt* de una cara de la pirámide era la razón del avance, medido en manos, a la subida medida en codos. La gran pirámide mide 440 codos de lado de la base y 280 de altura, cuyo *seqt* es 5,5 manos por codo. Estas relaciones establecidas por los egipcios se hicieron partir de las longitudes de los lados y no usaron las medidas de los ángulos. Los griegos fueron los primeros en establecer relaciones entre ángulos centrales, círculos y sus respectivas cuerdas; algunos, por ejemplo, se aventuraron a calcular el tamaño de la Tierra y las distancias relativas del Sol y la Luna.

Hiparco (140 años a. de C.) a quien los griegos llamaron el padre de la Astronomía, elaboró tablas sobre las longitudes de las cuerdas sobre una circunferencia. Estas tablas se pueden considerar como las primeras de algunas funciones trigonométricas. Hiparco es importante en la astronomía por las mejoras que introdujo en los instrumentos y en las técnicas de observación. Los matemáticos lo consideran el fundador de la trigonometría o, al menos, el padre de esta nueva rama de las Matemáticas griegas.

Más tarde (100 años d. de C.), Menelao continuó las investigaciones de Hiparco y 400 años después, los matemáticos de la India lograron medir las longitudes de semicuerdas trazadas desde una recta que gira, hasta su posición inicial. ■

Reflexiona

1. ¿Cuál debería ser la razón trigonométrica para usarse si el *seqt* fuera la razón de la subida, medida en codos, al avance, medido en manos?
....
2. Si una pirámide tiene 800 manos de lado de la base y el *seqt* es de 6 manos por codo, ¿cuál es la altura de la pirámide?
....
3. Investiga cuál fue el método utilizado por Eratóstenes para calcular la distancia del Sol a la Tierra.

Glosario

Ángulos complementarios: dos ángulos cuyas medidas suman 90°.

Ángulo de depresión: el que forma la visual con la horizontal, cuando el objeto se encuentra por debajo de la horizontal.

Ángulo de elevación: el que forma la visual con la horizontal, cuando el objeto se encuentra por encima de la horizontal.

Coseno de un ángulo: razón entre el cateto adyacente al ángulo y la hipotenusa.

Dirección: ángulo entre 0° y 360° medido desde el eje norte-sur en el sentido en que giran las manecillas del reloj y que se emplea en aviación.

Ecuación trigonométrica: ecuación que involucra como incógnita alguna razón trigonométrica.

Grado: unidad de medida de ángulos que se determina al asignarle 360 al ángulo de una vuelta.

Identidad trigonométrica: igualdad entre dos expresiones que contienen formas trigonométricas y que se satisface para todo valor del ángulo.

Radián: medida de un ángulo cuya longitud de arco es el radio de la circunferencia.

Razón trigonométrica: cociente entre las longitudes de dos lados de un triángulo rectángulo.

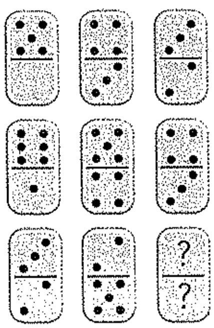
Rumbo: ángulo entre 0° y 90° medido desde el eje norte-sur y que se emplea en navegación marítima.

Seno de un ángulo: razón entre el cateto opuesto al ángulo y la hipotenusa.

Tangente de un ángulo: razón entre el cateto opuesto al ángulo y el cateto adyacente.

Razonamiento

1. Encuentra la ficha del dominó que completa la secuencia en cada caso (*ver* figura 1.61).



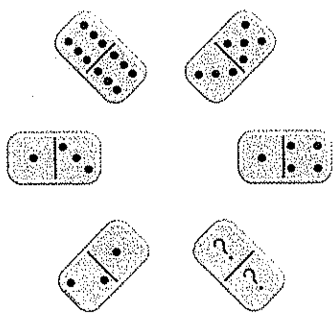
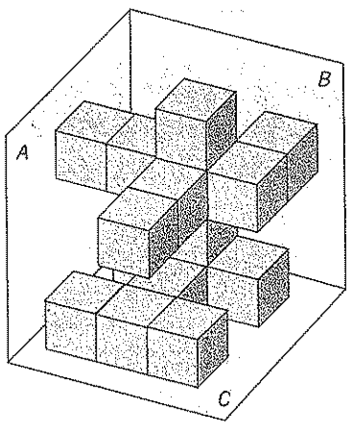


Figura 1.61

2. En la ilustración, *A*, *B* y *C* son planos. Relaciona la sombra del sólido con el plano respectivo.



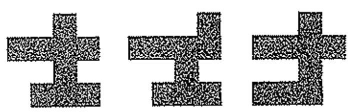
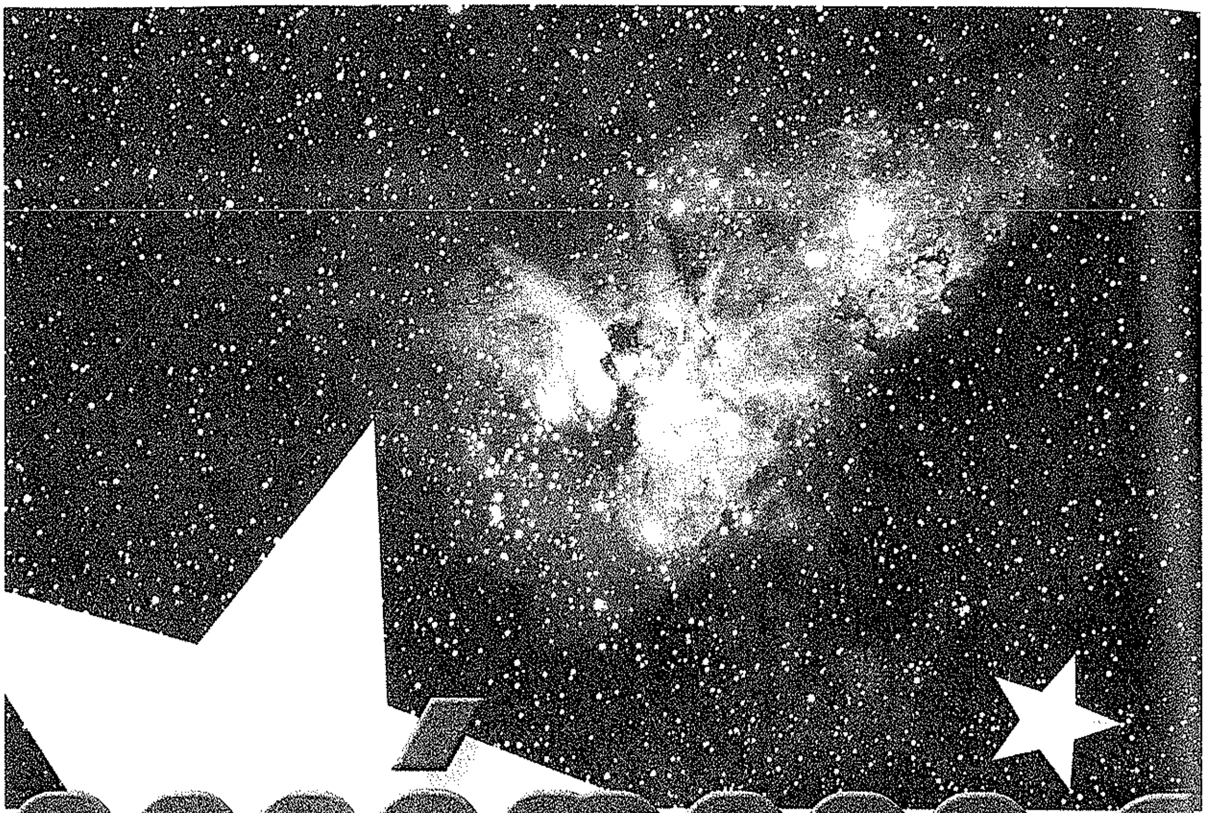


Figura 1.62

Unidad 2

Pensamientos variacional y espacial

> Funciones trigonométricas



Fenómenos periódicos en la naturaleza

Estándares:

Conexiones

Relacionar conceptos

Establecer relaciones y diferencias entre razones y funciones trigonométricas.

Comunicación

Leer, escribir y comunicar

Reconocer gráficamente las funciones trigonométricas, su relación con el círculo unitario, sus propiedades y regularidades.

El término periodo (del latín **periodus**) se utiliza para designar el intervalo de tiempo necesario para completar un ciclo repetitivo o simplemente el espacio de tiempo que dura un fenómeno. En Matemáticas, el período (para un número racional periódico) es el conjunto de cifras de repetición indefinida después de la coma.

El comportamiento periódico es muy natural en la naturaleza. Por ejemplo, un día determinado de la semana es periódico debido a que se repite con la misma frecuencia. Otros ejemplos de comportamiento periódico involucran el movimiento causado por la vibración o la oscilación, entre estos podemos considerar: una masa suspendida en un resorte comprimido, que después se deja vibrar libremente en forma vertical; las ondas sonoras; las ondas luminosas y la corriente eléctrica.

En Astronomía un ejemplo es una estrella variable, cuya brillantez aumenta y disminuye de manera alternada; Delta Cephei (δ Cephei) es una de estas y la cuarta estrella en magnitud aparente de la constelación Cepheus o Cefeo. El prototipo de estrella variable es Cefeida, a la que da su nombre. Fue la segunda de este tipo en ser descubierta y la que más cerca se encuentra del Sol.

En 1784, John Goodricke observó la variabilidad del tiempo entre periodos de máxima brillantez de esta estrella, la cual ocurre con un periodo de reloj de precisión de 5 días 8 horas 47 minutos y 32 segundos. Es una de las pocas estrellas variables cuyo cambio de brillo (entre las magnitudes 3,5 y 4,3) puede apreciarse a simple vista, sin la ayuda de instrumentos.

Delta Cephei tiene dos estrellas compañeras de 7° y 13° magnitud, respectivamente, con la primera de las cuales se cree que forma una pareja física.

El estudio de las estrellas variables tipo Delta Cephei les ha proporcionado a los astrónomos valiosa información, principalmente para la medición de distancias astronómicas.

Analiza y resuelve

De acuerdo con la lectura anterior, responde.

1. ¿Cuál es período del número 7,435435435...?

   a. 345 **b.** 435
   c. 543 **d.** 743

2. ¿Cuál es el período de máxima brillantez de la estrella Delta Cephei?

   a. 5,366 días. **b.** 5,84 días.
   c. 5,54 días. **d.** 5,3 días.

3. En magnitud, ¿qué puesto ocupa la estrella Delta Cephei en la constelación Cefeo?

   a. Primera. **b.** Segunda.
   c. Tercera. **d.** Cuarta.

4. Cuál de los siguientes fenómenos no clasificarías como periódico:

   a. Impresión diaria de una revista.
   b. El movimiento de un resorte.
   c. El movimiento de un péndulo.
   d. Cantidad de kilómetros recorridos en una carretera.

5. El estudio de las estrellas variables les ha servido a los astrónomos para:

   a. Conocer que Delta Cephei tiene únicamente una estrella compañera de 7° de magnitud.
   b. Descubrir que se requieren instrumentos sofisticados para analizar δ Cephei.
   c. Proporcionar información acerca de mediciones de distancias astronómicas.
   d. Conocer que Delta Cephei es la segunda estrella en magnitud aparente de la constelación Cepheus.

6. Busca en internet el periodo de máxima brillantez para otras estrellas de la constelación Cefeo.

Razonamiento lógico

Desarrollar destrezas matemáticas

Justificar procedimientos y argumentar los pasos que se siguen en una demostración que involucra razones y funciones trigonométricas.

Resolución de problemas

Emplear estrategias en la resolución de problemas

Formular y resolver problemas que tienen como modelo funciones trigonométricas. Predecir el resultado de un problema, usando una gráfica.

Funciones circulares

Logro: comprender la definición de las funciones trigonométricas como funciones de ángulos y funciones de números reales.

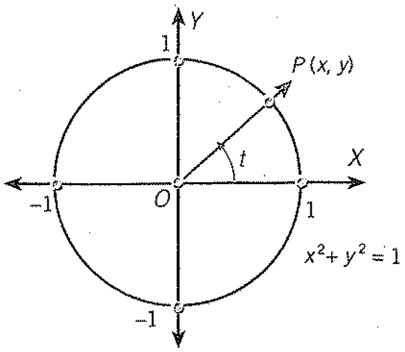


Figura 2.1

Originalmente, definimos las funciones trigonométricas por medio de relaciones entre ángulos y lados de los triángulos rectángulos. En esta unidad, definiremos esas relaciones para todos los números reales por medio de un círculo de radio 1 con centro en el origen, al cual llamaremos círculo unitario y que tiene por ecuación $x^2 + y^2 = 1$.

A cada número real t en $(0, 2\pi)$ le corresponde un ángulo de t radianes en posición normal y éste a su vez determina de manera única un punto $P(x, y)$ sobre la circunferencia unitaria, el cual corresponde al punto de intersección del lado terminal del ángulo t con la circunferencia (*ver* figura 2.1).

De esta forma definimos las funciones circulares seno de t, escrito como $\operatorname{sen} t$ y el coseno de t denotado por $\cos t$, como:

$\mathit{sen}\ t = y$ $\qquad$ $\cos t = x$

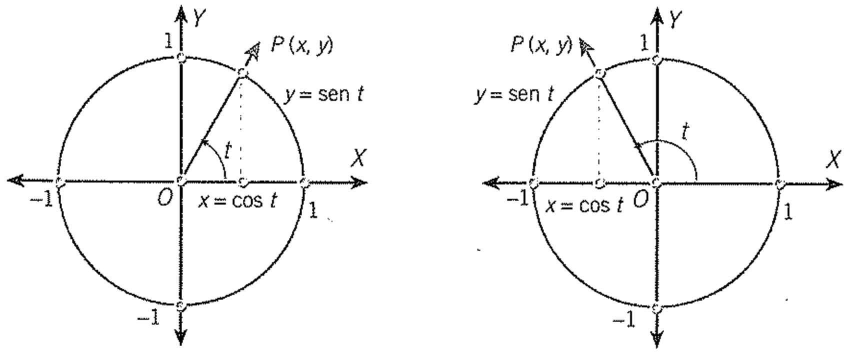


Figura 2.2

Comentario

$(\cos t)^2 = \cos^2 t$

$(\operatorname{sen} t)^2 = \operatorname{sen}^2 t$

$\cos^2 t \neq \cos t^2$

Recordemos que el punto $P(x, y)$ se encuentra sobre la circunferencia trigonométrica, es decir, $x^2 + y^2 = 1$, por lo cual se puede concluir que:

$$\textbf{\textit{Identidad pitagórica:}}\ (\cos t)^2 + (\operatorname{sen} t)^2 = 1.$$

Ejemplo 1

¿Cuál es el valor de cos t, si el ángulo está determinado por el punto con coordenadas $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$?

Solución

Cada valor de t determina un único punto sobre la circunferencia unitaria; por tanto:

$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1$ $\qquad$ Usamos el hecho que $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ se encuentra sobre $x^2 + y^2 = 1$.

$\cos t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ y $\operatorname{sen} t = \frac{1}{2}$ $\qquad$ Utilizamos la identidad pitagórica. ◀

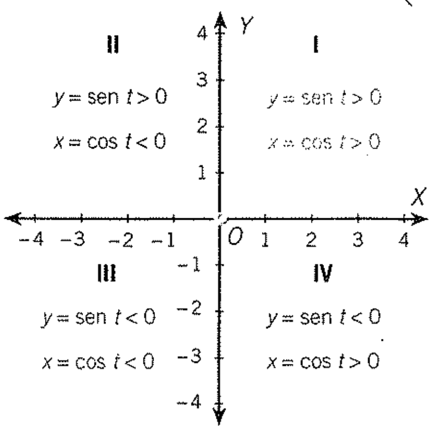


Figura 2.3

La figura 2.3 muestra el signo de las funciones seno y coseno en cada uno de los cuadrantes.

Ejemplo 2

Si $\text{sen}\ t = \frac{1}{4}$ y $P(x, y)$ es un punto en el segundo cuadrante, encontremos $\cos t$.

Solución

$\cos^2 t + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 1$ — Empleamos la identidad pitagórica ($\cos^2 t + \text{sen}^2 t = 1$).

$\cos^2 t = 1 - \frac{1}{16}$ — Despejamos el valor de $\cos^2 t$.

$\cos^2 t = \frac{15}{16}$ — Efectuamos las operaciones indicadas.

$\cos t = \pm\frac{\sqrt{15}}{4}$ — Hallamos el valor de $\cos t$.

Como (x, y) se encuentra en el segundo cuadrante $\cos t < 0$ (*ver* figura 2.3), por tanto la solución que se considera es $\cos t = -\frac{\sqrt{15}}{4}$. ◀

Las definiciones de coseno y seno por medio del círculo unitario nos permiten determinar algunos valores de estas funciones para varios ángulos importantes. Observemos la figura 2.4.

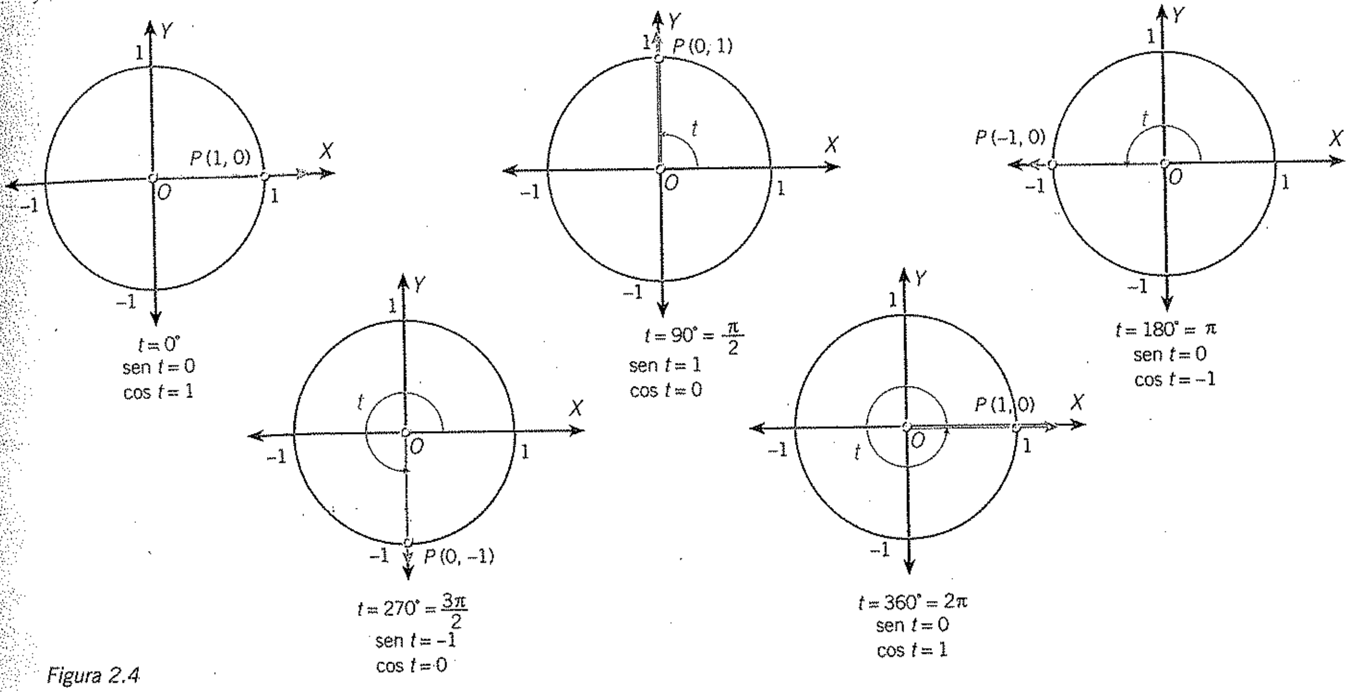


Figura 2.4

Si tomamos $t > 2\pi$ es necesario recorrer la circunferencia más de una vez para obtener el punto P (*ver* figura 2.5).

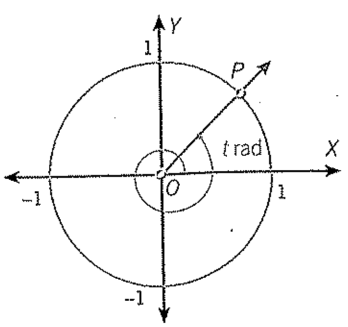


Figura 2.5

Si $t < 0$, se recorre la circunferencia en sentido negativo como muestra la figura 2.6.

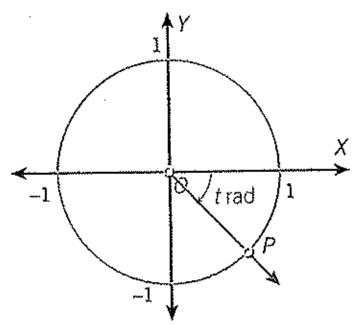


Figura 2.6

> **Comentario**
>
> *La longitud de la circunferencia es $2\pi \approx 6{,}2832$ radianes. Es decir, 1 radián $= \dfrac{1}{6{,}2832}$ longitud de la circunferencia.*

De esta forma, podemos establecer la siguiente relación entre los números reales y los ángulos en posición normal, medidos en radianes:

*A cada número real **t** le corresponde un ángulo que mide **t** radianes, y a cada ángulo de **t** radianes le corresponde el número real **t**.*

Ejemplo 3

En cada caso hallemos el ángulo correspondiente al número real dado.

a. $t = -1$ **b.** $t = 3$

c. $t = -\frac{\pi}{4}$ **d.** $t = \frac{\pi}{4}$

Solución

a. A $t = -1$ le corresponde el ángulo cuya medida es –1 radián, es decir, utilizando que $2\pi \approx 6{,}2832$ radianes, tenemos que al pasar –1 rad a grados:
$\dfrac{2\pi \cdot (-1 \text{ rad})}{6{,}2832 \text{ rad}} = \dfrac{-2}{6{,}2832}\pi = -0{,}32\pi = -57{,}3°$, es decir, –1 rad equivale a –57,3°.

b. A $t = 3$ le corresponde el ángulo cuya medida es 3 radianes, es decir, aproximadamente 172°.

c. A $t = -\frac{\pi}{4}$ le corresponde el ángulo cuya medida es $-\frac{\pi}{4}$ radianes, es decir, –45°.

d. A $t = \frac{\pi}{4}$ le corresponde al ángulo cuya medida es $\frac{\pi}{4}$ radianes, es decir, 45°.

Veamos los resultados en la figura 2.7.

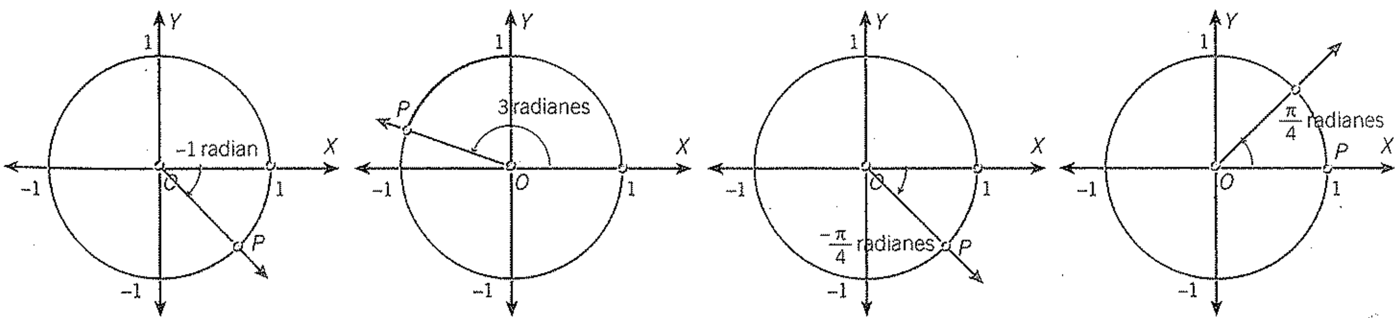


Figura 2.7

Ejemplo 4

Calculemos las funciones seno y coseno para $t = \frac{25\pi}{6}$.

Solución

El valor de $t = \frac{25\pi}{6}$ radianes corresponde a una rotación de más de una vuelta. En este caso, restamos el valor de 2π las veces que sea necesario, hasta obtener un valor entre 0 y 2π.

Entonces, $\frac{25\pi}{6} - 2\pi$ equivale en el círculo unitario a $\frac{13\pi}{6}$ y, a su vez, ese valor equivale a $\frac{13\pi}{6} - 2\pi = \frac{\pi}{6}$.

Por lo cual, $\operatorname{sen}\left(\frac{25\pi}{6}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ y $\cos\left(\frac{25\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Es decir, $\frac{25\pi}{6}$, $\frac{13\pi}{6}$ y $\frac{\pi}{6}$ son ángulos coterminales.

> **Comentario**
>
> *Dos ángulos son coterminales si tienen los mismos lados iniciales y terminales.*

Pensamiento crítico

Utiliza la calculadora en modo radianes y calcula $sen\left(\frac{25\pi}{6}\right)$, $sen\left(\frac{13\pi}{6}\right)$ *y* $sen\left(\frac{\pi}{6}\right)$. *Realiza el mismo procedimiento para la función coseno. ¿Qué resultados obtuviste?*

Ahora definiremos las otras cuatro funciones circulares en términos de seno y coseno:

$$\tan t = \frac{sen\, t}{\cos t}, \text{ para todo real } t \text{ con } \cos t \neq 0.$$

$$\cot t = \frac{\cos t}{sen\, t}, \text{ para todo real } t, \text{ donde } sen\, t \neq 0.$$

$$\sec t = \frac{1}{\cos t}, \text{ para todo real } t, \text{ tal que } \cos t \neq 0.$$

$$\csc t = \frac{1}{sen\, t}, \text{ para todo real } t, \text{ tal que } sen\, t \neq 0.$$

Con las definiciones de las funciones trigonométricas, podemos hallar los valores de las funciones en 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ y 2π. Veamos la tabla 2.1.

Radianes	Grados	seno	coseno	tangente	cotangente	secante	cosecante
0	0°	0	1	0	Indeterminado	1	Indeterminado
$\frac{\pi}{2}$	90°	1	0	Indeterminado	0	Indeterminado	1
π	180°	0	−1	0	Indeterminado	−1	Indeterminado
$\frac{3\pi}{2}$	270°	−1	0	Indeterminado	0	Indeterminado	−1
2π	360°	0	1	0	Indeterminado	1	Indeterminado

Tabla 2.1

Ejemplo 5

Si $\cos t = -\frac{1}{3}$ y t se encuentra en el tercer cuadrante, hallemos el valor de $\text{sen}\, t$, $\tan t$, $\cot t$, $\sec t$ y $\csc t$.

Solución

$\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \text{sen}^2 t = 1$ — Usamos la propiedad pitagórica $\cos^2 t + \text{sen}^2 t = 1$.

$\text{sen}^2 t = 1 - \frac{1}{9}$ — Despejamos el valor de $\text{sen}^2 t$.

$\text{sen}^2 t = \frac{8}{9}$ — Realizamos la sustracción indicada.

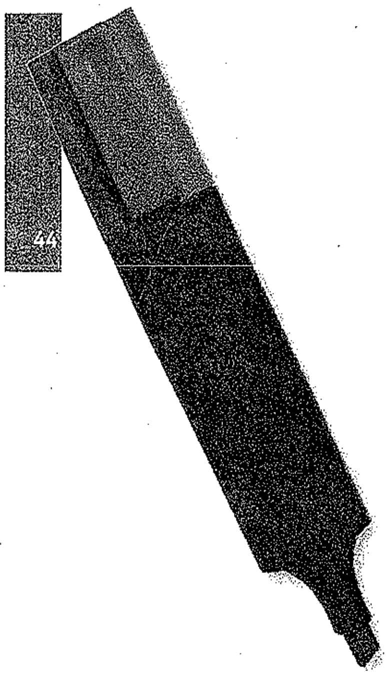
$\text{sen}\, t = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$ — Despejamos el valor de $\text{sen}\, t$.

Como t se encuentra en el cuadrante III, entonces $\text{sen}\, t = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$, por tanto:

$\tan t = \frac{\text{sen}\, t}{\cos t}$ — Empleamos la definición de $\tan t$.

$\tan t = \frac{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}{-\frac{1}{3}}$ — Reemplazamos los valores de $\text{sen}\, t$ y $\cos t$.

$\tan t = 2\sqrt{2}$ — Obtenemos el valor de $\tan t$.



Por otro lado:

$\cot t = \dfrac{\cos t}{\operatorname{sen} t}$ — Empleamos la definición de $\cot t$.

$\cot t = \dfrac{-\frac{1}{3}}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}$ — Reemplazamos los valores de $\operatorname{sen} t$ y $\cos t$.

$\cot t = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$ — Hallamos el valor de $\cot t$.

Para los valores de $\sec t$ y $\csc t$, realizamos un procedimiento similar a los anteriores y obtenemos:

$$\sec t = \frac{1}{\cos t} = \frac{1}{-\frac{1}{3}} = -3$$

$$\csc t = \frac{1}{\operatorname{sen} t} = \frac{1}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}} = -\frac{3}{2\sqrt{2}} = -\frac{3\sqrt{2}}{4}$$ ◀

Observemos la tabla 2.2, la cual determina el signo de las funciones trigonométricas a través de su definición.

Cuadrante	$\operatorname{sen}\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\cot\theta$	$\sec\theta$	$\csc\theta$
I: $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$	+	+	+	+	+	+
II: $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$	+	–	–	–	–	+
III: $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$	–	–	+	+	–	–
IV: $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$	–	+	–	–	+	–

Tabla 2.2

> Piensa y practica <

> Conexiones

1. En cada caso de la figura 2.8, halla $\operatorname{sen} t$, $\cos t$, $\tan t$, $\cot t$, $\sec t$, $\csc t$.

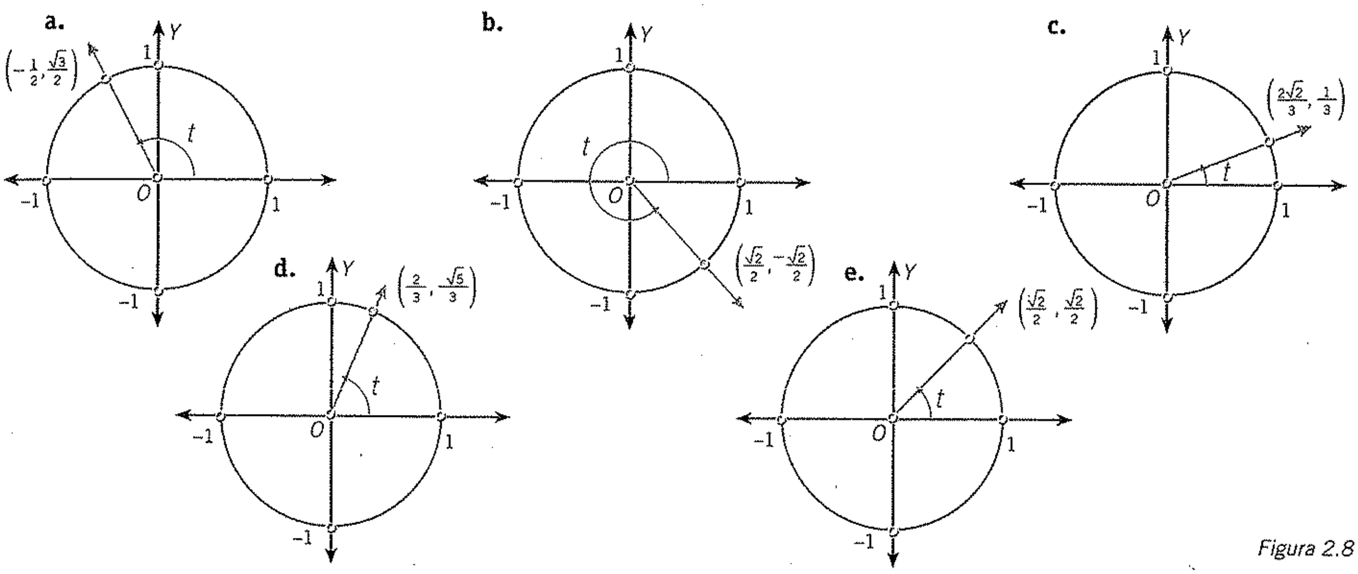


Figura 2.8

2. En cada caso, dibuja en posición normal el ángulo cuya medida se indica. Ubica un punto sobre su lado terminal y encuentra los valores de seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante en caso de existir.

a. $-\frac{\pi}{2}$ rad **b.** $-\pi$ rad

c. $\frac{\pi}{2}$ rad **d.** $\frac{5\pi}{2}$ rad

e. $-270°$ **f.** -2π rad

g. $\frac{3\pi}{2}$ rad **h.** $-\frac{3\pi}{2}$ rad

3. Si sabes que $\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, halla $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $\sec\left(\frac{\pi}{4}\right)$ y $\csc\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

4. Utiliza la figura 2.9 para obtener las coordenadas del punto terminal sobre la circunferencia unitaria, determinado por cada número real dado o ángulo en radianes.

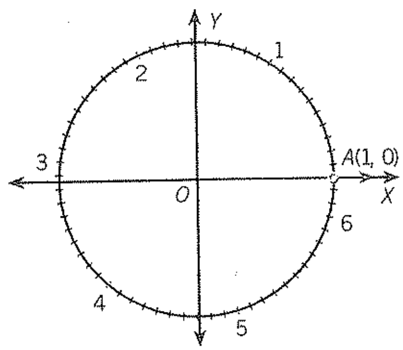


Figura 2.9

a. 2 **b.** –2

c. 1 **d.** –1

e. 4,5 **f.** –4,5

g. 10 **h.** –9

5. Ubica en posición normal los ángulos y halla los valores de las funciones que se indican.

a. $\cos(-180°)$ **b.** $\text{sen}\,540°$

c. $\tan(-540°)$ **d.** $\csc(-60°)$

e. $\sec(-45°)$ **f.** $\cot 840°$

6. Si $\sec t = 2$ y $\frac{3\pi}{2} < t < 2\pi$, encuentra $\cos t$, $\text{sen}\, t$, $\tan t$, $\cot t$ y $\csc t$.

7. Si $\csc t = 4$ y $\frac{\pi}{2} < t < \frac{3\pi}{2}$, encuentra $\text{sen}\, t$, $\cos t$, $\tan t$, $\cot t$ y $\sec t$.

> Razonamiento lógico

8. **a.** Da un ejemplo de dos ángulos menores que 2π radianes, donde la cotangente es positiva.

b. Da un ejemplo de dos ángulos menores que 2π radianes, donde la cotangente es negativa.

Uso de la tecnología

9. Con la ayuda de la tabla 2.2 y una calculadora científica, busca un ángulo θ que cumpla la condición dada.

a. $\text{sen}\,\theta < 0$ y $\tan\theta > 0$

b. $\text{sen}\,\theta < 0$ y $\tan\theta < 0$

c. $\cos\theta < 0$ y $\tan\theta > 0$

d. $\cos\theta < 0$ y $\tan\theta < 0$

e. $\sec\theta < 0$ y $\text{sen}\,\theta > 0$

f. $\sec\theta > 0$ y $\text{sen}\,\theta > 0$

g. $\csc\theta > 0$ y $\sec\theta < 0$

h. $\text{sen}\,\theta$ y $\cos\theta < 0$ y $\tan\theta > 0$.

> Comunicación

De acuerdo con la información anterior, responde las preguntas 10 y 11.

10. ¿Por qué no es posible determinar un ángulo cuyo coseno y cuya secante sean de signos contrarios?

11. ¿Qué puedes afirmar sobre seno y cosecante?

12. De cada conjunto de ángulos selecciona los ángulos para los cuales:

$$A = \{120°, 80°, 278°, 310°, 208°, 95°\}$$

$$B = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{6\pi}{7}, \frac{4\pi}{5}, \frac{9\pi}{13}, \frac{11\pi}{21}, \frac{7\pi}{29}\right\}$$

$$C = \{389°, -4°, -12°, -728°, 714°, 37°\}$$

a. El seno es negativo.

b. El coseno es negativo.

c. La secante es positiva.

d. La tangente es negativa y el seno es positivo.

e. El coseno es positivo y la cotangente es negativa.

f. La cosecante es negativa y el coseno es positivo.

g. El seno es negativo y la cotangente es positiva.

13. Divide la identidad $\cos^2 t + \text{sen}^2 t = 1$ por $\cos^2 t$. ¿Qué obtienes? ¿Qué pasa si divides por $\text{sen}^2 t$?

Ángulos de referencia

Logro: encontrar los valores de las funciones trigonométricas de un ángulo medido en grados o en radianes a partir del respectivo ángulo de referencia, usando la calculadora para el ángulo agudo cuando sea necesario.

Es posible calcular los valores de las funciones trigonométricas de cualquier ángulo por medio de valores de las funciones trigonométricas en el primer cuadrante $\left(0 < t < \frac{\pi}{2}\right)$, a través de algunas transformaciones.

*Se denomina **ángulo de referencia** de un ángulo α, al ángulo agudo β formado por el lado terminal del α y el eje X, ubicado en el primer cuadrante cuyas funciones trigonométricas difieren de las del α a lo sumo en un signo (ver figura 2.10).*

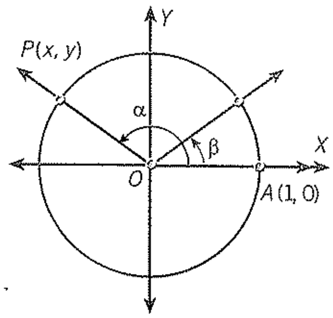


Figura 2.10

Ejemplo 6

Calculemos $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)$, $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $\tan\left(\frac{5\pi}{4}\right)$.

Solución

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1,\ \tan\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 1$$

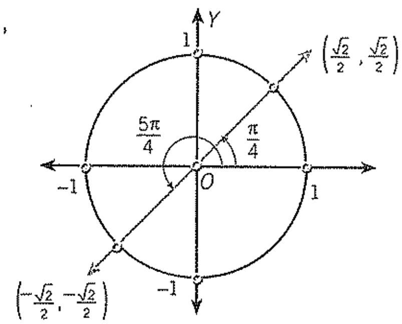


Figura 2.11

De los resultados anteriores tenemos que $\frac{\pi}{4}$ es el ángulo de referencia de $\frac{5\pi}{4}$.
¿Por qué no es necesario evaluar en las funciones cotangente, secante y cosecante?
Recordemos que el valor de una función trigonométrica de un ángulo α es igual al valor de $\alpha + 360°$. Por lo cual, solamente debemos encontrar los ángulos de referencia para ángulos en el segundo, tercero y cuarto cuadrantes.

Pensamiento crítico

¿Por qué el hecho de que el valor de una función trigonométrica de un ángulo α es igual al valor de $\alpha + 360°$, justifica que solamente debemos encontrar los ángulos de referencia para el segundo, tercero y cuarto cuadrantes?

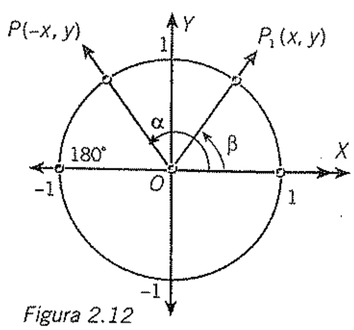


Figura 2.12

Comencemos encontrando los ángulos de referencia para ángulos ubicados en el segundo cuadrante.

Sea $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Este ángulo corta a la circunferencia en el punto $P(-x, y)$. Si proyectamos ese punto sobre el primer cuadrante obtenemos el punto $P_1(x, y)$.

Las coordenadas del ángulo α tienen longitud igual que las coordenadas del ángulo $\beta = 180° - \alpha$ (*ver* figura 2.12).

Entonces,

$\text{sen}\ \alpha = y$ y $\text{sen}\ \beta = \text{sen}(180° - \alpha) = y$

$\cos \alpha = -x$ y $\cos \beta = \cos(180° - \alpha) = x$

$\tan \alpha = \dfrac{y}{-x} = -\left(\dfrac{y}{x}\right)$ y $\tan \beta = \tan(180° - \alpha) = \dfrac{y}{x}$

*Si α es un ángulo cuyo lado terminal está en el segundo cuadrante, el **ángulo de referencia** es $(180° - \alpha)$, en radianes $(\pi - \alpha)$.*

$\text{sen}\ \alpha = \text{sen}(180° - \alpha)$	$\cos \alpha = -\cos(180° - \alpha)$
$\tan \alpha = -\tan(180° - \alpha)$	$\cot \alpha = -\cot(180° - \alpha)$
$\sec \alpha = -\sec(180° - \alpha)$	$\csc \alpha = \csc(180° - \alpha)$

Ejemplo 7

Usemos el ángulo de referencia para encontrar los valores de las funciones trigonométricas para los ángulos:

a. 150° **b.** 520°

Solución

a. El ángulo 150° tiene su lado terminal en el segundo cuadrante. Entonces su ángulo de referencia es $180° - 150° = 30°$ (*ver* figura 2.13).

Entonces,

- $\text{sen}\ 150° = \text{sen}(180° - 150°) = \text{sen}\ 30° = \dfrac{1}{2}$
- $\cos 150° = -\cos(180° - 150°) = -\cos 30° = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}$
- $\tan 150° = -\tan(180° - 150°) = -\tan 30° = \dfrac{-\sqrt{3}}{3}$
- $\cot 150° = -\cot(180° - 150°) = -\cot 30° = -\sqrt{3}$
- $\sec 150° = -\sec(180° - 150°) = -\sec 30° = -\dfrac{2}{\sqrt{3}} = -\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$
- $\csc 150° = \csc(180° - 150°) = \csc 30° = 2$

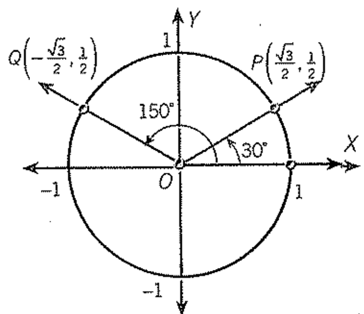


Figura 2.13

b. Como 520° es mayor que 360°, debemos buscar el ángulo coterminal con el ángulo dado, es decir, $520° - 360° = 160°$ (160° tiene su lado terminal en el segundo cuadrante). Luego su ángulo de referencia es $180° - 160° = 20°$. Entonces:

- $\text{sen}\ 520° = \text{sen}\ 160° = \text{sen}(180° - 160°) = \text{sen}\ 20°$. Utilizando una calculadora en modo grados (modo deg), digitando 20° sin, obtenemos que $\text{sen}\ 20° \approx 0{,}34$.
- $\cos 520° = -\cos(160°) = -\cos(180° - 160°) = -\cos(20°) \approx -0{,}94$. ◀

Pensamiento crítico

¿Cuál es el valor de las otras funciones trigonométricas para 520°?

Ahora, tomemos α en el tercer cuadrante $\left(\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}\right)$. El ángulo α interseca a la circunferencia en el punto $P(-x, -y)$; de nuevo proyectamos ese punto en el primer cuadrante, obteniendo el punto $P_2(x, y)$ que es simétrico a P respecto al origen (*ver* figura 2.14).

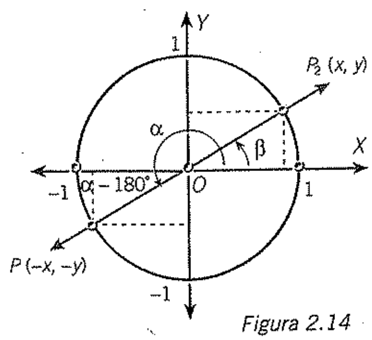


Figura 2.14

Las coordenadas de β tienen igual longitud que las de $\alpha - 180°$ por ser opuestos por el vértice, entonces:

- $\operatorname{sen}\alpha = -y$ $\qquad$ $\operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}(\alpha - 180°) = y$
- $\cos\alpha = -x$ $\qquad$ $\cos\beta = \cos(\alpha - 180°) = x$
- $\tan\alpha = \dfrac{-y}{-x} = \dfrac{y}{x}$ $\qquad$ $\tan\beta = \tan(\alpha - 180°) = \dfrac{y}{x}$

Si α es un ángulo cuyo lado terminal está en el tercer cuadrante, el ***ángulo de referencia*** *es $(\alpha - 180°)$, o en radianes $(\alpha - \pi)$. Además, se cumple que:*

$$\operatorname{sen}\alpha = -\operatorname{sen}(\alpha - 180°) \qquad \cos\alpha = -\cos(\alpha - 180°)$$

$$\tan\alpha = \tan(\alpha - 180°) \qquad \csc\alpha = -\csc(\alpha - 180°)$$

$$\sec\alpha = -\sec(\alpha - 180°) \qquad \cot\alpha = \cot(\alpha - 180°)$$

Ejemplo 8

Hallemos el valor de las funciones trigonométricas para $\alpha = \dfrac{4\pi}{3}$ radianes.

Solución

Un ángulo de $\dfrac{4\pi}{3}$ tiene su lado terminal en el tercer cuadrante (*ver* figura 2.15), por tanto su ángulo de referencia es $\dfrac{4\pi}{3} - \pi = \dfrac{\pi}{3}$.

Utilizando las funciones trigonométricas para $\dfrac{\pi}{3}$ obtenemos:

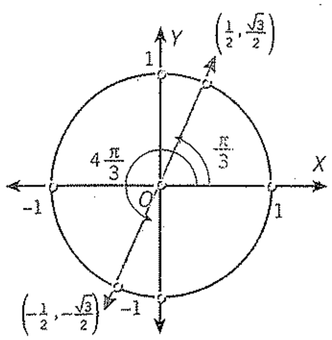


Figura 2.15

- $\operatorname{sen}\dfrac{4\pi}{3} = -\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
- $\cos\dfrac{4\pi}{3} = -\cos\dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}$
- $\tan\dfrac{4\pi}{3} = \tan\dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3}$
- $\cot\dfrac{4\pi}{3} = \cot\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$
- $\sec\dfrac{4\pi}{3} = -\sec\dfrac{\pi}{3} = -2$
- $\csc\dfrac{4\pi}{3} = -\csc\dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ ◁

Ejemplo 9

Determinemos cuál de los siguientes valores es igual a $\operatorname{sen} 208°$.

a. $\operatorname{sen} 28°$ $\qquad$ **b.** $\cos(-28°)$ $\qquad$ **c.** $-\cos 28°$ $\qquad$ **d.** $-\operatorname{sen} 28°$

Solución

Como 208° se encuentra en el tercer cuadrante, entonces el ángulo de referencia es $208° - 180° = 28°$. Además, como la función seno es negativa en el tercer cuadrante $\operatorname{sen} 208° = -\operatorname{sen} 28°$. Por tanto, la respuesta correcta es (d). ◁

En el caso que α se encuentre en el cuarto cuadrante $\left(\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi\right)$, se tiene que α interseca a la circunferencia en el punto $P(x, -y)$. De nuevo proyectando en el primer cuadrante obtenemos el punto $P_3(x, y)$ (*ver* figura 2.16).

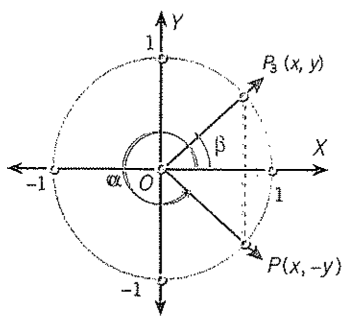


Figura 2.16

Además, $\beta = 360° - \alpha$, entonces:

- $\operatorname{sen}\alpha = -y$ $\qquad$ $\operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}(360° - \alpha) = y$
- $\cos\alpha = x$ $\qquad$ $\cos\beta = \cos(360° - \alpha) = x$
- $\tan\alpha = -\dfrac{y}{x}$ $\qquad$ $\tan\beta = \tan(360° - \alpha) = \dfrac{y}{x}$

Si α es un ángulo cuyo lado terminal está en el cuarto cuadrante, el ***ángulo de referencia*** *para α es $(360° - \alpha)$, o en radianes $(2\pi - \alpha)$ y se tiene que:*

$$sen\ \alpha = -sen(360° - \alpha) \qquad cos\ \alpha = cos(360° - \alpha)$$
$$tan\ \alpha = -tan(360° - \alpha) \qquad cot\ \alpha = -cot(360° - \alpha)$$
$$sec\ \alpha = sec(360° - \alpha) \qquad csc\ \alpha = -csc(360° - \alpha)$$

Ejemplo 10

Con la ayuda de una calculadora y el ángulo de referencia, hallemos $\tan 324°$ y $\cos 311°$.

Solución

Tanto 324° como 311° tienen su lado terminal en el cuarto cuadrante, y sus ángulos de referencia son respectivamente 36° y 49°. Así obtenemos que:

- $\tan 324° = -\tan(360° - 324°) = -\tan 36°$. Para hallar este valor, utilizamos la calculadora en grados (modo Deg), digitando 36° tan obtenemos que $-\tan 36° \approx -0{,}73$.
- $\cos 311° = \cos(360° - 311°) = \cos 49° \approx 0{,}66$ ◁

Pensamiento crítico

¿Por qué el ángulo de referencia es un ángulo agudo?

> Piensa y practica <

> Conexiones

1. Señala el ángulo de referencia, para cada ángulo de la figura 2.17.

a. b. c.

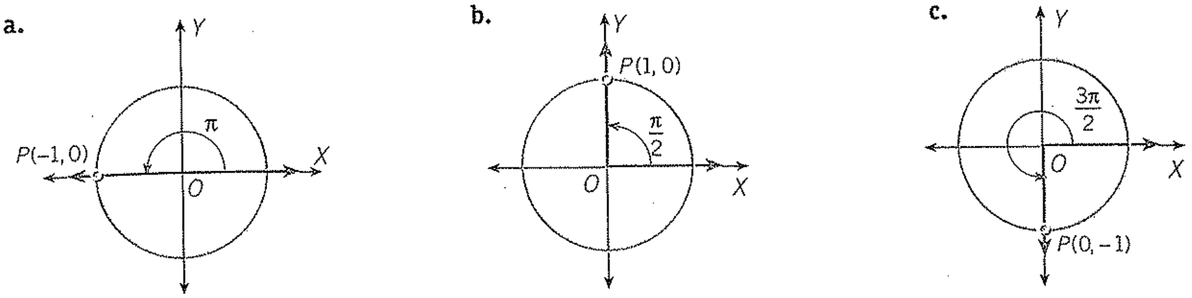


Figura 2.17

2. Determina el ángulo de referencia para cada ángulo. Dibuja en un mismo plano cartesiano, el ángulo dado y su ángulo de referencia.

   a. 163° **b.** −183°
   c. 282° **d.** 310°
   e. $\dfrac{25\pi}{3}$ **f.** $\dfrac{18\pi}{11}$
   g. 2823° **h.** −789°

3. Determina el valor de verdad de las proposiciones acerca del ángulo α que se muestra en la figura 2.18.

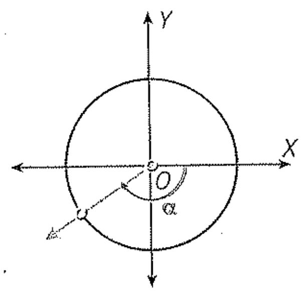


Figura 2.18

   a. α esta orientado negativamente.
   b. Su ángulo de referencia es $\alpha - \pi$.
   c. $\cos(\alpha) = \cos(\pi - \alpha)$
   d. $\tan(\alpha) = -\tan(\alpha)$

Contesta las preguntas 4 a 6 de acuerdo con la información de la tabla 2.3.

θ en rad	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$
θ en grad	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
sen θ	0	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$	1
cos θ	1	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$	0

Tabla 2.3

4. Calcula el valor de las siguientes expresiones.

a. $\cos 255°$ **b.** $\operatorname{sen} 315°$

c. $\cot 165°$ **d.** $\csc \frac{5\pi}{3}$

e. $\cot 120°$ **f.** $\operatorname{sen}\frac{13\pi}{12}\cos\frac{13\pi}{12}$

g. $\sec\frac{7\pi}{12} - \tan\frac{7\pi}{12}$ **h.** $\cot^2 330° \sec^2 330°$

i. $\operatorname{sen}\frac{23\pi}{12}$ **j.** $\tan\frac{23\pi}{12}$

k. $\tan 285°$ **l.** $\operatorname{sen} 405°$

m. $\csc 405°$ **n.** $\sec 405°$

5. Dadas las propiedades:

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ $\quad \sec(-\alpha) = \sec\alpha$
$\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$ $\quad \csc(-\alpha) = -\csc\alpha$
$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$ $\quad \cot(-\alpha) = -\tan\alpha$

y los ángulos de referencia, halla:

a. $\operatorname{sen}\left(-\frac{11\pi}{4}\right)$ **b.** $\cot\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$

c. $\cos\left(-\frac{23\pi}{12}\right)$ **d.** $\sec(-165°)$

e. $\csc(-330°)$ **f.** $\tan(-285°)$

g. $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ **h.** $\cot(-120°)$

i. $\operatorname{sen}\left(-\frac{16\pi}{3}\right)$ **j.** $\cos\left(-\frac{16\pi}{3}\right)$

> Razonamiento lógico

6. Determina y justifica cuáles de las igualdades son verdaderas.

a. $\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \operatorname{sen}\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$

b. $\cos\frac{\pi}{6} = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right)$

c. $\tan\left(\pi - \frac{\pi}{12}\right) = \tan\frac{\pi}{12}$

d. $\tan\frac{\pi}{5} = \tan\left(2\pi - \frac{\pi}{5}\right)$

7. Dado que $\operatorname{sen} 123° \approx 0{,}84$ rad, halla otro número real t en el intervalo $(0°, 360°)$, tal que $\operatorname{sen} t = \operatorname{sen} 123°$.

8. Dado que $\cos\frac{6\pi}{15} \approx 0{,}99$ rad, halla otro número real t en el intervalo $(0, 2\pi)$, tal que $\cos\frac{6\pi}{15} = \cos t$.

9. Si θ es un ángulo tal que $\pi < \theta < \frac{4\pi}{3}$, determina el valor de verdad de cada proposición.

a. El ángulo de referencia de θ es $\pi - \theta$.

b. El ángulo de referencia de $\theta - \frac{\pi}{2}$ es $\frac{3\pi}{2} - \theta$.

c. El ángulo de referencia de $\theta + \frac{\pi}{2}$ es $\frac{3\pi}{2} + \theta$.

10. Encuentra en los cuadrantes II, III y IV, ángulos que tengan a γ como ángulo de referencia.

a. $\gamma = 18°$ **b.** $\gamma = 37°$

c. $\gamma = 78°$ **d.** $\gamma = \frac{\pi}{11}$

Uso de la tecnología

11. Usa la calculadora y el concepto de ángulo de referencia para hallar el valor solicitado.

a. $\tan 341°$ **b.** $\cos 98°$

c. $\operatorname{sen} 197°$ **d.** $\operatorname{sen} 111°$

e. $\cos 302°$ **f.** $\tan 331°$

g. $\operatorname{sen}(-114°)$ **h.** $\tan(-114°)$

12. Usa la calculadora para hallar el valor de seno y coseno de $\theta = 42°$. Determina, en los cuadrantes segundo, tercero y cuarto, ángulos que tengan a θ como ángulo de referencia, y determina el valor de seno, coseno y tangente para cada uno.

Gráfica de las funciones sen θ y cos θ

Logro: identificar propiedades y regularidades de las gráficas de las funciones trigonométricas seno y coseno.

Un sistema de riego, como se muestra en la figura 2.19, da una vuelta en 80 segundos. La gráfica cartesiana muestra la variación del punto donde sale el agua en una vuelta completa. Esta curva es la gráfica de una función periódica.

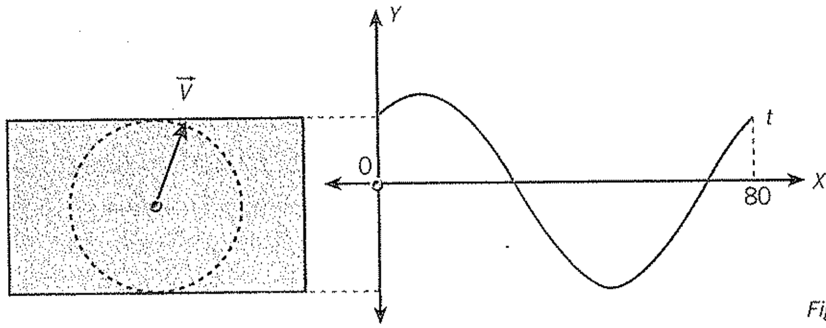


Figura 2.19

El periodo de la función descrita en la figura anterior es $t = 80$ segundos, debido a que cada 80 segundos el punto de riego se encuentra en el mismo lugar.

> *Una función* ***periódica*** *es aquella que de forma regular repite los valores que toma. El intervalo menor para el cual se repite la gráfica se llama* ***período de la función.***

Matemáticamente,

> *Una función f es* ***periódica*** *si existe una constante $p > 0$, tal que $f(x + p) = f(x)$ para todo x en el dominio de f.*

La gráfica de una función periódica en un intervalo cuya longitud es el período es un **ciclo en la curva**.

Conexión con la vida

En Biología, Física, Economía e Ingeniería es común encontrarse con fenómenos periódicos, fenómenos que se idealizan para su análisis en un modelo matemático que involucra funciones periódicas.

Ejemplo 11

Hallemos el período de las funciones de la figura 2.20. ¿Cuántos ciclos se dibujaron de cada función?

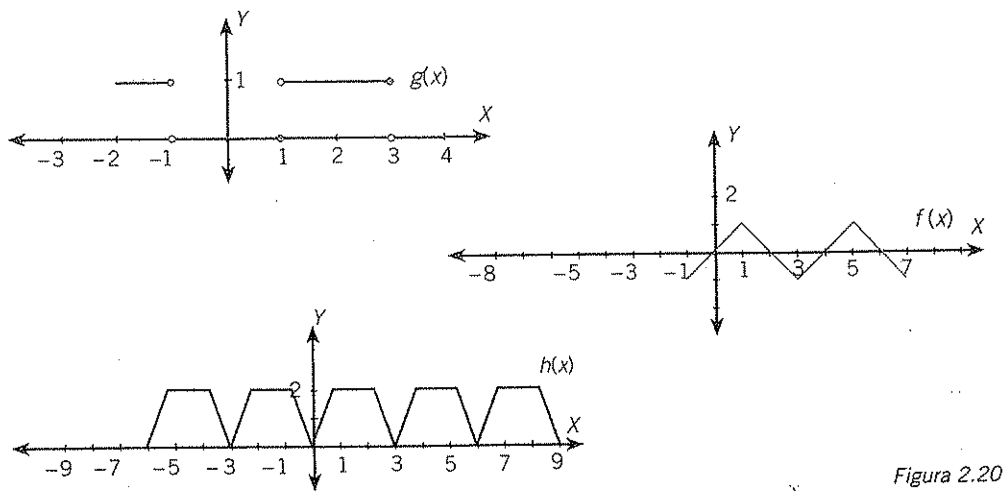


Figura 2.20

Solución

- El período de la función $g(x)$ es 2 y se dibujaron tres (3) ciclos de la función.
- El período de la función $f(x)$ es 4 y se dibujaron dos (2) ciclos de la función.
- El período de la función $h(x)$ es 3 y se dibujaron cinco (5) ciclos de la función. ◀

Empezaremos estudiando la función $y = \operatorname{sen} x$. Como la longitud de la circunferencia unitaria es 2π, entonces $\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x$, es decir, la función seno es periódica y su período es $p = 2\pi$.

Para dibujarla, evaluamos en valores de x entre $[0, 2\pi]$ (*ver* la tabla 2.4). Recordemos que la calculadora debe estar en modo radianes.

x	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{8}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
sen x	0	0,3827	0,7071	0,9239	1	0,9239	0,7071	0,3827	0	–0,7071	–1	–0,7071	0

Tabla 2.4

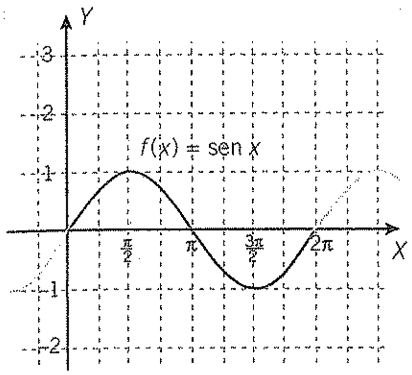


Figura 2.21

Uniendo con un trazo continuo los puntos obtenidos en la tabla 2.4, obtenemos la figura 2.21.

De forma general, como seno es una función periódica, la gráfica de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ se puede apreciar en la figura 2.22.

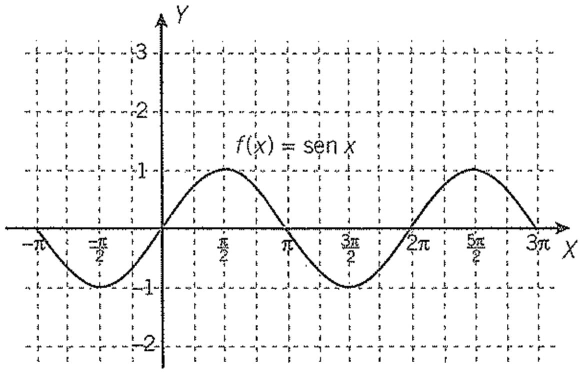


Figura 2.22

Como $y = \operatorname{sen} x$ es una ordenada del punto terminal de un ángulo de x radianes en la circunferencia unitaria, la gráfica se puede construir usando regla y compás, como se muestra en la figura 2.23.

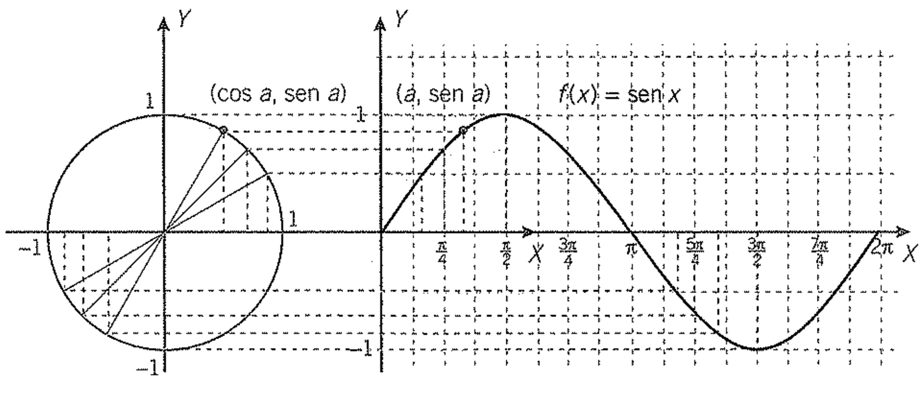


Figura 2.23

Observando la gráfica de $f(x) = \operatorname{sen} x$ podemos obtener las siguientes características:

1. Dominio **R**.

2. Rango $\{y : -1 \le y \le 1\} = [-1, 1]$, es decir, el valor máximo que alcanza la función $\operatorname{sen} x$ es 1 y el valor mínimo es –1.

3. Es simétrica respecto al origen O. Esto es si (x, y) está en la gráfica, entonces $(-x, -y)$ también está en la gráfica, es decir, si $(x, \operatorname{sen} x)$ está en la gráfica de $\operatorname{sen} x$, entonces $(-x, -\operatorname{sen} x)$ está en la gráfica de $\operatorname{sen} x$. Otra manera de expresar esta propiedad es diciendo que $f(x) = \operatorname{sen} x$ es una función impar, es decir, $f(-x) = -f(x)$.

4. Mientras que x aumenta de 0 a $\frac{\pi}{2}$, el valor de $y = \operatorname{sen} x$ crece de 0 a 1.
Si x aumenta de $\frac{\pi}{2}$ a π, el valor de $y = \operatorname{sen} x$ disminuye de 1 a 0.
Si x aumenta de π a $\frac{3\pi}{2}$, $\operatorname{sen} x$ disminuye de 0 a –1.
Finalmente, si x aumenta de $\frac{3\pi}{2}$ a 2π, $\operatorname{sen} x$ crece de –1 a 0. Es decir, $f(x) = \operatorname{sen} x$ es creciente en unos intervalos y decreciente en otros:
   - Creciente en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$.
   - Decreciente en $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$.

Pensamiento crítico

¿En qué otros intervalos $f(x) = sen\, x$ es creciente?

Para graficar la función $y = \cos x$, recordemos que coseno representa la abscisa en los puntos en el círculo unitario, por tanto tiene período 2π, esto es, $\cos(x + 2\pi) = \cos x$. Para dibujarla, evaluamos coseno en valores de x entre $[0, 2\pi]$ (*ver* tabla 2.5). La calculadora debe estar en modo radianes.

x	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{8}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$\cos x$	1	0,9239	0,7071	0,3827	0	–0,3827	–0,7071	–0,9239	–1	–0,7071	0	0,7071	1

Tabla 2.5

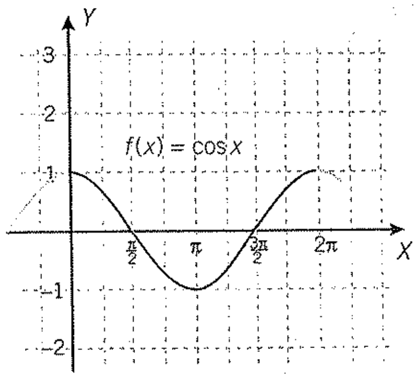


Figura 2.24

Uniendo los puntos con un trazo continuo obtenemos la figura 2.24.

Como coseno es periódica, la gráfica se puede extender a todo **R**, como se muestra en la figura 2.25.

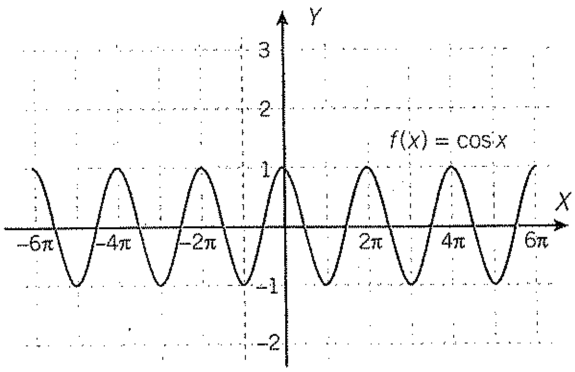


Figura 2.25

Además, como $y = \cos x$ es la abscisa del punto terminal de un ángulo x radianes en la circunferencia unitaria, la gráfica se puede construir usando regla y compás como se muestra en la figura 2.26.

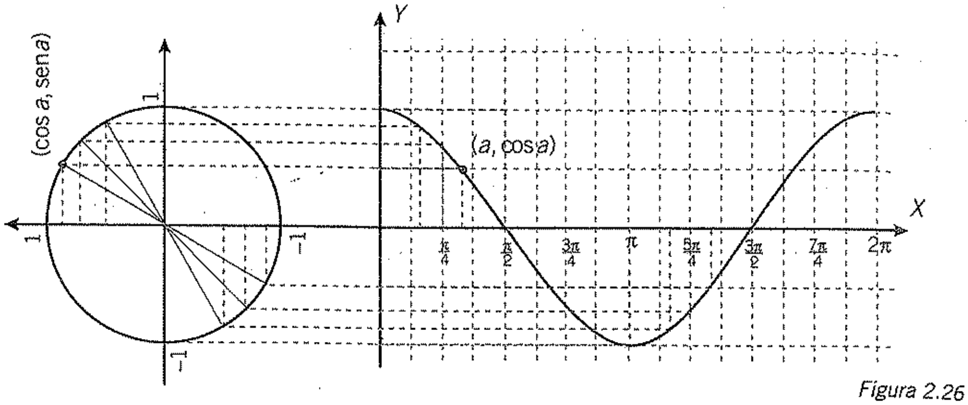
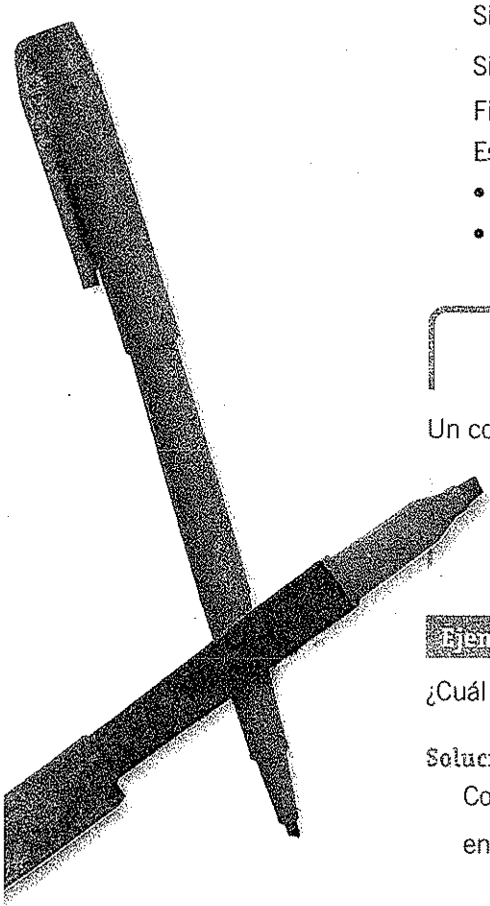


Figura 2.26

Por medio de la gráfica de $f(x) = \cos x$ podemos obtener las siguientes características:

1. Dominio **R**.
2. Rango $\{y : -1 \leq y \leq 1\} = [-1, 1]$, es decir, el valor máximo que alcanza la función $\cos x$ es 1 y el valor mínimo es –1.
3. Es simétrica respecto al eje *Y*. Esto es si (x, y) está en la gráfica, entonces $(-x, y)$ también está en la gráfica, es decir, si $(x, \cos x)$ está en la gráfica de $\cos x$, entonces $(-x, \cos x)$ está en la gráfica $\cos x$. Otra manera de expresar esta propiedad es diciendo que $f(x) = \cos x$ es una función par, es decir, $f(-x) = f(x)$, para todo x en el dominio.
4. Mientras que x aumenta de 0 a $\frac{\pi}{2}$, el valor de $y = \cos x$ decrece de 1 a 0.
   Si x aumenta de $\frac{\pi}{2}$ a π, el valor de $y = \cos x$ disminuye de 0 a –1.
   Si x aumenta de π a $\frac{3\pi}{2}$, $\cos x$ aumenta de –1 a 0.
   Finalmente, si x aumenta de $\frac{3\pi}{2}$ a 2π, $\cos x$ crece de 0 a 1.
   Es decir, $f(x) = \cos x$ es creciente en unos intervalos y decreciente en otros:
   - Creciente en $(\pi, 2\pi)$.
   - Decreciente en $(0, \pi)$.



Pensamiento crític

¿En qué otros intervalos $f(x) = \cos x$ es creciente?

Un concepto muy importante para definir las funciones trigonométricas es la amplitud.

*La **amplitud A** es la mitad de la diferencia entre los valores máximos y mínimos de una función periódica.*

Ejemplo 12

¿Cuál es la amplitud de las funciones seno y coseno?

Solución

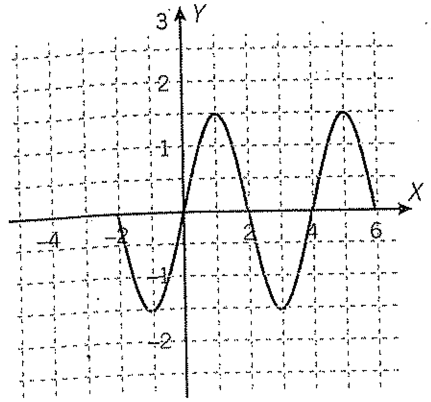
Como el valor máximo de las funciones seno y coseno es 1 y el valor mínimo es –1, entonces la amplitud $A = \frac{1-(-1)}{2} = 1$. ◄

> Piensa y practica <

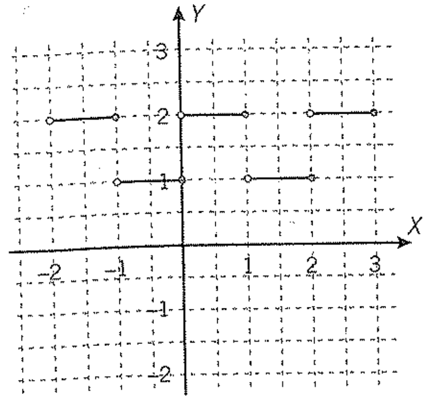
> Conexiones

1. Determina la amplitud, el periodo y el número de ciclos dibujados de cada unas de las funciones de la figura 2.27.

a.



b.



c.

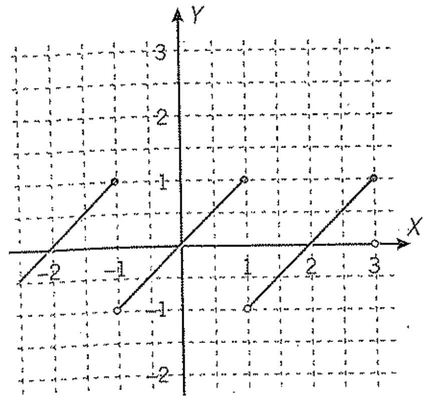


Figura 2.27

2. Determina cuáles de las siguientes funciones son pares y cuáles son impares. Justifica tu respuesta.

a. $f(x) = x$ **b.** $f(x) = x^2$

c. $f(x) = x^3$ **d.** $f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$

e. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad 0 \le x \le 2 \\ -x & \text{si} \quad -2 \le x < 0 \end{cases}$

f. $f(x) = x \operatorname{sen} x$

g. $f(x) = x^2 \cos x$ **h.** $h(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$

3. Los ceros de una función $f(x)$ son los valores de x para los cuales $f(x) = 0$. ¿Cuáles son los ceros de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$? ¿Cuáles son los valores de x para los cuales $\cos x = 0$?

> Razonamiento lógico

4. Dibuja en la misma hoja de papel milimetrado con colores distintos, la gráfica de la función $y = \operatorname{sen} x$ y la gráfica de la función $y = \cos x$, tal que $-4\pi \le x \le 4\pi$.

   a. ¿Existen valores para los que $\operatorname{sen} x = \cos x$? ¿Cuáles son esos valores?

   b. Determina el intervalo en el cual ambas funciones son crecientes y el intervalo en el cual ambas funciones son crecientes.

5. Sabiendo que $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, halla tres valores de x distintos de $\frac{\pi}{6}$, tales que $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

6. Halla el valor de verdad de las siguientes afirmaciones. Justifica tu respuesta.

   a. La función $f(x) = \operatorname{sen} x$ es par.

   b. El rango de la función $f(x) = \cos x$ es el conjunto de los números reales.

   c. No existen valores de x para los cuales $\operatorname{sen} x = 6$.

   d. $\operatorname{sen} x$ es creciente en el intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

   e. El valor máximo de la función coseno se alcanza cuando x es un múltiplo par de π.

   f. La amplitud de la función coseno es 2.

   g. El periodo de la función $\operatorname{sen} x$ es π.

   h. $\operatorname{sen} x = 0$ cuando $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

7. Determina los intervalos donde:

   a. $\cos x < 0$ y $\operatorname{sen} x > 0$.

   b. $\cos x < 0$ y $\operatorname{sen} x < 0$.

   c. $\operatorname{sen} x < 0$ y $\cos x > 0$.

   d. $\operatorname{sen} x > 0$ y $\cos x > 0$.

Curvas sinusoidales

Logro: identificar la ecuación de una curva sinusoidal, dibujar su gráfica cartesiana y determinar su amplitud y período.

La figura 2.28 describe el comportamiento del movimiento de un resorte a través del tiempo por medio de una curva sinusoidal, muy semejante a las gráficas de las funciones seno y coseno.

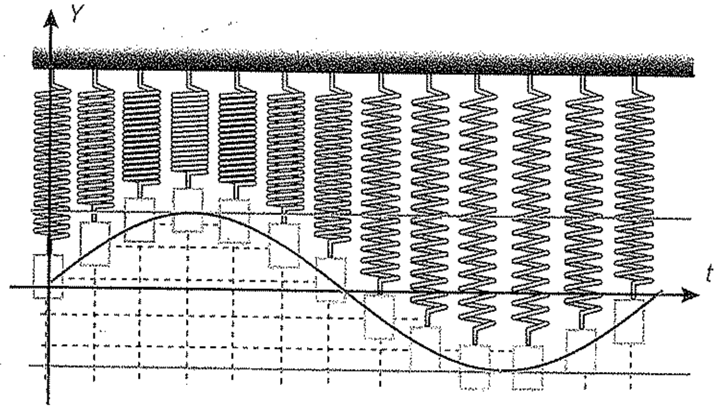


Figura 2.28

*Las **funciones sinusoidales** se obtienen por medio de modificaciones sobre las funciones seno o coseno, y sus gráficas son conocidas como **curvas sinusoidales**.*

Comencemos estudiando las funciones de la forma $f(x) = a\cos\ x$ y $f(x) = a\text{sen}\ x$, donde a es cualquier número real diferente de cero.

A continuación describiremos algunas propiedades de esas funciones:

Para las funciones del tipo $f(x) = a\cos\ x$ y $f(x) = a\,\text{sen}\,x$, con a real diferente de cero se cumple que:

- *El dominio es* $\mathbf{R}$.
- *Son periódicas y su período es* 2π.
- *La amplitud es* $|a|$.
- *Rango:* $\{y : -|a| \le y \le |a|\}$.

Ejemplo 13

Tracemos las gráficas de las siguientes funciones en el intervalo $[0, 2\pi]$.

a. $f(x) = 3\cos\ x$ **b.** $f(x) = -\frac{1}{2}\text{sen}\ x$

Solución

a. Como la amplitud es $|3| = 3$, entonces el valor máximo que alcanza la función es 3 y el mínimo es –3, cuando $\cos\ x = 1$ y $\cos\ x = -1$, respectivamente. Además, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3\cos\frac{\pi}{2} = 0$ y $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 3\cos\frac{3\pi}{2} = 0$.

Podemos trazar la figura con base en la gráfica de la función coseno, triplicando para cada x el valor de la imagen (*ver* figura 2.29), así, su dominio es **R** y su rango es $\{y : -3 \le y \le 3\}$.

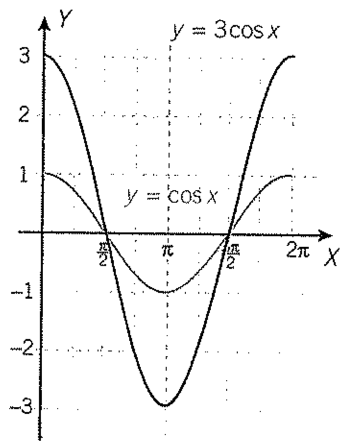


Figura 2.29

b. La amplitud es $\left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$ y el período es 2π.

La gráfica puede elaborarse a partir de la función seno, en la que para cada x, se toma un medio del valor en la función seno y se ubica el punto simétrico respecto al eje X. Así, en los intervalos en los cuales $\operatorname{sen} x$ es positivo, la función $-\frac{1}{2}\operatorname{sen} x$ toma valores negativos, y donde $\operatorname{sen} x$ es negativo, la nueva función es positiva. El dominio de $f(x)$ es **R** y su rango es $\left\{y : -\frac{1}{2} \le y \le \frac{1}{2}\right\}$. Veamos la gráfica en la figura 2.30. ◀

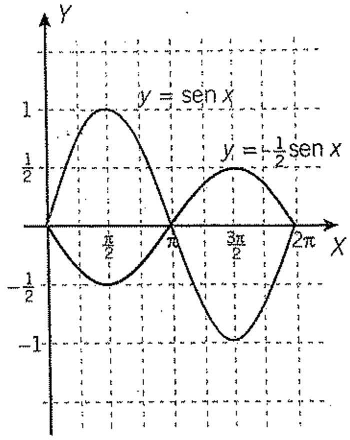


Figura 2.30

Ahora estudiaremos las funciones de la forma $f(x) = \cos(kx)$ o $f(x) = \operatorname{sen}(kx)$, donde k es cualquier número real diferente de cero.

*Algunas **propiedades** de las funciones $f(x) = cos(kx)$ y $f(x) = sen(kx)$, son:*

- *Domino:* **R**.
- *Rango:* $\{y : -1 \le y \le 1\}$.
- *La amplitud es uno (1).*
- *Son periódicas con período igual a* $\frac{2\pi}{|k|}$.

Ejemplo 14

Tracemos las gráficas de las funciones en el período determinado.

a. $f(x) = \cos(4x)$ **b.** $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$

Solución

a. Como $k = 4$, entonces el período de la función $\cos(4x)$ es $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, es decir, la gráfica completa un período para coseno en el intervalo $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ (*ver* figura 2.31).

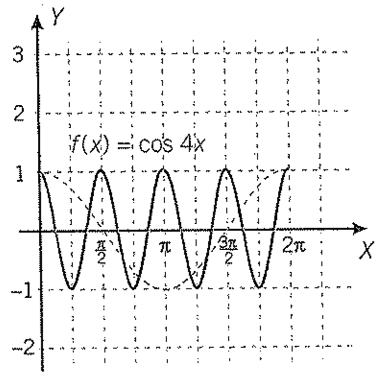


Figura 2.31

b. $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$ implica que $k = \frac{1}{2}$, es decir, tiene un período de $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$. Por tanto, completa la gráfica de seno en un período de $0 \le x \le 4\pi$ (*ver* figura 2.32). ◀

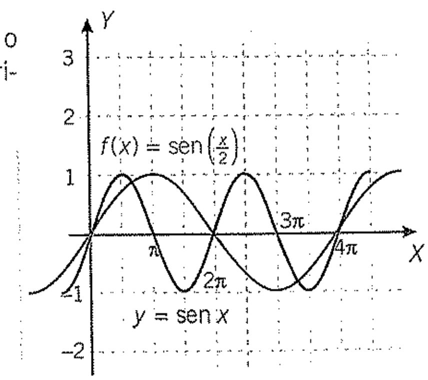


Figura 2.32

Existe otro tipo de transformaciones que se escriben de la forma $f(x) = \cos(x - b)$ o $f(x) = \operatorname{sen}(x - b)$, las cuales describen curvas de tipo coseno o seno trasladadas horizontalmente.

Para transformaciones $f(x) = cos(x - b)$ o $f(x) = sen(x - b)$, se cumple que la gráfica de f(x) se obtendrá a partir de cos x o sen x, respectivamente:

- *Trasladada hacia la derecha, si $b > 0$.*
- *Trasladada hacia la izquierda, si $b < 0$.*

*El número **b** se conoce como el **desplazamiento de fase**.*

Otras propiedades de esas funciones son:

- *Dominio:* **R**.
- *Amplitud* = 1.
- *Período* $= 2\pi$, *dado por el intervalo* $[b, b + 2\pi]$.
- *Rango:* $\{y : -1 \le y \le 1\}$.

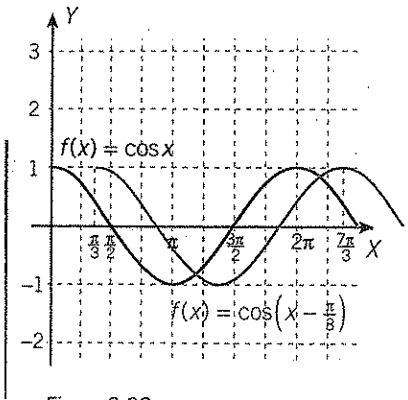


Figura 2.33

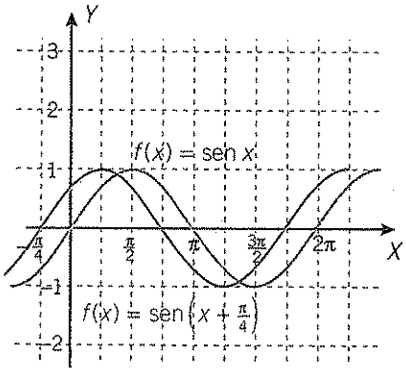


Figura 2.34

Ejemplo 15

Grafiquemos las funciones.

a. $f(x) = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$ **b.** $f(x) = \operatorname{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Solución

a. El desplazamiento de fase es $b = \dfrac{\pi}{3}$, es decir, se tiene un desplazamiento horizontal hacia la derecha en $\dfrac{\pi}{3}$ de la función coseno (*ver* figura 2.33).

El dominio es **R** y el rango es $\{y : -1 \le y \le 1\}$. Un intervalo que contiene la onda completa es el intervalo $\left[\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3} + 2\pi\right]$.

b. El desplazamiento de fase es $b = -\dfrac{\pi}{4}$, por tanto, se tiene un desplazamiento horizontal hacia la izquierda de $\dfrac{\pi}{4}$ en la función seno (*ver* figura 2.34). ◅

Para funciones de la forma $y = \cos x + a$ y $y = \operatorname{sen} x + a$:

- *Se obtiene un desplazamiento vertical hacia arriba de **a** unidades de las funciones seno o coseno, si $a > 0$.*
- *Se obtiene un desplazamiento vertical hacia abajo de **a** unidades de las funciones seno o coseno, si $a < 0$.*
- *Dominio:* **R**.
- *Rango:* $\{y : -1 + a \le y \le 1 + a\}$.

Ejemplo 16

Grafiquemos.

a. $f(x) = \cos x + 2$ **b.** $f(x) = \operatorname{sen} x - 3$.

Solución

a. En $f(x) = \cos x + 2$ se tiene un desplazamiento vertical hacia arriba de la función coseno en 2 unidades (*ver* figura 2.35 (a)). Su dominio es **R** y su rango es $\{y : 1 \le y \le 3\}$.

b. En $f(x) = \operatorname{sen} x - 3$ se obtiene un desplazamiento vertical hacia abajo de la función seno en 3 unidades (*ver* figura 2.35 (b)). Su dominio es **R** y su rango es $\{y : -4 \le y \le -2\}$.

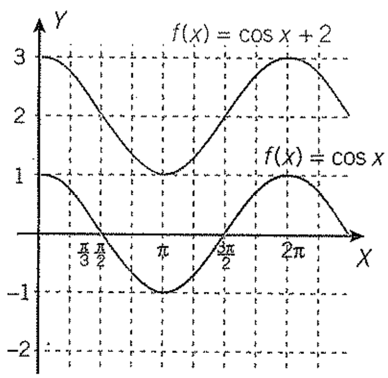


Figura 2.35a

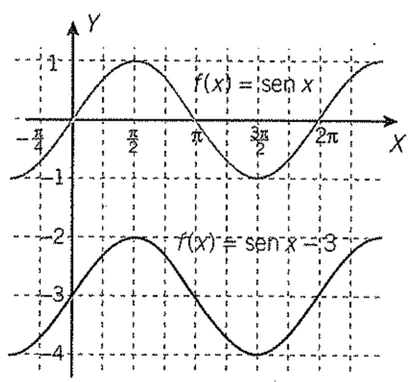


Figura 2.35b ◅

Comentario

Recuerda que:

- *sen(−x) = −sen x: función impar*
- *cos(−x) = cos x: función par*

Ejemplo 17

Analicemos y grafiquemos las funciones.

a. $f(x) = 3\cos\left[2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right] + 2$ **b.** $g(x) = -\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 3$

Solución

a. Para realizar la gráfica de $f(x) = 3\cos\left[2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right] + 2$ analicemos las propiedades que cumple:

- Se hace un desplazamiento horizontal hacia la derecha de $2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.
- Se hace un desplazamiento vertical hacia arriba de 2.
- El periodo es $\frac{2\pi}{2} = \pi$.
- La amplitud es $|3| = 3$.
- Rango: $\{y : \underbrace{-3}_{\text{Amplitud}} + \underbrace{2}_{\text{Desplazamiento vertical}} \leq y \leq 3 + 2\} = \{y : -1 \leq y \leq 5\}$.

Así, obtenemos la gráfica de $f(x)$ que aparece en la figura 2.36.

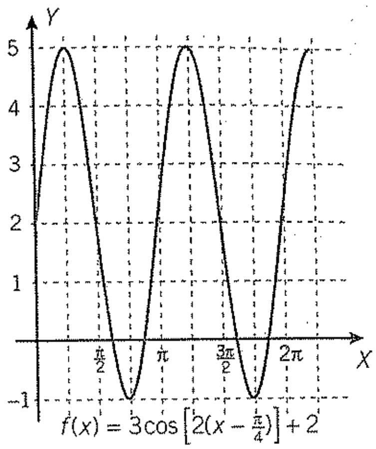


Figura 2.36

b. Analicemos las propiedades de $g(x) = -\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 3$.

- Se hace un desplazamiento horizontal de $\frac{\pi}{3}$ unidades de la función $-\text{sen}\,x$.
- Se hace un desplazamiento vertical de 3 unidades, por tanto, el rango es $\{y : 2 \leq y \leq 4\}$.
- Dominio: **R**.
- La amplitud es $|-1| = 1$.

Así obtenemos la gráfica de $g(x)$ que aparece en la figura 2.37. ◁

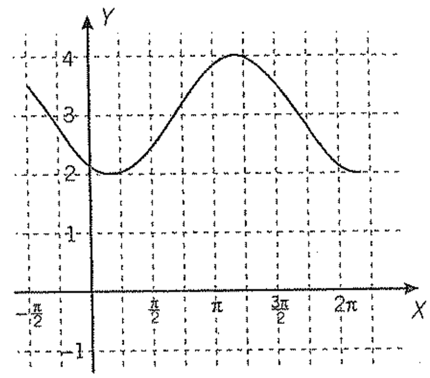


Figura 2.37

> Piensa y practica <

> Conexiones

1. Para cada una de las siguientes funciones, halla la amplitud y el período. Elabora una gráfica de la función.

a. $y = -5\text{sen}(2x)$

b. $y = 5\text{sen}\,x$

c. $y = 2\cos\left(\frac{1}{2}x\right)$

d. $y = \frac{1}{3}\cos(3x)$

e. $y = -3\cos\left(\frac{1}{4}x\right)$

f. $y = -4\text{sen}(4x)$

g. $y = 4\text{sen}(4x)$

h. $y = -\frac{1}{2}\text{sen}\,x$

2. En cada una de las siguientes funciones, halla dominio, valor máximo, valor mínimo, rango y período. Elabora una gráfica de la función sin utilizar la calculadora.

a. $y = \cos x + 4$

b. $y = -\text{sen}\,x - 5$

c. $y = 3\cos x + 2$

d. $y = -2\cos x + 2$

e. $y = \frac{1}{2}\text{sen}\,x - 1$

f. $y = \frac{\cos x}{2} - 3$

3. En cada una de las siguientes funciones, indica un intervalo adecuado *I*, donde se pueda graficar la onda completa. Elabora la gráfica de un ciclo de la función.

a. $y = \text{sen}\left(2x - \dfrac{2\pi}{3}\right)$

b. $y = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$

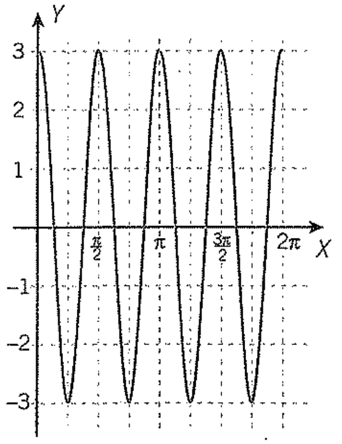
c. $y = \text{sen}\left(3x - \dfrac{\pi}{9}\right)$

d. $y = -2\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

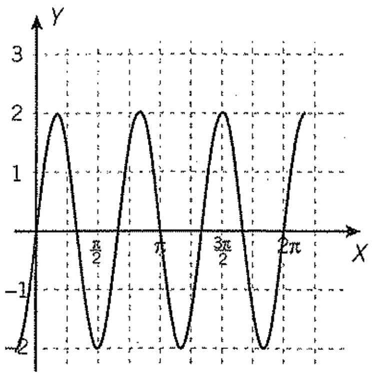
> Comunicación

4. Las gráficas de la figura 2.38 corresponden a funciones de la forma $y = a\cos kx$ y $y = a \text{ sen } kx$. Halla las ecuaciones respectivas.

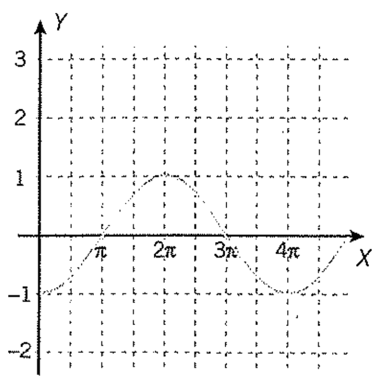
a.



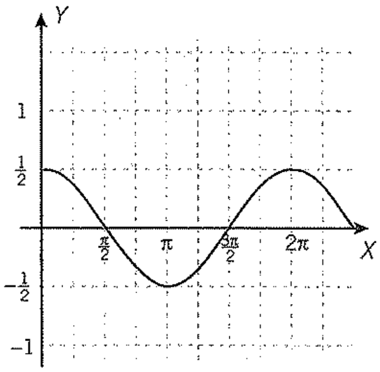
b.



c.



d.



e.

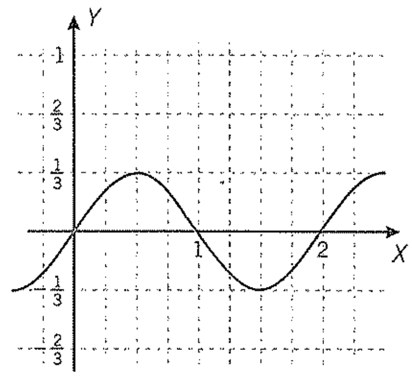
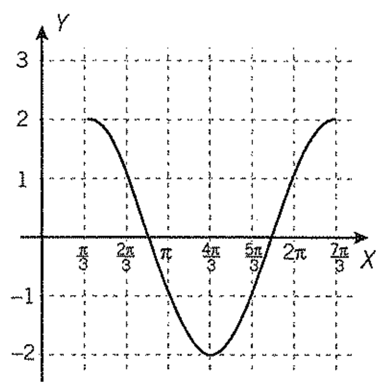


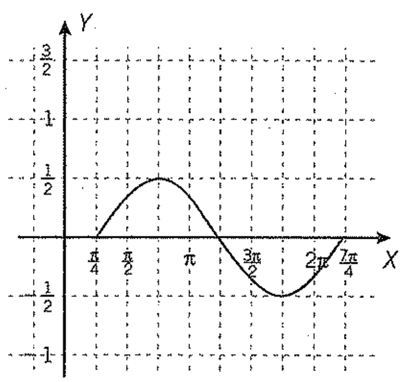
Figura 2.38

5. Las gráficas de la figura 2.39 corresponden a funciones de la forma $y = a\cos(x - b)$ y $y = a\text{sen}(x - b)$, dibujando en cada una un ciclo de la curva. Halla las ecuaciones correspondientes.

a.



b.



c.

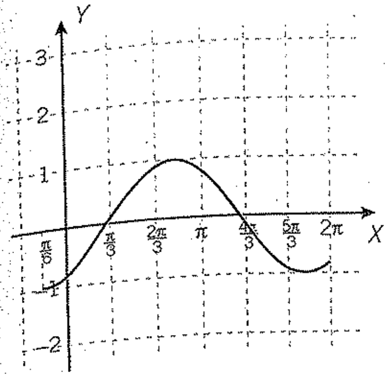


Figura 2.39

6. Determina el valor de verdad de cada proposición. Justifica tu respuesta.

   a. La gráfica de la función $f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ es igual a la gráfica de $f(x) = \operatorname{sen} x$.

   b. La función $f(x) = \cos 2x$ tiene período 4π.

   c. La gráfica de la función $f(x) = -\cos x$ es idéntica a la gráfica de $f(x) = \cos(-x)$.

   d. La amplitud de la función $f(x) = \frac{1}{4} + 4\cos\left(\frac{1}{4}x\right)$ es $\frac{1}{4}$.

> Resolución de problemas

7. En un circuito eléctrico, la corriente notada por I (en amperes) cuando el tiempo es t segundos es:
   $I(t) = 6\cos\left(80\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$.

   a. ¿Cuál es el período de la función?

   b. ¿Cuál es su desplazamiento horizontal?

   c. ¿Qué significa $I(0)$?

   d. ¿Cuál es su amplitud?

8. La función que describe el desplazamiento y de un objeto en movimiento armónico simple en el tiempo t es: $f(t) = A\operatorname{sen}(\varpi t)$, o, $f(t) = A\cos(\varpi t)$ donde $|A|$ es el desplazamiento máximo del objeto y $\frac{\varpi}{2\pi}$ es la frecuencia o número de ciclos u ondas completas por unidad de tiempo.

   a. Supón que un péndulo describe un desplazamiento angular θ, con un movimiento armónico simple de la forma $\theta(t) = \frac{\pi}{5}\cos(4t)$, (*ver* figura 2.40).

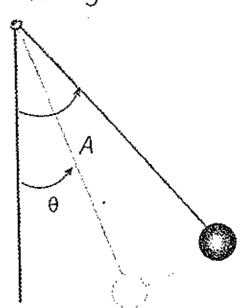


Figura 2.40

   b. Dibuja dos ciclos de la función. ¿Cuál es su amplitud? ¿Cuál es la frecuencia?

   c. Un resorte oscila con M.A.S., con una amplitud de 12 cm y un período de 3 segundos. Además, sabes que $f(0) = 0$. ¿Cuál será la función que describe su desplazamiento? ¿Cuál es su frecuencia?

9. Supón que el número de ratones de una población en el instante t (en años), está dado por:
   $N(t) = 2000\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) + 4000$.

   a. ¿Cuál será la población máxima que se puede llegar a tener? ¿Cuál será la población mínima?

   b. ¿Cada cuántos años se repetirá la misma cantidad de ratones?

> Razonamiento lógico

Resuelve los ejercicios 10 y 11 en grupo.

10. A continuación se definen cinco funciones.

   a. $y = \cos x$

   b. $y = 2\cos x$

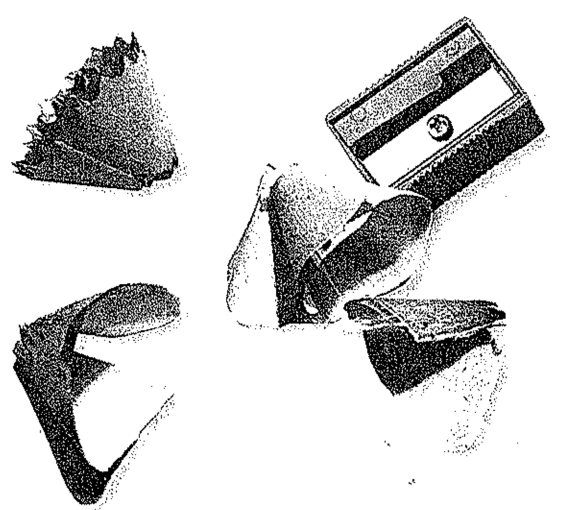
   c. $y = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

   d. $y = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{8}\right)$

   e. $y = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{8}\right) + 3$

   Estudien cada función a partir de la fórmula que la define, comparándola con la inmediatamente anterior. Trabajen en orden, una por una, y hallen sus características de amplitud, período, valor máximo, valor mínimo, dominio, rango y gráfica. En cada caso, determinen qué característica se modifica al pasar de una a otra.

11. De acuerdo con los resultados encontrados en el ejercicio 10, estudien la función definida por la expresión $y = \frac{3}{2}\operatorname{sen}(9x + 2\pi) - 4$ y dibujen una onda completa.



5 Lección

Pensamientos variacional y espacial

Funciones tan θ, cot θ, sec θ y csc θ

Logro: identificar dominio, rango y períodos de las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante.

Para graficar la función $y = \tan x$ es necesario recordar que $\tan x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}$, por lo cual, el dominio de la función se define para los números donde $\cos x \neq 0$ (las divisiones entre cero no están definidas), es decir, cuando $x = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2} \ldots$

De esta forma, el dominio de $\tan x$ es $\left\{x \in \mathbf{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\right\}$.

Algunas propiedades adicionales de $f(x) = \tan x$ son:

- $tan(-x) = \dfrac{sen(-x)}{cos(-x)} = -\dfrac{sen\,x}{cos\,x} = -tan\,x$ ***(tangente es una función impar).***
- $tan(x+\pi) = \dfrac{sen(x+\pi)}{cos(x+\pi)} = \dfrac{-sen\,x}{-cos\,x} = tan\,x$, *entonces el periodo de* $tan\ x$ *es* π.

Construyamos una tabla (en modo radianes), evaluando la función para valores entre 0 y $\frac{\pi}{2}$, con la calculadora (*ver* tabla 2.6).

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	1,5	1,55	1,56	1,57	1,5707
$\tan x$	0	0,577	1	1,732	14,101	48,078	92,62	1255,77	10 381,33

Tabla 2.6

Como $\tan(-x) = -\tan x$, obtenemos la tabla 2.7 para valores entre $-\frac{\pi}{2}$ y 0.

x	0	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$	–1,5	–1,55	–1,56	–1,57	–1,5707
$\tan x$	0	–0,577	–1	–1,732	–14,101	–48,078	–92,62	–1255,77	–10 381,33

Tabla 2.7

Comentario

El conjunto definido por $\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots\}$ equivale al conjunto de los enteros, que se denota por $\mathbf{Z}$.

Pensamiento crítico

Observa que si el valor de x se acerca a $\frac{\pi}{2}$, entonces tan x tomará valores cada vez mayores. ¿Qué pasa cuando se toman valores mayores pero cercanos a $-\frac{\pi}{2}$?

Como el período de $\tan x$ es π $\left(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right)$, entonces la gráfica se repite en cada intervalo de la forma $\left((2k+1)\frac{\pi}{2}, (2k+3)\frac{\pi}{2}\right)$. Así obtenemos la gráfica de la figura 2.41.

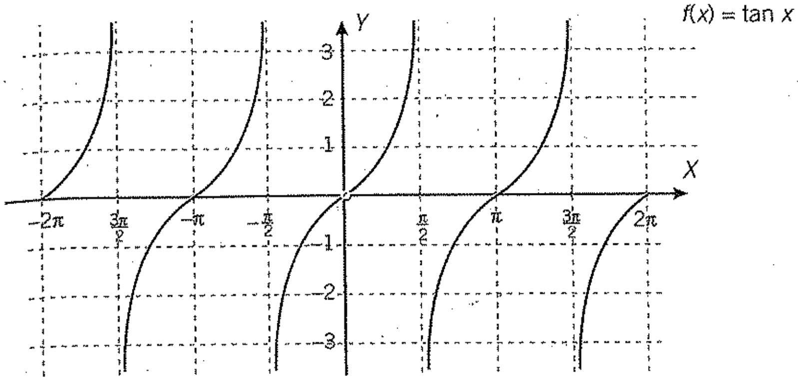


Figura 2.41

Observando la gráfica de la función tangente podemos concluir que:

- *No alcanza ni valor máximo, ni valor mínimo, es decir, no se puede definir amplitud para esta función.*
- *No es continua debido a que en los múltiplos impares de $\frac{\pi}{2}$ no está definida. Las rectas punteadas como $x = \frac{\pi}{2}$, que no forman parte de la gráfica, se llaman **asíntotas**.*
- *Es una función creciente en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.*

Ahora, analicemos las propiedades de las funciones $\cot x$, $\sec x$ y $\csc x$ (*ver* tabla 2.8).

Notemos que $\cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$, $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ y $\csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$. Por tanto, para $\cot x$ y $\csc x$ el domino está dado por $\{x \in \mathbf{R} : x \neq n\pi,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$. Por otro lado, el dominio de $\sec x$ es el mismo dominio que para tangente, ya que el denominador es $\cos x$.

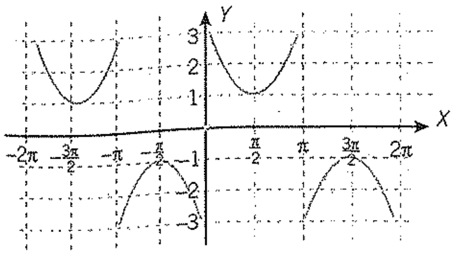
Comentario

Para calcular $\sec x$ en la calculadora, calcula $\cos x$ y luego oprime la tecla $\frac{1}{x}$.

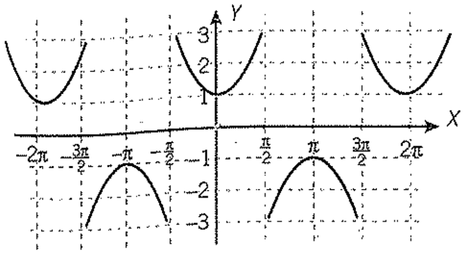
Función	Dominio	Período	Simetrías respecto al eje Y
$\cot x$	$\{x \in \mathbf{R} : x \neq n\pi,\ n \in \mathbf{Z}\}$	$\cot(x + \pi) = \frac{\cos(x + \pi)}{\operatorname{sen}(x + \pi)} = \frac{-\cos x}{-\operatorname{sen} x} = \cot x$ Entonces, $\cot x$ tiene período π.	$\cot(-x) = \frac{\cos(-x)}{\operatorname{sen}(-x)} = -\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = -\cot x$ Entonces, $\cot x$ es una función impar.
$\sec x$	$\left\{x \in \mathbf{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\right\}$	$\sec(x + 2\pi) = \frac{1}{\cos(x + 2\pi)} = \frac{1}{\cos x} = \sec x$ Entonces, $\sec x$ tiene período 2π.	$\sec(-x) = \frac{1}{\cos(-x)} = \frac{1}{\cos x} = \sec x$ Entonces, $\sec x$ es una función par.
$\csc x$	$\{x \in \mathbf{R} : x \neq n\pi,\ n \in \mathbf{Z}\}$	$\csc(x + 2\pi) = \frac{1}{\operatorname{sen}(x + 2\pi)} = \frac{1}{\operatorname{sen} x} = \csc x$ Entonces, $\csc x$ tiene período 2π.	$\csc(-x) = \frac{1}{\operatorname{sen}(-x)} = \frac{1}{-\operatorname{sen} x} = -\csc x$ Entonces, $\csc x$ es una función impar.

Tabla 2.8

$f(x) = \csc x$



$f(x) = \sec x$



$f(x) = \cot x$

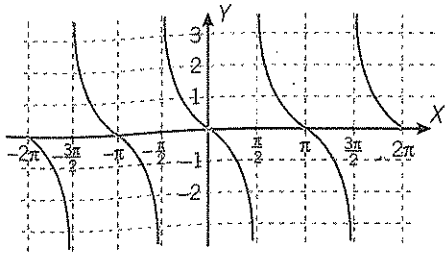


Figura 2.42

En la figura 2.42 se muestran las gráficas de las funciones $\sec x$, $\csc x$ y $\cot x$.

Por medio de las gráficas de la figura 2.42, es posible concluir que:

- *El rango de* $\sec x$ *y* $\csc x$ *es* $\{y : y \leq -1\} \cup \{y : y \geq 1\}$.
- *La función* $\cot x$ *es decreciente en todo su dominio.*
- $\sec x$ *es creciente en* $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ *y en* $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, *y decreciente en* $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ *y* $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$.
- $\csc x$ *es creciente en* $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ *y* $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, *y decreciente en* $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ *y* $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$.
- *Las funciones cosecante, secante y cotangente no son continuas, ya que no se encuentran definidas en todo* $\mathbb{R}$.
- *No es posible hablar del concepto de amplitud en esas curvas, pues no alcanzan ni valor máximo, ni valor mínimo.*

> Piensa y practica <

> Conexiones

1. Con base en los dominios de las funciones $\tan x$, $\sec x$, $\csc x$ y $\cot x$, halla el dominio de las funciones.

a. $f(x) = \sec(2x)$

b. $f(x) = \tan\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

c. $f(x) = \csc\left(\frac{x}{2}\right)$

d. $f(x) = \cot\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

Recuerda que dada una función $y = f(x)$, entonces $y = f(x - c)$ representa un desplazamiento horizontal de la misma. Si $c > 0$ es necesario trasladar c unidades hacia la derecha. Si $c < 0$, se traslada hacia la izquierda c unidades.

2. Traza las gráficas de las siguientes funciones.

a. $y = \tan\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

b. $y = \cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

c. $y = \sec\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

d. $y = \csc\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

3. Con la ayuda de las gráficas de $\sec x$ y $\csc x$, elabora la gráfica de las siguientes funciones.

a. $f(x) = \sec x + 1$

b. $f(x) = \csc x - 2$

c. $f(x) = 2\sec x$

d. $f(x) = -3\csc x$

¿Cuál es el rango de estas funciones?

4. Con la ayuda de las gráficas, encuentra valores de x que satisfacen cada ecuación.

a. $\tan x = 1$

b. $\cot x = -1$

c. $\cot x = 1$

d. $\tan x = -1$

e. $\sec x = 1$

f. $\csc x = 1$

g. $\sec x = -1$

h. $\csc x = -1$

Razonamiento lógico

5. En la tabla 2.9, marca con una **X** al frente de las propiedad que cumple cada función.

Propiedad	$f(x) = \tan x$	$f(x) = \cot x$	$f(x) = \sec x$	$f(x) = \csc x$
Su rango es $\mathbf{R}$.				
$f(x)$ es impar.				
$f(x)$ es decreciente.				
$f(x)$ es par y su período es π.				
Su rango es $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.				
Dominio: $\{x \in \mathbf{R} : x \neq n\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$				
$f(0) = 0$				
$f(x) = \frac{1}{2}$ tiene solución.				

Tabla 2.9

6. Observando las gráficas de las funciones trigonométricas $\tan x$, $\sec x$, $\csc x$ y $\cot x$, determina el valor de verdad de las siguientes afirmaciones.

a. Si x crece de $\frac{\pi}{2}$ a π, entonces $\sec x$ es creciente.

b. Si x crece de π a $\frac{3\pi}{2}$, entonces $\csc x$ es decreciente.

c. Si x crece de π a $\frac{3\pi}{2}$, entonces $\csc x$ es creciente.

d. Si x crece de π a $\frac{3\pi}{2}$, entonces $\cot x$ es creciente.

e. La función tangente tiene distinto período que la función cosecante.

f. Secante es una función impar.

7. Traza la gráfica de las siguientes funciones.

a. $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$

b. $f(x) = \tan^2 x$

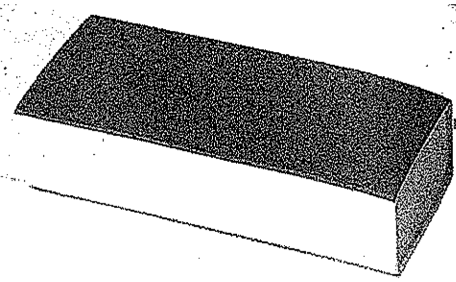
c. $g(x) = -\sec x$

d. $h(x) = 2 + \operatorname{sen} x + \cos x$

Uso de la tecnología

8. Evalúa, en la calculadora, en modo radianes, las funciones $\sec x$, $\csc x$, $\cot x$ y $\tan x$ en los puntos $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{\pi}{3}$, $-\pi$, $-\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{8}$, $\frac{\pi}{12}$, $-\frac{\pi}{12}$. Discute los resultados con tus compañeros y compañeras.

Evaluación por competencias



Autoevaluación

A continuación aparecen los indicadores de logro. Marco ✔ en la columna Sí, si el logro indicado está superado o ✘ en la columna No, si está por superar.

	Sí	No
> Interpreto los valores de las seis funciones trigonométricas en la circunferencia, para θ un número real.	☐	☐
> A partir del valor de una función trigonométrica, hallo los valores de las demás funciones.	☐	☐
> Establezco adecuadamente la relación entre las funciones trigonométricas de ángulos complementarios.	☐	☐
> Hallo el ángulo de referencia de un ángulo dado.	☐	☐

Coevaluación

Con los siguientes ejercicios, afianzamos los indicadores de logro que hemos superado y reforzamos aquellos que están por superar.

1. Si $\csc t = 2$ y $\frac{\pi}{2} < t < \frac{3\pi}{2}$, encontremos $\operatorname{sen} t$, $\cos t$, $\tan t$, $\cot t$, $\sec t$.

2. En cada caso, dibujemos en posición normal el ángulo cuya medida se indica. Ubiquemos un punto sobre su lado terminal y hallemos los valores de seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante en caso de existir.

a. $\frac{\pi}{3}$ radianes

b. $\frac{7\pi}{3}$ radianes

c. $-\frac{5\pi}{2}$ radianes

3. Determinemos el ángulo de referencia para cada ángulo. Dibujemos en un mismo plano cartesiano, el ángulo dado y su ángulo de referencia.

a. $189°$ **b.** $298°$

c. $\frac{19\pi}{7}$ **d.** $\frac{29\pi}{3}$

4. Dibujemos las siguientes funciones y describamos su período, rango y amplitud.

a. $f(x) = \cos(4x)$ **b.** $f(x) = -2\operatorname{sen}(2x)$

c. $h(x) = 6 + 3\cos x$ **d.** $j(x) = -1 - \operatorname{sen}(4x)$

e. $p(x) = \cos x + 3$ **f.** $f(x) = -\frac{1}{2}\operatorname{sen} x + \frac{1}{2}$

g. $f(x) = -\operatorname{sen} x - 1$

5. En el intervalo $[2\pi, 6\pi]$ hallemos las soluciones a las ecuaciones.

a. $\operatorname{sen} x = 1$ **b.** $\operatorname{sen} x = -1$

c. $\tan x = 1$ **d.** $\cos x = -1$

e. $\cos x = 1$ **f.** $\sec x = -1$

6. Usemos los ángulos de referencia para hallar los valores que se indican.

a. $\csc(-135°)$ **b.** $\sec 930°$

c. $\tan 300°$ **d.** $\operatorname{sen} \frac{16\pi}{3}$

7. Si $\cos\beta = -\frac{3}{5}$ y $\operatorname{sen}\beta = \frac{4}{5}$, encontremos los valores de las demás funciones trigonométricas para el ángulo β.

8. En la tabla 2.10, marquemos con una **X** al frente de las propiedades que cumple cada función.

Propiedad	$\operatorname{sen} x$	$\cos x$	$\tan x$	$\cot x$	$\sec x$	$\csc x$
$f(x)$ es impar.						
$f(x)$ es par.						
$f(x)$ tiene un período 2π.						
$f(x)$ tiene un período π.						
$f(x)$ es decreciente en el $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.						
$f(x)$ es creciente en el $\left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$.						
Su rango es $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.						
Su rango es $[-1, 1]$.						
Su dominio es $\mathbf{R}$.						
No está definida para todos los reales.						

Tabla 2.10

9. En la figura 2.43 se representa una función. Analicémosla y respondamos.

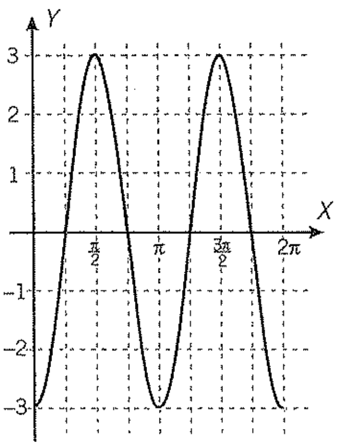


Figura 2.43

a. ¿Cuál es el rango y el dominio de la función?

b. ¿Cuál es el período de la función?

c. Señalemos un ciclo de la función.

d. ¿Cuál es la amplitud de la función?

e. ¿Cuáles son los ceros de la función?

f. Hallemos una fórmula que defina esta función. Justifiquemos nuestra respuesta.

Tu creación

En la figura 2.44 se muestra la gráfica de una función periódica.

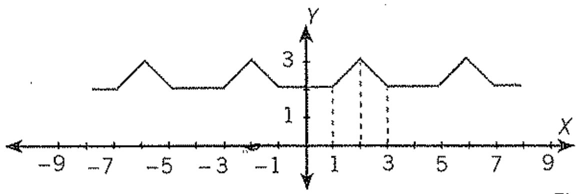
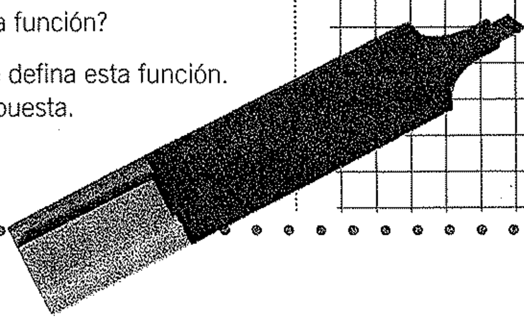


Figura 2.44

Realiza los cambios adecuados para que la función sea impar.



Prueba ICFES

Selecciona de las cuatro opciones sólo una de las respuestas, la que consideres relaciona de manera más estructurada los conceptos matemáticos con las condiciones particulares de la situación problema.

Sea β un ángulo que se encuentra en el cuadrante III y cumple que $\cos\beta = -\frac{1}{2}$.

1. ¿Cuál es el valor de $\operatorname{sen}\beta$?

a. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **b.** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

c. $\frac{1}{2}$ **d.** $-\frac{1}{2}$

2. ¿Cuál es el valor de $\tan\beta$?

a. 1 **b.** –1

c. $\sqrt{3}$ **d.** $-\sqrt{3}$

3. ¿Cuál es el valor de $\sec\beta$?

a. –2 **b.** 2

c. $\frac{2\sqrt{3}}{2}$ **d.** $-\frac{2\sqrt{3}}{2}$

4. El ángulo de referencia de β es:

a. $\alpha = \pi - \beta$ **b.** $\alpha = \beta - \pi$

c. $\alpha = \beta - \frac{\pi}{2}$ **d.** $\alpha = 2\pi - \beta$

Según la función $y = -3\cos\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right) + 1$, responde los puntos del 5 al 9.

5. El rango de y es:

a. $[-3, 3]$ **b.** $\left[-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$

c. $[-2, 4]$ **d.** $[-2, 3]$

6. El período p de y está dado por:

a. $p = 2\pi$ **b.** $p = \frac{\pi}{2}$

c. $p = 4\pi$ **d.** $p = \pi$

7. Si $x = \frac{\pi}{3}$, entonces el valor de y es:

a. 1 **b.** 2

c. 4 **d.** –2

8. El desplazamiento de fase de y respecto a $\cos(2x)$ es:

a. $\frac{2\pi}{3}$ unidades hacia la izquierda.

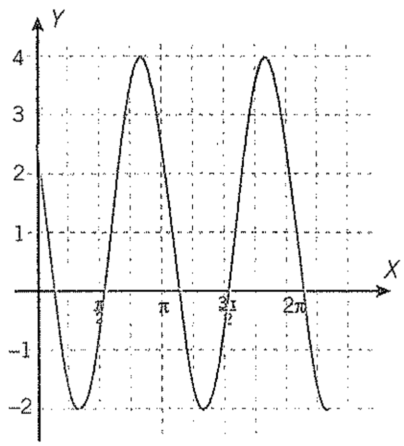
b. $\frac{2\pi}{3}$ unidades hacia la derecha.

c. $\frac{\pi}{3}$ unidades hacia la izquierda.

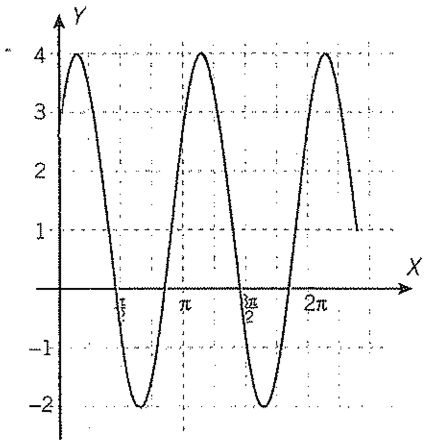
d. $\frac{\pi}{3}$ unidades hacia la derecha.

