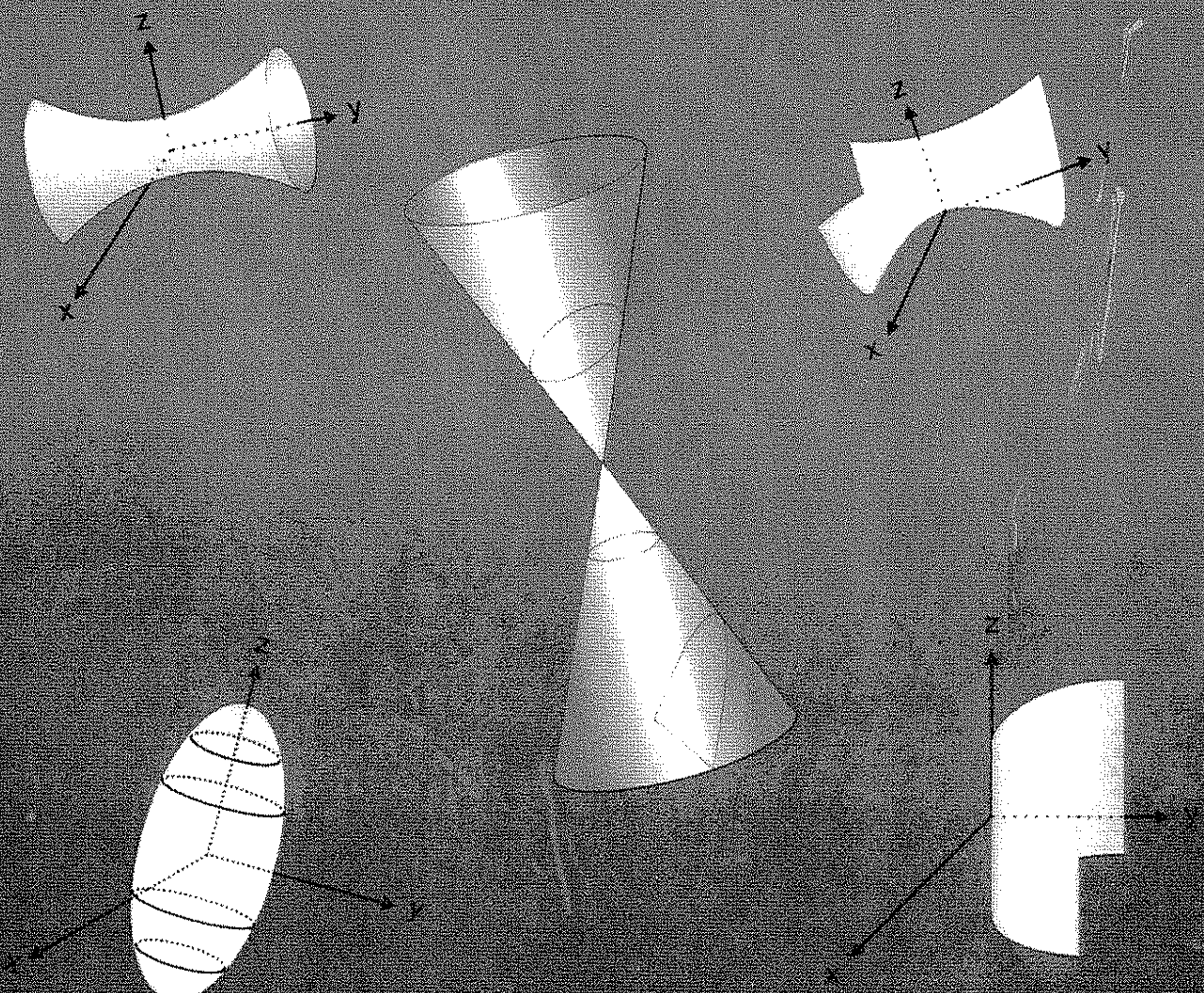
CON ESTÁNDARES
PARA LA EXCELENCIA
Y DESARROLLO DE COMPETENCIAS

MATEMÁTICA EXPERIMENTAL 10

Trigonometría y Geometría Analítica



Julio Alberto Uribe Cálad

CON ESTÁNDARES
PARA LA EXCELENCIA
DESARROLLO DE COMPETENCIAS

Sebastian Mesa 10

MATEMATICA EXPERIMENTAL

TRIGONOMETRÍA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

10

DÉCIMO GRADO
EDUCACIÓN MEDIA

SEGUNDA EDICIÓN ACTUALIZADA
2006

Julio Alberto Uribe Cálad

UROS EDITORES

Este texto ha sido elaborado por los autores de acuerdo con los programas del Ministerio de Educación Nacional y bajo la responsabilidad de los siguientes integrantes:

AUTOR

JULIO ALBERTO URIBE CÁLAD

- Licenciado en Matemáticas y Física de la Universidad de Antioquia, año 1.980
- Posgraduado en Didáctica Universitaria en la misma universidad en el año 2002.
- Rector del colegio Calasanz de Medellín entre los años 1991 y 2002 y profesor de la misma institución desde el año 1971
- Profesor Asociado de la Universidad Nacional de Colombia, sede de Medellín, desde el año 1980
- Distinguido con el premio a la Docencia Excepcional por el Consejo Superior de la Universidad Nacional en los años 2000, 2001 y 2002.
- Coautor de la reconocida serie ELEMENTOS DE MATEMÁTICAS publicada por Editorial Bedout entre los años 1989 y 1999.
- Autor y coautor de más de 25 textos, incluidos dos de carácter universitario, uno de los cuales es actualmente el texto guía en el curso de GEOMETRÍA VECTORIAL, para estudiantes de ingeniería en la Universidad Nacional de Colombia, sede de Medellín.

COMITÉ TÉCNICO

Diseño y Diagramación: Isabel Consuelo Álvarez M.
Margarita María Osorio Arango.
Diseño de carátula: Juan Carlos Uribe Osorio.
Impresión y Terminación Editorial Artes y Letras Ltda. - Itaguí - Tel: 372 77 16

AGRADECIMIENTOS:

Al profesor Jesús Enrique Uribe Ángel, quien elaboró las preguntas correspondientes a las comprensiones de lectura de cada unidad.
A los profesores Luis Alfonso Vélez Moreno, profesor asociado de la Escuela de Estradística de la Universidad Nacional de Colombia, sede Medellín, y Juan Manuel Ramírez Salazar, profesor del Colegio Calasanz, quienes hicieron importantes sugerencias metodológicas y de contenido al material de estadística.
Al profesor Fernando Puerta Ortiz, quien revisó y corrigió la primera edición de este texto

CRÉDITOS

Este texto recomienda el uso del paquete computacional DERIVE, propiedad de TEXAS INSTRUMENTS INCORPORATED. Se adquiere este material, hágalo de forma legal; recuerde que la piratería es un delito y, como tal, será sancionado según las leyes

ISBN 958-97011-8-3

Contenido

MATEMÁTICA

escrito para

ESTRUCTURAR Y DESARROLLAR EL

a través de

UN CURRÍCULO

mediado por

PROCESOS GENERALES

como

- PLANTEAMIENTO Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
  - Enunciar el problema
  - Desarrollar estrategias de solución
  - Verificar los resultados
  - Generalizar las estrategias de solución
  - Utilizar significativamente la matemática para aplicarla en la solución de nuevos problemas
- RAZONAMIENTO
  - Cómo y por qué de los procesos
  - Justificar los procedimientos
  - Plantear hipótesis y argumentos a partir de propiedades conocidas
  - Exhibir contraejemplos para mostrar la falsedad de ciertas proposiciones
  - Identificar patrones de comportamiento
- COMUNICACIÓN
  - Expresar oralmente las ideas
  - Escribir procesos de solución de problemas
  - Enunciar e interpretar propiedades
  - Evaluar información
- MODELACIÓN
  - Identificar las partes de un problema
  - Escribir un modelo matemático para el enunciado de un problema
  - Resolver el modelo
  - Verificar las soluciones obtenidas
- EJERCITACIÓN
  - Realizar cálculos aritméticos, métricos, geométricos, analíticos y de rutina
  - Dibujar gráficas
  - Medir objetos
  - Realizar transformaciones en el plano y en el espacio

CONOCIMIENTOS ESPECÍFICOS

dados en

PENSAMIENTOS

como

PENSAMIENTO NUMÉRICO

a través de

LÓGICA Y CONJUNTOS

como

- OPERACIONES CON CONJUNTOS:
  - Unión e intersección
- Funciones proposicionales dadas mediante desigualdades.
- DEMOSTRACIÓN DE ALGUNAS PROPIEDADES RELATIVAS A:
  - Desigualdades
  - Línea recta
  - Circunferencia
  - Cónicas
  - Identidad trigonométrica

LOS NÚMEROS REALES

como

- CEROS REALES DE UN POLINOMIO
  - Ceros racionales
  - Ceros irracionales
  - Teorema del valor intermedio
- ORDEN DE LOS REALES
  - Axiomas de orden.
  - Las relaciones $<, >, \leq, \geq$.
  - Propiedades de las desigualdades.
- INTERVALOS DE NÚMEROS REALES
  - Cerrados, abiertos y semicerrados.
  - Intervalos infinitos

PENSAMIENTO ESPACIAL

a través de

- REPRESENTAR GEOMÉTRICAMENTE:
  - Intervalos
  - Solución de inecuaciones
  - Líneas rectas, circunferencias y secciones cónicas
- INTERPRETCIÓN GRÁFICA DEL DOMINIO Y EL RANGO DE UNA FUNCIÓN
- APLICAR LAS PROPIEDADES DE LA GEOMETRÍA EN LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE MODELADO DE FUNCIONES

para desarrollar

COMPETENCIAS

INTERPRETATIVA

PROPOSITIVA

evidenciadas por el alcance de

LOGROS

como

DESTREZA OPERATIVA

APROPIACIÓN Y COMUNICACIÓN DE CONCEPTOS

EXPERIMENTAL 10

PENSAMIENTO LÓGICO MATEMÁTICO

CONTEXTO

como

- Conocer el ambiente social y familiar que rodea al estudiante.
- Identificar la realidad emocional y sicológica propia de la adolescencia.
- Crear, por parte del docente, un ambiente adecuado de motivación para el aprendizaje.
- Lograr la participación activa del estudiante en los procesos de aprendizaje.
- Desarrollar la capacidad de pensamiento de los estudiantes teniendo en cuenta que se encuentra saliendo de la etapa de las operaciones concretas e ingresando a la etapa de las operaciones formales.
- Preparar a los estudiantes para resolver problemas de la vida cotidiana y de la ciencia.

PENSAMIENTO MÉTRICO

a través de

- UTILIZAR LAS UNIDADES DE MEDIDA DE LONGITUD, ÁREA Y VOLUMEN EN LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE MODELADO DE FUNCIONES.
- EMPLEAR LAS UNIDADES DE MEDIDA EN LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE APLICACIÓN DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS Y DE LAS SECCIONES CÓNICAS

PENSAMIENTO ALEATORIO

a través de

- REVISIÓN DE CONCEPTOS:
  - Medidas de posición: cuartiles, deciles y percentiles
  - Medidas de dispersión: rango, rango intercuartil, varianza y desviación estándar
- CORRELACIÓN Y REGRESIÓN:
  - Diagrama de dispersión
  - Correlación entre dos variables
  - Coeficiente de correlación
  - Regresión lineal
  - Recta de mejor ajuste
  - Método de los mínimos cuadrados
  - Ajuste de recta usando la geometría analítica
  - Ajuste de recta usando la estadística

PENSAMIENTO VARIACIONAL

a través de

- ANALIZAR Y DISTRIBUIR GRÁFICAS DE RELACIONES A PARTIR DE:
  - Interceptos con los ejes
  - Simetrías con los ejes y con el origen
  - Dominio y rango
  - Tabla de valores
- IDENTIFICAR, ANALIZAR Y DIBUJAR LAS CÓNICAS A TRAVÉS DE:
  - Sus ecuaciones general y básica
  - Sus elementos claves: centro, eje focal, veértice(s), foco(s), eje normal, asíntotas (si las tiene)
- REPRESENTAR FUNCIONES A TRAVES DE:
  - Enunciados verbales
  - Tablas de valores
  - Gráficas
  - Fórmulas o reglas
- CLASIFICAR FUNCIONES REALES COMO:
  - Algebraicas
  - Trascendentes
  - Especiales
- OBTENER FUNCIONES A PARTIR DE OTRAS MEDIANTE:
  - Traslaciones horizontales y verticales
  - Contracciones horizontales y verticales
  - Simetrías respecto a los ejes
- RESOLVER PROBLEMAS DE MODELADO DE FUNCIONES
- ANALIZAR Y DIBUJAR LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS
- PROBAR IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS
- RESOLVER ECUACIONES TRIGONOMETRICAS
- RESOLVER PROBLEMAS QUE GENERAN TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS Y NO RECTÁNGULOS (APLICAR LEYES DE SENO Y COSENO)

ARGUMENTATIVA

DIBUJO DE GRÁFICOS

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Primera parte

- Revisión de Conceptos
- Orden en los Reales
- Relaciones Reales
- Funciones Reales

Núcleo Temático

1

REVISIÓN DE CONCEPTOS Y ORDEN EN R

LOGRO GENERAL

- Afianzar, ampliar e interiorizar los conceptos adquiridos en los cursos anteriores buscando fortalecer la destreza operativa y la solución de problemas algebraicos y geométricos.

DIMENSIONES

LOGROS ESPECÍFICOS	INDICADORES DE LOGRO
Corporal: • Participar activamente en los talleres programados para realizar un repaso profundo y serio, de los contenidos estudiados en cursos anteriores.	• Interviene en un trabajo colectivo en el cual los alumnos son elegidos al azar para exponer problemas que traen por escrito. • Participa en actividades de destreza operativa, manejo conceptual y solución de problemas.
Comunicativa: • Emplear correctamente el vocabulario matemático. • Expresarse con seguridad delante de sus compañeros.	• Explica con sus propias palabras el significado de los conceptos matemáticos. • Escribe en lenguaje matemático el enunciado de los problemas. • Explica con claridad y precisión los procesos seguidos para la obtención de los resultados.
Cognitiva: • Repasar los algoritmos de la factorización y la simplificación de fracciones. • Resolver ecuaciones polinómicas y sistemas de ecuaciones. • Revisar las propiedades geométricas relativas a ángulos, triángulos, cuadriláteros, congruencia y semejanza de figuras. • Revisar las propiedades geométricas relacionadas con el cálculo de áreas y volúmenes. • Enunciar e interpretar las propiedades de las desigualdades. • Resolver ecuaciones polinómicas y fraccionarias.	• Dado un conjunto de números reales, los clasifica en racionales e irracionales. • Factoriza polinomios en R. • Halla ceros reales de un polinomio. • Resuelve ecuaciones polinómicas. • Resuelve problemas donde es necesario aplicar las propiedades básicas de los ángulos, los triángulos, los cuadriláteros, la congruencia y la semejanza de figuras. • Calcula áreas y volúmenes de figuras geométricas. • Interpreta las propiedades de las desigualdades. • Resuelve una inecuación dada.
Estética: • Dibujar figuras que traduzcan enunciados de problemas algebraicos.	• Ilustra mediante dibujos o gráficos el enunciado de un problema de tipo algebraico o geométrico.
Ética - Actitudinal: • Reconocer la importancia de realizar un buen repaso, como punto de partida para adquirir nuevos conocimientos.	• Presenta sus trabajos, tareas e informes en el tiempo señalado.

EVALUACIÓN

ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS

1.1 COMPRENSIÓN DE LECTURA: EL ÁLGEBRA EN EUROPA

Lee atentamente el siguiente texto y luego subraya la letra correspondiente a la ÚNICA respuesta correcta en cada uno de los enunciados propuestos.

Después de Al-Kharizmi surge un grupo de algebristas, primero en Oriente y luego en España, cuyas obras pasan al Medioevo a través de las versiones latinas hechas en la Escuela de Traductores de Toledo, fundada por el arzobispo Don Raimundo, poco después de la conquista de la ciudad por Alfonso VI. Este hecho facilitó el cruzamiento de las culturas oriental y occidental tan beneficiosa para la atrasada Europa, que despertó del letargo en que estaba sumida desde que los bárbaros destruyeron la civilización grecorromana.

La difusión del álgebra en Europa trajo como consecuencia su democratización, y la historia nos enseña que mientras más cultivadores tiene una disciplina científica más ocasiones y motivos hay de inspiración. La fundación de las universidades, colegios y escuelas y las expediciones de los cruzados contribuyeron a crear un clima favorable a la ciencia, que hizo posible los progresos de los siglos XVI y XVII. Durante la Edad Media - insuficientemente estudiada aún desde el punto de vista matemático - surgen algebristas tan notables como Leonardo Fibonacci, que trajo a Italia el álgebra de los árabes, Jordano Namorario, Juan de Sacrobosco y Nicolás Chequet, que fue el primero que utilizó el signo radical con índices.

1. Las siguientes afirmaciones son verdaderas, con excepción:

a. En España funcionó una institución dedicada a traducir textos matemáticos.
b. A finales de la Edad Media se presentó un cruce de las culturas oriental y occidental que trajo grandes beneficios a Europa.
c. Los bárbaros fueron los destructores de la cultura oriental.
d. El álgebra de los árabes fue llevada por L. Fibonacci a Italia en la Edad Media.

2. El enunciado que mejor expresa el contenido del texto es:

a. Europa despierta de un largo sueño.
b. Italia, cuna de grandes algebristas.
c. La escuela de Toledo y sus grandes aportes a la Ciencia.
d. El cruce de culturas que trae como consecuencia el progreso del pueblo Europeo.

3. La expresión "despertó del letargo" da a entender que Europa:

a. Padeció de la famosa epidemia del sueño.
b. Había estado estancada durante un período de tiempo considerable.
c. Vivió mucho tiempo alejada de la cultura.
d. Salió de su atraso debido a la intervención de los bárbaros.

4. Del texto anterior se puede inferir que:

a. En el campo de la ciencia, la Edad Media, aún tiene que aportar.
b. Los árabes abordaron el tema del cálculo infinitesimal.

c. Namorario, Sacrobosco y Don Raimundo son científicos islámicos.
d. Después de la Edad Media, es España el país que pasa a la vanguardia en los estudios matemáticos.

5. De acuerdo con la forma y el contenido, el escrito anterior puede catalogarse como:

a. Narrativo
b. Expositivo
c. Descriptivo
d. Objetivo

1.2 ¿QUÉ VAMOS A ESTUDIAR Y QUÉ NECESITAMOS?

- En este texto vamos a desarrollar las ideas básicas de un curso de **TRIGONOMETRÍA** y **GEOMETRÍA ANALÍTICA**.
- Para abordar con éxito el estudio de estos contenidos, es necesario contar con las herramientas matemáticas básicas del álgebra y la geometría euclidiana tales como: los números reales, productos notables, factorización, fracciones algebraicas, solución de ecuaciones y racionalización.
- Haremos pues, un repaso rápido de estos conceptos utilizando la siguiente estrategia:
  - En un recuadro presentamos los títulos de los conceptos que deben revisarse y las unidades de los textos MATEMÁTICA EXPERIMENTAL 8 y 9 donde pueden consultarse.
  - Luego, cuando sea necesario, ilustraremos con algún ejemplo.
  - Finalmente, presentamos un taller de ejercicios teórico-prácticos para ser resueltos por el alumno.
- Cada profesor evaluará la necesidad de efectuar este repaso y el momento y la metodología para adelantarlo. Nuestra propuesta es que se realice durante las dos o tres primeras semanas de clase para que los estudiantes entren en "calor" y hagan una buena "pretemporada".

1.3 ÁLGEBRA DE LOS NÚMEROS REALES

1.3.1. Los Números Reales

CONCEPTO	TEXTO	NÚCLEO TEMÁTICO
Los números reales. Estructura de campo de los reales. Igualdad de números reales y sus propiedades. Consecuencias algebraicas de la estructura de campo y de la igualdad de números reales.	Matemática Experimental 8	1
	Matemática Experimental 9	0

EJERCICIO 1.1

1 Contestar las siguientes preguntas:

a) ¿Cómo está conformado el conjunto de los números reales?

b) ¿Cuáles son los números racionales?

c) ¿Es $\sqrt[3]{0.001}$ un número racional o irracional?

d) ¿Es $\frac{\sqrt{75}}{5}$ un número racional o irracional?

e) ¿Es $\sqrt{-4}$ un número real? ¿Por qué?

f) ¿Cuándo $\sqrt[2n]{p(x)}$, con $n \in N$, es un número real?

g) ¿Cuándo $\dfrac{x+5}{x-3}$ es un número real?

h) ¿Cuándo $\log_2 (x+2)$ es un número real?

i) ¿Qué establece la propiedad de **COMPLETEZ** de los números reales?

j) ¿Por qué los números reales constituyen una ESTRUCTURA DE CAMPO?

k) ¿Cuáles son las propiedades de la igualdad de números reales?

l) ¿Cuáles consecuencias algebraicas se derivan de la estructura de campo en los números reales y de las propiedades de la igualdad?

2 En el paréntesis de la izquierda escribir una V o una F, según que el enunciado sea verdadero o falso.

( ) a) Algunos racionales son decimales infinitos periódicos.
( ) b) Ningún decimal infinito es irracional.
( ) c) Algunos racionales son decimales infinitos no periódicos.
( ) d) Todo decimal periódico es racional.
( ) e) Existen algunos números que no son ni enteros ni racionales.

3 ¿Cuáles de los siguientes números son racionales y cuáles irracionales?

a) La longitud de una circunferencia de radio $\frac{1}{2}$ cm.

b) El área de un cuadrado de lado 2 cm.

c) La hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 5 cm y 12 cm.

d) El volumen de un cilindro de altura 2 cm y cuya base tiene un radio de 1 cm.

e) El área de un triángulo rectángulo isósceles cuya hipotenusa mide 2 cm.

f) El área lateral de un cono de radio $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ cm y de altura 3 cm.

4 Llenar el siguiente cuadro con una x cuando el número de la columna izquierda corresponda al conjunto de la fila superior.

	N	Z	Q	Q'	R
-7					
3.14					
$\pi - \frac{2}{3}$					
$-\frac{5}{4}$					
$\frac{\sqrt{3}}{2}$					
$\sqrt{\frac{4}{9}}$					
$\sqrt[3]{\frac{4}{27}}$					
4.25					
$4\frac{3}{5}$					

5 Indicar las propiedades de los números reales que justifican las siguientes igualdades:

a) $(a + b) + (c + d) = (a + b) + (d + c)$

b) $(a + b) + c = c + (b + a)$

6. Hallar el inverso aditivo y el inverso multiplicativo de $\sqrt{2}$

7. Hallar el inverso aditivo y el inverso multiplicativo de $\sqrt{3}-\sqrt{2}$

8. Llenar el siguiente cuadro colocando V o F según que la afirmación sea verdadera o falsa para el conjunto dado.

	NATURALES	ENTEROS	RACIONALES	REALES
Cerrado con respecto a la suma				
Cerrado con respecto a la multiplicación				
Cerrado con respecto a la resta				
Cerrado con respecto a la división				
Todos los elementos poseen inverso aditivo				
Todos los elementos, excepto el neutro aditivo, poseen inverso multiplicativo				

1.3.2. Polinomios, Productos Notables y Factorización

CONCEPTO	TEXTO	NÚCLEO TEMÁTICO
• **POLINOMIOS** - Polinomio en una variable, grado, coeficiente principal, término independiente. - Polinomio en dos o más variables.	Matemática Experimental 8	3
	Matemática Experimental 9	0
• **PRODUCTOS NOTABLES** - Binomio al cuadrado - Binomio al cubo - Binomio de Newton - Suma por diferencia - Producto de un binomio por su trinomio cuadrado imperfecto	Matemática Experimental 8	5
	Matemática Experimental 9	0
• **FACTORIZACIÓN** - Concepto de factorización - Polinomios primos - Factor común - Trinomio cuadrado perfecto - Diferencia de cuadrados - Trinomios de la forma $ax^{2n} + bx^n + c$, con $n \in N$. - Suma y diferencia de cubos - Agrupación de términos - Ceros de un polinomio, con una variable de grado $n>2$. - Ceros racionales de un polinomio - Ceros irracionales de un polinomio - Teorema del factor	Matemática Experimental 8	6
	Matemática Experimental 9	0

Ejemplo 1

Hallemos, por simple inspección, el resultado de (3m - 2n + 5p) (3m - 2n - 5p)

SOLUCIÓN

Agrupemos los dos primeros términos de cada paréntesis para obtener una suma por diferencia:

$$\begin{aligned}(3m - 2n + 5p)(3m - 2n - 5p) &= [(3m - 2n) + 5p][(3m - 2n) - 5p] \\ &= (3m - 2n)^2 - (5p)^2 \\ &= 9m^2 - 12mn + 4n^2 - 25p^2\end{aligned}$$

Ejemplo 2

Hallemos, por simple inspección, el resultado de $(7x - 3y)(49x^2 + 21xy + 9y^2)$

SOLUCIÓN:

Como tenemos el producto de una diferencia por su trinomio cuadrado imperfecto, entonces el resultado es una diferencia de cubos. Por lo tanto:

$$\begin{aligned}(7x - 3y)(49x^2 + 21xy + 9y^2) &= (7x)^3 - (3y)^3 \\ &= 343x^3 - 27y^3\end{aligned}$$

Ejemplo 3

Factoricemos el polinomio $1 - x^2 + 2xy - y^2$ en las variables x e y

SOLUCIÓN

El polinomio $1 - x^2 + 2xy - y^2$ se factoriza así:

$1 - x^2 + 2xy - y^2 = 1 - (x^2 - 2xy + y^2)$ . . . . Agrupamos los tres últimos términos en un paréntesis precedido del signo (-)

$\therefore 1 - x^2 + 2xy - y^2 = 1 - (x - y)^2$ . . . . El paréntesis es un trinomio cuadrado perfecto.

$\therefore 1 - x^2 + 2xy - y^2 = [1 - (x - y)][1 + (x - y)]$ . . . . Diferencia de cuadrados.

$\therefore 1 - x^2 + 2xy - y^2 = (1 - x + y)(1 + x - y)$ . . . . Quitamos paréntesis internos.

Ejemplo 4

Factoricemos, en los reales, el polinomio $x^7 - 3x^6 + 2x^5$

SOLUCIÓN

En los racionales, el polinomio $x^7 - 3x^6 + 2x^5$ se factoriza así:

$x^7 - 3x^6 + 2x^5 = x^5(x^2 - 3x + 2)$ . . . . Factor común x^5

$\therefore x^7 - 3x^6 + 2x^5 = x^5(x - 2)(x - 1)$ . . . . $x^2 - 3x + 2$ es un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$

Ejemplo 5

¿Cómo se obtiene el término $\boxed{?}$ en el trinomio $x^2 + 5x + \boxed{?}$ para que resulte un trinomio cuadrado perfecto?

SOLUCIÓN

- En un trinomio de la forma $\mathbf{ax^{2n} + bx^n} + \boxed{?}$, donde $\mathbf{n} \in \mathbf{Z^+}$ y $\mathbf{a = 1}$, el término independiente $\boxed{?}$ se obtiene calculando la mitad del coeficiente del segundo término y elevando este resultado al cuadrado; es decir:

$$\boxed{?} = \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

- Por lo tanto, en el trinomio $\mathbf{x^2 + 5x +}$ $\boxed{?}$ el término correspondiente a $\boxed{?}$ necesario para completar un trinomio cuadrado perfecto, se obtiene así:

$$\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$$

- **PREGUNTA:** ¿Qué habrá que hacer si el coeficiente del término x^{2n} es diferente de 1?

Ejemplo 6

Probemos que el polinomio $x^2 + 4x + 7$ es primo en R .

SOLUCIÓN

- Debemos probar que $x^2 + 4x + 7$ no es factorizable en R. La estrategia es aplicar el método de completación al trinomio cuadrado perfecto, así:

$$x^2 + 4x + 7 = (x^2 + 4x + \quad) + 7 \cdots\cdots \text{¿Por qué?}$$

$$\therefore x^2 + 4x + 7 = \left[x^2 + 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2\right] + 7 - \left(\frac{4}{2}\right)^2 \cdots\cdots \text{¿Por qué?}$$

$$\therefore x^2 + 4x + 7 = (x + 2)^2 + 7 - 4 \cdots\cdots \text{¿Por qué?}$$

$$\therefore x^2 + 4x + 7 = (x + 2)^2 + 3 \cdots\cdots \text{¿Por qué?}$$

- La expresión $(x + 2)^2 + 3$ es una suma de cuadrados NO factorizable en los reales. Por lo tanto, $x^2 + 4x + 7$ es PRIMO en los reales.
- Si calculamos el valor del discriminante $b^2 - 4ac$ obtenemos:

$$b^2 - 4ac = 4^2 - 4(1)(7)$$
$$\therefore b^2 - 4ac = 16 - 28$$
$$\therefore b^2 - 4ac = -12 < 0$$

Ejemplo 7

Factoricemos en R el polinomio $8x^4 + 6x^3 - 15x^2 - 12x - 2$

SOLUCIÓN

- Si el polinomio tiene factores reales entonces buscamos primero los ceros racionales que serán de la forma $\frac{p}{q}$, donde p es un divisor (factor) de 2 y q un divisor (factor) de 8; es decir:

$$D(2) = \pm1, \pm2$$
$$D(8) = \pm1, \pm2, \pm4, \pm8$$

Luego, los posibles ceros son: $\pm1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{8}, \pm2$

- Ahora empezamos a tantear con el objeto de encontrar cuál de los "sospechosos" cumple.

Ni 1, ni -1, ni $\frac{1}{2}$. Veamos con $-\frac{1}{2}$. Apliquemos el proceso de la División Sintética:

	8	6	-15	-12	-2
$-\frac{1}{2}$		-4	-1	8	2
	8	2	-16	-4	0

Luego, $x = -\frac{1}{2}$ es un cero y $\left(x + \frac{1}{2}\right)$ es un factor; por lo tanto:

$$P(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)(8x^3 + 2x^2 - 16x - 4)$$

- Si continuamos probando, por tanteo, encontraremos que $-\frac{1}{4}$ también es un cero. Veamos:

	8	2	-16	-4
$-\frac{1}{4}$		-2	0	4
	8	0	-16	0

Luego, $\left(x + \frac{1}{4}\right)$ es un factor del polinomio y:

$$P(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{4}\right)(8x^2 - 16)$$

$$= \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{4}\right) 8(x^2 - 2)$$

- El último factor cuadrático es una diferencia de cuadrados NO FACTORIZABLE en los racionales, pero sí en los reales:

$$x^2 - 2 = \left(x + \sqrt{2}\right)\left(x - \sqrt{2}\right)$$

Luego:

$$P(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{4}\right)8\left(x + \sqrt{2}\right)\left(x - \sqrt{2}\right)$$

$$= 8\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{4}\right)\left(x + \sqrt{2}\right)\left(x - \sqrt{2}\right)$$

$$= 2 \cdot 4\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{4}\right)\left(x + \sqrt{2}\right)\left(x - \sqrt{2}\right)$$

$$= 2\left(x + \frac{1}{2}\right)4\left(x + \frac{1}{4}\right)\left(x + \sqrt{2}\right)\left(x - \sqrt{2}\right)$$

$$= (2x + 1)(4x + 1)\left(x + \sqrt{2}\right)\left(x - \sqrt{2}\right)$$

Ejemplo 8

Hallemos los ceros reales del polinomio $P(x) = x^3 + 2x - 4$

SOLUCIÓN

- Los ceros de un polinomio P(x) son los valores de x para los cuales P(x)= 0. Como queremos hallar los ceros reales, entonces éstos pueden ser racionales o irracionales. De acuerdo con lo estudiado en el ejemplo anterior, los posibles ceros racionales de $x^3 + 2x - 4$ son ± 1, ± 2 y ± 4 (¿por qué); sin embargo, fácilmente podemos comprobar que ninguno de ellos anula el polinomio. Por lo tanto, este polinomio no tiene ceros racionales.

- El procedimiento para encontrar los ceros irracionales se fundamenta en una importante propiedad denominada **TEOREMA DE VALOR INTERMEDIO,** consistente en lo siguiente:

1. Escogemos, arbitrariamente, dos números enteros preferiblemente consecutivos, hallamos el valor del polinomio en cada uno de ellos y verificamos que estos valores tengan signo contrario. Si no tienen signo contrario, debemos escoger otros dos valores. Por ejemplo:

* Si a = 0 y b = 1 entonces P(0) = - 4 y P (1) = 1 + 2 - 4 = -1; luego, no hay cambio de signo. Debemos escoger otros dos valores.

* Si a = 1 y b = 2 entonces P(1) = -1 y P(2) = 8 + 4 - 4 = 8; como hay cambio de signo, podemos garantizar que entre 1 y 2 hay un cero.

2. El paso siguiente consiste en "estrechar" el intervalo entre 1 y 2. Con este fin, hallamos el valor del polinomio para un número entre 1 y 2 ; por ejemplo, para 1.5; así: P (1.5) = 3.375 + 3 - 4 = 2.375. ¿ Qué comprobamos? que P(1) = -1 y P(1.5) = 2.375; es decir, hay cambio de signo y el cero está entre 1 y 1.5

3. Sigamos estrechando el intervalo. Escojamos un valor entre 1 y 1.5; por ejemplo, 1.2: P(1.2) = 1.728 + 2.4 - 4 = 0.128. Por lo tanto, P(1) = -1 y P(1.2) = 0.128. Luego, el cero está entre 1 y 1.2.

Notemos que P(1.2) = 0.128. Este resultado está muy próximo a cero; es decir, la raíz de esta ecuación está más cercana a 1.2 que a 1.

4. Tomemos ahora un valor más próximo a 1.2; por ejemplo,1.1: P(1.1) = 1.331 + 2.2 - 4 = - 0.471. Por tanto, P(1.1) = -0.471 y P(1.2) = 0.128; luego, el cero está entre 1.1 y 1.2. Si tomamos 1.18 nos queda que P(1.18) = 0.003032, el cual es sumamente próximo a cero.

5. Podemos obtener una mejor aproximación si continuamos el proceso con números que tengan tres o más cifras decimales. Sin embargo, nuestro propósito es sólo hallar un valor que nos proporcione una buena aproximación al cero que buscamos. Por esta razón, podemos afirmar que 1.18 es una buena aproximación al cero del polinomio $P(x) = x^3 + 2x - 4$

6. Como 1.18 es un cero aproximado del polinomio, entonces (x - 1.18) es factor aproximado del mismo. Utilizando la división sintética encontramos los coeficientes aproximados al otro factor del polinomio; así:

	1	0	2	-4
1.18		1.18	1.3924	4.003032
	1	1.18	3.3924	$0.00303 \approx 0$

Notemos que el residuo de la división es casi cero (0.003032). Así pues, podemos afirmar que:

$$x^3 + 2x - 4 \approx (x - 1.18)(x^2 + 1.18x + 3.3924)$$

Realiza el producto $(x - 1.18)(x^2 + 1.18x + 3.3924)$ y compara qué tan parecidos son los coeficientes del polinomio resultante con los coeficientes correspondientes del polinomio $x^3 + 2x - 4$.

7. Puesto que el factor $x^2 + 1.18x + 3.3924$ es un polinomio cuadrático, entonces sus ceros podemos encontrarlos aplicando la fórmula cuadrática; así:

$$x = \frac{-1.18 \pm \sqrt{1.18^2 - 4(1)(3.3924)}}{2}$$

$$\therefore x = \frac{-1.18 \pm \sqrt{1.39 - 13.5696}}{2}$$

$$\therefore x = \frac{-1.18 \pm \sqrt{-12.17}}{2} \notin R$$

Por lo tanto, $x^2 + 1.18x + 3.3924$ no tiene ceros reales.

- **CONCLUSIÓN**: El polinomio $P(x) = x^3 + 2x - 4$ sólo tiene un cero en los reales es: $x \approx 1.18$

ATENCIÓN

1. El método descrito en el ejemplo anterior se denomina **MÉTODO DE BISECCIÓN** porque el intervalo de números comprendidos entre **a** y **b** se puede estrechar una y otra vez utilizando el Teorema del Valor Intermedio hasta hallar la raíz que buscamos.

2. Hay una fórmula que nos permite hallar un valor aproximado de la raíz **c** de una ecuación polinómica $P(x) = 0$ cuando conocemos dos números **a** y **b** tales que **P(a)** y **P(b)** tienen signos contrarios. La fórmula es la siguiente:

$$c \approx \frac{aP(b) - b\,P(a)}{P(b) - P(a)}$$

El valor de c tendrá una mejor aproximación mientras más cercanos sean entre sí los números **a** y **b**. Si en nuestro ejemplo anterior tomamos los valores $a = 1$ y $b = 2$ entonces:

$$c \approx \frac{1P(2) - 2P(1)}{P(2) - P(1)}$$

$$\therefore\ c \approx \frac{(1)\cdot(8) - 2\cdot(-1)}{8 - (-1)}$$

$$\therefore\ c \approx \frac{8 + 2}{8 + 1}$$

$$\therefore\ c \approx \frac{10}{9}$$

$$\therefore\ c \approx 1.11$$

Si tomamos los valores $a = 1$ y $b = 1.5$, entonces:

$$c \approx \frac{1P(1.5) - 1.5\,P(1)}{P(1.5) - P(1)}$$

$$\therefore\ c \approx \frac{(1)\cdot(2.38) - (1.5)\cdot(-1)}{2.38 - (-1)}$$

$$\therefore\ c \approx \frac{2.38 + 1.5}{2.38 + 1}$$

$$\therefore\ c \approx \frac{3.88}{3.38}$$

$$\therefore\ c \approx 1.15$$

Como vemos, ambos resultados 1.11 y 1.15 son buenas aproximaciones a la aproximación 1.18. El valor 1.15 es más próximo a 1.18 que 1.11 debido a que el intervalo entre 1 y 1.15 es más estrecho que el intervalo entre 1 y 2.

EJERCICIO 1.2

1 Contestar las siguientes preguntas:

a) ¿Cómo se escribe en forma simbólica el enunciado: **Cuadrado de la suma de $2x^3$ y $4y^2$** ?

b) ¿Cómo se escribe en forma simbólica el enunciado: **Suma de los cuadrados de $2x^3$ y $4y^2$** ?

c) ¿Cuál es el desarrollo de una suma al cuadrado?

d) ¿Es una diferencia de cuadrados igual a una diferencia al cuadrado?
e) ¿Cuál es el trinomio cuadrado perfecto de (2a - 3b) ¿Y su trinomio cuadrado imperfecto?
f) ¿Es lo mismo el cubo de la diferencia de dos términos que la diferencia de los cubos de esos mismos términos? ¿por qué?
g) ¿Cómo se llega a una suma de cubos?
h) ¿Qué es factorizar un polinomio en un determinado conjunto numérico?
i) ¿Cuándo un polinomio es primo en un determinado conjunto numérico?
j) ¿En qué conjuntos es primo el polinomio $x^2 - 7$?
k) ¿Cómo se halla el factor común de un polinomio?
l) ¿Cómo se identifica un trinomio cuadrado perfecto? ¿Cómo se factoriza?
m) ¿Es siempre factorizable una suma de cuadrados? ¿Cómo se analiza si es factorizable?
n) ¿Cómo se identifica una diferencia de cuadrados? ¿Y cómo se factoriza?
o) ¿Qué diferencia hay entre una diferencia de cuadrados y una diferencia al cuadrado?
p) ¿Qué características presenta un trinomio de la forma $x^{2n} + bx^n + c$?
q) ¿Cómo se factoriza un trinomio de la forma $x^{2n} + bx^n + c$?
r) ¿Cómo se identifica un trinomio de la forma $ax^{2n} + bx^n + c$?
s) Explique el método de completación al trinomio cuadrado perfecto para factorizar trinomios de la forma $ax^{2n} + bx^n + c$.
t) ¿Cómo se identifica una suma de cubos? ¿Y una diferencia de cubos?
u) ¿Cómo se factoriza una suma de cubos? ¿Y una diferencia de cubos?
v) ¿Cuál es el trinomio cuadrado imperfecto de $x^2 - y^3$?
w) ¿Cuándo un número real es cero de un polinomio?
x) ¿Qué establece el Teorema del Factor?
y) Describa el procedimiento para hallar los ceros racionales de un polinomio, en caso de que los tenga.
z) Describa el procedimiento para hallar los ceros irracionales de un polinomio, en caso de que los tenga.

En los ejercicios 2 a 21 efectuar las operaciones indicadas, utilizando los productos notables:

2 $(x + y + z)^2$

3 $(3b^2 + 6c^3)(3b^2 - 6c^3)$

4 $\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{5}\right)\left(\frac{x}{3}-\frac{y}{5}\right)$

5 $(m^3 + m^2 - 2m + 1)^2$

6 $(2x + 3y - 4z - 2w)^2$

7 $[3 (a+b) -2] [3 (a+b) +2]$

8 $[(a^2+3) -a] [(a^2+3) + a]$

9 $[(a^3-a) + (a^2- 3)][(a^3-a) - (a^2- 3)]$

10 $(x + y + z) (x + y - z) (x - y + z) (y + z - x)$

11 $(ax + by)^2 (ax - by)^2$

12 $(3a - b) (9a^2 + 3ab + b^2)$

13 $(x + 2) (x^2 - 2x + 4)$

14 $[(x+y)^2 +2(x+y)+1] [(x+y)^2 -2(x+y)+1]$

15 $(x - 2y + 5z) (x + 2y + 5z)$

16 $(2x - 3y - 5z) (2x + 3y + 5z)$

17 $(-bu - v) (bu - v)$

18 $(a + 3b)^2 (a^2 - 6ab + 9b^2)$

19 $(x + 2y) (x - 2y) (x^2 + 4y^2)$

20 $(2x - 5y) (4x^2 + 10xy + 25y^2)$

21 $(3a + 2b - c) (3a - 2b + c)$

En los ejercicios del 22 al 65 factorizar los polinomios dados en el conjunto de los números racionales.

22 $9x^2y^2 - 36z^6$

23 $3ax - bx - 3ay + by$

24 $12x^2y^3 - 4x^3y^2$

25 $12a^2 - 4ab - 3ax^2 + bx^2$

26 $36t^8 - 25x^{10}$

27 $6x^2 + 3xy - 2ax - ay$

28 $4a^2 - 12ab + 9b^2$

29 $y^3 - y^2 + y - 1$

30 $a^{2n+1} + a^{n+2} + a^{n+1}$; con $n \in Z$

31 $x^2 - x - 2$

32 $6st^2 - 9s^2t - 2t^3 + 27s^3$

33 $x^2 - 26x + 165$

34 $x - 4y - x^3 + 64y^3$

35 $x^2 - 9x - 90$

36 $64x^6 - y^6$

37 $x^2y^2 + 34xy + 289$

38 $a^3 + 27b^3 + a + 3b$

39 $204 - 29x^2 + x^4$

40 $x^2 - a^2 - 6xy + 2ab + 9y^2 - b^2$

41 $110 - x - x^2$

42 $a^3 - 9b^2 - 27b^3 + a^2$

43 $x^4 - 14x^2 - 51$

44 $4(a + b)2 - 5(a + b) - 6$

45 $a^2y^2 + 14ay - 240$

46 $18a^3 - 8a(x^2 + 8x + 16)$

47 $2x^2 + 3x + 1$

48 $9x^3 - 12x^2y + 4xy^2$

49 $10x^2 + 79x - 8$

50 $16x^4 - x^2 + 6xy - 9y^2$

51 $x^2 - 2xy - 323y^2$

52 $a^2 - 4b^2 + a^2b - 2ab^2$

53 $a^2 + 2ab + b^2 + a + b$

54 $4a^4 - a^2 - 4ab - 4b^2$

55 $x^3 + 12x^2y - 45xy^2$

56 $2x^3 - x^2 - 8x + 4$

57 $6x^2 - 31x + 35$

58 $x^2 - 9 + y^2 - 2xy$

59 $20 - 9x - 20x^2$

60 $a^2 + 2ab + b^2 - a^3 - b^3$

61 $65 + 8xy - x^2y^2$

62 $u^3v - 9uv^3$

63 $3x^3 + 6x^2 - 189x$

64 $m^9 - 27n^{12}$

65 $x^3 + 5x^2 - x - 5$

Hallar los ceros reales y factorizar los polinomios de los ejercicios 66 a 70.

66 $x^5 - 3x^4 - 15x^3 + 35x^2 + 54x - 72$

67 $x^5 - 2x^4 - 10x^3 + 20x^2 + 9x - 18$

68 $x^6+5x^5+x^4-25x^3-26x^2+20x+24$

69 $48x^4 - 52x^3 + 13x - 3$

70 $2x^4 + 5x^3 - 9x^2 - 15x + 9$

1.3.3. Fracciones Algebraicas, Racionalización y Solución de Ecuaciones

CONCEPTO	TEXTO	NÚCLEO TEMÁTICO
• **FRACCIONES ALGEBRAICAS RACIONALES** - Simplificación - Suma y resta - Multiplicación y división - Fracciones complejas	Matemática Experimental 8 Matemática Experimental 9	8 0
• **RACIONALIZACIÓN DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS** - De monomios - De binomios con raíces cuadradas - De binomios con raíces cúbicas	Matemática Experimental 9	4
• **SOLUCIÓN DE ECUACIONES** - De primer grado con signos de agrupación y denominadores	Matemática Experimental 8	9

CONCEPTO	TEXTO	NÚCLEO TEMÁTICO
- De segundo grado con signos de agrupación y denominadores	Matemática Experimental 9	7
- Irracionales que conducen a ecuaciones de primero o segundo grado	Matemática Experimental 9	8
- Polinómicas de grado n>2	Matemática Experimental 9	8
- Solución de sistemas de ecuaciones	Matemática Experimental 9	1

Ejemplo 1

Simplifiquemos la expresión $\dfrac{a^4-b^4}{a^3+b^3}\cdot\left[1+\dfrac{a\,b}{(a-b)^2}\right]\div\left[\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\right]$

SOLUCIÓN

En esta expresión aparece una combinación de operaciones con fracciones algebraicas. El primer paso en su solución es simplificar cada fracción, si es posible. A continuación se resuelven las operaciones de suma o resta contenidas dentro de los corchetes. Finalmente, se resuelven las multiplicaciones y las divisiones. Veamos:

$$\frac{a^4-b^4}{a^3+b^3}\cdot\left[1+\frac{a\,b}{(a-b)^2}\right]\div\left[\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right]=\frac{(a^2+b^2)\cancel{(a+b)}(a-b)}{\cancel{(a+b)}(a^2-ab+b^2)}\cdot\left[\frac{(a-b)^2+ab}{(a-b)^2}\right]\div\left[\frac{b^2+a^2}{a^2b^2}\right]$$

$$=\frac{(a^2+b^2)(a-b)}{a^2-ab+b^2}\cdot\left[\frac{a^2-2ab+b^2+ab}{(a-b)^2}\right]\cdot\left[\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\right]$$

$$=\frac{(a^2+b^2)(a-b)}{\cancel{a^2-ab+b^2}}\cdot\left[\frac{\cancel{a^2-ab+b^2}}{(a-b)^2}\right]\cdot\left[\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\right]$$

$$=\frac{\cancel{(a^2+b^2)}\cancel{(a-b)}\cdot\cancel{(a^2-ab+b^2)}\cdot a^2b^2}{\cancel{(a^2-ab+b^2)}(a-b)^2\cancel{(a^2+b^2)}}$$

$$=\frac{a^2b^2}{a-b}$$

Ejemplo 2

Simplifiquemos la expresión $\left(\dfrac{x^{-2}\,y^{-3}}{x^3\,y^2}\right)\cdot\left[\dfrac{(y^3\,x^{-3})^{-3}}{x^2\,y^3}\right]^{-2}$

SOLUCIÓN

- Para simplificar y escribir con exponente positivo la expresión $\left(\frac{x^{-2}\,y^{-3}}{x^3\,y^2}\right)\cdot\left[\frac{(y^3\,x^{-3})^{-3}}{x^2\,y^3}\right]^{-2}$ se aplica la definición de potenciación cuando el exponente es negativo: $x^{-n}=\dfrac{1}{x^n}$ y las leyes de los exponentes:

1. $x^n\cdot y^m=x^{n+m}$ **2.** $\dfrac{x^n}{x^m}=x^{n-m}$ **3.** $(x^m)^n=x^{n\cdot m}$ **4.** $(x\cdot y)^m=x^m\cdot y^m$ **5.** $\left(\dfrac{x}{y}\right)^m=\dfrac{x^m}{y^m}$

- Por lo tanto:

$$\left(\frac{x^{-2}\,y^{-3}}{x^3\,y^2}\right)\cdot\left[\frac{\left(y^3\,x^{-3}\right)^{-3}}{x^2\,y^3}\right]^{-2} = \left(\frac{1}{x^2\,x^3\,y^2\,y^3}\right)\cdot\left[\frac{y^{-9}\,x^9}{x^2\,y^3}\right]^{-2}$$

$$= \left(\frac{1}{x^5\,y^5}\right)\cdot\left(\frac{y^{18}\,x^{-18}}{x^{-4}\,y^{-6}}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{x^5\,y^5}\right)\cdot\left(\frac{x^4\cdot y^{18}\cdot y^6}{x^{18}}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{x^5\,y^5}\right)\cdot\left(\frac{y^{18+6}}{x^{18-4}}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{x^5\,y^5}\right)\cdot\left(\frac{y^{24}}{x^{14}}\right)$$

$$= \frac{y^{24}}{x^5\,y^5\,x^{14}} = \frac{y^{24}}{x^{19}\,y^5} = \frac{y^{19}}{x^{19}}$$

Ejemplo 3

Racionalicemos el denominador de $\frac{y^2}{x+\sqrt{x^2-y^2}}$

SOLUCIÓN

$$\frac{y^2}{x+\sqrt{x^2-y^2}} = \frac{y^2\left(x-\sqrt{x^2-y^2}\right)}{\left(x+\sqrt{x^2-y^2}\right)\left(x-\sqrt{x^2-y^2}\right)}$$

$$= \frac{y^2\left(x-\sqrt{x^2-y^2}\right)}{x^2-\left(x^2-y^2\right)}$$

$$= \frac{y^2\left(x-\sqrt{x^2-y^2}\right)}{\cancel{x^2}-\cancel{x^2}+y^2}$$

$$= \frac{\cancel{y^2}\left(x-\sqrt{x^2-y^2}\right)}{\cancel{y^2}}$$

$$= x - \sqrt{x^2-y^2}$$

Ejemplo 4

Racionalicemos el denominador de $\frac{x+y}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}$

SOLUCIÓN

$$\frac{x+y}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}} = \frac{(x+y)\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x\,y}+\sqrt[3]{y^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}\right)\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x\,y}+\sqrt[3]{y^2}\right)}$$

$$= \frac{\cancel{(x+y)}\left(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}\right)}{\cancel{(x+y)}}$$

$$= \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}$$

Ejemplo 5

Resolvamos la ecuación $\frac{b(x+a)}{x^2-b^2} + \frac{2x+3b-a}{x+b} = \frac{2\left(x^2+bx-b^2\right)}{x^2-b^2}$

SOLUCIÓN

- En general, para resolver una ecuación conviene tener en cuenta las siguientes recomendaciones:
  1. Eliminar los denominadores, multiplicando ambos lados de la ecuación por el m.c.m. de los denominadores dados.
  2. Eliminar signos de agrupación.
  3. Reducir términos semejantes.
  4. Determinar el grado de la ecuación y, de acuerdo con éste, proceder a hallar el valor de la incógnita.
- Sigamos estos pasos:

  1. Procedemos a eliminar los denominadores de la ecuación dada.
  Hallemos el m.c.m. de los denominadores:

$$\left.\begin{aligned} x^2-b^2 &= (x+b)(x-b) \\ x+b &= x+b \\ x^2-b^2 &= (x+b)(x-b) \end{aligned}\right\} \therefore \text{m.c.m.} = (x+b)(x-b)$$

  2. Multiplicamos ambos lados de la igualdad por (x + b) (x - b):

$$(x+b)(x-b)\left[\frac{b(x+a)}{(x+b)(x-b)} + \frac{2x+3b-a}{x+b}\right] = (x+b)(x-b)\cdot\frac{2\left(x^2+bx-b^2\right)}{(x+b)(x-b)}$$

$$\therefore \frac{\cancel{(x+b)}\cancel{(x-b)}\,b(x+a)}{\cancel{(x+b)}\cancel{(x-b)}} + \frac{\cancel{(x+b)}(x-b)(2x+3b-a)}{\cancel{(x+b)}} = \frac{2\cancel{(x+b)}\cancel{(x-b)}\left(x^2+bx-b^2\right)}{\cancel{(x+b)}\cancel{(x-b)}}$$

$\therefore\ b(x+a) + (x-b)(2x+3b-a) = 2(x^2+bx-b^2)$; con $x \neq b$ y $x \neq -b$

  3. A continuación, eliminamos los signos de agrupación (paréntesis) y reducimos términos semejantes:

$$bx + ab + \cancel{2x^2} + 3bx - ax - 2bx - 3b^2 + ab = \cancel{2x^2} + 2bx - 2b^2$$

$$\therefore\ 2bx - ax + 2ab - 3b^2 = 2bx - 2b^2$$

  4. En términos de x, la ecuación resultante es de primer grado; por lo tanto, para hallar su valor, transponemos todos los términos que tienen x a un lado de la ecuación y los términos que no tienen x al otro lado; así:

$$2bx - ax - 2bx = b^2 - 2ab$$

$$\therefore\ -ax = b^2 - 2ab$$

$$\therefore\ ax = 2ab - b^2$$

$$\therefore\ x = \frac{b(2a-b)}{a}\ ;\ \text{con } a \neq 0$$

Ejemplo 6

Despejemos y de la ecuación $y^2 - 4xy + 2y + 3x^2 - 6x = 0$

SOLUCIÓN

- Para saber cómo se despeja la y, debemos identificar qué tipo de ecuación es ésta en términos de y. Una observación cuidadosa nos permite determinar que es una ecuación de segundo grado en términos de y.
- A continuación, ordenamos la ecuación en la forma $ay^2 + by + c = 0$, hallamos los valores de a, b y c y, luego, aplicamos la fórmula cuadrática $y = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$; así:

$y^2 - 4xy + 2y + 3x^2 - 6x = 0$..ecuación dada
$\therefore\ y^2 - (4xy - 2y) + 3x^2 - 6x = 0$..¿qué hicimos?
$\therefore\ y^2 - (4x - 2)y + (3x^2 - 6x) = 0$..¿por qué?

- De aquí:

$$a = 1\ ;\ b = -(4x - 2)\ ;\ c = 3x^2 - 6x$$

- Luego:

$$y = \frac{4x - 2 \pm \sqrt{(4x-2)^2 - 4(1)(3x^2 - 6x)}}{2}$$

$$\therefore\ y = \frac{4x - 2 \pm \sqrt{16x^2 - 16x + 4 - 12x^2 + 24x}}{2}$$

$$\therefore\ y = \frac{4x - 2 \pm \sqrt{4x^2 + 8x + 4}}{2}$$

$$\therefore\ y = \frac{4x - 2 \pm \sqrt{(2x+2)^2}}{2}$$

$$\therefore\ y = \frac{4x - 2 \pm (2x+2)}{2}$$

$$\therefore\ y_1 = \frac{4x - 2 + 2x + 2}{2} \quad ó \quad y_2 = \frac{4x - 2 - 2x - 2}{2}$$

$$\therefore\ y_1 = \frac{6x}{2} \quad ó \quad y_2 = \frac{2x - 4}{2}$$

$$\therefore\ y_1 = 3x \quad ó \quad y_2 = x - 2$$

Ejemplo 7

¿Cómo se resuelve el sistema de ecuaciones $\begin{cases} \dfrac{4x - 2y}{3} - \dfrac{x + 2y}{2} = \dfrac{5}{6} \\ \dfrac{2x + y}{3} - \dfrac{2x + y}{2} = -\dfrac{1}{6} \end{cases}$ y qué significa gráficamente el resultado?

SOLUCIÓN

- Para resolver el sistema, quitamos los denominadores de cada ecuación. El m. c. m. de los denominadores en cada una es 6. Por lo tanto:

$$\begin{cases} 6\left(\dfrac{4x - 2y}{3} - \dfrac{x + 2y}{2}\right) = 6 \cdot \dfrac{5}{6} \\ 6\left(\dfrac{2x + y}{3} - \dfrac{2x + y}{2}\right) = 6 \cdot \left(-\dfrac{1}{6}\right) \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} 2(4x-2y)-3(x+2y)=5 \\ 2(2x+y)-3(2x+y)=-1 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} 8x-4y-3x-6y=5 \\ 4x+2y-6x-3y=-1 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} 5x-10y=5 \\ -2x-y=-1 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x-2y=1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1) \\ 2x+y=1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2) \end{cases}$$

- Este es un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas (líneas rectas). Para resolverlo, podemos recurrir a alguno de los siguientes métodos: igualación, sustitución o reducción.

  Utilicemos, en este caso, el método de reducción multiplicando la primera ecuación por -2 y dejando la segunda igual:

$$\begin{array}{lrl} (1)\ x\,\text{-}2: & -2x+4y & = -2 \\ (2)\ x\ 1: & 2x+\ y & = 1 \\ \hline & 5y & = -1 \end{array}$$

$$\therefore y = -\frac{1}{5}$$

Reemplazando este valor en la ecuación (1) nos queda:

$$x - 2 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) = 1$$

$$\therefore x + \frac{2}{5} = 1$$

$$\therefore x = \frac{3}{5}$$

- La solución del sistema es la pareja ordenada $\left(\frac{3}{5}, -\frac{1}{5}\right)$. Gráficamente, esta pareja ordenada corresponde al punto de intersección de las dos líneas rectas representadas por cada una de las ecuaciones.

Ejemplo 8

¿Cómo se resuelve la ecuación $2x^3 + 13x^2 + 7x - 12 = 0$?

SOLUCIÓN

- La ecuación $\mathbf{2x^3 + 13x^2 + 7x - 12 = 0}$ es **POLINÓMICA DE TERCER GRADO**. Las soluciones de esta ecuación son los **CEROS** del polinomio $2x^3 + 13x^2 + 7x - 12$. Utilizando los métodos descritos anteriormente podemos encontrar que $x = -\frac{3}{2}$, $x \approx -5.7$ y $x \approx 0.7$ son aproximaciones a las raíces o soluciones de la ecuación.

EJERCICIO 1.3

En los ejercicios 1 a 12 efectuar las operaciones indicadas y simplificar los resultados.

1. $\dfrac{2a^3 + 54b^3}{2a^2 + 5ab - 3b^2} + \dfrac{8ab - 19b^2}{2a - b} - a - b$

2. $$\frac{4xy + 4y^2}{4x^2 - 8xy + 3y^2} - \frac{15xy}{2x^2 + 3xy - 9y^2} + \frac{4x + y}{2x - y}$$

3. $$\frac{4}{x^4 + x^2 + 1} + \frac{x^2 + x - 1}{x^2 - x + 1} + \frac{x^2 - x - 1}{x^2 + x + 1}$$

4. $$\frac{x^2}{y^2} - \frac{1 - x^2}{1 - y^2} + \frac{x - 1}{y + y^2} + \frac{x + 1}{y - y^2}$$

5. $$\frac{a}{(a - b)(a - c)} + \frac{b}{(b - c)(b - a)} + \frac{c}{(c - a)(c - b)}$$

6. $$\frac{x^2 yz}{(x - y)(x - z)} + \frac{y^2 zx}{(y - z)(y - x)} + \frac{z^2 xy}{(z - x)(z - y)}$$

7. $$\frac{a^2 - a - 2}{a^2 + a - 6} \cdot \frac{(a - 1)^2}{a^4 - 1} \cdot \left(\frac{a}{a - 1} - \frac{1}{a + 1}\right)$$

8. $$\frac{x^4 - 1}{x^3 - 1}\left(1 - \frac{x}{(x + 1)^2}\right) \div \left(\frac{1}{x} + x\right)$$

9. $$\frac{a^2 - b^2}{a^3 + b^3}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{ab} + \frac{1}{b^2}\right) \cdot \frac{a^3 b^3}{(a - b)^2} - \frac{a^2}{a - b}$$

10. $$\frac{a^4 - b^4}{a^3 + b^3} \cdot \left[1 + \frac{ab}{(a - b)^2}\right] \div \left[\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right]$$

11. $$\frac{a + \dfrac{b - a}{1 + ab}}{1 - \dfrac{a(b - a)}{1 + ab}} \cdot \frac{\dfrac{x + y}{1 - xy} - y}{1 + \dfrac{y(x + y)}{1 - xy}}$$

12. $$\frac{\dfrac{(a + b)^2 + (a - b)^2}{b - a} - (a+b)}{\dfrac{1}{b - a} - \dfrac{1}{a + b}} \div \frac{(a + b)^3 + (b - a)^3}{(a + b)^2 - (a - b)^2}$$

En los ejercicios 13 a 30 simplificar cada ejercicio y expresar la respuesta con exponente positivo. Las letras representan números reales positivos.

13. $$\left(\frac{7x^5}{8w^3 y^4 z^6}\right)^2$$

14. $$x^{-3/4}\, x^{5/6}\, x^{-1/3}$$

15. $$\left(\frac{3x^3 y^{-2} z^{-1}}{2xy^2 z^3}\right)^{-1}$$

16. $$\frac{a^{-1} + b^{-1}}{a^{-2} - b^{-2}}$$

17. $$\frac{(x + y)^{-1}}{x^{-1} + y^{-1}}$$

18. $$\frac{2x^{-1} + 3xy^{-2}}{4x^{-2} - 9x^2 y^{-4}}$$

19. $$\frac{xy^{-2} + yx^{-2}}{x^{-2} - y^{-2}}$$

20. $$\left[\left(x^{1/4} + y^{1/4}\right)\left(x^{1/4} - y^{1/4}\right)\right]^2$$

21 $\left(x^{-1}-y^{-1}\right)\left(x^{-2}+x^{-1}y^{-1}+y^{-2}\right)$

22 $\dfrac{x^{1/2}y^{-1}+2xy^{-1/2}+x^{3/2}}{6x^{3/2}y}$

23 $\dfrac{x^{1/5}y^{1/2}+x^2y^2z}{x^{1/2}y^2}$

24 $\dfrac{4\cdot 16^{n/2}}{4^{1/2}\left(4^n\right)^{1/2}}$

25 $\left[\left(\dfrac{a^x}{a}\right)^{2x}\cdot\left(a^{-2}\right)^{x^2}\right]^{1/x}$

26 $\dfrac{3\cdot 3^{3n}-9\cdot 9^n}{\left(3\cdot 3^n\right)^3-27\cdot 3^{2n+1}}$

27 $\dfrac{3^a\cdot 9^{a+1}}{2\cdot 27^a}\cdot\dfrac{4^{2a}}{81}\cdot\dfrac{36\left(3^{2a}+9^a\right)^{-3}}{16^a}$

28 $\dfrac{\left(5^{2b}\right)^{b-1}}{5^3\cdot 5^{b-2}}\cdot\dfrac{\left(625^b\right)^{2-b}\cdot 3125^{\,b(b-1)}}{\left(125^{b-1}\right)^{b+1}}$

29 $\left[2+\dfrac{ma^{4p}-ma^{-4p}}{\left(a^p-a^{-p}\right)\left(ma^p+ma^{-p}\right)}\right]^{1/2}$

30 $\dfrac{\left(e^x+e^{-x}\right)^2-\left(e^x-e^{-x}\right)^2}{\left(e^x+e^{-x}\right)\sqrt{1-\left(\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)^2}}$

En los ejercicios 31 a 33 racionalizar el denominador y simplificar el resultado.

31 $\dfrac{\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}}$

32 $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}}$

33 $\dfrac{5}{\left(\sqrt{6}-1\right)\left(6+\sqrt{6}\right)}$

En los ejercicios 34 y 35 racionalizar el numerador y simplificar el resultado.

34 $\dfrac{\sqrt{3(x+h)-2}-\sqrt{3x-2}}{h}$

35 $\dfrac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}$

En los ejercicios 36 a 45 resolver para x las ecuaciones propuestas:

36 $3\left(\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{6}\right)-\dfrac{3}{4}(2x+18)=-4$

37 $ax+\dfrac{b}{a}=bx+1$

38 $a(x-2)-b(x-1)=b-a$

39 $\dfrac{cx+d^2}{d}-c=\dfrac{4dx-cd}{c}$

40 $\dfrac{x+4}{2}-\dfrac{5}{6}=\dfrac{2x-2}{3}$

41 $\dfrac{rx}{s}-\dfrac{sx}{r}=r-s$

42 $\dfrac{2}{x-2}-\dfrac{3}{2x-3}=\dfrac{6}{2x^2-7x+6}$

43 $b(a+x)-(a+x)(b-x)=x^2+\dfrac{bc^2}{a}$

44 $\dfrac{x-a+b}{x-a}+\dfrac{x-b}{x-2b}=\dfrac{x}{x-b}+\dfrac{x-a}{x-a-b}$

45 $\dfrac{b(x+a)}{x^2-b^2}+\dfrac{2x+3b-a}{x+b}=\dfrac{2\left(x^2+bx-b^2\right)}{x^2-b^2}$

En los ejercicios 46 a 50 despejar la letra que se indica.

46 $1=\dfrac{3(d+b)}{2+d}$; despejar b

47 $L_2=L_1(1+at)$; despejar t

48 $p = \frac{w}{2gt}\left(V_1^2 - V_2^2\right)$; despejar t

49 $E = \frac{1}{2} mr^2w^2 - \frac{e^2}{s}$; despejar m

50 $M = \frac{L}{F}\left(\frac{25}{f} + 1\right)$; despejar f

51 Resolver el sistema de ecuaciones $\begin{cases} \dfrac{4x-2y}{3} - \dfrac{x+2y}{2} = \dfrac{5}{6} \\[2mm] \dfrac{2x+y}{3} - \dfrac{2x+2y}{2} = -\dfrac{1}{6} \end{cases}$

¿Qué significa gráficamente el resultado?

En los ejercicios **52** a **55** resolver las ecuaciones para la incógnita x:

52 $mx^2 - nx = m + n$

53 $p^2x^2 - px = q^2 + q$

54 $u^2x^2 - x^2 + 2u^2x + 4 = 0$

55 $r^2x^2 - 2r^2 + r^2 = 9$

En los ejercicios **56** a **60** resolver cada una de las siguientes ecuaciones polinómicas:

56 $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$

57 $4x^3 - 4x^2 - 11x + 6 = 0$

58 $4x^5 + 12x^4 - 41x^3 - 99x^2 + 10x + 24 = 0$

59 $x^3 - 2x^2 + 3x = 1$

60 $3x^3 + 3x = 8x^2 - 1$

1.4 EL DERIVE EN ÁLGEBRA

1.4.1. Introducción

- El DERIVE es un programa computacional matemático que permite el procesamiento de **variables algebraicas, expresiones, funciones, vectores y matrices.** Su versatilidad le permite trabajar tanto en forma numérica como simbólica, pudiendo realizar factorizaciones, límites, derivadas, sumatorias, integrales y muchas operaciones más. Adicionalmente, con DERIVE es posible dibujar gráficos en 2 y 3 dimensiones.

- La elección de DERIVE, como un software ideal para apoyar el trabajo matemático, se debe a su sencillez porque, aunque no es el más "poderoso", si es el más "amigable" para estudiantes de últimos grados de bachillerato y primeros semestres de universidad.

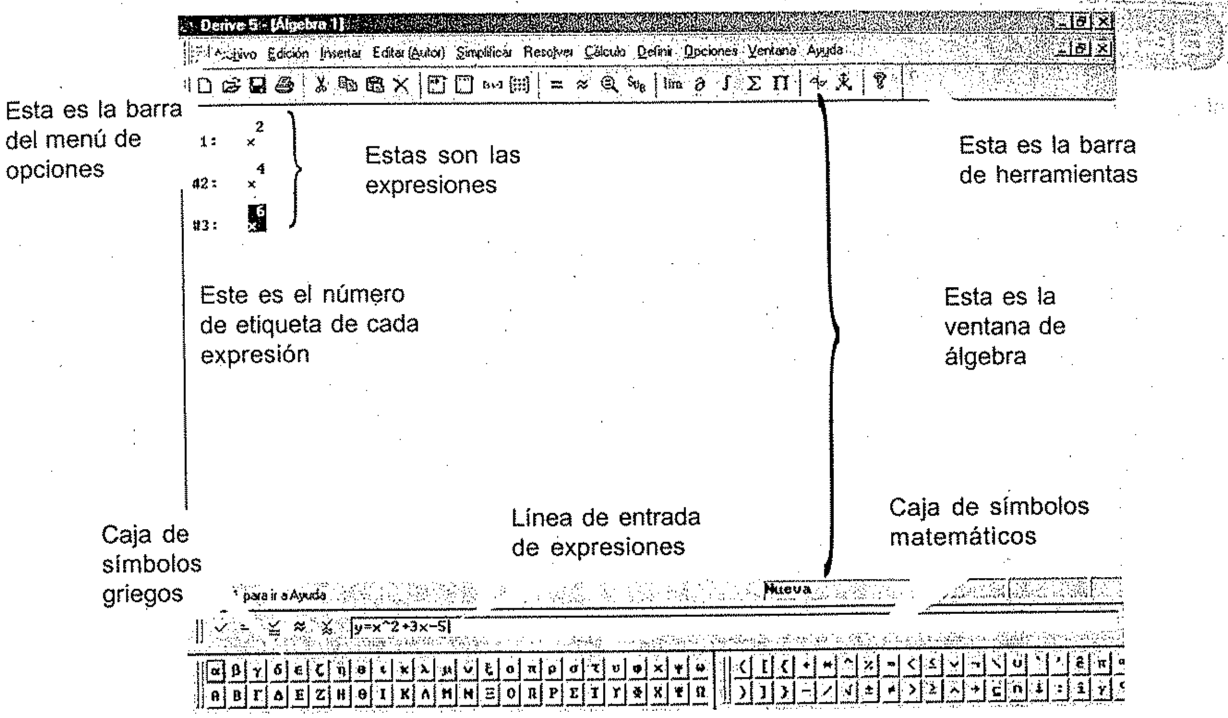
- Un curso de matemáticas como éste requiere del uso del DERIVE ya que frecuentemente surgen problemas tan difíciles que prácticamente sería imposible resolverlos si no se cuenta con una herramienta computacional.

- **Una advertencia:** No pretendamos que un paquete computacional como DERIVE responda todas nuestras preguntas y resuelva todas nuestras dudas. Recordemos que el computador no piensa: los que pensamos somos nosotros. Son frecuentes las conclusiones erróneas que nos puede presentar un programa y que una persona con escaso manejo de los conceptos matemáticos podría no detectar. Por ello, es necesario estar alerta y "desconfiar" de los resultados que pueden arrojar programas como éste.

1.4.2. El Entorno de Trabajo de Derive

- Una vez instalado el programa DERIVE en el computador, se busca el icono del DERIVE, en el lugar donde haya sido instalado y se hace **doble click** sobre él.

- Inmediatamente después de hacer doble click, aparecerá la pantalla de trabajo de DERIVE. Esta pantalla contiene de arriba abajo las siguientes líneas o zonas:



- Para INGRESAR UNA EXPRESIÓN a la ventana de álgebra, hacemos **click** sobre la LÍNEA DE ENTRADA DE EXPRESIONES, digitamos la expresión dada y luego presionamos la tecla ENTER o el símbolo ✓ ubicado a la izquierda de la línea de entrada de expresiones. De inmediato, DERIVE nos mostrará la expresión digitada en la VENTANA DE ÁLGEBRA, antecedida de un número (**#1, #2, #3, ...**), denominado NÚMERO DE ETIQUETA de la expresión. El programa DERIVE queda listo para aceptar la próxima expresión (no es necesario borrar la expresión previamente resaltada en la línea de entrada de expresiones).

- Para SIMPLIFICAR UNA EXPRESIÓN previamente resaltada en la ventana de álgebra, hacemos **click** sobre el símbolo = ubicado a la izquierda de la línea de entrada de expresiones, u oprimimos la tecla Ctrl y enseguida la tecla ENTER.

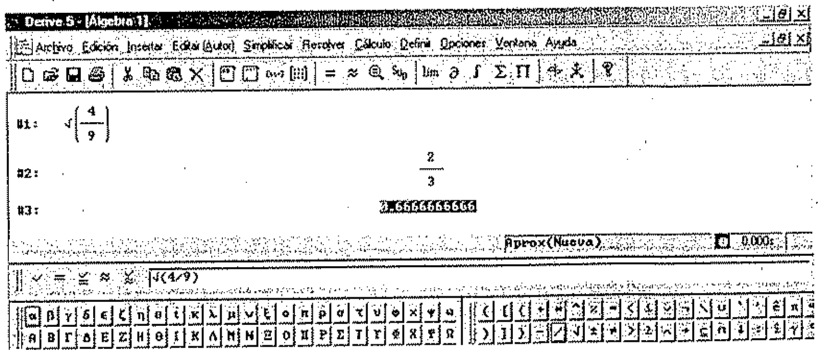
- Para APROXIMAR LA EXPRESIÓN hacemos lo mismo sobre el símbolo ≈ u orpimimos la tecla Shift y enseguida la tecla ENTER.

Ejemplo 1

Introduzcamos la expresión $\sqrt{\frac{4}{9}}$ en la línea de entrada de expresiones; luego, utilicemos las tres combinaciones y comparemos los resultados.

SOLUCIÓN

Teniendo en cuenta las tres instrucciones anteriores, la ventana del DERIVE nos mostrará lo siguiente:



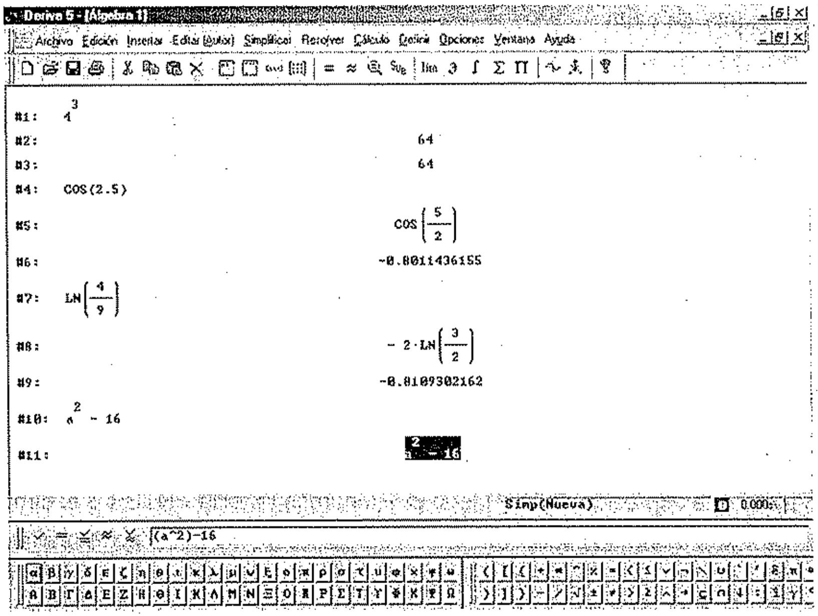
Ejemplo 2

Introducir, simplificar y aproximar las expresiones siguientes:

a) 4^3 b) Cos (2.5) c) $\ln\left(\frac{4}{9}\right)$ d) $a^2 - 16$

SOLUCIÓN

Si aplicamos las instrucciones anteriores a cada expresión obtenemos:



- Para BORRAR UNA EXPRESIÓN previamente resaltada en la ventana de álgebra, hacemos **click** sobre el botón de la barra de herramientas.
- Para MOVER UNA EXPRESIÓN de una línea a otra de la ventana de álgebra basta arrastrarla con el mouse.
- Para CORREGIR una expresión resaltada en la ventana de álgebra, o para usarla como parte de otra expresión, señalamos con el puntero del mouse la línea de edición y a continuación presionamos la tecla F3. Esto hará que la expresión resaltada caiga a la línea de expresión.
- Para CANCELAR LA SELECCIÓN de un comando presionamos la tecla ESC.

Ejemplo 3

La siguiente tabla nos muestra cómo ingresar algunas expresiones en DERIVE.

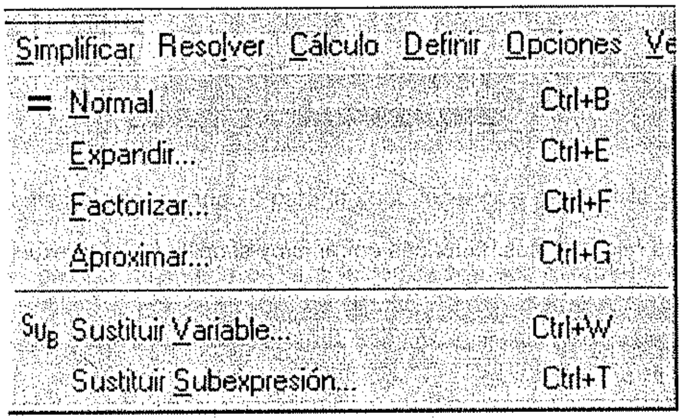
EXPRESIÓN A INGRESAR	**INGRESO A DERIVE**
$\frac{a^3 + 3b^2}{5}$	(a^3 + 3*b^2) / 5
$\frac{5w(w-3)^2}{(w+1)^{2w^3}(w-3)^4}$	(5 * w * (w-3) ^2) / ((w+1) ^(2*w^3) * (w-3) ^4)
cos (x-2) + sen (x^2) - tan (x) + 1	cos (x-2) + sin (x^2) - tan (x) + 1
$\lvert x^2 - 3\rvert$ - ln(x + 3) + 100	abs (x^2 - 3) - ln (x+3) + 100

EXPRESIÓN A INGRESAR	INGRESO A DERIVE
$\dfrac{\sqrt[3]{\frac{4}{9}a+1}+e^{x^2}}{2^{x-3y}}$	((4/9*a+1) ^ (1/3) + exp (x^2)) / (2^(x-3*y))
$\mathrm{Log}_3\,(x^2-5)+\mathrm{sen}(50\pi y)$	log (x^2 - 5,3) + sin (50 * π * y)
$\left(\sqrt[5]{a-2}\right)^{-\infty}$	((a-2) ^(1/5)) ^(- inf)

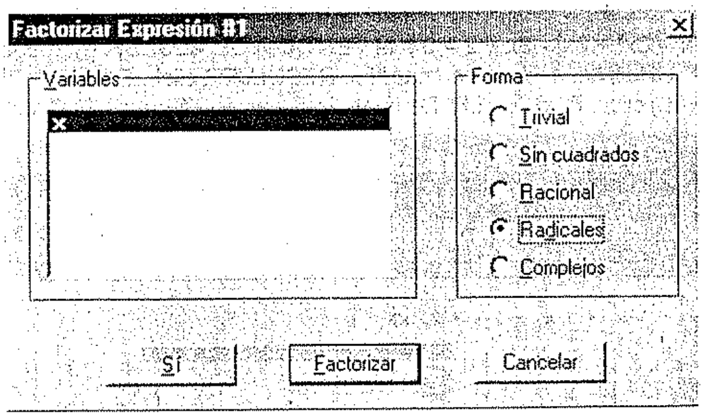
- En caso de presentarse un OLVIDO en la forma de INTRODUCIR ALGUNA EXPRESIÓN, basta con ir a la BARRA DE OPCIONES donde aparece el símbolo AYUDA O HELP. Con éste, en CONTENIDO o en ÍNDICE podemos encontrar cómo escribir la expresión olvidada. Allí también se encuentran respuestas a las preguntas más frecuentes.

1.4.3. Factorización y Solución de Ecuaciones con Derive

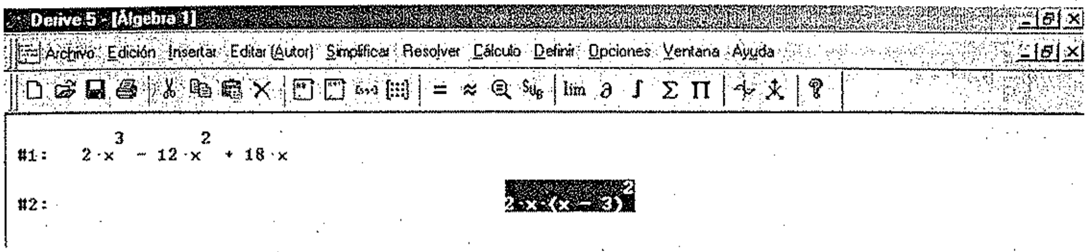
- Para FACTORIZAR, en los reales, una expresión previamente resaltada en la ventana de álgebra (por ejemplo, $2x^3 - 12x^2 + 18x$), hacemos lo siguiente:
  - Vamos al MENÚ DE OPCIONES y hacemos click sobre el comando SIMPLIFICAR.
  - Inmediatamente aparecerá esta pequeña ventana, encima de la ventana del DERIVE:



  - Sobre esta pequeña ventana, señalamos con el mouse la opción FACTORIZAR y hacemos **click.** De inmediato aparece otra ventana. Señalamos la opción RADICALES, hacemos **click** y, luego, en la ventana señalamos, en la parte inferior, la opción FACTORIZAR.



- Finalmente, la ventana de álgebra del DERIVE nos mostrará la expresión factorizada; así:



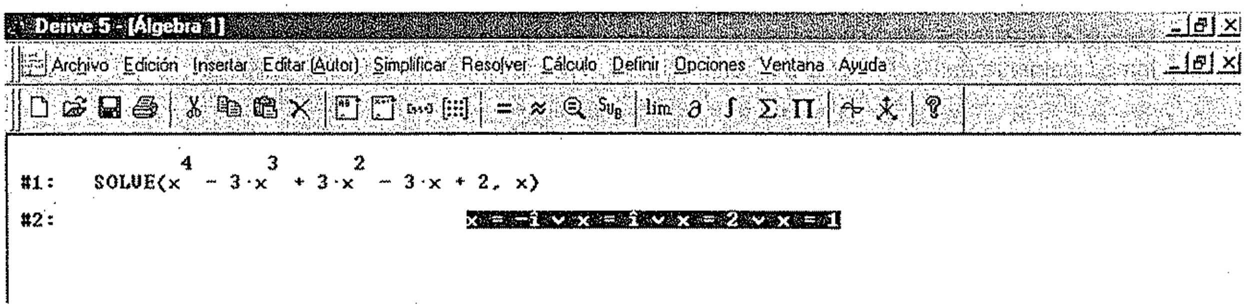
En síntesis, los pasos para factorizar una expresión en los reales son los siguientes:

SIMPLIFICAR click, FACTORIZAR click, RADICALES click, FACTORIZAR click.

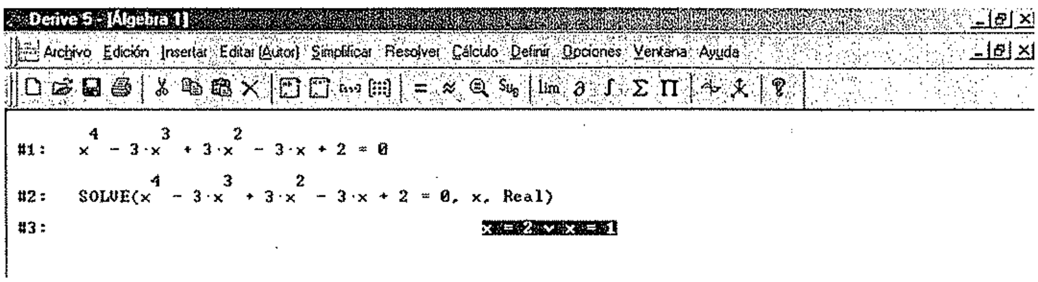
Si queremos factorizar la expresión en los complejos, basta cambiar la opción RADICALES por COMPLEJOS.

- Para RESOLVER UNA ECUACIÓN EN UNA VARIABLE $f(x) = 0$ (por ejemplo, $x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2 = 0$) en los complejos y en forma EXACTA, tenemos dos alternativas:

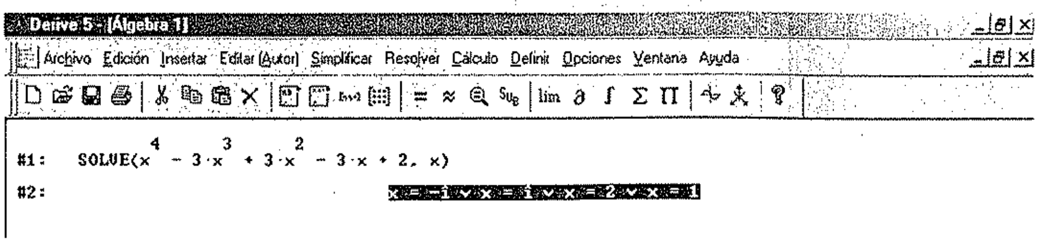
1. Entrar y simplificar la expresión SOLVE (f(x),x); así:
   - Escribimos SOLVE (x^4 - 3*x^3 + 3*x^2 - 3*x + 2 , x)
   - Luego oprimimos la tecla SHIFT y la tecla ENTER.
   - De inmediato, la ventana de álgebra del DERIVE nos mostrará lo siguiente:



   - Si sólo requerimos las raíces reales, entonces entramos y simplificamos la expresión: SOLVE (f(x),x,real).



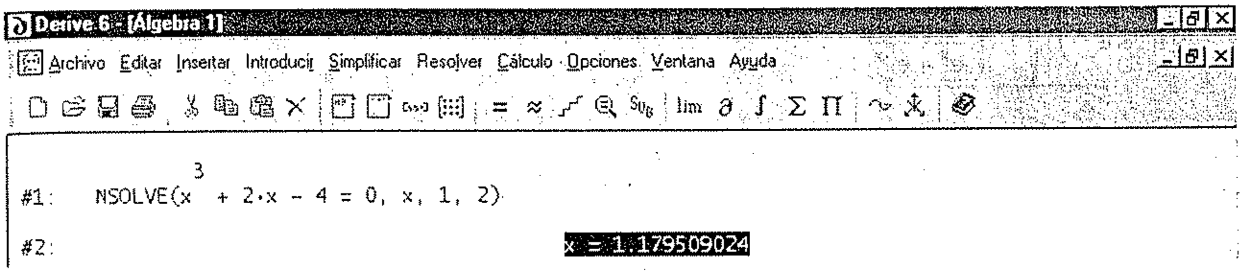
2. Entrar la ecuación $x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2 = 0$ a la VENTANA DE ÁLGEBRA y, luego, hacer sucesivamente click desde el MENU DE OPCIONES en los comandos: RESOLVER click, EXPRESIÓN click, ALGEBRAICO click, COMPLEJO (O REAL) click, RESOLVER. De inmediato aparecerá en la VENTANA DE ÁLGEBRA lo siguiente:



ATENCIÓN

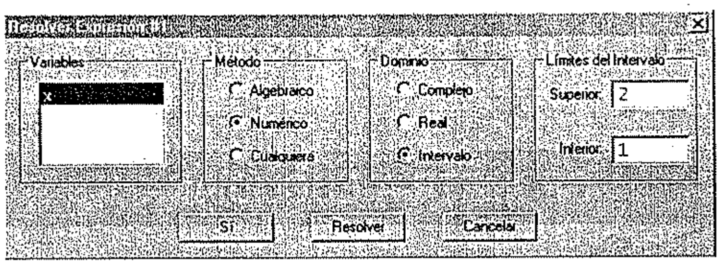
Para hallar en FORMA APROXIMADA una raíz de la ecuación f(x) =0 en [a ; b] (por ejemplo, $x^3+2x-4=0$ en el intervalo [1 ; 2]), entramos y simplificamos la expresión NSOLVE (f(x), x,a,b); así:

NSOLVE (x^3+2x-4, x , 1,2) y luego presionar el botón $\boxed{\leq}$. De inmediato aparecerá en pantalla:

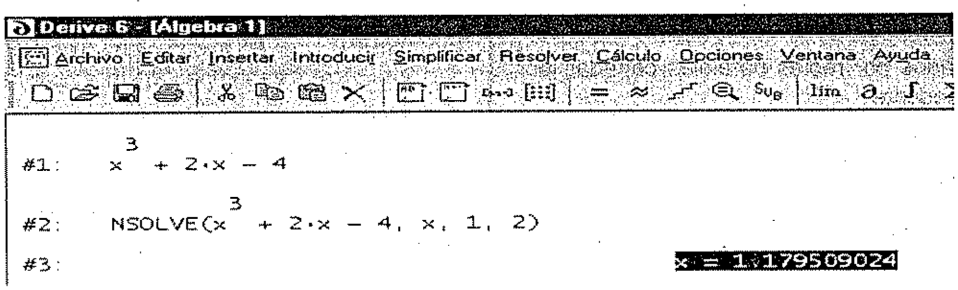


También podemos hacerlo así:

- Ingresamos y seleccionamos la expresión x^3+2x-4
- Presionamos el botón (o Resolver + Expresión)
- De inmediato, aparecerá en la pantalla la siguiente ventana:



- En esta ventana podemos elegir la variable para la cual deseamos resolver la ecuación (en este caso x).
- También podemos escoger entre método **algebraico, numérico o cualquiera**. Hemos escogido el método **numérico**. El dominio para la búsqueda de la solución puede ser **complejo, real** o un **intervalo;** hemos escogido esta última alternativa y por eso escogimos el límite inferior 1 y el límite superior 2.
- Finalmente, hacemos **click** sobre el rectángulo **Resolver** y de inmediato aparecerá:



EJERCICIO 1.4

En los ejercicios 1 a 5 usar tanto las herramientas del álgebra como el DERIVE para simplificar cada expresión:

1. $\dfrac{a^4-b^4}{a^3+b^3}\left(1+\dfrac{ab}{(a-b)^2}\right)\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\right)^{-1}$

2. $\left(\dfrac{x^{-2}y^{-3}}{x^3y^2}\right)\left(\dfrac{\left(y^3x^{-3}\right)^{-3}}{x^2y^3}\right)^{-2}$

3 $\dfrac{\dfrac{(a+b)^2+(a-b)^2}{b-a}-(a+b)}{\dfrac{1}{b-a}-\dfrac{1}{a+b}}\cdot\dfrac{(a+b)^2-(a-b)^2}{(a+b)^3+(b-a)^3}$

4 $\dfrac{\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}}$

5 $\dfrac{\left(e^x+e^{-x}\right)^2-\left(e^x-e^{-x}\right)^2}{\left(e^x+e^{-x}\right)^2\sqrt{1-\left(\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)^2}}$

En los ejercicios **6** a **15** factorizar, usando DERIVE cada uno de los polinomios dados:

6 $x^5-3x^4-15x^3+35x^2+54x-72$

7 $3ax-bx-3ay+by$

8 $x^5-2x^4-10x^3+20x^2+9x-18$

9 $204-29x^2+x^4$

10 m^9-27n^{12}

11 $a^3+2ab+b^2+a+b$

12 $6st^2-9s^2t-2t^3+27s^3$

13 $48x^4-52x^3+13x-3$

14 $6x^2-31xy+35y^2$

15 $a^{2n+1}+a^{n+2}+a^{n+1}$, con $n\in Z$

En los ejercicios **16** a **18** resolver, en los reales, las siguientes ecuaciones:

16 $x^4-3x^3+3x^2-3x+2=0$

17 $3x^3+3x^2-12x+2=0$

18 $x^3-3x+1=0$

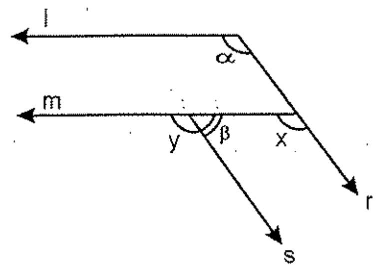
1.5 GEOMETRÍA EUCLIDIANA

Conviene revisar algunos contenidos de la geometría euclidiana, tales como:

CONCEPTO	TEXTO	NÚCLEO TEMÁTICO
• **ÁNGULOS** - Clasificación según su medida y su posición - Complementarios y suplementarios - Propiedades de los ángulos según su posición - Formados por rectas paralelas cortadas por una secante	Matemática Experimental 8 (geometría)	4
	Matemática Experimental 8 (geometría)	5
• **TRIÁNGULOS** - Clasificación según sus lados y sus ángulos - Línea y puntos notables - Propiedades generales - Casos de congruencia	Matemática Experimental 9 (geometría)	0
	Matemática Experimental 9 (geometría)	0
• **CUADRILÁTEROS** - Clasificación - Propiedades generales y particulares	Matemática Experimental 9 (geometría)	0
• **PROPORCIONALIDAD Y SEMEJANZA** - Casos de semejanza de triángulos - Teorema de Tales - Relaciones métricas en el triángulo rectángulo - Teorema de Pitágoras	Matemática Experimental 9 (geometría)	2

CONCEPTO	TEXTO	NÚCLEO TEMÁTICO
• **ÁREAS Y VOLÚMENES** - Áreas de figuras planas - Áreas de cuerpos geométricos - Volumen de los cuerpos geométricos	Matemática Experimental 8 (geometría)	1
	Matemática Experimental 9 (geometría)	5

Ejemplo 1

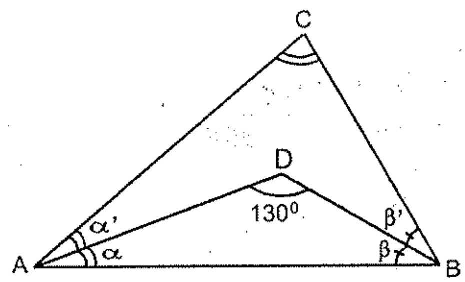


Si $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$ y $\overleftrightarrow{r} \parallel \overleftrightarrow{s}$ y la $m\hat{\alpha} = 125°$, hallemos la $m\hat{\beta}$.

SOLUCIÓN

- Como $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$ entonces $\hat{\alpha} \cong \hat{x}$.
- Ahora bien, $m\hat{\alpha} = 125°$; luego, $m\hat{x} = 125°$.
- Puesto que $\overleftrightarrow{r} \parallel \overleftrightarrow{s}$ entonces $\hat{x} \cong \hat{y}$ y, por lo tanto, la $m\hat{y} = 125°$.
- Finalmente, $m\hat{y} + m\hat{\beta} = 180°$; luego, $125° + m\hat{\beta} = 180°$, con lo cual, $m\hat{\beta} = 55°$.

Ejemplo 2



Datos: $\overline{AD}$ es bisectriz del $\angle A$

$\overline{BD}$ es bisectriz del $\angle B$

$m\angle D = 130°$

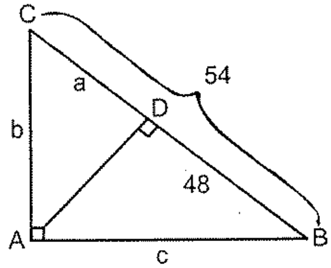
Hallar: $m\angle C$

SOLUCIÓN

1. Como $\overline{AD}$ es bisectriz del $\angle A$ entonces $\angle\alpha \cong \angle\alpha'$
2. Como $\overline{BD}$ es bisectriz del $\angle B$ entonces $\angle\beta \cong \angle\beta'$
3. En el ΔADB se cumple que $m\angle\alpha + m\angle\beta + m\angle D = 180°$ y como $m\angle D = 130°$ entonces $m\angle\alpha + m\angle\beta = 180° - 130° = 50°$.
4. En el ΔABC se cumple que $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180°$ y como $m\angle A = m\angle\alpha + m\angle\alpha'$; $m\angle B = m\angle\beta + m\angle\beta'$; $m\angle\alpha = m\angle\alpha'$ y $m\angle\beta = m\angle\beta'$ entonces $2\,m\angle\alpha + 2\,m\angle\beta + m\angle C = 180°$.
5. Por lo tanto, $2(m\angle\alpha + m\angle\beta) + m\angle C = 180°$ entonces $2(50°) + m\angle C = 180°$; luego, $m\angle C = 180° - 100° = 80°$.

Ejemplo 3

Hallemos las medidas de a, b y c de la figura siguiente:



SOLUCIÓN

1. De la figura es inmediato que $54 = a + 48$; con lo cual $a = 6$.

2. Para calcular la medida de b tengamos en cuenta que cada cateto es media proporcional entre la hipotenusa y la proyección de este cateto sobre la hipotenusa, por lo tanto:

$$\frac{54}{b} = \frac{b}{a}$$

$$\therefore \frac{54}{b} = \frac{b}{6}$$

$$\therefore b^2 = 54 \cdot 6$$

$$\therefore b^2 = 324$$

$$\therefore b = 18$$

3. El lado $\overline{AB} = c$ es un cateto del triángulo rectángulo CAB en el cual conocemos la hipotenusa ($|\overline{BC}| = 54$) y el otro cateto ($|\overline{AC}| = b = 18$). Por lo tanto, aplicando el Teorema de Pitágoras nos queda:

$$54^2 = b^2 + c^2$$

$$\therefore 54^2 = 18^2 + c^2$$

$$\therefore c^2 = 54^2 - 18^2$$

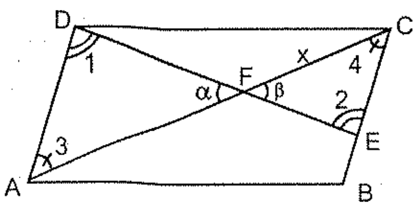
$$\therefore c = \sqrt{2916 - 324}$$

$$\therefore c = \sqrt{2592}$$

$$\therefore c \approx 50.9$$

Ejemplo 4

Si ABCD es un paralelogramo, hallemos el valor de x.



$|\overline{AF}| = 24$ cm

$|\overline{AD}| = 18$ cm

$|\overline{BE}| = 6$ cm

SOLUCIÓN

1. El $\Delta AFD \sim \Delta CFE$ ya que $\begin{cases} \angle\alpha \cong \angle\beta \text{.......................... ¿ por qué ?} \\ \angle 1 \cong \angle 2 \text{.......................... ¿ por qué ?} \\ \angle 3 \cong \angle 4 \text{.......................... ¿ por qué ?} \end{cases}$

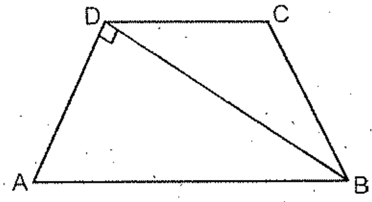
2. Por lo tanto, $\dfrac{|\overline{AD}|}{|\overline{EC}|} = \dfrac{|\overline{AF}|}{|\overline{FC}|} = \dfrac{|\overline{DF}|}{|\overline{FE}|}$ ....¿ por qué ?

3. Luego, $\dfrac{|\overline{AD}|}{|\overline{EC}|} = \dfrac{|\overline{AF}|}{|\overline{FC}|}$

4. Luego, $\dfrac{18}{|\overline{EC}|} = \dfrac{24}{x}$; pero, $|\overline{EC}| = |\overline{BC}| - |\overline{BE}| = 18 \text{ cm} - 6 \text{ cm} = 12 \text{ cm}$

5. Luego, $\dfrac{18}{12} = \dfrac{24}{x} \Rightarrow x = \dfrac{24 \cdot 12}{18} = 16$ cm

Ejemplo 5



DATOS: ABCD es un trapecio isósceles

$\overline{DB} \perp \overline{AD}$, $\left|\overline{DB}\right| = 24$ cm, $\left|\overline{AD}\right| = 10$ cm

HALLAR: Área de ABCD

SOLUCIÓN

1. Como ABCD es un trapecio isósceles entonces $\overline{AD} \cong \overline{BC}$

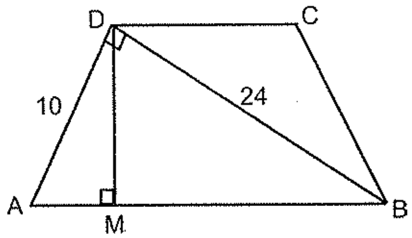
2. Para calcular el área del trapecio ABCD necesitamos conocer la base mayor $\overline{AB}$, la base menor $\overline{DC}$ y la altura que sería el segmento perpendicular trazado desde D o desde C sobre $\overline{AB}$. La base mayor $\overline{AB}$ la obtenemos aplicando el Teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo ADB; así:

$$\left|\overline{AB}\right|^2 = \left|\overline{AD}\right|^2 + \left|\overline{DB}\right|^2$$

$$\therefore \left|\overline{AB}\right|^2 = 10^2 + 24^2$$

$$\therefore \left|AB\right| = \sqrt{676} = 26 \text{ cm}$$

La altura del trapecio es el segmento perpendicular $\overline{DM}$. Notemos que este segmento también es altura del ΔADB.



Como el ΔADB es rectángulo, entonces su área es igual al producto de los catetos dividido por 2; es decir:

$$A_{\Delta ADB} = \frac{10 \text{ cm} \cdot 24 \text{ cm}}{2} = 120 \text{ cm}^2 \text{..} (1)$$

Pero también el área del triángulo rectángulo ADB puede calcularse así:

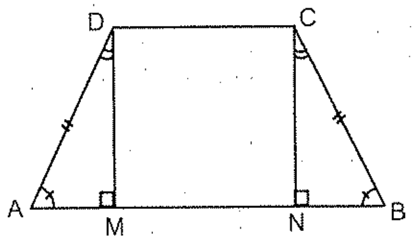
$$A_{\Delta ADB} = \frac{\left|\overline{AB}\right| \cdot \left|\overline{DM}\right|}{2} = \frac{26 \text{ cm} \cdot \left|\overline{DM}\right|}{2} = 13 \text{ cm} \cdot \left|\overline{DM}\right| \text{........................} \quad (2)$$

Igualando (1) y (2) nos queda:

$$13 \text{ cm} \cdot \left|\overline{DM}\right| = 120 \text{ cm}^2$$

$$\therefore \left|\overline{DM}\right| = \frac{120 \text{ cm}^2}{13 \text{ cm}} \approx 9.23 \text{ cm}$$

3. Ahora hallemos la base menor $\overline{DC}$. Con este fin, tracemos la altura desde el vértice C.



El $\Delta AMD \approx \Delta CNB$, por A - L - A. Por lo tanto, $\overline{AM} \cong \overline{NB}$. Ahora bien:

$$\left|\overline{AM}\right|^2 = \left|\overline{AD}\right|^2 - \left|\overline{MD}\right|^2$$

$$\therefore \left|\overline{AM}\right|^2 = 10^2 - 9.23^2$$

$$\therefore \left|\overline{AM}\right|^2 = 100 - 85.2$$

$$\therefore \left|\overline{AM}\right|^2 = \sqrt{14.8} = 3.84\text{cm.}$$

Finalmente,

$$\left|\overline{DC}\right| = \left|\overline{MN}\right| = \left|\overline{AB}\right| - \left|\overline{AM}\right| - \left|\overline{NB}\right|$$

$$\therefore \left|\overline{DC}\right| = \left|\overline{AB}\right| - 2\left|\overline{AM}\right|$$

$$\therefore \left|\overline{DC}\right| = 26 - 2(3.84)$$

$$\therefore \left|\overline{DC}\right| = 18.32 \text{ cm.}$$

4. Ya tenemos todos los datos para calcular el área del trapecio; así:

$$A = \frac{\left(\left|\overline{AB}\right| + \left|\overline{DC}\right|\right)}{2} \cdot \left|\overline{DM}\right|$$

$$\therefore A = \frac{(26\,\text{cm} + 18.32\,\text{cm})}{2} \cdot (9.23\,\text{cm})$$

$$\therefore A = 204.53 \text{ cm}^2$$

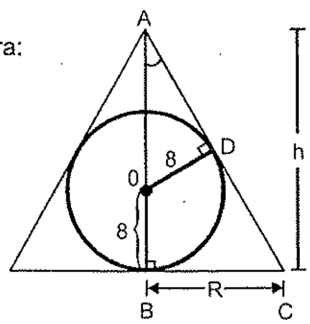
Ejemplo 6

Nos presentan el siguiente enunciado: Se inscribe una esfera de 8 cm de radio en un cono. Si denominamos h a la altura del cono y R al radio de la base, se pide:

a) Dibujar el problema.
b) Escribir una expresión que permita calcular el volumen del cono en términos de la altura h.

RESPUESTA

a) La siguiente figura nos muestra un corte frontal del cono y la esfera:



b) El volumen de un cono de altura h y radio de la base R es:

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

Como queremos expresar el volumen sólo en términos de h, entonces debemos hallar una relación entre h y R. Los triángulos rectángulos ADO y ABC son semejantes por tener un ángulo agudo igual (el ∠A). Por lo tanto, podemos establecer proporcionalidad entre sus lados correspondientes; así:

$$\frac{\left|\overline{OD}\right|}{\left|\overline{BC}\right|} = \frac{\left|\overline{AD}\right|}{\left|\overline{AB}\right|} \quad \text{...(1)}$$

donde:

$\left|\overline{OD}\right| = 8,\qquad \left|\overline{BC}\right| = R,\qquad \left|\overline{AD}\right| = \sqrt{\left|\overline{OA}\right|^2 - \left|\overline{OD}\right|^2},\qquad \left|\overline{AB}\right| = h$

$\therefore \left|\overline{OD}\right| = 8,\qquad \left|\overline{BC}\right| = R\qquad \left|\overline{AD}\right| = \sqrt{(h-8)^2 - 8^2}\quad ,\qquad \left|\overline{AB}\right| = h$

$\therefore \left|\overline{OD}\right| = 8,\qquad \left|\overline{BC}\right| = R,\qquad \left|\overline{AD}\right| = \sqrt{h^2 - 16h}\quad ,\qquad \left|\overline{AB}\right| = h$..............(2)

Por lo tanto, reemplazando (2) en (1) nos queda:

$$\frac{8}{R} = \frac{\sqrt{h^2 - 16h}}{h}$$

$$\therefore R = \frac{8h}{\sqrt{h^2 - 16h}}$$

Finalmente:

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{8h}{\sqrt{h^2 - 16h}}\right)^2 h$$

$$\therefore V = \frac{1}{3}\pi \frac{64h^2}{h^2 - 16h} h$$

$$\therefore V = \frac{64\pi h^2}{3(h-16)} \text{cm}^3$$

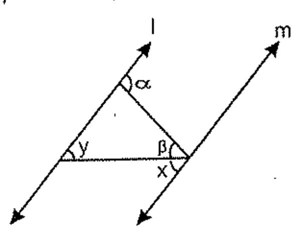
Y hemos expresado el Volumen en términos de la altura.

EJERCICIO 1.5

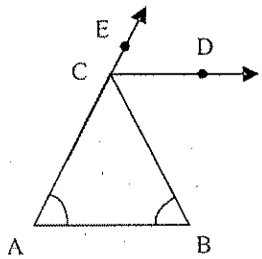
1. Dos ángulos forman un par lineal. La medida de uno de ellos excede en 30° a la tercera parte de la medida del otro. ¿Cuánto miden los ángulos?

2. Un ángulo $\hat{\alpha}$ es el complemento de un ángulo cuya medida es 38°. Si $\hat{\beta}$ es el suplemento del $\hat{\alpha}$, ¿cuál es la medida del $\hat{\beta}$?

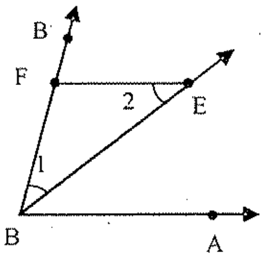
3. Si $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$, $m\hat{\alpha} = 94°$ y $m\hat{\beta} = 22°$, hallar las medidas de $\hat{x}$ e $\hat{y}$.



4 Si $\angle A \cong \angle B$, demostrar que la bisectriz $\overrightarrow{CD}$ del ángulo $E\hat{C}B$ es paralela a $\overline{AB}$.

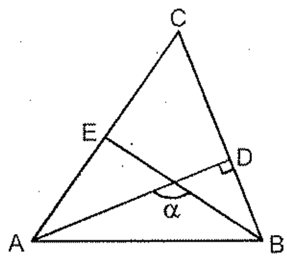


5 Si $\overline{EF} \parallel \overrightarrow{BA}$ y $m\hat{1} = m\hat{2}$, demostrar que $\overrightarrow{BE}$ es la bisectriz del ángulo $\hat{B}$.



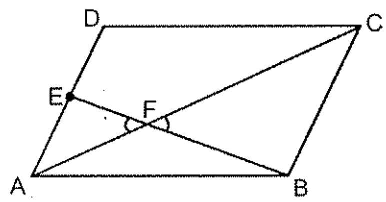
6 En el ΔABC, $\overline{AD}$ es la altura trazada sobre el lado $\overline{BC}$ y $\overline{BE}$ es la bisectriz del $\angle B$.

Si $m\angle A = 64°$ y $m\angle C = 42°$, hallar $m\angle a$.



7 Demostrar que en todo triángulo isósceles las medianas trazadas sobre los lados congruentes son congruentes

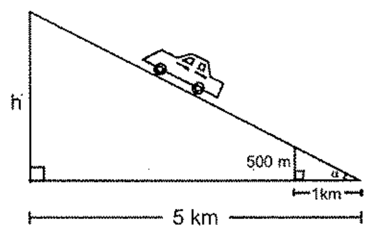
8 La figura ABCD es un paralelogramo; E es el punto medio de $\overline{AD}$; $\overline{AC}$ y $\overline{EB}$ se cortan en F. Probar que BF = 2 EF



9 Un auto asciende por una carretera que forma con la horizontal un ángulo constante α.

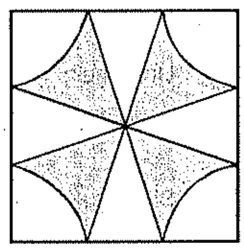
Calcular:

a) La altura h que alcanza cuando ha recorrido 5 Km. en forma horizontal.
b) La distancia recorrida sobre la carretera.



10 Hallar el área total y el volumen del sólido inferior que resulta al cortar un cono de 24 cm de altura y 8 cm de radio de la base, por un plano perpendicular a la altura, distante 15 cm del vértice.

11 El cuadrado tiene 6 cm de lado y cada uno de sus lados se ha dividido en tres partes iguales trazándose los segmentos que se indican, así como los arcos que unen sus extremos. Hallar el área de la cruz formada.



12. Un fabricante de envases de cartón desea construir cajas sin tapas usando láminas cuadradas de 12 dm de lado, recortando cuadrados iguales de las cuatro esquinas y doblando los lados hacia arriba. Si x decímetros es la longitud del lado del cuadrado que debe recortarse, se pide:

a) Dibujar la lámina y una caja típica.
b) Expresar el volumen de la caja en función de x.

13. Una ventana rectangular está rematada por un semicírculo. Si el perímetro de la ventana es 200 cm y el radio del semicírculo es x cm, calcular el área A de la ventana en función de x.

14. Un hombre desea cercar un terreno rectangular y después colocar otras dos cercas paralelas a uno cualquiera de los lados del terreno. El hombre dispone de 1000 metros de alambre de púas para cercar y desea hacer cinco hileras de cerca. Si el lado del rectángulo a lo largo del cual se instalaron las cercas mide x m, hallar el área A del terreno en función de x.

15. Con una hoja metálica rectangular de 12 cm de ancho se va a construir un canal para conducir agua lluvia. Con este fin se doblan hacia arriba dos lados de tal manera que queden perpendiculares a la hoja. Si los lados que se doblan miden x cm, calcular el área A de la sección que resulta después de doblar la lámina, en función de x.

1.6 ORDEN EN LOS NÚMEROS REALES

- En los grados 8° y 9° estudiamos los números reales como objetos primitivos, dotados de dos operaciones también primitivas: la **suma (+)** y la **multiplicación (•)** y una relación igualmente primitiva: la **igualdad (=)**. Establecimos, además, que los números reales con sus operaciones de suma y multiplicación satisfacen una serie de propiedades denominadas **AXIOMAS DE CAMPO,** las cuales, junto con las propiedades o axiomas de la igualdad, nos permiten obtener la mayoría de las propiedades básicas del álgebra (transposición de términos y factores en una igualdad, eliminación de signos de agrupación, leyes de los signos,...). Así mismo, destacamos la existencia de otro axioma no menos importante: el **AXIOMA DE COMPLETEZ O DE CONTINUIDAD.**
- En esta unidad vamos a estudiar otra relación fundamental en el conjunto de los números reales: la **RELACIÓN DE ORDEN.** La siguiente experiencia nos ayudará a entender el significado de esta relación.

Experiencia

- Ubiquemos sobre la recta numérica los números -3 y 6; figura 1-1:

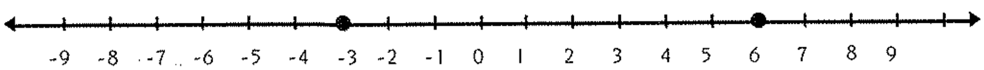


Figura 1-1

- Al colocar los números, encontramos que -3 queda ubicado a la izquierda de 6. Intuitivamente esto significa que **-3 ES MENOR** que **6**.
- En general, y de manera intuitiva, si al colocar sobre una línea recta dos números a y b encontramos que el número a está ubicado a la izquierda de b, entonces: **a ES MENOR QUE b**; figura 1-2:

Figura 1-2

Sin embargo, no vamos a utilizar las expresiones "estar a la izquierda" o "ser menor que" como términos primitivos. Nuestro nuevo término primitivo es la palabra **POSITIVO**, el cual usaremos para definir las relaciones de orden **MENOR QUE** y **MAYOR QUE**. Las bases de este proceso de ordenación son los siguientes axiomas que caracterizan al conjunto de los **REALES POSITIVOS**, que simbolizaremos por R^+:

AXIOMAS DE ORDEN

- **AXIOMA 1: PROPIEDAD DE TRICOTOMÍA**

  Dado cualquier número real **x**, una y sólo una de las siguientes afirmaciones es verdadera:

  a) $\mathbf{x \in R^+}$ o b) $\mathbf{x = 0}$ o c) $\mathbf{-x \in R^+}$

- **AXIOMA 2: PROPIEDAD CLAUSURATIVA DE LA SUMA EN R^+**

  Para todo $\mathbf{x, y \in R^+}$ se cumple que $\mathbf{x + y \in R^+}$

- **AXIOMA 3: PROPIEDAD CLAUSURATIVA DE LA MULTIPLICACIÓN EN R^+**

  Para todo $\mathbf{x, y \in R+}$ se cumple que $\mathbf{x \cdot y \in R^+}$

El axioma 1 establece que si **x** es un número real, entonces de dicho número podemos afirmar una de tres cosas: **x** es positivo, **x** es igual a 0 ó **-x** es positivo (lo que equivale a decir que **x** es negativo).

Estos tres axiomas nos servirán de base para definir las relaciones **MENOR QUE** y **MAYOR QUE**; así:

DEFINICIÓN DE MENOR QUE Y MAYOR QUE:

Sean $x, y \in R$:

- **x es MENOR QUE y, denotado $x < y$, si y sólo si $y - x \in R^+$**
- **x es MAYOR QUE y, denotado $x > y$, si y sólo si $x - y \in R^+$**

Los símbolos > y < se llaman **SIGNOS DE DESIGUALDAD.** Expresiones tales como:

$x + 5 > 4$, $x^2 < 6$, $2 + 3 < 8$, $4 < x < 7$

se llaman **DESIGUALDADES.**

Ejemplo 1

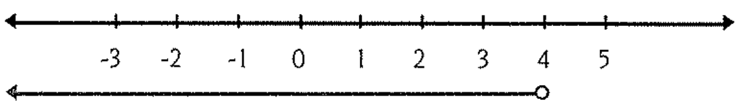
- $5 < 12$ ya que $12 - 5 = 7 \in R^+$
- $-6 < -2$ ya que $(-2) - (-6) = 4 \in R^+$
- $5 > -9$ ya que $5 - (-9) = 14 \in R^+$
- Si $ab - ac \in R^+$, entonces podemos escribir que $ab > ac$ o que $ac < ab$

Ejemplo 2

Representemos en la recta numérica el conjunto $\mathbf{A = \{x / x < 4\}}$

SOLUCIÓN

- Los números reales **x**, tales que $\mathbf{x < 4}$, se encuentran ubicados a la izquierda de 4 en la recta numérica; es decir:



$x < 4$

Figura 1-3

- Para representar este conjunto, la figura 1-3 nos muestra una semirrecta orientada hacia la izquierda y con un círculo vacío en su origen (4). ¿Qué significa el círculo vacío?

  Vamos a definir a continuación los símbolos $\leq$ y $\geq$:

DEFINICIÓN DE $\leq$ Y $\geq$

Los símbolos $\leq$ (menor o igual que) y $\geq$ (mayor o igual que) los definimos así:

- **$a \leq b$ si y sólo si $a < b$ ó $a = b$**
- **$a \geq b$ si y sólo si $a > b$ ó $a = b$**

Ejemplo 3

Representemos en la recta numérica el conjunto **$A = \{x/x \geq -3\}$**

SOLUCIÓN

- Los números reales **x**, tales que **$x \geq -3$**, corresponden a -3 y todos los ubicados a la derecha de -3 en la recta numérica; por lo tanto:

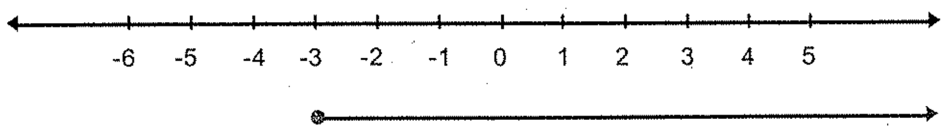
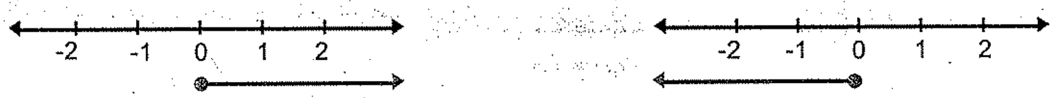


Figura 1-4

- Para representar este conjunto, la figura 1 - 4 nos muestra una semirrecta orientada hacia la derecha y con un círculo lleno en su punto de origen (-3). ¿Qué significa el círculo lleno?

ATENCIÓN

1. **$x > 0$** significa que **$x - 0 \in R^+$**; es decir, significa que **x** es un número real positivo.
2. **$x < 0$** significa que **$0 - x \in R^+$**; es decir, significa que **-x** es un número real positivo, o lo que es lo mismo: **x** es un número real negativo.



$x > 0$ **Figura 1-5** $x < 0$

3. Repasemos algo de conjuntos:

UNIÓN E INTERSECCIÓN DE CONJUNTOS

- Para **UNIR** dos conjuntos **A** y **B** tomamos tanto los elementos comunes como los no comunes; es decir, tomamos los elementos de **A** o los de **B** o los de ambos.

  Simbólicamente: **$A \cup B = \{x/x \in A \vee x \in B\}$**

  El símbolo $\cup$ se lee **UNIÓN** y el símbolo $\vee$ se lee **o**

- Para **INTERSECAR** dos conjuntos **A** y **B** tomamos sólo los elementos comunes a ambos conjuntos; es decir, tomamos los elementos de **A** y los de **B**.

  Simbólicamente: **$A \cap B = \{x/x \in A \wedge x \in B\}$**

  El símbolo $\cap$ se lee **INTERSECCIÓN** y el símbolo $\wedge$ se lee **y**

Ejemplo 4

Representemos sobre la recta numérica el conjunto **$C = \{ x/-2 \leq x < 5 \}$**

SOLUCIÓN

- En primer lugar, "traduzcamos" a nuestro lenguaje este conjunto. Sus elementos son todos los números MAYORES o IGUALES que -2 y MENORES QUE 5; es decir, los comprendidos entre -2 y 5, incluido -2 y sin incluir el 5; figura 1 - 6

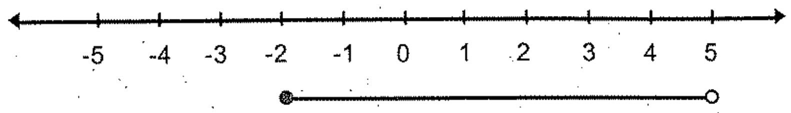


Figura 1-6

- Para representar el conjunto C trazamos un segmento cuyo extremo izquierdo (-2) se incluye ("círculo lleno") y cuyo extremo derecho (5) no se incluye ("círculo vacío").

Ejemplo 5

Dados los conjuntos **M = {x/x ≥ 1}** y **N ={x/ -4 ≤ x < 3}**, hallemos **M∪N** y **M∩N.**

SOLUCIÓN

- Representemos en la recta numérica los conjuntos dados; figura 1-7:

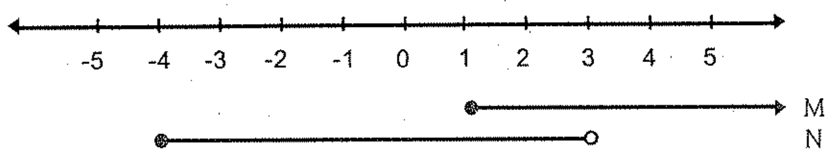


Figura 1-7

- Para hallar M∪N tomamos los elementos comunes y no comunes a M y N. El conjunto resultante es {x/x ≥ -4}; figura 1-8:

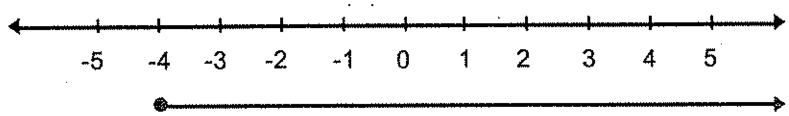


Figura 1-8

- Para hallar M∩N tomamos sólo los elementos comunes a M y N. Estos elementos comunes están comprendidos entre 1 (incluido) y 3 (sin incluir). Por lo tanto: M∩N={x/1 ≤ x<3}; figura 1-9:

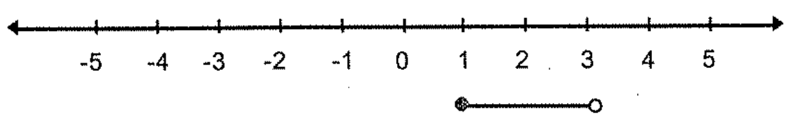


Figura 1-9

1.7 INTERVALOS

Primera Experiencia

- Consideremos los siguientes subconjuntos de números reales:

A={x/3 ≤ x ≤ 8}　　　B={x/3< x ≤ 8}

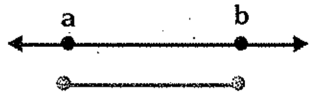
C={x/3 ≤ x <8}　　　D={x/3 < x < 8}

- El conjunto A contiene todos los números reales comprendidos entre 3 y 8, incluyendo los valores extremos 3 y 8. Este conjunto se llama INTERVALO CERRADO y lo simbolizamos por: A =[3 ; 8]
- Los conjuntos B y C contienen todos los números reales comprendidos entre 3 y 8, pero en B sólo se incluye el 8 y en C sólo se incluye el 3. Estos conjuntos se llaman INTERVALOS SEMICERRADOS y los simbolizamos así: B=(3 ; 8] y C=[3 ; 8).
- El conjunto D contiene todos los números reales comprendidos entre 3 y 8, sin incluir los valores extremos 3 y 8. Este conjunto se llama INTERVALO ABIERTO y lo simbolizamos por: C = (3 ; 8).

DEFINICIÓN DE INTERVALO

Si a,b $\in$ R tales que a < b, entonces:

$[a, b] = \{x/a \leq x \leq b\}$

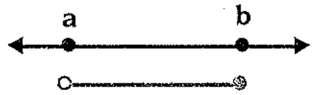


I. CERRADO

$[a, b) = \{x/a \leq x < b\}$

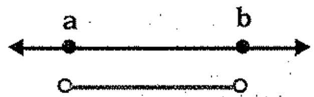
I. SEMICERRADO POR LA IZQUIERDA

$(a, b] = \{x/a < x \leq b\}$



I. SEMICERRADO POR LA DERECHA

$(a, b) = \{x/a < x < b\}$



I. ABIERTO

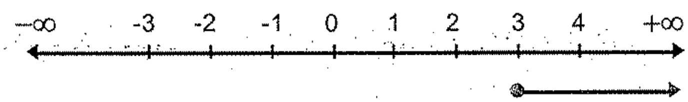
Segunda Experiencia

- Consideremos, ahora, los siguientes conjuntos:

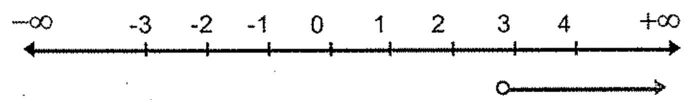
  $A=\{x/x \geq 3\}$ $B=\{x/x > 3\}$
  $C=\{x/x \leq 3\}$ $D=\{x/x < 3\}$

- Cada uno de estos conjuntos es un **INTERVALO INFINITO** y lo simbolizamos así:

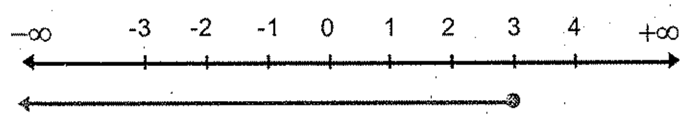
$A = [3; +\infty)$



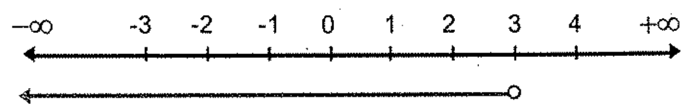
$B = (3 ; +\infty)$



$C = (-\infty; 3]$



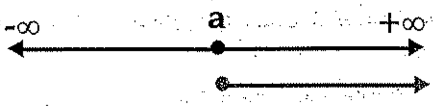
$D = (-\infty; 3)$



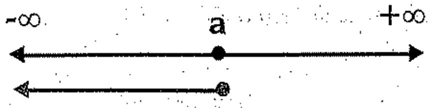
INTERVALOS INFINITOS

Si a $\in$ R entonces los siguientes conjuntos se denominan INTERVALOS INFINITOS:

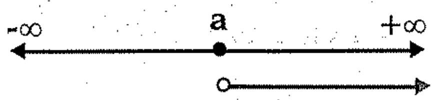
[a ; +∞] ={x/x ≥ a}



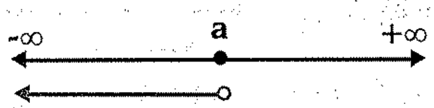
(-∞ ; a] ={x/x ≤ a}



(a ; +∞] ={x/x > a}



(-∞ ; a) ={x/x < a}



Ejemplo

Dados los intervalos A =[-1 ; +∞) ; B =(-3 ; -2) ; C =(-2; 3] y D =(-∞ ; 1] , hallemos:

a) A∩B y b) C∪D.

SOLUCIÓN

a) Representemos sobre la recta numérica los conjuntos A y B:

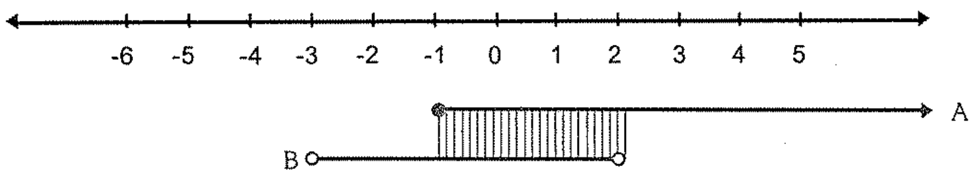


Figura 1-10

El conjunto A∩B es la zona rayada en la figura 1-10, correspondiente a los elementos comunes a los conjuntos A y B. Por lo tanto: A∩B = [-1 ; 2)

b) Representemos sobre la recta numérica los conjuntos C y D:

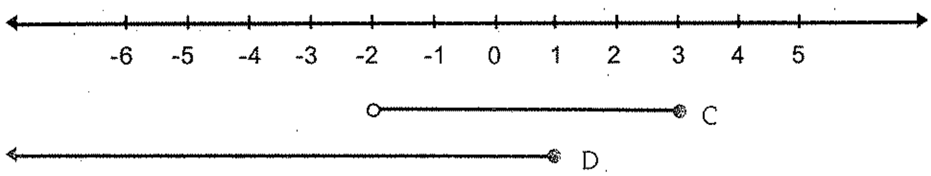


Figura 1-11

Como en la unión tomamos tanto los elementos comunes como los no comunes, entonces rayamos los elementos de ambos; figura 1-11

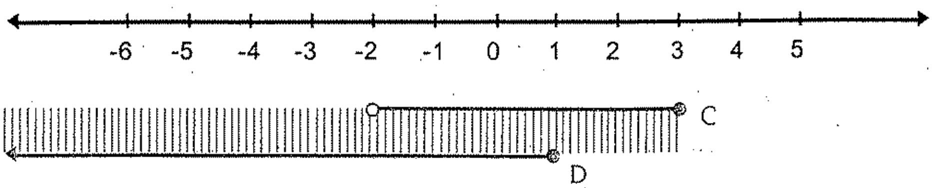


Figura 1-12

Por lo tanto: C∪D = (- ∞; 3]

EJERCICIO 1.6

1 Escribir en forma simbólica los enunciados siguientes:

a) x es menor o igual que y.
b) x es mayor o igual que y.
c) x no es mayor que y
d) x está entre 3 y 10 inclusive
e) y está entre -5 y -2.

2 Escribir en forma de desigualdad los siguientes intervalos y representarlos en la recta numérica.

a) A = $[-5 ; 12]$
b) B = $[-8; 5)$
c) C = $(-\infty ; -3)$
d) D = $(9 + \infty)$
e) E = $(-8 ; -1)$
f) F = $[0 ; 13)$

3 Escribir en forma de intervalo las siguientes desigualdades y representarlas en la recta numérica.

a) $x \leq -4$
b) $-5 < x \leq 10$
c) $m \geq 1$
d) $t > 8$
e) $-12 < y \leq 0$
f) $p \geq 18$

4 Dados los intervalos $A = [-7 ; 2)$; $B = (-4; 3)$ y $C = (-\infty ; -1]$ hallar y escribir en forma de intervalo los siguientes conjuntos. Representar la solución en la recta numérica.

a) $A \cup C$
b) $A \cap B$
c) $A \cap (B \cup C)$

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (1)

La suma de dos números positivos es 110. Si a uno de los números lo llamamos x, se pide:

1. Escribir una ecuación, en función de x, que permita calcular el producto P de los dos números.
2. ¿De qué grado es la expresión obtenida?
3. ¿Para cuáles valores de x, el producto es igual a 0?

1.8 PROPIEDADES DE LAS DESIGUALDADES

En esta sección enunciaremos e interpretaremos las propiedades de las desigualdades más utilizadas en la solución de ejercicios y problemas de la geometría analítica y el cálculo.

Primera Experiencia

- Sabemos que $-7 > -10$ y $-10 > -20$ ¿qué relación hay entre -7 y -20?
- La respuesta parece (y lo es) simple: $-7 > -20$.
- En general, si **a**, **b** y **c** son números reales tales que **a >b** y **b >c** entonces **a >c**. Esta propiedad se denomina **PROPIEDAD TRANSITIVA DE LAS DESIGUALDADES.**
- Esta propiedad es útil cuando tenemos dobles desigualdades como ésta:

$$2x - 3 \leq x^2 + 5x - 2 < 4x + 8$$

En este caso, la propiedad transitiva nos permite escribir la expresión así:

$$2x - 3 \leq x^2 + 5x - 2 \wedge x^2 + 5x - 2 < 4x + 8$$

Más adelante estudiaremos la forma de resolver estas desigualdades.

P - 1 PROPIEDAD TRANSITIVA.

Sean a, b, c $\in$ R
Si a > b y b > c entonces a > c
ó
Si a < b y b < c entonces a < c

Segunda Experiencia

- Consideremos la desigualdad -5 < 12 y sumemos a ambos lados, por ejemplo, -7. ¿Cambiará de sentido la desigualdad? Veamos:

$-5 < 12$ .... Desigualdad dada

$\underbrace{-5 + (-7)}_{-12} \;?\; \underbrace{12 + (-7)}_{5}$ .... Hemos sumado (-7) a ambos lados

$-12 < 5$

- Como vemos, la desigualdad NO ha cambiado de sentido.
- Repitamos el procedimiento anterior, pero restando una misma cantidad a ambos lados de la desigualdad. Saquemos conclusiones.

P-2: Si sumamos o restamos a ambos miembros de una desigualdad un mismo número, la desigualdad NO CAMBIA de sentido; es decir:

Si a, b, c $\in$ R y a > b, entonces $a \pm c > b \pm c$

APLICACIÓN:

Esta propiedad nos garantiza que la transposición de términos en las desigualdades es similar a la transposición de términos en las igualdades; es decir:

Si $x + 7 > 9$, entonces $x > 9 - 7$.
Si $x - 2 > 4$, entonces $x > 4 + 2$

Ejemplo

$$\begin{aligned} x + 7 > 9 &\Rightarrow x + 7 + (-7) > 9 + (-7) \\ &\Rightarrow x + 0 > 9 + (-7) \\ &\Rightarrow x > 9 + (-7) \\ &\Rightarrow x > 9 - 7 \end{aligned}$$

Tercera Experiencia

- Consideremos la desigualdad -6 < 5 y multipliquemos ambos lados por un número positivo, por ejemplo, 6. ¿Cambiará de sentido la desigualdad? Veamos:

$$-6 < 5$$

$$\underbrace{(-6)\cdot 6}_{-36} \;?\; \underbrace{5\cdot 6}_{30}$$

$$-36 < 30$$

- Como vemos, la desigualdad **NO** cambió de sentido. En general, tenemos que:

> **P-3: Si multiplicamos (o dividimos) ambos lados de una desigualdad por un mismo número POSITIVO, la desigualdad no cambia de sentido; es decir:**
>
> **Sean a, b $\in$ R y c > 0. Si a > b, entonces a•c > b•c**

APLICACIÓN:

Esta propiedad nos dice que podemos trasponer un FACTOR POSITIVO de un lado al otro de una desigualdad SIN QUE CAMBIE el sentido de la desigualdad.

Ejemplo

Si $4x > -12$, entonces $x > -\dfrac{12}{4}$

Si $3x \leq 7$, entonces $x \leq \dfrac{7}{3}$

Cuarta Experiencia

- Consideremos la misma desigualdad de la actividad anterior. Ahora multipliquemos ambos lados por un mismo número NEGATIVO, por ejemplo, -2 ¿Cambiará de sentido la desigualdad? Veamos:

$$-6 < 5$$

$$\underbrace{(-6)\cdot(-2)}_{12} \;?\; \underbrace{5\cdot(-2)}_{-10}$$

$$12 > -10$$

- En efecto, cuando multiplicamos los dos lados de la desigualdad por un mismo número negativo, la desigualdad cambió de sentido. En general, tenemos que:

> **P-4: Si multiplicamos o dividimos ambos lados de una desigualdad por un mismo número NEGATIVO, la desigualdad cambia de sentido; es decir,**
>
> **Sean a, b$\in$R y c < 0. Si a > b, entonces a•c < b•c**

APLICACIÓN:

Esta propiedad implica que para transponer un FACTOR NEGATIVO de un lado al otro de una desigualdad es necesario CAMBIAR el sentido de la desigualdad.

Ejemplo 1

$$\text{Si } -3x \geq 15 \text{ entonces } x \leq -\frac{15}{3}$$

cambió de sentido

Ejemplo 2

Hallemos los valores de x que verifican la desigualdad:

$$4x - 5 + 12 - 7x \leq 6x + 9 - 2x + 16$$

SOLUCIÓN

$4x - 5 + 12 - 7x \leq 6x + 9 - 2x + 16.$ .... Desigualdad dada

$\therefore\ 4x - 7x - 6x + 2x \leq 9 + 16 + 5 - 12.$ .... Transposición de términos

$\therefore\ -7x \leq 18$ .... Reducción de términos semejantes

$\therefore\ x \geq -\dfrac{18}{7}$ .... Transposición de factores negativos

Luego, los valores de x que solucionan la desigualdad son los números MAYORES ó IGUALES que $-\dfrac{18}{7}$. En forma de intervalo la solución es: $x \in \left[-\dfrac{18}{7}; +\infty\right)$.

Quinta Experiencia

- Si recordamos las leyes de signos de la multiplicación y la división, deduciremos que el producto o cociente de dos números es positivo cuando AMBOS SON POSITIVOS (+•+ = +) o cuando AMBOS SON NEGATIVOS (– • – = +).

- Por lo tanto:

$$a \bullet b > 0 \text{ si y sólo si } \begin{cases} 1)\ a > 0 \wedge b > 0 \\ \quad\vee \\ 2)\ a < 0 \wedge b < 0 \end{cases}$$

- Esta propiedad es igualmente válida cuando tenemos $\dfrac{a}{b} > 0$

P-5: El producto o cociente de dos números es mayor que CERO (o positivo) cuando ambos números son positivos o ambos números son negativos; es decir:

$$\mathbf{a \bullet b > 0 \text{ si y sólo si } \begin{cases} 1)\ a > 0 \wedge b > 0 \\ \quad\vee \\ 2)\ a < 0 \wedge b < 0 \end{cases}}$$

Sexta Experiencia

- Si recordamos de nuevo las leyes de los signos de la multiplicación y la división, deduciremos que el producto (o cociente) de dos números es negativo cuando los números tienen signos contrarios:

$$(+)\bullet(-)=(-)$$

ó

$$(-)\bullet(+)=(-)$$

- Por lo tanto:

$$a \bullet b < 0 \text{ si y sólo si } \begin{cases} 1)\ a > 0 \wedge b < 0 \\ \vee \\ 2)\ a < 0 \wedge b > 0 \end{cases}$$

- Esta propiedad es igualmente válida cuando tenemos $\frac{a}{b} < 0$

> **P-6: Si el producto (o cociente) de dos números es NEGATIVO es porque los números tienen SIGNOS CONTRARIOS; es decir:**
>
> $$\mathbf{a \bullet b < 0 \text{ si y sólo si } \begin{cases} 1)\ a > 0 \wedge b < 0 \\ \vee \\ 2)\ a < 0 \wedge b > 0 \end{cases}}$$

PREGUNTA: ¿Cómo se interpretan las propiedades 5 y 6 cuando:

$a \bullet b \geq 0$; $a \bullet b \leq 0$; $\frac{a}{b} \leq 0$ y $\frac{a}{b} \geq 0$?

Ejemplo 1

Hallemos los valores de x que verifican la desigualdad: $(x - 3)(x - 1) > 0$.

SOLUCIÓN

Como la desigualdad es de la forma $a \bullet b > 0$, entonces:

$$(x-3)(x-1) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1)\ x-3 > 0 \wedge x-1 > 0 \\ \vee \\ 2)\ x-3 < 0 \wedge x-1 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1)\ x > 3 \wedge x > 1 \\ \vee \\ 2)\ x < 3 \wedge x < 1 \end{cases}$$

La solución de la parte 1) es la INTERSECCIÓN de los $x > 3$ con los $x > 1$; figura 1-13.

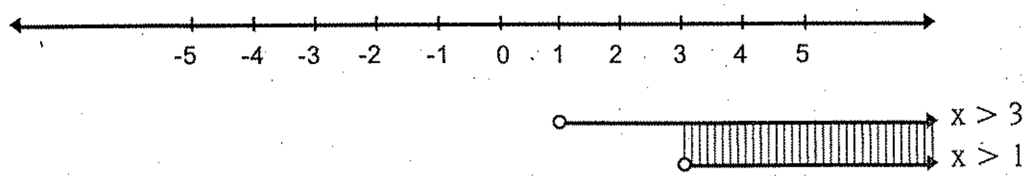


Figura 1-13

La intersección corresponde a la parte rayada; es decir,

$$S_1 = \{x/x > 3\} = (3 ; +\infty)$$

La solución de la parte 2) es la INTERSECCIÓN de los $x < 3$ con los $x < 1$; figura 1-14.

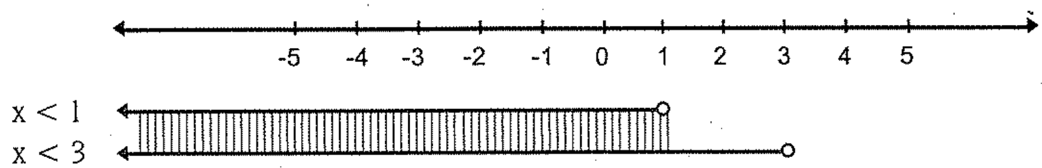


Figura 1-14

La intersección corresponde a la parte rayada; es decir:

$$S_1 = \{x/x < 1\} = (-\infty ; 1)$$

La solución total, de acuerdo con la propiedad, es la UNIÓN (por el símbolo V que aparece entre 1) y 2)) de S_1 con S_2. Por lo tanto:

$$S_T = S_1 \cup S_2 = \{x/x > 3 \vee x < 1\} = (-\infty ; 1) \cup (3 ; +\infty)$$

Esta solución la representamos en la figura 1-15.

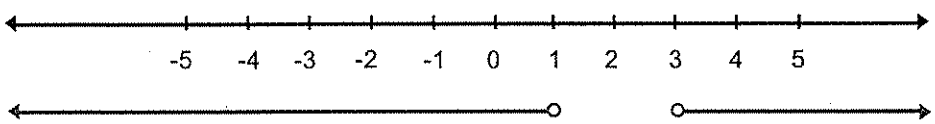


Figura 1-15

Ejemplo 2

Hallemos los valores de x que verifiquen la desigualdad

$$\frac{5 + x}{x + 3} \leq 0$$

SOLUCIÓN

La desigualdad es de la forma $\frac{a}{b} \leq 0$. Para solucionarla debemos tener en cuenta, en primer lugar, que el denominador, $x + 3$, no puede ser igual a 0; es decir, $x + 3 \neq 0$. Por lo tanto:

$$\frac{5+x}{x+3} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1)\ 5+x \geq 0 \wedge x+3<0 \\ \qquad \vee \\ 2)\ 5+x \leq 0 \wedge x+3>0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1)\ x \geq -5 \ \wedge x<-3 \\ \qquad \vee \\ 2)\ x \leq -5 \wedge x>-3 \end{cases}$$

La solución de la parte 1) es la INTERSECCIÓN de los $x \geq -5$ con los $x < -3$; figura 1-16.

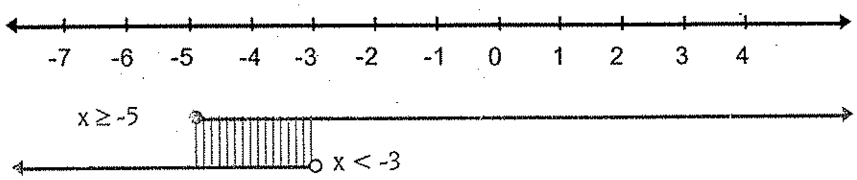


Figura 1-16

La intersección corresponde a la parte rayada; es decir:

$$\mathbf{S_1 = \{x / -5 \leq x < -3\} = [-5 ; -3)}$$

La solución de la parte 2) es la INTERSECCIÓN de los $x \leq -5$ con los $x > -3$; figura 1-17.

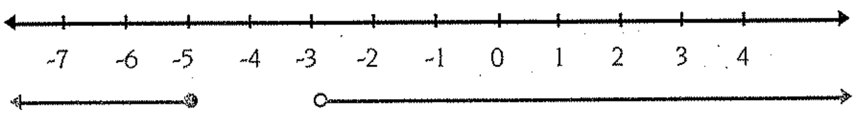


Figura 1-17

Observemos que los conjuntos no tienen elementos comunes; por lo tanto, su solución es el conjunto vacío:

$$\mathbf{S_2 = \phi}$$

La solución total es la UNIÓN de S_1 con S_2:

$$\begin{aligned} S_T = S_1 \cup S_2 &= \{x/-5 \leq x < -3\} \cup \phi \\ &= \{x/-5 \leq x < -3\} \\ &= [-5 ; -3) \end{aligned}$$

ATENCIÓN

1. Si miramos con detalle la solución obtenida en el ejemplo 1, encontraremos que los extremos de los intervalos resultantes son precisamente los CEROS de los factores (x - 3) y (x - 1); es decir, 3 y 1.

   Así mismo, al detallar los extremos del intervalo solución del ejemplo 2 vemos que coinciden con los CEROS de los factores (5 + x) y (x + 3); es decir, -5 y -3

2. Las propiedades 5 y 6 pueden extenderse cuando tengamos tres o más factores; es decir, podemos tener expresiones como éstas:

$$a \cdot b \cdot c > 0 \qquad \frac{a \cdot b}{c} > 0$$

$$a \cdot b \cdot c \cdot d \leq 0 \qquad \frac{a \cdot b}{c \cdot d} \leq 0$$

Sin embargo, su aplicación resultaría poco práctica por la cantidad de posibilidades que aparecerían. Miremos, por ejemplo, el análisis que tendríamos que hacer para la desigualdad $a \cdot b \cdot c > 0$

$$a \cdot b \cdot c > 0 \Leftrightarrow (a \cdot b) \cdot c > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1) \; a \cdot b > 0 \wedge c > 0 \\ \qquad\qquad \vee \\ 2) \; a \cdot b < 0 \wedge c < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1) \begin{cases} a > 0 \wedge b > 0 \\ \\ a < 0 \wedge b < 0 \end{cases} \wedge \; c > 0 \\ \qquad\qquad \vee \\ 2) \begin{cases} a > 0 \wedge b < 0 \\ \\ a < 0 \wedge b > 0 \end{cases} \wedge \; c < 0 \end{cases}$$

¡Bastante dispendioso, verdad! Más adelante estudiaremos un método práctico que nos permitirá resolver de una manera sencilla estas expresiones de apariencia muy compleja.

EJERCICIO 1.7

1. Elaborar una tabla con el resumen de la propiedad de las desigualdades que acabamos de estudiar.

En los ejercicios 2 a 9 interpretar adecuadamente cada una de las proposiciones dadas:

2. Si $a \neq 0$ entonces $a^2 > 0$
3. Si $a>b$ entonces $-a<-b$.
4. Si $a<c$ y $b<d$ entonces $a+b < c+d$
5. Si $a>0$ entonces $\frac{1}{a} > 0$.
6. Si $a<0$ entonces $\frac{1}{a} < 0$
7. Si $a>0$, $b>0$ y $a<b$, entonces $0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$
8. Si $a>b>0$ entonces $a^2 > b^2$
9. Si $a<b$ entonces $a < \frac{a+b}{2} < b$

En los ejercicios 10 a 14 hallar todos los valores de **x** que hacen cierta cada desigualdad. Escriba el resultado en forma de intervalo y represéntelo gráficamente en la recta numérica.

10. $-7 < 3 + 2x < 8$
11. $5x - 9 \geq 5x + 3x - 12$
12. $(2x - 1)(4 - x) < 0$
13. $\frac{3 + 2x}{x} > 0$
14. $(x + 1)(4 - 3x) \geq 0$

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (2)

Un terreno rectangular tiene un perímetro igual a 48 m. Si nombramos con la letra x uno de sus lados, se pide:

1. Escribir una expresión algebraica que permita calcular el área A de dicho rectángulo, en función de x.
2. ¿De qué grado es la expresión obtenida?
3. ¿Para cuáles valores de x, el área es positiva?

1.9 INECUACIONES

- Ya sabemos que una **ECUACIÓN** es una igualdad que se cumple para ciertos valores de la(s) incógnita(s) que aparecen en ella. El **CONJUNTO SOLUCIÓN** de una ecuación está constituido por aquellos elementos, de un conjunto referencial dado, que hacen verdadera dicha igualdad.
- En forma similar, podemos definir lo que es una **INECUACIÓN:**

DEFINICIÓN DE INECUACIÓN

- Una **INECUACIÓN** es una desigualdad en la que aparecen una o más incógnitas.
- La **SOLUCIÓN** de una desigualdad consta de todos los valores, de un conjunto referencial dado, que hacen verdadera la desigualdad.
- Para resolver una inecuación podemos utilizar una o más de las propiedades de las desigualdades estudiadas en la sección anterior.

Ejemplo

Las siguientes desigualdades son inecuaciones:

- $3x + 5 \leq 6x - 7$ .... inecuación con una incógnita
- $4x^2 - 3x > 1$ .... inecuación con una incógnita
- $\dfrac{x-3}{2x+1} - 5 \leq x$ .... inecuación con una incógnita
- $4x - 3y \leq 2$ .... inecuación con dos incógnitas
- $x^2 + y^2 < 4$ .... inecuación con dos incógnitas

- En este texto sólo resolveremos inecuaciones con una incógnita, las cuales clasificamos en:

1.9.1 Inecuaciones Lineales

INECUACIONES LINEALES O DE PRIMER GRADO

- Es cualquier inecuación que pueda escribirse en la forma:

$$ax + b \leq 0 \text{ ó } ax + b \geq 0$$

- Para resolver este tipo de inecuaciones eliminamos denominadores, si los hay, y luego aplicamos las propiedades de las desigualdades relacionadas con la transposición de términos y factores.

Ejemplo 1

Resolvamos la inecuación $\frac{x-5}{6}+\frac{1}{2} \leq \frac{4x+2}{9}$, escribamos la solución en forma de intervalo y representémosla gráficamente.

SOLUCIÓN

- En primer lugar vamos a eliminar los denominadores. El m.c.d. (6, 2, 9) = 18; por lo tanto

$\frac{x-5}{6}+\frac{1}{2} \leq \frac{4x+2}{9}$ .... inecuación dada

$\therefore 18\left(\frac{x-5}{6}+\frac{1}{2}\right) \leq 18\left(\frac{4x+2}{9}\right)$ .... ¿por qué no cambió el sentido de la desigualdad?

$\therefore 3(x-5)+9 \leq 2(4x+2)$

$\therefore 3x-15+9 \leq 8x+4$

- A continuación aplicamos las propiedades de las desigualdades relativas a la transposición de términos y factores:

$3x-8x \leq 4+15-9$

$\therefore -5x \leq 10$

$\therefore x \geq \frac{10}{-5}$ .... ¿por qué cambió el sentido de la desigualdad?

$\therefore x \geq -2$

- En forma de intervalo, la solución es: $[-2\,;+\infty)$
- La representación gráfica, figura 1-18, es la siguiente:

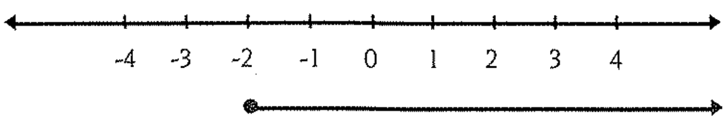


Figura 1-18

Ejemplo 2

Resolvamos la inecuación $2x-12 \leq 4-6x < 3x-5$, escribamos la solución en forma de intervalo y representémosla gráficamente.

SOLUCIÓN

- Como tenemos que resolver una doble inecuación, podemos utilizar la propiedad transitiva de las desigualdades para convertirla en dos inecuaciones simples; así:

$$\mathbf{a < b < c \Leftrightarrow a < b \wedge b < c}$$

- Por lo tanto:

$2x-12 \leq 4-6x < 3x-5$..inecuación dada

$\therefore 2x-12 \leq 4-6x \wedge 4-6x < 3x-5$.................................propiedad transitiva

- Ahora resolvemos cada una de estas inecuaciones y al final hallamos la intersección de los resultados:

1) $2x-12 \leq 4-6x \Leftrightarrow 2x+6x \leq 4+12$

$\Leftrightarrow 8x \leq 16$

$\Leftrightarrow x \leq 2$

$\Leftrightarrow x \in (-\infty; 2]$................................(1)

2) $4 - 6x < 3x - 5 \Leftrightarrow -6x - 3x < -5 - 4$
$\Leftrightarrow -9x < -9$
$\Leftrightarrow 9x > 9$
$\Leftrightarrow x > 1$
$\Leftrightarrow x \in (1 + \infty)$................................(2)

- Representemos las soluciones (1) y (2) en la recta numérica y hallemos su intersección:

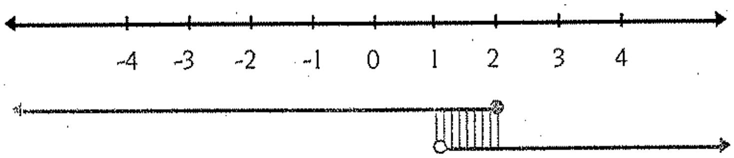


Figura 1-19

- Por lo tanto, la solución de la inecuación corresponde a los valores de x pertenecientes al intervalo (1; 2]:

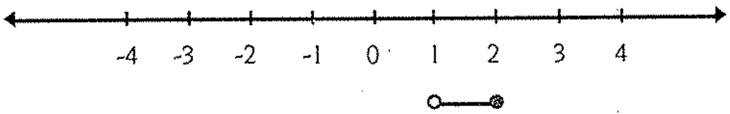


Figura 1-20

1.9.2 Inecuaciones Polinómicas

INECUACIONES POLINÓMICAS

- Es cualquier inecuación que pueda escribirse en la forma:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 < 0 \ (\text{ó} \leq 0)$$

ó

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 > 0 \ (\text{ó} \geq 0)$$

Ejemplos

Las siguientes inecuaciones son polinómicas:

a) $3x^4 - 11x^2 - 4 < 0$ b) $2x^3 + x^2 - 7x - 6 \geq 0$ c) $x^3 + 3x^2 \leq x$
d) $4x - x^2 > 0$ e) $x^3 < 9$ f) $3 - x \leq x^2$

MÉTODO PARA RESOLVER INECUACIONES POLINÓMICAS

- Para resolver una inecuación polinómica procedemos así:

1. Transponemos todos los términos a un mismo lado de la desigualdad de tal manera que el otro lado sea cero.
2. Factorizamos el polinomio resultante, utilizando alguno de los métodos conocidos: factor común, diferencia de cuadrados, formas trinómicas, completación a trinomio cuadrado perfecto y, sobre todo, el Teorema del Factor.
3. En este momento podríamos aplicar la propiedad:

$$a \cdot b \cdot c > 0$$

ó

$$a \cdot b \cdot c < 0$$

Sin embargo, ya sabemos lo complicado que puede resultar utilizar este proceso. Vamos a desarrollar al siguiente procedimiento, mucho más práctico:

PASO 1

¿De qué depende que el producto a•b•c sea mayor que 0 (positivo) o menor que 0 (negativo)? Sencillo: Depende del signo de cada uno de los factores a, b y c. Por esta razón, el primer paso será determinar para cuáles valores de la variable se anula (se hace 0) cada factor y, luego, a partir de estos valores analizar cuándo los factores obtenidos son positivos o negativos.

PASO 2

Con los valores de la variable que anulan cada factor formamos intervalos abiertos consecutivos desde $-\infty$ hasta $+\infty$.

Hagamos acá un alto en la explicación para que analicemos un caso concreto que nos ilustre lo que hemos dicho:

Ejemplo 1

Resolvamos la inecuación $x^2 + 2x < 8$

SOLUCIÓN

1. De la desigualdad dada tenemos:

$$x^2 + 2x - 8 < 0$$

2. Factorizando el polinomio resultante que, en este caso, es un trinomio de la forma $x^{2n} + bx^n + c$, nos queda:

$$(x + 4)(x - 2) < 0$$

3. PASO 1:
   Los valores de **x** que anulan cada factor son:

$$x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4$$
$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

PASO 2:
Con $x = -4$ y $x = 2$ formamos intervalos consecutivos desde $-\infty$ hasta $+\infty$; así:

$$(-\infty; -4) \qquad (-4 ; 2) \qquad (2 ; +\infty)$$

Sigamos con la explicación...

PASO 3:

De los intervalos: $(-\infty ; -4)$, $(-4 ; 2)$ y $(2 ; +\infty)$ veamos cuáles valores de **x** son candidatos a ser solución de la inecuación; es decir, debemos determinar cuál o cuáles de ellos hacen que: $(x + 4)\cdot(x - 2) < 0$

PASO 4:

Tomemos un valor arbitrario del primer intervalo: $(-\infty ; -4)$; por ejemplo, $x = -7$ y probemos cómo es el signo de $(x + 4)(x - 2)$:

$$\begin{aligned}(-7 + 4) \cdot (-7 - 2) &= (-3) \cdot (-9) \\ &= 27 \nless 0\end{aligned}$$

Como 27 no es menor que 0, entonces el intervalo $(-\infty, -4)$ no es solución de la inecuación.

- Ahora, tomemos un valor arbitrario del segundo intervalo: $(-4 ; 2)$; por ejemplo, $x = 0$ y probemos el signo de $(x + 4)(x - 2)$:

$$\begin{aligned}(0 + 4) \cdot (0 - 2) &= (4) \cdot (-2) \\ &= -8 < 0\end{aligned}$$

Como -8 es menor que 0, entonces el intervalo $(-4 ; 2)$ es solución de la inecuación.

- Finalmente, tomemos un valor arbitrario del intervalo $(2 ;+\infty)$; por ejemplo, $x = 5$ y probemos el signo de $(x + 4)(x - 2)$:

$$\begin{aligned}(5 + 4) \cdot (5 - 2) &= (9) \cdot (3) \\ &= 27 \nless 0\end{aligned}$$

Como 27 no es menor que 0, entonces el intervalo $(2 ; +\infty)$ no es solución de la inecuación.

Por lo tanto, de los tres intervalos analizados, sólo (-4 ; 2) es solución de la inecuación.

PASO 5

Sólo nos quedan por analizar dos valores: $x = -4$ y $x = 2$; es decir, los CEROS. Si reemplazamos cada uno de ellos en la expresión $(x + 4)(x - 2) < 0$ nos queda: $0 < 0$, lo cual no es verdad.

Por lo tanto, $x = -4$ y $x = 2$ no son solución de la inecuación.

4. CONCLUSIÓN: La solución de la inecuación $x^2 + 2x < 8$ es el intervalo (-4 ; 2)

Figura 1-21

ATENCIÓN

Como ejercicio, recomendamos resolver esta misma inecuación aplicando la propiedad a•b < 0.

Ejemplo 2

Resolvamos la inecuación $3x^3 - 7x \geq 14x^2 - 10$

SOLUCIÓN

1. $3x^3 - 7x \geq 14x^2 - 10$ .... ineacuación dada
2. $\therefore\ 3x^3 - 14x^2 - 7x + 10 \geq 0$ .... (¿por qué)
3. $\therefore\ (3x - 2)(x + 1)(x - 5) \geq 0$ .... Factorizamos aplicando el Teorema del Factor (¡Verifíquelo!)
4. Los ceros de cada factor son:

$$3x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$
$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$
$$x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$$

5. Con $x = -1$, $x = \frac{2}{3}$ y $x = 5$ formamos los intervalos que serán las posibles soluciones de la inecuación. Estos intervalos son:

$$(-\infty ; -1)\ ,\ \left(-1 ; \frac{2}{3}\right)\ ,\ \left(\frac{2}{3} ; 5\right)\ ,\ (5; +\infty)$$

6. Analicemos el signo de la inecuación en cada uno de los intervalos obtenidos:

- En $(-\infty ; -1)$, tomemos, por ejemplo, $x = -4$:

$$(-12 - 2)\cdot(-4 + 1)\cdot(-4 - 5) = \underbrace{(-14)\cdot(-3)\cdot(-9)}_{\textbf{Este producto es negativo}}$$

Luego, en este intervalo la inecuación es NEGATIVA y necesitamos valores de **x** para los cuales sea POSITIVA O CERO (≥ 0). Por lo tanto, el intervalo $(-\infty; -1)$ no es solución de la inecuación.

- En $\left(-1 ; \frac{2}{3}\right)$, tomemos $x = 0$:

$$(0 - 2)\cdot(0 + 1)\cdot(0 - 5) = \underbrace{(-2)\cdot(1)\cdot(-5)}_{\textbf{Este producto es positivo}}$$

Por lo tanto, en este intervalo, la inecuación es POSITIVA; luego $\left(-1\,;\,\frac{2}{3}\right)$ es solución de la inecuación.

- En $\left(\frac{2}{3}\,;\,5\right)$, tomemos x = 2:

$$(6-2)\cdot(2+1)\cdot(2-5) = \underbrace{(4)\cdot(3)\cdot(-3)}_{\textbf{Este producto es negativo}}$$

Luego, en este intervalo la inecuación es NEGATIVA y necesitamos valores de **x** para los cuales sea POSITIVA O CERO (≥ 0). Por lo tanto, el intervalo no es solución de la inecuación.

- En $(5\,;\,+\infty)$, tomemos x = 8:

$$(24-2)\cdot(8+1)\cdot(8-5) = \underbrace{(22)\cdot(9)\cdot(3)}_{\textbf{Este producto es positivo}}$$

Por lo tanto, en este intervalo la inecuación es POSITIVA; luego, $(5\,;\,+\infty)$ es solución de la inecuación.

- Sólo nos queda por analizar tres valores: $x = -1$, $x = \frac{2}{3}$ y $x = 5$, es decir, los CEROS. Veamos:

  * Si $x = -1$: $(-3-2)\cdot(-1+1)\cdot(-1-5) = (-5)\cdot(0)\cdot(-6) = 0$

    Luego, en $x = -1$, se cumple que $0 \geq 0$, lo cual es cierto; es decir, $x = -1$ es solución de la inecuación

  * Si $x = \frac{2}{3}$: $(2-2)\cdot\left(\frac{5}{3}\right)\cdot\left(\frac{-13}{3}\right) = 0$

    Luego, en $x = \frac{2}{3}$: se cumple que $0 \geq 0$, lo cual es CIERTO; es decir, $x = \frac{2}{3}$ es solución de la inecuación.

  * Si $x = 5$: $(15-2)\cdot(5+1)\cdot(5-5) = 0$

    Luego, en $x = 5$, se cumple que $0 = 0$, lo cual es CIERTO; es decir, $x = 5$ es solución de la inecuación

7. **CONCLUSIÓN:** La solución de la inecuación:

$$3x^3 - 7x \geq 14x^2 - 10$$

Es la unión de los intervalos $\left(-1\,;\,\frac{2}{3}\right)$, $(5;\,+\infty)$ y el conjunto $\left\{-1,\,\frac{2}{3}\,,\,5\right\}$. Por lo tanto:

$$S_T = \left[-1\,;\,\frac{2}{3}\right] \cup [5\,;\,+\infty)$$

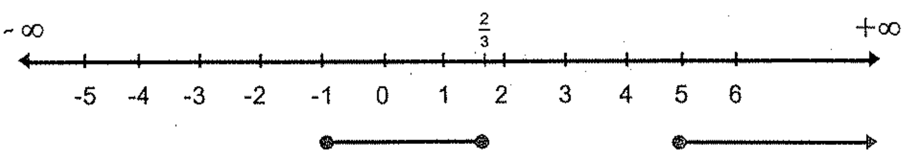


Figura 1-22

1.9.3 Inecuaciones Racionales

INECUACIONES RACIONALES

- Es cualquier inecuación que pueda escribirse en la forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} < 0 \ \ (\text{ó} \leq 0) \qquad ; \qquad \frac{P(x)}{Q(x)} > 0 \ \ (\text{ó} \geq 0)$$

donde **P(x)** y **Q(q)** son **POLINOMIOS ALGEBRAICOS.**

Ejemplos

Las siguientes son inecuaciones racionales:

$$\frac{x^2 + 4x}{x - 3} \leq 0 \qquad ; \qquad \frac{x}{x + 1} < x - 3 \qquad ; \qquad \frac{x^2 + x - 6}{2x^2 - 13x - 7} \geq 0$$

MÉTODO PARA RESOLVER INECUACIONES RACIONALES

- Cuando queremos resolver una inecuación como $\frac{x-3}{2x+1} < 5$, la primera tentación que podemos tener es transponer el factor 2x + 1 al otro lado de la desigualdad; sin embargo, ésta no es una buena idea ya que habría que tener en cuenta el signo de este factor: ¿es siempre positivo? ¿es siempre negativo? La respuesta es NO; por lo tanto:

$$\frac{x-3}{2x+1} < 5 \not\Leftrightarrow x - 3 < 5\,(2x + 1)$$

- Veamos, pues, cómo se resuelve una inecuación racional. En realidad, el procedimiento es muy similar al que estudiamos para resolver inecuaciones polinómicas.

1. Transponemos todos los términos a un mismo lado de la desigualdad de tal manera que el otro lado sea cero.
2. Resolvemos la suma o resta de fracciones que resulte hasta que nos quede una expresión de la forma:
   $\frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0$ ó $\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$
3. Factorizamos completamente el numerador y el denominador de la fracción.
4. Una vez factorizados el numerador y el denominador de la fracción, hallamos los ceros de cada factor y con ellos formamos intervalos abiertos consecutivos desde $-\infty$ hasta $+\infty$.
5. Finalmente, analizamos el signo de la fracción en cada uno de los intervalos, como lo hicimos en el caso de las inecuaciones polinómicas y de acuerdo con los resultados decidimos cuáles de ellos son solución y cuáles no.

   El siguiente ejemplo nos ayudará a aclarar las posibles dudas.

Ejemplo 1

Resolvamos la inecuación $2x - 1 \leq \frac{5}{x+1}$

SOLUCIÓN

1. $2x - 1 \leq \frac{5}{x+1}$ .... inecuación dada.

2. $2x - 1 - \dfrac{5}{x+1} \leq 0$............................ ¿por qué ?

3. $\left.\begin{array}{l} \dfrac{(2x-1)(x+1)-5}{x+1} \leq 0 \\ \\ \dfrac{2x^2+x-6}{x+1} \leq 0 \end{array}\right\}$.............resolvimos la operación con fracciones.

4. $\dfrac{(2x-3)(x+2)}{(x+1)} \leq 0$..........................factorizamos numerador y denominador de la fracción.

5. Los ceros de cada factor son: $x = \dfrac{3}{2}$, $x = -2$ y $x = -1$. Con estos ceros formamos los siguientes intervalos:

$$(-\infty ; -2) , (-2 ; -1) , \left(-1 ; \frac{3}{2}\right) \text{ y } \left(\frac{3}{2} ; +\infty\right)$$

6. Analicemos el signo de $\dfrac{(2x-3)(x+2)}{x+1}$ en cada uno de los intervalos:

* En $(-\infty; -2)$ tomamos $x = -4$ y nos queda: $\dfrac{(-)\cdot(-)}{(-)} = \dfrac{(+)}{(-)} = (-)$; es decir, en este intervalo la expresión es negativa y eso precisamente es lo que necesitamos. Por lo tanto, el intervalo $(-\infty; -2)$ es solución de la inecuación.

$$\therefore \quad \mathbf{S_1 = (-\infty ; -2)}$$

* En $(-2 ; -1)$ tomamos $x = -1.5$ y nos queda: $\dfrac{(-)\cdot(+)}{(-)} = \dfrac{(-)}{(-)} = (+)$; es decir, en este intervalo la expresión es positiva y nosotros necesitamos que sea negativa o cero (≤ 0). Por lo tanto, el intervalo $(-2 ; -1)$ no es solución de la inecuación.

* En $\left(-1 ; \dfrac{3}{2}\right)$ tomamos $x = 0$ y nos queda $\dfrac{(-)\cdot(+)}{(+)} = \dfrac{(-)}{(+)} = (-)$; es decir, en este intervalo la expresión es negativa. Por lo tanto, el intervalo $\left(-1 ; \dfrac{3}{2}\right)$ es solución de la inecuación.

$$\therefore \quad \mathbf{S_2} = \left(-1 ; \frac{3}{2}\right)$$

* El lector verificará que el intervalo $\left(\dfrac{3}{2} ; +\infty\right)$ no es solución de la inecuación.

* Si probamos los ceros encontraremos que $x = -2$ y $x = \dfrac{3}{2}$ cumplen con la condición de ser ≤ 0; pero, $x = -1$ no cumple ya que con este valor se anula el denominador de la fracción.

* **CONCLUSIÓN:** La solución de esta inecuación es:

$$S_T = S_1 \cup S_2 \cup \left\{-2 ; \frac{3}{2}\right\}$$

$$\therefore\ S_T = (-\infty\,;-2) \cup \left(-1\,;\frac{3}{2}\right) \cup \left\{-2\,;\frac{3}{2}\right\}$$

$$\therefore\ S_T = (-\infty\,;-2\,] \cup \left(-1\,;\frac{3}{2}\right]$$

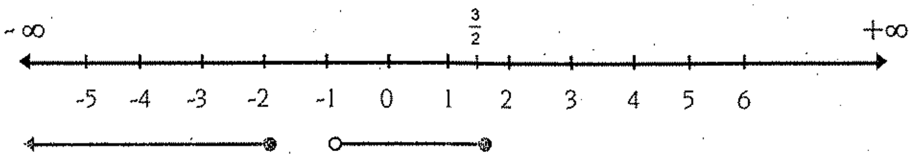


Figura 1-23

Ejemplo 2

Resolvamos la inecuación $\dfrac{2x^2 - x + 3}{x - 4} \leq 0$

SOLUCIÓN

- Observemos que ya la inecuación tiene la forma $\dfrac{P(x)}{Q(x)} \leq 0$. Por lo tanto, debemos proceder a factorizar el numerador y el denominador.
- El denominador ya está factorizado y al tratar de factorizar el numerador encontramos que el trinomio $2x^2 - x + 3$ no es factorizable en los reales porque al calcular el valor del discriminante $b^2 - 4ac$ obtenemos:

$$\begin{aligned}(-1)^2 - 4(2)(3) &= 1 - 24\\ &= -23 < 0\end{aligned}$$

  es decir, un valor negativo. Esto significa que, como el coeficiente del término cuadrático es positivo (es 2) en el trinomio $2x^2 - x + 3$, entonces el valor de este trinomio siempre es positivo para cualquier valor que le demos a x (¿por qué?)
- Por lo tanto, si $2x^2 - x + 3$ es siempre positivo, entonces el factor $(x - 4)$ tendrá que ser negativo para que la expresión $\dfrac{2x^2 - x + 3}{x - 4}$ sea negativa (< 0); es decir:

$$\begin{aligned}x - 4 < 0 &\Rightarrow x < 4\\ &\Rightarrow x \in (-\infty\,; 4)\end{aligned}$$

- Ahora bien, una fracción es igual a 0 sólo cuando el numerador es 0; sin embargo, ya dijimos que el numerador es siempre positivo.
- CONCLUSIÓN: La solución de la inecuación $\dfrac{2x^2 - x + 3}{x - 4} \leq 0$ es el intervalo $(-\infty\,; 4)$.

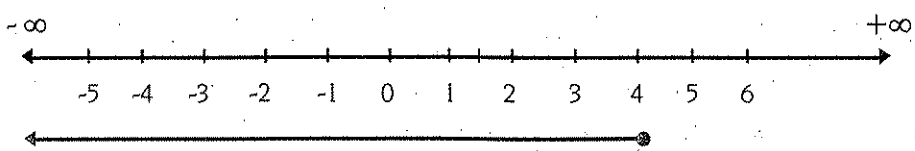


Figura 1-24

Ejemplo 3

Hallemos los valores de **y** para los cuales $\sqrt{\dfrac{1}{2 - y} - 3} \in \mathbf{R}$

SOLUCIÓN

- Para que una raíz par (raíz cuadrada en este caso) sea real es necesario que el radicando sea positivo o cero; es decir:

$$\sqrt{\frac{1}{2-y}-3} \in \mathbf{R} \Leftrightarrow \frac{1}{2-y}-3 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-3(2-y)}{2-y} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-6+3y}{2-y} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3y-5}{2-y} \geq 0$$

- Tanto el numerador como el denominador están factorizados. Los ceros del numerador y el denominador son $y = \frac{5}{3}$ y $y = 2$. Con estos ceros formamos los intervalos $\left(-\infty ; \frac{5}{3}\right)$, $\left(\frac{5}{3} ; 2\right)$ y $(2 ; +\infty)$

- Ahora analicemos el signo de la fracción $\frac{3y-5}{2-y}$ en cada uno de estos intervalos:

  * En $\left(-\infty ; \frac{5}{3}\right)$ tomamos $y = 0$: $\left(\frac{(-)}{(+)}\right) = (-)$En este intervalo la expresión es negativa. Por lo tanto, este intervalo no es solución de la inecuación.

  * En $\left(\frac{5}{3} ; 2\right)$ tomamos $y = 1.8$: $\left(\frac{(+)}{(+)}\right) = (+)$. En este intervalo, la expresión es positiva. Por lo tanto, este intervalo es solución de la inecuación.

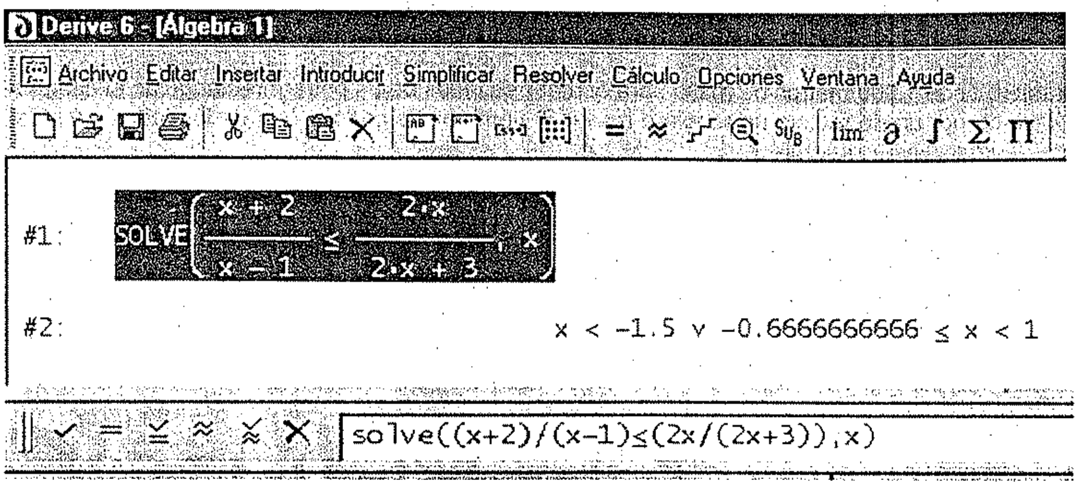
  * En $(2 ; +\infty)$ tomamos $y = 5$: $\left(\frac{(+)}{(-)}\right) = (-)$. En este intervalo, la expresión es negativa. Por lo tanto, este intervalo no es solución de la inecuación.

  * Finalmente, $\frac{3y-5}{2-y}=0$ cuando $3y - 5 = 0$; luego, $y = \frac{5}{3}$. Por lo tanto, los valores de **y** para los cuales $\sqrt{\frac{1}{2-y}-3} \in$ R corresponden al intervalo $\left[\frac{5}{3} ; 2\right)$.

1.9.4 Solución de Inecuaciones con el Derive

DERIVE también es útil para resolver inecuaciones. Al igual que las ecuaciones, podemos resolver inecuaciones de dos maneras: Por ejemplo, para resolver la inecuación $\frac{x+2}{x-1} \leq \frac{2x}{2x+3}$; hacemos lo siguiente:

1. - Escribimos SOLVE ((x+2) / (x - 1) ≤ (2x) / (2x + 3), x)
   - Oprimimos simultáneamente las teclas SHIFT y ENTER.
   - De inmediato, la VENTANA DE ALGEBRA nos mostrará:



2. También podemos hacerlo entrando la expresión a la ventana de álgebra y haciendo luego click desde el MENÚ DE OPCIONES sobre los comandos: RESOLVER click, EXPRESIÓN click, ALGEBRAICO click, REAL click, RESOLVER click.

