GEOMETRÍA VECTORIAL Y ANALÍTICA
Una introducción al Álgebra Lineal

Abraham Asmar Charris
Profesor Asociado
Universidad Nacional de Colombia

Patricia Restrepo de Peláez
Profesora Asociada
Universidad Nacional de Colombia

Rosa Franco Arbeláez
Profesora Asociada
Universidad Nacional de Colombia

Fernando Vargas Hernández
Profesor Asistente
Universidad Nacional de Colombia

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
SEDE MEDELLÍN
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS

2009

Catalogación en la publicación Universidad Nacional de Colombia (Medellín)

Geometría vectorial y analítica : una introducción al álgebra lineal / Abraham Asmar Charris...[et al.].-- Medellín : Universidad Nacional de Colombia, 2007
viii, 554 p.

ISBN : 978-958-82-56-38-52

1. Geometría vectorial. 2. Geometría analítica. 3. Análisis vectorial. 4. Superficies. 5. Álgebra lineal. I. Asmar Charris, Abraham. II. Universidad Nacional de Colombia (Medellín). Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas.

CDD-22 516.182/2007

Primera Edición : Agosto de 2007
Reimpresón: Abril de 2009
ISBN: 978-958-8256-38-2

Coordinadora de Edición: Margarita Toro Villegas

Impresión : Universidad Nacional de Colombia
Sede Medellín
Centro de Publicaciones
Tel : (4)4309770 - (4)4309775
e-mail : cenpubli@unalmed.edu.co

Contenido

I Consta de los capítulos 1 a 8, en los cuales se trata sólo lo relacionado con el plano. **1**

1 Vectores geométricos en el plano **3**
- 1.1 Conceptos básicos 3
- 1.2 Suma de vectores 6
- 1.3 Producto de un escalar por un vector 14
- 1.4 Descomposición de un vector 23
- 1.5 Proyección de un vector sobre otro vector 25
- 1.6 Producto escalar 29
- 1.7 Vectores geométricos en el plano cartesiano. Descomposición canónica . . . 32
- 1.8 Ejercicios 48

2 Vectores coordenados o algebraicos **55**
- 2.1 Introducción 55
- 2.2 Suma y producto por escalar en $\mathbb{R}^2$ 57
- 2.3 Magnitud, dirección y otros conceptos en $\mathbb{R}^2$ 62
- 2.4 Ejercicios 73

3 La línea recta en el plano **79**
- 3.1 Ecuación vectorial y ecuaciones paramétricas 79
- 3.2 Ángulo de inclinación y pendiente 83
- 3.3 Ecuaciones escalares no paramétricas 87
- 3.4 Ecuación en forma normal 92
- 3.5 Rectas perpendiculares 94
- 3.6 Ángulo entre rectas 95
- 3.7 Distancia de un punto a una recta 96
- 3.8 Ecuaciones lineales, combinaciones lineales, dependencia e independencia lineal 98
- 3.9 Ejercicios 100

4 Transformaciones lineales del plano y matrices 2×2 **107**
- 4.1 Transformaciones del plano 107
- 4.2 Transformaciones lineales y matrices 113
- 4.3 Propiedades básicas de las transformaciones lineales 116
- 4.4 Imagen de un conjunto bajo una transformación 119

4.5 Operaciones con transformaciones lineales y con matrices 123
4.6 Inversas para transformaciones lineales y matrices 134
4.7 Ejercicios 141

5 Sistemas de ecuaciones lineales 2×2 149
5.1 Conceptos y resultados básicos 149
5.2 Sistemas de ecuaciones lineales y matrices 156
5.3 Ejercicios 162

6 Determinantes de orden 2 167
6.1 Definición. Par orientado de vectores 167
6.2 Transformaciones que preservan la orientación 171
6.3 Determinantes y áreas de paralelogramos 173
6.4 Fórmulas de Cramer 176
6.5 Propiedades 177
6.6 Ejercicios 179

7 Valores propios y vectores propios 183
7.1 Definiciones. Cálculo de valores y vectores propios 183
7.2 Factorización $A = PDP^{-1}$ 187
7.3 Valores propios y vectores propios de matrices simétricas 189
7.4 Ejercicios 199

8 Secciones Cónicas 203
8.1 La circunferencia 204
8.2 Traslación de ejes 208
8.3 La parábola 211
8.4 La elipse 224
8.5 La hipérbola 239
8.6 La ecuación $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ 259
8.7 Rotación de ejes 259
8.8 Ecuación general de segundo grado 263
8.9 Ejercicios 272

II Consta de los capítulos 9 a 15, en los cuales se trata sólo lo relacionado con el espacio. 277

9 Vectores en el espacio 279
9.1 Vectores geométricos. Conceptos básicos y operaciones 279
9.2 Sistema de coordenadas cartesianas para el espacio 282
9.3 Descomposición canónica para vectores geométricos 285
9.4 Producto vectorial 296
9.5 Vectores coordenados o algebraicos 304
9.6 Ejercicios 319

10 Rectas y planos **327**
10.1 La línea recta 327
10.2 Ángulo y posiciones relativas entre dos rectas 331
10.3 Distancia de un punto a una recta 335
10.4 Planos 337
10.5 Posiciones relativas entre dos planos y entre una recta y un plano 342
10.6 Distancia de un punto a un plano 346
10.7 Ecuaciones paramétricas para un plano 348
10.8 Ejercicios 354

11 Transformaciones lineales del espacio y matrices 3×3 **363**
11.1 Transformaciones del espacio 363
11.2 Transformaciones lineales y matrices 369
11.3 Operaciones con transformaciones lineales y matrices 378
11.4 Inversa para transformaciones lineales y matrices 384
11.5 Ejercicios 395

12 Sistemas de ecuaciones lineales 3×3 **401**
12.1 Definiciones y algunos resultados básicos 401
12.2 Método de eliminación de Gauss 409
12.3 Otros resultados básicos 416
12.4 Método de Gauss-Jordan 419
12.5 Ejercicios 424

13 Determinantes de orden 3 **429**
13.1 Definición y algunos resultados básicos 429
13.2 Propiedades básicas 436
13.3 Aplicaciones geométricas 440
13.4 Ejercicios 447

14 Valores propios y vectores propios **453**
14.1 Definiciones. Cálculo de valores y vectores propios 453
14.2 Matrices simétricas 464
14.3 Ejercicios 474

15 Superficies cuádricas **479**
15.1 Definiciones 479
15.2 Elipsoide 482
15.3 Hiperboloide de una hoja 485
15.4 Hiperboloide de dos hojas 487
15.5 Cono elíptico 489
15.6 Cilindro recto elíptico 491
15.7 Cilindro recto hiperbólico 492
15.8 Cilindro recto parabólico 493
15.9 Paraboloide elíptico 494
15.10 Paraboloide hiperbólico 496
15.11 Cambio de sistema de coordenadas 497
15.12 Ejercicios 512

Prefacio

A comienzos del año 2001, un grupo de profesores de la Escuela de Matemáticas propone una reforma a los distintos programas de las asignaturas de servicio para la Facultad de Minas, incluyendo por supuesto el curso de Geometría.

El nuevo programa para dicho curso había sido elaborado por el profesor Diego Mejía Duque. Se basaba en el texto *Linear Algebra Through Geometry* de Thomas Banchoff y John Wermer, editado por Springer-Verlag, el cual se proponía como texto guía. Por diversas razones, el cambio en el programa de Geometría no se hizo efectivo y se continuó con el programa anterior. Es apenas para el semestre 02 de 2002 cuando se conforma un grupo de profesores para analizar el nuevo programa y estudiar el texto guía propuesto; conformaron dicho grupo los profesores Diego Mejía Duque, Margarita María Toro Villegas, Abraham Asmar Charris, Patricia Restrepo de Pelaez y Fernando Vargas Hernandez. Este grupo conceptuó que el texto en consideración no era apropiado como texto guía, pero recomendó escribir un material para el curso, manteniendo la orientación y características del mencionado texto, incluyendo ciertos temas ausentes en él y aumentando tanto el número de ejemplos como las colecciones de ejercicios propuestos.

El trabajo de escritura de tal material lo emprendieron, a partir del semestre 01 de 2003, los profesores Abraham Asmar, Patricia Restrepo, Rosa Franco y Fernando Vargas. El material se completó, en manuscrito, al final del semestre 02 de 2004.

La transcripción en computador se hizo empleando el procesador de texto Scientific WorkPlace, trabajo que se realizó bajo la coordinación general de la profesora Margarita Toro y se culminó al final del semestre 01 de 2005.

Este material se propone para un curso de Geometría Vectorial y Analítica; se diferencia de otros textos sobre el tema, principalmente por dos razones. La más importante es que se aprovechan las ideas geométricas en el plano y en el espacio para introducir conceptos básicos y temas de Álgebra Lineal. La otra es que está dividido en dos partes: en la primera sólo se trata lo relativo al plano y en la segunda lo relativo al espacio. Con esta separación se espera mayor comprensión por parte de los estudiantes de los diversos temas ya que, por una parte, casi siempre es más sencillo trabajar en el plano que en el espacio y por otra, cuando se llega al espacio ya se cuenta con el conocimiento adquirido en el plano y al replicar lo que se ha hecho se reafirman conceptos, resultados y procedimientos. Además de los temas usuales en Geometría Vectorial y Analítica, se estudian en un nivel elemental las transformaciones lineales, se muestra cómo las matrices 2×2 y 3×3 surgen de manera natural como representaciones de transformaciones lineales del plano y del espacio respectivamente, y cómo las operaciones con matrices corresponden a las operaciones con transformaciones lineales. Se analizan los sistemas de ecuaciones lineales 2×2 y 3×3 desde el punto de vista geométrico. Se introducen los conceptos de valor propio y vector propio y se emplean para eliminar los términos mixtos en una ecuación de segundo grado, tanto en dos variables como en tres, a fin de transformarla en otra que permita identificar el lugar geométrico que ella representa.

Este texto ha sido ensayado como guía en el curso de Geometría durante tres semestres. Trabajando con una intensidad de cuatro horas por semana durante quince semanas, se ha logrado cubrir los diez primeros capítulos; los cinco capítulos restantes podrían usarse como parte de un curso de Álgebra Lineal.

Invitamos a los docentes que usen este material y en general a los lectores, a enviarnos sus comentarios, observaciones y sugerencias que contribuyan a mejorarlo.

Agradecimientos especiales para los profesores Ivan Asmar Charris y Carlos Mejía Salazar, quienes, como directores de la Escuela de Matemáticas, dieron su respaldo al proyecto; el profesor Ivan en el inicio y el profesor Carlos en la etapa final en la cual su decidido apoyo fue fundamental para llevar el proyecto a su estado actual.

Agradecemos a Juan Pablo Hernández, Yamir Carvajal, Edison Mauricio Rivera, Santiago Barrera y Sandra Milena Murillo, por su trabajo en la transcripción del texto y la elaboración de los gráficos.

También agradecemos de manera especial a la profesora Margarita Toro Villegas, quien además de haber coordinado la labor de transcripción en computador, nos acompañó durante todo el trabajo y dedicó generosamente muchas horas de su valioso tiempo para hacer cambios y correcciones relacionadas con dicha transcripción.

Los autores
Medellín, Agosto de 2006

Parte I

Consta de los capítulos 1 a 8, en los cuales se trata sólo lo relacionado con el plano.

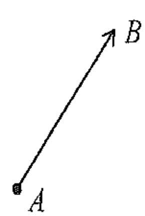
1

Vectores geométricos en el plano

1.1 Conceptos básicos

Cantidades tales como la longitud, la temperatura y la masa (por ejemplo) quedan completamente determinadas por su magnitud, expresada por un número real acompañado de unidades apropiadas. Cantidades de tal tipo son llamadas **cantidades escalares.** Por ejemplo, la longitud de una varilla queda completamente determinada si indicamos el número de unidades de longitud (centímetros, metros, pies,...) que mide dicha varilla. Así mismo, al decir que una temperatura es de 10 grados centígrados, la hemos descrito completamente. Por otra parte, cantidades como fuerza, velocidad y aceleración que tienen magnitud y dirección son llamadas **cantidades vectoriales**. Para determinarlas completamente se requiere dar su magnitud y, además, especificar una dirección. Por ejemplo, para describir la velocidad del viento, en cierto lugar, en un instante dado debemos especificar tanto su magnitud (digamos 50 km por hora) como su dirección (digamos hacia el noroeste). Otro ejemplo de una cantidad vectorial es el desplazamiento: el desplazamiento de un cuerpo se determina por la distancia que se ha movido o desplazado (digamos 10 metros) y por la dirección en que se ha movido. Así que las cantidades vectoriales son algo más complejas que las escalares.

Las cantidades vectoriales se suelen representar geométricamente mediante **segmentos de recta orientados o dirigidos** (flechas). Un segmento de recta[1] se dice orientado cuando se estipula cuál de sus extremos es su punto inicial y así el otro será el punto final (o terminal) en el cual se dibuja una punta de flecha como se ilustra en la figura 1.1.



A : Punto inicial
B : Punto final

Figura 1.1.

Llamaremos **vector geométrico** a todo segmento de recta orientado. Denotaremos los vectores geométricos mediante letras minúsculas con una flecha encima como $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$.

[1] Se asume que los extremos de un segmento de recta son puntos distintos, es decir, que el segmento no se reduce a un punto.

Si los puntos inicial y final de un vector son, respectivamente, los puntos A y B (como en la figura 1.1) también denotaremos dicho vector en la forma $\overrightarrow{AB}$. En este capítulo sólo trataremos con vectores geométricos en el plano.

En todo vector geométrico $\overrightarrow{AB}$ se distinguen dos elementos. Uno es su **magnitud**, denotada $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$, la cual es la longitud del segmento $\overline{AB}$. El otro es su **dirección**, la cual expresaremos mediante un ángulo, como se indica a continuación: trazamos a partir del punto inicial A una semirrecta horizontal y hacia la derecha; convenimos en tomar como dirección de $\overrightarrow{AB}$ el ángulo θ que se forma al ir de dicha semirrecta al segmento $\overline{AB}$ en sentido antihorario. (Figura 1.2) La dirección de un vector $\overrightarrow{AB}$ la denotaremos $dir(\overrightarrow{AB})$.

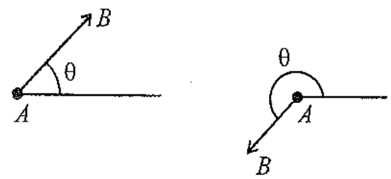


Figura 1.2.

Nótese que $0° \leq \theta < 360°$ si θ se mide en grados, y que $0 \leq \theta < 2\pi$ si θ se mide en radianes.

Cuando se emplea un vector geométrico para representar una determinada cantidad vectorial, la magnitud del vector (tomada a una cierta escala) y la dirección del mismo, representan la magnitud y la dirección, respectivamente, de dicha cantidad vectorial.

Ejemplo 1.1
Consideremos un cuerpo que se desplaza desde un punto A hasta un punto B distante 40 km de A y hacia el noroeste de A. Si empleamos una escala en la cual $\frac{1}{2}$ cm equivale a 10 km, el desplazamiento de dicho cuerpo se puede representar por el vector geométrico $\overrightarrow{AB}$ que se muestra en la figura 1.3, para el cual $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = 40$ km y $dir(\overrightarrow{AB}) = 135°$. ■

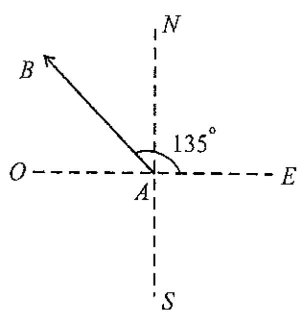


Figura 1.3.

Dos vectores geométricos $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ se dicen **iguales** y se escribe $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$ si ellos tienen la misma magnitud y la misma dirección.

Ejemplo 1.2
Los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ en la figura siguiente son iguales. ■

Figura 1.4.

Según la definición de igualdad, se puede trasladar un vector geométrico de un lugar a otro y mientras no se cambie ni su magnitud ni su dirección, obtendremos vectores iguales a él. Por esta razón los vectores geométricos se dicen **vectores libres.**

A continuación se muestra un vector $\overrightarrow{v}$ y una colección de vectores geométricos, cada uno de ellos igual a $\overrightarrow{v}$.

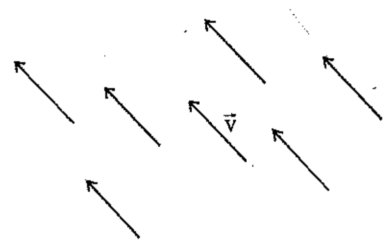


Figura 1.5.

Sean $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ dos vectores geométricos dados.

- El **ángulo entre** $\overrightarrow{u}$ **y** $\overrightarrow{v}$ se define como aquel ángulo α, $0° \leq \alpha \leq 180°$, que forman $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ una vez que se hacen coincidir sus puntos iniciales. (Figura 1.6)

Figura 1.6.

- $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ se dicen **paralelos** si el ángulo entre ellos es $\alpha = 0°$ ó $\alpha = 180°$. Si $\alpha = 0°$ se dice que $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ tienen la **misma dirección** y si $\alpha = 180°$ que $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ tienen **direcciones opuestas**. (Figura 1.7)

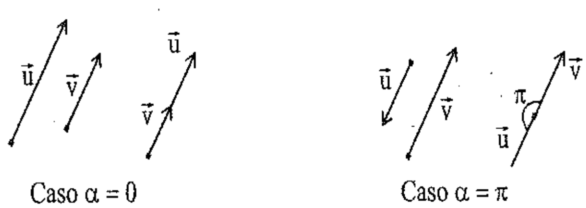


Figura 1.7.

- $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ se dicen **perpendiculares** si el ángulo entre ellos es $\alpha = 90°$. (Figura 1.8)

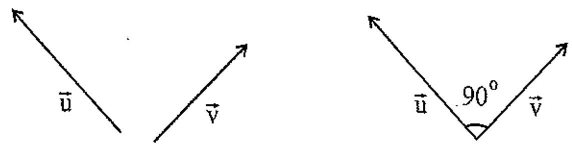


Figura 1.8.

1.2 Suma de vectores

En el caso de las fuerzas o de las velocidades la experiencia indica como ellas deben sumarse. Por ejemplo, si sobre un cuerpo M se aplican simultáneamente dos fuerzas $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ (con las mismas unidades) en un mismo punto, la experiencia ha mostrado que el efecto es el mismo que si se aplicara en dicho punto la fuerza $\overrightarrow{w}$ obtenida como la diagonal del paralelogramo determinado por los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ (ver la figura 1.9). Se dice que $\overrightarrow{w}$ es la fuerza resultante o que es la suma vectorial de las fuerzas $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ y se escribe $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$.

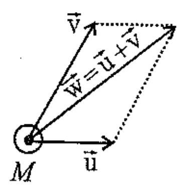


Figura 1.9.

Análogamente, si una embarcación tiene una velocidad propia $\overrightarrow{u}$ y la velocidad del agua es $\overrightarrow{v}$ ($\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ con las mismas unidades), el resultado es que la embarcación se mueve, respecto a tierra, con la velocidad $\overrightarrow{w}$ obtenida también como la diagonal del paralelogramo determinado por $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$. (Ver la figura 1.10). En este caso se dice que $\overrightarrow{w}$ es la suma vectorial de las velocidades $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ y se escribe $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$.

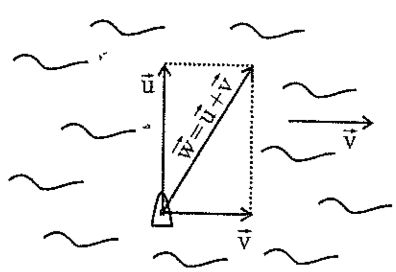


Figura 1.10.

Miremos ahora lo que ocurre con el desplazamiento: si una partícula se desplaza primero desde el punto A hasta el punto B, lo que se representa por el vector $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, y luego desde el punto B al punto C, que se representa por el vector $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BC}$, el resultado es equivalente a un solo desplazamiento de A a C, que se representa por el vector $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AC}$. El desplazamiento $\overrightarrow{w}$ se dice la suma vectorial de los desplazamientos $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ y se escribe $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ (o $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$). Esto se ilustra en la figura 1.11.

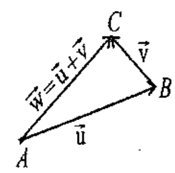


Figura 1.11.

Los ejemplos anteriores conducen a definir la suma $\vec{u}+\vec{v}$ de dos vectores geométricos $\vec{u}$ y $\vec{v}$, de cualquiera de las dos formas siguientes:

Regla del paralelogramo
Si los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no son paralelos, se hacen coincidir sus puntos iniciales y se construye el paralelogramo determinado por dichos vectores. El vector **suma** $\vec{u}+\vec{v}$ se define como el vector que va desde el punto inicial de $\vec{u}$ y de $\vec{v}$, hasta el vértice opuesto a este punto (figura 1.12).

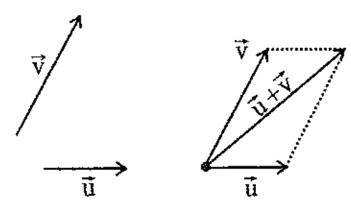


Figura 1.12.

Regla del triángulo
Se dibuja $\vec{v}$ a partir del extremo final de $\vec{u}$. El vector **suma** $\vec{u}+\vec{v}$ se define como el vector que va desde el punto inicial de $\vec{u}$ al punto final de $\vec{v}$ (figura 1.13).

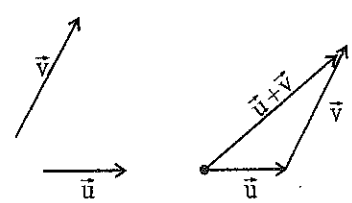


Figura 1.13.

Si los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son paralelos, ellos se suman mediante la regla del triángulo. Nótese que si A, B y C son puntos del plano, distintos dos a dos, entonces

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$

como se aprecia en la figura 1.11.

La suma de vectores geométricos es conmutativa, es decir, para todo par de vectores $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ se tiene que

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$$

lo cual es evidente si seguimos la regla del paralelogramo. Si seguimos la regla del triángulo también podemos apreciar tal hecho (ver figura 1.14).

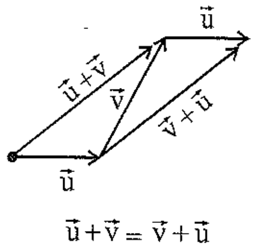


Figura 1.14.

Digamos ahora que queremos hallar la suma $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w}$. Una manera de proceder consiste en aplicar la regla del triángulo dos veces así: primero para hallar $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ y luego para obtener $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w}$, como se ilustra en la figura siguiente

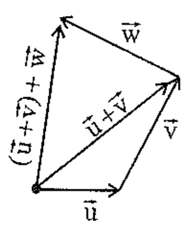


Figura 1.15.

Observe que al proceder así el vector $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w}$ es el vector que va del punto inicial de $\overrightarrow{u}$ al punto terminal de $\overrightarrow{w}$; observe también que

$$(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w})$$

de manera que la suma de vectores geométricos también es asociativa.

En virtud de la igualdad anterior, los paréntesis en ella pueden omitirse y escribir simplemente $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$ para denotar cualquiera de sus dos miembros.

De manera similar $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} + \overrightarrow{z}$ denotará al vector que va desde el punto inicial de $\overrightarrow{u}$ hasta el punto terminal de $\overrightarrow{z}$ cuando se traza $\overrightarrow{v}$ a continuación de $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{w}$ a continuación de $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{z}$ a continuación de $\overrightarrow{w}$, como se muestra en la figura siguiente

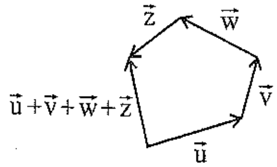


Figura 1.16.

Se puede proceder de manera análoga para sumar 5 o más vectores.

Ejemplo 1.3
La velocidad de un bote respecto al agua es de 20 millas por hora y hacia el norte, en un lugar donde la velocidad de la corriente es de 5 millas por hora respecto a tierra en la dirección S 60° E. Dibuje la velocidad resultante del bote respecto a tierra y halle su magnitud y su dirección.

Solución:
En la figura siguiente los vectores geométricos $\overrightarrow{v}_b$, $\overrightarrow{v}_c$ y $\overrightarrow{v}_r$ representan, respectivamente, la velocidad del bote respecto al agua, la de la corriente respecto a tierra y la velocidad resultante del bote respecto a tierra.

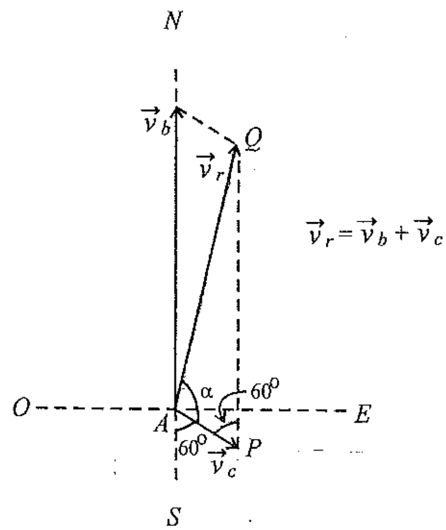


Figura 1.17.

Hallaremos $\|\overrightarrow{v}_r\|$ aplicando ley del coseno en el triángulo APQ :

$$\left\|\overrightarrow{AQ}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{AP}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{PQ}\right\|^2 - 2\left\|\overrightarrow{AP}\right\|\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|\cos 60°$$

es decir,

$$\begin{aligned}
\|\overrightarrow{v}_r\|^2 &= \|\overrightarrow{v}_c\|^2 + \|\overrightarrow{v}_b\|^2 - 2\|\overrightarrow{v}_c\|\|\overrightarrow{v}_b\|\cos 60° \\
&= 25 + 400 - 2(5)(20)\frac{1}{2} \\
&= 325.
\end{aligned}$$

Luego, $\|\overrightarrow{v}_r\| = \sqrt{325} = 18.03$ millas por hora.

Por otra parte, $dir(\overrightarrow{v}_r) = \alpha - 30°$, donde α es el ángulo (medido en grados) entre los vectores $\overrightarrow{v}_c$ y $\overrightarrow{v}_r$. Hallaremos α usando ley de senos de nuevo en el triángulo APQ :

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|} = \frac{\operatorname{sen}60°}{\left\|\overrightarrow{AQ}\right\|}$$

$$\text{sen}\alpha = \frac{\left\|\overrightarrow{PQ}\right\| \text{sen}60^\circ}{\left\|\overrightarrow{AQ}\right\|} = \frac{(20)(\frac{\sqrt{3}}{2})}{\sqrt{325}} = \frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{325}} = 0.96$$

Por tanto, $\alpha = \text{sen}^{-1}(0.96) = 73.74^\circ$ o $\alpha = 180^\circ - \text{sen}^{-1}(0.96) = 106.26^\circ$.

¿Cómo saber cuál de estas opciones es la correcta? Una forma de saberlo es aplicando la ley del coseno en el triángulo APQ, según la cual debe tenerse que

$$\|\overrightarrow{v}_c\|^2 + \|\overrightarrow{v}_r\|^2 - 2\|\overrightarrow{v}_c\|\,\|\overrightarrow{v}_r\| \cos\alpha = \|\overrightarrow{v}_b\|^2.$$

Ahora, si $\alpha = 73.74^\circ$, el lado izquierdo de esta igualdad nos da

$$25 + 325 - 2(5)\sqrt{325}\cos(73.74^\circ)$$

número que es menor que 350 y debería dar 400, pues $\|\overrightarrow{v}_b\|^2 = 400$.

Luego, $\alpha = 180^\circ - \text{sen}^{-1}(0.96) = 106.26^\circ$ y en consecuencia

$$dir(\overrightarrow{v}_r) = 106.26^\circ - 30^\circ = 76.26^\circ. \quad \blacksquare$$

Dado un vector $\overrightarrow{v}$ se llama **opuesto** de $\overrightarrow{v}$ y se denota $-\overrightarrow{v}$, al vector que tiene la misma magnitud de $\overrightarrow{v}$ y dirección opuesta a la de $\overrightarrow{v}$. (Figura 1.18).

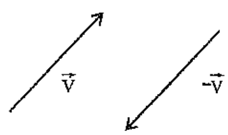


Figura 1.18.

Nótese que si hacemos la suma $\overrightarrow{v} + (-\overrightarrow{v})$ se obtiene como resultado un punto. Así, a fin de que la suma de dos vectores sea siempre otro vector, se admite la existencia de un vector cuyos puntos inicial y final coinciden. Tal vector, cuya magnitud es 0 y al cual no se le asigna dirección, es llamado **vector nulo** o **vector cero** y se denotará $\overrightarrow{0}$. Así, dicho vector $\overrightarrow{0}$ es tal que $\overrightarrow{v} + (-\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{0}$; cualquiera sea el vector $\overrightarrow{v}$, y además él es su propio opuesto, es decir, $-\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$.

En adelante consideraremos que el conjunto de los vectores geométricos incluye al vector nulo y que $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{u}$ para todo vector $\overrightarrow{u}$.

No definiremos ángulo entre el vector $\overrightarrow{0}$ y otro vector, pero admitiremos que el vector $\overrightarrow{0}$ es paralelo y también perpendicular a cualquier vector, incluso a él mismo.

A continuación listamos las propiedades básicas de la suma de vectores. En ellas $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{z}$ son vectores geométricos cualesquiera.

1. $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ es un vector geométrico.
2. $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$
3. $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{z} = \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{z})$
4. $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{u}$
5. $\overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}$

Ejemplo 1.4
Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ vectores dados. Expresar en términos de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ el vector $\vec{x}$ tal que

$$\vec{x} + \vec{v} = \vec{u}$$

Solución:
Podemos despejar $\vec{x}$ en la ecuación $\vec{x} + \vec{v} = \vec{u}$ como se indica a continuación: sumamos $-\vec{v}$ en ambos lados de ella, con lo cual se obtiene

$$(\vec{x} + \vec{v}) + (-\vec{v}) = \vec{u} + (-\vec{v})$$

Reagrupando, escribimos esta ecuación en la forma

$$\vec{x} + (\vec{v} + (-\vec{v})) = \vec{u} + (-\vec{v})$$

Ahora, como $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$ entonces

$$\vec{x} + \vec{0} = \vec{u} + (-\vec{v})$$

Finalmente, como $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$ se tiene que

$$\vec{x} = \vec{u} + (-\vec{v}) \qquad \blacksquare$$

Ahora nos referiremos a la diferencia de dos vectores.

Dados dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, la **diferencia** $\vec{u} - \vec{v}$ se define como el vector que sumado a $\vec{v}$ nos da $\vec{u}$. (Ver la figura 1.19). Ahora, según se acaba de ver en el ejemplo anterior, tal vector es $\vec{u} + (-\vec{v})$; así que

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$$

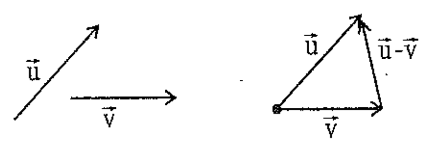


Figura 1.19.

Ejemplo 1.5
Sobre un cuerpo actúan dos fuerzas $\vec{F_1}$ y $\vec{F_2}$ en un mismo punto P. La fuerza $\vec{F_1}$ es de 25 Newtons y su dirección es 60° y la fuerza resultante $\vec{F}$ que actúa sobre el cuerpo es de 30 Newtons y su dirección es 40°. Dibuje la fuerza $\vec{F_2}$ y halle su magnitud y su dirección.

Solución:
En la figura siguiente se representan las fuerzas $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$ y $\vec{F}$

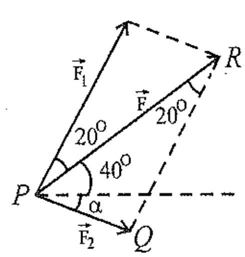


Figura 1.20.

Como $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}$ entonces $\overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{F} - \overrightarrow{F_1}$.

Hallaremos $\left\|\overrightarrow{F_2}\right\|$ empleando ley del coseno en el triángulo PQR:

$$\begin{aligned}\left\|\overrightarrow{F_2}\right\|^2 &= \left\|\overrightarrow{F_1}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{F}\right\|^2 - 2\left\|\overrightarrow{F_1}\right\|\left\|\overrightarrow{F}\right\|\cos 20^\circ \\ &= (25)^2 + (30)^2 - 2(25)(30)\cos 20^\circ \\ &= 115.46\end{aligned}$$

Luego, $\left\|\overrightarrow{F_2}\right\| = \sqrt{115.46} = 10.75$ Newtons

Por otra parte, la dirección de $\overrightarrow{F_2}$ es $360^\circ - \alpha$ donde α es el ángulo que aparece en la figura. Para hallar dicho ángulo α usaremos la ley del seno en el mismo triángulo PQR:

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha + 40^o)}{\left\|\overrightarrow{F_1}\right\|} = \frac{\operatorname{sen}20^o}{\left\|\overrightarrow{F_2}\right\|}$$

$$\operatorname{sen}(\alpha + 40^\circ) = \frac{\left\|\overrightarrow{F_1}\right\| \operatorname{sen}20^\circ}{\left\|\overrightarrow{F_2}\right\|} = \frac{25\operatorname{sen}20^\circ}{10.75} = 0.8$$

Como $\alpha + 40^\circ < 90^\circ$ entonces $\alpha + 40^\circ = \operatorname{sen}^{-1}(0.8) = 52.69^\circ$ y así $\alpha = 12.69^\circ$. Por tanto, $dir(\overrightarrow{F_2}) = 360^\circ - 12.69^\circ = 347.31^\circ$. ■

Ejemplo 1.6

Sean $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ como se muestran en la figura 1.21, con $\|\overrightarrow{u}\| = 2$, $\|\overrightarrow{v}\| = 4$ y $\|\overrightarrow{w}\| = 1$. Dibuje $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}$ y halle tanto su magnitud como su dirección.

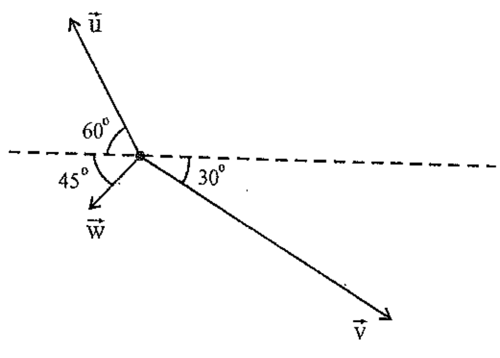


Figura 1.21.

Solución:

Hallaremos primero la magnitud y dirección de $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$. En la figura 1.22 se muestran los vectores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ como también el ángulo β entre $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$, y el ángulo α que necesitamos conocer a fin de usarlo para hallar $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|$, aplicando ley de coseno en el triángulo OQP.

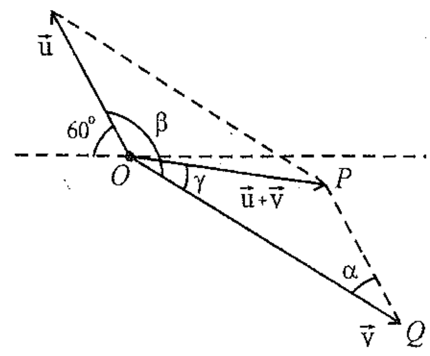


Figura 1.22.

Como $2\alpha + 2\beta = 360°$, pues la suma de los ángulos interiores de un paralelogramo es 360°, entonces $\alpha = 180° - \beta$. Ahora, como $\beta = 180° - 60° + 30° = 150°$ entonces $\alpha = 30°$.

Aplicando ley de coseno en el triángulo OQP tenemos:

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 &= \|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 - 2\|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|\cos\alpha \\ &= 2^2 + 4^2 - 2(2)(4)\cos 30^o \\ &= 20 - 8\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Luego, $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\| = \sqrt{20 - 8\sqrt{3}} = 2.48.$

Por otra parte, $dir(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = dir\,\overrightarrow{v} + \gamma = 330° + \gamma$ (Ver figura 1.22).

Procedemos a hallar el ángulo γ, usando ley del seno en el triángulo OQP:

$$\begin{aligned} \frac{\text{sen}\gamma}{\|\overrightarrow{u}\|} &= \frac{\text{sen}\alpha}{\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|} \\ \frac{\text{sen}\gamma}{2} &= \frac{\text{sen}30°}{2.48} \\ \text{sen}\gamma &= \frac{2\text{sen}30°}{2.48} = \frac{1}{2.48}. \end{aligned}$$

Y puesto que γ es agudo, como se aprecia en la figura 1.22, entonces

$$\gamma = \text{sen}^{-1}\left(\frac{1}{2.48}\right) = 23.78°$$

Luego, $dir(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = 330° + 23.78° = 353.78°$.

Consideremos ahora el vector $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}$. (Vea la figura 1.23.)

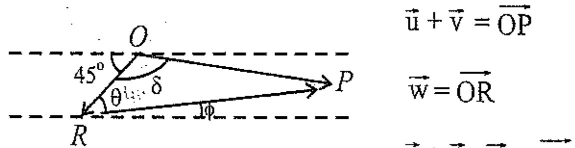


Figura 1.23.

Para hallar $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}\|$ usamos ley de coseno en el triángulo OPR:

$$\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}\|^2 = \|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 + \|\overrightarrow{w}\|^2 - 2\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|\|\overrightarrow{w}\|\cos\delta$$

Y como $\delta = dir(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) - dir(\overrightarrow{w}) = 353.78° - 225° = 128.78°$ entonces

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}\|^2 &= (2.48)^2 + 1^2 - 2(2.48)(1)\cos(128.78°) \\ &= 10.26 \end{aligned}$$

y así $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}\| = \sqrt{10.26} = 3.20$.

Por último, $dir(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}) = \phi = 45° - \theta$, pues $\phi + \theta = 45°$. Calcularemos θ usando ley del seno en el triángulo OPR :

$$\frac{\text{sen}\theta}{\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|} = \frac{\text{sen}\delta}{\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}\|}$$

$$\text{sen}\theta = \frac{\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|\,\text{sen}\delta}{\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}\|} = \frac{(2.48)\text{sen}(128.78°)}{3.20} = 0.6$$

y como θ es agudo entonces $\theta = \text{sen}^{-1}(0.6) = 36.87°$.

Así, $dir(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}) = 45° - 36.87° = 8.13°$. ■

Para finalizar esta sección nos referiremos a la relación entre $\|\overrightarrow{u}\|$, $\|\overrightarrow{v}\|$ y $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|$. Si $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ son vectores no paralelos, considerando el triángulo construido a partir de ellos como se muestra en la figura 1.13, podemos concluir que

$$\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\| < \|\overrightarrow{u}\| + \|\overrightarrow{v}\|$$

basados en un resultado de la Geometría Euclídea, el cual dice que "la longitud de un lado en cualquier triángulo es menor que la suma de las longitudes de los otros dos lados".

Por otra parte, es fácil comprobar que si $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ son paralelos se da la igualdad $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{u}\| + \|\overrightarrow{v}\|$ en unos casos y en otros la desigualdad $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\| < \|\overrightarrow{u}\| + \|\overrightarrow{v}\|$. Tenemos así que para todo par de vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ se cumple la desigualdad

$$\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\| \leq \|\overrightarrow{u}\| + \|\overrightarrow{v}\| \tag{1.1}$$

la cual es denominada **desigualdad triangular.**

1.3 Producto de un escalar por un vector

En adelante llamaremos **escalar** a todo número real. Vamos a definir el producto $a\overrightarrow{u}$ de un escalar a por un vector geométrico $\overrightarrow{u}$.

Empecemos con el caso en que el escalar a es un entero y $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$, caso en el cual la definición de $a\overrightarrow{u}$ es natural.

Definimos $1\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$ y $2\overrightarrow{u}$ como el vector que tiene la misma dirección de $\overrightarrow{u}$ y magnitud el doble de la de $\overrightarrow{u}$. De manera similar se definen los vectores $3\overrightarrow{u}, 4\overrightarrow{u}, \ldots$. Ahora definimos $(-1)\overrightarrow{u} = -\overrightarrow{u}$, $(-2)\overrightarrow{u} = -2\overrightarrow{u}, \ldots$. Así, por ejemplo $(-2)\overrightarrow{u}$ tiene dirección opuesta a la de $\overrightarrow{u}$ y el doble de la magnitud de $\overrightarrow{u}$. Por último definimos $0\overrightarrow{u}$ como el vector nulo $\overrightarrow{0}$ (ver figura 1.24).

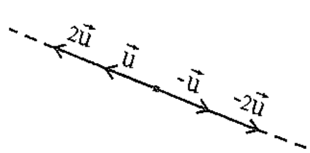


Figura 1.24.

En general, el **producto $a\overrightarrow{u}$ de un escalar a por un vector geométrico $\overrightarrow{u}$** se define como se indica a continuación:

- Si $a > 0$ y $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ entonces $a\overrightarrow{u}$ es el vector con la misma dirección de $\overrightarrow{u}$ y con magnitud $a\|\overrightarrow{u}\|$.

- Si $a < 0$ y $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ entonces $a\overrightarrow{u}$ es el vector con dirección opuesta a la de $\overrightarrow{u}$ y con magnitud $|a|\,\|\overrightarrow{u}\|$, donde $|a|$ es el valor absoluto de a.

- Si $a = 0$ o $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ entonces $a\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.

Obsérvese, en la definición anterior, que:

- $\| a\overrightarrow{u}\| = |a|\,\|\overrightarrow{u}\|$
- $a\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ si y sólo si $a = 0$ o $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$
- $a\overrightarrow{u}$ es paralelo a $\overrightarrow{u}$

Dado un vector $\overrightarrow{u}$, todo vector de la forma $a\overrightarrow{u}$, con $a \in \mathbb{R}$, se dirá un **múltiplo escalar** de $\overrightarrow{u}$.

Ejemplo 1.7
Considere los vectores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ tales que $\|\overrightarrow{u}\| = 3$, $\|\overrightarrow{v}\| = 2$, $\|\overrightarrow{w}\| = 1$ y $dir(\overrightarrow{u}) = 30°$, $dir(\overrightarrow{v}) = 120°$, $dir(\overrightarrow{w}) = 240°$. Halle la magnitud y dirección de cada uno de los vectores $\frac{2}{3}\overrightarrow{u}$, $-\frac{3}{2}\overrightarrow{v}$, $-\frac{7}{4}\overrightarrow{w}$ y dibújelos.

Solución:

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{2}{3}\overrightarrow{u}\right\| &= \left|\frac{2}{3}\right| \|\overrightarrow{u}\| = \frac{2}{3}(3) = 2 \\
\left\|-\frac{3}{2}\overrightarrow{v}\right\| &= \left|-\frac{3}{2}\right| \|\overrightarrow{v}\| = \frac{3}{2}(2) = 3 \\
\left\|-\frac{7}{4}\overrightarrow{w}\right\| &= \left|-\frac{7}{4}\right| \|\overrightarrow{w}\| = \frac{7}{4}(1) = \frac{7}{4}
\end{aligned}$$

En la figura 1.25 se muestran los vectores $\frac{2}{3}\overrightarrow{u}$, $-\frac{3}{2}\overrightarrow{v}$, y $-\frac{7}{4}\overrightarrow{w}$

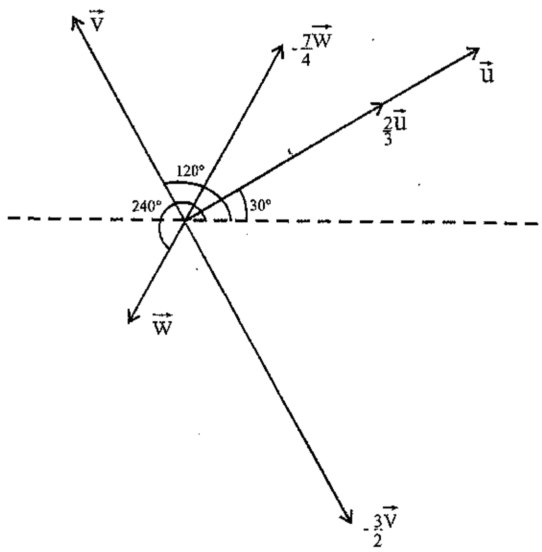


Figura 1.25.

$dir(\frac{2}{3}\overrightarrow{u}) = dir(\overrightarrow{u}) = 30°$
$dir(-\frac{3}{2}\overrightarrow{v}) = dir(\overrightarrow{v}) + 180° = 120° + 180° = 300°$
$dir(-\frac{7}{4}\overrightarrow{w}) = dir(\overrightarrow{w}) - 180° = 240° - 180° = 60°$. ∎

El producto de un escalar por un vector tiene las siguientes propiedades básicas, válidas cualesquiera sean los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ y cualesquiera sean los escalares a y b.

1. $a\overrightarrow{u}$ es un vector geométrico
2. $a(b\overrightarrow{u}) = (ab)\overrightarrow{u}$
3. $1\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$
4. $a(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = a\overrightarrow{u} + a\overrightarrow{v}$
5. $(a+b)\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{u}$

A continuación nos referiremos a la propiedad 4.

Es claro que esta propiedad es válida si $a = 0$ o $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ o $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.

Supongamos $a > 0$, $\overrightarrow{u} \neq 0$ y $\overrightarrow{v} \neq 0$. Consideremos los triángulos ABC y DEF, mostrados en la figura 1.26, cuyos lados son, respectivamente, $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ y $a\overrightarrow{u}$, $a\overrightarrow{v}, a\overrightarrow{u} + a\overrightarrow{v}$. Vamos a probar que $a(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = a\overrightarrow{u} + a\overrightarrow{v}$, lo cual obtendremos como consecuencia de que los triángulos antes mencionados son semejantes.

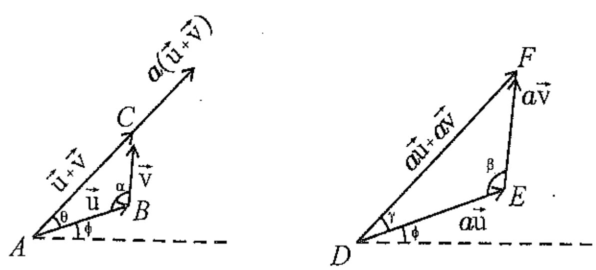


Figura 1.26.

Dichos triángulos son semejantes pues $\alpha = \beta$ (ya que $\overrightarrow{u}$ es paralelo a $a\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ lo es a $a\overrightarrow{v}$) y además

$$\frac{\left\|\overrightarrow{EF}\right\|}{\left\|\overrightarrow{DE}\right\|} = \frac{\|a\overrightarrow{v}\|}{\|a\overrightarrow{u}\|} = \frac{a\|\overrightarrow{v}\|}{a\|\overrightarrow{u}\|} = \frac{\|\overrightarrow{v}\|}{\|\overrightarrow{u}\|} = \frac{\left\|\overrightarrow{BC}\right\|}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|}.$$

Como consecuencia de esa semejanza tenemos que

$$\frac{\left\|\overrightarrow{DF}\right\|}{\left\|\overrightarrow{AC}\right\|} = \frac{\left\|\overrightarrow{DE}\right\|}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|} \text{ y así } \frac{\|a\overrightarrow{u} + a\overrightarrow{v}\|}{\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|} = \frac{\|a\overrightarrow{u}\|}{\|\overrightarrow{u}\|} = a.$$

Luego,

$$\|a\overrightarrow{u} + a\overrightarrow{v}\| = a\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\| = \|a(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})\|$$

es decir, los vectores $a\overrightarrow{u} + a\overrightarrow{v}$ y $a(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})$ tienen la misma magnitud. Veamos ahora que también tienen la misma dirección:
Por una parte

$$\begin{aligned} dir(a(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})) &= dir(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \qquad \text{(pues } a > 0\text{)} \\ &= \theta + \phi \end{aligned}$$

y por otra parte,

$$dir(a\overrightarrow{u} + a\overrightarrow{v}) = \gamma + \phi.$$

Ahora, por la semejanza de los triángulos ABC y DEF se tiene que $\theta = \gamma$, así

$$dir(a(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})) = dir(a\overrightarrow{u} + a\overrightarrow{v})$$

Por tanto, $a(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = a\overrightarrow{u} + a\overrightarrow{v}$.

De manera análoga se puede verificar la validez de la propiedad 4. si $a < 0$, $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ y $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$. Esto y la verificación de las propiedades 2. y 5. se dejan como ejercicio. ♦

Un vector geométrico se dice **unitario** si su magnitud es 1. Dado un vector $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$, es fácil construir un vector unitario con la misma dirección de $\overrightarrow{v}$. Por ejemplo, si $\overrightarrow{v}$ es un vector tal que $\|\overrightarrow{v}\| = 4$, es claro que el vector $\frac{1}{4}\overrightarrow{v}$ es unitario y tiene la misma dirección de $\overrightarrow{v}$. En general, dado cualquier vector $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$, el vector

$$\overrightarrow{u} = \frac{1}{\|\overrightarrow{v}\|}\overrightarrow{v}$$

tiene la misma dirección de $\overrightarrow{v}$ pues $\frac{1}{\|\overrightarrow{v}\|} > 0$, y es unitario ya que

$$\|\overrightarrow{u}\| = \left\|\frac{1}{\|\overrightarrow{v}\|}\overrightarrow{v}\right\| = \left(\frac{1}{\|\overrightarrow{v}\|}\right)\|\overrightarrow{v}\| = 1$$

Nos referiremos al proceso de hallar el vector unitario $\frac{1}{\|\overrightarrow{v}\|}\overrightarrow{v}$ a partir de un vector no nulo $\overrightarrow{v}$, como **normalización** de $\overrightarrow{v}$. A menudo escribiremos $\frac{\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|}$ en vez de $\frac{1}{\|\overrightarrow{v}\|}\overrightarrow{v}$.

Obsérvese que para todo vector no nulo $\overrightarrow{v}$, se tiene que

$$\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{v}\|\,\overrightarrow{u}$$

donde $\overrightarrow{u}$ es el vector unitario con la misma dirección de $\overrightarrow{v}$.

Ejemplo 1.8
Sean $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ vectores tales que $\|\overrightarrow{v}\| = 3$, $dir(\overrightarrow{v}) = 40°$, $\|\overrightarrow{w}\| = 0.5$ y $dir(\overrightarrow{w}) = 210°$.

a) Normalice cada uno de los vectores $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$

b) Halle el vector $\overrightarrow{z}$ con dirección opuesta a la de $\overrightarrow{w}$ y magnitud 2.5.

Solución:

a) El vector $\overrightarrow{v}$ normalizado es $\overrightarrow{u_1} = \dfrac{1}{\|\overrightarrow{v}\|}\overrightarrow{v} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{v}$, el cual es unitario y con la misma dirección de $\overrightarrow{v}$ (figura 1.27*a*). En forma análoga, el vector $\overrightarrow{w}$ normalizado es $\overrightarrow{u_2} = \dfrac{1}{\|\overrightarrow{w}\|}\overrightarrow{w} = \dfrac{1}{0.5}\overrightarrow{w} = 2\overrightarrow{w}$, el cual es unitario y con la misma dirección de $\overrightarrow{w}$ (figura 1.27*b*).

b) $\overrightarrow{z} = -2.5\overrightarrow{u_2} = -2.5\,(2\overrightarrow{w}) = -5\overrightarrow{w}$ (figura 1.27*b*). ■

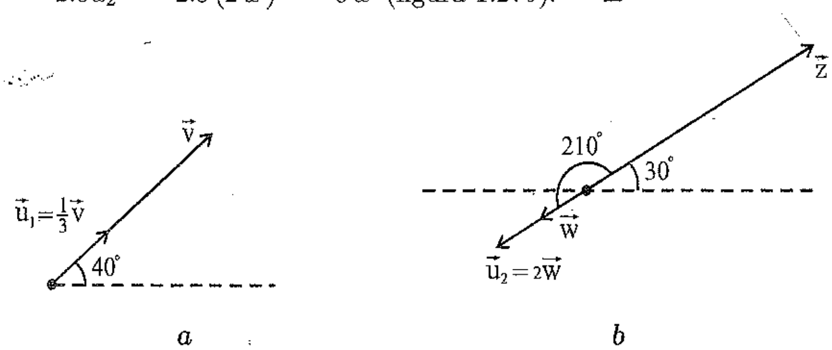


Figura 1.27.

Consideremos ahora dos vectores no nulos $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$. Ya sabemos que:

Si $\overrightarrow{v}$ es múltiplo escalar de $\overrightarrow{u}$ o $\overrightarrow{u}$ es múltiplo escalar de $\overrightarrow{v}$ entonces $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ son paralelos.

Probaremos ahora que el recíproco de dicha afirmación también es cierto, cualesquiera sean los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$.

Supongamos que $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ son vectores paralelos. Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ entonces $\overrightarrow{u}$ es múltiplo escalar de $\overrightarrow{v}$, pues $\overrightarrow{0} = 0\overrightarrow{v}$; análogamente, si $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ entonces $\overrightarrow{v}$ es múltiplo escalar de $\overrightarrow{u}$.

Consideremos ahora el caso $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ y $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$. Si $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ tienen la misma dirección, un vector unitario en la dirección tanto de $\overrightarrow{u}$ como de $\overrightarrow{v}$ es $\dfrac{\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|}$ y por tanto

$$\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{v}\|\left(\frac{\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|}\right) = \left(\frac{\|\overrightarrow{v}\|}{\|\overrightarrow{u}\|}\right)\overrightarrow{u}$$

Luego, $\overrightarrow{v}$ es múltiplo escalar de $\overrightarrow{u}$. Similarmente, si $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ tienen direcciones opuestas entonces un vector unitario con la misma dirección de $\overrightarrow{v}$ es $-\dfrac{\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|}$ y por tanto

$$\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{v}\|\left(-\frac{\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|}\right) = \left(-\frac{\|\overrightarrow{v}\|}{\|\overrightarrow{u}\|}\right)\overrightarrow{u}$$

así que $\overrightarrow{v}$ es múltiplo escalar de $\overrightarrow{u}$.

Hemos probado así que para todo par de vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$,

$\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ son paralelos si y sólo si $\overrightarrow{v}$ es múltiplo escalar de $\overrightarrow{u}$ o $\overrightarrow{u}$ es múltiplo escalar de $\overrightarrow{v}$.

Ejemplo 1.9
Probar, empleando vectores geométricos, lo siguiente: Si A, B y C son los vértices de un triángulo y M, N son los puntos medios de los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ respectivamente, entonces el segmento de recta $\overline{MN}$ es paralelo al lado $\overline{AB}$ y la longitud de $\overline{MN}$ es la mitad de la de $\overline{AB}$.

Prueba:

En la figura 1.28 se muestra un triángulo con vértices A, B, C y los puntos medios M, N de los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$.

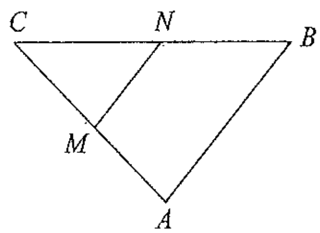


Figura 1.28.

Vamos a probar que $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, de lo cual se concluye lo que se pide probar. En primer lugar tenemos que

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CN}$$

Ahora, como M y N son los puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$, respectivamente, entonces

$$\overrightarrow{MC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \text{ y } \overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$$

Luego,

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}. \quad \blacklozenge$$

Ahora nos referiremos a un resultado relacionado con la división de un segmento en una razón dada.

Como ejemplo, consideramos la figura 1.29, en la cual el punto P divide al segmento $\overline{AB}$ de tal modo que la distancia de A a P es igual a $\frac{2}{3}$ de la distancia de P a B, es decir, de tal modo que

$$\left\|\overrightarrow{AP}\right\| = \frac{2}{3}\left\|\overrightarrow{PB}\right\| \tag{1.2}$$

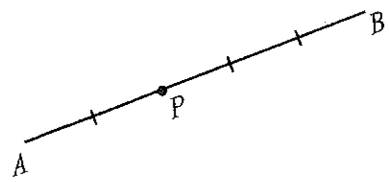


Figura 1.29.

Nótese que en lugar de (1.2) se puede escribir cualquiera de las siguientes igualdades:

$$\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{PB} \qquad \text{o} \qquad \frac{\left\|\overrightarrow{AP}\right\|}{\left\|\overrightarrow{PB}\right\|} = \frac{2}{3}$$

En general, si m y n son números positivos y P es el punto de un segmento $\overline{AB}$ que lo divide de tal modo que

$$\left\|\overrightarrow{AP}\right\| = \frac{m}{n}\left\|\overrightarrow{PB}\right\|$$

podemos escribir, en lugar de esta igualdad, cualquiera de las igualdades siguientes:

$$\overrightarrow{AP} = \frac{m}{n}\overrightarrow{PB} \qquad \text{o} \qquad \frac{\left\|\overrightarrow{AP}\right\|}{\left\|\overrightarrow{PB}\right\|} = \frac{m}{n} \tag{1.3}$$

Se tiene el siguiente resultado:

Teorema de la proporción: *Sean m y n números positivos y sea P el punto de un segmento $\overline{AB}$ que lo divide de tal modo que*

$$\frac{\left\|\overrightarrow{AP}\right\|}{\left\|\overrightarrow{PB}\right\|} = \frac{m}{n}$$

Si O es cualquier punto del plano, entonces

$$\overrightarrow{OP} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}$$

Prueba:

Consideremos la figura 1.30 en la cual suponemos el punto P como se indica en el enunciado del teorema.

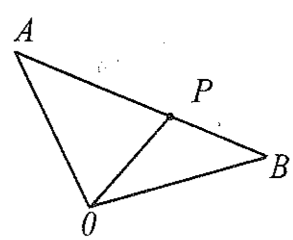


Figura 1.30.

En primer lugar tenemos que

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} \tag{1.4}$$

y como (vea (1.3))

$$\overrightarrow{AP} = \frac{m}{n}\overrightarrow{PB}$$

se tiene que

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \frac{m}{n}\overrightarrow{PB}$$

Como, además,

$$\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OA} + \frac{m}{n}\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP}\right)\\
\left(1+\frac{m}{n}\right)\overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OA} + \frac{m}{n}\overrightarrow{OB}\\
\left(\frac{n+m}{n}\right)\overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OA} + \frac{m}{n}\overrightarrow{OB}\\
\overrightarrow{OP} &= \frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}
\end{aligned}$$

Hemos probado así lo que se pedía para el caso en el cual O no es un punto de la recta que pasa por A y B. El lector puede observar que la prueba dada también es válida en el caso en que O es un punto de dicha recta. ♦

Como caso particular del teorema de la proporción se tiene que:

> Si M es el punto medio de un segmento $\overline{AB}$ y O es cualquier punto del plano entonces
> $$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$$

Un resultado de la Geometría Euclidiana afirma que "en todo triángulo, las tres medianas se cortan en un punto (llamado **baricentro**) cuya distancia a cada vértice es igual a 2/3 de la longitud de la mediana trazada desde dicho vértice". En el siguiente ejemplo se muestra una manera de probar este resultado empleando vectores geométricos.

Ejemplo 1.10
Sean A, B y C los vértices de un triángulo y O cualquier punto del plano.
a) Sea P el punto de la mediana relativa al lado $\overline{BC}$ tal que su distancia al vértice A es 2/3 de la longitud de dicha mediana. Probar que

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right).$$

b) Aplicar el resultado en *a*) para probar que las tres medianas de un triángulo se cortan en un punto cuya distancia a cada vértice es igual a 2/3 de la longitud de la mediana trazada desde el respectivo vértice.

Prueba:

a) Consideremos la figura 1.31

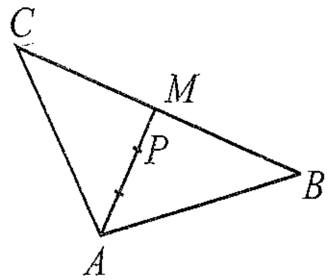


Figura 1.31.

En dicha figura M es el punto medio del lado $\overline{BC}$ y así el segmento $\overline{AM}$ es la mediana relativa al lado $\overline{BC}$. Por otra parte, el punto P es tal que su distancia al punto A es $2/3$ de la distancia de A a M, o equivalentemente, P es tal que su distancia al punto A es el doble de su distancia al punto M, es decir,

$$\frac{\left\|\overrightarrow{AP}\right\|}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|}=\frac{2}{1}$$

Entonces, según el teorema de la proporción,

$$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OM}$$

De otro lado, como M es el punto medio del segmento $\overline{CB}$,

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$$

luego,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right)\\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}\\ &= \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right).\end{aligned}$$

b) Sea Q el punto de la mediana trazada desde el vértice B tal que la distancia de Q a B es $2/3$ de la longitud de dicha mediana. Según lo probado en a) tenemos que

$$\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)$$

Análogamente, si R es el punto de la mediana trazada desde el vértice C tal que la distancia de R a C es $2/3$ de la longitud de dicha mediana, entonces

$$\overrightarrow{OR}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)$$

Luego, si P es como en el literal a) entonces

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OR}$$

y por tanto los puntos P, Q y R coinciden. ♦

1.4 Descomposición de un vector

Sean $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ vectores dados no paralelos. Empezaremos mostrando cómo cualquier vector $\overrightarrow{z}$ puede descomponerse en la forma

$$\overrightarrow{z} = \overrightarrow{p} + \overrightarrow{q} \tag{1.5}$$

con $\overrightarrow{p}$ paralelo a $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{q}$ paralelo a $\overrightarrow{v}$.

Consideremos primero el caso en el cual $\overrightarrow{z}$ no es paralelo a $\overrightarrow{u}$ ni a $\overrightarrow{v}$. Dibujamos $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{z}$ con punto inicial común y trazamos, pasando por el extremo final de $\overrightarrow{z}$, paralelas a $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$, hasta cortar las rectas que contienen estos vectores.

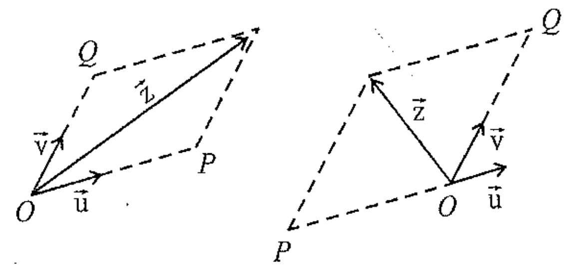


Figura 1.32.

Si P y Q son los correspondientes puntos de corte y O denota el punto inicial de $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$, como en la figura 1.32, se tiene que

$$\overrightarrow{z} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$$

con $\overrightarrow{OP}$ paralelo a $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{OQ}$ paralelo a $\overrightarrow{v}$.

Ahora, en el caso $\overrightarrow{z}$ paralelo (por ejemplo) a $\overrightarrow{u}$, podemos escribir

$$\overrightarrow{z} = \overrightarrow{z} + \overrightarrow{0}$$

dándose que $\overrightarrow{z}$ es paralelo a $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{0}$ es paralelo a $\overrightarrow{v}$. Similarmente, si $\overrightarrow{z}$ es paralelo a $\overrightarrow{v}$,

$$\overrightarrow{z} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{z}$$

donde $\overrightarrow{0}$ es paralelo a $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{z}$ es paralelo a $\overrightarrow{v}$.

Tenemos así que dado un vector $\overrightarrow{z}$ cualquiera, $\overrightarrow{z}$ se descompone como se dijo inicialmente, es decir, en la forma (1.5).

Consideremos ahora un vector $\overrightarrow{z}$ descompuesto en la forma (1.5). Como $\overrightarrow{p}$ es paralelo a $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{q}$ es paralelo a $\overrightarrow{v}$ entonces $\overrightarrow{p} = a\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{q} = b\overrightarrow{v}$ para ciertos escalares a y b; por tanto, $\overrightarrow{z}$ es expresable en la forma

$$\overrightarrow{z} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}.$$

A continuación probaremos que los escalares a y b en la escritura anterior de $\overrightarrow{z}$ son únicos:

Supongamos que $\overrightarrow{z} = a_1\overrightarrow{u} + b_1\overrightarrow{v}$ y también $\overrightarrow{z} = a_2\overrightarrow{u} + b_2\overrightarrow{v}$ (Vamos a probar que $a_1 = a_2$ y $b_1 = b_2$).

Entonces

$$\begin{aligned} a_1\vec{u} + b_1\vec{v} &= a_2\vec{u} + b_2\vec{v} \\ a_1\vec{u} - a_2\vec{u} &= b_2\vec{v} - b_1\vec{v} \\ (a_1 - a_2)\vec{u} &= (b_2 - b_1)\vec{v}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Si fuese $a_1 - a_2 \neq 0$, podríamos escribir $\vec{u}$ como múltiplo escalar de $\vec{v}$ y entonces $\vec{u}$ sería paralelo a $\vec{v}$, pero sabemos que $\vec{u}$ no es paralelo a $\vec{v}$. Luego $a_1 - a_2 = 0$, es decir, $a_1 = a_2$. Ahora, como $a_1 - a_2 = 0$ entonces $(b_2 - b_1)\vec{v} = \vec{0}$ (ver (1.6)) y como $\vec{v} \neq \vec{0}$ entonces $b_2 - b_1 = 0$ y así $b_1 = b_2$.

Resumimos la discusión anterior en el siguiente resultado:

> Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son vectores no paralelos entonces para todo vector $\vec{z}$ existen únicos escalares a y b tales que
> $$\vec{z} = a\vec{u} + b\vec{v}$$ (1.7)

Nos referiremos a la escritura en (1.7) de un vector $\vec{z}$ como la **descomposición de $\vec{z}$ en las direcciones de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.**

Ejemplo 1.11
Sean $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{z}$ los vectores mostrados en la figura 1.33

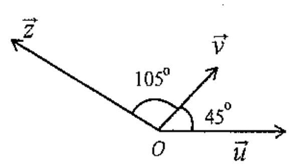


Figura 1.33.

Sabiendo que $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 2$ y $\|\vec{z}\| = 4$, hallar la descomposición de $\vec{z}$ en las direcciones de $\vec{u}$ y $\vec{v}$, determinando los escalares a y b tales que $\vec{z} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

Solución:
Consideremos la figura 1.34 en la cual $\overrightarrow{PR}$ es paralelo a $\vec{v}$, y $\overrightarrow{RQ}$ es paralelo a $\vec{u}$.

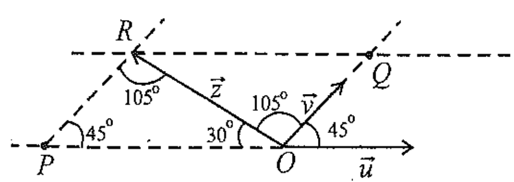


Figura 1.34.

De acuerdo con la figura tenemos que la descomposición de $\vec{z}$ en las direcciones de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es

$$\vec{z} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$$

donde $\overrightarrow{OP} = a\overrightarrow{u}$ para cierto escalar $a < 0$ y $\overrightarrow{OQ} = b\overrightarrow{v}$ para cierto escalar $b > 0$. Observe que $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{PR}$.

A continuación determinamos los escalares a y b :

Según la ley de senos aplicada al triángulo OPR tenemos que

$$\frac{\left\|\overrightarrow{OP}\right\|}{\text{sen}105^\circ} = \frac{\|\overrightarrow{z}\|}{\text{sen}45^\circ} = \frac{\left\|\overrightarrow{PR}\right\|}{\text{sen } 30^\circ}$$

En primer lugar, como $\left\|\overrightarrow{OP}\right\| = \|a\overrightarrow{u}\| = |a|\,\|\overrightarrow{u}\|$ entonces

$$\frac{|a|\,\|\overrightarrow{u}\|}{\text{sen}105^\circ} = \frac{\|\overrightarrow{z}\|}{\text{sen}45^\circ}$$

de donde

$$|a| = \frac{\|\overrightarrow{z}\|\ \text{sen}105^\circ}{\|\overrightarrow{u}\|\ \text{sen}45^\circ} = \frac{4\,(0.96)}{3\,(1/\sqrt{2})} \approx 1.81$$

y dado que $a < 0$ entonces $a \approx -1.81$.

Por otra parte, dado que $\left\|\overrightarrow{OQ}\right\| = \left\|\overrightarrow{PR}\right\|$, se tiene

$$\frac{\left\|\overrightarrow{OQ}\right\|}{\text{sen}30^\circ} = \frac{\|\overrightarrow{z}\|}{\text{sen}45^\circ}$$

Ahora, como $\left\|\overrightarrow{OQ}\right\| = \|b\overrightarrow{v}\| = |b|\,\|\overrightarrow{v}\|$ entonces

$$|b| = \frac{\|\overrightarrow{z}\|\ \text{sen}30^\circ}{\|\overrightarrow{v}\|\ \text{sen}45^\circ} = \frac{4\,(1/2)}{2\,(1/\sqrt{2})} = \sqrt{2}$$

y puesto que $b > 0$ entonces $b = \sqrt{2}$.

Así, la descomposición del vector $\overrightarrow{z}$ en las direcciones de $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ es

$$\overrightarrow{z} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}$$

con $a \approx -1.81$ y $b = \sqrt{2}$. ■

1.5 Proyección de un vector sobre otro vector

Sea $\overrightarrow{u}$ un vector no nulo dado y sea $\overrightarrow{z}$ un vector cualquiera. Como caso particular de descomposición de un vector tenemos que $\overrightarrow{z}$ puede descomponerse, de manera única, en la forma

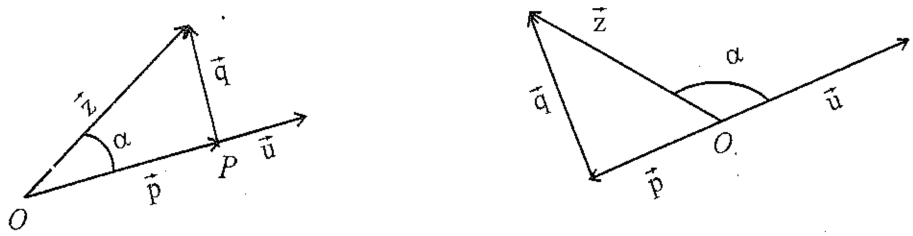
$$\overrightarrow{z} = \overrightarrow{p} + \overrightarrow{q} \tag{1.8}$$

con $\overrightarrow{p}$ paralelo a $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{q}$ perpendicular a $\overrightarrow{u}$. El vector $\overrightarrow{p}$ se dice **la componente (vectorial) de $\overrightarrow{z}$ en la dirección de $\overrightarrow{u}$**, en tanto que $\overrightarrow{q}$ se dice **la componente (vectorial) de $\overrightarrow{z}$ perpendicular a $\overrightarrow{u}$**.

Para obtener gráficamente las componentes $\overrightarrow{p}$ y $\overrightarrow{q}$ se dibujan $\overrightarrow{z}$ y $\overrightarrow{u}$ con el mismo punto inicial y se traza una perpendicular desde el extremo final de $\overrightarrow{z}$ hasta cortar la recta que contiene al vector $\overrightarrow{u}$. Si P es el punto de corte y O es el punto inicial de $\overrightarrow{z}$ y $\overrightarrow{u}$ entonces

$$\overrightarrow{p} = \overrightarrow{OP} \quad \text{y} \quad \overrightarrow{q} = \overrightarrow{z} - \overrightarrow{p}$$

Lo anterior se ilustra en la figura 1.35, en la cual $\overrightarrow{z} \neq \overrightarrow{0}$ y α es el ángulo entre $\overrightarrow{z}$ y $\overrightarrow{u}$.



Caso a : $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ***Caso b :*** $90^\circ < \alpha < 180^\circ$

Figura 1.35.

Nótese que si $\overrightarrow{z} = \overrightarrow{0}$, entonces en (1.8) $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{0}$ y $\overrightarrow{q} = \overrightarrow{0}$.

El vector $\overrightarrow{p}$ en (1.8) también se llama **proyección de $\overrightarrow{z}$ sobre $\overrightarrow{u}$** y se denota $Proy_{\overrightarrow{u}}\overrightarrow{z}$. Obsérvese que:

- Si $\overrightarrow{z}$ es paralelo a $\overrightarrow{u}$ entonces $Proy_{\overrightarrow{u}}\overrightarrow{z} = \overrightarrow{z}$.
- Si $\overrightarrow{z}$ es perpendicular a $\overrightarrow{u}$ entonces $Proy_{\overrightarrow{u}}\overrightarrow{z} = \overrightarrow{0}$.

Puesto que el vector $\overrightarrow{p} = Proy_{\overrightarrow{u}}\overrightarrow{z}$ es paralelo a $\overrightarrow{u}$, existe un escalar r tal que

$$\overrightarrow{p} = r\frac{\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|}.$$

Tal escalar r se llama **componente escalar de $\overrightarrow{z}$ en la dirección de $\overrightarrow{u}$**. Nótese que esa componente escalar puede ser positiva, cero o negativa.

Si $\overrightarrow{z} = \overrightarrow{0}$ ya sabemos que $Proy_{\overrightarrow{u}}\overrightarrow{z} = \overrightarrow{0}$. Supongamos entonces que $\overrightarrow{z} \neq \overrightarrow{0}$ y sea α el ángulo entre $\overrightarrow{z}$ y $\overrightarrow{u}$. A continuación hallaremos una expresión para el vector $\overrightarrow{p} = Proy_{\overrightarrow{u}}\overrightarrow{z}$ en términos de $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{z}$ y α.

- Si $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ (figura 1.35, caso a) entonces $\overrightarrow{p}$ tiene la misma dirección de $\overrightarrow{u}$ y por tanto $\overrightarrow{p} = \|\overrightarrow{p}\|\dfrac{\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|}$. Ahora, como

$$\cos\alpha = \frac{\|\overrightarrow{p}\|}{\|\overrightarrow{z}\|}, \text{ es decir, } \|\overrightarrow{p}\| = \|\overrightarrow{z}\|\cos\alpha$$

entonces $\overrightarrow{p} = (\|\overrightarrow{z}\|\cos\alpha)\dfrac{\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|}$ y así

$$Proy_{\overrightarrow{u}}\overrightarrow{z} = (\|\overrightarrow{z}\|\cos\alpha)\frac{\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|}.$$

Nótese que esta fórmula también es válida si $\alpha = 0^\circ$ y si $\alpha = 90^\circ$. En efecto, si $\alpha = 0^\circ$ los dos miembros en ella son iguales a $\overrightarrow{z}$, y si $\alpha = 90^\circ$ esos dos miembros son iguales a $\overrightarrow{0}$.

- Si $90° < \alpha < 180°$ (figura 1.35, caso *b*) entonces $\overrightarrow{p}$ tiene dirección opuesta a la de $\overrightarrow{u}$ y por tanto $\overrightarrow{p} = \|\overrightarrow{p}\| \left(-\frac{\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|}\right)$. Ahora, en este caso

$$\cos(180° - \alpha) = \frac{\|\overrightarrow{p}\|}{\|\overrightarrow{z}\|}, \text{ es decir, } \|\overrightarrow{p}\| = \|\overrightarrow{z}\| \cos(180° - \alpha)$$

y como $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$ entonces $\|\overrightarrow{p}\| = -\|\overrightarrow{z}\| \cos\alpha$. Luego

$$\overrightarrow{p} = (-\|\overrightarrow{z}\| \cos\alpha) \left(-\frac{\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|}\right)$$

y así (como en el caso anterior)

$$Proy_{\overrightarrow{u}} \overrightarrow{z} = (\|\overrightarrow{z}\| \cos\alpha) \frac{\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|}.$$

Nótese que esta fórmula también es válida si $\alpha = 180°$, pues en tal caso sus dos miembros son iguales a $\overrightarrow{z}$.

A continuación recogemos lo básico de la discusión anterior.

Sea $\overrightarrow{u}$ un vector no nulo y $\overrightarrow{z}$ un vector cualquiera.
- Si $\overrightarrow{z} = \overrightarrow{0}$, $Proy_{\overrightarrow{u}} \overrightarrow{z} = \overrightarrow{0}$.
  En este caso la componente escalar de $\overrightarrow{z}$ en la dirección de $\overrightarrow{u}$ es 0.
- Si $\overrightarrow{z} \neq \overrightarrow{0}$ y α es el ángulo entre $\overrightarrow{z}$ y $\overrightarrow{u}$,
  $$Proy_{\overrightarrow{u}} \overrightarrow{z} = (\|\overrightarrow{z}\| \cos\alpha) \frac{\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|}.$$
  En este caso la componente escalar de $\overrightarrow{z}$ en la dirección de $\overrightarrow{u}$ es $\|\overrightarrow{z}\| \cos\alpha$

Ejemplo 1.12
Sean $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{z}$ vectores tales que $\|\overrightarrow{u}\| = 3$ y $\|\overrightarrow{z}\| = 4$. Hallar la componente escalar de $\overrightarrow{z}$ en la dirección de $\overrightarrow{u}$ y la proyección de $\overrightarrow{z}$ sobre $\overrightarrow{u}$, en cada uno de los siguientes casos:

a) El ángulo entre $\overrightarrow{z}$ y $\overrightarrow{u}$ es de 60°.
b) El ángulo entre $\overrightarrow{z}$ y $\overrightarrow{u}$ es de 150°.
c) $\overrightarrow{z}$ es perpendicular a $\overrightarrow{u}$.
d) $\overrightarrow{z}$ tiene dirección opuesta a la de $\overrightarrow{u}$.

Solución:

Si r es la componente escalar de $\overrightarrow{z}$ en la dirección de $\overrightarrow{u}$ entonces:
En el caso *a*), el cual se ilustra en la figura 1.36*a*, se tiene

$$r = \|\overrightarrow{z}\| \cos 60° = 4\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \text{ y así } Proy_{\overrightarrow{u}} \overrightarrow{z} = 2\frac{\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|} = \frac{2}{3}\overrightarrow{u}$$

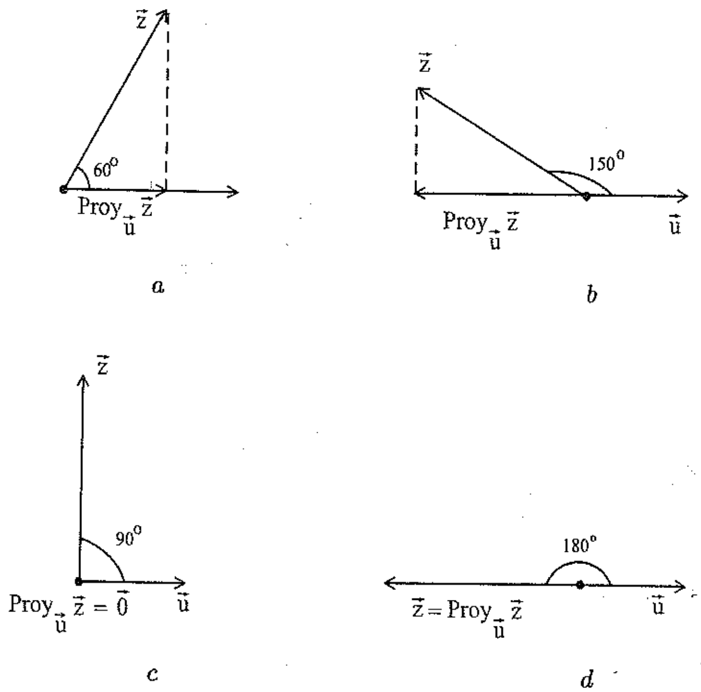


Figura 1.36.

En el caso *b*), ilustrado en la figura 1.36b, se tiene

$$r = \|\overrightarrow{z}\| \cos 150^o = 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2\sqrt{3} \text{ y así } Proy_{\overrightarrow{u}}\overrightarrow{z} = \left(-2\sqrt{3}\right)\frac{\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|} = \frac{-2\sqrt{3}}{3}\overrightarrow{u}$$

En el caso *c*), por ser $\overrightarrow{z}$ perpendicular a $\overrightarrow{u}$, sabemos que $Proy_{\overrightarrow{u}}\overrightarrow{z} = \overrightarrow{0}$ (figura 1.36c), es decir, $r = 0$. Si se emplea la fórmula para r igualmente se obtiene $r = 0$, pues $r = \|\overrightarrow{z}\| \cos 90° = 0$.

En el caso *d*), por ser $\overrightarrow{z}$ paralelo a $\overrightarrow{u}$, sabemos que $Proy_{\overrightarrow{u}}\overrightarrow{z} = \overrightarrow{z}$ (figura 1.36d). Ahora, como $\overrightarrow{z}$ tiene dirección opuesta a la de $\overrightarrow{u}$ entonces

$$\overrightarrow{z} = -\|\overrightarrow{z}\|\frac{\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|} = -4\frac{\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|}$$

y por tanto $r = -4$. Si se quiere emplear la fórmula para r igualmente se obtiene $r = -4$, pues $r = \|\overrightarrow{z}\| \cos 180° = -4$. ■

Ejemplo 1.13

Un cuerpo se desliza sobre un plano inclinado un ángulo θ, como se muestra en la figura 1.37 en la cual $\overrightarrow{u}$ es un vector unitario en la dirección del movimiento y $\overrightarrow{v}$ un vector unitario perpendicular a $\overrightarrow{u}$. Halle, para cada posición del cuerpo en su deslizamiento, las componentes de su peso $\overrightarrow{w}$ en las direcciones de los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$; exprésela en términos de $\overrightarrow{w}, \theta, \overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$.

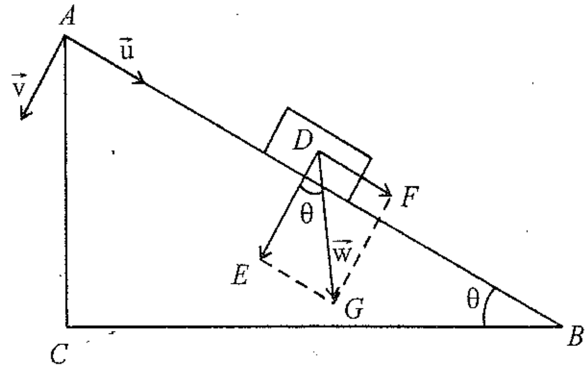


Figura 1.37.

Solución:

Para cada posición del cuerpo, las componentes de su peso $\overrightarrow{w}$ en las direcciones de $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ son respectivamente

$$\overrightarrow{DF} = Proy_{\overrightarrow{u}}\overrightarrow{w} \qquad \text{y} \qquad \overrightarrow{DE} = Proy_{\overrightarrow{v}}\overrightarrow{w}$$

Ahora, el ángulo EDG entre $\overrightarrow{w}$ y $\overrightarrow{v}$ es igual al ángulo θ (¿por qué?), y por tanto el ángulo GDF entre $\overrightarrow{w}$ y $\overrightarrow{u}$ es $90° - \theta$. Luego,

$$Proy_{\overrightarrow{u}}\overrightarrow{w} = (\|\overrightarrow{w}\| \cos(90° - \theta))\,\overrightarrow{u} = (\|\overrightarrow{w}\| \operatorname{sen}\theta)\,\overrightarrow{u}$$

y

$$Proy_{\overrightarrow{v}}\overrightarrow{w} = (\|\overrightarrow{w}\| \cos\theta)\,\overrightarrow{v}$$

Así, las componentes del peso $\overrightarrow{w}$ en las direcciones de $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ son respectivamente

$$Proy_{\overrightarrow{u}}\overrightarrow{w} = (\|\overrightarrow{w}\| \operatorname{sen}\theta)\,\overrightarrow{u} \quad \text{y} \quad Proy_{\overrightarrow{v}}\overrightarrow{w} = (\|\overrightarrow{w}\| \cos\theta)\,\overrightarrow{v}. \qquad \blacksquare$$

1.6 Producto escalar

Hasta el momento hemos sumado dos vectores y multiplicado un escalar por un vector. Ahora consideraremos cierto producto entre dos vectores, el cual es llamado **producto escalar**, pues el resultado es un escalar. Como introducción a dicho producto, nos referiremos a continuación al concepto de **trabajo** en la Física.

Consideremos un cuerpo el cual experimenta un desplazamiento $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{PQ}$ mientras actúa sobre él una fuerza constante no nula $\overrightarrow{F}$, que forma un ángulo α con $\overrightarrow{u}$, como se ilustra en la figura 1.38.

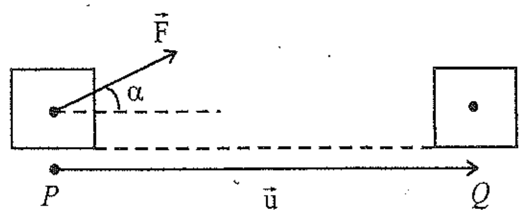


Figura 1.38.

Pues bien, el **trabajo** W realizado por la fuerza $\overrightarrow{F}$ se define como el producto de la componente escalar de $\overrightarrow{F}$ en la dirección del vector desplazamiento $\overrightarrow{u}$ y la magnitud de $\overrightarrow{u}$. Es decir,

$$W = \left(\left\|\overrightarrow{F}\right\| \cos\alpha\right) \|\overrightarrow{u}\|$$

o sea

$$W = \left\|\overrightarrow{F}\right\| \|\overrightarrow{u}\| \cos\alpha \tag{1.9}$$

Observe que el trabajo es una cantidad escalar que puede ser positiva, cero o negativa. Es positiva cuando $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ y $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$; es cero cuando $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ (el cuerpo no se desplaza) o cuando $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ($\overrightarrow{F}$ es perpendicular al desplazamiento $\overrightarrow{u}$), y es negativa cuando $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ y $\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi$. Por ejemplo, cuando se levanta un objeto, el trabajo realizado por la fuerza aplicada es positivo (en este caso, la fuerza aplicada y el desplazamiento tienen la misma dirección) mientras que el trabajo realizado por la fuerza gravitacional es negativo (la fuerza gravitacional y el desplazamiento tienen direcciones opuestas).

El escalar W en (1.9), que se ha obtenido a partir de los vectores $\overrightarrow{F}$ y $\overrightarrow{u}$, se dice el producto escalar de $\overrightarrow{F}$ y $\overrightarrow{u}$ y se denota

$$W = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{u}$$

En general, dados dos vectores geométricos cualesquiera $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{u}$, se define el **producto escalar** $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$ **así:**

- Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ o $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u} = 0$
- Si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$ y α es el ángulo entre $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{u}$,

$$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u} = \|\overrightarrow{v}\| \|\overrightarrow{u}\| \cos\alpha \tag{1.10}$$

Una consecuencia inmediata de la definición dada es que

$$\boxed{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u} = 0 \text{ si y sólo si } \overrightarrow{v} \text{ y } \overrightarrow{u} \text{ son perpendiculares}}$$

Además, como $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$, entonces

$$-\|\overrightarrow{v}\| \|\overrightarrow{u}\| \leq \|\overrightarrow{v}\| \|\overrightarrow{u}\| \cos\alpha \leq \|\overrightarrow{v}\| \|\overrightarrow{u}\|$$

por tanto, para $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ y $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$, se tiene que

$$-\|\overrightarrow{v}\| \|\overrightarrow{u}\| \leq \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u} \leq \|\overrightarrow{v}\| \|\overrightarrow{u}\|$$

o, equivalentemente,

$$\boxed{|\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}| \leq \|\overrightarrow{v}\| \|\overrightarrow{u}\|}$$

Esta desigualdad, la cual es válida también para $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ o $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$, se conoce como **desigualdad de Cauchy-Schwarz.**

El producto escalar tiene las siguientes propiedades, válidas cualesquiera sean los vectores $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ y cualquiera sea el escalar r.

1. $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$
2. $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = \|\overrightarrow{u}\|^2$
3. $(r\overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{v} = r(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u} \cdot (r\overrightarrow{v})$
4. $\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}$
   $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} + \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}$

Las propiedades 1. y 2. se siguen, en forma inmediata, de la definición del producto escalar. La prueba de las propiedades 3. y 4. se deja como ejercicio.

Ejemplo 1.14
Un cubo se desliza entre dos puntos A y B distantes 5 metros sobre un plano inclinado que forma 30° con la horizontal, como en la figura 1.39. Si el cubo pesa 12 Newtons y la fuerza de fricción que se produce por el rozamiento entre el cubo y el plano inclinado es de 3 Newtons, calcule el trabajo realizado por el peso $\overrightarrow{w}$, la fuerza de fricción $\overrightarrow{F_f}$, la normal $\overrightarrow{N}$ y la fuerza resultante $\overrightarrow{F}$ cuando el cubo se desplaza entre los puntos A y B.

Solución:
Para cualquier posición del cubo en su desplazamiento entre los puntos A y B, las fuerzas que actúan sobre él son su peso $\overrightarrow{w}$, la normal $\overrightarrow{N}$ y la fuerza de fricción $\overrightarrow{F_f}$. En la figura 1.39 se muestra el diagrama de dichas fuerzas, como también la fuerza resultante $\overrightarrow{F}$, el vector desplazamiento $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{AB}$ y la descomposición vectorial del peso $\overrightarrow{w}$ en una componente $\overrightarrow{w_r}$ en la dirección del movimiento y una componente $\overrightarrow{w_n}$ en la dirección perpendicular al movimiento.

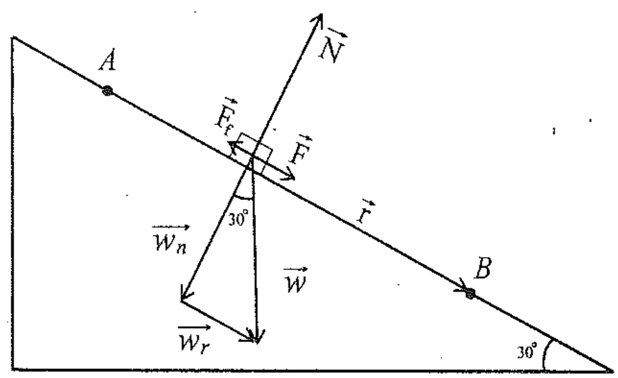


Figura 1.39.

Sean W_1, W_2, W_3 y W_T los trabajos realizados, respectivamente, por el peso $\overrightarrow{w}$, la fricción $\overrightarrow{F_f}$, la normal $\overrightarrow{N}$ y la resultante $\overrightarrow{F}$ cuando el cubo se desplaza de A a B.

Como el ángulo entre $\overrightarrow{w}$ y $\overrightarrow{r}$ es de 60° entonces

$$W_1 = \overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{r} = \|\overrightarrow{w}\| \, \|\overrightarrow{r}\| \cos 60° = (12)(5)\left(\frac{1}{2}\right) = 30 \text{ Joules.}$$

De manera similar, como el ángulo entre $\overrightarrow{F_f}$ y $\overrightarrow{r}$ es de 180° entonces

$$W_2 = \overrightarrow{F_f} \cdot \overrightarrow{r} = \left\|\overrightarrow{F_f}\right\| \|\overrightarrow{r}\| \cos 180° = (3)(5)(-1) = -15 \text{ Joules.}$$

Observe que el trabajo W_2 es negativo ya que la fuerza de fricción $\overrightarrow{F_f}$ tiene dirección contraria a la del vector desplazamiento $\overrightarrow{r}$.

Por otra parte, como el ángulo entre $\overrightarrow{N}$ y $\overrightarrow{r}$ es de 90° entonces

$$W_3 = \overrightarrow{N} \cdot \overrightarrow{r} = \left\|\overrightarrow{N}\right\| \|\overrightarrow{r}\| \cos 90° = 0.$$

Obsérvese que el trabajo W_3 es nulo porque la fuerza normal $\overrightarrow{N}$ es perpendicular al vector desplazamiento $\overrightarrow{r}$. Por último, la fuerza resultante $\overrightarrow{F}$ está dada por

$$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{w} + \overrightarrow{F_f} + \overrightarrow{N} = \overrightarrow{w_r} + \overrightarrow{w_n} + \overrightarrow{F_f} + \overrightarrow{N}$$

pero como la normal $\overrightarrow{N}$ tiene la misma magnitud de la componente $\overrightarrow{w_n}$ del peso y dirección contraria a la de $\overrightarrow{w_n}$, es decir, $\overrightarrow{N} = -\overrightarrow{w_n}$ entonces

$$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{w_r} + \overrightarrow{F_f}.$$

Ahora, $\overrightarrow{w_r}$ tiene la dirección del movimiento y

$$\|\overrightarrow{w_r}\| = \|\overrightarrow{w}\| \, sen 30° = (12)\left(\frac{1}{2}\right) = 6$$

mientras que $\overrightarrow{F_f}$ tiene la dirección contraria a la del movimiento y $\left\|\overrightarrow{F_f}\right\| = 3$. Luego, la fuerza resultante $\overrightarrow{F}$ es tal que $\left\|\overrightarrow{F}\right\| = 3$ y su dirección es la misma que la del movimiento. Así que

$$W_T = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{r} = \left\|\overrightarrow{F}\right\| \|\overrightarrow{r}\| \cos 0° = (3)(5)(1) = 15 \text{ Joules}.$$

Observe que

$$W_T = W_1 + W_2. \quad \blacksquare$$

1.7 Vectores geométricos en el plano cartesiano. Descomposición canónica

Empecemos por recordar que el conjunto de los puntos sobre una recta $\mathcal{L}$ se puede poner en correspondencia biunívoca con el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales como se indica a continuación:

Se elige en $\mathcal{L}$ un punto O al que se llama **origen** y una **orientación** o **dirección**, la cual se dice **positiva** que se indica con una punta de flecha (figura 1.40). En la recta orientada $\mathcal{L}$ se dice que un punto A está a la izquierda de un punto B (o que B está a la derecha de A) si al ir de A a B lo hacemos en sentido positivo. Se escoge una unidad de longitud y luego se hace corresponder un número real x a cada punto X de $\mathcal{L}$ así: 0 corresponde al origen O, 1 corresponde al punto de $\mathcal{L}$ que está una unidad a la derecha de O y en general un número positivo x corresponde al punto X situado x unidades a la derecha de O. Por otra parte, -1 corresponde al punto de $\mathcal{L}$ que está una unidad a la izquierda de O y en general un número negativo x corresponde al punto X situado $-x$ unidades a la izquierda de O. Si a un punto X de $\mathcal{L}$ le corresponde el número real x, de la manera antes indicada, se dice que x es la **coordenada** del punto X.

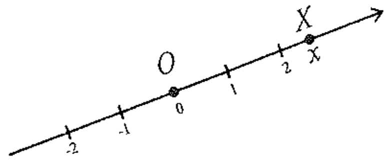


Figura 1.40.

Establecida dicha correspondencia, la recta $\mathcal{L}$ se dice una **recta real**, una **recta numérica** o también un **eje coordenado.**

Ahora recordemos la gran idea del matemático y filósofo Francés Rene Descartes (1596 - 1650) en relación con un sistema de referencia para ubicar puntos en el plano. En ella se hace uso del concepto de **par ordenado** (o **pareja ordenada**) de números reales, el cual se refiere a una pareja de números para los cuales importa el orden en que los coloquemos. El par ordenado que consiste de los números a y b, siendo a el primero y b el segundo, se acostumbra denotarlo en la forma (a, b) o también en la forma $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. En este texto optaremos por emplear la segunda de las notaciones anteriores por simple conveniencia. Nótese que el par $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ es distinto del par $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ pues, aunque los dos están conformados por los mismos números reales 1 y 2, el orden en que estos números aparecen en el primer par es diferente al orden en que aparecen en el segundo. En general, se tiene que

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \text{ si y sólo si } \; a = c \text{ y } b = d.$$

Denotaremos $\mathbb{R}^2$ el conjunto de todos los pares ordenados $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ de números reales, es decir,

$$\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \; / \; a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

La idea de Descartes consistió en considerar en el plano un par de ejes coordenados perpendiculares, con la misma unidad de longitud y con un mismo origen O, el cual es el punto de corte de dichos ejes. Se acostumbra tomar uno de los ejes horizontal y con orientación positiva hacia la derecha (éste es llamado eje x), y el otro (llamado eje y) con orientación positiva hacia arriba. (Ver figura1.41).

Una vez escogido un tal sistema de ejes coordenados (al cual nos referiremos como un **sistema cartesiano** xy) se establece, de manera natural, una correspondencia biunívoca entre el conjunto de puntos del plano y el conjunto $\mathbb{R}^2$ de todos los pares ordenados de números reales. A cada punto P del plano se le hace corresponder un par ordenado $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ de números reales a, b obtenidos de la siguiente manera: desde el punto P se trazan paralelas al eje x y al eje y; el número a es la coordenada del punto donde se corte al eje x, y el número b la coordenada del punto donde se corte al eje y. (Ver figura1.41).

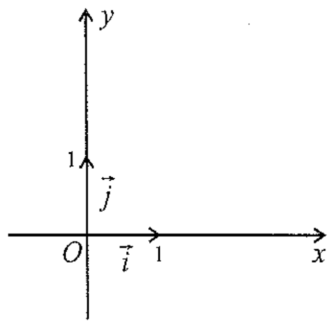


Figura 1.42.

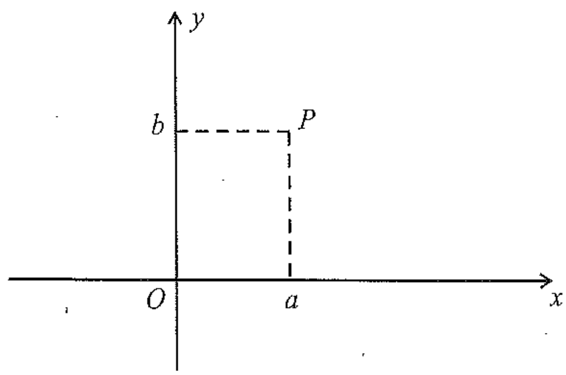


Figura 1.41.

Los números a y b se dicen las **coordenadas cartesianas** o **rectangulares** del punto P; a se dice **la abscisa** o también **coordenada** x, y b se dice **la ordenada** o también **coordenada** y del punto P. De esta manera a cada punto P del plano le corresponde la pareja $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ de sus coordenadas. Esta correspondencia es biunívoca, ya que si partimos de una pareja ordenada $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ de números reales e invertimos el proceso antes descrito, vemos que existe un único punto P del plano del cual $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ es su pareja de coordenadas.

Es necesario tener presente que el plano (cuyos elementos son puntos) es distinto del conjunto $\mathbb{R}^2$ (cuyos elementos son pares ordenados de números reales). Sin embargo, una vez se fija un sistema cartesiano en el plano, se usa la correspondencia antes mencionada entre el plano y $\mathbb{R}^2$ para identificar cada punto P del plano con su par $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ de coordenadas. Así, diremos "el punto $P = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$" en vez de "el punto P cuyo par de coordenadas es $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$".

En adelante asumiremos que el plano está dotado de un sistema cartesiano y nos referiremos a él como **plano cartesiano**. A continuación consideraremos los vectores geométricos en el plano cartesiano.

Es costumbre denotar $\overrightarrow{i}$ al vector unitario que apunta en la dirección positiva del eje x, y $\overrightarrow{j}$ al vector unitario que apunta en la dirección positiva del eje y. En la figura 1.42 se muestran dichos vectores $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ con su punto inicial en el origen.

Puesto que $\overrightarrow{i}$ y $\overrightarrow{j}$ no son paralelos se tiene que:

$$\boxed{\text{Para todo vector } \overrightarrow{u}\text{, existen únicos escalares } a \text{ y } b \text{ tales que } \overrightarrow{u} = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j}} \tag{1.11}$$

La descomposición

$$\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j}$$

de un vector $\overrightarrow{u}$ se llama **descomposición canónica** de $\overrightarrow{u}$. Los números a y b (los cuales son las componentes escalares de $\overrightarrow{u}$ en las direcciones de $\overrightarrow{i}$ y $\overrightarrow{j}$ respectivamente) se dicen las **componentes escalares** de $\overrightarrow{u}$ o simplemente las **componentes** de $\overrightarrow{u}$; a se dice **la componente** x y b **la componente** y.

Dado que $\overrightarrow{i}$ y $\overrightarrow{j}$ son unitarios y apuntan en las direcciones positivas de los ejes x y y, respectivamente, la descomposición canónica de cualquier vector $\overrightarrow{u}$ es bastante sencilla de obtener. Por ejemplo, el vector $\overrightarrow{u}$ que va del origen al punto $\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ se expresa claramente en la forma

$$\overrightarrow{u} = 4\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$$

como se aprecia en la figura 1.43.

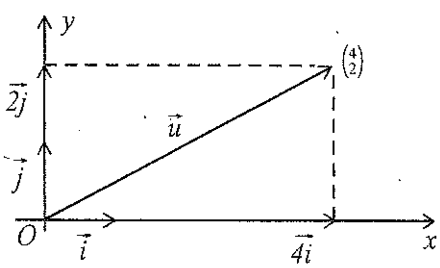


Figura 1.43.

Recíprocamente, si el vector $\overrightarrow{u} = 4\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$ tiene su punto inicial en el origen entonces su punto final es $P = \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$. En general, se tiene que

$$\boxed{\overrightarrow{OP} = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j} \quad \text{si y sólo si } P = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}}$$

En la figura 1.44 se ilustra lo anterior en el caso $a < 0$ y $b > 0$.

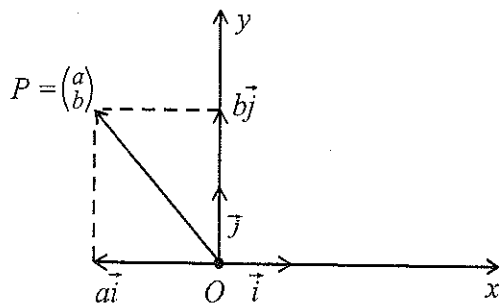


Figura 1.44.

Para cada punto P, el vector $\overrightarrow{OP}$ se dirá el **vector de posición del** punto P.

Hallemos ahora la descomposición canónica de un vector cualquiera $\overrightarrow{PQ}$ con punto inicial $P = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ y punto final $Q = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ (figura 1.45).

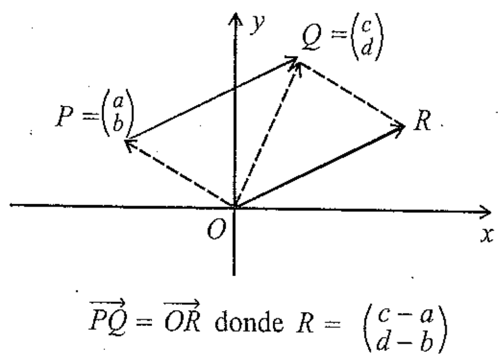


Figura 1.45.

Como $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$ y dado que

$$\overrightarrow{OQ} = c\,\vec{i} + d\,\vec{j} \quad \text{y} \quad \overrightarrow{OP} = a\,\vec{i} + b\,\vec{j}$$

entonces

$$\overrightarrow{PQ} = (c\,\vec{i} + d\,\vec{j}) - (a\,\vec{i} + b\,\vec{j}) = (c-a)\,\vec{i} + (d-b)\,\vec{j}.$$

Nótese que si $R = \begin{pmatrix} c-a \\ d-b \end{pmatrix}$ entonces

$$\overrightarrow{OR} = (c-a)\,\vec{i} + (d-b)\,\vec{j}$$

y por tanto $\overrightarrow{PQ}$ es igual al vector de posición $\overrightarrow{OR}$. (Ver figura 1.45).

Tenemos así que:

Si $P = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ y $Q = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ entonces la descomposición canónica de $\overrightarrow{PQ}$ es

$$\overrightarrow{PQ} = (c-a)\overrightarrow{i} + (d-b)\overrightarrow{j}$$

y así

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OR} \quad \text{donde} \quad R = \begin{pmatrix} c-a \\ d-b \end{pmatrix}$$

Dada la unicidad de la descomposición canónica de cualquier vector $\overrightarrow{u}$ se tiene que:

Si $\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j}$ y $\overrightarrow{v} = a'\overrightarrow{i} + b'\overrightarrow{j}$ entonces
$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$ si y sólo si $a = a'$ y $b = b'$

En particular, como $\overrightarrow{0} = 0\overrightarrow{i} + 0\overrightarrow{j}$,

Si $\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j}$ entonces
$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ si y sólo si $a = 0$ y $b = 0$

Ejemplo 1.15

Sean $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $Q = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

a) Halle la descomposición canónica del vector $\overrightarrow{PQ}$.

b) Halle el punto R tal que $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OR}$.

Solución:

a) La descomposición canónica del vector $\overrightarrow{PQ}$ es

$$\overrightarrow{PQ} = (-1-2)\overrightarrow{i} + (4-3)\overrightarrow{j} = -3\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$$

b) Puesto que $\overrightarrow{PQ} = -3\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$ se tiene que $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OR}$ donde $R = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$. (Figura 1.46).

■

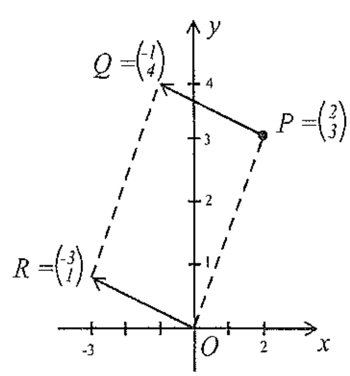


Figura 1.46.

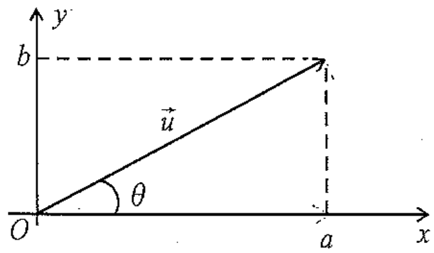


Figura 1.47.

Tenemos ahora dos maneras de describir cualquier vector no nulo $\vec{u}$: una dando la magnitud $\|\vec{u}\|$ y la dirección θ, y otra expresándolo en la forma $\vec{u} = a\,\vec{i} + b\,\vec{j}$, es decir, dando su descomposición canónica. Podemos pasar de cualquiera de las dos a la otra, como se muestra a continuación:

Digamos que partimos de $\vec{u} = a\,\vec{i} + b\,\vec{j}$. (Ver figura 1.47.)

En primer lugar, según Teorema de Pitágoras, es claro que

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

En cuanto a la dirección θ de $\vec{u}$ se tiene lo siguiente:

- Si $a = 0$ entonces $\theta = 90°$ cuando $b > 0$, y $\theta = 270°$ cuando $b < 0$.
- Si $a \neq 0$ entonces
$$\tan\theta = \frac{b}{a}.$$

Así, si θ es agudo entonces $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$. Ahora, si θ no es agudo, entonces $\theta \neq \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$; sin embargo, a partir de $\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$ siempre podremos obtener la dirección θ. (Vea ejemplo 1.16).

Digamos ahora que partimos de $\vec{u}$ descrito dando su magnitud $\|\vec{u}\|$ y su dirección θ, y supongamos que $\vec{u} = a\,\vec{i} + b\,\vec{j}$. (Ver figura 1.47).

Como $\cos\theta = \dfrac{a}{\|\vec{u}\|}$ y $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{b}{\|\vec{u}\|}$ entonces

$$a = \|\vec{u}\|\cos\theta \quad \text{y} \quad b = \|\vec{u}\|\operatorname{sen}\theta$$

y por tanto, la descomposición canónica de $\vec{u}$ es

$$\vec{u} = (\|\vec{u}\|\cos\theta)\,\vec{i} + (\|\vec{u}\|\operatorname{sen}\theta)\,\vec{j}$$

que podemos escribir también como

$$\vec{u} = \|\vec{u}\|\,((\cos\theta)\,\vec{i} + (\operatorname{sen}\theta)\,\vec{j}\,).$$

Nótese que $(\cos\theta)\,\vec{i} + (\operatorname{sen}\theta)\,\vec{j}$ es un vector unitario (pues $\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$) con la misma dirección de $\vec{u}$.

Ejemplo 1.16
Hallar la magnitud y la dirección de cada uno de los vectores $\overrightarrow{z_1} = 3\overrightarrow{i} + 5\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{z_2} = -\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$ y $\overrightarrow{z_3} = 6\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j}$.

Solución:
En la figura 1.48 se muestran los vectores $\overrightarrow{z_1}, \overrightarrow{z_2}, \overrightarrow{z_3}$ con punto inicial en el origen y sus respectivas direcciones θ_1, θ_2 y θ_3.

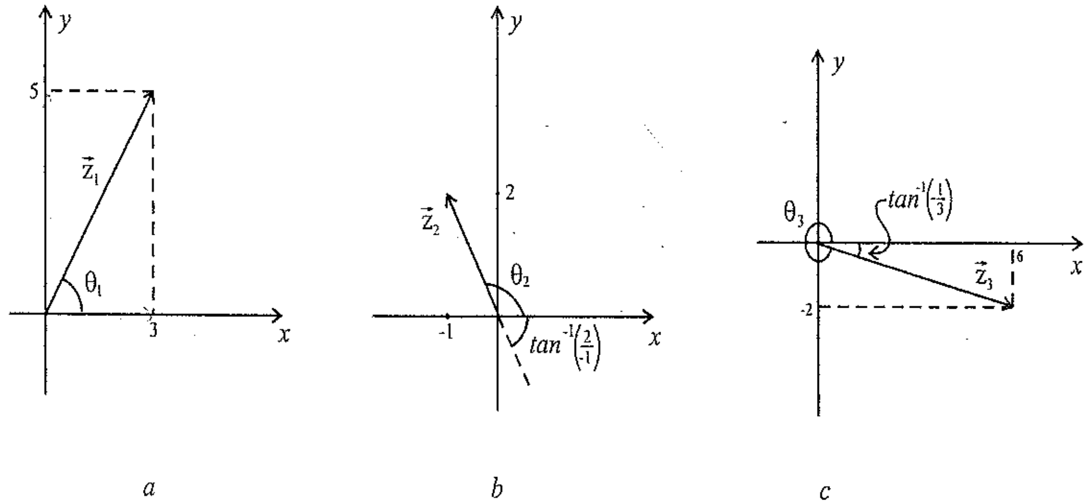


Figura 1.48.

Como $\overrightarrow{z_1} = 3\overrightarrow{i} + 5\overrightarrow{j}$ entonces $\|\overrightarrow{z_1}\| = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}$. De manera similar,

$$\|\overrightarrow{z_2}\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5} \text{ y } \|\overrightarrow{z_3}\| = \sqrt{6^2 + (-2)^2} = \sqrt{40}.$$

A continuación determinamos θ_1, θ_2 y θ_3 :

- $\tan\theta_1 = \frac{5}{3}$ y como $0 < \theta_1 < 90°$ entonces $\theta_1 = \tan^{-1}(\frac{5}{3}) = 59.04°$. (Vea figura 1.48*a*).
- $\tan\theta_2 = -\frac{2}{1}$, pero como $90° < \theta_2 < 180°$ entonces $\theta_2 \neq \tan^{-1}(-\frac{2}{1})$. Sin embargo, (vea figura 1.48*b*), $\theta_2 = \tan^{-1}(-\frac{2}{1}) + 180° = -63.43° + 180° = 116.57°$.
- De manera similar al caso anterior, $\tan\theta_3 = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$, pero como $270° < \theta_3 < 360°$ entonces $\theta_3 \neq \tan^{-1}(-\frac{1}{3})$. En este caso $\theta_3 = \tan^{-1}(-\frac{1}{3}) + 360° = -18.43° + 360° = 341.57°$. (Vea figura 1.48*c*). ■

Ejemplo 1.17
Halle la descomposición canónica del vector $\overrightarrow{OP}$ tal que $\left\|\overrightarrow{OP}\right\| = \frac{5}{2}$ y $dir(\overrightarrow{OP}) = \frac{3\pi}{4}\ rad$. (Figura 1.49).

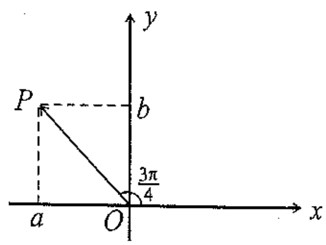


Figura 1.49.

Solución:

La descomposición canónica de $\overrightarrow{OP}$ está dado por

$$\overrightarrow{OP} = a\,\overrightarrow{i} + b\,\overrightarrow{j}$$

donde

$$a = \left\|\overrightarrow{OP}\right\| \cos\frac{3\pi}{4} = \frac{5}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{5}{2\sqrt{2}} \text{ y } b = \left\|\overrightarrow{OP}\right\| sen\frac{3\pi}{4} = \frac{5}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{5}{2\sqrt{2}}.$$

Así, la descomposición canónica de $\overrightarrow{OP}$ es

$$\overrightarrow{OP} = -\frac{5}{2\sqrt{2}}\overrightarrow{i} + \frac{5}{2\sqrt{2}}\overrightarrow{j}. \quad \blacksquare$$

Si se conoce la descomposición canónica de vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ es muy sencillo hallar $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ y también $r\overrightarrow{u}$, para cualquier $r \in \mathbb{R}$. En efecto, se tiene que:

> Si $\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j}$ y $\overrightarrow{v} = c\overrightarrow{i} + d\overrightarrow{j}$ entonces
> - $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (a+c)\overrightarrow{i} + (b+d)\overrightarrow{j}$
> - $r\overrightarrow{u} = (ra)\overrightarrow{i} + (rb)\overrightarrow{j}$

Ejemplo 1.18

Si $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{v} = -\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j}$ y $\overrightarrow{w} = 4\overrightarrow{j}$, hallar la descomposción canónica de los vectores $2\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{v} - 2\overrightarrow{w}$.

Solución:

$$\begin{aligned}
2\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} &= 2(2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}) + (-\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j}) \\
&= (4\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}) + (-\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j}) \\
&= (4-1)\overrightarrow{i} + (2+3)\overrightarrow{j} \\
&= 3\overrightarrow{i} + 5\overrightarrow{j}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{v} - 2\overrightarrow{w} &= (2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}) + 3(-\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j}) - 2(4\overrightarrow{j}) \\
&= 2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - 3\overrightarrow{i} + 9\overrightarrow{j} - 8\overrightarrow{j} \\
&= (2-3)\overrightarrow{i} + (1+9-8)\overrightarrow{j} \\
&= -\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.19
Sean $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ los vectores mostrados en la figura 1.50, tales que $\|\overrightarrow{u}\| = 2$ y $\|\overrightarrow{v}\| = 1$. Halle la magnitud y dirección del vector $\overrightarrow{z} = 2\overrightarrow{u} + 4\overrightarrow{v}$.

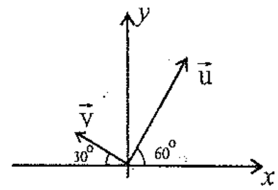


Figura 1.50.

Solución:
Hallemos la descomposición canónica de $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$, para luego hallar la del vector $\overrightarrow{z}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u} &= (\|\overrightarrow{u}\|\cos 60°)\,\overrightarrow{i} + (\|\overrightarrow{u}\|\,\text{sen}60°)\,\overrightarrow{j}\\ &= 2\left(\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{i} + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\overrightarrow{j}\\ &= \overrightarrow{i} + \sqrt{3}\,\overrightarrow{j}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{v} &= (\|\overrightarrow{v}\|\cos 150°)\,\overrightarrow{i} + (\|\overrightarrow{v}\|\,\text{sen}150°)\,\overrightarrow{j}\\ &= (\cos 150°)\,\overrightarrow{i} + (\text{sen}150°)\,\overrightarrow{j}\\ &= (-\cos 30°)\,\overrightarrow{i} + (\text{sen}30°)\,\overrightarrow{j}\\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{i} + \frac{1}{2}\overrightarrow{j}.\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{z} &= 2\left(\overrightarrow{i} + \sqrt{3}\,\overrightarrow{j}\right) + 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{i} + \frac{1}{2}\overrightarrow{j}\right)\\ &= (2 - 2\sqrt{3})\,\overrightarrow{i} + (2\sqrt{3} + 2)\,\overrightarrow{j}.\end{aligned}$$

Ahora sí hallemos $\|\overrightarrow{z}\|$ y $dir(\overrightarrow{z})$:
$\|\overrightarrow{z}\| = \sqrt{(2 - 2\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{3} + 2)^2} = 2\sqrt{(1 - \sqrt{3})^2 + (\sqrt{3} + 1)^2} = 2\sqrt{8} = 4\sqrt{2}$.

Sea $\theta = dir(\overrightarrow{z})$. Entonces $\tan\theta = \dfrac{2\sqrt{3} + 2}{2 - 2\sqrt{3}}$ y como $90° < \theta < 180°$, pues $2 - 2\sqrt{3} < 0$ y $2\sqrt{3} + 2 > 0$, entonces

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{3} + 2}{2 - 2\sqrt{3}}\right) + 180° = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}}\right) + 180° = -75° + 180° = 105°. \quad \blacksquare$$

Hemos visto cómo a partir de la descomposición canónica podemos hallar la magnitud y la dirección de un vector. También hemos visto cómo se realizan de manera sencilla la suma de vectores y la multiplicación de un escalar por un vector cuando se conoce la descomposición canónica de los vectores. Ahora obtendremos una expresión muy simple para el producto escalar $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ de dos vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$, en términos de las componentes (escalares) de dichos vectores.

Sean $\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j}$ y $\overrightarrow{v} = c\overrightarrow{i} + d\overrightarrow{j}$. Supongamos que $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$ y que el ángulo α entre $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ no es de $0°$, ni de $180°$, es decir, $0° < \alpha < 180°$. (Vea figura 1.51).

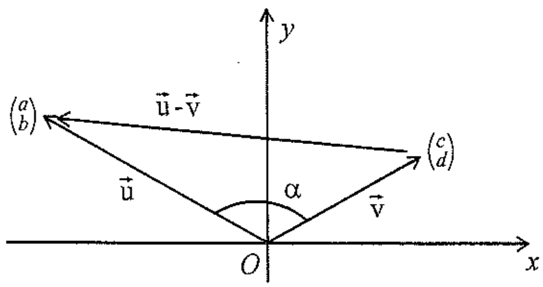


Figura 1.51.

De la ley del coseno, aplicada al triángulo de la figura 1.51 se obtiene que

$$\|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 - 2\,\|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|\cos\alpha \qquad (1.12)$$

Ahora, como el lector puede comprobar sin mucha dificultad, esta igualdad también es válida si $\alpha = 0°$ o si $\alpha = 180°$, casos en los cuales no tendríamos un triángulo como el de la figura 1.51. De manera que la igualdad (1.12) es válida para $0° \leq \alpha \leq 180°$. Escribamos dicha igualdad en la forma

$$\|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|\cos\alpha = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2\right)$$

y sustituyamos en su lado derecho

$$\|\overrightarrow{u}\|^2 = a^2 + b^2, \;\; \|\overrightarrow{v}\|^2 = c^2 + d^2 \;\; \text{y} \;\; \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2 = (a-c)^2 + (b-d)^2.$$

Luego de desarrollar los cuadrados $(a-c)^2, (b-d)^2$ y de simplificar, se obtiene la importante igualdad

$$\|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|\cos\alpha = ac + bd. \qquad (1.13)$$

Nótese que el lado izquierdo de (1.13) es justamente $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$; nótese, además, que el lado derecho de (1.13) también es igual a $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ cuando $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ o $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$. Tenemos así que

$$\boxed{\text{Si } \overrightarrow{u} = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j} \text{ y } \overrightarrow{v} = c\overrightarrow{i} + d\overrightarrow{j} \text{ entonces } \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = ac + bd} \qquad (1.14)$$

Ahora, ya que el producto $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ es fácil de calcular a partir de las descomposiciones canónicas de $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$, resulta de gran utilidad expresar, en términos de $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$, el ángulo entre $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$, la componente escalar de $\overrightarrow{v}$ en la dirección de $\overrightarrow{u}$ y la proyección de $\overrightarrow{v}$ sobre $\overrightarrow{u}$. Tales expresiones se derivan de la igualdad

$$\|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|\cos\alpha = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$$

Por ejemplo, despejando $\cos\alpha$ en dicha igualdad se tiene que

$$\boxed{\text{Si } \overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0} \text{ y } \overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}\text{, el ángulo } \alpha \text{ entre } \overrightarrow{u} \text{ y } \overrightarrow{v} \text{ es tal que } \cos\alpha = \frac{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|}} \tag{1.15}$$

También podemos despejar $\|\overrightarrow{v}\|\cos\alpha$, que es la componente escalar de $\overrightarrow{v}$ en la dirección de $\overrightarrow{u}$ cuando $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$. Se obtiene

$$\|\overrightarrow{v}\|\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{u}\|}.$$

Nótese que el lado derecho, el cual es 0 cuando $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$, también nos da la componente escalar de $\overrightarrow{v}$ en la dirección de $\overrightarrow{u}$ si $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$. Así que,

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Si } \overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}\text{, la componente escalar de } \overrightarrow{v} \text{ en la dirección de } \overrightarrow{u} \text{ es } \dfrac{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{u}\|} \\ \text{y así, } Proy_{\overrightarrow{u}}\overrightarrow{v} = \left(\dfrac{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{u}\|}\right)\dfrac{\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|} = \left(\dfrac{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{u}\|^2}\right)\overrightarrow{u} = \left(\dfrac{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}}{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u}}\right)\overrightarrow{u}\end{array}} \tag{1.16}$$

Empleando (1.14) se puede probar rápidamente las propiedades 3. y 4. del producto escalar, que fueron enunciadas luego de la definición de dicho producto. Como ejemplo, probaremos la propiedad 3.:

Digamos que $\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j}$ y $\overrightarrow{v} = c\overrightarrow{i} + d\overrightarrow{j}$. Entonces

$$\begin{aligned}(r\overrightarrow{u})\cdot\overrightarrow{v} &= \left((ra)\overrightarrow{i} + (rb)\overrightarrow{j}\right)\cdot\left(c\overrightarrow{i} + d\overrightarrow{j}\right)\\ &= (ra)c + (rb)d\\ &= r(ac+bd)\\ &= r(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}).\end{aligned}$$

De manera similar se prueba que $\overrightarrow{u}\cdot(r\overrightarrow{v}) = r(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v})$. ♦

Ejemplo 1.20

Considere los vectores $\overrightarrow{u} = 3\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$ y $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$. Hallar:

a) $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$

b) El ángulo α entre $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$.

c) La componente escalar de $\overrightarrow{v}$ en la dirección de $\overrightarrow{u}$ y el vector $Proy_{\overrightarrow{u}}\overrightarrow{v}$.

Solución:

En la figura 1.52 se muestran los vectores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, el ángulo α entre ellos y el vector $Proy_{\overrightarrow{u}}\overrightarrow{v}$, el cual es $\overrightarrow{OP}$.

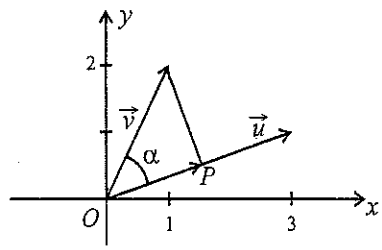


Figura 1.52.

a) De acuerdo con (1.14), $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=(3)(1)+(1)(2)=5.$
b) Para hallar α emplearemos (1.15). Como $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=5$, $\|\overrightarrow{u}\|=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$ y $\|\overrightarrow{v}\|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$ entonces

$$\cos\alpha=\frac{5}{\sqrt{10}\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

y como $0°<\alpha<180°$, $\alpha=\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=45°$.

c) La componente escalar de $\overrightarrow{v}$ en la dirección de $\overrightarrow{u}$ es $\dfrac{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{u}\|}=\dfrac{5}{\sqrt{10}}$, y por tanto

$$Proy_{\overrightarrow{u}}\overrightarrow{v}=\frac{5}{\sqrt{10}}\frac{\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|}=\frac{5}{\sqrt{10}}\frac{\overrightarrow{u}}{\sqrt{10}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{u}=\frac{1}{2}\left(3\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}\right)\quad\blacksquare$$

Ejemplo 1.21
Hallar el área $\mathcal{A}$ del paralelogramo cuyos vértices son los puntos $A=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ y $D=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$.

Solución:
En la figura 1.53 se muestra el paralelogramo en consideración, su altura h relativa a la base $\overline{AB}$ y el ángulo α entre los vectores $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$.

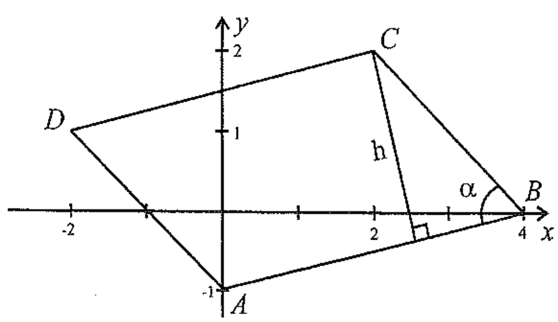


Figura 1.53.

El área del paralelogramo es

$$\mathcal{A}=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|h$$

y como $h = \left\|\overrightarrow{BC}\right\| \operatorname{sen}\alpha$, entonces

$$\mathcal{A} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \left\|\overrightarrow{BC}\right\| \operatorname{sen}\alpha$$

o también

$$\mathcal{A} = \left\|\overrightarrow{BA}\right\| \left\|\overrightarrow{BC}\right\| \operatorname{sen}\alpha \tag{1.17}$$

Procedemos entonces a hallar $\left\|\overrightarrow{BA}\right\|, \left\|\overrightarrow{BC}\right\|$ y $\operatorname{sen}\alpha$:

$\overrightarrow{BA} = (0-4)\overrightarrow{i} + (-1-0)\overrightarrow{j} = -4\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}, \quad \left\|\overrightarrow{BA}\right\| = \sqrt{(-4)^2 + (-1)^2} = \sqrt{17}$

$\overrightarrow{BC} = (2-4)\overrightarrow{i} + (2-0)\overrightarrow{j} = -2\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}, \quad \left\|\overrightarrow{BC}\right\| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8}.$

Como α es el ángulo entre $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$ entonces

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left\|\overrightarrow{BA}\right\| \left\|\overrightarrow{BC}\right\|} = \frac{(-4)(-2)+(-1)(2)}{\sqrt{17}\sqrt{8}} = \frac{6}{\sqrt{17}\sqrt{8}} = \frac{3}{\sqrt{17}\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{34}}$$

Ahora, $\operatorname{sen}\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$, pero como α es águdo entonces

$$sen\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{9}{34}} = \frac{5}{\sqrt{34}}$$

Luego, sustituyendo en (1.17) $\left\|\overrightarrow{BA}\right\| = \sqrt{17}$, $\left\|\overrightarrow{BC}\right\| = \sqrt{8}$ y $\operatorname{sen}\alpha = \frac{5}{\sqrt{34}}$, tenemos que el área del paralelogramo es

$$\mathcal{A} = \sqrt{17}\sqrt{8}\left(\frac{5}{\sqrt{34}}\right) = 10 \text{ (unidades cuadradas).} \quad \blacksquare$$

Ejemplo 1.22
Considere el triángulo cuyos vértices son los puntos $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$.

a) ¿Es el triángulo ABC un triángulo rectángulo?
b) Halle los tres ángulos del triángulo ABC.
c) Calcule el área del triángulo ABC.

Solución:

En la figura 1.54 se muestra el triángulo ABC.

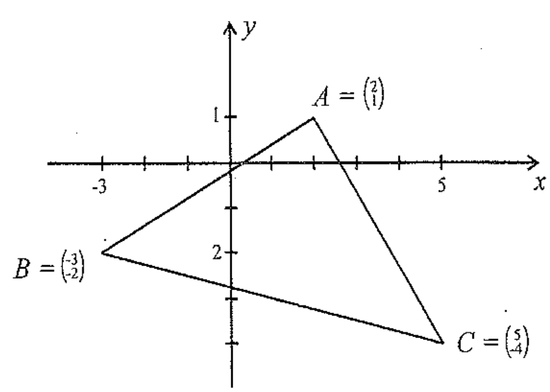


Figura 1.54.

a) El triángulo ABC será un triángulo rectángulo si y sólo si dos de sus lados son perpendiculares, es decir, si y sólo si alguno de los productos escalares $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AC}$ es cero. Calculemos, entonces, estos productos:

Como $\overrightarrow{AB}=(-3-2)\overrightarrow{i}+(-2-1)\overrightarrow{j}=-5\overrightarrow{i}-3\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{AC}=(5-2)\overrightarrow{i}+(-4-1)\overrightarrow{j}=3\overrightarrow{i}-5\overrightarrow{j}$ y $\overrightarrow{BC}=(5-(-3))\overrightarrow{i}+(-4-(-2))\overrightarrow{j}=8\overrightarrow{i}-2\overrightarrow{j}$ entonces

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} &= (-5)(8)+(-3)(-2)=-34 \qquad (\text{así } \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}\neq 0)\\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} &= (-5)(3)+(-3)(-5)=0.\end{aligned}$$

Como $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ entonces los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son perpendiculares y por tanto el triángulo ABC es rectángulo.

b) Por el literal a) sabemos que el ángulo $\widehat{BAC}$ es recto. Sean θ y α, respectivamente, los ángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{BCA}$. Puesto que θ es el ángulo entre los vectores $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$ tenemos que $\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left\|\overrightarrow{BA}\right\|\left\|\overrightarrow{BC}\right\|}$.

Ahora, como

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\left(-\overrightarrow{AB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{BC}\right)=-\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}\right)=34 \text{ y } \left\|\overrightarrow{BA}\right\|=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$$

se tiene que

$$\cos\theta=\frac{34}{\sqrt{(-5)^2+(-3)^2}\sqrt{8^2+(-2)^2}}=\frac{34}{\sqrt{34}\sqrt{68}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

y así $\theta=\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=45°$. Se sigue que $\alpha=45°$.

c) Como el ángulo $\widehat{BAC}$ es recto entonces el área $\mathcal{A}$ del triángulo ABC es

$$\mathcal{A}=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\left\|\overrightarrow{AC}\right\|=\frac{1}{2}\sqrt{34}\sqrt{34}=17 \text{ (unidades cuadradas).} \quad ■$$

Ejemplo 1.23

Probar que las diagonales de un rombo son bisectrices de sus correspondientes ángulos.

Prueba:

En la figura 1.55 se muestra un rombo $OPQR$.

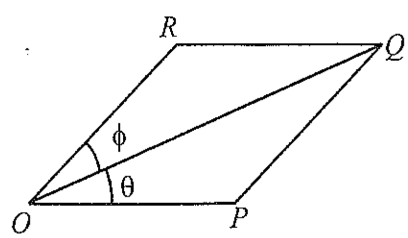


Figura 1.55.

Recordemos que un rombo es un paralelogramo con sus lados de igual longitud.

Veamos que la diagonal $\overline{OQ}$ es bisectriz del ángulo $\widehat{POR}$, es decir, que los ángulos ϕ y θ que se muestran en la figura 1.55 son iguales.

Como θ y ϕ son, respectivamente, los ángulos entre $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{OQ}$ y entre $\overrightarrow{OQ}$ y $\overrightarrow{OR}$ entonces

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}}{\left\|\overrightarrow{OP}\right\|\left\|\overrightarrow{OQ}\right\|} = \frac{\overrightarrow{OP}\cdot\left(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OR}\right)}{\left\|\overrightarrow{OP}\right\|\left\|\overrightarrow{OQ}\right\|} = \frac{\left\|\overrightarrow{OP}\right\|^2+\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OR}}{\left\|\overrightarrow{OP}\right\|\left\|\overrightarrow{OQ}\right\|}$$

$$\cos\phi = \frac{\overrightarrow{OR}\cdot\overrightarrow{OQ}}{\left\|\overrightarrow{OR}\right\|\left\|\overrightarrow{OQ}\right\|} = \frac{\overrightarrow{OR}\cdot\left(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OR}\right)}{\left\|\overrightarrow{OR}\right\|\left\|\overrightarrow{OQ}\right\|} = \frac{\overrightarrow{OR}\cdot\overrightarrow{OP}+\left\|\overrightarrow{OR}\right\|^2}{\left\|\overrightarrow{OR}\right\|\left\|\overrightarrow{OQ}\right\|}$$

Ahora, como el paralelogramo $OPQR$ es un rombo entonces $\left\|\overrightarrow{OP}\right\| = \left\|\overrightarrow{OR}\right\|$ y puesto que $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OR}\cdot\overrightarrow{OP}$, al comparar los miembros derechos de las dos igualdades anteriores, se concluye que $\cos\phi = \cos\theta$. Se sigue que $\theta = \phi$, como se quería probar, pues θ y ϕ se encuentran entre $0°$ y $180°$.

En forma análoga el lector puede mostrar que la diagonal $\overline{PR}$ es bisectriz del ángulo $\widehat{OPQ}$. ♦

Ejemplo 1.24
Probar que las diagonales de un paralelogramo son perpendiculares si y sólo si el paralelogramo es un rombo.

Prueba:
En la figura 1.56 se muestra un paralelogramo $OPQR$ y sus diagonales $\overline{OQ}$ y $\overline{PR}$.

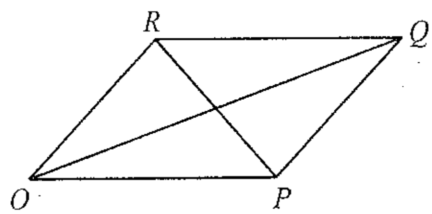


Figura 1.56.

En primer lugar,

$$\begin{aligned}
\overline{OQ} \text{ y } \overline{PR} \text{ son perpendiculares} &\iff \overrightarrow{OQ} \text{ y } \overrightarrow{PR} \text{ son perpendiculares}\\
&\iff \overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{PR} = 0\\
&\iff \left(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OR}\right)\cdot\left(\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OP}\right) = 0\\
&\iff \overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OR} - \left\|\overrightarrow{OP}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{OR}\right\|^2 - \overrightarrow{OR}\cdot\overrightarrow{OP} = 0\\
&\iff \left\|\overrightarrow{OR}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{OP}\right\|^2\\
&\iff \left\|\overrightarrow{OR}\right\| = \left\|\overrightarrow{OP}\right\|.
\end{aligned}$$

Ahora, como el cuadrilátero $OPQR$ es un paralelogramo entonces

$$\begin{aligned}
\left\|\overrightarrow{OR}\right\| = \left\|\overrightarrow{OP}\right\| &\iff \left\|\overrightarrow{OR}\right\| = \left\|\overrightarrow{OP}\right\| = \left\|\overrightarrow{PQ}\right\| = \left\|\overrightarrow{RQ}\right\|\\
&\iff \text{el paralelogramo } OPQR \text{ es un rombo}
\end{aligned}$$

Así, las diagonales $\overline{OQ}$ y $\overline{PR}$ son perpendiculares si y sólo si el paralelogramo $OPQR$ es un rombo. ♦

1.8 Ejercicios

Sección 1.1

1. Para cada literal dibujar el vector con las características descritas.
   a) $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = 5$ y $dir\left(\overrightarrow{AB}\right) = 20°$.
   b) $\|\overrightarrow{v}\| = 2$ y $dir\left(\overrightarrow{v}\right) = 180°$.
   c) $\|\overrightarrow{w}\| = \frac{1}{2}$ y $dir\left(\overrightarrow{w}\right) = 240°$.

2. Dos autos parten al mismo tiempo de un punto O. El primero se desplaza a una velocidad de 40 km/h en dirección $S\ 60°\ O$ y el segundo con una velocidad de 30 km/h hacia el sureste. Representar gráficamente esta situación y calcular la distancia entre los dos autos cuando han transcurrido dos horas.

Sección 1.2

3. Dos remolcadores A y B llevan un barco a un puerto. El remolcador A ejerce una fuerza de 7000 lbf sobre su cable con dirección de 80°. El remolcador B ejerce una fuerza de 5000 lbf con dirección de 20°. Hacer un gráfico que muestre la fuerza resultante y hallar la magnitud y dirección de dicha fuerza.

4. Un avión viaja a una velocidad de 100 millas por hora (respecto al viento) hacia el sureste y el viento tiene una velocidad de 30 millas por hora (respecto a tierra) hacia el nordeste. ¿Cuál es la velocidad resultante del avión con respecto a tierra?.

5. La corriente de un río fluye del oeste hacia el este a 0.8 km/h. Un nadador parte de la rivera de dicho río nadando hacia el norte, con una velocidad de nado de 1.5 km/h con respecto al agua.

   a) Hallar la velocidad del nadador respecto a tierra.

   b) Suponga que el ancho del río es 1 km. ¿Qué tan lejos, río abajo, el nadador alcanza la otra orilla?.

6. Sean $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ vectores del plano. Probar que $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}$ implica $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{w}$.

Sección 1.3

7. Sea $\overrightarrow{v}$ un vector tal que $\|\overrightarrow{v}\| = 4$ y $dir\left(\overrightarrow{v}\right) = 45°$.

   a) Dibujar un vector $\overrightarrow{x}$ tal que $\|\overrightarrow{x}\| = 9$ y $dir\left(\overrightarrow{x}\right) = dir\left(\overrightarrow{v}\right)$.

   b) Dibujar un vector $\overrightarrow{y}$ tal que $\|\overrightarrow{y}\| = 5$ y la dirección de $\overrightarrow{y}$ es la opuesta a la dirección de $\overrightarrow{v}$.

   c) Expresar los vectores $\overrightarrow{x}$ y $\overrightarrow{y}$ como múltiplos escalares del vector $\overrightarrow{v}$.

8. Sean A, B, C y D puntos del plano tales que D está sobre el segmento $\overline{AB}$ y su distancia al punto A es $\frac{2}{3}$ de la distancia entre A y B. Si E es el punto medio del segmento de recta $\overline{AC}$, expresar el vector $\overrightarrow{DE}$ en términos de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

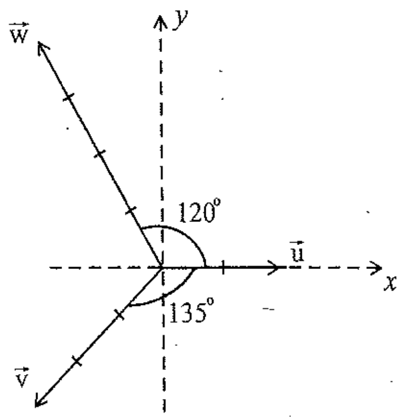
9. Suponiendo que $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, expresar $\overrightarrow{DE}$ en términos de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$.

10. Considere un cuadrilátero $ABCD$ y sean P, Q, R y S los puntos medios de sus lados $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ y $\overline{DA}$ respectivamente. Demostrar, utilizando vectores geométricos, que P, Q, R y S son los vértices de un paralelogramo. (**Ayuda:** Vea ejemplo 1.9).

11. Demostrar vectorialmente que las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio.

Sección 1.4

12. Considerar los vectores $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ que se muestran en la figura, donde $\|\overrightarrow{u}\| = 2$, $\|\overrightarrow{v}\| = 3$ y $\|\overrightarrow{w}\| = 4$.



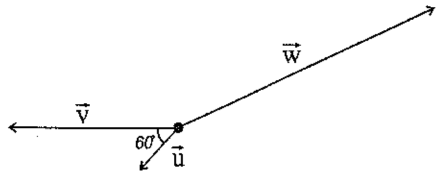
Encontrar la descomposición de $\overrightarrow{w}$ en las direcciones de $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$, determinando los escalares a, b tales que $\overrightarrow{w} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}$.

13. Dados los vectores geométricos $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{w}$ tales que $\|\overrightarrow{v}\| = 5$, $\|\overrightarrow{u}\| = 8$, $\|\overrightarrow{w}\| = 10$, $dir(\overrightarrow{v}) = 60^\circ$, $dir(\overrightarrow{u}) = 120^\circ$ y $dir(\overrightarrow{w}) = 180^\circ$,

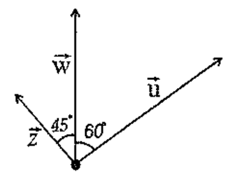
a) Dibujar los vectores $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{w}$.

b) Encontrar la descomposición de $\overrightarrow{w}$ en las direcciones de $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ (es decir, hallar escalares a y b tales que $\overrightarrow{w} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}$).

14. Los vectores geométricos $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ que se muestran en la figura *a*, son tales que $\|\overrightarrow{u}\| = 1$, $\|\overrightarrow{v}\| = 3$, $\|\overrightarrow{w}\| = 5$ y el ángulo entre $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{w}$ es de 150°. Hallar la descomposición de $\overrightarrow{w}$ en las direcciones de $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$.



a



b

15. Sean $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{z}$ los vectores en la figura b, tales que $\|\overrightarrow{u}\| = 6$, $\|\overrightarrow{w}\| = 5$ y $\|\overrightarrow{z}\| = 4$

 a) Encontrar la magnitud del vector $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{w} + \overrightarrow{z}$ y el ángulo entre este vector y el vector $\overrightarrow{u}$.

 b) Hallar los escalares a y b tales que $\overrightarrow{w} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{z}$.

 c) Hallar la descomposición de $\overrightarrow{u}$ en las direcciones de $\overrightarrow{z}$ y $\overrightarrow{w}$. Ilustrarlo gráficamente.

Sección 1.5

16. Sean $\overrightarrow{u}$ el vector tal que $\|\overrightarrow{u}\| = 5$ y $dir\,(\overrightarrow{u}) = 30°$. Para todo vector que satisfaga las condiciones dadas en cada literal, dibujar $proy_{\overrightarrow{u}}\overrightarrow{v}$ y calcular su magnitud.

 a) $\|\overrightarrow{v}\| = 4$, $dir\,(\overrightarrow{v}) = 150°$

 b) $\|\overrightarrow{v}\| = 6$ y el ángulo entre $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ mide $60°$.

17. Sean $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ vectores tales que $\|\overrightarrow{u}\| = 6$ y $\|\overrightarrow{v}\| = 10$

 a) Suponiendo que el ángulo entre $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ es de $120°$, hallar el escalar a tal que $proy_{\overrightarrow{u}}\overrightarrow{v} = a\overrightarrow{u}$.

 b) ¿Cuál es la componente escalar de $\overrightarrow{v}$ en la dirección del vector $\overrightarrow{u}$?

18. Sean $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ vectores tales que $\|\overrightarrow{u}\| = 7$, $dir\,(\overrightarrow{u}) = 120°$, $\|\overrightarrow{v}\| = 8$ y $dir\,(\overrightarrow{v}) = 225°$

 a) Dibujar los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$.

 b) Descomponer gráficamente el vector $\overrightarrow{u}$ como la suma de un vector $\overrightarrow{p}$ paralelo al vector $\overrightarrow{v}$ y un vector $\overrightarrow{q}$ perpendicular a $\overrightarrow{v}$. Hallar las magnitudes de los vectores $\overrightarrow{p}$ y $\overrightarrow{q}$.

19. Se coloca un objeto que pesa 6 libras sobre una rampa con una inclinación de $30°$. Hallar la magnitud de la fuerza que se requiere para evitar que el objeto ruede por la rampa.

Sección 1.6

20. Sean $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ vectores tales que $\|\overrightarrow{u}\| = 3$, $\|\overrightarrow{v}\| = 4$ y $\|\overrightarrow{w}\| = 2$ y sea $\overrightarrow{z} = 2\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} + 3\overrightarrow{w}$. Calcular $\overrightarrow{z} \cdot \overrightarrow{v}$ sabiendo que el ángulo entre $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ es de $60°$ y el ángulo entre $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ es de $120°$.

21. Sean $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ vectores. Probar que:

 a) $\|\overrightarrow{v} \pm \overrightarrow{w}\|^2 = \|\overrightarrow{v}\|^2 \pm 2\,(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}) + \|\overrightarrow{w}\|^2$.

 b) $(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) \cdot (\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}) = \|\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{w}\|^2$.

22. Calcular $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ sabiendo que $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$, $\|\overrightarrow{u}\| = 5$, $\|\overrightarrow{v}\| = 6$ y $\|\overrightarrow{w}\| = 7$.

23. Sean $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ vectores. Probar:

    a) **Teorema de Pitágoras:** $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ son perpendiculares si y sólo si $\|\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}\|^2 = \|\overrightarrow{v}\|^2 + \|\overrightarrow{w}\|^2$

    b) **Ley del paralelogramo:** $\|\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}\|^2 + \|\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}\|^2 = 2\|\overrightarrow{v}\|^2 + 2\|\overrightarrow{w}\|^2$. (Es decir, la suma de los cuadrados de las longitudes de las diagonales de un paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de sus cuatro lados.)

    c) **Identidad de polarización:** $\|\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}\|^2 - \|\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}\|^2 = 4(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w})$.

24. Demostrar, empleando la identidad de polarización, que las diagonales de un paralelogramo tienen igual longitud si y sólo si el paralelogramo es un rectángulo.

25. Sean $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ vectores geométricos tales que $\|\overrightarrow{v}\| = 4$, $\|\overrightarrow{w}\| = \frac{1}{\sqrt{3}}$ y $\overrightarrow{u}$ es unitario.

    Si $\|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}\| = \|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}\|$ y el ángulo entre $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ es $\frac{\pi}{3}$ radianes,

    a) Calcular el ángulo entre $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$.

    b) Calcular la magnitud de la proyección de $\overrightarrow{v}$ sobre $\overrightarrow{w}$.

Sección 1.7

26. Hallar la descomposición canónica de cada uno de los siguientes vectores:

    a) $\overrightarrow{v}$ tal que $\|\overrightarrow{v}\| = 6$ y $dir(\overrightarrow{v}) = 225°$.

    b) $\overrightarrow{u}$ tal que $\|\overrightarrow{u}\| = 5$ y $dir(\overrightarrow{u}) = 270°$.

    c) $\overrightarrow{w}$ tal que $\|\overrightarrow{w}\| = 3$ y $dir(\overrightarrow{w}) = \frac{\pi}{6}$ radianes.

27. Si $\overrightarrow{u} = 3\overrightarrow{i} - 4\overrightarrow{j}$, hallar:

    a) La magnitud y dirección de $\overrightarrow{u}$.

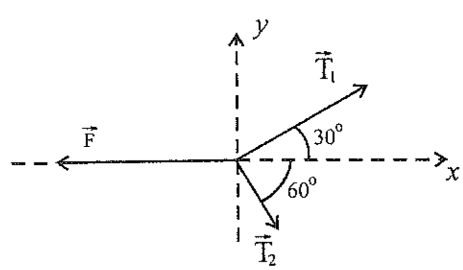
    b) La descomposición canónica del vector $\overrightarrow{w}$ de magnitud 7 y dirección opuesta a la de $\overrightarrow{u}$.

    c) La descomposición canónica de cada uno de los vectores de longitud $4\sqrt{2}$ que forma ángulo de 45° con el vector $\overrightarrow{u}$.

28. Sean $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{i} - 5\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{v} = 3\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{w} = -2\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j}$. Hallar la descomposición canónica, la magnitud y la dirección de los siguientes vectores:

    a) $2\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$. *b*) $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$. *c*) $3\overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}$.

29. Considerar el diagrama de fuerzas de la siguiente figura.



La fuerza $\overrightarrow{F}$ tiene una magnitud de 20 Newtons y el sistema se encuentra en equilibrio, es decir, $\overrightarrow{F} + \overrightarrow{T_1} + \overrightarrow{T_2} = \overrightarrow{0}$. Hallar la descomposición canónica de $\overrightarrow{F}$, $\overrightarrow{T_1}$ y $\overrightarrow{T_2}$.

30. Realizar los ejercicios 12 y 13 (sección 1.4), utilizando la descomposición canónica de los vectores dados.

31. Sean $\overrightarrow{u} = 3\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{v} = 5\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$ y $\overrightarrow{w} = 7\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$. Calcular:

    a) $\overrightarrow{u} \cdot (2\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w})$. *b*) $\|\overrightarrow{u}\| (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w})$. *c*) $\|(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})\overrightarrow{w}\|$.

32. Calcular $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}$

    a) Si $\|\overrightarrow{v}\| = 2$, $\|\overrightarrow{w}\| = 3$ y el ángulo entre $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ es $\frac{\pi}{3}$ radianes.

    b) Si $\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j}$ y $\overrightarrow{w} = 2\overrightarrow{i}$.

33. Para cada par de vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ dados a continuación, determinar si ellos son perpendiculares, si el ángulo entre ellos es agudo o si el ángulo entre ellos es obtuso. Calcular la proyección de $\overrightarrow{u}$ sobre $\overrightarrow{v}$.

    a) $\overrightarrow{u} = 6\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j}$.

    b) $\overrightarrow{u} = -6\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{v} = 4\overrightarrow{i} + 6\overrightarrow{j}$.

    c) $\overrightarrow{u} = 3\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j}$.

34. Sean $\overrightarrow{u_1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{u_2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{j}$.

    a) Probar que $\overrightarrow{u_1}$ y $\overrightarrow{u_2}$ son perpendiculares.

    b) Hallar la descomposición de cada unos de los los vectores $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ y $-2\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j}$ en las direcciones de $\overrightarrow{u_1}$ y $\overrightarrow{u_2}$.

35. Sea $\overrightarrow{w} = 7\overrightarrow{i} - 5\overrightarrow{j}$. Para cada par de vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ dados a continuación

    i) Determinar si existen escalares a y b tales que $\overrightarrow{w} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}$.

    ii) Si su respuesta en *i*) es afirmativa, halle los valores de a y b.

    a) $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j}$.

    b) $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{v} = -2\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j}$.

36. Sean $\overrightarrow{u} = 3\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j}$ y $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{i} + \alpha\overrightarrow{j}$. Encontrar los valores de α para los cuales se satisface la condición dada en cada caso.

    a) $\overrightarrow{u}$ es perpendicular a $\overrightarrow{v}$. *b*) El ángulo entre $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ es $\frac{\pi}{4}$ radianes.

37. Para el par de vectores $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ dados en cada literal, calcular el producto escalar, el coseno del ángulo entre ellos, determinar si son perpendiculares, verificar la desigualdad de Cauchy-Schwarz y hallar $Proy_{\overrightarrow{w}}\overrightarrow{v}$ y $Proy_{\overrightarrow{v}}\overrightarrow{w}$.

    a) $\overrightarrow{v} = 4\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$

    b) $\overrightarrow{v} = 4\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{w} = \frac{1}{2}\overrightarrow{i} - \frac{2}{3}\overrightarrow{j}$

    c) $\overrightarrow{v} = -2\overrightarrow{i} + 18\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{w} = \frac{3}{2}\overrightarrow{i} - \frac{1}{6}\overrightarrow{j}$

38. Sean $\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j}$ y $\overrightarrow{v} = c\overrightarrow{i} + d\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{v} \neq \vec{0}$. Encontrar una condición necesaria y suficiente sobre a, b, c y d para que $\overrightarrow{v}$ y $Proy_{\overrightarrow{v}}\overrightarrow{u}$ tengan

    a) La misma dirección.

    b) Dirección contraria.