9. La gráfica de y es:

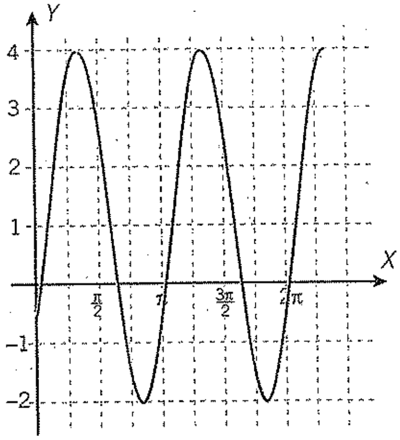
a.



b.



c.



d.

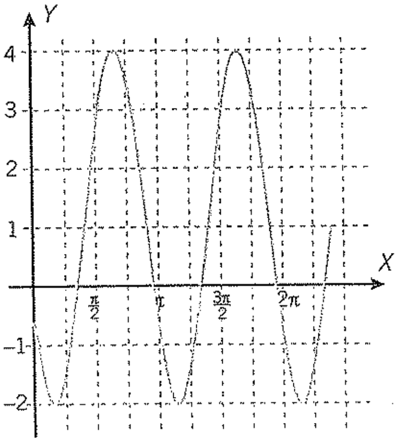


Figura 2.45

Dadas las gráficas de las funciones trigonométricas, resuelve los ejercicios 10 a 13.

10. Un cuadrante donde la función seno y tangente sean negativas es:

a. Cuadrante I **b.** Cuadrante II

c. Cuadrante III **d.** Cuadrante IV

11. La función coseno es creciente en el intervalo:

a. $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ **b.** $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

c. $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ **d.** $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$

12. El rango de la función $\cot x$ es:

a. $[-1, 1]$ **b.** $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

c. Todos los reales. **d.** $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

13. Una de las siguientes proposiciones es falsa.

a. $\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$ **b.** $\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x$

c. $\cot x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ **d.** $\csc x = \sec\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

14. Para hallar la altura del edificio *A* de la figura 2.46, se requiere conocer:

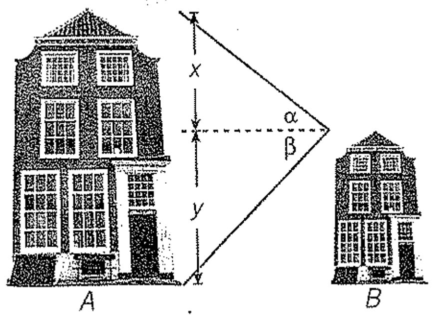


Figura 2.46

a. x, α y β.

b. x y β.

c. α y β.

d. y y β.

15. La expresión que es igual a $\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}$ es:

a. $\cos\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{6} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{6}$

b. $-\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}$

c. $\cos\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{6} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{6}$

d. $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}$

16. De acuerdo con la figura 2.47, determina cuál afirmación es falsa:

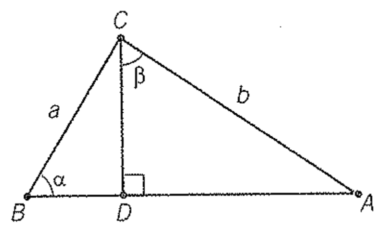


Figura 2.47

a. $\angle BCD = \frac{\pi}{2} - \alpha$.

b. $\angle BCA = \frac{\pi}{2} - (\alpha - \beta)$.

c. El área del $\triangle BCD$ es igual a $\frac{1}{2}ab\cos\alpha\cos\beta$.

d. El área del $\triangle DCA$ es igual a $\frac{1}{2}\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$.

Conexión histórica

Métodos numéricos

Los métodos numéricos son una rama de las Matemáticas que tiene por objetivo describir, analizar y crear algoritmos que permitan resolver problemas matemáticos, en los que se involucren cantidades numéricas, con una precisión determinada.

En el contexto del cálculo numérico, un **algoritmo** es un procedimiento que puede llevar a una solución aproximada de un problema mediante un número finito de pasos que pueden ejecutarse de manera lógica. En algunos casos, se les da el nombre de **métodos constructivos** a estos algoritmos numéricos.

En general, estos métodos se aplican cuando se necesita un valor numérico como solución a un problema matemático, y los procedimientos "exactos" o "analíticos" son incapaces de dar una respuesta. Debido a ello, son procedimientos de uso frecuente por físicos e ingenieros, y cuyo desarrollo se ha favorecido por la necesidad de éstos de obtener soluciones, aunque la precisión no sea completa. Debe recordarse que la Física experimental, por ejemplo, nunca arroja valores exactos sino intervalos que engloban la gran mayoría de resultados experimentales obtenidos, ya que no es habitual que dos medidas del mismo fenómeno arrojen valores exactamente iguales.

Esta rama también es útil para obtener aproximaciones de los valores de las funciones. Debido a que es fácil evaluar en polinomios, resulta bastante útil expresar las funciones trigonométricas en función de polinomios. Por ejemplo, utilizando el cálculo se puede demostrar que $\operatorname{sen} t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \frac{t^7}{5!} + \ldots$; $\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \ldots$,

donde $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$. Estas fórmulas, conocidas como series de Taylor, reciben este nombre debido a que fueron demostradas por el matemático inglés Brook Taylor (1685-1731). Cuanto más términos de la serie, más precisos serán los valores obtenidos para las funciones $\operatorname{sen} t$ y $\cos t$. Por ejemplo, si utilizamos los cinco primeros términos de la serie de Taylor para calcular sen 0,8, obtenemos:

$$\operatorname{sen} 0{,}8 \approx 0{,}8 - \frac{0{,}8^3}{3!} + \frac{0{,}8^5}{5!} - \frac{0{,}8^7}{7!} + \frac{0{,}8^9}{9!}$$
$$\approx 0{,}71735609$$

Con la calculadora en modo radianes obtenemos que:
sen 0,8 = 0,717356090899522761627174610581 39.

Vale la pena anotar que la calculadora utiliza fórmulas como las anteriores para calcular las funciones trigonométricas, exponenciales y logarítmicas con los términos suficientes para asegurar la mayor precisión en el resultado. ■

Reflexiona

1. Describe algunas aplicaciones de los métodos numéricos.
2. Calcula con una serie de Taylor de cuatro términos $\cos 1$, $\operatorname{sen}(-1)$. Compara con los resultados de la calculadora.
3. ¿Qué diferencia existe entre los métodos exactos y los métodos aproximados?

Glosario

Ángulos coterminales: α y β son ángulos coterminales si comparten el punto de intersección del lado terminal con la circunferencia unitaria.

Amplitud de una función: es la mitad de la diferencia entre los valores máximos y mínimos de una función periódica y se denota con la letra A.

Ángulo de referencia: dado un ángulo en posición normal θ, es el ángulo agudo y positivo α que forma el lado final de θ con el eje X.

Ciclo de la una función periódica: la gráfica de una función periódica en un intervalo cuya longitud es el periodo, es un ciclo en la curva.

Círculo unitario: círculo con centro en el origen y radio 1.

Cofunción: las funciones f y g son *cofunciones* si $f(x) = g\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ y, por tanto, $\left(f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = g(x)\right)$, para todo x tal que x y $\frac{\pi}{2} - x$ pertenezcan al dominio de f y g.

Curva sinusoidal: corresponde a la gráfica de una función sinusoidal o función que se obtiene por transformaciones sobre las funciones seno o coseno.

Dominio de una función: subconjunto de los números reales en el que se puede definir una función determinada.

Función circular: es aquella que depende de las coordenadas de un punto, en el círculo unitario, de la distancia de este al origen.

Función creciente: una función f es creciente en el intervalo $[a, b]$, si para todo par $x_1, x_2 \in [a, b]$, con $x_1 < x_2$ se sigue que $f(x_1) < f(x_2)$.

Función decreciente: una función g es decreciente en el intervalo $[a, b]$, si para todo par $x_1, x_2 \in [a, b]$ con $x_1 < x_2$, se sigue que $g(x_1) > g(x_2)$.

Función impar: una función f cuya gráfica es simétrica respecto al origen 0, se llama función impar, es decir, para todo x en su dominio $f(-x) = -f(x)$.

Función par: una función f cuya gráfica es simétrica respecto al eje Y, se llama función par, es decir, para todo x en su dominio $f(-x) = f(x)$.

Función periódica: una función f es periódica si existe una constante $p > 0$, tal que $f(x + p) = f(x)$ para todo x en el dominio de f.

Funciones uno a uno: f es una función uno a uno en el intervalo $[a, b]$ si para todo par de números distintos $x_1, x_2 \in [a, b]$, sus imágenes $f(x_1)$, $f(x_2)$ son distintas. Es decir, si $x_1, x_2 \in [a, b]$, $x_1 \neq x_2$, entonces $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Rango de una función: todos los posibles valores que toma una función evaluada en los elementos de su dominio.

Razonamiento

1. Siete de los diez números, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9, están representados en la figura 2.48 por una letra distinta. Sitúa esos dígitos de manera que los productos $A \times B \times C$, $B \times G \times E$ y $D \times E \times F$ sean iguales. No puedes repetir ningún dígito.

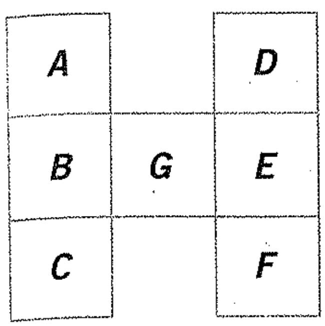


Figura 2.48

2. Ubica los números del 1 al 8 en los círculos de la figura 2.49, de forma que la suma de cada lado del cuadrado sea igual a 13.

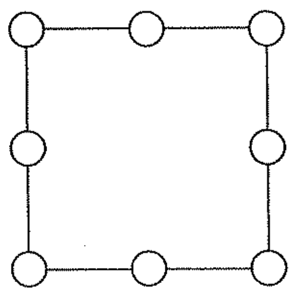


Figura 2.49

3. Sitúa los números del 1 al 12 en los círculos de la figura 2.50, de manera que la suma de cada lado del hexágono sea igual a 17.

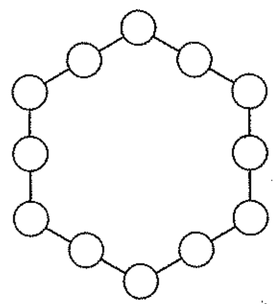
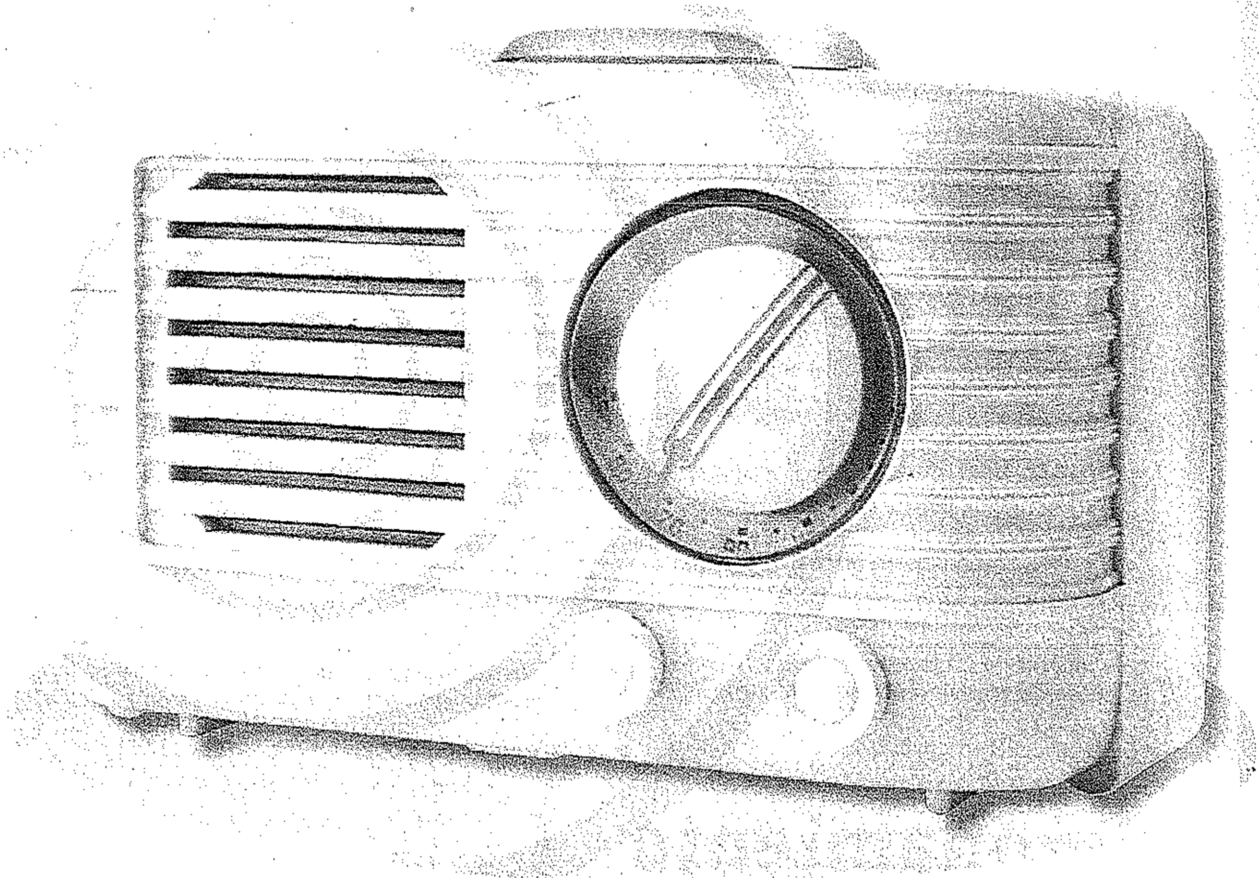


Figura 2.50

> Funciones trigonométricas



LAS SEÑALES

Una señal es todo fenómeno que puede representarse mediante una función continua (cuyo dominio es el conjunto de los números reales) o discreta (cuyo dominio es los números enteros). Algunos ejemplos de señales son: la variación de la presión de aire a la salida de un parlante, la variación de la intensidad electromagnética que llega a una antena receptora, la variación de la temperatura máxima tomada diariamente, los colores de una imagen digitalizada (pixeles), entre otros.

Una señal continua es aquella definida para todos los puntos de un intervalo determinado del conjunto de los números reales. Entre ellos están la corriente, el voltaje, el sonido, la luz, etcétera. Una señal discreta es una señal discontinua que está definida para un subconjunto de los números enteros. Su importancia en la tecnología es que los computadores y microchips que son utilizados en este nuevo mundo "digital", solo manejan señales discretas. En

Estándares:

Conexiones

Relacionar conceptos

Modelar situaciones de la Física mediante funciones trigonométricas directas e inversas.

Comunicación

Leer, escribir y comunicar

Explicar situaciones modeladas con funciones trigonométricas inversas.

inversas

la naturaleza, una señal discreta podría ser el pulso cardiaco, el rebotar de una pelota al caer libremente, etcétera. Muchas aplicaciones de ingeniería involucran el procesamiento de señales aleatorias o desconocidas a través del tiempo. Algunas de estas aplicaciones son: predicción, donde obtenemos futuros valores de una señal usando valores pasados de la misma; filtrado, donde buscamos recuperar los valores de una señal que ha sido alterada por ruido o fallas; modulación, donde convertimos señales de información de bajas frecuencias en señales de transmi-

Las transmisiones de radio son señales sonoras que se superponen en una forma de onda electromagnética armónica conocida como onda portadora. Existen dos tipos de transmisión de radio, conocidas como amplitud modulada (AM) y frecuencia modulada (FM).

sión de alta frecuencia que se transmiten más fácilmente en el medio de transmisión. En todos estos casos, el procesamiento de las señales involucra convertir una señal en otra. Es decir, se efectúa una transformación de una función del tiempo (la señal de entrada) en otra función del tiempo (la señal de salida) para lo cual empleamos las funciones trigonométricas.

Las transmisiones de radio son señales sonoras que se superponen en una forma de onda electromagnética armónica conocida como onda portadora. Existen dos tipos de transmisión de radio, conocidas como amplitud modulada (AM) y frecuencia modulada (FM). En AM la señal cambia, es decir, cambia la amplitud de la portadora, pero no cambia la frecuencia. En FM la onda sonora cambia la frecuencia, pero no cambia la amplitud. ▪

Adaptado de: Wikipedia http://es.wikipedia.org/wiki/Procesado_de_Se%C3%B1al y http://electronicaiv.webcindario.com/introduccion.htm

Analiza y resuelve

De acuerdo con la lectura anterior, responde.

1. Una señal puede representarse mediante:
   - **a.** Una intensidad electromagnética.
   - **b.** Una función continua.
   - **c.** Una función continua o discreta.
   - **d.** Una modulación.
2. El voltaje y el sonido son ejemplos de:
   - **a.** Filtrado.
   - **b.** Señal discontinua.
   - **c.** Señal continua.
   - **d.** Todas las anteriores.
3. No es una aplicación de procesamiento de señales aleatorias a través del tiempo:
   - **a.** Filtrado.
   - **b.** Transmisión.
   - **c.** Predicción.
   - **d.** Modulación.
4. En la modulación:
   - **a.** Se recuperan los valores de una señal con ruido.
   - **b.** Las señales de baja frecuencia se convierten en señales de alta frecuencia.
   - **c.** Las señales de alta frecuencia se convierten en señales de baja frecuencia.
   - **d.** Se pierden los valores de una señal con ruido.
5. Determina si cada afirmación es falsa o verdadera.
   - **a.** La señal de AM cambia la frecuencia de la portadora.
   - **b.** El filtrado de una señal consiste en recuperar los valores que han sido alterados por ruidos o fallas.
   - **c.** La predicción de señales es tratar de obtener valores futuros usando valores pasados

Razonamiento lógico

Desarrollar destrezas matemáticas

Reconocer las características de las funciones trigonométricas inversas.

Resolución de problemas

Emplear estrategias en la resolución de problemas

Solucionar problemas empleando las funciones trigonométricas inversas.

Funciones inversas

Logro: determinar las condiciones, analíticas y geométricas que debe cumplir una función para que tenga inversa.

Recordemos que una **función** es una regla o relación entre dos conjuntos A y B, que asigna a cada elemento x de A un único elemento $f(x)$ (imagen de x bajo f) de B.

Simbólicamente:

$$\begin{array}{l} f: A \to B \\ f(x) = y \end{array} \quad \textit{donde } x \in A,\ y \in B$$

Por lo general, se considera que A y B son subconjuntos de los números reales. A recibe el nombre de **dominio** y B el de **codominio**. El **rango** de f es el conjunto de los valores de $f(x)$ para todos los x en el dominio.

Si tenemos una función podemos encontrar el valor de y dado el valor de x o viceversa, esto es, dado el valor de y podemos encontrar el valor de x tal que $y = f(x)$.

Ejemplo 1

Sea $f(x) = 900 - 50x$, y y un valor particular del rango. ¿Qué valor de x debemos obtener para que se satisfaga $f(x) = y$?

Solución

Para responder la pregunta debemos despejar la variable x de la ecuación:

$y = 900 - 50x$	Remplazamos $f(x)$ por y.
$y - 900 = -50x$	Despejamos $-50x$.
$\dfrac{900 - y}{50} = x$	Despejamos x.

Luego el valor de x con el cual encontramos y es $x = \dfrac{900 - y}{50}$. ◀

Comentario

La definición de $(f \circ g)(x)$ implica que primero se aplica la función g a x y después la función f a g(x). El dominio de $f \circ g$ es el conjunto de todos los números x en el dominio de g, tales que g(x) se encuentra en el dominio de f.

A partir del resultado anterior podemos definir una nueva función en x: $g(x) = \dfrac{900 - x}{50}$.

Observemos que las funciones $y = f(x)$ y $y = g(x)$ cumplen que:

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f\left(\frac{900 - x}{50}\right) = 900 - 50\left(\frac{900 - x}{50}\right) = x$$

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(900 - 50x) = \frac{900 - (900 - 50x)}{50} = x$$

Es decir, el resultado de la composición entre las funciones $f(x)$ y $g(x)$ es la función identidad $I(x) = x$.

Por tanto diremos que las funciones $f(x) = 900 - 50x$ y $g(x) = \dfrac{900 - x}{50}$ son inversas una de la otra.

*Dadas las funciones $f: A \to B$ y $g: B \to A$ que cumplen $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = I(x)$, se dice que g es la **inversa** de f y lo simbolizamos $g(x) = f^{-1}(x)$ o f es la inversa de g, simbolizado $f(x) = g^{-1}(x)$.*

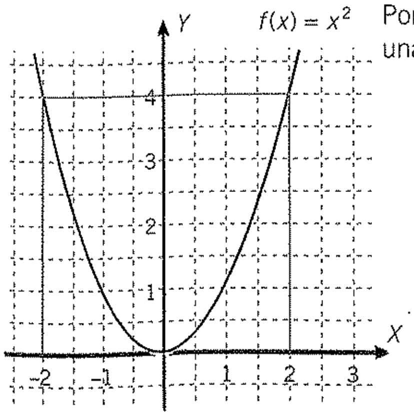


Figura 3.1

También se tiene que el dominio de f es el rango de f^{-1} y que el dominio de f^{-1} es el rango de f.

No todas las funciones tienen inversas. Por ejemplo, si $f(x) = x^2$ y $y = 4$, no existe un único x tal que $x^2 = 4$ (*ver* figura 3.1).

¿Qué condiciones debe cumplir una función para que tenga inversa?

*La función $f: A \to B$ tiene **inversa** si satisface las propiedades:*

1. ***Sobreyectiva:** todo elemento de B es imagen de algún elemento de A.*
2. ***Inyectiva (uno a uno):** elementos diferentes de A tienen imágenes diferentes en B.*

Simbólicamente:

1. *Imagen $(f) = f(A) = B$.*
2. *Para todo $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$, se cumple que $f(x_1) \neq f(x_2)$.*

Comentario

Si una función es sobreyectiva e inyectiva se dice que es biyectiva.

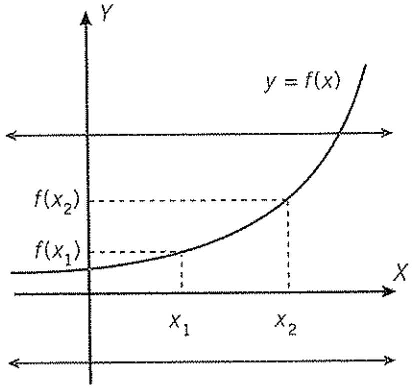
Pensamiento crítico

¿Por qué el hecho que no exista un único x tal que $x^2 = 4$ en $f(x) = x^2$ para $y = 4$ es suficiente para decir que f(x) no tiene inversa?

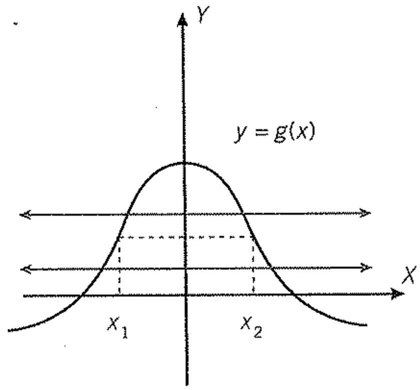
¿La expresión "Si $f(x_1) = f(x_2)$, entonces $x_1 = x_2$" equivale a afirmar que la función f es inyectiva?

Analicemos las gráficas de la figura 3.2.

Observemos que cualquier recta horizontal positiva interseca en un punto a la gráfica de *f* y las rectas horizontales negativas y cero no la intersecan. En la gráfica de *g*, existen rectas horizontales que intersecan esa función en más de un punto para un intervalo específico. Por tanto, *f* es una función uno a uno y la función *g* es sobreyectiva y no uno a uno en el intervalo específico.



$x_1 \neq x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2)$



$x_1 \neq x_2 \quad \Rightarrow \quad g(x_1) \neq g(x_2)$

Figura 3.2

*Gráficamente f es **uno a uno** si toda recta horizontal interseca la gráfica de f máximo en un punto.*
*f es **sobreyectiva** si toda recta horizontal interseca la gráfica de f por lo menos en un punto.*

Ejemplo 2

¿Cuáles de las gráficas de la figura 3.3a corresponden a una función uno a uno?

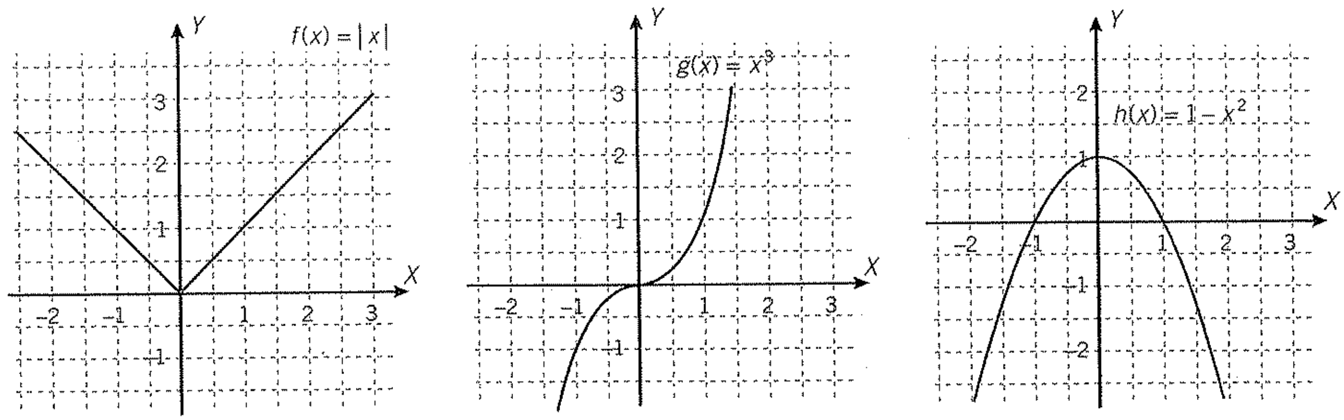


Figura 3.3a

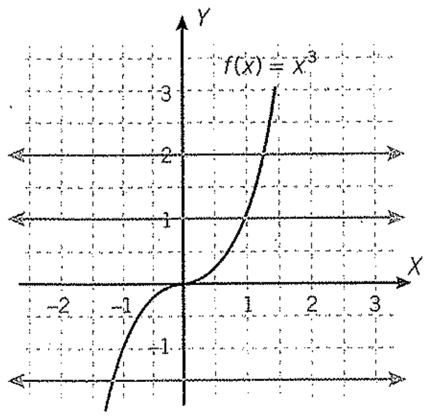


Figura 3.3b

Solución

Si trazamos rectas horizontales (paralelas al eje X) podemos ver que f y h no son uno a uno y g sí lo es. Puesto que la intersección entre cada recta horizontal y la gráfica de g es un punto (*ver* figura 3.3b), podemos decir que g es uno a uno y sobreyectiva, condiciones que aseguran la existencia de su función inversa. Si $y = g(x)$ es uno a uno y sobreyectiva, entonces todo valor de y en el rango proviene de un único valor de x; de esta manera podemos escribir a x como una función de y, siendo esta nueva función la inversa de g. ◀

Si una función no es uno a uno, podemos restringir su dominio a un intervalo I para obtener una nueva función uno a uno en I. Por ejemplo, la función $h(x) = 1 - x^2$ definida en **R** no es uno a uno (*ver* figura 3.3a), pero si restringimos el dominio de h al intervalo $[0, 3]$, obtenemos una nueva función $h_1(x) = 1 - x^2$ con dominio $[0, 3]$, la cual es uno a uno, como puede verificarse en la figura 3.4.

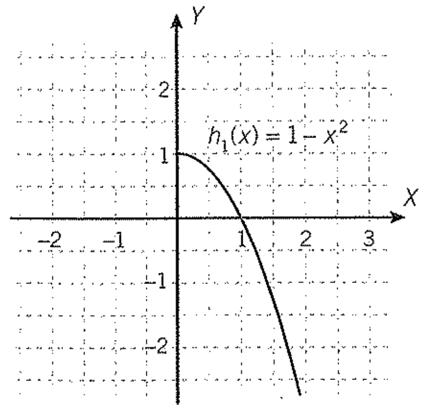


Figura 3.4

Si la función $f(x)$ tiene inversa, los pasos para determinar la función inversa de $f(x)$ son:

1. *Escribir $y = f(x)$.*
2. *Resolver la ecuación $y = f(x)$ para x. El resultado obtenido es una ecuación de la forma $x = f^{-1}(y)$.*
3. *Intercambiar x y y en la ecuación del paso 2. Esto expresa a $f^{-1}(x)$.*

Ejemplo 3

Calculemos la función inversa de $h_1(x) = 1 - x^2$.

Solución

Como analizamos anteriormente, para que la función h_1 tenga inversa debe estar definida en el dominio $[0, 3]$, por tanto su rango será $[-8, 1]$ (verifica este resultado). Como ya conocemos que h_1 tiene inversa procedemos a encontrarla.

$y = h_1(x)$	Empleamos el paso 1 para determinar funciones inversas
$y = 1 - x^2$	Remplazamos $h_1(x)$ por $1 - x^2$.
$x^2 = 1 - y$	Despejamos el valor de x^2.
$x = \sqrt{1-y}$, para $y \leq 1$	Despejamos x y obtenemos el valor de x en términos de y (paso 2).
$y = \sqrt{1-x}$	Empleamos el paso 3 (hacemos $y = x$ y $x = h_1^{-1}(x)$).
$h_1^{-1}(x) = \sqrt{1-x}$	Obtenemos la función inversa de h_1 definida en el intervalo $[-8, 1]$.

Comprobemos que $h_1^{-1}(x) = \sqrt{1-x}$ definida en $[-8, 1]$ con valores en $[0, 3]$ es la inversa de $h_1(x)$ con dominio $[0, 3]$ y rango $[-8, 1]$.

Sea $x \in [0, 3]$, entonces $h_1(x) \in [-8, 1]$; además:

$h_1^{-1}[h_1(x)] = h_1^{-1}(1 - x^2) = \sqrt{1-(1-x^2)} = \sqrt{x^2} = x$, porque $x \geq 0$.

$h_1[h_1^{-1}(x)] = h_1\left(\sqrt{1-x}\right) = 1 - \left(\sqrt{1-x}\right)^2 = x$.

Observemos que la gráfica de $h_1^{-1}(x)$ es la imagen simétrica respecto a la recta $y = x$ de la gráfica de $h_1(x)$ (*ver* figura 3.5). ◀

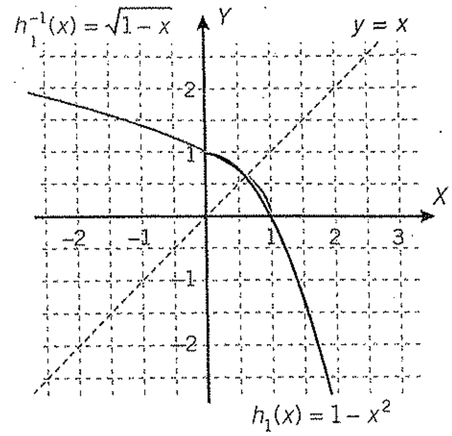


Figura 3.5

Ejemplo 4

¿Cuál es la inversa de $f(x) = x^3$?

Solución

Después de corroborar que la función $f(x)$ tiene inversa, procedemos a calcularla.

Paso 1:	$y = x^3$	Remplazamos $f(x)$ con y.
Paso 2:	$\sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{x^3}$	Despejamos x en términos de y.
	$x = \sqrt[3]{y}$	Obtenemos el valor de x en términos de y.
Paso 3:	$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$	Hacemos $y = x$ y $x = f^{-1}(x)$.

Observemos las funciónes $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ en la figura 3.6. ◀

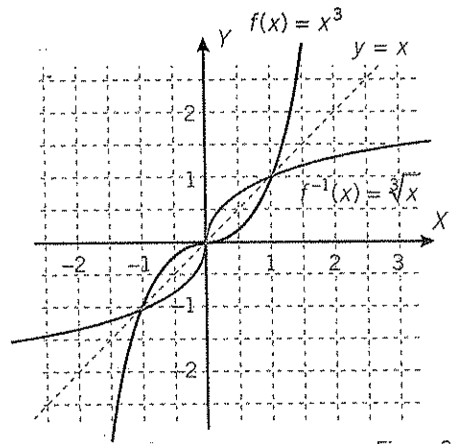


Figura 3.6

Pensamiento crítico

¿Existe alguna función lineal $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$, cuya inversa sea perpendicular a $-f(x)$?

> Piensa y practica <

> Comunicación

1. Escribe una expresión matemática para representar la inversa de las siguientes funciones. Explica el resultado.

a. La longitud de la circunferencia de un círculo es una función de su diámetro $C = \pi d$.

b. El volumen de un cubo es una función de su lado l: $V = l^3$.

c. La temperatura medida en °C es una función de la temperatura en °F: $C° = \frac{5}{9}(F° - 32)$.

d. El costo total de producción es una función del número de artículos fabricados: $C(x) = a + bx$, donde a es un costo fijo y b es el costo de fabricar un solo artículo.

> Razonamiento lógico

2. Determina cuáles de las funciones son uno a uno en el intervalo $[0, \pi]$. ¿Cuáles son funciones uno a uno en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$?

a. $y = \text{sen}\,\theta$ **b.** $y = \cos\theta$

c. $y = \tan\theta$ **d.** $y = \csc\theta$

e. $y = \sec\theta$ **f.** $y = \cot\theta$

3. De acuerdo con la gráfica de la figura 3.7, determina cuáles de los siguientes puntos se encuentran en la gráfica de su función inversa.

a. (0, 1) **b.** (1, 2)

c. (1, 0) **d.** (2, 1)

e. (−1, 0) **f.** (0, −1)

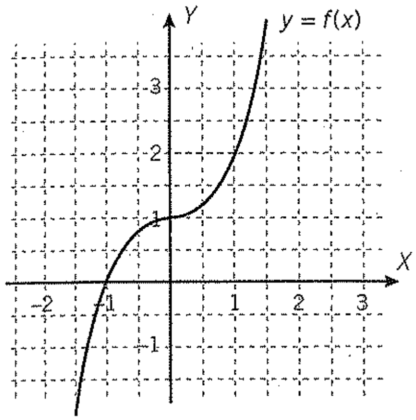


Figura 3.7

> Resolución de problemas

4. Muestra que cada función es uno a uno sobre su dominio.

a. $f(x) = 3x - 1$ **b.** $f(x) = \dfrac{1}{x - 1}$

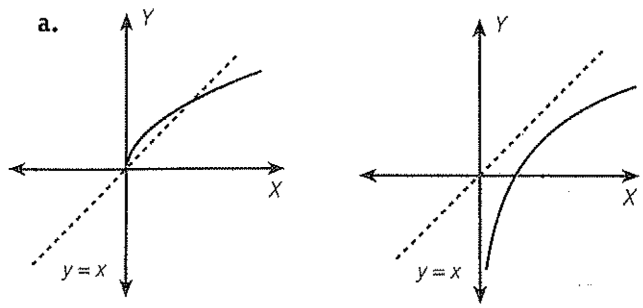
c. $f(x) = \sqrt{2x - 4}$ **d.** $f(x) = \dfrac{7 - x}{3}$

e. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ **f.** $f(x) = x^3 - 1$

5. Halla la función inversa de cada función del ejercicio 4 y verifica los resultados.

6. Traza para cada función de la figura 3.8, la gráfica simétrica respecto a la recta $y = x$, para encontrar la gráfica de $f^{-1}(x)$.

a.



b.

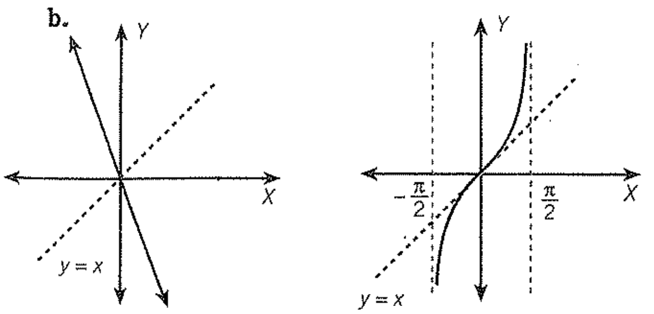


Figura 3.8

7. Completa cada proceso para encontrar la función inversa.

a. $f(x) = 2x + 1$

$y =$

$\dfrac{y-1}{2} =$

$f^{-1}(x) =$

b. $g(x) = -5x + 2$

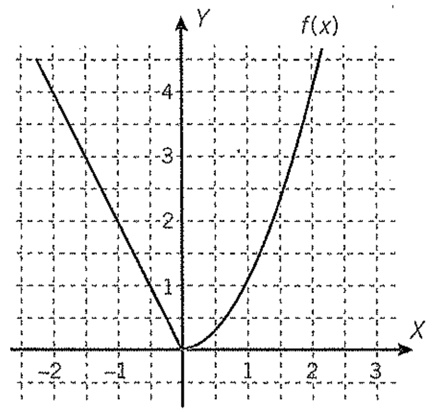
$= -5x + 2$

$x =$

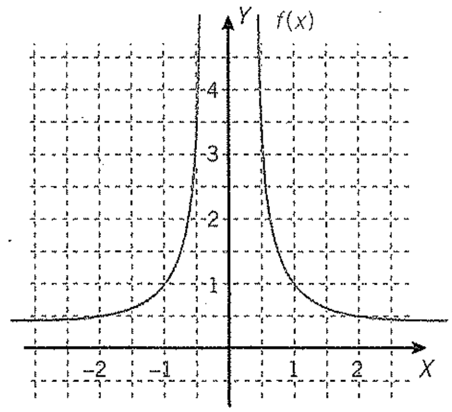
$g^{-1}(x) =$

8. Restringe el dominio de las funciones cuyas gráficas se dan en la figura 3.9, para que las nuevas funciones sean uno a uno.

a.



b.



c.

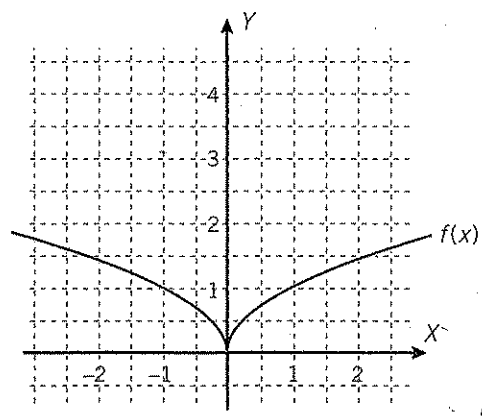


Figura 3.9

Inversa del seno

Logro: hallar el intervalo donde la función seno tenga inversa y establecer las relaciones más importantes entre las funciones seno y su inversa.

Recordemos que la función $f(x) = \text{sen}\ x$ toma valores en los reales, es decir, tiene como dominio **R** y como rango a $[-1, 1]$. Esta función no es uno a uno ya que existen infinitos valores para los cuales $\text{sen}\ x$ toma el valor 0; tres de esos valores son $x = 0$, $x = \pi$, $x = -\pi$. Es decir, no existe un único numero real x tal que $\text{sen}\ x = 0$.

Gráficamente, toda recta de la forma $y = c$, con $c \in [-1, 1]$ interseca en infinitos puntos a la gráfica de la función seno como lo observamos en la figura 3.10.

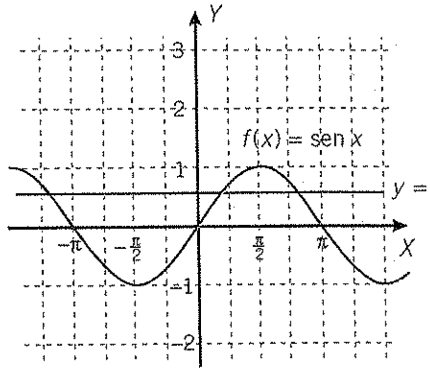


Figura 3.10

Así pues, $f(x) = \text{sen}\ x$ no tiene inversa para todos los $x \in \mathbf{R}$. Sin embargo, es posible restringir su dominio a un intervalo I donde dicha función sea uno a uno y de esta forma hallar su función inversa. Existen muchas posibilidades para efectuar esa restricción de dominio, la más natural es hacer $I = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (*ver* figura 3.11).

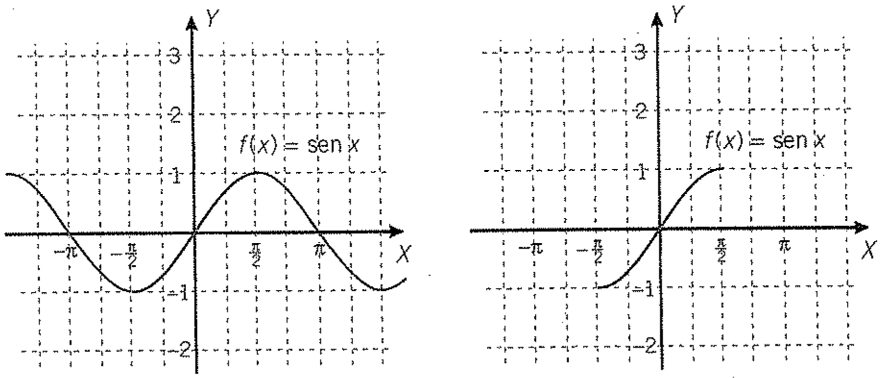


Figura 3.11

> *La función* $f(x) = \text{sen}\ x$ *con* $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *tiene* ***inversa,***
>
> *que la llamaremos* $\text{sen}^{-1}(x)$ *y está definida por:*
>
> $y = \text{sen}^{-1}(x)$, *si y sólo si,* $\text{sen}\ y = x$.

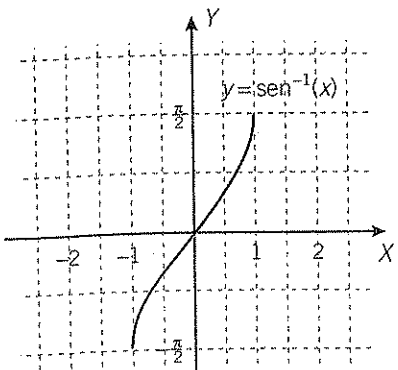


Figura 3.12

Notemos que el dominio de $\text{sen}^{-1}(x)$ es $[-1, 1]$ y su rango es $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

La figura 3.12 muestra la gráfica de la función $y = \text{sen}^{-1}(x)$, para $x \in [-1, 1]$.

Ejemplo 5

Para la función $y = \text{sen}\ x$ restringida en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, ¿cuál es el valor de x tal que $\text{sen}\ x = 0$? ¿Cuál es el valor de x tal que $\text{sen}\ x = \frac{1}{2}$?

Solución

Si $y = 0$, el único $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ para el cual $\text{sen}\ x = 0$ es $x = 0$ (*ver* figura 3.11).

Si $y = \frac{1}{2}$, el único $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ para el cual $\text{sen}\ x = \frac{1}{2}$ es $x = \frac{\pi}{6}$ (*ver* figura 3.11). ◀

Comentario

La notación $sen^{-1}x$ representa la función inversa de sen x respecto a la composición de funciones y no se refiere a la razón inversa $\frac{1}{sen\, x}$, que representa la función cosecante.

A continuación definimos la función inversa de $f(x) = \text{sen}\, x$, para x en $[-1, 1]$.

*La **inversa de la función seno**, llamada **arcoseno**, es la función que a cada x en $[-1, 1]$ le hace corresponder un único valor y en $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, tal que $sen\ y = x$.*

La manera de simbolizar la función arcoseno es $f(x) = sen^{-1}(x)$ o $f(x) = arcsen(x)$.

Además, se cumplen las siguientes propiedades:

- $sen\,(sen^{-1}x) = x$ *para* $-1 \leq x \leq 1$
- $sen^{-1}(sen\, x) = x$ *para* $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

Ejemplo 6

Sin utilizar la calculadora encontremos el valor indicado.

a. $\text{sen}^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ **b.** $\text{sen}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ **c.** $\text{sen}^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **d.** $\text{sen}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ **e.** $\text{sen}^{-1}(-1)$

Solución

Observemos la tabla 3.1.

x	$\text{sen}^{-1}x$	Justificación
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y $\frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\text{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ y $-\frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y $\frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
$\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{6}$	$\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ y $\frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
-1	$-\frac{\pi}{2}$	$\text{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ y $-\frac{\pi}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Tabla 3.1

Ejemplo 7

La corriente (en amperios) de un circuito de corriente alterna en un tiempo t (en segundos) está dado por $I = 20\text{sen}\left(\frac{\pi t}{5} - \frac{\pi}{2}\right)$. Hallemos el valor de t para que $I = 10$.

Solución

Debemos tener en cuenta que para cualquier ángulo α, $-\frac{\pi}{2} \leq \text{sen}\alpha \leq \frac{\pi}{2}$. Así, considerando a $\alpha = \frac{\pi}{5}t - \frac{\pi}{2}$ tenemos que, $-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{5}t - \frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2}$, es decir, $0 \leq t \leq 5$. Por otra parte,

$10 = 20\,\text{sen}\left(\frac{\pi t}{5} - \frac{\pi}{2}\right)$ Remplazamos $I = 10$.

$\text{sen}\left(\frac{\pi t}{5} - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$ Despejamos el valor de $\text{sen}\left(\frac{\pi t}{5} - \frac{\pi}{2}\right)$.

$\text{sen}^{-1}\left(\text{sen}\left(\frac{\pi t}{5} - \frac{\pi}{2}\right)\right) = \text{sen}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ Aplicamos la propiedad de una función inversa ($\text{sen}^{-1}(\text{sen}\, x) = x$).

$\frac{\pi t}{5} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}$ Utilizamos el resultado $\text{sen}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$.

$t = \frac{10}{3}$ segundos, $0 \le \frac{10}{3} \le 5$ Despejamos t y verificamos que se cumple $0 \le t \le 5$.

Ejemplo 8

Utilicemos una calculadora para hallar cada valor con cuatro cifras significativas. Demos la respuesta en radianes y en grados.

a. $\text{sen}^{-1}(-0{,}3042)$ **b.** arcsen(0,43) **c.** $\text{sen}^{-1}(1{,}34)$ **d.** $\text{sen}^{-1}\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Solución

Para hallar los valores en radianes colocamos la calculadora en (RAD) y en grados en (DEG).

x	$\text{sen}^{-1}(x)$ (radianes)	$\text{sen}^{-1}(x)$ (grados)
$-0{,}3042$	$-0{,}3091$	$-17{,}71$
0,43	0,4445	25,4676
1,34	Error (1,34 no está en el dominio de $\text{sen}^{-1}(x)$)	Error (1,34 no está en el dominio de $\text{sen}^{-1}(x)$)
$\frac{\pi}{4}$	0,9033	51,7575

Tabla 3.2

Ejemplo 9

Si en un triángulo rectángulo se tiene un ángulo agudo θ, tal que $\theta = \text{sen}^{-1}\left(\frac{7}{\sqrt{50}}\right)$, hallemos los valores de sen θ, cos θ, tan θ, csc θ, sec θ y cot θ sin utilizar calculadora.

Solución

Como $\theta = \text{sen}^{-1}\left(\frac{7}{\sqrt{50}}\right)$ y θ es agudo podemos evaluar sen a ambos lados de la igualdad, entonces $\text{sen}\,\theta = \frac{7}{\sqrt{50}}$. Con esta información, trazamos el triángulo rectángulo de la figura 3.13. Así tenemos que:

$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{50}} = \frac{\sqrt{2}}{10}$ Utilizamos la definición de cos θ.

$\tan\theta = 7$ Aplicamos la definición de tan θ.

$\csc\theta = \frac{\sqrt{50}}{7}$ Utilizamos que csc θ es la inversa de sen θ.

$\sec\theta = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ Utilizamos que sec θ es la inversa de cos θ.

$\cot\theta = \frac{1}{7}$ Utilizamos que cot θ es la inversa de tan θ.

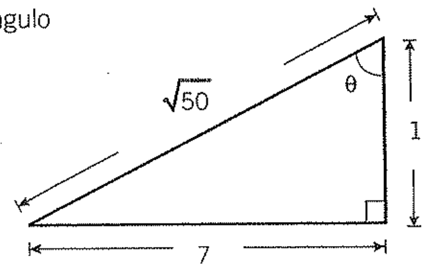


Figura 3.13

Ejemplo 10

a. ¿Cuál es el ángulo θ en el segundo cuadrante, tal que sen $\theta = 0{,}3$?

b. ¿Cuál es el ángulo θ en el tercer cuadrante, tal que sen $\theta = -0{,}3$?

Solución

a. Como se busca θ en el segundo cuadrante, el ángulo de referencia de θ es $\alpha = \pi - \theta$, la función seno es positiva en el primero y segundo cuadrantes, y $\text{sen}\,\alpha = 0{,}3$, entonces $\alpha = \text{sen}^{-1}(0{,}3)$.

Por medio de la calculadora obtenemos que $\alpha = 0{,}30469265$ rad. Como $\alpha = \pi - \theta$, entonces $\theta = \pi - \alpha$. Por tanto, $\theta = 3{,}14159265 - 0{,}30469265 = 2{,}8369$ radianes.

b. Como se busca θ en el tercer cuadrante, el ángulo de referencia de θ es $\alpha = \theta - \pi$, por lo cual $\theta = \alpha + \pi$. Como $\alpha = \text{sen}^{-1}(0{,}3) = 0{,}30469265$, entonces $\theta = 3{,}14159265 + 0{,}30469265 = 3{,}44628531$ radianes. ◀

La función arcoseno también es de gran ayuda para determinar el valor de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, cuando se conocen las longitudes de los lados.

Ejemplo 11

Con la ayuda de la función arcoseno encontremos el valor de los ángulos θ_1 y θ_2 en el triángulo rectángulo de la figura 3.14.

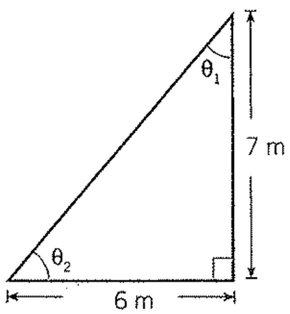


Figura 3.14

Solución

Sea h la hipotenusa del triángulo de la figura 3.14.

$h = \sqrt{7^2 + 6^2} \approx 9{,}21954$ m	Aplicamos el teorema de Pitágoras.
$\text{sen}\,\theta_1 = \dfrac{6}{9{,}21954} = 0{,}650791$	Aplicamos la definición de $\text{sen}\,\theta_1$.
$\theta_1 = \text{sen}^{-1}(0{,}650791)$	Aplicamos la propiedad de $\text{sen}^{-1}\theta_1$.
$\theta_1 = 40{,}601266 \approx 40°36'5''$	Obtenemos el valor de θ_1.

Para el ángulo θ_2 procedemos de la siguiente manera:

$\text{sen}\,\theta_2 = \dfrac{7}{9{,}21954} = 0{,}759257$	Aplicamos la definición de $\text{sen}\,\theta_2$.
$\theta_2 = \text{sen}^{-1}(0{,}7592566)$	Despejamos $\text{sen}\,\theta_2$.
$\theta_2 = 49{,}39874 \approx 49°23'55''$	Obtenemos el valor de θ_2. ◀

Ejemplo 12

Resolvamos las siguientes ecuaciones.

a. $3 = 7\,\text{sen}\,x - 1$, con $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$

b. $-12 = 20\,\text{sen}\,(2x - 1) + 3$, con $-\frac{\pi}{2} \le 2x - 1 \le \frac{\pi}{2}$

Solución

a. $3 = 7\,\text{sen}\,x - 1$

$4 = 7\,\text{sen}\,x$	Adicionamos 1 a ambos lados de la ecuación.
$\dfrac{4}{7} = \text{sen}\,x$	Dividimos por 7 ambos lados de la ecuación.
$\text{sen}^{-1}\dfrac{4}{7} = \text{sen}^{-1}(\text{sen}\,x)$	Usamos que $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ para aplicar la propiedad de $\text{sen}^{-1}(x)$.
$\text{sen}^{-1}\dfrac{4}{7} = x$	Simplificamos términos.
$x \approx 0{,}6082$ rad	Usamos la calculadora en modo RAD. Obtenemos el valor de x.

b. $-12 = 20\,\text{sen}\,(2x - 1) + 3$

$\text{sen}\,(2x - 1) = -\dfrac{3}{4}$	Despejamos el valor de $\text{sen}\,(2x - 1)$.
$2x - 1 = \text{sen}^{-1}\left(-\dfrac{3}{4}\right)$	Usamos que $-\frac{\pi}{2} \le 2x - 1 \le \frac{\pi}{2}$ para aplicar sen^{-1}.
$x \approx 0{,}07597$ rad	Usamos la calculadora en modo RAD y despejamos el valor de x. Obtenemos el valor de x. ◀

Pensamiento crítico

Encuentra otro intervalo J, donde $y = \text{sen } x$ sea uno a uno y define $f(x) = \text{sen}^{-1}(x)$ con rango J y dominio $[-1, 1]$.

Calcula $\text{sen}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$, $\text{sen}^{-1}(0{,}35)$, $\text{sen}^{-1}(-0{,}83)$. ¿Cómo determinaste esos valores?

> Piensa y practica <

> Conexiones

1. Sin utilizar la calculadora, halla los valores exactos.

a. $\text{sen}^{-1}\left(-\frac{3}{2}\right)$ **b.** $\text{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$

c. $\text{sen}^{-1}(0)$ **d.** $\text{sen}^{-1}(1)$

> Resolución de problemas

2. Con la ayuda del teorema de Pitágoras y la función arcoseno, halla las longitudes de los lados y el valor de los ángulos de cada triángulo rectángulo de la figura 3.15.

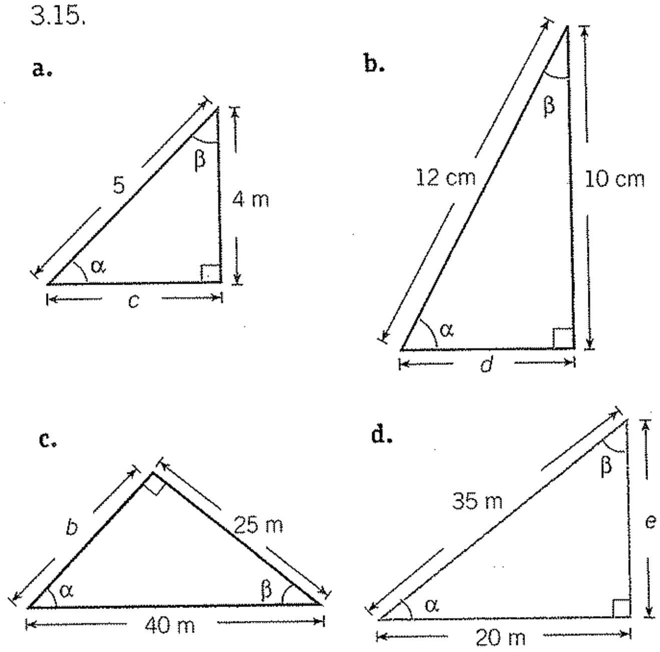


Figura 3.15

3. Si en un triángulo rectángulo se tiene un ángulo agudo θ, tal que $\theta = \text{sen}^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$, halla los valores de, $\text{sen } \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$, $\csc \theta$, $\sec \theta$ y $\cot \theta$ sin utilizar calculadora.

4. Calcula el ángulo de elevación del Sol si un edificio de 50 metros de altura proyecta una sombra de 30 metros al nivel del suelo (*ver* figura 3.16).

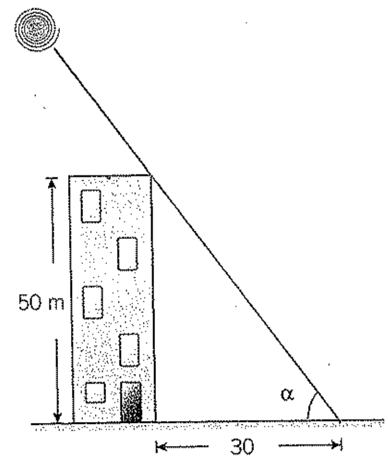


Figura 3.16

> Razonamiento lógico

5. Determina el valor de verdad de las siguientes proposiciones. Justifica tu respuesta.

a. La función $h(x) = \text{sen}(x)$, con dominio $[0, \pi]$, tiene función inversa.

b. La función $g(x) = \text{arcsen}(x)$ es una función uno a uno.

c. $\text{sen}^{-1}(x) \neq \frac{1}{\text{sen}(x)}$.

d. La función $h(x) = \text{sen}(x)$, con dominio $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, tiene función inversa con dominio $[0, 1]$.

Uso de la tecnología

6. Con la ayuda de la calculadora (en radianes) encuentra el valor de x.

a. $x = \text{sen}^{-1}(0{,}7)$

b. $\frac{x-1}{2} = \text{sen}^{-1}(0{,}01)$

c. $3\text{sen}\left(\frac{x+2}{4}\right) = 2$, con $-\frac{\pi}{2} \leq \frac{x+2}{4} \leq \frac{\pi}{2}$.

d. $3\text{sen}(x-1) + 2 = 1$, con $-\frac{\pi}{2} \leq x - 1 \leq \frac{\pi}{2}$.

e. $3\text{sen}(2x) = 2$, con $-\frac{\pi}{2} \leq 2x \leq \frac{\pi}{2}$.

Inversa del coseno

Logro: determinar un intervalo donde exista la inversa de la función coseno y establecer identidades que relacionen a la función coseno con su inversa.

Recordemos que la función $f(x) = \cos x$ tiene como dominio todos los reales y rango el intervalo $[-1, 1]$. Esta función es sobreyectiva pero no es uno a uno, ya que existen infinitos valores para los cuales $\cos x$ toma el valor de $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Estos valores son $\frac{\pi}{4} + 2n\pi$, con $n \in \mathbf{Z}$. Es decir, no existe un único número real x tal que $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Gráficamente, toda recta de la forma $y = c$, con $c \in [-1, 1]$ interseca en infinitos puntos a la gráfica de la función coseno, como lo observamos en la figura 3.17.

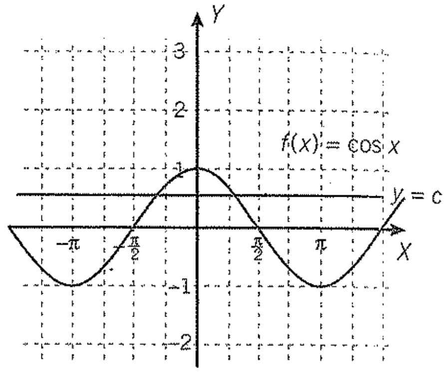


Figura 3.17

Así pues, $f(x) = \cos x$ no tiene inversa para todos los $x \in \mathbf{R}$. Sin embargo, es posible restringir su dominio a un intervalo I donde esa función sea uno a uno y de esta forma hallar su función inversa. Existen muchas posibilidades para efectuar esta restricción de dominio, la más natural es hacer $I = [0, \pi]$ (*ver* figura 3.18).

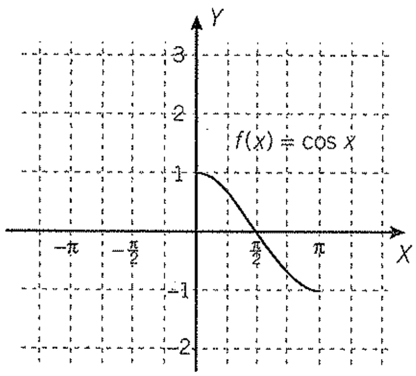


Figura 3.18

Comentario

La notación $\cos^{-1} x$ representa la función inversa de $\cos x$ respecto a la composición de funciones y no se refiere a la razón inversa $\frac{1}{\cos x}$, que representa la función secante.

La función $f(x) = \cos x$, con $x \in [0, \pi]$,
*tiene **inversa** y la llamaremos $\cos^{-1}(x)$ definida por:*
$y = \cos^{-1}(x)$, si y sólo si, $\cos y = x$.

Notemos que el dominio de $\cos^{-1}(x)$ es $[-1, 1]$ y el rango es $[0, \pi]$.

La figura 3.19 muestra la gráfica de la función $y = \cos^{-1}(x)$, para $x \in [-1, 1]$.

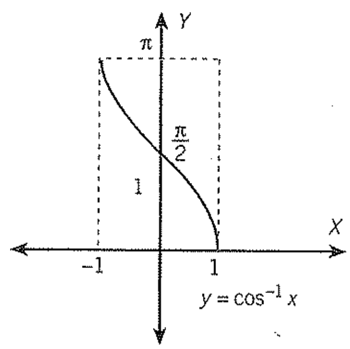


Figura 3.19

Ejemplo 13

Para la función $y = \cos x$ restringida en el intervalo $[0, \pi]$, ¿cuál es el valor de x tal que $\cos x = 0$? ¿Cuál es el valor de x tal que $\cos x = \frac{1}{2}$?

Solución

Si $y = 0$, el único $x \in [0, \pi]$ para el cual $\cos x = 0$ es $x = \frac{\pi}{2}$ (*ver* figura 3.18).

Si $y = \frac{1}{2}$, el único $x \in [0, \pi]$ para el cual $\cos x = \frac{1}{2}$ es $x = \frac{\pi}{3}$ (*ver* figura 3.18). ◀

La función inversa de $f(x) = \cos x$, para x en $[-1, 1]$ la definimos así:

*La **inversa de la función coseno,** llamada **arcocoseno,** es la función que a cada x en $[-1, 1]$ le hace corresponder un único valor y en $[0, \pi]$, tal que $\cos y = x$.*

La manera de simbolizar la función arcocoseno es
$f(x) = \cos^{-1}(x)$ *o* $f(x) = \arccos(x)$.

Además, se cumplen las siguientes propiedades:

- $\cos(\cos^{-1} x) = x$ *para* $-1 \le x \le 1$.
- $\cos^{-1}(\cos x) = x$ *para* $0 \le x \le \pi$.

Ejemplo 14

Sin utilizar la calculadora encontremos el valor indicado.

a. $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ **b.** $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ **c.** $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **d.** $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ **e.** $\cos^{-1}(-1)$

Solución

Observemos la tabla 3.3.

x	$\cos^{-1} x$	Justificación
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y $\frac{\pi}{4} \in [0, \pi]$
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ y $\frac{3\pi}{4} \in [0, \pi]$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\pi}{6}$	$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y $\frac{\pi}{6} \in [0, \pi]$
$\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ y $\frac{\pi}{3} \in [0, \pi]$
-1	π	$\cos(\pi) = -1$ y $\pi \in [0, \pi]$

Tabla 3.3 ◀

Ejemplo 15

Evaluemos cada expresión matemática con la ayuda de un triángulo rectángulo.

a. $\operatorname{sen}\left(\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)\right)$ **b.** $\csc\left(\cos^{-1}\left(\frac{7}{25}\right)\right)$

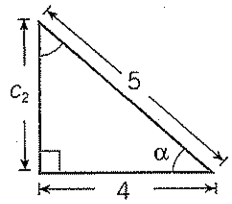


Figura 3.20

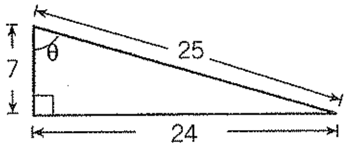


Figura 3.21

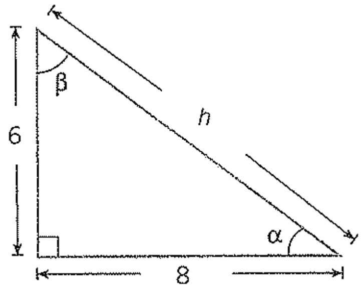


Figura 3.22

Comentario

Es posible encontrar el valor del ángulo β, sin necesidad de utilizar la función arccos, simplemente debemos observar que $\alpha + \beta = 90°$ (α y β son complementarios). Es decir, $\beta = 90° - \alpha = 90° - 36{,}8699 = 53{,}1301$.

Solución

a. Nombremos $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)$, por tanto $\cos\alpha = \frac{4}{5}$. Con dicha información trazamos el triángulo rectángulo de la figura 3.20. Podemos observar que el triángulo rectángulo tiene el ángulo agudo α, cateto adyacente de α, $c_1 = 4$ e hipotenusa $h = 5$. Por el teorema de Pitágoras obtenemos que el cateto opuesto $c_2 = \sqrt{h^2 - c_1^2} = \sqrt{25 - 16} = 3$; entonces

$$\operatorname{sen}\left(\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)\right) = \operatorname{sen}\alpha = \frac{3}{5}.$$

b. Sea $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{7}{25}\right)$, así pues $\cos\theta = \frac{7}{25}$ y de esta forma $c_1 = 7$, $h = 25$ y $c_2 = 24$ (*ver* figura 3.21). Por tanto, $\csc\left(\cos^{-1}\left(\frac{7}{25}\right)\right) = \csc\theta = \frac{h}{c_2} = \frac{25}{24}$. ◀

Ejemplo 16

Con la ayuda de la función arccos encontremos las medidas de los ángulos del triángulo de la figura 3.22.

Solución

$\cos\alpha = \frac{8}{h}$	Empleamos la definición de $\cos\alpha$.
$h = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$	Utilizamos el teorema de Pitágoras para obtener el valor de la hipotenusa.
$\cos\alpha = \frac{8}{10}$	Remplazamos el valor de h en $\cos\alpha$.
$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)$	Utilizamos la propiedad de $\cos^{-1}\alpha$.
$\alpha = 36{,}8699 = 36°52'11{,}64''$	Obtenemos el valor de α.
Por otra parte:	
$\cos\beta = \frac{6}{10}$	Empleamos la definición de $\cos\beta$.
$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$	Utilizamos la propiedad de $\cos^{-1}\beta$.
$\beta = 53{,}1301 = 53°7'48{,}36''$	Obtenemos el valor de β. ◀

> Piensa y practica <

> Conexiones

1. Halla los valores que se indican sin usar la calculadora.

a. $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **b.** $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$

c. $\cos^{-1}(0)$ **d.** $\cos^{-1}(1)$

> Resolución de problemas

2. Con la ayuda de un triángulo rectángulo calcula el valor de:

a. $\tan\left(\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)\right)$ **b.** $\operatorname{sen}\left(\cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right)$

c. $\csc\left(\cos^{-1}\left(\frac{7}{10}\right)\right)$ **d.** $\cot\left(\cos^{-1}\left(\frac{2}{5}\right)\right)$

3. Héctor Andrés sujeta una cometa con una cuerda de 300 metros y la distancia horizontal es 200 metros (*ver* figura 3.23). Encuentra el ángulo de elevación θ.

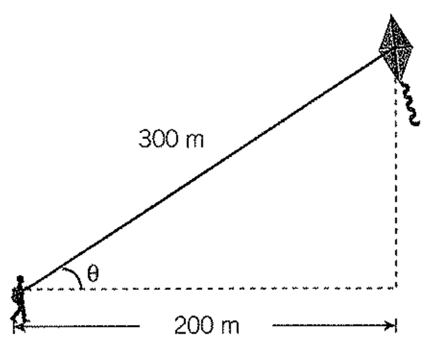
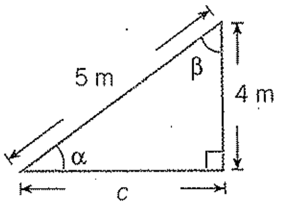


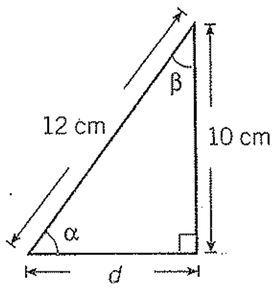
Figura 3.23

4. Halla todas las medidas de los ángulos de cada triángulo de la figura 3.24, con la ayuda de la función arcocoseno.

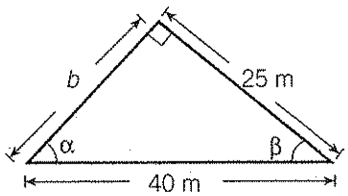
a.



b.



c.



d.

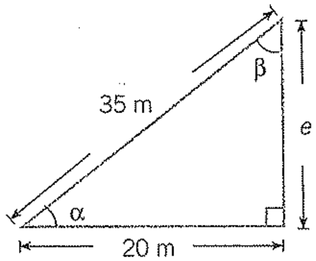


Figura 3.24

> Razonamiento lógico

5. Sea x tal que $0 < x < 1$, entonces $\cos^{-1}(x) \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.
Es decir, $\cos^{-1} x$ está en el primer cuadrante. En qué cuadrante se encuentran los siguientes ángulos medidos en radianes:
   a. $\cos^{-1}(x) + \pi$
   b. $-\cos^{-1}(x)$
   c. $\cos^{-1}(x) + \frac{\pi}{2}$
   d. $\cos^{-1}(x) - \frac{3\pi}{2}$

6. Realiza la gráfica en papel milimetrado de $h(x) = \cos^{-1}(x) - \frac{\pi}{2}$ para $-1 \le x \le 1$. ¿Es igual a la gráfica de $f(x) = \operatorname{sen}^{-1}(x)$?

> Comunicación

7. Sean x_1, x_2 en $[-1, 1]$, tales que $x_1 < x_2$. Determina cuál de las siguientes relaciones es verdadera. Justifica tu respuesta.
   a. $\cos^{-1}(x_1) < \cos^{-1}(x_2)$.
   b. $\cos^{-1}(x_1) > \cos^{-1}(x_2)$.

8. Comprueba que:
   a. $\operatorname{sen}^{-1}(-x) = -\operatorname{sen}^{-1}(x)$, para todo $x \in [-1, 1]$.
   b. La gráfica de la función $g(x) = \frac{\pi}{2} + \operatorname{sen}^{-1}(-x)$ para $x \in [-1, 1]$, es igual a la gráfica de la función $\cos^{-1}(x)$, para $x \in [-1, 1]$.
   c. $\cos^{-1}(x) + \operatorname{sen}^{-1}(x) = \frac{\pi}{2}$, para $x \in [-1, 1]$.

Uso de la tecnología

9. Utiliza la calculadora para encontrar los siguientes valores en radianes y grados (en caso de ser posible).
   a. $\tan\left(\cos^{-1}(0{,}05)\right)$
   b. arccos(2,12)
   c. arccos(−0,99)
   d. arccos(0,55)
   e. csc(arccos (0,81))

10. Resuelve la siguiente ecuación siguiendo los pasos sugeridos.
$7 = 9\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$
   a. Divide la ecuación por 9.
   b. Aplica la función arccos(x) en ambos lados de la ecuación. Encuentra $\cos^{-1}\left(\frac{7}{9}\right)$ utilizando la calculadora en el modo radianes. (¿Por qué debes suponer que $x - \frac{\pi}{3} \in [0, \pi]$?).
   c. Despeja la variable x.

11. Resuelve las siguientes ecuaciones para $x \in [0, \pi]$ (utiliza la calculadora en modo radianes):
   a. $\cos x = 1$
   b. $\cos x - 1 = -0{,}5$
   c. $4\cos x - 2 = 1$
   d. $9\cos x - 2 = 2$

Inversa de la tangente

Logro: definir las condiciones para encontrar la función inversa de la función tangente.

Para encontrar la inversa de la función tangente debemos hacer consideraciones similares a las realizadas para definir las funciones arcoseno y arcocoseno.

La función tangente tiene como rango el conjunto de los reales y está definida para todos los números reales, excepto para los múltiplos impares de $\frac{\pi}{2}$ (*ver* figura 3.25).

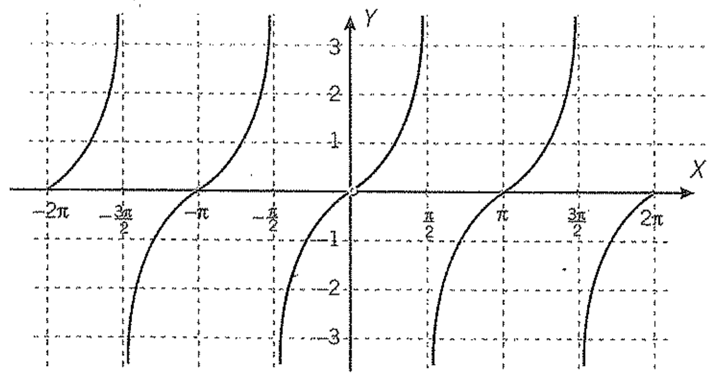


Figura 3.25

Claramente, la función tangente no es uno a uno, pero podemos definir una función inversa si restringimos el dominio de forma adecuada. Generalmente se escoge el conjunto $I = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

> *La función **arcotangente** ($y = \arctan(x)$ o $y = \tan^{-1}(x)$) es la función que hace corresponder a cada número real x un único número real $y \in I$, tal que $x = \tan y$. Es decir, $y = \arctan(x)$ equivale a $x = \tan y$.*

Pensamiento crítico

¿Por qué la función tangente no es uno a uno en los reales?
¿Por qué es importante anotar que el rango de la función arcotangente no incluye a $\frac{\pi}{2}$ y a $-\frac{\pi}{2}$?

Para trazar la gráfica de la función arcotangente, reflejamos la gráfica $y = \tan x$ en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ sobre la ecuación $y = x$ como se muestra en la figura 3.26.

Finalmente, obtenemos la gráfica de $y = \tan^{-1}(x)$ (*ver* figura 3.27).

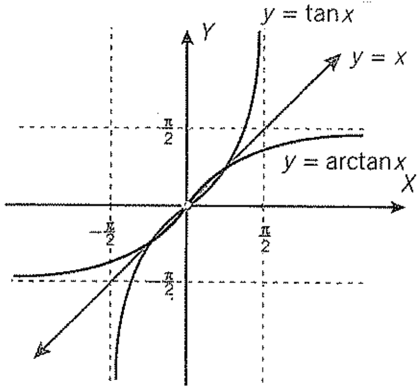


Figura 3.26

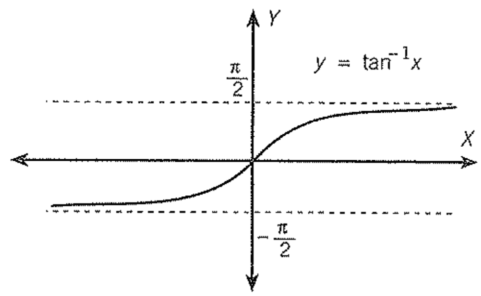


Figura 3.27

Ejemplo 17

Encontremos el valor de:

a. $\tan^{-1}(-\sqrt{3})$ **b.** $\tan^{-1}(0)$ **c.** $\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ **d.** $\tan^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

Solución

x	$\tan^{-1}(x)$	Justificación
$-\sqrt{3}$	$-\frac{\pi}{3}$	$\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$ y $-\frac{\pi}{3}\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$
0	0	$\tan(0)=0$ y $0\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$
$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{\pi}{6}$	$\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}$ y $\frac{\pi}{6}\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$
$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ y $-\frac{\pi}{6}\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

Tabla 3.4

La función arcotangente cumple las siguientes propiedades:

- $\tan(\tan^{-1}x)=x$ para $x\in\mathbf{R}$
- $\tan^{-1}(\tan x)=x$ para $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$

Ejemplo 18

Diana quiere calcular el ángulo de elevación del Sol y sabe que su estatura es 168 centímetros y proyecta una sombra de 120 centímetros de largo al nivel del suelo (*ver* figura 3.28). ¿Cuál es el valor de ese ángulo?

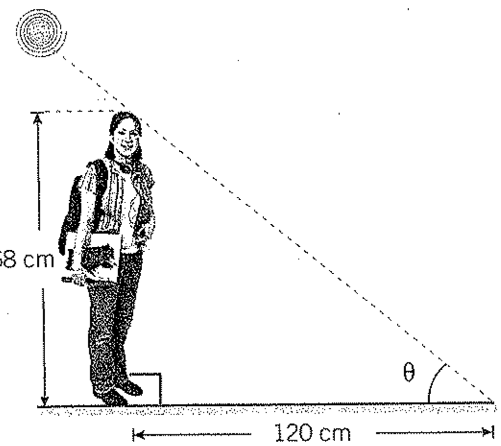


Figura 3.28

Solución

Recordemos que la función tangente relaciona los catetos de un triángulo rectángulo con los ángulos agudos del mismo.

$\tan\theta=\frac{168}{120}$ Utilizamos la definición de $\tan\theta$.

$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{168}{120}\right)$ Empleamos la propiedad de $\tan^{-1}\theta$.

$\theta\approx 54{,}462322\approx 54°27'44{,}36''$ Usamos la calculadora en modo DEG.

Ejemplo 19

Resolvamos las siguientes ecuaciones

a. $6=11\tan x+12$, con $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$

b. $-1=12\tan(2-3x)+23$, con $-\frac{\pi}{2}<2-3x<\frac{\pi}{2}$

Solución

a. $6=11\tan x+12$ Consideramos la ecuación a resolver.

$-6=11\tan x$ Adicionamos -12 a ambos lados de la ecuación.

$\tan x=-\frac{6}{11}$ Despejamos el valor de $\tan x$.

$\tan^{-1}(\tan x) = \tan^{-1}\left(-\frac{6}{11}\right)$ Aplicamos la propiedad de $\tan^{-1}(x)$ ya que $-\frac{6}{11} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

$x = \tan^{-1}\left(-\frac{6}{11}\right)$ Simplificamos términos.

$x \approx -0{,}49935$ rad Empleamos la calculadora en RAD. Obtenemos el valor aproximado de x.

b. $-1 = 12 \tan(2 - 3x) + 23$ Consideramos la ecuación a resolver.

$\tan(2 - 3x) = -2$ Despejamos $\tan(2 - 3x)$.

$2 - 3x = \tan^{-1}(-2)$ Aplicamos la propiedad de $\tan^{-1}(x)$ ya que $2 - 3x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

$x = \dfrac{2 - \tan^{-1}(-2)}{3}$ Despejamos el valor de x.

$x \approx 1{,}03572$ rad Utilizamos la calculadora en modo RAD. Obtenemos el valor aproximado de x. ◀

Ejemplo 20

Encontremos:

a. $\operatorname{sen}(\tan^{-1}(2))$ **b.** $\cos\left(\tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)\right)$ **c.** $\csc\left(\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{9 - x^2}}\right)\right)$

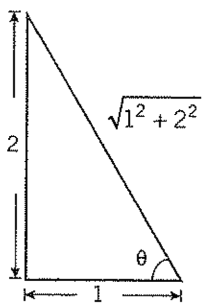


Figura 3.29

Solución

a. $\theta = \tan^{-1}(2)$ Renombramos $\tan^{-1}(2)$ con θ.

$\tan\theta = 2$ Empleamos el hecho de que $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ y la definición de $\tan\theta$.

$\operatorname{sen}(\tan^{-1}(2)) = \operatorname{sen}\theta$ Utilizamos la igualdad $\theta = \tan^{-1}(2)$ y la remplazamos en la expresión inicial.

Usamos el hecho de que $\tan\theta = 2$ y construimos el triángulo de la figura 3.29.

Con la información de la figura 3.29 concluimos que $\operatorname{sen}\theta = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

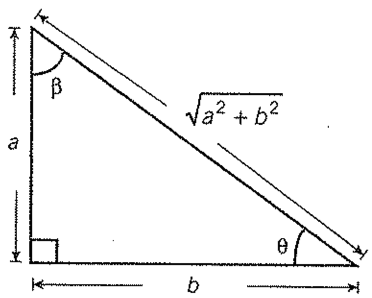


Figura 3.30

b. $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)$ Renombramos $\tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)$ con θ.

$\tan\theta = \frac{a}{b}$ Empleamos el hecho que $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ y la definición de $\tan\theta$.

$\cos\left(\tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)\right) = \cos\theta$ Utilizamos la igualdad $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)$ y la remplazamos en la expresión inicial.

Usamos el hecho de que $\tan\theta = \frac{a}{b}$ y construimos el triángulo de la figura 3.30.

Observando el triángulo de la figura 3.30, obtenemos que $\cos\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ y por tanto $\cos\left(\tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)\right) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

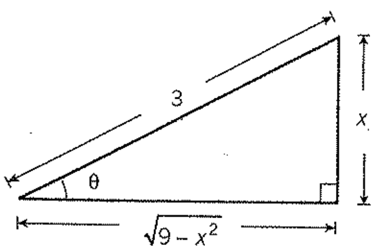


Figura 3.31

c. $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{9 - x^2}}\right)$ Renombramos $\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{9 - x^2}}\right)$ con θ.

$\tan\theta = \frac{x}{\sqrt{9 - x^2}}$ Empleamos el hecho de que $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ y la propiedad de $\tan\theta$.

Usamos el resultado $\tan\theta = \frac{x}{\sqrt{9 - x^2}}$ y construimos el triángulo rectángulo de la figura 3.31.

De la figura 3.31, obtenemos que $\csc\left(\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{9 - x^2}}\right)\right) = \csc\theta = \frac{3}{x}$. ◀

> Piensa y practica <

> Resolución de problemas

1. Encuentra el valor de x. Redondea el valor de x a cuatro cifras decimales.

   a. $7 = 5\tan(2x - 3) - 12$ con $-\frac{\pi}{2} < 2x - 3 < \frac{\pi}{2}$

   b. $19 = 4\tan x - 10$ con $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

   c. $\tan(4x) - 12 = 24$ con $-\frac{\pi}{2} < 4x < \frac{\pi}{2}$

2. Si se sabe que $\arccos\left(-\frac{4}{5}\right) = \alpha$ (*ver* figura 3.32), calcula $\operatorname{sen}\alpha$, $\tan\alpha$ y $\sec\alpha$.

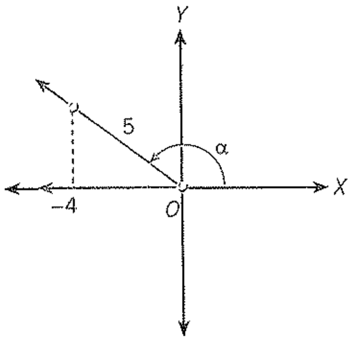


Figura 3.32

3. Halla los ángulos desconocidos de cada triángulo de la figura 3.33, con la ayuda de la función arcotangente. Redondea el valor de cada ángulo a cuatro cifras decimales.

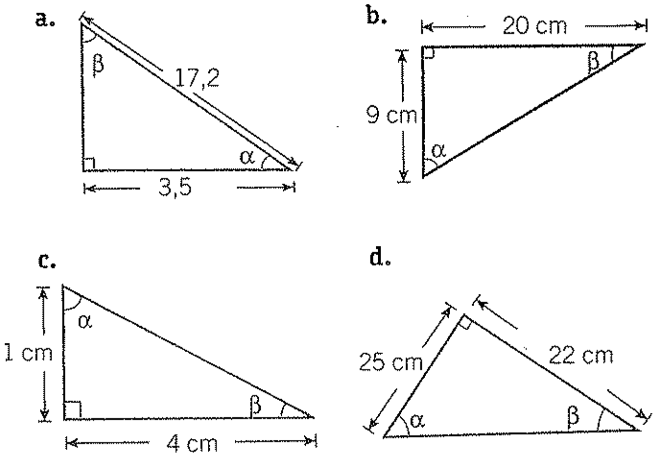


Figura 3.33

> Conexiones

4. Utilizando triángulos rectángulos, evalúa.

   a. $\cos\left(\tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)\right)$ **b.** $\operatorname{sen}\left(\tan^{-1}\left(\frac{2}{9}\right)\right)$

   c. $\sec\left(\tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)\right)$ **d.** $\csc\left(\tan^{-1}\left(\frac{2}{9}\right)\right)$

5. Carlos Arturo está observando un partido de fútbol desde la tribuna a una distancia horizontal a la cancha de 30 metros y a una distancia vertical de 20 metros. Encuentra el ángulo de depresión θ (*ver* figura 3.34).

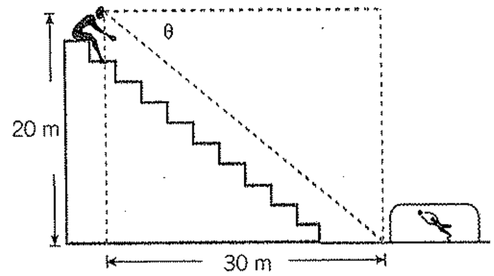


Figura 3.34

6. Un avión viaja a 3 kilómetros de altura, ¿Cuál es el ángulo de elevación α, si se sabe que la distancia horizontal entre el observador y el avión es 15 kilómetros? (*ver* figura 3.35).

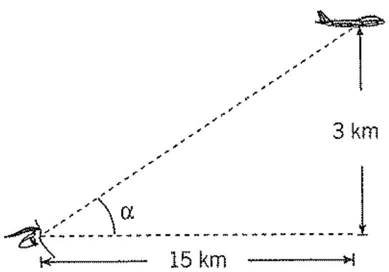


Figura 3.35

> Razonamiento lógico

7. Halla los siguientes valores e indica cuáles se pueden encontrar y cuáles no. Justifica tu respuesta usando las funciones inversas.

   a. arcsen (0,8) **b.** arcsen (3)

   c. arccos (−5) **d.** arctan (18)

8. Halla un número α en $\left(-\frac{5\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}\right)$, tal que $\tan\alpha = -\frac{1}{10}$.

Uso de la tecnología

9. Con la ayuda de una calculadora en modo radianes evalúa.

   a. $\tan^{-1}(100)$ **b.** $\tan^{-1}(1000)$

   c. $\tan^{-1}(10\,000)$ **d.** $\tan^{-1}(100\,000)$

   e. $\tan^{-1}(1\,000\,000)$ **f.** $\tan^{-1}(10\,000\,000)$

   ¿Qué puedes concluir de los resultados obtenidos?

Evaluación por competencias

Autoevaluación

A continuación aparecen los indicadores de logro. Marco con ✔ en la columna Sí, si el logro indicado está superado o ✘ en la columna No, si está por superar.

	Sí	No
> Hallo la inversa de una función uno a uno.	☐	☐
> Defino restricciones de las funciones trigonométricas para que sean uno a uno.	☐	☐
> Reconozco y utilizo las relaciones entre las funciones trigonométricas y sus inversas.	☐	☐
> Identifico situaciones problema donde se utilizan las funciones trigonométricas inversas.	☐	☐
> Resuelvo problemas que involucran funciones trigonométricas inversas con la ayuda de la calculadora.	☐	☐

Coevaluación

Con los siguientes ejercicios, afianzamos los indicadores de logro que hemos superado y reforzamos aquellos que están por superar.

1. Encontremos la función inversa de las siguientes funciones:

a. $f(x) = 13x - 1$

b. $g(x) = 6 - 2x^3$

c. $h(x) = \dfrac{x-3}{2x+1}$

d. $j(x) = \dfrac{1}{2x-3}$

2. Determinemos qué funciones son uno a uno en el intervalo dado.

a. $f(x) = \sec(x)$ en $[0, \pi]$.

b. $f(x) = x^2 - 3$ en $[-1, 2]$.

c. $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ en $\left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$.

d. $f(x) = x^2 - x + 1$ para $x \in \mathbf{R}$.

3. El rango de la función $f(x) = \tan^{-1}(x)$ es:

a. $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$

b. $[-1, 1]$

c. $[0, \pi]$

d. $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$

4. Con la ayuda de la gráfica de un triángulo rectángulo, y sin usar calculadora, hallemos los siguientes valores:

a. $\operatorname{sen}(\arctan(5))$

b. $\tan\left(\operatorname{arcsen}\left(\dfrac{1}{3}\right)\right)$

c. $\csc\left(\arccos\left(\dfrac{4}{7}\right)\right)$

d. $\cos\left(\operatorname{arcsen}\left(\dfrac{1}{2}\right)\right)$

5. Encontremos los ángulos agudos de los triángulos de la figura 3.36 por medio de las funciones arcoseno, arcocoseno y arcotangente.

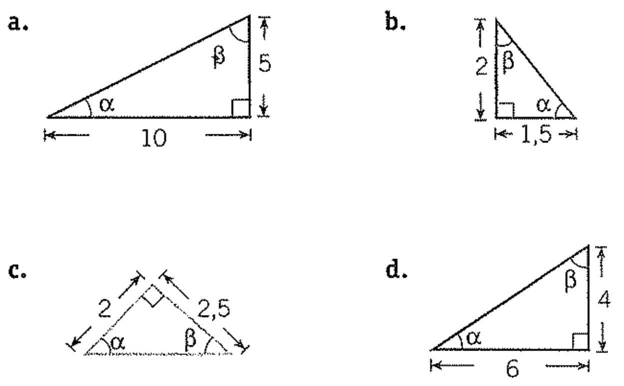


Figura 3.36

6. Resolvamos las siguientes ecuaciones:

a. $15\operatorname{sen}(x) - 1 = 9$, con $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

b. $17\cos(x) - 12 = 1$, con $0 \leq x \leq \pi$.

c. $9\tan(x) = 3$, con $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

7. Calculemos los valores, en caso de ser posible.

a. $\sec(\arctan(-1))$

b. $\operatorname{sen}(\tan^{-1}(-\sqrt{3}))$

c. $\tan(\operatorname{arcsen}(-1))$

d. $\cot\left(\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$

8. Un velero se encuentra a 2 kilómetros del puesto de observación que tiene una altura de 0,1 kilómetros. ¿Cuál el valor del ángulo de depresión obtenido desde la punta del puesto de observación hacia el velero?

9. ¿Cuál es el dominio de cada una de las funciones trigonométricas inversas? ¿Cuál es el rango?

10. Grafiquemos las siguientes funciones:

a. $f(x) = \arccos(x)$

b. $f(x) = 2\arccos(x)$

c. $f(x) = \arccos(x) + 1$

11. Señalemos la afirmación verdadera.

a. $f(x) = x^2 - 2x + 1$ es uno a uno.

b. La inversa de la función $f(x) = x^2 - 2x + 1$, con $x \geq 1$, es $f^{-1}(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 1}$, para $x > 1$.

c. La inversa de la función $f(x) = x^2 - 2x + 1$, con $x \geq 1$, es $f^{-1}(x) = \sqrt{x} + 1$, para $x \geq 0$.

d. El dominio de la inversa de $f(x) = x^2 - 2x + 1$, para $x \geq 1$, es el intervalo $[1, \infty)$.

12. Determinemos cuál de las funciones tiene dominio $[-1, 1]$.

a. $y = \tan^{-1}(\tan x)$ b. $y = \cos^{-1}(\cos x)$

c. $y = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1} x)$ d. $y = \operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen} x)$

13. Se tiende un cable desde un punto en el piso (plano), a 2 metros de distancia de un poste de 6 metros de alto, hasta el extremo superior del poste.

a. ¿Cuál es la longitud del cable que se extendió?

b. ¿Qué ángulo se forma entre el cable tendido y el poste?

Tu creación

1. Encuentra una expresión para el ángulo θ del triángulo rectángulo de la figura 3.37.

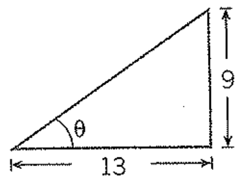
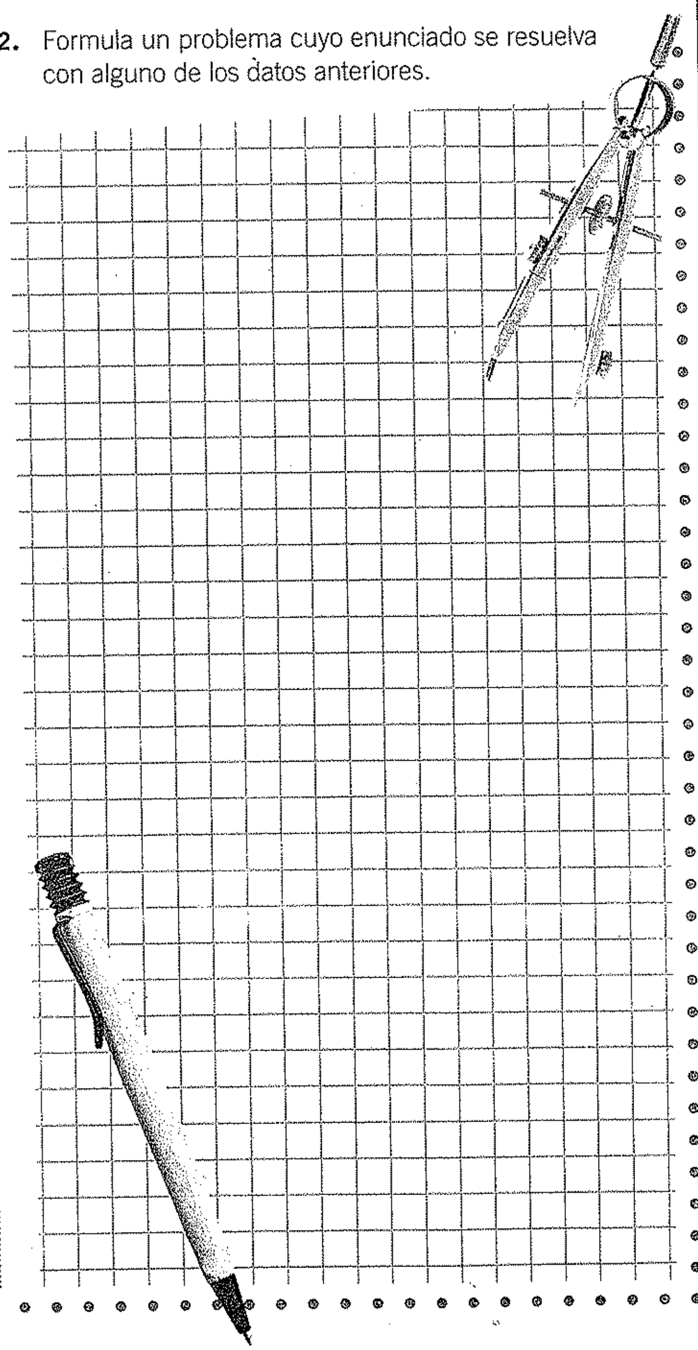


Figura 3.37

2. Formula un problema cuyo enunciado se resuelva con alguno de los datos anteriores.



Prueba ICFES

Selecciona de las cuatro opciones sólo una de las respuestas, la que consideres relaciona de manera más estructurada los conceptos matemáticos con las condiciones particulares de la situación problema.

De acuerdo con la figura 3.38, escoge la respuesta correcta para los ejercicios 1 a 4.

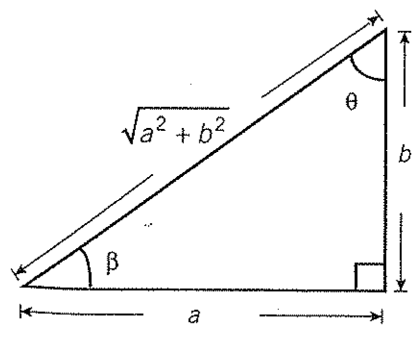


Figura 3.38

1. El valor de $\tan^{-1}(a)$ es:

a. $\tan^{-1}(b\tan\theta)$

b. θ

c. $\tan^{-1}\left(\dfrac{\tan\theta}{b}\right)$

d. $\dfrac{1}{\tan a}$

2. El valor de $\cos\beta$ es:

a. $\dfrac{a\cos\theta}{\sqrt{a^2+b^2}}$

b. $\dfrac{b\tan\theta}{\sqrt{a^2+b^2}}$

c. $\dfrac{b\cot\theta}{\sqrt{a^2+b^2}}$

d. $\dfrac{a\tan\theta}{\sqrt{a^2+b^2}}$

3. El valor de $\operatorname{sen}\beta$ es:

a. $\dfrac{a}{b}$

b. $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

c. $\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

d. $a\sqrt{a^2+b^2}$

4. El valor de $\cos^{-1}\left(\dfrac{b}{a}\right)$ es:

a. β

b. θ

c. $90°$

d. $\beta+\theta$

De acuerdo con la figura 3.39, escoge la respuesta correcta para los ejercicios 5 a 7.

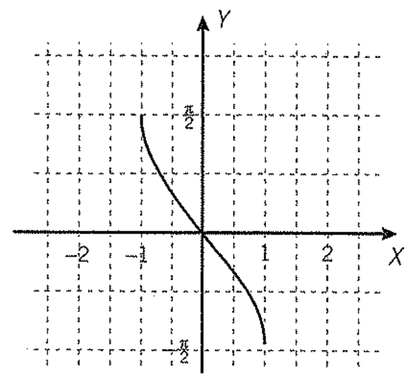


Figura 3.39

5. La función *f* descrita en la figura 3.39 es:

a. $f(x) = -\cos^{-1}(x)$

b. $f(x) = \operatorname{sen}^{-1}(x)$

c. $f(x) = \cos^{-1}(x) - \dfrac{\pi}{2}$

d. $f(x) = \operatorname{sen}^{-1}(x) - \dfrac{\pi}{2}$

6. El dominio de $f(x)$ es:

a. $(-1, 1)$

b. $[-1, 1]$

c. $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

d. $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

7. El rango de $f(x)$ es:

a. $(-1, 1)$

b. $[-1, 1]$

c. $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

d. $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Supón que el número de conejos de una población, en el año t, está dado por: $N(t) = 200\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) + 300$.

Responde las preguntas 8 a 11 de acuerdo con la información anterior.

8. ¿Cuál es la población esperada a los 3 años?

a. 300

b. 500

c. 100

d. 400

9. La amplitud de la función $N(t)$ es:

a. 300

b. 200

c. 100

d. 400

10. El período de la función $N(t)$ es:

a. $\frac{\pi}{2}$

b. 2

c. 4

d. 2π

11. ¿Para cuál valor de t se alcanzará por primera vez una población de 400 conejos?

a. $\frac{3}{2}$

b. 6

c. $\frac{2}{3}$

d. $\frac{\pi}{3}$

Responde las preguntas 12 y 13 de acuerdo con la siguiente información.

Cristian Camilo mira televisión y sus ojos están a 0,5 metros del piso. El televisor tiene 0,5 metros de alto y se encuentra sobre un mueble que mide 1 metro. Sea x la distancia horizontal entre Cristian y el televisor. Además, θ es el ángulo que abarca la vista hacia televisor (*ver* figura 3.40).

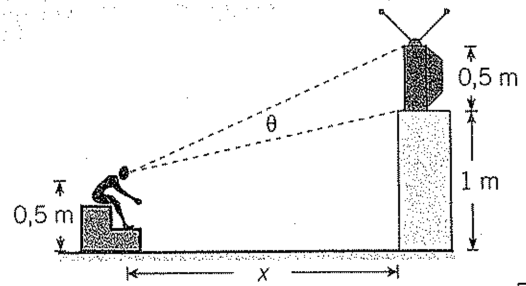


Figura 3.40

Se ha demostrado que: $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{2x}{x^2 + 0,5}\right)$.

12. Si $\theta = 45°$, entonces un posible valor para x es:

a. $\frac{2 + \sqrt{2}}{2}$ m

b. $\frac{4 - \sqrt{2}}{2}$ m

c. $\frac{2 + 2\sqrt{2}}{2}$ m

d. $2 + \sqrt{2}$ m

13. Si $\theta = 60°$, entonces un posible valor para x es:

a. $\frac{2 + \sqrt{4}}{2}$ m

b. $\frac{2 + \sqrt{5}}{2}$ m

c. $\frac{2 + \sqrt{0,5}}{2}$ m

d. No existe valor de x.

14. Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera:

a. El dominio de $f(x) = \text{sen}^{-1}(x)$ es $[-1, 1]$.

b. El rango de $f(x) = \text{sen}^{-1}(x)$ es $[-1, 1]$.

c. $f(x) = \text{sen}^{-1}(x) = \frac{1}{\text{sen}(x)}$.

d. El rango de $f(x) = \text{sen}^{-1}(x)$ es $[0, \pi]$.

15. Cuál de las siguientes afirmaciones es falsa:

a. $\cos^{-1}(\cos x) = x$, para $x = \in [0, \pi]$.

b. El dominio de $f(x) = \cos^{-1}(x)$ es $[-1, 1]$.

c. $f(x) = \cos^{-1}(x) = \frac{1}{\cos(x)}$.

d. El rango de $f(x) = \cos^{-1}(x)$ es $[0, \pi]$.

Conexión histórica

Series de Fourier

Jean-Baptiste-Joseph Fourier (1768 a 1830) fue un gran matemático y físico francés conocido por sus trabajos e investigaciones en *series de Fourier*, una herramienta matemática utilizada para analizar funciones o señales periódicas a través de la descomposición de esa función en una suma infinita de funciones senoidales mucho más simples (como combinación de senos y cosenos). Este trabajo es notable porque significa que cualquier situación donde ocurren variaciones periódicas puede describirse mediante estas funciones trigonométricas.

En Ingeniería y Física tiene bastantes aplicaciones ya que se emplea en estudios de: acústica, óptica, procesamiento de imágenes y señales, comprensión y análisis de datos, sistemas de telecomunicaciones, transmisión del sonido y el flujo del calor, entre otros. Además de ser una teoría muy útil en Matemática teórica.

Siendo muy joven, Fourier quedó huérfano y fue educado en una escuela militar, donde fue profesor de matemáticas a la edad de 20 años. Después fue profesor en la escuela Politécnica y renunció para acompañar a Napoleón en su expedición a Egipto, donde se desempeñó como gobernador. Trabajó en problemas físicos sobre el calor, pero en principio la Academia Francesa no quiso publicar sus trabajos por falta de rigor matemático. Finalmente, logró publicar debido a que llegó a ser secretario de la Academia. Murió a los 63 años, debido en parte a que después de su llegada de Egipto se obsesionó en mantenerse caliente y usaba varias prendas y mantenía sus habitaciones a temperaturas insoportablemente altas.

Matemáticamente, las series de Fourier se describen así:

$$y(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)\right], \text{ o,}$$

$$y(x) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos(x) + b_1\operatorname{sen}(x) + a_2\cos(2x) + b_2\operatorname{sen}(2x) + a_3\cos(3x) + b_3\operatorname{sen}(3x) + \ldots$$

donde a_n y b_n se llaman coeficientes de la serie de Fourier para la función periódica $y(x)$.

Por ejemplo, para la señal definida en la figura 3.41 se tiene la serie de Fourier definida por

$$y(x) = \frac{4}{\pi}\left(\operatorname{sen} x + \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x + \frac{1}{5}\operatorname{sen} 5x + \frac{1}{7}\operatorname{sen} 7x + \ldots\right)$$

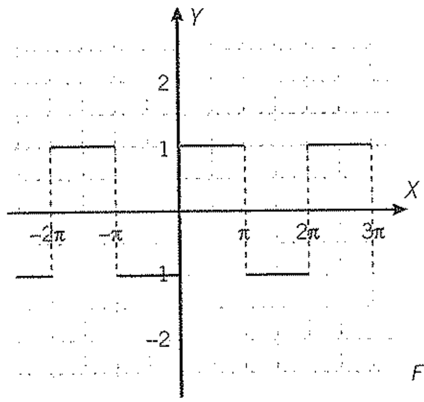


Figura 3.41

Reflexiona

1. ¿Qué es una serie de Fourier?
2. ¿Qué es una función periódica?
3. ¿Qué labores realizó Fourier durante su vida?
4. ¿Para qué se emplean las series de Fourier?

Glosario

Arcocoseno: función que a cada número x en el intervalo $[-1, 1]$ le asigna un único número y en el intervalo $[0, \pi]$, tal que $x = \cos y$.

Arcocotangente: función que le hace corresponder a cada número real x un único número real y en el intervalo $(0, \pi)$, tal que $x = \cot y$.

Arcosecante: función que a cada número x en el dominio $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$, le asigna un único número y en $(\infty, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$, tal que $x = \sec y$.

Arcoseno: función que a cada número x en el intervalo $[-1, 1]$ le hace corresponder un único número y en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, tal que $\operatorname{sen} y = x$.

Arcotangente: función que le hace corresponder a cada número real x un único número real y en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, tal que $x = \tan y$.

Ecuación trigonométrica: ecuación de la forma $f(x) = k$, donde $f(x)$ es una función compuesta de expresiones trigonométricas.

Función inversa: si f es uno a uno de $A = \mathrm{Dom}(f)$ en $B = \mathrm{Rango}\ (f)$, entonces existe la función inversa de f con dominio B y rango A, denotada, tal que $\left(f \circ f^{-1}\right)(x) = x$, para todo $x \in B$ y $\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = x$, para todo $x \in A$.

Función uno a uno: f es uno a uno en el intervalo I si números distintos en I tienen imágenes distintas por medio de f.

Igualdad de funciones: dos funciones f y g son iguales, si y sólo si tienen el mismo dominio y $f(x) = g(x)$, para todo x en el dominio.

Restricción en una función: la función f es una restricción de la función g si $\mathrm{Dom}(f) \subseteq \mathrm{Dom}(g)$ y $f(x) = g(x)$, para todo $x \in \mathrm{Dom}(f)$.

Razonamiento

1. Ubica los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8 en las casillas de la figura 3.42, de manera que no estén dos números consecutivos en casillas contiguas, ni de forma vertical ni horizontal.

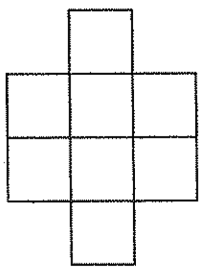


Figura 3.42

2. ¿Cuántos cuadrados puedes formar que tengan sus vértices en puntos de la figura 3.43?

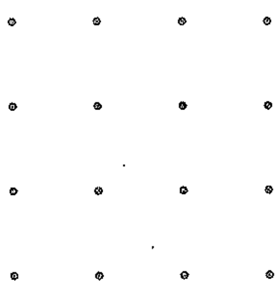


Figura 3.43

Tomado de Calendario Matemático 2008. Un reto diario. www.googolmx.com

3. Busca el camino en el laberinto para llegar del punto A al punto B.

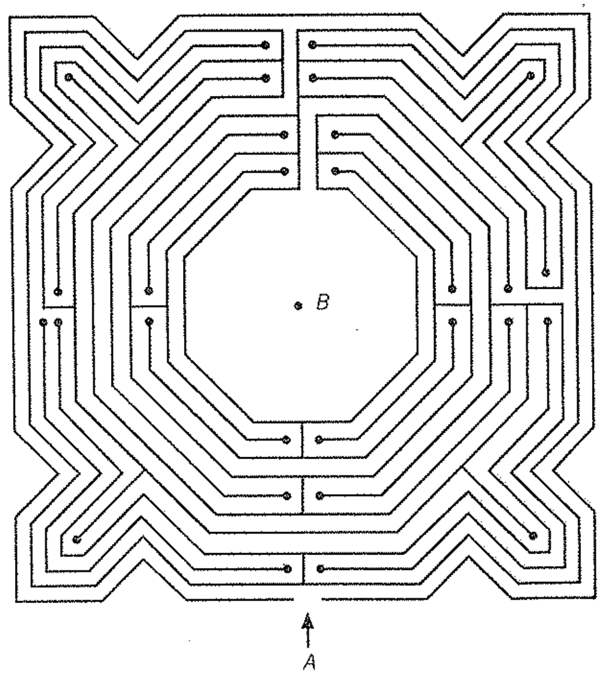
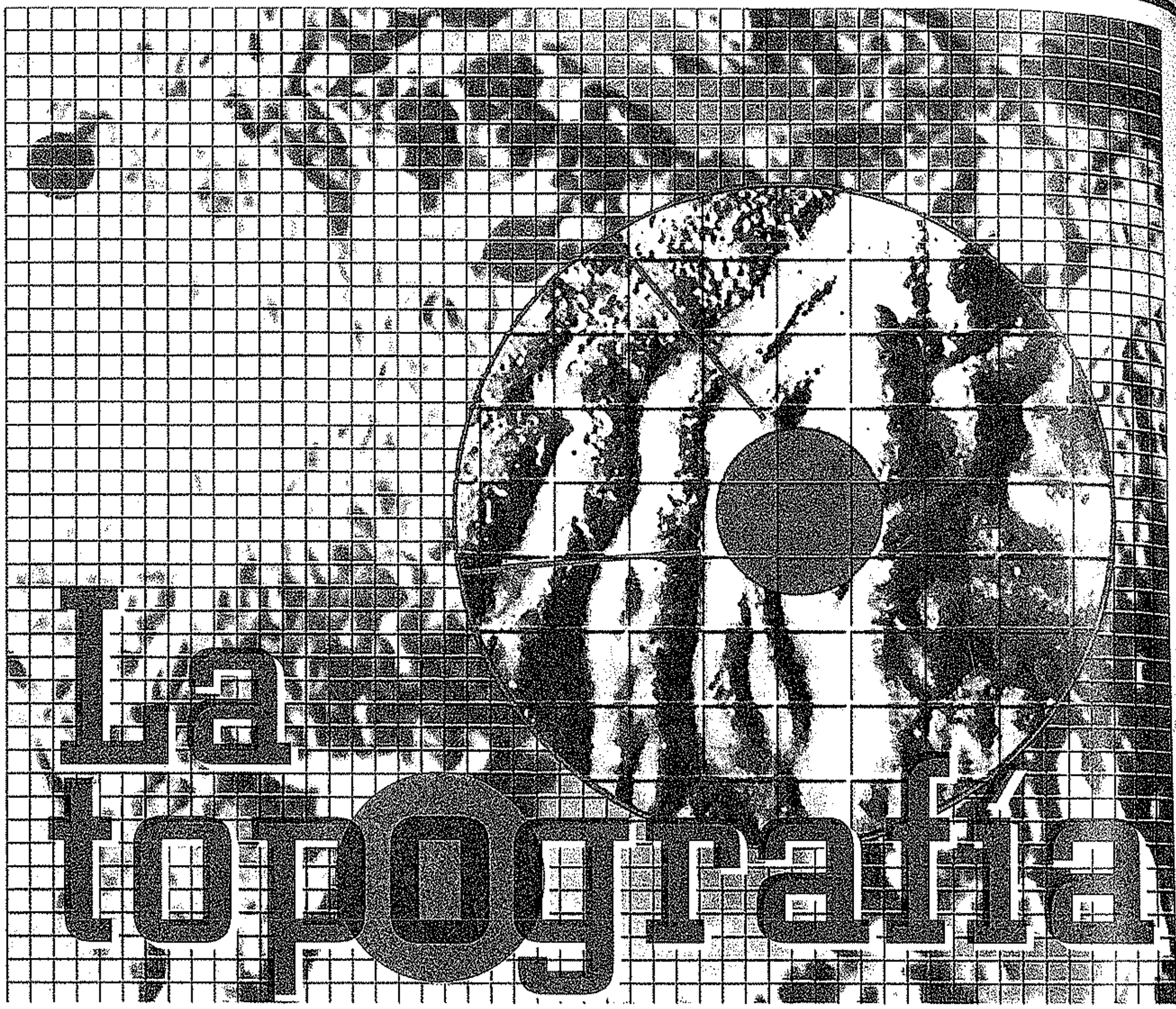


Figura 3.44

> Identidades y ecuaciones



La topografía

se emplea en varios campos,

como la minería, arquitectura,

ingeniería civil, agronomía, entre otras.

Se considera una ciencia geométrica aplicada

a la descripción de la realidad

física inmóvil.

La palabra topografía proviene de *topos* que significa "lugar", y *grafos*, "descripción". Es la ciencia que estudia el conjunto de principios y procedimientos que tienen por objeto la representación gráfica de la superficie de la Tierra, con sus formas y detalles, tanto naturales como artificiales. Esta representación tiene lugar sobre superficies planas, se limita a pequeñas extensiones de terreno y utiliza la geodesia para áreas mayores de superficies curvas. Para esa representación se emplea un sistema de coordenadas tridimensional donde la X y Y corresponden a unidades de la planimetría (métodos y procedimientos

Estándares:

Conexiones

Relacionar conceptos

Simplificar expresiones utilizando identidades trigonométricas elementales.

Comunicación

Leer, escribir y comunicar

Encontrar soluciones de una ecuación a partir de la representación gráfica.

empleados para la representación a escala de todos los detalles interesantes del terreno sobre una superficie plana, prescindiendo de su relieve) y la Z de la altimetría (también llamada hipsometría, la cual estudia el conjunto de métodos y procedimientos para determinar y representar la altura de cada uno de los puntos o cotas, respecto a un plano de referencia, consiguiendo representar el relieve del terreno).

Los mapas topográficos utilizan el sistema de representación de planos acotados que muestran la elevación del terreno. Se vale de líneas que conectan los puntos con la misma cota respecto a un plano de referencia, denominadas curvas de nivel. Este plano de referencia puede ser o no el nivel del mar, pero en caso de serlo se hablará de altitudes en lugar de cotas.

La topografía se emplea en varios campos, como la minería, arquitectura, ingeniería civil, agronomía, entre otras. Se considera una ciencia geométrica aplicada a la descripción de la realidad física inmóvil, ya que plasma en un plano topográfico la realidad vista en el ámbito rural y urbano, describiendo los elementos allí existentes: muros, edificios, calles, etcétera.

En obras civiles como edificios y puentes, la tarea del topógrafo es previa al inicio de un proyecto. Un arquitecto debe contar con un levantamiento tridimensional previo del terreno y de elementos inmóviles y fijos al suelo. Realizado el proyecto con base en este levantamiento, el topógrafo se encarga del "replanteo" del mismo: ubica los límites de la obra, los ejes desde los cuales se miden los elementos (columnas, tabiques, etcétera); establece los niveles o alturas de referencia. Actualmente, el método más utilizado para la toma de datos se basa en el empleo de una estación total, con la cual pueden medirse ángulos horizontales, verticales y distancias. Conociendo las coordenadas del lugar donde se ha colocado la estación es posible determinar las coordenadas tridimensionales de todos los puntos que se midan. ■

Adaptado de Wikipedia: http://es.wikipedia.org/wiki/Topograf%C3%Ada. 23 de Marzo de 2008.

Analiza y resuelve

De acuerdo con la lectura anterior, responde.

1. La topografía es una ciencia que tiene por objeto:
   - **a.** El estudio de pequeñas extensiones de terrenos.
   - **b.** La representación gráfica de la superficie de la Tierra.
   - **c.** La descripción de las superficies curvas.
   - **d.** Ubicar puntos en la superficie de la Tierra.
2. La afirmación verdadera es:
   - **a.** El trabajo de un topógrafo es construir edificios.
   - **b.** Un topógrafo se dedica al estudio de los topos.
   - **c.** Un topógrafo es el encargado de la representación gráfica de terrenos.
   - **d.** Un topógrafo no establece las alturas de referencia en una obra.
3. La afirmación falsa es:
   - **a.** Los mapas topográficos muestran la elevación del terreno.
   - **b.** La topografía se emplea en la agronomía.
   - **c.** En una obra civil, la labor del topógrafo es posterior al inicio de la misma.
   - **d.** La altimetría se conoce también como hipsometría.
4. La planimetría es:
   - **a.** Una ciencia que estudia las superficies curvas de la Tierra.
   - **b.** Una representación de un plano.
   - **c.** Un método para representar el relieve de un terreno.
   - **d.** Un procedimiento para representar sobre una superficie plana los detalles de un terreno.
5. Completa.
   - **a.** Para la representación gráfica de la superficie de la Tierra se utiliza ____________________.
   - **b.** La topografía se considera una ciencia __________ aplicada a la descripción de la realidad física inmóvil.
6. Busca el significado de la palabra *geodesia* y escribe su relación con la topografía.

Razonamiento lógico

Desarrollar destrezas matemáticas

Explicar y justificar cada uno de los pasos para establecer una identidad.

Resolución de problemas

Emplear estrategias en la resolución de problemas

Aplicar las leyes de seno y coseno en la resolución de diferentes problemas de carácter trigonométrico.

Identidades

Logro: establecer las identidades trigonométricas fundamentales.

Para considerar la simplificación de expresiones trigonométricas y la resolución de ecuaciones debemos conocer y manejar las propiedades básicas del álgebra como: factorización, productos, operaciones entre fracciones, racionalización, entre otros y el manejo apropiado de las identidades trigonométricas fundamentales.

Recordemos las identidades trigonométricas fundamentales:

- *Identidades recíprocas*

  $$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta},\ \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta},\ \csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}.$$

- *Identidades por división*

  $$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta},\ \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}.$$

- *Identidades pitagóricas*

  $$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1,\ 1+\tan^2\theta = \sec^2\theta,\ 1+\cot^2\theta = \csc^2\theta.$$

- *Identidades de ángulos complementarios*

  $$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{sen} x,\ \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x,\ \csc\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sec x.$$

- *Identidades de simetría*

  $$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x,\ \cos(-x) = \cos x,\ \tan(-x) = -\tan x.$$

Comentario

Una identidad es una ecuación que es cierta para todos los valores del dominio de una variable.

Para utilizar las identidades en la simplificación de expresiones y en la resolución de ecuaciones, debemos estudiar algunos procedimientos para transformar una expresión en otra. Analicemos los siguiente ejemplos.

Ejemplo 1

a. Expresemos $\cos^3 x + \operatorname{sen}^2 x \cos x$, en términos de $\cos x$.

b. Expresemos $\sec x + \sec x \cot^2 x$, en términos de $\cos x$.

Solución

a. $\cos^3 x + \operatorname{sen}^2 x \cos x$ — Escribimos la expresión a modificar.

$= \cos x\left(\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x\right)$ — Factorizamos $\cos x$.

$= \cos x(1)$ — Utilizamos la identidad pitagórica $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$.

$= \cos x$ — Aplicamos la propiedad modulativa para el producto.

b. $\sec x + \sec x \cot^2 x$ — Tomamos la expresión a modificar.

$= \sec x(1 + \cot^2 x)$ — Factorizamos $\sec x$.

$= \sec x(\csc^2 x)$ — Utilizamos la identidad pitagórica $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$.

$= \dfrac{1}{\cos x}(\csc^2 x)$ — Utilizamos la identidad recíproca $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$.

$= \dfrac{1}{\cos x(1 - \cos^2 x)}$ — Utilizamos la identidad $\csc^2 x = \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = \dfrac{1}{1 - \cos^2 x}$. ◀

Conexión con la vida

Las identidades trigonométricas tienen aplicación en los movimientos realizados por relojes de péndulo, por resortes que actúan como amortiguadores o por los planetas dentro de su órbita.

Para demostrar una identidad transformamos una expresión en otra. Veamos este hecho.

Ejemplo 2

Demostremos que $\csc x - \operatorname{sen} x = \cos x \cot x$.

Solución

Trabajamos con el lado izquierdo de la igualdad hasta obtener la expresión del lado derecho.

$\csc x - \operatorname{sen} x$	Tomamos la expresión del lado izquierdo.
$= \dfrac{1}{\operatorname{sen} x} - \operatorname{sen} x$	Utilizamos la identidad recíproca $\csc x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$.
$= \dfrac{1 - \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x}$	Adicionamos fracciones.
$= \dfrac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x}$	Utilizamos la identidad pitagórica $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$.
$= \cos x \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$	Utilizamos la propiedad de producto entre fracciones.
$= \cos x \cot x$	Utilizamos la identidad por división $\cot x = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$. ◀

En ocasiones, para demostrar igualdades debemos desarrollar la expresión trigonométrica de ambos lados de la igualdad, hasta evidenciar la identidad. Observemos el siguiente ejemplo.