EJERCICIO 1.8

En los ejercicios 1 a 14 se pide resolver las inecuaciones dadas, escribir el resultado en forma de intervalo y representarlo gráficamente.

1. $2x + 3 > 7$
2. $5x - 2 < 2x + 4$
3. $2x - 3 \leq \frac{x}{3} + \frac{1 - x}{2}$
4. $4 - x \leq 3 + 2x \leq 8 + 6x$
5. $(x + 2)(x + 4) > 0$
6. $x(x + 1)(x - 2) \geq 0$
7. $4 - x^2 \leq -2$
8. $5 - x^2 < 8$
9. $4x^2 \geq 10 - 3x$
10. $2x^3 - 11x < 9x^2 - 30$
11. $\frac{x - 1}{x + 1} \geq 0$
12. $\frac{2x - 1}{x + 4} \leq -1$
13. $\frac{x + 2}{x - 1} < \frac{2x}{2x + 3}$
14. $2x - 1 \geq \frac{39x - 60}{x^2 - 2x}$

En los ejercicios 15 a 20 hallar los valores de **x** en **R** para los cuales:

15. $\sqrt{3x - 5} \in R$
16. $\sqrt[4]{8 - x} \notin R$
17. $\sqrt{x^2 - 3} \in R$
18. $\sqrt{x^2 + 3x + 5} \in R$
19. $\sqrt{2x + \frac{x - 3}{3x + 1}} \notin R$
20. $\sqrt[3]{x^2 + 5x + 6} \notin R$

Resolver los problemas 1 a 14 de este ejercicio 1.8, utilizando DERIVE.

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (3)

Un granjero tiene 1.000 metros de malla para cercar tres lados de un potrero rectangular, el cuarto lado está limitado por un río recto y no requiere malla. Si nombramos con x a uno de los lados, se pide:

1. Hacer una interpretación gráfica del problema.
2. Escribir una expresión algebraica que permita calcular el área A del potrero, en función de x.
3. ¿De qué grado es la expresión obtenida?
4. ¿Podría predecirse, a partir de la expresión obtenida, cuáles son las dimensiones del terreno que tiene mayor área? Explique.

Taller de la Unidad 1

1. PREGUNTAS PARA REVISAR LA TEORÍA:

a) ¿Cuál es la propiedad que introduce el concepto de orden en el conjunto de los números reales?

b) Si a y b son números reales, ¿cómo se define $a < b$? ¿y $a > b$?

c) Si a y b son números reales tales que $a < b$, ¿cómo se llaman y cómo se definen los siguientes conjuntos: $[a;b]$, $[a;b)$, $(a;b]$, $(a;b)$, $(a;+\infty)$, $(-\infty; a)$, $[a;+\infty)$, $(-\infty; a]$?

d) ¿Qué establece la propiedad transitiva de las desigualdades?

e) ¿Cómo se transponen términos de un lado al otro de una desigualdad?

f) ¿Cómo se transponen factores de un lado al otro de una desigualdad?

g) Si a y b son números reales diferentes de 0, ¿cuándo se cumple que $a \cdot b > 0$? ¿cuándo $a \cdot b < 0$? ¿cuándo $\frac{a}{b} \geq 0$? ¿cuándo $\frac{a}{b} \leq 0$?

h) ¿Qué es una inecuación?

i) ¿Cómo se define una inecuación polinómica en la variable x? ¿cómo se resuelven estas inecuaciones?

j) ¿Cómo se define una inecuación racional en la variable x? ¿cómo se resuelven estas inecuaciones?

2. Indicar cuáles de los siguientes enunciados son verdaderos y cuáles son falsos:

a) $5 \leq 6 + 1$

b) $\frac{6-3}{3} > \frac{3}{2}$

c) $\left(\frac{4}{7} + \frac{3}{4} > \frac{3}{5} + \frac{5}{7}\right)$ y $(4 \geq 5 \cdot 3)$

d) $(18 - 10) - 4 \geq 18 - (10 - 4)$

e) $(4 > 6)$ ó $(5 + 2 = 10)$

f) $(3 + 4 < 8)$ ó $(6 + 5 > 5 + 6)$

3. ¿Qué conclusiones se obtienen si:

a) $a \geq b$ y $b \geq a$? b) $a \geq b$ y $a \neq b$? c) $(a \leq b$ y $b \leq c)$ y $c \leq a$?

4. Indicar cuáles de los siguientes enunciados son verdaderos y cuáles son falsos. Justificar la respuesta.

a) Si $x > 2$ entonces $x^2 > 4$

b) Para todo $x > 2$, se cumple que $x^2 > 4$

c) Si x es cualquier número real, entonces $x + 1 > x$

d) Si x es cualquier número real, entonces $x + x > x$

e) Si x es cualquier número real, entonces $x^2 > x$

f) Si $x > 0$ y $y < 0$ entonces $x + y > y$

g) Si y es cualquier número real diferente de 0 y $\frac{x}{y} > 1$ entonces $x > y$

5. Escribir cada conjunto en forma de desigualdad, en forma de intervalo y representarlo gráficamente.

a) El conjunto de los números reales menores o iguales a 5.
b) El conjunto de los números reales mayores que -4 y menores que 4.
c) El conjunto de los números reales menores que -4 o mayores o iguales que 4.
d) El conjunto de los números reales entre -2 y 7.

6. Describir la falsedad del siguiente razonamiento:

1) $4^2 - 2(4 \cdot 7) + 7^2 = 7^2 - 2(7 \cdot 4) + 4^2$

2) $\therefore (4 - 7)^2 = (7 - 4)^2$

3) $\therefore \sqrt{(4-7)^2} = \sqrt{(7-4)^2}$

4) $\therefore 4 - 7 = 7 - 4$

5) $\therefore -3 = 3$

7. Demostrar que $x^2 - 2x + 5 > 0$, para todo x

8. ¿Cómo deben ser m y n para que $x^2 + mx + n > 0$?

9. Descubra el error en el siguiente razonamiento:

1) Sean $m, n \in R^+$ tales que $m > n$
2) Luego, $mn > n^2$
3) Luego, $mn - m^2 > n^2 - m^2$
4) Luego, $m(n - m) > (n + m)(n - m)$
5) Luego, $m > n + m$
6) Luego, $0 > n$
7) Luego, $n < 0$
8) Pero, $n \in R^+$

¿Por qué se presentó la contradicción en los pasos 7) y 8)?

10. Utilizando la notación de intervalos, encontrar en cada caso el conjunto solución y representarlo gráficamente.

a) $[-3;7] \cup [2;6]$
b) $[2;4] \cup [3;10]$
c) $[6;9] \cap [7;10]$
d) $[2;6] \cap [-3;+\infty]$
e) $(-\infty;-8) \cup [-5;0]$
f) $[(-\infty;-2] \cap (-2;-7)] \cup (0;10]$

En los ejercicios **11.** a **22.** ,hallar el conjunto solución de la inecuación indicada y representarla gráficamente

11. $5x + 2 > x - 6$

12. $\frac{2}{3}x - \frac{1}{2} \leq 0$

13. $13 \geq 2x - 3 \geq 5$

14. $2 > -3 - 3x \geq -7$

15. $\frac{4}{x} - 3 > \frac{2}{x} - 7$

16. $\frac{1}{x+1} < \frac{2}{3x-1}$

17. $x^2 > 4$

18. $(x - 3)(x + 5) > 0$

19. $1 - x - 2x^2 \geq 0$

20. $4x^2 + 9x < 9$

21. $\frac{x+2}{x-1} < \frac{2x}{2x+3}$

22 $\frac{2x^3 - x^2 - 5x - 2}{x+3} \leq 0$

En los ejercicios **23.** a **26.**, hallar todos los valores de x para los cuales:

23. $\sqrt{8x-5} \in R$

24. $\sqrt{x^2-3x-10} \notin R$

25. $\sqrt{x^2-5x+4} \in R$

26. $\sqrt{\dfrac{x+3}{x-2}-5} \in R$

27. Para cada conjunto de la columna A encontrar un conjunto de la columna B que sea igual a él (la correspondencia no es uno a uno). El conjunto referencial es R.

COLUMNA A	COLUMNA B
a) $\{x/x^2+x+12 \geq 0\}$	1) $\{x/x>-4\}$
b) $\{x/x>-4 \text{ ó } x<3\}$	2) R
c) $\{x/x>-4 \text{ y } x>3\}$	3) $\{x/x \leq -4 \text{ ó } x \geq 3\}$
d) $\left\{x / \sqrt{\dfrac{x+1}{x^2+4}} \in R\right\}$	4) $\{x/-4<x<3\}$
e) $\left\{x/\sqrt{x^2+x-12} \in R\right\}$	5) ϕ
f) $\left\{x / \dfrac{x-3}{x+4}<0\right\}$	6) $\{x/x>3\}$
g) $\{x/x^2+x \geq 12\}$	7) No se encuentra
h) $\{x/x<-4 \text{ y } x>3\}$	8) $\{x/x \geq -1\}$

Prepárate para las Pruebas ICFES

En cada uno de los siguientes ejercicios se presenta una información acerca de la cual se formula una o varias preguntas. Cada pregunta tiene cuatro alternativas de respuesta, de las cuales dos de ellas son válidas para resolver el problema.

En cada caso, debe seleccionar sólo aquella que relaciona de manera más estructurada los conceptos matemáticos, con las condiciones particulares de la situación planteada.

Responda las preguntas 1., 2. y 3. con base en la siguiente información:

Por su buen comportamiento un grupo de 30 alumnos recibe 10 paquetes de cuentos, pagando por ellos $\frac{3}{4}$ del precio total, ya que el colegio paga la cuarta parte. Si el precio de cada paquete es \$36000 y los cuentos se reparten por igual.

1. COMPETENCIA: Propositiva.

   La cantidad x que debe pagar cada alumno es:

   a) $x \geq 5000$ b) $6000 \leq x \leq 10000$
   c) $10000 \leq x \leq 15000$ d) $x \geq 10000$

2. COMPETENCIA: Propositiva

Si un alumno recibe de mesada $80000 mensuales, el porcentaje de ésta que debe sacar para pagar las cuentas es:

a) Entre el 10% y el 13%
b) Entre el 5% y el 10%
c) Exactamente el 20%
c) Mucho menor al 25%

3. COMPETENCIA: Propositiva

Si el colegio destinara $1.000.000 para estimular el buen comportamiento de los alumnos, con la compra de cuentos, este dinero sería:

a) Suficiente para 350 alumnos.
b) Exacto para 200 alumnos.
c) Lo necesario para 330 alumnos.
d) Para menos de 350 alumnos.

4. Betty se casa y sus amigos han recogido $120.000 para su regalo de bodas. Si el dinero que pagó cada uno excede en $7.985 al número de personas, se puede afirmar que:

a) El número de amigos fue 15.
b) Al aumentar el número de aportantes, disminuye el valor de la cuota.
c) La cuota de cada uno es $4.000 < x < 7.000$.
d) Al sumar el número de personas y el valor de la cuota debe dar $120.000.

5. Necesito empapelar una pared rectangular de 108 m^2 y dispongo de una hoja de papel de 144 m^2. Por esta razón debo:

a) Cortar cuadrados de 4 m de lado en cada esquina de la hoja.
b) Cortar una franja de 3 m en uno de los lados de la hoja.
c) Dejar un cuadrado de 12 m por 9 m.
d) Cortar un rectángulo de 12 m por 3 m en la parte superior de la hoja.

Núcleo Temático

2

RELACIONES REALES

LOGRO GENERAL

- Reconocer algunos elementos que caracterizan una relación definida en el conjunto de los números reales y utilizarlos para dibujar su gráfica.

LOGROS ESPECÍFICOS	INDICADORES DE LOGRO
Corporal: • Desarrollar la habilidad para dibujar gráficas de rectas y curvas en el plano.	• Gradúa correctamente los ejes coordenados. • Representa mediante puntos, parejas ordenadas de una relación real. • Marca interceptos con los ejes y delimita zonas de graficación de la curva.
Comunicativa: • Explicar oralmente y por escrito el significado matemático de palabras como: interceptos, simetrías, dominio y rango.	• Describe oralmente o por escrito el procedimiento para hallar los interceptos con los ejes, determinar las simetrías y hallar el dominio y el rango de una relación real.
Cognitiva: • Identificar conjunto de partida, conjunto de llegada y regla de una relación. • Escribir el grafo o conjunto de parejas ordenadas de una relación real dada. • Determinar interceptos con los ejes, simetrías, dominio, rango y tabla de valores de una relación real.	• Dada una relación, identifica el conjunto de partida, el conjunto de llegada y la regla. • Escribe el conjunto de parejas ordenadas correspondiente a una relación dada. • Determina interceptos con los ejes, simetrías, dominio, rango y elabora una tabla de valores de una relación real dada.
Estética: • Utilizar toda la información disponible sobre una relación real (interceptos, simetrías, dominio, rango y tabla de valores) para dibujar un bosquejo de su gráfica.	• Dibuja un bosquejo de la gráfica de una relación real, a partir de la información obtenida de sus interceptos, simetrías, dominio, rango y tabla de valores.
Ética - Actitudinal: • Asumir una postura respetuosa frente a la forma de pensar de los demás.	• Reconoce que la paz es un gran beneficio que se alcanza con una actitud de respeto por el otro y en la búsqueda de la justicia y oportunidades para todos.

DIMENSIONES

EVALUACIÓN

ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS

2.1 COMPRENSIÓN DE LECTURA: LA EUROPA DEL RENACIMIENTO (SIGLO XVI)

Lea atentamente el siguiente texto y luego subraye la letra correspondiente a la ÚNICA respuesta correcta en cada uno de los enunciados propuestos.

FRANCISCO VIETE
1540 - 1603

Fue sólo en el siglo XVI cuando la ciencia europea sobrepasó finalmente a la de sus antecesores. Veamos qué acontecimientos notables se dieron en esta época: 1. Los italianos Tartaglia y Ferrari resolvieron la ecuación cúbica general y más tarde la ecuación general de cuarto grado, 2. Empezaron a utilizarse por primera vez los números imaginarios y se inventaron los símbolos algebraicos actuales gracias a los trabajos realizados por Francois Viete en 1591, 3. Aparecen en Europa las fracciones decimales, inventadas por el sabio alemán Simón Stevin, que escribió sobre ellas en 1585, 4. El matemático inglés Neper inventó los logaritmos como ayuda para los cálculos astronómicos y escribió sobre ellos en 1614. Briggs calculó las primeras tablas de logaritmos decimales que se publicaron en 1624.

De esta forma, a finales del siglo XVII llega a su fin el período de la matemática elemental tal como hoy se enseña en nuestras escuelas y colegios de bachillerato. Después vino la etapa de transición a la matemática superior: a la matemática de las magnitudes variables.

1. El propósito específico del autor del texto es:

a. Explicar cómo se obtiene el conocimiento científico.
b. Relacionar una serie de eventos que dieron brillo a la matemática.
c. Destacar el Renacimiento como una época de avance de la matemática elemental.
d. Mostrar la culminación de la matemática elemental y el comienzo de la matemática superior.

2. Los siguientes fueron avances significativos de la matemática, durante el Renacimiento, con excepción de:

a. El descubrimiento de los logaritmos empleado en los cálculos astronómicos.
b. Aparición de las fracciones decimales.
c. La utilización de los números imaginarios.
d. El cálculo de las primeras tablas de logaritmos decimales.

3. El tema central del escrito podría enunciarse como:

a. Los aportes hechos por algunos europeos al desarrollo de la matemática.
b. La consolidación de la matemática elemental.
c. La transición de la matemática hacia la ciencia superior.
d. El proceso de la ciencia en Europa a lo largo del Renacimiento.

4. El escrito anterior menciona diversos personajes de una época. El único país que no tiene representación es:

a. Alemania.
b. Italia.
c. España.
d. Francia.

5. La secuencia que mejor representa la función de cada idea dentro del escrito es:

a. Tesis, consecuencia, causas.
b. Ejemplificación, planteamiento, consecuencia.
c. Planteamiento, demostración, conclusión.
d. Consecuencia, planteamiento, conclusión.

2.2 EL CONCEPTO DE RELACIÓN

- El verbo RELACIONAR equivale a ASOCIAR ó HACER CORRESPONDER los elementos de un conjunto con los elementos de otro conjunto (pudiendo ser ambos conjuntos el mismo). Por lo tanto, la palabra RELACIÓN significa ASOCIACIÓN ó CORRESPONDENCIA.
- El concepto de RELACIÓN está ligado tanto a nuestras actividades cotidianas como a la matemática. Veamos algunos ejemplos:
  * Podemos RELACIONAR los elementos de un conjunto de bolas de cristal con el color de cada una.
  * Podemos RELACIONAR los elementos de un conjunto de personas con sus estaturas respectivas.
  * Podemos RELACIONAR los países de América del Sur con sus respectivas capitales.
  * Podemos RELACIONAR los elementos de un conjunto de números con el DOBLE de cada uno.
  * Podemos RELACIONAR los elementos de dos conjuntos de números reales mediante la regla o propiedad "... ES MAYOR QUE...".
  * Podemos utilizar la regla o propiedad "... ES SEMEJANTE A... " para RELACIONAR los elementos de dos conjuntos de figuras geométricas.
- Para que avancemos un poco en el estudio de las relaciones analicemos el siguiente ejemplo:

Ejemplo

Lina María llamó a una agencia de viajes y preguntó cómo podía viajar a distintas ciudades españolas. La informadora le dijo:

"Desde Bogotá hay vuelos a Madrid, Barcelona y Sevilla".
"Desde Medellín hay vuelos a Madrid y Sevilla".
"Desde Cali hay vuelos a Madrid".
"¿Y desde Armenia? "; preguntó Lina María.
"Desde Armenia no hay vuelos a España".
"¿Puedo ir a Pamplona? "; preguntó Lina María.
"No hay vuelos directos desde Colombia a Pamplona".

Con toda la información obtenida, Lina María elaboró el siguiente diagrama sagital; figura 2-1:

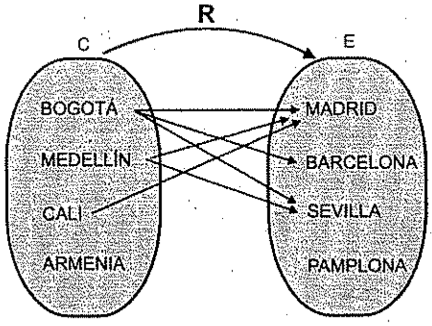


Figura 2-1

El diagrama sagital nos muestra que Lina María ha establecido una RELACIÓN entre los elementos del conjunto C (conjunto de partida) y los elementos del conjunto E (conjunto de llegada) mediante la regla **"De...hay vuelo directo a..."**. Como de Armenia no sale ninguna flecha, este elemento del conjunto C no está relacionado con ninguno del conjunto E; así mismo, a Pamplona no llega ninguna flecha, luego este elemento del conjunto E no está relacionado con ninguno de C.

CONCLUSIÓN: Lina María estableció una relación R del conjunto C en el conjunto E, la cual denotamos por $R: C \rightarrow E$, mediante la regla **"de...hay vuelo directo a..."**. Si representamos cada ciudad mencionada por su letra inicial minúscula, entonces los conjuntos C y E son:

$$C = \{b, m, c, a\}$$
$$E = \{m, b, s, p\}$$

En consecuencia, la relación R definida en el diagrama de flechas podemos escribirla como un conjunto de parejas ordenadas; así:

$$R = \{(b,m), (b,b), (b,s), (m,m), (m,s), (c,m)\}$$

DEFINICIÓN DE RELACIÓN

- Una relación queda definida si conocemos:
  a) El conjunto de partida.
  b) El conjunto de llegada.
  c) Una regla o propiedad que permite hacer corresponder los elementos del conjunto de partida con los elementos del conjunto de llegada
- Para indicar que R es una relación de A en B escribimos $R: A \rightarrow B$.

Ejemplo 1

Dados los conjuntos $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ y $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ y $R: A \rightarrow B$ una relación definida mediante la regla: **"cada elemento de B es 2 unidades mayor que un elemento de A"**, se pide:

1) Identificar el conjunto de partida y el conjunto de llegada.
2) Si los elementos del conjunto de partida se representan por **x** y los del conjunto de llegada por **y**, escribamos en lenguaje matemático la regla dada.
3) Elaborar el diagrama de flechas de R.
4) Escribir el conjunto de parejas ordenadas de R.
5) Dibujar la gráfica de R.

SOLUCIÓN

1) Como R es una relación de A en B entonces A es el conjunto de partida y B el conjunto de llegada.
2) La regla establece que: "cada elemento de B es 2 unidades mayor que un elemento de A"; esto es lo mismo que decir que: **"y es 2 unidades mayor que x"** ó que: **"y = x + 2"**.
3) Este es el diagrama de flechas:

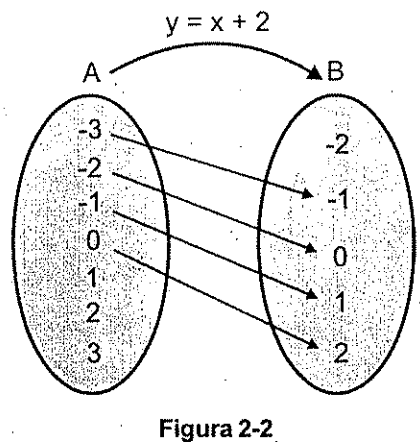


Figura 2-2

- -1 es 2 unidades mayor que -3: -1 es LA IMAGEN DE -3.
- 0 es 2 unidades mayor que -2: 0 es LA IMAGEN DE -2
- 1 es 2 unidades mayor que -1: 1 es LA IMAGEN DE -1
- 2 es 2 unidades mayor que 0: 2 es LA IMAGEN DE 0.
- -2 NO ES IMAGEN de ningún elemento de A.

4) De acuerdo con el diagrama de flechas, el conjunto de parejas ordenadas de $\boldsymbol{R}$ es:

$$\boldsymbol{R} = \{(-3, -1), (-2, 0), (-1, 1), (0, 2)\}$$

5) Para dibujar la gráfica de $\boldsymbol{R}$ basta dibujar los puntos correspondientes a cada pareja ordenada, así:

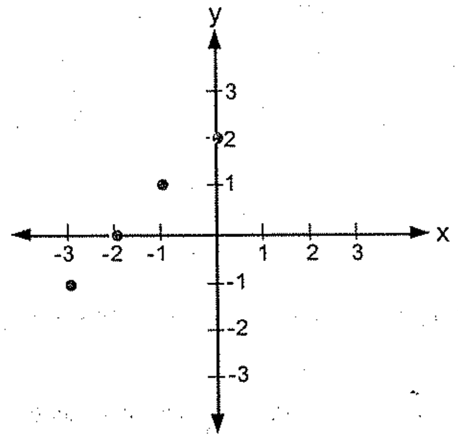


Figura 2-3

Los puntos A, B, C y D de la figura 2-3, y exclusivamente estos puntos, conforman la gráfica de R .

PREGUNTAS

1) ¿Se pueden unir los puntos A, B, C y D de la figura 2-3 mediante una línea de trazo continuo? ¿Por qué?
2) ¿Bajo qué condiciones podríamos unir tales puntos con una línea de trazo continuo?

Ejemplo 2

Dados Los conjuntos $A = \{x/x \in [-3; 3]\}$, $B = \{y/y \in [-2; 2]\}$ y $\boldsymbol{R}: A \rightarrow B$ una relación definida por $y = x + 2$, dibujemos la gráfica de $\boldsymbol{R}$.

SOLUCIÓN

- Como los conjuntos A y B son intervalos cerrados de números reales y la regla es la misma del ejemplo anterior, entonces la gráfica de $\boldsymbol{R}$ es muy similar a la anterior pero con una gran diferencia: los puntos A, B, C y D se unen mediante un segmento de línea recta; así:

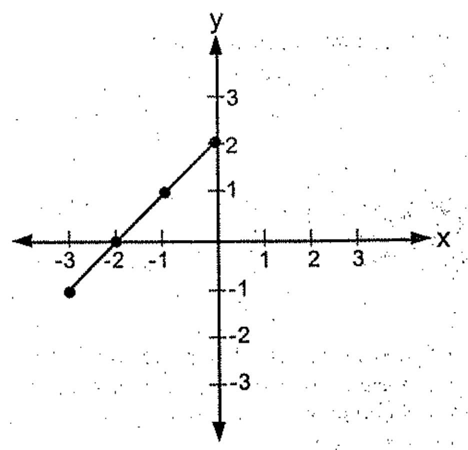


Figura 2-4

- Al unir estos puntos mediante un trazo continuo estamos reafirmando el hecho de que los conjuntos de partida y de llegada son subconjuntos de números reales y que pares ordenados como: (-2.5, -0.5), (-1.3), 0.7) , (-0.6 , 1.4) y otros más también hacen parte de la gráfica.

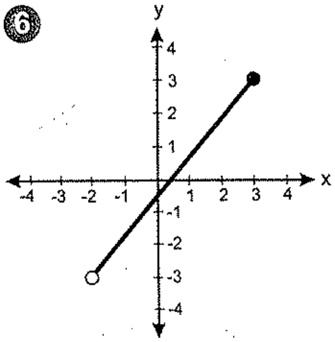
EJERCICIO 2.1

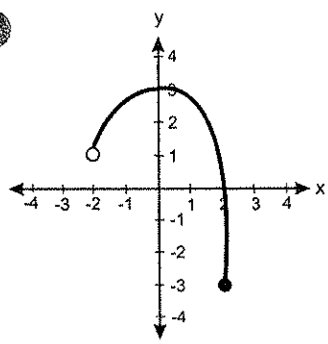
En los ejercicios 1 a 4 R_1 , R_2 , R_3 y R_4 son relaciones R: A $\rightarrow$ A definidas en el conjunto A = {1, 2, 3, 4 }. Se pide en cada caso:

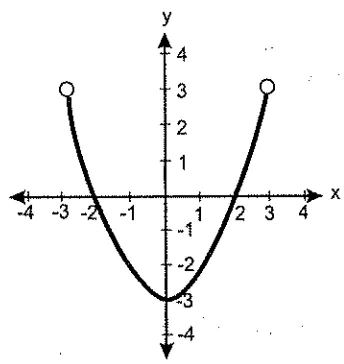
a) Elaborar un diagrama sagital.
b) Escribir el conjunto de parejas ordenadas.
c) Dibujar la gráfica.

1. $R_1 = \{ (x,y) / y = x \}$
2. $R_2 = \{ (x,y) / x + y = 6 \}$
3. $R_3 = \{ (x,y) / y = x + 3 \}$
4. $R_4 = \{ (x,y) / y^2 = x \}$
5. Dibujar las gráficas de las relaciones definidas por las reglas de los ejercicios 1 a 4 en el intervalo cerrado A = [1 ; 4]

En los ejercicios 6 a 8 se dan las gráficas de tres relaciones definidas en intervalos de números reales. Para cada una de ellas se pide determinar el conjunto de partida y el conjunto de llegada.

6.


7.


8.


SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (4)

Dos números positivos suman 6. Si uno de los números lo nombramos con x, se pide:

1. **Escribir una ecuación, en términos de x, que permita calcular el producto de uno de los números por el cuadrado del otro.**
2. **¿De qué grado es la ecuación obtenida, en términos de x?**
3. **¿Para cuáles valores de x, el producto es positivo?**

2.3 RELACIONES REALES

- En este texto, nuestro interés fundamental es estudiar relaciones definidas en el conjunto de los números reales o en intervalos de números reales. Por esta razón, limitaremos nuestro trabajo a relaciones reales cuya regla está definida mediante una ecuación de la forma E(x, y) = 0, siendo **x** un elemento del conjunto de partida y **y** un elemento del conjunto de llegada.

Ejemplo

Las siguientes son relaciones reales definidas mediante una ecuación:

$R_1 = \{ (x,y) / 2x - 3y = 5 \}$ $\qquad$ $R_2 = \{ (x,y) / x^2 + y^2 = 4\}$

$R_3 = \{ (x,y) / 3x^2 - y = 5 \}$ $\qquad$ $R_4 = \{ (x,y) / 4x^2 + 3y^2 = 12\}$

$R_5 = \{ (x,y) / x^2 - 5y^2 = 15 \}$ $\qquad$ $R_6 = \{ (x,y) / 4xy - 3y + 2x + 3 = 0\}$

- De las infinitas relaciones reales que podemos definir mediante una ecuación de la forma E(x, y) = 0, vamos a aprender a identificar, inicialmente, dos de ellas: las RELACIONES LINEALES y LAS RELACIONES CUADRATICAS.

2.3.1 Relaciones Lineales

RELACIÓN LINEAL

- **Una RELACIÓN LINEAL se define como el conjunto de todos los pares ordenados de números reales (x, y) que satisfacen una regla de la forma:**

$$ax + by + c = 0$$

donde a, b y c son números reales fijos tales que a y b no son simultáneamente iguales a 0.

- **Notemos dos características especiales de las relaciones lineales: Las variables x y y pertenecen a términos distintos y ambas son de PRIMER GRADO.**
- **La gráfica de una relación lineal es una LÍNEA RECTA; por lo tanto, para dibujar su gráfica sólo necesitamos dos puntos.**

Ejemplo

Son ejemplos de relaciones lineales las siguientes:

$R_1 = \{ (x,y) / 2x - 3y +5 = 0\}$ $\qquad$ $R_2 = \{ (x,y) / y = 2x - 4\}$

$R_3 = \{ (x,y) / 5x - 4y = 0\}$ $\qquad$ $R_4 = \{ (x,y) / x = -2\}$

$R_5 = \{ (x,y) / y = 1 \}$ $\qquad$ $R_6 = \{ (x,y) / x = 0\}$

Puede sorprendernos el hecho de que las relaciones R_4 y R_5 aparezcan con una sola variable. En realidad, tienen las dos variables, lo que ocurre es que el coeficiente de la que no aparece es 0; en efecto:

* La regla de R_4 es x + 0y = -2
* La regla de R_5 es 0x + y = 1
* La regla de R_6 es x + 0y = 0

Estas dos relaciones constituyen dos casos particulares de relaciones lineales: **Las líneas rectas paralelas a los ejes coordenados.** La relación R_4 representa una recta paralela al eje **y**; la relación R_5 una recta paralela al eje x y la relación R_6 corresponde al eje y.

Dibujemos las gráficas de cada una de las relaciones R_1 a R_5. Recordemos que sólo necesitamos dos puntos para dibujar cada una.

GRÁFICA DE 2x - 3y + 5 = 0

- Se recomienda despejar la variable y; así: $y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$
- Ahora, elaboremos una tabla de valores para obtener dos puntos, dibujamos estos pares ordenados en el plano cartesiano y los unimos mediante una recta de trazo continuo; figura 2-5.

x	y
0	$\frac{5}{3}$
-1	1

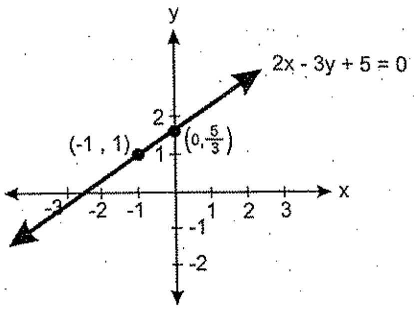


Figura 2-5

GRÁFICA DE R_2, R_3, R_4 y R_5

- GRÁFICA DE R_2

x	y = 2x - 4
1	-2
2	0

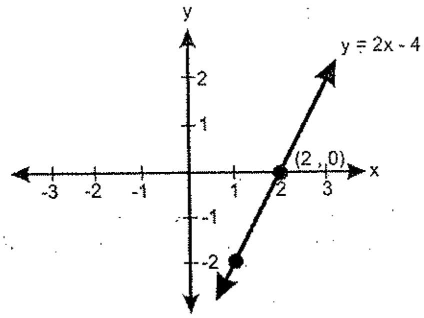


Figura 2-6

- GRÁFICA DE R_3

x	$y = \frac{5}{4}x$
0	0
1	$\frac{5}{4}$

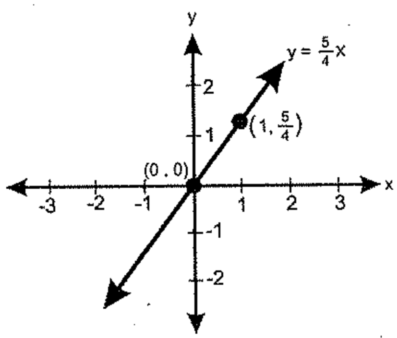


Figura 2-7

- GRÁFICA DE R_4

Para dibujar la gráfica de R_4 debemos tener en cuenta que **x** siempre tomará el valor de -2, cualquiera sea el valor que tome **y**; por lo tanto:

x	y
-2	-2
-2	1

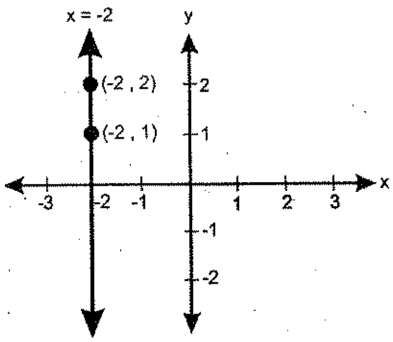


Figura 2-8

- **GRÁFICA DE R_5**

Para dibujar R_5 tengamos en cuenta que la variable **y** siempre tomará el valor de 1, cualquiera sea el valor que tome la **x** ; por lo tanto:

x	y=1
-2	1
1	1

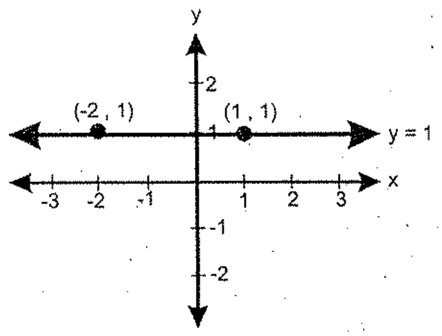


Figura 2-9

GRÁFICAS DE RECTAS PARALELAS A LOS EJES

- **La gráfica de una relación lineal cuya regla es una ecuación de la forma x = a, donde a es un número real, es una LÍNEA RECTA PARALELA AL EJE y.**
- **La gráfica de una relación lineal cuya regla es una ecuación de la forma y = b, donde b es un número real, es una LÍNEA RECTA PARALELA AL EJE x.**

PREGUNTA: ¿Cuáles son las ecuaciones del eje **x** y del eje **y**?

2.3.2 Relaciones Cuadráticas

DEFINICIÓN

- **El conjunto de todos los pares ordenados de números reales (x, y) que satisfacen una regla de la forma:**

$$ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0$$

donde a, b, c, d y e son números reales fijos tales que a y b NO son simultáneamente iguales a 0, define un tipo especial de relaciones denominadas RELACIONES CUADRÁTICAS.

- **En estas relaciones encontramos que una o ambas variables x y y son de segundo grado.**
- **La gráfica de una relación cuadrática depende de los coeficientes a y b y puede ser una de estas curvas, llamadas CÓNICAS:**

*** CIRCUNFERENCIA: Si $a = b$**
*** ELIPSE: Si $a \cdot b > 0$ y $a \neq b$**
*** HIPÉRBOLA: Si $a \cdot b < 0$**
*** PARÁBOLA: Si $a = 0$ ó $b = 0$**

Ejemplo

Son ejemplos de relaciones cuadráticas las siguientes:

$R_1 = \{ (x,y) / 3x^2 + 3y^2 = 12\}$ ........................CIRCUNFERENCIA.

$R_1 = \{ (x,y) / 4x^2 + 25y^2 = 100\}$ .... ELIPSE

$R_1 = \{ (x,y) / x^2 - 4y^2 = 4\}$ .... HIPÉRBOLA

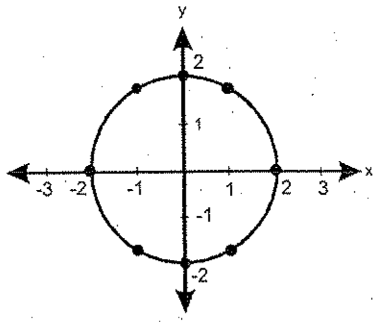
$R_1 = \{ (x,y) / y^2 - 4y - 4x - 8 = 0\}$ .... PARÁBOLA

Para dibujar de manera aceptable las gráficas de estas curvas debemos obtener un número relativamente grande de pares ordenados. Veamos cómo hacerlo:

GRÁFICA DE $3x^2 + 3y^2 = 12$

• En primer lugar, al despejar la **y** nos queda: $y = \pm\sqrt{4 - x^2}$

x	$y = \pm\sqrt{4 - x^2}$
-3	NO EXISTE
-2	0
-1	$\pm\sqrt{3} \approx \pm 1.73$
0	$\pm\sqrt{4} = \pm 2$
1	$\pm\sqrt{3} \approx \pm 1.73$
2	0
3	NO EXISTE



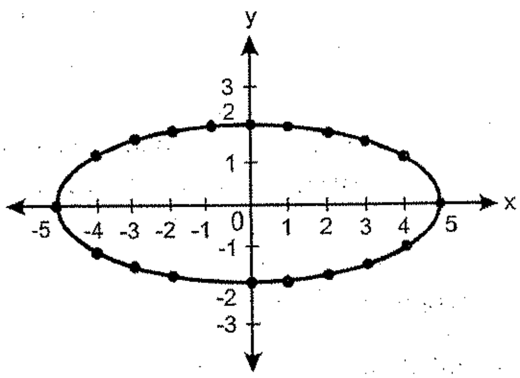
CIRCUNFERENCIA
Figura 2-10

- **PREGUNTA:** ¿Después de despejar la **y**, pudimos haber sabido con certeza los valores que debíamos darle a la **x** y de esa manera evitar asignarle valores como -3 y 3 para los cuales la **y** no existe?

GRÁFICA DE $4x^2 + 25y^2 = 100$

- De nuevo despejamos la y: $y = \pm\dfrac{\sqrt{100 - 4x^2}}{5}$

x	$y = \pm\dfrac{\sqrt{100 - 4x^2}}{5}$
± 6	NO EXISTE
± 5	0
± 4	$\pm\dfrac{6}{5} = \pm 1.2$
± 3	$\pm\dfrac{8}{5} = \pm 1.6$
± 2	± 1.84
± 1	± 1.96
0	2



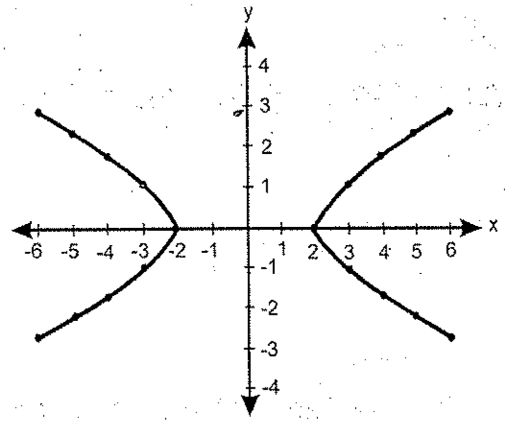
ELIPSE
Figura 2-11

- **PREGUNTA:** ¿Cómo podemos saber con certeza los valores que puede tomar x?

GRÁFICA DE $x^2 - 4y^2 = 4$

- Al despejar la y nos queda: $y = \pm \frac{\sqrt{x^2-4}}{2}$

x	$y = \pm \frac{\sqrt{x^2-4}}{2}$
± 6	$\pm \frac{\sqrt{32}}{2} \approx \pm 2.82$
± 5	$\pm \frac{\sqrt{21}}{2} \approx \pm 2.23$
± 4	$\pm \frac{\sqrt{12}}{2} \approx 1.73$
± 3	$\pm \frac{\sqrt{5}}{2} \approx \pm 1.11$
± 2	0
± 1	NO EXISTE
0	NO EXISTE



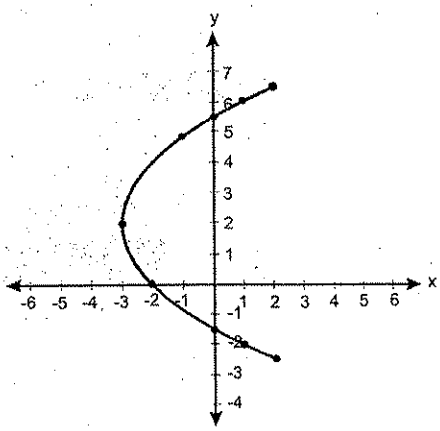
HIPÉRBOLA
Figura 2-12

- **PREGUNTA:** ¿Cómo sabemos, por ejemplo que x no puede tomar valores en el intervalo (-2 ; 2)?

GRÁFICA DE $y^2 - 4y - 4x - 8 = 0$

- De nuevo despejamos la y: $y = \frac{4 \pm \sqrt{16x + 48}}{2}$

x	$y = \frac{4 \pm \sqrt{16x+48}}{2}$
- 5	NO EXISTE
- 4	NO EXISTE
- 3	2
- 2	0 ó 4x
- 1	4.82 ó - 0.82
0	5.46 ó - 1.46
1	6 ó - 2
2	6.5 ó - 2.5



PARÁBOLA
Figura 2-13

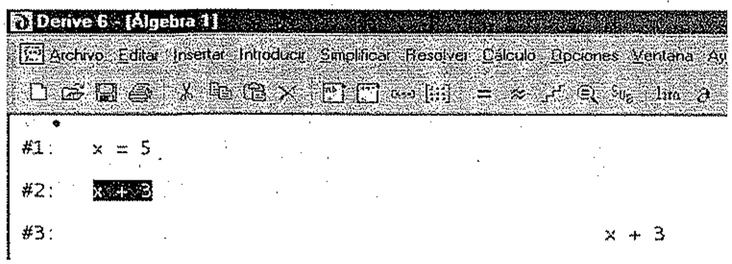
2.3.3 Dibujo de Gráficas con el Derive

DERIVE es un programa bastante bueno para ingresar relaciones, elaborar tablas de valores y dibujar gráficas en dos dimensiones. A continuación, estudiaremos cada uno de estos conceptos.

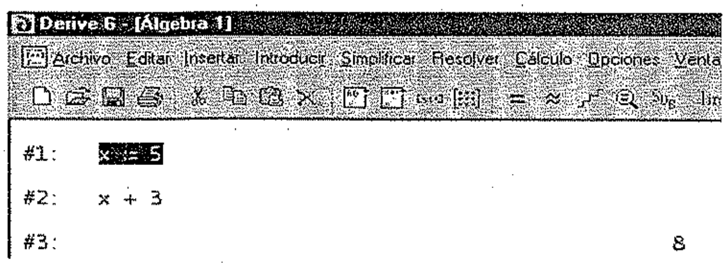
2.3.3.1 *Definición de Variables y Constantes*

- La expresión x : = 5, asigna el valor 5 a la variable x (no olvidar los dos puntos: antes del =).
- La expresión x : = elimina el último valor asignado a la variable x; es decir, la "limpia".

Ejemplo



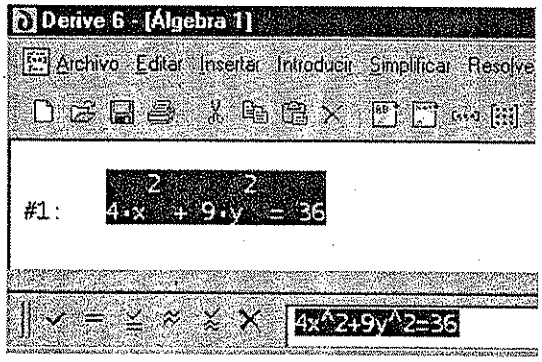
En este caso, el computador no acepta que x tome el valor de 5 y, por eso, x + 3 es x + 3 y no 8.



El hecho de escribir x : = 5 esta indicando que todo lo que sea x valdrá 5 y por ello x + 3 es igual a 8.

2.3.3.2 *Ingreso de Relaciones*

- Para ingresar una relación como $4x^2 + 9y^2 = 36$ basta escribirla con el teclado y luego presionar ENTER para ponerla en pantalla. De inmediato aparecerá:



2.3.3.3 *Ingreso de Vectores y Elaboración de Tablas de Valores*

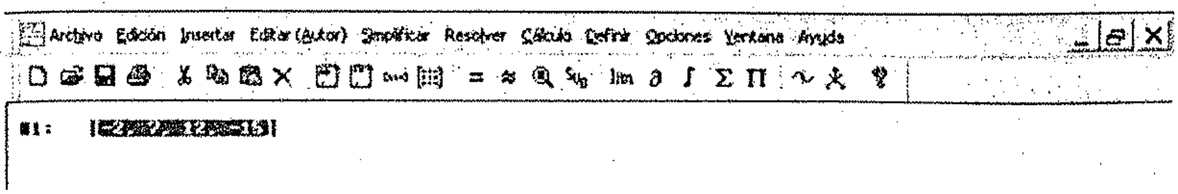
- Un vector es un arreglo de la forma [a_1, a_2, a_3,...a_n]

Ejemplo 1

Ingresemos a través de DERIVE el vector [-2, 7, 12, -15]

SOLUCIÓN

Escribimos [-2, 7, 12, -15] y presionamos ENTER. De inmediato aparecerá:



Ejemplo 2

Obtengamos la familia de curvas de la forma $y=ax^2+1$, para los valores $-5 \leq a \leq 20$ y $a \in Z$.

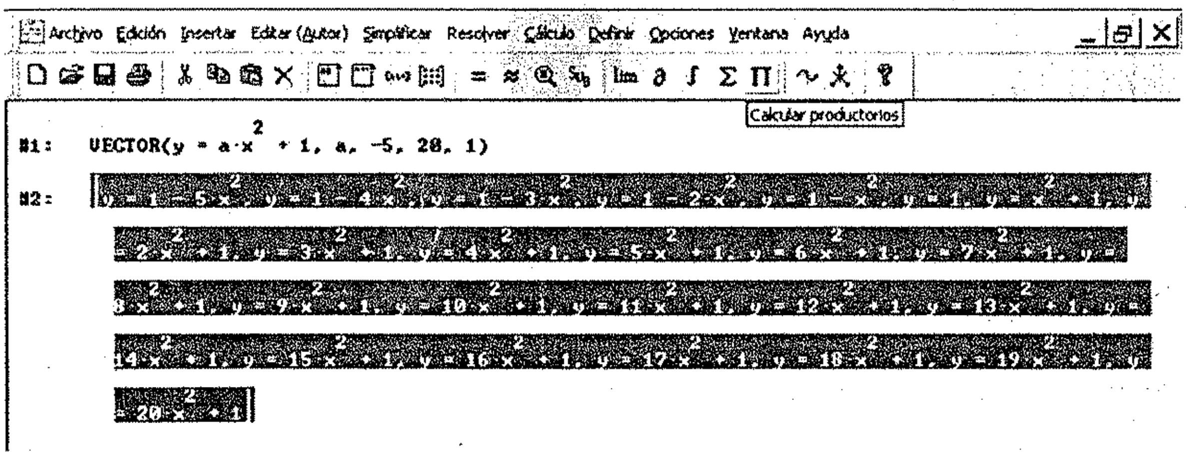
SOLUCIÓN

- En este caso emplearemos el comando **vector.**
- Ingresamos en la línea de entrada de expresiones:

vector (y = a * x ^ 2 + 1, a, -5, 20, 1)

luego, oprimimos sucesivamente las teclas Ctrl y ENTER y aparecerá la familia que estábamos buscando, en forma de vector así:

$$[y = -5x^2 + 1, y = -4x^2 + 1, y = -3x^2 + 1, y = -2x^2 + 1, \ldots , y = 20x^2 + 1]$$



- En este caso, hemos empleado el comando **vector**; así:

vector (función, variable, valor INICIO, valor FIN, incremento)

Ejemplo 3

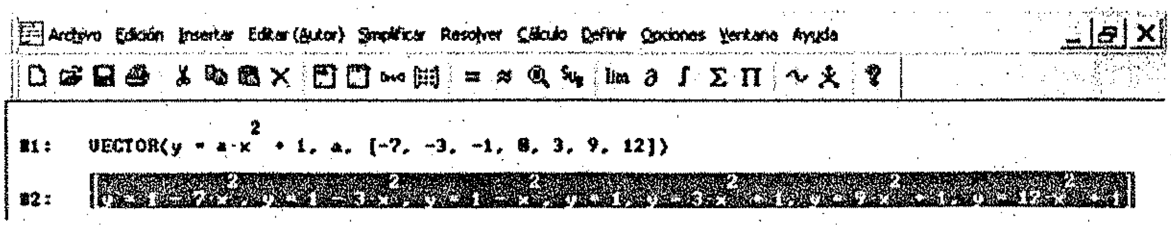
Obtengamos la familia de curvas de la forma $y = ax^2 + 1$, para los valores de a = -7, -3, -1, 0, 3, 9, 12.

SOLUCIÓN

- Como los valores de a no siguen ninguna secuencia, entonces debemos utilizar una variación del comando vector, ingresando en la línea de entrada de expresiones:

vector (y = a * x ^2 + 1, a, [-7, -3, -1, 0, 3, 9, 12])

- Obtendremos el resultado deseado presionando las teclas Ctrl y ENTER.



- En este caso, hemos utilizado la versión:

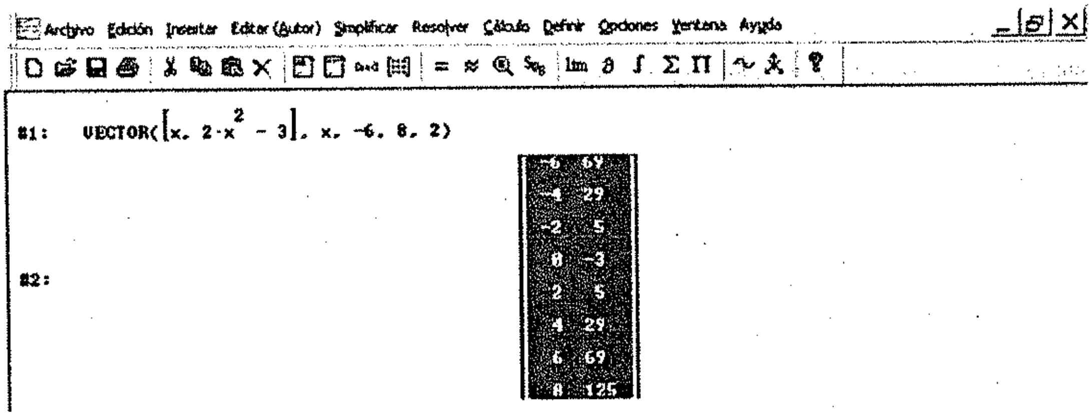
vector (función, variable, [valor 1, valor 2, ... , valor n])

Ejemplo 4

- El comando **vector** también nos permite crear TABLAS DE VALORES. Si, por ejemplo, queremos una tabla de valores de la función $y = 2x^2 - 3$, para valores de x entre –6 y 8 y de 2 en 2, escribimos lo siguiente:

vector ([x, 2 * x ^ 2 - 3], x, -6, 8, 2)

luego oprimimos Ctrl y ENTER y aparecerá en pantalla:



- El diseño general para producir tablas de valores es el siguiente:

vector ([variable, función], variable, valor INICIAL, valor FINAL, incremento)

Ejemplo 5

- Elaboremos una tabla de valores para la misma función del ejemplo anterior, pero para los siguientes valores de la variable: -8, -3, -1, 0, 4, 9, 12.

SOLUCIÓN

Ingresamos:

vector ([x, 2 * x ^ 2 - 3], x, [-8, -3, -1, 0, 4, 9, 12])

y luego oprimimos las teclas Ctrl y ENTER.

2.3.3.4 Dibujo de gráficas en dos dimensiones

Los siguientes ejemplos nos recordarán cómo dibujar gráficas de relaciones y funciones en dos dimensiones.

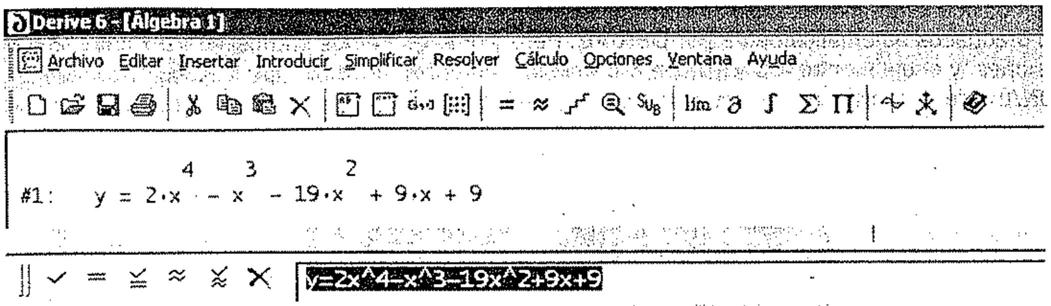
Ejemplo 1

Dibujemos la gráfica de la función $y=2x^4 - x^3 - 19x^2 + 9x + 9$ para valores de x entre -6 y 6 y 12 divisiones y para valores de y entre -50 y 40 y 8 divisiones.

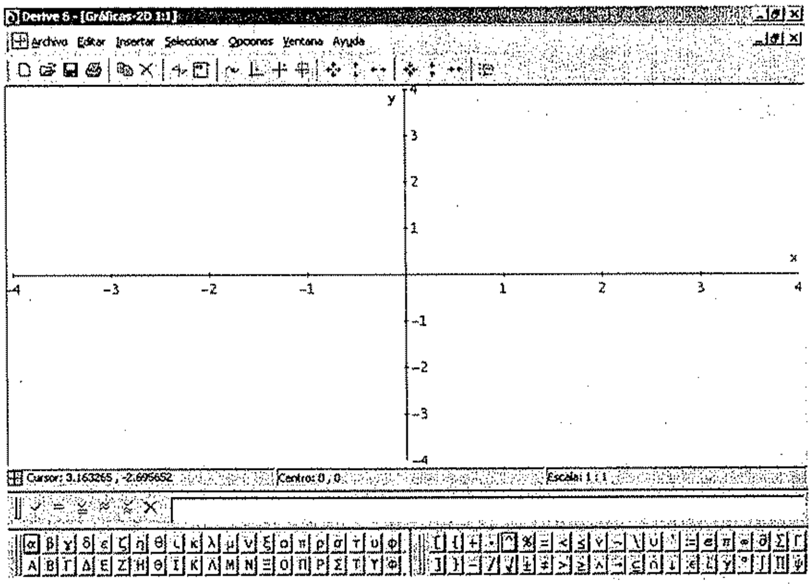
SOLUCIÓN

- En general, para dibujar la gráfica de una función hacemos lo siguiente:

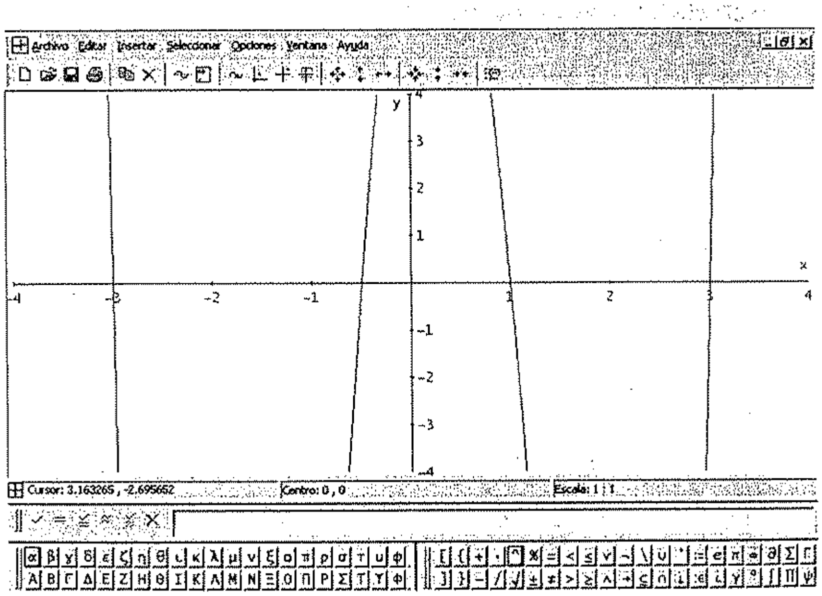
1. Ingresamos $y=2x^4 - x^3 - 19x^2 + 9x + 9$ a la ventana de álgebra, la resaltamos y hacemos **click** sobre el comando .



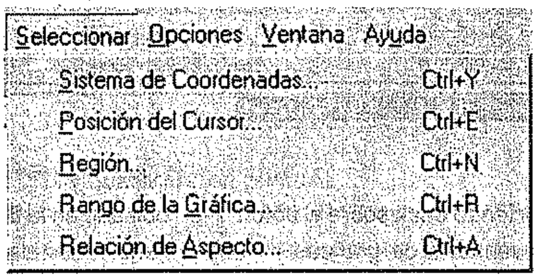
2. Abrimos la ventana **2D-plot** haciendo **click** sobre el botón ubicado en la **BARRA DE HERRAMIENTAS.** De inmediato aparecerá una ventrana de gráficas en dos dimensiones (plano cartesiano), en la cual la barra de herramientas ha cambiado.



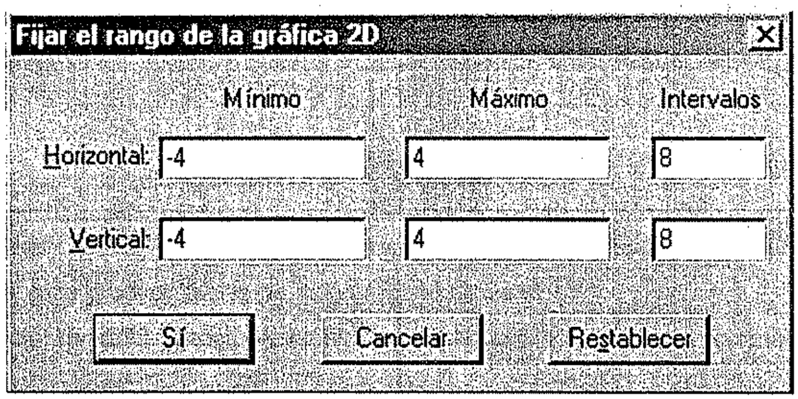
3. Hacemos de nuevo **click** sobre el botón , que ahora tiene una posición diferente y aparecerá la gráfica deseada.



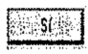
4. Notemos que la gráfica no aparece completa en la pantalla. Esto se debe a que los ejes coordenados han sido graduados automáticamente por DERIVE. Pero, como queremos graduar el eje x entre -6 y 6 con 12 divisiones, y el eje y entre -50 y 40 con 8 divisiones, entonces hacemos **click** sobre el comando **SELECCIONAR**; de inmediato aparecerá el siguiente menú de opciones:

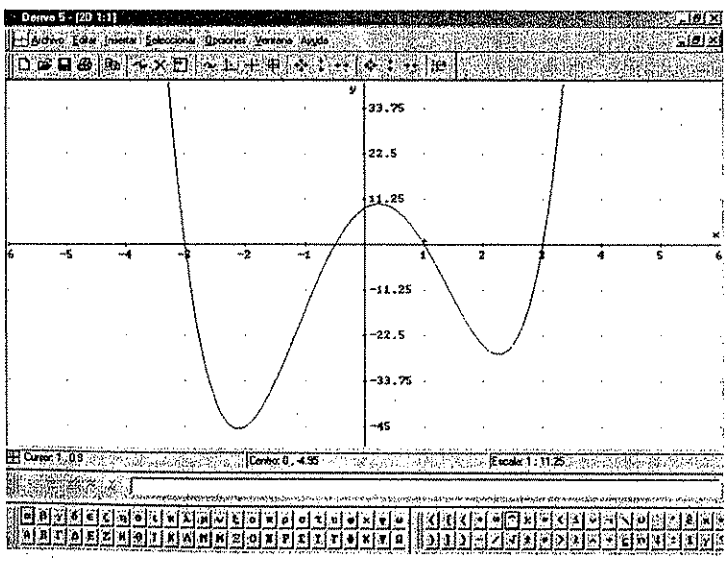


Hacemos **click** sobre el comando **RANGO DE LA GRÁFICA** y aparecerá el siguiente cuadro:



Se ingresa el mínimo horizontal llevando el puntero del mouse hasta el extremo izquierdo de la caja, escribiendo el valor mínimo (-6) y haciendo **click.** El mínimo que había antes se borrará oprimiendo la tecla **Supr.** Los demás valores se ingresan en la misma forma.

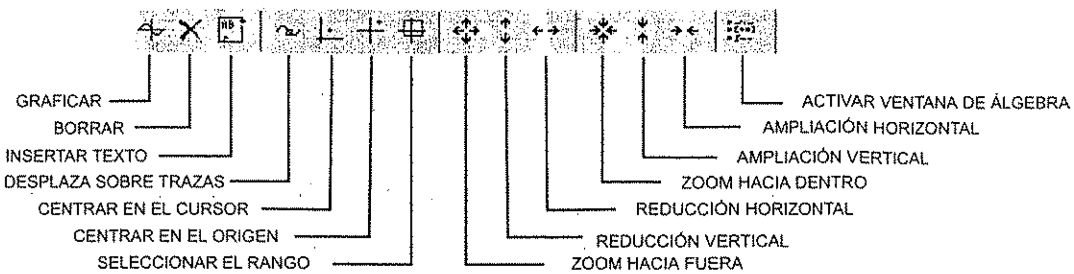
Después de hacer lo que acabamos de indicar, hacemos **click** sobre  en el cuadro y de inmediato aparecerá:



ATENCIÓN

Otra forma de ingresar los datos es oprimiendo la tecla , anotando al mínimo y oprimiendo sucesivamente esta tecla hasta tener toda la información. Finalmente llevamos el puntero del mouse hasta el cuadro Sí y hacemos click. De inmediato aparecerá la gráfica solicitada.

- Para BORRAR la gráfica obtenida hacemos click sobre el botón , ubicado en la BARRA DE HERRAMIENTAS.
- Para REGRESAR A LA VENTANA DE ÁLGEBRA hacemos click sobre el último botón de la BARRA DE HERRAMIENTAS:
- Veamos para qué sirven cada uno de los botones de la ventana para graficar en dos dimensiones.



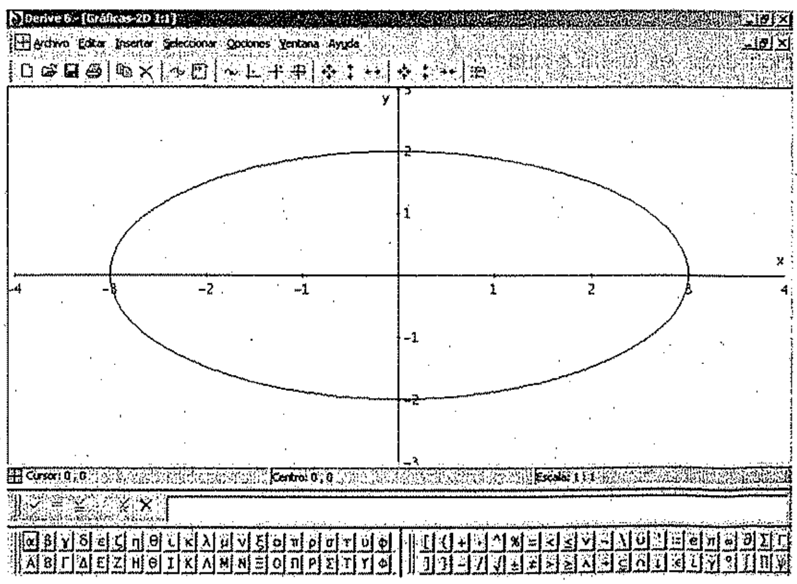
Ejemplo 2

Dibujemos la gráfica de $4x^2 + 9y^2 = 36$

SOLUCIÓN

Tenemos el siguiente proceso:

1. Ingresamos $4x^2 + 9y^2 = 36$ a la ventana de álgebra, la resaltamos y hacemos click sobre el comando .
2. Abrimos la ventana para dibujar gráficas en dos dimensiones haciendo click sobre el botón .
3. De inmediato aparece el plano cartesiano, hacemos de nuevo click sobre el comando y de inmediato aparecerá la gráfica de la curva; así:

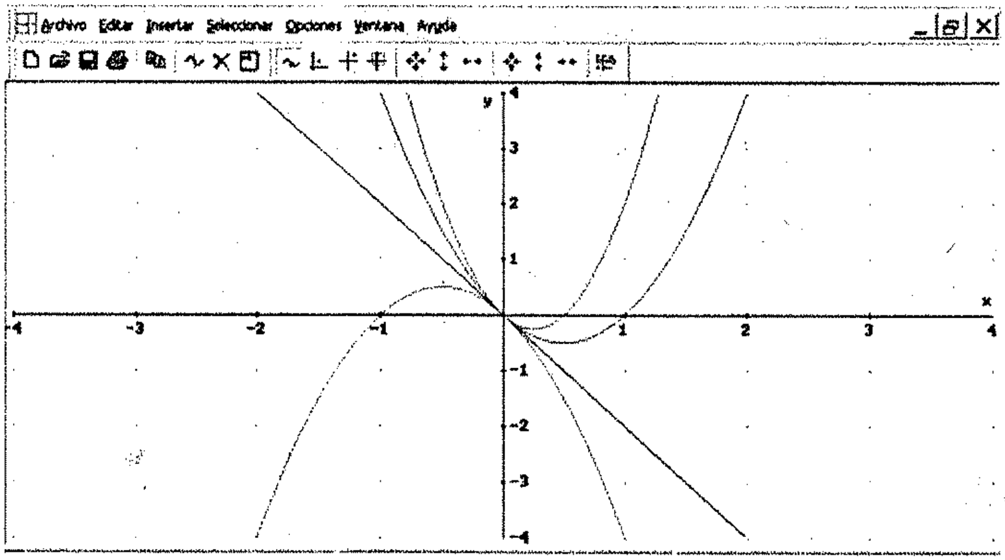


Ejemplo 3

Dibujemos la gráfica de la familia de curvas definida por $y = ax^2 - 2x$, para a = -2, 0, 2, 4.

SOLUCIÓN

- Ingresamos en DERIVE: vector (a * x ^ 2 - 2 * x, a, -2, 4 , 2)
- A continuación hacemos clic sobre el botón . De inmediato, quedan registrados la expresión que se quiere dibujar y el vector con las funciones obtenidas para cada valor de a.
- Luego, vamos a y repetimos el proceso anterior.



EJERCICIO 2.2

En los ejercicios 1 a 10 se pide:

a) Determinar si la relación dada es lineal o cuadrática.
b) Si es lineal, indicar la clase de línea recta, buscar dos puntos de cada una y dibujar la gráfica.
c) Si es cuadrática, identificar el tipo de curva que representa, elaborar una tabla de valores adecuada y dibujar la gráfica

1. R = { (x,y) / 2x - 4y + 5 = 0 }
2. R = { (x,y) / y= -3x + 2}
3. R = { (x,y) / 4x - 8 = 0 }
4. R = { (x,y) / 4x - 12y = 0}
5. R = { (x,y) / 5y + 20 = 0 }
6. R = { (x,y) / $12 - 3x^2 = 3y^2$}
7. R = { (x,y) / $5y^2 - 4x^2 = 20$ }
8. R = { (x,y) / $4x^2 - y + 2x = 6$}
9. R = { (x,y) / $y^2 + 9x^2 = 9$ }
10. R = { (x,y) / $y^2 - 3x + 5y = 8$}
11. Utilizar el DERIVE para dibujar las gráficas de las relaciones cuadráticas de los problemas 1 a 10.

2.4 GRÁFICAS DE RELACIONES REALES

- El desarrollo del sistema de coordenadas rectangulares permitió establecer una relación muy fuerte entre el álgebra (ecuaciones) y la geometría (gráficas). En la sección anterior aprendimos a reconocer las ecuaciones y a dibujar las gráficas de algunas relaciones especiales: **La línea recta y las cónicas.** Sin embargo, para dibujar sus gráficas recurrimos a un procedimiento que a estas alturas resulta bastante mecánico y poco analítico: La elaboración de tablas de valores. Al utilizar este método no tenemos la certeza de los valores que podemos asignarle, por ejemplo, a la variable x; es decir, estamos trabajando con una metodología de prueba error: este valor sirve y este no sirve, este otro sirve y este otro no, etc.
- En esta sección vamos a desarrollar algunos procedimientos que nos van a permitir dibujar la gráfica de una relación de una manera reflexiva y analítica. Naturalmente, habrá ocasiones en las que seguirá siendo necesario obtener unas cuantas parejas ordenadas para completar el análisis y dibujar la gráfica.
- Los aspectos analíticos que vamos a desarrollar son los siguientes:

  1. Los interceptos con los ejes.
  2. Las simetrías con los ejes y con el origen.
  3. El dominio y el rango.

2.4.1 Intercepto con los Ejes

Experiencia

- En las gráficas de la figura 2-14 hemos resaltado los puntos donde la curva corta a los ejes coordenados.

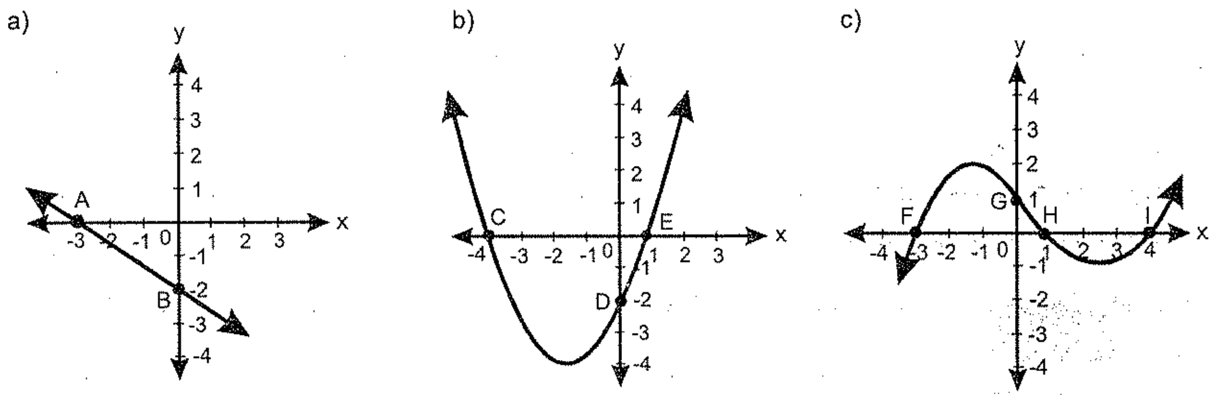


Figura 2-14

- ¿Cuáles son las coordenadas de los puntos A y B de la figura 2-14 (a)?
- ¿Cuáles son las coordenadas de los puntos C, D y E de la figura 2-14 (b)?
- ¿Cuáles son las coordenadas de los puntos F, G, H e I de la figura 2-14 (c)?
- ¿Qué característica común presentan los puntos donde una curva corta a los ejes coordenados?
- Los puntos A, B, C, D, E, F, G, H e I donde las gráficas de las relaciones dibujadas cortan a los ejes coordenados se denominan INTERCEPTOS CON LOS EJES.
- Si conocemos la ecuación E(x, y) = 0 que define una relación, ¿cómo encontramos los interceptos con el eje x? ¿y los interceptos con el eje y?

INTERCEPTOS CON LOS EJES

- **Los puntos donde una curva corta a los ejes coordenados se denominan INTERCEPTOS CON LOS EJES.**
- **Los interceptos con el eje x se caracterizan por tener su segunda componente u ordenada igual a 0 y los interceptos con el eje y por tener su primera componente o abscisa igual a 0.**
- **En la práctica, para hallar los interceptos con el eje x, de una relación definida por una regla E(x, y) = 0, reemplazamos la variable y por 0 y resolvemos la ecuación resultante para x. Así mismo, para hallar los interceptos con el eje y reemplazamos la variable x por 0 y resolvemos la ecuación resultante para y.**

Ejemplo 1

Hallemos los interceptos con los ejes de la relación definida por $R = \{ (x,y) / y^2 - 2x + 5 = 0 \}$

SOLUCIÓN

- **INTERCEPTOS CON EL EJE x**

  Hacemos y = 0 en la ecuación dada y resolvemos la ecuación resultante para x:

$$\begin{aligned} y = 0 &\Rightarrow (0)^2 - 2x + 5 = 0 \\ &\Rightarrow -2x + 5 = 0 \\ &\Rightarrow x = 2.5 \end{aligned}$$

  Luego, el punto P(2.5 , 0) es el intercepto con el eje x.

- **INTERCEPTO CON EL EJE y**

  Hacemos x = 0 en la ecuación dada y resolvemos la ecuación resultante para y:

$$\begin{aligned} x = 0 &\Rightarrow y^2 - 2(0) + 5 = 0 \\ &\Rightarrow y^2 + 5 = 0 \\ &\Rightarrow y^2 = -5 \\ &\Rightarrow y = \sqrt{-5} \in R \end{aligned}$$

  Luego, esta curva no intercepta al eje y.

- Dejamos al lector el ejercicio de dibujar la gráfica de esta relación.

Ejemplo 2

Hallemos los interceptos de la relación R definida por $R = \{ (x,y) / 2xy - 3x + 4y = 12 \}$

SOLUCIÓN

- **INTERCEPTOS CON EL EJE x**

  Hacemos y = 0 : $2x(0) - 3x + 4(0) = 12$

$$\begin{aligned} &\therefore\ 0 - 3x + 0 = 12 \\ &\therefore\ -3x = 12 \\ &\therefore\ x = -4 \end{aligned}$$

  Luego, el punto P(-4, 0) es el intercepto con el eje x.

- **INTERCEPTOS CON EL EJE y**

  Hacemos x = 0 : $2(0)y - 3(0) + 4y = 12$

$$\therefore\ 0 - 0 + 4y = 12$$

$\therefore 4y = 12$

$\therefore y = 3$

Luego, el punto (0, 3) es el intercepto con el eje y.

- Dejamos al lector el ejercicio de dibujar la gráfica de esta relación.

2.4.2 Simetría con los Ejes y con el Origen

Primera experiencia

- Recordemos en primer lugar que, en términos elementales, una figura plana puede ser simétrica con respecto a una recta o con respecto a un punto. Veamos, por ejemplo, la figura 2-15:

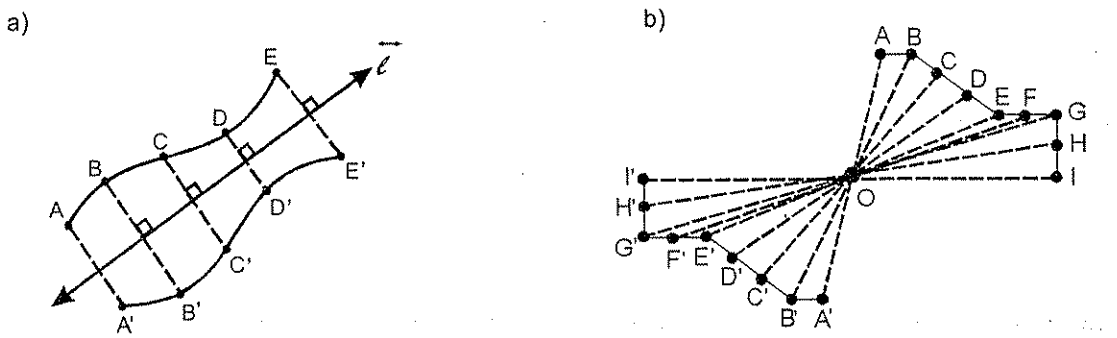


Figura 2-15

- En la figura 2-15 (a), la curva ABCDE y la curva A' B' C' D' E' son simétricas respecto a la recta $\overleftrightarrow{\ell}$. La recta $\overleftrightarrow{\ell}$ actúa como un espejo en el cual cada curva es como el reflejo de la otra. Notemos que la recta $\overleftrightarrow{\ell}$ es la mediatriz de los segmentos $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$, $\overline{DD'}$ y $\overline{EE'}$.
- En la figura 2-15 (b) la línea ABCDEFGHI y la línea A'B'C'D'E'F'G'H'I' son simétricas respecto al punto 0. Si medimos los segmentos $\overline{OA}$ y $\overline{OA'}$, $\overline{OB}$ y $\overline{OB'}$, $\overline{OC}$ y $\overline{OC'}$, $\overline{OD}$ y $\overline{OD'}$,..., $\overline{OI}$ y $\overline{OI'}$ comprobaremos que miden lo mismo.

Segunda experiencia

- Observemos ahora las gráficas de la figura 2-16:

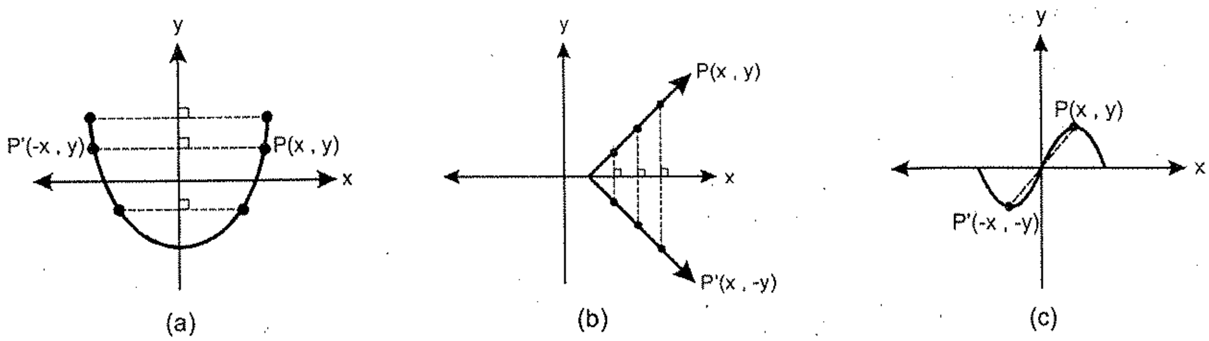


Figura 2-16

- En la figura 2-16 (a), la gráfica es simétrica respecto al eje y. Podemos comprobar que para cada punto P(x, y) existe un punto P'(-x, y).
- En la figura 2-16(b), la gráfica es simétrica respecto al eje x. Podemos comprobar que para cada punto P(x, y) existe un punto P'(x, - y).
- En la figura 2-16(c), la gráfica es simétrica respecto al origen. Podemos comprobar que para cada punto P(x, y) existe un punto P'(-x, -y).
- A continuación describimos los criterios que nos permiten decidir cuando una curva de ecuación E(x, y) = 0 es simétrica con respecto a los ejes o al origen.

SIMETRÍAS DE UNA CURVA

- **SIMETRÍA RESPECTO AL EJE x.**

  Una curva de ecuación E(x, y) = 0 es simétrica respecto al eje x si tanto el punto P(x, y) como el punto P'(x, -y) pertenecen a la gráfica; es decir, si al sustituir y por -y en la ecuación obtenemos una ecuación equivalente.

- **SIMETRÍA RESPECTO AL EJE y.**

  Una curva de ecuación E(x, y) = 0 es simétrica respecto al eje y, si tanto el punto P(x, y) como el punto P'(-x, y) pertenecen a la gráfica; es decir, si al sustituir x por -x en la ecuación obtenemos una ecuación equivalente.

- **SIMETRÍA RESPECTO AL ORIGEN.**

  Una ecuación E(x, y) = 0 es simétrica respecto al origen, si tanto el punto P(x, y) como el punto P'(-x, -y) pertenecen a la gráfica; es decir, si al sustituir x por -x y y por -y en la ecuación, obtenemos una ecuación equivalente.

Ejemplo 1

Analicemos las simetrías de la elipse $R = \{ (x,y) / 3x^2 + 4y^2 = 12 \}$

SOLUCIÓN

- **SIMETRÍA CON EL EJE x:**

  Reemplacemos y por -y en la ecuación dada:

  $\therefore\ 3x^2 + 4y^2 = 12$ ....Ecuación dada.
  $\therefore\ 3x^2 + 4(-y)^2 = 12$....................................Cambiamos y por -y
  $\therefore\ 3x^2 + 4y^2 = 12$ ....$(-y)^2 = y^2$

  Como vemos, esta última ecuación es equivalente a la ecuación dada. Por lo tanto, la elipse es simétrica respecto al eje x.

- **SIMETRÍA CON EL EJE y:**

  Reemplacemos x por -x en la ecuación dada:

  $\therefore\ 3x^2 + 4y^2 = 12$ ....Ecuación dada.
  $\therefore\ 3(-x)^2 + 4y^2 = 12$................................Cambiamos x por -x
  $\therefore\ 3x^2 + 4y^2 = 12$ ....$(-x)^2 = x^2$

  De nuevo, esta última ecuación es equivalente a la ecuación dada. Por lo tanto, la elipse es simétrica respecto al eje y.

- **SIMETRÍA CON RESPECTO AL ORIGEN:**

  Reemplazamos simultáneamente x por -x y y por -y en la ecuación dada:

$\therefore\ 3x^2 + 4y^2 = 12$ ....Ecuación dada.

$\therefore\ 3(-x)^2 + 4(-y)^2 = 12$..............................Cambiamos x por -x y y por -y

$\therefore\ 3x^2 + 4y^2 = 12$ ....$(-x)^2 = x^2$ y $(-y)^2 = y^2$

También, en este caso, esta última ecuación es equivalente a la ecuación dada. Por lo tanto, la elipse es simétrica respecto al origen.

- **CONCLUSIÓN**: La elipse de ecuación $3x^2 + 4y^2 = 12$ es simétrica respecto al eje x, al eje y y al origen.
- Dejamos como ejercicio al lector dibujar la gráfica de la curva y verificar las conclusiones obtenidas analíticamente.

PREGUNTAS:

1. ¿Si una curva es simétrica respecto al eje x y respecto al eje y, podemos concluir que es simétrica respecto al origen?
2. ¿Si una curva no es simétrica respecto al eje x y tampoco es simétrica respecto al eje y, podemos concluir que tampoco es simétrica respecto al origen?

Ejemplo 2

Analicemos las simetrías de la curva $\mathcal{R} = \{ (x,y) / xy = 4 \}$

SOLUCIÓN

- $\mathcal{R}$ no es simétrica respecto al eje x (¡verifíquelo!)
- $\mathcal{R}$ no es simétrica respecto al eje y (¡verifíquelo!)
- Analicemos la simetría respecto al origen. Para ello, cambiemos x por -x y y por -y en la ecuación dada.

$xy = 4$ ....Ecuación dada.

$\therefore\ (-x)(-y) = 4$ ....Cambiamos x por -x y y por -y

$\therefore\ xy = 4$..................................$(-x)(-y) = xy$

- Por lo tanto, esta última ecuación es equivalente a la original. Esto significa que $\mathcal{R}$ es simétrica respecto al origen. Esta conclusión responde la pregunta 2. anterior: una curva puede no tener simetrías con los ejes y, sin embargo, puede tenerla respecto al origen.
- La figura 2-17 nos muestra la gráfica de $\mathcal{R}$.

x	$y = \frac{4}{x}$
-4	-1
-3	-1.33
-2	-2
-1	-4
0	NO EXISTE
1	4
2	2
3	1.33
4	1

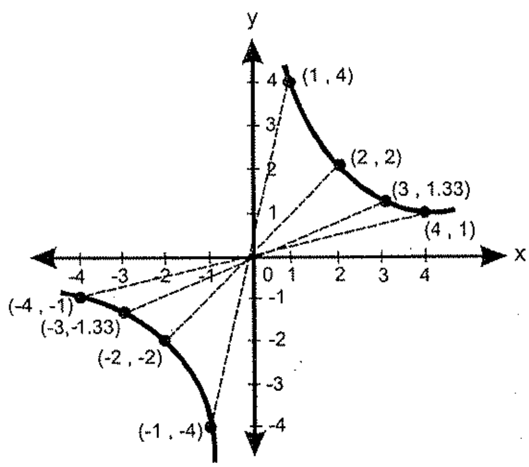


Figura 2-17

2.4.3 Dominio y Rango

- Recordemos que para dibujar las gráficas de las relaciones de la sección 3.3.2 (relaciones cuadráticas) utilizamos tablas de valores y nos preguntamos, en cada caso, si no habría un método para saber exactamente cuáles valores podría tomar la variable **x** y, en consecuencia, cuáles la variable **y.**
- Los valores **que puede** tomar la variable **x** (elementos del conjunto de partida) en una relación R definida mediante una ecuación E(x, y) = 0, constituyen el DOMINIO de R y los elementos **que puede** tomar la variable **y** (elementos del conjunto de llegada), en esa misma relación, constituyen el RANGO o el CONJUNTO IMAGEN de R.

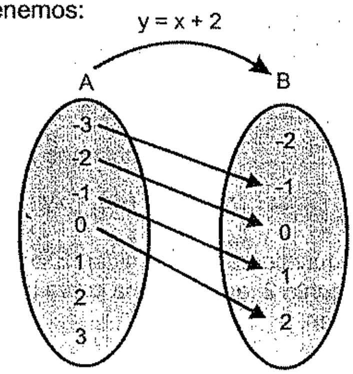
DOMINIO Y RANGO DE UNA RELACIÓN

Sea R: A → B una relación de A en B.

- **El dominio de R, denotado D_R, es el conjunto de elementos de A que están relacionados al menos con un elemento de B; es decir, el dominio de R es un subconjunto del conjunto de partida: $D_R \subset A$**
- **El rango de R, denotado I_R, es el conjunto de elementos de B que están relacionados al menos con un elemento de A. Luego, el rango de R es un subconjunto del conjunto de llegada: $I_R \subset B$.**

Ejemplo

En el diagrama de flechas siguiente tenemos:



El dominio de la relación es el conjunto D = {-3, -2, -1, 0 }. Notemos que D ⊂ A.

El rango de la relación es el conjunto I = {-1, 0, 1, 2 }. Notemos que I ⊂ B.

2.4.3.1 Método práctico para hallar el Dominio

- Puesto que el dominio de una relación consiste en los valores de la variable **x** que pueden relacionarse con valores de la variable **y**, cuando la regla es una ecuación de la forma E(x, y) = 0, entonces lo primero que debemos hacer es tratar de despejar la y en términos de **x**; es decir, escribir la regla en la forma y = E(x).

  Si logramos despejar la y, analizamos, si ocurre uno de estos casos:

  PRIMER CASO:

  La x hace parte de un radicando de índice par (raíz cuadrada, cuarta,..)

Ejemplo 1

Hallemos el dominio de la relación real $R = \{(x,y) / 3x + y^2 - 3 = 0\}$

SOLUCIÓN

- Despejemos la variable **y** de la expresión dada:

$$y = \pm\sqrt{3-3x}$$

Como vemos, al despejar la **y**, la variable **x** hace parte de una raíz de índice par.

- Ahora asignemos a la variable **x** algunos valores y analicemos lo que pasa con la variable **y**:

Si $x = -2$ entonces $y = \pm\sqrt{9} = \pm 3$; $\pm 3 \in R$

Si $x = -1$ entonces $y = \pm\sqrt{6}$; $\pm\sqrt{6} \in R$

Si $x = 0$ entonces $y = \pm\sqrt{3}$; $\pm\sqrt{3} \in R$

Si $x = 1$ entonces $y = \sqrt{0} = 0$; $0 \in R$

Si $x = 2$ entonces $y = \sqrt{-3}$; $\sqrt{-3} \notin R$

Si $x = 3$ entonces $y = \sqrt{-6}$; $\sqrt{-6} \notin R$

- Podemos comprobar que hay valores de **x** como 2, 3, 4,... que no pueden relacionarse con ningún valor de **y** pues al reemplazarlos en la ecuación $y = \pm\sqrt{3-3x}$ producen un número que no es real $\left(\sqrt{-3}, \sqrt{-6}, \sqrt{-9}, \ldots\right)$.

- Ahora bien, para determinar con exactitud y sin necesidad de estar adivinando, cuales son los valores que constituyen el dominio de R basta encontrar los valores de la variable x para los cuales la expresión $\sqrt{3-3x}$ es un número real. Recordemos que una raíz de índice par es un número real SÓLO CUANDO SU RADICANDO ES POSITIVO O CERO (≥ 0). Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\sqrt{3-3x} \in R &\Leftrightarrow 3 - 3x \geq 0\\ &\Leftrightarrow -3x \geq -3\\ &\Leftrightarrow 3x \leq 3\\ &\Leftrightarrow x \leq 1\end{aligned}$$

- Este resultado significa que sólo los números reales menores o iguales que 1, del conjunto de partida, están relacionados con algún elemento del conjunto de llegada. Por lo tanto:

$$D_R = \{x / x \leq 1\} = (-\infty ; 1]$$

ATENCIÓN

Si al despejar la variable **y** de una relación R definida por una ecuación E(x, y) = 0, encontramos que la variable **x** hace parte de una RAÍZ DE ÍNDICE PAR, entonces para hallar su dominio bastará hacer el RADICANDO MAYOR O IGUAL A CERO y resolver la inecuación resultante.

SEGUNDO CASO:

La x hace parte del denominador de una fracción

Ejemplo 2

Hallemos el dominio de la relación real $R = \{(x,y) \,/\, 2xy - 3y + 5 = 0\}$

SOLUCIÓN

- Despejamos la variable y:

$$2xy - 3y + 5 = 0$$
$$\therefore\ 2xy - 3y = -5$$
$$\therefore\ y = (2x - 3) = -5$$
$$\therefore\ y = \frac{-5}{2x-3}\ ;\ \text{con}\ \ 2x - 3 \neq 0$$

- Al despejar la **y**, encontramos que la variable **x** hace parte del denominador de una fracción. Y como estamos trabajando con números reales, para que esta fracción $\frac{-5}{2x-3}$ sea real, es necesario que el denominador no sea 0; es decir, necesitamos que $2x - 3 \neq 0$:

$$2x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{3}{2}$$

- Ahora bien, cuando $x = \frac{3}{2}$ encontramos que $y = \frac{-5}{2\left(\frac{3}{2}\right) - 3} = \frac{-5}{0}$ y $\frac{-5}{0} \notin R$. Esto significa que $x = \frac{3}{2}$ no puede relacionarse con ningún valor de **y** en la relación $y = \frac{-5}{2x-3}$. Pero, ¿puede relacionarse $x = \frac{3}{2}$ con algún valor de **y** en la relación original $2xy - 3y + 5 = 0$? Para contestar esta pregunta reemplacemos **x** por $\frac{3}{2}$ en $2xy - 3y + 5 = 0$:

$2xy - 3y + 5 = 0$ ....Ecuación original

$\therefore\ 2\left(\frac{3}{2}\right)y - 3y + 5 = 0$ ....Reemplazamos x por $\frac{3}{2}$

$\therefore\ 3y - 3y + 5 = 0$ ....¿Por qué?

$\therefore\ 0 + 5 = 0$ ....¿Por qué?

$\therefore\ 5 = 0$ ¡contradicción!

Este resultado significa que cuando en la regla original reemplazamos **x** por $\frac{3}{2}$ no obtuvimos ningún valor para **y**. Por lo tanto, $\frac{3}{2}$ no hace parte del dominio de R.

- **CONCLUSIÓN:** El dominio de R es el conjunto $D_R = R - \left\{\frac{3}{2}\right\}$.

ATENCIÓN

1. Estrictamente las relaciones $R_1 = \{ (x,y) / 2xy - 3y + 5 = 0\}$ y $R_2 = \left\{(x,y) / y = \dfrac{-5}{2x-3}\right\}$ no son equivalentes. Por esta razón fue necesario verificar que el valor $x = \dfrac{3}{2}$, que en R_2 no generó un valor real para **y**, tampoco generó un valor real para **y** en R_1.
2. Si al despejar la variable **y** en una relación R definida por la ecuación E(x,y) = 0, encontramos que la variable **x** hace parte del denominador de una fracción, entonces determinamos los valores de **x** que anulan (hacen cero) dicho denominador. A continuación, reemplazamos tales valores de **x** en la ecuación original. Si obtenemos una contradicción (2 = 5, 0=-3, 4=0, etc) entonces esos valores de **x** no pertenecen al dominio de la relación; si obtenemos algún valor de **y** o una identidad, entonces dichos valores de **x** pertenecen al dominio de R.
3. Puede ocurrir que al despejar una variable **y** comprobemos que la **x** no hace parte de una raíz de índice par ni del denominador de una fracción. En este caso, podemos afirmar que el dominio de R es todo el conjunto de los números reales. (Más adelante, cuando estudiemos otra clase de relaciones consideraremos nuevas restricciones).

Ejemplo 3

Hallemos el dominio de la relación R = $\{(x,y) / 3x^2 + 5y - 6 = 0 \}$

SOLUCIÓN

- Despejamos la variable y:

$$3x^2 + 5y - 6 = 0$$
$$\therefore\ 5y = 6 - 3x^2$$
$$\therefore\ y = \frac{6 - 3x^2}{5}$$

- Como la **x** no hace parte de un radical par, ni del denominador de una fracción, concluimos que el dominio son todos los números reales; es decir:

$$D_R = R = (-\infty\,;+\infty)$$

2.4.3.2 Método práctico para hallar el Rango

- Como dijimos antes, el rango de una relación es el conjunto formado por aquellos elementos del conjunto de llegada que están relacionados con algún elemento del conjunto de partida. Por esta razón, para hallar el rango de una relación real, definida mediante una ecuación de la forma E(x, y) = 0, debemos despejar la variable **x** y realizar sobre la variable **y** un análisis similar al realizado sobre la variable **x** cuando despejamos la **y**.

2.4.4 Significado Gráfico del Dominio y el Rango

- En esta sección veremos la importancia que tiene, desde el punto de vista gráfico, hallar el dominio y el rango de una relación.

  Podemos dividir nuestro análisis en dos partes:

1. Cuando el dominio y/o el rango son intervalos de números reales.
2. Cuando del dominio y/o el rango es necesario eliminar algún valor particular que anule el denominador de una fracción.

En este texto sólo analizaremos la primera parte.

Experiencia

- Hallemos el dominio y el rango de la relación $R = \{(x,y) / 4x^2 + 25y^2 = 100\}$ e interpretemos gráficamente estos resultados.

- **DOMINIO**

Despejamos la variable **y**:

$$4x^2 + 25y^2 = 100$$

$$\therefore \; y = \pm\sqrt{\frac{100 - 4x^2}{25}}$$

$$\therefore \; y = \pm\frac{\sqrt{100 - 4x^2}}{5}$$

Como **x** hace parte de una radical par, entonces:

$$\sqrt{100 - 4x^2} \in R \Leftrightarrow 100 - 4x^2 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow 25 - x^2 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (5 + x)(5 - x) \geq 0$$

La solución de esta inecuación es el intervalo [-5 ; 5] (¡verifíquelo!).

CONCLUSIÓN: $\boxed{D_R = [-5 ; 5]}$

- **RANGO**

Despejamos la variable **x**:

$$4x^2 + 25y^2 = 100$$

$$\therefore \; x = \pm\sqrt{\frac{100 - 25y^2}{4}}$$

$$\therefore \; x = \pm\frac{\sqrt{100 - 25y^2}}{2}$$

Como **y** hace parte de un radical par, entonces:

$$\sqrt{100 - 25y^2} \in R \Leftrightarrow 100 - 25y^2 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow 4 - y^2 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (2 + y)(2 - y) \geq 0$$

La solución de esta inecuación es el intervalo [-2; 2] (¡verifíquelo!).

CONCLUSIÓN: $I_R = [-2 ; 2]$

- **SIGNIFICADO GRÁFICO**

Como **x** puede tomar valores sólo en el intervalo [-5 ; 5] , ésto significa que a lo largo del eje **x**, es decir de izquierda a derecha del plano cartesiano, la gráfica estará dibujada entre -5 y 5, incluyendo ambos valores.

Como **y** puede tomar valores sólo en el intervalo [-2 ; 2] ésto significa que a lo largo del eje **y**, es decir de abajo hacia arriba del plano cartesiano, la gráfica estará dibujada entre -2 y 2.

La figura 2-18 nos muestra que la gráfica de esta relación (una elipse) está dibujada en el intervalo [-5 ; 5], a lo largo del eje **x**, y en el intervalo [-2 ; 2] , a lo largo del eje **y**.

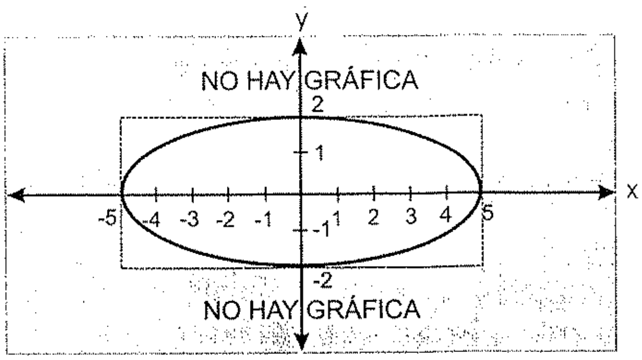


Figura 2-18

ATENCIÓN

- Si el dominio o el rango de una relación son intervalos de números reales, éstos indican las zonas del plano cartesiano en las cuales se puede dibujar la gráfica de la relación.
- En el próximo curso, daremos el significado gráfico cuando del dominio y el rango es necesario eliminar algún valor particular que anule el denominador de una fracción.

2.4.5 Un Ejercicio General de Graficación

- Vamos a terminar esta unidad desarrollando un ejercicio en el cual aplicaremos los conceptos estudiados y, con base en ellos, dibujaremos la gráfica de la relación dada.

Ejemplo

Sea R una relación real definida por $R = \{ (x,y) / 4x^2 - 9y^2 + 24x - 36y = 36\}$. Se pide:

a) Identificar, si es posible, la curva que representa.
b) Hallar los interceptos con los ejes.
c) Analizar simetrías con los ejes y el origen
d) Hallar el dominio.
e) Hallar el rango.
f) Elaborar una tabla de valores.
g) Utilizar toda la información anterior para dibujar la gráfica.

SOLUCIÓN

a) IDENTIFICACIÓN:

Un examen cuidadoso de la regla que define la relación nos indica que tenemos una relación cuadrática en la cual los coeficientes de x^2 y de y^2 son de signo contrario. Por lo tanto, la gráfica tiene forma de hipérbola.

b) INTERCEPTOS:

Con el eje x: Si $y = 0$ entonces $4x^2 - 24x - 36 = 0$. Como esta ecuación es de segundo grado en x, entonces la resolvemos y encontramos que $x = -3 - 3\sqrt{2}$ ó $x = -3 + 3\sqrt{2}$ (¡comprobarlo!). Luego los interceptos con el eje x son $(-3 - 3\sqrt{2}, 0)$ y $(-3 + 3\sqrt{2}, 0)$.

Con el eje y: Si $x = 0$ entonces $9y^2 + 36y + 36 = 0$. De nuevo esta es una ecuación de segundo grado, cuya solución es $y = -2$ (¡comprobarlo!). Luego, el único intercepto con el eje y es el punto (0, -2).

c) SIMETRÍAS:

Con el eje x: Si cambiamos y por -y en la ecuación dada, nos queda:

$$4x^2 - 9(-y)^2 - 24x - 36(-y) = 36$$
$$\therefore 4x^2 - 9y^2 - 24x + 36y = 36$$

Si comparamos esta última ecuación con la original, encontraremos que no son equivalentes; luego, la curva no es simétrica con el eje x.

Análisis similares nos permitirán concluir que la curva tampoco es simétrica con el eje y ni con el origen (¡verificarlo!).

d) DOMINIO:

Despejemos la y de la ecuación dada. Como esta ecuación es de segundo grado en términos de y, entonces:

$$4x^2 - 9y^2 + 24x - 36y = 36$$

$$\therefore 9y^2 + 36y - (4x^2 + 24x - 36) = 0$$

$$\therefore y = \frac{-36 \pm \sqrt{1296 + 4(9)\left(4x^2 + 24x - 36\right)}}{18}$$

$$\therefore y = \frac{-36 \pm \sqrt{1296 + 144x^2 + 864x - 1296}}{18}$$

$$\therefore y = \frac{-36 \pm \sqrt{144x^2 + 864x}}{18}$$

$$\therefore y = \frac{-36 \pm \sqrt{144\left(x^2 + 6x\right)}}{18}$$

$$\therefore y = \frac{-36 \pm 12\sqrt{x^2 + 6x}}{18}$$

$$\therefore y = \frac{-6 \pm 2\sqrt{x^2 + 6x}}{3}$$

Al despejar la variable y, encontramos que la x hace parte de una raíz de índice par. Por lo tanto, $x^2 + 6x \geq 0$; la solución de esta inecuación polinómica de segundo grado es: $(-\infty ; -6] \cup [0 ; +\infty)$ (¡comprobarlo!); luego:

$$\mathbf{D_R = (-\infty ; -6] \cup [0 ; +\infty)}$$

Gráficamente, este resultado significa que, a lo largo del eje x, podemos dibujar desde $-\infty$ hasta -6 y desde 0 hasta $+\infty$.

e) RANGO:

Despejemos la x de la ecuación dada; así:

$$\therefore 4x^2 - 9y^2 + 24x - 36y = 36$$

$$\therefore 4x^2 + 24x - (9y^2 + 36y + 36) = 0$$

$$\therefore x = \frac{-24 \pm \sqrt{24^2 + 4(4)(9y^2 + 36y + 36)}}{8}$$

$$\therefore x = \frac{-24 \pm \sqrt{576 + 144y^2 + 576y + 576}}{8}$$

$$\therefore x = \frac{-24 \pm \sqrt{144y^2 + 576y + 1152}}{8}$$

Al despejar la variable x, encontramos que la y hace parte de una raíz de índice par. Por lo tanto, $144y^2 + 576y + 1152 \geq 0$; la solución de esta inecuación es R (¿por qué?).

Gráficamente este resultado significa que, a lo largo del eje y, podemos dibujar la curva desde $-\infty$ hasta $+\infty$.

f) TABLA DE VALORES Y RESUMEN

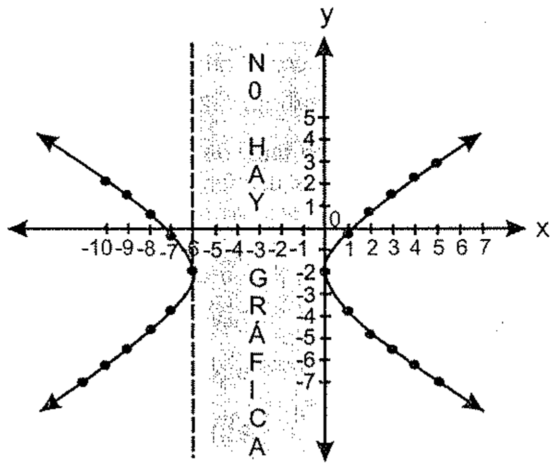
El dominio nos dice que x puede tomar valores desde $-\infty$ hasta -6 y desde 0 hasta $+\infty$; luego, podemos elaborar una tabla de valores teniendo en cuenta esta información y el hecho de que para cada valor de x se obtienen dos valores de y; así:

x	$y = \frac{-6 \pm 2\sqrt{x^2 + 6x}}{3}$
-10	-6.21 ó 2.21
-9	-5.47 ó 1.46
-8	-4.66 ó 0.66
-7	-3.76 ó -0.23
-6	-2
0	-2
1	-3.76 ó -0.23
2	-4.66 ó 0.66
3	-5.47 ó 1.46
4	-6.21 ó 2.21
5	-6.94 ó 2.94

RESUMEN
• **INTERCEPTOS:** $\left(3-3\sqrt{2}, 0\right), \left(3+3\sqrt{2}, 0\right)$ y $\left(0, -2\right)$
• **SIMETRÍAS:** No presenta simetrías
• **DOMINIO:** $(-\infty ; -6] \cup [0 ; +\infty)$
• **RANGO:** **R**

g) DIBUJO DE LA GRÁFICA

Con base en la tabla de valores anterior y el análisis realizado podemos dibujar la gráfica de la relación; figura 2-14:

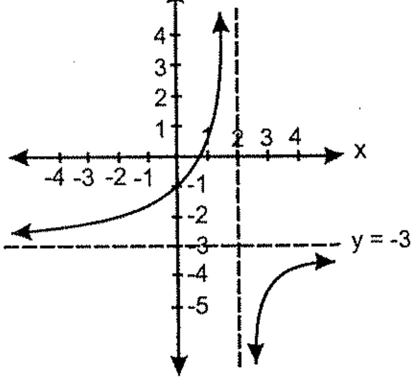


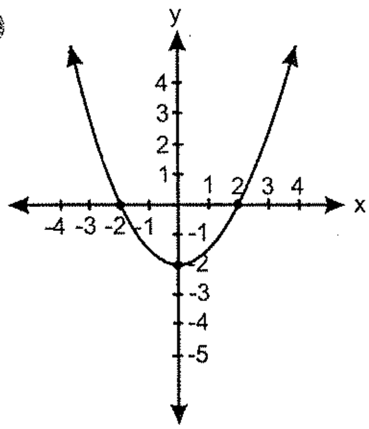
Ahora, usa DERIVE para dibujar la gráfica de esta relación y compara los resultados.

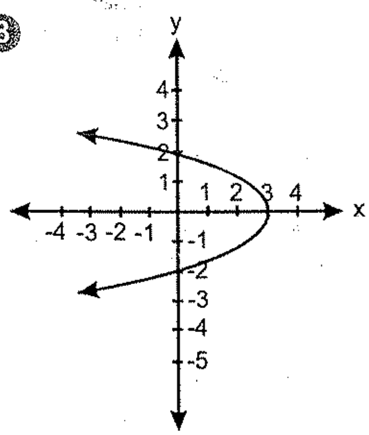
EJERCICIO 2.3

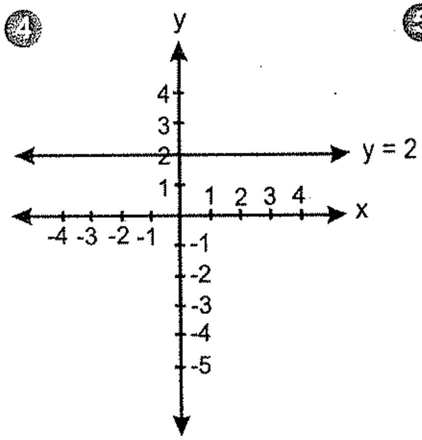
En los ejercicios 1 a 6 se pide:

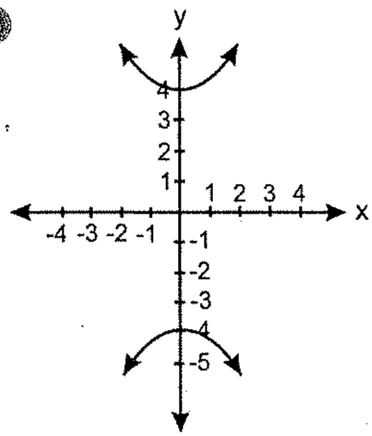
a) Identificar los interceptos con los ejes.
b) Determinar las posibles simetrías con los ejes y con el origen.
c) Hallar el dominio y el rango.

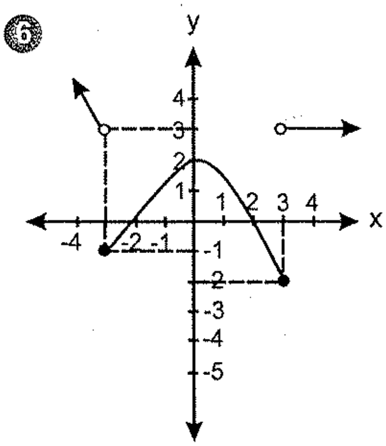
1


2


3


4


5


6


En los ejercicios 7 a 15 se pide:

a) Hallar los interceptos con los ejes.
b) Determinar las posibles simetrías con los ejes y con el origen
c) Hallar el dominio.
d) Hallar el rango.
e) Con base en la información anterior elaborar una tabla de valores auxiliar y dibujar la gráfica.
f) Dibujar la gráfica de cada una de estas relaciones usando DERIVE

7. $R = \{ (x,y) / y = 4x^2 \}$

8. $R = \{ (x,y) / y^2 = -4x \}$

9. $R = \{ (x,y) / y = 3 - x^2 \}$

10. $R = \{ (x,y) / y^2 - 3x + 2y - 4 = 0 \}$

11. $R = \{ (x,y) / 2x^2 - 3y^2 = 6 \}$

12. $R = \{ (x,y) / 2x^2 + 3y^2 = 6 \}$

13. $R = \{ (x,y) / x^2 + xy + y^2 \leq 12 \}$

14. $R = \{ (x,y) / x^2 - 3y + 2x - 1 = 0 \}$

15. $R = \{ (x,y) / x^2 - 2x + y^2 + 4y = 4 \}$

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (5)

Dos números positivos suman 32. Si uno de los números lo nombramos con x, se pide:

1. **Escribir una ecuación, en términos de x, que permita calcular la suma de los cuadrados de ambos números.**
2. **¿De qué grado es la ecuación obtenida, para qué valor de x la suma es mínima? Explique.**

Taller de la Unidad 2

1. PREGUNTAS PARA REVISAR LA TEORÍA.

a) ¿Qué se requiere para definir una relación?

b) ¿Cómo se define una relación lineal en los reales? ¿Cómo es su gráfica?

c) ¿Cuál es la gráfica de la relación R ={(x,y) / x=5}?

d) ¿Cuál es la gráfica de la relación R = {(x, y) / y= 3} ?

e) Si a y b tienen el mismo signo, ¿qué representa la gráfica de la relación: R ={ (x,y) /$ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0$}?

f) Si $a = 0$ y $b \neq 0$, ¿qué representa la gráfica de la relación: R ={ (x,y) /$ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0$}?

g) ¿Cómo se hallan los interceptos con los ejes de una relación real definida por una ecuación E(x , y) = 0?

h ¿Cómo se analizan las simetrías de una relación real definida por una ecuación E(x , y) = 0?

i) ¿Cómo se halla el dominio de una relación real definida por una ecuación E(x , y) = 0?

j) ¿Cómo se halla el rango de una relación real definida por una ecuación E(x , y) = 0?

k) ¿Cómo se usa DERIVE para dibujar la gráfica de una relación?

2. FALSO O VERDADERO

Responder falso o verdadero a cada una de las siguientes proposiciones. Justificar cada respuesta.

a) La gráfica de R = {(x,y) / y= -3} es una línea recta paralela al eje x.

b) La relación R ={ (x,y) / 2x - 6y = 0} no tiene interceptos con los ejes.

c) La relación R = { (x,y) / $y^2 - 4x + 5 = 0$} es simétrica con el eje x.

d) Una curva puede ser simétrica con el eje x y con el eje y, pero no ser simétrica con el origen.

e) Hay curvas que son simétricas con el origen sin ser simétricas con el eje x ni con el eje y.

f) La gráfica de R = { (x,y) / $4x^2 - 3y^2 + 2x = 5$} es una parábola.

En los ejercicios **3.** a **8.** marcar la letra correspondiente a la única respuesta correcta.

3. La proposición verdadera es:

a) En toda relación, el dominio coincide siempre con el conjunto de partida.
b) En toda relación, el rango coincide siempre con el conjunto de llegada.
c) En toda relación, el conjunto de partida debe ser distinto al conjunto de llegada.
d) En toda relación, el dominio es un subconjunto del conjunto de partida.

4. El dominio de la relación R : R $\rightarrow$ R definida por la regla $3x^2 - y + 6 = 0$ es:

a) R   b) { y/y ≥ 6}   c) {x/x ≥ 6}   d) {x/x ≤ -6}

5. El rango de la relación del ejercicio 4. es:

a) R   b) { y/y ≥ 6}   c) {x/x ≥ 6}   d) {x/x ≤ -6}

6. La gráfica de la relación $R = \{ (x,y) / 4x^2 - 3y + 2 = 0\}$ es:

a) Simétrica con relación al eje x. b) Simétrica con relación al eje y.
c) Simétrica con relación al origen. d) No tiene simetrías.

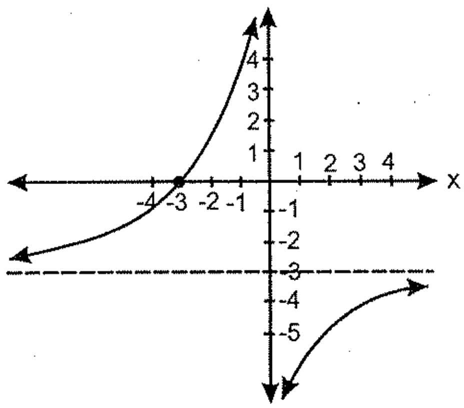
7. La gráfica de la relación $R = \{ (x,y) / x^2 - 3y^2 = 9\}$:

a) Intercepta al eje x en (3, 0) y (-3, 0). b) Intercepta al eje y en (0, -3) y (0, 3).
c) No intercepta al eje x. d) No tiene interceptos.

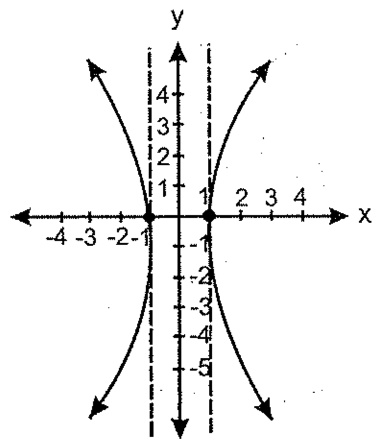
En los ejercicios 8. a 11. se pide:

a) Hallar los interceptos con los ejes.
b) Identificar las simetrías con los ejes y con el origen.
c) Hallar el dominio.
d) Hallar el rango.

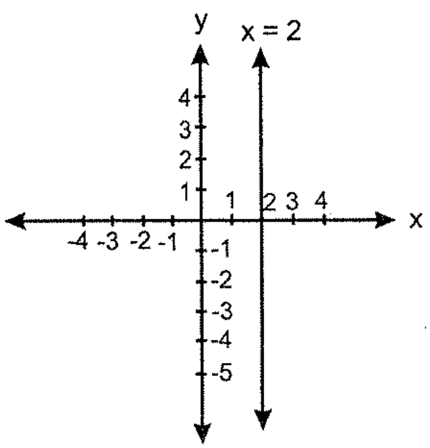
8.



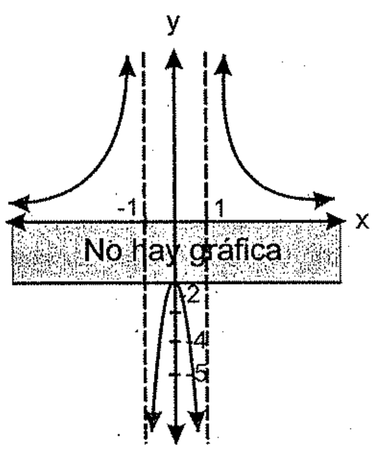
9.



10.



11.



En los ejercicios 12. a 20., para cada relación se pide:

a) Hallar los interceptos con los ejes.
b) Determinar las simetrías con los ejes y con el origen.
c) Hallar el dominio.
d) Hallar el rango.
e) Elaborar una tabla de valores y utilizar, tanto la información obtenida a partir de ésta, como la información obtenida de los literales a), b), y d) para dibujar la gráfica de la relación.

12. $R=\{(x,y) / y - 3x + 1 = 0\}$

13. $R=\{(x,y) / y^2 - 4x = 6\}$

14. $R=\{(x,y) / x^2 + y^2 = 9\}$

15. $R=\{(x,y) / 3x^2 - 2y + 1 = 0\}$

16. $R=\{(x,y) / 4y^2 - 9x^2 = 36\}$

17. $R=\{(x,y) / 5x - y = 2\}$

18. $R=\{(x,y) / 4y^2 + x^2 = 4\}$

19. $R=\{(x,y) / x^2 - 6x - 8y = 7\}$

20. $R=\{(x,y) / 9x^2 + 4y^2 + 18x - 24y + 9 = 0\}$

Prepárate para las Pruebas ICFES

Subraye la letra correspondiente a la ÚNICA respuesta correcta en cada uno de los siguientes ejercicios:

1. La división $24 \cdot 10^{-8}$ entre $8 \cdot 10^{-6}$ se realiza así:

$$\frac{24 \cdot 10^{-8}}{8 \cdot 10^{-6}} = \frac{24}{8} \cdot 10^{-8} \cdot 10^{6} = 3 \cdot 10^{-2} = 0.03$$

El procedimiento realizado en la primera igualdad:

a) No es correcto porque en este caso 24 no se puede dividir exactamente por 8.

b) No es correcto porque $\frac{1}{8 \cdot 10^{-6}} = 8 \cdot 10^{6}$

c) No es correcto porque $\frac{10^{-8}}{10^{-6}} = 10^{-14}$

d) Sí es correcto porque es posible dividir 24 entre 8 y el factor con exponente negativo (10^{-6}) pasa al numerador con exponente positivo.

2. El comportamiento de la presión dentro de un recipiente, al aumentar la temperatura, está dado por la siguiente tabla:

T	40	50	60	70	80	90
P	80	100	120	140	160	180

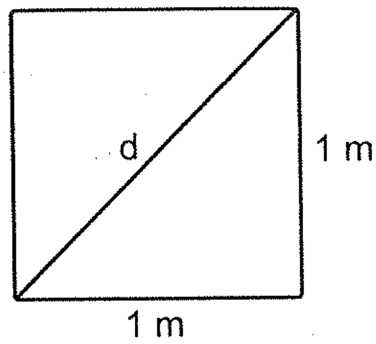
La relación entre la temperatura (T) y la presión (P) es:

a) Lineal, porque varían en forma inversamente proporcional.
b) Lineal, porque la presión es igual a un factor multiplicado por la temperatura.
c) Cuadrática, porque la presión siempre es el doble de la temperatura.
d) Exponencial, porque al aumentar la temperatura también lo hace la presión.

3. La progresión: 6, 3, 0, -3, -6, -9,... podemos clasificarla como:

a) Aritmética creciente porque 6 + (-3) = 6 - 3 = 3
b) Geométrica decreciente porque su razón es 2.
c) Geométrica creciente porque 3 + (-3) = 0
d) Aritmética decreciente porque su razón es -3.

4. Tenemos el siguiente cuadrado:



¿Se puede expresar el valor de la diagonal d como una fracción racional?

a) Sí, porque el valor de la hipotenusa es igual a $\sqrt{2}$.
b) No, porque $\sqrt{2}$ es un número irracional.
c) No, porque el desarrollo de $\sqrt{2}$ es un decimal periódico.
d) Sí, porque el valor de la diagonal es igual al valor de la hipotenusa de un triángulo rectángulo.

5. Tres números enteros consecutivos suman 72. ¿Podemos conocer el valor del menor de los tres números?

a) No, porque no existen datos suficientes para determinar el valor de los tres números.
b) Sí, resolviendo la ecuación $n + 2n + 3n = 72$
c) No, porque no conocemos el valor del mayor y del mediano.
d) Sí, resolviendo la ecuación $n + (n + 1) + (n + 2) = 72$

Núcleo Temático

3

LA FUNCIÓN

LOGRO GENERAL

- Reconocer la importancia del concepto de función dentro de la matemática y su utilidad para modelar situaciones de la vida diaria.

LOGROS ESPECÍFICOS	INDICADORES DE LOGRO
Corporal: • Manipular diagramas, tablas, gráficas y programas computacionales como el DERIVE para representar y dibujar relaciones que son funciones.	• Elabora diagramas de flechas de relaciones que son funciones. • Dibuja gráficas de relaciones que son funciones. • Utiliza el DERIVE para dibujar gráficas de funciones.
Comunicativa: • Explicar el significado de la notación funcional y=f(x). • Escribir en el lenguaje de las funciones, situaciones de la ciencia o de la vida diaria.	• Interpreta con sus palabras el significado de la notación y=f(x). • Traduce al lenguaje matemático situaciones problemáticas de otras ramas de la ciencia o de la vida diaria que pueden expresarse mediante funciones.
Cognitiva: • Identificar relaciones que son funciones. • Clasificar funciones reales en: algebraicas, trascendentes y especiales. • Dibujar gráficas de funciones reales simples. • Dibujar gráficas de funciones reales obtenidas por transformaciones de funciones simples. • Resolver problemas que dan lugar a relaciones funcionales.	• Redefine relaciones que no son funciones y las convierte en funciones. • Dada una función real, la clasifica en algebraica, trascendente o especial. • Analiza, dibuja e interpreta gráficas de funciones reales simples. • Dada una función simple, realiza sobre ella transformaciones como desplazamientos, contracciones, dilataciones y reflexiones. • Resuelve problemas cuyos enunciados corresponden a situaciones funcionales.
Estética: • Elaborar un cuadro sinóptico para clasificar las funciones.	• Diseña una cartelera con la clasificación de las funciones reales.
Ética - Actitudinal: • Actuar de manera honesta en la presentación de trabajos y evaluaciones.	• Reconoce y acepta sus fortalezas y debilidades en la actividad académica.

DIMENSIONES

EVALUACIÓN

ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS

3.1 COMPRENSIÓN DE LECTURA: EL ANÁLISIS MATEMÁTICO (SIGLOS XVII A XIX)

Lea atentamente el siguiente texto y luego subraye la letra correspondiente a la ÚNICA respuesta correcta en cada uno de los enunciados propuestos.

ISAAC NEWTON
1642 - 1727

Los conceptos de variable y función no surgieron en forma definitiva ni en la mente de Galileo, Descartes o Newton, ni en la de cualquier otro matemático concreto. Estos conceptos fueron pensados por otros matemáticos anteriores a ellos (por ejemplo, Neper cuando desarrolló los logaritmos) y tomaron una forma más o menos definida, aunque no definitiva, en Newton y Leibnitz. La definición actual de FUNCIÓN data del siglo XIX, pero ni es del todo rigurosa ni seguramente la última. El concepto de función se desarrolla incluso en el momento actual.

El análisis matemático se basó en los materiales suministrados por la nueva ciencia de la mecánica y en problemas de geometría y álgebra. El primer paso hacia la matemática de las magnitudes variables fue la aparición, en 1637, de la "GEOMETRÍA" de Renato Descartes, donde se establecían las bases de la llamada geometría analítica.

El siguiente paso decisivo en la matemática de las magnitudes variables fue dado por Newton y Leibnitz durante la segunda mitad del siglo XVII al sentar las bases del CÁLCULO. Este fue el verdadero comienzo del análisis, puesto que el objeto del cálculo es el estudio de las funciones mismas, distinto al objeto de la geometría analítica que son las figuras geométricas.

1. Para el autor, el punto de arranque del análisis matemático fue dado:
   a. Cuando se publicaron los materiales suministrados por la nueva ciencia de la mecánica.
   b. Por Descartes con la publicación de la "Geometría", en 1637.
   c. Por un inglés y un alemán cuando sentaron las bases del cálculo.
   d. Por las mentes geniales de Galileo, Descartes y Newton.

2. El tema central que desarrolla el autor del texto es:
   a. La historia del cálculo: de la antigüedad a nuestros días.
   b. Cómo fueron los comienzos del desarrollo del análisis matemático.
   c. Las labores de los científicos europeos en el desarrollo de las matemáticas.
   d. Los tropiezos que ha tenido el cálculo en las diferentes épocas.

3. Según el texto, es cierto que:
   a. Newton es el verdadero padre del análisis matemático.
   b. Galileo, Newton y Descartes son los "responsables" de los conceptos de variable y función.
   c. Newton y Descartes fueron copistas de Neper.
   d. Los conceptos de variable y función fueron pensados por científicos predecesores de Galileo, Descartes y Newton.

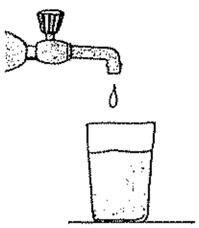
4. Los siguientes temas se mencionan en el texto, menos:
   a. Las bases de la geometría analítica.
   b. Los fundamentos de los planos cartesianos.
   c. El objeto de trabajo de la Geometría Analítica.
   d. Los logaritmos de Neper.

5. El escrito anterior puede catalogarse como:
   a) Un artículo. b) Una reseña.
   c) Un ensayo. d) Una crítica.

3.2 DEL CONCEPTO DE RELACIÓN AL DE FUNCIÓN

Primera experiencia

- Una canilla está goteando. El nivel del agua que se alcanza en el vaso **depende** del tiempo que la canilla esté goteando. Esta **dependencia** o **relación** podemos observarla en la siguiente tabla:

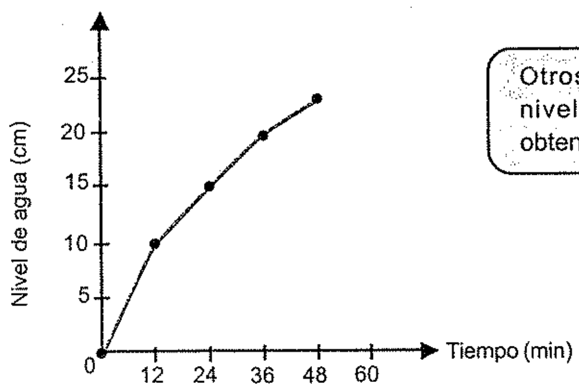


Tiempo (minutos)	Nivel de Agua (cm)
0	0
12	10
24	15
36	19
48	22

A la magnitud **tiempo** se le llama **variable independiente** y la magnitud **nivel de agua** es la **variable dependiente**.

- La tabla anterior nos permite visualizar, como si fuera un diagrama sagital, la relación existente entre los elementos de dos conjuntos: el conjunto **TIEMPO** y el conjunto **NIVEL DEL AGUA**.

Por supuesto, también podemos representar en un diagrama cartesiano los pares de valores de la relación **tiempo - nivel del agua**: (0, 0) , (12, 10) , (24, 15) , (36, 19) , (48, 22); así:



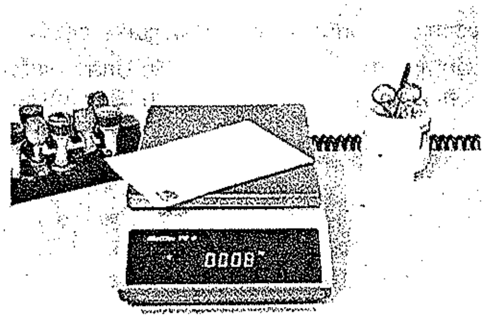
Otros tiempos intermedios proporcionarán niveles de agua intermedios. Al unirlos obtenemos la gráfica.

La gráfica nos da una **idea global de la relación de dependencia** que existe entre las dos magnitudes. Los valores de la variable independiente **tiempo** (0, 12, 24, ...) se representan en el eje horizontal o **eje de las abscisas** y los valores de la variable dependiente **nivel del agua** (0, 10, 15, 19, ...) se representan en el eje vertical o **eje de las ordenadas**.

Segunda experiencia

- En un cierto país el costo del correo se rige por la siguiente tabla:

Peso en Gramos	Costo
Hasta 20 g	U.S. $0,20
Entre 20 g y 50 g	U.S. $0,26
Entre 50 g y 100 g	U.S. $0,39
Entre 100 g y 250 g	U.S. $0,85
Entre 250 g y 500 g	U.S. $1,70
Entre 500 g y 1000 g	U.S. $2,35
Entre 1000 g y 2000 g	U.S. $3,20



- Marcos y Sara le escriben a sus amigos Julio, Margarita, Lina y Juan Carlos. La carta de Julio pesa 15 g, la de Margarita 80 g, la de Lina 90 g y la de Juan Carlos 500 g. Contesta:

  a) ¿Cuánto cuesta poner cada carta?
  b) ¿Es posible que a dos cartas les corresponda el mismo valor?
  c) ¿A una misma carta le puede corresponder costos distintos?

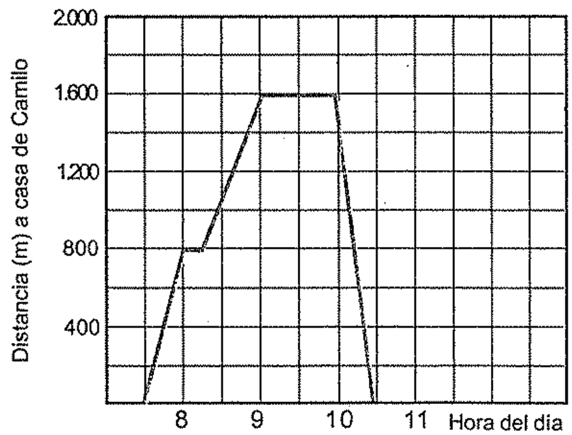
A cada carta le corresponde un **ÚNICO** costo.
El costo **depende** del peso de la carta, o **está en función** del peso.

- En este caso hemos expresado la relación mediante una **tabla**.

Tercera experiencia

- Fíjate bien en la siguiente gráfica y en lo que dice Camilo:

Salí de mi casa a visitar a Juliana. Llegué a su casa y la esperé un rato. Luego, salimos al parque y conversamos. Finalmente volvimos juntos a mi casa.



- Contesta:

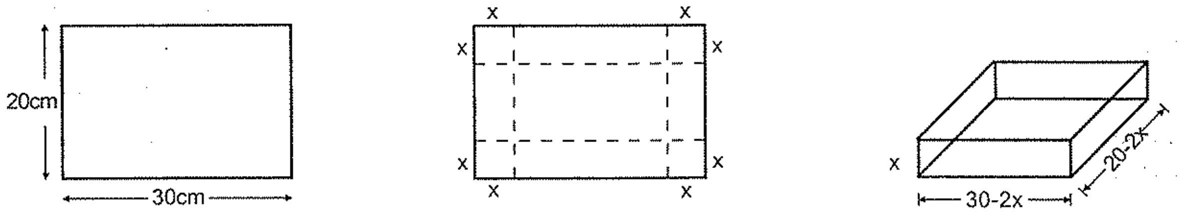
  a) ¿A qué hora salió Camilo de su casa?
  b) ¿Cuánto tiempo tardó en llegar a la casa de Juliana y qué distancia recorrió?
  c) ¿Cuánto tiempo debió esperar a Juliana?
  d) ¿Qué distancia hay de la casa de Juliana al parque? ¿Cuánto tiempo tardaron en ir de la casa de Juliana al parque?
  e) ¿Cuánto tiempo permanecieron en el parque?
  f) ¿Qué distancia hay del parque a la casa de Camilo? ¿Cuánto se demoraron en recorrer esta distancia?

A cada hora del día le corresponde **una** determinada distancia a la casa de Camilo. Esta distancia **depende** de la hora del día, o **está en función** de la hora del día.

- En esta experiencia, la relación la hemos expresado **mediante una gráfica.**

Cuarta experiencia

- Santiago tiene una lámina rectangular de cartón de 30 cm de largo por 20 cm de ancho. Recorta cuatro cuadrados en las esquinas para construir una caja sin tapa, como muestra la figura siguiente. Expresemos el volumen de la caja en **función** del lado del cuadrado recortado.



- Si convenimos en llamar **x** al lado del cuadrado recortado, entonces las dimensiones de la caja serán: **alto: x; largo: 30 - 2x ; ancho: 20 - 2x**
- Por lo tanto, el volumen de la caja podemos expresarlo mediante la fórmula.

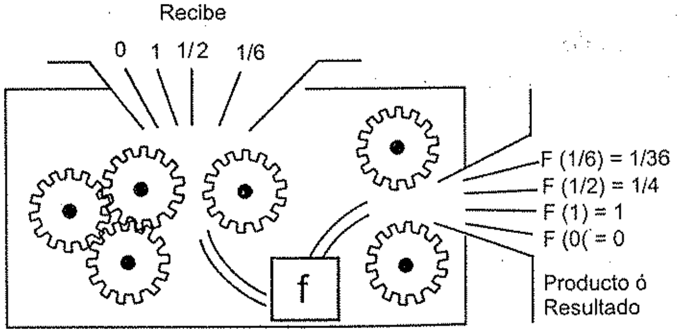
$$V(x) = x\,(30 - 2x)\,(20 - 2x)$$

A cada valor del lado del cuadrado recortado **(x)** le corresponde **un** volumen de la caja. El volumen de la caja **depende** del valor del lado del cuadrado recortado o **está en función** del lado del cuadrado recortado.

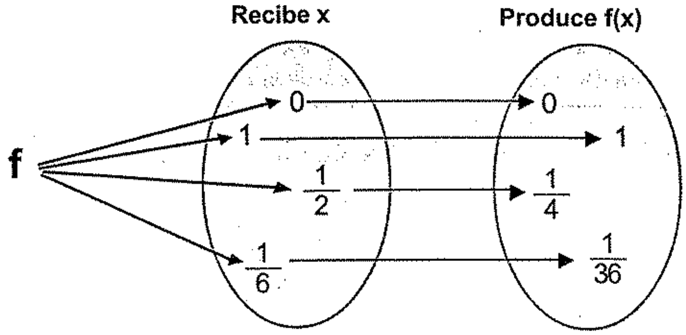
- En esta experiencia hemos expresado la relación **mediante una fórmula.**

EL CONCEPTO DE FUNCIÓN

- Las relaciones que hemos trabajado en las experiencias anteriores tienen una característica común: **A cada valor de la variable independiente le corresponde UNO y SOLO UNO de la variable dependiente**. Una relación de este tipo se llama **FUNCIÓN**.
- Las funciones son como máquinas **f** a las que les introducimos un elemento **x** y nos produce otro elemento **y** que suele designarse por **f (x)** (¡recuerdas la representación simbólica de las operaciones unarias: es la misma!). Observemos, por ejemplo, el funcionamiento de la máquina siguiente:

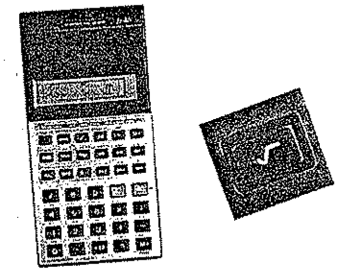


El proceso realizado por la máquina también podemos visualizarlo en el siguiente diagrama sagital o en una tabla de valores:



Conjunto de Partida   Conjunto de Llegada

(x)	f (x)
0	0
1	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{36}$



- Las teclas de las calculadoras tienen incorporadas funciones, mediante fórmulas, en algunas de sus teclas; por ejemplo, la tecla de la **raíz cuadrada** define la función **$y = \sqrt{x}$.**
- Si tecleamos 36 y pulsamos , aparece en pantalla 6. Decimos que 36 es una **entrada válida** para la función $y = \sqrt{x}$ y que 6 es una **salida válida** para esta función. También se dice que 6 es la **imagen** de 36 en la función $y = \sqrt{x}$.

El conjunto de entradas válidas se llama **dominio** de la función.

- Si tecleamos – 9 y pulsamos , aparece en pantalla E (ERROR). – 9 no es una entrada válida para la función $y = \sqrt{x}$.

  $y = -6$ no es una salida válida para la función $y = \sqrt{x}$, pues no existe ningún valor de entrada que luego de pulsar la tecla nos devuelva en pantalla a – 6.

El conjunto de salidas válidas se llama **rango** de la función.

Recordemos

- **FUNCIÓN**: es la relación o correspondencia existente entre los elementos de dos conjuntos, de tal manera que a cada elemento del conjunto de partida le corresponde un **único** elemento del conjunto de llegada, denominado **imagen** o **transformado.**
- **VARIABLE INDEPENDIENTE**: es la que corresponde a los elementos del conjunto de partida.
- **DOMINIO DE LA FUNCIÓN**: es el conjunto de todos los valores que toma la variable independiente.
- **VARIABLE DEPENDIENTE**: es la que corresponde a los elementos del conjunto de llegada.
- **RANGO**: es el conjunto de todos los valores que toma la variable dependiente.
- **GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN**: es la representación en el diagrama cartesiano, mediante puntos, de los pares ordenados obtenidos de un diagrama sagital o de una tabla de valores.

Ejemplo 1

Don Pedro, el vendedor de frutas, tiene promoción de mangos y colocó un cartel con los precios según las docenas que le compren. Se pide:

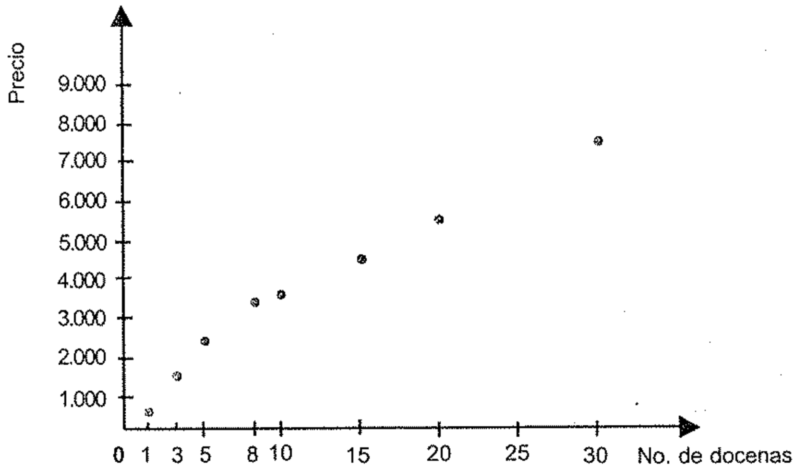
a) Dibujar la gráfica de la función dada por la tabla.

b) ¿Tiene sentido unir los puntos obtenidos?

Número de Docenas de mangos	1	3	5	8	10	15	20	30
Precio	600	1.500	2.300	3.200	3.500	4.500	5.600	7.500

SOLUCIÓN

a) Dibujamos las parejas de valores en un sistema cartesiano y obtenemos distintos puntos de la gráfica. Observemos:



b) No tiene sentido unir los puntos obtenidos, pues en este caso sólo están en venta valores enteros de docenas de mangos. ¿Tendría sentido vender, por ejemplo, 3,07 docenas de mangos?

Ejemplo 2

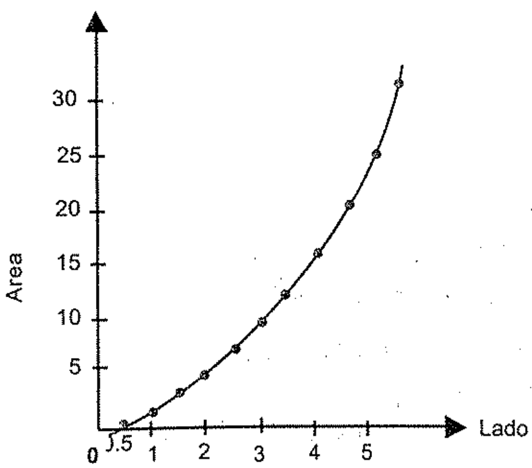
La fórmula que expresa el área de un cuadrado en función de su lado l es $A = l^2$. Tenemos, pues una función dada por una fórmula. Se pide:

a) Dibujar la gráfica de dicha función.
b) ¿Tiene sentido unir los puntos obtenidos?

SOLUCIÓN

a) Para dibujar la gráfica de esta función, elaboramos una tabla, dando valores al lado y calculando, mediante la fórmula, las áreas correspondientes.

Lado: l	Area: l^2
0,5	0,25
1	1
1,5	2,25
2	4
2,5	6,25
3	9
3,5	12,25
4	16
4,5	20,25
5	25
5,5	30,25



b) Si damos valores intermedios al lado, obtendremos valores intermedios del área. Por lo tanto, tiene sentido unir los puntos iniciales dados en la tabla.

Ejemplo 3

Consideremos la relación $\mathcal{R}$: R→R definida por la regla xy + 2y = 3:

a) ¿Es $\mathcal{R}$ función? ¿Por qué?
b) Si no lo es, ¿cómo debemos redefinirla para que lo sea?

SOLUCIÓN

a) Veamos si la relación cumple las dos condiciones para ser función:

1. Como el conjunto de partida es $\mathcal{R}$, verifiquemos si el dominio de $\mathcal{R}$ también es R:

$$xy + 2y = 3 \Rightarrow y(x+2) = 3$$
$$\Rightarrow y = \frac{3}{x+2}$$

Para que $\frac{3}{x+2} \in R$ debe cumplirse que $x + 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2$; por lo tanto, $D_R = R - \{-2\}$.

Como vemos, el dominio no es igual al conjunto de partida, por lo cual la primera condición de la definición no se cumple.

2. La segunda condición de la definición se cumple, ya que para cada $x \in R - \{-2\}$ el valor de $y = \frac{3}{x+2} \in R$.

b) Para que la relación $\mathcal{R}$ sea función debemos definirla así:

$$\mathcal{R}: R - \{-2\} \rightarrow R \text{ definida por } y = \frac{3}{x+2}$$

Ejemplo 4

Indiquemos si la relación $\mathcal{R}$: R→ R definida por la regla $y^2 + 3x - 2 = 0$ es o no función. En caso contrario, redefinámosla de manera que lo sea y dibujemos tanto la gráfica de la relación como la de la función.

SOLUCIÓN

- Veamos si se cumplen las condiciones de la definición de función:

a) Despejemos la **y** para hallar el dominio:

$$y^2 + 3x - 2 = 0 \Rightarrow y^2 = 2 - 3x$$
$$\Rightarrow y = \pm\sqrt{2-3x}$$

Ahora bien, $\sqrt{2-3x} \in R \Leftrightarrow 2 - 3x \geq 0$
$$\Leftrightarrow -3x \geq -2$$
$$\Leftrightarrow 3x \leq 2$$
$$\Leftrightarrow x \leq \frac{2}{3}$$

Por lo tanto, $D_{\mathcal{R}} = \left(-\infty ; \frac{2}{3}\right]$. Esto significa que la primera condición de la definición no se cumple pues el dominio no es igual al conjunto de partida.

b) Como a cada valor de **x** le corresponden dos de **y** (por los dos signos de la raíz cuadrada), tampoco se cumple la segunda condición.

- Si queremos que $\mathcal{R}$ sea función debemos hacer dos cosas:

a) Definir la relación así: $R\colon \left(-\infty\,;\dfrac{2}{3}\right] \to \mathbb{R}$

b) Tomar de la raíz cuadrada sólo uno de los signos; así: $y = +\sqrt{2-3x}$ ó $y = -\sqrt{2-3x}$

- Las figuras 3-1 (a) y 3-1 (b) nos muestran las gráficas de la relación y de la función respectivamente:

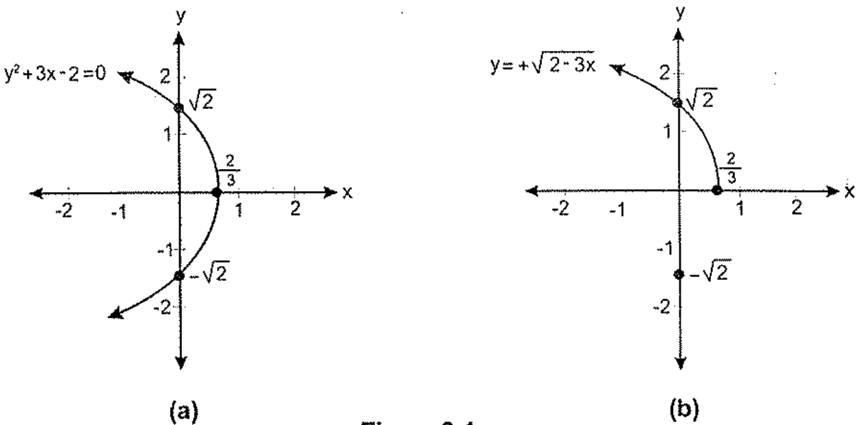


Figura 3-1

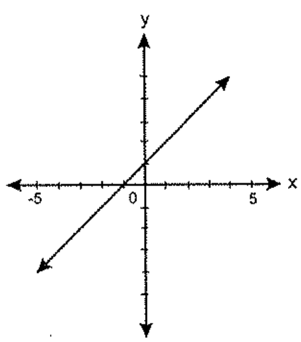
ATENCIÓN

Hay una forma sencilla para averiguar si la gráfica de una relación cumple la segunda condición de la definición de función. Este criterio es el siguiente:

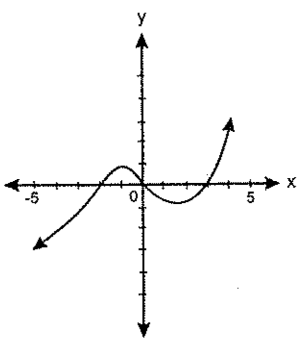
> **CRITERIO GRÁFICO PARA RECONOCER FUNCIONES**
>
> **La gráfica de una relación en el plano cartesiano, QUE CUMPLE LA PRIMERA CONDICIÓN de la definición, es función si cualquier recta vertical que se trace, corta a la gráfica a lo más en un punto.**

Ejemplo 5

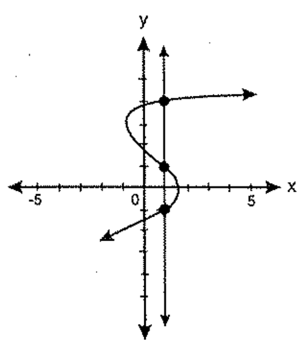
Indiquemos cuáles de las siguientes relaciones son funciones y cuáles no.



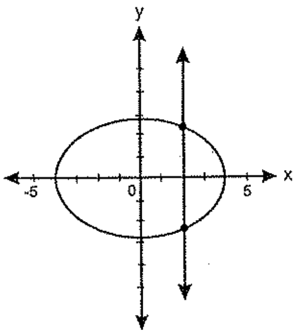
ES FUNCIÓN



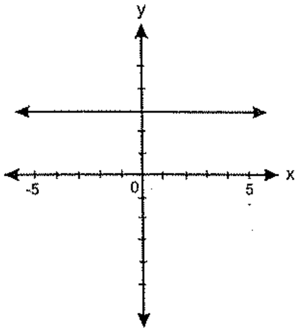
ES FUNCIÓN



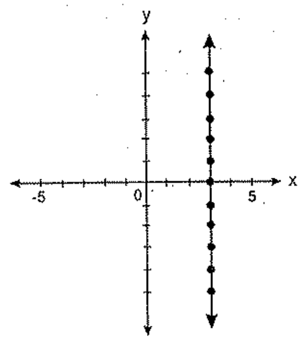
NO ES FUNCIÓN



NO ES FUNCIÓN



ES FUNCIÓN



NO ES FUNCIÓN

Ejemplo 6

Sea f: R → R una función definida por la regla $y = f(x) = x^2 + 2x - 3$. Hallemos:

a) f(-3) b) f(0) c) f(5) d) f(a + 1) e) $\dfrac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$

SOLUCIÓN

a) f(-3) significa que debemos ir a la regla de la función **f** y reemplazar **x** por -3; así:

$$f(-3) = (-3)^2 + 2(-3) - 3 = 9 - 6 - 3 = 0$$

b) f(0) significa que debemos ir a la regla de la función **f** y reemplazar **x** por 0; así:

$$f(0) = 0^2 + 2(0) - 3 = -3$$

c) f(5) significa que debemos ir a la regla de la función **f** y reemplazar **x** por 5; así:

$$f(5) = 5^2 + 2(5) - 3 = 25 + 10 - 3 = 32$$

d) f(a + 1) significa que debemos ir a la regla de la función **f** y reemplazar **x** por a + 1; así:

$$f(a + 1) = (a + 1)^2 + 2(a + 1) - 3 = a^2 + 2a + 1 + 2a + 2 - 3 = a^2 + 4a$$

e) Para calcular $\dfrac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$, hallamos $f(x_1 + h)$ y $f(x_1)$; así:

$$f(x_1 + h) = (x_1 + h)^2 + 2(x_1 + h) - 3$$
$$f(x_1) = x_1^2 + 2x_1 - 3$$

Por lo tanto:

$$\frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} = \frac{(x_1 + h)^2 + 2(x_1 + h) - 3 - (x_1^2 + 2x_1 - 3)}{h}$$

$$= \frac{\cancel{x_1^2} + 2hx_1 + h^2 + \cancel{2x_1} + 2h - \cancel{3} - \cancel{x_1^2} - \cancel{2x_1} + \cancel{3}}{h}$$

$$= \frac{2hx_1 + 2h + h^2}{h}$$

$$= \frac{\cancel{h}(2x_1 + 2 + h)}{\cancel{h}} = 2x_1 + 2 + h; \text{ siempre que } h \neq 0$$

3.3 FUNCIONES CRECIENTES, DECRECIENTES, PARES E IMPARES

3.3.1 Funciones Crecientes y Decrecientes

En el lenguaje ordinario, la palabra CRECER significa AUMENTAR y la palabra DECRECER significa DISMINUIR. En esta sección estudiaremos el significado que tienen las palabras CRECER y DECRECER en el lenguaje matemático.

Experiencia

- Consideremos inicialmente la gráfica de una función definida en un intervalo abierto (a ; b), como la de la figura 3-2.

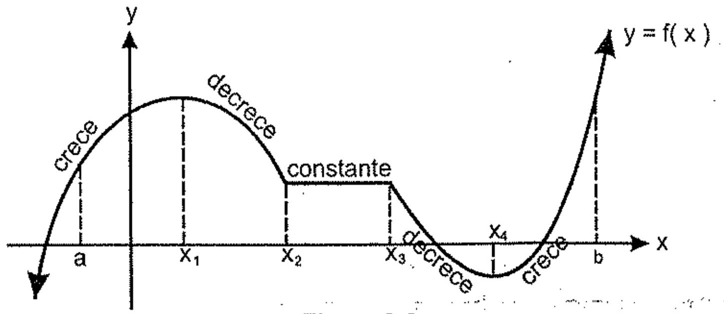


Figura 3-2

- Esta figura nos muestra que hay intervalos donde los valores de **y** aumentan, cuando los valores de **x** aumentan; estos intervalos son: $(a ; x_1)$ y (x_4 , b). En estos intervalos la función **f** es CRECIENTE.
- También la figura nos muestra otros intervalos donde los valores de **y** disminuyen, cuando los valores de **x** aumentan; estos intervalos son: $(x_1 ; x_2)$ y $(x_3 ; x_4)$. En estos intervalos la función **f** es DECRECIENTE.
- Finalmente, hay un intervalo donde la función no es creciente ni decreciente: $(x_2 ; x_3)$. En este intervalo la función es CONSTANTE.

- Todas estas observaciones podemos resumirlas en la siguiente definición para funciones crecientes y decrecientes:

DEFINICIÓN

Sea f una función definida en un intervalo abierto I.

- **Se dice que f es CRECIENTE en I si al aumentar los valores de x en I, también aumentan los valores de f(x); es decir:**

$$\textbf{f es CRECIENTE en I, si } x_2 > x_1 \textbf{ implica que } f(x_2) > f(x_1)\textbf{, para todo } x_1, x_2 \in I$$

- **Se dice que f es DECRECIENTE en I si al aumentar los valores de x en I, se cumple que los valores de f(x) disminuyen; es decir:**

$$\textbf{f es DECRECIENTE en I, si } x_2 > x_1 \textbf{ implica que } f(x_2) < f(x_1)\textbf{, para todo } x_1, x_2 \in I$$

La figura 3-3 nos aclara las definiciones anteriores:

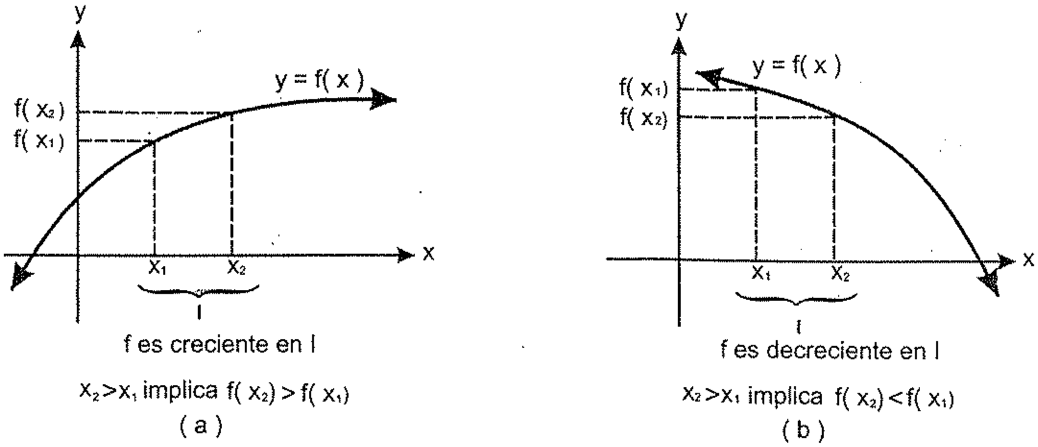


Figura 3-3

Ejemplo

La gráfica siguiente representa la variación de temperatura de una población a lo largo de un determinado día. Figura 3-4.

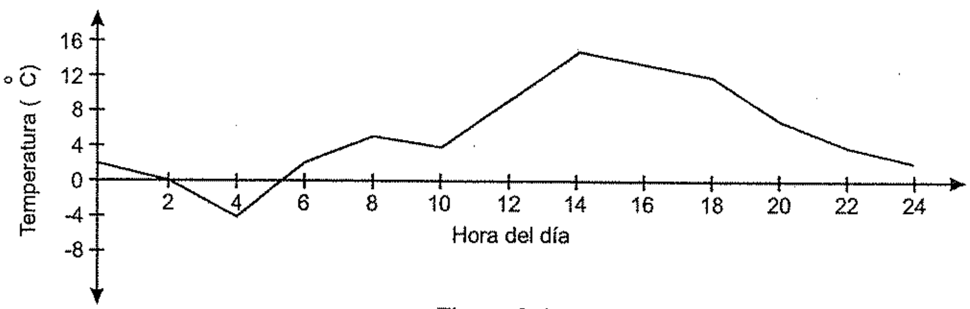


Figura 3-4

a) Estimemos la temperatura máxima y mínima de ese día y las horas las que se produjeron tales temperaturas.

b) ¿En cuáles períodos del día la temperatura crece? ¿Y en cuáles decrece?

c) ¿A qué horas la temperatura fue de 0°C?

SOLUCIÓN

a) De acuerdo con la gráfica, la temperatura máxima se produce a las 2 de la tarde y es aproximadamente de 15°C. La temperatura mínima se produce a las 4 de la mañana y es de –4°C.

b) La temperatura aumenta entre las 4 a.m. y las 8 a.m., y entre las 10 a.m. y las 2 p.m.. La temperatura disminuye entre las 0 horas y las 4 a.m. y entre las 2 p.m. y las 24 horas.

c) La temperatura es 0° en los puntos donde la gráfica intercepta al eje horizontal. Esto ocurre a las 2 a.m. y a las 5:15 a.m., aproximadamente.

3.3.2 Funciones Pares e Impares

En la unidad anterior de este texto establecimos los criterios mediante los cuales una curva es simétrica con respecto a los ejes coordenados y con el origen. Por supuesto, una curva que sea función no puede ser simétrica con relación al eje x (¿Por qué?), pero sí puede serlo con respecto al origen y con respecto al eje y. La simetría de funciones está directamente relacionada con los conceptos de FUNCIÓN PAR y FUNCIÓN IMPAR. Veamos:

DEFINICIÓN DE FUNCIONES PAR E IMPAR

- **Una función f es FUNCIÓN PAR cuando cualquiera que sea el valor x de su dominio se verifica que**
$$f(-x) = f(x)$$

- **Una función f es FUNCIÓN IMPAR cuando cualquiera que sea el valor x de su dominio se verifica que**
$$f(-x) = -f(x)$$

Ejemplo 1

La función real definida por $f(x) = 2x^2 - 3$ es PAR ya que $\mathbf{f(-x) = 2(-x)^2 - 3 = 2x^2 - 3 = f(x)}$. En la figura 4-5 (a) podemos comprobar la simetría de la curva con respecto al eje y.

Ejemplo 2

La función real definida por $f(x) = x^3$ es IMPAR ya que $\mathbf{f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)}$. En la figura 3-5 (b) podemos comprobar la simetría de la curva con respecto al origen.

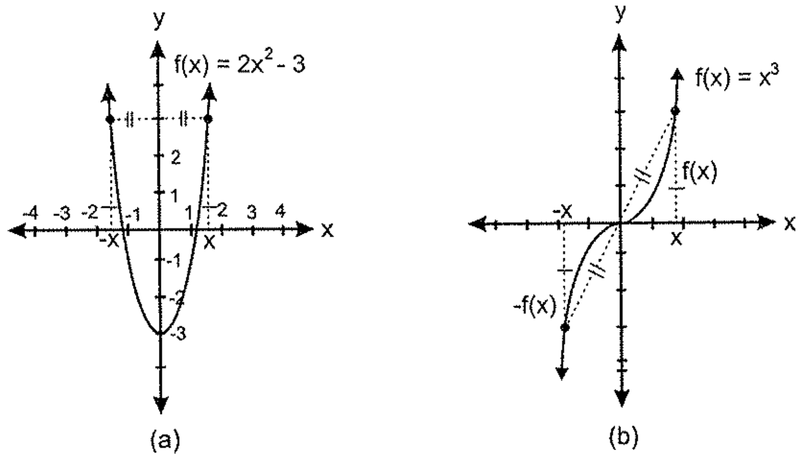


Figura 3-5

Ejemplo 3

Determinemos si las siguientes funciones reales son pares, impares o ninguna de las dos:

a) $f(x) = 4x^5 - 2x^3$ b) $g(x) = 3 - 2x^4$ c) $h(x) = \text{Sen}(x)$

SOLUCIÓN

a) $$\left.\begin{aligned} f(-x) &= 4(-x)^5 - 2(-x)^3 \\ &= -4x^5 + 2x^3 \\ &= -\left(4x^5 - 2x^3\right) \\ &= -f(x) \end{aligned}\right\} \therefore f(-x) = -f(x)$$: Por lo tanto, f es una función impar.

b) $$\left.\begin{aligned} g(-x) &= 3 - 2(-x)^4 \\ &= 3 - 2x^4 \\ &= g(x) \end{aligned}\right\} \therefore g(-x) = g(x)$$: Luego, g es una función par.

c) $h(-x) = \text{Sen}(-x)$

$= -\text{Sen}(x) \cdots\cdots \text{pues } \text{Sen}(-x) = -\text{Sen}(x)$

$= -h(x)$

$\therefore$ h(-x) = -h(x) : Por lo tanto, h es una función impar.

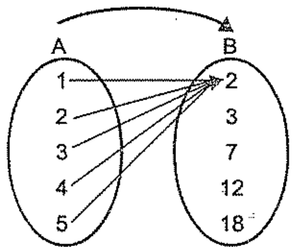
ATENCIÓN

Conviene dibujar las gráficas de estas funciones y verificar los resultados obtenidos.

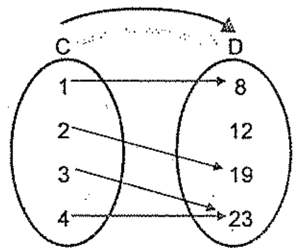
EJERCICIO 3.1

1 Indicar cuáles de las relaciones definidas mediante los siguientes diagramas sagitales son funciones. Explicar la respuesta.

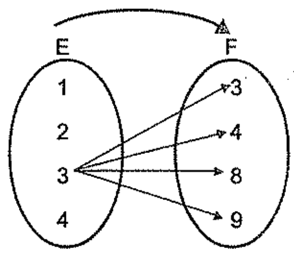
a)



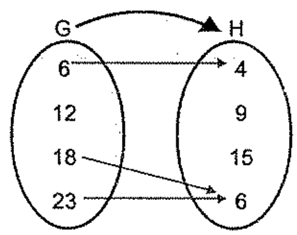
b)



c)



d)



2 La gráfica de la derecha corresponde a una relación real definida de un conjunto A en un conjunto B (R:A→B).

a) ¿Cuáles son los conjuntos A y B?

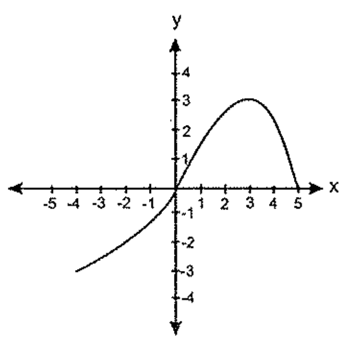
b) ¿Es R una función f de A en B? ¿Por qué?

c) Si la respuesta en b) es afirmativa halle f(-4) y estime el valor de f(1).

d) ¿Para cuáles valores f(x)=-2? ¿Y f(x)=0?

e) ¿Cuáles son el dominio y el rango de f?

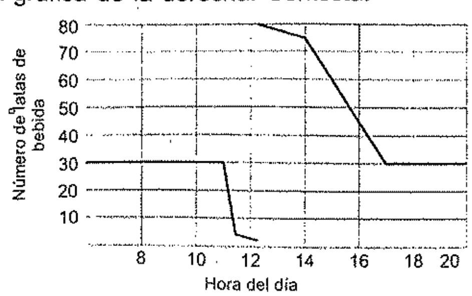
f) ¿En qué intervalos f es creciente y en cuáles es decreciente?



3 En una cafetería se encuentra una máquina con latas de gaseosas. Un cierto día la empresa que instaló la máquina realizó un estudio para saber cuantas latas había en cada momento desde las 8 de la mañana hasta las 8 de la noche. Dicho estudio quedó representado en la gráfica de la derecha. Contesta:

a) ¿Cuántas latas había en la máquina a las 8 de la mañana?

b) ¿En qué períodos no se consumió ninguna lata?



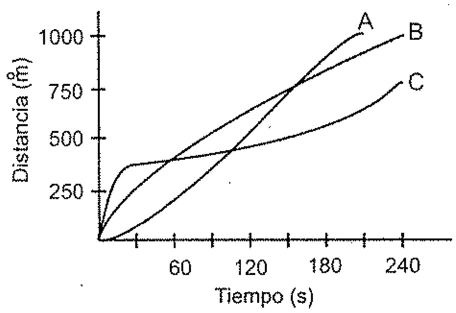
c) ¿Cuántas latas se consumieron entre las 11:00 y las 11:30 a.m.?

d) ¿A qué hora se llenó la máquina?

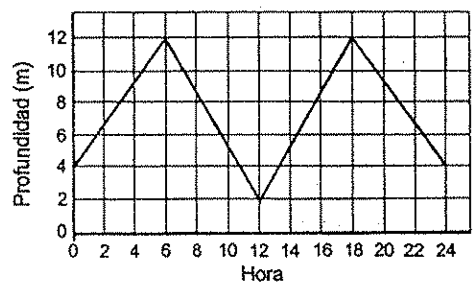
e) ¿Puede preverse, a partir de la gráfica, a qué hora se suspende el servicio en la tarde?

f) ¿Cuándo se han consumido más latas de gaseosa por hora?

4. Tres atletas participan en una carrera de 1.000 m. La gráfica de la derecha describe en forma aproximada el comportamiento de los atletas en dicha prueba. ¿Cómo describiría un locutor que está transmitiendo la prueba lo que ha ocurrido?



5. La gráfica muestra cómo varía la profundidad del agua en un puerto durante un día cualquiera; por ejemplo, el lunes:



a) ¿A qué horas aumenta la profundidad? ¿A qué horas disminuye?

b) ¿A qué horas se producirá el máximo de profundidad? ¿Y el mínimo?

c) Imagine la gráfica en los días siguientes y trate de representarla.

6. En la tabla, se muestra la población P (en miles) de un municipio cualquiera, desde 1990 hasta 2000.

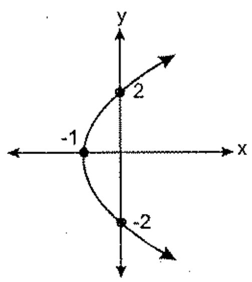
t	1990	1992	1994	1996	1998	2000
P	823	847	887	935	1005	1080

a) Dibujar una gráfica de P como función del tiempo.

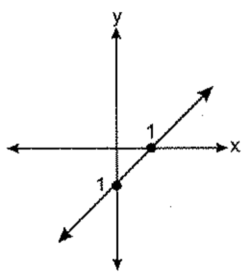
b) Usar la gráfica para estimar la población en 1991.

7. Determinar si las gráficas de las siguientes relaciones son funciones de x en y. Si lo son, escribir el dominio y el rango.

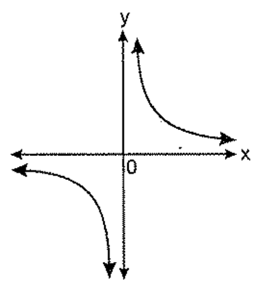
(a)



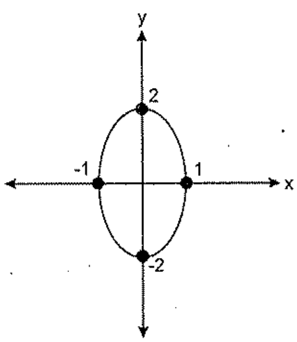
(b)



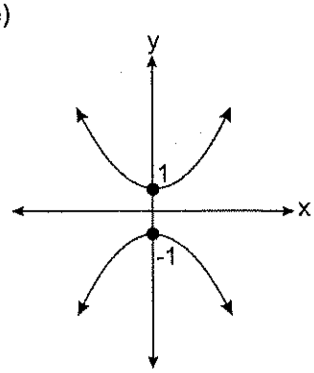
(c)



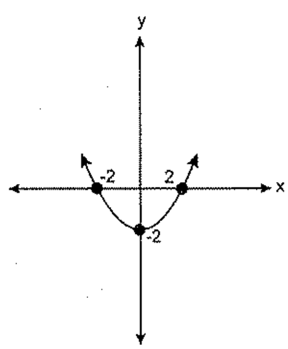
(d)



(e)



(f)



En los ejercicios 8 a 13 determinar cuáles de las relaciones reales son funciones y cuáles no. Aquellas que no lo sean, redefinirlas de tal manera que se conviertan en funciones.

8 $R_1 = \{(x, y) / x = y^2\}$ 9 $R_2 = \left\{ (x, y) / y = \dfrac{1}{x} \right\}$ 10 $R_3 = \{(x, y) / y = x^2\}$

11 $R_4 = \{(x, y) / y = 2x + 1\}$ 12 $R_5 = \{(x, y) / x \cdot y = 2\}$ 13 $R_6 = \{(x, y) / x^2 + y^2 = 1\}$

En los ejercicios 14 a 16, hallar el dominio de la función:

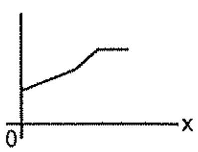
14 $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2 + 5x - 6}$ 15 $g(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$ 16 $h(t) = \sqrt[4]{9 - t^2}$

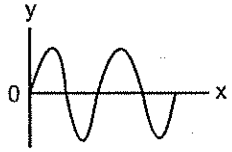
En los ejercicios 17 a 22 calcular para cada función f:

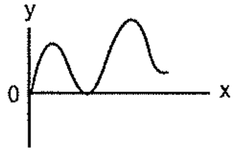
a) f(-3) b) f(0) c) f(2) d) f(a + b) e) f(a) + f(b) f) $\dfrac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$

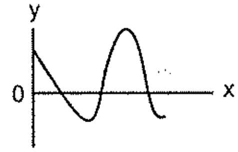
17 $f(x) = x^2 + 3x - 4$ 18 $f(x) = \dfrac{x+2}{x+3}$ 19 $f(x) = \sqrt{x-2}$

20 $f(x) = x^3$ 21 $f(x) = x$ 22 $f(x) = 8$

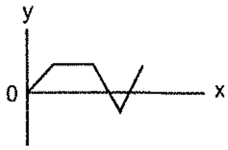
23 a)


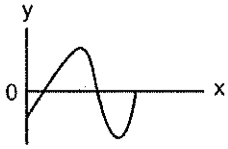
b)


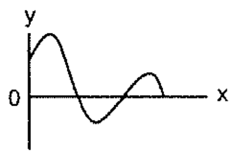
c)


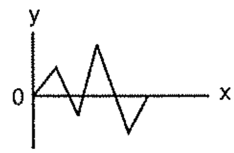
d)


Completar las siguientes gráficas sabiendo que corresponden a funciones pares.

24 a)


b)


c)


d)


Completar estas gráficas sabiendo que corresponden a funciones impares.

En los ejercicios 25 a 30 determinar si f es par o impar o ninguna de las dos.

25 $f(x) = x^4$ 26 $f(x) = 3x^2 - 4x$ 27 $f(x) = 2x - x^3$

28 $f(x) = x^5$ 29 $f(x) = 3x^2 - 2x^4$ 30 $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 3$

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (6)

Se tienen 1800 dólares para cercar un terreno rectangular. EL material que se necesita para cercar dos de sus lados paralelos cuesta 2 dólares el metro lineal. Los otros dos lados paralelos serán cercados con un material que cuesta 3 dólares el metro lineal. Si uno de los lados lo nombramos con x, se pide:

1. **Escribir una ecuación, en términos de x, que permita calcular el área del terreno.**
2. **¿De qué grado es la ecuación obtenida en términos de x?**
3. **¿Podría predecirse, a partir de la ecuación obtenida, cuáles son las dimensiones del terreno que tiene mayor área? Explique.**

3.4 CLASES DE FUNCIONES REALES

Nuestro propósito en este curso es familiarizarnos con las gráficas de algunas funciones cuya presencia es frecuente en el estudio del análisis de los números reales. En esta sección clasificaremos varias funciones y, luego, mostraremos cómo transformarlas mediante desplazamientos horizontales o verticales, contracciones o dilataciones y simetrías con los ejes coordenados.

3.4.1 Funciones Constantes

DEFINICIÓN

La regla que define una FUNCIÓN CONSTANTE es $y = f(x) = k$, donde k es un número real fijo (constante). Esta función asigna a cada valor de x la misma imagen k.

Ejemplo

Dibujemos la gráfica de la función $f: R \to R$ definida por la regla $y = f(x) = -1$.

SOLUCIÓN

- Cada elemento del conjunto de partida lo relacionamos siempre con -1 en el conjunto de llegada.
- La figura 3-6 nos muestra que la gráfica de $y = f(x) = -1$ es una LÍNEA RECTA PARALELA AL EJE x.

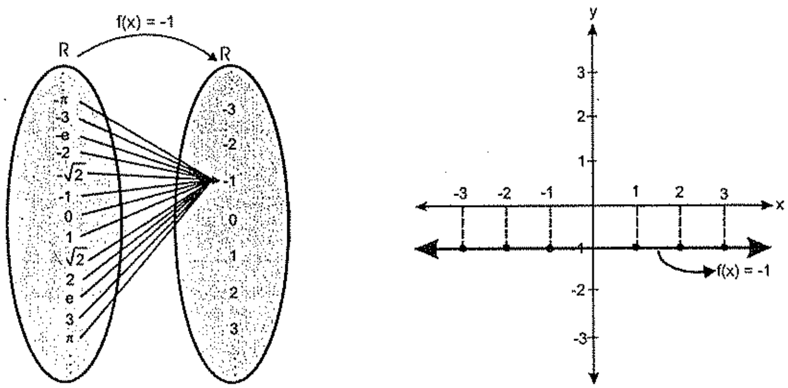


Figura 3-6

- En general, la gráfica de $y = f(x) = k$, con $k \in R$ es una recta paralela al eje x, que pasa por el punto (0, k).

3.4.2 Funciones Potencia

DEFINICIÓN

Las FUNCIONES POTENCIA tienen la forma $f(x) = x^n$, donde n es una constante.

- Entre las funciones potencia consideraremos varios casos:

a) n es un entero positivo

- La figura 3-7 muestra las gráficas de $f(x) = x^n$, cuando n= 1,2,3,4 y 5. De éstas ya conocemos la gráfica y=x (corresponde a una linea recta que pasa por el origen y con pendiente 1) y la de $y=x^2$ (corresponde a una parábola).

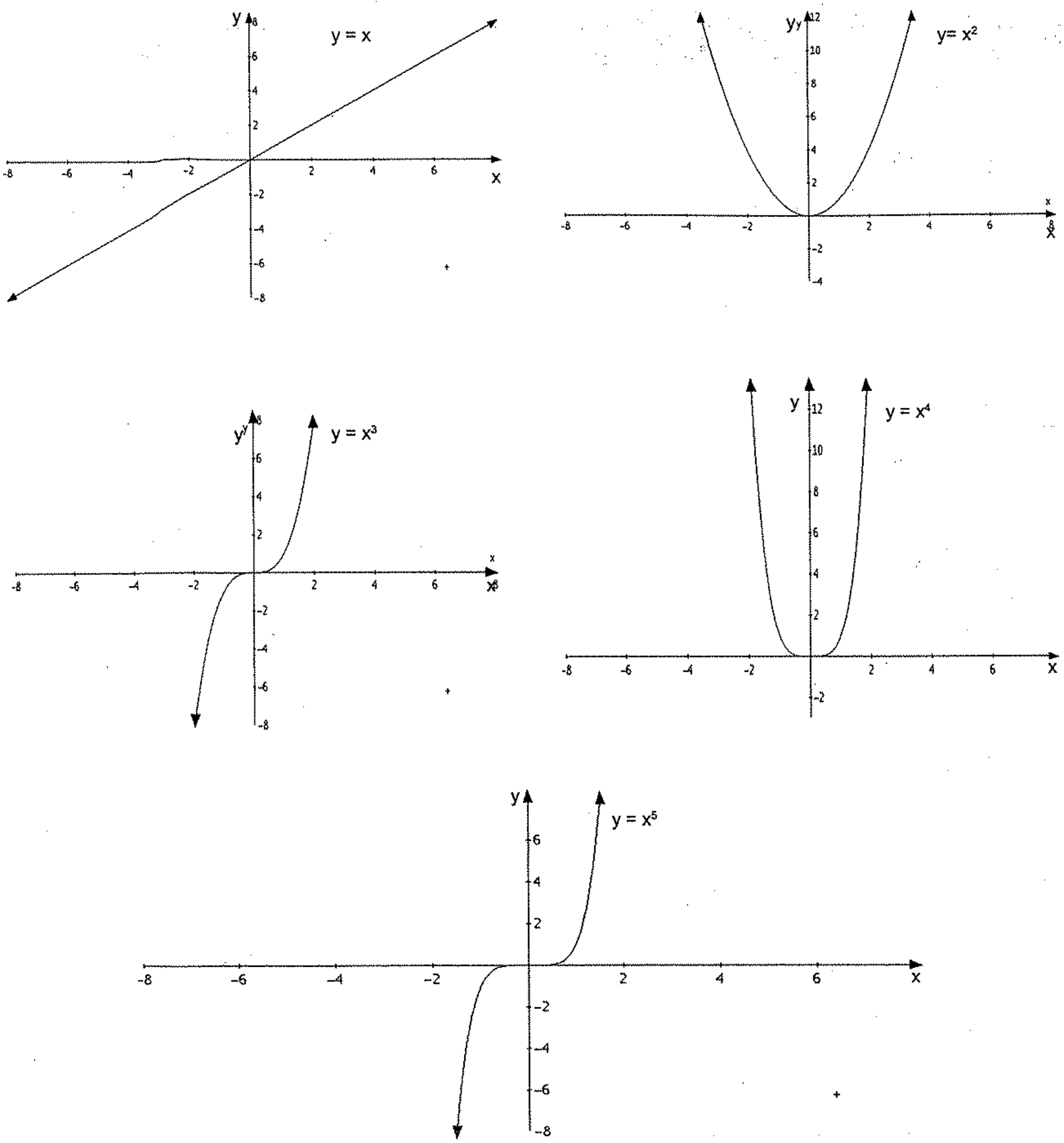


Figura 3-7

- La forma general de la gráfica de $f(x) = x^n$, cuando **n** es un número entero positivo, depende de si **n** es par o impar. Si **n** es par, entonces $f(x)=x^n$ es una función par y su gráfica es muy parecida a la parábola $y=x^2$. Si **n** es impar mayor que 1, entonces $f(x)=x^n$ es una función impar y su gráfica es parecida a la de $y=x^3$. La figura 3-8 (a) nos muestra las gráficas de $y=x^2$, $y=x^4$ y $y=x^6$, hechas con el DERIVE y la figura 3-8 (b), las gráficas de $y=x^3$, $y=x^5$ y $y=x^7$, también hechas con el DERIVE.