39. Para cada par de puntos dados, encontrar el punto R tal que el cuadrilátero $OPRQ$ es un paralelogramo.

    a) $P = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}$. *b*) $P = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$.

40. Sean $P = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $R = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

    a) Hallar la descomposición canónica de cada uno de los vectores $\overrightarrow{QP}$, $\overrightarrow{QR}$ y $\overrightarrow{PR}$.

    b) Mostrar que los puntos P, Q y R no son colineales.

    c) Si M es el punto medio del segmento $\overline{PR}$, hallar la descomposición canónica y la magnitud de $\overrightarrow{QM}$.

    d) Si B es el baricentro del triángulo PQR, hallar la descomposición canónica y la magnitud del vector $\overrightarrow{QB}$.

    e) Encontrar el ángulo entre $\overrightarrow{QP}$ y $\overrightarrow{QR}$.

    f) Sea S el punto de intersección de la bisectriz del ángulo entre $\overrightarrow{QP}$ y $\overrightarrow{QR}$ con el segmento $\overline{PR}$. Hallar la descomposición canónica de $\overrightarrow{QS}$.

41. Sean $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ y $S = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ puntos de $\mathbb{R}^2$. Calcular $Proy_{\overrightarrow{PQ}}\overrightarrow{RS}$ y $Proy_{\overrightarrow{RS}}\overrightarrow{PQ}$.

42. Un triángulo tiene como vértices los puntos $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$. Hallar:

    a) Cada uno de sus ángulos interiores.

    b) El área del triángulo.

43. Sea $\overrightarrow{u}$ un vector no nulo y sea $\overrightarrow{z}$ un vector cualquiera. Probar que para cualquier escalar no nulo r se tiene que $Proy_{r\overrightarrow{u}}\overrightarrow{z} = Proy_{\overrightarrow{u}}\overrightarrow{z}$.

44. Sean $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ vectores geométricos no nulos. Mostrar que $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ son paralelos si y sólo si $Proy_{\overrightarrow{v}}\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$.

2

Vectores coordenados o algebraicos

2.1 Introducción

Consideraremos, como ya se había anunciado, al plano provisto de un sistema cartesiano xy, lo cual permite identificar cada punto del plano con un par ordenado $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ de números reales, según se explicó en el capítulo anterior.

De acuerdo con la definición de igualdad de vectores geométricos, y dado que entre los infinitos vectores iguales a un vector dado hay uno (y sólo uno) con punto inicial en el origen O, podemos considerar que el conjunto de todos los vectores geométricos del plano se reduce a los que tienen su punto inicial en el origen. (Ver figura 2.1).

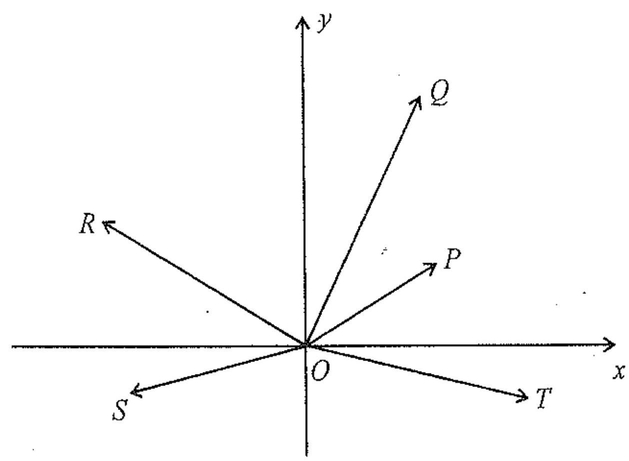


Figura 2.1.

Ahora bien, es evidente que cada vector con punto inicial en el origen O determina un único punto $P = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ del plano el cual es su extremo final y, recíprocamente, cada punto $P = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ del plano es el extremo final de un único vector con punto inicial en el origen, el cual es el vector $\overrightarrow{OP}$, es decir, el vector de posición del punto P. (Ver figura 2.2).

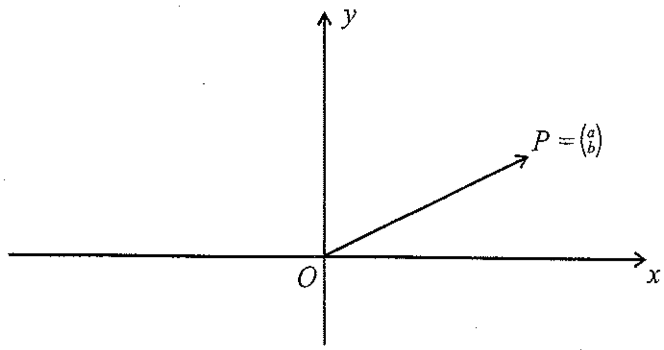


Figura 2.2.

Tenemos así la correspondencia biunívoca

$$\overrightarrow{OP} \longleftrightarrow P$$

entre el conjunto de los vectores con su punto inicial en el origen y el conjunto de los puntos del plano, es decir, entre el conjunto de los vectores posición y el conjunto $\mathbb{R}^2$.

De acuerdo con dicha correspondencia, las operaciones suma y producto por escalar con vectores de posición, inducen una suma y un producto por escalar con pares ordenados de números reales como se indica a continuación.

Consideremos vectores de posición $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{OQ}$ siendo $P = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ y $Q = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$. Como

$$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = \left(a\,\overrightarrow{i} + b\,\overrightarrow{j}\right) + \left(c\,\overrightarrow{i} + d\,\overrightarrow{j}\right) = (a+c)\,\overrightarrow{i} + (b+d)\,\overrightarrow{j}$$

entonces

$$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OR} \text{ siendo } R = \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}$$

lo cual sugiere definir $P + Q$ como el punto R, es decir, definir

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

Ilustramos lo anterior en la figura 2.3, en la cual a, b, c y d son todos positivos.

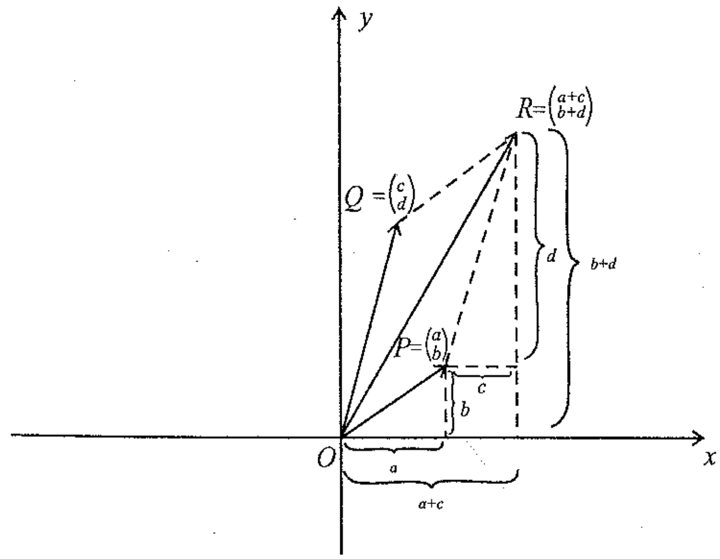


Figura 2.3.

Análogamente, como para cada $r \in \mathbb{R}$ se tiene

$$r\left(\overrightarrow{OP}\right) = r\left(a\,\vec{i} + b\,\vec{j}\right) = (ra)\,\vec{i} + (rb)\,\vec{j}$$

entonces

$$r\left(\overrightarrow{OP}\right) = \overrightarrow{OS} \text{ siendo } S = \begin{pmatrix} ra \\ rb \end{pmatrix}$$

lo cual sugiere definir rP como el punto S, es decir, definir

$$r\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra \\ rb \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

Por lo anterior se define en $\mathbb{R}^2$ (es decir, en el conjunto de puntos del plano) una suma y un producto por escalar, de acuerdo con las igualdades (2.1) y (2.2).

2.2 Suma y producto por escalar en $\mathbb{R}^2$

Dados $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ y $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ en $\mathbb{R}^2$ y el escalar r, definimos la **suma** $X+U$ y el **producto** rX como

$$X + U = \begin{pmatrix} x+u \\ y+v \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad rX = \begin{pmatrix} rx \\ ry \end{pmatrix}$$

Es necesario insistir en que estas operaciones en $\mathbb{R}^2$ han sido definidas de tal modo que

$$\boxed{\begin{array}{rcl} X + U = R & \Leftrightarrow & \overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OU} = \overrightarrow{OR} \\ rX = S & \Leftrightarrow & r\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OS} \end{array}}$$

y en general,

$$\boxed{rX + tU = T \Leftrightarrow r\overrightarrow{OX} + t\overrightarrow{OU} = \overrightarrow{OT}}$$

cualesquiera sean X, U, R, S, T en $\mathbb{R}^2$ y r, t en $\mathbb{R}$.

En adelante, los elementos de $\mathbb{R}^2$ (a los cuales nos veniamos refiriendo como puntos) se dirán también **vectores coordenados o vectores algebraicos**.

Dado X en $\mathbb{R}^2$, todo vector de la forma rX, con $r \in \mathbb{R}$, se dirá un **múltiplo escalar** de X.

Ejemplo 2.1
Sean $X = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $U = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Hallar $X + U$ y $(-1)X$.

Solución:

$$X + U = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-2 \\ -1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(-1)X = (-1)\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)4 \\ (-1)(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad ■$$

• El vector algebraico $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es llamado el **vector nulo** o **vector cero** de $\mathbb{R}^2$ y se denotará por la letra O. Este vector es tal que

$$X + O = X \text{ para cualquier } X \in \mathbb{R}^2.$$

• El **inverso aditivo** del vector $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, denotado $-X$, se define como $-X = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$.
Se tiene que

$$X + (-X) = O \quad \text{y} \quad -X = (-1)X.$$

Ejemplo 2.2
El inverso aditivo del vector $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ es $-X = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (figura 2.4). ■

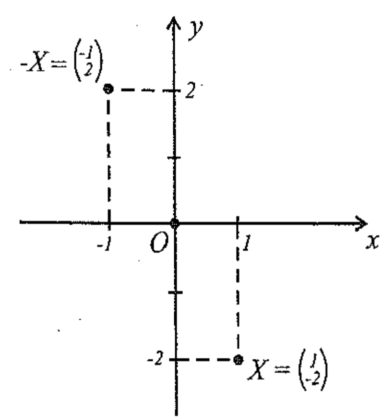


Figura 2.4.

Es claro que la suma y la multiplicación por escalar en $\mathbb{R}^2$ heredan las propiedades algebraicas de las correspondientes operaciones entre vectores geométricos. A continuación listamos las propiedades básicas, válidas para cualesquiera vectores X, Y, Z de $\mathbb{R}^2$ y todo par de números reales r y s.

1. $X + Y \in \mathbb{R}^2$
2. $X + Y = Y + X$
3. $(X + Y) + Z = X + (Y + Z)$
4. $X + O = X$
5. $X + (-X) = O$
6. $rX \in \mathbb{R}^2$
7. $1X = X$
8. $r(sX) = (rs)X$
9. $r(X + Y) = rX + rY$
10. $(r + s)X = rX + sX$

Vale la pena señalar que cada una de las propiedades anteriores es de fácil verificación recurriendo únicamente a la definición de las operaciones suma y multiplicación por escalar en $\mathbb{R}^2$, y a las propiedades de la suma y el producto entre números reales. Como ejemplo, verificaremos la propiedad 9 :

Si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ y $Y = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ entonces

$$\begin{aligned} r(X + Y) &= r\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right] = r\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(x_1 + x_2) \\ r(y_1 + y_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} rx_1 + rx_2 \\ ry_1 + ry_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rx_1 \\ ry_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} rx_2 \\ ry_2 \end{pmatrix} \\ &= rX + rY. \quad \blacklozenge \end{aligned}$$

La verificación de las restantes propiedades se deja como ejercicio.

- Sean $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ y $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ en $\mathbb{R}^2$. Sabemos que

$$\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OU} = (x - u)\,\overrightarrow{i} + (y - v)\,\overrightarrow{j}$$

es decir,

$$\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OU} = \overrightarrow{OR} \;\text{ con } R = \begin{pmatrix} x - u \\ y - v \end{pmatrix}.$$

Definimos, en consecuencia, la **diferencia** $X - U$ como el vector R. Así,

$$X - U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - u \\ y - v \end{pmatrix}.$$

Ahora, sabemos que el vector $R = \begin{pmatrix} x - u \\ y - v \end{pmatrix}$ es tal que $\overrightarrow{UX} = \overrightarrow{OR}$ y como $R = X - U$ entonces

$$\boxed{\overrightarrow{UX} = \overrightarrow{OR} \quad \text{con } R = X - U}$$

lo cual nos dice que todo vector $\overrightarrow{UX}$ es igual al vector de posición del punto $X - U$ (ver figura 2.5).

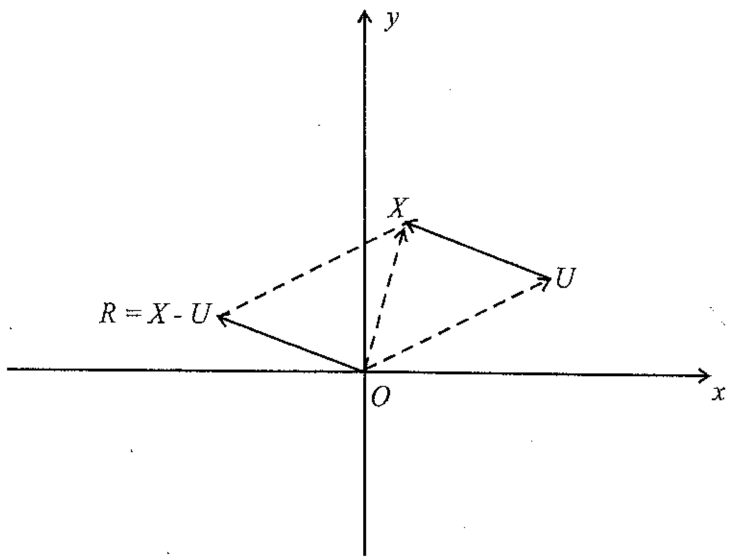


Figura 2.5.

De lo anterior se sigue, en forma inmediata, que

$$\boxed{\overrightarrow{UX} = \overrightarrow{YZ} \text{ si y sólo si } X - U = Z - Y}$$

cualesquiera sean U, X, Y, Z en $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo 2.3
Dados los puntos $A = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, encuentre el punto D tal que el cuadrilátero $ABDC$ es un paralelogramo.

Solución:

El cuadrilátero $ABDC$ es un paralelogramo si y sólo si $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$ (ver figura 2.6).

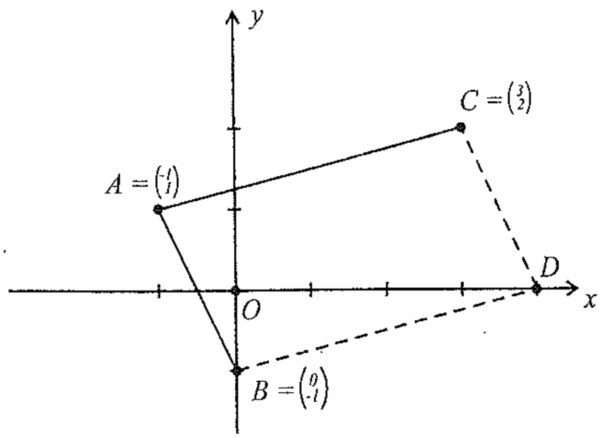


Figura 2.6.

Ahora,

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \iff D - C = B - A$$
$$\iff D = B - A + C$$

luego,

$$D = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad \blacksquare$$

Ejemplo 2.4
Probar el siguiente resultado:

Teorema de la proporción en $\mathbb{R}^2$. Si m y n son números positivos y P es el punto del segmento $\overline{AB}$ que lo divide de tal modo que $\dfrac{\|\overrightarrow{AP}\|}{\|\overrightarrow{PB}\|} = \dfrac{m}{n}$, entonces

$$P = \frac{n}{m+n}A + \frac{m}{m+n}B. \tag{2.3}$$

Prueba:
El resultado anterior se puede deducir directamente del teorema de la proporción para vectores geométricos así: Según dicho teorema, si P es como se indica en el enunciado y O es cualquier punto del plano, entonces

$$\overrightarrow{OP} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}.$$

En particular, la igualdad anterior es válida si O es el origen del sistema cartesiano xy, caso en el cual esa igualdad es equivalente, como sabemos, a la igualdad (2.3).

También podemos probar el resultado en consideración de la siguiente manera: El punto P es tal que

$$\overrightarrow{AP} = \frac{m}{n}\overrightarrow{PB}$$

Ahora (vea ejercicio 3.b) de este capítulo), esta igualdad es equivalente a

$$P - A = \frac{m}{n}(B - P)$$

y despejando P se obtiene

$$P = \frac{n}{m+n}A + \frac{m}{m+n}B. \quad \blacklozenge$$

Como caso particular del teorema de la proporción se tiene que

> Si M es el punto medio de un segmento de recta $\overline{AB}$ entonces
> $M = \frac{1}{2}(A+B)$

2.3 Magnitud, dirección y otros conceptos en $\mathbb{R}^2$

En esta sección trasladaremos a los vectores algebraicos nociones ya definidas para vectores geométricos como magnitud, dirección, descomposición canónica, producto escalar, ángulo entre vectores y proyección de un vector sobre otro; todo ello empleando la correspondencia $\overrightarrow{OP} \longleftrightarrow P$ ya mencionada.

• Sea $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ en $\mathbb{R}^2$. Llamaremos **magnitud** de X, denotada $\|X\|$, a la magnitud del vector de posición $\overrightarrow{OX}$ (vea figura 2.7), es decir,

$$\|X\| = \left\|\overrightarrow{OX}\right\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

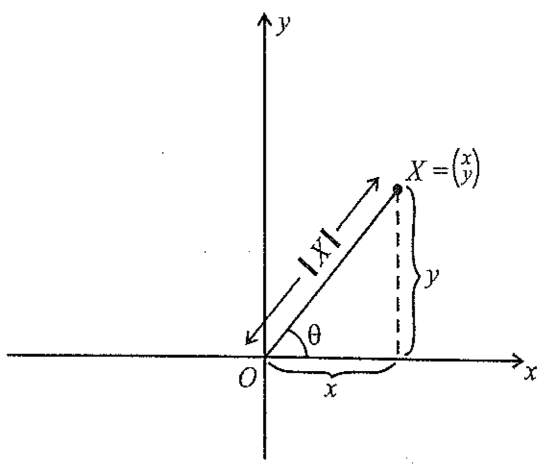


Figura 2.7.

Nótese que $\|X\|$ es la distancia del punto X al origen.

Es de esperar que la magnitud en $\mathbb{R}^2$ tenga las propiedades que sabemos tiene la magnitud de vectores geométricos. En efecto, cualesquiera sean X, U en $\mathbb{R}^2$ y $r \in \mathbb{R}$ se da que:

1. $\|X\| \geq 0$
2. $\|X\| = 0$ si y sólo si $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

3. $\|rX\| = |r| \, \|X\|$
4. $\|X + U\| \leq \|X\| + \|U\|$ (**Desigualdad triangular**).

Cada una de las propiedades 1. a 3. puede probarse remitiéndonos a la correspondiente propiedad para vectores geométricos o bien directamente a partir de que $\|X\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Como ejemplo probaremos de las dos formas la propiedad 3.

Digamos que $rX = S$, es decir que $r\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OS}$. Entonces

$$\|rX\| = \|S\| = \left\|\overrightarrow{OS}\right\| = \left\|r\overrightarrow{OX}\right\| = |r| \left\|\overrightarrow{OX}\right\| = |r| \, \|X\| .$$

En la penúltima de las igualdades anteriores hemos hecho uso de la propiedad $\left\|r\overrightarrow{OX}\right\| = |r| \left\|\overrightarrow{OX}\right\|$ para la magnitud de vectores geométricos. Ahora, sin remitirnos a vectores geométricos y con $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tenemos:

$$\|rX\| = \left\|\begin{pmatrix} rx \\ ry \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{(rx)^2 + (ry)^2} = \sqrt{r^2(x^2 + y^2)} = \sqrt{r^2}\sqrt{x^2 + y^2} = |r| \, \|X\| . \quad \blacklozenge$$

En cuanto a la propiedad 4, podemos probarla recurriendo a vectores geométricos, a partir de la desigualdad triangular

$$\left\|\overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OU}\right\| \leq \left\|\overrightarrow{OX}\right\| + \left\|\overrightarrow{OU}\right\| .$$

Más adelante, una vez tengamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz y el producto escalar en $\mathbb{R}^2$, se puede probar dicha desigualdad triangular sin recurrir a vectores geométricos.

La **distancia** entre dos puntos $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ es el escalar $\left\|\overrightarrow{UX}\right\|$, es decir, el escalar $\|X - U\|$. (Ver figura 2.8).

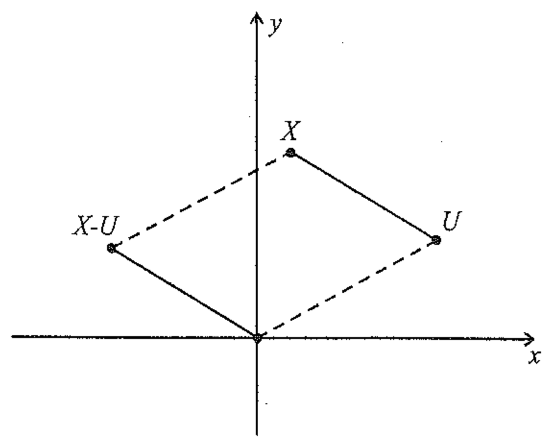


Figura 2.8.

Así que,

La distancia entre los puntos $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ es
$\|X - U\| = \sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2}$

Ejemplo 2.5
La distancia entre los puntos $U = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ es

$$\|X - U\| = \sqrt{(-3-1)^2 + (4-(-2))^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52}. \qquad \blacksquare$$

• Consideremos $X \in \mathbb{R}^2$. Si $X \neq O$ llamaremos **dirección** de X, denotada $dir\,(X)$, a la dirección del vector de posición $\overrightarrow{OX}$ (En la figura 2.7, el ángulo θ es la dirección del vector algebraico X).

Diremos que un vector $U \in \mathbb{R}^2$, $U \neq O$, tiene la **misma dirección** o que tiene **dirección opuesta** a la de X según que el vector $\overrightarrow{OU}$ tenga la misma dirección o dirección opuesta a la de $\overrightarrow{OX}$.

Si r es un escalar no nulo y $X \neq O$ entonces rX tiene la misma dirección de X cuando $r > 0$ y dirección opuesta a la de X cuando $r < 0$, pues así ocurre entre $r\overrightarrow{OX}$ y $\overrightarrow{OX}$.

Por último, diremos que X y U son **paralelos** si los vectores $\overrightarrow{OX}$ y $\overrightarrow{OU}$ lo son. Ahora, $\overrightarrow{OX}$ y $\overrightarrow{OU}$ son paralelos si y sólo si alguno de los dos es múltiplo escalar del otro. Por tanto,

Dos vectores de $\mathbb{R}^2$ son paralelos si y sólo si uno de ellos es múltiplo escalar del otro.

• Un vector de $\mathbb{R}^2$ se dice un **vector unitario** si tiene magnitud 1. Los vectores unitarios de $\mathbb{R}^2$ conforman la circunferencia de centro en el origen y radio 1. Si $X \in \mathbb{R}^2$ y $X \neq O$ entonces el vector $\frac{1}{\|X\|}X$ es unitario, pues

$$\left\| \frac{1}{\|X\|}X \right\| = \frac{1}{\|X\|}\|X\| = 1,$$

y tiene la misma dirección de X ya que $\frac{1}{\|X\|} > 0$.

Nos referiremos al proceso de hallar el vector unitario $\frac{1}{\|X\|}X$, a partir del vector no nulo X, como **normalización** del vector X. Al igual que para vectores geométricos, a menudo escribiremos $\frac{X}{\|X\|}$ en lugar de $\frac{1}{\|X\|}X$.

El vector unitario de $\mathbb{R}^2$ con dirección θ, como se muestra en la figura 2.9, es $\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix}$. Por tanto, si X es cualquier vector no nulo con dirección θ entonces el vector unitario con la misma dirección de X es

$$\frac{X}{\|X\|} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix}$$

de donde

$$X = \|X\| \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix}$$

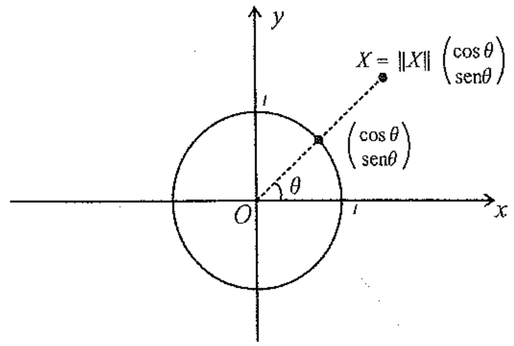


Figura 2.9.

Ejemplo 2.6

Sean $X = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ y $Y = \begin{pmatrix} -3\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

a) Muestre que X es unitario y halle su dirección.

b) Normalice el vector $X + Y$.

c) Halle el vector Z con dirección opuesta a la del vector $X + Y$ y tal que $\|Z\| = \sqrt{10}$.

Solución:

a) Como $X = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ entonces

$$\|X\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1^2 + (-1)^2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$$

y por tanto X es unitario.

Si θ es la dirección de X entonces $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ y $\operatorname{sen}\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, de donde $\tan\theta = -1$. Ahora, como X es un punto del cuarto cuadrante, es decir, $270^\circ < \theta < 360^\circ$ entonces

$$\theta = \tan^{-1}(-1) + 360^\circ = -45^\circ + 360^\circ = 315^\circ$$

b) $X + Y = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} - 3\sqrt{2}/2 \\ -1/\sqrt{2} + \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Luego,

$$\|X + Y\| = \frac{\sqrt{2}}{2} \left\| \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{5} = \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

Normalizar el vector $X+Y$ es hallar el vector unitario con la misma dirección de $X+Y$; tal vector es

$$U = \frac{1}{\|X + Y\|}(X + Y) = \frac{1}{\frac{\sqrt{10}}{2}} \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

c) $Z = -\sqrt{10}U$ donde U es el vector unitario hallado en b), es decir,

$$Z = -\sqrt{10}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} = -\sqrt{2}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\sqrt{2}\\-\sqrt{2}\end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

• En la misma medida en que son importantes los vectores geométricos $\overrightarrow{i}$ y $\overrightarrow{j}$, lo son los vectores $E_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ y $E_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ en $\mathbb{R}^2$, los cuales llamaremos **vectores canónicos** de $\mathbb{R}^2$.

Todo vector $X = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ en $\mathbb{R}^2$ se descompone en la forma

$$X = \begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = xE_1 + yE_2.$$

Obsérvese que el vector $xE_1 = \begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}$ está en el eje x y que el vector $yE_2 = \begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix}$ está en el eje y. (Ver figura 2.10).

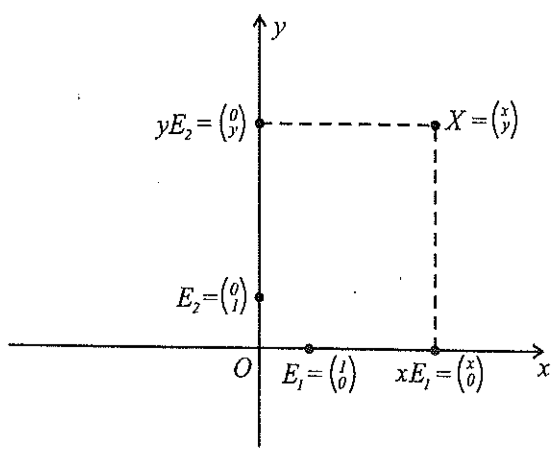


Figura 2.10.

Es más, la única manera de descomponer un vector $X = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ como suma de dos vectores, uno en el eje x y el otro en el eje y, es

$$X = xE_1 + yE_2$$

igualdad que llamaremos **descomposición canónica** del vector X.

Como resumen de lo anterior tenemos:

> La descomposición canónica de un vector $X = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ es
>
> $$X = xE_1 + yE_2$$

Ejemplo 2.7
La descomposición canónica de $X = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ es $X = -2E_1 + 3E_2$. (Figura 2.11). ■

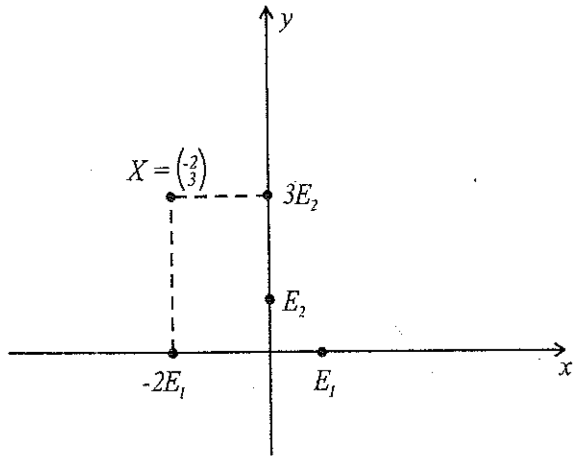


Figura 2.11.

• Llamaremos **producto escalar** de los vectores $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ y $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$, que denotaremos $X \cdot U$, al producto escalar $\overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{OU}$. Ahora, como $\overrightarrow{OX} = x\vec{i} + y\vec{j}$ y $\overrightarrow{OU} = u\vec{i} + v\vec{j}$ entonces $\overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{OU} = xu + yv$. Así que,

> El producto escalar de los vectores $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ y $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ es el escalar
> $$X \cdot U = xu + yv$$

El producto escalar entre vectores de $\mathbb{R}^2$ tiene, como era de esperarse, las siguientes propiedades, válidas cualesquiera sean X, U, Z en $\mathbb{R}^2$ y $r \in \mathbb{R}$.

> 1. $X \cdot U$ es un escalar
> 2. $X \cdot X = \|X\|^2$
> 3. $X \cdot U = U \cdot X$
> 4. $(rX) \cdot U = r(X \cdot U) = X \cdot (rU)$
> 5. $X \cdot (U + Z) = X \cdot U + X \cdot Z$ y $(X + U) \cdot Z = X \cdot Z + U \cdot Z$
> 6. $|X \cdot U| \leq \|X\| \, \|U\|$ (**Desigualdad de Cauchy-Schwarz**)

Probemos la propiedad 4. sin utilizar vectores de posición: Si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ y $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$,

$$(rX) \cdot U = \begin{pmatrix} rx \\ ry \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = (rx)u + (ry)v = r(xu + yv) = r(X \cdot U).$$

Análogamente se prueba que $X \cdot (rU) = r(X \cdot U)$.

Ahora probemos la propiedad 6., recurriendo a los vectores de posición y a la desigualdad de Cauchy-Schwarz ya probada para ellos:

$$|X \cdot U| = \left|\overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{OU}\right| \leq \left\|\overrightarrow{OX}\right\| \left\|\overrightarrow{OU}\right\| = \|X\| \, \|U\| \, .$$

La verificación de las propiedades 2., 3. y 5. queda como ejercicio. ♦

Ejemplo 2.8

Para $X = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ y $U = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ se tiene:

a) $X \cdot U = (3)(2) + (-2)(7) = -8$

b) $\left(\frac{1}{3}X\right) \cdot (8U) = \frac{1}{3}(X \cdot 8U) = \frac{8}{3}(X \cdot U) = \frac{8}{3}(-8) = -\frac{64}{3}$. ■

• Si X y U son vectores no nulos de $\mathbb{R}^2$, el **ángulo entre** X y U se define como el ángulo entre los vectores $\overrightarrow{OX}$ y $\overrightarrow{OU}$ (figura 2.12).

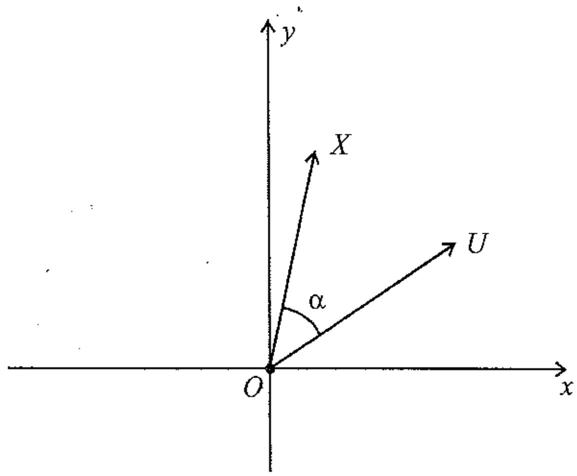


Figura 2.12.

Si α es el ángulo entre $\overrightarrow{OX}$ y $\overrightarrow{OU}$ sabemos que $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{OU}}{\left\|\overrightarrow{OX}\right\| \left\|\overrightarrow{OU}\right\|}$. Ahora, como $\overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{OU} = X \cdot U$, $\left\|\overrightarrow{OX}\right\| = \|X\|$ y $\left\|\overrightarrow{OU}\right\| = \|U\|$ entonces se tiene que:

> Si α es el ángulo entre los vectores no nulos X y U entonces
> $$\cos\alpha = \frac{X \cdot U}{\|X\| \, \|U\|} \qquad (2.4)$$

Los vectores X y U se dicen **ortogonales**, lo cual se denota $X \perp U$, si los vectores $\overrightarrow{OX}$ y $\overrightarrow{OU}$ son perpendiculares. Ahora, como $\overrightarrow{OX}$ y $\overrightarrow{OU}$ son perpendiculares si y sólo si $\overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{OU} = 0$ entonces

$$\boxed{X \perp U \text{ si y sólo si } X \cdot U = 0}$$

Ejemplo 2.9

Sean $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $U = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Determine si X y U son ortogonales.

b) Si X y U no son ortogonales halle el ángulo α entre ellos.

Solución:

a) $X \cdot U = (1)(-3) + (2)(1) = -1$

Como $X \cdot U \neq 0$ entonces X y U no son ortogonales.

b) $\cos\alpha = \dfrac{X \cdot U}{\|X\|\,\|U\|} = \dfrac{-1}{\sqrt{1^2+2^2}\sqrt{(-3)^2+1^2}} = \dfrac{-1}{\sqrt{5}\sqrt{10}} = -\dfrac{1}{5\sqrt{2}}$.

Y como $0° \leq \alpha \leq 180°$ entonces $\alpha = \cos^{-1}\left(-\dfrac{1}{5\sqrt{2}}\right) = 98.13°$. ■

Ejemplo 2.10

Para cualquier vector $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ se tiene que $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ son ortogonales pues

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = (x)(-y) + (y)(x) = 0 \qquad ■$$

- Sean X y U vectores de $\mathbb{R}^2$ con $U \neq O$. La **proyección de X sobre U**, denotada $Proy_U X$, se define como el vector algebraico P tal que $\overrightarrow{OP} = Proy_{\overrightarrow{OU}}\overrightarrow{OX}$. (Ver figura 2.13).

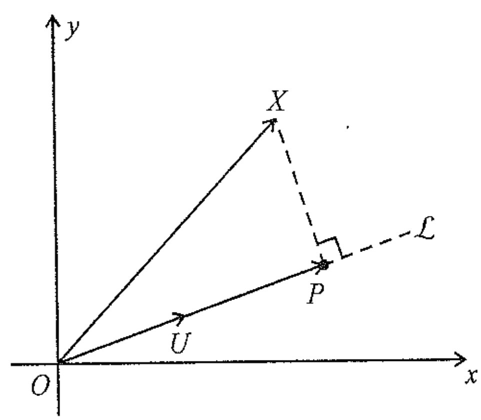


Figura 2.13.

Así que

$$\boxed{Proy_U X = P \text{ si y sólo si } Proy_{\overrightarrow{OU}}\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP}}$$

Obsérvese que si $\mathcal{L}$ es la recta que pasa por los puntos O y U entonces $Proy_U X$ es el punto donde la perpendicular trazada desde X a la recta $\mathcal{L}$, corta dicha recta. De acuerdo con esto es claro que si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ entonces $Proy_{E_1} X = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ y $Proy_{E_2} X = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$ como se ilustra en la figura 2.14.

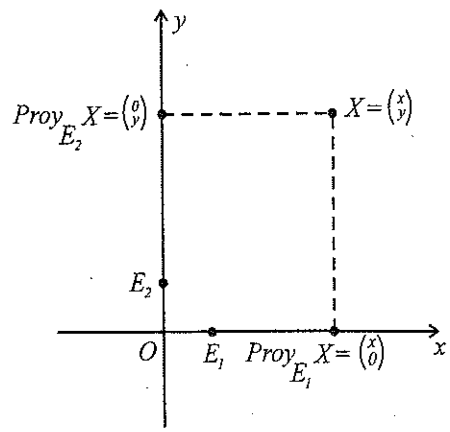


Figura 2.14.

Si X y U son vectores cualesquiera de $\mathbb{R}^2$ con $U \neq O$, de la ya conocida fórmula

$$Proy_{\overrightarrow{OU}}\overrightarrow{OX} = \left(\frac{\overrightarrow{OX}\cdot\overrightarrow{OU}}{\left\|\overrightarrow{OU}\right\|}\right)\frac{\overrightarrow{OU}}{\left\|\overrightarrow{OU}\right\|}$$

se sigue, pasando a vectores algebraicos, que

$$\boxed{Proy_U X = \left(\frac{X\cdot U}{\|U\|}\right)\frac{U}{\|U\|} = \left(\frac{X\cdot U}{\|U\|^2}\right)U = \left(\frac{X\cdot U}{U\cdot U}\right)U} \tag{2.5}$$

Es de resaltar que dado un vector U en $\mathbb{R}^2$, $U \neq O$, todo vector X de $\mathbb{R}^2$ se descompone en la forma

$$X = Proy_U X + (X - Proy_U X)$$

donde $Proy_U X$ es paralelo a U y $X - Proy_U X$ es ortogonal a U.

Finalizamos este capítulo con el siguiente ejemplo, en el cual se combinan varios de los conceptos introducidos en él.

Ejemplo 2.11

Sean $V = \begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$, $W = \begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix}3\\-14\end{pmatrix}$ y $X = 2V + 3W - U$. Halle:

a) El vector X.
b) La magnitud y la dirección de X.
c) La descomposición canónica de X.
d) $\|-2V\| + 2\|V\|$.
e) El ángulo entre $2V$ y $-3W$.
f) La distancia entre los puntos U y W.
g) La proyección de W sobre V.
h) Vectores P y Q tales que $W = P + Q$ con P paralelo a V y Q ortogonal a V.
i) El área del triángulo cuyos vértices son V, W y el origen.

Solución:

a) $X = 2V + 3W - U = 2\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\-14\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6+6-3\\4-15+14\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\3\end{pmatrix}.$

b) $\|X\| = \sqrt{(-3)^2+3^2} = 3\sqrt{2}.$

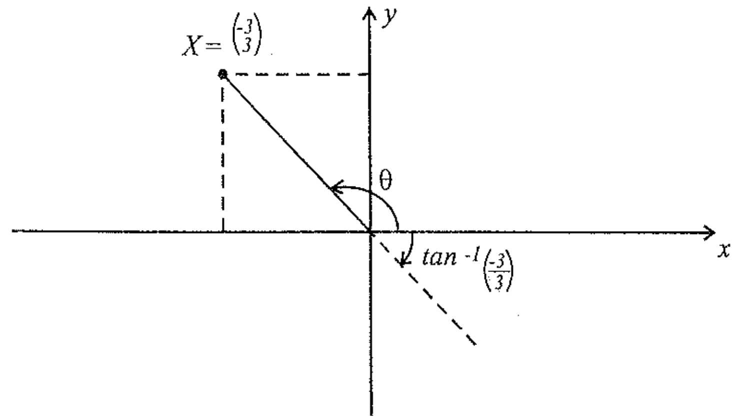


Figura 2.15.

Si θ es la dirección de X entonces $\tan\theta = \frac{3}{-3} = -1$. Ahora, como $90^o < \theta < 180^o$ entonces $\theta \neq \tan^{-1}(-1)$ (Ver figura 2.15); sin embargo,

$$\theta = \tan^{-1}(-1) + 180^o = -45^o + 180^o = 135^o.$$

c) La descomposición canónica del vector $X = \begin{pmatrix}-3\\3\end{pmatrix}$ es

$$X = -3E_1 + 3E_2.$$

d) $\|-2V\| + 2\|V\| = |-2|\,\|V\| + 2\|V\| = 4\|V\| = 4\sqrt{(-3)^2+2^2} = 4\sqrt{13}.$

e) El ángulo α entre los vectores $2V$ y $-3W$ es el mismo ángulo entre V y $-W$; luego (según fórmula (2.4))

$$\cos\alpha = \frac{V\cdot(-W)}{\|V\|\,\|-W\|} = \frac{-(V\cdot W)}{\|V\|\,\|W\|} = \frac{-((-3)(2)+2(-5))}{\sqrt{13}\sqrt{29}} = \frac{16}{\sqrt{13}\sqrt{29}}.$$

Y como $0^o \le \alpha \le 180^o$ entonces $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{16}{\sqrt{13}\sqrt{29}}\right) = 34.51^o.$

f) La distancia entre los puntos U y W es

$$d = \|W-U\| = \sqrt{(2-3)^2+(-5-(-14))^2} = \sqrt{1+9^2} = \sqrt{82}.$$

g) $Proy_V W = \dfrac{W\cdot V}{V\cdot V}V = \frac{-16}{13}V = -\frac{16}{13}V = -\frac{16}{13}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}48/13\\-32/13\end{pmatrix}.$

h) Como sabemos

$$W = Proy_V W + (W - Proy_V W)$$

donde $Proy_V W$ es paralelo a V y $W - Proy_V W$ es ortogonal a V. Luego, vectores P y Q que cumplen las condiciones exigidas son

$$P = Proy_V W = \begin{pmatrix}48/13\\-32/13\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad Q = W - Proy_V W = \begin{pmatrix}-22/13\\-33/13\end{pmatrix}.$$

i) En la figura 2.16 se muestra el triángulo VOW, el punto $Proy_V W$ y la altura h relativa a la base $\overline{OV}$, la cual es $h = \|W - Proy_V W\|$.

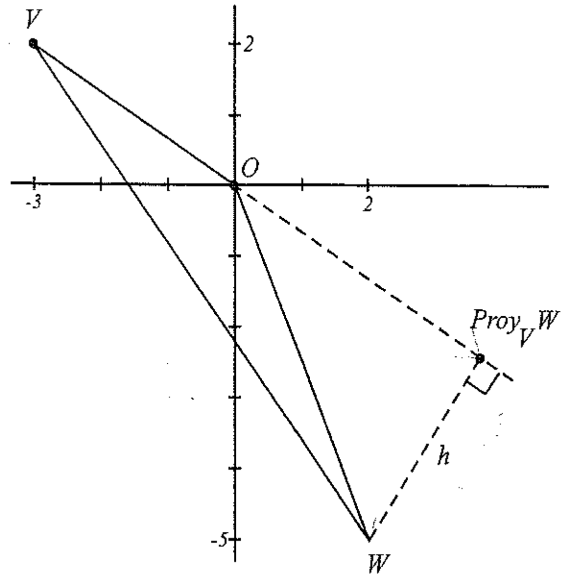


Figura 2.16.

El área $\mathcal{A}$ del triángulo es entonces

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{OV}\right\| h = \frac{1}{2}\|V\| h.$$

Como $h = \|W - Proy_V W\| = \frac{11}{13}\sqrt{13}$ (verifíquelo) y $\|V\| = \sqrt{13}$ entonces

$$\mathcal{A} = \left(\frac{1}{2}\sqrt{13}\right)\left(\frac{11}{13}\sqrt{13}\right) = \frac{11}{2} \quad \text{(unidades cuadradas).} \quad \blacksquare$$

Comentario

Estando el plano dotado de un sistema cartesiano xy, hemos convenido identificar cada punto P del plano con el par ordenado $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ de sus coordenadas con respecto a dicho sistema; en consecuencia, hemos escrito $P = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Ahora, en lugar de esta última igualdad, se puede encontrar en otros textos $P = (a\ ,\ b)$, $P(a\ ,\ b)$ o $P\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Por otra parte, la correspondencia biunívoca

$$a\,\overrightarrow{i} + b\,\overrightarrow{j} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

permite identificar un vector geométrico $a\,\overrightarrow{i} + b\,\overrightarrow{j}$ con el par ordenado $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Por ello, en algunos textos (no en éste) se expresan los vectores geométricos como pares ordenados de números reales. Así, por ejemplo, dado un punto $P(a\ ,\ b)$, pueden encontrarse escrituras como las siguientes:

$$\overrightarrow{OP} = (a\ ,\ b), \qquad \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{OP} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$

Adoptada una cualquiera de estas notaciones, las operaciones definidas para vectores geométricos, se expresan en términos de los pares ordenados. Por ejemplo, con respecto a la primera notación, se tendría que si $\overrightarrow{u} = (a\ ,\ b)$ y $\overrightarrow{v} = (a'\ ,\ b')$ entonces:

- $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (a + a'\ ,\ b + b')$
- $r\overrightarrow{u} = (ra\ ,\ rb)$ si $r \in R$.

También, dados dos puntos $A(a_1\ ,\ b_1)$ y $B(a_2\ ,\ b_2)$ y dado que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ se tendría:

$$\overrightarrow{AB} = (a_2, b_2) - (a_1\ , b_1) = (a_2 - a_1\ , b_2 - b_1).$$

Queremos insistir en que los pares ordenados $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ no denotan vectores geométricos en este texto, sino puntos del plano a los que hemos dotado de operaciones inducidas por las operaciones con vectores geométricos. Como veremos más adelante, ésto nos facilitará el trabajo con transformaciones lineales y matrices.

2.4 Ejercicios

Sección 2.2

1. Sean $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $S = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   a) Ubicar en el plano cartesiano los puntos dados.

   b) Hallar los puntos medios de los lados del cuadrilátero $PQRS$.

   c) Verificar que los puntos medios de los lados del cuadrilátero $PQRS$ son los vértices de un paralelogramo.

2. Sean $P = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Hallar:

   a) El punto R tal que Q es el punto medio del segmento $\overline{PR}$.

   b) El punto S del segmento $\overline{PQ}$ tal que $\dfrac{\left\|\overrightarrow{PS}\right\|}{\left\|\overrightarrow{SQ}\right\|} = \frac{2}{3}$.

   c) El punto M sobre el segmento de recta $\overline{PQ}$ cuya distancia a P es $\frac{2}{3}$ de la distancia de P a Q.

3. Sean S, T, U, X, Y y Z puntos del plano y r y d escalares. Probar que:

   a) $\overrightarrow{UX} = \overrightarrow{ST} + \overrightarrow{YZ} \iff X - U = (T - S) + (Z - Y)$.

   b) $\overrightarrow{UX} = r\overrightarrow{ST} \iff X - U = r\,(T - S)$.

   c) $\overrightarrow{UX} = r\overrightarrow{ST} + d\,\overrightarrow{YZ} \iff X - U = r\,(T - S) + d\,(Z - Y)$.

4. Sean X, Y y Z vectores de $\mathbb{R}^2$ y sean r y s números reales. Probar que:

   a) $X+Y=Y+X$.
   b) $(X+Y)+Z=X+(Y+Z)$.
   c) $X+O=O+X$.
   d) $r(sX)=(rs)X$.
   e) $(r+s)X=rX+sX$.

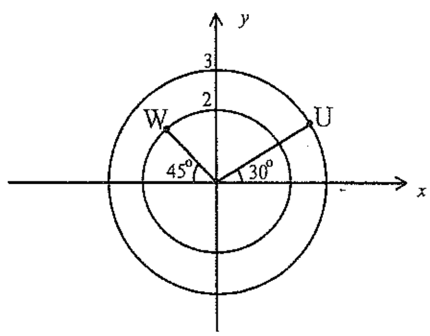
Sección 2.3

5. Sean $V=\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$, $W=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ y $U=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ vectores de $\mathbb{R}^2$ y sea $Z=U-2W+V$. Hallar:

   a) La magnitud y la dirección de Z.
   b) La descomposición canónica de Z.
   c) Todos los escalares a tales que $\|aV\|=15$.
   d) La distancia entre los vectores V y U.
   e) El ángulo entre los vectores W y $-2V$.
   f) El ángulo entre los vectores V y U.
   g) El vector unitario con dirección opuesta a la del vector $V+W$.
   h) El escalar b tal que el vector $\begin{pmatrix}3\\b\end{pmatrix}$ sea ortogonal al vector W.

6. Sean $U=-3E_1+E_2$, $V=\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$ y $W=6E_1-E_2$. Encontrar el vector X de $\mathbb{R}^2$ tal que $2U-V+X=7X+W$.

7. Se sabe que para todo vector no nulo X de $\mathbb{R}^2$ con dirección θ, se tiene que $X=\|X\|\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \operatorname{sen}\theta\end{pmatrix}$. Usando este hecho hallar el vector $4U-5W$ donde U y W son los vectores mostrados en la siguiente figura.



8. Sean $V=E_1+E_2$, $W=E_1$ y $U=aV+bW$ con a,b escalares.

   a) Ubicar V y W en el plano cartesiano.
   b) Probar que si $U=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ entonces $a=b=0$.
   c) Hallar a y b tales que $U=E_1+2E_2$.

9. Sean $P = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$.

   a) Probar que P, Q y R son tres de los vértices de un cuadrado $PQRS$.

   b) Hallar el vértice S del cuadrado $PQRS$.

   c) Calcular el área del cuadrado $PQRS$.

10. Dos vértices de un triángulo equilátero son $A = \begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$ y el origen.

    a) Hallar el tercer vértice (2 soluciones).

    b) Hallar el área del triángulo.

11. Un rombo $PQRS$ es tal que $P = \begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ y Q está sobre el eje y.

    a) Determinar los vértices Q y S.

    b) Calcular el área de dicho rombo.

12. Sean U, V y W vectores en $\mathbb{R}^2$. En cada una de las expresiones siguientes se pueden introducir paréntesis de una sola manera para obtener una expresión que tenga sentido. Introducir los paréntesis y efectuar las operaciones si $U = \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$ y $W = \begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$.

    a) $U \cdot VW$ b) $U \cdot V + W$ c) $U/V \cdot W$

13. Sean $U = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$ y $W = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$. Calcular:

    a) $U \cdot V$ b) $U \cdot (V + W)$ c) $(2U - V) \cdot (3W)$

    d) $Proy_W U$ e) $\|U\| V \cdot W$ f) $\|(U \cdot V) W\|$

14. Sean $P = \begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ y $R = \begin{pmatrix}m\\10\end{pmatrix}$ puntos tales que el ángulo QPR es recto. Hallar el valor de m.

15. En cada caso hallar un vector X de $\mathbb{R}^2$ tal que $X \cdot V = 0$ y $\|X\| = \|V\|$.

    a) $V = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ b) $V = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ c) $V = \begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ d) $V = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$

    ¿Qué característica adicional tiene el paralelogramo cuyos vértices son O, X, V y $X + V$?

16. Para el triángulo de vértices $P = \begin{pmatrix}7\\-7\end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}$ y $R = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$,

    a) Comprobar que el triángulo es rectángulo e isósceles.

    b) Calcular las longitudes de las tres alturas.

    c) Comprobar que la longitud de la mediana relativa a la hipotenusa es igual a la mitad de la longitud de la hipotenusa.

17. Para el triángulo de vértices $P = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $R = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \end{pmatrix}$,

    a) Comprobar que el triángulo es isósceles.

    b) Calcular las longitudes de las tres alturas del triángulo.

    c) Calcular las longitudes de las tres medianas del triángulo.

    d) Hallar el baricentro del triángulo.

18. Sean $P_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ y r un real positivo. Describir, mediante una ecuación en x, y, el conjunto de todos los puntos $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tales que $\|P - P_0\| = r$. Interpretar geométricamente dicho conjunto.

19. Hallar un punto $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ equidistante de los puntos $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $S = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$. Además, calcular el radio de la circunferencia que pasa por los puntos Q, R y S.

20. Describir, mediante una ecuación en x, y, el conjunto de todos los puntos $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ que satisfacen las condiciones indicadas en cada literal.

    a) P equidista de los puntos $M = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

    b) La suma de las distancias de P a $F_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y a $F_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ es igual a 4.

    c) La distancia de P a $R = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ es el doble de su distancia al punto $Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

21. Sean X y U puntos del plano que no están en una misma línea recta que pasa por el origen.

    a) Probar que el área $\mathcal{A}$ del paralelogramo cuyos vértices son O, X, U y $X + U$ es

    $$\mathcal{A} = \|U\|\,\|X - Proy_U X\| = \|X\|\,\|U - Proy_X U\|$$

    b) ¿Cuántos paralelogramos se pueden construir de tal manera que tres de sus vértices sean los puntos O, X y U ? ¿Qué relación existe entre las áreas de esos paralelogramos?

22. Sean $X = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ y $U = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix}$. Calcular el área del triángulo OXU.

23. Sean $X = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $Y = \begin{pmatrix} -1 \\ t \end{pmatrix}$, $t > 0$. Hallar el valor de t tal que el ángulo entre X y Y es de $45°$.

24. Sean U_1 y U_2 vectores de $\mathbb{R}^2$ no nulos y ortogonales, y sea W cualquier vector de $\mathbb{R}^2$. Probar que:

    a) $W = Proy_{U_1} W + Proy_{U_2} W$.

    b) Si U_1 y U_2 son unitarios, entonces $W = (W \cdot U_1)\,U_1 + (W \cdot U_2)\,U_2$.

25. Sea U un vector no nulo de $\mathbb{R}^2$. Probar que para cualquier vector X de $\mathbb{R}^2$ el vector $X - Proy_U X$ es ortogonal a U, mostrando que $U \cdot (X - Proy_U X) = 0$.

26. Sea U un vector no nulo de $\mathbb{R}^2$. Probar que para todo vector X de $\mathbb{R}^2$ existen únicos vectores P y Q de $\mathbb{R}^2$ tales que $X = P + Q$, con P paralelo a U y Q ortogonal a U.

27. Si $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $U = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, hallar dos vectores P y Q de $\mathbb{R}^2$ tales que $X = P + Q$ con P paralelo a U y Q ortogonal a U.

28. Probar la desigualdad triangular en $\mathbb{R}^2$, empleando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y el producto escalar en $\mathbb{R}^2$.

29. Demostrar lo siguiente utilizando vectores coordenados:

    a) Las diagonales de cualquier rectángulo tienen igual longitud.

    b) La suma de los cuadrados de las longitudes de los lados de un paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de sus diagonales.

    c) En todo triángulo rectángulo la longitud de la mediana relativa a la hipotenusa es igual a la mitad de la longitud de la hipotenusa.

    d) Si las longitudes de dos medianas de un triángulo son iguales, entonces dicho triángulo es isósceles.

    e) Las diagonales de un rombo son perpendiculares.

    Sugerencia: En cada caso, dibujar la figura correspondiente con un vértice en el origen y al menos un lado sobre uno de los ejes coordenados.

3

La línea recta en el plano

Una vez dotado el plano de un sistema de coordenadas cartesianas xy, las curvas en él pueden ser descritas a partir de ecuaciones. Se entiende por ecuación para una curva $\mathcal{C}$ del plano una igualdad que involucra las variables x, y de tal manera que dicha igualdad la satisfacen los puntos $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de la curva $\mathcal{C}$ y solamente ellos. Por ejemplo, una ecuación para la circunferencia de centro en el origen y radio r es

$$\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| = r$$

ya que un punto $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ del plano pertenece a esa circunferencia si y sólo si cumple dicha ecuación . Es claro que la ecuación anterior es equivalente a la ecuación

$$x^2 + y^2 = r^2$$

la cual es también, una ecuación para la circunferencia en consideración.

En este capítulo obtendremos distintas ecuaciones para una línea recta en el plano.

3.1 Ecuación vectorial y ecuaciones paramétricas

Una línea recta queda completamente determinada dando dos puntos distintos por donde ella pasa o también dando un punto sobre ella y un vector geométrico no nulo paralelo a la recta. Se entiende que un vector no nulo $\overrightarrow{AB}$ es paralelo a una recta $\mathcal{L}$ si sus extremos A, B están sobre $\mathcal{L}$ o sobre alguna recta paralela a $\mathcal{L}$. Cualquier vector no nulo $\overrightarrow{AB}$ paralelo a una recta se dirá un **vector director** de dicha recta.

Consideremos una recta $\mathcal{L}$ y sean P_0 un punto fijo de $\mathcal{L}$ y $\overrightarrow{OD}$ un vector director de $\mathcal{L}$.

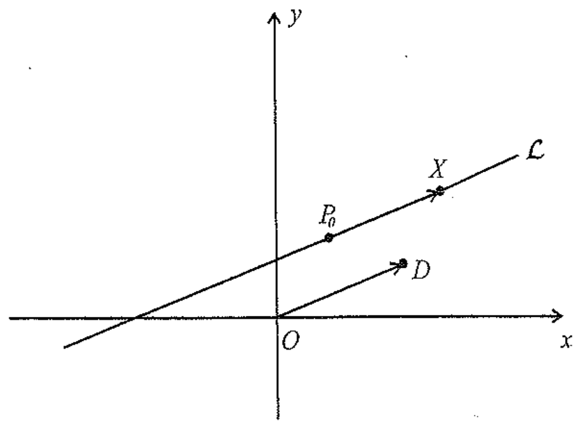


Figura 3.1.

Vemos que $\mathcal{L}$ está conformada por los puntos X tales que el vector $\overrightarrow{P_0X}$ es paralelo al vector $\overrightarrow{OD}$ (ver figura 3.1), es decir, $\mathcal{L}$ está conformada por los puntos X tales que

$$\overrightarrow{P_0X} = t\overrightarrow{OD}, \quad t \in \mathbb{R} \tag{3.1}$$

Ahora bien, como $\overrightarrow{P_0X} = \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OP_0}$ entonces (3.1) es equivalente a

$$\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OP_0} = t\overrightarrow{OD}, \quad t \in \mathbb{R}$$

que también podemos escribir como

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP_0} + t\overrightarrow{OD}, \quad t \in \mathbb{R}$$

condición que podemos expresar de manera simplificada, usando vectores algebraicos, en la forma

$$X = P_0 + tD, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Así, la recta $\mathcal{L}$ que pasa por P_0 y tiene vector director $\overrightarrow{OD}$ consiste de todos los puntos X de la forma

$$X = P_0 + tD \tag{3.2}$$

con $t \in \mathbb{R}$, como se ilustra en la figura 3.2 en la cual se muestran los puntos $P_0, P_0 + \frac{1}{2}D$ y $P_0 + D$ correspondientes, respectivamente, a $t = 0, t = \frac{1}{2}$ y $t = 1$.

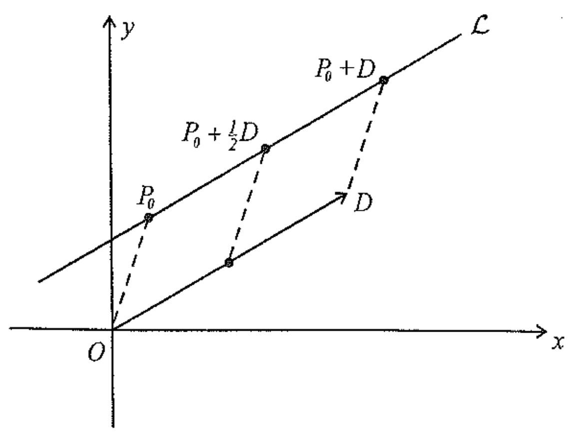


Figura 3.2.

La ecuación (3.2) se dice una **ecuación vectorial paramétrica** o simplemente una **ecuación vectorial** para la recta $\mathcal{L}$; la variable t es el **parámetro.** A cada valor de t en $\mathbb{R}$ corresponde un punto de $\mathcal{L}$, el punto $X = P_0 + tD$; a valores distintos de t corresponden puntos distintos de $\mathcal{L}$ y al dar a t todos los valores en $\mathbb{R}$ se obtienen todos los puntos de la recta $\mathcal{L}$.

En adelante diremos indistintamente que $\overrightarrow{OD}$ es un vector director de $\mathcal{L}$ o que D es un vector director de $\mathcal{L}$.

Nótese que si la recta $\mathcal{L}$ pasa por el origen entonces tomando $P_0 = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ en (3.2), esta ecuación se reduce a

$$X = tD \tag{3.3}$$

Como dicha recta consta de todos los múltiplos escalares del vector D (ver figura 3.3) nos referiremos a ella como **la recta generada por el vector** D.

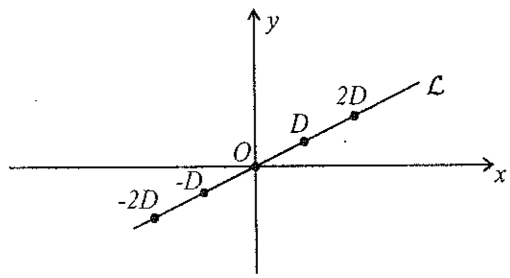


Figura 3.3.

Retornemos a la ecuación (3.2). Si en ella $X = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, $P_0 = \begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix}d_1\\d_2\end{pmatrix}$ se obtiene

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}d_1\\d_2\end{pmatrix}$$

ecuación vectorial que equivale al par de ecuaciones escalares

$$\begin{cases} x = x_0 + td_1 \\ y = y_0 + td_2 \end{cases} \tag{3.4}$$

las cuales son llamadas **ecuaciones escalares paramétricas** o simplemente **ecuaciones paramétricas** de la recta que pasa por $\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$ y que tiene vector director $\begin{pmatrix}d_1\\d_2\end{pmatrix}$.

Ejemplo 3.1
Sea $\mathcal{L}$ la recta que pasa por el punto $P_0 = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ y tiene vector director $D = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$. (Figura 3.4).

a) Halle una ecuación vectorial y ecuaciones paramétricas para $\mathcal{L}$.
b) Halle un punto de la recta $\mathcal{L}$ distinto de P_0.
c) Use las ecuaciones paramétricas para determinar si el punto $\begin{pmatrix}3\\10/3\end{pmatrix}$ es de $\mathcal{L}$.

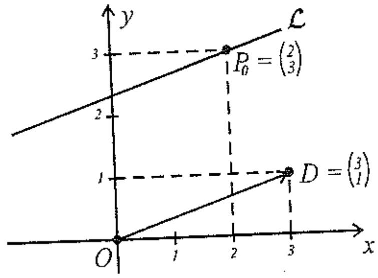


Figura 3.4.

Solución:

a) Una ecuación vectorial para $\mathcal{L}$ es $X = P_0 + tD$, es decir,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y unas ecuaciones paramétricas son

$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 3 + t \end{cases}$$

b) Dando a t un valor distinto de 0 en la ecuación vectorial hallada en a) se obtiene un punto de la recta distinto de P_0. Por ejemplo, si $t = 1$ se obtiene el punto $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$.

c) El punto $\begin{pmatrix} 3 \\ 10/3 \end{pmatrix}$ es de $\mathcal{L}$ si y sólo si existe $t \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} 3 = 2 + 3t \\ \dfrac{10}{3} = 3 + t \end{cases} \quad \text{es decir} \quad \begin{cases} 1 = 3t \\ \dfrac{1}{3} = t \end{cases}$$

Como se ve, las ecuaciones anteriores se satisfacen con $t = \dfrac{1}{3}$, así que $\begin{pmatrix} 3 \\ 10/3 \end{pmatrix}$ es un punto de $\mathcal{L}$. ■

Ejemplo 3.2

a) Demuestre que una ecuación vectorial para la recta $\mathcal{L}$ que pasa por dos puntos distintos P y Q es

$$X = P + t(Q - P) \tag{3.5}$$

b) Halle una ecuación vectorial y ecuaciones paramétricas para la recta que pasa por los puntos $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Solución:

a) Consideremos la figura siguiente:

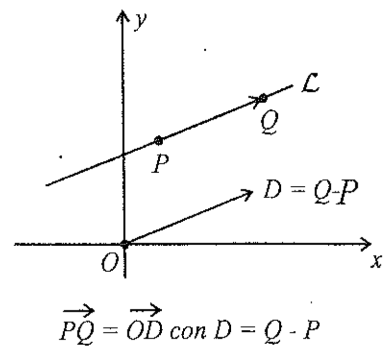


Figura 3.5.

Como P y Q son puntos de $\mathcal{L}$ y $P \neq Q$ entonces el vector $\overrightarrow{PQ}$ es un vector director de $\mathcal{L}$; ahora, como $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OD}$ con $D = Q - P$, entonces D es un vector director para $\mathcal{L}$ y por tanto una ecuación vectorial para $\mathcal{L}$ es

$$X = P + tD$$

es decir,

$$X = P + t(Q - P).$$

b) De acuerdo con lo hecho en a) y tomando $P = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $Q = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ se tiene que una ecuación vectorial para la recta que pasa por los puntos $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ es

$$X = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$$

es decir,

$$X = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Unas ecuaciones paramétricas para dicha recta son

$$\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 3 - 4t \end{cases} \quad ■$$

Observe que la ecuación (3.5) con $0 \leq t \leq 1$ describe el segmento de recta $\overline{PQ}$. Se tiene así que:

> Dados dos puntos P y Q,
>
> $$\overline{PQ} = \left\{X \in \mathbb{R}^2 \;/\; X = P + t(Q - P),\ \ 0 \leq t \leq 1\right\}$$

3.2 Ángulo de inclinación y pendiente

Consideremos una recta $\mathcal{L}$ no paralela al eje x. En tal caso $\mathcal{L}$ corta al eje x formándose cuatro ángulos con vértice en el punto de corte; entre ellos llamaremos **ángulo de inclinación** de $\mathcal{L}$ al ángulo α que se forma partiendo del eje x y avanzando en sentido antihorario hasta encontrar por primera vez a $\mathcal{L}$. (Ver figura 3.6).

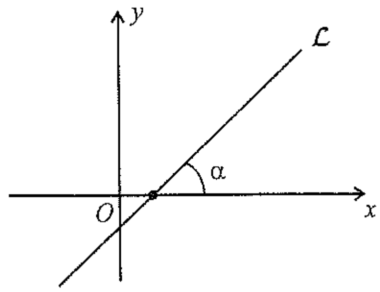


Figura 3.6.

Si $\mathcal{L}$ es una recta horizontal diremos que su ángulo de inclinación es de 0° (o 0 radianes).

Nótese que el ángulo de inclinación α de cualquier recta es tal que $0° \leq \alpha < 180°$ (o $0 \leq \alpha < \pi$ si α se mide en radianes).

Es claro que una recta en el plano queda completamente determinada al dar su ángulo de inclinación y un punto por donde ella pasa, y que dos rectas del plano son paralelas si y sólo si tienen el mismo ángulo de inclinación.

Ahora bien, en lugar de trabajar directamente con el ángulo de inclinación α resulta más conveniente hacerlo con el número

$$m = \tan \alpha$$

el cual es llamado **pendiente** de la recta correspondiente. Obsérvese que la pendiente queda definida para todas las rectas del plano, exceptuando únicamente las verticales (para las cuales el ángulo de inclinación es de 90°).

Obsérvese, además, que si dos rectas no verticales son paralelas entonces ellas tienen la misma pendiente (pues tienen el mismo ángulo de inclinación). El recíproco de esta afirmación también es cierto. Veámoslo:

Digamos que $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ son dos rectas no verticales con ángulos de inclinación α_1, α_2 y pendientes m_1, m_2 respectivamente.

Si $m_1 = m_2$ entonces $\tan \alpha_1 = \tan \alpha_2$ y como $0° \leq \alpha_1 < 180°$ y $0° \leq \alpha_2 < 180°$ entonces tiene que ser $\alpha_1 = \alpha_2$, así $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ tienen el mismo ángulo de inclinación y en consecuencia son paralelas. Se tiene así que:

> Dos rectas no verticales son paralelas si y sólo si tienen la misma pendiente.

La pendiente m, al igual que el ángulo de inclinación α, es una medida de la inclinación de la recta y se tiene que

> $m > 0$ si y sólo si $0° < \alpha < 90°$
> $m < 0$ si y sólo si $90° < \alpha < 180°$
> $m = 0$ si y sólo si $\alpha = 0°$

como se ilustra en la figura 3.7

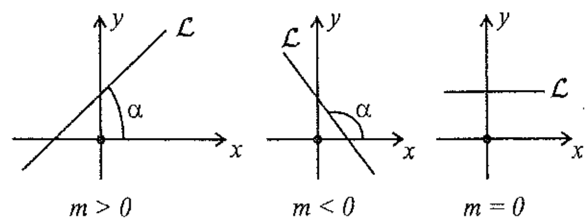


Figura 3.7.

Ejemplo 3.3
Halle la pendiente de la recta $\mathcal{L}$ que pasa por los puntos $P_1 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ y $P_2 = \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$.

Solución:

Consideremos la figura 3.8

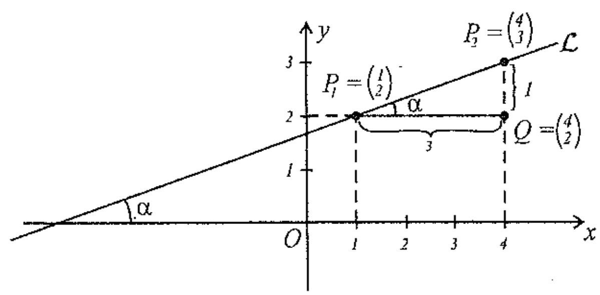


Figura 3.8.

Para hallar la pendiente m de $\mathcal{L}$ podemos apoyarnos en el triángulo rectángulo P_1QP_2 en el cual (como se muestra en la figura) el ángulo QP_1P_2 coincide con α, por ser ángulos correspondientes. Así, de dicho triángulo se tiene que

$$m = \tan\alpha = \frac{\text{longitud de } \overline{QP_2}}{\text{longitud de } \overline{P_1Q}} = \frac{3-2}{4-1} = \frac{1}{3}. \quad \blacksquare$$

En el ejemplo anterior se calculó la pendiente m a partir de dos puntos dados sobre la recta. Ahora, razonando como en dicho ejemplo, se puede probar que si $P_1 = \begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$ y $P_2 = \begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$ son dos puntos distintos cualesquiera de una recta no vertical $\mathcal{L}$ entonces la pendiente m de dicha recta, como se ilustra en la figura 3.9, es

$$\boxed{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}} \tag{3.6}$$

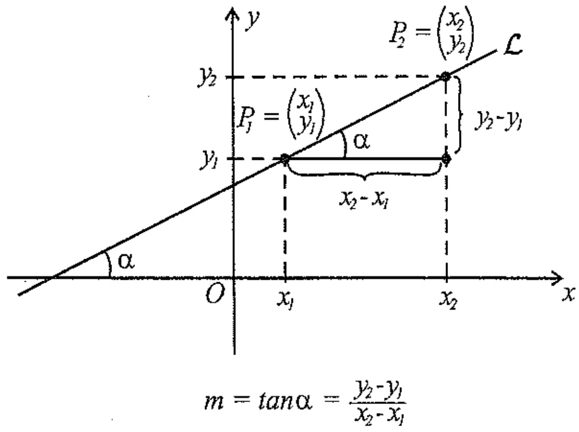


Figura 3.9.

Más aún, no importa cuál punto denotemos P_1 y cuál P_2, pues

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-(y_1 - y_2)}{-(x_1 - x_2)} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}.$$

Ahora, si en lugar de dos puntos conocemos un vector director $D = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$ para una recta no vertical $\mathcal{L}$, entonces la pendiente m de $\mathcal{L}$ es $m = \dfrac{d_2}{d_1}$, como se ilustra en la figura 3.10.

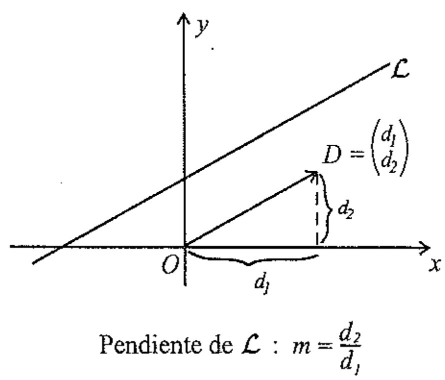


Figura 3.10.

Por otra parte, si m es la pendiente de una recta $\mathcal{L}$ entonces $D = \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ es un vector director de $\mathcal{L}$, ya que $D = \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ es un vector director de la recta $\mathcal{L}'$ que pasa por los puntos $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ y dicha recta $\mathcal{L}'$ es paralela a $\mathcal{L}$ porque la pendiente de $\mathcal{L}'$ también es m. (Ver figura 3.11).

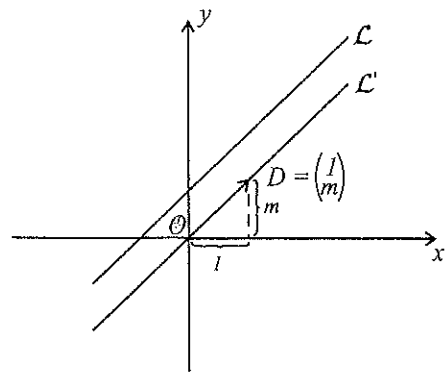


Figura 3.11.

3.3 Ecuaciones escalares no paramétricas

Sea $\mathcal{L}$ una recta paralela al eje x que pasa por el punto $P_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$. Es claro que un punto $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ pertenece $\mathcal{L}$ si y sólo si $y = y_0$; por tanto, una ecuación para $\mathcal{L}$ es

$$y = y_0 \tag{3.7}$$

De manera similar, si $\mathcal{L}$ es paralela al eje y y pasa por el punto $P_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, entonces una ecuación para $\mathcal{L}$ es

$$x = x_0$$

En la figura 3.12 se ilustran estos dos casos

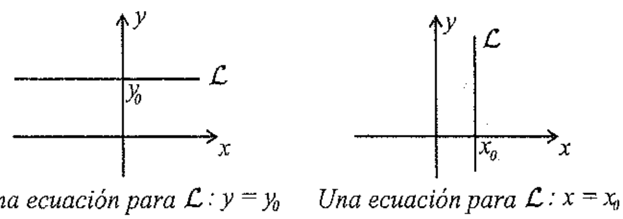


Figura 3.12.

Supongamos ahora que $\mathcal{L}$ es una recta que no es paralela al eje x ni al eje y. Digamos que un punto de esta recta es $P_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ y que un vector director es $D = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$. Como sabemos, unas ecuaciones paramétricas para $\mathcal{L}$ son

$$\begin{aligned} x &= x_0 + td_1 \\ y &= y_0 + td_2 \end{aligned}$$

Como $d_1 \neq 0$ y $d_2 \neq 0$ (pues $\mathcal{L}$ no es vertical ni horizontal) despejando el parámetro t en cada una de las ecuaciones anteriores e igualando se obtiene la ecuación

$$\frac{x - x_0}{d_1} = \frac{y - y_0}{d_2} \tag{3.8}$$

Así, todo punto $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de $\mathcal{L}$ satisface la ecuación (3.8); recíprocamente, si un punto $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ satisface la ecuación (3.8) entonces él satisface las ecuaciones paramétricas tomando

$$t = \frac{x - x_0}{d_1} = \frac{y - y_0}{d_2}$$

Por tanto (3.8) es una ecuación para la recta $\mathcal{L}$, de la cual se dice que es una **ecuación en forma simétrica.** Ahora, es claro que dicha ecuación es equivalente a la ecuación

$$y - y_0 = \frac{d_2}{d_1}(x - x_0)$$

es decir, a la ecuación

$$y - y_0 = m(x - x_0) \tag{3.9}$$

donde $m = d_2/d_1$ es la pendiente de $\mathcal{L}$, como ya se sabe. De la ecuación (3.9) se dice que es una ecuación para la recta $\mathcal{L}$ en la **forma punto-pendiente.**

Nótese que la ecuación (3.7) para una recta horizontal se puede obtener de la ecuación (3.9) con $m = 0$.

Si en la ecuación (3.9) se escoge el punto P_0 como el punto $\begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$ donde la recta $\mathcal{L}$ corta al eje y, entonces (3.9) se convierte en

$$y - b = m(x - 0)$$

o, equivalentemente, en

$$y = mx + b \tag{3.10}$$

El número b, el cual es la ordenada del punto donde la recta $\mathcal{L}$ corta al eje y, es llamado **intercepto** de $\mathcal{L}$ con el eje y; por ello, de la ecuación (3.10) se dice que es una ecuación para la recta $\mathcal{L}$ en la **forma pendiente-intercepto.**

Como resumen de lo anterior tenemos:

Sea $\mathcal{L}$ una recta en el plano que pasa por el punto $P_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$.

- Si $\mathcal{L}$ es horizontal, una ecuación para $\mathcal{L}$ es

$$y = y_0$$

- Si $\mathcal{L}$ es vertical, una ecuación para $\mathcal{L}$ es

$$x = x_0$$

- Si $\mathcal{L}$ no es horizontal ni vertical y un vector director de $\mathcal{L}$ es $D = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$, una ecuación para $\mathcal{L}$ es

$$\frac{x - x_0}{d_1} = \frac{y - y_0}{d_2}$$

- Si $\mathcal{L}$ tiene pendiente m, una ecuación para $\mathcal{L}$ es

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

- Si $\mathcal{L}$ tiene pendiente m y corta al eje y en el punto $\begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$, una ecuación para $\mathcal{L}$ es

$$y = mx + b$$

Ejemplo 3.4

a) Halle una ecuación en la forma pendiente-intercepto para la recta $\mathcal{L}_1$ que pasa por el punto $P_0 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ y tiene ángulo de inclinación de 30^o.

b) Halle una ecuación para la recta vertical $\mathcal{L}_2$ que pasa por el punto $P_0 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

c) Halle una ecuación para la recta horizontal $\mathcal{L}_3$ que pasa por el punto $P_0 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

d) Halle una ecuación en la forma punto-pendiente para la recta $\mathcal{L}_4$ que pasa por el punto $Q_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ y es paralela a la recta $\mathcal{L}_1$ descrita en el literal a).

e) Halle unas ecuaciones paramétricas para la recta $\mathcal{L}_4$ descrita en el literal d).

Solución:

a) Como el ángulo de inclinación de $\mathcal{L}_1$ es $\alpha = 30°$ entonces la pendiente de $\mathcal{L}_1$ es $m = \tan 30° = 1/\sqrt{3}$. Por tanto, una ecuación para $\mathcal{L}_1$ en la forma punto-pendiente es

$$y - 2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(x + 3)$$

Ahora, de la ecuación anterior podemos obtener una ecuación en la forma pendiente-intercepto para $\mathcal{L}_1$, despejando la variable y así:

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + \left(\frac{3}{\sqrt{3}} + 2\right)$$

es decir,

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + \left(\sqrt{3} + 2\right)$$

la cual es una ecuación para $\mathcal{L}_1$ en la forma pendiente-intercepto; en dicha ecuación se observa que el intercepto con el eje y de la recta es $\sqrt{3} + 2$.

b) Una ecuación para la recta vertical $\mathcal{L}_2$ que pasa por $P_0 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ es $x = -3$.

c) Una ecuación para la recta horizontal $\mathcal{L}_3$ que pasa por $P_0 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ es $y = 2$.

d) Como $\mathcal{L}_4$ es paralela a $\mathcal{L}_1$ y la pendiente de $\mathcal{L}_1$ es $m = 1/\sqrt{3}$ entonces la pendiente de $\mathcal{L}_4$ también es $m = 1/\sqrt{3}$. Luego, una ecuación en la forma punto-pendiente para la recta $\mathcal{L}_4$ es

$$y - (-1) = \frac{1}{\sqrt{3}}(x - 2)$$

es decir,

$$y + 1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(x - 2)$$

e) Como $\mathcal{L}_4$ tiene pendiente $m = 1/\sqrt{3}$ entonces un vector director para $\mathcal{L}_4$ es el vector $D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$. Ahora bien, otro vector director para $\mathcal{L}_4$, más cómodo para su manejo algebraico, es $D' = \sqrt{3}D = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$. Usando este vector D' y el punto $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, tenemos que unas ecuaciones paramétricas para $\mathcal{L}_4$ son

$$\begin{cases} x = 2 + \sqrt{3}t \\ y = -1 + t \end{cases} \qquad \blacksquare$$

Hemos visto que toda recta en el plano tiene una ecuación de una de las formas siguientes:

$$y - y_0 = m\,(x - x_0)\,, \qquad y = mx + d, \qquad x = x_0 \tag{3.11}$$

Ahora, como cada una de estas ecuaciones puede llevarse a la forma

$$ax + by = c \tag{3.12}$$

con a, b, c constantes, $a \neq 0$ o $b \neq 0$, podemos afirmar que toda recta en el plano tiene una ecuación de la forma (3.12).

Por otra parte, toda ecuación de la forma (3.12) es equivalente a alguna ecuación del tipo de las que aparecen en (3.11). En efecto, si en (3.12) se tiene $b \neq 0$, despejando la variable y de ella se obtiene la ecuación equivalente

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$$

la cual es del tipo $y = mx + d$ y por tanto corresponde a la recta con pendiente $m = -a/b$ y que corta al eje y en el punto $\begin{pmatrix} 0 \\ c/b \end{pmatrix}$. Si $b = 0$, entonces (3.12) se reduce a la ecuación $ax = c$ con $a \neq 0$, la cual es equivalente a la ecuación

$$x = \frac{c}{a}$$

que es del tipo $x = x_0$ y por tanto corresponde a la recta vertical que corta al eje x en el punto $\begin{pmatrix} c/a \\ 0 \end{pmatrix}$.

Resumimos la discusión anterior en el siguiente resultado:

> Toda recta en el plano tiene una ecuación de la forma
> $$ax + by = c$$
> con a, b, c constantes, $a \neq 0$ o $b \neq 0$, y toda ecuación de esta forma corresponde a una recta en el plano.

De una ecuación como (3.12) para una recta, se dice que está en **forma general**. Nótese que si en la ecuación $ax + by = c$ se tiene $c = 0$ entonces la recta correspondiente pasa por el origen ya que $a(0) + b(0) = 0$. Recíprocamente, si la recta con ecuación $ax + by = c$ pasa por el origen entonces tiene que ser $c = 0$ (pues $c = a\,(0) + b\,(0) = 0$). Así que,

> Toda recta que pasa por el origen tiene una ecuación de la forma
> $$ax + by = 0$$
> con a, b constantes, $a \neq 0$ o $b \neq 0$, y toda ecuación de esta forma corresponde a una recta que pasa por el origen.

Ejemplo 3.5
Dada la recta $\mathcal{L}_1$ con ecuación

$$2x + 3y = 6 \tag{3.13}$$

obtenga una ecuación en forma general para la recta $\mathcal{L}_2$ que es paralela a $\mathcal{L}_1$ y pasa por el punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Solución:

Empecemos determinando la pendiente de $\mathcal{L}_1$, para lo cual basta despejar la variable y de (3.13). Al hacerlo se obtiene

$$y = -\frac{2}{3}x + 2.$$

Luego, la pendiente de $\mathcal{L}_1$ es $m = -2/3$. Ahora, como $\mathcal{L}_2$ es paralela a $\mathcal{L}_1$ entonces la pendiente de $\mathcal{L}_2$ también es $m = -2/3$ y como $\mathcal{L}_2$ pasa por $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ entonces (usando la forma punto-pendiente) una ecuación para $\mathcal{L}_2$ es

$$y - 4 = -\frac{2}{3}(x - 1).$$

Llevamos ahora esta ecuación a la forma general:

$$\begin{aligned} 3(y-4) &= -2(x-1) \\ 3y - 12 &= -2x + 2 \\ 2x + 3y &= 14 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Así, una ecuación en forma general para $\mathcal{L}_2$ es la ecuación (3.14). ■

3.4 Ecuación en forma normal

Una recta en el plano también queda completamente determinada dando un punto por donde ella pasa y un vector geométrico no nulo perpendicular a la recta. Se entiende que un vector no nulo $\overrightarrow{n}$ es perpendicular a una recta $\mathcal{L}$ si $\overrightarrow{n}$ es perpendicular a algún vector director $\overrightarrow{d}$ de $\mathcal{L}$. Todo vector no nulo $\overrightarrow{n}$ perpendicular a una recta $\mathcal{L}$, se dirá un **vector normal** a $\mathcal{L}$. Si $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{ON}$, en lugar de decir que $\overrightarrow{n}$ es un vector normal a $\mathcal{L}$ también diremos que N es un vector normal a $\mathcal{L}$.

Consideremos una recta $\mathcal{L}$ y sean P_0 un punto fijo de $\mathcal{L}$ y $\overrightarrow{ON}$ un vector normal a $\mathcal{L}$, como se ilustra en la figura 3.13.

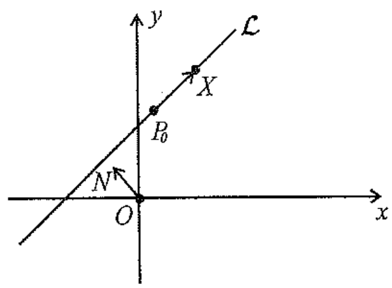


Figura 3.13.

Empleando el producto escalar podemos obtener para $\mathcal{L}$ una ecuación vectorial muy simple, distinta a la ecuación vectorial (3.2). En efecto, un punto X del plano está en $\mathcal{L}$ si y sólo si el vector $\overrightarrow{P_0X}$ es perpendicular al vector $\overrightarrow{ON}$ (ver figura 3.13), es decir, si y sólo si

$$\overrightarrow{P_0X} \cdot \overrightarrow{ON} = 0 \tag{3.15}$$

ecuación que podemos expresar de manera simplificada, usando vectores algebraicos, como

$$(X - P_0) \cdot N = 0$$

o bien como

$$X \cdot N = P_0 \cdot N \tag{3.16}$$

Así, (3.16) es una ecuación (vectorial no paramétrica) para $\mathcal{L}$, de la cual se dice que es una **ecuación en forma normal**.

Observe que si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, al sustituir en la ecuación (3.16) y realizar los productos escalares indicados en ella, tal ecuación toma la forma

$$ax + by = c \tag{3.17}$$

donde $c = P_0 \cdot N$.

Por otra parte, si (3.17) es una ecuación para una recta $\mathcal{L}$ entonces escogiendo un punto P_0 de $\mathcal{L}$, dicha ecuación puede escribirse en la forma (3.16) con $N = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, o equivalentemente, en la forma (3.15), de lo cual se sigue que $N = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ es un vector normal a $\mathcal{L}$. Algo más, si $N = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ es un vector normal a $\mathcal{L}$, todo vector no nulo ortogonal a él es un

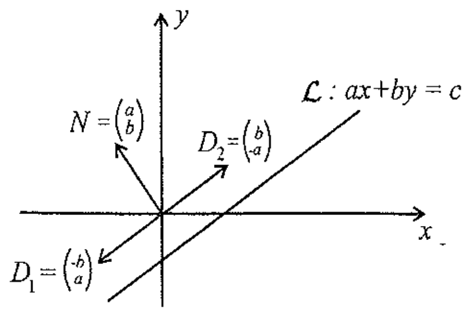


Figura 3.14.

vector director de $\mathcal{L}$; en particular, los vectores $D_1 = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ y $D_2 = \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ son vectores directores de $\mathcal{L}$ pues ambos son ortogonales a N.

Se tiene así lo siguiente:

- Si $N = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ es un vector normal a una recta $\mathcal{L}$ entonces una ecuación para $\mathcal{L}$ es
$$ax + by = c$$
para cierta constante c.
- Si $ax + by = c$ es una ecuación para una recta $\mathcal{L}$ entonces $N = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ es un vector normal a $\mathcal{L}$ y $D_1 = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ y $D_2 = \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ son vectores directores de $\mathcal{L}$. (Vea figura 3.14).

Ejemplo 3.6
Considere la recta $\mathcal{L}$ que pasa por $P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y que tiene vector director $D = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Halle una ecuación en forma normal para $\mathcal{L}$ y obtenga a partir de ella una ecuación en forma general para $\mathcal{L}$.

Solución:

Un vector normal a $\mathcal{L}$ es $N = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ pues $N \cdot D = 0$, y como $\mathcal{L}$ pasa por el punto $P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ entonces una ecuación en forma normal para $\mathcal{L}$ es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Realizando los productos escalares indicados, se obtiene

$$3x + 2y = 5$$

la cual es una ecuación para $\mathcal{L}$ en forma general. ■

3.5 Rectas perpendiculares

Ahora nos referiremos a condiciones bajo las cuales dos rectas del plano son perpendiculares.

Sean $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ dos rectas dadas. En primer lugar estas rectas son perpendiculares (lo cual denotamos $\mathcal{L}_1 \perp \mathcal{L}_2$) si y sólo si un vector director D_1 de $\mathcal{L}_1$ es ortogonal a un vector director D_2 de $\mathcal{L}_2$.

Ahora obtendremos un criterio de perpendicularidad en términos de las pendientes, para el caso en que ninguna de las rectas es vertical.

Supongamos entonces que ninguna de las rectas $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ es vertical y que ellas tienen respectivamente pendientes m_1 y m_2; recordamos que en tal caso los vectores $D_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ m_1 \end{pmatrix}$ y $D_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ m_2 \end{pmatrix}$ son vectores directores de $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ respectivamente. Se tiene entonces que:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 \perp \mathcal{L}_2 &\Leftrightarrow D_1 \text{ y } D_2 \text{ son ortogonales} \\ &\Leftrightarrow D_1 \cdot D_2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 1 + m_1 m_2 = 0 \\ &\Leftrightarrow m_1 m_2 = -1 \end{aligned}$$

Así hemos probado que:

> Si las rectas $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ tienen pendientes m_1, m_2 respectivamente entonces
>
> $$\mathcal{L}_1 \perp \mathcal{L}_2 \text{ si y sólo si } m_1 m_2 = -1.$$

Ejemplo 3.7
Halle una ecuación para la recta mediatriz del segmento de recta $\overline{PQ}$ donde $P = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}$ y $Q = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Solución:

La mediatriz del segmento $\overline{PQ}$ es la recta $\mathcal{L}_1$ que pasa por el punto medio de $\overline{PQ}$ y es perpendicular a la recta $\mathcal{L}_2$ determinada por P y Q.

El punto medio del segmento $\overline{PQ}$ es $M = \frac{1}{2}(P+Q) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ y la pendiente de $\mathcal{L}_2$ es

$$m_2 = \frac{3-(-7)}{-5-3} = \frac{10}{-8} = -\frac{5}{4}.$$

así, la recta $\mathcal{L}_1$ (que es perpendicular a $\mathcal{L}_2$) tiene pendiente $m_1 = -1/m_2 = 4/5$; y como $\mathcal{L}_1$ pasa por $M = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ entonces una ecuación para la mediatriz $\mathcal{L}_1$ es

$$y - (-2) = \frac{4}{5}(x - (-1))$$

es decir,

$$y + 2 = \frac{4}{5}(x+1). \quad \blacksquare$$

3.6 Ángulo entre rectas

Cuando dos rectas $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ se cortan se forman cuatro ángulos con vértice en el punto de corte. Dos cualesquiera de esos ángulos o son opuestos por el vértice, y por tanto son congruentes, o son adyacentes, y por tanto son suplementarios. Llamaremos **ángulo de** $\mathcal{L}_1$ a $\mathcal{L}_2$ al ángulo medido en sentido antihorario desde $\mathcal{L}_1$ hasta encontrar por primera vez $\mathcal{L}_2$. En la figura 3.15 dicho ángulo es θ y $180° - \theta$ es el ángulo de $\mathcal{L}_2$ a $\mathcal{L}_1$.

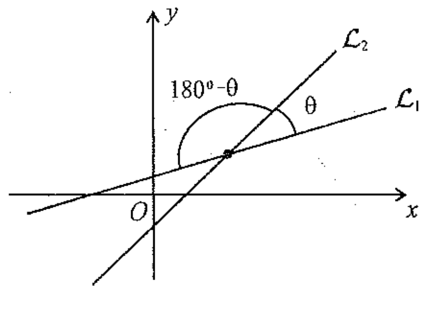


Figura 3.15.

A continuación obtendremos una fórmula para el ángulo de $\mathcal{L}_1$ a $\mathcal{L}_2$ en términos de sus pendientes.

Consideremos la figura 3.16 en la cual θ es el ángulo de $\mathcal{L}_1$ a $\mathcal{L}_2$, ϕ el de $\mathcal{L}_2$ a $\mathcal{L}_1$ y θ_1, θ_2 los ángulos de inclinación de $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$, respectivamente.

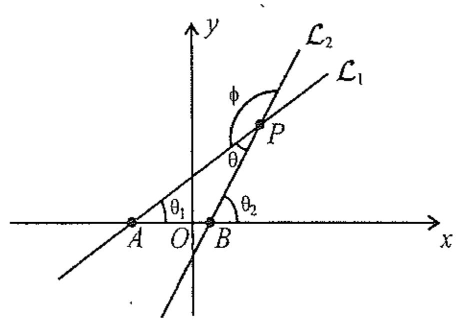


Figura 3.16.

De la figura se deduce que $\theta_2 = \theta_1 + \theta$, pues θ_2 es un ángulo exterior al triángulo ABP y por ello θ_2 es la suma de los ángulos interiores no adyacentes θ_1 y θ. Así que

$$\theta = \theta_2 - \theta_1 \tag{3.18}$$

Si ninguno de los ángulos θ, θ_1 y θ_2 es recto entonces

$$\tan\theta = \tan(\theta_2 - \theta_1) = \frac{\tan\theta_2 - \tan\theta_1}{1 + \tan\theta_1 \tan\theta_2}$$

Ahora, si m_1 y m_2 son las pendientes de $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ respectivamente entonces $\tan\theta_1 = m_1$ y $\tan\theta_2 = m_2$ por lo tanto

$$\tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \tag{3.19}$$

igualdad que determina de manera única al ángulo θ, pues $0° \leq \theta < 180°$. Nótese el orden de las pendientes en el numerador del lado derecho en (3.19).

Se advierte al lector que la igualdad (3.19) se dedujo de la figura 3.16, y que para una figura diferente quizás no se cumpla la igualdad (3.18), pero para $\theta \neq 90°$ siempre se tendrá que

$$\tan\theta = \tan(\theta_2 - \theta_1)$$

como podrá comprobar el lector considerando otras figuras.

En cuanto al ángulo ϕ tenemos que $\phi = 180° - \theta$ y por tanto

$$\tan\phi = \tan\left(180° - \theta\right) = -\tan\theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

de manera que la única diferencia entre las fórmulas para $\tan\phi$ y $\tan\theta$ está en el orden en que aparecen las pendientes en el numerador, como era de esperarse.

Nótese que la fórmula (3.19) no es aplicable cuando alguna de de las rectas es vertical o cuando las rectas son perpendiculares. Ahora, si por ejemplo $\mathcal{L}_1$ es vertical, el ángulo de $\mathcal{L}_1$ a $\mathcal{L}_2$ puede hallarse fácilmente a partir del ángulo de inclinación de $\mathcal{L}_2$.

Ejemplo 3.8

Halle el ángulo de la recta $\mathcal{L}_1$ a la recta $\mathcal{L}_2$ sabiendo que $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ tienen, respectivamente, ecuaciones

$$2x + 3y = 5 \qquad \text{y} \qquad 5x + y = -3.$$

Solución:

Las pendientes de $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ son respectivamente $m_1 = -2/3$ y $m_2 = -5$. Aplicando la fórmula (3.19) tenemos que el ángulo θ de $\mathcal{L}_1$ a $\mathcal{L}_2$ en sentido antihorario es tal que

$$\tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} = \frac{-5 - \left(-\frac{2}{3}\right)}{1 + (-5)\left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{-\frac{13}{3}}{\frac{13}{3}} = -1.$$

Ahora, como $\tan\theta < 0$ entonces $90° < \theta < 180°$ y por tanto

$$\theta = \tan^{-1}(-1) + 180° = -45° + 180° = 135°. \quad \blacksquare$$

3.7 Distancia de un punto a una recta

Consideremos una recta $\mathcal{L}$ con ecuación $ax + by = c$ y un punto $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ del plano. Se desea hallar una expresión para la distancia d del punto X_0 a $\mathcal{L}$ (Figura 3.17).

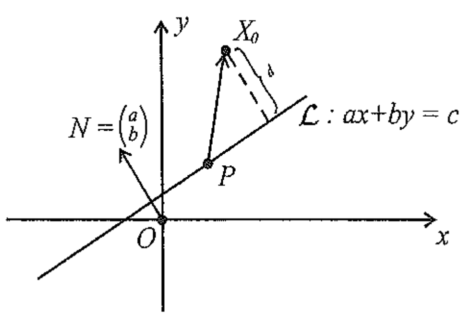


Figura 3.17.

Una manera de obtener una tal expresión para d, empleando vectores, es la siguiente: elijamos un punto cualquiera $P = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ de $\mathcal{L}$ y consideremos el vector $\overrightarrow{PX_0}$ y también el vector $N = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, el cual es normal a la recta $\mathcal{L}$. (Ver figura 3.17).

Es claro que la distancia de X_0 a $\mathcal{L}$ es la magnitud del vector $Proy_{\overrightarrow{ON}} \overrightarrow{PX_0}$, así que

$$\begin{aligned} d &= \left\| Proy_{\overrightarrow{ON}} \overrightarrow{PX_0} \right\| \\ &= \left\| Proy_N (X_0 - P) \right\| \\ &= \left\| \frac{N \cdot (X_0 - P)}{\|N\|^2} N \right\| \\ &= \frac{|N \cdot X_0 - N \cdot P|}{\|N\|}. \end{aligned}$$

Ahora, $N \cdot X_0 = ax_0 + by_0$ y $N \cdot P = ae + bf$, y como P es un punto de $\mathcal{L}$ entonces $ae + bf = c$, luego $N \cdot P = c$ y por tanto

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Hemos probado así que:

> La distancia d del punto $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ a la recta $\mathcal{L}$ con ecuación $ax + by = c$, es
> $$d = \frac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \tag{3.20}$$

Ejemplo 3.9
Considere la recta $\mathcal{L}$ con ecuación $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ y el punto $X_0 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

a) Halle la distancia d de X_0 a $\mathcal{L}$.

b) Muestre que la recta $\mathcal{L}'$ con ecuación $10x + 5y = 7$ es paralela a $\mathcal{L}$ y encuentre la distancia d' entre estas dos rectas.

Solución:

a) Empecemos por hallar una ecuación en forma general para la recta $\mathcal{L}$. Como $D = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ es un vector director de $\mathcal{L}$ entonces $N = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ es un vector normal a esta recta y así una ecuación en forma general para $\mathcal{L}$ es $4x + 2y = c$ en la cual sólo resta determinar el valor de la constante c. Ahora, como un punto de $\mathcal{L}$ es $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ entonces $4(-1) + 2(3) = c$ y así $c = 2$; luego una ecuación para $\mathcal{L}$ es $4x + 2y = 2$, la cual es equivalente a $2x + y = 1$.

Según (3.20) la distancia de X_0 a $\mathcal{L}$ es

$$d = \frac{\left|2\left(-\frac{1}{2}\right) + 1(5) - 1\right|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{5}}.$$

b) De las ecuaciones para las rectas $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}'$ vemos que para cada una de ellas la pendiente es -2; luego, $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}'$ tienen la misma pendiente y por tanto son paralelas. Ahora, para hallar la distancia d' entre $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}'$ basta elegir un punto en $\mathcal{L}'$ y luego calcular la distancia de él a $\mathcal{L}$. Como un punto de $\mathcal{L}'$ es $\begin{pmatrix} 0 \\ 7/5 \end{pmatrix}$ entonces

$$d' = \frac{\left|2\,(0) + 1\left(\frac{7}{5}\right) - 1\right|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{2}{5\sqrt{5}}. \quad \blacksquare$$

3.8 Ecuaciones lineales, combinaciones lineales, dependencia e independencia lineal

Hemos visto que toda ecuación de la forma

$$ax + by = c$$

con $a \neq 0$ o $b \neq 0$ (a, b, c constantes) es la ecuación de una línea recta en el plano cartesiano xy. Por ello las ecuaciones de la forma

$$ax + by = c$$

se denominan **ecuaciones lineales** (en las variables x, y), y también por ello una expresión del tipo

$$ax + by$$

se dice una **expresión lineal** en las variables x, y.

Es más, si $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ son vectores geométricos del plano, todo vector de la forma

$$a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}$$

con a y b escalares, se dice una **combinación lineal** de los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$. De manera similar, si X y Y son vectores de $\mathbb{R}^2$, todo vector de la forma

$$aX + bY$$

con a y b escalares, se dice una **combinación lineal** de los vectores X y Y.

Ejemplo 3.10
a) ¿Es el vector $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ una combinación lineal de los vectores $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1/2 \\ 3 \end{pmatrix}$?

b) ¿Es el vector $\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$ una combinación lineal de los vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$?

Solución:
a) Veamos si existen escalares a y b tales que

$$a\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1/2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

es decir, tales que

$$\begin{aligned} 2a + \frac{1}{2}b &= 1 \\ -a + 3b &= -1. \end{aligned}$$

Despejando a en la segunda ecuación y reemplazando en la primera se obtiene $b = -2/13$; sustituyendo este valor de b en la segunda ecuación se obtiene $a = 7/13$. Por lo tanto, el vector $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sí es combinación lineal de los vectores dados:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{7}{13}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{2}{13}\begin{pmatrix} 1/2 \\ 3 \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

b) Veamos si existen escalares a y b tales que

$$a\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

es decir, tales que

$$\begin{aligned} a + 3b &= 7 \\ 2a + 6b &= 8 \end{aligned} \tag{3.21}$$

Despejando a en la primera ecuación y reemplazando en la segunda se obtiene que $14 = 8$. Luego, no existen escalares a, b que satisfagan (3.21), es decir, el vector $\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$ no es una combinación lineal de los vectores dados. $\blacksquare$

Sea $\mathcal{L}$ una recta que pasa por el origen y por un punto D, con $D \neq O$. Recordamos que para $X \in \mathbb{R}^2$ se tiene que $X \in \mathcal{L}$ si y solamente si X es múltiplo escalar de D. Se sigue de lo anterior que dos vectores dados de $\mathbb{R}^2$ están sobre una misma línea recta que pasa por el origen si y sólo si alguno de los dos vectores es múltiplo escalar del otro. Por ello, cuando dos vectores X, Y de $\mathbb{R}^2$ son tales que alguno de los dos es múltiplo escalar del otro, se dice que ellos son **linealmente dependientes (L.D.)**. En caso contrario, se dice que los vectores son **linealmente independientes (L.I.)**. De igual forma, dos vectores geométricos $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ se dicen **linealmente dependientes (L.D.)** si alguno de los dos es múltiplo escalar del otro, es decir, si son paralelos; en caso contrario los vectores se dicen **linealmente independientes (L.I.)**.

Ejemplo 3.11

Como $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ entonces los vectores $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ son linealmente dependientes (están sobre una misma línea recta que pasa por el origen).

Por otra parte, los vectores $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ son linealmente independientes (no están sobre una misma línea recta que pasa por el origen) pues no existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. En la figura 3.18 se aprecia lo anterior. $\blacksquare$

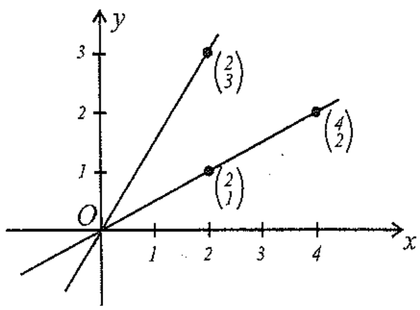


Figura 3.18.

3.9 Ejercicios

Sección 3.1

1. Encontrar una ecuación vectorial para la recta $\mathcal{L}$ descrita en cada literal:

   a) $\mathcal{L}$ pasa por el origen y tiene vector director $D = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

   b) $\mathcal{L}$ pasa por los puntos $P = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ y $Q = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

   c) $\mathcal{L}$ contiene el punto $P_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ y es paralela al vector $\overrightarrow{OD}$ con $D = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. Probar que las ecuaciones vectoriales

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix},\ t_1 \in \mathbb{R} \qquad \text{y} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix},\ t_2 \in \mathbb{R}.$$

   son ecuaciones de una misma línea recta.

3. Sea $\mathcal{L}_1$ la recta que pasa por el punto $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y es paralela al vector $D_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y sea $\mathcal{L}_2$ la recta que pasa por el punto $Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y es paralela al vector $D_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}$. Hallar el punto de intersección de $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$.

Sección 3.2

4. Determinar si los puntos dados en cada caso son colineales.

   a) $P = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

   b) $P = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} -3 \\ 11 \end{pmatrix}$

5. Para cada literal, hallar una ecuación para la bisectriz del ángulo agudo que forman las rectas con ecuaciones dadas.

   a) $\mathcal{L}_1 : x = 5 + \sqrt{3}t, \quad y = t\,; \qquad \mathcal{L}_2 : x = 2$ *b*) $\mathcal{L}_1 : x = \frac{4}{3}t, \quad y = t, \qquad \mathcal{L}_2 : y = 2$

Sección 3.3

6. Para cada literal, hallar una ecuación en forma general para la recta que satisface las condiciones dadas.

   a) Tiene pendiente 4 y pasa por el punto $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

   b) Tiene pendiente -2 y corta el eje x en el punto $\begin{pmatrix} -2/3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   c) Pasa por el punto $\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ y es paralela al eje y.

   d) Pasa por los puntos $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$.

   e) Intersecta al eje y en el punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ y es perpendicular a la recta con ecuación $y = -\frac{2}{3}x + 5$.

   f) Pasa por $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ y es paralela a la recta que contiene los puntos $\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

7. Para cada literal, hallar una ecuación en la forma pendiente-intercepto para la recta que pasa por el punto P y es paralela a la recta con ecuación dada.

   a) $\dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y-5}{4}$, $P = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

   b) $2x - y - 14 = 0$, $P = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

   c) $y = 7$, $P = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

   d) $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \end{cases}$, $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

8. Sea $\mathcal{L}$ la recta que corta al eje x en $P = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ y al eje y en $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$. Probar que si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, una ecuación para $\mathcal{L}$ es

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

9. La gráfica de una ecuación que relaciona la temperatura en grados centígrados con la temperatura en grados fahrenheit es una recta. El agua se congela a 0^oC y a 32^oF y el agua hierve a 100^oC y a 212^oF.

   a) Si F grados fahrenheit corresponden a C grados centígrados, escribir una ecuación que relacione F con C.

   b) Dibujar la gráfica de la ecuación del literal *a*).

   c) ¿Cuál es la temperatura en grados fahrenheit que corresponde a 20 grados centígrados?

   d) ¿Cuál es la temperatura en grados centígrados que corresponde a 86 grados fahrenheit?

   e) ¿Existe alguna temperatura para la cual sea $C = F$?

10. Determinar los valores reales de k y h tales que $3x + ky + 2 = 0$ y $5x - y + h = 0$ son ecuaciones de la misma recta.

Sección 3.4

11. Hallar un vector normal a la recta con ecuación dada en cada literal:

a) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$

b) $y = 2x - 5$

c) $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-3}{3}$

d) $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -3t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

e) $2(x-1) + 5(y+2) = 0$

f) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{7} = 1$

12. Sean $\mathcal{L}$ una recta y N un punto de $\mathcal{L}$ tales que $\overrightarrow{ON}$ es un vector normal a $\mathcal{L}$. Probar que una ecuación para $\mathcal{L}$ es

$$(\cos\alpha)\,x + (\operatorname{sen}\alpha)\,y = \rho.$$

donde $\rho = \left\|\overrightarrow{ON}\right\|$ y α es la dirección del vector $\overrightarrow{ON}$.

Sección 3.5

13. Estudiar la posición relativa (paralelas, perpendiculares, se cortan) de cada par de rectas y si se cortan, hallar el punto de intersección de ellas.

a) $\begin{cases} \mathcal{L}_1 : 2x - y + 1 = 0 \\ \mathcal{L}_2 : 5x - 3y + 2 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \mathcal{L}_1 : y = 2x + 1 \\ \mathcal{L}_2 : -4x + 2y + 5 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \mathcal{L}_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \mathcal{L}_2 : x - 2 = \dfrac{y+3}{2} \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

14. Para cada literal, hallar una ecuación vectorial de la recta que pasa por el punto P y es perpendicular a la recta que tiene la ecuación dada.

a) $P = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\dfrac{x}{7} + \dfrac{y}{7} = 1$

b) $P = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $2x - 5y = 4$

c) $P = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x = -5$

d) $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $y = 3$

e) $P = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $y = \frac{1}{3}x + 5$

15. Para cada literal, hallar todos los valores de k para los cuales se satisface la condición indicada.

a) Las ecuaciones $3x + 6ky = 7$ y $9kx + 8y - 15 = 0$ representan rectas paralelas.

b) Las ecuaciones $3kx + 8y - 5 = 0$ y $6y - 4kx = -1$ representan rectas perpendiculares.

16. Sea k un número real cualquiera. Hallar una ecuación en forma general para la recta que pasa por el punto $P = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$, tiene vector director $D = \begin{pmatrix} 5 \\ k \end{pmatrix}$ y es perpendicular a la recta que pasa por los puntos $\begin{pmatrix} k \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}$.

17. Sean a, b, c y d números reales. Probar que:

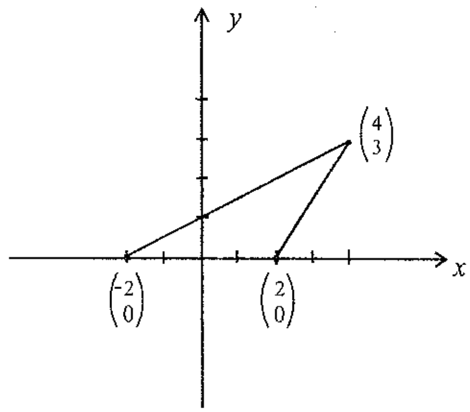
    a) Las rectas con ecuaciones $ax + by = c$ y $ax + by = d$ son paralelas.

    b) Las rectas con ecuaciones $ax + by = c$ y $bx - ay = d$ son perpendiculares.

18. a) Probar que el conjunto de puntos del plano equidistantes de dos puntos dados $P = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$ y $Q = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$ es la mediatriz del segmento $\overline{PQ}$.

    b) Hallar una ecuación en forma general para la mediatriz del segmento $\overline{PQ}$ con $P = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $Q = \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix}$.

19. Para el triángulo de la figura



    a) Encontrar el baricentro (punto de intersección de las medianas).

    b) Hallar el circuncentro (punto de intersección de las mediatrices).

    c) Hallar el ortocentro (punto de intersección de las rectas que contienen las alturas).

    d) Comprobar que los tres puntos hallados en a), b) y c) son colineales.

    El resultado del literal d) se puede generalizar: Para todo triángulo, el baricentro, el ortocentro y el circuncentro son colineales y la recta que contiene estos tres puntos es conocida como la recta de Euler.

20. Probar que los puntos $P = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ y $S = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ son los vértices de un rectángulo.

21. Hallar un punto P del eje x tal que la recta que pasa por P y por $Q = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ es perpendicular a la recta que pasa por P y por $R = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

22. El lado desigual de un triángulo isósceles, no equilátero, tiene por extremos $P = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$ y $Q = \begin{pmatrix} -1 \\ 10 \end{pmatrix}$. El otro vértice pertenece a la recta con ecuación $x + 2y - 7 = 0$.

    a) Determinar el tercer vértice.

    b) Hallar la longitud de la altura del triángulo relativa al lado $\overline{PQ}$.

    c) Calcular el área del triángulo.

23. Si $\mathcal{L}$ es la recta con ecuación $5x - y = 1$, encontrar las ecuaciones de las rectas perpendiculares a $\mathcal{L}$ que forman con los ejes coordenados un triángulo de área igual a 5 unidades cuadradas. (Dos soluciones).

Sección 3.6

24. Determinar el ángulo de $\mathcal{L}_1$ a $\mathcal{L}_2$ para cada par de rectas dadas.

   a) $\mathcal{L}_1 : \sqrt{3}x - y = 5; \qquad \mathcal{L}_2 : x - \sqrt{3}y = -3$

   b) $\mathcal{L}_1 : x - y = -1; \qquad \mathcal{L}_2 : \sqrt{3}x - y = 2$

   c) $\mathcal{L}_1 : \begin{cases} x = -1 - t \\ y = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}; \qquad \mathcal{L}_2 : x - y = 0$

   d) $\mathcal{L}_1 : \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{4}; \qquad \mathcal{L}_2 : x - 2 = \dfrac{y}{4}.$

Sección 3.7

25. En cada literal, hallar la distancia del punto P a la recta dada:

   a) $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 3x + 4y - 10 = 0$

   b) $P = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 2/3 \end{pmatrix}, \quad 2x - y + 5 = 0$

26. Considere la recta $\mathcal{L}$ que pasa por los puntos $P = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$ y $R = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

   a) Hallar una ecuación en forma normal para $\mathcal{L}$.

   b) Encontrar la distancia del punto $X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ a la recta $\mathcal{L}$.

   c) Encontrar la distancia del origen a la recta perpendicular a $\mathcal{L}$ que pasa por el punto $S = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

27. Considere la recta $\mathcal{L}$ con ecuación $2y - 3x = 4$ y el punto $P = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

   a) Encontrar unas ecuaciones paramétricas de la recta $\mathcal{L}_1$ que pasa por P y es perpendicular a $\mathcal{L}$. Dibujar $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}_1$.

   b) Hallar la distancia del punto P a la recta $\mathcal{L}$.

28. Considere la recta $\mathcal{L}_1$ generada por el vector $V = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

   a) Encontrar la distancia del punto $X_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ a la recta $\mathcal{L}_1$.

   b) Hallar una ecuación en forma general para la recta $\mathcal{L}_2$ que es paralela a $\mathcal{L}_1$ y pasa por el punto $P = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$.

   c) Encontrar la distancia entre las rectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$.

29. Describir mediante ecuaciones el lugar geométrico de todos los puntos $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ del plano, cuya distancia a la recta con ecuación $3x + 4y - 15 = 0$ es igual a 3.

30. Sea $\mathcal{L}_1$ la recta con ecuación $x + y - 2 = 0$ y sea $\mathcal{L}_2$ la recta paralela a $\mathcal{L}_1$ que pasa por el punto $P = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$. Hallar el área del trapecio limitado por las rectas $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ y los ejes coordenados.

31. Sea $\mathcal{L}_1$ la recta con ecuación $ax + by = 0$ y sea $\mathcal{L}_2$ la recta perpendicular a $\mathcal{L}_1$ que pasa por el origen. Demostrar que la suma de los cuadrados de las distancias de un punto cualquiera X_0 a las rectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ es igual al cuadrado de la longitud del vector X_0.

Sección 3.8

32. Sean $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $Z = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Muestre que el vector X es combinación lineal de los vectores Y y Z.

33. Sean $X = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ y $Y = \begin{pmatrix} -3/2 \\ 2 \end{pmatrix}$. ¿Es el vector $Z = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ una combinación lineal de los vectores X y Y?

34. Para los vectores X, Z y W dados en cada literal, determinar si Z y W son linealmente independientes. Expresar, si es posible, el vector X como combinación lineal de Z y W.

a) $Z = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $W = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix}$

b) $Z = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$, $W = \begin{pmatrix} 10/3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

4

Transformaciones lineales del plano y matrices 2×2

4.1 Transformaciones del plano

Empecemos recordando el concepto de función. Una **función** f de un conjunto $\mathcal{A}$ en un conjunto $\mathcal{B}$, es una regla mediante la cual se asigna a cada elemento x de $\mathcal{A}$ un único elemento de $\mathcal{B}$, el cual es llamado **imagen de x bajo f** y es denotado $f(x)$. Los conjuntos $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ se llaman respectivamente, **dominio** y **codominio** de la función f.

La notación $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ indica que f es una función con dominio $\mathcal{A}$ y codominio $\mathcal{B}$, aunque esta notación no indica cómo actúa f, es decir, cómo f asigna imagen a cada elemento de $\mathcal{A}$. Una notación completa es

$$\begin{aligned} f : \mathcal{A} &\to \mathcal{B} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

en la cual aparece la ley de asignación de f, $x \mapsto f(x)$. Por ejemplo, al escribir

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} - \left\{1, -\tfrac{1}{3}\right\} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{x^2}{(x-1)\left(x+\frac{1}{3}\right)} \end{aligned}$$

estamos presentando toda la información relativa a la función f : el dominio, el codominio y la ley de asignación.

Dos funciones

$$\begin{aligned} f : \mathcal{A} &\to \mathcal{B} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} g : \mathcal{A} &\to \mathcal{B} \\ x &\mapsto g(x) \end{aligned}$$

se dicen **iguales** y se escribe $f = g$ si $f(x) = g(x)$, para todo $x \in \mathcal{A}$, es decir, si f y g asignan a cada elemento $x \in \mathcal{A}$ la misma imagen.

En este capítulo nos interesan sólo las funciones del plano en sí mismo, es decir, funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ a las cuales nos referiremos como **transformaciones del plano.** Dichas transformaciones las denotaremos mediante letras mayúsculas como P, Q, R, S, T.

Ejemplo 4.1
Sean U un vector no nulo de $\mathbb{R}^2$ y $\mathcal{L}$ la recta generada por U. Si X es un vector cualquiera de $\mathbb{R}^2$, el vector $Proy_U X$, el cual está sobre $\mathcal{L}$, lo llamaremos también la **proyección de X sobre $\mathcal{L}$** (Ver figura 4.1).

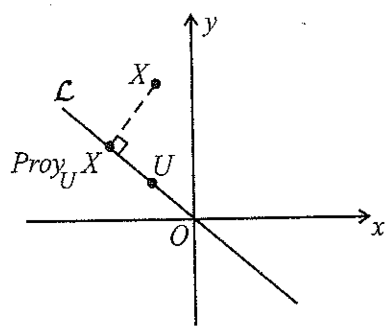


Figura 4.1.

Denotaremos P_U la transformación del plano que asigna a cada vector X de $\mathbb{R}^2$, su proyección sobre la recta $\mathcal{L}$. Es decir,

$$\begin{aligned} P_U : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ X &\mapsto P_U(X) = Proy_U X \end{aligned}$$

La transformación P_U la llamaremos **proyección sobre la recta $\mathcal{L}$.**

Tomemos, por ejemplo, el caso particular $U = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y hallemos para $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ las coordenadas del vector $P_U(X)$:

$$P_U(X) = Proy_U X = \left(\frac{X \cdot U}{U \cdot U}\right) U = \frac{2x+y}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5}x + \frac{2}{5}y \\ \frac{2}{5}x + \frac{1}{5}y \end{pmatrix}$$

es decir,

$$P_U\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5}x + \frac{2}{5}y \\ \frac{2}{5}x + \frac{1}{5}y \end{pmatrix}. \tag{4.1}$$

Así por ejemplo,

$$P_U\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5}(5) + \frac{2}{5}(5) \\ \frac{2}{5}(5) + \frac{1}{5}(5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Si $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P_U\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, en lugar de la igualdad (4.1) podemos escribir

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5}x + \frac{2}{5}y \\ \frac{2}{5}x + \frac{1}{5}y \end{pmatrix}$$

o bien

$$\begin{cases} x' = \frac{4}{5}x + \frac{2}{5}y \\ y' = \frac{2}{5}x + \frac{1}{5}y \end{cases}$$

ecuaciones que expresan las coordenadas x',y' del vector $P_U(X)$ en términos de las coordenadas x, y de X. ■

Ejemplo 4.2

Sea U un vector no nulo de $\mathbb{R}^2$ y sea $\mathcal{L}$ la recta generada por U. Denotaremos S_U la transformación del plano que asigna a cada vector X de $\mathbb{R}^2$ la reflexión de X respecto a la recta $\mathcal{L}$. Es decir, para cada X de $\mathbb{R}^2$, $S_U(X)$ es el otro extremo del segmento de recta

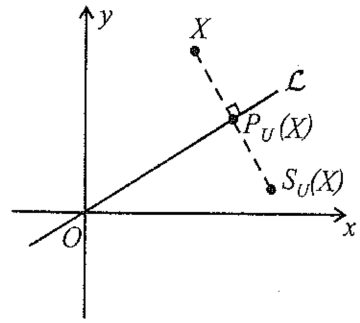


Figura 4.2.

trazado desde X perpendicularmente a la recta $\mathcal{L}$ y cuyo punto medio es el punto $P_U(X)$. (Ver figura 4.2).

Así que

$$P_U(X) = \frac{1}{2}(X + S_U(X)).$$

Despejando $S_U(X)$ de esta igualdad se obtiene que

$$S_U(X) = 2P_U(X) - X.$$

De manera que

$$\begin{aligned} S_U : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ X &\mapsto S_U(X) = 2P_U(X) - X \end{aligned}$$

A la transformación S_U la llamaremos **reflexión respecto a la recta $\mathcal{L}$.**

Si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ y, por ejemplo $U = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, encontramos en el ejemplo anterior que

$$P_U(X) = \begin{pmatrix} \frac{4}{5}x + \frac{2}{5}y \\ \frac{2}{5}x + \frac{1}{5}y \end{pmatrix}$$

luego,

$$S_U(X) = 2\begin{pmatrix} \frac{4}{5}x + \frac{2}{5}y \\ \frac{2}{5}x + \frac{1}{5}y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y \\ \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y \end{pmatrix}$$

es decir,

$$S_U\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y \\ \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

Por ejemplo, si $X = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}$, su reflexión respecto a la recta $\mathcal{L}$ generada por $U = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ es

$$S_U\begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5}(10) + \frac{4}{5}(0) \\ \frac{4}{5}(10) - \frac{3}{5}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Si $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = S_U\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, en lugar de (4.2) podemos escribir

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y \\ \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y \end{pmatrix}$$

o bien las ecuaciones

$$\begin{cases} x' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y \\ y' = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y \end{cases}. \qquad \blacksquare$$

Ejemplo 4.3
Sea $D_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación que asigna a cada vector X de $\mathbb{R}^2$ el vector $2X$. (Ver figura 4.3). Es decir,

$$\begin{aligned} D_2 : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ X &\mapsto D_2(X) = 2X \end{aligned}$$

Nótese que D_2 alarga cada vector X de $\mathbb{R}^2$, en la misma dirección de X hasta el doble de su longitud.

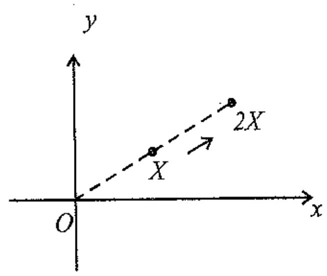


Figura 4.3.

Si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ entonces $D_2(X) = 2X = 2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$, así

$$D_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

o bien, si $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = D_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \quad \text{o, equivalentemente,} \quad \begin{cases} x' = 2x \\ y' = 2y \end{cases}. \qquad \blacksquare$$

Es claro que en el ejemplo anterior, en lugar del número 2 podemos emplear cualquier número real r y considerar la transformación

$$\begin{aligned} D_r : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ X &\mapsto D_r(X) = rX \end{aligned}$$

Si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, entonces

$$D_r(X) = rX = r\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rx \\ ry \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 4.4
Fijemos un número real θ, $-2\pi < \theta < 2\pi$. Consideremos la transformación $R_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, la cual llamaremos **rotación por el ángulo θ,** definida como se indica a continuación:

para cada X de $\mathbb{R}^2$, $R_\theta(X)$ es el punto final del vector de posición obtenido al rotar el vector $\overrightarrow{OX}$ alrededor del origen un ángulo de θ radianes. Convenimos en realizar la rotación en el sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj cuando $\theta > 0$, y en el mismo sentido de dicho movimiento cuando $\theta < 0$. (Figura 4.4).

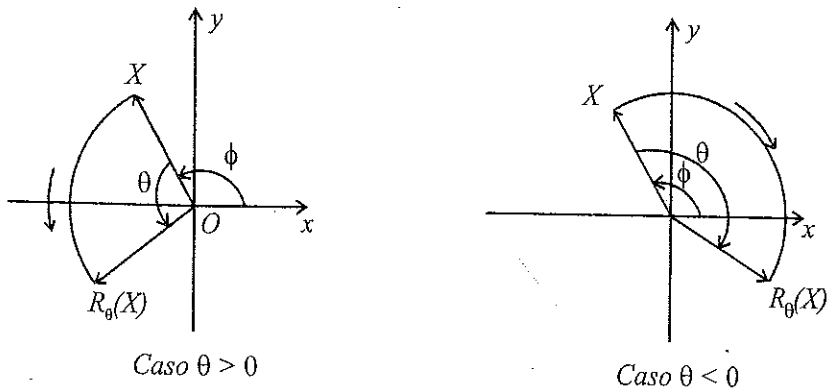


Figura 4.4.

Determinemos las coordenadas del vector $R_\theta(X)$ para $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $X \neq O$.

Sea ϕ, en radianes, la dirección del vector X como se muestra en la figura 4.4. Como

$$X = \|X\| \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \operatorname{sen}\phi \end{pmatrix}, R_\theta(X) = \|R_\theta(X)\| \begin{pmatrix} \cos(\phi+\theta) \\ \operatorname{sen}(\phi+\theta) \end{pmatrix} \quad y \quad \|R_\theta(X)\| = \|X\|$$

se tiene que,

$$\begin{aligned} R_\theta(X) &= \|X\| \begin{pmatrix} \cos(\phi+\theta) \\ \operatorname{sen}(\phi+\theta) \end{pmatrix} \\ &= \|X\| \begin{pmatrix} \cos\phi\cos\theta - \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\phi\cos\theta + \cos\phi\operatorname{sen}\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \|X\|\cos\phi\cos\theta - \|X\|\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta \\ \|X\|\operatorname{sen}\phi\cos\theta + \|X\|\cos\phi\operatorname{sen}\theta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ahora, como $\|X\|\cos\phi = x$ y $\|X\|\operatorname{sen}\phi = y$ entonces

$$R_\theta(X) = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta \\ y\cos\theta + x\operatorname{sen}\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta \\ x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta \end{pmatrix}$$

es decir,

$$R_\theta\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta \\ x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta \end{pmatrix}. \tag{4.3}$$

Si $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R_\theta\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, en lugar de la igualdad anterior tenemos

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta \\ x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta \end{pmatrix}$$

o bien las ecuaciones

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta \\ y' = x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

a las cuales nos referiremos como **ecuaciones de rotación.** Ellas expresan las coordenadas x',y' del vector $R_\theta(X)$ en términos de las coordenadas x, y del vector X.

Por ejemplo, si $\theta = \pi/2$ entonces $\cos\theta = 0$ y $\operatorname{sen}\theta = 1$ y por tanto, sustituyendo en (4.3),

$$R_{\frac{\pi}{2}}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

como se ilustra en la figura 4.5.

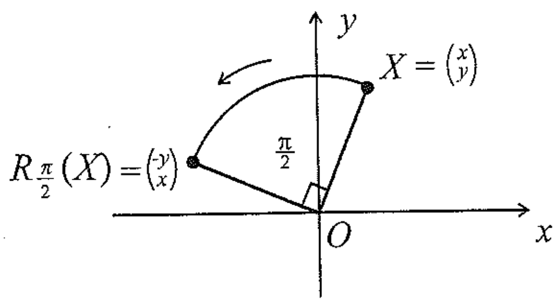


Figura 4.5.

Por otra parte, si $\theta = -3\pi/2$ entonces $\cos\theta = 0$ y $\operatorname{sen}\theta = 1$ y así, sustituyendo en (4.3),

$$R_{-\frac{3\pi}{2}}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}.$$

Obsérvese que

$$R_{-\frac{3\pi}{2}}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R_{\frac{\pi}{2}}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ para todo } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ de } \mathbb{R}^2,$$

es decir, $R_{-\frac{3\pi}{2}} = R_{\frac{\pi}{2}}$. ■

Ejemplo 4.5

Fijemos un vector U de $\mathbb{R}^2$ y consideremos la transformación T_U, definida por $T_U(X) = X + U$, para todo X de $\mathbb{R}^2$ (figura 4.6). Es decir,

$$\begin{array}{rcl} T_U : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ X & \mapsto & T_U(X) = X + U \end{array}$$

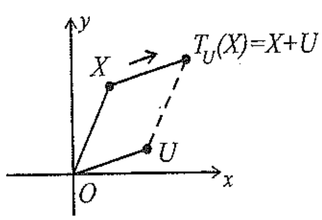


Figura 4.6.

La transformación T_U se llamará **traslación por el vector U** ya que para cada X de $\mathbb{R}^2$, $T_U(X)$ es el punto que se obtiene trasladando el punto X en la dirección del vector U (o $\overrightarrow{OU}$) una distancia $\|U\|$.

Si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ y $U = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ entonces

$$T_U(X) = X + U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + x_0 \\ y + y_0 \end{pmatrix}$$

es decir,

$$T_U \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + x_0 \\ y + y_0 \end{pmatrix}$$

o también si $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = T_U \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ entonces

$$\begin{cases} x' = x + x_0 \\ y' = y + y_0 \end{cases}.$$

Por ejemplo, si $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ entonces para cada $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$,

$$T_U \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 1 \\ y + 3 \end{pmatrix}. \qquad \blacksquare$$

Finalizaremos esta sección refiriéndonos a dos tranformaciones especiales. Una es la transformación que a cada $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ le asigna como imagen el mismo vector $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; se llamará la **transformación identidad** y se denotará I. La otra es la transformación que a cada $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ le asigna como imagen el vector $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; se llamará la **transformación nula** y se denotará O.

Obsérvese que $D_0 = O$, $D_1 = I$, $R_0 = I$ y $T_o = I$.

4.2 Transformaciones lineales y matrices

En los ejemplos anteriores hemos considerado distintas transformaciones del plano. A continuación recordaremos la forma como actúa cada una de tales transformaciones T dando x', y' en términos de x, y donde $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

(*i*) P_U : proyección sobre la recta generada por el vector $U = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} x' &= \frac{4}{5}x + \frac{2}{5}y \\ y' &= \frac{2}{5}x + \frac{1}{5}y \end{aligned}$$

(*ii*) S_U : reflexión respecto a la recta generada por el vector $U = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} x' &= \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y \\ y' &= \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y \end{aligned}$$

(*iii*) D_r : multiplicación por el escalar r.

$$\begin{aligned} x' &= rx \\ y' &= ry \end{aligned}$$

(*iv*) R_θ : rotación alrededor del origen por un ángulo θ.

$$\begin{aligned} x' &= (\cos\theta)\, x - (\operatorname{sen}\theta)\, y \\ y' &= (\operatorname{sen}\theta)\, x + (\cos\theta)\, y \end{aligned}$$

(*v*) T_U : traslación por el vector $U = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} x' &= x + x_0 \\ y' &= y + y_0 \end{aligned}$$

Obsérvese que cada una de las transformaciones (*i*) a (*iv*) es del tipo

$$\begin{aligned} x' &= ax + by \\ y' &= cx + dy \end{aligned} \tag{4.4}$$

con a, b, c, d constantes reales. Por ejemplo, la transformación (*i*) es del tipo (4.4) con $a = \frac{4}{5}$, $b = c = \frac{2}{5}$ y $d = \frac{1}{5}$, mientras que (*iv*) lo es con $a = d = \cos\theta$, $b = -\operatorname{sen}\theta$ y $c = \operatorname{sen}\theta$. Nótese también que la transformación (*v*) es del tipo (4.4) únicamente cuando $U = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, caso en el cual ella se reduce a

$$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= y \end{aligned}$$

que es del tipo (4.4) con $a = d = 1$ y $b = c = 0$.

Toda transformación $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ del tipo (4.4) es llamada una **transformación lineal** del plano. La denominación "lineal" tiene que ver con la forma lineal de las expresiones $ax + by$ y $cx + dy$ para las coordenadas x', y' del vector $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Cada una de las transformaciones (*i*) a (*iv*) es una transformación lineal del plano; la transformación identidad I y la transformación nula O también son transformaciones lineales. En cuanto a la transformación T_U podemos observar que ella es transformación lineal únicamente en el caso $U = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, caso en el cual $T_U = I$.

Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal definida por las ecuaciones

$$\begin{aligned} x' &= ax + by \\ y' &= cx + dy \end{aligned}$$

con a, b, c, d constantes donde, como ya sabemos, $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Es claro que los números a, b, c, d y sus posiciones en las igualdades anteriores determinan de manera única a T. Pues bien, el símbolo o arreglo

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

el cual determina a T, se llama **matriz de** T y se denotará $m(T)$.

En general, todo arreglo de números como el anterior se dirá una **matriz de dos filas y dos columnas**, una **matriz** 2×2, o una **matriz de orden 2**.

Dos matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ se dicen **iguales**, y se escribe

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$

si $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$ y $d = d'$.

A continuación listamos las matrices de las transformaciones lineales (i) a (iv) antes consideradas:

$$(i) \quad m(P_U) = \begin{pmatrix} 4/5 & 2/5 \\ 2/5 & 1/5 \end{pmatrix} \qquad (ii) \quad m(S_U) = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{pmatrix}$$

$$(iii) \quad m(D_r) = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \qquad (iv) \quad m(R_\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Además,

$$m(I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad m(O) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde I y O son, respectivamente, la transformación identidad y la transformación nula.

La matriz $m(I)$ se llamará **matriz identidad de orden** 2 y se denotará I_2, mientras que la matriz $m(O)$ se llamará **matriz nula de orden** 2 y se denotrá O.

Obsérvese que cada transformación lineal T determina una matriz 2×2 la cual es $m(T)$ y recíprocamente, cada matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ es la matriz de una única transformación lineal del plano, la cual es la transformación $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}.$$

Queda así establecida una correspondencia biunívoca entre las transformaciones del plano y las matrices 2×2.

Ahora introduciremos una notación muy útil. Sea T una transformación lineal del plano con matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, es decir, T es la transformación definida por

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}.$$

Pues bien, puesto que la matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ determina la transformación T, es natural escribir, para cada $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

notación en la cual la matriz de T aparece sustituyendo al símbolo T.

Así, por ejemplo, si P_U es la proyección sobre la recta generada por el vector $U = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ entonces

$$\begin{pmatrix} 4/5 & 2/5 \\ 2/5 & 1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P_U \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (4/5)\,x + (2/5)\,y \\ (2/5)\,x + (1/5)\,y \end{pmatrix}.$$

De manera que, de acuerdo con (4.5), se tiene que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

igualdad que interpretaremos diciendo que la matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ transforma al vector $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dando como resultado el vector $\begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$. También tomaremos la igualdad (4.6) como definición del **producto de una matriz 2×2 por un vector de $\mathbb{R}^2$**.

Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + 2y \\ 5x - 2y \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2x + y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

4.3 Propiedades básicas de las transformaciones lineales

La importancia de las transformaciones lineales radica en la forma simple como ellas actúan.

Si $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una transformación lineal entonces para todo par de vectores X, U de $\mathbb{R}^2$ y todo escalar r se tiene que

$$T(X + U) = T(X) + T(U) \qquad \text{y} \qquad T(rX) = rT(X) \tag{4.7}$$

Para probar lo afirmado, digamos que $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ y que la matriz de T es $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
T(X + U) &= T\begin{pmatrix} x + u \\ y + v \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x + u \\ y + v \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a(x + u) + b(y + v) \\ c(x + u) + d(y + v) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (ax + by) + (au + bv) \\ (cx + dy) + (cu + dv) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} au + bv \\ cu + dv \end{pmatrix} \\
&= T(X) + T(U).
\end{aligned}$$

Hemos probado así la primera de las propiedades en (4.7). La prueba de la segunda se deja como ejercicio.

De manera que toda transformación lineal T del plano tiene las propiedades (4.7). A continuación probaremos que entre las transformaciones del plano, únicamente las lineales gozan de esas propiedades, es decir, probaremos que si una transformación T del plano tiene dichas propiedades entonces T es una transformación lineal.

Supongamos entonces que $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tiene las propiedades (4.7). Vamos a probar que T es una transformación lineal probando que existen constantes a, b, c, d tales que para cualquier $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$,

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}.$$

Como sabemos, si $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ entonces para cada $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ en $\mathbb{R}^2$ se tiene que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = xE_1 + yE_2$$

Por lo anterior y aplicando las propiedades (4.7),

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T(xE_1 + yE_2) = T(xE_1) + T(yE_2) = xT(E_1) + yT(E_2). \tag{4.8}$$

Así, si $T(E_1) = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ y $T(E_2) = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ entonces

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} \tag{4.9}$$

lo cual prueba que T es una transformación lineal.

Hemos probado el siguiente resultado:

> Una transformación $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una transformación lineal si y sólo si
>
> $$T(X + U) = T(X) + T(U) \qquad \text{y} \qquad T(rX) = rT(X)$$
>
> para todo par de vectores X, U de $\mathbb{R}^2$ y todo escalar r.

Vale la pena señalar que las dos propiedades que aparecen en el recuadro anterior (las propiedades (4.7)) se pueden sustituir por una sola, por la propiedad

$$T(rX + sU) = rT(X) + sT(U) \tag{4.10}$$

cualesquiera sean X, U en $\mathbb{R}^2$ y r, s en $\mathbb{R}$. Dejamos la prueba de ello como ejercicio al lector.

Además de las propiedades (4.7), toda transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tiene las siguientes propiedades:

- Para cualquier vector $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$,

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = xT(E_1) + yT(E_2).$$

Así, una transformación lineal T del plano queda completamente determinada por los vectores $T(E_1)$ y $T(E_2)$, es decir, por las imágenes que ella asigne a los vectores canónicos E_1 y E_2.

- $T(E_1) = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ y $T(E_2) = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ si y sólo si $m(T) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

- $T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Para la prueba de la primera afirmación, vea (4.8).

Por otra parte, si $T(E_1) = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ y $T(E_2) = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ ya probamos (vea (4.9)) que

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

por tanto $m(T) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Recíprocamente, si $m(T) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ entonces

$$T(E_1) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad T(E_2) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

Por último,

$$T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0T(E_1) + 0T(E_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad \blacklozenge$$

Ejemplo 4.6

Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal tal que

$$T(E_1) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad T(E_2) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$

a) Halle la matriz de T.

b) Halle $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, cualquiera sea el vector $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$.

c) Muestre que $T = R_{\frac{\pi}{4}}$.

Solución:

a) $T(E_1)$ y $T(E_2)$ son respectivamente la primera columna y la segunda columna de la matriz de T, $m(T)$. Así que,

$$m(T) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$

b)

$$\begin{aligned} T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= m(T)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\sqrt{2}/2)\,x - (\sqrt{2}/2)\,y \\ (\sqrt{2}/2)\,x + (\sqrt{2}/2)\,y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

c) Obsérvese que para todo $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$,

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\cos\frac{\pi}{4})\,x - (\operatorname{sen}\frac{\pi}{4})\,y \\ (\operatorname{sen}\frac{\pi}{4})\,x + (\cos\frac{\pi}{4})\,y \end{pmatrix} = R_{\frac{\pi}{4}}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

luego $T = R_{\frac{\pi}{4}}$. ■

Ejemplo 4.7
Muestre que la transformación $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y \\ x^2 + 2y \end{pmatrix}$ no es una transformación lineal.

Solución:
T no tiene la propiedad $T(X + Y) = T(X) + T(Y)$ para todo X, Y de $\mathbb{R}^2$, ya que por ejemplo,

$$T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mientras que

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

por tanto T no es una transformación lineal. ■

4.4 Imagen de un conjunto bajo una transformación

Sea T una transformación del plano y $\mathcal{C}$ un conjunto de puntos del plano. Llamaremos **imagen de $\mathcal{C}$ bajo T** al conjunto denotado $T(\mathcal{C})$ y conformado por todos los vectores $T(X)$ con $X \in \mathcal{C}$, es decir,

$$T(\mathcal{C}) = \{T(X) \,/\, X \in \mathcal{C}\}.$$

Ejemplo 4.8
Bajo la rotación $R_{\frac{\pi}{4}}$ la recta $\mathcal{L}_1$ con ecuación $y = 0$ (el eje x) se transforma en la recta $\mathcal{L}_2$ con ecuación $y = x$, es decir, $R_{\frac{\pi}{4}}(\mathcal{L}_1) = \mathcal{L}_2$. (Figura 4.7). ■

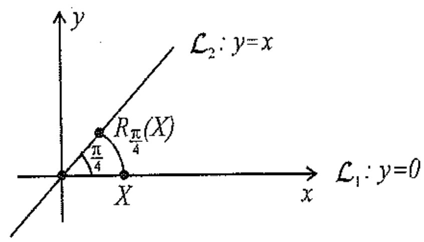


Figura 4.7.

Ejemplo 4.9
Bajo la transformación nula O, todo subconjunto C del plano, $C \neq \phi$, se transforma en el conjunto $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. ■

Como una primera propiedad geométrica de las transformaciones lineales tenemos:

> 1. La imagen de una recta $\mathcal{L}$ bajo una transformación lineal T es una recta o es un conjunto con un solo punto. Más precisamente:
>
> a) Si $\mathcal{L}$ es la recta que pasa por los puntos distintos P y Q entonces $T(\mathcal{L})$es la recta que pasa por $T(P)$ y $T(Q)$ si $T(P) \neq T(Q)$; si $T(P) = T(Q)$ entonces $T(\mathcal{L}) = \{T(P)\}$.
>
> b) Si $\mathcal{L}$ pasa por el punto P y tiene vector director U entonces $T(\mathcal{L})$ es larecta que pasa por el punto $T(P)$ y tiene vector director $T(U)$ si $T(U) \neq O$; si $T(U) = O$, entonces $T(\mathcal{L}) = \{T(P)\}$.
>
> 2. La imagen de un segmento de recta $\overline{PQ}$, bajo una transformación lineal T, es el segmento de recta de extremos $T(P)$ y $T(Q)$, el cual se reduce al conjunto $\{T(P)\}$ cuando $T(P) = T(Q)$.

Prueba de 1.a): Si $\mathcal{L}$ pasa por los puntos distintos P y Q entonces una ecuación para $\mathcal{L}$ es

$$X = P + t(Q - P) \tag{4.11}$$

es decir,

$$\mathcal{L} = \{P + t(Q - P) \ \ / \ t \in \mathbb{R}\}.$$

Por tanto,

$$T(\mathcal{L}) = \{T(P + t(Q - P)) \ \ / \ t \in \mathbb{R}\}$$

Ahora, dado que T es una transformación lineal tenemos,

$$T(P + t(Q - P)) = T(P) + t(T(Q) - T(P))$$

luego,

$$T(\mathcal{L}) = \{T(P) + t(T(Q) - T(P)) \ \ / \ t \in \mathbb{R}\}$$

Así, si $T(P) \neq T(Q)$ entonces $T(\mathcal{L})$ es la recta que pasa por los puntos $T(P)$ y $T(Q)$; mientras que si $T(P) = T(Q)$ entonces $T(\mathcal{L})$ se reduce al conjunto $\{T(P)\}$ cuyo único elemento es el punto $T(P)$. ♦

La prueba de 1.b) se deja como ejercicio al lector.

Prueba de 2.: Sabemos que

$$\overline{PQ} = \{P + t(Q - P) \,/\, 0 \leq t \leq 1\}$$

y como T es lineal, entonces

$$T\left(\overline{PQ}\right) = \{T(P) + t(T(Q) - T(P)) \,/\, 0 \leq t \leq 1\}$$

luego $T\left(\overline{PQ}\right)$ es el segmento de recta de extremos $T(P)$ y $T(Q)$. ♦

Ejemplo 4.10
Sea T la reflexión respecto a la recta $\mathcal{L}$ con ecuación $y = x$ y sea $\mathcal{L}_1$ la recta que pasa por $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$. Halle $T(\mathcal{L}_1)$.

Solución:
Dos puntos de $\mathcal{L}_1$ distintos son $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$. Puesto que $T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $T\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ y dado que $T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \neq T\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$, entonces $T(\mathcal{L}_1)$ es la recta $\mathcal{L}_2$ que pasa por $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$. (Figura 4.8). ■

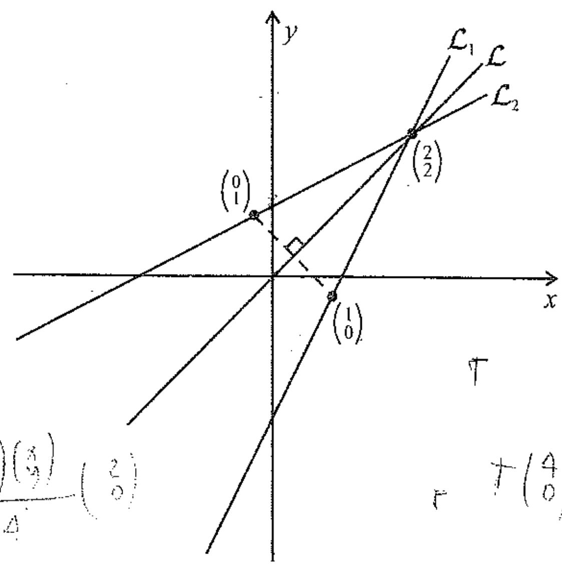


Figura 4.8.

Ejemplo 4.11
Sea P la proyección sobre el eje x y sea $\mathcal{L}$ la recta vertical que pasa por $\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$. Halle $P(\mathcal{L})$.

Solución:
Es claro que para todo $X \in \mathcal{L}$, $P(X) = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$, luego $P(\mathcal{L}) = \left\{\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\right\}$. (Figura 4.9). ■

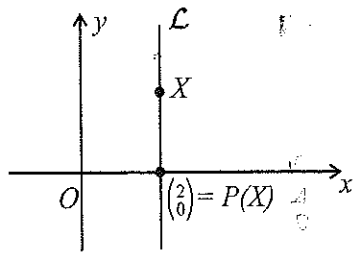


Figura 4.9.

Ahora consideraremos la imagen de un paralelogramo $\mathcal{P}$ de vértices O, X, U y $X+U$ donde X y U son vectores de $\mathbb{R}^2$ linealmente independientes, el cual llamaremos **paralelogramo determinado por los vectores X y U.** (Figura 4.10).

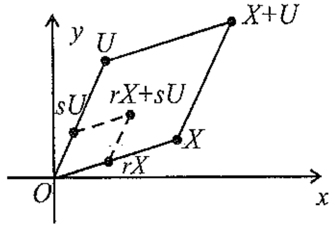


Figura 4.10.

Puesto que

$$\overline{OX} = \{rX \,/\, 0 \leq r \leq 1\} \qquad \text{y} \qquad \overline{OU} = \{sU \,/\, 0 \leq s \leq 1\}$$

entonces el paralelogramo $\mathcal{P}$ en consideración puede describirse en la forma (ver figura 4.10)

$$\mathcal{P} = \{rX + sU \,/\, 0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq s \leq 1\}.$$

Si $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una transformación lineal entonces

$$T(rX + sU) = rT(X) + sT(U)$$

y por tanto la imagen bajo T del paralelogramo $\mathcal{P}$ es

$$T(\mathcal{P}) = \{rT(X) + sT(U) \,/\, 0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq s \leq 1\}$$

que es el paralelogramo determinado por los vectores $T(X)$ y $T(U)$ si estos son linealmente independientes. Si $T(X)$ y $T(U)$ son linealmente dependientes entonces los puntos $O, T(X)$ y $T(U)$ están sobre una misma línea recta y en tal caso $T(\mathcal{P})$ es un segmento de recta o es el conjunto $\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$.

Tenemos entonces que:

La imagen bajo una transformación lineal T del paralelogramo determinado por dos vectores X y U linealmente independientes, es el paralelogramo determinado por $T(X)$ y $T(U)$, si estos vectores son linealmente independientes. Si $T(X)$ y $T(U)$ son linealmente dependientes entonces dicha imagen es un segmento de recta o es el conjunto $\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$.

Ejemplo 4.12
Consideremos el paralelogramo $\mathcal{P}$ determinado por los vectores $X = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ y $U = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ y sea S la reflexión respecto al eje y.

Como $S(X) = \begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$ y $S(U) = \begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$ entonces $S(X)$ y $S(U)$ son vectores linealmente independientes y por tanto la imagen del paralelogramo $\mathcal{P}$ bajo S, es el paralelogramo determinado por los vectores $S(X) = \begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$ y $S(U) = \begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$. (Figura 4.11). ■

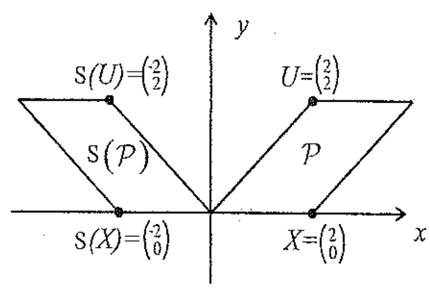


Figura 4.11.