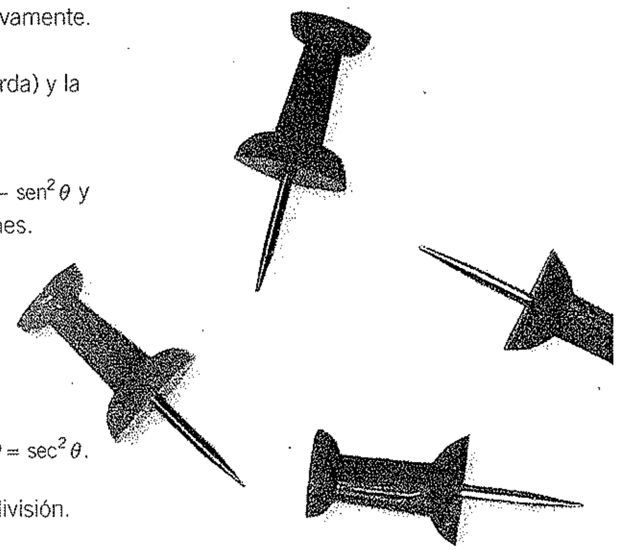
Ejemplo 3

Demostremos que:

a. $\dfrac{\cot \theta}{\sec \theta} = \csc \theta - \operatorname{sen} \theta$ **b.** $(1 + \tan \theta)^2 = \dfrac{1 + 2\cos \theta \operatorname{sen} \theta}{\cos^2 \theta}$

Solución

a. $\dfrac{\cot \theta}{\sec \theta} = \csc \theta - \operatorname{sen} \theta$	Escribimos la igualdad a demostrar.
$\dfrac{\dfrac{\cos \theta}{\operatorname{sen} \theta}}{\dfrac{1}{\cos \theta}} = \dfrac{1}{\operatorname{sen} \theta} - \operatorname{sen} \theta$	Utilizamos las identidades $\cot \theta = \dfrac{\cos \theta}{\operatorname{sen} \theta}$ y $\csc \theta = \dfrac{1}{\operatorname{sen} \theta}$, a izquierda y derecha de la ecuación, respectivamente.
$\dfrac{\cos^2 \theta}{\operatorname{sen} \theta} = \dfrac{1 - \operatorname{sen}^2 \theta}{\operatorname{sen} \theta}$	Realizamos la división entre fracciones (izquierda) y la sustracción (derecha).
$\dfrac{\cos^2 \theta}{\operatorname{sen} \theta} = \dfrac{\cos^2 \theta}{\operatorname{sen} \theta}$	Empleamos la identidad pitagórica $\cos^2 \theta = 1 - \operatorname{sen}^2 \theta$ y obtenemos la igualdad entre las dos expresiones.
b. $(1 + \tan \theta)^2$	Tomamos la expresión del lado izquierdo.
$= 1 + 2 \tan \theta + \tan^2 \theta$	Desarrollamos el cuadrado del binomio: $(u + v)^2 = u^2 + 2uv + v^2$.
$= (1 + \tan^2 \theta) + 2 \tan \theta$	Utilizamos la propiedad asociativa.
$= \sec^2 \theta + 2 \tan \theta$	Empleamos la propiedad pitagórica: $1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$.
$= \dfrac{1}{\cos^2 \theta} + 2 \dfrac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta}$	Utilizamos las identidades de recíproco y de división.
$= \dfrac{1 + 2 \cos \theta \operatorname{sen} \theta}{\cos^2 \theta}$	Adicionamos fracciones y obtenemos la expresión del lado derecho de la identidad. ◀



En otras ocasiones, para demostrar identidades debemos multiplicar una de las expresiones por el equivalente trigonométrico de 1, en la forma más conveniente.

Ejemplo 4

Demostremos las siguientes identidades:

a. $\dfrac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x} = \dfrac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}$ **b.** $\dfrac{\csc x}{1+\operatorname{sen} x} = \sec^2 x(\csc x - 1)$

Solución

a. $\dfrac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x}$ Tomamos la expresión del lado izquierdo.

$= \dfrac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x}\cdot\dfrac{1+\cos x}{1+\cos x}$ Multiplicamos por 1 escrito de la forma: $1 = \dfrac{1+\cos x}{1+\cos x}$.

$= \dfrac{1-\cos^2 x}{\operatorname{sen} x(1+\cos x)}$ Factorizamos la diferencia de cuadrados.

$= \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x(1+\cos x)}$ Empleamos la identidad pitagórica $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$.

$= \dfrac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x}\cdot\dfrac{\operatorname{sen} x}{(1+\cos x)}$ Empleamos la definición de una potencia y la multiplicación entre fracciones.

$= \dfrac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}$ Utilizamos el hecho que $\dfrac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x} = 1$ y obtenemos el lado derecho de la identidad.

b. $\dfrac{\csc x}{1+\operatorname{sen} x}$ Tomamos la expresión del lado izquierdo.

$= \dfrac{\csc x}{1+\operatorname{sen} x}\cdot\dfrac{1-\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}$ Multiplicamos por 1 escrito de la forma: $1 = \dfrac{1-\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}$.

$= \dfrac{\csc x(1-\operatorname{sen} x)}{1-\operatorname{sen}^2 x}$ Factorizamos la diferencia de cuadrados.

$= \dfrac{\csc x(1-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x}$ Utilizamos la identidad pitagórica $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$.

$= \dfrac{\csc x - \csc x \operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$ Aplicamos la propiedad distributiva.

$= \dfrac{\csc x - 1}{\cos^2 x}$ Utilizamos la identidad recíproca $\csc x \operatorname{sen} x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}\cdot \operatorname{sen} x = 1$.

$= \sec^2 x(\csc x - 1)$ Utilizamos la identidad recíproca $\dfrac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$ y obtenemos el lado derecho de la identidad. ◀

Comentario

Recuerda que:

- $\dfrac{xy}{zw} = \dfrac{x}{z}\cdot\dfrac{y}{w} = \dfrac{x}{w}\cdot\dfrac{y}{z}$
- $(x-y)(x+y) = x^2 - y^2$
- $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
- $\dfrac{a}{a} = 1$, *para todo* $a \neq 0$.

Si queremos demostrar que una ecuación trigonométrica no es una identidad, basta encontrar un contraejemplo, es decir, sustituimos las variables por valores específicos y las evaluamos para mostrar que esa ecuación no es cierta para todos lo valores del dominio.

Ejemplo 5

Demostremos que las siguientes ecuaciones no son una identidad trigonométrica.

a. $\sec x - \cos x = \operatorname{sen} x \sec x$ **b.** $\tan(x+y) = \tan x + \tan y$

Solución

a. $x = \dfrac{\pi}{4}$ Tomamos un valor particular de x.

$\sec\dfrac{\pi}{4} - \cos\dfrac{\pi}{4}$ Evaluamos en $x = \dfrac{\pi}{4}$ la expresión del lado izquierdo de la ecuación.

$= \sqrt{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ Obtenemos el resultado de la evaluación.

$\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\sec\frac{\pi}{4}$ — Evaluamos en $x=\frac{\pi}{4}$ la expresión del lado derecho de la ecuación.

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2}=1$ — Obtenemos el resultado de la evaluación.

$1\neq\frac{\sqrt{2}}{2}$ — Comparamos los resultados de las evaluaciones.

De lo anterior, obtenemos que $\sec x-\cos x\neq \operatorname{sen} x \sec x$.

b. $x=y=\frac{\pi}{4}$ — Tomamos un valor particular de x y y.

$\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\pi}{4}=2$ — Evaluamos en $x=y=\frac{\pi}{4}$ la expresión del lado derecho de la ecuación.

$\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=\tan\frac{\pi}{2}=0$ — Evaluamos en $x=y=\frac{\pi}{4}$ la expresión del lado izquierdo de la ecuación.

$2\neq 0$ — Comparamos los resultados de las evaluaciones.

Así, $\tan(x+y)\neq\tan x+\tan y$, por tanto, no es una identidad. ◀

Para verificar identidades debemos tener en cuenta:

- *Transformar la expresión más complicada en una más simple.*
- *En caso de ser necesario, factorizar, realizar operaciones entre fracciones, desarrollar binomios, racionalizar o multiplicar por 1 expresado en forma conveniente.*
- *Emplear las identidades fundamentales.*
- *En algunos casos, desarrollar las dos expresiones hasta obtener un resultado común.*

Pensamiento crítico

¿Cómo mostrarías gráficamente que las identidades $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\operatorname{sen} x$, $\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cot x$, $\csc\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sec x$ *son ciertas?*

> Piensa y practica <

> Conexiones

1. Simplifica cada expresión, utilizando identidades fundamentales.

a. $\cos x \sec x$

b. $\frac{1-\cos^2 x}{\operatorname{sen}^3 x}$

c. $\frac{-\operatorname{sen}(-x)}{\cos(-x)}$

d. $(\tan^2 x+1)\cos x$

e. $\frac{\cos^2 u}{\operatorname{sen} u-1}$

f. $\sec x-\frac{\tan^2 x}{\sec x}$

g. $\tan x\cos x\cot^2 x$

h. $\frac{1}{1-\cos\beta}+\frac{1}{1+\cos\beta}$

i. $\operatorname{sen} x\tan x\sec^2 x\cos^2 x$

j. $(\csc^2 x-\cot^2 x)(1+\sec^2 x)$

2. Escribe cada expresión en términos de $\operatorname{sen} x$.

a. $\frac{\tan^2 x}{\csc x-1}$

b. $\frac{\csc x}{\tan^2 x-\sec^2 x}$

c. $\frac{1-\cot^2 x}{\operatorname{sen} x-\cos x}$

3. Escribe cada expresión en términos de $\cos x$.

a. $\frac{\tan^2 x}{\csc x-1}$

b. $\frac{\csc x}{\tan^2 x-\sec^2 x}$

c. $\frac{1-\cot^2 x}{\operatorname{sen} x-\cos x}$

4. Explica cómo se usa la propiedad algebraica para demostrar la identidad trigonométrica.

a. $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$;
$(\csc^4\theta - \cot^4\theta) = \csc^2\theta + \cot^2\theta$

b. $\dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{2}{1-x^2}$;
$\dfrac{1}{1-\operatorname{sen}\beta} + \dfrac{1}{1+\operatorname{sen}\beta} = 2\sec^2\beta$

c. $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$;
$\tan^3\theta - 1 = (\tan\theta - 1)(\sec^2\theta + \tan\theta)$

d. $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$;
$\csc^4\phi - 2\csc^2\phi\cot^2\phi + \cot^4\phi = 1$

e. $\dfrac{x}{x+1} + \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$;
$\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\alpha+1} + \dfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha-1} = \dfrac{\cos^2\alpha-2}{\cos^2\alpha}$

> Razonamiento lógico

5. Demuestra las siguientes identidades.

a. $1 - \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{1-\cos x} = -\cos x$

b. $\dfrac{1+\cot^2 x}{\csc^2 x} = 1$

c. $\dfrac{1+\operatorname{sen} y}{\operatorname{sen} y} = 1 + \csc y$

d. $\dfrac{\sec\theta - 1}{1-\cos\theta} = \sec\theta$

e. $\sec^2 x + 4 = \tan^2 x + 5$

f. $\operatorname{sen}\beta = \dfrac{\tan\beta\cot\beta}{\csc\beta}$

g. $\dfrac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^3 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\csc x}$

h. $\dfrac{\operatorname{sen}^2 t}{\cos t} + \cos t = \sec t$

i. $\tan\alpha = \dfrac{\cos\alpha\sec\alpha}{\cot\alpha}$

j. $\dfrac{1}{1+\tan^2 y} = \cos^2 y$

k. $\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x} = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{(1-\cos x)^2}$

l. $\dfrac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x} = \operatorname{sen}^2 x$

m. $\dfrac{(1+\cos\beta)(1-\cos\beta)}{\tan^2\beta} = \cos^2\beta$

n. $(\tan x + \operatorname{sen} x)(1 - \cos x) = \operatorname{sen}^2 x\tan x$

o. $\cos x(1 + \tan x)^2 = \sec x + 2\operatorname{sen} x$

p. $\cot v + \sec v = \dfrac{\cos v + \tan v}{\operatorname{sen} v}$

q. $\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 2\cos^2 x - 1$

r. $\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$

s. $\sec^2 b + \tan^2 b = 2\tan^2 b + 1$

t. $(\operatorname{sen} a + \cos a)^2 = 1 + 2\operatorname{sen} a\cos a$

u. $\operatorname{sen}^4\alpha - \cos^4\alpha = \operatorname{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha$

v. $\dfrac{\tan^2 x - 1}{\operatorname{sen} x + \cos x} = \dfrac{\operatorname{sen} x - \cos x}{\cos^2 x}$

w. $(\tan^2\theta + 1)\cos^2\theta = 1$

x. $\dfrac{\cot^2 y}{\cot^2 y\operatorname{sen}^2 y} + \csc^2 y\cot^2 y = \csc^4 y$

y. $\cot^2\alpha\operatorname{sen}^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha = \operatorname{sen}^2\alpha$

z. $\tan\theta - \tan\theta\sec^2\theta = -\tan^3\theta$

6. Completa la tabla 4.1, teniendo en cuenta que cada función trigonométrica de la fila se expresa en términos de la función trigonométrica de la columna.

	sen x	cos x	tan x	cot x	sec x	csc x
sen x	sen x	$\pm\sqrt{1-\cos^2 x}$	$\dfrac{\tan x}{\pm\sqrt{\tan^2 x+1}}$	$\pm\sqrt{\dfrac{1}{1+\cot^2 x}}$		
cos x	$\pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x}$					
tan x					$\pm\sqrt{\sec^2 x - 1}$	
cot x						
sec x		$\dfrac{1}{\cos x}$				
csc x						csc x

Tabla 4.1

7. Demuestra las siguientes identidades.

a. $\dfrac{1+\csc x}{\csc x - 1} = \dfrac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}$

b. $\cos^4 y + (\operatorname{sen} y \cos y)^2 + \operatorname{sen}^2 y = 1$

c. $\sec^4 x - 1 - \sec^2 x \tan^2 x = \tan^2 x$

d. $\cot\beta + \tan\beta = \cot\beta \sec^2\beta$

e. $\dfrac{\operatorname{sen} t}{1-\cos t} = \dfrac{1+\cos t}{\operatorname{sen} t}$

f. $\dfrac{1}{1-\operatorname{sen} t} + \dfrac{1}{1+\operatorname{sen} t} = 2\sec^2 t$

g. $\dfrac{\operatorname{sen} t}{1+\cos t} = \csc t - \cot t$

h. $\dfrac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x} + \tan x = \sec x$

i. $\dfrac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x} - \dfrac{1-\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x} = 4\tan x \sec x$

j. $\dfrac{\sec y + \csc y}{\sec y - \csc y} = \dfrac{\operatorname{sen} y + \cos y}{\operatorname{sen} y - \cos y}$

k. $\dfrac{\tan y + \cot y}{\tan y - \cot y} = \dfrac{1}{1-2\cos^2 y}$

l. $\left(\dfrac{\sec\beta + \csc\beta}{1+\tan\beta}\right)^2 = \csc^2\beta$

m. $\dfrac{1}{\csc x - \cot x} = \cot x + \csc x$

n. $\operatorname{sen}^2\beta\cot^2\beta + \cos^2\beta\tan^2\beta = 1$

o. $\operatorname{sen}^3\beta + \cos^3\beta = (\operatorname{sen}\beta + \cos\beta)(1-\operatorname{sen}\beta\cos\beta)$

p. $\operatorname{sen}^4\beta + \cos^4\beta = 1 - 2\operatorname{sen}^2\beta\cos^2\beta$

q. $\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}} = \csc x + \cot x$

r. $\sqrt{\dfrac{1-\operatorname{sen} y}{1+\operatorname{sen} y}} = \dfrac{1}{\sec y + \tan y}$

s. $\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \dfrac{\tan x}{\cot x} + \dfrac{\sec x}{\csc x} = \dfrac{2\cot x + 1}{\cot^2 x}$

t. $(\tan y - \operatorname{sen} y)^2 + (1-\cos y)^2 = (1-\sec y)^2$

u. $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta} = \dfrac{\csc\beta + \csc\alpha}{\csc\beta - \csc\alpha}$

v. $\dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} = \dfrac{\cot\beta - \cot\alpha}{1+\cot\alpha\cot\beta}$

w. $\dfrac{\cot x}{1-\tan x} + \dfrac{\tan x}{1-\cot x} = 1 + \sec x \csc x$

x. $\dfrac{2}{\tan x} - \cot x \cos^2 x = \operatorname{sen} x \cos x + \cot x$

y. $\sec^2 a \csc^2 a = \sec^2 a + \csc^2 a$

z. $\sec^2 a + \csc^2 a = (\tan a + \cot a)^2$

8. Encuentra un valor de ϕ para el cual se cumple la igualdad.

a. $\cos(\phi x) = \cos x$

b. $\sqrt{\cos^2\phi} = \cos\phi$

c. $\sqrt{\cot^2\phi + 1} = \cot^2\phi + 1$

d. $\sqrt{1-\cos^2\phi} = -\operatorname{sen}\phi$

e. $(\operatorname{sen}\phi + \cos\phi)^2 = \operatorname{sen}^2\phi + \cos^2\phi$

f. $\operatorname{sen}\phi = \cos\phi$

9. Encuentra una expresión para k (simplificando), con el cual se establece una identidad.

a. $\dfrac{1}{k} = \dfrac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x} + \operatorname{sen} x$

b. $\dfrac{k^2}{\cos x - 1} = \cos x + 1$

c. $\dfrac{k-1}{1-\cos x} = k$

d. $\operatorname{sen} x \tan x = k + \sec x$

> Comunicación

10. Por medio de un contraejemplo, demuestra que las siguientes expresiones no son identidades.

a. $\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x = 1$

b. $\tan x = \operatorname{sen} x \cdot \cos x$

c. $\tan^2 x - \csc^2 x = 2$

d. $\tan(2x) = 2\tan x$

e. $\sec^2 x - \cos^2 x = \operatorname{sen}^2 x$

11. Relaciona cada expresión de la izquierda con una sola expresión equivalente a la derecha.

$\operatorname{sen} x \tan x$	$\tan x$
$\cos x \csc x$	$\csc x - \operatorname{sen} x$
$\operatorname{sen} x \sec x$	$\sec x - \cos x$
$\operatorname{sen}^2 x \csc x$	$\sec x$
$\cos x \cot x$	$\operatorname{sen} x$
$\tan x \csc x$	$\cot x$

Lección 2

Pensamientos numérico y variacional

Identidades para la adición y sustracción de ángulos

Logro: usar las identidades de adición y sustracción de ángulos para validar equivalencias de expresiones trigonométricas.

En diversas aplicaciones de la trigonometría, es común el uso de fórmulas relativas a la adición y a la sustracción de dos ángulos. Por ejemplo, el canal de televisión Halo T. V. desea instalar una cámara en la parte superior de la tribuna del estadio del club deportivo Chipidey, a una altura de 10 metros. La vista de la cámara debe cubrir la tribuna cuyo ancho es de 6 metros, y el ancho de la cancha de fútbol que mide 50 metros. ¿Qué ángulo debe rotar la cámara?

De acuerdo con la figura 4.1, tenemos que $\alpha = \theta + \varphi$. Como el ángulo que debe rotar la cámara es θ, despejamos ese valor de la ecuación anterior y obtenemos que $\theta = \alpha - \varphi$.

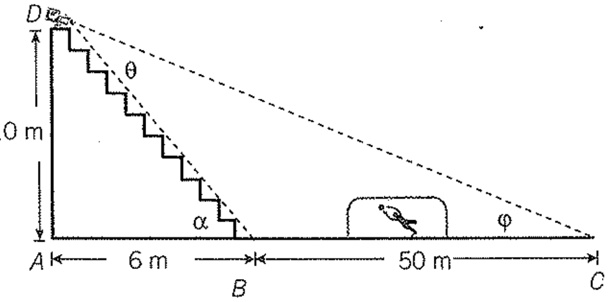


Figura 4.1

Para resolver el problema, le sugerimos a la compañía de televisión usar la razón trigonométrica tangente del ángulo de rotación de la cámara, es decir, encontrar $\tan\theta = \tan(\alpha - \varphi)$, ya que por los datos del problema, conocemos los valores de $\tan\alpha$ y $\tan\varphi$, pero necesitamos conocer la relación entre $\tan(\alpha - \varphi)$ y $\tan\alpha$, $\tan\varphi$, lo cual aprenderemos en esta lección. Además, deduciremos identidades para $\operatorname{sen}(\phi \pm \beta)$, $\cos(\phi \pm \beta)$, $\tan(\phi \pm \beta)$.

Deduzcamos el valor de $\operatorname{sen}(\phi + \beta)$.

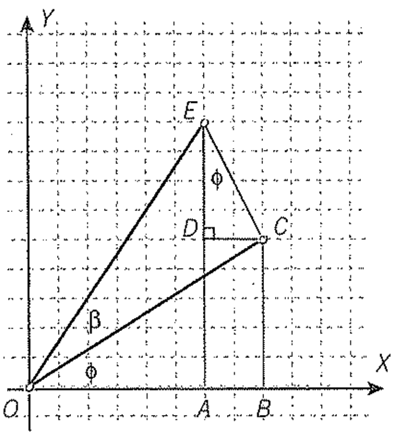


Figura 4.2

1. $\operatorname{sen}(\phi + \beta) = \frac{AE}{OE}$ — Observamos el triángulo OAE de la figura 4.2.

2. $\operatorname{sen}(\phi + \beta) = \frac{BC + DE}{OE}$ — Reemplazamos $AE = AD + DE$ y $AD = BC$ (*ver* figura 4.2).

3. $\operatorname{sen}(\phi + \beta) = \frac{BC}{OE} + \frac{DE}{OE}$ — Obtenemos el valor de $\operatorname{sen}(\phi + \beta)$.

Por otro lado,

4. $\operatorname{sen}\phi = \frac{BC}{OC}$, $\cos\beta = \frac{OC}{OE}$ — Observamos los triángulos OBC y OEC de la figura 4.2.

5. $OC = OE\cos\beta$ — Despejamos OC de $\cos\beta = \frac{OC}{OE}$.

6. $\operatorname{sen}\phi = \frac{BC}{OE\cos\beta}$ — Remplazamos el valor $OC = OE\cos\beta$ en $\operatorname{sen}\phi = \frac{BC}{OC}$.

7. $\operatorname{sen}\phi\cos\beta = \frac{BC}{OE\cancel{\cos\beta}}\cdot\cancel{\cos\beta} = \frac{BC}{OE}$ — Multiplicamos $\operatorname{sen}\phi$ y $\cos\beta$.

Ahora,

8. $\cos\phi = \frac{DE}{EC}$, $\operatorname{sen}\beta = \frac{EC}{OE}$ Observamos los triángulos *EDC* y *OEC* de la figura 4.2.

9. $EC = OE \operatorname{sen}\beta$ Despejamos EC de $\operatorname{sen}\beta = \frac{EC}{OE}$.

10. $\cos\phi = \frac{DE}{OE \operatorname{sen}\beta}$ Remplazamos $EC = OE \operatorname{sen}\beta$ en $\cos\phi = \frac{DE}{EC}$.

11. $\cos\phi \operatorname{sen}\beta = \frac{DE}{OE}$ Multiplicamos $\cos\phi$ y $\operatorname{sen}\beta$.

12. $\operatorname{sen}\phi\cos\beta + \cos\phi\operatorname{sen}\beta = \frac{BC}{OE} + \frac{DE}{OE}$ Adicionamos los resultados de (7) y (11).

13. $\frac{BC}{OE} + \frac{DE}{OE} = \frac{AE}{OE}$ Observamos la figura 4.2

14. $\operatorname{sen}(\phi+\beta) = \operatorname{sen}\phi\cos\beta + \cos\phi\operatorname{sen}\beta$ Igualamos el resultado de (1) y (13).

De lo anterior concluimos que:

Seno de la suma de dos ángulos

$$sen\,(\phi+\beta) = sen\,\phi\,cos\,\beta + cos\,\phi\,sen\,\beta$$

Esta expresión nos permite hallar el seno de una adición de ángulos en términos de las funciones seno y coseno de los ángulos ϕ y β.

Ejemplo 6

Encontremos el valor exacto de $\operatorname{sen} 75°$.

Solución

Como $45° + 30° = 75°$, entonces:

$$\operatorname{sen} 75° = \operatorname{sen}(45° + 30°) = \operatorname{sen} 45° \cos 30° + \cos 45° \operatorname{sen} 30°$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}. \blacktriangleleft$$

De la identidad seno de la suma de dos ángulos, podemos encontrar las siguientes identidades:

- $\operatorname{sen}(\phi - \beta) = \operatorname{sen}(\phi + (-\beta)) = \operatorname{sen}\phi\cos(-\beta) + \cos\phi\operatorname{sen}(-\beta)$, de donde se obtiene:

Seno de la diferencia de dos ángulos

$$sen\,(\phi-\beta) = sen\,\phi\,cos\,\beta - cos\,\phi\,sen\,\beta$$

- $\operatorname{sen} 2\phi = \operatorname{sen}(\phi + \phi) = \operatorname{sen}\phi\cos\phi + \operatorname{sen}\phi\cos\phi = 2\operatorname{sen}\phi\cos\phi$, es decir,

Seno del ángulo doble

$$sen\,2\phi = 2\,sen\,\phi\,cos\,\phi$$

Ejemplo 7

Si $\operatorname{sen}\alpha = -\frac{4}{5}$, $\operatorname{sen}\theta = \frac{12}{13}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ y $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, hallemos:

a. $\operatorname{sen}(\alpha - \theta)$ **b.** $\operatorname{sen} 2\theta$ **c.** $\operatorname{sen} 2\alpha$

Comentario

$cos(-\beta) = cos\,\beta$,
$sen(-\beta) = -\,sen\,\beta$.

Solución

Para usar las identidades del seno de la diferencia de ángulos y del seno del ángulo doble, debemos hallar los valores de $\cos\alpha$ y $\cos\theta$:

$\cos^2\alpha + \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = 1$	Utilizamos la identidad pitagórica $\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha = 1$.
$\cos^2\alpha = 1 - \frac{16}{25}$	Despejamos $\cos^2\alpha$.
$\cos\alpha = \pm\frac{3}{5}$	Hallamos $\cos\alpha$.
$\cos\alpha = -\frac{3}{5}$	Utilizamos el hecho de que $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Por otro lado:

$\cos^2\theta + \left(\frac{12}{13}\right)^2 = 1$	Utilizamos la identidad pitagórica $\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta = 1$.
$\cos\theta = \pm\frac{5}{13}$	Despejamos $\cos^2\theta$ y hallamos $\cos^2\theta$.
$\cos\theta = \frac{5}{13}$	Utilizamos el hecho que $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

Por tanto:

a. $\text{sen}\,(\alpha - \theta) = \text{sen}\,\alpha\cos\theta - \cos\alpha\,\text{sen}\,\theta = \left(-\frac{4}{5}\right)\left(\frac{5}{13}\right) - \left(-\frac{3}{5}\right)\left(\frac{12}{13}\right) = \frac{16}{65}$.

b. $\text{sen}\,(2\theta) = 2\text{sen}\,\theta\cos\theta = 2\frac{12}{13}\cdot\frac{5}{13} = \frac{120}{169}$.

c. $\text{sen}(2\alpha) = 2\text{sen}\,\alpha\cos\alpha = 2\left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{24}{25}$. ◀

Comentario

$\text{sen}\,x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$,

$\cos x = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

Ahora encontremos las identidades para $\cos(\phi + \beta)$, $\cos(\phi - \beta)$ y $\cos(2\phi)$

- $\cos(\phi + \beta) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - (\phi + \beta)\right) = \text{sen}\left(\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) - \beta\right)$

  $= \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right)\cos\beta - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right)\text{sen}\,\beta$ — Utilizamos que $\cos\alpha = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$.

  $= \cos\phi\cos\beta - \text{sen}\,\phi\,\text{sen}\,\beta$. — Utilizamos que $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \text{sen}\,\alpha$.

- $\cos(\phi - \beta) = \cos(\phi + (-\beta))$

  $= \cos\phi\cos(-\beta) - \text{sen}\,\phi\,\text{sen}\,(-\beta)$ — Utilizamos la identidad de coseno de una adición.

  $= \cos\phi\cos\beta - \text{sen}\,\phi(-\text{sen}\,\beta)$ — Utilizamos que $\cos\beta = \cos(-\beta)$ y $\text{sen}\,(-\beta) = -\text{sen}\,\beta$.

  $= \cos\phi\cos\beta + \text{sen}\,\phi\,\text{sen}\,\beta$

- $\cos(2\alpha) = \cos(\alpha + \alpha)$

  $= \cos\alpha\cos\alpha - \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\alpha$ — Utilizamos la identidad de coseno de una adición.

  $= \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha = \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha)$ — Utilizamos la identidad pitágorica.

  $= 2\cos^2\alpha - 1$

Coseno de la suma de dos ángulos

$$\cos(\phi + \beta) = \cos\phi\cos\beta - \text{sen}\,\phi\,\text{sen}\,\beta$$

Coseno de la diferencia de dos ángulos

$$\cos(\phi - \beta) = \cos\phi\cos\beta + \text{sen}\,\phi\,\text{sen}\,\beta$$

Coseno del ángulo doble

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

Ejemplo 8

Si $\operatorname{sen} \alpha = \frac{4}{5}$, $\cos\theta = \frac{12}{13}$, $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ y $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, calculemos:

a. $\cos(\alpha + \theta)$ **b.** $\cos(\alpha - \theta)$ **c.** $\cos(\theta - \alpha)$ **d.** $\cos 2\theta$

Solución

Para usar las identidades del coseno de la suma y diferencia de ángulos y del coseno del ángulo doble, debemos hallar los valores de $\cos\alpha$ y $\operatorname{sen}\theta$.

$\cos^2\alpha + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$ Utilizamos la identidad pitagórica $\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1$.

$\cos^2\alpha = 1 - \frac{16}{25}$ Despejamos $\cos^2\alpha$.

$\cos\alpha = \pm\frac{3}{5}$ Hallamos $\cos\alpha$.

$\cos\alpha = \frac{3}{5}$ Utilizamos el hecho que $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Por otro lado,

$\operatorname{sen}^2\theta + \left(\frac{12}{13}\right)^2 = 1$ Utilizamos la identidad pitagórica $\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$.

$\operatorname{sen}^2\theta = 1 - \frac{144}{169}$ Despejamos $\operatorname{sen}^2\theta$.

$\operatorname{sen}\theta = \pm\frac{5}{13}$ Hallamos $\operatorname{sen}\theta$.

$\operatorname{sen}\theta = -\frac{5}{13}$ Utilizamos el hecho que $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$.

Por tanto:

a. $\cos(\alpha + \theta) = \cos\alpha\cos\theta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\theta = \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{12}{13}\right) - \left(\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{5}{13}\right) = \frac{56}{65}$.

b. $\cos(\alpha - \theta) = \cos\alpha\cos\theta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\theta = \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{12}{13}\right) + \left(\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{5}{13}\right) = \frac{16}{65}$.

c. $\cos(\theta - \alpha) = \cos\theta\cos\alpha + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\alpha = \left(\frac{12}{13}\right)\left(\frac{3}{5}\right) + \left(-\frac{5}{13}\right)\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{16}{65}$.

d. $\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = \left(\frac{12}{13}\right)^2 - \left(-\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{144}{169} - \frac{25}{169} = \frac{119}{169}$. ◀

Comentario

- *$\cos(-x) = \cos x$ implica que $\cos(\alpha - \beta) = \cos(-(\beta - \alpha)) = \cos(\beta - \alpha)$.*
- *$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$ implica que $\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = -\operatorname{sen}(\beta - \alpha)$.*

Ejemplo 9

Resolvamos el ejercicio de inicio de lección, es decir, encontremos el ángulo para rotar la cámara en el estadio de fútbol (*ver* figura 4.1).

Solución

1. $\tan\theta = \tan(\alpha - \varphi) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha - \varphi)}{\cos(\alpha - \varphi)}$ Utilizamos la definición de $\tan\theta$.

2. $\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\varphi - \cos\alpha\operatorname{sen}\varphi}{\cos\alpha\cos\varphi + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\varphi}$ Utilizamos las identidades $\operatorname{sen}(\alpha - \varphi)$ y $\cos(\alpha - \varphi)$.

3. $\operatorname{sen}\alpha = \frac{10}{\sqrt{136}}$, $\cos\alpha = \frac{6}{\sqrt{136}}$ Aplicamos el Teorema de Pitágoras al $\triangle ABD$.

4. $\operatorname{sen}\varphi = \frac{10}{\sqrt{3236}}$, $\cos\varphi = \frac{56}{\sqrt{3236}}$ Aplicamos el Teorema de Pitágoras al $\triangle ADC$.

5. $\tan\theta = \dfrac{\frac{10}{\sqrt{136}}\frac{56}{\sqrt{3236}} - \frac{6}{\sqrt{136}}\frac{10}{\sqrt{3236}}}{\frac{6}{\sqrt{136}}\frac{56}{\sqrt{3236}} + \frac{10}{\sqrt{136}}\frac{10}{\sqrt{3236}}}$ Evaluamos los valores de (3) y (4) en la ecuación (2).

$\tan\theta \approx 1{,}146789$ Aproximamos el valor de $\tan\theta$.

$\theta \approx 48{,}911572°$ Despejamos θ aplicando $\tan^{-1}\theta$ con la calculadora en modo DEG. ◀

Es posible determinar identidades para tangente de la siguiente forma:

$$\tan(\phi+\beta)=\frac{\text{sen}(\phi+\beta)}{\cos(\phi+\beta)}$$

$$=\frac{\text{sen}\,\phi\cos\beta+\cos\phi\,\text{sen}\,\beta}{\cos\phi\cos\beta-\text{sen}\,\phi\,\text{sen}\,\beta}$$

Utilizamos las identidades de adición y sustracción de seno y coseno.

$$=\frac{\dfrac{\text{sen}\,\phi\cos\beta+\cos\phi\,\text{sen}\,\beta}{\cos\phi\cos\beta}}{\dfrac{\cos\phi\cos\beta-\text{sen}\,\phi\,\text{sen}\,\beta}{\cos\phi\cos\beta}}$$

Multiplicamos por $\dfrac{\dfrac{1}{\cos\phi\cos\beta}}{\dfrac{1}{\cos\phi\cos\beta}}$.

$$=\frac{\tan\phi+\tan\beta}{1-\tan\phi\tan\beta}$$

Utilizamos la definición de tangente en términos de seno y coseno.

$$\tan(\phi-\beta)=\tan(\phi+(-\beta))$$

Escribimos la sustracción como una adición.

$$=\frac{\tan\phi+\tan(-\beta)}{1-\tan\phi\tan(-\beta)}$$

Aplicamos la identidad de tangente de una adición.

$$=\frac{\tan\phi-\tan\beta}{1+\tan\phi\tan\beta}$$

Utilizamos que $\tan(-\beta)=-\tan\beta$.

De donde concluimos:

Tangente de la suma de dos ángulos

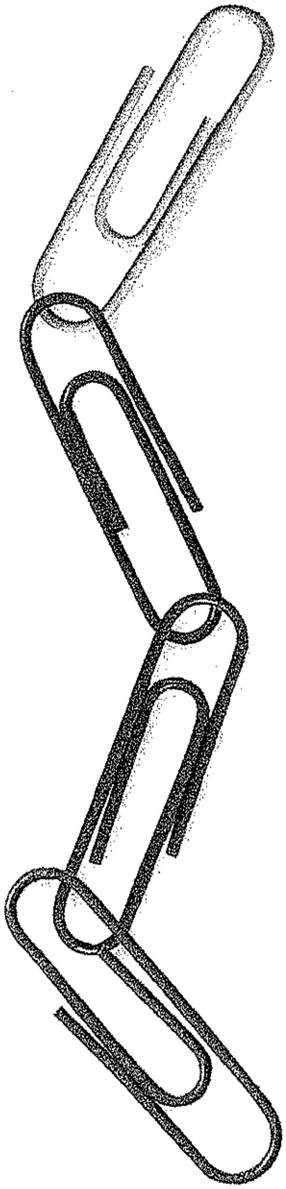
$$\tan(\phi+\beta)=\frac{\tan\phi+\tan\beta}{1-\tan\phi\tan\beta}$$

Tangente de la diferencia de dos ángulos

$$\tan(\phi-\beta)=\frac{\tan\phi-\tan\beta}{1+\tan\phi\tan\beta}$$

Tangente del ángulo doble

$$\tan 2\phi=\frac{2\tan\phi}{1-\tan^2\phi}$$



Pensamiento crítico

¿Cómo puedes emplear la identidad $\tan(\phi+\beta)=\dfrac{\text{sen}(\phi+\beta)}{\cos(\phi+\beta)}$ *para hallar la identidad del ángulo doble?*

Ejemplo 10

Si sabemos que $\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ y $\tan\frac{\pi}{4}=1$, encontremos los valores de:

a. $\tan\frac{\pi}{12}$ **b.** $\tan\frac{5\pi}{12}$ **c.** $\tan\frac{\pi}{3}$

Solución

a. $\tan\frac{\pi}{12}=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)$

Utilizamos el hecho de que $\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{12}$.

$$=\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\frac{\pi}{6}}{1+\tan\frac{\pi}{4}\cdot\tan\frac{\pi}{6}}$$

Utilizamos la identidad $\tan(\phi-\beta)$.

$$= \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}$$ Efectuamos las operaciones indicadas.

$$= 2 - \sqrt{3}$$ Simplificamos la expresión.

b. $\tan \frac{5\pi}{12} = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right)^2$ Utilizamos el hecho que $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{12}$.

$$= \frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan \frac{\pi}{6}}{1 - \tan \frac{\pi}{4} \cdot \tan \frac{\pi}{6}}$$ Utilizamos la identidad $\tan(\phi + \beta)$.

$$= 2 + \sqrt{3}$$ Simplificamos la expresión.

c. $\tan \frac{\pi}{3} = \tan 2\frac{\pi}{6}$ Utilizamos el hecho que $2\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$.

$$= \frac{2\tan \frac{\pi}{6}}{1 - \tan^2 \frac{\pi}{6}}$$ Utilizamos la identidad del ángulo doble.

$$= \sqrt{3}$$ Simplificamos la expresión. ◀

Ejemplo 11

Con la ayuda de los triángulos de la figura 4.3 y las identidades para tangente, hallemos $\tan\left(\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) + \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right)$

Solución

1. $\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) = \alpha$ Utilizamos del triángulo (a) que $\operatorname{sen} \alpha = \frac{3}{5}$.
2. $\cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = \beta$ Utilizamos del triángulo (b) que $\cos \beta = \frac{1}{3}$.
3. $\tan \alpha = \frac{3}{4}$ Observamos el triángulo (a) de la figura 4.3.
4. $\tan \beta = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ Observamos el triángulo (b) de la figura 4.3.
5. $\tan\left(\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) + \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right)$

$$= \tan(\alpha + \beta)$$ Reemplazamos los valores de (1) y (2).

$$= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$ Utilizamos la identidad de tangente de la suma de dos ángulos.

$$= \frac{\frac{3}{4} + 2\sqrt{2}}{1 - \frac{3}{4} \cdot 2\sqrt{2}}$$ Reemplazamos los valores de (3) y (4).

$$= \frac{3 + 8\sqrt{2}}{4 - 6\sqrt{2}}$$ Simplificamos la expresión. ◀

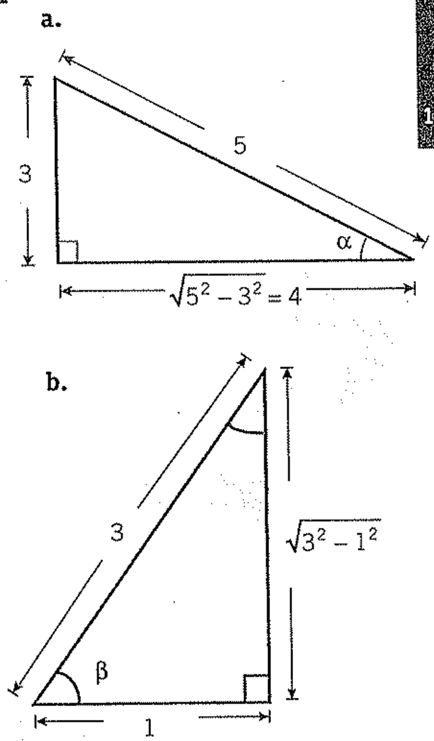


Figura 4.3

Ejemplo 12

Demostremos las siguientes identidades.

a. $\tan x - \tan y = \frac{\operatorname{sen}(x - y)}{\cos x \cos y}$

b. $\frac{1 - \cos 2x}{\operatorname{sen} 2x} = \tan x$

Solución

a. Desarrollamos el lado derecho de la expresión.

$$\frac{\operatorname{sen}(x-y)}{\cos x \cos y}$$

$$= \frac{\operatorname{sen} x \cos y - \cos x \operatorname{sen} y}{\cos x \cos y}$$ Utilizamos la identidad del seno de la diferencia de ángulos.

$$= \frac{\operatorname{sen} x \cos y}{\cos x \cos y} - \frac{\cos x \operatorname{sen} y}{\cos x \cos y}$$ Empleamos la propiedad $\frac{x-y}{z} = \frac{x}{z} - \frac{y}{z}$.

$$= \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} - \frac{\operatorname{sen} y}{\cos y}$$ Simplificamos la expresión.

$$= \tan x - \tan y$$ Utilizamos la identidad de división.

b. Desarrollemos el lado izquierdo de la expresión.

$$\frac{1-\cos 2x}{\operatorname{sen} 2x}$$

$$= \frac{1-(1-2\operatorname{sen}^2 x)}{2\operatorname{sen} x \cos x}$$ Utilizamos las identidades del ángulo doble para seno y coseno.

$$= \frac{1-1+2\operatorname{sen}^2 x}{2\operatorname{sen} x \cos x}$$ Aplicamos la propiedad distributiva.

$$= \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$ Simplificamos la expresión.

$$= \tan x$$ Utilizamos la identidad de división. ◀

Existen unas identidades muy importantes conocidas como identidades del ángulo medio, con las cuales es posible encontrar el coseno, seno o tangente de la mitad de un ángulo cuando se conoce el valor correspondiente para el ángulo. Veamos.

$$\cos 2\phi = 2\cos^2\phi - 1$$ Tomamos la identidad de coseno del ángulo doble.

$$2\cos^2\phi = 1 + \cos 2\phi$$ Despejamos $2\cos^2\phi$.

$$\cos\phi = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\phi}{2}}$$ Despejamos $\cos\phi$.

$$\cos\frac{\phi}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\phi}{2}}$$ Remplazamos ϕ por $\frac{\phi}{2}$ y obtenemos la identidad del coseno del ángulo medio.

Debemos tener en cuenta que el signo del radical depende del cuadrante en el cual queda el ángulo. De forma similar obtenemos que:

Identidad del coseno del ángulo medio

$$\cos\frac{\phi}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\phi}{2}}$$

Identidad del seno del ángulo medio

$$\operatorname{sen}\frac{\phi}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\phi}{2}}$$

Identidad de la tangente del ángulo medio

$$\tan\frac{\phi}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\phi}{1+\cos\phi}}$$

> Piensa y practica <

> Conexiones

1. Halla el valor exacto de cada expresiones si: $\cos a = -\frac{4}{5}$, $\cos b = \frac{15}{17}$, $\pi < a < \frac{3\pi}{2}$ y $0 < b < \frac{\pi}{2}$.
   - **a.** $\cos(a - b)$
   - **b.** $\cos 2b$
   - **c.** $\cos(a + b)$
   - **d.** $\cos\left(\frac{a}{2}\right)$
   - **e.** $\operatorname{sen}(a - b)$
   - **f.** $\operatorname{sen} 2a$
   - **g.** $\operatorname{sen}\left(\frac{b}{2}\right)$
   - **h.** $\tan(a - b)$
   - **i.** $\tan(a + b)$
   - **j.** $\tan 2b$
   - **k.** $\tan\left(\frac{a}{2}\right)$

2. Encuentra el valor de k para el cual se cumple cada igualdad.
   - **a.** $\cos x \cos 3x + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 3x = \cos kx$
   - **b.** $\operatorname{sen} 4x \cos kx - \cos 4x \operatorname{sen} kx = \operatorname{sen} 3x$
   - **c.** $\operatorname{sen} 4x \cos 5x + \cos 4x \operatorname{sen} 5x = \operatorname{sen} kx$
   - **d.** $\dfrac{\tan x + \tan 3x}{1 - \tan x \tan 3x} = \tan kx$

3. Usa las identidades adecuadas para escribir las siguientes expresiones en términos de seno, coseno o tangente de un solo ángulo.
   - **a.** $\cos 54° \cos 24° + \operatorname{sen} 54° \operatorname{sen} 24°$
   - **b.** $\cos\frac{\pi}{3} \cos\frac{5\pi}{6} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} \operatorname{sen}\frac{5\pi}{6}$
   - **c.** $\operatorname{sen}\frac{5\pi}{12} \cos\frac{7\pi}{8} + \cos\frac{5\pi}{12} \operatorname{sen}\frac{7\pi}{8}$
   - **d.** $\operatorname{sen}\frac{\pi}{12} \cos\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{12} \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}$
   - **e.** $\dfrac{\tan 25° + \tan 18°}{1 - \tan 25° \tan 18°}$
   - **f.** $\dfrac{\tan 25° - \tan 8°}{1 + \tan 25° \tan 8°}$

4. Usa las identidades de la suma o diferencia de ángulos para hallar el valor exacto en cada caso.
   - **a.** $\operatorname{sen} 75°$
   - **b.** $\operatorname{sen} 105°$
   - **c.** $\operatorname{sen} 120°$
   - **d.** $\operatorname{sen}\frac{7\pi}{12}$
   - **e.** $\cos\frac{7\pi}{12}$
   - **f.** $\tan\frac{5\pi}{12}$
   - **g.** $\tan\frac{\pi}{12}$

5. Simplifica cada expresión.
   - **a.** $1 - 2\operatorname{sen}^2 20°$
   - **b.** $\dfrac{2\tan 30°}{1 - \tan^2 30°}$
   - **c.** $\cos^2 40° - \operatorname{sen}^2 40°$
   - **d.** $2\operatorname{sen} 70° \cos 70°$

6. Halla el valor de $\operatorname{sen} 2\beta$, $\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}$, $\cos 2\beta$, $\cos\frac{\beta}{2}$, $\tan 2\beta$ y $\tan\frac{\beta}{2}$ cuando:
   - **a.** $\operatorname{sen}\beta = \frac{3}{5}$; $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$
   - **b.** $\cos\beta = \frac{7}{25}$; $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$

> Razonamiento lógico

7. Demuestra las siguientes identidades.
   - **a.** $\dfrac{1 + \tan\theta}{1 - \tan\theta} = \dfrac{\cos 2\theta}{1 - \operatorname{sen} 2\theta}$
   - **b.** $\operatorname{sen}(\alpha + \phi) - \operatorname{sen}(\alpha - \phi) = 2\cos\alpha \operatorname{sen}\phi$
   - **c.** $(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 = 1 + 2\operatorname{sen} 2x$
   - **d.** $\operatorname{sen} 3x = 3\operatorname{sen} x - 4\operatorname{sen}^3 x$

8. Utilizando el hecho de que $\cot\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha}$, realiza los siguientes ejercicios.
   - **a.** Demuestra que $\cot(x + y) = \dfrac{\cot x \cot y - 1}{\cot x + \cot y}$.
   - **b.** Demuestra que $\cot(x - y) = \dfrac{\cot x \cot y + 1}{\cot y - \cot x}$.

c. Utiliza los valores de $\cot\frac{\pi}{4} = 1$, $\cot\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ y las identidades encontradas anteriormente para calcular el valor exacto de $\cot\frac{\pi}{12}$ y $\cot\frac{2\pi}{3}$.

9. Demuestra las siguientes identidades.

a. $\tan\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1 + \tan\theta}{1 - \tan\theta}$

b. $\tan(x - \pi) = \tan x$

c. $\text{sen}(x + 2\pi) = \text{sen}\, x$

d. $\cot(x + \pi) = \cot x$

e. $\frac{\cos 2x}{\text{sen}\, x} = \csc x - 2\,\text{sen}\, x$

f. $\cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$

g. $\sec 2x = \frac{\csc^2 x}{\csc^2 x - 2}$

h. $\text{sen}\,\alpha = 2\,\text{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$

i. $\text{sen}\,\beta = \frac{2\tan\frac{\beta}{2}}{1 + \tan^2\frac{\beta}{2}}$

j. $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\text{sen}\,\theta}{1 + \cos\theta}$

k. $\cot^2 x - \cot^2 x \cos 2x + 2\,\text{sen}^2 x = 2$

l. $\tan\alpha = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2\frac{\alpha}{2}}$

m. $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

n. $1 + \tan 2x \tan x = \sec 2x$

o. $\tan\frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{\text{sen}\, x}$

10. Halla una expresión en términos de $\cos x$, $\cos y$, $\cos z$, $\text{sen}\, x$, $\text{sen}\, y$ y $\text{sen}\, z$ para:

a. $\cos(x + y + z)$

b. $\text{sen}(x + y + z)$

> Resolución de problemas

11. Un guardabosque está buscando, desde una altura de 30 metros, un gato montés que podría estar en un camino de longitud 220 metros y su inicio está a 20 metros de la base de la torre. ¿Qué ángulo debe rotar la luz que está usando para poder iluminar todo el camino?

12. Utilizando una identidad para el ángulo doble, encuentra el valor de x y θ del triángulo de la figura 4.4.

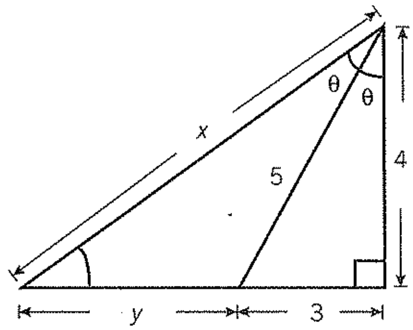


Figura 4.4

13. Con la ayuda de triángulos rectángulos, calcula el valor exacto.

a. $\cos\left(\tan^{-1} 2 - \text{sen}^{-1}\frac{3}{5}\right)$

b. $\cos\left(2\tan^{-1} 4\right)$

c. $\text{sen}\left(\cos^{-1}\frac{1}{2} - \text{sen}^{-1}\frac{4}{5}\right)$

d. $\tan\left(\text{sen}^{-1}\frac{1}{2} + \cos^{-1}\frac{3}{5}\right)$

Uso de la tecnología

14. Con la ayuda de una calculadora, evalúa.

a. $\cos(x - 21°)$

b. $\text{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{17}\right)$

c. $\tan(x - 17°)$

d. $\cot\left(4\frac{\pi}{13} - b\right)$

Lección 3

Pensamiento variacional

Ecuaciones trigonométricas

Logro: usar métodos algebraicos e identidades trigonométricas para resolver ecuaciones trigonométricas.

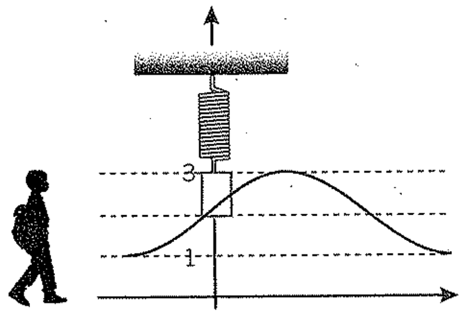


Figura 4.5

Pablo observa el comportamiento del movimiento de un resorte en vibración y el desplazamiento de la masa que está suspendida en dicho resorte (*ver* figura 4.5). La función que modela este desplazamiento es:

$$f(t) = 6\ \text{sen}\left(\frac{\pi t}{2}\right) + 7$$

Donde $f(t)$ se mide en centímetros y t en segundos (*ver* figura 4.6).

Pablo desea saber en qué instantes de tiempo, $f(t) = 10$ cm. Para determinar esos valores resolveremos $10 = 6\ \text{sen}\left(\frac{\pi t}{2}\right) + 7$, es decir, debemos resolver una ecuación trigonométrica.

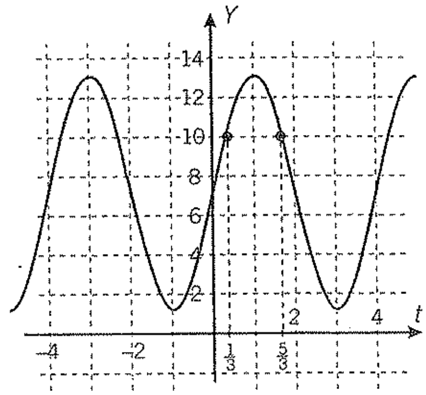


Figura 4.6

*Una **ecuación trigonométrica** es una ecuación que involucra funciones trigonométricas y es válida para algunos números reales que dependen del dominio de la función trigonométrica.*

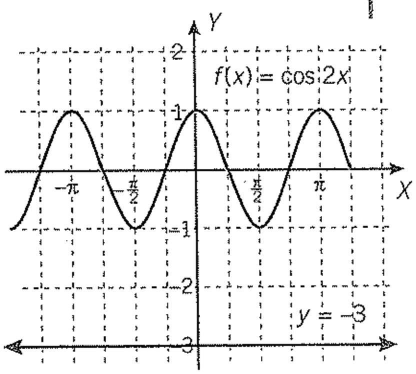


Figura 4.7

Algunas ecuaciones trigonométricas pueden no tener solución. Por ejemplo, la ecuación $-3 = \cos 2x$ no tiene solución, pues el rango de la función $f(x) = \cos 2x$ es el intervalo $[-1, 1]$ (*ver* figura 4.7).

Ejemplo 13

Resolvamos la ecuación $10 = 6\text{sen}\left(\frac{\pi t}{2}\right) + 7$, la cual describe los tiempos en los cuales el desplazamiento del resorte es de 10 cm.

Solución

$10 = 6\ \text{sen}\left(\frac{\pi t}{2}\right) + 7$

$3 = 6\ \text{sen}\left(\frac{\pi t}{2}\right)$ Despejamos $6\text{sen}\left(\frac{\pi t}{2}\right)$.

$\frac{1}{2} = \text{sen}\left(\frac{\pi t}{2}\right)$ Despejamos $\text{sen}\left(\frac{\pi t}{2}\right)$.

$\text{sen}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{\pi t}{2}\right)$ Aplicamos la función seno inversa.

$\frac{\pi}{6} = \frac{\pi t}{2}$ Hallamos el valor de $\text{sen}^{-1}\frac{1}{2}$.

$t = \frac{1}{3}$ segundos. Despejamos el valor de t.

Pero también, $\text{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ (*ver* figura 4.6). Por lo cual $t = \frac{5}{3}$ segundos, también es solución de la ecuación trigonométrica. De forma general, tenemos que la función seno es periódica (período 2π) y:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right) = \frac{1}{2},\ k = 0, 1, 2, 3, \ldots \text{ y } \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right) = \frac{1}{2},\ k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Es decir, todas las soluciones posibles se escriben de la forma $\frac{\pi}{6} + 2k\pi = \frac{\pi t}{2}$ y $\frac{5\pi}{6} + 2k\pi = \frac{\pi t}{2}$, de donde obtenemos que $t = \frac{1}{3} + 4k$ y $t = \frac{5}{3} + 4k$. ◀

Comentario

Como las funciones trigonométricas son periódicas con período π o 2π, inicialmente se deben encontrar las soluciones en el intervalo correspondiente al período de la función. Luego, se hallan todas las soluciones adicionando todo múltiplo entero del período a una de las soluciones básicas.

Si suponemos que Pablo observa el movimiento del resorte durante 15 segundos, los valores de t para los que $f(t)$ es 10 centímetros son:

$$t = \frac{1}{3}\text{s},\ t = \frac{1}{3} + 4 = \frac{13}{3}\text{s},\ t = \frac{1}{3} + 8 = \frac{25}{3}\text{s},\ t = \frac{1}{3} + 12 = \frac{37}{3}\text{s}.$$

$$t = \frac{5}{3}\text{s},\ t = \frac{5}{3} + 4 = \frac{17}{3}\text{s},\ t = \frac{5}{3} + 8 = \frac{29}{3}\text{s},\ t = \frac{5}{3} + 12 = \frac{41}{3}\text{s}.$$

Pensamiento crítico

¿Por qué puedes aplicar la función inversa en $\frac{1}{2} = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{2}\right)$? ¿Qué debes suponer?

¿En el caso en que Pablo observa el movimiento del resorte durante 15 segundos por qué se toma hasta $k = 3$?

Mostraremos varias técnicas para resolver ecuaciones trigonométricas.

> Factorización

Ejemplo 14

Resolvamos $\tan x = \tan x \operatorname{sen}^2 x$.

Solución

$\tan x = \tan x \operatorname{sen}^2 x$	
$\tan x - \tan x \operatorname{sen}^2 x = 0$	Igualamos la ecuación a 0.
$\tan x(1 - \operatorname{sen}^2 x) = 0$	Sacamos factor común.
$\tan x(1 - \operatorname{sen} x)(1 + \operatorname{sen} x) = 0$	Factorizamos la diferencia de cuadrados.
$\tan x = 0,\ 1 - \operatorname{sen} x = 0,\ 1 + \operatorname{sen} x = 0.$	Igualamos cada factor a 0.
$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$	Empleamos la igualdad de $\tan x$ en términos de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$.
$\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = 0$	Utilizamos el hecho de que $\tan x = 0$.

Por tanto, $\operatorname{sen} x = 0$ y al calcular sen^{-1} a ambos lados de la igualdad obtenemos que $x = 0,\ x = \pi,\ x = 2\pi$ en el intervalo $[0, 2\pi]$. De manera general, las soluciones de $\tan x = 0$ son de la forma $x = k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$. ◀

Comentario

En la ecuación $\tan x = \tan x \operatorname{sen}^2 x$ no es válido dividir ambas expresiones por $\tan x$, debido a que es posible cometer el error de dividir por cero.

Pensamiento crítico

¿Por qué $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ para $k \in \mathbf{Z}$ no son solución de $\tan x(1 - \operatorname{sen} x)(1 + \operatorname{sen} x) = 0$?

Ejemplo 15

Resolvamos la ecuación $4\cos^2 x - 8\cos x + 3 = 0$.

Solución

$4\cos^2 x - 8\cos x + 3 = 0$	
$(2\cos x - 1)(2\cos x - 3) = 0$	Factorizamos el trinomio cuadrado.
$2\cos x - 1 = 0$, o, $2\cos x - 3 = 0$	Igualamos cada factor a 0.
$\cos x = \frac{1}{2}$, o, $\cos x = \frac{3}{2}$	Despejamos el valor de $\cos x$, en cada ecuación.
$x = \frac{\pi}{3}$, o, $x = \frac{5\pi}{3}$, para $x \in [0, 2\pi]$	Hallamos los valores de x para $\cos x = \frac{1}{2}$.

De forma general, las soluciones de $\cos x = \frac{1}{2}$ son $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ y $x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$, con $k \in \mathbf{Z}$.

Para $\cos x = \frac{3}{2}$, no existen soluciones ya que el rango de la función coseno es $[-1, 1]$. ◀

Ejemplo 16

Resolvamos la ecuación $\operatorname{sen} 2x = -\operatorname{sen} x$.

Solución

$\operatorname{sen} 2x = -\operatorname{sen} x$	
$2\operatorname{sen} x \cos x = -\operatorname{sen} x$	Utilizamos la identidad $\operatorname{sen} 2x = 2\operatorname{sen} x \cos x$.
$2\operatorname{sen} x \cos x + \operatorname{sen} x = 0$	Igualamos a 0 la ecuación.
$\operatorname{sen} x(2\cos x + 1) = 0$	Factorizamos $\operatorname{sen} x$.
$\operatorname{sen} x = 0$, o, $2\cos x + 1 = 0$	Igualamos cada factor a 0.
$x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$	Calculamos la solución de $\operatorname{sen} x = 0$.
$x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$	Calculamos la solución de $\cos x = -\frac{1}{2}$.

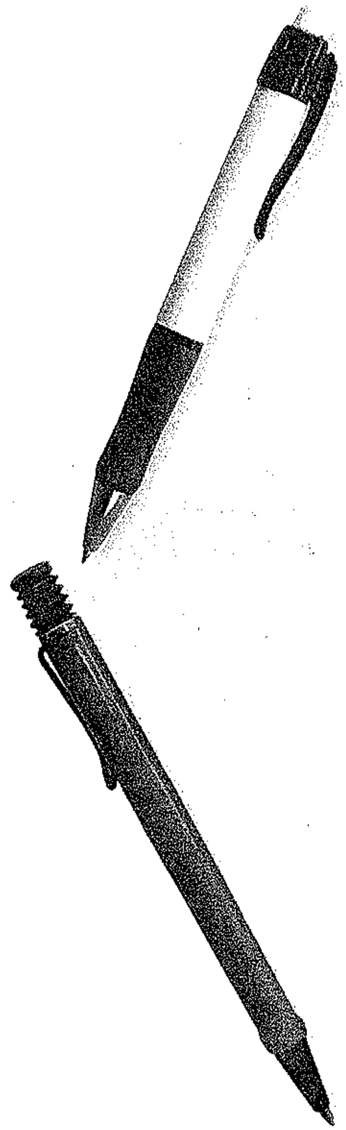
Así, los valores de x que satisfacen la igualdad $\operatorname{sen} 2x = -\operatorname{sen} x$ son de la forma $x = k\pi$, o, $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. ◀

Ejemplo 17

Resolvamos la ecuación $2\sec^2 x + \tan^2 x - 3 = 0$.

Solución

$2\sec^2 x + \tan^2 x - 3 = 0$	
$2(1 + \tan^2 x) + \tan^2 x - 3 = 0$	Utilizamos la identidad pitagórica $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$.
$3\tan^2 x - 1 = 0$	Aplicamos la propiedad distributiva y simplificamos términos semejantes.
$(\sqrt{3}\tan x - 1)(\sqrt{3}\tan x + 1) = 0$	Factorizamos la diferencia de cuadrados.
$\sqrt{3}\tan x - 1 = 0$, o, $\sqrt{3}\tan x + 1 = 0$	Igualamos cada factor a 0.
$\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, o, $\tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$	Despejamos $\tan x$.
$\tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}$, o, $\tan x = \frac{-\sqrt{3}}{3}$	Racionalizamos.
$x = \frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$	Encontramos la solución de $\tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.
$x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$	Encontramos la solución de $\tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$. ◀



11

Ejemplo 18

Resolvamos la ecuación $\cos x + \operatorname{sen} x = 1$

Solución

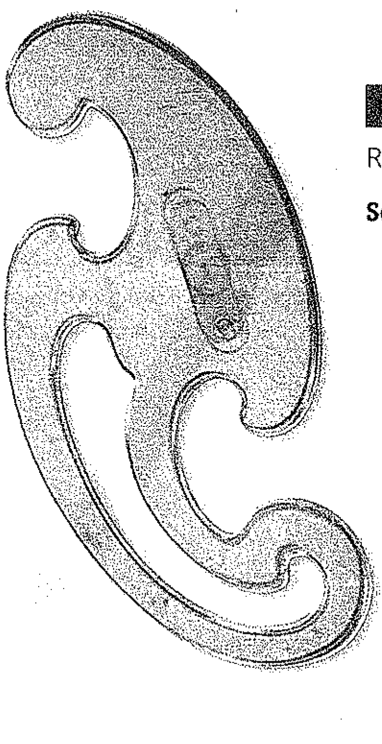
$\cos x + \operatorname{sen} x = 1$	
$\cos x = 1 - \operatorname{sen} x$	Despejamos el valor de $\cos x$.
$\cos^2 x = (1 - \operatorname{sen} x)^2$	Elevamos al cuadrado cada lado de la igualdad.
$\cos^2 x = 1 - 2 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x$	Desarrollamos el cuadrado del binomio.
$1 - \operatorname{sen}^2 x = 1 - 2 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x$	Utilizamos la identidad $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$.
$0 = \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x$	Igualamos la ecuación a 0 y simplificamos términos.
$\operatorname{sen} x(\operatorname{sen} x - 1) = 0$	Factorizamos $\operatorname{sen} x$.
$\operatorname{sen} x = 0$, o, $\operatorname{sen} x - 1 = 0$	Igualamos cada factor a 0.
$x = k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$.	Hallamos la solución de $\operatorname{sen} x = 0$.
$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$.	Hallamos la solución de $\operatorname{sen} x = 1$.

Debido a que elevamos al cuadrado la ecuación original, necesitamos verificar las soluciones. Primero para $x = k\pi$, tomemos $k = 0$; así obtenemos que: $\cos 0 + \operatorname{sen} 0 = 1 + 0 = 1$.

Para $k = 1$, tenemos $\cos \pi + \operatorname{sen} \pi = -1 + 0 = -1$. Es decir, los múltiplos impares de π no satisfacen la ecuación original.

Por otro lado, para cualquier valor entero de k en $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ tenemos que:
$\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 0 + 1 = 1$.

Finalmente, podemos concluir que las soluciones obtenidas son:
$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, y, $x = 2k\pi$. ◀



Ejemplo 19

Resolvamos la ecuación $8\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x - 2 = 0$.

Solución

$8\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x - 2 = 0$	
$8\cos^2 x + 1 - \cos^2 x - 2 = 0$	Utilizamos la identidad pitagórica $1 - \cos^2 x = \operatorname{sen}^2 x$.
$7\cos^2 x - 1 = 0$	Simplificamos términos semejantes.
$(\sqrt{7}\cos x - 1)(\sqrt{7}\cos x + 1) = 0$	Factorizamos la diferencia de cuadrados.
$\cos x = \frac{\sqrt{7}}{7}$, o, $\cos x = -\frac{\sqrt{7}}{7}$	Igualamos cada factor a 0.

Hallamos la solución de $\cos x = \frac{\sqrt{7}}{7}$, empleando arccos y obtenemos que $x = \arccos\frac{\sqrt{7}}{7} + 2k\pi$ en el intervalo $[0, \pi]$.
De forma análoga, las soluciones para $\cos x = -\frac{\sqrt{7}}{7}$ son de la forma:
$x = \arccos\left(-\frac{\sqrt{7}}{7}\right) + 2k\pi$. ◀

Pensamiento crítico

¿Por qué la solución de $\cos x = \frac{\sqrt{7}}{7}$ es $x = \arccos\frac{\sqrt{7}}{7} + 2k\pi$ para x en el intervalo $[0, \pi]$?

Ejemplo 20

Encontremos la solución de $1 - 2\tan 3u + \tan^2 3u = 0$.

Solución

En este caso no necesitamos desarrollar $\tan 3u$ debido a que todos lo ángulos en la ecuación son de la forma $3u$.

$1 - 2\tan 3u + \tan^2 3u = 0$

$(1 - \tan 3u)^2 = 0$ Factorizamos el trinomio cuadrado perfecto.

$1 - \tan 3u = 0$ Igualamos cada factor a 0.

$\tan 3u = 1$ Despejamos el valor de $\tan 3u$.

$3u = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$ Aplicamos a ambos lados de la igualdad $\tan^{-1}$.

$u = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3},\ k \in \mathbf{Z}$ Despejamos el valor de u. ◀

Ejemplo 21

A una masa atada a un resorte que se encuentra suspendido verticalmente, se le aplica una fuerza. La fuerza aplicada produce un movimiento que se describe mediante la ecuación $y = \frac{3}{4}\operatorname{sen} 3t + \frac{1}{4}\cos 3t$. ¿Para cuáles valores y será 0?

Solución

Debemos resolver la ecuación $0 = \frac{3}{4}\operatorname{sen} 3t + \frac{1}{4}\cos 3t$.

$0 = \frac{3}{4}\operatorname{sen} 3t + \frac{1}{4}\cos 3t$

$0 = 3\operatorname{sen} 3t + \cos 3t$ Factorizamos el 4 y lo pasamos al lado izquierdo de la ecuación.

$3\operatorname{sen} 3t = -\cos 3t$ Despejamos $3\operatorname{sen} 3t$.

$\frac{\operatorname{sen} 3t}{\cos 3t} = -\frac{1}{3}$ Para $t \neq \frac{\pi}{6} + 2\pi$, tenemos que $\cos 3t \neq 0$, así que dividimos la expresión por $\cos 3t$.

$\tan 3t = -\frac{1}{3}$ Utilizamos la identidad de $\tan x$ en términos de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$.

$3t = \tan^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right) + k\pi$ Aplicamos a ambos lados de la igualdad $\tan^{-1}$.

$t = \frac{1}{3}\tan^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{k\pi}{3}$ Despejamos el valor de t.

$t = -0{,}10725 \text{ rad} + \frac{k}{3} \text{ rad}$. Empleamos la calculadora en modo Rad para calcular $\tan^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right)$. ◀

Comentario

Recuerda que $(a-b)^2 = (a-b)(a-b)$.

> Piensa y practica <

> Razonamiento lógico

En los ejercicios del 1 al 4 marca la respuesta correcta.

1. La solución de $\tan x = 1$ en el intervalo $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ es:
   - a. $x = \pi$
   - b. $x = \frac{\pi}{4}$
   - c. $x = \frac{5\pi}{4}$
   - d. $x = \frac{3\pi}{4}$

2. No es solución de la ecuación $3\operatorname{sen} x \cos x = 0$:
   - a. $x = \pi$
   - b. $x = \frac{\pi}{3}$
   - c. $x = 0$
   - d. $x = \frac{\pi}{2}$

3. Si $\cos 3x = -1$ para $x \in \mathbf{R}$, el valor de x es igual a:
   - a. $2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$.
   - b. $(1 + 2k)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbf{Z}$.
   - c. $(1 + 4k)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbf{Z}$.
   - d. $(1 + 2k)\pi,\ k \in \mathbf{Z}$.

4. Los valores de $\beta \in [0, \pi]$ en la ecuación $\cos^2\beta - \text{sen}\,\beta - 1 = 0$ son:

a. $0, \frac{\pi}{2}$ **b.** $0, \frac{\pi}{4}$

c. $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$ **d.** $\pi, 0$

> Conexiones

5. Traza las gráficas de $f(x) = \text{sen}\,x$, $f(x) = 2\,\text{sen}\,x$, $f(x) = \text{sen}\,2x$, $f(x) = \frac{1}{2}\,\text{sen}\,x$, $f(x) = \cos\,x$, $f(x) = 2\cos\,x$, $f(x) = \cos\,2x$, $f(x) = \frac{1}{2}\cos\,x$, en el intervalo $\left[0, \pi\right]$. Halla los valores para los cuales cada función satisface:

a. $f(x) = 1$ **b.** $f(x) = -1$

c. $f(x) = 0$ **d.** $f(x) = -2$

e. $f(x) = 2$

6. Halla todas las soluciones de las siguientes ecuaciones.

a. $\cos\,4\alpha = 1$ **b.** $\text{sen}\,3\alpha = -1$

c. $\tan\,(-\alpha) = 1$ **d.** $\sec\,x = \sqrt{2}$

e. $\cos\,3\alpha = \frac{1}{2}$ **f.** $\text{sen}\,7\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

g. $\tan\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ **h.** $\cot\,3\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$

7. Resuelve las siguientes ecuaciones mediante factorización.

a. $1 - \tan^2 4x = 0$

b. $\csc\,x + \tan\,x\csc\,x = 0$

c. $2\cos^2 t + 3\cos\,t + 1 = 0$

d. $2\,\text{sen}^2 t + 3\,\text{sen}\,t + 1 = 0$

e. $\cos\,x\,\text{sen}\,x - 2\cos\,x = 0$

f. $2\cos^2 x - 1 = 0$

g. $4\,\text{sen}^2 x - 4\,\text{sen}\,x + 1 = 0$

h. $4\,\text{sen}^2 2x - 4\,\text{sen}\,2x + 1 = 0$

i. $4\cos^2 3x - 9\cos\,3x + 2 = 0$

8. Traza las gráficas de *f* y *g* sobre el mismo plano cartesiano y determina sus puntos de intersección $\left(f(x) = g(x)\right)$.

a. $f(x) = 3\cos\,x - 1$ $g(x) = 2\cos\,2x$

b. $f(x) = \frac{1}{2}\,\text{sen}\,2x$ $g(x) = \cos\,x$

c. $f(x) = \text{sen}\,2x$ $g(x) = 2\,\text{sen}\,2x - 1$

d. $f(x) = \tan\,x$ $g(x) = \cot\,x$

9. Resuelve cada una de las siguientes ecuaciones para $0° \leq x < 360°$, usando identidades básicas y factorización.

a. $2\,\text{sen}^2 x + \cos\,x = 1$

b. $2\cos^2 3x + \text{sen}\,3x = 1$

c. $\text{sen}\,2x = \csc\,2x$

d. $\frac{1}{2}\,\text{sen}\,4x = \tan\,4x$

e. $2\sec^2 4x + \tan^2 4x - 3 = 0$

f. $\sec\,x - \tan\,x = 1$

g. $\text{sen}\,x + \cos\,x = 0$

h. $2\csc\,x - 3\sec^2 x = 0$

> Resolución de problemas

10. En días nublados, la intensidad de luz solar *y* (en calorías/cm²) se halla mediante la ecuación $y = y_M\,\text{sen}^2\left(\frac{\pi t}{d}\right)$, en donde $t = 0$ es la madrugada, y_M es la intensidad máxima y *d* es el número de días de iluminación. Supón que $d = 10$ horas. ¿Aproximadamente, cuántas horas posteriores a la madrugada $y = y_M$, $y = \frac{1}{2}\,y_M$, $y = \frac{3}{4}\,y_M$?

11. A una masa atada a un resorte que se encuentra suspendido verticalmente, se le aplica una fuerza. Esta fuerza produce un movimiento que se describe mediante la ecuación $y = \frac{3}{4}\text{sen}\,3t + \frac{1}{4}\cos\,3t$. ¿Para qué valores *y* será $\frac{1}{4}$?

12. Inventa una ecuación trigonométrica de la forma $a\,\text{sen}\,bx - c = 0$ con *a*, *b* y *c* números reales que cumpla cada condición dada. Justifica tu respuesta.

a. Tener una sola solución en el intervalo $[0, \pi)$.

b. Tener exactamente dos soluciones en el intervalo $[0, \pi)$.

c. Tener exactamente tres soluciones en el intervalo $[0, \pi)$.

d. No tener solución en el intervalo $[0, \pi)$.

13. Grafica las siguientes ecuaciones.

a. $\text{sen}\,4x = -x$ **b.** $\text{sen}\,2x = x^2$

c. $\cos\,x = \frac{x}{2}$ **d.** $\cos\,x = \frac{x}{2} - 1$

Uso de la tecnología

14. Recurre a las identidades de la suma o diferencia de ángulos para resolver cada ecuación para $x \in [0, 2\pi)$. Da tu respuesta con cuatro cifras decimales.

a. $\cos\,2x\cos\,3x - \text{sen}\,2x\,\text{sen}\,3x = 0{,}134$

b. $\text{sen}\,2x\cos\,x + \cos\,2x\,\text{sen}\,x = -0{,}45$

c. $\text{sen}\,2{,}12x\cos\,3{,}23x - \cos\,2{,}12x\,\text{sen}\,3{,}23x = 1$

Lección 4 Identidades para adiciones y multiplicaciones

Pensamientos numérico y variacional

Logro: convertir un producto de senos y cosenos en una suma o diferencia de senos y cosenos, y viceversa.

En algunos problemas requerimos disponer de identidades que permitan transformar productos de senos y cosenos en sumas o viceversa, es decir, transformar sumas de senos y cosenos en productos.

Por ejemplo, es posible expresar el producto $\operatorname{sen} u \cos v$ en forma de suma de funciones trigonométricas, utilizando las identidades para la suma y la diferencia de la función seno:

$\operatorname{sen}(u + v) = \operatorname{sen} u \cos v + \cos u \operatorname{sen} v$

$\operatorname{sen}(u - v) = \operatorname{sen} u \cos v - \cos u \operatorname{sen} v$

Adicionando estas dos identidades obtenemos:

$\operatorname{sen}(u + v) + \operatorname{sen}(u - v) = 2 \operatorname{sen} u \cos v.$

De donde obtenemos la identidad:

$$\operatorname{sen} u \cos v = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(u+v) + \operatorname{sen}(u-v)\right]$$

Si sustraemos la identidad $\operatorname{sen}(u - v)$ de la identidad $\operatorname{sen}(u + v)$ obtenemos que $\operatorname{sen}(u + v) - \operatorname{sen}(u - v) = 2 \cos u \operatorname{sen} v$. Luego:

$$\cos u \operatorname{sen} v = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(u+v) - \operatorname{sen}(u-v)\right]$$

De forma análoga, podemos obtener las siguientes identidades:

$$\cos u \cos v = \frac{1}{2}\left[\cos(u+v) + \cos(u-v)\right]$$

$$\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v = \frac{1}{2}\left[\cos(u-v) - \cos(u+v)\right]$$

Ejemplo 22

Expresemos las siguientes multiplicaciones como una adición de funciones trigonométricas.

a. $\cos 5x \cos 3x$ **b.** $\cos 3x \operatorname{sen} 2x$

Solución

a. $\cos 5x \cos 3x$

$= \frac{1}{2}\left[\cos(5x + 3x) + \cos(5x - 3x)\right]$ Utilizamos la identidad de $\cos u \cos v$, con $u = 5x$ y $v = 3x$.

$= \frac{1}{2}(\cos 8x + \cos 2x)$ Efectuamos las operaciones indicadas.

b. $\cos 3x \operatorname{sen} 2x$

$= \frac{1}{2}(\operatorname{sen} 5x - \operatorname{sen} x)$ Utilizamos la identidad de $\cos u \operatorname{sen} v$, con $u = 3x$ y $v = 2x$. ◀

Pensamiento crítico

Si en el ejemplo 22 tomas $u = 3x$, $v = 5x$ en la identidad de $\cos u \cos v$, ¿obtienes el mismo valor?

Utilizando las identidades anteriores que transforman una multiplicación en una adición, es posible obtener algunas identidades que transforman una adición en una multiplicación. Si en la identidad $\operatorname{sen} u \cos v = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(u+v) + \operatorname{sen}(u-v)]$ hacemos las sustituciones $x = u + v$ y $y = u - v$, tenemos que $\operatorname{sen} u \cos v = \frac{1}{2}(\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y)$, es decir, $2 \operatorname{sen} u \cos v = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y$.

Como $u = \frac{x+y}{2}$ y $v = \frac{x-y}{2}$, obtenemos la primera identidad que convierte una adición en una multiplicación.

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

De forma similar obtenemos las otras tres identidades:

$$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos x - \cos y = -2 \operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

Comentario

Si $x = u + v$, y, $y = u - v$, tenemos que $x + y = 2u$, y, $\frac{x+y}{2} = u$.

Con identidades manejamos expresiones trigonométricas que comprenden diversos ángulos.

Ejemplo 23

¿Cuáles son las soluciones de la ecuación $\operatorname{sen} 4x + \operatorname{sen} 6x = 0$?

Solución

$\operatorname{sen} 4x + \operatorname{sen} 6x = 0$

$2 \operatorname{sen}\left(\frac{4x+6x}{2}\right)\cos\left(\frac{4x-6x}{2}\right) = 0$ — Transformamos la adición en multiplicación.

$2 \operatorname{sen} 5x \cos(-x) = 0$ — Efectuamos las operaciones indicadas.

$\operatorname{sen} 5x = 0$, o, $\cos(-x) = 0$ — Igualamos cada factor a 0.

$x = k\frac{\pi}{5}$, o, $x = k\frac{\pi}{2}$, con $k \in \mathbf{Z}$. — Empleamos el hecho de que $\cos(-x) = 0 = \cos x$ y solucionamos cada ecuación. ◀

Ejemplo 24

Verifiquemos la identidad $\frac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 7x}{\cos x + \cos 7x} = \tan 4x$

Solución

Tomemos cada una de las partes del lado izquierdo de la igualdad.

$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 7x$

$= 2 \operatorname{sen}\left(\frac{x+7x}{2}\right)\cos\left(\frac{x-7x}{2}\right)$ — Transformamos la adición del numerador en una multiplicación.

$= 2 \text{ sen } 4x \cos(-3x)$ — Efectuamos las operaciones indicadas.

Por otra parte:

$\cos x + \cos 7x$ — Transformamos la adición del denominador en una multiplicacion.

$= 2 \cos 4x \cos(-3x)$

Retomamos la fracción del lado izquierdo de la igualdad.

$\dfrac{\text{sen } x + \text{sen } 7x}{\cos x + \cos 7x}$

$= \dfrac{2 \text{ sen } 4x \cos(-3x)}{2 \cos 4x \cos(-3x)}$ — Reemplazamos los valores obtenidos anteriormente.

$= \tan 4x$ — Simplificamos y obtenemos el lado derecho de la ecuación.

> Piensa y practica <

> Conexiones

1. Usa las identidades para escribir cada multiplicación como una adición.

a. $\cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4}$

b. $\text{sen } 2\alpha \text{ sen } \alpha$

c. $\cos \beta \text{ sen}(-\beta)$

d. $\text{sen}(\varepsilon - \pi) \text{ sen}(\varepsilon + \pi)$

e. $\text{sen } 3\alpha \cos(-3\alpha)$

f. $12 \text{ sen } \frac{x}{2} \cos \frac{x}{3}$

g. $\text{sen } 3\alpha \cos \alpha$

h. $\cos(\alpha - \beta) \text{ sen}(\alpha + \beta)$

2. Usa las identidades para escribir cada adición o sustracción como una multiplicación.

a. $\cos 6\beta + \cos 4\beta$

b. $\text{sen}(x - \pi) - \text{sen}(x + \pi)$

c. $\cos \alpha + \cos 3\alpha$

d. $\text{sen}(x - y) + \text{sen}(x + y)$

e. $\cos(x - y) - \cos(x + y)$

f. $\text{sen } 9t + \text{sen } 6t$

g. $\cos(-2\alpha) + \cos 3\alpha$

> Resolución de problemas

3. Usa las identidades de adición y multiplicación para resolver las ecuaciones.

a. $\text{sen } 4x - \text{sen } 6x = 0$

b. $\cos 9x - \cos(2x - 1) = 0$

c. $\text{sen}(8x - 3) - \text{sen } 3x = 0$

d. $\cos \pi x + \cos 2\pi x = 0$

e. $\cos^2 4x - \cos^2 7x = 0$

f. $\text{sen}^2(4x - 3) - \text{sen}^2(7x + 1) = 0$

g. $\cos^2 10x - \cos 10x \cos 6x = 0$

h. $\text{sen } 5x - \text{sen } x = 2\cos 3x$

> Razonamiento lógico

4. Usa las identidades de adición y multiplicación para verificar las siguientes identidades.

a. $\dfrac{\cos 3x + \cos x}{\text{sen } 3x - \text{sen } x} = \cot x$

b. $\text{sen } 45° + \text{sen } 15° = \text{sen } 75°$

c. $\dfrac{\text{sen } x + \text{sen } 9x}{\cos x + \cos 9x} = \tan 5x$

d. $\dfrac{\text{sen } 8x}{\text{sen } 7x + \text{sen } x} = \dfrac{\cos 4x}{\cos 3x}$

e. $\text{sen } \frac{x}{4} \cos \frac{x}{4} = \frac{1}{2} \text{ sen } \frac{x}{2}$

f. $\dfrac{2 \cos 3x}{\text{sen } 4x - \text{sen } 2x} = \csc x$

g. $\dfrac{\cos x - \cos y}{\cos x + \cos y} = -\tan\left(\dfrac{x + y}{2}\right) \tan\left(\dfrac{x - y}{2}\right)$

h. $2\cos 4x \cos 2x = \cos 2x + \cos 6x$

i. $\text{sen}(30 - x) + \text{sen}(30 + x) = \cos x$

5. Dadas las funciones $f(x) = \cos(7x - 1)$, $g(x) = \text{sen}(7x - 3)$ y $h(x) = \cos 2x$, convierte $f(x)g(x)$, $h(x)\text{sen } x$, $g(x)h(x)$, $2f(x)\cos x$, en funciones definidas por adiciones de expresiones trigonométricas.

Lección 5

Pensamientos numérico y espacial

Ley del seno y ley del coseno

Logro: aplicar las leyes del seno y del coseno en la solución de situaciones problema.

> Ley del seno

Diana es una atléta y desea participar en una competencia donde se deben recorrer las calles que muestra la figura 4.8. ¿Qué distancia tiene que recorrer?

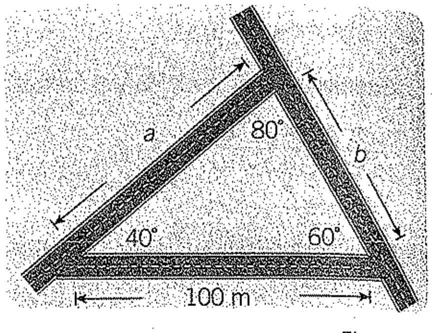


Figura 4.8

Como el triángulo no es rectángulo, no podemos resolver este problema usando las razones e identidades trigonométricas. Para esto podemos utilizar el teorema del seno que se aplica para triángulos que no son rectángulos. Veamos en qué consiste la ley de seno.

Consideremos el triángulo *ABC* de la figura 4.9 y tracemos la altura respecto al lado *c*.

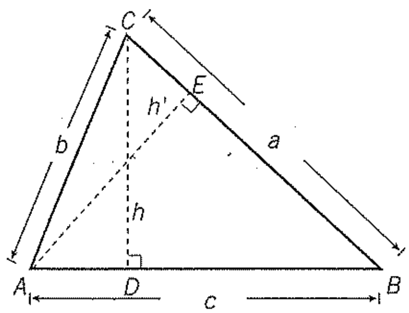


Figura 4.9

1. $\operatorname{sen} A = \frac{h}{b}$ Observamos el triángulo *ADC* de la figura 4.9.

2. $\operatorname{sen} B = \frac{h}{a}$ Observamos el triángulo *BDC* de la figura 4.9.

3. $h = b \operatorname{sen} A$ Despejamos *h* de (1).

4. $h = a \operatorname{sen} B$ Despejamos *h* de (2).

5. $b \operatorname{sen} A = a \operatorname{sen} B$ Igualamos las expresiones (3) y (4).

6. $\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b}$

Por otro lado, tracemos la altura *h'* respecto al lado *a*.

7. $\operatorname{sen} C = \frac{h'}{b}$ Observamos el triángulo *AEC* de la figura 4.9.

8. $\operatorname{sen} B = \frac{h'}{c}$ Observamos el triángulo *ABE* de la figura 4.9.

9. $h' = b \operatorname{sen} C$ Despejamos *h'* de (7).

10. $h' = c \operatorname{sen} B$ Despejamos *h'* de (8).

11. $b \operatorname{sen} C = c \operatorname{sen} B$ Igualamos las expresiones (9) y (10).

12. $\frac{\operatorname{sen} C}{c} = \frac{\operatorname{sen} B}{b}$

De (6) y (12) obtenemos:

$$\textit{Ley de senos: } \frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$$

En palabras quiere decir que en todo triángulo, la razón entre el seno de un ángulo y el lado opuesto es constante.

El teorema del seno es de utilidad cuando se quieren determinar todas las medidas de un triángulo (tres lados y tres ángulos) y se conoce al menos la siguiente información:

I. Las medidas de dos ángulos y la longitud de un lado.
II. Las longitudes de dos lados y la medida de un ángulo opuesto a uno de ellos.

Al proceso de determinar todas las medidas de un triángulo se le conoce como ***resolver un triángulo.***

Comentario

Una altura en un triángulo es un segmento perpendicular que va desde un vértice a la recta que contiene el lado opuesto.

Ejemplo 25

Resolvamos el problema de la atleta, planteado al comienzo de la lección 5.

Solución

Hallemos el valor de a.

$\dfrac{a}{\text{sen } 60°} = \dfrac{100}{\text{sen } 80°}$ Utilizamos la ley de senos.

$a = \dfrac{100 \cdot \text{sen } 60°}{\text{sen } 80°}$ Despejamos el valor de a.

$a \approx 87{,}94$ m Aproximamos el valor de a.

Por otra parte, hallemos el valor de b.

$\dfrac{b}{\text{sen } 40°} = \dfrac{100}{\text{sen } 80°}$ Utilizamos la ley de senos.

$b = \dfrac{100 \cdot \text{sen } 40°}{\text{sen } 80°}$ Despejamos el valor de b.

$b \approx 65{,}27$ m Aproximamos el valor de b.

Es decir, la distancia aproximada que debe recorrer Diana es
100 m + 87,94 m + 65,27 m = 253,21 m. ◀

Comentario

Si ABC es un triángulo rectángulo, entonces la ley de seno se reduce a la definición de la razón trigonométrica seno.

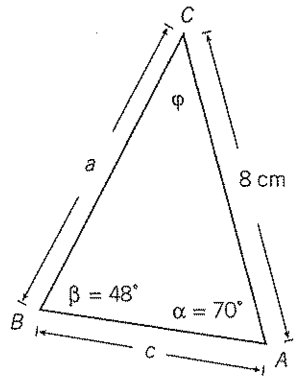


Figura 4.10

Ejemplo 26

Resolvamos el triángulo de la figura 4.10.

Solución

La información que conocemos es:

$\alpha = 70°$, $\beta = 48°$; por tanto, $\varphi = 180° - (\alpha + \beta) = 180° - (70° + 48°) = 62°$.

Para hallar a utilizamos la razón $\dfrac{\text{sen } \alpha}{a} = \dfrac{\text{sen } \beta}{8}$, es decir, $\dfrac{\text{sen } 70°}{a} = \dfrac{\text{sen } 48°}{8}$.
Por tanto, $a = 10{,}12$ cm.

Para hallar c, utilizamos la razón $\dfrac{\text{sen } \varphi}{c} = \dfrac{\text{sen } \beta}{8}$, es decir, $\dfrac{\text{sen } 62°}{c} = \dfrac{\text{sen } 48°}{8}$.
Por tanto, $c = 9{,}5$ cm. ◀

Pensamiento crítico

¿Por qué las expresiones $\dfrac{\text{sen } A}{a} = \dfrac{\text{sen } B}{b} = \dfrac{\text{sen } C}{c}$ *y* $\dfrac{a}{\text{sen } A} = \dfrac{b}{\text{sen } B} = \dfrac{c}{\text{sen } C}$ *son equivalentes?*

En la ley de senos debemos considerar que cuando los datos que se tienen acerca de un triángulo son dos lados y un ángulo opuesto (este caso se conoce como lado-lado-ángulo), pueden presentarse los siguientes casos:

- Se determinan dos triángulos.
- Se determina uno solo.
- No se puede determinar un triángulo con esas características.

La figura 4.11 muestra las distintas posibilidades para lado-lado-ángulo, cuando se conocen los lados a, b y el ángulo A.

En la figura 4.11 (a), tenemos que $a < h$ y entonces no se determina ningún triángulo.
En la figura 4.11 (b), como $a > h$, se determina un único triángulo.

En la figura 4.11 (c), tenemos que $h < a < b$ y se determinan dos triángulos distintos.

Analicemos el siguiente ejemplo.

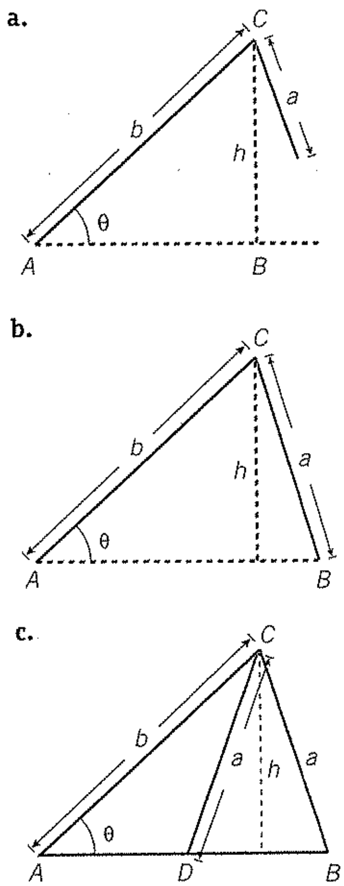


Figura 4.11

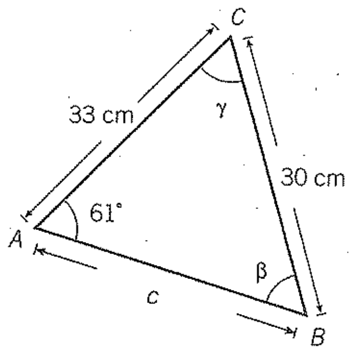


Figura 4.12

Ejemplo 27

Resolvamos el triángulo de la figura 4.12.

Solución

Para hallar la medida de β, hacemos:

$\dfrac{\text{sen } 61°}{30} = \dfrac{\text{sen } \beta}{33}$ Utilizamos la ley de senos.

$\text{sen } \beta = \dfrac{33 \text{ sen } 61°}{30}$ Despejamos el valor de $\text{sen } \beta$.

$\text{sen } \beta = 0{,}962$

$\beta = 74{,}17°$ Calculamos sen^{-1} a ambos lados de la igualdad.

Por tanto, existen dos posibles triángulos (*ver* figura 4.13) que son solución para los lados 33 cm, 30 cm y $\beta = 74{,}17°$.

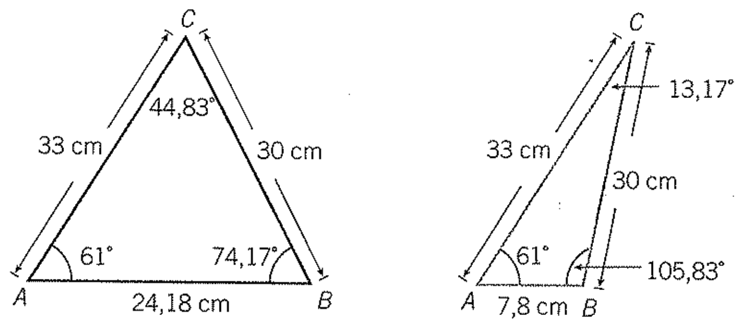


Figura 4.13

> Ley de cosenos

Un topógrafo quiere saber la longitud de un lago (*ver* figura 4.14). Él sabe que $\alpha = 92°$, $a = 36$ m y $b = 28$ m. ¿Cuál es la longitud del lago?

Si se quisiera utilizar el teorema del seno para hallar el valor de c, tendríamos las relaciones: $\dfrac{\text{sen } 92°}{c} = \dfrac{\text{sen } \beta}{28} = \dfrac{\text{sen } \gamma}{36}$, pero no podríamos resolver el triángulo, entonces ¿cómo podemos hallar los valores que faltan?

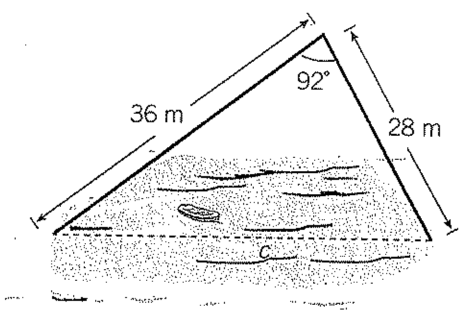


Figura 4.14

Consideremos el $\triangle ABC$ de la figura 4.15.

Tracemos la altura $\overline{BD}$, desde B al lado opuesto $\overline{AC}$.

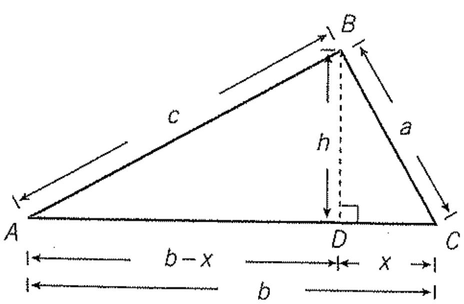


Figura 4.15

1. $c^2 = (b-x)^2 + h^2$ Utilizamos el hecho de que $\triangle ADB$ es rectángulo.
2. $c^2 = b^2 - 2\,bx + x^2 + h^2$ Desarrollamos el cuadrado de la diferencia.
3. $c^2 = b^2 - 2\,bx + a^2$ Utilizamos el hecho de que $a^2 = x^2 + h^2$ (*ver* $\triangle BDC$).
4. $\cos C = \dfrac{x}{a}$ Observamos $\triangle BDC$.
5. $x = a \cos C$ Despejamos x.
6. $c^2 = b^2 + a^2 - 2ba \cos C$. Reemplazamos este valor en (3).

De forma similar, podemos hallar expresiones para a^2 y b^2. Esto nos lleva a concluir:

Ley de cosenos

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

Resolvamos el problema del topógrafo.

$c^2 = 36^2 + 28^2 - 2(36)(28)\cos 92°$	Empleamos la ley de cosenos.
$c^2 = 1296 + 784 - 2016(-0{,}03)$	Realizamos las operaciones indicadas.
$c^2 \approx 2150{,}36$	Aproximamos el valor de c^2.
$c \approx 46{,}37$ metros	Hallamos el valor aproximado de c.

Ejemplo 28

Resolvamos el $\triangle ABC$, donde $a = 17$, $b = 13$ y $c = 12$.

Solución

Representemos el $\triangle ABC$ en la figura 4.16. Para hallar el valor de γ, procedemos de la siguiente manera:

$12^2 = 17^2 + 13^2 - 2(17)(13)\cos\gamma$	Utilizamos la ley de cosenos $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.
$144 = 289 + 169 - 442\cos\gamma$	Efectuamos las operaciones indicadas.
$-314 = -442\cos\gamma$	Despejamos $-442\cos\gamma$.
$\cos\gamma \approx 0{,}7104$	Despejamos $\cos\gamma$.
$\gamma \approx 44{,}73°$	Hallamos el valor de γ.

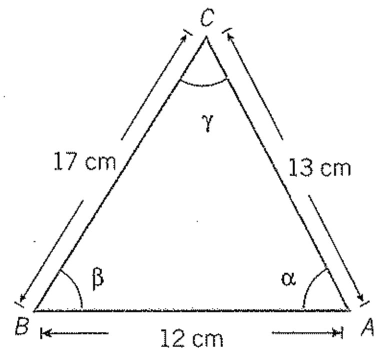


Figura 4.16

Por otro lado, para hallar el valor de α, realizamos las siguientes operaciones:

$17^2 = 12^2 + 13^2 - 2(13)(12)\cos\alpha$	Utilizamos la ley de cosenos $a^2 = c^2 + b^2 - 2cb\cos\alpha$.
$\cos\alpha = \dfrac{12^2 + 13^2 - 17^2}{2(13)(12)}$	Despejamos el valor de $\cos\alpha$.
$\alpha \approx 85{,}59°$	Hallamos el valor de α.
$\alpha + \beta + \gamma = 180°$	Usamos el hecho de que la suma de los ángulos internos de un triángulo suman 180°.
$\beta \approx 49{,}68°$	Hallamos el valor de β. ◀

Ejemplo 29

Dos aviones que vuelan a la misma altura, se dirigen en línea recta hacia el aeropuerto de Honolulu, como lo muestra la figura 4.17. El ángulo que forman las trayectorias es de 20°. Un avión se halla a 20 km del aeropuerto y el otro a 12 km. ¿Cuál es la distancia horizontal entre los aviones?

Solución

Denotemos con a la distancia horizontal entre los dos aviones.

$a^2 = 20^2 + 12^2 - 2(20)(12)\cos 20°$	Utilizamos la ley de cosenos.
$a^2 = 400 + 144 - 480\cos 20°$	Realizamos las operaciones indicadas.
$a^2 = 544 - 480(0{,}94)$	Simplificamos la expresión.
$a \approx 9{,}64$ km	Hallamos el valor de a. ◀

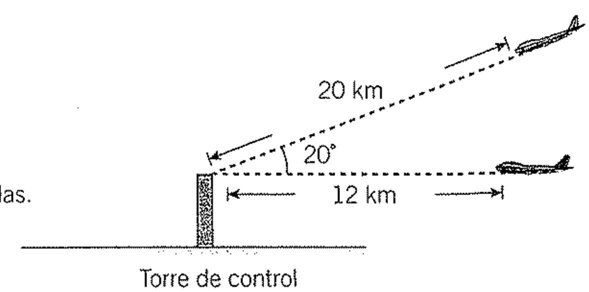


Figura 4.17

> Piensa y practica <

> Conexiones

1. Empleando la ley de senos resuelve cada triángulo. Si no existe triángulo justifica tu respuesta. Si existen dos triángulos, da las dos soluciones.

a. $\triangle ABC$, con $A = 99°$, $B = 48°$ y $c = 85{,}7$ m.

b. $\triangle DEF$, con $D = 57°$, $d = 31$ cm y $e = 45$ cm.

c. $\triangle HJK$, con $H = 51°$, $K = 79°$ y $k = 68$ cm.

d. $\triangle ABC$, con $B = 92°$, $b = 88{,}1$ cm y $c = 58{,}3$ cm.

e. $\triangle PQR$, con $P = 76°$, $p = 47$ cm y $r = 36$ cm.

2. Con base en la figura 4.18 y en los datos dados en cada literal, calcula los demás elementos del triángulo.

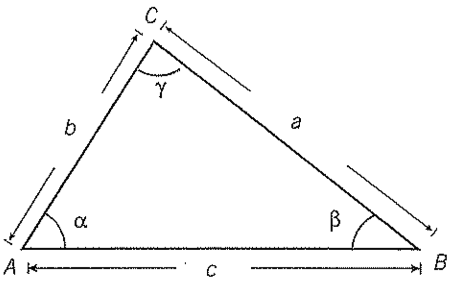


Figura 4.18

a. $\alpha = 30°$; $\beta = 65°$; $a = 120$ cm.

b. $\gamma = 70°$; $c = 15$ cm; $b = 12$ cm.

c. $\alpha = 35°$; $c = 50$ cm; $a = 40$ cm.

d. $\alpha = 52°$; $\beta = 75°$; $a = 23{,}5$ cm.

e. $\alpha = 50°$; $\beta = 80°$; $c = 19$ cm.

f. $a = 10$ cm; $b = 10$ cm; $c = 8$ cm.

g. $a = 15$ cm; $b = 20$ cm; $c = 18$ cm.

h. $\gamma = 60°$; $b = 10$ cm; $a = 12$ cm.

i. $\alpha = 45°$; $b = 15$ cm; $c = 20$ cm.

j. $\beta = 83°$; $\gamma = 77°$; $c = 25$ cm.

3. En un triángulo isósceles, el ángulo entre los lados de igual longitud mide 23° y su lado opuesto mide 10 cm. ¿Cuál es el valor de los otros ángulos y lados del triángulo?

4. En el paralelepípedo de la figura 4.19 halla el valor de a.

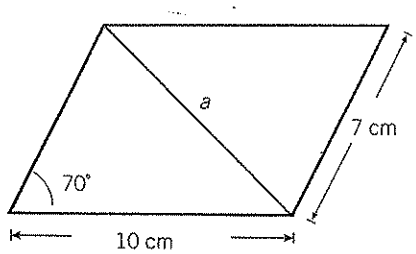


Figura 4.19

> Comunicación

5. Explica, con un ejemplo, por qué el teorema del coseno se transforma en el teorema de Pitágoras para triángulos rectángulos.

6. Explica, con un ejemplo, por qué la ley del seno se transforma en la definición de la relación trigonométrica seno en un triángulo rectángulo.

7. La prueba de la ley de cosenos y la ley de senos la realizamos basándonos en un triángulo acutángulo. Según la figura 4.20, en la cual el triángulo es obtusángulo, por qué sigue siendo válida la ley de senos y la ley de cosenos. Explica tu respuesta.

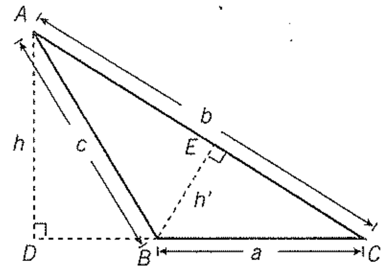


Figura 4.20

> Resolución de problemas

8. Un globo vuela a una altitud de 100 metros sobre la cumbre de una montaña que mide 216 metros, según se indica en la figura 4.21. Desde el globo se ve una segunda montaña más alta que la primera. El ángulo de depresión desde el globo es de 28° y desde la cumbre de la primera montaña el ángulo de elevación es de 30°. Halla la distancia entre el globo y la segunda montaña, y la distancia entre las cumbres de las montañas.

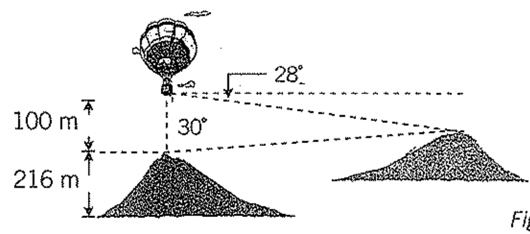


Figura 4.21

9. Halla la altura h del edificio con los datos suministrados en las figuras 4.22 y 4.23.

a.

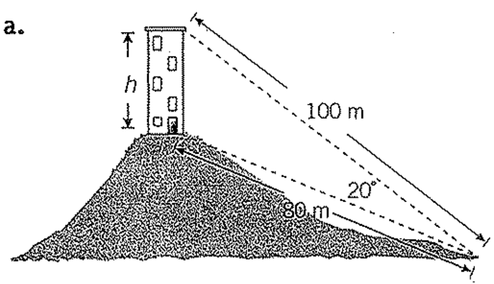


Figura 4.22

b.

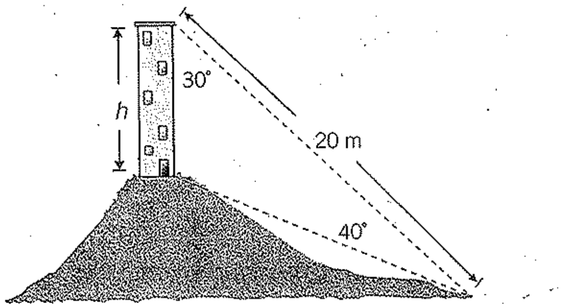


Figura 4.23

10. Un poste en una calle inclinada proyecta una sombra de 20 metros (*ver* figura 4.24). Si el ángulo de inclinación de la calle es de 20° con la horizontal y el ángulo de elevación del Sol es de 55°, ¿cuál es la altura del poste?

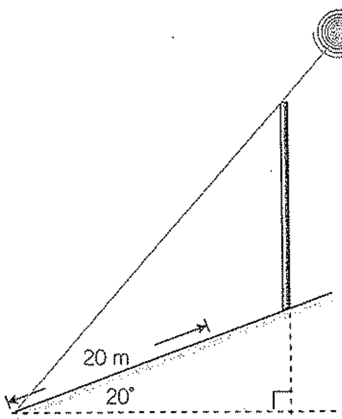


Figura 4.24

11. Un lote en forma triangular está bordeado por dos carreteras que se encuentran en un ángulo de 80° (*ver* figura 4.25). Los lados del lote miden 90 m y 80 m. ¿Cuántos metros mide el perímetro del lote?

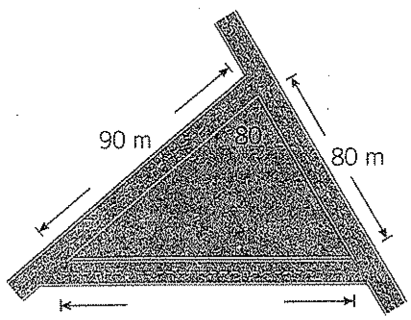


Figura 4.25

12. Una escalera mide 8 m y está recostada sobre una montaña con una inclinación de 80° respecto a la horizontal. El extremo inferior de la escalera está a 4 m de la base de la montaña (*ver* figura 4.26). Calcula el ángulo de inclinación de la escalera.

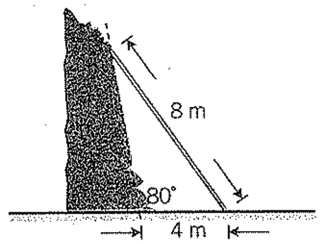


Figura 4.26

13. Pablo y Diana están en una carretera separados por una distancia de 10 metros (*ver* figura 4.27). Pablo eleva una cometa con una cuerda de 15 metros, el ángulo de elevación de la cometa es de 20°. ¿Cuál es la distancia de la cometa a Diana?

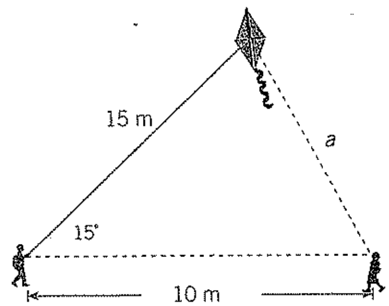


Figura 4.27

14. Con el paso de los años, un edificio se ha inclinado 20° de la vertical (*ver* figura 4.28). Los dueños han decidido sujetarlo con un cable que está a 12 metros de la base del edificio, como se muestra en la figura 4.28. Si el ángulo de elevación es de 25°, calcula la longitud del cable y la altura del edificio.

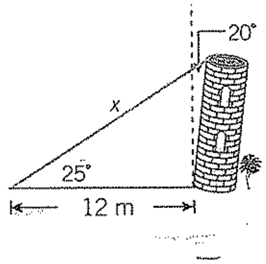
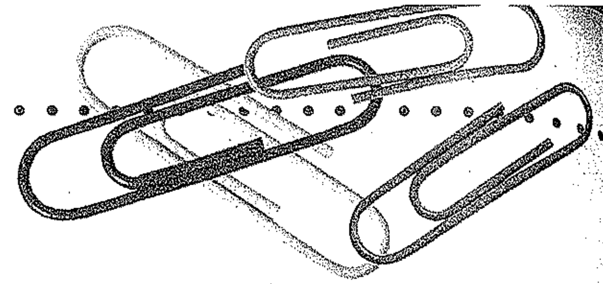


Figura 4.28

15. Dos autos viajan por dos carreteras rectas que forman un ángulo de 20° y que comienzan en una estación. Si las velocidades son de $60\frac{\text{km}}{\text{h}}$ y $50\frac{\text{km}}{\text{h}}$, ¿qué distancia los separa 1 hora después, si partieron al mismo tiempo?

Evaluación por competencias



Autoevaluación

A continuación aparecen los indicadores de logro. Marco ✔ en la columna Sí, si el logro indicado está superado o ✘ en la columna No, si está por superar.

	Sí	No
> Compruebo identidades trigonométricas.	☐	☐
> Calculo una función trigonométrica de la adición o sustracción de dos ángulos.	☐	☐
> Compruebo identidades relacionadas con la adición o sustracción de dos ángulos.	☐	☐
> Calculo las funciones trigonométricas del ángulo doble y del ángulo medio.	☐	☐
> Convierto una multiplicación de senos o cosenos en una adición o sustracción de senos y cosenos.	☐	☐
> Resuelvo una ecuación trigonométrica general.	☐	☐
> Aplico las leyes del seno y del coseno en la solución de situaciones problema.	☐	☐

Coevaluación

Con los siguientes ejercicios, afianzamos los indicadores de logro que hemos superado y reforzamos aquellos que están por superar.

1. Verifiquemos las siguientes identidades.

a. $\sec^4 x - \tan^4 x = 2\sec^2 x - 1$

b. $\dfrac{\cos\theta}{1-\operatorname{sen}\theta} = \sec\theta + \tan\theta$

c. $\dfrac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y}{\operatorname{sen} x + \cos y} = \tan\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$

d. $\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos x\cos y$

e. $\dfrac{1+\tan x}{1-\tan x} = \dfrac{\cos x + \operatorname{sen} x}{\cos x - \operatorname{sen} x}$

f. $\dfrac{\operatorname{sen} 4x - \operatorname{sen} 2x}{2\cos 3x} = \operatorname{sen} x$

g. $\dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{\cot\alpha + \cot\beta} = \tan\alpha\tan\beta$

2. Escribamos cada expresión trigonométrica en términos de coseno.

a. $\tan x + \sec x\cot x$ **b.** $\tan x + \cot x$

c. $\operatorname{sen} x(1-\cos x)$ **d.** $1 - \tan^2 x\cos x$

3. Demostremos con un contraejemplo, que cada igualdad no es una identidad.

a. $\dfrac{1}{\sec x + \csc x} = \cos x + \operatorname{sen} x$

b. $\csc(x+y) = \csc x + \csc y$

4. Sabiendo que $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{4}{5}$, $\cos\alpha = -\dfrac{12}{13}$, $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ y $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, calculemos:

a. $\operatorname{sen}\dfrac{\theta}{2}$ **b.** $\operatorname{sen} 2\theta$

c. $\cos\theta$ **d.** $\cos\dfrac{\theta}{2}$

e. $\tan\theta$ **f.** $\operatorname{sen}(\theta+\alpha)$

g. $\cos(\alpha-\theta)$ **h.** $\tan 2\alpha$

i. $\tan(\alpha+\theta)$

5. Encontremos las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi]$ para las ecuaciones.

a. $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **b.** $\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 4x = 0$

c. $3\tan^2 x = 1$ **d.** $\cos x = \dfrac{1}{2}$

e. $\operatorname{sen} x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **f.** $2\tan x = \sec x$

g. $\dfrac{\cos x}{1-\operatorname{sen} x} = 0$

h. $2\cos^2 x + 5\operatorname{sen} x - 4 = 0$

i. $\cos 2x + 3\operatorname{sen} x = 2$

j. $\cos 3x\cos 7x = \cos 9x\cos 4x$

6. Escribamos cada multiplicación como una adición.

a. $\cos(x+y)\operatorname{sen}(x-y)$

b. $\cos 3\theta \cos 6\theta$

c. $\operatorname{sen}(x-\pi)\operatorname{sen}(x+\pi)$

d. $\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}+x\right)$

7. En cada caso, resolvamos el $\triangle ABC$ de la figura 4.29.

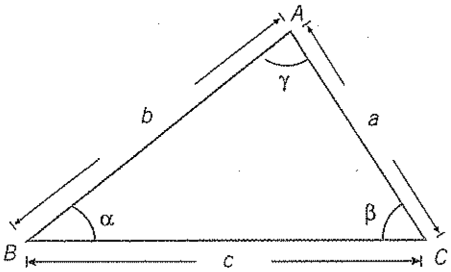


Figura 4.29

a. $\alpha = 45°$; $b = 17$ cm ; $c = 22$ cm .

b. $\gamma = 60°$; $b = 20$ cm ; $a = 24$ cm .

c. $\beta = 22°$; $\alpha = 42°$; $a = 15$ cm .

d. $a = 5$ m ; $b = 7$ m ; $c = 8$ m .

8. Una estatua se observa desde dos puntos, *A* y *B*, opuestos, separados por 300 metros, con ángulos de elevación de 20° y 15°. ¿Cuál es la altura de la estatua y a qué distancia está de los puntos *A* y *B*?

9. Marcela debe recorrer un juego de obstáculos formado por dos escaleras como lo muestra la figura 4.30. Ella sabe que la primera escalera mide 10 metros y la segunda escalera mide 8 metros. Además, las bases están separadas 5 metros. ¿Cuál es el valor de los ángulos de inclinación de las dos escaleras?

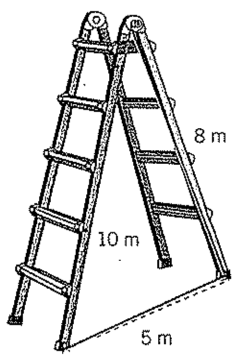


Figura 4.30

10. Rafaela y Arturo comienzan a caminar desde un punto *p*, por dos carreteras que divergen por un ángulo de 40° (*ver* figura 4.31). Rafaela camina a $10\frac{\text{m}}{\text{min}}$ y Arturo a $12\frac{\text{m}}{\text{min}}$. ¿Cuál es la distancia entre ellos después de 90 segundos?

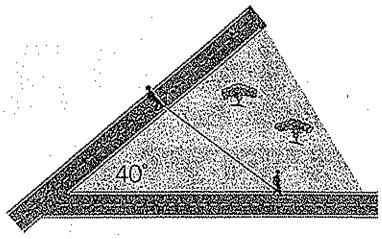


Figura 4.31

11. Cristian y Andrea están en una carretera, en medio de la selva, separados por una distancia de 10 m. Ambos están observando un mico tití colgado en un árbol (*ver* figura 4.32). Cristian con un ángulo de elevación de 26° y Andrea con un ángulo de elevación de 18°. Aproximadamente, ¿a qué altura está el mico tití?

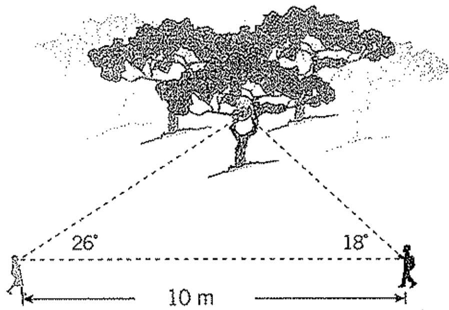


Figura 4.32

Tu creación

De acuerdo con la información del triángulo de la figura 4.33, formula un problema.

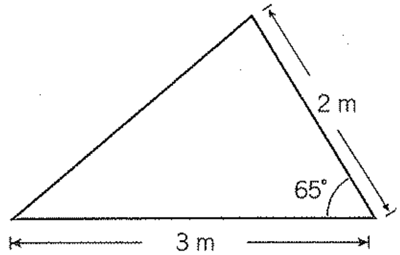


Figura 4.33

Prueba ICFES

Selecciona de las cuatro opciones sólo una de las respuestas, la que consideres relaciona de manera más estructurada los conceptos matemáticos con las condiciones particulares de la situación problema.

1. Una de las siguientes expresiones no es una identidad trigonométrica.

   a. $\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha = 1$

   b. $\dfrac{1}{\sec\gamma} = \cos\gamma$

   c. $1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$

   d. $\sec^2\theta - 1 = \tan^2\theta$

Con base en la figura 4.34, escoge la respuesta correcta para los ejercicios del 2 al 5.

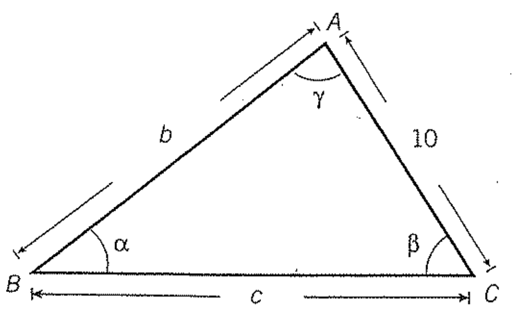


Figura 4.34

2. El valor de c es:

   a. $10\dfrac{\text{sen }\gamma}{\text{sen }\alpha}$

   b. $10\dfrac{\text{sen }\gamma}{\text{sen }\beta}$

   c. $b\dfrac{\text{sen }\gamma}{\text{sen }\alpha}$

   d. $b\dfrac{\text{sen }\alpha}{\text{sen }\beta}$

3. Si $\alpha = 45°$ y $\beta = 60°$, entonces:

   a. $b = 10\dfrac{\text{sen } 45°}{\text{sen } 60°}$

   b. $b = 10\dfrac{\text{sen } 60°}{\text{sen } 45°}$

   c. $b = c\dfrac{\text{sen } 60°}{\text{sen } 45°}$

   d. $b = c\dfrac{\text{sen } 45°}{\text{sen } 60°}$

4. Si $\alpha = \beta$, entonces:

   a. $c = 10$

   b. $b = 10$

   c. $b = c$

   d. $b^2 + c^2 = 100$

5. Si $\alpha = 65°$ y $\beta = 30°$, entonces:

   a. $\gamma = 80°$

   b. $\gamma = 85°$

   c. $\gamma = 75°$

   d. $\gamma = 70°$

6. La ecuación que corresponde a la intersección de las dos funciones de la figura 4.35 es:

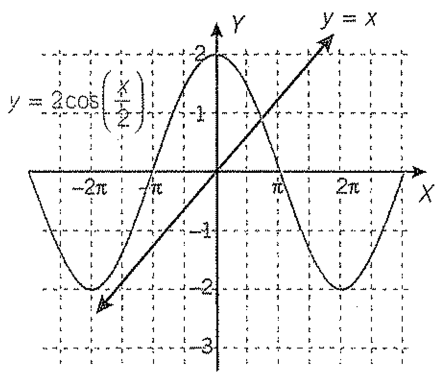


Figura 4.35

a. $x = \cos \frac{1}{2}x$

b. $-x = 2 \cos \frac{1}{2}x$

c. $x = 2 \cos \frac{1}{2}x$

d. $x = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}x$

7. Los ceros de la función $f(x) = 2\cos \frac{x}{2}$ de la figura 4.35, en el intervalo $[-2\pi, 2\pi]$ son:

a. 0, π y 2π

b. $-\pi$ y 0

c. $-\pi$ y π

d. -2π , $-\pi$ y 0

8. Si los ángulos γ y θ son agudos y, además, $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ y $\cos \theta = \frac{1}{2}$, entonces $\cos(\alpha + \theta)$ es igual, a:

a. $\frac{4}{5} + \frac{1}{2}$

b. $\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

c. $\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

d. $\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$

9. La expresión $\cos 4x \operatorname{sen} 3x$ es igual a:

a. $12 \cos x \operatorname{sen} x$

b. $\frac{1}{2}(\operatorname{sen} 7x - \operatorname{sen} x)$

c. $\frac{1}{2}(\cos 7x - \cos x)$

d. $\cos 3x \operatorname{sen} 4x$

10. Un poste de altura h se encuentra inclinado según se muestra en la figura 4.36. Este poste está sostenido por un cable de longitud l, que se encuentra atado a una distancia m de la base del poste.