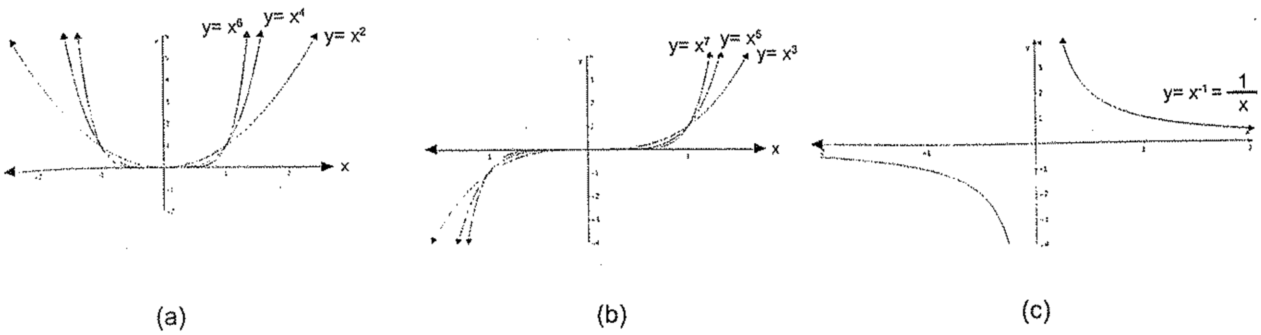


Figura 3-8

b) n = -1

La figura 3-8(c) nos muestra la gráfica de la función $f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$. Corresponde a una **hipérbola equilátera** y la estudiaremos con detalle en la unidad 13 de este texto.

c) $n = \frac{1}{a}$, siendo a un entero positivo

DEFINICIÓN

- La función real $\mathbf{f(x) = x^{\frac{1}{a}} = \sqrt[a]{x}}$ se denomina **función raíz o irracional.**
- Para **a = 2**, se tiene la función **raíz cuadrada** $\mathbf{f(x) = \sqrt{x}}$, cuyo dominio es el intervalo $[0 ; +\infty)$ y cuya gráfica es la mitad superior de la parábola $\mathbf{x=y^2}$ (figura 3-9 (a)).
- Para **a = 3**, se tiene la función **raíz cúbica** $\mathbf{f(x) = \sqrt[3]{x}}$, cuyo dominio es R y cuya gráfica nos muestra la figura 3-9 (b).
- Para otros valores pares de **a**, la gráfica de $\mathbf{y= \sqrt[a]{x}}$ es similar a la de $\mathbf{y= \sqrt{x}}$ y para otros valores impares de **a**, la gráfica de $\mathbf{y= \sqrt[a]{x}}$ es similar a la de $\mathbf{y= \sqrt[3]{x}}$.

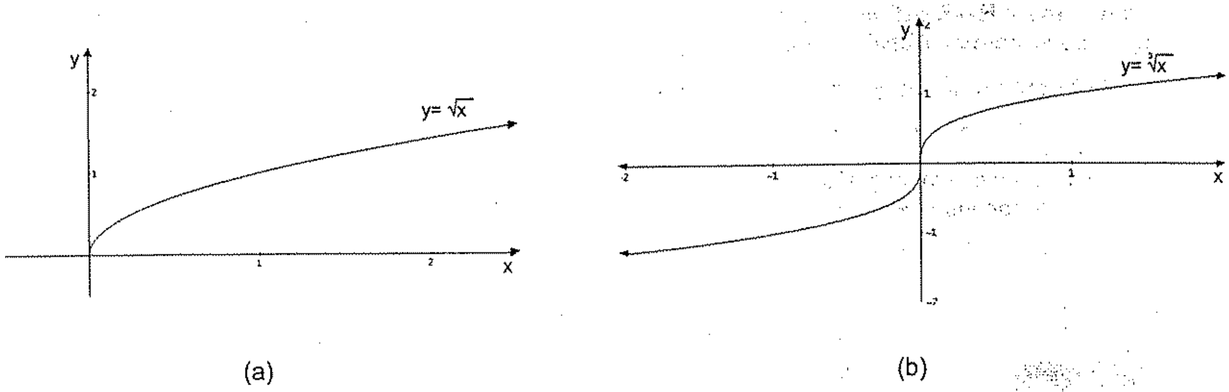


Figura 3-9

3.4.3 Función Polinómica

- Si la regla que define una función es un polinomio en la variable independiente x, obtendremos un tipo especial de función algebraica denominado FUNCIÓN POLINÓMICA. Son ejemplos de funciones polinómicas las siguientes:

$f(x) = 4x^5 + 7x^4 - 3x^3 + 2x - 1$: Función de quinto grado.

$g(x) = 8x - 7$: Función lineal.

$h(x) = 6x^2 + 9x$: Función de segundo grado.

$p(x) = \frac{3}{5}x^3 + 2x^2 - 3$: Función de tercer grado.

$q(x) = \frac{8}{7}x^0 = \frac{8}{7}$: Función de cero grado o constante.

DEFINICIÓN DE FUNCIÓN POLINÓMICA

Una función f: R→R es una FUNCIÓN POLINÓMICA cuando su regla tiene la forma:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$$

donde a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_1, $a_0 \in$ R y n es un número entero no negativo.

ATENCIÓN

Las funciones potencia **$f(x)= x^n$**, cuando **n** es un **número entero no negativo**, son casos particulares de la función polinómica.

3.4.3.1 La Función Lineal

- Cuando estudiamos las relaciones lineales vimos que una manera de escribir la ecuación de una línea recta es y = mx + n. Esta misma ecuación es la que utilizaremos para definir la FUNCIÓN LINEAL.

DEFINICIÓN DE FUNCIÓN LINEAL

- **La función f: R→R definida por la regla y = f(x) = mx + n, donde m y n son dos números reales fijos, se denomina FUNCIÓN LINEAL.**
- **Los números reales m y n son la pendiente de la recta y el intercepto con el eje y.**

- Por supuesto, para dibujar la gráfica de una función lineal real basta conocer dos puntos y unirlos mediante una línea de trazo continuo. Si necesitamos encontrar la pendiente de una recta que pasa por dos puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, aplicamos la expresión:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\text{diferencia de las y}}{\text{diferencia de las x}}$$

Ejemplo

Dibujemos la gráfica de la función real definida por la regla y = f(x) = -3x + 2.

SOLUCIÓN

- La figura 3-10 nos muestra una tabla con dos parejas ordenadas y la gráfica de la función:

x	0	1
f(x)	2	-1

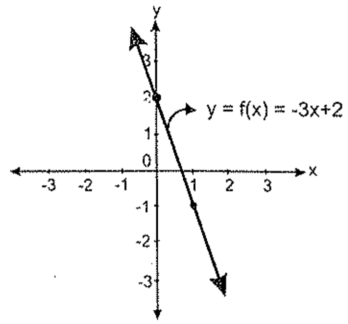


Figura 3-10

- Notemos que la pendiente de la recta es negativa y por eso su gráfica es decreciente.

3.4.3.2 La Función Cuadrática

- En la unidad 2 estudiamos las relaciones cuadráticas y analizamos que la regla que las define tiene la forma:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \text{.................}(1)$$

donde A, B, C, D, E y F son números reales tales que A y C no son simultáneamente iguales a cero. También encontramos que, dependiendo de los valores que tomen A y C, podemos dibujar una circunferencia (cuando A = C), una elipse (cuando A•C > 0), una hipérbola (cuando A•C < 0), una parábola (cuando A = 0 ó C = 0) ó degeneraciones de ellas (recordemos, por ejemplo, que una circunferencia puede degenerar en un punto o en el conjunto vacío).

- De todas estas relaciones cuadráticas sólo es función aquella en la cual C = 0 (¿por qué?). Por lo tanto, si en la ecuación (1) despejamos la y, obtenemos:

$$Ey = -Ax^2 - Dx - F$$

$$\therefore\ y = -\frac{A}{E}x^2 - \frac{D}{E}x - \frac{F}{E},\ \text{con } E \neq 0 \text{...........}(2)$$

Si hacemos $a = -\frac{A}{E}$, $b = -\frac{D}{E}$ y $c = -\frac{F}{E}$, entonces la ecuación (2) nos queda:

$$y = ax^2 + bx + c \text{....................................}(3)$$

- Esta ecuación (3) es la regla de una función cuadrática, si $a \neq 0$. La gráfica de una función cuadrática es una parábola vertical y en su análisis gráfico influyen los números a, b y c. En efecto:
  - * El signo de **a** determina la concavidad de la parábola: si a>0, la parábola es cóncava hacia arriba (∪); si a<0, la parábola es cóncava hacia abajo (∩).
  - * El cociente $\frac{-b}{2a}$ nos permite localizar la abscisa del vértice de la parábola; es decir, $x = \frac{-b}{2a}$ es la primera componente del punto más alto o más bajo de la parábola. Por supuesto, la otra componente del vértice la obtenemos reemplazando este valor de **x** en la regla de la función.
  - * El valor de **c** indica el punto donde la parábola intercepta al eje **y** (el punto (0, c) es el intercepto con el eje **y**).
  - * Los interceptos con el eje **x** son los ceros de la función y los obtenemos resolviendo la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$.

DEFINICIÓN DE FUNCIÓN CUADRÁTICA

- **La función f: R→R definida por la regla $y = f(x) = ax^2 + bx + c$; donde $a, b, c \in R$ y $a \neq 0$ se denomina FUNCIÓN CUADRÁTICA.**
- **La gráfica de una función cuadrática es una PARÁBOLA VERTICAL y los números a, b y c son claves en su dibujo.**

Ejemplo

Analicemos y dibujemos la gráfica de la función f: R→R definida por la regla: $y = f(x) = -2x^2 + 4x + 3$.

SOLUCIÓN

- Como $a = -2 < 0$, entonces la gráfica es una parábola cóncava hacia abajo.
- La abscisa del vértice de la parábola es $x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-4}{-4} = 1$. Por lo tanto, la ordenada del vértice es $f(1) = -2 + 4 + 3 = 5$.

  CONCLUSIÓN: El vértice de la parábola es el punto V(1, 5).

- La curva corta al eje y en el punto (0, 3) y al eje x en los puntos donde y = 0; es decir, donde:

$$-2x^2 + 4x + 3 = 0$$
$$\therefore\ 2x^2 - 4x - 3 = 0$$
$$\therefore\ x \approx 2.58 \text{ ó } x \approx -0.58 \quad \textbf{¡verificarlo!}$$

  Luego, los puntos (2.58, 0) y (-0.58, 0) son los interceptos con el eje x.

- Con la información anterior podemos dibujar la gráfica de la función; figura 3-11.

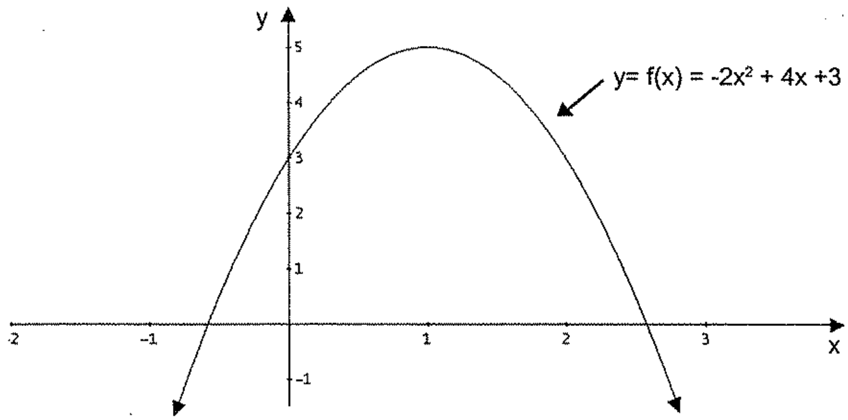
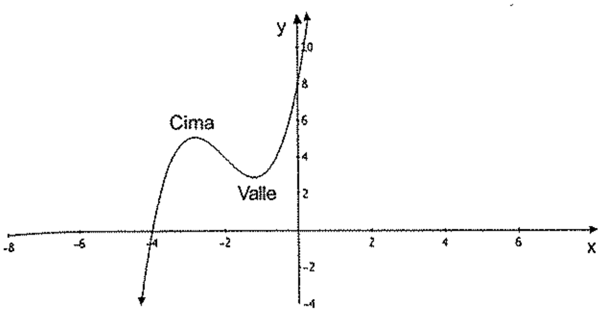


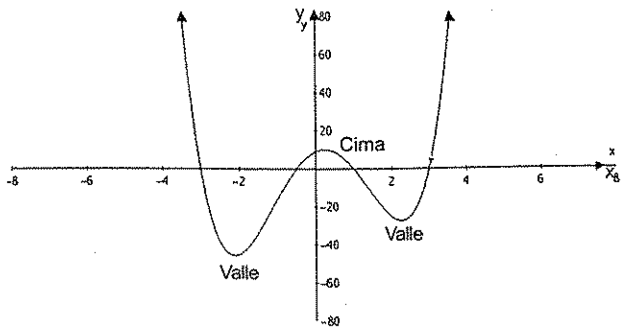
Figura 3-11

3.4.3.3 Funciones Polinómicas de Grado Mayor que 2

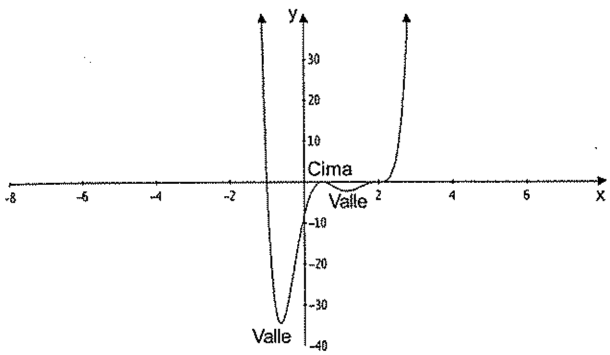
- Ya vimos en las dos secciones anteriores que la gráfica de una función polinómica de primer grado es una línea recta y la de una función polinómica de segundo grado es una parábola vertical.
- Se requieren métodos que se estudian en un curso de cálculo para hacer un análisis completo de las gráficas de funciones polinómicas de grado mayor que 2. Generalmente, a medida que el grado aumenta, la gráfica es más complicada. Sin embargo, como vemos en la figura 3-12 su apariencia siempre es la de una curva suave, sin interrupciones, sin esquinas, huecos o brechas y con algunas "cimas" y "valles" que pueden aparecer en gran cantidad si el grado es elevado.



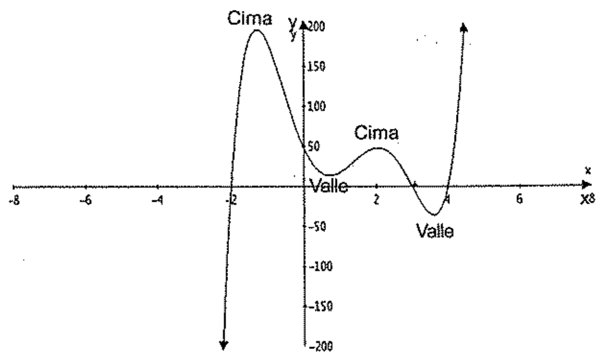
Gráfica de: $f(x) = x^3 + 6x^2 + 10x + 8$
(a)



Gráfica de: $f(x) = 2x^4 - x^3 - 19x^2 + 9x + 9$
(b)



Gráfica de: $f(x) = 4x^6 - 24x^5 + 45x^4 - 13x^3 - 42x^2 + 36x - 8$
(c)



Gráfica de: $f(x) = 3x^5 - 19x^4 + 16x^3 + 70x^2 - 100x + 48$
(d)

Figura 3-12

- Indudablemente, un elemento clave en el dibujo de la gráfica de una función polinómica lo constituye la obtención de los interceptos con los ejes; en particular, los interceptos con el eje **x**. Para obtener éstos últimos debemos resolver la ecuación polinómica correspondiente, recurriendo a los métodos ya estudiados previamente (teorema del factor y la división sintética). Por ejemplo:

  * La función $f(x) = x^3 + 6x^2 + 10x + 8 = (x + 4)(x^2 + 2x + 2)$ tiene un intercepto con el eje **x** en $x = -4$ y un intercepto con el eje **y** en $(0, 8)$ (ver figura 3-12 (a)).
  * La función $f(x) = 2x^4 - x^3 - 19x^2 + 9x + 9 = (x + 3)(2x + 1)(x - 1)(x - 3)$ tiene cuatro interceptos con el eje **x**: en $x = -3$, $x = -\frac{1}{2}$, $x = 1$ y $x = 3$, y un intercepto con el eje **y**: $(0, 9)$ (ver figura 3-12 (b)).
  * La función $f(x) = 4x^6 - 24x^5 + 45x^4 - 13x^3 - 42x^2 + 36x - 8 = (x + 1)(2x - 1)^2 (x - 2)^3$ tiene tres interceptos con el eje **x**: en $x = -1$, $x = \frac{1}{2}$ y $x = 2$, y un intercepto con el eje y: $(0, -8)$ (ver figura 3-12 (c)).
  * Finalmente, la función $f(x) = 3x^5 - 19x^4 + 16x^3 + 70x^2 - 100x + 48 = (x + 2)(x - 3)(x - 4)(3x^2 - 4x + 2)$ tiene tres interceptos con el eje x: en **x** $= -2$, $x = 3$ y $x = 4$, y tiene un intercepto con el eje **y** en $(0, 48)$ (ver figura 3-12 (d)).
  * Invitamos a cada lector a resolver las anteriores ecuaciones polinómicas con el objeto de repasar los aspectos básicos de la teoría de ecuaciones polinómicas.

- El siguiente ejemplo nos muestra cómo hallar los interceptos con el eje x de una función polinómica, usando el DERIVE.

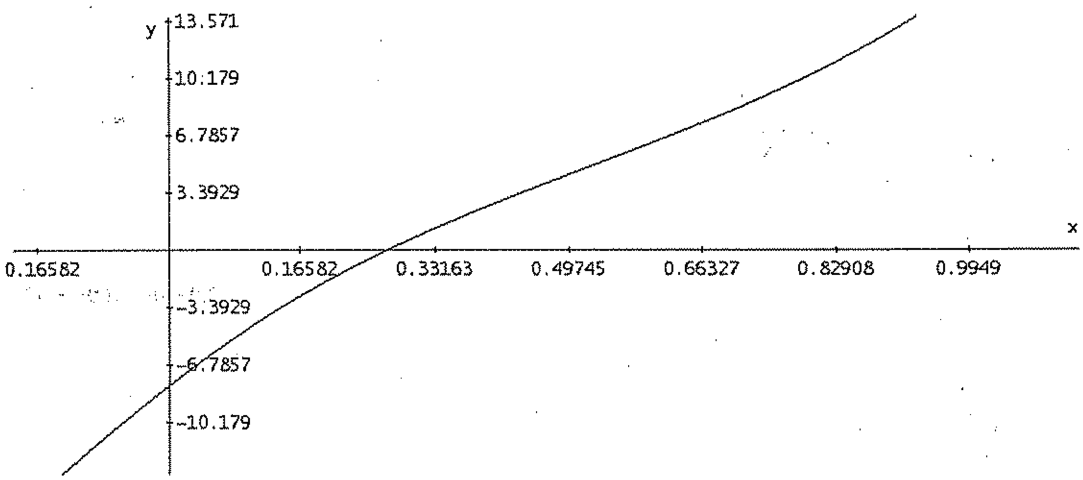
Ejemplo

Hallemos los interceptos con ele eje **x** de la función definida por $y = f(x) = 4x^6 - 24x^5 + 45x^4 - 13x^3 - 24x^2 + 36x - 8$.

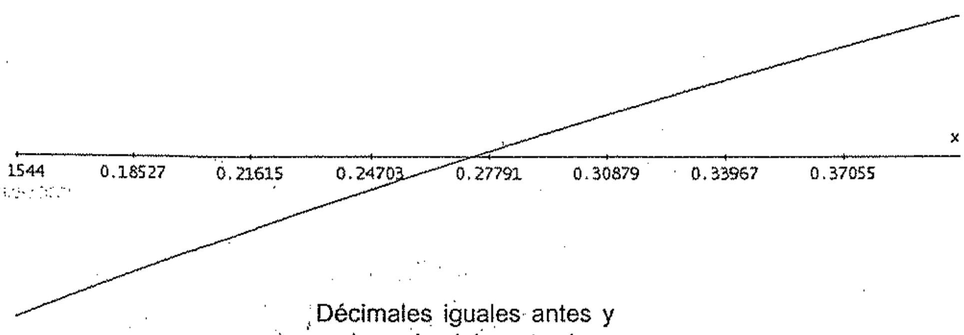
SOLUCIÓN

- Primero dibujamos la gráfica de la curva usando DERIVE, como explicamos en la unidad 2 .
- Usamos el botón que sirve para SELECCIONAR el rango y nos vamos acercando a la parte se la curva que corta el eje x; así:

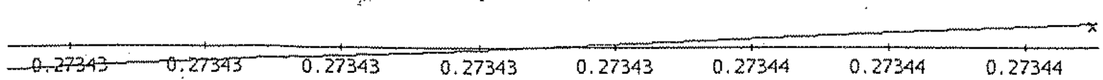
1. Hacemos click sobre el botón . De inmediato aparecerá una **+**.
2. Luego, hacemos click sostenido en un punto próximo al intercepto con el eje x que se quiere determinar.
3. Arrastramos el mouse (con el click sostenido) hasta una esquina opuesta al punto elegido en el numeral anterior y soltamos el botón del mouse. De esta manera, el Intercepto quedará ubicado dentro de un rectángulo.
4. Damos $\boxed{\text{OK}}$ o $\boxed{\text{SI}}$ como respuesta a la ventana que salga y aparecerá lo siguiente:



5. Repetimos el procedimiento anterior, tantas veces como se quiera con el fin de garantizar precisión en algunas cifras decimales. Esto se logra cuando las cifras decimales son las mismas en los números que aparecen en el eje x antes y después del punto al cual nos estamos acercando; así



Décimales iguales antes y después del punto de intersección



ATENCIÓN

Si deseamos regresar a la ventana original, antes de realizar los ZOOM´S, debemos hacer RESET y luego $\boxed{\text{sí}}$ o $\boxed{\text{OK.}}$

3.4.4 Funciones Racionales

- Observemos las funciones algebraicas cuyas reglas son las siguientes:

$$f(x) = \frac{2x^2}{x-3} \quad ; \quad f(x) = \frac{x+5}{2x-3}\ ; \quad f(x) = \frac{4x^3}{x^2-2x+6} \quad ; \quad f(x) = \frac{2x^2}{x^2-1}$$

- En cada una de ellas tenemos el cociente de dos funciones polinómicas. Por esta razón, cada una de ellas se denomina FUNCIÓN RACIONAL.

> **DEFINICIÓN DE FUNCIÓN RACIONAL**
>
> **Si p(x) y q(x) son polinomios, entonces la función real f definida por la regla:**
>
> $$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$
>
> **se denomina FUNCIÓN RACIONAL y está definida para todos los valores de x tales que $q(x) \neq 0$.**

- Para dibujar la gráfica de una función racional debemos recurrir a los análisis que realizamos en la unidad tres, cuando estudiamos el concepto de relación; es decir, debemos determinar: interceptos con los ejes, simetrías con los ejes y con el origen, dominio y rango. La figura 3-12 nos muestra la gráfica y el análisis correspondiente a la función racional $f(x) = \frac{2x^2}{x^2-1}$. Invitamos al lector a verificarlos.

1. INTERCEPTOS: (0, 0).
2. SIMETRÍAS: Con el eje y.
3. DOMINIO: R - {-1 , 1}
4. RANGO: $y \in (-\infty\ ; 0]$ y $(2\ ; +\infty)$

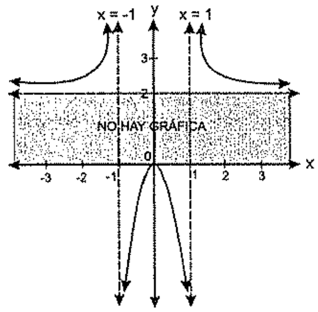
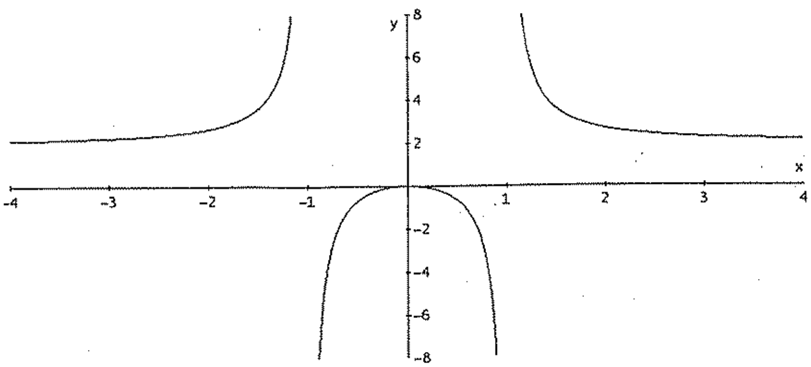


Figura 3-12

- Sí usamos DERIVE, la gráfica de esta función nos quedaría así:



3.4.5 Funciones Algebraicas

DEFINICIÓN

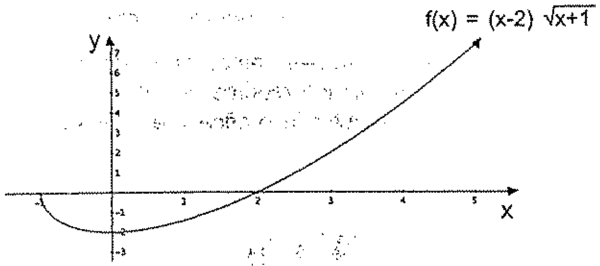
Una función f recibe el nombre de FUNCION ALGEBRAICA si puede construirse usando operaciones algebraicas (suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación) a partir de polinomios.

ATENCIÓN

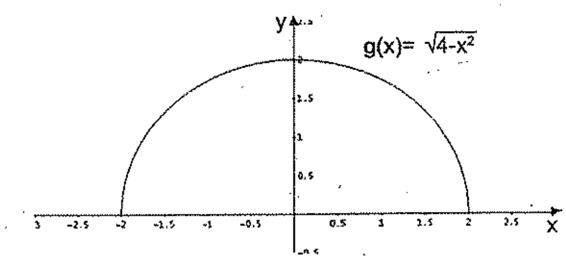
De acuerdo con esta definición, toda función potencia, toda función racional y las funciones polinómicas son funciones algebraicas.

Ejemplo

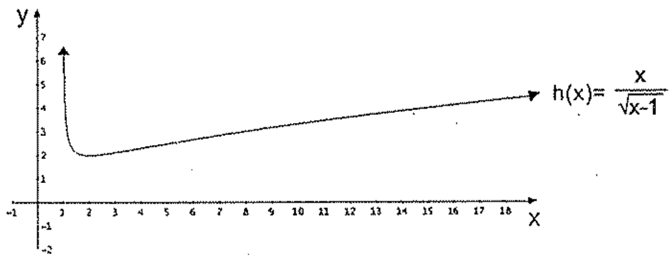
Las funciones $f(x) = (x-2)\sqrt{x+1}$, $g(x) = \sqrt{4-x^2}$ y $h(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x-1}}$ son ejemplos de funciones algebraicas. Sus gráficas se muestran en la figura 3-13(a), 3-13(b) y 3-13(c), respectivamente.



(a)



(b)



(c)

Figura 3-13

3.4.6 Funciones Trascendentes

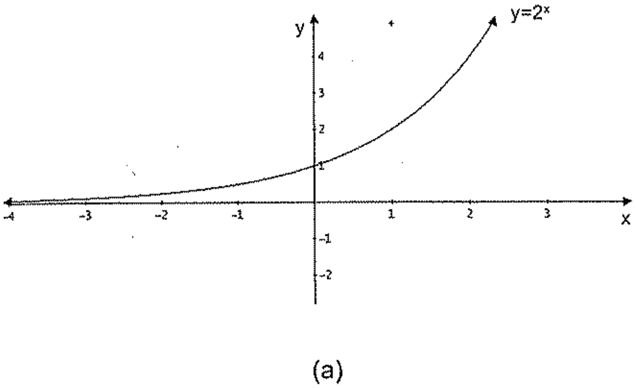
- Las funciones que no son algebraicas se denominan **TRASCENDENTES**. Incluyen la función exponencial, la función logarítmica y las funciones trigonométricas. Las funciones exponencial y logarítmica fueron estudiadas en el grado 9° y las funciones trigonométricas se desarrollarán en este curso. A continuación, haremos un breve repaso de las funciones exponencial y logarítmica.

3.4.6.1 Funciones Exponenciales

DEFINICIÓN

Las FUNCIONES EXPONENCIALES tienen la forma $f(x) = a^x$, donde la base a es un número real positivo diferente de 1.

- La figura 3-14 (a) nos muestra la gráfica de $y=2^x$ y la figura 3-14 (b) la gráfica de $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$. En ambos casos, el dominio es R y el rango es $(0; +\infty)$.



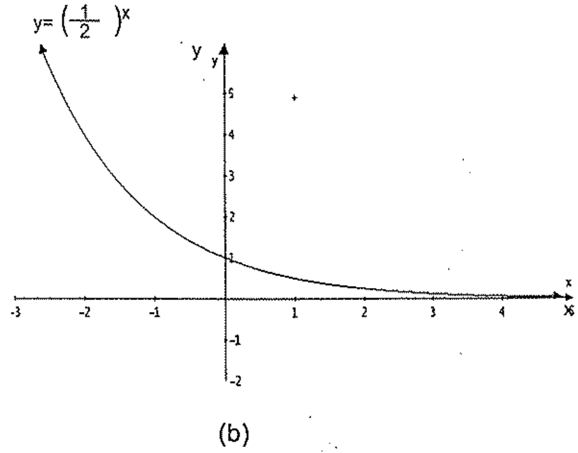


Figura 3-14

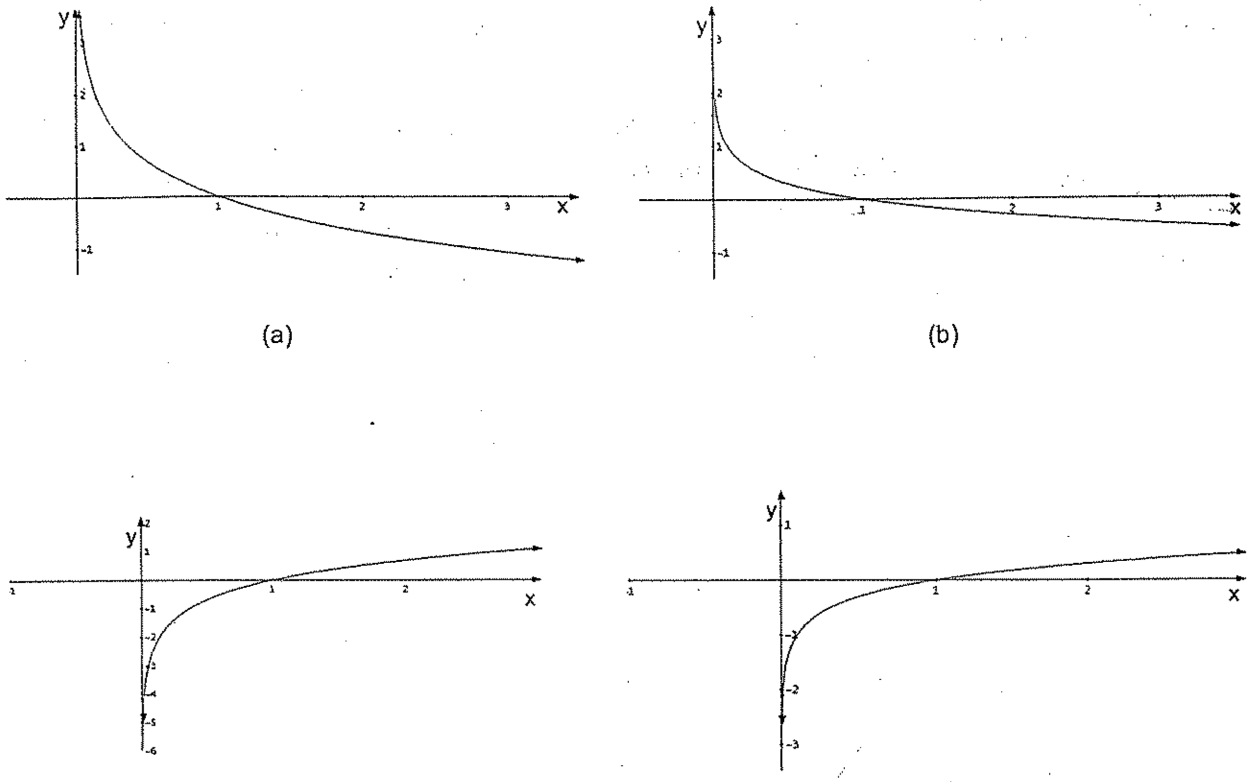
- Según estudiemos en el grado 9°, la funciones exponenciales son muy útiles para modelar fenómenos naturales como el crecimiento de una colonia de bacterias (cuando a>1) y la disminución de un material radioactivo (cuando a<1).
- En general, si **a>1** la gráfica de la función **$y=a^x$** es creciente y tiene la forma de la figura 4-14(a) y si **0<a<1** es decreciente y tiene la forma de la figura 3-14(b).
- Todas las funciones exponenciales **$y=a^x$** interceptan al eje **y** en el punto **(0,1)**.
- Entre las funciones exponenciales debemos destacar la función $y=e^x$, asociada a la solución de muchos problemas del Cálculo Diferencial e Integral.

3.4.6.2 Funciones Logarítmicas

DEFINICIÓN

Las FUNCIONES LOGARÍTMICAS tienen la forma $f(x) = \log_a(x)$, donde la base a es un número real positivo, diferente de 1.

- Si recordamos que **$\log_a(x)$** significa encontrar el exponente al que debemos elevar el número **a** para obtener **x**, es fácil entender la relación de inversas existente entre la exponenciación y la logaritmación. De la misma manera, puede afirmarse que las funciones exponencial y logarítmica son **FUNCIONES INVERSAS.**
- La figura 3-15 presenta las gráficas de cuatro funciones logarítmicas con diferentes bases. En dos de ellas la base es 0<a<1 y por eso su gráfica es decreciente; en las otras dos, la base es a>1 y sus gráficas son crecientes. Todas las funciones logarítmicas **$y=\log_a(x)$** interceptan al eje **x** en el punto **(1,0)**.
- La función logarítmica está definida para todos los valores positivos de **x**; es decir, el dominio de **$y=\log_a(x)$** es **$(0 ; \infty)$**. El rango es el conjunto **R**.



(a) (b)

(c) (d)

Figura 3-15

- Entre las funciones logarítmicas merece destacarse la función $\mathbf{f(x) = \log_e(x) = \ln(x)}$, denominada la función **LOGARITMO NATURAL.** Esta función se encuentra asociada a numerosos problemas del Cálculo Diferencial e Integral.

3.4.7 Funciones Especiales

3.4.7.1 Función Valor Absoluto

- En los grados 7° y 8° definimos el valor absoluto de un número como un operador que transforma un número negativo en su opuesto positivo, al cero lo deja igual y a los números positivos también los deja igual.
- Ahora vamos a definir una función mediante la cual a cada número real le asignamos su valor absoluto. La figura 3-16 nos muestra un diagrama sagital y la gráfica de esta función:

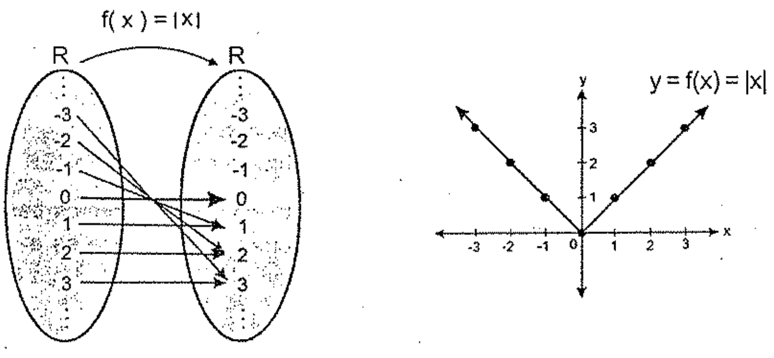


Figura 3-16

- Notemos que todo número real posee valor absoluto. Por lo tanto, el dominio de f(x) =|x| es el conjunto de los números reales. Y como el valor absoluto es siempre positivo o cero, entonces el rango de esta función son los números reales mayores o iguales que cero; es decir:

$$D_f = R$$
$$I_f = [0 ; +\infty)$$

3.4.7.2 Función Mayor Entero Contenido

- Acabamos de definir una función mediante la cual a cada número real le asignamos su valor absoluto. Vamos a definir una nueva función f mediante la cual a cada número real le hacemos corresponder el MAYOR NUMERO ENTERO QUE SEA MENOR O IGUAL que él; es decir, el MAYOR ENTERO CONTENIDO EN ese número real. Por ejemplo:

Si x = 0.5	entonces	f(0.5) = 0
Si x = 1.3	entonces	f(1.3) = 1
Si x = 3	entonces	f(3) = 3
Si x = -2.4	entonces	f(-2.4) = -3
Si x = -3.7	entonces	f(-3.7) = -4
Si x = -0.8	entonces	f(-0.8) = -1

- Esta función se denomina FUNCIÓN MAYOR ENTERO CONTENIDO EN x y se denota y = f(x) = [x] .
- Para dibujar la gráfica de esta función (figura 3-17) vamos a utilizar los siguientes valores:

Si $-4 \le x < -3$,	[x] = -4
Si $-3 \le x < -2$,	[x] = -3
Si $-2 \le x < -1$,	[x] = -2
Si $-1 \le x < 0$,	[x] = -1
Si $0 \le x < 1$,	[x] = 0
Si $1 \le x < 2$,	[x] = 1
Si $2 \le x < 3$,	[x] = 2
Si $3 \le x < 4$,	[x] = 3

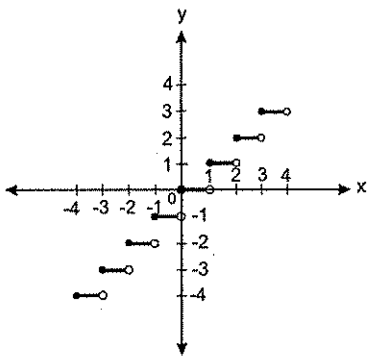


Figura 3-17

- El dominio de esta función es el conjunto de todos los números reales, ya que todo número real posee un mayor entero contenido en él y el rango es el conjunto Z de los números enteros; es decir:

$$D_f = R$$
$$I_f = Z$$

3.4.7.3 Funciones por Tramos

- Con mucha frecuencia, las gráficas de funciones se emplean para describir la variación de cantidades físicas en ciertos intervalos de tiempo. Por ejemplo, la figura 3-18 nos muestra el comportamiento de la temperatura **T** de cierta solución en diferentes instantes de tiempo **t** durante un experimento. La gráfica nos muestra que la temperatura aumenta gradualmente entre t = 0 y t = 5, se mantiene constante entre t = 5 y t = 8 y disminuye rápidamente de t = 8 a t = 9. Para analizar las variaciones de T resulta más valiosa una gráfica que una tabla de valores numéricos.

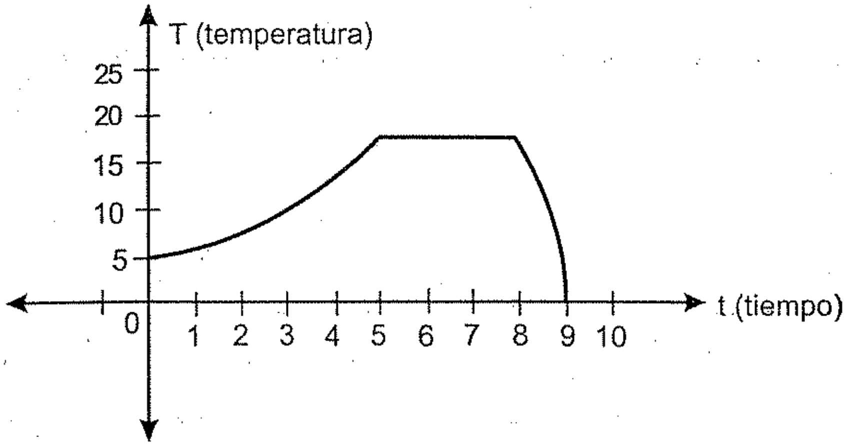


Figura 3-18

- Gráficas como la anterior, que describen el comportamiento de diversos fenómenos (movimiento de un cuerpo, estado financiero de una compañía, pulsaciones cardíacas,...) pertenecen a un tipo especial de funciones denominado FUNCIONES SEGMENTADAS o POR TRAMOS.

- En matemáticas, la regla de una función por tramos está formada por distintas expresiones, definida cada una de ellas en intervalos que son disjuntos (no tienen elementos comunes) entre sí. A través de algunos ejemplos aprenderemos a dibujar las gráficas de estas funciones.

Ejemplo 1

Dibujemos la gráfica de la función f: R→R definida por la regla:

$$f(x) = \begin{cases} -3 & \text{si } x \in (-\infty\,;-1) \\ x^2+1 & \text{si } x \in [-1\,;2) \\ 1-x & \text{si } x \in [2\,;+\infty) \end{cases}$$

Hallemos, además, el dominio y el rango.

SOLUCIÓN

- Para dibujar la gráfica de esta función debemos mirar cada intervalo y el tramo o pedazo de la función que se define allí:

 1. En el intervalo (-∞ ; -1), la función tiene un valor fijo de -3; es decir, en este intervalo tenemos una función constante. Por lo tanto, su gráfica es la semirrecta $\overrightarrow{BA}$, paralela al eje **x**.

ATENCIÓN

El extremo B no se incluye debido a que el intervalo es abierto en -1. Este detalle lo representamos en la gráfica con un "círculo vacío" ó "hueco" en el punto (-1 ; -3) de la figura 3-19.

2. En el intervalo [-1 ; 2) tenemos una función cuadrática. Su gráfica es el arco de parábola $\overset{\frown}{CD}$, incluyendo a C ("círculo lleno") pero no a D ("círculo vacío").

3. Finalmente, en el intervalo [2; +∞), la función es LINEAL. Su gráfica es la semirrecta $\overrightarrow{EF}$. Como el intervalo es cerrado en 2, entonces el punto E aparece representado con un "círculo lleno".

- La gráfica completa de la función aparece dibujada en la figura 3-19.

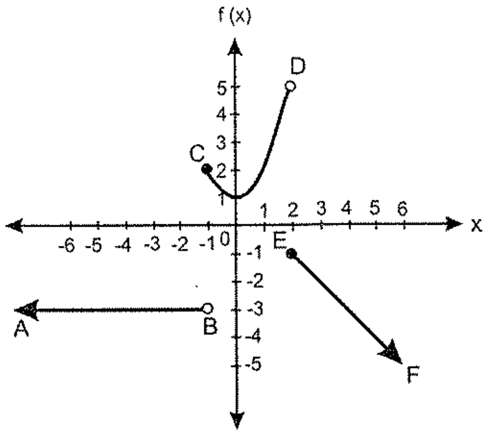


Figura 3-19

- El dominio será la unión de los intervalos donde la variable x está definida; es decir:

$$D = (-\infty ; -1) \cup [-1 ; 2) \cup [2 ; +\infty) = R.$$

El rango lo hallamos mirando la región, a lo largo del eje y (de abajo hacia arriba), donde la función está dibujada:

$$I = (-\infty ; -1] \cup [1 ; 5)$$

Ejemplo 2

Sea h: R→R una función definida por la regla:

$$h(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x \in (-\infty ; -3] \\ -5 & \text{si } x \in (-3 ; 0] \\ x^2 - 5 & \text{si } x \in (0 ; 3] \\ 4 - x & \text{si } x \in (3 ; +\infty) \end{cases}$$

Se pide:

a) Dibujar la gráfica de h.
b) Hallar el dominio y el rango.
c) Hallar h(-4), h(-1), h(2), h(6).

SOLUCIÓN

- Para graficar h debemos dibujar cada tramo; así:

1. En el intervalo (-∞ ; 3], la función es lineal. Elaboremos una tabla de valores, tengamos en cuenta que toda función lineal corresponde a una línea recta y que para dibujar ésta sólo necesitamos dos puntos (tabla 3-1(a)). El punto correspondiente al extremo x = -3 es un "círculo lleno", pues el intervalo es cerrado.

x	2x + 1
-4	-7
-3	-5

(a)

x	-5
-3	-5
0	-5

(b)

x	x^2-5
0	-5
1	-4
2	-1
3	4

(c)

x	4 - x
3	1
4	0

(d)

Tabla 3-1

2. En el intervalo (-3 ; 0], la función es constante. La gráfica es un segmento de recta paralelo al eje x, que pasa por y = -5, con un "círculo vacío" en (-3 ; -5), y otro lleno en (0 ; -5), (Tabla 3-1(b)).

ATENCIÓN

En la figura 3-19, los dos tramos aparecen conectados debido a que cuando x = -3, en ambas funciones el valor de y es el mismo: -5.

3. En el intervalo (0;3] , la función es de segundo grado. La gráfica es un arco de parábola. Los extremos de este arco de parábola son los puntos (0, -5)("círculo vacío") y (3, 4) ("círculo lleno"). De nuevo, las funciones h(x) = -5 y h(x) = x^2 - 5 aparecen conectadas ya que el punto (0, -5) coincide en ambas, (Tabla 3-1(c)).
4. Finalmente, en el intervalo (3 ; +∞) la función nuevamente es lineal. La gráfica la obtenemos asignando a x dos valores (Tabla 3-1(d)). El extremo correspondiente a x = 3 (es decir, el punto (3, 1)) es un "círculo vacío".

   En este caso, las gráficas de h(x) = x^2 - 5 y h(x) = 4 - x aparecen desconectadas, pues las imágenes correspondientes a x = 3 son diferentes en cada función.

- La gráfica se ilustra en la figura 3-19.

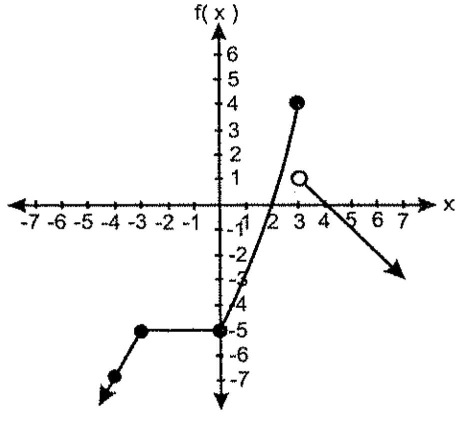


Figura 3-19

- El dominio de h es: (-∞ ; -3] ∪ (-3; 0] ∪ (0 ; 3] ∪ (3 ; +∞)= R. El rango lo obtenemos mirando la gráfica de abajo hacia arriba (a lo largo del eje **y**): I_h =(-∞ ; 4].
- Finalmente, hallemos las imágenes solicitadas:

  Como -4 ∈ (-∞ ; -3] entonces h(-4) = 2(-4) + 1 = -7
  Como -1 ∈ (-3; 0] entonces h(-1) = -5
  Como 2 ∈ (0 ; 3] entonces h(2) = 2^2 - 5 = -1
  Como 6 ∈ (3 ; +∞) entonces h(6) = 4 - 6 = -2

3.4.8 Dibujo de Funciones por Tramos con el DERIVE

- Para dibujar la gráfica de una función por tramos como la siguiente:

$$f(x)=\begin{cases} 2x+1 & \text{si } x\leq -3 \\ -5 & \text{si } -3<x\leq 0 \\ x^2-5 & \text{si } 0<x\leq 3 \\ 4-x & \text{si } x>3 \end{cases}$$

Podemos usar el comando IF o el comando CHI.

- Si usamos el comando IF, entonces la función debemos ingresarla así:

f(x): = if (x ≤ -3, 2 * x + 1, if (x ≤ 0, -5,if(x ≤ 3, x ^ 2 - 5, 4 - x)))

y luego procedemos en la misma forma que en los ejemplos anteriores.

- Si usamos el comando CHI (característico de un intervalo), debemos ingresar la función así:

f(x): = (2 * x + 1)* CHI (-inf, x, -3) + (-5) * CHI (-3, x, 0) + (x ^ 2 -5) * CHI (0, x, 3) + (4 - x) * CHI (3, x, inf)

y luego procedemos en la misma forma que en los ejemplos anteriores.

En cualquiera de los dos casos, la gráfica obtenida es la siguiente; figura 3-20:

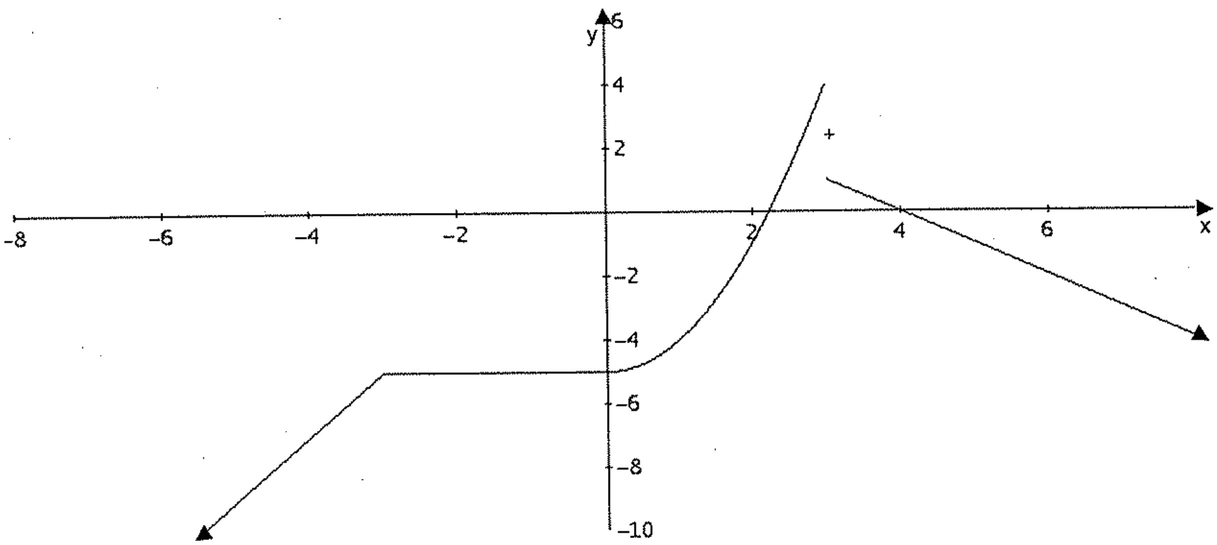


Figura 3-20

EJERCICIO 3.2

En los ejercicios 1 a 11 clasificar cada función en algebraica, trascendente o especial.

1. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5$
2. $f(x)=\dfrac{2x^2}{x^3+1}$
3. $f(x) = e^x$
4. $f(x)=\sqrt{x+3}$
5. $f(x) = -3$
6. $f(x)=\begin{cases} 2x+1 & \text{sí} \quad x<-2 \\ 3 & \text{sí} \quad x=-2 \\ x^2-3 & \text{sí} \quad x>-2 \end{cases}$

7. $f(x) = |2x - 3|$

8. $f(x) = \sqrt{2} - \frac{4}{5}x$

9. $f(x) = -\frac{3}{x}$

10. $f(x) = \frac{\sqrt{2x+3}}{x-1}$

11. $f(x) = 2^{x^2}$

En los ejercicios 12 a 15 hallar los interceptos con los ejes de cada una de las funciones polinómicas dadas. Luego, utilice el DERIVE para dibujar su gráfica.

12. $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

13. $f(x) = 3x^3 - 4x^2 - 5x + 2$

14. $f(x) = x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 8x$

15. $f(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$

En los ejercicios 16 a 27 dibuja a mano y con DERIVE la gráfica dada y halla el dominio y el rango de cada una.

16. $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < -2 \\ 4x - 5 & \text{si } -2 \le x < 4 \\ 4x - 5 & \text{si } x \ge 4 \end{cases}$

17. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & \text{si } x < -3 \\ 4 & \text{si } -3 \le x < 0 \\ 2x - 5 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

18. $f(x) = \begin{cases} -3 & \text{si } x \le -2 \\ 2 & \text{si } -2 < x < 3 \\ 5 & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$

19. $f(x) = \begin{cases} 4 - x & \text{si } x < -2 \\ x^2 + 2 & \text{si } -2 \le x < 2 \\ 6 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$

20. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 2 \\ 6 & \text{si } 2 \le x < 5 \\ 2x - 3 & \text{si } x \ge 5 \end{cases}$

21. $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x \le 0 \\ x - 2 & \text{si } 0 < x < 2 \\ x^2 - 2 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$

22. $f(x) = |x| + |x - 1|$

23. $f(x) = \begin{cases} -4x - 5 & \text{si } x \le -2 \\ \frac{2x+1}{x+1} & \text{si } -2<x<-1 \text{ ó } -1<x<1 \\ [x] & \text{si } 1 \le x < 4 \\ -3x+15 & \text{si } x \ge 4 \end{cases}$

24. $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x \le -3 \\ x^2-3 & \text{si } -3<x<2 \\ \log_2 x & \text{si } 2 \le x \le 8 \\ x-5 & \text{si } x > 8 \end{cases}$

25. $f(x) = \begin{cases} 2^{x+3} & \text{si } x \le -1 \\ x^2+3 & \text{si } 1<x<2 \\ 9-x & \text{si } 2 \le x < 7 \\ 2 & \text{si } x \ge 7 \end{cases}$

26. $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x \le -3 \\ x^2-3 & \text{si } -3 < x < 2 \\ [x-1] & \text{si } 2 \le x \le 8 \\ x-1 & \text{si } x > 8 \end{cases}$

27. $f(x) = \begin{cases} -2x-6 & \text{si } x \le -6 \\ x & \text{si } -6 < x \le -2 \\ 9-x & \text{si } 2 \le x < 7 \\ 2 & \text{si } x \ge 7 \end{cases}$

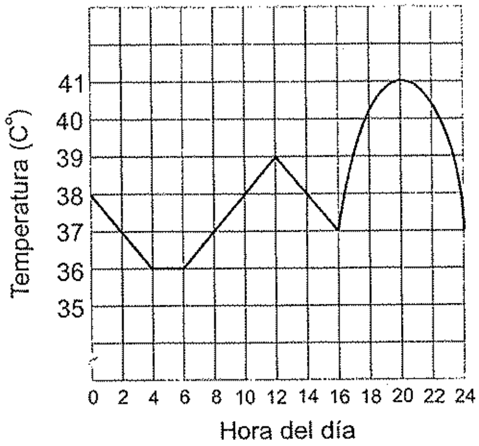
28. Una obra de arte antigua fue comprada en 1922 por \$ 200.000 y su valor se ha duplicado cada diez años desde su compra. Se pide:

a) Hallar f(t), sabiendo que f(t) es el valor de la obra de arte t años después de su compra.
b) Determinar el valor de la obra de arte en 1982

29. Se sabe que la longitud L del cabello aumenta aproximadamente 2cm por cada dos meses. Una chica se corta el cabello y justo después del corte este mide 20cm., y a partir de ese día decide cortarse el cabello 4cm. cada dos meses:

a) Haga un dibujo que muestre la longitud del cabello (cm) en función del tiempo (meses) durante el transcurso de los 10 meses siguientes.
b) Usando la gráfica, determine en cuál mes el cabello de la chica mide aproximadamente 15cm.

30 En una unidad de cuidados intensivos (UCI) hay un aparato que registra permanentemente, en forma de gráfica, la temperatura del enfermo. Cierto día se hizo este registro:



a) ¿Con qué temperatura regresó a la UCI?¿Cuál fue la máxima temperatura de este enfermo y a qué horas se presentó?
b) ¿A qué hora la temperatura superó los 40°? ¿Cuándo volvió la temperatura a ser 37°?
c) Con la información que da el gráfico, escriba una regla para esta función.

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (7)

Una caja rectangular de base cuadrada se construye de tal manera que el área de sus seis caras es de 18m². Si llamamos x la medida del lado de la base, se pide:

1. **Hacer una interpretación gráfica del problema.**
2. **Escribir una ecuación, en términos de x, que permita calcular el volumen de la caja.**
3. **¿De qué grado es la ecuación obtenida en términos de x?**
4. **¿Para cuáles valores de x, el volumen es positivo?**

3.5 TRANSFORMACIONES DE FUNCIONES

- En la sección anterior estudiamos las gráficas de las formas más simples de algunas funciones como éstas:

$$y= f(x) = x^2 \ ; \ y= f(x) =\sqrt{x} \ ; \ f(x) = 2^x$$

- Ahora veremos cómo obtener las gráficas de **$y=f(x) \pm a$, $y=f(x \pm a)$, $y= a\,f(x)$** y **$y=f(ax)$,** siendo **a** un número real positivo.

3.5.1 Desplazamientos Verticales

Experiencia

- Utilicemos el DERIVE o una hoja de papel cuadriculado para dibujar las gráficas de las funciones cuyas ecuaciones son:

a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = x^2 + 1$ c) $f(x) = x^2 - 2$

- Comparemos las gráficas obtenidas con las siguientes, figura 4-21.

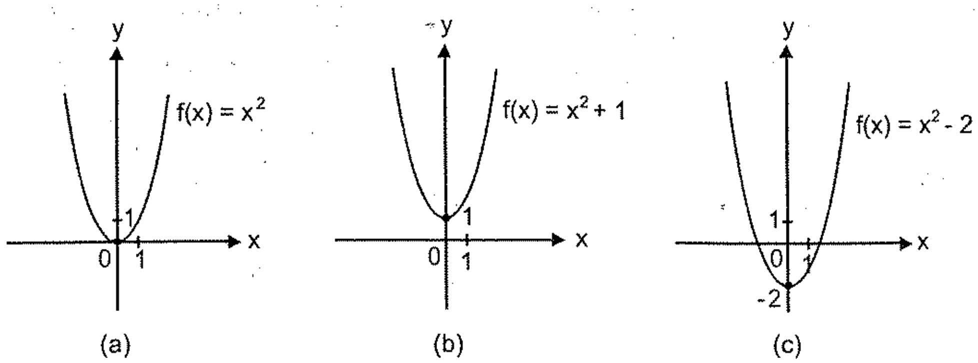


Figura 3-21

- Esta experiencia nos permite afirmar lo siguiente: si a **y=f(x)** le sumamos un número positivo **a**, entonces la gráfica de **y=f(x) + a** es la misma de **y=f(x)** pero desplazada hacia arriba **a** unidades. Si, en cambio, a **y=f(x)** le restamos el número positivo **a**, entonces la gráfica de **y= f(x) - a** es la misma de **y=f(x)** pero desplazada hacia abajo **a** unidades.
- En la práctica, si una pareja ordenada de **y = f(x)** es, por ejemplo, (-3, 4), entonces una pareja ordenada de **y = f(x) + 3** será (-3, 7); es decir, para obtener las parejas ordenadas de **y = f(x) + 3**, debemos sumar 3 a las segundas componentes de las parejas ordenadas de **y = f(x).**

3.5.2 Desplazamientos Horizontales

Experiencia

- Ahora utilicemos el DERIVE o una hoja de papel cuadriculado para dibujar las gráficas de las funciones cuyas ecuaciones son:

  a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = (x + 1)^2$ c) $f(x) = (x - 2)^2$

- Comparemos las gráficas obtenidas con las siguientes; figura 3-22:

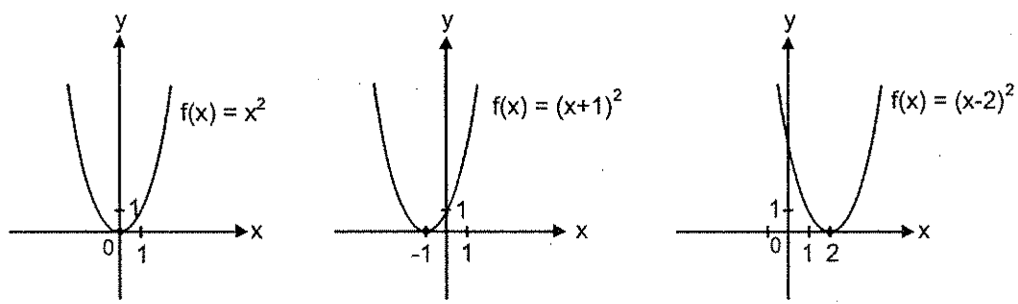


Figura 3-22

- Contestemos: ¿Qué efecto produce en la gráfica de $y=x^2$ sumar 1 unidad a x? ¿Y restar 2 unidades a x?
- Esta experiencia nos permite afirmar lo siguiente: si **a** es un número positivo, entonces la gráfica de **y=f(x-a)** es la misma de **y=f(x)** pero desplazada hacia la derecha **a** unidades y la gráfica de **y= f(x+a)** es la misma de **y=f(x)** pero desplazada hacia la izquierda **a** unidades.
- En la práctica, si una pareja ordenada de **y = f(x)** es, por ejemplo (-2, 4), entonces una pareja ordenada de **y = f(x+3)** será (-5, 4); es decir, para obtener las parejas ordenadas de **y = f(x+3)**, debemos restar 3 a las primeras componentes de las parejas ordenadas de **y = f(x).**

DESPLAZAMIENTOS VERTICALES

- Supongamos que **a** es un número positivo. Si queremos obtener la gráfica de:
  1. y= f(x)+**a**, entonces desplazamos la gráfica de y=f(x) una distancia de **a** unidades hacia arriba.
  2. y= f(x)-**a**, entonces desplazamos la gráfica de y=f(x) una distancia de **a** unidades hacia abajo.
- En la práctica, si una pareja ordenada de y=f(x) es (x_1, y_1), entonces una pareja ordenada de y=f(x)+a será (x_1, y_1+a) y una pareja ordenada de y=f(x)-a será (x_1, y_1-a).

DESPLAZAMIENTOS HORIZONTALES

- Supongamos que **a** es un número positivo. Si queremos obtener la gráfica de:
  1. y= f(x+**a**), entonces desplazamos la gráfica de y=f(x) una distancia de **a** unidades hacia la izquierda.
  2. y= f(x-**a**), entonces desplazamos la gráfica de y=f(x) una distancia de **a** unidades hacia la derecha.
- En la práctica, si una pareja ordenada de y=f(x) es (x_1, y_1), entonces una pareja ordenada de y=f(x+a) será $(x_1 - a , y_1)$ y una pareja ordenada de y=f(x-a) será $(x_1 + a , y_1)$.

3.5.3 Dilataciones y Contracciones Verticales

Primera experiencia

- Dibujemos, usando el DERIVE o en papel cuadriculado, en el mismo plano cartesiano, las gráficas de las siguientes funciones:

$$y= 4x - x^2 \quad ; \quad y= 2(4x - x^2) \quad ; \quad y=\frac{1}{2}(4x - x^2)$$

- Compara tus gráficas con las siguientes:

x	$4x - x^2$	$2(4x - x^2)$	$\frac{1}{2}(4x - x^2)$
0	0	0	0
0.5	1.75	3.5	0.875
1	3	6	1.5
1.5	3.75	7.5	1.875
2	4	8	2
2.5	3.75	7.5	1.875
3	3	6	1.5
3.5	1.75	3.5	0.875
4	0	0	0

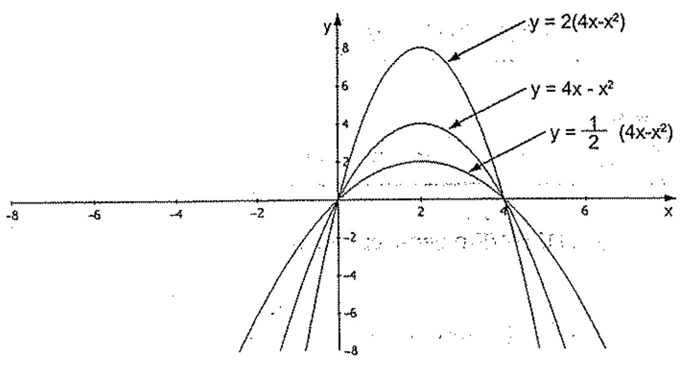


Figura 3-23

* ¿Qué efecto producen en la gráfica de $y= 4x-x^2$ los factores 2 y $\frac{1}{2}$?

Segunda experiencia

- Repite el proceso anterior dibujando, en el mismo plano cartesiano, las gráficas de las funciones:

$$y = 4x - x^2 \quad ; \quad y = -2(4x - x^2) \quad ; \quad y = -\frac{1}{2}(4x - x^2)$$

- Compara tus gráficas con las siguientes; figura 3-24:

x	$4x - x^2$	$-2(4x - x^2)$	$-\frac{1}{2}(4x - x^2)$
0	0	0	0
0.5	1.75	-3.5	-0.875
1	3	-6	-1.5
1.5	3.75	-7.5	-1.875
2	4	-8	-2
2.5	3.75	-7.5	-1.875
3	3	-6	-1.5
3.5	1.75	-3.5	-0.875
4	0	0	0

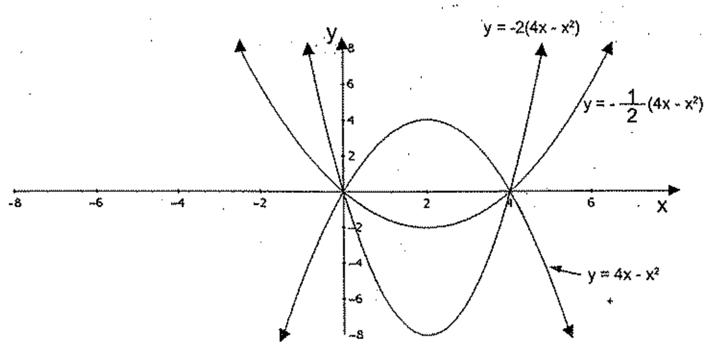


Figura 3-24

* ¿Qué efecto producen en la gráfica de $y= 4x-x^2$ los factores -2 y $-\frac{1}{2}$?

- La realización de estas dos experiencias nos permite afirmar que:
  - * Si **a>1** entonces para dibujar la gráfica de **y=af(x) alargamos o dilatamos verticalmente, a** veces, la gráfica de **y= f(x).**
  - * Si **0<a<1** entonces para dibujar la gráfica de **y= af(x) reducimos o contraemos verticalmente, a** veces, la gráfica de **y= f(x).**
  - * Si **a es un número negativo,** entonces para dibujar la gráfica de **y= af(x)** realizamos sobre la función **y=f(x),** las mismas dilataciones o contracciones descritas anteriormente pero, adicionalmente, la gráfica se refleja con respecto al eje x; es deir, las gráficas de **y=af(x)** y **y=-af(x)** son simétricas con respecto al eje x.
- En la práctica, si una pareja ordenada de **y= f(x)** es, por ejemplo, (4, -3), entonces una pareja ordenada de **y = -2 f(x)** será (4,6); es decir, para obtener las parejas ordenadas de **y= -2f(x)** debemos multiplicar por -2 las segundas componentes de las parejas ordenadas de **y=f(x).**

3.5.4 Dilataciones y Contracciones Horizontales

Primera experiencia

- Utiliza el DERIVE o papel cuadriculado para dibujar, en el mismo plano cartesiano, las gráficas de las funciones:

  a) $y= |x|$; b) $y = |2x|$

- Compara las gráficas dibujadas con las siguientes:

x	$\|x\|$
-4	4
-3	3
-2	2
-1	1
0	0
1	1
2	2
3	3
4	4

x	$\|2x\|$
-2	4
-1	2
0	0
1	2
2	4

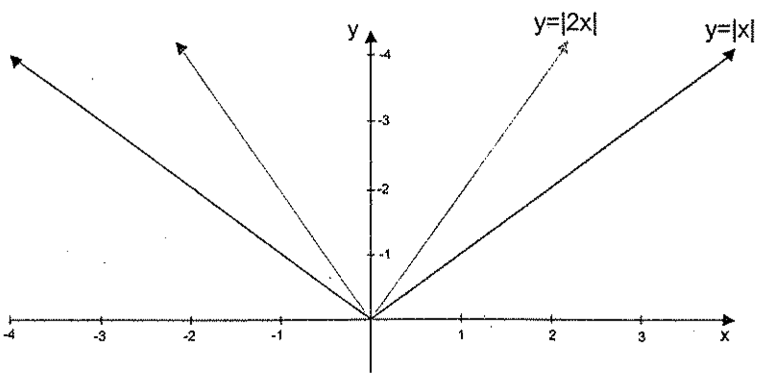


Figura 3-25

- ¿Qué efecto se produce en la gráfica de y= |x| cuando multiplicamos su argumento o variable independiente por 2? ¿Se dilata o se contrae?
- Si observamos con cuidado las dos tablas de valores encontramos que la gráfica de y= |2x| alcanza las mismas imágenes que y= |x| cuando los valores de la variable independiente de ésta los dividimos por 2. En efecto:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Si } x=-4 & \text{entonces } |x| = |-4| = 4 \\ \text{Si } x=-2 & \text{entonces } |2x| = |-4| = 4 \end{array}\right\} (-2) = (-4) \div 2$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Si } x=2 & \text{entonces } |x| = |2| = 2 \\ \text{Si } x=1 & \text{entonces } |2x| = |2| = 2 \end{array}\right\} (1) = (2) \div 2$$

Segunda experiencia

- Ahora dibuja, en un mismo plano cartesiano, las gráficas de las funciones:

a) $y= |x|$; b) $y = \left|\frac{1}{2}x\right|$

- Compara las gráficas dibujadas con las siguientes; figura 3-26:

x	|x|
-4	4
-2	2
0	0
2	2
4	4

x	$\left\|\frac{1}{2}x\right\|$
-8	4
-4	2
-2	1
0	0
2	1
4	2
8	4

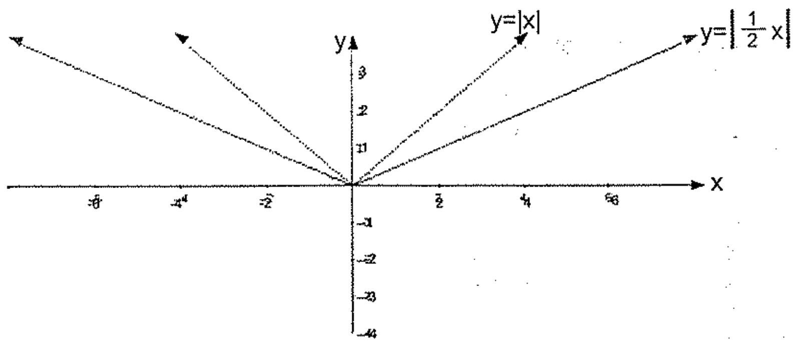


Figura 3-26

- ¿Qué efecto se produce en la gráfica de y= |x| cuando multiplicamos su argumento o variable independiente por $\frac{1}{2}$? ¿Se dilata o se contrae?
- Si observamos con cuidado las dos tablas de valores encontramos que la gráfica de $y = \left|\frac{1}{2}x\right|$ alcanza las mismas imágenes que y= |x| cuando el valor de la variable independiente de ésta lo multiplicamos por 2. En efecto:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Si } x=-4 & \text{entonces } |x| = |-4| = 4 \\ \text{Si } x=-8 & \text{entonces } \left|\frac{1}{2}x\right| = |-4| = 4 \end{array}\right\} -8 = -4 \times 2$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Si } x=4 & \text{entonces } |x| = |-4| = 4 \\ \text{Si } x=8 & \text{entonces } \left|\frac{1}{2}x\right| = |4| = 4 \end{array}\right\} 8 = 4 \times 2$$

- Podemos generalizar las observaciones realizadas a partir de las dos experiencias anteriores, afirmando lo siguiente:
  - * Si **a>1,** entonces para dibujar la gráfica de **y= f(ax)** se **encoge o comprime** horizontalmente, **a** veces, la gráfica de **y= f(x).**
    En la práctica, para que la gráfica de **y=f(ax)** tenga las mismas imágenes que la gráfica de **y= f(x)** debemos dividir las primeras componentes de estas por **a.** Por ejemplo, si una pareja ordenada de **y=f(x)** es (-4,4), entonces una pareja ordenada de **y= f(2x)** será (-2, 4).
  - * Si **0<a<1,** entonces para dibujar la gráfica de **y= f(ax)** se **alarga o dilata** horizontalmente $\frac{1}{a}$ **veces,** la gráfica de **y= f(x)**. En la práctica, para que la gráfica de **y= f(ax)** tenga las mismas imágenes que la gráfica

de **y= f(x)** debemos multiplicar las primeras componentes de ésta por $\frac{1}{a}$ (o dividirlas por **a**). Por ejemplo, si una pareja ordenada de **y=f(x)** es (5, -3), entonces una pareja ordenada de **y= f** $\left(\frac{1}{3}x\right)$ será $\left(\frac{5}{\frac{1}{3}}, -3\right)$ = (15,-3).

* Cuando el factor **a** es negativo, entonces para dibujar la gráfica de **y=f(ax)** realizamos, sobre la gráfica de la función **y=f(x)**, las mismas contracciones o dilataciones descritas anteriormente, pero adicionalmente debemos reflejar la gráfica con respecto al eje y; es decir, la gráfica de **y=f(-ax)** es la simétrica con respecto al eje y, de la gráfica de **y=f(ax)**.

Ejemplo

- Utiliza el DERIVE o una hoja de papel cuadriculado para dibujar, en un mismo plano cartesiano, las gráficas de las funciones:

a) $y= 2^x$; b) $y = 2^{-x}$

- Compara las gráficas dibujadas con las siguientes:

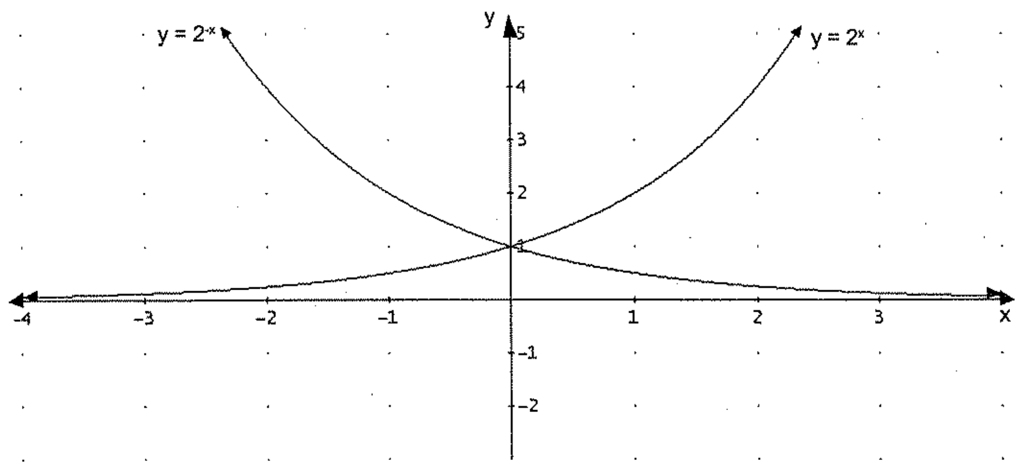


Figura 3-27

- Como vemos, la gráfica de $y=2^{-x}$ es la simétrica, con el eje **y**, de la gráfica de $y= 2^x$.
- En general, la gráfica de y=f(-x) es la simétrica, con respecto al eje **y** de la gráfica de y= f(x).

RESUMEN

1. DESPLAZAMIENTOS VERTICALES Y HORIZONTALES

Supongamos que **a > 0**. Si queremos obtener la gráfica de:

a) **y= f(x)+a**, entonces desplazamos la gráfica de **y=f(x)** una distancia de **a** unidades hacia arriba.
b) **y= f(x)-a**, entonces desplazamos la gráfica de **y=f(x)** una distancia de **a** unidades hacia abajo.
c) **y=f(x-a)**, entonces desplazamos la gráfica de **y=f(x)** una distancia de **a** unidades hacia la derecha.
d) **y=f(x+a)**, entonces desplazamos la gráfica de **y=f(x)** una distancia de **a** unidades hacia la izquierda.

2. **DILATACIONES Y CONTRACCIONES**

a) Si **a > 1** entonces para dibujar la gráfica de **y= af(x)** alargamos o dilatamos verticalmente, **a veces**, la gráfica de **y= f(x).**

b) Si **0 < a < 1**, entonces para dibujar la gráfica de **y= af(x)** reducimos o contraemos verticalmente, **a veces**, la gráfica de **y=f(x).**

c) Si **a > 1**, entonces para dibujar la gráfica de **y= (ax)** reducimos o contraemos horizontalmente, **a veces,** la gráfica de **y=f(x).**

d) Si **0<a<1,** entonces para dibujar la gráfica de **y=f(ax)** alargamos o dilatamos horizontalmente, $\frac{1}{a}$ **veces,** la gráfica de **y=f(x).**

3. **REFLEXIONES O SIMETRÍAS**

a) La gráfica de **y= - f(x)** es la simétrica con respecto al eje x de la gráfica de la función **y= f(x).**

b) La gráfica de **y= f(-x)** es la simétrica con respecto al eje y de la gráfica de la función **y= f(x).**

ATENCIÓN

- Para dibujar la gráfica de **y = af(bx+c)+d** a partir de la gráfica de **y = f(x)** debemos tener en cuenta el siguiente orden para trabajar:

PASO 1: Desplazamos horizontalmente la gráfica de **y = f(x)**, **c unidades** hacia la derecha o hacia la izquierda, dependiendo de si c es negativo o positivo; es decir, realizamos la transformación **y=f(x+c).**

PASO 2: Alargamos o comprimimos horizontalmente la gráfica de **y = f(x+c), b veces**; es decir, realizamos la transformación **y= f(bx+c)**. Si, además, **b** es negativo, debemos dibujar la simétrica de esta última función respecto al eje **y.**

PASO 3: Alargamos o comprimimos verticalmente la gráfica de **y = f(bx+c), a veces**; es decir, realizamos la transformación **y= af(bx+c).** Si, además, **a** es negativo debemos dibujar su simétrica con respecto al eje **x.**

PASO 4: Finalmente, desplazamos verticalmente la gráfica de **y = af(bx+c), d unidades** hacia arriba o hacia abajo dependiendo de si **d** es positivo o negativo; es decir, realizamos la transformación **y= af(bx+c)+d.**

- La regla de la función **y= a f(bx +c) + d** también puede escribirse así: $y = a\,f\left[b\left(x+\frac{c}{d}\right)\right]+d$. En este caso, el orden de trabajo es el siguiente:

PASO 1: Alargamos o comprimimos horizontalmente la gráfica de **y = f(x), b veces;** es decir, realizamos la transformación **y=f(bx).** Si además **b** es negativo debemos dibujar su simétrica con respecto al eje **y.**

PASO 2: Desplazamos horizontalmente la gráfica de **y = f(bx),** $\frac{c}{b}$ unidades hacia la derecha o hacia la izquierda, dependiendo de si $\frac{c}{b}$ es negativo o positivo; es decir, realizamos la transformación $y = f\left[b\left(x+\frac{c}{b}\right)\right]$

PASO 3: El mismo PASO 3 anterior sobre la gráfica de $y = f\left[b\left(x+\frac{c}{b}\right)\right]$

PASO 4: El mismo PASO 4 anterior sobre la gráfica de $y = af\left[b\left(x+\frac{c}{b}\right)\right]$

Ejemplo 1

Partiendo de la gráfica de $y = \sqrt{x}$, utilicemos las transformaciones para graficar $y = \sqrt{x} - 3$, $y = \sqrt{x-3}$, $y = -\sqrt{x}$ y $y = 3\sqrt{x}$.

SOLUCIÓN

- En la figura 3-28 (a) hemos dibujado la gráfica de $y = \sqrt{x}$. Para dibujar la gráfica de $y = \sqrt{x} - 3$ desplazamos 3 unidades hacia abajo, la gráfica de $y = \sqrt{x}$, figura 3-28(b).

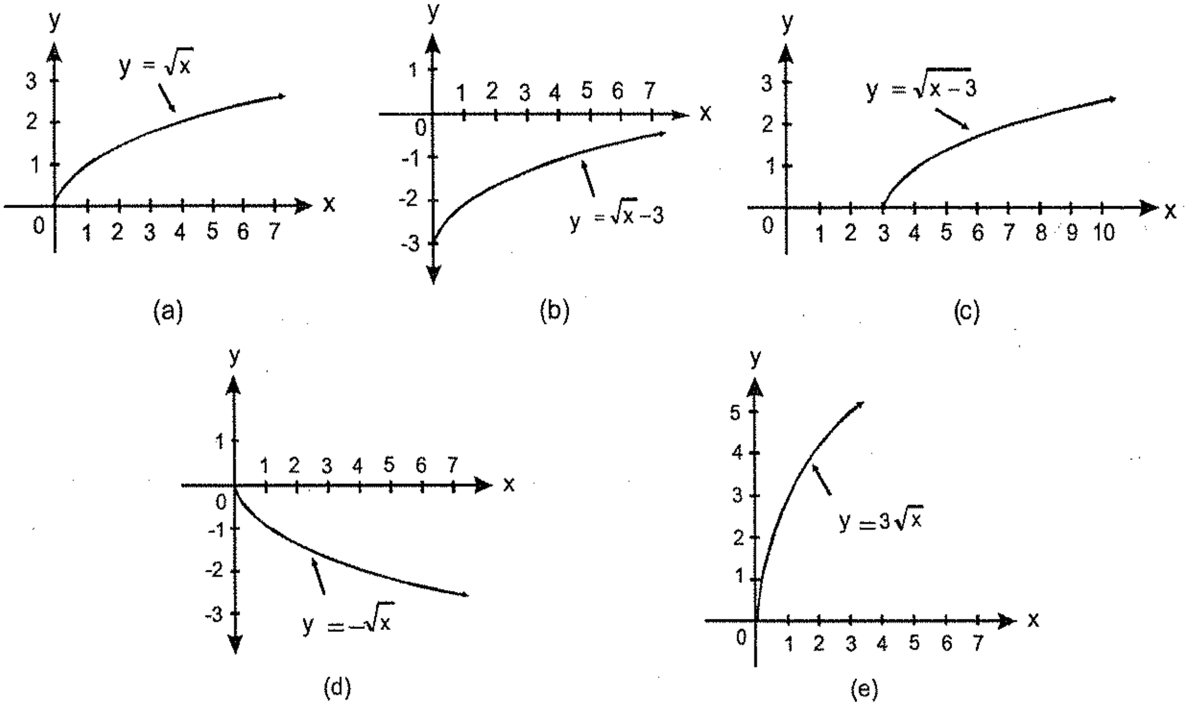


Figura 3-28

- La gráfica de $y = \sqrt{x-3}$ la obtenemos desplazando, 3 unidades hacia la derecha, la gráfica de $y = \sqrt{x}$, figura 3-28(c). Para dibujar la gráfica de $y = -\sqrt{x}$ basta dibujar la simétrica con respecto al eje x de $y = \sqrt{x}$, figura 3-28(d). Finalmente, para dibujar la gráfica de $y = 3\sqrt{x}$, alargamos verticalmente 3 veces la gráfica de $y = \sqrt{x}$, figura 4-28(e).

Ejemplo 2

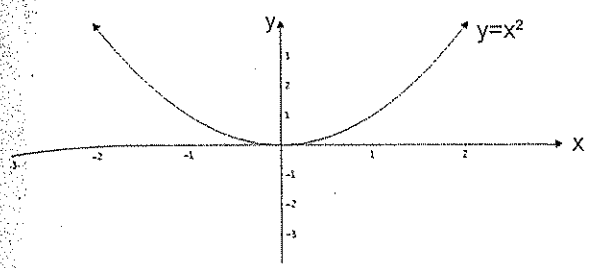
Utilizando transformaciones, dibujemos la gráfica de la función $y=-2x^2 + 4x + 1$.

SOLUCIÓN

- En primer lugar, si completamos al trinomio cuadrado perfecto, entonces la regla de la función nos queda así:

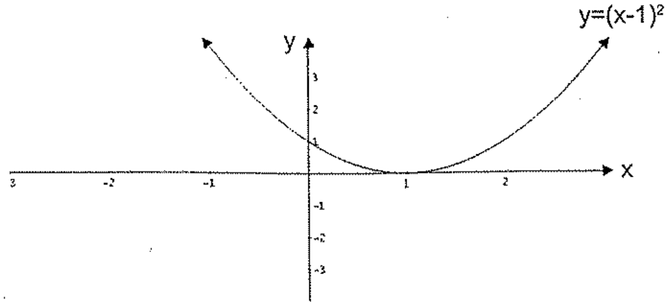
$$y=-2x^2 + 4x + 1 = -2(x-1)^2 + 3 \text{ ¡Comprobarlo!}$$

- Esto significa que podemos dibujar la gráfica de $y = -2x^2 + 4x - 1$, dibujando la gráfica de $y = -2(x-1)^2 + 3$. Con este fin, primero dibujamos la gráfica de $y = x^2$, figura 3-29 (a); luego, dibujamos $y = (x-1)^2$ desplazando la gráfica de $y = x^2$, 1 unidad a la derecha, figura 3-29 (b).



Partimos de la gráfica de la función $y=x^2$

(a)

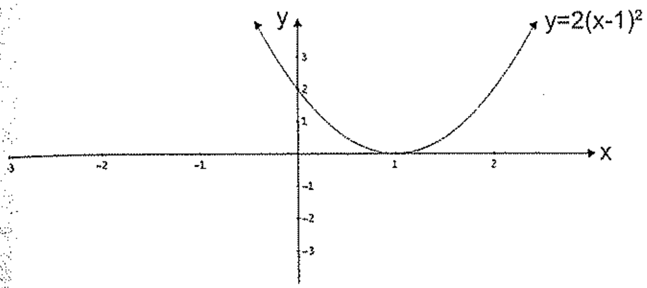


Traslademos hacia la derecha 1 unidad y obtenemos la función $y=(x-1)^2$

(b)

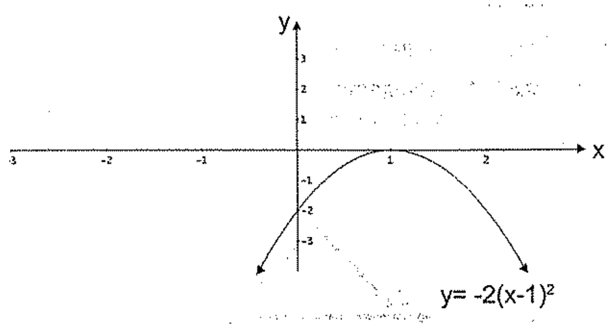
Figura 3-29

- Luego, dilatamos verticalmente la curva de $y = (x - 1)^2$ al multiplicarla por el factor 2, para obtener $y= 2(x-1)^2$, figura 3-29 (c). Al multiplicar la función por (-1) lo que hacemos es dibujar la simétrica con el eje x de la curva anterior y nos queda la curva de ecuación $y= -2(x-1)^2$, figura 3-29 (d).



Dilatamos verticalmente la parábola al multiplicar a $y=(x-1)$ por el factor 2. Así obtenemos: $y=2(x-1)^2$

(c)

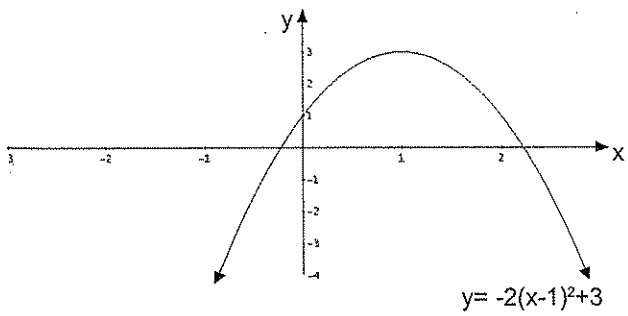


Por simetría respecto del eje x, obtenemos: $y= -2(x-1)^2$

(d)

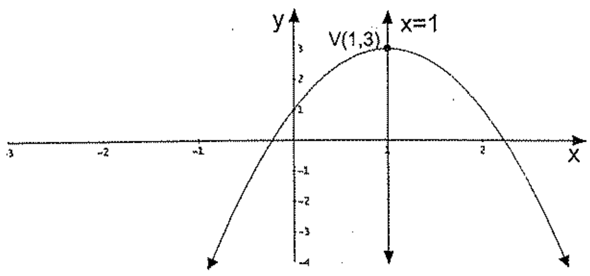
Figura 3-29

Finalmente, al sumar 3 a la función anterior lo que hacemos es desplazar 3 unidades verticalmente hacia arriba la gráfica de la figura 3-29 (d) y nos queda $y= -2(x-1)^2 +3$, figura 3-29 (e). Esta curva es una parábola con vértice en el punto V (1,3) y eje de simetría la recta x = 1, figura 3-29 (f).



Trasladamos verticalmente hacia arriba 3 unidades y obtenemos $y=-2(x-1)-3$

(e)



La parábola dada tiene su vértice en V(1,3) y el eje de simetría es la recta x=1.

(f)

Figura 3-29

La gráfica de una función f definida por y = f(x) es la siguiente, figura 3-30:

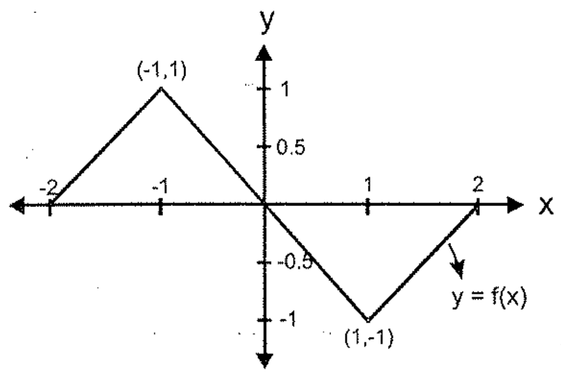


Figura 3-30

Dibujemos la gráfica de $y = f\left(\frac{1}{2}x+1\right)$

SOLUCIÓN

- El orden en que debemos dibujar la gráfica es el siguiente:

  PASO 1: Dibujamos y= f(x+1) ; es decir, trasladamos horizontalmente 1 unidad hacia la izquierda, la gráfica de y = f(x). Esto significa que restamos 1 unidad a la abscisa de cada pareja ordenada de y = f(x); figura 3-31(b):

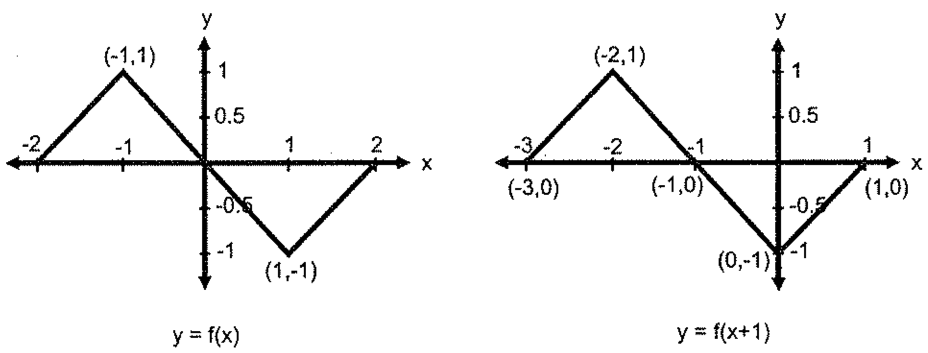
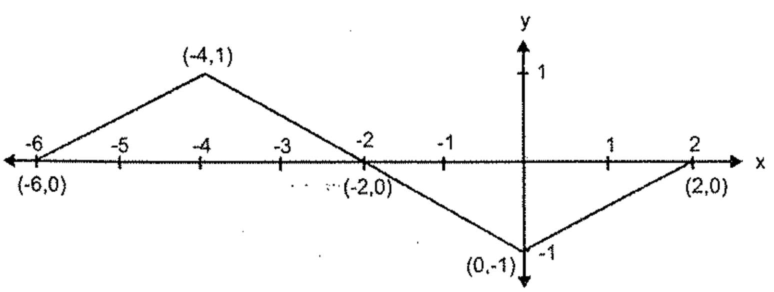


Figura 3-31

PASO 2: Finalmente, dibujamos $y = f\left(\frac{1}{2}x+1\right)$ que consiste en alargar horizontalmente, 2 veces, la gráfica de y= f(x+1). Con este fin, multiplicamos por 2 las abscisas de cada pareja ordenada de y= f(x+1); figura 3-32:

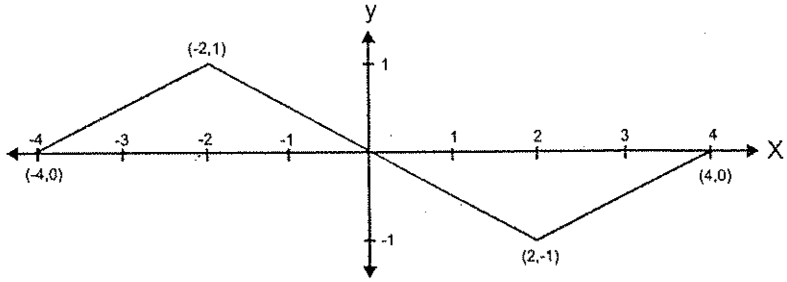


$y = f\left(\frac{1}{2}x+1\right)$

Figura 3-32

- Otra manera de resolver el problema es escribiendo la función que queremos dibujar así: $y = f\left[\frac{1}{2}(x+2)\right]$. En este caso, el orden para dibujar la gráfica es el siguiente:

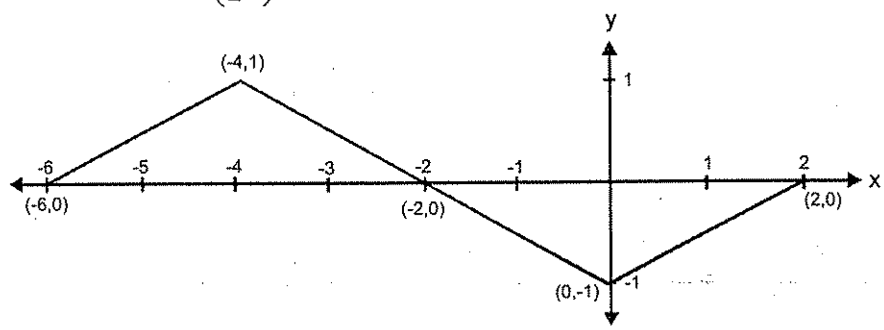
PASO 1: Dibujamos $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$; es decir, alargamos horizontalmente, 2 veces, la gráfica de y = f(x). Con este fin, multiplicamos por 2 las abscisas de cada pareja ordenada de y = f(x); figura 3-33:



$$y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$$

Figura 3-33

PASO 2: Finalmente dibujamos $y = f\left[\frac{1}{2}(x+2)\right]$ que consiste en trasladar horizontalmente, 2 unidades hacia la izquierda, la gráfica de $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$; figura 3-34:



$$y = f\left[\frac{1}{2}(x+2)\right]$$

Figura 3-34

- Como vemos, ambos procesos nos conducen al mismo resultado.

Ejemplo 4

Dibujemos paso a paso la gráfica de la función definida por: $y = e^{1-\frac{x}{5}}$.

SOLUCIÓN

- La función también podemos escribirla así: $y = e^{-\frac{1}{5}x+1}$.
- En estas condiciones, partimos de la gráfica de $f(x) = e^x$, figura 3-35(a) y efectuamos sobre ella las siguientes transformaciones.

PASO 1: Dibujamos $f(x+1) = e^{x+1}$, para la cual debemos trasladar horizontalmente, 1 unidad hacia la izquierda, la gráfica de $y= e^x$; figura 3-35(b).

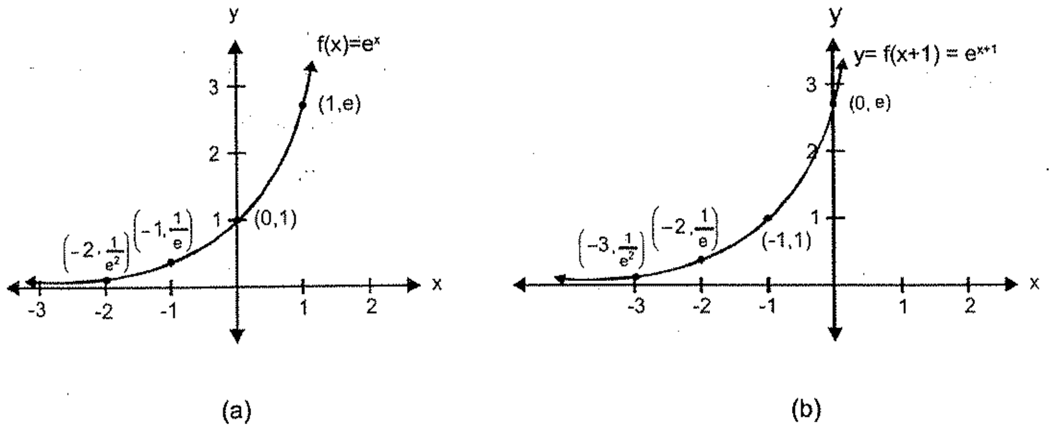


Figura 3-35

PASO 2: A continuación, dibujamos la gráfica de $f\left(\frac{1}{5}x\right)$ a partir de la gráfica de $f(x)=e^{x+1}$; es decir, dibujamos $y=e^{\frac{1}{5}x+1}$.Por ello, debemos alargar horizontalmente, 5 veces, la gráfica de $f(x)=e^{x+1}$. Esto es lo mismo que multiplicar por 5, las abscisas de cada una de las parejas ordenadas de esta última función; figura 3-36.

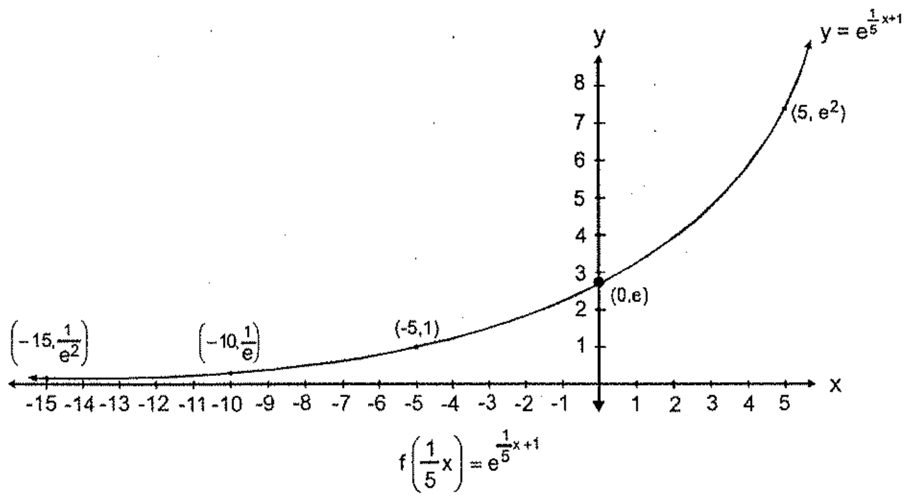


Figura 3-36

PASO 3: Finalmente, dibujamos la gráfica de f(-x) a partir de la gráfica de $f(x)=e^{\frac{1}{5}x+1}$; es decir, dibujamos $\mathbf{y=e^{\frac{1}{5}(-x)+1}=e^{-\frac{1}{5}x+1}}$. Con este fin, dibujamos la curva simétrica, con respecto al eje y, de la curva de ecuación $y=e^{\frac{1}{5}x+1}$. Las parejas ordenadas de $y=e^{-\frac{1}{5}x+1}$ se obtienen escribiendo el inverso aditivo de las abscisas de las parejas ordenadas de $y=e^{\frac{1}{5}x+1}$; figura 3-37.

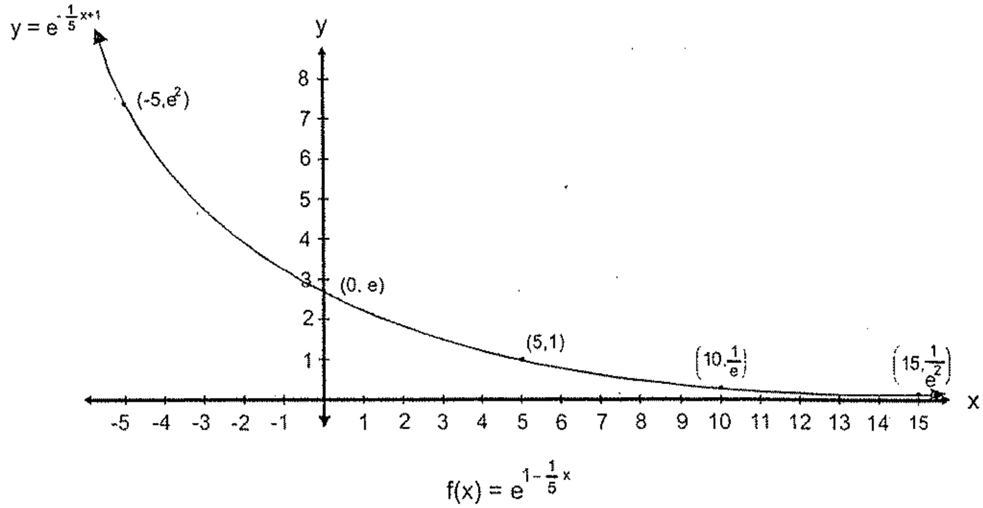


Figura 3-37

EJERCICIO 3.3

1. Suponga que se tiene la gráfica de una función f. Escriba las ecuaciones para las gráficas que se obtienen a partir de la gráfica de f; así:

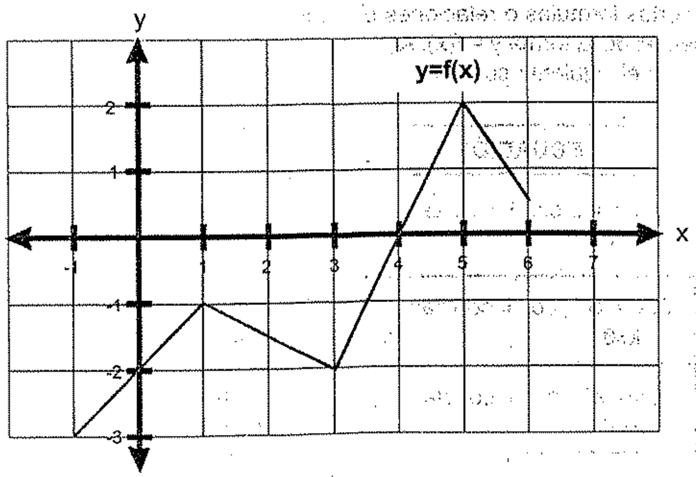
   a) Trasládela 5 unidades hacia arriba.
   b) Trasládela 5 unidades hacia abajo.
   c) Trasládela 4 unidades hacia la derecha.
   d) Trasládela 4 unidades hacia la izquierda.
   e) Simétrica con respecto al eje x.
   f) Simétrica con respecto al eje y.
   g) Alárguela verticalmente un factor de 2.
   h) Contráigala horizontalmente un factor de 3.

2. Explicar cómo se obtienen las gráficas siguientes a partir de la gráfica de $y = f(x)$.

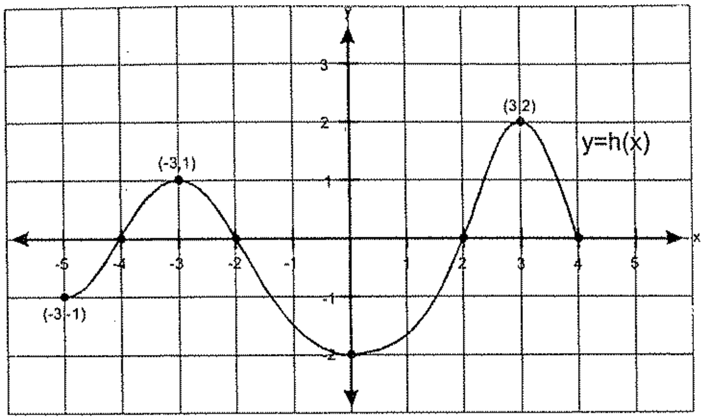
   a) $y = 3\,f(x)$
   b) $y = f(x - 5)$
   c) $y = -\,f(x)$
   d) $y = -3\,f(x)$
   e) $y = f(3x)$
   f) $y = 3\,f(x) - 5$

3. Con base en la gráfica de una función f, trazar la gráfica de las funciones siguientes:

   a) $f(3x)$
   b) $f(x - 3)$
   c) $f\left(\frac{1}{2}x\right)$
   d) $f(2x + 3)$
   e) $f(-x)$
   f) $-f(x + 1)$



4. Partiendo de la gráfica de la función h siguiente, dibujar: a) y= 3h(x+2) ; b) y= h(-2x-2)+2



5. Partiendo de la gráfica de una de las funciones básicas estudiadas en la sección anterior, dibuje la gráfica de las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt{2x}$ b) $y = \dfrac{1}{x+3}$ c) $y = 2\,|\,x+3\,|$

d) $y = 2^{-2x+3}$ e) $y = -3\log_2(2x-1)$ f) $y = x^2 - 4x + 7$

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (8)

El volumen de un prisma recto de base cuadrada es 36m³. Si llamamos x la medida del lado de la base, se pide:

1. **Hacer una interpretación gráfica del enunciado del problema.**
2. **Escribir una ecuación, en términos de x, que permita calcular el área total de la caja.**
3. **¿Para qué valores de x el área de la caja es positiva?**

3.6 LAS FUNCIONES COMO MODELOS MATEMÁTICOS

- Numerosas aplicaciones de la matemática a otras ciencias y a situaciones de la vida diaria exigen la aplicación de ciertas fórmulas o relaciones básicas. La mayoría de estas fórmulas son funciones definidas mediante una ecuación de la forma y = f(x). Algunas de estas funciones reciben nombres especiales que daremos a continuación, en el siguiente cuadro:

ECUACIÓN	SIGNIFICADO
1. $y = kx$; con k constante y $k \neq 0$	y varía directamente con x y es directamente proporcional a x
2. $y = kx^n$; con k constante y $k \neq 0$	y varía directamente con la n-ésima potencia de x. y es directamente proporcional a la potencia n-ésima de x.
3. $y = k/x$; con k constante y $k \neq 0$	y varía inversamente con x. y es inversamente proporcional a x.
4. $y = k/x^n$; con k constante y $k \neq 0$	y varía inversamente con la n-ésima potencia de x. y es inversamente proporcional a la potencia n-ésima de x.

5. $y = k\,x\,z$, con k constante y $k \neq 0$	y es conjuntamente proporcional a **x** y a **z.**
6. $y = k\dfrac{x}{w}$; con k constante y $k \neq 0$	y varía directamente con x e inversamente con w.

- En estos casos, la letra k es una constante diferente de 0 y recibe el nombre de constante de variación o constante de proporcionalidad.

Ejemplo 1

- El área de un círculo varía directamente con el cuadrado de su radio. Por esta razón, $A = kR^2$. En este caso, ya sabemos que el valor de k es π.
- La LEY DE NEWTON DE LA GRAVITACIÓN establece que la atracción gravitacional entre dos cuerpos varía directamente con el producto de sus masas e inversamente con el cuadrado de la distancia que hay entre sus centros de gravedad. Si G, m_1, m_2 y d representan la fuerza de atracción gravitacional, las dos masas y la distancia, respectivamente, entonces la ley afirma que:

$$G = k\,\frac{m_1\,m_2}{d^2}$$

ATENCIÓN

En los problemas de variación, no es indispensable calcular la constante de proporcionalidad a menos que se requiera explícitamente. La constante se puede calcular si se conoce un conjunto particular de valores de las variables.

Ejemplo 2

Se sabe que si la temperatura permanece constante, entonces la presión de un gas encerrado en un recipiente es inversamente proporcional al volumen. La presión de cierto gas dentro de un globo esférico de 9 cm de radio es de 20 libras por cm³. Si el radio del globo anterior es ahora de 12 cm, hallemos la nueva presión del gas.

SOLUCIÓN

- Si llamamos P a la presión, V al volumen y la presión es inversamente proporcional al volumen, entonces:

$$P = \frac{k}{V}$$

para algún número real k.

- Para hallar el valor de k, tengamos en cuenta que el volumen del globo inicial es $V = \frac{4}{3}\pi(9)^3 = 972\pi$ cm³. Por lo tanto: cuando P = 20, el volumen $V = 972\pi$ y, entonces $20 = \dfrac{k}{972\pi}$; luego,

$$k = 19440\pi \;\text{ y }\; P = \frac{19440\,\pi}{V} \text{ ....(1).}$$

- Si el radio es de 12 cm, entonces $V = \frac{4}{3}(12)^3\,\pi = 2304\,\pi$ cm³. Y sustituyendo este valor en la ecuación (1) nos queda:

$$P = \frac{19440\,\pi}{2304\,\pi} = 8.4375 \text{ libras por cm}^3.$$

- Por lo tanto, la nueva presión del gas es 8.4375 lb/cm³.

Ejemplo 3

El peso que puede soportar una viga con sección transversal rectangular varía proporcionalmente al ancho y al cuadrado del alto de la sección transversal y es inversamente proporcional a la longitud de la viga. Si una viga que tiene una sección transversal de 6 cm por 12 cm y 2.5 m de longitud soporta una carga de 250 Kgf. ¿Qué peso soportará una viga de 6 cm por 24 cm de sección transversal y 3 m de longitud? (suponga que el ancho es la longitud más corta de la sección transversal).

SOLUCIÓN

- Si el ancho, el alto, la longitud y el peso los denotamos por a, b, *l* y P, respectivamente, entonces:

$$P = k\frac{ah^2}{b} \text{..............................(1)}$$

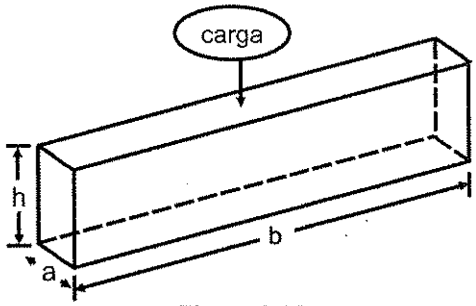


Figura 3-38

- Teniendo en cuenta los datos del problema, nos queda:

$$250 = k\frac{6(12)^2}{250\text{ cm}}$$

Despejando k de esta última igualdad tenemos que $k = \frac{62.500}{864}$

- Por lo tanto, reemplazando este valor en (1) resulta que:

$$P = \frac{62.500}{864}\left(\frac{a\,h^2}{b}\right) \text{................ (2)}$$

- Finalmente, para calcular el peso P que soporta la viga cuando a = 6 cm, h = 24 cm y b = 3m reemplazamos estos valores en (2); así:

$$P = \frac{62.500}{864} \cdot \frac{6(24)^2}{300}$$

$$\therefore P = 833.33 \text{ kgf.}$$

Ejemplo 4

Se va a cercar un terreno rectangular situado en la ribera de un río, utilizando para ello una malla de 80 m. La parte del terreno que está sobre la ribera del río no requiere malla. Se pide:

a) Si **x** metros es el largo del terreno, expresemos en metros cuadrados el área del terreno como función de **x.**
b) ¿Cuál es el dominio de la función resultante?
c) ¿Cuáles son las dimensiones del terreno para las cuales el área del mismo es máxima?

SOLUCIÓN

a) Del enunciado del problema sabemos que **x** metros mide el largo del terreno. Si llamamos **y** al número de metros del ancho del terreno, entonces podemos dibujar la figura 3-39:

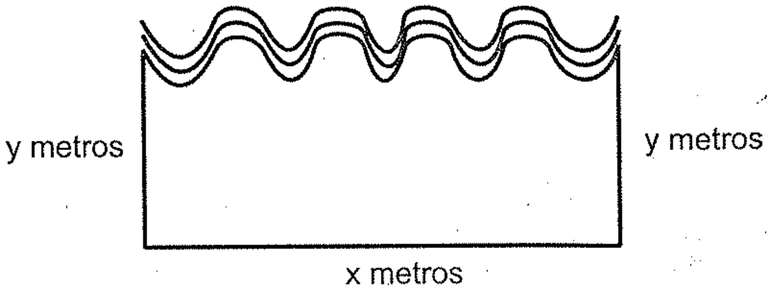


Figura 3-39

Como contamos con 80 metros de malla y ésto corresponde al perímetro del terreno, entonces:

$$80 = x + 2y \text{.....................}(1)$$

El área de un rectángulo es igual al producto de su base por su altura (largo por ancho). Por lo tanto:

$$A = xy \text{.............................}(2)$$

Pero el área hay que escribirla sólo en función de **x**. Por lo tanto:

$$\text{De (1)} : y = 40 - \frac{1}{2}x$$

$$\text{En (2)} : A(x) = x\left(40 - \frac{1}{2}x\right)$$

$$\text{Luego} : A(x) = 40x - \frac{1}{2}x^2$$

Por lo tanto, el área del rectángulo en función del largo x es:

$$\boxed{\mathbf{A(x) = 40x - \frac{1}{2}x^2}}$$

b) Cualquiera que mire desprevenidamente esta función dirá que su dominio son todos los números reales. Y es verdad. Sin embargo, en este caso concreto no tiene sentido que **x**, ni **A(x)** tomen valores negativos (¿por qué?). En consecuencia, averigüemos donde $A(x) = 0$ y así podremos saber donde $A(x) > 0$ y donde $A(x) < 0$. Veamos:

$$A(x) = 0 \Rightarrow 40x - \frac{1}{2}x^2 = 0$$
$$\Rightarrow 80x - x^2 = 0$$
$$\Rightarrow x(80 - x) = 0$$
$$\Rightarrow x = 0 \quad \text{ó} \quad x = 80$$

Como **x** no puede ser negativo, entonces sólo debemos analizar dos intervalos $(0 ; 80)$ y $(80 ; +\infty)$. Una sencilla comprobación nos permitirá concluir que $A(x) > 0$ en el intervalo $(0 ; 80)$

Esto significa que el dominio de esta función es el intervalo $(0 ; 80)$.

c) La función de ecuación $A(x) = 40x - \frac{1}{2}x^2$ es una función cuadrática. Esta función tiene su máximo valor cuando:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{40}{-2\left(\frac{1}{2}\right)} = 40$$

si $x = 40$, entonces $y = 40 - \frac{1}{2}(40) = 20$

Por lo tanto, el terreno de máxima área es aquel cuyas dimensiones son: largo = 40m y ancho = 20m.

Ejemplo 5

Una isla está ubicada en el punto A, 6 Km. mar adentro del punto más cercano B en una playa recta. Una mujer que se encuentra en la isla desea ir hacia un punto C situado a 9 Km. de B sobre la misma playa. La mujer puede alquilar una lancha por $15.000 el kilómetro, desembarcar en un punto P ubicado entre B y C y allí alquilar un carro con chofer a un costo de $12.000 por kilómetro para llegar hasta C. Se pide:

a) Hacer un dibujo de la situación planteada por el enunciado del problema.
b) Si x es la distancia entre B y P, escribamos una expresión que nos permita calcular el costo de viajar desde el punto A hasta el punto C.
c) ¿Cuál es el dominio de la función resultante?

SOLUCIÓN

a) La figura 3-40 describe el enunciado del problema.

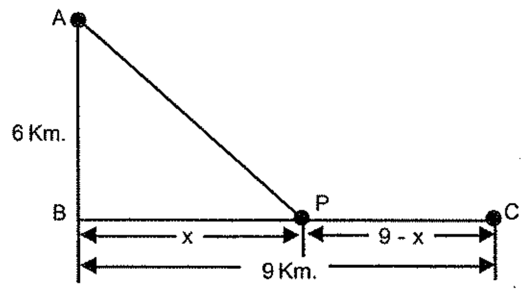


Figura 3-40

b) El costo de recorrer una distancia determinada es igual al producto del número de kilómetros por el valor de 1 kilómetro. Por lo tanto:

$$\text{Distancia } \overline{AP} = \sqrt{36 + x^2}$$

$$\text{Distancia } \overline{PC} = 9 - x$$

$$\text{Costo de recorrer } \overline{AP} = 15000\sqrt{36 + x^2}$$

$$\text{Costo de recorrer } \overline{PC} = 12000\,(9 - x)$$

Si llamamos C(x) el costo total entonces:

$$\boxed{\mathbf{C(x) = 15000\sqrt{36 + x^2} + 12000\,(9 - x)}}$$

c) Para determinar el dominio de esta función basta observar que x puede tomar valores entre 0 y 9: toma el valor de 0 cuando P coincide con B y toma el valor de 9 cuando P coincide con C. Por lo tanto, el dominio de esta función es el intervalo [0 ; 9].

Ejemplo 6

Una compañía ofrece instalar bombillas a un costo de $300 cada una si el pedido es de 40 unidades o menos. Para conseguir mejores contratos reduce en $5 el costo por cada bombilla que pase de 40.

a) Si x es el número de bombillas que van a instalarse, escribamos una expresión para determinar el costo total de la instalación.
b) ¿Cuál es el dominio de la función resultante?
c) ¿Cuántas bombillas deben instalarse de manera que la compañía obtenga las mayores ganancias?

SOLUCIÓN

a) En primer lugar, tengamos en cuenta que el costo total de la instalación, que representaremos por C(x), es igual al **producto del número de bombillas a instalar por el precio de cada una.** En este caso, la expresión que debemos encontrar para C(x) consta de dos partes: la primera, cuando se van a instalar 40 bombillas o menos y, la segunda, cuando se van a instalar más de 40 bombillas; es decir:

1. Si $x \leq 40$, entonces $C(x) = 300 \cdot x$
2. Si $x > 40$, entonces el precio de cada bombilla será $300 menos $5 que se descuenta por cada bombilla por encima de las 40. El número de bombillas por encima de las 40 se representa por (x - 40); el descuento obtenido por estas (x - 40) bombillas es 5(x - 40) en cada una y, en consecuencia, el precio será 300 - 5(x - 40)por bombilla. Por lo tanto, el costo total C(x) de instalar más de 40 bombillas es: x [300 - 5(x - 40)]

De 1. y 2. podemos escribir la siguiente expresión para determinar el costo total de la instalación:

$$C(x) = \begin{cases} 300\,x & \text{si } 0 \leq x \leq 40 \\ x\,[300 - 5\,(x-40)\,] & \text{si } x > 40 \end{cases}$$

$$\therefore\quad C(x) = \begin{cases} 300\,x & \text{si } 0 \leq x \leq 40 \\ 300x - 5x^2 & \text{si } x > 40 \end{cases}$$

$$\therefore\quad C(x) = \begin{cases} 300\,x & \text{si } 0 \leq x \leq 40 \\ 500\,x - 5x^2 & \text{si } x > 40 \end{cases}$$

b) Para que entendamos cuál es el dominio de la función dibujemos su gráfica; figura 3-41

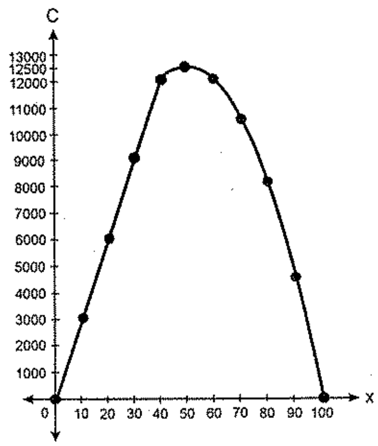


Figura 3-41

La figura nos muestra que C toma valores no negativos cuando el número de bombillas está entre 0 y 100. Por lo tanto, el dominio de C es el intervalo [0 ; 100]. Para obtener este resultado analíticamente basta averiguar donde C es igual a 0 y luego evaluar los intervalos donde C es positiva; es decir:

$C(x) = 0$ cuando $300x = 0$ ó $500x - 5x^2 = 0$

$300x = 0$ cuando $x = 0$

$500x - 5x^2 = 0$ cuando $x(500 - 5x) = 0$, $x = 0$ ó $x = 100$

Por lo tanto, los posibles intervalos de análisis son: $(-\infty; 0)$, $(0 ; 100)$ y $(100 ; +\infty)$. El intervalo $(-\infty; 0)$, se descarta (¿por qué?); en el intervalo (0 ; 100), la función C es positiva (¡ verificarlo !) y en el intervalo $(100 ; +\infty)$, la función C vuelve a ser negativa (¿por qué?). En consecuencia, el dominio de C es el intervalo [0 ; 100].

c) La figura 3-41 nos muestra que el valor máximo de la función se presenta en un punto entre x = 40 y x = 100. Como en este intervalo (40 ; 100), la función es cuadrática entonces el valor máximo se encuentra donde $x = -\dfrac{b}{2a}$; es decir: $x = -\dfrac{500}{-10} = 50$.

CONCLUSIÓN: La compañía obtiene la mayor ganancia cuando vende lotes de 50 bombillas. En este caso, el valor de la venta es: $500(50) - 5(50)^2 = 12.500$ pesos.

EJERCICIO 3.4

En los ejercicios 1 a 4 expresar cada enunciado en forma de ecuaciones:

1. p varía directamente con el cuadrado de q.

2. t varía inversamente con r.

3. a varía directa y conjuntamente con b y c^3.

4. m varía directamente con n e inversamente con el cuadrado de p.

5. m varía directamente con n. Si m vale 15 cuando n = 10, determinar el valor de m cuando n = 12.

6. p varía inversamente con q. Si p = 6 cuando q = 8, hallar el valor de p cuando q = 10.

7. t varía conjuntamente con r y s. Si t = 20 cuando r = 4 y s = 5, hallar el valor de t cuando r = 9 y s = 15.

8. a varía directamente con el producto de b y c e inversamente con el cuadrado de d. Si a = 6 cuando b = 4, c = 12 y d = 2, calcular el valor de a si b = 2, c = 5 y d = 3.

9. x varía directamente con y^2 e inversamente con z^3. Si x = 2 cuando y = 3 y z = 5, calcular y si x = 10 y z = 12.

10. El volumen de un cilindro circular recto varía conjuntamente con la altura y el cuadrado del radio. Si el volumen de un cilindro circular recto de radio 4 cm y de altura 7 cm es $112\ \pi cm^3$, calcular el volumen de otro cilindro de radio 8 cm y altura 14 cm.

11. La nómina diaria correspondiente a un grupo de trabajadores es directamente proporcional al número de obreros. Si 12 de éstos perciben un pago total de $540.000, se pide: a) Expresar el costo de la nómina diaria como función del número de obreros. b) ¿Cuál es el costo de la nómina diaria para un grupo de 15 trabajadores?

12. La ley de Hooke establece que la fuerza F requerida para estirar un resorte x unidades de su posición natural es directamente proporcional a x. Si un peso de 4 kgf estira un resorte cuya longitud natural es de 10 cm hasta una longitud de 10.3 cm. ¿Cuál es el peso que produce una longitud de 11.5 cm?

13. La intensidad de la luz varía inversamente con el cuadrado de la distancia a partir de su fuente. Comparar la intensidad de una pantalla que está a 5 metros de una fuente dada con la intensidad de una pantalla que está a 7 metros de la misma fuente.

14. En un pequeño poblado con 5.000 habitantes la tasa de propagación de una epidemia (índice de variación del número de personas infectadas) es conjuntamente proporcional al número de personas atacadas y al número de personas que todavía no se han contagiado. (a) Si la epidemia se difunde con una tasa de 9 personas por día cuando hay 100 personas contagiadas, exprese la rapidez de propagación de la epidemia como función del número de personas enfermas. b) ¿ Con qué rapidez se difunde la epidemia cuando 200 personas ya se han contagiado ?

15. La iluminación producida sobre una superficie por una fuente luminosa varía directamente con la potencia en candelas de la fuente e inversamente con el cuadrado de la distancia entre la fuente y la superficie. Comparar la iluminación producida por una lámpara de 512 cd (candelas) que está a 8 dm de la superficie con la de una lámpara de 72 cd a 2 dm de la superficie.

16. Una ventana rectangular está rematada por un semicírculo. El perímetro de la ventana es 200 cm y la cantidad de luz que ingresa por ella es directamente proporcional al área de la ventana, (a) Si x cm es el radio del semicírculo, expresar la cantidad de luz que ingresa por la ventana como función de x; (b) ¿Cuál es el dominio de la función resultante?; (c) ¿Cuál es el radio del semicírculo de la ventana que admite el paso de la mayor cantidad de luz?

17. Una caja rectangular de base cuadrada se construye de tal manera que el área de sus seis caras es de $18m^2$:

a) Si x cm es la longitud del lado de la base, expresar el volumen de la caja en función de x.
b) ¿Cuál es el dominio de la función resultante donde el problema tiene sentido?

18. Con una hoja metálica rectangular de 12 cm de ancho, y en la que no importa el largo, se va a construir un canal para conducir el agua-lluvia. Con este fin se doblan, por el ancho, hacia arriba dos segmentos iguales de tal manera que queden perpendiculares a la hoja. ¿Cuántos centímetros se deben doblar para que el canal tenga capacidad máxima?

19. Un hombre desea cercar un terreno rectangular y después colocar otras dos cercas paralelas a alguno de los lados para subdividirlo en tres lotes rectangulares. Si dispone de 1000 metros de cerca, ¿con qué dimensiones obtendrá el área máxima?

20. Un fabricante de envases de cartón desea construir cajas, sin la tapa superior, usando láminas cuadradas de cartón de 12 dm de lado, recortando cuadrados iguales de las cuatro esquinas y doblando los lados hacia arriba. (a) Si x decímetros es la longitud del lado del cuadrado que debe recortarse, expresar en dm^3 el volumen de la caja a fabricar, como función de x. (b) ¿Cuál es el dominio de la función resultante?

Taller de la Unidad 3

1. PREGUNTAS PARA REVISAR LA TEORÍA

a) ¿Qué condiciones debe cumplir una relación para que sea función?
b) ¿De qué maneras se puede representar una función?
c) ¿Cómo se definen los siguientes conceptos:
   i. Función?
   ii. Dominio y rango de una función?
   iii. Gráfica de una función?
d) ¿Qué es una función par? ¿Cómo puede determinarse que una función es par sólo con mirar su gráfica?
e) ¿Qué es una función impar? ¿Cómo puede determinarse que una función es impar con sólo mirar su gráfica?
f) ¿Qué es función creciente y función decreciente?
g) Si f es una función dada, ¿Qué significa la expresión y = f (x)? ¿Qué nombres reciben x e y en esta función?
h) ¿Cómo se clasifican las funciones reales?
i) ¿Qué es una función algebraica? Escriba cinco (5) ejemplos.
j) ¿Cuál es la gráfica de una función constante? ¿De una función lineal? ¿De una función cuadrática?
k) ¿Cómo se obtienen las coordenadas del vértice de una parábola funcional?
l) Gráficamente, ¿qué representan los ceros de una ecuación polinómica?
m) ¿Cómo se define una función racional?
n) ¿Cuáles son las funciones especiales, cómo se definen y cómo se simbolizan?

2. FALSO O VERDADERO

Colocar en el paréntesis de la izquierda una V o una F según que el enunciado sea verdadero o falso.

( ) a) Toda relación es función, pero no toda función es relación.
( ) b) En una función es posible que un mismo elemento del conjunto de partida tenga dos imágenes.
( ) c) Si $x_1 < x_2$ y f es una función decreciente, entonces $f(x_1) > f(x_2)$.
( ) d) Una recta vertical intercepta la gráfica de una función más de una vez.
( ) e) Si f es una función real definida por la regla $f(x) = 5 - 3x$, entonces $f(a + 1) = 2 - 3a$.

( ) f) Si **f** es una función real definida por la regla $f(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{si } x \leq -3 \\ 6 & \text{si } -3 < x < 0 \\ x^2 + 3 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ entonces $f(1) = 4$.

( ) g) La función $\mathbf{f} = \left\{(x, y) \,/\, y = \sqrt{-5}\right\}$ es una función real constante.

( ) h) La función f: R→R definida por la regla $f(x) = 4x - x^2 - 4$ tiene un valor máximo en $x = 2$.

( ) i) Las raíces de la función f: R→R definida por la regla $f(x) = x(x^2 - 1)(x^3 + 8)$ son $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$ y $x = -2$.

( ) j) El dominio de la función real definida por la regla $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 3}}$ es R.

( ) k) La relación $R = \{(x, y) \,/\, 4x^2 - 2y^2 - 3x + 1 = 0\}$ es una función.

( ) l) La relación $R = \{(x, y) \,/\, x = -3\}$ es una función.

( ) m) Siempre se puede dividir por 2^x.

( ) n) Si $0 < a < b$ entonces $\log(a) < \log(b)$

( ) o) Si c varía directamente con a e inversamente con el cuadrado de b entonces $c = k\dfrac{b^2}{a}$.

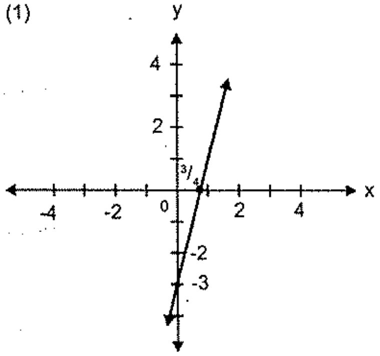
( ) p) Si y varía directamente con el cubo de x e inversamente con z entonces $y = k\dfrac{x^3}{z}$.

( ) q) La gráfica de $y = -f(x)$ es la simétrica con el eje y de $y = f(x)$.

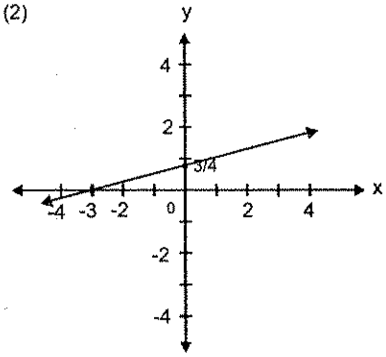
( ) r) La gráfica de $y = f(-x)$ es la simétrica con el eje y de $y = f(x)$.

Los ejercicios 3. a 9. se responden con base en las gráficas de las funciones que aparecen a continuación. Tenga en cuenta cómo están numeradas para dar su respuesta. Cada una de ellas representa funciones polinómicas o exponenciales. Escriba al frente de cada afirmación el (los) número(s) de las gráficas de las funciones que la verifican. Tenga en cuenta que para una misma afirmación puede haber varias funciones que la satisfagan; en este caso, debe señalarlas todas.

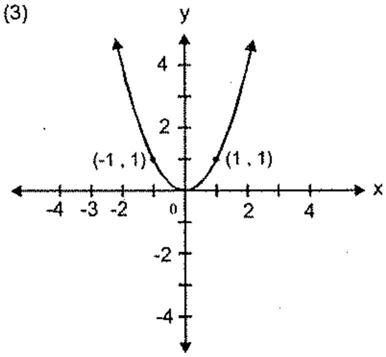
(1)



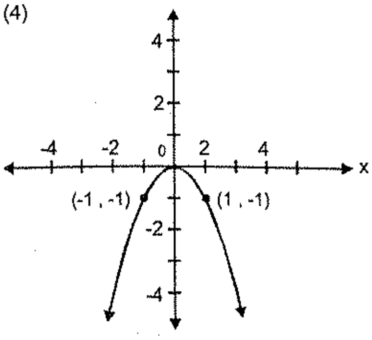
(2)



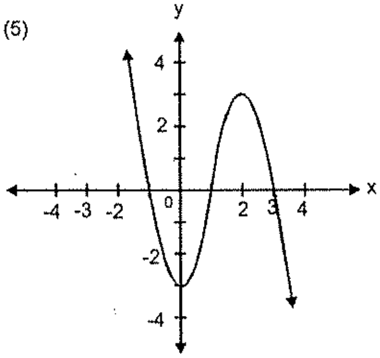
(3)



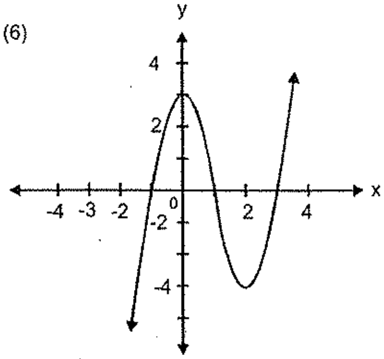
(4)

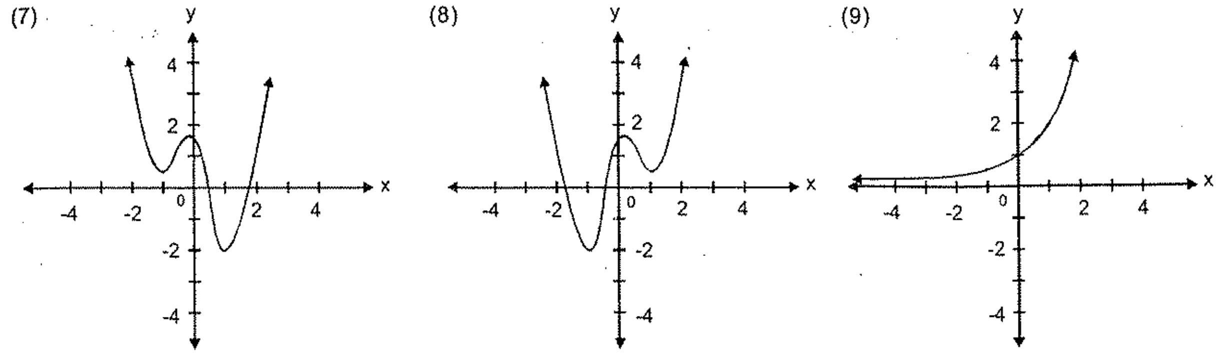


(5)



(6)





3. Es función par ______.

4. La regla de la función es $y = 4x - 3$ ______.

5. Es función polinómica de grado mínimo igual a 4 ______.

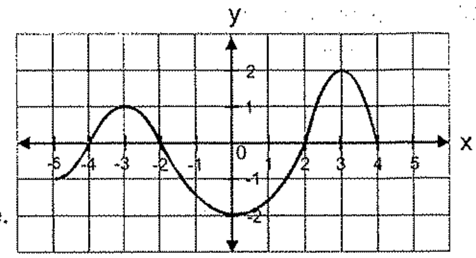
6. Es polinomio con tres raíces reales ______.

7. Es función exponencial ______.

8. Si una de las funciones es $y = f(x)$, la otra es $y = -f(x)$ (puede haber varias parejas) ______.

9. Si una de las funciones es $y = f(x)$, la otra es $y = f(-x)$ (puede haber varias parejas) ______.

10. Sea f una función cuya gráfica es la siguiente:



a) Estimar el valor de $f(-3)$
b) Estimar el valor de $f(1)$
c) Estimar los valores de x tales que $f(x) = 1.5$.
d) Hallar el dominio y el rango de f.
e) En cuál(es) intervalos f es creciente y en cuál(es) decreciente.
f) ¿Es f par, impar o ninguna de las dos? ¿Por qué?

En los ejercicios **11** a **13**, hallar para cada una de las funciones dadas: $f(a)$, $f(-a)$, $-f(a)$, $f(a + h)$, $f(a) + f(h)$, $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ con $h \neq 0$.

11. $f(x) = 3x^2 - x + 2$ **12.** $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ **13.** $f(x) = \sqrt{4 - x}$

En los ejercicios **14** a **21**, hallar el dominio de cada una de las funciones dadas.

14. $f(x) = \sqrt{3x - 5}$ **15.** $f(x) = \sqrt{7 - 2x}$ **16.** $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ **17.** $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$

18. $f(x) = \dfrac{x + 1}{x^3 - 9x}$ **19.** $f(x) = \dfrac{4x + 7}{6x^2 + 13x - 5}$ **20.** $f(x) = \dfrac{\sqrt{x + 1}}{\sqrt{x - 1}}$ **21.** $f(x) = \sqrt{\dfrac{x + 1}{x - 1}}$

22. Teniendo en cuenta la función f del ejercicio **10.**, dibujar la gráfica de:

a) $g(x) = -2f(x-3)$ b) $h(x) = \dfrac{1}{2}f(1-2x)+3$

23. Usar transformaciones de funciones básicas para dibujar las gráficas de las siguientes funciones:

a) $y = \dfrac{1}{3}\sqrt{x - 2} - 1$ b) $y = (x - 2)^2 + 1$ c) $y = -2e^{(-x+1)} - 1$ d) $y = -\log_2\left(\dfrac{1}{2}x + 5\right)$

En los ejercicios 24 y 25 dibujar la gráfica de la función dada y hallar su dominio y su rango en cada una.

24. $f(x) = \begin{cases} 5 - x^2 & \text{si } x \leq -2 \\ 2x + 5 & \text{si } -2 < x \leq 0 \\ \log_2(x+1) & \text{si } 0 < x \leq 3 \\ 2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

25. $f(x) = \begin{cases} 2 - 3x & \text{si } x \leq -2 \\ \dfrac{2x+1}{x+2} & \text{si } -2 < x \leq 1 \\ 2^{x-1} & \text{si } 1 < x < 3 \\ x^2 - 2x - 4 & \text{si } x = 3 \\ 8 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

26. Supóngase que y varía directamente con el cuadrado de x. Si y = 3 cuando x = 1, ¿cuál es el valor de y cuando x = 2?

27. Supóngase que w es inversamente proporcional a la raíz cúbica de t. Si w = 2 cuando t = 27, ¿cuál es el valor de w cuando t = 8?

28. Un método práctico establece que el tono T de una campana es inversamente proporcional a la raíz cúbica de su peso p. Una campana que pesa 800 libras tiene un tono de 512 ciclos por segundo. ¿Qué tan pesada debe ser una campana similar para que produzca un tono de 256 ciclos por segundo?

29. El periodo T de un péndulo plano varía directamente con la raíz cuadrada de su longitud L. ¿Cuánto se debe cambiar la longitud L para doblar el periodo del péndulo?

30. Expresar el área de un triángulo equilátero como una función de la altura h del triángulo.

31. Se va a construir una caja rectangular abierta con una base cuadrada de longitud x y un volumen de 16.000 cm³. Expresar el área A de la caja como una función de x.

32. Se debe construir una pista de atletismo con dos segmentos rectos y dos semicirculares, como muestra la figura **3-42**. El radio de cada segmento semicircular es r. La longitud de la pista debe ser de 1 Km. Expresar el área limitada por la pista como función de r.

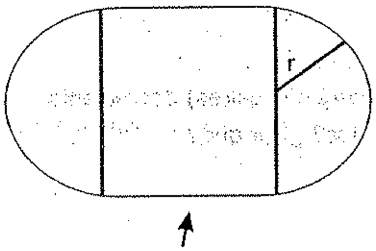


Figura 3-42

33. Se bombea agua en un tanque cónico con el vértice hacia abajo, cuya altura es de 1.2 m y cuyo radio es de 40 cm. Expresar, en m³, el volumen del agua como una función de su profundidad.

34. En el proyecto de una heladería se calcula que si se instalan sillas para ubicar entre 40 y 80 personas, la ganancia diaria será de $8.000 pesos por silla. Pero si la capacidad de sillas sobrepasa los 80, entonces la ganancia diaria de cada silla disminuye $40 por el número de sillas excedentes. Si x es el número de sillas y G la ganancia diaria, se pide:

a) Escribir a G en términos de x.
b) Dibujar la gráfica de G y hallar su dominio.
c) Hallar el número de sillas que deben instalarse para obtener la mayor ganancia.

35. La babilla del río Magdalena se encuentra en peligro de extinción. Las mediciones del Inderena muestran que dicha población se reduce la mitad cada año. Si cuando se hizo la medición inicial habían 50.000 ejemplares, se pide:

a) Determinar una función para calcular el número de babillas que había en el año t.
b) Determinar el número de babillas que habrá al cuarto año.
c) ¿Al cabo de cuánto tiempo el número de babillas será de 5.000?

Prepárate para las Pruebas ICFES

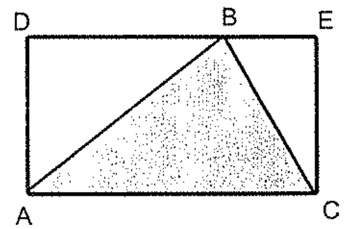
En los siguientes ejercicios no se requiere resolver el problema sino únicamente determinar si la información proporcionada es suficiente o necesaria para la solución del problema. En cada pregunta hay dos informaciones identificadas con I y II y debe responder así:

Si únicamente necesita la información I, escoja a)
Si únicamente necesita la información II, escoja b)
Si necesita ambas informaciones, escoja c)
Si cualquiera de las dos sirve, escoja d)
Si no es suficiente con las dos, escoja e)

1. ¿Cuánto valen 20 huevos?

I. Un huevo vale \$200 II. La docena vale \$2400

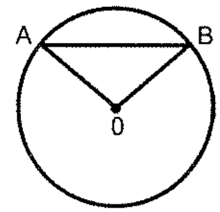
2. Para hallar el área de la parte sombreada, necesito conocer que:



I. $|\overline{AB}| = 20$ cm

II. El área del rectángulo ADEC es 200 cm^2

3. Para hallar el área del círculo de centro 0, necesito conocer que:



I. $\overline{OA} \perp \overline{OB}$

II. El área del ΔAOB es 32 cm^2

4. En un colegio sólo hay tres grados: primero, segundo y tercero. Para calcular el número de alumnos que hay en cada curso es necesario conocer:

I. El número de alumnos del colegio.

II. Cuántos alumnos hay más en cuarto que en quinto.

5. Para hallar la altura de un triángulo necesito saber que:

I. El área del triángulo es 900 m^2.

II. La base y la altura tienen la misma dimensión.

Segunda Parte

Trigonometría

Núcleo Temático

4

LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

LOGRO GENERAL

- Construir y definir las funciones trigonométricas en el plano cartesiano y en el triángulo rectángulo

LOGROS ESPECÍFICOS	INDICADORES DE LOGRO
Corporal: • Realizar experiencias con el plano cartesiano y con triángulos rectángulos que favorezcan la adquisición del concepto de función trigonométrica.	• Manipula el plano cartesiano y triángulos rectángulos para definir las funciones trigonométricas.
Comunicativa: • Describir el proceso de construcción de las funciones trigonométricas en el plano cartesiano y en el triángulo rectángulo.	• Explica con sus propias palabras la manera como se obtienen las funciones trigonométricas en el plano cartesiano y en el triángulo rectángulo.
Cognitiva: • Construir la función trigonométrica general en una circunferencia de radio $R \neq 1$. • Definir las funciones Seno, Coseno y Tangente en la circunferencia $x^2+y^2=R^2$ y en el triángulo rectángulo. • Hallar las seis funciones trigonométricas de un ángulo dado en posición normal. • Determinar el signo de las funciones trigonométricas de un ángulo dado en posición normal.	• Construye la función trigonométrica general en una circunferencia de ecuación $x^2+y^2=R^2$. • Define las funciones Seno, Coseno y Tangente en las circunferencia $x^2+y^2=R^2$ y en el triángulo rectángulo. • Halla las seis funciones trigonométricas de un ángulo dado en posición normal. • Determina el signo de las funciones trigonométricas de un ángulo dado en posición normal.
Estética: • Dibujar en una circunferencia con centro en el origen y radio 1, las líneas correspondientes a las funciones Seno, Coseno y Tangente.	• Dada una circunferencia de centro en el origen y radio 1, dibuja en ella las líneas correspondientes al Seno, al Coseno y la Tangente de un ángulo.
Ética - Actitudinal: • Reconocer la contribución de la matemática a la formación de un pensamiento lógico y una disciplina férrea.	• Reconoce la importancia de la matemática en la formación de personas con capacidad de pensamiento lógico y gran disciplina de trabajo.

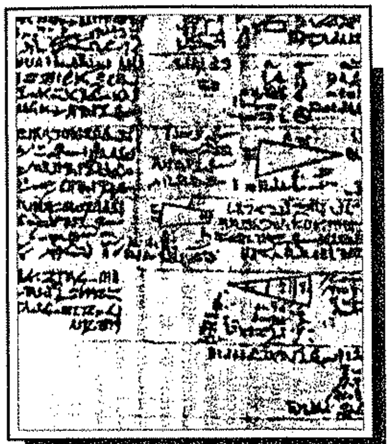
DIMENSIONES

EVALUACIÓN

ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS

4.1 COMPRENSIÓN DE LECTURA: HISTORIA DE LA TRIGONOMETRÍA (1)

Lea atentamente el siguiente texto y luego subraye la letra correspondiente a la ÚNICA respuesta correcta en cada uno de los enunciados propuestos.



PARIRO DEL RHINO
1650 a. de C.

El origen de la trigonometría se remonta a las primeras matemáticas conocidas, en Egipto y Babilonia. El problema 56 del Papiro Rhind[1] presenta un interés especial porque contiene lo que podríamos llamar unos rudimentos de trigonometría y de una teoría de triángulos semejantes. En la construcción de las pirámides, un problema esencial era el de mantener una pendiente uniforme en cada cara y la misma en las cuatro, y pudo haber sido este problema el que llevó a los egipcios a introducir un concepto equivalente al de la cotangente de un ángulo. En la tecnología moderna se acostumbra medir la pendiente de una línea recta por medio de la razón entre "la subida" y "el avance"; en Egipto, en cambio, se solía utilizar la inversa de esta razón, denominándola por la palabra "seqt" que significa la separación horizontal de una recta oblicua del eje vertical por unidad de variación en la altura. Así, pues, el seqt correspondía, salvo en lo que se refiere a las unidades de medida, al "desplome" que usan hoy los arquitectos para medir la pendiente hacia el interior de un muro. La unidad de longitud que usaban los egipcios para medir verticalmente era el "codo" y para medir horizontalmente era la "mano", de las que había siete en un "codo". El problema 56 pide calcular el seqt de una pirámide que mide 250 codos de altura y cuya base tiene 360 codos de lado. El escriba divide primero 360 por 2 y a continuación divide el resultado por 250 obteniendo $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{50}$; por último multiplica este resultado por 7 y da el valor del seqt como $5\frac{1}{25}$ "manos" por "codo"

1. El problema No. 56, contenido en el Papiro Rhind, tiene una importancia especial porque:
   a. Allí se encuentra el embrión de las matemáticas y de la geometría.
   b. En él aparece un estudio de triángulos y un buen análisis matemático.
   c. Es, en esencia, la fundamentación trigonométrica y el estudio de polígonos de tres lados.
   d. Contiene los primeros estudios de la trigonometría y unos principios generales sobre triángulos semejantes.

2. El codo y la mano fueron utilizados por los egipcios para:
   a. Medir todo tipo de distancias.
   b. Medir la distancia entre un punto y otro.
   c. Medir longitudes de arriba hacia abajo y de derecha a izquierda.
   d. Calcular distancias verticales y horizontales.

1 El Papiro Rhind debe su nombre al anticuario escocés Henry Rhind quien en 1858 adquirió un rollo de papiro de 30 cm de alto y casi 6 m de largo, en una ciudad comercial del Nilo. Fue el escriba **Ahmes**, quien en 1650 a. de C., lo copió. Este escriba nos dice que el material se deriva de un prototipo del Imperio Medio, de entre el año 2000 y el 1800 a. de C. y es posible que parte de estos conocimientos provengan en realidad de **Imhotep**, el casi legendario arquitecto y médico del faraón **Zoser**, que dirigió la construcción de su pirámide hace casi 5000 años.

3. Era de vital importancia, en la construcción de una pirámide:
   a. Tener en cuenta el concepto de cotangente.
   b. Mantener una pendiente uniforme en cada lado y la misma en los otros tres.
   c. Emplear materiales de mucha resistencia.
   d. Calcular muy bien la distancia de la cúspide a la base.

4. El término ***escriba*** que se menciona en el texto se refiere a:
   a. El doctor e intérprete de la ley Judía.
   b. Un sabio matemático que proponía los problemas.
   c. Un doctor especialista en copiar o redactar los problemas matemáticos.
   d. Un intelectual antiguo que escribía sobre temas diversos del saber.

5. De la lectura anterior se puede construir la siguiente analogía: **Seqt: es a: desplome como: papiro es a:**
   a) Lámina. b) Papel.
   c) Documento. d) Madera.

4.2 CONCEPTOS BÁSICOS DE LA TRIGONOMETRÍA

4.2.1. Ángulo

Experiencia

- Un ángulo se define, en geometría, como la unión de dos semirrectas con un origen común, como $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ en la figura 4-1.

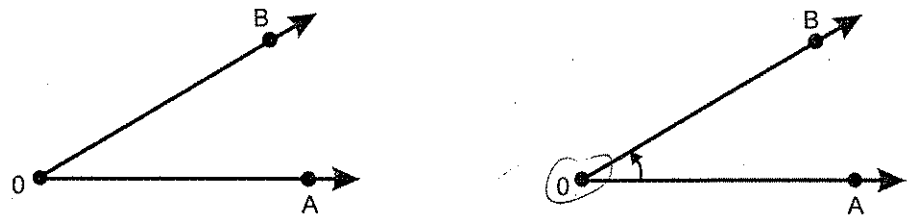


Figura 4-1

- También podemos considerar el $\angle AOB$ formado por la rotación de uno de sus lados, por ejemplo $\overrightarrow{OA}$, al rededor del punto 0, hasta que coincida con el lado $\overrightarrow{OB}$.

- Como gran parte de nuestro estudio de la trigonometría la realizaremos en un sistema de coordenadas, entonces es importante definir un ángulo en términos de una ROTACIÓN; así:

Un ÁNGULO se forma por la rotación de una semirrecta alrededor de su origen. La posición inicial de la semirrecta se llama LADO INICIAL del ángulo y la posición final de la semirrecta se llama LADO FINAL. El punto de rotación es el VÉRTICE del ángulo; figura 4-2.

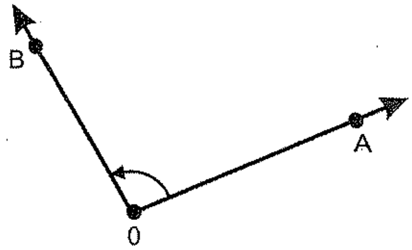


Figura 4-2

- La cantidad y orientación de la rotación es la MEDIDA del ángulo. La unidad de medida más común es el GRADO, el cual se define como $\frac{1}{360}$ de una rotación completa.

ATENCIÓN

Si la rotación se realiza en sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj, entonces la medición es positiva. En cambio, si la rotación se realiza en el mismo sentido del movimiento de las agujas del reloj, la medición es negativa. Finalmente, si la rotación es completa en el sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj, tendremos un ángulo cuya medida será 3600.

- La figura 5-3 nos muestra distintos ángulos y sus medidas.

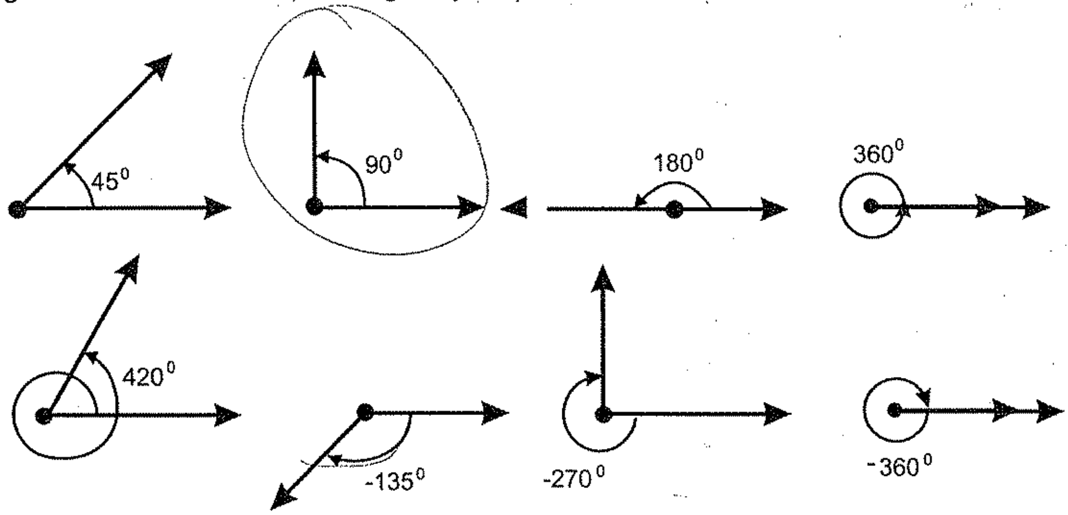


Figura 4-3

4.2.2. Ángulo en posición normal

Experiencia

- Observemos cuidadosamente los ángulos dibujados a continuación; figura 4-4:

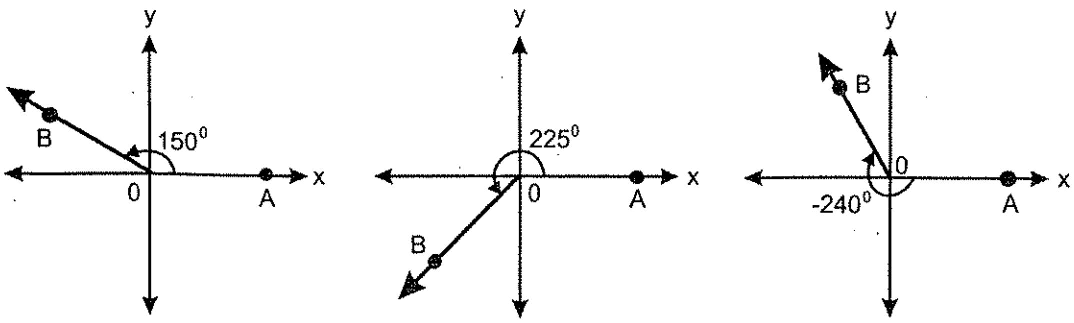


Figura 4-4

- Todos poseen dos características especiales:
  1. Sus vértices coinciden con el origen del sistema cartesiano.
  2. Su lado inicial coincide con el eje positivo **x**.
- Cualquier ángulo que cumpla las dos condiciones anteriores se denomina ÁNGULO EN POSICIÓN NORMAL.

DEFINICIÓN

Un ángulo se encuentra en POSICIÓN NORMAL dentro de un sistema de coordenadas rectangulares si y sólo si su vértice coincide con el origen y su lado inicial con el eje positivo x.

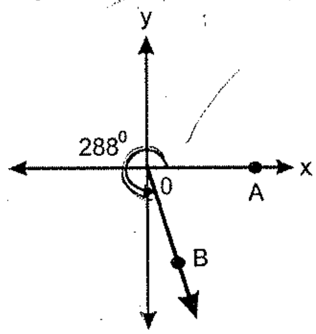
Ejemplo 1

Encontremos la medida en grados de cada ángulo y representémoslos en posición normal.

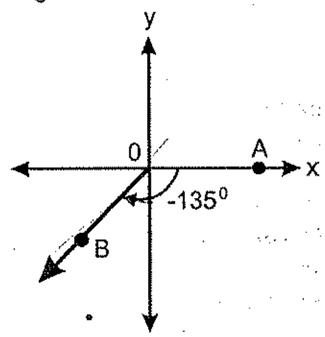
1. $\frac{4}{5}$ de una rotación completa en sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj.
2. $\frac{3}{8}$ de una rotación completa en el mismo sentido del movimiento de las agujas del reloj.

SOLUCIÓN

1. $\frac{4}{5}(360°) = 4(72°) = 288°$



2. $\frac{3}{8}(-360°) = 3(-45°) = -135°$



ATENCIÓN

1. La figura 4-5 muestra diferentes ángulos en posición normal con el MISMO LADO FINAL. Estos ángulos se denominan ÁNGULOS COTERMINALES. En dicha figura, los ángulos de 45°, 405° y -315° son coterminales.

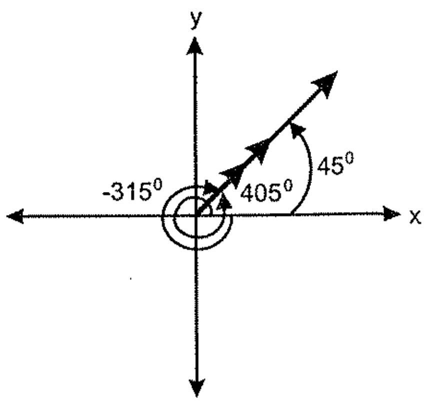


Figura 4-5

2. Las medidas de ángulos coterminales difieren en múltiplos de 360°. Por ejemplo, el conjunto de medidas de ángulos coterminales de 30° es:

$$\{x/x = 30° + k\,(360°),\ \text{donde } k \in Z\}$$

4.2.3. Radianes y Arcos de circunferencia

Experiencia

Según vimos antes, la unidad más común para medir ángulos es el GRADO; sin embargo, en trabajos científicos y en matemáticas avanzadas es mejor emplear el RADIAN. Recordemos qué es un radian:

- La figura 4-6 nos muestra un ángulo θ cuyo vértice está en el centro de una circunferencia de radio r. Este ángulo se denomina ÁNGULO CENTRAL y sus lados cortan a la circunferencia en los puntos A y B, para formar el arco $\overset{\frown}{AB}$:

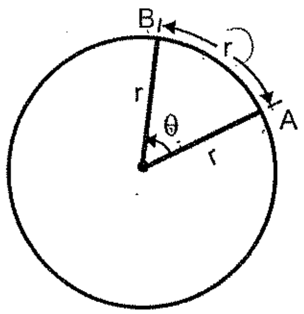


Figura 4-6

- Si, como muestra la figura 4-6, la longitud del arco $\overset{\frown}{AB}$ es igual a la del radio r, entonces el ángulo θ se denomina RADIAN.

> - **Un RADIAN es un ángulo central que intercepta un arco de circunferencia cuya longitud es igual al radio de la circunferencia.**
> - **En toda circunferencia hay aproximadamente 6.28 radianes; es decir, 2π radianes.**

4.2.4. Relación entre Grados y Radianes

- En la figura 4-7 podemos observar que a medida que el arco (α) crece, entonces el ángulo (θ) también crece; es decir, hay una relación directa entre la medida del arco (en radianes) y la medida del ángulo (en grados). ¿Cómo se establece ésta relación? Veamos:

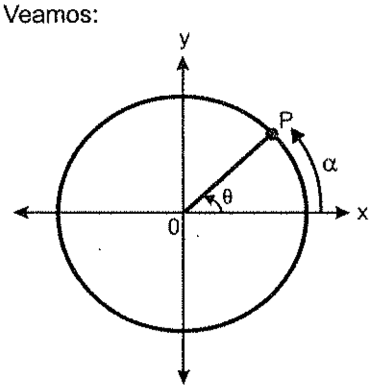


Figura 4-7

Cuando $\alpha = 2\pi$ radianes, entonces $\theta = 360°$, es decir 2π radianes equivalen a $360°$. Por lo tanto:

- **Si 2π radianes equivalen a $360°$ entonces, α radianes equivaldrán a $\theta°$; es decir:**

$$\frac{2\pi \text{ rad}}{\alpha \text{ rad}} = \frac{360^0}{\theta^0}$$

Simplificando nos queda:

$$\boxed{\frac{\pi \text{ rad}}{\alpha \text{ rad}} = \frac{180^0}{\theta^0}}$$

- Esta última igualdad nos permite transformar grados en radianes y viceversa.

Ejemplo 1

Transformemos $\frac{5\pi}{6}$ radianes en grados.

SOLUCIÓN

Aplicando la igualdad $\frac{\pi \text{ rad}}{\alpha \text{ rad}} = \frac{180^0}{\theta^0}$ nos queda:

$$\frac{\pi \text{ rad}}{\frac{5\pi}{6} \text{ rad}} = \frac{180^0}{\theta^0}$$

$$\therefore \theta^0 = \frac{180^0 \times \frac{5\pi}{6} \text{ rad}}{\pi \text{ rad}}$$

$$\therefore \theta^0 = 30^0 \times 5 = 150^0$$

$$\therefore \theta° = 150°$$ error

Ejemplo 2

Transformemos -120° en radianes

SOLUCIÓN

Aplicando la igualdad $\frac{\pi \text{ rad}}{\alpha \text{ rad}} = \frac{180^0}{\theta}$ nos queda:

$$\frac{\pi \text{ rad}}{\alpha \text{ rad}} = \frac{180^0}{-120^0}$$

$$\therefore \alpha \text{ rad} = \frac{-120^0 \times \pi \text{ rad}}{180^0}$$

$$\therefore \alpha \text{ rad} = -\frac{2\pi}{3} \text{ rad}$$

EJERCICIO 4.1

En los ejercicios 1 a 6, hallar la medida del ángulo para la rotación indicada y dibujarlo en posición normal.

1. $\frac{1}{2}$ de rotación completa en el mismo sentido del movimiento de las agujas de un reloj.
2. $\frac{3}{8}$ de rotación completa en sentido contrario al movimiento de las agujas de un reloj.
3. $\frac{5}{12}$ de rotación completa en el mismo sentido del movimiento de las agujas de un reloj.
4. $\frac{7}{6}$ de rotación completa en sentido contrario al movimiento de las agujas de un reloj.
5. $\frac{1}{3}$ de rotación completa en el mismo sentido del movimiento de las agujas de un reloj.
6. $\frac{19}{12}$ de rotación en sentido contrario al movimiento de las agujas de un reloj.

En los ejercicios 7 a 12, indicar en qué cuadrante se encuentra el lado final de los siguientes ángulos en posición normal.

7. 190°	8. -300°	9. 150°
10. -513°	11. 815°	12. -905°

En los ejercicios 13 a 21 encontrar el valor en grados de cada valor de α.

13. $\alpha = 3\pi$ rad.	14. $\alpha = -\pi$ rad.	15. $\alpha = -\frac{\pi}{6}$ rad.
16. $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ rad.	17. $\alpha = -\frac{\pi}{12}$ rad.	18. $\alpha = \frac{7\pi}{6}$ rad.
19. $\alpha = \frac{5\pi}{6}$ rad.	20. $\alpha = -\frac{5\pi}{2}$ rad.	21. $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ rad.

En los ejercicios 22 a 30, encontrar el valor en radianes de cada valor de θ.

22. $\theta = 120°$	23. $\theta = 240°$	24. $\theta = 75°$
25. $\theta = 135°$	26. $\theta = 315°$	27. $\theta = -300°$
28. $\theta = 150°$	29. $\theta = 225°$	30. $\theta = -660°$

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (9)

Un tanque de agua es un prisma colocado horizontalmente y tiene 16 metros de largo. Sus extremos son trapecios isósceles con altura de 4 metros, base inferior de 4 metros y base superior de 6 metros. Si se vierte agua en el depósito y llamamos x la profundidad del tanque en un momento dado, con $0 < x < 4$, se pide:

1. Hacer una representación gráfica del problema.
2. Escribir una ecuación, en función de x, para calcular el volumen del agua presente en el tanque.
3. Calcular el porcentaje de agua presente en el tanque cuando la profundidad es de 2 metros.

Experiencia

- En esta sección vamos a construir una función que nos servirá de soporte para definir más adelante las funciones trigonométricas: LA FUNCIÓN CIRCULAR. La base para construir esta función, como su nombre lo dice, es una circunferencia con centro en (0, 0) y radio igual a 1; figura 4-8.

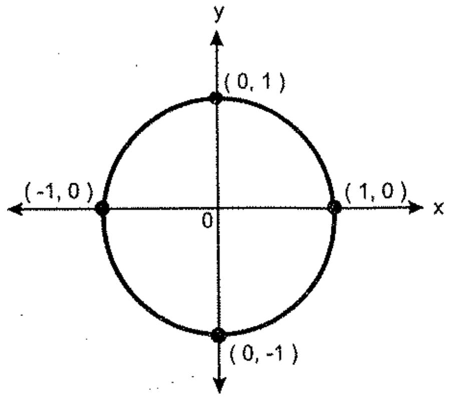


Figura 4-8

- Naturalmente, para definir una función debemos conocer lo siguiente:
  - EL CONJUNTO DE PARTIDA
  - EL CONJUNTO DE LLEGADA
  - LA REGLA QUE DEFINE LA FUNCIÓN

Vamos por partes:

a) El CONJUNTO DE PARTIDA está formado por todos los ángulos centrales en posición normal de la circunferencia unitaria o por los arcos de la misma circunferencia que parten del punto (1, 0); figura 4-9:

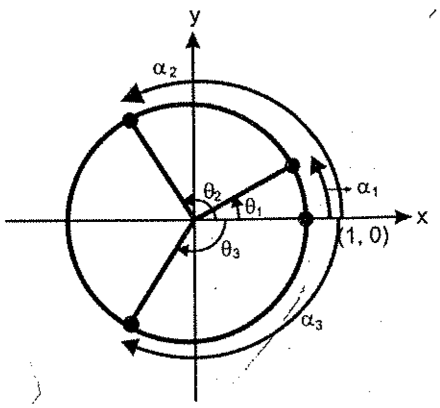


Figura 4-9

b) El CONJUNTO DE LLEGADA está formado por todos los puntos de la circunferencia unitaria; es decir, por todas aquellas parejas ordenadas (x, y) que satisfacen la ecuación:

$$x^2 + y^2 = 1$$

La figura 4-10 nos muestra algunos de estos puntos:

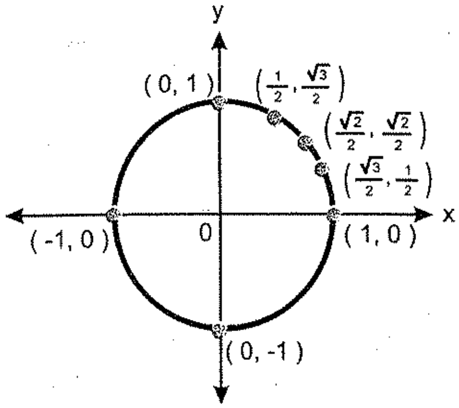


Figura 4-10

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1 \qquad \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{2}{4} + \frac{2}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{4}{4} = 1 \qquad (-1)^2 + 0^2 = 1 + 0 = 1$$

En adelante, los puntos que pertenecen a la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ se llamarán PUNTOS TRIGONOMÉTRICOS.

DEFINICIÓN

Se llama PUNTO TRIGONOMÉTRICO aquel cuyas coordenadas satisfacen la ecuación $x^2 + y^2 = 1$; es decir:

(x, y) es PUNTO TRIGONOMÉTRICO $\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$

c) La REGLA que define la función es la siguiente:

A cada ángulo central o arco, considerado en las condiciones ya establecidas, le asignamos o asociamos el punto trigonométrico correspondiente al extremo del lado final del ángulo o del arco; así:

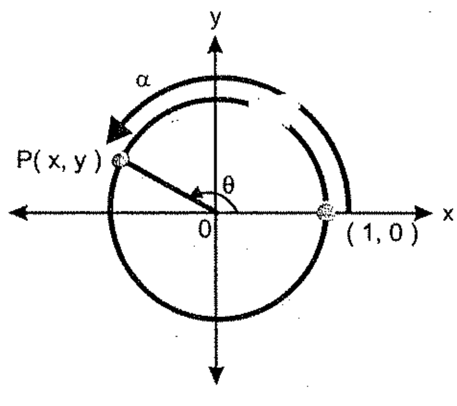


Figura 4-11

- Esta correspondencia es una función ya que a cada ángulo central (o arco) le asignamos uno y sólo un punto trigonométrico; es decir:

F(θ) = (x, y)

La función circular F asocia θ con (x, y)

Ejemplo 1

Calculemos el valor de la función circular para los siguientes ángulos y arcos:

a) $\theta = 0°$ b) $\alpha = \frac{\pi}{2}$ rad. c) $\theta = 180°$

d) $\alpha = -\frac{3\pi}{2}$ rad. e) $\theta = 450°$ f) $\pi\alpha = -3\pi$ rad.

SOLUCIÓN

Dibujemos para cada caso la circunferencia unitaria, el ángulo o arco correspondiente y determinemos el punto trigonométrico asociado a cada uno.

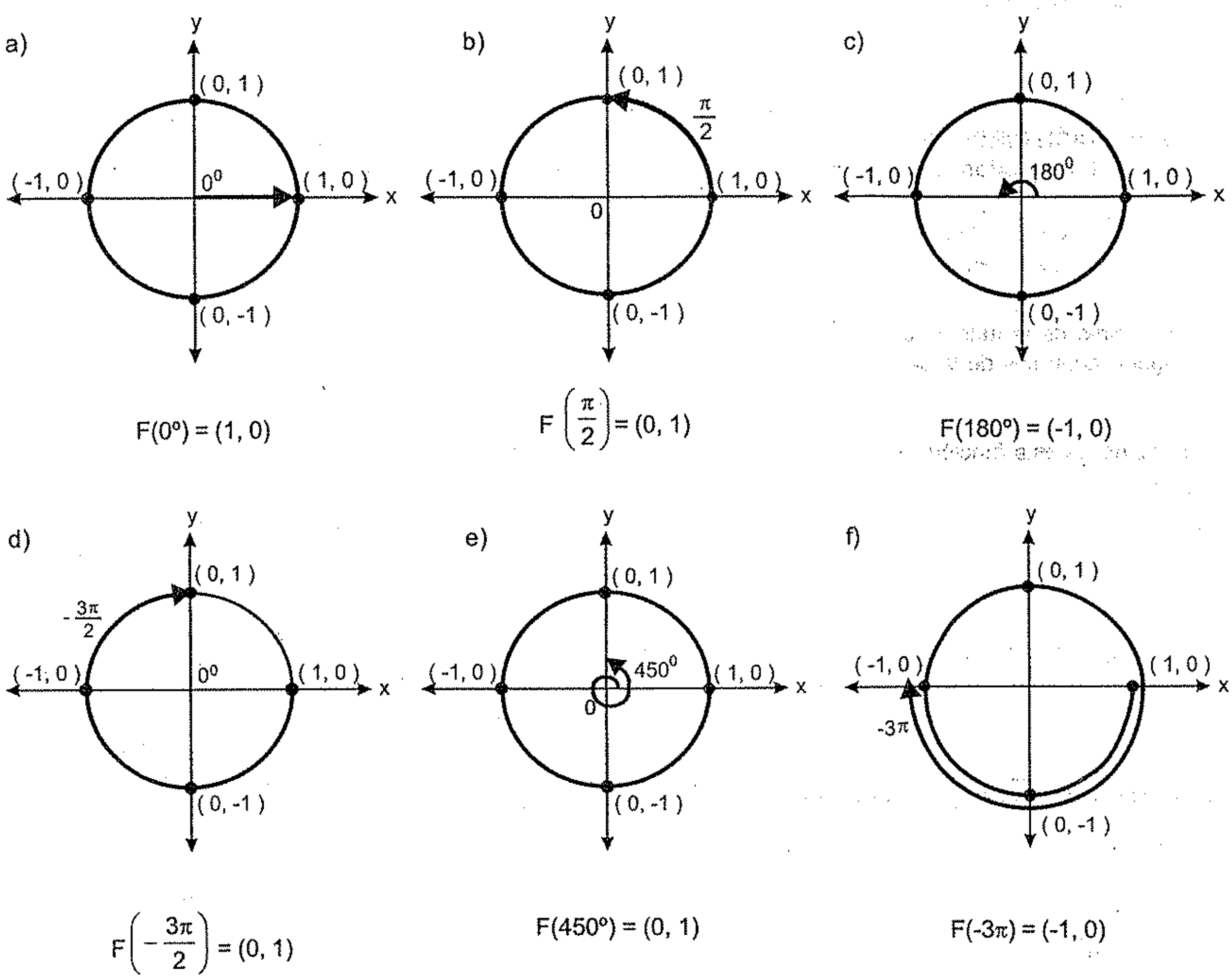


Figura 5-12

ATENCIÓN

1. Si el ángulo es mayor de 360°, entonces seguimos dando vueltas hasta completar el ángulo deseado. Esto significa que podemos definir la función circular para ángulos mayores de 360°; sin embargo, cuando esto ocurre los puntos trigonométricos asociados se repiten; figura 4-13.

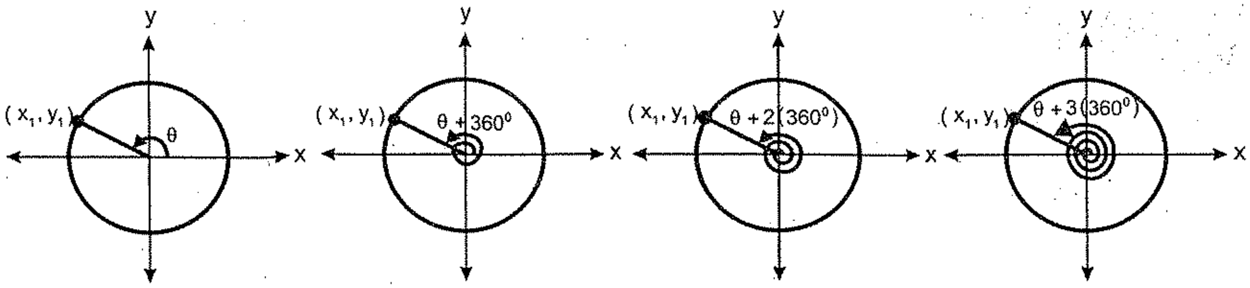


Figura 4-13

2. En general, podemos establecer que para n = 1, 2, 3,... se cumple que:

$$\mathbf{F(\theta) = F\big(\theta + n\,(360^\circ)\big)}$$

Esto significa que la función circular se repite cada 360° o que es una función PERIÓDICA, con período igual a 360°.

LA FUNCIÓN CIRCULAR es PERIÓDICA y su período es 360° (ó 2π radianes) ya que para cualquier ángulo θ en grados (o α en radianes) y cualquier entero n se cumple que:

$$\mathbf{F(\theta) = F(\theta + 360^\circ \bullet n) \quad o \quad F(\alpha) = F(\alpha + 2\pi \bullet n)}$$

3. El dominio de la función circular es el conjunto de los números reales, correspondiente a la medida de los ángulos centrales de la circunferencia unitaria; es decir:

$$\mathbf{D_f = R}$$

El rango de esta función es el conjunto P de los puntos trigonométricos; es decir:

$$\mathbf{I_f = P = \{(x,y) \,/\, x^2 + y^2 = 1\}}$$

EJERCICIO 4.2

En los ejercicios 1 a 12, hallar las imágenes indicadas de acuerdo con la función circular.

1 $F(-\pi)$	2 $F(360^\circ)$	3 $F(7\pi)$	4 $F(270^\circ)$
5 $F(-5\pi)$	6 $F(1.080^\circ)$	7 $F(0)$	8 $F(90^\circ)$
9 $F(-1.440^\circ)$	10 $F(100\pi)$	11 $F(450^\circ)$	12 $F(2\pi n),\ n \in N$

En los ejercicios 13 a 18 aplica la definición de función circular y encontrar el valor del ángulo (θ) o del arco (α) que corresponde al punto trigonométrico dado.