4.5 Operaciones con transformaciones lineales y con matrices

Sean T y S dos transformaciones del plano. La **suma** de T y S, denotada $T+S$, es la transformación del plano definida, para cada $X \in \mathbb{R}^2$, por

$$(T+S)(X) = T(X) + S(X).$$

Así,

$$\boxed{\begin{aligned} T+S : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ X &\mapsto (T+S)(X) = T(X)+S(X) \end{aligned}}$$

Ejemplo 4.13
Sean D_2 y D_3 las transformaciones del plano definidas por $D_2(X) = 2X$ y $D_3(X) = 3X$ para cada $X \in \mathbb{R}^2$. Entonces $D_2 + D_3$ es la transformación del plano definida como sigue:

$$(D_2 + D_3)(X) = D_2(X) + D_3(X) = 2X + 3X = 5X$$

para cada $X \in \mathbb{R}^2$. Nótese que $D_2 + D_3 = D_5$. ■

Para cada transformación T del plano se tiene la transformación denotada $-T$ y definida, para cada $X \in \mathbb{R}^2$, por

$$(-T)(X) = -(T(X)).$$

La transformación $-T$ es tal que $T + (-T) = O$ donde, como se ha convenido, O denota la transformación nula. En efecto, para cualquier X de $\mathbb{R}^2$,

$$(T + (-T))(X) = T(X) + (-T)(X) = T(X) - (T(X)) = O.$$

Ejemplo 4.14
Sea T la reflexión respecto al eje x, es decir, T es la transformación definida por $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$. Hallemos la transformación $-T$:

$$(-T)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\left(T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = -\begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}.$$

Así que $-T$ es la transformación del plano definida, para cada $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$, por $(-T)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$. Nótese que $-T$ es la reflexión respecto al eje y (figura 4.12). ■

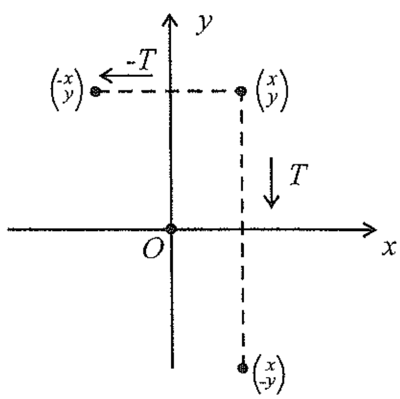


Figura 4.12.

La suma entre transformaciones del plano goza de las siguientes propiedades. En ellas T, S y R son transformaciones del plano y O es la transformación nula.

1. $T + S = S + T$.
2. $(T + S) + R = T + (S + R)$.
3. $T + O = T$.
4. $T + (-T) = O$.

Ya se ha probado la propiedad 4. La prueba de las restantes propiedades se deja como ejercicio.

Supongamos ahora que T y S son transformaciones lineales del plano con

$$m(T) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ y } m(S) = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}.$$

Entonces, para cada $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} (T+S)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + S\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a'x+b'y \\ c'x+d'y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (a+a')\,x + (b+b')\,y \\ (c+c')\,x + (d+d')\,y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Luego $T+S$ es también una transformación lineal y

$$m(T+S) = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix}. \tag{4.12}$$

La igualdad anterior sugiere cómo definir una suma entre matrices 2×2, que corresponda a la suma entre transformaciones lineales. Si A y B son matrices 2×2 y T y S son las transformaciones lineales tales que $A = m(T)$ y $B = m(S)$, la suma $A+B$ debe definirse de modo que $A+B = m(T+S)$. Por ello, teniendo en cuenta (4.12), la **suma entre dos matrices** 2×2 se define de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix}.$$

Como resumen tenemos que:

> Si T y S son transformaciones lineales del plano, con
>
> $$m(T) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad m(S) = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$
>
> entonces $T+S$ también es una transformación lineal del plano y
>
> $$m(T+S) = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix} = m(T) + m(S).$$

Ejemplo 4.15

Sean T y S las transformaciones lineales del plano tales que

$$m(T) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } m(S) = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hallar $m(T+S)$ y $(T+S)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ para cualquier $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ en $\mathbb{R}^2$.

Solución:

$$\begin{aligned} m(T+S) &= m(T)+m(S) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0+10 & -3+2 \\ 4-5 & 2+0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 10 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Así, para todo $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$,

$$(T+S)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10x-y \\ -x+2y \end{pmatrix}. \qquad \blacksquare$$

Para cada matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ se tiene la matriz $-A = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$ la cual es tal que $A+(-A)=O$ donde, como se ha convenido, O denota la matriz nula. En efecto

$$A+(-A) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-a & b-b \\ c-c & d-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O.$$

Es de esperar que la suma entre matrices tenga las mismas propiedades algebraicas de la suma entre transformaciones lineales. En efecto si A, B, C son matrices 2×2 cualesquiera y O es la matriz nula 2×2, se tiene que:

1. $A+B=B+A$.
2. $(A+B)+C=A+(B+C)$.
3. $A+O=A$
4. $A+(-A)=O$.

La propiedad 4. ya ha sido probada. La prueba de las restantes propiedades se deja como ejercicio.

Volvamos a la definición de la suma $T+S$ de las transformaciones T y S. Obsérvese que lo que hace posible dicha suma es el hecho de que en $\mathbb{R}^2$ (visto como codominio de T y de S) hay definida una suma, lo cual permite sumar $T(X)$ y $S(X)$ para cada X de $\mathbb{R}^2$. Ahora bien, en $\mathbb{R}^2$ también hay definido un producto por escalar, así que también podemos considerar el producto de un escalar por una transformación del plano.

Sean r un escalar y $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. El **producto de** r **por** T, denotado rT, es la transformación del plano definida, para cada X de $\mathbb{R}^2$, por

$$(rT)(X) = r(T(X)).$$

Así,

$$\boxed{\begin{aligned} rT : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ X &\mapsto (rT)(X) = r(T(X)) \end{aligned}}$$

Ejemplo 4.16
Consideremos la rotación $R_{\frac{\pi}{2}}$. En la figura 4.13 se muestra el efecto de la transformación $3R_{\frac{\pi}{2}}$ sobre un vector X. ■

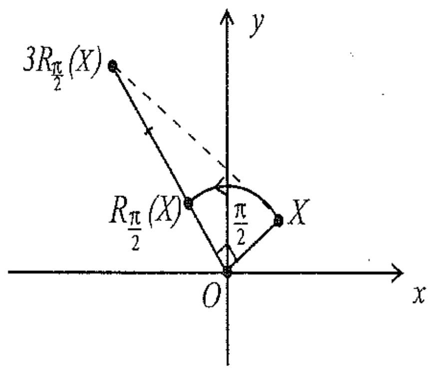


Figura 4.13.

El lector puede probar fácilmente las siguientes propiedades básicas, las cuales son válidas, cualesquiera sean las transformaciones T, S del plano y los números r, s.

1. $r(sT) = (rs)T = s(rT)$.
2. $1T = T$.
3. $r(T+S) = rT + rS$.
4. $(r+s)T = rT + sT$.

Supongamos ahora que T es una transformación lineal del plano con $m(T) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y sea r un escalar. Entonces, para todo $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} (rT)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= r\left(T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \\ &= r\begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (ra)x+(rb)y \\ (rc)x+(rd)y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ra & rb \\ rc & rd \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Luego, rT es una transformación lineal y además

$$m(rT) = \begin{pmatrix} ra & rb \\ rc & rd \end{pmatrix}. \tag{4.13}$$

Ahora, de la misma manera como la igualdad (4.12) lleva a definir la suma entre matrices como lo hicimos, la igualdad (4.13) lleva a definir el **producto** $r\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ **de un escalar r por una matriz** $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ en la forma

$$r\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra & rb \\ rc & rd \end{pmatrix}.$$

Tenemos así que:

> Si r es un escalar y T es una transformación lineal del plano con
> $$m(T) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
> entonces rT también es una transformación lineal del plano y
> $$m(rT) = \begin{pmatrix} ra & rb \\ rc & rd \end{pmatrix} = r(m(T)).$$

Ejemplo 4.17
Sea T la transformación lineal tal que $m(T) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$.

Hallar $m(5T)$ y $(5T)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ para cualquier $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$.

Solución:

$$m(5T) = 5(m(T)) = 5\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (5)(2) & (5)(-3) \\ (5)(1) & (5)(8) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -15 \\ 5 & 40 \end{pmatrix}.$$

Así, la ley de asignación para la transformación $5T$ es

$$(5T)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -15 \\ 5 & 40 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10x - 15y \\ 5x + 40y \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

El producto de un escalar por una matriz 2×2 hereda las propiedades algebraicas del producto de un escalar por una transformación lineal. Si A, B son matrices 2×2 y r, s son escalares, se tiene que

> 1. $r(sA) = (rs)A = s(rA)$.
> 2. $1A = A$.
> 3. $r(A + B) = rA + rB$.
> 4. $(r + s)A = rA + sA$.

Consideraremos ahora una tercera operación, la composición entre dos transformaciones T y S del plano.

Se denomina **compuesta de T y S**, denotada $T \circ S$, a la transformación del plano definida, para cada X de $\mathbb{R}^2$, por

$$(T \circ S)(X) = T(S(X)).$$

El diagrama siguiente ilustra dicha composición

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{S} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{T} & \mathbb{R}^2 \\ X & \mapsto & S(X) & \mapsto & T(S(X)) \end{array}$$

Así,

$$\boxed{\begin{array}{rl} T \circ S : \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R}^2 \\ X & \mapsto (T \circ S)(X) = T(S(X)) \end{array}}$$

Ejemplo 4.18

Sea T la reflexión respecto al eje x y sea S la reflexión respecto al eje y. Si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ entonces

$$(T \circ S)(X) = T(S(X)) = T\left(S\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = T\begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} = -X.$$

En la figura 4.14 se ilustra la composición de T y S. Nótese que $T \circ S = R_\pi$. ■

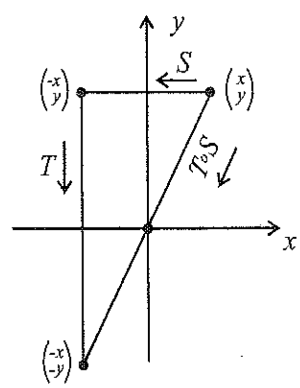


Figura 4.14.

El lector puede comprobar que en el ejemplo anterior $T \circ S = S \circ T$. Sin embargo, para otras transformaciones T y S puede darse que $T \circ S \neq S \circ T$, como se muestra en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 4.19

Sean T la reflexión respecto al eje x y $S = R_{\frac{\pi}{4}}$. Como ya sabemos, para cada $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$,

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad S\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\cos\frac{\pi}{4}\right)x - \left(sen\frac{\pi}{4}\right)y \\ \left(sen\frac{\pi}{4}\right)x + \left(\cos\frac{\pi}{4}\right)y \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} x - y \\ x + y \end{pmatrix}.$$

Luego,

$$\begin{aligned}(T \circ S)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} &= T\left(S\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)\\ &= T\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}x-y\\x+y\end{pmatrix}\right)\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}x-y\\-(x+y)\end{pmatrix}\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}x-y\\-x-y\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}(S \circ T)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} &= S\left(T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)\\ &= S\begin{pmatrix}x\\-y\end{pmatrix}\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}x-(-y)\\x+(-y)\end{pmatrix}\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}x+y\\x-y\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Se observa que $T \circ S$ y $S \circ T$ actúan de distinta manera; por ejemplo,

$$(T \circ S)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1-1\\-1-1\end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}$$

mientras que

$$(S \circ T)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1+1\\1-1\end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}.$$

Luego $T \circ S \neq S \circ T$. ■

En lo que sigue centraremos la atención en la composición de transformaciones lineales. A continuación listamos las propiedades básicas de la composición entre transformaciones lineales; se advierte al lector que algunas de dichas propiedades no son exclusivas de las transformaciones lineales. Si T, S, R son transformaciones lineales del plano, r es un escalar, I la transformación identidad y O la transformación nula, entonces:

1. $T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R$.
2. $T \circ I = T = I \circ T$.
3. $T \circ (S + R) = (T \circ S) + (T \circ R)$.
4. $(S + R) \circ T = (S \circ T) + (R \circ T)$.
5. $(rT) \circ S = r(T \circ S) = T \circ (rS)$.
6. $T \circ O = O = O \circ T$.

A continuación probaremos la propiedad 3. a modo de ejemplo: Cualquiera sea X en $\mathbb{R}^2$ se tiene que

$$\begin{aligned}(T\circ(S+R))(X) &= T((S+R)(X))\\ &= T(S(X)+R(X))\\ &= T(S(X))+T(R(X)) \text{ (pues } T \text{ es lineal)}\\ &= (T\circ S)(X)+(T\circ R)(X)\\ &= ((T\circ S)+(T\circ R))(X).\end{aligned}$$

Luego,

$$T\circ(S+R)=(T\circ S)+(T\circ R).$$

La prueba de las otras propiedades se deja como ejercicio.

Nótese, observando las propiedades 1. a 6. anteriores, que la composición entre transformaciones lineales se comporta de manera similar al producto entre números (hace falta la propiedad conmutativa y, como veremos más adelante, no toda transformación distinta de la nula tiene una transformación inversa). Por tal motivo la compuesta $T\circ S$ de dos transformaciones lineales T y S es llamada **producto de** T **y** S y también se denota TS. De hecho, en adelante emplearemos frecuentemente esta última notación.

Supongamos que T y S son transformaciones lineales del plano con

$$m(T)=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix} \text{ y } m(S)=\begin{pmatrix} a' & b'\\ c' & d'\end{pmatrix}.$$

Entonces, para todo $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}(TS)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} &= T\left(S\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)\\ &= T\begin{pmatrix}a'x+b'y\\c'x+d'y\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a'x+b'y\\c'x+d'y\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}a(a'x+b'y)+b(c'x+d'y)\\c(a'x+b'y)+d(c'x+d'y)\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}(aa'+bc')x+(ab'+bd')y\\(ca'+dc')x+(cb'+dd')y\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} aa'+bc' & ab'+bd'\\ ca'+dc' & cb'+dd'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Luego, TS también es una transformación lineal y

$$m(TS)=\begin{pmatrix} aa'+bc' & ab'+bd'\\ ca'+dc' & cb'+dd'\end{pmatrix}. \tag{4.14}$$

Con base en esta igualdad (4.14) se define el **producto** de dos matrices 2×2 en la forma siguiente:

$$\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b'\\ c' & d'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} aa'+bc' & ab'+bd'\\ ca'+dc' & cb'+dd'\end{pmatrix}.$$

Este producto entre matrices corresponde al producto entre transformaciones lineales en el mismo sentido en que la suma entre matrices y el producto de un escalar por una matriz corresponden, respectivamente, a la suma entre transformaciones lineales y al producto de un escalar por una transformación lineal.

Tenemos por tanto que:

> Si T y S son transformaciones lineales del plano con
> $$m(T) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ y } m(S) = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$
> entonces el producto (la compuesta) TS también es una transformación lineal del plano y
> $$m(TS) = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix} = m(T)\, m(S).$$

Obsérvese cómo se obtiene la matriz producto: digamos que

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}.$$

Por ejemplo, el número en el producto AB que está en la 1ª fila y en la 2ª columna se obtiene a partir de la 1ª fila de A y de la 2ª columna de B como se ilustra a continuación:

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b' \\ d' \end{pmatrix} = ab' + bd'.$$

Análogamente se obtienen los otros números que conforman la matriz producto AB.

Ejemplo 4.20
Sean T y S las transformaciones lineales del plano tales que

$$m(T) = A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } m(S) = B = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Hallar $m(TS)$ y $(TS)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ para cualquier $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$.

Solución:

$$\begin{aligned} m(TS) &= AB \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2(4) + 3(-6) & 2(7) + 3(5) \\ (-1)4 + 0(-6) & (-1)7 + 0(5) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -10 & 29 \\ -4 & -7 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Luego, para todo $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} (TS)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= (AB)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -10 & 29 \\ -4 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -10x+29y \\ -4x-7y \end{pmatrix}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

El lector puede comprobar que en el ejemplo anterior $AB \neq BA$, lo cual se debe a que $TS \neq ST$. De manera que:

El producto entre matrices 2×2 no es conmutativo.

En general, el producto entre matrices 2×2 se comporta algebraicamente como el producto (compuesta) entre transformaciones lineales del plano. En efecto, se tiene que si A, B, C son matrices 2×2 y r es un escalar, entonces:

1. $(AB)\,C = A\,(BC)$.
2. $AI_2 = A = I_2A$.
3. $A\,(B+C) = AB + AC$.
4. $(B+C)\,A = BA + CA$.
5. $(rA)\,B = r\,(AB) = A\,(rB)$.
6. $AO = O = OA$.

A continuación probaremos la propiedad 1. a modo de ejemplo.

Digamos que T, S, R son respectivamente las transformaciones lineales del plano determinadas por las matrices A, B, C, es decir, T, S, R son las transformaciones tales que

$$A = m\,(T)\,,\ B = m\,(S)\ \text{ y } C = m\,(R)\,.$$

Entonces

$$\begin{aligned} (AB)\,C &= (m\,(T)\,m\,(S))\,m\,(R) \\ &= m\,(TS)\,m\,(R) \\ &= m\,((TS)\,R) \\ &= m\,(T\,(SR))\,,\ \text{pues } (TS)\,R = T\,(SR) \\ &= m\,(T)\,m\,(SR) \\ &= m\,(T)\,(m\,(S)\,m\,(R)) \\ &= A\,(BC)\,. \end{aligned}$$

De manera similar se pueden probar las otras propiedades. Claro está que cada una de las propiedades enunciadas se puede probar directamente, sin recurrir a las transformaciones lineales.

Para finalizar esta sección, haremos un resumen muy breve de lo hecho en ella. Hemos definido tres operaciones con transformaciones lineales: la suma, el producto por escalar y el producto. Y en correspondencia con ellas se han definido tres operaciones con matrices: la suma, el producto de un escalar por una matriz y el producto de dos matrices. También hemos definido el producto de una matriz 2×2 por un vector de $\mathbb{R}^2$. A continuación listamos algunas de las propiedades básicas de este producto. Cualesquiera sean las matrices A, B, los vectores X, U de $\mathbb{R}^2$ y r en $\mathbb{R}$ se tiene:

1. $A(X+U) = AX + AU.$
2. $A(rX) = r(AX).$
3. $(A+B)X = AX + BX.$
4. $(rA)X = r(AX).$
5. $(AB)X = A(BX).$

Cada una de estas propiedades puede probarse recurriendo a transformaciones lineales o bien sin recurrir a ellas. Por ejemplo, para probar 1. podemos considerar la transformación lineal T cuya matriz es A y observar que 1. es una reescritura de la propiedad

$$T(X+U) = T(X) + T(U)$$

pues el lado izquierdo de 1. es $T(X+U)$ y el derecho $T(X)+T(U)$. De manera similar, 2. es una reescritura de la propiedad

$$T(rX) = r(T(X)).$$

4.6 Inversas para transformaciones lineales y matrices

Recordemos algunos conceptos sobre funciones, con los cuales el lector probablemente ya ha tenido contacto.

Consideremos una función

$$\begin{aligned} f : \mathcal{A} &\to \mathcal{B} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

- f se dice **inyectiva** o **uno a uno** si para $x_1, x_2 \in \mathcal{A}$,

$$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

  es decir, elementos distintos del dominio de f no tienen la misma imagen bajo f. La condición anterior puede expresarse, de manera equivalente, en la forma

$$f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2.$$

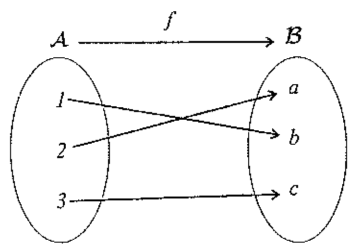
- Se denomina **rango** o **recorrido de** f al conjunto de todas las imágenes $f(x)$ con $x \in \mathcal{A}$. Denotaremos este conjunto $\mathcal{R}_f$ o $f(\mathcal{A})$; así,

$$\mathcal{R}_f = f(\mathcal{A}) = \{f(x) \,/\, x \in \mathcal{A}\}.$$

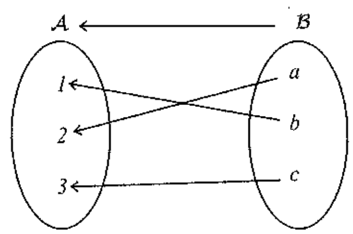
- f se dice **sobreyectiva** o simplemente **sobre** si todo elemento de $\mathcal{B}$ es imagen de por lo menos un elemento de $\mathcal{A}$, es decir, si el recorrido de f es todo el conjunto $\mathcal{B}$ (o sea si $f(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$).

- f se dice **biyectiva** si f es uno a uno y sobre. En otras palabras, f se dice biyectiva si todo elemento de $\mathcal{B}$ es imagen bajo f de uno y sólo un elemento de $\mathcal{A}$.

El diagrama siguiente muestra una función biyectiva f con dominio $\mathcal{A} = \{1,2,3\}$ y codominio $\mathcal{B} = \{a,b,c\}$



Nótese que para esta función f se puede definir una función de $\mathcal{B}$ hacia $\mathcal{A}$ "devolviendo" las flechas

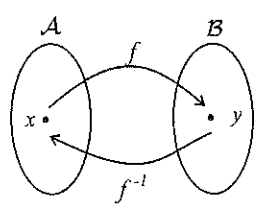


Esta función es llamada la inversa de f y se denota f^{-1}. Observe que para cada elemento y de $\mathcal{B}$, $f^{-1}(y)$ es aquel elemento x de $\mathcal{A}$ tal que $f(x) = y$.

En general, si $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es biyectiva se puede definir una función $g : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ tal que para todo $y \in \mathcal{B}$, $g(y) = x$ donde x es aquel elemento de $\mathcal{A}$ tal que $f(x) = y$. En este caso, es decir cuando f es biyectiva, se dice que f es **invertible** y la función g antes mencionada se llama la **inversa de** f y se denota f^{-1}. Así, la función inversa de f, cuando f es biyectiva, es la función $f^{-1} : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ tal que para $y \in \mathcal{B}$ y $x \in \mathcal{A}$,

$$f^{-1}(y) = x \text{ si y sólo si } f(x) = y.$$

De manera que si f envía a x en y entonces f^{-1} "deshace" lo hecho por f, enviando a y en x, como lo ilustra el siguiente diagrama:



Si $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ no es uno a uno o no es sobre, no podemos hablar de una función inversa para f con dominio $\mathcal{B}$ y codominio $\mathcal{A}$.

Obsérvese que si $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es biyectiva, entonces

$$f^{-1}(f(x)) = x \text{ para todo } x \in \mathcal{A} \quad \text{y} \quad f\left(f^{-1}(y)\right) = y \text{ para todo } y \in \mathcal{B}.$$

Por otra parte, es fácil probar que si para una función $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ existe una función $g : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ tal que $g(f(x)) = x$ para todo $x \in \mathcal{A}$ y $f(g(y)) = y$ para todo $y \in \mathcal{B}$, entonces f es invertible y $f^{-1} = g$.

Por supuesto, los conceptos y resultados anteriores nos interesan en relación con las transformaciones del plano y particularmente con las que son transformaciones lineales. Para una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ se tiene lo siguiente:

- Si T es invertible entonces su inversa T^{-1} también es una transformación lineal. (Vea ejercicio 35 de este capítulo).
- Si T es invertible, su inversa T^{-1} es tal que

$$T^{-1}(T(X)) = X \qquad \text{y} \qquad T\left(T^{-1}(X)\right) = X, \qquad \text{para todo } X \in \mathbb{R}^2,$$

  es decir,

$$T^{-1}T = I \qquad \text{y} \qquad TT^{-1} = I.$$

- Si $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es tal que

$$ST = I \qquad \text{y} \qquad TS = I$$

  entonces T es invertible y $T^{-1} = S$.

Ejemplo 4.21
Consideremos la transformación D_r con $r \neq 0$, la cual envía cada vector X de $\mathbb{R}^2$ en el vector rX. Vemos que se puede deshacer el efecto de D_r sobre un vector X (y retornar a X) multiplicando rX por el escalar $\dfrac{1}{r}$; de manera que la inversa de D_r debe ser la transformación $D_{\frac{1}{r}}$. Veamos que, en efecto, así es:

Si X es cualquier vector de $\mathbb{R}^2$,

$$D_{\frac{1}{r}}(D_r(X)) = D_{\frac{1}{r}}(rX) = \frac{1}{r}(rX) = \left(\frac{1}{r}r\right)X = 1X = X$$

y análogamente, $D_r\left(D_{\frac{1}{r}}(X)\right) = X$. Luego

$$D_{\frac{1}{r}}D_r = I \qquad \text{y} \qquad D_rD_{\frac{1}{r}} = I.$$

Se sigue que D_r es invertible y que $D_r^{-1} = D_{\frac{1}{r}}$. ■

Ejemplo 4.22
Sea P la proyección sobre el eje x, es decir, P es la transformación del plano tal que $P\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ para cada $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$.

Es claro que P no es uno a uno, pues (por ejemplo) todo vector $\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$ sobre el eje y es enviado en el origen $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; por tanto P no es invertible. ■

Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal. Sabemos que si $X = O$ entonces $T(X) = O$. Ahora, si T es invertible entonces T es uno a uno y, en particular,

“ El único vector X tal que $T(X) = O$ es $X = O$ ”.

De manera que este hecho es una condición necesaria para que T sea invertible. Resulta, y ello es sorprendente, que esa sola condición implica que T es invertible, como se establece en el siguiente resultado, en el cual también se expresa la invertibilidad de T en términos de los números que conforman la matriz de T.

> Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal con $m(T) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
> Las siguientes afirmaciones son equivalentes:
> 1. T es invertible.
> 2. El único vector X de $\mathbb{R}^2$ tal que $T(X) = O$ es $X = O$.
> 3. Las columnas $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ de $m(T)$ son linealmente independientes.
> 4. $ad - bc \neq 0$.

Probaremos lo anterior demostrando que 1. $\Longrightarrow$ 2., 2. $\Longrightarrow$ 3., 3. $\Longrightarrow$ 4. y 4. $\Longrightarrow$ 1.

Para probar que 1. $\Longrightarrow$ 2., supongamos que T es invertible y tomemos $X \in \mathbb{R}^2$ tal que $T(X) = O$. Entonces $T^{-1}(T(X)) = T^{-1}(O) = O$ (recuérdese que T^{-1} es una transformación lineal) y como también $T^{-1}(T(X)) = X$, entonces $X = O$.

Hemos probado así que si T es invertible entonces el único vector X de $\mathbb{R}^2$ tal que $T(X) = O$ es $X = O$.

Ahora probaremos que 2. $\Longrightarrow$ 3. probando su contrarecíproco, es decir, probando que si 3. no se cumple entonces 2. tampoco se cumple. Supongamos entonces que las columnas de $m(T)$ son linealmente dependientes y que, por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \text{ para cierto escalar } r.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} - r \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} a - rb \\ c - rd \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -r \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
T \begin{pmatrix} 1 \\ -r \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Así, el vector no nulo $\begin{pmatrix} 1 \\ -r \end{pmatrix}$ es tal que $T\begin{pmatrix} 1 \\ -r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, lo cual muestra que 2. no se da. De manera similar, si $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ para algún $r \in \mathbb{R}$, se puede probar que existe un vector no nulo X_0 tal que $T(X_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Probemos ahora que 3. $\Longrightarrow$ 4., probando que si 4. no se da entonces 3. tampoco se da. Supongamos entonces que $ad - bc = 0$ y probemos que las columnas de $m(T)$ son linealmente dependientes: si $ad - bc = 0$ entonces $ad = bc$.

Si por ejemplo $d \neq 0$, entonces $a = \dfrac{bc}{d}$ y en tal caso

$$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bc/d \\ c \end{pmatrix} = \frac{c}{d} \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

de lo cual se concluye que las columnas de $m(T)$ son linealmente dependientes. De igual forma se procede si $a \neq 0$ o $b \neq 0$ o $c \neq 0$. Si $a = b = c = d = 0$, es obvio que las columnas de $m(T)$ son linealmente dependientes.

Finalmente probemos que 4. $\Longrightarrow$ 1. Supongamos entonces que $ad - bc \neq 0$; para probar que T es invertible probaremos primero que existe una matriz $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ tal que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Considerando esta igualdad como una ecuación con incógnitas p, q, r, s vemos que ella es equivalente al sistema

$$\begin{aligned} ap + br &= 1 \\ cp + dr &= 0 \\ aq + bs &= 0 \\ cq + ds &= 1 \end{aligned} \tag{4.15}$$

Usando sus dos primeras ecuaciones tenemos que

$$\begin{aligned} dap + dbr &= d \\ bcp + bdr &= 0 \end{aligned}$$

de donde $(ad - bc)\,p = d$ y como $ad - bc \neq 0$ entonces

$$p = \frac{d}{ad - bc}.$$

Para simplificar, hagamos en lo que sigue $\Delta = ad - bc$. De manera similar a como se obtuvo el valor $p = \dfrac{d}{\Delta}$ se obtiene, usando las dos primeras ecuaciones de (4.15), que

$$r = -\frac{c}{\Delta}$$

y usando las dos últimas ecuaciones de dicho sistema, que

$$q = -\frac{b}{\Delta} \qquad \text{y} \qquad s = \frac{a}{\Delta}.$$

Es sólo cuestión de operaciones comprobar que para dichos valores de p, q, r y s se tiene que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora, un hecho notable es que dicha matriz $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ también cumple que

$$\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dejamos al lector que termine la prueba mostrando que la transformación lineal S cuya matriz es $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ es tal que $TS = I$ y $ST = I$, de lo cual se sigue que T es invertible.

Hemos probado así que 4. $\Longrightarrow$ 1., con lo cual concluimos la prueba de lo afirmado en el último recuadro. ♦

Obsérvese que en la prueba de 4. $\Longrightarrow$ 1. se probó que $T^{-1} = S$ y por tanto

$$m\left(T^{-1}\right) = m\left(S\right) = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$$

luego, se tiene que:

> Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal con $m\left(T\right) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
> Si T es invertible entonces
> $$m\left(T^{-1}\right) = \begin{pmatrix} d/\Delta & -b/\Delta \\ -c/\Delta & a/\Delta \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$
> donde $\Delta = ad - bc$.

Por otra parte, del razonamiento empleado en la prueba de 4. $\Longrightarrow$ 1. se deduce lo siguiente:

> Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal. Si existe una transformación lineal $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $TS = I$ entonces $ST = I$ y por tanto T es invertible y $T^{-1} = S$.

Ejemplo 4.23

Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ -x + 3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

La matriz de T es $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ y $\Delta = (1)(3) - (-1)(2) = 5$.

a) Como $\Delta \neq 0$ entonces T es invertible y

$$m\left(T^{-1}\right) = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & -2/5 \\ 1/5 & 1/5 \end{pmatrix}.$$

Así, T^{-1} es la transformación del plano definida por

$$T^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & -2/5 \\ 1/5 & 1/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3/5)\,x - (2/5)\,y \\ (1/5)\,x + (1/5)\,y \end{pmatrix}.$$

b) Como T es invertible, el único vector $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ tal que

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ es } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

c) Es claro que las columnas $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ de A son linealmente independientes. ■

Ejemplo 4.24
Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ -2x - 4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

La matriz de T es $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$ y $\Delta = (1)(-4) - (-2)(2) = 0$.

a) Como $\Delta = 0$ entonces T no es invertible.

b) Como T no es invertible, podemos asegurar que existen vectores $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ no nulos tales que $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

c) Es claro que las columnas $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ de A son linealmente dependientes. ■

Trasladamos ahora el concepto de inversa para transformaciones lineales a las matrices 2×2. Sea A una matriz 2×2 y sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal tal que $m(T) = A$.

Diremos que la matriz A es **invertible** si la transformación lineal T es invertible. Si éste es el caso, a la matriz $m(T^{-1})$ la llamaremos la **inversa** de A y la denotaremos A^{-1}.

Obsérvese que si A es invertible entonces

$$AA^{-1} = I_2 \quad \text{y} \quad A^{-1}A = I_2.$$

En efecto,

$$AA^{-1} = m(T)\, m(T^{-1}) = m(TT^{-1}) = m(I) = I_2.$$

Análogamente se prueba que $A^{-1}A = I_2$.

Es fácil probar que si para una matriz A de orden 2 existe una matriz B de orden 2 tal que

$$AB = I_2 \quad \text{y} \quad BA = I_2.$$

entonces A es invertible y $A^{-1} = B$.

Ejemplo 4.25
Muestre que la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ es invertible y halle su inversa.

Solución:

Sea T la transformación lineal cuya matriz es A y sea $\Delta = (2)(0) - (\sqrt{3})(1) = -\sqrt{3}$. Como $\Delta \neq 0$ entonces T es invertible y

$$m(T^{-1}) = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{3} \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Ahora, como T es invertible entonces A es invertible y

$$A^{-1} = m(T^{-1}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}. \quad ■$$

Podemos trasladar a matrices, sin ninguna dificultad, los resultados obtenidos para transformaciones lineales respecto al concepto de inversa. Se tiene así el siguiente resultado, cuya prueba se deja al lector.

Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

1. Las afirmaciones siguientes son equivalentes.
   a) A es invertible.
   b) El único vector X de $\mathbb{R}^2$ tal que $AX = O$ es $X = O$.
   c) Las columnas de A son linealmente independientes.
   d) $ad - bc \neq 0$.
2. Si $ad - bc \neq 0$ entonces $A^{-1} = \dfrac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ donde $\Delta = ad - bc$.
3. Si existe una matriz B de orden 2 tal que $AB = I_2$ entonces $BA = I_2$ y por tanto A es invertible y $A^{-1} = B$.

4.7 Ejercicios

Sección 4.1

1. Sean $U \in \mathbb{R}^2$ y P_U la transformación proyección sobre la recta generada por el vector U. Para el vector U dado en cada literal, hallar $P_U\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ para cada $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$.

   a) $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *b)* $U = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *c)* $U = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ *d)* $U = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. Sea $\mathcal{L}$ la recta con ecuación $5x - 2y = 0$ y sea $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación proyección sobre $\mathcal{L}$. Si $P\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$, expresar a' y b' en términos de a y b.

3. Sean $U \in \mathbb{R}^2$ y S_U la transformación reflexión con respecto a la recta $\mathcal{L}$ generada por el vector U. Para el vector U dado en cada literal, encontrar $S_U\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ para cada $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

   a) $U = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ *b)* $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *c)* $U = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Sección 4.2

4. Para cada literal, obtener la matriz de la transformación reflexión con respecto a la recta dada.

   a) $y = -x$ *b)* $y = 2x$

5. Para cada literal, suponga que $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es la transformación lineal cuya matriz es la dada. Calcular las imágenes bajo T de $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   a) $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *b)* $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ *c)* $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ *d)* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

   e) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ *f)* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ *g)* $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *h)* $\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$

6. *a*) Dar ejemplo de una transformación $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ no lineal tal que $T\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.

   b) Dar ejemplo de una transformación lineal T tal que para X_1, X_2 linealmente independientes se tenga que $T(X_1)$, $T(X_2)$ sean linealmente dependientes.

Sección 4.3

7. Determinar si la transformación $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida en cada literal, es una transformación lineal. En caso afirmativo, hallar la matriz de T.

   a) $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3x+y\\x-2y\end{pmatrix}$ *b*) $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$

   c) $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x-1\\x-y\end{pmatrix}$ *d*) $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

8. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal tal que $T(E_1 + E_2) = \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$, $T(-E_1 + E_2) = \begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$. Encontrar $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ para cada $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ y $T\begin{pmatrix}-10\\15\end{pmatrix}$.

9. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal. Demostrar que si X_1, X_2 son linealmente dependientes entonces $T(X_1), T(X_2)$ también son linealmente dependientes.

Sección 4.4

10. Sea $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación proyección sobre el eje x. Encontrar la imagen bajo P de los siguientes conjuntos:

    a) La recta $\mathcal{L}$ que pasa por el origen y por el punto $\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$.

    b) El paralelogramo determinado por los vectores $V = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ y $W = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

11. Para cada literal, si $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es la transformación reflexión con respecto a la recta $\mathcal{L}$ dada, hallar la imagen bajo S de los conjuntos descritos.

    a) $\mathcal{L} : y = -x$, $C_1 = \left\{\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix} : x < 0\right\}$, $C_2 = \left\{\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix} : x \geq 0\right\}$

    b) $\mathcal{L} : y = 2x$, $C_1 = \left\{\begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix} : y < 0\right\}$, $C_2 = \left\{\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix} : x \geq 0\right\}$

12. Para $r = 1/3$ y $r = 2$,

    a) Si $D_r\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$, expresar x', y' en términos de x y y.

    b) Hallar la imagen bajo D_r de los siguientes conjuntos:

    i) $S = \left\{\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}\right\}$

    ii) El paralelogramo $\mathcal{P}$ determinado por $\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$.

    iii) La circunferencia $\mathcal{C}$ con centro en el origen y radio 2.

    iv) La recta $\mathcal{L}$ con ecuación $y = 2x - 3$.

13. a) Para $\theta = -\pi/3$ y $\theta = \pi/3$,

 i) Hallar la matriz de R_θ.

 ii) Hallar $R_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ para cada $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$.

 iii) Hallar la imagen bajo R_θ de la recta $\mathcal{L}$ con ecuación $y = x$.

 iv) Hallar la imagen bajo R_θ del paralelogramo $\mathcal{P}$ determinado por los vectores $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $W = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

 b) Para cada numeral expresar x', y' en términos de x y y.

 i) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R_{(\theta+\frac{\pi}{2})} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ii) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R_{2\theta} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ iii) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R_{(-\theta)} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

14. Sean $U \in \mathbb{R}^2$ y T_U la traslación por el vector U. Si P y Q son puntos distintos, probar que:

 a) $T_U(P) \neq T_U(Q)$

 b) La imagen bajo T_U de la recta que pasa por los puntos P y Q es la recta que pasa por los puntos $T_U(P)$ y $T_U(Q)$.

 c) La imagen bajo T_U del segmento de recta $\overline{PQ}$ es el segmento de recta con extremos $T_U(P)$ y $T_U(Q)$.

15. Sea T la transformación lineal con matriz $m(T) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Encontrar la imagen bajo T de los siguientes conjuntos:

 a) La recta $\mathcal{L}$ que pasa por el origen y tiene vector director $D = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

 b) La recta $\mathcal{L}'$ con ecuación $bx - ay = 0$.

16. Hallar la imagen del cuadrado con vértices en los puntos $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ bajo la transformación $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. ¿Es dicha imagen un cuadrado? ¿Cuál es su área?

17. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal tal que $T\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \end{pmatrix}$ y $T\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 4 \end{pmatrix}$. Hallar:

 a) $m(T)$ b) $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ para cada $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$.

 c) La imagen bajo T del paralelogramo $\mathcal{P}$ determinado por $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

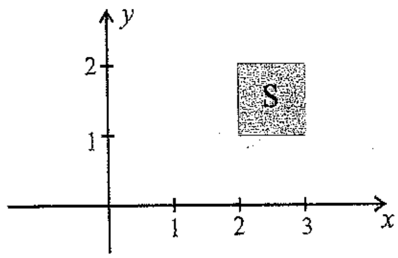
18. Encuentre todas las transformaciones lineales $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que transformen la recta cuya ecuación es $y = 0$ en la recta con ecuación $x = 0$.

19. Sea $\mathcal{P}$ el paralelogramo $ABCD$, donde A, B, C y D son puntos cualesquiera del plano.

 a) Describir $\mathcal{P}$ como un conjunto de puntos, en términos de A, $B - A$ y $D - A$.

b) Probar que $\mathcal{P}$ es la imagen bajo la traslación T_A del paralelogramo $\mathcal{P}'$ determinado por los vectores $B - A$ y $D - A$, y que el área de $\mathcal{P}$ es igual al área de $\mathcal{P}'$.

20. Si $U = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, hallar y graficar la imagen del cuadrado S de la figura bajo la traslación T_U.



Sección 4.5

21. Dadas las transformaciones lineales del plano T_1 y T_2 definidas por $T_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ x + y \end{pmatrix}$, $T_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5x + y \\ x + 3y \end{pmatrix}$, hallar:
   a) $m(T_1)$ y $m(T_2)$.
   b) $T_1 + T_2$, $m(T_1 + T_2)$, $m(T_1) + m(T_2)$, $(T_1 + T_2)\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$.
   c) $-4T_1$, $m(-4T_1)$, $-4m(T_1)$, $(-4T_1)\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$.
   d) $2T_1 - 3T_2$, $m(2T_1 - 3T_2)$, $2m(T_1) - 3m(T_2)$, $(2T_1 - 3T_2)\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$.
   e) $T_1 \circ T_2$, $m(T_1 \circ T_2)$, $m(T_1)m(T_2)$, $(T_1 \circ T_2)\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$.
   f) $T_2 \circ T_1$, $m(T_2 \circ T_1)$, $m(T_2)m(T_1)$, $(T_2 \circ T_1)\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

22. Una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es tal que
$$T(E_1) = E_1 + E_2 \text{ y } T(E_2) = 2E_1 - E_2.$$
   a) Calcular en términos de E_1 y E_2 los siguientes vectores:
      i) $T(3E_1 - 4E_2)$ *ii*) $T^2(3E_1 - 4E_2)$
   b) Hallar $m(T)$ y $m(T^2)$.
   Nota: T^2 es otra notación para el producto TT.

23. Sea P la transformación proyección sobre el eje x. Hallar:
   a) $m(P)$ *b*) $m(PR_{\pi/2})$ *c*) $m(R_{\pi/2}P)$ *d*) $(PR_{\pi/2})\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *e*) $(R_{\pi/2}P)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

24. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcular $A^2, B^2, CD, DC, E^2, F^2$.

b) Para cada numeral, encuentre la transformación lineal T que satisface la condición dada y cuando sea posible, dé una interpretación geométrica.

i) $m(T) = A$ *ii*) $m(T) = A^2$ *iii*) $m(T) = B$ *iv*) $m(T) = B^2$

v) $m(T) = C$ *vi*) $m(T) = D$ *vii*) $m(T) = CD$ *viii*) $m(T) = DC$

ix) $m(T) = E$ *x*) $m(T) = E^2$ *xi*) $m(T) = F$ *xii*) $m(T) = F^2$.

Nota: Para una matriz M, la expresión M^2 es otra notación para el producto MM

25. Hallar $m(T)$ y $m(T^2)$ sabiendo que T es la transformación lineal que transforma cada vector de $\mathbb{R}^2$ en dos veces su simétrico con respecto al eje y. Interpretar T^2 geométricamente.

26. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ x+y \end{pmatrix}$. Calcular:

    a) $T^3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *b*) $T^3\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

27. Probar que $R_\theta \circ R_\phi = R_{(\theta+\phi)}$, es decir, $R_\theta \circ R_\phi$ es la rotación por el ángulo $\theta + \phi$.

28. Sea T la transformación lineal con $m(T) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.

    a) Mostrar que para todo vector X perteneciente a la recta $y = x$, se tiene $T(X) = O$.

    b) Hallar una transformación lineal $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ diferente de la transformación nula tal que $ST = O$ y $TS = O$.

29. Sean $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $U_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Hallar la transformación $T_{U_1} \circ R_{\pi/2} \circ T_{U_2}$.

30. Sean $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal con $m(T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $U = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

    a) Hallar la transformación $T_U \circ T$ e interpretarla geométricamente.

    b) Mostrar que todos los puntos de la recta $y = 1$ permanecen fijos bajo la transformación $T_U \circ T$.

31. Sean $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. La matriz $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ se llama **traspuesta de A** y se denota A^T. Llamaremos **traspuesto** de X y denotaremos X^T al arreglo de números $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$, el cual consideraremos como una matriz de una sola fila (de igual forma, el vector $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ puede verse como una matriz de una sola columna).

    Definimos los productos $X^T U$ y $X^T A$, como sigue:

    $$X^T U = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = xu + yv = X.U$$

    $$X^T A = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa + yc & xb + yd \end{pmatrix}$$

Probar que

i) $(AX)^T = X^T A^T$

ii) $\left(X^T A\right) U = X^T (AU)$

En virtud de la igualdad en *ii)*, escribiremos $X^T AU$ para referirnos a cualquiera de sus dos miembros.

Sección 4.6

32. Para la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de cada literal, determinar si T es invertible y, en caso afirmativo, encontrar $m\left(T^{-1}\right)$ y $T^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

a) $m(T) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ *b)* $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 5y \end{pmatrix}$

c) $m(T) = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ *d)* $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x - 3y \\ 4x - 2y \end{pmatrix}$

e) $m(T) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ *f)* $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$

g) T es la proyección sobre la recta $y = x$.

h) T es la reflexión respecto al eje x.

i) $T = R_\theta$. *j)* $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$.

33. Demostrar que para cada θ, $-2\pi < \theta < 2\pi$, se tiene que $R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$.

34. Sean $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dos transformaciones invertibles. Demostrar que $S \circ T$ es invertible y $(S \circ T)^{-1} = T^{-1} \circ S^{-1}$.

35. Sean $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ las transformaciones lineales definidas por
$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ x - y \end{pmatrix}$ y $S\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y \\ x - 2y \end{pmatrix}$.

a) Demostrar que T y S son invertibles.

b) Hallar:

i) $T^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *ii)* $S^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *iii)* $(ST)^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

36. Probar que:

a) Si $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ es invertible y $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ entonces $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$.

37. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ 4x + 7y \end{pmatrix}$. Hallar, si es posible, un vector X de $\mathbb{R}^2$ tal que $T(X) = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

38. Sean $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ vectores de $\mathbb{R}^2$ linealmente independientes. Probar que todo vector $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ es expresable de manera única como combinación lineal de $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$, es decir, para todo vector $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ existen únicos escalares x y y tales que

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

Exprese x y y en términos de a, b, c, d, u y v. (**Ayuda**: Vea ejercicio 36.)

39. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal y sean X_1, X_2 dos vectores linealmente independientes de $\mathbb{R}^2$.

    a) Mostrar que si $T(X_1) = T(X_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ entonces T es la transformación nula.

    b) Mostrar que si $T(X_1) = X_1$ y $T(X_2) = X_2$ entonces T es la transformación identidad.

40. Probar que toda traslación T_U es uno a uno y sobre. Hallar T_U^{-1}

41. Demostrar que si $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una transformación lineal uno a uno entonces T transforma líneas rectas en líneas rectas.

42. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + cy \\ -y \end{pmatrix}$. Demostrar que para todo $c \in \mathbb{R}$, T es invertible y que $T^{-1} = T$.

43. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal invertible. Mostrar que T^{-1} también es transformación lineal.

44. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal y sean X_1, X_2 vectores linealmente independientes de $\mathbb{R}^2$. Demostrar que si T es invertible entonces $T(X_1)$, $T(X_2)$ también son linealmente independientes.

45. Probar que si $T : R^2 \to R^2$ es una transformación lineal invertible y $\mathcal{P}$ es un paralelogramo que no necesariamente tiene un vértice en el origen, entonces $T(\mathcal{P})$ también es un paralelogramo y sus vértices son las imágenes bajo T de los vértices de $\mathcal{P}$.

5

Sistemas de ecuaciones lineales 2×2

5.1 Conceptos y resultados básicos

Recordemos que una ecuación lineal en dos variables x, y es una ecuación de la forma

$$ax + by = u \tag{5.1}$$

en la cual a, b y u son números reales dados.

Una **solución** de una tal ecuación es un par ordenado $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ tal que al sustituir x por x_0 y y por y_0, la ecuación se satisface, es decir

$$ax_0 + by_0 = u.$$

Por ejemplo, una solución de la ecuación $x + 3y = 5$ es el par $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ pues $2 + 3\,(1) = 5$.

El conjunto de todas las soluciones de una ecuación del tipo (5.1) se dirá su **conjunto solución.** Dos ecuaciones del tipo (5.1) se dirán **equivalentes** si tienen el mismo conjunto solución; cuando se multiplica una ecuación por un escalar no nulo se obtiene una ecuación equivalente.

Como sabemos, si $a \neq 0$ o $b \neq 0$, la ecuación (5.1) corresponde a una línea recta, de manera que en tal caso el conjunto solución de (5.1) es dicha línea recta.

Ejemplo 5.1
El conjunto solución de la ecuación

$$x + 2y = 4 \tag{5.2}$$

es la recta $\mathcal{L}$ que corresponde a esta ecuación, la cual corta a los ejes coordenados en los puntos $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ (figura 5.1).

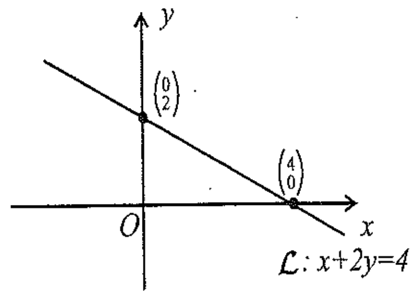


Figura 5.1.

Ahora, como ya lo sabemos, dicha recta $\mathcal{L}$ puede describirse mediante distintas ecuaciones. A continuación mostramos una manera de pasar de la ecuación (5.2) a una ecuación vectorial paramétrica para $\mathcal{L}$: de la ecuación (5.2) se obtiene la ecuación equivalente

$$y = 2 - \frac{1}{2}x.$$

Así, si damos a x cualquier valor en $\mathbb{R}$, digamos t, entonces el valor correspondiente de y es $y = 2 - (1/2)\,t$. Por tanto, $\mathcal{L}$ consta de los puntos $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ tales que

$$\begin{aligned} x &= t \\ y &= 2 - \frac{1}{2}t \end{aligned}$$

con $t \in \mathbb{R}$ o, equivalentemente, $\mathcal{L}$ consta de los puntos $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ de la forma

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{5.3}$$

Análogamente, la ecuación (5.2) es equivalente a la ecuación

$$x = 4 - 2y.$$

Así, si damos a y cualquier valor en $\mathbb{R}$, digamos s, entonces el valor correspondiente de x es $x = 4 - 2s$. Por tanto, $\mathcal{L}$ también puede describirse como el conjunto de puntos $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ tales que

$$\begin{aligned} x &= 4 - 2s \\ y &= s \end{aligned}$$

con $s \in \mathbb{R}$, o equivalentemente, como el conjunto de los puntos $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ de la forma

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad s \in \mathbb{R} \tag{5.4}$$

Las ecuaciones (5.3) y (5.4), las cuales son ecuaciones vectoriales paramétricas para la recta $\mathcal{L}$, proporcionan descripciones del conjunto solución de la ecuación (5.2) ■

Ejemplo 5.2
a) El conjunto solución de la ecuación

$$0x + 0y = 0$$

es todo $\mathbb{R}^2$, pues todo punto $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ es una solución de dicha ecuación.
b) Si $u \neq 0$, el conjunto solución de la ecuación

$$0x + 0y = u$$

es ϕ (el conjunto vacío), pues ningún par $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ la satisface. ■

Consideremos ahora un sistema de dos ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} ax + by &= u \\ cx + dy &= v \end{aligned} \tag{5.5}$$

$(a, b, c, d, u$ y v son números reales dados).

Una **solución** de tal sistema es un par ordenado $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$, el cual es solución de cada una de las dos ecuaciones del sistema. Por ejemplo, una solución del sistema

$$\begin{aligned} x + y &= 4 \\ 2x - y &= 5 \end{aligned}$$

es el par $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, pues $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ es solución de cada una de las ecuaciones, ya que $3 + 1 = 4$ y $2(3) - 1 = 5$. Por otra parte, el sistema

$$\begin{aligned} x + y &= 4 \\ 2x + 2y &= -5 \end{aligned}$$

carece de soluciones, pues si un par $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ satisface la primera ecuación, es decir, si $x_0 + y_0 = 4$, entonces dicho par no satisface la segunda, pues se tiene $2x_0 + 2y_0 = 2(x_0 + y_0) = 2(4) = 8$.

El sistema (5.5) se dice **soluble** o **consistente** si tiene al menos una solución; en caso contrario, el sistema se dice **no soluble** o **inconsistente.** El conjunto de todas las soluciones de un sistema del tipo (5.5) se dirá su **conjunto solución.**

Ejemplo 5.3
a) El conjunto solución del sistema

$$\begin{aligned} 0x + 0y &= 3 \\ 2x - y &= 7 \end{aligned}$$

es ϕ, pues la ecuación $0x + 0y = 3$ carece de soluciones.
b) El conjunto solución del sistema

$$\begin{aligned} 0x + 0y &= 0 \\ 2x - y &= 7 \end{aligned}$$

es el de la ecuación $2x - y = 7$, ya que todo par $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ es solución de la ecuación $0x + 0y = 0$.

c) El conjunto solución del sistema

$$\begin{aligned} 0x + 0y &= 0 \\ 0x + 0y &= 0 \end{aligned}$$

es todo $\mathbb{R}^2$, pues el conjunto solución de cada ecuación es $\mathbb{R}^2$. ■

Como se aprecia en el ejemplo anterior, si en el sistema (5.5) se tiene $a = 0$ y $b = 0$ o se tiene $c = 0$ y $d = 0$, entonces el conjunto solución es ϕ, una recta o todo $\mathbb{R}^2$. En lo que sigue centraremos la atención en el caso no trivial

$$a \neq 0 \text{ o } b \neq 0 \qquad \text{y} \qquad c \neq 0 \text{ o } d \neq 0. \tag{5.6}$$

En este caso el conjunto solución de la primera ecuación es una línea recta $\mathcal{L}_1$ y el de la segunda, una línea recta $\mathcal{L}_2$; por tanto, el conjunto solución del sistema es la intersección de $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$.

Ahora bien, para dichas rectas $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ se da una y sólo una de las tres posibilidades siguientes (figura 5.2):

- $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$.
- $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ son paralelas y $\mathcal{L}_1 \neq \mathcal{L}_2$.
- $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ se cortan en un único punto.

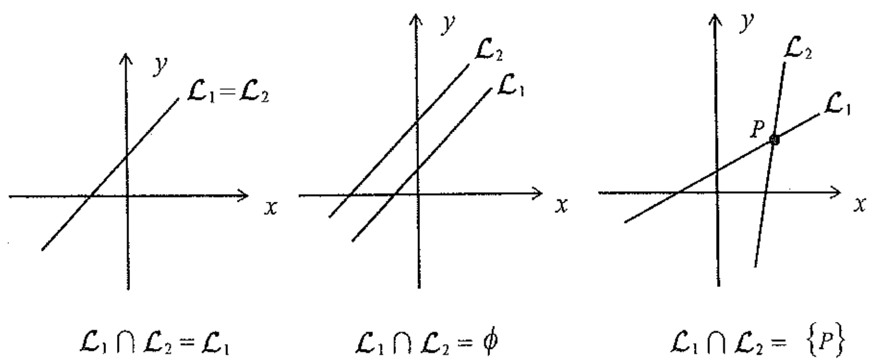


Figura 5.2.

Así, admitiendo lo anterior, podemos afirmar lo siguiente:

> Para el sistema (5.5), bajo la condición (5.6), se da uno y sólo uno de los siguientes casos:
>
> **Caso 1.** El sistema tiene infinitas soluciones, siendo su conjunto solución una línea recta. Cualquiera de las dos ecuaciones del sistema es una ecuación para dicha recta.
>
> **Caso 2.** El sistema carece de soluciones.
>
> **Caso 3.** El sistema tiene solamente una solución, la cual es el punto de intersección de las rectas $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$.

Ejemplo 5.4

a) Consideremos el sistema

$$\begin{aligned} x + 2y &= 4 \\ 3x + 6y &= 12 \end{aligned}$$

Se observa que las dos ecuaciones corresponden a una misma línea recta, la recta $\mathcal{L}$ con ecuación $x + 2y = 4$ (las dos ecuaciones son equivalentes). Así, el conjunto solución del sistema es dicha recta $\mathcal{L}$.

b) En el sistema

$$\begin{aligned} x + 2y &= 4 \\ 3x + 6y &= 7 \end{aligned}$$

las ecuaciones corresponden a rectas paralelas y distintas, luego el sistema carece de soluciones.

c) En el sistema

$$\begin{aligned} x + 2y &= 0 \\ 2x - 3y &= 8 \end{aligned}$$

las ecuaciones corresponden a rectas no paralelas, luego el sistema tiene solamente una solución, la cual es el punto de intersección de tales rectas. ■

Dos sistemas del tipo (5.5) se dicen **equivalentes** si tienen el mismo conjunto solución. Cuando se sustituye una de las ecuaciones de un sistema por la suma de esa ecuación y un múltiplo escalar de la otra, se obtiene un sistema equivalente. Por ejemplo, consideremos el sistema

$$\begin{aligned} ax + by &= u \\ cx + dy &= v \end{aligned} \tag{5.7}$$

Multiplicando la primera ecuación por un escalar λ se obtiene la ecuación $\lambda ax + \lambda by = \lambda u$, y sumando ésta a la segunda ecuación se obtiene

$$(\lambda a + c)\, x + (\lambda b + d)\, y = \lambda u + v$$

Sustituyendo en el sistema (5.7) su segunda ecuación por la ecuación anterior se obtiene el sistema

$$\begin{aligned} ax + by &= u \\ (\lambda a + c)\, x + (\lambda b + d)\, y &= \lambda u + v \end{aligned} \tag{5.8}$$

Veamos ahora que los sistemas (5.7) y (5.8) son equivalentes:

En primer lugar, si $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ es una solución del sistema (5.7) entonces

$$ax_0 + by_0 = u \qquad \text{y} \qquad cx_0 + dy_0 = v$$

por tanto,

$$\lambda ax_0 + \lambda by_0 = \lambda u \qquad \text{y} \qquad cx_0 + dy_0 = v$$

de donde

$$(\lambda a + c)\, x_0 + (\lambda b + d)\, y_0 = \lambda u + v$$

Luego, $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ es solución de cada una de las ecuaciones del sistema (5.8).

Recíprocamente, si $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ es una solución del sistema (5.8) entonces

$$ax_0 + by_0 = u \qquad \text{y} \qquad (\lambda a + c)\, x_0 + (\lambda b + d)\, y_0 = \lambda u + v$$

por tanto,

$$\lambda a x_0 + \lambda b y_0 = \lambda u \qquad \text{y} \qquad (\lambda a x_0 + \lambda b y_0) + (c x_0 + d y_0) = \lambda u + v$$

de donde (restando la primera de las igualdades anteriores de la segunda)

$$c x_0 + d y_0 = v$$

Luego, $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ es solución del sistema (5.7). ♦

Uno de los procedimientos más empleados para resolver un sistema es el llamado **método de eliminación,** el cual consiste a grandes rasgos en eliminar una de las incógnitas en alguna de las ecuaciones sin alterar el conjunto solución del sistema. Por ejemplo, para eliminar x en la segunda ecuación del sistema (5.7), se escoge λ de modo que $\lambda a + c = 0$ con lo cual en el sistema equivalente (5.8) ya no figura la incógnita x. Se ilustra este procedimiento en los tres ejemplos siguientes.

Ejemplo 5.5
Consideremos el sistema

$$\begin{aligned} x + 2y &= 0 \\ 2x - 3y &= 8 \end{aligned}$$

el cual tiene solamente una solución (vea ejemplo 5.4,c)). Hallemos dicha solución mediante el método de eliminación:

Con miras a eliminar la incógnita x en la segunda ecuación, multiplicamos la primera ecuación por -2, y la ecuación resultante $(-2x - 4y = 0)$ la sumamos a la segunda ecuación, lo cual nos conduce a

$$0x - 7y = 8$$

es decir,

$$-7y = 8.$$

El sistema inicial es entonces equivalente al sistema

$$\begin{aligned} x + 2y &= 0 \\ -7y &= 8 \end{aligned}$$

teniendo este último la ventaja de que de su segunda ecuación se obtiene $y = -\dfrac{8}{7}$ como único valor para y. Sustituyendo este valor de y en la primera ecuación y despejando x se obtiene $x = \dfrac{16}{7}$ como único valor para x. Así, la única solución del sistema es $\begin{pmatrix} 16/7 \\ -8/7 \end{pmatrix}$, es decir, el conjunto solución es $\left\{ \begin{pmatrix} 16/7 \\ -8/7 \end{pmatrix} \right\}$. ■

Ejemplo 5.6
Consideremos el sistema

$$\begin{aligned} x + 2y &= 4 \\ 3x + 6y &= 7 \end{aligned} \tag{5.9}$$

el cual carece de soluciones (vea ejemplo 5.4,b)). Es ilustrativo ver lo que ocurre si se aplica a este sistema el método de eliminación: para eliminar x en la segunda ecuación, multiplicamos la primera ecuación por -3 y el resultado se suma a la segunda, con lo cual se obtiene la ecuación

$$0x + 0y = -5.$$

El sistema (5.9) es entonces equivalente al sistema

$$\begin{aligned} x + 2y &= 4 \\ 0x + 0y &= -5 \end{aligned}$$

y como este último es inconsistente, entonces el sistema inicial (5.9) es inconsistente. Así que el método de eliminación también conduce a que el sistema (5.9) es no soluble. ■

Ejemplo 5.7
Consideremos el sistema

$$\begin{aligned} x + 2y &= 4 \\ 3x + 6y &= 12 \end{aligned}$$

(vea ejemplo 5.4,a)). Veamos qué ocurre si aplicamos el método de eliminación: multiplicando la primera ecuación por -3 y sumando la ecuación resultante ($-3x - 6y = -12$) a la segunda, se obtiene la ecuación

$$0x + 0y = 0.$$

Así, el sistema inicial es equivalente al sistema

$$\begin{aligned} x + 2y &= 4 \\ 0x + 0y &= 0. \end{aligned}$$

Como sabemos, este sistema es consistente y su conjunto solución es la recta que tiene como ecuación $x + 2y = 4$. De nuevo el método de eliminación nos condujo a lo que ya sabíamos. ■

Ejemplo 5.8
Considere el sistema

$$\begin{aligned} 2x + y &= 2 \\ x + ay &= 3 + b \end{aligned}$$

Hallar los valores de a y b tales que el sistema
i) Tenga solución única.
ii) Tenga infinitas soluciones.
iii) Sea inconsistente.

Solución: Eliminando x en la segunda ecuación del sistema dado, se encuentra que dicho sistema es equivalente al sistema

$$\begin{aligned} 2x + y &= 2 \\ \left(a - \frac{1}{2}\right) y &= 2 + b \end{aligned}$$

Ahora, este sistema tiene solución única si $a - \frac{1}{2} \neq 0$ sin importar el valor de b; tiene infinitas soluciones si $a - \frac{1}{2} = 0$ y $2 + b = 0$, y es inconsistente si $a - \frac{1}{2} = 0$ y $2 + b \neq 0$. Por tanto, el sistema dado:

i) Tiene solución única si $a \neq \frac{1}{2}$ sin importar el valor de b.

ii) Tiene infinitas soluciones si $a = \frac{1}{2}$ y $b = -2$.

iii) Es inconsistente si $a = \frac{1}{2}$ y $b \neq -2$. ■

5.2 Sistemas de ecuaciones lineales y matrices

Relacionemos ahora los sistemas con las transformaciones lineales, o lo que es equivalente, con las matrices.

En primer lugar, las dos igualdades en (5.5) son equivalentes a la igualdad en $\mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

y ésta, a su vez, es equivalente a la igualdad

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \tag{5.10}$$

Así, el sistema (5.5) puede escribirse, usando matrices 2×2 y vectores de $\mathbb{R}^2$, en la forma equivalente (5.10), es decir, como

$$AX = U \tag{5.11}$$

con $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ y $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$.

Nótese que un vector X_0 de $\mathbb{R}^2$ es una solución del sistema (5.5) si y sólo si $AX_0 = U$, es decir, si y sólo si la matriz A "transforma" a X_0 en el vector U.

Obsérvese la semejanza entre la ecuación vectorial (5.11) y la ecuación escalar

$$\alpha x = \beta$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, de la cual sabemos que si $\alpha \neq 0$, su única solución es el número $x_0 = \alpha^{-1}\beta$. De manera similar, si la matriz A es invertible, el vector $X_0 = A^{-1}U$ es la única solución de (5.11) pues, por una parte,

$$AX_0 = A\left(A^{-1}U\right) = \left(AA^{-1}\right)U = I_2 U = U,$$

lo cual muestra que $X_0 = A^{-1}U$ es una solución de (5.11). Por otra parte, si $\overline{X}$ es una solución de (5.11), es decir, si $A\overline{X} = U$, entonces $A^{-1}\left(A\overline{X}\right) = A^{-1}U$; pero

$$A^{-1}\left(A\overline{X}\right) = \left(A^{-1}A\right)\overline{X} = I_2\overline{X} = \overline{X}$$

por tanto, $\overline{X} = A^{-1}U = X_0$.

Así, si A es invertible el sistema (5.11) tiene solamente una solución (la cual es $X_0 = A^{-1}U$).

Vamos a probar ahora que el recíproco de la afirmación anterior también es cierto. Supongamos entonces que el sistema $AX = U$ tiene una única solución y probemos que A es invertible:

Si $U = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ya sabemos que el hecho de que el sistema $AX = O$ tenga solución única equivale a que A es invertible. Supongamos entonces que $U \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y denotemos X_0 la única solución de $AX = U$. Si A no fuese invertible, existiría un vector no nulo X^* tal que $AX^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y en tal caso el vector $X_0 + X^*$, el cual es distinto de X_0, sería otra solución de $AX = U$ pues $A(X_0 + X^*) = AX_0 + AX^* = U + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = U$, lo cual va contra lo supuesto. Luego, A tiene que ser invertible. ♦

Nótese que en la discusión anterior no se usó la condición (5.6), por tanto hemos probado el siguiente resultado:

> Sea A cualquier matriz 2×2 y sea U cualquier vector de $\mathbb{R}^2$.
> El sistema $AX = U$ tiene solamente una solución si y sólo si la matriz A es invertible.
> Cuando A es invertible, la única solución del sistema es $X_0 = A^{-1}U$.

Ejemplo 5.9

Consideremos el sistema del ejemplo 5.5

$$\begin{aligned} x + 2y &= 0 \\ 2x - 3y &= 8 \end{aligned}$$

el cual podemos escribir en la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

La matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ es invertible y su inversa es la matriz

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

donde $\Delta = 1\,(-3) - 2\,(2) = -7$. Luego, dicho sistema tiene como única solución al vector

$$X_0 = A^{-1}\begin{pmatrix}0\\8\end{pmatrix} = \frac{1}{-7}\begin{pmatrix}-3 & -2\\-2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\8\end{pmatrix} = -\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-16\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}16/7\\-8/7\end{pmatrix}$$

solución que ya habíamos encontrado por el método de eliminación. ∎

Ejemplo 5.10
Consideremos el sistema

$$\begin{aligned} x + y &= u \\ 5x + 5y &= v \end{aligned} \tag{5.12}$$

el cual podemos escribir en la forma

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\5 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}.$$

Puesto que la matriz $\begin{pmatrix}1 & 1\\5 & 5\end{pmatrix}$ no es invertible, para dicho sistema (5.12) no se da que tiene solución única. Ahora, como se cumple la condición (5.6) podemos afirmar que el sistema (5.12) carece de soluciones o bien su conjunto solución es una recta; que ocurra lo uno o lo otro depende, por supuesto, de cuál sea el vector $\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$. Por ejemplo, si $\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ el sistema (5.12) carece de soluciones, mientras que si $\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\10\end{pmatrix}$, el conjunto solución es la recta con ecuación $x + y = 2$. ∎

Si en el sistema (5.5) se tiene $u = 0$ y $v = 0$ o, equivalentemente $U = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ en (5.11) el sistema se dice **homogéneo.** Cualquiera sea la matriz A, el sistema homogéneo $AX = O$ es soluble ya que este sistema posee al menos la solución $X = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, la cual se dirá la **solución trivial.**

A continuación nos referiremos a las posibilidades para el conjunto solución de un sistema homogéneo

$$AX = O. \tag{5.13}$$

En primer lugar, como ya sabemos, este sistema tiene únicamente la solución trivial si y sólo si la matriz A es invertible.

Supongamos ahora que la matriz A no es invertible y que el sistema (5.13) cumple la condición (5.6). Puesto que el sistema es soluble y no es de solución única entonces sólo queda la posibilidad de que su conjunto solución sea una recta, la cual pasa por el origen. Es fácil ver que esto último sigue siendo cierto bajo las hipótesis A no invertible y $A \neq O$.

Tenemos así que:

> Cualquiera sea la matriz A de orden 2,
> *a*) El sistema $AX = O$ tiene únicamente la solución trivial $X = O$ si y sólo si A es invertible.
> *b*) Si A no es invertible y $A \neq O$, el conjunto solución del sistema $AX = O$ es una línea recta que pasa por el origen.
> *c*) Si $A = O$, el conjunto solución del sistema $AX = O$ es todo $\mathbb{R}^2$.

Dado un sistema no homogéneo $AX = U$, el sistema $AX = O$ se dirá su **sistema homogéneo asociado.**

En el siguiente ejemplo se ilustra la relación entre el conjunto solución de un sistema soluble no homogéneo y el conjunto solución del sistema homogéneo asociado.

Ejemplo 5.11

Consideremos el sistema no homogéneo del ejemplo 5.7

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix} \tag{5.14}$$

cuyo conjunto solución es la recta $\mathcal{L}$ con ecuación $x + 2y = 4$, la cual (según vimos en el ejemplo 5.1) la conforman los puntos $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ de la forma

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{5.15}$$

Observe que $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ es una solución particular del sistema, la cual se obtiene con $t = 0$.

El sistema homogéneo asociado al sistema (5.14) es

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.16}$$

y su conjunto solución la recta $\mathcal{L}'$ con ecuación $x + 2y = 0$, la cual la conforman los puntos $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ de la forma

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{5.17}$$

Obsérvese que las rectas $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}'$ son paralelas y que $\mathcal{L}$ puede obtenerse sumando la solución particular $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ de (5.14) a los puntos de $\mathcal{L}'$ (compare (5.15) y (5.17)). En otras palabras, el conjunto solución del sistema no homogéneo (5.14) (la recta $\mathcal{L}$) es la imagen bajo la traslación $T_{\binom{0}{2}}$, del conjunto solución del sistema homogéneo asociado.

En la figura 5.3 se ilustra lo anterior. ■

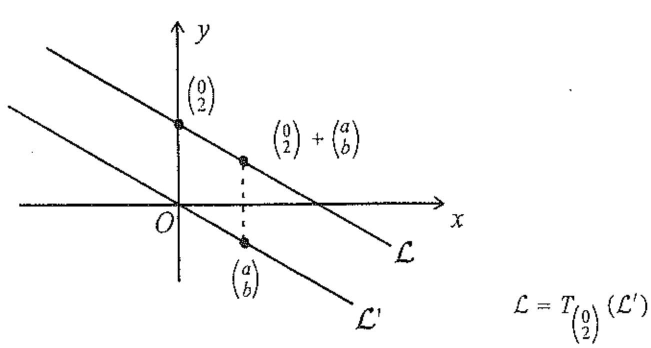


Figura 5.3.

En general, se tiene el siguiente resultado:

> Sea A una matriz 2×2 no nula y no invertible y sea U un vector no nulo de $\mathbb{R}^2$. Si X_0 es una solución particular del sistema $AX = U$ y la recta
> $$\mathcal{L}' = \{tD \mid t \in \mathbb{R}\} \qquad (D \in \mathbb{R}^2,\ D \text{ fijo})$$
> es el conjunto solución del sistema homogéneo asociado $AX = O$ entonces el conjunto solución del sistema $AX = U$ es la recta
> $$\mathcal{L} = \{X_0 + tD \mid t \in \mathbb{R}\}$$
> es decir, la recta
> $$\mathcal{L} = T_{X_0}(\mathcal{L}')$$
> la cual pasa por el punto X_0 y es paralela a $\mathcal{L}'$.

Prueba:

En primer lugar, todo punto $X_0 + tD$ de $\mathcal{L}$ es solución del sistema $AX = U$. En efecto, se tiene que

$$A(X_0 + tD) = AX_0 + tAD$$

y como $AX_0 = U$ y $AD = O$ entonces $A(X_0 + tD) = U + tO = U$, es decir, $X_0 + tD$ es solución del sistema $AX = U$.

Se sigue de lo anterior que la recta $\mathcal{L}$ está contenida en el conjunto solución del sistema $AX = U$ y como este conjunto solución también es una recta, entonces $\mathcal{L}$ es dicho conjunto solución. ♦

Retornemos al sistema (5.11), $AX = U$, y consideremos ahora la siguiente pregunta: Dada la matriz A, ¿Para cuáles vectores U el sistema es soluble y para cuáles no lo es?

Es de señalar que si A es invertible, ya conocemos la respuesta: el sistema $AX = U$ es soluble (y tiene sólo una solución) cualquiera sea el vector U de $\mathbb{R}^2$.

En el caso general (A invertible o no), una respuesta a la pregunta formulada puede darse reescribiendo el sistema $AX = U$ en la forma

$$x\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \tag{5.18}$$

ya que $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$. En efecto, de (5.18) se sigue que el sistema $AX = U$ es soluble si y sólo si existen escalares x_0, y_0 tales que

$$x_0\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + y_0\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

es decir, si y sólo si el vector $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ es combinación lineal de las columnas de la matriz A.

Así, una respuesta a la pregunta en consideración es:

> El sistema $AX = U$ es soluble si y sólo si el vector U es combinación lineal de las columnas de la matriz A.

Ejemplo 5.12
Para el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \tag{5.19}$$

determinar los vectores $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ tales que dicho sistema es soluble.

Solución:

Nótese que la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ no es invertible. El sistema dado es soluble si y sólo si $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ es combinación lineal de las columnas $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$. Ahora bien, como $\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ es múltiplo escalar de $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, entonces las combinaciones lineales de $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ son los múltiplos escalares de $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, es decir, los vectores sobre la recta $\mathcal{L}$ generada por $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ (figura 5.4).

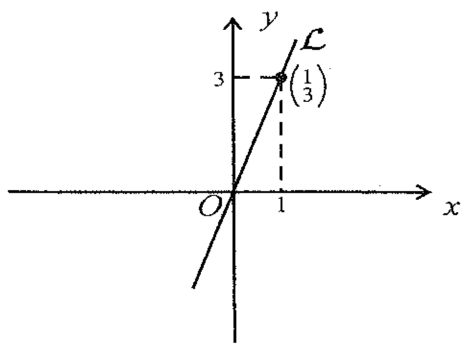


Figura 5.4.

Así, los vectores $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ tales que el sistema (5.19) es soluble son los múltiplos escalares de $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ o, equivalentemente, los vectores sobre la recta $\mathcal{L}$.

Por ejemplo, si $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, el sistema (5.19) es soluble (y su conjunto solución es la recta con ecuación $x + 2y = 4$). Por otra parte, si $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$ entonces el sistema (5.19) no es soluble pues $\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$ no es múltiplo escalar de $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. ■

Es de resaltar que los vectores $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ para los cuales el sistema (5.19) es soluble, son los puntos de una recta que pasa por el origen, la recta generada por $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ (o por $\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$). En general, se tiene el siguiente resultado, cuya prueba se deja como ejercicio. (Vea ejercicio 18 de este capítulo).

> Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Si A es no nula y no invertible entonces el conjunto de los vectores $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ para los cuales el sistema $AX = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ es soluble es la recta generada por $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ si $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, o por $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ si $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

5.3 Ejercicios

Sección 5.1

1. Describir mediante una ecuación vectorial paramétrica el conjunto solución de la ecuación
$$3x - 5 = 2x + 2y + 6$$
y dar dos soluciones particulares para ella.

2. Para cada uno de los sistemas dados a continuación determinar si es soluble y, en caso afirmativo, hallar el conjunto solución e interpretarlo geométricamente.

   a) $\begin{aligned} x - 3y &= 2 \\ -4x + 2y &= -3 \end{aligned}$ *b)* $\begin{aligned} 4x - 6y &= 0 \\ -2x + 3y &= 0 \end{aligned}$ *c)* $\begin{aligned} 3x - y &= 6 \\ -6x + 2y &= -12 \end{aligned}$

   d) $\begin{aligned} 2y - 5x &= 0 \\ 3y + 4x &= 0 \end{aligned}$ *e)* $\begin{aligned} x + 3y &= -1 \\ 2x - y &= 5 \end{aligned}$ *f)* $\begin{aligned} x - 2y &= 5 \\ -3x + 6y &= 10 \end{aligned}$

3. Determinar si las dos rectas con ecuaciones dadas en cada literal se cortan y, en caso afirmativo, hallar su punto de intersección.

   a) $\begin{aligned} x - y &= 2 \\ 2x + y &= 1 \end{aligned}$ *b)* $\begin{aligned} 4x - 6y &= 7 \\ 6x - 9y &= 12 \end{aligned}$ *c)* $\begin{aligned} 3x + 4y &= 2 \\ 6x - 7y &= 0 \end{aligned}$

4. Determinar si las tres rectas cuyas ecuaciones se dan en cada literal tienen un punto de intersección común y, en caso afirmativo, hallar dicho punto.

   a) $2x + 3y = -1$, $6x + 5y = 0$, $2x - 5y = 7$
   b) $x - 4y = 1$, $2x - y = -3$, $-x - 3y = 4$

5. Determinar los valores de a y b tales que la recta $ax + by = 10$ pase por los puntos $P = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ y $Q = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

6. El precio de la boleta para cierto evento es de \$2250 para adulto y \$1560 para niño. Se vendieron 450 boletas por un total de \$796530. ¿Cuántas boletas de cada tipo se vendieron?

7. Considere el sistema
$$\begin{aligned} kx + y &= 1 \\ x + ky &= 1 \end{aligned}$$

a) Encontrar los valores de k tales que el sistema

i) Tenga solución única.

ii) Tenga infinitas soluciones.

iii) No tenga soluciones.

b) Resolver los sistemas obtenidos en a i) y a ii).

8. Plantear un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas que satisfaga la condición dada en cada caso.

a) El sistema tiene infinitas soluciones. *b*) El sistema tiene solución única.

c) El sistema es inconsistente. *d*) La única solución del sistema es $\binom{-1}{2}$.

e) El conjunto solución del sistema es la recta que pasa por el origen y tiene vector director $D = \binom{-1}{2}$.

Sección 5.2

9. Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} 2x + y &= 1 \\ 3x - y &= 1 \end{aligned}$$

a) Escribir la matriz A y el vector U tales que el sistema dado se pueda expresar como $AX = U$.

b) Mostrar que A es invertible y calcular su inversa.

c) Calcular la única solución del sistema, utilizando la inversa de A.

d) Expresar el vector U como combinación lineal de las columnas de A.

10. Dos compuestos se combinan para fabricar dos tipos de fertilizantes. Cada unidad del fertilizante tipo I requiere 10 kg. del compuesto A y 30 kg. del compuesto B. Cada unidad del fertilizante tipo II requiere 25 kg. del compuesto A y 40 kg. del compuesto B. Se desea hallar el número de unidades de cada tipo de fertilizante que se puede producir con 650 kg. del compuesto A y 1250 kg. del compuesto B.

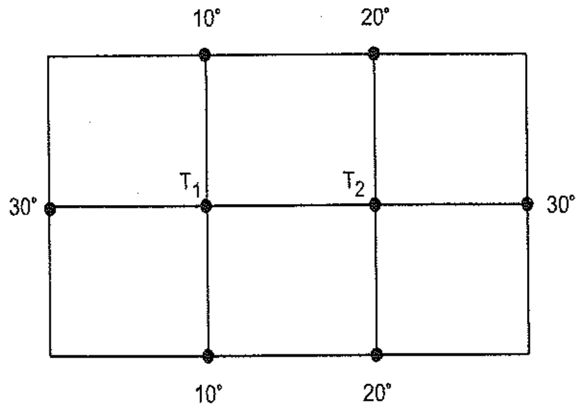
a) Plantear un sistema de ecuaciones lineales que permita resolver el problema.

b) Hallar el número de unidades de cada tipo de fertilizante que se puede producir.

11. La figura representa una red en la que se indican las temperaturas de ciertos puntos (nodos) de una sección transversal de un poste metálico. Suponga que la temperatura en cada nodo interior es el promedio de las temperaturas en los cuatro nodos más cercanos (a izquierda, a derecha, arriba, abajo).

a) Plantear un sistema de dos ecuaciones lineales cuya solución produzca las estimaciones de las temperaturas T_1 y T_2.

b) Encontrar los valores de T_1 y T_2.



12. *a*) Considere el sistema homogéneo

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

i) Demostrar que si $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ es una solución del sistema entonces para todo número real k, el vector $k\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ también es solución del sistema.

ii) Demostrar que si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ y $Y = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ son soluciones del sistema, entonces también el vector $X + Y$ es solución del sistema.

b) Construya un sistema no homogéneo de dos ecuaciones con dos incógnitas tal que $X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sean soluciones del sistema. ¿Será $3X$ solución del sistema? ¿Será $X + Y$ solución del sistema?

13. Considere un sistema $AX = U$ del cual sabe que una solución es $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ y que el conjunto solución del sistema $AX = O$ es la recta con ecuación $x - y = 0$. ¿Cuál es el conjunto solución del sistema $AX = U$?

14. Para cada uno de los siguientes literales, diga si el sistema $AX = U$ es soluble. En caso afirmativo, exprese el vector U como una combinación lineal de las columnas de A.

a) $AX = U$ con $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ y $U = \begin{pmatrix} -12 \\ -14 \end{pmatrix}$.

b) $AX = U$ con $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & -12 \end{pmatrix}$ y $U = \begin{pmatrix} -5 \\ 15 \end{pmatrix}$.

c) $AX = U$ con $A = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$ y $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

15. Encontrar una relación entre a y b de tal forma que sea soluble el sistema

$$\begin{aligned} x + y &= a \\ 5x + 5y &= b \end{aligned}$$

16. Para cada uno de los siguientes literales, encuentre todos los vectores $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ tales que el sistema dado sea soluble.

    a) $\begin{pmatrix} -2 & -3/2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ *b*) $\begin{pmatrix} -5 & 25 \\ -7 & 35 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$.

17. Encontrar condiciones sobre a, b, c y d de tal forma que no sea soluble el siguiente sistema

$$\begin{aligned} ax - by &= c \\ bx + ay &= d \end{aligned}$$

18. Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Probar que si A es no nula y no invertible entonces el conjunto de los vectores $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ para los cuales el sistema $AX = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ es soluble es la recta generada por $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ si $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, o por $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ si $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

6

Determinantes de orden 2

6.1 Definición. Par orientado de vectores

Consideremos una matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ o bien la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cuya matriz es A.

En secciones anteriores hemos visto como el escalar $ad - bc$ proporciona importante información acerca de la matriz A y de la transformación T. Recordamos, por ejemplo, que:

- La matriz A (La transformación T) es invertible si y sólo si $ad - bc \neq 0$.
- Si $ad - bc \neq 0$,
$$m\left(T^{-1}\right) = A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$
- Las columnas de la matriz A son linealmente independientes si y sólo si $ad - bc \neq 0$.
- Cualquiera sea el vector $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, el sistema $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ tiene solución única si y sólo si $ad - bc \neq 0$.

Tal escalar $ad - bc$ es llamado **determinante** de la matriz A o también **determinante** de la transformación T. Lo denotaremos de cualquiera de las formas siguientes:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}, \quad \det(A) \ \text{ o } \ \det(T).$$

Empleando el concepto de determinante, podemos reescribir los resultados antes recordados como sigue:

Sean $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal cuya matriz es A.

- A es invertible si y sólo si $\det(A) \neq 0$
- T es invertible si y sólo si $\det(T) \neq 0$.
- Si $\det(A) \neq 0$,
$$m\left(T^{-1}\right) = A^{-1} = \tfrac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$
- Las columnas de la matriz A son linealmente independientes si y sólo si $\det(A) \neq 0$.
- Cualquiera sea el vector $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, el sistema $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ tiene solución única si y sólo si $\det(A) \neq 0$.

De manera que el concepto de determinante está relacionado con varios de los conceptos asociados con matrices y transformaciones lineales. En este capítulo veremos otros conceptos también relacionados con el determinante; empezaremos con el concepto de "par de vectores orientado".

Consideremos un par de vectores no nulos X_1, X_2 de $\mathbb{R}^2$ visto como un par ordenado con X_1 primero y X_2 segundo. Denotemos α, con $0 \leq \alpha < 2\pi$, el ángulo de X_1 a X_2, medido en dirección antihoraria y al cual nos referiremos simplemente como el **ángulo de X_1 a X_2**.

Supongamos que los vectores X_1, X_2 son linealmente independientes, caso en el cual se tiene que $0 < \alpha < \pi$ o $\pi < \alpha < 2\pi$. (Figura 6.1).

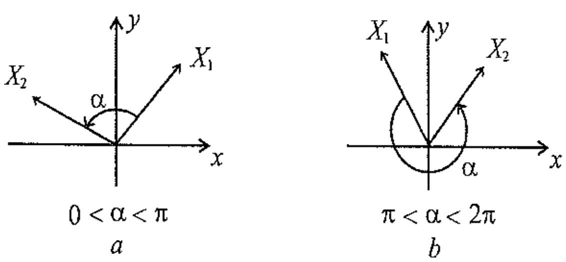


Figura 6.1.

Si $0 < \alpha < \pi$ o, equivalentemente, si $\operatorname{sen}\alpha > 0$ diremos que el par X_1, X_2 está **orientado positivamente** (figura 6.1a), mientras que si $\pi < \alpha < 2\pi$ o, equivalentemente, si $\operatorname{sen}\alpha < 0$ diremos que el par X_1, X_2 está **orientado negativamente** (figura 6.1b).

Ejemplo 6.1

El par $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ está orientado positivamente, pues el ángulo de E_1 a E_2 es $\dfrac{\pi}{2}$ y $0 < \dfrac{\pi}{2} < \pi$, en tanto que el par $E_1, -E_2$ está orientado negativamente ya que el ángulo de E_1 a $-E_2$ es $\dfrac{3\pi}{2}$ y $\pi < \dfrac{3\pi}{2} < 2\pi$ (figura 6.2). ■

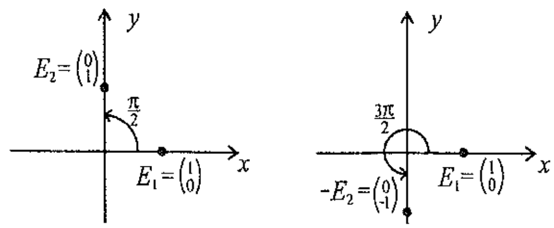


Figura 6.2.

Sean $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ y $X_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$. ¿Cómo determinar, a partir de las componentes x_1, y_1, x_2, y_2 si el par X_1, X_2 está orientado positivamente o negativamente?

Resulta que así como el coseno del ángulo entre X_1 y X_2 es expresable en términos de dichas componentes, también lo es el seno del ángulo α de X_1 a X_2. En efecto, consideremos el caso en que el par X_1, X_2 está orientado positivamente y sean θ_1, θ_2 las direcciones de X_1 y X_2 respectivamente (figura 6.3).

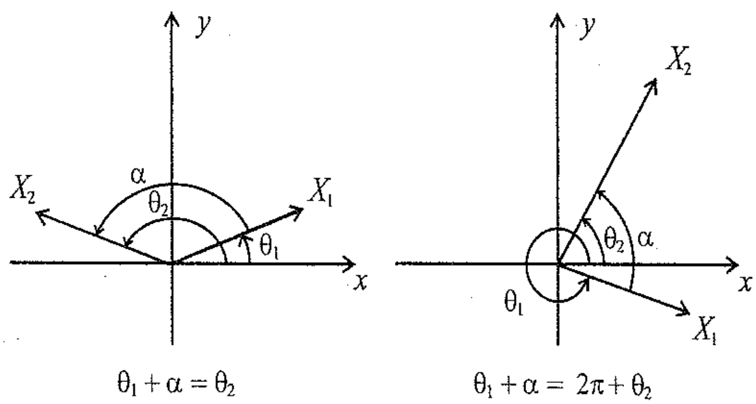


Figura 6.3.

En tal caso,

$$\alpha = \theta_2 - \theta_1 \qquad \text{o} \qquad \alpha = \theta_2 - \theta_1 + 2\pi$$

y así

$$\text{sen}\alpha = \text{sen}\,(\theta_2 - \theta_1) = \text{sen}\theta_2 \cos\theta_1 - \cos\theta_2 \text{sen}\theta_1 \tag{6.1}$$

Ahora, como

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \|X_1\| \begin{pmatrix} \cos\theta_1 \\ sen\theta_1 \end{pmatrix} \text{ y } X_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \|X_2\| \begin{pmatrix} \cos\theta_2 \\ \text{sen}\theta_2 \end{pmatrix}$$

entonces

$$\cos\theta_1 = \frac{x_1}{\|X_1\|},\ \text{sen}\theta_1 = \frac{y_1}{\|X_1\|},\ \cos\theta_2 = \frac{x_2}{\|X_2\|} \text{ y } \text{sen}\theta_2 = \frac{y_2}{\|X_2\|}$$

luego, sustituyendo en (6.1),

$$\text{sen}\alpha = \frac{y_2}{\|X_2\|}\frac{x_1}{\|X_1\|} - \frac{x_2}{\|X_2\|}\frac{y_1}{\|X_1\|}$$

es decir,

$$\text{sen}\alpha = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{\|X_1\|\,\|X_2\|} \tag{6.2}$$

Se puede probar que esta fórmula también es válida si el par X_1, X_2 está orientado negativamente.

Es claro que con la fórmula (6.2) es fácil saber, a partir de las componentes x_1, y_1, x_2, y_2, cuándo el par X_1, X_2 está orientado positiva o negativamente, pues según (6.2),

$$\text{sen}\alpha > 0 \text{ si y sólo si } x_1 y_2 - x_2 y_1 > 0$$

y

$$\text{sen}\alpha < 0 \text{ si y sólo si } x_1 y_2 - x_2 y_1 < 0.$$

Ahora, como

$$x_1 y_2 - x_2 y_1 = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$$

entonces se tiene lo siguiente:

Sean $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ vectores linealmente independientes de $\mathbb{R}^2$.

- El par X_1, X_2 está orientado positivamente si y sólo si $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} > 0$.
- El par X_1, X_2 está orientado negativamente si y sólo si $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} < 0$.

Ejemplo 6.2
Consideremos los vectores de $\mathbb{R}^2$, $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -0.9 \end{pmatrix}$ los cuales son linealmente independientes.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -0.9 \end{vmatrix} = (1)(-0.9) - (-1)(1) = 0.1.$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -0.9 \end{vmatrix} > 0$ entonces el par X_1, X_2 está orientado positivamente. ■

Obsérvese que:

- La fórmula (6.2) es válida aún en el caso que los vectores X_1, X_2 son linealmente dependientes.
- Dado un par cualquiera de vectores no nulos $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$, la fórmula (6.2) no es suficiente para determinar el ángulo α de X_1 a X_2. Así que si se desea hallar dicho ángulo α, es necesario contar con más información acerca de él. Por ejemplo, es fácil verificar que

$$\cos\alpha = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\|X_1\|\,\|X_2\|}. \tag{6.3}$$

Conocidos senα y cosα sabremos el cuadrante en el cual se encuentra α y utilizando (6.2) o (6.3) podremos determinar α. De manera que las igualdades (6.2) y (6.3) determinan de manera única el ángulo α.

6.2 Transformaciones que preservan la orientación

Sea ahora $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal invertible. Se dice que T **preserva la orientación** si siempre que un par X_1, X_2 está orientado positivamente, el par $T(X_1)$, $T(X_2)$ también está orientado positivamente. Y se dice que T **cambia la orientación** si siempre que un par X_1, X_2 está orientado positivamente, el par $T(X_1), T(X_2)$ está orientado negativamente.

En la definición anterior tenga en cuenta que si X_1, X_2 son vectores de $\mathbb{R}^2$ linealmente independientes y la transformación lineal T es invertible entonces los vectores $T(X_1), T(X_2)$ también son linealmente independientes.

Ejemplo 6.3

a) Consideremos una rotación R_θ, la cual es una transformación lineal invertible pues

$$m(R_\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

y así $\det(R_\theta) = \cos^2\theta + \text{sen}^2\theta = 1$, y por tanto $\det(R_\theta) \neq 0$.

Es claro que R_θ preserva la orientación pues el ángulo de un vector X_1 a un vector X_2 es el mismo ángulo de $R_\theta(X_1)$ a $R_\theta(X_2)$.

b) Consideremos ahora la reflexión S respecto al eje x, la cual es una transformación lineal invertible pues

$$m(S) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

y por tanto $\det(S) \neq 0$. S no preserva la orientación pues, por ejemplo, el par E_1, E_2 está orientado positivamente, pero el par $S(E_1) = E_1$, $S(E_2) = -E_2$ está orientado negativamente. Veamos que S cambia la orientación; para ello tomemos un par cualquiera $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ orientado positivamente y probemos que el par $S\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, S\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ está orientado negativamente:

$$S\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -y_1 \end{pmatrix}, \; S\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -y_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ -y_1 & -y_2 \end{vmatrix} = x_1(-y_2) - x_2(-y_1) = -(x_1y_2 - x_2y_1) = -\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Como $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} > 0$, pues el par $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ está orientado positivamente, entonces $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ -y_1 & -y_2 \end{vmatrix} < 0$ y en consecuencia el par $S\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, S\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ está orientado negativamente, como se quería probar. ■

Resulta que el signo del determinante de una transformación lineal invertible nos dice si ella preserva o cambia la orientación. En efecto, se tiene que:

> Sea T una transformación lineal invertible del plano.
> *a*) T preserva la orientación si y sólo si $\det(T) > 0$.
> *b*) T cambia la orientación si y sólo si $\det(T) < 0$.

Para probar a) empecemos suponiendo que T preserva la orientación y probemos que $\det(T) > 0$.

Digamos que $m(T) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Como el par E_1, E_2 está orientado positivamente y T preserva la orientación entonces el par $T(E_1), T(E_2)$ también está orientado positivamente. Pero $T(E_1) = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ y $T(E_2) = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$, así que el par $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ está orientado positivamente y por tanto

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} > 0$$

es decir, $\det(T) > 0$. Supongamos ahora que $\det(T) > 0$, es decir, se da que $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} > 0$ y probemos que T preserva la orientación. Tomemos un par cualquiera de vectores $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ orientado positivamente y veamos que el par $T(X_1), T(X_2)$ también está orientado positivamente. Como

$$T(X_1) = \begin{pmatrix} ax_1 + by_1 \\ cx_1 + dy_1 \end{pmatrix} \text{ y } T(X_2) = \begin{pmatrix} ax_2 + by_2 \\ cx_2 + dy_2 \end{pmatrix}$$

para probar que el par $T(X_1), T(X_2)$ está orientado positivamente basta probar que

$$\begin{vmatrix} ax_1 + by_1 & ax_2 + by_2 \\ cx_1 + dy_1 & cx_2 + dy_2 \end{vmatrix} > 0. \tag{6.4}$$

Así que nos limitaremos a probar esto último:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} ax_1 + by_1 & ax_2 + by_2 \\ cx_1 + dy_1 & cx_2 + dy_2 \end{vmatrix} &= (ax_1 + by_1)(cx_2 + dy_2) - (ax_2 + by_2)(cx_1 + dy_1) \\ &= ad(x_1 y_2 - x_2 y_1) - bc(x_1 y_2 - x_2 y_1) \\ &= (ad - bc)(x_1 y_2 - x_2 y_1) \\ &= \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Ahora, puesto que $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} > 0$ pues el par X_1, X_2 está orientado positivamente y puesto que $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} > 0$ por hipótesis, se tiene lo que se quería probar, es decir, (6.4). Con esto se completa la prueba de a).

La prueba de b) es completamente similar. ♦

Del resultado anterior se obtiene como corolario que para una transformación lineal T invertible, la negación de "T preserva la orientación" es "T cambia la orientación".

Ejemplo 6.4

a) Consideremos una rotación R_θ, de la cual sabemos que es una transformación lineal invertible. Como $\det(R_\theta) > 0$, pues $\det(R_\theta) = 1$, entonces R_θ preserva la orientación, como ya lo habíamos afirmado (ver ejemplo 6.3).

b) Sea S la reflexión respecto al eje x, de la cual sabemos que es una transformación lineal invertible. Como $\det(S) < 0$, pues $\det(S) = -1$, entonces S cambia la orientación, lo cual ya habíamos probado (ver ejemplo 6.3). ■

Volvamos a la igualdad

$$\begin{vmatrix} ax_1 + by_1 & ax_2 + by_2 \\ cx_1 + dy_1 & cx_2 + dy_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \tag{6.5}$$

obtenida en la prueba que precede al ejemplo 6.4. Obsérvese que en dicha igualdad

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$$

son matrices cualesquiera y

$$\begin{pmatrix} ax_1 + by_1 & ax_2 + by_2 \\ cx_1 + dy_1 & cx_2 + dy_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}.$$

Así, en esa igualdad está expresada la siguiente propiedad del determinante:

> Para cualquier par de matrices A, B de orden 2×2,
> $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

6.3 Determinantes y áreas de paralelogramos

Otra aplicación del determinante tiene que ver con el área de un paralelogramo y con el efecto de una transformación lineal invertible sobre el área de un paralelogramo. Un primer resultado en este sentido es el siguiente:

> Si $\mathcal{P}$ es el paralelogramo determinado por dos vectores $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ y $X_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$, linealmente independientes, entonces
>
> $$\text{Área de } \mathcal{P} = \text{valor absoluto de } \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \tag{6.6}$$

Prueba:

Consideremos la figura 6.4 en la cual h denota la altura del paralelogramo $\mathcal{P}$, relativa a la base $\overline{OX_1}$.

Tenemos así que

$$\text{Área de } \mathcal{P} = \left\|\overrightarrow{OX}_1\right\| h = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}\ h \tag{6.7}$$

Ahora, puesto que h es la distancia de X_2 a la recta $\mathcal{L}$ que pasa por $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y por $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, podemos emplear la fórmula que da la distancia de un punto a una recta, para calcular h. Como una ecuación para $\mathcal{L}$ es $-y_1x + x_1y = 0$, entonces

$$h = \frac{|-y_1x_2 + x_1y_2|}{\sqrt{(-y_1)^2 + x_1^2}} = \frac{|x_1y_2 - x_2y_1|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}.$$

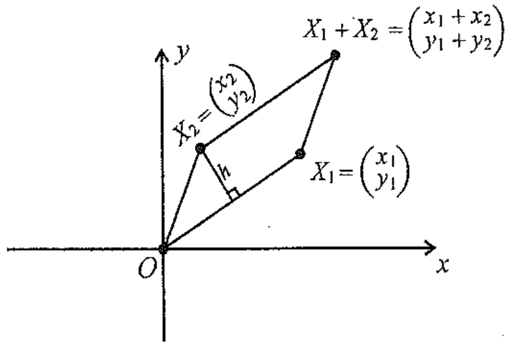


Figura 6.4.

Luego, sustituyendo h en (6.7) se tiene que el área es

$$\text{Área de } \mathcal{P} = \sqrt{x_1^2+y_1^2}\,\frac{|x_1y_2-x_2y_1|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}} = |x_1y_2-x_2y_1| \qquad \blacksquare$$

Sea ahora $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ una transformación lineal invertible con $m(T)=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$. Sabemos que la imagen del paralelogramo $\mathcal{P}$ bajo T, es el paralelogramo determinado por los vectores

$$T(X_1)=\begin{pmatrix}ax_1+by_1\\ cx_1+dy_1\end{pmatrix}, \qquad T(X_2)=\begin{pmatrix}ax_2+by_2\\ cx_2+dy_2\end{pmatrix},$$

los cuales son linealmente independientes pues T es invertible. Por tanto, según (6.6),

$$\text{Área de } T(\mathcal{P}) = \text{valor absoluto de } \begin{vmatrix} ax_1+by_1 & ax_2+by_2\\ cx_1+dy_1 & cx_2+dy_2\end{vmatrix}.$$

Ahora, según la igualdad (6.5), el determinante en el lado derecho de la igualdad anterior es igual a

$$\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}\begin{vmatrix}x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{vmatrix}$$

luego,

$$\begin{aligned}
\text{Área de } T(\mathcal{P}) &= \text{valor absoluto de } \begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}\begin{vmatrix}x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{vmatrix}\\
&= \left(\text{valor absoluto de } \begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}\right)\left(\text{valor absoluto de } \begin{vmatrix}x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{vmatrix}\right)\\
&= (\text{valor absoluto de } \det(T))\ \text{Área de } \mathcal{P}\\
&= |\det(T)|\ \text{Área de } \mathcal{P}.
\end{aligned}$$

Como resumen de lo anterior tenemos:

> Si $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una transformación lineal invertible y $\mathcal{P}$ es el paralelogramo determinado por dos vectores linealmente independientes $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ entonces
>
> $$\text{Área de } T(\mathcal{P}) = |\det(T)| \text{ Área de } \mathcal{P}. \tag{6.8}$$

Ejemplo 6.5
Sea T la transformación lineal (invertible) cuya matriz es $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y sea $\mathcal{P}$ el paralelogramo determinado por los vectores $X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Hallar el área de $\mathcal{P}$ y también el área de $T(\mathcal{P})$.

Solución: El conjunto $T(\mathcal{P})$ es el paralelogramo determinado por los vectores $T(X_1) = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $T(X_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, los cuales son L.I. En la figura 6.5 se muestran los paralelogramos $\mathcal{P}$ y $T(\mathcal{P})$.

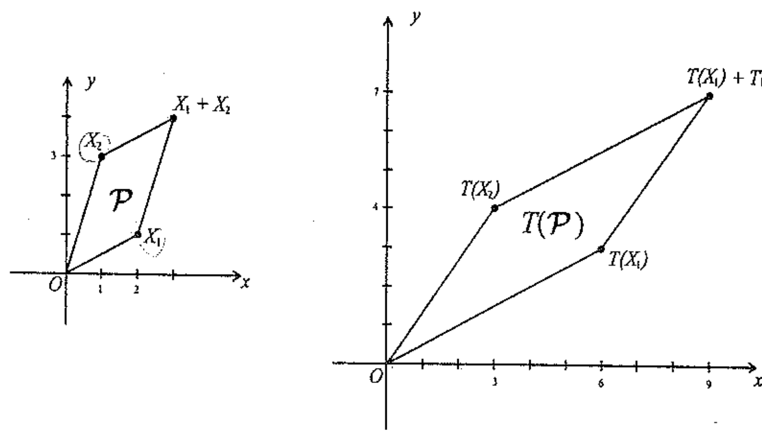


Figura 6.5.

En primer lugar tenemos, de acuerdo con (6.6), que

$$\text{Área de } \mathcal{P} = \text{valor absoluto de } \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5$$

Ahora, para calcular el área de $T(\mathcal{P})$ podemos emplear la fórmula (6.6) o también (6.8).

Como $\det(T) = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3$ y Área de $\mathcal{P} = 5$ entonces (usando (6.8)) se tiene

$$\text{Área de } T(\mathcal{P}) = |\det(T)| \text{ Área de } \mathcal{P} = (3)(5) = 15. \blacksquare$$

6.4 Fórmulas de Cramer

En lo que va de este capítulo hemos encontrado diversos conceptos relacionados con el determinante. Sin embargo, no fue a partir de ninguno de ellos como surgió inicialmente el concepto de determinante; éste tuvo su origen en la primera mitad del siglo XVIII en relación con una manera de resolver un sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} ax + by &= u \\ cx + dy &= v \end{aligned} \tag{6.9}$$

como se explica a continuación.

Multiplicando la primera ecuación por d y la segunda por $-b$, se obtiene

$$\begin{aligned} adx + bdy &= ud \\ -bcx - bdy &= -bv. \end{aligned}$$

Sumando ahora estas ecuaciones queda

$$(ad - bc)\, x = ud - bv.$$

Análogamente, multiplicando la primera ecuación del sistema (6.9) por $-c$, la segunda por a y sumando las ecuaciones resultantes, se obtiene

$$(ad - bc)\, y = av - cu.$$

Así, si $ad - bc \neq 0$ los únicos valores posibles para x y para y son

$$x = \frac{ud - bv}{ad - bc} \qquad \text{y} \qquad y = \frac{av - cu}{ad - bc}. \tag{6.10}$$

Se verifica fácilmente que si $ad - bc \neq 0$, los valores de x y de y en (6.10) satisfacen el sistema (6.9).

Se tiene entonces que:

Si $ad - bc \neq 0$, el sistema (6.9) tiene una y sólo una solución (lo cual ya sabemos) dada por las igualdades en (6.10), cualesquiera sean los escalares u y v.

Vemos así cómo apareció el escalar $ad - bc$, el cual se llamó determinante del sistema (6.9) y se denotó $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.

Es notable el hecho de que los numeradores en las expresiones para x y para y en (6.10) se pueden expresar como determinantes. En efecto,

$$ud - bv = \begin{vmatrix} u & b \\ v & d \end{vmatrix} \text{ y } av - cu = \begin{vmatrix} a & u \\ c & v \end{vmatrix}.$$

Como resumen de lo anterior tenemos que:

Si $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$, el sistema

$$\begin{aligned} ax + by &= u \\ cx + dy &= v \end{aligned}$$

tiene una y sólo una solución dada por

$$x = \frac{\begin{vmatrix} u & b \\ v & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \quad \text{y} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & u \\ c & v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \tag{6.11}$$

Las fórmulas para x y y en el resultado anterior se conocen como **fórmulas de Cramer** en homenaje al matemático suizo Gabriel Cramer (1704 - 1752).

Ejemplo 6.6
Muestre que el sistema

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 1 \\ -x + 4y &= -5 \end{aligned} \tag{6.12}$$

tiene solución única y halle dicha solución empleando las fórmulas de Cramer.

Solución:
Si A es la matriz de coeficientes del sistema dado,

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 3 = 5.$$

Como $\det(A) \neq 0$ entonces el sistema (6.12) tiene solución única y, según las fórmulas de Cramer, dicha solución está dada por

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -5 & 4 \end{vmatrix}}{\det(A)} = -\frac{11}{5}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -5 \end{vmatrix}}{\det(A)} = -\frac{9}{5}.$$

Por tanto, la única solución del sistema (6.12) es $\begin{pmatrix} -11/5 \\ -9/5 \end{pmatrix}$. ∎

6.5 Propiedades

En la sección 6.2 se probó la siguiente propiedad del determinante: Cualesquiera sean las matrices A y B de orden 2,

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

De esta propiedad se sigue que

> Si A es una matriz 2×2 invertible entonces
> $$\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det(A)}$$

En efecto, si A es una matriz invertible entonces de la igualdad $A^{-1}A = I_2$ se tiene que $\det\left(A^{-1}A\right) = \det(I_2) = 1$ y como $\det\left(A^{-1}A\right) = \det\left(A^{-1}\right)\det(A)$ entonces $\det\left(A^{-1}\right)\det(A) = 1$, de donde $\det\left(A^{-1}\right) = 1/\det(A)$. ♦

A continuación listamos otras propiedades del determinante. Probarlas es una tarea sencilla que dejamos como ejercicio.

1. $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

   Es decir, $\det\left(A^T\right) = \det(A)$ donde A^T denota la transpuesta de la matriz A. (Vea ejercicio 30 del capítulo 4).

2. $\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

   Es decir, cuando se intercambian las filas de una matriz A el determinante de la nueva matriz es $-\det(A)$.

3. $\begin{vmatrix} ta & tb \\ c & d \end{vmatrix} = t\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} a & b \\ tc & td \end{vmatrix} = t\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

   Es decir, cuando se multiplica una de las filas de una matriz A por un escalar t, el determinante de la nueva matriz es $t\det(A)$.

4. $\begin{vmatrix} a+a' & b+b' \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ c & d \end{vmatrix}$ y

   $\begin{vmatrix} a & b \\ c+c' & d+d' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ c' & d' \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} a & b \\ ta & tb \end{vmatrix} = 0$ y $\begin{vmatrix} tc & td \\ c & d \end{vmatrix} = 0$

   Es decir, si las filas de una matriz A son linealmente dependientes entonces $\det(A) = 0$.

6. $\begin{vmatrix} a & b \\ c+ta & d+tb \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} a+tc & b+td \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

   Es decir, si una fila de una matriz A se sustituye por la suma de ella con un múltiplo escalar de la otra fila de A, el determinante de la nueva matriz es igual a $\det(A)$.

Nótese que las propiedades 2. a 6. se refieren a movimientos, operaciones o sustituciones en las filas de la matriz. Se sigue de la propiedad 1. que dichas propiedades 2. a 6. también son válidas si esos movimientos, operaciones o sustituciones se refieren a las columnas de la matriz.

6.6 Ejercicios

Sección 6.1

1. Para cada par de vectores X_1 y X_2, determinar si el par está orientado positivamente.

   a) $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ b) $X_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

   c) $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ d) $X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$

2. Mostrar que una ecuación de la recta que pasa por dos puntos distintos $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ es

$$\det \begin{pmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_1 - x_2 & y_1 - y_2 \end{pmatrix} = 0$$

Sección 6.2

3. Para cada transformación lineal T dada a continuación, determinar si T es invertible y, en caso afirmativo, decir si T preserva o cambia la orientación.

   a) $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix}$ b) $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ -3x+3y \end{pmatrix}$ c) $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x-4y \\ -x+7y \end{pmatrix}$

4. Para cada una de las siguientes transformaciones lineales T del plano, determinar si T preserva o cambia la orientación.

   a) T es la reflexión con respecto a la recta $y = x$.

   b) $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-y \\ -8x+2y \end{pmatrix}$ c) $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-2y \\ x+y \end{pmatrix}$ d) $T = D_{-5}$

   e) $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y \\ y \end{pmatrix}$ f) $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2x+y \end{pmatrix}$

Sección 6.3

5. Sea $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Hallar un vector X_2 de longitud $2\sqrt{2}$ tal que el par X_1, X_2 esté orientado positivamente y el área del paralelogramo determinado por X_1 y X_2 sea 2 unidades cuadradas.

6. Sea $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Hallar un vector X_2 tal que el par X_1 , X_2 esté orientado positivamente, el ángulo de X_1 a X_2 sea de $30°$ y el área del triángulo de vértices $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, X_1 y X_2 sea de 5 unidades cuadradas.

7. Sea $T : R^2 \to R^2$ una transformación lineal invertible. Probar que si $\mathcal{P}$ es cualquier paralelogramo, no necesariamente con un vértice en el origen,

$$\textit{Área de } T(\mathcal{P}) = |\det T| \, \textit{Área de } \mathcal{P}$$

8. Utilice el resultado del ejercicio 7 para probar que si $\mathcal{P}$ es cualquier paralelogramo se tiene que:

   a) *Área de* $R_\theta(\mathcal{P})$ = *Área de* $\mathcal{P}$, cualquiera sea θ, $-2\pi < \theta < 2\pi$.

   b) *Área de* $S_U(\mathcal{P})$ = *Área de* $\mathcal{P}$, cualquiera sea $U \in \mathbb{R}^2$, $U \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   c) *Área de* $D_r(\mathcal{P}) = r^2$(*Área de* $\mathcal{P}$), cualquiera sea $r \in \mathbb{R}$.

9. Para cada una de las transformaciones lineales T descritas en el ejercicio 4, hallar el área de la imagen bajo T del triángulo cuyos vértices son $P = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ y $R = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$.

10. Sean $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$ y $S = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$. Para cada matriz A, si T es la transformación lineal tal que $m(T) = A$, graficar la imagen bajo T del cuadrilátero $PQSR$ y encontrar su área.

    a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *b*) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

11. Considere la transformación lineal $T : R^2 \to R^2$ definida por $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x - 2y \\ 2x + 3y \end{pmatrix}$. Encuentre el área de la imagen bajo T de cada una de las siguientes regiones:

    a) El cuadrado $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$.

    b) El rectángulo $-1 \le x \le 1$, $1 \le y \le 2$.

    c) El paralelogramo determinado por $2E_1 + 3E_2$ y $4E_1 - E_2$.

    d) El triángulo de vértices $P = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

12. Sean $P = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ y $S = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Hallar el área de la imagen bajo la reflexión sobre la recta con ecuación $y = 2x$, de cada una de las siguientes figuras:

    a) El paralelogramo con vértices en $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, P y Q.

    b) El triángulo de vértices P, Q y R.

    c) El cuadrilátero $PRQS$.

Sección 6.4

13. Para cada uno de los sistemas dados, probar que tiene solamente una solución y hallar dicha solución empleando las fórmulas de Cramer.

    a) $\begin{aligned} 5x + 7y &= 9 \\ -3x + 2y &= 10 \end{aligned}$ *b*) $\begin{aligned} x - 2y &= 2 \\ 2x + y &= 3 \end{aligned}$

14. Hallar, empleando las fórmulas de Cramer, funciones $f(x)$ y $g(x)$ definidas en el intervalo $\left(0\ ,\ \frac{\pi}{2}\right)$ que satisfagan, para cada x en dicho intervalo, las siguientes ecuaciones:
$$f(x)\cos x - g(x)senx = \sec x$$
$$f(x)senx + g(x)\cos x = cscx$$

Sección 6.5

15. Muestre, utilizando propiedades de los determinantes, que si el par de vectores X_1 , X_2 está orientado positivamente, entonces:

   a) Para todo escalar no nulo c, el par cX_2, cX_1 está orientado negativamente.

   b) El par X_1, $X_1 - X_2$ está orientado negativamente.

   c) El par X_1, $X_1 + X_2$ está orientado positivamente.

16. Suponga que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y $\det A = -3$

   a) Calcule los siguientes determinantes:

   (a) *i*) $\det\begin{pmatrix} -2a & -2b \\ c+3a & d+3b \end{pmatrix}$ *ii*) $\det\begin{pmatrix} -5b & a-b \\ -5d & c-d \end{pmatrix}$ *iii*) $\det\begin{pmatrix} a & b \\ 4a & 4b \end{pmatrix}$

   b) ¿Es A una matriz invertible?. En caso afirmativo, halle $\det A^{-1}$.

   c) Si B es una matriz de orden 2 tal que $\det B = \frac{1}{2}$, calcular $\det(A^T B^{-1})$

7

Valores propios y vectores propios

7.1 Definiciones. Cálculo de valores y vectores propios

En general, la acción de una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sobre los vectores de $\mathbb{R}^2$ puede ser muy variada, es decir, los vectores de $\mathbb{R}^2$ pueden ser transformados por T de diversas formas cambiando su magnitud o su dirección o ambas. En particular puede haber vectores especiales para los cuales la acción de la transformación sea muy simple.

Ejemplo 7.1
Sea $\mathcal{L}$ una recta en el plano que pasa por el origen y sea S la reflexión respecto a $\mathcal{L}$.

Es claro que si X está en $\mathcal{L}$ entonces $S(X) = X$. Por otra parte, si Y está en la recta $\mathcal{L}'$ que pasa por el origen y es perpendicular a $\mathcal{L}$ entonces $S(Y) = -Y$ (figura 7.1).

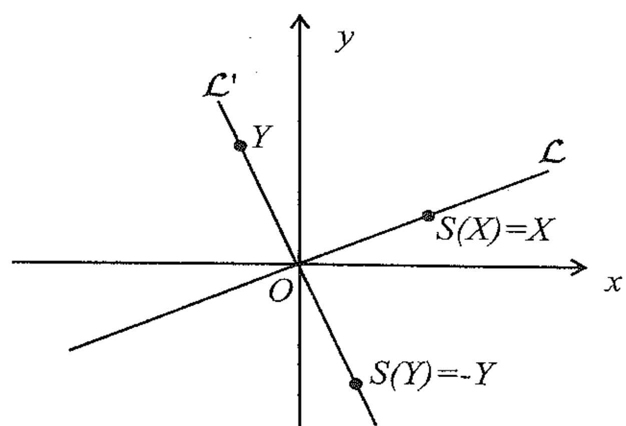


Figura 7.1.

Así, la acción de S sobre los vectores que están en $\mathcal{L}$ o en $\mathcal{L}'$ es muy simple. ■

En una amplia gama de aplicaciones en las ciencias exactas y en la ingeniería, en las que aparece una transformación lineal, digamos T, resultan muy útiles los vectores no nulos X y los escalares λ tales que

$$T(X) = \lambda X.$$

Este capítulo lo dedicaremos al estudio de tales vectores y de tales escalares. Iniciaremos con la siguiente definición:

Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal y sea λ un escalar. Si existe un vector X de $\mathbb{R}^2$, $X \neq O$, tal que

$$T(X) = \lambda X$$

se dice que λ es un **valor propio** de T. Si λ es un valor propio de T, cada vector no nulo X de $\mathbb{R}^2$ tal que $T(X) = \lambda X$ se dice un **vector propio de T correspondiente a λ**.

Sea ahora A una matriz 2×2. Por un valor propio o un vector propio de A entenderemos un valor propio o un vector propio de la transformación lineal T cuya matriz es A.

Nótese que un vector no nulo X es un vector propio de una transformación lineal T (de una matriz A) si y sólo si X y $T(X)$ (X y AX) son linealmente dependientes, es decir, están en una misma línea recta que pasa por el origen (figura 7.2).

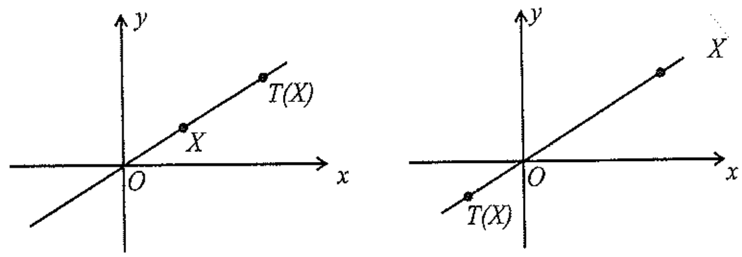


Figura 7.2.

Para la reflexión S del ejemplo 7.1, el escalar $\lambda = 1$ es un valor propio y todo vector no nulo X de la recta $\mathcal{L}$ es un vector propio de S correspondiente al valor propio $\lambda = 1$ pues para cada uno de dichos vectores X se tiene que $S(X) = X = 1X$; similarmente, $\lambda = -1$ es también un valor propio de S y todo vector no nulo X de la recta $\mathcal{L}'$ es un vector propio de S correspondiente al valor propio $\lambda = -1$ ya que para tales vectores X se tiene $S(X) = -X = (-1)X$.

Ejemplo 7.2

Consideremos la transformación D_r. Puesto que $D_r(X) = rX$ para todo X de $\mathbb{R}^2$, tenemos que r es un valor propio de D_r y todo vector no nulo de $\mathbb{R}^2$ es un vector propio de D_r correspondiente al valor propio r. El escalar r es el único valor propio de D_r (¿Por qué?).

Lo afirmado para D_r, respecto a valores y vectores propios, es igualmente válido para la matriz $\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}$, la cual es la matriz de D_r. ■

Ejemplo 7.3

Consideremos la rotación $R_{\frac{\pi}{2}}$. Es claro que para cualquier vector no nulo X de $\mathbb{R}^2$ se tiene que X y $R_{\frac{\pi}{2}}(X)$ no están sobre una misma línea recta que pase por el origen; por tanto, $R_{\frac{\pi}{2}}$ no tiene vectores propios y en consecuencia tampoco tiene valores propios. Equivalentemente, la matriz $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, la cual es la matriz de $R_{\frac{\pi}{2}}$, no tiene vectores propios ni valores propios. ■

Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal con matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Consideremos ahora el problema de la determinación de los valores propios y los vectores propios de T

(de A). En primer lugar, si disponemos de un valor propio λ de T, es claro que los vectores propios de T correspondientes a λ son los vectores no nulos $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ tales que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{7.1}$$

es decir, tales que

$$\begin{aligned} ax + by &= \lambda x \\ cx + dy &= \lambda y \end{aligned}$$

o, equivalentemente, tales que

$$\begin{aligned} (a-\lambda)\,x + by &= 0 \\ cx + (d-\lambda)\,y &= 0. \end{aligned}$$

Es decir, los vectores propios de T correspondientes a un valor propio λ de T (de A) son las soluciones no triviales del sistema anterior, o equivalentemente, del sistema

$$\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{7.2}$$

Por tanto, resolviendo este sistema encontraremos los vectores propios de T, correspondientes al valor λ. Veamos ahora cómo se determinan los valores propios. De la definición de valor propio vemos que un número real λ es un valor propio de T si y sólo si existe un vector no nulo $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ que satisface (7.1). Ahora, como (7.1) es equivalente al sistema (7.2), el escalar λ será un valor propio de T si y sólo si el sistema (7.2) tiene alguna solución no trivial; pero sabemos que dicho sistema (7.2) tiene alguna solución no trivial si y sólo si

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{7.3}$$

Luego, un número real λ es un valor propio de T (de A) si y sólo si λ satisface la ecuación (7.3).

La ecuación (7.3), con λ como su incógnita, se llama **ecuación característica** de T (de A); desarrollando el determinante, dicha ecuación (7.3) se convierte en

$$(a-\lambda)\,(d-\lambda) - bc = 0$$

que también podemos escribir como

$$\lambda^2 - (a+d)\,\lambda + (ad-bc) = 0. \tag{7.4}$$

Las raíces reales de esta ecuación son entonces los valores propios de T (de A).

Ahora, como el lado izquierdo de (7.4) es un polinomio de grado 2 en λ entonces dicha ecuación (7.4) tiene a lo más dos raíces distintas, así que la transformación T (la matriz A) tiene a lo más dos valores propios distintos. Cuando la ecuación (7.4) tenga dos raíces iguales, diremos que la transformación T (la matriz A) tiene dos valores propios iguales o tiene un valor propio de multiplicidad 2

Resumimos la discusión anterior en el siguiente resultado:

Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal con matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y sea λ un número real.

- λ es un valor propio de T (de A) si y sólo si λ es una raíz de la ecuación característica de T (de A)
$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

- La transformación T (la matriz A) tiene a lo más dos valores propios distintos.

- Si λ es un valor propio de T (de A), los vectores propios de T (de A) correspondientes a λ son las soluciones no triviales del sistema homogéneo
$$\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 7.4
Para la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, hallar los valores propios, y para cada valor propio hallar los correspondientes vectores propios.

Solución:
La ecuación característica de A es

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

o sea

$$\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0.$$

Sus raíces son los números $\lambda_1 = 5$ y $\lambda_2 = 2$, los cuales son los valores propios de A.

Hallemos ahora los vectores propios de A correspondientes al valor propio $\lambda_1 = 5$: Según ya se dijo, dichos vectores propios son las soluciones no triviales del sistema

$$\begin{pmatrix} 3-5 & 2 \\ 1 & 4-5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

es decir, del sistema

$$\begin{aligned} -2x + 2y &= 0 \\ x - y &= 0. \end{aligned}$$

El conjunto solución de este sistema es la recta $\mathcal{L}_1$ con ecuación $x - y = 0$, la cual pasa por el origen y , por ejemplo, por el punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ En otras palabras, $\mathcal{L}_1$ es la recta generada por $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Así, los vectores propios de A correspondientes al valor propio $\lambda_1 = 5$ son los vectores no nulos sobre la recta $\mathcal{L}_1$, es decir, los múltiplos escalares no nulos del vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

De manera similar se encuentra que los vectores propios de A, correspondientes al valor propio $\lambda_2 = 2$ son los vectores no nulos sobre la recta $\mathcal{L}_2$ con ecuación $x + 2y = 0$, es decir, los múltiplos escalares no nulos del vector $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (figura 7.3).

Tener presente que los valores propios y los vectores propios de la matriz A son también los de la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cuya matriz es A. ■

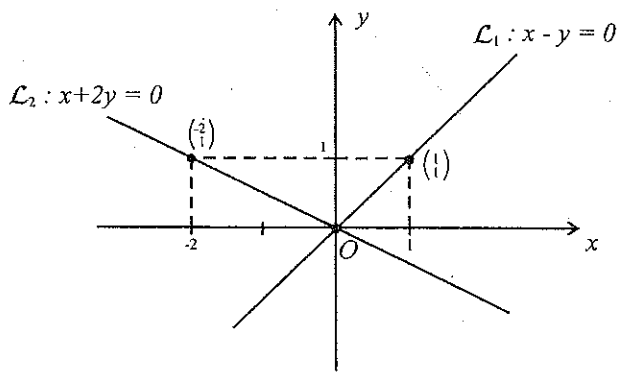


Figura 7.3.

Ejemplo 7.5
Hallar los valores propios de la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Solución:
La ecuación característica de A es

$$\begin{vmatrix} 0 - \lambda & -1 \\ 1 & 0 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

es decir,

$$\lambda^2 + 1 = 0.$$

Como esta ecuación no tiene raíces reales, entonces la matriz A no tiene valores propios[1], lo cual ya sabíamos (ver ejemplo 7.3). ■

7.2 Factorización $A = PDP^{-1}$

Uno de los resultados fundamentales acerca de los valores y vectores propios es el siguiente:

[1]Se puede extender el concepto de valor propio de una matriz, de tal modo que toda raíz (real o no) de la ecuación característica de la matriz sea un valor propio. En tal situación, la matriz A del ejemplo 7.5, cuya ecuación característica es $\lambda^2 + 1 = 0$, tendrá dos valores propios (no reales), a saber $\lambda_1 = i$ y $\lambda_2 = -i$. Sin embargo, como se ha definido el concepto de valor propio de una matriz en este texto, dicha matriz A no tiene valores propios.

Sea A una matriz 2×2. Si $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ son vectores propios de A linealmente independientes, correspondientes respectivamente a los valores propios λ_1, λ_2 de A (puede ser $\lambda_1 = \lambda_2$) entonces

$$A = PDP^{-1}$$

donde

$$P = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \text{ y } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Prueba:

Si $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ son vectores propios de A correspondientes a los valores propios λ_1, λ_2 respectivamente, entonces $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ son vectores no nulos de $\mathbb{R}^2$ tales que

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \lambda_1\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \; A\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \lambda_2\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}. \tag{7.5}$$

Ahora bien, dada la forma como se multiplican matrices, las dos igualdades en (7.5) equivalen a la igualdad

$$A\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 & \lambda_2 x_2 \\ \lambda_1 y_1 & \lambda_2 y_2 \end{pmatrix}.$$

Como, además,

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 & \lambda_2 x_2 \\ \lambda_1 y_1 & \lambda_2 y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

entonces las igualdades en (7.5) equivalen a la igualdad

$$A\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}. \tag{7.6}$$

Ahora, puesto que los vectores $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ son linealmente independientes entonces la matriz $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$ tiene una inversa. Por tanto, podemos despejar A de (7.6) multiplicando por dicha inversa a ambos lados de (7.6) por la derecha, con lo cual se obtiene la siguiente factorización de la matriz A :

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}^{-1}. \tag{7.7}$$

Hemos probado así lo afirmado en el recuadro. ♦

El lector puede probar fácilmente (reversando los pasos que condujeron de (7.5) a (7.7)) que si una matriz A admite una factorización como la que aparece en (7.7) entonces necesariamente $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ son vectores propios de A linealmente independientes que corresponden a los valores propios λ_1, λ_2 respectivamente. De manera que:

> Una matriz A es factorizable en la forma (7.7) si y sólo si A tiene dos vectores propios linealmente independientes.

De una matriz de la forma $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ se dice que es una **matriz diagonal.**

Ejemplo 7.6
Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ del ejemplo 7.4. Se encontró que $\lambda_1 = 5$ y $\lambda_2 = 2$ son los valores propios de A. Correspondiendo a $\lambda_1 = 5$ podemos tomar, por ejemplo, el vector propio $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y correspondiendo a $\lambda_2 = 2$ podemos tomar, por ejemplo, el vector propio $X_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (vea la figura 7.3).

Puesto que X_1, X_2 son linealmente independientes, entonces podemos factorizar A en la forma

$$A = PDP^{-1}$$

donde

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}. \qquad \blacksquare$$

Ejemplo 7.7
Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, cuyos valores propios son $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

Los vectores propios de A correspondientes al valor propio 1 son las soluciones no triviales del sistema

$$\begin{pmatrix} 1-1 & 2 \\ 0 & 1-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

es decir, del sistema

$$\begin{aligned} 0x + 2y &= 0 \\ 0x + 0y &= 0. \end{aligned}$$

Ahora, como el conjunto solución de este sistema es la recta con ecuación $y = 0$, entonces cualquier par de vectores propios de A están sobre dicha recta y en consecuencia son linealmente dependientes. Así, no existen dos vectores propios de A linealmente independientes y por ello A no es factorizable en la forma (7.7). $\blacksquare$

7.3 Valores propios y vectores propios de matrices simétricas

Ahora centraremos la atención en una clase de matrices que se presentan en una gran variedad de situaciones y problemas prácticos: las matrices simétricas. Una matriz 2×2 se dice **simétrica** si tiene la forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$$

o equivalentemente, si ella es igual a su traspuesta.

Por ejemplo, la matriz $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ es simétrica, pero la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ no lo es.

Consideremos una matriz simétrica $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$. Su ecuación característica es

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & d-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

o sea

$$\lambda^2 - (a+d)\,\lambda + \left(ad - b^2\right) = 0. \tag{7.8}$$

Las raíces de esta ecuación (7.8) en los complejos son los números

$$\lambda_1 = \frac{a+d+\sqrt{(a+d)^2 - 4\,(ad-b^2)}}{2} \qquad \text{y} \qquad \lambda_2 = \frac{a+d-\sqrt{(a+d)^2 - 4\,(ad-b^2)}}{2}$$

Un hecho notable es que esas raíces siempre son reales, ya que $(a+d)^2 - 4\left(ad-b^2\right) \geq 0$, pues

$$\begin{aligned} (a+d)^2 - 4\left(ad-b^2\right) &= a^2 + 2ad + d^2 - 4ad + 4b^2 \\ &= a^2 - 2ad + d^2 + 4b^2 \\ &= (a-d)^2 + 4b^2. \end{aligned}$$

Ahora, dada la igualdad

$$(a+d)^2 - 4\left(ad-b^2\right) = (a-d)^2 + 4b^2$$

las raíces λ_1, λ_2 pueden expresarse en la forma

$$\lambda_1 = \frac{a+d+\sqrt{(a-d)^2 + 4b^2}}{2} \qquad \text{y} \qquad \lambda_2 = \frac{a+d-\sqrt{(a-d)^2 + 4b^2}}{2}. \tag{7.9}$$

Se presentan dos posibles casos.

i) $(a-d)^2 + 4b^2 = 0$.

En este caso $\lambda_1 = \lambda_2$, es decir, la ecuación (7.8) tiene sólo una raíz. Nótese que este caso se presenta si y sólo si $a = d$ y $b = 0$, es decir,

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

caso en el cual $\lambda_1 = \lambda_2 = a$.

ii) $(a-d)^2 + 4b^2 > 0$.

En este caso $\lambda_1 \neq \lambda_2$, es decir, la ecuación (7.8) tiene dos raíces distintas. Nótese que este caso se presenta si y sólo si $a \neq d$ o $b \neq 0$.

Tenemos así que:

> Sea A una matriz simétrica de orden 2.
>
> - Las raíces de la ecuación característica de A son ambas reales y por tanto A siempre tiene valores propios.
> - Si A es de la forma $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ entonces los valores propios de A son $\lambda_1 = \lambda_2 = a$.
> - Si A no es de la forma $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ entonces A tiene dos valores propios distintos.

Sea A una matriz 2×2 simétrica. Como veremos más adelante, A siempre podrá factorizarse en la forma

$$A = PDP^{-1}$$

con P matriz invertible y D matriz diagonal. Pero más importante aún, es que la matriz P podrá escogerse con la propiedad $P^{-1} = P^T$; es más, en el caso en que A sea una matriz no diagonal, la matriz P podrá escogerse, además, como la matriz de una rotación R_θ con $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Por el momento veámoslo con una matriz particular.

Ejemplo 7.8
Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$. Como A es simétrica y no es de la forma $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, podemos predecir que A tiene dos valores propios distintos. Hallémoslos:

La ecuación característica de A es

$$\begin{vmatrix} 9-\lambda & 2 \\ 2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Ahora, como

$$\begin{vmatrix} 9-\lambda & 2 \\ 2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (9-\lambda)(6-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 15\lambda + 50 = (\lambda - 5)(\lambda - 10)$$

entonces dicha ecuación característica es

$$(\lambda - 5)(\lambda - 10) = 0$$

y así los valores propios de A son los números $\lambda_1 = 5$ y $\lambda_2 = 10$, los cuales son las raíces de la ecuación anterior. Los vectores propios de A correspondientes a $\lambda_1 = 5$ son las soluciones no triviales del sistema

$$\begin{pmatrix} 9-5 & 2 \\ 2 & 6-5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

es decir, del sistema

$$\begin{aligned} 4x + 2y &= 0 \\ 2x + y &= 0. \end{aligned}$$

El conjunto solución de este sistema es la recta $\mathcal{L}_1$ con ecuación $2x + y = 0$, la cual pasa por el origen y por $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Así, los vectores propios de A correspondientes al valor propio $\lambda_1 = 5$ son los vectores no nulos sobre dicha recta $\mathcal{L}_1$, es decir, los múltiplos escalares no nulos del vector $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Análogamente, los vectores propios de A correspondientes al valor propio $\lambda_2 = 10$ son los vectores no nulos sobre la recta $\mathcal{L}_2$ con ecuación $-x + 2y = 0$, la cual pasa por el origen y por $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, es decir, dichos vectores propios son los múltiplos escalares no nulos del vector $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (figura 7.4).

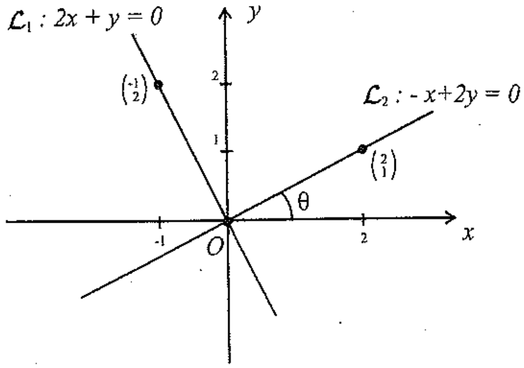


Figura 7.4.

Nótese que $\mathcal{L}_1 \perp \mathcal{L}_2$, es decir, todo vector propio correspondiente al valor propio $\lambda_1 = 5$ es ortogonal a todo vector propio correspondiente al valor propio $\lambda_2 = 10$ y viceversa.

Si tomamos dos vectores propios cualesquiera $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ correspondientes a λ_1, λ_2 respectivamente y conformamos la matriz

$$P = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$$

tendremos que esta matriz es invertible y que

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Pero ¿qué consecuencias tiene para P el hecho de que sus columnas sean ortogonales, es decir, que $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$?

Veamos: si $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$ entonces

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 + y_1^2 & 0 \\ 0 & x_2^2 + y_2^2 \end{pmatrix}$$

es decir,

$$P^T P = \begin{pmatrix} \|X_1\|^2 & 0 \\ 0 & \|X_2\|^2 \end{pmatrix}.$$

Inmediatamente se ve que si los vectores propios X_1, X_2 se escogen unitarios se tendrá

$$P^T P = I_2$$

es decir,

$$P^{-1} = P^T.$$

Como el lector puede observar hay varias opciones para escoger un par de vectores propios X_1, X_2 ortogonales y unitarios. En particular podemos escoger dos vectores propios de A ortogonales y unitarios así:

Uno de ellos en el primer cuadrante, en este caso sobre la recta $\mathcal{L}_2$, el cual es

$$X_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix}$$

donde $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ es el ángulo de inclinación de la recta $\mathcal{L}_2$ (vea figura 7.4). El otro vector, escogido en el segundo cuadrante (en este caso sobre la recta $\mathcal{L}_1$), es

$$X_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\text{sen}\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Con estos vectores conformamos la matriz

$$P = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

la cual cumple que

$$A = P\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}P^{-1}, \tag{7.10}$$

tiene la propiedad $P^{-1} = P^T$ y además es la matriz de la rotación R_θ. ∎

Una matriz P de orden 2, invertible y con la propiedad $P^{-1} = P^T$ es llamada una **matriz ortogonal**. Esta denominación se debe a que las matrices con tal propiedad son las que tienen sus columnas ortogonales y unitarias.

Nótese, en el ejemplo anterior, que la existencia de matrices ortogonales P tales que

$$A = PDP^{-1}$$

con D matriz diagonal, se debe a que en dicho ejemplo $\mathcal{L}_1 \perp \mathcal{L}_2$, es decir, a que la matriz A tiene la propiedad de que vectores propios correspondientes a valores propios distintos, son ortogonales. Pues bien, esa propiedad la tienen todas las matrices simétricas con dos valores propios distintos, como se afirma en el siguiente resultado.

> Sea A una matriz simétrica de orden 2, con dos valores propios distintos λ_1, λ_2. Si X_1, X_2 son vectores propios de A correspondientes a λ_1, λ_2 respectivamente entonces
>
> $$X_1 \perp X_2$$

Para probar lo afirmado digamos que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$, $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ y $X_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

Primero supongamos que $b = 0$. En este caso $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ y así los valores propios son los números a y d; podemos suponer que $\lambda_1 = a$ y $\lambda_2 = d$. Es fácil probar que en este caso $y_1 = 0$ y $x_2 = 0$, así que $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ y_2 \end{pmatrix}$ y en consecuencia $X_1 \perp X_2$.

Supongamos ahora que $b \neq 0$. Probaremos en primer lugar que $x_1 \neq 0$ y $x_2 \neq 0$; luego consideraremos la recta $\mathcal{L}_1$ que pasa por el origen y por X_1, la recta $\mathcal{L}_2$ que pasa por el origen y por X_2, y mostraremos que las pendientes $m_1 = y_1/x_1$ y $m_2 = y_2/x_2$ de dichas rectas cumplen que $m_1 m_2 = -1$. Con ello se habrá probado que $\mathcal{L}_1 \perp \mathcal{L}_2$ lo cual es equivalente a que $X_1 \perp X_2$, y se habrá completado así la prueba. Procedemos entonces a probar lo anunciado:

Como

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 \\ \lambda_1 y_1 \end{pmatrix}$$

entonces $ax_1 + by_1 = \lambda_1 x_1$ y así $by_1 = (\lambda_1 - a)\, x_1$. Si fuese $x_1 = 0$ entonces $by_1 = 0$ y como $b \neq 0$ entonces $y_1 = 0$ y así $X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, lo cual no puede ser pues X_1 es un vector propio. Luego $x_1 \neq 0$ y así

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{\lambda_1 - a}{b}.$$

Similarmente, $x_2 \neq 0$ y

$$\frac{y_2}{x_2} = \frac{\lambda_2 - a}{b}.$$

Como ya lo dijimos, y_1/x_1 y y_2/x_2 son las pendientes de las rectas $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ a las cuales ya nos hemos referido. Sólo resta probar que

$$\left(\frac{y_1}{x_1}\right)\left(\frac{y_2}{x_2}\right) = -1, \text{ es decir, } \left(\frac{\lambda_1 - a}{b}\right)\left(\frac{\lambda_2 - a}{b}\right) = -1.$$

Para probar ésto recurriremos a las expresiones de λ_1, λ_2 dadas en (7.9), según las cuales

$$\begin{aligned} \lambda_1 - a &= \frac{1}{2}(d-a) + \frac{1}{2}\sqrt{(a-d)^2 + 4b^2} \\ \lambda_2 - a &= \frac{1}{2}(d-a) - \frac{1}{2}\sqrt{(a-d)^2 + 4b^2}. \end{aligned}$$

Se sigue que

$$(\lambda_1 - a)(\lambda_2 - a) = \frac{1}{4}(d-a)^2 - \frac{1}{4}\left[(a-d)^2 + 4b^2\right] = -b^2$$

por lo tanto,

$$\left(\frac{\lambda_1 - a}{b}\right)\left(\frac{\lambda_2 - a}{b}\right) = \frac{-b^2}{b^2} = -1$$

como se quería probar. ♦

El hecho que se acaba de probar constituye otra de las propiedades notables de las matrices simétricas. A partir de esta propiedad podemos probar el siguiente resultado, el cual es fundamental en las aplicaciones de las matrices simétricas.

1. Para toda matriz simétrica A, con valores propios λ_1, λ_2 (no necesariamente distintos) existe una matriz ortogonal P tal que
$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$
o, equivalentemente , tal que
$$P^TAP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$
2. Si A es una matriz simétrica no diagonal, entonces A siempre tiene dos vectores propios (unitarios y ortogonales) de la forma
$$\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$
con $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. La matriz
$$Q = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$
la cual es la matriz de la rotación R_θ, es una matriz ortogonal tal que
$$Q^TAQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$
donde λ_1, λ_2 son los valores propios de A y λ_1 denota aquel valor propio al cual corresponde el vector propio $\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix}$.

Prueba de 1. Consideremos una matriz simétrica
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}. \tag{7.11}$$

Si $b = 0$, A es una matriz diagonal y así tomando $P = I_2$ y $D = A$ se tiene que $A = PDP^{-1}$, o equivalentemente, $P^TAP = D$ con P ortogonal y D diagonal.

Supongamos ahora que $b \neq 0$ y que λ_1, λ_2 son los valores propios de A, los cuales (como sabemos) son distintos.

En primer lugar, podemos afirmar (por ser $b \neq 0$) que los vectores propios de A correspondientes al valor propio λ_1 son los vectores no nulos sobre una cierta recta $\mathcal{L}_1$, la cual pasa por el origen y no es el eje x ni es el eje y. Similarmente, los vectores propios correspondientes a λ_2 son los vectores no nulos sobre otra recta $\mathcal{L}_2$ que pasa por el origen y no es el eje x ni es el eje y.

Ahora, puesto que A es simétrica, se tiene que $\mathcal{L}_1 \perp \mathcal{L}_2$, de acuerdo con la última propiedad de las matrices simétricas que hemos probado. Así, una (y sólo una) de las rectas $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ tiene un ángulo de inclinación θ, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$; suponiendo que dicha recta es $\mathcal{L}_1$, la situación es como se muestra en la figura 7.5.

Es claro (como se mostró en el ejemplo 7.8) que al escoger dos vectores propios unitarios $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ uno de ellos en $\mathcal{L}_1$ y el otro en $\mathcal{L}_2$, la matriz
$$P = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$$
tiene la propiedad
$$P^TP = I_2$$

pues

$$P^TP = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 + y_1^2 & x_1x_2 + y_1y_2 \\ x_1x_2 + y_1y_2 & x_2^2 + y_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

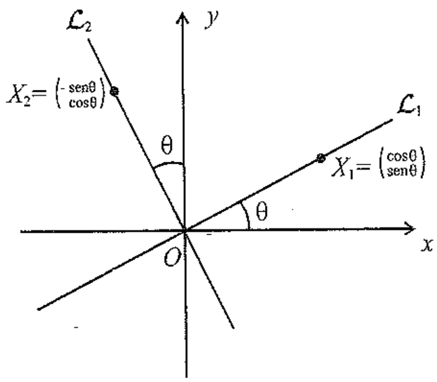


Figura 7.5.

Así, una tal matriz P tiene la propiedad $P^{-1} = P^T$, es decir, es una matriz ortogonal. Además, la matriz P cumple que

$$A = PDP^{-1}$$

con $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ si X_1 corresponde al valor propio λ_1 y X_2 corresponde al valor propio λ_2, o $D = \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$ si X_1 corresponde al valor propio λ_2 y X_2 al valor propio λ_1.

Prueba de 2. Continuemos con la matriz simétrica A dada en (7.11) en la cual suponemos que $b \neq 0$. Podemos escoger dos vectores propios de A ortogonales y unitarios así: uno de ellos en el primer cuadrante, el cual es

$$X_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \text{sen}\theta \end{pmatrix}$$

donde θ es el ángulo ya considerado (vea figura 7.5). El otro vector propio, el cual se escoge en el segundo cuadrante, es

$$X_2 = \begin{pmatrix} -\text{sen}\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Con estos vectores construimos la matriz

$$Q = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

la cual es la matriz de la rotación R_θ.

Si el vector X_1 corresponde al valor propio λ_1 (como aparece en la figura 7.5) entonces el vector X_2 corresponde al valor propio λ_2, y en este caso

$$A = Q \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} Q^{-1}$$

o, equivalentemente,

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, como $Q^{-1} = Q^T$ entonces

$$Q^T AQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}. \quad \blacklozenge$$

Ejemplo 7.9
Considere la matriz simétrica $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$.

a) Hallar los valores propios de A y por cada valor propio hallar los correspondientes vectores propios.

b) Comprobar que vectores propios de A correspondientes a valores propios distintos son ortogonales.

c) Hallar una matriz ortogonal Q de orden 2 que sea la matriz de una rotación R_θ con $0 < \theta < \pi/2$, tal que $Q^T AQ$ sea una matriz diagonal; indicar cuál es el ángulo θ.

Solución:
a) La ecuación característica de A es

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 3 \\ 3 & -4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

es decir,

$$\lambda^2 - 25 = 0$$

Luego, los valores propios de A son los números $\lambda_1 = 5$ y $\lambda_2 = -5$, los cuales son las raíces de la ecuación anterior. Los vectores propios de A correspondientes a $\lambda_1 = 5$ son las soluciones no triviales del sistema

$$\begin{pmatrix} 4-5 & 3 \\ 3 & -4-5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

es decir, del sistema

$$\begin{aligned} -x + 3y &= 0 \\ 3x - 9y &= 0 \end{aligned}$$

El conjunto solución de este sistema es la recta $\mathcal{L}_1$ con ecuación $-x + 3y = 0$, la cual es la recta generada por el vector $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Así, los vectores propios de A son los vectores no nulos sobre dicha recta $\mathcal{L}_1$, es decir, los vectores de la forma $t\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ con $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$. Análogamente, los vectores propios de A correspondientes a $\lambda_2 = -5$ son los vectores no nulos sobre la recta $\mathcal{L}_2$ con ecuación $3x + y = 0$, la cual es la recta generada por el vector $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$; es decir, dichos vectores propios son los vectores de la forma $s\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ con $s \in \mathbb{R}$, $s \neq 0$ (vea figura 7.6).

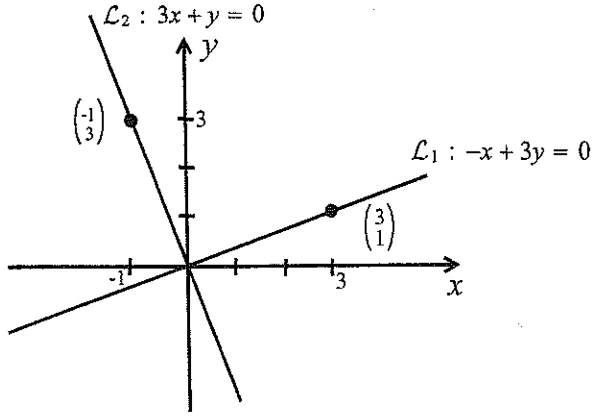


Figura 7.6.

b) Es claro que $\mathcal{L}_1 \perp \mathcal{L}_2$, así que todo vector propio de A correspondiente al valor propio λ_1 es ortogonal a todo vector propio de A correspondiente a λ_2. Esto también puede verse así: un vector propio cualquiera correspondiente a $\lambda_1 = 5$ es de la forma $t\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ con $t \in \mathbb{R}, t \neq 0$, y un vector propio cualquiera correspondiente a $\lambda_2 = -5$ es de la forma $s\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ con $s \in \mathbb{R}, s \neq 0$. Ahora,

$$\left(t\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\right) \cdot \left(s\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}\right) = (ts)\left(\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}\right) = (ts)\,0 = 0$$

luego $t\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ y $s\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ son ortogonales.

c) Un vector propio de A unitario y en el primer cuadrante es

$$X_1 = \frac{\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\right\|} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3/\sqrt{10}\\1/\sqrt{10}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta\\ \operatorname{sen}\theta\end{pmatrix}$$

donde $\theta = \tan^{-1}(1/3)$, y un vector propio unitario en el segundo cuadrante es

$$X_2 = \frac{\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}\right\|} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1/\sqrt{10}\\3/\sqrt{10}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\operatorname{sen}\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}$$

Luego, una matriz Q como se quiere es

$$Q = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{10} & -1/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \end{pmatrix}$$

En efecto,

- Q es una matriz ortogonal pues sus columnas son vectores ortogonales y unitarios.

- $Q = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = m(R_\theta)$ donde $\theta = \tan^{-1}(1/3) \approx 18.43°$.

- Como las columnas de Q son vectores propios de A linealmente independientes, con la primera columna correspondiendo a $\lambda_1 = 5$ y la segunda correspondiendo a $\lambda_2 = -5$ entonces
$$A = Q \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} Q^{-1}$$
o, equivalentemente,
$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$
Finalmente, como $Q^{-1} = Q^T$ ya que Q es una matriz ortogonal entonces
$$Q^T AQ = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \quad \blacksquare$$

El resultado en el numeral 2. del último recuadro se usará al final del capítulo siguiente, para probar (empleando matrices y vectores) que una ecuación de segundo grado
$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$
con $b \neq 0$, se puede transformar siempre en una ecuación de segundo grado, de la forma
$$a'(x')^2 + c'(y')^2 + d'x' + e'y' + f' = 0$$
(que carece de término en $x'y'$) mediante una rotación de los ejes coordenados x, y por un ángulo θ, el cual puede escogerse de tal modo que $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

7.4 Ejercicios

Sección 7.1

1. Para cada una de las siguientes matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

   a) Encontrar la ecuación característica.

   b) Hallar los valores propios.

   c) Encontrar los vectores propios correspondientes a cada valor propio y dar una interpretación geométrica para el conjunto de dichos vectores propios.

2. Sea $\mathcal{L}$ la recta generada por un vector no nulo U y sea P_U la transformación proyección sobre $\mathcal{L}$. Sin emplear $m(P_U)$, hallar:

   a) Los valores propios de P_U.

   b) Los vectores propios de P_U correspondientes a cada valor propio.

3. Para cada transformación lineal dada, hallar su ecuación característica y sus valores propios.

   a) La reflexión sobre el eje y.

   b) La reflexión sobre la recta con ecuación $y = x$.

   c) $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$.

4. Sea $T = R_{\frac{\pi}{2}}$. Mostrar que T no posee valores propios pero que T^2 tiene un valor propio y todo vector no nulo de $\mathbb{R}^2$ es vector propio de T^2 asociado con dicho valor propio.

5. Sean $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal, λ_1 y λ_2 escalares y $X \in \mathbb{R}^2$, $X \neq O$. Probar que si $T(X) = \lambda_1 X$ y $T(X) = \lambda_2 X$ entonces $\lambda_1 = \lambda_2$. Concluya que un vector propio de T no puede corresponder a dos valores propios diferentes.

6. Dar ejemplo de una transformación lineal con dos vectores propios linealmente independientes correspondientes a un mismo valor propio.

7. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$. Determinar los valores de a y b de tal modo que los vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sean vectores propios de la matriz A.