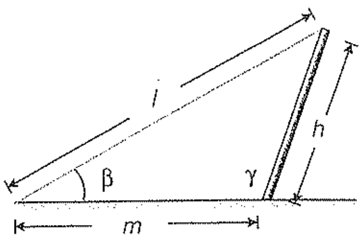


Figura 4.36

Si se desea conocer el ángulo β es necesario:

a. Conocer el valor de m y l. Además utilizar el teorema del coseno.

b. Conocer el valor de γ y l. Utilizar el teorema del seno.

c. Conocer h, γ y m. Utilizar el teorema del coseno.

d. Conocer el valor de h, l y γ. Utilizar el teorema del seno.

11. Para resolver la ecuación $\operatorname{sen}^2 2x + 2 \operatorname{sen} 2x \cos 3x = 0$ es necesario:

a. Utilizar la identidad $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$.

b. Utilizar la identidad $\operatorname{sen}^2 2x = 1 - \cos^2 2x$.

c. Factorizar $\operatorname{sen} 2x$.

d. Utilizar la identidad $\operatorname{sen} u \cos v = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(u + v) + \operatorname{sen}(u - v)\right]$.

12. Las soluciones de la ecuación $\operatorname{sen} x = \cos x$ son de la forma:

a. $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$

b. $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$

c. $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$

d. $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$. $k \in \mathbf{Z}$

13. Para que la ecuación $c = a - b\operatorname{sen} mx$ tenga solución, se deben cumplir las condiciones:

a. $c - a \in [-1, 1]$

b. $a \neq c \neq 0$

c. $\frac{a - c}{b} \in [-1, 1]$

d. $\frac{a}{b} \in [-1, 1]$

14. ¿Cuál de las siguientes expresiones no es identidad?

a. $\tan(-x) = -\tan 2x$

b. $\tan 2x = 2\tan x$

c. $\tan 2x = \frac{\operatorname{sen} 2x}{\cos 2x}$

d. $\tan 2x = \frac{1}{\cot 2x}$

Conexión histórica

La planimetría

La planimetría es un método utilizado por los topógrafos para medir terrenos. Consiste en un proceso llamado triangulación, en el que se crea una red de miles de triángulos entrelazados por medio de los cuales se mide el área de terrenos irregulares. El proceso se inicia midiendo la longitud de una línea base entre dos estaciones topográficas, después, utilizando un instrumento llamado teodolito, se miden los ángulos entre estas dos estaciones y una tercera. A continuación se utiliza la ley de los senos para calcular los otros dos lados del triángulo formado por las tres estaciones. Entonces se utilizan los lados calculados como líneas base y se repite el proceso una y otra vez para crear una red de triángulos (*ver* figura 4.37). En este método, la única distancia medida es la línea base inicial; las demás distancias se calculan a partir de la ley de los senos. Este método es práctico porque resulta mucho más fácil medir ángulos que distancias.

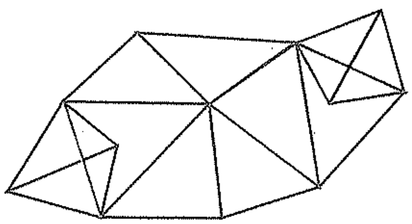


Figura 4.37

Uno de los esfuerzos de cartografía más ambiciosos de todos los tiempos fue el gran censo trigonométrico de la India, formada por varias expediciones y que tomó más de un siglo en terminarse. La famosa expedición de 1823, encabezada por Sir George Everest, duró 20 años. Extendiéndose sobre terreno irregular y enfrentándose con los temidos mosquitos de la malaria, esta expedición llegó a las estribaciones del Himalaya. Una expedición posterior, utilizando la triangulación, calculó la altura del pico más alto del Himalaya como 29 002 pies. Este pico fue bautizado en honor de Sir George Everest. Hoy día, utilizando satélites se ha estimado la altura del Everest en 29 028 pies. La concordancia tan cercana entre estos dos estimativos demuestra la gran precisión del método trigonométrico. ■

Adaptado de Stewart, Redin y Watson. *Precálculo* Tercera edición, Editorial Thomson, Learning.
2001.

Reflexiona

1. ¿Qué es la planimetría?
   ....
2. ¿Cuáles son las tareas de la planimetría?
   ....
3. ¿Qué leyes trigonométricas se emplean en la planimetría?
   ....
4. Investiga qué otros métodos emplean los topógrafos para medir terrenos.

Glosario

Amplitud: factor que amplía o reduce el rango de una función trigonométrica.

Ecuación trigonométrica: igualdad de dos expresiones que involucran funciones trigonométricas y puede ser válida para algunos elementos del dominio.

Ecuación trigonométrica simple: expresión de la forma $f(x) = c$, donde $f(x)$ es una función trigonométrica y c es una constante.

Fase: desplazamiento horizontal de una función sobre el eje X.

Identidad trigonométrica: igualdad de dos expresiones que involucran funciones trigonométricas y debe ser válida para todos los elementos del dominio.

Identidad para ángulos dobles: identidad que permite hallar la función trigonométrica del duplo de un ángulo cuando se conoce la función trigonométrica del ángulo.

Identidades inversas: identidades que relacionan una función trigonométrica con el inverso multiplicativo de otra función trigonométrica.

Identidades para ángulo medios: identidad que permite encontrar la función trigonométrica de la mitad de un ángulo, cuando se conoce la función trigonométrica del ángulo.

Identidades para sumas y productos: identidades que permiten expresar la adición o sustracción de dos funciones trigonométricas en forma de producto o viceversa.

Identidades pitagóricas: identidades trigonométricas que se basan en el teorema de Pitágoras y el círculo unitario.

Identidades trigonométricas para suma y diferencia de ángulos: fórmulas que expresan las funciones adición o sustracción de ángulos en términos de las funciones de cada ángulo.

Resolver un triángulo: determinar las medidas de los tres lados y los tres ángulos, conociendo algunos de esos datos.

Leyes del seno y del coseno: teoremas o leyes que se aplican especialmente para resolver triángulos oblicuángulos.

Verificación de una identidad: transformación de una expresión trigonométrica en otra expresión determinada.

Razonamiento

1. ¿Cuántos caminos distintos existen para llegar desde la ciudad **A** hasta la ciudad **Z**? (*ver* figura 4.38)

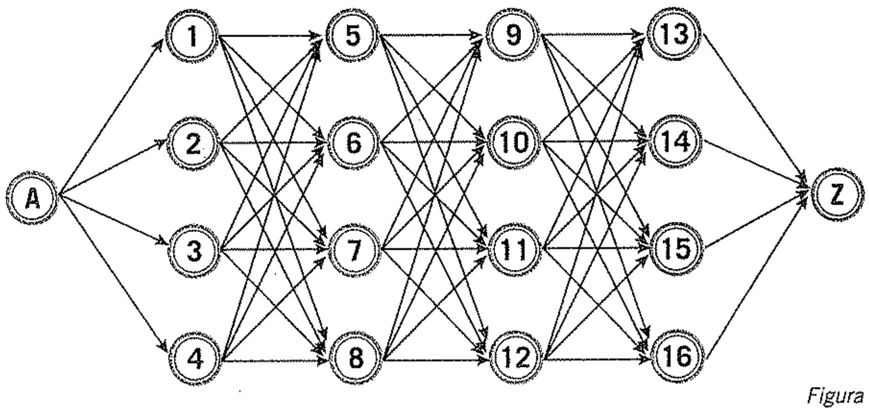
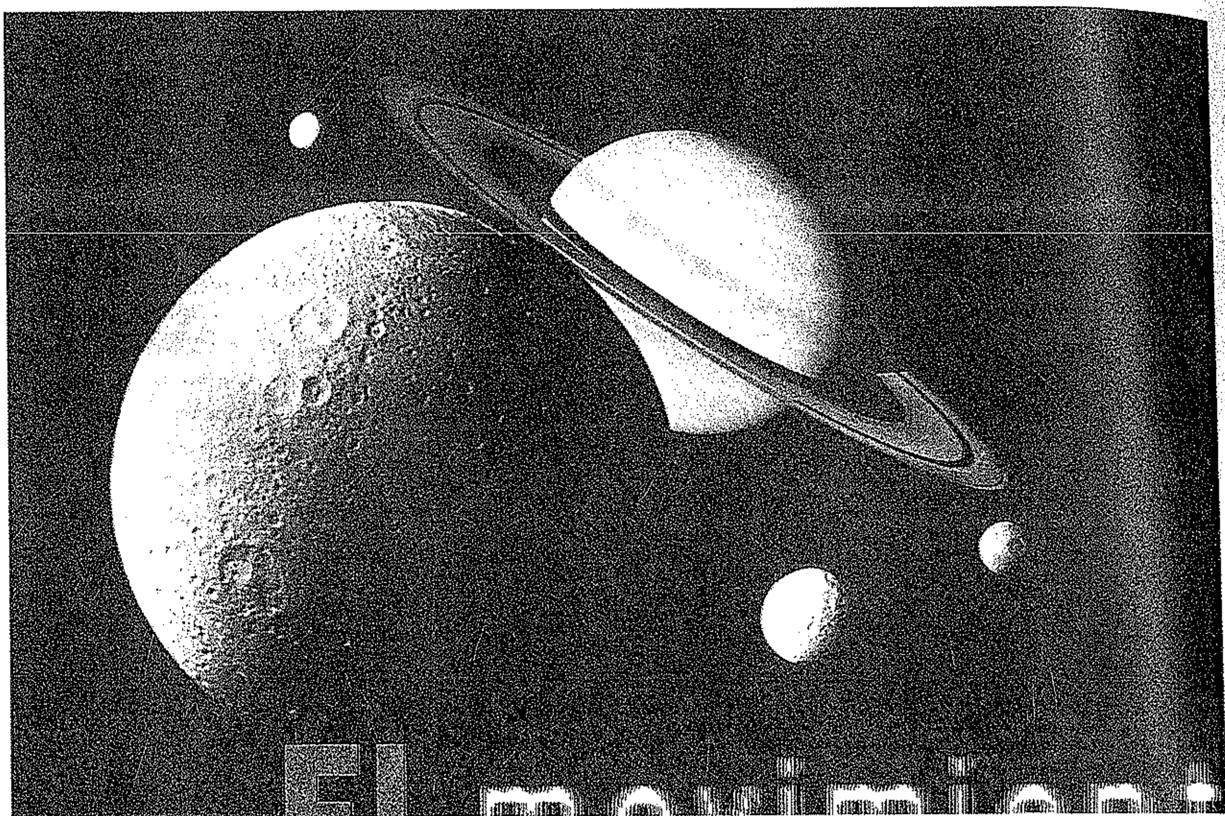


Figura 4.38

2. En un salón hay 5 hombres y cuatro mujeres. ¿Cuántas parejas diferentes formadas por personas de distintos géneros se pueden formar?

Geometría analítica



El movimiento de los planetas

A finales del siglo XVI, el astrónomo danés Tycho Brahe registró cuidadosamente observaciones de las posiciones de los planetas; esperaba usar estos datos para demostrar la validez de su modelo del sistema solar, en el cual el Sol se movía alrededor de la Tierra y los otros planetas lo hacían alrededor del Sol. Al morir (1601), sus registros fueron heredados por su asistente Johannes Kepler, quien gastó cerca de dos décadas para analizarlos, tratando de encontrar fórmulas matemáticas que reflejaran las relaciones entre ellos. Y llegó a la conclusión de que la idea aceptada hasta entonces, según la cual los planetas se movían en órbitas circulares, debía ser descartada: las órbitas eran elípticas. Kepler resumió los resultados de su laborioso estudio sobre el movimiento de los planetas en tres leyes:

Estándares:

Conexiones

Relacionar conceptos

Establecer modelos de la geometría analítica en otras áreas del conocimiento.

Comunicación

Leer, escribir y comunicar

Simplificar la presentación de modelos geométricos con la ayuda del lenguaje algebraico.

Primera ley: los planetas se mueven en órbitas elípticas que tienen al Sol en uno de sus focos.

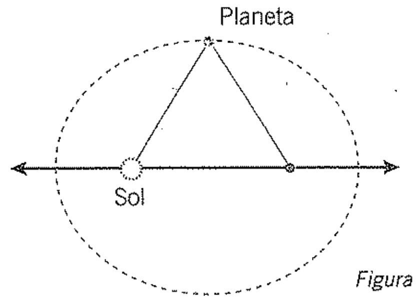


Figura 5.1

Segunda ley: la línea que une al Sol con los planetas recorre áreas iguales en tiempos iguales (las regiones elípticas coloreadas de morado y verde tienen la misma área, y son recorridas en tiempos iguales, esto es, en el mismo tiempo, en la región verde, el planeta debe recorrer un arco de elipse de mayor longitud.).

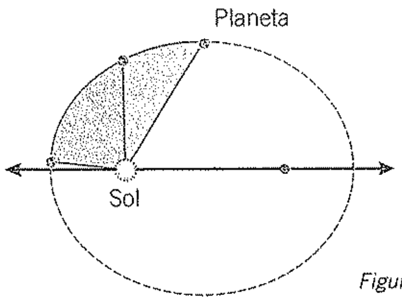


Figura 5.2

Tercera ley: el cuadrado del período del planeta (tiempo que tarda un planeta en dar una vuelta al Sol, se simboliza con la letra T) es proporcional al cubo del semieje mayor de la órbita (distancia entre el centro de la elipse y el extremo más alejado de la trayectoria que describe la elipse, se simboliza con la letra r).

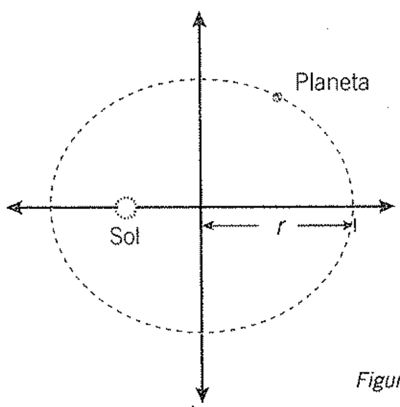


Figura 5.3

Analiza y resuelve

De acuerdo con la lectura anterior responde.

1. Según la segunda ley de Kepler, la afirmación correcta es:

a. En el mismo tiempo, el planeta debe recorrer un arco de elipse de mayor longitud en la región verde, que el recorrido en la región morada.

b. En el mismo tiempo, el planeta debe recorrer un arco de elipse de igual longitud en la región verde, que el recorrido en la región morada.

c. En el mismo tiempo, el planeta debe recorrer un arco de elipse de menor longitud en la región verde, que el recorrido en la región morada.

2. La fórmula matemática que refleja la idea contenida en la tercera ley de Kepler es:

a. $r^{\frac{2}{3}} = kT$

b. $T^2 r^3 = k$

c. $\frac{T^2}{r^3} = k$

d. $\frac{T^3}{r^2} = k$

3. En la segunda ley de Kepler, y teniendo en cuenta que el desplazamiento del planeta ha ocurrido en tiempos iguales, ¿cuál tipo de velocidad debe emplearse para establecer que las regiones recorridas tienen áreas iguales?

a. Velocidad tangencial del planeta.

b. Velocidad angular del planeta.

c. Velocidad lineal del planeta.

d. Ninguna de las anteriores.

4. Investiga la biografía de Nicolás Copérnico y Galileo Galilei, y determina cuál es la relación con las leyes de movimiento de los planetas.

Razonamiento lógico

Desarrollar destrezas matemáticas

Argumentar geométrica y analíticamente la validez de un enunciado que involucra secciones cónicas.

Resolución de problemas

Emplear estrategias en la resolución de problemas

Seleccionar las condiciones analíticas, en el sistema coordenado, que facilitan la representación y solución de una situación problema.

Lugares geométricos

Logro: identificar los elementos de estudio de la geometría analítica.

Se puede afirmar que cualquier conjunto de puntos, como una recta o una circunferencia, son lugares geométricos porque tienen alguna característica geométrica común. Por ejemplo, el conjunto de todos los puntos del plano que se encuentran a la misma distancia de dos puntos fijos P y Q, es una recta conocida como la mediatriz del $\overline{PQ}$. Una forma alternativa y práctica de describir un lugar geométrico es mediante una ecuación algebraica, por ejemplo, toda ecuación de la forma $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ o de la forma $x = ay^2 + by + c$, para $a \neq 0$, representa una parábola en el plano.

*La **geometría analítica** estudia lugares geométricos utilizando herramientas del álgebra.*

La principal característica que distingue a la geometría analítica de la geometría euclidiana son sus métodos y resultados.

El método consiste en representar algebraicamente la propiedad geométrica que satisfacen el conjunto de puntos, o representar algebraicamente la posición de un punto, el cual está fijo o en movimiento. Respecto a los resultados de la geometría analítica, estúdiaremos algunos en esta unidad. La idea de considerar no solamente puntos fijos, como en geometría elemental, es para dar interpretación a fenómenos o experimentos en la naturaleza como la trayectoria que sigue un balón de fútbol cuando el arquero saca o la curva descrita por un planeta alrededor del Sol.

Así como a cada punto de una recta podemos asignarle un número real (la coordenada del punto), a cada punto P en el plano podemos asignarle una pareja ordenada de números reales (las coordenadas del punto).

*Dos líneas rectas perpendiculares, cada una con los números reales como sistema de coordenadas, se denomina **sistema de coordenadas** cartesianas.*

La recta que contiene las primeras componentes de las parejas ordenadas se llama eje de **abscisas** o eje X y la otra recta que contiene las segundas componentes se denomina eje de **ordenadas** o eje Y.

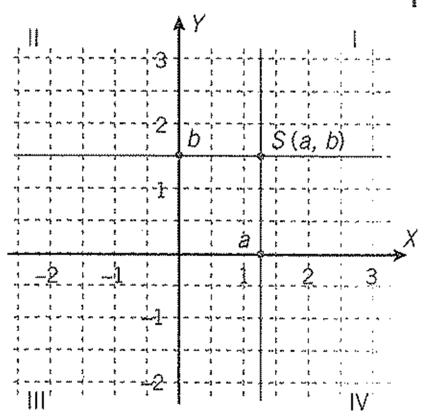


Figura 5.4

El plano cartesiano consta de un plano y dos rectas perpendiculares fijadas en éste, cada una con un sistema de coordenadas representado por los números reales.

- I: corresponde al primer cuadrante, constituido por todos los puntos del plano cuyas coordenadas cartesianas son positivas.
- II: corresponde al segundo cuadrante, conformado por todos los puntos en el plano cuya abscisa es negativa y su ordenada es positiva.
- III: corresponde al tercer cuadrante, conformado por todos los puntos en el plano cuyas coordenadas son negativas.
- IV: corresponde al cuarto cuadrante, es decir, todos los puntos en el plano cuya abscisa es positiva y su ordenada es negativa.

*Dos parejas de números reales (a, b) y (c, d) corresponden a las **coordenadas del mismo punto** P, si y sólo si,* $a = c$ *y* $b = d$.

Comentario

Las coordenadas de un punto en el eje X son de la forma (x, 0); y las coordenadas de un punto en el eje Y son de la forma (0, y).

Una fórmula importante en geometría analítica es la distancia entre dos puntos.

> *A y B son dos puntos en el plano con coordenadas* (x_1, y_1) *y* (x_2, y_2). *La **distancia euclidiana entre A y B** está dada por*
>
> $$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,.$$

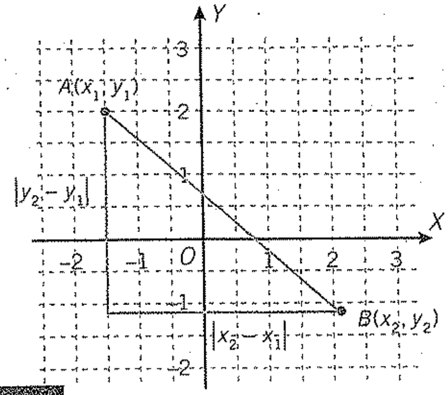


Figura 5.5

Observemos que esta fórmula es una consecuencia inmediata del teorema de Pitágoras, aplicado al triángulo rectángulo que aparece en la figura 5.5.

Ejemplo 1

a. Hallemos la distancia entre los puntos $A(-2, 4)$ y $B(5, 12)$.

b. Hallemos la ecuación de la mediatriz del segmento AB de coordenadas $A(0, 4)$ y $B(-3, 2)$.

Solución

a. $d(A, B) = \sqrt{[5-(-2)]^2 + (12-4)^2}$ — Reemplazamos $(x_1, y_1) = (-2, 4)$, $(x_2, y_2) = (5, 12)$ en la fórmula de distancia.

$d(A, B) = \sqrt{7^2 + 8^2}$ — Efectuamos las operaciones del radicando.

$d(A, B) = \sqrt{113}$ — Hallamos la distancia ente A y B.

b. Sea $P(x, y)$ un punto de la mediatriz del segmento AB, entonces $P(x, y)$ debe satisfacer la ecuación $d(P, A) = d(P, B)$. Por tanto:

$\sqrt{(x-0)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{[x-(-3)]^2 + (y-2)^2}$ — Reemplazamos $P(x, y)$ y $A(0, 4)$ en $d(P, A)$ y $P(x, y)$ y $B(-3, 2)$ en $d(P, B)$.

$\sqrt{x^2 + (y-4)^2} = \sqrt{(x+3)^2 + (y-2)^2}$ — Efectuamos las sustracciones o adiciones.

$x^2 + (y-4)^2 = (x+3)^2 + (y-2)^2$ — Elevamos al cuadrado ambos lados de la igualdad para eliminar la raíz cuadrada.

$x^2 + y^2 - 8y + 16 = x^2 + 6x + 9 + y^2 - 4y + 4$ — Desarrollamos los cuadrados perfectos.

$3 = 6x + 4y$ — Simplificamos la expresión. ◀

Ejemplo 2

Hallemos la ecuación algebraica que representa el lugar geométrico de todos los puntos $P(x, y)$ del plano cartesiano, tales que el segmento que va de P al punto $Q(0, 4)$ es perpendicular al segmento que va de P al punto $R(0, -4)$.

Solución

Como los segmentos PQ y PR son perpendiculares, entonces $\triangle PQR$ es un triángulo rectángulo con ángulo recto en el vértice P. Por tanto:

$(d(Q,R))^2 = (d(P,Q))^2 + (d(P,R))^2$ — Aplicamos el teorema de Pitágoras.

$$\left[\sqrt{(0-0)^2 + (-4-4)^2}\right]^2 = \left[\sqrt{(x-0)^2 + (y-4)^2}\right]^2 + \left[\sqrt{(0-x)^2 + (-4-y)^2}\right]^2$$

Reemplazamos las coordenadas de cada punto.

Comentario

*El **valor absoluto** de un número real t se denota por* $|t|$ *y corresponde a la distancia del punto P de coordenadas (t, 0) al punto O (0, 0), origen del sistema de coordenadas cartesianas. Por tanto,* $|t| = \sqrt{t^2}$. *Por ejemplo,* $|-8| = 8$; $|0{,}75| = 0{,}75$.

$$\left(\sqrt{64}\right)^2 = \left[\sqrt{x^2+(y-4)^2}\right]^2 + \left[\sqrt{x^2+(4+y)^2}\right]^2$$ Simplificamos radicandos.

$$64 = x^2 + (y-4)^2 + x^2 + (4+y)^2$$ Utilizamos el hecho de que la radicación es la operación inversa de la potenciación.

$$64 = x^2 + y^2 - 8y + 16 + x^2 + 16 + 8y + y^2$$ Efectuamos los cuadrados perfectos.

$$32 = 2x^2 + 2y^2$$ Simplificamos la expresión.

$$16 = x^2 + y^2$$ Sacamos factor común y simplificamos. ◀

Esta última ecuación corresponde a la ecuación de una circunferencia con centro en (0, 0) y radio 4, como veremos posteriormente.

Los lugares geométricos en el plano cartesiano, que estudiaremos en las siguientes lecciones, son la representación algebraica en dos variables de los conjuntos de puntos geométricos conocidos como secciones cónicas.

*Una **sección cónica** se forma cuando un cono circular recto de dos hojas se interseca con un plano.*

La figura 5.6 muestra los diferentes tipos de secciones cónicas que pueden construirse. Las secciones cónicas punto y líneas rectas simples y dobles, se conocen como **secciones cónicas degeneradas**.

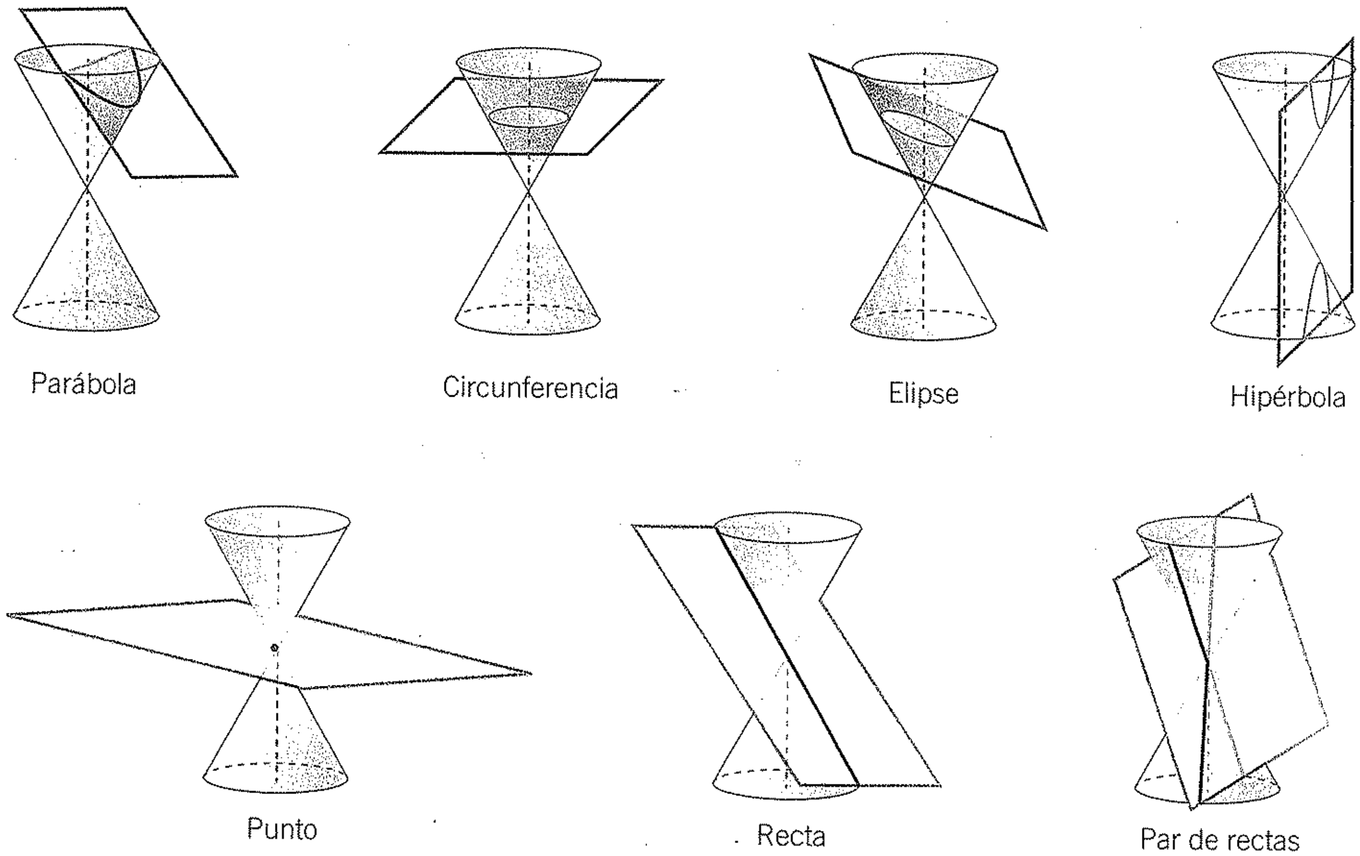


Figura 5.6

> Piensa y practica <

> Comunicación

1. Escribe el nombre de la sección cónica que representa cada gráfica.

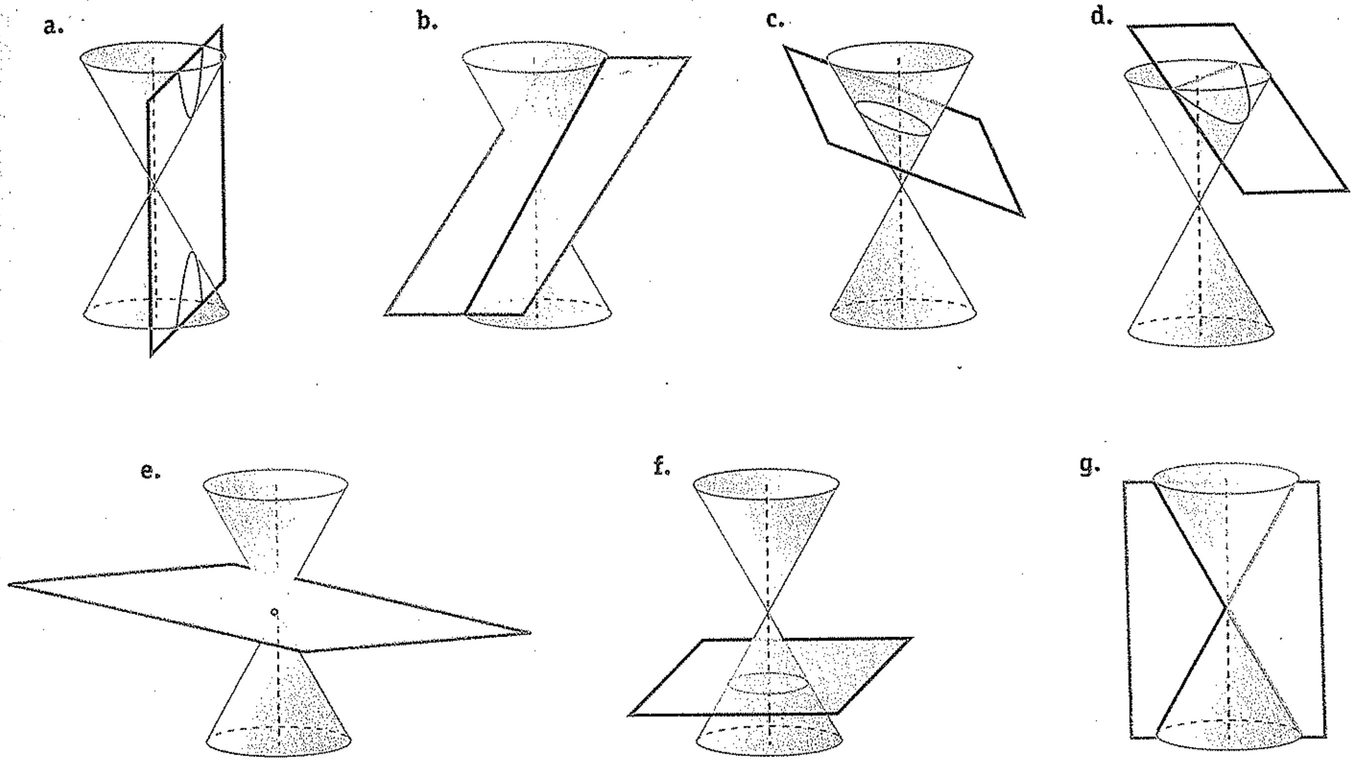


Figura 5.7

> Resolución de problemas

2. Halla la ecuación del lugar geométrico que satisfaga la condición dada.

   a. El conjunto de todos los puntos $P(x, y)$ del plano, cuya distancia al punto $O(2, 3)$ es constante e igual a 5.

   b. El conjunto de todos los puntos $P(x, y)$ del plano cuya suma de distancias a los dos puntos fijos $Q(0, 4)$ y $R(0, -4)$ es constante e igual a 10.

   c. El conjunto de todos los puntos del plano cuya distancia al eje de ordenadas (eje Y) es constante e igual a 5.

   d. El conjunto de todos los puntos $P(x, y)$ del plano que equidistan (se encuentran a la misma distancia) de los dos puntos fijos $Q(1, 4)$ y $R(3, 7)$.

   e. El conjunto de todos los puntos $P(x, y)$ del plano que equidistan de los dos puntos fijos $Q(-3, 2)$ y $R(3, -5)$.

   f. El conjunto de todos los puntos $P(x, y)$ del plano que se encuentran a 10 unidades de distancia del punto $Q(2, -3)$.

   g. El conjunto de todos los puntos $P(x, y)$ del plano que se encuentran a la misma distancia del punto $Q(0, -4)$ y de la recta $y = 12$.

   h. El conjunto de todos los puntos $P(x, y)$ del plano que se encuentran a la misma distancia del punto $Q(-3, 0)$ y de la recta de ecuación $x = 3$.

   i. El conjunto de todos los puntos $P(x, y)$ del plano que se encuentran a la misma distancia del punto $Q(0, -5)$ y de la recta de ecuación $y = 5$.

La línea recta

Logro: establecer las condiciones que caracterizan las relaciones de paralelismo y perpendicularidad entre dos rectas.

De la geometría euclidiana sabemos que por dos puntos pasa una única recta y que para trazar una línea recta basta conocer dos puntos que pertenezcan a la recta. También del estudio de las funciones lineales y afines sabemos que una línea recta puede identificarse algebraicamente conociendo las coordenadas de dos puntos por donde pase o conociendo las coordenadas de un punto por donde pase y la pendiente de la recta.

Una recta vertical (paralela al eje Y) se representa por una ecuación de la forma $x = k$, siendo k una constante real. En esta recta están todos los puntos del plano cartesiano cuyas coordenadas son de la forma (k, y), para cualquier valor real de y.

Una línea recta no vertical es el lugar geométrico de todos los puntos del plano tales que tomados dos puntos cualesquiera del lugar geométrico, $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$, el valor de la pendiente siempre es constante: $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \ (x_2 \neq x_1)$.

> *La **ecuación de la recta no vertical** que pasa por los puntos $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ con $x_2 \neq x_1$ es $y = mx + b$, donde $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ es la pendiente de la recta y b es la ordenada del punto de intersección entre la recta y el eje Y.*
> *La ecuación $y = mx + b$ se denomina **ecuación punto – pendiente**.*

Si una línea recta, no vertical ni horizontal, tiene pendiente m, entonces todas las rectas perpendiculares a esta recta tienen pendiente $-\dfrac{1}{m}$.

> *La pendiente de la recta $y = mx + b$ es igual a la función tangente calculada en el ángulo que se forma entre la línea recta y el eje positivo de las X, es decir,*
> *$m = \tan\theta = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, $x_2 \neq x_1$. θ se llama **ángulo de inclinación** de la recta.*

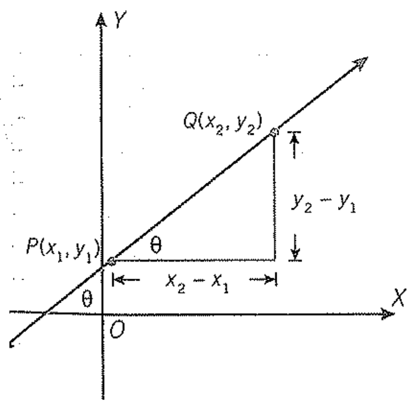


Figura 5.8

Ejemplo 3

a. Hallemos la ecuación y el ángulo de inclinación de la recta que pasa por los puntos (1, 4) y (3, –5).

b. Encontremos la ecuación de la recta que pasa por el punto (3, 7) y tiene ángulo de inclinación igual a 35°.

c. Hallemos la ecuación de la recta que pasa por el punto (18, 5) y es paralela a la recta con ecuación $2x - 3y = 6$.

d. Encontremos la ecuación de la recta que pasa por el punto (18, 5) y es perpendicular a la recta con ecuación $2x - 3y = 6$.

Comentario

*Una línea recta vertical tiene pendiente **no definida**.*

Solución

a. $m = \dfrac{-5 - 4}{3 - 1} = -\dfrac{9}{2}$ Calculamos la pendiente de la recta.

$y = -\dfrac{9}{2}x + b$ Reemplazamos el valor de la pendiente en $y = mx + b$.

Para hallar el valor de b, reemplazamos en esta ecuación las coordenadas de cualquiera de los dos puntos dados:

$4 = -\dfrac{9}{2} \cdot 1 + b$ Reemplazamos (1, 4) en $y = -\dfrac{9}{2}x + b$.

$b = \frac{17}{2}$ Despejamos b.

$y = -\frac{9}{2}x + \frac{17}{2}$ Reemplazamos $b = \frac{17}{2}$ en $y = -\frac{9}{2}x + b$.

Por tanto, la ecuación de la recta que pasa por los puntos (1, 4) y (3, –5) es $y = -\frac{9}{2}x + \frac{17}{2}$, al multiplicarse por 2 equivale a $9x + 2y = 17$.

Hallemos el ángulo de inclinación de la recta:

$\tan\theta = -\frac{9}{2}$ Utilizamos la igualdad $\tan\theta = m$.

$\theta = \tan^{-1}\left(-\frac{9}{2}\right)$ Despejamos el valor de θ.

$\theta \approx -77{,}47°$ Aproximamos el valor de θ.

b. $m = \tan 35°$ Utilizamos la igualdad $\tan\theta = m$.

$m = 0{,}7$ Hallamos el valor de la pendiente.

$y = 0{,}7x + b$ Reemplazamos $m = 0{,}7$ en $y = mx + b$.

$7 = 0{,}7 \cdot 3 + b$ Reemplazamos (3, 7) en $y = 0{,}7x + b$.

$4{,}9 = b$ Despejamos b.

$y = 0{,}7x + 4{,}9$ Reemplazamos $4{,}9 = b$ en $y = 0{,}7x + b$.

c. Hallemos la pendiente de la recta $2x - 3y = 6$.

$y = \frac{2}{3}x - \frac{6}{3}$ Despejamos y de $2x - 3y = 6$.

$m = \frac{2}{3}$ Interpretamos los valores de la ecuación $y = mx + b$.

Como la recta $2x - 3y = 6$ es paralela a la recta que estamos buscando, la pendiente es igual. Entonces tenemos que:

$y = \frac{2}{3}x + b$ Reemplazamos $m = \frac{2}{3}$ en $y = mx + b$.

$5 = \frac{2}{3} \cdot 18 + b$ Reemplazamos (18, 5) en $y = \frac{2}{3}x + b$.

$-7 = b$ Despejamos b.

$y = \frac{2}{3}x - 7$ Reemplazamos $-7 = b$ en $y = \frac{2}{3}x + b$.

d. Puesto que la recta que vamos a encontrar es perpendicular a la recta $2x - 3y = 6$, cuya pendiente es $m = \frac{2}{3}$, tenemos que la pendiente de la nueva recta será $m = -\frac{3}{2}$.

$y = -\frac{3}{2}x + b$ Reemplazamos $m = -\frac{3}{2}$ en $y = mx + b$.

$5 = -\frac{3}{2} \cdot 18 + b$ Reemplazamos (18, 5) en $y = -\frac{3}{2}x + b$.

$32 = b$ Despejamos b.

$y = -\frac{3}{2}x + 32$ Reemplazamos $32 = b$ en $y = -\frac{3}{2}x + b$. ◀

La ecuación general de la recta en el plano cartesiano es $Ax + By + C = 0$.

Si $B \neq 0$, la ecuación equivale a una ecuación punto-pendiente $y = mx + b$, donde $m = -\frac{A}{B}, b = -\frac{C}{B}$. Si $B = 0$ y $A \neq 0$, entonces la ecuación es de la forma $x = -\frac{C}{A}$, que corresponde a una línea recta vertical.

Comentario

Dos rectas paralelas tienen la misma pendiente.
El producto de las pendientes de dos rectas perpendiculares es –1.

La fórmula de distancia del punto $P(x_1, y_1)$ a la recta L con ecuación general $Ax + By + C = 0$; para $A \neq 0$, o, $B \neq 0$, es. $d(P,L) = \dfrac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

Ejemplo 4

Una piedra atada a una cuerda se gira horizontalmente, describiendo una trayectoria circular orientada positivamente alrededor del origen, de radio 5 decímetros. Cuando se suelta la cuerda, la piedra sigue un camino rectilíneo tangente a la circunferencia y golpea un techo recto descrito por una recta de ecuación $y = -\frac{4}{5}x + 12$ (*ver* figura 5.9).

Si la cuerda se suelta cuando la piedra está en el punto (3, –4), hallemos:

a. La distancia entre el techo y el punto (3, –4).

b. El punto donde la piedra golpea el techo.

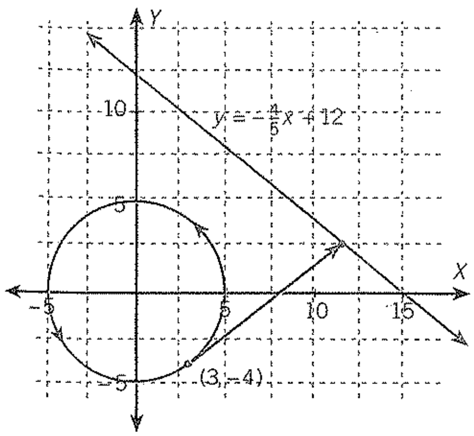


Figura 5.9

Solución

a. Hallar la distancia entre el techo y el punto (3, –4) equivale a encontrar la distancia entre el punto $P = (3, -4)$ y la recta l: $y = -\frac{4}{5}x + 12$.

$4x + 5y - 60 = 0$	Hallamos la ecuación general de la recta l.
$d(P, l) = \dfrac{\lvert 4(3) + 5(-4) - 60\rvert}{\sqrt{4^2 + 5^2}}$	Reemplazamos $A = 4$, $B = 5$, $C = -60$, $x_1 = 3$, $y_1 = -4$ en $d(P,L) = \dfrac{\lvert Ax_1 + By_1 + C\rvert}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.
$d(P, l) = \dfrac{\lvert -68\rvert}{\sqrt{16 + 25}}$	Efectuamos las operaciones indicadas.
$d(P, l) = \dfrac{68}{\sqrt{41}}$	Simplificamos el numerador y denominador.
$d(P, l) \approx 10{,}62$ dm	Aproximamos la distancia entre P y l.

b. Como la trayectoria recta que sigue la piedra después de ser soltada, es tangente a la circunferencia en el punto $(3, -4)$, la recta que representa la trayectoria de la piedra es perpendicular a la recta que pasa por los puntos $(3, -4)$ y $(0, 0)$ (radio de la circunferencia). De esta manera, la pendiente de la recta que pasa por el origen $(0, 0)$ y el punto $(3, -4)$ es $-\frac{4}{3}$. Por tanto, la pendiente de la recta que pasa por $(3, -4)$ y es perpendicular a uno de los radios de la circunferencia es $-\dfrac{1}{-\frac{4}{3}}$, es decir, $\frac{3}{4}$. Ahora encontremos la ecuación de la recta:

$y = \frac{3}{4}x + b$	Reemplazamos $m = \frac{3}{4}$ en $y = mx + b$.
$-4 = \frac{3}{4} \cdot 3 + b$	Reemplazamos $(3, -4)$ en $y = \frac{3}{4}x + b$.
$-\frac{25}{4} = b$	Despejamos b.
$y = \frac{3}{4}x - \frac{25}{4}$	Reemplazamos $-\frac{25}{4} = b$ en $y = \frac{3}{4}x + b$.

Luego el punto de impacto de la piedra con el techo es el de la intersección entre las rectas $y = -\frac{4}{5}x + 12$ y $y = \frac{3}{4}x - \frac{25}{4}$.

Resolviendo el sistema determinado por las ecuaciones de las rectas, obtenemos que la piedra impacta el techo en el punto $\left(\frac{365}{31}, \frac{80}{31}\right)$. ◀

Comentario

La tangente del ángulo θ formado por las dos rectas no perpendiculares $y = m_1x + b_1$, $y = m_2x + b_2$ es $\tan\theta = \dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}$

> Piensa y practica <

> Comunicación

1. Responde las siguientes preguntas.
   - **a.** ¿Cuántos puntos son necesarios para determinar la ecuación de una recta?
   - **b.** ¿Qué relación existe entre las pendientes de dos rectas perpendiculares?
   - **c.** ¿Qué relación existe entre las pendientes de dos rectas paralelas?
   - **d.** ¿Cómo se determinan los cortes con los ejes de coordenadas?
   - **e.** ¿Qué posición en el plano tiene una recta de pendiente no definida?
   - **f.** ¿Qué posición en el plano tiene una recta de pendiente cero?
2. Escribe la ecuación de la línea recta en la forma punto pendiente $y = mx + b$, si:
   - **a.** $m = -3$ y pasa por el punto (–1, 3).
   - **b.** $m = -2$ y pasa por el punto (2, –3).
   - **c.** Pasa por los puntos (4, 0) y (6, 8).
   - **d.** Pasa por el punto (2, 1) y es paralela a la recta $y = 4x - 9$.
   - **e.** Pasa por el punto (0, 4) y es perpendicular a la recta $10x - 6y = 27$.
   - **f.** Pasa por el punto (3, 5) y tiene un ángulo de inclinación de 30°.
   - **g.** Pasa por el punto (3, 5) y tiene un ángulo de inclinación de 120°.
   - **h.** Pasa por el punto (–2, 6) y tiene un ángulo de inclinación de 135°.
3. Determina los coeficientes A y B de la ecuación general de la recta $Ax + By + 8 = 0$, tal que:
   - **a.** Pasa por los puntos (0, 4) y (3, 0).
   - **b.** Pasa por los puntos $\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$ y $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$.
   - **c.** Pasa por el punto (1,5, 0,75) y tiene pendiente $m = -4$.
   - **d.** Pasa por el punto (–2, 1) y es perpendicular a la recta de ecuación $y = 4x$.
   - **e.** Pasa por el punto (3, 4) y es paralela a la recta de ecuación $y = 6x - 8$.
4. Halla el ángulo agudo formado por las dos rectas cuyas ecuaciones son:
   - **a.** $4x - 9y + 11 = 0$, $3x + 2y - 7 = 0$
   - **b.** $4x - y = 0$, $2x + 3y = 6$
   - **c.** $x + 2y - 6 = 0$, $4x + 3y + 12 = 0$
   - **d.** $y = 12x + 5$, $y = \frac{1}{4}x + 8$

> Resolución de problemas

5. El punto medio de un segmento rectilíneo PQ es el punto R que equidista de P y de Q, es decir, R satisface la ecuación $d(P, R) = d(Q, R)$. Si P tiene coordenadas cartesianas (x_1, y_1) y las coordenadas de Q son (x_2, y_2), demuestra que las coordenadas cartesianas de R son $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$.
6. Halla la ecuación de la mediatriz del segmento PQ, donde las coordenadas de P y Q son respectivamente:
   - **a.** (4, 6), (0, 8)
   - **b.** (1, 3), (– 5, 7)
   - **c.** (4, 0), (0, 4)
7. Un movimiento rectilíneo uniforme de un cuerpo es aquél cuya velocidad es constante, por tanto, la aceleración es cero. La posición x del cuerpo en el instante t está dada por la ecuación $x = vt + x_0$, donde x_0 es la posición del cuerpo al tiempo $t = 0$, y v es el valor numérico de la velocidad constante.
   - **a.** Dos cuerpos A y B viajan en movimiento rectilíneo uniforme, las ecuaciones de sus movimientos son $x_A = 35t + 100$; $x_B = 50t$, la velocidad está dada en metros por minuto. ¿En qué instante se encuentran los dos cuerpos? ¿Cuál debería ser la velocidad del segundo cuerpo para que se encontraran a los 10 minutos?
   - **b.** Dos corredores A y B parten del mismo lugar. A partió 30 segundos antes que B con una velocidad constante de 5 m/s. B sigue la misma trayectoria con una velocidad constante de 6 m/s. ¿A qué distancia del punto de partida el corredor B alcanzará al corredor A?

La circunferencia

Logro: deducir la ecuación de una circunferencia para establecer relaciones geométricas de su representación gráfica y como modelo analítico para resolver problemas.

*Una **circunferencia** es el lugar geométrico de todos los puntos del plano que equidistan de un punto fijo. El punto fijo se denomina **centro** de la circunferencia.*

La gráfica de una circunferencia corresponde a una curva plana cerrada. Todo segmento que va del centro a la circunferencia se denomina **radio** (la longitud común de todos estos segmentos se llama también radio), una cuerda que pasa por el centro de la circunferencia es un **diámetro** y su longitud es dos veces la del radio (*ver* figura 5.10).

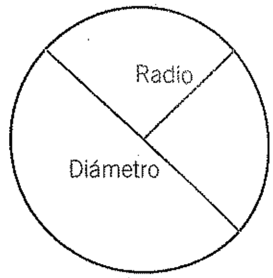


Figura 5.10

Consideremos una circunferencia con centro en el punto $O(x_0, y_0)$ y radio r. Establezcamos su ecuación, y para ello supongamos que el punto $P(x, y)$ se encuentra en la circunferencia. Entonces, de la definición tenemos: $d(P, O) = r$,

por tanto, $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r$.

Entonces, elevando al cuadrado para eliminar la raíz cuadrada tenemos:
$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$.

*La **ecuación estándar** de la circunferencia con centro en el punto $O(x_0, y_0)$ y radio r es: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$.*

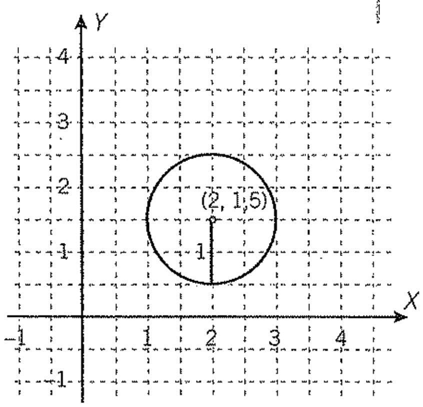


Figura 5.11

La figura 5.11 muestra la gráfica de una circunferencia con centro (2, 1,5) y radio 1.

La ecuación estándar de esta circunferencia es $(x - 2)^2 + (y - 1{,}5)^2 = 1$:

$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 3y + 2{,}25 = 1$	Desarrollamos los cuadrados perfectos.
$x^2 + y^2 - 4x - 3y + 5{,}25 = 0$	Igualamos a cero la ecuación.

Podemos ver que la ecuación anterior, es de la forma $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$.

*La **ecuación general** de la circunferencia es $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$.*

Ejemplo 5

Determinemos el lugar geométrico de la ecuación $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 4 = 0$.

Solución

$(x^2 + 4x) + (y^2 - 6y) + 4 = 0$	Agrupamos los términos en x y en y.
$(x^2 + 4x + 4) + (y^2 - 6y + 9) + 4 = 0 + 4 + 9$	Completamos el cuadrado perfecto, tanto en x como en y.
$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 + 4 = 4 + 9$	Factorizamos los cuadrados perfectos.
$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 9$	Simplificamos términos.

Así obtenemos que la ecuación anterior corresponde a una circunferencia con centro en (–2, 3) y radio $r = 3$. ◀

Observemos que esta ecuación general satisface la condición $D^2 + E^2 - 4F > 0$.
En este caso, $D = 4$, $E = -6$ y $F = 4$, por tanto,
$D^2 + E^2 - 4F = 4^2 + (-6)^2 - 4(4) = 16 + 36 - 16 = 36 > 0$.

> **Comentario**
>
> *Una ecuación general de una circunferencia se puede escribir en forma estándar (completando cuadrados en las variables x y y) solamente cuando se verifica la condición $D^2 + E^2 - 4F > 0$.*

Ejemplo 6

Hallemos la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos (1, 9), (8, 2) y (-9, 9).

Solución

$1^2 + 9^2 + D(1) + E(9) + F = 0$	Sustituimos (1, 9) en $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$.
$(1): D + 9E + F = -82$	Simplificamos la expresión y llamamos la ecuación (1).
$8^2 + 2^2 + D(8) + E(2) + F = 0$	Sustituimos (8, 2) en $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$.
$(2): 8D + 2E + F = -68$	Simplificamos la expresión y llamamos la ecuación (2).
$(-9)^2 + 9^2 + D(-9) + E(9) + F = 0$	Sustituimos (-9, 9) en $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$.
$(3): -9D + 9E + F = -162$	Simplificamos la expresión y llamamos la ecuación (3).

Ahora, tenemos que hallar el valor de los coeficientes D, E y F, así que solucionamos el sistema formado por las ecuaciones (1), (2) y (3):

$(4): 7D - 7E = 14$	Sustraemos término a término la primera ecuación de la segunda ecuación y obtenemos la ecuación (4).
$(5): 17D - 7E = 94$	Sustraemos término a término la tercera ecuación de la segunda ecuación y obtenemos la ecuación (5).
$10D = 80$	Sustraemos la cuarta ecuación de la quinta.
$D = 8$	Despejamos D.

Para hallar los valores de E y F, reemplazamos el valor de D en la primera y segunda ecuación:

$8 + 9E + F = -82$	Sustituimos $D = 8$ en (1).
$(6): 9E + F = -90$	Simplificamos la ecuación y la llamamos (6).
$64 + 2E + F = -68$	Sustituimos $D = 8$ en (2).
$(7): 2E + F = -132$	Simplificamos la ecuación y la llamamos (7).
$7E = 42$	Sustraemos (7) de (6).
$E = 6$	Despejamos E.
$12 + F = -132$	Sustituimos $E = 6$ en (7).
$F = -144$	Despejamos F.

Por consiguiente, la ecuación general de la circunferencia que pasa por los puntos (1, 9), (8, 2) y (−9, 9) es: $x^2 + y^2 + 8x + 6y - 144 = 0$

$\left(x^2 + 8x\right) + \left(y^2 + 6y\right) - 144 = 0$ Agrupamos en x y y.

$\left(x^2 + 8x + 16\right) + \left(y^2 + 6y + 9\right) - 144 = 0 + 16 + 9$ Completamos cuadrados en x y en y.

Por tanto, la ecuación estándar es $\left(x + 4\right)^2 + \left(y + 3\right)^2 = 169$, que corresponde a una circunferencia de centro en (−4, −3) y radio $r = 13$. ◀

Ejemplo 7

Encontremos la ecuación de la recta tangente a la circunferencia en el punto $T\left(3, \sqrt{3} - 3\right)$, con centro en (2, −3) y de radio $r = 2$.

Solución

$(x-2)^2+(y+3)^2=4$ Calculamos la ecuación de la circunferencia con centro en (2, –3) y radio $r=2$.

$(3-2)^2+(\sqrt{3}-3+3)^2=4$ Verificamos que el punto $T\left(3, \sqrt{3}-3\right)$ se encuentra sobre la circunferencia.

Supongamos que la ecuación de la recta tangente es $y=mx+b$:

$\sqrt{3}-3=m\cdot 3+b$ Utilizamos el hecho de que $T\left(3, \sqrt{3}-3\right)$ pertenece a la recta $y=mx+b$, es decir, sustituimos $\left(3, \sqrt{3}-3\right)$ en $y=mx+b$.

$3m+b=\sqrt{3}-3$ Reorganizamos la ecuación de la recta.

Por otra parte, la ecuación de la recta que pasa por el centro (2, –3) y por el punto $\left(3, \sqrt{3}-3\right)$ es perpendicular a la recta tangente, ya que el segmento formado por esos puntos es un radio de la circunferencia (*ver* figura 5.12). Entonces, la pendiente de la recta *l*, que pasa por los puntos (2, –3) y $\left(3, \sqrt{3}-3\right)$, es:

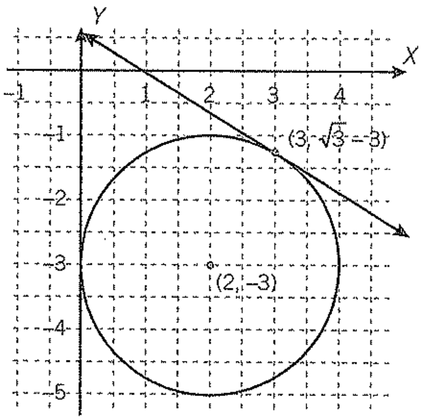


Figura 5.12

$m=\dfrac{\left(\sqrt{3}-3\right)-(-3)}{3-2}$ Reemplazamos (2, –3) y $\left(3, \sqrt{3}-3\right)$ en $m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

$m=\sqrt{3}$ Simplificamos la fracción y obtenemos la pendiente.

Por tanto, la pendiente de la recta tangente a la circunferencia es $-\dfrac{1}{m}=\sqrt{3}$, es decir, $m=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Reemplazamos $m=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ en la ecuación $3m+b=\sqrt{3}-3$ y obtenemos que $b=2\sqrt{3}-3$.

Así, la ecuación de la recta tangente es $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+2\sqrt{3}-3$. ◀

> Piensa y practica <

> Comunicación

1. Determina si cada proposición es verdadera (V) o falsa (F). Justifica tu respuesta mediante una gráfica.

a. Una línea recta en el plano interseca a una circunferencia en a lo más dos puntos.

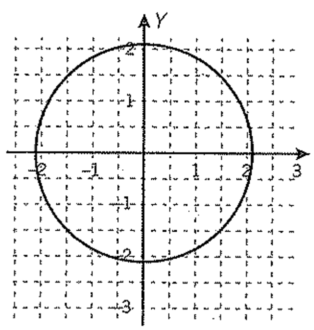
b. Dos circunferencias en el plano se cortan en a lo más dos puntos.

c. Desde un punto exterior a una circunferencia se pueden trazar exactamente dos rectas tangentes.

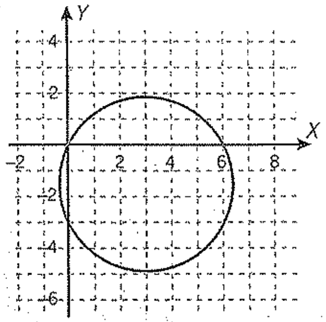
d. Toda recta tangente a una circunferencia es perpendicular a un radio (segmento) de la circunferencia.

2. Halla la ecuación estándar para cada una de las circunferencias de la figura 5.13.

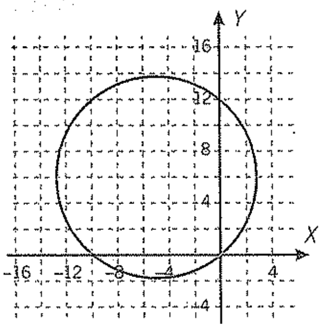
a.



b.



c.



d

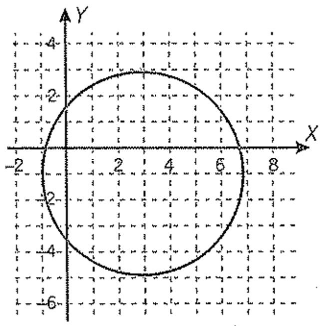


Figura 5.13

3. Halla la ecuación estándar de la circunferencia con centro en el punto (3, 4) que es:

a. Tangente al eje X.

b. Tangente al eje Y.

c. Tangente a la recta $y = -3x$.

d. Tangente a la circunferencia $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 4$.

e. Tangente a la circunferencia $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 25$.

4. Escribe las ecuaciones estándar y general de todas las circunferencias que tienen radio $r = 2$ y centro en la recta $x = 5$.

5. Escribe las ecuaciones estándar y general de todas las circunferencias que tienen radio $r = 2$ y centro en la recta $y = 5$.

6. Escribe las ecuaciones estándar y general de todas las circunferencias que tienen radio $r = 2$ y centro en la recta de ecuación $y = x$.

7. Escribe las ecuaciones estándar y general de todas las circunferencias que tienen radio $r = 2$ y centro en la recta $y = -x$.

8. Escribe las ecuaciones estándar y general de la circunferencia que tiene un diámetro con extremos en los puntos de coordenadas (9, 2) y (0, −3).

9. Escribe las ecuaciones estándar y general de la circunferencia de la figura 5.14.

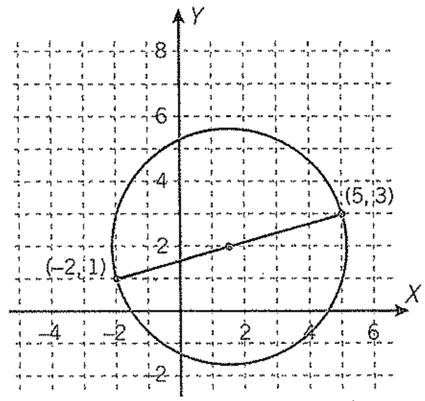


Figura 5.14

> Resolución de problemas

10. Traza la gráfica de las siguientes circunferencias.

a. $x^2 + 4x + 6 = 6y - y^2 + 2$

b. $x^2 + y^2 = 2$

c. $x^2 + y^2 - 8x + 20 = 13$

d. $x^2 = 225 - y^2$

e. $x^2 - 2tx = 5t^2 - y^2$

11. Halla la ecuación general de la circunferencia que pasa por los tres puntos dados.

a. (−2, 5), (4, −3) y (5, 4).

b. (−1, −1), (6, 0) y (5, 7).

c. (0, 0), (4, 0) y (2, 2).

d. (5, 0), (0, 5) y (3, 3).

12. Halla la ecuación de la recta tangente a la circunferencia dada en el punto dado.

a. $x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$; $T(1, 0)$

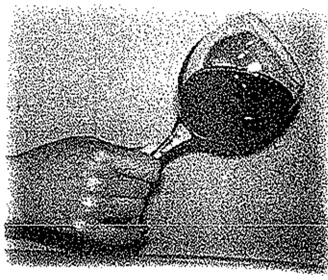
b. $x^2 + y^2 - 10x - 4y = 0$; $T(0, 0)$

c. $x^2 + y^2 - 12x + 8y + 7 = 0$; $T(3, 2)$

d. $x^2 + y^2 + 8x - 2y + 16 = 0$; $T(-3, 1)$

La elipse

Logro: deducir la ecuación de una elipse, con ejes paralelos a los ejes coordenados, para establecer relaciones geométricas de su representación gráfica y como modelo analítico para resolver problemas.



Figuras en forma de elipse (elípticas) aparecen en muchas situaciones de nuestro mundo. Por ejemplo, si tomamos un vaso de vidrio circular no totalmente lleno de algún líquido y lo inclinamos un poco, la superficie del líquido adquirirá forma de elipse. Otro ejemplo se logra al colocar una bola esférica frente a una bombilla luminosa. La sombra de la bola en el suelo tendrá forma de elipse.

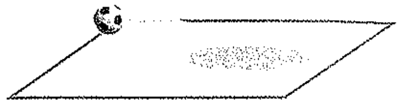


Figura. 5.15

Para eliminar los cálculos renales (pequeñas piedras formadas frecuentemente de calcio), los médicos algunas veces utilizan un aparato conocido como *lithotripter* (por sus siglas en inglés lith-uh-trip-tor) que significa pulverizador de piedras. Este instrumento utiliza ondas de choque de ultrasonido que se desplazan a través del agua para pulverizar las piedras. Después de tomar rayos X al paciente, para identificar la posición y el tamaño del cálculo renal para pulverizar, se procede a ubicar el *lithotripter* de manera que las ondas de choque se reflejen en la pared interior de un tubo en forma elíptica y pulverice los cálculos renales. Este aparato tiene un electrodo que cuando es descargado produce las ondas de ultrasonido, éste debe ubicarse en uno de los focos de la elipse y en el otro foco debe ubicarse el cálculo renal (*ver* figura 5.16).

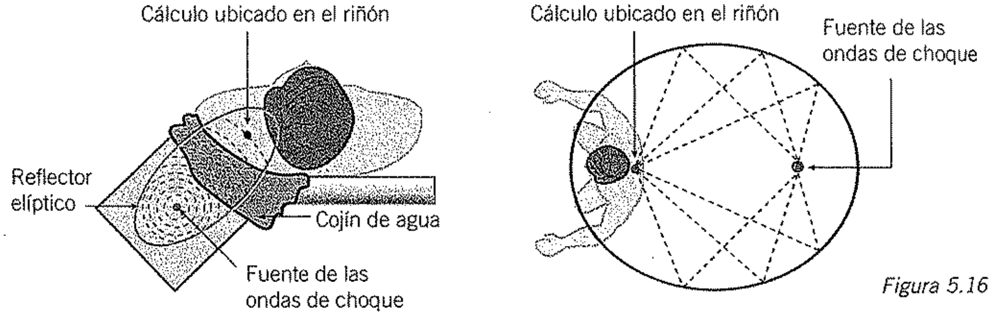


Figura 5.16

> *Una **elipse** es el conjunto de puntos (x, y) de un plano, tal que la suma de las distancias de cualquier punto a dos puntos fijos, llamados focos, es constante.*

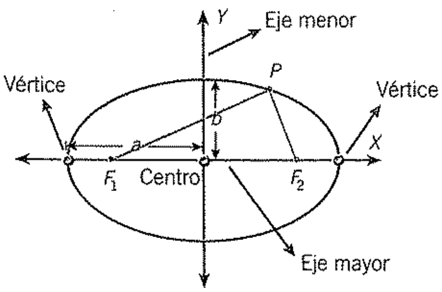


Figura 5.17

A continuación deduciremos la ecuación estándar de una elipse.

Supongamos que los focos de una elipse son F_1 y F_2, localizados en $(-c, 0)$, $(c, 0)$, respectivamente, siendo $c > 0$ un número real (*ver* figura 5.17).

Si $P(x, y)$ es un punto en la elipse, entonces por la definición tenemos que $d(P, F_1) + d(P, F_2) = k$, donde k es una constante.

Tomaremos arbitrariamente $k = 2a$; el siguiente desarrollo justificará esta elección.

$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$	Sustituimos $k = 2a$.
$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$	Hallamos las distancias indicadas.
$\left(\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2$	Despejamos $\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$ y elevamos al cuadrado ambos lados de la igualdad.

$(x-c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+(x+c)^2+y^2$ Calculamos el trinomio cuadrado perfecto del lado derecho.

$x^2-2xc+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+x^2+2xc+c^2+y^2$ Calculamos los trinomios cuadrados perfectos.

$-4xc=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$ Simplificamos términos.

$-4xc-4a^2=-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$ Despejamos $-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$.

$a^2+xc=a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$ Factorizamos -4 y simplificamos.

$a^4+2a^2xc+x^2c^2=a^2\left[(x+c)^2+y^2\right]$ Elevamos al cuadrado ambos lados de la igualdad y desarrollamos el trinomio cuadrado perfecto.

$a^4+2a^2xc+x^2c^2=a^2\left(x^2+2xc+c^2+y^2\right)$ Calculamos el trinomio cuadrado perfecto.

$a^4+2a^2xc+x^2c^2=a^2x^2+2a^2xc+a^2c^2+a^2y^2$ Aplicamos la propiedad distributiva.

$a^4-a^2c^2=a^2x^2-x^2c^2+a^2y^2$ Simplificamos y agrupamos términos.

$a^2(a^2-c^2)=x^2(a^2-c^2)+a^2y^2$ Sacamos factor común.

$a^2b^2=x^2b^2+a^2y^2$ Definimos el número positivo $b^2=a^2-c^2$.

$1=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$ Dividimos ambos lados de la ecuación entre a^2b^2.

Así, obtenemos la ecuación estándar de la elipse.

Como $a>b$, el segmento de recta desde $(-a,0)$ hasta $(a,0)$ se denomina **eje mayor** y el segmento de $(0,-b)$ a $(0,b)$ se denomina **eje menor** de la elipse. El punto $(0,0)$ donde se intersecan los dos ejes se denomina **centro** de la elipse.

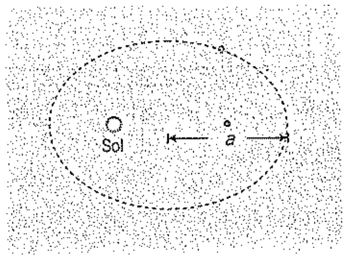
Los puntos $(-a,0)$ y $(a,0)$ son los **vértices** de la elipse; en general, los vértices de una elipse son los puntos extremos del eje mayor.

Observemos que la elipse de la figura 5.17 es simétrica a ambos ejes.

La ecuación estándar de una elipse centro en (0, 0) y focos $F_1=(-c,0)$ y $F_2=(c,0)$, con c número real positivo, es: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, para $a>b$, $b^2=a^2-c^2$.

Conexión con la vida

En 1609, el astrónomo alemán Johannes Kepler (1571-1630) descubrió —y publicó en su primer libro ***Astronomía Nova***— *que cada planeta en su período de traslación alrededor del Sol describía una trayectoria en forma de elipse, con el Sol en uno de los focos.*



Ejemplo 8

Hallemos la ecuación estándar de una elipse con focos (–4, 0) y (4, 0) y vértices en (–5, 0) y (5, 0).

Solución

Puesto que los focos son (–4, 0) y (4, 0), tenemos que $c=4$ y como los vértice son (–5, 0) y (5, 0), tenemos que $a=5$.

$b^2=5^2-4^2$ Sustituimos $c=4$ y $a=5$ en $b^2=a^2-c^2$.

$b^2=9$ Realizamos las operaciones indicadas.

$b=3$ Despejamos el valor de b.

$\dfrac{x^2}{5^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=1$ Reemplazamos $a=5$ y $b=3$ en $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ y obtenemos la ecuación de la elipse. ◀

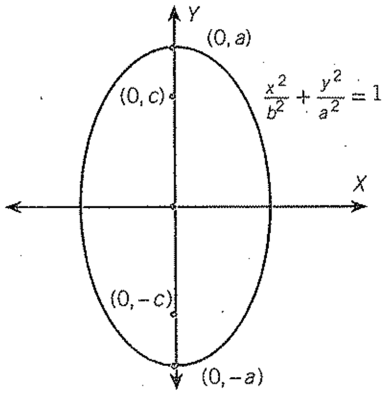


Figura 5.18

Pensamiento crítico

¿En qué se transforma la ecuación de una elipse en los casos en que $b > a$ y $b = a$?

Si tomamos los focos de una elipse sobre el eje Y en los puntos $(0, -c)$ y $(0, c)$, y procedemos de la misma forma como en la deducción de la ecuación estándar de una elipse, podemos obtener la ecuación $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$.

Esta ecuación corresponde a una elipse con eje mayor en el eje Y, eje menor en el eje X y vértices en $(0, -a)$ y $(0, a)$, como se ilustra en la figura 5.18.

Si en la ecuación $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ tomamos $a = b$, entonces la ecuación que se obtiene es $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ (o $x^2+y^2=a^2$) que corresponde a una curva que llamaremos **circunferencia**, con centro en $(0, 0)$ y radio a.

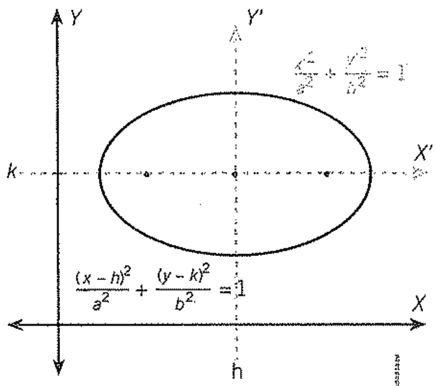


Figura 5.19

Analicemos ahora una elipse con ejes (mayor y menor) paralelos a los ejes coordenados y centro en el punto (h, k) como lo muestra la figura 5.19.

Mediante una traslación de ejes, $x = x' + h$, $y = y' + k$, el origen del sistema $X'Y'$ se encuentra en el punto (h, k) del sistema XY.

Por tanto, la ecuación de la elipse con centro (h, k) en el sistema $X'Y'$ es:

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1 \quad \text{o} \quad \frac{x'^2}{b^2}+\frac{y'^2}{a^2}=1$$

Ahora bien, como $x' = x - h$ y $y' = y - k$, entonces las ecuaciones correspondientes en el sistema XY son:

*La **ecuación estándar de una elipse** con centro en (h, k) es:*

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1, \text{ para } a>b, \quad \frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1, \text{ para } b>a.$$

Ejemplo 9

Hallemos la ecuación de la elipse con centro en $(-3, -2)$, eje menor de longitud 4 y vértice en $(-6, -2)$, $(0, -2)$. Determinemos también las coordenadas de los focos.

Solución

De las coordenadas de los vértices se obtiene que c es la distancia de uno de los vértices al centro, es decir:

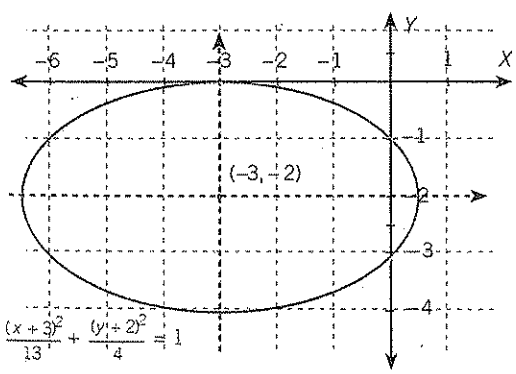


Figura 5.20

$c = \sqrt{(-3-0)^2+(-2+2)^2}$ Hallamos la distancia entre $(-3, -2)$ y $(0, -2)$.

$c = \sqrt{9}$ Simplificamos el radicando.

$c = 3$ Hallamos el valor de c.

Por otra parte, como el eje menor tiene longitud 4, tenemos que $2b = 4$, por tanto, $b = 2$. Así, $2^2 = a^2 - 3^2$, de donde obtenemos que $a^2 = 13$, entonces la ecuación de la elipse es:

$$\frac{(x+3)^2}{13}+\frac{(y+2)^2}{4}=1,$$ (*ver* figura 5.20). ◀

De manera general, la tabla 5.1 describe la ecuación estándar de una elipse.

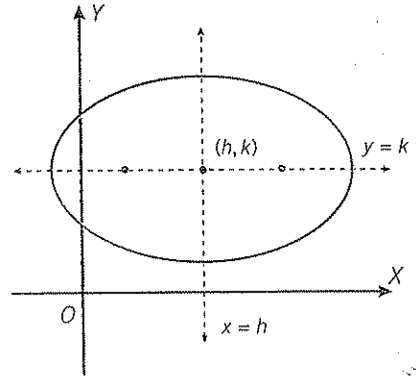
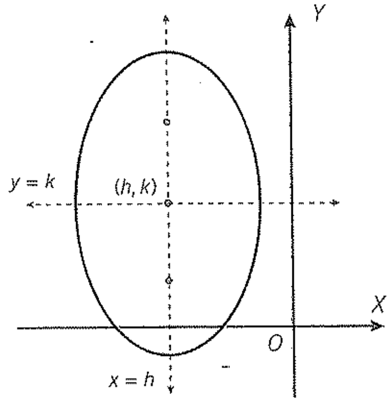
Ecuación estándar	Descripción	Representación gráfica
$\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$ Con $c^2=a^2-b^2$	Centro: (h, k) Focos: $(h \pm c, k)$ Eje mayor: $y = k$ Vértices eje mayor: $(h \pm a, k)$ Eje menor: $x = h$ Vértices eje menor: $(h, k \pm b)$	
$\dfrac{(x-h)^2}{b^2}+\dfrac{(y-k)^2}{a^2}=1$ Con $c^2=a^2-b^2$	Centro: (h, k) Focos: $(h, k \pm c)$ Eje mayor: $x = h$ Vértices eje mayor: $(h, k \pm a)$ Eje menor: $y = k$ Vértices eje menor: $(h \pm b, k)$	

Tabla 5.1

Ejemplo 10

El perímetro de un triángulo es 50 y los puntos $R(-10, 0)$ y $Q(10, 0)$ son dos de sus vértices (*ver* figura 5.21). Tracemos la gráfica donde puede localizarse el tercer vértice.

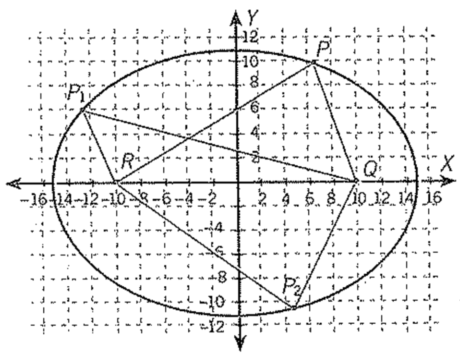


Figura 5.21

Solución

Vamos a encontrar todos los puntos P del plano tales que $QR + QP + PR = 50$:

$QR = 20$	Hallamos la distancia entre los puntos Q y R.
$QR + QP + PR = 50$	Utilizamos el hecho de que el perímetro del triángulo es 50.
$QP + PR = 30$	Sustituimos $QR = 20$ en $QR + QP + PR = 50$.
$d(P, Q) + d(P, R) = 30$	Rescribimos la longitud de segmentos en términos de distancia entre puntos.

Así nuestra búsqueda se trasforma en encontrar todos los puntos $P(x, y)$ del plano tales que $d(P, Q) + d(P, R) = 30$. Observamos que esa ecuación corresponde a la ecuación de una elipse con focos en Q y R y eje mayor de longitud $2a = 30$, es decir, $a = 15$. Utilizando la ecuación $b^2 = a^2 - c^2$, obtenemos $b^2 = 125$; así, la ecuación de la elipse será: $\dfrac{x^2}{225}+\dfrac{y^2}{125}=1$. Por tanto, los puntos $P(x, y)$ se encuentran sobre la elipse de ecuación $\dfrac{x^2}{225}+\dfrac{y^2}{125}=1$. ◀

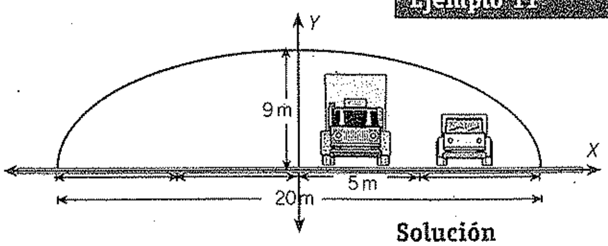


Figura 5.22

Ejemplo 11

El arco de un túnel es una semielipse de 20 m de ancho y 9 m de alto (*ver* figura 5.22). Encontremos la altura que corresponde a la orilla de un carril que se encuentra a 5 m del centro.

Solución

Elegimos un sistema de referencia *XY*, de manera que el eje *X* corresponda al piso del túnel y el eje *Y* a la recta vertical que pasa por el centro, como se muestra en la figura 5.22.

Considerando el eje *X* como eje mayor de longitud 20 m, y al eje *Y* como el eje menor de longitud 18 m, la ecuación de la elipse se deduce de $2a = 20$ y $b = 9$.

$\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{81} = 1$ Sustituimos $a = 10$ y $b = 9$ en $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Como la orilla del carril está ubicada en $x = 5$:

$\dfrac{5^2}{100} + \dfrac{y^2}{81} = 1$ Reemplazamos $x = 5$ en la ecuación en $\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{81} = 1$.

$\dfrac{y^2}{81} = 1 - \dfrac{1}{4}$ Despejamos el término de la variable *y*.

$y^2 = 81\left(\dfrac{3}{4}\right)$ Despejamos y^2.

$y = \dfrac{9}{2}\sqrt{3} \approx 7{,}8$ Despejamos y aproximamos el valor de *y*.

Por consiguiente, la altura que corresponde a la orilla del carril que dista 5 m del centro es aproximadamente 7,8 m. ◀

> Piensa y practica <

> Comunicación

1. Relaciona cada gráfica de la figura 5.23 con su ecuación.

a. $(x - 3)^2 + 16(y - 2)^2 = 16$

b. $9(x - 3)^2 + 4(y - 1)^2 = 36$

c. $4x^2 + 25y^2 = 100$

d. $13x^2 + 4y^2 = 52$

e. $16(x + 2)^2 + 4(y + 1)^2 = 64$

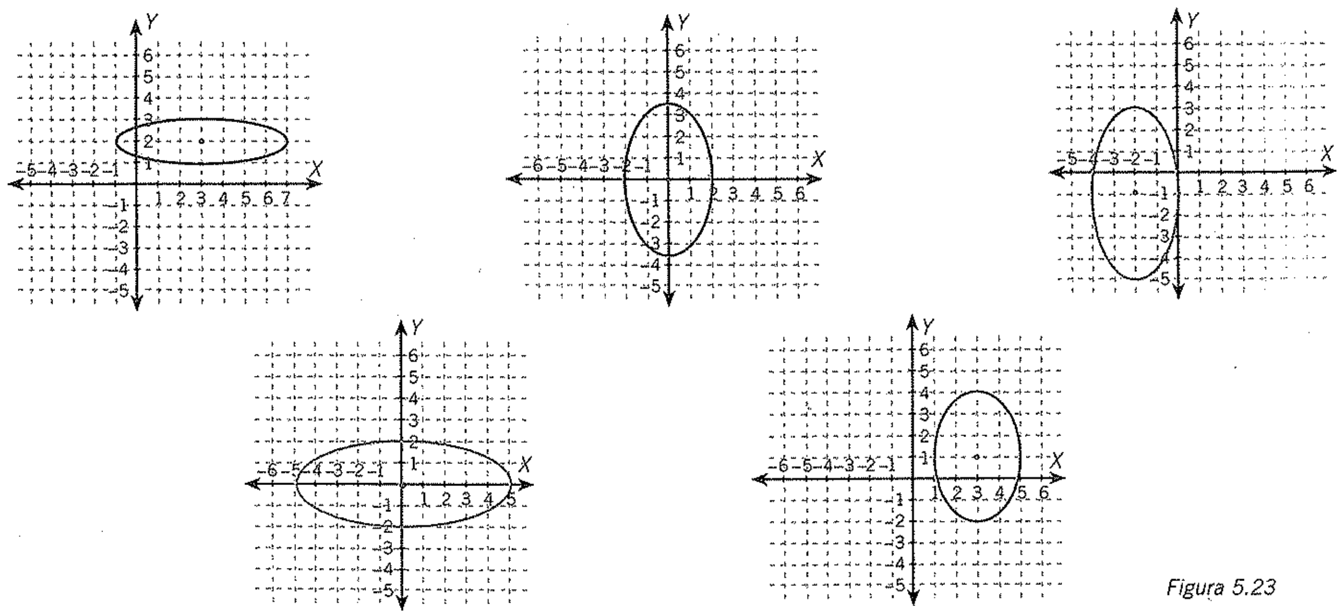


Figura 5.23

2. Las siguientes son ecuaciones de elipses. En cada una halla: centro, focos, vértices, longitud de los ejes menor y mayor.

a. $\frac{x^2}{25} + y^2 = 1$

b. $4x^2 + 9y^2 = 36$

c. $x^2 + 4y^2 - 2x + 16y + 13 = 0$

d. $2x^2 + y^2 + 2y = 1$

e. $9x^2 + y^2 - 36x - 4y + 31 = 0$

> Conexiones

3. Escribe la ecuación de la elipse cuyos focos y vértices sean los dados.

a. $F_1(4, 0)$, $F_2(-4, 0)$; $V_1(5, 0)$, $V_2(-5, 0)$

b. $F_1(12, 0)$, $F_2(-12, 0)$; $V_1(13, 0)$, $V_2(-13, 0)$

c. $F_1(\sqrt{5}, 0)$, $F_2(-\sqrt{5}, 0)$; $V_1(3, 0)$, $V_2(-3, 0)$

d. $F_1(\sqrt{21}, 0)$, $F_2(-\sqrt{21}, 0)$; $V_1(5, 0)$, $V_2(-5, 0)$

e. $F_1(0, 3)$, $F_2(0, -3)$; $V_1(0, 5)$, $V_2(0, -5)$

4. Halla la ecuación estándar de la elipse con centro en (0, 0) si:

a. El eje mayor está sobre el eje Y. Longitud del eje mayor = 22; longitud del eje menor = 16.

b. El eje mayor está sobre el eje Y. Longitud del eje menor = 20; distancia a los focos desde el centro $= \sqrt{20}$.

c. El eje mayor está sobre el eje X. Longitud del eje mayor = 8; longitud del eje menor = 6.

d. El eje mayor está sobre el eje X. Longitud del eje mayor = 14; longitud del eje menor = 10.

e. El eje mayor está sobre el eje X. Longitud del eje mayor = 16; distancia a los focos desde el centro = 6.

5. Halla la ecuación de la elipse que satisfaga las condiciones dadas.

a. Centro en (–3, –1); longitud eje mayor = 14; longitud eje menor = 10.

b. Focos en: (–2, 0) y (2, 0); $a = 7$

c. Centro en (0, 0); longitud del eje menor es $\frac{3}{4}$ de la longitud del eje mayor; $b = 6$.

d. Focos en: (–1, 1) y (–1, 5); longitud del eje mayor $= 4\sqrt{13}$.

e. Los puntos extremos del eje mayor son: (–11, 5) y (7, 5); los puntos extremos del eje menor son: (–2, 9) y (–2, 1).

f. Focos: (1, –1) y (1, 5); la elipse pasa por el punto (4, 2).

g. La elipse es tangente al eje X, al eje Y, y tiene centro en (4, –7).

h. Centro en el origen; $a = 2c$; la longitud del eje mayor = 20.

> Razonamiento lógico

6. Explica por qué una elipse no es una función.

7. Cuando los focos de una elipse se mueven separándose entre sí, sobre el eje mayor fijo, ¿a qué lugar geométrico se aproxima la elipse?

8. Una circunferencia es una elipse particular. Para una circunferencia con centro en el origen y radio r, determina focos, vértices, longitudes de los lados mayor y menor.

> Resolución de problemas

9. La Tierra describe una trayectoria elíptica al moverse alrededor del Sol, el cual se ubica en uno de los focos de la trayectoria elíptica. En el movimiento de traslación de la Tierra la menor distancia de acercamiento al Sol es de 147 millones de kilómetros y la distancia de mayor separación es de 150 millones de kilómetros. ¿A qué distancia se encuentra el Sol del otro foco de la elipse?

10. El túnel de una carretera de seis carriles tiene su techo en forma elíptica, como muestra la figura 5.24. Cada carril tiene un ancho de 4,5 m. Con base en las medidas dadas en la figura, determina la distancia vertical en cada carril, es decir, halla la altura máxima para que un camión pueda pasar por el túnel sin tocar el techo.

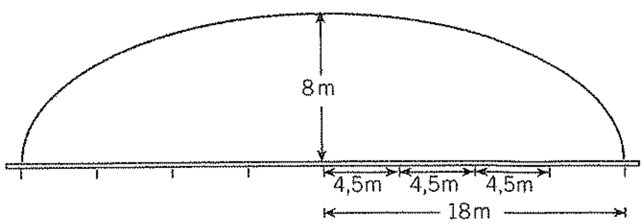


Figura 5.24

11. Una escalera de 5 metros de longitud se encuentra recostada contra una pared vertical, y tiene una marca a 2 metros del extremo superior de la escalera. Supón que inicialmente la escalera se ha colocado verticalmente contra la pared. Si el extremo inferior de la escalera se desliza, alejándose de la pared, de modo que el extremo superior de la escalera se desliza sobre la pared, entonces la marca en la escalera describe un lugar geométrico. Explica por qué ese lugar geométrico corresponde a una parte de una elipse.

La parábola

Logro: encontrar las condiciones que dan información de la gráfica de la parábola a partir de la ecuación.

Las luces de los automóviles contienen reflectores parabólicos, que trabajan según el principio de que la luz colocada en el foco de una parábola se refleja fuera del espejo (superficie en el fondo de la lámpara), en líneas paralelas al eje de simetría. De igual manera, en telecomunicaciones las antenas de recepción de señales de comunicación toman la forma de una superficie parabólica.

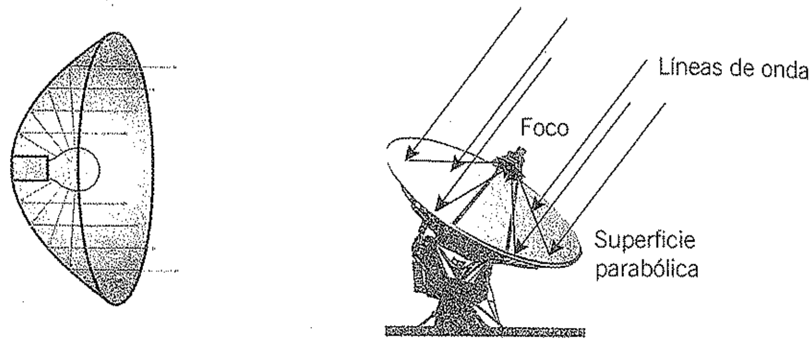


Figura 5.25

> *Una **parábola** es el lugar geométrico de todos los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado foco y de una recta fija denominada directriz (ver figura 5.26).*

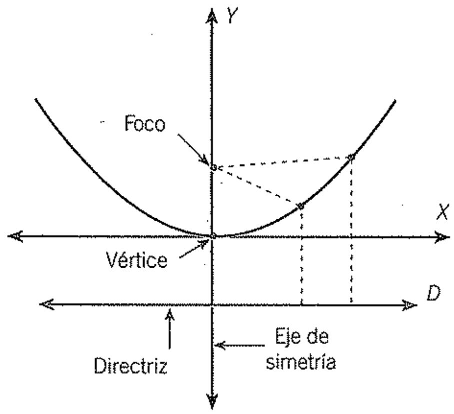


Figura 5.26

Vamos a deducir la ecuación que representa el lugar geométrico: una parábola con foco en el punto $F(0, c)$ y directriz D la línea recta de ecuación $y = -c$.

Sea $P(x, y)$ un punto del lugar geométrico, entonces $d(P, F) = d(P, D)$. Por tanto:

$d\big((x, y), (0, c)\big) = d\big((x, y), (x, -c)\big)$	Sustituimos las coordenadas de cada punto.
$\sqrt{(x-0)^2 + (y-c)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y+c)^2}$	Utilizamos la fórmula de distancia.
$x^2 + (y-c)^2 = (y+c)^2$	Elevamos al cuadrado ambos lados de la igualdad.
$x^2 + y^2 - 2cy + c^2 = y^2 + 2cy + c^2$	Desarrollamos los cuadrados perfectos.
$x^2 = 4cy$	Simplificamos términos semejantes.

Esta última ecuación representa una parábola que abre hacia arriba si $c > 0$, y abre hacia abajo si $c < 0$.

Comentario

La gráfica de la función cuadrática $y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ es una parábola que abre hacia arriba si $a > 0$, y abre hacia abajo si $a < 0$.

Ejemplo 12

Hallemos la ecuación de la parábola cuyo foco $F(0, 4)$ y directriz es $y = -4$.

Solución

Si $P(x, y)$ es un punto de la parábola, entonces la distancia del foco $(0, 4)$ a P es:

$d(P, F) = \sqrt{(x-0)^2 + (y-4)^2}$.

Ahora calculamos la distancia entre $P(x, y)$ y la directriz utilizando el hecho que como $y = -4$ es una recta horizontal, entonces la recta perpendicular a la directriz $(y = -4)$, desde el punto (x, y), pasa por el punto $(x, -4)$. Por tanto, la distancia de $P(x, y)$ a la directriz es igual a la distancia entre (x, y) y $(x, -4)$, es decir:

$\sqrt{(x-x)^2 + (y+4)^2} = \sqrt{(y+4)^2}$

$\sqrt{(x-0)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{(y+4)^2}$	Igualamos las dos distancias encontradas.
$\sqrt{x^2 + (y-4)^2} = \sqrt{(y+4)^2}$	Simplificamos el radicando de la izquierda.
$x^2 + (y-4)^2 = (y+4)^2$	Elevamos al cuadrado ambos lados de la ecuación.
$x^2 + y^2 - 8y + 16 = y^2 + 8y + 16$	Desarrollamos cada expresión.
$x^2 - 8y = 8y$	Simplificamos términos.
$x^2 = 16y$	Hallamos la ecuación de la parábola.

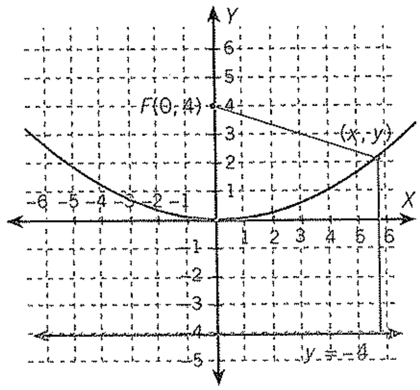


Figura 5.27

La ecuación de la parábola $x^2 = 16y$ podemos verla en la figura 5.27. ◀

De igual forma, la ecuación de una parábola con foco en $F(c, 0)$ y recta directriz $x = -c$, tiene ecuación estándar $y^2 = 4cx$, cuya gráfica es una parábola que abre hacia la derecha si $c > 0$ y hacia la izquierda si $c < 0$.

Ejemplo 13

Hallemos la ecuación de la parábola cuyo foco y directriz son: $F(-3, 0)$ y $x = 3$.

Solución

Si realizamos el mismo análisis utilizado en el ejemplo 12, tenemos que:

$d(F, (x, y)) = \sqrt{(x+3)^2 + (y-0)^2}$	Hallamos la distancia de $(-3, 0)$ a (x, y).
$d(F, (x, y)) = \sqrt{(x+3)^2 + y^2}$	Simplificamos la expresión.
$d((x, y), x = 3) = \sqrt{(x-3)^2 + (y-y)^2}$	Hallamos la distancia de (x, y) a $x = 3$.
$d((x, y), x = 3) = \sqrt{(x-3)^2}$	Simplificamos la expresión.
$\sqrt{(x+3)^2 + y^2} = \sqrt{(x-3)^2}$	Igualamos $d(F, (x, y))$ y $d((x, y), x = 3)$.
$(x+3)^2 + y^2 = (x-3)^2$	Elevamos al cuadrado ambos lados de la igualdad.
$x^2 + 6x + 9 + y^2 = x^2 - 6x + 9$	Desarrollamos los cuadrados perfectos.
$y^2 = -12x$	Simplificamos la expresión.

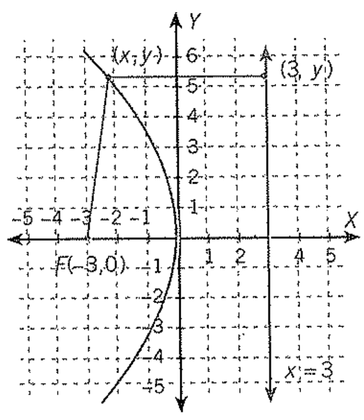


Figura 5.28

$y^2 = -12x$ corresponde a la ecuación de la parábola cuya gráfica se ilustra en la figura 5.28. ◀

De manera general, la tabla 5.2 describe la ecuación de una parábola.

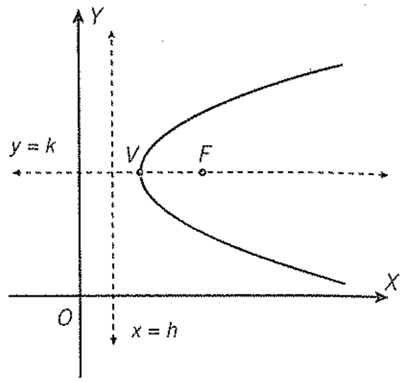
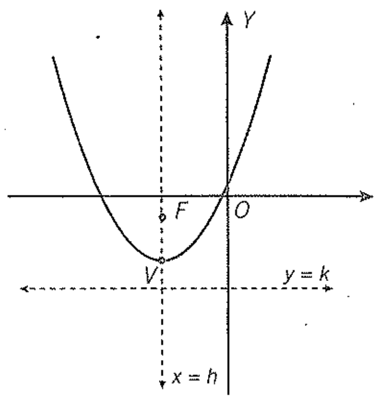
Ecuación estándar de la parábola	Descripción	Representación gráfica
$(y-k)^2 = 4c(x-h)$	Vértice: (h, k) Foco: $(h+c, k)$ Eje de simetría: $y = k$ Directriz: $x = h - c$ Abre hacia la derecha: si $c > 0$ Abre hacia la izquierda: si $c < 0$	
$(x-h)^2 = 4c(y-k)$	Vértice (h, k) Foco: $(h, k+c)$ Eje de simetría: $x = h$ Directriz: $y = k - c$ Abre hacia arriba: si $c > 0$ Abre hacia abajo: si $c < 0$	

Tabla 5.2

Los ejemplos y fórmulas anteriores corresponden a parábolas con vértice en (0, 0). El siguiente ejemplo, aun cuando más general por la localización del vértice, muestra el procedimiento para reducir su ecuación y gráfica a uno de los casos anteriores.

Ejemplo 14

Determinemos en cada ecuación: foco, directriz, vértice y eje de simetría.

a. $(x+1)^2 = -25(y-1)$ **b.** $(y-1)^2 = 16x$

Solución

a. La ecuación $(x+1)^2 = -25(y-1)$ es de la forma $(x-h)^2 = 4c(y-k)$, donde (h, k) es el vértice, por tanto, la pareja ordenada $(-1, 1)$ es el vértice de la parábola.

$c = -\dfrac{25}{4}$ Despejamos c de $4c = -25$.

$\left(-1, 1 - \dfrac{25}{4}\right) = \left(-1, -5\dfrac{1}{4}\right)$ Usamos el hecho de que $F(h, k+c)$.

La ecuación de la directriz está dada por la expresión $y = k - c$, así la directriz tiene como ecuación $y = 7\dfrac{1}{4}$. El eje de simetría es $x = -1$.

b. Utilizando el mismo razonamiento encontramos que el vértice es $V(0, 1)$; foco $F(4, 1)$; ecuación de la recta directriz $x = -4$ y eje de simetría $y = 1$. ◀

Ejemplo 15

Hallemos las coordenadas del foco, vértice, ecuación de la directriz, ecuación del eje de simetría y gráfica de la parábola de ecuación $y^2 + 4y + 8x - 20 = 0$.

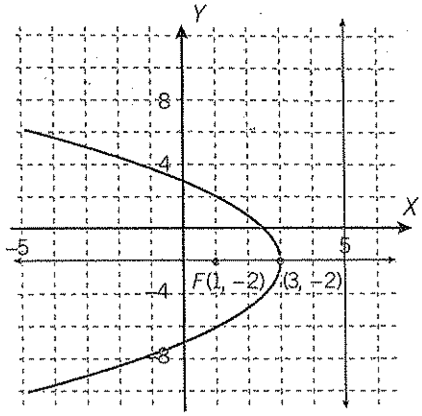


Figura 5.29

Solución

$\left(y^2 + 4y\right) + 8x = 20$ Agrupamos los términos con variable *y*.

$\left(y^2 + 4y + 4\right) + 8x = 20 + 4$ Completamos el trinomio cuadrado perfecto en la variable *y*.

$(y + 2)^2 = -8x + 24$ Despejamos el trinomio cuadrado perfecto.

$(y + 2)^2 = -8(x - 3)$ Factorizamos –8.

$(y + 2)^2 = 4(-2)(x - 3)$ Rescribimos el término del lado derecho.

Así, tenemos: vértice $(3, -2)$, $c = -2$, foco $(3 + (-2), -2) = (1, -2)$; directriz $x = 3 - (-2) = 5$; eje de simetría $y = -2$. Observemos la gráfica en la figura 5.29. ◀

> Piensa y practica <

> Comunicación

1. Relaciona cada gráfica de la figura 5.30, con su ecuación.

a. $x^2 + 10x + 3y + 13 = 0$

b. $y^2 - 2x - 4y + 6 = 0$

c. $x^2 - 4x - 5y - 11 = 0$

d. $2x + y^2 = 0$

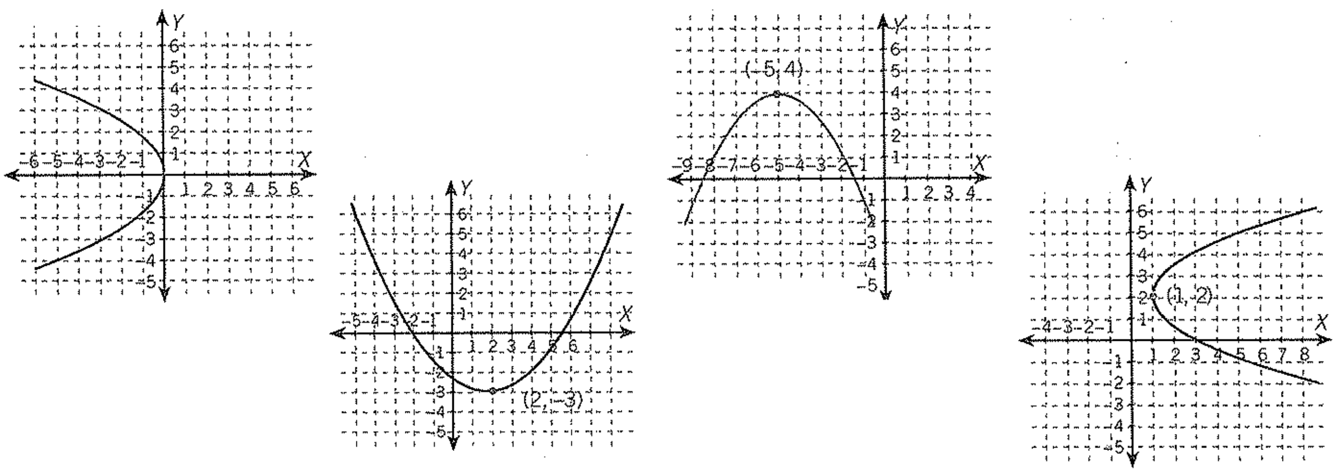


Figura 5.30

2. ¿La ecuación de una parábola siempre corresponde a una función?

3. Explica de qué manera distingues entre la ecuación de una parábola y la ecuación de una elipse.

4. Describe las relaciones entre el vértice, foco, directriz y eje de simetría de una parábola.

5. ¿Cuánto ejes de simetría tiene una parábola? ¿Cuántos tiene una elipse?

6. Escribe la ecuación de una parábola que tiene vértice en (2, –5), que abre hacia la izquierda y su foco está a 4 unidades de su vértice.

7. Describe la figura que se obtiene al girar la porción de parábola $y = x^2; -2 \leq x \leq 2$, alrededor de su eje de simetría.

8. Halla el vértice, el foco y la ecuación de la directriz, de cada parábola. Determina hacia dónde abre, y traza su gráfica.

a. $y = \frac{1}{2}x^2$
b. $x^2 = 49y$
c. $y^2 = -6x$
d. $x^2 = 25y$
e. $x^2 - 4y = 0$
f. $y^2 + 36x = 0$

> Resolución de problemas

9. Halla una ecuación de la parábola que satisfaga las condiciones dadas.

a. Foco (10, 0); directriz $x = -10$.
b. Foco $(-\sqrt{3}, 0)$; directriz $x = \sqrt{3}$.
c. Foco $(-\sqrt{3}, 0)$; directriz $x = 0$.
d. Foco $(-\sqrt{0{,}01}, 0)$; directriz $x = \sqrt{0{,}01}$.
e. Foco $(-p, 0)$; directriz $x = p$.
f. Foco (0, 6); directriz $y = 0$.
g. Foco $\left(0, \frac{1}{4}\right)$; directriz $y = -\frac{1}{4}$.
h. Foco $\left(0, \frac{1}{4}\right)$; directriz $y = 0$.
i. Foco $(0, 2\pi)$, directriz $y = -2\pi$.
j. Foco $(0, 2\pi)$; directriz $y = 0$.

10. Halla el vértice, el foco y la ecuación de la directriz de cada parábola. Determina hacia dónde abre y traza su gráfica.

a. $x^2 - y - 2 = 0$
b. $y = x^2 + 4x + 3$
c. $y^2 - y - x + 6 = 0$
d. $x^2 + 10x + 2y + 21 = 0$
e. $(x + 2)^2 = -6(y + 4)$
f. $(y - 5)^2 = -16(x - 3)$

11. Halla la ecuación de la parábola con vértice en (–1, 2), eje de simetría una recta paralela al eje *Y*, y que pase por el punto (–3, 1).

12. Halla la ecuación de la parábola con vértice en (–2, 1), eje de simetría una recta paralela al eje *X*, y que pase por el punto (–3, 5).

> Conexiones

13. Se ha diseñado un arco parabólico en guadua. El arco tiene 8 metros de altura, el eje de simetría es vertical, los puntos de apoyo donde descansa el arco sobre el suelo se encuentran separados 18 metros. ¿Está el foco de la parábola localizado encima o debajo del suelo? Utilizando el suelo como eje *X* y el eje de simetría como eje *Y*, encuentra la ecuación de la parábola y las coordenadas del foco.

14. Se diseña un reflector luminoso, con sección transversal parabólica, haciendo girar una porción de parábola alrededor de su eje de simetría (*ver* figura 5.31). Si el foco está a 9 centímetros del vértice y la profundidad del reflector es de 16 centímetros, ¿cuál es la abertura del reflector?

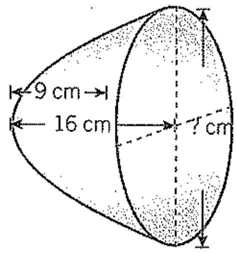


Figura 5.31

15. A partir de la definición de parábola, como lugar geométrico, halla la ecuación de la parábola con foco en el punto (3, 2) y directriz $y = -1$.

16. A partir de la definición de parábola, como lugar geométrico, halla la ecuación de la parábola con foco en el punto (3, 2) y directriz $y = -x$.

17. Un objeto se deja caer desde una altura de h_0 metros; después de *t* segundos, la distancia al suelo $h(t)$ está dada por $h(t) = -30t^2 + h_0$ metros.

a. Traza la gráfica *t* contra $h(t)$, para $h_0 = 300$ metros.
b. ¿Cuánto tarda el objeto en llegar al suelo?

18. Los puntos más altos de dos torres de un puente colgante están a 30,5 m por encima del nivel del agua y separados entre sí 115 m. Un cable que los une tiene forma de parábola y su punto más bajo está 12 m arriba del agua (*ver* figura 5.32). ¿A qué altura se encuentra un punto en el cable cuya distancia horizontal a una de las torres es 18 m?

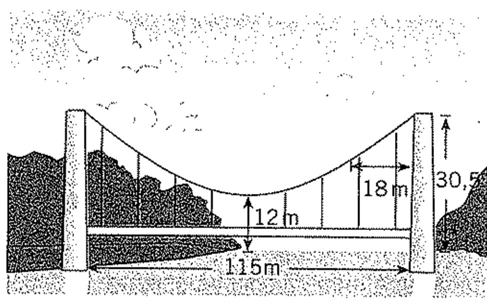


Figura 5.32

19. A la entrada de una casa construyeron un arco de 3 m de alto y 5 m de base. Halla la altura de un punto situado horizontalmente a 1,3 m de la base del arco.

La hipérbola

Logro: hallar la ecuación canónica de una hipérbola, identificar sus ejes transversos y conjugados, y utilizarla para solucionar problemas.

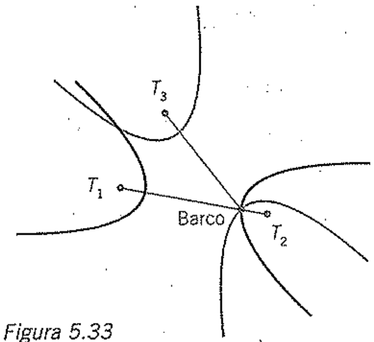


Figura 5.33

Un método de navegación, que resulta independiente de las condiciones de visibilidad, consta de dos estaciones, localizadas a gran distancia la una de la otra, las cuales transmiten simultáneamente un pulso de radio (una señal) (T_1, T_3) a una nave que navega en el mar (*ver* figura 5.33). Frecuentemente, la nave se encuentra más cerca de una de las estaciones que de la otra, por tanto la nave recibe las señales con una pequeña diferencia de tiempo. Midiendo la diferencia de tiempo y la velocidad del pulso de radio, la nave se puede localizar porque se encuentra en un lugar geométrico conocido como hipérbola.

*Una **hipérbola** es el lugar geométrico de todos los puntos P, del plano, tales que el valor absoluto de la diferencia entre las distancias entre P y dos puntos fijos F_1 y F_2, llamados los **focos de la hipérbola**, es constante, es decir, $\left|d(P, F_1) - d(P, F_2)\right| = \text{constante}$.*

El punto medio del segmento F_1F_2 se denomina centro de la hipérbola.

A continuación deduciremos la ecuación cartesiana de una hipérbola con centro en el origen.

Escogemos los ejes X y Y, de forma que los focos de la hipérbola estén en el eje X con coordenadas $(c, 0)$ y $(-c, 0)$, y que la diferencia de las distancias de un punto $P(x, y)$ de la hipérbola a los focos sea igual a la constante positiva $2a$.

En la figura 5.34 hemos supuesto $d(P, F_2) > d(P, F_1)$, entonces $d(P, F_2) - d(P, F_1) = 2a$ es la ecuación que nos permite establecer las siguientes ecuaciones equivalentes:

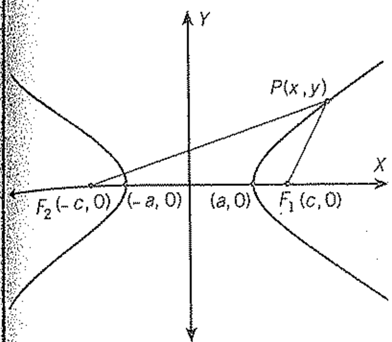


Figura 5.34

$\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a$ — Sustituimos las distancias $d(P, F_1)$ y $d(P, F_2)$ en $d(P, F_2) - d(P, F_1) = 2a$.

$\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2 = \left(2a + \sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2$ — Despejamos uno de los términos y elevamos al cuadrado ambos lados de la igualdad.

$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2 + y^2$ — Calculamos los trinomios cuadrados perfectos.

$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2$ — Calculamos los trinomios cuadrados perfectos.

$4xc = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ — Simplificamos términos.

$4\left(xc - a^2\right) = 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ — Despejamos un término de la igualdad y factorizamos.

$\left(xc - a^2\right)^2 = \left[a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right]^2$ — Simplificamos 4 y elevamos al cuadrado.

$x^2c^2 - 2a^2xc + a^4 = a^2\left[(x-c)^2 + y^2\right]$ — Calculamos los trinomios cuadrados perfectos.

$x^2c^2 - 2a^2xc + a^4 = a^2x^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2$ — Calculamos el trinomio y aplicamos la propiedad distributiva.

$x^2c^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4$ — Simplificamos y agrupamos términos.

$x^2\left(c^2 - a^2\right) - a^2y^2 = a^2\left(c^2 - a^2\right)$ — Sacamos factor común.

$x^2b^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ — Sustituimos $b^2 = c^2 - a^2$.

$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ — Dividimos entre a^2b^2.

Comentario

Si $a = b$, la hipérbola se llama equilátera.

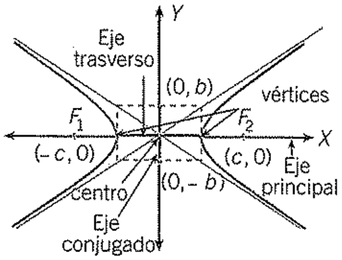


Figura 5.35

> *La ecuación $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ se llama* ***ecuación estándar*** *de la hipérbola, con centro en el origen y focos, en el eje X, de coordenadas $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$, donde $c^2 = a^2 + b^2$.*

Las características básicas de la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ son:

- Es simétrica respecto a los ejes X y Y. El **eje principal** de la hipérbola es la recta que contiene a los focos.
- Los **vértices** son los puntos de intersección de la hipérbola y su eje principal. El punto medio del segmento de recta que une los focos se llama **centro** de la hipérbola.
- El **eje trasverso** de la hipérbola es el segmento que une los vértices. El **eje conjugado** es el segmento que une los puntos $(0, -b)$ y $(0, b)$.

Observemos estos elementos en la figura 5.35.

Ejemplo 16

Analicemos la hipérbola $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1$.

Solución

De la ecuación tenemos que $a^2 = 16$, $b^2 = 25$, por tanto, $a = 4$, $b = 5$.

$c^2 = 25 + 16$ — Sustituimos $a = 4$ y $b = 5$ en $c^2 = b^2 + a^2$.

$c = \sqrt{41}$ — Despejamos c.

El eje principal es el eje X y los focos son $(-\sqrt{41}, 0)$ y $(\sqrt{41}, 0)$. Para determinar los vértices podemos hacer:

$\frac{x^2}{16} - \frac{0^2}{25} = 1$ — Sustituimos $y = 0$ en $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1$.

$x^2 = 16$ — Despejamos x^2.

$x = \pm 4$ — Despejamos x.

Por tanto, las coordenadas de los vértices son $(-4, 0)$ y $(4, 0)$.

Recordemos que las coordenadas del punto medio del segmento que une (x_1, y_1) con (x_2, y_2) son $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$, por tanto, el centro de la hipérbola es $\left(\frac{-\sqrt{41} + \sqrt{41}}{2}, \frac{0 + 0}{2}\right)$, es decir, $(0, 0)$.

El eje trasverso es el segmento que une los vértices $V_1 = (4, 0)$ y $V_2 = (-4, 0)$; y el eje conjugado es el segmento que une los puntos $(0, -5)$ y $(0, 5)$ (*ver* figura 5.36). ◀

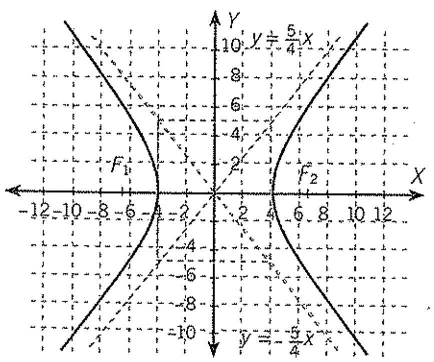


Figura 5.36

En la figura 5.36 se ha punteado un rectángulo, el cual tiene un par de lados que pasan por los vértices y son perpendiculares al eje principal, y el otro par de lados pasan por los extremos del eje conjugado. Consideremos las rectas que contienen las diagonales de este rectángulo, cuyas ecuaciones son: $y = \frac{5}{4}x$ y $y = -\frac{5}{4}x$.

Ahora bien, si de la ecuación $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1$ despejamos la variable y, entonces $y = \pm\sqrt{\frac{25}{16}x^2 - 25}$.

Para valores grandes de $|x|$, tenemos $\frac{25}{16}x^2 - 25 \approx \frac{25}{16}x^2$, como podemos deducirlo de la tabla 5.3.

x	± 100	± 1000	$\pm 100\,000$	$\pm 1\,000\,000$
$\frac{25}{16}x^2$	15 625	1 562 500	$1{,}5625 \times 10^{10}$	$1{,}5625 \times 10^{12}$
$\frac{25}{16}x^2 - 25$	15 600	1 562 475	$1{,}562499 \times 10^{10}$	$1{,}5625 \times 10^{12}$

Tabla 5.3.

Por tanto: $\pm\sqrt{\frac{25}{16}x^2 - 25} \approx \pm\frac{5}{4}x$.

Lo anterior lo interpretamos de la siguiente manera: la distancia vertical de la recta $y = \frac{5}{4}x$ (así como $y = -\frac{5}{4}x$) a la hipérbola $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1$ tiende a cero, a medida que la curva (rama de la hipérbola) se aleja indefinidamente del origen.

En tal caso diremos que las rectas $y = \frac{5}{4}x$ y $y = -\frac{5}{4}x$ son **asíntotas** de la hipérbola.

> *La hipérbola con eje trasverso horizontal* $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ *tiene como* ***asíntotas oblicuas*** *a las rectas* $y = \frac{b}{a}x$ *y* $y = -\frac{b}{a}x$.

Comentario

Las hipérbolas $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ *y* $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ *se denominan conjugadas.*

Al igual que con la parábola y la elipse, podemos intercambiar los papeles de x y y. En este caso la ecuación que resulta es una hipérbola con eje transverso vertical.

> $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ *corresponde a una hipérbola con vértices en $(0, -a)$ y $(0, a)$; focos en $(0, -c)$ y $(0, c)$, con* $c^2 = b^2 + a^2$. *Las asíntotas oblicuas corresponden a* $y = \frac{a}{b}x$ *y* $y = -\frac{a}{b}x$.

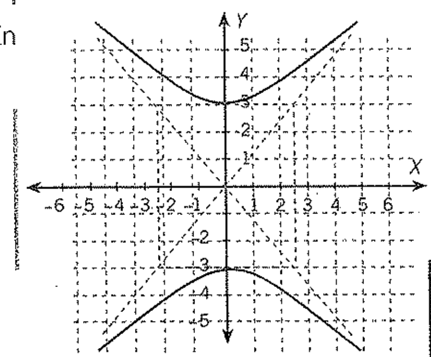


Figura 5.37

La figura 5.37 muestra la gráfica de la hipérbola $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$.

La tabla 5.4 describe las diferentes hipérbolas.

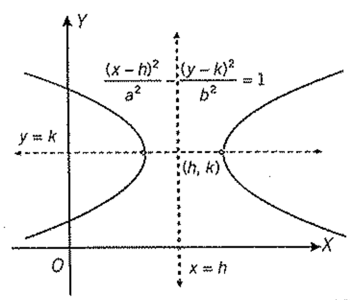
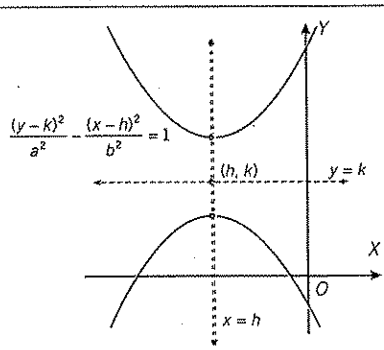
Ecuación estándar	Descripción	Representación gráfica
$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$, Donde $b^2 = c^2 - a^2$.	Centro: (h, k) Focos: $(h \pm c, k)$ Vértices: $(h \pm a, k)$ Eje trasverso: $y = k$ Asíntotas oblicuas: $y = k \pm \frac{b}{a}(x - h)$	
$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$, Donde $b^2 = c^2 - a^2$.	Centro: (h, k) Focos: $(h, k \pm c)$ Vértices: $(h, k \pm a)$ Eje trasverso: $x = h$ Asíntotas oblicuas: $y = k \pm \frac{a}{b}(x - h)$	

Tabla 5.4

Ejemplo 17

Analicemos las siguientes hipérbolas.

a. $x^2 - y^2 = 1$ **b.** $(x-2)^2 - (y-3)^2 = 1$

Solución

a. $x^2 - y^2 = 1$ es la ecuación de una hipérbola equilátera, ya que $a = b = 1$. Así tenemos que:

$c = \sqrt{2}$

Focos: $(-\sqrt{2}, 0)$, $(\sqrt{2}, 0)$.

Vértices: $(-1, 0)$, $(1, 0)$.