13 $(0, 1)$ con $0 \le \alpha \le 2\pi$	14 $(-1, 0)$ con $360^\circ \le \theta \le 720^\circ$
15 $(-1, 0)$ con $-2\pi \le \alpha \le 0$	16 $(0, -1)$ con $-720^\circ \le \theta \le -360^\circ$
17 $(0, -1)$ con $10\pi \le \alpha \le 12\pi$	18 $(1, 0)$ con $0^\circ \le \theta$ 360°

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (10)

Un fabricante va a producir cajas con tapa de 10 dm^3 de volumen; su base es un rectángulo cuyo largo es igual al triple del ancho. Si llamamos x al ancho, se pide:

1. Hacer una representación gráfica del enunciado del problema.
2. Escribir una expresión, en función de x, que permita calcular el costo de cada caja.
3. Dibujar con el DERIVE la gráfica de la función obtenida en el punto anterior y determinar un valor aproximado de x para el cual el costo del tanque es mínimo.

4.4 LAS FUNCIONES SENO Y COSENO

Experiencia

- En la práctica resulta difícil trabajar con la función circular $F(\theta) = (x, y)$. Por esta razón, vamos a definir dos nuevas funciones que reemplazan la anterior. Las dos nuevas funciones son:

1. $F_1(\theta) = y$......................F_1 asocia θ con y.

2. $F_2(\theta) = x$......................F_2 asocia θ con x.

- La función F_1 que asocia cada ángulo (ó arco) θ con la **y** del punto trigonométrico se denomina **SENO** y se representa así:

Sen $(\theta) = y$

y se lee así:

El Seno de θ es igual a y

- La función F_2 que asocia cada ángulo (ó arco) θ con la **x** del punto trigonométrico se llama **COSENO** y se representa así:

Cos $(\theta) = x$

y se lee así:

El Coseno de θ es igual a x

- La figura 5-14 nos muestra la representación geométrica en la circunferencia unitaria de estas dos nuevas funciones:

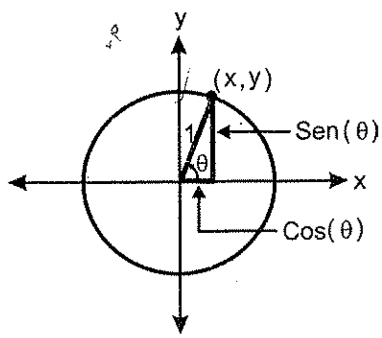


Figura 4-14

- La siguiente tabla muestra los resultados de las funciones Seno y Coseno para algunos valores dados de θ y de α.

90° π 270° 2π

	θ	0°	$\frac{\pi}{2}$	180°	$\frac{3\pi}{2}$	360°	-90°	-3π	630°
x	Cos (θ)	1	0	-1	0	1	0	-1	0
y	Sen (θ)	0	1	0	-1	0	-1	0	-1

Tabla 4-1

- Las funciones SENO y COSENO se llaman comúnmente FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS.

4.5 LA FUNCIÓN TANGENTE

Experiencia

- Además de las funciones básicas Seno y Coseno existe otra función trigonométrica fundamental: La función TANGENTE. Esta función hace corresponder cada ángulo (o arco) θ con el cociente $\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{x}}$ de las coordenadas del punto trigonométrico correspondiente al ángulo θ; es decir:

$$\text{Tan}(\theta) = \frac{y}{x}, \text{ con } x \neq 0$$

y leemos:

La Tangente de θ es igual a $\frac{y}{x}$, con x ≠ 0

- La tabla 4-2 muestra los valores de las tres funciones trigonométricas para algunos ángulos (o arcos):

Sen (θ) = y	Cos (θ) = x	Tan (θ) = $\frac{y}{x}$
Sen (0°) = 0	Cos (0°) = 1	Tan (0°) = $\frac{0}{1}$ = 0
Sen $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ = 1	Cos $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ = 0	Tan $\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{0}$: No está definida
Sen (180°) = 0	Cos (180°) = -1	Tan (180°) = $-\frac{0}{1}$ = 0
Sen $\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$ = 1	Cos $\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$ = 0	Tan $\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{1}{0}$: No está definida

Tabla 4-2

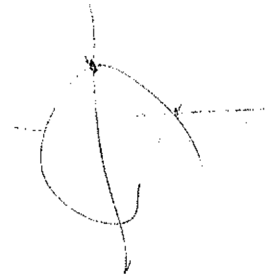
PARA CONSULTAR:

1. ¿Cuáles son el dominio y el rango de las funciones SENO, COSENO y TANGENTE?
2. Explica si es verdadera o falsa la siguiente relación entre las funciones Seno, Coseno y Tangente:

$$\text{Tan}(\theta) = \frac{\text{Sen}(\theta)}{\text{Cos}(\theta)}$$

EJERCICIO 4.3

Hallar el valor de las siguientes funciones (no use calculadora).



1. Sen $(-\pi)$	2. Cos (7π)	3. Sen $\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$
4. Sen (-2π)	5. Cos $(-\pi)$	6. Tan (-2π)
7. Tan (3π)	8. Cos (-3π)	9. Tan $(-\pi)$
10. Sen (-3π)	11. Cos (12π)	12. Tan $\left(\frac{3\pi}{2}\right)$
13. Sen(90°)	14. Cos(180°)	15. Tan(-90°)
16. Sen(-270°)	17. Cos(1.080°)	18. Tan(-720°)
19. Cos(90°)	20. Sen(180°)	21. Tan(180°)

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (11)

Un automóvil que se desplaza a una velocidad de 30 pies/seg. se aproxima a una intersección. En el momento en que el automóvil se encuentra a 120 pies de la intersección, un camión que viaja a razón de 40 pies/seg cruza dicha intersección. El automóvil y el camión se encuentran en caminos que forman un ángulo recto. Se pide:

1.. Hacer una representación gráfica del enunciado del problema.
2. Escribir una expresión para indicar la distancia que separa los vehículos t segundos después de que el camión cruzó por la intersección.
3. Calcular la distancia que separa los vehículos 1.44 segundos después de que el camión cruzó por la intersección.

4.6 DEFINICIÓN DE SENO, COSENO Y TANGENTE EN CIRCUNFERENCIAS DE RADIO DISTINTO DE 1

Experiencia

- En la mayoría de los problemas, las funciones trigonométricas se aplican en circunferencias cuyo radio es un número positivo cualquiera.
- Consideremos, pues, dos circunferencias concéntricas: Una de radio 1 y la otra de radio R≠1:

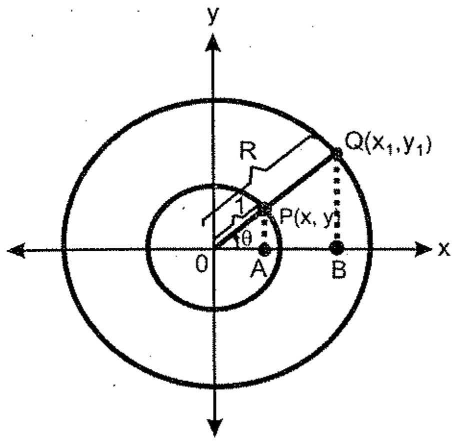


Figura 4-15

- Queremos definir las funciones trigonométricas del ángulo θ en la circunferencia de radio R y mostrar que tales definiciones son equivalentes a las que dimos para la circunferencia unitaria. En la figura 4-15, tenemos:

1. $\Delta OAP \sim \Delta OBQ$ .... Por ser triángulos rectángulos que tienen un ángulo agudo común (θ)

2. $\therefore \dfrac{|\overline{QB}|}{|\overline{PA}|} = \dfrac{|\overline{OB}|}{|\overline{OA}|} = \dfrac{|\overline{OQ}|}{|\overline{OP}|}$ .... Si dos triángulos son semejantes, los lados homólogos son proporcionales.

3. Ahora bien:

$|\overline{QB}| = y_1$; $|\overline{PA}| = y$

$|\overline{OB}| = x_1$; $|\overline{OA}| = x$

$|\overline{OQ}| = R$; $|\overline{OP}| = 1$

4. Luego:

$\dfrac{y_1}{y} = \dfrac{x_1}{x} = \dfrac{R}{1}$ .... Reemplazamos 3. en 2.

5. Ahora, de estas tres razones tomemos parejas; así:

- $\dfrac{y_1}{y} = \dfrac{R}{1} \Rightarrow \dfrac{y_1}{R} = \dfrac{y}{1}$

$\Rightarrow \dfrac{y_1}{R} = y$

Pero, $y = \text{Sen}(\theta)$ .... ¿Por qué?

Luego, $\mathbf{\dfrac{y_1}{R} = Sen(\theta)}$

- $\dfrac{x_1}{x} = \dfrac{R}{1} \Rightarrow \dfrac{x_1}{R} = \dfrac{x}{1}$

$\Rightarrow \dfrac{x_1}{R} = x$

Pero, $x = \text{Cos}(\theta)$ .... ¿Por qué?

Luego, $\dfrac{\mathbf{x_1}}{\mathbf{R}} = \mathbf{Cos}(\theta)$

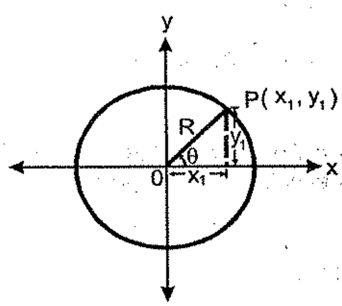
- $\dfrac{y_1}{y} = \dfrac{x_1}{x} \Rightarrow \dfrac{y_1}{x} = \dfrac{y}{x}$

Pero, $\dfrac{y}{x} = \text{Tan}(\theta)$ .... ¿Por qué?

Luego, $\dfrac{\mathbf{y_1}}{\mathbf{x_1}} = \mathbf{Tan}(\theta)$; con $x_1 \neq 0$

DEFINICIÓN DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Si (x_1, y_1) son las coordenadas de un punto de una circunferencia no unitaria de ecuación $x^2 + y^2 = R^2$, ubicado en el extremo del lado final de un ángulo θ, entonces las funciones trigonométricas de θ se definen así:



$$\textbf{Sen}(\theta) = \frac{\mathbf{y_1}}{\mathbf{R}} = \frac{\textbf{la "y" del punto}}{\textbf{Radio de la circunferencia}}$$

$$\textbf{Cos}(\theta) = \frac{\mathbf{x_1}}{\mathbf{R}} = \frac{\textbf{la "x" del punto}}{\textbf{Radio de la circunferencia}}$$

$$\textbf{Tan}(\theta) = \frac{\mathbf{y_1}}{\mathbf{x_1}} = \textbf{ ; con } \mathbf{x_1 \neq 0}$$

Ejemplo 1

Una circunferencia con centro en el origen pasa por el punto (3, -4). Encontrar los valores de las tres funciones trigonométricas del ángulo cuyo lado final contiene a dicho punto y es positivo.

SOLUCIÓN

- La figura 4-16 nos muestra el ángulo positivo θ cuyo lado final pasa por el punto (3, -4).

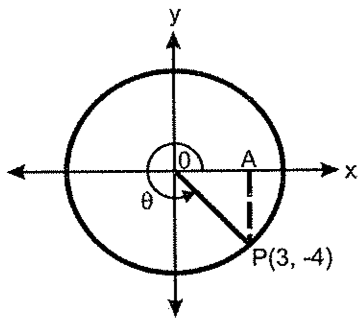


Figura 4-16

- Comprobemos que la circunferencia no es unitaria:

  $x^2 + y^2 = R^2$. .... Ecuación de una circunferencia con centro en el origen y radio R.

$\therefore 32 + (-4)^2 = R^2$ .... ¿Por qué?

$\therefore 9 + 16 = R^2$ .... ¿Por qué?

$\therefore R^2 = 25$

$\therefore R = 5$

Luego, la circunferencia tiene radio $5 \neq 1$.

- Finalmente, calculemos las funciones trigonométricas del ángulo θ; así:

$\text{Sen}\,\theta = \dfrac{y}{R} = \dfrac{-4}{5} = -\dfrac{4}{5}$; $\text{Cos}\,\theta = \dfrac{x}{R} = \dfrac{3}{5}$; $\text{Tan}\,\theta = \dfrac{y}{x} = \dfrac{-4}{3} = -\dfrac{4}{3}$

Ejemplo 2

Sabiendo que Sen (θ) $= \dfrac{2}{5}$ y $90° < \theta < 180°$; hallar las otras dos funciones trigonométricas.

SOLUCIÓN

- Como $\text{Sen}(\theta) = \dfrac{y}{R}$ y $\text{Sen}(\theta) = \dfrac{2}{5}$, entonces podemos concluir que: $\dfrac{y}{R} = \dfrac{2}{5}$ y que: $5y = 2R$
- Como R puede ser cualquier número real positivo, si R=10, entonces y=4; si R=5 entonces y=2, etc.
- Ahora dibujamos una circunferencia con centro en el origen y radio 5, marcamos un punto P, en el segundo cuadrante, cuya segunda componente sea y = 2 y calculamos el valor de la **x**; figura 4-17.

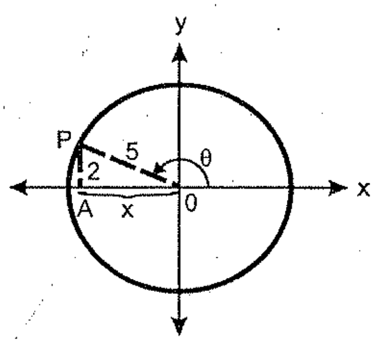


Figura 4-17

En el ΔOAP: $x^2 = 5^2 - 2^2$ .... Teorema de Pitágoras

$\therefore x^2 = 21$ .... ¿Por qué?

$\therefore x = -\sqrt{21}$ .... Se toma (-) por estar en el II cuadrante

Por lo tanto: $\text{Cos}(\theta) = \dfrac{x}{R} = \dfrac{-\sqrt{21}}{5}$; $\text{Tan}(\theta) = \dfrac{y}{x} = \dfrac{2}{-\sqrt{21}} = \dfrac{-2\sqrt{21}}{21}$

4.7 SIGNOS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Experiencia

- Los ejes de coordenadas rectangulares dividen al plano en cuatro regiones iguales, llamadas CUADRANTES, que podemos ordenar viajando en sentido ANTIHORARIO, a partir del punto A; figura 4-18:

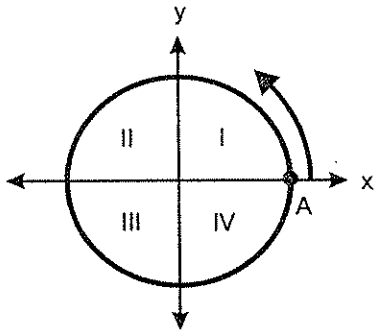


Figura 4-18

- Las funciones trigonométricas cambian de signo según el cuadrante en el cual se les considere, porque dependen de los signos de **x** y **y** (ya que R siempre es positivo).
- Si miramos la circunferencia de la figura 4-18, concluimos que **y** toma valores positivos en los cuadrantes I y II, y valores negativos en los cuadrantes III y IV. Como $\text{Sen}(\theta)=\frac{y}{R}$ entonces Sen(θ) es positivo en I y II y negativo en III y IV. En la misma forma se deducen los signos de las otras funciones.
- La tabla 5-3 muestra los signos de las tres funciones ya estudiadas.

SIGNOS DE LAS FUNCIONES

CUADRANTE	SENO	COSENO	TANGENTE
I	+	+	+
II	+	-	-
III	-	-	+
IV	-	+	-

Tabla 4-3

- No es necesario memorizar esta tabla ya que el signo de cada función se obtiene a partir de las coordenadas.

4.8 LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS EN EL TRIÁNGULO RECTÁNGULO

Experiencia

- Históricamente, la trigonometría se desarrolló con el fin de relacionar los lados y ángulos de un triángulo (tri = tres; gonos = ángulo; metron = medida) y resolver problemas concretos de astronomía y navegación.

- A continuación definiremos las funciones Seno, Coseno y Tangente de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo. Es fácil comprobar que estas definiciones son perfectamente coherentes con las ya elaboradas anteriormente:

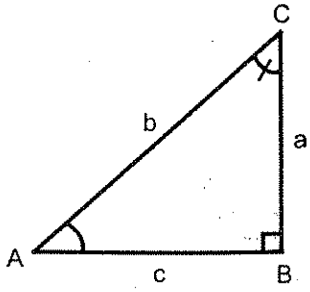


Figura 4-19

$$\text{Sen}(A) = \frac{a}{b} = \frac{\text{cateto opuesto al ángulo}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{Cos}(A) = \frac{c}{b} = \frac{\text{cateto adyacente al ángulo}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{Tan}(A) = \frac{a}{c} = \frac{\text{cateto opuesto al ángulo}}{\text{cateto adyacente al ángulo}}$$

¿Cuáles son las funciones del ángulo C?

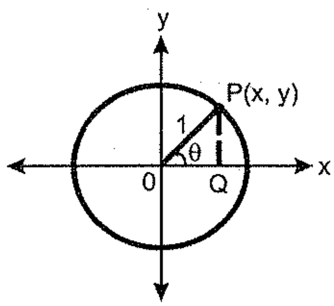
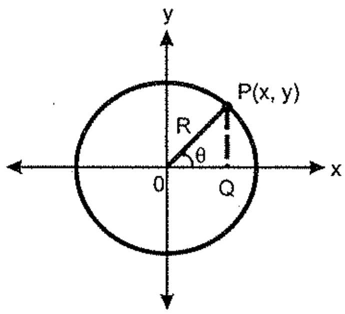
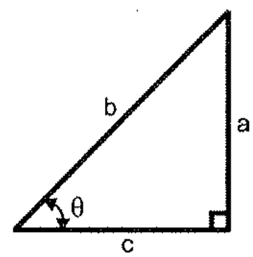
RESUMEN		
LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS		
CIRCUNFERENCIA UNITARIA	CIRCUNFERENCIA NO UNITARIA	TRIÁNGULO RECTÁNGULO
		
$\text{Sen}(\theta) = y$ $\text{Cos}(\theta) = x$ $\text{Tan}(\theta) = \frac{y}{x}\ ;\ x \neq 0$	$\text{Sen}(\theta) = \frac{y}{R}$ $\text{Cos}(\theta) = \frac{x}{R}$ $\text{Tan}(\theta) = \frac{y}{x}\ ;\ x \neq 0$	$\text{Sen}(\theta) = \frac{a}{b} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$ $\text{Cos}(\theta) = \frac{c}{b} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$ $\text{Tan}(\theta) = \frac{a}{c} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$

Figura 4-20

EJERCICIO 4.4

En los ejercicios 1 a 6, hallar el valor de las funciones Sen(θ), Cos(θ) y Tan(θ) del ángulo en posición normal, cuyo lado final pasa por el punto cuyas coordenadas se indican. Simplificar la respuesta, si es posible.

1. P(-3,-4)
2. P(-5, -12)
3. P(-5, 5)
4. P(-9, 12)
5. P(15, -8)
6. P(-8, 0)

En los ejercicios 7 a 12 , θ es la medida de un ángulo en posición normal, cuyo lado final se encuentra en el cuadrante indicado para cada caso. En cada ejercicio se da el valor de una función; encontrar los valores de las dos funciones restantes y simplificar la respuesta, si es posible.

7. $\text{Sen}(\theta) = -\frac{4}{5}$, en el III cuadrante

8. $\text{Cos}(\theta) = -\frac{8}{10}$, en el II cuadrante

9. $\text{Tan}(\theta) = \frac{5}{4}$, en el III cuadrante.

10. $\text{Cos}(\theta) = \frac{12}{13}$, en el I cuadrante.

11. $\text{Cos}(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, en el IV cuadrante.

12. $\text{Tan}(\theta) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, en el II cuadrante.

13. Indicar en qué cuadrante o cuadrantes son positivos los valores de las funciones Sen(θ), Cos(θ) y Tan(θ).

14. ¿Hay un cuadrante en el que los valores de Sen(θ), Cos(θ) y Tan(θ) sean todos negativos?

15. Explicar por qué los valores de Sen(θ) y Cos(θ) no pueden ser mayores que 1 ni menores que -1.

16. Explicar por qué la función Tan (θ) no está definida cuando θ es un múltiplo impar de 90º.

17. Si Tan(θ) = m, con θ en el I cuadrante θ, hallar Sen(θ) y Cos(θ) .

18. Si $\text{Cos}(\theta) = \frac{(a+b)\sqrt{2(a^2+b^2)}}{2(a^2+b^2)}$, con θ en el I cuadrante, hallar Sen(θ) y Tan(θ).

19. Si $\text{Cos}(\theta) = \frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}$, con θ en el I cuadrante y m, n $\in R^+$, hallar Sen(θ) y Tan(θ).

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (12)

Un pescador ubicado en un puente que tiene 20 pies de altura sobre el agua, recobra hilo a una velocidad constante. Si y es la medida del hilo, en un momento dado, y q es la medida del ángulo formado por el hilo con la superficie del agua, en un instante dado, se pide:

1. Hacer una representación gráfica del problema.
2. Escribir una ecuación que permita determinar la longitud del hilo, en función del ángulo q.
3. Hallar la medida del ángulo q correspondiente a una longitud del hilo de 30 pies.

Taller de la Unidad 4

1. **FALSO o VERDADERO**
   Responder FALSO o VERDADERO a cada una de las siguientes proposiciones. Justificar las respuestas falsas.

   a) Si f es la función circular y f(θ) = (x, y) entonces, f (θ + $2n\pi$)= (x, y), con n $\in$ N

   b) El punto $P\left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$ pertenece a la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$.

   c) Existe un $\alpha \in R$ tal que Sen(α) = -0.3

   d) Existe un $\alpha \in R$ tal que $\text{Cos}(\alpha) = -\frac{5}{4}$

   e) El dominio de la función Tan(α) es todo R

f) El rango de la función Sen(α) es todo R

g) Existe un $\alpha \in$ R tal que Tan(α) no existe.

h) La función circular sólo está definida para ángulos o arcos positivos.

i) Existe un ángulo α para el cual Tan(α)= -3

j) Si Tan(α) > 0 y Cos (α) < 0 entonces Sen(α)< 0.

En los ejercicios **2.** a **10.** señalar la respuesta correcta.

2. Una de las siguientes afirmaciones es verdadera:

a) La función circular es periódica y su período es π.

b) La función circular asocia puntos de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ con arcos de la misma, medidos a partir del punto (1, 0).

c) El rango de la función circular es: $\{ (x,y) / x^2 + y^2 = 1 \}$

d) La función circular sólo está definida para arcos tales que $0 \leq \alpha \leq 2\pi$

3. La imagen que le corresponde al arco $\alpha = -\dfrac{7\pi}{2}$ mediante la función circular es:

a) (0, -1) b) (1, 0) c) (-1, 0) d) (0, 1)

4. El valor de la expresión $\left(\text{Sen}\left(\dfrac{7\pi}{2}\right) + \text{Cos}\left(+\dfrac{\pi}{2}\right) + \text{Tan}\,(\pi)\right) \div \text{Cos}\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$ es:

a) 1 b) 0 c) -1 d) No existe

5. El valor en grados de $\dfrac{11\pi}{3}$ es:

a) 720° b) 600° c) 630° d) 660°

6. Si Sen (θ) y Cos (θ) son negativos, entonces el lado final de θ está en el:

a) III cuadrante b) II cuadrante c) I cuadrante d) IV cuadrante

7. El valor en radianes de (-1440°) es:

a) -8π b) -16π c) -4π d) 24π

8. Si Cos (α) = 1 - m^2, entonces Sen(α) es:

a) $m\sqrt{2 + m^2}$ b) m c) $m\sqrt{2 - m^2}$ d) $m\sqrt{m^2 - 2}$

9. Cuando el minutero de un reloj recorre 20 minutos después de las 12, ha recorrido un ángulo de:

a) 75° b) 120° c) 60° d) 30°

10. Si Tan(α) = m, entonces Cos(α) es:

a) $\dfrac{\sqrt{m^2 + 1}}{m^2 + 1}$ b) $m^2 + 1$ c) $\sqrt{m^2 + 1}$ d) $\dfrac{1}{m^2 + 1}$

En los ejercicios **11.** a **16.**, hallar la medida en radianes que corresponde a la medida dada en grados:

11. 150° **12.** -60° **13.** 225°

14. 450° **15.** 72° **16.** 100°

En los ejercicios **17** a **22**, hallar la medida en grados que corresponde a la medida dada en radianes:

17. $2\pi/3$ **18.** $11\pi/6$

19. $3\pi/4$ **20.** $-7\pi/2$

21. 7π **22.** $\pi/9$

23. Hallar el valor de las otras funciones trigonométricas del ángulo θ, sabiendo que

$$\text{Sen } \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{, donde } a^2 + b^2 \neq 0.$$

24. ¿Existe un número real θ para el cual 5 Sen (θ) = 12? ¿Por qué?

25. ¿Existe un número real θ para el cual 2 Cos (θ) - 2 = 0? ¿Por qué?

26. ¿En cuál cuadrante se halla el ángulo θ si Cos (θ) > 0 y Tan (θ) > 0? ¿Por qué?

Prepárate para las Pruebas ICFES

En cada uno de los siguientes ejercicios, escoja la letra correspondiente a la única respuesta correcta:

1. Un pueblo tiene 2500 habitantes, el 60% de los cuales votó en una elección de concejales. Los resultados fueron: de los votantes, el 38% votó por P, el 32% por S y el 30% por R. Por lo tanto, P ganó. El número de habitantes que votó por P fue:

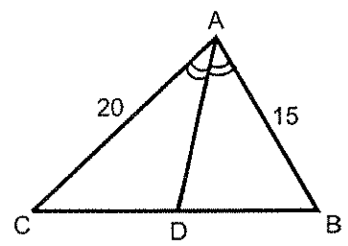
   a) 540 b) 570 c) 1250 d) 950

2. Una barra de dimensiones 2 cm x 3 cm x 4 cm se funde para formar tres cubos de igual volumen. La longitud del lado de cada cubo es:

   a) 1 cm b) 2 cm c) 3 cm d) 4 cm

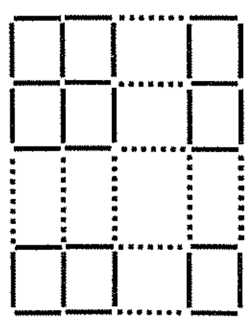
3. Si $\overline{AD}$ es la bisectriz del ángulo A y $|\overline{CB}|$ = 14 cm, entonces las longitudes de los segmentos $\overline{CD}$ y $\overline{DB}$ son respectivamente:

   a) 8 cm y 6 cm b) 9 cm y 5 cm
   c) 10 cm y 4 cm d) 12 cm y 2 cm



4. Se usan palillos de igual longitud para construir una red rectangular tal como muestra la figura. Si la red tiene 20 palillos de altura y 10 palillos de ancho, entonces el número de palillos que se usaron en su construcción es:

   a) 200 b) 410
   c) 420 d) 430



5. Las expresión general de un polinomio de grado n es: $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$. Si tenemos en cuenta las siguientes condiciones: $a_0 = 0$, $n = 4$, $a_n = 8$, $a_{n-1} = 2 - a_n$, el polinomio es:

a) $P(x) = x + 4x^3 + x^2 + 8x^4$

b) $P(x) = 2x + 4x^2 - 6x^3 + 8x^4$

c) $P(x) = x + 3x^2 + 5x^3 + 7x^4$

d) $P(x) = 1 + x^2 + 8x^4$

Núcleo Temático

5

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE CUALQUIER ÁNGULO

LOGRO GENERAL

- Determinar los valores de las funciones trigonométricas de cualquier ángulo mayor de 360° y menor de 0°.

D I M E N S I O N E S

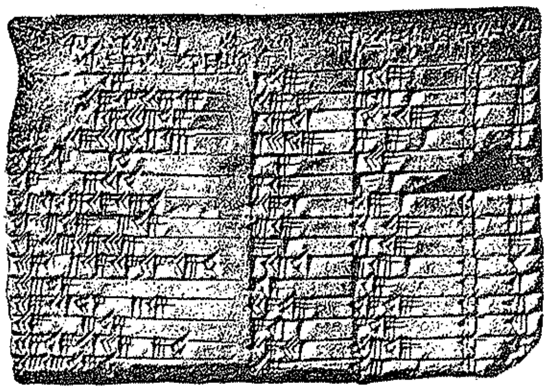
LOGROS ESPECÍFICOS	INDICADORES DE LOGRO
Corporal: • Manipular la calculadora para hallar las funciones trigonométricas de un ángulo dado.	• Adquiere destreza en el manejo de la calculadora para hallar las funciones trigonométricas de cualquier ángulo.
Comunicativa: • Explicar con claridad y ante sus compañeros la utilización de la calculadora para hallar funciones trigonométricas de un ángulo.	• Dado un ángulo cualquiera, describe el procedimiento para hallar sus funciones trigonométricas utilizando la calculadora.
Cognitiva: • Determinar geométricamente las funciones trigonométricas de los ángulos notables (30°, 45° y 60°) y sus "familiares". • Hallar los valores de las funciones trigonométricas de cualquier ángulo mayor de 90°. • Determinar la relación existente entre la función trigonométrica de un ángulo negativo con la función trigonométrica del mismo ángulo positivo.	• Utiliza las propiedades de los triángulos rectángulos de ángulos de 45°, de 30° y de 60° para calcular sus funciones trigonométricas. • A partir del concepto de ángulo de referencia, determina los valores de las funciones trigonométricas de cualquier ángulo. • Utiliza la congruencia de triángulos para relacionar las funciones trigonométricas de un ángulo negativo con las de un ángulo positivo. • Resuelve problemas propuestos en el texto u otros planteados en talleres.
Estética: • Utilizar las propiedades de la congruencia de triángulos y de los triángulos rectángulos especiales para determinar las funciones trigonométricas de algunos ángulos.	• Utiliza los casos de congruencia de triángulos y las escuadras para deducir las funciones trigonométricas de algunos ángulos.
Ética - Actitudinal: • Contribuir a crear y mantener un ambiente de armonía dentro de su grupo.	• Participa activamente en la construcción y mantenimiento de un ambiente de armonía con sus compañeros de grupo.

E V A L U A C I Ó N

E S T R A T E G I A S   M E T O D O L Ó G I C A S

5.1 COMPRENSIÓN DE LECTURA: HISTORIA DE LA TRIGONOMETRÍA (2)

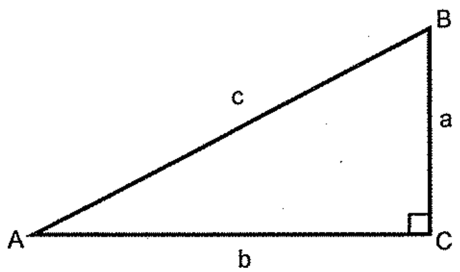
Lea atentamente el siguiente texto y luego subraye la letra correspondiente a la ÚNICA respuesta correcta en cada uno de los enunciados propuestos.



COLECCIÓN PLIMPTON
TABLILLA 322

La evidencia de un cierto conocimiento por parte de los babilonios de algunos elementos trigonométricos la encontramos en la tablilla 322 de la colección Plimpton de la Universidad de Columbia. La tablilla (ver foto) data del período babilónico antiguo (1900 a 1600 a.de C.) y es sólo una parte de una tablilla más grande, como se nota por la fractura a lo largo del borde izquierdo. La parte que se conserva contiene cuatro columnas de números distribuidos en quince filas horizontales. La columna del extremo derecho contiene los dígitos del uno al quince, y su finalidad parece ser sólo la de identificar el lugar en que figuran los números en las otras tres columnas, que están ordenadas así:

1,59,0,15	1,59	2,49	1
1,56,56,58,14,50,6,15	56,7	1,20,25	2
1,55,7,41,15,33,45	1,16,41	1,50,49	3
1,53,10,29,32,52,16	3,31,49	5,9,1	4
1,48,54,1,40	1,5	1,37	5
1,47,6,41,40	5,19	8,1	6
1,43,11,56,28,26,40	38,11	59,1	7
1,41,33,59,3,45	13,19	20,49	8
1,38,33,36,36	8,1	12,49	9
1,35,10,2,28,27,24,26,40	1,22,41	2,16,1	10
1,33,45	45,0	1,15,0	11
1,29,21,54,2,15	27,59	48,49	12
1,27,0,3,45	2,41	4,49	13
1,25,48,51,35,6,40	29,31	53,49	14
1,23,13,46,40	56	1,46	15



La tablilla no está en buenas condiciones como para que se puedan leer todos los números, pero una vez descubierto sin lugar a dudas el método de construcción de la tabla, ha sido posible reconstruir a partir del contexto los pocos números que faltan a causa de pequeñas fracturas. Los estudios han interpretado los datos de la tabla así: los números que aparecen en la segunda y tercera columnas (de izquierda a derecha) corresponden al cateto **a** e hipotenusa **c** de un triángulo rectángulo ABC; por lo tanto, la primera columna, es decir, la de la izquierda representa en cada caso el cuadrado de la razón de **c** a **b**. Así, pues, la columna del extremo izquierdo consiste en una tabla de los valores de Sec^2A, aunque esto no suponga, ni mucho menos, que los babilonios conocieran nuestro concepto de secante de un ángulo. De hecho, ni lo egipcios ni los babilonios dispusieron de una medida de ángulos en el sentido moderno del término.

1. Cuando se habla de "pequeñas fracturas" en la tablilla, el autor se refiere a:
   a. Borrones que impiden ver bien la información.
   b. Deterioro paulatino de la superficie de ese material.
   c. Fisuras que presenta en la cara en la cual están los escritos.
   d. Partículas minúsculas que le faltan al material que posee la Universidad de Columbia.

2. De los expresado en el texto se puede afirmar que:
   a. Egipcios y Babilonios manejaron la medida de los ángulos como se hace en nuestra época.
   b. Los Babilonios manejaron algunos elementos de la trigonometría.
   c. La Universidad de Columbia es una fuente de riqueza arqueológica.
   d. Los antiguos matemáticos babilónicos conocían el teorema de Pitágoras.

3. Los datos que contiene la tablilla 322: Era de vital importancia, en la construcción de una pirámide:
   a. Están siendo estudiados.
   b. Todavía están muy confusos.
   c. Ya fueron interpretados.
   d. No han podido ser ubicados en el tiempo.

4. Las siguientes afirmaciones son verdaderas, con excepción de:
   a. La interpretación del contenido ha sido posible gracias al buen estado de conservación.
   b. Cateto e hipotenusa de un triángulo rectángulo aparecen numerados en dos columnas de la tablilla.
   c. Una serie de números cardinales aparece en la última columna.
   d. La tablilla mencionada en el texto hace parte de una pieza mayor.

5. De la lectura anterior se puede inferir que:
   a. Los babilonios tuvieron un dominio profundo de la matemática.
   b. Los egipcios no fueron tan adelantados, en las ciencias, como los babilonios.
   c. El hombre siempre se ha preocupado por desentrañar los misterios de las ciencias.
   d. La matemática moderna reposa sobre sólidas bases plantadas por hombres de ciencia de la antigüedad.

5.2 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE 30°, 45°, 60°

- Hasta el momento hemos estudiado las funciones trigonométricas para los ángulos cuyo lado final coincide con alguno de los ejes coordenadas: 0°, 90°, 180°, 270°, 360°,...

  En esta unidad estudiaremos cómo hallar las funciones trigonométricas de cualquier ángulo. Comenzaremos con las funciones de 30°, 45° y 60°, llamados ÁNGULOS NOTABLES, ya que éstas (las funciones) podemos deducirlas geométricamente.

- Para facilitar la obtención de las funciones trigonométricas, recordemos las propiedades geométricas que cumplen los siguientes triángulos rectángulos:

  1) LOS TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS ISÓSCELES.
  2) LOS TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS CUYOS ÁNGULOS AGUDOS MIDEN 30° y 60°.

1) LOS TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS ISÓSCELES.

Experiencia

La geometría euclidiana nos enseña que un triángulo es isósceles cuando tiene al menos dos lados y dos ángulos congruentes. Si, además, el triángulo es rectángulo isósceles entonces sus catetos serán congruentes y sus ángulos agudos medirán 45° cada uno; figura 5-1.

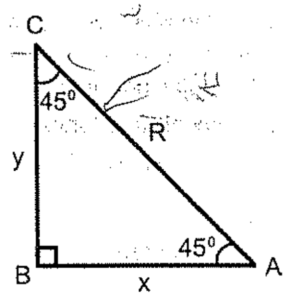
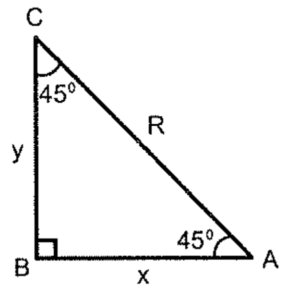


Figura 5-1

Ahora, demostremos que en cualquier triángulo rectángulo isósceles, la hipotenusa tiene una longitud igual a $\sqrt{2}$ veces la longitud de los catetos. Utilicemos la figura 5-1:

1. $|\overline{AC}|^2 = |\overline{AB}|^2 + |\overline{BC}|^2$ .... Teorema de Pitágoras

2. Pero:



$$\left.\begin{array}{l} |\overline{AC}| = R \\ |\overline{AB}| = x \\ |\overline{BC}| = y \end{array}\right\}$$ .... De la figura 5-1

3. Por lo tanto, $R^2 = x^2 + y^2$ .... Reemplazando 2. en 1.
4. Además, $x = y$ .... El ΔABC es isósceles.
5. Luego, $R^2 = x^2 + x^2$ .... ¿Por qué?
6. $\therefore R^2 = 2x^2$ .... ¿Por qué?
7. $\therefore R = \sqrt{2x^2}$ .... ¿Por qué?
8. $\therefore R = x\sqrt{2}$ .... ¿Por qué?

En todo triángulo rectángulo isósceles, la longitud de la hipotenusa es $\sqrt{2}$ veces la longitud de cualquiera de los catetos.

EJERCICIO 5.1

1. Los catetos de un triángulo rectángulo isósceles miden 7 cm, ¿cuánto mide la hipotenusa?

2. Demostrar que si la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles mide 1 m, entonces cada cateto mide $\frac{\sqrt{2}}{2}$ m.

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (13)

Un triángulo rectángulo tiene hipotenusa de longitud 13 cm y un cateto de longitud 5 cm. Se inscribe en este triángulo rectángulo un rectángulo que tiene un lado sobre la hipotenusa y los vértices del lado opuesto sobre los catetos. Si llamamos x la longitud del lado que está sobre la hipotenusa, se pide:

1. Dibujar una figura que interprete adecuadamente el enunciado del problema.
2. Escribir una función, en términos de x, para calcular el área del rectángulo.

2) TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS DE ÁNGULOS AGUDOS 30° Y 60°.

Para recordar la relación existente entre los lados y los ángulos de un triángulo rectángulo cuyos ángulos miden 300 y 600, realicemos la siguiente experiencia:

Experiencia

1. Observemos los triángulos de la figura 5-2

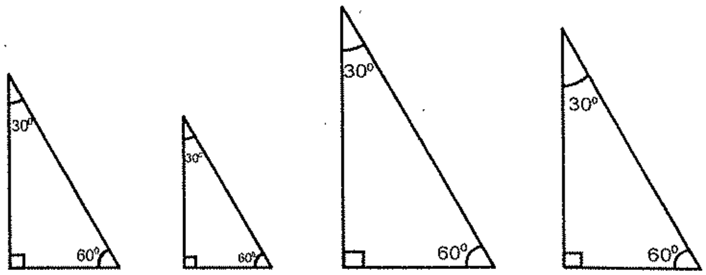


Figura 5-2

2. Midamos la hipotenusa y el cateto opuesto al ángulo de 30°
3. ¿Cómo es la longitud del cateto opuesto al ángulo de 30° con relación a la longitud de la hipotenusa?

En cualquier triángulo rectángulo cuyos ángulos agudos miden 30° y 60°, se cumple que el cateto opuesto al ángulo de 30° mide la MITAD de la hipotenusa.

4. Para determinar la relación entre la hipotenusa y el cateto opuesto al ángulo de 60°, usemos la figura 5-3.

Tenemos:

$|\overline{AC}|^2 = |\overline{AB}|^2 + |\overline{BC}|^2$ .... Teorema de Pitágoras

$\therefore |\overline{AB}|^2 = |\overline{AC}|^2 - |\overline{BC}|^2$ .... ¿Por qué?

$\therefore |\overline{AB}|^2 = |\overline{AC}|^2 - \left(\frac{1}{2}|\overline{AC}|\right)^2$ .... Ya que $|\overline{BC}| = \frac{1}{2}|\overline{AC}|$

$\therefore |\overline{AB}|^2 = |\overline{AC}|^2 - \frac{1}{4}|\overline{AC}|^2$ .... ¿Por qué?

$\therefore |\overline{AB}|^2 = \frac{3}{4}|\overline{AC}|^2$ .... ¿Por qué?

$\therefore |\overline{AB}| = \sqrt{\frac{3}{4}|\overline{AC}|^2}$ .... ¿Por qué?

$\therefore |\overline{AB}| = \frac{\sqrt{3}}{2}|\overline{AC}|$ .... ¿Por qué?

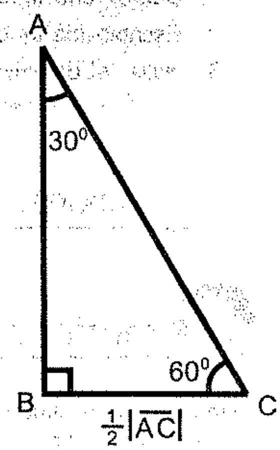


Figura 5-3

En cualquier triángulo rectángulo cuyos ángulos agudos miden 30° y 60°, se cumple que el cateto opuesto al ángulo de 60° mide $\frac{\sqrt{3}}{2}$ veces la longitud de la hipotenusa.

EJERCICIO 5.2

1. ¿Cuánto miden los catetos de un triángulo rectángulo cuyos ángulos agudos miden 30° y 60°, sabiendo que su hipotenusa mide 12 cm?

2. De acuerdo con la figura 5-4, ¿cuánto miden **y** y **h**?

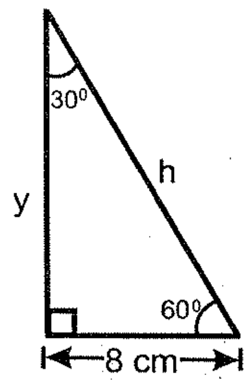


Figura 5-4

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (14)

Una página debe contener 60 cm^2 de material impreso, las márgenes de cada lado deben ser 5 cm cada una y la superior e inferior de 3 cm cada una. Si llamamos x el ancho de la parte impresa, se pide:

1. Dibujar una figura que interprete adecuadamente el enunciado del problema.
2. Escribir una función, en términos de x, para calcular el área de la página.
3. Hallar el dominio de la función obtenida donde el problema tiene senido

5.2.1 Funciones Trigonométricas de 60°

Experiencia

- Tracemos una circunferencia unitaria con centro en el origen y dibujemos un ángulo positivo en posición normal de 60°; figura 5-5:

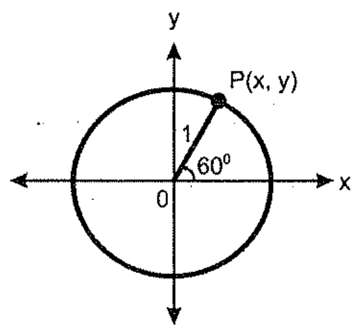


Figura 6-5

- Para hallar las funciones trigonométricas de 60° debemos encontrar las coordenadas (x, y) del punto P, ya que:

$$\text{Sen}(60^\circ) = \text{valor de la } \mathbf{y}$$

$$\text{Cos}(60^\circ) = \text{valor de la } \mathbf{x}$$

$$\text{Tan}\left(60^0\right) = \frac{\text{valor de la y}}{\text{valor de la x}}$$

- Ahora tracemos la distancia desde el punto P a los ejes coordenados (figura 5-6), formándose así el triángulo rectángulo OQP cuyos ángulos agudos miden 30° y 60° y en el cual:

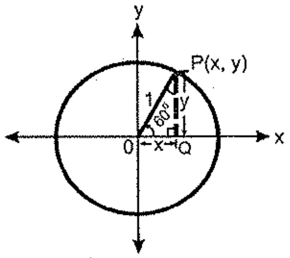


Figura 5-6

$|\overline{PQ}|$ = cateto opuesto al ángulo de 60° = y

$|\overline{OQ}|$ = cateto opuesto al ángulo de 30° = x

$|\overline{OP}|$ = hipotenusa = 1

- Por lo tanto, de acuerdo con lo que repasamos antes, concluimos que:

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

- En consecuencia:

$$\boxed{\mathbf{Sen(60^\circ) = y = \frac{\sqrt{3}}{2}}\ ; \quad \mathbf{Cos(60^\circ) = x = \frac{1}{2}}\ ; \quad \mathbf{Tan(60^\circ) = \frac{y}{x} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}}}$$

5.2.2 Funciones Trigonométricas de 30°

Experiencia

- Tracemos una circunferencia unitaria con centro en el origen y dibujemos un ángulo positivo en posición normal de 30°; figura 5-7(a):

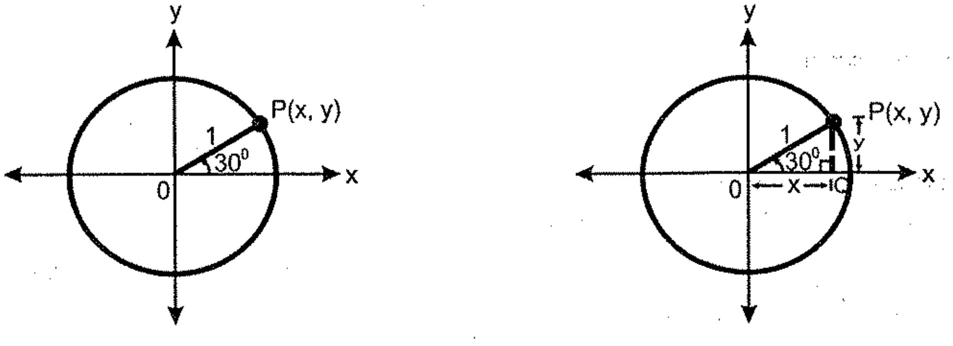


Figura 5-7

- Para hallar las funciones trigonométricas de 30°, basta determinar las coordenadas del punto P(x, y) correspondiente a este ángulo. Tracemos las distancias de P a los ejes coordenadas. El triángulo OQP es rectángulo y de nuevo sus ángulos agudos son de 30° y 60°; figura 5-7(b):
- Por lo tanto:

$$y = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} \quad ; \quad x = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

- En consecuencia:

$$\textbf{Sen}(30^\circ) = y = \frac{1}{2}; \quad \textbf{Cos}(30^\circ) = x = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \textbf{Tan}(30^\circ) = \frac{y}{x} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

ATENCIÓN

1. Notemos que las coordenadas del punto correspondiente a 60° son las inversas de las correspondientes a 30°; por lo tanto:

$$\text{Sen}(30^\circ) = \text{Cos}(60^\circ) \quad ; \quad \text{Cos}(30^\circ) = \text{Sen}(60^\circ)$$

2. Más adelante demostraremos que esta propiedad se cumple siempre que dos ángulos sean complementarios, es decir, que el Seno de un ángulo es igual al Coseno de su complementario y viceversa.

5.2.3 Funciones Trigonométricas de 45°

Experiencia

- Si trazamos un ángulo positivo en posición normal de 45°, entonces podemos construir un triángulo rectángulo isósceles, donde x = y y la hipotenusa mide 1; figura 5-8:

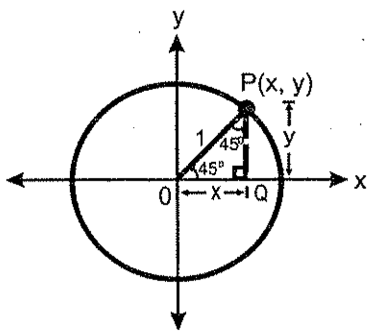


Figura 5-8

- Por lo tanto, de acuerdo con el repaso que hicimos al principio de esta unidad, tenemos que:

$$x = y = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

- En consecuencia:

$$\textbf{Sen}(45^\circ) = y = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \textbf{Cos}(45^\circ) = x = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \textbf{Tan}(45^\circ) = \frac{y}{x} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

RESUMEN

- La figura 5-9 y la tabla 5-1 nos resumen las funciones trigonométricas de los ángulos especiales (30^0, 45^0 y 60^0).

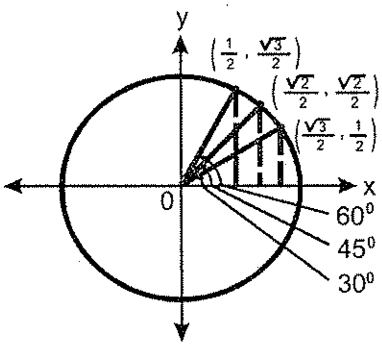


Figura 5-9

	SENO	COSENO	TANGENTE
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

Tabla 5-1

EJERCICIO 5.3

1. Sin usar calculadora, hallar el resultado de las siguientes expresiones:

a) Sen(30°) - Cos(60°)

b) Sen(45°) + Tan(60°)

c) $\dfrac{\text{Tan}\left(60^0\right) + \text{Cos}\left(30^0\right)}{\text{Tan}\left(45^0\right)} + \dfrac{\text{Tan}\left(30^0\right) - \text{Sen}\left(30^0\right)}{\text{Cos}\left(60^0\right)}$

d) $\text{Tan}(45°) + \dfrac{\left[\text{Sen}\left(60^0\right)\right] \cdot \left[\text{Cos}\left(60^0\right)\right]}{\text{Tan}\left(30^0\right)}$

2. Comprobar si las siguientes igualdades son verdaderas o falsas, reemplazando θ por 30°. No use calculadora.

a) $\dfrac{1}{\text{Sen}(\theta)} + \dfrac{\text{Cos}(\theta)}{\text{Sen}(\theta)} = \dfrac{\text{Sen}(\theta)}{1 - \text{Cos}(\theta)}$

b) $\text{Tan}(\theta) \cdot \text{Sen}(\theta) = \dfrac{1}{\text{Cos}(\theta)} - \text{Cos}(\theta)$

c) $4\ \text{Sen}(\theta) = 2$

d) $\dfrac{1 - \text{Tan}(\theta)}{1 + \text{Tan}(\theta)} = \dfrac{\text{Cos}(\theta) - \text{Sen}(\theta)}{\text{Cos}(\theta) + \text{Sen}(\theta)}$

e) $\text{Sen}^2(\theta) + \text{Cos}^2(\theta) = 1$

f) $1 + \text{Tan}^2(\theta) = \text{Sec}^2(\theta)$

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (15)

Un rectángulo de perímetro igual a 16 cm se gira alrededor de uno de sus lados para formar un cilindro. Si llamamos x el lado alrededor del cual se gira, se pide:

1. Dibujar una figura que interprete adecuadamente el enunciado del problema.
2. Escribir una ecuación, en función de x, para calcular el volumen del cilindro.
3. Hallar el dominio de la función obtenida donde el problema tiene sentido.

5.3 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE CUALQUIER ÁNGULO

- En la sección anterior encontramos las funciones trigonométricas de algunos ángulos (30^0, 45^0, 60^0) aplicando criterios geométricos. Sin embargo, hay muchos ángulos como 19^0, 26^0, 38^0, 54^0 ,... cuyas funciones no podemos obtener por geometría.

- Para estos casos contamos con dos instrumentos muy útiles:
  1. Las tablas de funciones trigonométricas.
  2. Las calculadoras.

  Estudiemos el manejo de cada una.

1. TABLAS DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

- Existen tablas de funciones trigonométricas con tanta exactitud como se quiera. Acá lo que más nos interesa es el procedimiento y por eso presentamos una tabla, sin fracciones de grado, al final del texto. Recomendamos al alumno tomar una fotocopia a esta tabla de manera que pueda tenerla a la mano en caso de necesidad.
- Para usar la tabla basta localizar el valor del ángulo en la columna GRADOS o su valor correspondiente en RADIANES y leer el resultado debajo de la función cuyo valor se quiere conocer.

Ejemplo

$$\text{Sen}(45^\circ) = 0{,}707 \;\; ; \;\; \text{Tan}(79^\circ) = 5{,}145 \;\; ; \;\; \text{Cos}\left(\frac{\pi}{12}\right) = \text{Cos}\left(\frac{3{,}1416}{12}\right) = \text{Cos}(0{,}2618) = 0{,}966$$

- Pero surge una pregunta: ¿Cómo hallamos las funciones trigonométricas de ángulos mayores de 90°, que no aparecen en la tabla?

  Para responder a esta pregunta debemos conocer lo que es un ÁNGULO DE REFERENCIA.

ÁNGULO DE REFERENCIA

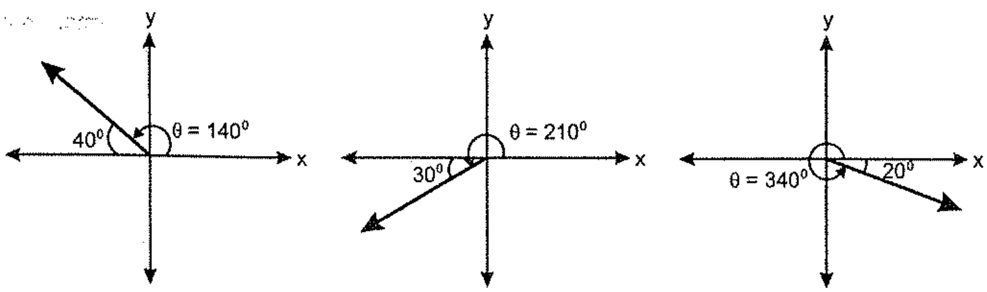
- Una vez conocidos los valores de las funciones trigonométricas de un ángulo en el primer cuadrante, que en adelante llamaremos ÁNGULO DE REFERENCIA, podemos conocer los valores de las funciones en los otros cuadrantes. Para lograr este objetivo, necesitamos hallar la relación entre el ángulo de referencia y el ángulo en posición normal cuyas funciones trigonométricas son numéricamente iguales pero que, por estar en otro cuadrante, pueden tener DISTINTOS SIGNOS.

DEFINICIÓN DE ÁNGULO DE REFERENCIA

Para todo ángulo θ en posición normal, el ÁNGULO DE REFERENCIA de θ, denotado θ_R, es el ángulo positivo, menor de 90°, formado por el lado final de θ y el eje x.

Ejemplo 1

- Observemos cuidadosamente la figura 5-10:



$\theta = 140^\circ$
θ_R de $140^\circ = 40^\circ$

$\theta = 210^\circ$
θ_R de $210^\circ = 30^\circ$

$\theta = 340^\circ$
θ_R de $340^\circ = 20^\circ$

Figura 5-10

- De la figura 5-10, podemos sacar conclusiones importantes:

a) Si el ángulo θ está en el II cuadrante, entonces $\theta_R = 180^o - \theta$
b) Si el ángulo θ está en el III cuadrante, entonces $\theta_R = \theta - 180^o$
c) Si el ángulo θ está en el IV cuadrante, entonces $\theta_R = 360^o - \theta$

RESUMEN

- La tabla 5-2 nos resume las conclusiones anteriores:

CUADRANTE	ÁNGULO DADO	ÁNGULO DE REFERENCIA
I	$0^o < \theta < 90^o$	$\theta_R = \theta$
II	$90^o < \theta < 180^o$	$\theta_R = 180^o - \theta$
III	$180^o < \theta < 270^o$	$\theta_R = \theta - 180^o$
IV	$270^o < \theta < 360^o$	$\theta_R = 360^o - \theta$

Tabla 5-2

Ejemplo 2

Hallemos las funciones trigonométricas de 225°

SOLUCIÓN

- Como el lado final de 225° está en el III cuadrante, entonces:

$$\theta_R = \theta - 180^o$$
$$\therefore \theta_R = 225^o - 180^o \text{ , Luego, } \quad \therefore \begin{cases} \text{Sen}\left(225^0\right) = -\text{Sen}\left(45^0\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{Cos}\left(225^0\right) = -\text{Cos}\left(45^0\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{Tan}\left(225^0\right) = \text{Tan}\left(45^0\right) = 1 \end{cases}$$
$$\therefore \theta_R = 45^o$$

- El Sen(225°) y el Cos(225°) son negativos ya que en el III cuadrante las funciones Seno y Coseno son negativas.

Ejemplo 3

Hallemos las funciones trigonométricas de 143°.

SOLUCIÓN

- Como el lado final de 143° está en el II Cuadrante, entonces:

$$\theta_R = 180^o - \theta$$
$$\therefore \theta_R = 180^o - 143^o \text{ , Luego, } \quad \therefore \begin{cases} \text{Sen}\left(143^0\right) = \text{Sen}\left(37^0\right) \\ \text{Cos}\left(143^0\right) = -\text{Cos}\left(37^0\right) \\ \text{Tan}\left(143^0\right) = -\text{Tan}\left(37^0\right) \end{cases}$$
$$\therefore \theta_R = 37^o$$

Ejemplo 4

Hallemos las funciones trigonométricas de 297°.

SOLUCIÓN

- El lado final de 297° está en el IV cuadrante, por lo tanto:

$$\theta_R = 360° - \theta$$

$$\therefore\ \theta_R = 360° - 297° \text{ , Luego, } \quad \therefore \begin{cases} \text{Sen}\left(297^0\right) = -\text{Sen}\left(63^0\right) \\ \text{Cos}\left(297^0\right) = \text{Cos}\left(63^0\right) \\ \text{Tan}\left(297^0\right) = -\text{Tan}\left(63^0\right) \end{cases}$$

$$\therefore\ \theta_R = 63°$$

CONSULTA: Describamos un método para hallar las funciones trigonométricas de un ángulo mayor de 360^0.

Ejemplo 5

Hallemos las funciones trigonométricas de 1.347°.

SOLUCIÓN

- Busquemos en qué cuadrante está el lado final de 1.347°:

$$\begin{array}{l|l} 1.347° & 360° \\ \hline 267° & 3 \end{array}$$

número de vueltas

el lado final de 1.347° coincide con el de 267°

- Es decir: Sen(1.347°) = Sen(267°)
  Cos(1.347°) = Cos(267°)
  Tan(1.347°) = Tan(267°)

- Ahora bien: $\theta_R = \theta - 180°$
  $\therefore\ \theta_R = 267° - 180° = 87°$

- Luego, Sen(1.347°) = Sen(267°) = - Sen(87°)
  Cos(1.347°) = Cos(267°) = - Cos(87°)
  Tan(1.347°) = Tan(267°) = Tan(87°)

EJERCICIO 5.4

1. Escribir las funciones trigonométricas de los siguientes ángulos en función de su ángulo de referencia:

a) Sen(147°) b) Cos(248°) c) Tan(316°)
d) Sen(893°) e) Cos(1216°) f) Tan(3015°)

2. Reducir el valor del ángulo a grados y determinar el valor de la función:

a) Sen $\left(\frac{5\pi}{4}\right)$ b) Cos $\left(\frac{13\pi}{3}\right)$ c) Tan $\left(\frac{23\pi}{6}\right)$

d) $\text{Sen}\left(\frac{43\pi}{6}\right)$ e) $\text{Cos}\left(\frac{57\pi}{4}\right)$ f) $\text{Tan}\left(\frac{35\pi}{3}\right)$

3. En la expresión $\dfrac{\text{Sen}\left(517^0\right) - \text{Cos}\left(2316^0\right) + \text{Tan}\left(236^0\right)}{\text{Sen}\left(1004^0\right)}$ se pide:

a) Escribir cada función trigonométrica en función del ángulo de referencia.

b) Hallar el valor.

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (16)

Un paquete puede enviarse por correo ordinario sólo si la suma de la altura y el perímetro de la base es menor o igual que 2.5 metros. Si la base del paquete es un rectángulo de doble largo que ancho y el ancho lo llamamos x, se pide:

1. Dibujar una figura que interprete adecuadamente el enunciado del problema.
2. Escribir una ecuación, en función de x, para calcular el volumen del paquete.
3. Hallar el dominio de la función obtenida donde el problema tiene sentido.

2. MANEJO DE LA CALCULADORA

- Debido al adelanto de la electrónica, el uso de la calculadora se ha impuesto en todas aquellas situaciones que exigen la realización de cálculos rápidos y complejos.
- En matemática superior, física y química, la calculadora es una gran ayuda porque simplifica una gran cantidad de operaciones y ahorra el tiempo que gastaríamos buscando datos en tablas. Vamos a dar a continuación una guía práctica del uso de la calculadora tratando de generalizar con las de mayor consumo en el comercio.

CARACTERÍSTICAS GENERALES:

MODE:	Tecla para escoger el sistema de medida angular.
DEG:	Sistema sexagesimal de medida angular (grados).
RAD:	Sistema circular (radianes).
INV:	Se utiliza para calcular el ángulo cuando conocemos la función.
+/-:	Cambia el signo de la cantidad que aparece en la pantalla.
1/x:	Halla el recíproco (inverso multiplicativo) de la cantidad.
o ' " ←:	Convierte el valor de un ángulo expresado en grados, minutos y segundos en forma decimal. Acompañada de INV hace lo contrario.

Ejemplo

1. Calculemos Cos (370 45' 14"):

DEG	3	7	o ' "	4	5	o ' "	1	4	o ' "	Cos	=	0,7924

2. Calculemos $\text{Tan}\left(\frac{\pi}{3}\text{rad}\right)$:

RAD	π	÷	3	=	Tan	=	1,7320

3. Calculemos el ángulo α, si $\text{Sen}(\alpha) = 0{,}83615$:

DEG	•	8	3	6	1	5	INV	Sen	=	56,73

5.4 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS NEGATIVOS

Experiencia

- Hasta ahora hemos analizado cómo calcular las funciones trigonométricas de cualquier ángulo positivo. Sólo nos falta determinar las funciones trigonométricas de un ángulo negativo. Para ello vamos a comparar las funciones del ángulo negativo con las funciones del mismo ángulo pero positivo.
- Si observamos la figura 5-11, podemos comprobar que:

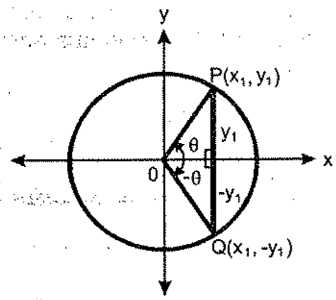


Figura 5-11

$$\left.\begin{array}{l}\text{Sen}\,\theta = y_1 \\ \text{Sen}\left(-\theta\right) = -y_1\end{array}\right\} \therefore\ \text{Sen}\left(-\theta\right) = -\text{Sen}\,\theta$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Cos}\,\theta = x_1 \\ \text{Cos}\left(-\theta\right) = x_1\end{array}\right\} \therefore\ \text{Cos}\left(-\theta\right) = \text{Cos}\,\theta$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Tan}\,\theta = \dfrac{y_1}{x_1} \\ \text{Tan}\left(-\theta\right) = \dfrac{-y_1}{x_1}\end{array}\right\} \therefore\ \text{Tan}\left(-\theta\right) = -\text{Tan}\,\theta$$

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS NEGATIVOS

1. **El seno del inverso aditivo de un ángulo es igual al inverso aditivo del seno del ángulo; es decir: Sen (- θ) = -Sen (θ).**
2. **El coseno del inverso aditivo de un ángulo coincide con el coseno del ángulo; es decir: Cos (- θ) = Cos (θ).**
3. **La tangente del inverso aditivo de un ángulo es igual al inverso aditivo de la tangente del ángulo; es decir: Tan (- θ) = -Tan (θ).**

ATENCIÓN

Las anteriores conclusiones siguen siendo válidas cuando el lado final del ángulo negativo esté en otro cuadrante. Compruébelo.

Ejemplo 1

Sen(-243º) = -Sen(243º)
Cos(-1342º) = Cos(1342º)
Tan(-856º) = -Tan(856º)

Ejemplo 2

Expresamos a Sen(-1573º) en función del ángulo de referencia y luego hallemos su valor.

SOLUCIÓN

1. Sen(-1573º) = -Sen(1573º) ....Sen(-θ) = -Sen (θ)
2. Dividamos 1573º entre 360º :

$$\begin{array}{l|l} 1573^\circ & 360^\circ \\ \hline 133^\circ & 4 \end{array}$$

Luego, Sen(-1573°) = -Sen(1573°)= -Sen(133°)............................ (1)

3. Finalmente, hallamos el ángulo de referencia de 133°:

θ_R = 180° - 133° = 47°

Sen(133°) = Sen(47°)...(2)

Por lo tanto, reemplazando (2) en (1) nos queda:

Sen(-1573°) = -Sen(1573°) = -Sen(133°) = -Sen(47°)

$\therefore$ Sen(-1573°) = -Sen(47°) = -0,731

EJERCICIO 5.5

1. Indique cuáles de las siguientes igualdades son verdaderas y cuáles son falsas. Justifique su respuesta.

a) Sen(-87°) = Sen(87°)
b) -Cos(-312°) = -Cos(312°)
c) Tan(-246°) = -Tan(246°)
d) -Sen(-123°) = Sen(123°)
e) Cos(-235°) = -Cos(55°)
f) -Tan(-126°) = Tan(54°)

2. Escriba las siguientes funciones trigonométricas en función del ángulo de referencia. Recuerde tener en cuenta los signos.

a) Sen(-87°)
b) Cos(-124°)
c) Tan(-235°)
d) Sen(-1004°)
e) Cos(-2315°)
f) Tan(-1256°)
g) Sen(-895°)
h) Cos(-827°)
i) Tan(-2856°)

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (17)

Un cilindro circular recto se inscribe en una esfera de radio 4 cm. Si llamamos x la altura del cilindro, se pide:

1. Dibujar una figura que interprete adecuadamente el enunciado del problema.
2. Escribir una ecuación, en función de x, para calcular el volumen del cilindro.
3. Hallar el dominio de la función obtenida donde el problema tiene sentido.

5.5 LAS SEIS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

- Existen seis funciones trigonométricas fundamentales, de las cuales hemos estudiado SENO, COSENO y TANGENTE. Las otras tres son: COSECANTE, SECANTE Y COTANGENTE, las cuales definiremos como los inversos multiplicativos (o recíprocos) del Seno, Coseno y Tangente respectivamente; es decir:

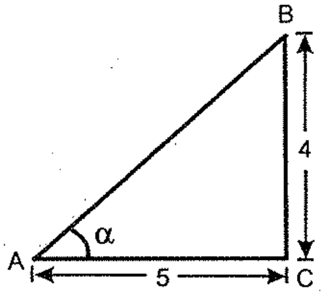
$$\text{Csc}(\theta) = \frac{1}{\text{Sen}(\theta)} \text{ ; con Sen}(\theta) \neq 0$$

$$\text{Sec}(\theta) = \frac{1}{\text{Cos}(\theta)} \text{ ; con Cos}(\theta) \neq 0$$

$$\text{Cot}(\theta) = \frac{1}{\text{Tan}(\theta)} = \frac{\text{Cos}(\theta)}{\text{Sen}(\theta)} \text{; con Sen}(\theta) \neq 0$$

Ejemplo 1

Para hallar las seis funciones trigonométricas para el ángulo "α" del triángulo rectángulo de la figura 5-12, calculemos, en primer lugar, el valor de la hipotenusa $|\overline{AB}|$; así:



$$|\overline{AB}|^2 = 5^2 + 4^2$$

$$\therefore\ |\overline{AB}|^2 = 25 + 16$$

$$\therefore\ |\overline{AB}|^2 = 41$$

$$\therefore\ |\overline{AB}| = \sqrt{41}$$

Figura 5-12

- En consecuencia:

$$\text{Sen}\,(\alpha) = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{4}{\sqrt{41}} = \frac{4\sqrt{41}}{41} \qquad \text{Cos}\,(\alpha) = \frac{\text{Cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{5}{\sqrt{41}} = \frac{5\sqrt{41}}{41}$$

$$\text{Tan}\,(\alpha) = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto adyacente}} = \frac{4}{5} \qquad \text{Cot}\,(\alpha) = \frac{\text{Cateto adyacente}}{\text{Cateto opuesto}} = \frac{5}{4}$$

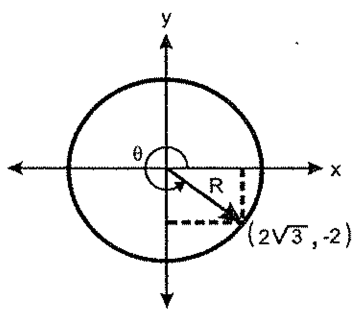
$$\text{Sec}\,(\alpha) = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{Cateto adyacente}} = \frac{\sqrt{41}}{5} \qquad \text{Csc}\,(\alpha) = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{Cateto opuesto}} = \frac{\sqrt{41}}{4}$$

Ejemplo 2

El lado final de un ángulo θ en posición normal pasa por el punto $\left(2\sqrt{3}\,,\ -2\right)$. Hallemos las seis funciones trigonométricas del ángulo θ y su valor.

SOLUCIÓN

- La figura 5-13 nos muestra el ángulo θ y el punto dado. Hallemos el valor de R:



$$x^2 + y^2 = R^2$$

$$\therefore\ \left(2\sqrt{3}\right)^2 + (-2)^2 = R^2$$

$$\therefore\ 12 + 4 = R^2$$

$$\therefore\ 16 = R^2$$

$$\therefore\ R = 4$$

Figura 5-13

- En consecuencia:

$$\text{Sen}\,(\theta) = \frac{y}{R} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} \qquad \text{Csc}\,(\theta) = \frac{R}{y} = -\frac{4}{2} = -2$$

$$\text{Cos}(\theta) = \frac{x}{R} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{Sec}(\theta) = \frac{R}{x} = \frac{4}{2\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Tan}(\theta) = \frac{y}{x} = -\frac{2}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \text{Cot}(\theta) = \frac{x}{y} = -\frac{2\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$$

- Como $\theta_R = 30°$ entonces $\theta = 360° - \theta_R = 330°$.

Ejemplo 3

a) Calculemos Csc(820 18' 26")

Como la Cosecante es la recíproca del Seno, entonces buscamos su valor así:

DEG | 8 | 2 | 0 ' " | 1 | 8 | 0 ' " | 2 | 6 | 0 ' " | Sen | 1/x | = | 1,009

b) Si Cot(α) = 3,67042, entonces el valor del ángulo α lo calculamos así:

DEG | 3 | • | 6 | 7 | 0 | 4 | 1/x | INV | Tan | = | 15,24

EJERCICIO 5.6

1. Si Sec (α) = $-\frac{7}{3}$, con α en el II cuadrante, hallar las otras cinco funciones trigonométricas y hallar el valor de α.

2. Si Cot β) = 5, con β en el III cuadrante, hallar las otras cinco funciones trigonométricas y hallar el valor de β.

3. El lado final de un ángulo θ está sobre el punto P(-5, -7). Hallar las seis funciones trigonométricas de θ y su valor.

4. Encontrar el valor de cada una de las seis funciones trigonométricas del ángulo θ de la figura 5-14.

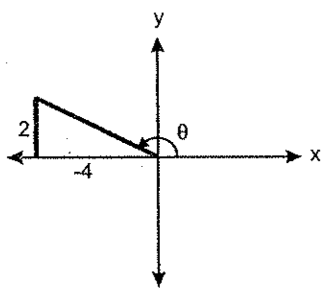


Figura 5-14

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (18)

Un alambre de 36 cm de largo se va a partir en dos trozos. Una de las partes se doblará en forma de triángulo equilátero y la otra en forma de rectángulo cuya base es el doble de su ancho. Si llamamos x la longitud de la parte que se utilizó para construir el triángulo equilátero, se pide:

1. Dibujar una figura que interprete adecuadamente el enunciado del problema.
2. Escribir una ecuación, en función de x, que permita calcular la suma de las áreas de las dos figuras construidas.
3. ¿Podría predecirse, a partir de la ecuación obtenida, cuál es el valor que debe tomar x para que la suma de las áreas sea mínima? Justifique su respuesta.

Taller de la Unidad 5

En los ejercicios **1.** a **10.**, elegir la letra correspondiente a la ÚNICA respuesta correcta:

1. El valor de la expresión $\text{Sen}(30°) \cdot \text{Cos}(60°) - \frac{3}{4}$ es:

a) $\frac{-1}{2}$ b) 1 c) -1 d) $\frac{1}{2}$

2. Dado el ángulo $\theta = 225°$, el ángulo referencia θ_R, se obtiene así:

a) $\theta_R = 180° - \theta$ b) $\theta_R = \theta - 180°$
c) $\theta_R = 360° - \theta$ d) $\theta_R = 180° + \theta$

3. Si el ángulo referencial de otro mide 75º, entonces el ángulo tiene su lado terminal:

a) En el II cuadrante. b) En el IV cuadrante.
c) En el III cuadrante d) En cualquiera de los anteriores.

4. Si $\theta = 60°$, entonces el valor de $\text{Sen}^2(\theta) + \text{Cos}^2(\theta)$ es:

a) 1 b) 2 c) 2 d) -1

5. Una de las siguientes afirmaciones es falsa:

a) $\text{Sen}(60°) = -\text{Sen}(-60°)$ b) $\text{Cos}(30°) = \text{Cos}(-30°)$
c) $\text{Tan}(45°) = \text{Tan}(-45°)$ d) $\text{Cot}(60°) = -\text{Cot}(-60°)$

6. La expresión $\frac{\text{Sen}(\alpha)\,\text{Cos}(\alpha)}{\text{Tan}(\alpha)\,\text{Cot}(\alpha)}$, donde $0° \le \alpha \le 90°$ y $\text{Tan}(\alpha) = 1$ equivale a:

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) 1 d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

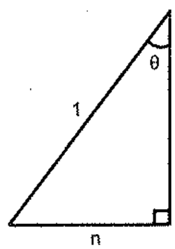
7. Sabemos que si $\alpha = \frac{\pi}{2}$, entonces $\text{Sen}(\alpha) = 1$, $\text{Cos}(\alpha) = 0$ y $\text{Tan}(\alpha)$ no existe. Si $\alpha = \frac{7\pi}{2}$, podemos afirmar que:

a) $\text{Sen}(\alpha) = 1$; $\text{Cos}(\alpha) = 0$; $\text{Tan}(\alpha)$ no existe.
b) $\text{Sen}(\alpha) = -1$; $\text{Cos}(\alpha) = 0$; $\text{Tan}(\alpha)$ no existe.
c) $\text{Sen}(\alpha) = -1$; $\text{Cos}(\alpha) = 1$; $\text{Tan}(\alpha) = -1$
d) $\text{Sen}(\alpha) = 0$; $\text{Cos}(\alpha) = 1$; $\text{Tan}(\alpha) = 0$

8. En una circunferencia con centro en el origen, el punto terminal del arco es (-3, -4). Los valores del Seno, Coseno y Tangente son, respectivamente:

a) $3, -4, \frac{3}{4}$ b) $-3, -4, -\frac{3}{4}$

c) $-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}, \frac{4}{3}$ d) $-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, -\frac{3}{4}$



9. En la figura, los valores de $\text{Sen}(\theta)$, $\text{Cos}(\theta)$ y $\text{Tan}(\theta)$ son:

a) $n,\ \sqrt{1-n^2},\ \frac{n\sqrt{1-n^2}}{1-n^2}$ b) $\sqrt{1-n^2},\ n,\ \frac{n\sqrt{1-n^2}}{1-n^2}$

c) $\sqrt{1-n^2}$, n , $\dfrac{\sqrt{1-n^2}}{n}$ d) n , $\sqrt{1-n^2}$, $\dfrac{\sqrt{1-n^2}}{n}$

10. Para cualquier valor de α podemos afirmar que: $\text{Cos}(\alpha) \cdot \text{Cos}(-\alpha)$ es:

a) Siempre mayor que 1
b) Mayor o igual que 0 y menor o igual que 0.5
c) Siempre negativo o cero
d) Mayor o igual que 0 y menor o igual que 1

En los ejercicios **11.** a **15.**, comprobar que las proposiciones dadas son verdaderas (no use tabla ni calculadora):

11. $1 + \text{Cot}^2\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \text{Csc}^2\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$

12. $2\ \text{Sen}(60^\circ) \cdot \text{Cos}(60^\circ) = \text{Sen}(120^\circ)$

13. $\text{Cos}^2\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\left[1 + \text{Tan}^2\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right] = 1$

14. $\text{Cos}^2(45^\circ) - \text{Sen}^2(45^\circ) = \text{Cos}(90^\circ)$

15. $\text{Sen}\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = \sqrt{\dfrac{1-\text{Cos}(4\pi/3)}{2}}$

En los ejercicios **16.** a **19.** , hallar los valores exactos de las siguientes expresiones:

16. $\text{Tan}^2(60^\circ) \cdot \text{Sec}(30^\circ) \cdot \text{Sen}(45^\circ)$

17. $\text{Cos}^2(\pi)\ \text{Tan}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\text{Sec}\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$

18. $\text{Cot}(60^\circ) - \text{Sen}\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\text{Sec}\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$

19. $\text{Sen}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\ \text{Cos}(\pi) + \text{Tan}\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\text{Cot}\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$

En los ejercicios **20.** a **26.** , expresar las funciones trigonométricas dadas en términos de las mismas funciones de su ángulo de referencia:

20. Sen (115°) **21.** Tan (325° 25') **22.** Sec (232° 58') **23.** Sen (511°)

24. Sen (-32°) **25.** Tan (-116°) **26.** Sec (-242°)

27. Sabiendo que $\text{Cos}(\alpha) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, hallar los valores de α entre 0° y 360°que cumplen la igualdad. No use tabla ni calculadora.

28. Sabiendo que $\text{Tan}(\alpha) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, hallar los valores de α entre 0° y 360° que cumplen la igualdad. No use tabla ni calculadora.

29. Hallar las demás funciones trigonométricas si $\text{Tan}(\alpha) = \dfrac{3}{4}$ y α está en el III cuadrante.

30. Hallar las demás funciones trigonométricas si $\text{Csc}(\theta) = 0$

Prepárate para las Pruebas ICFES

En cada uno de los siguientes ejercicios, escoja la letra correspondiente a la ÚNICA respuesta correcta.

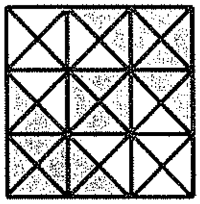
1. Un cajón contiene 28 lapiceros; algunos blancos, azules, rojos y algunos grises. Si la probabilidad de seleccionar un lapicero azul es $\frac{2}{7}$, ¿cuántos lapiceros azules hay en el cajón?

a) 4 b) 6 c) 8 d) 10

2. El área sombreada respecto al área total es:

a) $\frac{7}{8}$ b) $\frac{1}{2}$

c) $\frac{5}{9}$ d) $\frac{7}{9}$



3. Al recorrer una pista de 400 metros un atleta hace los primeros 100 metros a una velocidad de 4 m/seg. Si cada 100 metros, el atleta incrementa su velocidad en una unidad, podemos afirmar que:

a) Los últimos 100 metros los recorre a una velocidad de 8 m/seg.
b) El tiempo total de recorrido está entre 70 y 80 segundos.
c) De los 200 a los 300 metros el atleta demora 15 segundos.
d) El atleta demora menos de 70 segundos en hacer el recorrido.

Las preguntas **4.** y **5.** se responden según la siguiente información:

"Unas biblioteca tiene 320 libros. De ellos unos son de Matemáticas (M) y Ciencias (C), la décima parte de los libros son enciclopedias y la mitad son novelas".

4. Con la información dada es posible:

a) Saber cuántos libros de Matemáticas hay.
b) Saber que hay más libros de novela que de cualquier otro.
c) Saber que la suma de libros de Matemáticas más los de ciencias es mayor que las novelas.
d) Saber cuántos libros de ciencias hay.

5. La ecuación que relaciona el total de libros de la biblioteca es:

a) $M + C = 170$ b) $M + 160 + c = 320$

c) $M + 160 - 320 = C$ d) $M + 192 + C = 320$

Núcleo Temático

6

IDENTIDADES Y ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

LOGRO GENERAL

- Deducir las identidades trigonométricas de ángulos simples y utilizarlas para probar que otras igualdades son identidades y para resolver ecuaciones trigonométricas.

LOGROS ESPECÍFICOS	INDICADORES DE LOGRO
Corporal: • Realizar experiencias que permitan diferenciar los conceptos de identidad y ecuación trigonométrica.	• Partiendo de los conceptos de identidad y ecuación algebraica define los conceptos de identidad y ecuación trigonométrica.
Comunicativa: • Conseguir la participación activa de todos los alumnos por medio de sugerencias y preguntas dirigidas.	• Escribe un párrafo comparando los conceptos de identidad y ecuación. • Describe oralmente la manera como se obtienen las identidades trigonométricas básicas.
Cognitiva: • Diferenciar entre identidad y ecuación. • Deducir las identidades trigonométricas fundamentales. • Aplicar las identidades fundamentales en la verificación de otras identidades. • Resolver ecuaciones trigonométricas de cualquier ángulo.	• Dada una igualdad trigonométrica reconoce si es ecuación o identidad. • A partir de la ecuación $x^2 + y^2 = R^2$, deduce las identidades trigonométricas básicas. • Utiliza las identidades trigonométricas fundamentales para probar otras. • Resuelve ecuaciones trigonométricas de cualquier ángulo.
Estética: • Representar en la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = R^2$ las soluciones de una ecuación trigonométrica.	• Representa en una circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = R^2$ las soluciones de una ecuación trigonométrica.
Ética - Actitudinal: • Asumir una actitud inteligente y positiva en el momento de tomar decisiones.	• Participa activamente en la elaboración de normas que contribuyan a la convivencia armónica.

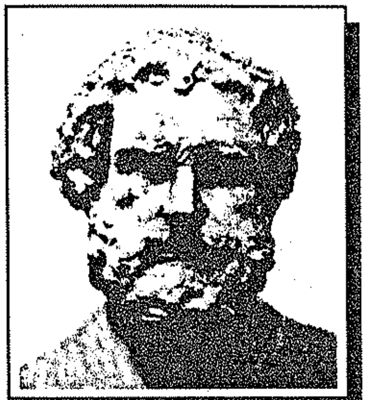
DIMENSIONES

EVALUACIÓN

ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS

6.1 COMPRENSIÓN DE LECTURA: HISTORIA DE LA TRIGONOMETRÍA (3)

Lea atentamente el siguiente texto y luego subraye la letra correspondiente a la ÚNICA respuesta correcta en cada uno de los enunciados propuestos.



EUXODO
408 - 355 a de C.

La trigonometría, como cualquier otra rama de la matemática, no fue el resultado de la labor de un solo hombre ni de una única nación. Ya mencionamos anteriormente que los antiguos egipcios y babilonios conocían y habían utilizado propiedades o "teoremas" relativos a las razones entre los lados de triángulos semejantes, sin formularlos explícitamente, claro está. Ahora bien, como no se ha encontrado ningún indicio del concepto de medida de ángulos en las civilizaciones anteriores a los griegos, los estudios antes mencionados podrían llamarse "trilaterometría" o medida de los polígonos de tres lados (o triláteros), mejor que "trigonometría" o medida de las distintas partes de un triángulo. Son los griegos quienes establecen por primera vez un estudio sistemático de las relaciones entre los ángulos centrales (o sus arcos correspondientes) en un círculo y las longitudes de las cuerdas que los subtienden. Las propiedades de las cuerdas, tomadas como medidas de ángulos centrales e inscritos en una circunferencia, les eran familiares ya a los griegos de la época de Hipócrates, y es posible que Eudoxo haya usado razones y este tipo de medidas de ángulos para determinar el tamaño de la tierra y las distancias relativas del sol y de la luna. En las obras de Euclides no aparece la trigonometría, en el sentido estricto del término, pero sí hay teoremas equivalentes a leyes o fórmulas trigonométricas concretas. Las proposiciones II. 12 y II. 13 de los ***Elementos***, por ejemplo, expresan el teorema del Coseno para ángulos obtusos y agudos, respectivamente, en un lenguaje geométrico más bien que trigonométrico, y se demuestran por un método análogo al utilizado por Euclides en conexión con el teorema de Pitágoras. Por lo demás, los teoremas relativos a longitudes de cuerdas son esencialmente aplicaciones del moderno teorema de los Senos (el cual estudiaremos más adelante).

1. En el texto se da a entender que la trilaterometría es:
   a. La medida de los polígonos.
   b. Un término sinónimo de trigonometría.
   c. La medida de los triángulos.
   d. La medida de los ángulos de un polígono.

2. De la lectura total del texto anterior se desprende que la trigonometría:
   a. Debe su descubrimiento a egipcios y babilonios.
   b. Es el resultado de estudios e investigaciones de muchos hombres de ciencia.
   c. Fue iniciada por los griegos y perfeccionada por egipcios y babilonios.
   d. Todavía está por descubrirse, pues lo que se ha trabajado hasta el momento es apenas el comienzo.

3. En las obras de Euclides podemos encontrar todo lo siguiente, con excepción de:
   a. Verdaderos tratados de trigonometría.
   b. El teorema del Coseno en términos geométricos.
   c. Demostraciones que están conectadas con trabajos de Pitágoras.
   d. Algunos teoremas que corresponden a fórmulas trigonométricas.

4. De egipcios y babilonios se dice en el texto que:
   a. Fueron abanderados de los estudios sobre la trigonometría.
   b. Se apoyaron en las investigaciones de los griegos para enunciar sus teoremas.
   c. Son los verdaderos inventores de propiedades, leyes y teoremas trigonométricos.
   d. Manejaban, en la antigüedad, saberes trigonométricos.

5. En el texto se menciona a Hipócrates para:
   a. Destacarlo como un estudioso de la trigonometría.
   b. Señalarlo como padre de la medicina.
   c. Asociarlo con los estudios de Eudoxo
   d. Referenciar un período temporal.

6.2 RELACIONES ENTRE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Experiencia

- En la unidad cinco definimos las funciones trigonométricas sobre una circunferencia unitaria y sobre una circunferencia no unitaria. Recordemos estas definiciones y algunas relaciones que resultan de ellas:

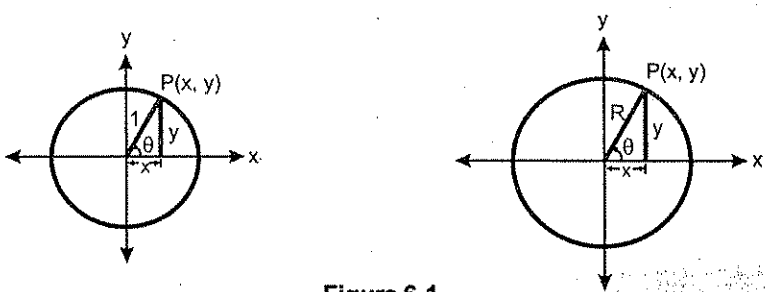


Figura 6-1

1) $\text{Sen}(\theta) = y$	1) $\text{Sen}(\theta) = \frac{y}{R}$
2) $\text{Cos}(\theta) = x$	2) $\text{Cos}(\theta) = \frac{x}{R}$
3) $\text{Tan}(\theta) = \frac{y}{x} = \frac{\text{Sen}(\theta)}{\text{Cos}(\theta)}$, $\text{Cos}(\theta) \neq 0$	3) $\text{Tan}(\theta) = \frac{y}{x} = \frac{\text{Sen}(\theta)}{\text{Cos}(\theta)}$, $\text{Cos}(\theta) \neq 0$
4) $\text{Cot}(\theta) = \frac{y}{x} = \frac{\text{Cos}(\theta)}{\text{Sen}(\theta)}$, $\text{Sen}(\theta) \neq 0$	4) $\text{Cot}(\theta) = \frac{x}{y} = \frac{\text{Cos}(\theta)}{\text{Sen}(\theta)}$, $\text{Sen}(\theta) \neq 0$
5) $\text{Sec}(\theta) = \frac{1}{x} = \frac{1}{\text{Cos}(\theta)}$, $\text{Cos}(\theta) \neq 0$	5) $\text{Sec}(\theta) = \frac{R}{x} = \frac{1}{\text{Cos}(\theta)}$, $\text{Cos}(\theta) \neq 0$
6) $\text{Csc}(\theta) = \frac{1}{y} = \frac{1}{\text{Sen}(\theta)}$, $\text{Sen}(\theta) \neq 0$	6) $\text{Csc}(\theta) = \frac{R}{y} = \frac{1}{\text{Sen}(\theta)}$, $\text{Sen}(\theta) \neq 0$

Según hemos visto, estas definiciones son equivalentes por lo cual podemos trabajar con una u otra según las necesidades.

- Estudiemos ahora otras relaciones que se obtienen a partir de las anteriores. Por comodidad las deduciremos a partir de la circunferencia unitaria. Veamos:

$x^2 + y^2 = 1$..................Ecuación de la circunferencia unitaria.

$$\text{Pero} \begin{cases} x = \text{Cos}(\theta) \Rightarrow x^2 = (\text{Cos}\,\theta)^2 = \text{Cos}^2(\theta) \\ y = \text{Sen}(\theta) \Rightarrow y^2 = (\text{Sen}\,\theta)^2 = \text{Sen}^2(\theta) \end{cases}$$

$$\therefore \boxed{\text{Cos}^2(\theta) + \text{Sen}^2(\theta) = 1} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (7)$$

De esta última expresión obtenemos las siguientes:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Cos}^2(\theta) = 1 - \text{Sen}^2(\theta) \\ \text{Sen}^2(\theta) = 1 - \text{Cos}^2(\theta) \end{array}} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (8)$$

- Si dividimos los dos miembros de (7) por $\text{Sen}^2(\theta)$, obtenemos:

$$\frac{\text{Cos}^2(\theta)}{\text{Sen}^2(\theta)} + \frac{\text{Sen}^2(\theta)}{\text{Sen}^2(\theta)} = \frac{1}{\text{Sen}^2(\theta)}, \text{ con Sen}(\theta) \neq 0$$

$$\therefore \boxed{\text{Cot}^2(\theta) + 1 = \text{Csc}^2(\theta)} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (9)$$

- Si dividimos los dos miembros de (7) por $\text{Cos}^2(\theta)$, obtenemos:

$$\frac{\text{Cos}^2(\theta)}{\text{Cos}^2(\theta)} + \frac{\text{Sen}^2(\theta)}{\text{Cos}^2(\theta)} = \frac{1}{\text{Cos}^2(\theta)}, \text{ con Cos}(\theta) \neq 0$$

$$\therefore \boxed{1 + \text{Tan}^2(\theta) = \text{Sec}^2(\theta)} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (10)$$

6.3 IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

- Consideremos las siguientes igualdades:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$$

$$\frac{a^3 + 1}{a + 1} = a^2 - a + 1; \text{ siempre que } a \neq -1$$

$$\text{Sen}^2(\theta) + \text{Cos}^2(\theta) = 1$$

- Todas estas igualdades se cumplen para cualquier valor de la(s) variable(s), donde la expresión está definida. Por esta razón se denominan IDENTIDADES. Las tres primeras son identidades algebraicas y la última es una identidad trigonométrica.
- Una identidad se expresa escribiendo el símbolo ≡ (idéntico a) entre las dos expresiones; así:

$$(a + b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2$$

$$(x + y)(x - y) \equiv x^2 - y^2$$

$$\frac{a^3 + 1}{a + 1} \equiv a^2 - a + 1; \text{ siempre que } a \neq -1$$

$$\text{Sen}^2(\theta) + \text{Cos}^2(\theta) \equiv 1$$

DEFINICIÓN

- **Una IDENTIDAD es una igualdad que se cumple para todos los valores de la(s) variable(s), donde la expresión esté definida.**
- **Si la(s) variable(s) son funciones trigonométricas de un ángulo, entonces la identidad se denomina TRIGONOMÉTRICA**

ATENCIÓN

1. En adelante, mientras no exista confusión, eliminaremos el paréntesis del ángulo en las funciones trigonométricas; así:
   - En lugar de Sen (θ) escribiremos Sen θ
   - En lugar de $\text{Cos}^2\left(\frac{\pi}{2}\right)$ escribiremos $\text{Cos}^2\,\frac{\pi}{2}$
   - En cambio, Tan (-325°) lo seguiremos escribiendo igual.

2. Las relaciones de igualdad que obtuvimos en la sección 6-1 son identidades y se denominan IDENTIDADES FUNDAMENTALES porque a partir de ellas podemos probar otras. Hagamos una lista de ellas y tengámosla muy presente:

1. $\text{Tan}\,\theta \equiv \dfrac{\text{Sen}\,\theta}{\text{Cos}\,\theta}$; $\text{Cos}\,\theta \neq 0$

2. $\text{Cot}\,\theta \equiv \dfrac{\text{Cos}\,\theta}{\text{Sen}\,\theta}$; $\text{Sen}\,\theta \neq 0$

3. $\text{Sec}\,\theta \equiv \dfrac{1}{\text{Cos}\,\theta}$; $\text{Cos}\,\theta \neq 0$

4. $\text{Csc}\,\theta \equiv \dfrac{1}{\text{Sen}\,\theta}$; $\text{Sen}\,\theta \neq 0$

5. $\text{Sen}^2\theta + \text{Cos}^2\theta \equiv 1$ $\longrightarrow$ $\text{Sen}^2\theta \equiv 1 - \text{Cos}^2\,\theta$; $\longrightarrow$ $\text{Cos}^2\,\theta \equiv 1 - \text{Sen}^2\,\theta$

6. $\text{Tan}^2\,\theta + 1 \equiv \text{Sec}^2\,\theta \longrightarrow \text{Tan}^2\theta \equiv \text{Sec}^2\,\theta - 1$

7. $\text{Cot}^2\,\theta + 1 \equiv \text{Csc}^2\,\theta \longrightarrow \text{Cot}^2\theta \equiv \text{Csc}^2\,\theta - 1$

Antes de comenzar a probar identidades conviene hacer un ejercicio preliminar que ayudará a entender mejor el proceso de trabajo.

Ejemplo

Expresemos la función SENO en términos de las demás funciones trigonométricas.

SOLUCIÓN

a) En términos de COSENO:

$\text{Sen}^2\theta + \text{Cos}^2\theta \equiv 1$ .... Identidad 5.

$\therefore\ \text{Sen}^2\theta \equiv 1 - \text{Cos}^2$

$\therefore\ \text{Sen}\,\theta \equiv \pm\sqrt{1 - \text{Cos}^2\,\theta}$

b) En términos de TANGENTE:

$\text{Tan}\,\theta \equiv \dfrac{\text{Sen}\,\theta}{\text{Cos}\,\theta}$ .... Identidad 1.

$\therefore\ \text{Sen}\,\theta \equiv \text{Cos}\,\theta \cdot \text{Tan}\,\theta$

$\therefore$ Sen $\theta \equiv \dfrac{1}{\text{Sec}\,\theta}$ Tan θ ; pero, $\text{Sec}^2\theta = 1 + \text{Tan}^2\theta$ .... Identidad 6.

$$\therefore \text{Sen}\,\theta \equiv \frac{1}{\pm\sqrt{1+\text{Tan}^2\theta}} \cdot \text{Tan}\,\theta$$

$$\therefore \text{Sen}\,\theta \equiv \frac{\text{Tan}\,\theta}{\pm\sqrt{1+\text{Tan}^2\theta}}$$

c) En términos de COSECANTE:

Como $\text{Csc}\,\theta \equiv \dfrac{1}{\text{Sen}\,\theta}$ entonces $\text{Sen}\,\theta \equiv \dfrac{1}{\text{Csc}\,\theta}$

d) En términos de SECANTE:

$$\text{Sen}^2\theta + \text{Cos}^2\theta \equiv 1$$

$$\therefore \text{Sen}^2\theta \equiv 1 - \text{Cos}^2\theta$$

$$\therefore \text{Sen}^2\theta \equiv 1 - \frac{1}{\text{Sec}^2\theta}$$

$$\therefore \text{Sen}^2\theta \equiv \frac{\text{Sec}^2\theta - 1}{\text{Sec}^2\theta}$$

$$\therefore \text{Sen}\,\theta \equiv \frac{\pm\sqrt{\text{Sec}^2\theta - 1}}{\text{Sec}\,\theta}$$

e) En términos de la COTANGENTE:

$$\text{Csc}^2\theta \equiv 1 + \text{Cot}^2\theta$$

$$\therefore \frac{1}{\text{Sen}^2\theta} \equiv 1 + \text{Cot}^2\theta$$

$$\therefore \text{Sen}^2\theta \equiv \frac{1}{1+\text{Cot}^2\theta}$$

$$\therefore \text{Sen}\,\theta = \pm\sqrt{\frac{1}{1+\text{Cot}^2\theta}}$$

EJERCICIO 6.1

Expresar la función dada en términos de las demás funciones trigonométricas:

1. Tan θ
2. Cos θ
3. Csc θ
4. Sec θ
5. Cot θ
6. Sen θ

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (19)

Se quiere construir un embudo cónico, cuya generatriz mida 20 cm. Si la altura del embudo la representamos por x, se pide:

1. **Dibujar una figura que interprete adecuadamente el enunciado del problema.**
2. **Escribir una expresión, en función de x, que permita calcular el volumen del cono.**

6.4 ¿CÓMO PROBAR UNA IDENTIDAD?

Realmente no existe un método único que permita a una persona probar que una igualdad es o no identidad. En última instancia, el éxito depende de la destreza operativa y de la apropiación conceptual alcanzada por quien desarrolla el ejercicio. Sin embargo, sugerimos un procedimiento que puede facilitar el proceso de trabajo:

1. Se puede transformar el primer miembro de la igualdad hasta obtener el segundo, o el segundo hasta obtener el primero, o transformar ambos miembros simultáneamente hasta obtener la misma expresión en ambos miembros.
2. Si uno de los miembros contiene sólo una función trigonométrica, conviene transformar el otro miembro en términos de esa misma función. Luego, comparar.
3. Si los dos miembros de la igualdad parecen igualmente complicados, tratar de llevarlos a una sola función y comparar. Si no es posible llevarlos a una sola función, conviene transformarlos en Senos y Cosenos, y comparar. En este caso conviene recordar las IDENTIDADES FUNDAMENTALES.
4. Factorizar y simplificar cuando sea posible.
5. Algunas veces, para obtener la conversión deseada, es necesario multiplicar el numerador y el denominador de un lado de la igualdad por un mismo factor. Esto es equivalente a multiplicar la fracción por la unidad.
6. Determinar para qué valores del ángulo no es válida la expresión. Recuerde: No es posible la división por cero, ni existen las raíces pares de números negativos.
7. Finalmente, si aplicando todo lo anterior no logra probar que la igualdad es una identidad, usted tiene derecho a pensar que tal vez no sea identidad. En este caso, proceda así: reemplace el ángulo por un valor donde la expresión esté definida y halle el resultado. Si los valores obtenidos son distintos en los dos miembros de la igualdad, entonces la igualdad dada NO ES IDENTIDAD.

Ejemplo 1

Probemos que: $Sec^2\theta\,(1 - Sen^2\theta) = 1$

SOLUCIÓN

- Como el miembro izquierdo parece más complicado que el derecho, transformemos el miembro izquierdo en el derecho.

- Recordemos que: $\begin{cases} Sec\,\theta = \dfrac{1}{Cos\,\theta} \Rightarrow Sec^2\,\theta = \dfrac{1}{Cos^2\,\theta} \\ \\ Sen^2\,\theta + Cos^2\,\theta = 1 \Rightarrow Cos^2\,\theta = 1 - Sen^2\,\theta \end{cases}$

- Reemplazando tenemos:

$$Sec^2\theta\,(1 - Sen^2\theta) = \frac{1}{\cancel{Cos^2\theta}} \cdot \left(\cancel{Cos^2\theta}\right)$$

$$\therefore\ Sec^2\theta\,(1 - Sen^2\theta) = 1$$

- Finalmente, la igualdad se verifica para todos los valores de θ , excepto aquellos en los que la secante no está definida; es decir:

$Sec\,\theta = \dfrac{1}{Cos\,\theta}$ no está definida cuando $Cos\,\theta = 0$; o sea, cuando $\theta = \pm\ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} ... n \cdot \frac{\pi}{2}$, con n impar.

Ejemplo 2

Demostremos que la siguiente igualdad es una identidad.

$$\frac{\text{Tan}\,\theta}{1+\text{Sec}\,\theta}-\frac{\text{Tan}\,\theta}{1-\text{Sec}\,\theta}=\frac{2}{\text{Sen}\,\theta}$$

SOLUCIÓN

- Como el miembro de la izquierda es el más complicado, entonces trabajaremos con él.
- Efectuando la resta de fracciones nos queda:

$$\frac{\text{Tan}\,\theta}{1+\text{Sec}\,\theta}-\frac{\text{Tan}\,\theta}{1-\text{Sec}\,\theta}=\frac{\text{Tan}\,\theta-\text{Tan}\,\theta\,\text{Sec}\,\theta-\text{Tan}\,\theta-\text{Tan}\,\theta\,\text{Sec}\,\theta}{(1-\text{Sec}\,\theta)(1+\text{Sec}\,\theta)}$$

$$=\frac{-2\,\text{Tan}\,\theta\,\text{Sec}\,\theta}{1-\text{Sec}^2\,\theta}$$

$$=\frac{-2\,\cancel{\text{Tan}}\,\theta\,\text{Sec}\,\theta}{-\text{Tan}^{\cancel{2}}\,\theta} \quad \text{.. Identidad (10)}$$

$$=\frac{2\,\text{Sec}\,\theta}{\text{Tan}\,\theta}$$

$$=\frac{2\left(\dfrac{1}{\cancel{\text{Cos}\,\theta}}\right)}{\dfrac{\text{Sen}\,\theta}{\cancel{\text{Cos}\,\theta}}}$$

$$=\frac{2}{\text{Sen}\,\theta}$$

- Por lo tanto:

$$\boxed{\frac{\textbf{Tan}\,\theta}{\textbf{1}+\textbf{Sec}\,\theta}-\frac{\textbf{Tan}\,\theta}{\textbf{1}-\textbf{Sec}\,\theta}\equiv\frac{\textbf{2}}{\textbf{Sen}\,\theta}}$$

- ¿Para qué valores de θ no está definida la igualdad?; es decir, ¿cuáles son las restricciones?

Ejemplo 3

Demostremos que: $\dfrac{\text{Sen}\,\theta+\text{Cos}\,\theta\,\text{Tan}\,\theta}{\text{Cos}\,\theta}\equiv 2\,\text{Tan}\,\theta$

SOLUCIÓN

- Como el denominador del primer miembro tiene un solo término, ensayemos escribiendo dicha expresión como una suma de fracciones; así:

$$\frac{\text{Sen}\,\theta+\text{Cos}\,\theta\text{Tan}\,\theta}{\text{Cos}\,\theta}=\frac{\text{Sen}\,\theta}{\text{Cos}\,\theta}+\frac{\cancel{\text{Cos}\,\theta}\text{Tan}\,\theta}{\cancel{\text{Cos}\,\theta}}$$

$$=\text{Tan}\,\theta+\text{Tan}\,\theta$$

$$=2\,\text{Tan}\,\theta$$

- Por lo tanto:

$$\boxed{\frac{\text{Sen}\,\theta+\text{Cos}\,\theta\,\text{Tan}\,\theta}{\text{Cos}\,\theta}\equiv 2\,\text{Tan}\theta}$$

Ejemplo 4

Demostremos que la igualdad : $\dfrac{\text{Cos}\,\theta}{\text{Cos}\,\theta - \text{Sen}\,\theta} = \dfrac{\text{Cos}\,\theta\,(\text{Cos}\,\theta - \text{Sen}\,\theta)}{1 - 2\,\text{Sen}\,\theta\,\text{Cos}\,\theta}$ es una identidad.

SOLUCIÓN

- Notemos que en esta igualdad el numerador del lado derecho se obtiene al multiplicar el numerador del lado izquierdo por Cos θ - Sen θ . Esta observación sugiere multiplicar el numerador y el denominador del lado izquierdo por dicho factor; así:

$$\frac{\text{Cos}\,\theta}{\text{Cos}\,\theta - \text{Sen}\,\theta} = \frac{\text{Cos}\,\theta\,(\text{Cos}\,\theta - \text{Sen}\,\theta)}{(\text{Cos}\,\theta - \text{Sen}\,\theta)(\text{Cos}\,\theta - \text{Sen}\,\theta)}$$

$$= \frac{\text{Cos}\,\theta(\text{Cos}\,\theta - \text{Sen}\,\theta)}{\text{Cos}^2\,\theta - 2\,\text{Sen}\,\theta\,\text{Cos}\,\theta + \text{Sen}^2\,\theta}$$

$$= \frac{\text{Cos}\,\theta\,(\text{Cos}\,\theta - \text{Sen}\,\theta)}{1 - 2\,\text{Sen}\,\theta\,\text{Cos}\,\theta}$$

- Luego: $\boxed{\dfrac{\textbf{Cos}\,\theta}{\textbf{Cos}\,\theta - \textbf{Sen}\,\theta} \equiv \dfrac{\textbf{Cos}\,\theta\,(\textbf{Cos}\,\theta - \textbf{Sen}\,\theta)}{1 - 2\,\textbf{Sen}\,\theta\,\textbf{Cos}\,\theta}}$; con Cos $\theta \neq$ Sen θ y 2Sen $\theta \neq$ Cos $\theta \neq 1$

Ejemplo 5

Probemos que: $1 - \text{Tan}^4\alpha \equiv \text{Sec}^4\alpha\,(\text{Cos}^2\alpha - \text{Sen}^2\alpha)$

SOLUCIÓN

- Transformemos el segundo miembro en el primero:

$\text{Sec}^4\alpha\,(\text{Cos}^2\alpha - \text{Sen}^2\alpha) = \text{Sec}^2\alpha \cdot \text{Sec}^2\alpha\,(\text{Cos}^2\alpha - \text{Sen}^2\alpha)$

$$= \text{Sec}^2\alpha \cdot \frac{1}{\text{Cos}^2\,\alpha}\left(\text{Cos}^2\alpha - \text{Sen}^2\alpha\right)$$

$$= \text{Sec}^2\alpha\left(\frac{\cancel{\text{Cos}^2\,\alpha}}{\cancel{\text{Cos}^2\,\alpha}} - \frac{\text{Sen}^2\,\alpha}{\text{Cos}^2\,\alpha}\right)$$

$$= \text{Sec}^2\alpha\ (1 - \text{Tan}^2\alpha)$$

$$= (1 + \text{Tan}^2\alpha)\,(1 - \text{Tan}^2\alpha)$$

$$= 1 - \text{Tan}^4\alpha$$

- Luego: $\boxed{\mathbf{1 - Tan^4\alpha \equiv Sec^4\alpha\,(Cos^2\alpha - Sen^2\alpha)}}$

EJERCICIO 6.2

Verificar si cada una de las siguientes igualdades es o no identidad. Si no lo es, encuéntrese un contraejemplo (un ángulo para el cual no se cumpla la igualdad).

1. $\text{Cos}\,\alpha\,(\text{Sec}\,\alpha - \text{Cos}\,\alpha) = \text{Sen}^2\alpha$
2. $\text{Cot}\,\alpha\,(\text{Tan}\,\alpha + \text{Cot}\,\alpha) = \text{Csc}^2\alpha$
3. $\text{Sec}\,\alpha\,(\text{Sec}\,\alpha - \text{Cos}\,\alpha) = \text{Tan}^2\alpha$
4. $(\text{Csc}\,\alpha + 1)\,(\text{Csc}\,\alpha - 1) = \text{Cot}^2\alpha$

5. $(\text{Csc}\,\theta - \text{Cot}\,\theta)(\text{Csc}\,\theta + \text{Cot}\,\theta) = 1$

6. $\text{Cot}\,\theta + \text{Tan}\,\theta = \text{Sec}\,\theta\,\text{Csc}\,\theta$

7. $\text{Csc}\,\theta - \text{Sen}\,\theta = \text{Cos}\,\theta \cdot \text{Cot}\,\theta$

8. $\dfrac{\text{Tan}\,\theta \cdot \text{Sen}\,\theta}{\text{Sec}\,\theta - 1} = 1 + \text{Cos}\,\theta$

9. $\dfrac{\text{Tan}^2\,\theta + 1}{\text{Tan}^2\,\theta} = \text{Csc}^2\,\theta$

10. $\dfrac{1 + \text{Sen}\,A}{\text{Cos}\,A} + \dfrac{\text{Cos}\,A}{\text{Sen}\,A} = \dfrac{1 + \text{Sen}\,A}{\text{Sen}\,A \cdot \text{Cos}\,A}$

11. $\dfrac{\text{Tan}\,A}{\text{Sec}\,A} - \dfrac{\text{Sec}\,A - \text{Cos}\,A}{\text{Tan}\,A} = 0$

12. $\dfrac{1 - \text{Cos}\,A}{\text{Sen}\,A} + \dfrac{\text{Sen}\,A}{1 - \text{Cos}\,A} = 2\,\text{Csc}\,A$

13. $\dfrac{\text{Sen}\,A}{1 + \text{Sec}\,A} - \dfrac{\text{Sen}\,A}{1 - \text{Sec}\,A} = 2\,\text{Cot}\,A$

14. $\dfrac{1}{1 - \text{Sen}\,B} = \text{Sec}^2\,B + \text{Sec}\,B\,\text{Tan}\,B$

15. $\text{Sec}^2\,B - \text{Csc}^2\,B = \dfrac{\text{Tan}\,B - \text{Cot}\,B}{\text{Sen}\,B\,\text{Cos}\,B}$

16. $\text{Tan}^2\,B - \text{Sen}^2\,B = \text{Sen}^2\,B \cdot \text{Tan}^2\,B$

17. $\dfrac{1}{1 + \text{Sen}\,x} = \dfrac{1 - \text{Sen}\,x}{\text{Cos}^2\,x}$

18. $\dfrac{\text{Sen}\,\theta - \text{Sen}^3\,\theta}{\text{Cos}^2\,\theta} = \dfrac{1}{\text{Csc}\,\theta}$

19. $\dfrac{\text{Sec}\,\alpha + 1}{\text{Sen}\,\alpha} = \dfrac{\text{Tan}\,\alpha}{\text{Cos}\,\alpha\,(\text{Sec}\,\alpha - 1)}$

20. $\dfrac{\text{Cos}^4\,\alpha - \text{Sen}^4\,\alpha}{1 - \text{Tan}^4\,\alpha} = \text{Cos}^4\,\alpha$

21. $\dfrac{\text{Sen}^3\alpha + \text{Cos}^3\,\alpha}{\text{Sen}\,\alpha + \text{Cos}\,\alpha} = 1 - \text{Sen}\,\alpha\,\text{Cos}\,\alpha$

22. $\dfrac{\text{Tan}\,\theta \cdot \text{Cot}\,\theta}{1 + \text{Tan}^2\,\theta} + \dfrac{1}{\text{Csc}^2\,\theta} = 1$

23. $\dfrac{\text{Sen}\,\alpha\,\text{Cos}\,\alpha}{1 - \text{Cos}\,\alpha} - \text{Cot}\,\alpha = \text{Csc}\,\alpha - \text{Sen}\,\alpha$

24. $\dfrac{\text{Csc}^4\,\theta - 1}{\text{Cot}^2\,\theta} = \text{Csc}^2\,\theta + 1$

25. $\dfrac{\text{Cot}\,\alpha\,(\text{Sec}\,\alpha - 1)(1 + \text{Sen}\,\alpha)}{\text{Tan}\,\alpha} = \dfrac{\text{Cot}^2\,\alpha \cdot \text{Tan}\,\alpha}{(\text{Sec}\,\alpha + 1)(\text{Csc}\,\alpha - 1)}$

26. $\dfrac{\text{Cot}\,\alpha(1 - \text{Sen}\,\alpha)(\text{Sec}^2\,\alpha - 1)}{1 + \text{Sen}\,\alpha} = \dfrac{\text{Sen}\,\alpha\,\text{Cos}\,\alpha}{(1 + \text{Sen}\,\alpha)^2}$

27. $\sqrt{\dfrac{\text{Sec}\,\alpha - 1}{\text{Csc}\,\alpha - 1}} = \sqrt{\dfrac{\text{Tan}\,\alpha\,(1 - \text{Cos}\,\alpha)}{1 - \text{Sen}\,\alpha}}$

28. $\dfrac{(\text{Sec}\,\alpha - \text{Cos}\,\alpha)(\text{Csc}\,\alpha - \text{Sen}\,\alpha)}{\text{Cos}\,\alpha} = \text{Sen}\,\alpha$

29. $\dfrac{\text{Sen}\,x\,\text{Cos}\,x}{\text{Sen}^2\,x - \text{Cos}^2\,x} = \dfrac{\text{Cot}\,x}{1 - \text{Cot}^2\,x}$

30. $\dfrac{\text{Csc}^4\,\alpha - 1}{\text{Cot}^2\,\alpha} = \text{Csc}^2\,\alpha + 1$

31. $\dfrac{\text{Tan}^2\,\alpha}{1 + \text{Cot}^2\,\alpha} = \text{Sen}^2\,\alpha$

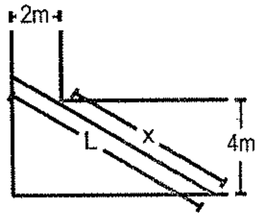
32. $\dfrac{\text{Cos}\,\alpha}{\text{Csc}\,\alpha - 2\,\text{Sen}\,\alpha} = \dfrac{\text{Tan}\,\alpha}{1 - \text{Tan}\,\alpha}$

33. $\text{Sec}^4\,\alpha - (\text{Tan}^4\alpha + \text{Sec}^2\,\alpha) = \text{Sec}^2\,\alpha\,\text{Sen}^2\,\alpha$

34. $\dfrac{\text{Sen}\,\alpha}{1 - \text{Tan}\,\alpha} + \dfrac{\text{Cos}\,\alpha}{1 - \text{Cot}\,\alpha} = \text{Sen}\,\alpha + \text{Cos}\,\alpha$

35. $\text{Sec}^6\,\theta - \text{Tan}^6\theta = 1 + 3\,\text{Sec}^2\theta\,\text{Tan}^2\theta$

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (20)



Una varilla se transporta horizontalmente por un pasillo de 2 m de ancho; luego, debe rodear una esquina para continuar siendo transportada por otro pasillo, perpendicular al anterior, de 4 m de ancho tal como muestra la figura siguiente. Si L es la longitud de la varilla y x es la longitud de uno de los pedazos en que la esquina divide a la varilla, se pide: Escribir una ecuación, en función de x, para calcular la longitud L de la varilla.

6.5 ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

En la sección anterior dijimos que las IDENTIDADES son igualdades que se cumplen para todo valor de la(s) variable(s).

Existen, sin embargo, otras igualdades que sólo se cumplen para ciertos valores de la variable. Por ejemplo:

- La igualdad $3x - 6 = 0$ se cumple sólo para $x = 2$
- La igualdad $x^2 + 5x + 6 = 0$ se cumple sólo para $x = -3$ ó $x = -2$
- La igualdad $a + b = 7$ se cumple para muchos valores de a y b, pero no para todos; por ejemplo, se cumple para $a = 3$ y $b = 4$; $a = 1$ y $b = 6$; $a = -2$ y $b = 9$; pero no se cumple para $a = 2$ y $b = 8$; ni para $a = -3$ y $b = 6$,...

Estas igualdades se denominan ECUACIONES.

Cuando la incógnita de una ecuación es el ángulo de una función trigonométrica, la ecuación se denomina TRIGONOMÉTRICA.

En la solución de una ecuación trigonométrica deben tenerse en cuenta dos aspectos:

1. **Resolver la parte algebraica.**

   Consiste en aplicar las identidades fundamentales y las propiedades del álgebra con el objeto de escribir la ecuación en términos de una sola función o de dos o más ecuaciones cada una con una sola función.

2. **Resolver la parte trigonométrica.**

   Consiste en hallar los valores del ángulo que satisfacen la ecuación.

Ejemplo 1

Resolvamos la ecuación: $\text{Cos}^2\alpha + 2\text{Cos}\,\alpha - 3 = 0$ para $0° \leq \alpha \leq 360°$.

SOLUCIÓN

La ecuación aparece en términos de una sola función y es de segundo grado. Vamos a resolverla por factorización:

$\text{Cos}^2\alpha + 2\text{Cos}\,\alpha - 3 = 0$ .... Ecuación dada.

$\therefore\ (\text{Cos}\,\alpha + 3)(\text{Cos}\,\alpha - 1) = 0$ .... Factorizamos.

$$\therefore \begin{cases} \text{Cos}\,\alpha + 3 = 0 \\ \text{ó} \\ \text{Cos}\,\alpha - 1 = 0 \end{cases}$$ .... Aplicamos $a \cdot b = 0$

$$\therefore \begin{cases} \text{Cos}\,\alpha = -3 \text{ no tiene solución (por qué)} \\ \text{ó} \\ \text{Cos}\,\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 0^0\ ,\ 360^0 \end{cases}$$

Luego, el conjunto solución es $S = \{0°, 360°\}$

ATENCIÓN

Si no hubiéramos restringido el ángulo al intervalo $0° \leq \alpha \leq 360°$entonces la solución sería:

$$S = \{\alpha/\alpha = 360° \cdot n \, ; \text{con } n \in Z\}$$

Ejemplo 2

Resolvamos la ecuación: $3Tan^2\theta + 2Sec^2\theta + 1 = 0$ para $0° \leq \alpha \leq 360°$.

SOLUCIÓN

$3Tan^2\theta + 2Sec^2\theta + 1 = 0$ .... Ecuación dada.

$\therefore 3Tan^2\theta - 2(1+Tan^2\theta) + 1 = 0$ .... $Sec^2\theta = 1 + Tan^2\theta$

$\therefore Tan^2\theta - 1 = 0$ .... Reducción de términos semejantes

$\therefore (Tan\theta + 1)(Tan\theta - 1) = 0$ .... Diferencia de cuadrados

$$\therefore \begin{cases} Tan\,\theta + 1 = 0 \Rightarrow Tan\,\theta = -1 \Rightarrow \theta = 135^0\,,\,315^0 \\ ó \\ Tan\,\theta - 1 = 0 \Rightarrow Tan\,\theta = 1 \Rightarrow \theta = 45^0\,,\,225^0 \end{cases}$$ ..... Aplicamos la propiedad a•b=0

Por lo tanto, la solución es S = { 45°, 135°, 225°, 315° }

Ejemplo 3

Resolvamos la ecuación: $4\,Cos^2\alpha - 2\left(1+\sqrt{3}\right)Cos\,\alpha + \sqrt{3} = 0$ para $0° \leq \alpha \leq 360°$.

SOLUCIÓN

Eliminemos el paréntesis y luego factoricemos por agrupación de términos:

$4\,Cos^2\alpha - 2\left(1+\sqrt{3}\right)Cos\,\alpha + \sqrt{3} = 0$ .... Ecuación dada.

$\therefore 4\,Cos^2\alpha - 2\,Cos\,\alpha - 2\sqrt{3}\,Cos\,\alpha + \sqrt{3} = 0$ .... Propiedad distributiva

$\therefore \left(4\,Cos^2\alpha - 2\,Cos\,\alpha\right) - \left(2\sqrt{3}\,Cos\,\alpha - \sqrt{3}\right) = 0$ .... Propiedad asociativa

$\therefore 2\,Cos\,\alpha\,(2\,Cos\,\alpha - 1) - \sqrt{3}\,(2\,Cos\,\alpha - 1) = 0$ .... Factor común

$\therefore (2\,Cos\,\alpha - 1)\left(2\,Cos\,\alpha - \sqrt{3}\right) = 0$ .... Factor común

$$\therefore \begin{cases} 2\,Cos\,\alpha - 1 = 0 \Rightarrow Cos\,\alpha = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^0\,,\,300^0 \\ ó \\ 2\,Cos\,\alpha - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow Cos\,\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = 30^0\,,\,330^0 \end{cases}$$

Luego, el conjunto solución es S = { 30°, 60°, 300°, 330° }

Ejemplo 4

Resolvamos la ecuación $Tanx\,Senx - \sqrt{3}\,Sen\,x = 0$ para $0° \leq x \leq 360°$.

SOLUCIÓN

- Tenemos una ecuación con dos incógnitas: Tanx y Senx; pero podemos factorizar:

$\text{Tan } x \text{ Sen } x - \sqrt{3} \text{ Sen } x = 0$ .... Ecuación dada.

$\therefore \text{ Sen } x \left(\text{Tan } x - \sqrt{3}\right) = 0$ .... Factor común Sen x

$\therefore \text{ Sen } x = 0 \text{ ó } \text{Tan } x - \sqrt{3} = 0$ .... Aplicamos la propiedad a•b=0

$\therefore \text{ Sen } x = 0 \text{ ó } \text{Tan } x = \sqrt{3}$

$$\therefore \begin{cases} \text{Sen } x = 0 \Rightarrow x = 0^0 , 180^0 , 360^0 \\ \text{Tan } x = \sqrt{3} \Rightarrow x = 60^0 , 240^0 \end{cases}$$

- Luego, el conjunto solución es: S = {0°, 60°, 180°, 240°, 360° }

Ejemplo 5

Resolvamos la ecuación Sen θ + Cos θ = 1, para 0° ≤ x ≤ 360°.

SOLUCIÓN

- De nuevo tenemos una ecuación con dos incógnitas: Sen θ y Cos θ

$\text{Sen } \theta + \text{Cos } \theta = 1$

$\therefore \text{ Sen } \theta = 1 - \text{Cos } \theta$

$\therefore \pm \sqrt{1 - \text{Cos}^2 \theta} = 1 - \text{Cos } \theta$ .... Porque $\text{Sen}^2 \theta = 1 - \text{Cos}^2 \theta$

$$\therefore \left(\pm \sqrt{1 - \text{Cos}^2 \theta}\right)^2 = (1 - \text{Cos } \theta)^2$$

Notemos que la ecuación original es de primer grado. Al elevar ambos miembros al cuadrado, estamos cambiando el grado de la ecuación y, probablemente, estamos introduciendo nuevas soluciones. Sin embargo, esto nos permite escribir el seno en función del coseno y resolver la ecuación. Para eliminar las soluciones extrañas, introducidas al elevar al cuadrado ambos miembros, se chequean los valores de θ obtenidos y se descartan los que no verifican la ecuación original.

- Sigamos:

$1 - \text{Cos}^2\theta = 1 - 2\text{Cos } \theta + \text{Cos}^2 \theta$

$\therefore 2\text{Cos}^2\theta - 2\text{Cos } \theta = 0$

$\therefore 2\text{Cos } \theta (\text{Cos } \theta - 1) = 0$

$$\therefore \begin{cases} 2 \text{ Cos } \theta = 0 \Rightarrow \text{Cos } \theta = 0 \Rightarrow \theta = 90^0 , 270^0 \\ \text{ó} \\ \text{Cos } \theta - 1 = 0 \Rightarrow \text{Cos } \theta = 1 \Rightarrow \theta = 0^0 , 360^0 \end{cases}$$

- Ahora verifiquemos estos resultados en la ecuación original:

Si θ = 0° entonces Sen 0° + Cos 0° = 0 + 1 = 1 (cumple)
Si θ = 90° entonces Sen 90° + Cos 90° = 1 + 0 = 1 (cumple)
Si θ = 270° entonces Sen 270° + Cos 270° = -1 + 0 1 (no cumple)
Si θ = 360° entonces Sen 360° + Cos 360° = 0 + 1 = 1 (cumple)

- Por lo tanto, el conjunto solución de la ecuación es: S = {0°, 90°, 360° }

Ejemplo 6

Resolvamos la ecuación Csc θ + Cot θ = $\sqrt{3}$, para 0° ≤ x ≤ 360°.

SOLUCIÓN

- Escribamos la ecuación dada en términos de Seno y Coseno:

$$\operatorname{Csc}\theta + \operatorname{Cot}\theta = \sqrt{3} \quad \text{.................... Ecuación dada}$$

$$\therefore \frac{1}{\operatorname{Sen}\theta} + \frac{\operatorname{Cos}\theta}{\operatorname{Sen}\theta} = \sqrt{3} \quad \text{.................... ¿Por qué?}$$

$$\therefore \frac{1+\operatorname{Cos}\theta}{\operatorname{Sen}\theta} = \sqrt{3}$$

$$\therefore\ 1+\operatorname{Cos}\theta = \sqrt{3}\ \operatorname{Sen}\theta \ \ ;\text{con } \operatorname{Sen}\theta \neq 0$$

Como en el ejemplo anterior, elevamos ambos miembros al cuadrado:

$$\therefore\ (1+\operatorname{Cos}\theta)^2 = \left(\sqrt{3}\ \operatorname{Sen}\theta\right)^2$$

$$\therefore\ 1 + 2\operatorname{Cos}\theta + \operatorname{Cos}^2\theta = 3\operatorname{Sen}^2\theta$$

$$\therefore\ 1 + 2\operatorname{Cos}\theta + \operatorname{Cos}^2\theta = 3\,(1 - \operatorname{Cos}^2\theta)$$

$$\therefore\ 1 + 2\operatorname{Cos}\theta + \operatorname{Cos}^2\theta = 3 - 3\operatorname{Cos}^2\theta$$

$$\therefore\ 4\operatorname{Cos}^2\theta + 2\operatorname{Cos}\theta - 2 = 0$$

$$\therefore\ 2\operatorname{Cos}^2\theta + \operatorname{Cos}\theta - 1 = 0$$

$$\therefore \begin{cases} 2\operatorname{Cos}\theta - 1 = 0 \Rightarrow \operatorname{Cos}\theta = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \theta = 60^0\ ,\ 300^0 \\ \text{ó} \\ \operatorname{Cos}\theta + 1 = 0 \Rightarrow \operatorname{Cos}\theta = -1 \Rightarrow \theta = 180^0 \end{cases}$$

- Verifiquemos estos resultados en la ecuación original:

Si $\theta = 60^\circ$ entonces $\operatorname{Csc} 60^\circ + \operatorname{Cot} 60^\circ = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$ (cumple).

Si $\theta = 180^\circ$ entonces $\operatorname{Csc} 180^\circ + \operatorname{Cot} 180^\circ$ no está definida.

Si $\theta = 300^\circ$ entonces $\operatorname{Csc} 300^\circ + \operatorname{Cot} 300^\circ = -\dfrac{2\sqrt{3}}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{3} = -\sqrt{3}$ (no cumple)

- Por lo tanto, el conjunto solución de la ecuación es: $S = \{60^\circ\}$

Ejemplo 7

Resolvamos la ecuación $\dfrac{\operatorname{Sen}\theta}{1+\operatorname{Cos}\theta} + \operatorname{Cot}\theta = 2$, para $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$.

SOLUCIÓN

- Como en la ecuación aparecen tres funciones trigonométricas, debemos tratar de reducir este número de manera que nos quede una ecuación con una incógnita o varias ecuaciones con una sola incógnita. Veamos cómo:

$$\therefore \frac{\operatorname{Sen}\theta}{1+\operatorname{Cos}\theta} + \operatorname{Cot}\theta = 2 \quad \text{................ Ecuación dada}$$

$$\therefore \frac{\operatorname{Sen}\theta}{1+\operatorname{Cos}\theta} + \frac{\operatorname{Cos}\theta}{\operatorname{Sen}\theta} = 2 \quad \text{................ } \operatorname{Cot}\theta = \frac{\operatorname{Cos}\theta}{\operatorname{Sen}\theta}$$

$\therefore \dfrac{\text{Sen}^2\theta + \text{Cos}\,\theta\left(1+\text{Cos}\,\theta\right)}{\text{Sen}\,\theta\left(1+\text{Cos}\,\theta\right)} = 2$ .... ¿Qué hicimos?

$\therefore \dfrac{\text{Sen}^2\theta + \text{Cos}\,\theta + \text{Cos}^2\theta}{\text{Sen}\,\theta(1+\text{Cos}\,\theta)} = 2$

$\therefore \dfrac{1+\text{Cos}\,\theta}{\text{Sen}\,\theta\left(1+\text{Cos}\,\theta\right)} = 2$

$\therefore$ $1 + \text{Cos}\,\theta = 2\,\text{Sen}\,\theta\,(1 + \text{Cos}\,\theta)$; con $\text{Sen}\,\theta \neq 0$ y $\text{Cos}\,\theta \neq -1$

$\therefore$ $(1 + \text{Cos}\,\theta) - 2\,\text{Sen}\,\theta\,(1 + \text{Cos}\,\theta) = 0$

$\therefore$ $(1 + \text{Cos}\,\theta)(1 - 2\text{Sen}\,\theta) = 0$

$$\therefore \begin{cases} 1 + \text{Cos}\,\theta = 0 \Rightarrow \text{Cos}\,\theta = -1 : \text{se descarta porque ya dijimos que Cos}\,\theta \neq -1 \\ \text{ó} \\ 1 - 2\,\text{Sen}\,\theta = 0 \Rightarrow \text{Sen}\,\theta = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \theta = 30^0\ ,\ 150^0 \end{cases}$$

- Por lo tanto, el conjunto solución de la ecuación es: $S = \{30°, 150°\}$

EJERCICIO 6.3

Resolver las siguientes ecuaciones para ángulos entre 0° y 360°:

1. $\text{Sen}^2 x - 1 = 0$
2. $2\,\text{Sen}\,x - \sqrt{3} = 0$
3. $\text{Tan}^2\alpha - 1 = 0$
4. $\text{Cos}^2\theta - \dfrac{1}{4} = 0$
5. $\text{Sen}^2\theta - \dfrac{3}{4} = 0$
6. $\text{Cos}^2\theta - \text{Cos}\,\theta = 0$
7. $\text{Sen}^2\alpha + 2\text{Sen}\,\alpha - 3 = 0$
8. $\text{Sen}\,\alpha \cdot \text{Cos}\,\alpha + \text{Sen}\,\alpha = 0$
9. $4\,\text{Cos}^2 x - \text{Cos}\,x = 0$
10. $\text{Sec}^2\theta = 2\,\text{Tan}^2\theta$
11. $2\,\text{Sen}^2\alpha + \text{Cos}^2\alpha - 1 = 0$
12. $\dfrac{1}{\text{Sen}\,\alpha} + \dfrac{1}{\text{Tan}\,\alpha} = 1$
13. $3\,\text{Cos}^2 x + \text{Sen}^2 x = 2$
14. $\dfrac{1}{\text{Csc}^2\alpha} - 1 = -\text{Cot}^2\alpha\,\text{Sen}^2\alpha$
15. $\text{Sen}\,\alpha + \sqrt{3}\,\text{Cos}\,\alpha = 0$
16. $4\,\text{Cos}^2\alpha - 2\left(1+\sqrt{2}\right)\text{Cos}\,\alpha + \sqrt{2} = 0$ (Factorice)
17. $2\,\text{Cos}\,\alpha = \text{Sec}\,\alpha$
18. $\text{Tan}\,\alpha\,(1 - \text{Sec}\,\alpha) + 3\,\text{Tan}\,\alpha = 0$
19. $6\,\text{Tan}^2\theta - 2\sqrt{3}\,\text{Tan}\,\theta - 3\,\text{Tan}\,\theta + \sqrt{3} = 0$ (Factorice)
20. $\text{Tan}\,\alpha\,(1 - 2\,\text{Sen}\,\alpha) - 2\,\text{Cos}\,\alpha = 0$
21. $\text{Cos}\,\alpha\,(1 - \text{Tan}\,\alpha) - \text{Sen}\,\alpha\,(1 + \text{Cot}\,\alpha) = 1$
22. $\text{Sec}\,\alpha - 5\,\text{Tan}\,\alpha\,(1 + 2\,\text{Sen}\,\alpha) = \text{Cos}\,\alpha$
23. $-5\,\text{Cos}^2 x - 3\,\text{Sen}\,x + 5 = 0$
24. $9\,\text{Cot}^2\alpha + \left(3 - 3\sqrt{3}\right)\text{Cot}\,\alpha - \sqrt{3} = 0$ (Factorice)
25. $\text{Tan}\,\alpha + \text{Sec}\,\alpha = 1$
26. $2\,\text{Tan}\,\alpha + 3\,\text{Sec}\,\alpha - 3 = 0$
27. $\text{Sen}\,x - \text{Cos}\,x = \sqrt{2}$
28. $2\,\text{Sen}\,x - \text{Cos}\,x = 0$

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (21)

A la 1 p.m., un barco A se encuentra 25 km al sur de otro barco B. Suponiendo que A viaja hacia el Oeste a una velocidad de 16 km/h y B navega hacia el Sur a 20 km/h, se pide:

1. **Dibujar la posición de los barcos en un momento t entre la 1 p.m. y la 1:30 p.m.**
2. **Escribir una ecuación, en función de t, para calcular la distancia d que separa ambos barcos en un instante t entre la 1:00 p.m. y la 1:30 p.m.**

Taller de la Unidad 6

En los ejercicios 1. a 10., elegir la letra correspondiente a la ÚNICA respuesta correcta:

1. La expresión $\text{Cos}\theta \cdot \text{Tan}\theta$, es equivalente a:

a) $\text{Sen}\ \theta$ b) $\text{Cos}\ \theta$ c) $\text{Tan}\ \theta$ d) $\dfrac{1}{\text{Cos}\ \theta}$

2. La expresión $\text{Sen}^3\theta + \text{Sen}\ \theta \cdot \text{Cos}^2\theta$ es idéntica a:

a) $\text{Cot}\ \theta$ b) $\text{Cos}\ \theta$ c) $\text{Sen}\ \theta$ d) $\text{Csc}\ \theta$

3. Los valores de θ, tales que $0° \leq \theta \leq 360°$, que satisfacen la ecuación $2\ \text{Sen}\ \theta - 1 = 0$, son:

a) 30° y 120° b) 30° y 240° c) 30° y 150° d) 30° y 135°

4. La expresión $\text{Sen}^4\theta + 2\text{Sen}^2\theta\ \text{Cos}^2\theta + \text{Cos}^4\theta$ es idéntica a:

a) $\text{Sen}^4\theta - \text{Cos}^4\theta$ b) 1 c) -1 d) $2\ \text{Sen}^2\theta\ \text{Cos}^2\theta$

5. El valor de θ que satisface la ecuación $\text{Sen}^2\theta + \text{Sen}\ \theta = 2$ para $0° \leq \theta \leq 360°$

a) 0° b) 180° c) 270° d) 90°

6. Sólo una de las siguientes igualdades es una identidad:

a) $\text{Sen}\ x + \text{Cos}\ x = 1$ b) $\text{Sen}^4x + \text{Cos}^4x = 1$
c) $2\text{Sen}^2x + 2\text{Cos}^2x = 1$ d) $4\ \text{Sen}^2x + 4\ \text{Cos}^2x = 4$

7. La igualdad $\text{Tan}\ \theta = \dfrac{\text{Sen}\ \theta}{\text{Cos}\ \theta}$ no se cumple cuando:

a) $\theta = 0°$ b) $\theta = 180°$ c) $\theta = 360°$ d) $\theta = 90°$

8. La expresión $\dfrac{\text{Sen}^2\theta}{1 + \text{Cos}\ \theta}$ es equivalente a:

a) $1 - \text{Cos}\ \theta$ b) $1 + \text{Sen}\ \theta$ c) $1 + \text{Cos}\ \theta$ d) $1 - \text{Sen}\ \theta$

9. Si escribimos $\text{Sen}\ \theta$ en términos de $\text{Tan}\ \theta$ obtenemos:

a) $\dfrac{\text{Tan}\ \theta}{\text{Tan}^2\theta + 1}$ b) $\dfrac{\pm\sqrt{1 + \text{Tan}^2\theta}}{\text{Tan}\ \theta}$ c) $\dfrac{\text{Tan}\ \theta}{\pm\sqrt{\text{Tan}^2\theta + 1}}$ d) $\dfrac{\text{Tan}\ \theta}{\pm\sqrt{\text{Tan}^2\theta - 1}}$

10. Si escribimos Sec θ en términos de Sen θ obtenemos:

a) $\dfrac{1}{\text{Sen}\,\theta}$ b) $\dfrac{\pm\sqrt{1-\text{Sen}^2\theta}}{1-\text{Sen}^2\theta}$ c) $\dfrac{1}{1+\text{Sen}^2\theta}$ d) $\dfrac{1}{1-\text{Sen}^2\theta}$

En los ejercicios **11.** a **20.** probar que las igualdades dadas son identidades:

11. $(\text{Tan}\,x + 2)(2\,\text{Tan}\,x + 1) = 5\,\text{Tan}\,x + 2\,\text{Sec}^2x$

12. $\text{Csc}\,\alpha\,(\text{Sec}\,\alpha - 1) - \text{Cot}\,\alpha\,(1 - \text{Cos}\,\alpha) = \text{Tan}\,\alpha - \text{Sen}\,\alpha$

13. $\text{Sen}^2\theta\,(2 + \text{Tan}^2\,\theta) = \text{Sec}^2\theta - \text{Cos}^2\theta$

14. $\text{Cos}\,x\,(2\,\text{Sec}\,x + \text{Tan}\,x)(\text{Sec}\,x - 2\,\text{Tan}\,x) = 2\,\text{Cos}\,x - 3\,\text{Tan}\,x$

15. $\sqrt{1+\text{Cot}^2x}\cdot\sqrt{\text{Sec}^2x-1}\cdot\sqrt{1-\text{Sen}^2x} = 1$

16. $\text{Tan}^3x + 1 = (\text{Tan}\,x + 1)(\text{Sec}^2x - \text{Tan}\,x)$

17. $\dfrac{\text{Sec}^2x\,(1+\text{Cos}\,x\;\text{Tan}\,x)}{(\text{Tan}\,x+\text{Sec}\,x)^2+1} = \dfrac{1}{2}$

18. $\dfrac{(\text{Tan}\,x+\text{Sec}\,x)^2+1}{2\,(1+\text{Sen}\,x)} = \text{Sec}^2x$

19. $7\,\text{Sec}^2x - 6\,\text{Tan}^2x + 9\,\text{Cos}^2x = \dfrac{(1+3\,\text{Cos}^2x)^2}{\text{Cos}^2x}$

20. $\dfrac{\text{Sen}^2x\,(\text{Cos}^4x-\text{Sen}^2x)+\text{Cos}^6x}{\text{Cos}^2x\,(2\,\text{Cos}^2x-1)} = \text{Sec}^2x$

En los ejercicios **21.** a **30.**, resolver cada ecuación para ángulos entre 0ª y 360ª.

21. $2\,\text{Sen}^2x + 3\,\text{Cos}\,x - 3 = 0$

22. $4\,\text{Tan}^2x - 3\,\text{Sec}^2x = 0$

23. $\text{Tan}^2x + \text{Sec}\,x - 1 = 0$

24. $\text{Cos}^2x - \text{Sen}^2x + 2\left(\dfrac{1+\text{Cos}\,x}{2}\right) = 1$

25. $2\,\text{Cos}\,x + \sqrt{3} - 2 - \sqrt{3}\,\text{Sec}\,x = 0$

26. $\text{Csc}\,x - 3 + 2\,\text{Sen}\,x = 0$

27. $\sqrt{3}\,\text{Cot}\,x + \sqrt{3} - 1 - \text{Tan}\,x = 0$

28. $\text{Tan}\,x - 1 + \text{Cos}^2x - \text{Sen}^2x = 0$

29. $2\,\text{Sen}\,x\,\text{Cos}\,x - \text{Cos}^2x + \text{Sen}^2x = 0$

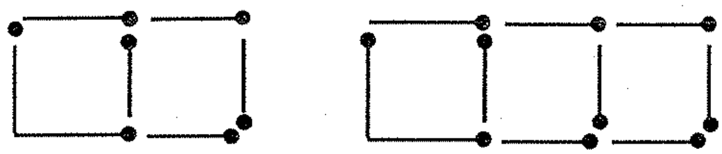
30. $\dfrac{2\,\text{Sen}\,x\,\text{Cos}\,x}{\text{Cos}^2x - \text{Sen}^2x} = \text{Cot}\,x$

Prepárate para las Pruebas ICFES

En cada uno de los siguiente ejercicios escoja la letra correspondiente a la ÚNICA respuesta correcta:

1. La figura muestra que es posible construir cuadrados con fósforos. Usamos 7 fósforos para construir 2 cuadrados y 10 fósforos para construir 3. ¿Cuántos fósforos se necesitan para construir 20 cuadrados?

a) 60 fósforos.
b) 61 fósforos.
c) 70 fósforos.
d) 79 fósforos.

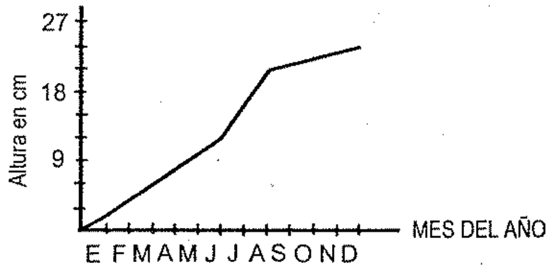


2. ¿Cuántos cuadrados es posible construir con 28 fósforos?

a) 8 b) 9 c) 10 d) 11

3. El siguiente gráfico representa el crecimiento de una planta. ¿En qué período se produjo el mayor crecimiento?

a) En enero.
b) Entre febrero y marzo.
c) Entre julio y agosto.
d) Entre septiembre, octubre, noviembre y diciembre



4. Si $(a + b)^2$ es impar y b^2 es par, ¿cuál o cuáles de las siguientes expresiones es impar?

I. a II. a^2 III. ab

a) II solamente b) I y II únicamente c) III solamente d) II y III únicamente.

5. Dada la expresión algebraica $\frac{64x^3}{a^6}$, para reducirla a la tercera parte:

a) Se extrae la raíz cúbica.
b) Se multiplica por 3 el numerador.
c) Se multiplica por 3 el denominador
d) Se divide por $\frac{1}{3}$ el denominador.

Núcleo Temático

7

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS COMPUESTOS

LOGRO GENERAL

- Deducir las identidades trigonométricas de ángulos compuestos y utilizarlas para probar otras identidades y para resolver ecuaciones trigonométricas.

LOGROS ESPECÍFICOS	INDICADORES DE LOGRO
Corporal: • Realizar experiencias en la circunferencia de ecuación $x^2+y^2=1$ con el fin de deducir la identidad: $\text{Cos}(\alpha-\beta) = \text{Cos}(\alpha)\text{Cos}(\beta) + \text{Sen}(\alpha)\,\text{Sen}(\beta)$.	• Utiliza el concepto de distancia entre dos puntos y la ecuación $x^2 + y^2 = 1$ para deducir la identidad: $\text{Cos}(\alpha-\beta) = \text{Cos}(\alpha)\text{Cos}(\beta) + \text{Sen}(\alpha)\,\text{Sen}(\beta)$.
Comunicativa: • Explicar la manera como se deduce la identidad: $\text{Cos}(\alpha-\beta) = \text{Cos}(\alpha)\text{Cos}(\beta) + \text{Sen}(\alpha)\,\text{Sen}(\beta)$.	• Explica en el tablero el proceso que conduce a la obtención de la identidad: $\text{Cos}(\alpha-\beta) = \text{Cos}(\alpha)\text{Cos}(\beta) + \text{Sen}(\alpha)\,\text{Sen}(\beta)$.
Cognitiva: • Enunciar y deducir las identidades trigonométricas de la suma y diferencia de ángulos, de ángulos dobles, de ángulos mitad y transformación de sumas en productos y viceversa. • Probar identidades trigonométricas donde aparezcan funciones de ángulos compuestos. • Resolver ecuaciones trigonométricas donde aparezcan funciones de ángulos compuestos.	• Deduce e interpreta las identidades trigonométricas de ángulos compuestos. • Prueba identidades trigonométricas donde intervienen funciones trigonométricas de ángulos compuestos. • Resuelve ecuaciones trigonométricas donde aparecen funciones trigonométricas de ángulos compuestos.
Estética: • Elaborar una tabla donde resume todas las identidades trigonométricas obtenidas.	• Diseña una cartelera con todas las identidades trigonométricas de ángulos simples y de ángulos compuestos.
Ética - Actitudinal: • Asumir una actitud de denuncia frente a posiciones de injusticia, discriminación, crueldad y deshonestidad.	• Expresa franca y objetivamente sus puntos de vista.

D I M E N S I O N E S

E V A L U A C I Ó N

E S T R A T E G I A S   M E T O D O L Ó G I C A S

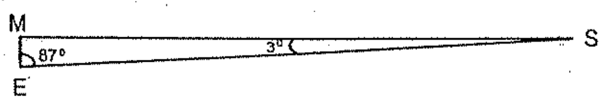
7.1 COMPRENSIÓN DE LECTURA: HISTORIA DE LA TRIGONOMETRÍA (4)

Lea atentamente el siguiente texto y luego subraye la letra correspondiente a la ÚNICA respuesta correcta en cada uno de los enunciados propuestos.

ARISTARCO DE SAMOS
310 - 230 A. DE C.).

Los astrónomos de la Época Alejandrina, especialmente Aristarco de Samos (310 a.C.-230 a.C.) y Eratóstenes de Cirene (276 a.C.-194 a.C.) trabajaron problemas en los cuales cada vez era más urgente establecer relaciones sistemáticas entre los ángulos y las cuerdas.

Aristarco, en su obra sobre los tamaños y las distancias del Sol y la Luna, hace la observación de que cuando la Luna está exactamente medio llena, el ángulo entre la visual dirigida al centro del Sol y la visual dirigida al centro de la Luna es menor que un ángulo recto en un treintavo de cuadrante (la introducción sistemática de los 360° como medida de un ángulo completo vino un poco más tarde). En el lenguaje trigonométrico actual esto significa que la razón de la distancia de la Luna a la Tierra con la distancia del Sol a la Tierra; es decir, la razón $\frac{ME}{SE}$ en la figura siguiente es igual a Sen 3°:



Pero, como aún no se habían desarrollado las tablas trigonométricas, Aristarco tuvo que recurrir a un teorema geométrico bien conocido en su época y que hoy expresaríamos mediante la cadena de desigualdades siguiente:

$$\frac{\operatorname{Sen} \alpha}{\operatorname{Sen} \beta} < \frac{\alpha}{\beta} < \frac{\operatorname{Tan} \alpha}{\operatorname{Tan} \beta};\ \text{para } 0° < \beta < \alpha < 90°$$

De esta manera concluyó Aristarco que $\frac{1}{20} < \operatorname{Sen} 3° < \frac{1}{18}$ y afirmó que el Sol está más de 18 veces, pero menos de 20 veces, más alejado de la Tierra que de la Luna. Este valor está muy lejos de aproximarse al verdadero, que es algo menor de 400 veces, pero es un poco mejor que los valores 9 y 12 que Arquímedes atribuye a Eudoxo y a Fidias, padre de Arquímedes.

1. Las observaciones de los astrónomos antiguos:

   a. Condujeron al hombre al desarrollo de la trigonometría.
   b. Facilitaron a los hombres de ciencia el conocimiento de la mecánica celeste.

c. Permitieron al hombre establecer distancias exactas entre el sol, la tierra y la luna.
d. Se han prestado para interpretaciones distintas sobre distancias entre los astros.

2. Según el texto, Aristarco y Eratóstenes:
   a. Son astrónomos del mundo griego antiguo.
   b. Estaban dedicados al trabajo matemático.
   c. Superaron en exactitud a Arquímedes y Eudoxo.
   d. Realmente pertenecen al mundo científico egipcio.

3. El campo real de trabajo de Aristarco fue:
   a. Las ciencias matemáticas.
   b. Las medidas y distancias.
   c. La trigonometría.
   d. La astronomía.

4. De acuerdo con el texto, Arquímedes:
   a. Mostró más respeto por los estudios de Eudoxo que por los de Aristarco.
   b. Entró en polémica con Aristarco por estudios de distancias entre astros.
   c. Estaba más alejado de la realidad que Aristarco, respecto de las distancias entre astros.
   d. Aprovechó su prestigio para teorizar erróneamente.

5. De la lectura anterior se puede concluir que:
   a. Las matemáticas necesitan de la astronomía para su desarrollo.
   b. El dominio de una ciencia conlleva al estudio y manejo de otras.
   c. La astronomía existía antes de aparecer el hombre
   d. El hombre siempre se ha preocupado por la conformación del universo.

7.2 FÓRMULAS DE SUMA Y RESTA DE ÁNGULOS

- En las unidades anteriores hemos estudiado las propiedades y relaciones de las funciones trigonométricas de un ángulo. Sin embargo, en física y cursos más avanzados de matemáticas intervienen funciones trigonométricas de la suma o diferencia de dos ángulos, del ángulo doble, del ángulo mitad, etc.

- Dedicaremos esta unidad a obtener las identidades correspondientes a:

$\text{Cos}\,(\alpha \pm \beta)$ .... Coseno de la suma o resta de dos ángulos.

$\text{Sen}\,(\alpha \pm \beta)$ .... Seno de la suma o resta de dos ángulos.

$\text{Tan}\,(\alpha \pm \beta)$ .... Tangente de la suma o resta de dos ángulos.

$\text{Cos}\,(2\alpha)$ .... Coseno de un ángulo doble.

$\text{Sen}\,(2\alpha)$ .... Seno de un ángulo doble.

$\text{Tan}\,(2\alpha)$ .... Tangente de un ángulo doble.

$\text{Cos}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ .... Coseno del ángulo mitad.

$\text{Sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ .... Seno del ángulo mitad.

$\text{Tan}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ .... Tangente del ángulo mitad.

- Antes de comenzar a deducirlas conviene advertir que, en general:

$$\mathbf{Cos}\,(\alpha+\beta) \neq \mathbf{Cos}\,\alpha + \mathbf{Cos}\,\beta$$
$$\mathbf{Sen}\,(\alpha-\beta) \neq \mathbf{Sen}\,\alpha - \mathbf{Sen}\,\beta$$
$$\mathbf{Tan}\,(2\alpha) \neq 2\,\mathbf{Tan}\,\alpha$$
$$\mathbf{Cos}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \neq \frac{\mathbf{Cos}\,\alpha}{2}$$

Ejemplo

Mostremos que $\text{Cos}\left(90^0 - 60^0\right) \neq \text{Cos}\,90^0 - \text{Cos}\,60^0$

SOLUCIÓN

$\text{Cos}(90^o - 60^o) = \text{Cos}\,30^o$	$\text{Cos}\,90^0 - \text{Cos}\,60^0 = 0 - \frac{1}{2}$
$\therefore \text{Cos}(90^o - 60^o) = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\therefore \text{Cos}\,90^0 - \text{Cos}\,60^0 = -\frac{1}{2}$

Como $\frac{\sqrt{3}}{2} \neq -\frac{1}{2}$, entonces hemos comprobado que:

$$\boxed{\mathbf{Cos}\left(90^0 - 60^0\right) \neq \mathbf{Cos}\,90^0 - \mathbf{Cos}\,60^0}$$

- Para obtener una fórmula correcta que incluya a Cos $(\alpha - \beta)$, nos basaremos en la fórmula de la **distancia entre dos puntos.** Plantearemos dos ecuaciones en las que interviene la longitud de una cuerda $\overline{PQ}$ de la circunferencia unitaria y, luego, igualaremos estas dos ecuaciones para obtener la ecuación deseada.

PRIMERA PARTE

- La figura 7-1 nos muestra una circunferencia unitaria con centro en el origen de coordenadas y dos ángulos α y β en posición normal.

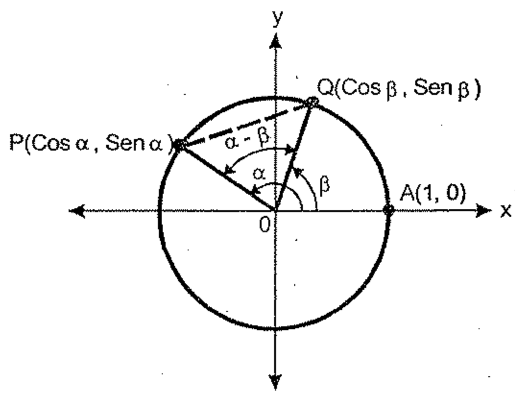


Figura 7-1

- Como la circunferencia es unitaria, entonces las coordenadas de los puntos P y Q serán, respectivamente, el COSENO y el SENO de los ángulos α y β ; así:

$$P\ (\text{Cos}\ \alpha\ ,\ \text{Sen}\ \alpha\ )$$
$$Q\ (\text{Cos}\ \beta\ ,\ \text{Sen}\ \beta\ )$$

además, el $\angle POQ$ será la diferencia $\alpha - \beta$.

- La longitud de la cuerda $\overline{PQ}$ se puede determinar aplicando la fórmula de distancia entre dos puntos; así:

$$\left|\overline{PQ}\right| = \sqrt{(\text{Cos}\ \alpha - \text{Cos}\ \beta)^2 + (\text{Sen}\ \alpha - \text{Sen}\ \beta)^2}$$

$$\therefore\ \left|\overline{PQ}\right|^2 = (\text{Cos}\ \alpha - \text{Cos}\ \beta)^2 + (\text{Sen}\ \alpha - \text{Sen}\ \beta)^2$$

$$\therefore\ \left|\overline{PQ}\right|^2 = \left(\text{Cos}^2\alpha - 2\,\text{Cos}\ \alpha\ \text{Cos}\ \beta + \text{Cos}^2\ \beta\right) + \left(\text{Sen}^2\alpha - 2\,\text{Sen}\ \alpha\ \text{Sen}\ \beta + \text{Sen}^2\ \beta\right)$$

$$\therefore\ \left|\overline{PQ}\right|^2 = \left(\text{Cos}^2\ \alpha + \text{Sen}^2\ \alpha\right) + \left(\text{Cos}^2\ \beta + \text{Sen}^2\ \beta\right) - 2\left(\text{Cos}\ \alpha\ \text{Cos}\ \beta + \text{Sen}\ \alpha\ \text{Sen}\ \beta\right)$$

$$\text{Pero}\left\{\begin{array}{l}\text{Sen}^2\ \alpha + \text{Cos}^2\ \alpha = 1\\ \text{Sen}^2\ \beta + \text{Cos}^2\ \beta = 1\end{array}\right.$$

$$\therefore\ \boxed{\left|\overline{PQ}\right|^2 = 2 - 2\left(\text{Cos}\ \alpha\ \text{Cos}\ \beta + \text{Sen}\ \alpha\ \text{Sen}\ \beta\right).}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(A)$$

SEGUNDA PARTE

- Ahora coloquemos el ángulo $\alpha - \beta$ en posición normal. Esto significa que el punto Q ocupa ahora la posición (1, 0) y el punto P la posición señalada por el lado final del ángulo $\alpha - \beta$; es decir: $Q\ \left(\text{Cos}\ (\alpha - \beta)\ ,\ \text{Sen}\ (\alpha - \beta)\right)$; figura 7-2:

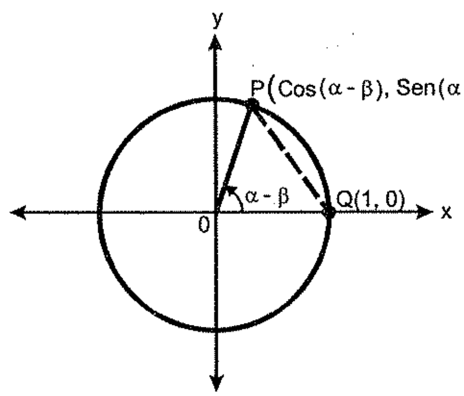


Figura 7-2

- Hallemos ahora, la distancia $\overline{PQ}$ en términos de las nuevas coordenadas:

$$\left|\overline{PQ}\right| = \sqrt{\left[\text{Cos}\ (\alpha - \beta) - 1\right]^2 + \left[\text{Sen}\ (\alpha - \beta) - 0\right]^2}$$

$$\therefore\ \left|\overline{PQ}\right|^2 = \text{Cos}^2\ (\alpha - \beta) - 2\,\text{Cos}\ (\alpha - \beta) + 1 + \text{Sen}^2\ (\alpha - \beta)$$

Pero: $\text{Cos}^2(\alpha - \beta) + \text{Sen}^2(\alpha - \beta) = 1$

$$\therefore \quad \boxed{\left|\overline{PQ}\right|^2 = 2 - 2\,\textbf{Cos}\,(\alpha - \beta)} \quad \text{...(B)}$$

- Como la distancia $\overline{PQ}$ es la misma en ambos casos, entonces podemos igualar los resultados (A) y (B); así:

$$2 - 2\left(\text{Cos}\,\alpha\ \text{Cos}\,\beta + \text{Sen}\,\alpha\ \text{Sen}\,\beta\right) = 2 - 2\,\text{Cos}\,(\alpha - \beta)$$

Después de cancelar términos y factores comunes, nos queda finalmente la siguiente igualdad-identidad:

$$\therefore \quad \boxed{\textbf{Cos}\,(\alpha - \beta) \equiv \textbf{Cos}\,\alpha\ \textbf{Cos}\,\beta + \textbf{Sen}\,\alpha\ \textbf{Sen}\,\beta} \quad \text{..........................(9)}$$

ATENCIÓN

1. Esta identidad es la número (9) para continuar la lista de identidades fundamentales comenzada en la unidad anterior.
2. Esta identidad podemos utilizarla para deducir otras identidades no menos importantes, como éstas:

* Probemos que el **coseno del complemento de un ángulo es igual al seno del ángulo;** es decir:

$$\boxed{\textbf{Cos}\left(90^0 - \theta\right) = \textbf{Sen}\,\theta} \quad \text{..(10)}$$

Prueba:

$$\therefore \text{Cos}\left(90^0 - \theta\right) = \cancelto{0}{\text{Cos}\,90^0} \cdot \text{Cos}\,\theta + \cancelto{1}{\text{Sen}\,90^0} \cdot \text{Sen}\,\theta \text{ ....por (9)}$$

$$\therefore \text{Cos}\left(90^0 - \theta\right) = 0 \cdot \text{Cos}\,\theta + 1 \cdot \text{Sen}\,\theta$$

$$\therefore \text{Cos}\left(90^0 - \theta\right) = \text{Sen}\,\theta$$

* Probemos que el **seno del complemento de un ángulo es igual al coseno del ángulo;** es decir:

$$\boxed{\textbf{Sen}\left(90^0 - \theta\right) = \textbf{Cos}\,\theta} \quad \text{..(11)}$$

Prueba:

En la identidad (10) reemplacemos θ por $\left(\mathbf{90^0} - \alpha\right)$; así:

$$\therefore \text{Cos}\left[90^0 - \left(90^0 - \alpha\right)\right] = \text{Sen}\left(90^0 - \alpha\right)$$

$$\therefore \text{Cos}\left[90^0 - 90^0 + \alpha\right] = \text{Sen}\left(90^0 - \alpha\right)$$

$$\therefore \text{Cos}\,(\alpha) = \text{Sen}\left(90^0 - \alpha\right) \quad \text{¡ y listo !}$$

* Probemos que: $\boxed{\cos(-\theta) = \cos\theta}$ ....(12)

Prueba:

Para mostrar que $\cos(-\theta) = \cos\theta$, aplicamos la identidad para $\cos(\alpha-\beta)$ con $\alpha = 0^0$ y $\beta = \theta$; así:

$$\cos(-\theta) = \cos\left(0^0 - \theta\right)$$

$$\therefore \cos(-\theta)\ \underbrace{\cancel{\cos 0^0}}_{=1} \cdot \cos\theta + \underbrace{\cancel{\text{Sen } 0^0}}_{=0} \cdot \text{Sen}\theta$$

$$\therefore \cos(-\theta) = 1 \cdot \cos\theta + 0 \cdot \text{Sen }\theta$$

$$\therefore \cos(-\theta) = \cos\theta$$

* Probemos que: $\boxed{\textbf{Sen}\,(-\theta) = -\textbf{Sen}\,\theta}$ ....(13)

Prueba:

En la identidad (10), Cos(90º- θ) = Sen θ sustituyamos θ por –α ; así:

$$\cos\left(90^0 - (-\alpha)\right) = \text{Sen}\,(-\alpha)$$

$$\therefore \cos\left(90^0 + \alpha\right) = \text{Sen}\,(-\alpha)$$

Pero, 90º + α también podemos escribirlo así: α - (-90º) ; por lo tanto:

$$\cos\left[\alpha - \left(-90^0\right)\right] = \text{Sen}\,(-\alpha)$$

$$\therefore \cos\alpha \cdot \cos\left(\cancel{-90^0}\right) + \text{Sen }\alpha\ \cancel{\text{Sen}}\left(-90^0\right) = \text{Sen}\,(-\alpha)$$

$$\therefore \cos\alpha \cdot 0 + \text{Sen }\alpha \cdot (-1) = \text{Sen}\,(-\alpha)$$

$$\therefore 0 - \text{Sen }\alpha = \text{Sen}\,(-\alpha)$$

CONCLUSIÓN: $\textbf{Sen}\,(-\alpha) = -\textbf{Sen}\,\alpha$, y por lo tanto Sen (-θ) = - Sen θ

* Probemos que: $\boxed{\textbf{Cos}\,(\alpha+\beta) = \textbf{Cos}\,\alpha\ \textbf{Cos}\,\beta - \textbf{Sen}\,\alpha\ \textbf{Sen}\,\beta}$ ....(14)

Prueba:

Esta igualdad es fácil de demostrar: basta escribir α + β como α -(-β) y aplicar las identidades anteriores; así:

$$\therefore \cos(\alpha+\beta) = \cos\left[\alpha - (-\beta)\right]$$

$$\therefore \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \underline{\cos(-\beta)} + \text{Sen }\alpha \cdot \underline{\text{Sen}\,(-\beta)}$$

$$\therefore \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \text{Sen }\alpha \cdot \left[-\text{Sen }\beta\right]$$

$$\therefore \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\ \cos\beta - \text{Sen }\alpha\ \text{Sen }\beta$$

* Probemos que: $\boxed{\mathbf{Sen}\left(\alpha+\beta\right)=\mathbf{Sen}\,\alpha\,\mathbf{Cos}\,\beta+\mathbf{Cos}\,\alpha\,\mathbf{Sen}\,\beta}$ ....(15)

Prueba:

Utilicemos la identidad $\text{Cos}\left(90^0-\theta\right)=\text{Sen}\,\theta$ y reemplacemos θ por $\alpha+\beta$; así:

$\therefore \text{Cos}\,(90^\circ-\theta)=\text{Sen}\,\theta$

$\therefore \text{Cos}\left[90^0-\left(\alpha+\beta\right)\right]=\text{Sen}\left(\alpha+\beta\right)$ ....hicimos $\theta=\alpha+\beta$

$\therefore \text{Cos}\left[\left(90^0-\alpha\right)-\beta\right]=\text{Sen}\left(\alpha+\beta\right)$

$\therefore \underbrace{\text{Cos}\left(90^0-\alpha\right)}\cdot\text{Cos}\,\beta+\underbrace{\text{Sen}\left(90^0-\alpha\right)}\cdot\text{Sen}\,\beta=\text{Sen}\left(\alpha+\beta\right)$

$\therefore \text{Sen}\,\alpha\cdot\text{Cos}\,\beta+\text{Cos}\,\alpha\cdot\text{Sen}\,\beta=\text{Sen}\left(\alpha+\beta\right)$

* Probemos que: $\boxed{\mathbf{Sen}\left(\alpha-\beta\right)=\mathbf{Sen}\,\alpha\,\mathbf{Cos}\,\beta-\mathbf{Cos}\,\alpha\,\mathbf{Sen}\,\beta}$ ....(16)

Prueba:

Hagamos $\alpha-\beta=\alpha+\left(-\beta\right)$ y utilicemos la identidad anterior; así:

$\therefore \text{Sen}\left(\alpha-\beta\right)=\text{Sen}\left[\alpha+\left(-\beta\right)\right]$

$\therefore \text{Sen}\left(\alpha-\beta\right)=\text{Sen}\,\alpha\,\underbrace{\text{Cos}\left(-\beta\right)}+\text{Cos}\,\alpha\,\underbrace{\text{Sen}\left(-\beta\right)}$

$\therefore \text{Sen}\left(\alpha-\beta\right)=\text{Sen}\,\alpha\,\text{Cos}\,\beta+\text{Cos}\,\alpha\left(-\text{Sen}\,\beta\right)$

$\therefore \text{Sen}\left(\alpha-\beta\right)=\text{Sen}\,\alpha\,\text{Cos}\,\beta-\text{Cos}\,\alpha\,\text{Sen}\,\beta$

* Probemos que: $\boxed{\mathbf{Tan}\left(\alpha+\beta\right)=\dfrac{\mathbf{Tan}\,\alpha+\mathbf{Tan}\,\beta}{1-\mathbf{Tan}\,\alpha\,\mathbf{Tan}\,\beta}}$ ....(17)

Prueba:

$$\text{Tan}\left(\alpha+\beta\right)=\frac{\text{Sen}\left(\alpha+\beta\right)}{\text{Cos}\left(\alpha+\beta\right)}$$

$$=\frac{\text{Sen}\,\alpha\,\text{Cos}\,\beta+\text{Cos}\,\alpha\,\text{Sen}\,\beta}{\text{Cos}\,\alpha\,\text{Cos}\,\beta-\text{Sen}\,\alpha\,\text{Sen}\,\beta}$$

Si queremos que la igualdad nos quede en términos de $\text{Tan}\,\alpha$ y $\text{Tan}\,\beta$, entonces debemos dividir el numerador y el denominador por $\text{Cos}\,\alpha\,\text{Cos}\,\beta$; así:

$$\text{Tan}\left(\alpha+\beta\right)=\frac{\dfrac{\text{Sen}\,\alpha\,\text{Cos}\,\beta}{\text{Cos}\,\alpha\,\text{Cos}\,\beta}+\dfrac{\text{Cos}\,\alpha\,\text{Sen}\,\beta}{\text{Cos}\,\alpha\,\text{Cos}\,\beta}}{\dfrac{\text{Cos}\,\alpha\,\text{Cos}\,\beta}{\text{Cos}\,\alpha\,\text{Cos}\,\beta}-\dfrac{\text{Sen}\,\alpha\,\text{Sen}\,\beta}{\text{Cos}\,\alpha\,\text{Cos}\,\beta}}$$

$$=\frac{\text{Tan}\,\alpha+\text{Tan}\,\beta}{1-\text{Tan}\,\alpha\cdot\text{Tan}\,\beta}$$

* En la misma forma se demuestra que:

$$\boxed{\operatorname{Tan}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{Tan}\alpha-\operatorname{Tan}\beta}{1+\operatorname{Tan}\alpha\operatorname{Tan}\beta}} \quad \dots\dots\dots \quad (18)$$

La tabla 7-1 nos muestra las identidades que hemos deducido en esta unidad, con su respectiva numeración.

RESUMEN

9. $\operatorname{Cos}(\alpha-\beta)=\operatorname{Cos}\alpha\operatorname{Cos}\beta+\operatorname{Sen}\alpha\operatorname{Sen}\beta$
10. $\operatorname{Cos}(90^\circ-\theta)=\operatorname{Sen}\theta$
11. $\operatorname{Sen}(90^\circ-\theta)=\operatorname{Cos}\theta$
12. $\operatorname{Cos}(-\theta)=\operatorname{Cos}\theta$
13. $\operatorname{Sen}(-\theta)=-\operatorname{Sen}\theta$
14. $\operatorname{Cos}(\alpha+\beta)=\operatorname{Cos}\alpha\operatorname{Cos}\beta-\operatorname{Sen}\alpha\operatorname{Sen}\beta$
15. $\operatorname{Sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{Sen}\alpha\operatorname{Cos}\beta+\operatorname{Cos}\alpha\operatorname{Sen}\beta$
16. $\operatorname{Sen}(\alpha-\theta)=\operatorname{Sen}\alpha\operatorname{Cos}\beta-\operatorname{Cos}\alpha\operatorname{Sen}\beta$
17. $\operatorname{Tan}(\alpha+\beta)=\dfrac{\operatorname{Tan}\alpha+\operatorname{Tan}\beta}{1-\operatorname{Tan}\alpha\operatorname{Tan}\beta}$
18. $\operatorname{Tan}(\alpha-\beta)=\dfrac{\operatorname{Tan}\alpha-\operatorname{Tan}\beta}{1+\operatorname{Tan}\alpha\operatorname{Tan}\beta}$

Tabla 7-1

Ejemplo 1

Sin usar calculadora, hallemos Cos 15°

SOLUCIÓN

- Como 15° = 45° - 30°, entonces:

$\operatorname{Cos}15^\circ=\operatorname{Cos}(45^\circ-30^\circ)$

$\therefore \operatorname{Cos}15^\circ=\operatorname{Cos}45^\circ\operatorname{Cos}30^\circ+\operatorname{Sen}45^\circ\operatorname{Sen}30^\circ$

$$\therefore \operatorname{Cos}15^\circ=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore \operatorname{Cos}15^\circ=\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$\therefore \operatorname{Cos}15^\circ\approx 0.9605$

Ejemplo 2

Sabiendo que $\text{Sen}\,\alpha = -\frac{4}{5}$; con $180^\circ < \alpha < 270^\circ$ y $\text{Cos}\,\beta = \frac{12}{13}$; con $0^\circ < \beta < 90^\circ$, calculemos $\text{Cos}\,(\alpha + \beta)$ y $\text{Sen}\,(\alpha - \beta)$.

SOLUCIÓN

- En primer lugar debemos determinar los valores de Cos α y Sen β, utilizando la identidad $\text{Sen}^2\theta + \text{Cos}^2\theta = 1$; así:

$$\left(-\frac{4}{5}\right)^2 + \text{Cos}^2\,\alpha = 1 \;\Rightarrow\; \text{Cos}^2\,\alpha = 1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2$$

$$\Rightarrow\; \text{Cos}^2\,\alpha = 1 - \frac{16}{25}$$

$$\Rightarrow\; \text{Cos}^2\,\alpha = \frac{9}{25}$$

$$\Rightarrow\; \text{Cos}\,\alpha = \pm\,\frac{3}{5}$$

Como $180^\circ < \alpha < 270^\circ$, entonces $\text{Cos}\,\alpha = -\frac{3}{5}$

- En la misma forma:

$$\text{Sen}^2\,\beta + \left(\frac{12}{13}\right)^2 = 1 \;\Rightarrow\; \text{Sen}^2\,\beta = 1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2$$

$$\Rightarrow\; \text{Sen}^2\,\beta = 1 - \frac{144}{169}$$

$$\Rightarrow\; \text{Sen}^2\,\beta = \frac{25}{169}$$

$$\Rightarrow\; \text{Sen}\,\beta = \pm\,\frac{5}{13}$$

Como $0^\circ < \beta < 90^\circ$, entonces $\text{Sen}\,\beta = \frac{5}{13}$

- Por lo tanto:

$$\text{Cos}\left(\alpha + \beta\right) = \text{Cos}\,\alpha\,\text{Cos}\,\beta - \text{Sen}\,\alpha\,\text{Sen}\,\beta$$

$$\therefore\; \text{Cos}\left(\alpha + \beta\right) = \left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(\frac{12}{13}\right) - \left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\left(\frac{5}{13}\right)$$

$$\therefore\; \text{Cos}\left(\alpha + \beta\right) = -\frac{16}{65}$$

$$\text{Sen}\left(\alpha - \beta\right) = \text{Sen}\,\alpha\,\text{Cos}\,\beta - \text{Cos}\,\alpha\,\text{Sen}\,\beta$$

$$\therefore\; \text{Cos}\left(\alpha - \beta\right) = \left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\left(\frac{12}{13}\right) - \left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(\frac{5}{13}\right)$$

$$\therefore\; \text{Cos}\left(\alpha - \beta\right) = -\frac{33}{65}$$

Ejemplo 3

Probemos que Tan (180° + α) = Tan α

SOLUCIÓN

$$\text{Tan}\,(180^\circ + \alpha) = \frac{\text{Tan}\,180^0 + \text{Tan}\,\alpha}{1 - \text{Tan}\,180^0 \cdot \text{Tan}\,\alpha} \quad \text{.......................... Identidad (17)}$$

$$\therefore \text{Tan}\,(180^\circ + \alpha) = \frac{0 + \text{Tan}\,\alpha}{1 - 0 \cdot \text{Tan}\,\alpha} \quad \text{.................................... Tan } 180^\circ = 0$$

$\therefore$ Tan (180° + α) = Tan α

EJERCICIO 7.1

1. Determinar los valores exactos de las funciones dadas a continuación, utilizando las fórmulas de suma y resta.

   a) Cos 105° b) Sen 375° c) Tan 75°

2. Probar las siguientes identidades:

   a) Cos (180° - α) = Cos α
   b) Cos (360° - α) = Cos α
   c) Cos (270° - α) = -Sen α
   d) Sen (180° - α) = Sen α
   e) Sen (360° +α) = Sen α
   f) Tan (180° - α) = - Tan α

3. Con las condiciones dadas en cada ejercicio, calcular en cada caso Cos(α–β) y Cos(α+β).

   a) $\text{Sen}\,\alpha = \frac{5}{13}$, con $0^0 < \alpha < 90^0$; $\text{Cos}\,\beta = \frac{3}{5}$, con $0^0 < \beta < 90^0$

   b) $\text{Cos}\,\alpha = -\frac{8}{17}$, con $90^0 < \alpha < 180^0$; $\text{Sen}\,\beta = \frac{4}{5}$, con $0^0 < \beta < 90^0$

4. Con las condiciones dadas en cada ejercicio, calcular en cada caso Sen (α+β) y Sen (α–β).

   a) $\text{Cos}\,\alpha = -\frac{3}{5}$, con $90^0 < \alpha < 180^0$; $\text{Sen}\,\beta = \frac{15}{17}$, con $0^0 < \beta < 90^0$

   b) $\text{Cos}\,\alpha = \frac{12}{13}$, con $270^0 < \alpha < 360^0$; $\text{Cos}\,\beta = -\frac{7}{25}$, con $180^0 < \beta < 270^0$

5. Con las condiciones dadas en cada ejercicio, calcular en cada caso Tan (α+β) y Tan (α–β).

   a) $\text{Tan}\,\alpha = \frac{8}{15}$, con $180^0 < \alpha < 270^0$; $\text{Sen}\,\beta = \frac{5}{13}$, con $90^0 < \beta < 180^0$

   b) $\text{Cos}\,\alpha = -\frac{15}{17}$, con $90^0 < \alpha < 180^0$; $\text{Sen}\,\beta = \frac{4}{5}$, con $90^0 < \beta < 180^0$

6. Probar que: Sen (α +β) + Sen (α – β) = 2 Sen α Cos β.

7. ·Probar que: Cos (α +β) + Cos (α – β) = 2 Cos α Cos β.