8. Hallar los valores propios de la transformación lineal cuya matriz se indica en cada literal. Hallar también los vectores propios correspondientes a cada valor propio de T.

   a) $m(T) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ *b*) $m(T) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

   c) $m(T) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ *d*) $m(T) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$

Sección 7.2

9. Para cada una de las siguientes matrices A_k,

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_7 = \begin{pmatrix} 3 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}, \quad A_8 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

   a) Hallar los valores propios y los vectores propios correspondientes.

   b) Encontrar, si existen, una matriz invertible P y una matriz diagonal D tales que $A_k = PDP^{-1}$.

Sección 7.3

10. Para cada matriz A_k de las dadas en el ejercicio 9, que sea simétrica y no diagonal,

    a) Verificar que vectores propios correspondientes a valores propios diferentes son ortogonales.

    b) Encontrar una matriz ortogonal Q tal que $Q^T A_k Q$ sea una matriz diagonal y además Q sea la matriz de una rotación R_θ con $0 < \theta < \pi/2$; indicar cuál es el ángulo θ.

8

Secciones Cónicas

Los antiguos geómetras griegos descubrieron que cortando un cono circular recto de dos hojas (o mantos) con planos que no pasan por el vértice del cono, se obtienen tres tipos básicos de curvas, las cuales se denominan **secciones cónicas,** o simplemente **cónicas.**

Un cono circular recto de dos hojas es una superficie en el espacio conformada por todas las rectas que pasan por un punto fijo P y forman un ángulo constante α, $0 < \alpha < 90°$, con una recta fija $\mathcal{L}$ que pasa por P (figura 8.1). La recta $\mathcal{L}$ es el eje del cono, el punto P es el vértice del cono y cada recta que es parte del cono se dice un elemento del cono. El vértice P separa al cono en dos partes, a las que se llama hojas.

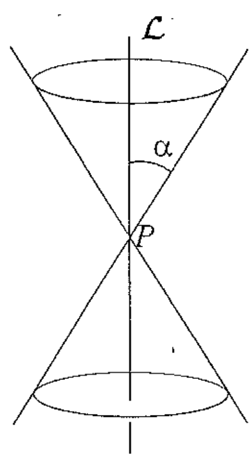


Figura 8.1.

Cuando un plano, que no pasa por el vértice P, corta todos los elementos de una sola hoja, la curva intersección del plano con el cono se llama **elipse** (figura 8.2.a); si el plano es paralelo a un elemento, la correspondiente curva intersección se llama **parábola** (figura 8.2.b), y si el plano corta ambas hojas, la curva resultante se llama **hipérbola** (figura 8.2.c). Cuando se corta el cono con un plano que pasa por el vértice del cono, la intersección resultante puede ser un punto, una recta o dos rectas que se cortan en el vértice. A este tipo de intersecciones se les llama **cónicas degeneradas.**

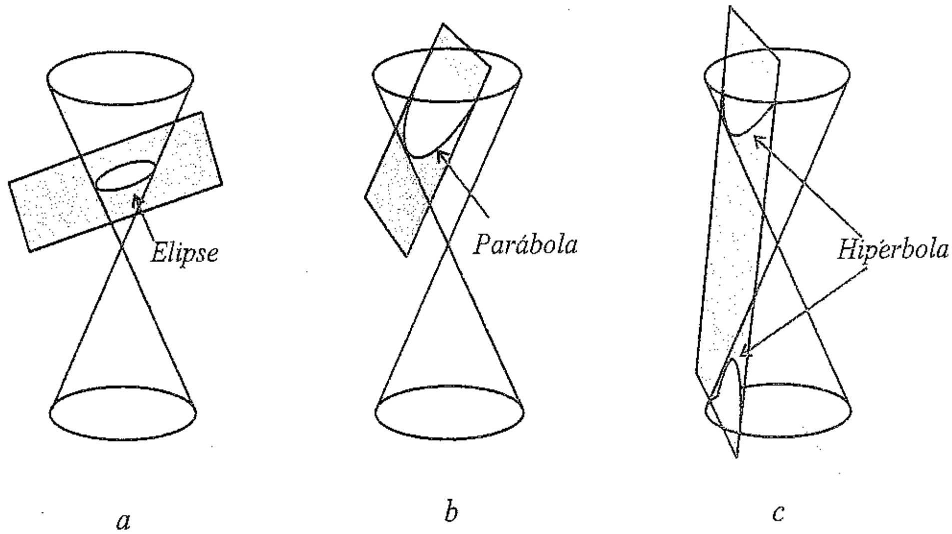


Figura 8.2.

Un caso particular de elipse es la circunferencia, curva que se obtiene cortando al cono con un plano que no pase por el vértice y que sea perpendicular al eje del cono.

Las propiedades fundamentales de las secciones cónicas se conocen desde hace más de dos mil años y es notable el hecho de que dichas curvas continúan jugando en la actualidad un importante papel en la ingeniería con una gran variedad de aplicaciones prácticas en la vida cotidiana (reflectores parabólicos, antenas parabólicas para televisión, etc), como también en la formulación de ciertos modelos científicos. En la Física, por ejemplo, es bien conocido lo que ocurre en los campos gravitacional y electrostático, los cuales son campos de fuerza proporcional al inverso del cuadrado de la distancia: cuando una partícula se mueve bajo la influencia de uno de estos campos, la trayectoria que ella describe es una cónica. En el campo gravitacional del sol se conoce que las órbitas de los planetas son elipses y que el sol se encuentra en uno de los focos. Por otra parte, la trayectoria que describe una partícula α en el campo eléctrico de un núcleo atómico, es una hipérbola.

Para el campo gravitacional de la tierra, Galileo descubrió a comienzos del siglo XVII que si un objeto es lanzado cerca de la superficie terrestre, formando un ángulo no recto con la horizontal, la trayectoria que él describe es un arco de parábola, si no se tiene en cuenta la resistencia del aire.

Se ha encontrado que las secciones cónicas se pueden definir (sin hacer referencia a un cono) como ciertos lugares geométricos del plano, es decir, como ciertos conjuntos de puntos del plano que cumplen determinadas condiciones. En este capítulo definiremos dichas secciones cónicas de esta forma y encontraremos para cada tipo, ecuaciones correspondientes. Empezaremos con la circunferencia que, como ya dijimos, es un caso particular de elipse y además es, después de la línea recta, el lugar geométrico más sencillo y más familiar.

8.1 La circunferencia

Se denomina **circunferencia** al conjunto de todos los puntos del plano que equidistan (están a igual distancia) de un punto fijo del plano. Al punto fijo se le llama **centro** y a la distancia del centro a cualquier punto de la circunferencia se le llama **radio.** (Figura 8.3a.)

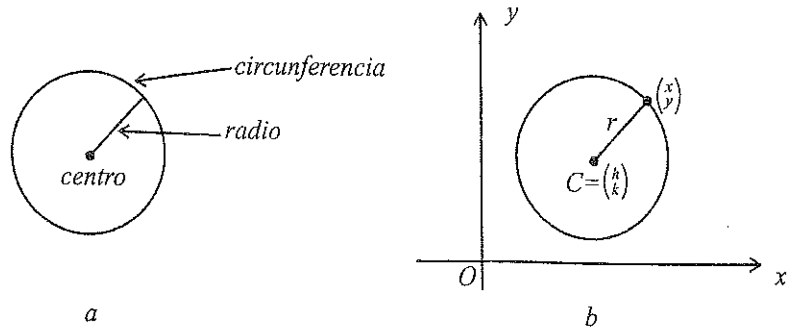


Figura 8.3.

Consideremos ahora el plano dotado de un sistema de coordenadas cartesianas xy, y en él una circunferencia con centro en el punto $C = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$ y radio r. (Figura 8.3*b*.)

Un punto $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ del plano está sobre dicha circunferencia si y sólo si

$$\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \right\| = r.$$

Efectuando la diferencia en el lado izquierdo y elevando ambos lados al cuadrado, transformamos la ecuación anterior en la ecuación equivalente

$$\left\| \begin{pmatrix} x-h \\ y-k \end{pmatrix} \right\|^2 = r^2$$

la cual a su vez equivale a la ecuación

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2.$$

De manera que un punto $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ pertenece a la circunferencia si y sólo si sus coordenadas satisfacen la ecuación anterior. Tenemos así que:

> Una ecuación para la circunferencia con centro en el punto $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$ y radio r es
> $$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2. \tag{8.1}$$

Si el centro es el origen (es decir, $h = 0$ y $k = 0$), la ecuación en (8.1) adopta la forma más simple

$$x^2 + y^2 = r^2 \tag{8.2}$$

la cual es llamada **forma canónica** de la ecuación de la circunferencia.

Ejemplo 8.1
Una ecuación para la circunferencia con centro en $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y radio 4 es

$$(x-(-1))^2 + (y-2)^2 = 4^2$$

es decir,

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 16. \quad \blacksquare$$

Ejemplo 8.2
Encuentre una ecuación para la circunferencia tal que los extremos de uno de sus diámetros son los puntos $P = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ y $Q = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Solución:
El centro de la circunferencia es el punto medio del segmento $\overline{PQ}$, pues este segmento es uno de sus diámetros. Así, dicho centro es el punto

$$C = \frac{1}{2}(P+Q) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4-2 \\ -3+7 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Por otra parte, el radio r de la circunferencia es la distancia del centro C a cualquiera de los puntos P o Q, así que

$$r = \|P - C\| = \left\| \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{3^2 + (-5)^2} = \sqrt{34}.$$

Por tanto, una ecuación para la circunferencia en consideración es

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 34. \quad \blacksquare$$

Si en la ecuación en (8.1),

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

se desarrollan los cuadrados, se pasa el término r^2 al lado izquierdo y se agrupan los términos constantes, se obtiene

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + \left(h^2 + k^2 - r^2\right) = 0.$$

Haciendo $D = -2h$, $E = -2k$ y $F = h^2 + k^2 - r^2$ vemos que esta ecuación toma la forma

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0. \tag{8.3}$$

Así, toda circunferencia tiene una ecuación de la forma anterior. Ahora, si se parte de una ecuación de la forma (8.3) para una circunferencia dada, ella puede llevarse a la forma en (8.1), completando los cuadrados en las variables x y y, como se ilustra en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 8.3
Halle el centro y el radio de la circunferencia con ecuación

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0. \tag{8.4}$$

Solución:
Llevemos la ecuación (8.4) a la forma

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

Para ello empezamos por escribirla en la forma

$$\left(x^2 + 2x\right) + \left(y^2 - 4y\right) = 4. \tag{8.5}$$

Ahora completamos el cuadrado en cada expresión en paréntesis, es decir, adicionamos en cada una la constante apropiada de modo que la primera se convierta en un cuadrado $(x-h)^2$ y la segunda en un cuadrado $(y-k)^2$. Haciendo lo dicho, tenemos que (8.5) es equivalente a

$$\left(x^2+2x+1\right)+\left(y^2-4y+4\right)=1+4+4$$

es decir, a

$$(x+1)^2+(y-2)^2=3^2$$

o sea, a la ecuación

$$(x-(-1))^2+(y-2)^2=3^2. \tag{8.6}$$

Hemos transformado así la ecuación (8.4) en la ecuación equivalente (8.6) de la cual vemos que el centro de la circunferencia es el punto $C=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ y que el radio es $r=3$. (Figura 8.4.) ∎

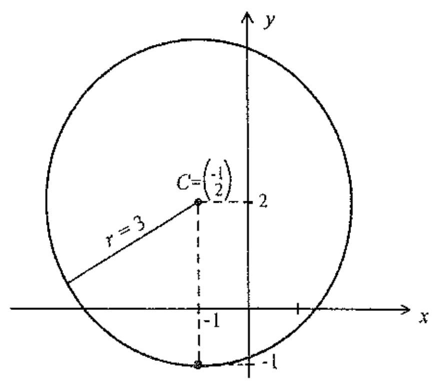


Figura 8.4.

Se advierte al lector que no toda ecuación de la forma (8.3) representa una circunferencia. En efecto, es posible que al completar los cuadrados en una ecuación dada del tipo (8.3) se obtenga una ecuación de la forma

$$(x-h)^2+(y-k)^2=d$$

con $d=0$ o con $d<0$. Es claro que en el primer caso la ecuación sólo es satisfecha por el punto $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}$, mientras que en el segundo caso ningún punto $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ la satisface.

Ejemplo 8.4

a) Consideremos la ecuación

$$x^2+y^2+2x-4y+5=0. \tag{8.7}$$

Al completar cuadrados se obtiene

$$(x+1)^2+(y-2)^2=0.$$

Luego, la ecuación (8.7) no representa una circunferencia y sólo es satisfecha por el punto $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$.

b) Consideremos ahora la ecuación

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y + 6 = 0. \tag{8.8}$$

Al completar cuadrados se obtiene

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = -1.$$

Así, ningún punto $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ satisface la ecuación (8.8). ■

8.2 Traslación de ejes

Acabamos de ver que una ecuación para una circunferencia con radio r y centro en el punto $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$, respecto a un sistema cartesiano xy (figura 8.5) es la ecuación

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

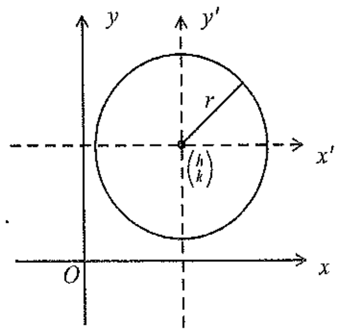


Figura 8.5.

Por otra parte, una ecuación para la misma circunferencia, pero respecto al sistema $x'y'$ que se muestra en la figura 8.5, cuyo origen coincide con el centro de la circunferencia, es la ecuación más simple

$$(x')^2 + (y')^2 = r^2.$$

Esto pone de manifiesto el hecho de que la forma de una ecuación para una curva dada, referida a un cierto sistema cartesiano, depende de la ubicación de la curva respecto a los correspondientes ejes coordenados.

Como en el caso anterior, en muchos otros es posible transformar una ecuación dada para una curva, referida a un sistema xy, en una ecuación más simple, cambiando a un nuevo sistema cartesiano $x'y'$. Debe tenerse presente que cuando se efectúa un tal cambio de sistema, cada punto P del plano con coordenadas x, y relativas al sistema xy, adquiere nuevas coordenadas x', y' relativas al nuevo sistema $x'y'$. Como también que es necesario disponer de la relación entre las viejas coordenadas x, y y las nuevas x', y' para poder pasar de un sistema al otro.

A continuación nos referiremos al cambio más sencillo de un sistema cartesiano xy a otro sistema cartesiano $x'y'$: aquel en el cual los nuevos ejes x', y' son respectivamente paralelos a los ejes x, y, están orientados en el mismo sentido y además se conserva en cada uno de ellos la unidad de medida (figura 8.6).

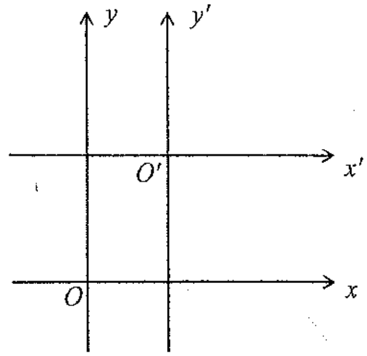


Figura 8.6.

Un cambio de sistema de coordenadas del tipo anterior se dice una **traslación de ejes.**

Consideremos una traslación de ejes y supongamos que el nuevo origen O' tiene vector de coordenadas $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$, respecto al sistema original xy. Sea P un punto cualquiera del plano con vector de coordenadas $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ respecto al sistema xy y con vector de coordenadas $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ respecto al nuevo sistema $x'y'$ (figura 8.7).

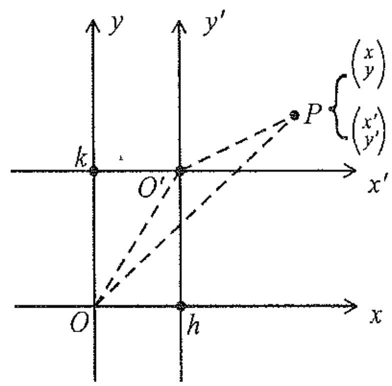


Figura 8.7.

Veamos cómo se relacionan las coordenadas x, y y las coordenadas x', y' :
Puesto que

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P}$$

y puesto que

$$\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j},\ \overrightarrow{OO'} = h\overrightarrow{i} + k\overrightarrow{j} \text{ y } \overrightarrow{O'P} = x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j}$$

se tiene que

$$x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} = \left(h\overrightarrow{i} + k\overrightarrow{j}\right) + \left(x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j}\right) = \left(x' + h\right)\overrightarrow{i} + \left(y' + k\right)\overrightarrow{j}$$

de donde,

$$x = x' + h \qquad \text{y} \qquad y = y' + k. \tag{8.9}$$

o, equivalentemente,

$$x' = x - h \qquad \text{y} \qquad y' = y - k. \tag{8.10}$$

Tenemos así el siguiente resultado:

> Supongamos que se trasladan los ejes coordenados x, y de modo que el nuevo origen es el punto $O' = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$, respecto al sistema xy.
>
> Si $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ son, respectivamente, los vectores de coordenadas de un mismo punto P del plano, respecto al sistema xy y respecto al nuevo sistema $x'y'$ entonces
>
> $$x = x' + h \qquad \text{y} \qquad y = y' + k$$
>
> o, equivalentemente,
>
> $$x' = x - h \qquad \text{y} \qquad y' = y - k.$$

Ejemplo 8.5

Suponga que se efectúa una traslación de ejes y que el nuevo origen es el punto $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Hallar las nuevas coordenadas x', y' del punto P cuyas coordenadas en el sistema original son $x = 5$, $y = -8$.

Solución:

Empleando la fórmula (8.10) con $x = 5$, $y = -8$, $h = -2$ y $k = 3$, se obtiene que

$$x' = 5 - (-2) = 7 \text{ y } y' = -8 - 3 = -11. \quad \blacksquare$$

Ejemplo 8.6

Consideremos la circunferencia C con ecuación

$$x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6 = 0. \tag{8.11}$$

Completando los cuadrados en x y en y, esta ecuación se convierte en la ecuación

$$(x+1)^2 + (y-3)^2 = 4 \tag{8.12}$$

la cual nos dice que la circunferencia C tiene radio $r = 2$ y centro en el punto $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Si trasladamos los ejes de tal forma que el nuevo origen sea el centro de la circunferencia C entonces según las fórmulas (8.10),

$$x' = x - (-1) = x + 1 \quad \text{y} \quad y' = y - 3.$$

Sustituyendo en (8.12), esta ecuación toma la forma

$$(x')^2 + (y')^2 = 4. \tag{8.13}$$

Así, en el nuevo sistema $x'y'$, la ecuación dada de la circunferencia C se transforma en la ecuación (8.13), la cual ya no tiene términos lineales y evidentemente es más simple que la ecuación (8.11). $\blacksquare$

8.3 La parábola

Se denomina **parábola** al conjunto de todos los puntos del plano que equidistan de un punto fijo (del plano) llamado **foco,** y de una recta fija (también del plano) llamada **directriz,** la cual no contiene al foco.

En la figura 8.8, el punto F es el foco y la recta $\mathcal{L}$ es la directriz.

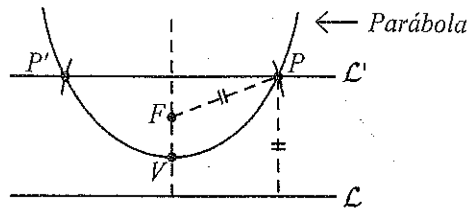


Figura 8.8.

Una manera de obtener puntos de la parábola es la siguiente: se traza una recta $\mathcal{L}'$ paralela a la directriz, como se muestra en la figura 8.8. Haciendo centro en el foco F y con radio igual a la distancia entre las rectas $\mathcal{L}'$ y $\mathcal{L}$, se trazan arcos de circunferencia que cortan a $\mathcal{L}'$; es claro que cada uno de los puntos de corte P y P' son puntos de la parábola, pues equidistan del foco y de la directriz. La recta que pasa por el foco F y es perpendicular a la directriz $\mathcal{L}$ se llama **eje focal.** El punto en el cual el eje focal intersecta la parábola se llama **vértice;** es claro que este punto (el cual es el punto V en la figura 8.8) está ubicado a la mitad de la distancia entre el foco F y la directriz $\mathcal{L}$.

La recta que pasa por el foco F y es paralela a la directriz $\mathcal{L}$ corta a la parábola en dos puntos P' y P; el segmento $\overline{P'P}$ es llamado **lado recto** de la parábola. (Figura 8.9).

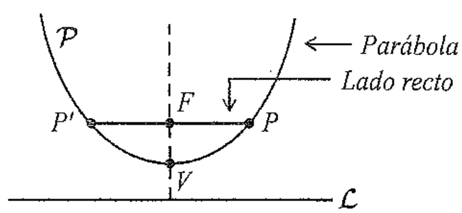


Figura 8.9.

Se trata ahora de hallar una ecuación para la parábola, respecto a un sistema cartesiano xy para el plano. Como veremos una tal ecuación toma su forma más simple cuando la parábola tiene su vértice en el origen y su eje focal es uno de los ejes coordenados.

Consideremos, por ejemplo, la parábola $\mathcal{P}$ con vértice en el origen y foco $F = \begin{pmatrix} 0 \\ p \end{pmatrix}$, $p \neq 0$. El eje focal de $\mathcal{P}$ coincide con el eje y; además, por definición de parábola, la directriz de $\mathcal{P}$ es la recta con ecuación $y = -p$ (figura 8.10).

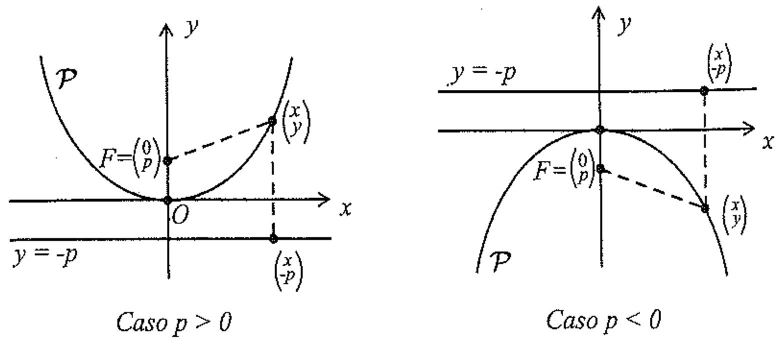


Figura 8.10.

En estas condiciones, un punto $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ está sobre la parábola $\mathcal{P}$ si y sólo si

$$\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ p \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ -p \end{pmatrix} \right\|. \tag{8.14}$$

Efectuando las diferencias indicadas en (8.14) y elevando ambos lados al cuadrado, se obtiene

$$\left\| \begin{pmatrix} x \\ y - p \end{pmatrix} \right\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ y + p \end{pmatrix} \right\|^2$$

es decir,

$$x^2 + (y - p)^2 = (y + p)^2.$$

Finalmente, desarrollando los cuadrados y simplificando se llega a la ecuación

$$x^2 = 4py$$

que escribimos en la forma

$$y = \frac{1}{4p} x^2. \tag{8.15}$$

Obsérvese que cada uno de los pasos que transformaron la ecuación (8.14) en la ecuación (8.15) pueden ser reversados. De manera que un punto $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ está sobre la parábola $\mathcal{P}$ si y sólo si $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ satisface la ecuación (8.15). Así, (8.15) es una ecuación para la parábola $\mathcal{P}$.

Dicha ecuación (8.15) muestra que la parábola es simétrica respecto a su eje focal que en este caso es el eje y, pues por cada punto $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ que la satisface, el punto $\begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$ también la satisface.

Los extremos del lado recto son los puntos de la parábola con ordenada igual a p. Para hallar sus abscisas, hacemos $y = p$ en la ecuación (8.15) y despejamos x obteniéndose $x = \pm 2p$. Por tanto, los extremos del lado recto de $\mathcal{P}$ son los puntos $P' = \begin{pmatrix} -2p \\ p \end{pmatrix}$ y $P = \begin{pmatrix} 2p \\ p \end{pmatrix}$. En la figura 8.11 se muestra dicho lado recto y sus extremos P', P para el caso $p > 0$.

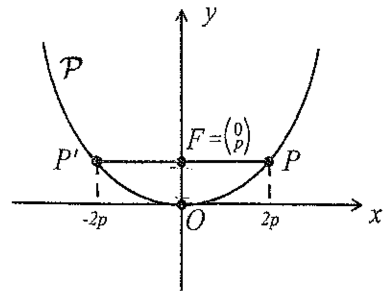


Figura 8.11.

Se sigue que la longitud del lado recto de $\mathcal{P}$ es $\|P - P'\| = 4\,|p|$. Así, entre más grande sea $|p|$, más abierta es la parábola y entre más pequeño sea $|p|$, más cerrada es la misma.

Vale la pena resaltar que el número p en la ecuación (8.15), es tal que $|p|$ es la distancia del foco F al vértice, como también del vértice a la directriz.

En la discusión anterior, la parábola $\mathcal{P}$ tiene vértice en el origen y foco $F = \begin{pmatrix} 0 \\ p \end{pmatrix}$, $p \neq 0$; su eje focal es el eje y. Si el vértice continúa en el origen, pero el foco es el punto $F = \begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix}$, $p \neq 0$, entonces su eje focal es el eje x, su directriz la recta con ecuación $x = -p$ y se intercambiarían los papeles de x y y (figura 8.12).

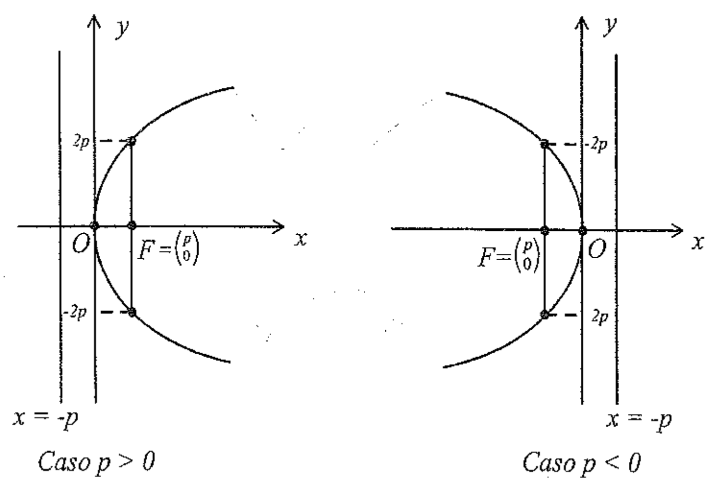


Figura 8.12.

En tal caso una ecuación para la parábola es

$$x = \frac{1}{4p}y^2. \tag{8.16}$$

La longitud del lado recto de la parábola sigue siendo $4\,|p|$ y al igual que en la ecuación (8.15), en la ecuación (8.16), $|p|$ es la distancia del foco al vértice y también del vértice a la directriz.

Las ecuaciones (8.15) y (8.16) son las ecuaciones más simples para la parábola, por tal razón a ellas se les llama **formas canónicas** para la ecuación de la parábola.

Tenemos así que:

- Una ecuación para la parábola con vértice en el origen y foco $F = \begin{pmatrix} 0 \\ p \end{pmatrix}$, $p \neq 0$, es
$$y = \frac{1}{4p}x^2.$$
Si $p > 0$, la parábola abre hacia arriba y si $p < 0$, la parábola abre hacia abajo.
- Una ecuación para la parábola con vértice en el origen y foco $F = \begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix}$, $p \neq 0$, es
$$x = \frac{1}{4p}y^2.$$
Si $p > 0$, la parábola abre hacia la derecha y si $p < 0$, la parábola abre hacia la izquierda.

Ejemplo 8.7
Halle una ecuación para cada una de las siguientes parábolas $\mathcal{P}$.

a) $\mathcal{P}$ tiene vértice en el origen y foco $F = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

b) $\mathcal{P}$ tiene vértice en el origen y su directriz es la recta con ecuación $x = 4$.

c) $\mathcal{P}$ tiene vértice en el origen, su eje focal es el eje y y pasa por el punto $P = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Solución:

a) Una ecuación para $\mathcal{P}$ es la ecuación (8.15) con $p = 3$, es decir, $y = \frac{1}{12}x^2$ (figura 8.13).

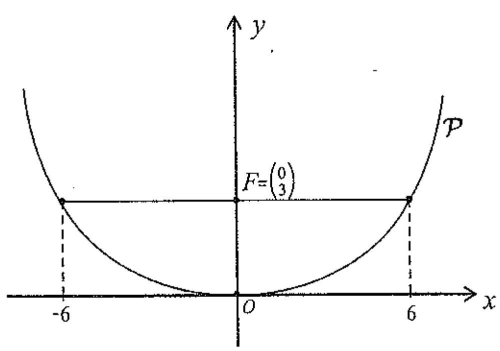


Figura 8.13.

b) Dado que $\mathcal{P}$ tiene vértice en el origen y su directriz es la recta con ecuación $x = 4$ entonces una ecuación para $\mathcal{P}$ es $x = \frac{1}{4p}y^2$ donde el foco es el punto $F = \begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix}$; además $p < 0$ pues la parábola abre hacia la izquierda. Ahora, como $|p| =$ distancia del vértice a la directriz $= 4$ entonces $p = -4$ y así una ecuación para $\mathcal{P}$ es $x = -\frac{1}{16}y^2$ (figura 8.14).

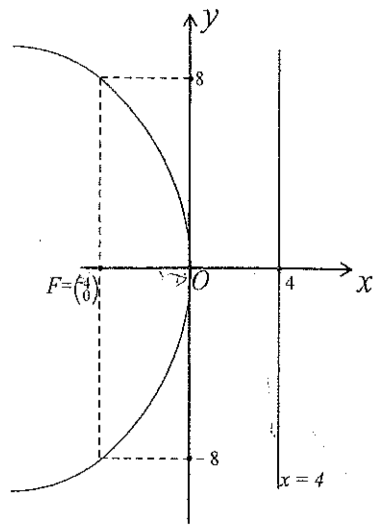


Figura 8.14.

c) Como $\mathcal{P}$ tiene vértice en el origen y su eje focal es el eje y, entonces $\mathcal{P}$ tiene una ecuación de la forma $y = \dfrac{1}{4p}x^2$. Ahora, como el punto $P = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$ pertenece a la parábola $\mathcal{P}$ entonces dicho punto satisface la ecuación de $\mathcal{P}$, así $-5 = \dfrac{1}{4p}(4)^2$ de donde $\dfrac{1}{4p} = -\dfrac{5}{16}$. Luego una ecuación para la parábola $\mathcal{P}$ es $y = -\dfrac{5}{16}x^2$.

En la figura 8.15 se muestra la parábola $\mathcal{P}$, la cual pasa también por el punto $P' = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \end{pmatrix}$, dada la simetría de $\mathcal{P}$ respecto al eje y. ■

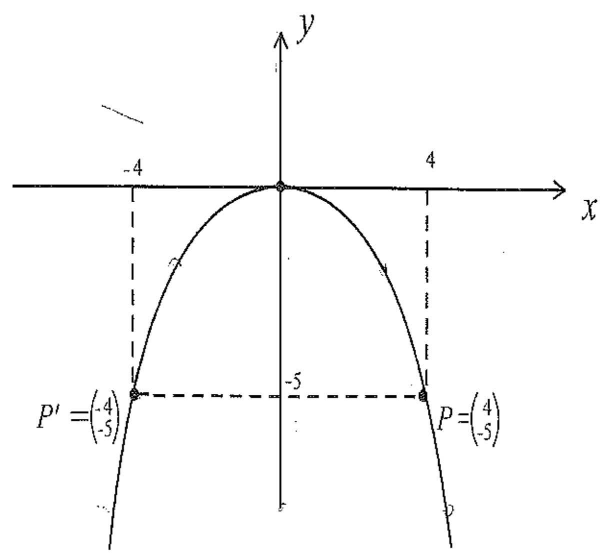


Figura 8.15.

Consideremos ahora una parábola $\mathcal{P}$ con vértice $V = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$ y foco $F = \begin{pmatrix} h \\ k+p \end{pmatrix}$, $p \neq 0$;

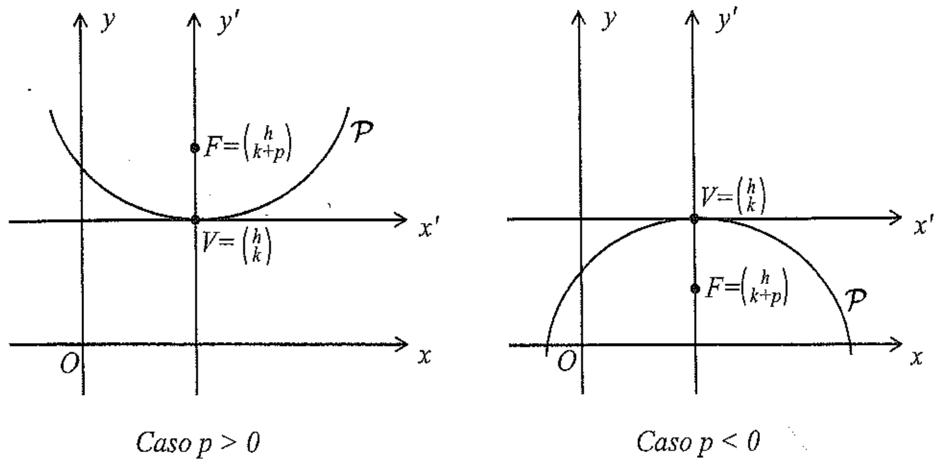


Figura 8.16.

su eje focal es paralelo al eje y (figura 8.16).

Efectuando una traslación de ejes de modo que el nuevo origen coincida con el vértice $V = \binom{h}{k}$, como se muestra en la figura 8.16, tenemos que, respecto al nuevo sistema $x'y'$, la parábola $\mathcal{P}$ tiene vértice en el origen y foco en el punto $\binom{0}{p}$ y así una ecuación para dicha parábola, referida al sistema $x'y'$, es (vea (8.15))

$$y' = \frac{1}{4p}\left(x'\right)^2.$$

Se sigue, usando las ecuaciones de traslación $x' = x - h$, $y' = y - k$, que una ecuación respecto al sistema xy, para la parábola $\mathcal{P}$ es

$$y - k = \frac{1}{4p}\left(x - h\right)^2. \tag{8.17}$$

De manera similar, una ecuación para la parábola con vértice $V = \binom{h}{k}$ y foco $F = \binom{h+p}{k}$, $p \neq 0$, la cual tiene ahora su eje focal paralelo al eje x, es

$$x - h = \frac{1}{4p}\left(y - k\right)^2. \tag{8.18}$$

Es claro que en cualquiera de los dos casos anteriores, $|p|$ sigue siendo la distancia del foco al vértice y de éste a la directriz, y que la longitud del lado recto sigue siendo también $4|p|$.

Una parábola se dice **vertical,** respecto a un sistema cartesiano xy, si su eje focal coincide con el eje y o es paralelo a dicho eje. Si el eje focal coincide con el eje x o es paralelo a este eje, la parábola se dice **horizontal.**

Se tiene así que

- Una ecuación para la parábola vertical con vértice $V = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$ y foco $F = \begin{pmatrix} h \\ k+p \end{pmatrix}$, $p \neq 0$, es

$$y - k = \frac{1}{4p}(x-h)^2 .$$

Si $p > 0$, la parábola abre hacia arriba y si $p < 0$, la parábola abre hacia abajo.

- Una ecuación para la parábola horizontal con vértice $V = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$ y

foco $F = \begin{pmatrix} h+p \\ k \end{pmatrix}$, $p \neq 0$, es

$$x - h = \frac{1}{4p}(y-k)^2 .$$

Si $p > 0$, la parábola abre hacia la derecha y si $p < 0$, la parábola abre hacia la izquierda.

Ejemplo 8.8

Encontrar una ecuación para cada una de las siguientes parábolas $\mathcal{P}$.

a) $\mathcal{P}$ tiene foco $F = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ y su directriz es la recta con ecuación $y = 1$.

b) $\mathcal{P}$ tiene vértice $V = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$, su eje focal es la recta con ecuación $x = -4$ y pasa por el punto $P = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

c) $\mathcal{P}$ abre hacia la izquierda y los extremos de su lado recto son los puntos $P' = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ y $P = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Solución:

a) En la figura 8.17 se muestran los datos dados (el foco y la directriz) y se insinúa en línea punteada la parábola $\mathcal{P}$.

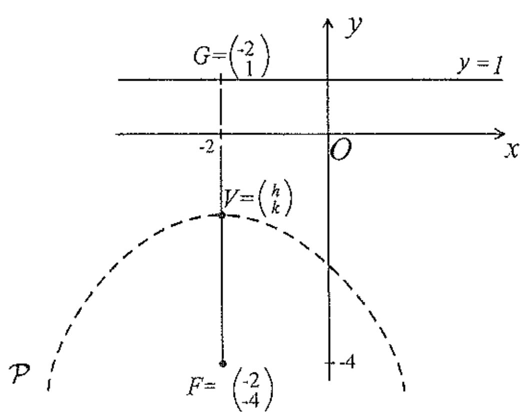


Figura 8.17.

Una ecuación para $\mathcal{P}$ es

$$y-k=\frac{1}{4p}(x-h)^2$$

siendo $V=\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}$ el vértice y $F=\begin{pmatrix}h\\k+p\end{pmatrix}$ el foco.

Ahora, puesto que el vértice es el punto medio del segmento con extremos $F=\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}$ y $G=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ entonces

$$V=\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}-2\\-3/2\end{pmatrix}.$$

Por otra parte, como

$$F=\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}h\\k+p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-\frac{3}{2}+p\end{pmatrix}$$

entonces $-\frac{3}{2}+p=-4$ de donde $p=-4+\frac{3}{2}=-\frac{5}{2}$ (y así $4p=-10$). Luego, una ecuación para $\mathcal{P}$ es

$$y+\frac{3}{2}=-\frac{1}{10}(x+2)^2.$$

b) Como el eje focal de $\mathcal{P}$ es paralelo al eje y entonces la parábola $\mathcal{P}$ es vertical, y puesto que su vértice es $V=\begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}$ entonces una ecuación para $\mathcal{P}$ es

$$y-2=\frac{1}{4p}(x+4)^2.$$

Ahora, dado que $P=\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}$ es un punto de la parábola, él satisface la ecuación anterior, así que $5-2=\frac{1}{4p}(-3+4)^2$ de donde $\frac{1}{4p}=3$. Luego, una ecuación para $\mathcal{P}$ es

$$y-2=3(x+4)^2.$$

En la figura 8.18 se muestra la parábola $\mathcal{P}$.

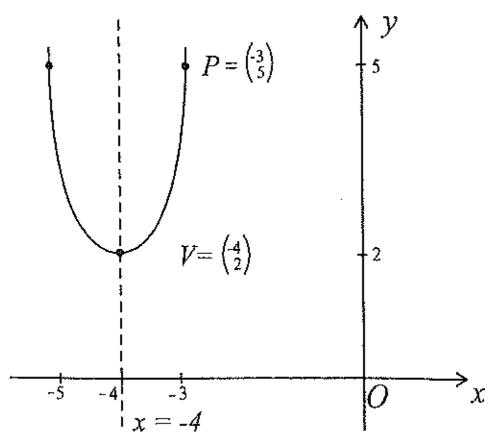


Figura 8.18.

c) En la figura 8.19 se insinúa en línea punteada la parábola $\mathcal{P}$ y se muestra su lado recto $\overline{P'P}$.

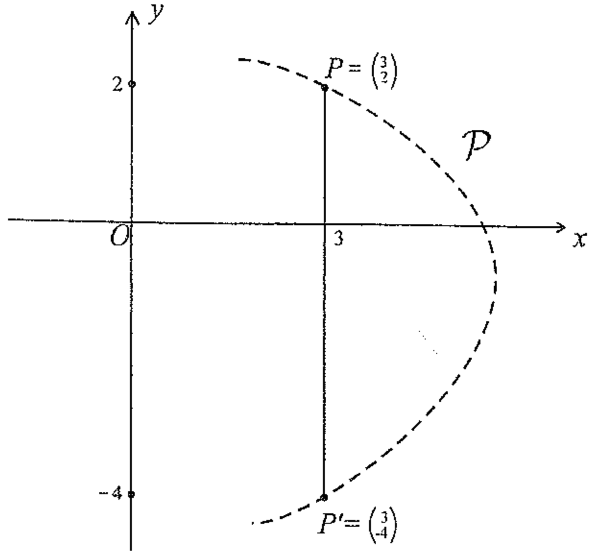


Figura 8.19.

Puesto que la parábola $\mathcal{P}$ es horizontal y abre hacia la izquierda, una ecuación para ella es

$$x - h = \frac{1}{4p}(y-k)^2 \tag{8.19}$$

donde $V = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$ es el vértice y $F = \begin{pmatrix} h+p \\ k \end{pmatrix}$ es el foco, siendo $p < 0$.

Comencemos hallando el valor de p :

$$4|p| = \text{ longitud del lado recto } = \|P - P'\| = 6$$

y puesto que $p < 0$ entonces $p = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$ (y así $4p = -6$).

Por otra parte, el foco es el punto medio del segmento $\overline{P'P}$, luego

$$F = \frac{1}{2}(P + P') = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, de la igualdad

$$F = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h+p \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h - \frac{3}{2} \\ k \end{pmatrix}$$

se obtiene $h - \frac{3}{2} = 3$ y $k = -1$, es decir, $h = \frac{9}{2}$ y $k = -1$.

Sustituyendo los valores hallados para p, h y k en (8.19), tenemos que una ecuación para la parábola $\mathcal{P}$ es

$$x - \frac{9}{2} = -\frac{1}{6}(y+1)^2. \quad \blacksquare$$

Consideremos nuevamente la ecuación (8.17). Desarrollando el cuadrado en su lado derecho obtenemos

$$y-k=\frac{1}{4p}\left(x^2-2xh+h^2\right)$$

o, equivalentemente,

$$y=\frac{1}{4p}x^2-\frac{h}{2p}x+\frac{h^2}{4p}+k.$$

Así, haciendo $a=\frac{1}{4p}$, $b=-\frac{h}{2p}$ y $c=\frac{h^2}{4p}+k$, vemos que la ecuación (8.17) toma la forma

$$y=ax^2+bx+c,\ a\neq 0. \tag{8.20}$$

Por tanto, toda parábola vertical tiene una ecuación de la forma (8.20) con $a>0$ si la parábola abre hacia arriba y $a<0$ si la parábola abre hacia abajo.

Recíprocamente, toda ecuación de la forma (8.20) representa una parábola vertical que abre hacia arriba si $a>0$ y hacia abajo si $a<0$. Ello se prueba llevando la ecuación (8.20) a la forma (8.17).

Un resultado similar se obtiene al considerar la ecuación (8.18).

Estos hechos se resumen en el siguiente cuadro.

- Toda parábola vertical tiene una ecuación de la forma
  $$y=ax^2+bx+c,\ a\neq 0$$
  con $a>0$ si la parábola abre hacia arriba y $a<0$ si la parábola abre hacia abajo. Recíprocamente, toda ecuación de la forma anterior representa una parábola vertical, la cual abre hacia arriba si $a>0$ y hacia abajo si $a<0$.

- Toda parábola horizontal tiene una ecuación de la forma
  $$x=ay^2+by+c,\ a\neq 0$$
  con $a>0$ si la parábola abre hacia la derecha y $a<0$ si la parábola abre hacia la izquierda. Recíprocamente, toda ecuación de la forma anterior representa una parábola horizontal, la cual abre hacia la derecha si $a>0$ y hacia la izquierda si $a<0$.

Ejemplo 8.9

Para cada una de las dos ecuaciones dadas a continuación, comprobar que ella representa una parábola. Determinar el vértice, el foco, la directriz y la longitud del lado recto.

a) $y=3x^2-4x+1$.

b) $6x+10y+y^2+19=0$.

Solución:

a) Para comprobar que la ecuación dada corresponde a una parábola, basta mostrar que ella es equivalente a una ecuación de la forma

$$y-k=\frac{1}{4p}\left(x-h\right)^2.$$

Para ello empezamos por escribir la ecuación dada en la forma

$$y = 3\left(x^2 - \frac{4}{3}x\right) + 1.$$

Ahora completamos el cuadrado en la variable x :

$$y = 3\left(x^2 - \frac{4}{3}x + \left(\frac{2}{3}\right)^2\right) - 3\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 1.$$

Obtenemos así

$$y = 3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{1}{3}$$

o, equivalentemente,

$$y - \left(-\frac{1}{3}\right) = 3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2.$$

Hemos mostrado así que la ecuación dada representa una parábola vertical.

De la ecuación anterior vemos que el vértice de dicha parábola es el punto $V = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$ y que el foco es el punto $F = \begin{pmatrix} h \\ k+p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -\frac{1}{3}+p \end{pmatrix}$ siendo p tal que $\frac{1}{4p} = 3$, es decir, siendo $p = \frac{1}{12}$; así el foco es el punto $F = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -\frac{1}{3}+\frac{1}{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/4 \end{pmatrix}$. En cuanto a la directriz, sabemos que ella es la recta con ecuación $y = k - p$; y como $k - p = -\frac{1}{3} - \frac{1}{12} = -\frac{5}{12}$, entonces la directriz es la recta con ecuación $y = -\frac{5}{12}$. Finalmente la longitud del lado recto es $4\,|p| = 4\left(\frac{1}{12}\right) = \frac{1}{3}$.

b) Para comprobar que la ecuación dada corresponde a una parábola, la transformaremos en una ecuación de la forma

$$x - h = \frac{1}{4p}(y - k)^2.$$

Para ello empezamos escribiendo la ecuación dada en la forma

$$6x + 19 = -\left(y^2 + 10y\right).$$

Ahora completamos el cuadrado en la variable y :

$$6x + 19 = -\left(y^2 + 10y + 25\right) + 25.$$

Obtenemos así

$$6x - 6 = -(y+5)^2$$

o, equivalentemente,

$$x - 1 = -\frac{1}{6}(y - (-5))^2.$$

Hemos mostrado así que la ecuación dada representa una parábola horizontal.

De la ecuación anterior vemos que el vértice de dicha parábola es el punto $V = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ y que el foco es el punto $F = \begin{pmatrix} h+p \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+p \\ -5 \end{pmatrix}$ siendo p tal que $\frac{1}{4p} = -\frac{1}{6}$, es decir, siendo $p = -\frac{3}{2}$; así, el foco es el punto $F = \begin{pmatrix} 1-\frac{3}{2} \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -5 \end{pmatrix}$. En cuanto a la directriz sabemos que es la recta con ecuación $x = h-p$ y como $h-p = 1+\frac{3}{2} = \frac{5}{2}$ entonces dicha directriz es la recta con ecuación $x = \frac{5}{2}$. Finalmente, la longitud del lado recto es $4|p| = 4\left(\frac{3}{2}\right) = 6$. ■

Volvamos a las ecuaciones (8.17) y (8.18)

$$y-k = \frac{1}{4p}(x-h)^2 \text{ y } x-h = \frac{1}{4p}(y-k)^2.$$

Multiplicando a ambos lados por $4p$, desarrollando luego los cuadrados y reuniendo las constantes, podemos llevar cada una de las ecuaciones anteriores a la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{8.21}$$

con $A \neq 0$ y $C = 0$ o bien $A = 0$ y $C \neq 0$.

Podemos afirmar entonces que toda parábola horizontal o vertical tiene una ecuación de la forma anterior. Ahora, si se parte de una ecuación de la forma (8.21) para una parábola dada, podemos transformarla en una ecuación de la forma (8.17) o en una de la forma (8.18), según corresponda, completando el cuadrado en la variable x si $A \neq 0$ o en la variable y si $C \neq 0$.

Es de señalar que algunas ecuaciones de la forma (8.21), con A y C como se ha indicado, no representan parábolas. Por ejemplo, la ecuación

$$x^2 - x - 6 = 0$$

es de la forma (8.21) con $A = 1$, $C = 0$, $D = -1$, $E = 0$ y $F = -6$, pero ella no representa una parábola, pues dicha ecuación es equivalente a

$$(x+2)(x-3) = 0$$

cuyo conjunto solución lo conforman los puntos $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ tales que

$$x + 2 = 0 \text{ o } x - 3 = 0$$

es decir, su conjunto solución es la unión de las rectas verticales

$$x = -2 \text{ y } x = 3.$$

Es fácil ver que los únicos casos en los cuales una ecuación de la forma (8.21), con A y C como se ha indicado, no representa una parábola son aquellos en los que ella se reduce a

$$Ax^2 + Dx + F = 0,\ A \neq 0$$

o bien a

$$Cy^2 + Ey + F = 0,\ C \neq 0.$$

En el primer caso, la ecuación representa un par de rectas paralelas al eje y (como en el ejemplo que acabamos de dar) o una sola recta paralela al eje o ningún lugar geométrico según que la ecuación $Ax^2 + Dx + F = 0$ tenga raíces reales y distintas, reales e iguales, o no reales. Algo similar ocurre con la ecuación $Cy^2 + Ey + F = 0$, $C \neq 0$.

Para terminar con la presentación de la parábola mencionaremos a continuación algunas de las aplicaciones de esta cónica.

- Cuando un objeto es lanzado cerca de la superficie terrestre, formando un ángulo no recto con la horizontal, la trayectoria que él describe es un arco de parábola, si no se tiene en cuenta la resistencia del aire. (A este hecho ya nos habíamos referido al inicio de esta sección).

- Los arcos de parábola son de uso frecuente en edificaciones y particularmente en puentes.

- Muchas otras de las aplicaciones de la parábola tienen que ver con dos hechos importantes.

  El primero de ellos es un hecho de la Física, el cual explicamos a continuación:

  Supongamos que un rayo de luz $\mathcal{L}_1$ toca una superficie S, la cual refleja la luz, en un punto P y sea $\mathcal{L}_2$ el rayo reflejado, como se muestra en la figura 8.20, en la cual η es la recta normal a la superficie S en el punto P.

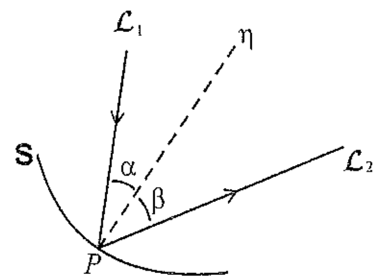


Figura 8.20.

Los ángulos α y β mostrados en la figura se llaman, respectivamente, ángulo de incidencia y ángulo de reflexión. Resulta que una ley de la Física establece que las rectas $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ y η son coplanares (están en un mismo plano) y que el ángulo de incidencia α es igual al ángulo de reflexión β.

El otro hecho es una propiedad geométrica de la parábola, la cual pasamos a explicar:

Consideremos una parábola $\mathcal{P}$ y sean Q un punto sobre ella, F su foco y η la recta normal a $\mathcal{P}$ en el punto Q (figura 8.21). Sean, además, α y β los ángulos mostrados en la figura 8.21, en la cual $\mathcal{L}'$ es una semirecta paralela al eje focal de $\mathcal{P}$. Pues bien, se puede probar que la parábola $\mathcal{P}$ tiene la propiedad de que $\alpha = \beta$.

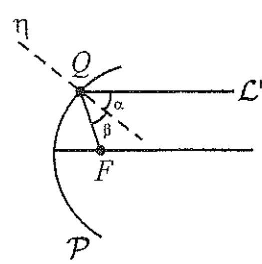


Figura 8.21.

- Los dos hechos anteriores se aplican, por ejemplo, en la construcción de reflectores parabólicos (farolas de autos, linternas, faros, etc). Tales reflectores tienen la forma de un paraboloide de revolución (superficie que se genera al rotar una parábola alrededor de su eje focal) en el cual se coloca una fuente de luz en el foco. De acuerdo con los dos hechos mencionados, todos los rayos de luz emitidos desde la fuente chocan contra la superficie del reflector y se reflejan paralelamente al eje focal, produciéndose un haz cilíndrico de luz.

  El mismo principio se aplica para telescopios. Si el eje focal del reflector parabólico es dirigido hacia una estrella, los rayos de luz provenientes de ese objeto distante llegan a la superficie del reflector paralelamente al eje focal y todos se reflejan concentrándose en el foco. Las antenas de radar, las antenas parabólicas de televisión y los micrófonos de campo abierto, también están construidos con base en el mismo principio.

8.4 La elipse

Se denomina **elipse** al conjunto de todos los puntos P del plano tales que la suma de las distancias de P a dos puntos fijos del plano F' y F es constante, siendo esa constante mayor que la distancia entre dichos puntos. Los puntos fijos F' y F son llamados **focos** de la elipse (figura 8.22).

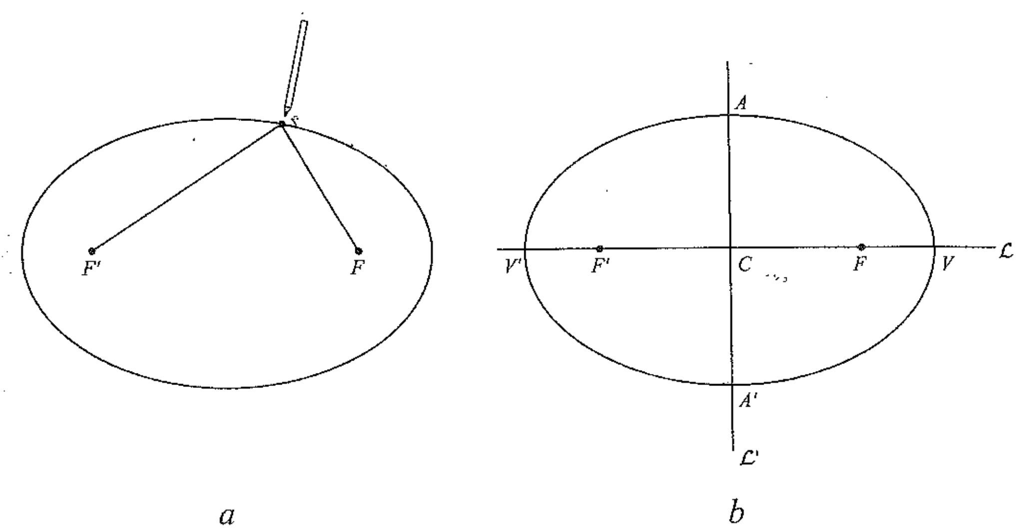


Figura 8.22.

La figura 8.22a muestra cómo se puede trazar una elipse: se elige una cuerda con longitud mayor que la distancia entre los puntos F' y F y se fijan sus extremos en estos puntos. Conforme se mueve la punta de un lápiz, manteniendo la cuerda tensa, la curva que se describe es la elipse con focos F', F y con la constante que se menciona en la definición de elipse igual a la longitud de la cuerda. Nótese que si $F' = F$, la curva resultante es una circunferencia con centro en F y radio la mitad de la longitud de la cuerda.

Consideremos ahora la figura 8.22b.

La recta $\mathcal{L}$ que pasa por los focos se llama **eje focal**, y los puntos V', V donde el eje focal corta la elipse, se llaman **vértices**.

El segmento $\overline{V'V}$ se llama **eje mayor.**

El punto C, el cual es el punto medio del segmento $\overline{F'F}$, se llama **centro.**

La recta $\mathcal{L}'$ que pasa por el centro y es perpendicular al eje focal, se llama **eje normal.**

El segmento $\overline{A'A}$, donde A' y A son los puntos de corte del eje normal con la elipse, se llama **eje menor.**

Como es de esperar, la forma más simple de una ecuación para la elipse, respecto a un sistema cartesiano xy, se obtiene cuando la elipse tiene su centro en el origen y el eje focal es alguno de los ejes coordenados.

Consideremos, por ejemplo, la elipse $\mathcal{E}$ con focos $F' = \begin{pmatrix} -c \\ 0 \end{pmatrix}$ y $F = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$, $c \geq 0$, y tal que la suma de las distancias de un punto cualquiera de la elipse a los focos F' y F es $2a$. Puesto que $2a$ debe ser mayor que la distancia $2c$ entre F' y F entonces se tiene que $a > c$. Nótese que la elipse $\mathcal{E}$ tiene centro en el origen y su eje focal es el eje x (figura 8.23).

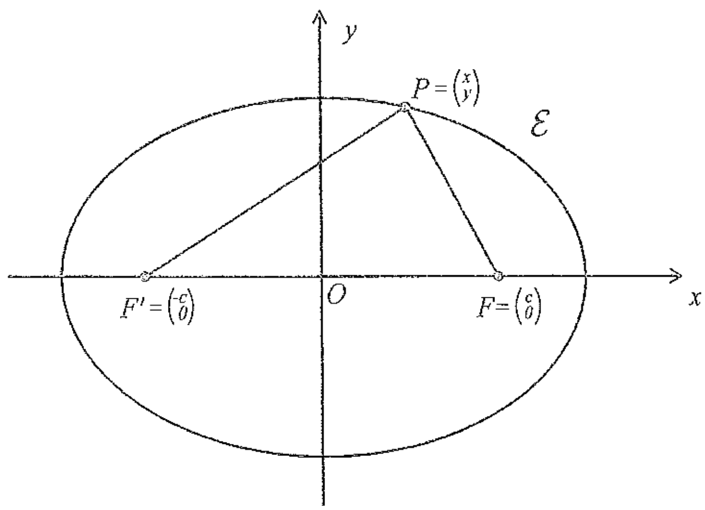


Figura 8.23.

En las condiciones anteriores, un punto $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ está sobre la elipse $\mathcal{E}$ si y sólo si

$$\|P - F'\| + \|P - F\| = 2a$$

es decir,

$$\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -c \\ 0 \end{pmatrix} \right\| + \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = 2a \tag{8.22}$$

o equivalentemente,

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

Para simplificar esta ecuación, pasamos el segundo radical al lado derecho, luego elevamos ambos lados al cuadrado, simplificamos y agrupamos términos semejantes. Se obtiene

$$\left(a^2 - c^2\right) x^2 + a^2 y^2 = a^2 \left(a^2 - c^2\right). \tag{8.23}$$

Ahora, como $a > c$ entonces $a^2 - c^2 > 0$. Introduciendo el número b, $b > 0$, tal que $b^2 = a^2 - c^2$, la ecuación (8.23) toma la forma más simple

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Finalmente, dividiendo a ambos lados por a^2b^2, se obtiene

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{8.24}$$

Por el momento tenemos que todo punto $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ sobre la elipse $\mathcal{E}$, satisface la ecuación (8.24). Recíprocamente, todo punto $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ que satisfaga dicha ecuación (8.24) está sobre la elipse $\mathcal{E}$, lo cual puede ser comprobado por el lector reversando los pasos que condujeron de la ecuación (8.22) a la ecuación (8.24). Sólo hay que tener cuidado con las raíces cuadradas que aparecen en este proceso. Así, (8.24) es una ecuación para la elipse $\mathcal{E}$.

De la ecuación (8.24) se ve que la elipse $\mathcal{E}$ es simétrica respecto al eje focal (el eje x) pues por cada punto $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ que satisface dicha ecuación, el punto $\begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$ también la satisface. De manera similar, de la ecuación (8.24) se ve que la elipse $\mathcal{E}$ es simétrica respecto al eje normal (el eje y). De estas dos simetrías se sigue que la elipse $\mathcal{E}$ también es simétrica respecto a su centro (el origen).

Si $y = 0$ en (8.24) entonces $\dfrac{x^2}{a^2} = 1$, es decir, $x^2 = a^2$ y por tanto $x = \pm a$, luego los vértices de $\mathcal{E}$ son los puntos $V' = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \end{pmatrix}$ y $V = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$. Así, la longitud $\|V - V'\|$ del eje mayor es $2a$ y por tanto el número a en la ecuación (8.24) es la mitad de la longitud del eje mayor, como también la distancia del centro a cada uno de los vértices.

Similarmente, si $x = 0$ en (8.24) entonces $\dfrac{y^2}{b^2} = 1$, es decir, $y^2 = b^2$ y por tanto $y = \pm b$. Luego los extremos del eje menor son los puntos $A = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$ y $A' = \begin{pmatrix} 0 \\ -b \end{pmatrix}$. Así, la longitud $\|A - A'\|$ del eje menor es $2b$ y por tanto, el número b en la ecuación (8.24) es la mitad de la longitud del eje menor, como también la distancia del centro a cada uno de los extremos del eje menor.

Nótese que en la ecuación (8.24), $b \leq a$ pues $b^2 = a^2 - c^2$.

Por último, de la ecuación (8.24) se puede obtener los focos de la elipse. En efecto, dichos focos son los puntos $F' = \begin{pmatrix} -c \\ 0 \end{pmatrix}$ y $F = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$ donde $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Los hechos anteriores se ilustran en la figura 8.24.

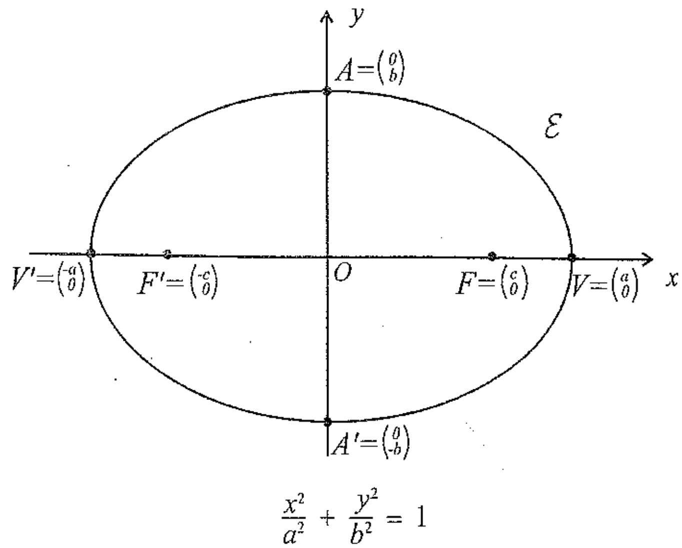


Figura 8.24.

Supongamos que se mantiene fijo el número a (la mitad de la longitud del eje mayor). Nótese que:

- Si los focos se acercan más y más (es decir, c tiende a 0), el número b tiende al número a $\left(\text{pues } b=\sqrt{a^2-c^2}\right)$ y la elipse se parece cada vez más a una circunferencia; de hecho se convierte en una circunferencia cuando $F'=F$ (es decir, cuando $c=0$).
- Si los focos se alejan más y más (es decir, c tiende al número a), el número b tiende a 0 y la elipse se va achatando cada vez más; de hecho se convierte en un segmento de recta cuando $F=V$ (es decir, cuando $c=a$). Es de señalar que este caso extremo no está contemplado en la definición de elipse.

De manera que la apariencia o forma de la elipse está asociada con la razón $\frac{c}{a}$, la cual se llama **excentricidad** de la elipse; la denotaremos mediante la letra e. Se tiene entonces que $e=\frac{c}{a}$ y como $0\le c<a$ entonces $0\le e<1$. Si e es próxima a 0, pero $e\neq 0$, la elipse parece una circunferencia; si $e=0$, la elipse es una circunferencia. Si e es próxima a 1, la elipse se asemeja a un segmento de recta.

En la discusión anterior la elipse $\mathcal{E}$ tiene sus focos en los puntos $F'=\begin{pmatrix}-c\\0\end{pmatrix}$ y $F=\begin{pmatrix}c\\0\end{pmatrix}$, $c\ge 0$, y la constante que se menciona en la definición de elipse igual a $2a$. Si dicha constante continúa siendo $2a$, pero ahora los focos son los puntos $F'=\begin{pmatrix}0\\-c\end{pmatrix}$ y $F=\begin{pmatrix}0\\c\end{pmatrix}$, $c\ge 0$, entonces la elipse tiene como eje focal el eje y y se intercambian los papeles de x y y. En tal caso, una ecuación para la elipse es (vea (8.24))

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1 \tag{8.25}$$

donde b es, como en (8.24), el número positivo tal que $b^2=a^2-c^2$.

En la ecuación (8.25) el número a sigue siendo la distancia del centro a los vértices, los cuales son ahora los puntos $V'=\begin{pmatrix}0\\-a\end{pmatrix}$ y $V=\begin{pmatrix}0\\a\end{pmatrix}$; el número b también sigue siendo la distancia del centro a los extremos del eje menor, los cuales son ahora los puntos $A' = \begin{pmatrix} -b \\ 0 \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$ (figura 8.25). Nótese que se mantiene la relación entre los números a, b y c. La excentricidad sigue siendo $e = \dfrac{c}{a}$.

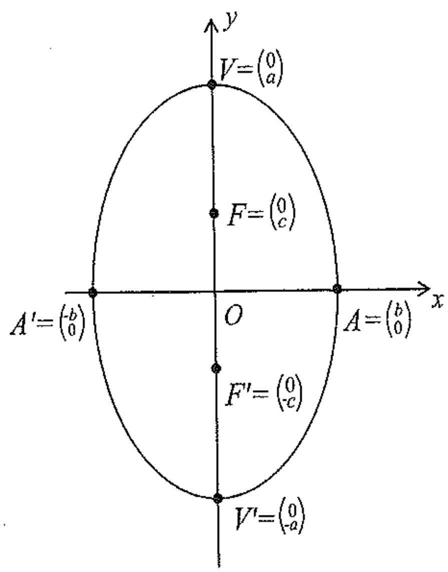


Figura 8.25.

Las ecuaciones (8.24) y (8.25) son las ecuaciones más simples para la elipse, por tal razón se les llama **formas canónicas** para la ecuación de la elipse.

Es importante tener presente que en cualquiera de las dos ecuaciones (8.24) y (8.25), $a^2 > b^2$ y que a^2 es el denominador de la variable asociada con el eje focal. Por ejemplo,

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

es de la forma (8.25) con $a^2 = 9$ y $b^2 = 4$, por tanto corresponde a una elipse con centro en el origen y eje focal el eje y. Mientras que

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

es de la forma (8.24), con $a^2 = 25$ y $b^2 = 16$, por tanto corresponde a una elipse con centro en el origen y eje focal el eje x.

Resaltamos a continuación lo básico de la discusión anterior.

Sea $\mathcal{E}$ una elipse con focos F' y F tal que la suma de las distancias de cada uno de sus puntos a los focos es la constante $2a$.

- Si $F' = \begin{pmatrix} -c \\ 0 \end{pmatrix}$ y $F = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$, $0 \le c < a$ entonces una ecuación para la elipse $\mathcal{E}$ es
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$
donde b es el número positivo tal que $b^2 = a^2 - c^2$.

- Si $F' = \begin{pmatrix} 0 \\ -c \end{pmatrix}$ y $F = \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}$, $0 \le c < a$ entonces una ecuación para la elipse $\mathcal{E}$ es
$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$$
donde b es el número positivo tal que $b^2 = a^2 - c^2$.

Ejemplo 8.10

Halle una ecuación para cada una de las siguientes elipses $\mathcal{E}$.

a) La elipse $\mathcal{E}$ tiene vértices $V' = \begin{pmatrix} -7/2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 7/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ y uno de sus focos es $F = \begin{pmatrix} \sqrt{13}/2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) La elipse $\mathcal{E}$ tiene centro en el origen, sus focos en el eje y, la longitud del eje mayor es tres veces la del eje menor y pasa por el punto $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Solución:

a) Como la elipse $\mathcal{E}$ tiene sus vértices sobre el eje x, entonces su eje focal es el eje x. Además, como el centro de la elipse es el punto medio del segmento $\overline{V'V}$, y este punto medio es $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, entonces $\mathcal{E}$ tiene su centro en el origen. Así, $\mathcal{E}$ tiene una ecuación de la forma
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Sólo resta determinar el valor de las constantes a y b.

En primer lugar, como a es la distancia del centro a cualquiera de los vértices, entonces $a = \left\| V - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \frac{7}{2}$. Por otra parte, $b^2 = a^2 - c^2$ donde c es la distancia del centro al foco F, y como esta distancia es $c = \left\| F - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \frac{\sqrt{13}}{2}$, entonces
$$b^2 = \left(\frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2 = \frac{49}{4} - \frac{13}{4} = \frac{36}{4} = 9.$$

Por tanto una ecuación para la elipse $\mathcal{E}$ es
$$\frac{x^2}{\frac{49}{4}} + \frac{y^2}{9} = 1$$

o, equivalentemente,

$$\frac{4x^2}{49} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

En la figura 8.26 se muestra la elipse $\mathcal{E}$.

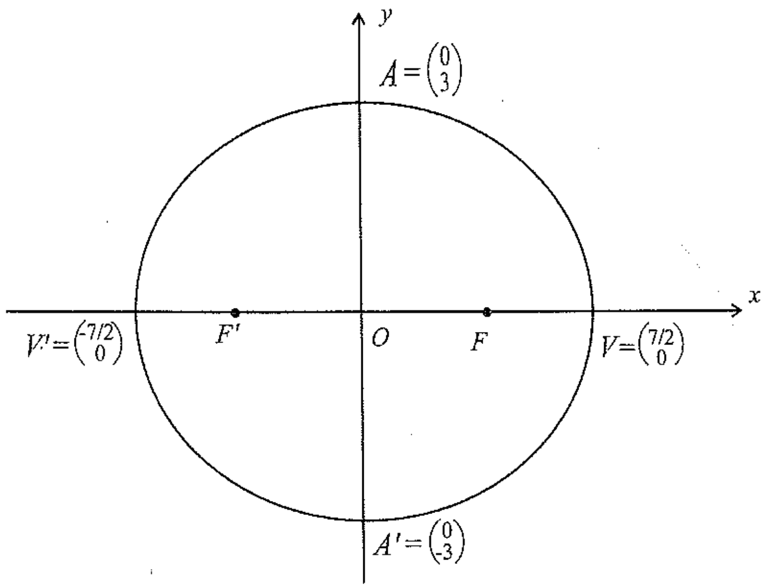


Figura 8.26.

b) Como la elipse $\mathcal{E}$ tiene centro en el origen y su eje focal es el eje y, entonces $\mathcal{E}$ tiene una ecuación de la forma

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$$

en la cual a es la mitad de la longitud del eje mayor y b la mitad de la longitud del eje menor.

Hallemos los valores de las constantes a y b :

Como la longitud del eje mayor es tres veces la longitud del eje menor entonces $2a = 3(2b)$, es decir, $a = 3b$.

Ahora, como $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ es un punto sobre la elipse $\mathcal{E}$ entonces dicho punto satisface la ecuación de $\mathcal{E}$ y por tanto

$$\frac{4^2}{9b^2} + \frac{1^2}{b^2} = 1$$

de donde $\dfrac{16+9}{9b^2} = 1$ o sea $b^2 = \dfrac{25}{9}$. Además, $a^2 = (3b)^2 = 9b^2 = 25$.

Así, una ecuación para la elipse $\mathcal{E}$ es

$$\frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{\frac{25}{9}} = 1$$

o, equivalentemente,

$$\frac{9x^2}{25} + \frac{y^2}{25} = 1.$$

La elipse $\mathcal{E}$ se muestra en la figura 8.27. ■

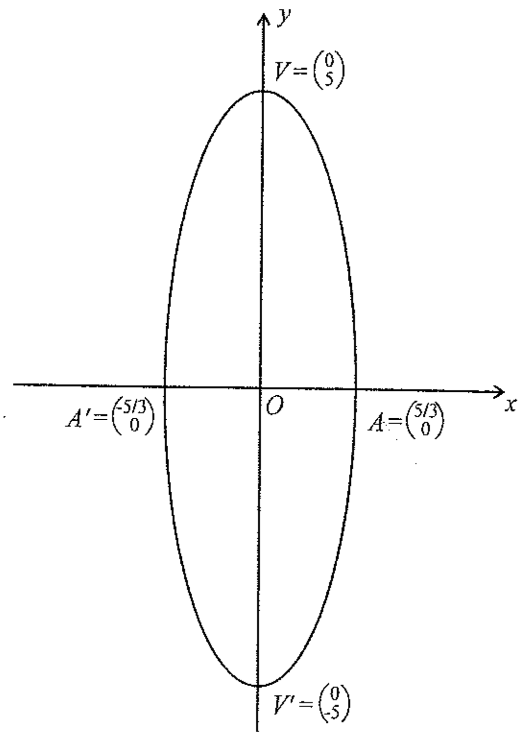


Figura 8.27.

Ejemplo 8.11

Muestre que la ecuación

$$144y^2 + 25x^2 = 225 \tag{8.26}$$

representa una elipse. Halle los focos, los vértices, los extremos del eje menor y la excentricidad de dicha elipse.

Solución:

Para mostrar que la ecuación (8.26) representa una elipse basta llevar dicha ecuación a una de las formas (8.24) o (8.25).

Comenzamos por dividir a ambos lados de (8.26) por 225, con lo cual se obtiene

$$\frac{144}{225}y^2 + \frac{25}{225}x^2 = 1$$

la cual escribiremos como

$$\frac{y^2}{\frac{225}{144}} + \frac{x^2}{\frac{225}{25}} = 1$$

que también puede escribirse como

$$\frac{y^2}{\left(\frac{5}{4}\right)^2} + \frac{x^2}{3^2} = 1 \tag{8.27}$$

ecuación que tiene la forma (8.24) con $a = 3$ y $b = \dfrac{5}{4}$.

Puesto que la ecuación (8.26) es equivalente a la ecuación (8.27) y ésta última representa una elipse, entonces la ecuación (8.26) representa una elipse, la cual tiene centro en el origen y como eje focal el eje x.

Para tal elipse se tiene que:

Los vértices son los puntos $V' = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $V = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Los extremos del eje menor son los puntos $A' = \begin{pmatrix} 0 \\ -5/4 \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 5/4 \end{pmatrix}$.

Los focos son los puntos $F' = \begin{pmatrix} -c \\ 0 \end{pmatrix}$ y $F = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$ donde

$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{9 - \frac{25}{16}} = \frac{\sqrt{119}}{4} \approx 2.73.$

Finalmente, la excentricidad es $e = \dfrac{c}{a} = \frac{\sqrt{119}}{12} \approx 0.91.$

En la figura 8.28 se muestra dicha elipse. ■

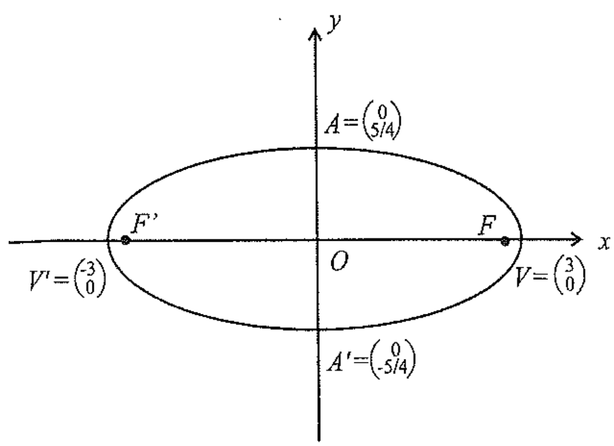


Figura 8.28.

Consideremos ahora una elipse con su centro en el punto $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$, focos $F' = \begin{pmatrix} h-c \\ k \end{pmatrix}$ y $F = \begin{pmatrix} h+c \\ k \end{pmatrix}$, $c \geq 0$, y suma constante de distancias $2a$ $(a > c)$. Nótese que el eje focal es paralelo al eje x (figura 8.29a).

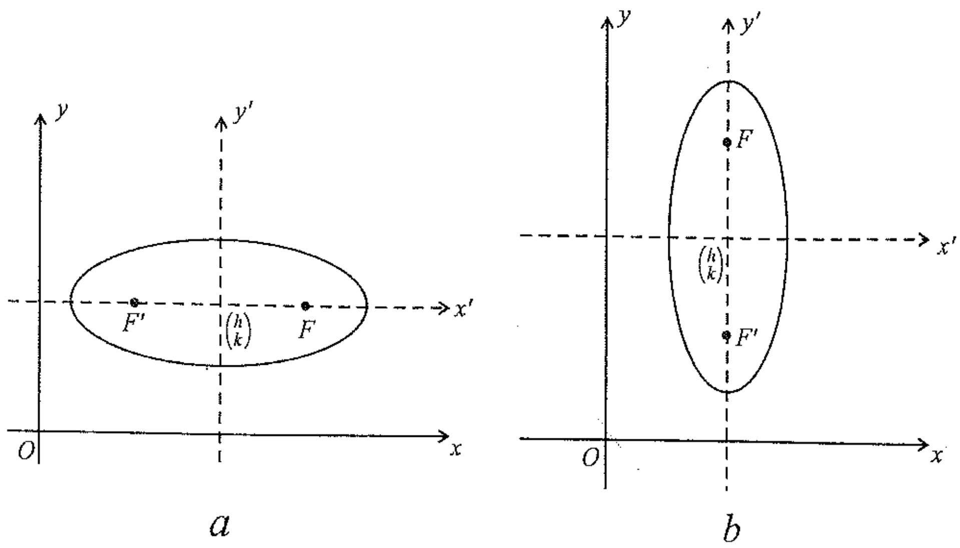


Figura 8.29.

Podemos obtener rápidamente una ecuación para dicha elipse, efectuando una traslación de ejes con el nuevo origen en el centro $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$ de la elipse. En efecto, una ecuación para la elipse, referida al nuevo sistema $x'y'$ (vea figura 8.29a) es

$$\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1$$

donde (al igual que en la ecuación (8.24)) b es el número positivo tal que $b^2 = a^2 - c^2$.

La sustitución $x' = x - h$, $y' = y - k$ en la ecuación anterior, nos lleva de inmediato a la ecuación

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \tag{8.28}$$

para la elipse en consideración, referida al sistema original xy.

De manera similar, si la elipse mantiene su centro en el punto $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$ y también la suma constante de distancias $2a$, pero ahora sus focos son los puntos $F' = \begin{pmatrix} h \\ k-c \end{pmatrix}$ y $F = \begin{pmatrix} h \\ k+c \end{pmatrix}$, $c \geq 0$ (figura 8.29b) entonces una ecuación para dicha elipse es

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1 \tag{8.29}$$

donde nuevamente b es el número positivo tal que $b^2 = a^2 - c^2$.

Es claro que en las ecuaciones (8.28) y (8.29) los números a y b tiene exactamente el mismo significado que en las ecuaciones (8.24) y (8.25).

Una elipse cuyo eje focal coincide con el eje x o es paralelo a este eje se dirá **horizontal**; si el eje focal coincide con el eje y o es paralelo a este eje, la elipse se dirá **vertical**.

Tenemos así lo siguiente.

Consideremos una elipse con centro en el punto $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$, la distancia entre los focos $2c$ $(c \geq 0)$ y con la constante mencionada en la definición de elipse igual a $2a$ $(a > c)$.

- Si la elipse es horizontal, una ecuación para ella es
$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$
donde b es el número positivo tal que $b^2 = a^2 - c^2$.
- Si la elipse es vertical, una ecuación para ella es
$$\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$
donde b es el número positivo tal que $b^2 = a^2 - c^2$.

Ejemplo 8.12

Halle una ecuación para cada una de las siguientes elipses $\mathcal{E}$.

a) La elipse $\mathcal{E}$ tiene focos $F' = \begin{pmatrix} -3-\sqrt{19} \\ 2 \end{pmatrix}$ y $F = \begin{pmatrix} -3+\sqrt{19} \\ 2 \end{pmatrix}$ y la suma de las distancias de cada punto de $\mathcal{E}$ a los focos es 16.

b) La elipse $\mathcal{E}$ tiene excentricidad $\frac{1}{2}$, centro en $C = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, el eje focal es la recta $x = -3$ y pasa por el punto $P = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Solución:

a) Como el eje focal de la elipse $\mathcal{E}$ es paralelo al eje x, entonces la elipse $\mathcal{E}$ es horizontal y por tanto una ecuación para ella es de la forma (8.28)

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1.$$

Procedemos a hallar el centro $C = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$ y el valor de las constantes a y b :

El centro es el punto medio del segmento $\overline{F'F}$, así

$$C = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(F' + F) = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Por otra parte, $2a = 16$ y por tanto $a = 8$. Finalmente, $b^2 = a^2 - c^2$, donde c es la distancia del centro a cualquiera de los focos; como esta distancia es $\|F - C\| = \sqrt{19}$ entonces $c = \sqrt{19}$ y así

$$b^2 = 8^2 - \left(\sqrt{19}\right)^2 = 64 - 19 = 45.$$

Por tanto, una ecuación para la elipse $\mathcal{E}$ es

$$\frac{(x+3)^2}{64} + \frac{(y-2)^2}{45} = 1.$$

La elipse $\mathcal{E}$ se muestra en el figura 8.30.

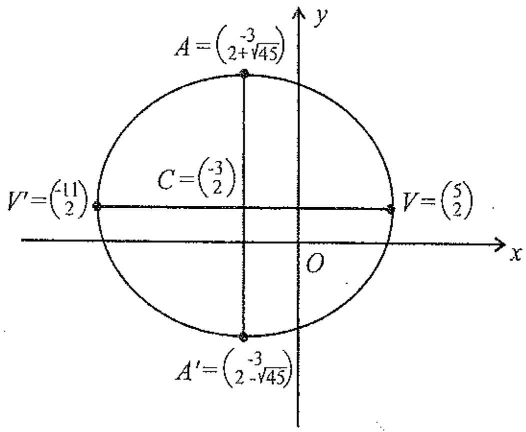


Figura 8.30.

b) Como el eje focal es paralelo al eje y, la elipse $\mathcal{E}$ es vertical y como el centro es el punto $C = \begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$ entonces una ecuación para $\mathcal{E}$ es

$$\frac{(y-2)^2}{a^2} + \frac{(x+3)^2}{b^2} = 1 \tag{8.30}$$

donde a es la mitad de la longitud del eje mayor y b la mitad de la longitud del eje menor. Hallemos los valores de dichas constantes a y b :

Puesto que la excentricidad de la elipse es $e = \dfrac{1}{2}$ y dado que $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$, tenemos que

$$\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} = \frac{1}{2}.$$

Elevando ambos lados al cuadrado y simplificando esta igualdad se transforma en

$$a^2 = \frac{4}{3}b^2. \tag{8.31}$$

Por otra parte, como el punto $P = \begin{pmatrix}-1\\6\end{pmatrix}$ está sobre la elipse, entonces él satisface la ecuación (8.30); tenemos así que

$$\frac{(6-2)^2}{a^2} + \frac{(-1+3)^2}{b^2} = 1$$

es decir,

$$\frac{16}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1. \tag{8.32}$$

Sustituyendo en esta ecuación a^2 por $\dfrac{4}{3}b^2$ (de acuerdo con la relación (8.31)) se obtiene

$$\frac{12}{b^2} + \frac{4}{b^2} = 1$$

de donde $b^2 = 16$. Se sigue (vea la relación (8.31)) que

$$a^2 = \left(\frac{4}{3}\right)(16) = \frac{64}{3}.$$

Así, una ecuación para la elipse $\mathcal{E}$ es

$$\frac{(y-2)^2}{\frac{64}{3}} + \frac{(x+3)^2}{16} = 1$$

o, equivalentemente,

$$\frac{3\,(y-2)^2}{64} + \frac{(x+3)^2}{16} = 1.$$

En la figura 8.31 se muestra la elipse $\mathcal{E}$; la mitad de la longitud del eje mayor es $a = \sqrt{\frac{64}{3}} \approx 4.6$ y la mitad de la longitud del eje menor es $b = \sqrt{16} = 4$. ■

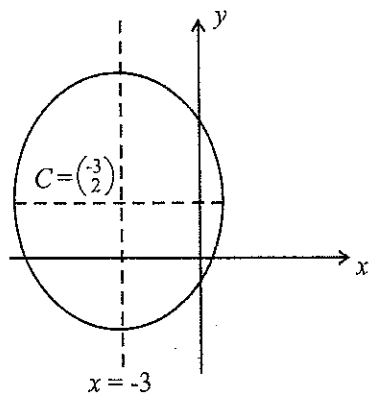


Figura 8.31.

Consideremos nuevamente las ecuaciones (8.28) y (8.29)

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \qquad \text{y} \qquad \frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1.$$

Multiplicando por a^2b^2 a ambos lados, desarrollando los cuadrados y reuniendo las constantes al lado izquierdo, cada una de estas ecuaciones se puede llevar a la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{8.33}$$

donde las constantes A y C son no nulas y del mismo signo.

Así, toda elipse horizontal o vertical tiene una ecuación de la forma (8.33), con A y C como se ha indicado. Ahora, si partimos de una ecuación de la forma (8.33) para una elipse dada, podemos llevarla a la forma (8.28) o a la forma (8.29) según corresponda, completando los cuadrados en las variables x y y, como se ilustra en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 8.13

Compruebe que la ecuación

$$16x^2 + 324y^2 + 64x - 2592y + 4672 = 0 \tag{8.34}$$

representa una elipse. Halle el centro, los focos, los vértices, los extremos del eje menor y la excentricidad de dicha elipse.

Solución:

Escribimos la ecuación (8.34) en la forma

$$16\left(x^2+4x\right)+324\left(y^2-8y\right)=-4672.$$

Completando los cuadrados en las variables x y y obtenemos

$$16\left(x^2+4x+4\right)+324\left(y^2-8y+16\right)=-4672+64+5184$$

es decir,

$$16\left(x+2\right)^2+324\left(y-4\right)^2=576.$$

Dividiendo a ambos lados de esta ecuación por 576 y simplificando nos queda

$$\frac{(x+2)^2}{36}+\frac{9\,(y-4)^2}{16}=1$$

o, equivalentemente,

$$\frac{(x+2)^2}{36}+\frac{(y-4)^2}{\frac{16}{9}}=1. \qquad (8.35)$$

Esta ecuación (8.35) es de la forma (8.28) con $a=6$ y $b=\frac{4}{3}$, por tanto corresponde a una elipse. Puesto que la ecuación (8.34) es equivalente a la ecuación (8.35) entonces la ecuación (8.34) representa una elipse.

Para tal elipse, la cual es horizontal, se tiene que:

El centro es el punto $C=\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$.

Los vértices son los puntos

$$V'=\begin{pmatrix}h-a\\k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2-6\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8\\4\end{pmatrix} \text{ y } V=\begin{pmatrix}h+a\\k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2+6\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}.$$

Los focos son los puntos

$$F'=\begin{pmatrix}h-c\\k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2-c\\4\end{pmatrix} \text{ y } F=\begin{pmatrix}h+c\\k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2+c\\4\end{pmatrix}$$

donde

$$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{36-\frac{16}{9}}=\frac{\sqrt{308}}{3}.$$

Los extremos del eje menor son los puntos

$$A'=\begin{pmatrix}h\\k-b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\4-\frac{4}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\\frac{8}{3}\end{pmatrix} \text{ y } A=\begin{pmatrix}h\\k+b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\4+\frac{4}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\\frac{16}{3}\end{pmatrix}.$$

La excentricidad es

$$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{308}}{(3)\,(6)}=\frac{\sqrt{308}}{18}\approx 0.97.$$

En la figura 8.32 se muestra dicha elipse. ■

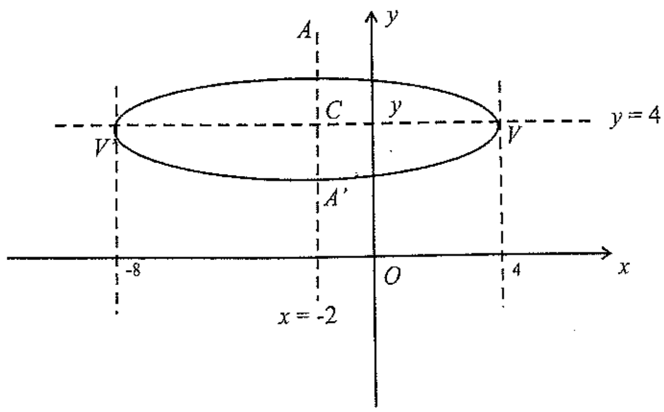


Figura 8.32.

Se advierte al lector que algunas ecuaciones de la forma (8.33), con A y C no nulos y del mismo signo, no representan elipses, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 8.14

a) Consideremos la ecuación

$$9x^2 + 5y^2 - 36x + 10y + 41 = 0.$$

Luego de completar los cuadrados en x y y, esta ecuación se convierte en

$$9\,(x-2)^2 + 5\,(y+1)^2 = 0.$$

Por tanto, la ecuación dada no representa una elipse y el único punto que la satisface es $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

b) Consideremos ahora la ecuación

$$9x^2 + 5y^2 - 36x + 10y + 45 = 0.$$

Luego de completar los cuadrados en x y y, esta ecuación se convierte en

$$9\,(x-2)^2 + 5\,(y+1)^2 = -4.$$

Luego, ningún punto $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ satisface la ecuación dada. ∎

Se puede probar que cuando una ecuación del tipo (8.33), con A y C no nulos y del mismo signo, no representa una elipse, ella representa un único punto o no representa ningún lugar geométrico, es decir, ningún punto $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ la satisface.

Finalizamos la presentación de la elipse mencionando algunas de las aplicaciones de esta cónica.

- Es bien conocido que los planetas en el sistema solar describen órbitas elípticas en su movimiento alrededor del sol, con éste en uno de los focos. De la misma forma, la trayectoria de la luna alrededor de la tierra es una elipse, con la tierra en uno de los focos. Las excentricidades de las órbitas de la tierra respecto al sol y de la luna respecto a la tierra son, respectivamente, 0.017 y 0.056 aproximadamente. El hecho de que estas excentricidades sean tan cercanas a cero indica que dichas órbitas son casi circulares.

- La elipse también se usa en construcción de edificios, puentes y en engranajes para maquinarias.

- La elipse goza, como la parábola, de una importante propiedad geométrica, a saber:

  Si P es un punto cualquiera de la elipse y η es la recta normal a la elipse en el punto P, entonces los ángulos α y β mostrados en la figura 8.33 son iguales.

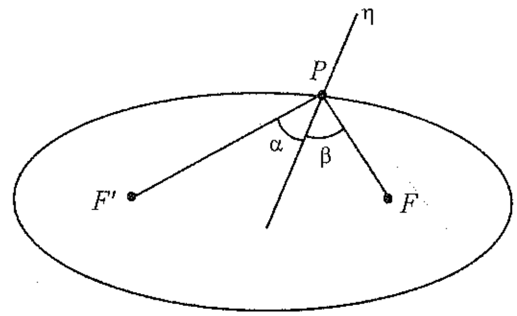


Figura 8.33.

Consideremos ahora un reflector elíptico, el cual tiene forma de un elipsoide de revolución obtenido al rotar una elipse con focos F' y F, alrededor de su eje focal. Supongamos que un rayo de luz emitido desde una fuente luminosa ubicada en el foco F' toca la superficie reflectora en un punto P, siendo α su ángulo de incidencia. Sabemos que dicho rayo se refleja de tal modo que el ángulo de reflexión es igual al ángulo de incidencia. Así, según la propiedad antes mencionada de la elipse, dicho rayo de luz se reflejará pasando por el foco F. En forma similar, lo que ocurre con la luz ocurre con el sonido: una onda sonora originada en uno de los focos, al chocar con la superficie reflectora elíptica, se refleja pasando por el otro foco. Dos aplicaciones de este hecho son las "galerías de susurros" y la "litotripsia".

En las galerías de susurros, un sonido originado en uno de los focos del recinto elíptico, no importa que tan débil sea dicho sonido, se escucha claramente en el otro foco. Por otra parte, la litotripsia es un procedimiento muy reciente para la destrucción de cálculos renales, el cual consiste en lo siguiente: se coloca un reflector elíptico con el cálculo en uno de los focos y en el otro una fuente emisora de ondas sonoras de alta intensidad, las cuales al chocar contra la superficie se reflejan convergiendo exactamente en el cálculo renal, produciendo su destrucción y sin afectar en el riñón la zona circundante al cálculo.

8.5 La hipérbola

La hipérbola es una cónica cuya definición es similar en muchos aspectos a la de la elipse. Veámosla:

Se denomina **hipérbola** al conjunto de todos los puntos P del plano tales que el valor absoluto de la diferencia de las distancias de P a dos puntos fijos del plano F' y F es constante, y esa constante es positiva y menor que la distancia entre estos puntos. Los puntos F' y F se llaman **focos** de la hipérbola.

Denotando $2a$ la constante mencionada en la definición anterior (como lo hicimos para la correspondiente constante en la definición de elipse) tenemos que la hipérbola consta de todos los puntos P del plano tales que

$$\left| \left\| \overrightarrow{PF'} \right\| - \left\| \overrightarrow{PF} \right\| \right| = 2a$$

es decir,

$$\left\| \overrightarrow{PF'} \right\| - \left\| \overrightarrow{PF} \right\| = 2a \qquad \text{o} \qquad \left\| \overrightarrow{PF'} \right\| - \left\| \overrightarrow{PF} \right\| = -2a$$

o, equivalentemente,

$$\left\| \overrightarrow{PF'} \right\| - \left\| \overrightarrow{PF} \right\| = 2a \qquad \text{o} \qquad \left\| \overrightarrow{PF} \right\| - \left\| \overrightarrow{PF'} \right\| = 2a. \tag{8.36}$$

A continuación indicamos una manera de obtener, con regla y compás, puntos P de la hipérbola que cumplen la primera de las condiciones en (8.36).

Se fijan los focos F', F y se determina el punto medio C del segmento $\overline{F'F}$. Luego, a cada lado de C se toman puntos V' y V a una distancia a de C, como se muestra en la figura 8.34.

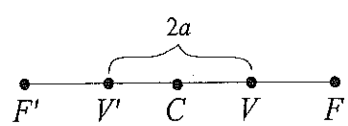


Figura 8.34.

Es claro que V cumple la primera de las condiciones en (8.36), es decir, $\left\| \overrightarrow{VF'} \right\| - \left\| \overrightarrow{VF} \right\| = 2a$; así que V es un punto de la hipérbola. (Igualmente V' cumple la segunda de las condiciones en (8.36) y por ello V' también es un punto de la hipérbola).

Se toma ahora un punto X a la derecha del foco F y sobre la recta que pasa por F' y F. Con centro en el foco F' y radio la distancia entre X y V' se traza un arco de circunferencia como se muestra en la figura 8.35. Por último, con centro en el foco F y radio la distancia entre X y V se traza media circunferencia a la izquierda de F. Los dos puntos P de corte de los arcos de circunferencia trazados (vea figura 8.35) son puntos de la hipérbola que cumplen la condición

$$\left\| \overrightarrow{PF'} \right\| - \left\| \overrightarrow{PF} \right\| = 2a$$

pues

$$\left\| \overrightarrow{PF'} \right\| = \left\| \overrightarrow{XV'} \right\|, \qquad \left\| \overrightarrow{PF} \right\| = \left\| \overrightarrow{XV} \right\| \qquad \text{y} \qquad \left\| \overrightarrow{XV'} \right\| - \left\| \overrightarrow{XV} \right\| = 2a.$$

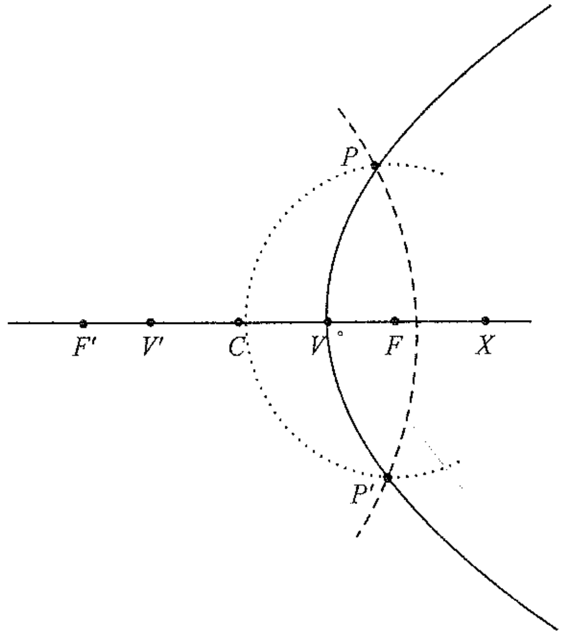


Figura 8.35.

De manera similar se obtienen puntos P que cumplen la segunda de las condiciones en (8.36), tomando el punto X a la izquierda de F' e intercambiando los papeles de F y F' y los de V y V' en el procedimiento anterior.

El aspecto de la hipérbola completa es como se muestra en la figura 8.36; las dos curvas que la conforman (correspondientes a las dos condiciones en (8.36)) son llamadas **ramas** de la hipérbola.

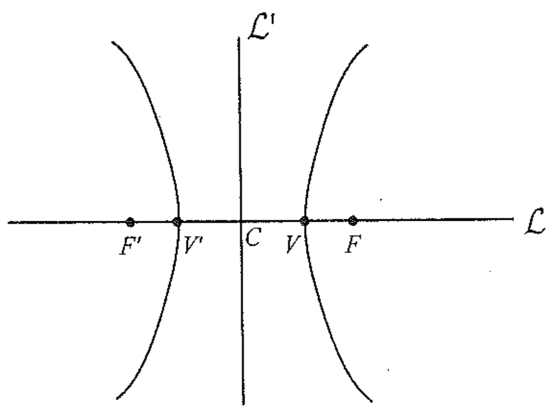


Figura 8.36.

La recta $\mathcal{L}$ que pasa por los focos se llama **eje focal**.

Los puntos V', V donde el eje focal corta la hipérbola, se llaman **vértices**.

El segmento $\overline{V'V}$ se llama **eje transverso**.

El punto C, el cual es el punto medio del segmento $\overline{V'V}$ y también del segmento $\overline{F'F}$, se llama **centro**.

La recta $\mathcal{L}'$ que pasa por el centro y es perpendicular al eje focal se llama **eje normal**.

Al igual que para la elipse, la forma más simple de una ecuación para la hipérbola se obtiene tomando los ejes coordenados de modo que el centro de la hipérbola esté en el origen y el eje focal sea alguno de los dos ejes coordenados. Consideremos, por ejemplo, la hipérbola $\mathcal{H}$, con focos $F' = \begin{pmatrix} -c \\ 0 \end{pmatrix}$ y $F = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$, $c > 0$, y tal que la constante mencionada en la definición de la hipérbola es $2a$. Puesto que $2a$ debe ser positiva y menor que la distancia $2c$ entre los focos F' y F entonces se tiene que $0 < a < c$. Nótese que la hipérbola $\mathcal{H}$ tiene su centro en el origen y su eje focal es el eje x (figura 8.37).

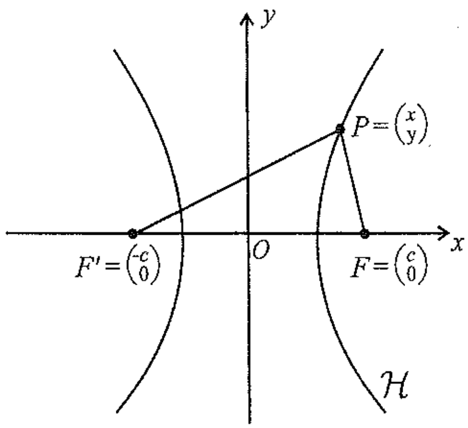


Figura 8.37.

En las condiciones anteriores un punto $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ está sobre la hipérbola $\mathcal{H}$ si y sólo si

$$\left| \|P - F'\| - \|P - F\| \right| = 2a$$

es decir,

$$\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -c \\ 0 \end{pmatrix} \right\| - \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \pm 2a$$

o, equivalentemente,

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a. \tag{8.37}$$

Los puntos $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ que satisfacen (8.37) con el signo $+$ en el lado derecho, conforman la **rama derecha**, mientras que aquellos que satisfacen (8.37) con el signo $-$, conforman la **rama izquierda.**

Siguiendo el mismo procedimiento para simplificar la ecuación similar a (8.37) en el caso de la elipse, se obtiene en primer lugar

$$\left(c^2 - a^2\right) x^2 - a^2 y^2 = a^2 \left(c^2 - a^2\right).$$

Ahora, como $c > a$ entonces $c^2 - a^2 > 0$ y así, introduciendo el número b, $b > 0$, tal que $b^2 = c^2 - a^2$, la ecuación anterior toma la forma más simple

$$b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2.$$

Finalmente, dividiendo por a^2b^2, se obtiene la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{8.38}$$

Así, todo punto $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ sobre cualquiera de las dos ramas de la hipérbola $\mathcal{H}$ satisface la ecuación (8.38). Se deja como ejercicio al lector probar que todo punto $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ que satisface la ecuación (8.38) está sobre alguna de las dos ramas de la hipérbola $\mathcal{H}$, es decir, está sobre $\mathcal{H}$. Podemos afirmar entonces que (8.38) es una ecuación para la hipérbola $\mathcal{H}$.

De la ecuación (8.38) se ve que la hipérbola $\mathcal{H}$ es simétrica respecto a su eje focal (el eje x), respecto a su eje normal (el eje y) y respecto a su centro (el origen).

Si $y = 0$ en (8.38) entonces $\frac{x^2}{a^2} = 1$, es decir, $x^2 = a^2$ y por tanto $x = \pm a$. Luego las intersecciones de $\mathcal{H}$ con el eje x, es decir los vértices de $\mathcal{H}$, son los puntos $V' = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \end{pmatrix}$ y $V = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$. Así, la longitud del eje transverso es $\|V - V'\| = 2a$ y por tanto el número a en la ecuación (8.38) es la mitad de la longitud del eje transverso o también la distancia del centro a cualquiera de los vértices.

Nótese que la ecuación (8.38) confirma que la hipérbola no corta su eje normal (el eje y), pues con $x = 0$ en (8.38) se obtiene $-\frac{y^2}{b^2} = 1$ y no existe $y \in \mathbb{R}$ que satisfaga esta ecuación.

El segmento $\overline{A'A}$ con $A' = \begin{pmatrix} 0 \\ -b \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$ (análogo al eje menor en la elipse) se llama **eje conjugado** de la hipérbola; su longitud es $\|A - A'\| = 2b$. Así, el número b en (8.38) es la mitad de la longitud del eje conjugado.

De la ecuación (8.38) se pueden obtener los focos de la hipérbola $\mathcal{H}$, pues dichos focos son los puntos $F' = \begin{pmatrix} -c \\ 0 \end{pmatrix}$ y $F = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$ con $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Consideremos ahora la parte de la hipérbola en el primer cuadrante. Despejando y en (8.38) se obtiene, para este caso,

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \quad , \qquad\qquad x \geq a.$$

Obsérvese que cuando $x = a$, $y = 0$ y que si x crece, y también crece, lo cual está de acuerdo con la forma de la curva en la figura 8.37. Pero hay algo más: cuando x es muy grande (comparado con a), $\sqrt{x^2 - a^2}$ es muy cercano (aunque menor) a $\sqrt{x^2}$, y como $\sqrt{x^2} = x$ (pues $x > 0$) entonces $\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ es muy cercano a $\frac{b}{a}x$. Se puede probar que para $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$, la diferencia $\frac{b}{a}x - y$ tiende a 0 (manteniéndose positiva) cuando $x \to \infty$. Así, la recta $y = \frac{b}{a}x$ es una asíntota de la hipérbola $\mathcal{H}$ para $x > 0$ (figura 8.38).

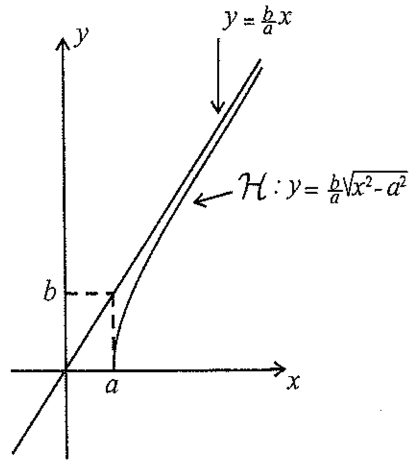


Figura 8.38.

Dada la simetría de la hipérbola, lo anterior se extiende a los otros cuadrantes.

En la figura 8.39 se muestra la hipérbola completa, los números a y b que aparecen en la ecuación (8.38) y las asíntotas.

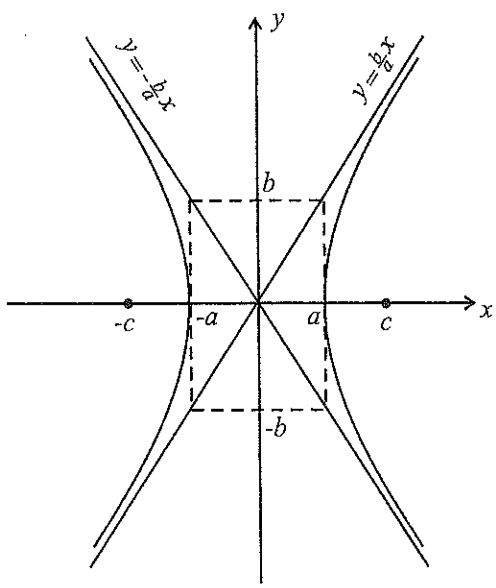


Figura 8.39.

Cuando las asíntotas forman ángulos rectos en su punto de corte, la hipérbola se dice **rectangular**. Ello ocurre cuando las pendientes $\frac{b}{a}$ y $-\frac{b}{a}$ de las asíntotas cumplen la condición

$$\left(\frac{b}{a}\right)\left(-\frac{b}{a}\right) = -1$$

es decir, $b^2 = a^2$ o sea $a = b$. En tal caso el rectángulo que se muestra en la figura 8.39 es un cuadrado y los ejes transverso y conjugado tiene la misma longitud. Por tal razón la hipérbola también se dice **equilátera** en este caso.

Así, la ecuación (8.38) con $a = b$, es decir, la ecuación

$$x^2 - y^2 = a^2$$

corresponde a una hipérbola rectangular o equilátera, con vértices $V' = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \end{pmatrix}$ y $V = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$.

En la discusión anterior la hipérbola $\mathcal{H}$ tiene sus focos en los puntos $F' = \begin{pmatrix} -c \\ 0 \end{pmatrix}$ y $F = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$, $c > 0$, y la constante que se menciona en la definición de hipérbola igual a $2a$. Si dicha constante continúa siendo $2a$, pero ahora los focos son los puntos $F' = \begin{pmatrix} 0 \\ -c \end{pmatrix}$ y $F = \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}$, $c > 0$, entonces la hipérbola tiene todavía su centro en el origen pero su eje focal es el eje y y se intercambian los papeles de x y y. En tal caso una ecuación para la hipérbola es

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \tag{8.39}$$

donde b es, nuevamente, aquel número positivo tal que $b^2 = c^2 - a^2$. La distancia del centro a los vértices $\left(\text{los cuales son ahora los puntos } V' = \begin{pmatrix} 0 \\ -a \end{pmatrix} \text{ y } V = \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}\right)$ sigue siendo a, y así $2a$ sigue siendo la longitud del eje transverso; igualmente, $2b$ sigue siendo la longitud del eje conjugado. Pero las asíntotas son ahora las rectas $y = \frac{a}{b}x$ y $y = -\frac{a}{b}x$ (figura 8.40).

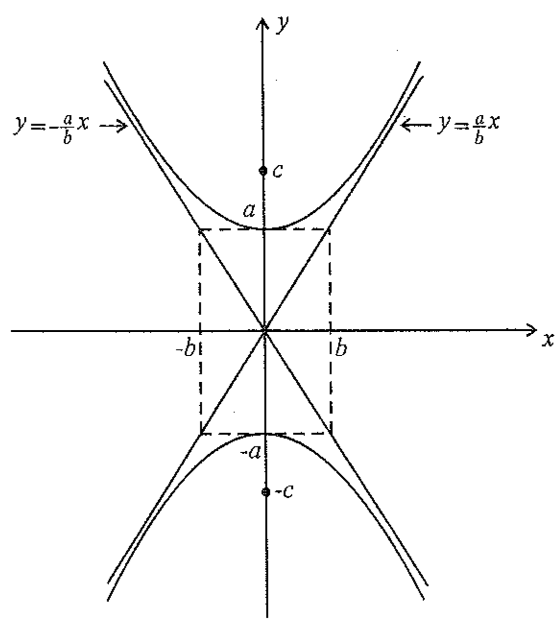


Figura 8.40.

Las ecuaciones (8.38) y (8.39) son las ecuaciones más simples para la hipérbola, por ello se les llama **formas canónicas** para la ecuación de la hipérbola.

En cualquiera de los casos tratados, la **excentricidad** de la hipérbola se define como $e = \frac{c}{a}$; puesto que $0 < a < c$ entonces $e > 1$, mientras que para la elipse $0 \leq e < 1$.

Recogemos a continuación lo básico de la discusión anterior.

- Una ecuación para la hipérbola con focos $F' = \begin{pmatrix} -c \\ 0 \end{pmatrix}$ y $F = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$, $c > 0$, y con la constante que se menciona en la definición de hipérbola igual a $2a$ $(0 < a < c)$ es
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$
donde b es el número positivo tal que $b^2 = c^2 - a^2$.

Las asíntotas de esta hipérbola son las rectas
$$y = \frac{b}{a}x \qquad \text{y} \qquad y = -\frac{b}{a}x$$
las cuales conforman el conjunto solución de la ecuación
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0, \text{ es decir, de } \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 0.$$

- Una ecuación para la hipérbola con focos $F' = \begin{pmatrix} 0 \\ -c \end{pmatrix}$ y $F = \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}$, $c > 0$, y con la constante que se menciona en la definición de hipérbola igual a $2a$ $(0 < a < c)$ es
$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$
donde b es el número positivo tal que $b^2 = c^2 - a^2$.

Las asíntotas de esta hipérbola son las rectas
$$y = \frac{a}{b}x \text{ y } y = -\frac{a}{b}x$$
las cuales conforman el conjunto solución de la ecuación
$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 0, \text{ es decir, de } \left(\frac{y}{a} - \frac{x}{b}\right)\left(\frac{y}{a} + \frac{x}{b}\right) = 0.$$

Obsérvese que en las ecuaciones (8.38) y (8.39), el minuendo involucra la variable asociada con el eje focal. Así, la ecuación (8.38) corresponde a una hipérbola cuyo eje focal es el eje x, mientras que (8.39) corresponde a una cuyo eje focal es el eje y.

Ejemplo 8.15
Halle una ecuación para cada una de las siguientes hipérbolas $\mathcal{H}$.

a) La hipérbola $\mathcal{H}$ tiene centro en el origen, uno de sus focos es el punto $F' = \begin{pmatrix} -\sqrt{13} \\ 0 \end{pmatrix}$ y su eje conjugado tiene una longitud de 6 unidades.

b) La hipérbola $\mathcal{H}$ tiene como asíntotas las rectas $y = \frac{12}{5}x$, $y = -\frac{12}{5}x$ y uno de sus focos es $F = \begin{pmatrix} 0 \\ 26 \end{pmatrix}$.

Solución:

a) Como $\mathcal{H}$ tiene centro en el origen y su eje focal es el eje x (pues su centro y uno de los focos están sobre el eje x) entonces $\mathcal{H}$ tiene una ecuación de la forma
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Hallemos el valor de las constantes a y b.

En primer lugar, como el eje conjugado de $\mathcal{H}$ tiene 6 unidades de longitud entonces $2b = 6$ y así $b = 3$.

Por otra parte, $a^2 = c^2 - b^2$ donde c es la distancia del centro al foco $F' = \begin{pmatrix} -\sqrt{13} \\ 0 \end{pmatrix}$ y como esta distancia es $\sqrt{13}$ entonces $c = \sqrt{13}$ y

$$a^2 = \left(\sqrt{13}\right)^2 - 3^2 = 13 - 9 = 4.$$

Por tanto, una ecuación para la hipérbola $\mathcal{H}$ es

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

En la figura 8.41 se muestra la hipérbola $\mathcal{H}$.

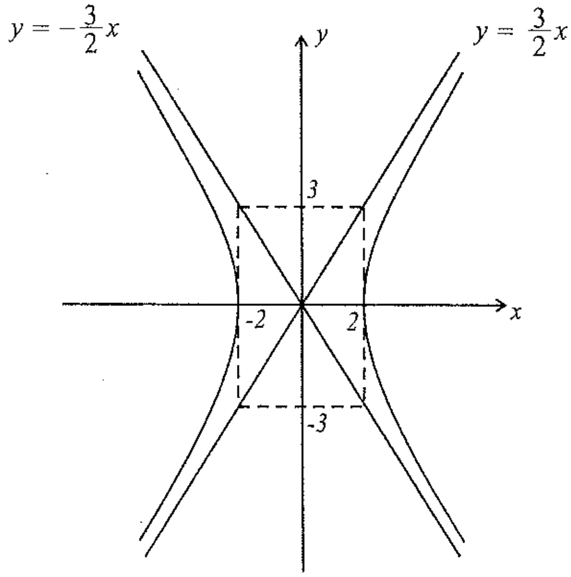


Figura 8.41.

b) Sabemos que las asíntotas de una hipérbola se cortan en el centro de la hipérbola; luego el centro de la hipérbola $\mathcal{H}$ es el origen pues las asíntotas $y = \frac{12}{5}x$ y $y = -\frac{12}{5}x$ se cortan allí. Ahora como $\mathcal{H}$ tiene su centro y uno de sus focos sobre el eje y entonces el eje focal de $\mathcal{H}$ es el eje y y así $\mathcal{H}$ tiene una ecuación de la forma

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

Ahora, como $y = \frac{12}{5}x$ es una asíntota de $\mathcal{H}$ entonces $\frac{a}{b} = \frac{12}{5}$ y así $a = \frac{12}{5}b$. Por otra parte, $b^2 = c^2 - a^2$ donde c es la distancia del foco $F = \begin{pmatrix} 0 \\ 26 \end{pmatrix}$ al centro, y como esta distancia es 26 entonces $c = 26$ y

$$b^2 = (26)^2 - \left(\frac{12}{5}\right)^2 b^2 = \frac{5^2\,(26)^2 - (12)^2\,b^2}{5^2}$$

de donde

$$\begin{aligned}
5^2b^2 + (12)^2 b^2 &= 5^2 (26)^2 \\
169b^2 &= 5^2 (26)^2 \\
b^2 &= \frac{(5)^2 (26)^2}{(13)^2} \\
b^2 &= \left(\frac{(5)(26)}{(13)}\right)^2 = (10)^2 .
\end{aligned}$$

Por tanto, $b = 10$ (pues $b > 0$) y así $a = \frac{12}{5}(10) = 24$.
Tenemos así que una ecuación para $\mathcal{H}$ es

$$\frac{y^2}{(24)^2} - \frac{x^2}{(10)^2} = 1.$$

En la figura 8.42 se muestra la hipérbola $\mathcal{H}$. ■

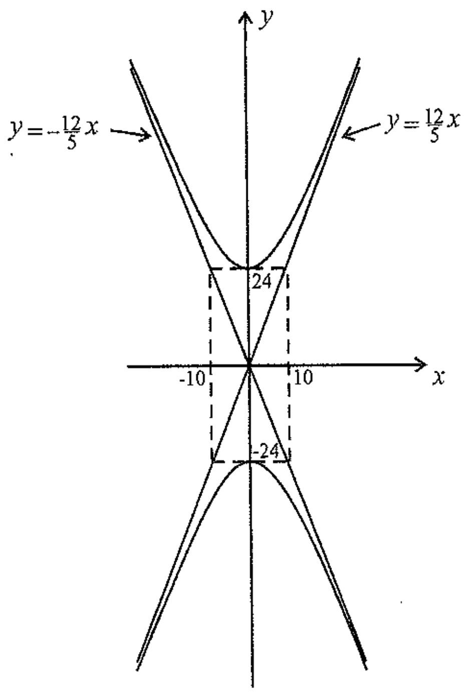


Figura 8.42.

Ejemplo 8.16
Muestre que la ecuación

$$9y^2 - 16x^2 - 144 = 0 \tag{8.40}$$

representa una hipérbola. Halle el centro, los focos, los vértices, los extremos del eje conjugado, las asíntotas y la excentricidad de dicha hipérbola.

Solución:
La ecuación (8.40) es equivalente a

$$9y^2 - 16x^2 = 144$$

y ésta a la ecuación

$$\frac{9y^2}{144} - \frac{16x^2}{144} = 1$$

la cual podemos escribir como

$$\frac{y^2}{\left(\frac{144}{9}\right)} - \frac{x^2}{\left(\frac{144}{16}\right)} = 1$$

es decir, como

$$\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1. \tag{8.41}$$

La ecuación (8.41) es de la forma (8.39) con $a = 4$ y $b = 3$, luego (8.41), y por lo tanto la ecuación (8.40), representa una hipérbola, la cual tiene centro en el origen y eje focal el eje y.

Para tal hipérbola se tiene que:

Los vértices son los puntos $V' = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ y $V = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Los extremos del eje conjugado son los puntos $A' = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Los focos son los puntos $F' = \begin{pmatrix} 0 \\ -c \end{pmatrix}$ y $F = \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}$ donde $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$, es decir, son los puntos $F' = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ y $F = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$.

La excentricidad es $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$.

Por último, las asíntotas son las rectas $y = \frac{a}{b}x$ y $y = -\frac{a}{b}x$, es decir, $y = \frac{4}{3}x$ y $y = -\frac{4}{3}x$. En la figura 8.43 se muestra dicha hipérbola. ∎

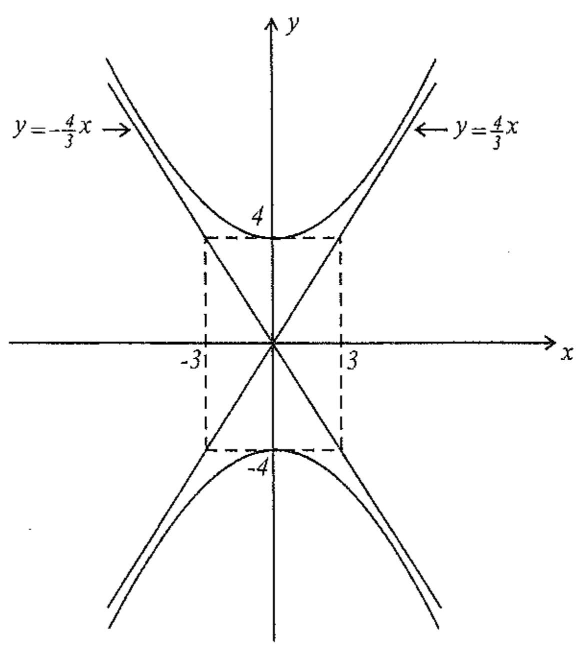


Figura 8.43.

Consideremos ahora una hipérbola con su centro en el punto $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$, focos $F' = \begin{pmatrix} h-c \\ k \end{pmatrix}$ y $F = \begin{pmatrix} h+c \\ k \end{pmatrix}$, $c > 0$, y con la constante que se menciona en la definición de hipérbola igual a $2a$ $(0 < a < c)$. Nótese que el eje focal es paralelo al eje x (figura 8.44a).

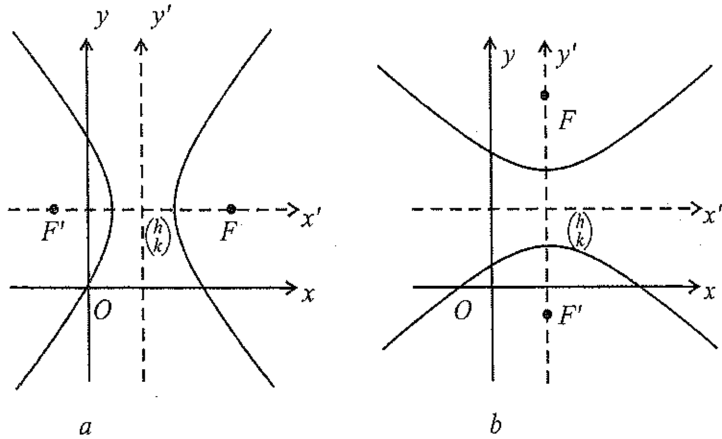


Figura 8.44.

De manera similar a lo hecho en las otras cónicas ya tratadas, tenemos que una ecuación para dicha hipérbola es

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1. \tag{8.42}$$

Los números a y b tiene el mismo significado que en la ecuación (8.38).

Si la hipérbola mantiene su centro en el punto $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$ y también la constante mencionada en la definición de hipérbola es $2a$, pero los focos son los puntos $F' = \begin{pmatrix} h \\ k-c \end{pmatrix}$ y $F = \begin{pmatrix} h \\ k+c \end{pmatrix}$, $c > 0$ (figura 8.44b) entonces en lugar de la ecuación anterior se tiene

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1. \tag{8.43}$$

Los números a y b tienen ahora el mismo significado que en la ecuación (8.39).

Una hipérbola cuyo eje focal coincide con el eje x o es paralelo a este eje se dirá **horizontal**; si el eje focal es el eje y o es paralelo a este eje, la hipérbola se dirá **vertical**.

Tenemos así lo siguiente:

Consideremos una hipérbola con centro en el punto $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$, distancia entre los focos $2c$ $(c > 0)$ y con la constante mencionada en la definición de hipérbola igual a $2a$ $(0 < a < c)$.

- Si la hipérbola es horizontal, una ecuación para ella es

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

donde b es el número positivo tal que $b^2 = c^2 - a^2$.
Las asíntotas son las rectas

$$y - k = \frac{b}{a}(x-h) \qquad \text{y} \qquad y - k = -\frac{b}{a}(x-h)$$

las cuales conforman el lugar geométrico de la ecuación

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 0, \text{ es decir, de } \left(\frac{x-h}{a} - \frac{y-k}{b}\right)\left(\frac{x-h}{a} + \frac{y-k}{b}\right) = 0.$$

- Si la hipérbola es vertical, una ecuación para ella es

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

donde b es el número positivo tal que $b^2 = c^2 - a^2$.
Las asíntotas son las rectas

$$y - k = \frac{a}{b}(x-h) \qquad \text{y} \qquad y - k = -\frac{a}{b}(x-h)$$

las cuales conforman el lugar geométrico de la ecuación

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 0, \text{ es decir, de } \left(\frac{y-k}{a} - \frac{x-h}{b}\right)\left(\frac{y-k}{a} + \frac{x-h}{b}\right) = 0.$$

Ejemplo 8.17
Halle una ecuación para cada una de las siguientes hipérbolas $\mathcal{H}$, como también sus asíntotas.

a) La hipérbola $\mathcal{H}$ tiene focos $F' = \begin{pmatrix} -\sqrt{29} \\ 3 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} \sqrt{29} \\ 3 \end{pmatrix}$ y pasa por el punto $P = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

b) La hipérbola $\mathcal{H}$ tiene vértices $V' = \begin{pmatrix} 2 \\ -4\sqrt{3} \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 2 \\ 4\sqrt{3} \end{pmatrix}$ y la longitud del eje conjugado es 2.

Solución:

a) Como el eje focal de la hipérbola $\mathcal{H}$ es paralelo al eje x entonces la hipérbola $\mathcal{H}$ es horizontal. Como, además, su centro es el punto

$$C = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(F' + F) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

entonces una ecuación para ella es de la forma

$$\frac{(x-0)^2}{a^2} - \frac{(y-3)^2}{b^2} = 1. \tag{8.44}$$

Procedemos a determinar el valor de las constantes a y b :

La distancia del centro a cualquiera de los focos es $c = \|F - C\| = \sqrt{29}$, y como $a^2 + b^2 = c^2$ entonces

$$a^2 + b^2 = 29. \tag{8.45}$$

Por otra parte, como $P = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ es un punto sobre la hipérbola, entonces él satisface la ecuación (8.44), así que

$$\frac{(-2)^2}{a^2} - \frac{(3-3)^2}{b^2} = 1$$

es decir, $\dfrac{4}{a^2} = 1$ de donde $a^2 = 4$ (o sea $a = 2$).

Sustituyendo $a^2 = 4$ en (8.45) se obtiene, finalmente,

$$b^2 = 29 - 4 = 25.$$

Por tanto, una ecuación para la hipérbola $\mathcal{H}$ es

$$\frac{x^2}{4} - \frac{(y-3)^2}{25} = 1.$$

Las asíntotas de $\mathcal{H}$ son las rectas

$$y - 3 = \frac{5}{2}x \qquad \text{y} \qquad y - 3 = -\frac{5}{2}x$$

es decir,

$$y = \frac{5}{2}x + 3 \qquad \text{y} \qquad y = -\frac{5}{2}x + 3$$

las cuales, como ya se ha dicho, conforman el conjunto solución de la ecuación

$$\frac{x^2}{4} - \frac{(y-3)^2}{25} = 0, \text{ es decir, de } \left(\frac{x}{2} - \frac{y-3}{5}\right)\left(\frac{x}{2} + \frac{y-3}{5}\right) = 0.$$

En la figura 8.45 se muestra la hipérbola $\mathcal{H}$.

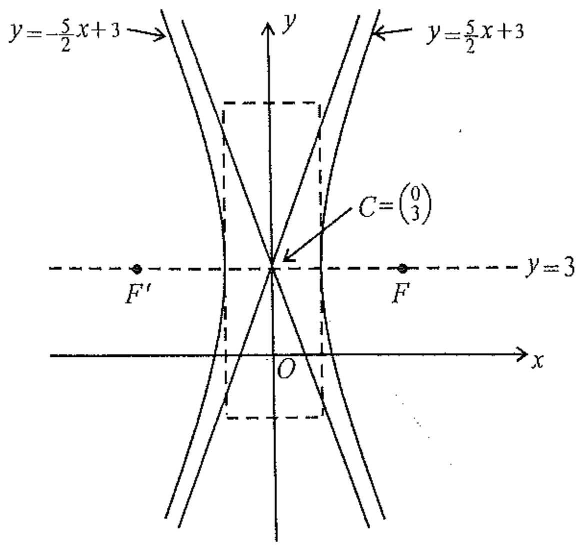


Figura 8.45.

b) En este caso la hipérbola $\mathcal{H}$ es vertical y su centro es el punto

$$C=\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\left(V'+V\right)=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}.$$

Luego, una ecuación para $\mathcal{H}$ es de la forma

$$\frac{(y-0)^2}{a^2}-\frac{(x-2)^2}{b^2}=1$$

es decir,

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{(x-2)^2}{b^2}=1.$$

En esta ecuación, $a=\dfrac{1}{2}\left\|V'-V\right\|=4\sqrt{3}$ y b es la mitad de la longitud del eje conjugado (la cual es 2), es decir, $b=1$. Así, una ecuación para $\mathcal{H}$ es

$$\frac{y^2}{48}-\frac{(x-2)^2}{1}=1$$

es decir,

$$\frac{y^2}{48}-(x-2)^2=1.$$

Las asíntotas de la hipérbola $\mathcal{H}$ son las rectas

$$y=4\sqrt{3}\,(x-2) \qquad \text{y} \qquad y=-4\sqrt{3}\,(x-2)\,.$$

En la figura 8.46 se muestra la hipérbola $\mathcal{H}$. ■

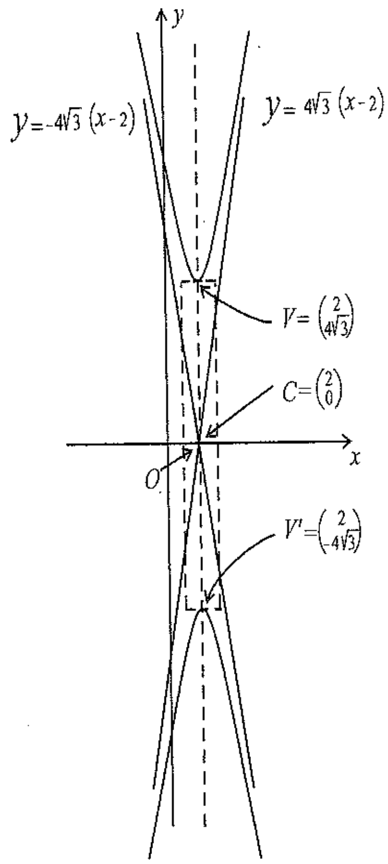


Figura 8.46.

Consideremos nuevamente las ecuaciones (8.42) y (8.43)

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1 \qquad \text{y} \qquad \frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1.$$

Como en el caso de las ecuaciones (8.28) y (8.29) para la elipse, cada una de las ecuaciones anteriores puede llevarse a la forma

$$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

donde las constantes A y C son no nulas, pero de signos distintos (en el caso de la elipse A y C son del mismo signo).

Así, toda hipérbola horizontal o vertical tiene una ecuación de la forma anterior, con A y C como se ha indicado. Al igual que en el caso de la elipse, si se parte de una ecuación de la forma anterior para una hipérbola dada, podemos transformar dicha ecuación en una de la forma (8.42) o en una de la forma (8.43) según corresponda, completando los cuadrados en x y en y.

Ejemplo 8.18

Compruebe que la ecuación

$$4y^2-9x^2+16y+18x-29=0 \tag{8.46}$$

representa una hipérbola. Halle el centro, los focos, los vértices, los extremos del eje conjugado, la excentricidad y las asíntotas de dicha hipérbola.

Solución:

Escribimos la ecuación (8.46) en la forma

$$4\left(y^2+4y\right)-9\left(x^2-2x\right)=29.$$

Completando los cuadrados en las variables x y y obtenemos

$$4\left(y^2+4y+4\right)-9\left(x^2-2x+1\right)=29+16-9$$

es decir,

$$4\left(y+2\right)^2-9\left(x-1\right)^2=36.$$

Finalmente, dividiendo a ambos lados de esta ecuación por 36, obtenemos la ecuación

$$\frac{(y+2)^2}{9}-\frac{(x-1)^2}{4}=1 \tag{8.47}$$

la cual es de la forma (8.43) con $a=3$ y $b=2$, y por tanto corresponde a una hipérbola. Puesto que la ecuación (8.46) es equivalente a la ecuación (8.47) entonces la ecuación (8.46) representa una hipérbola.

Para tal hipérbola, la cual es vertical, se tiene que:

El centro es el punto $C=\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$.

Los vértices son los puntos

$$V'=\begin{pmatrix}h\\k-a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad V=\begin{pmatrix}h\\k+a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

Los extremos del eje conjugado son los puntos

$$A'=\begin{pmatrix}h-b\\k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-2\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A=\begin{pmatrix}h+b\\k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}.$$

Los focos son los puntos

$$F'=\begin{pmatrix}h\\k-c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2-c\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad F=\begin{pmatrix}h\\k+c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2+c\end{pmatrix}$$

donde

$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}.$$

La excentricidad es $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{13}}{3}$.

Las asíntotas son las rectas

$$y+2=\frac{3}{2}(x-1) \qquad \text{y} \qquad y+2=-\frac{3}{2}(x-1)$$

o, equivalentemente,

$$y=\frac{3}{2}x-\frac{7}{2} \qquad \text{y} \qquad y=-\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}.$$

En la figura 8.47 se muestra dicha hipérbola. ■

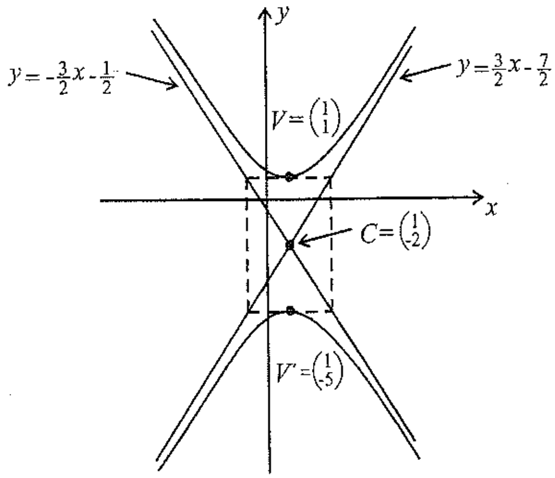


Figura 8.47.

Es claro que algunas ecuaciones de la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

con A y C no nulos y de signos contrarios, no representan hipérbolas. En efecto, digamos que luego de completar los cuadrados en una ecuación del tipo anterior se obtiene

$$b^2 (x-h)^2 - a^2 (y-k)^2 = G.$$

Si $G \neq 0$, la ecuación representa una hipérbola, pero si $G = 0$, ella representa un par de rectas que se cortan, como se ilustra en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 8.19
Consideremos la ecuación

$$4y^2 - 9x^2 + 16y + 18x + 7 = 0.$$

Luego de completar cuadrados, esta ecuación se convierte en

$$4(y+2)^2 - 9(x-1)^2 = 0$$

la cual tiene como conjunto solución el par de rectas distintas

$$y + 2 = \frac{3}{2}(x-1) \qquad \text{y} \qquad y + 2 = -\frac{3}{2}(x-1)$$

las cuales se cortan en el punto $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. ■

Para finalizar la presentación de la hipérbola mencionaremos algunas de sus aplicaciones:

- El sistema LORAN, acrónimo de la expresión *long range navigation*, que significa navegación de largo alcance, es un sistema de navegación por radio desarrollado en la II guerra mundial; es uno entre muchos sistemas que permiten determinar la posición de un barco o un avión y está basado en la propiedad que define la hipérbola. Este sistema utiliza dos pares de radiotransmisores ubicados en puntos T, T' y S, S' como lo muestra la figura 8.48. Simultáneamente desde T y T' se emiten señales que son captadas por el receptor de radio del barco (avión) el cual se encuentra en cierto punto P. Supongamos que la velocidad a la cual viaja la onda (la cual es conocida) es v *metros/microsegundo*. Si en el barco (avión) se capta primero la señal emitida desde T y t_0 *microsegundos* después se recibe la señal emitida desde T' entonces el barco (avión) está más lejos de T' que de T y además

$$\left\|\overrightarrow{PT'}\right\| - \left\|\overrightarrow{PT}\right\| = v\,(t + t_0) - vt = vt_0$$

donde t es el tiempo, en microsegundos, que transcurre entre la emisión de la señal en T y la recepción de ésta en el barco (avión). Observe que no interesa conocer el valor de t. Por tanto, el punto P se encuentra en una de las ramas de la hipérbola $\mathcal{H}_1$ de focos T', T y tal que la constante que se menciona en la definición de hipérbola es igual a vt_0.

Si se repite este proceso para otro par de radiotransmisores ubicados en S y S', se obtiene que el punto P también se encuentra en una de las ramas de la hipérbola $\mathcal{H}_2$ con focos S, S' y con la constante que se menciona en la definición de hipérbola igual a vt_0^*, donde t_0^* es el tiempo, en microsegundos, que transcurre entre la recepción en el barco (avión) de las señales emitidas desde S y S'. Así, el punto P, el cual da la posición del barco (avión) es uno de los puntos de intersección de las hipérbolas $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$.

Ahora, con la información que se tiene sobre las hipérbolas $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ se puede obtener ecuaciones para ellas y determinar los puntos de intersección de dichas hipérbolas, uno de los cuales es el punto P.

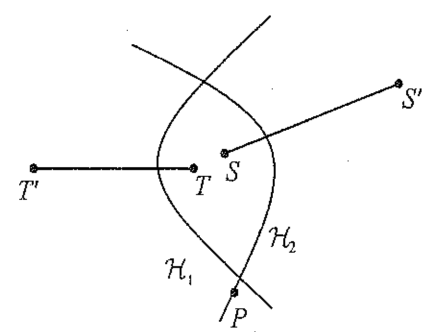


Figura 8.48.

- La hipérbola goza de una propiedad geométrica similar a las que hemos presentado para la parábola y para la elipse. Dicha propiedad es la siguiente:

  Si P es un punto cualquiera de la hipérbola y η es la recta normal a la hipérbola en P entonces los ángulos α y β mostrados en la figura 8.49 son iguales.

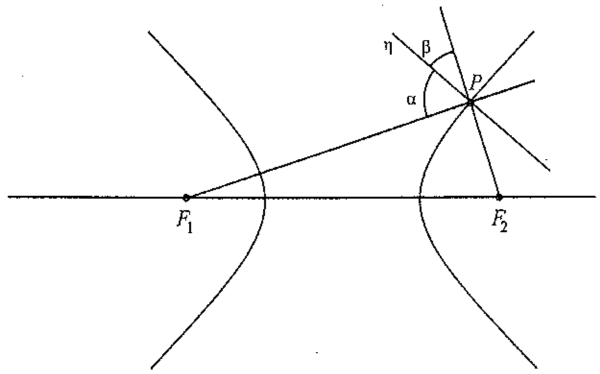


Figura 8.49.

- Consideremos ahora un manto de un hiperboloide de revolución obtenido al rotar, alrededor de su eje focal, una rama de una hipérbola con focos F' y F, y supongamos que la superficie convexa de éste refleja la luz. Se sabe que si un rayo de luz incidente y dirigido al foco F choca contra la superficie reflectora, él se refleja de tal forma que el ángulo de reflexión es igual al ángulo de incidencia. Este hecho, combinado con la propiedad geométrica de la hipérbola antes mencionada, permite concluir que dicho rayo se reflejará pasando por el otro foco F'.

La propiedad de reflexión de la parábola y de la hipérbola manejadas conjuntamente tienen importantes aplicaciones en la construcción de algunos telescopios. Por ejemplo, consideremos un telescopio que maneja dos espejos, uno parabólico y el otro hiperbólico. Los rayos de luz provenientes del espacio exterior y que llegan paralelamente al eje focal del espejo parabólico (ver figura 8.50) chocan contra éste, reflejándose todos en dirección hacia su foco F. Antes de que los rayos coincidan en F son interceptados por el espejo hiperbólico el cual tiene el mismo eje focal del espejo parabólico y sus focos están en F y F'. Cuando los rayos de luz chocan contra este segundo espejo, ellos son reflejados dirigiéndose todos al ocular F' del telescopio.

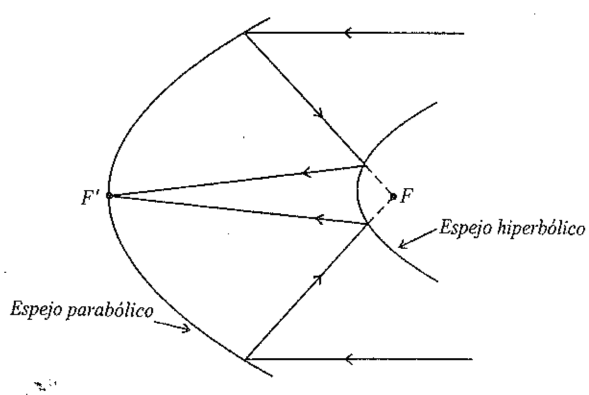


Figura 8.50.

8.6 La ecuación $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

En lo hecho hasta el momento hemos obtenido ecuaciones para los tres tipos de cónicas, en el caso en que el eje focal de la cónica es paralelo a (o coincide con) alguno de los ejes coordenados x, y. Como ya se ha señalado, cada una de dichas ecuaciones puede llevarse a la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \qquad A \neq 0 \quad \text{o} \quad C \neq 0 \tag{8.48}$$

Por tanto, podemos afirmar que toda cónica con el eje focal paralelo a (o coincidente con) alguno de los ejes coordenados x, y tiene una ecuación de la forma anterior. También se señaló que algunas ecuaciones del tipo anterior pueden no representar una cónica e incluso pueden no representar ningún lugar geométrico.

Pues bien, se puede probar que salvo casos excepcionales, la ecuación (8.48) representa una cónica con eje focal paralelo a (o coincidente con) alguno de los ejes coordenados x, y. En los casos excepcionales, la ecuación representa una cónica degenerada (un punto, una recta, un par de rectas distintas paralelas o un par de rectas distintas que se cortan) o no representa ningún lugar geométrico. El siguiente resultado precisa lo anterior.

Consideremos la ecuación de segundo grado en las variables x, y (sin término xy)

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \qquad A \neq 0 \quad \text{o} \quad C \neq 0.$$

- Si $A \neq 0$, $C = 0$ y $E \neq 0$, la ecuación representa una parábola vertical. Si $A \neq 0$, $C = 0$ y $E = 0$, la ecuación representa dos rectas distintas paralelas al eje y, una sola recta paralela al eje y o ningún lugar geométrico, según que las raíces de la ecuación $Ax^2 + Dx + F = 0$ sean reales y distintas, reales e iguales o no reales.
  Similarmente, si $A = 0$, $C \neq 0$ y $D \neq 0$, la ecuación representa una parábola horizontal. Si $A = 0$, $C \neq 0$ y $D = 0$, la ecuación representa dos rectas distintas paralelas al eje x, una sola recta paralela al eje x o ningún lugar geométrico, según que las raíces de la ecuación $Cy^2 + Ey + F = 0$ sean reales y distintas, reales e iguales, o no reales.
- Si A y C son no nulas y del mismo signo, la ecuación representa una elipse de ejes paralelos a los ejes coordenados o representa un punto o no representa ningún lugar geométrico.
- Si A y C son no nulas y de signos contrarios, la ecuación representa una hipérbola de ejes paralelos a los ejes coordenados o representa un par de rectas distintas que se cortan.

Lo afirmado es fácil de probar si la ecuación no trae términos lineales, es decir, si $D = 0$ y $E = 0$. Por otra parte, si la ecuación trae términos lineales, para probar lo afirmado basta completar el cuadrado en cada una de las expresiones $Ax^2 + Dx$, $Cy^2 + Ey$ que figure en la ecuación, como ya se ha ilustrado en cada una de las cónicas.

8.7 Rotación de ejes

Ahora nos referiremos a otro cambio posible de un sistema cartesiano xy a un nuevo sistema cartesiano $x'y'$: se mantiene el origen, los nuevos ejes x', y' se obtienen rotando los ejes

x, y un ángulo θ alrededor del origen y la unidad de medida en los ejes se mantiene (figura 8.51). Un cambio de sistema de este tipo se dice una **rotación de ejes** por el ángulo θ.

Digamos que hemos efectuado una rotación de ejes por un ángulo θ. Como ya se sabe, cada punto P del plano con coordenadas x, y relativas al sistema xy adquiere nuevas coordenadas x', y' relativas al nuevo sistema $x'y'$. (Figura 8.51).

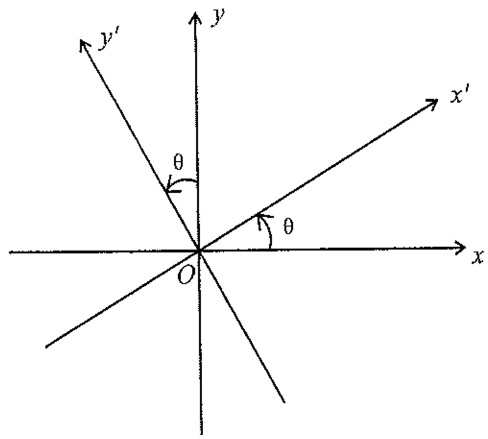


Figura 8.51.

Veamos cómo se relacionan las coordenadas x, y y las nuevas coordenadas x', y' de cada punto P del plano. Empecemos recordando que decir "las coordenadas del punto P relativas al sistema xy son los números x, y" equivale a decir que

$$\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$$

donde $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}$ son los vectores unitarios y perpendiculares entre sí, asociados con el sistema xy, ya conocidos.

Similarmente

$$\overrightarrow{OP} = x'\overrightarrow{i'} + y'\overrightarrow{j'}$$

donde $\overrightarrow{i'}, \overrightarrow{j'}$ son ahora los vectores unitarios y perpendiculares entre sí, asociados al sistema $x'y'$ (figura 8.52).

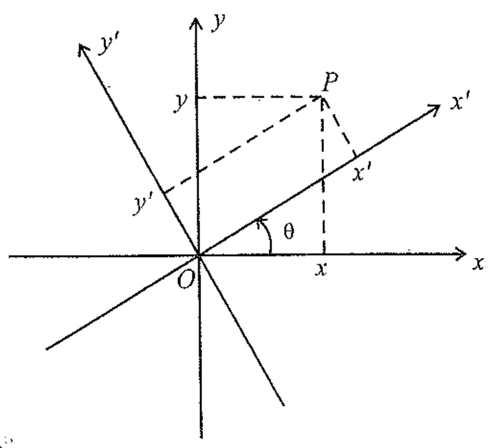


Figura 8.52.

Luego, las coordenadas x, y, x', y' son tales que

$$x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} = x'\overrightarrow{i'} + y'\overrightarrow{j'}. \tag{8.49}$$

Ahora, sabemos que

$$\begin{aligned} \overrightarrow{i'} &= (\cos\theta)\,\overrightarrow{i} + (\text{sen}\theta)\,\overrightarrow{j} \\ \overrightarrow{j'} &= \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\overrightarrow{i} + \text{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\overrightarrow{j} \\ &= (-\text{sen}\theta)\,\overrightarrow{i} + (\cos\theta)\,\overrightarrow{j}. \end{aligned}$$

Sustituyendo $\overrightarrow{i'}$ y $\overrightarrow{j'}$ en (8.49) tenemos que

$$\begin{aligned} x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} &= x'\left[(\cos\theta)\,\overrightarrow{i} + (\text{sen}\theta)\,\overrightarrow{j}\right] + y'\left[(-\text{sen}\theta)\,\overrightarrow{i} + (\cos\theta)\,\overrightarrow{j}\right] \\ &= \left(x'\cos\theta - y'\text{sen}\theta\right)\overrightarrow{i} + \left(x'\text{sen}\theta + y'\cos\theta\right)\overrightarrow{j} \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\theta - y'\text{sen}\theta \\ y &= x'\text{sen}\theta + y'\cos\theta \end{aligned} \tag{8.50}$$

o, equivalentemente,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \tag{8.51}$$

Hemos obtenido así las coordenadas x, y en términos de las nuevas coordenadas x', y'. Ahora, como la matriz

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

es invertible (pues su determinante es $\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta = 1$), podemos obtener también las coordenadas x', y' en términos de las coordenadas x, y a partir de (8.51) así:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

y como

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta \\ -\text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

entonces

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta \\ -\text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

o, equivalentemente,

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\theta + y\ \textit{sen}\theta \\ y' &= -x\ \textit{sen}\theta + y\cos\theta. \end{aligned} \tag{8.52}$$

Tenemos así el siguiente resultado:

Supongamos que se efectúa una rotación de los ejes coordenados x, y un ángulo θ. Si $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ son, respectivamente, los vectores de coordenadas de un mismo punto P del plano, respecto al sistema xy y respecto al nuevo sistema $x'y'$ entonces

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta \\ y &= x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta \end{aligned}$$

o, equivalentemente,

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\theta + y\ \operatorname{sen}\theta \\ y' &= -x\ \operatorname{sen}\theta + y\cos\theta \end{aligned}$$

Ejemplo 8.20
Consideremos la elipse con ecuación

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \tag{8.53}$$

referida a un sistema cartesiano xy. Veamos cómo cambia dicha ecuación si cambiamos al sistema $x'y'$ que se obtiene al rotar el sistema xy un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ radianes (figura 8.53a).

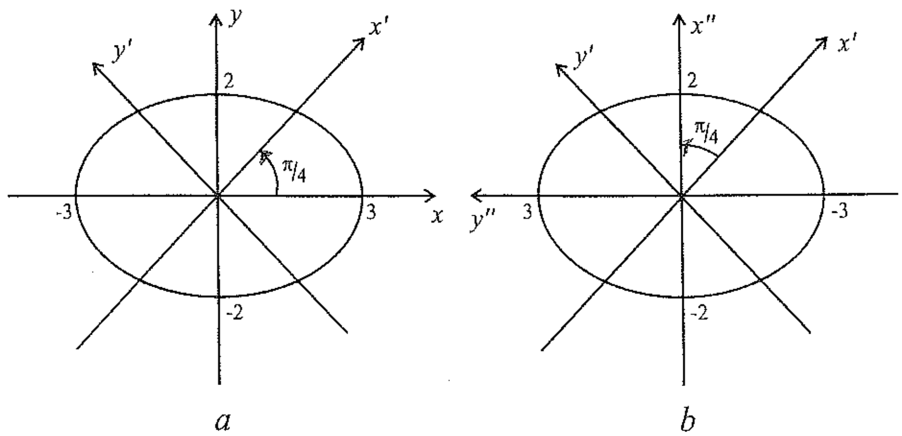


Figura 8.53.

Empleando las fórmulas en (8.50) con $\theta = \frac{\pi}{4}$ tenemos

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\frac{\pi}{4} - y' sen\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y' = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x' - y'\right) \\ y &= x' sen\frac{\pi}{4} + y'\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x' + y'\right). \end{aligned}$$

Sustituyendo x, y en la ecuación (8.53), ésta se convierte en

$$\frac{\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x' - y'\right)\right]^2}{9} + \frac{\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x' + y'\right)\right]^2}{4} = 1.$$

Desarrollando los cuadrados y reuniendo términos semejantes, esta ecuación queda en la forma

$$\frac{13}{72}\left(x'\right)^2+\frac{5}{36}x'y'+\frac{13}{72}\left(y'\right)^2=1. \tag{8.54}$$

Esta última ecuación es entonces una ecuación para la elipse en consideración, referida al nuevo sistema $x'y'$. ■

Nótese, en el ejemplo anterior, que la ecuación (8.53) se convirtió en una ecuación más complicada, apareciendo un término en $x'y'$. Este hecho se debe a la inclinación de los ejes coordenados x', y' respecto a los ejes de la elipse. Algo similar ocurre con parábolas e hipérbolas. Nótese, además, que podemos transformar la ecuación complicada (8.54) en la ecuación sencilla (8.53), simplemente deshaciendo la rotación efectuada, es decir, rotando el sistema $x'y'$ un ángulo de $-\frac{\pi}{4}$ o, equivalentemente, un ángulo de $\frac{7\pi}{4}$. Ahora bien, como lo muestra la figura 8.53*b*, también se puede simplificar la ecuación (8.54) eliminando su término en $x'y'$, rotando el sistema $x'y'$ un ángulo de $\frac{\pi}{4}$, pues en el nuevo sistema $x''y''$, la elipse tiene centro en el origen y el eje focal coincidiendo con el eje y''. Por lo tanto, una ecuación para la elipse referida a dicho sistema $x''y''$ es

$$\frac{\left(y''\right)^2}{9}+\frac{\left(x''\right)^2}{4}=1.$$

En general, como probaremos más adelante, siempre podremos eliminar el término en xy en una ecuación de la forma

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

con $B\neq 0$, mediante una rotación de ejes por un ángulo θ que podrá escogerse de tal forma que $0<\theta<\frac{\pi}{2}$.