Eje trasverso horizontal entre $(-1, 0)$ y $(1, 0)$.

Eje conjugado entre $(0, -1)$ y $(0, 1)$.

Centro en $(0, 0)$.

Asíntotas: $y = x$, $y = -x$.

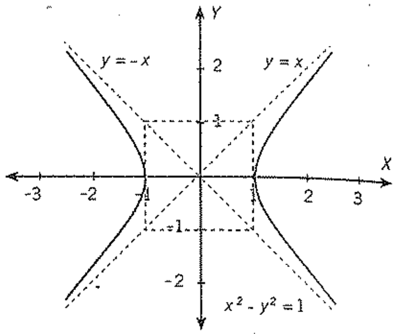


Tabla 5.5

b. $(x-2)^2 - (y-3)^2 = 1$ es la ecuación de una hipérbola con centro en $(2, 3)$, obtenida de la hipérbola del literal (a), por traslación de ejes: $x = x' + 2$; $y = y' + 3$. Por tanto, se trata también de una hipérbola equilátera con eje trasverso horizontal, así tenemos que:

Vértices: $(-1 + 2, 3)$ y $(1 + 2, 3)$, es decir, $(1, 3)$ y $(3, 3)$.

Focos: $(-\sqrt{2} + 2, 3)$ y $(\sqrt{2} + 2, 3)$.

Eje trasverso horizontal entre $(1, 3)$ y $(3, 3)$.

Eje conjugado entre $(2, -1 + 3)$ y $(2, 1 + 3)$, es decir, el segmento determinado entre los puntos $(2, 2)$ y $(2, 4)$.

Asíntotas: $y = x + 1$, $y = -x + 5$.

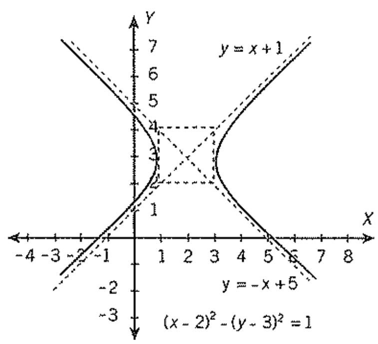


Tabla 5.6

Una de las aplicaciones más importantes de la hipérbola es su uso en la localización del sitio donde se ha originado un sonido que ha sido escuchado en, por lo menos, dos lugares distintos. Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 18

La velocidad del sonido bajo el agua en el mar, a unos 25 °C, es 1533 m/s. El submarino *A* escuchó el sonido de una carga explosiva (bajo el agua) 2 segundos después de que el submarino *B* lo escuchó. Los submarinos se encuentran a 4 km de distancia el uno del otro. Hallemos la hipérbola que contiene el punto en el cual la carga explotó.

Solución

En el plano cartesiano *XY* ubicamos los submarinos *A* y *B* en el eje *X*, a la misma distancia del origen (*ver* figura 5.38). En 2 segundos el sonido viaja $2 \times 1533 = 3066$ m;

eso significa que el sitio de explosión está 3066 m más cerca de B que de A.

Como la distancia entre A y B es 4000 m, las coordenadas de A y B son $(-2000, 0)$ y $(2000, 0)$, respectivamente; además, si $P(x, y)$ indica el lugar de la explosión, entonces $d(P, A) - d(P, B) = 3066$.

Luego P está ubicado sobre una de las ramas de la hipérbola con focos en $(-2000, 0)$ y $(2000, 0)$, tal que la diferencia de la distancia a los focos es $2a = 3066$; luego $a = 1533$. Ahora, como $c = 2000$, de la ecuación $b^2 = c^2 - a^2$ obtenemos $b = \sqrt{1\,649\,911} \approx 1284{,}5$.

Entonces, el lugar de la explosión es un punto de la hipérbola:

$\dfrac{x^2}{2\,350\,089} - \dfrac{y^2}{1\,649\,911} = 1$ y se encuentra más cerca de B que de A. ◀

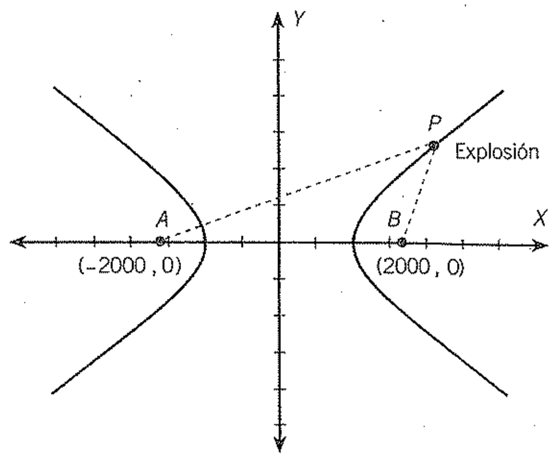


Figura 5.38

En el ejemplo anterior es claro que no se ha determinado el punto preciso de la explosión; para lograrlo, es necesario tener otro punto C (submarino) distinto de A y B, que haya escuchado la explosión; con A y C o B y C se construye la ecuación de otra hipérbola que, intersecada con la anterior, dé la ubicación de la explosión.

> Piensa y practica <

> Comunicación

1. Relaciona cada gráfica, con su respectiva ecuación.

a. $y^2 - x^2 = 9$

b. $25x^2 - 16y^2 = 400$

c. $9x^2 - 25y^2 = 225$

d. $9y^2 - x^2 = 36$

e. $\dfrac{(x+4)^2}{100} - \dfrac{(y-2)^2}{81} = 1$

f. $\dfrac{(y-1)^2}{16} - \dfrac{(x+3)^2}{1} = 1$

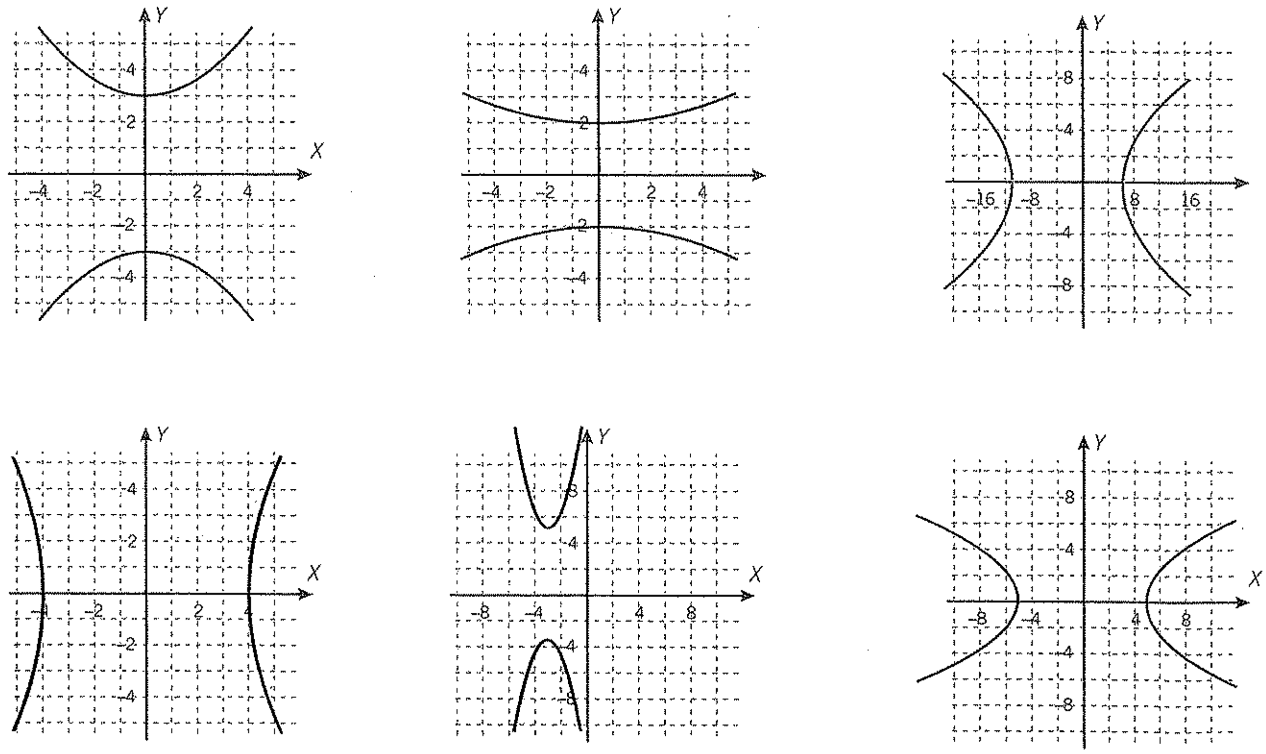


Figura 5.39

2. ¿La ecuación de una hipérbola siempre representa una función?

3. ¿Cómo diferencias si una ecuación dada de una cónica representa una elipse o una hipérbola?

4. Escribe una breve explicación de cómo determinar si el eje transverso de una hipérbola es vertical u horizontal.

> Razonamiento lógico

5. Escribe la ecuación de la hipérbola que satisfaga las condiciones dadas.

   a. Centro en $(1, -4)$, $a = 5$, $b = 2$, y el eje trasverso es horizontal.

   b. La longitud de los ejes conjugados es 6, los vértices están localizados en $(3, 4)$ y $(3, 0)$.

   c. La hipérbola es equilátera y tiene los focos en $(0, 6)$ y $(0, -6)$.

   d. Las pendientes de las asíntotas son ± 2, y los focos son $(1, 5)$ y $(1, -3)$.

   e. La hipérbola es equilátera con centro en $(0, 0)$, la distancia entre los focos es 18 y el eje trasverso es horizontal.

   f. Centro en $(3, -1)$, un vértice en $(5, -1)$, la ecuación de una de las asíntotas oblicuas es $3x - 11 = 2y$.

   g. La longitud del eje conjugado es 8, y los vértices están localizados en $(-3, 9)$ y $(-3, 5)$.

6. Escribe la ecuación de la hipérbola con centro en el origen, para la cual se dan las longitudes de los ejes transverso y conjugado, y el eje principal se especifica.

   a. $2a = 10$, $2b = 8$; eje X.

   b. $2a = 26$, $2b = 10$; eje Y.

   c. $2a = 14$, $2b = 6$; eje X.

   d. $2a = 2\sqrt{7}$, $2b = 4$; eje Y.

7. Escribe una ecuación de la hipérbola con centro en el origen que satisfaga las condiciones dadas.

   a. Eje principal sobre el eje X, pasa por los puntos $(2, 1)$ y $(4, 3)$.

   b. Eje principal sobre el eje X, pasa por los puntos $(3, 1)$ y $(9, 5)$.

   c. Eje principal sobre el eje Y, un extremo del eje conjugado es $(3, 0)$, un vértice está sobre el punto medio que une el centro con uno de los focos.

   d. Eje focal sobre el eje Y, un foco en $(0, 4)$ y $c = 3a$.

8. Completa el cuadrado para x y para y. Encuentra: centro, vértices, focos y asíntotas de la hipérbola. Luego, traza la gráfica en donde se muestren las asíntotas.

   a. $x^2 - 4y^2 - 2x - 16y - 19 = 0$

   b. $9x^2 - y^2 + 20y = 109$

   c. $-x^2 + 16y^2 + 14y = 33$

   d. $9y^2 - 4x^2 - 9y - 4x = \dfrac{139}{4}$

9. En un mismo plano traza el par de hipérbolas dadas.

   a. $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1$, $\dfrac{y^2}{9} - \dfrac{x^2}{4} = 1$

   b. $x^2 - \dfrac{y^2}{36} = 1$, $\dfrac{y^2}{36} - x^2 = 1$

   c. $\dfrac{x^2}{25} - y^2 = 1$, $y^2 - \dfrac{x^2}{25} = 1$

   d. $x^2 - y^2 = 1$, $y^2 - x^2 = 1$

> Resolución de problemas

10. En el sistema cartesiano del ejemplo 18, supón que el eje positivo de las X apunta al oriente. Un submarino C, localizado 2 km al norte del submarino A, escuchó el sonido de la carga explosiva un segundo después que el submarino A (*ver* figura 5.40). Halla el sitio exacto en donde estaba la carga explosiva.

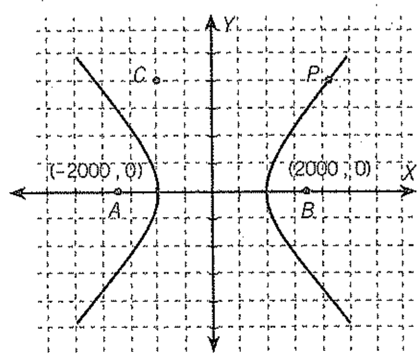
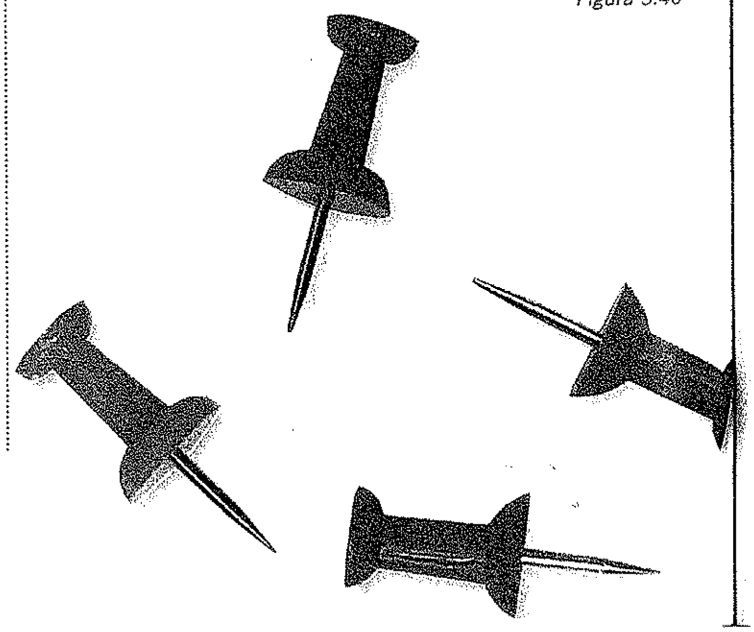


Figura 5.40



Traslación de ejes y ecuación general de segundo grado en dos variables no rotada

Logro: reconocer en la ecuación general de segundo grado en dos variables, sin rotación, las secciones cónicas.

Las secciones cónicas que hemos estudiado en las lecciones anteriores se han representado mediante curvas cuyas ecuaciones son casos particulares de la **ecuación general de segundo grado en dos variables, sin rotación**: $Ax^2 + Cy^2 + Dx + EY + F = 0$.

Por ejemplo, la ecuación de la circunferencia con centro en (h, k) y radio r: $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$, al desarrollarla se obtiene:
$x^2+y^2+(-2h)x+(-2k)y+(h^2+k^2-r^2)=0$, es decir, se obtiene de la ecuación general de segundo grado haciendo $A = C = 1$; $D = -2h$; $E = -2k$ y $F = h^2 + k^2 - r^2$.

La parábola de ecuación $(x-h)^2 = 4c(y-k)$ se obtiene de la ecuación general de segundo grado haciendo: $A = 1$, $C = 0$, $D = -2h$, $E = -4c$ y $F = h^2 + 4ck$. De igual manera, la línea recta aparece como un caso especial de esta ecuación haciendo $A = C = 0$.

Los términos Ax^2 y Cy^2 de la ecuación general de segundo grado son de segundo grado y se conocen como términos cuadráticos.

La ecuación general de segundo grado $Ax^2 + Cy^2 + Dx + EY + F = 0$, donde A, C, D, E y F son números reales constantes, representa:

- *Una **circunferencia**, si $A = C$ (A y C diferentes de 0). En algunos casos puede representar a un punto o simplemente carecer de puntos.*
- *Una **parábola**, si $A \neq 0$ y $C = 0$, o, $A = 0$ y $C \neq 0$; es decir, la ecuación general de segundo grado es de segundo grado respecto a una de las variables y lineal (primer grado) respecto a la otra.*
- *Una **elipse**, si A y C tienen el mismo signo ($A > 0$ y $C > 0$, o, $A < 0$ y $C < 0$). En algunos casos, el lugar geométrico se reduce a un solo punto, o carece de puntos.*
- *Una **hipérbola**, si A y C tienen signos opuestos ($A > 0$ y $C < 0$, o, $A > 0$ y $C < 0$). En algunos casos, el lugar geométrico se reduce a un par de líneas rectas.*

Ejemplo 19

Clasifica cada una de las siguientes ecuaciones de segundo grado, en una de las posibles secciones cónicas, y halla su ecuación estándar.

a. $4x^2 + 9y^2 - 40x + 36y + 100 = 0$

b. $4x^2 - 25y^2 + 64x + 350y - 1069 = 0$

c. $x^2 + 20x - 3y + 121 = 0$

d. $x - 6y^2 + 48y - 94 = 0$

e. $x^2 + y^2 - 50x + 18y + 706 = 0$

f. $x^2 + y^2 - 12x - 4y + 44 = 0$

g. $16x^2 - 9y^2 + 256x + 126y + 583 = 0$

Solución

a. Como $A = 4$ y $C = 9$ tienen el mismo signo, posiblemente la ecuación represente una elipse.

$4x^2 - 40x + 9y^2 + 36y = -100$	Ordenamos los términos.
$4(x^2 - 10x) + 9(y^2 + 4y) = -100$	Agrupamos términos y factorizamos.
$4(x-5)^2 + 9(y+2)^2 = -100 + 100 + 36$	Completamos cuadrados en x y en y.
$4(x-5)^2 + 9(y+2)^2 = 36$	Simplificamos y obtenemos la ecuación estándar.

b. Como $A = 4$ y $C = -25$ tienen signos opuestos, posiblemente la ecuación sea una hipérbola.

$4x^2 + 64x - 25y^2 + 350y = 1069$	Ordenamos los términos.
$4(x^2 + 16x) - 25(y^2 - 14y) = 1069$	Agrupamos términos y factorizamos.
$4(x+8)^2 - 25(y-7)^2 = 1069 + 256 - 1225$	Completamos cuadrados en x y en y.
$4(x + 8)^2 - 25(y - 7)^2 = 100$	Simplificamos y obtenemos la ecuación estándar.

c. Como $A = 1$ y $C = 0$, la ecuación representa una parábola.

$(x + 10)^2 - 3y + 121 = 100$	Completamos el cuadrado perfecto que involucra la variable x.
$(x + 10)^2 = 100 - 121 + 3y$	Ordenamos términos.
$(x + 10)^2 = 3(y - 7)$	Simplificamos términos y factorizamos.

$(x + 10)^2 = 3(y - 7)$ corresponde a la ecuación de una parábola con vértice en $(-10, 7)$ que abre hacia arriba.

d. Como $A = 0$ y $C = -6$, la ecuación representa una parábola.

$-6y^2 + 48y - 94 + x = 0$	Ordenamos términos.
$-6y^2 + 48y = 94 - x$	Separamos los términos por variables.
$-6(y - 4)^2 = -x + 94 - 96$	Completamos el cuadrado en la variable y.
$(y-4)^2 = \frac{1}{6}(x+2)$	Simplificamos términos.

e. Como $A = C = 1$, la ecuación posiblemente represente una circunferencia.

$(x^2 - 50x) + (y^2 + 18y) = -706$	Agrupamos términos.
$(x - 25)^2 + (y + 9)^2 = 0$	Completamos los cuadrados en x y en y.

Esa ecuación tiene una única solución en el punto $(25, -9)$, así el lugar geométrico que esta ecuación representa es un punto de coordenadas $(25, -9)$.

f. Como $A = C = 1$, la ecuación posiblemente represente una circunferencia.

$(x^2 - 12x) + (y^2 - 4y) = -44$	Agrupamos términos.
$(x - 6)^2 + (y - 2)^2 = -44 + 36 + 4$	Completamos los cuadrados en x y en y.
$(x - 6)^2 + (y - 2)^2 = -4$	Simplificamos la expresión.

Esa ecuación no tiene ninguna solución porque el miembro izquierdo es positivo o cero, mientras que el miembro derecho es negativo. Así, el lugar geométrico representado por esta ecuación carece de puntos, es decir, la solución de esta ecuación es el **conjunto vacío**.

g. Como $A = 16$ y $C = -9$, la ecuación posiblemente represente una hipérbola.

$16(x^2 + 16x) - 9(y^2 - 14y) = -583$	Ordenamos términos.
$16(x+8)^2 - 9(y-7)^2 = -583 + 1024 - 441$	Completamos los cuadrados en x y en y.
$16(x + 8)^2 - 9(y - 7)^2 = 0$	Simplificamos términos.
$16(x + 8)^2 = 9(y - 7)^2$	Separamos términos.
$y - 7 = \pm\frac{4}{3}(x + 8)$	Elevamos al cuadrado ambos lados de la igualdad.
$y = 7 \pm \frac{4}{3}(x + 8)$	Despejamos y.

Así, obtenemos la ecuación de dos rectas. ◀

En la tabla 5.7 se resumen las distintas posibilidades que se pueden presentar con esta ecuación.

Comentario

La ecuación general de segundo grado en dos variables representa una cónica cuyos ejes principales (exceptuando la línea recta) son paralelos a los ejes coordenados. Por esta razón se llama ecuación de segundo grado en dos variables no rotada.

Tipo elíptico $AC > 0$	$A(4ACF - CD^2 - AE^2) < 0$		$A = C$	Circunferencia
			$A \neq C$	Elipse
	$A(4ACF - CD^2 - AE^2) > 0$			Conjunto vacío
	$4ACF - CD^2 - AE^2 = 0$			Un punto
Tipo parabólico $AC = 0$	$A \neq 0$, $C = 0$	$E \neq 0$		Parábola
		$E = 0$	$4AF - D^2 < 0$	Dos rectas paralelas
			$4AF - D^2 = 0$	Una recta
			$4AF - D^2 > 0$	Conjunto vacío
	$A = 0$, $C \neq 0$	$D \neq 0$		Parábola
		$D = 0$	$4CF - E^2 < 0$	Dos rectas paralelas
			$4CF - E^2 = 0$	Una recta
			$4CF - E^2 > 0$	Conjunto vacío
Tipo hiperbólico $AC < 0$	$4ACF - CD^2 - AE^2 \neq 0$			Hipérbola
	$4ACF - CD^2 - AE^2 = 0$			Dos rectas que se cortan

Tabla 5.7

> Traslación de ejes

Algunos problemas de matemáticas, física e ingeniería se pueden comprender mejor o reducir los cálculos matemáticos si seleccionamos adecuadamente el sistema de referencia (sistema de coordenadas) o si realizamos un cambio del sistema de coordenadas (transformación de coordenadas).

A continuación vamos a estudiar una transformación que nos ayudará en la identificación gráfica del lugar geométrico correspondiente a una sección cónica. Esta transformación se llama traslación de ejes.

Partimos del sistema de referencia usual, el sistema de coordenadas cartesiano XY, con origen en $(0, 0)$. Supongamos que consideramos un nuevo sistema cartesiano deslizando los dos ejes de referencia, el eje X lo deslizamos horizontalmente h unidades y el eje Y lo deslizamos verticalmente k unidades, como se muestra en la figura 5.41.

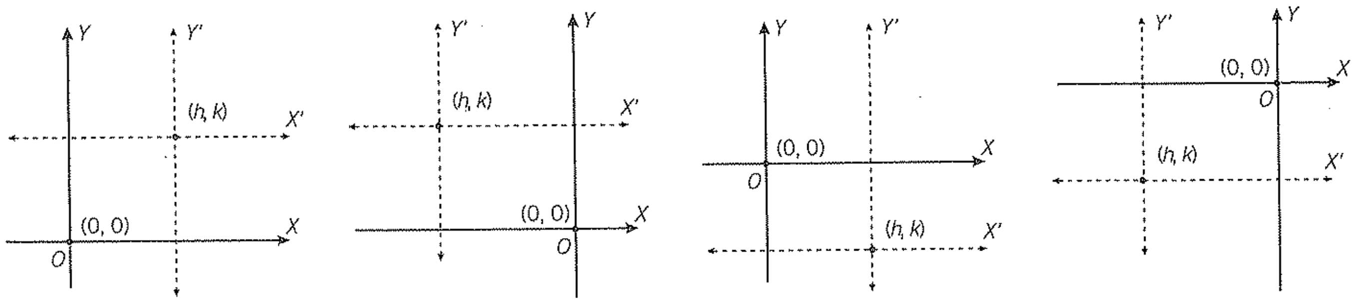


Figura 5.41

En el plano donde están los dos sistemas de referencia, un punto P tiene dos posibles coordenadas; respecto al sistema XY serán (x, y) y respecto del sistema $X'Y'$ serán (x', y'), y estas dos coordenadas están relacionadas mediante el siguiente par de ecuaciones:

$$\textit{Del sistema } X'Y' \textit{ al sistema } XY: \begin{cases} x = x' + h \\ y = y' + k \end{cases}$$

$$\textit{Del sistema } XY \textit{ al sistema } X'Y': \begin{cases} x' = x - h \\ y' = y - k \end{cases}$$

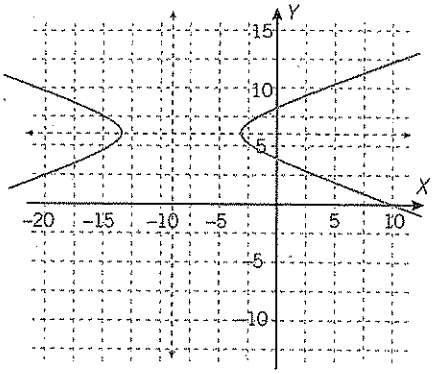


Figura 5.42

Ejemplo 20

Representemos gráficamente la hipérbola $4(x+8)^2 - 25(y-7)^2 = 100$, mediante la traslación de ejes:

$x = x' - 8$, $y = y' + 7$, es decir, trasladando el origen $(0, 0)$ al punto $(-8, 7)$ que es el centro de la hipérbola.

Solución

La hipérbola se representa algebraicamente en el sistema de referencia $X'Y'$ mediante la ecuación $4(x')^2 - 25(y')^2 = 100$, que es una ecuación más simple de interpretar y de representar gráficamente como se observa en la figura 5.42. ◀

> Piensa y practica <

> Comunicación

1. Identifica el lugar geométrico que representa cada ecuación.

a. $x^2 + y^2 - 6x - 10y - 47 = 0$

b. $16x^2 + 9y^2 + 224x - 72y + 784 = 0$

c. $x^2 - 6x - 8y - 7 = 0$

d. $x^2 + y^2 + 4x + 12y + 4 = 0$

e. $y^2 - 16x + 18y + 145 = 0$

f. $16x^2 + 9y^2 + 64x + 54y + 1 = 0$

g. $16x^2 - 25y^2 - 160x = 0$

2. Escribe la ecuación de segundo grado que corresponde al lugar geométrico dado.

a. Parábola con vértice en $(3, -2)$ y foco en $(3, 4)$.

b. Parábola con vértice en $(2, 5)$, eje de simetría $x = 2$, y pasa por el punto $(1, 1)$.

c. Parábola con vértice en $(4, -1)$, eje de simetría la recta $y = -1$, y pasa por el punto $(2, 3)$.

d. Elipse con el eje mayor en la recta $y = -3$, su eje menor en la recta $x = -2$, longitud del eje mayor 8 y longitud del eje menor 4.

e. Elipse con focos en $(1, 2)$ y $(9, 2)$, longitud del eje mayor igual a 10.

f. Elipse con vértices en $(8, 2)$ y $(-4, 2)$, y un foco en $(6, 2)$.

g. Hipérbola con focos en $(3, 2)$ y $(3, -6)$, eje transversal de longitud 4.

h. Hipérbola con focos en $(-6, -3)$ y $(4, -3)$, y un vértice en $(3, -3)$.

i. El punto $(1, 2)$.

j. El conjunto vacío.

> Resolución de problemas

3. Para cada una de las siguientes ecuaciones de segundo grado en dos variables, escribe las fórmulas de traslación de ejes al punto indicado (h, k) y escribe la ecuación de la curva en el nuevo sistema de referencia trasladado.

a. $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 64$; $(3, 5)$

b. $(x+2)^2 + y^2 = 225$; $(-2, 0)$

c. $\dfrac{(x+9)^2}{16} - \dfrac{(y-2)^2}{25} = 1$; $(-9, 2)$

d. $9\left(x-\sqrt{2}\right)^2 - 4\left(y+2\sqrt{2}\right)^2 = 36$; $\left(\sqrt{2}, -2\sqrt{2}\right)$

e. $4(x-1) = -0{,}1(y-7)^2$; $(1, 7)$

4. En cada una de las siguientes ecuaciones de segundo grado en dos variables, determina el lugar geométrico que representa. Haz un cambio de coordenadas al sistema de referencia $X'Y'$, mediante traslación de ejes, de manera que en el nuevo sistema el centro (para circunferencias, elipses e hipérbolas) o el vértice (en el caso de las parábolas), se encuentre en el origen de $X'Y'$.

a. $x^2 - y^2 + 6x + 4y + 5 = 0$

b. $4y^2 - 3x^2 + 8y - 12x = 16$

c. $x^2 + y^2 + 4x - 10y = 36$

d. $4x^2 - 9y^2 - 16x + 18y = 7$

e. $x^2 - 4y^2 + 4x + 32y - 64 = 0$

5. Traza la gráfica de la sección cónica correspondiente a cada ecuación.

a. $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 13 = 0$

b. $x^2 + 10x + 4y + 21 = 0$

c. $4x^2 - 9y^2 + 16x + 18y + 7 = 0$

d. $2x + y^2 + 6y + 9 = 6$

Lección 8

Rotación de ejes y ecuación general de segundo grado en dos variables

Logro: encontrar condiciones sobre los coeficientes de la ecuación general de segundo orden para clasificarla algebraicamente, en una sección canónica.

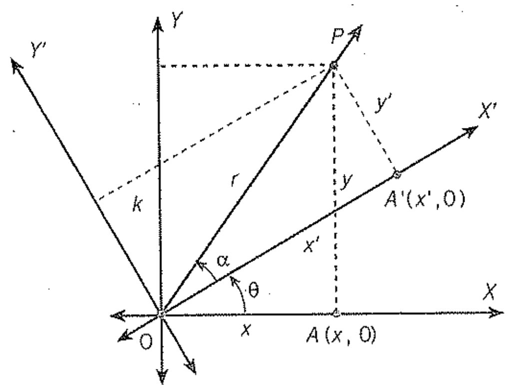


Figura 5.43

Supongamos que tenemos un plano en el cual hay un sistema de referencia de coordenadas cartesianas XY. Si consideramos unos nuevos ejes coordenados cartesianos $X'Y'$, en el mismo plano, obtenidos mediante la rotación de los ejes coordenados alrededor del origen, θ radianes, entonces cada punto P del plano tiene dos coordenadas, una para el sistema XY y la otra para el sistema $X'Y'$, como se muestra en la figura 5.43

Analicemos la relación entre las coordenadas del sistema XY y $X'Y'$, mediante la aplicación de resultados de la trigonometría a los triángulos rectángulos $\triangle OAP$ y $\triangle OA'P$, esto es:

Del $\triangle OAP$ tenemos que $\cos(\alpha+\theta)=\frac{x}{r}$ y $\operatorname{sen}(\alpha+\theta)=\frac{y}{r}$. Por tanto:

$x = r\cos(\alpha+\theta)$	Despejamos x de $\cos(\alpha+\theta)=\frac{x}{r}$.
$x = r\cos\alpha\cos\theta - r\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\theta$	Aplicamos la propiedad de coseno de una adición.
$y = r\operatorname{sen}(\alpha+\theta)$	Despejamos y de $\operatorname{sen}(\alpha+\theta)=\frac{y}{r}$.
$y = r\operatorname{sen}\alpha\cos\theta + r\cos\alpha\operatorname{sen}\theta$	Aplicamos la propiedad de seno de una adición.

Del $\triangle OA'P$ tenemos que $\cos\alpha=\frac{x'}{r}$ y $\operatorname{sen}\alpha=\frac{y'}{r}$. Por tanto,

$x' = r\cos\alpha$	Despejamos x' de $\cos\alpha=\frac{x'}{r}$.
$y' = r\operatorname{sen}\alpha$	Despejamos y' de $\operatorname{sen}\alpha=\frac{y'}{r}$.
$x = x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta$	Sustituimos $x'=r\cos\alpha$ y $y'=r\operatorname{sen}\alpha$ en $x=r\cos\alpha\cos\theta - r\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\theta$.
$y = y'\cos\theta + x'\operatorname{sen}\theta$	Sustituimos $x'=r\cos\alpha$ y $y'=r\operatorname{sen}\alpha$ en $y=r\operatorname{sen}\alpha\cos\theta + r\cos\alpha\operatorname{sen}\theta$.

Para hallar las coordenadas (x, y) de un punto P en el sistema XY a partir de las coordenadas (x', y') en el sistema X'Y' y del valor de las funciones trigonométricas seno y coseno calculadas en el ángulo θ, utilizamos las ecuaciones: $x = x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta$ y $y = y'\cos\theta + x'\operatorname{sen}\theta$.

Para transformar las coordenadas (x, y) en el sistema XY a coordenadas (x', y') en el sistema X'Y', utilizamos las ecuaciones: $x' = x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta$ y $y' = -x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta$.

Ejemplo 21

El sistema cartesiano "usual" XY ha sido rotado $\frac{\pi}{4}$ positivamente para obtener el nuevo sistema $X'Y'$.

a. Si el punto P tiene coordenadas $\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ en XY, hallemos las coordenadas de P en $X'Y'$.

b. Si el punto P tiene coordenadas $\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ en $X'Y'$, determinemos las coordenadas de P en XY.

c. Tracemos la gráfica de la ecuación $xy = 1$ (que equivale a $y = \frac{1}{x}$).

d. Hallemos la ecuación en $X'Y'$, correspondiente a $xy = 1$.

Solución

Si $\theta = \frac{\pi}{4}$, tenemos que $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y $\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

a. $x' = \sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}$ — Sustituimos $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x = y = \sqrt{2}$ en $x' = x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta$.

$x' = 2$ — Efectuamos las operaciones indicadas.

$y' = -\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}$ — Sustituimos $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x = y = \sqrt{2}$ en $y' = -x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta$.

$y' = 0$ — Efectuamos las operaciones indicadas.

Por tanto, las coordenadas $\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ en XY corresponden a $(2, 0)$ en $X'Y'$.

b. $x = \sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}$ — Sustituimos $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x' = y' = \sqrt{2}$ en $x = x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta$.

$x = 0$ — Efectuamos las operaciones indicadas.

$y = \sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}$ — Sustituimos $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x' = y' = \sqrt{2}$ en $y = y'\cos\theta + x'\operatorname{sen}\theta$.

$y = 2$ — Efectuamos las operaciones indicadas.

Así, las coordenadas $\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ en $X'Y'$ corresponden a $(0, 2)$ en XY.

c. Para representar la ecuación $y = \frac{1}{x}$, primero observemos el comportamiento de esta cuando toma valores relativamente pequeños y relativamente grandes (*ver* tabla 5.8).

x	±0,001	±0,01	±0,1	±10	±100	±1000
y	±1000	±100	±10	±0,1	±0,01	±0,001

Tabla 5.8

En la tabla 5.8 podemos observar que cuando x toma valores cercanos a 0, el valor de y se aleja de 0, es decir, tiene una asíntota en $x = 0$. Cuando x toma valores lejanos a 0, el valor de y se aproxima a 0, pero nunca toma el valor 0, es decir, tiene una asíntota en $y = 0$ (*ver* figura 5.44).

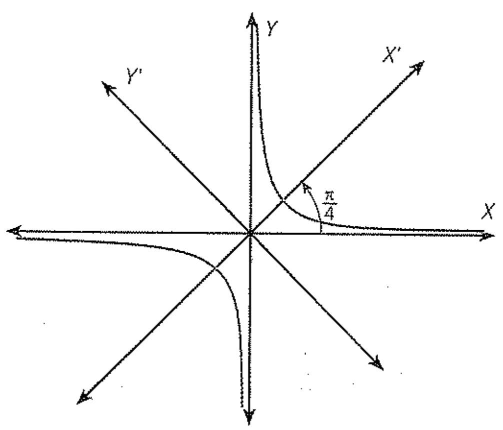


Figura 5.44

d. $\left(x'\frac{\sqrt{2}}{2} - y'\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x'\frac{\sqrt{2}}{2} + y'\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1$ — Reemplazamos $x = x'\frac{\sqrt{2}}{2} - y'\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y = x'\frac{\sqrt{2}}{2} + y'\frac{\sqrt{2}}{2}$, en $xy = 1$.

$\left(x'\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(y'\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1$ — Factorizamos la diferencia de cuadrados.

$\frac{(x')^2}{2} - \frac{(y')^2}{2} = 1$ — Efectuamos las operaciones indicadas.

Así, la ecuación en el sistema $X'Y'$ es $(x')^2 - (y')^2 = 2$, que corresponde a una hipérbola equilátera de eje trasverso "horizontal". ◀

Ecuación general de segundo grado en dos variables

En la lección 7 estudiamos la representación analítica de las secciones cónicas en un sistema trasladado de coordenadas cartesianas. Una situación más general se da cuando los ejes principales de la curva plana que representa la sección cónica no son paralelos a los ejes coordenados (*ver* figura 5.45). La ecuación algebraica que caracteriza estas curvas está dada por la siguiente ecuación:

$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, llamada ecuación general de segundo grado en dos variables.

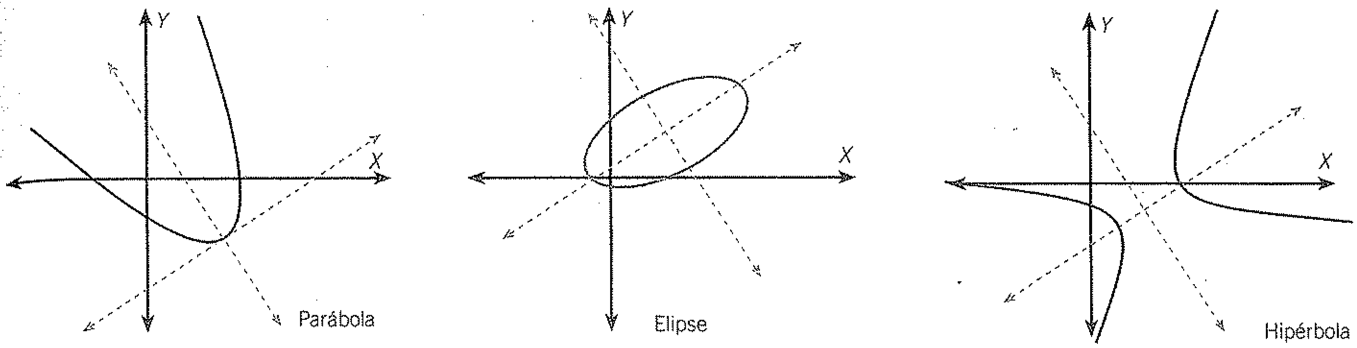


Figura 5.45

La ecuación $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, donde A, B, C, D, E y F son constantes conocidas, representa —salvo en algunos casos— una parábola, una elipse o una hipérbola. El siguiente criterio permite clasificar las cónicas por medio del número $B^2 - 4AC$, llamado **discriminante** de la sección cónica.

> *La ecuación $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ representa:*
> 1. *Una parábola, una recta, dos rectas paralelas o no hay gráfica, si $B^2 - 4AC = 0$.*
> 2. *Una elipse, una circunferencia, un punto o no hay gráfica, si $B^2 - 4AC < 0$.*
> 3. *Una hipérbola o dos rectas que se cortan, si $B^2 - 4AC > 0$.*

El término Bxy en la ecuación $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, puede eliminarse si se realiza una rotación de ejes de θ radianes, en donde $\theta = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{B}{A-C}\right)$, si $A \neq C$. Cuando $A = C$, se puede tomar $\theta = \frac{\pi}{4} = 45°$.

Ejemplo 22

Clasifiquemos la cónica representada por la ecuación dada. En cada caso, hagamos una rotación de ejes para eliminar el término xy en la ecuación y tracemos la gráfica.

a. $4x^2 + 4xy + y^2 + 20x - 10y = 0$

b. $3y^2 - 4xy + 30y - 20x + 40 = 0$

c. $4x^2 + 4xy + y^2 - 9 = 0$

Solución

Clasificación

a. $A = 4$, $B = 4$, $C = 1$, discriminante $B^2 - 4AC = 16 - 16 = 0$. Por tanto, representa una parábola, una recta o dos rectas paralelas.

b. $A = 0$, $B = -4$, $C = 3$, discriminante $B^2 - 4AC = 16 > 0$. Por tanto, representa una hipérbola o dos rectas que se cortan.

c. $A = 4$, $B = 4$, $C = 1$. Se tiene una clasificación igual a la del literal (a).

Rotación de ejes

a. $\theta = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{4}{4-1}\right) = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) \approx 0{,}46364 \text{ rad} = 26{,}6°$.

b. $\theta = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{-4}{0-3}\right) = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = 26{,}6°$

c. La misma rotación del literal (a).

Las tres ecuaciones requieren la misma rotación para eliminar al término mixto xy:

$\theta = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$ Tomamos el ángulo de rotación θ.

$2\theta = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$ Despejamos $\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$.

$\tan 2\theta = \frac{4}{3}$ Evaluamos la función tangente a ambos lados de la igualdad.

$\cos 2\theta = \frac{3}{5}$ Utilizamos el hecho de que $\tan 2\theta = \frac{4}{3}$ para considerar un triángulo rectángulo con catetos 4 y 3 e hipotenusa 5 y la definición de coseno.

$\operatorname{sen}\theta = \sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{2}}$ Sustituimos $\cos 2\theta = \frac{3}{5}$ en $\operatorname{sen}\theta = \sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}}$.

$\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ Simplificamos términos.

$\cos\theta = \sqrt{\frac{1+\frac{3}{5}}{2}}$ Sustituimos $\cos 2\theta = \frac{3}{5}$ en $\cos\theta = \sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}}$

$\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$ Simplificamos términos.

$x = x'\frac{2}{\sqrt{5}} - y'\frac{1}{\sqrt{5}}$ Sustituimos $\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$ y $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ en $x = x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta$.

$y = x'\frac{1}{\sqrt{5}} + y'\frac{2}{\sqrt{5}}$ Sustituimos $\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$ y $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ en $y = x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta$.

$x^2 = \frac{4}{5}x'^2 - \frac{4}{5}x'y' + \frac{1}{5}y'^2$ Elevamos al cuadrado $x = x'\frac{2}{\sqrt{5}} - y'\frac{1}{\sqrt{5}}$.

$y^2 = \frac{1}{5}x'^2 + \frac{4}{5}x'y' + \frac{4}{5}y'^2$ Elevamos al cuadrado $y = x'\frac{1}{\sqrt{5}} + y'\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Reemplazando estas fórmulas de x, y, x^2, y^2 en las ecuaciones dadas en XY, obtenemos:

a. $4\left(\frac{4}{5}x'^2 - \frac{4}{5}x'y' + \frac{1}{5}y'^2\right) + 4\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x' - \frac{1}{\sqrt{5}}y'\right)\left(\frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y'\right)$

$+\left(\frac{1}{5}x'^2 + \frac{4}{5}x'y' + \frac{4}{5}y'^2\right) + 20\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x' - \frac{1}{\sqrt{5}}y'\right) - 10\left(\frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y'\right) = 0$.

$5x'^2 + \frac{30}{\sqrt{5}}x' - \frac{40}{\sqrt{5}}y' = C$ Simplificamos

$\left(x' + \frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{8}{\sqrt{5}}\left(y' + \frac{9}{8\sqrt{5}}\right)$ Completamos el cuadrado en x' y obtenemos la ecuación estándar de una parábola en $x'y'$.

Para los casos (b) y (c) se procede de manera semejante, teniendo cuidado en las simplificaciones, para obtener:

b. Hipérbola de ecuación: $\frac{4}{35}\left(y' + 2\sqrt{5}\right)^2 - \frac{1}{35}\left(x' + \sqrt{5}\right)^2 = 1$.

c. Rectas paralelas: $(x')^2 = \frac{9}{5}$ o $x' = \pm\frac{3}{\sqrt{5}}$.

Sus gráficas se muestran en la figura 5.46. ◀

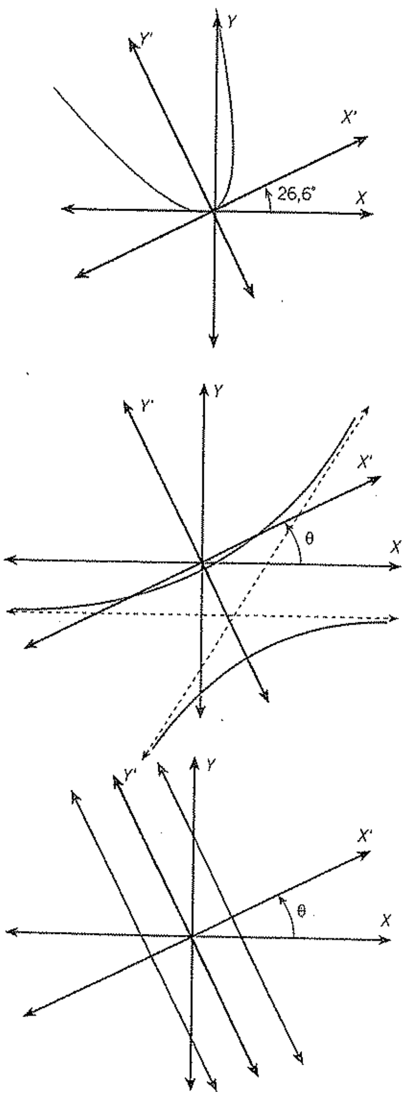


Figura 5.46

> Piensa y practica <

> Comunicación

1. Determina las coordenadas del punto (x', y'), luego de rotar el sistema XY el punto dado, el ángulo indicado.

   a. $(1, -2)$; $\theta = \frac{\pi}{6}$ radianes.

   b. $(2, 0)$; $\theta = \frac{2\pi}{3}$ radianes.

   c. $(1, 1)$; $\theta = \frac{\pi}{3}$ radianes.

   d. $(-4, -5)$; $\theta = \frac{\pi}{4}$ radianes.

   e. $(-3, 1{,}5)$; $\theta = \frac{\pi}{12}$ radianes.

2. Evalúa cada expresión trigonométrica y reescríbela.

   a. $x \cos \frac{\pi}{6} - y \operatorname{sen} \frac{\pi}{6}$

   b. $x \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right) + y \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

   c. $x \cos \frac{\pi}{12} - y \operatorname{sen} \frac{\pi}{12}$

   d. $x \operatorname{sen} \frac{3}{4}\pi + y \cos \frac{3}{4}\pi$

   e. $x \cos \frac{2\pi}{3} + y \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3}$

3. Los ejes X y Y se han rotado 30°. Halla los pares de ecuaciones que expresan las nuevas coordenadas x', y' en términos de x y y.

4. Los ejes X y Y se han rotado 120°. Halla los pares de ecuaciones que expresan a x y y en términos de x' y y'.

5. Si un punto en el sistema XY tiene coordenadas $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, halla las coordenadas de P en $X'Y'$, después de realizar una rotación de $\frac{\pi}{4}$.

6. Encuentra el ángulo de rotación, en cada ejercicio, de manera que la ecuación transformada por rotación de ejes no tenga el término mixto $x'y'$.

   a. $x^2 + 4y^2 - 3xy + 2x - 4y + 5 = 0$

   b. $3xy + 5x - 2y + 10 = 0$

   c. $x^2 + 3xy + x + 3y = 0$

   d. $x^2 - xy + 5x - 6y + 42 = 0$

   e. $2x^2 + 2xy + 2y^2 - 2x - 10y + 11 = 0$

> Resolución de problemas

7. Usando el discriminante, determina si la gráfica de la ecuación es una parábola, una elipse o una hipérbola.

   a. $x^2 - xy + y^2 + x + y + 1 = 0$

   b. $2x^2 + 5xy + y^2 + 3x - 2y + 10 = 0$

   c. $x^2 + 2xy + y^2 - 2x + 3y = 0$

   d. $x^2 + y^2 - 2x + 2y + 4 = 0$

   e. $9x^2 - 10y^2 + 9xy = 0$

8. ¿Qué clase de ecuación caracteriza a las secciones cónicas?

9. Utiliza las ecuaciones de transformación, por rotación, para cambiar las coordenadas del sistema XY al sistema $X'Y'$ y representa el lugar geométrico dado mediante una ecuación en $X'Y'$.

   a. $2x + 7y = 10$, $\operatorname{sen}\theta = \frac{3}{5}$, $\cos\theta = \frac{4}{5}$

   b. $y = x^2$, $\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$

   c. $xy = 1$, $\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$

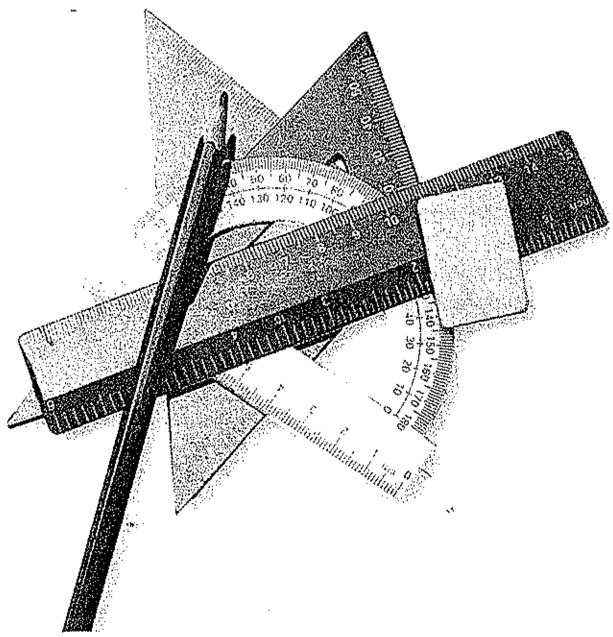
   d. $xy = 1$, $\operatorname{sen}\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$

   e. $x^2 + y^2 = 9$, $\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\theta = \frac{1}{2}$

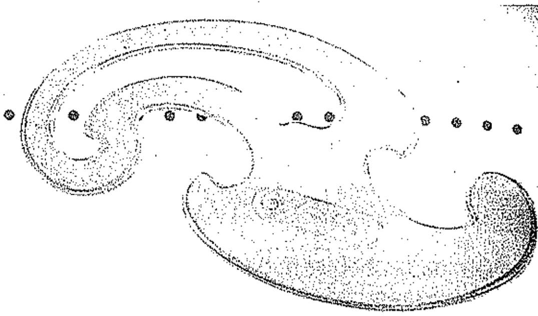
   f. $4x^2 + 9y^2 = 1$, $\operatorname{sen}\theta = 1$, $\cos\theta = 0$

   g. $x^2 - 4xy + y^2 - 3x = 0$, $\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$

   h. $8x^2 - 4xy + 5y^2 - 36 = 0$, $\operatorname{sen}\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$



Evaluación por competencias



Autoevaluación

A continuación aparecen los indicadores de logro. Marco ✔ en la columna Sí, si el logro indicado está superado o ✘ en la columna No, si está por superar.

	Sí	No
> Diferencio las secciones cónicas.	☐	☐
> Clasifico las secciones cónicas algebraicamente.	☐	☐
> Determino las características más importantes de cada sección cónica.	☐	☐
> Represento gráficamente las secciones cónicas.	☐	☐
> Realizo transformaciones de las ecuaciones de las secciones cónicas mediante traslación y rotación de ejes.	☐	☐

Coevalución

Con los siguientes ejercicios, afianzamos los indicadores de logro que hemos superado y reforzamos aquellos que están por superar.

1. Hallemos la distancia del punto P a la recta dada.

a. $P(5, 1)$, recta: $y = 3x + 2$.

b. $P(-3, 4)$; recta: $y = -x + 5$.

c. $P(x, x^2)$, recta: $y = 2x + 5$.

d. $P(x^3, x^2)$; recta: $y = 3x + 2$.

2. Hallemos una ecuación para la recta con:

a. Inclinación de 15° e intersección con el eje Y en $(0, 3)$.

b. Inclinación de 30° e intersección con el eje Y en $(0, -3)$.

c. Inclinación de 120° e intersección con el eje X en $(5, 0)$.

d. Inclinación de 53° e intersección con el eje X en $(-5, 0)$.

e. Inclinación de 37° e intersección con el eje Y en $(0, -1)$.

3. Determinemos la función cuadrática $\left(f(x) = ax^2 + bx + c\right)$ cuya gráfica tiene punto mínimo en (2, 1) y pasa por (0, 4).

4. Encontremos la función cuadrática cuya gráfica tiene punto máximo en (–3, 2) y pasa por (0, 5).

5. Hallemos para cada ecuación los vértices y focos de la elipse.

a. $25x^2 + 16y^2 = 400$

b. $64x^2 + 25y^2 = 400$

6. Hallemos las longitudes del eje mayor y del eje menor de la elipse cuya ecuación se da en cada literal.

a. $5x^2 + 9y^2 - 20x + 54y + 56 = 0$

b. $9x^2 + 16y^2 + 36x - 16y - 104 = 0$

7. Encontremos centro, vértices y focos de las siguientes hipérbolas.

a. $\dfrac{(x-3)^2}{16} - \dfrac{(y+4)^2}{9} = 1$

b. $\dfrac{(x-3)^2}{25} - \dfrac{y^2}{4} = 1$

8. Hallemos la ecuación en forma estándar de la elipse con centro en $(0, -3)$, focos $(-6, -3)$ y $(6, -3)$ y eje menor de longitud 6 cm.

9. Escribamos las ecuaciones de las asíntotas de las siguientes hipérbolas.

a. $4x^2 - 25y^2 + 16x + 50y - 109 = 0$

b. $9x^2 - 16y^2 - 36x - 64y - 116 = 0$

10. Hallemos las longitudes del eje mayor y el eje menor de la elipse cuya ecuación se da en cada literal.

a. $5x^2 + 9y^2 - 20x + 54y + 56 = 0$

b. $9x^2 + 16y^2 + 36x - 16y - 104 = 0$

11. Identifiquemos y simplifiquemos, mediante una traslación de ejes, la ecuación de cada sección cónica.

a. $x^2 + 12x - 3y + 18 = 0$

b. $x^2 + 2y^2 + 14x - 20y + 8 = 0$

c. $3x^2 - 4y^2 + 15x - 12y + 2 = 0$

d. $-6x^2 + y^2 - 24x - 2y - 32 = 0$

e. $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 7 = 0$

12. Utilicemos el discriminante $B^2 - 4AC$, para clasificar cada ecuación dada. Luego, hallemos el ángulo de rotación de ejes para eliminar el término que contiene a xy.

a. $3x^2 + 2xy + y^2 + 6x - y + 1 = 0$

b. $9x^2 + 3xy + 9y^2 - 5 = 0$

c. $3x^2 + 2xy + y^2 + 6x - y + 1 = 0$

d. $x^2 + 2xy + y^2 + 2x - y - 2 = 0$

e. $xy + 1 = 0$

13. Una piedra atada a una cuerda se gira horizontalmente, describiendo una trayectoria circular en un plano horizontal, de radio 5 decímetros alrededor del origen. Cuando se suelta la cuerda, la piedra sigue una trayectoria rectilínea perpendicular (perpendicular al radio del círculo), y golpea un techo recto descrito por una línea recta de ecuación $y = -\frac{2}{3}x + 10$. Si la cuerda se suelta cuando la piedra está en la posición $(3, -4)$ (*ver* figura 5.47), halla las coordenadas del punto donde la piedra impacta el techo.

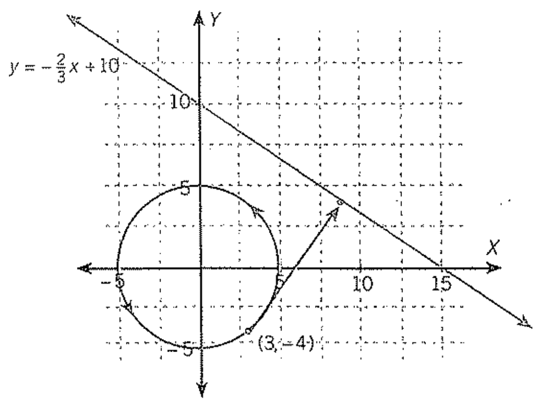
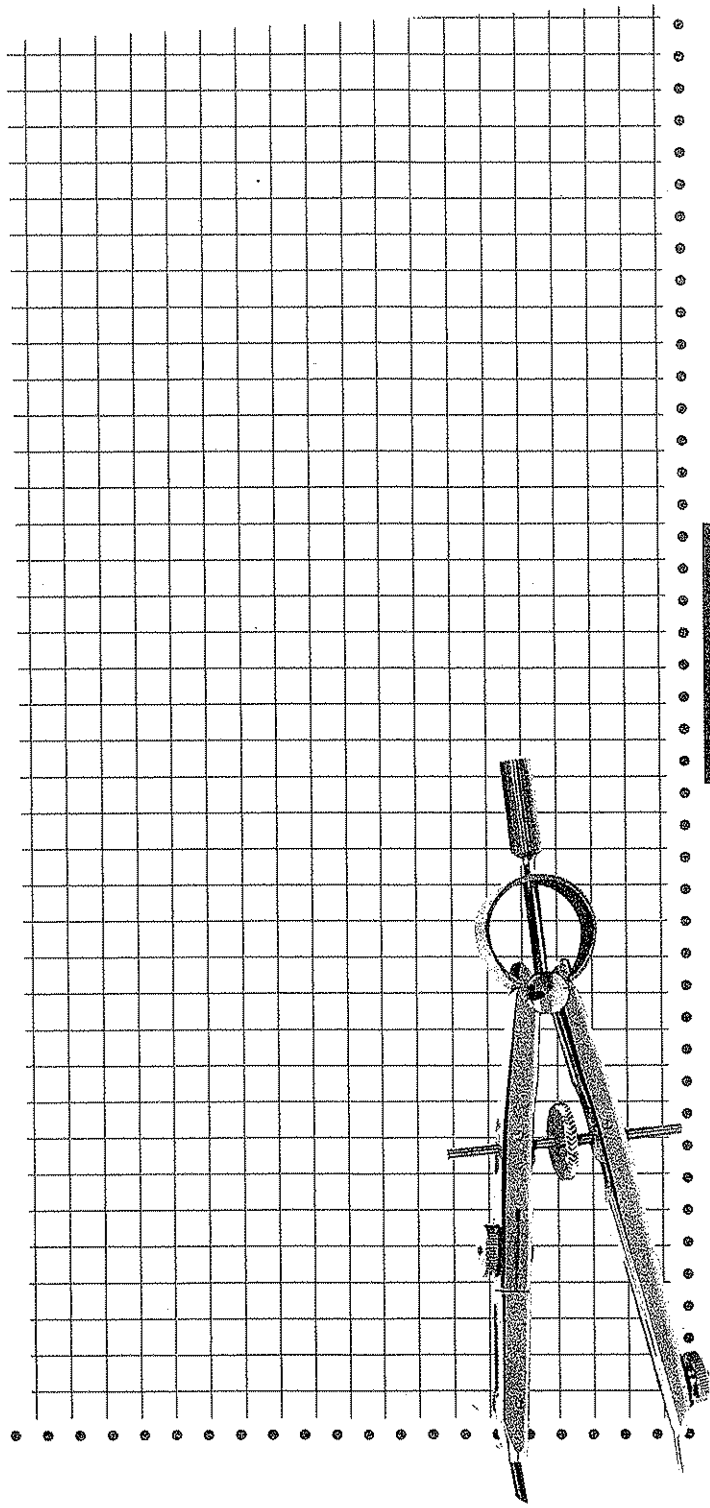


Figura 5.47

Tu creación

El triángulo ABC tiene un ángulo recto en B. El lado AC es extendido hasta un punto D de manera que se tiene la congruencia entre segmentos, esto es, $\overline{CD} \cong \overline{CB}$. La bisectriz del ángulo A interseca la recta BD en el punto E. Demuestre que $\angle AEB$ mide $\frac{\pi}{4}$ radianes.

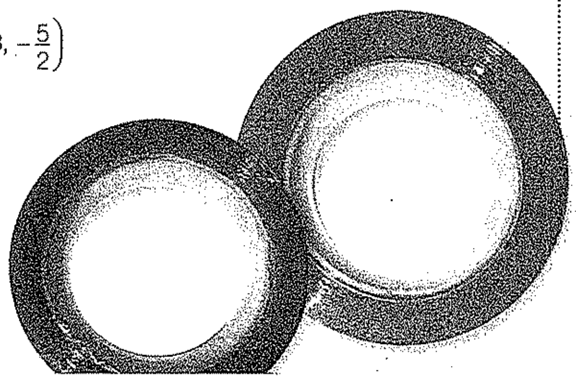


Prueba ICFES

Selecciona de las cuatro opciones sólo una de las respuestas, la que consideres relaciona de manera más estructurada los conceptos matemáticos con las condiciones particulares de la situación problema.

1. La distancia entre los puntos (–1, –1) y (–2, –5) es:
   - **a.** $\sqrt{39}$
   - **b.** 5
   - **c.** $\sqrt{45}$
   - **d.** $\sqrt{17}$

2. Las coordenadas del foco de la parábola $(y+1)^2 = -6(x-3)$ son:
   - **a.** $\left(\frac{3}{2}, -1\right)$
   - **b.** $\left(\frac{9}{2}, -1\right)$
   - **c.** $\left(3, \frac{1}{2}\right)$
   - **d.** $\left(3, -\frac{5}{2}\right)$



3. La ecuación de la directriz de la parábola $(y+1)^2 = -6(x-3)$ es:
   - **a.** $x = \frac{3}{2}$
   - **b.** $x = \frac{9}{2}$
   - **c.** $y = -\frac{5}{2}$
   - **d.** $y = \frac{1}{2}$

4. Las coordenadas de los focos de la elipse $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{25} = 1$, son:
   - **a.** $(-3, 2)$ y $(5, 2)$
   - **b.** $(1, -2)$ y $(1, 6)$
   - **c.** $\left(1-\sqrt{34}, 2\right)$ y $\left(1+\sqrt{34}, 2\right)$
   - **d.** $\left(1, 2-\sqrt{34}\right)$ y $\left(1, 2+\sqrt{34}\right)$

5. Una asíntota de la hipérbola $(x-5)^2 - \frac{(y+1)^2}{4} = 1$ es:
   - **a.** $y = \frac{1}{2}x - \frac{7}{2}$
   - **b.** $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$
   - **c.** $y = 2x - 11$
   - **d.** $y = -2x - 9$

6. El centro de la circunferencia $x^2 + y^2 - 6x + 16y - 71 = 0$ es:
   - **a.** (–3, 8)
   - **b.** (3, –8)
   - **c.** (3, 8)
   - **d.** (–3, 8)

7. El lugar geométrico de todos los puntos del plano que equidistan del punto (–1, 4) y de la recta $y = 2x$ es:
   - **a.** Una circunferencia.
   - **b.** Una elipse.
   - **c.** Una parábola.
   - **d.** Una hipérbola.

8. La ecuación algebraica que representa el lugar geométrico de todos los puntos del plano cuya distancia al puntos (0, 5) es 10 es:
   - **a.** $x^2 + y^2 + 10y - 15 = 0$
   - **b.** $x^2 - y^2 + 10y + 15 = 0$
   - **c.** $x^2 + y^2 - 10y - 15 = 0$
   - **d.** $x^2 + y^2 + 10y + 15 = 0$

9. El lugar geométrico de todos los puntos del plano que equidistan de los puntos fijos $(-2, 0)$ y $(4, 4)$ es:

a. $(x+2)^2 + (y-4)^2 = 16$

b. $(x+2)^2 - (y-4)^2 = 16$

c. $3x + 2y = 7$

d. $(x+2) = 4(y-4)^2$

10. El lugar geométrico de todos los puntos del plano cuya suma de distancias a los puntos fijos $(-1, 4)$ y $(5, 4)$ es 12, está representado por:

a. $3x^2 - 4y^2 + 12x - 32y - 32 = 0$

b. $3x^2 + 4y^2 - 12x - 32y - 32 = 0$

c. $3x^2 + 4y^2 + 12x - 32y - 32 = 0$

d. $3x^2 + 4y^2 + 12x - 32y + 32 = 0$

11. Al trasladar el origen del sistema coordenado cartesiano XY al punto $(2, 3)$, la elipse de ecuación

$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1$ se transforma en:

a. $\frac{(x'-3)^2}{4} + \frac{y'^2}{9} = 1$

b. $\frac{(x'+2)^2}{4} + \frac{(y'+3)^2}{9} = 1$

c. $\frac{(x'-3)^2}{4} + \frac{(y'+3)^2}{9} = 1$

d. $\frac{(x'-2)^2}{4} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1$

12. Para eliminar el término mixto xy de la ecuación general de segundo grado $x^2 + \sqrt{3}xy + 7y^2 + 2x - 10y + 8 = 0$, el ángulo de rotación de ejes es:

a. $\frac{\pi}{6}$

b. $-\frac{\pi}{6}$

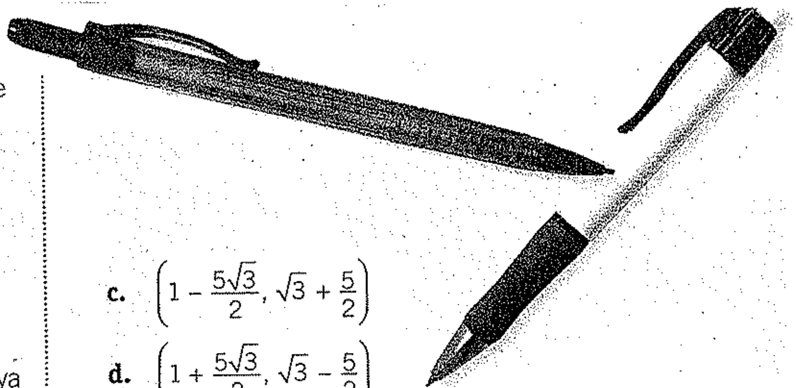
c. $\frac{\pi}{3}$

d. $0{,}89\pi$

13. Al rotar $\frac{\pi}{3}$ la hipérbola $x^2 - y^2 - 4x + 10y - 21 = 0$, la hipérbola obtenida en el sistema $X'Y'$ tiene centro en el punto:

a. $(2, 5)$

b. $(-5, 2)$



c. $\left(1 - \frac{5\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3} + \frac{5}{2}\right)$

d. $\left(1 + \frac{5\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3} - \frac{5}{2}\right)$

14. El ángulo de rotación de ejes para que la sección cónica $x^2 + y^2 - 12x + 20 = 0$ se transforme en la sección cónica $x^2 + y^2 + 12y + 20 = 0$ es:

a. π radianes.

b. $\frac{\pi}{2}$ radianes.

c. π radianes.

d. $\frac{3\pi}{2}$ radianes.

15. Después de trasladar el origen del sistema de referencia cartesiano XY al punto Q de coordenadas $(4, 2)$, y realizar una rotación, de $\frac{\pi}{6}$ radianes, a los ejes trasladados, entonces la ecuación de la hipérbola $x^2 - y^2 = 4$ se transforma en:

a. $x^2 - 2\sqrt{3}xy - y^2 + \left(10\sqrt{3} - 4\right)x + \left(10 + 4\sqrt{3}\right)y - 20\sqrt{3} - 29 = 0$

b. $x^2 + 2\sqrt{3}xy - y^2 - \left(10\sqrt{3} - 4\right)x + \left(10 + 4\sqrt{3}\right)y - 20\sqrt{3} - 29 = 0$

c. $x^2 - 2\sqrt{3}xy - y^2 - \left(10\sqrt{3} - 4\right)x - \left(10 + 4\sqrt{3}\right)y - 20\sqrt{3} - 29 = 0$

d. $x^2 + 2\sqrt{3}xy - y^2 + \left(10\sqrt{3} - 4\right)x + \left(10 + 4\sqrt{3}\right)y + 20\sqrt{3} - 29 = 0$

16. Un motociclista está ubicado en la posición $\left(\frac{48}{5}, \frac{36}{5}\right)$ y debe llegar como máximo en 2 minutos, a una autopista recta de ecuación $4x + 3y = 30$, siguiendo un camino recto. ¿A qué velocidad mínima debe ir?

a. 3 km/h

b. 360 km/h

c. 180 km/h

d. 6 km/h

Conexión histórica

Secciones cónicas

Después de los *Elementos* de Euclides, se llegó a la segunda cumbre en la geometría clásica griega alrededor de los 200 a. C. con el trabajo sobre las secciones cónicas de Apolonio (262-190 a.C.). Las secciones cónicas han evolucionado, no solamente dentro de las Matemáticas, sino en muchos y variados contextos. Las aplicaciones de las cónicas son diversas, por ejemplo, las propiedades de reflexión de la elipse son aprovechadas en la destrucción de los cálculos renales y también las de la parábola en las antenas parabólicas. Para realizar ciertos movimientos mecánicos de los robots, se necesitan engranes elípticos. La hipérbola es aprovechada en navegación (sistemas Navegadores Decca). Sin apenas darnos cuenta, de muchas maneras las secciones cónicas son parte de nuestra vida diaria (arquitectura, arte, naturaleza).

Sin embargo, no siempre la geometría evolucionaba en sus objetos de estudio y en sus métodos. Después del final de la civilización griega hasta la época medieval, pocos avances hubo en geometría; en el período medieval las Matemáticas comienzan nuevos caminos –álgebra y trigonometría– de la mano de indios y árabes, y la geometría (griega) apenas tiene nuevos aportes de la humanidad. En el llamado mundo Occidente, a pesar de que la geometría es una de las siete artes liberales, las escuelas y universidades se limitan a enseñar los *Elementos* de Euclides.

La aparición de la geometría cartesiana marca la geometría en la Edad Moderna. Descartes propone un nuevo método de resolver problemas geométricos y, por extensión, de investigar en geometría.

Existe controversia sobre el verdadero padre de este método. Lo único cierto es que se publica por primera vez como *Geometría analítica*, apéndice al *Discurso del método*, de Descartes, si bien se sabe que Pierre de Fermat conocía y utilizaba el método antes de su publicación por Descartes, y que incluso el matemático árabe Omar Khayyam ya utilizara un método muy parecido, en el siglo XI, para determinar ciertas intersecciones entre curvas.

Lo novedoso de la geometría analítica (como también se conoce a este método) es que permite representar figuras geométricas mediante fórmulas del tipo $g(x, y) = 0$, donde g representa una función de dos variables. Esto convertía toda la geometría griega en el estudio de las relaciones que existen entre polinomios de grados 1 y 2. ■

Reflexiona

1. ¿Cuál fue el aporte del método cartesiano a la geometría griega?

   ....

2. ¿Qué relación existe entre algunos lugares geométricos planos y polinomios en dos variables de primer y segundo grado?

Glosario

Asíntota: recta a la cual se aproxima indefinidamente una curva.

Cónicas degeneradas: punto, recta o rectas que se determinan cuando el plano que interseca al cono pasa por el vértice de este.

Directriz: recta o rectas asociadas a una cónica, tal que la distancia de un punto de la cónica a dicha recta está en una relación constante con la distancia desde ese punto al foco.

Discriminante: número que permite clasificar las secciones cónicas, representado por la expresión $B^2 - 4\,AC$.

Elipse: conjunto de puntos (x, y) tal que la suma de las distancias de (x, y) a dos puntos fijos, llamados focos, es constante.

Foco: punto o puntos asociados a una cónica.

Generatriz: línea que genera una superficie como un cono o un cilindro.

Hipérbola: conjunto de puntos (x, y) con la propiedad de que la diferencia positiva entre las distancias de (x, y) y cada uno de dos puntos fijos (distintos), llamados focos, es constante.

Parábola: conjunto de puntos (x, y) equidistantes de un punto fijo llamado foco y de una recta fija (que no contiene al foco) llamada directriz.

Secciones cónicas: curvas que resultan de la intersección de un plano con la superficie de un cono.

Razonamiento

1. Se tienen tres circunferencias de radio 8, tangentes y una a continuación de la otra, como se muestra en la figura 5.48.

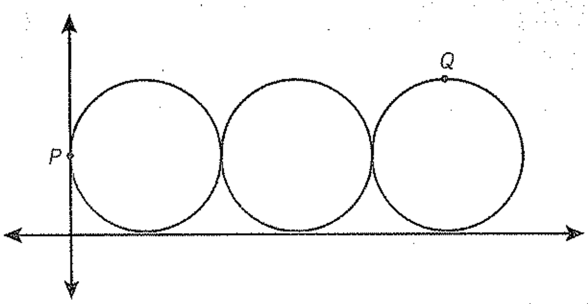


Figura 5.48

¿Cuál es la longitud del recorrido más corto para ir desde el punto P al punto Q, sobre las circunferencias?

a. 16π cm

b. 18π cm

c. 20π cm

d. 22π cm

2. ¿Cuál es el área del sector circular mostrado en la figura 5.49?

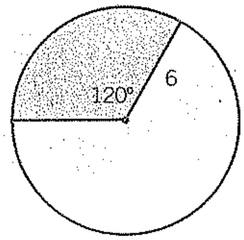


Figura 5.49

a. $\frac{7\pi}{3}$

b. $\frac{14\pi}{3}$

c. $\frac{49\pi}{3}$

d. $\frac{49\pi}{9}$

3. ¿Cuál es la longitud del segmento AC, si BC es radio de la circunferencia y el segmento AB es tangente a la circunferencia?

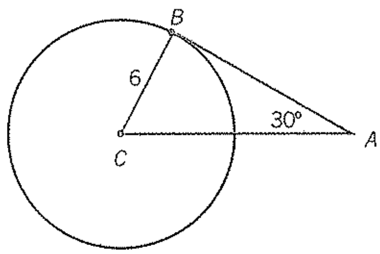


Figura 5.50

a. $3\sqrt{2}$

b. $2\sqrt{3}$

c. $6\sqrt{2}$

d. 12

>Vectores

En 1637, un abogado francés aficionado a las Matemáticas conjeturó: "Si n es un número natural mayor que 2, entonces la ecuación $x^n + y^n = z^n$ no tiene solución, para x, y, z números enteros no nulos". Esta conjetura fue llamada "El último teorema de Fermat".

Leonard Euler conjeturó un resultado similar al último teorema de Fermat: "No existen soluciones natu-

Estándares:

Conexiones

Relacionar conceptos

Utilizar la noción de vector para comprender los conceptos de orientación y descomposición de una fuerza.

Comunicación

Leer, escribir y comunicar

Argumentar correctamente el desarrollo vectorial en la resolución de un problema.

rales no triviales para la ecuación $x^4 + y^4 + z^4 = w^4$ " (las soluciones triviales son aquellas en las que algunos de los enteros, x, y, z, son iguales a 0). Esta conjetura permaneció sin resolver por cerca de 200 años, hasta que Naom Elkies, de la Universidad de Harvard, en 1988, dio el siguiente contraejemplo: $(2\,682\,440)^4 + (15\,365\,639)^4 + (18\,796\,760)^4 = (20\,615\,673)^4$.

En 1994, después de 350 años de la aparición de la conjetura de Fermat, Andrew Wiles, un matemático de la Universidad de Cambridge, demostró (en cerca de 100 páginas) el último teorema de Fermat.

Otra gran conjetura, solucionada en el siglo XX fue la conjetura de los cuatro colores: "En un plano no se necesitan más de cuatro colores para colorear un mapa de manera que dos regiones vecinas (que comparten una frontera) no quedan coloreadas del mismo color". Esta conjetura surgió de la inquietud de un estudiante universitario de Londres, Francis Guthrie en 1852.

En 1976, Kenneth Appel y Wolfgang Haken, de la Universidad de Illinois, con la ayuda de los mejores computadores de la época lograron probar el resultado. Usaron los computadores durante más de 1300 horas, convirtiendo este caso en el primero de la historia de la matemática en donde se han empleado cálculos computacionales.

Como era de esperarse, la demostración no fue aceptada por un gran número de matemáticos, ya que argumentaban que no era una demostración formal; decían que la máquina había comprobado que una gran cantidad de mapas podían colorearse usando a lo más cuatro colores, pero ¿que tal si existía un mapa que el computador no hubiera contemplado, que no podía colorearse de esa forma?

La discusión continuó por veinte años, hasta que en 1996 los matemáticos Neit Robertson, Daniel Sanders, Paul Seymour y Robin Thomas, de la Escuela de Matemáticas del Instituto Tecnológico de Georgia, en Estados Unidos, publicaron una demostración de esa conjetura.

Analiza y resuelve

De acuerdo con la lectura anterior, responde.

1. La conjetura que duró más de 250 años para ser demostrada fue:
   - **a.** La conjetura de los cuatro colores.
   - **b.** El último teorema de Fermat.
   - **c.** La conjetura de Euler.
   - **d.** La conjetura de Appel.
2. El matemático que demostró el último teorema de Fermat fue:
   - **a.** Francis Guthrie.
   - **b.** Neit Robertson.
   - **c.** Naom Elkies.
   - **d.** Andrew Wiles.
3. Acerca de la conjetura de Euler puede afirmarse que:
   - **a.** No es un teorema porque existe un ejemplo para el cual esa afirmación es verdadera.
   - **b.** Existe un contraejemplo de esa conjetura.
   - **c.** Fue demostrada por Andrew Wiles.
   - **d.** No está demostrada actualmente.
4. Pon en práctica el teorema de los cuatro colores en el mapa de la figura 6.1.

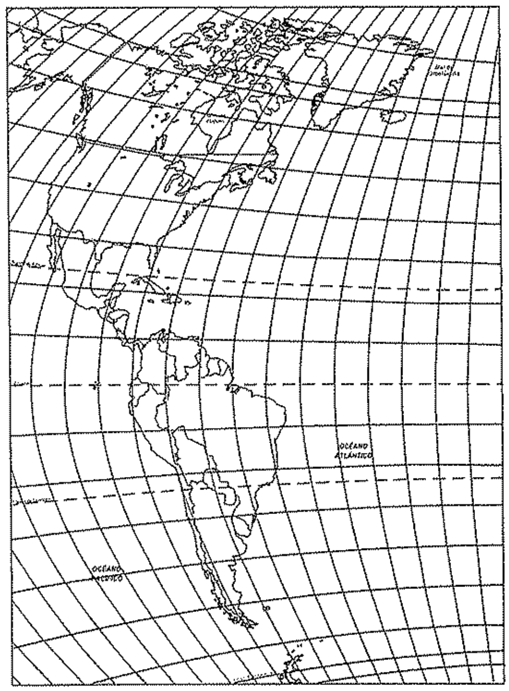


Figura 6.1

Razonamiento lógico

Desarrollar destrezas matemáticas

Realizar construcciones vectoriales que involucran estructuras geométricas, algebraicas, de orden y métricas.

Resolución de problemas

Emplear estrategias en la resolución de problemas

Resolver problemas geométricos en forma vectorial, describiendo, con una ecuación vectorial, alguna condición geométrica.

1 > Vectores en el plano

Lección

Pensamiento espacial

Logro: diferenciar magnitudes vectoriales de magnitudes escalares.

Los vectores son parte de nuestra vida cotidiana. Por ejemplo, un reporte meteorológico en una ciudad costera dice: "La temperatura en la madrugada fue de 4 °C y el viento sopló desde el noreste a 18 km/h". El reporte se compone de dos informaciones: la primera (temperatura) se expresó con un solo valor numérico (4 °C), mientras que la segunda requirió dos valores: uno numérico (su magnitud: 18 km/h) y otro una dirección (noreste). La temperatura es un ejemplo de una magnitud escalar y la dirección del viento es una magnitud vectorial.

Otros sucesos que requieren los vectores para expresar su información se observan en la tabla 6.1.

Magnitud	Ejemplo
Desplazamiento: un objeto se mueve cierta distancia en determinada dirección.	• Un ciclista sigue un trayecto que se encuentra 2 km al suroeste. • Una grúa hala un automóvil por la autopista. • Un bateador lanzó la bola de béisbol a 100 m en la línea izquierda del campo.
Fuerza: se ejerce al "empujar" o "halar" un objeto en cierta dirección.	• Un individuo empuja una caja sobre el piso. • Se requieren 25 libras de fuerza para levantar una caja que se encuentra en el piso. • Una fuerza de 12 newtons se aplica sobre la manija de un gato mecánico. (Un newton es una unidad de fuerza utilizada en Física: $1N \approx 0{,}22$ libras).
Velocidad: un objeto viaja en una dirección con cierta rapidez.	• Una brisa está soplando a 21km/h desde el noroeste. • Un avión viaja a 10 000 metros de altura con una rapidez de 400 km/h en dirección sureste.

Tabla 6.1

Comentario

Cuando se habla de fuerza, el origen del vector corresponde al punto donde se aplica la fuerza.

Sean A y B dos puntos en una recta l, en l se determina un segmento de extremos A y B que denotamos por $\overline{AB}$ o $\overline{BA}$. Este segmento conserva la misma dirección que l. Ahora bien, si imaginamos una partícula que se mueve sobre la recta l entre los puntos A y B, para describir el desplazamiento de la partícula es necesario distinguir si la partícula va de A hacia B o desde B hacia A. El desplazamiento de la partícula desde A hasta B se denota $\overrightarrow{AB}$, mientras que el desplazamiento de B hacia A se simboliza $\overrightarrow{BA}$. Los dos segmentos dirigidos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BA}$ son paralelos por tener la misma dirección que l, ambos tienen la misma longitud del segmento $\overline{AB}$; sin embargo, se distinguen en el sentido en que son recorridos, mientras $\overrightarrow{AB}$ es recorrido de A hacia B, $\overrightarrow{BA}$ es recorrido de B hacia A (tienen sentidos opuestos).

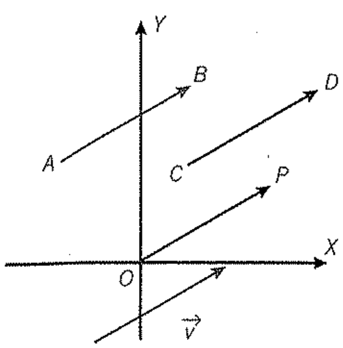


Figura 6.2

Sean A y B dos puntos en el plano. ***El segmento de recta dirigido de A hacia B****, denotado $\overrightarrow{AB}$, se denomina* ***vector*** *de punto inicial A y punto final B. La* ***magnitud*** *del vector $\overrightarrow{AB}$ es la longitud del segmento $\overline{AB}$ y se simboliza $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$.*

Dos vectores son ***equivalentes****, si y sólo si, tienen la misma magnitud, dirección y sentido.*

Los vectores de la figura 6.2, son equivalentes y se representan con el vector $\overrightarrow{OP}$, que es el vector con punto inicial el origen del plano cartesiano.

Un vector con su punto inicial en el origen del plano cartesiano está en ***posición estándar****.*
La ***dirección*** *de un vector en posición estándar (y de todos los vectores equivalentes con él) es el ángulo dirigido (medido a partir del eje positivo de las X) formado entre el eje positivo de las X y la recta que contiene al vector.*

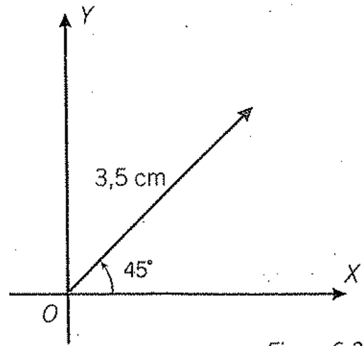


Figura 6.3

El vector de la figura 6.3 tiene una magnitud de 3,5 cm y una dirección de 45°.

Un vector en posición estándar $\overrightarrow{OP}$ se representa algebraicamente con la pareja ordenada de su punto terminal, esto es, si las coordenadas cartesianas del punto P son (a, b), entonces escribimos $\overrightarrow{OP} = (a, b)$. Por facilidad utilizaremos una de las siguientes representación para $\overrightarrow{OP}$: P, o, $\vec{P}$.

Un vector en el plano se describe cartesianamente de la siguiente manera:

Sea $P_1 = (x_1, y_1)$ el punto inicial y $P_2 = (x_2, y_2)$ el punto final del vector $\overrightarrow{P_1P_2}$.
El ***vector equivalente*** *a $\overrightarrow{P_1P_2}$ en posición estándar es $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$,*
es decir, el vector con punto inicial $(0, 0)$ y punto final $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.
Aplicando el teorema de Pitágoras obtenemos la ***magnitud*** *del $\overrightarrow{P_1P_2}$:*

$$\left\|\overrightarrow{P_1P_2}\right\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} .$$

La ***dirección*** *del $\overrightarrow{P_1P_2}$ es el ángulo orientado positivamente, formado con el eje positivo de las X (ver figura 6.4).*

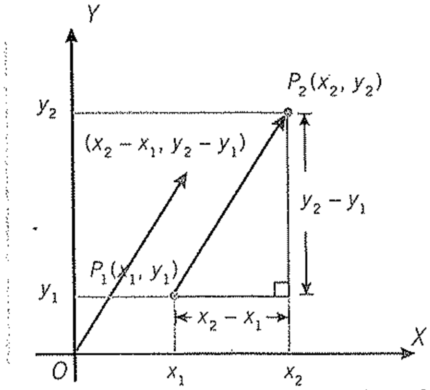


Figura 6.4

Ejemplo 1

Verifiquemos que los vectores $\vec{u}$, $\overrightarrow{OR}$ y $\vec{w}$ de la figura 6.5 son equivalentes.

Solución

Los tres vectores tienen el mismo sentido. Falta verificar que las magnitudes y direcciones son iguales (*ver* tabla 6.2).

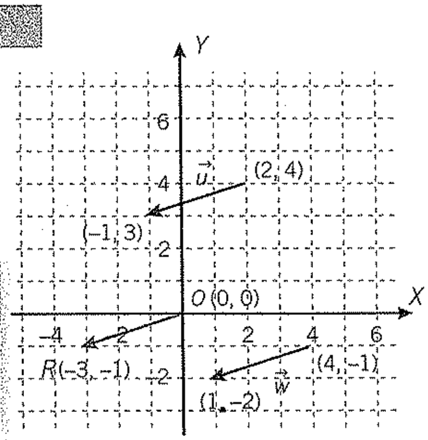


Figura 6.5

Vector	Magnitud	Dirección (basta calcular las pendientes de las rectas que los contienen)
$\vec{u}$	$\left\|\vec{u}\right\| = \sqrt{[2-(-1)]^2 + (4-3)^2} = \sqrt{10}$	$\dfrac{4-3}{2-(-1)} = \dfrac{1}{3}$
$\overrightarrow{OR}$	$\left\|\overrightarrow{OR}\right\| = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$	$\dfrac{0-(-1)}{0-(-3)} = \dfrac{1}{3}$
$\vec{w}$	$\left\|\vec{w}\right\| = \sqrt{(4-1)^2 + [-1-(-2)]^2} = \sqrt{10}$	$\dfrac{-1-(-2)}{4-1} = \dfrac{1}{3}$

Tabla 6.2

> Adición y sustracción de vectores

Para adicionar gráficamente dos vectores, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ (*ver* figura 6.6(a)), los colocamos haciendo coincidir sus puntos iniciales; luego formamos un paralelogramo que tenga en dos de sus lados a $\vec{v}$ y $\vec{w}$ (*ver* figura 6.6(b)); la diagonal del paralelogramo trazada desde el punto inicial de estos vectores es el vector suma (*ver* figura 6.6(c)).

Para sustraer gráficamente los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ de la figura 6.6(a), realizamos el mismo procedimiento descrito anteriormente, pero el vector diferencia será el vector que une los puntos finales de los dos vectores, es decir, el vector que corresponde a la otra diagonal del paralelogramo (*ver* figura 6.7).

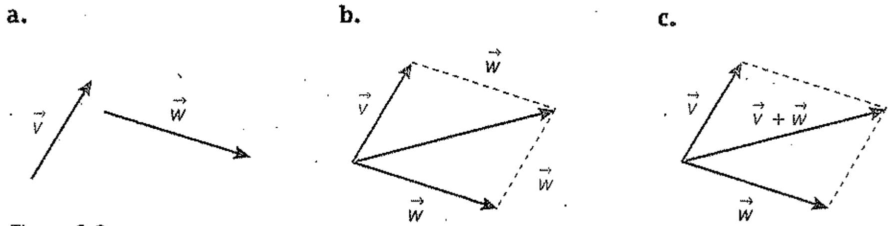


Figura 6.6

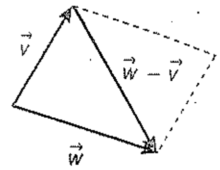


Figura 6.7

Pensamiento crítico

De acuerdo con la figura 6.7, ¿cuál es la diferencia, si la hay, del vector $\vec{w} - \vec{v}$ y $\vec{v} - \vec{w}$?

Comentario

La suma de dos o más vectores se llama el resultante de los vectores.

Si utilizamos un sistema de coordenadas cartesianas para representar los vectores en posición estándar, su suma corresponde a la suma de las parejas ordenadas de los puntos terminales de los vectores; en otras palabras:

$$\textit{Si } \vec{u} = (a, b), \vec{v} = (c, d), \textit{ entonces } \vec{u} + \vec{v} = (a + c, b + d).$$

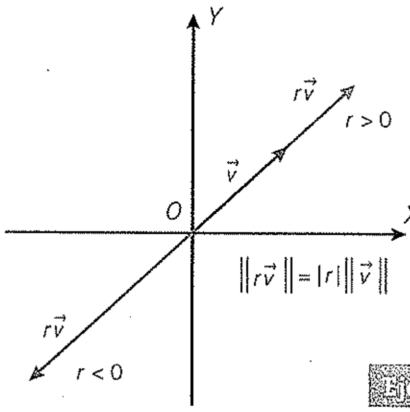


Figura 6.8

> Multiplicación de un escalar (número real) por un vector

La multiplicación del escalar r con el vector $\vec{v}$ es un vector que tiene la misma dirección que $\vec{v}$ y magnitud igual a $|r|\|\vec{v}\|$ (*ver* figura 6.8). Simbolizaremos este vector con $r\vec{v}$.

$$\textit{Si } \vec{u} = (a, b) \textit{ y } r \in \mathbf{R}, \textit{ entonces } r\vec{u} = (ra, rb).$$

Ejemplo 2

Consideremos los vectores $\vec{u} = (-3, 4)$ y $\vec{v} = (2\sqrt{2}, 1)$. Hallemos:

a. $3\vec{u}$ y comparemos $3\|\vec{u}\|$ con $\|3\vec{u}\|$.

b. $-2\vec{v}$ y comparemos $|-2|\|\vec{v}\|$ con $\|-2\vec{v}\|$.

c. $3\vec{u} - 2\vec{v}$.

d. $\|\vec{u} + \vec{v}\|$ y comparemos con $\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.

Solución

a. $3\vec{u} = 3(-3, 4)$ — Reemplazamos $r = 3$ y $\vec{u} = (-3, 4)$ en $r\vec{u} = (ra, rb)$.

$= (-9, 12)$ — Efectuamos las multiplicaciones indicadas.

$\|\vec{u}\| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$ — Hallamos la magnitud de $\vec{u}$.

Reemplazamos $\|\vec{u}\| = 5$ en $3\|\vec{u}\|$ y obtenemos que $3\|\vec{u}\| = 15$.

Por otra parte,

$\left\|3\vec{u}\right\| = \sqrt{(-9)^2 + 12^2} = 15$ Calculamos la magnitud de $3\vec{u} = (-9, 12)$.

Por tanto, $\left\|3\vec{u}\right\| = 3\left\|\vec{u}\right\|$.

b. $-2\vec{v} = -2(2\sqrt{2}, 1)$ Reemplazamos $r = -2$ y $\vec{v} = (2\sqrt{2}, 1)$ en $r\vec{v} = (ra, rb)$.

$= \left(-4\sqrt{2}, -2\right)$ Efectuamos las multiplicaciones indicadas.

$\left\|\vec{v}\right\| = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + 1^2} = 3$ Hallamos la magnitud de $\vec{v}$.

Por tanto, $|-2|\left\|\vec{v}\right\| = 2 \times 3 = 6$.

Por otro lado,

$\left\|-2\vec{v}\right\| = \sqrt{(-4\sqrt{2})^2 + (-2)^2} = 6$ Calculamos la magnitud de $-2\vec{v} = -2(2\sqrt{2}, 1)$.

Así, $|-2|\left\|\vec{v}\right\| = \left\|-2\vec{v}\right\|$.

c. $(-9, 12) + (-4\sqrt{2}, -2)$ Reemplazamos $3\vec{u} = (-9, 12)$ y $-2\vec{v} = (-4\sqrt{2}, -2)$ en $3\vec{u} - 2\vec{v}$.

$= (-9 - 4\sqrt{2}, 12 - 2)$ Efectuamos las operaciones indicadas.

$= (-9 - 4\sqrt{2}, 10)$ Simplificamos.

d. $\left\|\vec{u} + \vec{v}\right\| = \sqrt{\left(-3+2\sqrt{2}\right)^2 + 5^2}$ Hallamos la magnitud de $\vec{u} + \vec{v} = \left(-3 + 2\sqrt{2}, 5\right)$.

$= \sqrt{9 - 12\sqrt{2} + 8 + 25}$ Simplificamos el radicando.

$\approx 5{,}003$ Aproximamos el valor de la raíz.

De los literales anteriores tenemos que $\left\|\vec{u}\right\| = 5$ y $\left\|\vec{v}\right\| = 3$, por tanto,

$\left\|\vec{u}\right\| + \left\|\vec{v}\right\| = 8$, luego $\left\|\vec{u} + \vec{v}\right\| \leq \left\|\vec{u}\right\| + \left\|\vec{v}\right\|$. ◄

*La **desigualdad** $\left\|\vec{u} + \vec{v}\right\| \leq \left\|\vec{u}\right\| + \left\|\vec{v}\right\|$ se llama **triangular** y significa que con los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se puede construir un triángulo donde el tercer lado es $\vec{u} + \vec{v}$.*

Comentario

Con tres segmentos se puede construir un triángulo siempre que la suma de la longitud de dos lados cualquiera de ellos, sea mayor que la longitud del tercer lado.

> Descomposición canónica cartesiana de un vector en el plano

El vector $\vec{v} = (a, b)$, en posición estándar, podemos escribirlo así:

$\vec{v} = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = a(1, 0) + b(0, 1)$.

Denotamos los vectores (1, 0) y (0, 1) con los símbolos $\vec{i}$ y $\vec{j}$, respectivamente.

$\vec{i}$ y $\vec{j}$ se denominan vectores básicos canónicos del plano; todo vector $\vec{u}$ en el plano se puede escribir en la forma $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$, es decir, el vector $\vec{u}$ es una combinación lineal de los vectores $\vec{i}$ y $\vec{j}$; los escalares a y b son las coordenadas de $\vec{u}$ en la base canónica $\left\{\vec{i}, \vec{j}\right\}$.

> Piensa y practica <

> Razonamiento lógico

1. Traza dos vectores en posición estándar, llámalos A y B.

a. Completa el paralelogramo para hallar gráficamente la suma de estos vectores (el resultante).

b. En el mismo diagrama dibuja el vector $-B$.

c. Encuentra el resultante de los vectores A y $-B$.

d. Halla, una diagonal del paralelogramo que represente un vector equivalente al vector $A - B$.

e. Respecto al paralelogramo formado por los vectores A y B, escribe una regla general para trazar los vectores suma $A + B$ y diferencia $A - B$.

2. Determina si cada pareja de vectores son equivalentes. Utiliza los puntos siguientes como iniciales o terminales, según corresponda:

$A_1 = (-2, 2)$; $A_2 = (3, 4)$; $A_3 = (-2, 5)$; $A_4 = (-1, -1)$; $A_5 = (-4, 1)$; $A_6 = (2, 1)$; $A_7 = (-4, 4)$; $A_8 = (1, 2)$; $A_9 = (-6, -3)$; $A_{10} = (3, 1)$; $A_{11} = (-3, -3)$; $A_{12} = (0, 0)$.

a. $\overrightarrow{A_7A_5}$, $\overrightarrow{A_2A_{10}}$ **b.** $\overrightarrow{A_4A_{10}}$, $\overrightarrow{A_1A_2}$

c. $\overrightarrow{A_4A_{11}}$, $\overrightarrow{A_2A_8}$ **d.** $\overrightarrow{A_5A_7}$, $\overrightarrow{A_2A_{10}}$

e. $\overrightarrow{A_7A_1}$, $\overrightarrow{A_2A_8}$ **f.** $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_9A_4}$

g. $\overrightarrow{A_4A_{10}}$, $\overrightarrow{A_{12}A_6}$ **h.** $\overrightarrow{A_3A_7}$, $\overrightarrow{A_6A_{12}}$

> Resolución de problemas

3. Un estudiante vive cerca del colegio. La ruta escolar lo recoge en su casa y viaja una distancia de 3 km en dirección norte, luego la ruta gira 90° a la izquierda y recorre un trayecto de 4 km y llega al colegio.

a. Representa los desplazamientos del recorrido en un diagrama vectorial (diagrama cartesiano, con vectores).

b. Si denominas el desplazamiento como la resultante de los dos desplazamientos (aunque efectivamente la ruta no pueda realmente hacer este recorrido), ¿cuál es la magnitud de esta resultante?

4. El hexágono $ABCDE$ de la figura 6.9 es regular.

Da ejemplos de vectores que sean:

a. Equivalentes.

b. Paralelos pero de diferente magnitud.

c. De igual magnitud pero no paralelos.

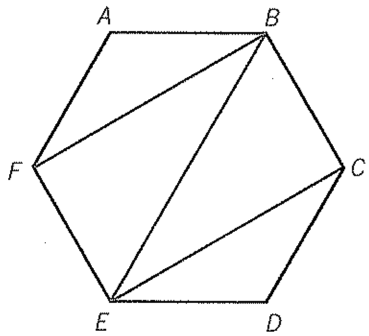


Figura 6.9

5. Utiliza una regla y un transportador para hallar la magnitud (en centímetros) y dirección (en grados) de cada uno de los vectores de la figura 6.10.

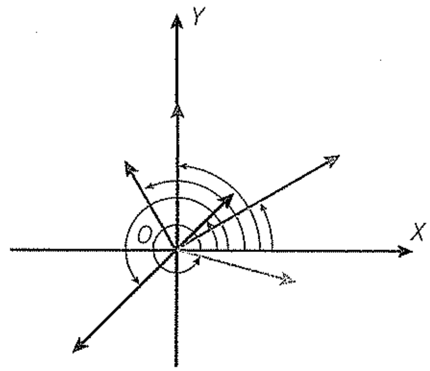


Figura 6.10

> Conexiones

6. Sean $\vec{r}$, $\vec{s}$, $\vec{t}$ y $\vec{u}$ como se muestran en la figura 6.11 (la línea punteada indica el eje X positivo). Halla la magnitud y dirección de cada resultante.

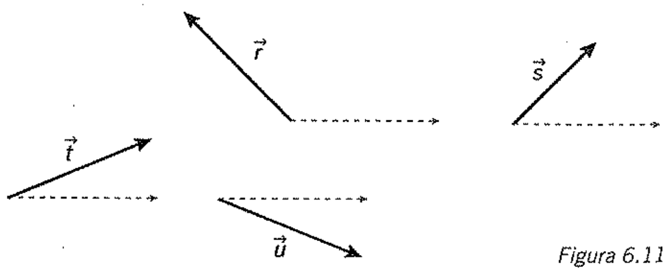


Figura 6.11

a. $\vec{s} + \vec{u}$ **b.** $\vec{r} - \vec{s}$

c. $2\vec{t} + \vec{u}$ **d.** $\frac{1}{2}\vec{r} + \vec{u}$

e. $2\vec{s} + \vec{r} - \vec{s}$

7. Verifica la desigualdad triangular para cada pareja de vectores.

a. $\vec{u} = (-3, 4)$; $\vec{v} = (0, 5)$

b. $\vec{u} = (-\sqrt{3}, \sqrt{6})$; $\vec{v} = (\sqrt{3}, 0)$

c. $\vec{u} = (-1, 1)$; $\vec{v} = (1, -1)$

Vectores en el espacio

Logro: identificar un vector en el espacio mediante sus cosenos directores y su longitud, y utilizarlo para representar vectorialmente una recta en el espacio.

Un vector $\vec{u}$ en posición estándar, en el espacio tridimensional euclidiano $\mathbf{R}^3$, se describe algebraicamente mediante las coordenadas cartesianas de su extremo $P = (a, b, c)$: $\overrightarrow{OP} = \vec{u} = (a, b, c)$ (*ver* figura 6.12).

El vector $\vec{u} = (a, b, c)$ se representa de la siguiente manera:

$\vec{u} = a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1)$, es decir, $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$, donde $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ y $\vec{k} = (0, 0, 1)$.

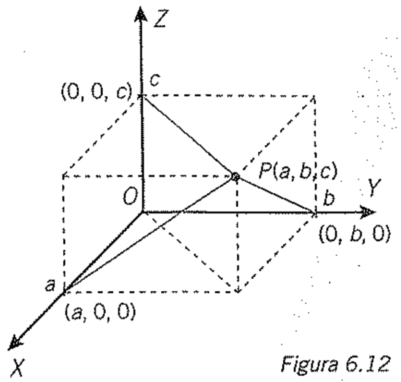


Figura 6.12

*$\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ se denominan **vectores básicos canónicos del espacio**; todo vector $\vec{u}$ en el espacio se puede escribir en la forma $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$, es decir, el vector $\vec{u}$ es una **combinación lineal** de los vectores $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$; los escalares a, b y c son las coordenadas de $\vec{u}$ en la base canónica $\left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$.*

Un vector en el espacio también puede escribirse en función de su magnitud y del coseno de los ángulos que forma con los ejes coordenados positivos (*ver* figura 6.13).

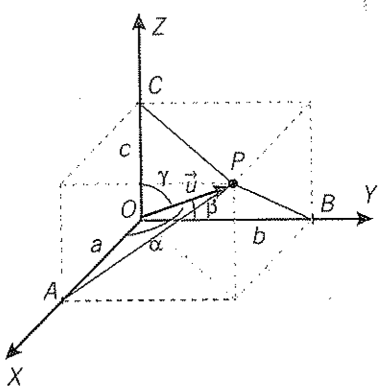


Figura 6.13

Los $\triangle OAP$, $\triangle OBP$ y $\triangle OCP$, son triángulos rectángulos con ángulo recto en *A*, *B* y *C*, respectivamente. La magnitud del vector $\vec{u}$ es $\left\|\vec{u}\right\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, aplicando la función coseno a los ángulos α, β y γ, en estos triángulos, respectivamente, obtenemos: $\cos\alpha = \dfrac{a}{\left\|\vec{u}\right\|}$, $\cos\beta = \dfrac{b}{\left\|\vec{u}\right\|}$ y $\cos\gamma = \dfrac{c}{\left\|\vec{u}\right\|}$.

*Los ángulos α, β y γ, formados por el vector $\vec{u}$ con los ejes coordenados cartesianos positivos, se denominan **ángulos directores**; $\cos\alpha$, $\cos\beta$ y $\cos\gamma$, determinan la dirección del vector $\vec{u}$ y se llaman **cosenos directores** de $\vec{u}$.*

Ejemplo 3

¿Cuáles son las componentes de un vector de longitud 5 y ángulos directores $\alpha = 135°$, $\beta = 60°$ y $\gamma = 60°$?

Solución

Sea $\vec{u}$ el vector buscado, entonces $\left\|\vec{u}\right\| = 5$; por tanto:

$a = 5\cos 135° = -5\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ Despejamos *a* de $\cos\alpha = \dfrac{a}{\left\|\vec{u}\right\|}$.

$b = 5\cos 60° = \dfrac{5}{2}$ Despejamos *b* de $\cos\beta = \dfrac{b}{\left\|\vec{u}\right\|}$.

$c = 5 \cos 60° = \frac{5}{2}$ Despejamos c de $\cos \gamma = \frac{c}{\left\|\vec{u}\right\|}$.

Es decir, $\vec{u} = \left(-5\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$. ◄

> Operaciones con vectores en el espacio

La suma de vectores en el espacio da nuevamente un vector en el espacio, y multiplicar un vector espacial por un número real da como resultado otro vector espacial.

Si $\vec{u} = (a, b, c)$, $\vec{v} = (x, y, z)$, *entonces* $\vec{u} + \vec{v} = (a + x, b + y, c + z)$.

Si $\vec{u} = (a, b, c)$, $r \in \mathbf{R}$, *entonces* $r\vec{u} = (ra, rb, rc)$.

Si $\vec{u} = (a, b, c)$, $\vec{v} = (x, y, z)$, *entonces la distancia entre los vectores* $\vec{u}$ *y* $\vec{v}$ *es la magnitud del vector diferencia* $\vec{u} - \vec{v}$, *es decir,*

$$dist\left(\vec{u}, \vec{v}\right) = \left\|\vec{u} - \vec{v}\right\| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}.$$

Ejemplo 4

Sean $\vec{u} = (1, 2, 3)$, $\vec{v} = (3, 0, 4)$, $\vec{w} = (2, 1, 0)$. Calculemos:

a. $\vec{u} + \vec{v}$ **b.** $\vec{v} + \vec{w}$ **c.** $\vec{u} - \vec{v}$

d. $\vec{u} - \vec{v} - \vec{w}$ **e.** $\vec{u} - \left(\vec{v} + \vec{w}\right)$ **f.** $2\vec{u}$

g. $2\vec{v}$ **h.** $2(\vec{u} + \vec{v})$

Solución

a. $\vec{u} + \vec{v} = (1 + 3, 2 + 0, 3 + 4) = (4, 2, 7)$

b. $\vec{v} + \vec{w} = (3 + 2, 0 + 1, 4 + 0) = (5, 1, 4)$

c. $\vec{u} - \vec{v} = (1 - 3, 2 - 0, 3 - 4) = (-2, 2, -1)$

d. $\left(\vec{u} - \vec{v}\right) - \vec{w}$ Aplicamos la propiedad asociativa en $\vec{u} - \vec{v} - \vec{w}$.

$= \left((1, 2, 3) - (3, 0, 4)\right) - (2, 1, 0)$ Describimos cada vector algebraicamente.

$= (-2, 2, -1) - (2, 1, 0)$ Reemplazamos el valor encontrado en (c).

$= (-4, 1, -1)$ Hallamos el resultante.

e. $\vec{u} - (5, 1, 4)$ Reemplazamos el valor obtenido en (b).

$= (1, 2, 3) - (5, 1, 4)$ Describimos algebraicamente al $\vec{u}$.

$= (-4, 1, -1)$ Hallamos el resultante.

f. $2\vec{u} = (2, 4, 6)$ Multiplicamos por 2 cada componente de $\vec{u}$.

g. $2\vec{v} = (6, 0, 8)$

h. $2\left(\vec{u} + \vec{v}\right) = 2(4, 2, 7) = (8, 4, 14)$

De los resultados obtenidos en (d) y (e) podemos deducir que $\vec{u} - \vec{v} - \vec{w} = \vec{u} - \left(\vec{v} + \vec{w}\right)$, y de (f), (g) y (h), tenemos que $2\left(\vec{u} + \vec{v}\right) = 2\vec{u} + 2\vec{v}$. ◄

Resumamos las propiedades de la adición y sustracción entre vectores y escalares, válidas para todos los $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ y todos los escalares k_1 y k_2.

1. $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$
2. $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)+\vec{w}=\vec{u}+\left(\vec{v}+\vec{w}\right)$
3. $\vec{u}+0=\vec{u}$
4. $\vec{u}+(-\vec{u})=0$
5. $k_1(\vec{u}+\vec{v})=k_1\vec{u}+k_1\vec{v}$
6. $(k_1+k_2)\vec{u}=k_1\vec{u}+k_2\vec{u}$
7. $(k_1k_2)\vec{u}=k_1(k_2\vec{u})=k_2(k_1\vec{u})$

Ejemplo 5

Hallemos la ecuación vectorial de la recta que pasa por el punto $\overrightarrow{P_0}=(x_0, y_0, z_0)$ y tiene la misma dirección del vector $\vec{v}=(a, b, c)$.

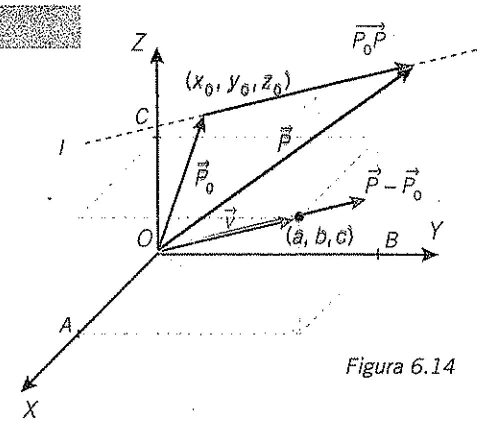


Figura 6.14

Solución

Si $\vec{P}=(x, y, z)$ es un punto de la recta, entonces el vector $\overrightarrow{P_0P}$ tiene la misma dirección del vector $\vec{v}$ (*ver* figura 6.14), por tanto, existe un número real t, tal que $\overrightarrow{P_0P}=t\vec{v}$ (ya que son vectores paralelos).

Como $\overrightarrow{P_0P}=\vec{P}-\overrightarrow{P_0}=(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$, entonces $\vec{P}-\vec{P_0}=t\vec{v}$, es decir, cualquier punto $\vec{P}$ de la recta es de la forma $\vec{P}=\overrightarrow{P_0}+t\vec{v}$. ◄

*La **ecuación vectorial** de la recta que pasa por el punto $\overrightarrow{P_0}=(x_0, y_0, z_0)$ y tiene la dirección del vector $\vec{v}$ es $\vec{P}(t)=\overrightarrow{P_0}+t\vec{v}$, donde $t\in\mathbf{R}$.*

De la ecuación $\vec{P}-\overrightarrow{P_0}=t\vec{v}$, que equivale a $(x-x_0, y-y_0, z-z_0)=(ta, tb, tc)$, obtenemos las ecuaciones cartesianas:

$$\begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \\ z = z_0 + tc \end{cases}$$

Ejemplo 6

Encontremos la ecuación vectorial y las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por:

a. El punto (1, 2, 3) y tiene vector director $\vec{v}=2\vec{j}+5\vec{k}$.

b. Los puntos $P_1(1, 3, -1)$ y $P_2(-2, -4, 3)$.

Solución

a. $\vec{v}=(0, 2, 5)$ — Describimos algebraicamente $\vec{v}=2\vec{j}+5\vec{k}$.

$\vec{P}(t)=(1, 2, 3)+t(0, 2, 5)$ — Utilizamos $\vec{P}(t)=\overrightarrow{P_0}+t\vec{v}$ para hallar la ecuación vectorial de la recta.

$\vec{P}(t)=(1+0t, 2+2t, 3+5t)$ — Efectuamos la multiplicación y adición correspondientes.

$x=1$; $y=2+2t$ y $z=3+5t$ — Igualamos $(x, y, z)=(1+0t, 2+2t, 3+5t)$.

Comentario

El conjunto de ecuaciones cartesianas recibe el nombre de sistema de ecuaciones paramétricas cartesianas de la recta.

Comentario

En el espacio euclidiano dos rectas son paralelas si tienen vectores directores paralelos, es decir, si el uno es múltiplo del otro.

b. El primer paso que debemos dar es hallar un vector director para la recta que pasa por los puntos P_1 y P_2; este vector es $\overrightarrow{P_1P_2}$ o cualquier vector paralelo a él. Ahora bien, empleando el resultado del ejemplo 5, tenemos que $\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{P_2} - \overrightarrow{P_1}$, por tanto, $\overrightarrow{P_1P_2} = (-3, -7, 4)$.

Así, la ecuación vectorial de la recta que pasa por los puntos P_1 y P_2 es $P_1 + t(-3, -7, 4)$ (también puede ser $P_2 + t(-3, -7, 4)$); por consiguiente, si un punto (x, y, z) está sobre esta recta, las ecuaciones paramétricas de la recta son $x = 1 - 3t$, $y = 3 - 7t$, $z = -1 + 4t$. ◁

> Piensa y practica <

> Comunicación

1. Representa cada uno de los siguientes vectores como una combinación lineal de los vectores canónicos $\left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$.

a. $\vec{P} = (1, 2, 3)$ **b.** $\vec{P} = \left(\frac{1}{2}, -1, 0\right)$

c. $\vec{P} = \left(0, -4, \frac{1}{3}\right)$ **d.** $\vec{P} = (0{,}1,\ 0{,}25,\ 0{,}35)$

e. $\vec{P} = (-2, 0, 2)$ **f.** $\vec{P} = \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}\right)$

g. $\vec{P} = (-7, 1, 5)$ **h.** $\vec{P} = (0, 0, 1)$

2. Reescribe cada uno de los siguientes vectores como un vector en posición estándar.

a. $3\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$ **b.** $\frac{3}{4}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} - \frac{1}{3}\vec{k}$

c. $\sqrt{3}\,\vec{i} - \sqrt{2}\,\vec{j} + \vec{k}$ **d.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} + \frac{2}{\sqrt{2}}\vec{k}$

3. Localiza el punto P dado en el espacio, luego halla la magnitud de un vector en posición estándar con punto final P.

a. $P = (3, 0, 4)$ **b.** $P = (0, 3, 4)$

c. $P = (3, 4, 0)$ **d.** $P = (1, -1, 2)$

4. Obtén la ecuación vectorial de la recta que pasa por los dos puntos dados.

a. $(3, 1); (0, 1)$ **b.** $(1, 4); (-2, 3)$

c. $(1, 2, 3); (0, 1, 0)$

d. $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 0\right); \left(-\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{2}\right)$

e. $(0, 4, -5); (2, -3, 0)$

f. $(6, 3, 3); (0, 0, 0)$

5. Halla el sistema de ecuaciones paramétricas cartesiano de las rectas halladas en el punto 4.

> Resolución de problemas

6. Determina cuáles de los siguientes pares de rectas son paralelas.

a. $l_1: \vec{P}(t) = (1 + 2t, -2 + 5t, 3)$;
$l_2: \vec{Q}(t) = (t, 4 + 2{,}5t, 4)$

b. $l_1: \vec{P}(t) = (t, 1 + 4t, 5 + 8t)$;
$l_2: \vec{Q}(t) = (1 + 3t, -12t, 17 + 48t)$

c. $l_1: \begin{cases} x = 5 + 4t \\ y = -2 + t \\ z = \frac{1}{2} - 3t \end{cases}$; $l_2: \begin{cases} x = 2t \\ y = -\frac{1}{2} + \frac{t}{2} \\ z = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}t \end{cases}$

7. Para cada recta l dada, halla la ecuación vectorial de la recta t paralela a l que pasa por el punto P_o.

a. $l: (1, 2, 0) + t(1, 0, 1)$; $P_o(-3, -1, 4)$

b. $l: (-1, -2, -3) + t(0, 0, 2)$; $P_o(-1, 2, 0)$

c. $l: (0, 0, 0) + t(1, 1, 1)$; $P_o(1, 1, 0)$

8. Considera los dos vectores en el plano: $\vec{e}_1 = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ y $\vec{e}_2 = \left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$. Escribe cada uno de los siguientes vectores $\vec{v}$ como una combinación lineal de los vectores $\vec{e}_1$ y $\vec{e}_2$, es decir, halla dos números reales a y b para que se verifique la ecuación vectorial $\vec{v} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$.

a. $\vec{v} = (1, 0)$ **b.** $\vec{v} = (0, 1)$

c. $\vec{v} = (1, 2)$ **d.** $\vec{v} = (-2, 3)$

e. $\vec{v} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ **f.** $\vec{v} = \left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$

Producto punto

Logro: reconocer la proyección ortogonal de un vector sobre otro, mediante el ángulo comprendido entre ellos y su producto punto.

Lección 3

Pensamiento espacial

Muchas aplicaciones en Geometría y Física se realizan con otras operaciones entre vectores, adicionales a la adición y a la multiplicación por escalar. En esta lección aprenderemos acerca de la operación producto punto.

Consideremos los vectores perpendiculares $\vec{a}$ y $\vec{b}$, en el plano, con extremos los puntos $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$, respectivamente. El vector $\overrightarrow{BA}$ es el vector diferencia $\vec{a} - \vec{b}$, y corresponde a la hipotenusa del triángulo rectángulo formado por los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ (*ver* figura 6.15), entonces $\overrightarrow{BA} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$.

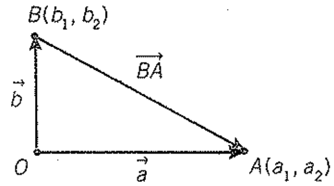


Figura 6.15

$\left\Vert\overrightarrow{BA}\right\Vert^2 = \left\Vert\vec{a}\right\Vert^2 + \left\Vert\vec{b}\right\Vert^2$	Aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo *OAB*.
$\left\Vert\overrightarrow{BA}\right\Vert^2 = \left\Vert(a_1 - b_1, a_2 - b_2)\right\Vert^2$	Calculamos el cuadrado de la magnitud del $\overrightarrow{BA}$.
$= (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2$	Efectuamos las operaciones indicadas.
$= a_1^2 - 2a_1b_1 + b_1^2 + a_2^2 - 2a_2b_2 + b_2^2$	Desarrollamos las diferencias de cuadrados.
$= (a_1^2 + a_2^2) + (b_1^2 + b_2^2) - 2(a_2b_2 + a_1b_1)$	Reagrupamos términos.
$\left\Vert\vec{a}\right\Vert^2 = a_1^2 + a_2^2$	Calculamos el cuadrado de la magnitud del $\vec{a}$.
$\left\Vert\vec{b}\right\Vert^2 = b_1^2 + b_2^2$	Calculamos el cuadrado de la magnitud del $\vec{b}$.

Es decir, $\left\Vert\overrightarrow{BA}\right\Vert^2 = \left\Vert\vec{a}\right\Vert^2 + \left\Vert\vec{b}\right\Vert^2 - 2(a_1b_1 + a_2b_2)$.

Comparando la última ecuación con la ecuación dada por el teorema de Pitágoras $\left\Vert\overrightarrow{BA}\right\Vert^2 = \left\Vert\vec{a}\right\Vert^2 + \left\Vert\vec{b}\right\Vert^2$, concluimos que $\left\Vert\overrightarrow{BA}\right\Vert^2 = \left\Vert\vec{a}\right\Vert^2 + \left\Vert\vec{b}\right\Vert^2$, si y sólo si, $a_1b_1 + a_2b_2 = 0$.

*El número real $a_1b_1 + a_2b_2$ se le denomina **producto punto de los vectores** $\vec{a} = (a_1, a_2)$ y $\vec{b} = (b_1, b_2)$, se simboliza $\vec{a} \cdot \vec{b}$ y se lee: "**Producto punto de $\vec{a}$ y $\vec{b}$**".*

*Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son **perpendiculares**, si y sólo si, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.*

Ejemplo 7.

Determinemos si los vectores dados son perpendiculares.

a. $\vec{a} = (5, -2)$; $\vec{b} = (2, 5)$

b. $\vec{a} = (-4, 1)$; $\vec{b} = (3, 12{,}5)$

c. $\vec{a} = (a_1, a_2)$; $\vec{b} = (-a_2, a_1)$

d. $\vec{a} = (a_1, a_2)$; $\vec{b} = (0, 0)$

Comentario

Para todo par de vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$, diferentes de $\vec{0}$, si θ es el ángulo entre estos vectores, entonces $0 \le \theta \le \pi$.

Solución

a. $(5, -2) \cdot (2, 5)$ — Indicamos el producto punto entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

$= 5 \times 2 + (-2) \times 5$ — Efectuamos las operaciones indicadas.

$= 0$ — Simplificamos la expresión.