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (22)

Un puente pasa 10 metros arriba de un río y es perpendicular al mismo. Un hombre que camina a 2 Km./h pasa sobre el centro del puente en el mismo instante en que otro hombre en una canoa pasa bajo el centro del puente a una velocidad de 3 Km./h. Si han transcurrido t horas después de que ambos hombres pasaron por el centro del puente, se pide:

1. **Hacer una interpretación gráfica del problema.**
2. **Escribir una ecuación, en función de t, que permita calcular la distancia que separa los dos hombres t horas después de haber cruzado por el centro del puente.**

7.3 FUNCIONES DE ÁNGULO DOBLE Y ÁNGULO MITAD

- En esta sección vamos a deducir las identidades correspondientes a:

$\text{Cos}(2\alpha)$	$\text{Cos}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$
$\text{Sen}(2\alpha)$	$\text{Sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$
$\text{Tan}(2\alpha)$	$\text{Tan}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

- Antes de empezar conviene insistir en que, por ejemplo:

$$\textbf{Cos}(2\alpha) \neq 2\,\textbf{Cos}\,\alpha$$

$$\textbf{Sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \neq \frac{\textbf{Sen}\,\alpha}{2}$$

7.3.1 Funciones de Ángulo Doble

- Las identidades del ángulo doble son casos particulares de las identidades correspondientes a Cos $(\alpha+\beta)$, Sen $(\alpha+\beta)$ y Tan $(\alpha+\beta)$. Para obtenerlas basta que reemplacemos β por α en las identidades de suma; así:

$\text{Cos}(2\alpha) = \text{Cos}(\alpha+\alpha)$

$\therefore \text{Cos}(2\alpha) = \text{Cos}\,\alpha\,\text{Cos}\,\alpha - \text{Sen}\,\alpha\,\text{Sen}\,\alpha$

$\therefore \text{Cos}(2\alpha) = \text{Cos}^2\alpha - \text{Sen}^2\alpha$

$\therefore \boxed{\textbf{Cos}(2\alpha) = \textbf{Cos}^2\alpha - \textbf{Sen}^2\alpha}$ ....(19)

De esta identidad (19) podemos deducir otras dos identidades para Cos (2α):

a) $\text{Cos}(2\alpha) = \text{Cos}^2\alpha - \text{Sen}^2\alpha$

$\therefore \; \text{Cos}\,(2\,\alpha) = \text{Cos}^2\,\alpha - \left(1 - \text{Cos}^2\,\alpha\right)$ .... $\text{Sen}^2\,\alpha = 1 - \text{Cos}^2\,\alpha$

$\therefore \; \text{Cos}\,(2\,\alpha) = \text{Cos}^2\,\alpha - 1 + \text{Cos}^2\,\alpha$

$\therefore \; \text{Cos}\,(2\,\alpha) = 2\,\text{Cos}^2\,\alpha - 1$

$\therefore \; \boxed{\textbf{Cos (2}\boldsymbol{\alpha}\textbf{) = 2Cos}^2\boldsymbol{\alpha}\textbf{ - 1}}$ ....(20)

b) $\text{Cos}\,(2\,\alpha) = \text{Cos}^2\,\alpha - \text{Sen}^2\,\alpha$

$\therefore \; \text{Cos}\,(2\,\alpha) = \left(1 - \text{Sen}^2\,\alpha\right) - \text{Sen}^2\,\alpha$ .... $\text{Cos}^2\,\alpha = 1 - \text{Sen}^2\,\alpha$

$\therefore \; \text{Cos}\,(2\,\alpha) = 1 - \text{Sen}^2\,\alpha - \text{Sen}^2\,\alpha$

$\therefore \; \text{Cos}\,(2\,\alpha) = 1 - 2\,\text{Sen}^2\,\alpha$

$\therefore \; \boxed{\textbf{Cos (2}\boldsymbol{\alpha}\textbf{) = 1 - 2Sen}^2\boldsymbol{\alpha}}$ ....(21)

- Ahora deduzcamos la identidad para Sen (2α):

$\text{Sen}\,(2\alpha) = \text{Sen}\,(\alpha + \alpha)$

$\therefore \; \text{Sen}\,(2\alpha) = \text{Sen}\,\alpha\,\text{Cos}\,\alpha + \text{Cos}\,\alpha\,\text{Sen}\,\alpha$

$\therefore \; \text{Sen}\,(2\alpha) = 2\,\text{Sen}\,\alpha\,\text{Cos}\,\alpha$

$\therefore \; \boxed{\textbf{Sen (2}\boldsymbol{\alpha}\textbf{) = 2 Sen }\boldsymbol{\alpha}\textbf{ Cos }\boldsymbol{\alpha}}$ ....(22)

- La deducción de Tan(2α) es similar a las anteriores:

$\text{Tan}\,(2\alpha) = \text{Tan}\,(\alpha + \alpha)$

$$\therefore \; \text{Tan}\,(2\alpha) = \frac{\text{Tan}\,\alpha + \text{Tan}\,\alpha}{1 - \text{Tan}\,\alpha \cdot \text{Tan}\,\alpha}$$

$$\therefore \; \text{Tan}\,(2\alpha) = \frac{2\,\text{Tan}\,\alpha}{1 - \text{Tan}^2\,\alpha}$$

$$\therefore \; \boxed{\textbf{Tan (2}\boldsymbol{\alpha}\textbf{)} = \frac{\textbf{2 Tan }\boldsymbol{\alpha}}{\textbf{1 - Tan}^2\,\boldsymbol{\alpha}}} \text{ ....(23)}$$

7.3.2 Funciones de Ángulo Mitad

- Las identidades trigonométricas para el ángulo mitad se obtienen fácilmente si sustituimos α por $\frac{\theta}{2}$ en las identidades para Cos (2α). Observemos:

$\text{Cos}\,(2\alpha) = 1 - 2\,\text{Sen}^2\alpha$ .... identidad (21)

$$\therefore \ \text{Cos}\left(2\cdot\frac{\theta}{2}\right) = 1 - 2\,\text{Sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \text{..........hacemos } \alpha = \frac{\theta}{2}$$

$$\therefore \ \text{Cos}(\theta) = 1 - 2\,\text{Sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\therefore \ 2\,\text{Sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = 1 - \text{Cos}\theta$$

$$\therefore \ \text{Sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1-\text{Cos}\,\theta}{2}$$

$$\therefore \ \text{Sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\text{Cos}\,\theta}{2}}$$

Luego: $\boxed{\textbf{Sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{\mathbf{1-Cos\,\theta}}{\mathbf{2}}}}$ .... (24)

- La identidad para $\text{Cos}\left(\frac{\theta}{2}\right)$ puede obtenerse empleando la identidad $\text{Cos}(2\alpha) = 2\,\text{Cos}^2\alpha - 1$; así:

$$\text{Cos}(2\alpha) = 2\,\text{Cos}^2\alpha - 1 \text{..........identidad (20)}$$

$$\therefore \ \text{Cos}\left(2\,\frac{\theta}{2}\right) = 2\,\text{Cos}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1 \text{..........hacemos } \alpha = \frac{\theta}{2}$$

$$\therefore \ \text{Cos}(\theta) = 2\text{Cos}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1$$

$$\therefore \ 2\text{Cos}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = 1 + \text{Cos}\,\theta$$

$$\therefore \ \text{Cos}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1+\text{Cos}\,\theta}{2}$$

$$\therefore \ \text{Cos}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\text{Cos}\,\theta}{2}}$$

Luego: $\boxed{\textbf{Cos}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{\mathbf{1+Cos\,\theta}}{\mathbf{2}}}}$ ....(25)

- Dejamos como ejercicio probar que:

$\boxed{\textbf{Tan}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{\mathbf{1-Cos\,\theta}}{\mathbf{1+Cos\,\theta}}}}$ ....(26)

Sugerencia: Utilizar la identidad fundamental $\text{Tan}\,\alpha = \dfrac{\text{Sen}\,\alpha}{\text{Cos}\,\alpha}$ y hacer $\alpha = \dfrac{\theta}{2}$.

Ejemplo 1

Sabiendo que $\text{Tan}\ \alpha = -\dfrac{8}{15}$; con $90° < \alpha < 180°$, hallemos: Cos (2α), Tan (2α) y $\text{Sen}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

SOLUCIÓN

- Utilicemos la identidad de la tangente del ángulo doble:

$$\text{Tan}\ (2\alpha) = \frac{2\ \text{Tan}\ \alpha}{1 - \text{Tan}^2\ \alpha}$$

$$\therefore\ \text{Tan}\ (2\alpha) = \frac{2\left(-\dfrac{8}{15}\right)}{1 - \left(-\dfrac{8}{15}\right)^2}$$

$$\therefore\ \text{Tan}\ (2\alpha) = -\frac{240}{161}$$

$$\therefore\ \boxed{\text{Tan}\ (2\alpha) = -\frac{240}{161}}$$

- Para hallar Cos (2α), primero encontremos Cos α empleando las identidades:

$$1 + \text{Tan}^2\alpha = \text{Sec}^2\alpha \qquad \text{y} \qquad \text{Cos}\ \alpha = \frac{1}{\text{Sec}\alpha}$$

$$\text{Sec}^2\ \alpha = 1 + \left(-\frac{8}{15}\right)^2$$

$$\therefore\ \text{Sec}^2\ \alpha = 1 + \frac{64}{225}$$

$$\therefore\ \text{Sec}^2\ \alpha = \frac{289}{225}$$

$$\therefore\ \text{Sec}^2\ \alpha = \pm\sqrt{\frac{289}{225}} = \pm\frac{17}{15}$$

Como $90° < \alpha < 180°$, entonces $\text{Sec}\ \alpha = -\dfrac{17}{15}$ y $\text{Cos}\ \alpha = -\dfrac{15}{17}$

Finalmente, $\text{Cos}\ (2\alpha) = 2\ \text{Cos}^2\ \alpha - 1 = 2\left(-\dfrac{15}{17}\right)^2 - 1$

$$\therefore\ \boxed{\textbf{Cos}\ (2\alpha) = \frac{161}{289}}$$

- Para calcular $\text{Sen}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$ usamos la identidad correspondiente; así:

$$\text{Sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - \text{Cos}\ \alpha}{2}}$$

$$\therefore\ \text{Sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\left(-\frac{15}{17}\right)}{2}}$$

$$\therefore\ \text{Sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{\frac{32}{17}}{2}}$$

$$\therefore\ \text{Sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{32}{34}}$$

$$\therefore\ \boxed{\textbf{Sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\frac{4\sqrt{17}}{17}}$$

Ahora bien, como $90^o < \alpha < 180^o$, entonces $45^0 < \frac{\alpha}{2} < 90^0$.

Luego,

$$\boxed{\textbf{Sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = +\frac{4\sqrt{17}}{17}}$$ ....(¿por qué el signo (+)?)

Ejemplo 2

Probemos que la igualdad: $\text{Cot}\,\alpha = \dfrac{1 + \text{Cos}(2\alpha)}{\text{Sen}\,(2\alpha)}$ es una identidad.

SOLUCIÓN

- Desarrollemos el lado derecho que es el más complicado:

$$\text{Cot}\,\alpha = \frac{1+\left(2\,\text{Cos}^2\,\alpha - 1\right)}{2\,\text{Sen}\,\alpha\ \text{Cos}\,\alpha}$$ .... $\text{Cos}\left(2\,\alpha\right) = 2\,\text{Cos}^2\,\alpha - 1$

$$\therefore\ \text{Cot}\,\alpha = \frac{1+2\,\text{Cos}^2\,\alpha - 1}{2\,\text{Sen}\,\alpha\ \text{Cos}\,\alpha}$$

$$\therefore\ \text{Cot}\,\alpha = \frac{2\,\text{Cos}^2\,\alpha}{2\,\text{Sen}\,\alpha\ \text{Cos}\,\alpha}$$

$$\therefore\ \text{Cot}\,\alpha = \frac{\text{Cos}\,\alpha}{\text{Sen}\,\alpha}$$

$$\therefore\ \text{Cot}\,\alpha = \text{Cot}\,\alpha$$

- Por lo tanto: $\boxed{\textbf{Cot}\,\alpha \equiv \dfrac{\textbf{1 + Cos}\left(2\,\alpha\right)}{\textbf{Sen}\left(2\,\alpha\right)}}$

7.4 IDENTIDADES DE PRODUCTO Y SUMA (OPCIONAL)

Combinando las identidades de suma y resta de ángulos es posible obtener otras nuevas. Veamos:

- Si sumamos miembro a miembro las identidades de Seno de suma y resta de ángulos nos queda:

$$\begin{aligned} \text{Sen}(\alpha+\beta) &= \text{Sen}\,\alpha\,\text{Cos}\,\beta + \text{Cos}\,\alpha\,\text{Sen}\,\beta \\ \text{Sen}(\alpha-\beta) &= \text{Sen}\,\alpha\,\text{Cos}\,\beta - \text{Cos}\,\alpha\,\text{Sen}\,\beta \end{aligned}$$

$$\text{Sen}(\alpha+\beta) + \text{Sen}(\alpha-\beta) = 2\,\text{Sen}\,\alpha\,\text{Cos}\,\beta$$

$$\therefore \boxed{\textbf{Sen}\,\alpha\,\textbf{Cos}\,\beta = \frac{1}{2}\left[\textbf{Sen}(\alpha+\beta) + \textbf{Sen}(\alpha-\beta)\right]} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(27)$$

- Si ahora restamos miembro a miembro las mismas identidades podemos obtener:

$$\therefore \boxed{\textbf{Cos}\,\alpha\,\textbf{Sen}\,\beta = \frac{1}{2}\left[\textbf{Sen}(\alpha+\beta) - \textbf{Sen}(\alpha-\beta)\right]} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(28)$$

- Procediendo en la misma forma con las identidades de coseno de suma y diferencia de ángulos es fácil deducir que:

$$\boxed{\textbf{Cos}\,\alpha\,\textbf{Cos}\,\beta = \frac{1}{2}\left[\textbf{Cos}(\alpha+\beta) + \textbf{Cos}(\alpha-\beta)\right]} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(29)$$

$$\boxed{\textbf{Sen}\,\alpha\,\textbf{Sen}\,\beta = \frac{1}{2}\left[\textbf{Cos}(\alpha-\beta) - \textbf{Cos}(\alpha+\beta)\right]} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(30)$$

- Si en las igualdades (27), (28), (29) y (30) hacemos:

$$A = \alpha + \beta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 1.$$
$$B = \alpha - \beta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 2.$$

y resolvemos simultáneamente el sistema formado por las ecuaciones 1. y 2., obtenemos:

$$\alpha = \frac{A+B}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 3.$$

$$\beta = \frac{A-B}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 4.$$

- Si ahora sustituimos estos valores en las igualdades (27) a (30), nos quedan estas nuevas identidades:

$$\textbf{Sen A} + \textbf{Sen B} = 2\,\textbf{Sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\textbf{Cos}\left(\frac{A-B}{2}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(31)}$$

$$\textbf{Sen A} - \textbf{Sen B} = 2\,\textbf{Cos}\left(\frac{A+B}{2}\right)\textbf{Sen}\left(\frac{A-B}{2}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(32)}$$

$$\text{Cos A} + \text{Cos B} = 2 \text{ Cos}\left(\frac{A+B}{2}\right) \text{Cos}\left(\frac{A-B}{2}\right) \text{ .... (33)}$$

$$\text{Cos A} - \text{Cos B} = -2 \text{ Sen}\left(\frac{A+B}{2}\right) \text{Sen}\left(\frac{A-B}{2}\right) \text{ .... (34)}$$

Ejemplo 1

Expresemos el producto Cos (3 θ) Sen (2 θ) como una suma o diferencia:

SOLUCIÓN

- Utilicemos la identidad (28), con $\alpha = 3\,\theta$ y $\beta = 2\,\theta$; así:

$$\text{Cos } (3\,\theta) \text{ Sen } (2\,\theta) = \frac{1}{2}\left[\text{Sen}\left(3\,\theta + 2\,\theta\right) - \text{Sen}\left(3\,\theta - 2\,\theta\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\text{Sen}\left(5\theta\right) - \text{Sen }\theta\right]$$

$$= \frac{1}{2}\text{Sen}\left(5\,\theta\right) - \frac{1}{2}\text{Sen }\theta$$

Ejemplo 2

Expresemos Cos (2 θ) - Cos (6 θ) como un producto de funciones.

SOLUCIÓN

- Apliquemos la identidad (34), haciendo $A = 2\,\theta$ y $B = 6\,\theta$; así:

$$\text{Cos } (2\,\theta) - \text{Cos } (6\,\theta) = -2\text{ Sen}\left(\frac{2\,\theta + 6\,\theta}{2}\right) \cdot \text{Sen}\left(\frac{2\,\theta - 6\,\theta}{2}\right)$$

$$= -2\text{ Sen}\left(4\,\theta\right)\text{Sen}\left(-2\,\theta\right)$$

$$= 2\text{ Sen}\left(4\,\theta\right)\text{Sen}\left(2\,\theta\right) \text{ .... Sen}\left(-\alpha\right) = -\text{Sen }\alpha$$

Ejemplo 3

Comprobemos que la igualdad $\dfrac{\text{Sen}\left(4\,\alpha\right) + \text{Sen}\left(2\,\alpha\right)}{\text{Cos}\left(4\,\alpha\right) - \text{Cos}\left(2\,\alpha\right)} = -\text{Cot }\alpha$ es una identidad.

SOLUCIÓN

$$\frac{\text{Sen}\left(4\,\alpha\right) + \text{Sen}\left(2\,\alpha\right)}{\text{Cos}\left(4\,\alpha\right) - \text{Cos}\left(2\,\alpha\right)} = \frac{2\text{ Sen}\left(\dfrac{4\,\alpha + 2\,\alpha}{2}\right)\text{Cos}\left(\dfrac{4\,\alpha - 2\,\alpha}{2}\right)}{-2\text{ Sen}\left(\dfrac{4\,\alpha + 2\alpha}{2}\right)\text{Sen}\left(\dfrac{4\,\alpha - 2\,\alpha}{2}\right)}$$

$$\therefore \frac{\text{Sen}(4\alpha)+\text{Sen}(2\alpha)}{\text{Cos}(4\alpha)-\text{Cos}(2\alpha)} = \frac{\cancel{2}\,\cancel{\text{Sen}(3\alpha)}\,\text{Cos}\,\alpha}{-\cancel{2}\,\cancel{\text{Sen}(3\alpha)}\,\text{Sen}\,\alpha}$$

$$\therefore \frac{\text{Sen}(4\alpha)+\text{Sen}(2\alpha)}{\text{Cos}(4\alpha)-\text{Cos}(2\alpha)} = -\frac{\text{Cos}\,\alpha}{\text{Sen}\,\alpha}$$

$$\therefore \frac{\text{Sen}(4\alpha)+\text{Sen}(2\alpha)}{\text{Cos}(4\alpha)-\text{Cos}(2\alpha)} = -\,\text{Cot}\,\alpha$$

RESUMEN DE LAS IDENTIDADES

Sugerimos al lector fotocopiar el siguiente cuadro resumen de las identidades y tenerlo a la mano, de modo que pueda consultarlo cuando sea necesario.

I. IDENTIDADES FUNDAMENTALES

1. $\text{Tan}\,\alpha = \dfrac{\text{Sen}\,\alpha}{\text{Cos}\,\alpha}$, $\text{Cos}\,\alpha \neq 0$
2. $\text{Cot}\,\alpha = \dfrac{\text{Cos}\,\alpha}{\text{Sen}\,\alpha}$, $\text{Sen}\,\alpha \neq 0$
3. $\text{Sec}\,\alpha = \dfrac{1}{\text{Cos}\,\alpha}$, $\text{Cos}\,\alpha \neq 0$
4. $\text{Csc}\,\alpha = \dfrac{1}{\text{Sen}\,\alpha}$, $\text{Sen}\,\alpha \neq 0$
5. $\text{Sen}^2\,\alpha + \text{Cos}^2\,\alpha = 1$
6. $\text{Sen}^2\,\alpha = 1 - \text{Cos}^2\,\alpha$
7. $\text{Cos}^2\,\alpha = 1 - \text{Sen}^2\,\alpha$
8. $\text{Cot}^2\,\alpha + 1 = \text{Csc}^2\,\alpha$
9. $\text{Tan}^2\,\alpha + 1 = \text{Sec}^2\,\alpha$

II. IDENTIDADES DE SUMA Y DIFERENCIA DE ÁNGULOS

10. $\text{Sen}\,(\alpha+\beta) = \text{Sen}\,\alpha\,\text{Cos}\,\beta + \text{Cos}\,\alpha\,\text{Sen}\,\beta$
11. $\text{Sen}\,(\alpha-\beta) = \text{Sen}\,\alpha\,\text{Cos}\,\beta - \text{Cos}\,\alpha\,\text{Sen}\,\beta$
12. $\text{Cos}\,(\alpha+\beta) = \text{Cos}\,\alpha\,\text{Cos}\,\beta - \text{Sen}\,\alpha\,\text{Sen}\,\beta$
13. $\text{Cos}\,(\alpha-\beta) = \text{Cos}\,\alpha\,\text{Cos}\,\beta + \text{Sen}\,\alpha\,\text{Sen}\,\beta$
14. $\text{Tan}\,(\alpha+\beta) = \dfrac{\text{Tan}\,\alpha + \text{Tan}\,\beta}{1 - \text{Tan}\,\alpha\,\text{Tan}\,\beta}$
15. $\text{Tan}\,(\alpha-\beta) = \dfrac{\text{Tan}\,\alpha - \text{Tan}\,\beta}{1 + \text{Tan}\,\alpha\,\text{Tan}\,\beta}$

III. IDENTIDADES DE ÁNGULO DOBLE

16. $\text{Sen}\,(2\alpha) = 2\,\text{Sen}\,\alpha\,\text{Cos}\,\alpha$

$$17.\quad \cos(2\alpha) = \begin{cases} \cos^2\alpha - \operatorname{Sen}^2\alpha \\ 2\cos^2\alpha - 1 \\ 1 - 2\operatorname{Sen}^2\alpha \end{cases}$$

$$18.\quad \operatorname{Tan}(2\alpha) = \frac{2\operatorname{Tan}\alpha}{1 - \operatorname{Tan}^2\alpha}$$

IV. IDENTIDADES DE ÁNGULO MITAD

$$19.\quad \operatorname{Sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}$$

$$20.\quad \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}$$

$$21.\quad \operatorname{Tan}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}}$$

V. IDENTIDADES DE SUMA Y PRODUCTOS DE FUNCIONES

$$22.\quad \operatorname{Sen}\alpha\cos\beta = \frac{\operatorname{Sen}(\alpha+\beta) + \operatorname{Sen}(\alpha-\beta)}{2}$$

$$23.\quad \cos\alpha\operatorname{Sen}\beta = \frac{\operatorname{Sen}(\alpha+\beta) - \operatorname{Sen}(\alpha-\beta)}{2}$$

$$24.\quad \cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)}{2}$$

$$25.\quad \operatorname{Sen}\alpha\operatorname{Sen}\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)}{2}$$

$$26.\quad \operatorname{Sen}\alpha + \operatorname{Sen}\beta = 2\operatorname{Sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$27.\quad \operatorname{Sen}\alpha - \operatorname{Sen}\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\operatorname{Sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$28.\quad \cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$29.\quad \cos\alpha - \cos\beta = -2\operatorname{Sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\operatorname{Sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

7.5 EJERCICIOS RESUELTOS

1. **Probemos que:** $\operatorname{Sen}(\alpha+\beta)\cdot\operatorname{Sen}(\alpha-\beta) \equiv \operatorname{Sen}^2\alpha - \operatorname{Sen}^2\beta$

SOLUCIÓN

- $\operatorname{Sen}(\alpha+\beta)\cdot\operatorname{Sen}(\alpha-\beta) = (\operatorname{Sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{Sen}\beta)(\operatorname{Sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{Sen}\beta)$

$$= (\text{Sen}\,\alpha\,\text{Cos}\,\beta)^2 - (\text{Cos}\,\alpha\,\text{Sen}\,\beta)^2$$

$$= \text{Sen}^2\,\alpha\,\text{Cos}^2\,\beta - \text{Cos}^2\,\alpha\,\text{Sen}^2\,\beta$$

$$= \text{Sen}^2\,\alpha\left(1 - \text{Sen}^2\,\beta\right) - \left(1 - \text{Sen}^2\,\alpha\right)\text{Sen}^2\,\beta$$

$$= \text{Sen}^2\,\alpha - \cancel{\text{Sen}^2\,\alpha\,\text{Sen}^2\,\beta} - \text{Sen}^2\,\beta + \cancel{\text{Sen}^2\,\alpha\,\text{Sen}^2\,\beta}$$

$$= \text{Sen}^2\,\alpha - \text{Sen}^2\,\beta$$

- Por lo tanto: $\boxed{\textbf{Sen}\,(\alpha+\beta)\cdot\textbf{Sen}\,(\alpha-\beta) \equiv \textbf{Sen}^2\,\alpha - \textbf{Sen}^2\,\beta}$

2. Probemos que: $\dfrac{\text{Sen}^2\,(2\theta)\,(1-\text{Cos}\,2\theta)}{1+\text{Cos}\,(2\theta)} \equiv 4\text{Sen}^4\theta$

SOLUCIÓN

- $$\frac{\text{Sen}^2\,(2\theta)\cdot(1-\text{Cos}\,2\theta)}{1+\text{Cos}\,(2\theta)} = \frac{(2\,\text{Sen}\,\theta\,\text{Cos}\,\theta)^2\cdot\left[1-\left(2\,\text{Cos}^2\theta-1\right)\right]}{1+2\text{Cos}^2\theta-1}$$

$$= \frac{4\,\text{Sen}^2\theta\,\cancel{\text{Cos}^2\theta}\cdot\left[2-2\,\text{Cos}^2\theta\right]}{2\,\cancel{\text{Cos}^2\theta}}$$

$$= \frac{4\,\text{Sen}^2\,\theta\cdot 2\left(1-\text{Cos}^2\theta\right)}{2}$$

$$= \frac{4\,\text{Sen}^2\theta\cdot 2\,\text{Sen}^2\theta}{2}$$

$$= \frac{8\,\text{Sen}^4\theta}{2}$$

$$= 4\,\text{Sen}^4\theta$$

- Por lo tanto: $\boxed{\dfrac{\textbf{Sen}^2\,(2\theta)\cdot(1-\textbf{Cos}\,(2\theta))}{1+\textbf{Cos}\,(2\theta)} \equiv 4\,\textbf{Sen}^4\theta}$

3. Probemos que: $1 - 8\,\text{Sen}^2\theta + 8\,\text{Sen}^4\theta \equiv \text{Cos}\,(4\theta)$

SOLUCIÓN

- Transformemos el segundo miembro en el primero:

$\text{Cos}\,(4\theta) = 1 - 2\,\text{Sen}^2\,(2\theta)$ .... $\text{Cos}\,(4\theta) = \text{Cos}\,[2\,(2\theta)]$

$$= 1 - 2\,(2\,\text{Sen}\,\theta\,\text{Cos}\,\theta)^2$$

$$= 1 - 2\left(4\,\text{Sen}^2\,\theta\,\text{Cos}^2\,\theta\right)$$

$$= 1 - 8\,\text{Sen}^2\,\theta\,\text{Cos}^2\,\theta$$

$$= 1 - 8\,\text{Sen}^2\,\theta\left(1 - \text{Sen}^2\,\theta\right)$$

$$= 1 - 8\,\text{Sen}^2\,\theta + 8\,\text{Sen}^4\,\theta$$

- Por lo tanto: $\boxed{\mathbf{1 - 8\,Sen^2\,\theta + 8\,Sen^4\,\theta \equiv Cos\,(4\theta)}}$

4. Probemos que la ecuación: $\mathbf{1 + Cos\,(2x) + Cos\,(4x) + Cos\,(6x) = 4\,Cos\,(x)\,Cos\,(2x)\,Cos\,(3x)}$ es una identidad.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}
1 + \text{Cos}\,(2x) + \text{Cos}\,(4x) + \text{Cos}\,(6x) &= 1 + [\text{Cos}\,(2x) + \text{Cos}\,(4x)] + \text{Cos}\,(6x)\\
&= 1 + 2\,\text{Cos}\,(3x)\,\text{Cos}\,x + \text{Cos}\,(6x)\\
&= [1 + \text{Cos}\,(6x)] + 2\,\text{Cos}\,(3x)\,\text{Cos}\,x\\
&= \left[1 + 2\,\text{Cos}^2\,(3x) - 1\right] + 2\,\text{Cos}\,(3x)\,\text{Cos}\,x\\
&= 2\,\text{Cos}^2\,(3x) + 2\,\text{Cos}\,(3x)\,\text{Cos}\,x\\
&= 2\,\text{Cos}\,(3x)\,[\text{Cos}\,(3x) + \text{Cos}\,x]\\
&= 2\,\text{Cos}\,(3x)\,[2\,\text{Cos}\,(2x)\,\text{Cos}\,x]\\
&= 4\,\text{Cos}\,x\,\text{Cos}\,(2x)\,\text{Cos}\,(3x)
\end{aligned}$$

5. Resolvamos la ecuación $\mathbf{Cos\,(3\theta) + Cos\,\theta - 2\,Sen\,(2\theta) = 0}$, para $\mathbf{0^0 \le \theta \le 360^0}$

SOLUCIÓN

- Agrupemos los dos primeros términos del lado izquierdo y apliquémosles la identidad Cos α + Cos β, y al tercer término le aplicamos la identidad correspondiente a Seno del ángulo doble; así:

$$[\text{Cos}\,(3\theta) + \text{Cos}\,\theta] - 2\,\text{Sen}\,(2\theta) = 0$$

$$\therefore\ [2\,\text{Cos}\,(2\theta)\,\text{Cos}\,\theta\,] - 2\,(2\,\text{Sen}\,\theta\,\text{Cos}\,\theta) = 0$$

$$\therefore\ 2\,\text{Cos}\,(2\theta)\,\text{Cos}\,\theta - 4\,\text{Sen}\,\theta\,\text{Cos}\,\theta = 0$$

$$\therefore\ 2\,\text{Cos}\,\theta\,[\text{Cos}\,(2\theta) - 2\,\text{Sen}\,\theta\,] = 0$$

$$\therefore\ 2\,\text{Cos}\,\theta = 0 \quad \text{ó} \quad \text{Cos}\,(2\theta) - 2\,\text{Sen}\,\theta = 0$$

- Resolvemos cada ecuación por aparte y unimos las soluciones obtenidas:

1. $2\,\text{Cos}\,\theta = 0 \Rightarrow \text{Cos}\,\theta = 0$

   $\Rightarrow \theta = 90^0\,,\,270^0$

2. $\text{Cos}\,(2\theta) - 2\,\text{Sen}\,\theta = 0 \Rightarrow 1 - 2\,\text{Sen}^2\,\theta - 2\,\text{Sen}\,\theta = 0$

   $\Rightarrow 2\,\text{Sen}^2\,\theta + 2\,\text{Sen}\,\theta - 1 = 0$

Esta ecuación podemos resolverla aplicando la fórmula cuadrática:

$$\text{Sen}\,\theta = \frac{-2 \pm \sqrt{4+8}}{4}$$

$$\text{Sen}\,\theta = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{4}$$

$$\text{Sen}\,\theta \approx \frac{-2 \pm 3.46}{4}$$

$$\therefore\ \text{Sen}\,\theta \approx 0.365 \quad \text{ó} \quad \text{Sen}\,\theta \approx -1.365$$

Si Sen $\theta \approx 0.365$ entonces $\theta \approx 21.5°$ ó $\theta \approx 158.5°$

Si Sen $\theta \approx -1.365$ entonces θ no existe.

Por lo tanto, la solución total es: $\left\{21.5^0,\ 90^0,\ 158.5^0,\ 270^0\right\}$

EJERCICIO 7.2

1. Si $\text{Tan}\,\alpha = -\frac{7}{24}$ y $\text{Cot}\,\beta = \frac{3}{4}$, donde α y β están en el II y III cuadrantes respectivamente, hallar los valores de Sen $(\alpha+\beta)$, Cos $(\alpha+\beta)$, Tan $(\alpha+\beta)$, Sen$(\alpha-\beta)$, Cos $(\alpha-\beta)$ y Tan $(\alpha-\beta)$.

2. Si $\text{Sec}\,\alpha = -3$, con α en el II cuadrante, hallar: Sen (2α), Cos(2α), y Tan(2α).

3. Si $\text{Tan}\,\alpha = 1$, con α en el III cuadrante, hallar: $\text{Sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, $\text{Cos}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ y $\text{Tan}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

En los ejercicios 4 a 18, probar que las igualdades dadas son identidades:

4. $\text{Sen}^2\,\theta = \dfrac{1-\text{Cos}\,(2\theta)}{2}$

5. $\text{Cos}\,x + \text{Cos}\,(2x) + \text{Cos}\,(3x) = \text{Cos}\,(2x)\,(1 + 2\,\text{Cos}\,x)$ (Sugerencia: Haga $\text{Cos}\,(3x) = \text{Cos}\,(x+2x)$)

6. $\text{Tan}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \text{Tan}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 2\,\text{Tan}\,(2x)$

7. $\text{Sen}^4\theta = \dfrac{3 - 4\,\text{Cos}\,(2\theta) + \text{Cos}\,(4\theta)}{8}$ (Sugerencia: Haga $\text{Cos}\,(4\theta) = \text{Cos}\,[2\,(2\theta)]$)

8. $\dfrac{\text{Sen}\,(2\theta)}{\text{Cos}^2\theta} = 2\,\text{Tan}\theta$

9. $\frac{1}{2}(\text{Cot}\,\alpha - \text{Tan}\,\alpha) = \text{Cot}\,(2\alpha)$

10. $\dfrac{\text{Sen}(\alpha+\beta)}{\text{Cos}\,\alpha\ \text{Cos}\,\beta} = \text{Tan}\,\alpha + \text{Tan}\,\beta$

11. $(\text{Sen}\,\alpha + \text{Cos}\,\alpha)^2 = 1 + \text{Sen}\,(2\alpha)$

12. $\dfrac{\text{Cos}\,(3\,\alpha)}{\text{Sen}\,\alpha} + \dfrac{\text{Sen}\,(3\,\alpha)}{\text{Cos}\,\alpha} = 2\,\text{Cot}\,(2\,\alpha)$

13. $\text{Cos}\,(\alpha + \beta) \cdot \text{Cos}\,(\alpha - \beta) = \text{Cos}^2\,\beta - \text{Sen}^2\,\alpha$

14. $\dfrac{1 + \text{Tan}\,\alpha}{1 - \text{Tan}\,\alpha} = \text{Sec}\,(2\alpha) + \text{Tan}\,(2\alpha)$

15. $\text{Cos}^4\alpha = \dfrac{1}{4}\left[1 + 2\,\text{Cos}\,(2\alpha) + \dfrac{1 + \text{Cos}\,(4\alpha)}{2}\right]$

16. $\text{Sen}^4\alpha = \dfrac{1}{4}\left[1 - 2\,\text{Cos}\,(2\alpha) + \dfrac{1 + \text{Cos}\,(4\alpha)}{2}\right]$

17. $\text{Sen}^4\,\alpha \cdot \text{Cos}^4\,\alpha = \dfrac{1}{64}\left[1 - 2\,\text{Cos}\,(4\alpha) + \dfrac{1 + \text{Cos}\,(8\alpha)}{2}\right]$

18. $\dfrac{\text{Tan}\,(2\alpha)}{\text{Tan}\,\alpha} = \dfrac{2\,\text{Cot}^2\alpha}{\text{Cot}^2\alpha - 1}$

En los ejercicios 19 a 32, resolver las ecuaciones dadas para ángulos entre 0º y 360º.

19. $\text{Sen}\,\alpha = \text{Cos}\,(2\,\alpha)$

20. $\text{Sen}\,(2\,\alpha) + \text{Sen}\,\alpha = 0$

21. $2\,\text{Cos}\alpha + 2\,\text{Cos}\,(2\alpha) = 0$

22. $2\,\text{Sen}^2\,\alpha + \text{Cos}\,(2\,\alpha) = \text{Sen}\,(2\,\alpha)$

23. $\text{Sen}\left(90^0 - \alpha\right) - \text{Sec}\,\alpha = 0$

24. $\text{Sen}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) - \text{Sen}\,\alpha = 0$

25. $\text{Cos}\,(2\,\theta) - \text{Cos}^2\,\theta = 0$

26. $\text{Cot}\,\theta + \text{Sen}\,(\theta + \pi) = -\,\text{Sen}\,\theta$

27. $\text{Sen}\left(\dfrac{\pi}{6} + \alpha\right) - \text{Cos}\left(\dfrac{\pi}{3} + \alpha\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

28. $\text{Sen}^2\,(2\,\alpha) - \text{Sen}\,(2\,\alpha) - 2 = 0$

29. $2\,\text{Sen}\,(2\,\theta) = 1$

30. $\text{Tan}\,(2\,\alpha) = -\,2\,\text{Sen}\,\alpha$

31. $\text{Cos}\,(2\,\alpha) + 3\,\text{Sen}\,\alpha + 1 = 0$

32. $2\,\text{Sen}\,(2\,\theta) - \text{Sen}\,\theta = 0$

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (23)

Escribir, en función de x, la ecuación que permite calcular la distancia del punto (0, 1) a la parábola de ecuación $y = x^2$.

Taller de la Unidad 7

En los ejercicios **1.** a **10.**, indicar la letra correspondiente a la ÚNICA respuesta correcta.

1. La expresión $\dfrac{1 - \text{Cos}\,(2x)}{\text{Sen}\,(2x)}$ es idéntica a:

a) Cot x
b) Tan x
c) Tan (2x)
d) Sen x

2. La expresión $\text{Cos}\left(\pi + \alpha\right)$ es equivalente a:

a) Sen α Cos α
b) Sen α
c) -Cos α
d) Cos α

3. La expresión $\text{Cos}\left(x + y\right) - \text{Cos}\left(x - y\right)$ es idéntica a:

a) -2 Sen x Sen y
b) 2 Sen x Cos y
c) 2 Sen x Sen y
d) 2 Cos x Sen y

4. Todas las expresiones siguientes equivalen a Cos (2x) excepto:

a) $\text{Cos}^2x - \text{Sen}^2x$
b) 2 Sen x Cos x
c) $1 - 2\text{Sen}^2 x$
d) (Cos x + Sen x) (Cos x - Sen x)

5. Para cualquier valor de θ se cumple que Sen θ es igual a:

a) 1 - Cos θ
b) Sen (π + θ)
c) Sen (2π - θ)
d) $\text{Cos}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

6. Sólo uno de los siguientes enunciados es verdadero:

a) Tan (5x) = Tan x
b) $\text{Cos}\left(x - y\right) = \text{Cos } x - \text{Cos } y$
c) $\text{Cos}\left(2x\right) = \left(\text{Cos } x + \text{Sen } x\right)\left(\text{Cos } x - \text{Sen } x\right)$
d) $2\text{ Sen}\left(2x\right) = \text{Sen } x \text{ Cos } x$

7. La solución de la ecuación $2 \text{ Cos } x = 1$, para $0^0 \leq x \leq 360^0$ es:

a) $\left\{60^0 , 300^0\right\}$
b) $\left\{60^0 , 120^0\right\}$
c) $\left\{120^0 , 240^0\right\}$
d) $\left\{60^0 , 120^0 , 240^0 , 300^0\right\}$

8. Dada la ecuación $2 \text{ Sen } \theta = 1$ y el conjunto solución $\left\{30^0 , 150^0\right\}$, podemos afirmar que:

a) La solución es falsa.
b) La solución es incompleta y correcta.
c) La solución es completa y correcta.
d) Sobra un elemento en el conjunto solución.

9. Dada la ecuación $2 \text{ Cos}^2 \theta = 3$, entonces el valor de θ que satisface la ecuación es:

a) 45°
b) 60°
c) 30°
d) Ningún valor de θ

10. La solución de la ecuación $\text{Sen } x \text{ Cos } x = \frac{1}{2}$ para $0^0 \leq x \leq 360^0$ es:

a) $\left\{45^0 , 225^0\right\}$
b) $\left\{45^0 , 135^0\right\}$
c) $\left\{45^0 , -45^0\right\}$
d) No tiene solución.

En los ejercicios **11.** a **27.** probar que las igualdades dadas son identidades.

11. $\text{Sen}\left(3x\right) \text{Cos } x - \text{Cos}\left(3x\right) \text{Sen } x = \text{Sen}\left(2x\right)$

12. $\text{Sen}\left(60^0 - x\right)\text{Cos}\left(30^0 + x\right) + \text{Cos}\left(60^0 - x\right)\text{Sen}\left(30^0 + x\right) = 1$

13. $\left[\text{Sen}\left(\dfrac{x}{2}\right) - \text{Cos}\left(\dfrac{x}{2}\right)\right]^2 = 1 - \text{Sen}\ x$

14. $\text{Tan}\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) + \text{Tan}\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{8}{3\ \text{Cot}\ x - \text{Tan}\ x}$

15. $2\ \text{Cos}^3 x\ \text{Sen}\ x + 2\ \text{Sen}^3 x\ \text{Cos}\ x = \text{Sen}\ (2x)$

16. $1 + \text{Sen}\ (2x) = 2\ \text{Sen}\ x\ \text{Cos}\ x + \text{Sen}^2 (2x) + \text{Cos}^2 (2x)$

17. $\text{Cos}^4 \theta - 2\ \text{Cos}^2 \theta\ \text{Sen}^2 \theta + \text{Sen}^4 \theta + \text{Sen}^2 (2\theta) = 1$

18. $\dfrac{\text{Sen}\ (2x)}{\text{Sen}\ x} - \dfrac{\text{Cos}\ (2x)}{\text{Cos}\ x} = \text{Sec}\ x$

19. $\text{Sen}\ (4\mu) + \text{Sen}\ (2\mu) = 2\ \text{Sen}\ \mu\ \text{Cos}\ \mu\ (2\ \text{Cos}\ (2\mu) + 1)$

20. $\text{Cot}\ \alpha - \text{Tan}\ \alpha = 2\ \text{Cot}\ (2\alpha)$

21. $\text{Tan}\left(\dfrac{x}{2}\right) + \text{Cot}\left(\dfrac{x}{2}\right) = 2\ \text{Csc}\ x$

22. $\dfrac{\text{Cos}\ (2x) - \text{Cos}\ (12x)}{\text{Sen}\ (12x) + \text{Sen}\ (2x)} = \text{Tan}\ (5x)$

23. $\text{Csc}\ x - \text{Csc}\ (3x) = 2\ \text{Cos}\ (2x)\ \text{Csc}\ (3x)$

24. $\text{Cos}\ x + \text{Cos}\ (2x) + \text{Cos}\ (5x) = \text{Cos}\ (2x)\ [1 + 2\ \text{Cos}\ (3x)]$

25. $\dfrac{\text{Sen}\ (2\alpha)}{\text{Cos}\ (2\alpha)} = \dfrac{2\ \text{Tan}\ \alpha}{1 - \text{Tan}^2 \alpha}$

26. $\text{Sen}\ (4\alpha) = 2\ \text{Sen}\ \alpha\left(2\ \text{Cos}^2 \alpha - 1\right)\text{Cos}\ \alpha$

27. $\text{Sen}\ (2\alpha) - \text{Cos}\ (2\alpha)\ \text{Tan}\ \alpha = \text{Tan}\ \alpha$

En los ejercicios **28.** a **37.** , resolver las ecuaciones siguientes para ángulos entre 0º y 360º.

28. $\text{Sen}\ (2x) - \text{Cos}^2 x + \text{Sen}^2 x = 0$

29. $2\ \text{Sen}^3 (2\alpha) - \text{Sen}\ (2\alpha) = 1 - 2\ \text{Sen}^2 (2\alpha)$

30. $\text{Tan}\ (2x) = \text{Cot}\ x$

31. $\text{Cos}\ (2x) + 2\ \text{Cos}^2\left(\dfrac{x}{2}\right) = 1$

32. $2\ \text{Cos}^2\left(\dfrac{x}{2}\right) + 2\ \text{Cos}\ x = 1$

33. $2\ \text{Sen}^2\left(\dfrac{x}{2}\right) - 2 = \text{Cos}\ x$

34. $\text{Cos}\ (3x) - \text{Cos}\ x = 0$

35. $\text{Sen}\ (5x) + \text{Sen}\ (3x) = 0$

36. $\text{Cos}\ (4x) + \text{Cos}\ (2x) = 0$

37. $\text{Sen}\ (3x)\ \text{Cos}\ x - \text{Cos}\ (3x)\ \text{Sen}\ x = 0$

Analizar cuidadosamente los siguientes enunciados y, luego, elegir la letra correspondiente a la ÚNICA respuesta correcta en cada uno de ellos.

1. El gerente de un restaurante sabe que en días ordinarios requiere el siguiente número de empleados de acuerdo con el número de clientes por atender:

INFORMACIÓN A :

CLIENTES	EMPLEADOS
0	0
25	1
35	2
40	3
50	4
65	5

INFORMACIÓN B : En un mes cualquiera el promedio de clientes que visitan el restaurante es 24; pero, en los días 15, 30 y 31 es el doble del promedio de dicho mes:

INFORMACIÓN C : En el mes de diciembre, el promedio diario es 41 y el 24 y el 31 es el doble del promedio.

El gerente general decide contratar para el 31 de diciembre 4 empleados. Al tomar esta decisión, el gerente:

a) Tuvo en cuenta sólo las informaciones A y C.
b) Tuvo en cuenta sólo la información B y C.
c) Tuvo en cuenta sólo las informaciones A y B.
d) No tuvo en cuenta ninguna información.

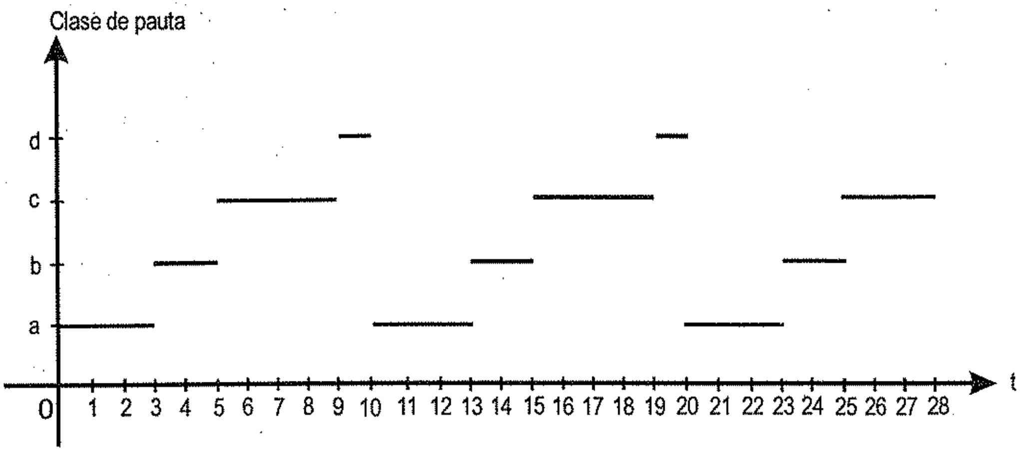
2. Al tomar los pesos de los alumnos de 100 se obtiene la siguiente tabla de frecuencias:

PESO	FRECUENCIA ABSOLUTA
50 Kg.	10
52 Kg.	30
54 Kg.	20
56 Kg.	10
58 Kg.	10

El porcentaje de alumnos que pesa 54 Kg. o más es:

a) 12.5% b) 25% c) 50% d) 49%

3. Un aviso luminoso de publicidad muestra cuatro pautas a, b, c y d. El tiempo de cada pauta se muestra en la figura:



La función que rige el comportamiento del aviso luminoso en el tiempo es periódica. El valor del período es:

a) 5 b) 10 c) 28 d) 20

Las preguntas **4.** y **5.** se responden de acuerdo con la siguiente información:

Una persona anota el tiempo empleado por un automóvil para recorrer cierta distancia, en la siguiente tabla:

TIEMPO (segundos)	1	3	5	7	9	...
DISTANCIA (metros)	2.2	10.2	26.2	50.2	82.2	...

4. Para recorrer una distancia de 200 metros, el tiempo empleado es:

a) Más de 18 segundos
b) Menos de 15 segundos.
c) Aproximadamente 16 segundos.
d) Aproximadamente 17 segundos.

5. Manteniendo la regularidad, se deduce que el automóvil ha recorrido 40 metros, entre los 9 y 11 segundos porque:

a) La distancia por cada segundo aumenta aproximadamente 8 metros.
b) La distancia recorrida depende del tiempo empleado más 1,2 metros.
c) La distancia recorrida entre los 3 y 7 segundos es de 40 metros.
d) La distancia recorrida a los 11 segundos es de 122,2 metros.

Núcleo Temático

8

GRÁFICAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

LOGRO GENERAL

- Dibujar las gráficas de las funciones trigonométricas.

LOGROS ESPECÍFICOS	INDICADORES DE LOGRO
Corporal: • Manipular calculadoras graficadoras y el DERIVE para dibujar gráficas de funciones trigonométricas.	• Gradúa correctamente los ejes coordenados para dibujar las gráficas de las funciones trigonométricas.
Comunicativa: • Explicar con sus propias palabras cómo se dibujan las gráficas de funciones de la forma **$y=A\text{sen}(ax+\alpha)$** y **$y=A\cos(ax+\alpha)$**.	• Describe delante de sus compañeros cómo se dibuja la gráfica de una función trigonométrica de la forma seno o coseno.
Cognitiva: • Dibujar las gráficas básicas de las seis funciones trigonométricas. • Hallar la amplitud, el período, la fase y la magnitud del desfasamiento de una función de la forma **$y=A\text{sen}(ax+\alpha)$** o **$y=A\cos(ax+\alpha)$**.	• Dadas las seis funciones trigonométricas básicas, hallar el dominio y el rango de cada una. • Determina la amplitud, el período, la fase y la magnitud del desfasamiento de una función de la forma **$y=A\text{sen}(ax+\alpha)$** o **$y=A\cos(ax+\alpha)$**.
Estética: • Dibujar la gráfica de una función trigonométrica de ecuación: **$y=A\text{sen}(ax+\alpha)$** o **$y=A\cos(ax+\alpha)$** utilizando la amplitud, el período, el ángulo de fase y la magnitud del desfasamiento.	• Dada una función de la forma **$y=A\text{sen}(ax+\alpha)$** o **$y=A\cos(ax+\alpha)$**, dibuja su gráfica a partir del conocimiento de la amplitud, el período, el ángulo de fase y el desfasamiento.
Etica - Actitudinal: • Reconocer el mal que se causa a una persona cuando se le discrimina, se le ignora o se actúa con ella de manera cruel.	• Toma conciencia de las limitaciones propias y de las diferencias con los demás, para lograr una convivencia armónica en su grupo social.

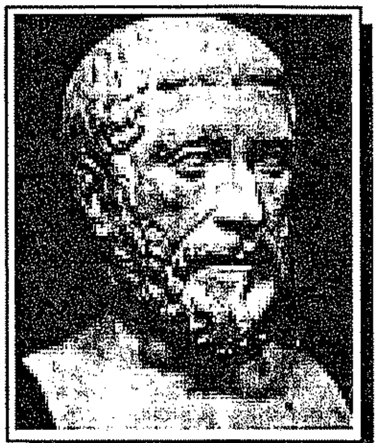
DIMENSIONES

EVALUACIÓN

ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS

8.1 COMPRENSIÓN DE LECTURA: HISTORIA DE LA TRIGONOMETRÍA (5)

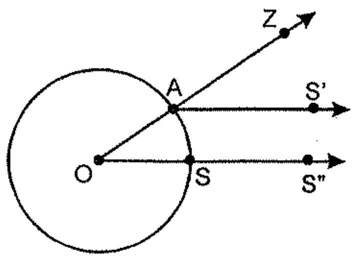
Lea atentamente el siguiente texto y luego subraye la letra correspondiente a la ÚNICA respuesta correcta en cada uno de los enunciados propuestos.



ERATÓSTENES
(276 - 194 A. DE C.)

Además del problema de calcular las distancias relativas del Sol y de la Luna, preocupó a los astrónomos Alejandrinos conocer la medida de los tamaños reales del Sol, la Luna y la Tierra. Aristóteles había hablado de una medida equivalente a unas 40.000 millas para la circunferencia de la Tierra (resultado debido probablemente a Eudoxo), y Arquímedes nos informa que algunos de sus contemporáneos estimaban dicho perímetro en unas 30.000 millas.

Un cálculo mucho mejor, y el más célebre de todos, fue el que llevó a cabo Eratóstenes, un contemporáneo más joven de Arquímedes y Aristarco. Eratóstenes observó que el día del solsticio de verano, a mediodía, el Sol alumbraba directamente en vertical el fondo de un pozo muy profundo en la localidad de Syena (próxima a la actual Assuan), mientras que al mismo tiempo en Alejandría, situada aproximadamente en el mismo meridiano y 5.000 estadios (1 estadio = 185 metros) al norte de Syena, el Sol proyectaba una sombra que indicaba que la distancia angular del Sol al cenit era de un cincuentavo de un círculo completo. A partir de la igualdad de los ángulos correspondientes S'AZ y S"OZ de las figura siguiente, resulta claramente que la circunferencia de la Tierra debe ser igual a 50 veces la distancia entre Syena(S) y Alejandría (A). Esto supone un perímetro de unos 250.000 estadios (o sea, 46.000 Km.). Otras estimaciones posteriores fijaron el número anterior en 252.000 estadios, probablemente con la intención de obtener la cantidad redonda de 700 estadios por grado.



Con el tamaño de la Tierra y las distancias relativas del Sol y de la Luna, fue posible calcular también el tamaño de éstos dos cuerpos celestes.

1. El propósito específico del autor en el escrito anterior es:

   a. Hacer precisiones sobre los errores que se cometían antes, al calcular distancias.
   b. Mostrar la grandeza de las observaciones de los científicos alejandrinos.

c. Demostrar que los astrónomos alejandrinos se preocuparon por conocer la medida de algunos astros.
d. Explicar que a los astrónomos griegos sólo les interesaba calcular las distancias entre los astros.

2. En el texto anterior se mencionaron los siguientes aspectos, menos:
   a. El cálculo del tamaño del sol y de la luna.
   b. Observaciones sobre las formas como alumbra el sol.
   c. Científicos Alejandrinos observaron y calcularon distancias entre diferentes astros.
   d. Eratóstenes no perteneció a la misma época de Arquímedes y Aristarco.

3. El término ESTADIO, utilizado en el texto, se refiere a::
   a. Sitio público para eventos deportivos.
   b. Una etapa en el proceso evolutivo de la tierra.
   c. Un cielo determinado.
   d. Una medida que tiene cierta equivalencia.

4. Del texto leído se puede deducir que:
   a. Las bases de la Astronomía moderna las encontramos en la Grecia antigua.
   b. Los científicos antiguos determinaron el conocimiento de la astronomía.
   c. El Asia Central es la cuna del conocimiento científico.
   d. Los sabios occidentales fueron superiores a los orientales.

5. La expresión solsticio de verano hace referencia a:
   a. Epoca en que el sol se halla más próximo al Ecuador.
   b. Tiempo en el cual el sol se halla más distante del Ecuador.
   c. Epoca de temperaturas altas en los países de la zona.
   d. Etapa de fuerte lluviosidad en la zona tórrida.

8.2 INTRODUCCIÓN

- En esta unidad vamos a realizar un estudio cuidadoso de la manera como varían las funciones trigonométricas y con base en este estudio dibujaremos sus gráficas. Utilizaremos algunos conceptos estudiados en la unidad 3 como: desplazamientos horizontales y verticales, contracciones, dilataciones y simetrías.

- El análisis de la variación y graficación de las funciones trigonométricas es muy importante en física para describir fenómenos ondulatorios y de movimiento armónico simple (M. A. S.)

8.3 FUNCIONES PERIÓDICAS

- Cuando cada mañana preguntamos: "¿ya llegó el PERIÓDICO?" "¿dónde está el PERIÓDICO?" es porque sabemos que TODOS LOS DÍAS un montón de hojas impresas llega a nuestra casa para informarnos lo ocurrido el día anterior.

- Cuando una revista deportiva sale cada semana, decimos que tiene una PERIODICIDAD de siete días.

- En general, la palabra PERIÓDICO se refiere a circunstancias o hechos que se repiten en intervalos iguales (de tiempo, de distancia,...).

- En la unidad 4 estudiamos la función circular y establecimos que era una FUNCIÓN PERIÓDICA, con período 360° ó 2π radianes; es decir, después de 360° se cumple que las imágenes de la función son las mismas que entre 0° y 360°. Por lo tanto; si F es la función circular, entonces:

$$F(\theta + 360°) = F(\theta)$$

- Ahora observemos la figura 8-1:

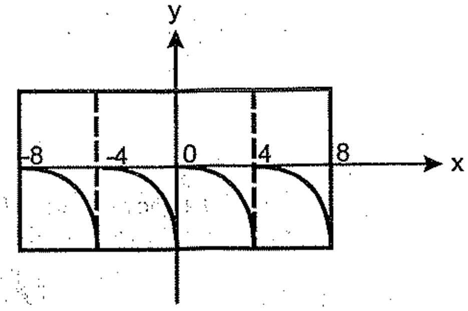


Figura 8-1

La figura nos muestra que el eje x ha sido dividido en intervalos iguales (de 4 unidades cada uno) y la gráfica dibujada es la misma en TODOS ellos. Por lo tanto, la gráfica es PERIÓDICA y su período es x = 4 unidades.

FUNCIÓN PERIÓDICA

- **Una función f es PERIÓDICA si existe un número k tal que f(x+k) = f(x) para todo x en el dominio de f.**
- **El valor de k más pequeño que cumpla esta condición, se denomina PERIODO de la función.**

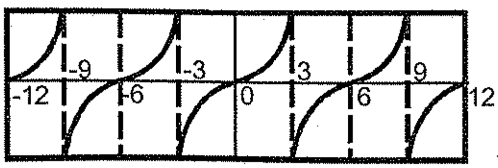
Ejemplo

Aunque la **función circular general** se repite cuando k = 360° ó k = 720° ó k = 1.080°, el período es 360° por ser el más pequeño.

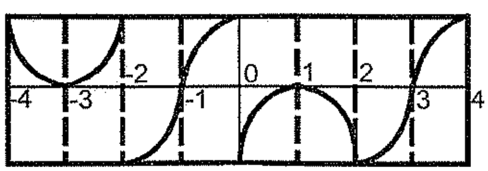
EJERCICIO 8.1

En los ejercicios 1 a 6 determinar cuáles de las siguientes gráficas corresponden a una función periódica, en el intervalo indicado, y hallar su período.

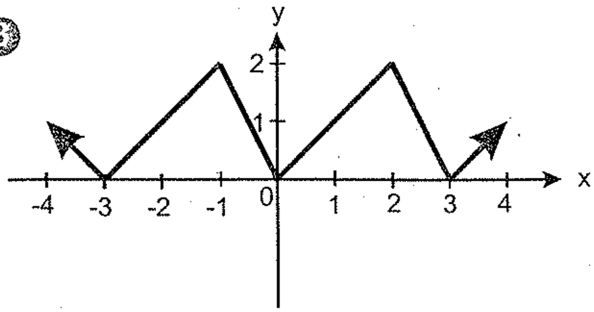
1



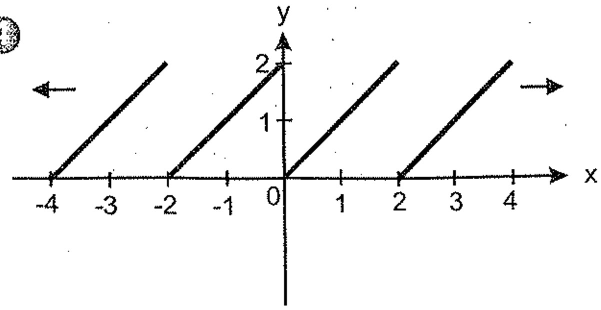
2



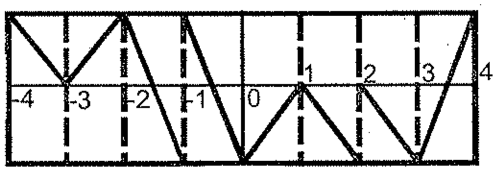
③



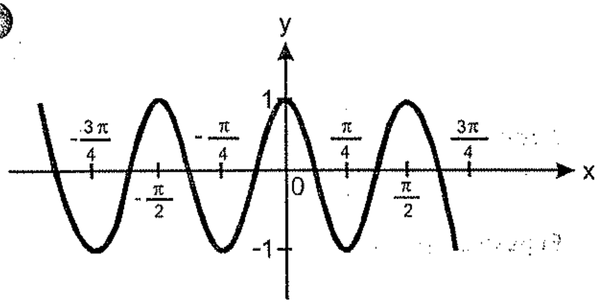
④



⑤



⑥



SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (24)

Un trapecio se inscribe en un semicírculo de radio 1 dm de tal manera que la base mayor coincida con el diámetro. Si la base menor del trapecio mide 2x decímetros, se pide:

1. **Hacer una representación gráfica del enunciado del problema.**
2. **Probar que la altura del trapecio, en función de x es $h = \sqrt{1-x^2}$**
3. **Escribir una ecuación, en función de x, para calcular el área del trapecio.**

8.4 VARIACIÓN Y GRÁFICA DE LA FUNCIÓN SENO

- El primer paso en el dibujo de la gráfica de la función y=Sen(x) es elaborar una tabla de valores de manera que el ángulo varíe entre 0 y $\frac{\pi}{2}$; tabla 8-1:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Sen (x)	0	0.5	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Tabla 8-1

Para dibujar la gráfica en este intervalo, graduamos el eje **y** en el intervalo $[-1; 1]$ y el eje **x** lo graduamos tomando como unidad de medida $\frac{\pi}{6}$; figura 8-2 (a).

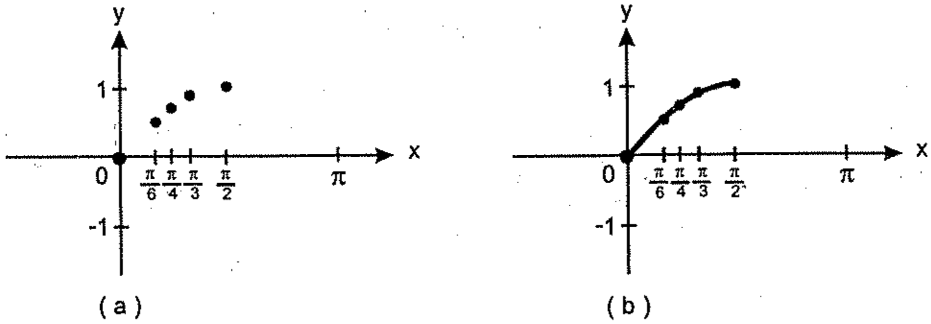


Figura 8-2

- A continuación, representamos los puntos obtenidos en la tabla 8 - 1 y como el dominio de la función seno es $\mathbb{R}$, entonces los puntos pueden unirse trazando una curva "suave", como nos muestra la figura 8-2 (b).

- El paso siguiente consiste en ampliar la tabla de valores y la gráfica al intervalo $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right]$; figura 8-3

x	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
Sen (x)	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0.5	0

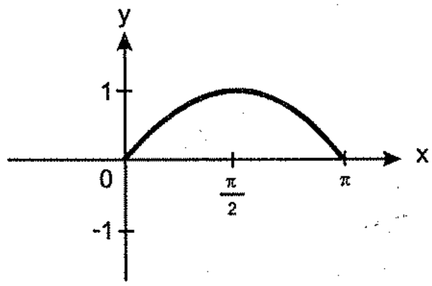


Figura 8-3

- A continuación, seguimos ampliando la tabla de valores y la gráfica al intervalo $\left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right]$; figura 8-4:

x	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$
Sen (x)	-0.5	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	-1

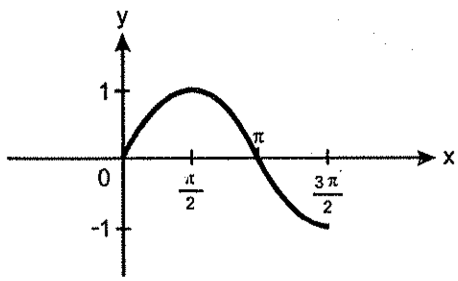


Figura 8-4

- Ahora ampliamos la tabla y la gráfica al intervalo $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$; figura 8-5:

x	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
Sen (x)	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	-0.5	0

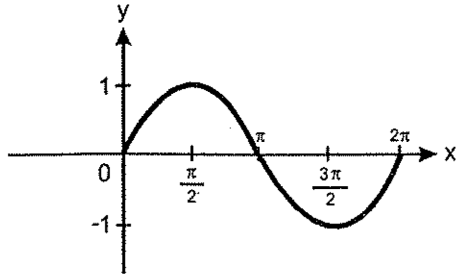


Figura 8-5

- De aquí en adelante, podemos comprobar que la tabla de valores volverá a repetirse para $x = 2\pi + \frac{\pi}{6}$, $x = 2\pi + \frac{\pi}{4}$, $x = 2\pi + \frac{\pi}{3}$, etc.; es decir, la función seno es periódica y su período es 2π radianes ó (360°); figura 8-6:

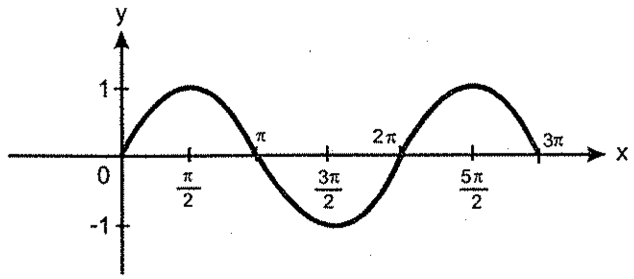


Figura 8-6

CONCLUSIONES

El análisis anterior nos permite sacar estas conclusiones:

- **Si el ángulo aumenta de 0 a $\frac{\pi}{2}$, el valor del SENO crece de 0 a 1.**
- **Si el ángulo varía entre $\frac{\pi}{2}$ y π, el valor del SENO decrece de 1 a 0.**
- **Si el ángulo varía entre π y $\frac{3\pi}{2}$, el valor del SENO decrece de 0 a -1.**
- **Si el ángulo varía entre $\frac{3\pi}{2}$ y 2π, el valor del SENO crece de -1 a 0.**
- **La función Seno es PERIÓDICA y su período es 2π.**

ATENCIÓN

- Como la función seno es periódica, con período 2π, y su dominio es el conjunto $\boldsymbol{R}$, entonces su gráfica puede extenderse indefinidamente en ambas direcciones a lo largo del eje **x**; figura 8-7:

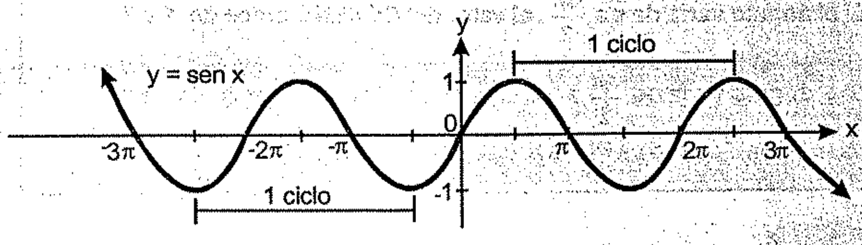


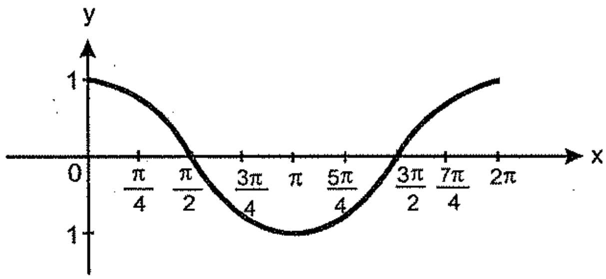
Figura 8-7

- La gráfica de una función periódica en un intervalo cuya longitud es un período se llama **CICLO** de la curva. La figura 8-7 muestra dos ciclos de la gráfica del Seno.

8.5 VARIACIÓN Y GRÁFICA DE LA FUNCIÓN COSENO

- Para dibujar la gráfica de la función **y = Cos(x)**, seguiremos un procedimiento similar al utilizado para graficar la función Seno; es decir, elaborando la tabla de valores entre 0 y 2π radianes y observando cómo varía el Coseno a medida que varía el ángulo; figura 8-8.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
Cos(x)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0.5	0	-0.5	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	-1	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	-0.5	0	0.5	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1



Ffigura 8-8

- Si extendemos la tabla de valores a ángulos mayores que 2π, obtendremos las mismas imágenes del intervalo $[0\ ;\ 2\pi]$. Por lo tanto, la función Coseno también es periódica y su período es 2π.

CONCLUSIONES

La tabla y gráfica anteriores nos permiten concluir que:

- **Si el ángulo aumenta de 0 a $\frac{\pi}{2}$, el valor del COSENO decrece de 1 a 0.**
- **Si el ángulo varía de $\frac{\pi}{2}$ a π, el valor del COSENO decrece de 0 a -1.**
- **Si el ángulo varía de π a $\frac{3\pi}{2}$, el valor del COSENO crece de -1 a 0.**
- **Si el ángulo varía de $\frac{3\pi}{2}$ a 2π, el valor del COSENO crece de 0 a 1.**
- **La función Coseno es PERIÓDICA y su período es 2π.**

ATENCIÓN

- Como la función Coseno es periódica, con período 2π, y su dominio es el conjunto $\boldsymbol{R}$, entonces su gráfica puede extenderse indefinidamente en ambas direcciones a lo largo del eje **x**; figura 8-9:

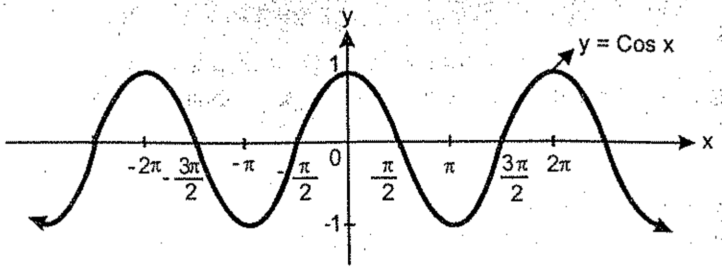


Figura 8-9

Ejemplo

- Hay una teoría que está muy de moda entre ciclistas, atletas y público en general: el BIORRITMO. Esta teoría establece que el funcionamiento orgánico de una persona depende de tres factores o ritmos que posee desde que nace: FACTOR FÍSICO, FACTOR EMOCIONAL Y FACTOR INTELECTUAL. Estos factores varían en forma de Seno y Coseno respecto al tiempo.

- La figura 8-10 nos muestra las gráficas de los tres factores (f_1, f_2, f_3) del biorritmo de una persona durante un período de 30 días.

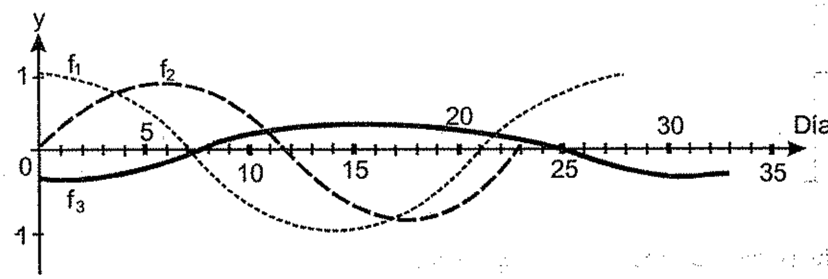


Figura 8-10

* El período del factor emocional (f_1) fue: 28 días.
* El período del factor físico (f_2) fue: 23 días.
* El período del factor intelectual (f_3) fue: 33 días.

El período es el tiempo necesario para que la gráfica complete un ciclo.

8.6 AMPLITUD, PERÍODO Y DESFASAMIENTO DE LAS FUNCIONES SENO Y COSENO

- En la unidad 3 de este texto estudiamos los efectos que se producen en la gráfica de una función **y=f(x)** cuando al argumento de la función **(la x)** le sumamos o restamos un número o cuando lo multiplicamos por un número o cuando la función la multilplicamos por un número.

- En esta sección veremos que si sobre las funciones seno o coseno realizamos las mismas operaciones, obtendremos transformaciones similares.

8.6.1 Amplitud

- Utilicemos el DERIVE o una hoja de papel cuadriculado para dibujar , en el mismo plano cartesiano, las gráficas de las siguientes funciones:

a) y= Sen(x) b) y= 3Sen(x) c)y= -2Sen(x)

- Comparemos las gráficas obtenidas con las siguientes:

x	y=Sen(x)	y= 3Sen (x)	y= -2Sen (x)
0	0	0	0
$\frac{\pi}{4}$	0.7	2.1	-1.4
$\frac{\pi}{2}$	1	3	-2
$\frac{3\pi}{4}$	0.7	2.1	-1.4
π	0	0	0
$\frac{5\pi}{4}$	-0.7	-2.1	1.4
$\frac{3\pi}{2}$	-1	-3	2
$\frac{7\pi}{4}$	-0.7	-2.1	1.4
2π	0	0	0

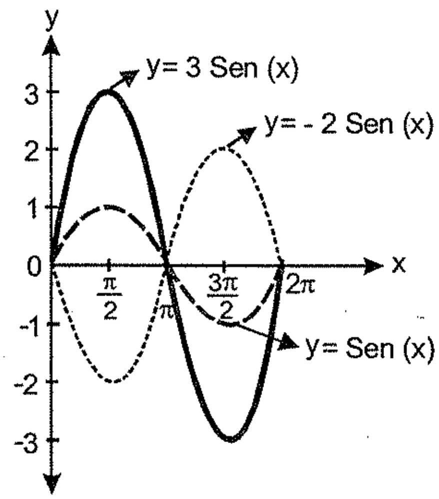


Figura 8-11

- ¿Qué efecto producen en la gráfica de y=Sen(x) los factores 3 y -2?
- Esta experiencia nos permite afirmar lo siguiente: si **A > 1**, entonces la gráfica de **y = Af(x)** se alarga verticalmente **A** veces con respecto a la gráfica de **y = f(x)** y la gráfica de $y=\frac{1}{A}$ **f(x)** se comprime verticalmente **A** veces con respecto a la gráfica de **y = f(x).**
- Cuando el factor **A** es negativo, entonces en la función **y = f(x)** se producen los mismos alargamientos o contracciones descritos antes, pero adicionalmente la gráfica de refleja con respecto al eje x; es decir, las gráficas de **y= A Sen(x)** y **y= -A Sen(x)** son simétricas con respecto al eje **x.**
- En la práctica, si una pareja ordenada de y = f(x) es (4, -3), entonces una pareja ordenada de y = -2f(x) será (4, 6); es decir, para obtener las parejas ordenadas de y = -2f(x) debemos multiplicar por -2 las segundas componentes de las parejas ordenadas de y = f(x).
- ¿Qué efecto produce en la gráfica de **y=Sen (x)** los factores **3** y **-2** ?¿Hay alguna variación en el período de la función?
- Notemos que el período de las tres funciones es el mismo: **2π**; sin embargo, la figura nos muestra que sus gráficas se diferencian en sus valores **MÁXIMO** y **MÍNIMO.** Esta variación se denomina **AMPLITUD.**

AMPLITUD DE UNA FUNCIÓN

- La gráfica de la función **y= ASen(x)** (o **y=ACos(x)**), donde A es un número real, tiene el mismo período que la función **y= Sen (x)** (o **y= Cos (x)**) pero sus valores MÁXIMO y MÍNIMO varían entre **-A** y **A** y no entre **-1** y **1.** Al valor absoluto de A, (|A|), se le denomina **AMPLITUD** de la función **y=A Sen(x)** (o **y=A Cos(x)**) y corresponde a una dilatación vertical (Si |A| > 1) o a una contracción vertical (Si |A| < 1) de las funciones **y=Sen(x)** o **y=Cos(x).**

- Si A>0, el sentido de la gráfica de y=A Sen(x) es el mismo de y= Sen(x).
- Si A<0, el sentido de la gráfica de y= A Sen(x) es contrario al de y= Sen (x).

EJERCICIO 8.2

En los ejercicios siguientes, dibujar en un mismo sistema de ejes coordenados los pares de funciones dados en cada caso, sabiendo que .

1. $\begin{cases} y = \text{Sen}(x) \\ y = \frac{1}{2}\text{Sen}(x) \end{cases}$

2. $\begin{cases} y = \text{Sen}(x) \\ y = \frac{2}{3}\text{Sen}(x) \end{cases}$

3. $\begin{cases} y = \text{Cos}(x) \\ y = 3\,\text{Cos}(x) \end{cases}$

4. $\begin{cases} y = \text{Cos}(x) \\ y = -4\,\text{Cos}(x) \end{cases}$

5. $\begin{cases} y = \text{Cos}(x) \\ y = -\frac{1}{3}\text{Cos}(x) \end{cases}$

6. $\begin{cases} y = \text{Sen}(x) \\ y = -5\,\text{Sen}(x) \end{cases}$

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (25)

Un depósito semiesférico tiene un radio de 13 m. Si en un momento determinado la profundidad del líquido en el depósito es x metros, se pide:

1. **Hacer una representación gráfica del problema cuando la profundidad del líquido es 8 metros.**
2. **Escribir una ecuación, en función de x, que permita calcular el radio de la superficie del agua.**

8.6.2 Período

- En la sección 8-3 indicamos que el PERIODO de una función es el menor intervalo a partir del cual la gráfica vuelve a repetirse. Por ejemplo, las funciones **y = Sen(x)**, y, **y = Cos(x)** son periódicas y su período es **x =2π.**
- Examinemos, ahora cómo varía el período si multiplicamos el ángulo por un valor constante **a.**

Primera Experiencia

- Dibujemos en un mismo sistema de coordenadas las gráficas de las funciones:

a) y = Sen(x) y b) y = Sen(2x)

- En primer lugar, elaboremos una tabla de valores de las funciones dadas:

x	Sen (x)	Sen (2x)
0	0	0
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{2}$	1	0
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
π	0	0
$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{3\pi}{2}$	-1	0
$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	-1
2π	-0	0

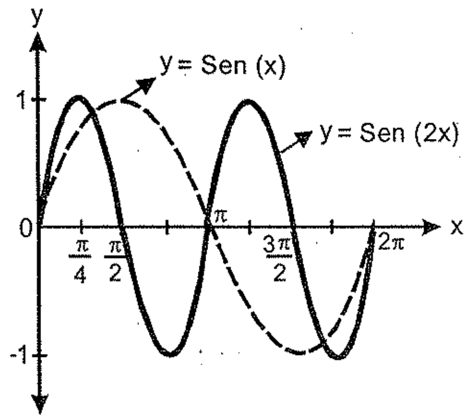


Figura 8-12

- Notemos que las dos funciones tienen la misma amplitud: **1**, pero su período es diferente. En efecto:

  * El período de y= Sen(x) es 2π
  * El período de y= Sén(2x) es π

  Por lo tanto, la gráfica de y= Sen(2x) muestra una CONTRACCIÓN HORIZONTAL respecto a la gráfica de y= Sen(x).

Segunda Experiencia

- Ahora dibujemos en un mismo sistema de coordenadas las gráficas de las funciones:

  a) $y = \text{Sen}(x)$ b) $y = \text{Sen}\left(\frac{1}{2}x\right)$

  * En primer lugar elaboremos una tabla de valores de las funciones dadas:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π	$\frac{9\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{4}$	3π	$\frac{13\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{2}$	$\frac{15\pi}{4}$	4π
Sen(x)	0	0.7	1	0.7	0	-0.7	-1	-0.7	0	0.7	1	0.7	0	-0.7	-1	-0.7	0
$\text{Sen}\left(\frac{1}{2}x\right)$	0	0.4	0.7	0.9	1	0.9	0.7	0.4	0	-0.4	-0.7	-0.9	-1	-0.9	-0.7	-0.4	0

  * Ahora dibujamos ambas funciones; figura 8-13:

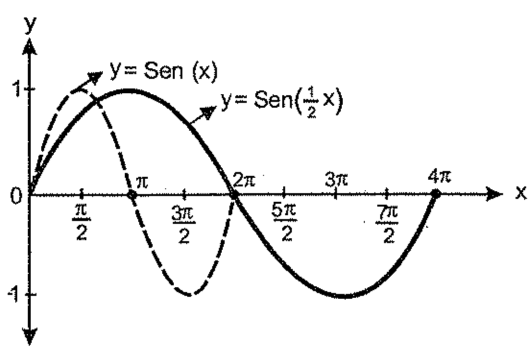


Figura 8-13

- Como en la experiencia anterior, las dos funciones tienen la misma amplitud: **1**, pero su período cambia; así:
  - * El período de y= Sen(x) es 2π
  - * El período de y= $\text{Sen}\left(\frac{1}{2}x\right)$ es 4π

Por lo tanto, la gráfica de y= $\text{Sen}\left(\frac{1}{2}x\right)$ muestra una DILATACIÓN HORIZONTAL respecto a la gráfica de y=Sen (x).

- En general, las funciones de la forma **y=Sen (ax)** o **y= Cos (ax)** donde **a>0**, completarán un ciclo cuando su variación es de 0 a $\frac{2\pi}{a}$. Por lo tanto:

PERÍODO DE UNA FUNCIÓN

- El **PERÍODO** de cualquier función de la forma **y = Sen(ax)** ó **y = Cos(ax)**, donde **a > 0**, es:

$$\mathbf{P = \frac{2\pi}{a}}$$

- Si **a>1** entonces para dibujar la gráfica de **y=Sen(ax) (o y=Cos(ax)**) reducimos o contraemos horizontalmente, **a veces**, la gráfica de **y= Sen(x)** (o **y=Cos(x)**).
- Si **0<a<1**, entonces para dibujar la gráfica de **y=Sen(ax)** (o **y=Cos(ax)**) alargamos o dilatamos horizontalmente, $\mathbf{\frac{1}{a}}$ **veces**, la gráfica de **y=Sen(x)** (o **y=Cos(x)**).
- Cuando el factor **a** es negativo, entonces para dibujar la gráfica de **y=Sen(ax)** (o**y=Cos(ax)**) realizamos, sobre la gráfica de **y=Sen(x)** (o **y=Cos(x)**) las mismas contracciones o dilataciones descritas anteriormente, pero adicionalmente debemos reflejar la gráfica con respecto al eje y; es decir, la gráfica de **y=Sen(-2x)** es la simétrica, con respecto al eje y, de la gráfica de **y=Sen(2x)**.

Ejemplo 1

Dibujemos en un mismo sistema de ejes coordenados las gráficas de las funciones y = 3 Sen(2x) y y = Sen(x).

SOLUCIÓN

- Un análisis de la ecuación nos permite obtener las siguientes conclusiones acerca de la función y = 3Sen(2x):
  - * La gráfica tiene forma senoidal.
  - * Su amplitud es A = 3
  - * Su período es $P = \frac{2\pi}{2} = \pi$
- Con esta información podemos dibujar ambas gráficas; figura 8-14.

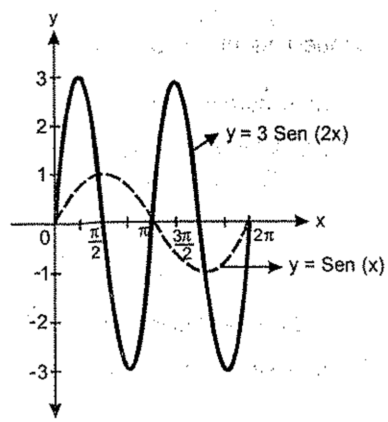


Figura 8-14

Ejemplo 2

Dibujemos la gráfica de y = 2 Cos(2x).

SOLUCIÓN

- Teniendo en cuenta todos los análisis realizados anteriormente, concluímos que:
  - * La curva tiene forma cosenoidal.
  - * Su amplitud es 2.
  - * Su período es $P = \frac{2\pi}{2} = \pi$

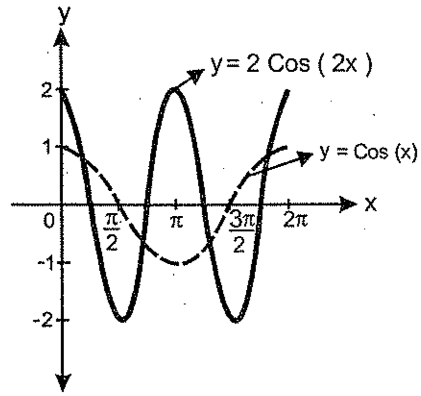


Figura 8-15

- La figura 8-15 nos muestra las gráficas de y = Cos(x) y y = 2Cos(2x):

Ejemplo 3

- Cuando una alarma electrónica o un diapasón se activan, el SONIDO que se produce está formado por vibraciones que dan lugar a una gráfica de tipo senoidal o cosenoidal en un osciloscopio; figura 8-16.

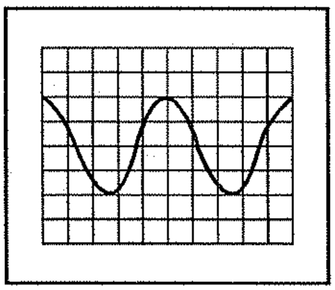


Figura 8-16

- Estos sonidos se pueden describir por medio de una ecuación de la forma:

S(t) = A Sen(at)

donde t es el tiempo, en segundos, transcurrido después que el sonido se ha originado.

- Algunas características de este tipo de sonido son las siguientes:
  - * El VOLUMEN del sonido es la AMPLITUD A de la función y se mide en DECIBELES (dB).
  - * La FRECUENCIA (F) de las vibraciones está dada por:

$$F = \frac{|a|}{2\pi}$$

es decir; la frecuencia es el INVERSO MULTIPLICATIVO del período.

  - * Ordinariamente, un diapasón en la parte intermedia de la escala musical produce 264 vibraciones por segundo.

- ¿Cuál será la ecuación que describe el sonido que produce un diapasón, si el volumen es 20 dB?

SOLUCIÓN

* Como la amplitud es 20 y la frecuencia de las vibraciones es 264, entonces:

$$\frac{|a|}{2\pi} = 264 \Rightarrow |a| = 264\,(2\pi) = 528\pi$$

Por lo tanto, la ecuación queda así:

$$S(t) = 20\ \text{Sen}(528\pi t)$$

EJERCICIO 8.3

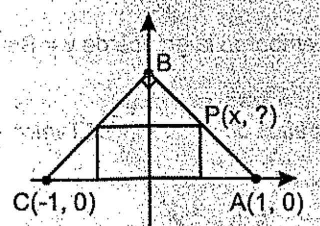
Hallar la amplitud, el período y dibujar la gráfica de las siguientes funciones en el intervalo que se indica:

1. $y = \text{Sen}(3x);\ -\pi \le x \le 2\pi$
2. $y = \text{Cos}\left(\frac{x}{2}\right);\ -4\pi \le x \le 4\pi$
3. $y = 3\ \text{Cos}(2x);\ -\pi \le x \le \pi$
4. $y = -3\ \text{Cos}\left(\frac{x}{2}\right);\ -4\pi \le x \le 4\pi$
5. $y = -2\ \text{Sen}\left(\frac{2}{3}x\right);\ 0 \le x \le 3\pi$
6. Un diapasón produce 356 vibraciones por segundo. Escribir una ecuación que describa la imagen de estas vibraciones en un osciloscopio, si el volumen es 25 dB.
7. Hallar el volumen y la frecuencia del sonido cuya imagen en un osciloscopio está descrita por la ecuación $S(t) = 32\ \text{Sen}(792\pi\, t)$.

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (26)

La figura muestra un rectángulo inscrito en un triángulo rectángulo isósceles, con ángulo recto en B, cuya hipotenusa mide 2 unidades de longitud. Se pide:

1. **Escribir las coordenadas del vértice B y la ordenada y del punto p, en términos de x.**
2. **Expresar el área del rectángulo en términos de x.**
3. **¿Para qué valor de x, el área del rectángulo es máxima?**



8.6.3 Desfasamiento o Desplazamiento Horizontal

- En la sección anterior estudiamos el efecto que produce en las gráficas de las funciones Seno y Coseno, la multiplicación del ángulo por constantes diferentes de cero.
- En esta sección examinaremos el efecto de sumar (o restar) del ángulo una constante diferente de cero.

- Dibujemos las gráficas de las funciones y = Sen(x) y y = Sen$\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ en el primer ciclo a partir de 0.

  * En primer lugar una tabla de valores de las funciones dadas:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π	$\frac{9\pi}{4}$
Sen(x)	0	0.7	1	0.7	0	-0.7	-1	-0.7	0	0.7
Sen$\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$	-0.7	0	0.7	1	0.7	0	-0.7	-1	-0.7	0

  * Ahora dibujemos ambas gráficas en el mismo plano cartesiano; figura 8-17:

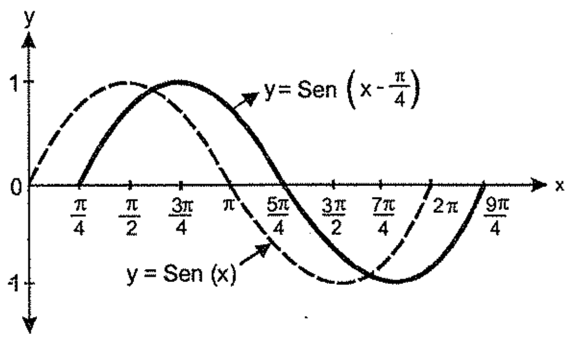


Figura 8-17

- La figura 8-17 nos muestra que las funciones dadas tienen la misma amplitud (1) y el mismo período (2π); sin embargo la gráfica de y = Sen$\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ se encuentra **desplazada** o corrida $\frac{\pi}{4}$ unidades a la DERECHA de la gráfica de y = Sen(x). El valor $\frac{\pi}{4}$ se denomina DESFASAMIENTO o DESPLAZAMIENTO.

- En la misma forma, podemos comprobar que la gráfica de y = Sen $\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ se encuentra desplazada $\frac{\pi}{4}$ unidades a la IZQUIERDA de la gráfica de y = Sen(x).

- Para el caso más general, y = **Sen(ax+b)** procedemos así:

  * Primero efectuamos la transformación y=Sen(x+b), trasladando horizontalmente la gráfica de y= Sen(x), **b** unidades hacia la derecha o hacia la izquierda, dependiendo de si b<0 ó b>0, respectivamente.
  * Luego, efectuamos la transformación y= Sen (ax+b) dilatando horizontalmente $\frac{1}{a}$ veces la gráfica de y= Sen(x+b), si 0<a<1, o contrayendo horizontalmente **a** veces la gráfica de y= Sen (x+b), si a>1.

- Un análisis similar se aplica a la gráfica de una función de la forma y= Cos (ax + b).

Ejemplo

Analicemos y dibujemos la gráfica de **y=** $\frac{1}{2}$ **Sen** $\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right)$

SOLUCIÓN

- En primer lugar, realizamos la transformación y= Sen $(x+\frac{\pi}{4})$, que consiste en trasladar $\frac{\pi}{4}$ unidades hacia la izquierda, la gráfica de y= Sen(x); figura 8-18.

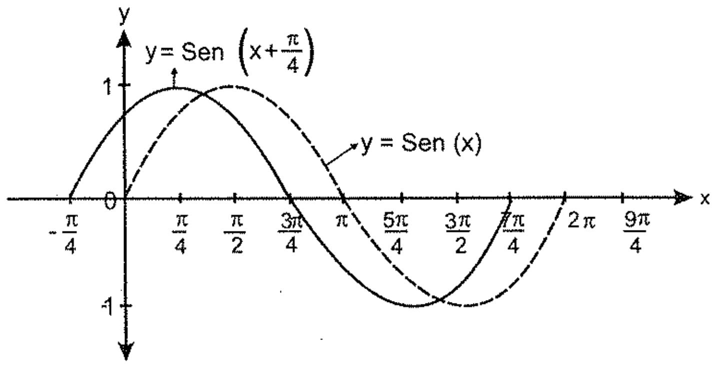
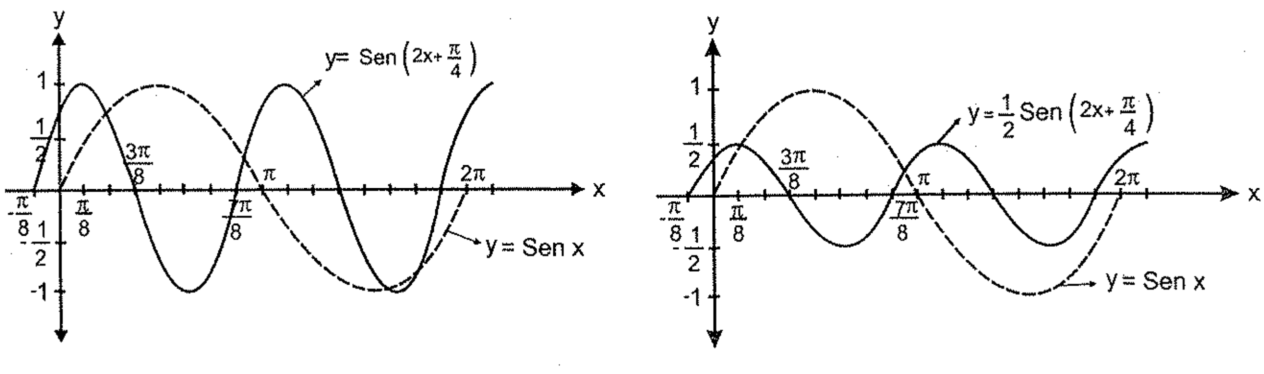


Figura 8-18

- A continuación, realizamos la tranformación y= Sen $(2x + \frac{\pi}{4})$ consistente en contraer horizontalmente la gráfica de y= Sen $(x - \frac{\pi}{4})$ un factor de $\frac{1}{2}$. En la práctica, lo que debemos hacer para dibujar la gráfica de y= Sen$(2x + \frac{\pi}{4})$ es dividir por 2 (o multiplicar por $\frac{1}{2}$) las abscisas de cada pareja ordenada de y= Sen $(x + \frac{\pi}{4})$; por ejemplo, si una pareja ordenada de y= Sen $(x + \frac{\pi}{4})$ es $(\frac{\pi}{4}, 1)$, entonces una pareja ordenada de y= Sen $(2x + \frac{\pi}{4})$ será $(\frac{\pi}{8}, 1)$; figura 8-19 (a).



(a) (b)

Figura 8-19

- Finalmente, realizamos la transformación y= $\frac{1}{2}$ Sen$(2x + \frac{\pi}{4})$ consistente en contraer verticalmente en $\frac{1}{2}$ la gráfica de la función y= Sen$(2x + \frac{\pi}{4})$; figura 8-19(b)

RESUMEN

Para dibujar la gráfica de y= A Sen(ax+b) (o y= A Cos (ax+b)) procedemos así:

1. **Dibujamos la gráfica de y=Sen (x+b) (o y=Cos(x+b) desplazando horizontalmente la gráfica de y=Sen(x) (o y=Cos(x)) b unidades hacia la izquierda o b unidades hacia la derecha, dependiendo de si b es positivo o negativo, respectivamente.**
2. **A continuación, dibujamos la gráfica de y=Sen (ax+b) (o y=Cos(ax+b)) contrayendo o dilatando horizalmente la gráfica de y= Sen(x+b) (o y=Cos(x+b)) un factor a o $\frac{1}{a}$, dependiendo de si a>1 o si 0<a<1, respecticamente.**
3. **Finalmente, dilatamos o contraemos verticalmente la gráfica de y=Sen (ax+b) (o y= Cos (ax+b) un factor A, dependiendo de si A>1 o si 0<A<1, respectivamente.**

EJERCICIO 8.4

1 Hallar la amplitud, el período, el desfasamiento y dibujar la gráfica para el primer período (ciclo) de las siguientes funciones:

a) $y = 3\ \text{Sen}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ b) $y = 2\ \text{Cos}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$

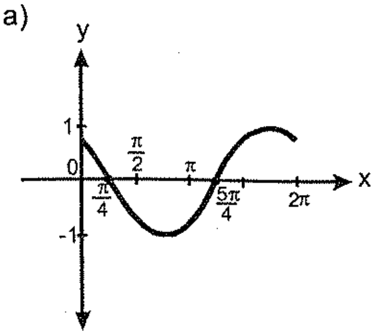
c) $y = 2\ \text{Sen}\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{5}\right)$ d) $y = 2\ \text{Cos}\ (x + \pi)$

e) $y = \frac{1}{2}\text{Cos}\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{3}\right)$ f) $y = 2\ \text{Cos}\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$

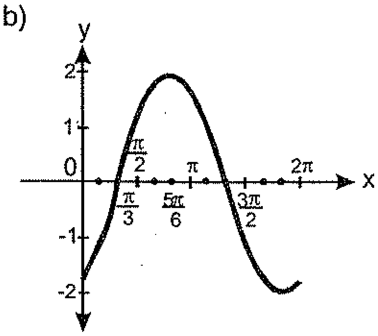
2 Dadas las gráficas de las siguientes funciones trigonométricas, se pide:

a) Hallar su amplitud b) Hallar su período
c) Hallar su desfasamiento d) Escribir su ecuación.

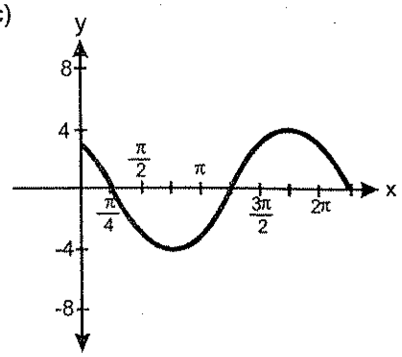
a)



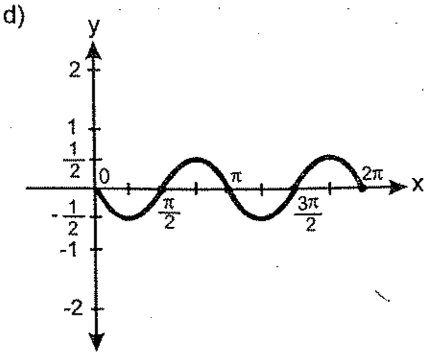
b)



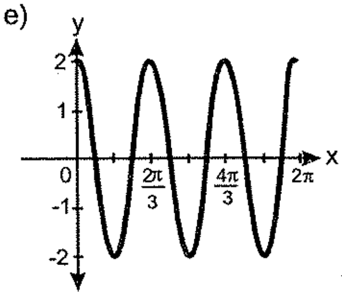
c)



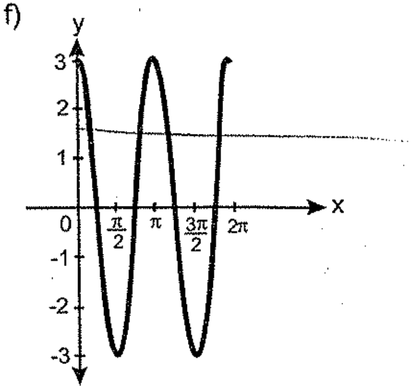
d)



e)



f)



SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (27)

Un muro y un edificio están ubicados en el mismo plano horizontal. El muro tiene 8 pies de altura y se encuentra separado 27 pies del edificio. Una escalera se recuesta sobre el edificio y se apoya en el piso de tal manera que toque la parte superior del muro. Si x pies es la distancia que separa la base del edificio del punto de apoyo de la escalera en el piso, se pide:

1. **Hacer una representación gráfica del enunciado del problema.**
2. **Escribir una ecuación para calcular la longitud de la escalera, en función de x.**

8.7 LAS GRÁFICAS DE LAS OTRAS CUATRO FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

1. GRÁFICA DE LA TANGENTE

- Para dibujar la gráfica de la función Tangente es conveniente expresarla en términos de Seno y Coseno, que según vimos en una unidad anterior es:

$$\textbf{Tan(x)} = \frac{\textbf{Sen}\left(\textbf{x}\right)}{\textbf{Cos}\left(\textbf{x}\right)}, \textbf{ con Cos(x)} \neq \textbf{0}$$

- Ahora bien, ¿cuáles son el dominio y el rango de esta función?

  El dominio está formado por aquellos valores del ángulo en los que NO se anula el Coseno; es decir:

$$D = \left\{x/x \neq \ldots, -\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots\right\} \quad \text{ó} \quad D = \left\{x/x \neq n \cdot \frac{\pi}{2}, \text{ con } n \in Z \text{ y } n \text{ impar}\right\}$$

Analicemos, por ejemplo, lo que ocurre cuando $x = \frac{\pi}{2}$:

$$\text{Si } x = \frac{\pi}{2} \text{ entonces } \operatorname{Tan}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\operatorname{Sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{Cos}\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{0} \text{ ¡ No existe !}$$

Para determinar el comportamiento de la gráfica en las proximidades de estos valores elaboremos una tabla para ángulos entre 0°y 360°, como la siguiente:

x	0°	30°	45°	60°	85°	90°	95°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	265°	270°	275°	300°	315°	330°	360°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{17\pi}{36}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{19\pi}{36}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{53\pi}{36}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{55\pi}{36}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
Tan(x)	0	0.57	1	1.73	11.4	NO EXISTE	-11.4	-1.73	-1	-0.57	0	0.57	1	1.73	11.4	NO EXISTE	-11.4	-1.73	-1	-0.57	0
	I CUADRANTE (+)						II CUADRANTE (-)					III CUADRANTE (+)					IV CUADRANTE (-)				

Tabla 8-2

La tabla nos muestra que cuando x toma valores próximos a $\frac{\pi}{2}$, en el I cuadrante, los valores de Tan(x) crecen más y más positivamente; es decir:

$$\textbf{Cuando } x \to \frac{\pi}{2} \textbf{ por la izquierda, entonces Tan(x)} \to +\infty$$

Así mismo, cuando x toma valores próximos a $\frac{\pi}{2}$, en el II cuadrante, los valores de Tan(x) decrecen más y más; es decir:

$$\textbf{Cuando } x \to \frac{\pi}{2} \textbf{ por la derecha, entonces Tan(x)} \to -\infty$$

Lo anterior se repite para $\mathbf{x} = \frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$,.... Por lo tanto, el rango de la función Tangente será:

$$\mathrm{I} = (-\infty ; +\infty) = R$$

- Representando los puntos de la tabla 8-2 en el sistema coordenado obtenemos la siguiente gráfica que recibe el nombre de **Tangentoide**; figura 8-20:

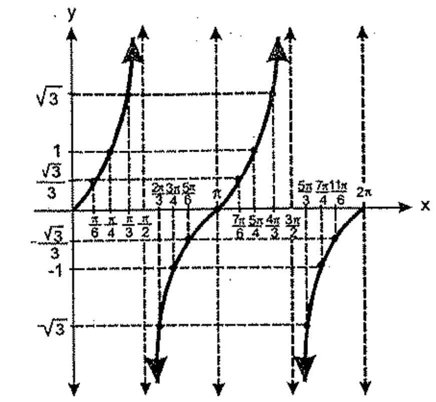


Figura 8-20

ATENCIÓN

- Las gráficas de las funciones Cosecante, Secante y Cotangente, se dibujan analizando los inversos multiplicativos del Seno, el Coseno y la Tangente, respectivamente.

  A continuación presentamos las gráficas de $y = Csc(x)$, $y = Sec(x)$ y $y = Cot(x)$ con sus respectivas tablas de valores.

2. GRÁFICA DE LA COSECANTE

- Tabla de valores:

x	0º	30º	45º	60º	90º	120º	135º	150º	180º	210º	225º	240º	270º	300º	315º	330º	360º
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
Csc (x)	NO EXISTE	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	NO EXISTE	-2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{2}$	-2	NO EXISTE
CUADRANTE		I +				II +				III -				IV -			

- Representando en el sistema cartesiano los puntos de esta tabla, obtenemos la siguiente gráfica; figura 8-21:

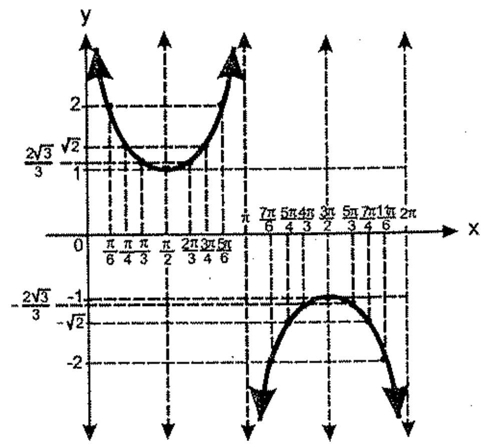


Figura 8-21

3. GRÁFICA DE LA SECANTE

- Tabla de valores:

x	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	0
Sec (x)	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	NO EXISTE	-2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{2}$	-2	NO EXISTE	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1

CUADRANTE	I +	II -	III -	IV +

- Representando en el sistema cartesiano los puntos de esta tabla, obtenemos la gráfica de la función secante; figura 8-22.

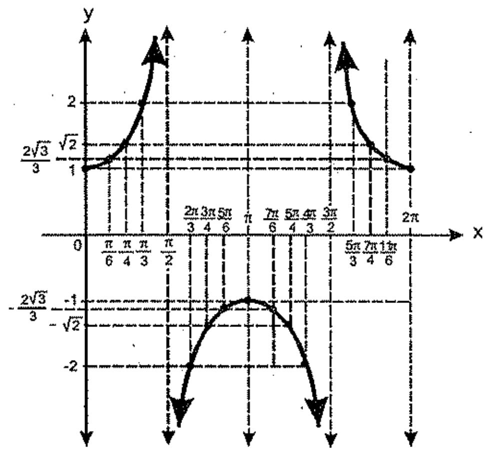


Figura 8-22

4. GRÁFICA DE LA COTANGENTE

- Tabla de valores:

x	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	0
Cot (x)	NO EXISTE	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	NO EXISTE	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	NO EXISTE

CUADRANTE	I +	II -	III -	IV +

- Representando en el plano cartesiano los puntos de esta tabla, obtendremos la siguiente gráfica de la función cotangente; figura 8-23.

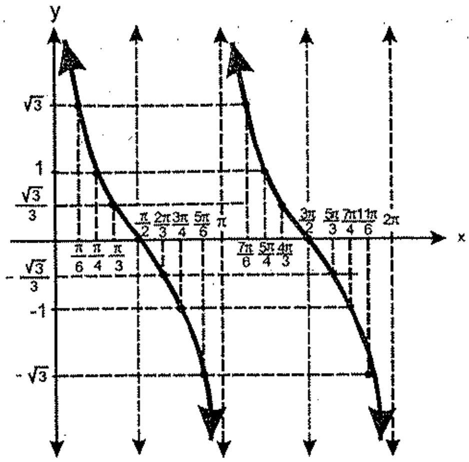
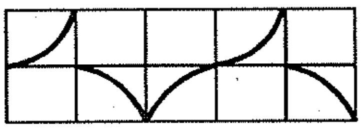


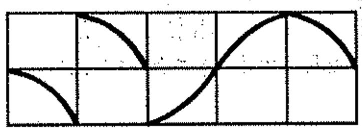
Figura 8-23

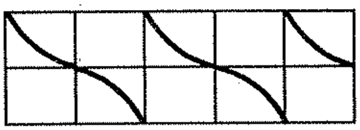
Taller de la Unidad 8

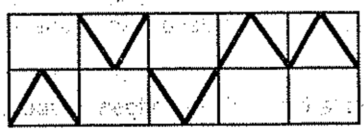
En los ejercicios **1.** a **10.**, escoger la letra correspondiente a la ÚNICA respuesta correcta:

1. Una de las siguientes gráficas corresponde a una función periódica, en el intervalo dado:

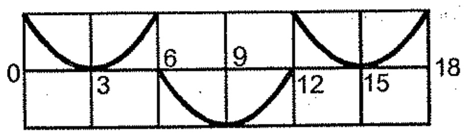
a) 

b) 

c) 

d) 

2. El período de la función que aparece en la gráfica es:



a) 3 b) 12 c) 6 d) 18

3. El valor máximo de la función $y = \text{Sen}(x)$, en $0 \leq x \leq 2\pi$, se obtiene cuando **x** vale:

a) 0 b) $\frac{\pi}{2}$ c) π d) $\frac{3\pi}{2}$

4. La función $y = \text{Cos}(3x)$, con $0^0 \leq x \leq 90^0$, tiene un valor mínimo cuando **x** vale:

a) 0° b) 45° c) 30° d) 60°

5. Una función f periódica, de período k, cumple que:

a) $f(kx) = kf(x)$
b) $f[k(\alpha + \beta)] = f(k\alpha) + f(k\beta)$
c) $f(k + x) = f(x)$
d) $f(x) = f(k)$, para todo x.

6. Cuando el ángulo crece de $\frac{3\pi}{2}$ a 2π, la gráfica del Seno:

a) Crece de -1 a 0
b) Crece de 0 a 1
c) Decrece de 0 a -1
d) Crece de 0 a $+\infty$

7. Mientras el ángulo aumenta de $\frac{\pi}{2}$ a π, la gráfica del Coseno:

a) Crece de -1 a 0
b) Crece de 0 a -1
c) Decrece de 0 a -1
d) Crece de 0 a -1

8. La amplitud de la curva $y = 4\ \text{Sen}(3x)$ es:

a) 3
b) 4
c) ∞
d) $\frac{4}{3}$

9. Si el período de $y = \text{Sen}(\alpha)$ es 2π, entonces el período de $y = 3\ \text{Sen}(2\alpha)$ es:

a) 4π
b) $\frac{2\pi}{3}$
c) π
d) $\frac{3\pi}{2}$

10. La gráfica de la función $y = 3\ \text{Sen}\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$ aparece desplazada:

a) $\frac{\pi}{4}$ hacia la derecha del origen, respecto a $y = \text{Sen}(x)$

b) $\frac{\pi}{4}$ hacia la izquierda del origen, respecto a $y = \text{Sen}(x)$

c) $\frac{\pi}{8}$ hacia la derecha del origen, respecto a $y = \text{Sen}(x)$

d) $\frac{\pi}{8}$ hacia la izquierda del origen, respecto a $y = \text{Sen}(x)$

En los ejercicios **11.** a **14.**, determinar la amplitud, período, ángulo de fase y magnitud del desfasamiento; luego, dibujar la gráfica:

11. $y = \frac{2}{3}\ \text{Cos}\left(3x - \frac{\pi}{5}\right)$

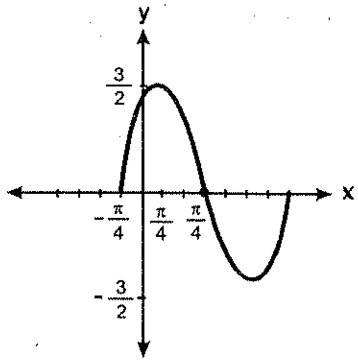
12. $y = -2\ \text{Sen}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}x\right)$

13. $y = 4\ \text{Sen}\left(\frac{2}{3}x + \frac{4}{5}\pi\right)$

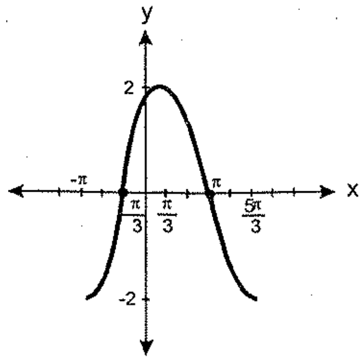
14. $y = -3\ \text{Cos}\left(\frac{2}{3}\pi - \frac{4}{5}x\right)$

En los ejercicios **15.** a **18.**, determinar las ecuaciones de cada una de las funciones trigonométricas cuya gráfica se presenta:

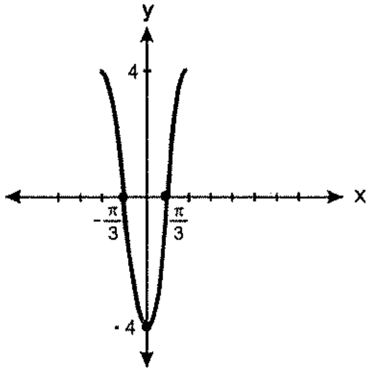
15.



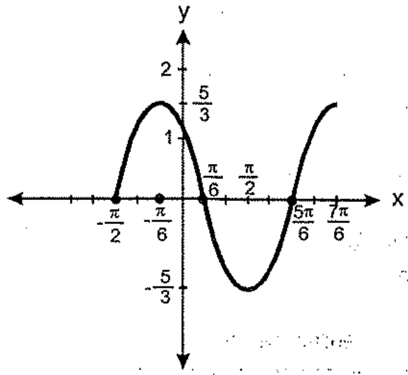
16.



17.



18.



Prepárate para las Pruebas ICFES

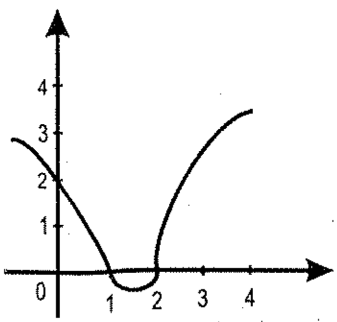
PREGUNTAS DE SELECCIÓN MÚLTIPLE CON MÚLTIPLE RESPUESTA VÁLIDA.

En estas preguntas, usted puede encontrar dos opciones válidas; pero debe seleccionar solo una: aquella que considere relaciona de manera más estructurada los conceptos matemáticos con las condiciones particulares de la situación problemática planteada.

1. Sea f una función de variable real definida por $f(x) = \frac{x+2}{x^2-9}$. Los valores que no puede tomar la variable independiente x en dicha función son:

   a) -2 y 3 porque estos valores anulan el numerador y el denominador de la expresión.
   b) -2,3 y -3 porque estos son los ceros de la función.
   c) -2 porque este es un intercepto con el eje y.
   d) 3 y -3 porque para ellos el denominador se anula.

2. A un grupo de estudiantes se les pide que dibujen la gráfica de la función definida por $f(x) = 3x - x^2 - 2$. Lina dibujó la siguiente gráfica. ¿Es correcta la gráfica dibujada por Lina?.



   a) Sí, porque el punto (2, 0) pertenece a la gráfica y f(2) = 0.
   b) No, porque la gráfica no corresponde a una parábola y la ecuación de f, sí.
   c) Sí, porque los puntos (1, 0) y (2, 0) son los interceptos con el eje x.

d) No, porque el signo de la mayor potencia f es negativo y, por tanto, su representación gráfica debe abrir hacia abajo.

Las preguntas 3. a 5. se responden con base en la siguiente información:

Como gerente de un fondo de empleados, Juan debe cobrar una cuota fija de afiliación a cada socio. Además, por cada venta de artículos que haga a un socio, debe hacerse un descuento del 20% y cobrarle 16% de IVA. Para hacer más manejable su labor administrativa, Juan decide relacionar toda la información anterior en la siguiente función: $f(x) = C + x - \frac{1}{5}x + \frac{4}{25}x$.

3. En esta función, la x y la C representan, respectivamente:

a) Número de artículos que vende Juan y el costo de un artículo.
b) Cualquier cantidad de dinero y costo de un artículo.
c) Cualquier cantidad de dinero y cuota de afiliación.
d) Costo de un artículo que vende Juan y cuota de afiliación.

4. De la función podemos deducir que un socio del fondo que no adquiera artículos no paga nada. Esta afirmación es:

a) Verdadera, porque al asignar a la variable el valor cero, el resultado obtenido es cero.
b) Verdadera, porque en la fórmula hay un valor definido para cada precio de cada artículo, y en este caso el valor del artículo es cero.
c) Falsa, porque la cuota de afiliación es independiente del valor del artículo y, por lo tanto, del impuesto y del descuento.
d) Falsa, porque al asignar a la variable el valor cero - debido a que no compra ningún artículo - de todas maneras debe pagar al menos la cuota de afiliación.

5. Suponiendo que llega un nuevo artículo al fondo de empleados, la expresión de la función inventada por Juan debe:

a) Modificarse, porque fue elaborada para ciertos artículos.
b) Modificarse, porque el precio del nuevo electrodoméstico cambia el valor del descuento.
c) Permanecer igual, porque a la variable de la función se le puede asignar cualquier valor real positivo.
d) Permanecer igual, porque lo que realmente modificaría la expresión es algún cambio en el descuento, la cuota fija o el impuesto.

Núcleo Temático

9

APLICACIONES DE LA TRIGONOMETRÍA

LOGRO GENERAL

- Identificar la importancia de las funciones trigonométricas en la solución de problemas que dan lugar a triángulos rectángulos o triángulos oblicuángulos.

LOGROS ESPECÍFICOS	INDICADORES DE LOGRO
Corporal: • Realizar actividades y experiencias que permitan acudir a la comprensión de los conceptos "ángulos de elevación" y "ángulo de depresión".	• Utilizar los brazos para describir los conceptos de "ángulo de elevación" y "ángulo de depresión".
Comunicativa: • Explicar con sus propias palabras los enunciados de la Ley de los Senos y la Ley de los Cosenos.	• Interpreta delante de sus compañeros los enunciados de las leyes del Seno y del Coseno.
Cognitiva: • Aplicar las funciones trigonométricas en la solución de problemas que originan triángulos rectángulos. • Enunciar y demostrar la Ley de los Senos y la Ley de los Cosenos. • Aplicar las leyes de los Senos y de los Cosenos en la solución de problemas que originan rtiángulos no rectángulos.	• Utiliza las definiciones de las funciones trigonométricas en la solución de problemas que dan lugar a triángulos rectángulos. • Enuncia y demuestra las Leyes del Seno y el Coseno. • Utiliza las Leyes del Seno y del Coseno en la solución de problemas que dan lugar a triángulos oblicuángulos.
Estética: • Describir gráficamente el enunciado de un problema donde intervienen funciones trigonométricas.	• Interpreta mediante un dibujo, el enunciado de un problema donde intervienen triángulos rectángulos u oblicuángulos.
Ética - Actitudinal: • Asumir el estudio con responsabilidad, entendiendo que ello significa una etapa importante en la construcción del proyecto de vida.	• Toma conciencia de las limitaciones propias y de las diferencias con los demás, para lograr una convivencia armónica en su grupo social.

DIMENSIONES

EVALUACIÓN

ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS

9.1 COMPRENSIÓN DE LECTURA: HISTORIA DE LA TRIGONOMETRÍA (6)

Lea atentamente el siguiente texto y luego subraye la letra correspondiente a la ÚNICA respuesta correcta en cada uno de los enunciados propuestos.

HIPARCO
(180 a.de C - 125 a. de C.)

Durante unos dos siglos y medio, de Hipócrates a Eratóstenes, los matemáticos griegos se habían dedicado a estudiar relaciones entre rectas y circunferencias, y habían aplicado estas relaciones a una gran variedad de problemas astronómicos, pero de todo ello no había resultado nada que pudiera llamarse una trigonometría más o menos sistemática. Todo parece indicar que, durante la segunda mitad del siglo II a.C., fue compuesta la primera tabla trigonométrica por obra del astrónomo Hiparco de Nicea (180 a.C. - 125 a.C), que se ganó así a pulso el derecho a ser conocido como el "padre de la trigonometría". Aristarco ya había observado que, en una circunferencia dada, la razón del arco a su cuerda disminuye según el ángulo decrece de 180° a 0°, tendiendo hacia el límite 1. Parece, sin embargo, que hasta que Hiparco emprendió la tarea, nadie se había preocupado de tabular los valores correspondientes de arcos y cuerdas para una serie completa de ángulos. Se ha llegado a afirmar, sin embargo, que Apolonio pudiera haberse anticipado a Hiparco a este respecto, y que la única contribución de este último a la trigonometría hubiera consistido sólo en el cálculo de un conjunto de cuerdas mejor que el que habían utilizado sus predecesores. Evidentemente Hiparco construyó sus tablas para usarlas en sus teorías astronómicas, sobre cuyos orígenes bien poco se sabe. La figura de Hiparco es una figura de transición entre la astronomía babilónica y la obra de Tolomeo.

Para elaborar su tabla trigonométrica, Hiparco comenzó con un ángulo de 7.5° y yendo hasta 1800 con incrementos de 7.5°, la tabla daba la longitud de la cuerda delimitada por los lados del ángulo central dado que corta a una circunferencia de radio r. Esta tabla es similar a la moderna tabla del Seno. No se sabe con certeza el valor de r utilizado por Hiparco, pero sí se sabe que 300 años más tarde el astrónomo Tolomeo utilizó r = 60, pues los griegos adoptaron el sistema numérico sexagesimal (base 60) de los babilonios.

1. La idea central del texto puede enunciarse de la siguiente manera:
   a. La cultura griega ha determinado el conocimiento científico.
   b. La constancia, trabajo y tesón de Hiparco en el campo de la Trigonometría.
   c. El verdadero padre de la Trigonometría es el matemático Apolonio.
   d. Hiparco no fue tan original pues se basó en otro científico que vivió antes que él.

2. La expresión **ganarse a pulso**, que se emplea en el texto se utiliza para indicar que Hiparco:
   a. Obtuvo ese galardón en su lucha intelectual con otros sabios.
   b. Ganó ese calificativo porque fue más inteligente que los otros científicos.
   c. Con esfuerzo y dedicación se ganó ese reconocimiento.
   d. Redactó, de su puño y letra, la primera tabla trigonométrica.

3. De las siguientes afirmaciones, sólo una es falsa. ¿Cuál es?
   a. Es posible que antes de Hiparco, otro científico antiguo, hubiera trabajado en la tabla trigonométrica.
   b. Hiparco y sus observaciones representan el paso entre dos conocimientos científicos.
   c. Entre Hipócrates y Eratóstenes la historia cuenta más de doscientos años.
   d. Todas las fórmulas, problemas y códigos de Hiparco se conocen hoy con mucha exactitud.

4. La letra del fragmento nos deja el siguiente interrogante:
   a. ¿Es realmente Hiparco el Padre de la Trigonometría?
   b. ¿Fue Hiparco quien elaboró la primera tabla trigonométrica?
   c. ¿Se le dio a r un valor específico en la antigüedad?
   d. ¿Estudiaron los griegos relaciones entre rectas y circunferencias?

5. Las expresiones: **"todo parece indicar que"**, **"evidentemente"** y **"más tarde"**, son:
   a. Frases adverbiales.
   b. Conectores.
   c. Oraciones simples.
   d. Adjetivos sustantivados.

9.2 INTRODUCCIÓN

- Según dijimos en una unidad anterior, antiguamente la Trigonometría consistía principalmente en el estudio de las relaciones existentes entre los lados y los ángulos de un triángulo: De ahí su nombre.
- La Trigonometría es una rama de la matemática especialmente útil en Física para el estudio de fuerzas, fenómenos vibratorios y ondulatorios; en Topografía, para la triangulación y medición de terrenos, distancias entre puntos inaccesibles, etc. También se utiliza en navegación y astronomía.
- En esta unidad mostraremos muchas de estas aplicaciones. Recomendamos, cuando sea posible, hacer un dibujo que interprete la situación del problema y que incluya los datos e incógnitas.
- Consideraremos dos tipos de aplicaciones:
  1. La interpretación gráfica del problema origina un triángulo rectángulo.
  2. La interpretación gráfica del problema origina un triángulo oblicuángulo.

9.3 APLICACIONES QUE ORIGINAN TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

- Los triángulos rectángulos se utilizan frecuentemente para hallar distancias que no pueden medirse fácilmente en forma directa. En tales casos se utiliza el ángulo formado por la línea visual (la que sale del ojo de un observador que mira un objeto) y la línea horizontal (la que sale del mismo ojo del observador). Dicho ángulo se denomina ÁNGULO DE ELEVACIÓN O ÁNGULO DE DEPRESIÓN, dependiendo de si el observador se encuentra en un punto más alto o más bajo, respectivamente, del punto u objeto que está mirando; figura 9-1.

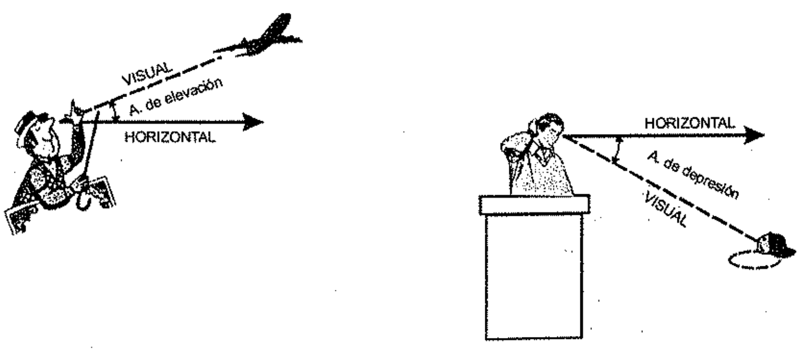


Figura 9-1

ÁNGULO DE ELEVACIÓN Y DEPRESIÓN

- **El ÁNGULO DE ELEVACIÓN es el ángulo que forman la línea visual, que sale del ojo de un observador que mira hacia arriba, y la línea horizontal.**
- **El ÁNGULO DE DEPRESIÓN es el ángulo que forman la línea visual, que sale del ojo de un observador que mira hacia abajo, y la línea horizontal.**

- Para resolver un problema cuya solución implica dibujar un triángulo rectángulo podemos recurrir a dos elementos fundamentales:

1. El teorema de Pitágoras.
2. Las definiciones de las funciones trigonométricas en el triángulo rectángulo.

Recordemos estos dos elementos teniendo en cuenta la figura 9-2:

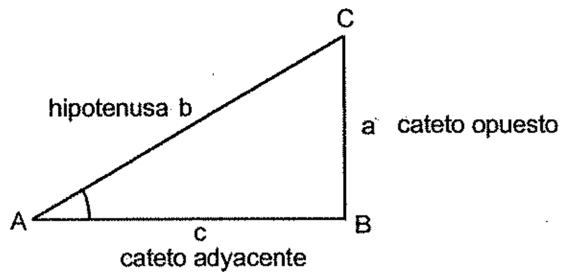


Figura 9-2

$b^2 = a^2 + c^2$..Teorema de Pitágoras

$$\left.\begin{aligned}
\text{Sen } A &= \frac{a}{b} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}\\
\text{Cos } A &= \frac{c}{b} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}\\
\text{Tan } A &= \frac{a}{c} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}\\
\text{Cot } A &= \frac{c}{a} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}}\\
\text{Sec } A &= \frac{b}{c} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}}\\
\text{Csc } A &= \frac{b}{a} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}}
\end{aligned}\right\}\ \text{Funciones trigonométricas en el triángulo rectángulo}$$

ATENCIÓN

1. En la mayoría de los problemas, supondremos que la masa de los cuerpos está concentrada en un punto, y así aparecerán representados en las figuras.
2. En muchos problemas, para describir la posición de un objeto, diremos que está ubicado 5 Km. al N 60° O (Norte 60° Oeste). La figura 9-3 nos muestra cómo debemos interpretar esta información.

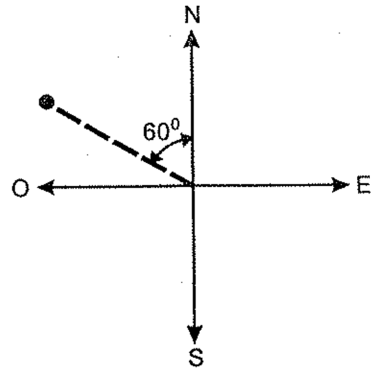


Figura 9-3

Ejemplo 1

Hallemos las partes que faltan del triángulo rectángulo ACB, en el cual $c = 36m$ y $\angle A = 56^o$; figura 9-4:

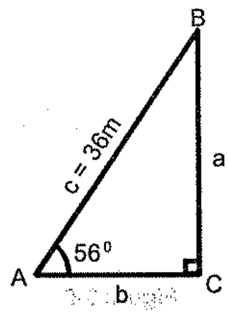


Figura 9-4

SOLUCIÓN

- Como los ángulos A y B son complementarios, entonces:

$$\boxed{\angle B = 90^o - 56^o = 34^o}$$

- Para determinar la longitud de a, debemos utilizar:

$$\boxed{\text{Sen } A = \frac{a}{c}}$$

ya que allí aparecen relacionados los datos conocidos (el ángulo A y la hipotenusa c) y el desconocido (el cateto a); por tanto:

$$\text{Sen } 56^o = \frac{a}{36}$$

$$\therefore\ a = (36)\cdot(0.829)$$

$$\therefore \boxed{a\ =\ 29.8m}$$

- Para calcular la longitud de **b**, aplicamos la función coseno al ángulo A; así:

$$\text{Cos } 56^{\circ} = \frac{b}{36}$$

$$\therefore \quad b = (36)\cdot(\text{Cos } 56\ )$$

$$\therefore \quad b = (36)\cdot(0.559)$$

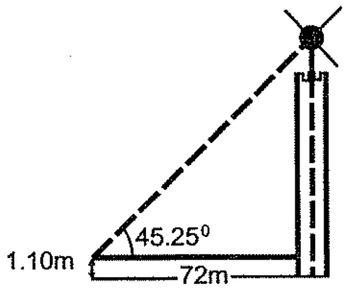
$$\therefore \quad \boxed{b = 20\text{m}}$$

Ejemplo 2

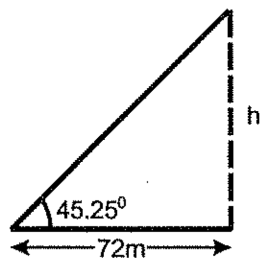
El ángulo de elevación con que se mira la veleta de una torre es de 45.25°, cuando el observador se coloca a 72 m de la torre. Si el observador se encuentra a 1.10 m sobre el suelo, ¿a qué altura se encuentra la veleta?

SOLUCIÓN

- El problema se reduce a encontrar el lado h del triángulo de la figura 9-5 (b) y sumarle 1.10 m que es la altura sobre el nivel del piso donde se encuentra el punto de observación.



(a)



(b)

Figura 9-5

- Empleando la función tangente, que relaciona los datos conocidos y el lado desconocido, nos queda:

$$\text{Tan } 45.25^{\circ} = \frac{h}{72\text{ m}}$$

$$\therefore\ h = (72\text{ m})\cdot(\text{Tan } 45.25^{\circ})$$

$$\therefore\ h \approx 72.63\text{ m}$$

$$\therefore\ 1.10\text{ m} + h \approx 73.73\text{ m}$$

Ejemplo 3

Se desea calcular la altura de la torre de la figura 9- 6. Para ello se hacen dos observaciones desde los puntos A y B, obteniendo como ángulos de elevación 30°y 45°, respectivamente. La distancia $\overline{AB}$ mide 30 m. Hallar la altura de la torre.

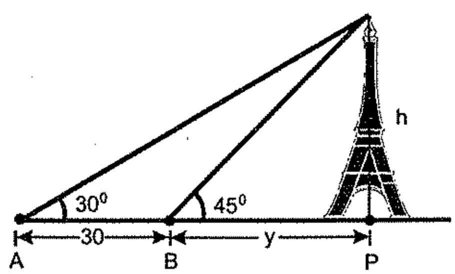


Figura 9-6

SOLUCIÓN

- Teniendo en cuenta los datos del problema, podemos escribir las siguientes ecuaciones:

$$\text{Tan } 30^\circ = \frac{h}{30+y} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$\text{Tan } 45^\circ = \frac{h}{y} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

- De (1) nos queda: $h = (30 + y)\ \text{Tan } 30^\circ$
  De (2) nos queda: $h = y\ \text{Tan } 45^\circ$

- Igualando los dos resultados, tenemos:

$$(30 + y)\cdot\text{Tan } 30^\circ = y \cdot \text{Tan } 45^\circ$$

$$\therefore\ 30\ \text{Tan } 30^\circ + y\ \text{Tan } 30^\circ = y\ \text{Tan } 45^\circ$$

$$\therefore\ y\ \text{Tan } 45^\circ - y\ \text{Tan } 30^\circ = 30\ \text{Tan } 30^\circ$$

$$\therefore\ y\ (\text{Tan } 45^\circ - \text{Tan } 30^\circ) = 30\ \text{Tan } 30^\circ$$

$$\therefore\ y = \frac{30\ \text{Tan } 30^0}{\text{Tan } 45^0 - \text{Tan } 30^0}$$

$$\therefore\ y = \frac{30\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}$$

$$\therefore\ y \quad 40.98 \text{ m}$$

- Reemplazando este resultado en (2) y despejando h nos queda:

$$h = y \cdot \text{Tan } 45^\circ$$

$$\therefore\ h = (40.98 \text{ m})\cdot 1$$

$$\therefore \boxed{h \approx 40.98 \text{ m}}$$

Ejemplo 4

Hallemos la altura h del edificio de la figura 9- 7, teniendo en cuenta la información que se presenta:

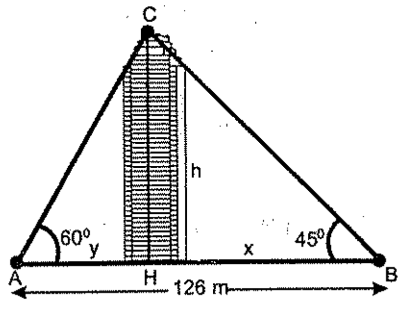


Figura 9-7

SOLUCIÓN

- Teniendo en cuenta los datos del problema podemos escribir el siguiente sistema de ecuaciones:

$$x + y = 126\text{ m} \quad \text{.......................................(1)}$$

$$\text{Tan } 60^o = \frac{h}{y} \quad \text{.......................................(2)}$$

$$\text{Tan } 45^o = \frac{h}{x} \quad \text{.......................................(3)}$$

- De (2) nos queda: $y = \dfrac{h}{\text{Tan } 60^0}$ y de (3) nos queda: $x = \dfrac{h}{\text{Tan } 45^0}$

  Reemplazando estos valores de **x** y **y** en (1) nos queda:

$$\frac{h}{\text{Tan } 60^0} + \frac{h}{\text{Tan } 45^0} = 126\text{ m}$$

$$\therefore \frac{h}{\sqrt{3}} + \frac{h}{1} = 126\text{ m}$$

$$\therefore \frac{h + h\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 126\text{ m}$$

$$\therefore h\left(1 + \sqrt{3}\right) = 126\sqrt{3}\text{ m}$$

$$\therefore h = \frac{126\sqrt{3}\text{ m}}{1 + \sqrt{3}}$$

$$\therefore h \approx 79.88\text{ m}$$

Ejemplo 5

Calculemos el radio y la apotema de un octógono regular cuyo lado mide 10 cm.

SOLUCIÓN

- Consideremos la figura 9-8:

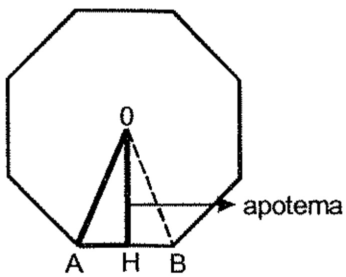


Figura 9-8

- El ángulo central del octógono vale: $\dfrac{360^0}{8} = 45^o$; por lo tanto, la mitad del ángulo central vale: $\dfrac{45^0}{2} = 22.5^o$
- En el triángulo rectángulo OAH se tiene:

  * radio = $\left|\overline{OA}\right| = \dfrac{5}{\text{Sen } 22.5^0} \approx \dfrac{5}{0.3827} = 13.06\text{ m}$

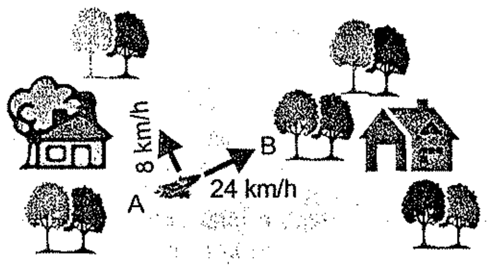
  * apotema = $\left|\overline{OH}\right| = \dfrac{5}{\text{Tan } 22.5^0} \approx \dfrac{5}{0.4142} = 12.07\text{ m}$

Ejemplo 6

Una barcaza puede navegar en agua tranquila a una velocidad de 24 Km./h. La velocidad de la corriente del río es 8 Km./h. Si la barcaza parte de una orilla en dirección perpendicular al río, hallar la velocidad real y la dirección que lleva con relación a la perpendicular al río.

SOLUCIÓN

- Observemos la figura 9-9 (a) y el esquema resumido de la figura 9-9 (b):



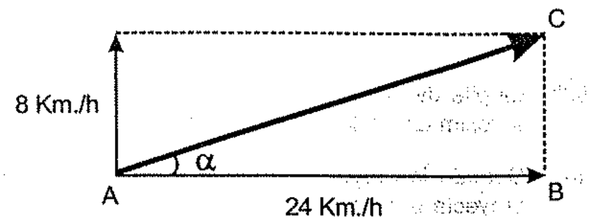


Figura 9-9

- La velocidad de la barcaza viene dada por $\left|\vec{AC}\right|$; así:

$$\left|\vec{AC}\right| = \sqrt{\left|\vec{AB}\right|^2 + \left|\vec{BC}\right|^2} = \sqrt{24^2 + 8^2}$$

$$\therefore \left|\vec{AC}\right| = \sqrt{640} \approx 25.29 \text{ Km./h.}$$

- El ángulo α que forman la dirección que lleva la barcaza $\left(\vec{AC}\right)$ con la perpendicular al río $\left(\vec{AB}\right)$ podemos obtenerlo así:

$$\text{Tan } \alpha = \frac{\left|\vec{BC}\right|}{\left|\vec{AB}\right|} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \alpha = \text{INV Tan}\left(\frac{1}{3}\right) \approx 18.43^\circ$$

- **NOTA:** En este problema la dirección $\vec{AB}$ es sólo aparente ya que, aunque levemente, la corriente del río va desviando la barcaza en la dirección $\vec{AC}$ indicada por el ángulo α.

EJERCICIO 9.1

En los ejercicios 1 a 6, dadas las partes indicadas del $\triangle ABC$, con med ($\angle C$)= 90°, calcular aproximadamente las partes restantes de cada triángulo.

1. $\angle A = 30°$, $b = 20$ cm
2. $\angle B = 520$, $a = 15$ cm
3. $\angle A = 17.66°$, $a = 4.5$ cm
4. $a = 25$ cm , $b = 45$ cm
5. $\angle A = 37.77°$, $b = 512$ cm
6. $a = 614$ cm , $c = 806$ cm

7. La pita de una cometa se encuentra tensa y forma un ángulo de 54.33° con la horizontal. Hallar la altura aproximada de la cometa respecto al suelo, si la pita mide 85 m y su extremo se sostiene a 1.5 m del suelo.

8. Cuando los rayos del sol tienen una inclinación de 51° sobre la horizontal, el árbol de la figura 9-10 proyecta una sombra de 8.5 m sobre el piso, desde la base del mismo. ¿Cuál es la altura del árbol?

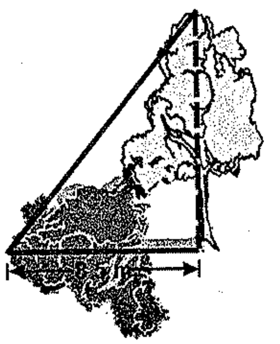


Figura 9-10

9. Las puntas de los brazos de un compás están separadas 7 cm y cada brazo mide 12 cm. Hallar el ángulo que forman los brazos del compás.

10. Calcular el lado del pentágono regular inscrito en una circunferencia de radio 10 m.

11. En una circunferencia de 100 m de radio se unen dos puntos con una cuerda de 50 m. ¿Cuánto mide el ángulo central correspondiente?

12. Una barca puede navegar en agua tranquila a 8 Km./h. Si la corriente del río lleva una velocidad de 6 Km./h, ¿bajo qué ángulo cortará la barca a la corriente para que la dirección de su movimiento sea perpendicular a la corriente? ¿Cuál es la velocidad real de la barca?

13. Desde cierto punto del suelo se ve el punto más alto de una torre formando ángulo de 30° con la horizontal. Si nos acercamos 75 m hacia el pie de la torre, ese ángulo se vuelve de 60°. Hallar la altura de la torre.

14. La distancia a las primeras nubes se llama "techo del cielo". En un aeropuerto un observador mira un rayo de luz lanzado verticalmente por un foco, y ve la nube que lo refleja con un ángulo de elevación de 72°. La distancia entre el observador y el foco es de 150 m. Hallar la altura del "techo del cielo" .

15. Desde un faro colocado a 40 m sobre el nivel del mar, el ángulo de depresión de un barco es de 55°. ¿A qué distancia del faro se halla el barco?

16. Un vigilante se encuentra en la ventana del faro de la figura 9-11 a una altura de 35 m sobre el nivel del mar. El ángulo de depresión del barco en la figura es de 30°. ¿Cuál es la distancia d del barco al faro?

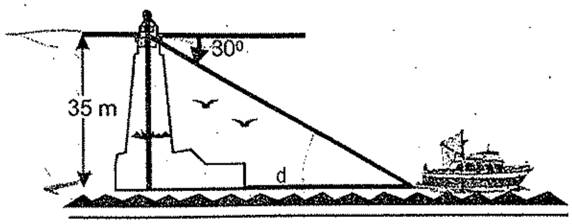


Figura 9-11

17 Hallar el área del trapecio isósceles de la figura 9 - 12.

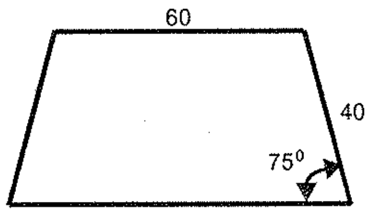


Figura 9-12

18 Un observador de aves encuentra un nido de alcatraces, en un punto del acantilado de la figura 9-13. ¿Qué distancia hay entre el nido y la cima del acantilado?

9,3 m

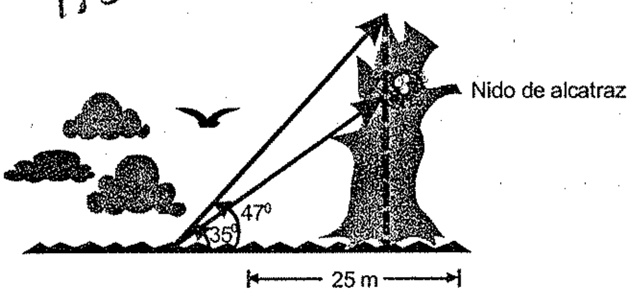


Figura 9-13

19 Demostrar que si B es un ángulo agudo de un triángulo rectángulo, entonces se cumple que

$\text{Sen B} \cdot \text{Tan B} = \dfrac{b^2}{ac}$.

20 Demostrar que si un ΔABC es rectángulo en el $\angle C$ entonces su área se expresa mediante la fórmula:

$\text{Área} = \dfrac{1}{2} a^2 \text{Tan B}.$

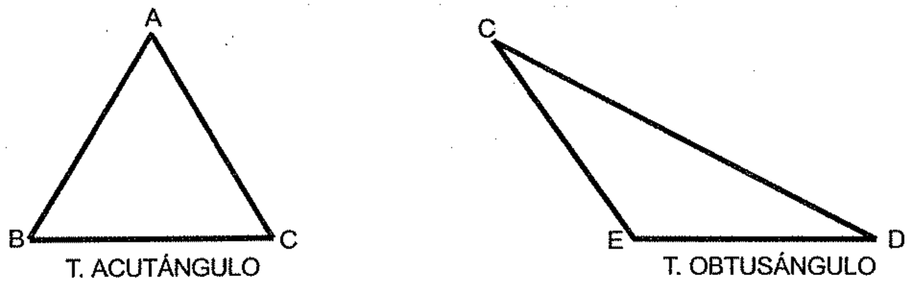
SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (28)

Se inscribe un cono circular recto en una esfera de radio 3. Si el radio de la base del cono lo nombramos con x, se pide:

1. **Dibujar un gráfico que interprete el enunciado del problema.**
2. **Escribir una ecuación para calcular el volumen del cono en función de x.**

9.4 APLICACIONES QUE ORIGINAN TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS.

- En esta sección estudiaremos problemas cuya solución exige el dibujo de triángulos no rectángulos (llamados también triángulos oblicuángulos); figura 9-14.



TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS
Figura 9-14

- En la solución de un triángulo oblicuángulo podemos distinguir cuatro casos, de acuerdo con sus datos, que son:

  CASO 1: (LADO - ÁNGULO - LADO): Se conocen dos lados y el ángulo comprendido entre ellos. El problema siempre tiene solución única.

  CASO 2: (ÁNGULO - LADO - ÁNGULO): Se conocen dos ángulos y un lado. También, en este caso, el problema tiene solución única.

  CASO 3: (LADO - LADO - LADO): Se conocen los tres lados del triángulo. De nuevo, el problema tiene solución única.

  CASO 4: (LADO - LADO - ÁNGULO): Se conocen dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos. En este caso, el problema puede tener:

  a) SOLUCIÓN ÚNICA
  ó
  b) DOS SOLUCIONES
  ó
  c) NINGUNA SOLUCIÓN

  Por esta razón, este caso se denomina CASO AMBIGUO.

  Para resolver triángulos oblicuángulos contamos con dos teoremas o leyes fundamentales:

  1) LA LEY DE LOS SENOS
  2) LA LEY DE LOS COSENOS

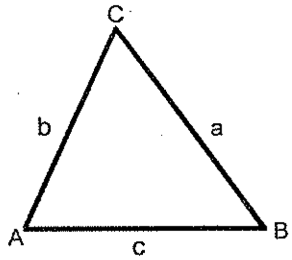
ATENCIÓN

Estrictamente, las definiciones de Seno, Coseno y Tangente sólo son aplicables a TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS, pues sólo en estos triángulos es posible hablar de cateto opuesto, cateto adyacente e hipotenusa.

1) LEY DE LOS SENOS

TEOREMA

En todo triángulo se cumple que las longitudes de los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos.



HIPÓTESIS: ΔABC es un triángulo cualquiera.

TESIS: $\dfrac{a}{\text{Sen } A} = \dfrac{b}{\text{Sen } B} = \dfrac{c}{\text{Sen } C}$

DEMOSTRACIÓN:

1. Como hasta el momento todo el trabajo trigonométrico lo hemos realizado sobre triángulos rectángulos, entonces tracemos en el ΔABC una de sus alturas, por ejemplo $\overline{CD}$, para que así el triángulo dado quede dividido en dos triángulos rectángulos; figura 9-15:

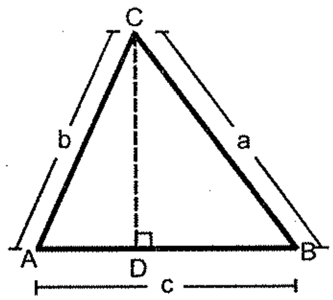


Figura 9-15

2. En el ΔADC se cumple que:

$$\text{Sen } A = \frac{|\overline{CD}|}{b}$$

$$\therefore \boxed{|\overline{CD}| = b \text{ Sen } A} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

En el ΔCDB se cumple que:

$$\text{Sen } B = \frac{|\overline{CD}|}{a}$$

$$\therefore \boxed{|\overline{CD}| = a \text{ Sen } B} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Igualando (1) y (2) nos queda:

$$b \text{ Sen } A = a \text{ Sen } B$$

$$\therefore \boxed{\frac{b}{\text{Sen } B} = \frac{a}{\text{Sen } A}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (A)$$

3. Para obtener la tercera razón, $\frac{c}{\text{Sen C}}$, basta trazar otra de las alturas del triángulo, por ejemplo $\overline{AP}$, y repetir lo realizado en el paso anterior; figura 9-16.

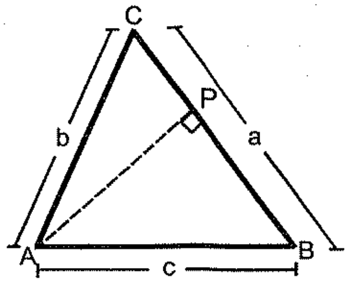


Figura 9-16

$$\boxed{\frac{c}{\text{Sen C}} = \frac{b}{\text{Sen B}}} \quad \text{..} \quad (B)$$

4. Finalmente, conectamos las igualdades (A) y (B) y nos queda:

$$\boxed{\frac{a}{\text{Sen A}} = \frac{b}{\text{Sen B}} = \frac{c}{\text{Sen C}}}$$

ATENCIÓN

- La Ley de los senos se aplica cuando los datos que se conocen son:

  1. Dos ángulos y un lado (A - L - A)
  En este caso, hallamos la medida del tercer ángulo restando de 180º la suma de los otros dos ángulos y, luego, calculamos los lados que faltan aplicando la ley de los senos.

  2. Dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos (L - L - A)
  Este es el caso más complicado ya que podemos tener UNA, DOS o NINGUNA solución.
  El procedimiento a seguir consiste en utilizar la ley de los senos para encontrar uno de los dos ángulos que faltan y determinar si tenemos UNA, DOS o NINGUNA solución.
  Finalmente encontramos el ángulo que falta restando de 180º, y el problema se reduce al caso anterior.

- Algunos ejemplos nos ayudarán a aclarar estas posibilidades.

Ejemplo 1

Si $\angle A = 45°$, $\angle B = 75°$ y c = 10 m; hallemos a, b y $\angle C$

SOLUCIÓN

- Tenemos Ángulo - Lado - Ángulo (caso 1).
- Como $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$, entonces $\angle C = 180° - 120° = 60°$
- Apliquemos la ley de los senos para hallar la medida del lado **a**; así:

$$\frac{a}{\text{Sen A}} = \frac{c}{\text{Sen C}}$$

$$\therefore\ a = \frac{c \text{ Sen A}}{\text{Sen C}}$$

$$\therefore\ a = \frac{10 \cdot (0.7)}{0.86} = 8.14 \text{ m}$$

- Así mismo:

$$\therefore\ b = \frac{c \text{ Sen B}}{\text{Sen C}}$$

$$\therefore\ b = \frac{10 \text{ Sen } 75^0}{\text{Sen } 60^0} = 11.15 \text{ m}$$

Ejemplo 2

Si $\angle A = 30°$, $a = 10$ m y $c = 15$ m; hallemos $\angle B$, $\angle C$ y b.

SOLUCIÓN

- Tenemos A - L - L (caso 2). Por lo tanto, el problema puede tener NINGUNA, UNA o DOS soluciones. Apliquemos la ley de los senos para calcular la medida del $\angle C$:

$$\frac{c}{\text{Sen C}} = \frac{a}{\text{Sen A}} \Rightarrow \frac{15}{\text{Sen C}} = \frac{10}{\text{Sen } 30^0}$$

$$\therefore\ \text{Sen C} = \frac{15 \cdot \text{Sen } 30^0}{10}\ 0.75$$

$$\therefore\ \angle C = 48°36' \text{ ó } \angle C = 131°24'$$

- Si $\angle C = 48° 36'$ entonces $\angle B = 101° 24'$ y $b = \dfrac{a \text{ SenB}}{\text{Sen A}} = 19.6$ m
- Si $\angle C = 131° 24'$ entonces $\angle B = 18° 36'$ y $b = 6.4$ m
- Estas dos posibilidades se muestran en la figura 9-17:

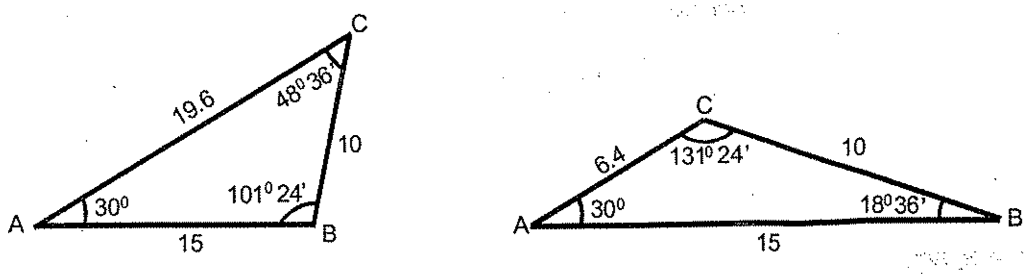


Figura 9-17

Ejemplo 3

Si $\angle A = 67°$, $c = 125$ cm y $a = 100$ cm; hallemos $\angle B$, $\angle C$ y b.

SOLUCIÓN

- De nuevo tenemos el caso A - L - L. Por lo tanto:

$$\text{Sen C} = \frac{c \text{ Sen A}}{a} = \frac{125 \cdot \text{Sen } 67^0}{100}$$

$$\therefore \text{ Sen C} \approx \frac{(125)(0.9205)}{100} = 1.1506$$

- En consecuencia, con los datos dados, no existe este triángulo ya que Sen C> 1.

Ejemplo 4

Un avión que se encuentra en el punto A de la figura 9-18 es observado por dos estaciones terrestres ubicadas en los puntos B y C. ¿A qué distancia se halla el avión de B?

SOLUCIÓN

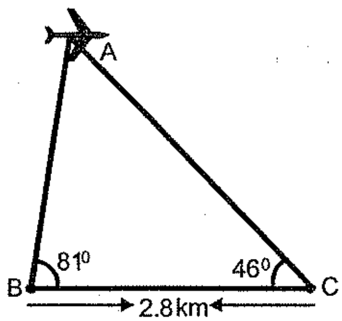


Figura 9-18

- Tenemos A - L - A.
  Como m(∠A) + m(∠B) + m(∠C) = 180º, entonces m(∠A)= 180º - 127º = 53º

- Apliquemos la ley de los Senos para calcular la distancia $\overline{AB}$:

$$\frac{2.8 \text{ km}}{\text{Sen } 53^0} = \frac{|\overline{AB}|}{\text{Sen } 46^0}$$

$$\therefore \quad |\overline{AB}| = \frac{2.8 \text{ km} \cdot \text{Sen } 46^0}{\text{Sen } 53^0} \approx 2.522 \text{ Km.}$$

Ejemplo 5

Una persona que se encuentra en el punto A de la figura 9-19 desea dirigirse al punto C, que se encuentra 2.8 Km en línea recta. Debido a que el terreno está en malas condiciones, decide seguir la trayectoria de A a B para dirigirse, finalmente, hacia C. ¿Cuál es la distancia total que deberá recorrer?

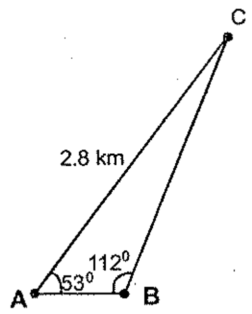


Figura 9-19

SOLUCIÓN

- De nuevo tenemos A - L - A.

  Como $m(\angle A) + m(\angle B) + m(\angle C) = 180^o$, entonces $m(\angle C) = 180^o - 165^o = 15^o$

- Apliquemos la ley de los senos para calcular la medida del lado $\overline{AB}$:

$$\frac{|\overline{AB}|}{\text{Sen } 15^0} = \frac{2.8\,\text{Km}}{\text{Sen } 112^0}$$

$$\therefore \quad |\overline{AB}| = \frac{2.8\text{ Km} \cdot \text{Sen } 15^0}{\text{Sen } 112^0} \approx 0.7816\text{ Km.}$$

- Ahora, apliquemos de nuevo la ley de los senos para calcular la medida del lado $\overline{BC}$:

$$\frac{0.7816}{\text{Sen } 15^0} = \frac{|\overline{BC}|}{\text{Sen } 53^0}$$

$$\therefore \quad |\overline{BC}| = \frac{0.7816 \cdot \text{Sen } 53^0}{\text{Sen } 15^0} \approx 2.4127\text{ Km.}$$

- Por lo tanto, la distancia total recorrida es:

$$|\overline{AB}| + |\overline{BC}| \approx 3.2\text{ Km.}$$

2) LEY DE LOS COSENOS

TEOREMA

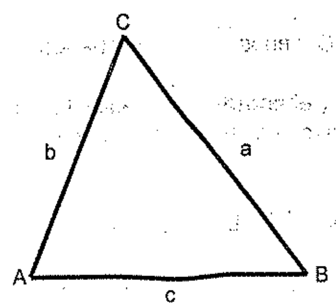
En todo triángulo se cumple que el cuadrado de la longitud de uno de los lados es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados MENOS el doble producto de estos lados por el coseno del ángulo que forman.

HIPÓTESIS: ΔABC es un triángulo cualquiera.

TESIS: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \text{ Cos } A$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \text{ Cos } B$

$c^2 = b^2 + a^2 - 2\,ab \text{ Cos } C$



DEMOSTRACIÓN:

- Vamos a demostrar que la primera ecuación de la ley de los cosenos es cierta para un triángulo acutángulo. Un procedimiento similar podrá seguirse para las otras ecuaciones y cuando el triángulo sea obtusángulo.

- Consideremos el triángulo ABC de la figura 9 - 20, en el cual hemos trazado la altura $\overline{CD}$.

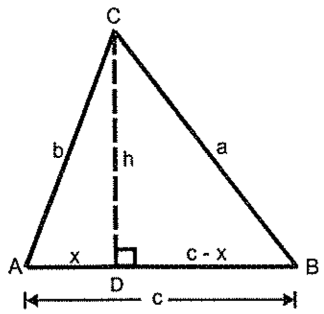


Figura 9-20

- En el triángulo rectángulo ADC se cumple que:

$$h^2 = b^2 - x^2 \qquad (1)$$

- En el triángulo rectángulo CDB se cumple que:

$$h^2 = a^2 - (c - x)^2 \qquad (2)$$

- Igualando (1) y (2) nos queda:

$$b^2 - x^2 = a^2 - (c - x)^2$$
$$\therefore\ b^2 - x^2 = a^2 - (c^2 - 2cx + x^2)$$
$$\therefore\ b^2 - x^2 = a^2 - c^2 + 2cx - x^2$$
$$\therefore\ a^2 = b^2 + c^2 - 2cx \qquad (3)$$

- Ahora bien, en el triángulo ADC se cumple que:

$$\operatorname{Cos} A = \frac{x}{b}$$
$$\therefore\ x = b \operatorname{Cos} A \qquad (4)$$

- Finalmente, reemplazando (4) en (3) nos queda:

$$\boxed{\mathbf{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,Cos\,A}}$$

ATENCIÓN

- La ley de los Cosenos se aplica cuando los datos conocidos son:

  1. **Dos lados y el ángulo entre ellos (L - A - L).**
     En este caso, hallamos el tercer lado, que es el opuesto al ángulo dado, aplicando la ley de los cosenos.

  2. **Los tres lados (L - L - L).**
     En este caso, aplicamos la ley de los cosenos para hallar cualquiera de los tres ángulos.

Ejemplo 6

Resolvamos el ΔABC de la figura 9-21:

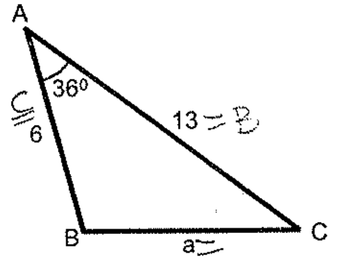


Figura 9-21

SOLUCIÓN

- Tenemos el caso L - A - L. Por lo tanto, aplicamos la ley de los cosenos para calcular el lado **a.**

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \text{ Cos } A$$
$$\therefore\ a^2 = 6^2 + 13^2 - 2(6)\,(13) \text{ Cos } 36^\circ$$
$$\therefore\ a^2 \approx 36 + 169 - 156(0.809017)$$
$$\therefore\ a^2 \approx 78.79$$
$$\therefore\ a \approx \sqrt{78.79} \approx 8.9$$

- Para hallar la medida del ángulo B también aplicamos la ley de los cosenos (aunque también podríamos aplicar la ley de los senos):

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \text{ Cos } B$$
$$\therefore\ \text{Cos } B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$
$$\therefore\ \text{Cos } B = \frac{(8.9)^2 + 6^2 - 13^2}{2\,(8.9)\,(6)} \approx -\,0.50365169$$
$$\therefore\ \angle B \approx \text{INV Cos}(-0.50365169) \approx 120.2^\circ$$

- Finalmente,

$$\angle C = 180^\circ - \angle A - \angle B$$
$$\therefore\ \angle C \approx 180^\circ - 36^\circ - 120.2^\circ$$
$$\therefore\ \angle C \approx 23.8^\circ$$

Ejemplo 7

Un topógrafo encuentra que el ángulo en el punto A de la figura 9-22, desde donde observa los puntos B y C, en cada orilla del lago, es 72°. Hallar la distancia a través del lago determinando la separación que hay entre los puntos B y C.

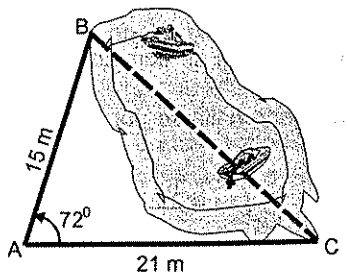


Figura 9-22

SOLUCIÓN

- Los datos son dos lados y el ángulo comprendido entre ellos; es decir, el criterio L - A - L. Por lo tanto, aplicamos la ley de los cosenos para calcular la distancia $\overline{BC}$:

$$\left|\overline{BC}\right|^2 = \left|\overline{AB}\right|^2 + \left|\overline{AC}\right|^2 - 2\left(\left|\overline{AB}\right|\right)\left(\left|\overline{AC}\right|\right)\text{Cos A}$$

$$\therefore \left|\overline{BC}\right|^2 = (15m)^2 + (21m)^2 - 2(15m)(21m)\text{ Cos } 72^\circ$$

$$\therefore \left|\overline{BC}\right|^2 = 225m^2 + 441m^2 - (630m^2)(0.3090169)$$

$$\therefore \left|\overline{BC}\right|^2 = 666m^2 - 194.68071m^2 = 471.31929\ m^2$$

$$\therefore \left|\overline{BC}\right| \approx 21.71m$$

- Por lo tanto, la distancia entre los puntos B y C es aproximadamente igual a 21.71m.

EJERCICIO 9.2

En los ejercicios 1 a 10 resolver los triángulos cuyos datos se dan:

1. $\angle A = 28^\circ$, $\angle B = 56^\circ$, a = 9 cm
2. a= 9 cm , b = 12 cm , $\angle A = 35^\circ$
3. $\angle A = 30^\circ$, a = 5 m , b = 10 m
4. a=3 cm , b = 8 cm , $\angle A = 56^\circ$ no tiene
5. b= 27.4 cm , c = 59.8 cm , $\angle C = 122^\circ$
   A= 35° B=22° a=4958
6. b= 25 cm , a = 47 cm , $\angle B = 42^\circ$
7. b= 10 cm , c = 8 cm , $\angle A = 72^\circ$
8. a= 8 m , b = 10 m , c = 12 m
9. b= 6 cm , $\angle A = 48^\circ$, c = 5 cm
10. a= 17 cm , c = 14 cm , $\angle B = 112^\circ$
11. Demostrar que la ley de los senos también se cumple para triángulos rectángulos.
12. Demostrar que la ley de los cosenos también se cumple para triángulos rectángulos.
13. Demostrar que el área de un ΔABC puede hallarse por medio de alguna de las fórmulas siguientes:

a) $A = \dfrac{ab\text{ Sen C}}{2}$　　b) $A = \dfrac{bc\text{ Sen A}}{2}$

c) $A = \dfrac{ac\text{ Sen B}}{2}$　　d) $A = \dfrac{b^2\text{ Sen A Sen C}}{2\text{ Sen B}}$

e) $A = \dfrac{a^2 \text{ Sen B Sen C}}{2 \text{ Sen A}}$ f) $A = \dfrac{c^2 \text{ Sen A Sen B}}{2 \text{ Sen C}}$

(Sugerencia: Utilizar la ley de los Senos).

14. Las diagonales de un paralelogramo miden 60 cm y 70 cm y se cortan formando un ángulo de 45°. Hallar el área del paralelogramo. (Sugerencia: Utilice alguna de las fórmulas del problema anterior).

15. Un observador nota que el ángulo de elevación de un punto de referencia a la cumbre de un risco es de 15°30'. Sigue caminando 98.8 m sobre un terreno horizontal y encuentra que ahora el ángulo de elevación es 33°10'. ¿A qué distancia se encontraba el observador de la base del risco cuando hizo la primera medición?

16. Una rampa de 15.9 m de largo con un ángulo de elevación de 31°10' se construyó desde el nivel del piso a una plataforma de embarque. Se necesita reemplazar la rampa por una nueva que tenga un ángulo de elevación de 22°40'. ¿Cuál sería la longitud de la nueva rampa?

17. Un niño caminó, en forma oblicua, 1260 pasos desde un campamento hasta un camino que corre en la dirección OESTE-ESTE. Después anduvo sobre el camino otros 920 pasos hasta un punto desde el cual podía ver el campamento. Su brújula le indicó una dirección del campamento de Norte 43°20' Oeste. ¿Cuántos pasos tendría que caminar en esa dirección para llegar de nuevo al campamento?

18. Para ir de San Luis a San Antonio es necesario viajar 60 Km al este y 25 Km en la dirección Norte 23°30" Este. ¿Qué distancia separa a las dos poblaciones?

19. La base de una torre tiene un ángulo de depresión de 30°respecto a un observador situado a 200 m cuesta abajo de la base. Dicho observador se da cuenta de que una sección de la torre necesita reparación. Si los ángulos de elevación a los extremos de la sección dañada son 48° y 60°, hallar la longitud de la sección por reparar.

20. Un tren sale de una estación y viaja a 80 Km./h en una vía recta. Otro sale de la misma estación una hora más tarde, sobre otra vía que forma con la anterior un ángulo de 118°. Si el segundo tren viaja a 50 Km/h; hallar la distancia entre los dos trenes 2 horas después de la salida del primer tren.

21. Dos ciudades A y B están separadas entre sí 200 Km. Un piloto sale de A y se dirige hacia B, pero a 80 Km observa que se ha desviado de su ruta 6°. ¿A qué distancia está de B en ese momento?

22. En la figura 9-23 se muestra un camino recto a lo largo de una pradera, que sufre una desviación en A hacia B. En B hay dos caminos en línea recta hacia la pradera, $\overline{BC}$ y $\overline{BD}$, cada uno de 6 Km de largo. Hallar la distancia entre C y D.

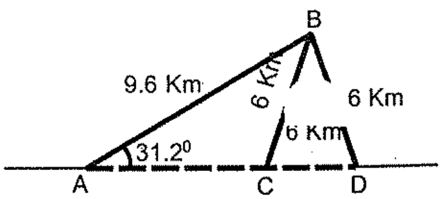


Figura 9-23

23. La figura 9-24 muestra dos lanchas ancladas en los puntos C y D sobre una laguna, vistas desde A y B respectivamente. Hallar la distancia que separa los puntos C y D sabiendo que:

$m(\angle BAC) = 104°$, $m(\angle BAD) = 34°$, $m(\angle ABC) = 46°$ y $m(\angle ABD) = 82°$

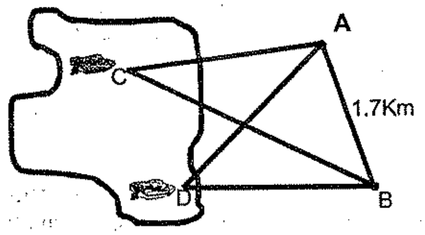


Figura 9-24

24 Un observador se encuentra en la parte superior del edificio (A) y ve un edificio (B). La distancia que separa los dos edificios es 430 m. De acuerdo con la figura 9-25, calcular la altura del edificio (A).

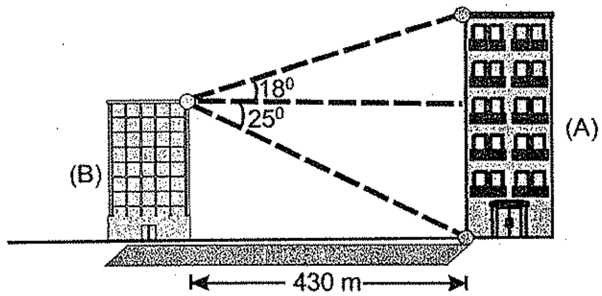


Figura 9-25

25 En la figura 9-26, hallar las medidas de $\overline{AE}$, $\overline{BE}$, $\overline{DE}$, $\overline{BD}$ y $\overline{EF}$ sabiendo que D es el punto medio de $\overline{AC}$.

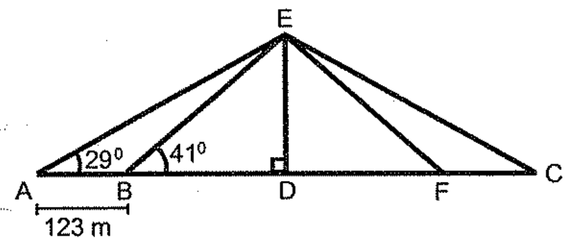


Figura 9-26

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (29)

Se quiere cerrar una esquina del primer cuadrante con un segmento de recta de 20 cm de longitud desde el punto A(a, 0) al punto B(0, b). Se pide:

1. **Escribir una ecuación, en función de a, para calcular el área del triángulo rectángulo cuyos catetos son a y b.**
2. **Hallar el dominio de la función resultante donde el problema tiene sentido.**

Taller de la Unidad 9

En los ejercicios 1 a 10 escoger la letra correspondiente a la ÚNICA respuesta correcta:

1. En la figura 9-27, la medida del lado x puede hallarse directamente aplicando:

a) Teorema de Pitágoras.
b) Ley de los Cosenos.
c) Definición de la función Seno.
d) Ley de los Senos.

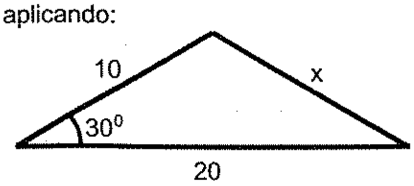


Figura 9-27

2. En el triángulo de la figura 9-28, el valor de h es:

a) $\frac{15\sqrt{3}}{3}$ b) $\frac{15\sqrt{3}}{2}$

c) $15\sqrt{3}$ d) $\frac{15\sqrt{2}}{3}$

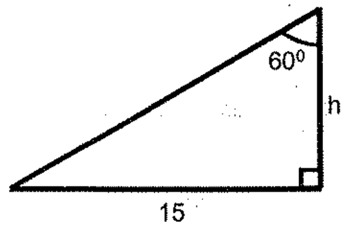


Figura 9-28

3. Para hallar directamente el valor del ángulo α, de la figura 9-29, debemos aplicar:

a) La definición de función Tangente.
b) La ley de los Cosenos.
c) La definición de función Seno.
d) La definición de función Secante.

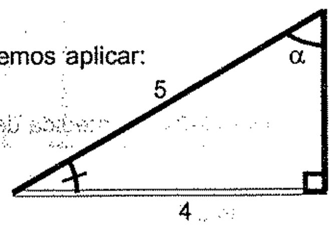


Figura 9-29

4. El área de un triángulo equilátero de lado **a** es:

a) $\frac{a^2}{2}$ b) $\frac{a^2}{4}$

c) $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ d) $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

5. Dos personas situadas en los puntos A y B respectivamente, disparan sendas flechas hacia el punto C, y dan ambos en el blanco. Las coordenadas del punto B son:

a) $(10, 0)$ b) $\left(\frac{5\sqrt{3}+15}{3}, 0\right)$

c) $\left(\frac{15-5\sqrt{3}}{3}, 0\right)$ d) $(10\sqrt{3}, 0)$

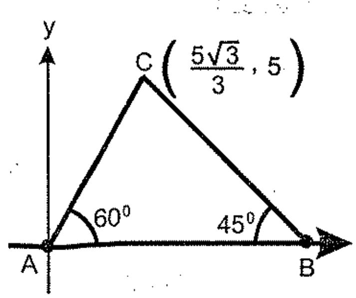


Figura 9-30

6. El área del paralelogramo de la figura 9-31 es:

a) ad Cos θ b) ad Sen θ

c) ab Cos θ d) ab Sen θ

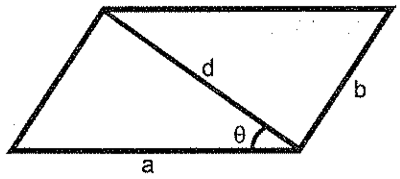


Figura 9-31

7. En la figura 9-32 , el $\triangle ABC$ está inscrito en una semicircunferencia. El área del $\triangle ABC$ es:

a) $R^2 \text{ Tan } 30°$ b) $\dfrac{R^2\sqrt{3}}{3}$

c) $\dfrac{R^2\sqrt{3}}{2}$ d) $R^2 \text{ Sen } 30°$

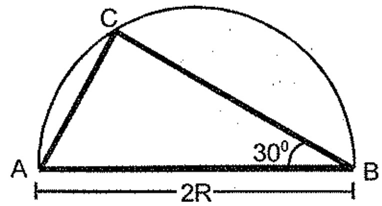


Figura 9-32

8. En la figura 9- 33, la medida del segmento $\overline{AB}$ es:

a) $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ b) 1

c) $\sqrt{2}$ d) $\sqrt{2-\sqrt{3}}$

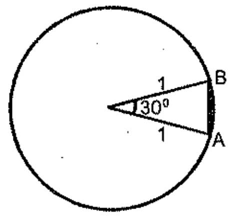


Figura 9-33

9. En la figura 9-34 , la medida del segmento $\overline{AB}$ es:

a) 7 b) 3 + 3 Cos 60°

c) 3 + 3 Tan 30° d) 3 + 3 Sen 60°

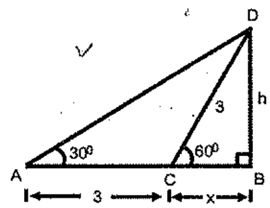


Figura 9-34

10. La expresión $a^2 - b^2 = c^2 - 2bc \text{ Cos } \alpha$ equivale a:

a) $b^2 + c^2 - a^2 = 2bc \text{ Cos } \alpha$ b) $a^2 - b^2 - c^2 = 2bc \text{ Cos } \alpha$

c) $c^2 - b^2 = a^2 + 2ac \text{ Cos } \alpha$ d) $c^2 - a^2 = b^2 + 2ab \text{ Cos } \alpha$

En los ejercicios 11 a 15 ,hallar las otras partes del $\triangle ABC$ que se desconocen:

11. $\angle A = 41°$, $\angle C = 77°$, a = 10.5

12. b = 0.5339 , $\angle A = 41°20'$, $\angle B = 120°12'$

13. a = 4.247 , b = 7.68 , $\angle A = 20°40'$

14. b = 16.39 , c = 20.11 , $\angle B = 118°48'$

15. a =25.3 , b = 32.7 , c = 52.5

16. ¿Cuál es la altura de un árbol si el ángulo de elevación a partir de un punto en el plano horizontal que pasa por su pie es de 35° y el ángulo de elevación a partir de otro punto sobre el mismo plano, pero 10 metros más cerca del pie es de 61.50?

17. Un observador ve un globo bajo un ángulo de elevación θ. Un segundo observador, situado al mismo lado respecto del globo que el primer observador, a una distancia de **a** metros de éste y en la misma horizontal, ve el globo con un ángulo de elevación ∅. Calcular la altura h del globo.

18. La altura de un edificio es **a**, ¿cuál es la altura de un asta de bandera sobre la parte alta del edificio si los ángulos de elevación, a partir del suelo, del pie y cima de dicha asta son ∅ y θ respectivamente?

19. Los lados iguales de un triángulo isósceles miden cada uno L metros y los ángulos iguales θ grados. Demostrar que el área del triángulo es L^2 Sen θ Cos θ.

20. Demostrar que el área del trapecio isósceles de la figura 9 - 35 es $A = \frac{1}{4}\left(b^2 - c^2\right)\text{Tan}\theta$.

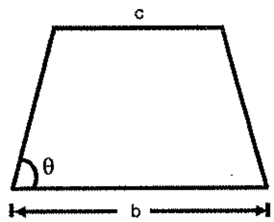


Figura 9-35

21. En la figura 9 - 36, hallar el valor de **x** y **h** en función de a,θ y ∅.

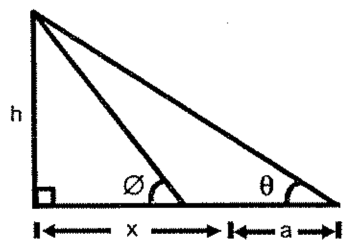


Figura 9-36

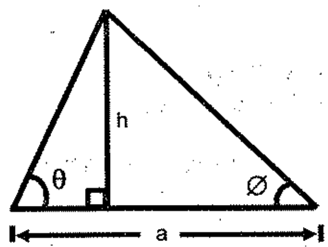


Figura 9-37

22. Calcular la altura h del triángulo de la figura 9-37 en términos de a,θ y ∅.

23. Dos boyas están separadas por una distancia de 64.2 m y un bote está a 74.1 m de la más cercana. El ángulo que forman las dos visuales del bote a las boyas es de 27°18'. ¿Qué distancia hay del bote a la boya más alejada?