8.8 Ecuación general de segundo grado

La ecuación general de segundo grado en dos variables x, y es de la forma

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \tag{8.55}$$

donde $A\neq 0$ o $B\neq 0$ o $C\neq 0$.

Un caso particular de la ecuación anterior es la ecuación

$$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

con $A\neq 0$ o $C\neq 0$, la cual carece de término en xy. De esta última ecuación ya sabemos que ella representa una cónica con eje focal paralelo a (o coincidente con) alguno de los ejes coordenados, representa una cónica degenerada o no representa ningún lugar geométrico.

Ahora consideraremos la ecuación (8.55) en el caso particular en el cual $B\neq 0$. Probaremos que:

La ecuación (8.55) con $B \neq 0$ puede transformarse siempre en otra ecuación de segundo grado de la forma

$$A'(x')^2 + C'(y')^2 + D'x' + E'y' + F' = 0 \tag{8.56}$$

(sin término en $x'y'$) mediante una rotación de ejes por un ángulo θ, el cual puede escogerse de tal modo que $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

Una manera de probar lo anterior es la siguiente:
Sustituyamos en la ecuación (8.55)

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\theta - y'\text{sen}\theta \\ y &= x'\text{sen}\theta + y'\cos\theta \end{aligned}$$

Se obtiene
$A(x'\cos\theta - y'\text{sen}\theta)^2 + B(x'\cos\theta - y'\text{sen}\theta)(x'\text{sen}\theta + y'\cos\theta) + C(x'\text{sen}\theta + y'\cos\theta)^2$
$+D(x'\cos\theta - y'\text{sen}\theta) + E(x'\text{sen}\theta + y'\cos\theta) + F = 0$

Desarrollando los cuadrados, realizando los productos y agrupando términos semejantes, la ecuación anterior toma la forma

$$A'(x')^2 + B'x'y' + C'(y')^2 + D'x' + E'y' + F' = 0 \tag{8.57}$$

en donde

$$\begin{aligned} A' &= A\cos^2\theta + B\text{sen}\theta\cos\theta + C\text{sen}^2\theta \\ B' &= 2(C-A)\text{sen}\theta\cos\theta + B\left(\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta\right) \\ C' &= A\text{sen}^2\theta - B\text{sen}\theta\cos\theta + C\cos^2\theta \\ D' &= D\cos\theta + E\text{sen}\theta \\ E' &= E\cos\theta - D\text{sen}\theta \\ F' &= F. \end{aligned}$$

Ahora probaremos que siempre existe un ángulo θ, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, tal que $B' = 0$, es decir, tal que

$$2(C-A)\text{sen}\theta\cos\theta + B\left(\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta\right) = 0.$$

Usando las identidades trigonométricas

$$2\text{sen}\theta\cos\theta = \text{sen}2\theta \text{ y } \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta = \cos 2\theta$$

la ecuación anterior puede escribirse en la forma

$$(C-A)\,\text{sen}2\theta + B\cos 2\theta = 0.$$

Si $A \neq C$ y $\cos 2\theta \neq 0$, esta ecuación es equivalente a

$$\tan 2\theta = \frac{B}{A-C}. \tag{8.58}$$

y si $A = C$ ella es equivalente a

$$\cos 2\theta = 0. \tag{8.59}$$

ya que $B \neq 0$.

Veamos, de (8.58) y (8.59), que siempre es posible escoger un ángulo θ como se desea. En efecto, en el caso $A \neq C$ y $\cos 2\theta \neq 0$, podemos escoger θ cumpliendo (8.58) tal que $0 < 2\theta < \pi$, es decir, tal que $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Y en el caso $A = C$, podemos escoger $2\theta = \frac{\pi}{2}$, es decir, $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Para completar la prueba sólo resta mostrar que si θ se escoge cumpliendo (8.58) en el caso $A \neq C$ o cumpliendo (8.59) en el caso $A = C$, entonces al menos uno de los coeficientes A', C' en la ecuación (8.57) es no nulo y así dicha ecuación (en la cual $B' = 0$) es de segundo grado. Esto último se deja como ejercicio al lector. ♦

También se puede probar el resultado en el último recuadro, empleando matrices y vectores, como se indica a continuación, donde haremos uso de lo establecido en el ejercicio 31 del capítulo 4.

En primer lugar

$$\begin{aligned} Ax^2 + Bxy + Cy^2 &= Ax^2 + \frac{B}{2}xy + \frac{B}{2}xy + Cy^2 \\ &= x(Ax + \frac{B}{2}y) + y(\frac{B}{2}x + Cy) \\ &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Ax + \frac{B}{2}y \\ \frac{B}{2}x + Cy \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Tenemos así,

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = X^T M X$$

donde

$$M = \begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix} \text{ y } X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

En segundo lugar,

$$Dx + Ey = U^T X \text{ con } U = \begin{pmatrix} D \\ E \end{pmatrix} \text{ y } X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Así, la ecuación (8.55) puede expresarse en la forma

$$X^T M X + U^T X + F = 0. \tag{8.60}$$

Consideremos ahora la matriz simétrica

$$M = \begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix}$$

en la cual $\frac{B}{2} \neq 0$. Sabemos que M posee dos valores propios diferentes λ_1, λ_2; también sabemos que existe $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ tal que $X_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix}$ es vector propio de M (el cual es unitario) y además la matriz ortogonal $Q = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, la cual es la matriz de la rotación R_θ, es tal que

$$Q^T M Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \tag{8.61}$$

siendo λ_1 el valor propio al cual corresponde el vector propio X_1.

Efectuamos ahora una rotación de los ejes x, y por el ángulo θ antes mencionado y sea $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ el vector de coordenadas en el nuevo sistema $x'y'$ del punto cuyo vector de coordenadas en el sistema xy es $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Sabemos que la relación entre X y X' es

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = QX'.$$

A continuación veremos que al sustituir X por QX' en la ecuación (8.60), se obtiene una ecuación que no tiene término en $x'y'$. En efecto, al hacer dicha sustitución se obtiene

$$\left(QX'\right)^T M \left(QX'\right) + U^T \left(QX'\right) + F = 0 \tag{8.62}$$

Ahora, dado que

$$\left(QX'\right)^T = \left(X'\right)^T Q^T$$

la ecuación (8.62) puede escribirse en la forma

$$\left(X'\right)^T Q^T M Q X' + U^T Q X' + F = 0$$

y como

$$Q^T M Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

tenemos que la ecuación (8.62) se transforma en

$$\left(X'\right)^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} X' + U^T Q X' + F = 0. \tag{8.63}$$

(Compare las ecuaciones (8.60) y (8.63)).

Ahora, como

$$\begin{aligned} \left(X'\right)^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} X' &= \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 x' & \lambda_2 y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \lambda_1 \left(x'\right)^2 + \lambda_2 \left(y'\right)^2 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} U^T Q X' &= \begin{pmatrix} D & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'\cos\theta - y'\text{sen}\theta \\ x'\text{sen}\theta + y'\cos\theta \end{pmatrix} \\ &= D\left(x'\cos\theta - y'\text{sen}\theta\right) + E\left(x'\text{sen}\theta + y'\cos\theta\right) \\ &= \left(D\cos\theta + E\text{sen}\theta\right)x' + \left(E\cos\theta - D\text{sen}\theta\right)y' \end{aligned}$$

entonces la ecuación (8.63) es equivalente a la ecuación

$$\lambda_1 \left(x'\right)^2 + \lambda_2 \left(y'\right)^2 + D'x' + E'y' + F' = 0 \tag{8.64}$$

la cual tiene la forma de la ecuación en (8.56) con

$A' = \lambda_1, \quad C' = \lambda_2, \quad D' = D\cos\theta + E\text{sen}\theta, \quad E' = E\cos\theta - D\text{sen}\theta \quad$ y $\quad F' = F.$

Nótese que

$$\begin{pmatrix} D' \\ E' \end{pmatrix} = Q^T \begin{pmatrix} D \\ E \end{pmatrix}$$

Esta vez es más evidente que la ecuación (8.64) es de segundo grado pues $\lambda_1 \neq 0$ o $\lambda_2 \neq 0$, ya que si $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 0$ entonces $M = O$ (vea (8.61)), pero $M \neq O$ ya que $B \neq 0$.

Tenemos así que la ecuación (8.55) con $B \neq 0$, se transforma, mediante la rotación por el ángulo θ, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, en una ecuación de segundo grado de la forma (8.56), la cual es la ecuación (8.64). ♦

Hemos probado así, de dos maneras, el resultado en el último recuadro. Un corolario inmediato de dicho resultado es el siguiente:

> Una ecuación de segundo grado
> $$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$
> con $B \neq 0$, representa una cónica con eje focal no paralelo a (ni coincidente con) ninguno de los ejes coordenados x, y, o representa una cónica degenerada o no representa ningún lugar geométrico.

Ejemplo 8.21
Transformar la ecuación

$$9x^2 + 4xy + 6y^2 + 12\sqrt{5}x - 4\sqrt{5}y + 5 = 0 \tag{8.65}$$

en una ecuación de la forma (8.56) mediante una rotación por un ángulo θ, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, y luego identificar el lugar geométrico que representa la ecuación dada.

Solución:
La ecuación (8.65) es de la forma (8.55) con

$$A = 9,\ B = 4,\ C = 6,\ D = 12\sqrt{5},\ E = -4\sqrt{5} \text{ y } F = 5.$$

Primer método.

Puesto que $A \neq C$, según la fórmula (8.58), el ángulo agudo θ que permite la transformación deseada de la ecuación (8.65), está definido implícitamente en la ecuación

$$\tan 2\theta = \frac{B}{A - C} = \frac{4}{9 - 6} = \frac{4}{3}.$$

En este caso 2θ también es agudo (pues $\tan 2\theta > 0$); así, de la figura 8.54 se obtiene que

$$\cos 2\theta = \frac{3}{5}$$

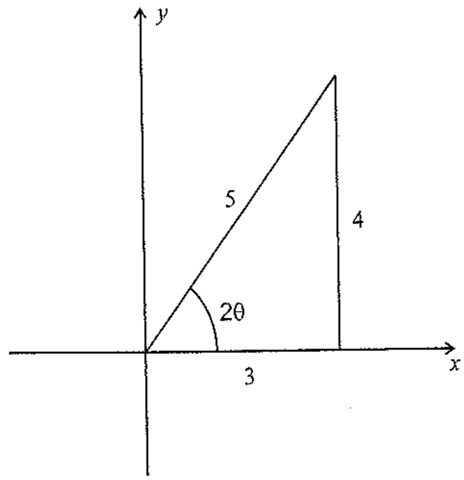


Figura 8.54.

y, usando las identidades

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2} \qquad \text{y} \qquad \text{sen}^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$$

obtenemos, en nuestro caso (en el cual $\cos\theta > 0$ y $\text{sen}\theta > 0$)

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{3}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{8}{10}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

y

$$\text{sen}\theta = \sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{2}{10}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

(Se sigue que $\tan\theta = 1/2$ y por tanto $\theta = \tan^{-1}(1/2)$). Así, de acuerdo con las ecuaciones de rotación (8.50), tenemos

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\theta - y'\text{sen}\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(2x' - y'\right) \\ y &= x'\text{sen}\theta + y'\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(x' + 2y'\right). \end{aligned}$$

Sustituyendo x, y en la ecuación (8.65), ésta se convierte en

$$\begin{aligned} &9\left[\frac{1}{\sqrt{5}}\left(2x'-y'\right)\right]^2 + 4\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(2x'-y'\right)\left(x'+2y'\right) + 6\left[\frac{1}{\sqrt{5}}\left(x'+2y'\right)\right]^2 \\ &+12\left(\sqrt{5}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(2x'-y'\right) - 4\left(\sqrt{5}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(x'+2y'\right) + 5 = 0 \end{aligned}$$

Desarrollando los cuadrados, realizando los productos, agrupando términos semejantes y simplificando se obtiene finalmente la ecuación

$$2\left(x'\right)^2 + \left(y'\right)^2 + 4x' - 4y' + 1 = 0 \tag{8.66}$$

la cual es de la forma (8.56). Para identificar el lugar geométrico correspondiente a esta ecuación (8.66), empezamos por escribirla en la forma

$$2\left(\left(x'\right)^2+2x'\right)+\left(\left(y'\right)^2-4y'\right)=-1$$

y luego completamos los cuadrados en x' y en y'. Se obtiene

$$2\left(\left(x'\right)^2+2x'+1\right)+\left(\left(y'\right)^2-4y'+4\right)=-1+2+4$$

es decir,

$$2\left(x'+1\right)^2+\left(y'-2\right)^2=5. \tag{8.67}$$

Por último, dividiendo a ambos lados de (8.67) por 5, se obtiene

$$\frac{(x'+1)^2}{\frac{5}{2}}+\frac{(y'-2)^2}{5}=1 \tag{8.68}$$

la cual corresponde a una elipse con centro en el punto $C=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ referido al sistema $x'y'$, eje focal el eje y', distancia del centro a los vértices $a=\sqrt{5}\approx 2.2$ y distancia del centro a los extremos del eje menor $b=\sqrt{\frac{5}{2}}\approx 1.58$. (Figura 8.55).

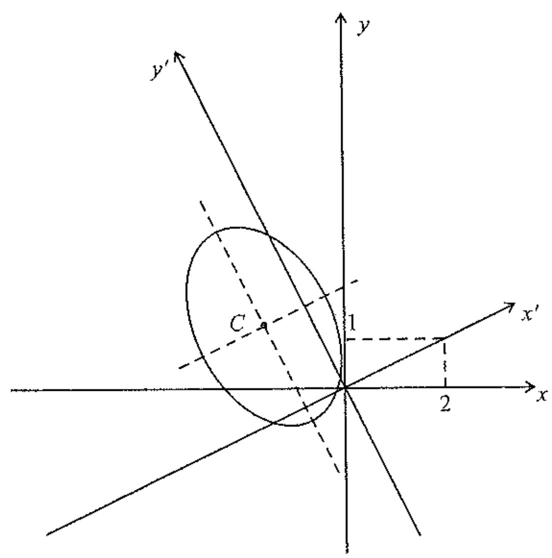


Figura 8.55.

Segundo método.

Empezamos por escribir la ecuación (8.65), usando matrices y vectores, en la forma

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & 2\\ 2 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 12\sqrt{5} & -4\sqrt{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}+5=0 \tag{8.69}$$

y consideramos la matriz simétrica

$$M=\begin{pmatrix} 9 & 2\\ 2 & 6\end{pmatrix}.$$

Los valores propios de esta matriz son los números $\lambda_1 = 5$ y $\lambda_2 = 10$. Los vectores propios correspondientes a $\lambda_1 = 5$ son los vectores de la forma $t\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$, $t \neq 0$ (entre éstos ninguno está en el primer cuadrante) y los vectores propios correspondientes a $\lambda_2 = 10$ son los vectores de la forma $t\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, $t \neq 0$; entre estos uno que es unitario y está en el primer cuadrante es

$$X_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2/\sqrt{5}\\1/\sqrt{5}\end{pmatrix}.$$

Sea entonces θ aquel ángulo, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, tal que

$$X_1 = \begin{pmatrix}2/\sqrt{5}\\1/\sqrt{5}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta\\ \operatorname{sen}\theta\end{pmatrix}$$

es decir, tal que

$$\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

(observe que θ es el mismo ángulo obtenido en el primer método). Como ya sabemos, la matriz ortogonal

$$Q = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\operatorname{sen}\theta\\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}}\\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}$$

la cual es la matriz de la rotación R_θ, es tal que

$$Q^T M Q = \begin{pmatrix}10 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}.$$

Ahora efectuamos una rotación de los ejes x, y por dicho ángulo θ; si $X' = \begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ es el vector de coordenadas, respecto al nuevo sistema $x'y'$, del punto cuyo vector de coordenadas respecto al sistema xy es $X = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ entonces

$$X = QX' = \begin{pmatrix}2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5}\\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2x' - y'\\ x' + 2y'\end{pmatrix}.$$

Sustituyendo X por QX' en la ecuación (8.69), ésta se convierte (vea (8.63)) en

$$\begin{pmatrix}x' & y'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}12\sqrt{5} & -4\sqrt{5}\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2x' - y'\\ x' + 2y'\end{pmatrix} + 5 = 0$$

es decir, en la ecuación

$$10\left(x'\right)^2 + 5\left(y'\right)^2 + 20x' - 20y' + 5 = 0$$

que es equivalente a

$$2\left(x'\right)^2 + \left(y'\right)^2 + 4x' - 4y' + 1 = 0$$

la cual coincide (como era de esperar) con la ecuación (8.66) obtenida en el primer método. Se continúa ahora exactamente como en dicho primer método. ■

Recomendamos al lector emplear preferiblemente el segundo de los métodos presentados, cuando se trate de eliminar el término en xy de una ecuación de la forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \qquad B \neq 0.$$

Dicho método tiene la ventaja sobre el primero, de poder extenderse a ecuaciones de segundo grado con tres o más variables.

Retornemos a la ecuación (8.64),

$$\lambda_1 \left(x'\right)^2 + \lambda_2 \left(y'\right)^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$$

en la cual λ_1, λ_2 son los valores propios de la matriz simétrica

$$M = \begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix}, \; B \neq 0$$

asociada con la ecuación (8.55). Teniendo en cuenta que dicha ecuación es de la forma (8.48) podemos afirmar que:

- Si $\lambda_1\lambda_2 = 0$ (es decir $\lambda_1 = 0$ o $\lambda_2 = 0$) entonces la ecuación (8.64) representa una parábola, un par de rectas distintas paralelas, una sola recta o ningún lugar geométrico.

- Si $\lambda_1\lambda_2 > 0$ (es decir, λ_1 y λ_2 son no nulos y del mismo signo) entonces la ecuación (8.64) representa una elipse, un punto o ningún lugar geométrico.

- Si $\lambda_1\lambda_2 < 0$ (es decir, λ_1 y λ_2 son no nulos y de signos contrarios) entonces la ecuación (8.64) representa una hipérbola o un par de rectas distintas que se cortan.

Ahora bien, teniendo en cuenta la igualdad (8.61)

$$Q^T M Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

vemos que

$$\lambda_1\lambda_2 = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \left|Q^T M Q\right| = \left|Q^{-1} M Q\right| = |Q|^{-1}\,|M|\,|Q| = |M| = AC - \frac{B^2}{4}$$

es decir,

$$\lambda_1\lambda_2 = \frac{4AC - B^2}{4}$$

y así, la información $\lambda_1\lambda_2 = 0$, $\lambda_1\lambda_2 > 0$, $\lambda_1\lambda_2 < 0$ viene en el escalar $4AC - B^2$ o también en $B^2 - 4AC$. Optaremos por leer esa información en el número $B^2 - 4AC$, el cual se llama **indicador** o **discriminante** de la ecuación (8.55)

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

pues él indica o determina el tipo de lugar geométrico que corresponde a dicha ecuación.

En términos del discriminante $\Delta = B^2 - 4AC$, el resultado en el recuadro anterior se puede expresar así:

- Si $\Delta = 0$, la ecuación (8.55) representa una parábola, un par de rectas distintas paralelas, una sola recta o ningún lugar geométrico.
- Si $\Delta < 0$, la ecuación (8.55) representa una elipse, un punto o ningún lugar geométrico.
- Si $\Delta > 0$, la ecuación (8.55) representa una hipérbola o un par de rectas distintas que se cortan.

8.9 Ejercicios

Sección 8.1

1. Para cada uno de los siguientes literales, encuentre una ecuación para la circunferencia que satisfaga las condiciones dadas:

   a) Centro en $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y pasa por $P = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

   b) Centro en $C = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ y tangente a la recta $x = 7$.

   c) Centro en $C = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix}$ y tangente a la recta $x - y - 1 = 0$.

   d) Tangente a la recta $3x + y + 2 = 0$ en el punto $P = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y pasa por $Q = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

   e) Tangente a la recta $3x + 4y - 16 = 0$ en el punto $P = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ y con radio 5 (dos soluciones).

   f) Tiene como diámetro la cuerda común de las circunferencias

   $$x^2 + y^2 + 2x - 2y - 14 = 0 \quad y \quad x^2 + y^2 - 4x + 4y - 2 = 0.$$

2. Cada una de las siguientes ecuaciones representa una circunferencia. Hallar el centro, el radio y dibujar la circunferencia.

   a) $3x^2 + 3y^2 + 4y - 7 = 0$
   b) $x^2 + y^2 - 10x - 10y + 25 = 0$
   c) $x^2 + y^2 + 6x - 1 = 0$
   d) $2x^2 + 2y^2 - 2x + 2y - 7 = 0$
   e) $x^2 + y^2 - 2\sqrt{3}x + 2\sqrt{7}y - 15 = 0$

Sección 8.3

3. Para cada uno de los siguientes literales, hallar una ecuación de la parábola que satisface las condiciones dadas y graficarla.

   a) Vértice en $V = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y ecuación de la directriz $y = -2$.

b) Vértice en $V = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ y foco en $F = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) Eje focal paralelo al eje x, vértice en $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ y pasa por el punto $A = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

d) Pasa por los puntos $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ y su eje focal es paralelo al eje y.

e) La ecuación de su directriz es $y = 1$ y los extremos del lado recto son $A = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$.

4. Cada una de los siguientes ecuaciones represénta una parábola. Para cada una de las parábolas, hallar el vértice V, el foco F, la ecuación de la directriz, la ecuación del eje focal y la longitud l del lado recto. Graficar la parábola.

   a) $y^2 = -6x$

   b) $x^2 = 8y$

   c) $y^2 - 12x - 2y + 7 = 0$.

   d) $y = \frac{1}{4}(x^2 - 2x + 5)$

   e) $y^2 + 4x + 4 = 0$

5. *a*) Encontrar una ecuación para la circunferencia que pasa por el vértice y por los puntos extremos del lado recto de la parábola cuya ecuación es $x^2 = -8y$.

   b) La directriz de la parábola $y^2 = 16x$ es tangente a una circunferencia que tiene como centro el foco de dicha parábola. Encontrar una ecuación para esta circunferencia y determinar los puntos de intersección de las dos curvas.

6. El cable de suspensión de un puente colgante tiene forma de parábola y sus extremos están apoyados en dos torres separadas 150 metros. Los puntos de soporte del cable en las dos torres están a 22 metros sobre la carretera y el punto más bajo del cable está a 7 metros por encima de la carretera. Calcular la distancia vertical entre el cable y un punto, sobre la carretera, situado a 15 metros del pie de una torre.

7. Por el extremo de una tubería horizontal que está a 25 metros de altura con respecto al suelo, sale agua describiendo una curva parabólica, siendo el vértice de la parábola el extremo del tubo. Si en un punto situado a 8 metros por debajo del nivel del tubo, el chorro de agua se ha curvado hacia afuera 10 metros más allá de la vertical que pasa por el extremo del tubo, ¿a qué distancia de esta línea vertical entrará el agua en contacto con el suelo?

Sección 8.4

8. Para cada uno de los siguientes literales, hallar una ecuación para la elipse que satisfaga las condiciones dadas y graficarla.

   a) Centro en $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, un foco en $F_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ y un vértice en $V_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

   b) Centro en $C = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$, eje mayor de longitud 8, eje menor de longitud 6 y eje mayor paralelo al eje x.

c) Vértices en $V = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ y $V\prime = \begin{pmatrix} 13 \\ -2 \end{pmatrix}$, focos en $F = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ y $F\prime = \begin{pmatrix} 12 \\ -2 \end{pmatrix}$.

d) Centro en $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, eje mayor paralelo al eje y, y pasa por los puntos $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

e) Vértices en $V_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \end{pmatrix}$ y excentricidad igual a $\frac{1}{2}$.

9. Los lados rectos de una elipse son las cuerdas que pasan por los focos y son perpendiculares al eje mayor. Probar que la longitud de cada lado recto de una elipse es $\dfrac{2b^2}{a}$, donde a es la mitad de la longitud del eje mayor y b es la mitad de la longitud del eje menor.

10. Cada una de las siguientes ecuaciones representa una elipse. Para cada elipse, hallar el centro C, los focos F' y F, los vértices V' y V, los extremos del eje menor A' y A, la excentricidad e y la longitud l del lado recto (ver ejercicio 8). Graficar la elipse.

    a) $\dfrac{x^2}{144} + \dfrac{y^2}{169} = 1$ *b*) $16x^2 + 25y^2 = 1$

    c) $\dfrac{(x-1)^2}{9} + \dfrac{(y-5)^2}{25} = 1$ *d*) $9x^2 + 16y^2 - 36x + 96y + 36 = 0$

    e) $25x^2 + 16y^2 + 50x + 64y - 311 = 0$

11. El arco de un puente es semielíptico con eje mayor horizontal. La base del arco tiene 30 metros de longitud y su parte más alta con respecto a la Tierra está a 10 metros. Determinar la altura del arco a 6 metros del centro de la base.

12. La órbita de la Tierra alrededor del Sol tiene forma de elipse con el Sol en un foco. Si la mitad del eje mayor de dicha órbita mide 14957000 km y la excentricidad de la elipse es 0.0167, hallar la distancia máxima y la distancia mínima de la Tierra al Sol.

13. Un satélite viaja alrededor de la Tierra en una órbita elíptica, para la cual la Tierra es un foco y la excentricidad es $\frac{1}{3}$. La distancia más corta a la que se acerca el satélite a la Tierra es 300 millas. Calcular la distancia más grande a la que se aleja el satélite de la Tierra. ¿Cuál es la ecuación de la órbita elíptica?

14. *a*) Hallar una ecuación para la cónica constituida por todos los puntos $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ cuya distancia al punto $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ es la mitad de su distancia a la recta $y - 8 = 0$.

    b) Identificar la cónica correspondiente a la ecuación hallada en *a*) y encontrar sus elementos principales: centro, foco(s), vértice(s), ecuación del eje focal.

    c) Graficar la cónica descrita en *a*).

15. Un segmento de recta, de 9 centímetros de longitud, se mueve de manera que en todo momento un extremo está sobre el eje x y el otro extremo está sobre el eje y. Hallar e identificar el lugar geométrico que describe un punto $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ situado sobre el

segmento a 6 centímetros del extremo que está sobre el eje y, cuando el segmento se mueve en la forma indicada.

Sección 8.5

16. Para cada uno de los siguientes literales, hallar una ecuación para la hipérbola que satisface las condiciones dadas. Graficar la hipérbola con sus asíntotas.

    a) Focos en $F = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ y $F\prime = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$, vértices en $V = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $V' = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

    b) Vértices en $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $V\prime = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y asíntotas $y = \pm 3x$.

    c) Centro en $C = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, un foco en $F = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y un vértice en $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

    d) Centro en $C = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, eje transversal paralelo a uno de los ejes coordenados y pasa por los puntos $A = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

    e) Las asíntotas son las rectas $2x - y = 0$ y $2x + y = 0$ y pasa por el punto $A = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$.

    f) El valor absoluto de la diferencia entre las distancias de cualquiera de sus puntos a los puntos $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix}$ es igual a 6.

17. Cada una de las siguientes ecuaciones representa una hipérbola. Para cada una de las hipérbolas, hallar el centro C, los focos F' y F, los vértices V' y V, los extremos del eje conjugado A' y A, la excentricidad e, las ecuaciones de las asíntotas y la longitud l del lado recto. Graficar la hipérbola.

    a) $\dfrac{x^2}{100} - \dfrac{y^2}{64} = 1$

    b) $(y + 6)^2 - (x - 2)^2 = 1$

    c) $4x^2 - 5y^2 + 20 = 0$

    d) $9x^2 - 4y^2 - 18x - 16y - 43 = 0$

    e) $x^2 - 4y^2 + 6x + 24y - 31 = 0$

18. Encontrar una ecuación para la elipse cuyos focos son los vértices de la hipérbola $11x^2 - 7y^2 = 77$ y cuyos vértices son los focos de esta misma hipérbola.

19. Considerar el lugar geométrico de los puntos $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ del plano para los cuales la distancia de P al punto $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ es igual al doble de la distancia de P a la recta $x + 1 = 0$.

    a) Mostrar que una ecuación para dicho lugar geométrico es $3x^2 - y^2 + 12x + 2y - 1 = 0$.

    b) Identificar la cónica descrita por la ecuación dada en *a*) y encontrar sus principales elementos: centro, foco(s), vértice(s), ecuación del eje focal, ecuación de las asíntotas (si las tiene). Graficar la cónica.

Sección 8.6

20. Para cada una de las siguientes ecuaciones cuadráticas, identificar el lugar geométrico que ella representa y graficar dicho lugar geométrico.

a) $x^2 + 4y^2 - 6x + 16y + 21 = 0$
b) $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 9 = 0$
c) $3x^2 - 2y^2 + 24x - 4y + 46 = 0$
d) $4x^2 - y^2 - 4x = 3$
e) $y^2 - 4y = x + 5$
f) $4x^2 + 3y^2 + 8x - 30y + 31 = 0$
g) $9(x+3)^2 = 36 - 4(y-2)^2$
h) $x^2 - 4y - 4x = 0$
i) $x^2 + y^2 + 2x + 10y + 26 = 0$
j) $2x(x-y) = y(3-y-2x)$
k) $9y^2 + 4x^2 - 54y + 45 = 0$
l) $9x^2 - 4y^2 = 18\sqrt{2}x + 8\sqrt{2}y + 26$
m) $x^2 + y^2 - 10x + 6y + 36 = 0$

Sección 8.8

21. Transformar cada una de las ecuaciones dadas, mediante una rotación de ejes, empleando matrices y vectores, en una ecuación de la forma

$$A'(x')^2 + C'(y')^2 + D'x' + E'y' + F' = 0.$$

Luego clasificar y graficar el correspondiente lugar geométrico.

a) $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 30x - 40y = 0$
b) $3x^2 - 2\sqrt{3}xy + y^2 + 2x + 2\sqrt{3}y = 0$
c) $8x^2 - 2xy + 8y^2 - 14x - 14y = 49$
d) $7x^2 - 48xy - 7y^2 + 25 = 0$
e) $11x^2 + 10\sqrt{3}xy + y^2 = 4$
f) $x^2 - 2xy + y^2 + 4\sqrt{2}x + 4\sqrt{2}y = 0$
g) $xy - y + x = 0$
h) $3x^2 - 2xy - 5 = 0$
i) $4x^2 + 4xy + y^2 = 9$
j) $xy + y - 2x - 2 = 0$
k) $19x^2 + 4xy + 16y^2 - 212x + 104y = 356$
l) $3x^2 - 6xy + 5y^2 = 36$
m) $3x^2 + 4xy - 4 = 0$
n) $2x^2 + 4xy + 5y^2 + 4x + 13y - \frac{1}{4} = 0$

22. Hallar el valor de k tal que la gráfica de la ecuación $2xy - 4x + 7y + k = 0$ es un par de rectas que se cortan.

Parte II

Consta de los capítulos 9 a 15, en los cuales se trata sólo lo relacionado con el espacio.

9

Vectores en el espacio

9.1 Vectores geométricos. Conceptos básicos y operaciones

El concepto de **vector geométrico** en el espacio es exactamente el mismo de vector geométrico en el plano, solo que para un vector geométrico $\overrightarrow{AB}$ en el espacio, el punto inicial A y el punto terminal B son puntos del espacio.

La magnitud $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$ de un vector $\overrightarrow{AB}$ del espacio se define, al igual que en el plano, como la longitud del segmento $\overline{AB}$. En cuanto a la dirección de un vector, recordamos que en el plano basta un ángulo para expresarla, pero en el espacio es claro que un solo ángulo no es suficiente. La **dirección** de un vector geométrico $\overrightarrow{AB}$ del espacio se expresa comúnmente empleando un sistema de tres semirrectas orientadas, mutuamente perpendiculares, que parten del punto inicial A del vector, como se ilustra en la figura 9.1.

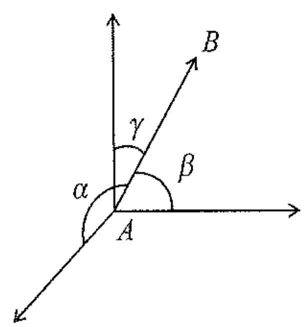


Figura 9.1.

La dirección del vector $\overrightarrow{AB}$ queda determinada por los tres ángulos α, β y γ mostrados en la figura, cada uno de los cuales se considera entre $0°$ y $180°$. Más adelante volveremos sobre este concepto.

Los conceptos de **igualdad** entre vectores, **ángulo** entre dos vectores, **vectores paralelos, vectores perpendiculares, misma dirección, dirección opuesta, vector unitario, vector nulo** se definen para el espacio de la misma forma que para el plano.

Las operaciones **suma** y **multiplicación por escalar** también se definen de igual manera que para el plano. Dichas operaciones conservan todas las propiedades que ellas tienen en el caso del plano.

Ejemplo 9.1
En la figura 9.2 se muestran tres vectores geométricos $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{z}$ del espacio, la suma $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ y la suma $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{z} = (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{z}$.

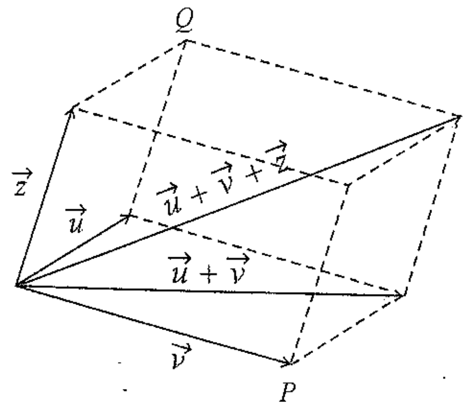


Figura 9.2.

En la figura 9.2 también se ve (por ejemplo) que

$$\overrightarrow{v} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{z}$$

así que

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{z} - \overrightarrow{v}. \quad \blacksquare$$

El concepto de combinación lineal de dos vectores geométricos del espacio se define exactamente como para dos vectores geométricos del plano. Consideremos ahora tres vectores del espacio $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{z}$; todo vector del espacio de la forma

$$a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} + c\overrightarrow{z}$$

con a, b, c escalares, se dice una **combinación lineal** de $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{z}$.

Ejemplo 9.2
En la figura 9.3 se muestran tres vectores $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{z}$ y las siguientes combinaciones lineales de ellos:

$$\frac{2}{3}\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + 2\overrightarrow{z}, \qquad \overrightarrow{u} + \frac{1}{2}\overrightarrow{v} \qquad \text{y} \qquad \overrightarrow{v} + 2\overrightarrow{z}$$

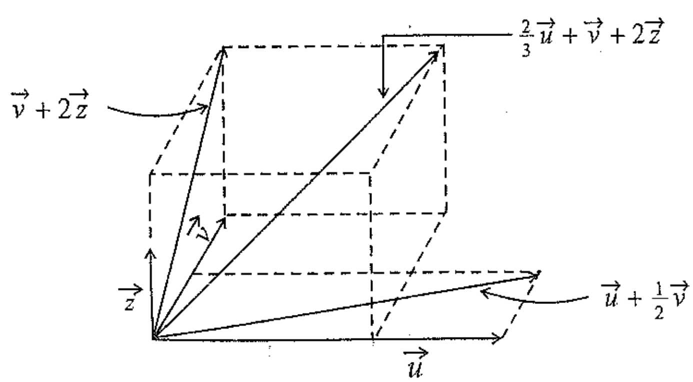


Figura 9.3.

Al igual que para vectores del plano, dos vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ del espacio se dicen **linealmente dependientes (L.D.)** si alguno de los dos es múltiplo escalar del otro; de lo contrario los vectores se dicen **linealmente independientes (L.I.)**. Tres vectores $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{z}$ del espacio se dicen **linealmente dependientes (L.D.)** si alguno de ellos es combinación lineal de los otros dos; si esto no sucede los vectores se dicen **linealmente independientes (L.I.)**. Por ejemplo, los vectores $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{z}$ de la figura 9.3 son L.I., mientras que $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{u} + (1/2)\overrightarrow{v}$ son L.D.

Para el plano sabemos que si $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ son vectores L.I. entonces todo vector $\overrightarrow{z}$ es expresable de manera única como combinación lineal de $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$. El análogo de este resultado para el espacio es el siguiente:

> Si $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{z}$ son vectores L.I. del espacio, entonces todo vector $\overrightarrow{w}$ del espacio es expresable de manera única como combinación lineal de $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{z}$,
> es decir, existen escalares únicos a, b, c tales que
> $$\overrightarrow{w} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} + c\overrightarrow{z}.$$

Prueba:

Consideremos vectores $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{z}$ del espacio linealmente independientes; al dibujarlos con punto inicial común O, ninguno de ellos queda contenido en el plano determinado por las rectas que contienen los otros dos vectores. (Figura 9.4).

Sea $\overrightarrow{w}$ un vector cualquiera del espacio, el cual también dibujamos con punto inicial O. (Ver figura 9.4).

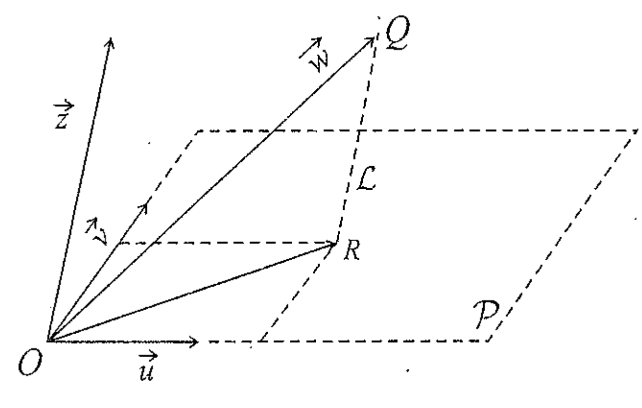


Figura 9.4.

Trazamos, pasando por el extremo final Q de $\overrightarrow{w}$, una recta $\mathcal{L}$ paralela a la recta que contiene al vector $\overrightarrow{z}$ hasta cortar el plano $\mathcal{P}$ determinado por las rectas que contienen los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$, como se muestra en la figura 9.4.

Si R es el punto de corte de la recta $\mathcal{L}$ con el plano $\mathcal{P}$ entonces

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{RQ}. \tag{9.1}$$

Ahora, como $\overrightarrow{RQ}$ es paralelo a $\overrightarrow{z}$ entonces existe un escalar c tal que

$$\overrightarrow{RQ} = c\overrightarrow{z} \tag{9.2}$$

y como $\overrightarrow{OR}$ es un vector del plano $\mathcal{P}$ y $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ son vectores no paralelos de este plano entonces existen escalares a, b tales que

$$\overrightarrow{OR} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}. \tag{9.3}$$

Luego, sustituyendo (9.2) y (9.3) en (9.1), se tiene que

$$\overrightarrow{w} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} + c\overrightarrow{z} \tag{9.4}$$

para ciertos escalares a, b, c.

Veamos que los escalares a, b, c en (9.4) son únicos: Supongamos que $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ son escalares tales que

$$\overrightarrow{w} = a_1\overrightarrow{u} + b_1\overrightarrow{v} + c_1\overrightarrow{z} = a_2\overrightarrow{u} + b_2\overrightarrow{v} + c_2\overrightarrow{z}. \tag{9.5}$$

Debemos probar que $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$ y $c_1 = c_2$. De (9.5) se sigue que

$$(a_1 - a_2)\overrightarrow{u} + (b_1 - b_2)\overrightarrow{v} + (c_1 - c_2)\overrightarrow{z} = \overrightarrow{0}. \tag{9.6}$$

Si fuese $c_1 - c_2 \neq 0$ se tendría

$$\overrightarrow{z} = \left(\frac{a_2 - a_1}{c_1 - c_2}\right)\overrightarrow{u} + \left(\frac{b_2 - b_1}{c_1 - c_2}\right)\overrightarrow{v}$$

y así $\overrightarrow{z}$ sería una combinación lineal de $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$, lo cual no es cierto. Luego $c_1 - c_2 = 0$, es decir, $c_1 = c_2$. Ahora, como $c_1 - c_2 = 0$, (9.6) se reduce a

$$(a_1 - a_2)\overrightarrow{u} + (b_1 - b_2)\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$$

y como $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ son vectores no paralelos del plano $\mathcal{P}$, de la igualdad anterior se sigue que

$$a_1 - a_2 = 0 \text{ y } b_1 - b_2 = 0$$

es decir, $a_1 = a_2$ y $b_1 = b_2$. ♦

Los conceptos de **proyección** de un vector sobre otro, **componente escalar** de un vector en la dirección de un vector dado, como también el **producto escalar** de dos vectores, se definen para vectores en el espacio de la misma manera que para vectores en el plano.

9.2 Sistema de coordenadas cartesianas para el espacio

Empecemos con el concepto de **terna ordenada** de números reales, el cual es similar al de par o pareja ordenada de números reales, solo que una terna está conformada por tres números mientras que un par lo está por dos. La terna ordenada que consta de los números a, b y c, siendo a el primero, b el segundo y c el tercero se denotará $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Así, la terna $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ es diferente a la terna $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, pues aunque las dos están conformadas por los mismos números 1, 2 y 3, el orden en que éstos aparecen en la primera terna es distinto al orden en que aparecen en la segunda. En general, se tiene que

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} \text{ si y sólo si } a = a',\ b = b' \text{ y } c = c'.$$

Denotaremos $\mathbb{R}^3$ el conjunto de todas las ternas ordenadas de números reales, es decir,

$$\mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \; / \; a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ahora nos referiremos a la noción de **sistema de coordenadas cartesianas** (o rectangulares) para el espacio, la cuál es una extensión de la noción de sistema de coordenadas cartesianas para el plano.

Se consideran tres ejes coordenados (eje x, eje y, eje z) con igual unidad de longitud, con un mismo origen O y mutuamente perpendiculares.

Si las direcciones positivas de dichos ejes son como se muestra en la figura 9.5 a, diremos que se trata de un **sistema cartesiano derecho.** Este nombre se deriva del hecho de que si se coloca la mano derecha de modo que el dedo índice apunte en la dirección positiva del eje x y el dedo medio en la dirección positiva del eje y entonces el pulgar apunta en la dirección positiva del eje z. (Vea nuevamente la figura 9.5a).

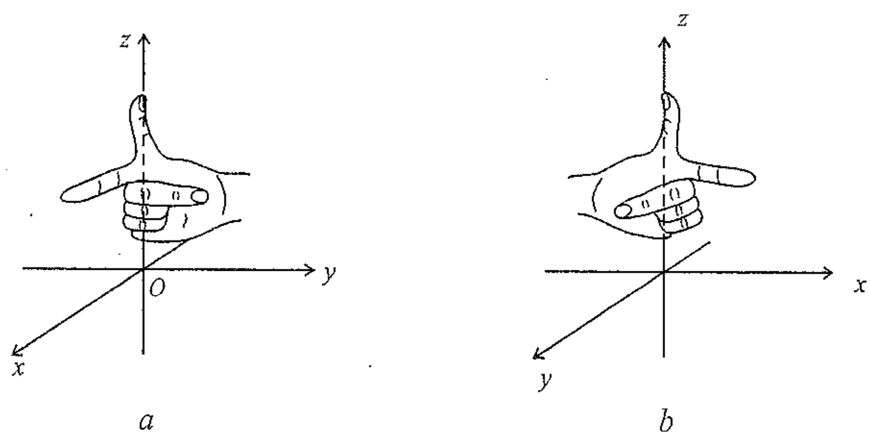


Figura 9.5.

En la figura 9.5b se muestra un **sistema cartesiano izquierdo.** Nosotros siempre usaremos un sistema cartesiano derecho, al cual nos referiremos simplemente como un sistema cartesiano xyz.

Dado un sistema cartesiano xyz para el espacio, llamaremos **plano coordenado** xy o simplemente **plano** xy al plano que contiene al eje x y al eje y; significado similar tienen las expresiones **plano (coordenado)** xz y **plano (coordenado)** yz. (Figura 9.6).

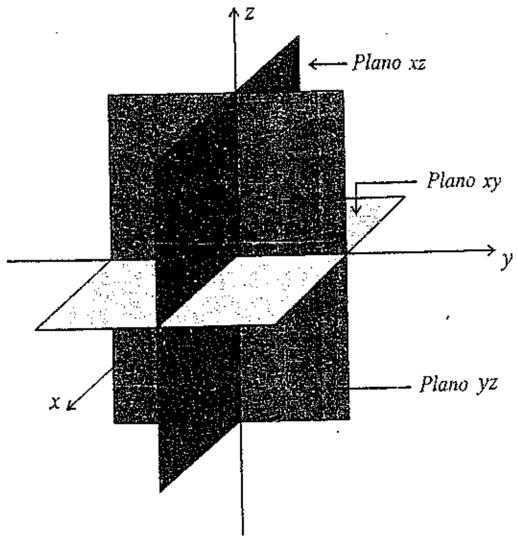


Figura 9.6.

Una vez escogido un sistema cartesiano xyz para el espacio, se establece de manera natural una correspondencia biunívoca entre el conjunto de todos los puntos del espacio y el conjunto $\mathbb{R}^3$ de todas las ternas ordenadas de números reales. A cada punto P del espacio se le hace corresponder una terna ordenada $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ donde los números a, b, c se obtienen de la manera siguiente:

Se trazan, pasando por el punto P, planos paralelos a los planos coordenados; el número a es la coordenada del punto en el eje x donde el plano paralelo al plano yz corta dicho eje; similarmente, el número b es la coordenada del punto en el eje y donde el plano paralelo al plano xz corta a ese eje, y el número c es la coordenada del punto en el eje z donde el plano paralelo al plano xy corta dicho eje (figura 9.7).

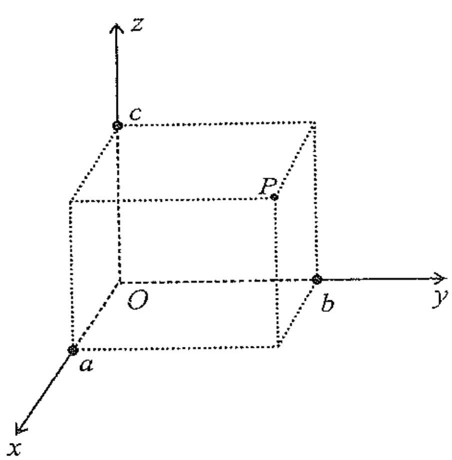


Figura 9.7.

Los números a, b, c se dicen las **coordenadas cartesianas o rectangulares del punto** P (respecto al sistema xyz); a se dice la **coordenada** x, b la **coordenada** y y c la **coordenada** z.

De esta manera a cada punto P le corresponde la terna $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ de sus coordenadas.

Esta correspondencia es biunívoca, ya que si partimos de una terna ordenada $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ de números reales e invertimos el proceso antes descrito, vemos que existe un único punto P del espacio cuya terna de coordenadas es $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

De la misma manera como se hizo para el plano, cada punto P del espacio se identifica con su terna de coordenadas $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Así, al igual que para el plano, diremos "el punto $P = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$" en lugar de "el punto P cuya terna de coordenadas es $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$".

En adelante supondremos que el espacio está provisto de un sistema cartesiano xyz. En la figura 9.8 se muestran los puntos $P = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $R = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

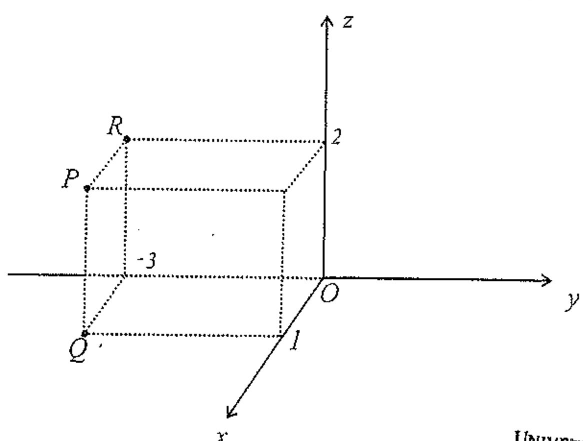


Figura 9.8.

9.3 Descomposición canónica para vectores geométricos

Es costumbre denotar $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k}$ los vectores unitarios que apuntan en las direcciones positivas de los ejes x, y, z respectivamente. En la figura 9.9 se muestran dichos vectores $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k}$

con su punto inicial en el origen.

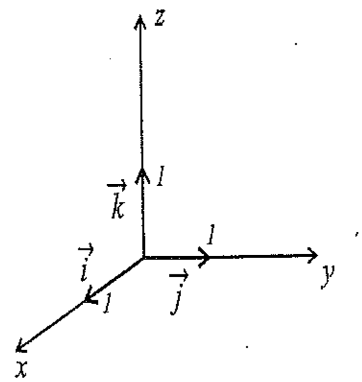


Figura 9.9.

Estos vectores juegan en el espacio el mismo papel que juegan en el plano los vectores $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$. En particular, puesto que ninguno de ellos es combinación lineal de los otros dos, se tiene que:

> Todo vector $\overrightarrow{u}$ del espacio es expresable de manera única como combinación lineal de $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ y $\overrightarrow{k}$, es decir, para todo vector $\overrightarrow{u}$ del espacio existen únicos escalares a, b y c tales que
>
> $$\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j} + c\overrightarrow{k} \tag{9.7}$$

Ahora, como $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k}$ son unitarios y apuntan en las direcciones positivas de los ejes x, y, z, respectivamente, la descomposición (9.7) de un vector dado $\overrightarrow{u}$ es sencilla de obtener.

Por ejemplo, para el vector $\overrightarrow{u}$ con punto inicial en el origen y punto terminal $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, es claro que

$$\overrightarrow{u} = 1\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k} \tag{9.8}$$

como se muestra en la figura 9.10.

Recíprocamente, si $\overrightarrow{u} = 1\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}$ y el punto inicial de $\overrightarrow{u}$ es el origen O entonces su punto final es $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

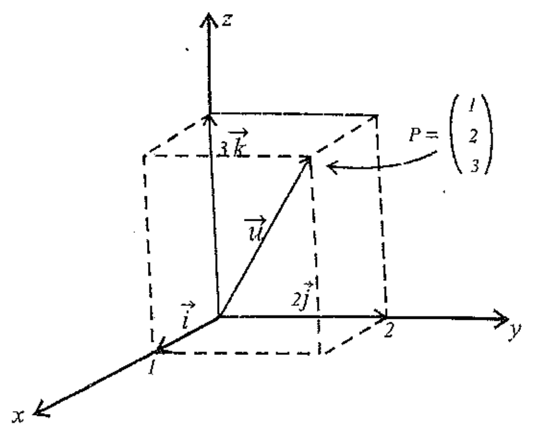


Figura 9.10.

En general, se tiene que

$$\overrightarrow{OP} = a\,\overrightarrow{i} + b\,\overrightarrow{j} + c\,\overrightarrow{k} \quad \Leftrightarrow \quad P = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Consideremos ahora un vector cualquiera $\overrightarrow{PQ}$ del espacio. Procediendo exactamente como si $\overrightarrow{PQ}$ fuese un vector del plano, se puede probar que:

Si $P = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ y $Q = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ entonces

$$\overrightarrow{PQ} = (a'-a)\,\overrightarrow{i} + (b'-b)\,\overrightarrow{j} + (c'-c)\,\overrightarrow{k}$$

y así

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OR} \text{ con } R = \begin{pmatrix} a'-a \\ b'-b \\ c'-c \end{pmatrix}$$

La descomposición

$$\overrightarrow{u} = a\,\overrightarrow{i} + b\,\overrightarrow{j} + c\,\overrightarrow{k}$$

de un vector $\overrightarrow{u}$ se llama **descomposición canónica** de $\overrightarrow{u}$. Los números a, b, c se dicen las **componentes escalares** o simplemente **las componentes** de $\overrightarrow{u}$; a se dice la **componente** x, b la **componente** y y c la **componente** z.

Ejemplo 9.3

Halle la descomposición canónica de cada uno de los vectores $\overrightarrow{OR}$, $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{ST}$ mostrados en la figura 9.11.

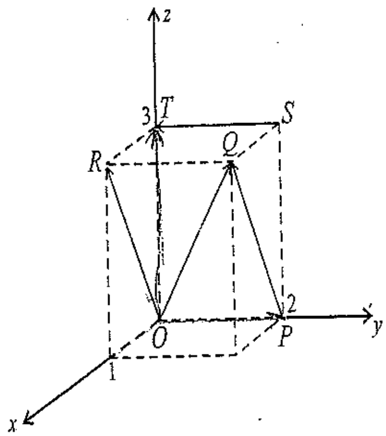


Figura 9.11.

Solución:

Como $R = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ entonces $\overrightarrow{OR} = 1\overrightarrow{i} + 0\overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k} = \overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{k}$. Similarmente, como $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ entonces

$$\overrightarrow{OQ} = 1\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}$$

Por otra parte, como $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ entonces

$$\overrightarrow{PQ} = (1-0)\overrightarrow{i} + (2-2)\overrightarrow{j} + (3-0)\overrightarrow{k} = \overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{k}$$

De la misma forma, como $S = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $T = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ entonces

$$\overrightarrow{ST} = (0-0)\overrightarrow{i} + (0-2)\overrightarrow{j} + (3-3)\overrightarrow{k} = -2\overrightarrow{j} \quad \blacksquare$$

Dada la unicidad de la descomposición canónica de un vector se tiene que:

Si $\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j} + c\overrightarrow{k}$ y $\overrightarrow{v} = a'\overrightarrow{i} + b'\overrightarrow{j} + c'\overrightarrow{k}$ entonces $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$ si y sólo si $a = a'$, $b = b'$ y $c = c'$

En particular, dado que $\overrightarrow{0} = 0\overrightarrow{i} + 0\overrightarrow{j} + 0\overrightarrow{k}$,

Si $\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j} + c\overrightarrow{k}$ entonces $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ si y sólo si $a = 0$, $b = 0$ y $c = 0$

Para un vector $\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j}$ del plano, sabemos que $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{a^2+b^2}$. De manera similar se tiene, en el espacio que:

> Si $\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j} + c\overrightarrow{k}$ entonces
>
> $$\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

En efecto, si $\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j} + c\overrightarrow{k}$ entonces (ver figura 9.12) $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OP}$ con $P = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

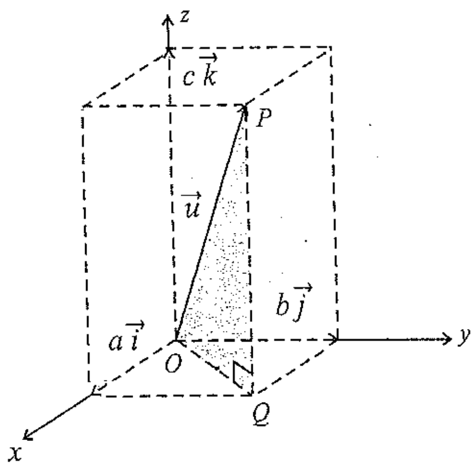


Figura 9.12.

Por teorema de Pitágoras

$$\left\|\overrightarrow{OP}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{OQ}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{QP}\right\|^2 \qquad \text{donde } Q = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ahora, como $\left\|\overrightarrow{QP}\right\|^2 = \left\|c\overrightarrow{k}\right\|^2$ y (de nuevo por el teorema de Pitágoras) $\left\|\overrightarrow{OQ}\right\|^2 = \left\|a\overrightarrow{i}\right\|^2 + \left\|b\overrightarrow{j}\right\|^2$ entonces

$$\left\|\overrightarrow{OP}\right\|^2 = \left\|a\overrightarrow{i}\right\|^2 + \left\|b\overrightarrow{j}\right\|^2 + \left\|c\overrightarrow{k}\right\|^2 = a^2+b^2+c^2$$

es decir,

$$\|\overrightarrow{u}\|^2 = a^2+b^2+c^2$$

de donde

$$\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2} \quad \blacklozenge$$

Observe en la figura 9.12 que si $\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j} + c\overrightarrow{k}$ entonces

$$Proy_{\overrightarrow{i}}\overrightarrow{u} = a\,\overrightarrow{i}, \qquad Proy_{\overrightarrow{j}}\overrightarrow{u} = b\,\overrightarrow{j} \qquad \text{y} \qquad Proy_{\overrightarrow{k}}\overrightarrow{u} = c\,\overrightarrow{k}$$

por tanto,

$$\overrightarrow{u} = Proy_{\overrightarrow{i}}\overrightarrow{u} + Proy_{\overrightarrow{j}}\overrightarrow{u} + Proy_{\overrightarrow{k}}\overrightarrow{u}$$

Ejemplo 9.4
Si $\overrightarrow{u} = 3\,\overrightarrow{i} - 2\,\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ entonces

$$\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{(3)^2 + (-2)^2 + (1)^2} = \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14} \quad \blacksquare$$

Ahora nos referiremos de nuevo a la dirección de un vector en el espacio. Cuando el espacio está provisto de un sistema cartesiano xyz, la dirección de un vector no nulo $\overrightarrow{u}$ queda determinada por los ángulos α, β y γ entre el vector $\overrightarrow{u}$ y los vectores $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ y $\overrightarrow{k}$, respectivamente (ver figura 9.13); es entonces natural expresar la dirección del vector $\overrightarrow{u}$ empleando dichos ángulos. Esos ángulos α, β y γ se llaman **ángulos directores** del vector $\overrightarrow{u}$ y diremos que la **dirección** de $\overrightarrow{u}$, denotada $dir\left(\overrightarrow{u}\right)$, es la terna $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$. También nos referiremos a los ángulos directores de un vector $\overrightarrow{u}$ como los **ángulos entre el vector** $\overrightarrow{u}$ **y los semiejes positivos** x, y, z.

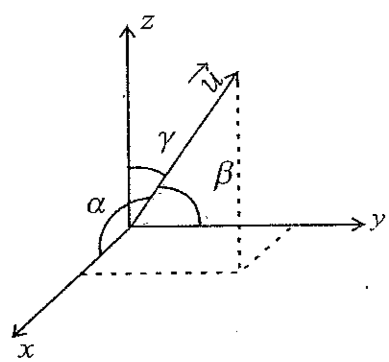


Figura 9.13.

Como es de esperar, los ángulos directores pueden obtenerse a partir de las componentes a, b, c del vector $\overrightarrow{u}$. En efecto observando la figura 9.14 y teniendo en cuenta el triángulo rectángulo OPQ vemos que

$$\cos\gamma = \frac{c}{\|\overrightarrow{u}\|} = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

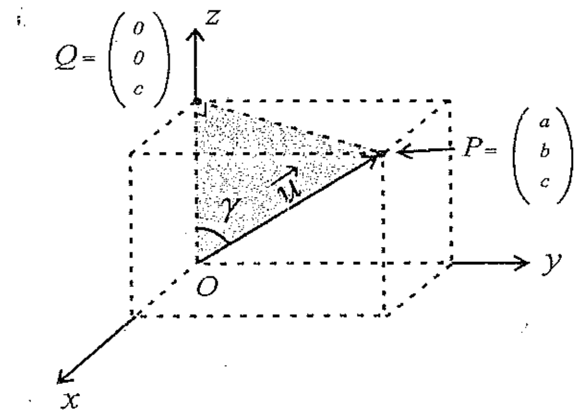


Figura 9.14.

Similarmente,

$$\cos\alpha = \frac{a}{\|\overrightarrow{u}\|} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \qquad \text{y} \qquad \cos\beta = \frac{b}{\|\overrightarrow{u}\|} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Para un vector fijo $\overrightarrow{u}$, las igualdades anteriores determinan de manera única los ángulos directores α, β y γ pues cada uno de ellos está entre 0° y 180°. Observe que dichas igualdades son equivalentes a las igualdades

$$a = \|\overrightarrow{u}\| \cos\alpha, \qquad b = \|\overrightarrow{u}\| \cos\beta, \qquad c = \|\overrightarrow{u}\| \cos\gamma$$

de las cuales se sigue que

$$\overrightarrow{u} = (\|\overrightarrow{u}\| \cos\alpha)\, \overrightarrow{i} + (\|\overrightarrow{u}\| \cos\beta)\, \overrightarrow{j} + (\|\overrightarrow{u}\| \cos\gamma)\, \overrightarrow{k}$$

es decir,

$$\overrightarrow{u} = \|\overrightarrow{u}\| \left((\cos\alpha)\, \overrightarrow{i} + (\cos\beta)\, \overrightarrow{j} + (\cos\gamma)\, \overrightarrow{k}\right) \tag{9.9}$$

Los números $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ se llaman **cosenos directores** del vector $\overrightarrow{u}$. Es claro que estos números cumplen la relación

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

así, el vector

$$(\cos\alpha)\, \overrightarrow{i} + (\cos\beta)\, \overrightarrow{j} + (\cos\gamma)\, \overrightarrow{k}$$

es un vector unitario con la misma dirección del vector $\overrightarrow{u}$.

Nótese que la igualdad (9.9) es análoga a la igualdad

$$\overrightarrow{u} = \|\overrightarrow{u}\| \left((\cos\theta)\, \overrightarrow{i} + (\text{sen}\theta)\, \overrightarrow{j}\right)$$

para un vector $\overrightarrow{u}$ del plano con dirección θ.

Recogemos a continuación lo básico de la discusión anterior.

Si α, β y γ son los ángulos directores del vector no nulo $\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j} + c\overrightarrow{k}$ entonces

- $\cos\alpha = \dfrac{a}{\|\overrightarrow{u}\|}, \qquad \cos\beta = \dfrac{b}{\|\overrightarrow{u}\|}, \qquad \cos\gamma = \dfrac{c}{\|\overrightarrow{u}\|}$ (9.10)
- $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$
- $\overrightarrow{u} = \|\overrightarrow{u}\| \left((\cos\alpha)\overrightarrow{i} + (\cos\beta)\overrightarrow{j} + (\cos\gamma)\overrightarrow{k}\right)$

Ejemplo 9.5
Halle la dirección del vector $\overrightarrow{PQ}$ donde $P = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $Q = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$. Halle además un vector unitario con la dirección de $\overrightarrow{PQ}$.

Solución:

Puesto que

$$\overrightarrow{PQ} = (4-2)\overrightarrow{i} + (-4-(-1))\overrightarrow{j} + (5-0)\overrightarrow{k} = 2\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j} + 5\overrightarrow{k}$$

y $\left\|\overrightarrow{PQ}\right\| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 5^2} = \sqrt{38}$ entonces los cosenos directores de $\overrightarrow{PQ}$ (vea (9.10)) están dados por

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{38}}, \qquad \cos\beta = \frac{-3}{\sqrt{38}}, \qquad \cos\gamma = \frac{5}{\sqrt{38}}$$

Tenemos así que los ángulos directores de $\overrightarrow{PQ}$ son

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{38}}\right) = 71.07^{\circ}, \;\; \beta = \cos^{-1}\left(\frac{-3}{\sqrt{38}}\right) = 119.12^{\circ} \;\text{ y }\; \gamma = \cos^{-1}\left(\frac{5}{\sqrt{38}}\right) = 35.8^{\circ}$$

Luego,

$$dir\left(\overrightarrow{PQ}\right) = \begin{pmatrix} 71.07^{\circ} \\ 119.12^{\circ} \\ 35.8^{\circ} \end{pmatrix}$$

Un vector unitario con la misma dirección de $\overrightarrow{PQ}$ es el vector

$$\overrightarrow{u} = \frac{\overrightarrow{PQ}}{\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|} = \frac{1}{\sqrt{38}}(2\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j} + 5\overrightarrow{k}) = \frac{2}{\sqrt{38}}\overrightarrow{i} - \frac{3}{\sqrt{38}}\overrightarrow{j} + \frac{5}{\sqrt{38}}\overrightarrow{k} \quad \blacksquare$$

Ejemplo 9.6

Si $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ es la dirección de un vector $\overrightarrow{u}$ y se sabe que $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{14}}$, $\cos\beta = -\dfrac{2}{\sqrt{14}}$ y $90^{\circ} < \gamma < 180^{\circ}$,

a) Halle los ángulos α, β y γ.
b) Halle un vector unitario con la misma dirección de $\overrightarrow{u}$.
c) Sabiendo que $\|\overrightarrow{u}\| = 3$, halle la descomposición canónica de $\overrightarrow{u}$.

Solución:

a) Como $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ y como $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{14}}$ y $\cos\beta=-\dfrac{2}{\sqrt{14}}$ tenemos que

$$\cos^2\gamma = 1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta = 1-\frac{1}{14}-\frac{4}{14}=\frac{9}{14}$$

de donde

$$\cos\gamma=\pm\frac{3}{\sqrt{14}}$$

Ahora, puesto que $90^\circ<\gamma<180^\circ$entonces $\cos\gamma<0$ y así $\cos\gamma=-\dfrac{3}{\sqrt{14}}$.

Por tanto, los ángulos directores del vector $\overrightarrow{u}$ son

$$\alpha=\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{14}}\right)=74.5^\circ,\ \ \beta=\cos^{-1}\left(-\frac{2}{\sqrt{14}}\right)=122.31^\circ,\ \ \gamma=\cos^{-1}\left(-\frac{3}{\sqrt{14}}\right)=143.3^\circ.$$

b) Un vector unitario con la misma dirección de $\overrightarrow{u}$ es

$$\begin{aligned}\overrightarrow{v} &= (\cos\alpha)\,\overrightarrow{i}+(\cos\beta)\,\overrightarrow{j}+(\cos\gamma)\,\overrightarrow{k}\\ &= \frac{1}{\sqrt{14}}\overrightarrow{i}-\frac{2}{\sqrt{14}}\overrightarrow{j}-\frac{3}{\sqrt{14}}\overrightarrow{k}\end{aligned}$$

c) La descomposición canónica de $\overrightarrow{u}$ es

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u} &= \|\overrightarrow{u}\|\left((\cos\alpha)\,\overrightarrow{i}+(\cos\beta)\,\overrightarrow{j}+(\cos\gamma)\,\overrightarrow{k}\right)\\ &= 3\left(\frac{1}{\sqrt{14}}\overrightarrow{i}-\frac{2}{\sqrt{14}}\overrightarrow{j}-\frac{3}{\sqrt{14}}\overrightarrow{k}\right)\\ &= \frac{3}{\sqrt{14}}\overrightarrow{i}-\frac{6}{\sqrt{14}}\overrightarrow{j}-\frac{9}{\sqrt{14}}\overrightarrow{k} \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Las operaciones suma de vectores y multiplicación de un escalar por un vector son muy fáciles de realizar cuando los vectores están expresados como combinación lineal de los vectores $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ y $\overrightarrow{k}$. En efecto:

> Si $\overrightarrow{u}=a\,\overrightarrow{i}+b\,\overrightarrow{j}+c\,\overrightarrow{k}$ y $\overrightarrow{v}=a'\,\overrightarrow{i}+b'\,\overrightarrow{j}+c'\,\overrightarrow{k}$ entonces
> - $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}=(a+a')\,\overrightarrow{i}+(b+b')\,\overrightarrow{j}+(c+c')\,\overrightarrow{k}$
> - $r\overrightarrow{u}=(ra)\,\overrightarrow{i}+(rb)\,\overrightarrow{j}+(rc)\,\overrightarrow{k}, \qquad r\in\mathbb{R}$

Ejemplo 9.7

Sean $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{i}-2\overrightarrow{j}+3\overrightarrow{k}$ y $\overrightarrow{v}=-\overrightarrow{i}+3\overrightarrow{j}-7\overrightarrow{k}$. Entonces:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v} &= (1+(-1))\,\overrightarrow{i}+((-2)+3)\,\overrightarrow{j}+(3+(-7))\,\overrightarrow{k}\\ &= 0\,\overrightarrow{i}+1\,\overrightarrow{j}-4\,\overrightarrow{k}\\ &= \overrightarrow{j}-4\,\overrightarrow{k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\overrightarrow{u} &= (-1)(1)\overrightarrow{i} + (-1)(-2)\overrightarrow{j} + (-1)(3)\overrightarrow{k} \\
&= -\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} - 3\overrightarrow{k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\overrightarrow{u} &= (2)(1)\overrightarrow{i} + (2)(-2)\overrightarrow{j} + (2)(3)\overrightarrow{k} \\
&= 2\overrightarrow{i} - 4\overrightarrow{j} + 6\overrightarrow{k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
5\overrightarrow{v} &= (5)(-1)\overrightarrow{i} + (5)(3)\overrightarrow{j} + (5)(-7)\overrightarrow{k} \\
&= -5\overrightarrow{i} + 15\overrightarrow{j} - 35\overrightarrow{k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\overrightarrow{u} + 5\overrightarrow{v} &= \left(2\overrightarrow{i} - 4\overrightarrow{j} + 6\overrightarrow{k}\right) + \left(-5\overrightarrow{i} + 15\overrightarrow{j} - 35\overrightarrow{k}\right) \\
&= (2-5)\overrightarrow{i} + (-4+15)\overrightarrow{j} + (6-35)\overrightarrow{k} \\
&= -3\overrightarrow{i} + 11\overrightarrow{j} - 29\overrightarrow{k} \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Para el plano probamos que si $\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j}$ y $\overrightarrow{v} = c\overrightarrow{i} + d\overrightarrow{j}$ entonces el producto escalar de $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ es $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = ac + bd$. De igual forma, se prueba, para el espacio, que

> Si $\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j} + c\overrightarrow{k}$ y $\overrightarrow{v} = a'\overrightarrow{i} + b'\overrightarrow{j} + c'\overrightarrow{k}$ entonces el producto escalar de $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ es
> $$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = aa' + bb' + cc' \tag{9.11}$$

El producto escalar de vectores en el espacio goza de las mismas propiedades que él tiene para vectores en el plano. Empleando (9.11) se hace fácil probar aquellas propiedades que no se deducen de manera inmediata de la definición de dicho producto.

En términos del producto escalar podemos expresar el coseno del ángulo entre dos vectores, la proyección de un vector sobre otro y, por supuesto, la componente escalar de un vector en la dirección de otro vector. Las fórmulas son exactamente las mismas que para el plano.

Ejemplo 9.8
Sean $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ y $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$.

a) Halle $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$

b) Halle el ángulo α entre $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$

c) Halle la componente escalar de $\overrightarrow{v}$ en la dirección de $\overrightarrow{u}$.

d) Halle $Proy_{\overrightarrow{u}}\overrightarrow{v}$

Solución:

a) $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = (1)(1) + (1)(-1) + (1)(1) = 1$

b) $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}, \qquad \|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{1}{3}$$

Luego,

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \approx 70.53^{\circ}$$

c) La componente escalar de $\overrightarrow{v}$ en la dirección de $\overrightarrow{u}$ es

$$\frac{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}}{\left\|\overrightarrow{u}\right\|}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

d)

$$Proy_{\overrightarrow{u}}\overrightarrow{v}=\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\overrightarrow{u}}{\left\|\overrightarrow{u}\right\|}=\frac{1}{3}\overrightarrow{u}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}\right)\quad\blacksquare$$

Ejemplo 9.9
¿Para cuáles valores de t los vectores $\overrightarrow{u}=t\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}$ y $\overrightarrow{v}=t\overrightarrow{i}+t\overrightarrow{j}-2\overrightarrow{k}$ son perpendiculares?

Solución:
Sabemos que $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ son perpendiculares si y sólo si $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=0$. Ahora, como

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=t^2-t-2=(t-2)(t+1)$$

entonces $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ son perpendiculares si y sólo si $(t-2)(t+1)=0$. Así, $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ son perpendiculares solamente para $t=2$ y para $t=-1$. $\blacksquare$

Ejemplo 9.10
Muestre que el triángulo cuyos vértices son los puntos

$$A=\begin{pmatrix}-1\\3\\-1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\1\\-\sqrt{3}\end{pmatrix}\quad \text{y}\quad C=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

es un triángulo isósceles y rectángulo.

Solución:
Como

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}&=\left(\sqrt{3}+1\right)\overrightarrow{i}-2\overrightarrow{j}+\left(1-\sqrt{3}\right)\overrightarrow{k}\\ \overrightarrow{AC}&=\overrightarrow{i}-2\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}\\ \overrightarrow{BC}&=-\sqrt{3}\,\overrightarrow{i}+\sqrt{3}\,\overrightarrow{k}\end{aligned}$$

entonces, las longitudes de los lados $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ están dadas respectivamente por

$$\begin{aligned}\left\|\overrightarrow{AB}\right\|&=\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2+(-2)^2+\left(1-\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{12}\\ \left\|\overrightarrow{AC}\right\|&=\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}=\sqrt{6}\\ \left\|\overrightarrow{BC}\right\|&=\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{6}\end{aligned}$$

Como los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ tienen igual longitud entonces el triángulo ABC es isósceles. Por otra parte, el triángulo ABC es rectángulo pues los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ son perpendiculares ya que

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=(1)\left(-\sqrt{3}\right)+(-2)(0)+(1)\left(\sqrt{3}\right)=0\quad\blacksquare$$

9.4 Producto vectorial

Como una introducción al producto vectorial de dos vectores, nos referiremos al concepto de momento de torsión o torque debido a una fuerza.

Podemos hacer avanzar un tornillo o perno de rosca derecha (en un medio, como madera, por ejemplo) aplicando una fuerza $\overrightarrow{F}$ a una llave, como se ilustra en la figura 9.15*a*.

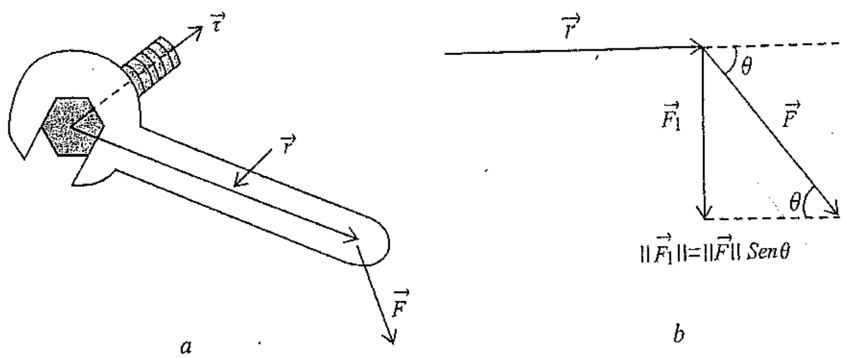


Figura 9.15.

El efecto producido por la fuerza $\overrightarrow{F}$ se llama **momento de torsión** o **torque** de $\overrightarrow{F}$ y se expresa mediante un vector que se denota $\overrightarrow{\tau}$.

La magnitud de dicho vector $\overrightarrow{\tau}$ depende de dos elementos:

- De la distancia de la cabeza del tornillo al punto donde se aplica la fuerza. En la figura esa distancia es $\|\overrightarrow{r}\|$.
- De la magnitud de la componente vectorial de $\overrightarrow{F}$ en la dirección perpendicular a $\overrightarrow{r}$. Esa componente es la única que produce el efecto de rotación. En la figura 9.15*b*, dicha componente es $\overrightarrow{F_1}$ y su magnitud es $\left\|\overrightarrow{F}\right\|\text{sen}\theta$, donde θ es el ángulo entre $\overrightarrow{r}$ y $\overrightarrow{F}$.

Se define la magnitud del vector $\overrightarrow{\tau}$ como

$$\|\overrightarrow{\tau}\| = \|\overrightarrow{r}\| \left\|\overrightarrow{F}\right\| \text{sen}\theta$$

La dirección del vector $\overrightarrow{\tau}$ es la mostrada en la figura 9.15*a*, la cual es la dirección en la cual avanza el tornillo.

El vector $\overrightarrow{\tau}$, cuya magnitud y dirección se han indicado, se denota

$$\overrightarrow{\tau} = \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{F}$$

y se dice que es el producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{r}$ y $\overrightarrow{F}$. Vectores con las características de vector $\overrightarrow{\tau}$, obtenidos a partir de dos vectores dados, surgen con frecuencia en diversas áreas de la Física y de la Ingeniería.

A continuación definiremos el **producto vectorial** $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ de dos vectores cualesquiera $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ del espacio:

a) Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ o $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$, $\quad \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$

b) Si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ y $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$, $\quad \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ es aquel vector tal que:

i) $\|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|\, sen\theta$, donde θ es el ángulo entre $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$.

ii) $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ es perpendicular tanto a $\overrightarrow{u}$ como a $\overrightarrow{v}$ y apunta en la dirección en que avanza un tornillo de rosca derecha cuando gira de $\overrightarrow{u}$ hacia $\overrightarrow{v}$ siguiendo el ángulo θ. Otra regla, a menudo más conveniente, para indicar hacia donde apunta $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ es la **Regla de la mano derecha**, según la cual $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ apunta hacia donde apunta el dedo pulgar de la mano derecha, cuando los otros dedos se curvan de $\overrightarrow{u}$ hacia $\overrightarrow{v}$, siguiendo el ángulo θ entre $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$, como se ilustra en la figura 9.16.

Figura 9.16.

El producto vectorial también se conoce producto cruz.

Una consecuencia inmediata de la definición del producto vectorial $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ es la siguiente:

$$\boxed{\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \text{ si y sólo si } \overrightarrow{u} \text{ y } \overrightarrow{v} \text{ son paralelos}}$$

En particular

$$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$$

Ejemplo 9.11

- Hallemos $\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{j}$: Según la definición dada,

$$\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{j} = \left(\left\|\overrightarrow{i}\right\| \left\|\overrightarrow{j}\right\| \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right) \overrightarrow{k}$$

y como $\left\|\overrightarrow{i}\right\| = 1, \quad \left\|\overrightarrow{j}\right\| = 1$ y $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1$ entonces

$$\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k}$$

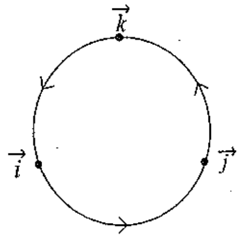
- De manera similar,

$$\overrightarrow{j} \times \overrightarrow{i} = \left(\left\|\overrightarrow{j}\right\| \left\|\overrightarrow{i}\right\| \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right) \left(-\overrightarrow{k}\right) = -\overrightarrow{k}$$

- En general, para los vectores $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ y $\overrightarrow{k}$ se tiene que:

$$\begin{array}{rclrclrcl}
\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{i} & = & \overrightarrow{0} & \overrightarrow{j} \times \overrightarrow{j} & = & \overrightarrow{0} & \overrightarrow{k} \times \overrightarrow{k} & = & \overrightarrow{0} \\
\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{j} & = & \overrightarrow{k} & \overrightarrow{j} \times \overrightarrow{k} & = & \overrightarrow{i} & \overrightarrow{k} \times \overrightarrow{i} & = & \overrightarrow{j} \\
\overrightarrow{j} \times \overrightarrow{i} & = & -\overrightarrow{k} & \overrightarrow{k} \times \overrightarrow{j} & = & -\overrightarrow{i} & \overrightarrow{i} \times \overrightarrow{k} & = & -\overrightarrow{j}
\end{array}$$

Estas relaciones pueden recordarse a partir del siguiente diagrama



El producto de cualquiera de los vectores $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ por sí mismo es $\vec{0}$ y el de dos consecutivos en el orden indicado por las flechas es el vector siguiente, mientras que el producto de dos consecutivos en el orden contrario al de las flechas, es el opuesto del vector siguiente en dicho orden. ■

El producto vectorial no es conmutativo; por ejemplo, $\vec{i} \times \vec{j} \neq \vec{j} \times \vec{i}$.

El producto vectorial tampoco es asociativo; por ejemplo

$$\left(\vec{i} \times \vec{i}\right) \times \vec{j} \neq \vec{i} \times \left(\vec{i} \times \vec{j}\right)$$

ya que

$$\left(\vec{i} \times \vec{i}\right) \times \vec{j} = \vec{0} \times \vec{j} = \vec{0}$$

mientras que

$$\vec{i} \times \left(\vec{i} \times \vec{j}\right) = \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$$

Sin embargo, el producto vectorial tiene las siguientes propiedades algebraicas, válidas cualesquiera sean los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{z}$ del espacio y cualquiera sea el escalar r.

1. $\vec{v} \times \vec{u} = -(\vec{u} \times \vec{v})$
2. $(r\vec{u}) \times \vec{v} = r(\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{u} \times (r\vec{v})$
3. $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{z}) = (\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{u} \times \vec{z})$
4. $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{z} = (\vec{u} \times \vec{z}) + (\vec{v} \times \vec{z})$

La propiedad 1. se sigue, de forma inmediata, de la definición de producto vectorial; el signo menos lo explica la regla de la mano derecha (figura 9.17).

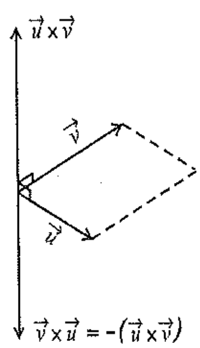


Figura 9.17.

La propiedad 2. se puede probar mostrando que los tres vectores $(r\vec{u})\times\vec{v}$, $r(\vec{u}\times\vec{v})$ y $\vec{u}\times(r\vec{v})$ tienen la misma magnitud y la misma dirección. La prueba de 3. es más laboriosa y no se dará en este texto. En cuanto a la propiedad 4., ella se puede probar a partir de las propiedades 1. y 3.

Veamos ahora que si

$$\vec{u} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k} \qquad \text{y} \qquad \vec{v} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$$

entonces

$$\vec{u}\times\vec{v} = (a_2b_3 - a_3b_2)\,\vec{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\,\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\,\vec{k} \tag{9.12}$$

En efecto,

$$\vec{u}\times\vec{v} = \left(a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}\right)\times\left(b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}\right)$$

Utilizando las propiedades 2, 3 y 4 del producto vectorial, antes mencionadas, tenemos que:

$$\begin{aligned}\vec{u}\times\vec{v} &= (a_1b_1)\,\vec{i}\times\vec{i} + (a_1b_2)\,\vec{i}\times\vec{j} + (a_1b_3)\,\vec{i}\times\vec{k}\\ &+ (a_2b_1)\,\vec{j}\times\vec{i} + (a_2b_2)\,\vec{j}\times\vec{j} + (a_2b_3)\,\vec{j}\times\vec{k}\\ &+ (a_3b_1)\,\vec{k}\times\vec{i} + (a_3b_2)\,\vec{k}\times\vec{j} + (a_3b_3)\,\vec{k}\times\vec{k}\end{aligned}$$

Ahora usamos los resultados del ejemplo 9.11, con lo cual se tiene que

$$\vec{u}\times\vec{v} = (a_1b_2)\,\vec{k} + (a_1b_3)\left(-\vec{j}\right) + (a_2b_1)\left(-\vec{k}\right) + (a_2b_3)\,\vec{i} + (a_3b_1)\,\vec{j} + (a_3b_2)\left(-\vec{i}\right)$$

de donde

$$\vec{u}\times\vec{v} = (a_2b_3 - a_3b_2)\,\vec{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\,\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\,\vec{k} \quad \blacklozenge$$

Antes de usar la fórmula (9.12), expresaremos su lado derecho en una forma más fácil de recordar; ello se hará recurriendo a la notación de determinantes.

Ya sabemos que un determinante de orden 2, es decir, de una matriz de orden 2, se define mediante la igualdad

$$\begin{vmatrix} a & b\\ c & d\end{vmatrix} = ad - bc$$

Nosotros necesitamos ahora los determinantes de orden 3, los cuales se pueden definir en términos de determinantes de orden 2, como se indica a continuación:

$$\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix} = c_1\begin{vmatrix} a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix} - c_2\begin{vmatrix} a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix} + c_3\begin{vmatrix} a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix} \tag{9.13}$$

La expresión del lado derecho en (9.13) se conoce como el desarrollo del determinante del lado izquierdo por los elementos de la primera fila. Obsérvese que en dicho lado derecho, c_1 se multiplica por el determinante de orden 2 que se obtiene del miembro izquierdo luego de borrar la fila y la columna que contienen a c_1; del mismo modo se obtienen los determinantes que multiplican a c_2 y a c_3. Note, además, el signo " $-$ " en el segundo término.

Volvamos ahora a la expresión (9.12), la cual escribimos en la forma

$$\vec{u} \times \vec{v} = (a_2b_3 - a_3b_2)\,\vec{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\,\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\,\vec{k} \tag{9.14}$$

Obsérvese que los coeficientes de $\vec{i}$, $\vec{j}$ y $\vec{k}$ en (9.14) se pueden escribir como determinantes de orden 2. En efecto,

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

Ahora note la semejanza entre el lado derecho de esta igualdad y el lado derecho de (9.13). Pues bien, en vista de dicha semejanza se escribe $\vec{u} \times \vec{v}$ como un determinante de orden 3 así:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Tenemos así que:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Si } \vec{u} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k} \quad \text{y} \quad \vec{v} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k} \ \text{ entonces} \\ \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k} \end{array}} \tag{9.15}$$

Ejemplo 9.12

Si $\vec{u} = 2\,\vec{i} + \vec{j} - 3\,\vec{k}$ y $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j} + 4\,\vec{k}$

$$\begin{aligned} \vec{u} \times \vec{v} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= (4-3)\,\vec{i} - (8+3)\,\vec{j} + (-2-1)\,\vec{k} \\ &= \vec{i} - 11\vec{j} - 3\,\vec{k} \end{aligned}$$

Verifiquemos que el vector $\vec{u} \times \vec{v}$ es perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$:

$\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = (2)(1) + (1)(-11) + (-3)(-3) = 0$ y

$\vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = (1)(1) + (-1)(-11) + (4)(-3) = 0$ ■

La magnitud de $\vec{u} \times \vec{v}$ tiene una interesante interpretación geométrica: Si los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no son paralelos, cuando se dibujan con el mismo punto inicial ellos determinan un paralelogramo como se ilustra en la figura 9.18.

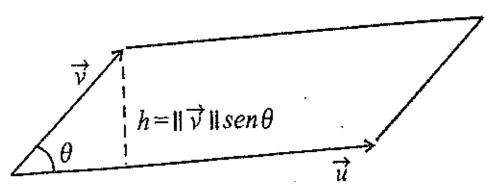


Figura 9.18.

Pues bien, el área de dicho paralelogramo es

$$\mathcal{A} = \|\overrightarrow{u}\|\, h = \|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\| \operatorname{sen}\theta = \|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\|$$

De manera que:

> El área $\mathcal{A}$ del paralelogramo determinado por dos vectores no paralelos $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ es
>
> $$\mathcal{A} = \|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\|.$$

Ejemplo 9.13
Considere los puntos

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad R = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

a) Muestre que P, Q y R no son colineales
b) Calcule el área del triángulo PQR.

Solución:
Empecemos calculando el vector $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$:

$$\overrightarrow{PQ} = (-2-1)\,\overrightarrow{i} + (0-(-1))\,\overrightarrow{j} + (1-3)\,\overrightarrow{k} = -3\,\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - 2\,\overrightarrow{k}$$
$$\overrightarrow{PR} = (4-1)\,\overrightarrow{i} + (2-(-1))\,\overrightarrow{j} + (-3-3)\,\overrightarrow{k} = 3\,\overrightarrow{i} + 3\,\overrightarrow{j} - 6\,\overrightarrow{k}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} &= \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -3 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & -6 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} \overrightarrow{i} - \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} \overrightarrow{j} + \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \overrightarrow{k} \\
&= 0\,\overrightarrow{i} - 24\,\overrightarrow{j} - 12\,\overrightarrow{k} \\
&= -24\,\overrightarrow{j} - 12\,\overrightarrow{k} = -12\left(2\,\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}\right)
\end{aligned}$$

a) Como $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} \neq \overrightarrow{0}$ entonces $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ no son paralelos y en consecuencia P, Q y R no son colineales.
b) Si $\mathcal{P}$ es el paralelogramo determinado por los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ entonces el área $\mathcal{A}$ del triángulo PQR es la mitad del área de $\mathcal{P}$. Así,

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}(\text{Area de } \mathcal{P}) = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\right\| = \frac{12}{2}\sqrt{2^2+1^2} = 6\sqrt{5} \text{ (unidades cuadradas)} \qquad \blacksquare$$

Los productos escalar y vectorial pueden combinarse para formar un producto del tipo

$$\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{z}) \tag{9.16}$$

el cual se llama **producto mixto** de los vectores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{z}$. Como el resultado es un escalar, dicho producto también se llama **triple producto escalar** de $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{z}$.

Si $\vec{u} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, $\quad \vec{v} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ $\quad$ y $\quad \vec{z} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}$
entonces

$$\begin{aligned}
\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{z}) &= \left(a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}\right)\cdot\left(\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3\end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3\end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2\end{vmatrix}\vec{k}\right) \\
&= a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3\end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3\end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2\end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}
\end{aligned}$$

El producto mixto (9.16) tiene una interesante interpretación geométrica. Veamos de qué se trata:

Supongamos que ninguno de los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{z}$ es combinación lineal de los otros dos y consideremos el paralelepípedo determinado por ellos, como se ilustra en la figura 9.19

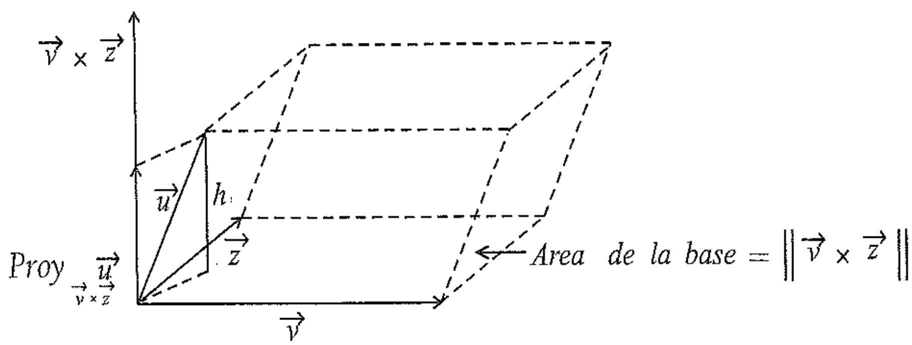


Figura 9.19.

El volumen de dicho paralelepípedo es

$$\mathcal{V} = (\textit{área de la base})(\textit{altura})$$

El área de su base, como sabemos, es $\|\vec{v}\times\vec{z}\|$ y su altura es

$$h = \left\|Proy_{\vec{v}\times\vec{z}}\,\vec{u}\right\|$$

Se deja como ejercicio para el lector, comprobar que

$$h = \frac{|\vec{v}\cdot(\vec{z}\times\vec{u})|}{\|\vec{v}\times\vec{z}\|}$$

Así, el volumen de dicho paralelepípedo es

$$\mathcal{V} = \|\vec{v}\times\vec{z}\|\,h = |\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{z})|$$

Nótese que se puede extender el alcance de la fórmula anterior de manera que incluya el caso $\vec{u}$ combinación lineal de $\vec{v}$ y $\vec{z}$, si admitimos que en tal caso los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{z}$ determinan un paralelepípedo de volumen cero. En forma similar, podemos extender el alcance de la fórmula en consideración de manera que incluya los casos $\vec{v}$ combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{z}$, y $\vec{z}$ combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

El producto mixto tiene, entre otras, la siguiente propiedad

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{z})=\vec{v}\cdot(\vec{z}\times\vec{u})=\vec{z}\cdot(\vec{u}\times\vec{v})$$

cuya prueba dejamos al lector.

Como resumen de lo relativo al producto mixto tenemos:

Sean $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{z}$ vectores geométricos cualesquiera del espacio.

- Si $\vec{u}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$, $\vec{v}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$ y $\vec{z}=c_1\vec{i}+c_2\vec{j}+c_3\vec{k}$ entonces
$$\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{z})=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}$$
- El volumen del paralelepípedo determinado por $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{z}$ es
$$\mathcal{V}=|\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{z})|$$
- $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{z})=0$ si y sólo los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{z}$ son L.D.
- $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{z})=\vec{v}\cdot(\vec{z}\times\vec{u})=\vec{z}\cdot(\vec{u}\times\vec{v})$

Dados cuatro puntos P, Q, R y S del espacio, ellos son coplanares (están en un mismo plano) si y sólo si alguno de los vectores $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$ o $\overrightarrow{PS}$ es combinación lineal de los otros dos, es decir, si y sólo si dichos vectores son linealmente dependientes. Por tanto se tiene que

Cuatro puntos P, Q, R y S del espacio son coplanares si y sólo si
$$\overrightarrow{PQ}\cdot\left(\overrightarrow{PR}\times\overrightarrow{PS}\right)=0$$

Ejemplo 9.14

Considere los puntos

$$P=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad Q=\begin{pmatrix}2\\4\\-1\end{pmatrix},\quad R=\begin{pmatrix}3\\5\\6\end{pmatrix}\text{ y }\quad S=\begin{pmatrix}-2\\-1\\3\end{pmatrix}$$

Muestre que los puntos dados no son coplanares y calcule el volumen del paralelepípedo $\mathcal{P}$ determinado por los vectores $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$ y $\overrightarrow{PS}$.

Solución:

Calculemos el producto mixto $\overrightarrow{PQ}\cdot\left(\overrightarrow{PR}\times\overrightarrow{PS}\right)$:

$$\overrightarrow{PQ}=\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k},\qquad \overrightarrow{PR}=2\vec{i}+4\vec{j}+5\vec{k}\qquad\text{y}\qquad \overrightarrow{PS}=-3\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{PQ}\cdot\left(\overrightarrow{PR}\times\overrightarrow{PS}\right) &= \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2\\ 2 & 4 & 5\\ -3 & -2 & 2\end{vmatrix}\\
&= 1\begin{vmatrix} 4 & 5\\ -2 & 2\end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & 5\\ -3 & 2\end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 4\\ -3 & -2\end{vmatrix}\\
&= (8+10) - 3(4+15) - 2(-4+12)\\
&= 18 - 57 - 16\\
&= -55
\end{aligned}$$

Como $\overrightarrow{PQ}\cdot\left(\overrightarrow{PR}\times\overrightarrow{PS}\right)\neq 0$ entonces los puntos P, Q, R y S no son coplanares y el volumen $\mathcal{V}$ del paralelepípedo $\mathcal{P}$ está dado por

$$\mathcal{V} = \left|\overrightarrow{PQ}\cdot\left(\overrightarrow{PR}\times\overrightarrow{PS}\right)\right| = |-55| = 55 \quad \blacksquare$$

Se denomina **triple producto vectorial** de los vectores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{z}$ al vector $\overrightarrow{u}\times(\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{z})$.

Se deja como ejercicio al lector probar que

$$\overrightarrow{u}\times(\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{z}) = (\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{z})\,\overrightarrow{v} - (\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v})\,\overrightarrow{z} \tag{9.17}$$

Esta igualdad (9.17) no sólo proporciona una manera rápida de calcular el vector $\overrightarrow{u}\times(\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{z})$, sino que nos muestra que este vector es combinación lineal de los vectores $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{z}$.

Ejemplo 9.15
Exprese el vector $\overrightarrow{u}\times(\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{z})$ como combinación lineal de los vectores $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$ donde

$$\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{i}+3\overrightarrow{j}, \qquad \overrightarrow{v} = \overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}+2\overrightarrow{k} \qquad \text{y} \qquad \overrightarrow{z} = 3\overrightarrow{j}-5\overrightarrow{k}$$

Solución:
Emplearemos la igualdad (9.17) para calcular el vector $\overrightarrow{u}\times(\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{z})$:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{z} &= (2)(0)+(3)(3)+(0)(-5) = 9\\
\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} &= (2)(1)+(3)(-1)+(0)(2) = -1\\
\overrightarrow{u}\times(\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{z}) &= (\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{z})\,\overrightarrow{v} - (\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v})\,\overrightarrow{z}\\
&= 9\overrightarrow{v} - (-1)\,\overrightarrow{z}\\
&= 9\left(\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}+2\overrightarrow{k}\right) + \left(3\overrightarrow{j}-5\overrightarrow{k}\right)\\
&= 9\overrightarrow{i} - 6\overrightarrow{j} + 13\overrightarrow{k} \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

9.5 Vectores coordenados o algebraicos

En el capítulo 2 se mostró cómo se dota el conjunto $\mathbb{R}^2$ de operaciones (suma, producto por escalar, producto escalar) y de conceptos definidos para vectores geométricos del plano. En idéntica forma $\mathbb{R}^3$ se dota de operaciones (suma, producto por escalar, producto escalar, producto vectorial) y de conceptos definidos para vectores geométricos del espacio. Iniciamos con la suma y producto por escalar.

- Dados $X = \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}$ en $\mathbb{R}^3$ y $r\in\mathbb{R}$, se define la **suma** $X+Y$ y el **producto** rX como

$$X+Y=\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ x_3+y_3 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad rX=\begin{pmatrix} rx_1 \\ rx_2 \\ rx_3 \end{pmatrix}$$

Debe tenerse presente que la suma y el producto por escalar definidas en $\mathbb{R}^3$ corresponden a la suma y el producto por escalar para vectores geométricos del espacio, en el siguiente sentido:

Cualesquiera sean X, Y, Z en $\mathbb{R}^3$ y r, s en $\mathbb{R}$,

$$\boxed{rX+sY=Z \quad \Leftrightarrow \quad r\overrightarrow{OX}+s\overrightarrow{OY}=\overrightarrow{OZ}}$$

Los elementos de $\mathbb{R}^3$ (a los que nos veníamos refiriendo como "puntos"), también se denominarán en adelante **vectores coordenados**, **vectores algebráicos** o simplemente **vectores** con tres componentes.

El vector $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ se dice el **vector nulo** o **vector cero** de $\mathbb{R}^3$; se denotará (como en $\mathbb{R}^2$) por la letra O. Dicho vector es tal que, para cualquier X de $\mathbb{R}^3$,

$$X+O=X$$

Dado $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ en $\mathbb{R}^3$, el vector $-X=\begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix}$, también en $\mathbb{R}^3$, se llama **inverso aditivo** del vector X. Este vector es tal que:

$$X+(-X)=O \qquad \text{y} \qquad -X=(-1)X.$$

Dados X y Y en $\mathbb{R}^3$, la **diferencia** $Y-X$ se define como el vector $Y+(-X)$. Así, si $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ y $Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ entonces

$$Y-X=\begin{pmatrix} y_1-x_1 \\ y_2-x_2 \\ y_3-x_3 \end{pmatrix}.$$

Se tiene, al igual que en el plano, que

$$\boxed{\overrightarrow{XY}=\overrightarrow{OR} \quad \Leftrightarrow \quad R=Y-X} \tag{9.18}$$

lo cual se ilustra en la figura 9.20

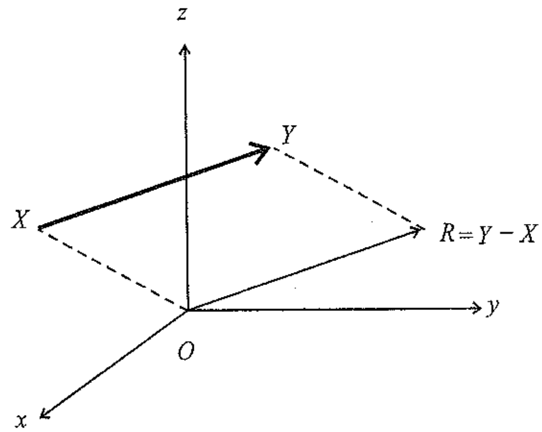


Figura 9.20.

Es claro que de (9.18) se sigue que, cualesquiera sean X, Y, Z y W en $\mathbb{R}^3$,

$$\boxed{\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{ZW} \quad \Leftrightarrow \quad Y - X = W - Z} \tag{9.19}$$

Ejemplo 9.16

Sean $X = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ $Z = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) Calcule el vector $2X + 3Y - \frac{1}{2}Z$
b) Halle el punto R tal que $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{OR}$
c) Halle el punto medio del segmento $\overline{XY}$

Solución:

a)
$$\begin{aligned} 2X + 3Y - \tfrac{1}{2}Z &= 2\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} - \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -10 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -10 + 6 - 1/2 \\ 8 - 9 + 1/2 \\ 2 + 0 - 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9/2 \\ -1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b) El punto R tal que $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{OR}$ es

$$R = Y - X = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

c) Como en el plano, el punto medio M de un segmento $\overline{AB}$ con A y B en $\mathbb{R}^3$, está dado por

$$M = \frac{1}{2}(A + B)$$

Por tanto, el punto medio del segmento $\overline{XY}$ es el punto

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{2}(X+Y) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -5+2 \\ 4-3 \\ 1+0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Ejemplo 9.17
Muestre que los puntos

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad S = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

son los vértices de un paralelogramo.

Solución:
En la figura 9.21 se muestra el cuadrilátero cuyos vértices son los puntos P, Q, R y S dados

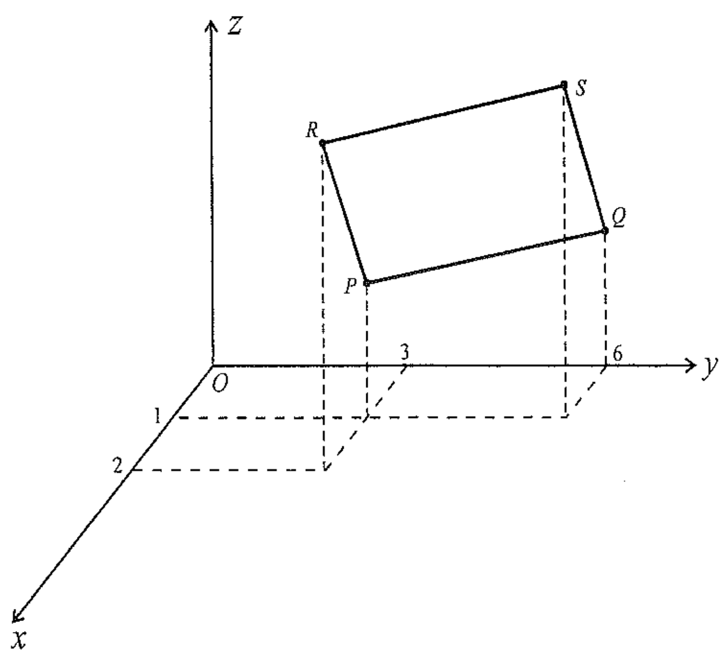


Figura 9.21.

Para mostrar que dicho cuadrilátero es un paralelogramo basta ver que $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$, es decir, que $Q - P = S - R$.

$$Q - P = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad S - R = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En efecto, se da que $Q - P = S - R$. ■

Al igual que en $\mathbb{R}^2$, las operaciones definidas en $\mathbb{R}^3$ tienen las siguientes propiedades básicas. En ellas X, Y, Z son vectores cualesquiera de $\mathbb{R}^3$ y r, s son escalares cualesquiera.

1. $X + Y \in \mathbb{R}^3$
2. $X + Y = Y + X$
3. $(X + Y) + Z = X + (Y + Z)$
4. $X + O = X$
5. $X + (-X) = O$
6. $rX \in \mathbb{R}^3$
7. $1X = X$
8. $r(sX) = (rs)X$
9. $r(X + Y) = rX + rY$
10. $(r + s)X = rX + sX$

• La **magnitud** del vector $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$, denotada $\|X\|$, se define como la magnitud del vector $\overrightarrow{OX}$. Así,

$$\|X\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

La magnitud en $\mathbb{R}^3$ tiene las siguientes propiedades, las cuales son exactamente las mismas que listamos para la magnitud en $\mathbb{R}^2$:

Si X, Y son vectores de $\mathbb{R}^3$ y $r \in \mathbb{R}$,

1. $\|X\| \geq 0$
2. $\|X\| = 0$ si y sólo si $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
3. $\|rX\| = |r|\,\|X\|$
4. $\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$ (**Desigualdad triangular**).

La **distancia** entre dos puntos X, Y de $\mathbb{R}^3$ se define como el número $\|X - Y\|$.

• Sea $X \in \mathbb{R}^3$, $X \neq O$. Llamaremos **ángulos directores** y **cosenos directores** de X a los ángulos directores y cosenos directores, respectivamente, del vector geométrico $\overrightarrow{OX}$. También llamaremos **dirección** de X, que denotaremos $dir\,(X)$, a la dirección de $\overrightarrow{OX}$.

Los conceptos **misma dirección**, **dirección opuesta** y **paralelismo** entre vectores de $\mathbb{R}^3$ se definen de igual forma que en $\mathbb{R}^2$. Se tiene, entre otros resultados, lo siguiente:

Para todo par de vectores X, Y de $\mathbb{R}^3$,

X y Y son paralelos si y sólo si X es múltiplo escalar de Y o Y es múltiplo escalar de X.

Ejemplo 9.18

$$\text{Sean } X = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad Y = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 15 \end{pmatrix}$$

a) Calcule la magnitud del vector $2X - \frac{1}{3}Y$

b) Calcule la distancia entre X y Y

Solución:

a) Como

$$2X - \tfrac{1}{3}Y = 2\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} - \tfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4-0 \\ 12+1 \\ 8-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 13 \\ 3 \end{pmatrix}$$

entonces la longitud del vector $2X - \frac{1}{3}Y$ es

$$\left\|2X - \frac{1}{3}Y\right\| = \sqrt{(-4)^2 + (13)^2 + 3^2} = \sqrt{16+169+9} = \sqrt{194}$$

b) La distancia entre X y Y está dada por

$$\|X - Y\| = \sqrt{(-2-0)^2 + (6-(-3))^2 + (4-15)^2} = \sqrt{4+81+121} = \sqrt{206} \quad \blacksquare$$

Ejemplo 9.19

$$\text{Sean} \quad X = \begin{pmatrix} -8 \\ -3/4 \\ 5/4 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 32 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad Z = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

a) ¿Son los vectores X y Y paralelos? ¿Son los vectores X y Z paralelos?

b) Halle un vector unitario con dirección opuesta a la del vector $X - Z$.

c) Halle un vector de magnitud $5/4$ y que tenga la misma dirección del vector Z.

Solución:

a) Como $Y = \begin{pmatrix} 32 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} = -4\begin{pmatrix} -8 \\ -3/4 \\ 5/4 \end{pmatrix} = -4X$

entonces Y es múltiplo escalar de X y así X y Y son paralelos.

Veamos ahora si X es múltiplo escalar de Z o Z es múltiplo escalar de X.

X es múltiplo escalar de Z si y sólo si existe $r \in \mathbb{R}$ tal que $X = rZ$, es decir,

$$\begin{pmatrix} -8 \\ -3/4 \\ 5/4 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

o equivalentemente,

$$-8 = 2r, \qquad -\frac{3}{4} = -r \qquad \text{y} \qquad \frac{5}{4} = 4r.$$

Es claro que no existe $r \in \mathbb{R}$ que satisfaga simultáneamente las tres condiciones anteriores; por tanto, X no es múltiplo escalar de Z.

En forma análoga se muestra que Z tampoco es múltiplo escalar de X. Luego, X y Z no son paralelos.

b) Un vector unitario con dirección opuesta a la del vector $X - Z$ es

$$U = -\frac{1}{\|X - Z\|}(X - Z)$$

Como $X - Z = \begin{pmatrix} -10 \\ 1/4 \\ -11/4 \end{pmatrix}$ entonces

$$\|X - Z\| = \sqrt{(-10)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{-11}{4}\right)^2} = \sqrt{100 + \frac{1}{16} + \frac{121}{16}} = \frac{\sqrt{1722}}{4}$$

y así,

$$U = -\frac{4}{\sqrt{1722}}\begin{pmatrix} -10 \\ 1/4 \\ -11/4 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1722}}\begin{pmatrix} 40 \\ -1 \\ 11 \end{pmatrix}$$

c) Un vector de magnitud 5/4 y con la misma dirección de Z es $V = \frac{5}{4}\frac{Z}{\|Z\|}$.

Como $\|Z\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 4^2} = \sqrt{21}$ entonces

$$V = \frac{5}{4}\frac{Z}{\|Z\|} = \frac{5}{4\sqrt{21}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \blacksquare$$

Ejemplo 9.20
Compruebe que el paralelogramo $PQSR$ del ejemplo 9.17 es un rombo.

Solución:
Basta ver que $\left\|\overrightarrow{PQ}\right\| = \left\|\overrightarrow{PR}\right\|$, o también que $\|Q - P\| = \|R - P\|$. Veámoslo:

Como $Q - P = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $R - P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ entonces

$$\|Q - P\| = \sqrt{(-1)^2 + 3^3 + 0^2} = \sqrt{10} \qquad \text{y} \qquad \|R - P\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 3^2} = \sqrt{10} \quad \blacksquare$$

• Los conceptos de combinación lineal y de dependencia e independencia lineal para dos vectores de $\mathbb{R}^3$ se definen de la misma forma que para dos vectores de $\mathbb{R}^2$. A continuación extenderemos estos conceptos a tres vectores de $\mathbb{R}^3$.

Sean X, Y y Z vectores de $\mathbb{R}^3$. Estos vectores se dicen **linealmente dependientes (L.D.)** si alguno de ellos es combinación lineal de los otros dos; si esto no sucede los vectores se dicen **linealmente independientes (L.I.)**. Por otra parte, todo vector de la forma

$$aX + bY + cZ$$

con a, b, c escalares, se dice una **combinación lineal (C.L.)** de X, Y y Z.

Para vectores geométricos del espacio vimos que si $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{z}$ son vectores L.I., entonces todo vector $\overrightarrow{w}$ del espacio es expresable de manera única como combinación lineal de $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{z}$. Es claro que a partir de este hecho se deduce en forma inmediata que:

> Si X, Y y Z son vectores L.I. de $\mathbb{R}^3$ entonces todo vector W de $\mathbb{R}^3$ es expresable de manera única como C.L. de X, Y y Z.

En el capítulo 10 se dará una prueba de este resultado sin recurrir a vectores geométricos.

- Los vectores $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $E_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ son llamados **vectores canónicos** de $\mathbb{R}^3$.

Cualquiera sea $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ en $\mathbb{R}^3$, se tiene que

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

es decir,

$$X = x_1E_1 + x_2E_2 + x_3E_3 \tag{9.20}$$

La igualdad (9.20) se llama **descomposición canónica** del vector X.

Ejemplo 9.21
La descomposición canónica del vector $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ es

$$X = -1E_1 + 2E_2 + 3E_3 \tag{9.21}$$

(ver figura 9.22)

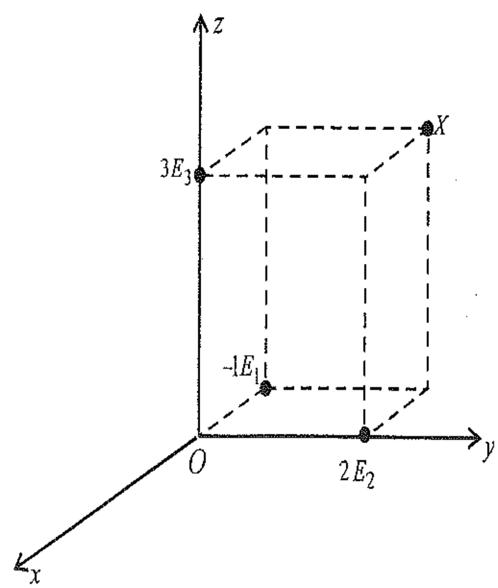


Figura 9.22.

La descomposición en (9.21) es la versión en $\mathbb{R}^3$ de la descomposición

$$\overrightarrow{OX} = -\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k} \quad \blacksquare$$

Ejemplo 9.22

Dados $X = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ y $Y = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, halle la descomposición canónica del vector $-\frac{3}{4}X + 5Y$.

Solución:

Puesto que

$$-\frac{3}{4}X + 5Y = \begin{pmatrix} -15/4 - 5 \\ 0 + 10 \\ 9/4 + 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -35/4 \\ 10 \\ 89/4 \end{pmatrix}$$

la descomposición canónica de $-\frac{3}{4}X + 5Y$ es $-\frac{3}{4}X + 5Y = -\frac{35}{4}E_1 + 10E_2 + \frac{89}{4}E_3$ $\blacksquare$

- Se define el **producto escalar** de dos vectores $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ y $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$, denotado $X \cdot Y$, como el producto escalar $\overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{OY}$. Así,

$$X \cdot Y = \overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{OY}$$

Ahora, como $\overrightarrow{OX} = x_1\overrightarrow{i} + x_2\overrightarrow{j} + x_3\overrightarrow{k}$ y $\overrightarrow{OY} = y_1\overrightarrow{i} + y_2\overrightarrow{j} + y_3\overrightarrow{k}$ entonces $\overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{OY} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$. Por tanto,

Si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ y $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ son vectores de $\mathbb{R}^3$, el producto escalar de X y Y es el escalar $X \cdot Y = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$

(9.22)

El producto escalar en $\mathbb{R}^3$ goza de las mismas propiedades que él posee en el caso de $\mathbb{R}^2$. Cualesquiera sean X, Y, Z en $\mathbb{R}^3$ y $r \in \mathbb{R}$ se tiene:

1. $X \cdot Y$ es un escalar
2. $X \cdot X = \|X\|^2$
3. $X \cdot Y = Y \cdot X$
4. $(rX) \cdot Y = r(X \cdot Y) = X \cdot (rY)$
5. $X \cdot (Y + Z) = X \cdot Y + X \cdot Z$ y $(X + Y) \cdot Z = X \cdot Z + Y \cdot Z$
6. $|X \cdot Y| \leq \|X\|\,\|Y\|$ (Desigualdad de Cauchy-Schwarz)

- Si X y Y son vectores no nulos de $\mathbb{R}^3$, el **ángulo entre X y Y** se define como el ángulo entre los vectores geométricos $\overrightarrow{OX}$ y $\overrightarrow{OY}$. Al igual que en $\mathbb{R}^2$, si α es el ángulo entre X y Y entonces

$$\cos\alpha = \frac{X \cdot Y}{\|X\|\,\|Y\|}$$

Los vectores X y Y (puede ser $X = O$ o $Y = O$) se dicen **ortogonales**, lo cual se denota $X \perp Y$, si los vectores $\overrightarrow{OX}$ y $\overrightarrow{OY}$ son perpendiculares. Se tiene entonces que

$$\boxed{X \perp Y \text{ si y sólo si } X \cdot Y = 0}$$

Ejemplo 9.23

Los vectores $X = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$ y $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1/7 \end{pmatrix}$ son ortogonales ya que

$$X \cdot Y = (4)(1) + (-5)(1) + (7)\left(\frac{1}{7}\right) = 0 \quad ■$$

- Sean X y U vectores de $\mathbb{R}^3$, $U \neq O$. La **proyección** de X sobre U se define y se denota como en el caso X y U en $\mathbb{R}^2$.

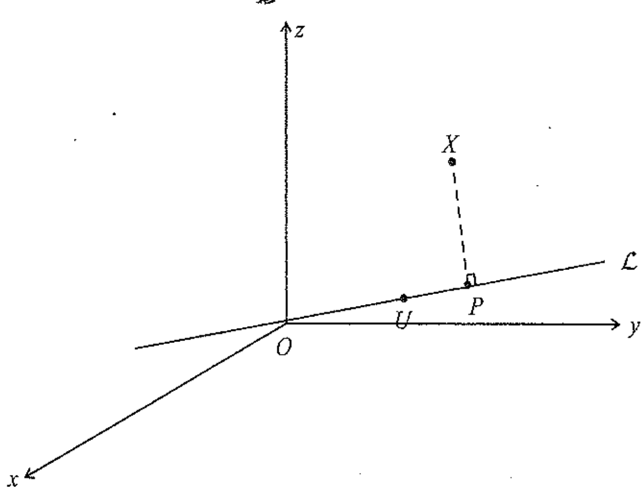


Figura 9.23.

Si $\mathcal{L}$ es la recta que pasa por el origen y por U, $Proy_U X$ es el punto P donde la perpendicular trazada desde X a la recta $\mathcal{L}$, corta a esta recta, como se ilustra en la figura 9.23. Al igual que para vectores de $\mathbb{R}^2$, se tiene que

$$Proy_U X = \left(\frac{X \cdot U}{\|U\|}\right)\frac{U}{\|U\|} = \left(\frac{X \cdot U}{\|U\|^2}\right)U = \left(\frac{X \cdot U}{U \cdot U}\right)U \tag{9.23}$$

Además, X descompone como

$$X = Proy_U X + (X - Proy_U X)$$

donde $Proy_U X$ es paralelo a U y $X - Proy_U X$ es ortogonal a U.

Ejemplo 9.24

Sea $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ un vector de $\mathbb{R}^3$. Sabemos que

$$X = x_1 E_1 + x_2 E_2 + x_3 E_3$$

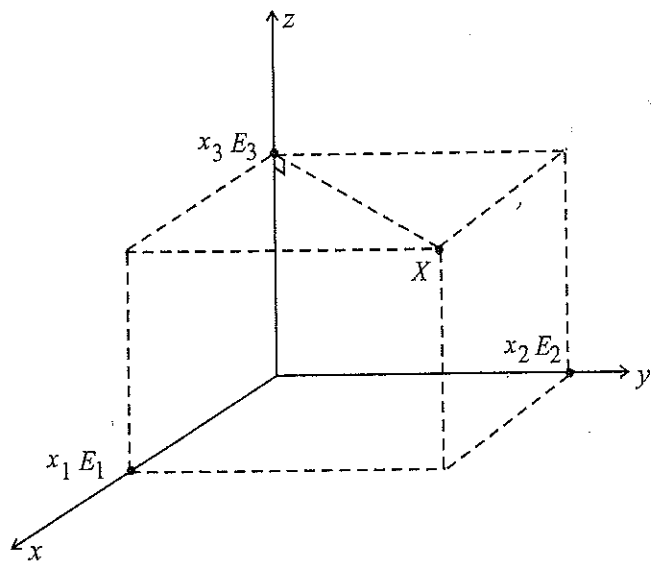


Figura 9.24.

A partir de la figura 9.24, es claro que

$$Proy_{E_3} X = x_3 E_3$$

pues x_3E_3 es el punto donde la perpendicular trazada desde X al eje z, corta a este eje, el cual es la recta que pasa por el origen y por E_3. Ahora, si aplicamos la formula (9.23), tenemos que

$$Proy_{E_3} X = (X \cdot E_3)\, E_3 = \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) E_3 = x_3 E_3$$

lo cual confirma lo apreciado en la figura.

De manera similar se tiene que

$$Proy_{E_1} X = x_1 E_1 \qquad y \qquad Proy_{E_2} X = x_2 E_2$$

Así que

$$X = Proy_{E_1} X + Proy_{E_2} X + Proy_{E_3} X$$

igualdad que es la versión en $\mathbb{R}^3$ de la igualdad

$$\overrightarrow{v} = Proy_{\overrightarrow{i}} \overrightarrow{v} + Proy_{\overrightarrow{j}} \overrightarrow{v} + Proy_{\overrightarrow{k}} \overrightarrow{v}$$

donde $\overrightarrow{v}$ es un vector geométrico cualquiera del espacio. ■

Ejemplo 9.25

$$\text{Sean } X = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad U = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcule la proyección de X sobre U.
b) Exprese a X como la suma de un vector paralelo a U y un vector ortogonal a U.

Solución:
a) La proyección de X sobre U es el vector

$$Proy_U X = \left(\frac{X \cdot U}{\|U\|}\right) \frac{U}{\|U\|} = \left(\frac{X \cdot U}{\|U\|^2}\right) U$$

Ahora, como

$$X \cdot U = (2)(0) + (3)(-2) + (4)(1) = -2 \quad \text{y} \quad \|U\|^2 = (0)(0) + (-2)(-2) + (1)(1) = 5$$

entonces

$$Proy_U X = -\frac{2}{5} U = -\frac{2}{5} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4/5 \\ -2/5 \end{pmatrix} \tag{9.24}$$

b) Sabemos que

$$X = Proy_U X + (X - Proy_U X)$$

donde $Proy_U X$ es paralelo a U y $X - Proy_U X$ es ortogonal a U.

Como $Proy_U X = \begin{pmatrix} 0 \\ 4/5 \\ -2/5 \end{pmatrix}$ y $X - Proy_U X = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 4/5 \\ -2/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 11/5 \\ 22/5 \end{pmatrix}$

entonces la expresión pedida para X es

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ 4/5 \\ -2/5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 11/5 \\ 22/5 \end{pmatrix}$$

donde $\begin{pmatrix} 0 \\ 4/5 \\ -2/5 \end{pmatrix}$ es paralelo a U y $\begin{pmatrix} 2 \\ 11/5 \\ 22/5 \end{pmatrix}$ es ortogonal a U. Es fácil comprobar esto último. En efecto: La igualdad (9.24) nos muestra que $\begin{pmatrix} 0 \\ 4/5 \\ -2/5 \end{pmatrix}$ es paralelo a U; por otra parte

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 11/5 \\ 22/5 \end{pmatrix} \cdot U = \begin{pmatrix} 2 \\ 11/5 \\ 22/5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = (2)(0) + \left(\frac{11}{5}\right)(-2) + \left(\frac{22}{5}\right)(1) = 0$$

lo cual muestra que $\begin{pmatrix} 2 \\ 11/5 \\ 22/5 \end{pmatrix}$ es ortogonal a U. ■

- Ahora trasladaremos a $\mathbb{R}^3$ el producto vectorial entre vectores geométricos del espacio, como lo hemos hecho con otras operaciones.

Si X y Y son vectores de $\mathbb{R}^3$, el **producto cruz** o **producto vectorial** de X y Y, denotado $X \times Y$, es el vector Z de $\mathbb{R}^3$ tal que $\overrightarrow{OX} \times \overrightarrow{OY} = \overrightarrow{OZ}$.

Como el lector puede comprobar,

$$X \times Y = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} E_1 - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} E_2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} E_3$$

Esta última igualdad se recuerda con mayor facilidad escribiendo su lado derecho como un determinante, en la forma

$$\begin{vmatrix} E_1 & E_2 & E_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}.$$

Tenemos así que:

$$\text{Si } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ y } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \text{ son vectores de } \mathbb{R}^3\text{, entonces} \qquad (9.25)$$

$$X \times Y = \begin{vmatrix} E_1 & E_2 & E_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

El lector puede probar fácilmente cada una de las propiedades del producto cruz que se enuncian a continuación, las cuales son simplemente las versiones en $\mathbb{R}^3$ de las propiedades ya presentadas para el producto cruz entre vectores geométricos del espacio.

Cualesquiera sean los vectores X, Y, Z en $\mathbb{R}^3$ y cualquiera sea el escalar r, se tiene que:

1. $X \times Y$ es ortogonal tanto a X como a Y, es decir,
$$X \cdot (X \times Y) = 0 \qquad \text{y} \qquad Y \cdot (X \times Y) = 0$$
2. $X \times Y = O$ si y sólo si X y Y son paralelos
3. $Y \times X = -(X \times Y)$
4. $(rX) \times Y = r(X \times Y) = X \times (rY)$
5. $X \times (Y + Z) = (X \times Y) + (X \times Z)$
6. $(X + Y) \times Z = (X \times Z) + (Y \times Z)$
7. Si $X \neq O$ y $Y \neq O$,
$$\|X \times Y\| = \|X\|\,\|Y\|\operatorname{sen}\theta$$
donde θ es el ángulo entre X y Y.
8. Si X y Y no son paralelos, $\|X \times Y\|$ es el área del paralelogramo determinado por X y Y.

Ejemplo 9.26

$$E_1 \times E_2 = \begin{vmatrix} E_1 & E_2 & E_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} E_1 - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} E_2 + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} E_3 = E_3$$

Similarmente,

$$E_2 \times E_3 = E_1 \qquad \text{y} \qquad E_3 \times E_1 = E_2$$

Estas relaciones entre los vectores E_1, E_2 y E_3 son la versión en $\mathbb{R}^3$ de las relaciones

$$\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k}, \qquad \overrightarrow{j} \times \overrightarrow{k} = \overrightarrow{i} \qquad \text{y} \qquad \overrightarrow{k} \times \overrightarrow{i} = \overrightarrow{j} \qquad \blacksquare$$

Ejemplo 9.27

Halle dos vectores unitarios que sean ortogonales tanto al vector

$X = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ como al vector $Y = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Solución:

Un vector ortogonal tanto a X como a Y es el vector

$$\begin{aligned} X \times Y &= \begin{vmatrix} E_1 & E_2 & E_3 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} E_1 - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} E_2 + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} E_3 \\ &= 7E_1 - 10E_2 + 8E_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ -10 \\ 8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Luego, dos vectores unitarios y ortogonales a X y Y son

$$N = \frac{X \times Y}{\|X \times Y\|} = \frac{1}{\sqrt{213}} \begin{pmatrix} 7 \\ -10 \\ 8 \end{pmatrix} \quad y \quad -N = -\frac{X \times Y}{\|X \times Y\|} = -\frac{1}{\sqrt{213}} \begin{pmatrix} 7 \\ -10 \\ 8 \end{pmatrix}. \qquad \blacksquare$$

Si X, Y, Z son vectores de $\mathbb{R}^3$, se llama **producto mixto** o **triple producto escalar** de X, Y y Z a

$$X \cdot (Y \times Z)$$

Para este producto se tiene, de manera completamente análoga a lo obtenido para vectores geométricos del espacio, lo siguiente :

> Sean X, Y, Z vectores cualesquiera de $\mathbb{R}^3$.
>
> 1. Si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad$ y $\quad Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$ entonces
> $$X \cdot (Y \times Z) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$
> 2. El volumen del paralelepípedo determinado por X, Y y Z es
> $$\mathcal{V} = |X \cdot (Y \times Z)|$$
> 3. $X \cdot (Y \times Z) = 0$ si y sólo si los vectores X, Y, Z son L.D.
> 4. $X \cdot (Y \times Z) = Y \cdot (Z \times X) = Z \cdot (X \times Y)$

En el numeral 2. del resultado anterior se entiende que el paralelepípedo determinado por los vectores X, Y y Z es el paralelepípedo determinado por los vectores geométricos $\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{OY}$ y $\overrightarrow{OZ}$.

Ejemplo 9.28
Para las siguientes ternas de vectores X, Y, Z determine si ellos son L.I.

a) $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$, $Z = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ -6 \end{pmatrix}$

b) $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$, $Z = \begin{pmatrix} -11 \\ 0 \\ 28 \end{pmatrix}$

c) $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$, $Z = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Solución:
a) Es claro que $Z = -3X$ y así $Z = -3X + 0Y$; luego Z es C.L. de X y Y y por tanto los vectores X, Y y Z son L.D.

b) Observe que en este caso ninguno de los vectores dados es múltiplo escalar de otro de ellos, es decir, cualesquiera dos de ellos son L.I. Calculemos entonces $X \cdot (Y \times Z)$:

$$\begin{aligned} X \cdot (Y \times Z) &= \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & -6 \\ -11 & 0 & 28 \end{vmatrix} \\ &= -\begin{vmatrix} 5 & -6 \\ 0 & 28 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & -6 \\ -11 & 28 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -11 & 0 \end{vmatrix} \\ &= -140 - 3\,(56 - 66) + 2\,(55) = 0 \end{aligned}$$

Como $X \cdot (Y \times Z) = 0$ entonces los vectores X, Y, Z son L.D.

c) Como en el literal *b*), cualesquiera dos de los vectores dados son linealmente independientes. Calculemos entonces $X \cdot (Y \times Z)$:

$$\begin{aligned} X \cdot (Y \times Z) &= \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & -6 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -\begin{vmatrix} 5 & -6 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= -(10 - 6) - 3\,(4 + 6) + 2\,(-2 - 5) = -4 - 30 - 14 \\ &= -48 \end{aligned}$$

Como $X \cdot (Y \times Z) \neq 0$ entonces X, Y, Z son L.I. ■

9.6 Ejercicios

Sección 9.2

1. Para cada punto P dado, dibujar el vector de posición $\overrightarrow{OP}$.

   a) $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ *b*) $P = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ *c*) $P = \begin{pmatrix} -2 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}$ *d*) $P = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

Sección 9.3

2. Para cada vector $\overrightarrow{v}$ dado, hallar su magnitud y dirección, y dibujarlo.

   a) $\overrightarrow{v} = 4\overrightarrow{k}$ *b*) $\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{k}$ *c*) $\overrightarrow{v} = -\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j} - 6\overrightarrow{k}$

   d) $\overrightarrow{v} = -4\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$ *e*) $\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j} - 4\overrightarrow{k}$

3. *a*) Hallar el punto final del vector $\overrightarrow{v}$ cuyo punto inicial es $P = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ y tiene dirección opuesta e igual longitud que el vector $\overrightarrow{u} = 6\overrightarrow{i} + 7\overrightarrow{j} - 3\overrightarrow{k}$.

   b) Hallar el punto inicial del vector $\overrightarrow{v}$ cuyo punto final es $Q = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$, su dirección es la del vector $\overrightarrow{u} = 4\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$ y su magnitud es cinco veces la del vector $\overrightarrow{u}$.

4. *a*) Hallar un vector unitario $\overrightarrow{u}$, tal que sus ángulos directores sean iguales y estén entre 0° y 90°.

   b) Hallar un vector $\overrightarrow{v}$ de magnitud 12 y que tenga la misma dirección que el vector $\overrightarrow{u}$ descrito en *a*).

5. *a*) ¿Existe un vector geométrico cuyos ángulos directores sean 30°, 60° y 45°?

   b) Hallar un vector de posición $\overrightarrow{v}$ que sea unitario y tal que los ángulos entre $\overrightarrow{v}$ y los semiejes positivos x y z sean ambos de 45° ¿En cuál plano coordenado está situado dicho vector $\overrightarrow{v}$?

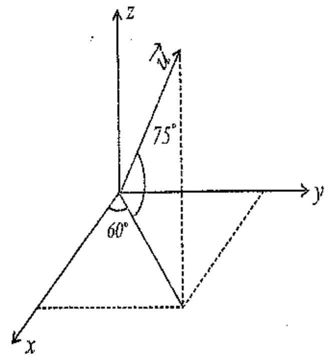
6. Sea $\overrightarrow{v}$ un vector en el espacio, con punto inicial en el origen y con las características descritas en cada literal. Hallar sus componentes y dibujarlo.

   a) $\overrightarrow{v}$ está situado en el plano yz, $\|\overrightarrow{v}\| = 2$ y el ángulo entre $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{j}$ es de 30°.

   b) $\overrightarrow{v}$ está situado en el plano xz, su magnitud es 5 y el ángulo entre $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{k}$ es de 45°.

   c) $\overrightarrow{v}$ es un vector unitario, forma una diagonal de un cubo y las coordenadas de su punto terminal son positivas.

7. Hallar los cosenos directores del vector $\overrightarrow{u}$ dado en la figura.



8. Sobre un cuerpo O actúan dos fuerzas $\overrightarrow{F_1}$ y $\overrightarrow{F_2}$ tales que la magnitud de $\overrightarrow{F_1}$ es 30 Newtons y la de $\overrightarrow{F_2}$ es 50 Newtons; además, $dir\left(\overrightarrow{F_1}\right) = \begin{pmatrix} 150° \\ 60° \\ \gamma_1 \end{pmatrix}$ con $90° \leq \gamma_1 \leq 180°$ y $dir\left(\overrightarrow{F_2}\right) = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ 45° \\ 90° \end{pmatrix}$ con $90° \leq \alpha_2 \leq 180°$. Hallar:

   a) Los ángulos γ_1 y α_2

   b) La descomposición canónica de $\overrightarrow{F_1}$ y de $\overrightarrow{F_2}$

   c) La magnitud y la dirección de la fuerza resultante que actúa sobre el cuerpo O.

9. Si $\overrightarrow{u}$ tiene ángulos directores α β, γ y $\overrightarrow{v}$ tiene ángulos directores α', β', γ' expresar, en términos de estos ángulos, el coseno del ángulo θ entre $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$.

10. Para cada par de vectores $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ dado, determinar si el ángulo entre ellos es agudo, obtuso o recto.

    a) $\overrightarrow{u} = 6\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + 4\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{k}$ *b*) $\overrightarrow{u} = -\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$

    c) $\overrightarrow{u} = -6\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{v} = 3\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + 6\overrightarrow{k}$

11. Mostrar que el ángulo entre los vectores $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ y $\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$ es el doble del ángulo entre los vectores $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ y $\overrightarrow{z} = 2\overrightarrow{i} + 5\overrightarrow{j} + 5\overrightarrow{k}$.

12. Hallar escalares a y b tales que el vector $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{i} + a\overrightarrow{j} + b\overrightarrow{k}$ sea perpendicular a los vectores $\overrightarrow{u} = -\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}$ y $\overrightarrow{w} = 2\overrightarrow{i} + 5\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$.

13. Considere un triángulo OAB tal que $\overrightarrow{OA} = 3\overrightarrow{i} + 6\overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k}$ y $\overrightarrow{OB} = 4\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}$

    a) Hallar la magnitud del lado $\overline{AB}$ del triángulo.

    b) Mostrar que el triángulo es rectángulo.

    c) Hallar los ángulos agudos del triángulo.

Sección 9.4

14. Sean $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - 3\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{v} = -3\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ y ϕ el ángulo entre $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$.

    a) Utilizar el producto cruz para hallar el seno del ángulo ϕ.

    b) Utilizar el producto escalar para hallar el coseno del ángulo ϕ.

    c) Comprobar que $\operatorname{sen}^2\phi + \cos^2\phi = 1$.

15. Sean $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ y $\vec{w} = 3\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$

    a) Hallar un vector $\vec{v}$ tal que $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{w}$. ¿Hay más de una solución?

    b) Hallar un vector $\vec{v}$ tal que $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{w}$ y $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$. ¿Hay más de una solución?

16. Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ vectores geométricos en el espacio.

    a) Probar que $\|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$. (Esta igualdad es conocida como **Identidad de Lagrange**).

    b) Probar que $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$ si y sólo si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares.

    c) Simplificar $(\vec{u} + \vec{v}) \times (\vec{u} - \vec{v})$.

    d) Si $\|\vec{u}\| = 2$, $\vec{v}$ es unitario y el ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es 45°, encontrar el escalar λ tal que $\vec{u} + \lambda\vec{v}$ sea perpendicular a $\vec{u}$.

17. Considerar los vectores $\vec{u} = \vec{i}$, $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j}$ y $\vec{w} = \vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$.

    a) Hallar el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

    b) Expresar cada uno de los vectores $\vec{j}$ y $\vec{k}$ como combinación lineal de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

    c) Expresar el vector $\vec{z} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$ como combinación lineal de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

18. Calcular el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores dados en cada literal.

    a) $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{v} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$ y $\vec{w} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$.

    b) $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$ y $\overrightarrow{OR}$ donde $P = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $R = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}$.

    c) $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$ y $\overrightarrow{PS}$ donde $P = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $R = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $S = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

19. Hallar todos los escalares t tales que los siguientes tres vectores no determinan un paralelepípedo: $\vec{i} + t\vec{j} + \vec{k}$, $t\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{j} + t\vec{k}$.

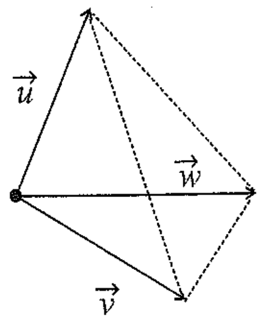
20. Probar que
$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{v} \cdot (\vec{w} \times \vec{u})$$
    cualesquiera sean los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

21. Suponiendo que los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ y $\vec{y}$ satisfacen las relaciones

    $(\vec{u} \times \vec{w}) \cdot \vec{v} = 5$, $\quad (\vec{u} \times \vec{y}) \cdot \vec{v} = 3$, $\quad \vec{w} + \vec{y} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ $\quad$ y $\quad \vec{w} - \vec{y} = \vec{i} - \vec{k}$

    expresar el vector $(\vec{u} \times \vec{v}) \times (\vec{w} \times \vec{y})$ como combinación lineal de $\vec{i}$, $\vec{j}$ y $\vec{k}$.

22. *a*) Sean $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ vectores no nulos con el mismo punto inicial. Probar que el volumen $\mathcal{V}$ del tetraedro determinado por ellos (vea la figura) está dado por
$$\mathcal{V} = \frac{1}{6} |\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})|$$



b) Calcular el volumen del tetraedro determinado por los vectores $\overrightarrow{u} = 3\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + 5\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{v} = -4\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + 6\overrightarrow{k}$ y $\overrightarrow{w} = 2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{k}$.

23. Dados los vectores $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}$ y $\overrightarrow{y} = 3\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$, hallar:

   a) $3\overrightarrow{w} - \overrightarrow{v} + \overrightarrow{y}$

   b) El vector $\overrightarrow{x}$ tal que $2\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} + \overrightarrow{x} = \overrightarrow{w} + 7\overrightarrow{x}$.

   c) La magnitud y la dirección de $2\overrightarrow{v} + 5\overrightarrow{y} - \overrightarrow{w}$.

   d) Un vector unitario con la misma dirección de $\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}$.

   e) $\overrightarrow{y} \cdot \overrightarrow{w} + \overrightarrow{u} \cdot (2\overrightarrow{v} - \overrightarrow{y})$

   f) El ángulo entre $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$.

   g) Los cósenos directores del vector $\overrightarrow{v} - 2\overrightarrow{w}$.

   h) $Proy_{\overrightarrow{u}}\overrightarrow{v}$

   i) La componente escalar de $\overrightarrow{u}$ sobre $\overrightarrow{v}$.

   j) $\|2\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u}\|$

   k) $\overrightarrow{u} \times (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w})$ y $(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \times \overrightarrow{w}$.

   l) Dos vectores unitarios perpendiculares a los vectores $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{u}$.

   m) El área del paralelogramo determinado por $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$.

   n) Un vector no nulo $\overrightarrow{x}$ tal que $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{x} = 0$.

   ñ) El escalar a tal que $\overrightarrow{v} - a\overrightarrow{u}$ es perpendicular a $\overrightarrow{w}$.

   o) Escalares a y b tales que $\overrightarrow{z} = a\overrightarrow{w} + b\overrightarrow{y}$ es un vector unitario perpendicular a $\overrightarrow{y}$ (hay dos soluciones).

   p) Escalares a, b y c tales que $\overrightarrow{w} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} + c\overrightarrow{y}$.

   q) El volumen del paralelepípedo determinado por $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$.

Sección 9.5

24. Sean $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ y $Z = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Hallar:

   a) La descomposición canónica de los siguientes vectores:

   i) $X + Z - Y$ *ii*) $7X - \frac{1}{2}Y - 3Z$

b) Los cosenos directores del vector $\overrightarrow{YZ}$.

c) El punto medio del segmento $\overline{XZ}$.

d) La distancia entre X y Y.

e) El punto sobre el segmento $\overline{XY}$ cuya distancia a X es $3/4$ de la distancia de X a Y.

f) El vector unitario con la misma dirección del vector $2X - 3Z$.

25. Sean $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Z = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $W = aX + bY + cZ$ donde a, b, $c \in \mathbb{R}$.

a) Expresar el vector W como combinación lineal de los vectores E_1, E_2 y E_3.

b) Demostrar que $W = O$ si y sólo si $a = b = c = 0$.

c) Hallar a, b y c tales que $W = E_1 + 2E_2 + 3E_3$.

d) Hallar a, b y c, no todos nulos, tales que $aX + bY + cV = O$.

e) Demostrar que no existen a, b, c reales tales que $E_1 + 2E_2 + 3E_3 = aX + bY + cV$.

26. Sean $P = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $S = \begin{pmatrix} m \\ n \\ 4 \end{pmatrix}$.

a) Mostrar que los puntos P, Q y R no son colineales.

b) Hallar m y n tales que P, Q y S sean colineales.

27. Considere una de las diagonales de un cubo y sea P uno de los extremos de esa diagonal. Hallar los ángulos con vértice P entre dicha diagonal y las aristas que tienen a P como uno de sus extremos.

28. Sean $X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $Z = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a) Calcular: $(2X \cdot Z)\,Y - (X \cdot Y)\,(2Z)$

b) Hallar los vectores de la forma $aY + bZ$ ortogonales al vector X y de longitud 1.

c) Determinar vectorialmente los cosenos de los ángulos del triángulo cuyos vértices son los puntos X, Y y Z.

d) Hallar el baricentro del triángulo de vértices X, Y y Z.

29. Sean $X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$. Descomponer el vector X en la forma $X = W + Z$, con W paralelo a Y y Z ortogonal a Y.

30. Sean $X = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $Z = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $W = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $U = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

a) Determinar todos los pares de vectores ortogonales entre sí.

b) Hallar un vector de magnitud 2 paralelo al vector $2X - Y$.

c) Hallar $Proy_Y X$ y $Proy_X Y$.

d) Descomponer el vector X como suma de un vector paralelo a W y un vector ortogonal a W.

31. Sean $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $Q = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$.

a) Hallar un punto S de $\mathbb{R}^3$ tal que P, Q, S sean los vértices de un triángulo rectángulo en P.

b) Hallar un vector no nulo X de $\mathbb{R}^3$ ortogonal a los vectores P y Q.

32. Sean X y Y dos vectores unitarios y ortogonales de $\mathbb{R}^3$. Probar que el vector $(X \times Y) \times X$ es unitario.

33. Dados dos vectores no paralelos X, Y de $\mathbb{R}^3$ y $Z = (Y \times X) - Y$,

a) Probar que X es ortogonal a $Y + Z$.

b) Probar que el ángulo θ entre Y y Z es tal que $90^o < \theta < 180^o$.

c) Si $\|Y\| = 1$ y $\|Y \times X\| = 2$, calcular la magnitud de Z.

34. Sean X y Y vectores de $\mathbb{R}^3$. Probar que si $X \times Y = O$ y $X \cdot Y = 0$, entonces $X = O$ o $Y = O$.

35. Sean X y Y dos vectores no paralelos de $\mathbb{R}^3$, tales que $X \cdot Y = 2$, X es unitario y $\|Y\| = 4$. Si $Z = (2X \times Y) - 3Y$, calcular:

a) $X \cdot (Y + Z)$.

b) La magnitud de Z.

c) El coseno del ángulo θ entre Y y Z.

36. Sean $P = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ y $R = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ los vértices de un triángulo.

a) Dibujar el triángulo.

b) Hallar el perímetro del triángulo.

c) Mostrar que el triángulo es un triángulo rectángulo.

d) Hallar los ángulos agudos del triángulo.

e) Calcular el área del paralelogramo determinado por $\overrightarrow{PQ}$ y $-2\overrightarrow{PR}$.

37. Sean $P = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ y $S = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ puntos del espacio.

a) Mostrar que los puntos P, Q, R y S son los vértices de un paralelogramo; dibujar el paralelogramo y hallar su área.

b) Hallar el punto X del segmento $\overline{SQ}$ que lo divide de tal modo que $\dfrac{\|\overrightarrow{SX}\|}{\|\overrightarrow{XQ}\|} = 3$.

38. Hallar el área del triángulo con vértices P, Q y R dados en cada literal.

a) $P = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) $P = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}, \quad abc \neq 0$

c) $P = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ b \end{pmatrix}, \quad ab \neq 0$

39. Mostrar que los puntos $P = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $S = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 10 \end{pmatrix}$ son los vértices de un paralelogramo. Calcular el área del paralelogramo.

40. Sean $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $R = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

   a) Hallar todos los puntos S tales que P, Q, R y S son los vértices de un paralelogramo.

   b) Calcular el área del paralelogramo $PQRS$.

   c) Calcular el área del triángulo PQR.

41. Sean $X = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 0 \\ -1/3 \end{pmatrix}$ y $Z = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

   a) Hallar la descomposición canónica de los siguientes vectores:

   i) $X \times Y$ *ii*) $X \times (Y \times Z)$ *iii*) $(X - Y) \times (X - Z)$

   b) Hallar la magnitud del vector $(X \cdot Z)Y + (X \times Z) \times Y$.

   c) Encontrar un vector de longitud 6 y que tenga dirección opuesta a la del vector $2X + (X \times Y) - (Y \times X)$.

   d) Determinar si los vectores $Y + Z$ y X son paralelos.

42. Determinar si los puntos O, P, Q y R son coplanares, siendo O el origen y P, Q, R los puntos dados en cada caso:

   a) $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$

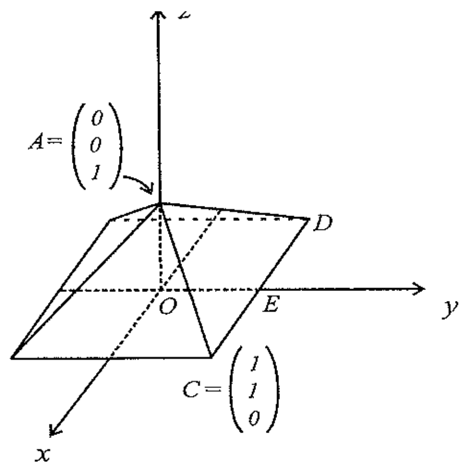
   b) $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix}.$

43. *a*) Determinar si los puntos siguientes son o no coplanares:

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

b) Mostrar que los puntos $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $S = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ no son coplanares y hallar el volumen de la pirámide triangular cuya base es el triángulo PQR y cuyo cuarto vértice es S.

44. La figura muestra una pirámide regular cuya base es cuadrada con centro en el origen y contenida en el plano xy.



a) Hallar el coseno del ángulo entre cada par de vectores dado:

i) $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CO}$ *ii*) $\overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{EO}$ *iii*) $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}$

b) Calcular el volumen de la pirámide.

10

Rectas y planos

10.1 La línea recta

En el espacio, al igual que en el plano, toda recta queda completamente determinada dando dos de sus puntos o bien uno de sus puntos y un **vector director**, es decir, un vector geométrico no nulo paralelo a la recta.

Si una recta $\mathcal{L}$ pasa por el punto P_0 y $\overrightarrow{OD}$ es un vector director de $\mathcal{L}$ (ver figura 10.1) entonces $\mathcal{L}$ está conformada por los puntos X de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$\overrightarrow{P_0X} = t\overrightarrow{OD}, \qquad t \in \mathbb{R} \tag{10.1}$$

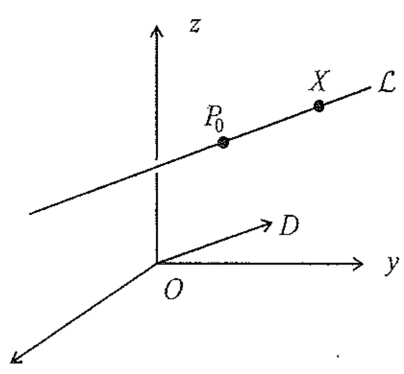


Figura 10.1.

Ahora, exactamente como lo hicimos en el plano, la condición (10.1) se puede expresar usando vectores algebraicos en la forma equivalente

$$X = P_0 + tD, \qquad t \in \mathbb{R}$$

Así que un punto X de $\mathbb{R}^3$ está sobre la recta $\mathcal{L}$ si y sólo si X es de la forma

$$X = P_0 + tD, \qquad t \in \mathbb{R} \tag{10.2}$$

Esta ecuación (10.2) se dice una **ecuación vectorial paramétrica** o simplemente una **ecuación vectorial** para la recta $\mathcal{L}$; la variable t es el parámetro. Diremos indistintamente que $\overrightarrow{OD}$ es un vector director de $\mathcal{L}$ o que D es un vector director de $\mathcal{L}$.

Si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $P_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$, la ecuación (10.2) es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

la cual es equivalente a las tres ecuaciones escalares

$$\begin{aligned} x &= x_0 + d_1 t \\ y &= y_0 + d_2 t\ , \qquad t \in \mathbb{R} \\ z &= z_0 + d_3 t \end{aligned} \tag{10.3}$$

que se denominan **ecuaciones escalares paramétricas** o simplemente **ecuaciones paramétricas** de la recta $\mathcal{L}$.

Si $d_1,\ d_2,\ d_3$ son todos distintos de cero, es fácil ver que un punto $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ satisface (10.3) para algún valor de t si y sólo si

$$\frac{x - x_0}{d_1} = \frac{y - y_0}{d_2} = \frac{z - z_0}{d_3} \tag{10.4}$$

En efecto, si $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ satisface (10.3) para cierto valor de t entonces, despejando t en cada una de las ecuaciones (10.3) e igualando, vemos que $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ satisface (10.4).

Recíprocamente, si $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ satisface (10.4) entonces haciendo

$$t = \frac{x - x_0}{d_1} = \frac{y - y_0}{d_2} = \frac{z - z_0}{d_3} \tag{10.5}$$

se tiene que

$$x - x_0 = d_1 t\ , \quad y - y_0 = d_2 t \quad \text{y} \quad z - z_0 = d_3 t$$

y por tanto $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ satisface (10.3). De manera que un punto $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ está sobre la recta $\mathcal{L}$ si y sólo si cumple las igualdades en (10.4). Nos referiremos a la expresión (10.4) como unas **ecuaciones simétricas** para la recta $\mathcal{L}$.

Si alguna de las componentes $d_1,\ d_2,\ d_3$ del vector director D es cero entonces $\mathcal{L}$ no tiene ecuaciones del tipo (10.4). Sin embargo, si una sola de esas componentes es cero todavía es posible describir la recta $\mathcal{L}$ mediante dos ecuaciones que no involucran el parámetro t. Por ejemplo, si $d_1 = 0$ pero $d_2 \neq 0$ y $d_3 \neq 0$, en lugar de (10.3) podemos escribir, en forma equivalente,

$$x = x_0, \qquad \frac{y - y_0}{d_2} = \frac{z - z_0}{d_3}$$

A ecuaciones de este tipo también nos referiremos como ecuaciones simétricas.

Al igual que en el plano, se tiene que una ecuación vectorial para la recta $\mathcal{L}$ que pasa por los puntos P y Q del espacio, con $P \neq Q$, es

$$X = P + t\,(Q - P)\,, \qquad t \in \mathbb{R}$$

pues $Q - P$ es un vector director de $\mathcal{L}$.

En particular, el segmento de recta $\overline{PQ}$ puede describirse en la forma

$$\overline{PQ} = \left\{X \in \mathbb{R}^3 \mid X = P + t\,(Q - P)\,;\quad 0 \leq t \leq 1\right\}$$

Es de señalar que, a diferencia de lo que ocurre en el plano, para una recta en el espacio no se tiene el concepto de pendiente, ni se cuenta con una ecuación análoga a la ecuación $ax + by = c$. Así que por el momento (10.2), (10.3) y (10.4) son las únicas maneras de describir mediante ecuaciones una recta en el espacio.