Por tanto, $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son perpendiculares.

b. $\vec{a} \cdot \vec{b} = (-4, 1) \cdot (3, 12{,}5) = -12 + 12{,}5 = 0{,}5 \neq 0$, entonces $\vec{a}$ y $\vec{b}$ no son perpendiculares.

c. $\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1, a_2) \cdot (-a_2, a_1) = -a_1a_2 + a_2a_1 = 0$, entonces $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son perpendiculares.

d. $\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1, a_2) \cdot (0, 0) = a_1 \times 0 + 0 \times a_2 = 0$, entonces $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son perpendiculares.

Si θ es el ángulo entre los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$, diferentes del vector nulo $\vec{0}$, entonces el coseno de θ está dado por $\cos\theta = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$.

Ejemplo 8

Hallemos el ángulo entre los vectores $\vec{u} = (0, 3)$ y $\vec{v} = (-2, 4)$.

Solución

Calculamos el numerador de $\cos\theta$:

$(0, 3) \cdot (-2, 4) = 12$ — Efectuamos el producto punto entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Calculamos el denominador de $\cos\theta$:

$\|(0, 3)\| = 3$ — Hallamos la magnitud de $\vec{u}$.

$\|(-2, 4)\| = \sqrt{20}$ — Hallamos la magnitud de $\vec{v}$.

$\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| = 3\sqrt{20}$ — Calculamos el producto.

Calculamos $\cos\theta$:

$\cos\theta = \dfrac{12}{3\sqrt{20}}$ — Hallamos el cociente entre los valores encontrados anteriormente.

$\approx 0{,}8944$ — Aproximamos el valor de $\cos\theta$.

Así, el ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$ está dado por $\arccos(0{,}8944) = 0{,}46364$ radianes.

Si $\vec{u} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\vec{v} = (b_1, b_2, b_3)$ son vectores en el espacio, entonces:
*el **producto punto** de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es el número real $\vec{u} \cdot \vec{v} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.*

*El **coseno del ángulo** θ entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es:* $\cos\theta = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$.

$\vec{u}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares, si y sólo si, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Ejemplo 9

Determinemos el ángulo entre los vectores $\vec{u} = (0, 4, 3)$ y $\vec{v} = (8, 0, -6)$.

Solución

Calculamos el numerador de $\cos\theta$:

$(0, 4, 3) \cdot (8, 0, -6) = -18$ Efectuamos el producto punto entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Calculamos el denominador de $\cos\theta$:

$\|(0, 4, 3)\| = 5$ Hallamos la magnitud de $\vec{u}$.

$\|(8, 0, -6)\| = 10$ Hallamos la magnitud de $\vec{v}$.

$\left\|\vec{u}\right\|\left\|\vec{v}\right\| = 50$ Calculamos el producto.

Calculamos $\cos\theta$:

$\cos\theta = -0{,}36$ Hallamos $\cos\theta$.

Así, el ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$ está dado por $\arccos(-0{,}36) = 1{,}939$ radianes. ◁

Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$, son vectores en el plano o en el espacio, con $\vec{v} \neq \vec{0}$, entonces ***la proyección perpendicular*** *de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ es un vector $\vec{w}$ paralelo al vector $\vec{v}$. El vector $\vec{w}$ está dado*

por $\vec{w} = \left(\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\left\|\vec{v}\right\|^2}\right)\vec{v}$, *y se denota mediante* $proy_{\vec{v}}\left(\vec{u}\right)$.

Ejemplo 10

Sean $\vec{u} = -\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ y $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$, hallemos:

a. $\left\|\vec{u}\right\|$ y $\left\|\vec{v}\right\|$

b. $\vec{u}\cdot\vec{v}$

c. El ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

d. $\text{proy}_{\vec{v}}\vec{u}$

e. $\text{proy}_{\vec{u}}\vec{v}$

f. La componente de $\vec{u}$ en la dirección de $\vec{i} + \vec{j}$.

g. La componente de $\vec{v}$ en la dirección de $\vec{i} + \vec{j}$.

Solución

a. $\left\|\vec{u}\right\| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$, $\left\|\vec{v}\right\| = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14}$.

b. $\vec{u}\cdot\vec{v} = (-1, 1, 2)\cdot(2, 1, 3) = -2 + 1 + 6 = 5$.

c. $\theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\left\|\vec{u}\right\|\left\|\vec{v}\right\|}\right) = \cos^{-1}\left(\dfrac{5}{\sqrt{6}\sqrt{14}}\right) \approx 56{,}94°$.

d. $\text{proy}_{\vec{v}}\vec{u} = \dfrac{5}{14}(2, 1, 3) = \left(\dfrac{10}{14}, \dfrac{5}{14}, \dfrac{15}{14}\right)$.

e. $\text{proy}_{\vec{u}}\vec{v} = \dfrac{5}{6}(-1, 1, 2) = \left(-\dfrac{5}{6}, \dfrac{5}{6}, \dfrac{10}{6}\right)$.

Comentario

Como

$$proy_{\vec{v}}(\vec{u}) = \left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\left\|\vec{v}\right\|^2}\right)\vec{v} = \left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\left\|\vec{v}\right\|}\right)\frac{\vec{v}}{\left\|\vec{v}\right\|},$$

entonces el número real $\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\left\|\vec{v}\right\|}$ *se denomina la componente del vector $\vec{u}$ en la dirección $\vec{v}$.*

f. Componente de $\vec{u}$ en la dirección de $\vec{i}+\vec{j} = \dfrac{\vec{u}\cdot(\vec{i}+\vec{j})}{\left\|\vec{i}+\vec{j}\right\|} = 0$.

g. Componente de $\vec{v}$ en la dirección de $\vec{i}+\vec{j} = \dfrac{\vec{v}\cdot(\vec{i}+\vec{j})}{\left\|\vec{i}+\vec{j}\right\|} = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$. ◄

Pensamiento crítico

¿Cómo explicas los resultados obtenidos en (f) y (g) del ejemplo 10?

> Piensa y practica <

> Comunicación

1. Determina si los pares de vectores dados, por componentes, son perpendiculares o paralelos. Si no son perpendiculares o paralelos, halla su ángulo.

a. $(-2, 3), (3, 2)$

b. $(-2, 3), (4, -6)$

c. $(-2, 3), (3, -6)$

d. $(-3, 7), (6, -14)$

e. $(3, -4), (0, 1)$

f. $(1, 2, 3), (2, 4, 6)$

g. $(1, 2, 3), (-2, 4, -2)$

h. $\left(\frac{3}{5}, 0, -\frac{4}{5}\right), \left(0, \frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$

2. Encuentra la medida de los ángulos del triángulo *ABC* cuyos vértices son:

a. $A = (0, 0)$, $B = (6, 0)$, $C = (0, 6)$

b. $A\ (0, 0)$, $B = (-3, 4)$, $C = (4, 0)$

c. $A = (1, 1)$, $B = (1, 4)$, $C = (5, 1)$

d. $A = (2, 2)$, $B = (-2, 2)$, $C = (0, -2)$

3. Determina el ángulo entre cada pareja de vectores.

a. $(3, 5), (4, -1)$

b. $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right), \left(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}\right)$

c. $(2, -4{,}5), (0, 2{,}3)$

d. $(0{,}1, 0), (1, 0{,}1)$

e. $(5{,}1, 4), (-1{,}5, 0)$

4. Para $\vec{u} = (3, 4, 0)$, $\vec{v} = (1, -2, 2)$, $\vec{w} = \left(2, 3, -\sqrt{3}\right)$, verifica:

a. $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$

b. $3\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot 3\vec{v} = 3\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)$

c. $\vec{u}\cdot\left(\vec{v}+\vec{w}\right) = \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$

d. $\vec{u}\cdot\vec{u} = \left\|\vec{u}\right\|^2$; $\vec{v}\cdot\vec{v} = \left\|\vec{v}\right\|^2$; $\vec{w}\cdot\vec{w} = \left\|\vec{w}\right\|^2$

e. $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\left(\vec{u}-\vec{v}\right) = \left\|\vec{u}\right\|^2 - \left\|\vec{v}\right\|^2$

f. $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\left(\vec{u}+\vec{v}\right) = \left\|\vec{u}\right\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \left\|\vec{v}\right\|^2$

> Razonamiento lógico

5. Utilizando la identidad $\cos\theta = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\left\|\vec{u}\right\|\left\|\vec{v}\right\|}$, siendo θ el ángulo entre los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, comprueba que $-\left\|\vec{u}\right\|\left\|\vec{v}\right\| \le \vec{u}\cdot\vec{v} \le \left\|\vec{u}\right\|\left\|\vec{v}\right\|$.

6. Los vectores $2\vec{u}+\vec{v}$, y $\vec{u}-3\vec{v}$ son perpendiculares y satisfacen que $\vec{u} = 2\vec{v}$. Halla el ángulo entre los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

7. Halla un vector $\vec{w}$ que sea perpendicular a $\vec{u} = (2, 3)$ y a $\vec{v} = (-2, 7)$.

8. Halla un vector $\vec{w}$ que sea perpendicular a $\vec{u} = (2, 0, -1)$.

9. Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ vectores unitarios (es decir, su norma es igual a 1).

a. Si el ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$ mide 60°, calcula el valor de $\left(6\vec{u}+4\vec{v}\right)\cdot\left(-\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}\right)$.

b. Si $\left\|\vec{u}-2\vec{v}\right\|=2\sqrt{2}$, halla la medida del ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

10. Sean $\vec{u}=(2,1,-4)$, $\vec{v}=(-6,y,12)$. ¿Para qué valor o valores de y:

a. es $\vec{u}$ paralelo a $\vec{v}$?

b. Es $\vec{u}$ perpendicular a $\vec{v}$?

> Resolución de problemas

11. Con la ayuda de la figura 6.16, halla:

a. $\vec{v}\cdot\vec{w}$

b. $\vec{v}\cdot\vec{u}$

c. $\vec{u}\cdot\vec{w}$

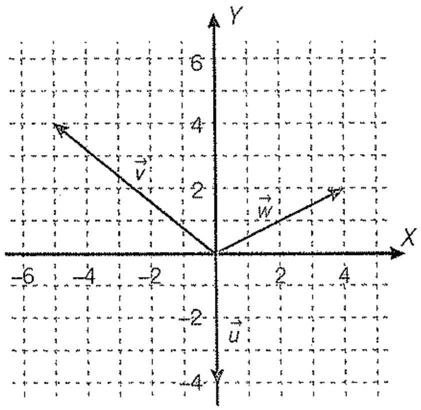


Figura 6.16

12. Calcula el producto punto y el coseno del ángulo entre los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

a. $\vec{u}=-13\vec{i}+8\vec{j}$, $\vec{v}=2\vec{i}+11\vec{j}$

b. $\vec{u}=11\vec{i}-8\vec{j}$, $\vec{v}=4\vec{i}-7\vec{j}$

c. $\vec{u}=4\vec{i}+5\vec{j}$, $\vec{v}=7\vec{i}-4\vec{j}$

d. $\vec{u}=-3\vec{i}+4\vec{j}$, $\vec{v}=-2\vec{i}-7\vec{j}$

13. Determina si los vectores son perpendiculares, paralelos o no tienen ninguna de las dos relaciones. Justifica tus respuestas.

a. $\vec{u}=-2\vec{i}+3\vec{j}$, $\vec{v}=-\vec{i}+2\vec{j}$

b. $\vec{u}=2\vec{i}-6\vec{j}$, $\vec{v}=-\vec{i}+3\vec{j}$

c. $\vec{u}=2\vec{i}-3\vec{j}$, $\vec{v}=6\vec{i}-4\vec{j}$

d. $\vec{u}=2\vec{i}+3\vec{j}$, $\vec{v}=6\vec{i}+4\vec{j}$

e. $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{v}=k\vec{i}+k\vec{j}$, donde k es un número real.

14. Sean $\vec{u}=3\vec{i}+4\vec{j}$ y $\vec{v}=\vec{i}+k\vec{j}$, donde k es un escalar.

a. Encuentra el valor o valores de k para que los vectores u y v sean paralelos.

b. Determina el valor o valores de k para que los vectores u y v sean perpendiculares.

c. Calcula el valor de k para que el ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sea $\frac{\pi}{4}$.

d. Determina el valor de k para que el ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sea $\frac{\pi}{3}$.

15. Calcula $\text{proy}_{\vec{v}}\vec{u}$ para cada pareja de vectores.

a. $\vec{u}=4\vec{i}$, $\vec{v}=\vec{i}+\vec{j}$

b. $\vec{u}=-5\vec{j}$, $\vec{v}=\vec{i}+\vec{j}$

c. $\vec{u}=2\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{v}=\vec{i}-2\vec{j}$

d. $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{v}=2\vec{i}-3\vec{j}$

e. $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{v}=x\vec{i}+y\vec{j}$

f. $\vec{u}=x\vec{i}-y\vec{j}$, $\vec{v}=\vec{i}+\vec{j}$

16. Sean $P(2,3)$, $Q(5,7)$, $R(2,-3)$ y $S(1,2)$. Calcula $\text{proy}_{\overrightarrow{PQ}}\overrightarrow{RS}$ y $\text{proy}_{\overrightarrow{RS}}\overrightarrow{PQ}$.

17. Halla $\text{proy}_{\vec{v}}\vec{u}$, $\text{proy}_{\vec{u}}\vec{v}$, la componente de $\vec{u}$ en la dirección de $\vec{v}$, la componente de $\vec{v}$ en la dirección de $\vec{u}$, el coseno del ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$, para los siguientes vectores.

a. $\vec{u}=-\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{v}=2\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}$

b. $\vec{u}=-\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{v}=-2\vec{i}+3\vec{j}+5\vec{k}$

c. $\vec{u}=-\vec{i}+3\vec{k}$, $\vec{v}=4\vec{j}$

d. $\vec{u}=\frac{1}{2}\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{j}+\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{k}$, $\vec{v}=2\vec{i}-2\vec{j}$

18. Determina el ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

a. $\vec{u}=-2\vec{i}+4\vec{j}-\sqrt{5}\vec{k}$, $\vec{v}=2\vec{i}-4\vec{j}+\sqrt{5}\vec{k}$

b. $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}+\frac{1}{2}\vec{k}$, $\vec{v}=\vec{i}+5\vec{j}-\frac{1}{2}\vec{k}$

Producto vectorial

Logro: utilizar el producto vectorial para determinar la independencia lineal de dos vectores y para hallar la ecuación de un plano.

El producto vectorial es una multiplicación entre vectores que da como resultado otro vector que es perpendicular a ambos. Dado que el resultado es otro vector, se define su norma, dirección y sentido. La norma se calcula como el producto de las normas de los vectores, multiplicado por el seno del ángulo que los separa. La dirección se considera sobre la línea recta perpendicular a ambos vectores, es decir, forma 90° con los mismos. El sentido se calcula con la regla de la mano derecha (*ver* figura 6.17), imaginando un tornillo colocado en el origen común de los dos vectores de manera que avance saliendo. Esto quiere decir que en el producto vectorial importa el orden en que se multiplican los vectores, ya que determina el sentido del vector resultado.

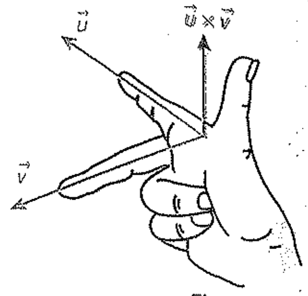


Figura 6.17

Si $\vec{u}=(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{v}=(b_1, b_2, b_3)$ son dos vectores en el espacio, entonces el producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$, en ese orden, es el vector $\vec{w}$ definido por

$$\vec{w}=\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\vec{k}.$$

El vector $\vec{w}$ se simboliza por $\vec{u}\times\vec{v}$, y se lee "producto vectorial de $\vec{u}$ con $\vec{v}$" ¡en ese orden!

Pensamiento crítico

¿Cuál es la diferencia, si existe, entre $\vec{u}\times\vec{v}$ y $\vec{v}\times\vec{u}$? ¿Y entre $\vec{u}\times\vec{v}$ y $\vec{u}\cdot\vec{v}$?

Comentario

$$\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}=a_2b_3-a_3b_2;$$

$$\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}=a_1b_3-a_3b_1;$$

$$\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1$$

son determinantes de tamaño 2×2.

Ejemplo 11

Hallemos el producto vectorial de:

a. $\vec{u}=(1, 2, 3)$, $\vec{v}=(4, 5, 6)$

b. $\vec{v}=(4, 5, 6)$, $\vec{u}=(1, 2, 3)$

c. $\vec{u}=(1, 3)$, $\vec{v}=(-2, 5)$

Solución

a. $\begin{vmatrix}2 & 3\\ 5 & 6\end{vmatrix}\vec{i}=(12-15)\vec{i}=-3\vec{i}$ Calculamos el coeficiente del $\vec{i}$ (determinante 2×2).

$\begin{vmatrix}1 & 3\\ 4 & 6\end{vmatrix}\vec{j}=(6-12)\vec{j}=-6\vec{j}$ Calculamos el coeficiente del $\vec{j}$ (determinante 2×2).

$\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & 5\end{vmatrix}\vec{k}=(5-8)\vec{k}=-3\vec{k}$ Calculamos el coeficiente del $\vec{k}$ (determinante 2×2).

Empleando los resultados anteriores, obtenemos que $\vec{u}\times\vec{v}=-3\vec{i}+6\vec{j}-3\vec{k}$.

b. $\vec{v}\times\vec{u}=\begin{vmatrix}5 & 6\\ 2 & 3\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}4 & 6\\ 1 & 3\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}4 & 5\\ 1 & 2\end{vmatrix}\vec{k}=3\vec{i}-6\vec{j}+3\vec{k}$.

c. Como estos vectores están en el plano, ya que tienen dos componentes, los disponemos en el espacio agregando la tercera componente igual a 0, es decir, $\vec{u}=(1, 3, 0)$, $\vec{v}=(-2, 5, 0)$, entonces:

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}3 & 0\\ 5 & 0\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & 0\\ -2 & 0\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1 & 3\\ -2 & 5\end{vmatrix}\vec{k}=0\vec{i}+0\vec{j}+11\vec{k}=11\vec{k}.$$

*La **ecuación cartesiana de un plano** Π en el espacio se puede determinar de manera única, si se tiene cualquiera de las dos siguientes condiciones:*

1. *Tres puntos no colineales por donde pasa el plano Π.*
2. *Un punto que pertenece al plano Π y un vector perpendicular a Π que se denomina vector normal al plano.*

Ejemplo 12

En cada caso, hallemos la ecuación del plano que satisface.

a. Pasa por el punto $A = (2, 3, 4)$ y tiene vector normal $\vec{N} = (1, -2, 2)$.

b. Pasa por los tres puntos $A = (2, 3, 4)$, $B = (0, 2, 1)$ y $C = (0, 0, 3)$.

Solución

a. Sea $P = (x, y, z)$ un punto del plano, entonces $\overrightarrow{AP} \in \Pi$, por tanto, $\overrightarrow{AP}$ es perpendicular a $\vec{N}$ ($\vec{N} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$). Como $\overrightarrow{AP} = (x, y, z) - (2, 3, 4) = (x - 2, y - 3, z - 4)$, entonces:

$(1, -2, 2) \cdot (x - 2, y - 3, z - 4) = 0$ — Indicamos el producto punto entre $\overrightarrow{AP}$ y $\vec{N}$.

$1(x - 2) - 2(y - 3) + 2(z - 4) = 0$ — Efectuamos el producto punto entre $\overrightarrow{AP}$ y $\vec{N}$.

Así, obtenemos que $x - 2y + 2z = 4$ es la ecuación del plano.

b. Con los puntos dados hallamos un vector perpendicular al plano buscado:

$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ y $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ — Encontramos dos vectores en el plano.

$\vec{u} = (-2, -1, -3)$ y $\vec{v} = (0, -2, 2)$ — Representamos algebraicamente $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

$\vec{N} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \vec{k}$ — Hallamos el vector $\vec{N}$ normal al plano.

$\vec{N} = (-8, 4, 4)$ — Efectuamos las operaciones indicadas.

Calculamos la ecuación cartesiana del plano:

$(-8, 4, 4) \cdot (x - 2, y - 3, z - 4) = 0$ — Indicamos el producto punto entre $\vec{N} = (-8, 4, 4)$ y $\overrightarrow{AP} = (x - 2, y - 3, z - 4)$.

$-8x + 4y + 4z = 12$ — Efectuamos las operaciones indicadas y obtenemos la ecuación del plano. ◁

Propiedades del producto vectorial

1. $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$
2. $\vec{u} \cdot \left(\vec{u} \times \vec{v}\right) = 0 \,;\ \vec{v} \cdot \left(\vec{u} \times \vec{v}\right) = 0$
3. $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$
4. $\vec{u} \times \left(\vec{v} + \vec{w}\right) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$
5. $\left(\vec{u} + \vec{v}\right) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}$
6. $\left\|\vec{u} \times \vec{v}\right\| = \left\|\vec{u}\right\| \left\|\vec{v}\right\| \operatorname{sen}\theta$, *donde θ es el ángulo comprendido entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$.*
7. $\left\|\vec{u} \times \vec{v}\right\|^2 = \left\|\vec{u}\right\|^2 \left\|\vec{v}\right\|^2 - \left(\vec{u} \cdot \vec{v}\right)^2$

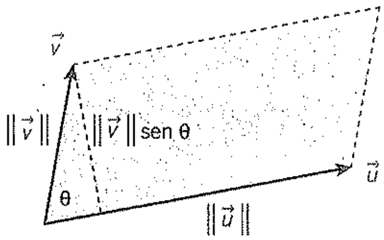


Figura 6.18

En la figura 6.18 observamos que el área del paralelogramo formado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es igual a $\left\|\vec{u}\right\|\left\|\vec{v}\right\|$ sen θ, es decir:

*El **área del paralelogramo** formado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es igual a $\left\|\vec{u} \times \vec{v}\right\|$.*

Cuando se aplica una fuerza en algún punto de un cuerpo rígido, el cuerpo tiende a realizar un movimiento de rotación en torno a algún eje. La propiedad de la fuerza para hacer girar al cuerpo se mide con una magnitud física que llamamos torque.

*Se define el **torque** $\vec{T}$ de una fuerza $\vec{F}$ que actúa sobre algún punto del cuerpo rígido, en una posición $\vec{r}$ respecto de cualquier origen O, por el que puede pasar un eje sobre el cual se produce la rotación del cuerpo rígido, al producto vectorial entre la posición $\vec{r}$ y la fuerza aplicada $\vec{F}$:*

$$\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Ejemplo 13

Fernando coloca una nuez en un alicate, y aplica una fuerza hacia el centro de 32 libras para apretar la nuez. Si el centro de la tuerca está en el origen (0, 0, 0), entonces la fuerza se aplica en el punto (0,6, 0, 0,4). Hallemos el torque.

Solución

$\vec{r} = (0{,}6,\ 0,\ 0{,}4) - (0,\ 0,\ 0) = (0{,}6,\ 0,\ 0{,}4)$	Hallamos $\vec{r}$: posición respecto del origen.
$\vec{F} = 32\vec{k} = (0,\ 0,\ 32)$	Asumimos que la dirección de la fuerza es el eje Z.
$(0{,}6,\ 0,\ 0{,}4) \times (0,\ 0,\ 32)$	Reemplazamos los valores correspondientes de $\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F}$.
$= \begin{vmatrix} 0 & 0{,}4 \\ 0 & 32 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0 & 32 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 0{,}6 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}\vec{k}$	Indicamos los determinantes correspondientes.
$= -19{,}2\vec{j}$	Efectuamos las operaciones indicadas. ◁

Ejemplo 14

Calculemos el volumen del paralelepípedo formado por los vectores $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ de la figura 6.19.

Solución

El volumen de todo paralelepípedo es el producto entre el área de su base y la longitud de la altura correspondiente. Por un lado, tenemos que el área de la base es $\left\|\vec{a} \times \vec{b}\right\|$; nos faltaría hallar el valor de la altura. Así que si denotamos con h la altura y con θ el ángulo comprendido entre el vector $\vec{c}$ y el vector $\vec{a} \times \vec{b}$ (*ver* figura 6.20), entonces:

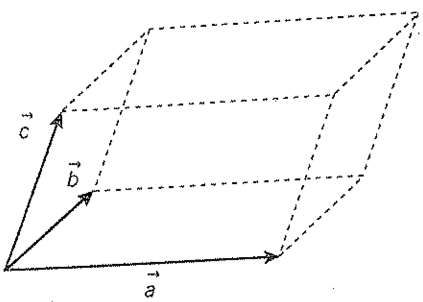


Figura 6.19

$\cos\theta = \dfrac{h}{\left\|\vec{c}\right\|}$	Utilizamos la definición de $\cos\theta$ (adyacente sobre hipotenusa).
$\left\|\vec{c}\right\|\cos\theta = h$	Despejamos h.

Denotemos con V el volumen del paralelepípedo; entonces:

$V = \left\|\vec{a} \times \vec{b}\right\| \left\|\vec{c}\right\| \cos\theta$ Reemplazamos $\left\|\vec{c}\right\| \cos\theta = h$ en $V = \left\|\vec{a} \times \vec{b}\right\| h$.

$V = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}$ Utilizamos $\vec{a} \cdot \vec{b} = \left\|\vec{a}\right\| \left\|\vec{b}\right\| \cos\varphi$, φ ángulo comprendido entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

Si $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$, $\cos\theta < 0$, en cuyo caso el volumen del paralelepípedo se obtiene cambiando el signo de $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}$. ◄

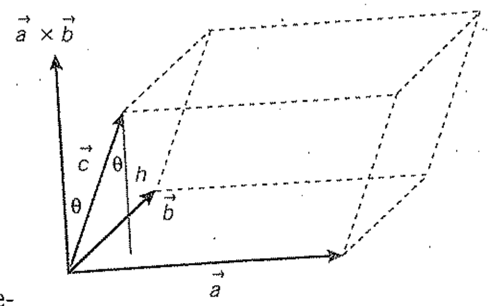


Figura 6.20

*El **volumen del paralelepípedo** determinado por los vectores $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ es igual al valor absoluto de $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}$, es decir, $V\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \left|\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}\right|$.*

> Piensa y practica <

> Comunicación

1. Calcula el vector A en cada caso.

a. $\vec{A} = (1, 0, 1) \times (0, 1, 1)$

b. $\vec{A} = (1, 2, 0) \times (0, 2, 1)$

c. $\vec{A} = (0, 0, 1) \times (4, 3, 0)$

d. $\vec{A} = (1, 2, 3) \times (3, 2, 1)$

2. Los puntos $P = (1, 2, 2)$, $Q = (2, 0, -2)$ y $R = (3, 1, 1)$ se encuentran en un mismo plano. Halla un $\vec{N}$ perpendicular a ese plano. (Sugerencia: los vértices $\vec{A} = \overrightarrow{PQ}$ y $\vec{B} = \overrightarrow{PR}$ se encuentran en el plano determinado por los puntos P, Q y R. El vector $A \times B$ es perpendicular a $\vec{A}$ y $\vec{B}$ y, por tanto, al plano que los contiene).

3. Halla el área del paralelogramo descrito por las condiciones dadas en cada caso.

a. $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}$ y $\vec{v} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$ son lados adyacentes del paralelogramo.

b. $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 6\vec{k}$ y $\vec{v} = 6\vec{i} + \vec{j} - \frac{1}{2}\vec{k}$ son lados adyacentes del paralelogramo.

c. $A = (3, -1, 5)$, $B = (0, 0, 6)$, $C = (1, 2, 1)$ y $D = (4, 1, 0)$ son los vértices del paralelogramo $ABCD$.

> Resolución de problemas

4. Halla el producto vectorial de los vectores dados y verifica que este vector es perpendicular a los vectores dados.

a. (0, 1, 2), (1, 1, 4)

b. (3, 2, 0), (1, 4, 0)

c. (6, 3, 1), (0, 1, 0)

d. (–5, 0, 3), (1, 0, 0)

5. Si $\vec{u} = (1, 2)$, $\vec{v} = (-1, 2)$, $\vec{w} = (3, 4)$, contesta:

a. ¿Para qué escalar k es el vector $k\vec{u} + \vec{v}$ perpendicular al vector $\vec{w}$?

b. ¿Para qué escalar k es el vector $k\vec{v} + \vec{w}$ perpendicular al vector $\vec{u}$?

6. Calcula los siguientes volúmenes y áreas.

a. El área del triángulo de vértices $A(0, 1, 0)$, $B(2, 1, 2)$ y $C(-3, 1, 4)$.

b. El área del paralelogramo determinado por los vectores (1, 2, 1) y (3, 2, –1).

c. El volumen del paralelepípedo determinado por los vectores (1, 2, 1), (0, 1, 0) y (0, –2, –1).

d. El volumen del tetraedro de vértices (1, 2, 1), (2, 0, –2), (3, 1, 1) y (–1, –1, –2).

Aplicaciones físicas y geométricas

Logro: aplicar las nociones vectoriales para resolver problemas geométricos y físicos.

> Aplicaciones geométricas

En las lecciones 1 y 2 utilizamos los vectores para determinar la ecuación de una línea recta. En esta presentaremos otras aplicaciones en la Geometría.

Ejemplo 15

Mostremos cómo los puntos medios de los lados de un cuadrilátero son los vértices de un paralelogramo.

Solución

Consideremos un cuadrilátero de vértices A, B, C y D (*ver* figura 6.21).

Sea P, Q, R y S los puntos medios de los $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{AD}$, respectivamente; entonces:

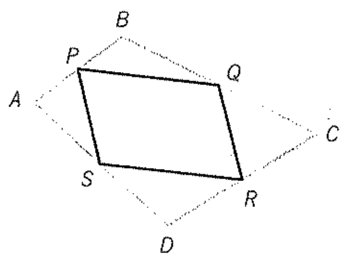


Figura 6.21

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BQ}$	Utilizamos la representación gráfica de la adición de vectores.
$\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$	Utilizamos el hecho de que P y Q son puntos medios de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$, respectivamente.
$\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right)$	Factorizamos $\frac{1}{2}$.
$\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$	Utilizamos la representación gráfica de la adición de vectores.

Por otro lado:

$\overrightarrow{SR} = \overrightarrow{SD} + \overrightarrow{DR}$	Utilizamos la representación gráfica de la adición de vectores.
$\overrightarrow{SR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$	Utilizamos el hecho de que S y R son puntos medios de $\overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{CD}$, respectivamente.
$\overrightarrow{SR} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}\right)$	Factorizamos $\frac{1}{2}$.
$\overrightarrow{SR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$	Utilizamos la representación gráfica de la adición de vectores.

Por tanto, $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$.

De manera similar comprobamos que $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{QR}$, y queda demostrado que el cuadrilátero $PQRS$ es un paralelogramo. ◄

Ejemplo 16

Demostremos que en el trapecio $ABCD$ de la figura 6.22, el segmento de recta que une los puntos medios de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ es paralelo a los lados $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$ y su longitud es igual al promedio de las longitudes de esos dos lados.

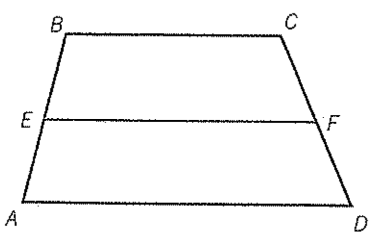


Figura 6.22

Solución

Denotemos con E y F los puntos medios de los lados no paralelos, designados por los $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$; entonces:

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EB}$ y $\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{CF}$	Utilizamos el hecho de que E y F son puntos medios de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$.
$\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{FD} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{CF}$	Efectuamos adiciones entre vectores equivalentes.

$$\overrightarrow{BC} + \left(\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{AE}\right) + \overrightarrow{FD} = \left(\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BC}\right) + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{EF}$$ Adicionamos a ambos lados de la igualdad $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EF}$.

$$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FD} = \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{EF}$$ Utilizamos que $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF}$ y $\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EC}$.

$$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EF}$$ Utilizamos que $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FD} = \overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{EF}$.

$$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} = 2\,\overrightarrow{EF}$$ Adicionamos vectores equivalentes.

$$\overrightarrow{EF} = \frac{\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}\right)}{2}$$ Despejamos $\overrightarrow{EF}$. ◁

> Aplicaciones físicas

De acuerdo con la primera ley del movimiento enunciada por Isaac Newton, la ley de la inercia, "todo cuerpo continúa en su estado inicial de reposo o de movimiento en línea recta con velocidad uniforme, a menos que sobre él actúe una **fuerza** externa". Sin ser muy precisos, una fuerza es lo que causa un cambio en la aceleración de un objeto. Con mayor exactitud, de acuerdo con la segunda ley del movimiento de Newton, $F = ma$, donde F es la fuerza que actúa sobre el objeto, m es la masa del objeto y a su aceleración. En muchas aplicaciones no sólo es necesario considerar la magnitud de una fuerza, sino que también se requiere conocer su dirección.

Fuerza y aceleración se consideran como cantidades vectoriales y las denotamos por $\vec{\mathbf{F}}$ *y* $\vec{a}$. *De la segunda ley del movimiento tenemos:* $\left\|\vec{\mathbf{F}}\right\| = m\left\|\vec{a}\right\|$.

Si sobre el objeto se aplica más de una fuerza, entonces entendemos que $\vec{F}$ representa la fuerza resultante de todas ellas, es decir, el vector suma de todas esas fuerzas.

Recordemos las unidades de medida para las fuerzas:

Sistema	Magnitud	Unidad
SI (Sistema Internacional)	Masa	kilogramo (kg)
	Aceleración	$\frac{m}{s^2}$
	Fuerza	Newton N: kg $\frac{m}{s^2}$
Sistema inglés	Aceleración	La unidad base de longitud es el pie (ft). 1 pie = 0,3048 m. $\frac{pie}{s^2}$
	Fuerza	Libra (lb)

Tabla 6.3

El peso P de un objeto es la fuerza gravitatoria que ejerce la Tierra sobre éste. La aceleración debida a la gravedad de la Tierra se denota por g. Utilizaremos las constantes $g = 9{,}8\ m/s^2$ (en el SI) y $g = 32\ pies/s^2$ (en el Sistema inglés). Entonces, las unidades de peso en el SI corresponden a $P = mg$ medido en newtons, y en el sistema inglés medido en libras fuerza.

Conexión con la vida

Una gran diferencia entre los sistemas de medidas es que en el SI una de las unidades fundamentales es el de masa y en el Sistema inglés se escoge la unidad fundamental de fuerza en vez de masa. La libra se define como una fuerza que equivale a 4,45 N.

Ejemplo 17

Un automóvil que pesa 4500 lb rueda cuesta abajo sobre una rampa que forma un ángulo de 27° con la horizontal, como se ve en la figura 6.23. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza que empuja al automóvil hacia abajo por la rampa y de la fuerza que empuja al automóvil contra la rampa?

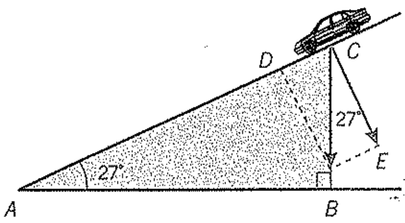


Figura 6.23

Solución

En la figura 6.23, el peso del automóvil es la fuerza $\overrightarrow{CB}$, que actúa dirigida hacia abajo, perpendicularmente a $\overrightarrow{AB}$; esta fuerza es la resultante de dos fuerzas: $\overrightarrow{CD}$, que empuja al automóvil por la rampa hacia abajo de manera perpendicular a $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{CE}$, que empuja al auto contra la rampa. Estas dos fuerzas son siempre perpendiculares; entonces: $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CE}$.

Debemos hallar las magnitudes $\left\|\overrightarrow{CD}\right\|$ y $\left\|\overrightarrow{CE}\right\|$:

$\left\|\overrightarrow{CD}\right\| = \left\|\overrightarrow{EB}\right\|$	Utilizamos el hecho que $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{EB}$ son paralelas y tienen la misma longitud.
$\angle CBA + \angle ACB + \angle CAB = 180°$	Usamos el hecho de que la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180° ($\triangle ABC$).
$\angle ACB + \angle CAB = 90°$	Reemplazamos $\angle CBA = 90°$ y simplificamos.

Por otro lado, $\angle ACB + \angle BCE = 90°$, por tanto, $\angle CAB = \angle BCE = 27°$.

$\operatorname{sen}(\angle BCE) = \dfrac{\left\|\overrightarrow{EB}\right\|}{\left\|\overrightarrow{CB}\right\|}$	Utilizamos la definición de $\operatorname{sen}\theta$ en $\triangle BCE$.
$\operatorname{sen}(\angle BCE) = \dfrac{\left\|\overrightarrow{CD}\right\|}{\left\|\overrightarrow{CB}\right\|}$	Reemplazamos $\left\|\overrightarrow{CD}\right\| = \left\|\overrightarrow{EB}\right\|$.
$\left\|\overrightarrow{CD}\right\| = \left\|\overrightarrow{CB}\right\| \operatorname{sen} 27°$	Despejamos $\left\|\overrightarrow{CD}\right\|$ y reemplazamos $\angle BCE = 27°$.

Ahora bien, como $\left\|\overrightarrow{CB}\right\|$ es la magnitud de la fuerza gravitatoria (peso), entonces $\left\|\overrightarrow{CB}\right\| = 4500$ lb.

Por consiguiente, $\left\|\overrightarrow{CD}\right\| = 4500 \cdot 0{,}454 \approx 2043$ lb. En forma similar $\left\|\overrightarrow{CE}\right\| = \left\|\overrightarrow{CB}\right\| \cos 27°$, es decir, $\left\|\overrightarrow{CE}\right\| = 4009{,}5$ lb. ◀

Ejemplo 18

Una rampa de 25 metros de longitud se utiliza para halar un peso de 50 kg, hacia arriba, hasta la cima de un montacargas (*ver* figura 6.24). Si la fuerza sobre la pendiente no puede superar los 380 N, ¿cuál es la máxima altura a la que puede colocarse el montacargas?

Solución

Analicemos los datos de la figura 6.24.

$\overrightarrow{F_r}$: fuerza que empuja el objeto hacia abajo de la rampa.

F: fuerza necesaria para vencer a $\overrightarrow{F_r}$, $F = -\overrightarrow{F_r}$ (de igual magnitud, pero en sentido opuesto).

θ : ángulo que forma la rampa con el suelo horizontal.

$\overrightarrow{F_R}$: fuerza que el objeto hace contra la rampa.

$\overrightarrow{F_P}$: fuerza debida a la gravedad ($P = \overrightarrow{F_P}$).

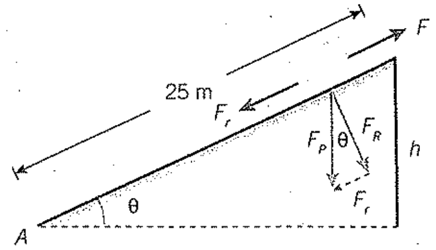


Figura 6.24

Ahora, con un argumento similar al del ejemplo 17, tenemos que $\angle A$ es igual al ángulo formado por $\overrightarrow{F_R}$ y $\overrightarrow{F_P}$, es decir, θ, entonces:

$\operatorname{sen}\theta = \dfrac{\left\|\overrightarrow{F_r}\right\|}{\left\|\overrightarrow{F_P}\right\|}$	Utilizamos la definición de $\operatorname{sen}\theta$.
$\left\|\overrightarrow{F_r}\right\| = \left\|\overrightarrow{F_P}\right\| \operatorname{sen}\theta$	Despejamos $\left\|\overrightarrow{F_r}\right\|$.
$\left\|\vec{F}\right\| = \left\|\overrightarrow{F_P}\right\| \operatorname{sen}\theta$	Utilizamos el hecho que $\left\|\overrightarrow{F_r}\right\| = \left\|-\overrightarrow{F_r}\right\| = \left\|\vec{F}\right\|$.
$\overrightarrow{F_P} = mg = 50 \cdot 9{,}8 = 490$ N	Calculamos la magnitud de $\overrightarrow{F_P}$.
$\left\|\vec{F}\right\| = 490 \cdot \operatorname{sen}\theta$	Reemplazamos $\overrightarrow{F_P} = 490$ N.

Ahora, debemos determinar $\left\|\vec{F}\right\|$ que no exceda 380 N.

En primer lugar buscamos el ángulo θ que haga $\left\|\vec{F}\right\| = 380$:

$380 = 490 \cdot \operatorname{sen}\theta$	Reemplazamos $\left\|\vec{F}\right\| = 380$.
$\operatorname{sen}\theta \approx 0{,}7755$	Despejamos y calculamos $\operatorname{sen}\theta$.
$h = 25 \cdot \operatorname{sen}\theta$	Utilizamos los datos de la figura 6.24.
$h \approx 25 \cdot 0{,}7755$	Reemplazamos $\operatorname{sen}\theta \approx 0{,}7755$.
$h \approx 19{,}4$	Efectuamos la multiplicación.

Ahora bien, si $h < 19{,}4$, entonces se requiere menos fuerza para subir el objeto por la rampa hasta la cima donde está el montacargas. Por ejemplo, si $h = 18$ metros, entonces $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{18}{25} = 0{,}72$, luego $\left\|\vec{F}\right\| = 490 \cdot 0{,}72 = 352{,}8$ N que es menor que 380 N.

Si $h > 19{,}4$, entonces se requerirá una fuerza mayor a la pedida (380 N) para subir el objeto por la rampa hasta la cima. Por ejemplo, si $h = 20$ metros, entonces $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{20}{25} = 0{,}8$; luego $\left\|\vec{F}\right\| = 490 \cdot 0{,}8 = 392$ que es mayor que 380 N. ◀

Recordemos que el trabajo (T) hecho por una fuerza constante (F) sobre una distancia S es $T = FS$.

Una unidad de trabajo es el trabajo hecho por una fuerza unitaria al mover un cuerpo una unidad de distancia en la dirección de la fuerza. En el sistema métrico, la unidad de trabajo es el newton-metro (N · m), llamado un julio (J); en el sistema inglés, la unidad de trabajo es el pie-libra (pie · lb).

Ejemplo 19

¿Qué tanto trabajo se hace para levantar un peso de 28 libras, a 7 pies del suelo?

Solución

$T = (28 \text{ libras})(7 \text{ pies})$	Reemplazamos $F = 28$ libras y $S = 7$ pies en $T = FS$.
$T = 196 \text{ pies} \cdot \text{lb}$	Realizamos la multiplicación. ◁

Ejemplo 20

Una caja de masa 10 kg se levanta 5 metros del suelo. ¿Qué trabajo se hace?

Solución

$F = (10 \text{ kg})(9{,}8 \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2})$	Utilizamos la segunda ley de Newton $F = m \cdot a$ y el hecho de que la aceleración se opone al movimiento debido a la gravedad.
$F = 98 \text{ N}$	Simplificamos la expresión.
$T = (98 \text{ N})(5 \text{ m})$	Utilizamos que $T = FS$.
$T = 490 \text{ J}$	Simplificamos la expresión. ◁

En estos dos ejemplos asumimos que la fuerza aplicada está en la misma dirección del movimiento. En general, es posible definir el trabajo como la componente de la fuerza en la dirección del movimiento por la distancia desplazada. En forma simbólica tenemos que si el objeto se mueve del punto P al punto Q, entonces la distancia que se desplaza es $\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|$. El vector D, que es igual al $\overrightarrow{PQ}$, se llama vector desplazamiento del objeto; entonces:

$$T = \left[\frac{F \cdot D}{\left\|\vec{D}\right\|}\right]\|D\| = \vec{F} \cdot \vec{D}.$$

*Así, el **trabajo** hecho es el producto punto entre el vector fuerza F y el vector desplazamiento D. Observemos que si $\vec{F}$ actúa en la dirección del movimiento $\vec{D}$, entonces el ángulo entre $\vec{F}$ y $\vec{D}$ es $0°$, así, $\cos 0° = 1$, en consecuencia*

$$\vec{F} \cdot \vec{D} = \left\|\vec{F}\right\|\left\|\vec{D}\right\| \cos 0° = \left\|\vec{F}\right\|\left\|\vec{D}\right\|.$$

Ejemplo 21

Una fuerza de 4 N tiene la dirección $\frac{\pi}{3}$, como se muestra en la figura 6.25. ¿Cuál es el trabajo realizado al mover un objeto desde el punto (1, 2) hasta el punto (5, 4)? (La distancia se mide en metros).

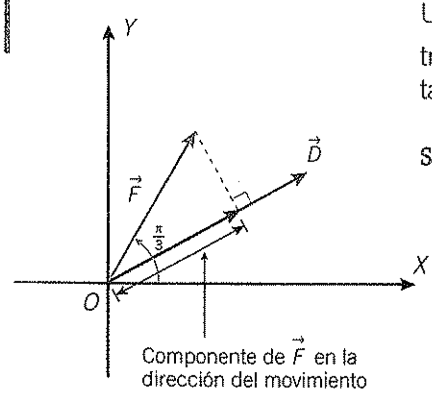


Figura 6.25

Solución

$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{\overrightarrow{F_x}}{4}$	Calculamos la componente en X de $\vec{F}$ $(\overrightarrow{F_x})$.
$\overrightarrow{F_x} = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$	Despejamos y simplificamos $\overrightarrow{F_x}$.
$\operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = \frac{\overrightarrow{F_y}}{4}$	Calculamos la componente en Y de $\vec{F}$ $(\overrightarrow{F_y})$.
$\overrightarrow{F_y} = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$	Despejamos y simplificamos $\overrightarrow{F_y}$.

$\vec{F} = \left(2, 2\sqrt{3}\right)$ Expresamos al $\vec{F}$ en forma algebraica.

$\vec{D} = (5 - 1)\vec{i} + (4 - 2)\vec{j} = 4\vec{i} + 2\vec{j}$ Hallamos el vector desplazamiento y lo simplificamos.

$\vec{D} = (4, 2)$ Escribimos $\vec{D}$ en forma algebraica.

$\vec{T} = \left(2, 2\sqrt{3}\right) \cdot (4, 2)$ Calculamos el trabajo.

$\vec{T} = 8 + 4\sqrt{3}$ J Simplificamos la expresión.

Comentario

El vector con punto inicial en el origen, equivale al $\vec{D}$ que tiene punto final en (4, 2).

Ejemplo 22

Un bloque de 350 lb está suspendido en el aire por dos cables, como se muestra en la figura 6.26. En el punto *A* actúan tres fuerzas: el peso (w) y las tensiones de los dos cables (r y s). Determinemos la tensión de cada cable.

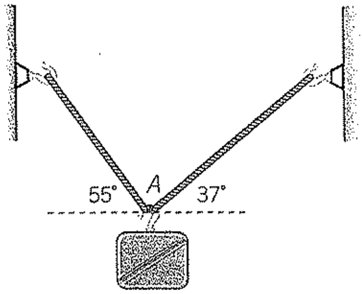


Figura 6.26

Solución

Escojamos el sistema de referencia de manera que el origen coincida con el punto *A* (*ver* figura 6.27).

Para que el sistema completo esté en equilibrio la suma de fuerzas debe ser igual al vector 0, es decir, $\vec{r} + \vec{s} + \vec{w} = \vec{0}$.

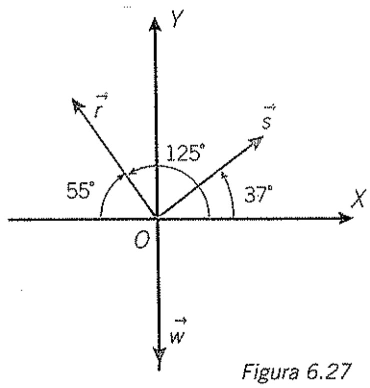


Figura 6.27

$\cos 125° = \dfrac{\overrightarrow{r_x}}{\left\|\vec{r}\right\|}$ Hallamos la componente *X* de $\vec{r}$.

$\overrightarrow{r_x} = \left\|\vec{r}\right\| \cos 125°$ Despejamos la componente *X* de $\vec{r}$.

$\operatorname{sen} 125° = \dfrac{\overrightarrow{r_y}}{\left\|\vec{r}\right\|}$ Hallamos la componente *Y* de $\vec{r}$.

$\overrightarrow{r_y} = \left\|\vec{r}\right\| \operatorname{sen} 125°$ Despejamos la componente *Y* de $\vec{r}$.

$\vec{r} = \left\|\vec{r}\right\|\left(\cos 125° \vec{i} + \operatorname{sen} 125° \vec{j}\right)$ Escribimos a $\vec{r}$ en término de los vectores canónicos.

Con un proceso similar al anterior obtenemos que $\vec{s} = \left\|\vec{s}\right\|\left(\cos 37° \vec{i} + \operatorname{sen} 37° \vec{j}\right)$ y $\vec{w} = \left\|\vec{w}\right\|\left(\cos 270° \vec{i} + \operatorname{sen} 270° \vec{j}\right)$.

$$\left\|\vec{r}\right\|\left(\cos 125° \vec{i} + \operatorname{sen} 125° \vec{j}\right) + \left\|\vec{s}\right\|\left(\cos 37° \vec{i} + \operatorname{sen} 37° \vec{j}\right) + \left\|\vec{w}\right\|\left(\cos 270° \vec{i} + \operatorname{sen} 270° \vec{j}\right) = 0$$

Reemplazamos los valores obtenidos en $\vec{r} + \vec{s} + \vec{w} = \vec{0}$.

$$\left\|\vec{r}\right\|\left(\cos 125° \vec{i} + \operatorname{sen} 125° \vec{j}\right) + \left\|\vec{s}\right\|\left(\cos 37° \vec{i} + \operatorname{sen} 37° \vec{j}\right) - 11\,200\vec{j} = 0$$

Reemplazamos $\cos 270° = 0$; $\operatorname{sen} 270° = -1$, y $\vec{w} = (350 \text{ lb})(32 \text{ pies/s}^2)$.

$$\left(\left\|\vec{r}\right\| \cos 125° + \left\|\vec{s}\right\| \cos 37°\right)\vec{i} + \left(\left\|\vec{r}\right\| \operatorname{sen} 125° + \left\|\vec{s}\right\| \operatorname{sen} 37°\right)\vec{j} = 11\,200\vec{j}$$

Reescribimos la igualdad.

$\left\|\vec{r}\right\| \cos 125° + \left\|\vec{s}\right\| \cos 37° = 0$ Igualamos las componentes en *X*.

Comentario

El ***peso*** *(w) se define como la fuerza de atracción que ejerce la Tierra sobre un objeto, es decir, w = mg.*

$$\left\|\vec{r}\right\| \text{sen } 125° + \left\|\vec{s}\right\| \text{sen } 37° = 11\,200 \qquad \text{Igualamos las componentes en } Y.$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones obtenemos: $\left\|\vec{r}\right\| = 8949{,}64$ lb y $\left\|\vec{s}\right\| = 6428{,}14$ lb.

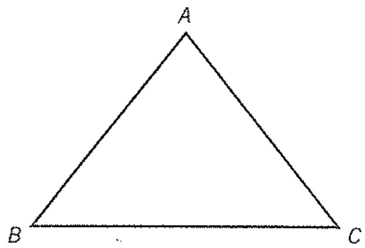
Por tanto, las tensiones son: $\vec{r} = 8949{,}64\left(\cos 125°\,\vec{i} + \text{sen } 125°\,\vec{j}\right)$ y $\vec{w} = 6428{,}14\left(\cos 270°\,\vec{i} + \text{sen } 270°\,\vec{j}\right)$. ◀

> Piensa y practica <

> Comunicación

1. Dibuja los vectores sobre cada figura para demostrar cada proposición.

a. Los ángulos opuestos a los lados iguales de un triángulo isósceles son iguales (*ver* figura 6.28).



$\overline{AB} \cong \overline{AC}$

Figura 6.28

b. Las diagonales de un paralelogramo se intersecan en sus puntos medios (*ver* figura 6.29).

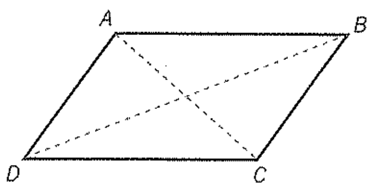


Figura 6.29

c. Teorema de Pitágoras: "En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos" (*ver* figura 6.30).

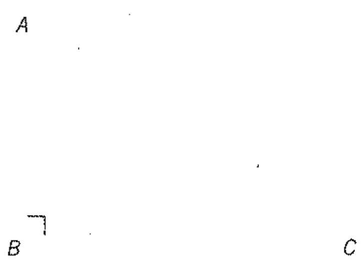
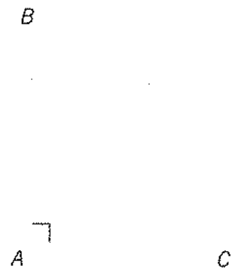


Figura 6.30

d. Recíproco del teorema de Pitágoras: "Si un triángulo satisface que el cuadrado de la longitud de su lado mayor es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de sus otros dos lados, entonces el triángulo es rectángulo" (*ver* figura 6.31).



$AB^2 + AC^2 = BC^2$

Figura 6.31

2. Deduce una identidad geométrica conocida, tomando el producto vectorial de los vectores $\vec{A} = (\cos\alpha)\vec{i} + (\text{sen }\alpha)\vec{j}$, $\vec{B} = (\cos\beta)\vec{i} + (\text{sen }\beta)\vec{j}$, e interpreta el resultado geométricamente.

> Resolución de problemas

3. Un bloque que pesa 122 lb se desliza hacia abajo sobre una rampa, que forma un ángulo de 30° con el suelo horizontal como se muestra en la figura 6.32.

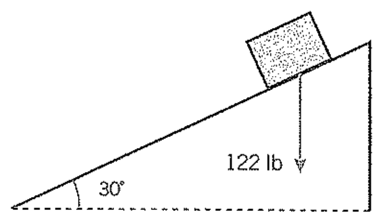


Figura 6.32

a. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza que empuja el bloque hacia abajo por la rampa?

b. ¿Cuál es la fuerza que el bloque ejerce sobre la rampa?

4. Responde las preguntas del ejercicio 3, si el bloque tiene una masa de 35 kg.

5. La punta de una soga se ata a una caja que pesa 160 lb. Si se hala la caja hacia arriba, la tensión en la cuerda se define como la magnitud de la fuerza necesaria para halarla. Si $\theta = 53°$ (*ver* figura 6.33), ¿cuál es la tensión de la cuerda?

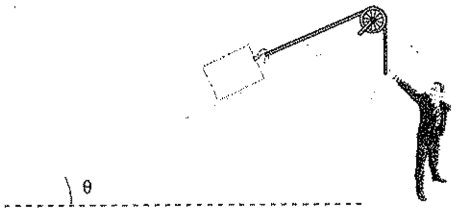


Figura 6.33

6. En el problema anterior, ¿cuál es la altura de la cima de la rampa si la persona que hala la cuerda lo hace con una fuerza de 95 libras?

7. En el problema 5, ¿cuál es el trabajo que realiza la persona si hala la caja 12 pies?

8. Una niña empuja un cortacésped manual con una fuerza de 26 libras. Los brazos del cortacésped forman un ángulo de 43° con la horizontal.

   a. ¿Cuáles son las componentes vertical y horizontal de la fuerza?

   b. Responde la pregunta (a) si la niña empuja el cortacésped con una fuerza de 112 N y el ángulo con la horizontal es 37°.

   c. En las condiciones de la pregunta (a), ¿cuál es el trabajo realizado por la niña si empuja el cortacésped 80 pies?

9. Tres fuerzas en un plano actúan sobre un objeto. Las magnitudes de las fuerzas son 70, 115 y 135 libras, respectivamente. La fuerza de magnitud 70 libras se ejerce a lo largo del eje *X*, la de magnitud 115 libras se aplica bajo el eje *X* a 120° con la fuerza de 70 libras de magnitud; el ángulo entre las fuerzas de 115 y 135 libras de magnitud es de 75°, y entre las fuerzas de magnitud 135 y 70 libras es 165°.

   a. Elabora un diagrama de fuerzas.

   b. ¿Están en equilibrio las tres fuerzas? Si no lo están, determina la magnitud y dirección de la fuerza resultante.

10. Dos cables sostienen un peso de 1000 libras como se muestra en la figura 6.34. Halla la tensión en cada cable.

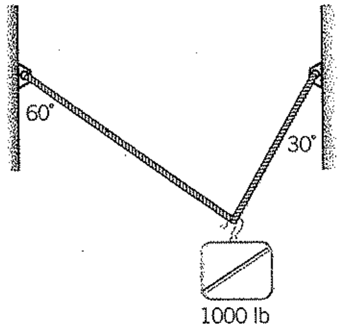


Figura 6.34

11. Un peso de 200 libras es soportado por una estructura construida con dos varillas y tres bisagras en los puntos *A*, *B* y *C* (*ver* figura 6.35). Halla las fuerzas ejercidas por las dos varillas.

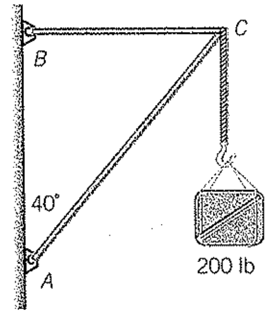


Figura 6.35

12. En un circo, un equilibrista montado en una monocicla recorre un cable sostenido entre dos soportes a cierta altura (*ver* figura 6.36). El peso total del equilibrista y su monocicla es de 155 libras. Halla la magnitud de la tensión que cada parte del cable está ejerciendo.

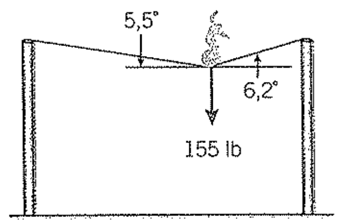


Figura 6.36

Vectores y ecuaciones paramétricas

Logro: comprender y utilizar la relación entre vectores y curvas en el plano.

Consideremos los puntos $P = (1, 3)$ y $Q = (-2, 6)$. Para hallar la ecuación cartesiana de la recta que pasa por P y Q tenemos que:

- Hallar la pendiente $m = \dfrac{6-3}{-2-1} = \dfrac{3}{-3} = -1$.
- Utilizar cualquiera de los dos puntos para hallar la ecuación $y - 3 = -1(x - 1)$, de donde tenemos $y = -x + 4$.

Por otra parte, para hallar la ecuación vectorial de la recta realizamos los siguientes pasos:

- Hallamos el vector "dirección" de la recta: $\vec{v} = Q - P = (-3, 3)$.
- Utilizamos uno de los puntos como punto de partida, para hallar la ecuación vectorial: $\overrightarrow{P(t)} = \vec{P} + t\vec{v} = (1, 3) + t(-3, 3)$, $t \in \mathbf{R}$, es decir, la ecuación vectorial de la recta que pasa por los puntos P y Q es $\vec{P}(t) = (1, 3) + t(-3, 3)$.

De la ecuación vectorial, teniendo en cuenta que $\vec{P}(t) = (x(t), y(t))$, obtenemos un par de ecuaciones que representan la "dinámica" de cambio de cada variable x y y:

$$\begin{cases} x(t) = 1 - 3t \\ y(t) = 3 + 3t \end{cases}.$$

Este par de ecuaciones las llamamos ecuaciones paramétricas de la recta, en el plano.

*Sea I un intervalo de números reales, el par de ecuaciones $x = x(t)$ y $y = y(t)$, $t \in I$, representan una **curva en el plano**. Estas ecuaciones se denominan **ecuaciones paramétricas de la curva** y el vector $\vec{R}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$, $t \in I$, se llama la representación vectorial de la curva.*

*La variable t es el **parámetro**.*

Ejemplo 23

Tracemos la gráfica de la curva dada por las ecuaciones paramétricas
$x(t) = t^2 - 2t + 3$; $y(t) = t + 2$, $t \in [-3, 3]$.

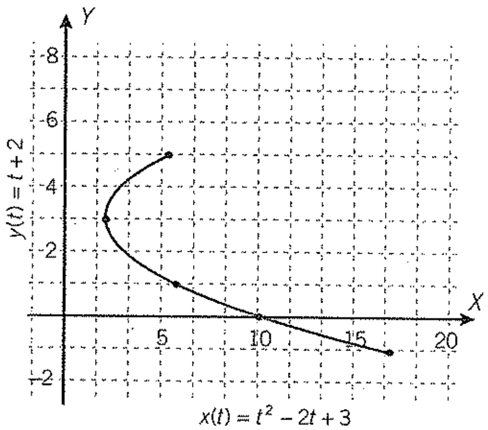


Figura 6.37

Solución

Necesitamos encontrar algunos pares ordenados (x, y) para trazar la gráfica de la curva, por ello construimos la tabla 6.4 de valores.

t	−3	−2	−1	0	1	2	3
x	18	11	6	3	2	3	6
y	−1	0	1	2	3	4	5

Tabla 6.4

Ubicamos en un plano cartesiano los puntos obtenidos anteriormente y los unimos "suavemente" con una línea continua que no represente cambios bruscos al unir cada par ordenado (*ver* figura 6.37).

Una ecuación vectorial de esta curva es
$\vec{R}(t) = (t^2 - 2t + 3)\vec{i} + (t + 2)\vec{j}, t \in [-3, 3]$. ◄

En algunos casos como en el ejemplo 23, es posible eliminar el parámetro del par de ecuaciones para obtener una ecuación cartesiana en las variables x y y. Veamos:

$t = y - 2$	Despejamos t de $y(t) = t + 2$.
$x(t) = (y-2)^2 - 2(y-2) + 3$	Reemplazamos $t = y - 2$ en $x(t) = t^2 - 2t + 3$.
$x(t) = y^2 - 4y + 4 - 2y + 4 + 3$	Desarrollamos la diferencia de cuadrados; aplicamos la propiedad distributiva.
$x = y^2 - 6y + 11$	Simplificamos la expresión.

Esta ecuación corresponde a una parábola con eje de simetría $y = 3$ y vértice $(2, 3)$.

Toda parábola de ecuación $y = ax^2 + bx + c$ se puede escribir en la forma canónica $y - y_0 = a(x - x_0)^2$. Por tanto, un par de ecuaciones paramétricas para esta parábola son $x = t + x_0$, y, $y = at^2 + y_0$, $t \in \mathbb{R}$.

Pensamiento crítico

Si la parábola tiene ecuación $x = ay^2 + by + c$, ¿cuáles podrían ser un par de ecuaciones paramétricas?

Ejemplo 24

Hallemos la representación paramétrica de:

a. La circunferencia de centro en (0, 0) y radio 3: $x^2 + y^2 = 9$.

b. La circunferencia de centro en (1, 2) y radio 2: $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$.

c. La elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Solución

a. Empleando la representación trigonométrica de las funciones circulares seno y coseno, con el ángulo $\theta = t$ como parámetro, tenemos que $x(t) = 3\cos t$, $y(t) = 3\operatorname{sen} t$ con $0 \le t \le 2\pi$.
La ecuación vectorial es $\vec{R}(t) = 3\cos t\,\vec{i} + 3\operatorname{sen} t\,\vec{j}$, $0 \le t \le 2\pi$.

b. De la misma manera que hicimos en la parte (a), tenemos: $x(t) - 1 = 2\cos t$, $y(t) - 2 = 2\operatorname{sen} t$ con $0 \le t \le 2\pi$, luego una representación paramétrica de esta circunferencia es $x(t) = 1 + 2\cos t$, $y(t) = 2 + 2\operatorname{sen} t$ con $0 \le t \le 2\pi$. ¿Cuál es la ecuación vectorial de esta circunferencia?

c. Tenemos que $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ equivale a $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$; entonces "interpretando" esta ecuación como una de tipo circular en las variables $\frac{x}{a}$ y $\frac{y}{b}$, tomamos la representación paramétrica siguiente: $\frac{x}{a} = \cos t$, $\frac{y}{b} = \operatorname{sen} t$, $0 \le t \le 2\pi$. ◁

Pensamiento crítico

En la solución del literal (a) del ejemplo 24, ¿por qué $0 \le t \le 2\pi$?

El **tiro parabólico** es un ejemplo de movimiento realizado por un cuerpo en dos dimensiones. Algunos cuerpos cuya trayectoria corresponde a un tiro parabólico son: proyectiles lanzados desde la superficie de la Tierra o desde un avión, el de una pelota de fútbol al ser despejada por el portero, el de una pelota de golf al ser lanzada con cierto ángulo respecto al eje horizontal.

El tiro parabólico es la resultante de la suma vectorial del movimiento horizontal uniforme y de un movimiento vertical rectilíneo uniformemente variado.

Comentario

Si una curva es la gráfica de una función $y = f(x)$, entonces la parametrización natural es $x = t$ y $y = f(t)$. Por tanto, la representación vectorial de esta curva es $\vec{R}(t) = t\,\vec{i} + f(t)\,\vec{j}$, $t \in Dom(f)$.

Ejemplo 25

Consideremos un cañón que dispara un proyectil desde el suelo ($y = 0$) con cierto ángulo α (menor de 90°) con la horizontal (*ver* figura 6.38). Hallemos las ecuaciones paramétricas de la curva dada por la trayectoria del proyectil.

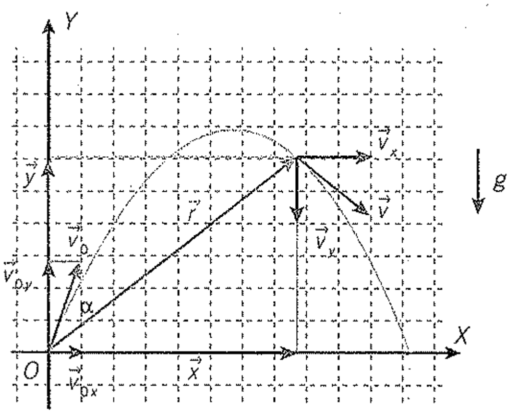


Figura 6.38

Solución

Sean:

a: la aceleración del proyectil, v: la velocidad, g: la aceleración de la gravedad, y $\vec{r}$: la posición del proyectil en el tiempo t.

Las ecuaciones cinemáticas del movimiento del proyectil son:

$a_x = 0\ ,\ v_x = v_0 \cos\alpha\ ,\ x(t) = (v_0 \cos\alpha)t\ ;$

$a_y = -g\ ,\ v_y = v_0 \operatorname{sen}\alpha - gt\ ,\ y(t) = v_0 \operatorname{sen}\alpha - \frac{1}{2}gt^2$

Las ecuaciones paramétricas de la curva dada por la trayectoria del proyectil son:

$x(t) = (v_0 \cos\alpha)t$ y $y(t) = v_0 \operatorname{sen}\alpha - \frac{1}{2}gt^2$

Eliminando el parámetro t, de estas ecuaciones obtenemos que $y = (\tan\alpha)x - \dfrac{g}{2(v_0\cos\alpha)^2}x^2$ ◀

Conexión con la vida

La cinemática estudia las leyes del movimiento sin tener en cuenta las causas que la producen.

Pensamiento crítico

¿Qué tipo de lugar geométrico representa la ecuación $y = (\tan\alpha)x - \dfrac{g}{2(v_0\cos\alpha)^2}x^2$ *?*

Ejemplo 26

Un automóvil viajando hacia el oriente a 100 km/h se encuentra con un camión que viaja en la misma dirección pero hacia el occidente a una velocidad de 85 km/h.

a. ¿Cuál es la velocidad del camión, relativa al automóvil?

b. ¿Cuál es la velocidad del automóvil, relativa al camión?

c. Supongamos que el camión sale de la carretera y toma otra carretera en dirección noroccidente, con la misma velocidad. ¿Cuál es la velocidad del camión relativa al automóvil?

Comentario

Cuando dos objetos A y B tienen velocidades $\overrightarrow{v_A}$ *y* $\overrightarrow{v_B}$*, respectivamente, entonces la velocidad de B relativa a A es* $\overrightarrow{v_A}(B) = \overrightarrow{v_B} - \overrightarrow{v_A}$.

Solución

Representemos gráficamente el movimiento del automóvil ($\vec{A}$) y del camión ($\vec{C}$) (*ver* figura 6.39).

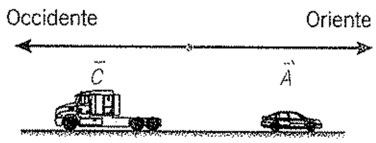


Figura 6.39

a. Como el automóvil va hacia el oriente, entonces $\overrightarrow{V_A} = 100$ km/h, mientras que como el camión se dirige al occidente la velocidad del camión "hacia el oriente" es $\overrightarrow{V_C} = -85$ km/h, entonces la velocidad del camión relativa al automóvil es $\overrightarrow{V_A}(C) = \overrightarrow{V_C} - \overrightarrow{V_A} = -85 - 100 = -185$ km/h hacia el oriente, o 185 km/h hacia el occidente.

b. De manera similar al análisis hecho en (a), tenemos que:
$\overrightarrow{V_C}(A) = \overrightarrow{V_A} - \overrightarrow{V_C} = (-100) - 85 = -185$ km/h hacia el occidente.

c. Luego de que el camión gira hacia el noroccidente, mantiene su rapidez de desplazamiento pero su dirección es ahora 135° respecto al camino que sigue el automóvil (*ver* figura 6.40).

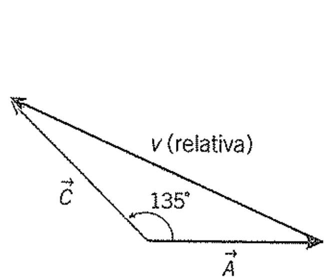


Figura 6.40

Entonces aplicando la Ley de los cosenos tenemos la magnitud (norma) del vector que da la velocidad del camión relativa al automóvil:

$$\left\|\overrightarrow{V_A}(C)\right\|^2 = |85|^2 + |100|^2 - 2(85)(100)\cos 135° \approx 29\,245{,}81 \text{, entonces } \left\|\overrightarrow{V_A}(C)\right\| \approx 171{,}01.$$

El ángulo θ que da la dirección del vector de velocidad del camión relativo al automóvil lo calculamos utilizando la Ley de los senos: $\frac{\operatorname{sen}\theta}{85} = \frac{\operatorname{sen} 135°}{171{,}01}$, de donde tenemos que $\operatorname{sen}\theta = 0{,}351$; por tanto, $\theta = 20{,}55°$.

Así, después de que el camión gira y sale de la carretera su rapidez es de 171,01 km/h en dirección occidente 20,55° al norte (W 20,55 °N) relativa al automóvil. ◄

Comentario

La velocidad relativa no depende de la posición de los objetos, ésta permanece igual por tanto tiempo como los dos objetos continúen sus viajes en la misma dirección, sin ningún cambio en su rapidez.

> Piensa y practica <

> Comunicación

1. Traza una gráfica de la curva cuyas ecuaciones paramétricas se dan.

   a. $x = 2t$; $y = 2 - t$ **b.** $x = 1 - t$; $y = x^2 + x$

   c. $x = t^2$, $y = 9 - t^2$ **d.** $x = t^2$, $y = |t|$

2. Si es posible, encuentra una ecuación cartesiana en las variables x y y, para las curvas del ejercicio 1.

3. Halla un par de ecuaciones paramétricas y la ecuación vectorial que representan las siguientes circunferencias.

   a. $x^2 + y^2 = 1$ **b.** $x^2 + y^2 = 2$

   c. $x^2 + y^2 - 2x = 0$ **d.** $x^2 + y^2 - 4y = 5$

> Resolución de problemas

4. En los siguientes casos se da un par de ecuaciones vectoriales de dos objetos que se mueven siguiendo una trayectoria rectilínea con parámetro "el tiempo" medido en minutos y "la distancia" en metros. En cada caso determina el tiempo en que se cruzan y la posición en que lo hacen.

   a. $\vec{R}(t) = (1, -2) + t(2, 5)$, $\vec{P}(t) = (0, 4) + t(-1, 1)$

   b. $\vec{R}(t) = (3, 2) + t(-2, 0)$, $\vec{P}(t) = (1, 4) + t(1, 1)$

   c. $\vec{R}(t) = (1, 2) + t(3, 4)$; $\vec{P}(t) = (3, 4) + t(1, 2)$

5. Una moto, un automóvil y un bus de servicio público viajan por una avenida que atraviesa la ciudad de sur a norte, con velocidades de 50, 80 y 70 km/h, respectivamente. El automóvil y la moto viajan hacia el sur, mientras que el bus lo hace hacia el norte. Calcula:

   a. La velocidad del automóvil relativa al bus.

   b. La velocidad de la moto relativa al bus.

   c. La velocidad del automóvil relativa a la moto.

6. Un avión está volando en dirección norte con una rapidez constante de 360 km/h. En su trayecto se encuentra con una corriente de aire (viento) que lleva una velocidad de 80 km/h en dirección suroccidente. Halla:

   a. La dirección del avión.

   b. La distancia recorrida luego de tres horas.

Uso de la tecnología

7. Para cada una de las siguientes curvas parametrizadas, traza su gráfica con la ayuda del computador (utiliza el programa Excel). Construye una tabla de datos de manera que en la primera columna estén 25 valores de los ángulos desde 0 radianes hasta 2π radianes (igualmente espaciados), tomando $\pi \approx 3{,}14159$, entonces son los primeros 25 múltiplos del valor 0,2513272 (que corresponde a 15°), empezando en 0; en la segunda columna, la fórmula correspondiente a la ecuación paramétrica para x, y en la tercera columna la ecuación paramétrica para y. Después con el Asistente para gráficos, en la opción "*XY* dispersión", en el subtipo "dispersión con puntos de datos conectados por líneas suavizadas" (segunda opción), traza el gráfico.

   a. $x(t) = 2(t - \operatorname{sen} t)$, $y(t) = 2(1 - \cos t)$

   b. $x(t) = t + \operatorname{sen} t$, $y(t) = 1 - \cos t$

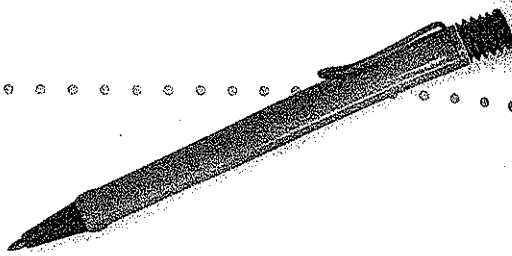
   c. $x(t) = \cot t$, $y(t) = 2\operatorname{sen}^2 t$. (No consideres los valores donde la función seno es 0).

   d. $x(t) = \frac{3t}{1 + t^2}$, $y(t) = \frac{3t^2}{1 + t^2}$

   e. $x(t) = \cos^3 t$, $y(t) = \operatorname{sen}^3 t$

   f. $x(t) = \cos t + t \operatorname{sen} t$, $y(t) = \operatorname{sen} t - t\cos t$

Evaluación por competencias



Autoevaluación

A continuación aparecen los indicadores de logro. Marco ✔ en la columna Sí, si el logro indicado está superado o ✘ en la columna No, si está por superar.

	Sí	No
> Realizo operaciones con vectores, como adición, sustracción, multiplicación por escalar, producto punto, producto vectorial.	☐	☐
> Aplico los vectores en la solución de problemas geométricos.	☐	☐
> Aplico los vectores en la solución de problemas físicos.	☐	☐

Coevaluación

Con los siguientes ejercicios, afianzamos los indicadores de logro que hemos superado y reforzamos aquellos que están por superar.

1. Encontremos un $\vec{v}$ en el plano con la longitud y dirección dadas.

a. 10; 45° **b.** 3; 60°

c. 12; 90° **d.** $\sqrt{5}$; 135°

e. $\frac{5}{3}$; 20° **f.** 1; 275°

2. Para los siguientes pares de vectores, encontremos la longitud de cada uno, el coseno y el seno del ángulo entre ellos, el producto punto y la longitud del producto vectorial entre ellos.

a. $\vec{u} = (1, 4, 6)$, $\vec{v} = (2, 0, -3)$

b. $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{v} = 3\vec{j} - 5\vec{k}$

c. $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$

3. Hallemos todos los números reales k tales que $\left\|k\vec{u}\right\| = 1$, donde $\vec{u}$ es un vector no nulo.

4. Sea un paralelogramo con lados adyacentes $\vec{A}$ y $\vec{B}$. Demostremos que el área del paralelogramo está dada por $\sqrt{\left\|\vec{A}\right\|^2 \left\|\vec{B}\right\|^2 - (\vec{A} \cdot \vec{B})^2}$.

5. Hallemos la ecuación de la recta que pasa por el punto dado y tiene vector director $\vec{v}$.

a. $(2, -1, 4)$, $\vec{v} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$

b. $(0, 0, 0)$, $\vec{v} = 4\vec{i} - 5\vec{j} - \vec{k}$

c. $(1, 5, -2)$, $\vec{v} = 5\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$

6. Demos un ejemplo de tres vectores que muestren que la siguiente proposición es falsa:

Si $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{u} \times \vec{w}$, entonces $\vec{v} = \vec{w}$. (Ayuda: no utilicemos el vector nulo en el ejemplo).

7. Encontremos el área del paralelogramo que tiene como dos de sus lados adyacentes a los vectores dados:

a. $\sqrt{2}\,\vec{i} - 1{,}41\vec{k}$, $\sqrt{3}\,\vec{i} + 1{,}4\vec{j} + \sqrt{6}\,\vec{k}$

b. (0,25, 2,5, 3,75); (4,75, 0,5, 0,05)

8. Utilicemos vectores para encontrar el ángulo entre la recta que pasa por los puntos P y Q y la mediana al lado $\overline{QR}$ del $\triangle PQR$, si las coordenadas de los vértices P, Q, R son (1, –2, 1), (0, 1, 6) y (– 3, 4, – 2), respectivamente.

9. Demos una razón geométrica de por qué $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$ debe estar en el plano determinado por los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$, si se asume que estos dos vectores no son paralelos.

10. Parte de una autopista en una colina tiene una inclinación de 6%; si un automóvil de 4725 lb se parquea a la orilla de la autopista:

a. ¿Cuál es la fuerza que tiende a hacer el automóvil para rodarse cuesta abajo?

b. ¿Cuánto trabajo hace el automóvil, si se rueda 300 pies cuesta abajo?

En mecánica, el momento m de una fuerza $\vec{F}$ alrededor de un punto P se define como $m = \left\|\vec{F}\right\| d$, donde d es la distancia entre el punto P y la línea de acción, l, de la fuerza $\vec{F}$ (*ver* figura 6.41). Si $\vec{R}$ es el vector que va desde P hasta un punto cualquiera Q de la recta l, entonces $d = \left\|\vec{R}\right\| \operatorname{sen}\alpha$, donde α es suplemento del ángulo entre $\vec{R}$ y $\vec{F}$, luego $m = \left\|\vec{R}\right\|\left\|\vec{F}\right\|$ y $\operatorname{sen}\alpha = \left\|\vec{R} \times \vec{F}\right\|$. En resumen, el vector $m = R \times F$ se llama **vector momento** o **momento vectorial** de $\vec{F}$ alrededor de P.

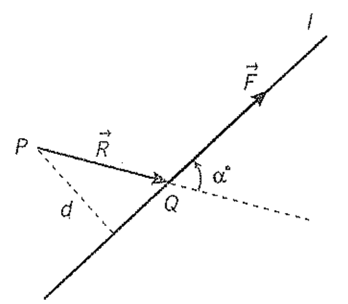


Figura 6.41

11. Una fuerza $\vec{F}$ actúa sobre una recta que pasa por un punto O. Encontremos el vector momento m de F, respecto a un punto P, donde:

a. $\vec{F} = \vec{i} + 2\vec{j}$, $O = (1, -1, 1)$, $P = (-2, 1, 3)$

b. $\vec{F} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$, $O = (4, -2, 1)$, $P = (1, 0, 2)$

12. Hallemos la velocidad vertical inicial de una piedra que es lanzada con una velocidad inicial de magnitud 50 pies/s, con un ángulo de 40° con la horizontal.

Tu creación

Una polea consiste de dos ruedas unidas por una correa (*ver* figura 6.42). La rueda más grande tiene tiene 9 pulgadas de diámetro y la otra tiene 6 pulgadas de diámetro. Si la rueda más grande gira a 120 revoluciones por minuto (rpm), ¿a qué rpm girará la rueda más pequeña?

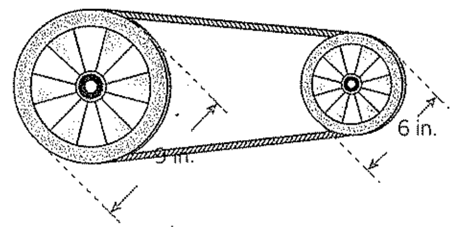


Figura 6.42

Prueba ICFES

Selecciona de las cuatro opciones sólo una de las respuestas, la que consideres relaciona de manera más estructurada los conceptos matemáticos con las condiciones particulares de la situación problema.

1. El valor de $(1, -2, 3) \cdot (2, 1, -2)$ es:

a. 0 **b.** -2

c. 4 **d.** -6

2. El ángulo entre los vectores unitarios $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es $\frac{\pi}{2}$ radianes. Entonces el valor de $\left\|\vec{u} + \vec{v}\right\|^2$ es:

a. 0 **b.** 1

c. 2 **d.** 4

3. Si θ es el ángulo entre los vectores $5\vec{i} - \vec{j}$, $-2\vec{i} + 3\vec{j}$, entonces el valor de $\operatorname{sen}\theta$ es:

a. $\frac{1}{2}$ **b.** $-\frac{1}{2}$

c. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ **d.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

4. El producto vectorial de $\vec{u} = (1, 2)$ y $\vec{v} = (-2, 1)$ es:

a. 0 **b.** $5\vec{j}$

c. $5\vec{k}$ **d.** $5\vec{i}$

5. Si θ es el ángulo formado por los $\vec{u} = 3\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$ y $\vec{v} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 7\vec{k}$, entonces $\cos\theta$ es aproximadamente:

a. 0,691

b. $-0{,}691$

c. 0,7071

d. $-0{,}7071$

6. De acuerdo con las condiciones del ejercicio anterior, θ es igual a:

a. 46,29°

b. $0{,}74\pi$ radianes

c. 70°

d. 45°

7. El ángulo entre las líneas rectas $(2, 3) + t(-1, 2)$, $(1, -2) + s(1, 3)$ es:

a. 45° **b.** 75°

c. 100° **d.** 135°

8. Si el vector $\vec{u}$ es perpendicular a los dos vectores $\vec{v} = (1, 2, 0)$, $\vec{w} = (0, -12, 4)$, entonces $\vec{u}$ debe ser:

a. Paralelo a $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

b. Perpendicular a $\vec{v} \times \vec{w}$.

c. Paralelo a $(-2, 1, 3)$.

d. Perpendicular a $(-2, 1, 3)$.

De acuerdo con los puntos $A(2, 3)$, $B(-1, 4)$ y $C(2, -1)$, responde las preguntas 9 a 11.

9. La medida de los ángulos formados por la bisectriz del $\angle BAC$ es:

a. 85,75° **b.** 54,215°

c. 94,25° **d.** 125,785°

10. El perímetro del $\triangle ABC$ es:

a. $4\sqrt{10}\sqrt{35}$

b. $4 + \sqrt{10} + \sqrt{35}$

c. $4^2 + \left(\sqrt{10}\right)^2 + \left(\sqrt{35}\right)^2$

d. $\sqrt{13} + \sqrt{17} + \sqrt{5}$

11. El área del $\triangle ABC$ es:

a. 3 **b.** 6

c. 9 **d.** 12

12. Una fuerza $\vec{F}$ de magnitud 15 N causa un desplazamiento $\vec{d}$ de magnitud 8 m. Si el ángulo entre $\vec{F}$ y $\vec{d}$ es $\theta = 30°$, el trabajo realizado es:

a. $120\sqrt{3}$ julios **b.** $60\sqrt{3}$ julios

c. $40\sqrt{3}$ julios **d.** $20\sqrt{3}$ julios

13. Una piedra es lanzada con una velocidad inicial de magnitud 16 pies/s, y con un ángulo de 38°. Las velocidades horizontal y vertical son respectivamente:

a. 13 y 12. **b.** 13 y 11.

c. 13 y 10. **d.** 12 y 10.

14. Dos ciclistas parten del punto *A* y, avanzando en línea recta, atraviesan una región circular, donde se encuentra una cámara de TV., intersecando la circunferencia en los puntos *B*, *C* y *D*, *E*, respectivamente (*ver* figura 6.43). Se puede afirmar que:

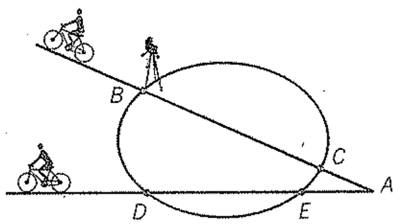


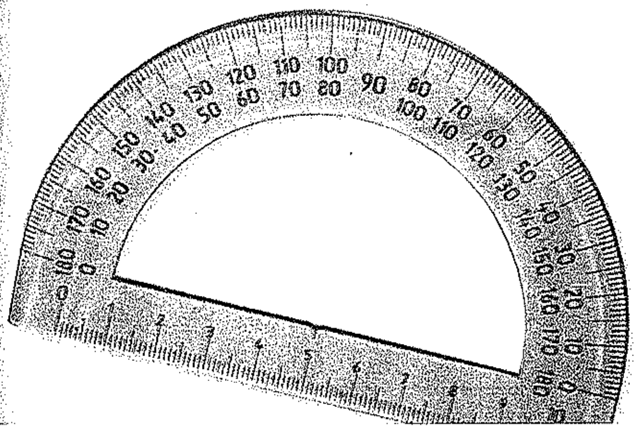
Figura 6.43

a. Ambos recorren la misma distancia desde *A* hasta el punto por donde salen de la región circular.

b. El ciclista que pasa por *C* recorre mayor distancia en la región circular que el ciclista que pasa por *E*.

c. Las distancias *AC*, *CB*, *AE* y *ED* satisfacen la proporción $\frac{AC}{AB} = \frac{AE}{AD}$.

d. Las distancias *AC*, *AB*, *AE*, *AD* satisfacen la proporción $\frac{AC}{AE} = \frac{AD}{AB}$.



15. En la figura 6.44 la medida del ángulo en *C* es 30°.

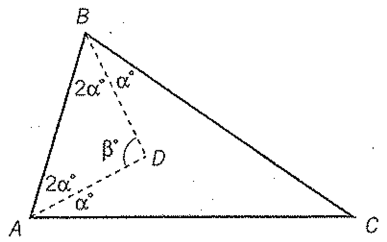


Figura 6.44

Entonces $\beta°$ es igual a:

a. 60°

b. 30°

c. 80°

d. 120°

16. El área de cada triángulo sombreado de la figura 6.45, respectivamente es:

a. 16 y 17

b. 16 y 8,5

c. 8 y 8,5

d. 17 y 16

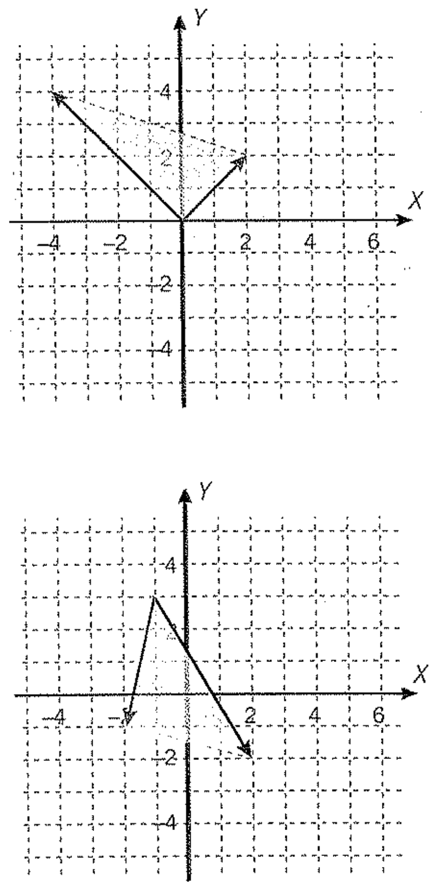


Figura 6.45

Conexión histórica

Los vectores y las leyes de Newton

La noción de vector estaba implícitamente definida en las ideas de fuerza y velocidad. Pero las operaciones vectoriales, de modo explícito, se realizaron por vez primera, a partir de la representación de los números complejos, en los trabajos de Bellavitis, que le condujo a su teoría de las equipolencias, la primera representación de un cálculo de magnitudes dirigidas y orientadas. Möebius, con su *Cálculo baricéntrico*, y sobre todo Grassmann, con su *Teoría lineal de la extensión*, fueron los que se enfrentaron de hecho con el problema, pero debido a su vocabulario y notaciones sus ideas no fueron comprendidas, hasta que Hankel y Schlegel dieron una versión más clara de su obra. Aunque la exposición por Grassmann incluía las nociones básicas del cálculo vectorial, tales como producto interno y externo, sus investigaciones de espacios de dimensión *n* despertaron un gran interés posteriormente. Por cierto, los términos "escalar y vector" se los debemos a Hamilton, el creador de los cuaterniones.

La influencia en la Física de la definición formal de vector se ve claramente en la mecánica newtoniana. De las leyes de Newton podemos extraer unas definiciones operacionales para los conceptos de masa y fuerza. Cuando un cuerpo en reposo se mueve o un cuerpo cambia su vector velocidad, se debe a la acción de una fuerza. La primera ley nos indica si alguna fuerza está presente, mientras que la segunda nos permite encontrar, o definir, las fuerzas que actúan en un sistema de referencia inercial. El concepto de masa puede definirse a partir de la segunda ley, así: si ejercemos la misma fuerza en idénticas circunstancias sobre dos cuerpos distintos, el menos masivo cambia el valor de su velocidad respecto al tiempo más rápidamente que el otro, es decir, adquiere más aceleración.

Según la tercera ley, dos objetos aislados de su entorno (no actúan fuerzas externas) experimentan sólo fuerzas mutuas, y la suma de sus momentos permanecen constantes en el tiempo: $\overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2} = k$. La idea detrás de este hecho es que si uno de los cuerpos aumenta su momento, por ejemplo, ganando velocidad, el otro lo pierde al mismo ritmo. Si la suma de fuerzas exteriores es cero, entonces la variación instantánea es 0. ■

Reflexiona

1. ¿A partir de qué creación matemática se presentaron explícitamente los vectores?
2. ¿El momento de un cuerpo es una cantidad escalar o vectorial?
3. Consulta cómo se escribe vectorialmente la segunda ley de Newton.

Glosario

Combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$: vector de la forma $a\vec{u} + b\vec{v}$.

Componente de $\vec{u}$ en dirección de $\vec{v}$: número real $\dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\left\|\vec{v}\right\|}$.

Desigualdad triangular: $\left\|\vec{u} + \vec{v}\right\| \leq \left\|\vec{u}\right\| + \left\|\vec{v}\right\|$

Fuerza: causa capaz de generar un cambio en la aceleración de un objeto.

Inercia: propiedad de los cuerpos según la cual tienden a mantener su movimiento cuando se afectan por una fuerza extraña.

Peso de un objeto: fuerza gravitatoria que ejerce la Tierra sobre un objeto.

Producto punto entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$: número real $ax + by$, denotado $\vec{u} \cdot \vec{v}$, en donde $\vec{v} = (a, b)$ y $\vec{v} = (x, y)$.

Producto vectorial: vector $u \times v = (bz - cy, cx - az, ay - bx)$, en donde: $\vec{u} = (a, b, c)$ y $\vec{v} = (x, y, z)$, cuya longitud es $\left|\vec{u} \times \vec{v}\right| = \left\|\vec{u}\right\|\left\|\vec{v}\right\| \operatorname{sen}\theta$ (θ es el ángulo entre los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$).

Trabajo: producto punto entre el vector fuerza y el vector desplazamiento.

Vector: segmento de recta dirigido, que se extiende de un punto a otro.

Vector unitario: vector cuya longitud es la unidad $\left(\left\|\vec{u}\right\| = 1\right)$.

Vectores canónicos unitarios en el plano: vectores $i = (1, 0)$ y $j = (0, 1)$, tales que todo vector $v = (a, b)$ puede expresarse como una combinación lineal de $\vec{i}$ y $\vec{j}$.

Vectores paralelos: vectores de un mismo plano, tales que el ángulo entre ellos es 0 o π.

Vectores perpendiculares (ortogonales): vectores de un mismo plano, tales que el ángulo entre ellos es $\frac{\pi}{2}$.

Razonamiento

1. Considera la proposición "Todos los números naturales terminados en 5 producen un número que elevado al cuadrado da un número que termina en 25".

   a. Verifica esta proposición para los primeros 10 números naturales que terminen en 5.

   b. Supón que el número natural x termina en 5 y que su cuadrado termina en 25. Demuestra que el siguiente número natural (después de x) que termina en 5 su cuadrado también termina en 25.

2. El $\triangle ABC$ es rectángulo con ángulo recto en B. El lado AC se prolonga de manera que $\overline{CD} \cong \overline{CB}$. La bisectriz del ángulo A interseca al $\overline{BD}$ en el punto E (*ver* figura 6.46). Demuestra que la medida de $\angle AEB$ es 45°.

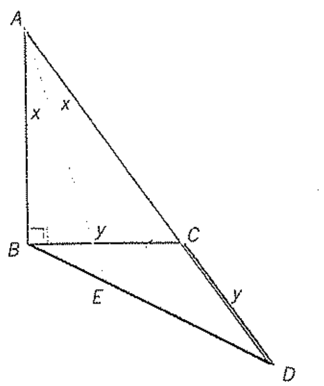


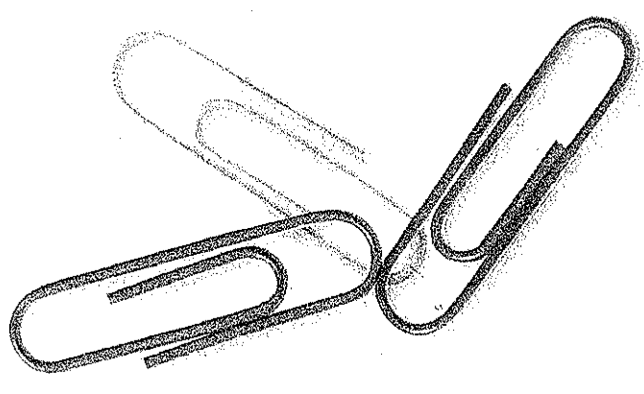
Figura 6.46

3. En el $\triangle ABC$, P es el punto medio del $\overline{BC}$. Si $\overline{PA} \cong \overline{PB} \cong \overline{PC}$, demuestra que la medida de $\angle BAC = 90°$.

4. Camila escribió la ecuación cuadrática $x^2 + 2x + 3 = 0$, y calculó su discriminante $D = 2^2 - 4(1)(3) = -8 < 0$, de lo cual dedujo que las "raíces" de esta ecuación son números complejos; al calcular el discriminante de la ecuación $4x^2 + 5x + 6 = 0$ obtuvo $D = -71 < 0$, concluyendo que también tiene raíces complejas.

   a. ¿Qué relación existe entre los coeficientes de cada ecuación?

   b. Demuestra que toda ecuación cuadrática, cuyos coeficientes son números naturales consecutivos, tiene raíces complejas.



> Matrices y programación lineal

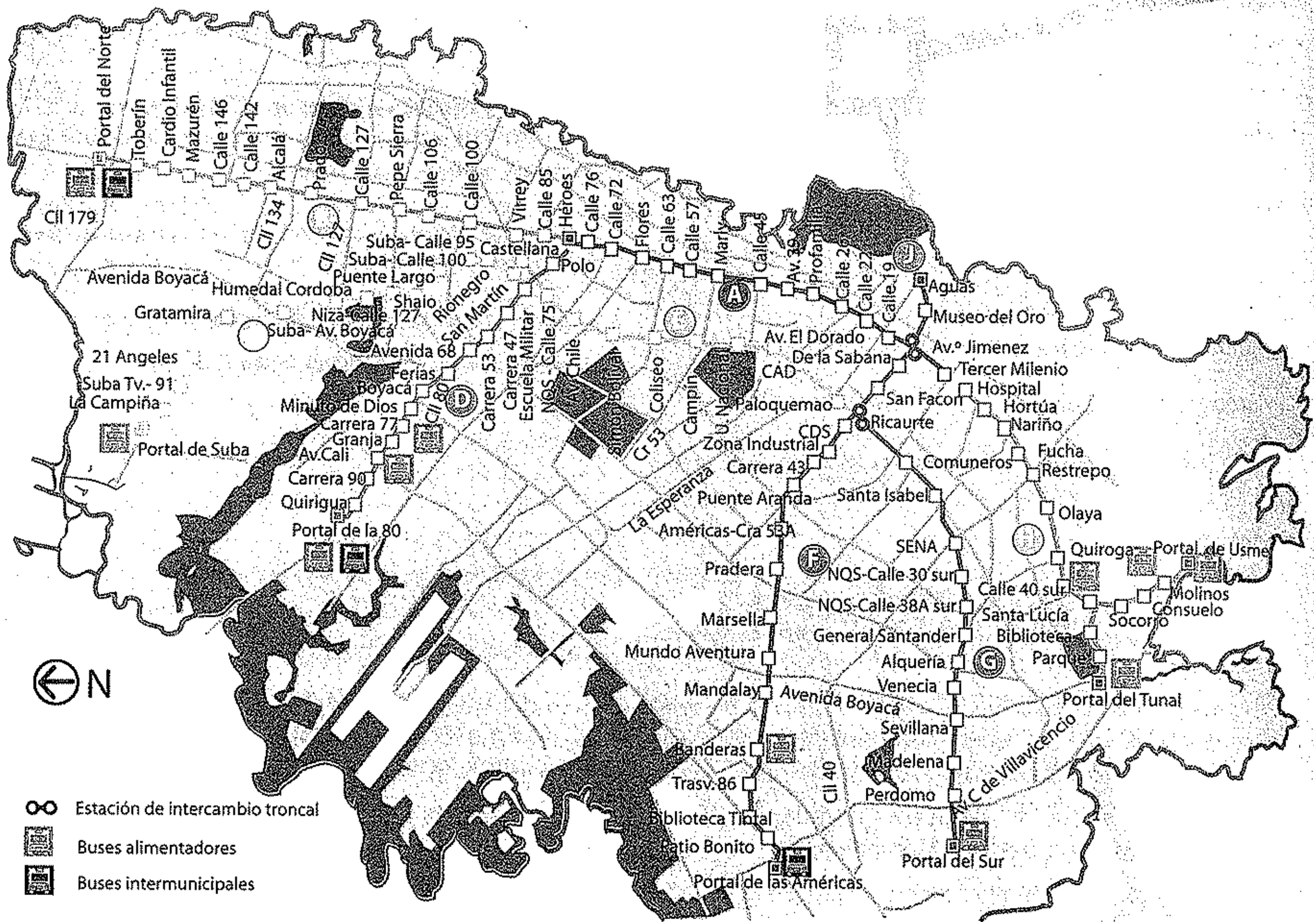


Figura 7.1

Grafos

Estándares:

Conexiones

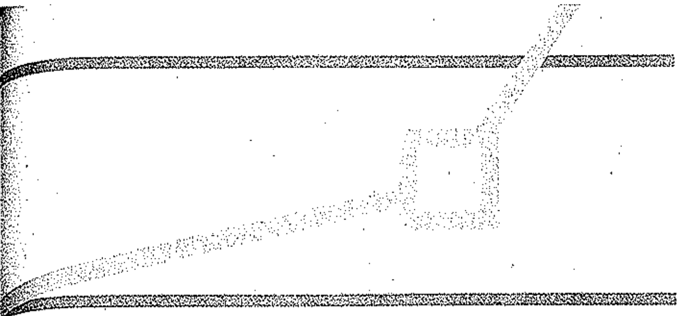
Relacionar conceptos

Relacionar e interpretar situaciones problema mediante matrices y funciones lineales.

Comunicación

Leer, escribir y comunicar

Representar y operar matricialmente, información numérica de dos o más variables.



Un grafo es un conjunto de puntos unidos por líneas que permiten analizar las relaciones entre unidades que interactúan. En el sector de transporte (aéreo, marítimo, ferroviario y terrestre) se realizan estudios de factibilidad en la planificación de vías, tiempos, costos y recursos disponibles, para lograr un completo cubrimiento del sector contemplado, y se utilizan técnicas propias de la teoría de grafos en la planificación de redes, que cubran las rutas disponibles en forma óptima. Por ejemplo, en el mapa del sistema de transporte de Bogotá Transmilenio (*ver* figura 7.1), los vértices pueden verse como las paradas de los buses articulados y las líneas que relacionan los vértices, como las vías.

En el área empresarial, uno de los problemas centrales es la planificación de personal, más exactamente de la distribución del recurso humano en la ejecución de sus labores. Con el ánimo de minimizar tiempos y de lograr las metas propuestas a nivel económico y el bienestar del recurso humano, se realizan estudios de grafos que permiten analizar las relaciones entre las diferentes variables involucradas. Por ejemplo, una compañía transporta ciertos productos alimenticios y la cantidad promedio en toneladas, de los productos que se transportan semanalmente entre las cuatro ciudades A, B, C y D es:

- De la ciudad A a la ciudad B, 42 toneladas.
- De la ciudad A a la ciudad C, 32 toneladas.
- De la ciudad A a la ciudad D, 35 toneladas.
- De la ciudad B a la ciudad A, 25 toneladas.
- De la ciudad B a la ciudad C, 30 toneladas.
- De la ciudad B a la ciudad D, 28 toneladas.
- De la ciudad C a la ciudad A, 35 toneladas.
- De la ciudad C a la ciudad B, 34 toneladas.
- De la ciudad C a la ciudad D, 25 toneladas.
- De la ciudad D a la ciudad A, 30 toneladas.
- De la ciudad D a la ciudad B, 20 toneladas.
- De la ciudad D a la ciudad C, 35 toneladas.

El grafo correspondiente a esta situación podemos observarlo en la figura 7.2.

Analiza y resuelve

De acuerdo con la lectura anterior, responde:

1. ¿Para qué se utilizan los grafos?

a. Para conocer la distancia entre dos ciudades.

b. Para estudiar relaciones entre unidades que interactúan.

c. Para conocer cuál es la producción de una empresa.

d. Para simplificar operaciones numéricas.

2. ¿Podrías organizar la información del grafo de la figura 7.2, mediante un arreglo? ¿De qué manera?

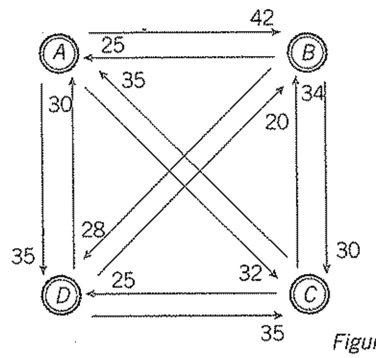


Figura 7.2

3. En promedio, ¿cuántas toneladas semanales se transportan desde la ciudad A?

a. 109

b. 65

c. 94

d. 77

4. Mediante un arreglo ordenado, organiza el porcentaje transportado desde cada ciudad.

5. En promedio, ¿cuántas toneladas semanales se transportan a la ciudad C?

a. 122

b. 97

c. 62

d. 25

Razonamiento lógico

Desarrollar destrezas matemáticas

Comprender demostraciones deductivas según el método de programación lineal, justificando matemáticamente cada etapa.

Resolución de problemas

Emplear estrategias en la resolución de problemas

Solucionar problemas referentes a sistemas de ecuaciones e inecuaciones lineales mediante matrices, determinantes o el método gráfico.

Concepto de matriz

Logro: interpretar información de dos o más variables relacionadas linealmente mediante matrices.

Los precios de los artículos suelen diferir de ciudad en ciudad; incluso en la misma ciudad pueden variar de establecimiento en establecimiento. Los precios de algunos artículos y algunas ciudades se muestran en la tabla 7.1.

Artículo \ Ciudad	Bogotá (*B*)	Cúcuta (*C*)	Santa Marta (*SM*)	Leticia (*L*)
	$ 12 000	$ 7500	$ 15 000	$ 10 000
	$ 10 000	$ 4500	$ 9500	$ 8800
	$ 1500	$ 1800	$ 2000	$ 2000
	$ 12 500	$ 10 000	$ 16 000	$ 14 000

Tabla 7.1

Estos datos constan de dos tipos de informaciones o variables: ciudades y precios de ciertos artículos. Una forma organizada de representar información como la anterior, es mediante un arreglo rectangular como el siguiente:

$$\begin{array}{r c}
 & \begin{array}{cccc} B & C & SM & L \end{array} \\
\begin{array}{r} \text{Champú} \\ \text{Gasolina} \\ \text{Agua} \\ \text{Bloqueador solar} \end{array} &
\begin{bmatrix} 12\,000 & 7500 & 15\,000 & 10\,000 \\ 10\,000 & 4500 & 9500 & 8800 \\ 1500 & 1800 & 2000 & 2000 \\ 12\,500 & 10\,000 & 16\,000 & 14\,000 \end{bmatrix}
\end{array}$$

$$\begin{array}{r c}
 & \begin{array}{cccc} \text{Columna 1} & \text{Columna 2} & \text{Columna 3} & \text{Columna 4} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\
\begin{array}{r} \text{Fila 1}\rightarrow \\ \text{Fila 2}\rightarrow \\ \text{Fila 3}\rightarrow \\ \text{Fila 4}\rightarrow \end{array} &
\begin{bmatrix} 12\,000 & 7500 & 15\,000 & 10\,000 \\ 10\,000 & 4500 & 9500 & 8800 \\ 1500 & 1800 & 2000 & 2000 \\ 12\,500 & 10\,000 & 16\,000 & 14\,000 \end{bmatrix}
\end{array}$$

*Un arreglo rectangular de m filas y n columnas se denomina **matriz rectangular** de tamaño m × n o de **dimensión** m × n. Si m = n, entonces el arreglo se llama **matriz cuadrada** de tamaño m × m.*

Ejemplo 1

Tomemos la situación de entrada (la compañía transportadora de alimentos) y representemos en forma de matriz la información suministrada.

Solución

Una matriz que representa esta información es:

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 42 & 32 & 35 \\ 25 & 0 & 30 & 28 \\ 35 & 34 & 0 & 25 \\ 30 & 20 & 35 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Esta información la interpretamos de la siguiente manera: de la ciudad A (fila 1) a la ciudad B (columna 2) se transportan 42 toneladas; de la ciudad D (fila 4) a la ciudad D (columna 4) se transportan 0 toneladas. También, podemos nombrar la matriz con una letra, es decir,

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 42 & 32 & 35 \\ 25 & 0 & 30 & 28 \\ 35 & 34 & 0 & 25 \\ 30 & 20 & 35 & 0 \end{bmatrix}. \triangleleft$$

Según el ejemplo anterior, si tenemos que los costos mensuales de transporte de la ciudad A a las otras ciudades es de \$ 400 000, de la ciudad B a las otras ciudades, \$ 380 000; de la ciudad C a las otras ciudades de \$ 450 000 y de la ciudad D a las otras ciudades de \$ 350 000, podemos representar los costos (en miles de pesos) de transporte mensual, mediante un vector columna de dimensión 4×1:

$$P = \begin{bmatrix} 400 \\ 380 \\ 450 \\ 350 \end{bmatrix}$$

Adicionalmente, el número total de toneladas transportadas, semanalmente, desde cada ciudad, se representa mediante un vector columna de dimensión 4×1:

$$T = \begin{bmatrix} 109 \\ 83 \\ 94 \\ 85 \end{bmatrix}$$

Comentario

Para obtener los elementos del vector columna T, se adicionan los elementos de cada fila de la matriz M y se colocan en la fila correspondiente.

La matriz que representa el porcentaje de toneladas transportadas semanalmente desde cada ciudad se obtiene al dividir cada "entrada" de cada fila por su respectiva suma; por ejemplo, los porcentajes correspondientes a cada "entrada de la fila 1" de la matriz que estamos construyendo es:

$$\frac{0}{109}100\% = 0\%, \ \frac{42}{109}100\% = 39\%, \ \frac{32}{109}100\% = 29\%, \ \frac{35}{109}100\% = 32\%.$$

Así, la matriz de porcentajes correspondiente a M es:

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{42}{109} & \frac{32}{109} & \frac{35}{109} \\ \frac{25}{83} & 0 & \frac{30}{83} & \frac{28}{83} \\ \frac{35}{94} & \frac{34}{94} & 0 & \frac{25}{94} \\ \frac{30}{85} & \frac{20}{85} & \frac{35}{85} & 0 \end{bmatrix}.$$

Expresando cada fracción como número decimal, multiplicando por 100% obtenemos:

$$M(\%) = \begin{bmatrix} 0 & 39\% & 29\% & 32\% \\ 30\% & 0 & 36\% & 34\% \\ 37\% & 36\% & 0 & 27\% \\ 35\% & 24\% & 41\% & 0 \end{bmatrix}$$

Interpretemos las entradas de esta matriz. Por ejemplo, la entrada que se encuentra en la fila 2 y en la columna 4 (34%) significa que del total (100%) de toneladas transportadas desde la ciudad B (que corresponde a la fila 2) el 34% se lleva a la ciudad D (que corresponde a la columna 4).

Comentario

La dimensión de la matriz suele escribirse en la parte inferior derecha de la misma, es decir, si $A = \left[a_{ij}\right]$ es una matriz de dimensión $m \times n$, $A = \left[a_{ij}\right]_{m \times n}$.

*Cada **elemento** o **entrada** en una matriz se identifica por la posición (fila, columna) en que se encuentra. Si $A = \left[a_{ij}\right]$ es una matriz de dimensión o tamaño $m \times n$, entonces a_{ij} es la entrada (i, j) de A, elemento que se encuentra en la fila i – ésima y la columna j – ésima de la matriz A.*

De la matriz obtenida de la tabla 7.1, el elemento que se encuentra en la posición (4, 2), es decir, fila 4 y columna 2, es 10 000, que representa el precio en pesos de un bloqueador solar en la ciudad de Cúcuta.

En la siguiente matriz hemos representado algebraicamente cada elemento mediante la letra m y un par de subíndices que identifican la posición del elemento; por ejemplo, m_{23} representa el elemento de la matriz M localizado en la fila 2 y columna 3.

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \end{bmatrix}$$

*Dos **matrices son iguales** si sus dimensiones son iguales y los elementos en las mismas posiciones son iguales. Dos **matrices son diferentes** si tienen diferentes dimensiones, o bien, si teniendo las mismas dimensiones tienen diferentes algún par de entradas correspondientes.*

Ejemplo 2

Consideremos las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2x^2 + 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} \cos 0 & 9x \\ \cos \pi & \sqrt{4} \end{bmatrix}$$

¿Para qué valor o valores de x son iguales las matrices A y B?

Solución

Como $\cos 0 = 1$, $\cos \pi = -1$ y $\sqrt{4} = 2$, sólo basta determinar los valores de las incógnitas para que A y B sean iguales.

$2x^2 + 4 = 9x$	Igualamos los elementos de las posiciones (fila 1, columna 2), de las matrices A y B.
$2x^2 - 9x + 4 = 0$	Igualamos a 0.
$(2x - 1)(x - 4) = 0$	Factorizamos el trinomio cuadrado.
$x = \frac{1}{2}$, o, $x = 4$	Obtenemos los ceros del trinomio.

Así las matrices A y B son iguales para $x = \frac{1}{2}$, y para $x = 4$; para cualquier otro valor diferente de x, las matrices A y B son diferentes. ◀

> Grafos

Uno de los usos de los grafos es la representación más sencilla de situaciones reales para una mejor comprensión. Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3

Yaneth y Andrés son amigos de Laura. Laura es a su vez amiga de Daniel, quien también es amigo de Paula. Representemos la relación entre Laura y sus amigos por medio de un grafo.

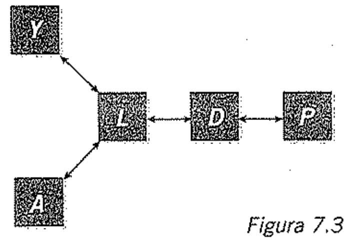


Figura 7.3

Solución

Un grafo está compuesto de nodos y enlaces. En este caso, los nodos son las personas (representados por la letra inicial de su nombre) y los enlaces representan la amistad entre dos personas (*ver* figura 7.3). ◁

*Un **grafo** está formado por vértices (nodos) y ejes (arcos) que conectan los vértices. Si U y V son vértices conectados, entonces $\overline{UV}$ es un eje que los conecta, U y V se denominan vértices terminales del eje $\overline{UV}$. Dos vértices U y V son **adyacentes** si existe un eje que los conecte.*

Todo grafo se puede representar mediante una matriz, llamada **matriz de adyacencia**.

*Los elementos de la matriz de adyacencia dependen de las conexiones entre los vértices del grafo. Si G es un grafo, entonces la **matriz de adyacencia** de G es $A(G)=[a_{ij}]$, donde $a_{ij}=0$ si no existe ningún eje entre los nodos i y j, y $a_{ij}=1$, si existe algún eje entre i y j.*

Ejemplo 4

Hallemos la matriz de adyacencia asociada al grafo del ejemplo 3.

Solución

$$A(G)=\begin{array}{c} \\ Y \\ A \\ L \\ D \\ P \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{matrix} Y & A & L & D & P \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \text{ o, } A(G)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

El elemento 1 en la matriz de adyacencia significa que los vértices, que dan la posición de este elemento, están conectados. Por ejemplo, el elemento en la posición 34 (fila 3 y columna 4) es 1, lo cual significa que los vértices *L* y *D* están conectados. ◁

En los ejes podemos incluir información respecto al tipo de relación entre los vértices que se conectan. Si como dato adicional del ejemplo 3, tenemos que Daniel y Paula han sido amigos por 5 años, colocaremos encima del eje $\overline{DP}$ el número 5 (el peso de la relación) como podemos ver en la figura 7.4:

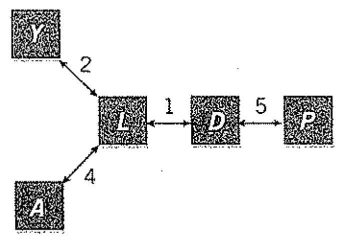


Figura 7.4

La **matriz de pesos**, asociada a este grafo es:

$$P(G)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Comentario

La representación que hizo Leonard Euler al problema de los puentes de Königsberg (siglo XVIII) dio origen a la teoría de grafos.

Pensamiento crítico

Problema de los puentes de Königsberg: ¿es posible encontrar un trayecto que cruce solamente una vez cada uno de los puentes (ver figura 7.5)?

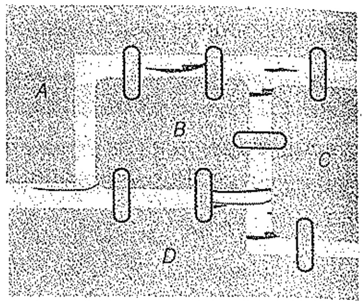


Figura 7.5

> Piensa y practica <

> Comunicación

1. Escribe una matriz que represente cada información.

a. En una encuesta a 100 personas, 40 hombres y 60 mujeres, se determinó que el 25% de las mujeres fuma y que el 60% de los hombres fuma.

b. A una reunión asistieron 200 personas, entre hombres, mujeres, niños y niñas. Las nacionalidades y distribución de estas personas fueron: Argentina: 10 niños, 15 niñas, 20 hombres y 25 mujeres; Colombia: 8 niños, 12 niñas, 15 hombres y 15 mujeres; México: 15 niños, 20 niñas, 20 hombres y 35 mujeres.

c. Un estudio clínico sobre enfermedades respiratorias en niños y niñas en el primer año de vida, efectuó una primera clasificación por género (*M*, *F*) y nivel socioeconómico (*B* = bajo, *D* = medio, *A* = alto). Los resultados fueron los siguientes: *B*: 120 *M*, 80 *F*; *D*: 100 *M*, 75 *F*; *A*: 90 *M*, 85 *F*.

d. Un estudio clínico sobre enfermedades del corazón recopiló información respecto a la relación entre hipertensión (*H*) y enfermedad arterial coronaria (*EAC*) en un grupo de individuos entre los 35 y los 49 años. Los resultados fueron los siguientes *H* y *EAC*: 550; *H* y no *EAC*: 220; no *H* y *EAC*: 950; no *H* y no *EAC*: 450.

e. Se sortea un viaje a la inauguración del Mundial de Fútbol entre 360 clientes de un concesionario automotor. De estos clientes, 195 son mujeres, 240 están casados y 165 son hombres casados.

f. Al final de un semestre, las calificaciones de la asignatura "Introducción a la ingeniería", con una intensidad semestral de 48 horas, fueron tabuladas en la tabla 7.2, para estudiar la relación entre la asistencia a clase y la calificación obtenida.

Ausencias	Aprobado	No aprobado
0 – 4	80	20
5 – 9	42	8
10 o más	10	40

Tabla 7.2

g. Los datos de 3 proveedores de tinturas para una industria de papel, en relación con las partes defectuosas, en lotes de cien unidades, se muestra en la tabla 7.3.

Proveedor	Pasa el control de calidad	Con defectos menores	Con defectos graves
A	90	3	7
B	70	20	10
C	75	15	10

Tabla 7.3

h. En la primera ronda de un torneo de fútbol, 6 equipos *A*, *B*, *C*, *D*, *E* y *F*, enfrentaron una vez a sus oponentes, los resultados por goles fueron los siguientes: (A:2, B:0), (A: 1, C:1), (A: 0, D: 1), (A: 1, E: 2), (A: 2, F: 2), (B: 1, C: 2), (B: 3, D: 2), (B: 2, E: 2), (B: 2, F: 0), (C: 0, D: 2), (C: 1, E: 1), (C: 2, F: 1), (D: 2, E: 0), (D: 3, F: 2), (E: 2, F: 3) , (B: 2, F: 0).

> Resolución de problemas

2. Determina los valores de las constantes P y Q, de manera que las dos matrices A y B sean iguales.

a. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{x^2+3x-4}{x^2+5x+6} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{P}{x+2} + \dfrac{Q}{x+3} \end{bmatrix}$

b. $A = \begin{bmatrix} \sqrt[3]{-8} & \dfrac{20}{x^2-25} \\ 0 & \dfrac{1}{2} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & \dfrac{P}{x-5} + \dfrac{Q}{x+5} \\ 0 & 0{,}5 \end{bmatrix}$

c. $A = \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{\pi}{4} \\ \dfrac{3x}{2x^2+11x+5} & 6 \end{bmatrix}$,

$B = \begin{bmatrix} 5^0 & \operatorname{arcsec} \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{P}{(x+5)} + \dfrac{Q}{(2x+1)} & 2\log_2 8 \end{bmatrix}$

d. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \dfrac{1}{x^3-1} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{\log_{10}\left(10^{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{2}} \\ 1 & \dfrac{P}{x-1} + \dfrac{Q}{x^2+x+1} \end{bmatrix}$

e. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & \dfrac{x+5}{x^2+x-2} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & \dfrac{P}{x-1} + \dfrac{Q}{x+2} \end{bmatrix}$

3. Halla el grafo asociado a la matriz de adyacencia dada.

a. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

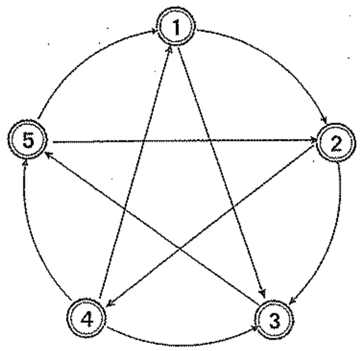
b. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

4. Halla la matriz de adyacencia asociada a cada grafo.

a.



b.