24. Las dos diagonales de un paralelogramo son 10 y 12 cm y forman un ángulo de 49°18'. Hallar las longitudes de los lados.

25. Una carretera recta forma un ángulo de 22° con la horizontal. El ángulo de elevación respecto a un aeroplano, desde un punto P, sobre la carretera, es de 57°. En el mismo instante, el ángulo de elevación, desde otro punto sobre la carretera 100 metros más adelante, ubicado sobre el mismo lado con respecto a la vertical, es de 63°. Hallar aproximadamente la distancia de P al aeroplano.

26. Un viejo mapa señala un tesoro enterrado en el punto C, ubicado al N 70°18' O de cierto árbol T. Para evitar una barranca entre T y C, el mapa dice que hay que caminar 315.3 m hacia el N 10°24' O y después 260 m hacia el lugar del tesoro. Si el descubridor del mapa ha estudiado trigonometría, ¿iría a buscar el tesoro? ¿por qué?

27. Al instalar una antena sobre un terreno inclinado, como muestra la figura 9 - 38, los cables que la sostienen forman un ángulo de 40° con el mástil. Hallar las longitudes **x** y **y** de los cables, teniendo en cuenta que la antena es vertical.

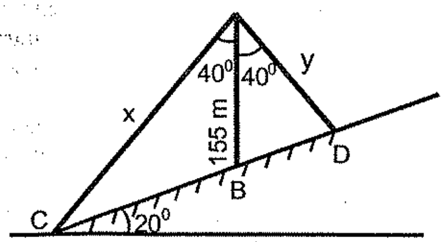


Figura 9-38

28. Demostrar que en todo ΔABC se cumple que:

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}=\frac{\text{Cos }A}{a}+\frac{\text{Cos }B}{b}+\frac{\text{Cos }C}{c}$$

29. Demostrar que en todo ΔABC se cumple que: $c^2=(a-b)^2+4ab\,\text{Sen}^2\left(\frac{c}{2}\right)$

30. Demostrar que si en un ΔABC se cumple que $\frac{\text{Cos }A}{b}=\frac{\text{Cos }B}{a}$, entonces el triángulo es isósceles o rectángulo.

31. Demostrar que si un ΔABC es tal que dos de sus ángulos interiores A y B satisfacen las ecuaciones:

(1) $\text{Sen }A\cdot\text{Cos}(A+B)+\text{Cos }A\cdot\text{Sen}(A+B)=0$
(2) $\text{Sen }B\cdot\text{Cos}(A+B)+\text{Cos}B\cdot\text{Sen}(A+B)=0$

entonces el ΔABC es equilátero.

32. Demostrar que si en un ΔABC se cumple que $m(\angle B)=2m(\angle C)$ entonces: $\text{Cos }C=\frac{b}{2c}$

33. Demostrar que en un ΔABC cualquiera se cumple que $a^2\text{Cos}(2B)-b^2\text{Cos}(2A)=a^2-b^2$

34. Demostrar que si en un ΔABC se cumple la relación: $\frac{\text{Sen }A}{\text{Sen }B}=2\text{ Cos }C$, entonces el triángulo es isósceles.

35. En la figura 9-39, demostrar que **h** y **x** están dados por:

$$x=\frac{a\text{ Sen }\beta\text{ Cos }\alpha}{\text{Sen}(\alpha-\beta)}\qquad h=\frac{a\text{ Sen }\alpha\text{ Sen }\beta}{\text{Sen}(\alpha-\beta)}$$

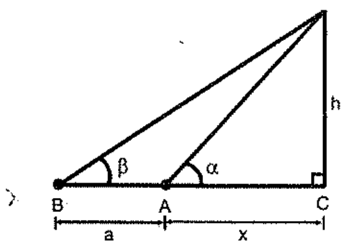


Figura 9-39

36. En la figura 9-40, demostrar que:

$$x=\frac{a\text{ Sen }\alpha\text{ Cos }\beta}{\text{Sen}(\beta-\alpha-\varnothing)}\qquad y=\frac{a\text{ Sen }\alpha\text{ Sen }\beta}{\text{Sen}(\beta-\alpha-\varnothing)}$$

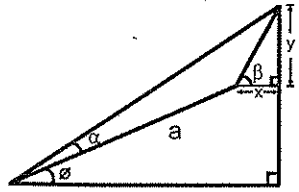


Figura 9-40

Subraye la letra correspondiente a la ÚNICA respuesta correcta en cada uno de los siguientes ejercicios:

1. De un corral de gallinas se vende el 63% y se quedan 74 gallinas en el corral. El número de gallinas presente inicialmente en el corral era:

a) 148 b) 200 c) 126 d) 137

2. Para realizar un experimento de Biología se requiere un cuarto de media naranja. Si el experimento hay que realizarlo 12 veces, la cantidad de naranjas necesarias es:

a) Media naranja. b) Una naranja.
c) Dos naranjas completas. d) Más de una naranja.

3. Un ejército de 1500 hombres se encuentra en una misión en un lugar muy apartado y tienen víveres para 3 meses. Si la misión se prolonga 2 meses, para que la misión se pueda cumplir sin perjudicar la supervivencia de los hombres se necesita:

a) Que les suministren mayor cantidad de víveres, porque con los que tienen no será suficiente.
b) Que aumenten el número de hombres para que no se pierda comida.
c) Que 600 hombres abandonen la misión.
d) Que 900 hombres abandonen la misión.

Las preguntas 4. y 5. se responden con base en la siguiente información:

Dos personas hacen un recorrido dentro de un plano cartesiano en tres posiciones diferentes, como lo ilustra la siguiente tabla:

Posición / Persona	1^0	2^0	3^0
A	(0,2)	(3,2)	(1,2)
B	(1,-2)	(5,-2)	(5,1)

4. De los recorridos realizados por ambas personas podemos concluir que:

a) A y B realizaron el mismo recorrido.
b) A, en el primer cambio de posición recorrió 4 unidades.
c) A realizó mayor recorrido que B.
d) B realizó mayor recorrido que A.

5. Teniendo en cuenta que **"desplazamiento es posición final menos posición inicial"**, del recorrido realizado por A podemos decir que:

a) Se hizo en trayectoria circular.
b) El recorrido total fue de 5 unidades.
c) Su desplazamiento y su recorrido total fue de 5 unidades.
d) Su desplazamiento fue de 1 unidad y su recorrido de 5 unidades en línea recta.

Tercera parte

Geometría Analítica

Núcleo Temático

10

ESTUDIO ANALÍTICO DE LA LÍNEA RECTA Y LA CIRCUNFERENCIA

LOGRO GENERAL

- Obtener toda la información posible para analizar y dibujar líneas rectas y circunferencias.

DIMENSIONES

LOGROS ESPECÍFICOS	INDICADORES DE LOGRO
Corporal: • Realizar movimientos en el plano que posibiliten la adquisición del concepto de lugar geométrico y explicar que la línea recta y la circunferencia son dos ejemplos de lugares geométricos.	• Marca distintas parejas de puntos en el plano y observa que por ellas sólo pasa una línea recta. • Dados un punto y una distancia en un plano, traza con el compás la circunferencia cuyo centro es el punto dado y radio la distancia dada.
Comunicativa: • Explicar el concepto de lugar geométrico y por qué la línea recta y la circunferencia son lugares geométricos.	• Explica por qué la línea recta y la circunferencia son ejemplos de lugares geométricos.
Cognitiva: • Hallar la dirección, la pendiente y el intercepto -y de una línea recta. • Identificar distintas formas de la ecuación de una línea recta. • Determinar analíticamente cuándo dos rectas son paralelas o perpendiculares. • Hallar distancia entre dos puntos y distancia de un punto a una recta. • Hallar las ecuaciones básicas y general de una circunferencia.	• Determina las ecuaciones general, punto-pendiente, pendiente - intercepto y general de una línea recta. • Halla los elementos básicos de una línea recta y una circunferencia a partir de su ecuación. • Identifica analíticamente cuándo dos rectas son paralelas o perpendiculares. • Transforma la ecuación de una circunferencia de básica a general y viceversa.
Estética: • Dibujar la gráfica de una línea recta y de una circunferencia a partir de sus elementos básicos.	• Dadas la ecuación de una línea recta y la de una circunferencia, dibuja sus gráficas a partir de sus elementos básicos.
Etica - Actitudinal: • Asumir que la puntualidad es una señal de madurez personal y de respeto por los demás.	• Cumple a tiempo con las tareas y trabajos que le son encomendados.

EVALUACIÓN

ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS

10.1 COMPRENSIÓN DE LECTURA: HISTORIA DE LA TRIGONOMETRÍA (7)

Lea atentamente el siguiente texto y luego subraye la letra correspondiente a la ÚNICA respuesta correcta en cada uno de los enunciados propuestos.

TOLOMEO
(95 - 170)

Tolomeo incorporó en su gran libro de astronomía, el ***Almagesto***, una tabla de cuerdas con incrementos angulares de $\frac{1^0}{2}$, desde 0° a 180° , con un error menor que 1/3.600 de unidad. También explicó su método para compilar esta tabla de cuerdas, y a lo largo del libro dio bastantes ejemplos de cómo utilizar la tabla para calcular los elementos desconocidos de un triángulo a partir de los conocidos. Tolomeo fue el autor del que hoy se conoce como teorema de Menelao para resolver triángulos esféricos, y durante muchos siglos su trigonometría fue la introducción básica para los astrónomos. Quizás al mismo tiempo que Tolomeo, los astrónomos de la India habían desarrollado también un sistema trigonométrico basado en la función Seno en vez de cuerdas como los Griegos. Esta función Seno, al contrario que el Seno utilizado en la actualidad, no era una proporción, sino la longitud del lado opuesto a un ángulo en un triángulo rectángulo de hipotenusa dada. Los matemáticos indios utilizaron diversos valores para ésta en sus tablas.

A finales del siglo VIII los astrónomos árabes habían recibido la herencia de las tradiciones de Grecia y de la India, y prefirieron trabajar con la función Seno. En las últimas décadas del siglo X ya habían completado la función Seno y las otras cinco funciones y habían descubierto y demostrado varios teoremas fundamentales de la trigonometría tanto para triángulos planos como esféricos. Varios matemáticos sugirieron el uso del valor $r = 1$ en vez de $r = 60$, lo que produjo los valores modernos de las funciones trigonométricas. Los árabes también incorporaron el triángulo polar en los triángulos esféricos. Todos estos descubrimientos se aplicaron a la astronomía y también se utilizaron para medir el tiempo astronómico y para encontrar la dirección de la Meca, lo que era necesario para las cinco oraciones diarias requeridas por la ley islámica. Los científicos árabes también compilaron tablas de gran exactitud. Por ejemplo, las tablas del Seno y de la Tangente, construidas con intervalos de 1/60 de grado (1 minuto) tenían un error menor que 1 dividido por 700 millones. Además, el gran astrónomo Nāsir al-Dīn al-Tūsi escribió el ***Libro de la figura transversal,*** el primer estudio de las trigonometrías plana y esférica como ciencias matemáticas independientes.

1. El autor dice de Tolomeo que:
   a. Desarrolló un sistema trigonométrico basado en la función seno.
   b. Influyó en el pensamiento de los astrónomos árabes.
   c. Sus trabajos ayudaron enormemente a la Astronomía.
   d. Compiló la tabla de cuerdas de los astrónomos indúes.

2. Los siguientes enunciados se ajustan a la verdad, con excepción de:
   a. El almagesto era una tabla de cuerdas con incrementos angulares.
   b. Tolomeo fue un célebre astrónomo griego.

c. Los astrónomos árabes se inclinaron por las tradiciones de los indúes.
d. Los descubrimientos trigonométricos tocaron campos religiosos musulmanes.

3. El propósito del autor en el texto anterior es:
   a. Mostrar la influencia de las matemáticas en la vida religiosa.
   b. Informar sobre los aportes hechos, por diferentes culturas, al desarrollo de la trigonometría.
   c. Denunciar a los astrónomos árabes pues no fueron originales en sus trabajos.
   d. Explicar una etapa en el desarrollo de la trigonometría.

4. La palabra que no tiene el mismo valor que COMPILAR, en la lectura, es:
   a. Compendiar.
   b. Recopilar.
   c. Coleccionar.
   d. Comprender.

5. En su escrito, el autor desarrolla la siguiente secuencia temática, respecto del desarrollo de la trigonometría:
   a. Aparición del almagesto, trabajos de los árabes, trabajos de los indúes.
   b. Tolomeo, el almagesto, trabajos de los árabes.
   c. Tolomeo, indúes, el Corán.
   d. Tolomeo, indúes, árabes.

10.2 LA GEOMETRÍA ANALÍTICA Y LOS LUGARES GEOMÉTRICOS

- Hasta principios del siglo XVII, el álgebra y la geometría se estudiaban separadamente. Pero, en la segunda década de este siglo, algunos matemáticos, principalmente **Renato Descartes** (1596-1650) y **Pierre de Fermat** (1601-1655) desarrollaron un sistema mediante el cual era posible establecer una correspondencia uno a uno entre los puntos de una recta y el conjunto de los números reales y, también, una correspondencia uno a uno entre puntos de un plano y parejas ordenadas de números reales. Tales correspondencias se denominan, respectivamente, **SISTEMA COORDENADO UNIDIMENSIONAL** y **SISTEMA COORDENADO BIDIMENSIONAL;** figura 10-1:

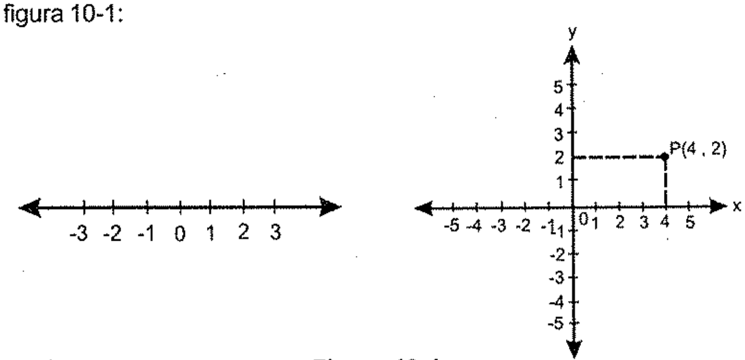


Figura 10-1

En honor a Descartes, a estos sistemas coordenados se les dio el nombre de **CARTESIANOS** (ya que Descartes firmaba sus libros con su apellido latinizado "cartesius")

- El desarrollo de los sistemas coordenados permitió a Descartes y sus colegas hacer un aporte fundamental al desarrollo de la matemática: La unificación del **ÁLGEBRA** y la **GEOMETRÍA**, primer paso definido hacia la matemática de las magnitudes variables y que culminó con la publicación en 1.637 del libro titulado **"GEOMETRÍA"**, escrito por Descartes, en el cual se establecían las bases de lo que hoy conocemos con el nombre de **GEOMETRÍA ANALÍTICA.**

- ¿Qué ocurría con el álgebra y la geometría hasta principios del siglo XVII? Pues, muy sencillo: Que ambas se habían desarrollado separadamente. Miremos, por ejemplo, una situación concreta: El de la ecuación $x^2+y^2=4$. En álgebra la **x** y la **y** se consideran incógnitas y como la ecuación no permitía hallarlas en forma única, entonces esta ecuación no ofrecía ningún interés para los matemáticos de esa época. Sin embargo, Descartes no consideró la **x** y la **y** como incógnitas a obtener de la ecuación inicial, sino como VARIABLES; es decir, se preguntó: "qué pasará con la **y** si le asigno valores arbitrarios a la **x**?". Al responder la pregunta, Descartes descubrió varias cosas:

* Que no cualquier valor (real) que le asignara a la **x** le permitía obtener un valor (real) para **y.** Por ejemplo, encontró que cuando **x** toma valores mayores que 2 ó menores que -2, los valores que toma la **y** no son reales. En efecto:

$$\text{Si } x = 3 \text{ entonces: } \begin{aligned} &3^2 + y^2 = 4 \\ &y^2 = 4 - 3^2 \\ &y^2 = 4 - 9 \\ &y^2 = -5 \\ &y = \pm\sqrt{-5} \notin R \end{aligned}$$

* Que cuando la **x** se reemplaza por valores entre -2 y 2, entonces la y puede tomar dos valores de igual valor numérico y distinto signo; por ejemplo:

$$\text{Si } x = 1 \text{ entonces: } \begin{aligned} &1^2 + y^2 = 4 \\ &y^2 = 4 - 1^2 \\ &y^2 = 4 - 1 \\ &y^2 = 3 \\ &y = \pm\sqrt{3} \end{aligned}$$

* Que la ecuación $x^2 + y^2 = 4$ expresa, pues, la interdependencia de dos VARIABLES y no de dos INCÓGNITAS.

- Otras ecuaciones con características similares a $x^2 + y^2 = 4$ las estudiamos en la unidad anterior:

$$\begin{aligned} &2x - 3y - 2 = 0 \\ &4x^2 - 5y + 1 = 0 \\ &2x^2 - 5y^2 - 10 = 0 \end{aligned}$$

En general, estas ecuaciones pertenecen a una clase cuya forma general podemos escribir así:

$$E(x, y) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

que se lee: "E de **x, y** es igual a 0".

- Pero, bueno, ¿qué significaba para Descartes una ecuación como $x^2 + y^2 = 4$? ¿Y en general, qué significaba una ecuación de la forma E(x, y) = 0? La respuesta es la siguiente: Una ecuación de la forma E(x, y) = 0 determina el conjunto de todos aquellos puntos del plano cuyas coordenadas satisfacen la ecuación. Así, por ejemplo, la ecuación $x^2 + y^2 = 4$ corresponde a una circunferencia de radio 2 y centro en el origen; figura 10-2:

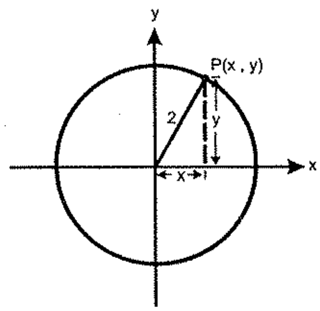


Figura 10-2

LUGAR GEOMÉTRICO

En general, una ecuación de la forma E(x, y) = 0 determina un LUGAR GEOMÉTRICO, llamado así porque consta de un conjunto de puntos que satisfacen una ó más condiciones geométricas. Por ejemplo, la ecuación $x^2 + y^2 = 4$ es el "lugar geométrico de todos los puntos (x, y) del plano cuya distancia al origen es 2 unidades" y ese lugar geométrico es una circunferencia.

- Así pues, el problema y el método general de la Geometría Analítica son los siguiente:

1. **Representar una ecuación dada con dos variables mediante una curva en el plano, deduciendo de las propiedades algebraicas de la ecuación, las propiedades geométricas de la curva.**

Por ejemplo, de las características algebraicas de $x^2 + y^2 = 4$ (que es una ecuación de segundo grado en las variables **x** y **y**, y otras características más...) podemos deducir sus propiedades geométricas (que es una circunferencia con centro en el origen y radio 2).

2. **Recíprocamente, conocidas las propiedades geométricas de la curva debemos hallar su ecuación.**

   Por ejemplo, si sabemos que una circunferencia tiene su centro en el origen y su radio mide 2 unidades entonces debemos deducir su ecuación: $x^2 + y^2 = 4$.

- Como vemos, la Geometría Analítica trabaja en dos sentidos:

1) Del **ÁLGEBRA** (ecuación)	$\longrightarrow$	a la **GEOMETRÍA** (dibujo de la curva)
y		
2) De la **GEOMETRÍA** (propiedades geométricas)	$\longrightarrow$	al **ÁLGEBRA** (obtención de la ecuación)

Por esta razón, no es exagerado afirmar que la Geometría Analítica es el "matrimonio" del álgebra con la geometría.

- En esta unidad estudiaremos las propiedades analíticas de dos lugares geométricos muy importantes: La Línea Recta y la Circunferencia.

10.3 ESTUDIO ANALÍTICO DE LA LÍNEA RECTA

10.3.1 Distangia Dirigida y Distancia Entre Dos Puntos

Primera experiencia

- Dos conceptos que es importante diferenciar bien desde un principio son los de DISTANCIA DIRIGIDA y DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS. Para entender la diferencia entre ellos consideremos el sistema coordenado unidimensional de la figura 10-3 en el cual hemos marcado los puntos A(-2) y B(4) :

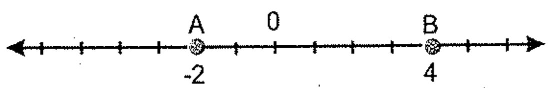


Figura 10-3

- Si alguien se desplaza desde el punto A hasta el punto B y luego se desplaza desde el punto B hasta el punto A, ese alguien habrá recorrido la MISMA DISTANCIA: 6 unidades, pero habrá realizado dos desplazamientos distintos: Uno hacia la derecha y otro hacia la izquierda. Cada uno de estos desplazamientos se denomina la DISTANCIA DIRIGIDA del punto A al punto B, en el primer caso, y del punto B al punto A, en el segundo.
- Para indicar la DISTANCIA DIRIGIDA desde A (-2) hasta B (4); es decir, hacia la derecha, escribimos:

$$\overrightarrow{AB} = 4 - (-2) = 6$$ **(coordenada del punto final - coordenada del punto inicial).**

- Para indicar la DISTANCIA DIRIGIDA desde B(4) hasta A(-2); es decir hacia la izquierda, escribimos:

$$\overrightarrow{BA} = (-2) - 4 = -6$$ **(coordenada del punto final - coordenada del punto inicial).**

- Notemos que la distancia dirigida de un punto a otro puede ser positiva o negativa: El signo depende de la forma en que se realice el desplazamiento (hacia la derecha o hacia la izquierda, hacia arriba o hacia abajo,...)

DISTANCIA DIRIGIDA

La DISTANCIA DIRIGIDA desde el punto $A(x_1)$ hasta el punto $B(x_2)$ se simboliza por $\overrightarrow{AB}$ y se define como:

$$\overrightarrow{AB} = x_2 - x_1$$

es decir, la diferencia entre la coordenada del punto final y la coordenada del punto inicial.

- Dijimos antes que la distancia que recorre alguien para ir desde A hasta B es la misma que recorre para ir desde B hasta A. El número de unidades de longitud que hay entre A y B es el mismo que hay entre B y A. Este número de unidades de longitud nunca es negativo y se denomina la DISTANCIA ENTRE A y B. La definimos así:

DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS EN UNA RECTA

La DISTANCIA ENTRE LOS PUNTOS $A(x_1)$ y $B(x_2)$ se representa por $|\overline{AB}|$ y se define así:

$$|\overline{AB}| = |x_2 - x_1|$$

es decir, el valor absoluto de la diferencia entre las coordenadas de los puntos A y B, sin importar el orden. Recordemos que el operador valor absoluto se utiliza, en este caso para indicar que la distancia entre los puntos A y B nunca es negativa.

Ejemplo 1

La distancia entre los puntos A(-2) y B(4) es:

$$|\overline{AB}| = |\,4 - (-2)\,| = |6| = 6$$

ó

$$|\overline{AB}| = |\,(-2) - 4\,| = |-6| = 6$$

Segunda experiencia

- En el plano cartesiano, la distancia entre dos puntos podemos obtenerla de la siguiente manera:

  Consideremos dos puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ del plano; figura 10-4 (a). A continuación, construimos un triángulo rectángulo cuya hipotenusa sea el segmento $\overline{PQ}$, trazando por P una paralela al eje **x**, por Q una paralela al eje y y designando por $R(x_2, y_1)$ el punto de intersección de ambas; figura 10-4 (b). ¿Por qué las coordenadas de R son (x_2, y_1)?

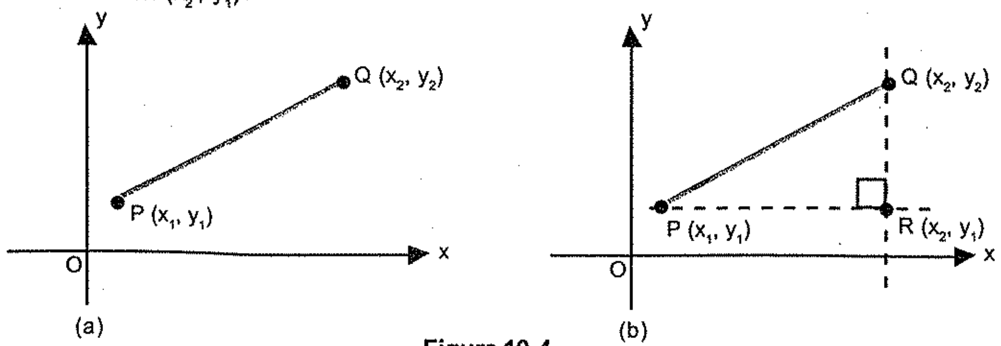


Figura 10-4

* Como el triángulo PRQ es rectángulo (¿por qué?), podemos aplicarle el Teorema de Pitágoras y escribir:

$$\left|\overline{PQ}\right|^2 = \left|\overline{PR}\right|^2 + \left|\overline{RQ}\right|^2$$

Pero:

$$\left.\begin{aligned}\left|\overline{PR}\right| &= \left|x_2 - x_1\right| \\ \left|\overline{RQ}\right| &= \left|y_2 - y_1\right|\end{aligned}\right\} \text{¿por qué?}$$

Luego:

$$\left|\overline{PQ}\right|^2 = \left|x_2 - x_1\right|^2 + \left|y_2 - y_1\right|^2$$

* Por lo tanto:

$$\therefore \left|\overline{PQ}\right|^2 = = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$\therefore \left|\overline{PQ}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS EN EL PLANO

Si $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ son dos puntos cualesquiera del plano coordenado, entonces la distancia $\left|\overline{PQ}\right|$ entre P y Q está dada por la expresión:

$$\left|\overline{PQ}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Ejemplo 2

Probemos que los puntos A(3, 7), B(5, -5) y C(-2, 0) son los vértices de un triángulo rectángulo isósceles (figura 10-5)

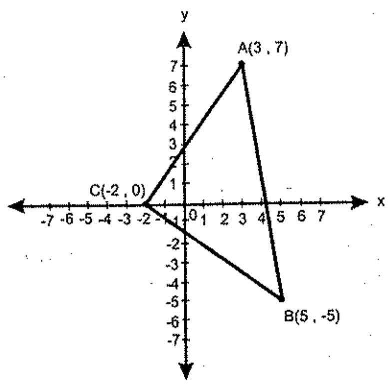


Figura 10-5

SOLUCIÓN

- Debemos probar dos cosas: Que el triángulo tiene al menos dos lados iguales (para que sea isósceles) y que sus lados cumplen el Teorema de Pitágoras (para que sea rectángulo).
- Hallemos la longitud de los lados aplicando distancia entre dos puntos a los vértices A, B y C:

$$\left.\begin{aligned}\left|\overline{AB}\right| &= \sqrt{(5-3)^2 + (-5-7)^2} = \sqrt{148} \\ \left|\overline{AC}\right| &= \sqrt{(-2-3)^2 + (0-7)^2} = \sqrt{74} \\ \left|\overline{BC}\right| &= \sqrt{(-2-5)^2 + (0+5)^2} = \sqrt{74}\end{aligned}\right\} \therefore \left|\overline{AC}\right| = \left|\overline{BC}\right|$$

También fácilmente comprobamos que:

$$|\overline{AC}|^2 + |\overline{BC}|^2 = 74 + 74 = 148 = |\overline{AB}|^2$$

es decir, satisface el Teorema de Pitágoras.

Concluimos, pues que el ΔABC es rectángulo isósceles.

EJERCICIO 10.1

1. Hallar la distancia dirigida y la distancia entre los pares de puntos siguientes:

   a) A(-5) y B(6) b) M(3) y N(-7)

   c) P(-8) y Q(-12) d) R(5) y S(0)

2. La distancia entre dos puntos es 9. Si uno de los puntos tiene coordenada (-2), hallar la coordenada del otro punto. (Dos soluciones).

3. Un cuadrado de lado igual a 2a tiene su centro en el origen y sus lados son paralelos a los ejes coordenados. Hallar las coordenadas de los cuatro vértices.

4. Tres vértices de un rectángulo son los puntos A(2, -1), B(7, -1) y C(7, 3). Hallar el cuarto vértice y el área del rectángulo.

5. Los vértices de un triángulo son los puntos A (1, -2), B (4, -2) y C (4, 2). Probar que el ΔABC es rectángulo y hallar su área.

6. Los vértices de un cuadrilátero son los puntos (1, 3), (7, 3), (9, 8) y (3, 8). Dibujarlo, probar que el ΔABC es un paralelogramo y calcular su área.

7. Dos de los vértices de un triángulo equilátero son los puntos (-1, 1) y (3, 1). Hallar las coordenadas del tercer vértice. (Dos soluciones).

8. Probar que los puntos (-5, 0), (0, 2) y (0, -2) son los vértices de un triángulo isósceles.

9. Probar que los puntos (0, 0), (3, 4), (8, 4) y (5, 0) son los vértices de un rombo y calcular su área.

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (30)

Una caja rectangular de base cuadrada se construye de tal manera que el área de sus seis caras es de 18 m². Si llamamos x la medida del lado de la base, se pide:

1. **Hacer una representación gráfica del problema.**
2. **Escribir una expresión, en términos de x, que permita calcular el volumen de la caja.**
3. **¿De qué grado es la ecuación obtenida en términos de x?.**
4. **¿Para cuáles valores de x, el volumen es positivo?.**

10.3.2 Coordenadas del Punto Medio de un Segmento

En muchos problemas es necesario determinar las coordenadas del punto medio de un segmento cuando conocemos las coordenadas de los extremos.

Experiencia

- Consideremos el segmento $\overline{AB}$ de la figura 10-6(a) cuyas coordenadas de los extremos A y B son: $A(x_1,y_1)$ y $B(x_2,y_2)$

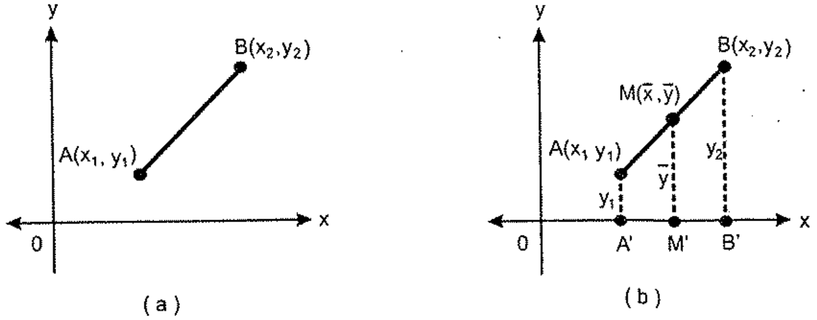


Figura 10-6

- Queremos hallar las coordenadas del punto medio $M(\bar{x},\bar{y})$ de $\overline{AB}$. Para resolver el problema hacemos lo siguiente (figura 10-6 (b)):

Desde A trazamos $\overline{AA'}$ paralelo al eje **y**, con lo cual $\overrightarrow{A'A} = y_1$.

Desde B trazamos $\overline{BB'}$ paralelo al eje **y**, con lo cual $\overrightarrow{B'B} = y_2$.

Desde M trazamos $\overline{MM'}$ paralelo al eje **y**, con lo cual $\overrightarrow{M'M} = \bar{y}$.

- La figura ABB'A' es un trapecio en el cual:

$\overline{AA'}$ es la base menor.
$\overline{BB'}$ es la base mayor.
$\overline{MM'}$ es la base media.

- Una propiedad de la geometría dice que: **"la medida de la base media de un trapecio es igual a la semisuma de las medidas de las bases "**; es decir:

$$\overrightarrow{M'M} = \frac{\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{B'B}}{2}$$

$$\therefore \bar{y} = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

- En forma similar, si trazamos paralelas al eje x por los puntos A, M y B, podemos probar que:

$$\therefore \bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO

Si $A(x_1 , y_1)$ y $B(x_2 , y_2)$ son los extremos de un segmento $\overline{AB}$, entonces las coordenadas del punto medio $M(\bar{x} , \bar{y})$ están dadas por:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2} \; ; \; \bar{y} = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Ejemplo 1

Hallemos las coordenadas del punto medio del segmento cuyos extremos son los puntosP(-3, 4) y Q(5, -2).

SOLUCIÓN

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{(-3)+5}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\bar{y} = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{4+(-2)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Luego, el punto medio es M(1, 1).

Ejemplo 2

El extremo de un segmento es el punto A(-3, 7) y el punto medio es M(2, -4). Determinemos las coordenadas del otro extremo.

SOLUCIÓN

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2} \Rightarrow 2 = \frac{-3 + x_2}{2} \quad ; \quad \bar{y} = \frac{y_1 + y_2}{2} \Rightarrow -4 = \frac{7 + y_2}{2}$$

$$\Rightarrow 4 = -3 + x_2 \qquad\qquad \Rightarrow -8 = 7 + y_2$$

$$\Rightarrow x_2 = 7 \qquad\qquad \Rightarrow y_2 = 15$$

Por lo tanto, el otro extremo es B(7, -15).

Ejemplo 3

Demostremos que el cuadrilátero que resulta al unir los puntos medios de los lados de otro cuadrilátero cualquiera es un paralelogramo.

SOLUCIÓN

- Consideremos el cuadrilátero ABCD de la figura 10-7 y hallemos los puntos medios de los lados.

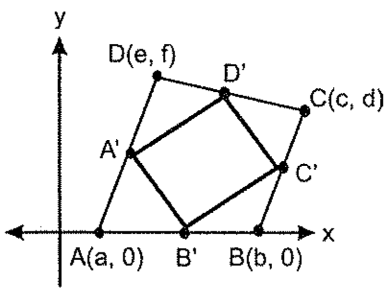


Figura 10-7

a) Coordenadas de A':

$$\left.\begin{array}{l} \bar{x} = \dfrac{a+e}{2} \\[2ex] \bar{y} = \dfrac{f+0}{2} = \dfrac{f}{2} \end{array}\right\} \therefore A'\left(\frac{a+e}{2}, \frac{f}{2}\right)$$

b) Coordenadas de B':

$$\left.\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{a+b}{2}\\ \bar{y} &= \frac{0+0}{2} = 0\end{aligned}\right\} \therefore B'\left(\frac{a+b}{2}, 0\right)$$

c) Coordenadas de C':

$$\left.\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{c+b}{2}\\ \bar{y} &= \frac{d+0}{2} = \frac{d}{2}\end{aligned}\right\} \therefore C'\left(\frac{c+b}{2}, \frac{d}{2}\right)$$

d) Coordenadas de D':

$$\left.\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{c+e}{2}\\ \bar{y} &= \frac{d+f}{2}\end{aligned}\right\} \therefore D'\left(\frac{c+e}{2}, \frac{d+f}{2}\right)$$

- En geometría aprendimos que una manera de demostrar que un cuadrilátero es paralelogramo, es probando que sus lados opuestos son congruentes. Por lo tanto, debemos probar que:

$$\left|\overline{A'D'}\right| = \left|\overline{B'C'}\right|$$

$$\left|\overline{A'B'}\right| = \left|\overline{D'C'}\right|$$

$$\left|\overline{A'D'}\right| = \sqrt{\left(\frac{a+e}{2} - \frac{c+e}{2}\right)^2 + \left(\frac{f}{2} - \frac{d+f}{2}\right)^2} \text{ : distancia entre dos puntos.}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{a+e-c-e}{2}\right)^2 + \left(\frac{f-d-f}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{a-c}{2}\right)^2 + \left(\frac{-d}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{a^2-2ac+c^2}{4} + \frac{d^2}{4}}$$

$$\therefore \left|\overline{A'D'}\right| = \sqrt{\frac{a^2-2ac+c^2+d^2}{4}} \quad \text{.........................} \quad (1)$$

$$\left|\overline{B'C'}\right| = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2} - \frac{c+b}{2}\right)^2 + \left(0 - \frac{d}{2}\right)^2} \text{ : distancia entre dos puntos.}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{a-c}{2}\right)^2 + \frac{d^2}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{a^2 - 2ac + c^2}{4} + \frac{d^2}{4}}$$

$$\therefore \left|\overline{B'C'}\right| = \sqrt{\frac{a^2 - 2ac + c^2 + d^2}{4}} \quad \text{...} \quad (2)$$

De (1) y (2) concluimos que $\left|\overline{A'D'}\right| = \left|\overline{B'C'}\right|$. En forma similar, podemos demostrar que $\left|\overline{A'B'}\right| = \left|\overline{D'C'}\right|$.

EJERCICIO 10.2

1. Los vértices de un triángulo son los puntos A(2, 5), B(5, 5) y C(0, 8). Determinar las longitudes de las medianas del triángulo.
2. El extremo de un diámetro de una circunferencia de centro C(-4, 1), es A(2, 6). Hallar las coordenadas del otro extremo B.
3. Hallar las coordenadas de los vértices de un triángulo sabiendo que las coordenadas de los puntos medios de sus lados son (-2, 1), (5, 2) y (2, -3).
4. Mostrar que las diagonales del paralelogramo cuyos vértices son A(-2, -3), B(5, -4), C(4, 1) y D(-3, 2) se cortan en su punto medio.
5. Demostrar que el segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado e igual a su mitad.
6. Demostrar que el punto medio de la hipotenusa de un triángulo rectángulo equidista de los tres vértices del triángulo.

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (31)

El volumen de un prisma recto de base cuadrada es 36 m^3. Si llamamos x la medida del lado de la base, se pide:

1. **Hacer una interpretación gráfica del problema.**
2. **Escribir una ecuación, en términos de x, que permita calcular el área total de la caja.**
3. **¿Para qué valores de x el área de la caja es positiva?**

10.3.3 Dirección y Pendiente de una Recta

El concepto de **pendiente** es muy importante en el estudio de la geometría analítica y el cálculo. Vamos a aproximarnos a él a través de las siguientes experiencias:

Primera experiencia

- Tres amigos: Sebastián, Santiago y Daniel desean subir corriendo tres calles planas de 100 metros de longitud cada una y ubicadas en el mismo plano horizontal; figura 10-8.

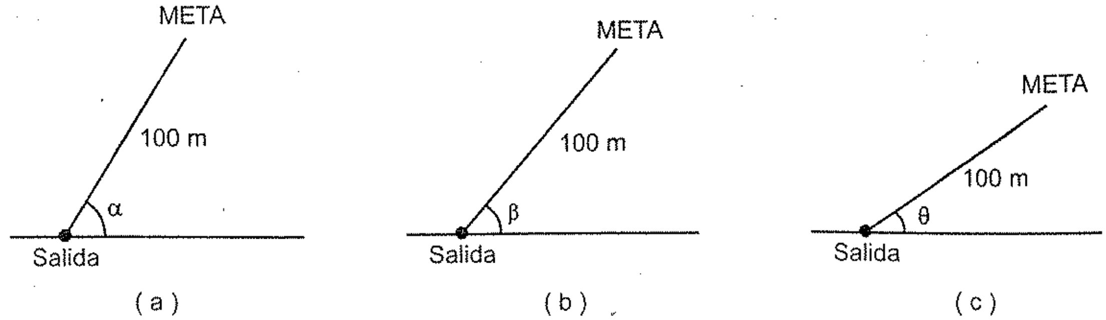


Figura 10-8

- ¿Cuál de los tres amigos tendrá mayores dificultades para llegar a la meta, si las condiciones del terreno son similares?
- Indudablemente, la calle dibujada en la figura 10-8 (a) presenta las mayores dificultades ya que está MAS INCLINADA, es MAS PENDIENTE que las otras dos. Si medimos el ángulo que cada calle forma con el plano horizontal ubicado a la derecha del punto donde comienza la calle, comprobamos que el ángulo α de la calle (a) es mayor que los ángulos β y θ de las calles (b) y (c). Estos ángulos reciben el nombre de ÁNGULOS DE INCLINACIÓN ó ÁNGULOS DE DIRECCIÓN.
- Otro detalle que nos puede indicar cuál de las calles es más inclinada es la relación (cociente) entre el desplazamiento dirigido horizontal (que designaremos por Δx) y el desplazamiento dirigido vertical (que designaremos por Δy). Esta relación está ligada con el ángulo de dirección. Observemos la figura 10-9:

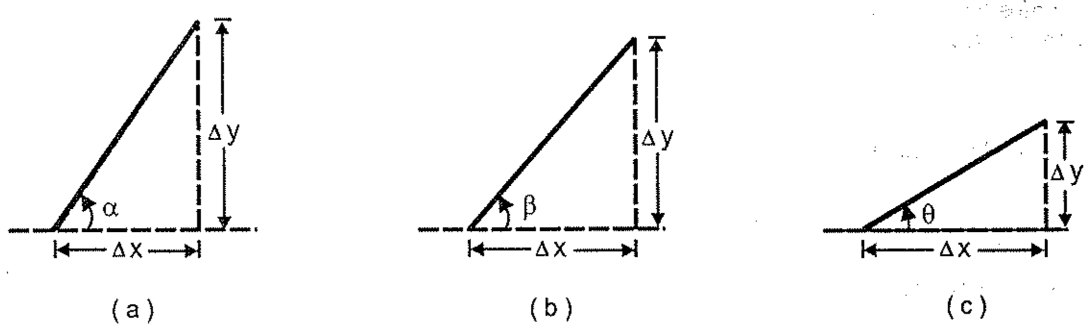


Figura 10-9

* En la figura 10-9 (a), el desplazamiento horizontal Δx es menor que en las figuras 10-9 (b) y 10-9 (c); en cambio, en la figura 10-9 (a), el desplazamiento vertical Δy (que representa la altura de cada calle) es mayor que en las figuras 10-9 (b) y 10-9 (c).
* Por lo tanto, el cociente (o razón) entre el desplazamiento vertical y el desplazamiento horizontal determina la mayor o menor PENDIENTE de la calle. La pendiente se designa por la letra **m** y es igual al cociente (o razón) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

CONCEPTO DE PENDIENTE

La PENDIENTE m de una calle (o montaña) recta se calcula hallando el cociente (razón) entre el desplazamiento dirigido vertical (Δy) y el desplazamiento dirigido horizontal (Δx) ; es decir:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{desplazamiento dirigido vertical}}{\text{desplazamiento dirigido horizontal}} \; ; \text{con } \Delta x \neq 0$$

- Si cambiamos la palabra "calle" por la palabra "recta" podemos llegar a las mismas conclusiones. Veámoslo analizando la recta $\overleftrightarrow{\ell}$ de la figura 10-10, en la cual hemos marcado tres puntos A, B y C:

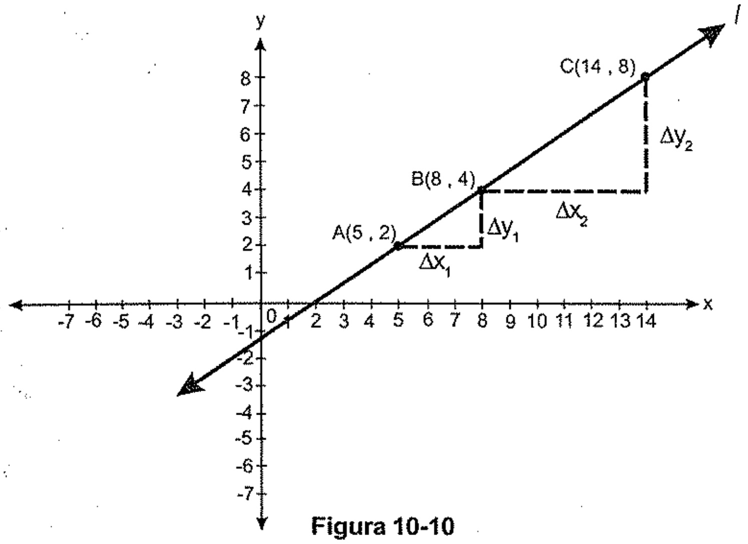


Figura 10-10

- Si tomamos los puntos A y B, ¿cuál es la variación de las x? ¿y cuál es la variación de las y? ¿Cuál es la pendiente?. Veamos:

$\Delta x_1 = 8 - 5 = 3$: Valor final de x - valor inicial de x.

$\Delta y_1 = 4 - 2 = 2$: Valor final de y - valor inicial de y.

Por lo tanto, la pendiente de esta recta, entre los puntos A y B, será:

$$m = \frac{\Delta y_1}{\Delta x_1} = \frac{2}{3}$$

- ¿Cuál es la pendiente entre los puntos B y C? ¿Será distinta a la obtenida entre los puntos A y B?
- Veamos:

$\therefore\ \Delta x_2 = 14 - 8 = 6$: valor final de x - valor inicial de x.

$\therefore\ \Delta y_2 = 8 - 4 = 4$: valor final de y - valor inicial de y.

$\therefore\ m = \frac{\Delta y_2}{\Delta x_2} = \frac{6}{4} = \frac{2}{3}$ **¡dió lo mismo !**

En ambos casos la pendiente de la recta es la misma. Esto significa que en una línea recta el valor de la pendiente es la misma SIN IMPORTAR LOS PUNTOS QUE SE TOMEN.

- Como ejercicio, halle la pendiente entre los puntos A y C y verifique que el resultado es el mismo anterior.

PENDIENTE DE UNA RECTA

Si $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ son dos puntos de una recta $\overleftrightarrow{\ell}$, entonces la PENDIENTE de $\overleftrightarrow{\ell}$, denotada por m, se define así:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{Valor final de y} - \text{Valor inicial de y}}{\text{Valor final de x} - \text{Valor inicial de x}}$$

ó

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{Valor inicial de y} - \text{Valor final de y}}{\text{Valor inicial de x} - \text{Valor final de x}}$$

- Tres preguntas:

   1. ¿Es posible que una recta tenga pendiente negativa? Dibuje una.
   2. ¿Es posible que una recta tenga pendiente 0? ¿Cómo es esta recta? Dibuje una.
   3. ¿Es posible que una recta tenga pendiente "infinita"? ¿Cómo es esta recta? Dibuje una.

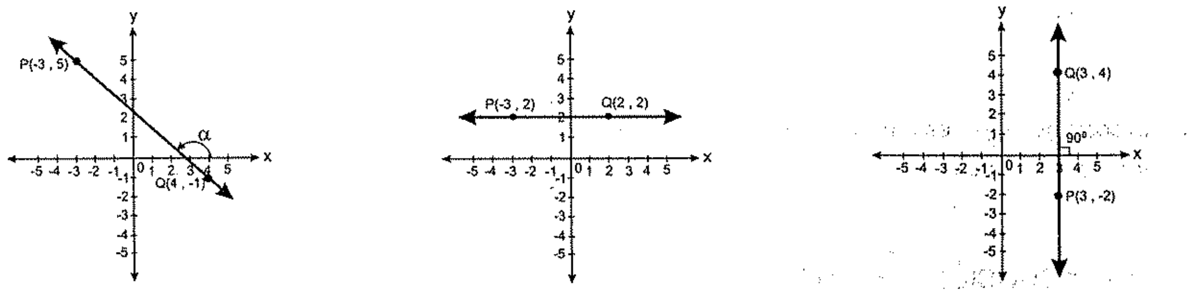
   El siguiente ejemplo nos ayudará a contestar estas preguntas:

Ejemplo

a) Dibujemos y hallemos la pendiente de la recta que pasa por los puntos P(-3, 5) y Q(4, -1).
b) Dibujemos y hallemos la pendiente de la recta que pasa por los puntos P(-3, 2) y Q(2, 2).
c) Dibujemos y hallemos la pendiente de la recta que pasa por los puntos P(3, -2) y Q(3, 4).
d) ¿Existe alguna relación entre la pendiente de la recta y el ángulo de dirección de la misma?

SOLUCIÓN

- Las tres rectas están dibujadas en la figura 10-11:



(a) $m = \dfrac{-1-5}{4-(-3)} = -\dfrac{6}{7}$

(b) $m = \dfrac{2-2}{2-(-3)} = \dfrac{0}{5} = 0$

(c) $m = \dfrac{4-(-2)}{3-3} = \dfrac{6}{0} =$ INFINITO

Figura 10-11

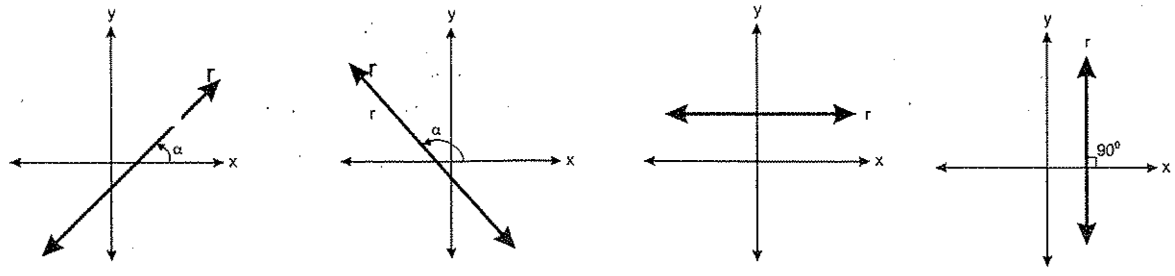
- La figura 10-11 (a) nos muestra una recta de pendiente NEGATIVA. Aparece inclinada hacia la izquierda y su ángulo de dirección α es obtuso.
- La figura 10-11 (b) nos muestra una recta de pendiente CERO. Esta recta es PARALELA AL EJE x. Su ángulo de dirección es 0°.
- La figura 10-11 (c) nos muestra una recta cuya pendiente NO EXISTE. Esta recta es PARALELA AL EJE y.
- Como puede verse, el valor de la pendiente de una recta está directamente relacionadao con el ángulo de dirección de la recta.

ÁNGULO DE DIRECCIÓN

- **Si una recta corta al eje x, llamaremos ÁNGULO DE DIRECCIÓN de la recta al ángulo α que cumple las dos condiciones siguientes:**
   - **α está formado por la recta y la parte del eje x ubicada a la derecha del punto donde la recta corta a este eje.**
   - **α es un ángulo positivo (medido en sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj) menor de 180°.**
- **Si la recta es paralela al eje x, entonces su dirección es 0°.**

ATENCIÓN

1. • Si la dirección de la recta es un ángulo agudo, entonces su pendiente es positiva; figura 10-12 (a).
   • Si la dirección de la recta es un ángulo obtuso, entonces su pendiente es negativa; figura 10-12 (b).
   • Si la recta es paralela al eje x, su pendiente es cero; figura 10-12 (c).
   • Si la recta es paralela al eje y, su pendiente no existe; figura 10-12 (d).



(a)	(b)	(c)	(d)
$0^\circ < \alpha < 90^\circ$	$90^\circ < \alpha < 180^\circ$	$\alpha = 0^\circ$	$\alpha = 90^\circ$
$m > 0$	$m < 0$	$m = 0$	m no existe

Figura 10-12

2. El cociente, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ es precisamente la **TANGENTE TRIGONOMÉTRICA** del ángulo de dirección α; por tanto, también podemos afirmar que la pendiente de una recta es **$m=\tan(\alpha)$.**

10.3.4 Ecuación de una Línea Recta

• Ya dijimos que uno de los objetivos de la Geometría Analítica es el de relacionar las propiedades geométricas de una figura (dibujo ó gráfica) con las características algebraicas (su ecuación). Pues bien, vamos a deducir la ecuación de una línea recta contenida en un plano a partir de sus propiedades geométricas. Empecemos preguntándonos, ¿qué necesitamos para dibujar una línea recta? Ayudémonos un poco:

  * Si nos dicen que una recta pasa por el punto P(3, 2) y su dirección es 45°, ¿podremos dibujar esta recta? Tratemos de hacerlo.
  * Si nos dicen que una recta pasa por los puntos P(-2, 3) y Q(4, 5), ¿podremos dibujar esta recta? Tratemos de hacerlo.

  En ambos casos, fue posible dibujar las rectas. Por lo tanto, desde el punto de vista geométrico una recta queda determinada (es decir, podemos dibujarla) si conocemos:

  * Un punto y la dirección (o la pendiente) de la recta

    ó

  * Dos puntos.

  En consecuencia, estas mismas condiciones son las que requerimos para determinar la ecuación de la recta. Analicemos cada una:

10.3.4.1 Ecuación de la forma "Punto - Pendiente" de la Recta

Experiencia

• Dibujemos la recta que pasa por el punto P(-2, 1) y cuya dirección es 60°.
• La figura 10-13 nos muestra que por el punto (-2, 1) pasan infinitas rectas, pero sólo una de ellas forma con el eje positivo x un ángulo de 60°.

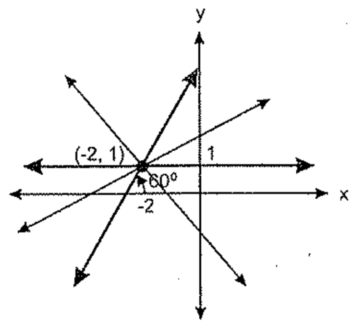


Figura 10-13

- Esto significa que es posible hallar la ecuación de esta recta cuando conocemos un punto y su dirección (o la pendiente).

- Sea P(x, y) un punto cualquiera de la recta $\overleftrightarrow{r}$, diferente del punto dado $Q(x_1, y_1)$; figura 10-14.

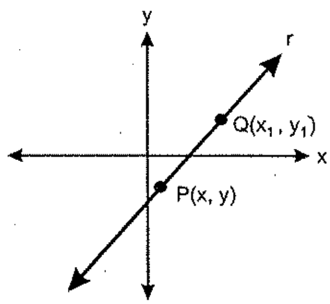


Figura 10-14

- Ahora bien, como la pendiente de una recta no depende de los puntos que se elijan, entonces:

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

$$\therefore \; y - y_1 = m\left(x - x_1\right)$$

Esta última igualdad es la ecuación de una recta cuando se conocen las coordenadas de un punto fijo (x_1 , y_1) y la pendiente **m** de la recta.

FORMA PUNTO - PENDIENTE DE UNA RECTA

TEOREMA

- **La ecuación de la recta que pasa por el punto dado Q(x1 , y1) y tiene una dirección (o pendiente) dada es:**

$$\mathbf{y - y_1 = m\,(x - x_1)}$$

- **Esta forma de la ecuación de una línea recta se llama PUNTO-PENDIENTE**

10.3.4.2 Ecuación de la Recta que pasa por dos Puntos.

Experiencia

- Uno de los axiomas fundamentales de la geometría euclidiana establece que por dos puntos distintos pasa una y sólo una recta. Esto significa que si conocemos las coordenadas de dos puntos, podemos dibujar la recta y, además, hallar su ecuación.

- Sean $\overleftrightarrow{r}$ una recta, $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ dos puntos de $\overleftrightarrow{r}$; figura 10-15.

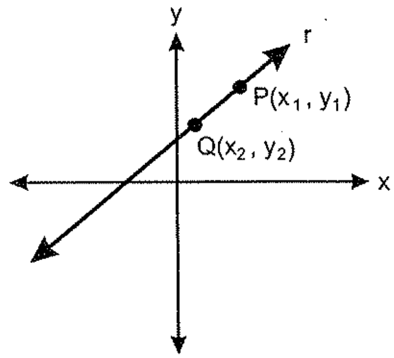


Figura 10-15

- Como conocemos dos de sus puntos, entonces su pendiente es:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\ ;\ \text{con } x_2 \neq x_1$$

Por lo tanto, con esta pendiente y uno cualquiera de los puntos, el problema se reduce a aplicar la ecuación punto - pendiente. En consecuencia, la ecuación quedará así:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

ECUACIÓN DE LA RECTA QUE PASA POR DOS PUNTOS

TEOREMA

La recta que pasa por los puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ tiene por ecuación:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

10.3.4.3 Formas Particulares de la Ecuación de una Línea Recta

- Si $\overleftrightarrow{r}$ es paralela al eje **y**, entonces todos los puntos de la recta tienen la misma abscisa. Por lo tanto, si **a** es la abscisa, entonces para todo P(x, y) de la recta se cumple que:

La ecuación de una recta PARALELA AL EJE y, y que pasa por el punto (a, 0) es x = a.

- Si $\overleftrightarrow{r}$ es paralela al eje **x**, entonces m = 0. Si, además, P(a, b) es un punto de la recta, entonces:

$y - b = 0\,(x - a)$..............................Punto - pendiente.
$\therefore y - b = 0$
$\therefore y = b$

Luego:

La ecuación de una recta PARALELA AL EJE x, que pasa por el punto (0, b) es y = b

- Si la recta no es paralela al eje **y**, entonces debe cortar a éste en algún punto. Sea este punto P(0, b). Si aplicamos la ecuación $y - y_1 = m(x - x_1)$, con $x_1 = 0$ y $y_1 = b$ entonces:

$$y - b = m(x - 0)$$
$$\therefore y - b = mx$$
$$\therefore y = mx + b$$

Luego:

La ecuación de una recta de pendiente m y que pasa por el punto (0, b) es y = mx + b

Esta ecuación se denomina comúnmente PENDIENTE - INTERCEPTO y.

- Si conocemos las coordenadas de los puntos donde la recta corta a los ejes: A(a, 0) y B(0, b), con $a \neq 0$ y $b \neq 0$, entonces la ecuación de la recta será:

$$y - 0 = \frac{b-0}{0-a}(x-a) \text{: Ecuación de la recta que pasa por dos puntos}$$

$$\therefore y = \frac{b}{-a}(x-a)$$

$$\therefore -ay = bx - ba$$

$$\therefore bx + ay = ba$$

$$\therefore \frac{\cancel{b}x}{\cancel{b}a} + \frac{\cancel{a}y}{b\cancel{a}} = \frac{ba}{ba} \quad \text{Dividimos ambos miembros por } \mathbf{ba} \text{ y simplificamos.}$$

Luego:

La ecuación de la recta que corta a los ejes coordenados en los puntos A(a, 0) y B(0, b), si $a \neq 0$ y $b \neq 0$ es $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

- Si observamos cualquiera de las formas que tiene la ecuación de una línea recta nos daremos cuenta que toda recta en el plano es la gráfica de una ecuación de PRIMER GRADO en **x** y **y.** Además, podemos demostrar el siguiente teorema:

ECUACIÓN GENERAL DE UNA LINEA RECTA

TEOREMA:

Toda ecuación de la forma $Ax + By + C = 0$, con $A \neq 0$ ó $B \neq 0$ determina una línea recta en el plano y se denomina ECUACIÓN GENERAL DE LA LÍNEA RECTA.

DEMOSTRACIÓN:

Consideremos dos casos:

CASO 1: $B \neq 0$

Si $B \neq 0$, entonces la ecuación $Ax + By + C = 0$ se convierte en:

$$\frac{A}{B}x + y + \frac{C}{B} = 0 \text{ .... Dividiendo ambos lados por B.}$$

$$\therefore y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} \text{ .... Despejamos y.}$$

Esta última ecuación es de la forma:

$$y = mx + b \text{, donde } m = -\frac{A}{B} \text{; } b = -\frac{C}{B}$$

es decir, es la ecuación de una recta con pendiente $m = -\dfrac{A}{B}$, que corta el eje **y** en el punto $\left(0, -\dfrac{C}{B}\right)$.

CASO 2: B = 0

Si B = 0 entonces $A \neq 0$ y $Ax + By + C = 0$ se convierte en:

$$Ax + C = 0 \quad \text{o} \quad x + \frac{C}{A} = 0 \quad \text{o} \quad x = -\frac{C}{A}$$

que corresponde a la ecuación de una recta paralela al eje y.

Ejemplo 1

Hallemos la ecuación de la recta que pasa por los puntos A(-5, -4) y B(8, 3).

SOLUCIÓN

- La ecuación es de la forma $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$.
- Si hacemos $(x_1, y_1) = (-5, -4)$ y $(x_2, y_2) = (8, 3)$ entonces:

$$y - (-4) = \frac{3-(-4)}{8-(-5)}(x - (-5))$$

$$\therefore\ y + 4 = \frac{7}{13}(x + 5)$$

$$\therefore\ 13y + 52 = 7(x + 5)$$

$$\therefore\ 13y + 52 = 7x + 35$$

$$\therefore\ 13y - 7x + 17 = 0$$

Ejemplo 2

Una recta pasa por el punto donde la recta $5x - 2y + 10 = 0$ corta al eje **x** y por el punto donde la recta $3x - 2y = 12$ corta al eje **y**. Hallemos la ecuación de dicha recta.

SOLUCIÓN

- Para hallar el punto donde la recta $5x - 2y + 10 = 0$ corta al eje **x**, hacemos $y = 0$ en la ecuación y despejamos **x**:

$$5x - 2(0) + 10 = 0 \Rightarrow 5x + 10 = 0\ ;\ 5x = -10\ ;\ x = -2$$

  Por lo tanto, $5x - 2y + 10 = 0$ corta al eje **x** en P(-2, 0).

- En forma similar, para hallar el punto donde la recta $3x - 2y = 12$ corta al eje **y** hacemos $x = 0$ en la ecuación y despejamos:

$$3(0) - 2y = 12 \Rightarrow -2y = 12\ ;\ y = -6$$

  Por lo tanto, $3x - 2y = 12$ corta al eje **y** en Q(0, -6).

- Luego, la recta buscada pasa por los puntos P(-2, 0) y Q(0, -6). Usando la ecuación: $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$, donde

  $a = -2$ y $b = -6$, obtenemos: $\dfrac{x}{-2} + \dfrac{x}{-6} = 1$ ó $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{6} = -1$.

Ejemplo 3

Hallemos el valor de m, de tal manera que la recta de ecuación: $2mx - 3y + m = 0$ pase por el punto $P(-2, 3)$.

SOLUCIÓN

- Si la recta pasa por $P(-2, 3)$, entonces las coordenadas de este punto deben satisfacer la igualdad. En consecuencia, sustituyendo x por -2 y y por 3 en la ecuación obtenemos:

$$2m(-2) - 3(3) + m = 0 \quad \text{o} \quad -4m - 9 + m = 0 \quad \text{o} \quad -3m = 9 \; ; \; m = -3$$

10.3.5 Rectas Paralelas y Perpendiculares

Vamos a utilizar la definición de pendiente de una recta para obtener los criterios analíticos de paralelismo y perpendicularidad de rectas.

1. CRITERIO DE PARALELISMO DE RECTAS.

Experiencia

- Dibujemos dos rectas paralelas $\overleftrightarrow{\ell_1}$ y $\overleftrightarrow{\ell_2}$ de ecuaciones $y = m_1x + b_1$ y $y = m_2x + b_2$, respectivamente; figura 10-16 (a). Estas dos rectas cortan al eje y en los puntos $P_1(0 , b_1)$ y $P_2(0 , b_2)$, respectivamente:

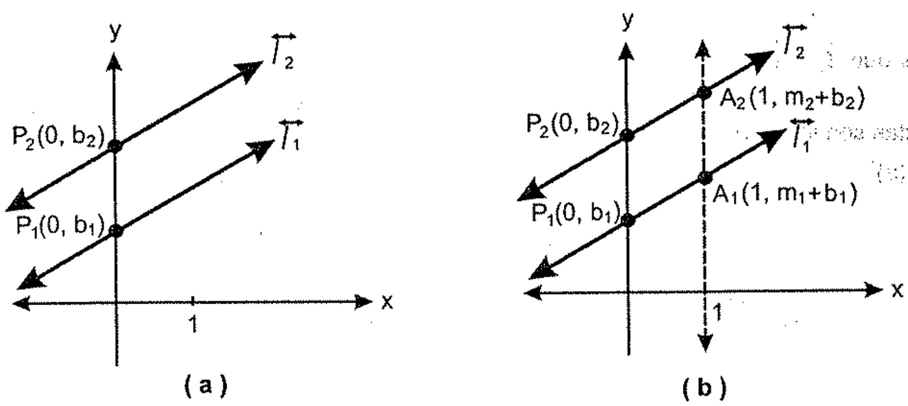


Figura 10-16

- Si trazamos la recta vertical $x = 1$, entonces ésta cortará a las rectas $\overleftrightarrow{\ell_1}$ y $\overleftrightarrow{\ell_2}$ en los puntos A_1 y A_2 (figura 10-16 (b)) cuyas coordenadas son:

$$A_1\text{: Si } x = 1, \text{ entonces } y = m_1(1) + b_1 = m_1 + b_1$$
$$A_2\text{: Si } x = 1, \text{ entonces } y = m_2(1) + b_2 = m_2 + b_2$$

Es decir, $A_1(1, m_1 + b_1)$ y $A_2(1, m_2 + b_2)$

- Como el cuadrilátero $P_1P_2A_2A_1$ es un paralelogramo (¿por qué?), entonces las distancias $|\overline{P_1P_2}|$ y $|\overline{A_1A_2}|$ son iguales. Por lo tanto:

$$|\overline{P_1P_2}| = b_2 - b_1$$

$$|\overline{A_1A_2}| = (m_2 + b_2) - (m_1 + b_1)$$

$$\therefore\ b_2 - b_1 = (m_2 + b_2) - (m_1 + b_1)$$

$$\therefore\ \cancel{b_2} - \cancel{b_1} = m_2 + \cancel{b_2} - m_1 - \cancel{b_1}$$

$$\therefore\ m_1 = m_2$$

- Recíprocamente podemos demostrar que si dos rectas $\overleftrightarrow{\ell_1}$ y $\overleftrightarrow{\ell_2}$ tienen sus pendientes iguales, entonces dichas rectas son paralelas.

- **CONCLUSIÓN**: $\overleftrightarrow{\ell_1}$ y $\overleftrightarrow{\ell_2}$ son paralelas si y sólo si $m_1 = m_2$.

CRITERIO ANALÍTICO DE PARALELISMO DE RECTAS

TEOREMA

Dos rectas $\overleftrightarrow{\ell_1}$ y $\overleftrightarrow{\ell_2}$ son paralelas si y sólo si sus pendientes m_1 y m_2 son iguales; es decir:

$$\overleftrightarrow{\ell_1} \parallel \overleftrightarrow{\ell_2} \textbf{ si y sólo si } m_1 = m_2$$

2. CRITERIO DE PERPENDICULARIDAD DE RECTAS.

Experiencia

- Supongamos que $\overleftrightarrow{\ell_1}$ y $\overleftrightarrow{\ell_2}$ son dos rectas perpendiculares cuyas pendientes m_1 y m_2 son diferentes de 0 (es decir, las rectas son inclinadas). Supongamos, además, que las rectas $\overleftrightarrow{\ell_1}$ y $\overleftrightarrow{\ell_2}$ se cortan en un punto P(r , s); figura 10-17 (a) :

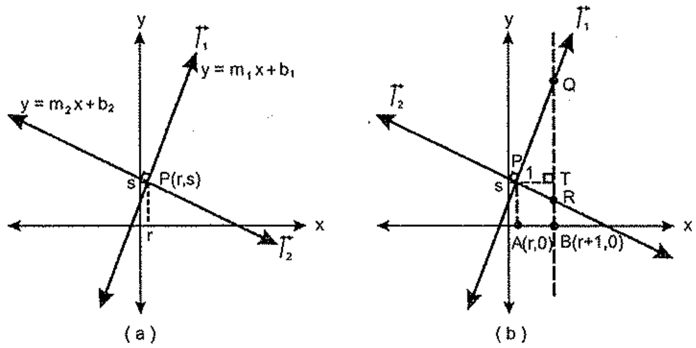


Figura 10-17

- Si por el punto de coordenadas B(r + 1, 0) trazamos una paralela al eje y, entonces esta paralela cortará a las rectas $\overleftrightarrow{\ell_1}$ y $\overleftrightarrow{\ell_2}$ en los puntos R y Q, respectivamente. Y si por el punto P(r, s) trazamos una paralela al eje x, entonces esta paralela cortará a $\overline{QR}$ en el punto T; figura 10-17(b).

- Ahora bien, si aplicamos la definición de pendiente a cada una de las rectas $\overleftrightarrow{\ell_1}$ y $\overleftrightarrow{\ell_2}$ nos queda:

$$m_1 = \frac{\text{Desplazamiento vertical}}{\text{Desplazamiento horizontal}} = \frac{\overrightarrow{TQ}}{\overrightarrow{PT}} = \frac{\overrightarrow{TQ}}{1} \Rightarrow m_1 = \overrightarrow{TQ}$$

$$m_2 = \frac{\text{Desplazamiento vertical}}{\text{Desplazamiento horizontal}} = \frac{\overrightarrow{TR}}{\overrightarrow{PT}} = \frac{\overrightarrow{TR}}{1} \Rightarrow m_2 = \overrightarrow{TR}$$

- Con esta información ya podemos encontrar las coordenadas de los puntos Q y R. La abscisa de ambos es la misma: r + 1. Las ordenadas las obtenemos a partir de la figura 10-17(b); así:

  * La ordenada de R es la distancia dirigida $\overrightarrow{BR}$:

$$\overrightarrow{BR} = \overrightarrow{BT} - \overrightarrow{RT} = \overrightarrow{BT} + \overrightarrow{TR} = s + m_2 \ldots\ldots\ldots\ldots \left(\overrightarrow{RT} = -\overrightarrow{TR}\right)$$

La ordenada de Q es la distancia dirigida $\overrightarrow{BQ}$:

$$\overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{BT} + \overrightarrow{TQ} = s + m_1$$

Por lo tanto, las coordenadas de R y Q son: $R(r + 1, s + m_2)$ y $Q(r + 1, s + m_1)$.

- Finalmente, como el ΔPQR es rectángulo en P (por ser $\overleftrightarrow{\ell_1} \perp \overleftrightarrow{\ell_2}$) entonces podemos aplicarle el Teorema de Pitágoras; así:

$$\left|\overline{QR}\right|^2 = \left|\overline{PQ}\right|^2 + \left|\overline{PR}\right|^2$$

$$\text{Pero} \begin{cases} \left|\overline{QR}\right| = \left|m_2 - m_1\right| \ldots\ldots\ldots\ldots \text{¿por qué?} \\ \left|\overline{PQ}\right| = \sqrt{1 + m_1^2} \ldots\ldots\ldots\ldots \text{¿por qué?} \\ \left|\overline{PR}\right| = \sqrt{1 + m_2^2} \ldots\ldots\ldots\ldots \text{¿por qué?} \end{cases}$$

Luego: $$\left(\left|m_2 - m_1\right|\right)^2 = \left(\sqrt{1 + m_1^2}\right)^2 + \left(\sqrt{1 + m_2^2}\right)^2$$

$$\therefore\ (m_2 - m_1)^2 = \left(1 + m_1^2\right) + \left(1 + m_2^2\right)$$

$$\therefore\ m_2^2 - 2m_1m_2 + m_1^2 = 2 + m_1^2 + m_2^2$$

$$\therefore\ -2m_1m_2 = 2$$

$$\therefore\ m_1m_2 = -1$$

- El recíproco de esta proposición también es verdadero: Enunciarlo y demostrarlo.
- **CONCLUSIÓN:** Dos rectas no verticales son perpendiculares si y sólo si el producto de sus pendientes es igual a -1.

CRITERIO ANALÍTICO DE PERPENDICULARIDAD DE RECTAS

TEOREMA

Dos rectas no verticales $\overleftrightarrow{\ell_1}$ y $\overleftrightarrow{\ell_2}$, cuyas pendientes son m_1 y m_2, respectivamente, son perpendiculares si y sólo si el producto de sus pendientes es igual a -1; es decir:

$$\overleftrightarrow{\ell_1} \perp \overleftrightarrow{\ell_2} \text{ si y sólo si } m_1 \cdot m_2 = -1$$

Ejemplo 1

Demostremos que los puntos A(1, 1), B(5, 3) y C(6, -4) son los vértices de un triángulo isósceles y que la mediana trazada sobre el lado desigual es perpendicular a éste.

SOLUCIÓN

- Dibujemos el triángulo ABC, figura 10-18:

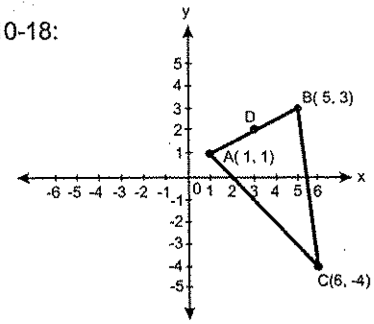


Figura 10-18

- Para probar que el ΔABC es isósceles determinamos las longitudes de sus lados y comprobamos que dos de ellas son iguales:

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(3-1)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$$

$$\left|\overline{BC}\right| = \sqrt{(6-5)^2 + (-4-3)^2} = \sqrt{1^2 + (-7)^2} = \sqrt{1+49} = \sqrt{50}$$

$$\left|\overline{AC}\right| = \sqrt{(6-1)^2 + (-4-1)^2} = \sqrt{5^2 + (-5)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50}$$

Por lo tanto, $\left|\overline{AC}\right| = \left|\overline{BC}\right|$. Luego, ΔABC es isósceles y su lado desigual (base) es $\overline{AB}$.

- Para hallar la mediana $\overline{CD}$ debemos determinar las coordenadas de D, punto medio de $\overline{AB}$.

$$\left.\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3 \\ \bar{y} &= \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \end{aligned}\right\} \therefore D(3, 2)$$

- Como queremos probar que la mediana también es altura, entonces debemos demostrar que $\overline{CD} \perp \overline{AB}$. Hallemos las pendientes de $\overline{CD}$ y $\overline{AB}$:

$$m_{\overline{CD}} = \frac{-4-2}{6-3} = \frac{-6}{3} = -2$$

$$m_{\overline{AB}} = \frac{3-1}{5-1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore m_{\overline{CD}} \cdot m_{\overline{AB}} = (-2) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = -1$$

- Luego, $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ y concluimos que la mediana trazada sobre la base del triángulo isósceles también es altura.

Ejemplo 2

En el triángulo del ejercicio anterior demostrar que el segmento que une los puntos medios de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$, mide la mitad de la longitud del lado $\overline{BC}$.

SOLUCIÓN

- El punto medio de $\overline{AB}$ es D(3, 2). Hallemos el punto medio de $\overline{AC}$ y llamémoslo E:

$$\left.\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{6+1}{2} = \frac{7}{2}\\ \bar{y} &= \frac{-4+1}{2} = -\frac{3}{2}\end{aligned}\right\} \therefore E\left(\frac{7}{2}, -\frac{3}{2}\right)$$

- Ahora, hallemos la longitud de $\overline{ED}$ utilizando la fórmula de distancia entre dos puntos:

$$\left|\overline{ED}\right| = \sqrt{\left(\frac{7}{2}-3\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}-2\right)^2}$$

$$\therefore \left|\overline{ED}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{7}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{49}{4}} = \sqrt{\frac{50}{4}} = \frac{\sqrt{50}}{2}$$

- Y como ya probamos que $\left|\overline{BC}\right| = \sqrt{50}$, entonces $\left|\overline{ED}\right| = \frac{1}{2}\left|\overline{BC}\right|$

Ejemplo 3

Hallemos la ecuación de la recta $\overleftrightarrow{\ell}$ que es perpendicular a la recta 3x - 2y + 6 = 0 y pasa por el punto donde la recta 5x + 4y = -8 corta el eje y.

SOLUCIÓN

- Como $\overleftrightarrow{\ell}$ es perpendicular a 3x - 2y + 6 = 0, entonces el producto de sus pendientes es igual a -1. Hallemos la pendiente de 3x - 2y + 6 = 0:

$$3x - 2y + 6 = 0 \;\;;\; -2y = -3x - 6 \;;\; 2y = 3x + 6 \;;\; y = \frac{3x+6}{2} \;;\; y = \frac{3x}{2} + \frac{6}{2} \;;\; y = \frac{3}{2}x + 3$$

- Como la última ecuación es de la forma y = mx + b, concluimos que su pendiente es $m = \frac{3}{2}$. Por lo tanto, la pendiente de $\overleftrightarrow{\ell}$ será $m_{\overleftrightarrow{\ell}} = -\frac{2}{3}$ (¿por qué?).

- Nos falta determinar el punto por donde pasa la recta $\overleftrightarrow{\ell}$. Este punto es donde la recta 5x + 4y = -8 corta el eje y; para obtener este punto escribamos la ecuación 5x + 4y = -8 en la forma y = mx + b, ó simplemente hagamos x = 0.

$$5x + 4y = -8 \;\;;\; 4y = -5x - 8 \;;\; y = \frac{-5x-8}{4} \;;\; y = -\frac{5x}{4} - \frac{8}{4} \;;\; y = -\frac{5}{4}x - 2$$

Por lo tanto, b = -2 y el punto de corte en el eje **y** es (0, -2).

- De esta manera, la recta buscada tiene pendiente $m = -\frac{2}{3}$ y pasa por el punto P(0, -2). Luego, su ecuación es:

$$y - (-2) = -\frac{2}{3}(x - 0) \;;\; y + 2 = -\frac{2}{3}x \;;\; \boxed{y = -\frac{2}{3}x - 2} \text{ : Ecuación pedida.}$$

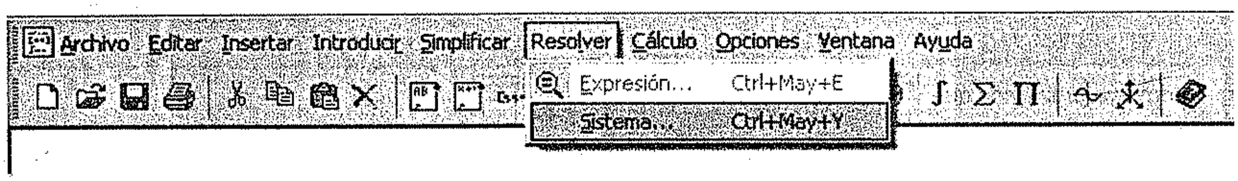
10.3.6 Un Ejercicio para Trabajar con DERIVE

- Recordemos cómo usar el DERIVE para hallar el punto de intersección de dos rectas en el plano, cuyas ecuaciones conocemos.
- Hallemos el punto de intersección de las rectas cuyas ecuaciones son

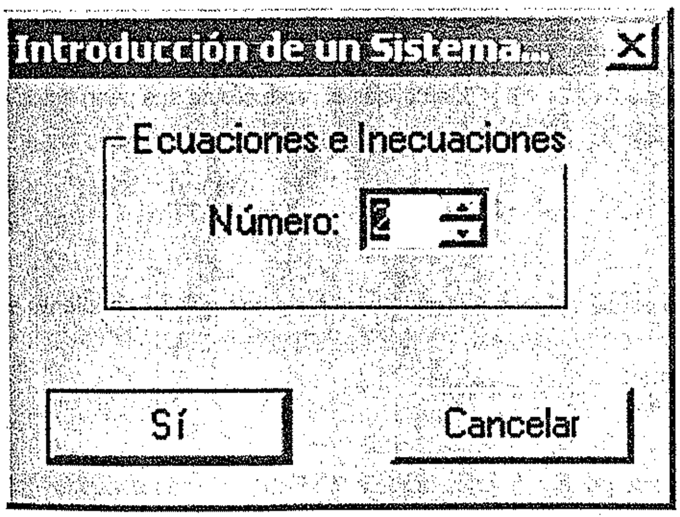
$$\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 2x + 4y = 6 \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

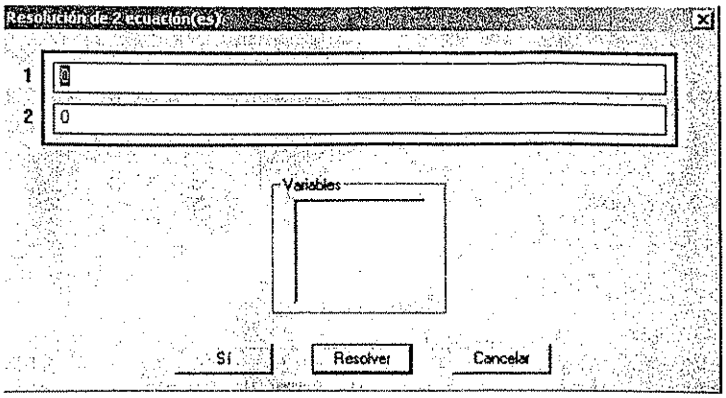
- Llevamos el puntero del mouse sobre la alternativa RESOLVER del menú de opciones y hacemos click.
- De inmediato aparecerá esta pequeña ventana:



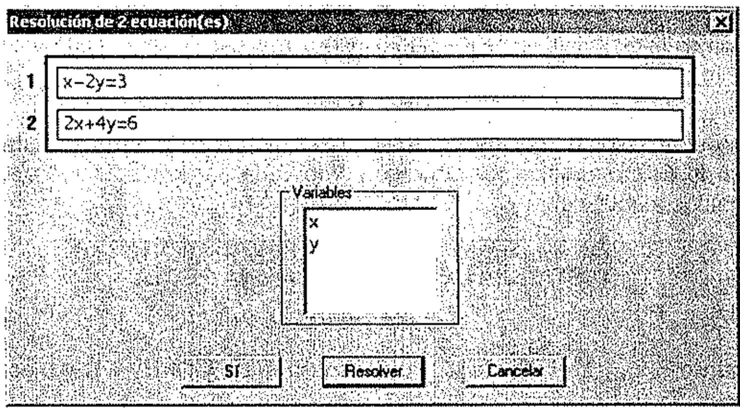
- Llevamos el puntero del mouse sobre la alternativa **SISTEMA**, hacemos **click** y aparecerá la siguiente ventana:



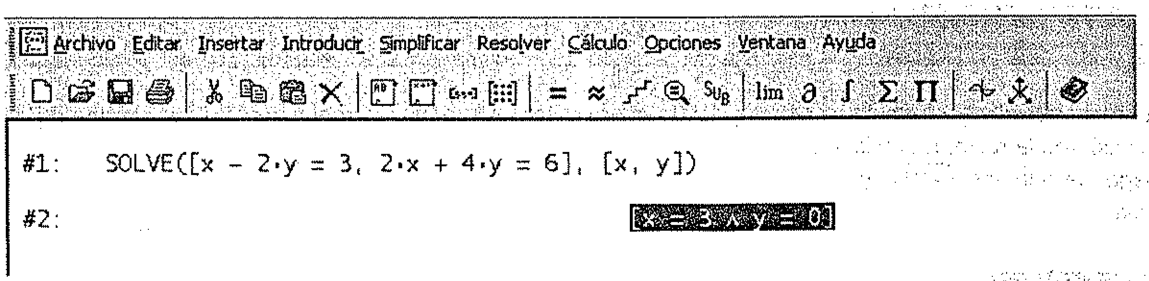
- Como el sistema tiene 2 ecuaciones, llevamos el puntero hasta el cuadro $\boxed{\text{Sí}}$ y hacemos **click** y aparecerá la siguiente ventana:



- Sobre el primer renglón escribimos la primera ecuación: x-2y=3
- Luego, sobre el segundo renglón escribimos la segunda ecuación: 2x+4y=6.
- A continuación, señalamos con el puntero del mouse las variables **x** e **y.**



- Finalmente, llevamos el puntero hasta **RESOLVER** y hacemos click. De inmediato aparecerá esta pantalla:



10.4 DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA

Experiencia

- La Geometría Euclidiana nos enseña que la distancia de un punto P a una recta $\overleftrightarrow{\ell}$ es la longitud del segmento perpendicular $\overline{PQ}$ trazado desde el punto hasta la recta; figura 10-19:

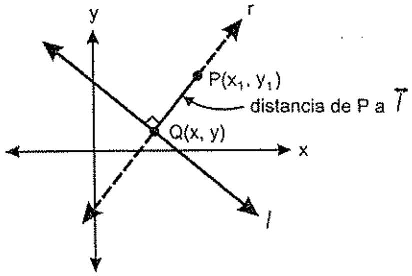


Figura 10-19

- Para determinar la distancia del punto P a la recta $\overleftrightarrow{\ell}$, debemos dar los siguientes pasos:

1) Hallamos la ecuación de la recta que pasa por $P(x_1, y_1)$ y es perpendicular a $\overleftrightarrow{\ell}$. Esta recta la llamaremos $\overleftrightarrow{r}$.
2) Encontramos el punto de intersección de $\overleftrightarrow{r}$ con $\overleftrightarrow{\ell}$, el cual llamaremos Q(x, y). Este punto se obtiene resolviendo simultáneamente el sistema de ecuaciones lineales que forman $\overleftrightarrow{r}$ y $\overleftrightarrow{\ell}$ (por igualación, sustitución ó reducción).
3) Finalmente, hallamos la distancia entre los puntos $P(x_1, y_1)$ y Q(x, y), aplicando la fórmula:

$$d = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}$$

- Teniendo en cuenta estos pasos es posible obtener una expresión para hallar la distancia de un punto a una recta. La deducción de esta expresión resulta algo complicada para estudiantes de este nivel y por ello la omitimos y nos limitamos a enunciarla:

DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA

TEOREMA

La distancia del punto $P(x_1, y_1)$ a la recta $\overleftrightarrow{\ell}$ cuya ecuación es $Ax + By + C = 0$ está dada por:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

ATENCIÓN

La utilización de esta fórmula es sencilla. En la expresión Ax + By + C, correpondiente al lado izquierdo de la ecuación de la recta, reemplazamos **x** por $\mathbf{x_1}$ y **y** por $\mathbf{y_1}$, hallamos el resultado y le aplicamos el valor absoluto. Luego, calculamos $\sqrt{A^2+B^2}$ y hallamos el cociente de los resultados obtenidos. Dicho cociente es la distancia pedida.

Ejemplo 1

Hallemos la distancia del punto P(-3, 5) a la recta cuya ecuación es 5x - 3y + 1 = 0.

SOLUCIÓN

Sabemos que: $d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$. Por tanto:

$$d = \frac{|5x_1 - 3y_1 + 1|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|5(-3) - 3(5) + 1|}{\sqrt{5^2 + (-3)^2}} = \frac{|-29|}{\sqrt{34}} = \frac{29}{\sqrt{34}}$$

Ejemplo 2

Los vértices de un triángulo son los puntos A(2, 5), B(-3, 6) y C(4, -3). Determinemos la longitud de la altura trazada desde C sobre el lado $\overline{AB}$.

SOLUCIÓN

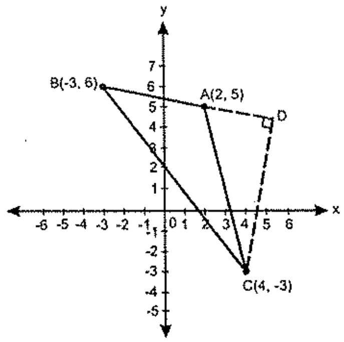


Figura 10-20

- La altura $\overline{CD}$ la hemos trazado perpendicular a la prolongación de $\overleftrightarrow{AB}$. Para calcular la longitud de $\overline{CD}$ basta encontrar la distancia del punto C a la recta $\overleftrightarrow{AB}$. Hallemos inicialmente la ecuación de $\overleftrightarrow{AB}$. Como conocemos dos de sus puntos, entonces aplicamos la ecuación: $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$; así:

$$y - 5 = \frac{6 - 5}{-3 - 2}(x - 2)$$

$$\therefore\ y - 5 = \frac{1}{-5}(x - 2)$$

$$\therefore\ -5y + 25 = x - 2$$

$$\therefore\ -5y - x + 27 = 0$$

$$\therefore\ x + 5y - 27 = 0\text{: Ecuación de } \overleftrightarrow{AB}$$

Para hallar la distancia de C(4, -3) a la recta $\overleftrightarrow{AB}$, aplicamos la fórmula:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

en la cual: $(x_1, y_1) = (4, -3)$; A = 1; B = 5; C = -27

Reemplazando obtenemos:

$$d = \frac{|1(4) + 5(-3) - 27|}{\sqrt{1 + 25}} = \frac{|4 - 15 - 27|}{\sqrt{26}} = \frac{38}{\sqrt{26}} \quad \text{(Distancia buscada)}$$

Ejemplo 3

Demostremos que las rectas $\overleftrightarrow{\ell}: 4x + 5y - 2 = 0$ y $\overleftrightarrow{r}: 8x + 10y + 15 = 0$, son paralelas y hallemos la distancia entre ellas.

SOLUCIÓN

- Para demostrar que las rectas son paralelas, hallemos sus pendientes y veamos si son iguales:

Escribamos a $\overleftrightarrow{\ell}$ en la forma y = mx + b:

$$4x + 5y - 2 = 0\ ;\ y = -\frac{4}{5}x + \frac{2}{5}\ ;\ \text{luego, } m_{\overleftrightarrow{\ell}} = -\frac{4}{5}$$

Escribamos a $\overleftrightarrow{r}$ en la forma y = mx + b.

$$8x + 10y + 15 = 0 \;;\; 10y = -8x - 15 \;;\; y = -\frac{8}{10}x - \frac{15}{10} \;;\; \text{luego,}\; m_{\overleftrightarrow{r}} = -\frac{4}{5}$$

- **CONCLUSIÓN**: $m_{\overleftrightarrow{l}} = m_{\overleftrightarrow{r}} = -\frac{4}{5}$. Luego, las rectas son paralelas; figura 10-21.

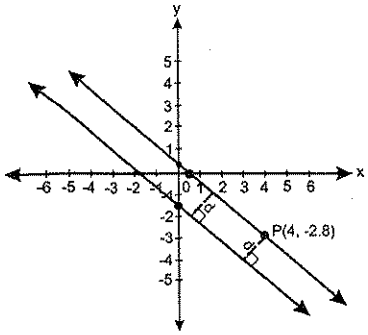


Figura 10-21

- La distancia entre $\overleftrightarrow{r}$ y $\overleftrightarrow{l}$ es la medida de cualquier segmento perpendicular trazado entre ellas. Si localizamos un punto $\overleftrightarrow{l}$ (o de $\overleftrightarrow{r}$) y hallamos su distancia a la otra recta, habremos encontrado la distancia pedida.

  * Para localizar un punto en $\overleftrightarrow{l}$ procedemos así: asignamos a **x** cualquier valor y despejamos la **y** de la expresión resultante:

    Si x=4 entonces: $4(4) + 5y - 2 = 0$

    $\therefore\; 16 + 5y - 2 = 0$

    $\therefore\; 5y + 14 = 0$

    $\therefore\; y = -\frac{14}{5} = -2.8$

    Luego, el punto es P(4, -2.8).

  * Ahora, hallemos la distancia del P (4, -2.8) a la recta r : 8x + 10y + 15 = 0

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|8(4) + 10(-28) + 15|}{\sqrt{8^2 + 10^2}} = \frac{|32 - 28 + 15|}{\sqrt{64 + 100}} = \frac{|19|}{\sqrt{164}} = \frac{19}{\sqrt{164}}$$

EJERCICIO 10.3

1. Hallar la pendiente de la recta que pasa por los puntos (-3, 2) y (7, -3).
2. Los vértices de un triángulo son los puntos (2, -2), (-1, 4) y (4, 5). Calcular las pendientes de sus lados.
3. Una recta tiene pendiente 3 y pasa por el punto (3, 2). La abscisa (x) de otro punto de la recta es 4. Hallar su ordenada (y).
4. Una recta de pendiente -2 pasa por el punto (2, 7) y por los puntos A y B. Si la ordenada de A es 3 y la abscisa de B es 6, ¿Cuál es la abscisa de A y la ordenada de B?
5. Utilizando el concepto de pendiente, probar que los puntos (6, -2), (2, 1) y (-2, 4) son colineales.

6. Hallar la ecuación de la recta:

a) Que pasa por (-4, 3) y tiene pendiente $\frac{1}{2}$.

b) Que pasa por (0, 5) y tiene pendiente -2.

c) Que pasa por (2, 0) y tiene pendiente $\frac{3}{4}$.

7. Hallar la pendiente m y el intercepto con el eje y de la recta cuya ecuación es $2y - 3x = 6$.

8. Demostrar que si las rectas $Ax + By + C = 0$ y $A'x + B'y + C' = 0$ son paralelas entonces $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}$ y que si son perpendiculares entonces $AA' + BB' = 0$.

9. Tres de los vértices de un paralelogramo son (-1, 4), (1, -1) y (6, 1). Si la ordenada del cuarto vértice es 6, ¿cuál es su abscisa?

10. Una recta $\overleftrightarrow{\ell}$ pasa por los puntos (3, 2) y (-4, -6) y otra recta $\overleftrightarrow{r}$ pasa por el punto (-7, 1) y por otro punto A cuya ordenada es -6. Hallar la abscisa de A sabiendo que las rectas son perpendiculares.

11. Demostrar que los puntos (2, 5), (8, -1) y (-2, 1) son los vértices de un triángulo rectángulo.

12. Hallar la ecuación de la mediatriz del segmento determinado por los puntos (7, 4) y (-1, -2).

13. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (2, 3) y cumple la condición siguiente:

a) Es paralela a la recta $2x + 3y - 5 = 0$.
b) Es perpendicular a la recta $4x + 5y - 20 = 0$

14. Hallar el valor de la constante k de tal manera que:

a) $3kx + 5y + k = 2$ pase por el punto (-1, 4).
b) $4x - ky - 7 = 0$ tenga pendiente 3.
c) $kx - y = 3k - 6$ corte al eje x a 5 unidades.

15. Demostrar que los puntos (2, 2) , (5, 6) , (9, 9) y (6, 5) son vértices de un rombo y que sus diagonales son perpendiculares.

16. Hallar la distancia **d** desde:

a) La recta $8x + 15y - 24 = 0$ al punto (-2, -3).

b) La recta $6x - 8y + 5 = 0$ al punto (-1, 7).

17. Hallar el valor de **k** para que la distancia **d** de la recta $8x + 15y + k = 0$ al punto (2, 3) sea igual a 5 unidades.

18. Dado el triángulo de vértices A(-2, 1), B(5, 4) y C(2, -3), hallar la longitud de la altura correspondiente al vértice A y el área del mismo.

19. Dadas las rectas $3x - y + 6 = 0$ y $2y - 6x + 1 = 0$ se pide:

a) Demostrar que son paralelas.

b) Hallar la distancia entre ellas.

20. Hallar la distancia **d** del punto de intersección de las rectas: $x + 3y - 4 = 0$, $5x - y + 6 = 0$ a la recta $4x - y - 3 = 0$.

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (32)

La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 5 m. Si hacemos rotar el triángulo alrededor de uno de los catetos obtenemos un cono circular recto. Si este cateto lo llamamos x, se pide:

1. **Hacer una interpretación geométrica del problema.**
2. **Escribir una ecuación, en términos de x, que permita calcular el volumen del cono.**

10.5.1 Ecuación Básica o Canónica

Experiencia

- Cuando estudiamos Geometría Euclidiana nos enseñaron que para dibujar una circunferencia necesitamos tres cosas:

  * Un plano (por ejemplo, una hoja de papel).
  * Un punto fijo, marcado en dicho plano.
  * Una distancia dada.

- Con estos tres datos procedemos a tomar en un compás la distancia dada y colocando la punta del compás en el punto fijo dibujamos la circunferencia. Cada uno de los puntos de la curva tienen la propiedad de EQUIDISTAR (estar a igual distancia) del punto fijo. Por esta razón:

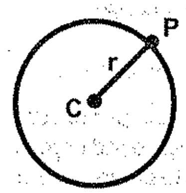
DEFINICIÓN DE CIRCUNFERENCIA

- **La CIRCUNFERENCIA es el lugar geométrico de todos los puntos de un plano que equidistan de otro punto del mismo plano llamado CENTRO.**
- **La distancia común se llama RADIO.**

  *** C es el centro.**

  *** P es un punto cualquiera de la circunferencia.**

  *** $|\overline{CP}| = r$ es el radio.**



- Por lo tanto, para determinar la ecuación de una circunferencia necesitamos: Un plano coordenado, las coordenadas del centro y la medida del radio.
- Dibujemos, en un sistema coordenado, una circunferencia de centro C(h, k) y radio R; figura 10-22.

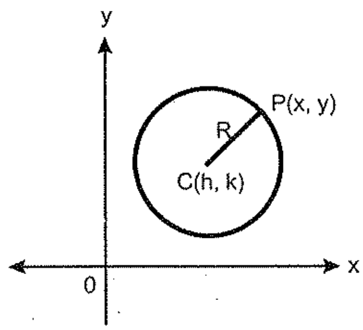


Figura 10-22

- Como la definición de circunferencia establece que la distancia del centro C a un punto cualquiera de la curva P es igual al radio R, entonces:

$|\overline{CP}| = R = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}$ .... distancia entre dos puntos

$\therefore R^2 = (x - h)^2 + (y - k)^2$ .... elevamos ambos lados de la igualdad al cuadrado.

- Si en particular, el centro de la circunferencia es el origen (0, 0) del plano coordenado, entonces la ecuación se convierte en:

  $(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = R^2$

  $\therefore x^2 + y^2 = R^2$

- Por lo tanto:

ECUACIÓN BÁSICA DE LA CIRCUNFERENCIA
• **La ecuación básica de una circunferencia con centro C(h, k) y radio R es $(x - h)^2 + (y - k)^2 = R^2$.**   • **Recíprocamente: toda ecuación de la forma $(x-h)^2 + (y-k)^2 = R^2$, donde h, k y R son números fijos y R>0, corresponde a una circunferencia de centro en (h, k) y radio R.**   • **Si el centro de la circunferencia es el punto (0, 0), entonces la ecuación se convierte en $x^2 + y^2 = R^2$.**

ATENCIÓN

En la solución de muchos problemas es necesario aplicar la siguiente propiedad de la circunferencia.

"Toda recta tangente a una circunferencia es perpendicular al radio trazado al punto de tangencia".

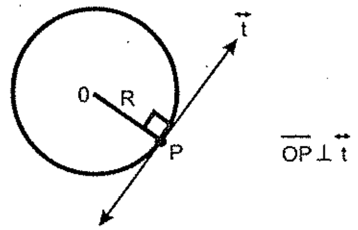


Figura 10-23

Ejemplo 1

Hallemos la ecuación de una circunferencia con centro en C(3, -2) y radio 3 unidades. Dibujemos su gráfica.

SOLUCIÓN

- La ecuación que buscamos es de la forma $(x - h)^2 + (y - k)^2 = R^2$, en la cual: h = 3, k = -2 y R = 3. Por lo tanto, reemplazando en la ecuación básica nos queda:

  $(x - 3)^2 + (y - (-2))^2 = 32$

  $\therefore (x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 9$.. Ecuación pedida.

- Para dibujar la gráfica sólo necesitamos conocer el centro y el radio que ya los tenemos. Luego, la gráfica es:

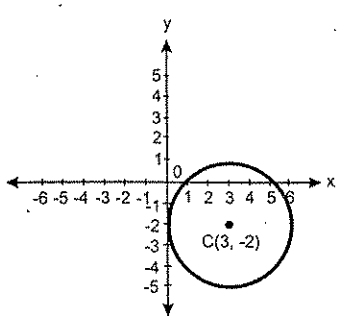


Figura 10-24

Ejemplo 2

Hallemos el centro y el radio de la circunferencia cuya ecuación básica es $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 4$

SOLUCIÓN

- Como la ecuación tiene la forma básica $(x - h)^2 + (y - k)^2 = R^2$, con $h = -3$, $k = 1$ y $R^2 = 4$, entonces el centro es el punto $C(-3, 1)$ y el radio es $R = \sqrt{4} = 2$.
- La gráfica de esta circunferencia es la siguiente; figura 10-25.

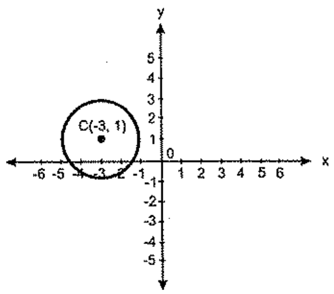


Figura 10-25

Ejemplo 3

Hallemos la ecuación de la recta tangente a una circunferencia cuyo centro es el punto C(2,-3), si el punto de tangencia es P(5, 1).

SOLUCIÓN

- Para comprender mejor el problema, dibujemos un gráfico de la situación; figura 10-26:

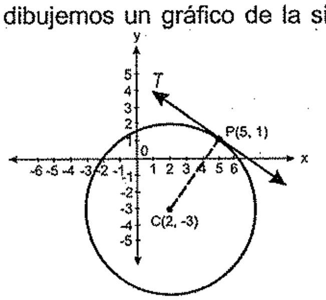


Figura 10-26

- La ecuación de la recta se obtiene conociendo un punto y la pendiente. El punto es P(5, 1) y la pendiente se halla teniendo en cuenta que el radio es perpendicular a la tangente $\overleftrightarrow{\ell}$ en el punto de tangencia. Por lo tanto:

$$m_{\overleftrightarrow{\ell}} \cdot m_{\overline{cp}} = -1$$

$$\therefore\ m_{\overleftrightarrow{\ell}} = -\frac{1}{m_{\overline{cp}}}$$

Ahora bien: $$m_{\overline{cp}} = \frac{1-(-3)}{5-2} = \frac{4}{3}$$

Luego, $$m_{\overleftrightarrow{\ell}} = -\frac{1}{\frac{4}{3}} = -\frac{3}{4}$$

- Por tanto, la ecuación de la recta es:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$\therefore\ y - 1 = -\frac{3}{4}(x-5)$$

$$\therefore\ 4y - 4 = -3x + 15$$

$\therefore\ \boxed{4y + 3x = 19}$: Esta es la ecuación de la recta tangente

10.5.2 Ecuación General de una Circunferencia

- Si desarrollamos la ecuación $(x - h)^2 + (y - k)^2 = R^2$ obtendremos otra forma de escribir la ecuación de la circunferencia denominada ECUACIÓN GENERAL DE LA CIRCUNFERENCIA. Veamos:

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = R^2$.. Ecuación dada.

$\therefore x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2 = R^2$........................ Desarrollamos los binomios.

$\therefore x^2 + y^2 \underbrace{-2h}_{D} x \underbrace{-2k}_{E} y \underbrace{+h^2 + k^2 - R^2}_{F} = 0$ .... Ordenamos términos.

- Si hacemos $D = -2h$, $E = -2k$ y $F = h^2 + k^2 - R^2$, obtenemos la ecuación:

$$\mathbf{x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

la cual se denomina ECUACIÓN GENERAL DE LA CIRCUNFERENCIA. Esta ecuación presenta unas características muy especiales que permiten identificarla. Veamos:

* La ecuación de la circunferencia es de segundo grado en las variables **x** y **y**.
* La ecuación no presenta términos en **xy**.
* Los coeficientes de $\mathbf{x^2}$ y $\mathbf{y^2}$ son iguales.

ATENCIÓN

De acuerdo con lo discutido anteriormente, toda circunferencia tiene una ecuación de la forma $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$; sin embargo, no puede garantizarse que toda ecuación de la forma $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ represente una circunferencia, porque puede ocurrir que al llevarla a la forma $(x-h)^2 + (y-k)^2 = R^2$, completando trinomios cuadrados perfectos, el valor de $R^2 = 0$ ó $R^2 < 0$; en el primer caso, el lugar geométrico sería el punto (h,k) y, en el segundo caso, sería el conjunto vacío.

Ejemplo 1

Determinemos el centro y el radio de la circunferencia cuya ecuación es: $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 39 = 0$.

SOLUCIÓN

- Debemos llevar la ecuación a la forma: $(x - h)^2 + (y - k)^2 = R^2$. Veamos cómo:
  - * Agrupamos variables:

$$(x^2 - 6x) + (y^2 + 2y) - 39 = 0$$

  - * Completamos trinomios cuadrados perfectos así: dividimos el coeficiente de **x** y el coeficiente de **y** entre DOS; elevamos cada cociente al cuadrado y lo sumamos en ambos miembros de la ecuación:

$$\left(x^2 - 6x + \left(\frac{6}{2}\right)^2\right) + \left(y^2 + 2y + \left(\frac{2}{2}\right)^2\right) - 39 = 0 + \left(\frac{6}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{2}\right)^2$$

$$\therefore (x^2 - 6x + 3^2) + (y^2 + 2y + 1^2) = 39 + 3^2 + 1^2$$
$$\therefore (x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 49$$
$$\therefore h = 3;\ k = -1;\ R = 7$$

- Por lo tanto; el centro es $C(3, -1)$ y el radio es $R = 7$.

Ejemplo 2

Analicemos si el lugar geométrico definido por la ecuación: $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 20 = 0$ es o no una circunferencia.

SOLUCIÓN

- Llevemos la ecuación a la forma $(x - h)^2 + (y - k)^2 = R^2$; así:

  * Agrupamos variables:

$$(x^2 + 4x) + (y^2 - 6y) = -20$$

  * Completamos los trinomios cuadrados perfectos en cada paréntesis, como explicamos en el ejemplo anterior:

$$(x^2 + 4x + 4) + (y^2 - 6y + 9) = -20 + 4 + 9$$

$$\therefore\ (x + 2)^2 + (y - 3)^2 = -7$$

$$\therefore\ h = -2; \quad k = 3; \quad R^2 = -7$$

  * pero, $R^2 = -7 \Rightarrow R = \sqrt{-7} \notin R$

- Por tanto, el lugar geométrico no es una circunferencia ya que el radio resultó ser un número que no es real. Luego, el lugar geométrico es el conjunto vacío.

EJERCICIO 10.4

1. Hallar las ecuaciones básica y general de la circunferencia con centro en el punto C(4, -3) y radio $r = 5$.
2. Hallar las ecuaciones básica y general de la circunferencia con centro en el punto C(-5, -12) y radio $r = 3$.
3. Hallar las ecuaciones básica y general de la circunferencia con centro en el punto C(1, 2) y que pasa por el punto P(3, -1).

En los ejercicios 4 y 5 hallar el centro y el radio de la circunferencia y dibujar su gráfica.

4. $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 9 = 0$.
5. $3x^2 + 3y^2 + 4x - 7 = 0$

En los ejercicios 6 a 8 determinar si la ecuación corresponde a una circunferencia, un punto o el conjunto vacío.

6. $x^2 + y^2 - 2x + 10y + 19 = 0$.
7. $x^2 + y^2 - 10x + 6y + 36 = 0$.
8. $36x^2 + 36y^2 - 48x + 36y - 119 = 0$.
9. Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto C(-2, 5) y es tangente a la recta $x = 7$.
10. Hallar la ecuación de la recta tangente a la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ en el punto P(5, 1).

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (33)

Un rectángulo se inscribe en una circunferencia de 4 cm de radio. Si uno de los lados del rectángulo lo llamamos x, se pide:

1. **Hacer una interpretación geométrica del problema.**
2. **Escribir una ecuación, en términos de x, que permita calcular el área del rectángulo, en términos de x.**

1. PREGUNTAS PARA REVISAR LA TEORÍA.

a) ¿Qué es un lugar geométrico plano?
b) ¿Cuáles son el problema y el método general de la geometría analítica?
c) ¿Qué diferencia hay entre la distancia dirigida y la distancia entre dos puntos? Muestre dicha diferencia con ejemplos.
d) ¿Cómo se halla la distancia dirigida de dos puntos ubicados en la línea recta?. ¿Y la distancia entre dos puntos?
e) ¿Cómo se halla la distancia entre dos puntos ubicados en el plano coordenado?
f) ¿Cómo se determinan las coordenadas del punto medio de un segmento cuando se conocen las coordenadas de los extremos?
g) ¿Cómo se determina la pendiente de una recta?
h) ¿Cuál es la pendiente de una recta paralela al eje x? ¿Y la de una recta paralela al eje y?
i) ¿Cuáles son las condiciones geométricas para determinar una línea recta?
j) ¿Cuál es la forma punto-pendiente de una línea recta?
k) ¿Cuál es la forma general de la ecuación de una línea recta?
l) ¿Cuál es la forma **pendiente-intercepto** y de la ecuación de una línea recta?
m) Si me dan una ecuación de la línea recta en la forma ax + by + c = 0, ¿cómo encuentro su pendiente y el intercepto con el eje y?
n) ¿Cuáles son las condiciones analíticas de paralelismo y perpendicularidad de rectas?
o) ¿Cuáles son las condiciones geométricas para determinar una circunferencia?
p) ¿Cuál es la forma básica de la ecuación de una circunferencia? ¿Y la forma general?
q) ¿Cuáles son las características algebraicas que nos permiten sospechar que una ecuación representa una circunferencia?
r) ¿Representa toda ecuación de la forma $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ una circunferencia? ¿Por qué?
s) ¿Cómo se convierte la ecuación general de una circunferencia en la ecuación básica?

2. SELECCIÓN ÚNICA.

En los ejercicios **2.1** a **2.10** señale la letra correspondiente a la ÚNICA respuesta correcta.

2.1 La distancia del punto A(0, -a) al punto B(0, a) es:

a) $a\sqrt{2}$ b) $2\,|a|$ c) 2a d) $2\sqrt{a}$

2.2 Si los puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ están ubicados sobre una recta paralela al eje x, entonces la distancia dirigida $\overrightarrow{PQ}$ es:

a) $|x_2 - x_1|$ b) $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ c) $x_2 - x_1$ d) $x_1 - x_2$

2.3 La pendiente de la recta 3x - y - 2 = 0 es:

a) 3 b) -3 c) $\frac{1}{3}$ d) $-\frac{1}{3}$

2.4 La ecuación 3x - 2y = 0 corresponde a:

a) El eje x
b) Una recta paralela al eje y.
c) Una recta que pasa por el origen
d) Una recta paralela al eje x

2.5 Los puntos A(-3, -2) y B(5, -2) son colineales con el punto:

a) (9, -2) b) (4, 4) c) (4, 9) d) (-9, 4)

2.6 La pendiente de una recta es $-\frac{2}{5}$. La pendiente de una recta perpendicular a ella es:

a) $\frac{3}{5}$ b) $\frac{5}{2}$ c) $-\frac{2}{5}$ d) $-\frac{5}{2}$

2.7 Los vértices de un triángulo son A(3, 11), B(-9, -5) y C(6, -10). La ecuación del lado $\overline{AB}$ es:

a) $4x - 3y + 21 = 0$ b) $4x + 3y + 21 = 0$
c) $4x - 3y - 21 = 0$ d) $3y - 4x + 21 = 0$

2.8 La ecuación de un lado de un paralelogramo es $y = 2x - 3$. La pendiente del lado opuesto es: y Porq

a) 3 b) -3 ~~c) 2~~ d) -2

2.9 El radio de la circunferencia $5x^2 + 5y^2 = 20$ es:

a) $\sqrt{20}$ b) 2 c) 4 d) $\frac{\sqrt{20}}{5}$

2.10 El centro y el radio de la circunferencia cuya ecuación es: $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$ son:

a) C(1, 1) y R = 2 b) C(1, 1) y R = 1
c) C(-1, -1) y R = 1 d) C(-1, -1) y R = 2

En los ejercicios **3.** a **6.** hallar la ecuación de la recta descrita en cada caso:

3. Pasa por el punto (3, 2) y tiene pendiente 3.

4. Pasa por los puntos A(4, 3) y B(-2, 5).

5. Tiene pendiente $-\frac{1}{2}$ y corta al eje y en el punto (0, 5).

6. Los interceptos con los ejes coordenados son (3, 0) y (0, 5).

7. Hallar la pendiente y el intercepto con el eje **y** de la recta de ecuación $x - 2y = 7$

En los ejercicios **8.** a **11.** determinar si las rectas dadas son paralelas, perpendiculares o ninguna de las dos.

8. $6x + 3y = 4$ y $2x + y = -5$

9. $8x - 2y = 5$ y $x + 4y = 15$

10. $-7x + 21y = 6$ y $6x + 2y = 7$

11. $-x + 6y = 18$ y $2x - 12y = -9$

12. Probar, utilizando pendientes, que los puntos A(-2, -10), B(1, -1) y C(2, 2) son colineales.

13. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (4, 5) y es perpendicular a la recta $7x + 6y = -3$

14. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (1, 4) y es paralela a la recta $-4x + 6y = 2$.

15. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (3, 2) y cuyos interceptos con los ejes coordenados son iguales y diferentes de cero.

16. Hallar la ecuación de la recta cuyo intercepto con el eje y es el mismo que el de la recta $2x + 5y = -25$ y cuya pendiente es el doble de la de $9x - 3y = 4$.

17. Determinar la ecuación general de la circunferencia que tiene un diámetro cuyos puntos extremos son A(-2, 3) y B(4, 5).

En los ejercicios **18.** a **20.** determinar si la ecuación del lugar geométrico es una circunferencia, un punto o el conjunto vacío.

18. $3x^2 + 3y^2 + 12x - 18y - 21 = 0$

19. $-2x^2 + 10x - 14y - 2y^2 - 37 = 0$

20. $-5x^2 + 10x - 5y^2 + 15y - 20 = 0$

Los ejercicios 21 a 27 se resuelven con base en la siguiente información: Los vértices de un ABC son los puntos A(3, 4), B(7, 0) y C(-3, -2):

21. Dibujar el ΔABC y hallar su perímetro.

22. Hallar las ecuaciones de las medianas trazadas desde los vértices A y B.

23. Hallar las coordenadas del baricentro del ΔABC.

24. Hallar las ecuaciones de las mediatrices de los lados $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$.

25. Hallar el circuncentro del ABC y la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo.

26. Hallar la ecuación de la recta tangente a la circunferencia en el vértice C.

27. Hallar el área del ΔABC.

28. Hallar las ecuaciones de las tangentes a la circunferencia $4x^2 + 4y^2 + 8x + 4y - 47 = 0$ que tengan pendiente igual a $-\frac{3}{2}$.

29. Hallar las ecuaciones de las tangentes trazadas del punto (-2, 7) a la circunferencia $x^2 + y^2 + 2x - 8y + 12 = 0$

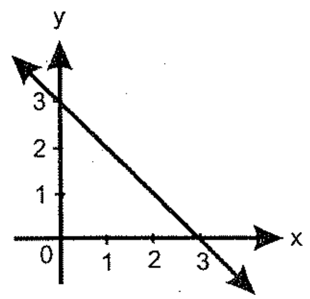
30. Hallar las ecuaciones de las tangentes a la circunferencia $x^2 + y^2 + 4x - 10y + 21 = 0$ que son paralelas a la recta $5x - 5y + 31 = 0$.

Prepárate para las Pruebas ICFES

1. En una feria, un ganadero ofrece un toro de regalo por cada 7 vacas que le compren. Si un comerciante sale con 120 cabezas de ganado, el número x de vacas que compró fue:

a) $100 < x < 105$ b) $x = 105$
c) $x = 100$ d) $90 < x < 100$

2. Para describir el movimiento de una partícula se dibujó la siguiente gráfica. Su ecuación es:

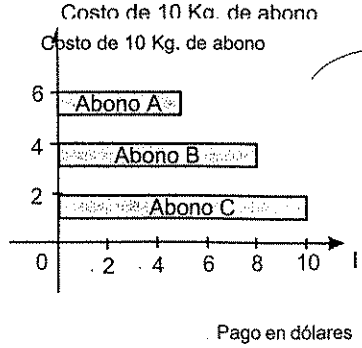


a) $y = x + 3$ b) $y = x - 3$

c) $y + 3 = -x$ d) $y = -x + 3$

Los ejercicios **3.**, **4** y **5.** se responden de acuerdo con el siguiente gráfico, en el cual el eje horizontal representa el valor pagado, en dólares, por tres tipos de abonos y el eje vertical, el costo de 10 Kg., de cada tipo de abono.

Costo de 10 Kg. de abono



3. El total de kg de abono tipo C que puede adquirirse es:

a) 20 b) 10
c) 2 d) 50

4. El costo de 1.5 Kg. de abono tipo B es:

a) U.S. \$0.6 b) U.S. \$1.2

c) U.S. \$1.5 d) U.S. \$3

5. La razón del precio de 1 Kg. de abono tipo C al precio de 1 Kg. de abono tipo B es:

a) De 1 a 5 b) De 1 a 2

c) De 5 a 1 d) De 2 a 1

Núcleo Temático

11

LA PARÁBOLA

LOGRO GENERAL

- Identificar, analizar y graficar ecuaciones de la forma $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ cuando A=0 ó C=0.

LOGROS ESPECÍFICOS	INDICADORES DE LOGRO
Corporal: • Manipular materiales como una escuadra, una cuerda, un lápiz y una hoja de papel para obtener el lugar geométrico llamado PARÁBOLA.	• Dados una recta y un punto exterior a ella y utilizando los materiales señalados, traza la curva formada por todos los puntos del plano que equidistan del punto y de la recta y la identifica como una PARÁBOLA.
Comunicativa: • Explicar qué tipo de lugar geométrico es la parábola.	• Enuncia y explica la definición de parábola como lugar geométrico.
Cognitiva: • Identificar los elementos básicos de una parábola. • Deducir ecuaciones básicas de las parábolas horizontal y vertical. • Identificar la forma general de la ecuación de una parábola. • Hallar los elementos básicos de una parábola cuya ecuación está escrita en forma general.	• Dada la gráfica de una parábola, identifica sus elementos básicos. • Deduce las ecuaciones básicas de una parábola horizontal y una parábola vertical. • Reconoce cuándo una ecuación de la forma $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ corresponde a una parábola o degeneración de ella. • Dada la ecuación general de una parábola, la lleva a la forma básica y obtiene todos los elementos claves.
Estética: • Dibujar la gráfica de una parábola, conocidos sus elementos básicos.	• Dados los elementos básicos de una parábola, dibuja su gráfica.
Etica - Actitudinal: • Adquirir la capacidad para tolerar y confrontar de manera respetuosa las posiciones que van en contravía con mi manera de pensar.	• Expresa franca y abiertamente sus puntos de vista respetando las posiciones de los demás, así no las comparta.

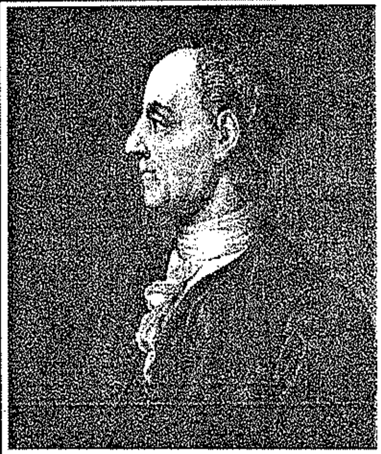
DIMENSIONES

EVALUACIÓN

ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS

11.1 COMPRENSIÓN DE LECTURA: HISTORIA DE LA TRIGONOMETRÍA (8)

Lea atentamente el siguiente texto y luego subraye la letra correspondiente a la ÚNICA respuesta correcta en cada uno de los enunciados propuestos.



LEONHARD EULER
(1709 - 1783)

El occidente latino se familiarizó con la trigonometría árabe a través de traducciones de libros de astronomía arábigos, que comenzaron a aparecer en el siglo XII. El primer trabajo importante en esta materia en Europa fue escrito por el matemático y astrónomo alemán **Johann Müller**, llamado **Regiomontano.** Durante el siguiente siglo, el también astrónomo alemán Georges Joachim, conocido como Rético, introdujo el concepto moderno de funciones trigonométricas como proporciones en vez de longitudes de ciertas líneas. El matemático francés Francois Viéte incorporó el triángulo polar en la trigonometría esférica y encontró fórmulas para expresar las funciones de ángulos múltiples, Sen(nθ) y Cos(nθ), en función de potencias de Sen(θ) y Cos(θ).

Los cálculos trigonométricos recibieron un gran empuje gracias al matemático escosés **John Napier**, quien inventó los **logaritmos** a principios del siglo XVII. También encontró reglas mnemotécnicas para resolver triángulos esféricos, y algunas proporciones (llamadas analogías de Napier) para resolver triángulos esféricos oblicuos.

Casi exactamente medio siglo después de la publicación de los logaritmos de Napier, Isaac Newton inventó el **cálculo diferencial e integral**. Uno de los fundamentos del trabajo de Newton fue la representación de muchas funciones matemáticas utilizando series infinitas de potencias de la variable x. Newton encontró la serie para el Sen(x) y series similares para el Cos(x) y la Tan(x).

Con la invención del cálculo las funciones trigonométricas fueron incorporadas al análisis, donde todavía hoy desempeñan un importante papel tanto en las matemáticas puras como en las aplicadas.

Por último, en el siglo XVIII, el matemático suizo Leonhard Euler definió las funciones trigonométricas utilizando expresiones con exponenciales de números complejos. Esto convirtió a la trigonometría en sólo una de las muchas aplicaciones de los números complejos; además, Euler demostró que las propiedades básicas de la trigonometría eran simplemente producto de la aritmética de los números complejos.

1. El texto anterior, por las características de su didáctica, puede clasificarse como:
   a. Un ensayo argumentativo.
   b. Una serie de descripciones subjetivas.
   c. Una serie de hechos y personajes.
   d. Una narración de corte científico.

2. El tema central más exacto del escrito podría ser:
   a. De la trigonometría al cálculo.

b. La aparición de las funciones trigonométricas.
c. Evolución de la trigonometría a través de las diferentes épocas.
d. La invensión de los logaritmos y sus efectos positivos en la trigonometría.

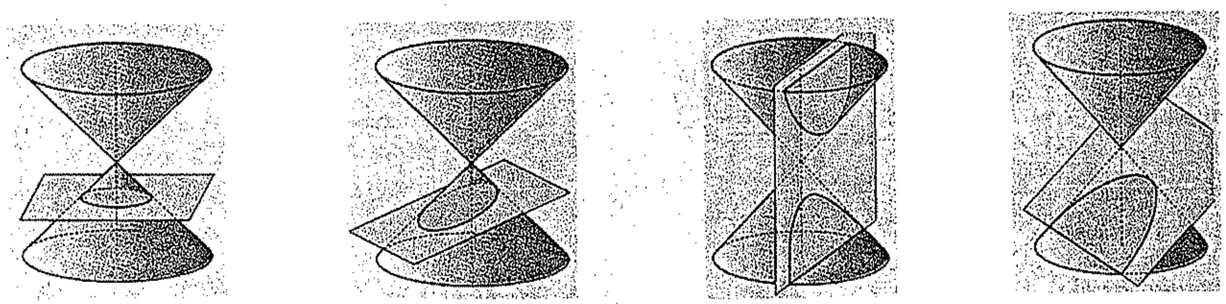
3. El autor del texto menciona científicos de los siguientes países, con excepción de:
   a. Suiza.
   b. Inglaterra.
   c. Escocia.
   d. Grecia.

4. De acuerdo con el texto, una de las siguientes afirmaciones es falsa:
   a. Científicos alemanes fueron Regiomontano y Joachim.
   b. Newton, predecesor de Napier, inventó el cálculo diferencial e integral.
   c. John Napier ideó los logaritmos y trabajó con triángulos esféricos oblicuos.
   d. Regiomontano escribió, en Europa, el primer trabajo importante sobre trigonometría.

5. El autor del texto se propone:
   a. Mostrar cómo se ha desarrollado una ciencia a través del tiempo.
   b. Resaltar la labor de los científicos alemanes.
   c. Relacionar la ciencia de los árabes con la de los europeos.
   d. Destacar la trigonometría por sobre otras ciencias matemáticas.

11.2 LAS SECCIONES CÓNICAS

- El matemático griego Apolonio de Pérgamo (360 - 300 a.C) desarrolló una investigación muy completa acerca de las secciones cónicas. Su obra, "Secciones Cónicas", incluye cerca de 400 proposiciones relacionadas con los conos. Se atribuye a Apolonio la creación de los nombres "elipse" e "hipérbola", y el haber descubierto que todas estas curvas resultan de la intersección de un cono con cierto plano, como se muestra en la figura 11-1:



CIRCUNFERENCIA
Si el plano secante es perpendicular al eje del cono

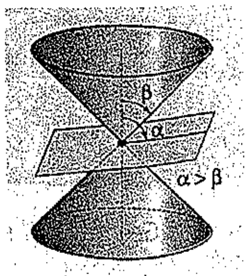
ELIPSE
Si el plano secante es oblicuo al eje y corta todas las generatrices del cono

HIPÉRBOLA
Si el plano es paralelo al eje del cono, la sección estará parte en una hoja y parte en la otra

PARÁBOLA
Si el plano secante es oblicuo al eje y paralelo a una generatriz

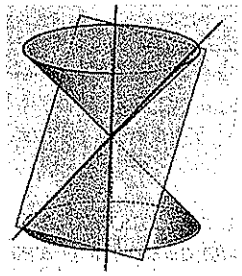
Figura 11-1

- También se puede presentar el caso en que el plano pasa por el vértice, obteniéndose en este caso un punto, dos rectas secantes o una recta, y se denominan CÓNICAS DEGENERADAS; figura 11-2:



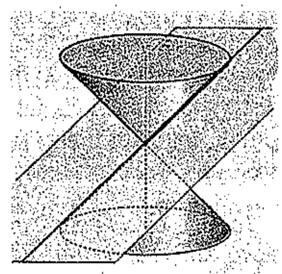
UN PUNTO

Si el ángulo que forma el plano con el eje es mayor que el formado por una generatriz.



DOS RECTAS QUE SE CORTAN

Si el ángulo que forma el plano con el eje es menor que el formado por una generatriz.



UNA RECTA

Si el ángulo que forma el plano con el eje es igual al formado por una generatriz.

Figura 11-2

- Las secciones cónicas siguen interesando, aún hoy, a los matemáticos, y su teoría la completaron esencialmente Descartes y Pascal, durante el siglo XVII.

11.3 SECCIONES CÓNICAS Y LUGARES GEOMÉTRICOS

- En el siglo XVII, J. Kepler observó la gran utilidad de las cónicas en astronomía al constatar que las trayectorias de los planetas alrededor del sol son elípticas, llegando a enunciar sus tres conocidas leyes sobre el movimiento de los planetas. El enunciado de la primera es: "Los planetas se mueven alrededor del sol siguiendo órbitas elípticas en uno de cuyos focos está el sol".

  La órbita de la tierra es una elipse tan poco achatada que es casi una circunferencia; la de Plutón, una elipse pronunciada, y la del cometa Halley, una elipse muy achatada. Los cuerpos celestes que entrando en el sistema solar no son atrapados por el sol, describen trayectorias parabólicas.

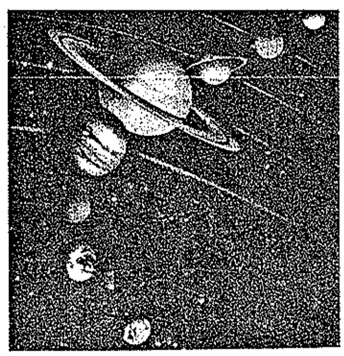


Figura 11 - 3

- La "parábola", la "elipse" y la "hipérbola" son tres ejemplos importantes de LUGARES GEOMÉTRICOS. En la unidad anterior de este texto definimos **un lugar geométrico** como **la figura formada por los puntos que cumplen determinadas propiedades geométricas y sólo por aquellos que la cumplen.** Dos ejemplos concretos de lugares geométricos son la CIRCUNFERENCIA (lugar geométrico de todos los puntos del plano que equidistan de otro punto del mismo plano llamado centro) y la MEDIATRIZ de un segmento (lugar geométrico de todos los puntos del plano que equidistan de los extremos del segmento).
- Dedicaremos esta unidad y las dos siguientes a estudiar las características y propiedades analíticas de la parábola, la elipse y la hipérbola.

11.4 LA PARÁBOLA: DEFINICIÓN, ELEMENTOS Y ECUACIÓN BÁSICA

11.4.1 Definición

Experiencia

- Para realizar esta experiencia cada alumno debe traer a clase una hoja de papel, una escuadra y una cuerda que tenga la misma longitud que uno de los catetos de la escuadra.
- Una vez con el material a la mano, hacemos lo siguiente:

  1) Fijar un extremo de la cuerda en el vértice correspondiente al ángulo no recto del cateto cuya longitud coincide con el de la cuerda y el otro extremo en un PUNTO FIJO del plano. El otro cateto de la escuadra se apoya en una RECTA FIJA, tal y como indica la figura 11 - 4.

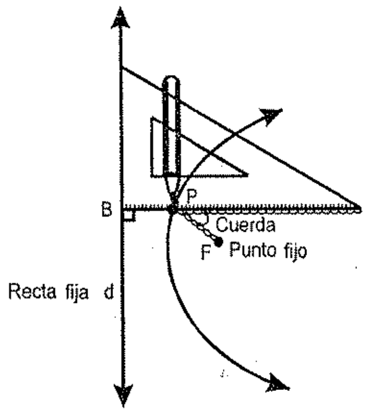


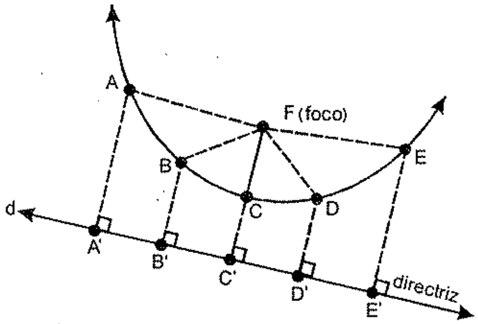
Figura 11 - 4

  2) Enseguida se desliza la escuadra a lo largo de la recta fija, al mismo tiempo que mantenemos tensa la cuerda y vamos dibujando la curva con un lápiz.
  3) Finalmente comprobamos que cada punto P de la curva dibujada cumple la condición que la distancia al punto fijo es igual a la distancia a la recta fija; es decir: $|\overline{PB}| = |\overline{PF}|$
  4) La curva dibujada se llama PARABOLA.

- Acabamos de describir la forma como se determina GEOMETRICAMENTE una PARÁBOLA. A continuación, formalizaremos la actividad realizada con la siguiente definición:

> **DEFINICIÓN**
>
> Una PARÁBOLA es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que su distancia a una recta fija, situada en el plano, es siempre igual a su distancia de un punto fijo del plano y que no pertenece a la recta.

..a figura 11 - 5, los puntos A, B, C, D y E pertenecen a la parábola ya que:



$|\overline{AF}| = |\overline{AA'}|$

$|\overline{BF}| = |\overline{BB'}|$

$|\overline{CF}| = |\overline{CC'}|$

$|\overline{DF}| = |\overline{DD'}|$

$|\overline{EF}| = |\overline{EE'}|$

Figura 11-5

11.4.2 Elementos de la Parábola

Los elementos básicos de una parábola son los siguientes:

- **FOCO:** Es el punto fijo mencionado en la definición.
- **DIRECTRIZ:** Es la recta fija mencionada en la definición.

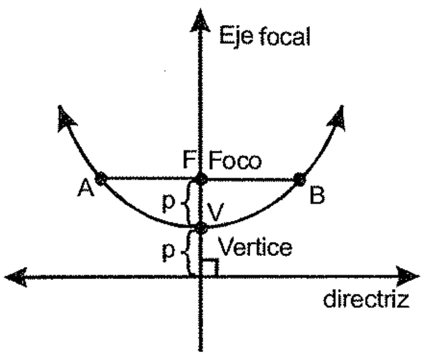
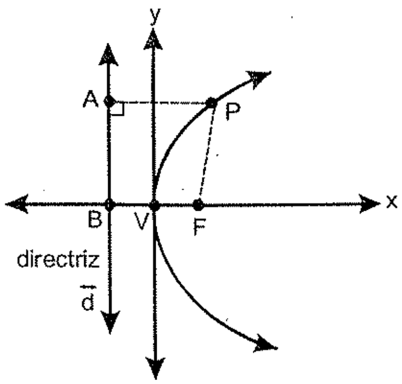


Figura 11 - 6

- **EJE FOCAL:** Es una recta que pasa por el foco y es perpendicular a la directriz.
- **VERTICE:** Es el punto V, de la figura 11 - 6, donde el eje focal corta la parábola.
- **DISTANCIA FOCAL:** Es la distancia dirigida del vértice al foco y del foco a la directriz se denota por **p**, (figura 11-6). Será utilizada más adelante al deducir la ecuación de la parábola.
- **LADO RECTO:** Es un segmento perpendicular al eje focal, que pasa por el foco F, cuyos extremos son dos puntos de la parábola. En la figura 11 - 6, el segmento $\overline{AB}$ es el lado recto.

11.4.3 Ecuación de la Parábola

- Para obtener la ecuación de una parábola, en primer lugar debemos ubicarla en un plano coordenado y, en segundo lugar, partiremos de la situación más sencilla: cuando su vértice coincide con el origen y su eje focal es uno de los ejes coordenados, por ejemplo el eje x, figura 11- 7 (a):



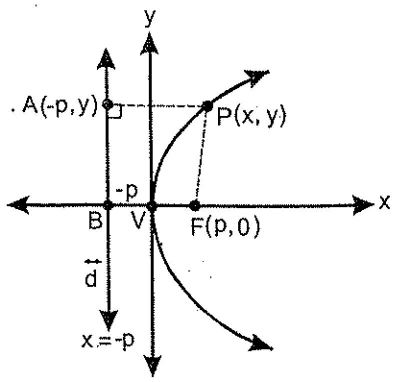


Figura 11 - 7

- A continuación, determinamos las coordenadas de los puntos P, F y A; figura 11 - 7 (b):
  - Como P es un punto de la parábola, entonces debe cumplirse que:

$$\left.\begin{array}{l} |\overline{PA}| = |\overline{PF}| \\ \overline{PA} \perp \overleftrightarrow{d} \end{array}\right\} \text{.........por definición de parábola}$$

  - Además:

$$\left.\begin{array}{l} |\overline{BF}| = |2p| \\ |\overline{BV}| = |\overline{VF}| = |p| \end{array}\right\} \text{.........¿por qué?}$$

  - Las coordenadas de P son (x,y), por ser un punto cualquiera de la curva.
  - La primera componente de A es -p (¿por qué?).
  - La segunda componente de A es y (¿por qué?).
  - Luego, las coordenadas de A son (-p, y).

- Finalmente, aplicamos la definición de parábola según la cual **la distancia de P a la directriz es igual a la distancia de P al foco;** es decir:

$$|\overline{PF}| = |\overline{PA}| \text{ .... distancia entre dos puntos}$$

$$|\overline{PF}| = \sqrt{(x-p)^2 + (y-0)^2} \text{ .... distancia entre dos puntos}$$

$$|\overline{PA}| = \sqrt{(x+p)^2 + (y-y)^2} \text{ .... por ser } |\overline{PF}| = |\overline{PA}|$$

$$\therefore \sqrt{(x-p)^2 + y^2} = \sqrt{(x+p)^2} \text{ .... ¿por qué?}$$

$$\therefore \cancel{x^2} - 2px + \cancel{p^2} + y^2 = \cancel{x^2} + 2px + \cancel{p^2} \text{ .... ¿por qué?}$$

$$\therefore y^2 = 4px$$

- Esta última ecuación corresponde a una parábola con vértice en el origen y eje focal coincidiendo con el eje x. Hemos demostrado el siguiente teorema:

> **TEOREMA**
>
> **La ecuación $y^2=4px$ corresponde a una parábola con las siguientes características:**
> - **Su eje focal coincide con el eje x.**
> - **Su vértice es el origen (0,0).**
> - **Está abierta hacia la derecha cuando $p>0$.**
> - **Las coordenadas del foco son (p,0).**
> - **La ecuación de la directriz es $x= -p$.**

ATENCIÓN

1. **Recíprocamente, podemos probar que toda ecuación, en el plano cartesiano, de la forma $y^2=4px$, con $p>0$ fijo, corresponde al lugar geométrico de los puntos (x,y) cuya distancia al punto (p,0) equidista de la recta $x= -p$.**
2. **En forma similar podemos demostrar que si una parábola tiene su vértice en (0,0), su eje x y se abre hacia la izquierda, entonces su ecuación es:**

$y^2=4p$, con $p<0$; figura 11 - 8

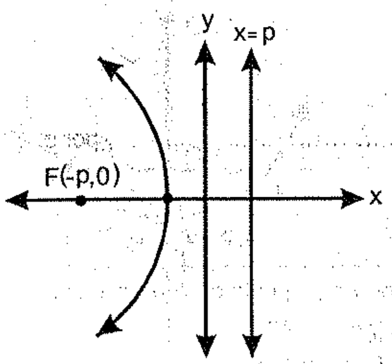


Figura 11-8

Ejemplo 1

Hallemos la ecuación de la parábola con foco en (3, 0) y directriz la recta x = -3. Dibujemos la gráfica.

SOLUCIÓN

- Según los datos del problema tenemos:

$$p = 3$$
$$V = (0, 0)$$
El eje focal es el eje x.

- Por lo tanto la ecuación es:

$$y^2 = 4px$$
$$\therefore\ y^2 = 4(3)x$$
$$\therefore\ y^2 = 12x$$

- Para dibujar la gráfica de la parábola (figura 11-9) podemos elaborar una tabla de valores:

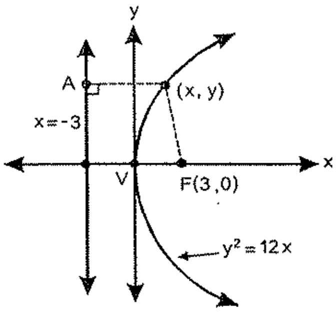


Figura 11-9

x	y
0	0
1	±3.46
2	±4.9
3	±6

Ejemplo 2

Una parábola tiene su vértice en el origen, su eje focal es el eje x y pasa por el punto (-3, 6). Hallemos su ecuación y dibujemos su gráfica.

SOLUCIÓN

- Como el vértice es (0, 0) y el eje focal es el eje x, entonces la ecuación de la parábola es de la forma:

$$y^2 = 4px \qquad \text{...(1)}$$

donde desconocemos el valor de p.

- Puesto que la parábola pasa por el punto (-3, 6) entonces sus coordenadas deben satisfacer la ecuación (1). Por lo tanto:

$$6^2 = 4p(-3)$$
$$\therefore\ p = -3$$

- Luego, la ecuación de la parábola es: $y^2 = -12x$.
- Como p es negativo, entonces la parábola aparece dibujada a la izquierda del origen; figura 11 -10.

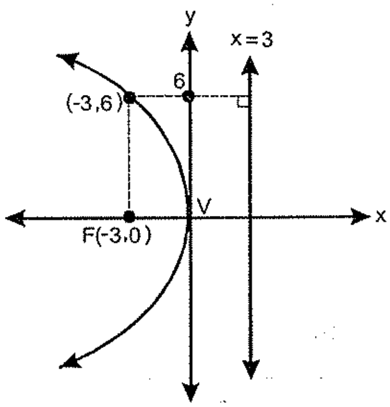


Figura 11 - 10

EJERCICIO

Demostrar que la ecuación de una parábola con vértice en el origen y eje focal el eje y es:

$$x^2 = 4py \begin{cases} \text{abierta hacia arriba si } p > 0 \\ \text{abierta hacia abajo si } p < 0 \end{cases}$$

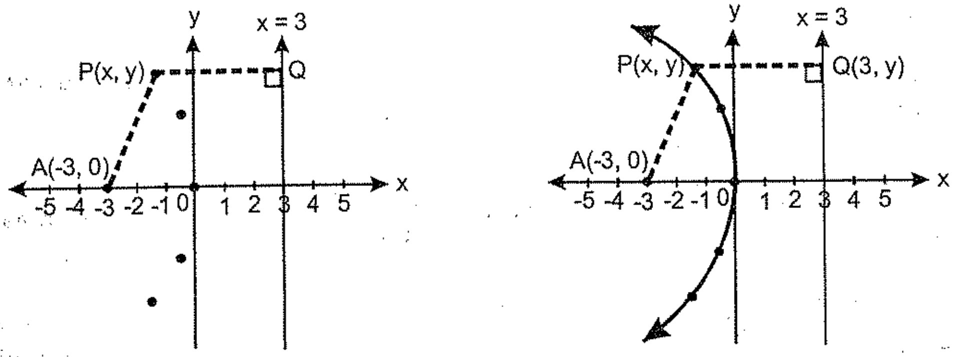
Ejemplo 3

Un punto P(x, y) se mueve en el plano de tal manera que su distancia a la recta x = 3 siempre es igual a su distancia al punto fijo A(-3, 0). Se pide:

a) Dibujar 5 puntos que cumplan esta condición.
b) Hallar la ecuación del lugar geométrico que satisface las condiciones del enunciado e identificarlo.
c) Dibujar la gráfica del lugar geométrico.

SOLUCIÓN

a) La figura 11 - 11(a) nos muestra 5 puntos típicos del lugar geométrico.



(a) (b)

Figura 11-11

b) Como la condición del problema es que la distancia del punto P a la recta x = 3 debe ser igual a la distancia al punto A, entonces:

$$\left|\overline{PA}\right| = \left|\overline{PQ}\right| \quad \text{.. (1)}$$

donde Q(3, y) (¿por qué?)

Ahora bien:

$$\left|\overline{PA}\right| = \sqrt{(x+3)^2 + y^2} \quad \text{...........................(2)}$$

$$\left|\overline{PQ}\right| = \sqrt{(x+3)^2} \quad \text{...............................(3)}$$

Reemplazando (2) y (3) en (1) nos queda:

$$\sqrt{(x+3)^2 + y^2} = \sqrt{(x-3)^2}$$

$$\therefore\ (x + 3)^2 + y^2 = (x - 3)^2$$

$$\therefore\ x^2 + 6x + 9 + y^2 = x^2 - 6x + 9$$

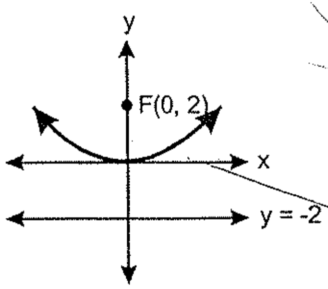
$$\therefore\ \boxed{y^2 = -12x}$$

c) La ecuación obtenida corresponde a una parábola con vértice en el origen, eje focal el eje x y orientada hacia la izquierda. La figura 11 - 11(b) nos muestra la gráfica de este lugar geométrico.

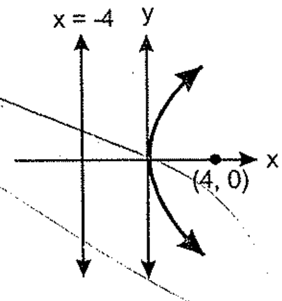
EJERCICIO 11.1

En los ejercicios 1 a 3 ,escribir la ecuación de la parábola cuya gráfica se presenta.

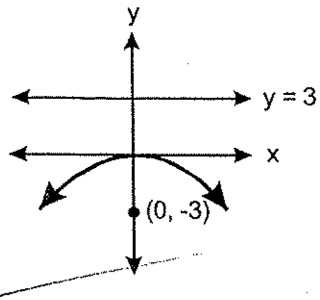
1



2



3



En los ejercicios 4 a 9 , hallar las coordenadas del foco; las ecuaciones del eje focal y de la directriz y dibujar las gráficas de las parábolas cuyas ecuaciones son:

4 $y^2 = 12x$

5 $x^2 = -16y$

6 $8x - y^2 = 0$

7 $20x + 5y^2 = 0$

8 $3x^2 + 12y = 0$

9 $7y - 28x^2 = 0$

10 Un punto P se mueve en el plano de tal manera que su distancia al punto fijo F(0, -4) es igual a su distancia a la recta y = 4. Hallar la ecuación del lugar geométrico descrito por el movimiento del punto P, identificarlo y dibujar su gráfica.

11 Un punto P se mueve en el plano de tal manera que su distancia al punto fijo F(5, 0) es igual a su distancia a la recta x = -5. Hallar la ecuación del lugar geométrico descrito por el movimiento del punto, identificarlo y dibujar su gráfica.

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (34)

Un punto P(x, y) se mueve en el plano de tal manera que siempre equidista de los extremos A(-3, 2) y B(7, 4). Se pide:

1. **Interpretar gráficamente el enunciado del problema, marcando tres puntos P que cumplan la condición del mismo.**
2. **Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico descrito por el punto P en su movimiento.**
3. **¿Cómo se llama el lugar geométrico de todos los puntos del plano que equidistan de los extremos de un segmento?.**

11.5 TRASLACIÓN DE EJES

- Muchas veces necesitamos obtener la ecuación de una parábola cuyo vértice no está en el origen y cuyo eje focal es paralelo, y no necesariamente coincidente, con uno de los ejes coordenados.
- Por tanto, vamos a considerar el caso de una parábola cuyo vértice es el punto O' (h, k) y cuyo eje focal x' es paralelo al eje x; figura 11 - 12:

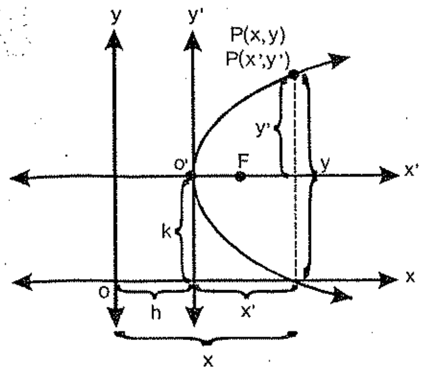


Figura 11 - 12

- Si, además, por O' trazamos el eje y' paralelo al eje y, entonces el nuevo sistema coordenado x' y' es una TRASLACIÓN del sistema original xy. Por lo tanto:

  (x, y): Coordenadas de P respecto al sistema xy.
  (x', y'): Coordenadas de P respecto al sistema x' y'.
  O'(h, k): Coordenadas del origen del sistema x' y' respecto al sistema xy

- Una observación detallada de la figura 11 - 12 y el hecho de que x, x', y, y', h, k son distancias dirigidas, nos permite escribir que:

$$\boxed{\begin{array}{l} x = x' + h \quad ó \quad x' = x - h; \\ y = y' + k \quad ó \quad y' = y - k \end{array}}$$

Estas ecuaciones se conocen con el nombre de FÓRMULAS DE TRASLACIÓN DE EJES.

- En estas condiciones, la ecuación de una parábola con vértice en (h, k) y eje focal paralelo al eje x, se obtiene así; figura 11 - 13:

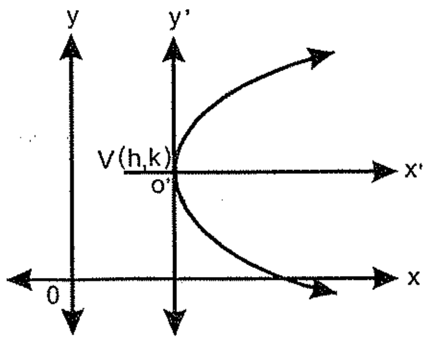


Figura 11 - 13

- En el sistema x' y', la ecuación de la parábola es : $y'^2 = 4px'$.
- Pero como nos interesa escribir la ecuación en el sistema original xy, entonces debemos aplicar las ecuaciones de traslación de ejes y reemplazarlas en la ecuación $y'^2 = 4px'$; así:

$$x' = x - h$$
$$y' = y - k$$
$$\therefore\ (y - k)^2 = 4p(x - h)$$

- El siguiente teorema nos resume todas las observaciones anteriores:

TEOREMA

- **Si se trasladan los ejes coordenados a un nuevo origen O'(h, k), y si las coordenadas de cualquier punto P antes y después de la traslación son (x, y) y (x', y') respectivamente, entonces las ecuaciones de transformación del sistema primitivo al nuevo sistema de coordenadas son:**

$$x = x' + h$$
$$y = y' + k$$

y del nuevo sistema al anterior son :

$$x' = x - h$$
$$y' = y - k$$

- **La ecuación de una parábola con eje focal paralelo al eje x, vértice en (h, k) y cuya distancia al foco es p, es:**

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

- **Si, en cambio, el eje focal es paralelo al eje y, la ecuación de la parábola es:**

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

- **Las ecuaciones $(y - k)^2 = 4p(x - h)$ y $(x - h)^2 = 4p(y - k)$ se denominan ECUACIONES BÁSICAS o CANÓNICAS de la parábola.**

Ejemplo 1

Utilicemos traslación de ejes para simplificar la ecuación:

$$y^2 - 4x - 6y + 17 = 0$$

SOLUCIÓN

- En este caso, la forma más recomendable de solución es efectuar la transformación por el método de completación a trinomio cuadrado perfecto. Observemos el procedimiento y analicemos cada paso:

$y^2 - 6y = 4x - 17$ .... ¿qué hicimos?

$\therefore\ y^2 - 6y + 9 = 4x - 17 + 9$ .... ¿por qué?

$\therefore\ (y - 3)^2 = 4x - 8$ .... ¿por qué?

$\therefore\ (y - 3)^2 = 4(x - 2)$

- Si hacemos: $y' = y - 3$ y $x' = x - 2$ nos queda: $y'^2 = 4x'$. Esta ecuación, corresponde a una parábola con vértice en el punto V(2, 3) y eje focal paralelo al eje x; figura 11 - 14.

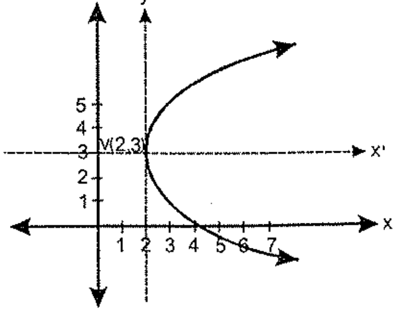


Figura 11 - 14

Ejemplo 2

El vértice de una parábola es V(-3, 4) y el foco es F(-5, 4). Hallemos la ecuación de la parábola, la ecuación de la directriz y dibujemos la curva.

SOLUCIÓN

- Los datos del problema son: V(-3, 4) y F(-5, 4). Como la segunda componente tiene el mismo valor en estos puntos (4), entonces el eje focal de la parábola es paralelo al eje x. Por tanto, su ecuación es de la forma:

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

- Hasta el momento tenemos: h = -3 y k = 4. Nos falta calcular el valor de p, el cual obtenemos haciendo la diferencia entre las primeras componentes del vértice y el foco; así:

$$p = -5 - (-3)$$
$$\therefore\ p = -5 + 3$$
$$\therefore\ p = -2$$

- Ahora reemplazamos los valores de h, k y p en la ecuación:

$$\therefore\ (y - k)^2 = 4p(x - h)$$
$$\therefore\ (y - 4)^2 = 4(-2)(x + 3)$$
$$\therefore\ (y - 4)^2 = -8(x + 3)$$

- Para hallar la ecuación de la directriz conviene dibujar primero la curva; figura 11 -15.

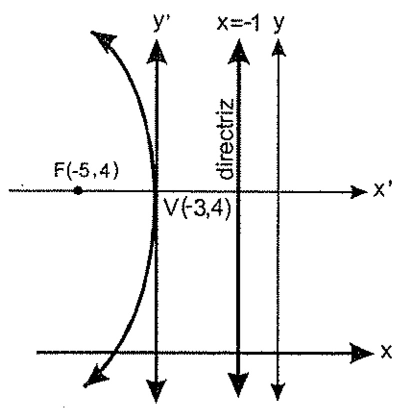


Figura 11 - 15

- Para dibujar la parábola sólo tuvimos en cuenta la posición del vértice, el foco y el hecho de que la parábola es abierta hacia la izquierda (por ser p < 0). La directriz debe estar 2 unidades a la derecha del vértice; por tanto, su ecuación es x = -1.
- Al dibujar la gráfica de la curva conviene hallar otros elementos importantes como, por ejemplo, los interceptos con los ejes.

11.6 ECUACIÓN GENERAL DE LA PARÁBOLA

- Si desarrollamos y trasponemos términos en la ecuación:

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

obtenemos:

$$\therefore\ y^2 - 2ky + k^2 = 4px - 4ph$$

$$\therefore\ y^2 \underbrace{-2k}_{D} y \underbrace{-4p}_{E} x + \underbrace{k^2 + 4ph}_{F} = 0$$

$$\therefore\ y^2 + Dy + Ex + F = 0 \text{.........................} \quad (1)$$

- Recíprocamente, completando al cuadrado en y, podemos demostrar que una ecuación de la forma (1), con $E \neq 0$, representa una parábola cuyo eje focal es paralelo al eje x.

ATENCIÓN

1. Al analizar la ecuación (1) hemos supuesto que $E \neq 0$; sin embargo, si suponemos que $E = 0$, la ecuación toma la forma:

$$y^2 + Dy + F = 0 \text{..................................} \quad (2)$$

que es una ecuación cuadrática en la única variable y. Si las soluciones de (2) son reales y distintas; por ejemplo:

$$y = c_1 \quad y \quad y = c_2$$

entonces el lugar geométrico corresponde a DOS RECTAS diferentes, paralelas al eje x. Si las soluciones de (2) son reales e iguales, el lugar geométrico consta de dos rectas coincidentes representadas geométricamente por una sola recta paralela al eje x. Finalmente, si las soluciones de (2) son complejas, no existe ningún lugar geométrico real.

2. Un análisis semejante podemos realizarle a la ecuación:

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

- Con base en toda la discusión anterior, podemos enunciar el siguiente teorema:

TEOREMA

Una ecuación de segundo grado en las variables x y y, que carezca del término xy, puede escribirse en la forma:

$$\mathbf{Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

- **Si $A = 0$, $C \neq 0$ y $D \neq 0$, la ecuación representa una parábola cuyo eje focal es paralelo al eje x o coincide con él. Si, además, $D = 0$, la ecuación representa dos rectas diferentes paralelas al eje x, dos rectas coincidentes paralelas al eje x o ningún lugar geométrico, según que las raíces de $Cy^2 + Ey + F = 0$ sean reales y distintas, reales e iguales o complejas.**
- **Si $A \neq 0$, $C = 0$ y $E \neq 0$, la ecuación representa una parábola, cuyo eje es paralelo al eje y o coincide con él. Si, además, $E = 0$, la ecuación representa dos rectas diferentes paralelas al eje y, dos rectas coincidentes paralelas al eje y o ningún lugar geométrico, según que las raíces de $Ax^2 + Dx + F = 0$ sean reales y distintas, reales e iguales o complejas.**

Ejemplo 1

Probemos que la ecuación $4x^2 - 20x - 24y + 97 = 0$ representa una parábola, hallemos las coordenadas del vértice y del foco y la ecuación de la directriz.

SOLUCIÓN

- En primer lugar, dividamos cada término de la ecuación por 4:

$$\frac{4x^2}{4}-\frac{20x}{4}-\frac{24y}{4}+\frac{97}{4}=0$$

$$\therefore\ x^2 - 5x - 6y + \frac{97}{4} = 0$$

Esta última ecuación tiene la forma de una parábola cuyo eje focal es paralelo al eje y.

- A continuación, llevemos la ecuación a la forma: $(x - h)^2 = 4p(y - k)$; así:
  - Agrupamos los términos de x a un mismo lado de la ecuación: $x^2 - 5x = 6y - \frac{97}{4}$.
  - Completamos al trinomio cuadrado perfecto el lado izquierdo de la ecuación; así:

$$x^2 - 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 6y - \frac{97}{4} + \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

$$\therefore\ \left(x-\frac{5}{2}\right)^2 = 6y-\frac{97}{4}+\frac{25}{4}$$

$$\therefore\ \left(x-\frac{5}{2}\right)^2 = 6y-\frac{72}{4}$$

$$\therefore\ \left(x-\frac{5}{2}\right)^2 = 6y-18$$

$$\therefore\ \left(x-\frac{5}{2}\right)^2 = 6(y-3)$$

- Por tanto, las coordenadas del vértice son: $\left(\frac{5}{2}, 3\right)$.
  - Como $4p = 6$, entonces $p=\frac{3}{2}$; luego, la parábola se abre hacia arriba.
  - Las coordenadas del foco son: $\left(\frac{5}{2}, 3+\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, \frac{9}{2}\right)$.
  - La ecuación de la directriz es: $y = 3-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$.

Ejemplo 2

Analicemos la relación $\{(x, y) / y^2 - 3y - 10 = 0\}$.

SOLUCIÓN

- Esta ecuación podemos escribirla así: $y^2 - 3y + 0x - 10 = 0$; por lo tanto, tiene la forma $y^2 + Dy + Ex + F = 0$, con $E = 0$.
- Para dibujar la gráfica de esta relación reemplazamos x por cualquier valor y siempre obtendremos la ecuación: $y^2 - 3y - 10 = 0$; es decir, las parejas ordenadas de esta relación tienen la forma: $(x, y^2 - 3y - 10 = 0)$.
- La solución de la ecuación $y^2 - 3y - 10 = 0$ es $y = 5$ ó $y = -2$. Por lo tanto, la relación dada está formada por dos rectas paralelas al eje x: La recta $y = 5$ y la recta $y = -2$; figura 11 - 16.

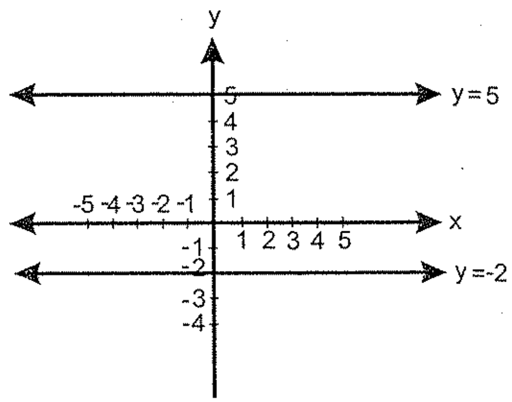


Figura 11 - 16

Ejemplo 3

Un punto P(x, y) se mueve en el plano de tal manera que su distancia a la recta y = 2 es igual a su distancia al punto fijo A(2, -2). Se pide:

a) Hallar la ecuación del lugar geométrico descrito por el movimiento del punto e identificarlo.
b) Determinar los elementos básicos del lugar geométrico.
c) Dibujar su gráfica.

SOLUCIÓN

a) En primer lugar, dibujemos un punto típico P(x, y) que cumpla con la condición del problema; figura 11 - 17(a).

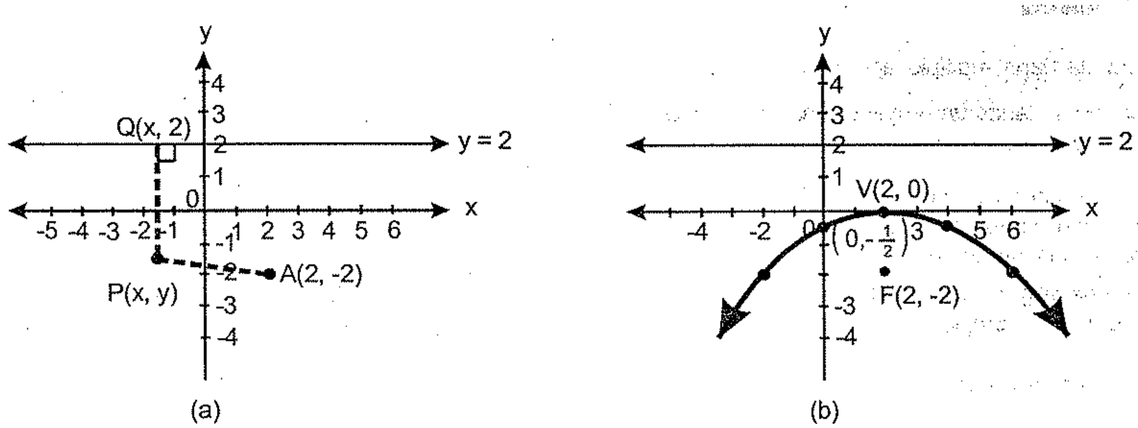


Figura 11 - 17

Como el punto P equidista del punto A(2, -2) y de la recta y = 2, entonces se cumple que:

$$\left|\overline{PA}\right| = \left|\overline{PQ}\right| \quad \text{...(1)}$$

Pero:

$$\left|\overline{PA}\right| = \sqrt{(x-2)^2+(y+2)^2} \quad \text{........................ (2)}$$

$$\left|\overline{PQ}\right| = \sqrt{(y-2)^2} \quad \text{...................................... (3)}$$

Reemplazando (2) y (3) en (1) nos queda:

$$\sqrt{(x-2)^2+(y+2)^2} = \sqrt{(y-2)^2}$$

$\therefore (x-2)^2 + (y+2)^2 = (y-2)^2$............................¿por qué?

$\therefore x^2 - 4x + 4 + \cancel{y^2} + 4y + 4 = \cancel{y^2} - 4y + 4$............... ¿por qué?

$\therefore x^2 - 4x + 8y + 4 = 0$

Esta última ecuación es de segundo grado en **x** y de primer grado en **y**. Por lo tanto, tiene forma de parábola. Analicemos si es parábola o una "degeneración" de parábola.

b) Para saber si la ecuación corresponde a una parábola o a una "degeneración" de parábola, debemos llevarla a la forma básica: En este caso $(x - h)^2 = 4p(y - k)$ (¿por qué?); así:

$x^2 - 4x + 8y + 4 = 0$.................................... Ecuación general dada.

$\therefore x^2 - 4x = -8y - 4$

$\therefore x^2 - 4x + 4 = -8y - 4 + 4$

$\therefore (x - 2)^2 = -8y$... Ecuación básica obtenida.

Tenemos, pues, una parábola vertical, con eje focal paralelo al eje y, vértice el punto V(2, 0) y distancia focal 4p = -8, p = -2. Por lo tanto, el foco se encuentra 2 unidades debajo del vértice, en el punto F(2, -2).

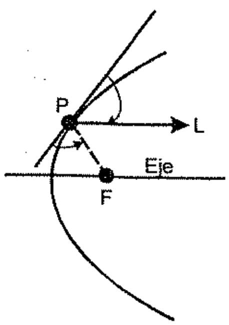
Otros elementos que nos pueden ayudar a dibujar la gráfica son los interceptos con los ejes. Te invitamos a comprobar que estos puntos son (2, 0) y $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$.

c) La gráfica de este lugar geométrico aparece dibujada en la figura 11 - 17(b).

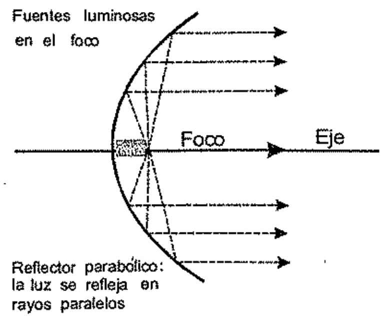
11.7 APLICACIONES DE LA PARÁBOLA

La parábola tiene múltiple aplicaciones. Veamos algunas:

- Cuando se lanza un proyectil, como una piedra o una pelota, su trayectoria es una parábola si no se consideran factores de menor importancia, como resistencia del aire y giros del proyectil sobre sí mismo.
- En la construcción de algunos puentes se emplean arcos parabólicos. Las curvas que forman los cables que sostienen ciertos puentes suspendidos son aproximadamente una parábola, siempre que la carga sobre el puente sea uniforme.
- Si se hace girar una parábola alrededor de su eje, se genera una superficie llamada PARABOLOIDE. Esta superficie se emplea en los distintos reflectores aprovechando la siguiente propiedad de la parábola: **"Si desde un punto P de la parábola trazamos el segmento $\overline{PF}$ y el vector $\overrightarrow{PL}$, paralelo al eje de la parábola, entonces $\overline{PF}$ y $\overrightarrow{PL}$ forman ángulos iguales con la tangente a la curva en el punto P"**; figura 11 - 18(a).



(a)



(b)

Figura 11-18

Esto nos indica que si se pone una fuente luminosa en F, los rayos luminosos reflejados en la superficie serán paralelos al eje de la parábola, formando así un haz cilíndrico de luz en esta dirección; figura 11-18 (b). El mismo principio se emplea a la inversa en los telescopios llamados reflectores: si el eje del espejo parabólico se dirige hacia una estrella, los rayos de la estrella después de reflejarse en el espejo, se concentrarán en el foco.

- Cuenta Plutarco que Arquímedes fue capaz de incendiar las naves de los romanos, que asediaban la ciudad de Siracusa, utilizando unos espejos móviles parabólicos llamados **ustorios** o quemantes; figura 11 - 19.

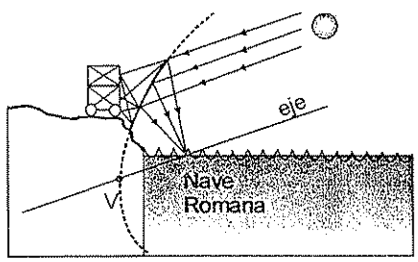


Figura 11-19

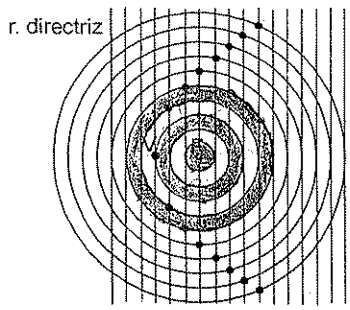


Figura 11-20

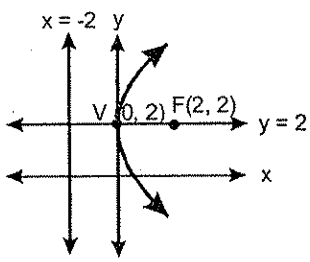
Estos espejos son superficies engendradas por el giro de una parábola alrededor de su eje.

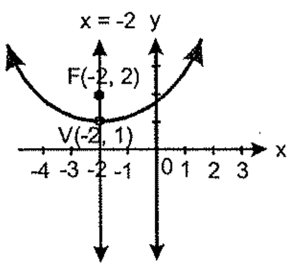
El secreto de Arquímedes fue orientar el eje hacia el sol. Cuando la nave enemiga avanza y corta el plano sol-eje, basta girar el espejo hasta que foco y nave se encuentren.

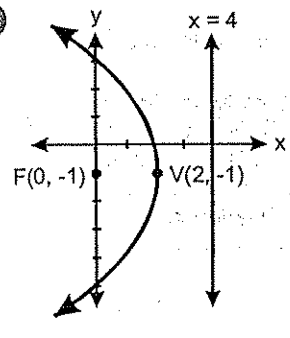
- La figura 11- 20 muestra cómo trazar una parábola utilizando circunferencias concéntricas en el foco y rectas paralelas a la directriz. Descubre cómo se hace e intenta dibujarla tú mismo.

EJERCICIO 11.2

En los ejercicios 1 a 3, escribir la ecuación básica de la parábola cuya gráfica se muestra:

1


2


3


En los ejercicios 4 a 7, hallar las coordenadas del vértice, las del foco, las ecuaciones del eje focal y de la directriz, y dibujar las gráficas de las parábolas cuyas ecuaciones son:

4 $(y - 3)^2 = 12(x + 2)$

5 $(x + 2)^2 = -16(y - 3)$

6 $(x - 1)^2 = -8y$

7 $(y + 1)^2 = 20x$

8 Hallar la ecuación y dibujar la gráfica de la parábola cuyo vértice es el punto V(-1, 5) y su foco es el punto F(-6, 5).

9. Hallar la ecuación y dibujar la gráfica de la parábola cuyo vértice es el punto V(-4, 2) y su foco es el punto F(0, 2).

En los ejercicios 10 a 13 determinar si la ecuación dada corresponde a una parábola, una recta, dos rectas o el conjunto vacío. Si es una parábola, determinar sus elementos básicos y dibujar su gráfica.

10. $4y^2 - 48x - 20y = 73$

11. $4x^2 + 48y + 12x = 153$

12. $3x^2 = 12x + 5$

13. $6y^2 + 24x = 0$

14. Un punto P(x, y) se mueve en el plano de tal manera que su distancia a la recta y = 3 es igual a su distancia al punto fijo A(1, 1). Se pide:

a) Hallar las ecuaciones general y básica del lugar geométrico descrito por el punto P en su movimiento.
b) Identificar el lugar geométrico y hallar sus elementos básicos.
c) Dibujar la gráfica del lugar geométrico obtenido.

15. Una parábola de eje focal paralelo al eje y pasa por los puntos (0, 0), (1, 0) y (3, 6). Hallar su ecuación.

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (35)

Un punto P(x, y) se mueve en el plano de tal manera que su distancia al origen es siempre igual a 5 cm. Se pide:

1. Interpretar gráficamente el enunciado del problema.
2. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico.

Taller de la Unidad 11

1. PREGUNTAS PARA REVISAR LA TEORÍA

Responder a las siguientes preguntas:

1.1 ¿Cómo se define la parábola?
1.2 ¿Cuáles son y cómo se definen los elementos básicos de una parábola?
1.3 ¿Cuál es la ecuación de una parábola horizontal cuyo vértice es el punto V(h, k)?
1.4 ¿Cuál es la ecuación de una parábola vertical cuyo vértice es el punto V(h, k)?
1.5 ¿Cuándo la ecuación $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ representa una parábola? ¿Cuándo es una degeneración de parábola?. ¿En qué degenera una parábola?.

En los ejercicios 2. a 9. , marcar una X sobre la letra correspondiente a la ÚNICA respuesta correcta.

2. La ecuación $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ representa una parábola cuando:

a) $A = 0; C, D, E, F \neq 0$ b) $A = C = 0; D, E, F \neq 0$
c) $A \cdot C > 0$ d) $A \cdot C \neq 0$

3. El vértice y el foco de la parábola $y^2 - 16x = 0$ son:

a) (0, 0) y (-4, 0) b) (0, 0) y (0, -4)
c) (0, 0) y (4, 0) d) (0, 0) y (0, 4)

4. El eje focal de la parábola $y^2 - 4y + 8x = 12$ es:

a) El eje x
b) El eje y
c) Una parábola al eje x
d) Una paralela al eje y

5. El vértice y el foco de la parábola $y^2 - 4y + 8x = 12$ son:

a) (2, 2) y (0, 2)
b) (2, 2) y (4, 2))
c) (-2, -2) y (4, 2)
d) (2, 2) y (-4, -2)

6. La ecuación de la directriz de la parábola $y^2 - 4y + 8x = 12$ es:

a) $x = 4$
b) $x = -4$
c) $x = 2$
d) $x = -2$

7. Si la parábola $y^2 = -4mx$ pasa por el punto (2, 2), el valor de m es:

a) 2
b) $\frac{1}{2}$
c) -2
d) $-\frac{1}{2}$

8. La parábola $y^2 = 20x$ está abierta hacia:

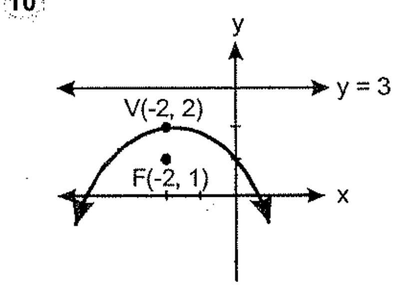
a) La derecha
b) Abajo
c) Arriba
d) La izquierda

9. El vértice y el foco de una parábola son: V(1, 8) y F(6, 8). Su eje focal es:

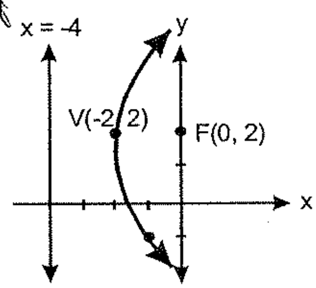
a) La recta $y = 8$
b) El eje x
c) El eje y
d) La recta $x = 8$

En los ejercicios **10.** a **12.**, escribir la ecuación de la parábola cuya gráfica se muestra.

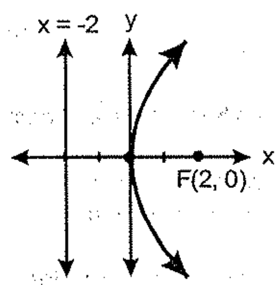
10.



11.



12.



13. Hallar la ecuación de la parábola cuyos vértice y foco son los puntos (-4, 3) y (-1, 3) respectivamente. Hallar también las ecuaciones de su directriz y de su eje focal.

14. La ecuación de un conjunto de parábolas es $y = 4x^2 + 4x + c$. Analizar cómo varía el lugar geométrico cuando c toma distintos valores (Sugerencia: Escriba la ecuación en la forma básica y argumente).

15. El vértice de una parábola es el punto (4, -1), su eje focal es la recta $y + 1 = 0$ y pasa por el punto (3, -3). Hallar su ecuación.

En los ejercicios **16.** a **18.**, escribir la ecuación dada en la forma básica, identificarla, hallar las coordenadas del vértice y del foco, hallar las ecuaciones de la directriz y el eje focal y dibujar su gráfica.

16. $y^2 + 2y - 4x + 9 = 0$
17. $x^2 + 20y - 40 = 0$
18. $3x^2 - 4x - 6y + 8 = 0$

19. Hallar, identificar, analizar y dibujar la ecuación del lugar geométrico de un punto $P(x, y)$ que se mueve de tal manera que su distancia a la recta $x + 3 = 0$ es siempre 2 unidades mayor que su distancia al punto $(1, 1)$.

20. El cable de suspensión de un puente colgante adquiere la forma de un arco de parábola. Los pilares que lo soportan tienen una altura de 60 metros y están separados a una distancia de 500 metros, quedando el punto más bajo del cable a una altura de 10 metros sobre la calzada del puente. Tomando como eje x la horizontal que define el punto y como eje y el de simetría de la parábola, hallar la ecuación de ésta. Calcular la altura de un punto situado a 80 metros del centro del puente.

Prepárate para las Pruebas ICFES

Subraye la letra correspondiente a la ÚNICA respuesta correcta en cada uno de los siguientes ejercicios:

1. A un aficionado a los rompecabezas le preguntaron cuántos años tenía. La respuesta fue: "Tomen tres veces los años que tendré dentro de tres años, réstenle tres veces los años que tenía hace tres años y resultará exactamente los años que tengo ahora". ¿Cuántos años tiene?

a) 18 b) 15 c) 21 d) 45

2. Carlos, Dora y Santiago tienen un lápiz verde, uno rojo y uno azul. Carlos no tiene el rojo y Santiago tiene el verde. ¿Cuál lápiz tiene Dora?

a) Verde b) Azul c) Rojo y azul d) Rojo

3. ¿Cuál de los siguientes números está justo en el medio entre $\frac{1}{5}$ y $\frac{13}{25}$?

a) $\frac{17}{25}$ b) $\frac{7}{15}$ c) $\frac{3}{5}$ d) $\frac{9}{25}$

4. Si $a < b < c < d < e$, siempre se cumple que:

a) $a + b + c \leq d + e$ b) $a + e < b + d$
c) $a + e < b + c + d$ d) $b + d < a + e$

5. El dígito de las unidades de la suma $3^{17} + 7^{13}$ es:

a) 1 b) 0 c) 6 d) 4

Núcleo Temático

12

LA ELIPSE

LOGRO GENERAL

- Identificar, analizar y graficar ecuaciones de la forma $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ cuando $A \cdot C > 0$ y $A \neq C$.

LOGROS ESPECÍFICOS	INDICADORES DE LOGRO
Corporal: • Manipular materiales como clavos, cuerdas y lápiz para obtener el lugar geométrico llamado ELIPSE.	• Dados dos puntos (clavos) separados una distancia dada y una cuerda de longitud mayor que la distancia entre los clavos, traza la curva cuyos puntos son tales que la suma de distancias a los dos puntos fijos es siempre constante y la identifica como una elipse.
Comunicativa: • Explicar qué tipo de lugar geométrico es la elipse.	• Enuncia y explica la definición de elipse como lugar geométrico.
Cognitiva: • Identificar los elementos básicos de una elipse. • Deducir ecuaciones básicas de las elipses horizontales y verticales. • Identificar la forma general de la ecuación de una elipse. • Hallar los elementos básicos de una elipse cuya ecuación está escrita en forma general.	• Dada la gráfica de una elipse, identifica sus elementos básicos y escribe su ecuación. • Deduce las ecuaciones básicas de una elipse horizontal y vertical. • Reconoce cuándo una ecuación de la forma $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ corresponde a una elipse o degeneración de ella. • Dada la ecuación general de una elipse, la lleva a la forma básica y obtiene todos los elementos fundamentales.
Estética: • Dibujar la gráfica de una elipse, conocidos sus elementos básicos.	• Dados los elementos básicos de una elipse, dibuja su gráfica.
Etica - Actitudinal: • Reconocer las situaciones y personas que en un momento dado contribuyen a desestabilizar el grupo.	• Asume una actitud conciliadora frente a los conflictos que puedan presentarse dentro del grupo.