Ejemplo 10.1

Sea $\mathcal{L}$ la recta que pasa por el punto $P_0 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y es paralela al vector $D = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

a) Halle para $\mathcal{L}$ una ecuación vectorial, ecuaciones paramétricas y ecuaciones simétricas.

b) Determine cuáles de los puntos siguientes están en $\mathcal{L}$:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad X_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Solución:

a) Una ecuación vectorial para $\mathcal{L}$ es

$$X = P_0 + tD$$

es decir,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Unas ecuaciones paramétricas para $\mathcal{L}$ son

$$\begin{aligned} x &= -3 + t \\ y &= 1 - 2t \\ z &= 1 + 3t \end{aligned}$$

y unas ecuaciones simétricas para $\mathcal{L}$ serán

$$\frac{x+3}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{3} \tag{10.6}$$

b) Para determinar cuáles de los puntos dados X_1, X_2, X_3 están en $\mathcal{L}$ usaremos las ecuaciones simétricas (10.6). Empezando con X_1 vemos que (10.6) no se satisface con $x = 0$, $y = 0$ y $z = 0$, luego X_1 no está en $\mathcal{L}$; de igual forma X_2 no está en $\mathcal{L}$ ya que (10.6) no se satisface con $x = 1$, $y = 2$ y $z = 3$. En cuanto al punto X_3, vemos que (10.6) se satisface con $x = -4$, $y = 3$ y $z = -2$, pues

$$\frac{-4+3}{1} = \frac{3-1}{-2} = \frac{-2-1}{3}$$

por tanto, el punto X_3 está en $\mathcal{L}$. ■

Ejemplo 10.2
Halle una ecuación vectorial y ecuaciones paramétricas para la recta $\mathcal{L}$ que pasa por los puntos $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Solución:
Una ecuación vectorial para $\mathcal{L}$ es

$$X = P + t\,(Q - P)$$

es decir,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

o sea

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se sigue que unas ecuaciones paramétricas para $\mathcal{L}$ son

$$\begin{aligned} x &= 1 - t \\ y &= t \\ z &= 1 \end{aligned}$$

Nótese que $\mathcal{L}$ no tiene ecuaciones del tipo (10.4), pues la componente en z del vector director $D = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ es 0. Sin embargo, despejando el parámetro t en las dos primeras ecuaciones e igualando, podemos describir la recta $\mathcal{L}$ mediante el par de ecuaciones

$$1 - x = y \quad \text{y} \quad z = 1$$

En la figura 10.2 se muestra la recta $\mathcal{L}$, los puntos P, Q y el vector director $\overrightarrow{OD}$. ■

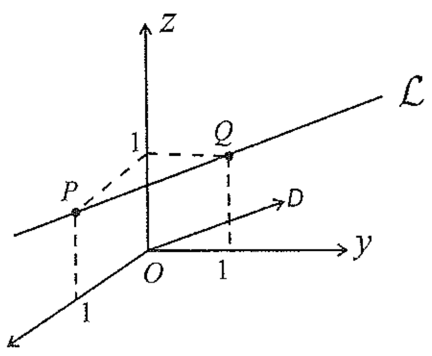


Figura 10.2.

Volvamos a la ecuación (10.2) para una recta con vector director $\overrightarrow{OD}$ y que pasa por un punto dado P_0. Si la recta pasa por el origen entonces tomando $P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ en (10.2), esta ecuación toma la forma

$$X = tD, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Así, al igual que en el plano, la recta $\mathcal{L}$ que pasa por el origen y por un punto dado D, $D \neq O$, está conformada por los múltiplos escalares de D. Por ello nos referiremos a dicha recta $\mathcal{L}$ como **la recta generada por** D, tal como lo hicimos en el caso del plano.

Nótese que dos vectores de $\mathbb{R}^3$ son linealmente dependientes (alguno de los dos es múltiplo escalar del otro) si y sólo si están en una misma línea recta que pase por el origen, como ocurre con dos vectores de $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo 10.3
a) Los vectores $X = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix}$ y $Y = \begin{pmatrix} -10 \\ 25 \\ -40 \end{pmatrix}$ son linealmente dependientes, es decir, X y Y están sobre una misma recta $\mathcal{L}$ que pasa por el origen, ya que $Y = -5X$. Como dicha recta $\mathcal{L}$ pasa por el origen y por el punto X, unas ecuaciones simétricas para ella son

$$\frac{x}{2} = -\frac{y}{5} = \frac{z}{8}$$

b) Los vectores $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ y $Y = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ son linealmente independientes ya que ninguno de los dos es múltiplo escalar del otro; esto significa que no existe una línea recta que pase por el origen y contenga simultáneamente los puntos X y Y. ■

10.2 Ángulo y posiciones relativas entre dos rectas

Sean $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ dos rectas del espacio y sean D_1 y D_2 vectores directores de $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ respectivamente.

Para las rectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ destacamos las siguientes posiciones relativas:

- **$\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ se cortan.**

  Se entiende por esto que $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ tienen un único punto en común, el cual es el punto de corte.

- **$\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ son paralelas.**

  Esto ocurre si y sólo si los vectores directores D_1, D_2 son paralelos. Si las rectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$, además de ser paralelas, tienen un punto en común entonces ellas son **coincidentes**, es decir $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$.

- **$\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ son perpendiculares.**

  Se entiende por ello que los vectores D_1, D_2 son ortogonales (no importa si $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ se cortan o no).

- **$\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ se cruzan (son oblicuas** o **son ajenas)**

  Se entiende por ello que $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ no se cortan ni son paralelas. (Vea figura 10.3). Nótese que esta situación se presenta si y sólo si $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ no están en un mismo plano.

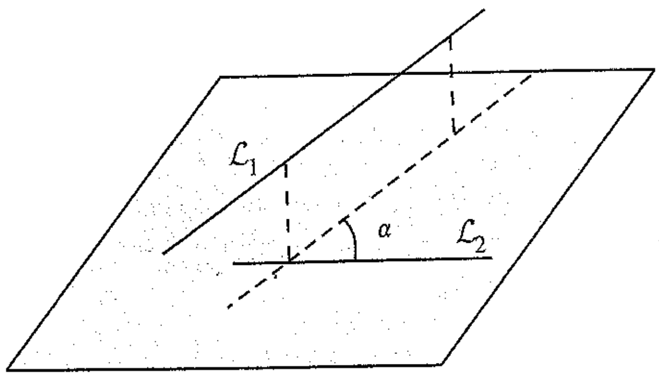


Figura 10.3.

Continuemos con las rectas $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ y sea θ.el ángulo entre los vectores directores D_1 y D_2

Es claro que si $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ se cortan, el ángulo θ es uno de los ángulos que se forman en el punto de corte, es decir, es uno de los ángulos entre $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$. Pues bien, dicho ángulo θ se considerará un ángulo entre $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$, aún en el caso en que $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ no se corten (ver figura 10.4). Si $\theta = 90°$, éste se tomará como el ángulo entre $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$; si $\theta \neq 90°$, tomaremos como el ángulo entre $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ el menor entre θ y $180° - \theta$.

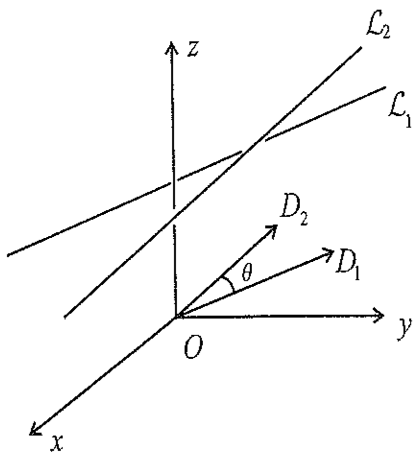


Figura 10.4.

Si α es el ángulo entre $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ entonces $0 \leq \alpha \leq 90°$ y

$$\cos\alpha = \frac{|D_1 \cdot D_2|}{\|D_1\|\,\|D_2\|}$$

de donde

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{|D_1 \cdot D_2|}{\|D_1\|\,\|D_2\|}\right)$$

Nótese que $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ son paralelas si y sólo si el ángulo entre $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ es $\alpha = 0$, y que son perpendiculares si y sólo si el ángulo entre ellas es $\alpha = 90°$.

En la figura 10.3, se muestra el ángulo α entre dos rectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ que se cruzan.

Ejemplo 10.4
Una recta $\mathcal{L}_1$ pasa por el punto $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y tiene a $D_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ como un vector director; otra recta $\mathcal{L}_2$ pasa por el punto $P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y tiene a $D_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 13 \end{pmatrix}$ como un vector director. Probar que $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ se cortan, hallar su punto de intersección y el ángulo entre ellas.

Solución:

Unas ecuaciones paramétricas para $\mathcal{L}_1$ y para $\mathcal{L}_2$ son respectivamente,

$$\begin{array}{rcl} x &=& 1+t \\ y &=& 1+2t \\ z &=& 1+3t \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{rcl} x &=& 2+3r \\ y &=& 1+8r \\ z &=& 0+13r \end{array}$$

Hemos denotado t al parámetro en las ecuaciones de $\mathcal{L}_1$ y r al parámetro de las ecuaciones de $\mathcal{L}_2$ para evitar posibles confusiones. Ahora probaremos que existe un valor para t y un valor para r que proporcionan un mismo punto $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, es decir, existen valores para t y r tales que

$$\begin{array}{rcl} 1+t &=& 2+3r \\ 1+2t &=& 1+8r \\ 1+3t &=& 0+13r \end{array}$$

En efecto, resolviendo (para t y r) el sistema conformado por las dos primeras ecuaciones se obtiene como única solución de dicho sistema $t = 4$ y $r = 1$, valores que también satisfacen la tercera ecuación. Hemos probado así que las rectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ tienen un punto en común y sólo uno, con lo cual queda probado que dichas rectas se cortan. Para obtener el punto de intersección basta sustituir $t = 4$ en las ecuaciones para $\mathcal{L}_1$ o sustituir $r = 1$ en las ecuaciones para $\mathcal{L}_2$; haciendo esto último se obtiene

$$x = 2 + 3\,(1) = 5, \quad y = 1 + 8\,(1) = 9 \quad \text{y} \quad z = (13)\,1 = 13$$

Así, el punto de intersección de $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ es $P = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 13 \end{pmatrix}$.

El ángulo entre $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ es

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{|D_1 \cdot D_2|}{\|D_1\|\,\|D_2\|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{58}{\sqrt{14}\sqrt{242}}\right) = \cos^{-1}(0.996\,45) \approx 4.83°. \quad \blacksquare$$

Ejemplo 10.5
Considere las rectas

$$\mathcal{L}_1 : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{-3} \qquad \text{y} \qquad \mathcal{L}_2 : \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+3}{2}$$

Pruebe que $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ se cruzan y halle el ángulo entre ellas.

Solución:
Para probar que $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ se cruzan probaremos en primer lugar que $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ no son paralelas y luego que no se cortan.

De las ecuaciones dadas vemos que los vectores $D_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ y $D_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ son, respectivamente, vectores directores de $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$; como estos vectores no son paralelos, ya que ninguno de ellos dos es múltiplo escalar del otro, entonces $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ no son paralelas.

Para probar que $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ no se cortan emplearemos las ecuaciones paramétricas de $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ que se obtienen de las ecuaciones dadas, las cuales son respectivamente

$$\begin{aligned} x &= 1+t \\ y &= 2-2t \\ z &= -1-3t \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} x &= 2+r \\ y &= -1+3r \\ z &= -3+2r \end{aligned}$$

$\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ se cortan si y sólo si existen valores para t y r que proporcionan el mismo punto $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, es decir, si y sólo si existen valores de t y r tales que

$$\begin{aligned} 1+t &= 2+r \\ 2-2t &= -1+3r \\ -1-3t &= -3+2r \end{aligned} \tag{10.7}$$

Resolviendo el sistema conformado por las dos primeras ecuaciones se obtiene como única solución $t = 6/5$ y $r = 1/5$; ahora, como estos valores no satisfacen la tercera ecuación entonces no existen valores de t y r que satisfagan simultáneamente las tres ecuaciones en (10.7), por tanto $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ no tienen ningún punto en común, es decir, no se cortan. Se completa así la prueba de que las rectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ se cruzan. El ángulo entre $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ es

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{|D_1 \cdot D_2|}{\|D_1\|\,\|D_2\|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{|-11|}{\sqrt{14}\sqrt{14}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{11}{14}\right) \approx 38.21^\circ. \ \blacksquare$$

Ejemplo 10.6
Considere las rectas $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ y $\mathcal{L}_3$ tales que

- $\mathcal{L}_1$ pasa por $P = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$ y $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$
- Unas ecuaciones simétricas para $\mathcal{L}_2$ son

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+\frac{1}{4}}{9}$$

- Una ecuación vectorial para $\mathcal{L}_3$ es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1/3 \end{pmatrix}$$

Muestre que $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ son paralelas y que $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_3$ son perpendiculares.

Solución:

Un vector director para $\mathcal{L}_1$ es $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OD_1}$ con $D_1 = Q - P = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$, un vector director para $\mathcal{L}_2$ es $D_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$ y un vector director para $\mathcal{L}_3$ es $D_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1/3 \end{pmatrix}$.

Como $D_2 = -\frac{3}{2}D_1$ entonces los vectores directores de $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ son paralelos y por tanto también son paralelas las rectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$.

Como $D_1 \cdot D_3 = -6 + 4 + 2 = 0$ entonces los vectores directores de $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_3$ son ortogonales y así las rectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_3$ son perpendiculares (y por tanto $\mathcal{L}_2$ y $\mathcal{L}_3$ también son perpendiculares). ∎

10.3 Distancia de un punto a una recta

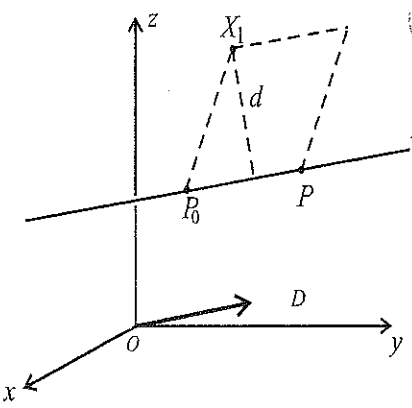
Consideremos en el espacio una recta $\mathcal{L}$ y un punto X_1. Queremos hallar una expresión para la distancia d de X_1 a $\mathcal{L}$. Supongamos que $\mathcal{L}$ pasa por el punto P_0 y tiene al vector D como un vector director (ver figura 10.5)

$(\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}) \neq 0$ No colineal

$\frac{x-1}{1} = \frac{x-2}{1}$

$x - 1 = x - ?$

x



$PQ \cdot (\overrightarrow{PR} \times \overrightarrow{PT}) \neq 0$ No coplanar

Figura 10.5.

Consideremos el paralelogramo $\mathcal{P}$ mostrado en la figura 10.5, en la cual P es el punto de $\mathcal{L}$ tal que $\overrightarrow{P_0P} = \overrightarrow{OD}$.

Nótese que la distancia d de X_1 a la recta $\mathcal{L}$ es la altura del paralelogramo $\mathcal{P}$, relativa a la base $\overline{P_0P}$. Por lo tanto, el área $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}$ es

$$\mathcal{A} = \left\| \overrightarrow{P_0P} \right\| d$$

Por otra parte, sabemos que también

$$\mathcal{A} = \left\| \overrightarrow{P_0P} \times \overrightarrow{P_0X_1} \right\|$$

luego,

$$\left\| \overrightarrow{P_0P} \right\| d = \left\| \overrightarrow{P_0P} \times \overrightarrow{P_0X_1} \right\|$$

de donde,

$$d = \frac{\left\| \overrightarrow{P_0P} \times \overrightarrow{P_0X_1} \right\|}{\left\| \overrightarrow{P_0P} \right\|}$$

Ahora, como

$$\overrightarrow{P_0P} = \overrightarrow{OD} \qquad \text{y} \qquad \overrightarrow{P_0X_1} = \overrightarrow{OR} \quad \text{con } R = X_1 - P_0$$

entonces

$$\left\| \overrightarrow{P_0P} \right\| = \|D\| \qquad \text{y} \qquad \left\| \overrightarrow{P_0P} \times \overrightarrow{P_0X_1} \right\| = \|D \times (X_1 - P_0)\|$$

y por tanto

$$d = \frac{\|D \times (X_1 - P_0)\|}{\|D\|} \tag{10.8}$$

Observe que si X_1 es un punto de la recta $\mathcal{L}$ entonces el vector $X_1 - P_0$ es paralelo a vector D y así $D \times (X_1 - P_0) = O$ obteniéndose (de (10.8)) que $d = 0$ (como debe ser).

Si la recta $\mathcal{L}$ pasa por el origen podemos tomar $P_0 = O$ en (10.8), con lo cual (10.8) se reduce a

$$d = \frac{\|D \times X_1\|}{\|D\|} \tag{10.9}$$

Ejemplo 10.7
Calcule la distancia del punto $X_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ a la recta $\mathcal{L}$ con ecuaciones simétricas

$$-\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{4} = z + 4 \tag{10.10}$$

Solución:

En primer lugar vemos que X_1 no es un punto de la recta $\mathcal{L}$ pues este punto no satisface las ecuaciones (10.10). Por otra parte, la recta $\mathcal{L}$ no pasa por el origen, pues el punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ tampoco satisface las ecuaciones (10.10).

Calcularemos la distancia d del punto X_1 a la recta $\mathcal{L}$ empleando la fórmula (10.8); para ello necesitamos un vector director D para $\mathcal{L}$ y un punto P_0 sobre $\mathcal{L}$.

Escribiendo las ecuaciones (10.10), en la forma

$$\frac{x - (-1)}{-2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z - (-4)}{1}$$

vemos que un vector director para $\mathcal{L}$ es $D = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ y que un punto sobre $\mathcal{L}$ es $P_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Ahora, como

$$X_1 - P_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

entonces

$$\begin{aligned} D \times (X_1 - P_0) &= \begin{vmatrix} E_1 & E_2 & E_3 \\ -2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} E_1 - \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} E_2 + \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} E_3 \\ &= 12E_1 + 5E_2 + 4E_3 \\ &= \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Luego (empleando la fórmula (10.8)), la distancia d buscada es

$$d = \frac{\left\| \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{\sqrt{(12)^2 + 5^2 + 4^2}}{\sqrt{(-2)^2 + 4^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{185}}{\sqrt{21}} \simeq 2.97 \quad \blacksquare$$

10.4 Planos

Un plano en el espacio queda completamente determinado dando tres de sus puntos que no sean **colineales** (es decir, que no estén sobre una misma línea recta) o también dando uno de sus puntos y un vector geométrico no nulo perpendicular al plano. Se entiende que un vector $\overrightarrow{n}$ del espacio es perpendicular a un plano $\mathcal{P}$ si $\overrightarrow{n}$ es perpendicular a todo vector $\overrightarrow{P_0X}$ con P_0 y X en $\mathcal{P}$ (ver figura 10.6).

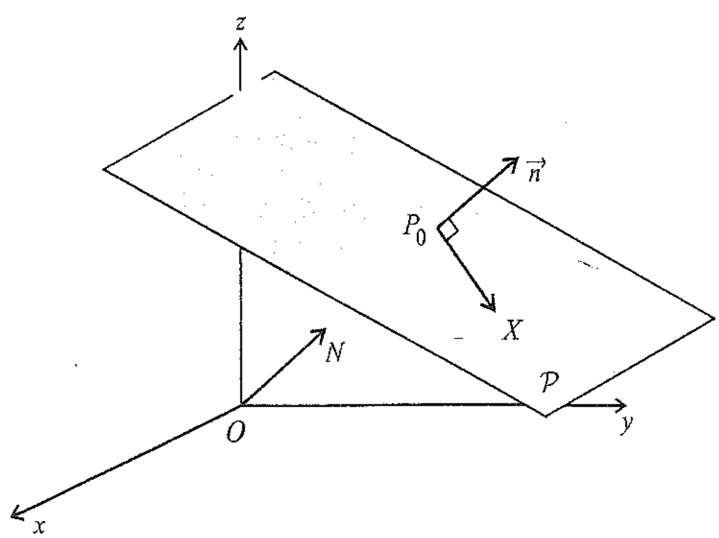


Figura 10.6.

Todo vector geométrico no nulo y perpendicular al plano $\mathcal{P}$ se dirá un **vector normal** a dicho plano.

Consideremos un plano $\mathcal{P}$ y sean P_0 un punto de $\mathcal{P}$ y $\overrightarrow{n}$ un vector normal a $\mathcal{P}$. Empleando el producto escalar podemos obtener para $\mathcal{P}$ una ecuación que es completamente análoga a la ecuación en forma normal de una recta en el plano. En efecto, un punto X del espacio está en el plano $\mathcal{P}$ si y sólo si el vector $\overrightarrow{P_0X}$ es perpendicular a $\overrightarrow{n}$, es decir, si y sólo si

$$\overrightarrow{P_0X} \cdot \overrightarrow{n} = 0$$

Ahora, si $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{ON}$, esta ecuación se puede expresar, usando únicamente vectores algebraicos, en la forma

$$(X - P_0) \cdot N = 0 \tag{10.11}$$

En adelante, convenimos en decir que un vector N de $\mathbb{R}^3$ es un vector normal a un plano $\mathcal{P}$ siempre que el vector geométrico $\overrightarrow{ON}$ sea un vector normal a $\mathcal{P}$.

La ecuación (10.11) es una ecuación vectorial no paramétrica para $\mathcal{P}$ la cual es llamada una **ecuación en forma normal** para el plano $\mathcal{P}$.

Si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $P_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, al sustituir X, P_0 y N en (10.11) y realizar el producto escalar, dicha ecuación (10.11) se transforma en la ecuación escalar

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \tag{10.12}$$

la cual es por tanto una ecuación para el plano $\mathcal{P}$; si realizamos los productos indicados en (10.12), esta ecuación se puede escribir como

$$ax + by + cz = d$$

donde $d = ax_0 + by_0 + cz_0$.

Podemos afirmar entonces que todo plano en el espacio tiene una ecuación de la forma

$$ax + by + cz = d \tag{10.13}$$

donde a, b, c y d son constantes y $a \neq 0$ o $b \neq 0$ o $c \neq 0$.

Recíprocamente, toda ecuación de la forma (10.13) con las constantes a, b, c como se ha indicado, corresponde a un plano. En efecto, si (por ejemplo) $a \neq 0$, la ecuación (10.13) puede escribirse como

$$a\left(x - \frac{d}{a}\right) + b(y - 0) + c(z - 0) = 0$$

la cual corresponde al plano que pasa por el punto $\begin{pmatrix} d/a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y tiene al vector $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ como un vector normal.

Un plano también queda determinado por tres puntos que no sean colineales. Sean P, Q y R tres puntos del espacio no colineales y sea $\mathcal{P}$ el plano determinado por dichos puntos; para escribir una ecuación para $\mathcal{P}$ sólo hace falta un vector normal a $\mathcal{P}$. Pues bien, un tal vector normal a $\mathcal{P}$ lo podemos hallar a partir de los puntos dados, empleando el producto vectorial. Por ejemplo, el vector

$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$$

es un vector normal al plano $\mathcal{P}$ (vea figura 10.7) ya que

- $\overrightarrow{n} \neq \overrightarrow{0}$ (pues $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ no son paralelos)
- $\overrightarrow{n}$ es perpendicular al plano $\mathcal{P}$ (pues $\overrightarrow{n}$ es perpendicular tanto a $\overrightarrow{PQ}$ como a $\overrightarrow{PR}$, y por ello $\overrightarrow{n}$ es perpendicular a todo vector $\overrightarrow{PX}$ con $X \in \mathcal{P}$).

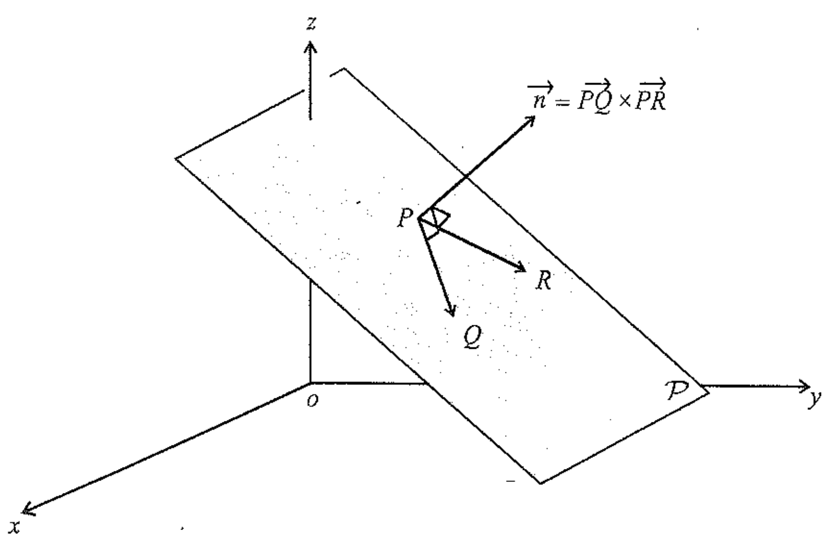


Figura 10.7.

Como resumen de lo obtenido acerca de planos, tenemos:

- Si $N = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ es un vector normal a un plano $\mathcal{P}$ y $P_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ es un punto de $\mathcal{P}$ entonces una ecuación vectorial para dicho plano $\mathcal{P}$ es

$$N \cdot (X - P_0) = 0, \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

ecuación que es equivalente a la ecuación escalar

$$a\,(x - x_0) + b\,(y - y_0) + c\,(z - z_0) = 0$$

la cual a su vez es equivalente a

$$ax + by + cz = d$$

donde $d = ax_0 + by_0 + cz_0$.

- Toda ecuación de la forma

$$ax + by + cz = d$$

con $a \neq 0$ o $b \neq 0$ o $c \neq 0$ corresponde a un plano con vector normal $N = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. El plano pasa por el origen si y sólo si $d = 0$.

- Si P, Q y R son puntos no colineales de un plano $\mathcal{P}$ entonces un vector normal a dicho plano es

$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$$

Una ecuación de la forma

$$ax + by + cz = d$$

para un plano, se dice una ecuación en **forma general.**

Ejemplo 10.8
Sea $\mathcal{P}$ el plano que pasa por los puntos $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $R = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$a)$ Halle una ecuación en forma normal para $\mathcal{P}$.
$b)$ Halle una ecuación en forma general para $\mathcal{P}$.

Solución:

En la figura 10.8 se muestra parte del plano $\mathcal{P}$.

$a)$ Para dar una ecuación en forma normal para el plano $\mathcal{P}$ sólo nos hace falta un vector normal a $\mathcal{P}$. Ahora, como sabemos, un tal vector normal a $\mathcal{P}$ es

$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$$

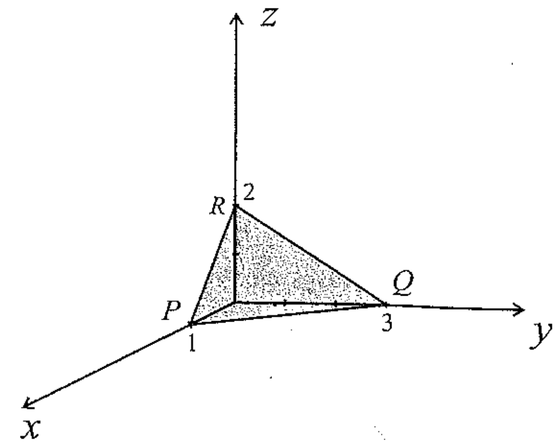


Figura 10.8.

Calculemos $\overrightarrow{n}$: Puesto que

$$\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} \qquad \text{y} \qquad \overrightarrow{PR} = -\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{k}$$

entonces

$$\begin{aligned} \overrightarrow{n} &= \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \overrightarrow{i} - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \overrightarrow{j} + \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \overrightarrow{k} \\ &= 6\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k} \end{aligned}$$

Ahora, como $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{ON}$ con $N = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ entonces una ecuación en forma normal para el plano $\mathcal{P}$ es

$$(X - P) \cdot N = 0$$

es decir,

$$\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \tag{10.14}$$

b) Luego de realizar la diferencia y el producto escalar indicados en (10.14), se obtiene la ecuación escalar

$$6(x-1) + 2(y-0) + 3(z-0) = 0$$

o, equivalentemente, la ecuación

$$6x + 2y + 3z = 6$$

la cual es una ecuación en forma general para el plano $\mathcal{P}$. ■

Ejemplo 10.9
La ecuación

$$2x - y + 4z = 4 \tag{10.15}$$

representa un plano $\mathcal{P}$ con vector normal $N = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Para precisar de qué plano se trata sólo resta dar alguno de sus puntos. Uno de ellos se obtiene, por ejemplo, haciendo $y = 0$ y $z = 0$ en la ecuación (10.15), lo cual nos da $x = 2$. Así $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es un punto del plano $\mathcal{P}$.

Nótese que dividiendo ambos lados de la ecuación (10.15) por 4 la podemos escribir en la forma

$$\frac{x}{2} - \frac{y}{4} + \frac{z}{1} = 1$$

Esta ecuación pone de manifiesto que el plano $\mathcal{P}$ corta los ejes coordenados x, y, z en los puntos $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ respectivamente. Por ejemplo, al hacer $x = 0$ y $y = 0$ en ella es evidente que $z = 1$, obteniéndose el punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ como punto de corte del plano $\mathcal{P}$ con el eje z. ■

10.5 Posiciones relativas entre dos planos y entre una recta y un plano

Sean $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ dos planos en el espacio con vectores normales $\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}$ respectivamente.

Para los planos $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ destacamos las siguientes posiciones relativas:

- **$\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ son paralelos.**
  Esto ocurre si y sólo si los vectores normales $\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}$ son paralelos. Si los planos $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$, además de ser paralelos, tienen un punto común entonces ellos son **coincidentes,** es decir, $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2$.

- **$\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ se cortan (no son paralelos** o **son secantes).**
  Se entiende por ello que la intersección de $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ es no vacía. En este caso, $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ es una línea recta $\mathcal{L}$ como se ilustra en la figura 10.9. Como dicha recta $\mathcal{L}$ está contenida en ambos planos entonces todo vector director $\overrightarrow{d}$ para $\mathcal{L}$ será perpendicular tanto a $\overrightarrow{n_1}$ como a $\overrightarrow{n_2}$, es decir, será paralelo a $\overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2}$. Así que un vector director de $\mathcal{L}$ es $\overrightarrow{d} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2}$.

- **$\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ son perpendiculares.**
  Esto ocurre si y sólo si los vectores normales $\overrightarrow{n_1}$ y $\overrightarrow{n_2}$ son perpendiculares; nótese que éste es un caso particular de planos que se cortan.

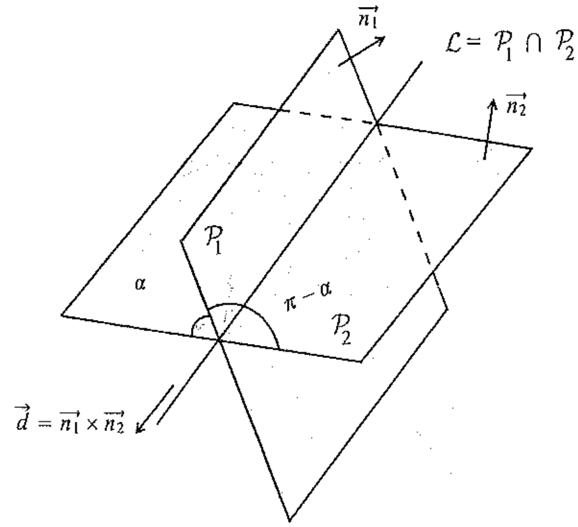


Figura 10.9.

Si los planos $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ se cortan (como en la figura 10.9) se forman cuatro ángulos diedros, de los cuales hay dos pares de ángulos congruentes y dos pares de suplementarios. Se puede probar que la medida del ángulo entre los vectores normales $\vec{n_1}$ y $\vec{n_2}$ es también la de uno de esos ángulos diedros; por ello consideraremos el ángulo θ entre $\vec{n_1}$ y $\vec{n_2}$ como uno de los ángulos entre $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$. Otro de los ángulos entre $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ será $180^\circ - \theta$. Convenimos en tomar como el **ángulo entre** entre $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ al menor entre θ y $180^\circ - \theta$ si $\theta \neq 90^\circ$, o a 90° en caso contrario. En el caso en el que $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ son paralelos, diremos que el ángulo entre $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ es de 0°.

Si α es el ángulo entre $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ entonces $0 \leq \alpha \leq 90^\circ$ y

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}|}{\|\vec{n_1}\| \, \|\vec{n_2}\|}$$

de donde

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{|\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}|}{\|\vec{n_1}\| \, \|\vec{n_2}\|}\right)$$

Ejemplo 10.10

a) Los planos $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ con ecuaciones

$$x - 2y + 3z = 1 \quad \text{y} \quad 2x - 4y + 6z = 9$$

son paralelos porque ellos tienen vectores normales $N_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $N_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$ los cuales son paralelos ya que $N_2 = 2N_1$.

Nótese que los planos $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ son distintos.

b) Los planos $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ con ecuaciones

$$x + 2y - 2z = 5 \quad \text{y} \quad 2x + y + 2z = -1$$

son perpendiculares porque ellos tienen vectores normales $N_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ y $N_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ los cuales son ortogonales ya que $N_1 \cdot N_2 = 0$.

c) Consideremos los planos $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ con ecuaciones

$$x + y = 1 \quad \text{y} \quad y + z = 2$$

Un vector normal a $\mathcal{P}_1$ es $N_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y un vector normal a $\mathcal{P}_2$ es $N_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Puesto que N_1 y N_2 no son paralelos ni ortogonales entonces los planos $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ no son paralelos (es decir, se cortan) ni son perpendiculares. Hallemos el ángulo α entre $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$:

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{|N_1 \cdot N_2|}{\|N_1\|\,\|N_2\|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 60^\circ$$

En la figura 10.10 se muestran los planos $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ y también la recta $\mathcal{L}$ que es la intersección de dichos planos.

Unas ecuaciones simétricas para la recta $\mathcal{L}$ son

$$x - 1 = -y = z - 2$$

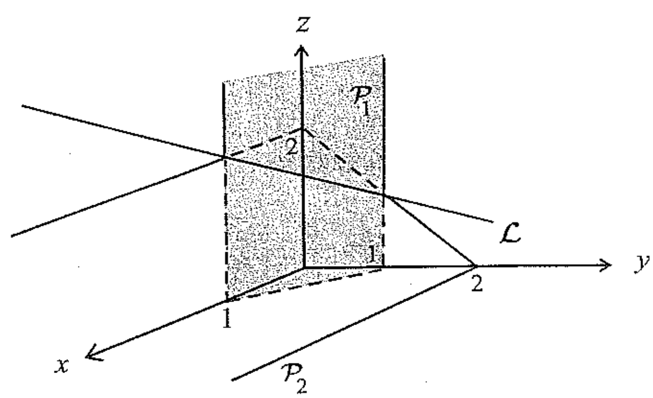


Figura 10.10.

Ejemplo 10.11

Encuentre una ecuación vectorial y unas ecuaciones simétricas para la recta $\mathcal{L}$ intersección de los planos $\mathcal{P}_1 : 3x + 2y - z = 4$ y $\mathcal{P}_2 : x - y + 5z = -1$.

Solución:

Un vector normal a $\mathcal{P}_1$ es $N_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ y un vector normal a $\mathcal{P}_2$ es $N_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Como $\mathcal{L} = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ entonces un vector director de $\mathcal{L}$ es

$$N_1 \times N_2 = \begin{vmatrix} E_1 & E_2 & E_3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 9E_1 - 16E_2 - 5E_3 = \begin{pmatrix} 9 \\ -16 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Sólo resta encontrar un punto de $\mathcal{L}$; uno de tales puntos se puede hallar haciendo $x = 0$ en las ecuaciones de los planos $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ y resolviendo simultáneamente las ecuaciones resultantes

$$2y - z = 4 \quad \text{y} \quad -y + 5z = -1$$

con lo cual se obtiene $y = \dfrac{19}{9}$ y $z = \dfrac{2}{9}$. Así, un punto sobre $\mathcal{L}$ es $P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 19/9 \\ 2/9 \end{pmatrix}$ y por tanto una ecuación vectorial para $\mathcal{L}$ es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 19/9 \\ 2/9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 9 \\ -16 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Se sigue que unas ecuaciones simétricas para $\mathcal{L}$ son

$$\frac{x}{9} = \frac{y - \frac{19}{9}}{-16} = \frac{z - \frac{2}{9}}{-5}$$

o, equivalentemente,

$$\frac{x}{9} = -\frac{y - \frac{19}{9}}{16} = -\frac{z - \frac{2}{9}}{5} \quad \blacksquare$$

Consideremos ahora una recta $\mathcal{L}$ con vector director $\overrightarrow{d}$ y un plano $\mathcal{P}$ con vector normal $\overrightarrow{n}$. La recta $\mathcal{L}$ puede tener, con relación al plano $\mathcal{P}$, una de las posiciones siguientes:

- **$\mathcal{L}$ es paralela al plano $\mathcal{P}$.**
  Este caso ocurre si y sólo si $\overrightarrow{d}$ es perpendicular a $\overrightarrow{n}$. En particular, ocurre cuando $\mathcal{L}$ está contenida en $\mathcal{P}$ (vea figura 10.11).

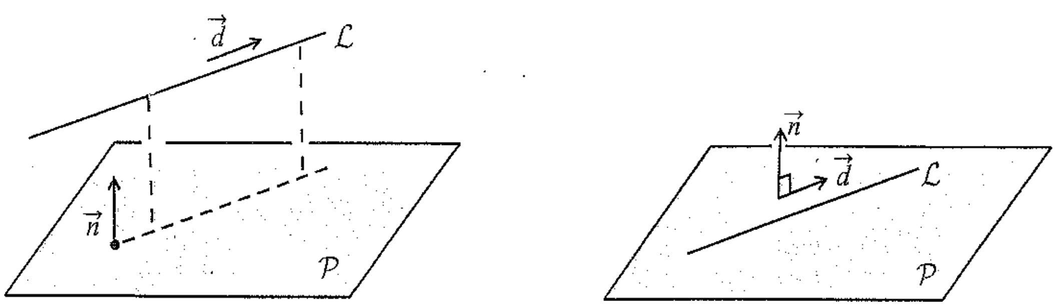


Figura 10.11.

- **$\mathcal{L}$ corta (es secante o no es paralela) al plano $\mathcal{P}$.**
  Se entiende por ello que $\mathcal{L}$ y $\mathcal{P}$ tienen un único punto común, el cual es el punto donde $\mathcal{L}$ corta a $\mathcal{P}$ (vea figura 10.12). Esto ocurre si y sólo si $\overrightarrow{d}$ no es perpendicular a $\overrightarrow{n}$. En el caso particular en que $\overrightarrow{d}$ y $\overrightarrow{n}$ sean paralelos, $\mathcal{L}$ es **perpendicular al plano $\mathcal{P}$**.

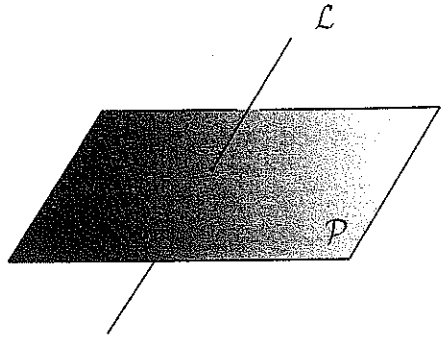


Figura 10.12.

10.6 Distancia de un punto a un plano

En el capítulo 3 obtuvimos una expresión para la distancia de un punto $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ del plano a una recta con ecuación $ax + by = c$. Procediendo de manera completamente análoga, el lector puede mostrar que la distancia d^* de un punto $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ del espacio a un plano $\mathcal{P}$ con ecuación

$$ax + by + cz = d$$

está dada por

$$d^* = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \tag{10.16}$$

Ejemplo 10.12
Calcule la distancia del punto $X_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ al plano $\mathcal{P}$ que pasa por el punto

$P = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ y contiene a la recta $\mathcal{L}$ descrita por la ecuación vectorial

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{10.17}$$

Solución:
Con el fin de aplicar la fórmula (10.16) procedemos a hallar una ecuación en forma general para el plano $\mathcal{P}$. A partir de (10.17), dando dos valores al parámetro t, por ejemplo $t = 0$ y $t = 1$, obtenemos los puntos $Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ y $R = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ sobre la recta $\mathcal{L}$, los cuales son también puntos del plano $\mathcal{P}$, pues la recta $\mathcal{L}$ está contenida en el plano $\mathcal{P}$.

Ahora, puesto que P, Q y R son tres puntos no colineales del plano $\mathcal{P}$, pues P no es un punto de $\mathcal{L}$, entonces un vector normal al plano $\mathcal{P}$ es el vector $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$. Como

$\overrightarrow{PQ} = 2\,\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - 9\,\overrightarrow{k}$ y $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{i} + 3\,\overrightarrow{j} - 8\,\overrightarrow{k}$ entonces

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & 1 & -9 \\ 1 & 3 & -8 \end{vmatrix} = 19\,\overrightarrow{i} + 7\,\overrightarrow{j} + 5\,\overrightarrow{k}$$

Por tanto, una ecuación para el plano $\mathcal{P}$ es

$$19\,(x-0) + 7\,(y+1) + 5\,(z-5) = 0$$

y así, una ecuación en forma general para dicho plano es

$$19x + 7y + 5z = 18$$

Luego (empleando la fórmula (10.16)) la distancia d^* del punto X_0 al plano $\mathcal{P}$ es

$$d^* = \frac{|19\,(-1) + 7\,(2) + 5\,(-4) - 18|}{\sqrt{19^2 + 7^2 + 5^2}} = \frac{43}{\sqrt{435}} \quad \blacksquare$$

La distancia entre dos rectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ que se cruzan es la longitud de aquel segmento de recta con un extremo en $\mathcal{L}_1$, el otro en $\mathcal{L}_2$ y que es perpendicular tanto a $\mathcal{L}_1$ como a $\mathcal{L}_2$ (ver figura 10.13).

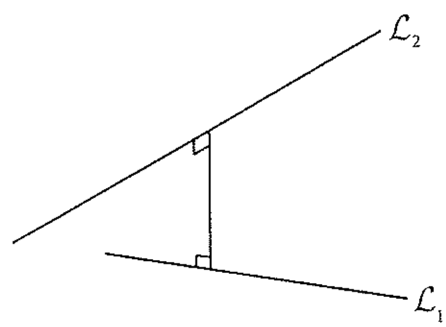


Figura 10.13.

Hay varias maneras de obtener dicha distancia; una de ellas consiste en calcularla como la distancia de un punto cualquiera en una de las rectas, al plano paralelo a esa recta y que contiene a la otra, como se ilustra en la figura 10.14, en la cual $\mathcal{P}$ es el plano paralelo a $\mathcal{L}_2$ que contiene a $\mathcal{L}_1$ y d^* es la distancia entre $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$. (Nótese que si $\overrightarrow{d_1}$ y $\overrightarrow{d_2}$ son vectores directores de $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ respectivamente entonces un vector normal al plano $\mathcal{P}$ antes mencionado es $\overrightarrow{d_1} \times \overrightarrow{d_2}$).

Ejemplo 10.13
Calcule la distancia entre las rectas

$$\mathcal{L}_1 : \frac{x-4}{2} = \frac{y+5}{4} = \frac{z-1}{-3} \quad \text{y} \quad \mathcal{L}_2 : x - 2 = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{2}$$

Solución:
Es claro que las rectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ no son paralelas pues los vectores directores

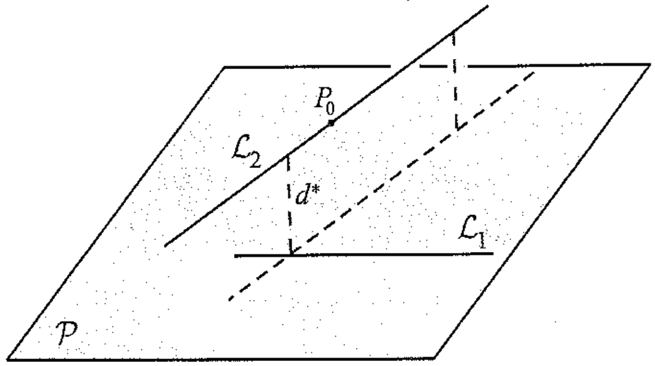


Figura 10.14.

$D_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ y $D_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ no son paralelos. El lector puede probar que $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ no se cortan, así que dichas rectas se cruzan. A continuación calcularemos la distancia entre $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ como la distancia d^* de un punto P_0 de $\mathcal{L}_2$ al plano $\mathcal{P}$ que es paralelo $\mathcal{L}_2$ y contiene a $\mathcal{L}_1$. (Vea la figura 10.14).

En primer lugar, de las ecuaciones de $\mathcal{L}_2$ vemos que un punto de esa recta es $P_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Por otra parte, un punto del plano $\mathcal{P}$ y un vector normal a este plano son

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ (punto de } \mathcal{L}_1) \quad \text{y} \quad N = D_1 \times D_2 = 17E_1 - 7E_2 + 2E_3.$$

Luego, una ecuación para el plano $\mathcal{P}$ es

$$17(x-4) - 7(y+5) + 2(z-1) = 0$$

es decir,

$$17x - 7y + 2z = 105$$

Así, la distancia d^* entre el punto P_0 y el plano $\mathcal{P}$, es

$$d^* = \frac{|17(2) - 7(-1) + 2(0) - 105|}{\sqrt{(17)^2 + (-7)^2 + 2^2}} = \frac{64}{\sqrt{342}}$$

la cual es la distancia entre las rectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$. ■

10.7 Ecuaciones paramétricas para un plano

Hemos visto que una recta con vector director $\vec{u} = \overrightarrow{OU}$ y que pasa por un punto P_0, puede describirse como el conjunto de todos los puntos X de $\mathbb{R}^3$ de la forma

$$X = P_0 + tU, \qquad t \in \mathbb{R}$$

A continuación veremos que un plano en el espacio puede describirse en forma análoga.

Un plano en el espacio queda determinado dando un punto por donde pasa y dos vectores geométricos no paralelos entre si, que sean paralelos al plano. Se entiende que un vector $\overrightarrow{u}$ es paralelo a un plano $\mathcal{P}$ si $\overrightarrow{u}$ es perpendicular a cualquier vector normal a dicho plano. Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OU}$, convenimos en decir que el vector U de $\mathbb{R}^3$ es un vector paralelo al plano $\mathcal{P}$ siempre que el vector geométrico $\overrightarrow{OU}$ sea un vector paralelo a ese plano.

Sea P_0 un punto del espacio y sean $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ dos vectores del espacio no paralelos entre si. Consideremos el plano $\mathcal{P}$ que pasa por P_0 y tal que los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ son paralelos a $\mathcal{P}$ (figura 10.15); sea, además, $X \in \mathbb{R}^3$.

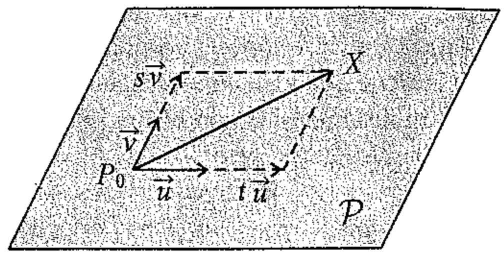


Figura 10.15.

Si $X \in \mathcal{P}$ entonces $\overrightarrow{P_0X}$ es combinación lineal de los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$, pues estos dos vectores son L.I. Recíprocamente, si $\overrightarrow{P_0X}$ es combinación lineal de los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ entonces $X \in \mathcal{P}$. En efecto, digamos que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{P_0X_1}$ y $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{P_0X_2}$; si $\overrightarrow{P_0X}$ es combinación lineal de $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$, entonces los puntos P_0, X, X_1 y X_2 son coplanares y como el único plano que contiene a P_0, X_1 y X_2 es $\mathcal{P}$, entonces $X \in \mathcal{P}$. Se tiene así que $X \in \mathcal{P}$ si y sólo si el vector $\overrightarrow{P_0X}$ es combinación lineal de los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$, es decir, el plano $\mathcal{P}$ está conformado por los puntos X de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$\overrightarrow{P_0X} = t\overrightarrow{u} + s\overrightarrow{v} \ ; \quad t, s \in \mathbb{R}$$

Ahora, si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OU}$ y $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OV}$, la igualdad anterior puede expresarse en forma equivalente como

$$X - P_0 = tU + sV \ ; \quad t, s \in \mathbb{R}$$

o también como

$$X = P_0 + tU + sV \ ; \quad t, s \in \mathbb{R} \tag{10.18}$$

De manera que (10.18) es una ecuación para el plano $\mathcal{P}$, de la cual diremos que es una **ecuación vectorial paramétrica** para dicho plano; las variables t y s son los parámetros.

Si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $P_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ y $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, la ecuación (10.18) es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

la cual es equivalente a las tres ecuaciones escalares

$$\begin{aligned} x &= x_0 + tu_1 + sv_1 \\ y &= y_0 + tu_2 + sv_2 \\ z &= z_0 + tu_3 + sv_3 \end{aligned}$$

las cuales se llaman **ecuaciones (escalares) paramétricas** para el plano $\mathcal{P}$.

Si el plano $\mathcal{P}$ pasa por el origen, al tomar $P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ en (10.18) esta ecuación se reduce a

$$X = tU + sV \ ; \quad t, s \in \mathbb{R}$$

Nótese que en este caso el plano $\mathcal{P}$ pasa también por los puntos U y V. Así, $\mathcal{P}$ es el plano que pasa por los puntos no colineales O, U y V; nos referiremos a $\mathcal{P}$ como **el plano generado por** U **y** V, pues $\mathcal{P}$ consta de todas las combinaciones lineales de U y V.

Observe que si tres vectores de $\mathbb{R}^3$ están en un mismo plano que pasa por el origen entonces uno de esos vectores tiene que ser combinación lineal de los otros dos y en consecuencia los tres vectores son linealmente dependientes. Recíprocamente, si tres vectores de $\mathbb{R}^3$ son linealmente dependientes, entonces existe un plano que pasa por el origen que contiene a los tres. De manera que tres vectores de $\mathbb{R}^3$ son linealmente dependientes si y sólo si los tres están en un mismo plano que pasa por el origen.

Ejemplo 10.14

Halle una ecuación vectorial paramétrica y las correspondientes ecuaciones escalares paramétricas para el plano $\mathcal{P}$ que pasa por los puntos $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $E_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Solución:

En la figura 10.16 se muestra parte del plano $\mathcal{P}$. Dos vectores geométricos no paralelos entre si, paralelos al plano $\mathcal{P}$ son, por ejemplo, $\overrightarrow{E_1E_2}$ y $\overrightarrow{E_1E_3}$; así, dos vectores de $\mathbb{R}^3$ no paralelos entre si, paralelos al plano $\mathcal{P}$ son

$$U = E_2 - E_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad V = E_3 - E_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Como, además, el plano $\mathcal{P}$ pasa por E_1 (por ejemplo) entonces una ecuación vectorial paramétrica para $\mathcal{P}$ es

$$X = E_1 + tU + sV$$

es decir,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Se sigue que unas ecuaciones escalares paramétricas para $\mathcal{P}$ son

$$\begin{aligned} x &= 1 - t - s \\ y &= t \\ z &= s \end{aligned}$$

En la figura 10.16 también se muestra el plano $\mathcal{P}'$ generado por U y V, el cual es paralelo al plano $\mathcal{P}$. ■

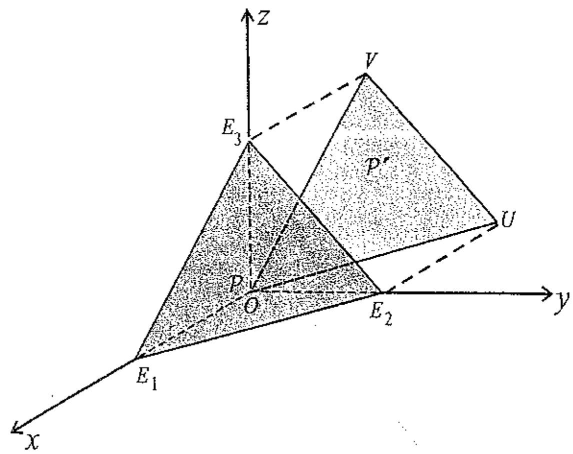


Figura 10.16.

Ejemplo 10.15

Halle una ecuación en forma general y una ecuación vectorial paramétrica para el plano $\mathcal{P}$ que pasa por el punto $P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, es perpendicular al plano $\mathcal{P}_1$ con ecuación

$$3x + 2y + 5z = 1$$

y es paralelo a la recta $\mathcal{L}$ intersección de los planos

$$\begin{aligned} 4x - 3y + 2z &= 7 \\ 5x + 2y + 3z &= 6 \end{aligned}$$

Solución:

Como ya se tiene un punto del plano $\mathcal{P}$ (el punto P_0), para escribir una ecuación de dicho plano sólo resta hallarle un vector normal $\overrightarrow{n}$. Puesto que los planos $\mathcal{P}$ y $\mathcal{P}_1$ son perpendiculares entonces un tal vector $\overrightarrow{n}$ debe ser perpendicular al vector $\overrightarrow{n_1} = 3\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + 5\overrightarrow{k}$ el cual es un vector normal al plano $\mathcal{P}_1$.

Por otra parte, como la recta $\mathcal{L}$ es paralela al plano $\mathcal{P}$, el vector $\overrightarrow{n}$ debe ser perpendicular a cualquier vector director de $\mathcal{L}$. Es claro entonces que necesitamos un vector $\overrightarrow{n}$ que simultáneamente sea perpendicular a los vectores $\overrightarrow{n_1}$ y $\overrightarrow{d}$, donde $\overrightarrow{d}$ es un vector director de $\mathcal{L}$.

La figura 10.17 ilustra la situación geométrica expresada en este ejemplo.

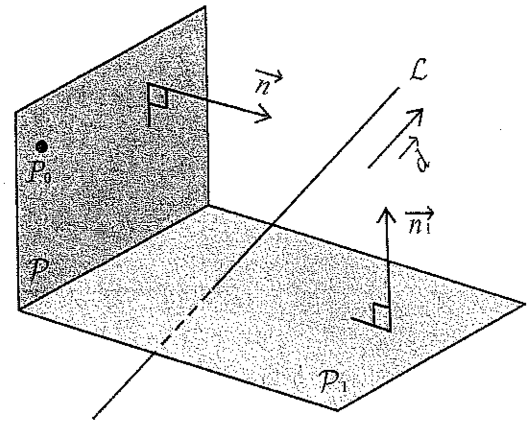


Figura 10.17.

Ahora bien, sabemos que un vector director para $\mathcal{L}$ lo podemos obtener como el producto cruz de los vectores $4\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ y $5\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ normales respectivamente a los planos $4x - 3y + 2z = 7$ y $5x + 2y + 3z = 6$. Luego, un vector director para la recta $\mathcal{L}$ es

$$\vec{d} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -3 & 2 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -13\vec{i} - 2\vec{j} + 23\vec{k}$$

Por tanto, un vector normal al plano $\mathcal{P}$ es

$$\vec{n} = \vec{n_1} \times \vec{d} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & 5 \\ -13 & -2 & 23 \end{vmatrix} = 56\vec{i} - 134\vec{j} + 20\vec{k}$$

o también el vector $\frac{1}{2}\vec{n} = 28\vec{i} - 67\vec{j} + 10\vec{k}$. Así, una ecuación para el plano $\mathcal{P}$ es

$$28(x-1) - 67(y+2) + 10(z-3) = 0$$

o, en forma equivalente,

$$28x - 67y + 10z = 192$$

la cual es una ecuación en forma general.

Sean ahora N_1 y D en $\mathbb{R}^3$ tales que $\vec{n_1} = \overrightarrow{ON_1}$ y $\vec{d} = \overrightarrow{OD}$, es decir, $N_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} -13 \\ -2 \\ 23 \end{pmatrix}$. Es claro que N_1 y D son linealmente independientes y que el plano generado por N_1 y D es paralelo al plano $\mathcal{P}$. Luego, una ecuación vectorial para $\mathcal{P}$ es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -13 \\ -2 \\ 23 \end{pmatrix} \quad \blacksquare$$

Finalizaremos este capítulo presentando una prueba para el siguiente resultado (al cual ya nos habíamos referido en la sección 9.5).

> Si U, V y Z son vectores linealmente independientes de $\mathbb{R}^3$ entonces todo vector W de $\mathbb{R}^3$ es expresable de manera única como combinación lineal de U, V y Z.

Prueba:

Supongamos que U, V y Z son vectores linealmente independientes de $\mathbb{R}^3$ y sea W un vector cualquiera de $\mathbb{R}^3$. Consideremos el plano $\mathcal{P}$ generado por U y V, y también la recta $\mathcal{L}$ que pasa por W y tiene con vector director Z. Puesto que Z no es combinación lineal de U y V, la recta $\mathcal{L}$ no es paralela al plano $\mathcal{P}$ (ver figura 10.18).

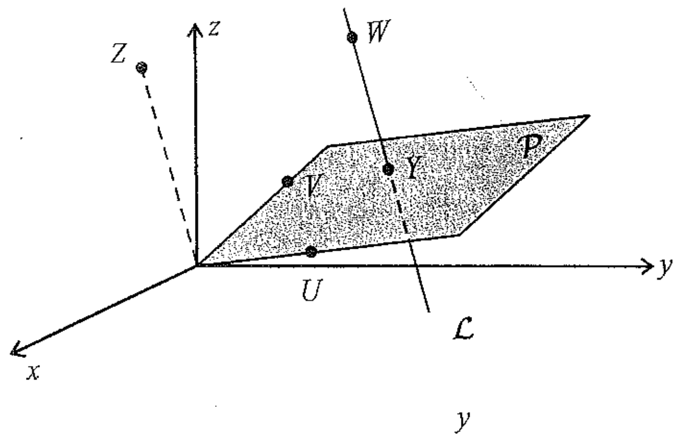


Figura 10.18.

El punto donde la recta $\mathcal{L}$ corta el plano $\mathcal{P}$ (el punto Y en la figura 10.18) es de la forma $W+tZ$ para algún t en $\mathbb{R}$, por ser un punto de $\mathcal{L}$, y también es de la forma $rU+sV$ con r, s en $\mathbb{R}$, por estar en el plano $\mathcal{P}$. Así que

$$W + tZ = rU + sV$$

Por tanto, existen t, r, s en $\mathbb{R}$ tales que

$$W = rU + sV + (-t)\,Z$$

lo cual prueba que W es combinación lineal de U, V y Z.

Para probar la unicidad de la escritura de W como combinación lineal de U, V y Z supongamos que existen escalares r_1, r_2, s_1, s_2, t_1, t_2 tales que

$$W = r_1U + s_1V + t_1Z \quad \text{y} \quad W = r_2U + s_2V + t_2Z \tag{10.19}$$

y probemos que $r_1 = r_2$, $s_1 = s_2$, $t_1 = t_2$. De (10.19)

$$r_1U + s_1V + t_1Z = r_2U + s_2V + t_2Z$$

es decir,

$$(r_1 - r_2)\,U + (s_1 - s_2)\,V + (t_1 - t_2)\,Z = O \tag{10.20}$$

Ahora, como U, V y Z son L.I. es fácil probar que la igualdad anterior implica que

$$r_1 - r_2 = 0, \quad s_1 - s_2 = 0 \quad \text{y} \quad t_1 - t_2 = 0$$

es decir,

$$r_1 = r_2, \quad s_1 = s_2 \quad \text{y} \quad t_1 = t_2 \quad \blacklozenge$$

10.8 Ejercicios

Sección 10.1

1. Una recta $\mathcal{L}$ pasa por el punto $P = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y es paralela al vector $D = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

   Determinar cuáles de los siguientes puntos están sobre la recta $\mathcal{L}$:

   $$P_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad P_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

2. Hallar unas ecuaciones paramétricas para la recta que contiene los puntos

   $P = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $Q = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

3. Sea $\mathcal{L}$ la recta que pasa por el punto $P = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ y es paralela a un vector cuyos ángulos directores α, β y γ son tales que $\alpha = 60°$, $\beta = 60°$ y $0° < \gamma < 90°$. Hallar una ecuación vectorial para la recta $\mathcal{L}$.

4. Hallar unas ecuaciones paramétricas para la recta $\mathcal{L}$ que pasa por el punto $P = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ y tiene como vector director al vector $D = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$. Hallar dos puntos distintos de P que estén en $\mathcal{L}$. Mostrar que $\mathcal{L}$ es paralela al plano xz y dibujar la recta $\mathcal{L}$.

5. *a*) Sea $\mathcal{L}$ una recta con ecuación vectorial $X = P + tD$. Encontrar el escalar t tal que el vector X (de $\mathcal{L}$) sea ortogonal al vector D.

   b) Utilizar el resultado del literal *a*) para calcular la distancia del origen a la recta $\mathcal{L}$ que pasa por el punto P dado y es paralela al vector D dado.

   i) $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

   ii) $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

6. Determinar si los vectores X y Y, dados en cada literal, son linealmente dependientes.

   a) $X = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 3/2 \\ -3/2 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} -2/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$

   b) $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Sección 10.2

7. Unas ecuaciones para las rectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ son, respectivamente,

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y+4}{-5} = \frac{z-2}{3} \quad \text{y} \quad \frac{x-3}{-2} = \frac{y+14}{5} = \frac{z-8}{-3}$$

Mostrar que $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ son coincidentes, es decir que $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$.

8. Para cada literal, encontrar ecuaciones simétricas de la recta que pasa por el punto P dado y es perpendicular a las rectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ dadas.

   a) $\mathcal{L}_1 : \dfrac{x+2}{-3} = \dfrac{y-1}{4} = \dfrac{z}{-5}, \qquad \mathcal{L}_2 : \dfrac{x-3}{7} = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z-8}{3}; \qquad P = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

   b) $\mathcal{L}_1 : x = 2 - 4t,\ y = -3 - 7t,\ z = -1 + 3t,$

   $\mathcal{L}_2 : x = -2 + 3s,\ y = 5 - 4s,\ z = -3 - 2s; \qquad P = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$

   c) $\mathcal{L}_1$ pasa por los puntos $Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ y $R = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathcal{L}_2$ es la recta generada por el vector $D = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$; $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

9. Hallar el ángulo entre las rectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ dadas en cada literal del ejercicio anterior.

10. Sean $P = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ y $R = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$.

    a) Hallar el baricentro del triángulo PQR.

    b) Hallar unas ecuaciones simétricas para cada una de las rectas que contienen las medianas del triángulo PQR.

11. Sea $\mathcal{L}_1$ la recta con ecuaciones simétricas $x + 5 = y = \dfrac{z+3}{2}$ y sea $\mathcal{L}_2$ la recta con ecuaciones paramétricas $x = t$, $y = 1 + 2t$, $z = 2 + t$. Hallar unas ecuaciones simétricas para la recta que pasa por el origen, es perpendicular a $\mathcal{L}_1$ y corta a $\mathcal{L}_2$.

Sección 10.3

12. Considere las rectas $\mathcal{L}_1 : \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{2-y}{3} = \dfrac{2z+4}{-1}$ y $\mathcal{L}_2 : \dfrac{x+1}{4} = \dfrac{y+2}{-6} = \dfrac{z+2}{-1}$

    a) Mostrar que $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ son paralelas no coincidentes.

    b) Calcular la distancia entre $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$.

    c) Dibujar $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$.

13. Sea $\mathcal{L}$ la recta que pasa por los puntos $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ y $Q = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Hallar el punto de $\mathcal{L}$ más cercano al punto $R = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

14. Considere las rectas $\mathcal{L}_1$: $\dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{1-z}{3}$ y $\mathcal{L}_2$: $x = 3+t$, $y = -1+2t$, $z = -3-t$.

    a) Determinar si $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ son paralelas, se cortan o se cruzan.

    b) Determinar si $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ son perpendiculares.

    c) Hallar el punto de intersección de la recta $\mathcal{L}_1$ con cada uno de los planos coordenados.

    d) Calcular la distancia del punto $P = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix}$ a la recta $\mathcal{L}_1$.

    e) Hallar unas ecuaciones simétricas para la recta que pasa por el punto $Q = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ y es paralela a la recta $\mathcal{L}_2$.

    f) Hallar unas ecuaciones simétricas para la recta $\mathcal{L}$ que pasa por el punto $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, es perpendicular a $\mathcal{L}_1$ y corta a esta recta. ¿Cuál es el punto de intersección de $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}_1$?

Sección 10.4

15. Considerar el plano $\mathcal{P}$ que pasa por el punto $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ y que tiene al vector $N = \begin{pmatrix} 8 \\ -11 \\ -2 \end{pmatrix}$ como un vector normal. Determinar cuáles de los siguientes puntos están en $\mathcal{P}$: $Q_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Q_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Q_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$, $Q_4 = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix}$.

16. Sea $\mathcal{P}$ el plano determinado por los puntos $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

    a) Hallar una ecuación en forma normal para $\mathcal{P}$.

    b) Hallar una ecuación en forma general para $\mathcal{P}$.

17. *a*) Sea $\mathcal{L}$ la recta que pasa por el punto $Q = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y es paralela al vector

$$D = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \text{ y sea } R = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

i) Mostrar que R no es un punto de la recta $\mathcal{L}$.

ii) Hallar una ecuación en forma general para el plano determinado por la recta $\mathcal{L}$ y el punto R.

b) Considerar las rectas $\mathcal{L}_1 : \dfrac{x-3}{-2} = \dfrac{y-3/2}{-3} = z$ y $\mathcal{L}_2 : x = 5+t,\ y = \dfrac{5}{2} + \dfrac{3}{2}t,$ $z = -\dfrac{1}{2}t$. Mostrar que $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ determinan un plano y hallar una ecuación en forma general para dicho plano.

c) Considerar las rectas $\mathcal{L}_1 : \dfrac{x-2}{4} = 1-z,\ y = 3$ y $\mathcal{L}_2 : \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-3}{2} = z-1$. Determinar si $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ se cortan y, en caso afirmativo, hallar una ecuación del plano que las contiene.

Sección 10.5

18. Considerar los siguientes planos:

$\mathcal{P}_1 : x + 2y - 2z = 5,$ $\qquad \mathcal{P}_2 : 3x - 6y + 3z = 2$

$\mathcal{P}_3 : 2x + y + 2z + 1 = 0,$ $\qquad \mathcal{P}_4 : x - 2y + z - 7 = 0$

a) Mostrar que dos de los planos anteriores son paralelos y los otros dos son perpendiculares

b) Encontrar el ángulo entre los planos $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$.

19. Sean $Q = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ y $\mathcal{P}_1$ el plano con ecuación $2x - 3y + 5z - 4 = 0$. Hallar una ecuación para el plano $\mathcal{P}$ que pasa por Q y es paralelo al plano $\mathcal{P}_1$.

20. *a*) Hallar una ecuación en forma general para el plano que pasa por el punto $Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix}$ y tal que la recta que pasa por los puntos $R = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $S = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix}$ es perpendicular a dicho plano.

b) Hallar unas ecuaciones paramétricas de la recta $\mathcal{L}$ que contiene al punto $Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ y es perpendicular al plano con ecuación $4x - 3y + z - 5 = 0$.

21. Hallar una ecuación en forma general para cada plano que cumpla simultaneamente las tres condiciones siguientes:

i) Es perpendicular al plano yz.

ii) Contiene al punto $Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

iii) Forma un ángulo ϕ con el plano $2x - y + 2z = 3$ de tal modo que $\cos\phi = \dfrac{2}{3}$.

22. Hallar la intersección del plano y la recta dados en cada literal. Determinar si la recta está contenida en el plano.

   a) $2x - 2y + z - 12 = 0$; $\quad x - \dfrac{1}{2} = \dfrac{y + 3/2}{-1} = \dfrac{z+1}{2}$

   b) $2x + 3y = 0$; $\quad \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+1}{-2} = z - 3$

   c) Plano xz; $\quad \dfrac{3x-9}{3} = \dfrac{y+1}{2} = 1 - z$

   d) $x - 2y - 3z - 8 = 0$; $\quad x = -3 + 4t, \quad y = 5 - t, \quad z = -7 + 2t$

23. Hallar unas ecuaciones paramétricas para la recta $\mathcal{L}$ que contiene el punto de intersección de la recta $\mathcal{L}_1$ de ecuaciones $x = -1 - 2t$, $y = 1 + t$, $z = 10 + 5t$ con el plano xy, y que es paralela a la recta $\mathcal{L}_2$ intersección de los planos $3x - 2y + z + 1 = 0$ y $8x - 4y + 5z = 13$.

24. Considerar los planos:

   $\mathcal{P}_1 : 5x - 3y + 2z = 1, \qquad \mathcal{P}_2 : x + 3y - z + 11 = 0$

   $\mathcal{P}_3 : x + 4y - 3z = 2, \qquad \mathcal{P}_4 : 3x - y + 4z - 9 = 0$

   Hallar una ecuación en forma general para el plano que contiene la recta intersección de los planos $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ y es paralelo a la recta intersección de los planos $\mathcal{P}_3$ y $\mathcal{P}_4$.

25. Considerar las rectas

   $\mathcal{L}_1 : \dfrac{x-1}{5} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z+1}{-3} \quad$ y $\quad \mathcal{L}_2 : x - 2 = \dfrac{y+1}{-3} = \dfrac{z+3}{2}$

   a) Mostrar que $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ son ajenas.

   b) Hallar unas ecuaciones para la recta que pasa por el punto $Q = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}$ y corta a cada una de las rectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$. (**Ayuda:** La intersección del plano determinado por $\mathcal{L}_1$ y Q, con un plano paralelo a $\mathcal{L}_1$ que contiene a $\mathcal{L}_2$, es una recta paralela a $\mathcal{L}_1$).

Sección 10.6

26. Un plano tiene ecuación $x + 2y - 2z + 7 = 0$. Hallar:

   a) Un vector unitario normal al plano.

   b) La distancia del origen al plano.

   c) El punto Q del plano más cercano al origen. (Comprobar que $\|Q\|$ es la distancia hallada en *b*)).

27. Para cada par de rectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ dada en cada numeral:

   a) Determinar si $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ se cortan, son paralelas, perpendiculares o se cruzan.

   b) Hallar la distancia entre $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$.

   c) Hallar el ángulo entre $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$.

   i) $\mathcal{L}_1 : x = -2 + 3t,\ y = 5 - t,\ z = 8 + 7t; \quad \mathcal{L}_2 : 10 - x = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-36}{-3}$

ii) $\mathcal{L}_1 : \dfrac{x-1}{-2} = y - 1 = \dfrac{z+1}{3}$; $\quad \mathcal{L}_2 : 3 - x = \dfrac{y+4}{5} = \dfrac{z-1}{2}$

iii) $\mathcal{L}_1 : x - 1 = y - 1,\ z = 2$; $\quad \mathcal{L}_2 : x = 2t,\ y = -2t + 1,\ z = t + 2$

iv) $\mathcal{L}_1 : x - 2 = \dfrac{y+1}{2} = 4 - z$; $\quad \mathcal{L}_2 : \dfrac{x-3}{3} = \dfrac{3y+4}{-3} = \dfrac{3z-13}{3}$

v) $\mathcal{L}_1 : \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z-4}{5}$; $\quad \mathcal{L}_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ -15 \end{pmatrix}$

28. *a)* Hallar una ecuación en forma general para cada plano que es perpendicular a la recta con ecuaciones $y = 2z$, $x = 0$, y dista $\sqrt{5}$ unidades del punto $Q = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. (Dos soluciones).

    b) Mostrar que la recta $\mathcal{L}$ con ecuaciones $x - 3 = y - 2 = 7 - z$ es paralela al plano $\mathcal{P}$ con ecuación $x + 2y + 3z = 0$. Hallar la distancia de la recta $\mathcal{L}$ al plano $\mathcal{P}$.

29. *a)* Probar que la distancia entre dos planos paralelos $ax + by + cz + d_1 = 0$ y $ax + by + cz + d_2 = 0$ está dada por $\dfrac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

    b) Mostrar que los planos $8x - 4y + z = 9$ y $-16x + 8y - 2z = 72$ son paralelos y hallar la distancia entre ellos.

30. Considerar el plano $\mathcal{P}$ con ecuación $x - 2y + 4z = 12$ y el punto $Q = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

    a) Calcular la distancia entre el punto Q y el plano $\mathcal{P}$.

    b) Hallar una ecuación en forma general para el plano $\mathcal{P}_1$ tal que $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}$ son paralelos no coincidentes y el punto Q es equidistante de estos dos planos.

Sección 10.7

31. *a)* Sea $\mathcal{L}$ la recta que pasa por el punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y es paralela al vector $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Determinar si $\mathcal{L}$ es paralela al plano $\mathcal{P}$ descrito en cada uno de los siguientes numerales:

    i) $\mathcal{P}$ pasa por los puntos $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

    ii) Una ecuación para $\mathcal{P}$ es $2x + 4y = 10$.

    iii) Una ecuaciones paramétricas para $\mathcal{P}$ son $x = 1 + 2t - \frac{3}{4}s$, $y = 1 + t + s$, $z = -2 + 3t + s$.

    iv) $\mathcal{P}$ pasa por el origen y es perpendicular a la recta con ecuaciones simétricas $\dfrac{x}{5} = \dfrac{y}{4} = -\dfrac{z}{2}$.

b) Hallar una ecuación vectorial para la recta que contiene al punto $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ y es paralela a cada uno de los planos $x + 2y + 3z = 4$ y $2x + 3y + 4z = 5$.

c) Hallar una ecuación para el plano que pasa por el punto $Q = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, es paralelo a la recta con ecuaciones simétricas $x - \frac{1}{2} = \frac{y + 3/2}{-1} = \frac{z+1}{2}$ y es perpendicular al plano con ecuación $8x + 5y + z - 11 = 0$.

32. Considerar los planos

$$\mathcal{P}_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathcal{P}_2 : x + y + z - 6 = 0.$$

a) Hallar unas ecuaciones paramétricas para el plano $\mathcal{P}_2$ y una ecuación en forma general para el plano $\mathcal{P}_1$.

b) Hallar el ángulo entre los planos $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$.

c) Calcular la distancia del punto $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ al plano que pasa por el punto $R = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ y contiene a la recta intersección de los planos $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$.

33. Considerar las rectas $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ y el plano $\mathcal{P}_1$ siguientes:

$\mathcal{L}_1 : x = 2 + 3t,\ y = 1 - 2t,\ z = t;\qquad \mathcal{L}_2 : \frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{2};$

$\mathcal{P}_1 : 2x + 3y + z - 5 = 0.$

a) Mostrar que $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ se cruzan.

b) Hallar la distancia entre $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$.

c) Hallar unas ecuaciones paramétricas para el plano $\mathcal{P}$ que es perpendicular al plano $\mathcal{P}_1$ y contiene la recta $\mathcal{L}_2$.

d) Hallar unas ecuaciones simétricas para la recta $\mathcal{L}$ que pasa por el origen, es perpendicular a la recta $\mathcal{L}_1$ y es paralela al plano $\mathcal{P}_1$.

e) Hallar unas ecuaciones paramétricas para la recta $\mathcal{L}$ que es perpendicular tanto a $\mathcal{L}_1$ como a $\mathcal{L}_2$ y las corta a ambas.

34. Para los vectores U, V y Z dados en cada literal, determinar si ellos son linealmente independientes. Si ellos son linealmente independientes, expresar el vector $W = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ como combinación lineal de U, V y Z.

a) $U = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$b)\ U = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$c)\ U = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/3 \\ 1/4 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$$

11

Transformaciones lineales del espacio y matrices 3×3

11.1 Transformaciones del espacio

Llamaremos **transformaciones del espacio** a las funciones de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$, las cuales denotaremos mediante letras mayúsculas como $P,\ Q,\ R,\ S,\ T, \ldots$, al igual que lo hicimos con las transformaciones del plano.

Ejemplo 11.1
Sean U un vector no nulo de $\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{L}$ la recta generada por U. Si X es un vector cualquiera de $\mathbb{R}^3$, el vector $Proy_U X$, el cual está en $\mathcal{L}$, lo llamaremos también la **proyección de X sobre $\mathcal{L}$**(ver figura 11.1).

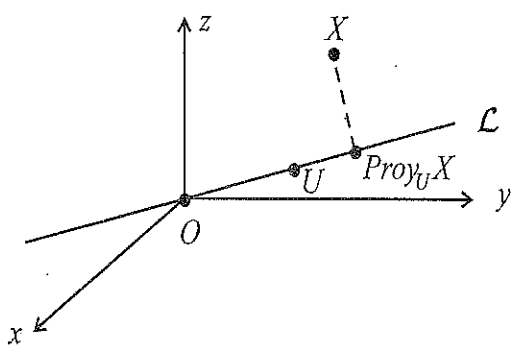


Figura 11.1.

Denotaremos P_U la transformación del espacio que asigna a cada vector X de $\mathbb{R}^3$, su proyección sobre la recta $\mathcal{L}$. Es decir,

$$\begin{array}{rcl} P_U : \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ X & \mapsto & P_U\left(X\right) = Proy_U X \end{array}$$

La transformación P_U la llamaremos **proyección sobre la recta $\mathcal{L}$**.

Tomemos, por ejemplo, $U = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ y hallemos para $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ las coordenadas del vector $P_U\left(X\right)$:

$$P_U(X) = Proy_U X = \left(\frac{X \cdot U}{U \cdot U}\right) U = \frac{x - 2y + 3z}{14} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{14}x - \frac{1}{7}y + \frac{3}{14}z \\ -\frac{1}{7}x + \frac{2}{7}y - \frac{3}{7}z \\ \frac{3}{14}x - \frac{3}{7}y + \frac{9}{14}z \end{pmatrix}$$

es decir,

$$P_U \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{14}x - \frac{1}{7}y + \frac{3}{14}z \\ -\frac{1}{7}x + \frac{2}{7}y - \frac{3}{7}z \\ \frac{3}{14}x - \frac{3}{7}y + \frac{9}{14}z \end{pmatrix}$$

Para las proyecciones P_{E_1}, P_{E_2}, P_{E_3} sobre los ejes x, y, z respectivamente se tienen las siguientes expresiones

$$P_{E_1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_{E_2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_{E_3} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$$

las cuales se pueden obtener sin realizar ningún cálculo, dada la sencillez de su significado geométrico ■

Ejemplo 11.2

Como en el ejemplo 11.1, sea $\mathcal{L}$ la recta generada por un vector U de $\mathbb{R}^3$, $U \neq O$. Denotaremos S_U la transformación del espacio que asigna a cada vector X de $\mathbb{R}^3$ la reflexión de X respecto a la recta $\mathcal{L}$, entendiéndose dicha reflexión de manera idéntica al caso del plano (vea figura 11.2).

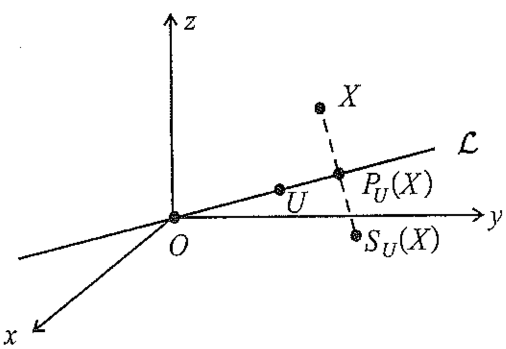


Figura 11.2.

De igual forma que en el plano, se tiene que

$$S_U(X) = 2P_U(X) - X$$

así que,

$$\begin{aligned} S_U : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ X &\mapsto S_U(X) = 2P_U(X) - X \end{aligned}$$

La transformación S_U la llamaremos **reflexión respecto a la recta $\mathcal{L}$**.

Si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y,por ejemplo, $U = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ entonces

$$S_U \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \frac{1}{14}x - \frac{1}{7}y + \frac{3}{14}z \\ -\frac{1}{7}x + \frac{2}{7}y - \frac{3}{7}z \\ \frac{3}{14}x - \frac{3}{7}y + \frac{9}{14}z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{6}{7}x - \frac{2}{7}y + \frac{3}{7}z \\ -\frac{2}{7}x - \frac{3}{7}y - \frac{6}{7}z \\ \frac{3}{7}x - \frac{6}{7}y + \frac{2}{7}z \end{pmatrix} \quad ■$$

Ejemplo 11.3

Sean U un vector no nulo de $\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{P}$ el plano que pasa por el origen y con vector normal U. Para cada vector X de $\mathbb{R}^3$, denotaremos $Q_U(X)$ la **proyección de X sobre el plano $\mathcal{P}$**, la cual se define como el punto donde la perpendicular trazada desde X al plano $\mathcal{P}$ intersecta a este plano, como se ilustra en la figura 11.3. En dicha figura también se muestra la proyección $P_U(X)$ del vector X sobre la recta $\mathcal{L}$ generada por U.

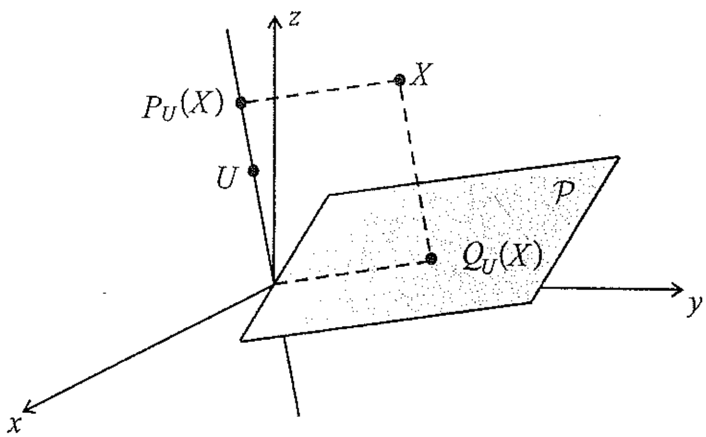


Figura 11.3.

En la figura 11.3 se aprecia que

$$X = Q_U(X) + P_U(X)$$

o equivalentemente, que

$$Q_U(X) = X - P_U(X)$$

Tenemos así la transformación

$$\begin{array}{rcl} Q_U : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ X & \mapsto & Q_U(X) = X - P_U(X) \end{array}$$

la cual llamaremos **proyección sobre el plano $\mathcal{P}$**.

Si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $U = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ se tiene que

$$Q_U\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{14}x - \frac{1}{7}y + \frac{3}{14}z \\ -\frac{1}{7}x + \frac{2}{7}y - \frac{3}{7}z \\ \frac{3}{14}x - \frac{3}{7}y + \frac{9}{14}z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{14}x + \frac{1}{7}y - \frac{3}{14}z \\ \frac{1}{7}x + \frac{5}{7}y + \frac{3}{7}z \\ -\frac{3}{14}x + \frac{3}{7}y + \frac{5}{14}z \end{pmatrix}$$

Para la proyección sobre los planos coordenados no es necesario realizar ningún cálculo. Por ejemplo, es claro que la proyección sobre el plano xy de un vector $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ está dada por

$$Q_{E_3}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

lo cual se ilustra en la figura 11.4 ∎

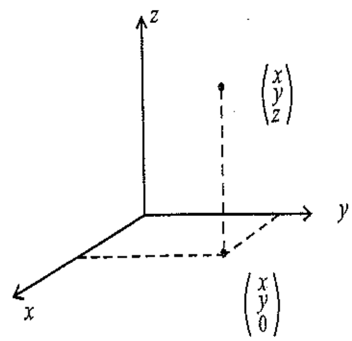


Figura 11.4.

Ejemplo 11.4
Sea, como en el ejemplo 11.3, $\mathcal{P}$ un plano que pasa por el origen y con vector normal U. Para cada vector X de $\mathbb{R}^3$, $R_U(X)$ denotará la **reflexión de X respecto al plano** $\mathcal{P}$, es decir, $R_U(X)$ es el otro extremo del segmento de recta trazado desde X perpendicularmente al plano $\mathcal{P}$ de tal modo que su punto medio es la proyección, $Q_U(X)$, de X sobre el plano $\mathcal{P}$ (vea figura 11.5).

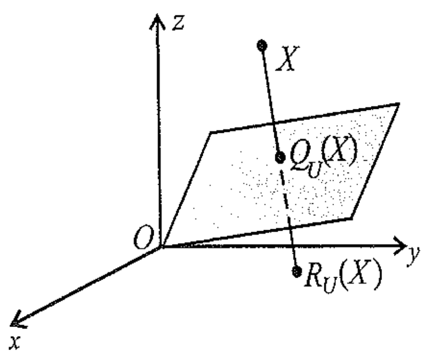


Figura 11.5.

Así, por definición de $R_U(X)$, el punto medio del segmento de extremos X y $R_U(X)$ es $Q_U(X)$, es decir,

$$Q_U(X) = \frac{1}{2}(X + R_U(X))$$

Despejando $R_U(X)$ de esta igualdad se obtiene

$$R_U(X) = 2Q_U(X) - X$$

Observe la similitud entre esta expresión para $R_U(X)$ y la expresión para $S_U(X)$, la cual es

$$S_U(X) = 2P_U(X) - X$$

La transformación

$$\begin{array}{rcl} R_U : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ X & \mapsto & R_U(X) = 2Q_U(X) - X \end{array}$$

la llamaremos **reflexión respecto al plano** $\mathcal{P}$

Si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y , por ejemplo, $U = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ entonces

$$R_U(X) = 2\begin{pmatrix} \frac{13}{14}x + \frac{1}{7}y - \frac{3}{14}z \\ \frac{1}{7}x + \frac{5}{7}y + \frac{3}{7}z \\ -\frac{3}{14}x + \frac{3}{7}y + \frac{5}{14}z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{7}x + \frac{2}{7}y - \frac{3}{7}z \\ \frac{2}{7}x + \frac{3}{7}y + \frac{6}{7}z \\ -\frac{3}{7}x + \frac{6}{7}y - \frac{2}{7}z \end{pmatrix}$$

Por supuesto, la reflexión respecto a cualquiera de los planos coordenados no requiere ningún cálculo. Por ejemplo, es claro que la reflexión respecto al plano xy de un vector $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ está dado por

$$R_{E_3}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -z \end{pmatrix}$$

lo cual se ilustra en la figura 11.6 ■

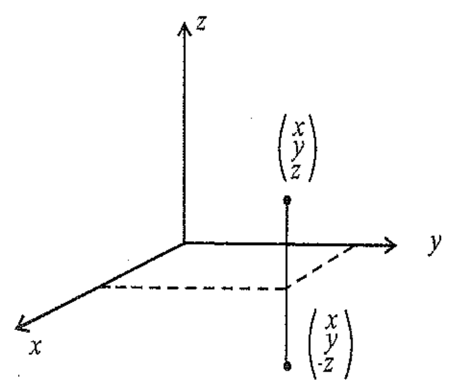


Figura 11.6.

Ejemplo 11.5
Sea $r \in \mathbb{R}$. Denotaremos D_r (como en el plano) la transformación del espacio que envía cada vector X de $\mathbb{R}^3$ en el vector rX, es decir,

$$\begin{aligned} D_r : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ X &\mapsto D_r(X) = rX \end{aligned}$$

Es claro que para todo $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$

$$D_r\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rx \\ ry \\ rz \end{pmatrix}$$

El efecto de D_r sobre los vectores de $\mathbb{R}^3$ es similar al de la transformación D_r del plano sobre los vectores de $\mathbb{R}^2$ ■

Ejemplo 11.6
Fijemos un número real θ , $-2\pi < \theta < 2\pi$. Denotaremos R_θ^z la transformación del espacio que rota cada vector de $\mathbb{R}^3$ un ángulo de θ radianes alrededor del eje z. Para cada vector $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$, esta transformación rota al vector X alrededor del punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ en el plano $z = z_0$, un ángulo de θ radianes en el sentido antihorario si $\theta > 0$ y en sentido horario si $\theta < 0$, entendiéndose que el sentido antihorario en el plano $z = z_0$ corresponde al sentido en que se curvan los dedos de la mano derecha cuando el dedo pulgar apunta en la dirección positiva del eje z. En la figura 11.7 se ilustra el efecto de la rotación R_θ^z con $\theta > 0$ sobre un vector X.

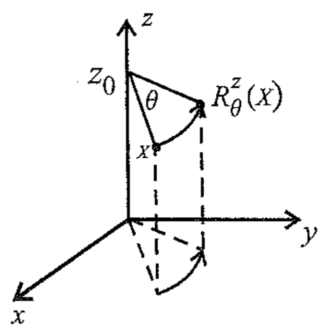


Figura 11.7.

Así las cosas, para cualquier vector $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$,

$$R_\theta^z \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta \\ x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta \\ z \end{pmatrix}$$

La transformación R_θ^z se llamará **rotación por el ángulo θ, alrededor del eje** z.

De manera similar R_θ^x y R_θ^y denotarán las **rotaciones por un ángulo de θ radianes alrededor del eje x y del eje y**, respectivamente. Para cualquier vector $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$, se tiene

$$R_\theta^x \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y\cos\theta - z\operatorname{sen}\theta \\ y\operatorname{sen}\theta + z\cos\theta \end{pmatrix}$$

y

$$R_\theta^y \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta + z\operatorname{sen}\theta \\ y \\ -x\operatorname{sen}\theta + z\cos\theta \end{pmatrix}$$

Note que los signos para R_θ^y son diferentes a los signos para R_θ^z y R_θ^x ■

Ejemplo 11.7
Fijemos un vector U de $\mathbb{R}^3$. Como en el plano, la transformación del espacio que envía cada vector X de $\mathbb{R}^3$ en $X + U$, se llamará **traslación por el vector** U y se denotará T_U.

Es decir,

$$\begin{aligned} T_U : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ X &\mapsto T_U(X) = X + U \end{aligned}$$

Si $U = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ entonces para cualquier vector $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$,

$$T_U \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + x_0 \\ y + y_0 \\ z + z_0 \end{pmatrix} \quad \blacksquare$$

De manera similar al caso del plano, se llaman **transformación identidad y transformación nula,** respectivamente, las transformaciones

$$\begin{aligned} I : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ X &\longmapsto I(X) = X \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} O : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ X &\longmapsto O(X) = O \end{aligned}$$

11.2 Transformaciones lineales y matrices

Obsérvese que para cada una de las transformaciones $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, que aparecen en los ejemplos 11.1 al 11.6, existen constantes $a_i,\ b_i,\ c_i$ con $i = 1, 2, 3$ de tal modo que la imagen bajo T de cualquier vector $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ es

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1x + a_2y + a_3z \\ b_1x + b_2y + b_3z \\ c_1x + c_2y + c_3z \end{pmatrix} \tag{11.1}$$

Como en el caso de las transformaciones del plano, toda transformación $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ del tipo (11.1) es llamada una **transformación lineal del espacio.** De manera que las transformaciones $P_U,\ S_U,\ Q_U,\ R_U,\ R_\theta^x,\ R_\theta^y$ y R_θ^z consideradas en este capítulo, como también las transformaciones I y O, son transformaciones lineales del espacio. En cuanto a la transformación T_U, ésta es una transformación lineal sólo en el caso $U = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, caso en el cual $T_U = I$.

Supongamos que T es una transformación lineal del espacio definida por (11.1). El arreglo de números

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \tag{11.2}$$

se llama **matriz de** T y se denotará $m(T)$. Por ejemplo, si $U = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$,

$$m(P_U) = \begin{pmatrix} \frac{1}{14} & -\frac{1}{7} & \frac{3}{14} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{3}{7} \\ \frac{3}{14} & -\frac{3}{7} & \frac{9}{14} \end{pmatrix}$$

Por otra parte,

$$m(P_{E_1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad m(I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad m(O) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En general todo arreglo de números como el que aparece en (11.2) se dirá una **matriz** 3×3 (se lee "tres por tres"), **una matriz de orden** 3 o también una **matriz de tres filas y tres columnas**; los números a_1, a_2, a_3 conforman la primera fila; b_1, b_2, b_3 la segunda fila y c_1, c_2, c_3 la tercera fila. Los números a_1, b_1, c_1 conforman la primera columna; a_2, b_2, c_2 la segunda columna y a_3, b_3, c_3 la tercera columna.

Denotaremos las matrices 3×3 mediante letras mayúsculas como A, B, $C, \ldots$; la matriz $m(I)$ se denotará I_3 y se dirá la **matriz identidad** de orden 3, y la matriz $m(O)$ se denotará O y se dirá la **matriz nula** de orden 3.

Dos matrices

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} a_1' & a_2' & a_3' \\ b_1' & b_2' & b_3' \\ c_1' & c_2' & c_3' \end{pmatrix}$$

se dicen **iguales** y se escribe $A = B$ si

$$a_i = a_i', \quad b_i = b_i' \quad \text{y} \quad c_i = c_i' \quad \text{para } i = 1, 2, 3$$

A cada transformación lineal T del espacio hemos asociado una matriz 3×3, la cual es $m(T)$. Por otra parte, toda matriz 3×3 como la que aparece en (11.2) es la matriz de una única transformación lineal del espacio, la cual es la transformación $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por (11.1). De manera que la correspondencia

$$T \longrightarrow m(T)$$

entre transformaciones lineales del espacio y matrices 3×3 es biunívoca.

Si $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, definimos el **producto** AX **de la matriz** A **por el vector** X de $\mathbb{R}^3$ así:

$$AX = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1x + a_2y + a_3z \\ b_1x + b_2y + b_3z \\ c_1x + c_2y + c_3z \end{pmatrix}$$

De manera que si T es la transformación lineal del espacio con matriz A entonces

$$T(X) = AX$$

para todo X de $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo 11.8
Cualquiera sea $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ en $\mathbb{R}^3$,

- $$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 4 & -3 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 8z \\ 4x - 3y + 5z \\ 6x + 7y + 9z \end{pmatrix}$$

- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

- Si $U = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $P_U \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{14}x - \frac{1}{7}y + \frac{3}{14}z \\ -\frac{1}{7}x + \frac{2}{7}y - \frac{3}{7}z \\ \frac{3}{14}x - \frac{3}{7}y + \frac{9}{14}z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{14} & -\frac{1}{7} & \frac{3}{14} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{3}{7} \\ \frac{3}{14} & -\frac{3}{7} & \frac{9}{14} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ■

Al igual que para las transformaciones del plano, se tiene que:

> Una transformación $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es una transformación lineal si y sólo si
> $$T(X+U) = T(X) + T(U) \quad \text{y} \quad T(rU) = rT(U)$$
> para todo par de vectores X, U de $\mathbb{R}^3$ y todo escalar r

(11.3)

Las dos condiciones en (11.3) se pueden sustituir por la condición

$$T(rX + sU) = rT(X) + sT(U)$$

cualesquiera sean X, U en $\mathbb{R}^3$ y r, s en $\mathbb{R}$.

Se tiene además que:

> Si $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es una transformación lineal, entonces
>
> - $T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
> - Para cualquier vector $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$,
>
> $$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = T(xE_1 + yE_2 + zE_3) = xT(E_1) + yT(E_2) + zT(E_3)$$
>
> (Por tanto, si se conocen $T(E_1)$, $T(E_2)$, y $T(E_3)$ ya se conoce $T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, cualquiera sea el vector $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$)
>
> - $m(T) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ si y sólo si $T(E_1) = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$, $T(E_2) = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$ y $T(E_3) = \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix}$

Ejemplo 11.9
Consideremos la transformación del espacio

$$\begin{array}{rcl} T:\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - z \\ x + z/3 \\ x - y/2 + 4z \end{pmatrix} \end{array}$$

Es claro que T es una transformación lineal pues su ley de asignación es de la forma (11.1). La matriz de T es

$$m(T) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{1}{2} & 4 \end{pmatrix}$$

Comprobemos que $T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y que $T(E_1)$, $T(E_2)$, $T(E_3)$ son, respectivamente, la primera, segunda y tercera columna de la matriz $m(T)$:

$$T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(0) - 0 \\ 0 + 0/3 \\ 0 - 0/2 + 4(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T(E_1) = \begin{pmatrix} 2(1) - 0 \\ 1 + 0/3 \\ 1 - 0/2 + 4(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \text{primera columna de } m(T)$$

$$T(E_2) = \begin{pmatrix} 2(0) - 0 \\ 0 + 0/3 \\ 0 - 1/2 + 4(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \text{segunda columna de } m(T)$$

$$T(E_3) = \begin{pmatrix} 2(0) - 1 \\ 0 + 1/3 \\ 0 - 0/2 + 4(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1/3 \\ 4 \end{pmatrix} = \text{tercera columna de } m(T) \quad \blacksquare$$

Ejemplo 11.10
Sea S una transformación lineal del espacio tal que

$$S(E_1) = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad S(E_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad S(E_3) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Halle la ley de asignación de S.

Solución:

Sea $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un vector cualquiera de $\mathbb{R}^3$. Dado que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = xE_1 + yE_2 + zE_3$$

y puesto que S es una transformación lineal,

$$\begin{aligned}
S\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= S\left(xE_1 + yE_2 + zE_3\right) \\
&= x\, S\left(E_1\right) + y\, S\left(E_2\right) + z\, S\left(E_3\right) \\
&= x\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2x - 2z \\ 3x - y \\ 4x + 5y - 3z \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Así, la ley de asignación de S es

$$S\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x - 2z \\ 3x - y \\ 4x + 5y - 3z \end{pmatrix}$$

También podemos obtener la ley de asignación de S hallando primero $m\left(S\right)$ como se indica a continuación:

Como S es una transformación lineal del espacio, las columnas primera, segunda y tercera de $m\left(S\right)$ son respectivamente $S\left(E_1\right)$, $S\left(E_2\right)$, $S\left(E_3\right)$; por tanto,

$$m\left(S\right) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

Luego, para cualquier vector $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$,

$$S\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x - 2z \\ 3x - y \\ 4x + 5y - 3z \end{pmatrix} \quad \blacksquare$$

Si $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es una transformación del espacio y $\mathcal{C}$ es un conjunto de puntos del espacio, **la imagen $T\left(\mathcal{C}\right)$ del conjunto $\mathcal{C}$ bajo T** es, como en el plano, el conjunto

$$T\left(\mathcal{C}\right) = \left\{T\left(X\right) / X \in \mathcal{C}\right\}$$

Respecto a la imagen bajo una transformación lineal de una recta, un segmento de recta o un paralelogramo se tienen resultados completamente análogos a los ya conocidos en el caso del plano. Se tiene, además, lo siguiente:

Si $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es una transformación lineal entonces:
1. La imagen $T(\mathcal{P})$ de un plano $\mathcal{P}$ bajo T es un plano, una recta o un conjunto con un solo punto.
2. La imagen $T(\mathbb{R}^3)$ de todo el espacio $\mathbb{R}^3$ bajo T, es todo $\mathbb{R}^3$, un plano que pasa por el origen, una recta que pasa por el origen o es el conjunto $\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$.
3. La imagen del paralelepípedo determinado por tres vectores X, Y y Z de $\mathbb{R}^3$, es el paralelepípedo determinado por $T(X), T(Y)$ y $T(Z)$ si estos vectores son L.I.[1]

Para probar 2. partiremos de que

$$\mathbb{R}^3 = \{xE_1 + yE_2 + zE_3 / x,\ y,\ z \in \mathbb{R}\}$$

Por tanto,

$$T(\mathbb{R}^3) = \{T(xE_1 + yE_2 + zE_3) / x,\ y,\ z \in \mathbb{R}\}$$

y como T es una transformación lineal,

$$T(xE_1 + yE_2 + zE_3) = xT(E_1) + yT(E_2) + zT(E_3)$$

luego,

$$T(\mathbb{R}^3) = \{xT(E_1) + yT(E_2) + zT(E_3) / x,\ y,\ z \in \mathbb{R}\}$$

Así que $T(\mathbb{R}^3)$ es el conjunto de todas las combinaciones lineales de los vectores $T(E_1)$, $T(E_2)$, $T(E_3)$. Se tiene así que:

- Si $T(E_1)$, $T(E_2)$, $T(E_3)$ son vectores L.I. entonces

$$T(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^3$$

pues en tal caso todo vector de $\mathbb{R}^3$ es expresable como C.L. de los vectores $T(E_1)$, $T(E_2)$, $T(E_3)$

- Si dos de los vectores $T(E_1)$, $T(E_2)$, $T(E_3)$ son L.I. y el otro es C.L. de aquellos entonces $T(\mathbb{R}^3)$ es el plano generado por esos dos vectores linealmente independientes. A continuación probaremos esto para el caso en que $T(E_1)$, $T(E_2)$ son linealmente independientes y $T(E_3)$ es combinación lineal de $T(E_1)$ y $T(E_2)$, es decir,

$$T(E_3) = rT(E_1) + sT(E_2)$$

para ciertos escalares r y s. En este caso, toda combinación lineal de $T(E_1)$, $T(E_2)$ y $T(E_3)$ es también una C.L. de $T(E_1)$ y $T(E_2)$ ya que si $x,\ y,\ z$ son escalares cualesquiera

$$\begin{aligned} xT(E_1) + yT(E_2) + zT(E_3) &= xT(E_1) + yT(E_2) + z(rT(E_1) + sT(E_2)) \\ &= (x + zr)T(E_1) + (y + zs)T(E_2) \end{aligned}$$

Por otra parte, es claro que toda combinación lineal de $T(E_1)$ y $T(E_2)$ es también combinación lineal de $T(E_1)$, $T(E_2)$ y $T(E_3)$ ya que si $x,\ y$ son escalares cualesquiera,

$$xT(E_1) + yT(E_2) = xT(E_1) + yT(E_2) + 0T(E_3)$$

[1] Cuando los vectores $T(X), T(Y)$ y $T(Z)$ son L.D., la imagen del paralelepípedo determinado por X, Y y Z no es necesariamente un paralelogramo, un segmento o un punto.

De manera que el conjunto de todas las combinaciones lineales de $T(E_1)$, $T(E_2)$ y $T(E_3)$ (el cual es $T(\mathbb{R}^3)$) es igual al conjunto de todas las combinaciones lineales de $T(E_1)$ y $T(E_2)$ (el cual es el plano generado por estos vectores).

Se deja como ejercicio para el lector completar la prueba de la afirmación 2. y también probar lo afirmado en 1. y 3.

Ejemplo 11.11

Sea T la transformación lineal del espacio tal que

$$T(E_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad T(E_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T(E_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Halle la imagen bajo T de:

a) El segmento $\overline{AB}$ donde $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) La recta $\mathcal{L}$ que pasa por los puntos $P = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ y $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

c) La recta $\mathcal{L}'$ que pasa por el punto $R = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ y tiene vector director $U = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

d) El plano $\mathcal{P}$ generado por $Y = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $V = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

e) El espacio $\mathbb{R}^3$.

Solución:

Comencemos por hallar la ley de asignación de T:

Si $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ es un punto cualquiera de $\mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= T(xE_1 + yE_2 + zE_3) \\ &= xT(E_1) + yT(E_2) + zT(E_3) \\ &= x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x+z \\ y+z \\ -x+y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

a) Las imágenes de A y B bajo T están dadas por

$$\begin{aligned} T(A) &= T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 \\ 0+0 \\ -1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \\ T(B) &= T\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+1 \\ -1+1 \\ -0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Como $T(A) = T(B)$ entonces

$$T\left(\overline{AB}\right) = \{T(A)\} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$$

b) Se tiene

$$\begin{aligned} T(P) &= T\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+4 \\ -1+4 \\ -2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \\ T(Q) &= T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+3 \\ 1+3 \\ 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Como $T(P) \neq T(Q)$ entonces $T(\mathcal{L})$ es la recta que pasa por $T(P)$ y $T(Q)$.

c) Tenemos

$$\begin{aligned} T(R) &= T\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5+7 \\ 2+7 \\ -(-5)+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \text{y} \\ T(U) &= T\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+1 \\ -1+1 \\ -(-1)-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Como $T(U) = O$, entonces

$$T(\mathcal{L}') = \{T(R)\} = \left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}\right\}$$

d) Como

$$\mathcal{P} = \{tY + rV /\ t,\ s \in \mathbb{R}\}$$

la imagen de $\mathcal{P}$ bajo la transformación lineal T es

$$T(\mathcal{P}) = \{tT(Y) + rT(V) /\ t,\ s \in \mathbb{R}\}$$

Ahora, dado que

$$T(Y) = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad T(V) = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

entonces

$$T(\mathcal{P}) = \left\{ t \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \Big/ \; t, \; s \in \mathbb{R} \right\}$$

Por último, como los vectores $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ son linealmente independientes, la imagen del plano $\mathcal{P}$ bajo T es otro plano, el plano generado por dichos vectores.

e) Como

$$\mathbb{R}^3 = \{xE_1 + yE_2 + zE_3 / x, \; y, \; z \in \mathbb{R}\}$$

entonces la imagen de $\mathbb{R}^3$ bajo la transformación lineal T es

$$T\left(\mathbb{R}^3\right) = \{xT(E_1) + yT(E_2) + zT(E_3) \,/\; x, \; y, \; z \in \mathbb{R}\}$$

donde

$$T(E_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad T(E_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad T(E_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ahora veamos si los vectores $T(E_1)$, $T(E_2)$, $T(E_3)$ son L.I.:

Es claro que $T(E_1)$ y $T(E_2)$ son linealmente independientes. Consideremos entonces el plano generado por estos vectores y veamos si $T(E_3)$ es o no un punto de dicho plano.

Un vector normal N al plano generado por $T(E_1)$ y $T(E_2)$ es el vector

$$N = T(E_1) \times T(E_2) = \begin{vmatrix} E_1 & E_2 & E_3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = E_1 - E_2 + E_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Luego, una ecuación para dicho plano es

$$x - y + z = 0$$

Ahora, como el punto $T(E_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ satisface esta ecuación ya que $1 - 1 + 0 = 0$, entonces $T(E_3)$ está en el plano generado por $T(E_1)$ y $T(E_2)$ y por tanto $T(E_3)$ es C.L. de $T(E_1)$ y $T(E_2)$.

En resumen, $T(E_1)$ y $T(E_2)$ son linealmente independientes y $T(E_3)$ es combinación lineal de $T(E_1)$, $T(E_2)$.

Se sigue que $T\left(\mathbb{R}^3\right)$ es el plano generado por los vectores $T(E_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $T(E_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, es decir,

$$T\left(\mathbb{R}^3\right) = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Big/ \; t, \; s \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3 : x - y + z = 0 \right\} \quad \blacksquare$$

11.3 Operaciones con transformaciones lineales y matrices

Sean T y S transformaciones del espacio y r un escalar. Las transformaciones $T+S$, rT y $T \circ S$ se definen exactamente como si T y S fueran transformaciones del plano. Al igual que en el caso del plano, es fácil probar que si T y S son transformaciones lineales entonces $T+S$, rT y $T \circ S$ también lo son.

Por ejemplo, una manera de probar que $T+S$ es una transformación lineal si T y S lo son, es probando que

$$(T+S)(tX+rU) = t(T+S)(X) + r(T+S)(U)$$

para todo par de vectores X, U de $\mathbb{R}^3$ y todo par de escalares t, r, como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}
(T+S)(tX+rU) &= T(tX+rU) + S(tX+rU) \\
&= tT(X) + rT(U) + tS(X) + rS(U) \\
&= t(T(X)+S(X)) + r(T(U)+S(U)) \\
&= t(T+S)(X) + r(T+S)(U)
\end{aligned}$$

También se puede probar que $T+S$ es una transformación lineal si T y S lo son, de la siguiente manera:

Digamos que

$$m(T) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad m(S) = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \tag{11.4}$$

Por tanto, para cualquier $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned}
(T+S)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + S\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11}x + b_{12}y + b_{13}z \\ b_{21}x + b_{22}y + b_{23}z \\ b_{31}x + b_{32}y + b_{33}z \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Luego,

$$(T+S)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_{11}+b_{11})x + (a_{12}+b_{12})y + (a_{13}+b_{13})z \\ (a_{21}+b_{21})x + (a_{22}+b_{22})y + (a_{23}+b_{23})z \\ (a_{31}+b_{31})x + (a_{32}+b_{32})y + (a_{33}+b_{33})z \end{pmatrix}$$

Esta última igualdad prueba que $T+S$ es una transformación lineal del espacio y además que

$$m(T+S) = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{pmatrix}$$

Se hace uso de esta igualdad para definir una **suma** entre matrices 3×3 así:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{pmatrix}$$

Se insiste en que, al igual que para matrices 2×2, la suma entre matrices 3×3 se ha definido de modo de que ella corresponda a la suma de transformaciones lineales, es decir, de modo que

$$m(T) + m(S) = m(T+S)$$

De manera similar se demuestra que si T es una transformación lineal del espacio con $m(T)$ como en (11.4) entonces rT es una transformación lineal y

$$m(rT) = \begin{pmatrix} ra_{11} & ra_{12} & ra_{13} \\ ra_{21} & ra_{22} & ra_{23} \\ ra_{31} & ra_{32} & ra_{33} \end{pmatrix}$$

Se define el producto de un escalar por una matriz 3×3 en la forma

$$r\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra_{11} & ra_{12} & ra_{13} \\ ra_{21} & ra_{22} & ra_{23} \\ ra_{31} & ra_{32} & ra_{33} \end{pmatrix}$$

con lo cual se tiene que

$$r(m(T)) = m(rT)$$

Consideremos ahora la compuesta $T \circ S$ de dos transformaciones lineales T y S con $m(T)$ y $m(S)$ como en (11.4). El lector puede probar que $T \circ S$ también es una transformación lineal, sin hacer uso de $m(T)$ y $m(S)$.

Cuando T y S son transformaciones lineales, la compuesta $T \circ S$ también se llama **producto** de T y S y se denota TS. Podemos calcular $m(TS)$ de la siguiente manera:

La primera columna de $m(TS)$ es el vector

$$\begin{aligned} (TS)(E_1) &= T(S(E_1)) \\ &= T\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix}, \qquad \text{pues } S(E_1) = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De manera similar se calculan las columnas segunda y tercera de $m(TS)$, las cuales son respectivamente, los vectores $(TS)(E_2)$ y $(TS)(E_3)$.

Se obtiene así que

$$m(TS) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

donde

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31}$$

y en general, para $i = 1, 2, 3$ y $j = 1, 2, 3$

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} \tag{11.5}$$

Nótese que en $m(TS)$, el escalar c_{ij}, ubicado en la intersección de la fila i y la columna j se obtiene a partir de la fila i de $m(T)$ y de la columna j de $m(S)$ como se ilustra a continuación :

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ b_{3j} \end{pmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j}$$

Se define ahora el **producto** de dos matrices 3×3 de modo que

$$m(T)\,m(S) = m(TS)$$

es decir, se define el producto de dos matrices 3×3 de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \boxed{a_{21} \quad a_{22} \quad a_{23}} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & \boxed{c_{23}} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \tag{11.6}$$

donde los escalares c_{ij} se calculan como ya se ha indicado. Por ejemplo (vea los elementos encerrados en rectángulos en (11.6)),

$$c_{23} = a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33}$$

Obsérvese que el producto de dos matrices 3×3 se obtiene de manera similar al de dos matrices 2×2.

Ejemplo 11.12

Sea K la reflexión respecto al plano xy y sea J la reflexión respecto al plano yz. Entonces para cualquier vector $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ se tiene:

$$J\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad (KJ)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = K\left(J\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = K\begin{pmatrix} -x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \\ -z \end{pmatrix}$$

Por otra parte

$$K\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -z \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad (JK)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = J\left(K\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = J\begin{pmatrix} x \\ y \\ -z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \\ -z \end{pmatrix}$$

Observe que en este caso $KJ = JK$ (vea figura 11.8), aunque en general el producto de transformaciones lineales no es conmutativo. ■

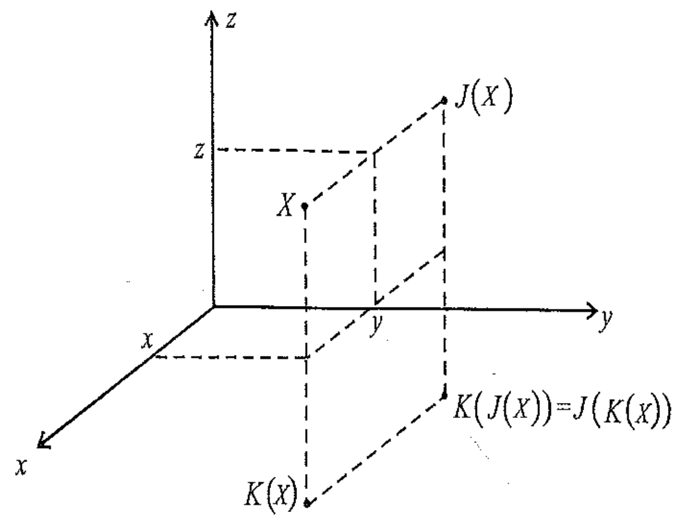


Figura 11.8.

Ejemplo 11.13
Sean P la proyección sobre el plano xy, Q la proyección sobre el plano yz y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un vector cualquiera de $\mathbb{R}^3$. Entonces:

$$P\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad Q\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$(PQ)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P\left(Q\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = P\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(QP)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = Q\left(P\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = Q\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(PP)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P\left(P\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = P\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(QQ)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = Q\left(Q\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = Q\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Observe que $PQ = QP$, $P^2 = P$ y $Q^2 = Q$ (vea figura 11.9). ■

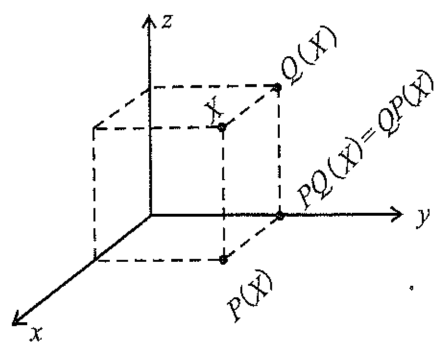


Figura 11.9.

Ejemplo 11.14
Considere las transformaciones lineales del espacio T y S definidas por

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-2y \\ x+y+z \\ -3x+z \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad S\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y+z \\ z \end{pmatrix}$$

Halle la matriz de transformación lineal $(4T+S)\,T$

Solución:

$$\begin{aligned} m\left[(4T+S)\,T\right] &= m(4T+S)\,m(T) \\ &= \left[m(4T)+m(S)\right]m(T) \\ &= \left[4m(T)+m(S)\right]m(T) \end{aligned}$$

Como

$$m(T) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad m(S) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

entonces

$$\begin{aligned} 4m(T)+m(S) &= 4\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & -8 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \\ -12 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & -8 & 0 \\ 4 & 5 & 5 \\ -12 & 0 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y así

$$\begin{aligned} m\left[(4T+S)\,T\right] &= \left[4m(T)+m(S)\right]m(T) \\ &= \begin{pmatrix} 5 & -8 & 0 \\ 4 & 5 & 5 \\ -12 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 & -18 & -8 \\ -6 & -3 & 10 \\ -27 & 24 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Otra manera de hallar la matriz de la transformación lineal $(4T+S)T$ consiste en buscar primero la ley de asignación de esta transformación, como se muestra a continuación:

Si $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ es un vector cualquiera de $\mathbb{R}^3$ entonces

$$\begin{aligned}
[(4T+S)T]\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= (4T+S)\left[T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right] \\
&= (4T)\left[T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right] + S\left[T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right] \\
&= 4T\begin{pmatrix} x-2y \\ x+y+z \\ -3x+z \end{pmatrix} + S\begin{pmatrix} x-2y \\ x+y+z \\ -3x+z \end{pmatrix} \\
&= 4\begin{pmatrix} x-2y-2(x+y+z) \\ x-2y+x+y+z-3x+z \\ -3(x-2y)-3x+z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x-2y \\ x+y+z-3x+z \\ -3x+z \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -3x-18y-8z \\ -6x-3y+10z \\ -27x+24y+5z \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Luego,

$$m[(4T+S)T] = \begin{pmatrix} -3 & -18 & -8 \\ -6 & -3 & 10 \\ -27 & 24 & 5 \end{pmatrix} \quad \blacksquare$$

Las operaciones suma, multiplicación por escalar y producto, definidas para transformaciones lineales del espacio y para matrices 3×3, gozan de las mismas propiedades algebraicas ya establecidas en el capítulo 4 para dichas operaciones con transformaciones lineales del plano y con matrices 2×2.

En cuanto al producto de una matriz 3×3 por un vector de $\mathbb{R}^3$, éste tiene también las mismas propiedades que tiene su similar para matrices 2×2 y vectores de $\mathbb{R}^2$. En particular se tiene que:

- Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ entonces

$$AX = x\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$$

Nótese que el vector AX es combinación lineal de las columnas de A.

- Cualquiera sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, la matriz **transpuesta de** A, denotada A^T es

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Cualquiera sea el vector $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, el **transpuesto de** X es $X^T = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$. Si X y A son como se ha indicado y $U = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$, definimos los siguientes productos:

$$X^T U = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = xu + yv + zw = X.U$$

$$\begin{aligned} X^T A &= \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} xa_{11} + ya_{21} + za_{31} & xa_{12} + ya_{22} + za_{32} & xa_{13} + ya_{23} + za_{33} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Como el lector puede comprobar fácilmente, la transpuesta y los productos aquí definidos tienen las propiedades enunciadas en el ejercicio 30 del capítulo 4 para el caso de matrices 2×2 y vectores de R^2.

11.4 Inversa para transformaciones lineales y matrices

La noción de invertibilidad para una transformación del espacio es la misma que para una transformación del plano y en general la misma que para una función cualquiera.

Ejemplo 11.15
Sea $\mathcal{L}$ la recta generada por un vector U de $\mathbb{R}^3$, $U \neq O$.

a) La proyección P_U sobre la recta $\mathcal{L}$ no es una transformación invertible. Para ver esto, basta considerar cualquier recta $\mathcal{L}'$ perpendicular a $\mathcal{L}$ que pase por el origen y dos puntos X_1, X_2 en $\mathcal{L}'$ con $X_1 \neq X_2$. Es claro que

$$P_U(X_1) = O = P_U(X_2)$$

luego P_U no es uno a uno y por tanto P_U no es invertible (ver figura 11.10).

b) La reflexión S_U respecto a la recta $\mathcal{L}$ es invertible y $S_U^{-1} = S_U$. En efecto,

$$S_U S_U = I$$

(ver figura 11.10). ■

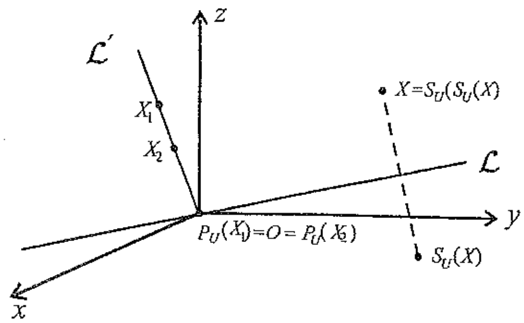


Figura 11.10.

Ejemplo 11.16
Para $r \neq 0$ la transformación D_r es invertible y $D_r^{-1} = D_{\frac{1}{r}}$ puesto que, como el lector puede verificar,

$$D_r D_{\frac{1}{r}} = I = D_{\frac{1}{r}} D_r \quad \blacksquare$$

Ejemplo 11.17
Para cada θ, $-2\pi < \theta < 2\pi$, las rotaciones R_θ^x, R_θ^y, R_θ^z alrededor de los ejes x, y, z respectivamente, son invertibles y

$$\left(R_\theta^x\right)^{-1} = R_{-\theta}^x, \quad \left(R_\theta^y\right)^{-1} = R_{-\theta}^y \quad \text{y} \quad \left(R_\theta^z\right)^{-1} = R_{-\theta}^z \quad \blacksquare$$

Ejemplo 11.18
Sea T la transformación lineal del espacio tal que

$$m(T) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Veamos que la imagen $T\left(\mathbb{R}^3\right)$ del espacio $\mathbb{R}^3$ bajo T no es todo $\mathbb{R}^3$, es decir, que T no es sobre.

En efecto, para cada vector $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$,

$$T\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 - y_0 \\ y_0 - z_0 \\ -x_0 + z_0 \end{pmatrix}$$

y se observa que el punto $\begin{pmatrix} x_0 - y_0 \\ y_0 - z_0 \\ -x_0 + z_0 \end{pmatrix}$ satisface la ecuación

$$x + y + z = 0 \tag{11.7}$$

pues

$$(x_0 - y_0) + (y_0 - z_0) + (-x_0 + z_0) = 0$$

Luego, todas las imágenes bajo T de vectores en $\mathbb{R}^3$ caen en el plano $\mathcal{P}$ cuya ecuación es (11.7), es decir, $T\left(\mathbb{R}^3\right) \subseteq \mathcal{P}$. Así T no es sobre.

Ahora, como T no es sobre entonces T no es invertible. $\blacksquare$

A continuación estableceremos para transformaciones lineales del espacio, resultados completamente análogos a los ya establecidos para transformaciones lineales del plano respecto al concepto de invertibilidad. El primero de ellos es:

> Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal. Si T es invertible entonces T^{-1} es una transformación lineal.

La prueba de este resultado se deja como ejercicio para el lector. En segundo lugar tenemos:

> Una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es invertible si y sólo si el único vector X de $\mathbb{R}^3$ tal que $T(X) = O$ es $X = O$

Es claro que si no se cumple la condición

$$\text{“El único vector } X \text{ de } \mathbb{R}^3 \text{ tal que } T(X) = O \text{ es } X = O\text{”} \qquad (11.8)$$

entonces T no es uno a uno y en consecuencia T no es invertible. De manera que si T es invertible entonces debe cumplirse (11.8).

Supongamos ahora que se cumple (11.8) y probemos que T es invertible, probando que T es uno a uno y sobre. Para probar que T es uno a uno, supongamos que X_1, X_2 son vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que $T(X_1) = T(X_2)$ y probemos que $X_1 = X_2$:

Si $T(X_1) = T(X_2)$ entonces $T(X_1) - T(X_2) = O$, y como T es una transformación lineal, $T(X_1) - T(X_2) = T(X_1 - X_2)$, luego $T(X_1 - X_2) = O$. Ahora, usando la condición (11.8) concluimos que $X_1 - X_2 = O$ de donde $X_1 = X_2$.

Para probar que T es sobre probemos que $T(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^3$:

Como

$$\mathbb{R}^3 = \{xE_1 + yE_2 + zE_3 /\ x,\ y,\ z \in \mathbb{R}\}$$

entonces

$$T(\mathbb{R}^3) = \{xT(E_1) + yT(E_2) + zT(E_3) /\ x,\ y,\ z \in \mathbb{R}\}$$

es decir, $T(\mathbb{R}^3)$ es el conjunto de todas las C.L. de los vectores $T(E_1)$, $T(E_2)$, $T(E_3)$. Si probamos que estos vectores son L.I. tendremos que todo vector de $\mathbb{R}^3$ es C.L. de ellos, es decir, que $\mathbb{R}^3 \subseteq T(\mathbb{R}^3)$, y como $T(\mathbb{R}^3) \subseteq \mathbb{R}^3$ entonces tendremos $T(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^3$ como se desea probar.

Ahora, los vectores $T(E_1)$, $T(E_2)$, $T(E_3)$ son L.I., ya que ninguno de los tres es C.L. de los otros dos, pues si (por ejemplo) se diera que $T(E_3) = tT(E_1) + sT(E_2)$ con $t, s \in \mathbb{R}$ entonces se tendría que $T(E_3) = T(tE_1 + sE_2)$ y como T es uno a uno ocurrirá que $E_3 = tE_1 + sE_2$, lo cual no puede ocurrir ya que E_1, E_2, E_3 son L.I.

Se completa así la prueba de que si se da (11.8) entonces T es invertible ♦

El turno es ahora para el siguiente resultado:

> Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal.
> T es invertible si y sólo si las columnas de $m(T)$ son L.I.

Para probarlo, digamos que

$$m(T) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \tag{11.9}$$

Es fácil ver que en la siguiente lista de afirmaciones, cada una (a partir de la segunda) es equivalente a la anterior:

i) T es invertible

ii) El único vector X de $\mathbb{R}^3$ tal que $T(X) = O$ es $X = O$

iii) El único vector $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

iv) Los únicos escalares $x,\ y,\ z$ tales que

$$x\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

son $x = 0,\ y = 0$ y $z = 0$

v) Ninguna de las columnas de $m(T)$ es combinación lineal de las otras dos (es decir, las columnas de $m(T)$ son L.I.)

Así que la primera y la última de las afirmaciones anteriores son equivalentes, como se quería probar ♦

Otro resultado importante es:

> Si $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es una transformación lineal con $m(T) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$
>
> entonces
>
> $$T \text{ es invertible si y sólo si } \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

Denotemos Δ el determinante de $m(T)$ que aparece en el resultado anterior y sean

$$U = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad Z = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

En la prueba de dicho resultado usaremos el hecho de que para $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ en $\mathbb{R}^3$,

$$T(X) = O \Leftrightarrow X \text{ es ortogonal a } U,\ V, \text{ y } Z$$

En efecto,

$$T(X) = O \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_1x + a_2y + a_3z &= 0 \\ b_1x + b_2y + b_3z &= 0 \\ c_1x + c_2y + c_3z &= 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \quad U \cdot X = 0, \quad V \cdot X = 0 \text{ y } Z \cdot X = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad X \text{ es ortogonal a } U,\ V \text{ y } Z$$

También utilizaremos el hecho ya conocido de que

$$\Delta = U \cdot (V \times Z)$$

Probaremos el resultado en consideración probando que:

- Si $\Delta = 0$ entonces T no es invertible (11.10)
- Si $\Delta \neq 0$ entonces T es invertible (11.11)

Para probar (11.10) partamos de que $\Delta = 0$, es decir,

$$U \cdot (V \times Z) = 0 \tag{11.12}$$

Supongamos $V \times Z \neq O$. De (11.12) vemos que $V \times Z$ es ortogonal a U; por otra parte, sabemos que $V \times Z$ es ortogonal a V y a Z. Luego, $V \times Z$ es un vector no nulo ortogonal a los vectores U, V y Z, es decir, $V \times Z$ es un vector no nulo tal que

$$T(V \times Z) = O$$

y por lo tanto,T no es invertible.

Supongamos ahora que $V \times Z = O$. Entonces V y Z son L.D., luego existe un plano que contiene a los puntos U, V y Z. Así, cualquier vector N normal a dicho plano será ortogonal a U, V y Z, es decir, será tal que $T(N) = O$, concluyéndose de ello que T no es invertible.

Hemos probado así (11.10). Ahora probaremos (11.11):

Supongamos que $\Delta \neq 0$, es decir,

$$U \cdot (V \times Z) \neq 0$$

Probaremos que T es invertible probando que T tiene la propiedad (11.8): Ya sabemos que $T(O) = O$. Sea ahora X un vector de $\mathbb{R}^3$ tal que $T(X) = O$, es decir, X es ortogonal a U, V y Z. Como X es ortogonal a V y Z entonces X es paralelo al vector $V \times Z$, es decir,

$$X = t(V \times Z)$$

para algún $t \in \mathbb{R}$. Como además X es ortogonal a U entonces $U \cdot X = 0$, es decir,

$$U \cdot (t(V \times Z)) = 0$$

o, equivalentemente,

$$t(U \cdot (V \times Z)) = 0$$

Ahora, como $U \cdot (V \times Z) \neq 0$ entonces $t = 0$ y así $X = O$. Luego, el único vector X de $\mathbb{R}^3$ tal que $T(X) = O$ es $X = O$, y por tanto T es invertible.

Hemos probado así la implicación en (11.11). Finaliza así la prueba del resultado en el último recuadro. ♦

Ejemplo 11.19
Considere la transformación

$$\begin{array}{rcl} T:\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+2z \\ 4x+y \\ y-3z \end{pmatrix} \end{array}$$

a) Veamos si T es o no es invertible, calculando el determinante Δ de $m(T)$: Como

$$m(T) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

entonces

$$\begin{aligned} \Delta = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} &= (-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -(-3-0) + 2(4-0) = 11 \end{aligned}$$

Como $\Delta \neq 0$, concluimos que T es invertible.

b) Dado que T es invertible, el único vector $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es el vector $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Es decir, el único vector $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tal que

$$\begin{aligned} -x+2z &= 0 \\ 4x+y &= 0 \\ y-3z &= 0 \end{aligned}$$

es $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

c) Como T es invertible, las columnas

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

de $m(T)$ son linealmente independientes. ■

Volvamos a las transformaciones lineales del plano. Recordemos que para una transformación lineal $T:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ con $m(T) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, vimos que si T es invertible y $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ entonces

$$m\left(T^{-1}\right) = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Pues bien, para una transformación lineal $T:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ se tiene un resultado análogo, solo que el cálculo de $m\left(T^{-1}\right)$ es un poco más laborioso. Veamos:

Supongamos que T es invertible y que $m(T)$ es como en (11.9); continuemos con

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = U \cdot (V \times Z)$$

donde $U = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ y $Z = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$

Supongamos además que

$$m\left(T^{-1}\right) = \begin{pmatrix} r_1 & s_1 & t_1 \\ r_2 & s_2 & t_2 \\ r_3 & s_3 & t_3 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ es decir, } \quad T \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

o equivalentemente,

$$U \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = 1, \quad V \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{y} \quad Z \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = 0$$

es decir, la primera columna de $m\left(T^{-1}\right)$ es un vector ortogonal a V y a Z y, además, cumple que

$$U \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = 1$$

Ahora, como $\Delta = U \cdot (V \times Z)$ y $V \times Z$ es ortogonal a V y Z tenemos que

$$U \cdot (V \times Z) = \Delta, \quad V \cdot (V \times Z) = 0 \quad \text{y} \quad Z \cdot (V \times Z) = 0$$

y como $\Delta \neq 0$, ya que T es invertible, podemos escribir las igualdades anteriores en la forma

$$U \cdot \frac{1}{\Delta}(V \times Z) = 1, \quad V \cdot \frac{1}{\Delta}(V \times Z) = 0 \quad \text{y} \quad Z \cdot \frac{1}{\Delta}(V \times Z) = 0$$

Luego, el vector $\frac{1}{\Delta}(V \times Z)$ cumple que

$$T\left(\frac{1}{\Delta}(V \times Z)\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y como también

$$T \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y T es uno a uno entonces tiene que ser

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}(V \times Z)$$

Hemos determinado así la primera columna de la matriz $m\left(T^{-1}\right)$. De manera similar se determinan sus otras dos columnas, obteniéndose que

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}(Z \times U) \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}(U \times V).$$

Tenemos así lo siguiente:

> Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal con matriz
>
> $$m(T) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \quad \text{y sea } \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$
>
> Si T es invertible entonces
>
> $$m\left(T^{-1}\right) = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} V \times Z & Z \times U & U \times V \\ \vert & \vert & \vert \\ \vert & \vert & \vert \end{pmatrix} \tag{11.13}$$
>
> donde
>
> $$U = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad Z = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 11.20

Considere la transformación lineal T del ejemplo 11.19, de la cual ya sabemos que es invertible.

a) Halle $m\left(T^{-1}\right)$

b) Halle la ley de asignación para T^{-1}

Solución:

a) Tenemos que

$$m(T) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

y vimos que el determinante Δ de esta matriz es $\Delta = 11$. Luego, de acuerdo con la fórmula (11.13),

$$m\left(T^{-1}\right) = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} V \times Z & Z \times U & U \times V \\ \vert & \vert & \vert \\ \vert & \vert & \vert \end{pmatrix}$$

donde

$$U = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad Z = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

El lector puede verificar que

$$\begin{aligned} V \times Z &= -3E_1 + 12E_2 + 4E_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix} \\ Z \times U &= 2E_1 + 3E_2 + E_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \\ U \times V &= -2E_1 + 8E_2 - E_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por tanto,

$$m\left(T^{-1}\right) = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 12 & 3 & 8 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

b) La ley de asignación para T^{-1} es :

$$\begin{aligned} T^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \frac{1}{11}\begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 12 & 3 & 8 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{11}\begin{pmatrix} -3x + 2y - 2z \\ 12x + 3y + 8z \\ 4x + y - z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{3}{11}x + \frac{2}{11}y - \frac{2}{11}z \\ \frac{12}{11}x + \frac{3}{11}y + \frac{8}{11}z \\ \frac{4}{11}x + \frac{1}{11}y - \frac{1}{11}z \end{pmatrix} \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Volvamos una vez más a las transformaciones lineales del plano. Vimos que si para una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ existe una transformación lineal $S : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $ST = I$ (o $TS = I$) entonces T es invertible y $T^{-1} = S$. Pues bien, exactamente lo mismo se da para transformaciones lineales del espacio. Es decir, se tiene lo siguiente.

> Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal. Si existe una transformación lineal $S : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $ST = I$ o $TS = I$ entonces T es invertible y $T^{-1} = S$.

Prueba: Supongamos que $S : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es una transformación lineal tal que $ST = I$ y sea X un vector de $\mathbb{R}^3$ tal que $T(X) = O$. Entonces

$$X = I(X) = (ST)(X) = S(T(X)) = S(O) = O$$

Luego, el único vector X de $\mathbb{R}^3$ tal que $T(X) = O$ es $X = O$ y por tanto T es invertible. Además,

$$S = SI = S\left(TT^{-1}\right) = (ST)T^{-1} = IT^{-1} = T^{-1}$$

Supongamos ahora que $TS = I$. Entonces, según se acaba de probar, S es invertible y $S^{-1} = T$; luego $ST = I$ y por tanto T es invertible y $S = T^{-1}$. ◆

Pasemos ahora a las matrices 3×3. Para ellas la noción de invertibilidad se define exactamente como lo hicimos para matrices 2×2. Veamos:

Sea A una matriz 3×3 y consideremos la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ cuya matriz es A. La matriz A se dice **invertible** si lo es la transformación lineal T. Si éste es el caso, la matriz $m\left(T^{-1}\right)$ se dice la **inversa** de A y se denota A^{-1}, es decir, $A^{-1} = m\left(T^{-1}\right)$.

Al igual que para matrices 2×2, la matriz A^{-1} (cuando existe) es tal que

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_3.$$

Por supuesto, todos los resultados establecidos para transformaciones lineales, relacionados con invertibilidad, pueden trasladarse a matrices 3×3. Se tiene así que:

Para cualquier matriz $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$,

1) Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- A es invertible
- El único vector X de $\mathbb{R}^3$ tal que $AX = O$ es $X = O$
- Las columnas de A son L.I.
- $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$

2) Si A es invertible y $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ entonces

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} V \times Z & Z \times U & U \times V \\ | & | & | \\ | & | & | \end{pmatrix} \tag{11.14}$$

donde

$$U = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad Z = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

3) Si existe una matriz B de orden 3 tal que $AB = I_3$ (o $BA = I_3$) entonces A es invertible y $A^{-1} = B$.

De acuerdo con el resultado 1), podemos determinar si tres vectores dados de $\mathbb{R}^3$ son L.I., considerando la matriz A cuyas columnas son los tres vectores dados (en cualquier orden) y calculando su determinante Δ. Si $\Delta \neq 0$, los vectores son L.I. y si $\Delta = 0$, ellos son L.D.

Ejemplo 11.21

Sea $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

Vimos en el ejemplo 11.19 que la transformación lineal T cuya matriz es A, es una transformación invertible, por tanto la matriz A es invertible. Como además

$$m\left(T^{-1}\right) = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 12 & 3 & 8 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(vea ejemplo 11.20), entonces A^{-1} es la matriz que aparece al lado derecho en la igualdad anterior. ■

Ejemplo 11.22
Muestre que la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ es invertible y halle su inversa.

Solución:
Para ver que A es invertible basta mostrar que su determinante Δ es distinto de cero.

$$\begin{aligned} \Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} &= 2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2(3+1) + (3-0) + 0 \\ &= 11. \end{aligned}$$

Como $\Delta \neq 0$, A es invertible. Para hallar A^{-1} emplearemos la fórmula (11.14) :

$$A^{-1} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} V \times Z & Z \times U & U \times V \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

donde $U = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $Z = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Calculando los tres productos cruz que figuran en A^{-1} se obtiene:

$$V \times Z = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Z \times U = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad U \times V = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Por tanto,

$$A^{-1} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -3 & 6 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \tag{11.15}$$

(Téngase presente que si T es la transformación lineal del espacio cuya matriz es A entonces T es invertible, pues A lo es, y además $A^{-1} = m\left(T^{-1}\right)$. ■

Ejemplo 11.23
Para cada una de las siguientes colecciones de vectores, determine si ellos son L.I.

$a)\ X = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

$b)\ X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} -7 \\ 7 \\ -10 \end{pmatrix}$

Solución:

a) Sea A la matriz 3×3 con X como primera columna, Y como segunda columna y Z como tercera columna, es decir,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & -1 \\ 1 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Calculemos su determinante Δ :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & -1 \\ 1 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -5 & -1 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 0 & -5 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 2\,(-20+7) - 0 + (0+5) = -21$$

Como $\Delta \neq 0$, la matriz A es invertible y así sus columnas son linealmente independientes Luego, los vectores dados son L.I.

b) Consideremos la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 2 & -1 & 7 \\ 1 & 4 & -10 \end{pmatrix}$$

Dejamos al lector verificar que el determinante de esta matriz es cero, de lo cual se sigue que las columnas de B son L.D., es decir, que los vectores X, Y, Z son L.D. ■

11.5 Ejercicios

Sección 11.1

1. Considerar la recta $\mathcal{L} : x = 3t,\ y = t,\ z = -2t$. Hallar la ley de asignación de la transformación dada en cada literal y hallar también la imagen bajo la transformación del vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   a) La proyección sobre la recta $\mathcal{L}$.

   b) La reflexión respecto a la recta $\mathcal{L}$.

2. Considerar el plano $\mathcal{P} : x - y + z = 0$. Hallar la ley de asignación para cada transformación dada y la imagen del vector $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ bajo dicha transformación.

   a) Proyección sobre el plano $\mathcal{P}$.

   b) Reflexión con respecto al plano $\mathcal{P}$.

3. Para cada literal hallar la ley de asignación de la transformación dada y la imagen bajo dicha transformación del vector dado.

   a) $R^z_{\frac{\pi}{3}}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ *b*) $R^y_{\frac{\pi}{4}}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *c*) $R^x_{\frac{\pi}{6}}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix}$.

Sección 11.2

4. Para cada literal determinar si la transformación T definida es una transformación lineal y, en caso afirmativo, hallar la matriz de T.

   a) $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix}$ *b*) $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ y \end{pmatrix}$

   c) $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ *d*) $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ y+z \\ x+z \end{pmatrix}$.

5. Sea $\mathcal{P}$ el plano con ecuaciones paramétricas $x = t - 2s,\ y = 2t - s,\ z = -t + s$ y sea $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Hallar:

   a) La matriz de la transformación proyección sobre el plano $\mathcal{P}$.

   b) La proyección del vector V sobre el plano $\mathcal{P}$.

   c) La matriz de la transformación reflexión respecto al plano $\mathcal{P}$.

   d) La reflexión del vector V respecto al plano $\mathcal{P}$.

6. Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que $T(E_1 + E_2 + E_3) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

   $T(-E_1 + E_2 + E_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $T(E_1 - E_2 + E_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   Hallar $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $T\begin{pmatrix} -10 \\ -15 \\ 25 \end{pmatrix}$.

7. Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que $T(E_3) = 2E_1 + 3E_2 + 5E_3$, $T(E_2 + E_3) = E_1$ y $T(E_1 + E_2 + E_3) = E_2 - E_3$.

   a) Hallar la matriz de T.

   b) Calcular $T(E_1 + 2E_2 + 3E_3)$.

8. Sea T la transformación lineal del espacio tal que $m(T) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Hallar:

   a) $T\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ *b*) $T(2E_1 - 5E_2 + E_3)$

   c) La ley de asignación de T. *d*) La imagen de $\mathbb{R}^3$ bajo T.

9. Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - z \\ -x + z \\ x - z \end{pmatrix}$

   a) Hallar el conjunto de todos los vectores de $\mathbb{R}^3$ cuya imagen bajo T es el vector nulo e interpretar geométricamente dicho conjunto.

   b) Hallar la imagen de $\mathbb{R}^3$ bajo T e interpretarla geométricamente.

10. Sea T la transformación lineal del espacio definida por $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y + 2z \\ 3x + y + 4z \\ 5x - y + 8z \end{pmatrix}$

    a) Hallar la matriz de T.

    b) Mostrar que la imagen de $\mathbb{R}^3$ bajo T es un plano que pasa por el origen y hallar una ecuación en la forma general para dicho plano.

    c) Mostrar que el conjunto $\mathcal{H} = \{X \in \mathbb{R}^3 / T(X) = O\}$ es una recta que pasa por el origen y hallar unas ecuaciones paramétricas para dicha recta.

11. Sea T la transformación lineal del espacio definida por $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + z \\ x - y - z \\ -x + y + z \end{pmatrix}$.

    Hallar la imagen bajo T del conjunto descrito en cada literal.

    a) La recta $\mathcal{L}$ perpendicular a la recta $\mathcal{L}_1 : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z+2}{3}$ que pasa por el punto $R = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ y además es paralela al plano $\mathcal{P} : 2x + 3y - z + 5 = 0$

    b) El segmento de recta $\overline{AB}$ donde $A = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

    c) El plano $\mathcal{P}$ que pasa por el punto $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y contiene a la recta $\mathcal{L}_1 : x = 1 - t,\ y = 2 + t,\ z = -1 + 2t$.

    d) La recta $\mathcal{L}_2$ intersección de los planos $x + y - z = 0$ y $2x - y + 3z = 2$.

12. Hallar una transformación lineal T del espacio tal que la imagen de $\mathbb{R}^3$ bajo T es el conjunto descrito en cada literal.

    a) El plano con ecuación $2x - y + z = 0$

b) La recta generada por el vector $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Sección 11.3

13. Sean S la reflexión respecto al plano $x-y+z=0$ y T la proyección sobre el plano xz. Hallar la matriz y la ley de asignación de cada una de las transformaciones siguientes:

    a) $T+S$ *b*) $3T-2S$ *c*) TS *d*) ST *e*) $(2S+T)\,S$

14. Sean S y T las transformaciones lineales del espacio definidas por $S\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ y \\ x \end{pmatrix}$ y $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x+y \\ x+y+z \end{pmatrix}$. Hallar la ley de asignación de cada una de las transformaciones siguientes:

    a) TS *b*) ST *c*) S^2 *d*) $(2T-3S)\,S$

15. Sean T y S las transformaciones lineales del espacio tales que $m\,(T) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ y $m\,(S) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Hallar la matriz de la transformación $(5T-3S)\,(T+S)$.

16. Hallar la ley de asignación de la transformación T que asigna a cada vector X de $\mathbb{R}^3$ el vector resultante de rotar el vector X en sentido antihorario, un ángulo de $\frac{\pi}{3}$ radianes alrededor del eje z y luego un ángulo de $\frac{\pi}{6}$ radianes alrededor del eje y. Hallar también la imagen del vector $\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ \sqrt{3} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ bajo T.

17. Hallar la ley de asignación de la transformación T que asigna a cada vector X de $\mathbb{R}^3$, el vector obtenido mediante una rotación de $\frac{\pi}{4}$ radianes en sentido antihorario alrededor del eje x, seguida de una reflexión respecto al plano yz. Hallar también la imagen bajo T del vector $\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Sección 11.4

18. Sea U un vector no nulo de $\mathbb{R}^3$ y sea $\mathcal{P}$ el plano que pasa por el origen y que tiene a U como un vector normal. Sean Q_U y R_U las transformaciones proyección sobre el plano $\mathcal{P}$ y reflexión respecto al plano $\mathcal{P}$.

    a) Probar que Q_U no es invertible.

    b) Probar que R_U es invertible y hallar su inversa R_U^{-1}.

19. *a*) Considerar la recta $\mathcal{L} : x = \frac{1}{3}t,\ y = \frac{2}{3}t,\ z = \frac{2}{3}t$ y el plano $\mathcal{P} : x - 2y + 2z = 0$.

    i) Hallar la inversa de la transformación reflexión respecto a la recta $\mathcal{L}$.

    ii) Hallar la inversa de la transformación reflexión respecto al plano $\mathcal{P}$.

    b) Hallar la inversa de la transformación reflexión respecto al plano xz.

20. Sean T y S las transformaciones lineales del espacio definidas por
$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+y \\ x-z \\ x+y-z \end{pmatrix} \text{ y } S\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x-y+z \\ -y+z \\ -x-2y+z \end{pmatrix}.$$
Probar que T es la inversa de S.

21. Sea T la transformación lineal del espacio tal que $m(T) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

    a) Mostrar que T es uno a uno y sobre.

    b) Hallar $m\left(T^{-1}\right)$.

    c) Hallar la ley de asignación de T^{-1}.

22. *a*) Para cada matriz dada determinar si es invertible y, en caso afirmativo, hallar su inversa.
$$i)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad ii)\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad iii)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$
    b) Para cada matriz A dada en el literal *a*) sea T la tranformación lineal del espacio cuya matriz es A. Si A es invertible, hallar la ley de asignación para T^{-1} y si no lo es hallar la imagen de $\mathbb{R}^3$ bajo T.

23. Para cada literal, comprobar que la transformación lineal T es invertible mostrando que el único vector X de $\mathbb{R}^3$ tal que $T(X) = O$ es $X = O$; además, hallar la ley de asignación de T^{-1}.
$$a)\ T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+y+z \\ x-2z \\ 2x-z \end{pmatrix} \qquad b)\ T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$
$$c)\ T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x-z \\ -y-2z \\ -2z \end{pmatrix} \qquad d)\ T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

24. *a*) Probar que si T y S son transformaciones lineales invertibles del espacio entonces TS es invertible y $(TS)^{-1} = S^{-1}T^{-1}$.

    b) Sea T la reflexión respecto a la recta generada por el vector $U = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y sea S la reflexión respecto al plano que pasa por el origen y tiene al vector $N = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ como un vector normal. Empleando el resultado en *a*) hallar la inversa de TS.

25. *a*) Sea T la transformación lineal del espacio definida por

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+y \\ 2x+ay+2z \\ y+az \end{pmatrix}$$

Hallar los valores de la constante a para los cuales T no es invertible.

b) Hallar una condición necesaria y suficiente sobre los números a , b y c de modo que la transformación T con matriz $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ tenga inversa. Hallar la ley de asignación de T^{-1} cuando T sea invertible.

c) Muestre que la transformación lineal con matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & d & a+d \\ b & e & b+e \\ c & f & c+f \end{pmatrix}$$

donde $a, b, c, d, e,$ y f son números reales cualesquiera, no es invertible.

d) Hallar una condición necesaria y suficiente sobre los números a, b, c y d, para que la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$ sea invertible. Hallar A^{-1} cuando A sea invertible.

26. Determinar si los vectores dados en cada literal son linealmente dependientes.

a) $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $Z = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Z = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

12

Sistemas de ecuaciones lineales 3×3

12.1 Definiciones y algunos resultados básicos

Se denomina **ecuación lineal** con tres variables x, y, z a toda ecuación de la forma

$$ax + by + cz = u \tag{12.1}$$

en la cual a, b, c y u son números reales dados. Una **solución** de tal ecuación es una terna ordenada $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que al sustituir x por x_0, y por y_0 y z por z_0, la ecuación se satisface, es decir,

$$ax_0 + by_0 + cz_0 = u$$

Por ejemplo, una solución de la ecuación $x + 2y - z = 3$ es la terna $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ ya que $1 + 2(0) - (-2) = 3$.

El conjunto de todas las soluciones de una ecuación del tipo (12.1) se dirá su **conjunto solución.** Dos ecuaciones del tipo (12.1) se dicen **equivalentes** si tienen el mismo conjunto solución; cuando se multiplica una de tales ecuaciones por un escalar no nulo se obtiene una ecuación equivalente. Como sabemos, si $a \neq 0$ o $b \neq 0$ o $c \neq 0$, (12.1) es una ecuación para un plano, así que en tal caso el conjunto solución de (12.1) es dicho plano.

Ejemplo 12.1
Consideremos la ecuación

$$x + 2y - z = 3 \tag{12.2}$$

Su conjunto solución es el plano $\mathcal{P}$ con ecuación (12.2). Nótese que si asignamos cualquier valor a z y cualquier valor a y, el valor de x para que la terna $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ sea solución de (12.2), queda determinada así: $x = 3 - 2y + z$. Por tanto, el conjunto solución de (12.2), es decir, el plano $\mathcal{P}$, está dado por

$$\mathcal{P} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \Big/ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 2y + z \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\}$$

o equivalentemente,

$$\mathcal{P} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \Big/ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \blacksquare$$

Ejemplo 12.2
a) El conjunto solución de la ecuación

$$0x + 0y + 0z = 0$$

es todo $\mathbb{R}^3$, pues todo vector $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ la satisface.
b) Si $u \neq 0$, el conjunto solución de la ecuación

$$0x + 0y + 0z = u$$

es ϕ, pues ningún vector $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ la satisface. $\blacksquare$

Consideremos ahora un sistema de dos ecuaciones lineales con tres variables (o incógnitas):

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= u_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= u_2 \end{aligned} \tag{12.3}$$

Una **solución** del sistema (12.3) es un vector $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ que sea solución de cada una de las dos ecuaciones. El sistema (12.3) se dice **soluble** o **consistente** si tiene al menos una solución; en caso contrario se dice **no soluble** o **inconsistente**. El conjunto de todas las soluciones del sistema se dirá su **conjunto solución.** Dos sistemas del tipo (12.3) se dicen **equivalentes** si tienen el mismo conjunto solución. Si en el sistema (12.3) se tiene $u_1 = 0$ y $u_2 = 0$, el sistema se dice **homogéneo**; en tal caso el vector $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es una solución del sistema, la cual es llamada la **solución trivial**.