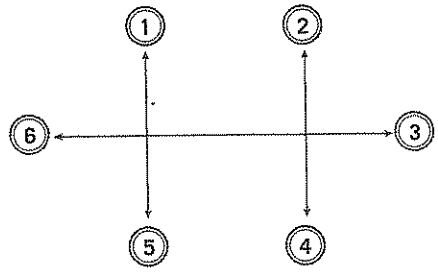


Figura 7.6

5. En el conjunto $W = \{2, 3, 4, 6, 12\}$ considera la relación: x está relacionado con y, si y sólo si, x divide a y, donde $x,\ y \in W$.

a. Traza el grafo dirigido asociado a esta relación.

b. Halla la matriz de adyacencia asociada al grafo.

6. En el conjunto $W = \{2, 3, 6, -2, -3, -6\}$ considera la relación: x está relacionado con y, si y sólo si, x divide a y, donde $x,\ y \in W$.

a. Traza el grafo dirigido asociado a esta relación.

b. Halla la matriz de adyacencia asociada al grafo.

7. En el conjunto $D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ considera la relación x está relacionado con y, si y sólo si, 3 divide a $y - x$. Por ejemplo, 2 y 8 están relacionados porque 3 divide a $6 = 8 - 2$.

a. Traza el grafo dirigido asociado a esta relación.

b. Halla la matriz de adyacencia asociada al grafo.

Lección 2

Operaciones con matrices

Logro: realizar operaciones aritméticas entre matrices.

> Adición y producto por escalar

Si A y B son matrices de las mismas dimensiones, entonces la matriz suma de A y B, tiene las mismas dimensiones que A y B, y sus elementos son la suma de los correspondientes elementos de las matrices A y B.

Si $A = \left[a_{ij}\right]$ *y* $B = \left[b_{ij}\right]$ *son matrices de dimensión* $m \times n$,
***la matriz suma** de A y B, A + B, tiene la entrada ij– ésima* $a_{ij} + b_{ij}$.
*La **matriz múltiplo de A**: kA, donde* $k \in \mathbf{R}$, *es la matriz cuya entrada ij– ésima es* ka_{ij}.

Ejemplo 5

La compañía Omega suministra accesorios de lujo para automóviles. Esta compañía tiene dos industrias en las ciudades de Bogotá y Cali, y suministra a las ciudades Medellín, Barranquilla y Bucaramanga. El número de accesorios enviados durante los meses de enero, febrero y marzo se resume en las matrices E, F y M, respectivamente, donde las filas corresponden a Bogotá, Cali (en ese orden), y las columnas a Medellín, Barranquilla y Bucaramanga (en ese orden).

$$E = \begin{bmatrix} 2500 & 3200 & 1800 \\ 1500 & 2400 & 1200 \end{bmatrix};\ F = \begin{bmatrix} 2800 & 3000 & 2100 \\ 1800 & 2100 & 1600 \end{bmatrix} \text{ y } M = \begin{bmatrix} 3200 & 3800 & 2400 \\ 2000 & 2600 & 2000 \end{bmatrix}.$$

a. ¿Cuántos accesorios en total se despacharon a Medellín, Barranquilla y Bucaramanga en enero?

b. ¿Cuántos accesorios se despacharon a Medellín, Barranquilla y Bucaramanga en el primer bimestre?

c. ¿Cuántos accesorios se despacharon a Medellín, Barranquilla y Bucaramanga en el primer trimestre?

d. La compañía Omega pronostica que, para el primer trimestre del siguiente año, sus envíos a estas tres ciudades se incrementarán en un 20%. Hallemos las matrices de los tres primeros meses (E, F, y M) del siguiente año.

Comentario

Para realizar adiciones con matrices, éstas deben ser de igual dimensión.

Solución

a. Tomamos la matriz E. Para hallar el total de accesorios enviados a Medellín (columna 1), desde Bogotá (fila 1) y Cali (fila 2), sumamos los valores (fila 1– columna 1 y fila 2– columna 1): 2500 y 1500, esto es, 4000.
Realizando un análisis similar con las otras ciudades, tenemos:
Para Barranquilla (fila 1– columna 2 y fila 2– columna 2): $3200 + 2400 = 5600$.
Para Bucaramanga (fila 1– columna 3 y fila 2– columna 3): $1800 + 1200 = 3000$.

b. Para hallar el total de accesorios enviados desde Bogotá a Medellín, en enero y febrero, sumamos los dos valores correspondientes: 2500 y 2800, cuya suma es 5300, es decir, en el primer bimestre del año se enviaron 5300 accesorios a Medellín desde Bogotá. De manera similar, operamos las demás entradas de las matrices E y F:

$$E + F = \begin{bmatrix} 2500 & 3200 & 1800 \\ 1500 & 2400 & 1200 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2800 & 3000 & 2100 \\ 1800 & 2100 & 1600 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2500 + 2800 & 3200 + 3000 & 1800 + 2100 \\ 1500 + 1800 & 2400 + 2100 & 1200 + 1600 \end{bmatrix}$$

$$E + F = \begin{bmatrix} 5300 & 6200 & 3900 \\ 3300 & 4500 & 2800 \end{bmatrix}.$$

c. Siguiendo un procedimiento similar al utilizado en la parte (b), la respuesta a este interrogante será la suma de las tres matrices: $E + F + M$. Como ya tenemos la suma de E y F, según (b), entonces basta sumar esta matriz resultado con la matriz M (por asociatividad de la suma de números reales):

$$(E + F) + M = \begin{bmatrix} 5300 & 6200 & 3900 \\ 3300 & 4500 & 2800 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3200 & 3800 & 2400 \\ 2000 & 2600 & 2000 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8500 & 10\,000 & 6300 \\ 5300 & 7100 & 4800 \end{bmatrix}.$$

d. Con el pronóstico dado por la compañía, el número de accesorios que se enviarán a la ciudad de Medellín, desde Bogotá, para enero, será de 2500 más 20% de 2500, es decir, $2500 + 0{,}20 \times 2500 = 2500(1 + 0{,}20) = 2500 \times 1{,}2 = 3000$.
Multiplicando cada una de las entradas de la matriz E por 1,2 hallamos la matriz pronosticada para el mes de enero, es decir:

$$1{,}2\begin{bmatrix} 2500 & 3200 & 1800 \\ 1500 & 2400 & 1200 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}2 \times 2500 & 1{,}2 \times 3200 & 1{,}2 \times 1800 \\ 1{,}2 \times 1500 & 1{,}2 \times 2400 & 1{,}2 \times 1200 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3000 & 3840 & 2160 \\ 1800 & 2880 & 1440 \end{bmatrix}$$

Para febrero (pronosticado):

$$1{,}2 \times F = 1{,}2\begin{bmatrix} 2800 & 3000 & 2100 \\ 1800 & 2100 & 1600 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3360 & 3600 & 2520 \\ 2160 & 2520 & 1920 \end{bmatrix}$$

Y para marzo (pronosticado):

$$1{,}2 \times M = 1{,}2\begin{bmatrix} 3200 & 3800 & 2400 \\ 2000 & 2600 & 2000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3840 & 4560 & 2880 \\ 2400 & 3120 & 2400 \end{bmatrix}. \blacktriangleleft$$

Comentario

La adición de matrices cumple las propiedades conmutativa y asociativa.

Comentario

El nombre de escalar dado a los números reales, proviene de la clasificación de las cantidades en escalares y vectoriales, dada en Física. Las cantidades escalares se representan de manera completa por su magnitud.

Ejemplo 6

Dadas las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -4 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$, hallemos, si es posible:

a. $A + B$ **b.** $(-1)B$ **c.** $B + C$ **d.** $C - B$

Solución

a. El tamaño de la matriz A es 3×3, diferente al de la matriz B que es 3×2; por tanto, no se puede realizar la adición entre ellas.

b. $(-1)B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -1 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}.$

c. Como B y C tienen las mismas dimensiones, tenemos:

$$B + C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -4 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -3 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}.$$

d. $C - B = C + (-1)B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -4 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -1 \\ -2 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 6 & -5 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}. \blacktriangleleft$

Ejemplo 7

Descompongamos las matrices A y B del ejemplo 6, en vectores fila y en vectores columna.

Solución

Para la matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

En la descomposición por vectores fila, cada fila de A forma un vector.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

En la descomposición por vectores columna, cada columna de A forma un vector.

Para la matriz B:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -3 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Realizamos la descomposición por filas.

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Realizamos la descomposición por columnas. ◁

Comentario

Para multiplicar dos matrices A y B, en el orden $A \times B$, el número de columnas de la matriz A debe ser igual al número de filas de la matriz B.

> Multiplicación entre matrices

*Sean: A una matriz de dimensión $m \times p$, y B una matriz de dimensión $p \times n$. **La matriz producto** AB es la matriz de dimensión $m \times n$, cuyas entradas c_{ij} se obtienen de efectuar el producto punto entre la fila i – ésima de la matriz A y la columna j – ésima de la matriz B.*

Ejemplo 8

Encontremos la matriz producto AB, de las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$.

Solución

El número de columnas de la matriz A es 3, que es igual al número de filas de la matriz B. La dimensión de la matriz AB es 3×2, es decir, tiene seis entradas.

Utilizamos la representación por filas de la matriz A y la representación por columnas de la matriz B, para hallar los 6 elementos de la matriz producto AB:

Entrada (1, 1):

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}$ — Indicamos el producto punto de los vectores fila 1 de la matriz A y la columna 1 de la matriz B.

$= 1 \times 2 + 2 \times (-3) + 3 \times 2 = \mathbf{2}$ — Efectuamos el producto punto.

Entrada (1, 2):

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ — Indicamos el producto punto de los vectores fila 1 de la matriz A y la columna 2 de la matriz B.

$= 1 \times 0 + 2 \times 1 + 3 \times 5 = \mathbf{17}$ — Efectuamos el producto punto.

Entrada (2, 1):

$\begin{bmatrix}4 & 5 & 6\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & -3 & 2\end{bmatrix}$ Indicamos el producto punto de los vectores fila 2 de la matriz A y la columna 1 de la matriz B.

$= 4 \times 2 + 5 \times (-3) + 6 \times 2 = \mathbf{5}$ Efectuamos el producto punto.

Entrada (2, 2):

$\begin{bmatrix}4 & 5 & 6\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & 1 & 5\end{bmatrix}$ Indicamos el producto punto de los vectores fila 2 de la matriz A y la columna 2 de la matriz B.

$= 4 \times 0 + 5 \times 1 + 6 \times 5 = \mathbf{35}$ Efectuamos el producto punto.

Entrada (3, 1):

$\begin{bmatrix}7 & 8 & 9\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & -3 & 2\end{bmatrix}$ Indicamos el producto punto de los vectores fila 3 de la matriz A y la columna 1 de la matriz B.

$= 7 \times 2 + 8 \times (-3) + 9 \times 2 = \mathbf{8}$ Efectuamos el producto punto.

Entrada (3, 2):

$\begin{bmatrix}7 & 8 & 9\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & 1 & 5\end{bmatrix}$ Indicamos el producto punto de los vectores fila 3 de la matriz A y la columna 2 de la matriz B.

$= 7 \times 0 + 8 \times 1 + 9 \times 5 = \mathbf{53}$ Efectuamos el producto punto.

Por tanto, $AB = \begin{bmatrix}2 & 17\\ 5 & 35\\ 8 & 53\end{bmatrix}$ ◀

Ejemplo 9

Analicemos si el producto de matrices cumple la propiedad conmutativa.

Solución

Para observar qué sucede con el producto de matrices, tomemos dos matrices arbitrarias, A y B, y calculemos AB y BA. Sean $A = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$, entonces:

$AB = \begin{bmatrix}2 & 1\\ 4 & 3\end{bmatrix}$ Calculamos AB.

$BA = \begin{bmatrix}3 & 4\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ Calculamos BA.

Así, obtenemos que $AB \neq BA$. ◀

Pensamiento crítico

¿El producto entre matrices es asociativo?

La matriz cuadrada de dimensiones $n \times n$ que tiene todos sus elementos iguales a 0, excepto aquellos de posiciones (i, i), es decir, los elementos de la diagonal de la matriz, que son iguales a 1 se denomina matriz identidad de tamaño n y se denota por I_n,

$$I_n = \begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}.$$

Comentario

La matriz cuadrada de dimensión $n \times n$ que tiene todos sus elementos iguales a 0 se llama matriz nula y se denota por O_n, $O_n = \begin{bmatrix}0 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}$.

as

Comentario

La matriz identidad actúa como el módulo de la multiplicación entre matrices, es decir, para cualquier matriz B, $IB = BI = B$, para I de la misma dimensión que B.

> Multiplicación de matrices utilizando Excel

Para calcular el producto de dos matrices con Excel, por ejemplo, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, debemos realizar los siguientes pasos.

Paso 1. Digitamos en las celdas A1:D2 los elementos de la matriz A.

Paso 2. Digitamos en las celdas F1:G4 los elementos de la matriz B, como vemos en la figura 7.7.

Paso 3. Con el mouse seleccionamos las celdas A4:B5 (ya que la matriz AB tendrá dimensiones 2×2).

Paso 4. Mientras el área A4:B5 permanece resaltada introducimos en la **Barra de fórmulas** (la que queda frente a f_x) la expresión = MMULT(A1:D2;F1:G4), como vemos en la figura 7.8.

Paso 5. Pulsamos simultáneamente las teclas CTRL + MAYUSC + INTRO (pulsamos primero CTRL y sin soltarla pulsamos MAYÚSCULA y por último la tecla ENTER). En las celdas A4:B5 deberán aparecer los elementos de la matriz AB, como podemos ver en la figura 7.9.

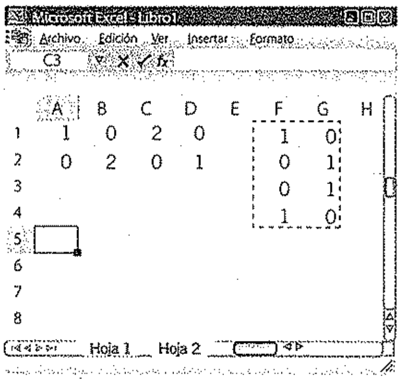


Figura 7.7

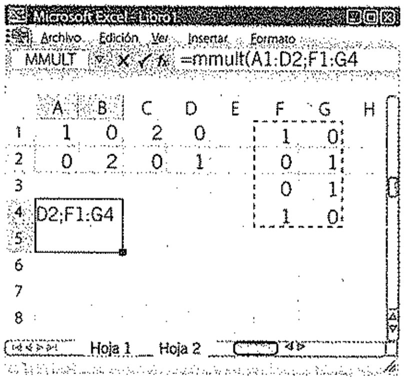


Figura 7.8

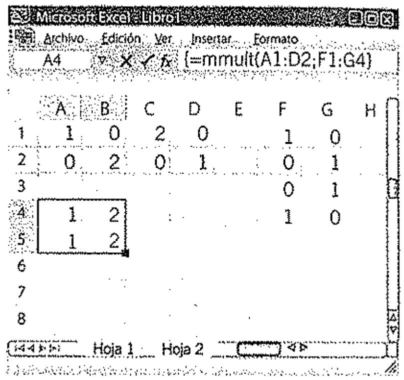


Figura 7.9

> Piensa y practica <

> Comunicación

1. Dadas las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, halla:

a. La representación de A y B, por vectores fila y vectores columna.

b. La matriz suma $A + B$.

c. La matriz $2A - 3B$.

2. Efectúa las operaciones.

a. $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

d. $3\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$

3. Halla los valores de x en cada caso.

a. $\begin{bmatrix} 2x & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 3x \\ 2x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} x & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} x+1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 9 & 9 \\ 5 & 13 & 10 \end{bmatrix}$

4. Calcula los productos posibles entre las matrices

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

5. Para las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ -5 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, realiza las siguientes operaciones.

a. $A + B$ **b.** AC

c. BC **d.** AD

6. Si A es una matriz de dimensiones $m \times n$, entonces la matriz que se obtiene al colocar las filas de A como columnas se llama matriz transpuesta de A y se denota A^t. Por ejemplo, si $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & 4 \end{bmatrix}$, $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$.

a. Halla las transpuestas de las matrices del ejercicio 5.

b. Calcula: $(A+B)^t$, $A^t + B^t$, $(AC)^t$, C^tA^t.

> Resolución de problemas

7. Considera la matriz $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ y calcula.

a. B^2 **b.** $B^2 - B$

c. $B^2 - B - 2I_3$

8. Para las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, calcula:

a. $A^2, A^3, \cdots, A^n$ **b.** $B^2, B^3, \cdots, B^n$

A^k representa el producto de A, k veces (A multiplicada con ella misma k veces).

9. Considera las matrices $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ y calcula:

a. AB **b.** BA

c. Con base en el literal (a), ¿qué cambio hace la matriz B sobre la matriz A, al multiplicar a B por la derecha de A?

d. Con base en el literal (b), ¿qué cambio hace la matriz B sobre la matriz A, al multiplicar a B por la izquierda de A?

10. ¿Por cuál matriz X debe multiplicarse a derecha la matriz $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ para obtener la matriz $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$?

11. ¿Por cuál matriz X debe multiplicarse a izquierda la matriz $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ para obtener la matriz $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$?

12. Una compañía de motocicletas fabrica los modelos A y B, en tres cilindradas: C, D y E. Del modelo A produce: 450 unidades de cilindrada C, 250 unidades de cilindrada D y 100 unidades de cilindrada E; del modelo B, 380 unidades de cilindrada C, 180 unidades de cilindrada D y 110 unidades de cilindrada E. La cilindrada C genera 30 horas de taller y 3 horas de administración. La cilindrada D genera 35 horas de taller y 3,5 horas de administración. La cilindrada E lleva 38 horas de taller y 4 horas de administración.

a. Representa la información en dos matrices.

b. Halla una matriz que exprese las horas de taller y de administración empleadas para cada uno de los modelos.

Uso de la tecnología

13. Utiliza el programa Excel para hallar los productos de:

a. BA, para $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

b. AB, para $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

c. AB, para $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

d. BA, para $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Matrices elementales y matriz inversa

Logro: hallar la inversa de una matriz cuadrada.

Las matrices de dimensión 3×3: $E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $E_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $E_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$,

$E_2(-5) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $E_{23}(-5) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \end{bmatrix}$, han sido obtenidas de la matriz identidad I_3, mediante una ***operación elemental*** entre filas:

E_{12}: se intercambiaron las filas 1 y 2 de la matriz I_3.

E_{13}: se intercambiaron las filas 1 y 3 de la matriz I_3.

E_{23}: se intercambiaron las filas 2 y 3 de la matriz I_3.

$E_2(-5)$: se multiplicó por –5, la fila 2 de la matriz I_3.

$E_{23}(-5)$: se multiplicó por –5, la fila 2, de la matriz I_3 y el resultado lo adicionamos con la fila 3.

*Las **operaciones elementales entre filas** en una matriz son:*

- *Intercambio de las filas i y j:* $F_i \leftrightarrow F_j$.
- *Multiplicación de la fila i por una constante* $c \neq 0$: $cF_i \rightarrow F_i$.
- *Adicionamos a la fila j, la fila i multiplicada por la constante* $c \neq 0$: $cF_i + F_j \rightarrow F_j$.

Una matriz $n \times n$ se denomina matriz elemental si puede obtenerse de la matriz identidad I_n mediante una única operación elemental entre filas:

- $F_i \leftrightarrow F_j$ *le corresponde la matriz elemental* E_{ij}.
- $cF_i \rightarrow F_i$ *le corresponde la matriz elemental* $E_i(c)$.
- $cF_i + F_j \rightarrow F_j$ *le corresponde la matriz elemental* $E_{ij}(c)$.

Ejemplo 10

Multipliquemos a izquierda la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$, por las matrices:

a. E_{12} **b.** E_{13} **c.** E_{23} **d.** $E_2(-5)$ **e.** $E_{23}(-5)$

Solución

a. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ Intercambiamos las filas 1 y 2 de A.

b. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ Intercambiamos las filas 1 y 3 de A.

c. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ Intercambiamos las filas 2 y 3 de A.

d. $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-5&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3\\-20&-25&-30\\7&8&9\end{bmatrix}$ Multiplicamos por −5 la fila 2, de la matriz *A*.

e. $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-5&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\-13&-17&-21\end{bmatrix}$ Multiplicamos la fila 2 de *A* por −5 y al producto le adicionamos la fila 3 de *A*. ◁

De los resultados del ejemplo 10, concluimos que se pueden efectuar las operaciones elementales entre filas de una matriz *A*, sin multiplicar a izquierda por alguna de las matrices elementales, lo cual denotamos como se muestra en la tabla 7.4:

Notación de las operaciones elementales	Interpretación
$\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}\overset{F_1\leftrightarrow F_2}{\sim}\begin{bmatrix}4&5&6\\1&2&3\\7&8&9\end{bmatrix}$	La matriz de la derecha equivale a la matriz de la izquierda, y se obtiene de intercambiar la fila 1 por la fila 2.
$\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}\overset{-5F_2\to F_2}{\sim}\begin{bmatrix}1&2&3\\-20&-25&-30\\7&8&9\end{bmatrix}$	La equivalencia entre matrices se obtiene multiplicando la fila 2 por −5, y cambiando las entradas de la fila 2 por estos nuevos productos.
$\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}\overset{-5F_2+F_3\to F_3}{\sim}\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\-13&-17&-21\end{bmatrix}$	La equivalencia entre matrices se obtiene multiplicando por −5 la fila 2, a este producto se le adiciona las entradas de la fila 3 y estos nuevos resultados son las nuevas entradas de la fila 3.

Tabla 7.4

Ejemplo 11

De los resultados del ejemplo 10:

a. Multipliquemos a izquierda la matriz $\begin{bmatrix}4&5&6\\1&2&3\\7&8&9\end{bmatrix}$ por la matriz elemental E_{12}.

b. Multipliquemos a izquierda la matriz $\begin{bmatrix}1&2&3\\-20&-25&-30\\7&8&9\end{bmatrix}$ por la matriz elemental $E_2\left(-\frac{1}{5}\right)$.

c. Multipliquemos a izquierda la matriz $\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\-13&-17&-21\end{bmatrix}$ por la matriz elemental $E_{23}(5)$.

Solución

a. $\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&5&6\\1&2&3\\7&8&9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-\frac{1}{5}&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\\-20&-25&-30\\7&8&9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}$

$$\textbf{c.}\quad \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&5&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\-13&-17&-21\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix} \blacktriangleleft$$

De los resultados anteriores podemos notar que las operaciones elementales sobre los renglones de una matriz son **reversibles**, es decir, es posible retornar a la matriz inicial haciendo otra operación elemental del mismo tipo, como se muestra en la tabla 7.5.

Operación elemental	Operación inversa correspondiente
$F_i \leftrightarrow F_j$	$F_i \leftrightarrow F_j$
$F_i \to cF_i$	$F_i \leftarrow \left(\frac{1}{c}\right)F_i$
$F_j \to F_j + cF_i$	$F_j \leftarrow F_j - cF_i$

Tabla 7.5

Comentario

Se debe considerar el sentido de la flecha en la notación de operaciones elementales entre filas, ya que ésta, indica el orden en que deben hacerse.

Observemos la siguiente propiedad de las matrices elementales, con los resultados de los ejemplos 10 y 11:

$$\textbf{a.}\quad \begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}, \text{ es decir, } E_{12}E_{12}=I_3$$

$$\textbf{b.}\quad \begin{bmatrix}1&0&0\\0&-\frac{1}{5}&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-5&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}, \text{ es decir, } E_2\left(-\frac{1}{5}\right)E_2(-5)=I_3$$

$$\textbf{c.}\quad \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&5&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-5&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}, \text{ es decir, } E_{23}(5)E_{23}(-5)=I_3$$

De manera general (*ver* tabla 7.6):

Matriz elemental	Matriz inversa correspondiente	Relación de inversión
E_{ij}	E_{ij}	$E_{ij}E_{ij}=I_n$
$E_i(c)$	$E_i\left(\frac{1}{c}\right)$	$E_i\left(\frac{1}{c}\right)E_i(c)=I_n$
$E_{ij}(c)$	$E_{ij}(-c)$	$E_{ij}(-c)E_{ij}(c)=I_n$

Tabla 7.6

Ejemplo 12

Mediante operaciones elementales entre filas, transformemos la matriz $A=\begin{bmatrix}1&2\\2&6\end{bmatrix}$, en la matriz identidad I_2.

Solución

Las operaciones que vamos aplicar sobre la matriz A y sus equivalentes son:

1. $F_2 \leftarrow F_2 + (-2)F_1$
2. $F_2 \leftarrow \left(\frac{1}{2}\right)F_2$
3. $F_1 \leftarrow F_1 + (-2)F_2$

En un mismo arreglo rectangular, disponemos la matriz A y la matriz identidad I_2, separadas por una línea vertical: $\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right]$, simbólicamente $\left[A|I_n\right]$ llamada **matriz aumentada** por la identidad, y realizamos las operaciones elementales en ambas matrices, de manera simultánea.

1. $\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{F_2+(-2)F_1\to F_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1(-2)+2 & 2(-2)+6 & 1(-2)+0 & 0(-2)+1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right]$.

Ahora tomamos la matriz equivalente y aplicamos la segunda operación:

2. $\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right] \overset{\left(\frac{1}{2}\right)F_2\to F_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)0 & \left(\frac{1}{2}\right)2 & \left(\frac{1}{2}\right)(-2) & \left(\frac{1}{2}\right)(1) \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \end{array}\right]$

3. $\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \end{array}\right] \overset{F_1+(-2)F_2\to F_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 1+(-2)0 & 2+(-2)1 & 1+(-2)(-1) & 0+(-2)\left(\frac{1}{2}\right) \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \end{array}\right] \sim$

$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \end{array}\right]$ ◀

En resumen tenemos:

$E_{21}(-2)E_2\left(\frac{1}{2}\right)E_{12}(-2)A = I_2$; $E_{21}(-2)E_2\left(\frac{1}{2}\right)E_{12}(-2)I_2 = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$;

$A\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

La matriz $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ se llama la **inversa de A** y se denota A^{-1}. El algoritmo desarrollado anteriormente es una aplicación del método de eliminación de Gauss – Jordan, que abordaremos con mayor profundidad al final de esta unidad.

Las matrices cuadradas A y B de las mismas dimensiones son ***equivalentes*** $(A \sim B)$, *si y sólo si, existen matrices elementales* $E_1, E_2, \ldots, E_k$, *tales que* $E_1E_2\ldots E_kA = B$, *es decir, si mediante operaciones elementales entre filas se puede transformar la matriz A en la matriz B (o la matriz B en la matriz A).*

La matriz cuadrada A de dimensiones $n \times n$ *es* ***invertible****, si y sólo si, A es equivalente a la matriz identidad* I_n. *En este caso,* $E_1E_2\ldots E_mA = I_n$, *para algún m, y la* ***matriz inversa*** *de A, denotada* A^{-1}, *se obtiene al aplicar las mismas operaciones elementales a la matriz* I_n, *es decir,* $E_1E_2\ldots E_mI_n = A^{-1}$.

Ejemplo 13

Determinemos si la matriz A es invertible. En caso de serlo, hallemos su matriz inversa.

a. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ **b.** $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Solución

a. $\left[A|I_3\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ Construimos la matriz aumentada.

Aplicamos el método de Gauss – Jordan, con el objetivo de transformar la matriz A en la identidad:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&1&1&0&0\\0&1&2&0&1&0\\1&1&-1&0&0&1\end{array}\right]\underset{\sim}{F_3+(-1)F_1\to F_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&1&1&0&0\\0&1&2&0&1&0\\0&-1&-2&-1&0&1\end{array}\right]\underset{\sim}{F_3+F_2\to F_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&1&1&0&0\\0&1&2&0&1&0\\0&0&0&-1&1&1\end{array}\right]$$

Como la fila 3 es de ceros, no podemos transformar a A en la I_3, lo que significa que la matriz A no es invertible.

b. $$\left[A|I_3\right]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&1&1&0&0\\0&1&0&0&1&0\\0&0&-1&0&0&1\end{array}\right]$$ Construimos la matriz aumentada.

Aplicamos el método de Gauss – Jordan:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&1&1&0&0\\0&1&0&0&1&0\\0&0&-1&0&0&1\end{array}\right]\underset{\sim}{F_1+(-2)F_2\to F_1}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&-2&0\\0&1&0&0&1&0\\0&0&-1&0&0&1\end{array}\right]\underset{\sim}{F_1+F_3\to F_1}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&-2&1\\0&1&0&0&1&0\\0&0&-1&0&0&1\end{array}\right]\underset{\sim}{(-1)F_3\to F_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&-2&1\\0&1&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&-1\end{array}\right].$$

Por tanto la matriz A es invertible ya que resulta equivalente a I_3.

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}1&-2&1\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}. \triangleleft$$

Propiedades de la operación inversa en matrices:

- *La matriz inversa A^{-1} también es invertible, su inversa es A, es decir, $\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$.*
- *Si A es invertible, entonces la matriz A, con $c\neq 0$, también es invertible y $(cA)^{-1}=\frac{1}{c}A^{-1}$.*
- *Si A y B son matrices cuadradas invertibles de las mismas dimensiones, entonces la matriz producto AB es invertible y $\left(AB\right)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.*

Pensamiento crítico

¿Crees que la división entre matrices está definida?

> Cálculo de la matriz inversa utilizando Excel

Utilicemos Excel para hallar la matriz inversa de $A=\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$.

Para ello debemos realizar los siguientes pasos.

Paso 1. Introducimos en una hoja de Excel la matriz $A=\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$, esto es, digitamos en A1:C3 los elementos de la matriz A (*ver* figura 7.10).

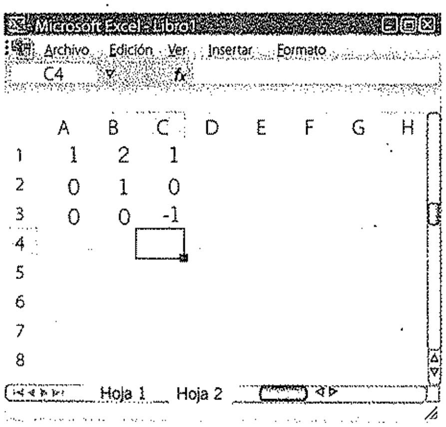


Figura 7.10

Paso 2. Seleccionamos las celdas E1:G3.

Paso 3. Estando las celdas seleccionadas resaltadas, ubicamos el cursor en la Barra de fórmulas (frente a f_x) y escribimos =MINVERSA(A1:C3) (*ver* figura 7.11).

Paso 4. Pulsamos simultáneamente las teclas CONTROL + MAYÚSCULAS + ENTER y en las celdas E1:G3 deberán aparecer los elementos de la matriz inversa de A (*ver* figura 7.12).

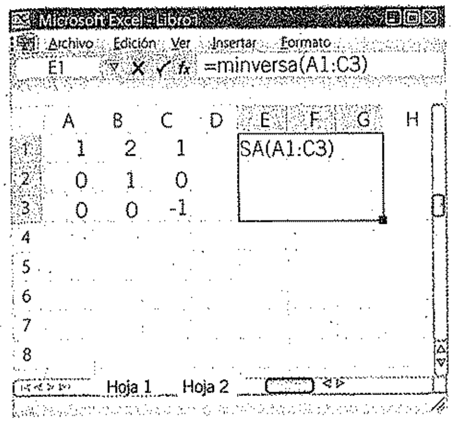


Figura 7.11

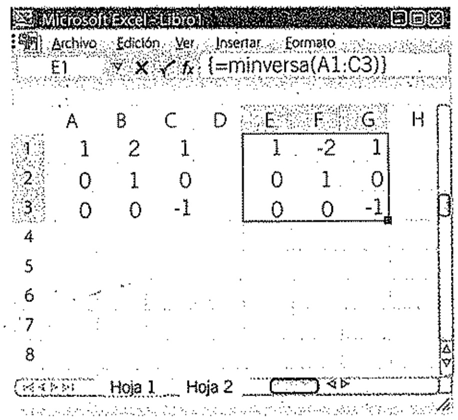


Figura 7.12

> Piensa y practica <

> Comunicación

1. Verifica, en cada caso, que las dos matrices son equivalentes.

a. $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 2\end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$.

b. $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 2\end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$.

c. $A=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 3 & 5\end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix}1 & 6\\ 0 & 13\end{bmatrix}$.

d. $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ 0 & 3 & 4\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix}2 & -2 & 0\\ 0 & 3 & 4\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}$.

e. $A=\begin{bmatrix}1 & 4 & -2\\ 3 & 0 & -5\\ 9 & 7 & -1\end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix}1 & 0 & -\frac{5}{3}\\ 0 & 1 & -\frac{1}{12}\\ 0 & -29 & 17\end{bmatrix}$.

2. Determina si las siguientes matrices diagonales son invertibles ($a \neq 0$, $b \neq 0$ y $c \neq 0$).

a. $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$ **b.** $A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}$

c. $A=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 6\end{bmatrix}$ **d.** $A=\begin{bmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{bmatrix}$

e. $A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{bmatrix}$ **f.** $A=\begin{bmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & c\end{bmatrix}$

> Resolución de problemas

3. Halla la matriz inversa, en cada caso.

a. $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{bmatrix}$ **b.** $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{bmatrix}$

c. $A=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 3 & 0\end{bmatrix}$ **d.** $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$

e. $A=\begin{bmatrix}3 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 3\\ 2 & 1 & 1\end{bmatrix}$ **f.** $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 5\\ -4 & -3 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{bmatrix}$

Uso de la tecnología

4. Con la ayuda del programa Excel, encuentra la inversa de cada matriz.

a. $A=\begin{bmatrix}3 & 4\\ -2 & -3\end{bmatrix}$ **b.** $A=\begin{bmatrix}3 & 7\\ 2 & 5\end{bmatrix}$

c. $A=\begin{bmatrix}3 & -15\\ 5 & 25\end{bmatrix}$ **d.** $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ -1 & 3 & 2\end{bmatrix}$

e. $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 3 & 0 & -4\\ 1 & 2 & 5\end{bmatrix}$ **f.** $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ -2 & 3 & -1\\ 5 & -4 & 2\end{bmatrix}$

Matrices y sistemas de ecuaciones

Logro: escribir sistemas de ecuaciones lineales en forma matricial.

Un sistema de ecuaciones lineales puede solucionarse empleando métodos algebraicos: igualación, reducción, sustitución o igualación, por el método gráfico o empleando matrices. Analicemos de qué manera podemos solucionar un sistema de ecuaciones empleando matrices.

Un cultivo de bacterias contiene tres tipos de bacterias *A*, *B* y *C*. Para sobrevivir, cada tipo de bacteria requiere ciertas cantidades de tres nutrientes *D*, *E* y *F*. En la tabla 7.7 se muestran el número de unidades diarias de nutrientes que cada tipo de bacteria necesita. Cada día se aplican 100 000 unidades del nutriente *D*, 135 000 del nutriente *E* y 230 000 del *F*. En estas condiciones, ¿cuántas especies de cada tipo de bacteria se pueden mantener en el cultivo?

Tipo bacterias / Nutrientes	*A*	*B*	*C*
D (por día)	2	1	3
E (por día)	4	2	1
F (por día)	2	5	3

Tabla 7.7

Denotemos con las letras *x*, *y*, *z* las unidades de las bacterias *A*, *B* y *C* que se pueden mantener diariamente en el cultivo. Entonces:

Diariamente del nutriente *D* se requieren $2x + y + 3z$.

Diariamente del nutriente *E* se requieren $4x + 2y + z$.

Diariamente del nutriente *F* se requieren $2x + 5y + 3z$.

Como se aplica diariamente una cantidad exacta de cada nutriente, entonces tenemos las tres ecuaciones:

$$2x + y + 3z = 100$$
$$4x + 2y + z = 135$$
$$2x + 5y + 3z = 230$$

Antes de emplear los métodos matriciales para solucionar el sistema, debemos escribirlo de manera matricial. Puesto que el anterior sistema es de 3 ecuaciones con tres incógnitas, podemos representarlo como una igualdad entre matrices: por un lado, la multiplicación entre la matriz de coeficientes y el vector columna de variables y por el otro lado, el vector columna de valores independientes:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 135 \\ 230 \end{bmatrix}$$

A continuación presentaremos dos formas matriciales de resolver este sistema de ecuaciones.

Comentario

Todo sistema de ecuaciones puede expresarse así:

$$AX = Y,$$

donde A es la matriz de coeficientes, X el vector columna de las variables y Y la matriz columna de los términos independientes.

Método de la matriz inversa

1. *Escribimos el sistema en forma matricial.*
2. *Tomamos la matriz de coeficientes y hallamos su inversa.*
3. *Multiplicamos a izquierda, en ambos lados del sistema matricial, por la matriz inversa de la matriz de coeficientes.*

Método de eliminación de Gauss – Jordan

1. *Escribimos el sistema en forma matricial.*
2. *Formamos la matriz aumentada de A,* $\left[A\middle|b\right]$, *donde b es el vector columna de valores independientes.*
3. *Realizamos operaciones elementales entre filas de la matriz aumentada hasta conseguir la matriz identidad.*

Comentario

Existe otro método de eliminación conocido como método de Gauss, que consiste en reducir la matriz ampliada en una matriz diagonal superior.

Ejemplo 14

Solucionemos por los métodos de matriz inversa y de eliminación de Gauss – Jordan el problema de inicio de lección.

Solución

<table>
<tr><th></th><th>Método de la matriz inversa</th><th>Eliminación de Gauss – Jordan</th></tr>
<tr><td>Paso 1</td><td>$$\begin{bmatrix}2&1&3\\4&2&1\\2&5&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}100\\135\\230\end{bmatrix}$$</td><td>$$\begin{bmatrix}2&1&3\\4&2&1\\2&5&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}100\\135\\230\end{bmatrix}$$</td></tr>
<tr><td>Paso 2</td><td>$$A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{40}&\frac{3}{10}&-\frac{1}{8}\\-\frac{1}{4}&0&\frac{1}{4}\\\frac{2}{5}&-\frac{1}{5}&0\end{bmatrix}$$</td><td>$$\left[A\middle|b\right]=\left[\begin{array}{ccc|c}2&1&3&100\\4&2&1&135\\2&5&3&230\end{array}\right]$$</td></tr>
<tr><td>Paso 3</td><td>$$\begin{bmatrix}\frac{1}{40}&\frac{3}{10}&-\frac{1}{8}\\-\frac{1}{4}&0&\frac{1}{4}\\\frac{2}{5}&-\frac{1}{5}&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&3\\4&2&1\\2&5&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{40}&\frac{3}{10}&-\frac{1}{8}\\-\frac{1}{4}&0&\frac{1}{4}\\\frac{2}{5}&-\frac{1}{5}&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}100\\135\\230\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{40}&\frac{3}{10}&-\frac{1}{8}\\-\frac{1}{4}&0&\frac{1}{4}\\\frac{2}{5}&-\frac{1}{5}&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}100\\135\\230\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{57}{4}\\\frac{65}{2}\\13\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14{,}25\\32{,}5\\13\end{bmatrix}$$</td><td>$$\left[\begin{array}{ccc|c}2&1&3&100\\4&2&1&135\\2&5&3&230\end{array}\right]\underset{F_3-F_1\to F_3}{\overset{F_2+(-2)F_1\to F_2}{\sim}}\left[\begin{array}{ccc|c}2&1&3&100\\0&0&-5&-65\\0&4&0&130\end{array}\right]$$
$$\overset{F_2\leftrightarrow F_3}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|c}2&1&3&100\\0&4&0&130\\0&0&-5&-65\end{array}\right]\overset{\left(\frac{1}{4}\right)F_2\to F_2}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|c}2&1&3&100\\0&1&0&\frac{65}{2}\\0&0&-5&-65\end{array}\right]$$
$$\overset{\left(-\frac{1}{5}\right)F_3\to F_3}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|c}2&1&3&100\\0&1&0&\frac{65}{2}\\0&0&1&13\end{array}\right]\overset{F_1+(-1)F_2\to F_1}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|c}2&0&3&\frac{135}{2}\\0&1&0&\frac{65}{2}\\0&0&1&13\end{array}\right]$$
$$\overset{F_1+(-3)F_3\to F_1}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|c}2&0&0&\frac{57}{2}\\0&1&0&\frac{65}{2}\\0&0&1&13\end{array}\right]\overset{\left(\frac{1}{2}\right)F_1\to F_1}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&\frac{57}{4}\\0&1&0&\frac{65}{2}\\0&0&1&13\end{array}\right]$$</td></tr>
<tr><td>Solución</td><td>$x=14{,}25$; $y=32{,}5$ y $z=13$</td><td>$x=14{,}25$; $y=32{,}5$ y $z=13$</td></tr>
</table>

Comentario

Se puede realizar más de una operación elemental al tiempo en una matriz.

Como las unidades de nutrientes estaban en miles, entonces las unidades de los tres tipos de bacterias son: Tipo A: 14 250 unidades, Tipo B: 32 500 unidades y Tipo C: 13 000 unidades. ◁

Ejemplo 15

Una empresa de transporte escolar quiere comprar 30 buses modernos, con una capacidad de cupo de 1300 pasajeros (estudiantes, monitores, profesores). Los tres tipos disponibles de buses transportan 35, 40 y 45. ¿Cuántos buses de cada tipo se deben comprar?

Solución

1. Designamos las incógnitas:
   x: número de buses de capacidad 35 pasajeros.
   y: número de buses de capacidad 40 pasajeros.
   z: número de buses de capacidad 45 pasajeros.

2. Formulamos las ecuaciones lineales que relacionan las incógnitas y los datos:
   $x + y + z = 30$
   $35x + 40y + 45z = 1300$

3. Aplicamos el método de eliminación de Gauss – Jordan:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 35 & 40 & 45 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 1300 \end{bmatrix}$$

Escribimos la ecuación matricial correspondiente al sistema de ecuaciones.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 30 \\ 35 & 40 & 45 & 1300 \end{array}\right]$$

Escribimos la matriz aumentada correspondiente al sistema de ecuaciones.

Efectuamos las operaciones elementales entre filas.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 30 \\ 35 & 40 & 45 & 1300 \end{array}\right] \overset{F_2+(-35)F_1 \to F_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 30 \\ 0 & 5 & 10 & 250 \end{array}\right] \overset{\left(\frac{1}{5}\right)F_2 \to F_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 30 \\ 0 & 1 & 2 & 50 \end{array}\right] \overset{F_1+(-1)F_2 \to F_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -20 \\ 0 & 1 & 2 & 50 \end{array}\right]$$

4. $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 \\ 50 \end{bmatrix}$$

Escribimos el sistema equivalente al inicial, porque A no se puede reducir más.

$x - z = -20$
$y + 2z = 50$

Multiplicamos y obtenemos ahora un sistema de ecuaciones de dos variables y dos incógnitas.

$x = z - 20\,,\ y = -2z + 50\,.$ Despejamos las incógnitas x y y en términos de la incógnita z.

$$\begin{bmatrix} z - 20 \\ -2z + 50 \\ z \end{bmatrix}$$

Escribimos la solución del sistema en términos de z.

Se debe tener en cuenta que $0 \leq z \leq 30$, porque el colegio desea comprar 30 buses.

La solución anterior se puede expresar como la forma vectorial de una recta paramétrica en el espacio $\mathbf{R}^3$, de la siguiente forma: $\begin{bmatrix} z - 20 \\ -2z + 50 \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 \\ 50 \\ 0 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$,

donde el parámetro es la incógnita z, que pasa por el punto

Comentario

Si al simplificar la matriz ampliada $\left[A|b\right]$ (realizar operaciones elementales entre filas) se llega a la matriz identidad, se dice que el sistema tiene una única solución; si se llega a una fila de sólo ceros, se dice que el sistema tiene infinitas soluciones y si se llega a una fila de ceros (correspondientes a la matriz A) y a un valor diferente de cero en b, el sistema no tiene solución.

$(-20, 50, 0)$ y tiene vector director $(1, -2, 1)$; la cual resulta natural ya que las dos ecuaciones $x + y + z = 30$, $35x + 40y + 45z = 1300$, representan dos planos no paralelos cuya intersección es una línea recta. ◁

> Piensa y practica <

> Comunicación

1. Representa en forma matricial cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales.

a. $\begin{cases} x + 3y = 4 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 5x - 4y = 9 \\ 2x + 3y = -1 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x - 5y = 0 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 3x + 12y = 9 \\ 2x + 8y = 6 \end{cases}$

e. $\begin{cases} x - y = -3 \\ 2x + 3y = -1 \end{cases}$

f. $\begin{cases} 2x - y = -1 \\ -4y = 3 - x \end{cases}$

g. $\begin{cases} 5x - y = 4 \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 1 \end{cases}$

h. $\begin{cases} x + 2y + 6z = 7 \\ x + y - 2z = 10 \\ x + 2y + 3z = 4 \end{cases}$

i. $\begin{cases} 5x - 2y = -2 \\ x = 5 - \frac{y}{2} \end{cases}$

j. $\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ x + 3y + z = 5 \\ 3x + 8y + 4z = 17 \end{cases}$

k. $\begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ 2x + 5y + 2z = 0 \\ 3x - y - 4z = 0 \end{cases}$

2. Plantea el sistema de ecuaciones que da solución a cada problema y escríbelo en forma matricial.

a. Un tren de carga lleva 4800 reses entre vacas y toros. El número de vacas es el triple que el de toros. ¿Cuántas vacas y cuántos toros hay?

b. Jaime tiene el triple de edad que Laura. Si Jaime tuviese 30 años menos y Laura 8 años más, los dos tendrían la misma edad. ¿Cuántos años tiene cada uno?

c. Halla las dimensiones de una parcela rectangular sabiendo que es 250 m más larga que ancha y que el perímetro es 4000 m.

d. Dos kilos de uvas y tres de pitahayas cuestan $ 31 500. Cinco kilos de uvas y seis de pitahayas cuestan $ 72 000. ¿Cuánto cuesta el kilo de uvas? ¿Cuánto el kilo de pitahayas?

3. Resuelve por el método de la matriz inversa los sistemas planteados en el ejercicio 1, literales (e), (g) y (j).

4. Resuelve por el método de eliminación de Gauss – Jordan los sistemas planteados en el ejercicio 1, literales (i), (j) y (k).

> Resolución de problemas

5. Dos amigos invierten $ 20 000 000 cada uno. El primero coloca una cantidad x al 4% de interés efectivo anual, una cantidad y al 5% efectivo anual y el resto al 6% efectivo anual. El otro invierte la misma cantidad x al 5%, la cantidad y al 6% y el resto de su dinero lo invierte a una tasa efectiva anual del 4%. Determina las cantidades x, y y z, sabiendo que el primero obtiene unos intereses de $ 1 050 000 y el segundo de $ 950 000.

6. En una empresa, los obreros de nivel A ganan $ 18 000 diarios y los de nivel B ganan $ 15 000 diarios. Si en un día en el que se contrató a 35 obreros el pago total fue de $ 591 000, ¿cuántos obreros de cada nivel trabajaron ese día?

7. Patricia es 5 años mayor de lo que dice ser y asegura que con esa edad que dice tener es 12 años menor que su esposo Jaime. Jaime, que nunca miente, dice que cuando se casaron, hace 20 años, ella tenía $\frac{3}{4}$ de la edad de él en ese entonces. ¿Cuáles son las edades verdaderas?

> Razonamiento lógico

8. Sean A y B dos matrices cuadradas invertibles de dimensiones 3×3, tales que $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Si $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, halla la inversa de la matriz A.

Determinantes

Logro: calcular el determinante de una matriz.

Hallemos la solución del sistema de ecuaciones $[1]: \begin{cases} ax + by &= r \\ cx + dy &= s \end{cases}$, suponiendo que $ad - bc \neq 0$.

La condición que $ad - bc \neq 0$, implica que $a \neq 0$, o, $c \neq 0$.

Supongamos que $a \neq 0$.

Formamos la matriz aumentada, con los términos independientes r y s, y buscamos la solución utilizando el método de reducción de Gauss – Jordan, esto es:

$$\left[\begin{array}{cc|c} a & b & r \\ c & d & s \end{array}\right] \overset{\left(\frac{1}{a}\right)F_1 \to F_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{b}{a} & \frac{r}{a} \\ c & d & s \end{array}\right] \overset{F_2 + (-c)F_1 \to F_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{b}{a} & \frac{r}{a} \\ 0 & d - \frac{bc}{a} & s - \frac{rc}{a} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{b}{a} & \frac{r}{a} \\ 0 & \frac{da - bc}{a} & \frac{sa - rc}{a} \end{array}\right] \overset{\left(\frac{a}{ad - bc}\right)F_2 \to F_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{b}{a} & \frac{r}{a} \\ 0 & 1 & \frac{as - rc}{ad - bc} \end{array}\right]$$

$$\overset{F_1 + \left(-\frac{b}{a}\right)F_2 \to F_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{r}{a} - \frac{b(as - rc)}{a(ad - bc)} \\ 0 & 1 & \frac{as - rc}{ad - bc} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{rd - bs}{ad - bc} \\ 0 & 1 & \frac{as - rc}{ad - bc} \end{array}\right]$$

Por tanto, la solución del sistema es: $\begin{cases} x = \dfrac{rd - bs}{ad - bc} \\ y = \dfrac{as - rc}{ad - bc} \end{cases}$

Observemos que los denominadores de x y de y son iguales a $ad - bc$; este número real se denomina el determinante de la matriz de los coeficientes del sistema.

*El **determinante de la matriz** $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ se denota por $det(A)$ o $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$,*

y está definido por $det(A) = ad - bc$ $\left(\text{que es el producto } a \times d - b \times c = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\right)$.

De la definición de determinante de orden 2×2, tenemos que la solución del sistema dado en [1] se escribe: $x = \dfrac{\begin{vmatrix} r & b \\ s & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$, $y = \dfrac{\begin{vmatrix} a & r \\ c & s \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$.

Pensamiento crítico

Verifica que cuando $c \neq 0$, la solución del sistema de ecuaciones [1] tiene la misma solución que cuando se considera $a \neq 0$.

Ejemplo 16

a. Hallemos el determinante de las matrices $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 10 & 15 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ y $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$.

b. Hallemos los valores del parámetro k, de manera que cada matriz dada tenga determinante distinto de 0: $A = \begin{bmatrix} 3 & k \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} k & 5 \\ 5 & k \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 5 & k \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ y $D = \begin{bmatrix} k & 1 \\ -1 & k \end{bmatrix}$.

Solución

a. $\det(A) = 2 \times 4 - 3 \times 1 = 5$; $\det(B) = 10 \times 4 - 15 \times 1 = 25$; $\det(C) = -5$ y $\det(D) = 0$.

b. $\det(A) = 6 + k$, para que el $\det(A) \neq 0$, $k \neq -6$.

$\det(B) = k^2 - 25$, entonces el $\det(B) \neq 0$, cuando $k \neq 5$, o, $k \neq -5$.

$\det(C) = 10$, entonces $\det(C) \neq 0$ para cualquier valor de k.

$\det(D) = k^2 + 1$, entonces $\det(D) \neq 0$ para cualquier valor de k real. ◀

De las matrices del literal (a) observemos que:

1. Las matrices B y C son equivalentes a la matriz A:

La matriz B se obtiene de la matriz A multiplicando la fila 1 por 5, entonces $|B| = 5|A|$.

La matriz C se obtiene de la matriz A intercambiando las filas 1 y 2, entonces $\det(C) = -\det(A)$.

2. La segunda fila de la matriz D es un múltiplo de la primera fila, ya que la fila 1 multiplicada por 4 es igual a la fila 2, por tanto el determinante de esta matriz es igual a 0.

Para definir los determinantes de una matriz cuadrada de dimensiones mayores a 2×2, necesitamos unos nuevos conceptos de determinantes referidos a matrices cuadradas de dimensiones $n \times n$.

*Para la matriz A, de dimensiones $n \times n$, **el menor del elemento** a_{ij} es el determinante de la matriz de dimensión $(n-1) \times (n-1)$ obtenida de A, al eliminar de ésta la fila i–ésima y la columna j–ésima. El menor del elemento a_{ij} se denota M_{ij}.*

Ejemplo 17

Hallemos los menores, de los elementos de la primera fila de la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

Solución

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -2;\ M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3;\ M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$ ◀

Como vimos en el ejemplo 16, un determinante es un número real que puede ser positivo, negativo o cero. En la siguiente definición para calcular el determinante de la matriz, a cada elemento de la matriz se le asigna el número 1 o el número –1, de acuerdo con su posición en la matriz, que acompañará cada menor. Así, a la entrada a_{ij} de la matriz A se le asigna el número $(-1)^{i+j}$, usualmente se dice que a cada entrada se le asigna un signo de acuerdo con su posición.

Para una matriz de dimensión 3×3, los signos asignados a sus entradas se pueden describir mediante la tabla de signos: $\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$.

*El cofactor de la entrada a_{ij}, de la matriz A, es el menor de a_{ij} multiplicado por $(-1)^{i+j}$, es decir, $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$. La matriz cuadrada, de dimensiones $n \times n$, cuya entrada ij–ésima es el cofactor C_{ij} de la matriz A, se denomina **matriz de cofactores** de A y se denota $Cof(A)$.*

Ejemplo 18

Hallemos los cofactores de los elementos de la primera fila de la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

Solución

$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = (-1)^2 \times (-2) = -2$. $C_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = (-1)^3 \times 3 = (-1) \times 3 = -3$.
$C_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = (-1)^4 \times 1 = 1$. ◁

Comentario

El determinante de una matriz A, de dimensiones n × n, puede evaluarse multiplicando cada entrada en cualquier fila por su cofactor y sumando los productos resultantes.

*El **determinante** de la matriz* $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{3\times 3}$ *, desarrollado*

por la primera fila está definido por: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}C_{11} - a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$.

Ejemplo 19

Hallemos el determinante de la matriz dada en el ejemplo 18.

Solución

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2C_{11} - 3C_{12} + 5C_{13} = 2 \times (-2) - 3 \times 3 + 5 \times 1 = -8 \quad ◁$$

De manera recursiva, podemos definir el determinante de cualquier matriz de dimensiones $n \times n$.

Los determinantes se utilizan para calcular la inversa de una matriz (cuando ésta tiene inversa) y resolver un sistema de ecuaciones lineales cuadrado (igual número de ecuaciones que incógnitas).

> Cálculo de la inversa de una matriz empleando determinantes

Para hallar la inversa de una matriz de dimensiones $n \times n$, con $n \geq 3$, seguimos estos pasos:

1. Verificamos que $\det(A) \neq 0$.
2. Calculamos la matriz de los cofactores Cof (A).
3. Calculamos la transpuesta de la matriz Cof (A).
4. Dividimos cada entrada de la matriz Cof (A), por $\det(A)$.

Simbólicamente,

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)}(Cof(A))^t$$

Comentario

La matriz A, de dimensiones n × n, tiene inversa, si y sólo si, det(A) ≠ 0.

Ejemplo 20

Comprobemos por el método de determinante, que la inversa de la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

es $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{40} & \frac{3}{10} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \end{bmatrix}$.

Solución

Calculamos el determinante de A y corroboramos que es diferente de 0; por tanto, la matriz A tiene inversa.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 2 - 10 + 48 = 40$$

$\text{Cof}(A) = \begin{bmatrix} 1 & -10 & 16 \\ 12 & 0 & -8 \\ -5 & 10 & 0 \end{bmatrix}$ Hallamos la matriz de cofactores de A.	$(\text{Cof}(A))^t = \begin{bmatrix} 1 & 12 & -5 \\ -10 & 0 & 10 \\ 16 & -8 & 0 \end{bmatrix}$ Escribimos la transpuesta de la matriz de cofactores de A.
$A^{-1} = \frac{1}{40}\begin{bmatrix} 1 & 12 & -5 \\ -10 & 0 & 10 \\ 16 & -8 & 0 \end{bmatrix}$ Reemplazamos los valores encontrados en $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}(\text{Cof}(A))^t$.	$= \begin{bmatrix} \frac{1}{40} & \frac{3}{10} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \end{bmatrix}$ Efectuamos la multiplicación y hallamos la inversa de A.

> Regla de Cramer

Se utiliza para resolver un sistema de ecuaciones lineales cuadrado (igual número de ecuaciones que de incógnitas), donde la matriz de los coeficientes tiene determinante diferente de 0.

Consideremos un sistema de n incógnitas: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y n ecuaciones:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

Este sistema se puede escribir matricialmente de la siguiente forma:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{A\,=\,\text{matriz de los coeficientes del sistema}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{x\,=\,\text{vector de incógnitas}} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}}_{b\,=\,\text{vector términos independientes}}$$

es decir $Ax = b$.

Algoritmo de Cramer:

1. *Calculamos el determinante del sistema:* $D = \det(A)$.
2. *Calculamos el determinante asociado a cada incógnita:* $D_{x_1} = \det(A_{x_1})$, $D_{x_2} = \det(A_{x_2})$, ..., $D_{x_n} = \det(A_{x_n})$. *La matriz* A_{x_1} *se obtiene de la matriz A, cambiando en ésta la primera columna por el vector de términos independientes b; la matriz* A_{x_2} *se obtiene de la matriz A, cambiando en ésta la segunda columna por el vector de términos independientes b. De manera general, la matriz* A_{x_j} *se obtiene de la matriz A, cambiando en ésta la j–ésima columna por el vector de términos independientes b.*
3. *Obtenemos los valores de las incógnitas:* $x_1 = \frac{D_{x_1}}{D}$, $x_2 = \frac{D_{x_2}}{D}$, ..., $x_n = \frac{D_{x_n}}{D}$.

Ejemplo 21

Utilicemos la regla de Cramer para encontrar la solución del sistema 2×2: $\begin{cases} 2x + y = -1 \\ x - y = 3 \end{cases}$.

Solución

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$ Escribimos el sistema de manera matricial $Ax = b$.

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3$$ Calculamos el determinante (D) de A.

$$D_x = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 3 = -2$$ Calculamos D_x (determinante de la incógnita x).

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 1 = 7$$ Calculamos D_y (determinante de la incógnita y).

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$$ Calculamos x.

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{7}{-3} = -\frac{7}{3}$$ Calculamos y. ◀

Ejemplo 22

Utilicemos la regla de Cramer para encontrar la solución del sistema 3×3:

$$\begin{cases} 2x - y - z = 1 \\ x + y - z = 3 \\ 2x - 3y + 4z = -11 \end{cases}.$$

Solución

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -11 \end{bmatrix}$$ Escribimos el sistema de manera matricial $Ax = b$.

Calculamos el determinante (D) de A:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 2(4 - 3) + 1(4 + 2) - 1(-3 - 2) = 13.$$

Calculamos D_x (determinante de la incógnita x):

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -11 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -11 & 4 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -11 & -3 \end{vmatrix} = 1 + 1 - 2 = 0$$

Calculamos D_y (determinante de la incógnita y):

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -11 & 4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -11 & 4 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -11 \end{vmatrix} = 2 - 6 + 17 = 13$$

Calculamos D_z (determinante de la incógnita z):

$$D_z = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & -11 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -11 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -11 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -4 - 17 - 5 = -26$$

$$x = \frac{D_x}{D} = 0$$ Calculamos x.

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{13}{13} = 1$$ Calculamos y.

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{-26}{13} = -2$$ Calculamos z. ◀

> Piensa y practica <

> Comunicación

1. Halla los determinantes de las siguientes matrices.

a. $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ **b.** $\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 2 \\ -1 & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$ **d.** $\begin{bmatrix} 2^3 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2^4} \end{bmatrix}$

e. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 0 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ **f.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

2. Encuentra la transpuesta de las matrices (b) y (f) del ejercicio 1; luego, halla el determinante de estas matrices y compáralos con el resultado obtenido en (b) y (f) del punto 1.

3. Halla los valores de k, para que la matriz dada sea invertible.

a. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & k \end{bmatrix}$ **b.** $\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 4 & k^2 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 1 & k & 1 \\ k & 1 & k \\ 1 & k & 1 \end{bmatrix}$ **d.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & k & 3 \\ -k & 3 & k \end{bmatrix}$

4. Halla el menor y el cofactor de cada elemento de la matriz dada.

a. $A = \begin{bmatrix} 3 & 12 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ **b.** $B = \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

c. $D = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ **d.** $D = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 12 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 24 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

5. Si $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 5 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 10$, halla el valor de cada uno de los siguientes determinantes usando propiedades, no lo desarrolles.

a. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ \frac{5}{2} & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ **b.** $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

c. $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix}$ **d.** $\begin{vmatrix} a+1 & b-1 & c+1 \\ 5 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

6. Halla la inversa de las siguientes matrices, utilizando la fórmula de la matriz de los cofactores.

a. $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$ **b.** $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ **d.** $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 7 \\ -1 & 0 & 2 \\ 5 & -8 & -3 \end{bmatrix}$

> Resolución de problemas

7. Utiliza la regla de Cramer para resolver los sistemas de ecuaciones.

a. $\begin{cases} x + y = 200 \\ x - y = 35 \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} 2x + y = 450 \\ x - 2y = 180 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 3x + 4y + z = -7 \\ 2x + 3y + z = -5 \\ x + y = -2 \end{cases}$ **d.** $\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 240 \\ x + 2y = 120 \\ 3y + 4z = 60 \end{cases}$

8. Aplica la regla de Cramer para resolver cada problema.

a. Halla el área de un rectángulo, si tiene perímetro 72 cm y la longitud de uno de sus lados es el triple de la longitud de otro de sus lados.

b. Una compañía cervecera envasa cerveza rubia en barriles de 2 galones y 6 galones de capacidad. Si ha envasado 6420 galones en 1350 barriles, ¿cuántos barriles de 2 y 6 galones ha utilizado?

c. Una prueba consta de 40 preguntas, cada respuesta correctamente contestada tiene un valor de 0,625 puntos, mientras cada respuesta errada tiene una penalización de 0,25 puntos. Si un estudiante ha obtenido una calificación de 10,125, ¿cuántas respuestas correctas y cuántas erradas tuvo?

d. Una tienda de alquiler de películas se especializa en películas de tres tipos: acción, terror y comedia. Se sabe que el 60% de las películas de acción más el 50% de las de terror corresponden al 30% del total de las películas; también se sabe que el 20% de las películas de acción más el 60% de las de acción más el 60% de las películas de comedia corresponden a la mitad del total de películas. Si se sabe que hay 100 películas más de terror que de acción, ¿cuál es el número de películas de cada tipo?

Lección 6

Desigualdades lineales con dos incógnitas

Logro: encontrar el conjunto solución de un sistema de desigualdades lineales y representarlo geométricamente.

Las gráficas de desigualdades desempeñan un papel relevante en la solución de problemas de muchas áreas, como negocios, economía, nutrición, industria, entre otros.

En esta lección aprenderemos a resolver desigualdades lineales y sistemas de desigualdades lineales, que luego aplicaremos en la solución de algunos problemas. Comenzamos con dos ejemplos que muestran una primera clasificación de las desigualdades, así como los pasos que deben seguirse para resolverlas gráficamente.

Ejemplo 23

Tracemos la gráfica del conjunto solución de la desigualdad $4x + 5y \leq 20$.

Solución

Paso 1. Reemplazamos el símbolo de desigualdad " $\leq$ " por el de igualdad y utilizamos la gráfica de la ecuación $4x + 5y = 20$ como línea de referencia para encontrar el conjunto solución de la desigualdad. En la figura 7.13 observemos que esta recta divide al plano en dos partes, llamados semiplanos, uno de las cuales contiene el conjunto solución (puntos solución posibles de la desigualdad).

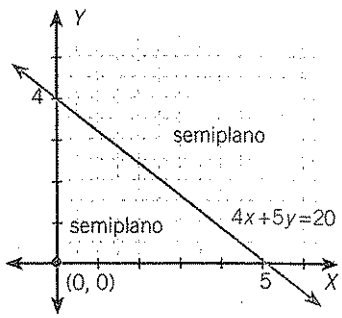


Figura 7.13

Paso 2. Determinamos cuál de los dos semiplanos debe elegirse: escogemos un punto cualquiera y sustituimos sus coordenadas en la desigualdad; si la desigualdad se cumple, entonces hemos encontrado uno de los muchos puntos que forman parte de la región solución. Escogemos, por ejemplo, el punto (0, 0) y reemplazamos sus coordenadas en la desigualdad: $4(0) + 5(0) = 0 \leq 20$; como ésta se cumple, el punto (0, 0) está en la región solución. Por tanto, el semiplano que se encuentra por debajo de la recta $4x + 5y = 20$ junto con esta recta, es el conjunto solución de la desigualdad $4x + 5y \leq 20$. La figura 7.14 muestra la región que representa el conjunto solución. ◀

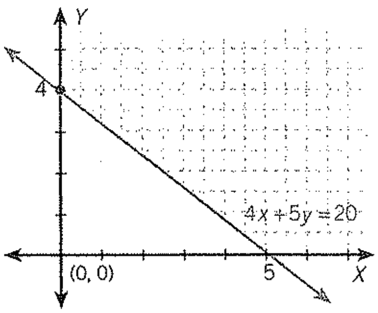


Figura 7.14

Ejemplo 24

Tracemos una gráfica que muestre el conjunto solución de la desigualdad $x > y^2$.

Solución

Paso 1. Trazamos la gráfica de la ecuación $x = y^2$, que corresponde a una parábola que abre hacia el eje X positivo y tiene vértice en el origen. La gráfica de la ecuación $x = y^2$ divide al plano en dos regiones, en una de las cuales debe encontrarse la solución de la desigualdad (*ver* figura 7.15).

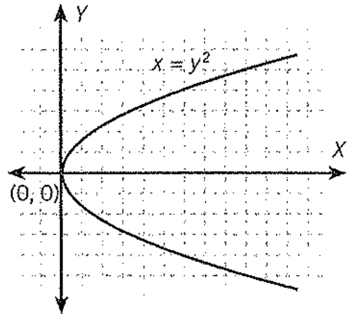


Figura 7.15

Paso 2. Seleccionamos un punto en la región que está a la izquierda de la parábola, como por ejemplo $(-1, 0)$, y sustituimos sus coordenadas en la desigualdad: $-1 > 0$; como la proposición resultante es falsa, entonces el punto $(-1, 0)$ no es solución de la desigualdad. En general, si (a, b) es un punto de la parábola $x = y^2$, entonces cualquier punto de la forma (x_1, b) con $x_1 < a$ no pertenece al conjunto solución de la desigualdad $x > y^2$, porque $x_1 < b^2$ ya que $a = b^2$; por consiguiente, cualquier punto que se encuentre a la izquierda de la parábola no satisface la desigualdad $x > y^2$. Del análisis anterior concluimos que el conjunto solución de esta desigualdad es la región que se halla a la derecha de la parábola, como se ve en la figura 7.16.

En este caso no consideramos la curva $x = y^2$ como parte del conjunto solución, ya que la desigualdad es estrictamente mayor. ◀

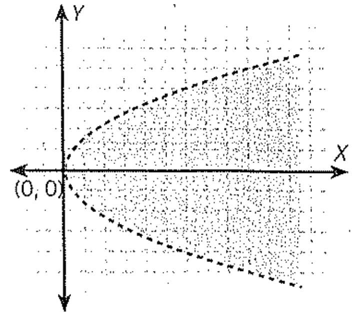


Figura 7.16

Podemos hacer una primera clasificación de las desigualdades con dos incógnitas respecto al grado de sus incógnitas:

Si las dos incógnitas utilizadas son de primer grado y del tipo $ax + by + c \geq 0$ *(esta desigualdad también puede tomarse con* ≤ 0, > 0, *o,* < 0*), tendremos una* ***desigualdad con dos incógnitas de tipo lineal****; si al menos una de las incógnitas tiene grado mayor que uno o si involucra formas distintas a la anterior, tales como* xy, $x \operatorname{sen} y$, $\dfrac{x}{(x-y)}$, e^{xy}, *entonces tendremos una* ***desigualdad con dos incógnitas de tipo no lineal.***

Por ahora sólo estudiaremos las desigualdades lineales con dos incógnitas de tipo lineal.

Una desigualdad lineal con dos incógnitas tiene una de las formas siguientes:
$ax + by + c \geq 0$, $x \geq r$, $y \geq s$ para a, b, c, r y s números reales (donde se pueden incluir los signos $>$, $<$).

Para cualquier desigualdad lineal la recta correspondiente a la igualdad separa al plano en dos regiones llamadas **semiplanos**, una que contiene todos los puntos que satisfacen la desigualdad y otra en donde no se satisface.

A continuación describiremos cómo hallar de manera gráfica, el conjunto solución de la desigualdad $ax + by + c \geq 0$.

Pasos para hallar el conjunto solución de una desigualdad de la forma $ax + by + c \geq 0$.

Paso 1. Trazamos la línea recta de ecuación $ax + by + c = 0$.

Paso 2. Tomamos un punto $P(x_1, y_1)$ *del plano y lo evaluamos en la desigualdad. Si el punto* $P(x_1, y_1)$ *satisface la desigualdad, entonces todos los puntos del semiplano al cual pertenece el punto P constituyen la solución de la desigualdad. En otras palabras, si trasformamos la desigualdad en una de la forma* $y \geq mx + q$ *(suponiendo* $q \neq 0$*) y consideramos que el punto (x, y) está sobre la recta* $y = mx + q$ *y* $y_1 > y$*, entonces* $y_1 > mx + q$*. Por tal razón, el punto* (x, y_1) *es solución de la desigualdad, para cualquier valor de x, es decir, si el punto* (x_1, y_1) *es solución, entonces cualquier otro punto del semiplano donde esté P también es solución (ver figura 7.17).*

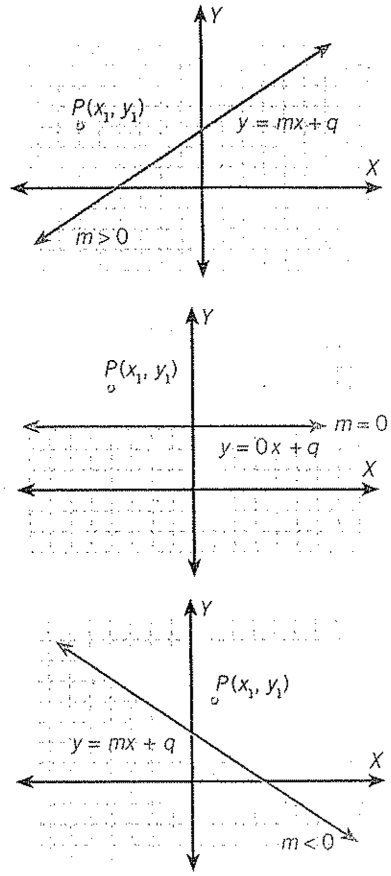


Figura 7.17

Ejemplo 25

Encontremos el conjunto solución de la desigualdad $x - 2y \geq 4$.

Solución

Trazamos la recta de ecuación $x - 2y = 4$ y seleccionamos el punto (0, 0), que se encuentra en el semiplano que está por arriba de la recta (*ver* figura 7.18).

$0 - 2(0) \geq 4$	Sustituimos (0, 0) en la desigualdad.
$0 \geq 4$	Simplificamos la expresión y llegamos a una proposición falsa.

Por tanto, el punto (0, 0) no es solución de la desigualdad y, en consecuencia, ningún punto de este semiplano es solución de la desigualdad. Así, la solución de $x - 2y \geq 4$ es el semiplano que se sitúa por debajo de la recta $x - 2y = 4$, junto con esta recta, como se observa en la figura 7.18. ◀

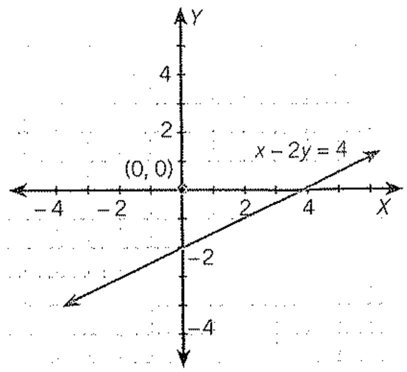


Figura 7.18

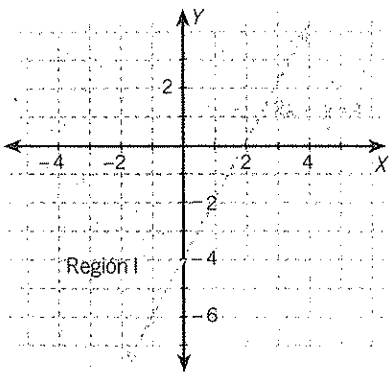


Figura 7.19

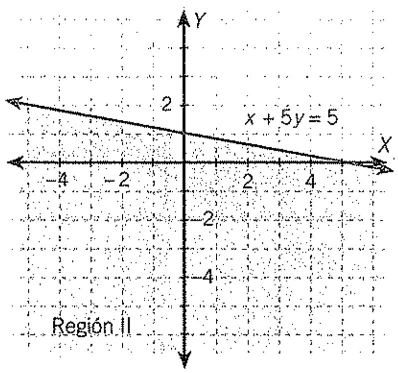


Figura 7.20

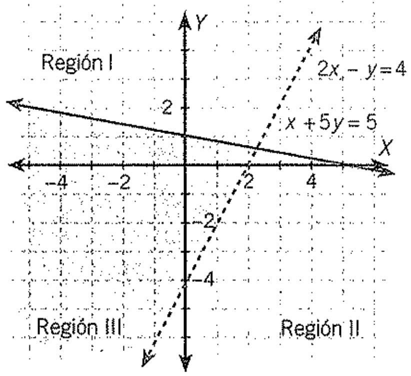


Figura 7.21

Ejemplo 26

Grafiquemos el conjunto solución del sistema de desigualdades $\begin{cases} 2x - y < 4 \\ x + 5y \leq 5 \end{cases}$.

Solución

1. Trazamos la recta que corresponde a la ecuación $2x - y = 4$. Puesto que la desigualdad es estricta, trazamos una línea punteada. Para determinar cuál semiplano corresponde a la solución de la desigualdad $2x - y < 4$, tomamos el (0, 0) como punto de prueba:

   $2(0) - 0 < 4$ Sustituimos (0, 0) en la desigualdad.

   $0 < 4$ Simplificamos la expresión y llegamos a una proposición verdadera.

   Por tanto, el punto (0, 0) es solución de la desigualdad, por lo cual el semiplano que está por encima de la recta $2x - y = 4$ es la región solución. En la figura 7.19 se muestra el semiplano correspondiente, al que llamaremos región I.

2. Trazamos la recta que corresponde a la solución de la ecuación $x + 5y = 5$. Determinamos el semiplano que corresponde a la región solución tomando como punto de prueba a (0, 0):

   $0 + 5(0) \leq 5$ Evaluamos (0, 0) en la desigualdad.

   $0 \leq 5$ Simplificamos la expresión y llegamos a una proposición verdadera.

   Así, el semiplano que está por debajo de la recta $x + 5y = 5$ (donde se encuentra el punto (0, 0)) es la región solución de la desigualdad $x + 5y \leq 5$. En la figura 7.20 se aprecia la región solución (región II).

3. El conjunto solución del sistema de desigualdades dado es la región III de la figura 7.21, que corresponde a la intersección de los conjuntos solución de cada desigualdad del sistema. ◀

Ejemplo 27

Determinemos el conjunto solución del sistema de desigualdades lineales

$$\begin{cases} x - 2y \leq 4 \\ 2x - y \leq 2 \\ 2x + 3y \leq 12 \end{cases}.$$

Solución

De manera similar al ejemplo 26, el conjunto solución se obtiene de la intersección de los conjuntos solución de cada desigualdad del sistema. La solución es la región IV de la figura 7.22.

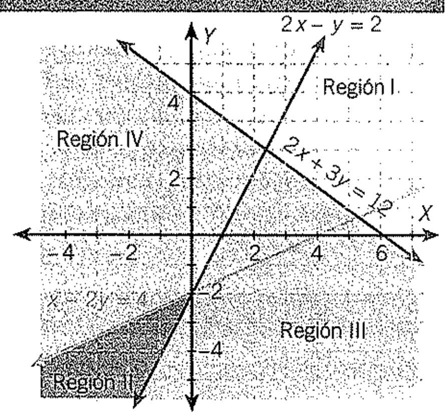


Figura 7.22 ◀

Ejemplo 28

Tracemos el conjunto solución del sistema de inecuaciones lineales $\begin{cases} x \geq 1 \\ y \leq -1 \\ 2x - 3y \leq 6 \end{cases}$.

Solución

1. Trazamos la gráfica de la ecuación $x = 1$, que corresponde a una línea recta vertical, que determina dos semiplanos; el de la derecha de la recta $x = 1$, región I en la figura 7.23, es el conjunto solución de la desigualdad.

2. Trazamos la gráfica de la ecuación $y = -1$, que corresponde a una línea recta horizontal; el semiplano que está por debajo de esa recta es el conjunto solución de la desigualdad $y \leq -1$ (región II en la figura 7.23).

3. Trazamos la recta $2x - 3y = 6$ y tomamos como punto de prueba a (0, 0), el cual satisface la desigualdad ya que $2(0) - 3(0) = 0 \leq 6$; por tal razón, el semiplano donde se encuentra (0, 0) es el conjunto solución de esta desigualdad (región III en la figura 7.23).

4. El conjunto solución del sistema de desigualdades dado, es la región IV en la figura 7.23. ◀

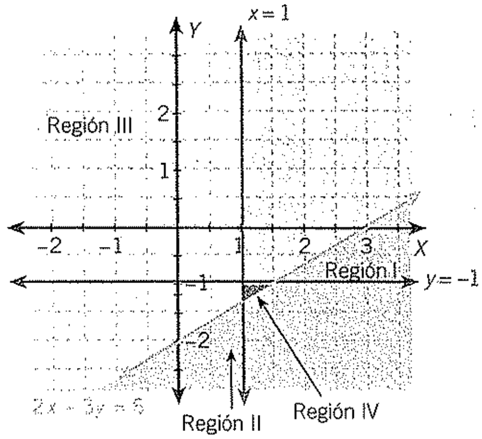


Figura 7.23

> Piensa y practica <

> Razonamiento lógico

1. Clasifica cada desigualdad en lineal y no lineal.

   a. $\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y > 0$

   b. $\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}xy + \frac{1}{2}y > 0$

   c. $\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}y > 0$

   d. $20x + 45y + 2 < 0$

2. Colorea la región solución, en el plano, para cada desigualdad dada.

   a. $y \geq 2$ b. $y \leq -2$

   c. $x \leq -2$ d. $x \geq 2$

   e. $2x + 3y \geq 6$ f. $2x - 3y \leq -6$

   g. $2x + 3y \leq -6$ h. $2x - 3y \geq 6$

> Resolución de problemas

3. Encuentra la gráfica del conjunto solución del sistema de desigualdades.

   a. $\begin{cases} 2x - 3y \geq -5 \\ x + 2y \leq 7 \\ x \geq -1 \\ y \geq 0 \end{cases}$

   b. $\begin{cases} 5x + y \leq 9 \\ 2x + 3y \leq 14 \\ x \geq -2 \\ y \geq 2 \end{cases}$

4. Compara las gráficas de los conjuntos solución de las desigualdades $xy < 1$ y $y < \frac{1}{x}$. ¿Son iguales? Explica tu respuesta.

5. Escribe la desigualdad o desigualdades representadas en las gráficas de la figura 7.24.

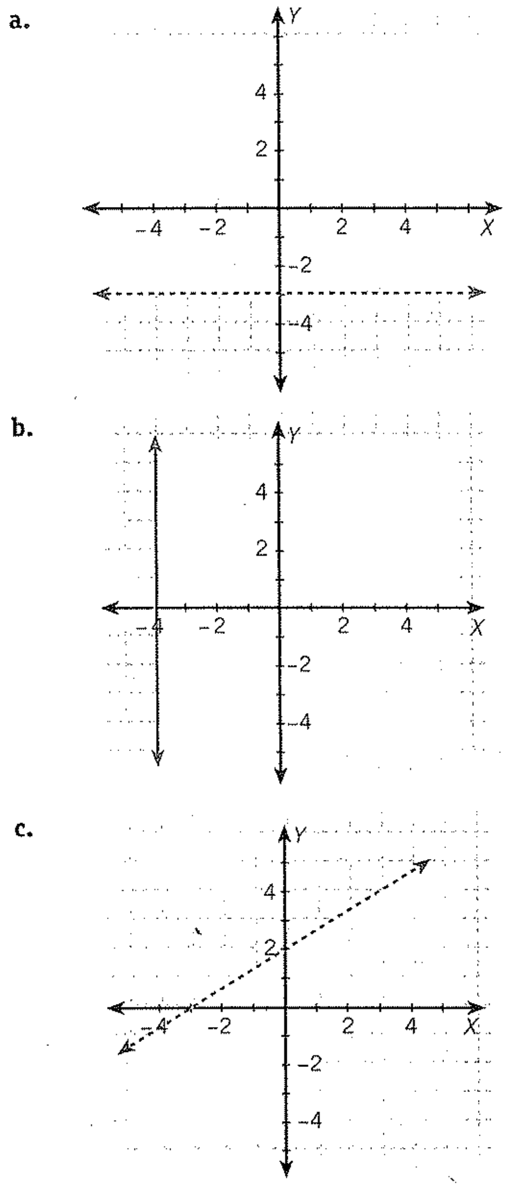


Figura 7.24

Introducción a la programación lineal

Logro: identificar y diferenciar los elementos claves de la programación lineal, mediante la modelación de problemas sencillos.

Consideremos un comerciante de electrodomésticos que busca maximizar las ganancias por las ventas de un artículo determinado, un ingeniero electricista que intenta minimizar la cantidad de energía necesaria en un circuito para que un dispositivo eléctrico funcione o un ingeniero metalúrgico que intenta disponer correctamente la proporción de materiales para lograr la mayor resistencia de una pieza destinada a un nuevo producto.

En general,

> *Problemas que buscan maximizar o minimizar situaciones se denominan* ***problemas de optimización****. El área de las Matemáticas que se ocupa de modelar situaciones de optimización de funciones lineales con ciertas restricciones (también lineales), se llama* ***programación lineal****.*

Un problema de programación lineal implica una función lineal (función objetivo) que se desea maximizar o minimizar, condicionada a ciertas restricciones que son desigualdades o igualdades lineales, que restringen los valores de las variables. Vamos a ilustrar la metodología de trabajo con algunos ejemplos, para dar solución a problemas de este tipo.

Ejemplo 29

Una microempresa agrícola planea cultivar arroz tipo A y tipo B. Cada hectárea de arroz tipo A genera una ganancia de $ 50 000, y cada hectárea de arroz tipo B produce una ganancia de $ 70 000. Para sembrar se han alquilado un tractor y un arado. El tractor se alquila por 200 horas y el arado por 100 horas. Sembrar una hectárea de arroz tipo A requiere 4 horas de tractor y una hora de arado, mientras que para la siembra de una hectárea de arroz tipo B se necesitan 3 horas de tractor y 2 horas de arado. ¿Cuántas hectáreas de cada tipo de arroz deberían plantarse para maximizar la ganancia de la microempresa?

Solución

1. Denotemos con:
   x: el número de hectáreas que se van a cultivar de arroz tipo A.
   y: el número de hectáreas que van a cultivarse de arroz tipo B.
2. Definamos la función objetivo (ganancia): $f(x, y) = 50x + 70y$ (en miles de pesos).
3. Definamos las restricciones:
   - Por el tiempo de alquiler del tractor: $4x + 3y \leq 200$, ya que el arroz tipo A requiere 4 horas de tractor, mientras que el tipo B necesita 3, y en total se alquiló por 200 horas.
   - Por el tiempo de alquiler del arado: $x + 2y \leq 100$, ya que el arroz tipo A requiere una hora de arado, mientras que el de tipo B necesita 2, y en total se alquiló por 100 horas.
     La razón para utilizar las desigualdades (≤ 200, ≤ 100) es por el número máximo de horas de alquiler del tractor y del arado.
   - Condiciones de no negatividad: $x \geq 0$, $y \geq 0$, porque las incógnitas x y y denotan cantidad (número de hectáreas).

Conexión con la vida

En 1948, Estados Unidos, Inglaterra (países aliados) y la Unión Soviética vivían un período llamado la guerra fría. La Unión Soviética bloqueó las comunicaciones terrestres desde las zonas alemanas en poder de los aliados y Berlín. Los países aliados, utilizaron la programación lineal para crear mecanismos óptimos para abastecer a la ciudad de Berlín. Debido a la efectividad de estos métodos, los soviéticos levantaron el bloqueo en 1949.

En resumen, nuestro modelo de programación lineal queda como se muestra en la tabla 7.8.

Función objetivo (ganancia). En miles de pesos	Restricciones
$f(x, y) = 50x + 70y$	$4x + 3y \leq 200$ $x + 2y \leq 100$ $x \geq 0\,,\ y \geq 0$

Tabla 7.8

4. Para resolver el problema, trazamos la gráfica del conjunto solución de las desigualdades que dan las restricciones.
   El conjunto solución de las restricciones se llama **conjunto de soluciones factibles**. En la figura 7.25, ese conjunto es la parte coloreada. Para determinar en qué punto se maximiza la ganancia, tomamos los puntos extremos del conjunto de soluciones factibles, es decir, los puntos de corte entre las dos rectas, cada recta y los ejes ordenados y el punto (0, 0).

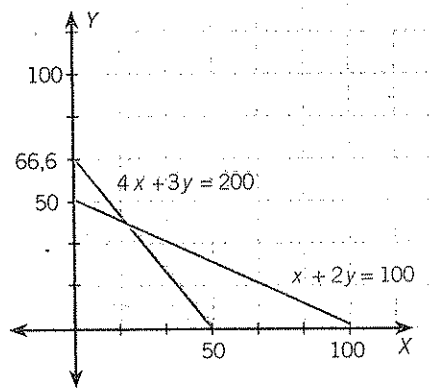


Figura 7.25

5. Determinemos los puntos extremos:
   (0, 0): punto de corte entre los ejes coordenados.
   (0, 50): punto de corte entre el eje Y y la recta $x + 2y = 100$.
   (50, 0): punto de corte entre el eje X y la recta $4x + 3y = 200$.
   (20, 40): punto de corte entre las rectas $x + 2y = 100$ y $4x + 3y = 200$.

6. Para saber qué punto maximiza la ganancia, evaluamos cada punto extremo en la función ganancia y determinamos cuál es el que da un valor mayor.

$f(0, 0) = 0$	Evaluamos $f(x, y) = 50x + 70y$ en (0, 0).
$f(0, 50) = 50 \times 0 + 70 \times 50 = 3500$	Evaluamos $f(x, y) = 50x + 70y$ en (0, 50).
$f(50, 0) = 50 \times 50 + 70 \times 0 = 2500$	Evaluamos $f(x, y) = 50x + 70y$ en (50, 0).
$f(20, 40) = 50 \times 20 + 70 \times 40 = 3800$	Evaluamos $f(x, y) = 50x + 70y$ en (20, 40).

Puesto que el mayor valor se obtiene en el punto (20, 40), esto quiere decir que la microempresa agrícola maximizará su ganancia si cultiva 20 hectáreas de arroz tipo *A* y 40 hectáreas de tipo *B*. ◀

El desarrollo realizado en el ejemplo anterior podemos resumirlo en el siguiente teorema.

> ***Teorema fundamental de programación:*** *si una función objetivo tiene una solución óptima, entonces esa solución corresponderá a un vértice de la región que representa el conjunto de soluciones factibles.*

Ejemplo 30

Minimicemos la función objetivo $C(x, y) = 4x + y$, con las siguientes restricciones: $3x + 5y \geq 120$; $x + y \geq 32$, $x \geq 0$; $y \geq 0$.

Solución

En la figura 7.26 se presenta el conjunto de soluciones factibles.

Debemos encontrar un par ordenado que satisfaga todas las restricciones y que dé a la función objetivo C su menor valor. Para ello utilicemos el teorema fundamental de programación (*ver* tabla 7.9).

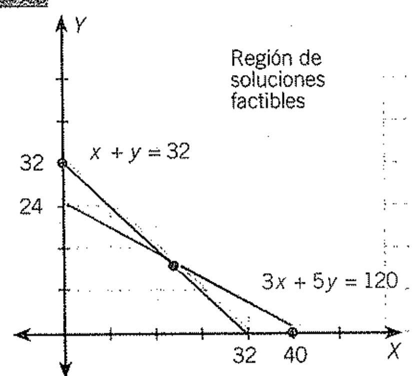


Figura 7.26

Vértices (x, y)	$(0, 32)$ Punto de intersección entre el eje Y y la recta $x + y = 32$.	$(20, 12)$ Punto de intersección entre las rectas $x + y = 32$ y $3x + 5y = 120$.	$(40, 0)$ Punto de intersección entre el eje X y la recta $3x + 5y = 120$.
$C(x, y)$	$C(0, 32) = 4 \times 0 + 32 = 32$	$C(20, 12) = 4 \times 20 + 12 = 92$	$C(40, 0) = 4 \times 40 + 0 = 160$

Tabla 7.9

Así, el valor mínimo de la función $C(x, y)$ es 32 y se presenta en la solución factible $(0, 32)$. ◀

> Piensa y practica <

> Comunicación

1. Minimiza la función objetivo $f(x, y) = 11x + 16y$, con las restricciones $x + 2y \geq 45$; $x + y \geq 40$; $2x + y \geq 45$; $x \leq 50$; $y \leq 50$.

2. Maximiza la función objetivo $f(x, y) = 6x + 7y$, con las restricciones $x + 2y \leq 900$; $x + y \leq 500$; $3x + 2y \leq 1200$.

3. Maximiza la función objetivo $f(x, y) = 4x + 5y$, con las restricciones $3x + 4y \leq 250$; $x + y \leq 75$; $2x + 3y \leq 180$.

4. Minimiza la función objetivo $f(x, y) = 4x + 3y$, sujeta a las restricciones $2x + y \geq 8$; $2x + 3y \geq 16$; $x + 3y \geq 11$; $x \leq 20$; $y \leq 20$.

5. Halla los valores máximo y mínimo (optimiza) de la función objetivo $f(x, y) = 7x + 5y - 2$, teniendo en cuenta las restricciones $-5x + 4y \leq 1$; $2x + y \leq 3$; $-x + y \geq -3$; $x - 3y \leq 9$.

> Razonamiento lógico

En los ejercicios 6, 7 y 8, halla los extremos (valores máximo y mínimo) de la función f, para la región poligonal con los vértices especificados. Además, establece un sistema de desigualdades cuya región de soluciones factibles tenga los vértices dados.

6. $f(x, y) = 8x - 3y - 7$; vértices en $(2, 1)$, $(5, 2)$, $(3, 4)$.

7. $f(x, y) = 6x + 5y - 3$; vértices en $(1, 0)$, $(5, 1)$, $(6, 4)$.

8. $f(x, y) = 8x + 7y - 9$; vértices en $(1, 4)$, $(5, 7)$, $(9, 2)$, $(2, 2)$.

Formación ciudadana

Analizo críticamente y debato con argumentos y evidencias sobre hechos ocurridos a nivel local, nacional o mundial, y comprendo las consecuencias que estos pueden tener sobre mi propia vida.

9. La gráfica de la figura 7.27 representa la tasa de desempleo en Colombia entre 2000 y 2008. Determina cuál es el valor máximo y mínimo y en qué años se obtuvieron. Propón un problema de optimización con estos datos.

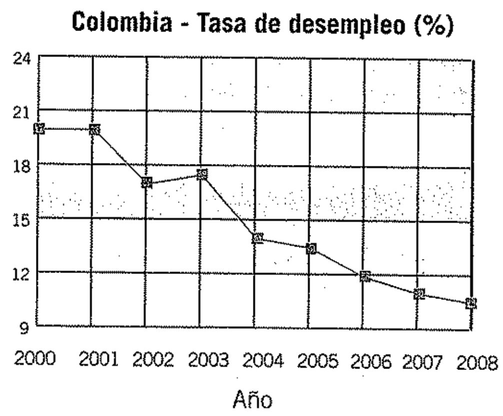


Figura 7.27

Lección 8

Pensamientos numérico y variacional

Problemas de programación lineal con dos incógnitas

Logro: plantear y solucionar problemas de programación lineal con dos incógnitas.

En esta lección plantearemos problemas de distintas ramas del conocimiento que pueden resolverse con la ayuda de la programación lineal. Algunos de estos problemas sólo se plantearán, pero no podremos resolverlos con el método "gráfico" aprendido en la lección anterior, ya que este no resulta adecuado para más de dos variables.

Ejemplo 31

Un nutricionista formula una dieta especial que incluye dos grupos de alimentos: *G* y *H*. Cada onza de alimento del grupo *G* contiene 3 unidades de vitamina *A*, una de vitamina *C* y una de vitamina *D*. Cada onza de alimento del grupo *H* contiene una unidad de vitamina *A*, una de vitamina *C* y 3 de vitamina *D*. Cada onza de alimento del grupo *G* cuesta $ 400 y la del grupo *H* cuesta $ 100. Las restricciones para la dieta son tales que se requieren, al menos, 24 unidades de vitamina *A*, 16 de vitamina *C* y 30 de vitamina *D*. Hallemos la cantidad requerida de cada grupo de alimentos que se podría utilizar para minimizar el costo. ¿Cuál es el costo mínimo?

Solución

Denotamos con:

x: el número de onzas de alimento del grupo *G*.

y: el número de onzas de alimento del grupo *H*.

La función objetivo (costo) en términos de x y y es:

$C(x, y) = 400x + 100y$.

Por otra parte, las restricciones de esta dieta son:

Vitamina *A*: $3x + y \geq 24$

Vitamina *C*: $x + y \geq 16$

Vitamina *D*: $x + 3y \geq 30$

De donde obtenemos la gráfica del conjunto soluciones factibles que se muestra en la figura 7.28.

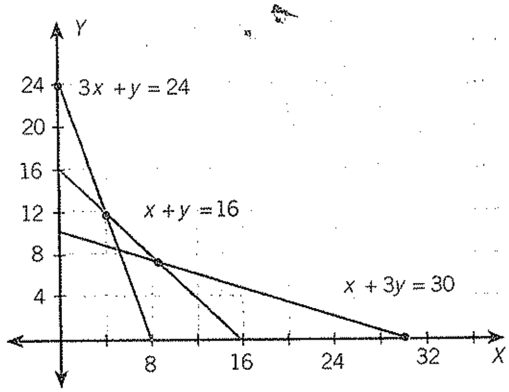


Figura 7.28

Hallamos los vértices de la región factible:

Vértices (x, y)	$C(x, y)$
(0, 24) Punto de intersección entre el eje *Y* y la recta $3x + y = 24$.	$C(0, 24) = 400 \times 0 + 100 \times 24 = 2400$
(4, 12) Punto de intersección entre las rectas $3x + y = 24$ y $x + y = 16$.	$C(4, 12) = 400 \times 4 + 100 \times 12 = 2800$
(9, 7) Punto de intersección entre las rectas $x + 3y = 30$ y $x + y = 16$.	$C(9, 7) = 400 \times 9 + 100 \times 7 = 4300$
(30, 0) Punto de intersección entre el eje *X* y la recta $x + 3y = 30$.	$C(30, 0) = 400 \times 30 + 100 \times 0 = 12\ 000$

Tabla 7.10

Luego, el costo mínimo es $ 2400, que se logra cuando $x = 0$ onzas del grupo *G* y $y = 24$ onzas del grupo *H*. ◁

Ejemplo 32

Sebastián trabaja en la sección de jugos de un almacén, y desea saber qué cantidades debe mezclar de dos jugos: manzana y piña. Él sabe que tiene 1200 litros de jugo de manzana y 1400 litros de jugo de piña. Las cantidades de jugo utilizadas en cada mezcla y sus ganancias son:

Mezcla 1: con 30% de jugo de manzana y 70% de jugo de piña, obtiene \$ 700 de ganancia por litro preparado y vendido.

Mezcla 2: con 60% de jugo de manzana y 40% de jugo de piña, obtiene \$ 500 de ganancia por litro preparado y vendido.

Utilicemos la programación lineal para ayudarle a Sebastián a decidir las cantidades que debe preparar de cada mezcla, para obtener la máxima ganancia.

Solución

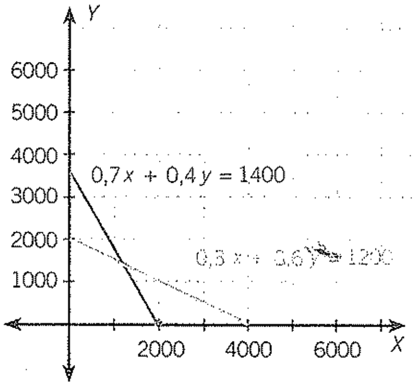


Figura 7.29

Denotemos con:

x: la cantidad de litros preparados de la mezcla 1.

y: los litros preparados de la mezcla 2.

Así, la función objetivo (ganancia) es $g(x, y) = 700x + 500y$ y las restricciones son: jugo de manzana: $0{,}3x + 0{,}6y \le 1200$; jugo de piña: $0{,}7x + 0{,}4y \le 1400$.

De no negatividad: $x \ge 0$, $y \ge 0$.

Trazamos la región de soluciones factibles en la figura 7.29.

Los vértices de la región y los valores de la función objetivo se presentan en la tabla 7.11.

Vértices	Valor de la función objetivo
(0, 0)	$g(0, 0) = 0$
(2000, 0)	$g(2000, 0) = 700\,(2000) + 500\,(0) = \$\,1\,400\,000$
(0, 2000)	$g(0, 2000) = 700\,(0) + 500\,(2000) = \$\,1\,000\,000$
(1200, 1400)	$g(1200, 1400) = 700\,(1200) + 500\,(1400) = \$\,1\,540\,000$

Tabla 7.11

En consecuencia, Sebastián debe preparar 1200 litros de la mezcla 1 y 1400 de la mezcla 2, para maximizar sus ganancias en \$ 1 540 000. ◁

Ejemplo 33

Una tienda naturista va a introducir en el mercado dos perfumes naturales: "Orquídea andina" y "Margarita apacible". El dueño de la tienda realizó un sondeo con sus clientes potenciales, para decidir cuánta cantidad de perfume debe producir. El propietario, que cuenta con el equipo necesario para procesar 3000 onzas de perfume, no puede pasarse de \$ 9 000 000 en gastos. Utilicemos los datos de la tabla 7.12 para calcular cuántas botellas de cada perfume debe producir y así obtener una ganancia máxima.

	Orquídea andina	Margarita apacible
Tamaño de la botella	2 onzas	1,5 onzas
Costo por botella	\$ 3000	\$ 6000
Ganancia neta (por botella)	\$ 4000	\$ 5000

Tabla 7.12

Solución

Denotamos con:

x: el número de botellas de "Orquídea andina" que debe preparar.

y: el número de botellas de "Margarita apacible" que debe producir.

Entonces:

Función objetivo: $G(x, y) = 4x + 5y$ en miles de pesos.

Restricciones:

Por el tamaño de las botellas: $2x + 1{,}5y \leq 3000$.

Por el costo de las botellas: $3x + 6y \leq 9000$ en miles de pesos.

De no negatividad: $x \geq 0$, $y \geq 0$.

La región de soluciones factibles se muestra en la figura 7.30.

Los vértices y valores de la función objetivo se muestran en la tabla 7.13.

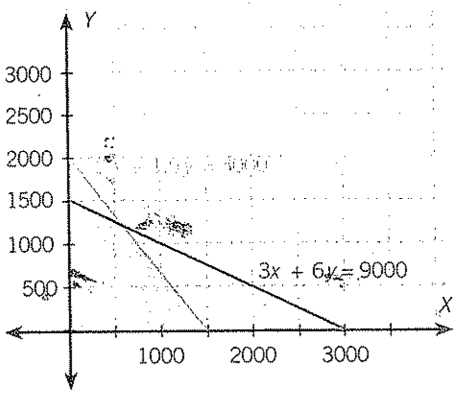
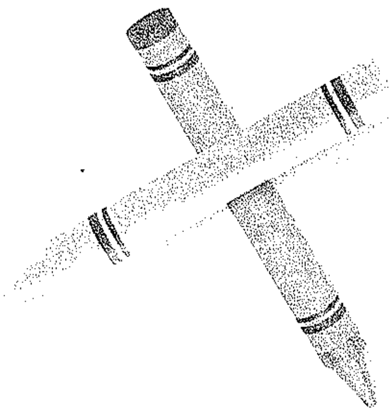


Figura 7.30



Vértices	Función objetivo
(0, 0)	$G(0, 0) = 0$
(1500, 0)	$G(1500, 0) = 4(1500) + 5(0) = 6000$ en miles
(0, 1500)	$G(0, 1500) = 4(0) + 5(1500) = 7500$ en miles
(600, 1200)	$G(600, 1200) = 4(600) + 5(1200) = 8400$ en miles

Tabla 7.13

Por tanto, la ganancia máxima es \$ 8 400 000 y el propietario la alcanza si elabora y comercializa 600 botellas de perfume "Orquídea andina" y 1200 de "Margarita apacible". ◁

Ejemplo 34

Luis es promotor de conciertos y ha firmado un contrato con un grupo de *rock*. En el contrato se garantiza una asistencia de por lo menos 12 500 personas y entradas por boletería de al menos \$ 225 000 000. Los precios de los boletos para el concierto son \$ 15 000 y \$ 25 000, de acuerdo con la ubicación; con base en el contrato, el promotor le dará al grupo de *rock* \$ 5000 por cada boleto de \$ 15 000 y \$ 7500 por cada boleto de \$ 25 000 que se venda. Hallemos cuál es el valor mínimo de dinero que Luis le ha garantizado al grupo.

Solución

Representemos con:

x: el número de boletos de \$ 15 000 que se deben vender.

y: el número de boletos de \$ 25 000 que deben venderse.

Entonces:

Función objetivo (ganancia del grupo de *rock*):
$f(x, y) = 5000x + 7500y$.

Restricciones:

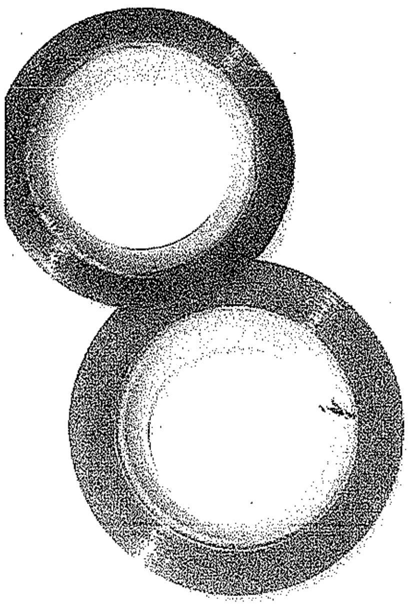
Por asistencia: $x + y \geq 12\,500$

Por dinero en boletería: $15\,000\,x + 25\,000\,y \geq 225\,000\,000$

De no negatividad: $x \geq 0$, $y \geq 0$

Observemos que la segunda restricción equivale a $15\,x + 25\,y \geq 225\,000$.

La región de soluciones factibles se observa en la figura 7.31.



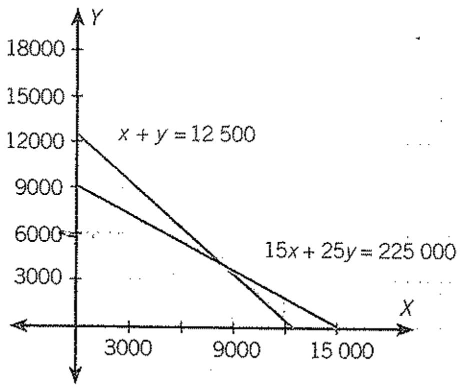


Figura 7.31

Los vértices de la región de factibilidad y de los valores de la función objetivo, aparecen en la tabla 7.14.

Vértices	Función objetivo
(0, 12 500)	$f(0, 12\,500) = 5000\,(0) + 7500\,(12\,500) = \$\ 93\,750\,000$
(8750, 3750)	$f(8750, 3750) = 5000\,(8750) + 7500\,(3750) = \$\ 71\,875\,000$
(15 000, 0)	$f(15\,000, 0) = 5000\,(15\,000) + 7500\,(0) = \$\ 75\,000\,000$

Tabla 7.14

Por consiguiente, Luiś debió garantizarle al grupo de *rock* \$ 71 875 000 de ganancias. ¿Cuál es la ganancia mínima que espera Luis? ◀

> Piensa y practica <

> Resolución de problemas

1. Un proveedor de helados de crema tiene dos máquinas para elaborar helados de vainilla y fresa. Para cumplir sus pedidos, la compañía debe producir, por hora, al menos 240 litros de helado de vainilla y 380 litros de helado de fresa. La máquina I procesa 16 litros de helado de vainilla y 19 litros de helado de fresa, por hora. La máquina II fabrica 12 litros de helado de vainilla y 38 de fresa, por hora. El costo de funcionamiento —por hora— de las máquinas I y II es \$ 2800 y \$ 2500, respectivamente. ¿Cuántas horas se deberían operar las máquinas para cumplir con contratos al menor costo?

2. Una dieta consta de dos alimentos. Las restricciones de los nutrientes A, B y C requieren obtener al menos 100 mg de A, 240 mg de B y 300 mg de C. El costo del primer alimento es \$ 3000 el kilo, y el del segundo alimento es \$ 2500 el kilo. Las cantidades de nutrientes en cada alimento, en mg por kilo, están dadas en la tabla 7.15.

	Alimento 1	Alimento 2
A	10	20
B	60	20
C	40	40

Tabla 7.15

¿Cuál es el costo mínimo de esta dieta?

3. Una compañía manufactura contestadores automáticos modelos estándar (S) y de lujo (L). Cada contestador pasa a través de los procesos P_1, P_2, P_3. Un modelo estándar requiere una hora en P_1, una hora en P_2 y dos horas en P_3. Un contestador de lujo necesita tres horas en P_1, una en P_2 y una en P_3. De acuerdo con el horario de los operarios, el proceso P_1 puede hacerse en 24 horas, el proceso P_2 en 10 horas y el P_3 en 16. Si la ganancia es \$ 25 000 por cada modelo estándar y \$ 35 000 por cada modelo de lujo, ¿cuántas unidades de cada tipo debería producir la compañía para lograr la máxima ganancia?

4. Una compañía de ingeniería trabaja en el reacondicionamiento de motores de cuatro y seis cilindros. Cada motor de cuatro cilindros necesita una hora para limpieza, cinco para reparación y tres para probarlo. Los motores de seis cilindros exigen una hora para limpieza, 10 para reparación y dos para prueba. La estación de limpieza está disponible a lo sumo por nueve horas, el equipo de reparación está disponible cuando más por 80 horas y el equipo de prueba tiene una disponibilidad a lo sumo de 24 horas. Por cada motor reacondicionado de cuatro cilindros, la compañía gana \$ 150 000 y por un motor de seis cilindros, \$ 250 000. La compañía puede vender todos los motores reacondicionados. ¿Cuántos motores de cada tipo debería reacondicionar para obtener la máxima ganancia? ¿Cuál es la máxima ganancia?

5. Un productor de alimento concentrado para animales produce dos tipos: P para perros y G para gatos. Los dos tipos de alimento contienen tres clases de los mejores ingredientes: I_1, I_2, I_3. Cada tonelada de P requiere 200 libras de I_1, 100 libras de I_2 y 100 libras de I_3. Cada tonelada de G necesita 100 libras de I_1, 200 de I_2 y 400 de I_3. Existen por lo menos 5000 libras de I_1 disponibles, al menos 7000 libras de I_2 y a lo sumo 10 000 libras de I_3. Cada tonelada producida de P cuesta \$ 450 000 y cada tonelada de G cuesta \$ 300 000. ¿Cuántas toneladas de cada alimento debería fabricar para minimizar los costos? ¿Cuál es el costo mínimo?

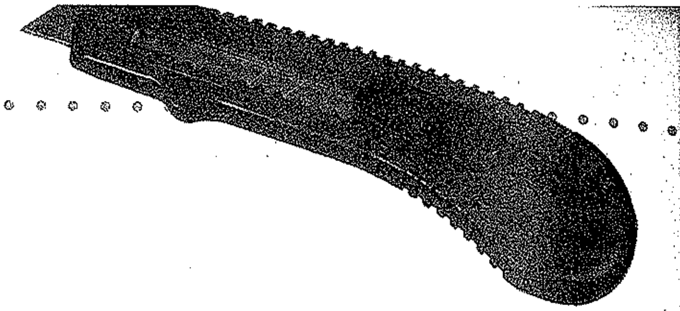
6. Un agricultor cultiva trigo y maíz. El trigo necesita 8 unidades de insecticida y 6 unidades de fertilizante por hectárea, mientras que el maíz requiere 7 unidades de cada uno. Si la ganancia por hectárea de trigo es \$ 32 000 y por hectárea de maíz es \$ 29 000, ¿cuántas hectárea de cada uno debe plantar para obtener la máxima ganancia? Supón que el agricultor cuenta con tierra suficiente y con 715 unidades de insecticida y 640 de fertilizante. ¿Cuál es la ganancia?

7. Supón que una compañía tiene dos fábricas y tres centros de distribución. Se conocen: producción de cada fábrica y demanda de cada compañía compradora; costos para transportar una unidad desde cada fábrica hasta cada compañía compradora. Plantea un problema de programación lineal que permita minimizar el costo de trasporte. En la tabla 7.16 se dan los costos de transporte, producción y demanda.

Fábricas	Compañías compradoras 1	2	3	Producción de fabricas
1	5	7	8	100
2	4	10	9	150
Demanda	70	60	80	

Tabla 7.16

Evaluación por competencias



Autoevaluación

A continuación aparecen los indicadores de logro. Marco ✔ en la columna Sí, si el logro indicado está superado o ✘ en la columna No, si está por superar.

	Sí	No
> Represento información utilizando matrices.	☐	☐
> Determino la solución de problemas modelados por sistemas de ecuaciones lineales.	☐	☐
> Determino el valor máximo y/o mínimo de una función lineal en una región con fronteras lineales.	☐	☐

Coevaluación

Con los siguientes ejercicios, afianzamos los indicadores de logro que hemos superado y reforzamos aquellos que están por superar.

1. Resolvamos cada sistema de ecuaciones mediante A^{-1}, es decir, si $AX = B$, entonces $X = A^{-1}B$.

a. $\begin{cases} 4x - y = 3 \\ x + 4y = 5 \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} 3x - 2y = \dfrac{1}{2} \\ x + y = \dfrac{7}{2} \end{cases}$

2. Hallemos el determinante de la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$.

3. Determinemos si los puntos dados están sobre la misma recta.

a. $A(0, 1)$; $B(-8, 7)$; $C(4, -2)$

b. $A(3, 4)$; $B(2, 3)$; $C(-1, 0)$

4. Tracemos la gráfica del conjunto solución de cada sistema de desigualdades.

a. $2x - 5y < 9$; $3x + 4y \geq 2$

b. $2x + 3y > 6$; $2x - y > -2$; $x < 3$

c. $2x + 3y \leq 18$; $x + y \leq 7$; $x \geq 0$; $y \geq 0$

5. Resolvamos el problema de programación lineal y en cada caso asumamos que $x \geq 0$, $y \geq 0$.

a. Maximicemos la función objetivo $f(x, y) = 2x + 2y$, sujeta a las restricciones: $x + 2y \leq 14$, $5x + 2y \leq 30$.

b. Maximicemos la función objetivo $f(x, y) = 4x + 5y$, sujeta a las restricciones: $2x + 3y \leq 24$, $4x + 3y \leq 36$.

c. Minimicemos la función objetivo $f(x, y) = 4x + y$, sujeta a las restricciones: $5x + 2y \geq 16$, $x + 2y \geq 8$, $x \leq 20$, $y \leq 20$.

6. Apliquemos la regla de Cramer para resolver el sistema de ecuaciones.

a. $\begin{cases} x - y = 100 \\ x + y = 300 \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} 2x + 2y + 5z = 5 \\ 3x - y + 2z = 6 \\ 8x - 3y + z = 12 \end{cases}$

7. Hallemos la inversa de las matrices utilizando la matriz ampliada de la forma $[A \mid I]$.

a. $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \\ 7 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ **b.** $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 5 & 10 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

8. Consideremos la función objetivo $f(x, y) = 100x + 150y$, y hallemos el sistema de restricciones que determina la región de soluciones factibles.

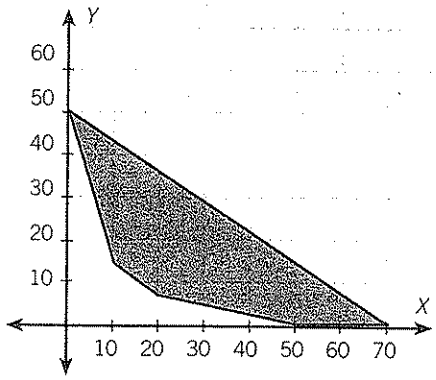


Figura 7.32

Tu creación

Cuando se transmite información por medios electrónicos, en muchos casos es necesario encriptar (transmitirla con seguridad) los datos. Hay muchas formas interesantes de encriptar mensajes. Describiremos aquí un método que es eficaz, en especial cuando se usa una matriz de gran tamaño, sin embargo, para efectos de aprendizaje basta una matriz 2×2.

Tomemos la matriz invertible $E = \begin{bmatrix} -2 & -6 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$, cuya inversa es $E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$.

Establecemos la siguiente codificación del alfabeto español (a cada una de las 27 letras del alfabeto español, ordenadamente, le asignamos los números enteros consecutivamente del 1 al 27, y un espacio entre palabras se codifica con el número 0):

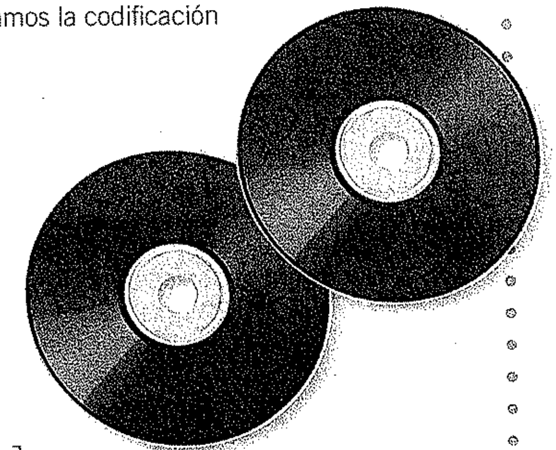
A	*B*	*C*	*D*	...	*X*	*Y*	*Z*
1	2	3	4	...	25	26	27

Por ejemplo, ciframos el mensaje, HOLA ESTA ES UNA PRUEBA = 8, 16, 12, 1, 0, 5, 20, 21, 1, 0, 5, 20, 0, 22, 14, 1, 0, 17, 19, 22, 5, 2, 1.

Como la matriz de codificación es de dimensiones 2×2, entonces particionamos la codificación en grupos de a dos, de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} 8 \\ 16 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 12 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 20 \\ 21 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 20 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 22 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 14 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 17 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 19 \\ 22 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$



En el último vector de la partición, hemos incluido un 0 (para completar).

Ahora formamos la matriz del mensaje:

$$C = \begin{bmatrix} 8 & 12 & 0 & 20 & 1 & 5 & 0 & 14 & 0 & 19 & 5 & 1 \\ 16 & 1 & 5 & 21 & 0 & 20 & 22 & 1 & 17 & 22 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

El mensaje cifrado se ve como la matriz EC, es decir:

$$EC = \begin{bmatrix} -112 & -30 & -30 & -166 & -2 & -130 & -132 & -34 & -102 & -170 & -22 & -2 \\ 160 & 56 & 40 & 248 & 4 & 180 & 176 & 64 & 136 & 252 & 36 & 4 \end{bmatrix}$$

Quien recibe el mensaje debe conocer, previamente, la matriz E. Entonces, para descifrar (desencriptar) el mensaje debe tomar la matriz anterior y multiplicarla a izquierda por la matriz inversa E^{-1}.

a. Encripta tu primer apellido.

b. Utiliza una matriz invertible de dimensiones 3×3, para encriptar. ¿Cómo debes particionar ahora los mensajes?

c. Emplea el programa Excel para encriptar y desencriptar un mensaje, empleando tu matriz 3×3.

Prueba ICFES

Selecciona de las cuatro opciones sólo una de las respuestas, la que consideres relaciona de manera más estructurada los conceptos matemáticos con las condiciones particulares de la situación problema.

En una clínica una nutricionista, diseña una dieta utilizando tres alimentos básicos. El número de unidades por onza de cada ingrediente especial para cada uno de los alimentos se muestra en la tabla 7.17.

Alimento	Composición
A	30 unidades por onza de calcio. 10 unidades por onza de hierro. 10 unidades por onza de vitamina *A*.
B	10 unidades por onza de calcio. 10 unidades por onza de hierro. 30 unidades por onza de vitamina *A*.
C	20 unidades por onza de calcio. 20 unidades por onza de hierro. 20 unidades por onza de vitamina *A*.

Tabla 7.17

1. Si las filas corresponden a calcio, hierro y vitamina *A*, entonces la matriz que representa esta información es:

a. $\begin{bmatrix} 30 & 10 & 10 \\ 10 & 10 & 30 \\ 20 & 20 & 20 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 30 & 10 & 10 \\ 10 & 10 & 20 \\ 20 & 30 & 20 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 30 & 10 & 20 \\ 10 & 10 & 20 \\ 10 & 30 & 20 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 30 & 10 & 20 \\ 10 & 10 & 30 \\ 10 & 20 & 20 \end{bmatrix}$

2. El menor del elemento (hierro, alimento *C*) es:

a. 400

b. 700

c. 800

d. 500

3. El cofactor del elemento (vitamina *A*, alimento *B*) es:

a. –400

b. –700

c. –800

d. –500

4. Si la dieta debe incluir exactamente 400 unidades de calcio, 160 unidades de hierro y 240 unidades de vitamina *A*, entonces las onzas de cada alimento para cumplir las exigencias de la dieta son:

a. $\begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ **b.** $\begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 12 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ **d.** No hay solución.

5. Si la dieta debe incluir exactamente 340 unidades de calcio, 180 unidades de hierro y 220 unidades de vitamina *A*, entonces las onzas de cada alimento para cumplir las exigencias de la dieta son:

a. $\begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ **b.** $\begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 12 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ d. No hay solución.

6. Si la dieta debe incluir exactamente 360 unidades de calcio, 200 unidades de hierro y 240 unidades de vitamina A, entonces las onzas de cada alimento para cumplir las exigencias de la dieta son:

a. $\begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 12 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ d. No hay solución.

Una empresa fabrica dos artículos, y cada artículo debe elaborarse en dos plantas. Cada unidad del artículo *A* requiere 2 horas en la planta 1 y 4 horas en la planta 2; cada unidad del artículo *B* requiere 3 horas en la planta 1 y 2 horas en la planta 2. Las plantas 1 y 2 disponen de 60 y 80 horas por semana para su utilización, respectivamente. Las utilidades por unidad, de cada artículo, son US \$3 y US \$4 respectivamente. p denota el número de unidades producidas del artículo *A* y q el número de unidades producidas del artículo *B*. Se requiere maximizar las utilidades.