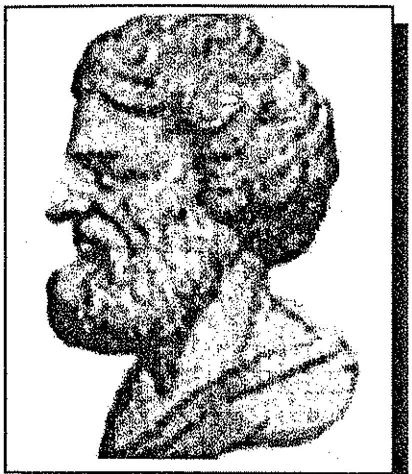
D I M E N S I O N E S

E V A L U A C I Ó N

E S T R A T E G I A S   M E T O D O L Ó G I C A S

121 COMPRENSIÓN DE LECTURA: HISTORIA DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA (1)

Lea atentamente el siguiente texto y luego subraye la letra correspondiente a la ÚNICA respuesta correcta en cada uno de los enunciados propuestos.



APOLONIO DE PERGA
(262 a.de C - 190 a de C.)

Apolonio de Perga, matemático griego, llamado el "Gran Geómetra", que vivió durante los últimos años del siglo III y principios del siglo II a. de C., nació en Perga, Panfilia (hoy Turquía). Escribió sobre cálculos aritméticos y estadística y colocó los cimientos de la geometría de posición con su *Tratado de las cónicas*, que en un principio estaba compuesto por ocho libros. Apolonio hizo también importantes contribuciones a la astronomía griega, en especial con la aplicación de modelos geométricos al movimiento de los planetas.

Mientras, Apolonio, "El gran geómetra", estuvo en Pérgamo, escribió la primera edición de su famoso libro "Secciones Cónicas", que consta de 8 libros. Los libros del 1 al 4 no contienen material original pero introducen las propiedades básicas de las cónicas que fueron conocidas por Euclides, Aristóteles y otros. Los libros del 5 al 7 son originales; en estos discute y muestra cómo muchas de las cónicas pueden ser dibujadas desde un punto. El da proposiciones determinando el centro de curvatura lo cual conduce inmediatamente a su ecuación cartesiana.

Muchos de sus otros libros están perdidos, el libro número 8 de "Secciones Cónicas" está perdido, mientras que los libros del 5 al 7 sólo existen en traducción Arábica; sin embargo son conocidos algunos de sus otros trabajos a partir de los escritos de otros personajes. Sabemos que obtuvo una aproximación de π entre $22/7<\pi<223/71$ conocido por Arquímedes.

Apolonio, considera un solo cono y hace variar la oblicuidad del plano que lo corta. De esta manera obtuvo como curva fundamental la parábola cuya ecuación es $y^2 = 2\pi x$. Las otras dos curvas las caracteriza por: $y^2<2\pi x$, que equivale a la hipérbola ("exceso").

En"On the Burning Mirror" él mostró que rayos de luz paralelos no caen a un foco en un espejo esférico (como ha sido previamente pensado) y discutió las propiedades focales de un espejo parabólico.

El fue también un importante fundador de la astronomía matemática griega, la cual usó modelos geométricos para explicar la teoría planetaria.

1. En el texto anterior el autor se propone:
   a. Dar razones que justifiquen el calificativo de "Gran Geómetra" al científico Apolonio.
   b. Informar sobre los grandes aportes hechos por Apolonio a la ciencia geométrica.
   c. Explicar la manera como se encontró el valor de π.
   d. Demostrar que la astronomía no puede desarrollarse sin la ayuda de las matemáticas.

2. De Apolonio de Perga se puede afirmar todo lo siguiente, menos:
   a. La historia lo tiene como griego pero realmente es turco.
   b. Escribió ocho libros que constituyen una especie de enciclopedia.
   c. Aún se conservan algunos de sus libros.
   d. Se tiene entre los precursores de la Astronomía matemática de los griegos.

3. El tema central más exacto del escrito es:
   a. La fundación de la astronomía matemática griega.
   b. La obtención de la parábola como curva fundamental.
   c. La importancia de Apolonio en el campo de las ciencias matemáticas.
   d. La actividad creadora de los científicos griegos.

4. De la lectura anterior se puede inferir que:
   a. Apolonio era un hombre aficionado a la Astronomía.
   b. La Astronomía no se hubiera desarrollado sin la ayuda de Apolonio.
   c. La verdadera pasión de Apolonio fue la geometría.
   d. Euclides, Aristóteles y otros se basaron en Apolonio.

5. Parece que algunos de los trabajos de Apolonio fueron conocidos por los siguientes científicos, menos por:
   a. Arquímedes.
   b. Tolomeo.
   c. Euclides.
   d. Aristóteles.

12.2 EL CONCEPTO DE ELIPSE

Experiencia

- Para realizar esta experiencia necesitamos dos clavos grandes, una cuerda de unos 30 cm de longitud y un lápiz o una tiza.
- Fijamos en el piso los dos clavos separados entre sí unos 12 ó 15 cms.
- A continuación, amarramos los extremos de la cuerda a los dos clavos y deslizamos el lápiz o la tiza al mismo tiempo que mantenemos tensa la cuerda tal y como indica la figura 12 - 1.

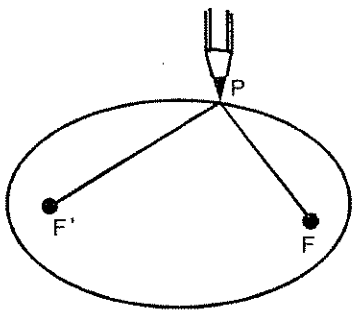


Figura 12-1

- Finalmente, marcamos un punto P cualquiera sobre la curva dibujada, lo unimos a los clavos F y F', medimos las distancias $\overline{PF}$ y $\overline{PF'}$, las sumamos y anotamos el resultado. Esta operación se repite para otros puntos de la curva y se sacan conclusiones.
- La curva dibujada al realizar la actividad anterior se denomina ELIPSE.

DEFINICIÓN

- **Una ELIPSE es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que la suma de sus distancias a dos puntos fijos de ese plano es siempre igual a una constante y mayor que la distancia entre los dos puntos.**
- **Convendremos en representar la constante por 2a.**

- Ahora observemos la figura 12-2:

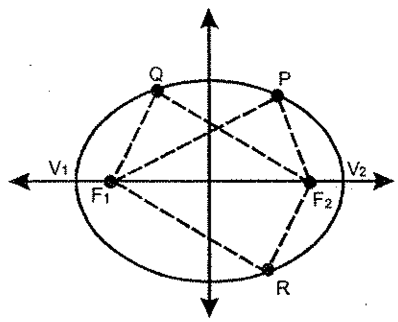


Figura 12-2

Comprobemos que se cumple:

$$\left|\overline{PF_1}\right| + \left|\overline{PF_2}\right| = \left|\overline{QF_1}\right| + \left|\overline{QF_2}\right| = \left|\overline{RF_1}\right| + \left|\overline{RF_2}\right| = \text{Constante}$$

12.2.1 Elementos de la Elipse

- La figura 12 - 3 nos muestra los elementos básicos de la elipse:

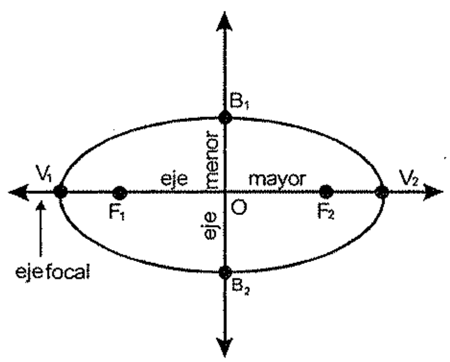


Figura 12 - 3

1. **Focos:** Son los puntos fijos F_1 y F_2.
2. **Eje focal:** Es la recta que pasa por los focos de la elipse.
3. **Vértices:** Son los puntos V_1 y V_2 donde la elipse corta al eje focal.
4. **Eje mayor:** Es el segmento cuyos extremos son V_1 y V_2. De acuerdo con la definición de elipse se cumple que $\left|\overline{V_1V_2}\right| = 2a$.

5. **Centro:** Es el punto medio de $\overline{V_1V_2}$ y también punto medio de $\overline{F_1F_2}$. Lo denotamos por O.

6. **Eje menor:** Es el segmento $\overline{B_1B_2}$ perpendicular al eje mayor y que pasa por el centro.

7. **Distancia focal:** Es la distancia entre los dos focos y se designa por 2c; es decir: $\left|\overline{F_1F_2}\right| = 2c$.

12.2.2 Ecuación de la Elipse

- Para deducir la ecuación de la elipse trazamos un sistema de coordenadas en el plano de la curva de modo que el origen coincida con el centro y el eje focal coincida con uno de los ejes coordenados (por ejemplo, con el eje x). Por lo tanto, las coordenadas de los focos serán $F_1(-c, 0)$ y $F_2(c, 0)$; figura 12-4.

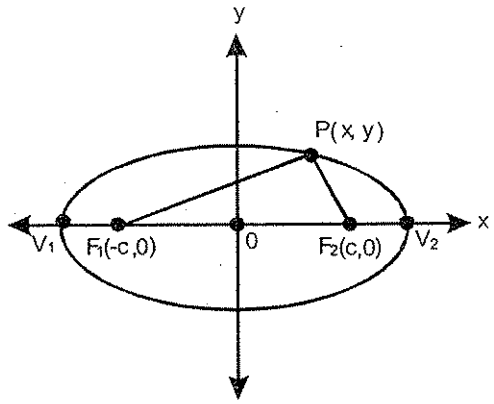


Figura 12-4

DEDUCCIÓN

- Si P(x, y) es un punto cualquiera de la elipse y aplicamos la definición nos queda:

$$\left|\overline{PF_1}\right| + \left|\overline{PF_2}\right| = 2a \quad \text{.......................} (1)$$

en donde **a** es una constante positiva mayor que **c**.

- Ahora bien:

$$\left.\begin{aligned}\left|\overline{PF_1}\right| &= \sqrt{(x+c)^2+y^2}\\ \left|\overline{PF_2}\right| &= \sqrt{(x-c)^2+y^2}\end{aligned}\right\} \quad \text{.......................} (2)$$

- Por lo tanto; reemplazando (2) en (1) queda (invitamos al lector a analizar con cuidado cada uno de los pasos siguientes y justificarlos):

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a$$

$$\therefore \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$\therefore (x+c)^2 + \cancel{y^2} = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2 + \cancel{y^2}$$

$$\therefore x^2 + 2cx + \cancel{c^2} = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + x^2 - 2xc + \cancel{c^2}$$

$$\therefore \quad 4cx - 4a^2 = -4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\therefore \quad cx - a^2 = -a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\therefore \quad \left(cx - a^2\right)^2 = \left(-a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2$$

$$\therefore \quad c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2\left(c^2 - 2cx + x^2 + y^2\right)$$

$$\therefore \quad c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2c^2 - 2a^2cx + a^2x^2 + a^2y^2$$

$$\therefore \quad a^4 - a^2c^2 = a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2$$

$$\therefore \quad a^2\left(a^2 - c^2\right) = x^2\left(a^2 - c^2\right) + a^2y^2$$

- Dividiendo ambos miembros de esta última ecuación por $a^2\left(a^2 - c^2\right)$, obtenemos:

$$1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} \quad \text{.......................................(3)}$$

Además, en la figura 12 - 5 podemos observar que: $a^2 = b^2 + c^2$. Por tanto:

$$a^2 - c^2 = b^2 \quad \text{....................................... (4)}$$

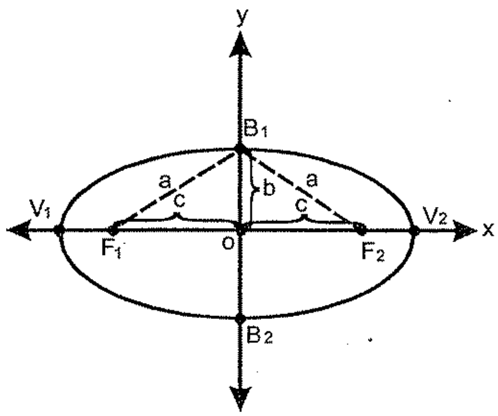


Figura 12 - 5

Reemplazando (4) en (3) nos queda finalmente:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{.......................................(5)}$$

- De esta manera, hemos demostrado el siguiente teorema:

TEOREMA

La ecuación de una ELIPSE cuyos focos son $F_1(-c\,,\,0)$ y $F_2(c\,,\,0)$ y en la cual 2a es la suma de las distancias de un punto cualquiera P de la elipse a los focos es:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

donde b es un número positivo tal que: $b^2=a^2-c^2$.

- En forma similar podemos demostrar que si los focos de la elipse son los puntos $F_1(0\,,-c)$ y $F_2(0\,,c)$; es decir, el eje focal coincide con el eje y, entonces la ecuación es:

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \quad \text{...} \quad (6)$$

donde b es un número positivo tal que: $b^2=a^2-c^2$; figura 12 - 6.

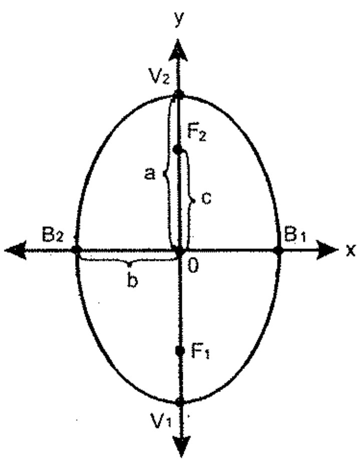


Figura 12 - 6

PREGUNTA: ¿Qué diferencia fundamental existe entre la ecuación de una elipse horizontal (ecuación (5)) y la de una elipse vertical (ecuación (6))?

- Compara la respuesta que has dado a la pregunta con las siguientes observaciones:

ATENCIÓN

1. Tanto en la ecuación $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ como en la ecuación $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ intervienen las cantidades a, b y c que representan:
   - **a** la distancia del centro al vértice.
   - **b** la distancia del centro al extremo del eje menor.
   - **c** la distancia del centro al foco.

2. El valor de **a** siempre es mayor que el valor de **b**.
3. Si escribimos la ecuación en la forma:

$$\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}=1, \text{ con A y B positivos} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

tenemos:

- Si A = B, representa una circunferencia.
- Si A>B, representa una elipse horizontal.
- Si A<B, representa una elipse vertical.

4. El que una elipse sea vertical u horizontal depende de cual denominador es mayor cuando la ecuación se escribe en la forma de la ecuación (7) (ecuación básica de la elipse con centro en el origen).
5. Recíprocamente, se puede probar que toda ecuación de la forma $\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}=1$, con A y B positivos y diferentes, representa una elipse o describe una elipse.

Ejemplo 1

Dada la ecuación $16x^2 + 25y^2 = 400$, encontremos:

a) Las coordenadas de los vértices.
b) Las coordenadas de los extremos del eje menor.
c) Las coordenadas de los focos.
d) Dibujemos la gráfica.

SOLUCION:

- Escribamos la ecuación en la forma básica $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ó $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$. Para lograrlo, dividimos la ecuación por 400:

$$\frac{16x^2}{400}+\frac{25y^2}{400}=\frac{400}{400}$$

$$\therefore\ \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$$

- Esta ecuación corresponde a una elipse horizontal porque al escribirla en la forma básica, el mayor denominador correspondió a la variable x. Por lo tanto:

$$a^2=25 \Rightarrow a=5$$

$$b^2=16 \Rightarrow b=4$$

$$\therefore\ c^2=25-16 \Rightarrow c=3$$

- Luego, $V_1(-5, 0)$ y $V_2(5, 0)$ son los vértices.
  $B_1(0, 4)$ y $B_2(0, -4)$ son los extremos del semieje menor.
  $F_1(-3, 0)$ y $F_2(3, 0)$ son los focos.

- La gráfica es la de una elipse con centro en el origen y focos sobre el eje x; figura 12- 7:

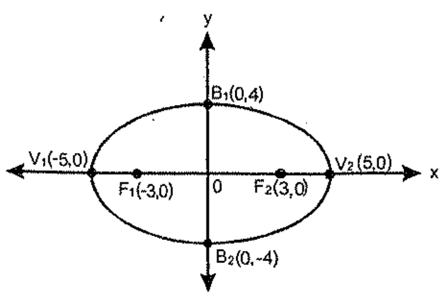


Figura 12 - 7

Ejemplo 2

Encontremos la ecuación de una elipse centrada en el origen, cuyos focos son los puntos $F_1(-4, 0)$ y $F_2(4, 0)$ y vértices los puntos $V_1(-6, 0)$ y $V_2(6, 0)$.

SOLUCIÓN

- De acuerdo con los datos del problema: a = 6 y c = 4. Hallemos el valor de b:

$$b^2 = a^2 - c^2$$

$$\therefore\ b^2 = 36 - 16 = 20$$

$$\therefore\ b = 2\sqrt{5}$$

- Si a = 6 y b = $2\sqrt{5}$, entonces la ecuación es: $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$.

Ejemplo 3

Un punto P(x, y) se mueve en el plano de tal manera que su distancia al punto fijo A(-4, 0) es igual a dos tercios de su distancia a la recta x = -9. Hallar la ecuación del lugar geométrico descrito por el movimiento del punto, identificarlo, hallar sus elementos fundamentales y dibujar su gráfica.

SOLUCIÓN

- La figura 12 - 8 describe el enunciado del problema y nos muestra un punto P(x, y) típico del lugar geométrico.

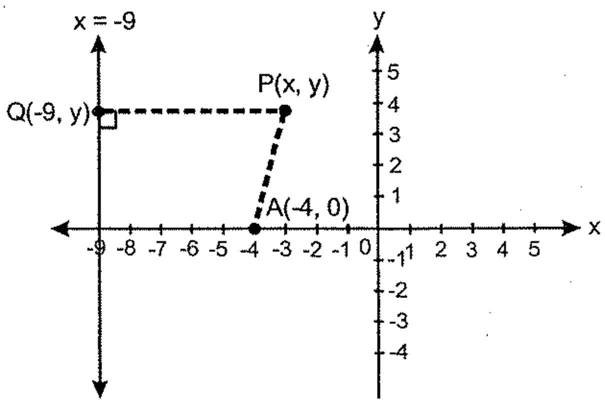


Figura 12 - 8

- De acuerdo con el enunciado del problema, el punto P se mueve de tal manera que su distancia al punto A es $\frac{2}{3}$ de su distancia a la recta x = -9. Como la distancia de un punto a una recta es el segmento perpendicular trazado desde el punto hasta la recta entonces el punto Q(-9, y) sería el pie de la perpendicular trazada desde P hasta x = -9 (¿por qué?). Por lo tanto:

$$\left|\overline{PA}\right| = \frac{2}{3}\left|\overline{PQ}\right| \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Pero:

$$\left|\overline{PA}\right| = \sqrt{(x+4)^2 + y^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$\left|\overline{PA}\right| = \sqrt{(x+9)^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Reemplazando (2) y (3) en (1) nos queda:

$$\sqrt{(x+4)^2+y^2} = \frac{2}{3}\sqrt{(x+9)^2} \quad \text{.....................(4)}$$

Eliminando raíces y simplificando, esta última ecuación nos queda así:

$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1 \quad \text{...} \quad (5)$$

- La ecuación (5) corresponde a una elipse cuyo eje focal es el eje x; por tanto:

$$a^2 = 36 \Rightarrow a = 6$$

$$b^2 = 20 \Rightarrow b = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \approx 4.6$$

$$c^2 = a^2 - b^2 = 36 - 20 = 16 \Rightarrow c = \sqrt{16} = 4$$

En consecuencia, el semieje mayor mide 6 unidades, los vértices son los puntos $V_1(6, 0)$ y $V_2(-6, 0)$, el semieje menor mide 4.6 unidades y los focos están ubicados en los puntos $F_1(4, 0)$ y $F_2(-4, 0)$.

- Con toda la información anterior podemos dibujar la gráfica de esta elipse; figura 12 -9:

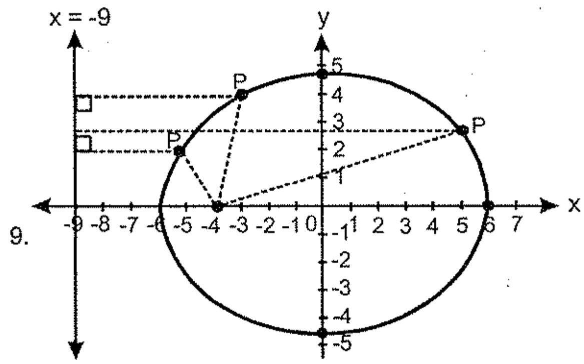


Figura 12-9

Ejemplo 4

Deduzcamos la ecuación de una elipse con centro en el punto (h, k) ≠ (0, 0) y el eje focal paralelo al eje x.

SOLUCIÓN

- En la figura 12 - 10, (h, k) son las coordenadas del centro con relación al sistema xy

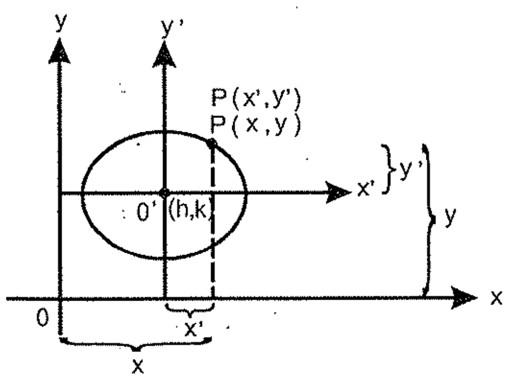


Figura 12 - 10

- Tracemos el sistema x' y' por el centro de la elipse de tal manera que x' sea paralelo a x y y' paralelo a y.

- Si P(x, y) es un punto cualquiera sobre la curva, entonces por el criterio de la traslación de ejes sabemos que:

$$\left.\begin{array}{l} x' = x - h \\ y' = y - k \end{array}\right\} \dots\dots\dots\dots \quad (1)$$

- La ecuación de la elipse en el sistema x' y' es:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1 \dots\dots\dots\dots \quad (2)$$

- Reemplazando (1) en (2) obtenemos, finalmente:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

- Si el eje focal es paralelo al eje y, entonces la ecuación resultante es:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

- Las ecuaciones $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ y $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$ se denominan las ECUACIONES BÁSICAS o CANÓNICAS de la elipse, con centro en $(h, k) \neq (0, 0)$ y eje focal paralelo o coincidente con uno de los ejes coordenados.

Ejemplo 5

Hallemos la ecuación de la elipse con centro en C(-1, 2), un vértice en V_1 (-1,5) y un foco en $F_1\left(-1, 2+\sqrt{5}\right)$.

SOLUCIÓN

- De acuerdo con los datos: h = -1, k = 2, $c = \left|\overline{CF_1}\right| = \sqrt{5}$, $a = \left|\overline{CV_1}\right| = 3$
- Hallemos el valor de b: $b^2 = a^2 - c^2 = 9 - 5 = 4$. Luego, $b = \sqrt{4} = 2$
- Como el eje focal es vertical (¿por qué ?), entonces la ecuación de la elipse es de la forma:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

Reemplazando los valores de h, k, a y b en esta ecuación, nos queda:

$$\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$$

- La gráfica de la elipse es la siguiente; figura 12- 11:

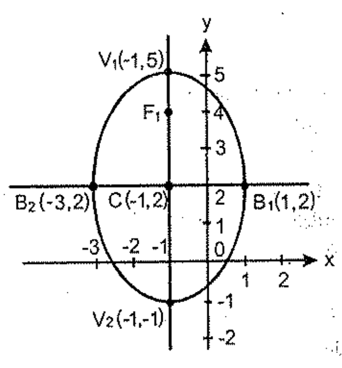
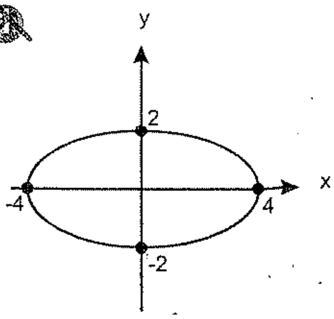


Figura 12 - 11

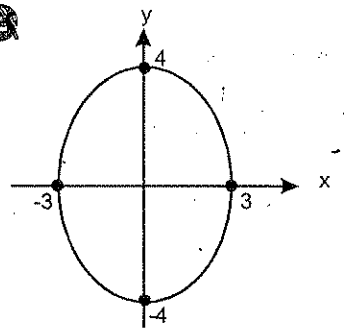
EJERCICIO 12.1

En los ejercicios 1 a 5, escribir la ecuación de la elipse cuya gráfica se presenta.

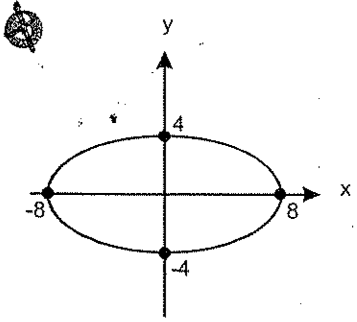
1



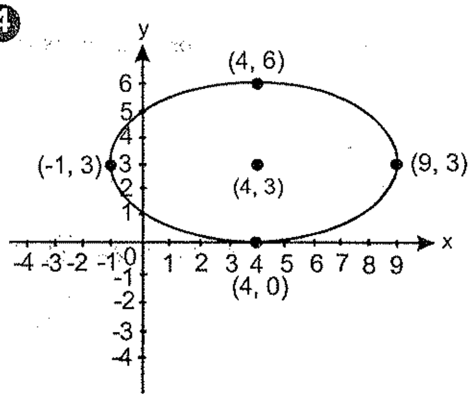
2



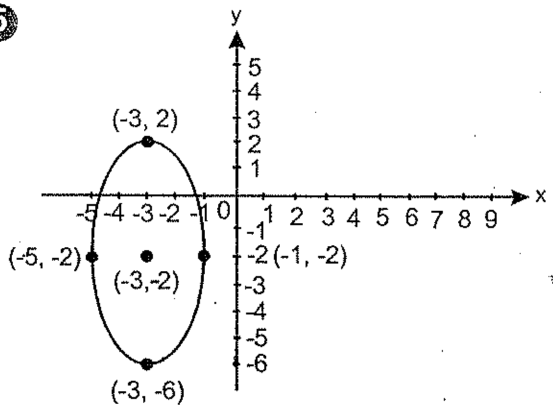
3



4



5



En los ejercicios 6 a 11, hallar las coordenadas del centro, de los vértices, de los focos, la ecuación del eje focal y dibujar la gráfica de las elipses cuyas ecuaciones son:

6. $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$

7. $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$

8. $4x^2+9y^2=36$

9. $\dfrac{(x-3)^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$

10. $16(x+5)^2+4(y-1)^2=64$

11. $\dfrac{(x+4)^2}{25}+\dfrac{(y-2)^2}{9}=1$

12. Hallar la ecuación de la elipse cuyo centro está en (3, 2), uno de sus focos es (7, 2) y uno de sus vértices es (9, 2).

13. Encontrar la ecuación de la trayectoria de un punto P(x, y) que se mueve de modo que su distancia al punto fijo (5, 0) es la mitad de su distancia a la recta x = 20. Identificar la curva resultante, analizarla y dibujarla.

14. Un punto P se mueve en el plano de tal manera que la suma de distancias a los puntos fijos (0, 3) y (0, -3) es igual a 10. Hallar la ecuación del lugar geométrico descrito por el punto en su movimiento, identificarlo, hallar sus elementos y dibujar su gráfica.

15. Un arco de un túnel es una semielipse de 20 metros de ancho y 7 metros de alto, en el centro del túnel. Hallar la altura del túnel en la orilla de un carril situada a 7 metros del centro.

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (36)

Se tienen dos conos rectos circulares, uno invertido dentro del otro. Sus bases son paralelas y el vértice del cono menor se encuentra en el centro de la base del mayor. La altura y radio de la base del mayor son 12 cm y 6 cm respectivamente y la altura y radio de la base del menor son h y r respectivamente. Se pide:

1. **Hacer un dibujo que interprete adecuadamente el enunciado del problema.**
2. **Escribir una ecuación, en función de h, que permita calcular el volumen del cono menor.**

12.3 ECUACIÓN GENERAL DE LA ELIPSE

- Si desarrollamos la ecuación $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ obtendremos:

$$\underbrace{b^2}_{A}x^2+\underbrace{a^2}_{C}y^2\underbrace{-2b^2h}_{D}x\underbrace{-2a^2k}_{E}y+\underbrace{b^2h^2+a^2k^2-a^2b^2}_{F}=0$$

- Esta ecuación, tiene la forma:

$$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

es decir, es una ecuación de segundo grado en las variables x y y en la cual los coeficientes A y C son de IGUAL SIGNO PERO DISTINTO VALOR NUMÉRICO.

- Para demostrar que una ecuación de la forma:

$$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

representa una elipse es necesario verificar que $A \neq C$, que $A \cdot C > 0$ y, luego, recurrir al método de completación al trinomio cuadrado perfecto como lo hicimos con la parábola.

- Un análisis similar podemos realizar sobre la ecuación:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

- Las conclusiones anteriores podemos sintetizarlas en el siguiente teorema:

TEOREMA

Si los coeficientes A y C son de igual signo y distinto valor numérico, la ecuación

$$\mathbf{Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0}$$

representa una elipse con eje focal paralelo a uno de los coordenados o un punto o no representa ningún lugar geométrico real.

Ejemplo 1

Demostremos que $4x^2+9y^2+24x+36y+36=0$ es la ecuación de una elipse.

SOLUCIÓN

- Agrupemos variables:

$$\left(4x^2+24x\right)+\left(9y^2+36y\right)=-36$$

- Saquemos factor común en cada paréntesis:

$$4\left(x^2+6x\right)+9\left(y^2+4y\right)=-36$$

- Completemos trinomios cuadrados perfectos en cada paréntesis:

$$4\left[x^2+6x+\left(\frac{6}{2}\right)^2\right]+9\left[y^2+4y+\left(\frac{4}{2}\right)^2\right]=-36+4\left(\frac{6}{2}\right)^2+9\left(\frac{4}{2}\right)^2$$

$$\therefore\ 4\left(x+3\right)^2+9\left(y+2\right)^2=-36+36+36$$

$$\therefore\ 4\left(x+3\right)^2+9\left(y+2\right)^2=36$$

- Finalmente, dividiendo por 36 esta última ecuación, tenemos :

$$\frac{(x+3)^2}{9}+\frac{(y+2)^2}{4}=1$$

que es la ecuación de una elipse horizontal cuyo centro es el punto (-3,-2) y cuyos semiejes son a=3 y b=2 .

Ejemplo 2

Determinemos el centro, los semiejes, los vértices y los focos de la elipse cuya ecuación es $9x^2+16y^2+72x=0$.

SOLUCIÓN

- Agrupemos variables:

$$\left(9x^2+72x\right)+16y^2=0$$

- Saquemos factor común:

$$9\left(x^2+8x\right)+16\left(y^2\right)=0$$

- Completemos trinomios cuadrados perfectos:

$$9\left(x^2+8x+16\right)+16\left(y^2\right)=0+9\,(16)$$

$$\therefore\ 9\left(x+4\right)^2+16\left(y+0\right)^2=144$$

$$\therefore\ \frac{(x+4)^2}{16}+\frac{(y+0)^2}{9}=1$$

- Por lo tanto, el centro es el punto C(-4,0) , los semiejes miden 4 y 3 unidades, los vértices son V_1(-8,0) y V_2(0,0); los extremos del semieje menor son los puntos B_1(-4,3) y B_2(4, -3) ; figura 12 - 12.
- La gráfica de la elipse aparece a continuación ; figura 12 - 12.

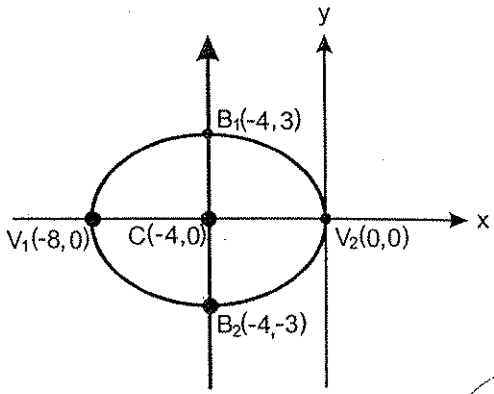


Figura 12-12

- Además, como $c^2 = a^2 - b^2 = 16 - 9$, entonces $c^2 = 7$; luego, $c = \sqrt{7} \approx 2.6$. Por lo tanto $F_1(-6.6,0)$ y $F_2(-1.4,0)$.

Ejemplo 3

Determinemos si el lugar geométrico correspondiente a la ecuación $9x^2 + 4y^2 - 36x - 8y + 76 = 0$ es o no una elipse.

SOLUCIÓN

Si escribimos la ecuación dada en la forma básica, utilizando el método de completación al cuadrado, nos queda:

$$9(x-2)^2 + 4(y-1)^2 = -36$$

Por lo tanto, el lugar geométrico es el conjunto vacío ya que una suma de cuadrados nunca es negativa, en el conjunto de los números reales.

EJERCICIO 12.2

En los ejercicios 1 a 5, determinar si el lugar geométrico correspondiente a la ecuación dada es una elipse, un punto o el conjunto vacío. Si es una elipse, hallar el centro, los focos, los vértices y los extremos del eje menor.

1. $25x^2 + 9y^2 - 50x + 36y - 164 = 0$
2. $x^2 + 2y^2 - 10x + 12y + 43 = 0$
3. $4x^2 + 3y^2 + 16x - 6y + 31 = 0$
4. $9x^2 + 4y^2 - 8y - 32 = 0$
5. $6x^2 + 7y^2 + 1 = 0$
6. Se denomina EXCENTRICIDAD (e) de una elipse al cociente entre la distancia de un foco al centro y la distancia de un vértice al centro (es decir: $e = \dfrac{c}{a}$). Determinar la excentricidad de la elipse cuya ecuación es $x^2 + 9y^2 + 10x + 16 = 0$.
7. Investigar qué influencia tiene el valor de la excentricidad en el dibujo de la gráfica de una elipse.

8. Hallar la ecuación del lugar geométrico de todos los puntos P(x, y) del plano cuya suma de distancias a los puntos fijos (3, 6) y (3, -2) es igual a 12. Identificar el lugar geométrico, determinar sus elementos más importantes y dibujar su gráfica.

9. Demostrar que la longitud del segmento de recta que une un foco de la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ con uno de los extremos del eje menor es a.

10. Hallar la ecuación de la elipse cuyos focos son los puntos (2, 0) y (-2, 0) y su excentricidad es igual a $\frac{2}{3}$.

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (37)

La resistencia R de una viga rectangular de madera es proporcional al producto de su base x por el cuadrado de su altura y.

De un tronco cilíndrico de 30 cm de diámetro se saca una viga rectangular. Se pide:

1. **Hacer un dibujo que interprete adecuadamente el enunciado del problema.**
2. **Escribir una ecuación, en función de x, para calcular la resistencia de la viga rectangular.**

12.4 APLICACIONES DE LA ELIPSE

Al igual que la parábola, también la elipse presenta importantes aplicaciones. Veamos algunas:

- Se emplean engranajes elípticos en ciertos tipos de maquinarias para producir una leve fuerza de choque y lento retorno.
- Se usan arcos de forma semielíptica en la construcción de puentes de piedra y concreto.
- También en la elipse se cumple la propiedad reflexiva que consiste en lo siguiente: **"Si por un punto P de la curva trazamos una tangente, dicha recta forma ángulos iguales con los segmentos vectores $\overline{PF_1}$ y $\overline{PF_2}$"; figura 12 - 13:**

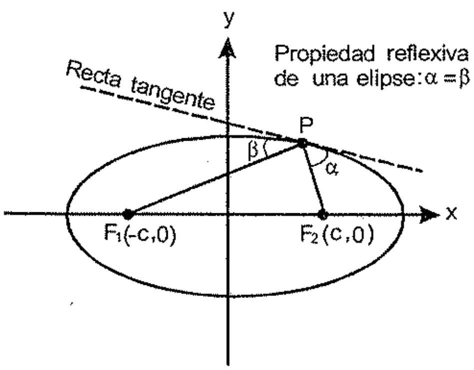


Figura 12 - 13

Esta propiedad es la base de otra propiedad denominada GALERIA DE LOS MURMULLOS que consiste en lo siguiente: Si el techo de un cuarto grande tiene forma de semielipsoide (medio huevo) y dos personas están conversando en uno de los focos, entonces otra persona ubicada cerca del otro foco puede escuchar la conversación, sin que ésta sea escuchada por otras personas dentro del mismo salón; figura 12 - 14:

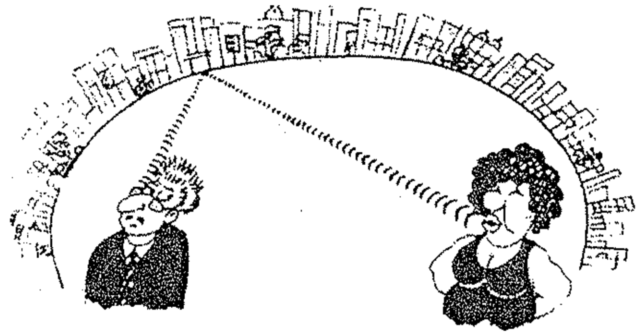


Figura 12 - 14

Taller de la Unidad 12

1. PREGUNTAS PARA REVISAR LA TEORÍA

1.1 ¿Cómo se define la elipse?

1.2 ¿Cuáles son y cómo se definen los elementos básicos de una elipse?

1.3 ¿Cuál es la ecuación que relaciona la longitud del semieje mayor, la longitud del semieje menor y la distancia del centro a uno de los focos?

1.4 ¿Cuál es la ecuación de una elipse horizontal con centro en el punto C(h, k)?

1.5 ¿Cuál es la ecuación de una elipse vertical con centro en el punto C(h, k)?

1.6 ¿Cuándo la ecuación $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ representa una elipse o degeneración de ella?

1.7 ¿En qué degenera una elipse? ¿Cuándo se presenta esta situación?

En los ejercicios **2.** a **11.** marcar una X sobre la letra correspondiente a la ÚNICA respuesta correcta.

2. La ecuación de una elipse cuyo eje mayor coincide con el eje x, y cuyo centro es un punto (h, k) distinto al origen, es:

a) $\dfrac{(x-h)^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

c) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

b) $\dfrac{(x-h)}{a^2} + \dfrac{(y-k)}{b^2} = 1$

d) $\dfrac{(x-h)^2}{b^2} + \dfrac{(y-k)^2}{a^2} = 1$

3. La ecuación de una elipse cuyo eje mayor coincide con el eje y, y el centro es un punto (h, k) distinto al origen, es:

a) $\dfrac{(x-h)^2}{a^2} + \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

c) $\dfrac{(y-k)^2}{a^2} + \dfrac{x^2}{b^2} = 1$

b) $\dfrac{(y-k)}{b^2} + \dfrac{(x-h)}{a^2} = 1$

d) $\dfrac{(y-h)^2}{a^2} + \dfrac{(x-k)}{b^2} = 1$

4. Si F_1 y F_2 son los focos de una elipse, y P es un punto cualquiera de la curva, entonces se cumple que:

a) $\left|\overline{PF_1}\right|+\left|\overline{PF_2}\right|=0$

b) $\left|\overline{PF_1}\right|-\left|\overline{PF_2}\right|=$ constante

c) $\left|\overline{PF_1}\right|+\left|\overline{PF_2}\right|=$ constante

d) $\left|\overline{PF_1}\right|=\left|\overline{PF_2}\right|$

5. El eje focal de la elipse $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ es:

a) El eje x
b) El eje y
c) Una paralela al eje x
d) Una paralela al eje y

6. Para que la ecuación $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$, corresponda a una elipse, es necesario que:

a) $A \neq C$ y $A \cdot C < 0$
b) $A \neq C$ y $A \cdot C > 0$
c) $A = C$ y $A \cdot C < 0$
d) $A = C$ y $A \cdot C > 0$

7. El semieje mayor y el semieje menor de la elipse $4x^2+9y^2+24x+36y+36=0$ son respectivamente:

a) 3 y 2
b) 9 y 4
c) 36 y 24
d) 6 y 4

8. El centro de la elipse $4x^2+9y^2-24x+36y+36=0$ es:

a) (-3, -2)
b) (-2, 3)
c) (3, 2)
d) (3, -2)

9. Los vértices de la elipse $4x^2+9y^2-24x+36y+36=0$ son:

a) (3, 1) y (3, -5)
b) (0, -2) y (6, -2)
c) (1, -2) y (5, -2)
d) (0, 0) y (0, -3)

10. Los focos de la elipse $4x^2+9y^2-24x+36y+36=0$ son:

a) $(3-\sqrt{5},2)$ y $(3+\sqrt{5},2)$
b) $(3,\sqrt{5}-2)$ y $(3,-\sqrt{5}-2)$
c) $(3-\sqrt{5},-2)$ y $(3+\sqrt{5},-2)$
d) $(3,2+\sqrt{5})$ y $(3,2-\sqrt{5})$

11. El eje focal de la elipse $4x^2+9y^2-24x+36y+36=0$ es:

a) El eje x
b) La recta y = -2
c) El eje y
d) La recta x = 3

En los ejercicios **12.** a **14.** hallar la ecuación de la elipse y dibujar su gráfica.

12. Centro en el origen, un foco en el punto (2, 0) y un vértice en el punto (5, 0).

13. Centro en el origen, un foco en el punto (-4, 0), semieje menor 3.

14. Centro en el origen, un vértice en el punto (-7, 0) y un extremo del eje menor es el punto (0, 3).

15. Hallar la ecuación de la elipse cuyos vértices son los puntos (4, 0) y (-4, 0) y cuyos focos son los puntos (3, 0) y (-3, 0).

16. El eje mayor de una elipse mide 10 cm, el eje focal es paralelo al eje x, la elipse pasa por el punto (-5, 7) y su centro es (-5, 3). Hallar su ecuación.

17. Hallar la ecuación y la excentricidad de la elipse que tiene su centro en el origen, uno de sus vértices en el punto (0, -7) y pasa por el punto $\left(\sqrt{5}, \frac{14}{3}\right)$.

En los ejercicios **18.** a **21.** , determinar si la gráfica de la ecuación dada es una elipse, un punto o el conjunto vacío. Si es una elipse, halle el centro, los focos, los vértices, los extremos del eje menor y la excentricidad y dibuje la gráfica.

18. $25x^2 + 4y^2 = 100$

19. $4x^2 + y^2 - 16x + 15 = 0$

20. $3x^2 + 2y^2 - 12x + 12y + 29 = 0$

21. $4x^2 + 9y^2 - 8x + 9y + 4 = 0$

22. Un punto P(x, y) se mueve de forma que el producto de las pendientes de las dos rectas que unen P con los dos puntos fijos (-2, 1) y (6, 5) es constante e igual a -4. Demostrar que dicho lugar es una elipse, analizarlo y dibujar su gráfica.

23. La órbita de la tierra es una elipse en uno de cuyos focos está el sol. Sabiendo que el semieje mayor de la elipse es 148.5 millones de kilómetros y que la excentricidad vale 0.017, hallar la máxima y la mínima distancia de la tierra al sol.

24. Un puente que pasa por encima de una autopista tiene forma semielíptica. La menor altura sobre la autopista es de 4 metros y la altura máxima es de 9 metros. El ancho del puente es de 50 metros. Un camión que debe pasar por un carril de la autopista situado a 10 metros a la derecha del centro desea saber que altura total de carga (altura de la carga más altura del camión), puede transportar si debe dejar una luz de 0.5 metros entre la carga y el puente.

Prepárate para las Pruebas ICFES

Subraye la letra correspondiente a la ÚNICA respuesta correcta en cada uno de los siguientes ejercicios:

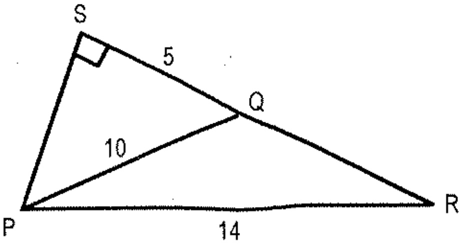
1. Tres hermanas: Carmen, Alejandra y Clara, tienen un conjunto de 30 prendas de vestir, de las cuales 15 son blusas y el resto son faldas y pantalones. Carmen tiene 3 blusas y 3 faldas. Clara tiene 8 prendas de vestir, entre ellas 4 blusas. El número de pantalones de Carmen es igual al de blusas que tiene Clara. Alejandra tiene tantos pantalones como blusas tiene Carmen. La cantidad de pantalones que posee Clara es la misma que las blusas que tiene Carmen. ¿Cuántas faldas tiene Alejandra?

a) 1 b) 3 c) 4 d) 5

2. En el ΔPQR, PR = 14 y PQ = 10. El lado RQ prolongado se encuentra con la perpendicular PS en S, de modo que QS = 5. El perímetro del ΔPQR es:

a) $24 + 5\sqrt{2}$ b) $24 + 3\sqrt{3}$

c) 29 d) 30



3. Para cuáles valores de k tienen las ecuaciones $kx - y = 2$ y $x + y = 3$ una solución (x, y) en la cual $x > 0$ y $y > 0$?

a) $k > -1$ b) $k < \frac{2}{3}$ c) $k > \frac{2}{3}$ d) $-1 < k < \frac{2}{3}$

4. Una mesa de billar de 2 m por 3 m, tiene una bola en una esquina. Suponga que se golpea la bola y que ésta se desplaza formando un ángulo de 45° con una banda de la mesa. Entonces la bola rebota y se desplaza en otro ángulo de 45° hasta llegar a otra banda y rebotar de nuevo. Con respecto al número de veces que la bola golpeará las bandas antes de llegar a una esquina se puede afirmar que:

a) Es cuatro ya que la bola debe tocar las cuatro bandas antes de llegar a la esquina.
b) Es tres ya que la bola toca tres bandas y después de la tercera banda llega a la esquina.
c) Es imposible determinarlo pues la bola rebotaría de banda en banda debido al ángulo con que tocó la primera banda.
d) Es una, pues la bola se desplaza a través de la diagonal de la mesa cayendo a la esquina contraria sin tocar ninguna banda.

5. La distancia total d que recorre la bola del ejercicio anterior es:

a) $8\sqrt{2}$ b) $4\sqrt{2}$ c) $2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}$ d) $6\sqrt{2}$

Núcleo Temático

15

LA HIPÉRBOLA

LOGRO GENERAL

- Identificar, analizar y graficar ecuaciones de la forma $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ cuando $A \cdot C < 0$.

DIMENSIONES

LOGROS ESPECÍFICOS	INDICADORES DE LOGRO
Corporal: • Manipular materiales como una regla de longitud L, una cuerda de longitud L' tal que L'<L, dos clavos y una hoja de papel para obtener el lugar geométrico llamado HIPÉRBOLA.	• Con los materiales dados y siguiendo ciertas instrucciones, traza en el plano (hoja de papel) la HIPÉRBOLA.
Comunicativa: • Explicar qué tipo de lugar geométrico es la hipérbola.	• Enuncia y explica la definición de hipérbola como lugar geométrico.
Cognitiva: • Identificar los elementos básicos de una hipérbola. • Deducir las ecuaciones básicas de las hipérbolas horizontal y vertical. • Identificar la forma general de la ecuación de una hipérbola. • Hallar los elementos básicos de una hipérbola cuya ecuación está escrita en forma general.	• Dada la gráfica de una hipérbola, identifica sus elementos básicos. • Deduce las ecuaciones básicas de una hipérbola horizontal y una vertical. • Reconoce cuándo una ecuación de la forma $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ corresponde a una hipérbola o degeneración de ella. • Dada la ecuación general de una hipérbola, la lleva a la forma básica y determina sus elementos claves.
Estética: • Dibujar la gráfica de una hipérbola, conocidos sus elementos básicos.	• Dados los elementos básicos de una hipérbola, dibuja su gráfica.
Etica - Actitudinal: • Tener claro que el desarrollo de la ciencia sólo tiene sentido en la medida que contribuya al crecimiento humano y al mejoramiento de la calidad de vida de los pueblos.	• Descubre que la elección de una profesión o de un trabajo deben ser consecuentes con el desarrollo de sus mejores capacidades espirituales e intelectuales; es decir, de su vocación humana.

EVALUACIÓN

ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS

131 COMPRENSIÓN DE LECTURA: HISTORIA DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA (2)

Lea atentamente el siguiente texto y luego subraye la letra correspondiente a la ÚNICA respuesta correcta en cada uno de los enunciados propuestos.

RENATO DESCARTES
1596 - 1650

Renato Descartes (1596 – 1650) era hijo de una familia noble. Su padre, consejero en el parlamento de Bretaña, fue hombre bastante acaudalado. Descartes heredó de él dinero suficiente para mantener una vida de estudio y viajes. Su contribución a la matemática es de enorme importancia. Se le ha considerado, generalmente, como el inventor de la geometría analítica, pero esta noción es "históricamente poco adecuada", porque esta área de la matemática no surgió enteramente de la cabeza de Descartes. El estudio de las curvas por medio de sus ecuaciones, definido como la "esencia" de la geometría analítica, era conocido por los griegos y constituía la base de su estudio de las secciones cónicas.". Menecmo, tutor de Alejandro el Grande, está considerado como el autor de este descubrimiento. Entre otros predecesores de Descartes deben contarse al Teólogo **Nicole Oresme** y a **Francisco Viete** cuyas reformas en la representación simbólica facilitaron el desarrollo del álgebra. Pero el que con mayor razón puede reclamar, con Descartes, el título de inventor de la geometría analítica, es su famoso contemporáneo **Pierre Fermat**, que amplió considerablemente todas las ramas del pensamiento matemático de su época y desarrolló la moderna teoría de números. El hallazgo consistente en asignarle a un punto del plano una pareja ordenada de números que representan las distancias del punto a dos líneas, una horizontal y otra vertical, fue enteramente de Descartes. Por esta razón a este sistema se le dio el nombre de **Plano Cartesiano.**

1. La oración que mejor expresa el contenido del texto es:
   a. Estudios y viajes de R. Descartes.
   b. Descartes pudo estudiar e inventar debido a la riqueza de su familia.
   c. Breve reseña biográfica de Descartes y sus aportes a la geometría analítica.
   d. R. Descartes no es el inventor de la Geometría analítica.

2. La expresión "históricamente poco adecuada", da a entender que:
   a. Descartes copió el trabajo sobre curvas, hecho por los griegos.
   b. No hay razones evidentes que comprueben la paternidad de esa ciencia.
   c. En el pasado, otra cultura ya había trabajado esos temas.
   d. Todavía falta estudiar esa ciencia a través de la historia.

3. El propósito del autor con el escrito anterior apunta a:

   a. Demostrar que Descartes no es el padre de la Geometría analítica.
   b. Destacar el trabajo de Descartes en el campo de la Geometría.
   c. Explicar una etapa en el desarrollo de la ciencia.
   d. Refutar a quienes consideran a Descartes "el Padre de la Geometría Analítica".

4. De Descartes se dijo todo lo siguiente, menos:

   a. Su solvencia económica le permitió estudiar y viajar mucho.
   b. Su padre fue un alto funcionario público de Bretaña.
   c. Perteneció a la nobleza de su país.
   d. Los griegos conocían sus estudios sobre las curvas por medio de ecuaciones.

5. Cuando el autor habla de "predecesores de Descartes" se refiere a:

   a) Científicos que vivieron después que él.
   b) Estudiosos de las ciencias que vivieron antes que él.
   c) Matemáticos contemporáneos suyos.
   d) Falsos científicos de culturas anteriores.

13.2 LA HIPÉRBOLA

13.2.1 Concepto de Hipérbola

Experiencia

- Para realizar esta experiencia necesitamos una regla de longitud L y una cuerda de longitud L' tal que L' < L.
- Ahora hacemos lo siguiente:
  - Marcamos en el plano (piso, hoja, pupitre, etc.) dos puntos fijos F_1 y F_2 separados entre sí una distancia mayor que L - L'.
  - Hacemos coincidir uno de estos puntos fijos con un extremo de la regla (por ejemplo, F_1) y el otro con un extremo de la cuerda (por ejemplo, F_2); figura 13 - 1.

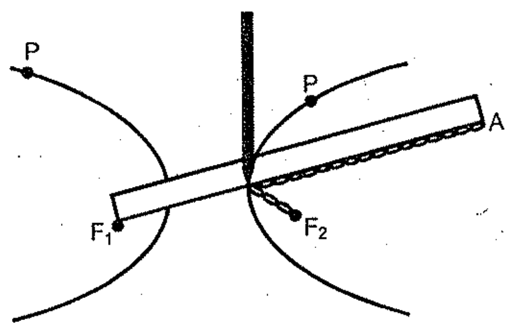


Figura 13-1

- También hacemos coincidir el otro extremo de la regla con el otro extremo de la cuerda en el punto A, tal y como nos muestra la figura 13 - 1.

- Al tensionar la cuerda con un lápiz, a lo largo de la regla, se dibuja una rama de la curva cuando se hace girar la regla alrededor del extremo que se ha fijado en el punto F_1.

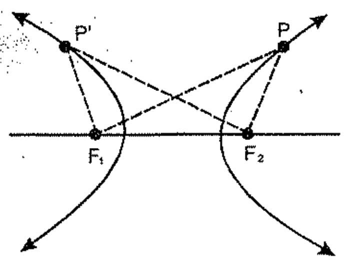
  Invirtiendo las posiciones de los extremos libres de la regla y la cuerda, obtenemos la otra rama.

- Cada uno de los puntos obtenidos en las dos ramas corresponde a una HIPÉRBOLA.
- Comprobemos, finalmente, que cualquier punto P de la hipérbola cumple la condición:

$$|\overline{PF_1}|-|\overline{PF_2}|=L-L'=\text{ constante } \text{ ó } |\overline{PF_2}|-|\overline{PF_1}|=L-L'=\text{constante.}$$

DEFINICIÓN

Una HIPÉRBOLA es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos del plano, llamados focos, es siempre igual a una constante positiva, menor que la distancia entre los focos y que representamos por 2a.



$$\left||PF_1|-|PF_2|\right| = \text{constante} = 2a$$

$$\left||P'F_2|-|P'F_1|\right| = \text{constante} = 2a$$

ATENCIÓN

1. Es importante notar la estrecha analogía existente entre las definiciones de hipérbola y elipse. Esta analogía se encontrará frecuentemente a medida que avancemos en el estudio de la hipérbola.
2. La figura 13 - 2 nos muestra que la hipérbola consta de dos ramas diferentes, cada una de longitud infinita.

13.2.2 Elementos de la Hipérbola

Los elementos básicos de la hipérbola podemos identificarlos en la figura 13 - 2:

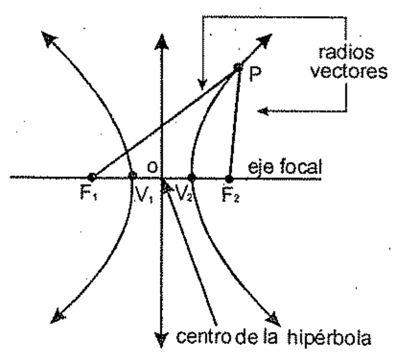


Figura 13 - 2

1. **FOCOS:** Son los puntos fijos F_1 y F_2.

2. **DISTANCIA FOCAL:** Es la distancia entre los focos y se representa por 2c; es decir, $\left|\overline{F_1F_2}\right| = 2c$.

3. **EJE FOCAL:** Es la recta que pasa por los focos.

4. **VERTICES:** Son los puntos donde el eje focal corta la hipérbola; en la figura, son los puntos V_1 y V_2.

5. **EJE TRANSVERSO:** Es el segmento que une los vértices V_1 y V_2.

6. **CENTRO:** Es el punto medio del segmento $\overline{V_1V_2}$. Es el punto 0.

7. **EJE NORMAL:** Es una recta perpendicular al eje focal que pasa por el centro.

8. **RADIOS VECTORES:** Son los segmentos trazados desde un punto P de la hipérbola a los focos F_1 y F_2.

ATENCIÓN

1. Como V_1 y V_2 son puntos de la hipérbola, se cumple que:

$$\left|\overline{V_2F_1}\right| - \left|\overline{V_2F_2}\right| = 2a \quad \dots\dots (1)$$

$$\left|\overline{V_1F_2}\right| - \left|\overline{V_1F_1}\right| = 2a \quad \dots\dots (2)$$

sumando miembro a miembro (1) y (2) nos queda:

$$\left|\overline{V_2F_1}\right| - \left|\overline{V_2F_2}\right| + \left|\overline{V_1F_2}\right| - \left|\overline{V_1F_1}\right| = 4a$$

$$\therefore \left(\left|\overline{V_2F_1}\right| - \left|\overline{V_1F_1}\right|\right) + \left(\left|\overline{V_1F_2}\right| - \left|\overline{V_2F_2}\right|\right) = 4a$$

$$\therefore \left|\overline{V_1V_2}\right| + \left|\overline{V_1V_2}\right| = 4a$$

$$\therefore 2\left|\overline{V_1V_2}\right| = 4a$$

$$\therefore \left|\overline{V_1V_2}\right| = 2a$$

es decir, la distancia del centro de la hipérbola a cada vértice mide **a** unidades y la longitud del eje transverso es 2a.

2. Cuando estudiamos la elipse vimos que el número b representaba la longitud del semieje menor; en cambio, en la hipérbola este número no representa ningún elemento. Sin embargo, podemos localizar dos puntos B y B' sobre el eje normal trazando una circunferencia con centro en uno de los vértices y radio c. La longitud del segmento BB' se representa por 2b; figura 13 - 3.

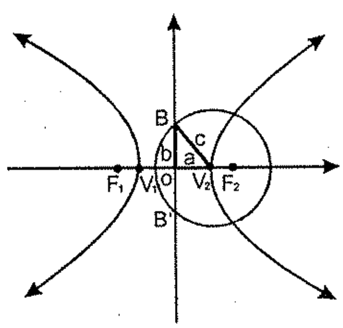


Figura 13 - 3

3. La misma figura 13 - 3 nos permite relacionar los valores a, b y c que intervienen en la hipérbola, aplicando el Teorema de Pitágoras en el triángulo BOV_2:

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$$

13.3 ECUACIÓN DE LA HIPÉRBOLA

- Para hallar la ecuación de la hipérbola, al igual que la parábola y la elipse, introducimos un sistema coordenado en el plano de la curva de tal manera que el origen coincide con el centro y el eje x con el eje focal. Por tanto, los focos serán los puntos $F_1(-c, 0)$ y $F_2(c, 0)$.
- Sea P(x, y) un punto cualquiera de la curva; figura 13 - 4.

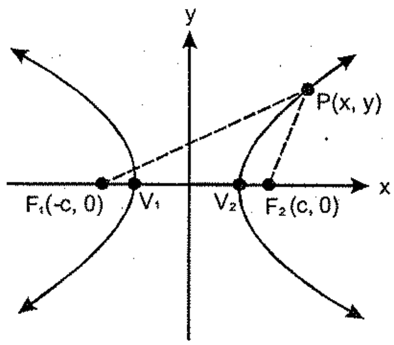


Figura 13 - 4

- Luego, P debe satisfacer la condición de la definición de hipérbola; es decir:

$$\left|\,|\overline{PF_1}| - |\overline{PF_2}|\,\right| = 2a \quad \ldots\ldots (1)$$

donde, a>0 y a < c.

- La condición expresada en la igualdad (1) equivale a escribir:

$$|\overline{PF_1}| - |\overline{PF_2}| = 2a \quad \ldots\ldots (2)$$

$$|\overline{PF_1}| - |\overline{PF_2}| = -2a \quad \ldots\ldots (3)$$

la igualdad (2) es verdadera cuando P está sobre la rama derecha de la hipérbola y la igualdad (3) es verdadera cuando P está sobre la rama izquierda.

- Ahora bien:

$$\left.\begin{array}{l} |\overline{PF_1}| = \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} \ \ldots\ldots \text{distancia entre dos puntos} \\ |\overline{PF_2}| = \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} \ \ldots\ldots \text{distancia entre dos puntos} \end{array}\right\} \ldots\ldots (4)$$

- Reemplazando (4) en (2) y (3) nos queda:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \quad \ldots\ldots (5)$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = -2a \quad \ldots\ldots (6)$$

- A continuación, desarrollando estas dos ecuaciones en la misma forma como desarrollamos la correspondiente ecuación para la elipse nos queda:

$$\left(c^2 - a^2\right)x^2 - a^2y^2 = a^2\left(c^2 - a^2\right) \quad \text{(¡verifíquelo!)}$$

Dividiendo ambos miembros de esta ecuación por $a^2\left(c^2 - a^2\right)$ tenemos:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$$

y como: $b^2 = c^2 - a^2$, entonces nos queda: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

- Hemos demostrado el siguiente teorema:

TEOREMA

- La ecuación de una HIPERBOLA cuyos focos son $F_1(-c, 0)$ y $F_2(c, 0)$ **y en la cual 2a es la diferencia de las distancias de un punto cualquiera P de la hipérbola a los focos es:**

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ ....(1)}$$

donde b es un número positivo tal que: $b^2 = a^2 - c^2$.

- **En forma similar:**

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \text{ ....(2)}$$

es la ecuación de una hipérbola cuyos focos son $F_1(0, -c)$ y $F_2(0, c)$; es decir, con centro en el origen y eje focal el eje y.

ATENCIÓN

1. Las ecuaciones (1) y (2) del cuadro anterior se denominan ECUACIONES CANÓNICAS o BÁSICAS de la hipérbola.
2. Tanto en la ecuación $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ como en la ecuación $\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1$ intervienen las cantidades a, b y c que representan:
   - **a** la distancia del centro a cada vértice.
   - **c** la distancia del centro a cada foco.
   - **b** una distancia medida desde el centro, sobre el eje normal y cuyo valor es: $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.
3. Contrariamente a lo que ocurre en la elipse, el valor de **a** puede ser mayor, menor o igual a **b.**
4. La posición vertical u horizontal de la hipérbola depende de los signos de los coeficientes de las variables cuando la ecuación aparece escrita en la forma canónica. En efecto, si el coeficiente de x^2 es POSITIVO, entonces la hipérbola es horizontal. Si el coeficiente de y^2 es POSITIVO entonces la hipérbola es vertical.
5. Para dibujar la gráfica de una hipérbola también conviene tener en cuenta los siguientes elementos que ya conocemos: interceptos con los ejes, simetrías, dominio y rango.

Ejemplo 1

Hallemos la ecuación de la hipérbola cuyos focos son $F_1(-3, 0)$ y $F_2(3, 0)$ y cuyos vértices son $V_1(-2, 0)$ y $V_2(2, 0)$.

SOLUCIÓN

- El eje focal coincide con el eje x, ya que los focos están sobre dicho eje. Por lo tanto, la ecuación es de la forma:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

- De acuerdo con los datos del problema tenemos:

  a = 2 es la abscisa del vértice
  c = 3 es la abscisa del foco

  además:

$$b^2 = c^2 - a^2 = 9 - 4 = 5$$

$$\therefore b = \sqrt{5}$$

- Por lo tanto, la ecuación pedida es: $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{5} = 1$

Ejemplo 2

Hallemos las coordenadas de los focos y los vértices de la hipérbola: $\dfrac{y^2}{16} - \dfrac{x^2}{8} = 1$.

SOLUCIÓN

- La forma de la ecuación nos dice que el eje focal coincide con el eje y. Luego, los vértices y los focos son de la forma: $V_1(0, ?)$; $V_2(0, ?)$; $F_1(0, ?)$; $F_2(0, ?)$.
- De la ecuación tenemos que: $a^2 = 16$ y $b^2 = 8$; luego, $a = 4$ y $b = 2\sqrt{2}$. Por lo tanto, $V_1(0, -4)$ y $V_2(0, 4)$ son los vértices de la hipérbola.

  Además: $c^2 = a^2 + b^2 = 16 + 8 = 24$; luego, $c = 2\sqrt{6}$. Por lo tanto, $F_1\left(0, -2\sqrt{6}\right)$ y $F_2\left(0, 2\sqrt{6}\right)$ son las coordenadas de los focos.

13.4 ASÍNTOTAS DE LA HIPÉRBOLA

- Observemos la gráfica de la relación de la figura 13 - 5:

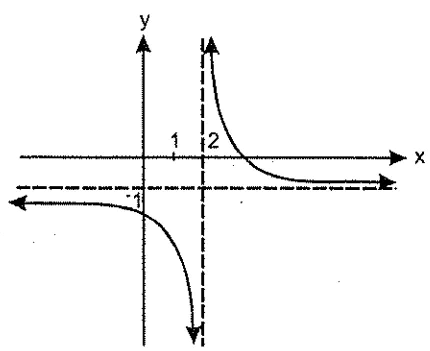


Figura 13 - 5

- La gráfica nos muestra que mientras más próximos están los valores de **x** a 2, entonces más aumentan o disminuyen infinitamente los valores de **y.** Por esta razón, la recta x = 2 es una ASINTOTA VERTICAL.
- Así mismo, mientras más aumentan los valores de **x** positiva o negativamente, los valores de **y** se aproximan más y más a la recta **y=-1.**

DEFINICIÓN

- **Una ASÍNTOTA de una curva es una recta cuya distancia a la curva tiende a cero.**
- **La ecuación de una asíntota vertical es x = k, donde $k \in R$.**
- **La ecuación de una asíntota horizontal es y = k, donde $k \in R$.**

- El estudio formal de las asíntotas de una curva lo haremos en el texto Matemática Experimental 11.
- Algunas curvas, como la hipérbola, poseen otro tipo de asíntotas: LAS ASÍNTOTAS OBLICUAS.
  - Consideremos la hipérbola de ecuación $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ y las rectas $y=\frac{b}{a}x$ y $y=-\frac{b}{a}x$ dibujadas en la figura 13 - 6.

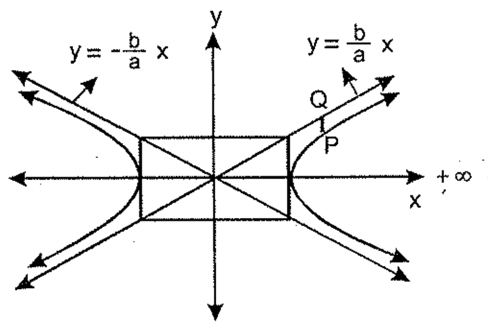


Figura 13 - 6

- Calculemos la diferencia $\overrightarrow{PQ}$ entre la **y** de la recta y la **y** de la hipérbola que representamos así: $\overrightarrow{PQ}=y_r-y_h$

donde.......................... $\begin{cases} y_r=\frac{b}{a}x \\ y_h=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} \end{cases}$

$$\therefore\ \overrightarrow{PQ}=y_r-y_h=\frac{b}{a}x-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$$

$$\therefore\ \overrightarrow{PQ}=\frac{b}{a}\left(x-\sqrt{x^2-a^2}\right)$$

- Si ahora multiplicamos y dividimos la expresión de la derecha por $\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)$, obtenemos:

$$\overrightarrow{PQ} = y_r - y_h = \frac{b}{a} \cdot \frac{\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right)\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right)}{\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right)}$$

$$= \frac{b}{a} \cdot \frac{x^2 - \left(x^2 - a^2\right)}{\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right)}$$

$$= \frac{b}{a} \cdot \frac{a^2}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}$$

$$\therefore \quad \boxed{\overrightarrow{PQ} = y_r - y_h = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}}$$

- Si analizamos el lado derecho de esta última igualdad, encontraremos que cuando x se hace grande, dicha expresión tiende a CERO, ya que una fracción de numerador constante se hace muy pequeña cuando aumenta su denominador. Dicho de otra manera, cuando el valor de x se aleja del origen, la distancia dirigida $\overrightarrow{PQ}$ tiende a valer cero.

- El anterior análisis nos permite afirmar que las rectas $y = \pm \frac{b}{a}x$ "tienden a tocar a la hipérbola" cuando $x \to \infty$ (x tiende a infinito) y se denominan ASÍNTOTAS OBLICUAS de la hipérbola.

TEOREMA

- **Las rectas $y = \frac{b}{a}x$ y $y = -\frac{b}{a}x$ son las ASINTOTAS de la hipérbola cuya ecuación es:**

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

- **Estas asíntotas se denominan ASÍNTOTAS OBLICUAS.**

PARA CONSULTAR: Investiga un método para determinar las posibles asíntotas oblicuas de una relación.

ATENCIÓN

Un método sencillo para hallar las ecuaciones de las asíntotas de una hipérbola de ecuación $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ es el siguiente:

1. Escribimos la ecuación de la hipérbola en la forma $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$.
2. Reemplazamos por cero (0) el término constante a^2b^2 ; es decir: $b^2x^2 - a^2y^2 = 0$
3. Resolvemos la diferencia de cuadrados del lado izquierdo de la ecuación: $(bx + ay)(bx - ay) = 0$

4. Igualamos a cero cada factor: $bx + ay = 0$ ó $bx - ay = 0$.

5. Despejemos **y** en cada ecuación obtenida: $y = -\frac{b}{a}x$ ó $y = \frac{b}{a}x$

Ejemplo 1

Hallemos las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola cuya ecuación es: $16x^2 - 9y^2 - 144 = 0$. Luego, usemos las asíntotas obtenidas para dibujar la gráfica.

SOLUCIÓN

- Tenemos: $16x^2 - 9y^2 - 144 = 0$; luego, $16x^2 - 9y^2 = 144$
- Reemplazamos 144 por 0 y obtenemos: $16x^2 - 9y^2 = 0$; luego, $(4x-3)(4x+3) = 0$. Igualando a cero cada factor y despejando **y** nos queda: $y = \frac{4}{3}x$ ó $y = -\frac{4}{3}x$. Estas son las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola.
- Las asíntotas ayudan en el dibujo de la gráfica de la hipérbola. En efecto, primero trazamos sus asíntotas y, luego se determinan los vértices. Finalmente trazamos la curva; figura 13 - 7.

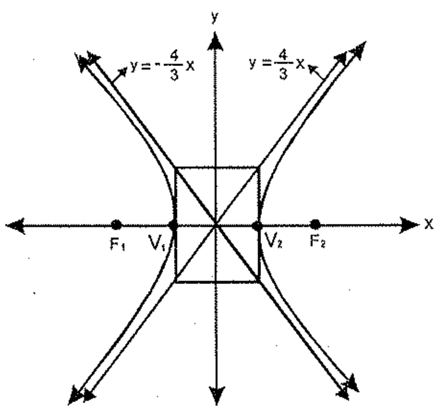


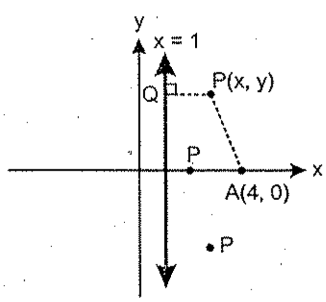
Figura 13 - 7

Ejemplo 2

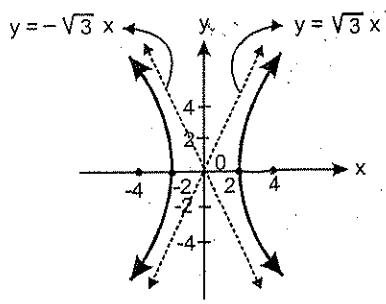
Un punto P(x, y) se mueve en el plano de tal manera que su distancia al punto fijo A(4, 0) es el doble de su distancia a la recta $x - 1 = 0$. Determinar la ecuación del lugar geométrico, identificarlo, hallar sus elementos claves (centro, focos, vértices,...) y dibujar su gráfica.

SOLUCIÓN

- En primer lugar, dibujemos en el plano cartesiano de la figura 13 - 8 (a), el punto fijo A(4, 0), la recta $x - 1 = 0$ y tres posiciones del punto P en su movimiento.



(a)



(b)

Figura 13-8

- Las coordenadas del punto Q son (1, y) (¿por qué?).

  De acuerdo con el enunciado del problema podemos escribir que:

$$\left|\overline{PA}\right| = 2\left|\overline{PQ}\right| \quad \text{.......................................} (1)$$

donde:

$$\left|\overline{PA}\right| = \sqrt{(x-4)^2 + y^2} \quad \text{.......................................} (2)$$

$$\left|\overline{PQ}\right| = \sqrt{(x-1)^2} \quad \text{.......................................} (3)$$

Reemplazando (2) y (3) en (1) nos queda:

$$\sqrt{(x-4)^2 + y^2} = 2\sqrt{(x-1)^2} \quad \text{.......................................} (4)$$

Eliminando raíces y simplificando, esta última ecuación nos queda así:

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1 \quad \text{.......................................} (5)$$

- La ecuación (5) corresponde a una hipérbola cuyo eje focal es el eje x; por lo tanto:

$$a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$$

$$b^2 = 12 \Rightarrow b = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \approx 3.46$$

$$c^2 = a^2 + b^2 = 16 \Rightarrow c = \sqrt{16} = 4$$

En consecuencia, los vértices son los puntos $V_1(2, 0)$ y $V_2(-2, 0)$; los focos son los puntos $F_1(4, 0)$ y $F_2(-4, 0)$ y las ecuaciones de las asíntotas son $y = \sqrt{3}\,x$ y $y = -\sqrt{3}\,x$.

- Esta información nos permite dibujar la gráfica de la hipérbola; figura 13 - 8 (b).

13.5 HIPÉRBOLA EQUILÁTERA

Si en la ecuación $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, hacemos a = b, obtenemos: $x^2 - y^2 = a^2$. Esta expresión define una HIPÉRBOLA EQUILÁTERA.

Ejemplo

Dibujemos la gráfica de la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$

SOLUCIÓN

- La ecuación es de la forma: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$; luego, la curva tiene los focos sobre el eje **x**.
- Las asíntotas oblicuas de la curva son: $y = x$ y $y = -x$ (porque a = b).
- Los vértices son: $V_1(-1, 0)$ y $V_2(1, 0)$.

- Y esta es la gráfica; figura 13 - 9:

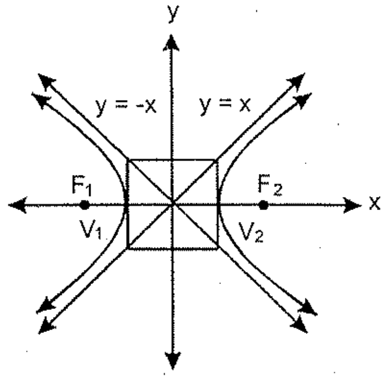
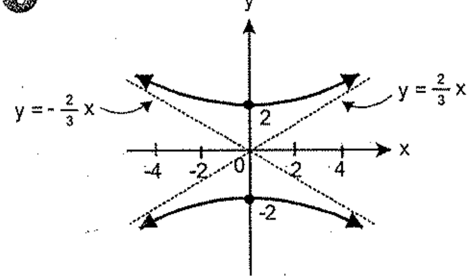


Figura 13 - 9

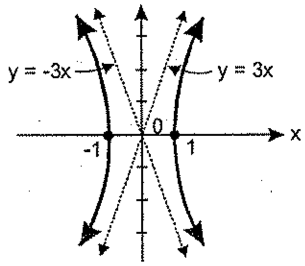
EJERCICIO 13.1

En los ejercicios **1** a **3** escribir la ecuación de la hipérbola cuya ecuación se presenta.

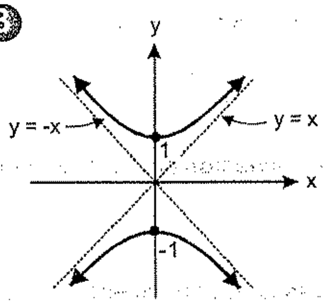
1



2



3



En los ejercicios **4** a **12** hallar las coordenadas de los vértices, las coordenadas de los focos, las ecuaciones de las asíntotas y dibujar las gráficas de las siguientes hipérbolas.

4 $\frac{x^2}{15} - \frac{y^2}{12} = 1$

5 $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{20} = 1$

6 $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{25} = 1$

7 $\frac{y^2}{49} - \frac{x^2}{28} = 1$

8 $6x^2 - 9y^2 = 54$

9 $4y^2 - 16x^2 = 60$

10 $11x^2 - 3y^2 = 33$

11 $35x^2 - 40y^2 = 1400$

12 $y^2 - x^2 = 9$

13 Encontrar la ecuación de la hipérbola cuyos focos son $F_1(0, -5)$ y $F_2(0, 5)$ y vértices los puntos $V_1(0, -2)$ y $V_2(0, 2)$.

14 Hallar la ecuación de la hipérbola con eje focal el eje x y tal que $a = 5$ y $c = 8$.

15 Un vértice de una hipérbola, con centro en el origen, es el punto $V_1(4, 0)$ y pasa por el punto $(3, 8)$. Hallar su ecuación, determinar las coordenadas de sus focos, las ecuaciones de las asíntotas y dibujar su gráfica.

16 Un punto P se mueve en el plano de tal manera que la diferencia de sus distancias a los puntos A(0, 4) y B(0, -4) es siempre igual a 4. Se pide:

a) Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico descrito por el punto P en su movimiento.
b) Identificar sus elementos básicos.
c) Dibujar su gráfica.

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (38)

Tres puntos A, B y C se hallan situados de modo que la medida del $\angle ABC = 60^\circ$. Un automóvil sale del punto A y en el mismo instante parte del punto B un tren. El automóvil avanza hacia el punto B a 80 Km./h y el tren se dirige al punto C a 50 Km./h. Teniendo en cuenta que $|\overline{AB}| = 200$ Km; se pide:

1. **Hacer una representación gráfica del problema de tal manera que se muestre la posición de los vehículos 1 hora después de haberse iniciado el movimiento.**
2. **Escribir una ecuación, en función del tiempo t ($0 < t < 2.5$ horas) para determinar la distancia que separa los dos vehículos.**

13.6 ECUACIÓN DE LA HIPÉRBOLA CON CENTRO EN $(H, K) \neq (0, 0)$.

Siguiendo el mismo procedimiento que utilizamos para la parábola y la elipse, podemos demostrar que:

TEOREMA

- **La ecuación de una hipérbola con centro en (h, k) y eje focal horizontal es:**

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

- **Las asíntotas de esta hipérbola son las rectas:**

$$y - k = \frac{b}{a}(x-h) \quad y \quad y - k = -\frac{b}{a}(x-h)$$

- **La ecuación de una hipérbola con centro en (h, k) y eje focal vertical es:**

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

- **Las asíntotas de esta hipérbola son las rectas:**

$$y - k = \frac{a}{b}(x-h) \quad y \quad y - k = -\frac{a}{b}(x-h)$$

ATENCIÓN

Las ecuaciones $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ y $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$ se denominan ECUACIONES BÁSICAS o CANÓNICAS de la hipérbola.

Ejemplo 1

Hallemos la ecuación de la hipérbola con centro en (-4, 1), un vértice en (2, 1) y distancia focal igual a $2\sqrt{13}$.

SOLUCIÓN

- La distancia entre el centro y el vértice dado es: $a=\sqrt{(-4-2)^2+(1-1)^2}=\sqrt{36}=6.$

- Como la distancia focal es $4\sqrt{13}$ entonces $c=2\sqrt{13}$. Y puesto que: $b=\sqrt{c^2-a^2}$, entonces $b=\sqrt{\left(2\sqrt{13}\right)^2-6^2}=\sqrt{16}=4$

- Como la curva tiene su centro en (-4, 1) y su eje focal es horizontal, entonces la ecuación tiene la forma:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

$$\therefore\ \frac{(x+4)^2}{6^2}-\frac{(y-1)^2}{4^2}=1$$

$$\therefore\ \frac{(x+4)^2}{36}-\frac{(y-1)^2}{16}=1$$

Ejemplo 2

Dada la hipérbola de ecuación $9(x-1)^2-16(y+2)^2=144$, hallemos :

a) Coordenadas del centro
b) Coordenadas de los vértices
c) Coordenadas de los focos
d) Ecuaciones de las asíntotas
e) Dibujemos la gráfica.

SOLUCIÓN

- Dividiendo ambos miembros por 144, obtenemos: $\frac{(x-1)^2}{16}-\frac{(y+2)^2}{9}=1$

- a) Las coordenadas del centro son (1, -2).

  b) Como $a^2=16$, entonces $a=4$. Los vértices están ubicados a **a** unidades del centro; por lo tanto: $V_1(-3, -2)$ y $V_2(5, -2)$.

  c) Los focos están ubicados a **c** unidades del centro. Para hallar **c** tengamos en cuenta que: $a=4$, $b=3$ y $b^2=c^2-a^2$. Luego, $c^2=b^2+a^2$ y $c=\sqrt{16+9}=5$. Por lo tanto, los focos son los puntos $F_1(-4, -2)$ y $F_2(6, -2)$.

  d) Las ecuaciones de las asíntotas tienen la forma: $y-k=\pm\frac{b}{a}(x-h)$. Reemplazando valores tenemos:

  $$y+2=\pm\frac{3}{4}(x-1)$$

  e) La gráfica de la hipérbola se muestra en la figura 13 - 10.

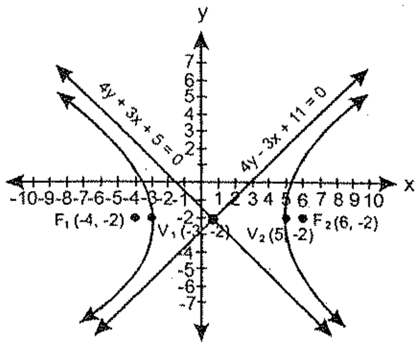


Figura 13 - 10

13.7 ECUACIÓN GENERAL DE LA HIPÉRBOLA

- Al igual que las ecuaciones generales de la circunferencia, de la elipse y de la parábola, también la ecuación general de una hipérbola se obtiene desarrollando alguna de las ecuaciones básicas:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1 \quad \text{..........} (1)$$

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1 \quad \text{..........} (2)$$

- Si desarrollamos, por ejemplo, la ecuación (1) nos queda:

$$\therefore\ b^2(x-h)^2-a^2(y-k)^2=a^2b^2$$

$$\therefore\ b^2\left(x^2-2hx+h^2\right)-a^2\left(y^2-2ky+k^2\right)=a^2b^2$$

$$\therefore\ b^2x^2-2b^2hx+b^2h^2-a^2y^2+2a^2ky-a^2k^2-a^2b^2=0$$

$$\therefore\ \underbrace{b^2}_{A}x^2\underbrace{-a^2}_{C}y^2\underbrace{-2b^2h}_{D}x+\underbrace{2a^2k}_{E}y+\underbrace{\left(b^2h^2-a^2k^2-a^2b^2\right)}_{F}=0$$

- Esta última ecuación es de la forma:

$$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

es decir, una ecuación de segundo grado en **x** y **y** en la cual los coeficientes A y C son de SIGNO CONTRARIO.

- Recíprocamente, para demostrar que una ecuación de la forma:

$$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

representa una hipérbola es necesario verificar que $A \cdot C<0$; luego, utilizar el método de completación al trinomio cuadrado perfecto como lo hicimos con la parábola y la elipse y, finalmente, analizar si la ecuación resultante representa una hipérbola o una degeneración de ella (un par de rectas que se cortan).

Ejemplo 1

Demostremos que la ecuación $9x^2 - 4y^2 - 54x + 8y + 113 = 0$ representa una hipérbola y dibujemos su gráfica.

SOLUCIÓN

- Agrupemos variables: $(9x^2 - 54x) - (4y^2 - 8y) = -113$
- Saquemos factor común en cada paréntesis: $9(x^2 - 6x) - 4(y^2 - 2y) = -113$
- Completemos trinomios cuadrados perfectos así: dividimos el coeficiente de **x** entre 2, elevamos al cuadrado y el resultado lo sumamos a ambos miembros de la ecuación. Lo mismo se hace con la variable y.

$$9\left[x^2 - 6x + \left(\frac{6}{2}\right)^2\right] - 4\left[y^2 - 2y + \left(\frac{2}{2}\right)^2\right] = -113 + 9\left(\frac{6}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{2}{2}\right)^2$$

$$\therefore\ 9(x^2 - 6x + 9) - 4(y^2 - 2y + 1) = -113 + 81 - 4$$

$$\therefore\ 9(x-3)^2 - 4(y-1)^2 = -36$$

- Dividiendo por -36 esta última ecuación, obtenemos:

$$\frac{(y-1)^2}{9} - \frac{(x-3)^2}{4} = 1$$

ésta es la ecuación de una hipérbola cuyo centro es C(3, 1) y cuyo eje focal es paralelo al eje y.

- Como $a^2 = 9$, entonces $a = 3$ y las coordenadas de los vértices son: (3,1 + 3) y (3,1 - 3); o sea, (3, 4) y (3, -2) respectivamente.
- Como $c^2=a^2+b^2$, entonces $c = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$. Por lo tanto, las coordenadas de los focos son $(3, 1+\sqrt{13})$ y $(3, 1-\sqrt{13})$ respectivamente.
- Finalmente, las ecuaciones de los asíntotas son: $y - 1 = \frac{3}{2}(x-3)$ y $y - 1 = -\frac{3}{2}(x-3)$.
- La gráfica aparece dibujada a continuación; figura 13 - 11.

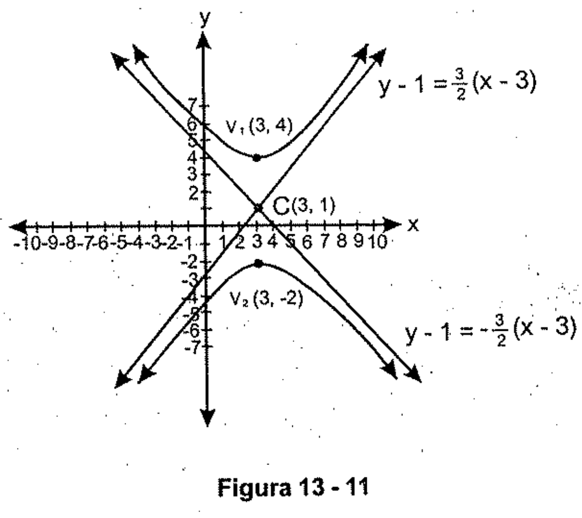


Figura 13 - 11

Ejemplo 2

Discutamos y dibujemos la gráfica de la relación cuya ecuación es $3x^2 - y^2 - 12x - 6y + 3=0$.

SOLUCIÓN

- Como $A = 3$ y $C = -1$ entonces $A \cdot C = -3$; es decir, $A \cdot C<0$. Luego, la ecuación tiene forma de hipérbola.
- Agrupemos variables: $(3x^2 - 12x) - (y^2 + 6y) = -3$
- Saquemos factor común en cada paréntesis: $3(x^2 - 4x) - (y^2 + 6y) = -3$
- Completemos trinomios cuadrados perfectos:

$$3(x^2 - 4x + 4) - (y^2 + 6y + 9) = -3 + 12 - 9$$

$$\therefore\ 3(x-2)^2 - (y+3)^2 = 0$$

$$\therefore\ \left[\sqrt{3}\,(x-2) + (y+3)\right]\left[\sqrt{3}\,(x-2) - (y+3)\right] = 0$$

$$\therefore\ \sqrt{3}\,(x-2) + (y+3) = 0 \quad ó \quad \sqrt{3}\,(x-2) - (y+3) = 0$$

$$\therefore\ \sqrt{3}x - 2\sqrt{3} + y + 3 = 0 \quad ó \quad \sqrt{3}\,x - 2\sqrt{3} - y - 3 = 0$$

$$\therefore\ \sqrt{3}x + y = 2\sqrt{3} - 3 \qquad ó \quad \sqrt{3}\,x - y = 2\sqrt{3} + 3$$

- Por tanto, la ecuación dada, aunque tiene forma de hipérbola, en realidad corresponde a un par de líneas rectas. Estas dos líneas rectas constituyen una DEGENERACIÓN de la hipérbola.
- La gráfica de este par de líneas rectas aparece dibujada en la figura 13 - 12.

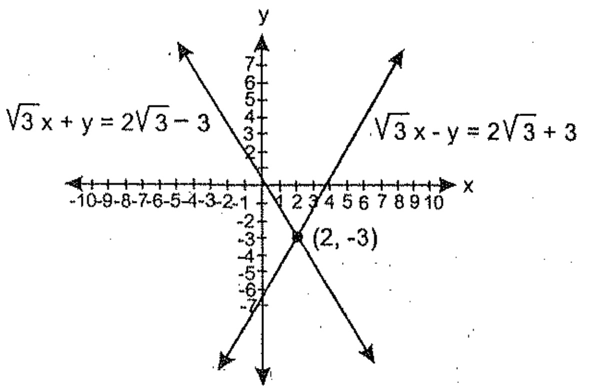
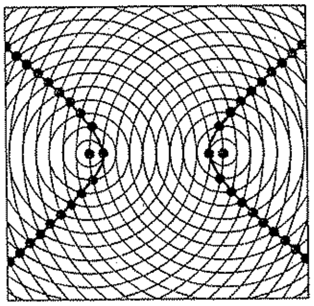


Figura 13 - 12

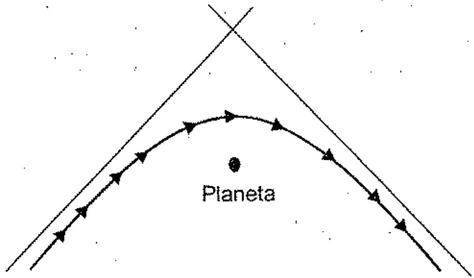
13.8 APLICACIONES DE LA HIPÉRBOLA

- Cuando se lanza una piedra a un estanque de agua quieta se forman, a partir del punto de choque, una serie de ondas circulares concéntricas que se van alejando de ese punto.

  Si se lanzan dos piedras, aparecen dos familias de circunferencias concéntricas que al cortarse determinan una hipérbola; figura 13 - 13 (a). La construcción de esta hipérbola es la siguiente:



(a)



(b)

Figura 13 - 13

- Se trazan dos familias de circunferencias concéntricas cuyos centros están separados 10 unidades.

- Las circunferencias de la izquierda se numeran con 1i, 2i , 3i ,... Las circunferencias de la derecha se numeran con 1d, 2d, 3d,...

- Marcando los puntos donde se cortan la 1d con la 9i, la 2d con la 10i, la 3d con la 11i,...y uniéndolos se forma una rama de la hipérbola. La otra rama se obtiene por simetría. Te invitamos a dibujarla.

• Supongamos que un asteroide vaga libremente por el espacio. De acuerdo con la Ley de Newton, su trayectoria será rectilínea hasta que se vea perturbada por la proximidad de un planeta, cuya atracción comenzará a curvar su trayectoria.

En raras ocasiones, el asteroide será "capturado" por el planeta y caerá hacia él o pasará a moverse siguiendo una órbita elíptica a su alrededor. Pero lo más probable es que describa una trayectoria como la mostrada por la figura 13- 13 (b): una rama de hipérbola.

La asíntota de la izquierda marca la trayectoria que tendría el asteroide sin la influencia del campo gravitatorio del planeta.

La atracción - mayor a menor distancia - obliga al asteroide a cambiar cada vez más rápidamente de dirección. Cuando el asteroide se aleja del planeta decrece paulatinamente la atracción y el movimiento tiende, de nuevo a ser rectilíneo: aparece la segunda asíntota.

13.9 CLASIFICACIÓN DE LAS CÓNICAS SEGÚN SU ECUACIÓN GENERAL

• El siguiente teorema nos permite clasificar una cónica mediante los coeficientes de su ecuación general.

TEOREMA

La gráfica de $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ representa:

1. **Una circunferencia, un punto o ningún gráfico, si $A = C$.**
2. **Una parábola, dos rectas paralelas a uno de los ejes coordenados, una recta paralela a uno de los ejes coordenados, o ningún gráfico, si $A = 0$ ó $C = 0$.**
3. **Una elipse, un punto o ningún gráfico, si $A \cdot C > 0$.**
4. **Una hipérbola o dos rectas que se cortan, si $A \cdot C < 0$.**

• Para llegar a las conclusiones que plantea este teorema es necesario completar, la ecuación dada, al trinomio cuadrado perfecto, con el objeto de llevarla de la forma general a la forma canónica (ó básica). Luego, ya escrita en la forma básica se analiza qué tipo de relación representa.

Ejemplo 1

Identifiquemos el lugar geométrico representado por las ecuaciones siguientes:

a) $4x^2 - 9x + y - 5 = 0$
b) $4x^2 - y^2 + 8x - 6y + 4 = 0$
c) $2x^2 + 4y^2 - 4x + 12y = 0$

SOLUCIÓN

a) Como A=4 y C=0 entonces la ecuación tiene forma de parábola o una de sus degeneraciones. Veamos:

$$4x^2 - 9x = -y + 5$$

$$\therefore\ 4\left(x^2 - \frac{9}{4}x\right) = -y + 5$$

$$\therefore\ 4\left(x^2 - \frac{9}{4}x + \frac{81}{64}\right) = -y + 5 + \frac{81}{16}$$

$$\therefore\ 4\left(x - \frac{9}{8}\right)^2 = -y + \frac{161}{16}$$

$$\therefore\ \left(x - \frac{9}{8}\right)^2 = -\frac{1}{4}y + \frac{161}{64}$$

$$\therefore\ \left(x - \frac{9}{8}\right)^2 = -\frac{1}{4}\left(y - \frac{161}{16}\right)$$

Luego, la relación es una parábola con eje focal paralelo al eje **y** y vértice en $V\left(\frac{9}{8}, \frac{161}{16}\right)$.

b) Como A = 4 y C = -1 entonces A•C= -4 < 0. La ecuación es una hipérbola o su degeneración. Veamos:

$$\left(4x^2 + 8x\right) - \left(y^2 + 6y\right) = -4$$

$$\therefore\ 4\left(x^2 + 2x\right) - \left(y^2 + 6y\right) = -4$$

$$\therefore\ 4\left(x^2 + 2x + 1\right) - \left(y^2 + 6y + 9\right) = -4 + 4 - 9$$

$$\therefore\ 4(x+1)^2 - (y+3)^2 = -9$$

$$\therefore\ (y+3)^2 - 4(x+1)^2 = 9$$

$$\therefore\ \frac{(y+3)^2}{9} - \frac{(x+1)^2}{\frac{9}{4}} = 1$$

Luego, la ecuación es una hipérbola vertical con centro en (-1, -3).

c) Como A = 2 y C = 4, entonces A•C=8>0. La ecuación es una elipse o una de sus degeneraciones. Veamos:

$$\left(2x^2 - 4x\right) + \left(4y^2 + 12y\right) = 0$$

$$\therefore\ 2\left(x^2 - 2x\right) + 4\left(y^2 + 3y\right) = 0$$

$$\therefore\ 2\left(x^2 - 2x + 1\right) + 4\left(y^2 + 3y + \frac{9}{4}\right) = 0 + 2 + 9$$

$$\therefore\ 2(x-1)^2+4\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=11$$

$$\therefore\ \frac{2(x-1)^2}{11}+\frac{4\left(y+\frac{3}{2}\right)^2}{11}=1$$

$$\therefore\ \frac{(x-1)^2}{\frac{11}{2}}+\frac{\left(y+\frac{3}{2}\right)^2}{\frac{11}{4}}=1$$

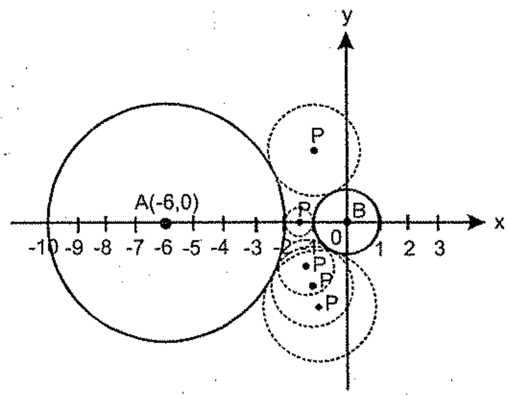
- Luego, la ecuación corresponde a una elipse horizontal con centro en $\left(1,-\frac{3}{2}\right)$.

Ejemplo 2

Un punto P(x, y) se mueve en el plano de tal manera que siempre es el centro de una circunferencia tangente a las circunferencias de ecuación $x^2 + y^2 = 1$ y $(x + 6)^2 + y^2 = 16$. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico descrito por el movimiento del punto P.

SOLUCIÓN

- La circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ tiene radio 1 y centro B en el origen. La circunferencia $(x + 6)^2 + y^2 = 16$ tiene radio 4 y su centro es el punto A(-6, 0). La figura 13 - 14 (a) nos muestra la gráfica de estas dos circunferencias y cinco circunferencias punteadas, de las cuales P es su centro.



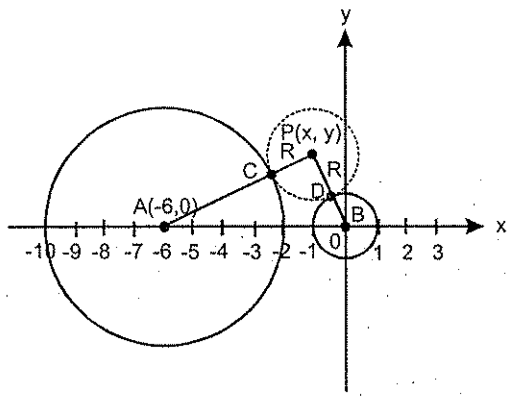


Figura 13 - 14

- Tomemos una de las cinco circunferencias punteadas. Su centro es el punto P(x, y), su radio es R y los puntos C, y D son los puntos de tangencia con las circunferencias dadas; figura 13 - 14 (b). Por lo tanto:

$$\left|\overline{PA}\right| = R + 4 \text{.................................. (¿por qué?)}$$

$$\left|\overline{PB}\right| = R + 1 \text{.................................. (¿por qué?)}$$

Si despejamos R en cada una de las dos ecuaciones anteriores, nos queda:

$$R = \left|\overline{PA}\right| - 4 \text{..................................(1)}$$

$$R = \left|\overline{PB}\right| - 1 \text{.................................. (2)}$$

Igualando (1) y (2) nos queda:

$$\left|\overline{PA}\right| - 4 = \left|\overline{PB}\right| - 1$$

$$\therefore \left|\overline{PA}\right| - 3 = \left|\overline{PB}\right|$$

- Ahora bien:

$$\left|\overline{PA}\right| = \sqrt{(x+6)^2 + y^2} \text{ y } \left|\overline{PB}\right| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Reemplazando en (3), obtenemos:

$$\sqrt{(x+6)^2 + y^2} - 3 = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{.................................(3)}$$

- Si elevamos ambos miembros de la ecuación (3) al cuadrado y reducimos términos semejantes nos quedará la siguiente ecuación general de segundo grado:

$$12x^2 + 72x - 4y^2 + 81 = 0 \text{ (¡comprobarlo!)....................(4)}$$

- Finalmente, si completamos trinomios cuadrados perfectos y factorizamos, obtendremos la siguiente ecuación en la forma básica.

$$12(x+3)^2 - 4(y-0)^2 = 27$$

Esta ecuación corresponde a una hipérbola horizontal (realmente el lugar geométrico es una rama de esta hipérbola) que tiene su centro en el punto (-3, 0).

- Dejamos al lector el análisis completo de la curva y el dibujo de su gráfica.

EJERCICIO 13.2

En los ejercicios 1 a 4 escribir cada ecuación en la forma básica, identificar el lugar geométrico que representa, determinar sus principales elementos y dibujar la gráfica.

1. $y^2 - 12y - 8x + 20 = 0$
2. $3x^2 - 2y^2 + 24x + 12y + 24 = 0$
3. $4x^2 + y^2 - 16x + 15 = 0$
4. $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 = 0$

5. Al igual que en la elipse, se denomina EXCENTRICIDAD de una hipérbola al cociente $\frac{c}{a}$. Encontrar la excentricidad y las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola de ecuación $49x^2 - 4y^2 = 196$. ¿Qué influencia tiene la excentricidad de una hipérbola en su gráfica?

6. La distancia entre los vértices de una hipérbola mide 4 unidades. Si sus focos son los puntos (4, -2) y (4, -8), hallar la ecuación de la hipérbola, las ecuaciones de las asíntotas, su excentricidad y dibujar su gráfica.

7. Una hipérbola horizontal pasa por el punto (4, 6) y sus asíntotas son las rectas $2x + y - 3 = 0$ y $2x - y - 1 = 0$. Hallar su ecuación y dibujar su gráfica (Sugerencia: el centro de la hipérbola es el punto de intersección de las asíntotas).

8. Hallar la ecuación de la elipse cuyos focos son los vértices de la hipérbola $11x^2 - 7y^2 = 77$ y cuyos vértices son los focos de esta hipérbola.

9. El centro de una hipérbola vertical está sobre la recta $y + 2 = 0$. Si la curva pasa por los puntos (0, 3), (3, 1) y (4, -7), hallar la ecuación de esta hipérbola, encontrar sus elementos principales y dibujar la gráfica.

10 Dos de los vértices de un triángulo son los puntos fijos A(1, 0) y B(5, 0). El tercer vértice C se mueve de tal manera que la diferencia entre las longitudes de los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ es siempre igual a la mitad de la longitud del lado $\overline{AB}$.

Se pide:

a) Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico.
b) Determinar los elementos principales
c) Dibujar su gráfica

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (39)

Un viaje organizado por una escuela puede llevar hasta 250 estudiantes. Si viajan 150 estudiantes o menos, el costo será de \$15.000 por cada uno. Sin embargo, el costo por persona se reduce \$50 por cada alumno que exceda en número a 150 hasta que el costo llegue a \$10.000 por alumno. Si x es el número de estudiantes que hacen el viaje, se pide:

1. **Escribir una ecuación, en función de x, para calcular los ingresos que obtendrá el organizador del viaje.**
2. **Determinar cuántos estudiantes deben hacer el viaje para que la escuela reciba los mayores ingresos.**

Taller de la Unidad 13

1 **PREGUNTAS PARA REVISAR LA TEORÍA**

1.1 ¿Cómo se define la hipérbola?

1.2 ¿Cuáles son y cómo se definen los elementos básicos de una hipérbola?

1.3 ¿Cuál es la ecuación de una hipérbola vertical cuyo centro es el punto C(h, k)?

1.4 En la ecuación $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$, ¿qué representan los valores h, k, a y b?

1.5 ¿Cómo se obtienen las asíntotas de una hipérbola de ecuación $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$?

1.6 ¿Cuándo la ecuación $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ representa una hipérbola o degenración de ella?

1.7 ¿En qué degenera una hipérbola?

1.8 ¿Qué relación existe entre los valores a, b y c en la hipérbola?

1.9 ¿Qué es excentricidad de una hipérbola?

En los ejercicios **2** a **6** marcar una X sobre la letra correspondiente a la única respuesta correcta en cada uno de los siguientes ejercicios.

2 La ecuación de una hipérbola con vértices en (0, -a) y (0, a) y con centro en el origen es:

a) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ b) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ c) $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ d) $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$

3 Una condición necesaria para que la ecuación $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ corresponda a una hipérbola es que:

a) $A \cdot C < 0$ b) $A \cdot C > 0$ c) $A = 0$ y $C \neq 0$ d) $C = 0$ y $A \neq 0$

4 Una hipérbola tiene su centro en el origen, su eje focal es el eje y y pasa por los puntos (4, 6) y (1, -3). Su ecuación es:

a) $\frac{x^2}{4} - \frac{5y^2}{36} = 1$ b) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ c) $36x^2 - 20y^2 = 36$ d) $5y^2 - 9x^2 = 36$

5 Las asíntotas de la hipérbola de ecuación $9x^2 - 16y^2 = 144$ son:

a) $y = \pm \frac{5}{4}x$ b) $y = \pm \frac{4}{3}x$

c) $y = \pm \frac{4}{5}x$ d) $y = \pm \frac{3}{4}x$

6 El centro y el eje focal de la hipérbola $9x^2 - 16y^2 - 18x - 64y = 199$ son respectivamente:

a) C(1, -2); el eje x b) C(1, -2) ; y = -2

c) C(-1, 2); y = -2 d) C(-1, 2); eje x

En los ejercicios **7** a **10** escribir cada ecuación en la forma básica, identificar el lugar geométrico que representa, determinar sus principales elementos y dibujar la gráfica.

7 $3x^2 + 2y^2 - 12x + 12y + 29 = 0$ **8** $4x^2 - 4y^2 - 4x + 8y - 11 = 0$

9 $x^2 - 6x + 2y + 9 = 0$ **10** $4x^2 + 9y^2 - 8x + 9y + 4 = 0$

11 Un punto P se mueve en el plano de tal manera que su distancia al punto (5, 0) es siempre $\frac{5}{3}$ de su distancia a la recta $5x - 9 = 0$. Hallar la ecuación del lugar geométrico descrito por el punto en su movimiento, identificarlo, determinar sus elementos básicos y dibujar la gráfica.

12 Un punto P se mueve en el plano de tal manera que el producto de las pendientes de las rectas que pasan por P y por los puntos fijos A(-2, 1) y B(3, 2) es igual a 4. Hallar la ecuación del lugar geométrico descrito por el punto P en su movimiento, identificarlo, determinar sus elementos básicos y dibujar la gráfica.

13 Demostrar que la ecuación $\frac{x^2}{9-t} + \frac{y^2}{5-t} = 1$, donde $t \in R$, representa:

a) Una elipse, si $t < 5$
b) Una hipérbola, si $5 < t < 9$
c) Probar que en ambos casos los focos son los puntos (2, 0) y (-2, 0).

14 Demostrar que la distancia de un foco a una asíntota de la hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ es b.

15 Un segmento de recta de longitud a + b se mueve de tal manera que sus extremos están sobre los ejes x e y; figura 13- 15. Demostrar que el lugar geométrico descrito por un punto P(x, y) que divide al segmento en dos partes a y b es una elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

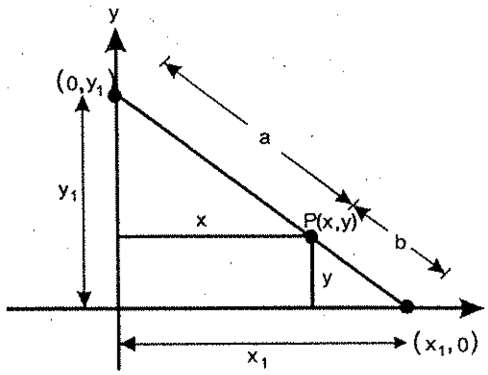
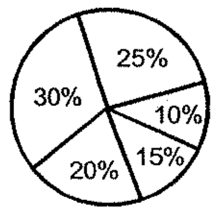


Figura 13- 15

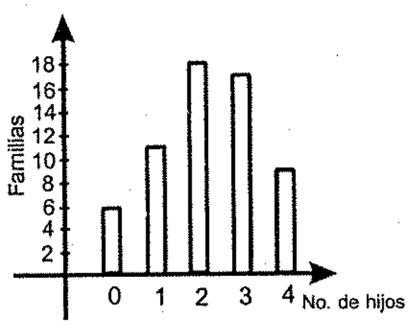
Prepárate para las Pruebas ICFES

Subraye la letra correspondiente a la ÚNICA respuesta correcta en cada uno de los siguientes ejercicios:

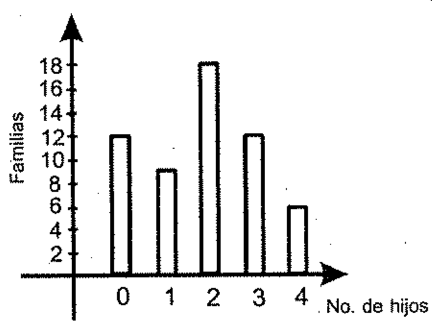
1. El diagrama circular muestra los resultados obtenidos en una encuesta realizada a 60 familias de un barrio, sobre el número de hijos de cada familia; sin embargo, la forma como se presentaron los datos que arrojó la encuesta no fue bien entendida por la mayor parte de la población. Una nueva forma de presentar la información es:



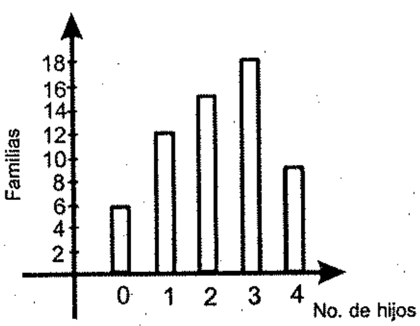
a)



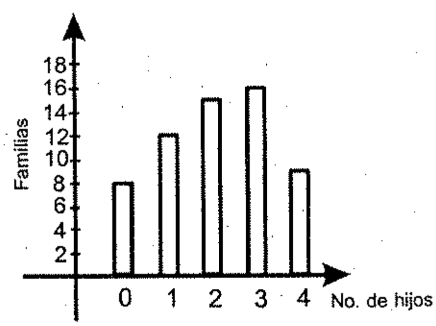
b)



c)

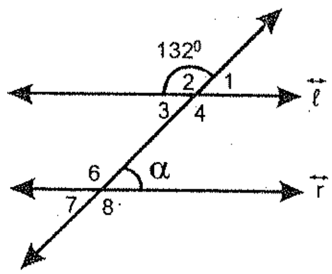


d)



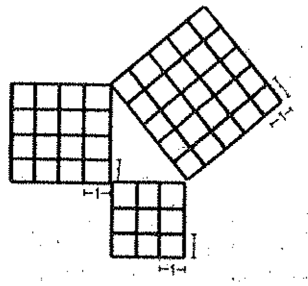
2. Para determinar el valor del ángulo α de la figura, en la cual $\overleftrightarrow{\ell} \parallel \overleftrightarrow{r}$, debemos hacer el siguiente razonamiento:

a) $\angle 2 \cong 4 \cong \angle\alpha$ por ser opuestos por el vértice.
b) $\angle 3 = 180^o - 132^o = 48^o$ y $\angle 3 \cong \angle\alpha$ por ser alternos internos.
c) $\angle 4 \cong \angle\alpha$ por ser internos colaterales.
d) $\angle\alpha = 132^o$ por correspondientes con el $\angle 4$



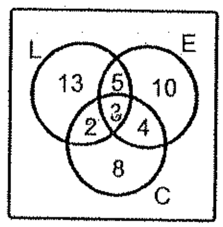
3. La demostración correcta para la situación que plantea la figura es:

a) $3^2 - 4^2 = 5^2$
b) $5^2 - 3^2 = 4^2$
c) $5^2 + 4^2 = 3^2$
d) $4^2 - 3^2 = 5^2$



Las preguntas **4.** y **5.** se responden con la siguiente información:

En la biblioteca se realiza una encuesta a 50 personas acerca de los libros más consultados. Para tabular dicha encuesta, se utiliza un diagrama de Venn en el cual se ubican los datos sobre los libros de literatura (L), libros científicos (C) y textos escolares (E):



4. De las personas consultadas se puede afirmar que:

a) 3 personas no consultan ninguno de los tres tipos de libros.
b) 4 personas consultan libros científicos y textos escolares.
c) Los libros más consultados son los de literatura y los menos consultados son los científicos.
d) 10 personas consultan textos escolares.

5. De las relaciones generadas entre los libros consultados todas son ciertas EXCEPTO:

a) El número de personas que consultan textos escolares y no científicos es igual al número de personas que consultan textos de literatura y no escolares.
b) Los textos científicos son los menos consultados.
c) Si una persona más consultara textos escolares, su número equivaldría al de personas que consultan literatura.
d) Las personas que consultan literatura es cinco veces mayor que que el número de personas que consultan textos científicos.

Cuarta Parte

Estadística

Núcleo Temático

14

PENSAMIENTO ALEATORIO

LOGRO GENERAL

- Revisar las medidas de centralización, posición y dispersión para interpretar conjuntos de datos representados mediante una variable.
- Analizar el comportamiento y la relación existente entre datos correspondientes a dos o más variables.

LOGROS ESPECÍFICOS	INDICADORES DE LOGRO
Corporal: • Realizar mediciones de la estatura o el peso a un grupo de personas y establecer la relación entre ellos.	• Dada una muestra de 10 compañeros de clase, mide sus estaturas y sus pesos y establece la relación entre ellos.
Comunicativa: • Explicar los conceptos de correlación lineal, coeficiente de correlación, regresión lineal y recta de mejor ajuste.	• Dado un conjunto de datos en dos variables, explica los conceptos de correlación lineal, coeficiente de correlación, regresión lineal y recta de mejor ajuste.
Cognitiva: • Hallar las medidas de centralización, posición y dispersión de un conjunto de datos. • Determinar la correlación lineal, el coeficiente de correlación lineal y la regresión lineal de un conjunto de datos en dos variables. • Hallar la ecuación de la recta de mejor ajuste correspondiente a una distribución de datos bivariados.	• Dado un conjunto de datos univariados, calcula las medidas de centralización, posición y dispersión. • Dado un conjunto de datos bivariados, determina la correlación lineal, el coeficiente de correlación lineal y la regresión lineal. • Halla la ecuación de la recta de mejor ajuste que corresponde a una distribución de datos bivariados.
Estética: • Dibujar el diagrama de dispersión de un conjunto de datos bivariados. • Graficar la recta de mejor ajuste correspondiente a una distribución de datos bivariados.	• Dado un conjunto de datos bivariados, dibuja su diagrama de dispersión. • Grafica la recta de mejor ajuste correspondiente a una distribución de datos bivariados.
Etica - Actitudinal: • Reconocer la importancia del trabajo en equipo.	• Participa activamente en las experiencias de aprendizajes programadas para realizar grupalmente.

DIMENSIONES

EVALUACIÓN

ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS

14.1 COMPRENSIÓN DE LECTURA: HISTORIA DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA (3)

Lea atentamente el siguiente texto y luego subraye la letra correspondiente a la ÚNICA respuesta correcta en cada uno de los enunciados propuestos.

PIERRE FERMAT
1601 - 1665

Pierre (Pedro) Fermat nació en 1601 en un pueblecito de Francia, hijo de un comerciante en cueros, quien lo envió a Tolosa a que estudiara Derecho. Eso hizo y durante todo el resto de su vida, vivió allí y ejerció su profesión de abogado. Murió en 1665.

Fue, como tantos otros, un autodidacta de las Matemáticas. Como no era su profesión sino un «hobby» rara vez publicaba sus trabajos, pero sí se carteaba con los grandes científicos de su época.

Acostumbraba anotar sus descubrimientos en el margen del libro que estaba leyendo. En uno de esos márgenes se encontró escrito, después de su muerte, lo que hasta hace poco se conoció como el **Teorema Indemostrado de Fermat.**

A más de ser un <u>coinventor</u> de la Geometría Analítica y precursor del Cálculo Diferencial, Fermat hizo aportes importantes a la Teoría de los Números y a la Teoría de la Probabilidad.

En Teoría de los Números (realmente, de los números naturales) Fermat estableció un teorema (ese sí demostrado) que sólo tres siglos más tarde, con el advenimiento de los computadores electrónicos, resultó de vital importancia para lo que se llama «generación de números al azar» por computador.

1. Las siguientes afirmaciones sobre Fermat son falsas, excepto:
   a. Sus estudios y trabajos matemáticos no son el fruto de la formación universitaria.
   b. Su afición por las matemáticas le hizo abandonar su carrera de abogado.
   c. Raras veces se comunicaba con los científicos de su época.
   d. Con alguna frecuencia daba a conocer sus trabajos sobre matemáticas.

2. La «generación de números al azar» realmente apareció:
   a. Por casualidad, tres siglos después que Fermat estableciera su teorema.
   b. Con base en el teorema que había demostrado tres siglos antes, Fermat.
   c. Como producto de la capacidad inventiva de Fermat.
   d. De la interpretación que se hizo de el «Teorema Indemostrado» de este intelectual.

3. El término <u>coinventor</u>, subrayado en la lectura quiere dar a entender que Fermat:

   a. Es el creador de la Geometría Analítica.
   b. Es el precursor y padre de la Geometría y el Cálculo.
   c. Al lado de otro(s) creó la Geometría Analítica.
   d. Perfeccionó la Geometría Analítica y el Cálculo Diferencial.

4. Respecto de la «Teoría de la Probabilidad», en el texto:

   a. Se dice que ayudó siglos más tarde al trabajo de computación.
   b. Fermat la perfeccionó.
   c. Fue un campo al cual Fermat no le dedicó mucho tiempo.
   d. Apenas si se menciona.

5. De la lectura de ese fragmento se puede inferir que:

   a. Los hombres que revolucionaron el campo de las matemáticas fueron autodidactas.
   b. Los padres siempre han determinado el futuro profesional de sus hijos.
   c. Muchos inventos y descubrimientos del ayer, son base fundamental para la ciencia de hoy.
   d. Los humanísticos y las ciencias son campos diametralmente opuestos.

14.2 REVISIÓN DE CONCEPTOS

- En los cursos anteriores presentamos métodos para organizar los datos de una distribución mediante tablas y gráficas. Igualmente, complementamos las interpretaciones que nos brindaron tablas y gráficas, con medidas numéricas cuyas características son propias de colecciones de datos cuantitativos. Tales características son las medidas de centralización, de posición y de dispersión.

- Un ejemplo nos ayudará a recordar estos conceptos:

Ejemplo

De un grupo de 850 estudiantes del programa de Educación Física, de las mejores universidades del país, se escogieron los 80 mejores tiempos logrados en los 100 metros planos. Estos fueron los registros:

12.7	14.6	13.8	12.9	12.5	11.8	14.6	14.0	14.3	13.1
12.8	13.6	13.5	14.2	13.8	14.8	14.4	13.3	14.1	14.5
13.2	11.7	12.9	13.0	14.1	14.6	12.4	14.6	13.9	13.6
14.3	14.1	14.2	12.3	13.1	12.9	13.6	13.4	13.5	13.8
13.0	14.5	14.8	13.7	12.0	14.8	13.5	14.3	14.5	13.7
14.2	13.8	13.5	14.0	12.5	13.2	12.8	13.4	13.4	14.0
12.8	12.3	13.1	12.5	14.2	12.9	13.4	12.6	13.5	13.0
13.4	12.2	14.1	13.5	13.5	14.0	12.2	13.4	12.9	13.0

a) Identificar la población, la muestra, el caracter estadístico, el tipo de caracter estadístico y el tipo de variable estadística.

b) Agrupar la muestra en intervalos o clases y construir la tabla de frecuencias.

c) Construir el histograma y el polígono de frecuencias absolutas, el histograma y el polígono de frecuencias acumuladas.

d) Dibujar la curva de frecuencias absolutas y la ojiva.

e) Calcular e interpretar las medidas de tendencia central.

f) Calcular Q_3, D_5, D_7, P_{63} y P_{92}

g) Calcular las medidas de dispersión

h) Hallar los porcentajes de la distribución que se encuentran en los intervalos: $x \pm s$, $x \pm 2s$ y $x \pm 3s$. ¿Podemos afirmar que esta distribución es normal o aproximadamente normal?

SOLUCIÓN

a) La **población** corresponde a los 850 estudiantes del programa de Educación Física de las mejores universidades del país. La **muestra**, a los 80 mejores tiempos logrados en la prueba de los 100 metros. El **caracter estadístico** es el aspecto que vamos a estudiar: los **tiempos logrados en los 100 metros planos.** La variable estadística es **cuantitativa** y **continua.**

Recordemos

- **POBLACIÓN:** es el conjunto de todos los elementos que cumplen determinada condición; por ejemplo, "ser estudiantes del programa de Educación Física de las mejores universidades del país".
- **MUESTRA:** es cualquier subconjunto o parte de la población; por ejemplo, "los 80 estudiantes que obtuvieron los mejores tiempos en los 100 metros planos".
- El aspecto o los aspectos que se va(n) a estudiar (en este caso, el TIEMPO) se denomina(n) **CARACTER (ES) ESTADÍSTICO(S).** Los caracteres estadísticos pueden ser **CUALITATIVOS** o **CUANTITATIVOS.** Los cualitativos son básicamente cualidades o atributos (por ejemplo, el lugar de nacimiento, el estado civil de una persona, la profesión de alguien, el color del cabello,...) y los cuantitativos son especialmente cantidades numéricas (por ejemplo, el número de hermanos, la estatura y el peso de las personas, la calificación obtenida en un examen,...).
- El conjunto de valores que puede tomar un caracter se denomina **VARIABLE ESTADÍSTICA O ALEATORIA.** Las variables estadísticas pueden ser **DISCRETAS** o **CONTINUAS.** Las variables son discretas cuando sólo pueden tomar valores aislados y son continuas cuando pueden tomar todos los valores posibles dentro de un intervalo de números reales.
- Si la variable se simboliza por **x**, entonces los valores observados o medidos de la variable se representan por $x_1, x_2, x_3, \dots x_i, \dots x_n$

b) Como el número de datos es grande, conviene agruparlo en **intervalos** o **clases.** Es recomendable que todas las clases o intervalos tengan la misma amplitud. Los puntos medios de cada clase se llaman **marcas de clase.**

No existe una regla única para fijar el número **k** de intervalos o clases en que se va a agrupar la muestra, pero generalmente varía entre 5 y 15, dependiendo del tamaño de la muestra. Una buena guía para tomar la decisión acerca del valor de **k** es la propuesta de **Herbert A. Sturges (1926)**, quien diseñó la siguiente tabla:

Números de Elementos de la Muestra	Números de Intervalos
n	k
De 6 a 11	4
De 12 a 22	5
De 23 a 45	6
De 45 a 90	7
De 91 a 181	8
De 182 a 362	9
De 363 a 724	10
De 725 a 1.448	11
De 1.449 a 2.896	12

- Para determinar la amplitud de los intervalos o clases procedemos así:

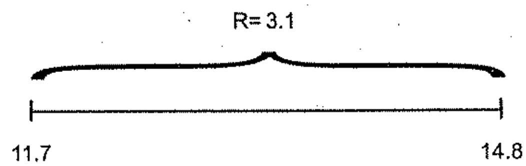
* Hallamos la diferencia entre el mayor valor y el menor valor de la muestra. Esta diferencia se denomina **RANGO** de la muestra y lo representamos por **R**; es decir:

$$\mathbf{R = X_{max} - X_{min}}$$

* Dividimos **R** entre **k** para hallar la amplitud **A** de cada intervalo:

$$\mathbf{A = \frac{R}{k}}$$

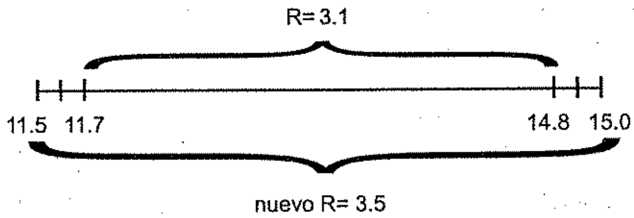
* Como en este caso, el dato mayor es 14.8 y el menor es 11.7, entonces el rango de la muestra es **R=14.8 - 11.7 = 3.1.**



* El número de intervalos, de acuerdo con la tabla de Sturges es **k=7** y la amplitud de cada intervalo será:

$$A = \frac{3.1}{7} = 0.442...$$

Como los datos de la muestra tienen una cifra decimal, entonces aproximamos a la décima mayor más próxima; es decir, a 0.5. Esto hace que el nuevo rango sea **7 x 0.5 = 3.5**; o sea, **0.4** más que el rango de los datos. Estos 0.4 podemos repartirlos en 0.2 por debajo y 0.2 por encima (de 11.5 a 15.0); así:



* La **tabla de frecuencias** debe contener los valores de la variable. Como estos valores vienen agrupados en clases, entonces deben aparecer el extremo superior, el extremo inferior, las marcas de clase, las frecuencias absolutas y relativas. En ocasiones también es conveniente incluir las frecuencias absolutas y relativas acumuladas y los porcentajes.

Recordemos

- La **FRECUENCIA ABSOLUTA** de un valor x_i es el número de veces que se repite dicho valor en toda la muestra. La frecuencia absoluta del valor x_i se representa por f_i.
- La **FRECUENCIA RELATIVA** de un valor x_i es el cociente entre su frecuencia absoluta y el número de datos de la muestra. La frecuencia relativa de un dato o valor x_i la representamos por h_i.

$$h_i = \frac{f_i}{n}$$

siendo **n** el número total de datos; es decir,

$$n= f_1+ f_2+ f_3+...+ f_n$$

- La **FRECUENCIA ABSOLUTA ACUMULADA** de un valor x_i es la suma de las frecuencias absolutas de los valores menores o iguales a x_i. La frecuencia absoluta acumulada del valor x_i se representa por F_i.

$$F_i = f_1+ f_2+ f_3+...+ f_i$$

- La **FRECUENCIA RELATIVA ACUMULADA** de un valor x_i es el cociente entre la frecuencia absoluta acumulada del valor x_i y el número total de datos. La frecuencia relativa acumulada del valor x_i la representamos por H_i.

$$H_i= \frac{F_i}{n} = \frac{f_1+ f_2+ f_3+...+ f_i}{n}$$

La tabla de frecuencias para la distribución de los tiempos logrados por los 80 estudiantes en los 100 metros planos es la siguiente (completa la última columna):

INTERVALO (segundos)	MARCAS DE CLASE	RECUENTO	FRECUENCIA ABSOLUTA	FRECUENCIA ABSOLUTA ACUMULADA	FRECUENCIA RELATIVA	FRECUENCIA RELATIVA ACUMULADA
	x_i		f_i	F_i	$h_i= \frac{f_i}{n}$	$H_i= \frac{F_i}{n}$
[11.5-12.0)	11.75		2	2	$\frac{2}{80} = 0.02$	
[12.0-12.5)	12.25		6	8	$\frac{6}{80} = 0.07$	
[12.5-13.0)	12.75		13	21	$\frac{13}{80} = 0.16$	
[13.0-13.5)	13.25		16	37	$\frac{16}{80} = 0.20$	
[13.5-14.0)	13.75		17	54	$\frac{17}{80} = 0.21$	
[14.0-14.5)	14.25		16	70	$\frac{16}{80} = 0.20$	
[14.5-15.0)	14.75		10	80	$\frac{10}{80} = 0.12$	
			80			

c) Para los datos agrupados en intervalos, existen las siguientes representaciones gráficas: **histogramas, polígonos de frecuencias, polígonos de frecuencias acumuladas, curvas de frecuencias y ojivas.** Consideremos cada una de estas gráficas:

1. **HISTOGRAMAS**

- Un histograma es un conjunto de rectángulos contiguos cuyas bases son los intervalos o clases sobre el eje horizontal y alturas iguales a las frecuencias absolutas o relativas correspondientes a cada clase sobre el eje vertical.

Para el caso que nos ocupa, éstos serían la tabla de frecuencias absolutas y acumuladas y los histogramas correspondientes; figura 14-1:

Intervalos (seg)	f_i	F_i
[11.5-12.0)	2	2
[12.0-12.5)	6	8
[12.5-13.0)	13	21
[13.0-13.5)	16	37
[13.5-14.0)	17	54
[14.0-14.5)	16	70
[14.5-15.0)	10	80
	80	

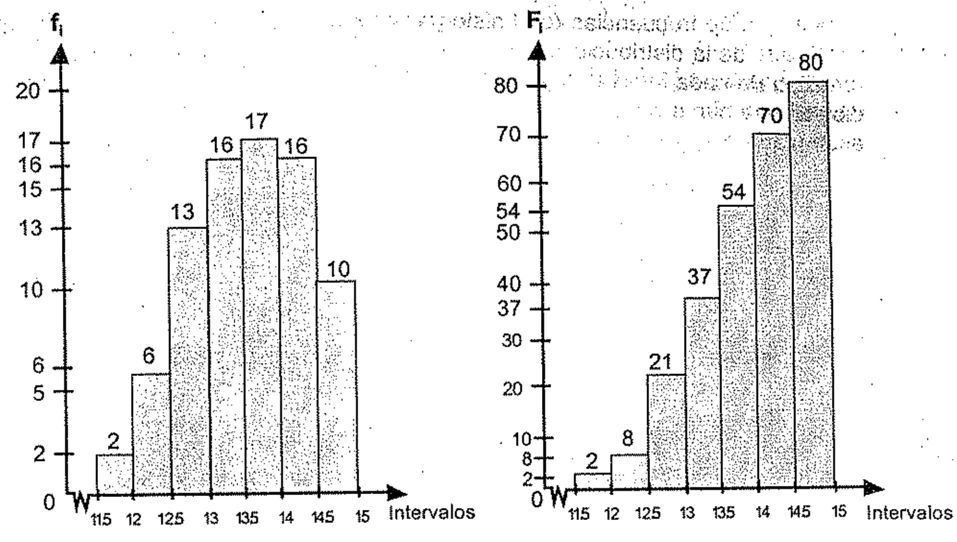
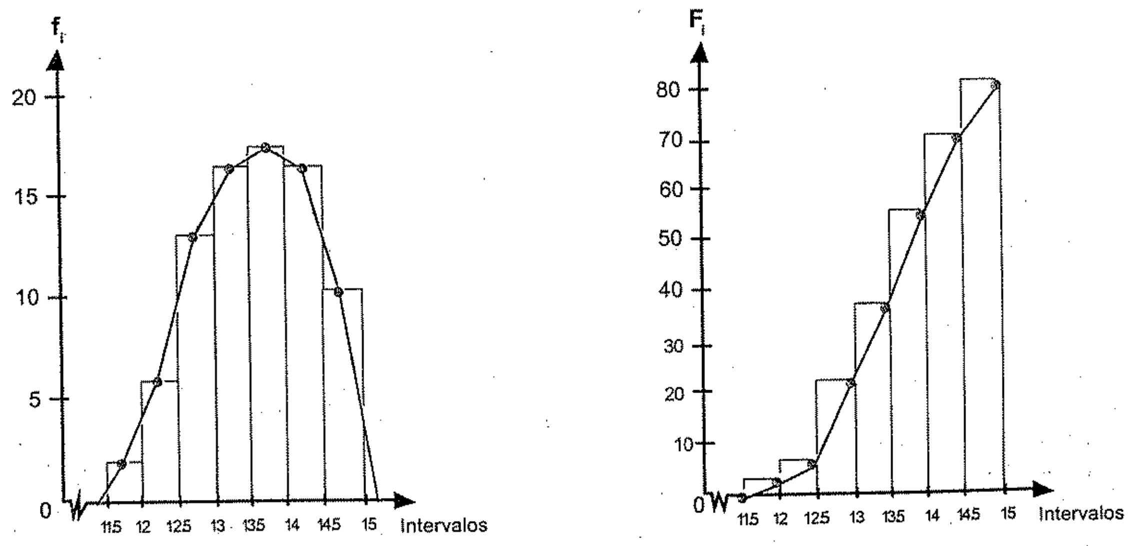


Figura 14-1

2. POLÍGONO DE FRECUENCIAS

- El polígono de frecuencias se construye uniendo con una línea poligonal los puntos medios de los lados superiores de cada rectángulo. En el caso de los histogramas, serán los puntos formados por las marcas de clases y con el fin de que el área encerrada bajo el polígono de frecuencia sea igual a la suma de las áreas de los rectángulos, unimos la marca de clase del primer rectángulo con el punto medio del lado vertical izquierdo, prolongando hasta el eje horizontal; de la misma forma procedemos con el último rectángulo. Si queremos construir el polígono de frecuencias acumuladas, unimos con segmentos los extremos derechos de cada clase.

- A continuación presentamos los polígonos de frecuencias absolutas y frecuencias absolutas acumuladas de los tiempos alcanzados por los estudiantes de Educación Física, en la prueba de los 100 metros planos; figura 14-2:



POLÍGONO DE FRECUENCIAS ABSOLUTAS

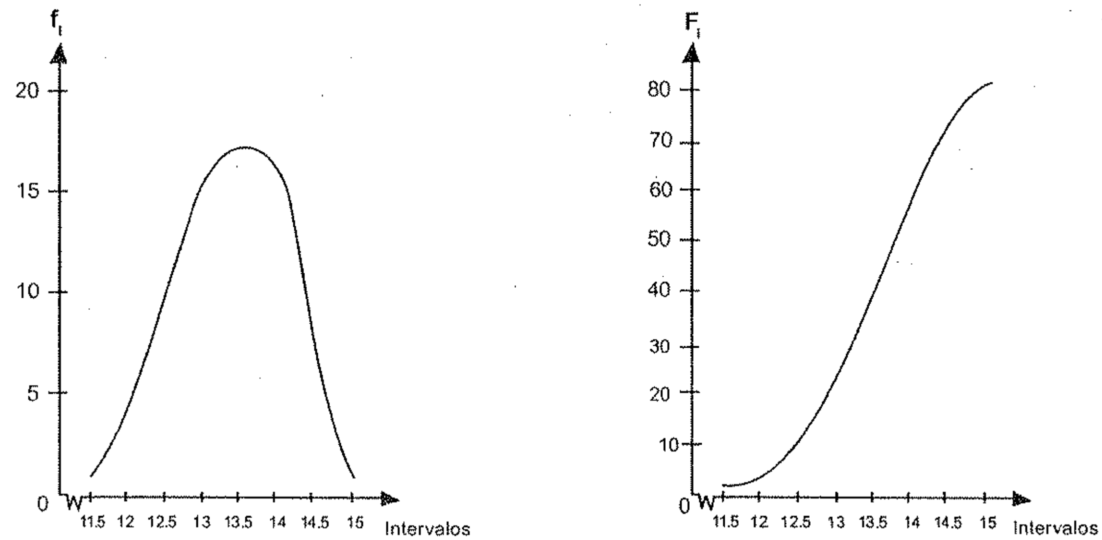
(a)

POLÍGONO DE FRECUENCIAS ABSOLUTAS ACUMULADAS

(b)

Figura 14-2

d) El polígono de frecuencias (o el histograma) sugiere el dibujo de una curva suave como una representación idealizada de la distribución de la población. Si pudiéramos aumentar el tamaño de la muestra y disminuir la amplitud de cada intervalo, obtendríamos un polígono de frecuencias menos irregular cada vez y podríamos dibujar una curva suave y continua. La figura 14-3 muestra las curvas de frecuencia absoluta y frecuencia acumulada del caso que nos ocupa:



CURVA DE FRECUENCIAS ABSOLUTAS
(a)

CURVA DE FRECUENCIAS ABSOLUTAS ACUMULADAS
(b)

Figura 14-3

Este tipo de curvas recibe el nombre de **CURVAS DE FRECUENCIAS.** Las curvas de frecuencias acumuladas se llaman **OJIVAS.**

e) Las **MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL** son: la **Media aritmética ($\overline{x}$)**, la **mediana (Me)** y la **Moda (Mo).** La siguiente tabla nos ayudará a calcular las medidas de tendencia central de esta distribución:

Tiempo (seg)			F_i	$f_i \cdot x_i$
[11.5-12.0)	11.75	2	2	23.50
[12.0-12.5)	12.25	6	8	73.50
[12.5-13.0)	12.75	13	21	165.75
[13.0-13.5)	13.25	16	37	212.00
[13.5-14.0)	13.75	17	54	233.75
[14.0-14.5)	14.25	16	70	228.00
[14.5-15.0)	14.75	10	80	147.50

- La media aritmética de una distribución de **n** datos se obtiene sumando los productos $f_i \cdot x_i$ y dividiendo por n; es decir:

$$\overline{x} = \frac{\Sigma f_i \cdot x_i}{n} = \frac{23.50 + 73.50 + 165.75 + 212.00 + 233.75 + 228.00 + 147.50}{80}$$

$$= \frac{1084}{80} = 13.55 \text{ seg}$$

Luego, el tiempo promedio de los atletas es de 13.55 segundos.

- La mediana (Me) de una distribución de datos es el valor que ocupa la posición central cuando éstos se ordenan creciente o decrecientemente. La mediana es un valor que deja por debajo el 50% de los datos y el otro 50% por encima.

Cuando el número de datos es muy grande, no resulta práctico escribirlos en orden creciente o decreciente. En este caso, recurrimos a la frecuencia absoluta acumulada o a la aplicación de la fórmula:

$$Me = L_{i-1} + \frac{\left(\frac{n}{2} - F_{i-1}\right)}{f_i} \cdot A$$

donde:

$n =$ número de datos de la distribución
$L_{i-1} =$ límite inferior del intervalo que contiene la mediana
$F_{i-1} =$ frecuencia absoluta acumulada del intervalo anterior a donde se encuentra la mediana
$f_i =$ frecuencia absoluta del intervalo donde está la mediana.
$A =$ amplitud del intervalo donde está la mediana.

Consideremos cada una de las dos alternativas:

i. Como n=80, entonces $\frac{n}{2} = 40$. Por lo tanto, la mediana se encontrará en el intervalo correspondiente a la frecuencia absoluta acumulada inmediatamente superior a $\frac{n}{2} = 40$. Si en el polígono de frecuencias absolutas acumuladas ubicamos a 40 y por allí trazamos una paralela al eje horizontal, que intercepte al polígono, y luego por el punto de intersección proyectamos sobre el eje horizontal, encontramos que la mediana se encuentra ubicada en el intervalo [13.5 - 14), más cerca de 13.5 que de 14., figura 14-4.

Intervalos (seg)		
[11.5-12.0)	2	2
[12.0-12.5)	6	8
[12.5-13.0)	13	21
[13.0-13.5)	16	37
[13.5-14.0)	17	54
[14.0-14.5)	16	70
[14.5-15.0)	10	80
	80	

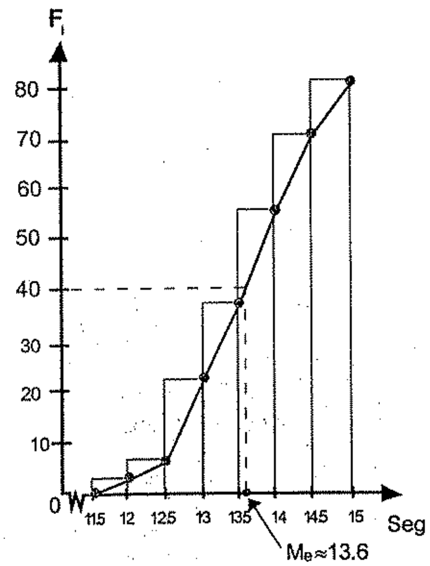


Figura 14-4

ii. Aplicando la fórmula $\mathbf{Me} = L_{i-1} + \dfrac{\left(\dfrac{n}{2} - F_{i-1}\right)}{f_i} \bullet \mathbf{A}$ nos queda: $Me = 13.5 + \dfrac{40-37}{17} \bullet 0.5 \approx 13.58$.

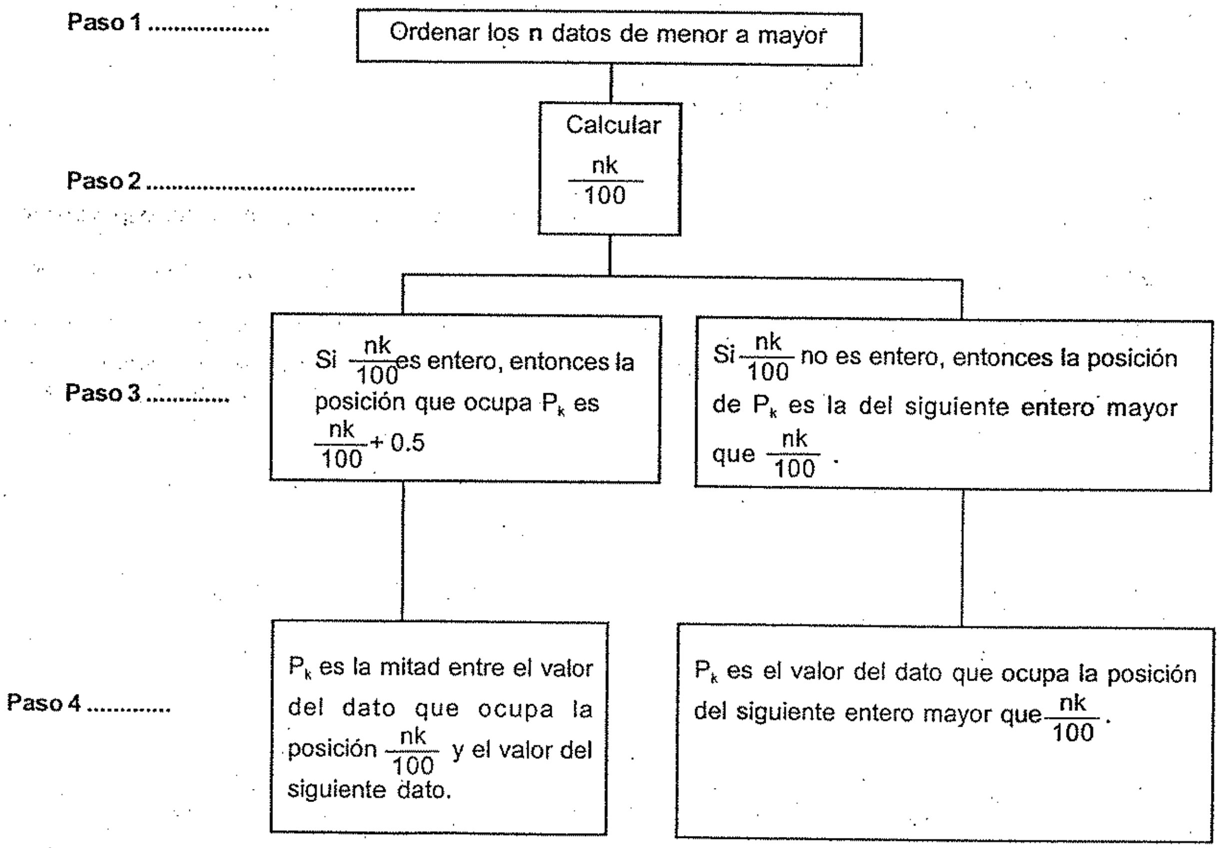
Este resultado significa que el 50% de los atletas obtuvieron un tiempo inferior o igual a 13.58 segundos.

- La moda (Mo) de una distribución es el dato que se presenta con mayor frecuencia. Como en este caso los datos están agrupados en intervalos, se toma como **moda** la marca de clase del intervalo que tenga la mayor frecuencia absoluta (f_i), es decir, 13.75 segundos.

- Puesto que $\overline{x}$= 13.55 segundos, Me= 13.58 segundo y Mo está alrededor de 13.75, podemos afirmar que, como estos valores casi coinciden, la curva de distribución es aproximadamente simétrica.

f) Las medidas de posición son los **cuartiles (Q_1, Q_2 y Q_3)**, que dividen los datos en 4 partes porcentualmente iguales; los **deciles (D_1, D_2, D_3..., D_9)**, dividen la distribución de los daos en 10 grupos con aproximadamente el 10% de los datos en cada grupo y los **percentiles (P_1, P_2, P_3,... P_{99})**, dividen los datos en 100 grupos con aproximadamente el 1% de los datos en cada uno. En la práctica, los cuartiles y los deciles son percentiles; por ejemplo: $Q_1 = P_{25}$; $D_8 = P_{80}$ y $Q_2 = Me = P_{50}$.

El procedimiento para determinar el percentil $\mathbf{P_k}$ de un conjunto de **n** datos consiste en aplicar estos 4 pasos:



Para calcular Q_3, D_5, D_7, P_{60} y P_{90}, ordenamos las marcas de clase de cada intervalo, de menor a mayor, tantas veces como indique su frecuencia absoluta:

11.75	11.75	12.25	12.25	12.25	12.25	12.25	12.25	12.75	12.75
12.75	12.75	12.75	12.75	12.75	12.75	12.75	12.75	12.75	12.75
12.75	13.25	13.25	13.25	13.25	13.25	13.25	13.25	13.25	13.25
13.25	13.25	13.25	13.25	13.25	13.25	13.25	13.75	13.75	13.75
13.75	13.75	13.75	13.75	13.75	13.75	13.75	13.75	13.75	13.75

13.75	13.75	13.75	13.75	14.25	14.25	14.25	14.25	14.25	14.25
14.25	14.25	14.25	14.25	14.25	14.25	14.25	14.25	14.25	14.25
14.75	14.75	14.75	14.75	14.75	14.75	14.75	14.75	14.75	14.75

- Como $Q_3 = P_{75}$, entonces $\frac{nk}{100} = \frac{(80)\,(75)}{100} = 60$. Como P_{75} es entero, entonces la posición de P_{75} es 60.5 y P_{75} será la semisuma del dato que ocupa la posición 60 y la que ocupa la posición 61; es decir, $\frac{14.25 + 14.25}{2} = 14.25$ segundos.
- Como $D_5 = P_{50}$ = Me entonces $D_5 = 13.58$ segundos.
- Como $D_7 = P_{70}$, entonces $\frac{nk}{100} = \frac{(80)\,(70)}{100} = 56$. Como P_{70} es entero, entonces la posición de P_{70} es 56.5 y P_{70} será la semisuma del dato que ocupa la posición 56 y la que ocupa la posición 57; es decir, $\frac{14.25 + 14.25}{2} = 14.25$ segundos.
- Calculemos P_{63}: $\frac{nk}{100} = \frac{(80)\,(63)}{100} = 50.4$. Como P_{63} no es entero, entonces la posición de P_{63} es 51 (¿Por qué?) y ésta corresponde a 13.75; luego P_{63}=13.75 segundos.
- Calculemos P_{92}: $\frac{nk}{100} = \frac{(80)\,(92)}{100} = 73.6$. Como P_{92} no es entero, entonces la posición de P_{92} es 74 y esta corresponde a 14.75 segundos.

g) Las **MEDIDAS DE DISPERSIÓN** son el **rango intercuartil**, la **desviación media, la varianza,** la **desviación típica o estándar y el coeficiente de variabilidad.**

En este literal, vamos a calcular la varianza y la desviación típica o estándar. Con este fin, completamos la siguiente tabla:

Intervalos	Marcas de clase x_i	Frecuencia Absoluta f_i	$x_i \cdot f_i$	$x_i^2 \cdot f_i$
[11.5-12.0)	11.75	2	23.50	276.12
[12.0-12.5)	12.25	6	73.50	900.36
[12.5-13.0)	12.75	13	165.75	2113.28
[13.0-13.5)	13.25	16	212.00	2808.96
[13.5-14.0)	13.75	17	233.75	3214.02
[14.0-14.5)	14.25	16	228.00	3248.96
[14.5-15.0)	14.75	10	147.50	2175.60
		$\sum f_i = 80$	$\sum x_i \cdot f_i = 1084$	$\sum x_i^2 \cdot f_i =$ 14737.5

- Para calcular la varianza usamos la expresión:

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\left[\sum x_i^2 \cdot f_i - \frac{(\sum x_i \cdot f_i)^2}{n}\right]$$

$$\therefore\ s^2 = \frac{1}{79}\left[14737.3 - \frac{(1084)^2}{80}\right]$$

$$\therefore\ s^2 = \frac{1}{79}\left[14737.3 - 14688.2\right]$$

$$\therefore\ s^2 = \frac{1}{79}\left[49.10\right] = \frac{49.10}{79} = 0.62 \text{ seg}^2$$

- La desviación típica o estándar es $s = \sqrt{0.62} = 0.79$ segundos.

h) Como la media aritmética de esta distribución es $\bar{x}$ = 13.55 segundos, entonces:

- $\bar{x} \pm s = (\bar{x} - s\ ;\ \bar{x} + s) = (13.55 - 0.79\ ;\ 13.55 + 0.79) = (12.76\ ;\ 14.34)$. Entre 12.76 y 14.34 hay unos 71 datos, lo que equivale al $\frac{71}{80} \times 100 = 88.75\%$ de la distribución.

- $\bar{x} \pm 2s = (\bar{x} - 2s\ ;\ \bar{x} + 2s) = (13.55 - 1.58\ ;\ 13.55 + 1.58) = (11.97\ ;\ 15.13)$. Entre 11.97 y 15.13 hay unos 78 datos, lo que equivale al 97% de la distribución.

- $\bar{x} \pm 3s = (\bar{x} - 3s\ ;\ \bar{x} + 3s) = (13.55 - 2.37\ ;\ 13.55 + 2.37) = (11.18\ ;\ 15.92)$. Este intervalo contiene el 100% de los datos.

- Estos porcentajes nos dicen que la distribución de los tiempos puede tener forma acampanada; es decir, puede ser normal o aproximadamente normal.

EJERCICIO 14.1

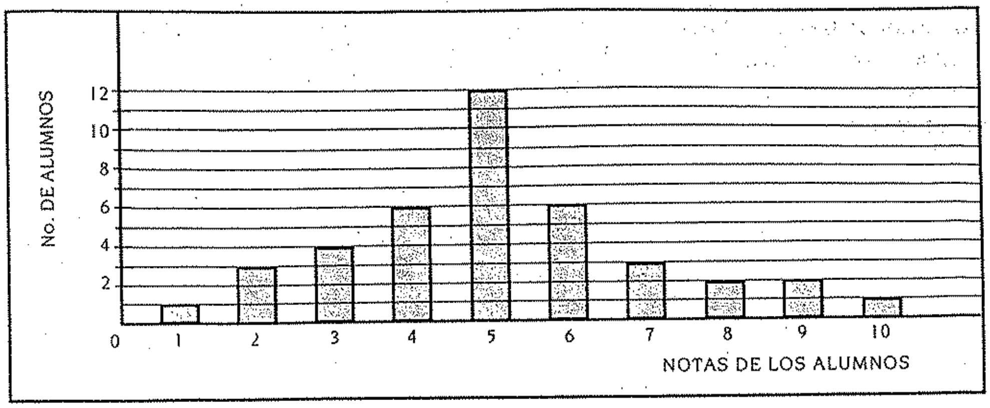
1. Se ha tomado el peso a un grupo de atletas. Estos son los resultados en kg:

   75, 77, 76, 77, 77, 79, 78, 77

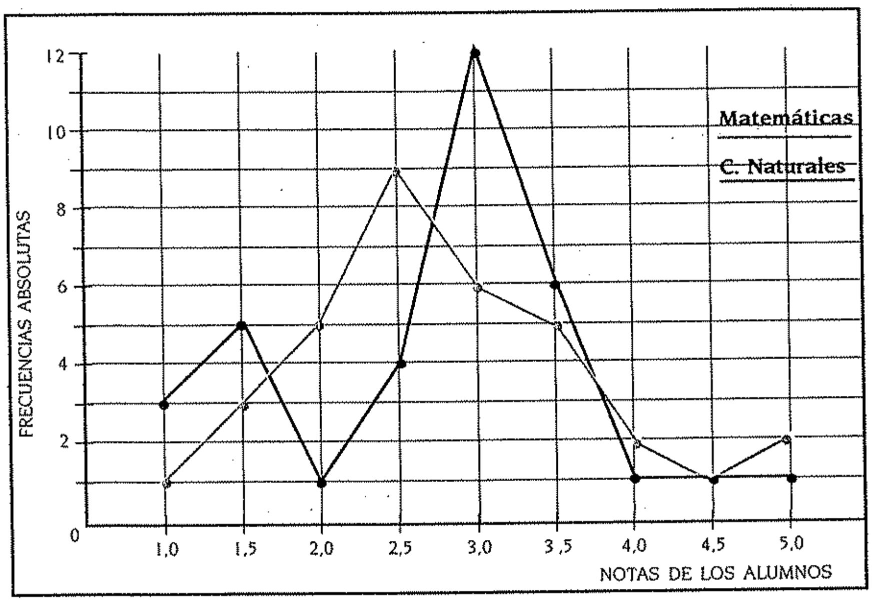
   Halla el recorrido, la desviación media, la varianza y la desviación típica.

2. Las estaturas en centímetros de 10 jóvenes son: 163, 167, 154, 170, 165, 167, 168, 163, 169, 154 Calcula el rango y la desviación típica.

3. El siguiente diagrama de barras muestra las notas de los alumnos de una clase. Halla el rango y la desviación típica.



4. El siguiente polígono de frecuencias compara los resultados de unos alumnos en una evaluación de ciencias naturales y matemáticas.



a) ¿Cuántos alumnos presentaron las evaluaciones?
b) Halla la media, la mediana y la moda de cada una de las materias.
c) ¿En cuál de las dos materias están las notas menos dispersas?

5. Una fábrica tiene que seleccionar entre dos marcas A y B para el suministro de bombillas. Elige 30 muestras de cada una de las dos marcas y anota la duración de las bombillas, manteniéndolas permanentemente encendidas. Estos fueron los resultados:

MARCA A

Días de Duración	No. de Bombillas
52	6
58	8
66	7
70	5
76	4
	30

MARCA B

Días de Duración	No. de Bombillas
51	3
56	5
67	7
73	8
75	7
	30

¿En cuál de las dos empresas es mayor la dispersión?¿Cuál presenta mayor coeficiente de variabilidad? ¿Cuál marca elegirías?

6. Un científico midió los pesos de varios elefantes en la India y encontró un peso promedio por elefante de 10800 kg con una varianza igual a 338.724 kg^2. También midió el peso de las ratas y encontró una medida de 470 gramos y una varianza de 7569 gramos^2. Compara la variabilidad de los pesos de estos animales. ¿Cuál peso es más homogeneo?

7. A continuación se presentan las calificaciones definitivas obtenidas por un grupo de 70 estudiantes del curso Matemáticas Básicas, en el semestre anterior:

2,8	3,3	2,4	3,7	3,2	3,1	4,5	3,3	3,0	1,3
3,4	2,5	3,6	1,8	3,0	3,4	3,7	3,4	2,3	3,1
3,1	2,8	2,0	4,3	2,5	1,0	3,0	3,3	1,4	3,7
3,7	3,7	3,2	3,6	1,6	2,4	2,5	3,0	3,5	2,0
4,2	3,6	3,1	3,5	2,6	3,2	3,2	2,6	2,8	1,5
3,1	3,2	3,4	2,6	3,4	2,3	1,7	3,2	3,3	3,4
3,0	2,2	3,9	3,0	3,3	3,8	3,1	4,3	3,9	3,0

Se pide:

a) Determinar el porcentaje de estudiantes que perdió el curso.

b) Agrupar en clases, los datos de esta distribución.

c) Hallar el porcentaje de estudiantes que obtuvo calificación entre 2,5 y 3,5

d) Construir el histograma, el polígono de frecuencias absolutas, la curva de frecuencias absolutas, el polígono de frecuencias acumuladas y la ojiva de esta distribución.

e) Calcular la media, la mediana y la moda para los datos de esta distribución e interpretar los resultados.

f) Calcular Q_1, Q_3, D_8 y P_{90} en esta distribución.

g) Calcular el rango, el rango intercuartil, la varianza, la desviación típica y el coeficiente de variación para los datos de esta distribución.

h) Calcular los porcentajes de la distribución en los intervalos $x \pm s$, $x \pm 2s$, $x \pm 3s$ y compararlos con los de una distribución normal. ¿Podría ser la distribución de estos datos una distribución normal?

8. Un examen en forma de test tiene un punto de VERDADERO o FALSO que consta de 10 preguntas. 48 estudiantes presentan el examen y el profesor observa el número de respuestas acertadas, obteniendo los siguientes resultados:

7	5	7	6	8	6	5	7
10	8	6	9	4	8	7	6
5	7	10	9	7	6	7	6
9	8	7	7	6	7	3	4
7	8	8	9	7	7	8	7
7	6	8	3	8	8	7	7

Se pide:

a) Construir la tabla de distribución de frecuencias

b) La "capacidad evaluativa" de este punto se considera **buena** si por lo menos el 60% de los estudiantes responden acertadamente 7 o más preguntas. ¿Qué conclusión puede obtenerse con los resultados anteriores?

c) Construir el diagrama de barras.

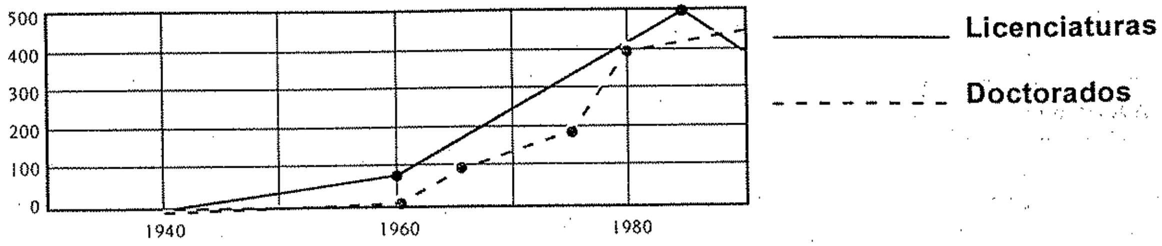
d) Calcular las medidas de tendencia central e interpretarlas.

e) Calcular Q_1, Q_3, D_3, D_6, P_{70} y P_{90}.

f) Calcular las medidas de dispersión y los intervalos $\overline{x} \pm s$, $\overline{x} \pm 2s$, $\overline{x} \pm 3s$. Hallar el porcentaje de los datos de cada uno de ellos y compararlos con los porcentajes de la Campana de Gauss.

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (40)

La gráfica muestra el total de licenciaturas y doctorados, en miles de diplomas, otorgados durante un período de años por una universidad:



De acuerdo con la gráfica, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

a) En 1950 hubo 50.000 doctorados y 60.000 licenciados.
b) En 1960 hubo 50.000 doctorados.
c) El número de licenciados fue siempre en aumento.
d) En 1980 hubo igual número de licenciados que de doctorados.

14.3 DISTRIBUCIONES BIDIMENSIONALES O DE DATOS BIVARIADOS

- En el ejemplo estudiado en la sección anterior, hemos considerado una distribución de datos representados mediante una sola variable y realizamos cálculos y procedimientos que nos permitieron describir e interpretar los valores de esta variable.
- Sin embargo, en la vida cotidiana y en el desarrollo de la ciencia y la tecnología es necesario analizar el comportamiento y la relación entre dos o más variables. Consideremos, por ejemplo, estas situaciones:
  - ¿Existe alguna relación entre la estatura de un grupo de personas y el tamaño del pie?
  - ¿Hay alguna relación entre la altura de los árboles y el diámetro de sus troncos, a cierta altura del suelo?
  - En una región de Europa se observó que, con el paso del tiempo, hubo un aumento significativo de la población, al mismo tiempo que aumentó el número de cigueñas. ¿Significa ésto que a los niños los traen las cigüeñas? ¿Qué relación habrá entre el aumento del número de cigüeñas y el aumento de la población?
- ¿Será posible realizar estimaciones del valor de una de las variables conociendo el valor de la otra variable? Este es, precisamente, uno de los temas centrales de esta unidad.

14.4 CORRELACIÓN LINEAL

14.4.1 Idea de Correlación

- El objetivo general de investigar la **correlación lineal** entre dos variables es medir la intensidad de una relación lineal entre dos variables. En estadística se han ideado los **coeficientes de correlación** que nos permiten expresar cuantitativamente el grado de relación existente entre las dos variables.

Primera experiencia

Las siguientes tablas de valores nos muestran la relación existente entre dos variables:

- A un grupo de 11 estudiantes se les midieron sus estaturas en centímetros y sus números de zapatos. Los resultados fueron consignados en la siguiente tabla:

Estatura en cm	154	156	157	158	160	163	165	165	170	171	172
Número del zapato	35	36	36	36	37	38	38	39	40	41	41

En este caso, las variables son **la estatura y el número del zapato.** ¿Si aumenta la estatura del estudiante, aumenta también el número de zapato?

- Se miden el radio y la longiud de 8 circunferencias, obteniéndose la siguiente tabla:

Radio en cm	5	6	7	9	10	11	13	14
Longitud en cm	31.42	37.7	43.98	56.55	62.83	69.11	81.68	87.96

¿Cuáles son las variables para la tabla?

- Las variables como **estatura-número del zapato** y **radio-longitud de la circunferencia que** se obtienen al observar un fenómeno respecto a dos modalidades, se denominan **variables estadísticas bivariadas** o **variables estadísticas bidimensionales.**
- Las **variables bivariadas cuantitativas** las representaremos mediante el par ordenado **(x,y)** que toma los valores (x_1,y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), ...(x_n, y_n). Las distribuciones en las que intervienen estas variables se llaman **distribuciones bivariadas**, donde **x** es la **variable de entrada** (variable independiente) y **y** es la **variable de salida** (variable dependiente).
- **PREGUNTA:** En las distribuciones bivariadas **estatura-número del zapato** y **radio-longitud de la circunferencia**, ¿cuál es la variable de entrada y cuál es la variable de salida para cada caso?

Segunda experiencia

- Representemos en un sistema de ejes cartesianos, los pares de valores **(x,y)** correspondientes a las siguientes distribuciones bivariadas, como si fueran las coordenadas de un punto:

a) Estas son las calificaciones de 10 estudiantes de Matemáticas y Física en la escala de 1 a 10.

Matemáticas (x)	1	3	4	5	6	6	7	7	8	10
Física (y)	1	2	5	5	6	7	6	7	9	10

De acuerdo con la tabla, ¿están **correlacionadas** las notas de matemáticas y las de física? Explica.

b) A 10 trabajadores se les preguntó acerca de su peso en kilogramos y su **número de hijos**. Los datos aparecen consignados en la siguiente tabla:

Peso en kg (x)	60	63	64	67	67	69	71	75	82	83
No. de hijos (y)	3	1	1	0	1	3	2	0	3	1

¿Están correlacionadas las variables **peso en kilogramos (x)** y **número de hijos (y)** ?

c) La tabla siguiente muestra el **número de horas de estudio (x)** dedicadas a preparar un examen y la **calificación obtenida.**

Horas de estudio (x)	2	3	3	4	4	5	5	6	6	6	7	7	7	8	8
Calificación (y)	5	5	7	5	7	7	8	6	9	8	7	9	10	8	9

De acuerdo con la tabla, ¿cuando el tiempo dedicado a estudiar aumenta, también aumenta la calificación obtenida? ¿Las variables están correlacionadas?

d) Por último, retomemos la distribución bivariada correspondiente a la medida del radio y la longitud de las 8 circunferencias. ¿Están correlacionadas estas variables?

- Al representar cada una de estas distribuciones, mediante puntos, en un sistema coordenado, obtenemos las siguientes gráficas denominadas **diagramas de dispersión.** Figura 14-5.

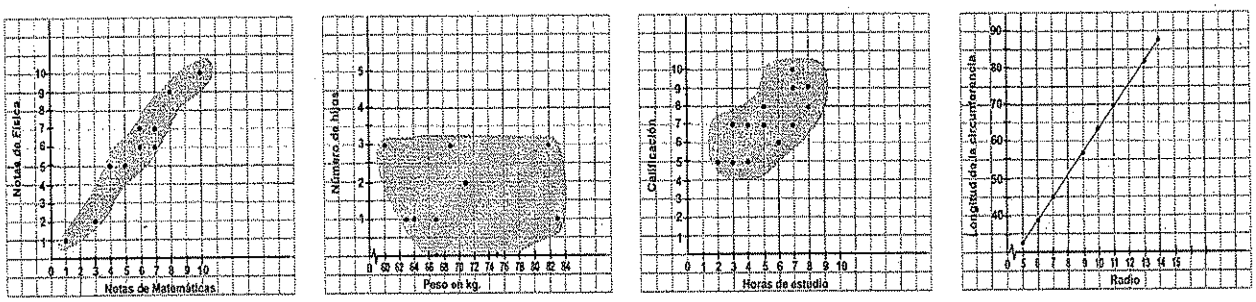


Figura 14-5

- Para saber si la mayoría de los puntos del diagrama están cerca de una recta, dibujamos un óvalo lo más estrecho posible alrededos de los puntos. A este óvalo lo llamaremos **nube de puntos.** Cuanto más estrecha sea la nube de puntos, más se aproximarán los puntos a una recta.
- Las nubes de puntos nos dan una idea del grado de **relación** o **dependencia** que existe entre las dos variables. A esta dependencia la llamamos **CORRELACIÓN.**

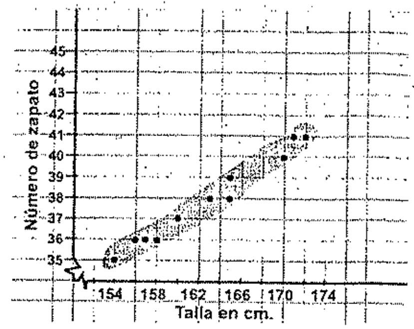
DIAGRAMAS DE DISPERSIÓN E IDEA DE CORRELACIÓN

- **DIAGRAMA DE DISPERSIÓN:** Es la gráfica de todos los pares ordenados de datos de dos variables que están en un sistema de ejes coordenados. La variable de entrada **x**, se grafica en el eje horizontal y la variable de salida **y** se grafica en el eje vertical.
- **IDEA DE CORRELACIÓN:** Las **nubes de puntos** que resultan al dibujar un diagrama de dispersión, dan una idea de la relación o dependencia que existe entre las dos variables. Esta dependencia se denomina **Correlación.**
- En nuestro estudio de las distribuciones bivariadas, tendremos en cuenta los casos en que la nube de puntos se condensa en torno a una **línea recta.**

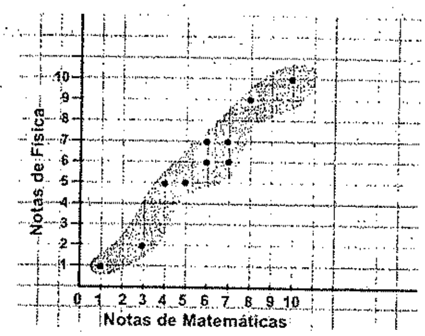
- **PREGUNTA:** ¿En cuáles de los diagramas de dispersión anteriores hay correlación y en cuáles no?

Tercera experiencia

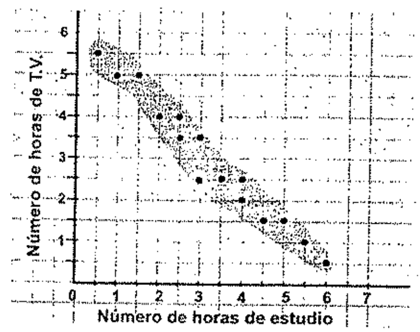
- Esta experiencia nos permitirá diferenciar los distintos tipos de correlación y la dependencia que existe entre las variables.
- Observemos los siguientes diagramas de dispersión y los comentarios que aparecen debajo de cada uno; figura 14-6:



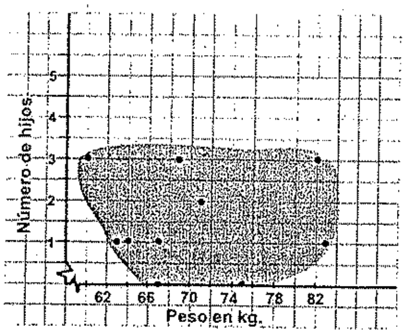
Correlación lineal positiva
Dependencia aleatoria fuerte



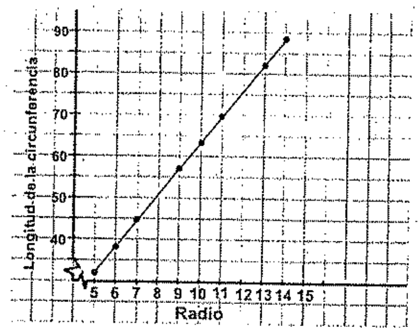
Correlación lineal positiva
Dependencia aleatoria fuerte



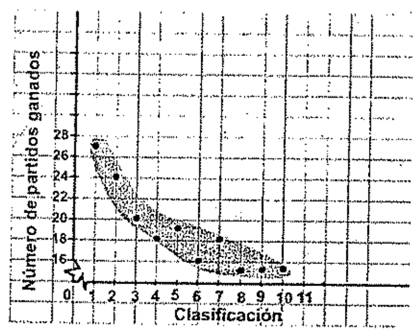
Correlación lineal negativa
Dependencia aleatoria fuerte



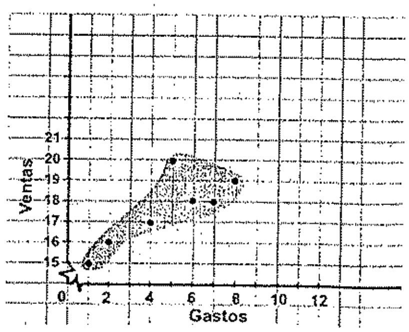
Correlación lineal nula
Independencia aleatoria



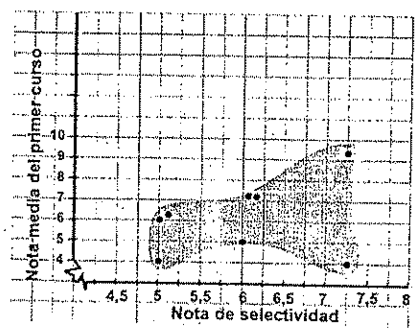
Correlación lineal positiva
Dependencia funcional



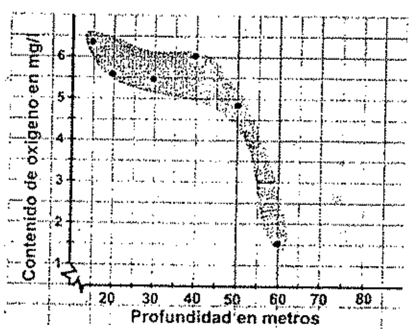
Correlación lineal negativa
Dependencia aleatoria fuerte



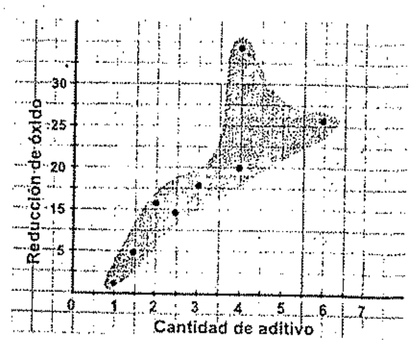
Correlación lineal positiva
Dependencia aleatoria no muy fuerte



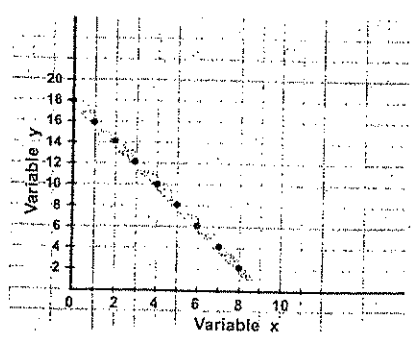
Correlación lineal positiva
Dependencia aleatoria débil



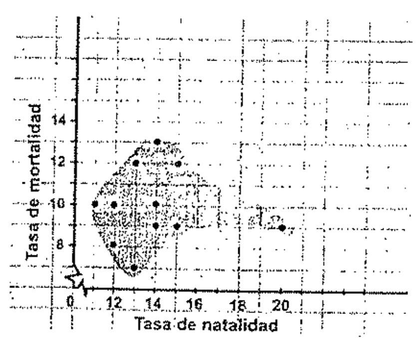
Correlación lineal negativa
Dependencia aleatoria fuerte



Correlación lineal positiva
Dependencia aleatoria fuerte



Correlación lineal negativa
Dependencia funcional



Correlación lineal nula
Independencia aleatoria

Figura 14-6

- La **CORRELACION LINEAL** entre dos variables puede ser **positiva, negativa** o **nula.**
  - Es **positiva** si al aumentar una variable, aumenta la otra.
  - Es **negativa** si al aumentar una variable, disminuye la otra.
  - Es **nula** cuando no hay relación lineal entre las variables

- La **DEPENDENCIA** entre dos variables es **LINEAL** si los puntos de la nube están muy cerca a una recta. En este caso, existe una función lineal que relaciona ambas variables.
- La **DEPENDENCIA** es **ALEATORIA** si los puntos de la nube se separan de una linea recta. la dependencia será más **fuerte** cuanto más estrecha sea la nube y más **débil** cuanto más ancha sea ésta.

14.4.2 Coeficiente de Correlación Lineal

- La intensidad de una relación o la dependencia que existe entre dos variables se puede medir cuantitativamente mediante el **COEFICIENTE DE CORRELACIÓN,** el cual simbolizamos con la letra **r.**

- El coeficiente de correlación es un número que varía entre **-1** y **1.** La figura 14-7 muestra una escala aproximada de correlación.

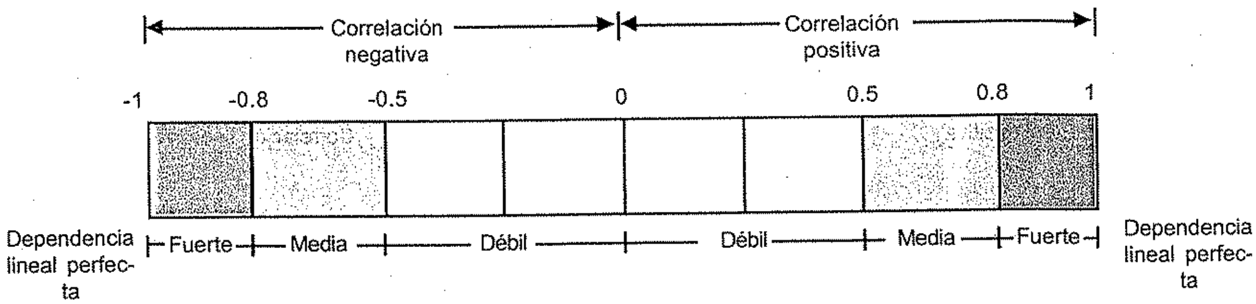


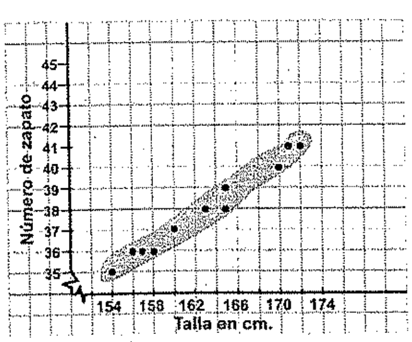
Figura 14-7

ATENCIÓN

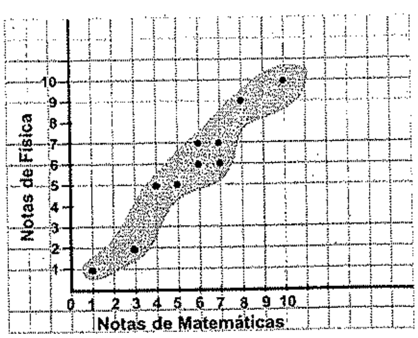
1. El coeficiente de correlación mide la fuerza de la relación entre las dos variables aleatorias y siempre se cumple que **$-1 \leq r \leq 1$.** Cuando **$r = \pm 1$,** la relación es perfecta y puede decirse que no hay aleatoriedad pues todos los puntos de la nube están sobre la recta.

2. Cuando **$r \neq 0$**, se afirma que no hay relación **lineal** enre las variables; sin embargo, no se excluye otro tipo de relación entre ellas (por ejemplo, podría darse una relación circular).