Ejemplo 12.3
a) El conjunto solución del sistema

$$\begin{aligned} 0x + 0y + 0z &= 3 \\ x - 2y + 3z &= 5 \end{aligned}$$

es ϕ, pues la primera ecuación carece de soluciones.
b) El conjunto solución del sistema

$$\begin{aligned} 0x + 0y + 0z &= 0 \\ x - 2y + 3z &= 5 \end{aligned}$$

es el de la segunda ecuación (ya que el conjunto solución de la primera es todo $\mathbb{R}^3$), es decir, es el plano con ecuación $x - 2y + 3z = 5$.
c) El conjunto solución del sistema

$$\begin{aligned} 0x + 0y + 0z &= 0 \\ 0x + 0y + 0z &= 0 \end{aligned}$$

es todo $\mathbb{R}^3$, pues el conjunto solución para cada una de las dos ecuaciones es $\mathbb{R}^3$. ■

En general, si en el sistema (12.3) se tiene $a_1 = 0$, $b_1 = 0$ y $c_1 = 0$ o $a_2 = 0$, $b_2 = 0$ y $c_2 = 0$ entonces el conjunto solución del sistema es ϕ, un plano o todo $\mathbb{R}^3$.

Supongamos ahora que en el sistema (12.3)

$$a_1 \neq 0 \text{ o } b_1 \neq 0 \text{ o } c_1 \neq 0 \quad \text{y} \quad a_2 \neq 0 \text{ o } b_2 \neq 0 \text{ o } c_2 \neq 0 \tag{12.4}$$

En este caso el conjunto solución de cada ecuación es un plano; si denotamos $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ dichos planos entonces el conjunto solución del sistema es $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$.

Ahora, para los dos planos $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ se presenta uno y sólo uno de los tres casos siguientes:
Caso 1. $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2$.
En este caso $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_1$.
Caso 2. $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ son paralelos y $\mathcal{P}_1 \neq \mathcal{P}_2$.
En este caso $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \phi$.
Caso 3. $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ no son paralelos.
En este caso $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ es una recta.

En la figura 12.1 se ilustran estos tres casos.

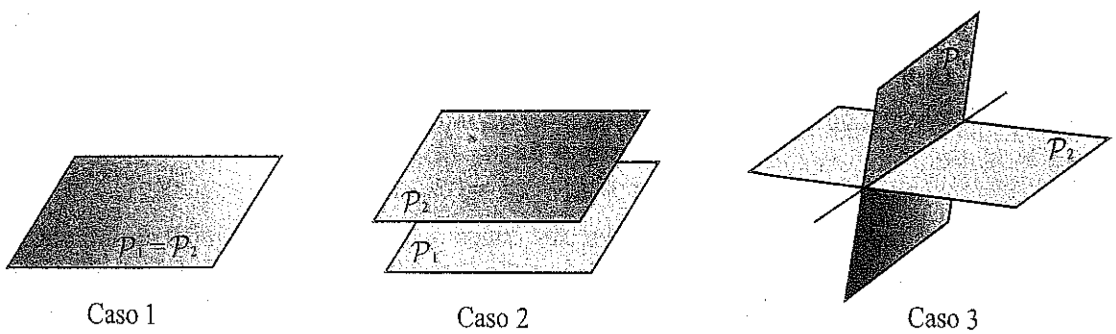


Figura 12.1.

Admitiendo lo anterior, podemos afirmar que:

> Para un sistema
> $$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= u_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= u_2 \end{aligned}$$
> con $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \neq O$ y $\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \neq O$, se da uno y sólo uno de los siguientes casos
> **Caso 1.** El conjunto solución es un plano.
> **Caso 2.** El conjunto solución es ϕ.
> **Caso 3.** El conjunto solución es una recta.

Nótese que si el sistema es homogéneo, entonces sólo se dan los casos 1 y 3 : El conjunto solución es un plano que pasa por el origen o es una recta que pasa por el origen. Lo primero ocurre cuando los planos con ecuaciones

$$a_1x + b_1y + c_1z = 0 \quad \text{y} \quad a_2x + b_2y + c_2z = 0$$

coinciden, es decir, cuando los vectores

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

son L.D. Obviamente, el otro caso se da cuando estos vectores son L.I.

Ejemplo 12.4
En el sistema

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 2 \\ 2x - 4y + 6z &= 4 \end{aligned}$$

las dos ecuaciones representan un mismo plano. Por tanto, el conjunto solución del sistema es un plano, el plano con ecuación $x - 2y + 3z = 2$ ■

Ejemplo 12.5
En el sistema

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 2 \\ 2x - 4y + 6z &= 5 \end{aligned}$$

las ecuaciones representan planos paralelos distintos, luego el sistema no es soluble. ■

Ejemplo 12.6
En el sistema

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 2 \\ 2x + \ y + \ z &= 1 \end{aligned} \tag{12.5}$$

las ecuaciones representan planos no paralelos, luego el conjunto solución del sistema es la recta intersección de esos dos planos. Podemos obtener una ecuación vectorial paramétrica para dicha recta, encontrándole un vector director y un punto por donde ella pasa. También podemos obtener lo mismo resolviendo el sistema (12.5) mediante el método de eliminación (el cual ya hemos empleado en sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas) como se muestra a continuación: A fin de eliminar la incógnita x en la segunda ecuación, multiplicamos la primera ecuación por -2 y la ecuación resultante (la cual es $-2x + 4y - 6z = -4$) la sumamos a la segunda ecuación; se obtiene

$$5y - 5z = -3$$

Así el sistema (12.5) es equivalente al sistema

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 2 \\ 5y - 5z &= -3 \end{aligned} \tag{12.6}$$

En este sistema se observa que si $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ es una solución de él entonces, despejando y de la segunda ecuación, se tiene $y = -\frac{3}{5} + z$, y sustituyendo este valor en la primera y luego despejando x se obtiene $x = 2 + 2\left(-\frac{3}{5} + z\right) - 3z = \frac{4}{5} - z$. Así, toda solución $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ del sistema (12.6) es de la forma

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} - z \\ -\frac{3}{5} + z \\ z \end{pmatrix} \tag{12.7}$$

Recíprocamente, todo vector $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de la forma anterior es solución del sistema (12.6), lo cual puede comprobarlo el lector sustituyendo x por $\frac{4}{5} - z$ y y por $-\frac{3}{5} + z$ en el sistema (12.6). Luego, el conjunto solución del sistema (12.6), y por tanto el del sistema (12.5), es la recta

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \Big/ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} - z \\ -\frac{3}{5} + z \\ z \end{pmatrix} \right\}$$

o, en forma equivalente,

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \Big/ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5 \\ -3/5 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \blacksquare$$

Nótese que el sistema (12.6) se resolvió así: Se despejó y en términos de z de la segunda ecuación; luego se sustituyó esa expresión de y en la primera ecuación y se despejó x en términos de z. Ello condujo a la expresión (12.7). Esta manera de proceder en sistemas del tipo (12.6) se conoce como **sustitución de abajo hacia arriba** o más brevemente **sustitución regresiva.**

Pasemos ahora a considerar un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= u_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= u_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= u_3 \end{aligned} \tag{12.8}$$

Para estos sistemas, los conceptos de **solución, conjunto solución, sistema soluble, sistemas equivalentes, sistema homogéneo** y **solución trivial** se definen exactamente como para los sistemas del tipo (12.3).

Supongamos por el momento, que los tres vectores

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

son no nulos. En tal caso las ecuaciones en (12.8) representan planos $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_3$ y el conjunto solución del sistema es precisamente $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3$.

Para los planos $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_3$ se presenta uno y sólo uno de los ocho casos siguientes:

Caso 1. $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_3$

En este caso $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 = \mathcal{P}_1$.

Caso 2. Dos de los planos coinciden y son paralelos al otro, el cual es distinto de los dos primeros.

En este caso $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 = \phi$.

Caso 3. Dos de los planos coinciden y el otro, el cual es distinto a los primeros, los corta.

En este caso $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3$ es una recta.

Caso 4. Los tres planos son paralelos pero distintos dos a dos.

En este caso $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 = \phi$.

Caso 5. Los tres planos son distintos dos a dos, dos de ellos son paralelos y el otro los corta.

En este caso $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 = \phi$.

Caso 6. Los tres planos son distintos y no paralelos dos a dos, siendo la intersección de cualesquiera dos de ellos una misma recta.

En este caso $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3$ es una recta.

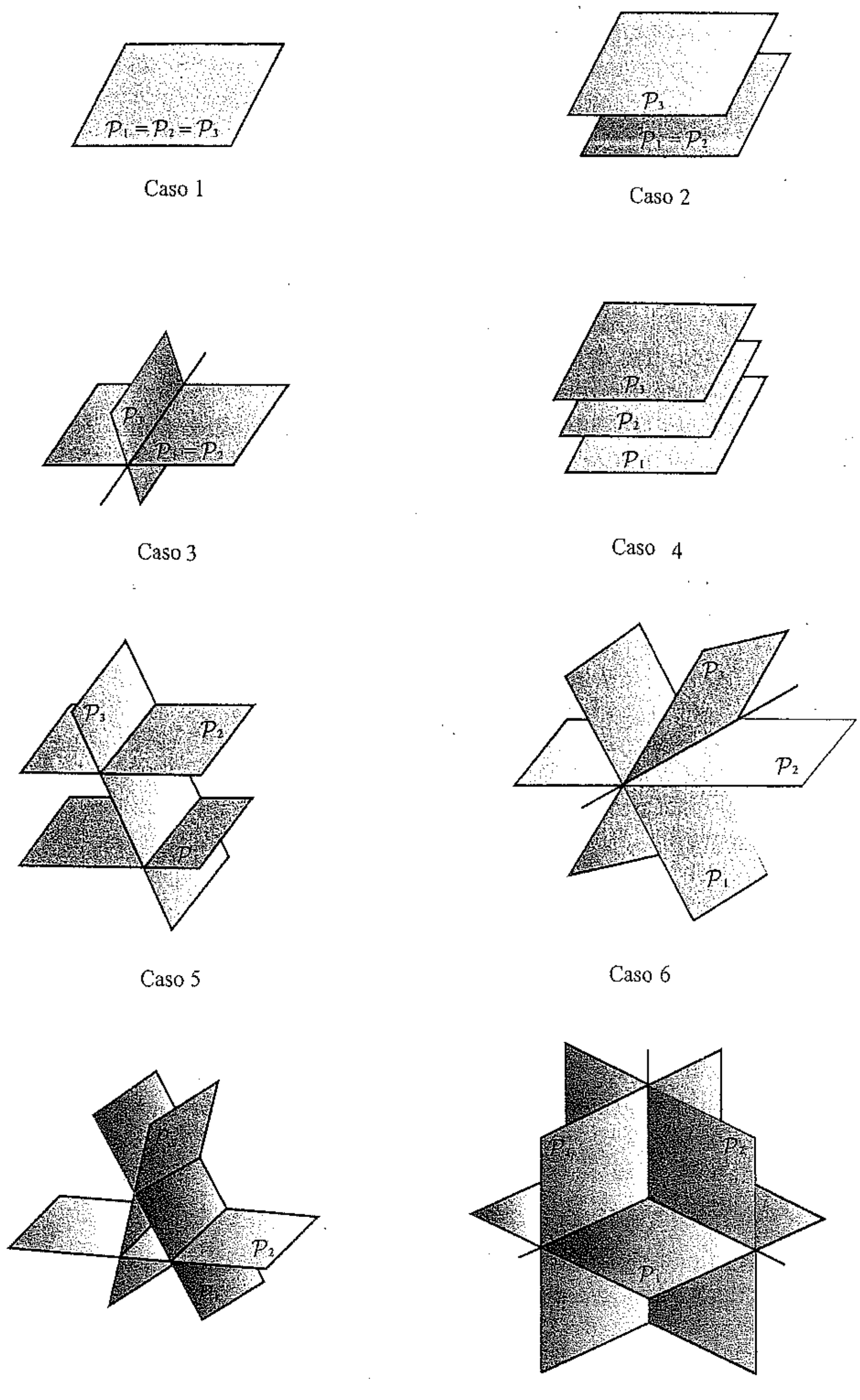
Caso 7. Los tres planos son distintos y no paralelos dos a dos; además, la recta intersección de cualesquiera dos de ellos es paralela al otro plano sin estar contenida en él.

En este caso $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 = \phi$.

Caso 8. Los tres planos son distintos y no paralelos dos a dos; además, la recta intersección de cualesquiera dos de ellos no es paralela al otro plano y por tanto lo corta en un punto.

En este caso $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3$ es un conjunto con un solo punto.

En la figura 12.2 se ilustran estos casos.



$\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_3$
Caso 1
$\mathcal{P}_3$
$\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2$
Caso 2
$\mathcal{P}_3$
$\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2$
Caso 3
$\mathcal{P}_3$
$\mathcal{P}_2$
$\mathcal{P}_1$
Caso 4
$\mathcal{P}_3$
$\mathcal{P}_2$
$\mathcal{P}_1$
Caso 5
$\mathcal{P}_3$
$\mathcal{P}_2$
$\mathcal{P}_1$
Caso 6
$\mathcal{P}_2$
Caso 7
$\mathcal{P}_3$
$\mathcal{P}_2$
$\mathcal{P}_1$
Caso 8

Figura 12.2.

Admitiendo lo anterior, podemos afirmar que:

> Para un sistema
>
> $$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= u_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= u_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= u_3 \end{aligned}$$
>
> con $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \neq O$, $\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \neq O$ y $\begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix} \neq O$
>
> se da uno y sólo uno de los casos siguientes:
>
> **Caso 1.** El conjunto solución es ϕ.
>
> **Caso 2.** El conjunto solución es un conjunto con un único punto.
>
> **Caso 3.** El conjunto solución es una recta.
>
> **Caso 4.** El conjunto solución es un plano.

Dejamos al lector determinar cómo es el conjunto solución de un sistema del tipo (12.8) si es nulo al menos uno de los vectores

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 12.7

Resolvamos el sistema

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ 2y - z &= 7 \\ 2z &= 6 \end{aligned}$$

De la tercera ecuación se observa que la única opción para z es $z = \frac{6}{2} = 3$; sustituyendo en la segunda ecuación z por 3 y despejando y se obtiene que y sólo puede tomar el valor $y = \frac{1}{2}(7+3) = 5$. Finalmente, sustituyendo en la primera ecuación z por 3 y y por 5 se obtiene, como único valor posible para x, $x = 3 - 5 - 3 = -5$. Por tanto, la única solución del sistema es $\begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ ■

El procedimiento empleado en el ejemplo anterior para resolver el sistema también se incluye en lo que hemos llamado **sustitución regresiva**.

Ejemplo 12.8

Consideremos el sistema

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 2 \\ 5y - 5z &= -3 \\ 0x + 0y + 0z &= 0 \end{aligned} \tag{12.9}$$

Puesto que el conjunto solución de la tercera ecuación es todo $\mathbb{R}^3$, entonces el conjunto solución del sistema (12.9) es el mismo del sistema

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 2 \\ 5y - 5z &= -3 \end{aligned} \tag{12.10}$$

Ahora, dada la forma de este sistema, él se puede resolver mediante sustitución regresiva. Esto se hizo en el ejemplo 12.6. Su conjunto solución (y por tanto el del sistema (12.9)) es la recta con ecuación

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5 \\ -3/5 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \blacksquare$$

12.2 Método de eliminación de Gauss

En los ejemplos 12.7 y 12.8 fue fácil resolver los sistemas, dada la forma simple de ellos. Por ejemplo, en el sistema del ejemplo 12.7, la incógnita x sólo aparece en la primera ecuación y la incógnita y sólo en las dos primeras.

Para resolver un sistema del tipo (12.8) que no tenga forma simple, es natural intentar transformarlo en otro sistema equivalente a él que si tenga una forma simple, como la de los sistemas de los ejemplos 12.7 y 12.8. Más adelante se precisará que significa tener una "forma simple". Con miras a transformar un sistema del tipo (12.8) en otro equivalente a él que tenga forma simple, podemos:

i) Intercambiar dos ecuaciones.
ii) Multiplicar ambos lados de una ecuación por un escalar no nulo.
iii) Sustituir una ecuación por la suma de ella con un múltiplo escalar de otra.

Estas manipulaciones de las ecuaciones de un sistema se llaman **operaciones elementales**. Para el lector ya debe ser claro que ninguna de estas operaciones altera el conjunto solución del sistema. Nótese que la operación del tipo *iii*) es la que permite eliminar incógnitas para simplificar el sistema.

En los tres ejemplos siguientes se ilustra lo anterior.

Ejemplo 12.9
Resuelva el sistema

$$\begin{aligned} 2x - \ y + \ \ z &= 4 \\ 2x + 2y + 3z &= 3 \\ 6x - 9y - 2z &= 17 \end{aligned} \tag{12.11}$$

Solución:

Nuestro primer propósito es eliminar la incógnita x en la segunda ecuación, lo cual se consigue sumando a dicha ecuación, la primera multiplicada por (-1). La nueva segunda ecuación es

$$3y + 2z = -1$$

Ahora eliminamos x en la tercera ecuación. Para ello sumamos a esa ecuación, la primera multiplicada por -3. El resultado es

$$-6y - 5z = 5$$

la cual es la nueva tercera ecuación. Así, el sistema (12.11) es equivalente al sistema

$$\begin{aligned} 2x - y + z &= 4 \\ 3y + 2z &= -1 \\ -6y - 5z &= 5 \end{aligned} \tag{12.12}$$

De este sistema conservamos las dos primeras ecuaciones y eliminamos la incógnita y en la tercera. Para ello sumamos a la tercera ecuación, la segunda multiplicada por 2. Se obtiene así el sistema

$$\begin{aligned} 2x - y + \ \ z &= \ \ 4 \\ 3y + 2z &= -1 \\ -z &= \ \ 3 \end{aligned} \tag{12.13}$$

el cual es equivalente al sistema (12.12) y por tanto al sistema (12.11). Se resuelve ahora el sistema (12.13) mediante sustitución regresiva, obteniéndose como única solución el vector $\begin{pmatrix} 13/3 \\ 5/3 \\ -3 \end{pmatrix}$, el cual es entonces la única solución del sistema inicialmente dado. ■

Ejemplo 12.10
Resuelva el sistema

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= \ \ 4 \\ x + 3y + 4z &= \ \ 5 \\ -x \qquad\ - z &= -2 \end{aligned} \tag{12.14}$$

Solución:
Conservamos la primera ecuación y empezamos por eliminar la incógnita x en las otras dos ecuaciones. Esto se consigue sumando a la segunda, la primera multiplicada por -1 (o equivalentemente, restando la primera ecuación de la segunda) y sumando a la tercera ecuación la primera. En esta primera etapa se obtiene el sistema

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 4 \\ y + \ z &= 1 \\ 2y + 2z &= 2 \end{aligned} \tag{12.15}$$

el cual es equivalente al sistema (12.14). De él conservamos las dos primeras ecuaciones y eliminamos la incógnita y en la tercera. Para ello sumamos a dicha tercera ecuación, la segunda multiplicada por -2. En este caso el sistema resultante es

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 4 \\ y + \ z &= 1 \\ 0z &= 0 \end{aligned} \tag{12.16}$$

el cual es equivalente al sistema

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 4 \\ y + \ z &= 1 \end{aligned} \tag{12.17}$$

pues la tercera ecuación en (12.16) (la cual es $0x + 0y + 0z = 0$) la satisface todo vector de $\mathbb{R}^3$. Este último sistema se resuelve mediante sustitución regresiva de la siguiente manera:

De la segunda ecuación, despejando y en términos de z, se obtiene

$$y = 1 - z$$

Ahora sustituimos en la primera ecuación y por $1 - z$ y despejamos x. Se obtiene

$$x = 4 - 2(1 - z) - 3z = 2 - z$$

Luego, las soluciones del sistema (12.17) (y por tanto del sistema (12.14)) son los vectores $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de la forma

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-z \\ 1-z \\ z \end{pmatrix} \tag{12.18}$$

o equivalentemente, de la forma

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{12.19}$$

Así que, el conjunto solución del sistema (12.14) es la recta que pasa por el punto $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y tiene a $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ como vector director. ■

Ejemplo 12.11
Resuelva el sistema

$$\begin{aligned} x - \ y + \ z &= 1 \\ 2x - 2y + 2z &= 2 \\ 3x - 3y + 3z &= 3 \end{aligned} \tag{12.20}$$

Solución:
Es evidente que las tres ecuaciones del sistema representan un mismo plano, así que el conjunto solución de este sistema es el plano con ecuación

$$x - y + z = 1 \tag{12.21}$$

Si se aplica al sistema (12.20) el método de eliminación, vemos que al eliminar x en las dos últimas ecuaciones se obtiene el sistema

$$\begin{aligned} x - \ y + \ z &= 1 \\ 0x + 0y + 0z &= 0 \\ 0x + 0y + 0z &= 0 \end{aligned}$$

cuyo conjunto solución es el de la primera ecuación en él.

Escribiendo la ecuación (12.21) en la forma

$$x = 1 + y - z$$

y considerando y y z como parámetros, vemos que el conjunto solución de (12.21), y por tanto del sistema (12.20), también puede escribirse como el conjunto de todos los vectores $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ de la forma

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+y-z \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

es decir, de la forma

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \blacksquare$$

En los ejemplos 12.9, 12.10 y 12.11 eliminamos incógnitas de una manera metódica y con un propósito claro; en realidad aplicamos el **método de eliminación de Gauss**. A continuación precisaremos en qué consiste este método y lo presentaremos en forma simplificada, omitiendo las incógnitas y los signos = en las ecuaciones. Necesitamos introducir antes algunas notaciones y definiciones.

En primer lugar, es claro que el sistema

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= u_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= u_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= u_3 \end{aligned} \tag{12.22}$$

puede expresarse en la forma equivalente

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

es decir, en la forma

$$AX = U \tag{12.23}$$

con

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

Nos referiremos a la matriz A como la **matriz de coeficientes,** al vector X como **vector de incógnitas**, al vector U como **vector de términos independientes** y al arreglo

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & u_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & u_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & u_3 \end{pmatrix} \tag{12.24}$$

como la **matriz aumentada** o **ampliada** del sistema (12.22). En lugar de (12.24) escribiremos

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & u_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & u_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & u_3 \end{array}\right) \quad \text{o} \quad \left(A \,\vdots\, U\right)$$

En general, un arreglo de números como el que aparece en (12.24) se dice una **matriz de 3 filas y 4 columnas** o más brevemente, una **matriz 3×4**.

Ejemplo 12.12

a) En el ejemplo 12.9, la matriz aumentada del sistema inicial (12.11) es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ 6 & -9 & -2 & 17 \end{array}\right)$$

mientras que la del sistema final (12.13) es

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & | & 4 \\ 0 & 3 & 2 & | & -1 \\ 0 & 0 & -1 & | & 3 \end{pmatrix} \tag{12.25}$$

b) En el ejemplo 12.10, la matriz aumentada del sistema inicial (12.14) es

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 4 \\ 1 & 3 & 4 & | & 5 \\ -1 & 0 & -1 & | & -2 \end{pmatrix}$$

mientras que la del sistema final (12.17) es

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 4 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \tag{12.26}$$

c) En el ejemplo 12.11, la matriz aumentada del sistema inicial (12.20) es

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 1 \\ 2 & -2 & 2 & | & 2 \\ 3 & -3 & 3 & | & 3 \end{pmatrix}$$

mientras que la del sistema final (12.21) es

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \quad \blacksquare \tag{12.27}$$

Obsérvese que en (12.25), (12.26) y (12.27) del ejemplo anterior, las matrices conformadas por las tres primeras columnas tienen una forma especial, tienen forma escalonada. En general, una matriz 3×3 se dice una **matriz escalonada** si cumple las siguientes condiciones en las que llamamos **pivote** al primer número distinto de cero de cada fila no nula:

- Primero están las filas no nulas (si las hay).
- Debajo de cada pivote, en la columna correspondiente a él , todos los números son cero.
- Cada pivote está a la izquierda del pivote de la siguiente fila hacia abajo, si ésta es no nula.

Un sistema cuya matriz de coeficientes sea una matriz escalonada se dirá un **sistema escalonado.**

Ya podemos precisar en qué consiste el método de eliminación de Gauss: En transformar un sistema dado, mediante operaciones elementales sobre sus ecuaciones, en un sistema equivalente escalonado. A continuación mostramos que tal transformación siempre es posible:

Partamos del sistema

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= u_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= u_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= u_3 \end{aligned} \tag{12.28}$$

y consideremos el caso en el cual al menos uno de los números a_1, a_2, a_3 es distinto de cero. Intercambiando ecuaciones si es necesario, podemos suponer que $a_1 \neq 0$. Los pasos a seguir en este caso son:

- Se mantiene la primera ecuación y se suma a la segunda ecuación, la primera multiplicada por $-\frac{a_2}{a_1}$; con ello se elimina la incógnita x en la segunda ecuación. Luego se suma a la tercera ecuación, la primera multiplicada por $-\frac{a_3}{a_1}$, con lo cual se elimina la incógnita x de la tercera ecuación.

Lo anterior nos lleva a un sistema equivalente de la forma

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= u_1 \\ b_2'y + c_2'z &= u_2' \\ b_3'y + c_3'z &= u_3' \end{aligned} \tag{12.29}$$

- Supongamos que $b_2' \neq 0$ o $b_3' \neq 0$. Podemos asumir (intercambiando las dos últimas ecuaciones si es necesario) que $b_2' \neq 0$. Sumando a la tercera ecuación en (12.29), la segunda multiplicada por $-\frac{b_3'}{b_2'}$, se elimina la incógnita y en la tercera ecuación en (12.29), obteniéndose un sistema equivalente al sistema (12.29) de la forma

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= u_1 \\ b_2'y + c_2'z &= u_2' \\ c_3''z &= u_3'' \end{aligned}$$

el cual es un sistema escalonado.

Si en el sistema (12.29) ocurre que $b_2' = b_3' = 0$, entonces (12.29) es de la forma

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= u_1 \\ c_2'z &= u_2' \\ c_3'z &= u_3' \end{aligned} \tag{12.30}$$

el cual ya es escalonado cuando $c_2' \neq 0$ y $c_3' = 0$ o también cuando $c_2' = 0$ y $c_3' = 0$. El sistema (12.30) no es escalonado cuando $c_2' = 0$ y $c_3' \neq 0$ o también cuando $c_2' \neq 0$ y $c_3' \neq 0$. En el primer caso, basta intercambiar sus dos últimas ecuaciones para obtener un sistema escalonado; en el segundo caso se suma a la tercera ecuación, la segunda multiplicada por $-\frac{c_3'}{c_2'}$, con lo cual se elimina la incógnita z en la tercera ecuación, obteniéndose un sistema escalonado. Se obtiene así, en ambos casos, un sistema escalonado equivalente al sistema (12.30) y por tanto al sistema (12.28).

Retornemos al sistema (12.28) y consideremos ahora el caso en el cual $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. En este caso se procede de manera análoga a lo antes descrito, solo que iniciando con b_1, b_2, b_3 en lugar de a_1, a_2, a_3 si al menos uno de los números b_1, b_2, b_3 es distinto de cero. Si ocurre que también $b_1 = b_2 = b_3 = 0$, pasamos a considerar los números c_1, c_2, c_3. Si al menos uno de estos números es distinto de cero, procedemos como en el caso en el cual

$b_1 \neq 0$ o $b_2 \neq 0$ o $b_3 \neq 0$. Finalmente, si también $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ entonces la matriz de coeficientes del sistema original es

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

la cual ya es una matriz escalonada ♦

Es claro que en el proceso de pasar de un sistema del tipo (12.28) a un sistema escalonado, las incógnitas x, y, z y los símbolos $=$ y $+$ no juegan ningún papel. Por tanto las incógnitas y los mencionados símbolos pueden omitirse durante el proceso, efectuando las operaciones elementales con las filas de la matriz aumentada del sistema, en lugar de efectuarlas con las ecuaciones. A las operaciones elementales con ecuaciones, corresponden las siguientes operaciones elementales con filas:

- Intercambiar dos filas
- Multiplicar una fila por un escalar no nulo
- Sustituir una fila por la suma de ella con un múltiplo escalar de otra fila.

Ejemplo 12.13
Consideremos el sistema

$$\begin{aligned} 2x - y + z &= 4 \\ 2x + 2y + 3z &= 3 \\ 6x - 9y - 2z &= 17 \end{aligned}$$

del ejemplo 12.9. Para transformarlo en un sistema escalonado equivalente, trabajaremos con su matriz aumentada, la cual es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ 6 & -9 & -2 & 17 \end{array}\right)$$

Sumando a la segunda fila la primera multiplicada por -1, y sumando a la tercera fila, la primera multiplicada por -3, se obtiene la matriz

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & -6 & -5 & 5 \end{array}\right)$$

Ahora conservamos las dos primeras filas de la matriz anterior y sumamos a la tercera fila, la segunda multiplicada por 2. Se obtiene así la matriz

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

en la cual las tres primeras columnas conforman una matriz escalonada.

El sistema escalonado correspondiente a esta matriz es

$$\begin{aligned} 2x - y + z &= 4 \\ 3y + 2z &= -1 \\ -z &= 3 \end{aligned}$$

el cual se resuelve por sustitución regresiva, obteniéndose que el conjunto solución consta únicamente del vector $\begin{pmatrix} 13/3 \\ 5/3 \\ -3 \end{pmatrix}$ ■

12.3 Otros resultados básicos

Ahora estableceremos algunos resultados generales acerca de sistemas del tipo (12.8), resultados que son completamente similares a los ya establecidos para sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas. No daremos las pruebas de estos resultados pues ellas son prácticamente las ya presentadas en el capítulo 5 para sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas.

En en primer lugar tenemos:

> El sistema (12.23), $AX = U$, tiene solamente una solución si y sólo si la matriz A es invertible. Cuando la matriz A es inverible, la única solución del sistema es $X = A^{-1}U$.

En cuanto al sistema homogéneo $AX = O$, se tiene lo siguiente:

> *a*) El sistema homogéneo $AX = O$ tiene únicamente la solución trivial si y sólo si la matriz A es invertible.
> *b*) Si A no es invertible y $A \neq O$, el conjunto solución del sistema $AX = O$ es una línea recta que pasa por el origen o es un plano que pasa por el origen.
> *c*) Si $A = O$, el conjunto solución del sistema $AX = O$ es todo $\mathbb{R}^3$.

En el siguiente resultado se relaciona el conjunto solución de un sistema no homogéneo soluble $AX = U$, con el conjunto solución del sistema homogéneo asociado $AX = O$.

> Si X_0 es una solución particular del sistema no homogéneo $AX = U$ y $\mathcal{S}_H$ es el conjunto solución del sistema homogéneo asociado $AX = O$, entonces el conjunto solución del sistema $AX = U$ es el conjunto
> $$\mathcal{S} = \left\{X \in \mathbb{R}^3 \,/\, X = X_0 + X_h,\ X_h \in \mathcal{S}_H\right\}$$
> el cual es la imagen del conjunto $\mathcal{S}_H$ bajo la traslación T_{X_0}, es decir,
> $$\mathcal{S} = T_{X_0}(\mathcal{S}_H)\,.$$

En la figura 12.3 se ilustra lo expresado en este último resultado, en los casos en que $\mathcal{S}_H$ es una recta o un plano.

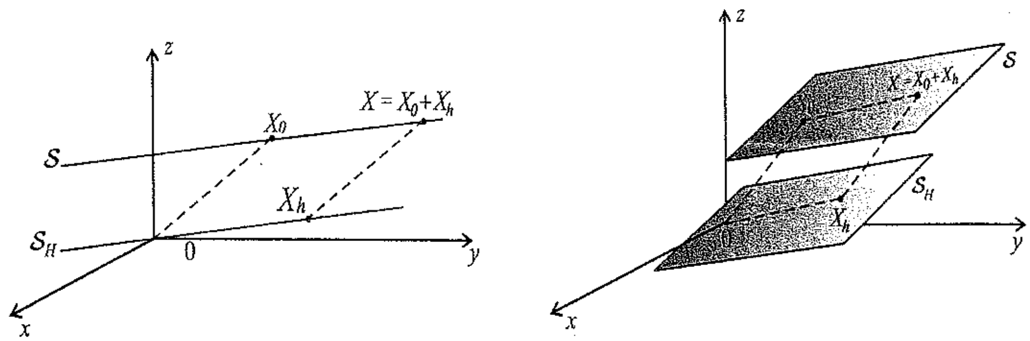


Figura 12.3.

Tenemos por último, lo siguiente:

> El sistema $AX = U$ es soluble si y sólo si el vector U es C.L. de las columnas de la matriz A.

Los ejemplos que siguen a continuación hacen referencia a los resultados anteriores.

Ejemplo 12.14
Consideremos el sistema del ejemplo 12.9,

$$AX = U$$

en el cual

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 6 & -9 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad U = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 17 \end{pmatrix}$$

El lector puede comprobar que la matriz A es invertible y que

$$A^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 23 & -11 & -5 \\ 22 & -10 & -4 \\ -30 & 12 & 6 \end{pmatrix}$$

Luego, el sistema en consideración tiene como única solución el vector

$$X = A^{-1}U = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 23 & -11 & -5 \\ 22 & -10 & -4 \\ -30 & 12 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 17 \end{pmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -26 \\ -10 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13/3 \\ 5/3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

la cual ya habíamos obtenido empleando el método de eliminación de Gauss. ■

Ejemplo 12.15
Consideremos el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \tag{12.31}$$

Sabemos que este sistema es soluble si y sólo si el vector $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ es C.L. de las columnas

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{12.32}$$

Ahora, como la segunda y la tercera columnas en (12.32) son múltiplos escalares de la primera entonces las C.L. de las tres columnas en (12.32) son, en realidad, los múltiplos escalares del vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, es decir, son los vectores de la recta $\mathcal{L}$ generada por dicho vector.

Por tanto, el sistema (12.31) es soluble si y sólo si el vector $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ es múltiplo escalar del vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, es decir, si y sólo si $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \in \mathcal{L}$.

Por ejemplo, si $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/4 \\ -5/4 \\ -5/4 \end{pmatrix}$ entonces el sistema (12.31) es soluble ya que este vector es múltiplo escalar de $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Por otra parte, si $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$ entonces el sistema (12.31) es no soluble pues este vector no es múltiplo escalar de $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Es de resaltar que en este caso los vectores $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ para los cuales el sistema (12.31) es soluble conforman una recta que pasa por el origen, la cual es la recta $\mathcal{L}$. ■

Ejemplo 12.16
Consideremos el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -5 \\ 2 & 3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \tag{12.33}$$

y denotemos por A su matriz de coeficientes. Este sistema es soluble si y sólo si el vector $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ es C.L. de las columnas de la matriz A, es decir, de los vectores

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix}. \tag{12.34}$$

El lector puede comprobar que el determinante de la matriz A es cero y por tanto los vectores en (12.34) son L.D. Ahora, se observa que los dos primeros vectores en (12.34) son L.I. luego debe tenerse que la tercera columna en (12.34) es C.L. de la dos primeras. Así las cosas, las C.L. de las tres columnas en (12.34) son, en realidad, las C.L. de las dos primeras, es decir, son los vectores del plano $\mathcal{P}$ generado por los vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Se deja al lector comprobar que una ecuación para dicho plano $\mathcal{P}$ es

$$5x + 3y - z = 0 \tag{12.35}$$

En resumen, el sistema (12.33) es soluble si y sólo si el vector $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ es C.L. de los vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, es decir, si y sólo si $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \in \mathcal{P}$.

Por ejemplo, si $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$ entonces el sistema (12.33) es soluble puesto que este vector pertenece al plano $\mathcal{P}$ ya que él satisface la ecuación (12.35). Por otra parte, si $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ entonces el sistema no es soluble ya que este vector no pertenece al plano $\mathcal{P}$ pues no satisface la ecuación (12.35).

Es de resaltar que en este caso los vectores $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ para los cuales el sistema (12.33) es soluble, conforman un plano que pasa por el origen, el cual es el plano $\mathcal{P}$. ∎

12.4 Método de Gauss-Jordan

Finalizaremos este capítulo refiriéndonos al **método de eliminación de Gauss-Jordan** para resolver sistemas de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas. En este método (el cual es un refinamiento del método de eliminación de Gauss) el proceso de eliminación se lleva hasta el punto en el cual la matriz de coeficientes del sistema, además de ser escalonada, tiene todos los pivotes iguales a uno y también ceros encima de cada pivote en la columna correspondiente a éste. Una matriz con estas características se dirá una **matriz escalonada reducida.**

Ejemplo 12.17
Consideremos el sistema

$$\begin{aligned} 2x - y + z &= 4 \\ 2x + 2y + 3z &= 3 \\ 6x - 9y - 2z &= 17 \end{aligned}$$

de los ejemplos 12.9 y 12.13. En el ejemplo 12.13 finalizamos el proceso de eliminación cuando obtuvimos la matriz

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

Continuemos ahora con el proceso de eliminación hasta obtener una matriz escalonada reducida.

Para tener 1 en el lugar de los pivotes 2, 3 y -1, multiplicamos la primera fila por $\frac{1}{2}$, la segunda fila por $\frac{1}{3}$ y la tercera fila por -1. Se obtiene así la matriz

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & 1/2 & 2 \\ 0 & 1 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

Ahora sumamos a la primera fila, la segunda multiplicada por $\frac{1}{2}$, con lo cual obtenemos la matriz

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5/6 & 11/6 \\ 0 & 1 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

Por último, sumamos a la segunda fila, la tercera multiplicada por $-\frac{2}{3}$ y a la primera fila, la tercera multiplicada por $-\frac{5}{6}$. Se obtiene así la matriz

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 13/3 \\ 0 & 1 & 0 & 5/3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

en la cual las tres primeras columnas conforman una matriz escalonada reducida. El sistema correspondiente a la matriz aumentada anterior es:

$$\begin{array}{rcl} x & = & 13/3 \\ y & = & 5/3 \\ z & = & -3 \end{array}$$

Es claro que la única solución del sistema es el vector $\begin{pmatrix} 13/3 \\ 5/3 \\ -3 \end{pmatrix}$ ■

Obsérvese en el ejemplo anterior que:

- La matriz que se obtuvo al aplicar el método de eliminación de Gauss-Jordan es

$$\left(I_3 \ \vdots \ U^*\right)$$

donde U^* es la única solución del sistema.

- Como se obtuvo solución única, la matriz de coeficientes del sistema inicial (y también la de cada uno de los sistemas en el proceso de eliminación) es invertible.

En general, se tiene lo siguiente:

Consideremos un sistema $AX = U$, donde A es una matriz 3×3 y U un vector de $\mathbb{R}^3$.

a) Si al aplicar el método de eliminación de Gauss-Jordan a la matriz $\left(A \ \vdots \ U\right)$ se obtiene la matriz $\left(I_3 \ \vdots \ U^*\right)$ entonces U^* es la única solución del sistema $AX = U$ y además la matriz A es invertible.

b) Si A es invertible entonces al aplicar el método de eliminación de Gauss-Jordan a la matriz $\left(A \ \vdots \ U\right)$ se obtiene siempre una matriz de la forma $\left(I_3 \ \vdots \ U^*\right)$ donde U^* es la única solución del sistema $AX = U$.

Sólo es necesario probar lo afirmado en *b*). Para probarlo digamos que

$$\left(A \ \vdots \ U\right) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & | & u_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & | & u_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & | & u_3 \end{pmatrix} \tag{12.36}$$

y supongamos que A es invertible.

Puesto que A es invertible, al menos uno de los números a_1, a_2, a_3 es no nulo. Intercambiando filas si es necesario, podemos asumir que $a_1 \neq 0$.

Es claro que siendo $a_1 \neq 0$, se pueden conseguir ceros debajo de a_1 en la primera columna, sumando a la segunda y a la tercera fila de la matriz en (12.36), múltiplos apropiados de la primera fila. Si después de obtener dichos ceros, dividimos por a_1 la primera fila, obtendremos una matriz aumentada $\left(A' \ \vdots \ U'\right)$ de la forma

$$\left(A' \ \vdots \ U'\right) = \begin{pmatrix} 1 & b'_1 & c'_1 & | & u'_1 \\ 0 & b'_2 & c'_2 & | & u'_2 \\ 0 & b'_3 & c'_3 & | & u'_3 \end{pmatrix} \tag{12.37}$$

Obsérvese que la matriz A' es invertible (como lo es A) pues el sistema $A'X = U'$ tiene solución única ya que este sistema es equivalente al sistema $AX = U$.

Afirmamos que en A' al menos uno de los números b'_2, b'_3 es no nulo (si fuera $b'_2 = b'_3 = 0$, entonces la segunda columna de A' será múltiplo escalar de la primera columna; pero ello no puede ocurrir pues las columnas de A' son L.I. ya que A' es invertible). Intercambiando las filas segunda y tercera en A', si fuese necesario, podemos suponer que $b'_2 \neq 0$. Siendo $b'_2 \neq 0$, podemos conseguir ceros en los puestos correspondientes a b'_1 y b'_3 sumando a la primera y tercera filas de $\left(A' \ \vdots \ U'\right)$, múltiplos apropiados de la segunda fila. Si luego dividimos la segunda fila por b'_2 se obtiene una matriz aumentada $\left(A'' \ \vdots \ U''\right)$ de la forma

$$\left(A'' \ \vdots \ U''\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & c''_1 & | & u''_1 \\ 0 & 1 & c''_2 & | & u''_2 \\ 0 & 0 & c''_3 & | & u''_3 \end{pmatrix} \tag{12.38}$$

La matriz A'' en (12.38) es invertible; para ver esto basta dar el mismo argumento que se dio para mostrar la invertibilidad de la matriz A'. Afirmamos que en dicha matriz A'', $c_3'' \neq 0$ (Si fuese $c_3'' = 0$, la tercera columna de A'' sería C.L. de las dos primeras columnas en A'', pero ello no ocurre ya que las columnas de A'' son L.I. por ser A'' una matriz invertible). Siendo $c_3'' \neq 0$, podemos conseguir ceros en los puestos correspondientes a c_1'' y c_2'', sumando a la primera y segunda filas de $\left(A'' \;\vdots\; U''\right)$ múltiplos apropiados de la tercera fila. Si luego de ello dividimos por c_3'' la tercera fila obtendremos, finalmente, una matriz de la forma

$$\left(I_3 \;\vdots\; U^*\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & u_1^* \\ 0 & 1 & 0 & u_2^* \\ 0 & 0 & 1 & u_3^* \end{array}\right) \tag{12.39}$$

Es claro que U^* es la única solución del sistema $AX = U$. Hemos probado así lo afirmado en *b*). ♦

El método de eliminación de Gauss-Jordan proporciona otra manera de hallar la inversa de cualquier matriz 3×3 que sea invertible, como se explica a continuación:

Sea A una matriz 3×3 invertible. Sabemos que la primera, segunda y tercera columnas de A^{-1} son, respectivamente, los vectores

$$A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

los cuales son, respectivamente, las únicas soluciones de los sistemas

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{12.40}$$

Así que resolviendo estos sistemas encontraremos las columnas de A^{-1} y por tanto, la matriz A^{-1}.

Ya sabemos que si aplicamos el método de Gauss-Jordan a las matrices aumentadas

$$\left(\begin{array}{c|c} & 1 \\ A & 0 \\ & 0 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{c|c} & 0 \\ A & 1 \\ & 0 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{c|c} & 0 \\ A & 0 \\ & 1 \end{array}\right) \tag{12.41}$$

de los sistemas en (12.40), obtendremos matrices

$$\left(I_3 \;\vdots\; U_1^*\right), \quad \left(I_3 \;\vdots\; U_2^*\right), \quad \left(I_3 \;\vdots\; U_3^*\right) \tag{12.42}$$

siendo U_1^*, U_2^*, U_3^* la primera, segunda y tercera columna de A^{-1}, respectivamente. Así,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} U_1^* & U_2^* & U_3^* \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

Ahora, es claro que el paso de (12.41) a (12.42) puede hacerse simultáneamente, partiendo del arreglo (matriz)

$$\left(\begin{array}{c|ccc} & 1 & 0 & 0 \\ A & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

es decir, partiendo de $\begin{pmatrix} A & \vdots & I_3 \end{pmatrix}$ y realizando operaciones elementales sobre sus filas hasta obtener una matriz de la forma

$$\begin{pmatrix} I_3 & | & U_1^* & U_2^* & U_3^* \\ & | & | & | & | \end{pmatrix}$$

Al terminar tendremos que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} U_1^* & U_2^* & U_3^* \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

En resumen, el procedimiento para calcular A^{-1} usando operaciones elementales sobre las filas es:

- Se forma la matriz $\begin{pmatrix} A & \vdots & I_3 \end{pmatrix}$
- Se realizan operaciones elementales sobre las filas de la matriz $\begin{pmatrix} A & \vdots & I_3 \end{pmatrix}$ hasta obtener $\begin{pmatrix} I_3 & \vdots & B \end{pmatrix}$.
- La matriz B es A^{-1}

Ejemplo 12.18

Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

la cual es invertible, pues su determinante es distinto de cero. Hallemos ahora su inversa empleando el método de Gauss-Jordan.

Partimos de la matriz

$$\begin{pmatrix} A & \vdots & I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para facilitar el proceso de eliminación intercambiamos la primera y segunda filas, con lo cual obtenemos la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sumando a la segunda fila la primera multiplicada por -2, y a la tercera fila la primera multiplicada por -4, se obtiene la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & | & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & | & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora sumamos a la tercera fila, la segunda multiplicada por $-\frac{7}{3}$, y a la primera la segunda multiplicada por $\frac{1}{3}$, obteniéndose la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & | & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & | & -7/3 & 2/3 & 1 \end{pmatrix}$$

Sumando a la segunda fila la tercera multiplicada por $\frac{3}{5}$, y a la primera la tercera multiplicada por $\frac{1}{5}$ obtenemos la siguiente matriz

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2/15 & 7/15 & 1/5 \\ 0 & -3 & 0 & -2/5 & -8/5 & 3/5 \\ 0 & 0 & -5 & -7/3 & 2/3 & 1 \end{array}\right)$$

Por último, al multiplicar la segunda fila por $-\frac{1}{3}$ y la tercera por $-\frac{1}{5}$ se obtiene

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2/15 & 7/15 & 1/5 \\ 0 & 1 & 0 & 2/15 & 8/15 & -1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 7/15 & -2/15 & -1/5 \end{array}\right)$$

Por tanto,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2/15 & 7/15 & 1/5 \\ 2/15 & 8/15 & -1/5 \\ 7/15 & -2/15 & -1/5 \end{pmatrix} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} -2 & 7 & 3 \\ 2 & 8 & -3 \\ 7 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

El lector puede comprobar que la matriz anterior es efectivamente la inversa de A, mostrando que

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix} \left[\frac{1}{15}\begin{pmatrix} -2 & 7 & 3 \\ 2 & 8 & -3 \\ 7 & -2 & -3 \end{pmatrix}\right] = I_3 \quad \blacksquare$$

12.5 Ejercicios

Sección 12.1

1. Hallar el conjunto solución de cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales e interpretarlo geométricamente.

   a) $2x + 3y - 3z = 2$

   b) $\begin{aligned} 5x + 2y - 6z &= -1 \\ x - y + z &= -2 \end{aligned}$

   c) $\begin{aligned} 2x + y - 3z &= 3 \\ -x - \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}z &= 2 \end{aligned}$

   d) $\begin{aligned} x + 2z &= 0 \\ x - 2y - z &= 1 \end{aligned}$

   e) $\begin{aligned} x - y + z &= 0 \\ x + y + z &= 0 \end{aligned}$

   f) $\begin{aligned} 3x - 2y + 2\sqrt{3}z &= 1 \\ \sqrt{3}x - \frac{2}{3}\sqrt{3}y + 2z &= \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$

Sección 12.2

2. Para cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales,

   a) Escribirlo en la forma matricial $AX = U$

   b) Hallar, utilizando el método de eliminación de Gauss, el conjunto solución del sistema e interpretarlo geométricamente.

$$i)\quad \begin{aligned} x - \tfrac{5}{2}y + 2z &= -3/2 \\ x - y + z &= 5 \\ x - 4y + 5z &= 1 \end{aligned} \qquad ii)\quad \begin{aligned} 2x + 3y - 4z &= 1 \\ 4x + 5y - 9z &= 4 \\ -2x - y + 4z &= -5 \end{aligned}$$

$$iii)\quad \begin{aligned} x + 2y - z &= 5 \\ 2x + 3y + z &= -2 \\ -7x - 9y - 8z &= 25 \end{aligned} \qquad iv)\quad \begin{aligned} 3x + y - z &= 0 \\ 2x \quad + z &= 0 \\ x - y + 3z &= 0 \end{aligned}$$

$$v)\quad \begin{aligned} x + 2y - 5z &= 2 \\ 3x \quad + 4z &= -1 \\ 2x - 2y + 9z &= -2 \end{aligned} \qquad vi)\quad \begin{aligned} x - 5y + z &= -4 \\ -2x + 10y - 5z &= 2 \\ 2x - 10y + 3z &= -6 \end{aligned}$$

3. Hallar la intersección de los planos $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ y $\mathcal{P}_3$ descritos en cada literal, planteando y resolviendo un sistema apropiado de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas.

   a) $\mathcal{P}_1 : x - y + z + 5 = 0$, $\mathcal{P}_2 : 3x + y - 5z - 10 = 0$ y $\mathcal{P}_3 : 7x + 5y - 17z = 40$

   b) $\mathcal{P}_1 : x + y - 8z = -7$, $\mathcal{P}_2$ es el plano que pasa por el punto $\begin{pmatrix} -7/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y tiene vector normal $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix}$ y $\mathcal{P}_3$ es el plano que pasa por el origen y es perpendicular al recta $\dfrac{x}{3} = y = -z$.

   c) $\mathcal{P}_1 : 2x - y + 5z = 0$, $\mathcal{P}_2$ es el plano que pasa por $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ y tiene vector normal $\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -10 \end{pmatrix}$ y $\mathcal{P}_3$ es el plano que contiene las rectas $\mathcal{L}_1 : x = y = z$ y $\mathcal{L}_2 : \dfrac{x}{2} = -y = \dfrac{z}{2}$.

4. Resolver el problema planteado en cada uno de los siguientes literales, empleando sistemas de ecuaciones lineales.

   a) Hallar una ecuación para la parábola que pasa por los puntos $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix}$ y es tal que su eje focal es paralelo al eje y.

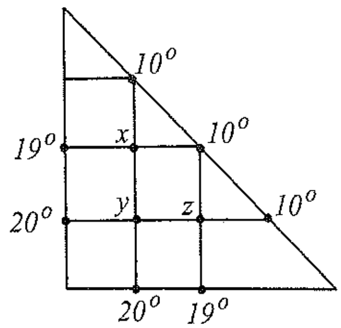
   b) Hallar una ecuación para el plano que pasa por el origen y por los puntos $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $Q = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

   c) Encontrar el polinomio cúbico tal que su gráfica pasa por los puntos $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ y $R = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}$.

   d) Calcular los números a, b y c tales que los polinomios $(a+3)\,x^2 + (2a - 2c + 10)\,x + 6c$ y $-2bx^2 - 3bx + (a - 4b + 9)$ sean iguales.

5. Calcular las temperaturas x, y y z de los puntos correspondientes de la placa metálica triangular que se muestra en la figura siguiente, sabiendo que la temperatura en cada

uno de dichos puntos es el promedio de las temperaturas de los cuatro puntos más cercanos a él entre los señalados en la figura.



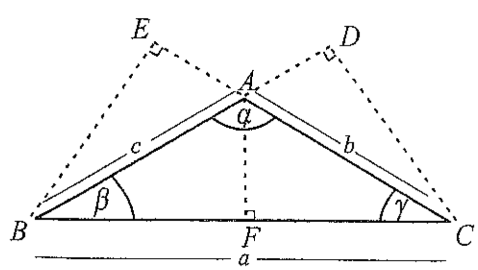
6. Una empresa editorial produce tres clases de libros: Con pasta rústica, con pasta dura y con pasta de lujo. Para los de pasta rústica la empresa gasta 5 dólares en papel, 2 dólares en ilustraciones y 3 dólares en pastas. Para los de pasta dura los gastos son de 10, 4 y 8 dólares en papel, ilustraciones y pastas respectivamente. Para los de pasta de lujo, se gastan 20, 12 y 24 dólares para el papel, ilustraciones y pastas respectivamente. Si el presupuesto en dólares de la empresa es de 2350 para papel, 1100 para ilustraciones y 2000 para pastas. ¿Cuántos libros de cada clase se pueden producir con este presupuesto?

7. Una nutricionista está planeando una dieta que proporcione ciertas cantidades de vitamina C, calcio y magnesio, y que utilice los comestibles I, II y III. La siguiente tabla muestra el número de miligramos de cada nutriente que aporta una unidad de cada tipo de comestible.

	Comestible I	Comestible II	Comestible III
Vitamina C	10	20	20
Calcio	50	40	10
Magnesio	30	10	40

Suponiendo que el paciente requiere diariamente de un total de 100 mg de vitamina C, 290 mg de calcio y 180 mg de magnesio, determinar el número de unidades diarias de cada comestible que la nutricionista debe sugerir para que la dieta contenga los nutrientes requeridos.

8. A partir de la siguiente figura,



mostrar que los cosenos de los ángulos α, β y γ, y los lados a, b y c del triángulo

ABC, se relacionan mediante las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} c\cos\alpha + a\cos\gamma &= b \\ b\cos\alpha + a\cos\beta &= c \\ c\cos\beta + b\cos\gamma &= a \end{aligned}$$

9. *a*) Para el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} 2x + 3y - z &= a \\ x - y + 3z &= b \\ 3x + 7y - 5z &= c \end{aligned}$$

encontrar una condición necesaria y suficiente sobre a, b y c de tal forma que el sistema sea consistente.

b) Para el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} 2x - y + 3z &= a \\ 3x + y - 5z &= b \\ -5x - 5y + 21z &= c \end{aligned}$$

mostrar que el sistema es inconsistente si y sólo si $c \neq 2a - 3b$

c) Considerar el sistema

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 5z &= 0 \\ -x + 7y - z &= 0 \\ 4x - 11y + kz &= 0 \end{aligned}$$

¿Para cuál valor de k este sistema tiene soluciones no triviales? Cuál es el conjunto solución del sistema obtenido para ese valor de k?

Sección 12.3

10. Sea A una matriz de orden 3 y U un vector no nulo de $\mathbb{R}^3$. Para cada uno de los siguientes literales, hallar el conjunto solución S del sistema $AX = U$ y expresarlo como una traslación del conjunto solución S_H del sistema homogéneo asociado $AX = O$, sabiendo que X_0 es una solución particular del sistema $AX = U$.

a) $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\quad S_H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \Big/ 2x - 3y + z = 0 \right\}$

b) $X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\quad S_H$ es la recta generada por el vector $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$

c) $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\quad S_H = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Sección 12.4

11. Para cada uno de los sistemas dados,

a) Escribirlo en la forma matricial $AX = U$.

b) Hallar, utilizando el método de eliminación de Gauss-Jordan, el conjunto solución del sistema.

i) $\begin{aligned} 2x+y+z &= 8 \\ 3x-2y-z &= 1 \\ 4x-7y+3z &= 10 \end{aligned}$ *ii*) $\begin{aligned} x+y+z &= 0 \\ -2x+5y+2z &= 0 \\ -7x+7y+z &= 0 \end{aligned}$

iii) $\begin{aligned} -x+y-z &= 2 \\ x+y+z &= -1 \\ x-y-z &= 2 \end{aligned}$ *iv*) $\begin{aligned} -3x-6y+z &= 0 \\ 2x+5y+\tfrac{1}{3}z &= 2 \\ x+4y+\tfrac{5}{3}z &= 1 \end{aligned}$

12. Para cada numeral,

a) Determinar si la matriz A es invertible y, en caso afirmativo, hallar la matriz A^{-1} mediante el método de Gauss-Jordan.

b) Si A es invertible resolver el sistema $AX=U$ utilizando A^{-1}.

i) $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $U=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

ii) $A=\begin{pmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$, $U=\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

iii) $A=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 & 1/2 \end{pmatrix}$, $U=\begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/6 \\ 5/6 \end{pmatrix}$

iv) $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $U=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

v) $A=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $U=\begin{pmatrix} -\operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta \\ -2 \end{pmatrix}$

13

Determinantes de orden 3

13.1 Definición y algunos resultados básicos

Consideremos una matriz de orden 3

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

o bien la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ cuya matriz es A. Se llama **determinante de A** o también **determinante de T** al escalar

$$a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

Lo denotaremos de cualquiera de las formas siguientes:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \det(A) \quad \text{o} \quad \det(T)$$

Así que

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \tag{13.1}$$

Nos referiremos a los determinantes de matrices 3×3 también como **determinantes de orden 3**. Observe que la expresión (13.1) es la que empleamos para introducir los determinantes de orden 3 en el capítulo 9 y la que hemos usado a lo largo de los capítulos 10, 12 y 13.

En la expresión (13.1) cada número a_i $(i = 1, 2, 3)$ aparece acompañado de un determinante de orden 2 y está precedido por el signo $+$ o por el signo $-$; dicho determinante es el de la matriz 2×2 que resulta de omitir en la matriz A la fila y la columna que contienen a a_i; en cuanto al signo, éste se puede expresar en términos de la posición que ocupa a_i: dicho signo es $(-1)^{1+i}$, donde el 1 en el exponente es por la fila (la fila 1) e i es por la columna (la columna i) en las que se encuentra a_i. De manera que la igualdad (13.1) puede escribirse como

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + a_2 (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \tag{13.2}$$

El escalar que acompaña a a_i $(i = 1, 2, 3)$ en el lado derecho de la igualdad anterior se llama **cofactor de a_i**; dicho lado derecho se conoce como **desarrollo del determinante mediante cofactores de la primera fila.**

Cuando en el lado derecho de la igualdad (13.1) se desarrollan los determinantes de orden 2 y luego se realizan los productos por a_1, por a_2 y por a_3, se obtiene como resultado

$$a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 \tag{13.3}$$

Es de señalar que fue esta expresión la que dio origen inicialmente al concepto de determinante de orden 3; ella apareció de manera natural, como lo veremos más adelante, resolviendo sistemas de ecuaciones lineales de tres ecuaciones con tres incógnitas. Es claro que de la expresión (13.3) se puede obtener el lado derecho de (13.1), simplemente factorizando en ella los escalares a_1, a_2, a_3 de la primera fila de la matriz A. Ahora, así como de (13.3) se puede obtener el lado derecho de (13.1), es decir, el lado derecho de (13.2), factorizando los elementos de la primera fila, también de (13.3) se puede obtener otros desarrollos para el determinante de A, similares al lado derecho en (13.2), factorizando los elementos de cualquiera de las otras filas de A o también factorizando los elementos de cualquiera de las columnas. Por ejemplo, el lector puede comprobar sin ninguna dificultad que factorizando en (13.3) los elementos a_3, b_3, c_3 de la tercera columna de A se obtiene

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_3\,(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} + b_3\,(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} + c_3\,(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

siendo el lado derecho de esta expresión **el desarrollo del determinante de A mediante cofactores de la tercera columna.**

De manera que:

> Para cualquier matriz A de orden 3, hay seis maneras de calcular el determinante de A mediante el desarrollo por cofactores, tres correspondiendo a las filas y tres correspondiendo a las columnas.

Ejemplo 13.1
Calcular el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Solución:

Para el cálculo del determinante de A emplearemos su desarrollo mediante cofactores de la tercera columna:

$$\begin{aligned} \det(A) &= 4\,(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 0\,(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 0\,(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 4\,(-4-1) = -20 \end{aligned}$$

Observe que como la tercera columna de A tiene dos componentes nulas, el desarrollo del determinante de A mediante cofactores de esa columna es más económico operacionalmente que el desarrollo del determinante mediante cofactores de cualquier otra columna o de cualquier otra fila de A, ya que al usar la tercera columna no se hace necesario calcular los cofactores de las dos componentes nulas de esa columna. ■

El hecho de que el determinante de una matriz 3×3 se pueda calcular empleando cualquiera de sus filas o cualquiera de sus columnas, sugiere que el determinante de cualquier matriz 3×3 debe ser igual al de su traspuesta. En efecto, al igual que para determinantes de orden 2, se tiene que:

> Para cualquier matriz A de orden 3,
> $\det\left(A^T\right) = \det(A)$

Para probar lo anterior, sea A una matriz 3×3 como al inicio de este capítulo. Entonces

$$\det\left(A^T\right) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Empleando el desarrollo de $\det\left(A^T\right)$ mediante cofactores de la primera columna de A^T, tenemos que

$$\det\left(A^T\right) = a_1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_2(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

Ahora, dado que los determinantes de orden 2 tiene la propiedad que estamos probando para los de orden 3, se tiene que

$$\det\left(A^T\right) = a_1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + a_2(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

Pero, como se puede observar, el lado derecho de la igualdad anterior es precisamente el desarrollo de $\det(A)$ mediante cofactores de la primera fila de A. Luego, $\det\left(A^T\right) = \det(A)$. ♦

A continuación listaremos los resultados más importantes en los que apareció involucrando el concepto de determinante de una matriz 3×3, luego de que este concepto se introdujo en el capítulo 9.

Sean $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ y $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal cuya matriz es A.

1. $\det(A) = U \cdot (V \times Z)$
   donde
   $$U = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad Z = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

2. A es invertible (T es invertible) si y sólo si $\det(A) \neq 0$ $(\det(T) \neq 0)$.

3. Si $\det(A) \neq 0$,

$$m\left(T^{-1}\right) = A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} V \times Z & Z \times U & U \times V \\ | & | & | \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

donde U, V y Z son como en 1.

4. Las columnas de la matriz A son L.I. si y sólo si $\det(A) \neq 0$.

5. Cualquiera sea el vector $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, el sistema $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ tiene solución única si y sólo si $\det(A) \neq 0$.

Ahora, dado que $\det(A) = \det\left(A^T\right)$ y puesto que las filas de A son las columnas de A^T, el resultado 4. conduce al siguiente resultado:

$$\boxed{\text{Las filas de } A \text{ son L.I. si y sólo si } \det(A) \neq 0}$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \text{Las filas de } A \text{ son L.I.} &\iff \text{Las columnas de } A^T \text{ son L.I.} \\ &\iff \det\left(A^T\right) \neq 0 \\ &\iff \det(A) \neq 0 \quad \blacklozenge \end{aligned}$$

Volvamos a la expresión (13.3). Quizá el lector se pregunte cómo surgió inicialmente tal expresión y por qué ella es la análoga para matrices 3×3, de la expresión $a_1b_2 - a_2b_1$ para el determinante de una matriz $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$.

Pues bien, tanto los determinantes de orden 2 como los de orden 3 tuvieron su origen en la primera mitad del siglo $XVIII$, en relación con una manera de resolver sistemas de ecuaciones lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas y tres ecuaciones con tres incógnitas.

Para el caso del sistema

$$\begin{aligned} a_1x + a_2y &= u \\ b_1x + b_2y &= v \end{aligned} \tag{13.4}$$

cierta manera de proceder, la cual se explicó en el capítulo 6, conduce a que si $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, entonces el sistema tiene una y sólo una solución dada por

$$x = \frac{ub_2 - a_2v}{a_1b_2 - a_2b_1} \quad \text{y} \quad y = \frac{a_1v - b_1u}{a_1b_2 - a_2b_1} \tag{13.5}$$

Como ya sabemos, el denominador en las expresiones anteriores se llamó determinante del sistema (13.4) y se denotó $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$. También sabemos que dichas expresiones pueden escribirse en la forma

$$x = \frac{\begin{vmatrix} u & a_2 \\ v & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}} \qquad \text{y} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & u \\ b_1 & v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}} \tag{13.6}$$

igualdades conocidas como fórmulas de Cramer para el sistema (13.4).

Pasemos ahora a mostrar cómo surgió la expresión (13.3). Para ello consideremos el sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas

$$\begin{aligned} a_1x + a_2y + a_3z &= u \\ b_1x + b_2y + b_3z &= v \\ c_1x + c_2y + c_3z &= w \end{aligned} \tag{13.7}$$

Con el fin de imitar el procedimiento empleado con el sistema (13.4), escribimos las dos primeras ecuaciones en (13.7) en la forma

$$\begin{aligned} a_1x + a_2y &= u - a_3z \\ b_1x + b_2y &= v - b_3z \end{aligned}$$

Usando las fórmulas en (13.5) y suponiendo que $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, se tiene que

$$x = \frac{(u - a_3z)\, b_2 - a_2\,(v - b_3z)}{a_1b_2 - a_2b_1} \qquad \text{y} \qquad y = \frac{a_1\,(v - b_3z) - b_1\,(u - a_3z)}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

Resulta que sustituyendo estas expresiones en la tercera ecuación del sistema (13.7), se obtiene una ecuación que sólo contiene la incógnita z, y cuando se despeja z de esa ecuación queda

$$z = \frac{a_1b_2w - a_2b_1w - a_1c_2v + a_2c_1v + b_1c_2u - b_2c_1u}{a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1} \tag{13.8}$$

En forma similar se obtienen expresiones análogas para x y para y, con el mismo denominador que aparece en (13.8), el cual es el escalar en (13.3). Dicho denominador se llamó determinante del sistema (13.7), y se denotó en la forma

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Es más, se encontró que los numeradores en las expresiones para x, para y y para z también podían expresarse como determinantes de orden 3, obteniéndose así el siguiente resultado, el cual es completamente análogo a lo obtenido para el sistema (13.4):

Si $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$, el sistema (13.7) tiene una y sólo una solución dada por

$$x = \frac{\begin{vmatrix} u & a_2 & a_3 \\ v & b_2 & b_3 \\ w & c_2 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & u & a_3 \\ b_1 & v & b_3 \\ c_1 & w & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & u \\ b_1 & b_2 & v \\ c_1 & c_2 & w \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}} \qquad (13.9)$$

Las igualdades en (13.9) son las **fórmulas de Cramer** para el sistema (13.7).

Es de señalar que las fórmulas (13.9) se pueden deducir más fácilmente, como se muestra a continuación:

Escribamos el sistema (13.7) en la forma

$$xA_1 + yA_2 + zA_3 = U \qquad (13.10)$$

donde

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad U = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

Tomando producto escalar en ambos lados de (13.10) por $A_2 \times A_3$ se obtiene

$$xA_1 \cdot (A_2 \times A_3) + yA_2 \cdot (A_2 \times A_3) + zA_3 \cdot (A_2 \times A_3) = U \cdot (A_2 \times A_3)$$

Ahora, como

$$A_2 \cdot (A_2 \times A_3) = 0 \quad \text{y} \quad A_3 \cdot (A_2 \times A_3) = 0$$

entonces

$$xA_1 \cdot (A_2 \times A_3) = U \cdot (A_2 \times A_3)$$

Por tanto, si $A_1 \cdot (A_2 \times A_3) \neq 0$

$$x = \frac{U \cdot (A_2 \times A_3)}{A_1 \cdot (A_2 \times A_3)} = \frac{\begin{vmatrix} u & v & w \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

y puesto que el determinante de cualquier matriz 3×3 es igual al de su transpuesta, se tiene que

$$x = \frac{\begin{vmatrix} u & a_2 & a_3 \\ v & b_2 & b_3 \\ w & c_2 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}}$$

la cual es la primera de las fórmulas en (13.9). De manera similar se llega a las otras dos fórmulas en (13.9).

Ejemplo 13.2
Muestre que el sistema

$$\begin{aligned} 2x - y + z &= 4 \\ 2x + 2y + 3z &= 3 \\ 6x - 9y - 2z &= 17 \end{aligned} \tag{13.11}$$

tiene solución única y halle dicha solución empleando las fórmulas de Cramer.

Solución:

Sea A la matriz de coeficientes del sistema dado.

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 6 & -9 & -2 \end{vmatrix} \\ &= 2(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -9 & -2 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} + 1(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 6 & -9 \end{vmatrix} \\ &= 2(-4+27) + (-4-18) + (-18-12) \\ &= -6 \end{aligned}$$

Como $\det(A) \neq 0$ entonces el sistema (13.11) tiene solución única. Según las fórmulas de Cramer dicha solución está dada por:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 17 & -9 & -2 \end{vmatrix}}{\det(A)}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 6 & 17 & -2 \end{vmatrix}}{\det(A)}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 6 & -9 & 17 \end{vmatrix}}{\det(A)} \tag{13.12}$$

Calculando los determinantes que aparecen en los numeradores de las igualdades en (13.12) se obtiene que

$$x = \frac{-26}{-6} = \frac{13}{3}, \quad y = \frac{-10}{-6} = \frac{5}{3}, \quad z = \frac{18}{-6} = -3$$

Por tanto, la única solución del sistema es $\begin{pmatrix} 13/3 \\ 5/3 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Se recuerda al lector que en el capítulo 12 se resolvió el sistema (13.11) por el método de eliminación de Gauss y también empleando la matriz A^{-1}. ■

Vale la pena resaltar que cuando se emplean las fórmulas de Cramer, por lo general hay que realizar muchas más operaciones que con el método de eliminación de Gauss. En realidad, las fórmulas de Cramer adquieren importancia cuando se trata de resolver sistemas de ecuaciones lineales en los cuales la matriz de coeficientes del sistema tiene algunas componentes variables.

13.2 Propiedades básicas

A continuación listaremos las propiedades básicas de los determinantes de orden 3, las cuales son completamente análogas a las ya establecidas en el capítulo 6 para los determinantes de orden 2. En las propiedades que hacen referencia a una matriz A o una matriz B se entiende que ellas son matrices 3×3.

1. Si se intercambian dos filas de una matriz A, el determinante sólo cambia de signo, es decir, el determinante de la nueva matriz es $-\det(A)$.

2. Si se multiplica una de las filas de una matriz A por un escalar t, el determinante de la nueva matriz es $t\det(A)$.

3. $$\begin{vmatrix} a_1+a_1' & a_2+a_2' & a_3+a_3' \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1' & a_2' & a_3' \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Se tienen igualdades análogas si en el lado izquierdo la suma que aparece se realiza en la segunda fila o en la tercera fila.

4. Si las filas de una matriz A son L.D. entonces el $\det(A) = 0$.
En particular, se tiene que:
- Si la matriz A posee una fila nula, $\det(A) = 0$.
- Si la matriz A posee dos filas iguales, $\det(A) = 0$.
- Si una de las filas de A es múltiplo escalar de otra de las filas de A entonces $\det(A) = 0$.

5. Si una fila de la matriz A se sustituye por la suma de ella y un múltiplo escalar de otra fila de A, el determinante de la nueva matriz es igual a $\det(A)$.

6. $\det(A^T) = \det(A)$

7. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

8. $$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3$$

Toda matriz de una de las formas

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

se dice una **matriz triangular.** Si es de la primera forma se dice que la matriz es **triangular superior** y si es de la segunda forma se dice que la matriz es **triangular inferior.**

Un caso particular de matrices triangulares son las de la forma

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

las cuales son llamadas **matrices diagonales.** Nótese que una matriz diagonal es tanto triangular superior como triangular inferior.

La propiedad 8. dice entonces que el determinante de cualquier matriz triangular es el producto de los números en la diagonal principal de la matriz.

La propiedad 4. puede considerarse probada, es más, se tiene que las filas de una matriz A son L.D. si y sólo si $\det(A) \neq 0$, pues ya hemos probado que las filas de una matriz A son L.I. si y sólo si $\det(A) \neq 0$. La propiedad 6. ya se probó al inicio de este capítulo. En cuanto a la propiedad 7., su prueba no la daremos por lo laboriosa que es. Para probar las restantes propiedades digamos que

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

Emplearemos el hecho de que

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = U \cdot (V \times Z)$$

donde

$$U = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad Z = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

con lo cual podremos usar propiedades del producto escalar, del producto cruz y del producto mixto.

Prueba de 1.

Sólo daremos la prueba para el caso en el cual se intercambian las dos primeras filas de la matriz A. La prueba es análoga si las filas que se intercambian son la primera y la tercera o la segunda y la tercera.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} &= V \cdot (U \times Z) \\ &= V \cdot (-Z \times U) && \text{pues } U \times Z = -Z \times U \\ &= -V \cdot (Z \times U) \\ &= -[U \cdot (V \times Z)] && \text{pues } V \cdot (Z \times U) = U \cdot (V \times Z) \\ &= -\det(A) && \blacklozenge \end{aligned}$$

Prueba de 2.

La probaremos para el caso en el cual se multiplica la primera fila de la matriz A por un escalar t. La prueba en los otros casos es similar.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} ta_1 & ta_2 & ta_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} &= (tU) \cdot (V \times Z) \\ &= t[U \cdot (V \times Z)] \\ &= t\det(A) \quad \blacklozenge \end{aligned}$$

Prueba de 3.

Si $U' = \begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \\ a_3' \end{pmatrix}$, la igualdad que aparece en 3. es equivalente a la igualdad

$$(U + U') \cdot (V \times Z) = U \cdot (V \times Z) + U' \cdot (V \times Z)$$

la cual sabemos es válida. ⧫

Prueba de 5.

La propiedad 5. puede probarse a partir de las propiedades 3. y 4. Probémosla para el caso en el cual a la segunda fila de la matriz A se le suma la primera multiplicada por un escalar t. La prueba en los otros casos es similar.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 + ta_1 & b_2 + ta_2 & b_3 + ta_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ ta_1 & ta_2 & ta_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

La igualdad anterior se debe a la propiedad 3. Ahora, por la propiedad 4.,

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ ta_1 & ta_2 & ta_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

pues la segunda fila es múltiplo escalar de la primera. Por tanto,

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 + ta_1 & b_2 + ta_2 & b_3 + ta_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \quad ⧫$$

Prueba de 8.

Probemos la propiedad 8. para el caso en el cual la matriz es triangular superior. Empleando el desarrollo del determinante mediante cofactores de la primera columna se tiene que

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ 0 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 (b_2 c_3 - 0) = a_1 b_2 c_3 \quad ⧫$$

Obsérvese que de la propiedad 6. se sigue que las propiedades 1., 2., 3., 4. y 5., las cuales se refieren a filas, son también válidas si en cada una de ellas se sustituye "fila(s)" por "columna(s)". Por otra parte, entre las propiedades dadas, las propiedades 1, 2 y 5 proporcionan otra forma de calcular determinantes: Se realizan operaciones elementales sobre las filas o sobre las columnas de la matriz a fin de transformar la matriz en otra cuyo determinante se puede calcular rápidamente, como por ejemplo una matriz triangular. Esta manera de proceder se ilustra en el ejemplo 13.4.

Ejemplo 13.3

- Si $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$, $\det(A) = 0$ pues una de las filas de A es nula.
- Si $B = \begin{pmatrix} -1 & 8 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 7 & 0 & 7 \end{pmatrix}$, $\det(B) = 0$ pues la primera y tercera columnas de B son

iguales.

- Si $C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 7 \\ 8/3 & -4/3 & -28/3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\det(C) = 0$ pues una de las filas es múltiplo escalar

de otra (la segunda fila es $-\dfrac{4}{3}$ veces la primera).

- Si $D = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$, $\det(C) = (-8)(2)\left(\frac{1}{2}\right) = -8$, ya que D es una matriz

triangular. ■

Ejemplo 13.4
Halle el determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ -3 & 6 & 9 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

empleando las propiedades 1, 2 y 5 hasta obtener el determinante de una matriz triangular superior.

Solución:

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 0 & 1 & -4 \\ -3 & 6 & 9 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} &= -\begin{vmatrix} -3 & 6 & 9 \\ 0 & 1 & -4 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} && \text{Por propiedad 1 : Se intercambiaron las dos primeras filas} \\
&= -\begin{vmatrix} 3(-1) & 3(2) & 3(3) \\ 0 & 1 & -4 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} \\
&= -3\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} && \text{Por propiedad 2.} \\
&= -3\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 7 & 14 \end{vmatrix} && \text{Por propiedad 5 : Se sumó a la tercera fila, la primera multiplicada por 4.} \\
&= -3\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 42 \end{vmatrix} && \text{Por propiedad 5 : Se sumó a la tercera fila, la segunda multiplicada por } -7 \\
&= -3(-1)(1)(42) && \text{Por propiedad 8.} \\
&= 126 \quad ■
\end{aligned}$$

Ejemplo 13.5

Sea $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$. Sabiendo que $\det(A) = -5$, halle el determinante de la matriz $B = \begin{pmatrix} -3a_1 & a_3 - 4a_1 & a_2 \\ -3b_1 & b_3 - 4b_1 & b_2 \\ -3c_1 & c_3 - 4c_1 & c_2 \end{pmatrix}$.

Solución:

Partiremos de $\det(B)$ y emplearemos la propiedad 1, 2 y 5 de los determinantes de orden 3, con el fin de hacer aparecer el $\det(A)$:

$$\begin{aligned}
\det(B) &= \begin{vmatrix} -3a_1 & a_3 - 4a_1 & a_2 \\ -3b_1 & b_3 - 4b_1 & b_2 \\ -3c_1 & c_3 - 4c_1 & c_2 \end{vmatrix} \\
&= (-3)\begin{vmatrix} a_1 & a_3 - 4a_1 & a_2 \\ b_1 & b_3 - 4b_1 & b_2 \\ c_1 & c_3 - 4c_1 & c_2 \end{vmatrix} && \text{Por propiedad 2.} \\
&= (-3)\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_2 \\ b_1 & b_3 & b_2 \\ c_1 & c_3 & c_2 \end{vmatrix} && \text{Por propiedad 5 : Se sumó a la segunda columna, la primera multiplicada por 4} \\
&= -(-3)\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} && \text{Por propiedad 1 : Se intercambian las columnas segunda y tercera.} \\
&= 3\det(A)
\end{aligned}$$

Ahora, como $\det(A) = -5$ entonces $\det(B) = 3(-5) = -15$. ■

13.3 Aplicaciones geométricas

Ahora procederemos a extender a los determinantes de orden 3, los resultados obtenidos en el capítulo 6, respecto a la relación entre determinantes y orientación y entre determinantes y áreas de paralelogramos.

Empezaremos definiendo el concepto de terna orientada de vectores de $\mathbb{R}^3$. Consideremos una terna de vectores linealmente independientes X_1, X_2, X_3 de $\mathbb{R}^3$, vista como una terna ordenada con X_1 primero, X_2 segundo y X_3 tercero. Sea $\mathcal{P}$ el plano generado por X_1 y X_2; sabemos que $X_1 \times X_2$ es un vector no nulo normal al plano $\mathcal{P}$ y cuya dirección la da la regla de la mano derecha (ver figura 13.1).

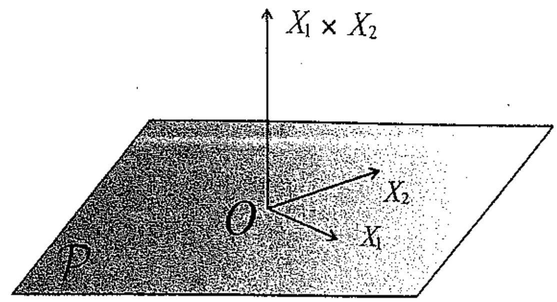


Figura 13.1.

El plano $\mathcal{P}$ separa al espacio en dos partes disjuntas; de esas dos partes, llamaremos **semiespacio principal determinado por el par ordenado $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$** a la parte que contiene al vector $X_1 \times X_2$. Nótese que un vector X de $\mathbb{R}^3$ está en dicho semiespacio si y sólo si el ángulo α entre X y $X_1 \times X_2$ es tal que $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$, es decir, si y sólo si $(X_1 \times X_2) \cdot X > 0$.

Pues bien, la terna de vectores X_1, X_2, X_3 se dirá **orientada positivamente** si el vector X_3 pertenece al semiespacio principal determinado por el par X_1, X_2, es decir, si $(X_1 \times X_2) \cdot X_3 > 0$. Si $(X_1 \times X_2) \cdot X_3 < 0$, la terna X_1, X_2, X_3 se dirá **orientada negativamente.**

Ejemplo 13.6

a) La terna E_1, E_2, E_3 está orientada positivamente ya que E_3 está en el semiespacio principal determinado por el par E_1, E_2 pues $E_3 = E_1 \times E_2$. O también, la terna E_1, E_2, E_3 está orientada positivamente ya que $(E_1 \times E_2) \cdot E_3 = E_3 \cdot E_3 = 1$ y $1 > 0$.
b) Ya que $(E_1 \times E_2) \cdot (-E_3) = E_3 \cdot (-E_3) = -1$ y $-1 < 0$, la terna E_1, E_2, $-E_3$ está orientada negativamente
c) Como $(E_2 \times E_1) \cdot E_3 = (-E_3) \cdot E_3 = -1$ y $-1 < 0$, la terna E_2, E_1, E_3 está orientada negativamente .(Ver figura 13.2). ■

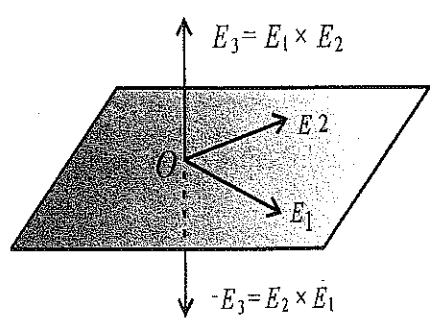


Figura 13.2.

Relacionemos ahora el concepto de terna orientada de vectores con el de determinante. Consideremos los vectores de $\mathbb{R}^3$

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad X_3 = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

Puesto que

$$\begin{aligned}
(X_1 \times X_2) \cdot X_3 &= X_3 \cdot (X_1 \times X_2) \\
&= X_1 \cdot (X_2 \times X_3) \\
&= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

se tiene lo siguiente:

> Sean X_1, X_2, X_3 vectores L.I. de $\mathbb{R}^3$.
> *a*) La terna X_1, X_2, X_3 está orientada positivamente si y sólo si
> $\det \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} > 0$
> *b*) La terna X_1, X_2, X_3 está orientada negativamente si y sólo si
> $\det \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} < 0$

Ejemplo 13.7
Consideremos la terna de vectores $X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Veamos si esta terna de vectores está orientada positivamente o si está orientada negativamente. Para ello calculemos el determinante de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Empleando el desarrollo del determinante de A mediante cofactores de la primera fila tenemos que

$$\begin{aligned}
\det(A) &= (-1)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} + 3(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\
&= -(1-4) - 3(0-2) = 9
\end{aligned}$$

Como $\det(A) > 0$ concluimos que la terna X_1, X_2, X_3 está orientada positivamente. ■

Sea ahora $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal invertible. Se dice que T **preserva la orientación** si siempre que una terna de vectores X_1, X_2, X_3 está orientada positivamente, la terna $T(X_1)$, $T(X_2)$, $T(X_3)$ también está orientada positivamente. Se dice que T **cambia la orientación** si siempre que una terna X_1, X_2, X_3 está orientada positivamente, la terna $T(X_1)$, $T(X_2)$, $T(X_3)$ está orientada negativamente.

Ejemplo 13.8

Consideremos la reflexión respecto al plano xy, es decir, la transformación lineal

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -z \end{pmatrix} \end{array}$$

de la cual sabemos que es una transformación invertible. Veamos si T preserva o cambia la orientación:

Partamos de la terna E_1, E_2, E_3, de la cual sabemos que está orientada positivamente. Como

$$T(E_1) = E_1, \quad T(E_2) = E_2, \quad T(E_3) = -E_3$$

y dado que la terna E_1, E_2, $-E_3$ está orientada negativamente, concluimos que T no preserva la orientación.

Veamos que T cambia la orientación. Para ello tomemos una terna cualquiera de vectores de $\mathbb{R}^3$

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

orientada positivamente y mostremos que la terna

$$T(X_1) = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ -z_1 \end{pmatrix}, \quad T(X_2) = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ -z_2 \end{pmatrix}, \quad T(X_3) = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ -z_3 \end{pmatrix}$$

está orientada negativamente, lo cual mostraremos probando que
$\det\begin{pmatrix} T(X_1) & T(X_2) & T(X_3) \\ | & | & | \end{pmatrix} < 0$ así:

$$\begin{aligned} \det\begin{pmatrix} T(X_1) & T(X_2) & T(X_3) \\ | & | & | \end{pmatrix} &= \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ -z_1 & -z_2 & -z_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \\ &= -\det\begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ahora como $\det\begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} > 0$, ya que la terna X_1, X_2, X_3 está orientada positivamente, entonces

$$\det\begin{pmatrix} T(X_1) & T(X_2) & T(X_3) \\ | & | & | \end{pmatrix} < 0$$

Luego, T cambia la orientación. ∎

Al igual que para las transformaciones lineales del plano, el signo del determinante de una transformación lineal del espacio nos dice si la transformación preserva o cambia la orientación. En efecto, se tiene:

> Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal invertible.
> *a*) T preserva la orientación si y sólo si $\det(T) > 0$.
> *b*) T cambia la orientación si y sólo si $\det(T) < 0$.

Para probar *a*) digamos que $m(T) = A$. Supongamos primero que T preserva la orientación y probemos que $\det(T) > 0$, es decir, que $\det(A) > 0$.

Puesto que la terna E_1, E_2, E_3 está orientada positivamente y dado que T preserva la orientación tenemos que la terna $T(E_1)$, $T(E_2)$, $T(E_3)$ está orientada positivamente y por tanto

$$\det\begin{pmatrix} T(E_1) & T(E_2) & T(E_3) \\ | & | & | \end{pmatrix} > 0$$

Pero como

$$\begin{pmatrix} T(E_1) & T(E_2) & T(E_3) \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AE_1 & AE_2 & AE_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = A$$

entonces $\det(A) > 0$.

Supongamos ahora que $\det(T) > 0$, es decir, que $\det(A) > 0$ y probemos que T preserva la orientación. Tomemos una terna cualquiera X_1, X_2, X_3 orientada positivamente y mostremos que la terna $T(X_1)$, $T(X_2)$, $T(X_3)$ también está orientada positivamente: Como

$$\begin{pmatrix} T(X_1) & T(X_2) & T(X_3) \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AX_1 & AX_2 & AX_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

entonces

$$\begin{aligned} \det\begin{pmatrix} T(X_1) & T(X_2) & T(X_3) \\ | & | & | \end{pmatrix} &= \det\left[A\begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}\right] \\ &= \det A \det\begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{13.13}$$

Ahora, como $\det(A) > 0$ (por hipótesis) y $\det\begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} > 0$ (ya que la terna X_1, X_2, X_3 está orientada positivamente) entonces

$$\det\begin{pmatrix} T(X_1) & T(X_2) & T(X_3) \\ | & | & | \end{pmatrix} > 0$$

Luego, $T(X_1)$, $T(X_2)$, $T(X_3)$ está orientada positivamente, como se quería probar.

La prueba de *b*) es completamente análoga. ♦

Ejemplo 13.9
Consideremos la rotación R_θ^z por un ángulo de θ radianes $(-2\pi < \theta < 2\pi)$ alrededor del eje z. Como sabemos, para cualquier $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$,

$$R_\theta^z\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta \\ x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta \\ z \end{pmatrix}$$

así que

$$m\left(R_{\theta}^{z}\right)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0\\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Luego,

$$\det\left(R_{\theta}^{z}\right)=\begin{vmatrix}\cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0\\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=\cos^{2}\theta+\operatorname{sen}^{2}\theta=1$$

Tenemos entonces que la transformación lineal R_{θ}^{z} es invertible ya que $\det\left(R_{\theta}^{z}\right)\neq 0$ y que dicha transformación preserva la orientación puesto que $\det\left(R_{\theta}^{z}\right)>0$. ■

Ejemplo 13.10

Consideremos, para $r\neq 0$, la transformación

$$\begin{array}{cccc} D_r: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} & \longmapsto & D_r\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}rx\\ ry\\ rz\end{pmatrix}\end{array}$$

de la cual sabemos que es invertible.

Como la matriz de D_r es la matriz

$$\begin{pmatrix}r & 0 & 0\\ 0 & r & 0\\ 0 & 0 & r\end{pmatrix}$$

entonces

$$\det\left(D_r\right)=\begin{vmatrix}r & 0 & 0\\ 0 & r & 0\\ 0 & 0 & r\end{vmatrix}=r^{3}$$

Se sigue que D_r preserva la orientación si y sólo si $r>0$ y que D_r cambia la orientación si y sólo si $r<0$. ■

Ahora relacionaremos el determinante con el volumen de un paralelepípedo .

Sea $\mathcal{P}$ el paralelepípedo determinado por los vectores linealmente independientes X_1, X_2, X_3 de $\mathbb{R}^3$. Como ya lo sabemos

$$\text{Volumen de } \mathcal{P}=\left|X_1\cdot\left(X_2\times X_3\right)\right|$$

y como

$$X_1\cdot\left(X_2\times X_3\right)=\det\begin{pmatrix}X_1 & X_2 & X_3\\ | & | & |\end{pmatrix}$$

entonces

$$\text{Volumen de } \mathcal{P}=\left|\det\begin{pmatrix}X_1 & X_2 & X_3\\ | & | & |\end{pmatrix}\right|$$

Sea ahora $T:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$ una transformación lineal invertible y consideremos la imagen $T\left(\mathcal{P}\right)$ del paralelepípedo $\mathcal{P}$ bajo T. Como el lector puede probar, dicha imagen $T\left(\mathcal{P}\right)$ es el paralelepípedo determinado por los vectores linealmente independientes $T(X_1)$, $T(X_2)$, $T(X_3)$; por tanto,

$$\text{Volumen de } T(\mathcal{P}) = \left|\det\begin{pmatrix} T(X_1) & T(X_2) & T(X_3) \\ | & | & | \end{pmatrix}\right|$$

Ahora, según la igualdad (13.13)

$$\det\begin{pmatrix} T(X_1) & T(X_2) & T(X_3) \\ | & | & | \end{pmatrix} = \det(T)\det\begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

luego,

$$\begin{aligned}\text{Volumen de } T(\mathcal{P}) &= |\det(T)|\left|\det\begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}\right| \\ &= |\det(T)| \text{ Volumen de } \mathcal{P}\end{aligned}$$

Hemos probado así lo siguiente:

Sea $\mathcal{P}$ el paralelepípedo determinado por los vectores linealmente independientes X_1, X_2, X_3.

- $$\text{Volumen de } \mathcal{P} = \left|\det\begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}\right| \qquad (13.14)$$

- Si $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es una transformación lineal invertible entonces

$$\text{Volumen de } T(\mathcal{P}) = |\det(T)| \text{ Volumen de } \mathcal{P} \qquad (13.15)$$

Ejemplo 13.11
Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que para cada $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z \\ y+z \\ 2x+y \end{pmatrix}$$

y sean $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $X_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Calcule el volumen del paralelepípedo $\mathcal{P}$ determinado por los vectores X_1, X_2, X_3.

b) Calcule el volumen del paralelepípedo $T(\mathcal{P})$.

Solución:

a) De acuerdo con la fórmula (13.14),

$$\text{Volumen de } \mathcal{P} = \left|\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\right|$$

Ahora,

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

por tanto, el volumen del paralelepípedo $\mathcal{P}$ es 2 unidades cúbicas.

b) De acuerdo con la fórmula (13.15),

$$\text{Volumen de } T(\mathcal{P}) = |\det(T)|\, 2$$

Ahora, como $m(T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ entonces

$$\det(T) = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = -3$$

y por tanto,

$$\text{Volumen de } T(\mathcal{P}) = |-3|\, 2 = 6 \text{ unidades cúbicas.}$$

Observe que el volumen del paralelepípedo $T(\mathcal{P})$ también se puede obtener calculando primero las imágenes $T(X_1)$, $T(X_2)$, $T(X_3)$ y luego usando la fórmula (13.14), según la cual

$$\text{Volumen de } T(\mathcal{P}) = \left|\det\begin{pmatrix} T(X_1) & T(X_2) & T(X_3) \\ | & | & | \end{pmatrix}\right|$$

Se deja como ejercicio para el lector calcular el volumen del paralelepípedo $T(\mathcal{P})$ de esta manera. ■

13.4 Ejercicios

Sección 13.1

1. Para la matriz A, dada en cada literal, calcular el determinante de A desarrollándolo por cofactores de cualquier fila o columna y determinar si A es invertible.

   a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ *b*) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 4 & -10 \end{pmatrix}$

   c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *d*) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

2. Para cada una de las siguientes transformaciones lineales $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ calcular el determinante de T y decir si T es invertible.

   a) $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+z \\ y-z \\ x+y \end{pmatrix}$.

   b) T es tal que $T(E_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $T(E_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $T(E_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

   c) $T = S \circ R$, donde S es la proyección sobre el plano con ecuación $2x - y + z = 0$ y R es la reflexión respecto a la recta generada por el vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   d) T es la reflexión respecto al plano $\mathcal{P}$ generado por los vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. *a*) Para la matriz A, dada en cada numeral, hallar todos los valores de λ tales que la matriz $A - \lambda I_3$ no es invertible.

   i) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ *ii*) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

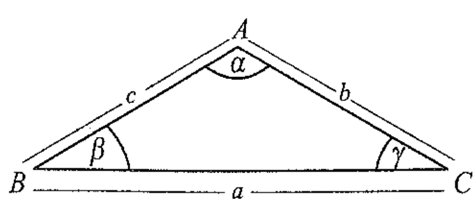
   b) ¿Para cuáles valores de α, la matriz $\begin{pmatrix} -\alpha & \alpha-1 & \alpha+1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2-\alpha & \alpha+3 & \alpha+7 \end{pmatrix}$ no es invertible?

4. Considerar el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 8 \\ 2x - y + 4z &= 7 \\ -y + z &= 1 \end{aligned}$$

   Mostrar que este sistema tiene solución única y calcular su solución empleando las fórmulas de Cramer.

5. Los ángulos y los lados del triángulo de la figura se relacionan mediante el sistema dado de tres ecuaciones lineales con las tres incógnitas $\cos\alpha$, $\cos\beta$ y $\cos\gamma$ (ver ejercicio 8 del capítulo 12).



$$\begin{aligned} c\cos\alpha + a\cos\gamma &= b \\ b\cos\alpha + a\cos\beta &= c \\ c\cos\beta + b\cos\gamma &= a \end{aligned}$$

   Utilizar las fórmulas de Cramer para expresar $\cos\gamma$ en términos de los lados a, b y c. (Observar que se obtiene la misma expresión al aplicar la ley del coseno).

Sección 13.2

6. Hallar el determinante de cada una de las siguientes matrices empleando operaciones elementales de fila.

   a) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \end{pmatrix}$

7. Sea $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Si $\det A = -2$, hallar el determinante de cada una de las siguientes matrices:

   a) $B = \begin{pmatrix} 3a & 3b & 3c \\ 5/2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $C = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 4a+5 & 4b & 4c+2 \\ a+2 & b+2 & c+2 \end{pmatrix}$

   c) $D = \begin{pmatrix} a-1 & b-1 & c-1 \\ 6 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ d) $E = \begin{pmatrix} 5a & 5 & -4 \\ 5b & 0 & 1 \\ 5c & 2 & -1 \end{pmatrix}$

8. a) Demostrar que $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$. Este determinante es llamado **determinante de Vandermonde de orden 3.**

   b) Hallar las correspondientes fórmulas para los siguientes determinantes:

   i) $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{pmatrix}$ ii) $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{pmatrix}$

9. Sea A una matriz de orden 3. Demostrar:

   a) Si A es invertible entonces $\det\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det A}$.

   b) Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ se tiene $\det(\alpha A) = \alpha^3 \det A$.

   c) Para todo $k \in \mathbb{N}$ se tiene $\det\left(A^k\right) = (\det A)^k$.

   d) Si $A^2 = A$ entonces $\det A = 0$ o $\det A = 1$.

   e) Si $A^T = -A$ entonces A no es invertible.

   f) Si A es invertible y $A^T = A^{-1}$ entonces $\det A = \pm 1$.

10. Sean A y B matrices de orden 3 tales que $\det A = 3$ y $\det B = -4$. Calcular:

    a) $\det(-2A)$ b) $\det\left(3A^2B^{-1}\right)$ c) $\det(3AB)^{-1}$

    d) $\det\left(-B^TA^{-1}\right)$ e) $\det\left(ABA^{-1}\right)$

11. Para la matriz A, dada en cada literal, mostrar que ella es invertible y calcular $\det\left(A^{-1}\right)$.

    a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

12. Sean A y B matrices de orden 3. Mostrar que, en general no es cierto que $\det(A+B) = \det A + \det B$.

Sección 13.3

13. Para la terna de vectores X, Y, Z dada en cada literal determinar si dichos vectores son linealmente independientes y, en caso afirmativo, decir si la terna X, Y, Z está orientada positivamente o negativamente.

a) $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Z = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$, $Z = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Z = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

d) $X = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$, $Z = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$

14. Para la terna de vectores X_1, X_2, X_3 dada en cada literal, determinar si X_1, X_2, X_3 son linealmente independientes y, en caso afirmativo, hallar el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores X_1, X_2, X_3.

a) $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $X_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) $X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $X_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix}$

15. Considerar la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ y+z \end{pmatrix}$.

a) Determinar si T preserva la orientación o la cambia.

b) Para cada terna de vectores dada en el ejercicio 14 que resulte linealmente independiente, calcular el volumen del paralelepí-pedo determinado por los vectores $T(X_1)$, $T(X_2)$ y $T(X_3)$ sin calcular estos vectores.

16. Sean $X_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Para la transformación lineal T dada en cada literal, calcular el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $T(X_1)$, $T(X_2)$ y $T(X_3)$ sin calcular estos vectores.

a) $T = R^x_{\frac{\pi}{4}}$

b) T es la reflexión respecto al plano xy.

c) T es la reflexión respecto a la recta $\frac{x}{2} = y = -z$.

17. Sean A, B, C y D puntos no coplanares del espacio y sea T la transformación dada por $T(X) = X - A$. Es fácil ver que el volumen del paralelepípedo de aristas $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{AD}$ es igual al volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $T(B)$, $T(C)$ y $T(D)$.

    Si $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, calcular utilizando determinantes:

    a) El volumen del paralelepípedo de aristas $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{AD}$.

    b) El volumen del prisma triangular cuya base es el triángulo ABC y tal que $\overline{AD}$ es una de sus aristas.

    c) El volumen de la pirámide cuadrangular cuyo vértice es el punto D y tiene como base el paralelogramo tal que dos de sus lados son los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$.

14

Valores propios y vectores propios

14.1 Definiciones. Cálculo de valores y vectores propios

Los conceptos de valor propio y vector propio para una transformación lineal del espacio y para una matriz 3×3 se definen exactamente como para una transformación lineal del plano y para una matriz 2×2.

Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal y sea λ un escalar. Se dice que λ es un **valor propio de** T si existe un vector X de $\mathbb{R}^3$, $X \neq O$, tal que

$$T(X) = \lambda X$$

Si λ es un valor propio de T, cada vector no nulo X de $\mathbb{R}^3$ tal que $T(X) = \lambda X$ se dice un **vector propio de** T **correspondiente a** λ.

Si A es una matriz 3×3, se llama valores propios de A y vectores propios de A a los valores propios y vectores propios de la transformación lineal del espacio cuya matriz es A.

Al igual que en el caso del plano, un vector no nulo X de $\mathbb{R}^3$ es un vector propio de una transformación lineal T del espacio (de una matriz A de orden 3) si y sólo si X y $T(X)$ (o X y AX) están en una misma recta que pasa por el origen.

Ejemplo 14.1

Sea $\mathcal{P}$ un plano que pasa por el origen y sea S la reflexión respecto al plano $\mathcal{P}$.

Es claro que si X es un vector de $\mathcal{P}$ entonces $S(X) = X$; por otra parte, si Y es un vector de la recta $\mathcal{L}$ que pasa por el origen y es perpendicular al plano $\mathcal{P}$ entonces $S(Y) = -Y$ (figura 14.1).

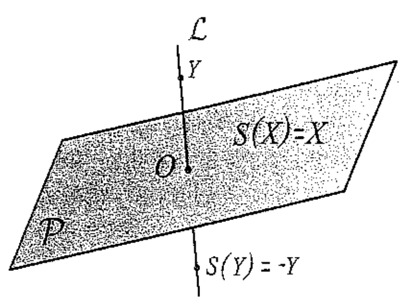


Figura 14.1.

Luego, $\lambda = 1$ es un valor propio de S y todo vector no nulo X en el plano $\mathcal{P}$ es un vector propio de S correspondiente a $\lambda = 1$, ya que para cada uno de dichos vectores X se tiene que $S(X) = X = 1X$. Similarmente, $\lambda = -1$ es otro valor propio de S y todo vector no nulo Y sobre la recta $\mathcal{L}$ es un vector propio de S correspondiente a $\lambda = -1$, pues para tales vectores Y, se tiene $S(Y) = -Y = -1Y$. ■

Ejemplo 14.2

Consideremos la transformación lineal $D_r : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Puesto que para todo X de $\mathbb{R}^3$, $D_r(X) = rX$, se tiene que r es un valor propio de D_r y todo vector no nulo de $\mathbb{R}^3$ es un vector propio de D_r correspondiente a r. Es más, r es el único valor propio de D_r (¿por qué?).

Lo afirmado para D_r, respecto a valores y vectores propios, es igualmente válido para la matriz de D_r, la cual es

$$\begin{pmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix} \quad ■$$

Ejemplo 14.3

Sea T una transformación lineal con matriz diagonal

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Así, para cualquier $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ en $\mathbb{R}^3$,

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = D\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 x \\ \lambda_2 y \\ \lambda_3 z \end{pmatrix}$$

En particular,

$$T(E_1) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 E_1, \quad T(E_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_2 E_2, \quad T(E_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \lambda_3 E_3$$

Luego λ_1, λ_2, λ_3 son valores propios de T (de D) y E_1, E_2, E_3 son vectores propios de T (de D) correspondientes a λ_1, λ_2, λ_3 respectivamente. Veamos que T no tiene otros valores propios.

Supongamos que λ es un valor propio de T y sea $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un vector propio de T correspondiente a λ. Entonces

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 x \\ \lambda_2 y \\ \lambda_3 z \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}$$

por tanto,

$$\lambda x = \lambda_1 x, \quad \lambda y = \lambda_2 y \quad \lambda z = \lambda_3 z$$

Ahora, como $x \neq 0$ o $y \neq 0$ o $z \neq 0$ (pues $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \neq O$) entonces

$$\lambda = \lambda_1 \quad \text{o} \quad \lambda = \lambda_2 \quad \text{o} \quad \lambda = \lambda_3$$

Así que λ_1, λ_2, λ_3 son los únicos valores propios de T (de D). ■

Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal con matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

y sea λ un escalar. De igual forma que para una transformación lineal del plano, se tiene que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- λ es un valor propio de T (de A)
- Existe $X \in \mathbb{R}^3$, $X \neq O$, tal que $AX = \lambda X$
- El sistema $(A - \lambda I_3)\, X = O$ tiene solución no trivial.
- La matriz $A - \lambda I_3$ no es invertible
- $\det(A - \lambda I_3) = 0$.

La ecuación $\det(A - \lambda I_3) = 0$, es decir,

$$\begin{vmatrix} a_1 - \lambda & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 - \lambda & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

en la cual λ se considera una incógnita, se llama **ecuación característica de T (de A)**. Desarrollando el determinante, dicha ecuación adquiere la forma

$$-\lambda^3 + d\lambda^2 + e\lambda + f = 0 \tag{14.1}$$

donde d, e y f son ciertas constantes. Las raíces reales de esta ecuación son entonces los valores propios de T (de A). Como el lado izquierdo de (14.1) es un polinomio de grado 3 en λ entonces dicha ecuación tiene exactamente 3 raíces en los complejos, pudiendo ocurrir que esas tres raíces sean iguales, que sólo dos de ellas sean iguales o que las tres sean distintas. Ahora como el grado del mencionado polinomio es 3, podemos asegurar que al menos una de dichas raíces es real. Esto puede probarse así: Sea $p(\lambda) = -\lambda^3 + d\lambda^2 + e\lambda + f$; es fácil ver que

$$\lim_{\lambda \to -\infty} p(\lambda) = \infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{\lambda \longrightarrow \infty} p(\lambda) = -\infty$$

Además, por ser p una función polinómica, p es continua en todo el intervalo $(-\infty, \infty)$ y por tanto la gráfica de p corta al eje λ por lo menos una vez, es decir, existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tal que $p(\lambda_0) = 0$, o sea, existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tal que λ_0 es una raíz de la ecuación (14.1).

Si ya sabemos que λ es un valor propio de T (de A), los vectores propios de T (de A) correspondientes a λ son las soluciones no triviales del sistema homogéneo

$$(A - \lambda I_3)\, X = O$$

es decir, del sistema

$$\begin{pmatrix} a_1 - \lambda & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 - \lambda & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{14.2}$$

Al conjunto solución de este sistema lo llamaremos **espacio propio de T (de A) correspondiente a** λ y lo denotaremos por $\mathcal{E}_\lambda$. Ahora, como la matriz de coeficientes del sistema (14.2) no es invertible (pues λ es valor propio de T (de A)) entonces, como ya sabemos, el conjunto solución $\mathcal{E}_\lambda$ de (14.2) es una recta que pasa por el origen, o es un plano que pasa por el origen o es todo $\mathbb{R}^3$.

Como resumen de lo anterior tenemos:

Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal con matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

- Un número real λ es un valor propio de T (de A) si y sólo si λ es una raíz de la ecuación característica de T (de A)

$$\begin{vmatrix} a_1 - \lambda & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 - \lambda & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

- La transformación T (la matriz A) tiene por lo menos un valor propio y tiene a lo más tres valores propios distintos.
- Si λ es un valor propio de T (de A), los vectores propios de T (de A) correspondientes a λ son las soluciones no triviales del sistema homogéneo

$$\begin{pmatrix} a_1 - \lambda & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 - \lambda & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Si λ es un valor propio de T (de A), el espacio propio $\mathcal{E}_\lambda$ es una recta que pasa por el origen o es un plano que pasa por el origen o es todo $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo 14.4

Sea T la transformación lineal del espacio cuya matriz es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Hallar los valores propios de T (de A) y los correspondientes espacios propios.

Solución:

La ecuación característica de T (de A) es

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 & -1 \\ 0 & 2 - \lambda & 0 \\ -1 & 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Calculando el determinante se encuentra que esta ecuación es

$$(2 - \lambda)\left(\lambda^2 - 2\lambda\right) = 0$$

la cual es equivalente a la ecuación

$$\lambda(\lambda-2)^2=0$$

cuyas raíces son los números $\lambda_1=0$ y $\lambda_2=2$, los cuales son los valores propios de T (de A).

El espacio propio de T (de A) correspondiente a $\lambda_1=0$ es, como sabemos, el conjunto solución del sistema

$$\begin{pmatrix}1-0 & 1 & -1\\ 0 & 2-0 & 0\\ -1 & 1 & 1-0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

es decir, del sistema

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 0\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

Resolviendo este sistema se obtiene que dicho espacio propio es

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_0 &= \left\{\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \Big/ \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}z\\ 0\\ z\end{pmatrix}\right\}\\ &= \left\{\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \Big/ \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=z\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\right\}\end{aligned}$$

Observe que $\mathcal{E}_0$ es una recta que pasa por el origen, la recta generada por el vector $\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$.

Por último, el espacio propio de T (de A) correspondiente al valor propio $\lambda_2=2$ es el conjunto solución del sistema

$$\begin{pmatrix}1-2 & 1 & -1\\ 0 & 2-2 & 0\\ -1 & 1 & 1-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

es decir, del sistema

$$\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

Resolviendo este sistema se encuentra que

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_2 &= \left\{\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \Big/ \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y-z\\ y\\ z\end{pmatrix}\right\}\\ &= \left\{\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \Big/ \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\right\}\end{aligned}$$

Observe que $\mathcal{E}_2$ es un plano que pasa por el origen, el plano generado por los vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

La situación relativa entre los espacios propios $\mathcal{E}_0$ y $\mathcal{E}_2$ es como se ilustra en la figura 14.2 ■

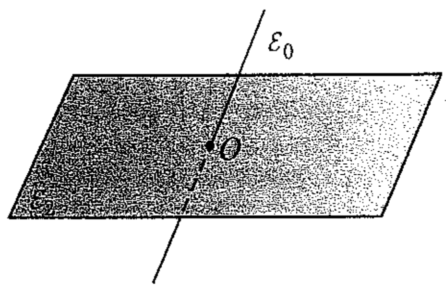


Figura 14.2.

Ejemplo 14.5
Sea θ tal que $0 \leq \theta < 2\pi$. Consideremos la transformación lineal R_θ^z, la cual rota cada vector de $\mathbb{R}^3$ un ángulo de θ radianes alrededor del eje z. Como ya se sabe,

$$m\left(R_\theta^z\right) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta & 0 \\ \text{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hallemos los valores propios y los espacios propios de esta transformación.

La ecuación característica de R_θ^z es

$$\begin{vmatrix} \cos\theta - \lambda & -\text{sen}\theta & 0 \\ \text{sen}\theta & \cos\theta - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Calculando el determinante encontramos que esta ecuación es

$$(1-\lambda)\left[(\cos\theta - \lambda)^2 + \text{sen}^2\theta\right] = 0$$

la cual es equivalente a la ecuación

$$(1-\lambda)\left(\lambda^2 - 2(\cos\theta)\lambda + 1\right) = 0 \qquad (14.3)$$

cuyas raíces son los números

$$\lambda = 1 \qquad \text{y} \qquad \lambda = \cos\theta \pm i\text{sen}\theta$$

Ahora, $\lambda = \cos\theta \pm i\text{sen}\theta$ es real si y sólo si $\text{sen}\theta = 0$, es decir, si y sólo si $\theta = 0$ o $\theta = \pi$.

Se presentan entonces los siguientes casos:

Caso 1. $\theta \neq 0$ y $\theta \neq \pi$.

En este caso la ecuación (14.3) tiene una raíz real, la cual es $\lambda = 1$, y dos raíces no reales, las cuales son $\lambda = \cos\theta \pm i\text{sen}\theta$. Por tanto, $\lambda = 1$ es el único valor propio de R_θ^z.

El espacio propio $\mathcal{E}_1$ de R_θ^z correspondiente a $\lambda = 1$ está conformado por los vectores X de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$R_\theta^z(X) = 1X$$

es decir, por los vectores de $\mathbb{R}^3$ que R_θ^z deja fijos.

Evidentemente esos vectores son los que están sobre el eje z y por lo tanto el espacio propio $\mathcal{E}_1$ es el eje z.

Caso 2. $\theta = 0$

Es claro que en este caso R_θ^z es la transformación identidad I, y como

$$I(X) = X = 1X$$

para todo X de $\mathbb{R}^3$ entonces $\lambda = 1$ es el único valor propio y el espacio propio $\mathcal{E}_1$ es todo $\mathbb{R}^3$.

Nótese que en este caso $\lambda = 1$ es la única raíz de la ecuación (14.3); ella se repite tres veces.

Caso 3. $\theta = \pi$

En este caso la ecuación (14.3) tiene dos raíces reales distintas; una es $\lambda = 1$, la cual aparece sólo una vez, y la otra es $\lambda = -1$, la cual aparece dos veces. Así que los valores propios de R_π^z son $\lambda = 1$ y $\lambda = -1$.

El espacio propio $\mathcal{E}_1$ de R_π^z correspondiente a $\lambda = 1$ es, como en el caso 1, el eje z, pues los vectores del eje z son los únicos vectores de $\mathbb{R}^3$ que permanecen fijos bajo R_π^z.

¿Y cuál es el espacio propio $\mathcal{E}_{-1}$ de R_π^z correspondiente a $\lambda = -1$?

Veamos: Como

$$m(R_\pi^z) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se tiene que $\mathcal{E}_{-1}$ es el conjunto solución del sistema

$$\begin{pmatrix} -1-(-1) & 0 & 0 \\ 0 & -1-(-1) & 0 \\ 0 & 0 & 1-(-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

es decir, el conjunto solución del sistema

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

el cual es el plano con ecuación $z = 0$, es decir, el plano xy.

Así que el espacio propio $\mathcal{E}_{-1}$ de R_π^z es el plano xy, como era de esperarse, pues los vectores X de dicho plano son los únicos vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$R_\pi^z(X) = (-1)X$$

Resumiendo, tenemos que:

- Si $\theta \neq 0$ y $\theta \neq \pi$, el único valor propio de R_θ^z es $\lambda = 1$ y $\mathcal{E}_1$ es el eje z.
- Si $\theta = 0$ entonces $R_\theta^z = I$ y así el único valor propio de R_θ^z es $\lambda = 1$ y $\mathcal{E}_1$ es todo $\mathbb{R}^3$
- Si $\theta = \pi$, los valores propios de R_θ^z son $\lambda = 1$ y$\lambda = -1$; $\mathcal{E}_1$ es el eje z y $\mathcal{E}_{-1}$ es el plano xy. ■

Recordemos que para una matriz A de orden 2 se tiene que si X_1, X_2 son dos vectores propios de A, linealmente independientes, correspondientes a los valores propios λ_1, λ_2 respectivamente, entonces

$$A = PDP^{-1}$$

donde

$$P = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ | & | \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Pues bien, para matrices de orden 3 se tiene un resultado completamente análogo:

Sea A una matriz de orden 3. Si X_1, X_2, X_3 son vectores propios de A, linealmente independientes, correspondientes respectivamente a los valores propios λ_1, λ_2, λ_3 (los cuales no tienen que ser distintos dos a dos) entonces

$$A = PDP^{-1}$$

donde

$$P = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Prueba.

Si X_1, X_2, X_3 son vectores propios de A correspondientes a los valores propios λ_1, λ_2, λ_3 respectivamente entonces

$$AX_1 = \lambda_1 X_1, \quad AX_2 = \lambda_2 X_2, \quad AX_3 = \lambda_3 X_3 \tag{14.4}$$

Luego,

$$\begin{pmatrix} AX_1 & AX_2 & AX_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 X_1 & \lambda_2 X_2 & \lambda_3 X_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

Y como

$$\begin{pmatrix} AX_1 & AX_2 & AX_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 X_1 & \lambda_2 X_2 & \lambda_3 X_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

entonces

$$A \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

es decir,

$$AP = PD \tag{14.5}$$

donde

$$P = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \tag{14.6}$$

Ahora, si además los vectores X_1, X_2, X_3 son L.I. entonces la matriz P es invertible. En tal caso, multiplicando a la derecha por P^{-1} en ambos lados de (14.5) se obtiene

$$A = PDP^{-1} \tag{14.7}$$

como se quería probar. ♦

El lector puede probar, reversando los pasos que condujeron de (14.4) a (14.7), que si una matriz A de orden 3 admite una factorización del tipo (14.7), con P y D matrices como en (14.6), entonces las columnas X_1, X_2, X_3 de la matriz P son vectores propios de A, linealmente independientes, correspondientes, a los valores propios λ_1, λ_2, λ_3 respectivamente. Así que:

> Una matriz de orden 3 es factrorizable en la forma
> $$A = PDP^{-1}$$
> con P matriz de orden 3 invertible y D matriz de orden 3 diagonal si y sólo si A posee tres vectores propios linealmente independientes.

Ejemplo 14.6
Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

del ejemplo 14.4. Para esta matriz se encontró que sus valores propios son $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 2$, que el espacio propio $\mathcal{E}_0$ es la recta generada por el vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y que el espacio propio $\mathcal{E}_2$ es el plano generado por los vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Los siguientes vectores propios de A

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

son linealmente independientes, ya que

$$\det \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} \neq 0$$

pues

$$\det \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

La situación relativa de los vectores X_1, X_2, X_3 se ilustra en la figura 14.3.

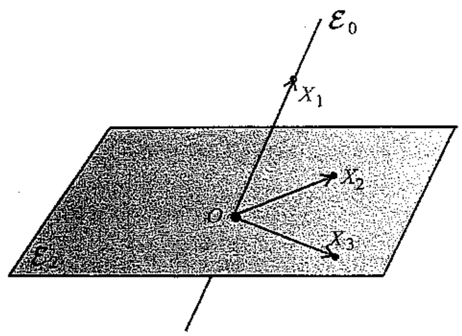


Figura 14.3.

Ahora como X_1 corresponde al valor propio $\lambda_1 = 0$ y X_2, X_3 corresponden al valor propio $\lambda_2 = 2$ entonces A es factorizable como

$$A = PDP^{-1}$$

donde

$$P = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \blacksquare$$

Ejemplo 14.7
Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

Veamos si esta matriz es o no es factorizable en la forma $A = PDP^{-1}$ con P matriz invertible y D matriz diagonal. Como sabemos A es factorizable en dicha forma si y sólo si A tiene tres vectores propios linealmente independientes. Pasemos entonces a determinar los valores y vectores propios de A.

La ecuación característica de A es

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 6 & 6 \\ 1 & 3-\lambda & 2 \\ -1 & -5 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Calculando el determinante y simplificando se obtiene la ecuación

$$-\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4 = 0 \tag{14.8}$$

de la cual nos interesan las raíces reales.

Sea $p(\lambda) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4$. Como el lector debe saber, las raíces enteras de la ecuación (14.8), si las hay, se encuentran entre los divisores del término constante 4, es decir, entre los números ± 1, ± 2 y ± 4 . Ahora, como $p(1) = -1 + 5 - 8 + 4 = 0$, entonces $\lambda = 1$ es una raíz de $p(\lambda)$ y por tanto $\lambda - 1$ es un factor de $p(\lambda)$; haciendo la división $p(\lambda)$ entre $\lambda - 1$ se encuentra que

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= (\lambda - 1)\left(-\lambda^2 + 4\lambda - 4\right) \\ &= -(\lambda - 1)\left(\lambda^2 - 4\lambda + 4\right) \\ &= -(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 \end{aligned}$$

Luego, la ecuación (14.8) es

$$-(\lambda-1)(\lambda-2)^2=0$$

ecuación cuyas raíces son los números $\lambda=1$ y $\lambda=2$, los cuales son los valores propios de A.

El espacio propio $\mathcal{E}_1$ de A correspondiente a $\lambda=1$ es el conjunto solución del sistema homogéneo

$$\begin{pmatrix} 4-1 & 6 & 6 \\ 1 & 3-1 & 2 \\ -1 & -5 & -2-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

es decir, del sistema

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 6 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & -5 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolviendo este sistema encontramos que

$$\mathcal{E}_1=\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \Big/ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=z\begin{pmatrix} -4/3 \\ -1/3 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

es decir, $\mathcal{E}_1$ es la recta generada por el vector $\begin{pmatrix} -4/3 \\ -1/3 \\ 1 \end{pmatrix}$ o equivalentemente, $\mathcal{E}_1$ es la recta generada por el vector $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

De manera similar se encuentra que el espacio propio $\mathcal{E}_2$ de A correspondiente al valor propio $\lambda=2$ es la recta generada por el vector $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Nótese que en este caso sólo hay dos espacios propios distintos y cada uno de ellos es una línea recta, como se ilustra en la figura 14.4.

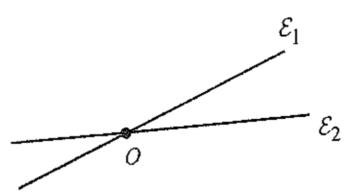


Figura 14.4.

Es claro entonces que A no tiene tres vectores propios linealmente independientes, ya que dados tres vectores propios cualesquiera de A, por lo menos dos de ellos deben estar en la recta $\mathcal{E}_1$ o en la recta $\mathcal{E}_2$, y por tanto esos tres vectores propios son linealmente dependientes. Luego la matriz A no es factorizable en la forma $A=PDP^{-1}$ con P matriz invertible y D matriz diagonal. ■

14.2 Matrices simétricas

Una matriz A de orden 3 se dice **simétrica** si ella es de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$$

o equivalentemente, si A tiene la propiedad

$$A^T = A$$

Ejemplo 14.8
La matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ es simétrica, pero la matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & -8 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ no lo es.
■

Vimos en el capítulo 7 que las matrices simétricas de orden 2 tienen propiedades especiales en cuanto a valores y vectores propios se refiere. Pues bien, las matrices simétricas de orden 3 tienen propiedades completamente análogas. En efecto, se tiene que:

Si A es una matriz 3×3 simétrica entonces,

1. Las raíces de la ecuación característica de A son todas reales.
2. Vectores propios de A, correspondientes a valores propios distintos, son ortogonales.
3. A posee tres vectores propios mutuamente ortogonales y unitarios.
4. Si X_1, X_2, X_3 son tres vectores propios de A mutuamente ortogonales y unitarios, correspondientes respectivamente a los valores propios λ_1, λ_2, λ_3 (los cuales no tienen que ser distintos dos a dos) entonces la matriz

$$Q = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

la cual es invertible y con la propiedad $Q^{-1} = Q^T$, es tal que

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

o equivalentemente

$$Q^TAQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

La prueba de 1. no se dará, pues ella requiere de conceptos y argumentos que están fuera de los propósitos de este texto.

En las pruebas de 2. y 3. usaremos el siguiente resultado:

> Si A es una matriz simétrica de orden 3 entonces para todo par de vectores X, Y de $\mathbb{R}^3$ se tiene que
> $$(AX).Y = X.(AY) \tag{14.9}$$

La prueba de este resultado es inmediata ya que, como sabemos, para toda matriz A de orden 3, podemos escribir

$$(AX).Y = (AX)^T Y \ \text{ y } \ (AX)^T = X^T A^T$$

cualesquiera sean los vectores X y Y de $\mathbb{R}^3$. Por tanto, si A es simétrica, es decir, si $A^T = A$, se tiene que

$$(AX).Y = (AX)^T Y = X^T A^T Y = X^T AY = X^T(AY) = X.(AY)$$

para todo par de vectores X, Y de $\mathbb{R}^3$

Prueba de 2.

Sean X_1, X_2 dos vectores propios de A, correspondientes a los valores propios λ_1, λ_2 respectivamente. Supongamos que $\lambda_1 \neq \lambda_2$ y probemos que X_1 y X_2 son ortogonales, es decir, $X_1.X_2 = 0$.

Por una parte tenemos que

$$(AX_1).X_2 = (\lambda_1 X_1).X_2 = \lambda_1 (X_1.X_2)$$

y por otra,

$$X_1.(AX_2) = X_1.(\lambda_2 X_2) = \lambda_2 (X_1.X_2)$$

Ahora, como $(AX_1).X_2 = X_1.(AX_2)$, según (14.9), entonces

$$\lambda_1 (X_1.X_2) = \lambda_2 (X_1.X_2)$$

es decir,

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(X_1.X_2) = 0$$

y puesto que $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ (pues estamos suponiendo que $\lambda_1 \neq \lambda_2$) entonces $X_1.X_2 = 0$, como se quería probar. ♦

Se advierte al lector que la prueba de 3. presenta un grado de dificultad que supera el nivel de este texto; si el lector lo desea, puede omitir su lectura.

Prueba de 3.

Ya se sabe que A tiene por lo menos un valor propio λ_1. Sea X_1 un vector propio de A, con $\|X_1\| = 1$, correspondiente al valor propio λ_1 y consideremos el plano $\mathcal{P}$ que pasa por el origen y que tiene a X_1 como un vector normal (vea figura 14.5).

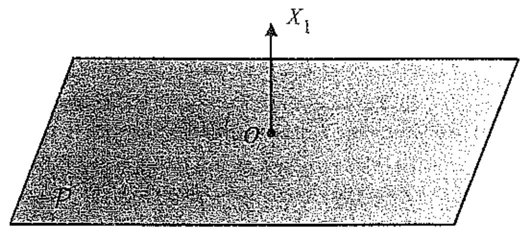


Figura 14.5.

Pues bien, probaremos que en el plano $\mathcal{P}$ hay dos vectores propios X_2 y X_3 de A ortogonales y unitarios. Esto se probará considerando la transformación lineal T del espacio cuya matriz es A y procediendo como se indica a continuación:

i) En primer lugar se prueba que

$$\text{Si } X \in \mathcal{P} \text{ entonces } T(X) \in \mathcal{P} \tag{14.10}$$

ii) Probado lo anterior, se considera la restricción T^* de T al plano $\mathcal{P}$, es decir, la transformación

$$\begin{array}{rccl} T^*: & \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ & X & \longmapsto & T^*(X) = T(X) \end{array}$$

iii) Se identifica el plano $\mathcal{P}$ con $\mathbb{R}^2$

iv) Identificado el plano $\mathcal{P}$ con $\mathbb{R}^2$, la transformación T^* da lugar (en virtud de dicha identificación) a una transformación lineal

$$\widetilde{T} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

v) Se prueba que la matriz de $\widetilde{T}$ es simétrica.

vi) Probado lo anterior ya se puede afirmar que $\widetilde{T}$ posee dos vectores propios $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ ortogonales, pues esto es válido para toda transformación lineal del plano con matriz simétrica.

vii) Se prueba que los vectores U, V de $\mathcal{P}$ que se identifican con $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ son vectores propios de T ortogonales

viii) Finalmente, los vectores

$$X_2 = \frac{1}{\|U\|} U \quad \text{y} \quad X_3 = \frac{1}{\|V\|} V$$

son dos vectores propios de T, es decir de A, ortogonales y unitarios en el plano $\mathcal{P}$.

Daremos ahora los detalles del plan anterior.

i) Empezaremos por probar (14.10).

Sea $X \in \mathcal{P}$. Entonces

$$\begin{aligned} T(X) \cdot X_1 &= AX \cdot X_1 \\ &= X \cdot AX_1 \qquad (\text{por } (14.9)) \\ &= X \cdot (\lambda_1 X_1) \\ &= \lambda_1 (X \cdot X_1) \\ &= 0 \qquad (\text{pues } X \cdot X_1 = 0 \text{ ya que } X \in \mathcal{P}) \end{aligned}$$

luego $T(X) \in \mathcal{P}$

ii) Consideremos la transformación T^*. Es claro que para todo par de vectores X, Y de $\mathcal{P}$

$$T^*(X) \cdot Y = X \cdot T^*(Y) \tag{14.11}$$

ya que

$$T^*(X) \cdot Y = T(X) \cdot Y = AX \cdot Y = X \cdot AY = X \cdot T(Y) = X \cdot T^*(Y)$$

iii) Pasamos ahora a identificar el plano $\mathcal{P}$ con $\mathbb{R}^2$.

Sean F_1, F_2 dos vectores de $\mathcal{P}$ unitarios y ortogonales. Cada vector X de $\mathcal{P}$ puede ser expresado de manera única como

$$X = x_1 F_1 + x_2 F_2$$

siendo

$$x_1 = X \cdot F_1 \quad \text{y} \quad x_2 = X \cdot F_2 \tag{14.12}$$

Consideremos la función $\phi : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la cual asigna al vector $X = x_1F_1 + x_2F_2$ de $\mathcal{P}$, el par $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$. Es claro que esta función es uno a uno y sobre, es decir, ϕ es biyectiva.

Emplearemos la aplicación ϕ para identificar cada vector $X = x_1F_1 + x_2F_2$ del plano $\mathcal{P}$ con el par $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ y con ello identificarémos el plano $\mathcal{P}$ con $\mathbb{R}^2$.

Nótese que F_1 se identifica con $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ pues $F_1 = 1F_1 + 0F_2$; similarmente F_2 se identifica con $E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

iv) Una vez identificado el plano $\mathcal{P}$ con $\mathbb{R}^2$, la transformación $T^* : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ da lugar a una transformación $\widetilde{T} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ como se explica a continuación:

Sea $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ en $\mathbb{R}^2$. Como ya sabemos, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ se identifica con el vector $X = x_1F_1 + x_2F_2$ de $\mathcal{P}$; por otra parte, como $T^*(X)$ es un vector de $\mathcal{P}$, existen escalares $\widetilde{x}_1$, $\widetilde{x}_2$ tales que

$$T^*(X) = \widetilde{x}_1 F_1 + \widetilde{x}_2 F_2$$

y así $T^*(X)$ se identifica con el par $\begin{pmatrix} \widetilde{x}_1 \\ \widetilde{x}_2 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$. Pues bien, la transformación $\widetilde{T}$ envía $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} \widetilde{x}_1 \\ \widetilde{x}_2 \end{pmatrix}$.

Resumiendo, la transformación $T^* : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ definida por

$$T^*(x_1F_1 + x_2F_2) = \widetilde{x}_1 F_1 + \widetilde{x}_2 F_2$$

da lugar a la transformación

$$\begin{array}{rccc} \widetilde{T}: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & \longmapsto & \widetilde{T}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{x}_1 \\ \widetilde{x}_2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Téngase presente que

$$T^*(x_1F_1 + x_2F_2) = \widetilde{x}_1 F_1 + \widetilde{x}_2 F_2 \quad \Leftrightarrow \quad \widetilde{T}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{x}_1 \\ \widetilde{x}_2 \end{pmatrix} \tag{14.13}$$

En la figura 14.6 se ilustra la identificación entre $\mathcal{P}$ y $\mathbb{R}^2$ y la relación entre las transformaciones T^* y $\widetilde{T}$.

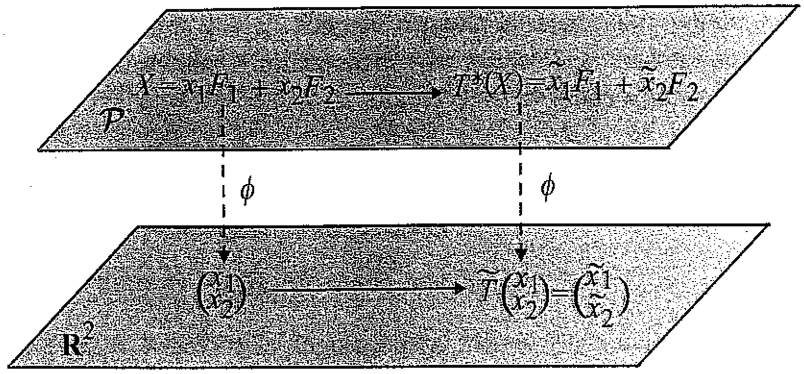


Figura 14.6.

Se deja al lector comprobar que $\widetilde{T}$ es una transformación lineal.

v) Sea ahora $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ la matriz de $\widetilde{T}$. Veamos que esta matriz es simétrica:

Puesto que

$$\widetilde{T}(E_1) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \widetilde{T}(E_2) = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

entonces (vea (14.13)),

$$T^*(F_1) = aF_1 + bF_2 \quad \text{y} \quad T^*(F_2) = cF_1 + dF_2$$

y como sabemos (vea (14.12))

$$\begin{aligned} a &= T^*(F_1) \cdot F_1, \quad b = T^*(F_1) \cdot F_2 \\ c &= T^*(F_2) \cdot F_1, \quad d = T^*(F_2) \cdot F_2 \end{aligned}$$

Ahora, usando (14.11), tenemos que

$$b = T^*(F_1) \cdot F_2 = F_1 \cdot T^*(F_2) = T^*(F_2) \cdot F_1 = c$$

luego la matriz de $\widetilde{T}$ es simétrica.

vi) Como la matriz de $\widetilde{T}$ es simétrica, podemos afirmar que $\widetilde{T}$ posee dos vectores propios $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ ortogonales.

vii) Sea $U = u_1F_1 + u_2F_2$ el vector de $\mathcal{P}$ que se identifica con el par $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$. Veamos que U es vector propio de A :

Para cierto valor propio λ de $\widetilde{T}$ se tiene

$$\widetilde{T}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \lambda u_2 \end{pmatrix}$$

y por tanto (vea (14.13)),

$$T^*(u_1F_1 + u_2F_2) = (\lambda u_1) F_1 + (\lambda u_2) F_2 = \lambda (u_1F_1 + u_2F_2)$$

es decir, el vector $U = u_1F_1 + u_2F_2$ del plano $\mathcal{P}$, es tal que

$$T^*(U) = \lambda U$$

o equivalentemente,

$$T(U) = \lambda U$$

lo cual prueba que el vector U del plano $\mathcal{P}$ es un vector propio de T, y por tanto, de la matriz A. De manera similar se prueba que el vector $V = v_1F_1 + v_2F_2$ es un vector propio de A en el plano $\mathcal{P}$.

Finalmente, los vectores U y V son ortogonales, pues

$$\begin{aligned} U \cdot V &= (u_1F_1 + u_2F_2) \cdot (v_1F_1 + v_2F_2) \\ &= u_1v_1 + u_2v_2 \\ &= \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \\ &= 0 \qquad \text{(ya que } \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \text{ son ortogonales)} \end{aligned}$$

viii) Por último, los vectores

$$X_2 = \frac{1}{\|U\|}U \qquad \text{y} \qquad X_3 = \frac{1}{\|V\|}V$$

son dos vectores propios de A ortogonales y unitarios en el plano $\mathcal{P}$. Así, los vectores X_1, X_2, X_3 son tres vectores propios de A ortogonales y unitarios. ♦

Prueba de 4.

Sean X_1, X_2, X_3 vectores propios de A ortogonales y unitarios, correspondientes a los valores propios λ_1, λ_2, λ_3, y sea

$$Q = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

Como X_1, X_2, X_3 son vectores propios de A linealmente independientes (pues son vectores de propios de A ortogonales y no nulos) entonces la matriz Q es invertible y tal que

$$A = Q \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} Q^{-1}$$

o, equivalentemente,

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \tag{14.14}$$

Veamos ahora que la matriz Q tiene la propiedad $Q^T = Q^{-1}$.

Para ello basta probar que

$$Q^TQ = I_3$$

Digamos que

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad X_3 = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$\begin{aligned} Q^T Q &= \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} X_1 \cdot X_1 & X_1 \cdot X_2 & X_1 \cdot X_3 \\ X_2 \cdot X_1 & X_2 \cdot X_2 & X_2 \cdot X_3 \\ X_3 \cdot X_1 & X_3 \cdot X_2 & X_3 \cdot X_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ahora, como X_1, X_2, X_3 son ortogonales

$$X_1 \cdot X_2 = X_1 \cdot X_3 = X_2 \cdot X_3 = 0$$

y como X_1, X_2, X_3 son unitarios

$$X_1 \cdot X_1 = X_2 \cdot X_2 = X_3 \cdot X_3 = 1$$

Luego,

$$Q^T Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

como se quería probar.

Es claro entonces que la igualdad (14.14) es equivalente a la igualdad

$$Q^T A Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \qquad \blacklozenge$$

Una matriz Q invertible y con la propiedad $Q^T = Q^{-1}$ es llamada una **matriz ortogonal.** Observe que en la prueba anterior (prueba de 4.) se ha probado que si las columnas de una matriz Q son vectores ortogonales y unitarios entonces Q es una matriz ortogonal; el lector puede probar fácilmente que, recíprocamente, si Q es una matriz de orden 3 ortogonal entonces sus columnas son vectores unitarios mutuamente ortogonales.

Observe que de los resultados en el último recuadro se obtiene el siguiente corolario:

> Si A es una matriz simétrica 3×3 entonces existen matrices Q y D, de orden 3, con Q ortogonal y D diagonal, tales que
> $$Q^T A Q = D$$

Este resultado se usará en el capítulo siguiente, para probar (empleando matrices y vectores) que toda ecuación de segundo grado

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + j = 0$$

con $d \neq 0$ o $e \neq 0$ o $f \neq 0$, siempre se puede transformar mediante una rotación del sistema xyz, en una ecuación de segundo grado de la forma

$$a' \left(x'\right)^2 + b' \left(y'\right)^2 + c' \left(z'\right)^2 + g'x' + h'y' + i'z' + j' = 0$$

(que carece de términos cruzados $x'y'$, $x'z'$ y $y'z'$).

Ejemplo 14.9
Considere la matriz simétrica

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Halle los valores propios de A y sus correspondientes espacios propios.
b) Halle matrices Q ortogonal y D diagonal tales que $Q^T AQ = D$.

Solución:
a) La ecuación característica de A es

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

El lector puede comprobar fácilmente que esta écuación es

$$(1-\lambda)(3-\lambda)(4-\lambda) = 0$$

Las raíces de esta ecuación son los números $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ y $\lambda_3 = 4$, los cuales son los valores propios de A.

Los espacios propios $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_3$ y $\mathcal{E}_4$ son, respectivamente, los conjuntos solución de los sistemas

$$(A - I_3)X = O, \quad (A - 3I_3)X = O \quad \text{y} \quad (A - 4I_3)X = O$$

Resolviendo estos sistemas se encuentra que

$\mathcal{E}_1$ es la recta generada por el vector $Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$\mathcal{E}_3$ es la recta generada por el vector $Y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$,

$\mathcal{E}_4$ es la recta generada por el vector $Y_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Observe que los vectores Y_1, Y_2, Y_3 son ortogonales dos a dos y por tanto las rectas $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_3$, $\mathcal{E}_4$ son mutuamente perpendiculares, como lo son los ejes coordenados.

b) Considere los vectores Y_1, Y_2, Y_3 indicados en *a*), los cuales son vectores propios de A ortogonales. Normalizándolos obtenemos los vectores unitarios

$$X_1 = \frac{1}{\|Y_1\|}Y_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \; X_2 = \frac{1}{\|Y_2\|}Y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \; X_3 = \frac{1}{\|Y_3\|}Y_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

los cuales siguen siendo vectores propios de A ortogonales dos a dos, correspondientes a los valores propios 1, 3, 4 respectivamente, ya que $X_1 \in \mathcal{E}_1$, $X_2 \in \mathcal{E}_2$ y $X_3 \in \mathcal{E}_4$.

Por tanto, la matriz

$$Q = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{6} & 0 & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

es una matriz ortogonal tal que

$$Q^T AQ = D$$

donde

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \blacksquare$$

Ejemplo 14.10

Considere la matriz simétrica

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Halle los valores propios de A y los correspondientes espacios propios.

b) Halle matrices Q ortogonal y D diagonal tales que $Q^T AQ = D$.

Solución:

a) El lector puede comprobar que

$$\det(A - \lambda I_3) = (1 - \lambda)^2 (10 - \lambda)$$

y por tanto la ecuación característica de A es

$$(1 - \lambda)^2 (10 - \lambda) = 0$$

Las raíces de esta ecuación son los números $\lambda_1 = 1$ (esta raíz se repite, apareciendo dos veces) y $\lambda_2 = 10$ (raíz que no se repite). Por tanto, los dos valores propios de A son $\lambda_1 = 1$ (que aparece dos veces) y $\lambda_2 = 10$ (que aparece una sola vez).

Los espacios propios $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_{10}$ son, respectivamente, los conjuntos solución de los sistemas

$$(A - I_3)X = O \quad \text{y} \quad (A - 10I_3)X = O$$

Resolviendo estos sistemas se encuentra que $\mathcal{E}_1$ es el plano generado por los vectores $Y_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $Y_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, y $\mathcal{E}_{10}$ es la recta generada por el vector $Y_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Observe que el vector Y_3 es ortogonal tanto a Y_1 como a Y_2, de manera que la recta $\mathcal{E}_{10}$ es perpendicular al plano $\mathcal{E}_1$; nótese además, que Y_1 y Y_2 no son ortogonales. La situación de los espacios propios y de los vectores Y_1, Y_2, Y_3 se ilustra en la figura 14.7.

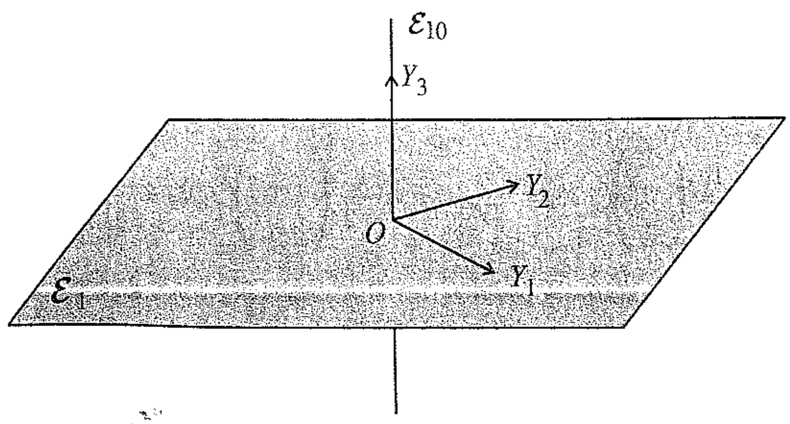


Figura 14.7.

Todos los vectores no nulos en el plano $\mathcal{E}_1$ son vectores propios de A correspondientes al valor propio $\lambda_1 = 1$; es claro entonces que en $\mathcal{E}_1$ hay dos vectores propios de A ortogonales y unitarios. Una manera de hallarlos es la siguiente:

Fijemos (por ejemplo) el vector Y_1 y hallemos en el plano $\mathcal{E}_1$ un vector $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ortogonal a Y_1.

Puesto que una ecuación para el plano $\mathcal{E}_1$ es

$$2x + 2y + z = 0$$

(pues $Y_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ es un vector normal al plano $\mathcal{E}_1$) entonces el vector $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ debe satisfacer esta ecuación y además ser ortogonal a Y_1, es decir, debe satisfacer también la ecuación

$$-x + y = 0$$

Resolviendo el sistema

$$\begin{aligned} 2x + 2y + z &= 0 \\ -x + y &= 0 \end{aligned}$$

encontramos que sus soluciones son los vectores $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de la forma

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z/4 \\ -z/4 \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -1/4 \\ -1/4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Luego, un vector del plano $\mathcal{E}_1$ ortogonal al vector Y_1 es, por ejemplo, el vector $Y_2^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ el cual se obtiene haciendo $z = -4$ en la igualdad anterior.

Por tanto, los vectores Y_1 y Y_2^* son dos vectores propios de A, ortogonales, correspondientes al valor propio 1.

Tenemos así que los vectores

$$Y_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Y_2^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad Y_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

son vectores propios de A ortogonales dos a dos. Normalizándolos obtenemos los vectores unitarios

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{1}{\|Y_1\|} Y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \frac{1}{\|Y_2^*\|} Y_2^* = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \\ X_3 &= \frac{1}{\|Y_3\|} Y_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

los cuales siguen siendo vectores propios de A ortogonales, con X_1, X_2 correspondiendo al valor propio $\lambda_1 = 1$ y X_3 correspondiendo al valor propio $\lambda_2 = 10$.

Por tanto, la matriz

$$Q = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/3\sqrt{2} & 2/3 \\ 1/\sqrt{2} & 1/3\sqrt{2} & 2/3 \\ 0 & -4/3\sqrt{2} & 1/3 \end{pmatrix}$$

es una matriz ortogonal tal que

$$Q^T AQ = D$$

donde

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \quad \blacksquare$$

14.3 Ejercicios

Sección 14.1

1. Sea A una matriz de orden 3 tal que su ecuación característica es

$$\det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 3\lambda - 9 = 0$$

a) Hallar los valores propios de A.

b) Para cada una de las siguientes matrices determinar si ella es invertible: $A + I$, $A + 3I$, $A - 3I$.

c) Hallar el determinante de A.

2. *a*) Sea T la transformación lineal del espacio definida por

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + 7y + 9z \\ -4x - 5y + z \\ 2x + 4y + 4z \end{pmatrix}$$

Determinar si $X = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $Y = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ son vectores propios de T y si alguno de ellos lo es, decir a cuál valor propio corresponde.

b) Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$. Sabiendo que $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $Z = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ son vectores propios de A, hallar los escalares a, b, c, d, e y f.

3. *a*) Probar que si A es una matriz triangular superior o inferior de orden 3 entonces los valores propios de A son las componentes de su diagonal principal.

b) Para la matriz A dada en cada numeral, hallar los valores propios de A y los correspondientes espacios propios.

$i)\ A=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$ $\qquad ii)\ A=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&3&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$

4. Para la matriz A dada en cada numeral:

   a) Hallar los valores propios de A.

   b) Hallar los espacios propios de A e interpretarlos geométricamente.

   c) ¿Posee A tres vectores propios linealmente independientes? En caso afirmativo, hallarlos.

   $i)\ A=\begin{pmatrix}1&3&3\\-3&-5&-3\\3&3&1\end{pmatrix}$ $\qquad ii)\ A=\begin{pmatrix}4&0&0\\1&4&0\\0&0&5\end{pmatrix}$

   $iii)\ A=\begin{pmatrix}1&1&-1/2\\1/2&3/2&-1/2\\-1/2&-1&1\end{pmatrix}$ $\qquad iv)\ A=\begin{pmatrix}-2&-4&-3\\4&6&3\\-3&-3&-1\end{pmatrix}$

5. Para la transformación lineal T dada en cada numeral:

   a) Hallar los valores propios de T.

   b) Hallar los espacios propios de T e interpretarlos geométricamente.

   $i)$ T es tal que $m(T)=\begin{pmatrix}2&1&3\\1&2&3\\3&3&10\end{pmatrix}$ $\qquad ii)\ T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}z\\0\\0\end{pmatrix}$

   $iii)$ T es la transformación nula de $\mathbb{R}^3$.

   $iv)$ T es tal que $T(E_1)=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, $T(E_2)=\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}$ y $T(E_3)=\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$

   $v)$ T es la transformación identidad de $\mathbb{R}^3$.

   $vi)$ $T=R_\theta^x$ con $0\leq\theta\leq 2\pi$

6. Hallar una matriz A de orden 3 tal que los vectores $X_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $X_2=\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}$ y $X_3=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$ son vectores propios de A correspondientes respectivamente a los valores propios $\lambda_1=6$, $\lambda_2=0$ y $\lambda_3=0$.

7. Para la matriz A, dada en cada literal, encontrar al menos un valor de c para el cual A tenga tres vectores propios linealmente independientes, en R^3.

   $a)\ A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&c&0\end{pmatrix}$ $\qquad b)\ A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\c&0&0\end{pmatrix}$

8. Para la matriz A, dada en cada literal, determinar si existen matrices P invertible y D diagonal tales que $A=PDP^{-1}$ y en caso afirmativo, hallar tales matrices.

$a)$ $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ $b)$ $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$c)$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $d)$ $A = \begin{pmatrix} -3 & -7 & -5 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

9. Sea T una transformación lineal del espacio.

   $a)$ Demostrar que todo vector propio de T corresponde a un único valor propio de T, es decir, un vector propio de T no puede pertenecer a dos espacios propios diferentes.

   $b)$ Demostrar que si X es un vector propio de T correspondiente a un valor propio λ entonces para todo $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, el vector cX también es un vector propio de T correspondiente a λ.

   $c)$ Demostrar que si X y Y son vectores propios de T correspondientes a un valor propio λ entonces $X + Y$ también es un vector propio de T correspondiente a λ, siempre que $X + Y \neq O$.

   $d)$ Demostrar que si U es un vector propio de T correspondiente a un valor propio λ y $\mathcal{L}_U$ es la recta generada por el vector U entonces la imagen bajo T de cada vector de $\mathcal{L}_U$ es también un vector de $\mathcal{L}_U$.

Sección 14.2

10. Para la matriz dada, en cada literal, hallar los valores de a, b y c de tal forma que la matriz sea simétrica.

   $a)$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ a & 2 & 1 \\ b & c & 3 \end{pmatrix}$ $b)$ $\begin{pmatrix} 1 & a & 3 \\ b & 2 & 4 \\ 3 & c & 0 \end{pmatrix}$

   $c)$ $\begin{pmatrix} a & -2 & 1 \\ -2 & 3 & b \\ c & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $d)$ $\begin{pmatrix} 2 & a-2b+2c & 2a+b+c \\ 3 & 5 & a+c \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix}$

11. Para la matriz A, dada en cada literal, determinar si A es ortogonal y, en caso afirmativo, hallar su inversa.

   $a)$ $A = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$ $b)$ $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   $c)$ $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ $d)$ $A = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/3 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

12. $a)$ Mostrar que la matriz de la rotación R_θ^x por el ángulo θ, alrededor del eje x, es una matriz ortogonal, cualquiera sea el ángulo θ.

   $b)$ Mostrar que la matriz de la reflexión respecto al plano $x+y+z=0$ es una matriz ortogonal .

13. *a*) Hallar escalares a, b, c tales que la matriz $\begin{pmatrix} a & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ b & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ c & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$ sea una matriz ortogonal.

    b) Demostrar que si la matriz de coeficientes del sistema

$$\begin{aligned} a_1x + a_2y + a_3z &= d_1 \\ b_1x + b_2y + b_3z &= d_2 \\ c_1x + c_2y + c_3z &= d_3 \end{aligned}$$

es una matriz ortogonal entonces el sistema posee como única solución el vector $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ para el cual

$$\begin{aligned} x &= a_1d_1 + b_1d_2 + c_1d_3 \\ y &= a_2d_1 + b_2d_2 + c_2d_3 \\ z &= a_3d_1 + b_3d_2 + c_3d_3 \end{aligned}$$

14. Sean $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Sin calcular los espacios propios de A:

    a) Verificar que X y Y son vectores propios de A.

    b) Hallar matrices Q ortogonal y D diagonal tales que $D = Q^TAQ$.

15. Sean $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Sin calcular la ecuación característica de A:

    a) Mostrar que 5 es un valor propio de A y encontrar el espacio propio de A correspondiente a dicho valor propio.

    b) Mostrar que X es vector propio de A y determinar su valor propio correspondiente.

    c) ¿Posee A factorización $D = Q^TAQ$ con Q matriz ortogonal y D matriz diagonal? En caso afirmativo, encontrar matrices Q y D con las propiedades anteriores.

16. Para la matriz A dada en cada numeral:

    a) Hallar los valores propios y su respectivos espacios propios. Interpretar geométricamente cada espacio propio.

    b) Verificar que vectores propios de A correspondientes a valores propios diferentes son mutuamente ortogonales.

    c) ¿Posee A tres vectores propios unitarios y ortogonales? En caso afirmativo, hallarlos.

    d) Hallar matrices Q ortogonal y D diagonal tales que $D = Q^TAQ$.

    i) $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ *ii*) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$iii)$ $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad iv)$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

17. Sea A una matriz de orden 3 tal que sus valores propios son $\lambda_1 = -5$ y $\lambda_2 = 3$; además $\mathcal{E}_{-5}$ es el plano generado por $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $\mathcal{E}_3$ es la recta generada por $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$a)$ ¿Es la matriz A factorizable en la forma $A = PDP^{-1}$ con P matriz invertible y D matriz diagonal? En caso afirmativo, hallar matriz P y D con las propiedades anteriores.