7. La función objetivo de este problema es:

a. $U(p, q) = 6p + 5q$

b. $U(p, q) = 5p + 6q$

c. $U(p, q) = 3p + 4q$

d. $U(p, q) = 4p + 3q$

8. El conjunto de restricciones del problema es:

a. $\begin{cases} 2p + 4q \leq 60 \\ 3p + 2q \leq 80 \\ p \geq 0,\ q \geq 0 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2p + 4q \geq 60 \\ 3p + 2q \geq 80 \\ p \geq 0,\ q \geq 0 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 2p + 3q \leq 60 \\ 4p + 2q \leq 80 \\ p \geq 0,\ q \geq 0 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 2p + 3q \geq 60 \\ 4p + 2q \geq 80 \\ p \geq 0, q \geq 0 \end{cases}$

9. El número de unidades producidas de cada artículo que maximiza la utilidad de esta compañía y su máxima utilidad son:

a. $p = 10\ ,\ q = 15\ ;\ U = 90$

b. $p = 15\ ,\ q = 15\ ;\ U = 105$

c. $p = 20\ ,\ q = 15\ ;\ U = 100$

d. $p = 15\ ,\ q = 10\ ;\ U = 85$

Las corrientes I_1, I_2 y I_3 están dadas por la solución del sistema:

$$\begin{cases} 4I_1 + 8I_3 = 2 \\ 2I_1 + 8I_3 = 6 \\ I_1 + I_2 - I_3 = 0 \end{cases}$$

10. El sistema en forma matricial es:

a. $\begin{bmatrix} 4 & 8 & 0 \\ 2 & 8 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 8 \\ 2 & 6 & 8 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 2 & 0 & 8 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 6 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

11. Si solucionamos el sistema utilizando la regla de Cramer, el determinante D es:

a. 16 b. 32 c. –16 d. –32

12. El determinante de la variable I_1 es:

a. –52 b. 16 c. 32 d. –32

13. El determinante de la variable I_2 es:

a. 15 b. –52 c. 18 d. –16

14. El determinante de la variable I_3 es:

a. 20 b. –20 c. 50 d. –50

15. La solución del sistema es:

a. $I_1 = 1\ ,\ I_2 = 3$ y $I_3 = 1$.

b. $I_1 = 2\ ,\ I_2 = 3$ y $I_3 = 1$.

c. $I_1 = -2\ ,\ I_3 = 1{,}25$ y $I_3 = 1{,}25$.

d. $I_1 = -2\ ,\ I_2 = -3$ y $I_3 = 1{,}25$.

Conexión histórica

¿De dónde surgieron los determinantes?

En el contexto de la solución de sistemas de ecuaciones lineales, pero también en el cálculo diferencial e integral, en los sistemas de ecuaciones diferenciales, en el cambio de variables en métodos de integración, y en el estudio de propiedades de las formas cuadráticas en tres o más variables. Los determinantes aparecieron en las Matemáticas más de un siglo antes que las matrices. El término matriz fue creado por James Joseph Sylvester, tratando de dar a entender que era "la madre de los determinantes".

Algunos de los más grandes matemáticos de los siglos XVIII y XIX contribuyeron al desarrollo de las propiedades de los determinantes. Las contribuciones más prolíficas a la teoría de los determinantes fueron las del matemático francés Agustin–Louis Cauchy, quien escribió, en 1812 una memoria de 84 páginas que contenía la primera demostración del teorema $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. Antes de Cauchy, en el siglo XVI, Cardano ofreció un método para resolver un sistema lineal de dos ecuaciones, que es básicamente lo que conocemos como la "regla de Cramer"; aunque él no utilizó explícitamente la noción de determinante, también en el trabajo *Elements of curves* de Witt, en 1660 (siglo XVII), se realiza una diagonalización de una matriz simétrica. El trabajo más conocido de Gabriel Cramer (1704–1752) es un estudio y una clasificación de curvas algebraicas, la regla de Cramer apareció en el apéndice, y aunque la regla lleva su nombre, variantes de la idea básica fueron planteadas antes por otros matemáticos. Sin embargo, la notación superior de Cramer ayudó a aclarar y popularizar la técnica.

El desarrollo de un determinante por cofactores fue empleado por primera vez por el matemático francés Pierre de Laplace (1749–1827). Otro matemático que contribuyó a la teoría de los determinantes fue Carl Gustav Jacobi, al establecer la teoría de las funciones de varias variables. Sylvester llamó más tarde jacobiano a este determinante, con Jacobi la palabra determinante ganó la aceptación definitiva. ■

Reflexiona

1. Nombra por lo menos dos matemáticos que contribuyeron al desarrollo de los determinantes y describe en qué área de las Matemáticas lo hicieron.
....
2. ¿Quiénes utilizaron la "regla de Cramer" antes que Cramer? ¿En qué tipo de trabajos la usaron?
....
3. Toma dos matrices, de dimensiones 2×2 y verifica la propiedad de los determinantes demostrada por Agustin–Louis Cauchy.

Glosario

Cofactor: determinante de la matriz obtenida al eliminar la fila y la columna correspondientes a un elemento.

Determinante: número real asociado a cada una de las matrices cuadradas.

Diagonal principal: componentes de la matriz localizados en a_{11}, a_{22}, a_{33}, ..., a_{nn}.

Función objetivo: función lineal que representa la meta que va a maximizarse o a minimizarse en un problema de programación lineal.

Matriz: arreglo rectangular de números dispuestos en filas y en columnas.

Matriz aumentada: matriz que contiene los coeficientes y las constantes de un sistema de ecuaciones.

Matriz columna: matriz que tiene una sola columna.

Matriz de probabilidad: matriz cuadrada en la que cada componente es no negativa y la suma de los elementos de cada renglón es 1.

Matriz fila: matriz que tiene una sola fila.

Matriz identidad: elemento identidad para la multiplicación de matrices.

Matriz inversa: matriz A^{-1}, tal que $A \cdot A^{-1} = I$.

Matriz triangular superior: matriz cuyos elementos por debajo de la diagonal principal son cero.

Menor *ij* de una matriz: determinante de la matriz que se obtiene eliminando la fila *i* y la columna *j* de la matriz dada.

Optimizar: maximizar o minimizar.

Programación lineal: rama de las Matemáticas cuya teoría permite resolver problemas de funciones lineales con varias variables, sujeta a restricciones presentadas en forma de desigualdades lineales.

Punto extremo: vértice de una región factible.

Región factible: conjunto de todos los puntos en el primer cuadrante que satisfacen todas las restricciones del problema de programación lineal. Sinónimo: *conjunto factible.*

Restricciones: desigualdades o igualdades lineales que restringen los valores de las variables para plantear un problema de programación lineal.

Semiplano: una de las regiones en que divide el plano cartesiano el gráfico de una ecuación lineal con dos incógnitas.

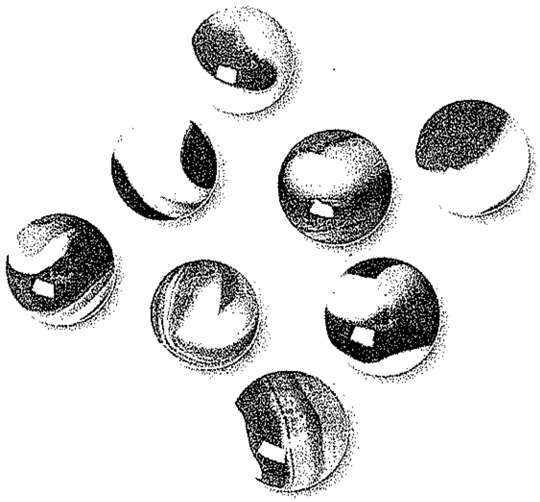
Solución de un sistema de desigualdades: intersección de los conjuntos solución de las desigualdades individuales.

Teorema fundamental de la programación lineal: establece que la función objetivo alcanza su máximo y su mínimo en un punto extremo.

Razonamiento

1. Prueba que la matriz $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ satisface una ecuación de la forma $A^2+\alpha A+\beta I_2=0$. Determina los coeficientes α y β, y utiliza esto para probar que la matriz A es invertible, y para hallar A^{-1}.

2. Una matriz se llama idempotente si $A^2 = A$. Prueba que si una matriz idempotente e invertible entonces es la matriz identidad.



3. Considera el grafo de la figura 7.33.

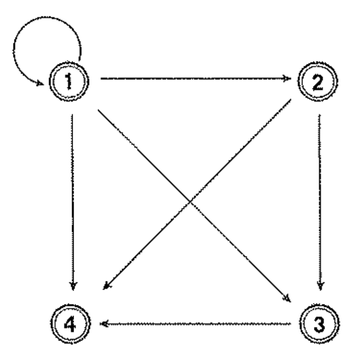


Figura 7.33

a. Encuentra la matriz de adyacencia, A, del grafo.

b. Halla A^2 y traza el grafo asociado a esta matriz.

> Probabilidad

Estándares:

Conexiones
Relacionar conceptos
Utilizar la función de probabilidad para resolver problemas de distintas áreas.

Comunicación
Leer, escribir y comunicar
Explicar la condición de independencia y dependencia entre eventos.

Sebastián y Carolina fueron de paseo a un circo. Sebastián se inscribió a un concurso, participó y se encuentra como finalista. En esta etapa del concurso el finalista debe elegir una puerta de entre tres. Las puertas están cerradas y sólo el presentador del concurso conoce los premios que esconden. Detrás de una de ellas se encuentra como regalo "Cinco días, cuatro noches en un hotel cinco estrellas en Santa Marta, todo incluido", mientras que cada una de las otras dos ocultará un cerdo. Una vez que Sebastián elija la puerta, el presentador abrirá una de las dos puertas que no han sido elegidas. La puerta que el presentador abre siempre esconderá un cerdo, y en ese momento el presentador le preguntará al participante: ¿Desea mantener su elección inicial o prefiere cambiar de puerta?

Por su parte, Carolina participa en el siguiente juego: en un tablero hay seis cuadrados numerados 1, 2, 3, 4, 5, 6. Cada uno de los seis jugadores que participa coloca tanto dinero como desee, en cualquiera de estos cuadrados. Se arrojan entonces tres dados. Si el número que el jugador ha elegido para colocar su dinero aparece en un solo dado, entonces él o ella recupera el dinero de la apuesta más una cantidad igual. Si el número elegido aparece en dos de los dados, recupera el dinero apostado más dos veces esa misma cantidad. Si el número aparece en tres dados, el jugador que apostó a ese número recupera el dinero más tres veces la misma cantidad. Pero si el número no aparece en ninguno de los dados, el que maneja este juego se queda con el dinero puesto en el cuadrado.

¿Cuáles son las posibilidades que tiene Carolina y Sebastián?

Analiza y resuelve

De acuerdo con la lectura anterior, responde.

1. Del concurso de Sebastián puede afirmarse que:
   a. Si decide cambiar de puerta, la probabilidad que gane es mayor.
   b. Si decide cambiar la puerta, la probabilidad que gane es igual que si decidiera mantener la puerta elegida.
   c. Si decide mantenerse en la puerta elegida, seguramente ganará.
   d. Si decide cambiar de puerta, la probabilidad que gane es menor.
2. La decisión que más favorecerá a Sebastián es:
   a. Cambiar de puerta.
   b. Mantenerse en la puerta elegida.
3. Carolina hizo el siguiente razonamiento: "La probabilidad de que mi número aparezca en un dado es de $\frac{1}{6}$, pero como los dados son tres, las probabilidades deben ser de $\frac{3}{6}$ o $\frac{1}{2}$; por tanto, el juego es justo".
   Se puede afirmar entonces que:
   a. El argumento es correcto, porque el juego favorece al jugador.
   b. El argumento es incorrecto, porque el juego favorece al dueño.
   c. El argumento es incorrecto, porque el juego favorece al jugador.
   d. El argumento es correcto, porque no favorece ni al jugador ni al dueño.
4. Si el juego de Carolina no es favorable para el jugador, ¿qué condición o condiciones adicionales se pueden imponer al juego para que sea justo?

Razonamiento lógico
Desarrollar destrezas matemáticas
Justificar argumentos de probabilidades condicionales.

Resolución de problemas
Emplear estrategias en la resolución de problemas
Utilizar las propiedades de la función de probabilidad para determinar la probabilidad de un evento.

Espacios muestrales

Logro: determinar el espacio muestral asociado a un experimento aleatorio.

*Un **modelo matemático** es un esquema teórico, generalmente expresado en forma de relaciones, funciones y/o ecuaciones entre variables que representan las magnitudes más significativas o de interés que se pretenden estudiar del fenómeno o del experimento que se va a realizar. Si en el fenómeno o experimento el resultado se puede predecir con exactitud, entonces **el modelo matemático es determinístico**; si, por el contrario, no es posible predecir con precisión el resultado del fenómeno o experimento, aunque sí se pueda describir el conjunto de resultados posibles, se habla de un **fenómeno al azar o experimento aleatorio** y el modelo matemático por elaborar será de tipo **probabilístico**.*

Observemos en la tabla 8.1 algunos ejemplos de experimentos aleatorios y determinísticos.

Fenómeno o experimento determinístico	Fenómeno o experimento aleatorio
La posición del Sol en la mañana y al mediodía en un lugar específico.	El volumen de agua que caerá un día de invierno.
La distancia recorrida por un objeto en caída libre después de t unidades de tiempo de iniciar su caída.	La cara que saldrá al lanzar un dado.

Tabla 8.1

En el experimento "Lanzar una moneda al aire", se puede predecir que ésta caerá (experimento determinístico), pero no es posible predecir con exactitud el lado de la moneda que quedará hacia arriba (experimento aleatorio).

Ejemplo 1

Otros ejemplos de experimentos determinísticos son:

1. Soltar una esfera desde determinada altura y observar la dirección de su movimiento, el resultado será siempre la dirección de la vertical.
2. Conectar 1 voltio a las terminales de una resistencia de 1 ohmio, se establecerá una corriente por ella, que será siempre igual a 1 amperio.
3. Agregar agua (H_2O) al óxido nítrico (N_2O_5), se obtendrá ácido nítrico (HNO_3).

Si las condiciones según las cuales se realiza el experimento no permiten que se sepa con anterioridad el resultado que se va a obtener, aunque sí podamos describir un conjunto de resultados cada uno de los cuales tiene una posibilidad bien definida de salir, diremos que se trata de un **experimento aleatorio**.

Ejemplo 2

Son ejemplos de experimentos aleatorios:

1. Lanzar un par de dados sobre una mesa y determinar la suma de los puntos de las caras que quedarán hacia arriba.
2. Determinar el número de individuos, de un grupo de 100, que sufrirá de gripe antes de que se acabe el año.
3. Determinar el número de automóviles que en un día saldrán de la ciudad.

4. En un centro de servicios de urgencias médicas determinar la duración de una llamada telefónica, elegida al azar, que recibirá la recepción.

5. El tiempo de vida de un ser humano recién nacido.

Se llama ***espacio muestral*** *al conjunto de todos los resultados posibles de un experimento o fenómeno aleatorio. Se suele simbolizar con la letra* **E**.

Ejemplo 3

Hallemos el espacio muestral para los experimentos del ejemplo 2.

Solución

1. **E** = {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}
2. **E** = {0, 1, 2, 3, 4,..., 100}
3. **E** = {0, 1, 2, 3,..., *M*}, donde *M* es el número máximo posible de vehículos que podrán salir de la ciudad un día.
4. **E** = [0, *M*], donde *M* es el máximo de minutos que podrá durar una llamada en la recepción de este centro médico.
5. **E** = [0, *M*], donde *M* es el número máximo de años que un ser humano podrá vivir.

Los subconjuntos de un espacio muestral **E** *se llaman* ***eventos o sucesos***. *E se llama evento seguro y* $\varnothing$ *evento imposible.*

Comentario

Un dado legal es uno en forma de cubo con sus caras numeradas del 1 al 6, elaborado con material cuya masa está uniformemente distribuida en todo el volumen, es decir, de densidad constante.

Ejemplo 4

Hallemos un evento seguro y un evento imposible del experimento "lanzar un dado y observar el número obtenido en la cara que queda arriba".

Solución

El espacio muestral del experimento es **E** = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. El evento "que en la cara de arriba aparezca cualquiera de los números naturales del 1 al 6" es el evento seguro *E*, mientras que el evento "que en la cara superior aparezca el número racional $\frac{3}{4}$", es el evento imposible $\varnothing$ (si el dado utilizado es un dado legal y convencional).

Como los eventos son subconjuntos del espacio referencial (muestral) **E**, éstos se pueden combinar mediante las operaciones de conjuntos: uniones, intersecciones, diferencias y complementos.

En un experimento aleatorio la ocurrencia de por lo menos uno de dos eventos A y B da lugar a un nuevo evento llamado la ***unión*** *de A y B:* $\mathbf{A \cup B}$.

Ejemplo 5

Dado el experimento "lanzar un dado legal" la ocurrencia de alguno de los eventos *A*: "salir un número par", *B*: "salir un número primo", hallemos el evento $A \cup B$.

Solución

$A = \{2, 4, 6\}$ Hallamos las posibilidades del evento A.

$B = \{2, 3, 5\}$ Hallamos las posibilidades del evento B.

$A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ Calculamos $A \cup B$. ◄

*La **ocurrencia simultánea** de dos eventos A y B es el **evento intersección** de A y B:* $\mathbf{A \cap B}$.

Ejemplo 6

Dados los eventos A:"obtener dos números primos" y B: "la suma de los resultados es igual a 7" del experimento "lanzar un dado legal dos veces consecutivamente", calculemos $A \cap B$.

Solución

$A = \{(2, 2), (2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 3), (3, 5), (5, 2), (5, 3), (5, 5)\}$ Hallamos las posibilidades del evento A.

$B = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$ Hallamos las posibilidades del evento B.

$A \cap B = \{(2, 5), (5, 2)\}$ Calculamos la ocurrencia simultánea de A y B. ◄

*Si los eventos A y B no pueden ocurrir simultáneamente se dice que son **incompatibles**, y se representan mediante la igualdad* $\mathbf{A \cap B = \varnothing}$.

Comentario

Un conjunto de eventos A_1, A_2, ..., A_m es incompatible dos a dos, si cada vez que seleccionamos dos eventos distintos éstos son incompatibles.

Los eventos A:"aparezca un número par al lanzar un dado legal" y B:"aparezca un número impar al lanzar un dado legal" son incompatibles.

Si A y B son eventos en el espacio muestral **E**, *entonces el evento "ocurre A pero no ocurre B" se denota por* **A – B** *y se denomina **evento diferencia** de A con B.*

Ejemplo 7

Hallemos el espacio muestral del evento "sale un número primo pero no es impar" del experimento "lanzar un dado legal".

Solución

De los eventos A: "sale un número primo" y B: "sale un número impar" tenemos:

$A = \{2, 3, 5\}$ Hallamos las posibilidades del evento A.

$B = \{1, 3, 5\}$ Hallamos las posibilidades del evento B.

$A - B = \{2\}$ Calculamos $A - B$. ◄

*La **no ocurrencia del evento** A es el **evento complemento** de A, se denota A^c, y está definido por* $A^c = \{x \in E : x \notin A\}$.

Ejemplo 8

Del experimento "sacar al azar un par de libros de un anaquel", en el cual hay uno de cada una de las siguientes áreas del conocimiento: Aritmética (T), Álgebra (G), Biología (B), Cálculo (C), Español ($Ñ$), Filosofía (F), Física (S), Química (Q) e Historia (H), determinemos la no ocurrencia del evento "sacar un libro de Matemática o un libro de Física".

Solución

Calculamos el espacio muestral del experimento:

E = {(*T*, *G*), (*T*, *B*), (*T*, *C*), (*T*, *Ñ*), (*T*, *F*), (*T*, *S*), (*T*, *Q*), (*T*, *H*), (*G*, *B*), (*G*, *C*), (*G*, *Ñ*), (*G*, *F*), (*G*, *S*), (*G*, *Q*), (*G*, *H*), (*B*, *C*), (*B*, *Ñ*), (*B*, *F*), (*B*, *S*), (*B*, *Q*), (*B*, *H*), (*C*, *Ñ*), (*C*, *F*), (*C*, *S*), (*C*, *Q*), (*C*, *H*), (*Ñ*, *F*), (*Ñ*, *S*), (*Ñ*, *Q*), (*Ñ*, *H*), (*F*, *S*), (*F*, *Q*), (*F*, *H*), (*S*, *Q*), (*S*, *H*), (*Q*, *H*)}

Denotemos con *A* = "sacar un libro de Matemática o un libro de Física" y hallemos las posibilidades de dicho evento:

A = {(*T*, *G*), (*T*, *B*), (*T*, *C*), (*T*, *Ñ*), (*T*, *F*), (*T*, *S*), (*T*, *Q*), (*T*, *H*), (*G*, *B*), (*G*, *C*), (*G*, *Ñ*), (*G*, *F*), (*G*, *S*), (*G*, *Q*), (*G*, *H*), (*B*, *C*), (*B*, *S*), (*C*, *Ñ*), (*C*, *F*), (*C*, *S*), (*C*, *Q*), (*C*, *H*), (*Ñ*, *S*), (*F*, *S*), (*S*, *Q*), (*S*, *H*)}

Calculamos A^c = {(*B*, *Ñ*), (*B*, *F*), (*B*, *Q*), (*B*, *H*), (*Ñ*, *F*), (*Ñ*, *Q*), (*Ñ*, *H*), (*F*, *Q*), (*F*, *H*), (*Q*, *H*)}. ◀

> Piensa y practica <

> Comunicación

1. Clasifica los experimentos o fenómenos dados en probabilísticos y determinísticos:

a. El volumen de agua que cae durante un día de lluvia en Quibdó.

b. El ácido sulfuroso H_2SO_3 es un ácido mineral (no un ácido orgánico), que se forma cuando el dióxido de azufre se disuelve en agua ($SO_2 + H_2O \rightarrow H_2SO_3$).

c. El tiempo que durará el motor de un automóvil hasta su primera reparación.

d. El número de aves que migran del Hemisferio Norte al Hemisferio Sur.

e. El área de un triángulo rectángulo de base de longitud igual al doble de la altura.

f. El nitrato amónico o nitrato de amonio es una sal formada por iones de nitrato y de amonio, se obtiene por neutralización de ácido nítrico con amoníaco tras la evaporación del agua: $NH_3 + HNO_3 \rightarrow NH_4NO_3$.

g. Una parte de la producción de nitrato amónico se dedica a la producción del óxido nitroso (N_2O) mediante la termólisis controlada: $NH_4NO_3 \rightarrow 2H_2O + N_2O$.

h. El número de clientes que ingresa en un almacén un día sábado.

i. El número de diagonales que tiene un polígono regular de *n* lados.

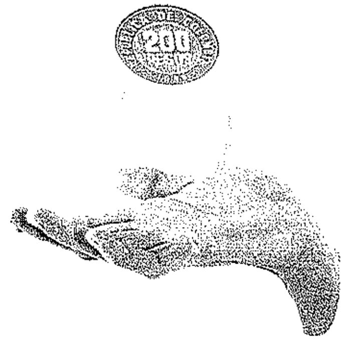
j. El día de la semana de mi próximo cumpleaños.

k. El número de una lotería, del premio mayor, que caerá en el próximo sorteo.

l. El número total de goles que marcará mi equipo favorito en el torneo local de este año.

2. Halla el espacio muestral en cada experimento aleatorio.

a. Lanzar al aire una moneda legal.



b. Lanzar un dado legal una vez, si sale un número par entonces lanzamos una moneda legal; si sale un número impar entonces se lanza el dado de nuevo.

c. Los estados de la naturaleza respecto del clima en una ciudad son: *N* = "nublado", *L* = "lluvioso", *S* = "soleado", *B* = "llovizna". El fenómeno aleatorio corresponde a observar el estado climatológico de la naturaleza en la ciudad dos días consecutivos.

d. En una caja hay 12 mandarinas y 3 están dañadas. Experimento: "extraer tres mandarinas y ver cuántas son buenas".

e. Una mujer portadora de hemofilia tiene 3 hijos. Experimento: "determinar los hijos que heredan o no heredan la enfermedad".

f. El experimento consiste en seleccionar dos componentes de un lote de producción y clasificarlos según si cumplen los requerimientos de calidad (S) o no cumplen los requerimientos (N).

g. En un torneo de ajedrez quedan cuatro jugadores para la última ronda, A, B, C y D. El experimento consiste en determinar el campeón y subcampeón del torneo.

h. Se lanza una moneda legal dos veces en forma consecutiva.

> Resolución de problemas

3. En una urna se colocan diez fichas numeradas del 0 al 9 (los números dígitos). Halla cada uno de los siguientes sucesos.

a. A = "obtener un múltiplo de 3".

b. B = "obtener un número impar".

c. C = "obtener un número par".

d. D = "obtener un número primo".

e. E = "obtener un número divisible entre 4".

f. $D - C$

g. $A \cup B$

h. $D \cap E$

i. A^c

j. $A^c \cap E$

k. $B \cup D$

> Conexiones

4. Un experimento tiene cinco posibles resultados: P, Q, R, S y T.

a. Describe el espacio muestral **E**.

b. ¿Cuántos eventos sin ningún elemento del espacio muestral se pueden formar?

c. ¿Cuántos eventos con un solo elemento del espacio muestral se pueden formar?

d. ¿Cuántos eventos con dos elementos del espacio muestral se pueden formar?

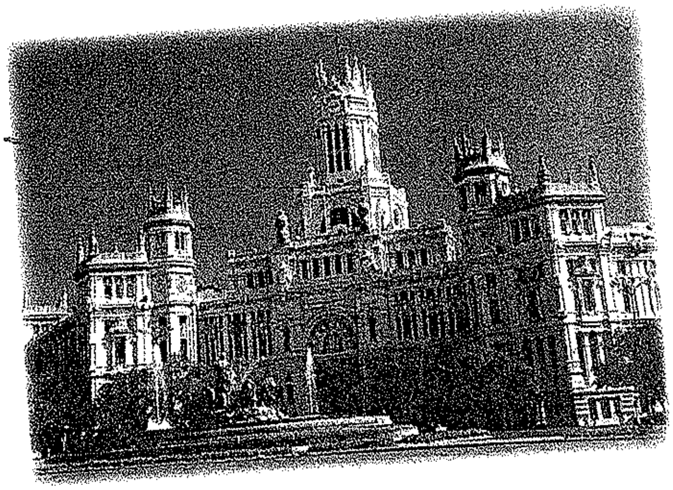
e. ¿Cuántos eventos con tres elementos del espacio muestral se pueden formar?

f. ¿Cuántos eventos con cuatro elementos del espacio muestral se pueden formar?

g. ¿Cuántos eventos con cinco elementos del espacio muestral se pueden formar?

h. ¿Cuántos eventos en total se pueden formar en el espacio muestral **E**?

5. Para viajar a Madrid, la capital de España, desde Bogotá es obligatorio pasar por Santo Domingo, y antes el avión puede pasar por Panamá, Caracas, San Juan, La Habana o Miami. Halla todas las rutas posibles con dos paradas antes de aterrizar en Madrid.



> Razonamiento lógico

6. A una reunión asisten 20 personas. Si cada asistente saluda de mano una vez a cada uno del resto de asistentes, ¿cuántos saludos de mano en total se dan en la reunión?

7. Una empresa de transporte público intermunicipal tiene rutas entre doce ciudades. ¿Cuántas clases de tiquetes disponibles tendrá esta empresa?

8. En un plano hay 5 puntos no colineales.

a. ¿Cuántas líneas rectas se pueden trazar?

b. ¿Cuántos triángulos se pueden trazar?

c. ¿Cuántos cuadriláteros se pueden trazar?

Principios fundamentales de conteo, combinaciones y permutaciones

Logro: utilizar los principios de adición y multiplicación de una sucesión finita de eventos, para hallar el número total de resultados posibles que se puedan presentar en un suceso aleatorio.

Muchos problemas se pueden resolver contando la ocurrencia de ciertos eventos simples. En esta lección estudiaremos los principios de conteo de adición y multiplicación, que nos ayudarán a resolver problemas que involucran eventos compuestos.

Una familia está planeando sus vacaciones. Las opciones que tienen son:

- A clima frío: Parque de los Nevados, nevado del Cocuy, sierra Nevada de Santa Marta.
- A clima caliente: Santa Marta, San Andrés, Capurganá, Cali, Cabo de la Vela, Leticia.

Como solamente van a elegir un sitio entonces pueden elegir entre 3 lugares para clima frío y 6 lugares para clima caliente, en total tienen $3 + 6 = 9$ lugares para ir de vacaciones.

Principio de adición

Si dos tareas no pueden realizarse simultáneamente y, además, la primera puede realizarse en m formas distintas, mientras que la segunda se realiza en n formas distintas, entonces la cantidad total de formas distintas para realizar dichas tareas es de $m + n$.

Ejemplo 9

En un grupo hay 6 hombres y 8 mujeres. ¿De cuántas maneras se puede escoger una persona del grupo?

Solución

La persona seleccionada es hombre o es mujer, un hombre se puede elegir de 6 maneras distintas y una mujer se puede elegir de 8 maneras distintas, luego, en total de este grupo se puede seleccionar una persona de $6 + 8 = 14$ formas distintas. ◁

Ejemplo 10

Se lanza una moneda cuatro veces. ¿De cuántas maneras distintas se puede obtener 2, 3 o 4 caras?

Comentario

En todos los ejercicios y situaciones propuestas con dados o monedas, supondremos que estos son legales.

Solución

En el espacio muestral **E** del resultado de los cuatro lanzamientos, consideramos los eventos:

A_1:"aparecen 2 caras" = $\{(C, C, S, S), (C, S, C, S), (S, C, C, S), (S, C, S, C), (S, S, C, C), (C, S, S, C)\}$

A_2: "aparecen 3 caras" = $\{(C, C, C, S), (C, C, S, C), (C, S, C, C), (S, C, C, C)\}$

A_3: "aparecen 4 caras" = $\{(C, C, C, C)\}$

Entonces el evento "aparecen 2, 3 o 4 caras" corresponde a $A_1 \cup A_2 \cup A_3$. Puesto que A_1, A_2, A_3 son eventos incompatibles dos a dos, es decir, A_1 y A_2, A_1 y A_3, A_2 y A_3 son eventos incompatibles, la cantidad de elementos del espacio muestral de $(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$ es igual a la cantidad de elementos del espacio muestral de A_1, más la cantidad de elementos del espacio muestral A_2, más la cantidad de elementos del espacio muestral A_3, esto es, $6 + 4 + 1 = 11$. ◁

Principio general de adición

Si en un espacio muestral se tienen m eventos incompatibles dos a dos: $A_1, A_2, \ldots, A_m$, tales que A_1 puede ocurrir de n_1 formas diferentes, A_2 puede ocurrir de n_2 formas diferentes, ..., A_m puede ocurrir de n_m formas diferentes, entonces la ocurrencia de un evento, que puede estar en uno de estos m eventos, es igual a $n_1 + n_2 + \ldots + n_m$ formas distintas.

Ejemplo 11

En una heladería los helados se venden en cono y en vaso, y cada uno viene sólo de los siguientes sabores: Chocolate, Pistacho, Vainilla. Hallemos todas las posibles combinaciones de helados.

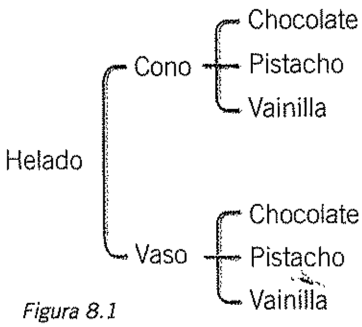


Figura 8.1

Solución

El diagrama de la figura 8.1 se denomina diagrama de árbol y muestra todas las posibilidades de las combinaciones de helado. De este diagrama tenemos que la heladería ofrece 6 combinaciones de helados. ◁

Para determinar la cantidad total de resultados de un evento se multiplica la cantidad de posibilidades de la primera característica por la cantidad de posibilidades de la segunda característica; si hay más de dos características, se siguen multiplicando las posibilidades de cada característica para determinar el total de resultados. En el ejemplo 11, se multiplica 3 por 2 para obtener 6 posibles resultados.

Principio de multiplicación

Si un procedimiento se divide en m etapas (o características) y hay n_1 posibles resultados para la primera etapa, n_2 posibles resultados para la segunda etapa, ..., n_m posibles resultados para la última, entonces el procedimiento completo puede efectuarse en el orden designado en $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_m$ formas diferentes.

Los diagramas de árbol ayudan a visualizar el conteo en los casos donde hay pocas características para tener en cuenta; sin embargo, cuando esto no es así, es decir, cuando la organización de datos es compleja, se recurre a dos tipos de organizaciones de datos: permutaciones y combinaciones.

Ejemplo 12

Ordenemos de todas las formas posibles las letras A, D, N.

Solución

ADN, AND, DAN, DNA, NAD, NDA.

Observemos que esta situación equivale a formar todos los números posibles de tres cifras con tres dígitos 2, 3 y 5: 235, 253, 325, 352, 523, 532. En total hay 6 casos. ◁

Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son n objetos distintos, una ***permutación*** *de estos n objetos es un reordenamiento de ellos. En total hay $n! = n \times (n-1) \times \ldots \times 2 \times 1$ permutaciones distintas de los n objetos. Diremos que es una permutación de orden n.*

El coeficiente binomial $\binom{n}{k}$ proporciona el ***número de subconjuntos de*** *k elementos, que se pueden formar de un conjunto de n elementos.*

Comentario

El número natural $n!$ se llama factorial de n y está definido por $0! = 1$, y $n! = n \times (n-1) \times \ldots \times 2 \times 1$, para $n \geq 1$. El coeficiente binomial n, k con $k \leq n$ está definido por $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Ejemplo 13

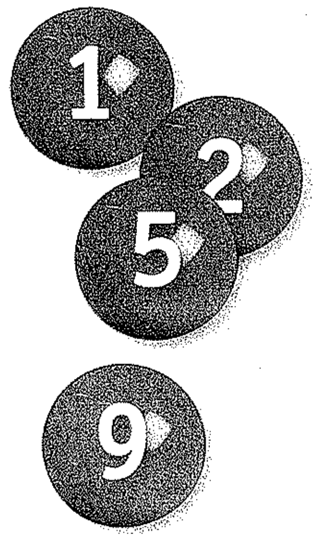
En una caja hay nueve balotas numeradas del 1 al 9, iguales en color y forma (todas son rojas esféricas del mismo radio y hechas del mismo material).

Determinemos el número de posibilidades de obtener, al azar, cuatro números de una cifra, realizando el siguiente experimento: extraer cuatro bolas, teniendo en cuenta las siguientes condiciones:

a. Los cuatro números se obtienen extrayendo las cuatro bolas al mismo tiempo.

b. Los cuatro números se obtienen extrayendo cada bola una vez, sin regresarla a la caja.

c. Los cuatro números se obtienen extrayendo cada bola una vez, y regresándola a la caja.



Solución

a. En este caso, no es importante el orden de los cuatro números por cuanto todos se sacan al mismo tiempo. Entonces el número de posibilidades de sacar cuatro números sin orden de un conjunto de nueve números es:

$$\binom{9}{4} = \frac{9!}{4!(9-4)!} = \frac{9!}{4!(5)!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times \cancel{5!}}{4!\cancel{5!}} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 126 .$$

b. Aplicamos el siguiente algoritmo para determinar el número de posibilidades:

Paso 1. Sacamos una balota, hay 9 posibilidades de elegir una balota.

Paso 2. Sacamos la segunda balota, hay 8 posibilidades de elegir una balota, porque la anterior extraída no se regresó a la caja.

Paso 3. Sacamos la tercera balota, hay 7 posibilidades de elegir una balota.

Paso 4. Sacamos la cuarta balota, hay 6 posibilidades de elegir una balota. Ahora, utilizamos el principio fundamental de multiplicación, y obtenemos el número de posibilidades: $9 \times 8 \times 7 \times 6 = 3024$ $\left(\text{este número coincide con } \frac{9!}{(9-4)!} = \frac{9!}{5!}\right)$.

c. Aplicamos el siguiente algoritmo para determinar el número de posibilidades:

Paso 1. Sacamos una balota, hay 9 posibilidades de elegir una balota.

Paso 2. Sacamos la segunda balota, hay 9 posibilidades de elegir una balota, porque la anterior extraída se regresó a la caja.

Paso 3. Sacamos la tercera balota, hay 9 posibilidades de elegir una balota.

Paso 4. Sacamos la cuarta balota, hay 9 posibilidades de elegir una balota.

Luego, por el principio fundamental de multiplicación, el número de posibilidades es: $9 \times 9 \times 9 \times 9 = 9^4 = 6561$.

Comentario

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},$$
para $n \geq k$.

Las ***variaciones sin repetición*** *de n elementos tomados de k en k se definen como las distintas agrupaciones formadas con k elementos distintos, elegidos de entre los n elementos de los que disponemos. Una variación es distinta a otra si difieren en algún elemento o si teniendo los mismos elementos éstos se sitúan en distinto orden.*

El número de variaciones que se pueden construir se calcula mediante la fórmula $p_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$, *donde la p recuerda que estas variaciones son permutaciones de orden k.*

El literal (b) del ejemplo 13 corresponde a una variación de 9 objetos (los números de todas las balotas) en grupos ordenados de tamaño 4 (las balotas extraídas).

*Las **variaciones con repetición** de n elementos tomados de k en k se definen como las distintas agrupaciones formadas con k elementos que pueden repetirse, elegidos de entre los n elementos de que disponemos.*

El número de variaciones que se pueden construir se calcula mediante la fórmula: $(pr)_{n,k} = n^k$; pr resalta que se trata de permutaciones con repetición, de orden k.

El literal (c) del ejemplo 13 corresponde a una variación con repetición de 9 objetos (las 9 balotas en la caja) en grupos ordenados de tamaño 4 (las bolas extraídas).

Si un conjunto de n objetos está dividido en m grupos, cada grupo con idénticos objetos, el grupo 1 con n_1 objetos, grupo 2 con n_2 objetos, etcétera, y el grupo m con n_m objetos (de manera que $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_m$), entonces el número de maneras distintas en que los n objetos pueden organizarse es $p_{n;\,n_1,\,n_2,\,\ldots,\,n_m} = \dfrac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_m!}$.

Ejemplo 14

¿De cuántas maneras se pueden permutar las letras de la palabra CATARATA?

Solución

Escribimos subíndices a las letras repetidas en esta palabra: $CA_1T_1A_2RA_3T_2A_4$.

Ahora existen 8 objetos distinguidos y por tanto hay 8! = 40 320.

Puesto que algunas permutaciones son iguales, por ejemplo: $CA_1T_1A_2RA_3T_2A_4$, $CA_2T_1A_1RA_3T_2A_4$, $CA_1T_2A_2RA_3T_1A_4$, entre otras, es necesario determinar qué permutaciones son iguales para contar solamente una. Para ello realizamos el siguiente análisis.

Para cada una de las 8! permutaciones, $A_1A_2A_3A_4$ puede permutarse en 4! formas y T_1T_2 puede permutarse en 2! formas, R da lugar solamente a 1! permutación, C da lugar solamente a 1! permutación; entonces, el valor calculado en exceso por 8! se corrige de la siguiente manera para encontrar el valor correcto: $\dfrac{8!}{4!2!1!1!} = 840$.

La figura 8.2 resume las diferentes posibilidades de ordenamiento de un conjunto de *n* elementos en subconjuntos de *k* elementos.

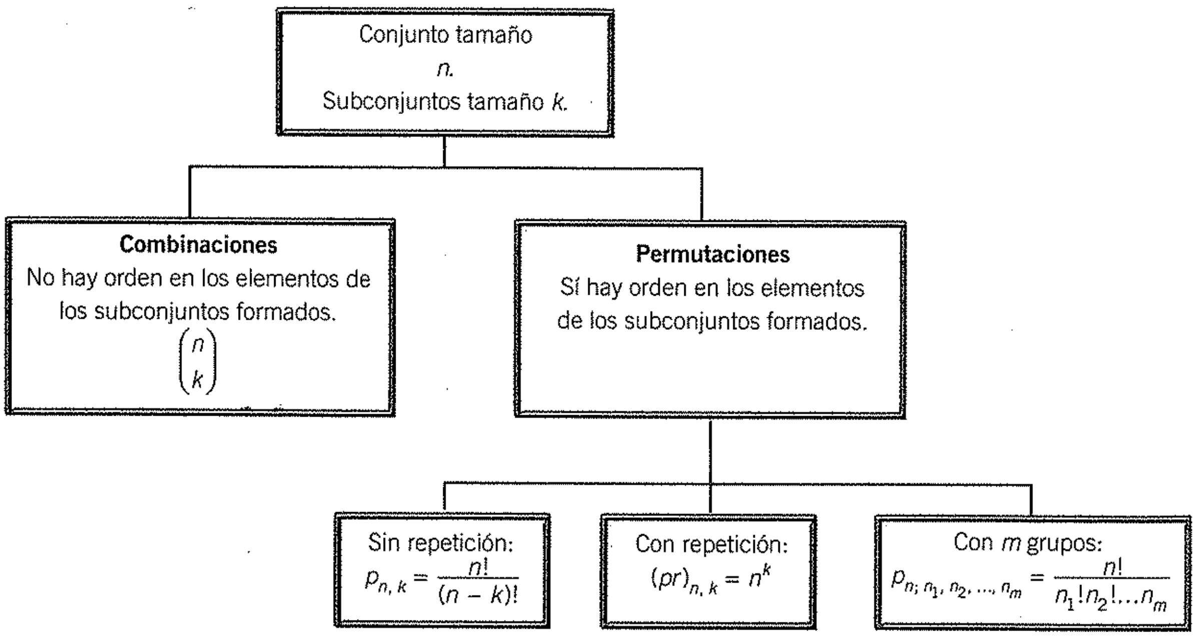


Figura 8.2

> Piensa y practica <

> Comunicación

1. En una competencia de natación, estilo mariposa, en la final quedan 8 participantes. ¿De cuántas formas pueden repartirse las tres medallas: oro, plata y bronce?

a. ¿Influye el orden de llegada de los participantes?

b. ¿Se pueden repetir los participantes?

2. En la primera ronda de un campeonato de ajedrez cada participante debe jugar contra todos los demás una sola partida. Si participan 36 jugadores, ¿cuántas partidas se disputarán?

a. ¿Influye el orden en que juega cada participante?

b. ¿Se pueden repetir los participantes?

3. Se quieren ubicar 10 libros en un estante: 4 son de Física, 3 son de Matemáticas, 2 de Química y 1 de Filosofía (los de una misma materia son iguales). ¿De cuántas formas puedes disponerlos en el estante? (Recuerda que cada elemento se tiene que repetir tantas veces como elementos se disponen igual que él: 4 de Física $(a = 4)$, 3 de Matemáticas $(b = 3)$, 2 de Química $(c = 2)$ y 1 de Filosofía $(d = 1)$).

4. Utilizando letras sin repetir de la palabra AURELIANO.

a. ¿Cuántas palabras de 6 letras (con sentido o sin éste) puedes formar?

b. ¿Cuántas palabras de 6 letras comienzan con R?

c. ¿Cuántas palabras de 6 letras comienzan con R y terminan con N?

d. ¿En cuántas palabras de 6 letras aparecen la L y la I juntas?

e. ¿En cuántas palabras de 6 letras la A, R y O aparecen juntas?

f. ¿Cuántas palabras de 6 letras empiezan por vocal?

5. Se quiere realizar una actividad con 40 estudiantes, para lo cual se aplica una encuesta a 10 estudiantes elegidos al azar.

a. ¿Importan el orden en que se seleccionen los 10 estudiantes para encuestar?

b. ¿Se pueden repetir los estudiantes para encuestar?

c. ¿Cuántos grupos distintos de tamaño 10 se pueden formar, para aplicar la encuesta?

> Resolución de problemas

6. Tienes un conjunto E con 10 elementos.

a. ¿Cuántos subconjuntos de cero elementos puedes formar?

b. ¿Cuántos subconjuntos de un elemento puedes formar?

c. ¿Cuántos subconjuntos de dos elementos puedes formar?

d. ¿Cuántos subconjuntos de tres elementos puedes formar?

e. ¿Cuántos subconjuntos tiene el conjunto E?

7. Un estudiante que presentó un examen respondió 7 de las 10 preguntas. ¿De cuántas formas pudo responder el examen?

8. Una editorial va a publicar diccionarios de traducción de un idioma a otro. Si para su publicación considera los idiomas alemán, chino, español, francés, inglés, italiano, japonés, portugués, ruso, ¿cuántos tipos de diccionarios deberá publicar?

9. Cien egresados de la carrera de Filosofía de una universidad tienen una reunión. Cada uno saluda a los demás una vez. ¿Cuántos saludos entre egresados se dieron en la reunión?

10. Tienes 20 números enteros consecutivos.

a. ¿De cuántas maneras puedes seleccionar tres, de modo que su suma sea un número impar?

b. ¿De cuántas maneras puedes seleccionar tres, de modo que su suma sea un número par?

11. Tienes n puntos en un plano $(n \geq 3)$; ningún trío de los cuales es colineal.

a. ¿Cuántas líneas rectas puedes formar?

b. ¿Cuántas líneas rectas puedes formar, que pasen por un punto dado?

c. ¿Cuántos triángulos puedes formar?

d. ¿Cuántos triángulos puedes formar, que tengan un punto dado como vértice?

12. Con 4 hombres y 8 mujeres se va a formar una comisión de 3 personas.

a. ¿De cuántas maneras se puede formar la comisión?

b. ¿De cuántas maneras se puede formar la comisión sí 2 de sus miembros deben ser hombres?

c. ¿De cuántas maneras se puede formar la comisión tal que al menos 2 de sus miembros sean mujeres?

13. Con los dígitos 0, 3, 4, 5, 8 y 9:

a. ¿Cuántos números de 4 cifras, sin repetir, puedes formar?

b. ¿Cuántos números de 5 cifras, sin repetir, puedes formar?

c. ¿Cuántos números de 4 cifras, sin repetir, son múltiplos de 5?

d. ¿Cuántos números de 4 cifras son mayores que 5000?

e. ¿Cuántos números de 5 cifras, sin repetir, son múltiplos de 3?

14. Una enciclopedia consta de 10 tomos numerados de I a X, en numeración romana. ¿De cuántas maneras puedes ubicarlos en el estante de una biblioteca desordenadamente?

15. En un país los vehículos se matriculan con tres letras y tres dígitos, en ese orden; por ejemplo BOL868. ¿Cuántos vehículos pueden matricularse en ese país?

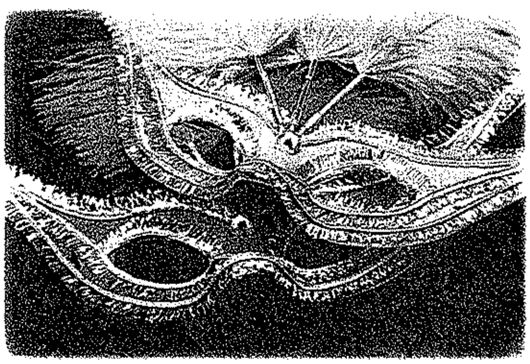
16. Andrés, Ana, Nicolás, María y Diana asisten a una obra de teatro.

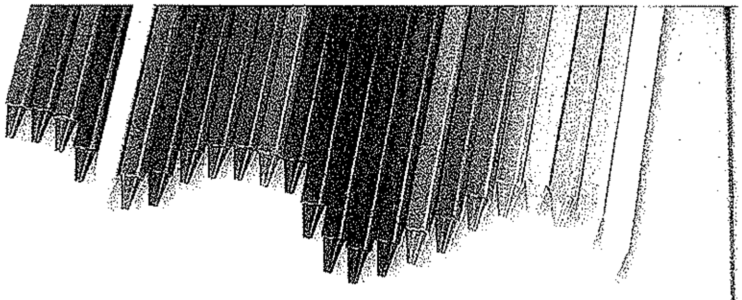
a. ¿De cuántas maneras se pueden ubicar en la fila de ingreso al teatro?

b. ¿De cuántas maneras se pueden sentar en una misma fila del teatro, si en los extremos quedan los hombres?

c. ¿De cuántas maneras se pueden sentar en una misma fila del teatro, si Andrés y Diana se hacen juntos?

d. ¿De cuántas maneras se pueden sentar en una misma fila del teatro, si Ana y María no se hacen juntas?





17. En una fábrica los productos se codifican con tres letras distintas que indican tres procesos que se aplican a cada uno de los productos y 4 dígitos distintos (primero las letras y a continuación los números). Las letras utilizadas para codificar son H, T, B y L.

a. ¿Cuántos productos pueden codificarse? ¿Cuántos códigos empiezan con L y terminan con 3?

b. ¿En cuántos códigos los dígitos 1 y 5 aparecen juntos en ese orden?

c. ¿En cuántos códigos aparecen dos números pares y el otro impar?

18. Encuentra el número de palabras que se pueden formar con todas las letras de MARCELINO.

19. Tienes los números 2, 3, 5, 7.

a. ¿Cuántos números de 4 cifras puedes escribir que tengan todos sus dígitos distintos?

b. ¿Cuántos números de 4 cifras puedes escribir?

c. ¿Cuántos números de 4 cifras puedes escribir que tengan en el dígito de las decenas el número 2?

Uso de la tecnología

20. Utiliza las funciones FACT y COMBINAT de Excel para realizar los siguientes cálculos:

a. 23!

b. 69!

c. 78!

d. 900!

e. 100!

f. 10!

g. $\binom{10}{2}$

h. $\binom{20}{20}$

i. $\binom{150}{7}$

j. $\binom{36}{2}$

Lección 3

Pensamiento aleatorio

Concepto de probabilidad

Logro: utilizar la noción de probabilidad para resolver problemas de ocurrencia de un suceso aleatorio, y establecer algunas propiedades importantes de la función de probabilidad asignada a los eventos elementales del espacio muestral.

En el siglo XVII, los juegos de azar eran la principal diversión de la sociedad francesa. Antoine Gombard, caballero De Meré, fue un experto jugador que le planteó a Pascal dos problemas sobre apuestas:

- La apuesta interrumpida: los jugadores *A* y *B* apuestan a cara o sello, lanzando una moneda legal. El jugador que primero llega a cinco puntos gana la apuesta. El juego se interrumpe en un momento en que *A* tiene 4 puntos y *B* tiene 3 puntos. ¿Cómo deben repartir la cantidad apostada para ser justos?

- Apuestas ventajosas: el caballero De Meré sabía que era ventajoso apostar por el resultado de obtener al menos un seis en una serie de 4 lanzamientos de un dado. Entonces De Meré argumentó que debiera ser igualmente ventajoso apostar por el resultado de obtener al menos un doble seis en una serie de 24 lanzamientos con un par de dados. Para ello había razonado "por regla de tres": si en 4 lanzamientos se apuesta por un resultado específico entre 6 posibles, es lo mismo que si en 24 lanzamientos se apuesta por un resultado específico entre 36 posibles, ya que $6:4 = 36:24$ $\left(\frac{6}{4} = \frac{36}{24}\right)$.

> Análisis de la apuesta interrumpida

Si utilizamos el criterio de repartir proporcionalmente lo apostado de acuerdo con los puntos acumulados, tendríamos que repartir lo apostado en la proporción 4 a 3 (4 : 3), es decir, si el monto total apostado es *M*, entonces se divide a *M* en 7 partes iguales de las cuales *A* recibe 4 y *B* recibe 3.

Si utilizamos el criterio de estudiar los posibles finales, suponiendo que hubieran continuado jugando, entonces tendríamos las posibilidades que se muestran en la figura 8.3.

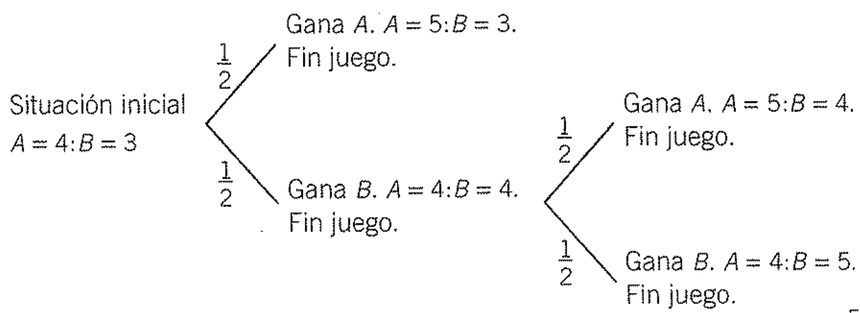


Figura 8.3

Podemos observar que después de un lanzamiento, la mitad de las veces ganaría *A*. Después de dos lanzamientos, la cuarta parte de las veces, $\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$, ganaría *A* y la cuarta parte restante de las veces ganaría *B*.

En conclusión, *A* ganaría tres de cada cuatro veces, $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, y *B* ganaría una vez de cuatro veces, es decir, *A* tendría 3 veces la probabilidad de ganar que la de *B*, por tanto, el reparto más justo es de 3 a 1, a favor de *A*, es decir, dividir el monto total apostado *M* en cuatro partes iguales, *A* recibiría $\frac{3}{4}M$ y *B* recibiría $\frac{1}{4}M$.

Si los resultados de un experimento o fenómeno aleatorio tienen las mismas posibilidades de ocurrir, entonces la ***probabilidad de un evento A*** *en el espacio muestral* **E** *(asociado al experimento) es igual a la razón entre el número de casos favorables que originan el evento A y el número de casos posibles que pueden ocurrir.*

Comentario

Blas Pascal y Pierre de Fermat mantuvieron abundante correspondencia sobre ambos problemas. Las soluciones que entre los dos encontraron sentaron las bases del cálculo de probabilidades y la teoría de juegos.

Ejemplo 15

Se lanza un dado legal 2 veces en forma consecutiva. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un siete, es decir, que la suma de los resultados sea igual a 7?

Solución

Escribimos cada resultado del espacio muestral como una pareja ordenada donde el primer número representa el resultado del primer dado y la segunda componente representa el resultado del segundo dado.

E = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), ..., (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)} Hallamos el espacio muestral.

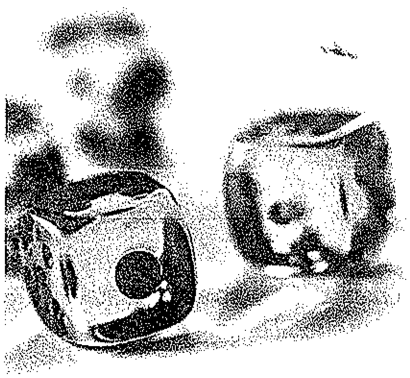
$A = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$ Hallamos el evento que reúne todos los resultados favorables.

$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ Calculamos la probabilidad de obtener un 7. ◅

Ejemplo 16

Resolvamos las dos situaciones de la entrada de unidad.

Solución



Dilema de Carolina

El número de elementos del espacio muestral correspondiente al lanzamiento de los tres dados es: $6 \times 6 \times 6 = 216$.

Supongamos que Carolina entró en el juego y apostó al número 3; entonces, de las 216 maneras igualmente probables en que pueden ser arrojados los dados, ella ganaría en 91 casos (3 aparece una vez en 75 ternas, dos veces en 15 ternas y tres veces en una terna) y perderá en los otros 125. De modo que la probabilidad de ganar lo mismo que se apostó o más es de $\frac{91}{216} \approx 0{,}4213$, y la probabilidad de perder es de $\frac{125}{216} \approx 0{,}5787$. Por tanto, el juego no es favorable para Carolina.

Dilema de Sebastián

En principio parecería que las dos puertas están empatadas en posibilidades y que cada una de ellas dispone de un 50% de acierto y un 50% de fracaso. Pero este planteamiento es erróneo y la respuesta más conveniente para Sebastián sería cambiar de puerta. Veamos por qué.

Al comienzo del juego Sebastián disponía de 3 puertas, y sólo una de ellas escondía el premio, al momento de elegir una tendría $\frac{1}{3}$ de posibilidades de acertar y llevarse el premio, frente a $\frac{2}{3}$ de posibilidades de fallar y ganar un cerdo. Consideremos los siguientes casos posibles:

1. Sebastián, con una probabilidad de $\frac{1}{3}$, acierta en qué puerta se esconde el premio. Entonces el presentador podrá abrir cualquiera de las otras dos puertas, y Sebastián perdería el premio en caso de que decida cambiar de puerta.
2. Sebastián, con una probabilidad de $\frac{2}{3}$ (el doble que la de acertar), falla y elige una puerta que esconde un cerdo. Entonces el presentador tendrá que abrir obligatoriamente la puerta donde se esconde el otro cerdo, así, Sebastián ganaría el premio en caso de cambiar de puerta.

En conclusión, dos de cada tres veces Sebastián obtendría el premio cambiando de puerta frente a una de cada tres que perdiera el premio. ◅

Pensamiento crítico

¿Por qué en el dilema de Carolina, para que el juego sea justo, habría que exigir que los dados mostraran siempre números diferentes?

Sea $\mathbf{E}$ *un espacio muestral. La probabilidad de los sucesos en* $\mathbf{E}$ *es un estimativo de la ocurrencia de estos y satisface los siguientes axiomas:*

P1. Para todo evento A, $0 \leq P(A) \leq 1$

P2. $P(\mathbf{E}) = 1$

P3. Si $A_1, A_2, \ldots, A_m$ *son eventos incompatibles dos a dos, entonces*

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_m).$$

Comentario

P es una función definida así:

$$P: \mathbf{E} \to [0, 1],$$
$$A \to P(A)$$

para $A \subset \mathbf{E}$.

Algunas propiedades de la función de probabilidad P son las siguientes:

1. $P(\varnothing) = 0$
2. Si A es un evento, entonces $P(A^c) = 1 - P(A)$.
3. Si A y B son eventos tales que $A \subseteq B$, entonces $P(A) \leq P(B)$.
4. Si A y B son eventos cualesquiera, entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Ejemplo 17

De un empaque que contiene 12 semillas de rosas rojas y 8 semillas de rosas amarillas, se seleccionan dos semillas aleatoriamente. ¿Cuál es la probabilidad de que:

a. Ambas resulten de rosas rojas?

b. Una resulte de rosas rojas y la otra de rosas amarillas?

Comentario

Por las leyes De Morgan tenemos que:

$$P(A \cup B)^c = P(A^c \cap B^c)$$

y

$$P(A \cap B)^c = P(A^c \cup B^c).$$

Solución

Observemos que en total hay 20 semillas en el empaque, de donde podemos tomar las dos. Como no es importante el orden en que deben aparecer las semillas, entonces seleccionar dos de las 20 corresponde a un caso de combinación, en este ejemplo de 20 objetos tomados de dos en dos. Así, el número total de casos posibles es $\binom{20}{2} = \frac{20!}{2!18!} = 190$. Para los casos favorables tenemos en cuenta la condición impuesta por cada pregunta.

a. Como en el análisis anterior se trata de una combinación de 12 objetos (semillas de rosas rojas) tomados de dos en dos, entonces:

$\binom{12}{2} = \frac{12!}{2!10!} = 66$ — Calculamos el número de combinaciones de 12 objetos tomados de dos en dos.

Sea A el evento "ambas semillas seleccionadas resultan de rosas rojas".

$P(A) = \frac{66}{190} \approx 0{,}3474$ — Calculamos $P(A)$ y aproximamos su valor.

b. $\binom{12}{1} = \frac{12!}{1!11!} = 12$ — Calculamos el número de combinaciones de 12 semillas rojas tomando una.

$\binom{8}{1} = 8$ — Calculamos el número de combinaciones de 8 semillas amarillas tomando una.

Sea B: "se selecciona una semilla roja y una semilla amarilla", los casos favorables para el evento B son $12 \times 8 = 96$.

$P(B) = \frac{96}{190} \approx 0{,}5053$ — Calculamos $P(B)$ y aproximamos su valor.

Pensamiento crítico

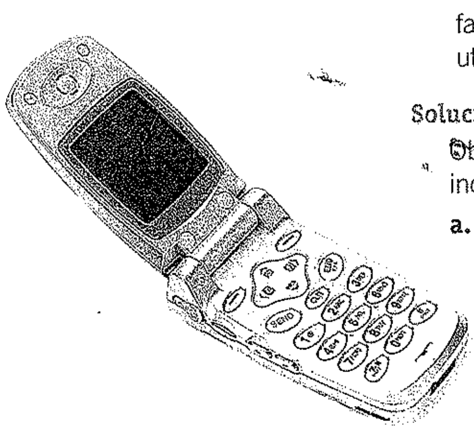
Compara las soluciones a las dos preguntas del ejemplo anterior y explica.

Ejemplo 18

Una compañía de microelectrónica tiene una máquina que produce componentes para utilizar en los teléfonos celulares. En cualquier instante la máquina puede estar en uno de los tres estados siguientes: funcionando óptimamente (F), dañada (A) y funcionando a bajo rendimiento (M). De la experiencia con este tipo de máquinas, el ingeniero de control de calidad sabe que la probabilidad de que la máquina esté dañada es 0,03 y de que esté funcionando a bajo rendimiento es 0,045.

a. Cuando la máquina está funcionando a bajo rendimiento o está dañada, debe contratarse un técnico para su reparación. ¿Cuál es la probabilidad de traer un técnico en cualquier instante?

b. A menos que la máquina esté dañada, esta puede utilizarse para producir cinco componentes por unidad de tiempo a bajo rendimiento y diez componentes por unidad de tiempo a rendimiento óptimo. ¿Cuál es la probabilidad de que puedan fabricarse componentes? ¿Cuál es la probabilidad de que ahora la máquina deba utilizarse para producir sólo cinco componentes?



Solución

Observemos que del enunciado del problema los tres estados, F, A y M, son eventos incompatibles dos a dos.

a. Sea J: "traer un técnico", entonces $J = A \cup M$:

$P(J) = P(A \cup M) = P(A) + P(M) - P(A \cap M)$ Utilizamos la propiedad $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

$P(J) = P(A \cup M) = P(A) + P(M) - 0$ Utilizamos el hecho de que A y M son incompatibles.

$P(J) = 0{,}03 + 0{,}045 = 0{,}075$ Reemplazamos los valores conocidos.

b. Sea F: "producir componentes", puesto que se producen componentes solamente si la máquina no está dañada y A: " la máquina esté dañada", A^c: "la máquina no esté dañada" tenemos:

$F = A^c$:

$P(F) = P(A^c) = 1 - P(A)$ Utilizamos la propiedad $P(A^c) = 1 - P(A)$.

$P(F) = 1 - 0{,}03 = 0{,}97$ Remplazamos los valores conocidos.

Por otra parte, sea G: "producir sólo cinco componentes", puesto que la máquina produce 5 componentes a bajo rendimiento tenemos que: $P(G) = P(M) = 0{,}045$. ◁

Ejemplo 19

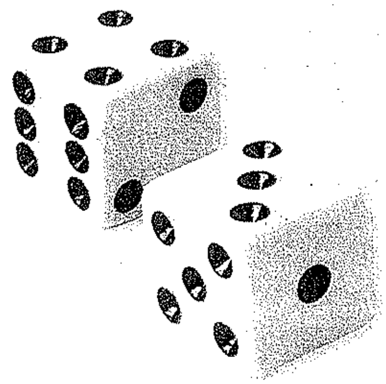
Un cubo cuyas caras han sido coloreadas, se divide en 1000 pequeños cubos de igual tamaño. Los cubos así obtenidos se colocan en una bolsa, la cual se agita para que queden mezclados. Hallemos la probabilidad de que al extraer de la bolsa un cubo al azar, tenga dos caras coloreadas.

Solución

Como un cubo tiene 12 aristas, entonces en cada arista hay 8 pequeños cubos con dos caras coloreadas (los dos cubos restantes corresponden a las esquinas del cubo inicial y tendrán tres caras coloreadas). Luego la probabilidad de seleccionar un cubo pequeño con dos caras coloreadas es $\frac{12 \times 8}{1000} = \frac{96}{1000} = 0{,}096$. ◁

Ejemplo 20

Se lanzan dos dados 100 veces, en forma consecutiva. ¿Cuál es la probabilidad de obtener doble seis al menos una vez?



Solución

Puesto que en un lanzamiento se presentan 36 posibles resultados, en los 100 lanzamientos se presentarán 36^{100} resultados. (Utilizamos el principio de multiplicación).

Consideremos el evento A: "obtener doble seis al menos una vez"; el evento complementario es A^c: "no obtener doble seis al menos una vez"; luego el número de resultados posibles para el evento A^c en un lanzamiento es 35. En consecuencia, en los 100 lanzamientos se presentarán 35^{100} resultados en los que no saldrá doble seis.

Por tal razón, la probabilidad de no obtener doble seis en los 100 lanzamientos es $\dfrac{35^{100}}{36^{100}}$; así, la probabilidad de obtener doble seis al menos una vez, en los 100 lanzamientos es $1-\dfrac{35^{100}}{36^{100}}$. ◄

Ejemplo 21

De los 80 empleados de una compañía perforadora de pozos petroleros, 45 tienen problemas auditivos. Del total de empleados 50 son hombres, 30 de los cuales tienen problemas auditivos. Si se selecciona un empleado al azar:

a. ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer, si de antemano se sabe que tiene problemas auditivos?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que tenga problemas auditivos, si de antemano se sabe que es mujer?

Solución

Elaboramos la tabla 8.2 en donde se muestran los datos completos de los empleados de esta compañía, de acuerdo con las dos características: género (masculino o femenino) y capacidad auditiva (con problemas o sin problemas).

	Capacidad auditiva		
Género	Con problemas (P)	Sin problemas (NP)	Total
M	30	20	50
F	15	15	30
Total	45	35	

Tabla 8.2

a. En la tabla 8.2 nos ubicamos en la columna "Con problemas auditivos", la cual tiene un total de 45 empleados (corresponde a los casos totales), 15 de los cuales son del género femenino, por tanto, la probabilidad pedida es $\dfrac{15}{45}=\dfrac{1}{3}$.

b. Nos ubicamos en la fila F que tiene un total de 30 (números de casos totales), 15 de los cuales tienen problemas auditivos (números de casos favorables); entonces, la probabilidad buscada es $\dfrac{15}{30}=\dfrac{1}{2}$. ◄

> Piensa y practica <

> Comunicación

1. Analiza la situación "Apuestas ventajosas" del inicio de la lección 3. ¿Se equivocó el caballero De Meré?

2. Se lanza un dado a una diana de tiro al blanco, compuesta por tres círculos concéntricos de radios 3 cm, 12 cm, y 20 cm.

- **a.** ¿Cuál es la probabilidad de dar en el círculo más pequeño?
- **b.** ¿Cuál es la probabilidad de dar en el círculo intermedio pero no en el círculo más pequeño?

3. De una caja con 10 bombillas de repuesto para iluminaciones navideñas, se probará sólo una para comprar la caja (si sale buena) o no comprarla (si sale defectuosa). Determina la probabilidad de comprar la caja si:

- **a.** Una bombilla está defectuosa.
- **b.** Dos bombillas están defectuosas.
- **c.** Tres bombillas están defectuosas.

4. Los registros del servicio de salas de urgencias de cierta UPA (Unidad de Primeros Auxilios) presentan las siguientes características, en un período de tres años: Ataques al corazón: 15%; traumas respiratorios: 23%; víctimas por accidentes de tránsito: 35%; envenenamientos: 10%; otros: 17%.
Suponiendo que los datos en esta unidad son representativos de la población que atiende, determina la probabilidad de los siguientes eventos:

- **a.** "Paciente que llega a la unidad sin traumas respiratorios".
- **b.** "Paciente que llega a la unidad no sea víctima de accidente de tránsito ni de envenenamiento".
- **c.** "Paciente que llega sea por ataque al corazón".

5. Si las letras A, O, R y M se arreglan en línea al azar, ¿cuál es la probabilidad de que en el arreglo aparezca la palabra AMOR?

> Resolución de problemas

6. En una urna hay 25 bolas numeradas del 1 al 25. Se extrae una bola al azar. Calcula la probabilidad de que:

- **a.** Sea un número primo.
- **b.** Sea divisible por 3.
- **c.** Sea un múltiplo de 5.
- **d.** No sea un cuadrado perfecto.

7. De una baraja con 52 cartas, bien barajadas, se extrae una carta al azar. Halla la probabilidad de obtener:

- **a.** Una sota.
- **b.** Una figura.
- **c.** Un trébol.
- **d.** Un diez de diamantes.
- **e.** Un ocho rojo o un seis negro.

8. Sean A y B dos eventos en un espacio muestral **E**, tales que $P(A) = 0{,}4$, $P(B) = 0{,}2$ y $P(A \cup B) = 0{,}5$. Halla $P(A \cap B)$.

9. Sabiendo que $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{5}$ y $P(A \cup B) = \frac{7}{15}$, halla la probabilidad de que:

- **a.** Ocurran A y B.
- **b.** Ocurra A pero no B.
- **c.** No ocurran ni A ni B.
- **d.** Ocurra uno de los dos pero no los dos.

10. En una urna hay 6 bolas numeradas del 1 al 6 con los siguientes colores: las bolas 1, 2, 3 y 4 son azules, y las bolas 5 y 6 son rojas. Se considera el experimento aleatorio "sacar al azar una de las bolas" y se definen los eventos siguientes:

A: "extraer una bola con número impar"; B: "extraer una bola azul"; C: "extraer una bola roja".
Halla las siguientes probabilidades:

- **a.** $P(A \cap B)$
- **b.** $P(A \cap B^c)$
- **c.** $P(C \cap A)$
- **d.** $P(C \cap A^c)$

11. Una persona tiene 6 pares de calcetines negros, 4 pares de calcetines azules y 2 pares de calcetines gris oscuro. Un día se levantó tarde y al salir de prisa eligió dos calcetines al azar. Halla la probabilidad de que:

- **a.** Ambos sean negros.
- **b.** Ambos sean del mismo color.
- **c.** Uno sea negro y el otro azul.
- **d.** Que los dos sean grises.

Probabilidad condicional

Logro: aplicar la noción de probabilidad condicional a problemas, reconociendo independencia o dependencia entre eventos.

En muchas situaciones, al calcular la probabilidad de ocurrencia de un evento nos encontramos que ya contamos con "alguna información", expresada en la ocurrencia de otro evento del espacio muestral, reduciendo los casos posibles del espacio muestral a los resultados del evento que ya ocurrió. La probabilidad calculada con esta información se llama **probabilidad condicional**, condicionada al evento ya ocurrido. En esta lección estudiaremos la formulación de esta probabilidad.

Ejemplo 22

Una compañía compra un seguro de salud para sus 200 empleados. La compañía que expidió el seguro de salud está interesada en hacer seguimiento al factor de riesgo "fumador", razón por la cual encuestó a los empleados, y resumió la información encontrada en la tabla 8.3.

	Mujeres (M)	Hombres (H)	Total
Fumador (F)	30	50	80
No fumador (N)	90	30	120
Total	120	80	200

Tabla 8.3

Se selecciona un empleado al azar:

a. ¿Cuál es la probabilidad de que sea hombre?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que sea hombre no fumador?

d. ¿Cuál es la probabilidad de que sea fumador, si se sabe que el empleado es una mujer?

Solución

a. En la tabla 8.3, el total de hombres es 80. Por tanto, la probabilidad de que el empleado seleccionado al azar sea hombre es $P(H) = \frac{80}{200} = 40\%$.

b. $P(M) = \frac{120}{200} = 60\%$.

c. En la columna donde está la información de los hombres, buscamos la fila de los no fumadores; por tanto, $P(H \cap N) = \frac{30}{200} = 15\%$.

d. En este caso, la información de los 200 empleados se ha reducido a 120 (las mujeres), ya que se sabe que el empleado seleccionado al azar es mujer, por tanto, en la columna de la información de mujeres buscamos el número de fumadoras, luego P (sea fumador si se sabe que es una mujer) $= \frac{30}{120} = 25\%$, es decir, la probabilidad de que un empleado, seleccionado al azar, sea fumador si se sabe que es una mujer es del 25%.

Observemos que esta probabilidad es igual a calcular el cociente de probabilidades.

$$\frac{P(\text{fumador y mujer})}{P(\text{mujer})} = \frac{\frac{30}{200}}{\frac{120}{200}} = \frac{30}{120}.$$

Sea **E** *un espacio muestral, B un evento que ya ocurrió, con P(B) ≠ 0. La probabilidad del evento A, dada la ocurrencia del evento B, se denomina* ***probabilidad condicional*** *de A dado B, se simboliza por* $P(A|B)$ *y se define como* $P(A|B) := \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Ejemplo 23

Una caja contiene 20 pelotas, 12 rojas y 8 negras, del mismo tamaño y material. Se extraen de la caja dos pelotas, una por una, en forma consecutiva. Hallemos la probabilidad de que las dos pelotas extraídas sean de color rojo, con las siguientes condiciones:

a. La pelota de la primera extracción se devuelve a la caja.

b. La pelota de la primera extracción no se devuelve a la caja.

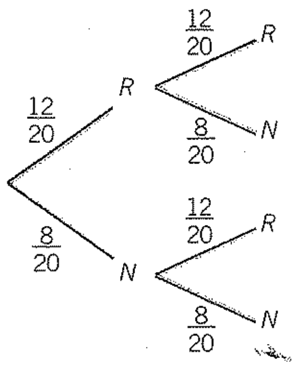


Figura 8.4

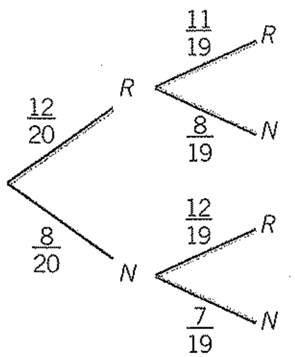


Figura 8.5

Solución

Dispondremos las probabilidades, de la primera y segunda extracción, en un diagrama de árbol. En las dos primeras ramas (color azul) están las probabilidades totales de la primera extracción y en las cuatro ramas siguientes (color rojo) están las probabilidades condicionales de la segunda extracción.

a. Con devolución:

Observemos que las probabilidades condicionales, de las segundas ramas del árbol, son iguales a las probabilidades en las primeras ramas (*ver* figura 8.4); esto se justifica porque el espacio muestral no cambió, pues la pelota tomada se devolvió. Entonces, sea Z: "la primera y la segunda pelota extraídas son rojas", $P(Z) = \frac{12}{20} \times \frac{12}{20} = 0{,}36$, este valor corresponde al producto de las probabilidades de las ramas (primera y segunda) que terminan en pelota roja.

b. Sin devolución:

Las probabilidades condicionales en las segundas ramas han cambiado por cuanto el espacio muestral se redujo a 19 elementos (al no devolver la pelota tomada en la primera extracción) (*ver* figura 8.5).

Entonces, $Z = A \cap B$, donde A: "la primera pelota extraída es roja" y B: " la segunda pelota extraída es roja":

$P(Z) = P(A \cap B) = P(A\|B)P(B)$	Utilizamos la definición de probabilidad condicional.
$P(Z) = \frac{11}{19} \times \frac{12}{20}$	Reemplazamos los valores conocidos del diagrama de árbol.
$P(Z) = \frac{33}{95} \approx 0{,}3474$	Efectuamos la multiplicación y aproximamos el valor. ◄

De la definición de probabilidad condicional $P(A|B) := \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ tenemos:

$P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$. Si la ocurrencia de B no afecta la ocurrencia de A, entonces $P(A|B) = P(A)$

Por tanto, $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Los eventos A y B ***son independientes****, si y sólo si,* $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Ejemplo 24

Se lanza un dado legal dos veces. Consideremos los eventos:

A: "el primer resultado es un número par"; B: "el segundo resultado es 2".

Analicemos si el segundo resultado depende o no del primero.

Solución

Escribimos el espacio muestral del experimento "lanzar un dado legal dos veces" que consta de 36 resultados posibles:

$\mathbf{E} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), \ldots, (2, 6), \ldots, (6, 1), \ldots, (6, 6)\}$

$A = \{(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$ Calculamos las posibilidades del evento A.

$B = \{(1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 2), (5, 2), (6, 2)\}$ Calculamos las posibilidades del evento B.

$A \cap B = \{(2, 2), (4, 2), (6, 2)\}$ Calculamos las posibilidades de A y B.

$P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$ Calculamos la probabilidad del evento A.

$P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ Calculamos la probabilidad del evento B.

$P(A \cap B) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$ Calculamos la probabilidad de la intersección de los eventos A y B.

Por otra parte, tenemos que $P(A \cap B) = \frac{1}{12} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = P(A)P(B)$, es decir, los eventos A y B son independientes. ◁

Una prueba médica para detectar la presencia de una enfermedad tiene dos posibles resultados: positiva o negativa. Un resultado positivo en la prueba indica que la persona examinada podría tener la enfermedad, y un resultado negativo en la prueba indica que la persona examinada probablemente no tiene la enfermedad. Sin embargo, estas pruebas médicas no son perfectas y pueden dar resultados equivocados. Los posibles resultados de una prueba médica, desde el punto de vista probabilístico, se muestran en el diagrama de árbol de la figura 8.6 y en la tabla 8.4.

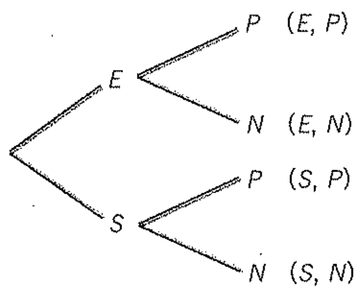


Figura 8.6

El resultado (S, P) se denomina una Falso positivo, y el resultado (E, N) es un resultado Falso negativo.

	P	N
E	Verdadero positivo	Falso negativo
S	Falso positivo	Verdadero negativo

Tabla 8.4

E: indica que el individuo tiene la enfermedad, S: indica que el individuo no tiene la enfermedad, P: indica que la prueba clínica da positivo, N: indica que la prueba clínica da negativo.

Los resultados más delicados, desde el punto de vista médico, son (E, N) porque estaría diagnosticándosele no enfermedad a un individuo realmente enfermo, y (S, P) porque estaría diagnosticándosele la enfermedad a un individuo que no la tiene.

Respecto a la prueba médica: la probabilidad de un verdadero positivo, se llama sensibilidad de la prueba, y la probabilidad de un verdadero negativo, se llama especificidad de la prueba.

Ejemplo 25

Una prueba de detección de una enfermedad produce un 2% de falsos positivos, y un 5% de falsos negativos. Halla:

a. La sensibilidad de la prueba. **b.** La especificidad de la prueba.

Solución

P(Falso positivo) = P(Prueba de positiva | Individuo no tiene la enfermedad) = 0,02.

P(Falso negativo) = P(Prueba de negativa | Individuo tiene la enfermedad) = 0,05.

a. Sensibilidad de la prueba: P(Verdadero positivo) = 1 − P(Falso negativo) = 0,95.

b. Especificidad de la prueba: P(Verdadero negativo) = 1 − P(Falso positivo) = 0,98. ◁

Ejemplo 26

Para dos eventos A y B de un espacio muestral **E**, se tiene que $P(A)=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{3}{5}$ y $P(A\cap B)=\frac{2}{5}$.

a. Calcula $P(A|B)$.

b. Calcula $P(B|A)$.

c. ¿Son A y B eventos independientes?

Solución

a. $P(A|B)=\dfrac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{5}}=\dfrac{2}{3}$ Reemplazamos los valores conocidos en $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$.

b. $P(B|A)=\dfrac{\frac{2}{5}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{4}{5}$ Reemplazamos los valores conocidos en $P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$.

c. $P(A)P(B)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}=\frac{3}{10}$ Calculamos $P(A)P(B)$.

$\frac{3}{10}\neq\frac{2}{5}$ Comparamos $P(A)P(B)$ y $P(A\cap B)$.

Por tanto, A y B no son independientes. ◄

> Piensa y practica <

> Comunicación

1. La tabla 8.5 presenta los datos sobre el número de facturas con reclamaciones para un plan de medicina complementaria, de una compañía de salud. Los datos están discriminados por tipo y región geográfica.

Tipo \ Región	Occidente	Centro	Oriente	Norte	Total
Hospitalizar	75	128	29	52	
Terapia física	233	514	104	251	
Consulta externa	100	326	65	99	
Total					

Tabla 8.5

a. Calcula los totales por columna y por fila. ¿Qué significan esos totales?

b. Si se escoge una factura al azar, ¿cuál es la probabilidad de que ésta provenga de la región oriental?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que una factura seleccionada al azar provenga de la región occidental?

d. ¿Cuál es la probabilidad de que una factura elegida al azar provenga de la región oriental o de la central? ¿Cuál es la relación entre estos dos eventos?

e. ¿Cuál es la probabilidad de que una factura escogida al azar corresponda al tipo hospitalización?

f. Si una factura correspondió a hospitalización, ¿cuál es la probabilidad de que esta sea de la región central?

g. Dado que una factura resultó de la región occidental, ¿cuál es la probabilidad de que corresponda a terapia física?

h. Si una factura correspondió a consulta externa, ¿cuál es la probabilidad de que provenga de la región norte?

i. ¿Cuál es la probabilidad de que una factura seleccionada al azar corresponda a consulta externa o provenga de la región occidental (o ambas)?

j. ¿Cuál es la probabilidad de que una factura seleccionada aleatoriamente corresponda a la región central o a hospitalización (o ambos)?

> Razonamiento lógico

2. Si $P(A|B) = 0{,}85$ y $P(B) = 0{,}90$, ¿cuál es el valor de $P(A \cap B)$?

3. Si $P(A) = 0{,}25$, $P(B) = 0{,}48$ y $P(A \cup B) = 0{,}61$, ¿cuál es el valor de $P(A|B)$ y de $P(B|A)$?

4. Considera los eventos A y B. Supón que se conocen las probabilidades siguientes: $P(B) = \frac{1}{4}$, $P(A|B) = \frac{1}{3}$, $P(A|B^c) = \frac{1}{3}$. Halla las probabilidades $P(A)$, $P(A \cup B)$, $P(B|A)$ y $P(A \cap B^c)$.

5. Si $P(A|B) = 0{,}4$; $P(B|A) = 0{,}3$ y $P(B) = \frac{2}{3}$, halla $P(A)$.

> Resolución de problemas

6. Un adorno navideño consta de 100 bombillas, conectadas en serie de manera que si una falla todas las bombillas no iluminan. Durante un período de 6 meses, la probabilidad de que una bombilla falle es de 0,01. ¿Cuál es la probabilidad de que durante un período de seis meses el adorno de las cien bombillas esté funcionando?

7. A un ciclista sospechoso de utilizar esteroides se la hacen dos pruebas, independientes, de detección de esteroides. La prueba A tiene una probabilidad de 0,95 de dar positivo si se han utilizado esteroides, y la aprueba B tiene una probabilidad de 0,90 de dar positivo si se han utilizado esteroides. ¿Cuál es la probabilidad de que ambas pruebas arrojen un falso negativo?

8. Un dado tiene 4 caras de color blanco y 2 caras de color rojo. El dado es legal, es decir todas las caras tienen la misma posibilidad de quedar arriba. El dado es lanzado varias veces. De las siguientes secuencias de resultados: RRRRBR, RBRRB, RBRRRRB,

a. ¿Cuál escogerías por tener la mayor probabilidad de salir?

b. Halla la probabilidad de cada secuencia.

9. Una lotería vende billetes que tienen solamente 5 números. ¿De las siguientes opciones cuáles elegirías para apostar por el premio mayor? Los sorteos son independientes.

a. Comprar el mismo número durante 5 sorteos consecutivos.

b. Comprar cinco billetes con diferentes números en un mismo sorteo.

10. Una enfermedad infecciosa afecta a uno de cada 1000 habitantes de una población. Se dispone de una prueba para detectar la enfermedad, de forma que si una persona tiene la enfermedad la prueba da positiva en un 99% de los casos. Como la prueba no es infalible, si una persona está sana la prueba da positiva en el 2% de los casos.

a. ¿Cuántas personas se espera que den positivo en la prueba?

b. Si una persona está sana, ¿cuál es la probabilidad de que dé positivo en la prueba?

c. Si una persona ha dado positivo ¿cuál es la probabilidad de que esté sana?

11. Una fábrica de tapetes ha colocado un pedido urgente para una fibra sintética, con 2 proveedores distintos e independientes A y B. Si ninguno de los pedidos se entrega en una semana, la producción deberá pararse hasta que llegue uno, por lo menos, de los pedidos. La probabilidad de que el proveedor A pueda entregar el material en una semana es de 0,75. La probabilidad de que el proveedor B pueda entregar el material en una semana es de 0,7.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que ambos proveedores entreguen el material en una semana?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno de los proveedores entregue el material en una semana?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que la producción en la fábrica se detenga?

12. Una entidad de salud ha clasificado a sus afiliados según dos criterios: A: es portador, A^c: no es portador, de una enfermedad D; y pertenece a un grupo de riesgo R o no pertenece a dicho grupo de riesgo R^c. En la tabla 8.6 se muestra la correspondiente tabla de probabilidades.

	Pertenece al grupo de riesgo (R)	No pertenece al grupo de riesgo (R^c)	Total
Portador (A)	0,004	0,004	0,008
No portador (A^c)	0,015	0,977	0,992
Total	0,019	0,981	1

Tabla 8.6

Halla e interpreta:

a. $P(A|R)$

b. $P(A|R^c)$

c. $P(A^c \cap R)$

Lección 5

Pensamiento aleatorio

Probabilidades totales y teorema de Bayes

Logro: aplicar el teorema de Bayes y el teorema de probabilidades totales para resolver problemas.

Un principio de solución de problemas es dividir el problema en otros menos complejos, resolverlos y regresar al problema original para darle solución. En esta lección aprenderemos dos teoremas que nos ayudarán en este proceso: el teorema de las probabilidades totales y el teorema (o regla) de Bayes.

Ejemplo 27

Tenemos dos urnas U_1 y U_2. La urna U_1 contiene 5 pelotas blancas y 5 pelotas rojas. La urna U_2 contiene 5 pelotas blancas y 10 pelotas rojas. Lanzamos una moneda legal: si la moneda cae en cara (C), entonces se extrae una pelota de la urna U_1; si la moneda cae sello (S), entonces se extrae una pelota de la urna U_2. ¿Cuál es la probabilidad de obtener una pelota roja?

Solución

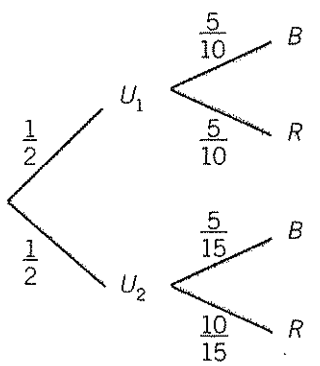


Figura 8.7

Nos ayudaremos con el diagrama de árbol de la figura 8.7.

Las dos primeras ramas corresponden al lanzamiento de la moneda. Y las segundas cuatro ramas corresponden a seleccionar la urna y sacar la pelota.

Definimos los eventos: C: "salga cara", S: "salga sello", B: "la pelota extraída es blanca" y R: " la pelota extraída es roja".

Así, $P(C) = \frac{1}{2}$, $P(S) = \frac{1}{2}$, $P(B|C) = \frac{5}{10}$, $P(R|C) = \frac{5}{10}$, $P(B|S) = \frac{5}{15}$ y $P(R|S) = \frac{10}{15}$.

En el diagrama de árbol tenemos dos caminos posibles para obtener una pelota roja: salga cara – pelota roja de la U_1 ($R \cap C$), o, salga sello – pelota roja de la U_2 ($R \cap S$), entonces:

$P(R) = P(R \cap C) \cup P(R \cap S)$	Interpretemos la probabilidad del evento R.
$P(R) = P(R\|C) \times P(C) + P(R\|S) \times P(S)$	Utilizamos la definición de probabilidad condicional.
$P(R) = \frac{5}{10} \times \frac{1}{2} + \frac{10}{15} \times \frac{1}{2}$	Reemplazamos los valores conocidos.
$P(R) = \frac{7}{12}$	Efectuamos las operaciones indicadas. ◁

Si **E** *es un espacio muestral y $B_1, B_2, ..., B_m$ son eventos en* **E** *tales que:*

1. *Todos los eventos B_j son no vacíos.*
2. *Cada par de eventos B_i y B_j, son incompatibles, es decir, $B_i \cap B_j = \varnothing$.*
3. *La unión de todos los B_j nos da el espacio muestral* **E**: $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_m = \mathbf{E}$

Entonces, el conjunto de eventos $\{B_1, B_2, ..., B_m\}$ se denomina una ***partición*** *de* **E**.

Ejemplo 28

Para el experimento aleatorio "resultado del lanzamiento de un dado" hallemos el espacio muestral y una partición de este.

Solución

El espacio muestral es **E** = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Algunas particiones de **E** son:

$$\{\{1\}, \{2, 3, 4\}, \{5, 6\}\};\ \{\{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}\};\ \{\{1, 4, 6\}, \{2, 3, 5\}\}.$$

Teorema: ***Principio de las probabilidades totales***

Si $\{B_1, B_2, \ldots, B_m\}$ es una partición de **E**, *y A es un evento cualquiera en* **E**, *entonces* $P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \ldots + P(A|B_m)P(B_m)$.

Ejemplo [illegible]

Una fábrica de neumáticos utiliza tres máquinas para su producción. El 5% de los neumáticos producidos por la máquina 1 es defectuoso (D), la máquina 2 produce un 8% y la máquina 3 un 10% de defectuosos. De toda la producción de neumáticos, el 50% es de la máquina 1, el 30% de la máquina 2, y el 20% de la máquina 3. De toda la producción de neumáticos de la fábrica, se selecciona un neumático al azar.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que sea defectuoso?

b. Si el neumático resultó defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que lo haya producido la máquina 2?

Solución

Definimos los eventos D: "el neumático resultó defectuoso", M_1: "el neumático fue hecho por la máquina 1", M_2: "el neumático fue hecho por la máquina 2", M_3: "el neumático fue hecho por la máquina 3".

a. Podemos verificar que $\{M_1, M_2, M_3\}$ es una partición del experimento "producción de neumáticos por máquinas", entonces:

$P(D) = P(D|M_1)P(M_1) + P(D|M_2)P(M_2) + P(D|M_3)P(M_3)$ Utilizamos el principio de las probabilidades totales.

$P(D) = 0{,}05 \times 0{,}5 + 0{,}08 \times 0{,}3 + 0{,}1 \times 0{,}2 = 0{,}069 = 6{,}9\%$ Reemplazamos los valores.

Es decir, de 100 neumáticos producidos, casi 7 son defectuosos.

b. Nos piden calcular $P(M_2|D)$:

$P(M_2|D) = \dfrac{P(M_2 \cap D)}{P(D)} = \dfrac{P(D|M_2)P(M_2)}{P(D)}$ Usamos la definición de probabilidad condicional.

$P(M_2|D) = \dfrac{0{,}08 \times 0{,}3}{0{,}069} = \dfrac{8}{23} \approx 0{,}3478$ Reemplazamos los valores conocidos.

Es decir, de un total de 100 neumáticos defectuosos alrededor de 35 son producidos por la máquina 2.

La solución dada en el literal (b) es una aplicación del teorema de Bayes.

Teorema de Bayes

Si $\{B_1, B_2, \ldots, B_m\}$ es una partición de **E**, *y A es un evento cualquiera en* **E**, *entonces*

$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \ldots + P(A|B_m)P(B_m)}.$$

Comentario

Thomas Bayes (1702-1761), monje y principiante de la estadística, fue ignorado por sus contemporáneos pero su trabajo ha tenido un profundo efecto en la estadística moderna, conocida como estadística bayesiana.

Ejemplo 30

Consideremos un sistema de comunicación que transmite dígitos binarios: 0 y 1. Por el ruido de los canales de comunicación, la señal recibida no siempre es la transmitida. Definamos T_i: "i es transmitido", R_i: "i es recibido", para $i = 0, 1$. Supongamos que se conoce que $P(R_0|T_0) = 0{,}8$; $P(R_1|T_1) = 0{,}9$ y que el dígito 0 se transmite el 45% de las veces.

a. Calculemos $P(T_0|R_1)$.

b. Hallemos la probabilidad de un error en la transmisión.

Solución

a. $$P(T_0|R_1) = \frac{P(R_1|T_0)P(T_0)}{P(R_1|T_0)P(T_0) + P(R_1|T_1)P(T_1)} = \frac{(1-0{,}8)(0{,}45)}{(1-0{,}8)0{,}45 + (0{,}9)(0{,}55)}$$
$$= \frac{2}{13} \approx 0{,}1538.$$

b. $$P(\text{error transmisión}) = P(T_0 \cap R_1) + P(T_1 \cap R_0) = P(R_1|T_0)P(T_0) + P(R_0|T_1)P(T_1)$$
$$= (1-0{,}8)(0{,}45) + (1-0{,}9)(0{,}55) = 0{,}145.$$

> Piensa y practica <

> Comunicación

1. Considera el espacio muestral **E** = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, del lanzamiento de un dado legal, $\{B_1, B_2, B_3\}$ una partición de **E** dada por $B_1 = \{1\}$, $B_2 = \{4, 6\}$, $B_3 = \{2, 3, 5\}$. Para el evento $A = \{3, 4\}$ escribe:

a. El principio de las probabilidades totales.

b. El teorema de Bayes para B_2.

2. Repite el ejercicio 1 si el dado está cargado de manera que P(salga número impar) = $2P$(salga número par).

3. Sean A_1, A_2, A_3 eventos de un espacio muestral **E**, tales que $P(A_1) = 0{,}1$; $P(A_2) = 0{,}5$; $P(A_3) = 0{,}4$; $P(B\,|\,A_1) = 0{,}25$, $P(B\,|\,A_2) = 0{,}6$ y $P(B\,|\,A_3) = 0{,}8$. Halla:

a. $P(A_1 \cap B)$, $P(A_2 \cap B)$, $P(A_3 \cap B)$.

b. $P(A_1|B)$, $P(A_2|B)$, $P(A_3|B)$.

4. Se hizo un examen de gramática del idioma inglés a ciento veinte estudiantes. Los resultados se resumen en la tabla 8.7:

	Aprobó	No aprobó
10*A*	25	15
10*B*	20	20
10*C*	28	12

Tabla 8.7

De los 120 estudiantes se selecciona uno al azar:

a. ¿Cuál es la probabilidad de que haya aprobado el examen?

b. Si el estudiante seleccionado al azar resultó que aprobó el examen, ¿cuál es la probabilidad de que sea un estudiante de 10*B*?

c. Si el estudiante seleccionado al azar resultó que aprobó el examen, ¿cuál es la probabilidad de que no sea un estudiante de 10*C*?

5. De un grupo de 10 personas se sabe que, respecto a sus gustos por los equipos de fútbol locales, 4 siempre mienten. Se va aplicar una prueba de "detección de mentiras" la cual da un resultado positivo en el 80% de los casos. Se selecciona un individuo del grupo de 10, y se le aplica la prueba.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que la prueba resulte positiva, es decir que establezca que el individuo está mintiendo?

b. Si la prueba dio positiva, ¿cuál es la probabilidad de que el individuo no sea mentiroso?

> Resolución de problemas

6. Un experimento consiste en dos etapas: Etapa 1 "lanzar un dado", Etapa 2 "lanzar una moneda tantas veces como el puntaje aparecido en el dado".

a. Halla la probabilidad que todos los lanzamientos de la moneda resulten en cara.

b. Dado que todos los lanzamientos de la moneda resultaron en cara, halle la probabilidad de que el resultado del dado fuera 3.

7. Una bolsa tiene doce monedas: 6 legales, 4 cargadas con probabilidad de cara igual a $\frac{2}{3}$, y dos monedas con ambos lados caras. Se selecciona una moneda al azar de la bolsa y se lanza.

a. Halla la probabilidad de que salga cara.

b. Si la moneda lanzada sale cara, halla la probabilidad de que la moneda provenga de cada uno de los tipos de moneda (legal, cargada, doble cara).

8. Una fábrica de rieles para cortinas produce en tres líneas: en la línea 1 se fabrica el 45% de la producción con una tasa de rieles defectuosos del 10%, en la línea 2 se fabrica el 35% de la producción con una tasa de rieles defectuosos del 8%, y en la línea 3 se fabrica el 20% de la producción con una tasa de rieles defectuosos del 5%. Se selecciona un riel de la producción total.

a. Halla la probabilidad de que el riel sea defectuoso.

b. Si el riel seleccionado resultó defectuoso, halla la probabilidad de que provenga de la línea 1, línea 2 y línea 3.

9. Se tienen tres bolsas negras, cada una con dos monedas. Una bolsa contiene dos monedas de oro, la otra dos monedas de plata y la otra una moneda de oro y una moneda de plata. Se selecciona una bolsa al azar y de esta se extrae, al azar, una moneda. Si la moneda seleccionada resultó de oro, halla la probabilidad que la otra moneda en la bolsa seleccionada también sea de oro.

10. En una población de ancianos, el 75% ha sido vacunado contra la influenza. La probabilidad de contraer el virus de la influenza es de 0,001 si está vacunado, mientras que si no lo está, la probabilidad de contraer el virus es de 0,01. Halla la probabilidad de que un anciano seleccionado al azar contraiga el virus.

11. Supón que se colorean unas bolas, del mismo tamaño, y se redistribuyen en tres urnas indistinguibles. El coloreado y la distribución se muestra en la tabla 8.8. El experimento consiste en dos etapas: Etapa 1: "se selecciona una urna al azar"; Etapa 2: "de la urna seleccionada se saca al azar una bola".

	Amarilla	Azul	Roja
Urna 1	4	2	3
Urna 2	2	3	5
Urna 3	5	2	4

Tabla 8.8

a. ¿Cuál es la probabilidad de que la bola sea roja?

b. Si la bola seleccionada resultó de color rojo, ¿cuál es la probabilidad de que la bola provenga de la urna 2?

12. El entrenador de fútbol del colegio sabe que la prueba que practica con sus jugadores es una buena herramienta para determinar quiénes están en buena forma. Para determinar qué jugadores están en buena forma (F), el resultado de la prueba debe dar positivo (S). Luego de una larga temporada de vacaciones, los jugadores se desordenan en su alimentación, y el entrenador conoce que 4 de 10 jugadores estarán en buena forma, y que aquellos que estén en buena forma obtendrán una prueba positiva en el 90% de las veces, y que aquellos que no estén en forma obtendrán una prueba negativa en el 90% de las veces. Halla:

a. $P(F)$

b. $P(S \mid F)$

c. $P(S^c \mid F^c)$

d. $P(S \mid F^c)$

e. $P(F \mid S)$

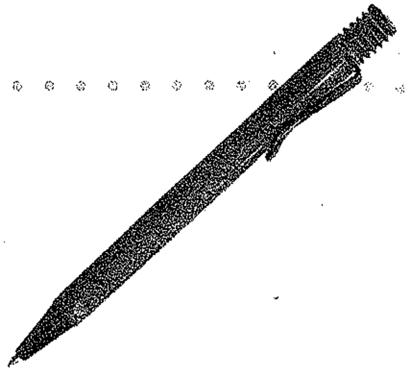
Formación ciudadana

Comprendo que cuando se actúa de forma corrupta y se usan los bienes públicos para beneficio personal, se afectan todos los miembros de la sociedad.

13. Investiga qué entidad en tu ciudad regula el mercado de loterías y cuántas circulan legalmente.

Si participaras en una de estas loterías, ¿cuál es la probabilidad que tienes de ganar?

Evaluación por competencias



Autoevaluación

A continuación aparecen los indicadores de logro. Marco ✓ en la columna Sí, si el logro indicado está superado o ✗ en la columna No, si está por superar.

	Sí	No
> Hallo el espacio muestral de un experimento aleatorio.	☐	☐
> Calculo probabilidades de eventos simples y compuestos.	☐	☐
> Hallo probabilidad de un evento dada la ocurrencia de otro evento.	☐	☐
> Determino si dos eventos son independientes.	☐	☐
> Utilizo el teorema de Bayes en problemas condicionales.	☐	☐

Coevaluación

Con los siguientes ejercicios, afianzamos los indicadores de logro que hemos superado y reforzamos aquellos que están por superar.

1. De dos eventos A y B se sabe que: $P(A^c) = 0{,}45$; $P(A \cup B) = 0{,}80$ y $P(B) = 0{,}55$.

a. ¿A y B son independientes?

b. Calculemos el valor de $P(A|B)$.

2. Dos personas piensan cada una de ellas un número del 0 al 9. Calculemos la probabilidad de que las dos personas no piensen el mismo número.

3. Dos sucesos tienen probabilidades 0,4 y 0,5. Sabiendo que son independientes, calculemos la probabilidad de que no ocurra ninguno de los dos.

4. Se escuchan tres CD y se vuelven a guardar al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno de los CD haya sido guardado en el estuche que le corresponde?

5. Un dado ha sido cargado de manera que la probabilidad de sacar un número impar es el doble que la de sacar un número par. Se lanza el dado. Calculemos:

a. La probabilidad de obtener un número par.

b. Si, a la vez, se lanza un dado legal, la probabilidad de obtener un número par y un número impar.

6. Un monedero contiene 4 monedas de plata y 6 de bronce, y otro contiene 8 de plata y 6 de bronce. Si se elige un monedero al azar y se extrae una moneda, ¿cuál es la probabilidad de que sea de plata?

7. En una oficina el 70% de los empleados son costeños. De entre los costeños, el 40% son hombres, mientras que de los no costeños, son hombres el 60%.

a. ¿Qué porcentaje de empleados no costeños son mujeres?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que un empleado de la oficina sea mujer?

c. Edgar trabaja en dicha oficina. ¿Cuál es la probabilidad de que sea costeño?

8. De una baraja de 40 cartas extraemos dos cartas a la vez. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos una de ellas sea copas?

9. Se extraen dos cartas de una baraja. Calculemos la probabilidad de que las dos sean copas.

10. De una baraja de 40 cartas extraemos dos cartas a la vez. Si ambas no son espadas, ¿cuál es la probabilidad de que al menos una de ellas sea copas?

11. Un avión con tres bombas trata de destruir una base militar enemiga; la probabilidad de destruir la base militar con cualquiera de las bombas es $\frac{2}{5}$. ¿Cuál es la probabilidad de que la base militar quede destruida si el avión emplea las tres bombas?

12. Tenemos una urna con 5 bolas rojas y 4 bolas negras y extraemos dos bolas.

a. ¿De cuántas formas podemos hacerlo?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos sean rojas en todos los casos?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que una sea roja y la otra negra?

13. En una urna hay 3 bolas azules, 5 rojas y 4 amarillas. Se extraen tres bolas consecutivamente, sin devolución. Calculemos la probabilidad de que las tres sean rojas.

14. El 65% de los alumnos de un centro han aprobado Matemáticas, un 70% ha aprobado Física, y un 53% ha aprobado ambas materias. Si se elige al azar un estudiante, calculemos la probabilidad de que:

a. Haya aprobado al menos una de las dos materias.

b. Haya perdido ambas materias.

c. Si aprobó Física, ¿cuál es la probabilidad de haber aprobado Matemáticas?

15. Se lanza una moneda y si sale cara se ponen 8 bolas rojas en una urna y si sale sello se ponen 4 bolas rojas. Se vuelve a lanzar la moneda, si sale cara se ponen 3 bolas negras en la urna y si sale sello se ponen 9 bolas negras. Entonces se saca una bola de la urna.

a. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una bola roja?

b. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una bola negra?

16. Un libro tiene 3 capítulos. El primero tiene 140 paginas; el 2° capítulo 160 páginas y el tercero, 100 páginas. El 90% de las páginas del primer capítulo no tiene ningún error, el 75% del segundo y el 80% del tercer capítulo tampoco tienen ningún error.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que al elegir una página al azar no tenga ningún error?

b. Supongamos que se elige una página al azar y se observa que no tiene ningún error. ¿Cuál es la probabilidad de que sea del 2° capítulo?

17. En una universidad, el 60% de los estudiantes consume pan integral, el 40% consume pan de centeno y el 25% consume ambos. Calculemos:

a. La probabilidad de que coma pan de centeno, sabiendo que consume pan integral.

b. La probabilidad de que no coma pan de integral, sabiendo que consume pan de centeno.

c. La probabilidad de que una persona de esa ciudad no consuma ninguno de los dos tipos de pan.

18. El 1,5% de la población de cierta región padece una enfermedad. Para detectar esta enfermedad se realiza una prueba de diagnóstico. Esta prueba da positiva en el 98,5% de los pacientes que padecen la enfermedad; en el 95% de los individuos que no la padecen da negativa. Si elegimos al azar un individuo de esa población:

a. ¿Cuál es la probabilidad de que el individuo dé positivo y padezca la enfermedad?

b. Si sabemos que la prueba diagnóstico ha dado positiva, ¿cuál es la probabilidad de que el individuo padezca la enfermedad?

19. En cierta región hay una epidemia de malaria (M). Se considera como uno de los síntomas la diarrea (D), aun cuando este síntoma también se presenta en personas con intoxicación (I), e incluso en algunas personas sin ningún cuadro médico serio (N). De información hospitalaria se sabe que $P(D \mid M) = 0{,}98$; $P(D \mid I) = 0{,}5$ y que $P(D \mid N) = 0{,}005$. También se conoce que el 5% de la población tiene malaria y el 0,3 % intoxicación. Si una persona tiene diarrea calculemos la probabilidad de que tenga malaria.

Tu creación

Con la siguiente información formula problemas de probabilidad y soluciónalos.

En una ciudad por cada dos hombres hay tres mujeres. En la ciudad hay una epidemia de gripe. El 15% de los hombres y el 20% de las mujeres están enfermos. Se elige al azar un habitante de esta ciudad.

Prueba ICFES

Selecciona de las cuatro opciones sólo una de las respuestas, la que consideres relaciona de manera más estructurada los conceptos matemáticos con las condiciones particulares de la situación problema.

1. El número de grupos de tres que se pueden formar con 30 personas es:

a. 8120 **b.** 24 360

c. 12 180 **d.** 4060

2. Selecciona la afirmación falsa.

a. Si M es un evento en un espacio muestral, entonces $0 \le P(M) \le 1$.

b. Si A y B son eventos independientes de un espacio muestral, entonces $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

c. Si A es un evento en un espacio muestral, entonces $P(A^c) = 1 - P(A)$.

d. Si A y B son eventos independientes, entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Una bolsa contiene 4 bolas blancas, 5 negras y 3 verdes.

3. La probabilidad de extraer una bola verde es:

a. $\frac{3}{4}$ **b.** $\frac{1}{3}$

c. $\frac{1}{4}$ **d.** $\frac{5}{48}$

4. La probabilidad de extraer una bola blanca o una bola negra es:

a. $\frac{3}{4}$ **b.** $\frac{1}{3}$

c. $\frac{1}{4}$ **d.** $\frac{5}{48}$

5. La probabilidad de extraer dos bolas blancas, sin devolver a la bolsa la primera bola extraída, es:

a. $\frac{3}{4}$ **b.** $\frac{1}{3}$

c. $\frac{1}{9}$ **d.** $\frac{1}{11}$

6. La probabilidad de extraer dos bolas blancas, devolviendo a la bolsa la primera bola extraída, es:

a. $\frac{3}{4}$ **b.** $\frac{1}{3}$

c. $\frac{1}{9}$ **d.** $\frac{1}{4}$

7. La probabilidad de extraer una bola verde en la primera extracción y una negra en la segunda extracción, sin devolver a la bolsa la primera bola extraída, es:

a. $\frac{3}{4}$ **b.** $\frac{5}{44}$

c. $\frac{1}{9}$ **d.** $\frac{1}{4}$

8. La probabilidad de extraer una bola verde en la primera extracción y una bola negra en la segunda extracción, devolviendo a la bolsa la primera bola extraída, es:

a. $\frac{3}{4}$ **b.** $\frac{1}{3}$

c. $\frac{1}{9}$ **d.** $\frac{5}{48}$

9. Hay que colocar a 5 hombres y 4 mujeres en una fila de modo que las mujeres ocupen los lugares pares. ¿De cuántas maneras puede hacerse?

a. $9!$ **b.** $4! + 5!$

c. $4! \times 5!$ **d.** $2(4! \times 5!)$

10. ¿Cuántos números de 4 cifras distintas se pueden formar con los dígitos 0, 1, ..., 9?

a. $9 \times 7 \times 6 \times 5$ **b.** 9×10^3

c. $9 \times 10 \times 8 \times 7$ **d.** $9^2 \times 8 \times 7$

11. Seis libros de Matemáticas, cinco de Física y cuatro de Química han de ser colocados en una estantería. ¿Cuántas colocaciones distintas admiten si los libros de cada materia han de estar juntos?

a. $6! \times 5! \times 4!$ **b.** $15!$

c. $2! \times (6! \times 5! \times 4!)$ **d.** $3! \times (6! \times 5! \times 4!)$

12. Un alumno tiene que elegir 7 de las 10 preguntas de un examen. ¿De cuántas maneras puede elegirlas, si las 4 últimas son obligatorias?

a. 120 maneras. **b.** 24 maneras.

c. 20 maneras. **d.** 6 maneras.

13. Si $P(A) = 0{,}4$, $P(B) = 0{,}7$ y $P(A \cup B) = 0{,}95$, entonces el valor de $P(B|A)$ es:

a. 0,15 **b.** $\frac{3}{8}$

c. $\frac{5}{8}$ **d.** 0,85

14. Si A y B son eventos independientes tales que $P(A) = 0{,}3$; $P(B) = 0{,}6$, entonces:

a. $P(A \cup B) = 0$ **b.** $P(A \cap B) = 0$

c. $P(A) \neq P(A|B)$ **d.** $P(A \cup B) = 0{,}72$

15. Si $P(A) = 0{,}4$, $P(B) = 0{,}6$ y $P(A \cup B) = 0{,}65$, entonces la proposición verdadera es:

a. A y B son incompatibles.

b. A y B son independientes.

c. $P(A^c \mid B^c) = \frac{7}{8}$

d. $P(A^c \cap B^c) = 0{,}05$

16. Dado que $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(A|B) = \frac{1}{3}$, la proposición verdadera es:

a. A y B son independientes.

b. A y B son incompatibles.

c. $A \subseteq B$

d. $P(A^c \mid B^c) = 0$

17. Sean A y B dos sucesos tales que $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B \mid A) = \frac{1}{2}$ y $P(A \mid B) = \frac{1}{4}$. La proposición verdadera es:

a. A y B son incompatibles.

b. A y B son independientes.

c. $A \subseteq B$

d. $P(A^c \mid B^c) = \frac{1}{2}$

18. Supón que Paola visita un colegio. ¿Cuál es el mínimo número de alumnos que debe tener para garantizar con una probabilidad 0,5 de que el día de cumpleaños de algún alumno coincida con el día de cumpleaños de ella? Supón que el día de la visita no es en un año bisiesto.

a. Mayor que 23.

b. Mayor que 153.

c. Mayor que 203.

d. Mayor que 253.

Una compañía de seguros de vida determina que la probabilidad que tiene una persona de 40, 50, 60 y 70 años, de sobrevivir durante 10 años más es: 0,9; 0,8; 0,6 y 0,4, respectivamente.

19. La probabilidad de que una persona de 40 años fallezca en los siguientes 10 años es:

a. 0,9 **b.** 0,1

c. 0,288 **d.** 0,1728

20. La probabilidad de que una persona de 50 años fallezca en los siguientes 10 años es:

a. 0,1 **b.** 0,4

c. 0,2 **d.** 0,6

21. La probabilidad de que una persona de 60 años fallezca en los siguientes diez años es:

a. 0,4 **b.** 0,6

c. 0,9 **d.** 0,288

Consideremos los eventos A: "el autobús escolar está en el taller" y B: "el autobús tiene radio". El 30% de los autobuses escolares está en el taller, el 70% tiene radio y el 20% tiene radio y se encuentra en el taller.

22. La probabilidad de que el autobús escolar esté en el taller y tenga radio es:

a. 0,21 **b.** 0,20

c. 0,7 **d.** 0,3

23. La probabilidad de que el autobús escolar esté en el taller o tenga radio es:

a. 0,3 **b.** 0,7

c. 0,79 **d.** 0,8

24. De los eventos A y B se puede afirmar que:

a. Son independientes.

b. No son independientes.

c. Son incompatibles.

d. Tienen igual probabilidad.

Conexión histórica

La probabilidad como rama de las Matemáticas

La cultura clásica consideraba que los sucesos aleatorios no eran susceptibles de analizarse científicamente (Aristóteles) y por tanto no se preocupó por su estudio. En la Edad Media, se creía que el mundo era determinístico y regido completamente por la voluntad divina.

Antes de la mitad del siglo XVII, el término *probable* (en latín *probabilis*) significaba "aprobable", y se aplicaba en ese sentido a opiniones o a acciones. Una acción u opinión probable era aquella que las personas sensatas emprenderían o mantendrían.

Hasta el Renacimiento no cambió esta forma de pensar. Los primeros estudios surgieron en conexión con los juegos de azar. El nacimiento de la probabilidad como ciencia suele datarse en el siglo XVII, en la correspondencia que dos matemáticos franceses, Blas Pascal y Pierre de Fermat, mantuvieron para resolver el conocido "problema de los puntos".

A partir de este momento, la probabilidad ha tenido un desarrollo muy importante, de la mano de matemáticos como De Moivre, Laplace, Bernoulli, entre otros.

Los avances acaecidos en esta área han tenido un impacto fundamental en todas las ramas de la ciencia moderna: Física cuántica, Biología, Medicina, Meteorología, Economía, Finanzas, Marketing, Seguros, entre otras. ■

Reflexiona

1. ¿Matemáticos de que país y en qué siglo impulsaron el estudio de la probabilidad?

   ....

2. ¿Qué significaba el término problable?

   ....

3. Consulta un ejemplo de aplicación de la probabilidad en Biología, Meteorología, las finanzas y los seguros.

> Bibliografía

AGOSTINI, F. *Juegos de lógica y matemáticas*. Círculo de Lectores, S.A., Madrid, 1982.

ANTON, Howard. *Introducción al Álgebra Lineal*. Editoral Limusa, S.A., México. 1982.

ARTIGUE, Michèle y otros. *Ingeniería didáctica en educación matemática*. Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1995.

AYRES, Frank. Jr. *Trigonometría Plana y Esférica*. McGraw-Hill, S.A., México. 1986.

BERGAMINI, D. *Matemáticas*. Colección científica de Life en Español, México, 1965.

CHEVALLARD, Y. *La Transposition Didactique*. Ediciones La Pensèe Sauvage, 1985.

DAVIS, P. J. y R., Hersh. *The Mathematical Experience*. Boston: Houghton Mifflin Co., 1981.

DICKSON, Linda. *El aprendizaje de las matemáticas*. Editorial Labor, S.A., Madrid, 1991.

DIENES, Z. P., GOLDING, E. W. *La geometría a través de las trasformaciones*. Editorial Teide, Barcelona, 1976.

DREYFUS, T. & EISENBERG, T. *A graphical approach to solving inequalities*. School Science and Mathematics, 1985.

ESPINOSA, F. *Investigaciones en matemática educativa*. Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1996.

GONZÁLEZ, J. y otros. *Números Enteros*. Colección Cultura y Aprendizaje Editorial Síntesis, Madrid, 1990.

LEAN, G. A. & CLEMENTS, M. A. *Spatial ability, visual imagery, and mathematics performance*, 1981.

LOVAGLIA, Florence M., y otros. *Álgebra*. Harla S.A. de C. V., México, 1972.

MEN. *Lineamientos curriculares para el área de matemáticas*, Colombia, 1998.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. *Estándares Básicos de Matemáticas y Lenguaje para la Educación Básica y Media*. Mayo de 2003.

MENDENHALL, William y otros. *Estadística matemática con aplicaciones*. Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1986.

MOISE, Edwin E., DOWNS, Floyd L. Jr. *Geometría Moderna*. Addison-Wesley Iberoamericana, S.A., Estados Unidos, 1986.

NCTM. *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática*. Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES, España, 1991.

PERKINS, David. *La Escuela Inteligente*. Editorial Gedisa, Barcelona, 1992.

PÓLYA, George. *On solving mathematical problems in high school*. Stephen Krulik, 1980.

SMITH, Karl J. *Introducción a la lógica*. Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1991.

SMITH, Sanderson M. *Agnesi to zeno: over 100 vignettes from the history of math*. Key Curriculum Press, California, EE.UU., 1996.

Universitas, Tomo 10. *La Matemática*. Salvat Editores, S.A, 1987.

VOLSTER, Carter. CROWN, Warren. *Invitación a las matemáticas*. Editorial Norma, Bogotá, Colombia.

Glosario

Combinación: arreglo de objetos distintos sin tener en cuenta un orden.

Espacio muestral: conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio.

Evento (o suceso): subconjunto del espacio muestral.

Evento imposible: el que nunca puede presentarse en un experimento aleatorio; usualmente se denota con el símbolo $\varnothing$.

Evento seguro: corresponde a todo el espacio muestral de un experimento aleatorio.

Eventos incompatibles: los que no se pueden presentar simultáneamente; satisfacen la condición de que su intersección es el evento imposible.

Fenómeno aleatorio: fenómeno en el que no es posible predecir con certeza los resultados que se obtendrán, sin embargo, sí es posible describir todos los posibles resultados que se presentarán, debido a la regularidad que tiene cada vez que se da.

Fenómeno determinístico: fenómeno en el que sus resultados sí pueden predecirse con seguridad, si se conocen las condiciones en las cuales éste se presenta.

Permutación: arreglo de objetos distintos en un orden determinado.

Probabilidad: estudio matemático de los eventos aleatorios.

Razonamiento

1. ¿Cuántas personas debe tener un grupo para que haya un 50% de probabilidades de que al menos dos miembros del mismo cumplan años el mismo día?

2. Un triángulo equilátero de lado x se inscribe en una circunferencia de radio r y se traza, "al azar", una cuerda sobre la circunferencia. ¿Cuál es la probabilidad de que la longitud s del segmento de cuerda comprendido dentro del círculo, sea mayor que la longitud del lado a del triángulo inscrito?

3. Sobre la superficie de una esfera marca tres puntos al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que los tres puntos queden en una misma semiesfera?

4. Observa la relación de pesos de la figura 8.8 y determina cuál es el paquete más pesado.

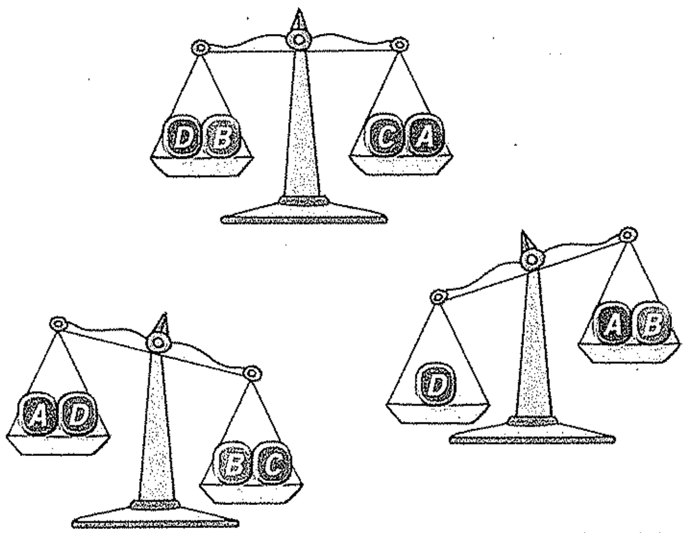
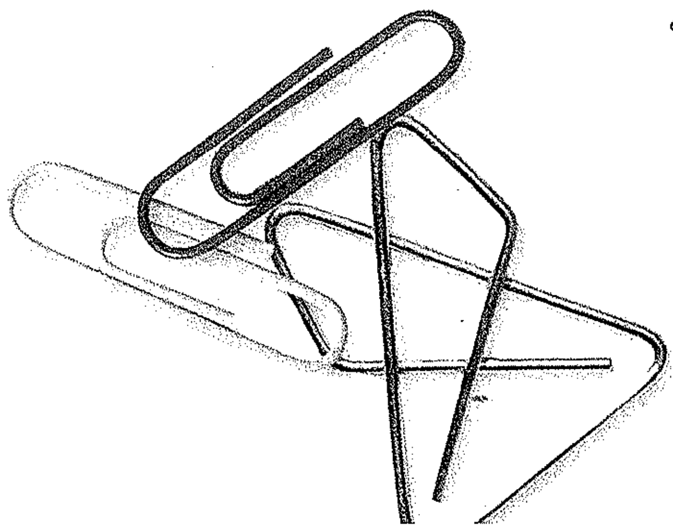


Figura 8.8



> Índice temático