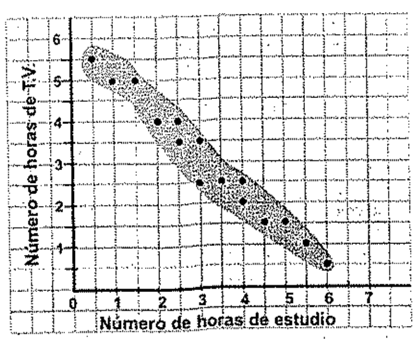
- A continuación, tenemos varios ejemplos de nubes de puntos y sus correspondientes correlaciones, figura 14-8:



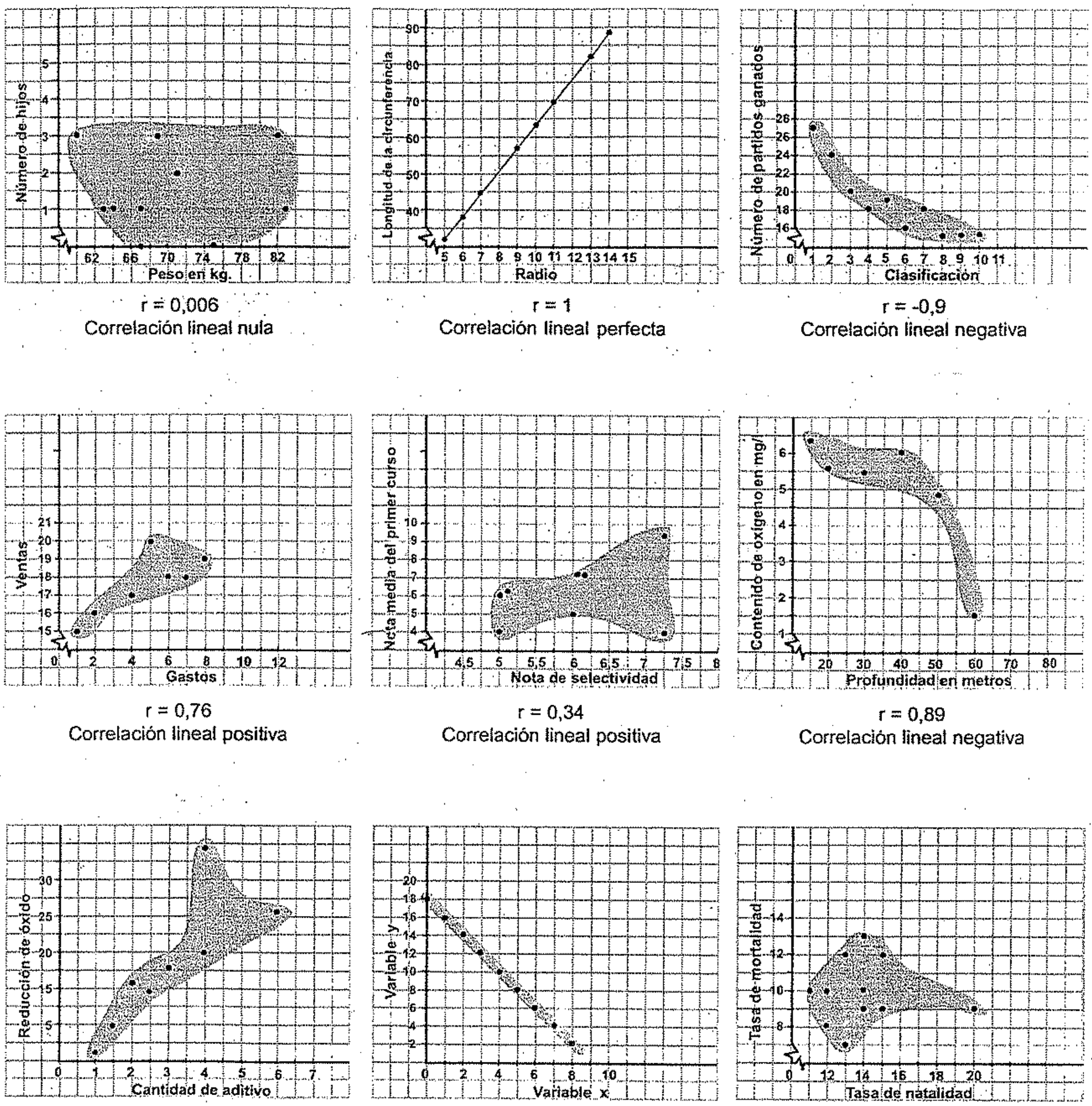
r = 0,988
Correlación lineal positiva



r = 0,97
Correlación lineal positiva



r = -0,981
Correlación lineal negativa



r = 0,006
Correlación lineal nula

r = 1
Correlación lineal perfecta

r = -0,9
Correlación lineal negativa

r = 0,76
Correlación lineal positiva

r = 0,34
Correlación lineal positiva

r = 0,89
Correlación lineal negativa

r = 0,81
Correlación lineal positiva

r = -1
Correlación lineal perfecta

r = -0,002
Correlación lineal nula

Figura 14-8

- Podemos realizar una estimación visual del coeficiente de correlación en una distribución bivariada. La siguiente experiencia describe un método sencillo y aplicable, especialmente, cuando la nube de puntos es aproximadamente rectangular.

Experiencia

- Coloquemos dos lápices (o dos reglas) sobre el diagrama de dispersión de tal manera que permanezcan paralelos y los movemos de modo que estén lo más cerca posible, figura 14-9.

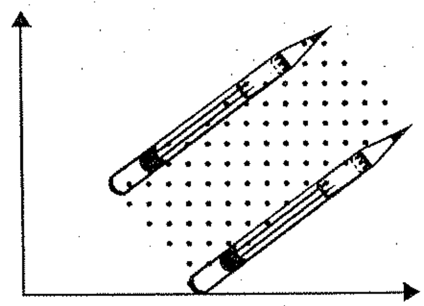


Figura 14-9

- Observemos la región rectangular que se forma con los dos lápices (o reglas) y estimemos cuantas veces es más larga que ancha. Una manera práctica de hacerlo es determinar cuántos cuadrados es posible construir en el rectángulo, figura 15-10.

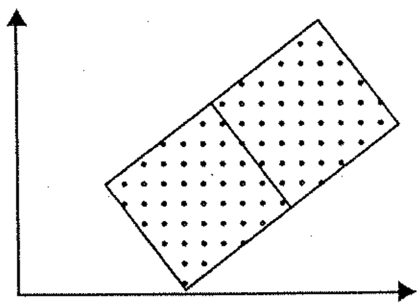


Figura 14-10

- Ahora, determinemos cuántos cuadrados se forman. Si no es un número entero, hacemos una aproximación. En la figura 14-10 son dos cuadrados; este número se aplica a la ecuación $\mathbf{r = \pm \left(1 - \frac{1}{k}\right)}$, con k=2. Luego:

$$\mathbf{r = \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} = 0.5}$$

- El signo de **r** lo determinamos teniendo en cuenta la disposición de la región rectangular. Si está en posición creciente, el coeficiente de correlación es positivo; si está en posición decreciente, el coeficiente de correlación es negativo y si la región rectangular está en posición horizontal o vertical, entonces **r=0**; figura 14-11:

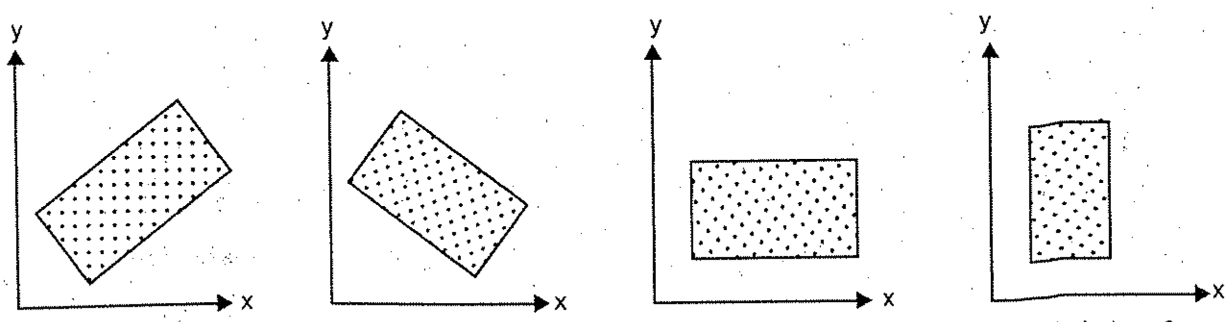


Figura 14-11

ATENCIÓN

- Es importante tener claro que esta manera de obtener el coeficiente de correlación es una aproximación y no sustituye el valor que puede obtenerse mediante métodos estadísticos, como veremos más adelante.

Ejemplo

Las variables estadísticas que aparecen en la tabla siguiente, corresponden a la clasificación de los 10 primeros equipos del torneo de fútbol profesional de nuestro país y el número de partidos ganados.

Clasificación (x)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
No. de partidos ganados (y)	27	24	20	18	19	16	18	15	15	15

Se pide:

a) Dibujar el diagrama de dispersión
b) Estimar el coeficiente de correlación
c) Determinar el tipo de correlación entre las variables.

SOLUCIÓN

a) Para dibujar el diagrama de dispersión y hallar el coeficiente de correlación, aplicamos el procedimiento descrito en la experiencia anterior, teniendo cuidado de no dejar ningún punto por fuera del rectángulo, pero sus lados muy cerca de los puntos, sin "tocarlos"; figura 14-12.

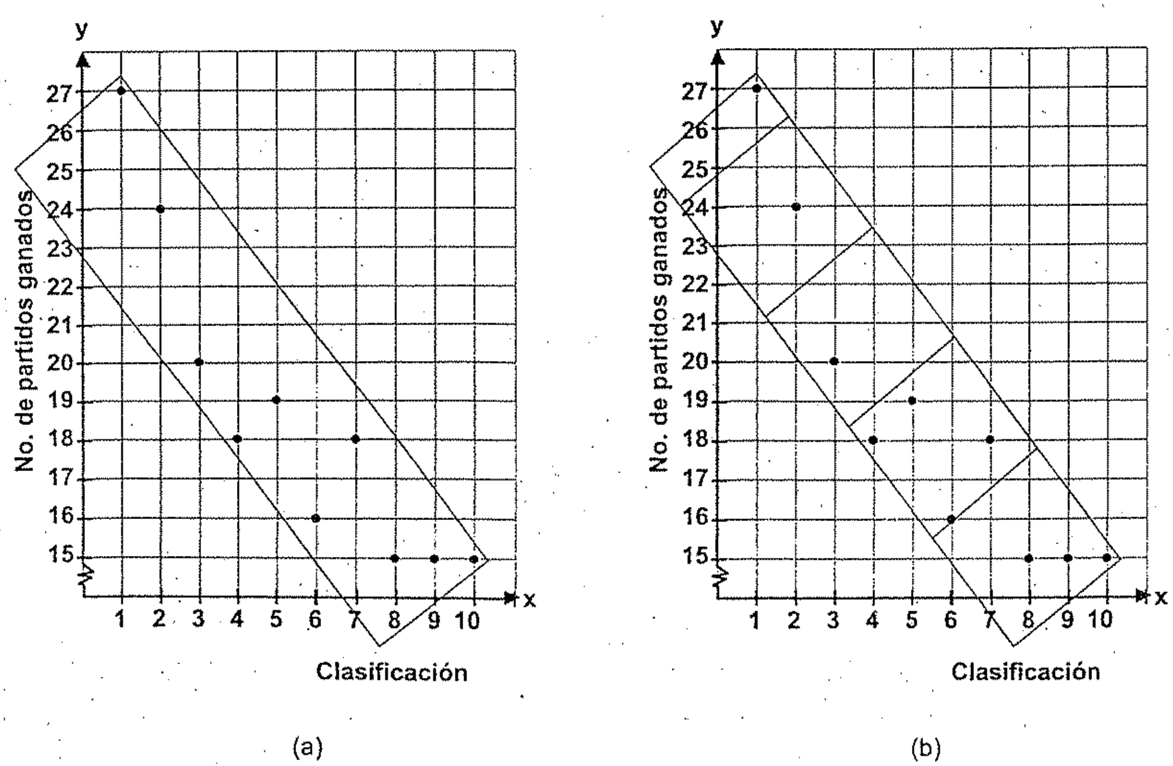


Figura 14-12

De acuerdo con la gráfica, la posición de la región rectangular es decreciente; por tanto, el coeficiente de correlación es negativo ya que al aumentar la variable **clasificación**, disminuye la variable **número de partidos ganados.**

b) Para estimar el coeficiente de correlación, medimos el ancho del rectángulo: 1.8 cm; luego medimos el largo, para saber cuántos cuadrados y fracción podemos construir. Como el largo del rectángulo es 7.8 cm, entonces establecemos la razón entre el largo y el ancho: $\frac{7.8 \text{ cm}}{1.8 \text{ cm}} = 4.\widehat{3}$; así pués, formamos visualmente $4.\widehat{3}$ cuadrados, figura 14-12(b). Luego, $\mathbf{k=4.\widehat{3}}$ y $\mathbf{r = -\left(1 - \frac{1}{4.\widehat{3}}\right) = -(1 - 0,\widehat{23}) = -0,77.}$

c) De acuerdo con el resultado obtenido, tenemos una correlación negativa y una dependencia aleatoria no muy fuerte.

o

EJERCICIO 14.2

En las distribuciones bivariadas de los problemas (1) a (3) se pide:

a) Elaborar el diagrama de dispersión
b) Utilizar el método de estimación visual para calcular el coeficiente de correlación **r.**
c) Determinar el tipo de correlación y de dependencia aleatoria que existe entre estas dos variables.

(1) Se han anotado las estaturas, en cm, de 11 estudiantes y sus correspondientes números de zapatos, obteniéndose la siguiente tabla:

Estatura en cm (x)	154	156	157	158	160	163	165	165	170	171	172
Número de zapato (y)	35	36	36	36	37	38	38	39	40	41	41

(2) Se ha entrevistado a 15 estudiantes sobre el número de horas que dedica a estudiar un día normal y el número de horas que dedica a ver la t.v. Estos son los resultados:

No. horas de estudio(x)	4	5	4	2.5	6	0.5	1	2	3	4.5	3	1.5	3.5	5.5	2.5
No. de horas de t.v. (y)	2	1.5	2.5	4	0.5	5.5	5	4	2.5	1.5	3.5	5	2.5	1	3.5

(3) Los datos que aparecen en la tabla siguiente corresponden al PESO (en miles de libras) y al RENDIMIENTO DE GASOLINA (en millas por galón) de 10 automóviles.

Peso (x)	2.5	3.0	4.0	3.5	2.7	4.5	3.8	2.9	5.0	2.2
Millas por galón (y)	40	43	30	35	42	19	32	39	15	44

4. Utilizar el método de estimación visual para calcular el coeficiente de correlación **r** de las siguientes distribuciones bivariadas, cuyos diagramas de dispersión son los siguientes; figura 14-13.

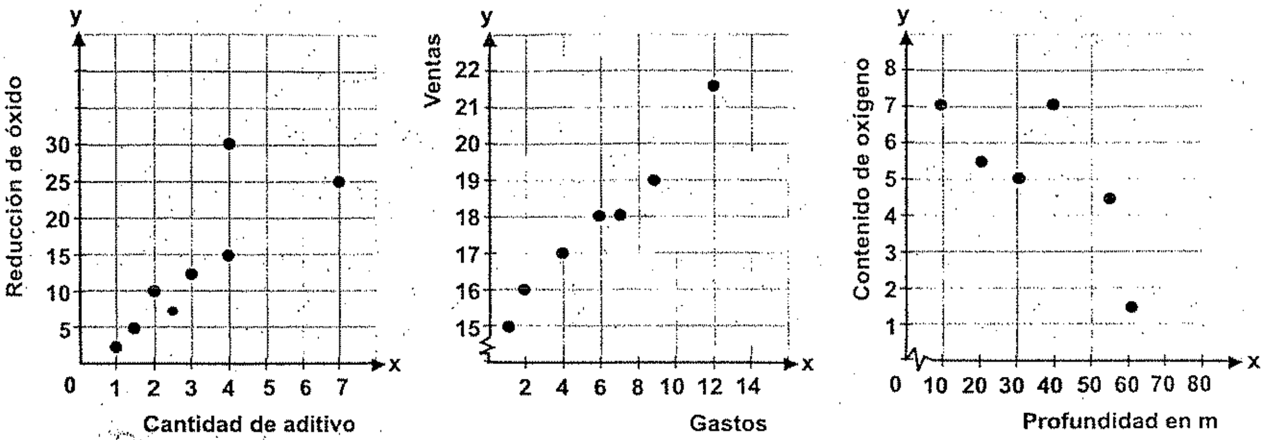


Figura 14-13

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (41)

Un rectángulo se inscribe en una semirrecta de 5cm de radio. La base x del rectángulo coincide con el diámetro de la circunferencia. Se pide:

1. Hacer un dibujo que interprete el enunciado del problema.

2. Escribir una expresión, en función de x, para calcular el área del rectángulo.

3. Hallar el dominio de la función resultante donde el problema tiene sentido.

14.4.3 Coeficiente de Correlación Lineal

- En la sección anterior, aprendimos a calcular el coeficiente de correlación **r** de dos variables, mediante el método de apreciación visual.
- Sin embargo, existe una fórmula que permite obtener en forma precisa el coeficiente de correlación lineal. Esta fórmula se denomina **PRODUCTO - MOMENTO DE PEARSON.**

FÓRMULA PRODUCTO - MOMENTO DE PEARSON

- El **COEFICIENTE DE CORRELACIÓN LINEAL r** entre dos variables **x** e **y** puede calcularse mediante la siguiente fórmula:

$$r = \frac{\sum(x - \overline{x})(y - \overline{y})}{\sqrt{\sum(x - \overline{x})^2 \sum(y - \overline{y})^2}}$$

donde **x** representa los valores de la primera variable y **y** los valores de la segunda variable.

- El término $(x - \overline{x})$ es la desviación de cada valor con respecto a la media aritmética de **x** y $(y - \overline{y})$, la desviación de cada valor con respecto a la media aritmética de **y**.

ATENCIÓN

La deducción de la fórmula de Pearson escapa a los propósitos de este texto.

Ejemplo

En un conocido gimnasio de la ciudad, un instructor registra la capacidad para realizar "lagartijas" y "sentadillas" a 10 de sus alumnos, durante una sesión. Los datos registrados fueron los siguientes:

Lagartijas (x)	27	22	15	35	30	52	35	55	40	40
Sentadillas (y)	30	26	25	42	38	40	32	54	50	43

Se pide:

a) Dibujar el diagrama de dispersión

b) Calcular el coeficiente de correlación utilizando el método de estimación visual y la ecuación $r = \pm\left(1 - \frac{1}{k}\right)$

c) Calcular el coeficiente de correlación utilizando la fórmula producto-momento de Pearson.

SOLUCIÓN

a) La figura 14-14 nos muestra el diagrama de dispersión para esta distribución de los datos.

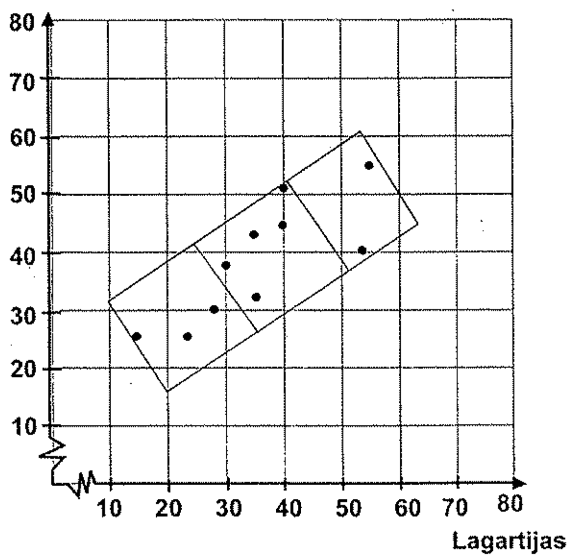


Figura 14-14

b) Para calcular el coeficiente de correlación r, por estimación visual, hacemos lo siguiente:

Ancho del rectángulo : 1.3 cm

Largo del rectángulo: 3.9 cm

Razón entre el largo y el ancho: $\frac{3.9}{1.3} = 3 = k$

$$\therefore\ r = +\left(1 - \frac{1}{k}\right) = +\left(1 - \frac{1}{3}\right) \approx 0.67$$

¿Por qué tomamos el signo positivo?

c) Para calcular el coeficiente de correlación utilizando la fórmula de Pearson: $r = \dfrac{\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sqrt{\sum(x-\bar{x})^2 \sum(y-\bar{y})^2}}$

hacemos lo siguiente:

i) Calculamos la media aritmética para la variable **x** y para la variable **y**; así:

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{351}{10}\text{ . Luego, } \bar{x} = 35{,}1$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{380}{10}\text{ . Luego, } \bar{y} = 38$$

ii) Hallamos las desviaciones con respecto a la media para las variables **x** e **y**; es decir, $(x - \bar{x})$ y $(y - \bar{y})$, para cada uno de los datos.

iii) Calculamos los productos de las desviaciones de la variable **x** y de la variable **y**; luego, realizamos la suma de cada producto. Esta suma corresponde al numerador de la fórmula de Pearson.

iv) Finalmente, calculamos $(x - \bar{x})^2$ y $(y - \bar{y})^2$ para cada dato, hallamos $\sum(y - \bar{y})^2$, multiplicamos estas sumas y calculamos la raíz cuadrada a este producto. Esta raíz cuadrada es el denominador de la fórmula de Pearson.

La mejor manera de presentar esta información es mediante una tabla como la siguiente. Comprueba cada resultado:

LAGARTIJAS x	SENTADILLAS y	$(x - \bar{x})$	$(y - \bar{y})$	$(x - \bar{x})(y - \bar{y})$	$(x - \bar{x})^2$	$(y - \bar{y})^2$
27	30	-8.1	-8.0	64.8	65.61	64
22	26	-13.1	-12.0	157.2	171.61	144
15	25	-20.1	-13.0	261.3	404.01	169
35	42	-0.1	+4.0	-0.4	0.01	16
30	38	-5.1	0.0	0.0	26.01	0.0
52	40	+16.9	+2.0	33.8	285.61	4
35	32	-0.1	-6.0	0.6	0.01	36
55	54	+19.9	+16.0	318.4	396.01	256
40	50	+4.9	+12.0	58.8	24.01	144
40	43	+4.9	+5.0	24.5	24.01	25
				$\sum(x - x)(y - y) = 919.0$	$\sum(x - \bar{x})^2 =$ 1396.9	$\sum(y - \bar{y})^2 =$ 858

Por lo tanto:

$$\sum(x - \bar{x})(y - \bar{y}) = 919$$

$$\sum(x - \bar{x})^2 = 1396.9$$

$$\sum(y - \bar{y})^2 = 858$$

Si reemplazamos estos valores en la fórmula de Pearson, obtenemos:

$$r = \frac{\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sqrt{\sum(x-\bar{x})^2 \sum(y-\bar{y})^2}} = \frac{919}{\sqrt{1396.9 \times 858}} \approx 0.84$$

EJERCICIO 14.3

Calcular el coeficiente de correlación para cada una de las distribuciones de los problemas del ejercicio 14.2, utilizando la fórmula producto-momento de Pearson.

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (42)

Un recipiente rectangular para almacenamiento, con la parte superior abierta, debe tener un volumen de $10m^3$. El largo de la base es el doble del ancho. El material para la base cuesta 10 dólares por m^2 y el material para los costados cuesta 6 dólares el m^2. Si el ancho de la base es x, escribir una expresión en términos de x que permita calcular el costo de los materiales para construir este recipiente.

14.5 REGRESIÓN LINEAL

14.5.1 Introducción

- En la sección anterior analizamos parejas de datos con el propósito de determinar si existía alguna correlación lineal significativa entre dos variables.
- Ahora queremos describir dicha relación encontrando la gráfica y la ecuación de la línea recta que la representa. Esta línea recta se denomina **línea de regresión** y su ecuación se denomina **ecuación de regresión.**
- Sir Francis Galton (1822 - 1911) estudió el fenómeno de la herencia y demostró que cuando matrimonios con estaturas altas (o bajas) tienen hijos, las estaturas de estos hijos tienden a exhibir **regresión,** es decir, a desplazarse hacia una estatura media más representativa.
- Para los métodos de regresión que presentamos en esta sección, suponemos que estamos investigando sólo relaciones lineales.

- En la práctica, las correlaciones entre dos variables **x** e **y** no están perfectamente alineadas y al graficar sus valores en el plano cartesiano se obtienen situaciones como las que nos muestra la figura 14-15, donde no hay ninguna recta que pase por **todos** los puntos; sin embargo, existe una recta que pasa por el centro de la nube de distribución y es la que **mejor se ajusta** a ella. Esta recta se denomina la **RECTA DE MEJOR AJUSTE.**

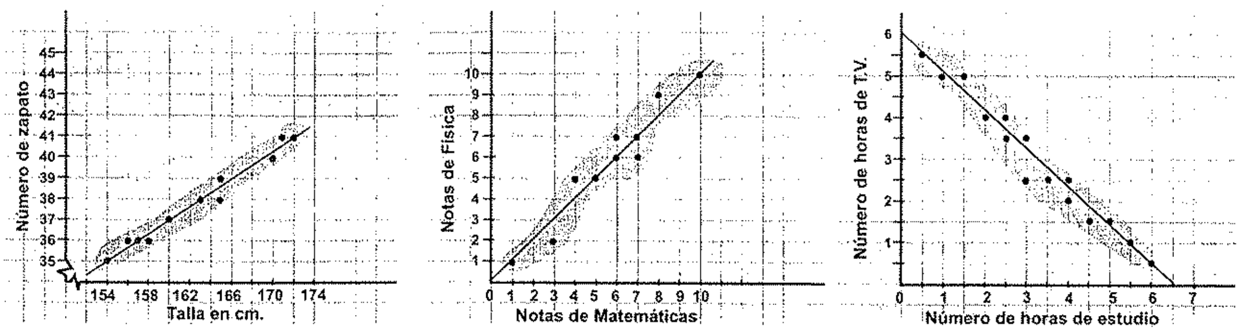


Figura 14-15

- La siguiente experiencia nos enseña cómo determinar la ecuación de la recta de mejor ajuste, correspondiente a una nube de puntos.

Experiencia

- Determinemos la recta de mejor ajuste correspondiente a la distribución de la tallas (x) y los números de zapatos (y) de los 11 estudiantes.

- Retomamos la tabla de valores:

Talla en cm	154	156	157	158	160	163	165	165	170	171	172
Número de zapato	35	36	36	36	37	38	38	39	40	41	41

- Calculamos la media aritmética de la variable x ($\overline{x}$) y la media aritmética de la variable y ($\overline{y}$).

$$\overline{x} = \frac{154 + 156 + 157 + 158 + 160 + 163 + 165 + 165 + 170 + 171 + 172}{11} = 162.82$$

$$\overline{y} = \frac{35 + 36 + 36 + 36 + 37 + 38 + 38 + 39 + 40 + 41 + 41}{11} = 37.9$$

Al punto ($\overline{x}$, $\overline{y}$) = (162.82 , 37.9) lo denominamos **centro de la nube.**

- A continuación, representamos la nube y el centro **C(162.82 , 37.9)** y luego, trazamos "a ojo" la recta que, creemos, mejor se ajusta a la nube y que pasa por el centro; figura 14-16.

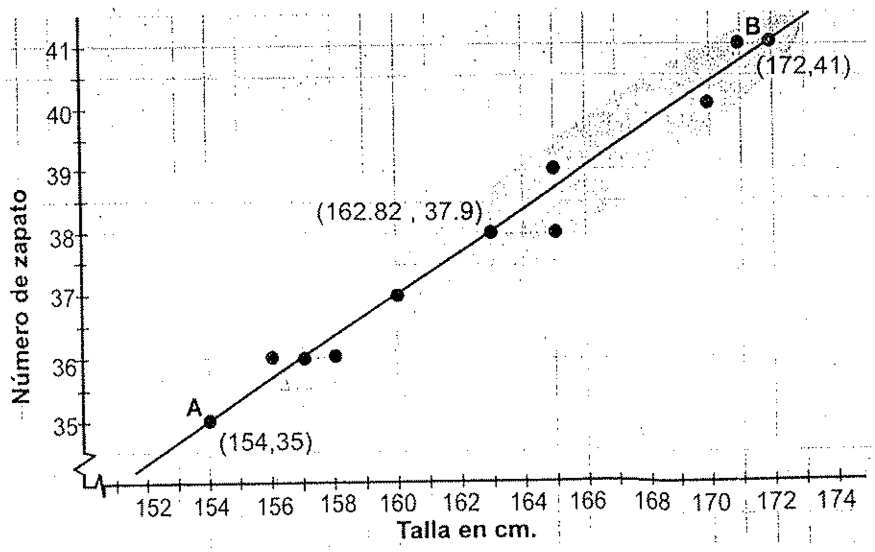


Figura 14-16

- Elegimos dos puntos por los que pasa la recta cuyas coordenadas sean números enteros. No tienen que ser puntos del diagrama de dispersión, pero es recomendable que estén bien separados. En este caso podemos tomar los puntos A(154, 35) y B(172, 41) y calculamos la pendiente de dicha recta:

$$m = \frac{41 - 35}{172 - 154} = \frac{1}{3}$$

- Una recta que **"ajusta"** la nube pasa por el punto C(162.82 , 37.9) y tiene pendiente $m = \frac{1}{3}$. Por tanto, utilizando la forma "punto-pendiente" podemos obtener su ecuación:

$y - y_1 = m(x - x_1)$ .... Forma "punto-pendiente"

$$\therefore\ y - 37.9 = \frac{1}{3}(x - 162.89)$$

$$\therefore\ y = \frac{1}{3}x - 16.37$$

- Esta ecuación relaciona la estatura o talla en centímetros (x) con el número de zapato (y).

  ¿Qué número de calzado le corresponde a una persona que mide 175 cm? Sustituyendo en la ecuación x=175, obtendremos aproximadamente y=42.

  ¿ Cuánto medirá una persona que utiliza un zapato número 34? Sustituyendo en la ecuación y=34, obtendremos una estatura de 151 cm.

ATENCIÓN

1. La ecuación $y = \frac{1}{3}x - 16.37$ es una buena aproximación de la recta de "mejor ajuste", teniendo en cuenta el diagrama de dispersión y su nube de puntos correspondiente.

2. Para determinar en forma precisa la recta de "mejor ajuste", aplicamos el **MÉTODO DE LOS MÍNIMOS CUADRADOS,** el cual consiste en encontrar los valores **m** y **n,** en la ecuación de la línea recta **y= mx + n,** de tal manera que ésta quede definida como la recta que hace mínima la suma de los cuadrados de las desviaciones, respecto a ella, de todos los puntos que corresponden a la distribución de datos obtenida. Ilustremos gráficamente este método:

- Las figuras 14-17 (a) y 14-17 (b) muestran las distancias entre un valor observado de **y** y un valor estimado de $\mathbf{y_1}$. El valor de esta distancia es la diferencia **(** $\mathbf{y - y_1}$**)**:

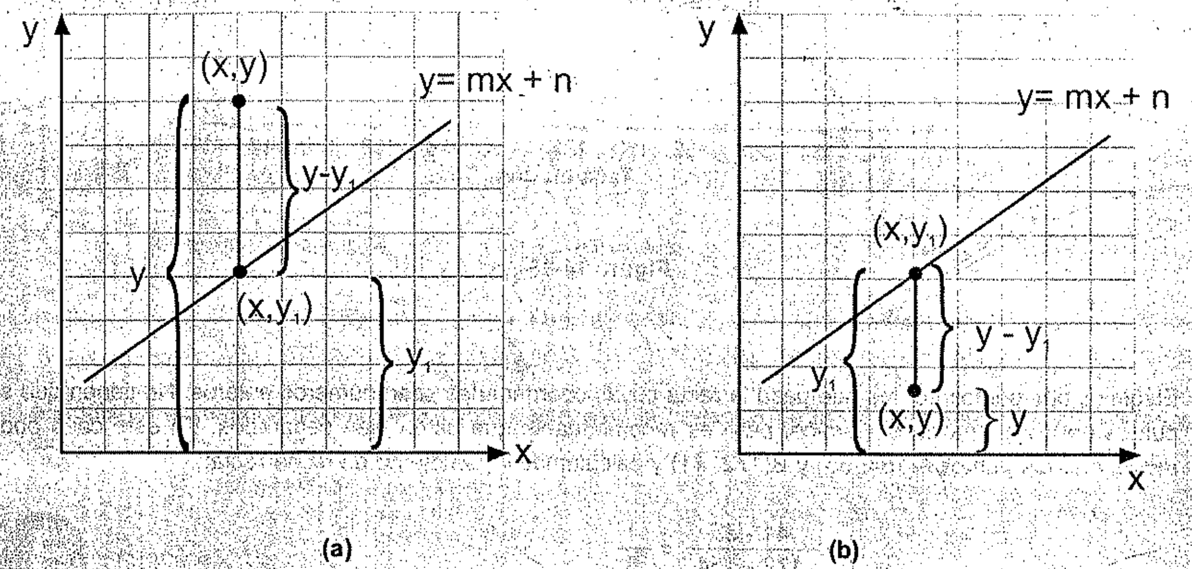


Figura 14-17

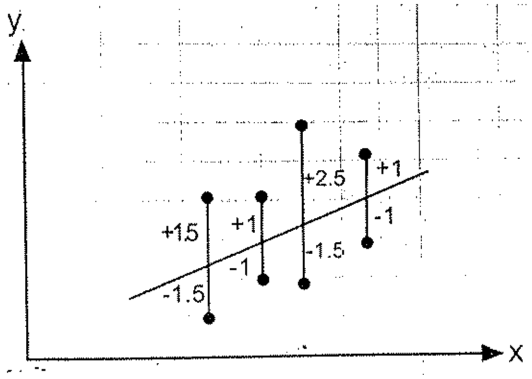
- Notemos que ($y - y_1$) es positiva cuando (x,y) está por encima de la recta, figura 14-17 (a) y es negativa cuando está por debajo de ella, figura 14-17(b).
- Si esta es la recta de **"mejor ajuste"** entonces $\sum(y-y_1)^2$ se hace lo más pequeña posible.

RECTA DE MEJOR AJUSTE

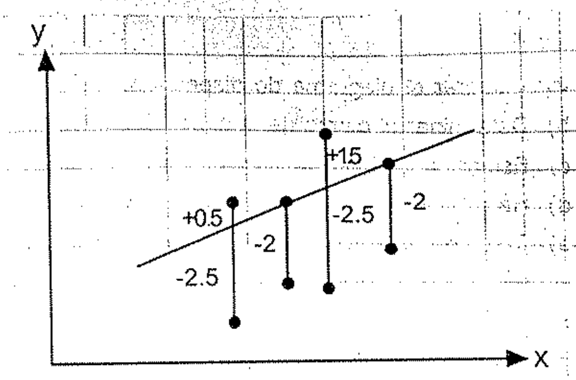
- En un diagrama de dispersión, la **RECTA DE MEJOR AJUSTE** se encuenra aplicando el **método de los mínimos cuadrados.**
- Este método consiste en encontrar los valores de **m** y **n** de la ecuación lineal **y=mx + n** de manera que el valor de $\mathbf{\sum(y-y_1)^2}$ sea el menor posible.

Ejemplo

- La figura 14-18(a) muestra un diagrama de dispersión con una posible recta de ajuste geométrico y la figura 14-18 (b) otra posible recta de ajuste geométrico para la misma distribución.



(a)



(b)

Figura 14-18

- Calculemos $\sum(y-y_1)^2$ en cada una:
  - En la figura 14-18 (a):

$$\sum(y-y_1)^2 = (-1.5)^2 + (+1.5)^2 + (+1)^2 + (-1)^2 + (-1.5)^2 + (+2.5)^2 + (1)^2 + (-1)^2 = 17$$

  - En la figura 14-18 (b):

$$\sum(y-y_1)^2 = (-2.5)^2 + (+0.5)^2 + (-2)^2 + (-2.5)^2 + (+1.5)^2 + (-2)^2 = 23$$

- Como el menor valor de $\sum(y-y_1)^2$ corresponde a la figura 14-18(a), entonces ésa será la recta de mejor ajuste geométrico.

14.5.3 Recta de Mejor Ajuste usando Fórmulas Estadísticas

- Además del procedimiento descrito en la sección anterior, podemos aplicar el método de los mínimos cuadrados, para encontrar los valores de **m** y **n** de la recta de mejor ajuste **y=mx+n**, utilizando las siguientes fórmulas estadísticas:

$$\boxed{m = \frac{\sum(x-\bar{x})\cdot(y-\bar{y})}{\sum(x-\bar{x})^2}} \qquad \text{. . . . . (1)}$$

donde $(x-\bar{x})$ y $(y-\bar{y})$ son las desviaciones de cada dato con respecto a la media aritmética.

$$\boxed{n = \bar{y} - m\bar{x}} \qquad \text{. . . . . (2)}$$

Ejemplo

Se eligieron en forma aleatoria 8 estudiantes de 10° grado para medir su estatura **x** (en pulgadas) y su peso **y** (en libras). La tabla siguiente muestra los resultados:

Estatura (x)	65	65	62	67	69	65	61	67
Peso (y)	105	125	110	120	140	135	95	130

Se pide:

a) Elaborar el diagrama de dispersión
b) Determinar el centro de la nube de puntos.
c) Estimar la recta de mejor ajuste y hallar los valores de la pendiente y el intercepto con el eje y.
d) Hallar la ecuación de la recta de regresión de y sobre x utilizando el método de los mínimos cuadrados.
e) Comparar la recta obtenida por el método geomérico y la obtenida por el método de los mínimos cuadrados. ¿Cómo son los resultados?

SOLUCIÓN

a) Este es el diagrma de dispersión, figura 14-19:

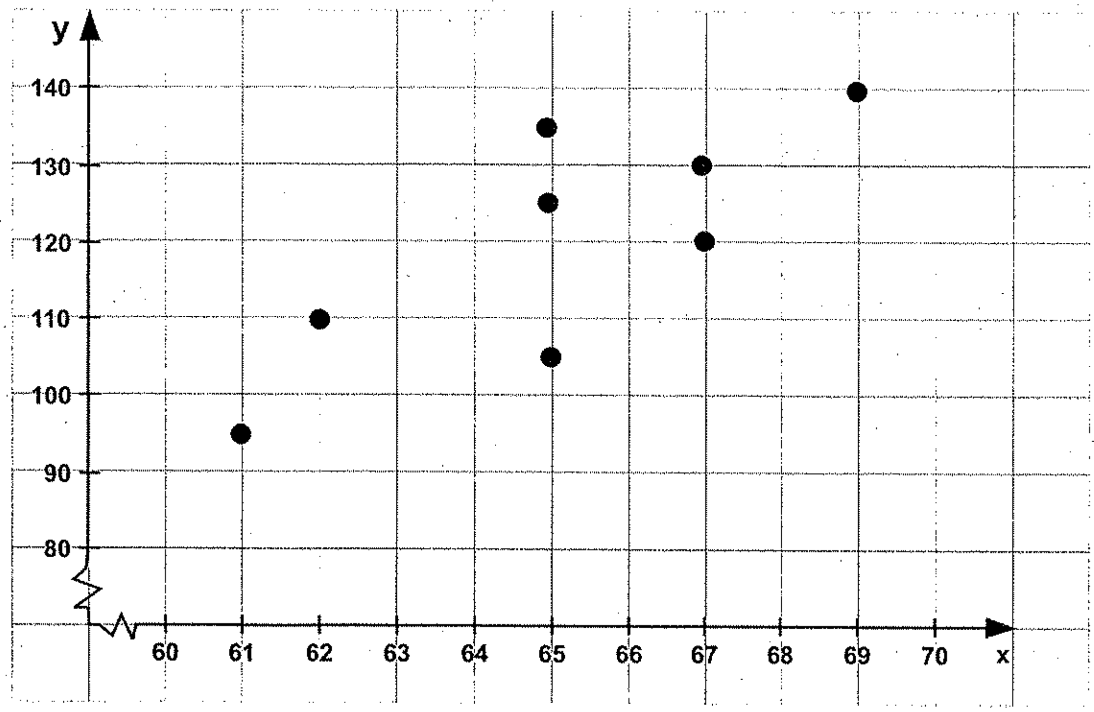


Figura 14-19

b) Determinemos el centro C($\overline{x}$, $\overline{y}$) de la nube de puntos, así:

$$\overline{x} = \frac{\sum x}{n} = 65.1 \quad \text{(¡Compruébalo!)}$$

$$\overline{y} = \frac{\sum y}{n} = 120 \quad \text{(¡Compruébalo!)}$$

luego, el centro de la nube es C(65.1 , 120)

c) Para estimar la gráfica de la recta de mejor ajuste, marcamos el punto C(65.1 , 120), trazamos la recta y escogemos otro punto sobre ella que no necesariamente tiene que estar en la distribución; por ejemplo, el punto P(60,95); figura 14-20.

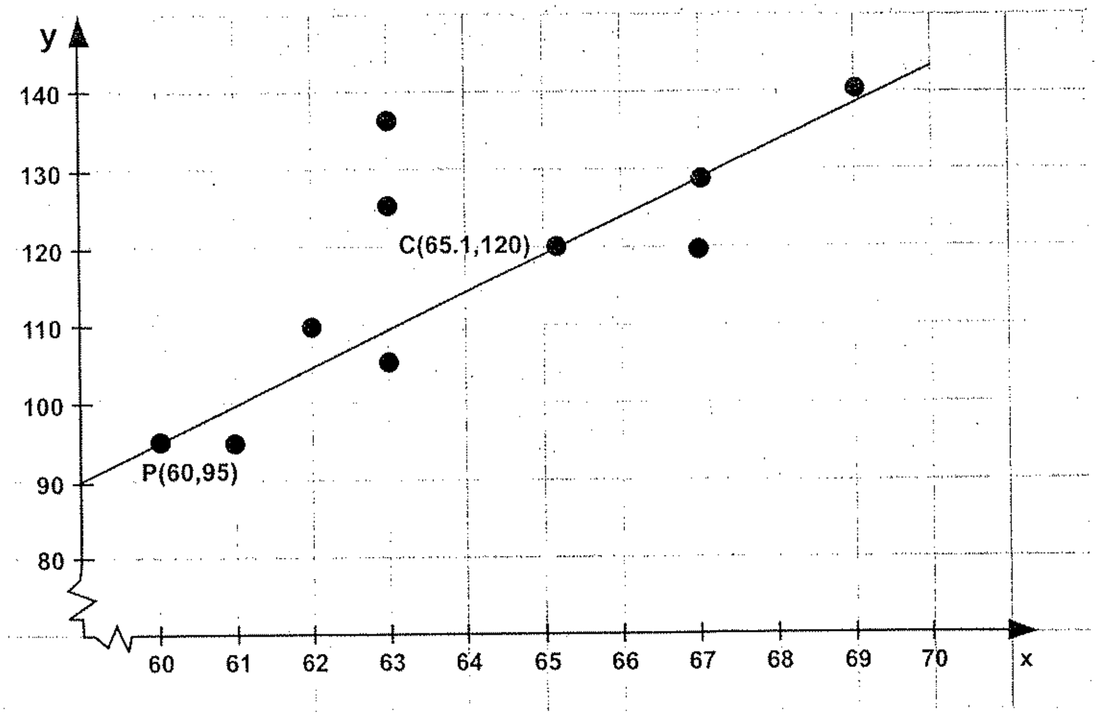


Figura 14-20

- La pendiente de esta recta es $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{120 - 95}{65.1 - 60} = \dfrac{25}{5.1} = 4.9$

- Ahora aplicamos la fórmula punto-pendiene para hallar la ecuación:

$y - y_1 = m\,(x - x_1)$ . . . . Forma punto-pendiente

$\therefore\ y - 120 = 4.9\,(x - 65.1)$ . . . . Reemplazamos valores

$\therefore\ y = 4.9x - 199$ . . . . Ecuación de la recta pedida

Luego, m= 4.9 y n= -199

d) Para hallar la recta de regresión de y sobre x, uilizando el método de los mínimos cuadrados, elaboramos la siguiente tabla:

ESTATURA (x)	PESO (y)	$(x-\overline{x})$	$(y-\overline{y})$	$(x-\overline{x})(y-\overline{y})$	$(x-\overline{x})^2$
65	105	-0.1	-15	1.5	0.01
65	125	-0.1	5	-0.5	0.01
62	110	-3.1	-10	31	9.61
67	120	1.9	0	0	3.61
69	140	3.9	20	78	15.21
65	135	-0.1	15	-1.5	0.01
61	95	-4.1	-25	102.5	16.81
67	130	1.9	10	19	3.61
				$\sum(x-\overline{x})\cdot(y-\overline{y}) = 230$	$\sum(x-\overline{x})^2 = 46.08$

Luego, $m = \dfrac{\sum(x-\overline{x})(y-\overline{y})}{\sum(x-\overline{x})^2} = \dfrac{230}{48{,}88} = 4.71$ y $n = \overline{y} - m\overline{x} = 120 - 4.71\,(65.1) = -186.62$

Por lo tanto, la recta de mejor ajuste o la recta de regresión de y sobre x es:

$$\mathbf{y = 4.71x - 186.62}$$

e) Al comparar la ecuación de la recta obtenida por métodos geométricos y la obtenida por el método de los mínimos cuadrados, encontramos poca diferencia entre los valores de la pendiente y el intercepto con el eje y.

ATENCIÓN

1. Tengamos en cuenta que sólo la recta obtenida por el método de los mínimos cuadrados garantiza el mejor ajuste. Los ajustes geométricos son básicamente ilustrativos; de hecho a la recta de mínimos cuadrados se le denomina la **LÍNEA DE REGRESIÓN VERDADERA.**

2. Con la ecuación de la recta de mejor ajuste, podemos hacer predicciones. En efecto, si un estudiante tiene una estatura de 70 pulgadas, podemos estimar su peso en libras, así:

$$y = 4.71\,(70) - 186.62$$
$$\therefore\ y = 143.1 \text{ libras}$$

Si hacemos el cálculo utilizando la ecuación de la recta de mejor ajuste obtenida por el método geométrico, nos queda:

$$y = 4.9\,(70) - 199$$
$$\therefore\ y = 144 \text{ libras}$$

Compara ambos resultados y explica.

EJERCICIO 14.4

1. Se realizó un estudio para determinar la relación entre el precio de reventa **y** (en cientos de dólares) y la antigüedad **x** (en años) de ciertos automóviles. La ecuación de la recta de mejor ajuste fue $y=185.7 - 21.52x$. Se pide:

   a) Hallar el valor de reventa de un automóvil con 4 años de antigüedad.
   b) Hallar el decremento (desvalorización) anual promedio en el precio de reventa de estos automóviles.
   c) Explicar el significado de la pendiente $m= - 21.52$

2. Las calificaciones de un estudiante cuando termina el grado 11° y durante el primer semestre en la universidad son, respectivamente (están calificadas de 1.0 a 10.0):

En bachillerato (x)	2.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0
En universidad (y)	2.0	3.0	3.0	4.0	6.0	5.0	7.0	6.0

   Se pide:

   a) Elaborar el diagrama de dispersión.
   b) Trazar, por estimación gráfica, la recta de mejor ajuste.
   c) Determinar, utilizando el método geométrico, la ecuación de la recta de mejor ajuste.
   d) Determinar, utilizando el método de los mínimos cuadrados y las fórmulas estadísticas, la recta de regresión de y sobre x.
   e) Para una calificación de 3.0 en el grado 11°, ¿cuál será la obtenida en la universidad? Realiza el cálculo para las rectas encontradas en los literales c) y d).

3. La siguiente tabla, compara el contenido de calorías y de grasas de algunos alimentos de comidas rápidas (comida "chatarra"):

Calorías (x)	270	420	210	450	130	310	290	450	446	640	233	552	360	838	199	360	345	552
Grasas (y)	9	20	10	22	6	25	7	20	20	38	1	55	6	20	12	36	25	22

   Se pide:

   a) Elaborar un diagrama de dispersión para esta distribución.
   b) Calcular el coeficiente de correlación r por estimación visual y utilizando las fórmulas estadísticas.
   c) Trazar la recta de mejor ajuste por estimación gráfica.
   d) Encontrar la recta de mejor ajuste utilizando el método geométrico.
   e) Encontrar la recta de mejor ajuste o la recta de regresión sobre x, utilizando el método de los mínimos cuadrados.
   f) Si un "perro caliente" tiene aproximadamente 900 calorías, ¿qué cantidad de grasa contiene?

4. Se realizó un estudio biológico de un pececillo llamado nariz-negra. En la siguiente tabla se registraron su longitud **y** (en milímetros) y la edad **x** (aproximada al año más cercano):

Edad (x)	0	3	2	2	1	3	2	4	1	1
Longitud (y)	25	80	45	40	36	75	50	95	30	50

Se pide:

a) Elaborar un diagrama de dispersión.
b) Calcular el coeficiente de correlación r por estimación visual.
c) Calcular el coeficiente de correlación r utilizando las fórmulas estadísticas.
d) Comparar los resultados obtenidos en los literales b) y c).
e) Trazar la recta de mejor ajuste por estimación gráfica.
f) Encontrar la ecuación de la recta de mejor ajuste utilizando el método geométrico.
g) Hallar la ecuación de la recta de regresión utilizando el método de los mínimos cuadrados. Comparar esta ecuación con la obtenida en el literal anterior.
h) Para una edad de 5 años, ¿cuál es la longitud del pececillo?

Taller de la Unidad 14

1. Preguntas para revisar la teoría:

1.1 ¿En qué consiste la correlación lineal?

1.2 En estadística, ¿para qué fueron creados los coeficientes de correlación lineal?

1.3 ¿Cuántas y cuáles son las variables que manejan las distribuciones bidimensionales?

1.4 ¿Qué es un diagrama de dispersión? Explique.

1.5 ¿Cuándo la correlación entre dos variables es:
a) Positiva?
b) Negativa?
c) Nula?

1.6 ¿Cuáles son los valores del coeficiente de correlación cuando se tiene:
a) Una correlación lineal positiva perfecta?
b) Una correlación lineal negativa perfecta?
c) Una correlación lineal nula?

1.7 Explica el procedimiento para calcular el coeficiente de correlación **r** por estimación visual.

1.8 Al calcular el coeficiente de correlación podemos utilizar la ecuación **producto-momento de Pearson** $\mathbf{r = \dfrac{\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sqrt{\sum(x-\bar{x})^2 \sum(y-\bar{y})^2}}}$, ¿qué significan las expresiones $(x-\bar{x})$ y $(y-\bar{y})$? ¿Pueden ser negativas? ¿Las expresiones $(x-\bar{x})^2$ y $(y-\bar{y})^2$ pueden ser negativas? ¿Puede ser cero alguna de ellas?

1.9 Explique el concepto de regresión lineal.

1.10 ¿Qué se entiende por la recta de mejor ajuste en un diagrama de dispersión?

1.11 Explique de manera explícita el procedimiento para trazar la recta de mejor ajuste utilizando la estimación gráfica.

1.12 Explique en qué consiste el método de los mínimos cuadrados, para calcular la recta de mejor ajuste o la recta de regresión,

1.13 ¿Cuál es la fórmula estadística para calcular la pendiente **m** de la recta de regresión de y sobre x? En ella, ¿qué significan las expresiones $(x-\bar{x})$, $(y-\bar{y})$ y $(x-\bar{x})^2$? ¿Podrá ser $(x-\bar{x})^2$ igual a cero?

1.14 ¿Cuál es la fórmula para hallar **n** en la recta de regresión $y= mx + n$?

2. No se debe confundir la verdadera correlación con causalidad. Este riesgo suele aumentar cuando los datos de las variables son muy pocos o están muy dispersos. Discute con tus compañeros las siguientes afirmaciones:

2.1 Los niños con los pies más grandes tienen mejor ortografía. Significa esto que el tamaño del pie nos informa sobre la calidad de la ortografía en los niños?

2.2 En una determinada región de Europa, se observó que con el paso del tiempo, hubo un fuerte crecimiento de la población al mismo tiempo que aumentó el número de cigüegas. ¿Significa ésto que a los niños los traen las cigüeñas?

3. Puede resultar interesante investigar en tu grupo sobre tus propias medidas y las de tus compañeros de clase. Para ello forma grupos de 10 estudiantes y recoge los datos de las siguientes variables:

3.1 Peso y estatura

3.2 Estatura y número de zapato

3.3 Longitud de pie y número de zapato

3.4 Estatura y medida de brazos extendidos

3.5 Medida de brazos extendidos y medida de la mano extendida

3.6 Sus notas de matemática-física.

Para cada numeral elaborar:

a) El diagrama de correlación correspondiente.

b) Utilizando el método de estimación visual, determinar el coeficiente de correlación.

c) Calcular el coeficiente de correlación utilizando la fórmula de Pearson.

d) ¿En qué casos el coeficiente de correlación r es positivo? ¿Y negativo?

e) ¿En cuál de los casos la correlación es casi perfecta?

f) Por estimación gráfica, trazar la recta de mejor ajuste:
   - Utilizando la geometría analítica, determinar la ecuación de mejor ajuste.
   - Utilizando el método de los mínimos cuadrados, determinar la recta de regresión.

4. La siguiente tabla muestra la clasificación de los 10 primeros equipos del torneo de Fútbol y el número de partidos ganados.

Clasificación (x)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
No. de partidos ganados (y)	27	24	20	18	19	16	18	15	15	15

Se pide:

4.1 Elaborar el diagrama de dispersión

4.2 Calcular el coeficiente de correlación $r = \pm\left(1 - \frac{1}{k}\right)$ utilizando el método de estimación visual.

4.3 Calcular el coeficiente de correlación r utilizando la fórmula de Pearson.

4.4 Comparar los valores obtenidos en los numerales 4.2 y 4.3. ¿Están muy cercanos sus valores? Explique.

4.5 Utilizar el método de estimación gráfica para trazar la recta de mejor ajuste

4.6 Por medio de la geometría, determinar la ecuación de la recta de mejor ajuste, trazada en el numeral anterior

4.7 Utilizar el método de los mínimos cuadrados (fórmulas estadísticas) para determinar la recta de regresión o de mejor ajuste

4.8 Comparar los valores de **m** y **n** para los numerales anteriores ¿Dichos valores son muy cercanos?

4.9 Cuántos partidos se estima, habrá ganado un equipo que ocupa el lugar decimotercero?

5. La siguiente tabla muestra la clasificación de los 10 primeros equipos del torneo de futbol y el número de partidos perdidos:

Clasificación (x)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
No. de partidos perdidos (y)	5	5	13	15	16	15	17	15	17	17

Resuelve las mismas preguntas propuestas para el ejercicio anterior. ¿Cuántos partidos se estima habrá perdido un equipo que ocupa el lugar decimotercero? ¿Y el décimo?

6. La siguiente tabla corresponde al número de horas de estudio que dedica un grupo de 15 estudiantes en un día y el número de horas que dedica a ver televisión:

No. horas de estudio(x)	4	5	4	2.5	6	0.5	1	2	3	4.5	3	1.5	3.5	5.5	2.5
No. de horas de t.v. (y)	2	1.5	2.5	4	0.5	5.5	5	4	2.5	1.5	3.5	5	2.5	1	3.5

6.1 Elaborar el diagrama de dispersión

6.2 Por estimación gráfica, trazar la recta de mejor ajuste

6.3 Deerminar la recta de regresión de y sobre x utilizando la geometría y por el método de los mínimos cuadrados.

7. La siguiente distribución bivariada corresponde a la medición del radio y la longitud de 8 circunferencias:

Radio (x)	5	6	7	9	10	11	13	14
Longitud (y)	31.42	37.7	43.98	56.55	62.83	69.11	81.68	87.96

7.1 Elaborar el diagrama de dispersión

7.2 Utilizando el método de estimación visual ¿podrías determinar el coeficiente de correlación r? ¿En el diagrama de dispersión se forma un rectángulo? ¿La correlación es perfecta y positiva o perfecta y negativa?

7.3 Utilizando la fórmula de producto-momento de Pearson, calcular el coeficiente de correlación. ¿Dicho valor es positivo o negativo?

7.4 Utilizar el método de estimación gráfica para trazar la recta de mejor ajuste. ¿Dicha recta contiene todos los puntos?

7.5 Encontrar la recta de mejor ajuste utilizando la geometría

7.6 Encontrar la recta de regresión utilizando el método de los mínimos cuadrados

7.7 Para un radio de 8cm ¿cuál es la longitud de la circunferencia?

8. Los siguientes datos fueron generados usando la ecuación $y = 3x + 1$.

x	0	1	2	3	4
y	1	4	7	10	13

8.1 Elaborar el diagrama de dispersión. ¿Se forma una nube de puntos? ¿El coeficiente de correlación es $r=1$?

8.2 Trazar la recta de mejor ajuste utilizando el método de estimación gráfica? ¿Son colineales estos puntos?

8.3 Determinar la recta de mejor ajuste utilizando la geometría

8.4 Determinar la recta de regresión por el método estadístico. ¿La ecuación de dicha recta es igual a la del numeral anterior o igual a la propuesta en el ejercicio? Explique.

Prepárate para las Pruebas ICFES

En cada uno de los siguientes ejercicios escoja la letra correspondiente a la ÚNICA respuesta correcta:

1. Los números que hacen falta para completar el último cuadro de la serie son:

1	2	3	6	4	8		16
8	4	24	12	32	16	64	

a) 8 y 12 b) 6 y 12

c) 6 y 24 d) 8 y 32

2. Si $x \neq 1$, entonces el valor de b en la expresión $x^2(x - 1) - x + 1 = (x - 1)(x^2 - b)$ es:

a) 1 b) $\frac{1}{2}$ c) 0 d) -1

3. Al simplificar la expresión $\frac{3+4+11+12}{4+12+2}$ se obtiene:

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{5}{3}$ c) 7 d) $\frac{19}{3}$

4. Si a las 8:00 a.m. se le suministra a un paciente una droga A, que debe tomarse cada media hora, y una droga B que debe tomarse cada 8 minutos, entonces las drogas A y B se vuelven a tomar juntas a las:

a) 9:38 a.m. b) 9:08 a.m. c) 9:20 a.m. d) 10:00 a.m.

5. La mitad de una vaca pesa 120 Kg. más de lo que pesa la quinta parte de la misma vaca. En consecuencia, la vaca pesa:

a) 420 Kg. b) 480 Kg. c) 400 Kg. d) 500 Kg.

RESPUESTAS

NÚCLEO TEMÁTICO 1

COMPRENSIÓN DE LECTURA:

EJERCICIO 1 – 1

2. **a)** V **b)** F **c)** F **d)** V **e)** V

3. **a)** Irracional **b)** Racional **c)** Racional **d)** Irracional **e)** Racional **f)** Irracional

4.

	N	Z	Q	Q'	R
-7		X	X		X
3.14			X		X
$\pi - \frac{2}{3}$				X	X
$-\frac{5}{4}$			X		X
$\frac{\sqrt{3}}{2}$				X	X
$\sqrt{\frac{4}{9}}$			X		X
$\sqrt[3]{\frac{4}{27}}$				X	X
4.25			X		X
$4\frac{3}{5}$			X		X

5. Asociativa y conmutativa

6. $-\sqrt{2}$ y $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, respectivamente

7. $\sqrt{2} - \sqrt{3}$ y $\sqrt{3} + \sqrt{2}$, respectivamente

8.

	NATURALES	ENTEROS	RACIONALES	REALES
Cerrado con respecto a la suma	V	V	V	V
Cerrado con respecto a la multiplicación	V	V	V	V
Cerrado con respecto a la resta	F	V	V	V
Cerrado con respecto a la división	F	F	V	V
Todos los elementos poseen inverso aditivo	F	V	V	V
Todos los elementos excepto el neutro aditivo, poseen inverso multiplicativo	F	F	V	V

EJERCICIO 1 – 2

2. $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$

3. $9b^4 - 36c^6$

4. $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{25}$

5. $m^6 + 2m^5 - 3m^4 - 2m^3 + 6m^2 - 4m + 1$

6. $4x^2 + 9y^2 + 16z^2 + 4w^2 + 12xy - 16xz - 8xw - 24yz - 12yw + 16zw$

7. $9a^2 + 18ab + 9b^2 - 4$

8. $a^4 + 5a^2 + 9$

9. $a^6 - 3a^4 + 7a^2 - 9$

10. $-x^4 - y^4 - z^4 + 2x^2y^2 + 2x^2z^2 + 2y^2z^2$

11. $a^4x^4 - 2a^2b^2x^2y^2 + b^4y^4$

12. $27a^3 - b^3$

13. $x^3 + 8$

14. $x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 - 2x^2 + 4xy^3 - 4xy - 2y^2 + y^4 + 1$

15. $x^2 + 10xz + 25z^2 - 4y^2$

16. $4x^2 - 9y^2 - 30yz - 25z^2$

17. $v^2 - b^2u^2$

18. $a^4 - 18a^2b^2 + 81b^4$

19. $x^4 - 16y^4$

20. $8x^3 - 125y^3$

21. $9a^2 - 4b^2 + 4bc - c^2$

22. $9(xy + 2z^3)(xy - 2z^3)$

23. $(3a - b)(x - y)$

24. $4x^2y^2\,(3y - x)$

25. $(3a - b)(4a - x^2)$

26. $(6t^4 + 5x^5)(6t^4 - 5x^5)$

27. $(2x + y)(3x - a)$

28. $(2a - 3b)^2$

29. $(y - 1)(y^2 + 1)$

30. $a^{n+1}\,(a^n + a + 1)$

31. $(x - 2)(x + 1)$

32. $(3s - t)(2t^2 + 9s^2)$

33. $(x - 15)(x - 11)$

34. $(x - 4y)(1 - x^2 - 4xy - 16y^2)$

35. $(x - 15)(x + 6)$

36. $(2x + y)(2x - y)(4x^2 - 2xy + y^2)\,(4x^2 + 2xy + y^2)$

37. $(xy + 17)^2$

38. $(a + 3b)(a^2 - 3ab + 9b^2 + 1)$

39. $(x^2 - 17)(x^2 - 12)$

40. $(x - 3y + a - b)(x - 3y - a + b)$

41. $(x + 11)(10 - x)$

42. $(a - 3b)(a^2 + 3ab + 9b^2 + a + 3b)$

43. $(x^2 - 17)(x^2 + 3)$

44. $(4a + 4b + 3)(a + b - 2)$

45. $(ay + 24)(ay - 10)$

46. $2a(3a + 2x + 8)(3a - 2x - 8)$

47. $(2x + 1)(x + 1)$

48. $x(3x - 2y)^2$

49. $(x + 8)(10x - 1)$

50. $(4x^2 + x - 3y)(4x^2 - x + 3y)$

51. $(x - 19y)(x + 17y)$

52. $(a - 2b)(a + 2b + ab)$

53. $(a + b)(a + b + 1)$

54. $(2a^2 + a + 2b)(2a^2 - a - 2b)$

55. $x(x + 15y)(x - 3y)$

56. $(2x - 1)(x + 2)(x - 2)$

57. $(2x - 7)(3x - 5)$

58. $(x - y + 3)(x - y - 3)$

59. $(4x + 5)(4 - 5x)$

60. $(a + b)(a + b - a^2 + ab - b^2)$

61. $(13 - xy)(xy + 5)$

62. $uv(u+3v)(u-3v)$ **63.** $3x(x+9)(x-7)$ **64.** $(m^3-3n^4)(m^6+3m^3n^4+9n^8)$ **65.** $(x+5)(x+1)(x-1)$

66. $(x+2)(x-4)(x+3)(x-3)(x-1)$ **67.** $(x-2)(x+3)(x-3)(x+1)(x-1)$ **68.** $(x+1)(x-1)(x+2)^2(x-2)(x+3)$

69. $(3x-1)(2x-1)(4x-3)(2x+1)$ **70.** $(x+3)(2x-1)(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$

EJERCICIO 1 – 3

1. $\dfrac{ab}{2a-b}$ **2.** $\dfrac{2x+y}{x+3y}$ **3.** 2 **4.** $\dfrac{(x+y)^2}{y^2(1-y^2)}$ **5.** 0 **6.** 0

7. $\dfrac{1}{(a+1)(a+3)}$ **8.** $\dfrac{x}{x+1}$ **9.** $-a$ **10.** $\dfrac{a^2b^2}{a-b}$ **11.** bx **12.** $a+b$

13. $\dfrac{49x^{10}}{64w^6y^8z^{12}}$ **14.** $\dfrac{1}{x^{\frac{1}{4}}}$ **15.** $\dfrac{2y^4z^4}{3x^2}$ **16.** $\dfrac{ab}{b-a}$ **17.** $\dfrac{xy}{(x+y)^2}$

18. $\dfrac{xy^2}{2y^2-3x^2}$ **19.** $\dfrac{x^2-xy+y^2}{y-x}$ **20.** $x-2x^{1/2}y^{1/2}+y$ **21.** $-\dfrac{x^3-y^3}{x^3y^3}$ **22.** $\dfrac{\left(1+x^{1/2}y^{1/2}\right)^2}{6xy^2}$

23. $\dfrac{1+x^{9/5}y^{3/2}z}{x^{3/10}y^{3/2}}$ **24.** 2^{n+1} **25.** $\dfrac{1}{a^2}$ **26.** $\dfrac{1}{9}$ **27.** $\dfrac{1}{4\cdot(3^{5a})}$

28. 25 **29.** $\dfrac{a^{2p}+1}{a^p}$ **30.** 2 **31.** $\dfrac{x-\sqrt{x^2-a^2}}{a}$ **32.** $\dfrac{x\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x^2y^2}+y\sqrt[3]{y}}{x^2+y^2}$

33. $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$ **34.** $\dfrac{3}{\sqrt{3(x+h)-2}+\sqrt{3x-2}}$ **35.** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x(x+h)}+\sqrt[3]{x^2}}$ **36.** $\{18\}$

37. $\left\{\dfrac{1}{a}\right\}$ **38.** $\left\{\dfrac{a}{a-b}\right\}$ **39.** $\left\{\dfrac{cd}{c+2d}\right\}$ **40.** $\{11\}$ **41.** $\left\{\dfrac{rs}{r+s}\right\}$ **42.** $\{6\}$

43. $\left\{\dfrac{bc^2}{a^2}\right\}$ **44.** $\left\{\dfrac{a+2b}{2}\right\}$ **45.** $\left\{\dfrac{b(2a-b)}{a}\right\}$ **46.** $b=\dfrac{2-2d}{3}$ **47.** $t=\dfrac{L_2-L_1}{aL_1}$

48. $t=\dfrac{w\left(v_1^2-v_2^2\right)}{2pg}$ **49.** $m=\dfrac{2Es+2e^2}{sr^2w^2}$ **50.** $f=\dfrac{25L}{MF-L}$

51. $x=\dfrac{3}{4}$, $y=-\dfrac{1}{8}$. El resultado representa el punto de intersección de las líneas rectas cuyas ecuaciones forman el sistema.

52. $\left\{\dfrac{m+n}{m},-1\right\}$ 53. $\left\{\dfrac{q+1}{p},-\dfrac{q}{p}\right\}$ 54. $\left\{-2,-\dfrac{2}{u^2-1}\right\}$ 55. $\left\{\dfrac{r+3}{r},\dfrac{r-3}{r}\right\}$

56. { -2, 2, 3} 57. { -1.5, 0.5, 2 } 58. {-4, -2, -0.5, 0.5, 3} 59. {0.4302}

60. { 0.754 , -0.208 , 2.121 }

EJERCICIO 1 – 5

1. 112.5° y 67.5° **2.** 128° **3.** $m\hat{x}=m\hat{y}=72^0$ **6.** 127°

9. **a)** 2.5 km **b)** 5.59 km **10.** **a)** $39\pi(\sqrt{10}+1)\ \text{cm}^2$ **b)** $387\pi\text{cm}^3$ **11.** $4(6-\pi)\ \text{cm}^2$

12. **b)** $V(x)=144x-48x^2+4x^3$ unidades cúbicas **13.** $A(x)=200x-\left(2+\dfrac{\pi}{2}\right)x^2$ unidades cuadradas

14. $A(x) = 100x - 2x^2$ unidades cuadradas

15. $A(x) = 12x - 2x^2$ unidades cuadradas

EJERCICIO 1 – 6

1. a) $x \leq y$ b) $x \geq y$ c) $x \leq y$ d) $3 \leq x \leq 10$ e) $-5 < y < -2$
2. a) $-5 \leq x \leq 12$ b) $-8 \leq x < 5$ c) $x < -3$ d) $x > 9$ e) $-8 < x < -1$ f) $0 \leq x < 13$
3. a) $(-\infty; -4]$ b) $(-5; 10]$ c) $[1; +\infty)$ d) $(8; +\infty)$ e) $(-12; 0]$ f) $[18; +\infty)$
4. a) $(-\infty; 2)$ b) $(-4; 2)$ c) $[-7; 2)$

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (1)

1. $P(x) = 110x - x^2$
2. De 2^0 grado
3. Para 0 y 110

EJERCICIO 1 – 7

1. $\left(-5; \frac{5}{2}\right)$ 2. $(-\infty; 1]$ 3. $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup (4; +\infty)$ 4. $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup (0; +\infty)$ 5. $\left[-1; \frac{4}{3}\right]$

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (2)

1. $P(x) = 24x - x^2$
2. De 2^0 grado
3. Para $0 < x < 24$

EJERCICIO 1 – 8

1. $(2; +\infty)$ 2. $(-\infty; 2)$ 3. $\left(-\infty; \frac{21}{13}\right]$ 4. $\left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$

5. $(-\infty; -4) \cup (-2; +\infty)$ 6. $[-1; 0] \cup [2; +\infty)$ 7. $(-\infty; -\sqrt{6}] \cup [\sqrt{6}; +\infty)$ 8. R

9. $(-\infty; -2] \cup \left[\frac{5}{4}; +\infty\right)$ 10. $(-\infty; -2) \cup \left(\frac{3}{2}; 5\right)$ 11. $(-\infty; -1) \cup [1; +\infty)$ 12. $(-4; -1]$

13. $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup \left(-\frac{2}{3}; 1\right)$ 14. $[-4; 0) \cup [1.5; 2) \cup [5; +\infty)$ 15. $\left[\frac{5}{3}; +\infty\right)$ 16. $(8; +\infty)$

17. $(-\infty; -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}; +\infty)$ 18. $(-\infty; +\infty)$ 19. $(-\infty; -1) \cup \left(\frac{1}{3} \quad \frac{1}{2} \quad \right)$ 20. ϕ

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (3)

1. $A(x) = 1000x - 2x^2$
2. De 2^0 grado
3. 500 m, 250 m

TALLER DE LA UNIDAD 1

2. a) V b) F c) F d) F e) F f) V
3. a) $a = b$ b) $a > b$ c) $a = b = c$
4. a) V b) V c) V d) F e) F f) V g) F

5. a) $\{x/x \le 5\}$ $= (-\infty ; 5]$ b) $\{x/$

5. **a)** $\{x/x \le 5\} = (-\infty ; 5]$ **b)** $\{x/ -4 < x < 4\} = (-4;4)$

c) $\{x/x < -4 \text{ ó } x \ge 4\} = (-\infty, -4) \cup [4; +\infty)$ **d)** $\{x/ -2 < x < 7\} = (-2 ; 7)$

6. La respuesta correcta es que: $\sqrt{(4-7)^2} = |4-7| = |-3| = 3$; luego, al pasar del punto 3) al 4) se comete un error.

10. **a)** $[-3 , 7]$ **b)** $[2 ; 10)$ **c)** $[7;9]$ **d)** $[2 ; 6]$ **e)** $(-\infty ; -8) \cup [-5 ; 0]$ **f)** $(-2 ; 10]$

11 $(-2 ; +\infty)$ **12.** $\left(-\infty ; \frac{3}{4}\right]$ **13.** $[4 ; 8]$ **14.** $\left(-\frac{5}{3} ; \frac{4}{3}\right]$ **1 5.** $\left(-\infty ; -\frac{1}{2}\right) \cup (0 ; +\infty)$

16. $(-\infty ; -1) \cup \left(\frac{1}{3} ; 3\right)$ **17.** $(-\infty ; -2) \cup (2 ; +\infty)$ **18.** $(-\infty ; -5) \cup (3 ; +\infty)$ **19.** $\left[-1 ; \frac{1}{2}\right]$

20. $\left(-3 ; \frac{3}{4}\right)$ **21.** $\left(-\infty ; -\frac{3}{2}\right) \cup \left(-\frac{2}{3} ; 1\right)$ **22.** $(-3 ; -1] \cup \left[-\frac{1}{2} ; 2\right]$ **23.** $\left[\frac{5}{8} ; +\infty\right)$

24. $(-2 ; 5)$ **25.** $(-\infty ; 1] \cup [4 ; +\infty)$ **26.** $\left(2 ; \frac{13}{4}\right]$

27. **a)** con 2), **b)** con 2), **c)** con 6), **d)** con 8)

e) con 3), **f)** con 4), **g)** con 3), **h)** con 5).

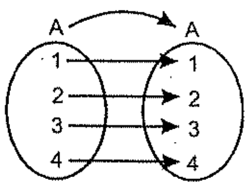
PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS ICFES: **1.** b), **2.** a), **3.** d), **4.** a), **5.** d).

NÚCLEO TEMÁTICO 2

COMPRENSIÓN DE LECTURA:

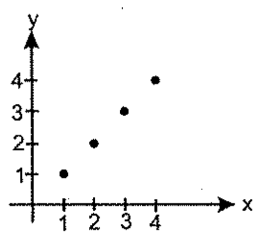
EJERCICIO 2 – 1

1. **a)**

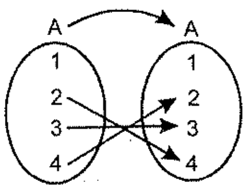


b) $R_1 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$

c)

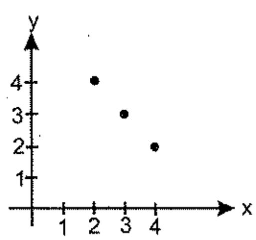


2. **a)**

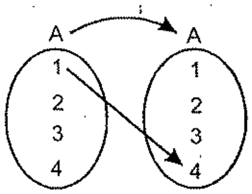


b) $R_2 = \{(2,4), (3,3), (4,2)\}$

c)

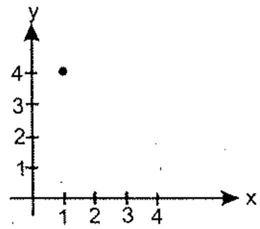


3. a)

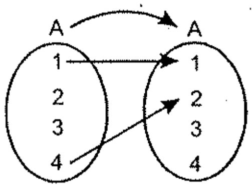


b) $R_3 = \{(1,4)\}$

c)

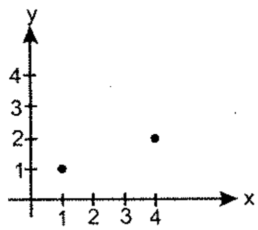


4. a)

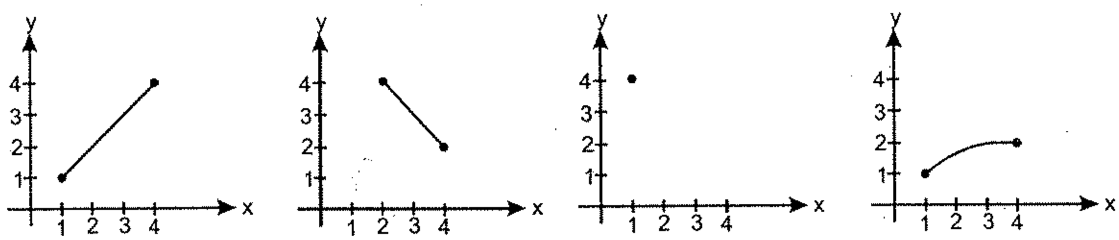


b) $R_4 = \{(1,1), (4,2)\}$

c)



5.



6. Partida: (-2 , 3] ; Llegada: (-3 ; 3]
7. Partida: (-2 ; 2] ; Llegada: [-3 ; 3]
8. Partida: (-3 ;3) ; llegada: (-3 ; 3)

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (4)

1. $P(x) = 6x^2 - x^3$
2. De 3º grado
3. Para $0 < x < 6$

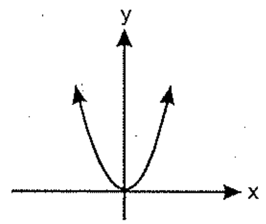
EJERCICIO 2 – 2

1. a) lineal b) línea recta no paralela a los ejes coordenados
2. a) lineal b) línea recta no paralela a los ejes coordenados
3. a) lineal b) línea recta paralela al eje y
4. a) lineal b) línea recta no paralela a los ejes coordenados
5. a) lineal b) línea recta paralela al eje x
6. a) cuadrática c) una circunferencia
7. a) cuadrática c) una hipérbola
8. a) cuadrática c) una parábola
9. a) cuadrática c) una elipse
10. a) cuadrática c) una parábola

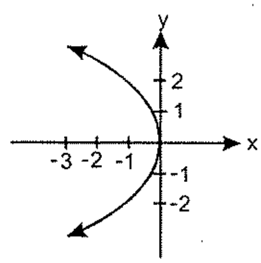
EJERCICIO 2 – 3

1. **a)** (1,0) y (0,1) **b)** No tiene simetrías con los ejes y con el origen **c)** D= R - {2} , I= R - {-3}
2. **a)** (-2,0) , (2,0) , (0,-2) **b)** Simetría con respecto al eje y **c)** D= R , I= [-2; +∞)
3. **a)** (3,0) , (0,2) , (0,-2) **b)** Simetría con respecto al eje x **c)** D=(-∞ ; 3] , I= R
4. **a)** (0,2) **b)** Con el eje y **c)** D= R , I = {2}
5. **a)** (0,4), (0,-4) **b)** Con el eje x, con el eje y, con el origen **c)** D= R, I=(-∞ ; -4] ∪ [4 ; +∞)
6. **a)** (-2,0), (2,0), (0,2) **b)** No es simétrica ni con los ejes ni con el origen **c)** D=R ; I= [-2;2] ∪ (3; +∞)

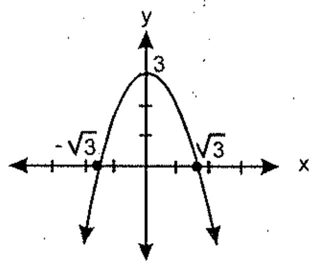
7. **a)** (0 , 0)
   b) Con el eje y
   c) D = R , no tiene asíntota vertical
   d) I = [0 ; + ∞)



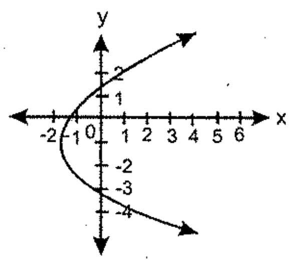
8. **a)** (0 , 0)
   b) Con el eje x
   c) $D = \left(-\infty ; 0\right]$
   d) I = R



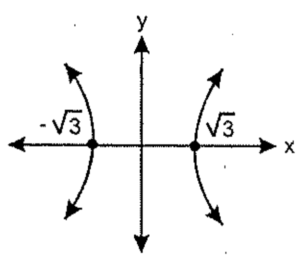
9. **a)** $\left(\sqrt{3}, 0\right)$, $\left(-\sqrt{3}, 0\right)$, (0 , 3),
   b) Con el eje y
   c) D = R
   d) $I = \left(-\infty ; 3\right]$



10. **a)** $\left(0, -1-\sqrt{5}\right)$, $\left(0, \sqrt{5}-1\right)$, $\left(-\frac{4}{3}, 0\right)$
    b) No tiene simetrías con los ejes ni con el origen
    c) $D = \left[-\frac{5}{3} ; +\infty\right)$
    d) I = R



11. **a)** $\left(-\sqrt{3}, 0\right)$, $\left(\sqrt{3}, 0\right)$
    b) Todas las simetrías con los ejes y con el origen
    c) $D = \left(-\infty ; -\sqrt{3}\right] \cup \left[\sqrt{3} ; +\infty\right)$
    d) I = R

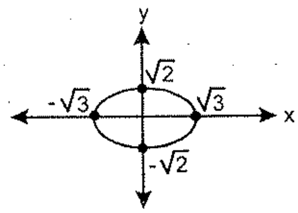


12. a) $\left(-\sqrt{3}\,,0\right),\left(\sqrt{3}\,,0\right),\left(0\,,\sqrt{2}\right),\left(0\,,-\sqrt{2}\right)$

b) Con los ejes coordenados y con el origen

c) $D=\left[-\sqrt{3}\,;\sqrt{3}\right]$

d) $I=\left[-\sqrt{2}\,,\sqrt{2}\right]$

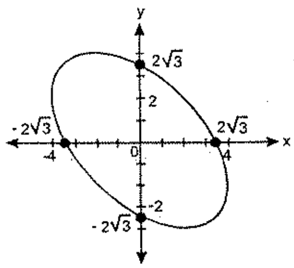


13. a) $\left(\pm 2\sqrt{3}\,,0\right),\left(0\,,\pm 2\sqrt{3}\right)$

b) Con el origen

c) D = [-4 , 4]

d) I = [-4 ; 4]

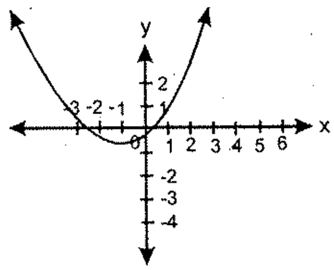


14. a) $\left(-1+\sqrt{2}\,,0\right),\left(-1-\sqrt{2}\,,0\right),\left(0\,,-\dfrac{1}{3}\right)$

b) No tiene simetrías con los ejes ni con el origen

c) D = R

d) $I=\left[-\dfrac{2}{3}\,;+\infty\right)$

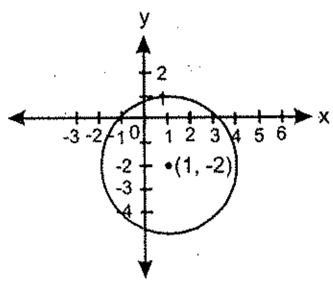


15. a) $\left(0\,,-2-2\sqrt{2}\right),\left(0\,,-2+2\sqrt{2}\right),\left(1+\sqrt{5}\,,0\right),\left(1-\sqrt{5}\,,0\right)$

b) No tiene simetrías con los ejes ni con el origen

c) D = [-2 ; 4]

d) I = [-5 ; 1]



SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (5)

1. **$P(x) = 2x^2 - 64x + 1024$**
2. **De 2º grado**
3. **Para x = 16**

TALLER DE LA UNIDAD 2

2. **a)** V **b)** F **c)** V **d)** F **e)** V **f)** F **3. d)** **4. a)** **5. b)** **6. b)**

7. **a)** **8. a)** (-3 , 0) **b)** No hay simetrías **c)** D = R - { 0 } **d)** I = R - { -3 }

9. **a)** (-1 , 0) y (1 , 0) **b)** Tiene todas las simetrías **c)** $D=\left(-\infty\,;-1\right]\cup\left[1\,;+\infty\right)$ **d)** I = R.

10. **a)** $(2, 0)$ **b)** Con el eje x **c)** $D = \{2\}$ **d)** $I = R$

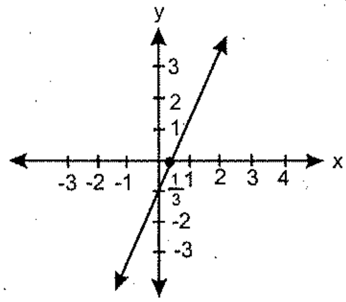
11. **a)** $(0, -2)$ **b)** Con el eje y **c)** $D = R - \{-1, 1\}$ **d)** $I = (-\infty; -2] \cup (0; +\infty)$

12. **a)** $\left(\frac{1}{3}, 0\right), (0, -1)$

b) No posee simetrías.

c) $D_R = R$

d) $I_R = R$

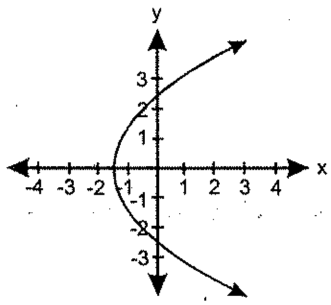


13. **a)** $\left(-\frac{3}{2}, 0\right), \left(0, \pm\sqrt{6}\right)$

b) Con el eje x.

c) $D_R = \left[-\frac{3}{2}, +\infty\right)$

d) $I_R = R$

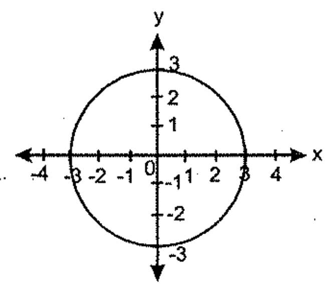


14. **a)** $(\pm 3, 0), (0, \pm 3)$

b) Con los dos ejes y con el origen

c) $D_R = [-3, 3]$

d) $I_R = [-3, 3]$

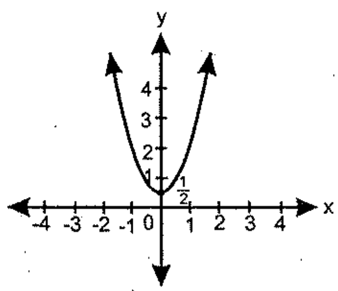


15. **a)** $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

b) Con el eje y

c) $D_R = R$

d) $I_R = \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$

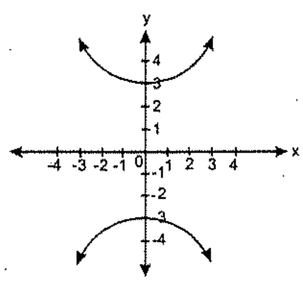


16. **a)** $(0, 3), (0, -3)$

b) Con los dos ejes y con el origen

c) $D_R = R$

d) $I_R = (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$

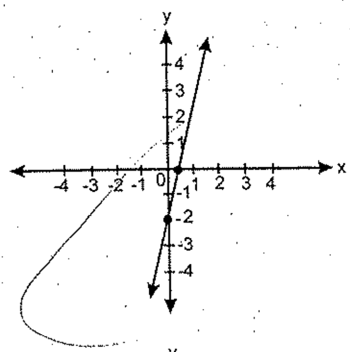


17. a) $\left(\frac{2}{5}, 0\right)$, $(0, -2)$

b) No tiene

c) $D_R = R$

d) $I_R = R$

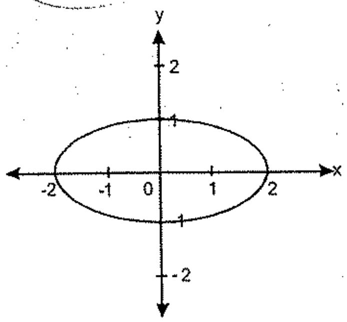


18. a) $(-2, 0)$, $(2, 0)$, $(0, -1)$, $(0, 1)$

b) Con los dos ejes y con el origen

c) $D_R = [-2, 2]$

d) $I_R = [-1, 1]$

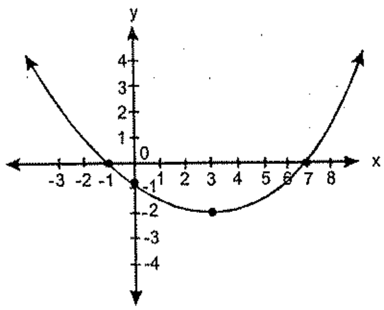


19. a) $(-1, 0)$, $(7, 0)$, $(0, -0.875)$

b) No tiene simetrías

c) $D_R = R$

d) $I_R = [-2, +\infty)$

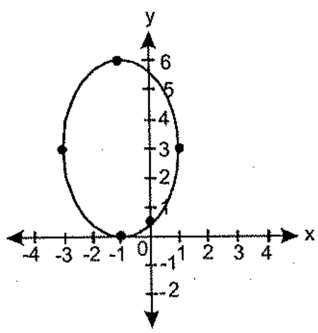


20. a) $(-1, 0)$, $(0, 5.6)$, $(0, 0.4)$

b) No tiene simetrías

c) $D_R = [-3, 1]$

d) $I_R = [0, 6]$



PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS ICFES: **1.** d), **2.** b), **3.** d), **4.** b), **5.** d).

NÚCLEO TEMÁTICO 3

COMPRENSIÓN DE LECTURA:

EJERCICIO 3 – 1

1. a y b

2. **a)** A= [-4 ; 5] , B =[-3 ; 3]   **b)** Sí   **c)** f (-4) = -3 , f(1) ≈ 1.4

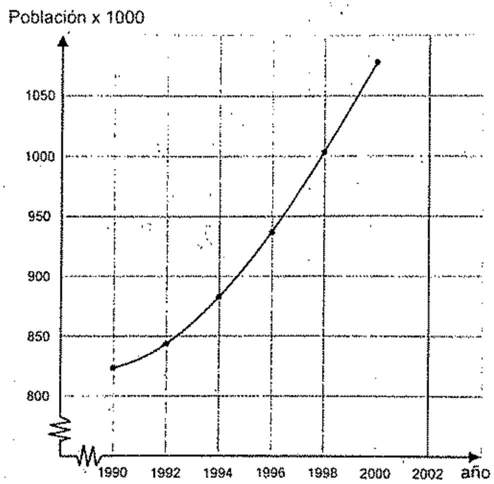
d) Para x = -2 y para x=0   **e)** D_f = [-4 ; 5] , I_f = [-3 ; 3]   **f)** Creciente en (-4;3) y decreciente en (3;5)

3. a) 30
   b) Antes de las 11:00 a.m y después de las 3:00 p.m
   c) Aproximadamente 26 latas
   d) A las 11:15 a.m.
   e) A las 3:00 p.m.
   f) Entre las 2:00 p.m y las 3:00 p.m.

4. Los atletas A y B terminaron la prueba; el atleta A demoró 210 segundos, el atleta B demoró 240 segundos y el atleta C sólo recorrió 750 metros.

5. a) Aumenta a las 0 horas y a las 12 horas; disminute a las 6 horas y a las 18 horas
   b) Máximo de profundidad: a las 6 y a las 18 horas, Mínimo de profundidas: a las 12 horas

6. a) Una posible gráfica es la siguiente:



   b) Unos 828.000 habitantes

7. a) Es función ; D = R , I=R
   c) Es función ; D = R- {0} , I = R - {0}
   f) Es función ; D = R , I = [-2; +∞)

8. No, f: $[0;+\infty) \to$ R por la regla $f(x) = \sqrt{x}$

9. No , f: R - { 0 } → R por la regla $f(x) = \frac{1}{x}$

10. Sí

11. Sí

12. No, f: R - { 0 } → R por la regla $f(x) = \frac{2}{x}$

13. No, f: $[-1;1] \to$ R por la regla $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

14. $D_f = R - \{1, -6\}$

15. $D_g = R$

16. $D_h = [-3; 3]$

17. a) -4
    b) -4
    c) 6
    d) $(a+b)^2 + 3(a+b) - 4$
    e) $a^2 + 3a - 4 + b^2 + 3b - 4$
    f) $2x_1 + h + 3$, con h ¹ 0

18. a) No está definido
    b) $\frac{2}{3}$
    c) $\frac{4}{5}$
    d) $\frac{a+b+2}{a+b+3}$
    e) $\frac{a+2}{a+3} + \frac{b+2}{b+3}$
    f) $\frac{1}{(x_1+3)(x_1+h+3)}$, con h ¹ 0

19. a) No está definido
    b) No está definido
    c) 0
    d) $\sqrt{a+b-2}$
    e) $\sqrt{a-2} + \sqrt{b-2}$
    f) $\frac{1}{\sqrt{x_1+h-2} + \sqrt{x_1-2}}$, con h ¹ 0

20. a) -27 b) 0 c) 8 d) $(a+b)^3$ e) $a^3 + b^3$ f) $3x_1^2 + 3x_1h + h^2$, con h ¹ 0

21. a) -3 b) 0 c) 2 d) a + b e) a + b f) 1, con $h \neq 0$

22. a) 8 b) 8 c) 8 d) 8 e) 16 f) 0, con $h \neq 0$

23. Par

26. Ninguna de las dos

27. Impar

28. Impar

29. Par

30. Ninguna de las dos

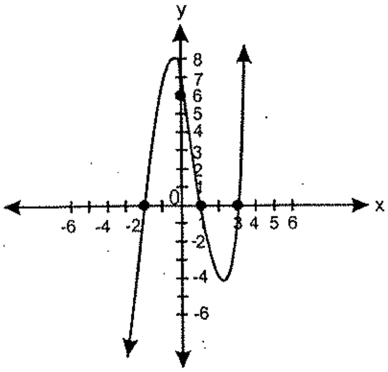
SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (6)

1. $A(x) = 300x - \frac{2}{3}x^2$
2. De 2º grado
3. 225 metros y 150 metros

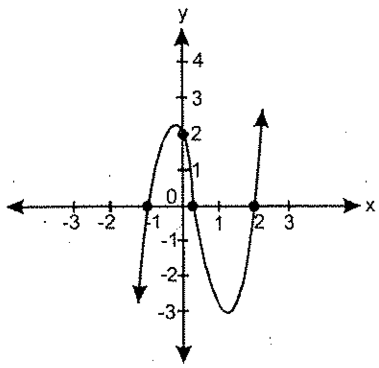
EJERCICIO 3 – 2

1. Algebraica
2. Algebraica
3. Trascendente
4. Algebraica
5. Algebraica
6. Especial
7. Especial
8. Algebraica
9. Algebraica
10. Algebraica
11. Trascendente

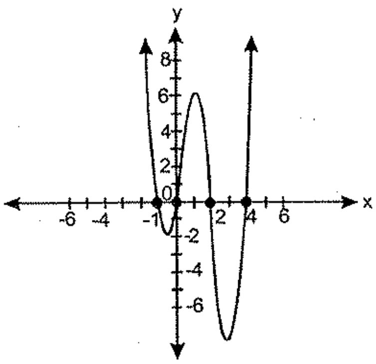
12. $(-2,0)$, $(1,0)$, $(3,0)$, $(0,6)$



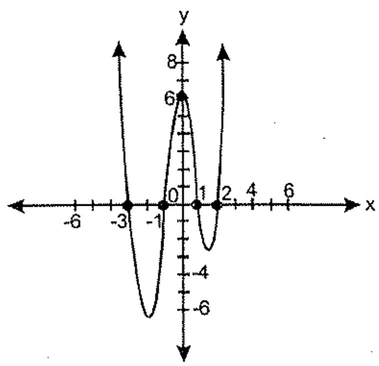
13. $(-1,0)$, $(2,0)$, $\left(\frac{1}{3},0\right)$, $(0,2)$



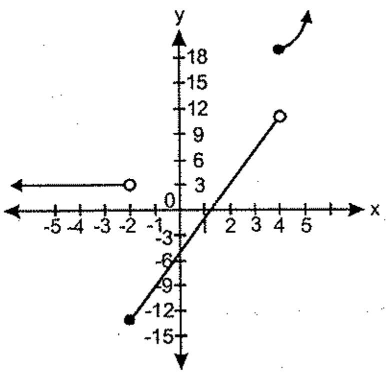
14. $(-1,0)$, $(0,0)$, $(2,0)$, $(4,0)$



15. $(-3,0)$, $(-1,0)$, $(1,0)$, $(2,0)$, $(0,6)$

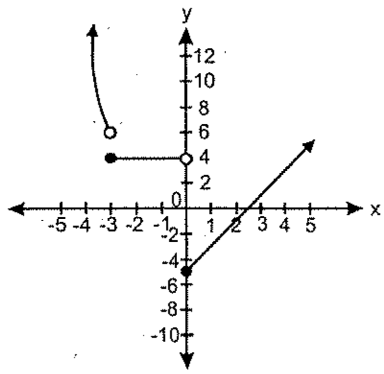


16.



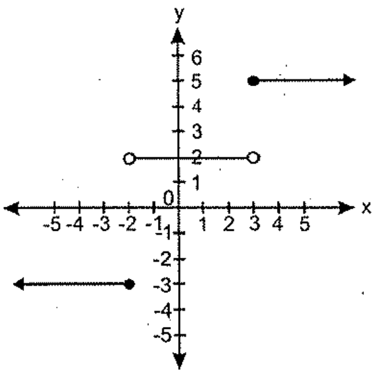
$D = \mathbb{R}$; $I = [-13 ; 11) \cup [18 ; +\infty)$

17.



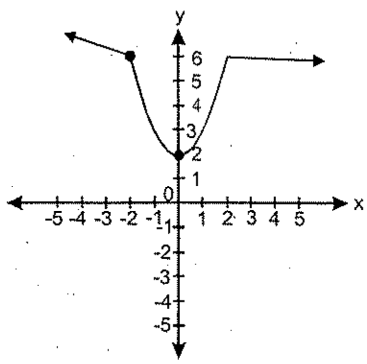
$D = \mathbb{R}$; , $I = [-5 ; +\infty)$

18.



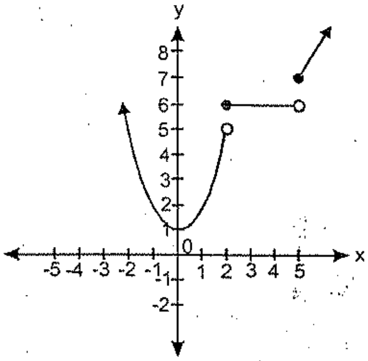
$D = \mathbb{R}$; $I = \{-3, 2, 5\}$

19.



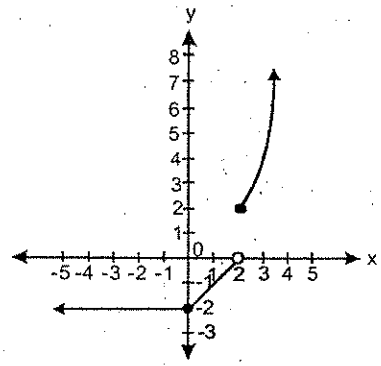
$D = \mathbb{R}$, $I = [2 ; +\infty)$

20.



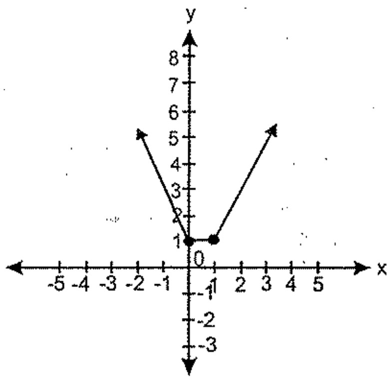
D = R ; I = [1; +∞)

21.



D = R , I = [-2 ; 0) ∪ [2 ; +∞)

22.

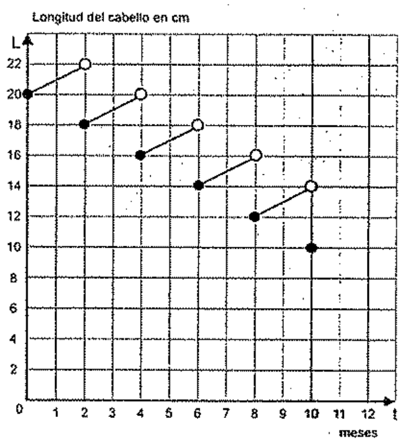


D = R ; I = [1; +∞)

28. a) $f(t) = 200.000 \cdot 2^{\frac{t}{0}}$

b) f(60) = $12,800.000

29. a)



b) En el 7º mes

30. a) Con 38ºC , 41ºC; a las 20 horas

b) Poco antes de las 18 horas ; a las 24 horas

c)

$$T(t)=\begin{cases} -\frac{1}{2}t+38 & \text{si } 0 \le t < 4 \\ 36 & \text{si } 4 \le t < 6 \\ \frac{1}{2}t+33 & \text{si } 6 \le t < 12 \\ -\frac{1}{2}t+45 & \text{si } 12 \le t < 16 \\ -\frac{1}{2}t^2+10t-59 & \text{si } 12 \le t < 16 \end{cases}$$

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (7)

2. $V(x) = \frac{9}{2}x - \frac{1}{2}x^3$

3. **De tercer grado**

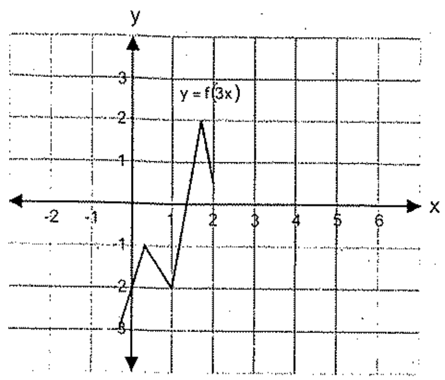
4. **Para $0 < x < 3$**

EJERCICIO 3 – 3

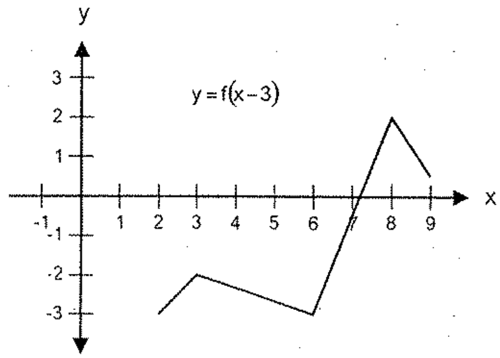
1. a) y = f(x) + 5 b) y= f(x) - 5 c) y = f(x - 4) d) y = f(x+4)
e) y = -f(x) f) y = f(-x) g) y = 2 f(x) h) y = f(3x)

2. a) Alargándola verticalmente un factor de 3.
b) Trasladándola 5 unidades hacia la derecha.
c) Dibujando su simétrica respecto al eje x.
d) Alargándola verticalmente un factor de 3 y dibujando su simétrica respecto al eje x
e) Contrayéndola horizontalmente un factor de 3
f) Alargándola verticalmente un factor de 3 y luego trasladándola verticalmente 5 unidades hacia abajo

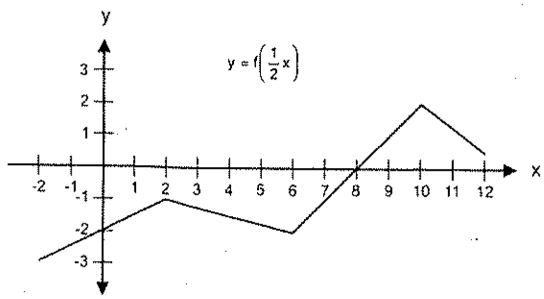
3. a)



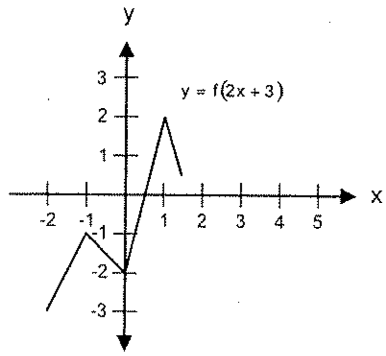
b)



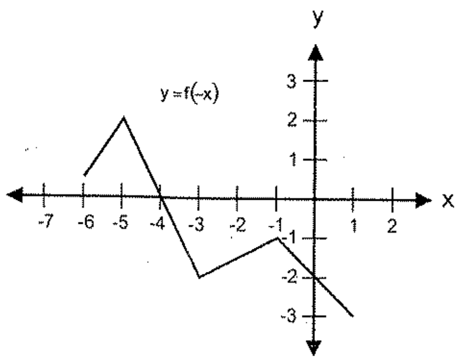
c)



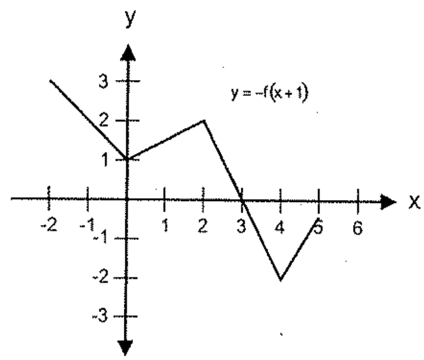
d)



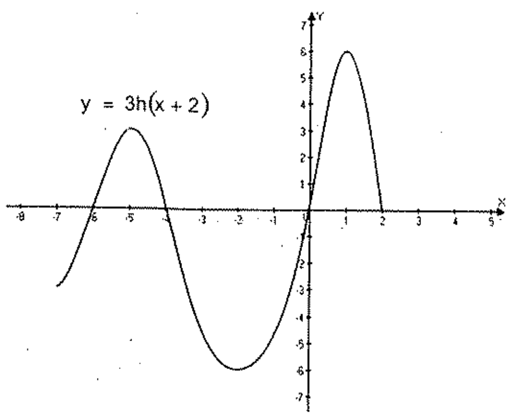
e)



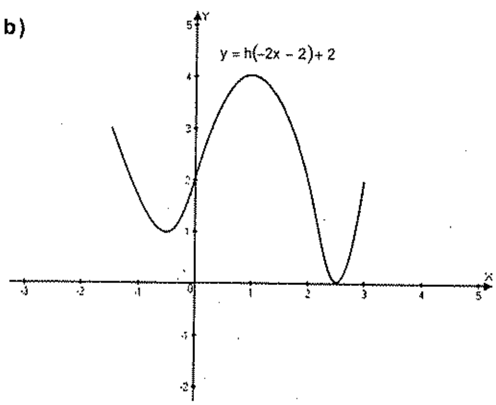
f)



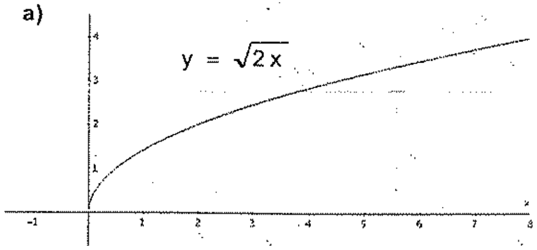
4. a)



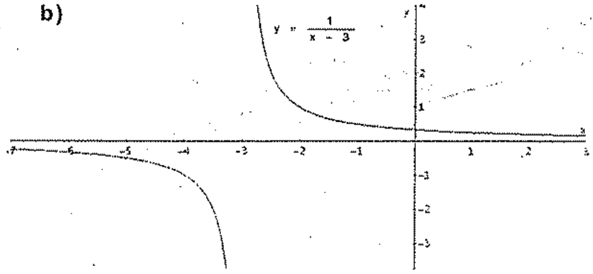
b)



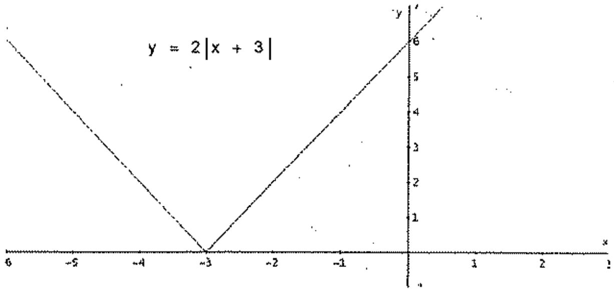
5. a)



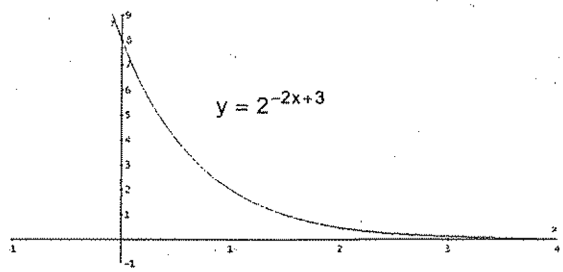
b)



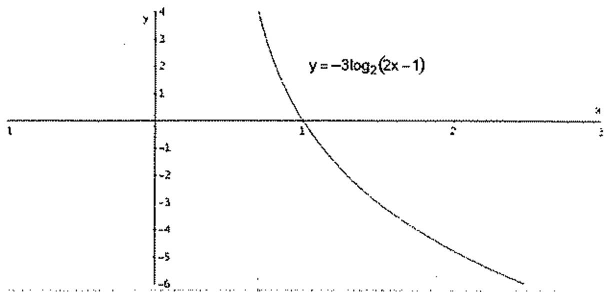
c)



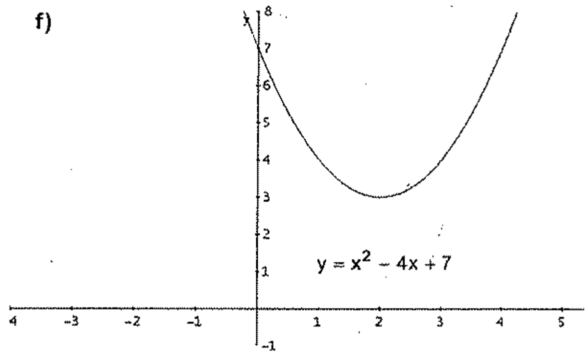
d)



e)



f)



SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (8)

2. $A(x) = 2x^2 + \frac{144}{x}$

3. Para $x > 0$

EJERCICIO 3 – 4

1. $p = kq^2$ **2.** $t = \frac{k}{r}$ **3.** $a = kbc^3$ **4.** $m = k\ \frac{n}{p^2}$ **5.** 18 **6.** $\frac{24}{5}$ **7.** 135 **8.** $\frac{5}{9}$

9. $\frac{72\sqrt{3}}{5}$ **10.** 2816 cm^3 **11. a)** $c(x) = 45000x$ **b)** \$ 675000 **12.** 20 kg

13. La intensidad a 5m es $\frac{49}{25}$ de la intensidad a 7m **14. a)** $f(x) = \frac{9x}{490000}(5000 - x)$ **b)** 17.6 personas por día

15. $\frac{4}{9}$ **16. a)** $L(x) = kx\left[200 - x\left(2 + \frac{\pi}{2}\right)\right]$ **b)** $\left(0\,;\frac{400}{\pi+4}\right)$ ó $(0\,;56.02)$ **c)** ≈ 28 cm

17. a) $V(x) = \frac{9}{2}\ \ x\ \frac{1}{2}\ \ x^3$ **b)** $D_v = (0\,;3)$

18. 3 cm

19. 125m x 250m con cercas intermedias paralelas al lado más corto.

20. **a)** $V(x) = 4x^3 - 48x^2 + 144x$ **b)** $[0 ; 6]$

TALLER DE LA UNIDAD 3

2. **a)** F **b)** F **c)** V **d)** F **e)** V **f)** V **g)** F **h)** V **i)** V
j) V **k)** F **l)** F **m)** V **n)** V **o)** F **p)** V **q)** F **r)** V

3. La (3) y la (4) **4.** La (1) **5.** La (7) y la (8) **6.** La (5) y la (6)

7. La (9) **8.** La (3) y la (4) ; La (5) y la (6) **9.** La (7) y la (8)

10. **a)** 1 **b)** -1.5 **c)** 2.5 y 3.5 **d)** $D_f = [-5;4]$; $I_f = [-2;2]$

e) Creciente: (-5 ; 3) y (0 ; 3) , Decreciente: (-3 ; 0) y (3 ;4)

11. $f(a) = 3a^2 - a + 2$, $f(-a) = 3a^2 + a + 2$, $-f(a) = -3a^2 + a - 2$; $f(a+h) = 3(a+h)^2 - (a+h) + 2$; $f(a) + f(h) = 3a^2 - a + 3h^2 - h + 4$,

$\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = 6a + 3h - 1$; con $h \neq 0$.

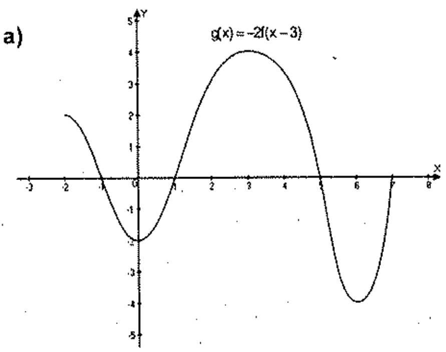
12. $f(a) = \dfrac{1}{a^2+1}$, $f(-a) = \dfrac{1}{a^2+1}$, $-f(a) = -\dfrac{1}{a^2+1}$, $f(a+h) = \dfrac{1}{a^2+2ah+h^2+1}$, $f(a) + f(h) = \dfrac{a^2+h^2+2}{(a^2+1)(h^2+1)}$

$\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = -\dfrac{2a+h}{(a^2+1)\left[(a+h)^2+1\right]}$; con $h \neq 0$.

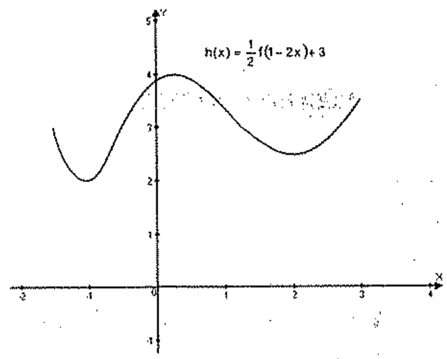
14. $\left[\dfrac{5}{3};+\infty\right]$ **15.** $\left(-\infty;\dfrac{7}{2}\right]$ **16.** $[-2 ; 2]$ **17.** $(-\infty;-3]\cup[3;+\infty)$

18. $R - \{0, -3, 3\}$ **19.** $R - \left\{-\dfrac{5}{2}, \dfrac{1}{3}\right\}$ **20.** $(1+\infty)$ **21.** $(-\infty;-1] \cup (1+\infty)$

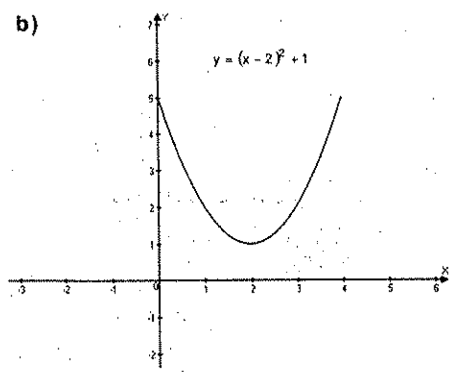
22. **a)**



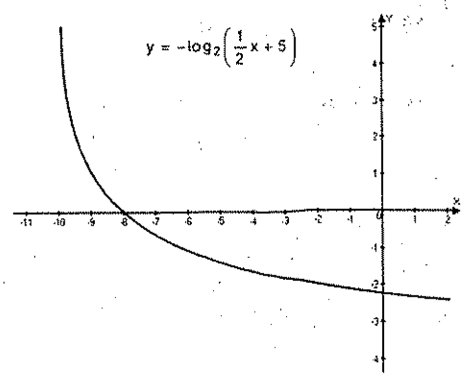
b)



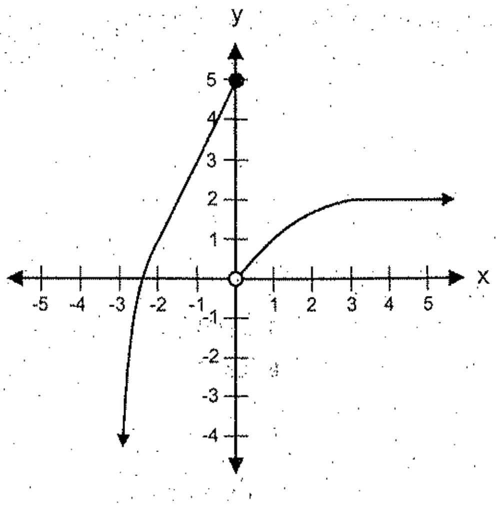
23. **b)**



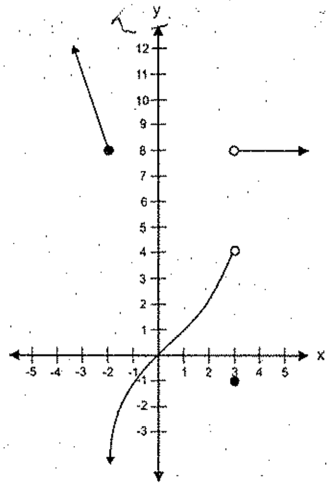
d)



24.



25.



26. 12 **27.** 3 **28.** 6.400 libras **29.** Debe ser 4L **30.** $A = \frac{h^2\sqrt{3}}{3}$

31. $A = x^2 + \frac{64000}{x}$ **32.** $A = r - \pi r^2$ **33.** $\frac{\pi}{27} h^3$

34. **a)** $G(x) = \begin{cases} 8000\,x & \text{si } 40 \le x \le 80 \\ 11200\,x - 40x^2 & \text{si } 80 < x \le 280 \end{cases}$ **b)** [40 ; 280] **c)** 140 sillas.

35. **a)** $b(t) = 50000 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t$ **b)** 3125 babillas **c)** Para $t = \log_{\frac{1}{2}}(0.1)$

PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS ICFES: **1.** d), **2.** b), **3.** c), **4.** e), **5.** c).

NÚCLEO TEMÁTICO 4

COMPRENSIÓN DE LECTURA: **1.** d), **2.** c), **3.** b), **4.** d), **5.** c).

EJERCICIO 4 – 1

1. -180^0 **2.** 135^0 **3.** -150^0 **4.** 420^0 **5.** -120^0 **6.** 570^0 **7.** III **8.** I
9. I **10.** III **11.** II **12.** II **13.** 540^0 **14.** -180^0 **15.** -30^0 **16.** 120^0
17. -15^0 **18.** 210^0 **19.** 150^0 **20.** -450^0 **21.** 135^0 **22.** $\frac{2\pi}{3}$ rad **23.** $\frac{4\pi}{3}$ rad **24.** $\frac{5\pi}{12}$ rad
25. $\frac{3\pi}{4}$ rad **26.** $\frac{7\pi}{4}$ rad **27.** $-\frac{5\pi}{3}$ rad **28.** $\frac{5\pi}{6}$ rad **29.** $\frac{5\pi}{4}$ rad **30.** $-\frac{11\pi}{3}$ rad

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (9)
2. $V(x) = 64x + 4x^2$
3. 45%

EJERCICIO 4 – 2

1. (-1 , 0) **2.** (1 , 0) **3.** (-1 , 0) **4.** (0 , -1) **5.** (-1 , 0) **6.** (1 , 0) **7.** (1 , 0) **8.** (0 , 1)
9. (1 , 0) **10.** (1 , 0) **11.** (0 , 1) **12.** (1 , 0) **13.** $\frac{\pi}{2}$ **14.** 3π **15.** $-\pi$ **16.** $-\frac{5\pi}{2}$

17. $\frac{23\pi}{2}$

18. 0 ó 2π

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (10)

2. $C(x) = \frac{18x^3 + 40}{3x}$

3. Para $x = \sqrt[3]{\frac{10}{9}}$ dm

EJERCICIO 4 – 3

1. 0	2. -1	3. 1	4. 0	5. -1	6. 0	7. 0	8. -1
9. 0	10. 0	11. 1	12. No existe	13. 1	14. -1	15. No existe	16. 1
17. 1	18. 0	19. 0	20. 0	21. 0			

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (11)

2. $D = \sqrt{2500t^2 - 7200t + 14400}$

3. 96 pies

EJERCICIO 4 – 4

1. $\text{Sen}(\theta) = -\frac{4}{5}$, $\text{Cos}(\theta) = -\frac{3}{5}$, $\text{Tan}(\theta) = \frac{4}{3}$

2. $\text{Sen}(\theta) = -\frac{12}{13}$, $\text{Cos}(\theta) = -\frac{5}{13}$, $\text{Tan}(\theta) = \frac{12}{5}$

3. $\text{Sen}(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\text{Cos}(\theta) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\text{Tan}(\theta) = -1$

4. $\text{Sen}(\theta) = \frac{4}{5}$, $\text{Cos}(\theta) = -\frac{3}{5}$, $\text{Tan}(\theta) = -\frac{4}{3}$

5. $\text{Sen}(\theta) = -\frac{8}{17}$, $\text{Cos}(\theta) = \frac{15}{17}$, $\text{Tan}(\theta) = -\frac{8}{15}$

6. $\text{Sen}(\theta) = 0$, $\text{Cos}(\theta) = -1$, $\text{Tan}(\theta) = 0$

7. $\text{Cos}(\theta) = -\frac{3}{5}$, $\text{Tan}(\theta) = \frac{4}{3}$

8. $\text{Sen}(\theta) = \frac{3}{5}$, $\text{Tan}(\theta) = -\frac{3}{4}$

9. $\text{Sen}(\theta) = -\frac{5\sqrt{41}}{41}$, $\text{Cos}(\theta) = -\frac{4\sqrt{41}}{41}$

10. $\text{Sen}(\theta) = \frac{5}{13}$, $\text{Tan}(\theta) = \frac{5}{12}$

11. $\text{Sen}(\theta) = -\frac{1}{2}$, $\text{Tan}(\theta) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

12. $\text{Sen}(\theta) = \frac{\sqrt{21}}{7}$, $\text{Cos}(\theta) = -\frac{2\sqrt{7}}{7}$

13. Seno: I y II, Coseno: I y IV, Tangente: I y III

14. No

15. Porque nunca los valores de la x y de la y son mayores en valor absoluto que el radio.

16. Porque en éstos ángulos el valor de la x es CERO.

17. $\text{Sen}(\theta) = \frac{m\sqrt{m^2+1}}{m^2+1}$; $\text{Cos}(\theta) = \frac{\sqrt{m^2+1}}{m^2+1}$

18. $\text{Sen}(\theta) = \frac{(a-b)\sqrt{2(a^2+b^2)}}{2(a^2+b^2)}$; $\text{Tan}(\theta) = \frac{a-b}{a+b}$

19. $\text{Sen}(\theta) = \frac{2mn}{m^2+n^2}$; $\text{Tan}(\theta) = \frac{2mn}{m^2-n^2}$

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (12)

2. $y = \frac{20}{\text{Sen}(\theta)}$

3. $\theta \approx 42°$

TALLER DE LA UNIDAD 4

1. a) V b) V c) V d) F e) F f) F g) V h) F i) V j) V

2. c)

3. d)

4. c)

5. d)

6. a)

7. a)

8. c)

9. b)

10. a)

11. $\frac{5\pi}{6}$ rad

12. $-\frac{\pi}{3}$ rad 13. $\frac{5\pi}{4}$ rad 14. $\frac{5\pi}{2}$ rad 15. $\frac{2\pi}{5}$ rad 16. $\frac{5\pi}{9}$ rad

17. 120° 18. 330° 19. 135° 20. -630° 21. 1260°

22. 20° 23. $\text{Cos}(\theta) = \pm\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $\text{Tan}(\theta) = \pm\frac{b}{a}$ 24. No

---

PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS ICFES: **1.** b), **2.** b), **3.** a), **4.** d), **5.** b).

NÚCLEO TEMÁTICO 5

COMPRENSIÓN DE LECTURA: **1.** d), **2.** b), **3.** c), **4.** a), **5.** d).

EJERCICIO 5 – 1

1. $7\sqrt{2}$ cm

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (13)

2. $A(x) = \frac{780}{169}x - \frac{60}{169}x^2$

EJERCICIO 5 – 2

1. 6 cm y $6\sqrt{3}$ cm **2.** 16 cm y $8\sqrt{3}$ cm

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (14)

2. $A(x) = \frac{6x^2 + 120x + 600}{x}$

EJERCICIO 5 – 3

1. **a)** 0 **b)** 3.85 **c)** 2.75 **d)** 1.75

2. Todas son verdaderas

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (15)

2. $V(x) = 64\pi x - 16\pi x^2 + \pi x^3$

3. $D_v = (0 ; 8)$

EJERCICIO 5 – 4

1. **a)** Sen 33° **b)** - Cos 68° **c)** - Tan 44° **d)** Sen 7° **e)** - Cos 44° **f)** - Tan 45°

2. **a)** Sen 225° = $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ **b)** Cos 780° = Cos 60° = $\frac{1}{2}$ **c)** Tan 690° = Tan 330° = $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

d) Sen 1290°= Sen 210° = $-\frac{1}{2}$ **e)** Cos 2565° = Cos 45° = $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **f)** Tan 2100° = Tan 300° = $-\sqrt{3}$

3. **a)** $\frac{\text{Sen } 23^0 + \text{Cos } 24^0 + \text{Tan } 56^0}{-\text{Sen } 76^0}$

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (16)

2. El volumen será a lo más $v(x) = 5x^2 - 12x^3$

3. $D_v = \left(0; \frac{5}{12}\right)$

EJERCICIO 5 – 5

1. **a)** F **b)** V **c)** V **d)** V **e)** V **f)** F

2. **a)** - Sen 87° **b)** - Cos 56° **c)** - Tan 55° **d)** Sen 76° **e)** - Cos 25° **f)** Tan 4° **g)** - Sen 5° **h)** - Cos 73° **i)** Tan 24°

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (17)

2. $V(x) = 16\pi - \frac{\pi}{4}\ x^3$

3. $D_v = (0 ; 8)$

EJERCICIO 5 – 6

1. Sen (a) = $\frac{\sqrt{40}}{7}$, Cos (a) = $-\frac{3}{7}$, Tan (a) = $-\frac{\sqrt{40}}{3}$

Cot (a) = $\frac{-3\sqrt{40}}{40}$, Csc (a) = $\frac{7\sqrt{40}}{40}$, a = 115°

2. Sen(b) = $-\frac{\sqrt{26}}{26}$, Cos(b) = $-\frac{5\sqrt{26}}{26}$, Tan(b) = $\frac{1}{5}$, Sec(b) = $-\frac{\sqrt{26}}{5}$, Csc(b) = $-\sqrt{26}$, x = 191°

3. Sen(q) = $-\frac{7\sqrt{74}}{74}$, Cos(q) = $-\frac{5\sqrt{74}}{74}$, Tan(q) = $\frac{7}{5}$, Cot(q) = $\frac{5}{7}$, Sec(q) = $-\frac{\sqrt{74}}{5}$, Csc(q) = $-\frac{\sqrt{74}}{7}$, q = 234°

4. Sen(q) = $\frac{\sqrt{5}}{5}$, Cos(q) = $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$, Tan(q) = $-\frac{1}{2}$, Cot(q) = -2, Sec(q) = $-\frac{\sqrt{5}}{2}$, Csc(q) = $\sqrt{5}$, q = 152°

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (18)

2. $\left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{18}\right)x^2 - 4x + 72$

3. $x = \sqrt{\frac{72}{2 + 9\sqrt{3}}}$

TALLER DE LA UNIDAD 5

1. a)	**2.** b)	**3.** d)	**4.** a)	**5.** c)	**6.** b)	**7.** b)	**8.** c)
9. a)	**10.** d)	**11.** V	**12.** V	**13.** V	**14.** V	**15.** V	**16.** $\sqrt{6}$

17. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ **18.** $\frac{\sqrt{3}-3}{3}$ **19.** 0 **20.** Sen 65° **21.** - Tan 34° 32' **22.** - Sec 52° 58'

23. Sen 29° **24.** - Sen 32° **25.** Tan 64° **26.** - Sec 62° **27.** 150° y 210° **28.** 30° y 210°

29. $\text{Sen}(\alpha) = -\frac{3}{5}$, $\text{Cos}(\alpha) = -\frac{4}{5}$, $\text{Cot}(a) = \frac{4}{3}$, $\text{Sec}(\alpha) = -\frac{5}{4}$, $\text{Csc}(\alpha) = -\frac{5}{3}$ **30.** No existen

PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS ICFES: **1.** c), **2.** d), **3.** b), **4.** b), **5.** d).

NÚCLEO TEMÁTICO 6

COMPRENSIÓN DE LECTURA: **1.** c), **2.** b), **3.** a), **4.** d), **5.** d).

EJERCICIO 6 – 1

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (19)

2. $V(x) = \frac{400}{3}\pi x - \frac{\pi}{3}x^3$

EJERCICIO 6 – 2

No son identidades las igualdades 25., 31., 32. y 34.

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (20)

$L = x + \frac{2x}{\sqrt{x^2 - 16}}$

EJERCICIO 6 – 3

1. $\{90^0,\ 270^0\}$ 2. $\{60^o, 120^o\}$ 3. $\{45^o, 135^o, 225^o, 315^o\}$ 4. $\{60^0, 120^0, 240^0, 300^0\}$

5. $\{60^o, 120^o, 240^o, 300^o\}$ 6. $\{0^o, 90^o, 270^o, 360^o\}$ 7. $\{90^o\}$ 8. $\{0^o, 180^o, 360^o\}$

9. $\{90^o, 270^o, 75.52^o, 284.48^o\}$ 10. $\{45^o, 135^o, 225^o, 315^o\}$ 11. $\{0^o, 180^o, 360^o\}$

12. $\{90^o\}$ 13. $\{45^o, 135^o, 225^o, 315^o\}$

14. Es identidad excepto para 0^o, 180^o y 360^o 15. $\{120^o, 300^o\}$ 16. $\{45^o, 60^o, 315^o, 300^o\}$

17. $\{45^o, 135^o, 225^o, 315^o\}$ 18. $\{0^o, 180^o, 360^o\}$ 19. $\{26.56505^o, 30^o, 206.56505^o, 210^o\}$

20. No tiene solución 21. $\{210^o, 330^o\}$ 22. $\{0^o, 180^o, 360^o, 213.75^o, 326.25^o\}$

23. $\{0^o, 180^o, 360^o, 36.87^o, 143.13^o\}$ 24. $\{60^o, 240^o, 108.5^o, 288.5^o\}$ 25. $\{0^o, 360^o\}$

26. $\{0^o, 247.38014^o, 292.61987^o, 360^o\}$ 27. $\{135^o\}$ 28. $\{26.565^o, 206.565^o\}$

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (21)

2. $d = \sqrt{656t^2 - 1000t + 625}$

TALLER DE LA UNIDAD 6

1. a) 2. c) 3. c) 4. b) 5. d) 6. d) 7. d) 8. a)

9. c) 10. b) 21. $\{0^o, 60^o, 300^o, 360^o\}$ 22. $\{60^o, 120^o, 240^o, 300^o\}$

23. $\{0^o, 120^o, 240^o, 360^o\}$ 24. $\{60^o, 180^o, 300^o\}$ 25. $\{0^o, 150^o, 210^o, 360^o\}$

26. $\{30^o, 90^o, 150^o\}$ 27. $\{60^o, 135^o, 240^o, 315^o\}$ 28. $\{0^o, 180^o, 45^o, 225^o, 360^o\}$

29. $\{22.5^o, 112.5^o, 202.5^o, 292.5^o\}$ 30. $\{30^o, 90^o, 150^o, 210^o, 270^o, 330^o\}$

PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS ICFES: 1. b), 2. b), 3. c), 4. b), 5. c).

NÚCLEO TEMÁTICO 7

COMPRENSIÓN DE LECTURA: 1. a), 2. a), 3. b), 4. c), 5. b).

EJERCICIO 7 – 1

1. a) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ b) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ c) $2+\sqrt{3}$

3. a) $\frac{56}{65}$ y $\frac{16}{65}$ b) $\frac{36}{85}$ y $-\frac{84}{85}$ 4. a) $\frac{13}{85}$ y $\frac{77}{85}$ b) $-\frac{253}{325}$ y $\frac{323}{325}$

5. a) $\frac{21}{220}$ y $\frac{171}{140}$ b) $-\frac{84}{13}$ y $\frac{36}{77}$

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (22)

2. $d = \sqrt{100 + 13t^2}$

EJERCICIO 7 – 2

1. $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{4}$, $-\frac{117}{125}$, $\frac{44}{125}$, $-\frac{117}{44}$ 2. $-\frac{4\sqrt{2}}{9}$, $-\frac{7}{9}$, $\frac{4\sqrt{2}}{7}$ 3. $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, $-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, $-\sqrt{2}-1$

19. { 30°, 150°, 270° } 20. { 0°, 120°, 180°, 240°, 360° } 21. { 60°, 180°, 300° }

22. { 45°, 225° } 23. { 0°, 180°, 360° } 24. { 0°, 120°, 360° }

25. { 0°, 180°, 360° } 26. { 90°, 270° } 27. { 210°, 330° }

28. { 135°, 315° } 29. { 15°, 75°, 195°, 255° } 30. { 0°, 60°, 180°, 300°, 360° }

31. { 210°, 330° } 32. { 0°, 180°, 360°, 75.5°, 284.5° }

TALLER DE LA UNIDAD 7

1. b) 2. c) 3. a) 4. b) 5. d) 6. c) 7. a) 8. b)

9. d) 10. a) 28. { 22.5°, 112.5°, 202.5°, 292.5° }

29. { 22.5°, 67.5°, 112.5°, 157.5°, 202.5°, 247.5°, 292.5°, 337.5°, 135°, 315° }

30. { 30°, 150°, 210°, 330° } 31. { 60°, 180°, 300° } 32. { 90°, 270° } 33. { 120°, 240° }

34. { 0°, 90°, 180°, 270°, 360°} 35. { 0°, 45°, 90°, 135°, 180°, 225°, 270°, 315°, 360°}

36. { 30°, 90°, 150°, 210°, 270°, 330°, 360° } 37. { 0°, 90°, 180°, 270°, 360°}

PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS ICFES: 1. a), 2. c), 3. b), 4. b), 5. d).

NÚCLEO TEMÁTICO 8

COMPRENSIÓN DE LECTURA: 1. c), 2. d), 3. d), 4. a.) 5. b).

EJERCICIO 8 – 1

1. Periódica, con período 6 2. No es periódica en ese intervalo

3. Periódica, con período 3 4. Periódica, con período 2

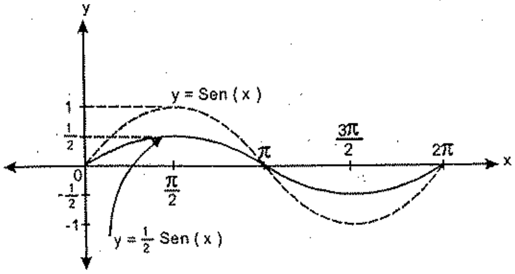
5. No es periódica en ese intervalo 6. Periódica, con período $\frac{\pi}{2}$

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (24)

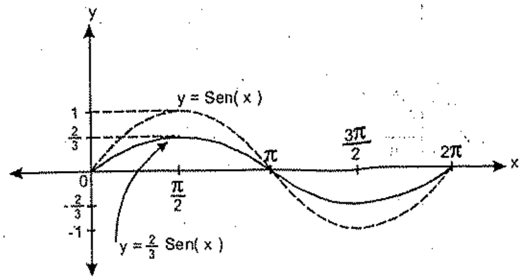
3. $A(x) = (1 + x)\sqrt{1-x^2}$

EJERCICIO 8 – 2

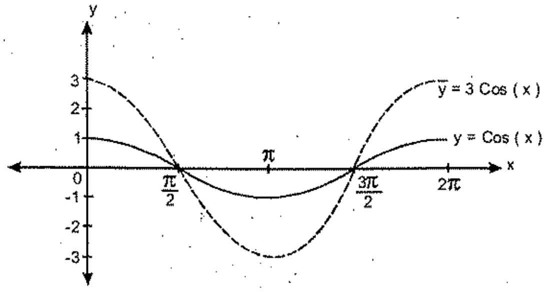
1.



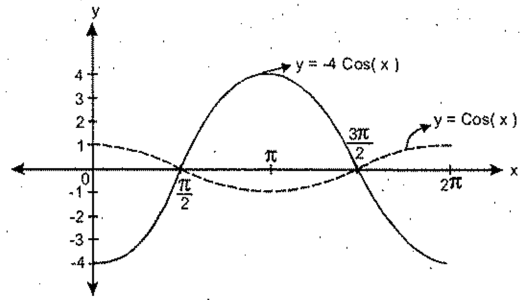
2.



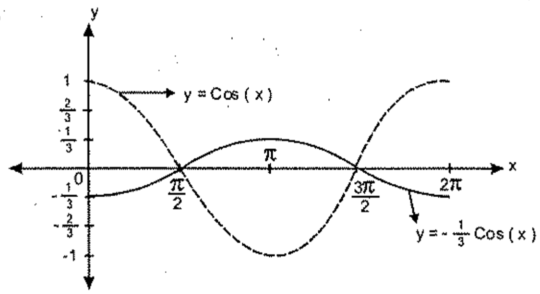
3.



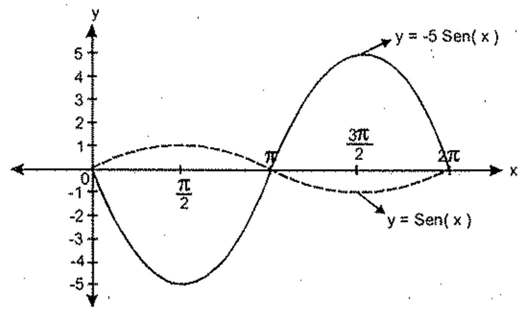
4.



5.



6.

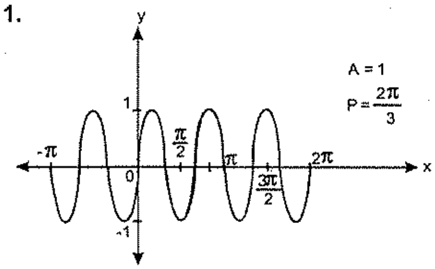


SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (25)

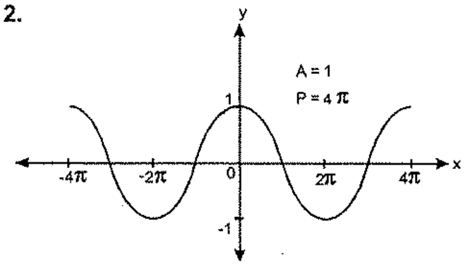
2. $R(x) = \sqrt{26x - x^2}$

EJERCICIO 8 – 3

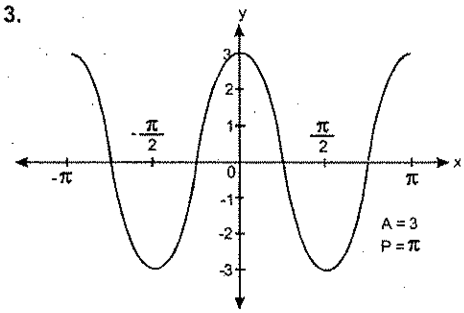
1.



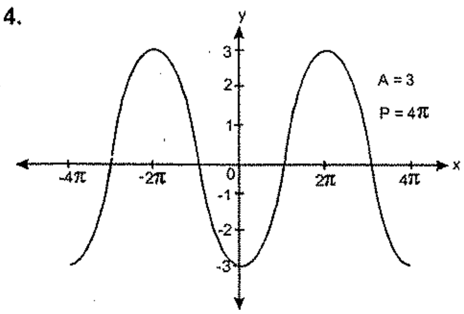
2.



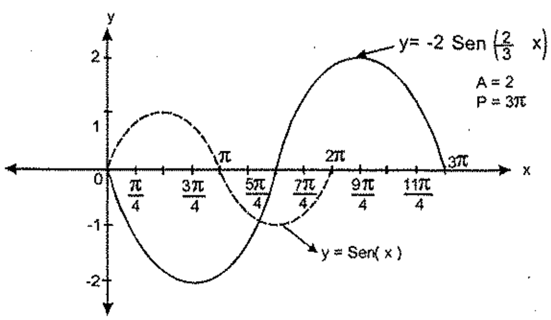
3.



4.



5.



6. s (t) = 25 Sen (712pt)

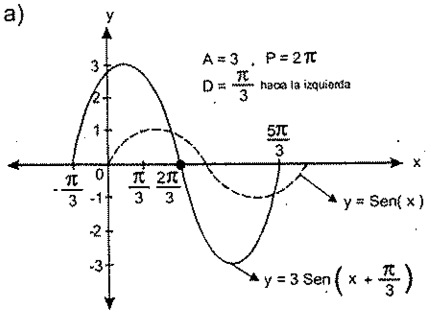
7. 32 dB, 396 vib/seg

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (26)

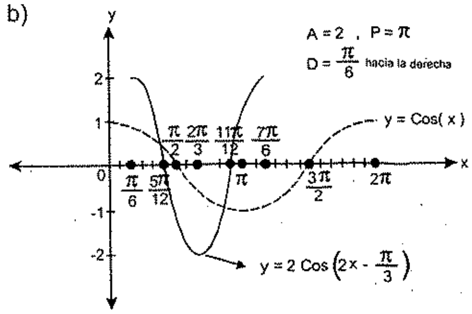
1. **B(0, 1) , P(x, 1 - x)**
2. **$A(x) = 2x - 2x^2$**
3. **Para $x = \frac{1}{2}$**

EJERCICIO 8 – 4

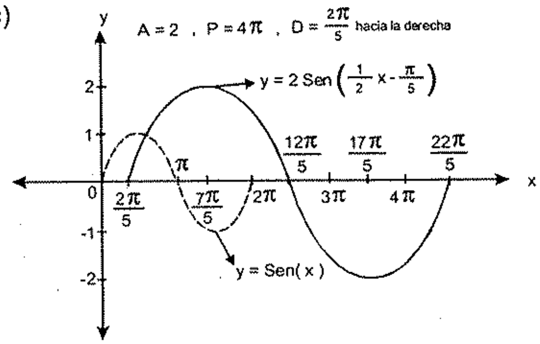
1. a)



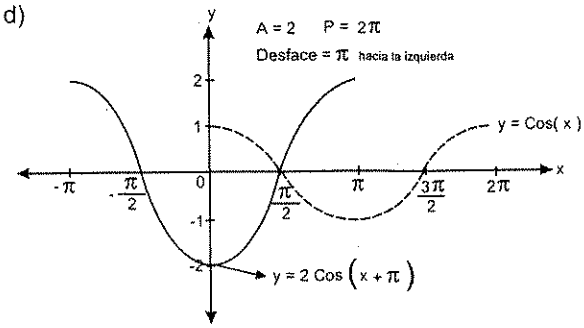
b)



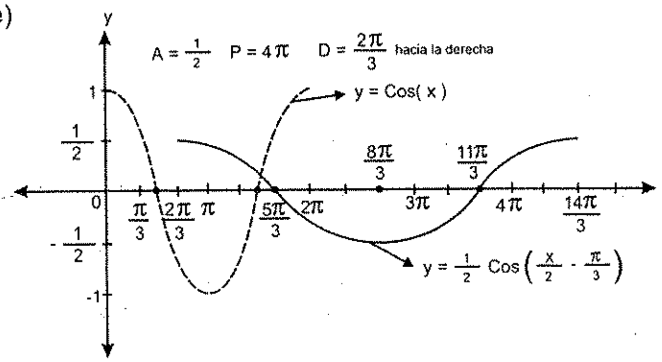
c)



d)



e)



2. a) A = 1 , P = 2π , D = $\frac{\pi}{4}$ a la izquierda, $y = \text{Cos}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

b) A = 2, P = 2π , D = $\frac{\pi}{3}$ a la derecha, $y = 2\ \text{Sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

c) A = 4 , P = 2π , D = $\frac{\pi}{4}$ a la izquierda, $y = 4\ \text{Cos}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

d) A = $\frac{1}{2}$, P = π , D = $\frac{\pi}{2}$ a la derecha, $y = \frac{1}{2}\ \text{Sen}\ (2x - \pi)$

e) A = 2, P = $\frac{2\pi}{3}$, D = $\frac{\pi}{3}$ a la izquierda, $y = -2\ \text{Cos}\ (3x + \pi)$

f) A = 3, P = π, D = $\frac{\pi}{2}$ a la derecha, $y = -3\ \text{Cos}\ (2x + \pi)$

ó

$y = 3\ \text{Cos}\ (2x - \pi)$

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (27)

2. $L(x) = \dfrac{x\sqrt{793 - 54x + x^2}}{x - 27}$

TALLER DE LA UNIDAD 8

1. c) 2. b) 3. b) 4. d) 5. c) 6. a) 7. c) 8. b)

9. c) 10. a) 11. $A = \frac{2}{3}$, $P = \frac{2\pi}{3}$, $\alpha = -\frac{\pi}{5}$, $D = \frac{\pi}{15}$ hacia la derecha

12. $A = 2$, $P = 4\pi$, $\alpha = -\frac{\pi}{3}$, $D = \frac{2\pi}{3}$ hacia la derecha 13. $A = 4$, $P = 3\pi$, $\alpha = \frac{4}{5}\pi$, $D = \frac{6}{5}\pi$ hacia la izquierda

14. $A = 3$, $P = \frac{5}{2}\pi$, $\alpha = -\frac{2}{3}\pi$, $D = \frac{5}{6}\pi$ hacia la derecha 15. $y = \frac{3}{2}\operatorname{Sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

16. $y = 2\operatorname{Cos}\left(\frac{3}{4}x - \frac{\pi}{4}\right)$ 17. $y = 4\operatorname{Cos}\left(\frac{3}{2}x + \pi\right)$ 18. $y = \frac{5}{3}\operatorname{Sen}\left(\frac{3}{2}x - \frac{5\pi}{4}\right)$

PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS ICFES: 1. d), 2. b), 3. d), 4. d), 5. c).

NÚCLEO TEMÁTICO 9

COMPRENSIÓN DE LECTURA: 1. b), 2. c), 3. d), 4. b), 5. a).

EJERCICIO 9 – 1

1. $\angle B = 60^0$, $a = 12$ cm, $c = 23$ cm 2. $\angle A = 38^0$, $b = 19$ cm, $c = 24$ cm 3. $\angle B = 72.33^0$, $b = 14.1$ cm, $c = 14.8$ cm

4. $\angle A = 29^0$, $\angle B = 61^0$, $c = 51.4$ cm 5. $\angle B = 52.23^0$, $a = 396.7$ cm, $c = 647.7$ cm

6. $\angle A = 49.66^0$, $\angle B = 40.34^0$, $b = 522$ cm 7. 70.6 m 8. h = 10.5 m 9. $\angle\alpha = 31.91^0$

10. 11.75 cm 11. $\angle\alpha = 28.95^0$ 12. $\angle\alpha = 41^0\,24'\,36''$, v = 5.29 Km./h

13. $\frac{75\sqrt{3}}{2}$ m 14. 461.62 m 15. 28.01 m 16. D = 60.62 m

17. 2718.22 u^2 18. 9.3 m

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (28)

2. $V(x) = \frac{1}{3}\pi x^2\left(3 + \sqrt{9 - x^2}\right)$

EJERCICIO 9 – 2

1. $b = 15.89$ cm, $c = 19.06$ cm, $\angle C = 96^0$

2. $\left.\begin{array}{l}\angle B = 49^0 53',\ \angle C = 95^0\,7',\ c = 15.62\text{ cm}\\ \angle B = 130^0\,7',\ \text{Ð}C = 14^0\,53',\ c = 4.03\text{ cm}\end{array}\right\}$ Dos soluciones

3. $\angle B = 90^0$, $\angle C = 60^0$, $c = 5\sqrt{3}$ m 4. No hay solución 5. $a = 40.58$ cm, $\angle A = 35^0\,8'$, $\angle B = 22^0\,52'$

6. No hay solución 7. $a = 10.7$ cm, $\angle C = 45^0\,19'$, $\angle B = 62^0\,41'$

8. $\angle A = 41^0\,24'$, $\angle B = 55^0\,46'$, $\angle C = 82^0\,50'$ 9. $a = 4.56$ cm, $\angle B = 77^0\,50'$, $\angle C = 54^0\,10$

10. $b = 25.75$ cm, $\angle A = 37^0\,44'$, $\angle C = 30^0\,16'$ 14. 1484.5 cm^2

15. $d \approx 171.61$ m 16. $l \approx 21.33$ m 17. 1699 pasos

18. 73.6 Km. 19. 106.64 m 20. $d \approx 188.71$ Km.

21. 120.73 Km. 22. 6.7 Km. 23. $|\overline{CD}| \approx 2.7$ Km.

24. 340.2 m

25. $|\overline{AE}| \approx 388.12$ m, $|\overline{BE}| \approx 286.81$ m

$|\overline{DE}| \approx 188.16$ m, $|\overline{BD}| \approx 216.45$ m

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (29)

1. $A(a) = \dfrac{a\sqrt{400 - a^2}}{2}$

TALLER DE LA UNIDAD 9

1. b) **2.** a) **3.** c) **4.** d) **5.** b) **6.** b) **7.** c) **8.** d)

9. b) **10.** a) **11.** $\angle B = 62^0$, $b = 14.1$, $c = 15.6$ **12.** $a \approx 0.41$, $c \approx 0.19$, $\angle C \approx 18^0 28'$

13. Dos soluciones: $c_1 = 10.46$, $\angle B_1 = 39^0 40'$, $\angle C_1 = 119^0 40'$ y $c_2 = 3.91$, $\angle B_2 = 140^0 20'$, $\angle C_2 = 19^0$

14. $c = 6.4$, $\angle A = 41^0 5' 24''$, $a = 12.24$ **15.** $\angle A = 21.8^0$, $\angle B = 28.8^0$, $\angle C = 129.4^0$

16. 11.3 m **17.** $\dfrac{a}{\text{Cot}\theta - \text{Cot}\phi}$ **18.** $a\left(\dfrac{\text{Tan}\,\theta}{\text{Tan}\,\phi} - 1\right)$

21. $x = \dfrac{a\,\text{Tan}\,\theta}{\text{Tan}\,\phi - \text{Tan}\,\theta}$, $h = \dfrac{a}{\text{Cot}\,\theta - \text{Cot}\,\phi}$ **22.** $h = \dfrac{a}{\text{Cot}\,\theta + \text{Cot}\,\phi}$

23. 120.3 m **24.** 10 cm, 4.68 cm **25.** 627 m

26. No **27.** $x = 291$ m, $y = 155$ m

PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS ICFES: **1.** b), **2.** d), **3.** d), **4)** d), **5)** d).

NÚCLEO TEMÁTICO 10

COMPRENSIÓN DE LECTURA: **1.** c., **2.** a., **3.** b., **4.** d., **5.** d.

EJERCICIOS 10-1

1. **a)** $\vec{AB} = 11$, $|\overline{AB}| = 11$ **b)** $\vec{MN} = -10$, $|\overline{MN}| = 10$ **c)** $\vec{PQ} = -4$, $|\overline{PQ}| = 4$ **d)** $\vec{RS} = -5$, $|\overline{RS}| = 5$

2. -11 ó 7 **3.** (a , a) , (-a , a) , (-a , -a) , (a , -a) **4.** (2 , 3) ; $20u^2$ **5.** Area = $6u^2$

6. $A = 30u^2$ **7.** $\left(1, 1+2\sqrt{3}\right)$ ó $\left(1, 1-2\sqrt{3}\right)$

8. $|\overline{AB}| = |\overline{BC}| = \sqrt{29}$ **9.** $|\overline{AB}| = |\overline{BC}| = |\overline{CD}| = |\overline{AD}| = 5$; Area = $10u^2$

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (30)

2. $V(x) = \dfrac{9}{2}x - \dfrac{1}{2}x^3$

3. De tercer grado

4. Para $0 < x < 3$

EJERCICIO 10 – 2

1. $\dfrac{\sqrt{10}}{2}, \dfrac{\sqrt{73}}{2}, \dfrac{\sqrt{85}}{2}$ **2.** P(-10 , -4) **3.** (1 , 6) , (9 , -2) , (-5 , -4)

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (31)

2. $A(x) = 2x^2 + \dfrac{144}{x}$

3. Para $x > 0$

EJERCICIO 10 – 3

1. $-\frac{1}{2}$ 2. $-2, \frac{1}{5}, \frac{7}{2}$ 3. 5 4. $x = 4$, $y = -1$

6. a) $x - 2y + 10 = 0$ b) $2x + y - 5 = 0$ c) $3x - 4y - 6 = 0$ 7. $m = \frac{3}{2}$, $b = 3$

9. 4 10. 1 12. $4x + 3y - 15 = 0$

13. a) $3y + 2x - 13 = 0$ b) $4y - 5x - 2 = 0$ 14. a) 9 b) $\frac{4}{3}$ c) -3

16. a) 5 b) 5.7 17. $k = 24$ ó $k = -146$ 18. $\frac{40}{\sqrt{58}}$, 20 19. b) $d = \frac{13}{2\sqrt{10}}$

20. $\frac{65\sqrt{17}}{136}$

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (32)

2. $V(x) = \frac{1}{3}\pi\left(25x - x^3\right)$

EJERCICIO 10 – 4

1. $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 25$; $x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$ 2. $(x + 5)^2 + (y + 12)^2 = 9$; $x^2 + y^2 + 10x + 24y + 160 = 0$

3. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 13$; $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 8$ 4. C(3 , 4), R = 4 5. $C\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$, $R = \frac{5}{3}$

6. Circunferencia. 7. Conjunto vacío

8. Circunferencia 9. $(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 81$ 10. $4y + 3x = 19$

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (33)

2. $A(x) = x\sqrt{64 - x^2}$

TALLER DE LA UNIDAD 10

2.1 b) **2.2** c) **2.3** a) **2.4** c) **2.5** a)

2.6 b) **2.7** a) **2.8** c) **2.9** b) **2.10** c)

3. $y = 3x - 7$ **4.** $3y + x = 13$ **5.** $2y + x - 10 = 0$ **6.** $3y + 5x = 15$ **7.** $m = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{7}{2}$

8. Paralelas **9.** Perpendiculares **10.** Perpendiculares **11.** Paralelas **13.** $7y - 6x = 11$

14. $3y - 2x - 10 = 0$ **15.** $x + y = 5$ **16.** $y = 6x - 5$ **17.** $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 10$

18. Circunferencia **19.** Un punto **20.** Conjunto vacío **21.** 24.34 unidades

22. $y - 5x + 11 = 0$; $x + 7y - 7 = 0$ **23.** $\left(\frac{7}{3}, \frac{2}{3}\right)$ **24.** $y + 5x = 9$; $y = 1 - x$

25. $(2, -1)$; $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 26$ **26.** $y + 5x = -17$ **27.** 24 unidades cuadradas.

28. $3x + 2y - 9 = 0$; $3x + 2y + 17 = 0$ **29.** $2x - y + 11 = 0$; $x + 2y - 12 = 0$ **30.** $x - y + 3 = 0$; $x - y + 11 = 0$

PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS ICFES: **1.** b), **2.** d), **3.** b), **4)** c)

COMPRENSIÓN DE LECTURA: **1.** d., **2.** c., **3.** d., **4.** b., **5.** a.

EJERCICIO 11 – 1

1. $x^2 = 8y$ **2.** $y^2 = 16x$ **3.** $x^2 = -12y$ **4.** $F(3, 0), x = -3$
5. $F(0, -4), y = 4$ **6.** $F(2, 0), x = -2$ **7.** $F(-1, 0), x = 1$ **8.** $F(0, -1), y = 1$

9. $F\left(\frac{1}{16}, 0\right), y = -\frac{1}{16}$ **10.** La parábola $x^2 = -16y$

11. La parábola $y^2 = 20x$

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (34)

2. Es la recta de ecuación $y = -5x + 13$
3. Mediatriz del segmento

EJERCICIO 11 – 2

1. $(y - 2)^2 = 8x$ **2.** $(x + 2)^2 = 4(y - 1)$ **3.** $(y + 1)^2 = -8(x - 2)$
4. V(-2, 3), F(1, 3), eje focal: $y = 3$; directriz: $x = -5$ **5.** V(-2, 3); F(-2, -1); eje focal: $x = -2$; directriz: $y = 7$
6. V(1, 0); F(1, -2); eje focal: $x = 1$; directriz: $y = 2$ **7.** V(0, -1); F(5, -1); eje focal: $y = -1$; directriz: $x = -5$
8. $(y - 5)^2 = -20(x + 1)$ **9.** $(y - 2)^2 = 16(x + 4)$

10. Parábola horizontal; $V\left(-\frac{49}{24}, \frac{5}{2}\right)$; $F\left(\frac{23}{24}, \frac{5}{2}\right)$; $x = -\frac{121}{24} =$; $y = \frac{5}{2}$

11. Parábola vertical; $V\left(-\frac{3}{2}, \frac{27}{8}\right)$; $F\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{8}\right)$; $y = \frac{51}{8}$; $x = -\frac{3}{2}$

12. Dos rectas paralelas al eje x. **13.** Parábola horizontal; V(0, 0); F(-1, 0); eje focal: el eje x; directriz: $x = 1$
14. **a)** $x^2 - 2x + 4y - 7 = 0$; $(x - 1)^2 = -4(y - 2)$
b) Parábola vertical, V(1, 2), F(1, 1), directriz: $y = 3$, eje focal: $x = 1$
15. $y = x^2 - x$

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (35)

2. $x^2 + y^2 = 25$. Es una circunferencia

TALLER DE LA UNIDAD 11

2. a) **3.** c) **4.** c) **5.** a) **6.** a) **7.** d) **8.** a) **9.** a)
10. $(x + 2)^2 = -4(y - 2)$ **11.** $(y - 2)^2 = 8(x + 2)$ **12.** $y^2 = 8x$ **13.** $(y - 3)^2 = 12(x + 4)$

14. El vértice se desplaza verticalmente a lo largo de la recta $x = -\frac{1}{2}$ **15.** $y^2 + 4x + 2y - 15 = 0$

16. V(2, -1), F(3, -1), $x = 1$, $y = -1$ **17.** V(0, 2), F(0, -3), $y = 7$, $x = 0$

18. $V\left(\frac{2}{3}, \frac{10}{9}\right)$, $F\left(\frac{2}{3}, \frac{29}{18}\right)$; eje focal: $x = \frac{2}{3}$; directriz: $y = \frac{11}{18}$ **19.** $y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$

20. $x^2 = 1250(y - 10)$; 15.12 metros

PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS ICFES: **1.** a), **2.** d), **3.** d), **4)** a), **5)** b)

COMPRENSIÓN DE LECTURA: 1. b., 2. a., 3. c., 4. c., 5. b.

EJERCICIO 12 – 1

1. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$

2. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$

3. $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{16}=1$

4. $\frac{(x-4)^2}{25}+\frac{(y-3)^2}{9}=1$

5. $\frac{(x+3)^2}{4}+\frac{(y-2)^2}{16}=1$

6. $C(0, 0)$, $V_1(0, 3)$, $V_2(0, -3)$, $F_1\left(0, \sqrt{5}\right)$, $F_2\left(0, -\sqrt{5}\right)$, eje focal: $x = 0$

7. $C(0, 0)$, $V_1(5, 0)$, $V_2(-5, 0)$, $F_1(3, 0)$, $F_2(-3, 0)$, eje focal: $y = 0$

8. $C(0, 0)$, $V_1(3, 0)$, $V_2(-3, 0)$, $F_1\left(\sqrt{5}, 0\right)$, $F_2\left(-\sqrt{5}, 0\right)$; eje focal: $y = 0$

9. $C(3, 0)$, $V_1(7, 0)$, $V_2(-1, 0)$, $F_1\left(3+\sqrt{7}, 0\right)$, $F_2\left(3-\sqrt{7}, 0\right)$, eje focal: $y = 0$

10. $C(-5, 1)$, $V_1(-5,5)$, $V_2(-5, -3)$, $F_1\left(-5, 1+2\sqrt{3}\right)$, $F_2\left(-5, 1-2\sqrt{3}\right)$, eje focal: $x = -5$

11. $C(-4, 2)$, $V_1(1, 2)$, $V_2(-9, 2)$, $F_1(0, 2)$, $F_2(-8, 2)$, eje focal: $y = 2$

12. $\frac{(x-3)^2}{36}+\frac{(y-2)^2}{20}=1$

13. La ecuación del lugar geométrico es $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{75}=1$ la cual corresponde a una elipse horizontal con centro en el origen y eje focal el eje x.

14. La ecuación del lugar geométrico es $\frac{y^2}{25}+\frac{x^2}{16}=1$, la cual corresponde a una elipse con centro en el origen y eje focal el eje y.

15. $\frac{7\sqrt{51}}{10}\text{m} \approx 5\text{m}$

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (36)

2. $V(h) = \frac{1}{3}\pi\left(6-\frac{1}{2}h\right)^2 h$

EJERCICIO 12 – 2

1. $\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y+2)^2}{25}=1$; $C(1, -2)$; $V_1(1, 3)$; $V_2(1, -7)$; $F_1(1, 2)$; $F2(1, -6)$

2. Un punto

3. Conjunto vacío

4. $\frac{x^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{9}=1$; $C(0, 1)$; $V_1(0, 4)$; $V_2(0, -2)$; $F_1\left(0, 1+\sqrt{5}\right)$; $F_2\left(0, 1-\sqrt{5}\right)$

5. Conjunto vacío

6. $e = \frac{\sqrt{8}}{3}$

8. $\frac{(x-3)^2}{20}+\frac{(y-2)^2}{36}=1$; $C(3, 2)$, $V_1(3, 8)$; $V_2(3, -4)$; $F_1(3, 6)$; $F_2(3, -2)$, eje focal: $x = 3$

10. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (37)

2. $R(x) = kx(900 - x^2)$

TALLER DE LA UNIDAD 12

2. a) **3.** c) **4.** c) **5.** a) **6.** b) **7.** a)

8. d) **9.** b) **10.** c) **11.** b) **12.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{21}=1$

13. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ **14.** $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{9}=1$ **15.** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$ **16.** $\frac{(x+5)^2}{25}+\frac{(y-3)^2}{16}=1$

17. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{49}=1$; $e=\frac{2\sqrt{10}}{7}$

18. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}=1$; $C(0, 0)$, $V_1(0, 5)$, $V_2(0, -5)$, $F_1\left(0, \sqrt{21}\right)$, $F_2\left(0, -\sqrt{21}\right)$, $B_1(2, 0)$, $B_2(-2, 0)$, $e=\frac{\sqrt{21}}{5}$

19. $\frac{(x-2)^2}{\frac{1}{4}}+y^2=1$, $C(2, 0)$, $V_1(2, 1)$; $V_2(2, -1)$, eje focal: $x = 2$

20. $\frac{(x-2)^2}{\frac{1}{3}}+\frac{(y+3)^2}{\frac{1}{2}}=1$, $C(2, -3)$, eje focal: $x = 2$

21. $\frac{16(x-1)^2}{9}+4\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=1$, $C\left(1, -\frac{1}{2}\right)$, eje focal: $y=-\frac{1}{2}$; $V_1\left(\frac{7}{4}, -\frac{1}{2}\right)$, $V_2\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right)$

22. $4x^2 + y^2 - 16x - 6y - 43 = 0$; $C(2, 3)$

23. 152 y 146 millones de kilómetros respectivamente **24.** $\left(\sqrt{21}+3.5\right)m \approx 8.1m$

PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS ICFES: **1.** a), **2.** d), **3.** c), **4)** b), **5)** d)

NÚCLEO TEMÁTICO 13

COMPRENSIÓN DE LECTURA: **1.** d., **2.** b., **3.** d., **4.** b., **5.** d.

EJERCICIOS 13-1

1. $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{9}=1$ **2.** $x^2-\frac{y^2}{9}=1$ **3.** $y^2 - x^2 = 1$

4. $V_1\left(-\sqrt{15}, 0\right)$, $V_2\left(\sqrt{15}, 0\right)$, $F_1\left(-3\sqrt{3}, 0\right)$, $F_2\left(3\sqrt{3}, 0\right)$; $y=\pm\frac{2\sqrt{5}}{5}x$

5. $V_1\left(-\sqrt{6}, 0\right)$, $V_2\left(\sqrt{6}, 0\right)$, $F_1\left(\sqrt{26}, 0\right)$, $F_2\left(-\sqrt{26}, 0\right)$; $y=\pm\sqrt{\frac{10}{3}}x$

6. $V_1(0, -2)$, $V_2(0, 2)$, $F_1\left(0, -\sqrt{29}\right)$, $F_2\left(0, \sqrt{29}\right)$; $y=\pm\frac{2}{5}x$

7. $V_1(0, 7), V_2(0, -7), F_1\left(0, \sqrt{77}\right), F_2\left(0, -\sqrt{77}\right)$ $y = \pm\dfrac{\sqrt{7}}{2}x$

8. $V_1(-3, 0), V_2(3, 0), F_1\left(-\sqrt{15}, 0\right), F_2\left(\sqrt{15}, 0\right), y = \pm\sqrt{\dfrac{2}{3}}\, x$

9. $V_1\left(0, \sqrt{15}\right), V_2\left(0, -\sqrt{15}\right), F_1\left(0, \dfrac{5\sqrt{3}}{2}\right), F_2\left(0, -\dfrac{5\sqrt{3}}{2}\right), y = \pm\ 2x$

10. $V_1\left(-\sqrt{3}, 0\right), V_2\left(\sqrt{3}, 0\right), F_1\left(-\sqrt{14}, 0\right), F_2\left(\sqrt{14}, 0\right), y = \pm\sqrt{\dfrac{11}{3}}\, x$

11. $V_1\left(-2\sqrt{10}, 0\right), V_2\left(2\sqrt{10}, 0\right), F_1\left(-5\sqrt{3}, 0\right), F_2\left(5\sqrt{3}, 0\right), y = \pm\sqrt{\dfrac{7}{8}}\, x$

12. $V_1(0, -3), V_2(0, 3), F_1\left(0, -3\sqrt{2}\right), F_2\left(0, 3\sqrt{2}\right), y = \pm x$

13. $\dfrac{y^2}{4} - \dfrac{x^2}{21} = 1$

14. $\dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{39} = 1$

15. No existe tal hipérbola.

16. $\dfrac{y^2}{4} - \dfrac{x^2}{12} = 1$

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (38)

$d = \sqrt{12900\, t^2 - 42000\, t + 40000}$

EJERCICIO 13 – 2

1. Parábola: $(y - 6)^2 = 8(x + 2)$, $V(-2, 6)$, eje focal paralelo al eje x, $F(0, 6)$, abierto hacia la derecha.

2. Hipérbola: $\dfrac{(x+4)^2}{2} - \dfrac{(y-3)^2}{3} = 1$, $C(-4, 3)$, eje focal paralelo al eje x, $V_1\left(\sqrt{2} - 4, 3\right), V_2\left(-\sqrt{2} - 4, 3\right)$

3. Elipse: $\dfrac{(x-2)^2}{\frac{1}{4}} + y^2 = 1$, $C(2, 0)$, eje focal paralelo al eje y, $V_1(2, 1), V_2(2, -1)$

4. Un punto: $(1, 2)$

5. $e = \dfrac{\sqrt{53}}{2}$, $7x + 2y = 0$ y $7x - 2y = 0$

6. $\dfrac{(y+5)}{4} - \dfrac{(x-4)^2}{5} = 1$, $y + 5 = \pm\dfrac{2}{\sqrt{5}}(x - 4)$; $e = \dfrac{3}{2}$

7. $4x^2 - y^2 - 8x + 2y - 8 = 0$

8. $\dfrac{x^2}{18} + \dfrac{y^2}{11} = 1$

9. $\dfrac{(y+2)^2}{\frac{11}{3}} - \dfrac{(x-2)^2}{\frac{11}{16}} = 1$

10. $(x - 3)^2 - \dfrac{y^2}{3} = 1$

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (39)

1. $I(x) = \begin{cases} 15000\, x & \text{si } 0 < x \le 150 \\ 22500\, x - 50\, x^2 & \text{si } 150 < x < 250 \end{cases}$

2. 225 estudiantes

TALLER DE LA UNIDAD 13

2. c) 3. a) 4. d) 5. d) 6. b)

7. Elipse: $\dfrac{(x-2)^2}{\frac{1}{3}}+\dfrac{(y+3)^2}{\frac{1}{2}}=1$, C(2, -3), eje focal paralelo al eje y.

8. Hipérbola: $\dfrac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{2}-\dfrac{(y-1)^2}{2}=1$; $C\left(\frac{1}{2},1\right)$; eje focal paralelo al eje x; vértices: $\left(\frac{1}{2}+\sqrt{2},1\right)$ y $\left(\frac{1}{2}-\sqrt{2},1\right)$

9. Parábola: $(x-3)^2=-2y$; vértice (3, 0), foco , $\left(3,-\frac{1}{2}\right)$ eje focal: x = 3 y cóncava hacia abajo

10. Elipse: $\dfrac{16(x-1)^2}{9}+4\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=1$; $C\left(1,-\frac{1}{2}\right)$, eje focal paralelo al eje x: $V_1\left(\frac{7}{4},-\frac{1}{2}\right)$, $V_2\left(\frac{1}{4},-\frac{1}{2}\right)$

11. $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$

12. $16\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-4\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=99$

PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS ICFES: **1.** c), **2.** b), **3.** b), **4)** c), **5)** d)

NÚCLEO TEMÁTICO 14

COMPRENSIÓN DE LECTURA: **1.** a), **2.** b), **3.** c), **4)** d), **5)** c)

EJERCICIOS 14-1

1. Recorrido = 4 kg , d = 0,75 , la varianzas= 1,43 , s = $\sqrt{1,25}\approx 1,195$
2. Rango o recorrido = 16 , s = 5,754
3. Rango = 9 , s = 2,01
4. a) 34 ,
   b) En ciencias naturales: $\bar{x}\approx 2,73$; la mediana = 3,0 , la moda es 3,0 ; En matermáticas: $\bar{x}\approx 2,82$, la mediana = 2,5 , la moda es 2,5
   c) En matemáticas
5. En la empresa B.
6. CV_1= 5,39% ; CV_2 = 18,28% ; El peso de los elefantes es más homogéneo
7.

Intervalos	x_i	f_i	F_i	h_i	% H_i
[1,0 - 1,5)	1,25	4	4	0,0571	5,71
[1,5 - 2,0)	1,75	5	9	0,0714	12,86
[2,0 - 2,5)	2,25	8	17	0,1143	24,29
[2,5 - 3,0)	2,75	13	30	0,1857	42,86
[3,0 - 3,5)	3,25	25	55	0,3571	78,57
[3,5 - 4,0)	3,75	11	66	0,1571	94,29
[4,0 - 4,5)	4,25	4	70	0,0571	100,00
		70		10000	

8. a)

x_i	f_i	F_i	h_i	$\%H_i$
3	2	2	0,042	4,2
4	2	4	0,042	8,4
5	3	7	0,063	14,7
6	8	15	0,167	31,4
7	17	32	0,354	66,8
8	10	42	0,208	87,6
9	4	46	0,083	95,9
10	2	48	0,042	100,0
	48			

b) 7 o más ; 68,8% es buena
$\overline{x} = 6{,}9$; Me = 7 ; Mo = 7
$s^2 = 2{,}42$; s= 1,56 ; cv= 22,6 %

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (40)
d)

EJERCICIO 14 – 2

1. b) $r \approx 0.9$ c) Correlación lineal positiva y dependencia aleatoria fuerte
2. b) $r \approx -0.9$ c) Correlación lineal negativa y dependencia aleatoria fuerte
3. b) $r \approx -0.96$ c) Correlación lineal negativa y dependencia aleatoria fuerte
4. a) $r \approx -0.8$ b) $r \approx -0.7$ c) $r \approx -0.8$

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (41)
2. $A(x) = \frac{1}{2}\ x\sqrt{100 - x^2}$
3. D= (0 ; 10)

EJERCICIO 14 – 3

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS (42)
$c(x) = 20x^2 + \frac{180}{x}$

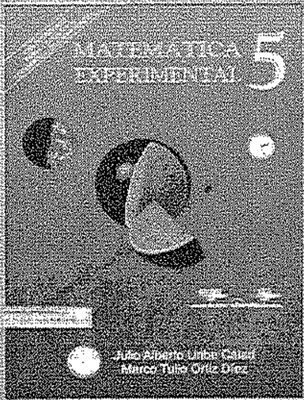
EJERCICIO 14 – 4

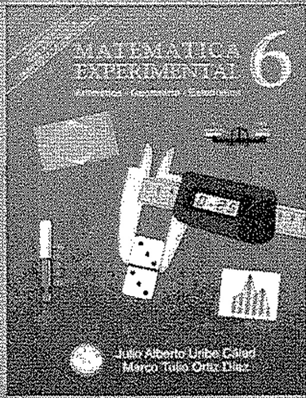
1. a) \$ 99.62 b) \$21.52 2. d) y=0.6x + 0.64 e) y = 2.44
3. b) r = 0.54 e) y = 0.043x + 2.784 f) y = 41.48
4. c) r = 0.931 g) y = 17.95x + 18.49 h) y = 108.24 cm

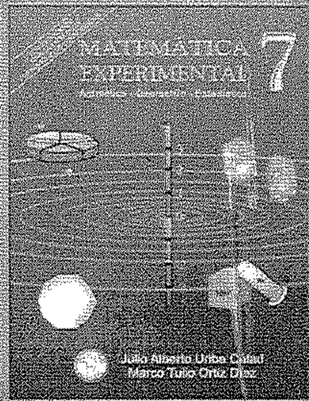
TALLER DE LA UNIDAD 14

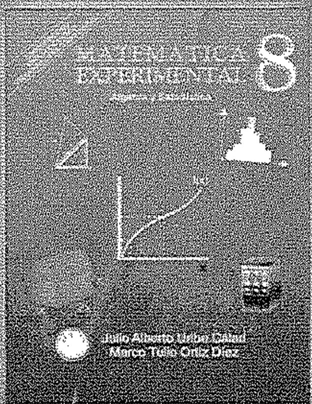
4. 4.3) r = -0.92 ; 4.7) $y = -1.206x + 25.\widehat{3}$; y = 9.7 ≈ 10 partidos
5. 5.3) r = 0.82 ; 5.7) y = 1.25x + 6.6 ; 5.9) y = 22.85 ≈ 23 partidos ; 5.10) y = 19.1 ≈ 20 partidos
6. 6.3) y = -0.93x + 5.97
7. 7.3) r = 1 ; 7.5) y= 6.28x ; 7.6) y= 6.283x ; 7.7) y = 50.26 cm
8. 8.3) y = 3x + 1 ; 8.4) y = 3x +1

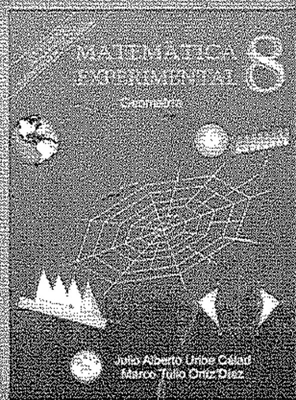
PREPÁRATE PARA LAS PRUEBAS ICFES: 1. d), 2. a), 3. b), 4) d), 5) c)

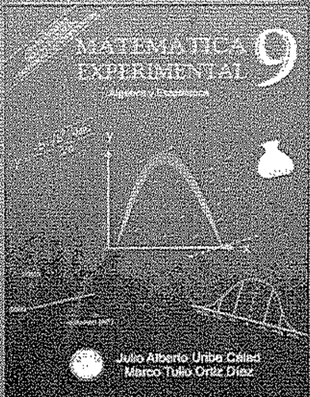


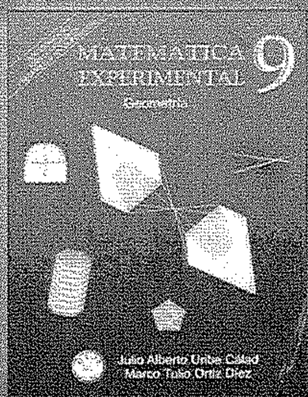


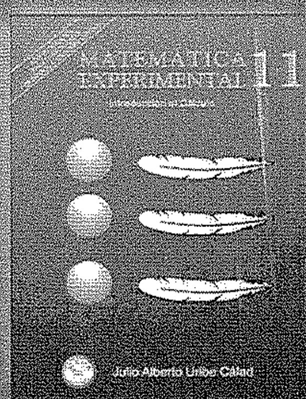












ISBN 958-97011-8-3
9 789589 701188