$b)$ ¿Es la matriz A factorizable en la forma $A = QDQ^T$ con Q matriz ortogonal y D matriz diagonal? En caso afirmativo, hallar Q y D con la propiedades anteriores.

$c)$ Hallar la matriz A.

18. Si A es matriz simétrica de orden 3 tal que sus únicos valores propios son $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = -3$ y el espacio propio $\mathcal{E}_2$ es la recta generada por el vector $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$:

$a)$ Hallar el espacio propio $\mathcal{E}_{-3}$.

$b)$ Hallar matrices Q ortogonal y D diagonal tales que $D = Q^T AQ$.

$c)$ Hallar la matriz A.

15

Superficies cuádricas

15.1 Definiciones

En el capítulo 8 se estudió la ecuación de segundo grado en dos variables x, y

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Vimos allí que si una ecuación de la forma anterior representa algún lugar geométrico, es decir, si el conjunto de puntos $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ que la satisface es no vacío entonces dicho lugar geométrico es una cónica (parábola, elipse o hipérbola) o es uno de los casos degenerados de cónicas (un punto, una recta, dos rectas distintas paralelas o dos rectas distintas que se cortan).

Ahora nos ocuparemos de la ecuación de segundo grado en tres variables x, y, z

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0 \tag{15.1}$$

en la cual por lo menos uno de los coeficientes A, B, C, D, E y F es no nulo.

Sea $\mathcal{S}$ el conjunto de puntos $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ que satisface una ecuación del tipo (15.1). Exceptuando ciertos casos, $\mathcal{S}$ es llamado una **superficie cuádrica** o también una **superficie cuadrática.** En los casos exceptuados nos referiremos a $\mathcal{S}$ como una **superficie cuádrica (cuadrática) degenerada**; estos casos son los siguientes:

- $\mathcal{S}$ es vacío.
- $\mathcal{S}$ consta de un solo punto.
- $\mathcal{S}$ es una línea recta.
- $\mathcal{S}$ es un plano.
- $\mathcal{S}$ es la unión de dos planos distintos, los cuales pueden ser paralelos o pueden cortarse.

Por ejemplo, para la ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 = -1$$

se da que $\mathcal{S} = \phi$ y para la ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Ahora, para la ecuación

$$x^2 + y^2 = 0$$

vemos que el conjunto de puntos que la satisfacen es

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \Big/ \ x = 0 \text{ y } y = 0 \right\}$$

el cual es una recta, el eje z. Por otra parte, para las ecuaciones

$$z^2 = 0, \quad x^2 - 1 = 0, \quad x^2 - y^2 = 0$$

los conjuntos de puntos que las satisfacen son, respectivamente, el plano $z = 0$, la unión de los planos distintos $x = 1$ y $x = -1$, los cuales son paralelos, y la unión de los planos distintos $x = y$ y $x = -y$, los cuales se cortan.

En cuanto a las superficies cuádricas, afirmamos que hay nueve tipos distintos de ellas: elipsoides, hiperboloides de una hoja, hiperboloides de dos hojas, conos, cilindros elípticos, cilindros hiperbólicos, cilindros parabólicos, paraboloides elípticos y paraboloides hiperbólicos (la esfera es un caso particular de elipsoide, como lo es la circunferencia de la elipse).

Para cada uno de esos nueve tipos daremos la(s) forma(s) canónica(s) o estándar de la ecuación y dibujaremos las superficies teniendo en cuenta la siguiente información:

- Los interceptos con los ejes coordenados.
- Las **trazas** o intersecciones con los planos coordenados y también con planos paralelos a los planos coordenados.
- La simetría respecto a los planos coordenados, a los ejes coordenados y al origen.
- Extensión de la superficie: Valor que puede tomar cada una de las variables x, y, z

En muchos casos bastará sólo con parte de la información anterior para dibujar la superficie.

En lo que respecta a la simetría, se tiene que una superficies $\mathcal{S}$ es (por ejemplo) **simétrica respecto al eje** x si cada vez que un punto $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ está en $\mathcal{S}$, también lo está su simétrico respecto al eje x, el cual es el punto $\begin{pmatrix} x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$. En otras palabras, si cada vez que el punto $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ satisface la ecuación de $\mathcal{S}$, el punto $\begin{pmatrix} x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$ también la satisface.

De igual forma, la superficie $\mathcal{S}$ es (por ejemplo) **simétrica respecto al plano** xy si cada vez que un punto $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ está en $\mathcal{S}$, también lo está su simétrico respecto al plano xy, el cual es el punto $\begin{pmatrix} x \\ y \\ -z \end{pmatrix}$; es decir, si cada vez que el punto $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ satisface la ecuación de $\mathcal{S}$, el punto $\begin{pmatrix} x \\ y \\ -z \end{pmatrix}$ también la satisface. En forma similar se define la simetría de $\mathcal{S}$ respecto a los otros ejes coordenados y respecto a los otros planos coordenados. Por último, la superficie $\mathcal{S}$ es **simétrica respecto al origen** si cada vez que un punto $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ está en $\mathcal{S}$, también lo está su simétrico respecto al origen, el cual es el punto $\begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$; es decir, si cada vez que el punto $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ satisface la ecuación de $\mathcal{S}$, el punto $\begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$ también la satisface.

Entre las superficies cuádricas hay algunas que son superficies cilíndricas. A continuación explicaremos lo que se entiende por tal tipo de superficies.

Sean $\mathcal{C}$ una curva contenida en un plano y $\mathcal{L}$ una recta que no está en el plano que contiene a $\mathcal{C}$ y no es paralela a ese plano. Por cada punto de $\mathcal{C}$ trazamos una recta paralela a $\mathcal{L}$ y consideramos la unión de todas esas rectas así trazadas; dicha unión es una superficie la cual se dice una **superficie cilíndrica** o también un **cilindro**. La curva $\mathcal{C}$ se llama **directriz** de la superficie y cualquiera de las rectas paralelas a $\mathcal{L}$ que conforman la superficie se dice una **generatriz** de la superficie (vea figura 15.1a).

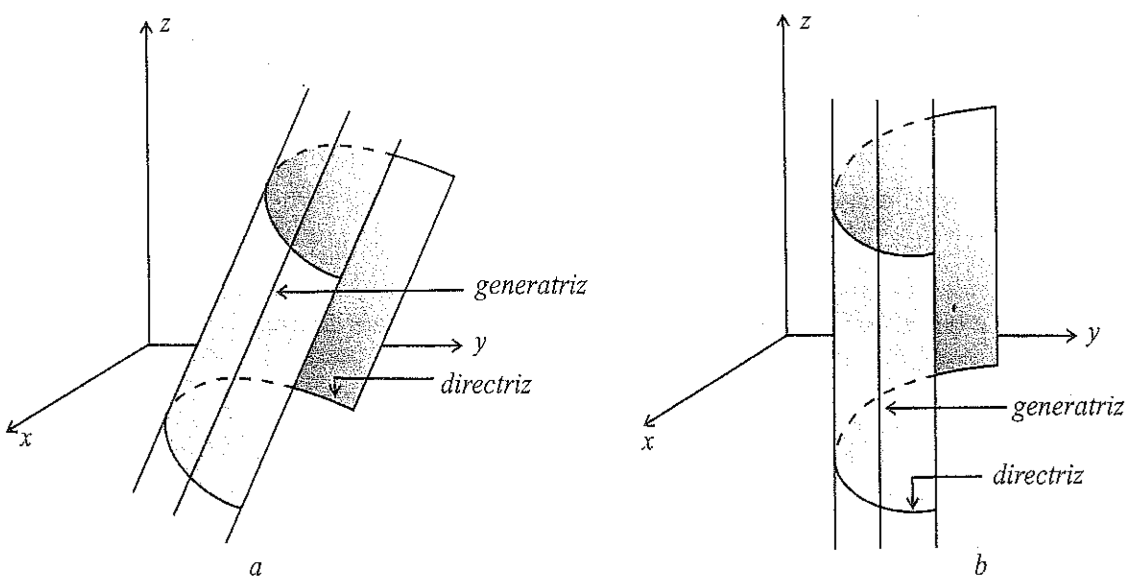


Figura 15.1.

Cuando las generatrices son perpendiculares al plano de la directriz (como en la figura 15.1b), la superficie se dice una **superficie cilíndrica recta** o un **cilindro recto**.

Consideremos, por ejemplo, el caso de una superficie cilíndrica recta $\mathcal{S}$ que tiene como directriz una curva $\mathcal{C}$ del plano xy descrita por $f(x,y)=0$ y $z=0$. Las generatrices son, por supuesto, paralelas al eje z.

Es claro que un punto $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ está en $\mathcal{S}$ si y sólo si el punto $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ está en $\mathcal{C}$, es decir, si y sólo si

$$f(x,y)=0$$

como se aprecia en la figura 15.2

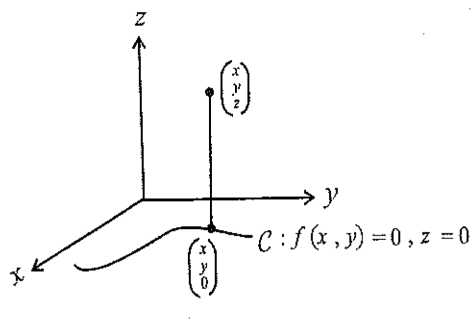


Figura 15.2.

Luego, la ecuación $f(x,y)=0$, considerada como una ecuación en x, y, z en la cual z puede tomar cualquier valor en $\mathbb{R}$, es una ecuación para la superficie cilíndrica recta $\mathcal{S}$.

En forma análoga, una ecuación

$$g(x,z)=0$$

corresponde en el espacio a una superficie cilíndrica recta cuyas generatrices son paralelas al eje y y que tiene como directriz la curva del plano xz descrita por

$$g(x,z)=0, \quad y=0$$

Igualmente, una ecuación

$$h(y,z)=0$$

corresponde en el espacio a una superficie cilíndrica recta cuyas generatrices son paralelas al eje x y que tiene como directriz la curva del plano yz descrita por

$$h(y,z)=0, \quad x=0$$

Pasaremos ahora sí a presentar los distintos tipos de superficies cuádricas. Como ya se dijo, para cada tipo daremos la(s) forma(s) canónica(s) de la ecuación, discutiremos una de ellas y la graficaremos; las constantes a, b, c que aparecen en dichas formas canónicas las asumiremos positivas.

15.2 Elipsoide

La forma canónica de la ecuación de un elipsoide es

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{15.2}$$

Interceptos con los ejes coordenados

Haciendo $y = 0$ y $z = 0$ en (15.2) se obtiene $x = \pm a$ y por tanto los interceptos de la superficie con el eje x son los puntos de este eje para los cuales $x = \pm a$. Análogamente, los interceptos con el eje y son los puntos de este eje para los cuales $y = \pm b$, y los interceptos con el eje z son los puntos del eje z con $z = \pm c$.

Simetría

Es claro que la superficie es simétrica respecto a cada eje coordenado, respecto a cada plano coordenado y respecto al origen. Por ejemplo, es simétrica respecto al eje x ya que cada vez que un punto $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ satisface la ecuación (15.2), también el punto $\begin{pmatrix} x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$ la satisface pues

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(-y)^2}{b^2} + \frac{(-z)^2}{c^2} = 1$$

En forma análoga, la superficie es simétrica respecto al origen pues al sustituir en (15.2) x por $-x$, y por $-y$ y z por $-z$, se obtiene la ecuación

$$\frac{(-x)^2}{a^2} + \frac{(-y)^2}{b^2} + \frac{(-z)^2}{c^2} = 1$$

la cual es equivalente a (15.2).

Trazas

La traza sobre el plano xy, es decir, sobre el plano $z = 0$, es la curva conformada por los puntos $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ con $z = 0$ y que satisfacen la ecuación (15.2), es decir, por los puntos $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tales que

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{y} \quad z = 0$$

ecuación que corresponde a una elipse contenida en el plano $z = 0$.

Análogamente, las trazas sobre los planos xz y yz son respectivamente, las elipses

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} &= 1, \quad y = 0 \\ \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} &= 1, \quad x = 0 \end{aligned}$$

Consideremos ahora la traza sobre un plano $y = y_0$, paralelo al plano xz: Al sustituir y por y_0 en la ecuación (15.2) se obtiene la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y_0^2}{b^2}$$

la cual muestra que si $-b < y_0 < b$ entonces dicha traza es una elipse, cuyo tamaño disminuye a medida que el plano $y = y_0$ se aleja del plano xz; es más, tal traza se reduce al punto $\begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$ si $y_0 = b$ y al punto $\begin{pmatrix} 0 \\ -b \\ 0 \end{pmatrix}$ si $y_0 = -b$. Nótese que si $|y_0| > b$, la superficie no tiene traza sobre el plano $y = y_0$.

Para las trazas sobre planos $x = x_0$ y $z = z_0$, la situación es completamente similar.

Extensión

De la discusión acerca de las trazas sobre planos paralelos a los planos coordenados se deduce que la superficie no tiene puntos $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ con $|x| > a$ o $|y| > b$ o $|z| > c$, es decir, si $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ es un punto de la superficie entonces

$$-a \leq x \leq a, \quad -b \leq y \leq b, \quad \text{y} \quad -c \leq z \leq c$$

A esta misma conclusión puede llegarse también así: Si el punto $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ satisface la ecuación (15.2) entonces

$$\frac{x^2}{a^2} \leq 1, \quad \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \quad \text{y} \quad \frac{z^2}{c^2} \leq 1$$

es decir,

$$x^2 \leq a^2, \quad y^2 \leq b^2 \quad \text{y} \quad z^2 \leq c^2$$

o equivalentemente

$$-a \leq x \leq a, \quad -b \leq y \leq b, \quad \text{y} \quad -c \leq z \leq c$$

De acuerdo con la información anterior vemos que el elipsoide tiene la forma mostrada en la figura 15.3.

Nótese que si, por ejemplo, $a = c$ entonces el elipsoide es una superficie de revolución que se genera al rotar la elipse

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad x = 0$$

(contenida en el plano yz) alrededor del eje y. En general, si cualesquiera dos de los denominadores en la ecuación (15.2) son iguales, la superficie es un elipsoide de revolución.

En el caso particular $a = b = c$, el elipsoide es una **esfera**, entendiéndose por esfera el conjunto de puntos $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ que equidistan de un punto fijo llamado **centro** de la esfera; la distancia de los puntos de la esfera a su centro se llama **radio**

Si una esfera tiene centro en el origen y radio r, un punto $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ está en dicha esfera si y sólo si

$$\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\| = r$$

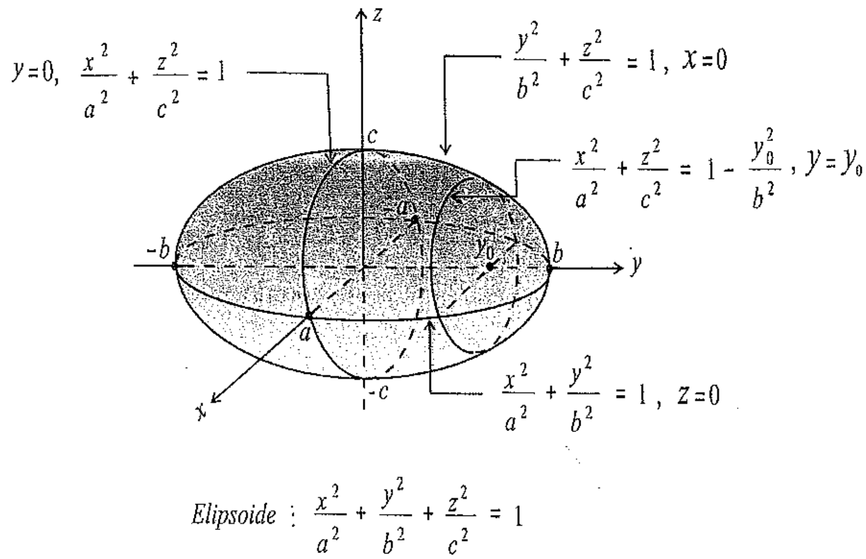


Figura 15.3.

o equivalentemente, si y sólo si $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ satisface la ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

la cual es la forma canónica de la ecuación de la esfera. Si en (15.2) se tiene $a = b = c$, dicha ecuación puede escribirse en la forma

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

la cual nos dice que en este caso el elipsoide es una esfera con centro en el origen y radio a.

15.3 Hiperboloide de una hoja

Una forma canónica de la ecuación de un hiperboloide de una hoja es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (15.3)$$

Las otras dos formas canónicas son:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad \text{y} \qquad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (15.4)$$

Analizaremos a continuación la ecuación (15.3); el análisis para las otras dos es completamente análogo.

Interceptos con los ejes coordenados

Con el eje x : $\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Con el eje y : $\begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ -b \\ 0 \end{pmatrix}$

La superficie no corta el eje z ya que al hacer $x = 0$ y $y = 0$ en (15.3), se obtiene la ecuación $-\dfrac{z^2}{c^2} = 1$ la cual no tiene solución para z en $\mathbb{R}$.

Simetría

La superficie es simétrica con respecto a cada eje coordenado, respecto a cada plano coordenado y respecto al origen.

Trazas

La traza en el plano xy, es decir, en el plano $z = 0$ es la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad z = 0$$

En general, la traza de la superficie sobre un plano $z = z_0$ (paralelo al plano xy) es la curva descrita por las ecuaciones

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{z_0^2}{c^2}, \quad z = z_0$$

la cual es una elipse (en el plano $z = z_0$), cuyo tamaño aumenta conforme $|z_0|$ crece, es decir, conforme el plano $z = z_0$ se aleja del plano xy. Por otra parte, las trazas sobre los planos xz y yz son respectivamente, las hipérbolas

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} &= 1, \quad y = 0 \\ \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} &= 1, \quad x = 0 \end{aligned}$$

También son hipérbolas las trazas sobre planos paralelos a los planos xz y yz, cualesquiera sean estos planos.

Extensión

De lo dicho acerca de las trazas sobre planos paralelos a los planos coordenados se deduce que cada una de las variables puede tomar cualquier valor en $\mathbb{R}$.

El hiperboloide de una hoja, correspondiente a la ecuación (15.3), tiene la forma mostrada en la figura 15.4

El eje z (eje asociado con la variable correspondiente al coeficiente negativo) se llama **eje del hiperboloide**. Nótese que si $a = b$, la traza del hiperboloide sobre cualquier plano paralelo al plano xy es una circunferencia y por tanto, en este caso, el hiperboloide es una superficie de revolución que se genera al rotar la hipérbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad y = 0$$

(contenida en el plano xz) alrededor del eje z, o también al rotar alrededor del mismo eje, la hipérbola

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad x = 0$$

(contenida en el plano yz)

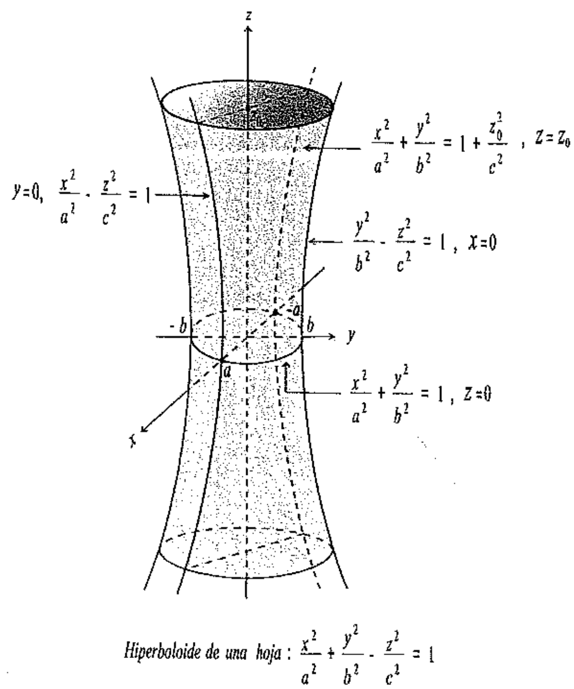


Figura 15.4.

15.4 Hiperboloide de dos hojas

Una forma canónica para la ecuación de un hiperboloide de dos hojas es

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{15.5}$$

Las otras dos formas canónicas son

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad \text{y} \qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{15.6}$$

Analizaremos la ecuación (15.5); el análisis para las otras dos ecuaciones es completamente análogo.

Interceptos con los ejes coordenados

Con el eje z : $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -c \end{pmatrix}$

La superficie no corta el eje x (ya que al hacer $y=0$ y $z=0$ se obtiene $-\frac{x^2}{a^2}=1$) ni al eje y (ya que al hacer $x=0$ y $z=0$ se obtiene $-\frac{y^2}{b^2}=1$)

Simetría

La superficie es simétrica respecto a cada eje coordenado, respecto a cada plano coordenado y respecto al origen.

Trazas

Las trazas sobre el plano xz y sobre el plano yz son, respectivamente, las hipérbolas

$$\begin{aligned} \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} &= 1, \quad y = 0 \\ \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} &= 1, \quad x = 0 \end{aligned}$$

No hay trazas sobre el plano xy, pues al hacer $z = 0$ en (15.5) se obtiene

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

La traza sobre cualquier plano horizontal $z = z_0$ es la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z_0^2}{c^2} - 1, \quad z = z_0$$

siempre y cuando $|z_0| > c$; esta elipse aumenta de tamaño a medida que $|z_0|$ aumenta. Para $z_0 = c$, dicha traza se reduce al punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$ y para $z_0 = -c$, al punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -c \end{pmatrix}$. Para $-c < z_0 < c$, la superficie no tiene traza sobre el plano $z = z_0$, es decir, la superficie no tiene puntos entre los planos horizontales $z = c$ y $z = -c$.

La traza sobre cualquier plano paralelo al plano xz y sobre cualquier plano paralelo al plano yz es una hipérbola.

Extensión

De lo dicho acerca de las trazas sobre planos paralelos a los planos coordenados se deduce que si un punto $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ está sobre la superficie entonces $|z| \geq c$, es decir, $z \geq c$ o $z \leq -c$. Por otra parte, cada una de las variables x, y puede tomar cualquier en $\mathbb{R}$.

La superficie tiene la forma mostrada en la figura 15.5

La superficie consta de dos piezas, llamadas **hojas del hiperboloide;** el eje z (eje correspondiente a la variable con coeficiente positivo en (15.5)) se dice el **eje del hiperboloide.**

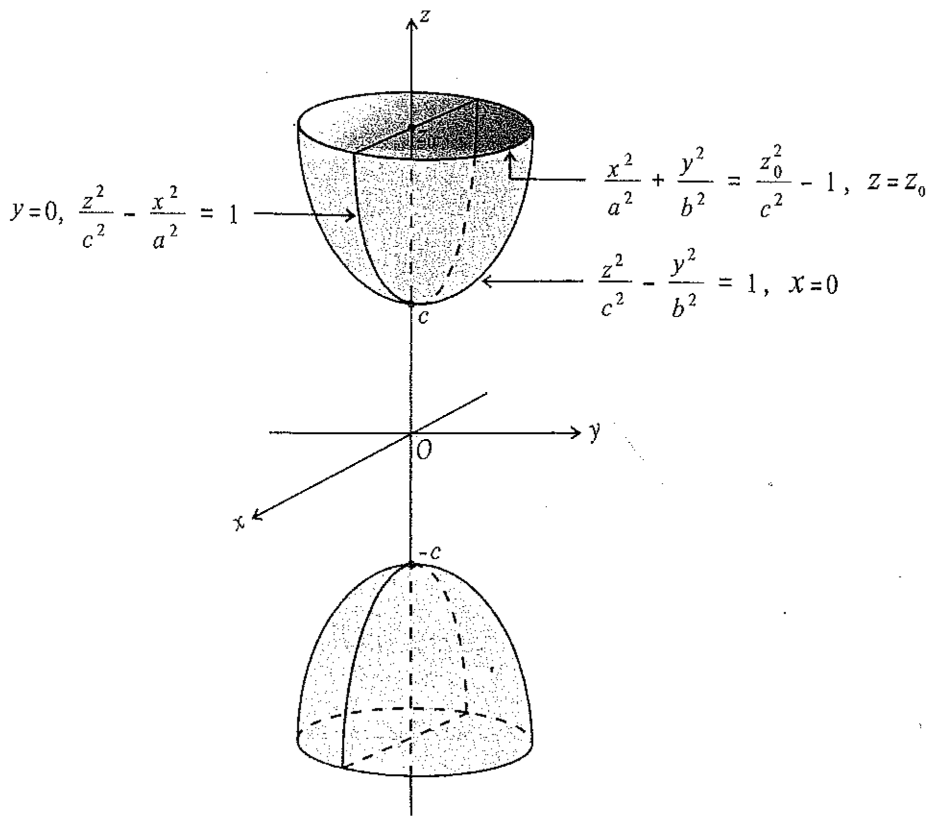
Cuando $a = b$, la traza del hiperboloide con cualquier plano horizontal $z = z_0$, con $|z_0| > c$, es una circunferencia y por tanto, en este caso, el hiperboloide es una superficie de revolución que se genera al rotar la hipérbola

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1, \quad y = 0$$

(situada en el plano xz) alrededor del eje z o también al rotar alrededor de este mismo eje la hipérbola

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad x = 0$$

(contenida en el plano yz).



Hiperboloide de dos hojas : $-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

Figura 15.5.

15.5 Cono elíptico

Una forma canónica para la ecuación de un cono elíptico es

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2} \tag{15.7}$$

Las otras dos formas canónicas son

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{y^2}{b^2} \quad \text{y} \quad \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{x^2}{a^2} \tag{15.8}$$

A continuación analizaremos la ecuación (15.7); el análisis para las otras dos ecuaciones es similar.

Interceptos con los ejes coordenados

La superficie corta los ejes coordenados únicamente en el origen.

Simetría

La superficie es simétrica respecto a cada eje coordenado, respecto a cada plano coordenado y respecto al origen.

Trazas

La traza sobre el plano xy se reduce al origen. Por otra parte, al hacer $y = 0$ en (15.7) se obtiene

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{z^2}{c^2}, \quad y = 0$$

o equivalentemente,

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = 0, \quad y = 0$$

lo cual nos dice que la traza con el plano xz (plano $y = 0$) esta formada por el par de rectas de este plano

$$\begin{aligned} \frac{x}{a} - \frac{z}{c} &= 0, \quad y = 0 \\ \frac{x}{a} + \frac{z}{c} &= 0, \quad y = 0 \end{aligned}$$

las cuales se cortan en el origen. De manera similar, la traza sobre el plano yz es la unión de las dos rectas

$$\begin{aligned} \frac{y}{b} - \frac{z}{c} &= 0, \quad x = 0 \\ \frac{y}{b} + \frac{z}{c} &= 0, \quad x = 0 \end{aligned}$$

las cuales también se cortan en el origen.

La traza de la superficie con cualquier plano horizontal $z = z_0$, $z_0 \neq 0$, es la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z_0^2}{c^2}, \quad z = z_0$$

la cual aumenta de tamaño conforme $|z_0|$ crece. Las trazas con planos paralelos a los otros dos planos coordenados son hipérbolas; por ejemplo, la traza con el plano vertical $y = y_0$, $y_0 \neq 0$, es el hipérbola

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{y_0^2}{b^2}, \quad y = y_0$$

Extensión

Las variables x, y, z pueden tomar cualquier valor en $\mathbb{R}$.

La superficie tiene la forma mostrada en la figura 15.6

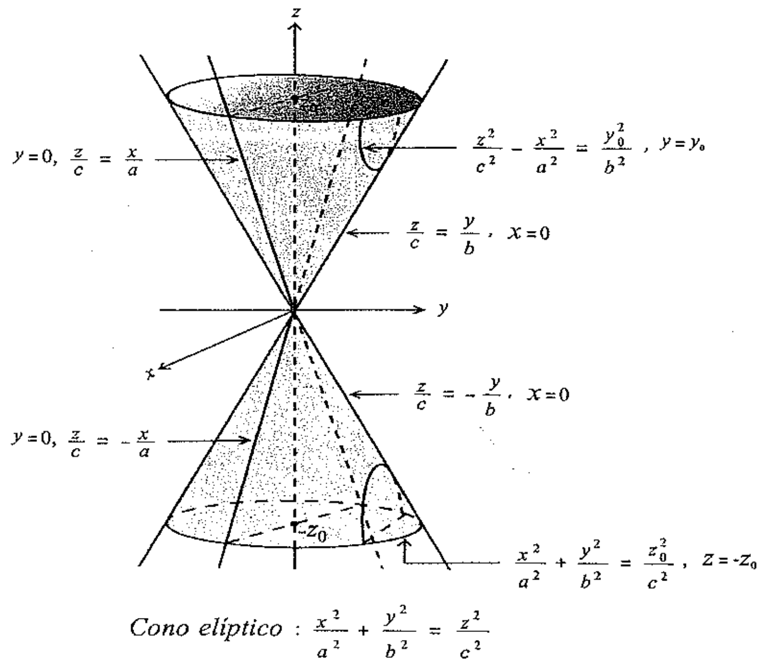


Figura 15.6.

El eje z (eje correspondiente a la variable despejada en (15.7)) se dice el **eje** del cono y el origen es llamado **vértice** del cono.

Cuando $a=b$, las trazas sobre planos horizontales son circunferencias y por tanto en este caso, el cono es una superficie de revolución que se obtiene al rotar alrededor del eje z (por ejemplo) la recta $\frac{z}{c}=\frac{x}{a}$; en lugar de cono elíptico la superficie se dice **cono circular**.

15.6 Cilindro recto elíptico

Una forma canónica para la ecuación de un cilindro recto elíptico es

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{15.9}$$

Las otras dos formas canónicas son

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \text{y} \quad \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{15.10}$$

A continuación nos referiremos a la ecuación (15.9). Esta ecuación, en la cual no aparece la variable z, corresponde a una superficie cilíndrica recta que tiene como directriz la elipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad z=0$$

contenida en el plano xy. En la figura 15.7 se muestra dicha superficie.

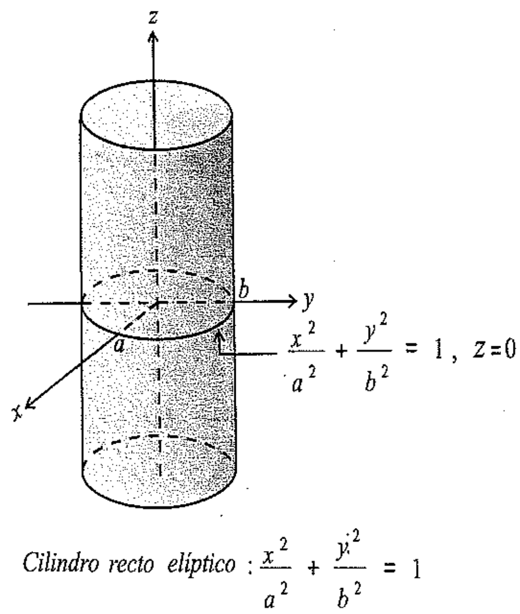


Figura 15.7.

El eje z (eje correspondiente a la variable que no figura en la ecuación) es el **eje** del cilindro.

Cuando $a = b$, la directriz del cilindro es la circunferencia

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad z = 0$$

En este caso el cilindro es una superficie de revolución y se dice un **cilindro circular recto**.

Para las otras dos ecuaciones en (15.10) la situación es similar.

15.7 Cilindro recto hiperbólico

Cualquiera de las ecuaciones siguientes es una forma canónica para la ecuación de un cilindro recto hiperbólico:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1 \tag{15.11}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = \pm 1 \quad \text{y} \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \pm 1 \tag{15.12}$$

Si por ejemplo, la ecuación es de la forma (15.11) con el signo + en el lado derecho, la superficie correspondiente es un cilindro recto que tiene como directriz la hipérbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad z = 0$$

contenida en el plano xy. La superficie tiene la forma mostrada en la figura 15.8

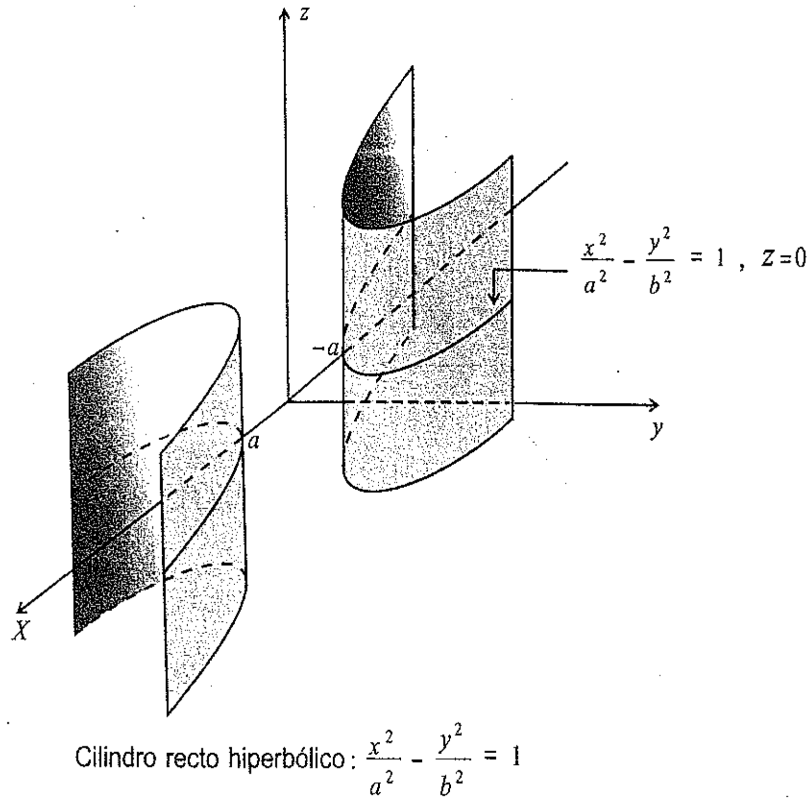


Figura 15.8.

Es de señalar que para cada una de las superficies correspondientes a las ecuaciones (15.2) a (15.12), el origen es un **centro de simetría**, en el sentido de que la superficie es simétrica respecto al origen. Por ello, dichas superficies son llamadas **cuádricas con centro**. Las superficies que siguen a continuación son llamadas **cuádricas sin centro**, porque ellas no poseen un centro de simetría.

15.8 Cilindro recto parabólico

Cualquiera de las ecuaciones siguientes es una forma canónica para un cilindro recto parabólico:

$$y = \pm ax^2, \quad x = \pm by^2 \tag{15.13}$$

$$z = \pm ax^2, \quad x = \pm cz^2, \quad y = \pm cz^2, \quad z = \pm by^2 \tag{15.14}$$

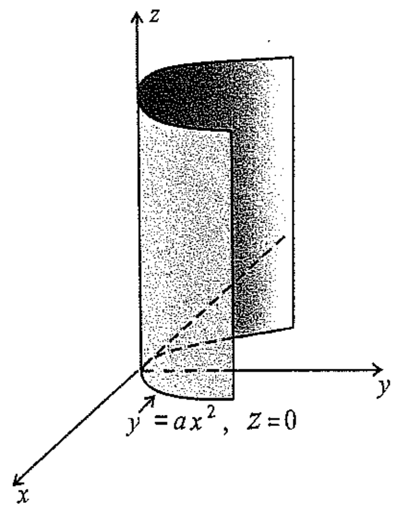
Si por ejemplo, la ecuación es

$$y = ax^2$$

la superficie correspondiente es un cilindro recto que tiene como directriz la parábola

$$y = ax^2, \quad z = 0$$

contenida en el plano xy. La superficie tiene la forma mostrada en la figura 15.9



Cilindro recto parabólico : $y = ax^2$, $a > 0$

Figura 15.9.

15.9 Paraboloide elíptico

Cualquiera de las ecuaciones siguientes es una forma canónica para la ecuación de un paraboloide elíptico:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \pm cz \tag{15.15}$$

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \pm ax, \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = \pm by \tag{15.16}$$

Analizaremos a continuación la ecuación (15.15) con el signo $+$ al lado derecho y $c > 0$; el análisis para las restantes ecuaciones es completamente similar.

Interceptos con los ejes coordenados.

La superficie pasa por el origen y no hay otros puntos de intersección entre la superficie y los ejes coordenados.

Simetría

La superficie es simétrica con respecto al eje z (pues al cambiar en (15.15) x por $-x$ y y por $-y$ se obtiene una ecuación equivalente), pero no lo es respecto a los otros ejes; también es simétrica con respecto a los planos xz y yz, pero no lo es respecto al plano xy, ni respecto al origen.

Trazas

Al hacer $z = 0$ en (15.15), se obtiene la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$$

la cual se satisface únicamente cuando $x = 0$ y $y = 0$; por tanto, la traza sobre el plano xy se reduce al origen. Por otra parte, todos los puntos $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ que satisfacen la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz$$

cumplen la condición $z \geq 0$, lo cual indica que la superficie está arriba del plano xy, exceptuando únicamente el origen. La traza sobre cualquier plano horizontal $z = z_0$, $z_0 > 0$, es la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz_0, \quad z = z_0$$

mientras que las trazas sobre los planos xz y yz son respectivamente, las parábolas

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} &= cz, \quad y = 0 \\ \frac{y^2}{b^2} &= cz, \quad x = 0 \end{aligned}$$

Las trazas sobre planos paralelos a los planos xz y yz también son parábolas.

Extensión

Las variables x, y pueden tomar cualquier valor, mientras que z sólo puede tomar valores no negativos.

La forma del paraboloide elíptico es como se muestra en la figura 15.10.

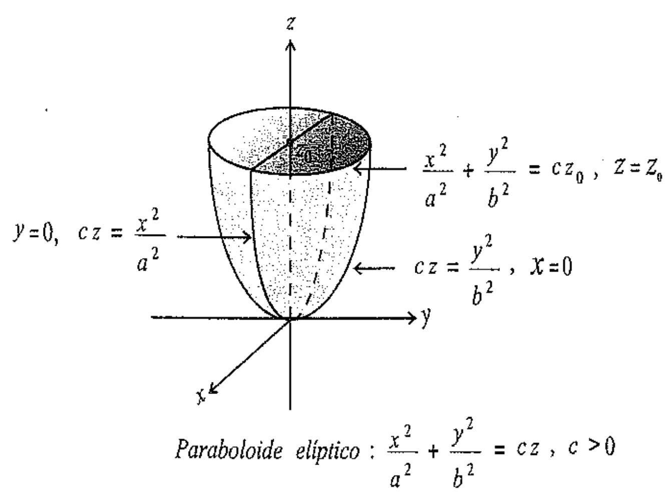


Figura 15.10.

Si $a = b$, las trazas con planos $z = z_0$, $z_0 > 0$, son circunferencias y por tanto, en este caso, el paraboloide es una superficie de revolución que se genera al rotar, por ejemplo, la parábola

$$cz = \frac{x^2}{a^2}, \quad y = 0$$

(contenida en el plano xz) alrededor del eje z. En este caso la superficie se dice un **paraboloide circular.**

15.10 Paraboloide hiperbólico

Cualquiera de las ecuaciones siguientes es una forma canónica para la ecuación de un paraboloide hiperbólico:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm cz \tag{15.17}$$

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \pm ax, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = \pm by \tag{15.18}$$

De ellas analizaremos a continuación la ecuación (15.17) con signo $-$ en el lado derecho, es decir, la ecuación

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = cz \tag{15.19}$$

El análisis de las otras ecuaciones es completamente similar.

Interceptos con los ejes coordenados

La superficie pasa por el origen y no hay otros puntos de intersección entre la superficie y los ejes coordenados.

Simetría

La superficie es simétrica respecto al eje z, pero no lo es respecto a los otros ejes; también es simétrica con respecto a los planos xz y yz, pero no lo es respecto al plano xy, ni respecto al origen.

Trazas

Si se hace $z = 0$ en (15.19) se obtiene

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 0$$

es decir,

$$\left(\frac{y}{b} - \frac{x}{a}\right)\left(\frac{y}{b} + \frac{x}{a}\right) = 0$$

Por tanto, la traza sobre el plano xy está conformada por las rectas

$$\begin{aligned} \frac{y}{b} - \frac{x}{a} &= 0, \quad z = 0 \\ \frac{y}{b} + \frac{x}{a} &= 0, \quad z = 0 \end{aligned}$$

las cuales se cortan en el origen. Por otra parte, las trazas sobre los planos xz y yz son, respectivamente, las parábolas

$$\begin{aligned} -\frac{x^2}{a^2} &= cz, \quad y = 0 \\ \frac{y^2}{b^2} &= cz, \quad x = 0 \end{aligned}$$

La traza sobre un plano horizontal $z = z_0$, $z_0 \neq 0$, es la hipérbola

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = cz_0, \quad z = z_0$$

la cual tiene su eje transverso paralelo al eje y cuando $z_0 > 0$, y paralelo al eje x cuando $z_0 < 0$.

Las trazas sobre los planos paralelos a los planos xz y yz son parábolas. Por ejemplo, la traza sobre el plano vertical $y = y_0$ es la parábola

$$\frac{x^2}{a^2} = -cz + \frac{y_0^2}{b^2}, \quad y = y_0$$

la cual se abre hacia abajo.

Extensión

Cada una de las variables x, y, z puede tomar cualquier valor en $\mathbb{R}$.

La forma del paraboloide hiperbólico es como se muestra en la figura 15.11

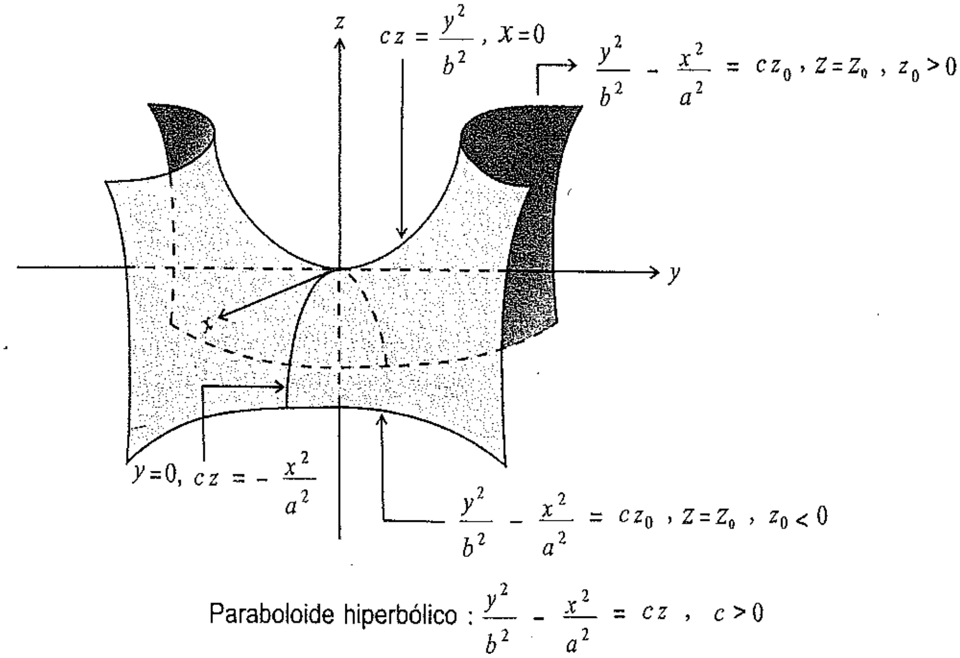


Figura 15.11.

15.11 Cambio de sistema de coordenadas

Tal como hicimos en el plano, acá consideraremos los cambios de coordenadas asociados con traslación y rotación de los ejes coordenados.

Traslación de ejes

De manera similar al plano, en el espacio se llama **traslación de los ejes coordenados** a la operación de mover los ejes coordenados de un sistema cartesiano xyz a otra posición, de manera que lo nuevos ejes coordenados x', $y,'$ z' sean respectivamente paralelos a los ejes x, y, z, y tengan la misma orientación positiva y también la misma unidad de medida de éstos (figura 15.12).

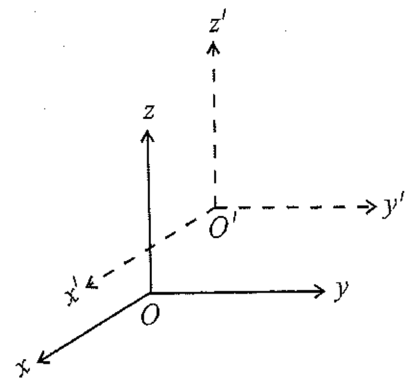


Figura 15.12.

Supongamos que se ha realizado una traslación de los ejes coordenados x, y, z y sea P un punto del espacio con terna de coordenadas $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ respecto al sistema xyz y con terna de coordenadas $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ respecto al nuevo sistema $x'y'z'$. Si el nuevo origen O' tiene terna de coordenadas $\begin{pmatrix} h \\ k \\ l \end{pmatrix}$ respecto al sistema xyz, el lector puede comprobar, razonando exactamente como en el caso de la traslación de ejes en el plano, que las nuevas coordenadas x', y', z' se relacionan con las viejas x, y, z según las ecuaciones

$$x' = x - h, \quad y' = y - k, \quad z' = z - l \tag{15.20}$$

o, equivalentemente, según las ecuaciones

$$x = x' + h, \quad y = y' + k, \quad z = z' + l \tag{15.21}$$

Al igual que para las ecuaciones de segundo grado en dos variables, algunas ecuaciones de segundo grado en tres variables x, y, z pueden simplificarse mediante una traslación de los ejes x, y, z como se ilustra en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 15.1
Consideremos la ecuación

$$x^2 + z^2 - 2x - 4y - 4z + 17 = 0 \tag{15.22}$$

Intentemos mediante una traslación de ejes, transformarla en una ecuación con el menor número posible de términos lineales.
Primer método. Usando las ecuaciones (15.21), sustituimos en la ecuación (15.22) x, y, z por $x' + h$, $y' + k$, $z' + l$ respectivamente. Se obtiene

$$\left(x' + h\right)^2 + \left(z' + l\right)^2 - 2\left(x' + h\right) - 4\left(y' + k\right) - 4\left(z' + l\right) + 17 = 0$$

Desarrollando los cuadrados y agrupando términos semejantes en x', y', z' esta ecuación toma la forma

$$(x')^2 + (z')^2 + 2(h-1)x' + 2(l-2)z' - 4y' + h^2 + l^2 - 2h - 4l - 4k + 17 = 0$$

Se observa que es posible hacer que la nueva ecuación no tenga términos lineales en x' y en z' (tomando $h = 1$ y $l = 2$), pero que es imposible hacer que ella no tenga término lineal en y'.

Ahora, con el ánimo de simplificar al máximo la ecuación (15.22), tomemos $h = 1$, $l = 2$ y elijamos k de tal modo que

$$h^2 + l^2 - 2h - 4l - 4k + 17 = 0$$

Sustituyendo en esta ecuación $h = 1$, $l = 2$ y despejando k se obtiene $k = 3$. Por tanto, si escogemos como nuevo origen el punto

$$O' = \begin{pmatrix} h \\ k \\ l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

la ecuación (15.22) tendrá, en las nuevas variables x', y', z', la forma más simple

$$(x')^2 + (z')^2 - 4y' = 0$$

es decir,

$$(x')^2 + (z')^2 = 4y' \tag{15.23}$$

Nótese que esta ecuación (15.23) está en forma canónica y corresponde a un paraboloide circular que tiene como eje al eje y' (ver figura 15.13).

Segundo método. Escribamos la ecuación (15.22) en la forma

$$(x^2 - 2x) + (z^2 - 4z) - 4y + 17 = 0$$

Completando los cuadrados en las expresiones en paréntesis se obtiene

$$(x^2 - 2x + 1) + (z^2 - 4z + 4) - 1 - 4 - 4y + 17 = 0$$

es decir,

$$(x-1)^2 + (z-2)^2 - 4y + 12 = 0$$

o, equivalentemente,

$$(x-1)^2 + (z-2)^2 = 4(y-3) \tag{15.24}$$

Por tanto, haciendo el cambio

$$x' = x - 1, \quad y' = y - 3, \quad z' = z - 2 \tag{15.25}$$

y sustituyendo en (15.24), obtenemos de nuevo la ecuación (15.23). Téngase presente que las ecuaciones en (15.25) corresponden a trasladar el sistema xyz de tal modo que el origen del nuevo sistema $x'y'z'$ sea el punto $O' = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ en el sistema xyz. ■

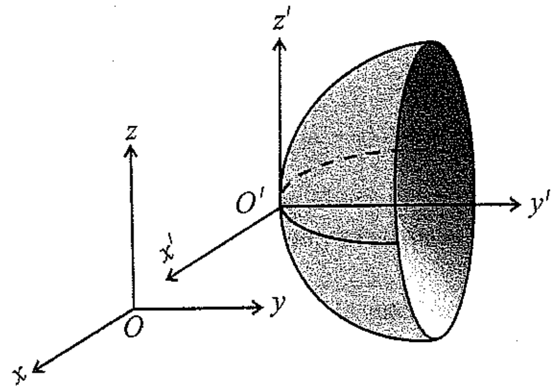


Figura 15.13.

Rotación de ejes

Entenderemos por una **rotación de ejes** en el espacio a la operación de mover los ejes coordenados de un sistema cartesiano xyz a una nueva posición, de manera que se mantenga fijo el origen y el nuevo sistema $x'y'z'$ esté orientado según la regla de la mano derecha (figura 15.14).

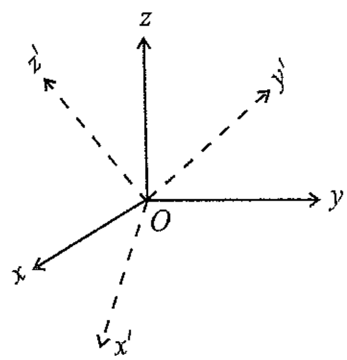


Figura 15.14.

Supongamos que se ha efectuado una rotación de los ejes x, y, z y sea P un punto del espacio cuya terna de coordenadas relativa al sistema xyz es $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y cuya terna coordenada relativa al nuevo sistema $x'y'z'$ es $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$. Veamos cómo se relacionan estas dos ternas de coordenadas del punto P.

Sean E_1, E_2, E_3 los vectores canónicos sobre los ejes x, y, z respectivamente y sean E_1', E_2', E_3' sus similares en el sistema $x'y'z'$. Puesto que

$$\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OE_1} + y\overrightarrow{OE_2} + z\overrightarrow{OE_3} \quad \text{y} \quad \overrightarrow{OP} = x'\overrightarrow{OE_1'} + y'\overrightarrow{OE_2'} + z'\overrightarrow{OE_3'}$$

entonces

$$x\overrightarrow{OE_1} + y\overrightarrow{OE_2} + z\overrightarrow{OE_3} = x'\overrightarrow{OE_1'} + y'\overrightarrow{OE_2'} + z'\overrightarrow{OE_3'}$$

o, equivalentemente,

$$xE_1 + yE_2 + zE_3 = x'E_1' + y'E_2' + z'E_3' \tag{15.26}$$

Digamos ahora que respecto al sistema xyz

$$E_1' = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}, \quad E_2' = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad E_3' = \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

En estas condiciones la igualdad (15.26) se convierte en

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x' \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} + y' \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} + z' \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

la cual pude escribirse en la forma

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \tag{15.27}$$

igualdad que nos da la relación entre las ternas de coordenadas $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$.

Si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ y $Q = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ la relación (15.27) toma la forma

$$X = QX' \tag{15.28}$$

Nótese que las columnas de Q son vectores unitarios y ortogonales y por tanto la matriz Q es una matriz ortogonal, es decir, Q tiene la propiedad

$$Q^{-1} = Q^T$$

y en consecuencia, de (15.28) se obtiene que

$$X' = Q^T X \tag{15.29}$$

Algo más, de la igualdad $I_3 = Q^T Q$ resulta que

$$1 = \det\left(Q^T Q\right) = \det\left(Q^T\right)\det(Q) = (\det(Q))^2$$

por tanto, $\det(Q) = \pm 1$. Ahora, como la terna de vectores E_1', E_2', E_3' está orientada positivamente y $Q = \begin{pmatrix} E_1' & E_2' & E_3' \\ | & | & | \end{pmatrix}$ entonces $\det(Q) = 1$.

En virtud de las relaciones (15.28) y (15.29) diremos que la matriz Q es la **matriz de paso del sistema $x'y'z'$ al sistema xyz** y que Q^T **es la matriz de paso** del sistema xyz al sistema $x'y'z'$.

Volvamos a la ecuación

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0 \tag{15.30}$$

y supongamos que al menos uno de los coeficientes D, E y F es no nulo.

A continuación probaremos que esta ecuación puede transformarse, mediante una rotación de ejes, en una ecuación de segundo grado de la forma

$$A'\left(x'\right)^2 + B'\left(y'\right)^2 + C'\left(z'\right)^2 + G'x' + H'y' + I'z' + J' = 0 \tag{15.31}$$

la cual ya no contiene términos cruzados $x'y'$, $x'z'$ ni $y'z'$.

Procederemos, empleando vectores y matrices, de manera completamente análoga a como lo hicimos en le capítulo 8 para el caso de una ecuación de segundo grado en dos variables x, y con término en xy.

En primer lugar, como el lector puede verificar, se tiene que

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & D/2 & E/2 \\ D/2 & B & F/2 \\ E/2 & F/2 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

es decir,

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz = X^T M X \tag{15.32}$$

donde

$$M = \begin{pmatrix} A & D/2 & E/2 \\ D/2 & B & F/2 \\ E/2 & F/2 & C \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

En segundo lugar,

$$Gx + Hy + Iz = U^T X$$

con

$$U = \begin{pmatrix} G \\ H \\ I \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Así, la ecuación (15.30) puede expresarse en la forma

$$X^T M X + U^T X + J = 0 \tag{15.33}$$

Ahora bien, dado que la matriz M es simétrica, existe una matriz ortogonal

$$Q = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

y existe una matriz diagonal

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

tales que

$$Q^T M Q = D$$

(Se le pide al lector recordar cómo se obtienen matrices Q y D que cumplan las condiciones anteriores)

Podemos suponer que $\det(Q) = 1$, pues si ello no es así es porque $\det(Q) = -1$ y en tal caso bastará intercambiar dos de sus columnas para tener $\det(Q) = 1$.

Teniendo que Q es ortogonal y $\det(Q) = 1$ consideramos la terna ordenada

$$E_1' = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}, \quad E_2' = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad E_3' = \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

(E_1' es la primera columna de Q, E_2' la segunda y E_3' la tercera) la cual está conformada por vectores unitarios y ortogonales y además está orientada positivamente. Pues bien, dicha terna de vectores determina un nuevo sistema cartesiano $x'y'z'$, con el mismo origen del sistema xyz, en el cual los vectores canónicos correspondientes a los ejes x', y', z' son precisamente dichos vectores E_1', E_2', E_3' respectivamente.

Sea $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ la terna de coordenadas en el sistema $x'y'z'$ del punto cuya terna de coordenadas en el sistema xyz es $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Como ya sabemos, la relación entre X' y X es (vea (15.28))

$$X = QX'$$

Ahora veremos que al sustituir X por QX' en la ecuación (15.33), ésta se convierte en una ecuación que no contiene términos cruzados. En efecto, al hacer dicha sustitución se obtiene

$$(QX')^T MQX' + U^T (QX') + J = 0. \tag{15.34}$$

En este punto usaremos el hecho de que $(QX')^T = (X')^T Q^T$ y así, la ecuación anterior puede escribirse como $(X')^T Q^T MQX' + U^T (QX') + J = 0$ y puesto que $Q^T MQ = D$, esta ecuación es equivalente a la ecuación

$$(X')^T DX' + U^T QX' + J = 0. \tag{15.35}$$

Ahora, como

$$(X')^T DX' = \begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \lambda_1 (x')^2 + \lambda_2 (y')^2 + \lambda_3 (z')^2$$

y

$$\begin{aligned} U^T QX' &= \begin{pmatrix} G & H & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1x' + a_2y' + a_3z' \\ b_1x' + b_2y' + b_3z' \\ c_1x' + c_2y' + c_3z' \end{pmatrix} \\ &= G(a_1x' + a_2y' + a_3z') + H(b_1x' + b_2y' + b_3z') \\ &\quad + I(c_1x' + c_2y' + c_3z') \\ &= (a_1G + b_1H + c_1I)x' + (a_2G + b_2H + c_2I)y' \\ &\quad + (a_3G + b_3H + c_3I)z' \end{aligned}$$

entonces la ecuación (15.35) es

$$\lambda_1 (x')^2 + \lambda_2 (y')^2 + \lambda_3 (z')^2 + G'x' + H'y' + I'z' + J = 0 \tag{15.36}$$

donde

$$\begin{aligned} G' &= a_1G + b_1H + c_1I \\ H' &= a_2G + b_2H + c_2I \\ I' &= a_3G + b_3H + c_3I \end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{pmatrix} G' \\ H' \\ I' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G \\ H \\ I \end{pmatrix} = Q^TU$$

Hemos probado así que la ecuación (15.30) se transforma mediante una rotación en la ecuación (15.36), la cual es de la forma (15.31). Nótese que el término constante J no cambia.

Puede probarse (y esto está fuera del alcance del texto) que mediante cambios apropiados de coordenadas, siempre es posible transformar una ecuación del tipo (15.1) en una ecuación de una de las siguientes formas:

$$\begin{aligned} \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 &= \delta \\ \alpha x^2 + \beta y^2 &= \gamma z \\ \alpha x^2 + \gamma z^2 &= \beta y \\ \beta y^2 + \gamma z^2 &= \alpha x \end{aligned}$$

De cualquiera de las ecuaciones anteriores es fácil pasar a una forma canónica que permita identificar el lugar geométrico correspondiente a la ecuación original.

Ejemplo 15.2

Para cada una de las ecuaciones dadas realice una rotación de ejes de tal forma que la ecuación transformada no tenga términos mixtos (o cruzados). Luego, si fuese necesario, realice una traslación de ejes con el propósito de eliminar o reducir a uno solo los términos lineales. Finalmente identifique el lugar geométrico correspondiente a la ecuación dada.

a) $4x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xy + 4xz - 2yz - \frac{6}{\sqrt{6}}x + \frac{12}{\sqrt{6}}y + \frac{6}{\sqrt{6}}z = 0$

b) $2x^2 + y^2 - 4xy - 4yz + 12x + 6y + 6z = 1$

c) $\frac{2}{5}x^2 + \frac{8}{5}y^2 - \frac{8}{5}xy + \frac{2}{\sqrt{5}}x - \frac{1}{\sqrt{5}}y = 0$

Solución *a*)

Empecemos escribiendo la ecuación dada en la forma

$$X^TMX + U^TX = 0 \tag{15.37}$$

donde

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad U = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -6 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Observe que la matriz M es simétrica. Dejamos que el lector muestre que los valores propios de M son los números $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 3$ y $\lambda_3 = 0$ y que los espacios propios correspondientes $\mathcal{E}_6$, $\mathcal{E}_3$ y $\mathcal{E}_0$ son, respectivamente, la recta generada por el vector $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, la recta generada por el vector $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ y la recta generada por el vector $X_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, las cuales son perpendiculares dos a dos, como debe ser dado que la matriz M es simétrica. Por tanto, tres vectores propios de M ortogonales dos a dos y unitarios, correspondientes respectivamente a $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 3$ y $\lambda_3 = 0$ son

$$Y_1 = \frac{X_1}{\|X_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; Y_2 = \frac{X_2}{\|X_2\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \; Y_3 = \frac{X_3}{\|X_3\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

El lector puede verificar que la terna ordenada Y_1, Y_2, Y_3 está orientada positivamente. Sean entonces

$$E_1' = Y_1, \quad E_2' = Y_2, \quad E_3' = Y_3$$

y formemos la matriz

$$Q = \begin{pmatrix} E_1' & E_2' & E_3' \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

Como sabemos, esta matriz Q es ortogonal, es decir, es invertible y $Q^{-1} = Q^T$ y además

$$Q^T M Q = D$$

donde

$$D = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Consideremos ahora el sistema cartesiano $x'y'z'$ que tiene el mismo origen del sistema xyz y tal que los vectores canónicos sobre los ejes x', y', z' son, respectivamente, los vectores E_1', E_2', E_3'; dicho sistema $x'y'z'$ está orientado según la regla de la mano derecha, pues la terna E_1', E_2', E_3' está orientada positivamente.

Los vectores de coordenadas $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ de un mismo punto, relativos a los sistemas xyz y $x'y'z'$ respectivamente, están relacionados (como sabemos) así:

$$X = QX' \tag{15.38}$$

Para transformar la ecuación dada en una ecuación en las nuevas variables x', y', z' sustituimos X por QX' en la ecuación (15.37), obteniéndose la ecuación

$$(X')^T Q^T M Q X' + U^T Q X' = 0$$

Puesto que $Q^T M Q = D$ entonces la ecuación anterior es equivalente a

$$(X')^T D X' + U^T Q X' = 0 \tag{15.39}$$

Ahora, como

$$(X')^T D X' = \begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = 6\,(x')^2 + 3\,(y')^2$$

y

$$U^TQX' = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -6 & 12 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = 6z'$$

entonces la ecuación (15.39) es equivalente a

$$6\left(x'\right)^2 + 3\left(y'\right)^2 + 6z' = 0 \tag{15.40}$$

Hemos transformado así la ecuación dada en la ecuación (15.40), la cual no contiene términos cruzados y tiene un solo término lineal.

La ecuación (15.40) a su vez es equivalente a la ecuación en forma canónica (en el sistema $x'y'z'$)

$$\left(x'\right)^2 + \frac{\left(y'\right)^2}{2} = -z'$$

la cual corresponde a un paraboloide elíptico, cuya forma se muestra en la figura 15.15

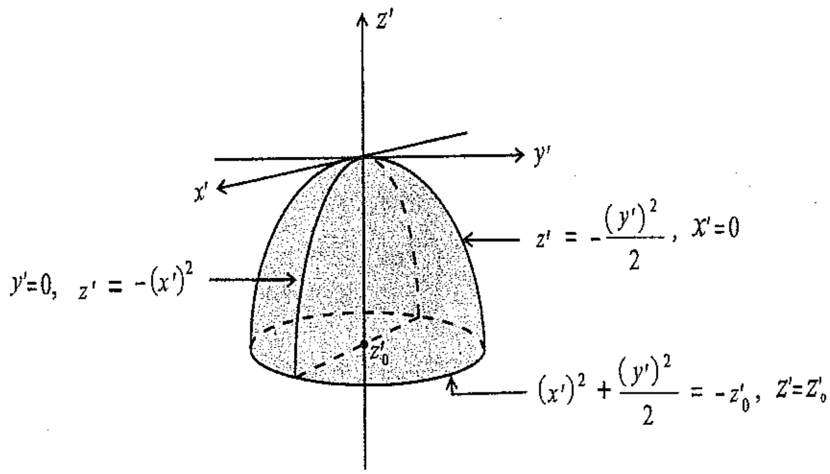


Figura 15.15.

Solución *b*)

Escribamos primero que todo la ecuación dada en la forma

$$X^TMX + U^TX = 1 \tag{15.41}$$

donde

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad U = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Observe que la matriz M es simétrica. Dejamos que el lector muestre que los valores propios de M son $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1$ y $\lambda_3 = 4$, y que los correspondientes espacios propios $\mathcal{E}_{-2}$, $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_4$ son, respectivamente, la recta generada por el vector $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, la recta generada por el vector $X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ y la recta generada por el vector $X_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$; las cuales son perpendiculares dos a dos, como debe ser dado que la matriz M es simétrica. Por tanto, tres vectores propios de M ortogonales dos a dos y unitarios, correspondientes respectivamente a $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1$ y $\lambda_3 = 4$ son

$$Y_1 = \frac{X_1}{\|X_1\|} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad Y_2 = \frac{X_2}{\|X_2\|} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad Y_3 = \frac{X_3}{\|X_3\|} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

El lector puede verificar que en este caso la terna ordenada Y_1, Y_2, Y_3 está orientada negativamente; luego (por ejemplo) la terna ordenada Y_2, Y_1, Y_3 está orientada positivamente.

Sean entonces

$$E_1' = Y_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad E_2' = Y_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad E_3' = Y_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y formemos la matriz

$$Q = \begin{pmatrix} E_1' & E_2' & E_3' \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

Como ya se sabe, esta matriz Q es ortogonal y

$$Q^T M Q = D$$

donde

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Consideremos ahora el sistema cartesiano $x'y'z'$ que tiene el mismo origen del sistema xyz y tal que los vectores canónicos sobre los ejes x', y', z' son, respectivamente, los vectores E_1', E_2' y E_3'; dicho sistema $x'y'z'$ está orientado según la regla de la mano derecha, ya que la terna E_1', E_2', E_3' se escogió orientada positivamente.

Como sabemos, la relación entre los vectores de coordenadas $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ de un mismo punto del espacio, relativos a los sistemas xyz y $x'y'z'$ respectivamente, está dada por

$$X = QX' \tag{15.42}$$

Sustituyendo X por QX' en la ecuación (15.41), esta ecuación se convierte en

$$(QX')^T MQX' + U^T QX' = 1$$

la cual es equivalente a

$$(X')^T Q^T MQX' + U^T QX' = 1$$

Como $Q^T MQ = D$ entonces la ecuación anterior es equivalente a la ecuación

$$(X')^T DX' + U^T QX' = 1 \tag{15.43}$$

Ahora,

$$\left(X'\right)^T DX' = \begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \left(x'\right)^2 - 2\left(y'\right)^2 + 4\left(z'\right)^2$$

y

$$U^T Q X' = \begin{pmatrix} 12 & 6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = 6x' + 12y' + 6z'$$

Luego, la ecuación (15.43) es equivalente a

$$\left(x'\right)^2 - 2\left(y'\right)^2 + 4\left(z'\right)^2 + 6x' + 12y' + 6z' = 1 \tag{15.44}$$

la cual no contiene términos cruzados.

Procederemos ahora a eliminar términos lineales en la ecuación (15.44), para lo cual la escribimos en la forma

$$\left[\left(x'\right)^2 + 6x'\right] - 2\left[\left(y'\right)^2 - 6y'\right] + 4\left[\left(z'\right)^2 + \frac{3}{2}z'\right] = 1$$

Completando los cuadrados en las expresiones entre corchetes, el lector puede comprobar que la ecuación anterior es equivalente a

$$\left(x' + 3\right)^2 - 2\left(y' - 3\right)^2 + 4\left(z' + \frac{3}{4}\right)^2 = -\frac{23}{4}$$

Por tanto, haciendo el cambio de variables

$$x'' = x' + 3, \quad y'' = y' - 3, \quad z'' = z' + \frac{3}{4} \tag{15.45}$$

la ecuación anterior adquiere la forma

$$\left(x''\right)^2 - 2\left(y''\right)^2 + 4\left(z''\right)^2 = -\frac{23}{4} \tag{15.46}$$

la cual ya no tiene términos cruzados ni lineales.

Téngase presente que el cambio de variables (15.45) corresponde a trasladar el sistema $x'y'z'$ de tal modo que el nuevo sistema $x''y''z''$ tenga como origen el punto $O'' = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -3/4 \end{pmatrix}$ respecto al sistema $x'y'z'$.

Por último, la ecuación (15.46) es equivalente a la ecuación en forma canónica (en el sistema $x''y''z''$)

$$-\frac{\left(x''\right)^2}{\frac{23}{4}} + \frac{\left(y''\right)^2}{\frac{23}{8}} - \frac{\left(z''\right)^2}{\frac{23}{16}} = 1 \tag{15.47}$$

la cual corresponde a un hiperboloide de dos hojas cuya forma en el sistema $x''y''z''$ se muestra en la figura 15.16

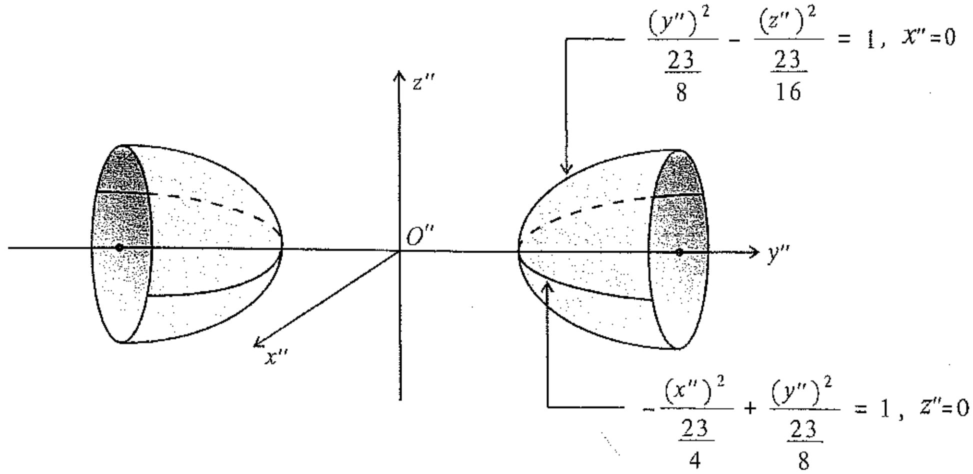


Figura 15.16.

Solución *c)*

Escribamos la ecuación dada en la forma

$$X^T M X + U^T X = 0 \tag{15.48}$$

donde

$$M = \begin{pmatrix} 2/5 & -4/5 & 0 \\ -4/5 & 8/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad U = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Observe que la matriz M es simétrica. Dejamos que el lector muestre que los valores propios de M son $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 0$, y que los espacios propios correspondientes $\mathcal{E}_2$ y $\mathcal{E}_0$, son respectivamente, la recta $\mathcal{L}$ generada por el vector $X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ y el plano $\mathcal{P}$ generado por los vectores $X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Nótese que la recta $\mathcal{L}$ es perpendicular al plano $\mathcal{P}$, como debe ser, dado que la matriz M es simétrica. Observe además, que los vectores X_2 y X_3 son ortogonales (si ésto no fuese así, habría que obtener dos vectores ortogonales no nulos en el plano $\mathcal{P}$ que sustituirían a los vectores X_2, X_3 en lo que sigue). Por tanto, tres vectores propios de M ortogonales y unitarios son los vectores

$$Y_1 = \frac{X_1}{\|X_1\|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Y_2 = \frac{X_2}{\|X_2\|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Y_3 = X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

con Y_1 correspondiente a $\lambda_1 = 2$ y Y_2, Y_3 correspondiendo a $\lambda_2 = 0$

El lector puede verificar que la terna ordenada Y_1, Y_2, Y_3 está orientada negativamente; así que (por ejemplo) la terna Y_1, Y_3, Y_2 está orientada positivamente.

Sean entonces

$$E_1' = Y_1, \quad E_2' = Y_3, \quad E_3' = Y_2$$

y formemos la matriz

$$Q = \begin{pmatrix} E_1' & E_2' & E_3' \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

la cual, como ya se sabe, es ortogonal y tal que

$$Q^T M Q = D$$

donde

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Consideremos ahora el sistema cartesiano $x'y'z'$ con el mismo origen del sistema xyz y tal que E_1', E_2', E_3' son los vectores canónicos correspondientes a los ejes x', y', z' respectivamente. Denotando $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ los vectores de coordenadas de un mismo punto del espacio, relativos a los sistemas xyz y $x'y'z'$ respectivamente, tenemos (como es sabido) que

$$X = QX'$$

Reemplazando X por QX' en la ecuación (15.48), ésta se convierte en

$$(QX')^T M Q X' + U^T Q X' = 0$$

o, equivalentemente, en

$$(X')^T \left(Q^T M Q\right) X' + U^T Q X' = 0$$

Como $Q^T M Q = D$, la ecuación anterior es equivalente a

$$(X')^T D X' + U^T Q X' = 0 \tag{15.49}$$

Ahora, como

$$(X')^T D X' = 2\,(x')^2$$

y

$$U^T Q X' = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = -\frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}z'$$

la ecuación (15.49) es equivalente a

$$2\,(x')^2 - \frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}z' = 0 \tag{15.50}$$

la cual no tiene términos cruzados.

Procederemos ahora a eliminar términos lineales en (15.50), para lo cual la escribimos en la forma

$$2\left((x')^2 - \frac{2}{5}x'\right) + \frac{3}{5}z' = 0$$

Completando el cuadrado en la expresión en paréntesis obtenemos

$$2\left((x')^2 - \frac{2}{5}x' + \frac{1}{25}\right) - \frac{2}{25} + \frac{3}{5}z' = 0$$

o, equivalentemente,

$$2\left(x' - \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{3}{5}\left(z' - \frac{2}{15}\right) = 0 \tag{15.51}$$

Así, haciendo el cambio de variables

$$x'' = x' - \frac{1}{5}, \quad y'' = y', \quad z'' = z' - \frac{2}{15}$$

la ecuación (15.51) se transforman en la ecuación

$$2\left(x''\right)^2 + \frac{3}{5}\left(z''\right) = 0 \tag{15.52}$$

la cual no tiene términos cruzados y sólo un término lineal. Por último, la ecuación (15.52) es equivalente a la ecuación en forma canónica

$$\left(x''\right)^2 = -\frac{3}{10}z''$$

la cual corresponde (en el sistema $x''y''z''$) al cilindro parabólico cuya forma se muestra en la figura 15.17.

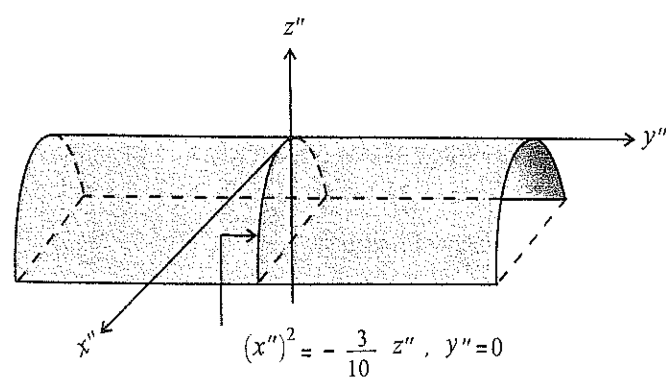


Figura 15.17.

15.12 Ejercicios

Sección 15.1 a sección 15.10

1. Considere la superficie S con ecuación

$$16y^2 + 16z^2 - 9x^2 + 144 = 0$$

a) Hallar la forma canónica para la ecuación de S, identificar la superficie S y determinar su eje.

b) Hallar los interceptos con los ejes coordenados.

c) Analizar la simetría con respecto a cada eje coordenado, a cada plano coordenado y al origen.

d) Hallar las trazas con los planos coordenados e identificarlas.

e) Hallar e identificar las trazas de la superficie con planos paralelos a los planos coordenados.

f) Con base en la información anterior, graficar la superficie.

2. Para la superficie S cuya ecuación está dada en cada literal, hallar la forma canónica para la ecuación de S, identificar la superficie S y graficarla.

a) $4x^2 + 9y^2 + z^2 = 36$ *b*) $3x^2 - 6y^2 + 2z^2 - 6 = 0$

c) $x^2 + 16z^2 = 4y^2 - 16$ *d*) $x^2 - y^2 + z^2 = 0$

e) $4y^2 + z^2 = 12x$ *f*) $4x^2 - y^2 + z = 0$

g) $4x^2 + y^2 = 4$ *h*) $x^2 - 4z = 0$

i) $4x^2 - 9y^2 = 36$

Sección 15.11

3. Para cada una de las siguientes ecuaciones cuadráticas, realizar una traslación de ejes coordenados para transformarla en una ecuación con el menor número de términos lineales. Escribir las ecuaciones de traslación y la nueva ecuación. Identificar el lugar geométrico correspondiente.

a) $9x^2 + 36y^2 + 4z^2 - 18x - 144y - 24z + 153 = 0$

b) $6x^2 + 3y^2 - 2z^2 + 12x - 18y - 8z + 7 = 0$

c) $x^2 - y^2 - z^2 - 4x - 2y + 8z = 14$

d) $4x^2 + 9y^2 - z^2 - 54y - 10z + 56 = 0$

e) $x^2 + 16z^2 + 2x - 32z - 16y = 15$

f) $7x^2 - 3y^2 + 126x + 72y + z + 135 = 0$

4. Para cada una de las siguientes ecuaciones, realizar una rotación de ejes de tal manera que la ecuación transformada no tenga términos mixtos. Escribir las ecuaciones de rotación. Si es necesario, realizar luego una traslación de ejes con el fin de eliminar o reducir a uno solo los términos lineales y escribir las ecuaciones de traslación.

Finalmente, hallar la ecuación respecto al último sistema coordenado e identificar la superficie.

a) $5x^2 + 5y^2 + 8xy + 4xz + 4yz + 2z^2 = 100$

b) $2xy + 2xz + 2yz - 6x - 6y - 4z + 9 = 0$

c) $144x^2 + 100y^2 + 81z^2 - 216xy - 540x - 720z = 0$

d) $2x^2 + 2y^2 + 5z^2 - 4xy - 2xz + 2yz + 10x - 26y - 2z = 0$

e) $2x^2 - 2xz + 2z^2 = 3$

f) $5x^2 - 8xy + 3y^2 + 8yz + z^2 = 27$

Respuestas

Respuestas Ejercicios Capítulo 1

Sección 1.1

2. 111.73 km.

Sección 1.2

3. magnitud 10440.31 libras fuerza, dirección 55.5°
4. 104.4 millas/hora en dirección $S\ 61.7°E$
5. $a)$ 1.7 km/h en dirección $N\ 28.07°E$ $b)$ 0.53 km

Sección 1.3

7. $c)$ $\overrightarrow{x} = \frac{9}{4}\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{y} = \frac{-5}{4}\overrightarrow{v}$
8. $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$
9. $\overrightarrow{DE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

Sección 1.4

12. $\overrightarrow{w} = \left(-1 - \sqrt{3}\right)\overrightarrow{u} - \dfrac{2\sqrt{6}}{3}\overrightarrow{v}$
13. $b)$ $\overrightarrow{w} = \frac{5}{4}\overrightarrow{u} - 2\overrightarrow{v}$
14. $\overrightarrow{w} = -\frac{5\sqrt{3}}{3}\overrightarrow{u} - \frac{5\sqrt{3}}{9}\overrightarrow{v}$
15. $a)$ 11.08, 47.67°
    $b)$ $a = 0.61$, $b = 1.12$
    $c)$ $\overrightarrow{u} = 1.64\overrightarrow{w} - 1.84\overrightarrow{z}$

Sección 1.5

16. $a)$ 2 $b)$ 3
17. $a)$ $-5/6$ $b)$ -5
18. $b)$ $\|\overrightarrow{p}\| = 1.81$, $\|\overrightarrow{q}\| = 6.76$
19. 3 libras

Seccion 1.6

20. -16
22. -6
25. $a)$ 150° $b)$ $2\sqrt{3}$

Sección 1.7

26. $a)$ $\overrightarrow{v} = -3\sqrt{2}\,\overrightarrow{i} - 3\sqrt{2}\,\overrightarrow{j}$ $b)$ $\overrightarrow{u} = 0\,\overrightarrow{i} - 5\,\overrightarrow{j} = -5\,\overrightarrow{j}$ $c)$ $\overrightarrow{w} = \frac{3\sqrt{3}}{2}\,\overrightarrow{i} + \frac{3}{2}\,\overrightarrow{j}$
27. $a)$ 5, 306.87° $b)$ $\overrightarrow{w} = -\frac{21}{5}\,\overrightarrow{i} + \frac{28}{5}\,\overrightarrow{j}$
    $c)$ $5.6\,\overrightarrow{i} - 0.8\,\overrightarrow{j}$, $-0.8\,\overrightarrow{i} - 5.6\,\overrightarrow{j}$

28. *a*) $\vec{i} - 11\vec{j}$, $\sqrt{122}$, $275.19°$
    b) $-3\vec{i} - 3\vec{j}$, $3\sqrt{2}$, $225°$
    c) $14\vec{i} - 16\vec{j}$, $2\sqrt{113}$, $311.19°$
29. $\vec{F} = -20\vec{i}$, $\vec{T_1} = 15\vec{i} + 5\sqrt{3}\vec{j}$, $\vec{T_2} = 5\vec{i} - 5\sqrt{3}\vec{j}$
31. *a*) -3 *b*) 170 *c*) $55\sqrt{2}$
32. *a*) 3 *b*) 4
33. *a*) ángulo agudo, $\frac{18}{13}\vec{i} - \frac{27}{13}\vec{j}$ *b*) perpendiculares, vector cero.
    c) ángulo obtuso, $-\frac{1}{17}\vec{i} - \frac{4}{17}\vec{j}$
34. *b*) $\vec{i} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{u_1} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{u_2}$, $\vec{j} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{u_1} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{u_2}$, $-2\vec{i} + 3\vec{j} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{u_1} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\vec{u_2}$
35. *a*) *i*) Si existen. *ii*) $a = 11$, $b = -2$
    b) *i*) No existen
36. *a*) $\alpha = -\frac{3}{4}$ *b*) $\alpha = \frac{1}{7}$
37. *a*) 4, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, no perpendiculares, $2\vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{i}$
    b) 0, 0, si son perpendiculares, $\vec{0}$, $\vec{0}$
    c) -6, $-\frac{9}{41}$, no perpendiculares, $-\frac{162}{41}\vec{i} + \frac{18}{41}\vec{j}$, $\frac{3}{82}\vec{i} - \frac{27}{82}\vec{j}$
38. *a*) $ac + bd > 0$ *b*) $ac + bd < 0$
39. *a*) $R = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \end{pmatrix}$ *b*) $R = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$
40. *a*) $\overrightarrow{QP} = \vec{i} - 3\vec{j}$, $\overrightarrow{QR} = 2\vec{i} + 2\vec{j}$, $\overrightarrow{PR} = \vec{i} + 5\vec{j}$
    c) $\overrightarrow{QM} = \frac{3}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j}$, $||\overrightarrow{QM}|| = \frac{\sqrt{10}}{2}$ *d*) $\overrightarrow{QB} = \vec{i} - \frac{1}{3}\vec{j}$, $||\overrightarrow{QB}|| = \frac{\sqrt{10}}{3}$
    e) $116.57°$ *f*) $\overrightarrow{QS} = 1.53\vec{i} - 0.36\vec{j}$
41. $\frac{51}{25}\vec{i} + \frac{68}{25}\vec{j}$, $-\frac{17}{26}\vec{i} + \frac{85}{26}\vec{j}$
42. *a*) $157.83°$, $10.22°$, $11.94°$ *b*) 5.5 unidades cuadradas.

Respuestas Ejercicios Capítulo 2

Sección 2.2

1. *b*) punto medio de $\overline{PQ}$: $\begin{pmatrix} 3/2 \\ 5/2 \end{pmatrix}$ punto medio de $\overline{QR}$: $\begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}$
   punto medio de $\overline{RS}$: $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ punto medio de $\overline{SP}$: $\begin{pmatrix} -5/2 \\ 3 \end{pmatrix}$

2. *a*) $R = \begin{pmatrix} -2 \\ -9 \end{pmatrix}$ *b*) $S = \begin{pmatrix} 14/5 \\ 3/5 \end{pmatrix}$ *c*) $M = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Sección 2.3

5. *a*) $\|Z\| = \sqrt{122}$, $dir\,(Z) = 95.19°$ *b*) $Z = -E_1 + 11E_2$
   c) $a = 3$ ó $a = -3$ *d*) $5\sqrt{2}$ *e*) $10.3°$ *f*) $90°$ *g*) $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ *h*) $b = \frac{3}{2}$
6. $X = \begin{pmatrix} -8/3 \\ 1/2 \end{pmatrix}$
7. $\begin{pmatrix} 6\sqrt{3} + 5\sqrt{2} \\ 6 - 5\sqrt{2} \end{pmatrix}$
8. *c*) $a = 2$, $b = -1$
9. *b*) $S = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ *c*) 5 unidades cuadradas.

10. *a*) $\begin{pmatrix} (-4-3\sqrt{3})/2 \\ (3-4\sqrt{3})/2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} (-4+3\sqrt{3})/2 \\ (3+4\sqrt{3})/2 \end{pmatrix}$ *b*) $\frac{25\sqrt{3}}{4}$ unidades cuadradas.
11. *a*) $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ -4/3 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} -1 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ *b*) 17/3 unidades cuadradas.
12. *a*) $(U \cdot V)W = \begin{pmatrix} 26 \\ 13 \end{pmatrix}$ *b*) $U \cdot (V+W) = -14$, $U/(V \cdot W) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$
13. *a*) 1 *b*) 8 *c*) 57 *d*) $\frac{7}{13}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ *e*) $-5\sqrt{5}$ *f*) $\sqrt{13}$
14. $m = -2$
15. *a*) $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ó $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ *b*) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ó $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ *c*) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ó $\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$
    d) $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ ó $\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$
    En todos los casos el paralelogramo es un cuadrado.
16. *b*) $2\sqrt{10}$, $2\sqrt{10}$, $2\sqrt{5}$
17. *b*) $5\sqrt{2}/2$, 3.64, 3.64 *c*) $5\sqrt{2}/2$, $\sqrt{53}/2$, $\sqrt{53}/2$, *d*) $\begin{pmatrix} -13/3 \\ 10/3 \end{pmatrix}$
18. $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 / (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \right\}$,
    circunferencia con centro en el punto P_0 y radio r.
19. $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\sqrt{5}$
20. *a*) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 / 6x - 4y + 3 = 0 \right\}$ *b*) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 \;/\; \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1 \right\}$
    c) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 / x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0 \right\}$
21. *b*) Se pueden construir tres paralelogramos y todos tienen la misma área.
22. 6.5 unidades cuadradas.
23. $t = 5$.
27. $P = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 33 \\ 44 \end{pmatrix}$ y $Q = \frac{2}{25}\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$

Respuestas Ejercicios Capítulo 3

Sección 3.1

1. *a*) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$ *b*) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$
   c) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$
3. $\begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix}$

Sección 3.2

4. *a*) No colineales. *b*) Colineales.
5. *a*) $x = 3 + \frac{\sqrt{3}}{3}t$, $y = t$ *b*) $x = -\frac{10}{3} + 3t$, $y = t$

Sección 3.3

6. *a*) $4x - y = -8$ *b*) $2x + y = -4/3$ *c*) $x = -3$
   d) $8x + 5y = 7$ *e*) $3x - 2y = -4$ *f*) $7x + 4y = 19$
7. *a*) $y = \frac{4}{3}x + \frac{4}{3}$ *b*) $y = 2x + 3$ *c*) $y = 0$

d) $y = -x + 7$

9. *a*) $F = \frac{9}{5}C + 32$ *c*) $68°F$ *d*) $30°C$ *e*) Sí, $-40°F = -40°C$.

10. $k = -3/5$, $h = 10/3$

Sección 3.4

11. *a*) $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ *b*) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ *c*) $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ *d*) $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ *e*) $\begin{pmatrix} 2/5 \\ 1 \end{pmatrix}$ *f*) $\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/7 \end{pmatrix}$.

Sección 3.5

13. *a*) No paralelas, no perpendiculares, se cortan en $P = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

b) Paralelas *c*) Perpendiculares y se cortan en $P = \begin{pmatrix} 17/5 \\ -1/5 \end{pmatrix}$

14. *a*) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$ *b*) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$

c) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$ *d*) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

15. *a*) $k = \pm 2/3$ *b*) $k = \pm 2$.

16. $x + y = 6$

18. *b*) $x - y = -8$

19. *a*) $\begin{pmatrix} 4/3 \\ 1 \end{pmatrix}$ *b*) $\begin{pmatrix} 0 \\ 7/2 \end{pmatrix}$ *c*) $\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$

21. $P = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

22. *a*) $\begin{pmatrix} 1/7 \\ 24/7 \end{pmatrix}$ *b*) $13\sqrt{10}/7$ *c*) $130/7$ unidades cuadradas.

23. $x + 5y = 5\sqrt{2}$, $x + 5y = -5\sqrt{2}$

Sección 3.6

24. *a*) $150°$ *b*) $15°$ *c*) $90°$ *d*) $12.53°$

Sección 3.7

25. *a*) 2 *b*) $22/3\sqrt{5}$

26. *a*) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 13$ *b*) $\sqrt{5}$ *c*) $3/\sqrt{5}$

27. *a*) $x = 1 + t$, $y = -3 - \frac{2}{3}t$, $t \in \mathbb{R}$ *b*) $\sqrt{13}$

28. *a*) $5/\sqrt{13}$ *b*) $3x - 2y = 17$ *c*) $17/\sqrt{13}$

29. $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ / \ 3x + 4y = 30 \quad \text{o} \quad 3x + y = 0 \right\}$

30. 10.5 unidades cuadradas.

Sección 3.8

33. No

34. *a*) L.I., $X = -Z - 3W$ *b*) L.D., No es posible.

Respuestas Ejercicios Capítulo 4

Sección 4.1

1. *a*). $P_U\binom{x}{y} = \binom{x}{0}$ *b*) $P_U\binom{x}{y} = \binom{0}{y}$

c). $P_U\binom{x}{y} = \frac{1}{2}\binom{x-y}{-x+y}$ d). $P_U\binom{x}{y} = \frac{1}{10}\binom{3(3x+y)}{3x+y}$

2. $a' = \frac{4a+10b}{29}$, $b' = \frac{10a+25b}{29}$

3. a) $S_U\binom{x}{y} = \binom{(3x-4y)/5}{(-4x-3y)/5}$ b) $S_U\binom{x}{y} = \binom{y}{x}$ c) $S_U\binom{x}{y} = \binom{(-3x-4y)/5}{(-4x+3y)/5}$

Sección 4.2

4. a) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

5. a) $\binom{1}{0}$, $\binom{-7}{2}$, $\binom{-3}{1}$
 b) $\binom{1/2}{-1/2}$, $\binom{-3/2}{3/2}$, $\binom{-1/2}{1/2}$
 c) $\binom{1}{-3}$, $\binom{-7}{5}$, $\binom{-3}{1}$
 d) $\binom{1}{0}$, $\binom{-1}{0}$, $\binom{0}{0}$
 e) $\binom{3}{0}$, $\binom{-3}{6}$, $\binom{0}{3}$
 f) $\binom{1}{0}$, $\binom{-1}{6}$, $\binom{0}{3}$
 g) $\binom{0}{1}$, $\binom{2}{-1}$, $\binom{1}{0}$
 h) $\binom{\sqrt{3}/2}{1/2}$, $\binom{-(\sqrt{3}+2)/2}{(2\sqrt{3}-1)/2}$, $\binom{-1/2}{\sqrt{3}/2}$

6. a) $T\binom{x}{y} = \binom{x^2}{y^2}$ b) $T = P_U$, para cualquier $U \in \mathbb{R}^2$, $U \neq O$.

Sección 4.3

7. a) Lineal, $m(T) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ b) Lineal, $m(T) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$
 c) No lineal   d) No lineal

8. $T\binom{x}{y} = \binom{(x+5y)/2}{x-2y}$, $T\binom{-10}{15} = \binom{65/2}{-40}$

Sección 4.4

10. a) eje x : $\left\{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 : y = 0\right\}$
 b) Segmento de recta entre el origen y el punto $\binom{3}{0}$, es decir
 $\left\{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 3,\ y = 0\right\}$.

11. a) $S(C_1) = \left\{\binom{0}{y} : y > 0\right\}$: semieje y positivo sin el origen
 $S(C_2) = \left\{\binom{0}{y} : y \leq 0\right\}$: semieje y negativo con el origen
 b) $S(C_1) = \left\{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{3}{4}x,\ x < 0\right\}$ $S(C_2) = \left\{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 :\ y = -\frac{4}{3}x,\ x \leq 0\right\}$

12. Para $r = \frac{1}{3}$
 a) $x' = \frac{1}{3}x$, $y' = \frac{1}{3}y$
 b) i) $\left\{\binom{2/3}{-1/3}, \binom{-1/3}{1}\right\}$
 ii) Paralelogramo determinado por $\binom{2/3}{-1/3}$ y $\binom{-1/3}{1}$, es decir
 $\left\{r\binom{2/3}{-1/3} + s\binom{-1/3}{1} : 0 \leq r \leq 1,\ \ 0 \leq s \leq 1\right\}$
 iii) Circunferencia con centro en el origen y radio $\frac{2}{3}$.
 iv) Recta $y = 2x - 1$.

 Para $r = 2$
 a) $x' = 2x$, $y' = 2y$

$b)$ $i)$ $\left\{\binom{4}{-2}, \binom{-2}{6}\right\}$

$ii)$ Paralelogramo determinado por $\binom{4}{-2}$ y $\binom{-2}{6}$:

$\left\{r\binom{4}{-2} + s\binom{-2}{6} :\ 0 \le r \le 1, 0 \le s \le 1\right\}$

$iii)$ Circunferencia con centro en el origen y radio 4.

$iv)$ Recta $y = 2x - 6$

13. $a)$ $i)$ $m\left(R_{-\frac{\pi}{3}}\right) = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ $\qquad ii)$ $R_{-\frac{\pi}{3}}\binom{x}{y} = \frac{1}{2}\binom{x+\sqrt{3}y}{-\sqrt{3}x+y}$

$iii)$ Recta generada por el vector $\binom{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$, es decir $R_{-\frac{\pi}{3}}(\mathcal{L}) = \left\{t\binom{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}};\ t \in \mathbb{R}\right\}$

$iv)$ Paralelogramo determinado por $\binom{(1+2\sqrt{3})/2}{(2-\sqrt{3})/2}$ y $\binom{1/2}{-\sqrt{3}/2}$:

$$R_{-\frac{\pi}{3}}(\mathcal{P}) = \left\{r\binom{(1+2\sqrt{3})/2}{(2-\sqrt{3})/2} + s\binom{1/2}{-\sqrt{3}/2} :\ 0 \le r \le 1,\ 0 \le s \le 1\right\}.$$

Para $\theta = \frac{\pi}{3}$

$i)$ $m\left(R_{\frac{\pi}{3}}\right) = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

$ii)$ $R_{\frac{\pi}{3}}\binom{x}{y} = \frac{1}{2}\binom{x-\sqrt{3}y}{\sqrt{3}x+y}$

$iii)$ Recta generada por el vector $\binom{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$, es decir

$R_{\frac{\pi}{3}}(\mathcal{L}) = \left\{t\binom{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}};\ t \in \mathbb{R}\right\}$

$iv)$ Paralelogramo determinado por $\binom{(1-2\sqrt{3})/2}{(\sqrt{3}+2)/2}$ y $\binom{1/2}{\sqrt{3}/2}$, es decir

$$R_{\frac{\pi}{3}}(\mathcal{P}) = \left\{r\binom{(1-2\sqrt{3})/2}{(\sqrt{3}+2)/2} + s\binom{1/2}{\sqrt{3}/2} :\ o \le r \le 1, 0 \le s \le 1\right\}$$

$b)$ $i)$ $x' = -x\text{sen}\theta - y\cos\theta, \qquad y' = x\cos\theta - y\text{sen}\theta$

$ii)$ $x' = x\cos 2\theta - y\text{sen}2\theta, \qquad y' = x\text{sen}2\theta + y\cos 2\theta$

$iii)$ $x' = x\cos\theta + y\text{sen}\theta, \qquad y' = -x\text{sen}\theta + y\cos\theta$

15. $a)$ $\left\{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 : y = -\frac{1}{3}x\right\}$

$b)$ Si $a = 0$ y $b \neq 0$, eje x. Si $a \neq 0$ y $2a + 3b \neq 0$, $y = -\left(\frac{a}{2a+3b}\right)x$.

Si $a \neq 0$ y $2a + 3b = 0$, eje y

16. Paralelogramo determinado por $\binom{1}{0}$ y $\binom{-3}{1}$. Su área es 1 unidad cuadrada.

17. $a)$ $m(T) = \begin{pmatrix} 1/4 & -19/4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ $\qquad b)$ $T\binom{x}{y} = \binom{(x-19y)/4}{-3x+5y}$

$c)$ $T(\mathcal{P}) = \left\{r\binom{5}{-8} + s\binom{-9}{4} :\ 0 \le r \le 1,\ 0 \le s \le 1\right\}$

Paralelogramo determinado por $\binom{5}{-8}$ y $\binom{-9}{4}$.

18. $T\binom{x}{y} = \binom{by}{cx+dy}$, $b, c, d \in \mathbb{R}$; $m(T) = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $b, c, d \in \mathbb{R}$.

19.$a)$ $\mathcal{P} = \{X \in R^2 : X = A + t(B - A) + r(D - A),\ 0 \le t \le 1,\ 0 \le r \le 1\}$

20. $T_U(S) = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in R^2 : 1 \le x \le 2, \quad 3 \le y \le 4\right\}$:

Cuadrado de vértices $\binom{1}{3}$, $\binom{2}{3}$, $\binom{2}{4}$, $\binom{1}{4}$.

Sección 4.5

21. *a)* $m(T_1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad m(T_2) = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

b) $(T_1 + T_2)\binom{x}{y} = \binom{-4x}{2x+4y}$ $\quad m(T_1 + T_2) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$m(T_1) + m(T_2) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad (T_1 + T_2)\binom{-1}{-3} = \binom{4}{-14}$

c) $(-4T_1)\binom{x}{y} = \binom{-4x+4y}{-4x-4y}$ $\quad m(-4T_1) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$

$4m(T_1) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$ $\quad (-4T_1)\binom{-1}{-3} = \binom{-8}{16}$

d) $(2T_1 - 3T_2)\binom{x}{y} = \binom{17x-5y}{-x-7y}$ $\quad m(2T_1 - 3T_2) = \begin{pmatrix} 17 & -5 \\ -1 & -7 \end{pmatrix}$

$2m(T_1) - 3m(T_2) = \begin{pmatrix} 17 & -5 \\ -1 & -7 \end{pmatrix}$ $\quad (2T_1 - 3T_2)\binom{-1}{-3} = \binom{-2}{22}$

e) $(T_1 \circ T_2)\binom{x}{y} = \binom{-6x-2y}{-4x+4y}$ $\quad m(T_1 \circ T_2) = \begin{pmatrix} -6 & -2 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$

$m(T_1)\,m(T_2) = \begin{pmatrix} -6 & -2 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad (T_1 \circ T_2)\binom{-1}{-3} = \binom{12}{-8}$

f) $(T_2 \circ T_1)\binom{x}{y} = \binom{-4x+6y}{4x+2y}$ $\quad m(T_2 \circ T_1) = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

$m(T_2)\,m(T_1) = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad (T_2 \circ T_1)\binom{-1}{-3} = \binom{-14}{-10}$

22. *a) i)* $-5E_1 + 7E_2$ $\quad$ *ii)* $9E_1 - 12E_2$

b) $m(T) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad m(T^2) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

23. *a)* $m(P) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ *b)* $m\left(P \circ R_{\frac{\pi}{2}}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) $m\left(R_{\frac{\pi}{2}} \circ P\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ *d)* $\left(P \circ R_{\frac{\pi}{2}}\right)\binom{x}{y} = \binom{-y}{0}$ $\quad$ *e)* $\left(R_{\frac{\pi}{2}} \circ P\right)\binom{x}{y} = \binom{0}{x}$

24. *a)* $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\quad B^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\quad CD = \begin{pmatrix} 8 & -7 \\ -10 & 10 \end{pmatrix}$

$DC = \begin{pmatrix} 5 & -11 \\ -5 & 13 \end{pmatrix}$, $\quad E^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad F^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) i) $T\binom{x}{y} = \binom{x}{0}$: Proyección sobre el eje x

ii) $T\binom{x}{y} = \binom{x}{0}$: Proyección sobre el eje x

iii) $T\binom{x}{y} = \binom{-y}{x}$: Rotación, ángulo $\frac{\pi}{2}$ $\quad$ *iv)* $T\binom{x}{y} = \binom{-x}{-y}$: Rotación, ángulo π

v) $T\binom{x}{y} = \binom{-x+2y}{x-3y}$ $\quad$ *vi)* $T\binom{x}{y} = \binom{-4x+y}{2x-3y}$ $\quad$ *vii)* $T\binom{x}{y} = \binom{8x-7y}{-10x+10y}$

viii) $T\binom{x}{y} = \binom{5x-11y}{-5x+13y}$ $\quad$ *ix)* $T\binom{x}{y} = \binom{x}{-y}$: Reflexión con respecto al eje x

x) $T\binom{x}{y} = \binom{x}{y}$: Identidad

xi) $T\binom{x}{y} = \binom{y}{x}$: Reflexión con respecto a la recta $y = x$

xii) $T\binom{x}{y} = \binom{x}{y}$: Identidad.

25. $m(T) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\quad m(T^2) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $\quad T^2 = D_4$

26. *a)* $T^3\binom{x}{y} = \binom{-2x-2y}{2x-2y} = -2\binom{x+y}{-x+y}$ *b)* $\binom{0}{4}$
28. *b)* $S\binom{x}{y} = \binom{-2x+y}{-2x+y}$
29. $\left(T_{U_1} \circ R_{\frac{\pi}{2}} \circ T_{U_2}\right)\binom{x}{y} = \binom{-y}{x} + \binom{1}{-1}$.
30. *a)* $(T_U \circ T)\binom{x}{y} = \binom{x}{2-y}$.
Reflexión con respecto al eje x seguida de la transformación T_U con $U = \binom{0}{2}$

Sección 4.6

32. *a)* Invertible, $m\left(T^{-1}\right) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $T^{-1}\binom{x}{y} = \binom{3x-2y}{-x+y}$
b) Invertible, $m\left(T^{-1}\right) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/5 \end{pmatrix}$, $T^{-1}\binom{x}{y} = \binom{(1/2)x}{(1/5)y}$
c) Invertible, $m\left(T^{-1}\right) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, $T^{-1}\binom{x}{y} = \binom{x-2y}{-2x+5y}$
d) No invertible
e) Invertible, $m\left(T^{-1}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $T^{-1}\binom{x}{y} = \binom{-x+y}{2x-y}$
f) Invertible, $m\left(T^{-1}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $T^{-1}\binom{x}{y} = \binom{y}{x}$, $T^{-1} = T$
g) No invertible
h) Invertible, $m\left(T^{-1}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $T^{-1}\binom{x}{y} = \binom{x}{-y}$, $T^{-1} = T$
i) Invertible, $m\left(T^{-1}\right) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $T^{-1}\binom{x}{y} = \begin{pmatrix} x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta \\ -x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta \end{pmatrix} = R_{-\theta}\binom{x}{y}$
j) No invertible
35. *b)* *i)* $T^{-1}\binom{x}{y} = \binom{(x+y)/2}{(x-y)/2}$ *ii)* $S^{-1}\binom{x}{y} = \binom{(2x+y)/5}{(x-2y)/5}$ *iii)* $(ST)^{-1}\binom{x}{y} = \binom{(3x-y)/10}{(x+3y)/10}$
37. $X = \binom{-19/3}{13/3}$

Respuestas Ejercicios Capítulo 5

Sección 5.1

1. $\binom{x}{y} = \binom{11}{0} + t\binom{2}{1}$, $t \in \mathbb{R}$. Dos soluciones particulares son $\binom{11}{0}$ y $\binom{0}{-11/2}$
2. *a)* Soluble, única solución $\binom{1/2}{-1/2}$
b) Soluble, el conjunto solución es la recta con ecuación $4x - 6y = 0$
c) Soluble, el conjunto solución es la recta con ecuación $3x - y = 6$
d) Soluble, única solución $\binom{0}{0}$ *e)* Soluble, única solución $\binom{2}{-1}$
f) No soluble.
3. *a)* Se cortan en el punto $\binom{1}{-1}$ *b)* No se cortan *c)* Se cortan en el punto $\binom{14/45}{4/15}$
4. *a)* No *b)* Sí, $\binom{-13/7}{-5/7}$
5. $a = 2$, $b = 4$
6. 137 boletas para adultos y 313 boletas para niños.
7. *a)* *i)* $k \neq 1$ y $k \neq -1$ *ii)* $k = 1$ *iii)* $k = -1$
b) *i)* $\binom{1/k+1}{1/k+1}$ *ii)* El conjunto solución es la recta $x + y = 1$

Sección 5.2

9. *a)* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $U = \binom{1}{1}$ *b)* $A^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

$c)$ $X = A^{-1}U = -\frac{1}{5}\binom{-2}{-1}$ $d)$ $U = \frac{2}{5}\binom{2}{3} + \frac{1}{5}\binom{1}{-1}$

10. $a)$ $\begin{array}{rcl} 10x + 25y &=& 650 \\ 30x + 40y &=& 1250 \end{array}$

$b)$ 15 unidades del fertilizante tipo I y 20 unidades de fertilizante tipo II

11. $a)$ $\begin{array}{rcl} 4T_1 - T_2 &=& 50 \\ -T_1 + 4T_2 &=& 70 \end{array}$ $b)$ $T_1 = 18°$, $T_2 = 22°$

12. $b)$ $\begin{array}{rcl} x + y &=& 1 \\ 5x + 5y &=& 5 \end{array}$, No, No

13. La recta con ecuación $x - y = -1$.

14. $a)$ Soluble, $U = 2\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

$b)$ Soluble, $U = (4y+5)\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 4 \\ -12 \end{pmatrix}$, para cada $y \in R$

$c)$ No soluble

15. $b = 5a$

16. $a)$ Para todo vector $\binom{u}{v}$ de $\mathbb{R}^2$ se tiene que el sistema es soluble.

$b)$ Para todo vector $\binom{u}{v}$ que sea múltiplo escalar de $\binom{5}{7}$ se tiene que el sistema es soluble.

17. En cada uno de los siguientes casos el sistema no es soluble:

$i)$ $a = b = 0$ y $c \neq 0$ $ii)$ $a = b = 0$ y $d \neq 0$

Respuestas Ejercicios Capítulo 6

Sección 6.1

1. $a)$ Orientado negativamente $b)$ Orientado positivamente
$c)$ Orientado negativamente $d)$ Orientado positivamente.

Sección 6.2

3. $a)$ Invertible y cambia la orientación $b)$ No invertible
$c)$ Invertible y preserva la orientación

4. $a)$ Cambia la orientación $b)$ Cambia la orientación $c)$ Preserva la orientación
$d)$ Preserva la orientación $e)$ Preserva la orientación $f)$ Preserva la orientación

Sección 6.3

5. $X_2 = \binom{-1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$ o $X_2 = \binom{-1-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$

6. $X_2 = \binom{3+\sqrt{3}}{1-3\sqrt{3}}$

9. $a)$ 22 unidades cuadradas $b)$ 88 unidades cuadradas
$c)$ 66 unidades cuadradas $d)$ 550 unidades cuadradas
$e)$ 22 unidades cuadradas $f)$ 22 unidades cuadradas.

10. $a)$ 1 unidad cuadrada $b)$ 6 unidades cuadradas.

11. $a)$ 16 unidades cuadradas $b)$ 32 unidades cuadradas.
$c)$ 224 unidades cuadradas $d)$ 80 unidades cuadradas.

12. $a)$ 7 unidades cuadradas $b)$ 23.5 unidades cuadradas
$c)$ 31.5 unidades cuadradas.

Sección 6.4

13. $a)$ $\binom{-52/31}{77/31}$ $b)$ $\binom{8/5}{-1/5}$

14. $f(x) = 2$, $g(x) = \cot x - \tan x$

Sección 6.5

16. *a)* *i)* 6   *ii)* -15 *iii)* 0

b) Sí, $\det A^{-1} = -1/3$

c) -6

Respuestas Ejercicios Capítulo 7

Sección 7.1

1. Para A_1 : *a)* $(\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0$ *b)* $\lambda_1 = 3, \ \lambda_2 = -1$

c) Para $\lambda_1 = 3 : t\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $t \neq 0$; vectores no nulos de la recta generada por el vector $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$. Para $\lambda_2 = -1 : \ t\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $t \neq 0$; vectores no nulos del eje y

Para A_2 : *a)* $\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$ *b)* $\lambda = 4$

c) $t\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$, $t \neq 0$; vectores no nulos de la recta generada por el vector $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$

Para A_3 : *a)* $\lambda^2 = 0$ *b)* $\lambda_1 = 0$ *c)* Vectores no nulos de $\mathbb{R}^2$

Para A_4 : *a)* $(\lambda - 1)^2 = 0$ *b)* $\lambda = 1$ *c)* Vectores no nulos de $\mathbb{R}^2$

Para A_5 : *a)* $\lambda^2 - 2 = 0$ *b)* $\lambda_1 = \sqrt{2}, \ \lambda_2 = -\sqrt{2}$

c) Para $\lambda_1 : t\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}$, $t \neq 0$; vectores no nulos de la recta generada por el vector $\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}$. Para $\lambda_2 : t\begin{pmatrix}-\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}$, $t \neq 0$; vectores no nulos de la recta generada por el vector $\begin{pmatrix}-\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}$.

Para A_6 : *a)* $\lambda^2 - 4\lambda - 1 = 0$ *b)* $\lambda_1 = 2 + \sqrt{5}, \ \lambda_2 = 2 - \sqrt{5}$

c) Para $\lambda_1 : t\begin{pmatrix}-1+\sqrt{5}\\2\end{pmatrix}$, $t \neq 0$; vectores no nulos de la recta generada por el vector $\begin{pmatrix}-1+\sqrt{5}\\2\end{pmatrix}$. Para $\lambda_2 : t\begin{pmatrix}-1-\sqrt{5}\\2\end{pmatrix}$, $t \neq 0$; vectores no nulos de la recta generada por el vector $\begin{pmatrix}-1-\sqrt{5}\\2\end{pmatrix}$

2. *a)* $\lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = 1$

b) Para λ_1 : vectores no nulos de la recta que pasa por el origen y es perpendicular a $\mathcal{L}$. Para λ_2 : vectores no nulos de la recta $\mathcal{L}$

3. *a)* $\lambda^2 - 1 = 0$; $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ *b)* $\lambda^2 - 1 = 0$; $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$

c) $\lambda^2 - 1 = 0$; $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$

6. Dr, $r \neq 0$

7. $a = 0$ y $b = 3$

8. *a)* $\lambda_1 = 3$, vectores no nulos de la recta con ecuación $y = x$,

$\lambda_2 = 2$, vectores no nulos de la recta con ecuación $y = 2x$

b) No existen

c) $\lambda = 2$, vectores no nulos de la recta con ecuación $y = 0$.

d) $\lambda_1 = 3$, vectores no nulos de la recta con ecuación $y = 2x$,

$\lambda_2 = -1$ vectores no nulos de la recta con ecuación $x = 0$.

Sección 7.2

9. Para $A_1 : a)$ $\lambda = 1;$ $t\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $t \neq 0$ $\qquad b)$ No existen.

Para $A_2 : a)$ $\lambda = 1;$ $t\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $t \neq 0$ $\qquad b)$ No existen.

Para $A_3 : a)$ $\lambda_1 = 3;$ $t\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $t \neq 0;$ $\qquad \lambda_2 = -5,$ $t\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $t \neq 0.$

$b)$ $P = I_2,$ $\qquad D = A_3$

Para $A_4 : a)$ $\lambda_1 = 0;$ $t\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $t \neq 0$ $\qquad b)$ No existen.

Para $A_5 :$ $a)$ $\lambda_1 = 3;$ $t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $t \neq 0;$ $\qquad \lambda_2 = -3,$ $t\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$, $t \neq 0.$

$$b)\ P = \begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix}3 & 0\\0 & -3\end{pmatrix}.$$

Para $A_6 : a)$ $\lambda_1 = 0;$ $t\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$, $t \neq 0;$ $\qquad \lambda_2 = 5,$ $t\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $t \neq 0.$

$$b)\ P = \begin{pmatrix}1 & -2\\2 & 1\end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix}5 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}.$$

Para $A_7 : a)$ $\lambda_1 = 0;$ $t\begin{pmatrix}1\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$, $t \neq 0;$ $\qquad \lambda_2 = 4;$ $t\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\1\end{pmatrix}$, $t \neq 0.$

$$b)\ P = \begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3}\\\sqrt{3} & 1\end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 4\end{pmatrix}.$$

Para $A_8 : a)$ $\lambda_1 = 3;$ $t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $t \neq 0;$ $\qquad \lambda_2 = -1,$ $t\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$, $t \neq 0.$

$$b)\ P = \begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix}3 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}.$$

Sección 7.3

10. Para $A_5 : b)$ $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix} = m\left(R_{\frac{\pi}{4}}\right)$

Para $A_6 : b)$ $Q = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1 & -2\\2 & 1\end{pmatrix} = m\left(R_{\theta}\right),$ $\theta = \tan^{-1}(2)$

Para $A_7 : b)$ $Q = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3}\\\sqrt{3} & 1\end{pmatrix} = m\left(R_{\frac{\pi}{3}}\right)$

Para $A_8 :$ $b)$ $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix} = m\left(R_{\frac{\pi}{4}}\right)$

Respuestas Ejercicios Capítulo 8

Sección 8.1

1. $a)$ $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 13$ $\qquad b)$ $(x+2)^2 + (y-5)^2 = 81$
   $c)$ $(x-1)^2 + (y+6)^2 = 18$ $\qquad d)$ $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 10$
   $e)$ $(x-7)^2 + (y-5)^2 = 25,$ $\qquad (x-1)^2 + (y+3)^2 = 25$
   $f)$ $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 8$
2. $a)$ $C = \binom{0}{-2/3}$, $r = \frac{5}{3}$ $\qquad b)$ $C = \binom{5}{5}$, $r = 5$ $\qquad c)$ $C = \binom{-3}{0}$, $r = \sqrt{10}$
   $d)$ $C = \binom{1/2}{-1/2}$, $r = 2$ $\qquad e)$ $C = \binom{\sqrt{3}}{-\sqrt{7}}$, $r = 5$

Sección 8.3

3. *a*) $y=\frac{1}{8}x^2$ *b*) $y-3=-\frac{1}{8}(x+4)^2$ *c*) $x-1=-\frac{1}{8}(y-3)^2$
d) $y=-\frac{1}{12}x^2+\frac{7}{12}x+3$ *e*) $y+1=-\frac{1}{8}x^2$
4. *a*) $V=\binom{0}{0}$, $F=\binom{-3/2}{0}$, directriz $x=\frac{3}{2}$, eje focal $y=0$, $l=6$
b) $V=\binom{0}{0}$, $F=\binom{0}{2}$, directriz $y=-2$, eje focal $x=0$, $l=8$
c) $V=\binom{1/2}{1}$, $F=\binom{7/2}{1}$, directriz $x=-\frac{5}{2}$, eje focal $y=1$, $l=12$
d) $V=\binom{1}{1}$, $F=\binom{1}{2}$, directriz $y=0$, eje focal $x=1$, $l=4$
e) $V=\binom{-1}{0}$, $F=\binom{-2}{0}$, directriz $x=0$, eje focal $y=0$, $l=4$
5. *a*) $x^2+(y+5)^2=25$ *b*) $(x-4)^2+y^2=64$, puntos de intersección $\binom{4}{8}$ y $\binom{4}{-8}$
6. 16.6 metros
7. $25\sqrt{2}/2$

Sección 8.4

8. *a*) $\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{x^2}{5}=1$ *b*) $\dfrac{(x+3)^2}{16}+\dfrac{(y-4)^2}{9}=1$
c) $\dfrac{(x-8)^2}{25}+\dfrac{(y+2)^2}{9}=1$ *d*) $\dfrac{(y-2)^2}{16}+\dfrac{(x-1)^2}{4}=1$
e) $\dfrac{y^2}{64}+\dfrac{x^2}{48}=1$
10. *a*) $C=\binom{0}{0}$; $F'=\binom{0}{-5}$, $F=\binom{0}{5}$; $V'=\binom{0}{-13}$, $V=\binom{0}{13}$;
$A'=\binom{-12}{0}$, $A=\binom{12}{0}$; $e=5/13$; $l=288/13$
b) $C=\binom{0}{0}$; $F'=\binom{-3/20}{0}$, $F=\binom{3/20}{0}$; $V'=\binom{-1/4}{0}$, $V=\binom{1/4}{0}$;
$A'=\binom{0}{-1/5}$, $A=\binom{0}{1/5}$; $e=3/5$; $l=8/25$
c) $C=\binom{1}{5}$; $F'=\binom{1}{1}$, $F=\binom{1}{9}$; $V'=\binom{1}{0}$, $V=\binom{1}{10}$;
$A'=\binom{-2}{5}$, $A=\binom{4}{5}$; $e=4/5$; $l=3.6$
d) $C=\binom{2}{-3}$; $F'=\binom{2-\sqrt{7}}{-3}$, $F=\binom{2+\sqrt{7}}{-3}$; $V'=\binom{-2}{-3}$, $V=\binom{6}{-3}$;
$A'=\binom{2}{-6}$, $A=\binom{2}{0}$; $e=\sqrt{7}/4$; $l=4.5$
e) $C=\binom{-1}{-2}$; $F'=\binom{-1}{-5}$, $F=\binom{-1}{1}$; $V'=\binom{-1}{-7}$, $V=\binom{-1}{3}$;
$A'=\binom{-5}{-2}$, $A=\binom{3}{-2}$; $e=3/5$; $l=6.4$
11. $2\sqrt{21}$
12. Máxima: 15206781.9 Km, Mínimo: 14707218.1 Km.
13. 600 millas, $\dfrac{x^2}{202500}+\dfrac{y^2}{180000}=1$
14. *a*) $4x^2+3y^2-48=0$
b) Elipse; centro $C=\binom{0}{0}$, focos $F'=\binom{0}{-2}$ y $F=\binom{0}{2}$,
vértices $V'=\binom{0}{-4}$ y $V=\binom{0}{4}$, eje focal $x=0$
15. $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{9}=1$, elipse

Sección 8.5

16. *a*) $y^2-x^2=1$ *b*) $x^2-\dfrac{y^2}{9}=1$ *c*) $(y-4)^2-\dfrac{(x+1)^2}{3}=1$
d) $\dfrac{(y+3)^2}{27/8}-\dfrac{(x-2)^2}{27/5}=1$ *e*) $\dfrac{x^2}{11/4}-\dfrac{y^2}{11}=1$ *f*) $\dfrac{(x-6)^2}{9}-\dfrac{(y-2)^2}{7}=1$

17. *a*) $C = \binom{0}{0}$; $F' = \binom{-2\sqrt{41}}{0}$, $F = \binom{2\sqrt{41}}{0}$; $V' = \binom{-10}{0}$, $V = \binom{10}{0}$;
$A' = \binom{0}{-8}$, $A = \binom{0}{8}$; $e = \sqrt{41}/5$; asíntotas $y = \pm\frac{4}{5}x$; $l = 12.8$
b) $C = \binom{2}{-6}$; $F' = \binom{2}{-6-\sqrt{2}}$, $F = \binom{2}{-6+\sqrt{2}}$; $V' = \binom{2}{-7}$, $V = \binom{2}{-5}$;
$A' = \binom{1}{-6}$, $A = \binom{3}{-6}$; $e = \sqrt{2}$; asíntotas $y + 6 = \pm(x-2)$; $l = 2$
c) $C = \binom{0}{0}$; $F' = \binom{0}{-3}$, $F = \binom{0}{3}$; $V' = \binom{0}{-2}$, $V = \binom{0}{2}$;
$A' = \binom{-\sqrt{5}}{0}$, $A = \binom{\sqrt{5}}{0}$; $e = 3/2$; asíntotas $y = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}x$; $l = 5$
d) $C = \binom{1}{-2}$; $F' = \binom{1-\sqrt{13}}{-2}$, $F = \binom{1+\sqrt{13}}{-2}$; $V' = \binom{-1}{-2}$, $V = \binom{3}{-2}$;
$A' = \binom{1}{-5}$, $A = \binom{1}{1}$; $e = \sqrt{13}/2$; asíntotas $y + 2 = \pm\frac{3}{2}(x-1)$; $l = 9$
e) $C = \binom{-3}{3}$; $F' = \binom{-3-\sqrt{5}}{3}$, $F = \binom{-3+\sqrt{5}}{3}$; $V' = \binom{-5}{3}$, $V = \binom{-1}{3}$;
$A' = \binom{-3}{2}$, $A = \binom{-3}{4}$; $e = \sqrt{5}/2$; asíntotas $(y-3) = \pm\frac{1}{2}(x+3)$; $l = 1$

18. $\dfrac{x^2}{18} + \dfrac{y^2}{11} = 1$

19. *b*) Hipérbola; centro $C = \binom{-2}{1}$, focos $F' = \binom{-6}{1}$ y $F = \binom{2}{1}$,
vértices $V' = \binom{-4}{1}$ y $V = \binom{0}{1}$, eje focal $y = 1$, asíntotas $y - 1 = \pm\sqrt{3}(x+2)$

Sección 8.6

20. *a*) Elipse *b*) Circunferencia *c*) Par de rectas que se cortan
d) Hipérbola *e*) Parábola *f*) Elipse
g) Elipse *h*) Parábola *i*) Punto: $\binom{-1}{-5}$
j) Elipse *k*) Elipse *l*) Hipérbola
m) Ningún lugar geométrico.

Sección 8.8

21. *a*) $x' = \frac{1}{2}(y')^2$, parábola
b) $x' = -(y')^2$, parábola
c) $\dfrac{(x'-\sqrt{2})^2}{9} + \dfrac{(y')^2}{7} = 1$, elipse
d) $(x')^2 - (y')^2 = 1$, hipérbola
e) $4(x')^2 - (y')^2 = 1$, hipérbola
f) $x' = -\frac{1}{4}(y')^2$, parábola
g) $\dfrac{(y'+\sqrt{2})^2}{2} - \dfrac{(x')^2}{2} = 1$, hipérbola
h) $\frac{(3-\sqrt{13})}{2}(x')^2 - \frac{(3+\sqrt{13})}{2}(y')^2 = 5$, hipérbola
i) $5(x')^2 = 9$, par de rectas paralelas
j) $\left(x' - \sqrt{2}/2\right)^2 - \left(y' - 3\sqrt{2}/2\right)^2 = 0$, par de rectas que se cortan
k) $\dfrac{\left(x' - 8/\sqrt{5}\right)^2}{60} + \dfrac{\left(y' + 14/\sqrt{5}\right)^2}{80} = 1$ elipse
l) $\left(4 - \sqrt{10}\right)(x')^2 + \left(4 + \sqrt{10}\right)(y')^2 = 36$, elipse
m) $(x')^2 - \dfrac{(y')^2}{4} = 1$, hipérbola

$n)\ \dfrac{6\left(x'+\sqrt{5}/2\right)^2}{9}+\dfrac{\left(y'+\sqrt{5}/2\right)^2}{9}=1,\quad$ elipse

22. $k=-14$

Respuestas Ejercicios Capítulo 9

Sección 9.3

2. $a)\ \|\overrightarrow{v}\|=4,\quad dir\left(\overrightarrow{v}\right)=\begin{pmatrix}90^\circ\\90^\circ\\0^\circ\end{pmatrix}\qquad b)\ \|\overrightarrow{v}\|=\sqrt{13},\quad dir\left(\overrightarrow{v}\right)=\begin{pmatrix}56.37^\circ\\90^\circ\\146.31^\circ\end{pmatrix}$

   $c)\ \|\overrightarrow{v}\|=\sqrt{53},\quad dir\left(\overrightarrow{v}\right)=\begin{pmatrix}97.89^\circ\\56.96^\circ\\145.5^\circ\end{pmatrix}\qquad d)\ \|\overrightarrow{v}\|=\sqrt{17},\quad dir\left(\overrightarrow{v}\right)=\begin{pmatrix}165.96^\circ\\75.96^\circ\\90^\circ\end{pmatrix}$

   $e)\ \|\overrightarrow{v}\|=\sqrt{29},\quad dir\left(\overrightarrow{v}\right)=\begin{pmatrix}68.2^\circ\\123.85^\circ\\137.97^\circ\end{pmatrix}$

3. $a)\ \begin{pmatrix}-7\\-4\\-2\end{pmatrix}\qquad b)\ \begin{pmatrix}-17\\10\\0\end{pmatrix}$

4. $a)\ \overrightarrow{u}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\left(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}\right)\qquad b)\ 4\sqrt{3}\left(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}\right)$

5. $a)$ no existe $\qquad b)\ \overrightarrow{v}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{i}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{k}$, plano xz

6. $a)\ \overrightarrow{v}=\sqrt{3}\,\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}\ $ o $\ \overrightarrow{v}=\sqrt{3}\,\overrightarrow{j}-\overrightarrow{k}$

   $b)\ \overrightarrow{v}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{i}+\dfrac{5\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{k}\ $ o $\ \overrightarrow{v}=-\dfrac{5\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{i}+\dfrac{5\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{k}\qquad c)\ \overrightarrow{v}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\left(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}\right)$

7. $\cos\alpha=0.1294,\quad \cos\beta=0.224,\quad \cos\gamma=0.9659$

8. $a)\ \gamma_1=90^\circ,\ \alpha_2=135^\circ\qquad b)\ \overrightarrow{F_1}=-15\sqrt{3}\,\overrightarrow{i}+15\,\overrightarrow{j},\ \overrightarrow{F_2}=-25\sqrt{2}\,\overrightarrow{i}+25\sqrt{2}\,\overrightarrow{j}$

   $c)\ \left\|\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}\right\|=79.36$ Newtons, $dir\left(\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}\right)=\begin{pmatrix}140.62^\circ\\50.61^\circ\\90^\circ\end{pmatrix}$

9. $\cos\theta=\cos\alpha\cos\alpha'+\cos\beta\cos\beta'+\cos\gamma\cos\gamma'$

10. $a)$ recto $\quad b)$ obtuso $\quad c)$ agudo.

12. $a=-\dfrac{7}{11},\ b=\dfrac{13}{11}$

13. $a)\ 5\sqrt{3}\qquad c)\ \sphericalangle OBA:53.93^\circ,\quad \sphericalangle OAB:36.07^\circ$

Sección 9.4

14. $a)\ \text{sen}\phi=\dfrac{5\sqrt{3}}{14},\quad b)\ \cos\phi=-\dfrac{11}{14}$

15. $a)\ \overrightarrow{v}=(-1-2b)\,\overrightarrow{i}+b\,\overrightarrow{j}+(-3-2b)\,\overrightarrow{k},\quad b\in\mathbb{R}\qquad b)\ \overrightarrow{v}=\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}-\overrightarrow{k}$

16. $c)\ 2\left(\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{u}\right)\qquad d)\ \lambda=-2\sqrt{2}$

17. $a)$ 3 unidades cúbicas $\qquad b)\ \overrightarrow{j}=-\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}+0\overrightarrow{w},\quad \overrightarrow{k}=0\overrightarrow{u}-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{v}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{w}$

    $c)\ \overrightarrow{z}=5\overrightarrow{u}-\dfrac{14}{3}\overrightarrow{v}+\dfrac{5}{3}\overrightarrow{w}$

18. $a)$ 14 unidades cúbicas $\qquad b)$ 23 unidades cúbicas $\qquad c)$ 6 unidades cúbicas

19. $t=0,\quad t=\sqrt{2}$ y $t=-\sqrt{2}$

21. $-3\,\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+5\,\overrightarrow{k}$

22. $b)\ \dfrac{1}{2}$ unidad cúbica

23. *a)* $5\overrightarrow{i} - 4\overrightarrow{j} + 9\overrightarrow{k}$ *b)* $\overrightarrow{x} = \frac{1}{3}\overrightarrow{i} + \frac{1}{6}\overrightarrow{j} - \frac{7}{6}\overrightarrow{k}$

c) Magnitud: $\sqrt{402} \approx 20.05$, dirección: $\begin{pmatrix} 37.06° \\ 75.56° \\ 56.73° \end{pmatrix}$

d) $-\frac{1}{\sqrt{10}}\overrightarrow{i} + \frac{3}{\sqrt{10}}\overrightarrow{k}$ *e)* 6 *f)* 10.89

g) $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{26}}$, $\cos\beta = \frac{3}{\sqrt{26}}$, $\cos\gamma = \frac{-4}{\sqrt{26}}$

h) $\frac{1}{3}\overrightarrow{i} - \frac{1}{6}\overrightarrow{j} - \frac{1}{6}\overrightarrow{k}$ *i)* $\frac{1}{\sqrt{6}}$ *j)* $2\sqrt{35}$

k) *i)* $\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$ *ii)* $-17\overrightarrow{i} + 8\overrightarrow{j} + 11\overrightarrow{k}$

l) $\pm\frac{1}{\sqrt{35}}\left(3\overrightarrow{i} + 5\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}\right)$ *m)* $\sqrt{35}$ unidades cuadradas.

n) Los múltiplos escalares no nulos del vrctor $3\overrightarrow{i} + 5\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$

ñ) $a = 9$ *o)* $a = \mp\frac{2}{\sqrt{42}}$, $b = \pm\frac{1}{\sqrt{42}}$ *p)* $a = 0$, $b = \frac{7}{4}$, $c = -\frac{1}{4}$

q) 4 unidades cúbicas.

Sección 9.5

24. *a)* *i)* $6E_1 - 4E_2 - 2E_3$ *ii)* $\frac{5}{2}E_1 - 12E_2 - \frac{23}{2}E_3$

b) $\cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{38}}$, $\cos\beta = \frac{-3}{\sqrt{38}}$, $\cos\gamma = \frac{-2}{\sqrt{38}}$

c) $\begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \\ 3/2 \end{pmatrix}$ *d)* $\sqrt{66}$ *e)* $\begin{pmatrix} -2 \\ 11/4 \\ 15/4 \end{pmatrix}$ *f)* $\frac{1}{\sqrt{122}}\begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ -9 \end{pmatrix}$

25. *a)* $W = (a+c)\,E_1 + (a+b+c)\,E_2 + (a+b)\,E_3$

c) $a = 2$, $b = 1$, $c = -1$

d) $a = -2c$, $b = c$, $c \in \mathbb{R}$, ej.: $-2X + Y + V = O$

26. *b)* $m = 0$, $n = 5$

27. Cada uno de los ángulos es $\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 54.74°$

28. *a)* $\begin{pmatrix} 8 \\ 14 \\ -2 \end{pmatrix}$ *b)* $\pm\frac{1}{\sqrt{66}}\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) $\frac{5}{2\sqrt{21}}, \frac{9}{2\sqrt{35}}, \frac{1}{2\sqrt{15}}$ *d)* $\begin{pmatrix} 4/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$

29. $W = \begin{pmatrix} -4/9 \\ -8/9 \\ 8/9 \end{pmatrix}$, $Z = \begin{pmatrix} 22/9 \\ -1/9 \\ 10/9 \end{pmatrix}$

30. *a)* Z y W, Z y U, W y U. *b)* $\pm\frac{2}{9}\begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$

c) $proy_Y X = \frac{8}{9}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $proy_X Y = \frac{4}{13}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$d)\ X = \underbrace{\frac{13}{9}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\text{Paralelo a } W} + \underbrace{\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 10 \\ -22 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{Ortogonal a } W}$$

31. *a*) S puede ser cualquier punto $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tal que $x - 5y - 5z = -8$. Por ejemplo

$S = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ *b*) $t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $t \in R$

33. *c*) $\|Z\| = \sqrt{5}$

35. *a*) -4 *b*) $\|Z\| = 8\sqrt{3}$ *c*) $\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

36. *b*) 20.21 unidades lineales. *d*) $\sphericalangle PRQ : 25.6°$, $\sphericalangle PQR : 64.4°$
e) $2\sqrt{854} \approx 58.45$ unidades cuadradas.

37. *a*) Área del paralelogramo: $\sqrt{172}$ unidades cuadradas *b*) $X = \begin{pmatrix} 15/4 \\ 1 \\ 13/4 \end{pmatrix}$

38. *a*) $3\sqrt{74} \approx 25.81$ unidades cuadradas.
b) $\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}$ unidades cuadradas.
c) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}|ab|$ unidades cuadradas.

39. *área* $= 24\sqrt{2}$ unidades cuadradas.

40. *a*) $S_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $S_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $S_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
b) $\sqrt{14}$ unidades cuadradas.
c) $\dfrac{\sqrt{14}}{2}$ unidades cuadradas.

41. *a*) *i*) $E_1 + 9E_2 + 5E_3$ *ii*) $20E_1 + \dfrac{5}{3}E_2 - 7E_3$ *iii*) $\dfrac{5}{3}E_1 + 15E_2 + \dfrac{25}{3}E_3$
b) $\dfrac{2}{3}\sqrt{1482}$ *c*) $-\dfrac{6}{\sqrt{145}}\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$ *d*) Si son paralelos.

42. *a*) no coplanares *b*) coplanares

43. *a*) Son coplanares *b*) no coplanares, Volumen $= \dfrac{2}{3}$ unidades cúbicas

44. *a*) *i*) $\dfrac{2}{\sqrt{6}}$ *ii*)
$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ *iii*) $\dfrac{1}{3}$ *b*) $\dfrac{4}{3}$ unidades cúbicas.

Respuestas Ejercicios Capítulo 10

Sección 10.1

1. Están sobre $\mathcal{L}$ los puntos P_2 y P_4
2. $x = 1 + t$, $y = -3 + t$, $z = 2$

3. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$

4. $x = 3 + 4t$, $y = -2$, $z = 5 - 2t$. Dos puntos de $\mathcal{L}$ distintos de P son, por ejemplo, $\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$.

5. *a*) $t = -\dfrac{P \cdot D}{\|D\|^2}$ *b*) *i*) $\dfrac{\sqrt{186}}{3}$ *ii*) $\dfrac{\sqrt{1518}}{11}$

6. *a*) L.D. *b*) L.I.

Sección 10.2

8. *a*) $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+3}{-26} = \dfrac{z-2}{-22}$ *b*) $\dfrac{x+4}{26} = y - 7 = \dfrac{z-3}{37}$ *c*) $\dfrac{x}{8} = \dfrac{y}{4}$, $z = 0$

9. *a*) 37.79° *b*) 77.53° *c*) 25.21°

10. *a*) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $\dfrac{x-4}{-3/2} = \dfrac{y}{3}$, $z = 2$; $\dfrac{y-1}{-3/2} = \dfrac{z-4}{3}$, $x = 3$; $\dfrac{x-2}{-3/2} = \dfrac{y-5}{9/2} = \dfrac{z}{-3}$

11. $x = y = -z$

Sección 10.3

12. *b*) $\dfrac{4\sqrt{901}}{53}$

13. $\begin{pmatrix} 31/21 \\ 37/21 \\ 85/21 \end{pmatrix}$

14. *a*) Se cruzan *b*) No son perpendiculares

c) Con el plano xy : $\begin{pmatrix} 5/3 \\ -1/3 \\ 0 \end{pmatrix}$; con el plano xz : $\begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix}$;

con el plano yz : $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$

d) $\dfrac{6\sqrt{42}}{7}$ *e*) $x - 3 = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-5}{-1}$

f) $\dfrac{x-3}{13} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+2}{-3}$, punto de intersección $\begin{pmatrix} 8/7 \\ 5/7 \\ -11/7 \end{pmatrix}$.

Sección 10.4

15. Q_3 y Q_4

16. *a*) $\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ *b*) $2y + z = 1$

17. *a*) *ii*) $13x - 5y - 6z = -30$ *b*) $x - 2y - 4z = 0$

c) $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ se cortan; $x - 3y + 4z = -3$

Sección10.5

18. *a)* $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_3$ son perpendiculares; $\mathcal{P}_2$ y $\mathcal{P}_4$ son paralelos *b)* $\phi = 47.12°$
19. $2x - 3y + 5z = 24$
20. *a)* $x + 2y + 9z = -55$ *b)* $x = 2 + 4t$, $y = 1 - 3t$, $z = -3 + t$
21. Dos soluciones: $4y - 3z = 1$ y $z = 1$
22. *a)* $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, no contenida *b)* Conjunto vacío, no contenida.

    c) $\begin{pmatrix} 7/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$, no contenida *d)* La recta dada, sí contenida.
23. $x = 3 - 6t$, $y = -1 - 7t$, $z = 4t$
24. $11x + 15y - 4z = -65$;
25. *b)* $x - 3 = \dfrac{y+4}{-3} = \dfrac{z+5}{-2}$

Sección 10.6

26. *a)* $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ *b)* $\dfrac{7}{3}$ *c)* $Q = \begin{pmatrix} -7/9 \\ -14/9 \\ 14/9 \end{pmatrix}$
27. *i) a)* Se cortan en $\begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 36 \end{pmatrix}$ y no son perpendiculares. *b)* 0 *c)* 25.22°

    ii) a) Se cruzan y no son perpendiculares. *b)* $\dfrac{49}{\sqrt{251}}$ *c)* 50.63°

    iii) a) Se cruzan y son perpendiculares. *b)* $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$ *c)* 90°

    iv) a) Se cortan en $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ y son perpendiculeres. *b)* 0 *c)* 90°

    v) a) No se cortan y son paralelas. *b)* $\sqrt{\dfrac{696}{35}}$ *c)* 0°
28. *a)* $2y + z = 2$, $2y + z = 12$ *b)* $2\sqrt{14}$
29. *b)* 5
30. *a)* $4/\sqrt{21}$ *b)* $x - 2y + 4z = 4$

Sección 10.7

31. *a) i)* no paralelas *ii)* paralelas *iii)* no paralelas *iv)* paralelas

    b) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ *c)* $11x - 15y - 13z = -46$
32. *a)* $\mathcal{P}_1 : 6x - 2y + 3z = -6$, $\mathcal{P}_2 : x = 6 - t - s$, $y = t$, $z = s$

    b) 54.73° *c)* $\dfrac{13\sqrt{33}}{11} \approx 6.789$
33. *b)* $22/\sqrt{26}$ *c)* $x = -1 + 2t + 2s$, $y = -2 - t + 3s$, $z = 1 + 2t + s$

    d) $\dfrac{x}{5} = y = -\dfrac{z}{13}$ *e)* $x = \dfrac{2}{13} - 3t$, $y = \dfrac{5}{13} - 4t$, $z = t$
34. *a)* L.D. *b)* L.I., $W = 0U - V + Z$ *c)* L.D.

Respuestas Ejercicios Capítulo 11

Sección 11.1

1. *a)* $P_U\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \dfrac{1}{14}\begin{pmatrix} 9x+3y-6z \\ 3x+\ \ y-2z \\ -6x-2y+4z \end{pmatrix}$, $P_U\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{14}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

   b) $S_U\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 2x+3y-6z \\ 3x-6y-2z \\ -6x-2y-3z \end{pmatrix}$, $S_U\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -11 \end{pmatrix}$

   En *a)* y *b)* $U = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

2. *a)* $Q_U\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2x+y-z \\ x+2y+z \\ -x+y+2z \end{pmatrix}$, $Q_U\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

   b) $R_U\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} x+2y-2z \\ 2x+y+2z \\ -2x+2y+z \end{pmatrix}$, $R_U\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$

   En *a)* y *b)* $U = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. *a)* $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(x-y\sqrt{3}\right)/2 \\ \left(x\sqrt{3}+y\right)/2 \\ z \end{pmatrix}$ $\quad T\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

   b) $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}(x+z) \\ y \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(-x+z) \end{pmatrix}$, $T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

   c) $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \left(\sqrt{3}y-z\right)/2 \\ \left(y+\sqrt{3}z\right)/2 \end{pmatrix}$, $T\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$

Sección 11.2

4. *a)* Es lineal, $m(T) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *b)* Es lineal, $m(T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

   c) No es lineal *d)* Es lineal, $m(T) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5. *a)* $\dfrac{1}{11}\begin{pmatrix} 10 & -1 & -3 \\ -1 & 10 & -3 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ *b)* $\dfrac{1}{11}\begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ -8 \end{pmatrix}$

   c) $\dfrac{1}{11}\begin{pmatrix} 9 & -2 & -6 \\ -2 & 9 & -6 \\ -6 & -6 & -7 \end{pmatrix}$ *d)* $\dfrac{1}{11}\begin{pmatrix} 13 \\ 13 \\ -5 \end{pmatrix}$

6. $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x+y+4z)/2 \\ x-y-z \\ (x+y)/2 \end{pmatrix}$ $\quad T\begin{pmatrix} -10 \\ -15 \\ 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 75/2 \\ -20 \\ -25/2 \end{pmatrix}$

7. *a)* $m(T)=\begin{pmatrix}-1&-1&2\\1&-3&3\\-1&-5&5\end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix}3\\4\\4\end{pmatrix}$

8. *a)* $\begin{pmatrix}5\\9\\5\end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix}9\\-14\\9\end{pmatrix}$ *c)* $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-y+2z\\3y+z\\x-y+2z\end{pmatrix}$

d) $T(\mathbb{R}^3)=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3\Big/ x-z=0\right\}$: plano que pasa por el origen con vector normal $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$.

9. *a)* $\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3\Big/ x-z=0\right\}$: plano que pasa por el origen con vector normal $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$

b) $\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3\Big/ x=-y=z\right\}$: recta que pasa por el origen con vector director $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$

10. *a)* $m(T)=\begin{pmatrix}1&-1&2\\3&1&4\\5&-1&8\end{pmatrix}$ *b)* $2x+2y-z=0$ *c)* $x=-3t,\ y=t,\ z=2t$

11. *a)* $T(\mathcal{L})=\left\{\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\-3\\3\end{pmatrix}\Big/ t\in\mathbb{R}\right\}$:

recta que pasa por el punto $\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}$ con vector director $\begin{pmatrix}1\\-3\\3\end{pmatrix}$.

b) $T\left(\overline{AB}\right)$: segmento de recta con extremos $\begin{pmatrix}2\\4\\-4\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$

c) $T(\mathcal{P})$: plano con ecuación $y+z=0$

d) $T(\mathcal{L}_2)$: recta con ecuación $x=-6t$, $y=\frac{4}{3}+10t$, $z=-\frac{4}{3}-10t$

12. *a)* Hay infinitas respuestas. Para cualquiera de ellas defina $T(E_1), T(E_2), T(E_3)$ de modo que estos tres vectores correspondan a puntos del plano dado y dos de ellos sean L.I.

b) Hay infinitas respuestas. Para cualquiera de ellas defina $T(E_1), T(E_2), T(E_3)$ de modo que estas tres imágenes sean múltiplos escalares del vector $\begin{pmatrix}2\\4\\-6\end{pmatrix}$ y al menos una de las tres sea no nula.

Sección 11.3

13. a) $m(T+S)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}4 & 2 & -2\\ 2 & 1 & 2\\ -2 & 2 & 4\end{pmatrix}$, $\quad (T+S)\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}4x+2y-2z\\ 2x+y+2z\\ -2x+2y+4z\end{pmatrix}$

b) $m(3T-2S)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}7 & -4 & 4\\ -4 & -2 & -4\\ 4 & -4 & 7\end{pmatrix}$, $\quad (3T-2S)\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}7x-4y+4z\\ -4x-2y-4z\\ 4x-4y+7z\end{pmatrix}$

c) $m(TS)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ -2 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $\quad (TS)\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}x+2y-2z\\ 0\\ -2x+2y+z\end{pmatrix}$

d) $m(ST)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 2 & 0 & 2\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $\quad (ST)\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}x-2z\\ 2x+2z\\ -2x+z\end{pmatrix}$

e) $m[(2S+T)S]=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}7 & 2 & -2\\ 0 & 6 & 0\\ -2 & 2 & 7\end{pmatrix}$, $\quad ((2S+T)S)\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}7x+2y-2z\\ 6y\\ -2x+2y+7z\end{pmatrix}$

14. a) $(TS)\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}z\\ y+z\\ x+y+z\end{pmatrix}$ $\quad$ b) $(ST)\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y+z\\ x+y\\ x\end{pmatrix}$

c) $S^2\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ $\quad$ d) $((2T-3S)S)\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3x+2z\\ -y+2z\\ 2x+2y-z\end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix}3 & -20 & 1\\ 0 & 3 & 17\\ -38 & -34 & 52\end{pmatrix}$.

16. $T\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\left(R^y_{\frac{\pi}{6}}R^z_{\frac{\pi}{3}}\right)\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\left(x\sqrt{3}-3y+2z\right)/4\\ \left(x\sqrt{3}+y\right)/2\\ \left(-x+y\sqrt{3}+2\sqrt{3}z\right)/4\end{pmatrix}$,

$T\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\ \sqrt{3}\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\left(3-\sqrt{3}\right)/4\\ \left(3+\sqrt{3}\right)/2\\ \left(9-\sqrt{3}\right)/4\end{pmatrix}$

17. $T\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x\\ \frac{\sqrt{2}}{2}(y-z)\\ \frac{\sqrt{2}}{2}(y+z)\end{pmatrix}$, $\quad T\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{2}\\ \sqrt{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 2\end{pmatrix}$

Sección 11.4

19. a) i) $S_U^{-1}=S_U$ con $U=\begin{pmatrix}1/3\\ 2/3\\ 2/3\end{pmatrix}$; $\quad S_U^{-1}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}-7x+4y+4z\\ 4x-y+8z\\ 4x+8y-z\end{pmatrix}$

ii) $R_U^{-1}=R_U$ con $U=\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 2\end{pmatrix}$; $\quad R_U^{-1}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}7x+4y-4z\\ 4x+y+8z\\ -4x+8y+z\end{pmatrix}$

b) $R_U^{-1}=R_U$ con $U=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$; $\quad R_U^{-1}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ -y\\ z\end{pmatrix}$

21. *b*) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2/3 \end{pmatrix}$ *c*) $T^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+y \\ x-2y+z \\ y-\frac{2}{3}z \end{pmatrix}$

22. *a*) *i*) Invertible, $A^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

ii) Invertible, $A^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

iii) No invertible

b) *i*) $T^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} x+y-z \\ x-y+z \\ -x+y+z \end{pmatrix}$ *ii*) $T^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -x+y+z \\ x-y+z \\ x+y-z \end{pmatrix}$

iii) $T\left(\mathbb{R}^3\right)$ es el plano $x-y+z=0$

23. *a*) $T^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}y+\frac{2}{3}z \\ x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{3}z \\ -\frac{2}{3}y+\frac{1}{3}z \end{pmatrix}$ *b*) $T^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-x+3y-z)/5 \\ -y+z \\ (3x+6y-7z)/5 \end{pmatrix}$

c) $T^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{x}{2}+\frac{z}{4} \\ -y+z \\ -\frac{1}{2}z \end{pmatrix}$ *d*) $T^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x-\frac{7}{2}y+\frac{1}{2}z \\ -x+y \\ 2x-\frac{5}{2}y+\frac{1}{2}z \end{pmatrix}$

24. *b*) $(TS)^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ -x \\ -y \end{pmatrix}$

25. *a*) $a=0$, $a=2$, $a=-2$ *b*) $abc \neq 0$, $T^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x/a \\ y/b \\ z/c \end{pmatrix}$

d) $ad-bc \neq 0$, $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} ad-bc & 0 & 0 \\ 0 & d & -b \\ 0 & -c & a \end{pmatrix}$

26. *a*) L.I. *b*) L.D.

Respuestas Ejercicios Capítulo 12

Sección 12. 1

1. *a*) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \Big/ 2x+3y-3z=2 \right\}$:

Plano que pasa por el punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y tiene vector normal $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$

b) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \Big/ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/7 \\ 9/7 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 4/7 \\ 11/7 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$:

Recta que pasa por el punto $\begin{pmatrix} -5/7 \\ 9/7 \\ 0 \end{pmatrix}$ y tiene vector director $\begin{pmatrix} 4/7 \\ 11/7 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) Conjunto vacío

$d)$ $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \Big/ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -2 \\ -3/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$:

Recta que pasa por el punto $\begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ y tiene vector director $\begin{pmatrix} -2 \\ -3/2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$e)$ $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \Big/ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ z \in \mathbb{R} \right\}$: Recta generada por $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$f)$ $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \Big/ 3x - 2y + 2\sqrt{3}z = 1 \right\}$:

Plano que pasa por el punto $\begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y tiene vector normal $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix}$

Sección 12.2

2. $b)$ $i)$ $\left\{ \begin{pmatrix} 47/6 \\ 22/3 \\ 9/2 \end{pmatrix} \right\}$ $\qquad$ $ii)$ $\left\{ \begin{pmatrix} 7/2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$iii)$ $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \Big/ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},\ z \in \mathbb{R} \right\}$:

Recta que pasa por el punto $\begin{pmatrix} -19 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}$ y tiene vector director $\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$iv)$ $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \Big/ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -1/2 \\ 5/2 \\ 1 \end{pmatrix},\ z \in \mathbb{R} \right\}$:

Recta generada por $\begin{pmatrix} -1/2 \\ 5/2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$v)$ Conjunto vacío

$vi)$ $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \Big/ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ y \in \mathbb{R} \right\}$:

Recta que pasa por $\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ y tiene vector director $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

3. $a)$ Recta que pasa por el punto $\begin{pmatrix} 5/4 \\ 25/4 \\ 0 \end{pmatrix}$ y tiene vector director $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$b)$ $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ $\qquad$ $c)$ Conjunto vacío.

4. $a)$ $y = 2x^2 - x + 3$ $\qquad$ $b)$ $-2x + 5y + 3z = 0$
$c)$ $p(x) = -4x^3 - 8x^2 + 2x + 11$ $\qquad$ $d)$ $a = 1,\ b = -2,\ c = 3$

5. Temperatura en los puntos x, y, z : $14°, 17°$ y $14°$, respectivamente.

6. 200 libros de pasta rústica, 55 libros con pasta dura, 40 libros con pasta de lujo.
7. 4 unidades de comestible I, 2 de comestible II y 1 de comestible III.
9. *a*) $-2a+b+c=0$

   c) $k=\dfrac{95}{11}$ $\quad \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \Big/ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -32/11 \\ -3/11 \\ 1 \end{pmatrix},\ z \in \mathbb{R} \right\}$

Sección 12.3

10. *a*) $\mathcal{S} = T_{X_0}(\mathcal{S}_H) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \Big/ 2x-3y+z=\dfrac{13}{2} \right\}$

    b) $\mathcal{S} = T_{X_0}(\mathcal{S}_H) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \Big/ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R} \right\}$

    c) $\mathcal{S} = T_{X_0}(\mathcal{S}_H) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$

Sección 12.4

11. *b*)

    i) $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ $\quad$ *ii*) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \Big/ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -3/7 \\ -4/7 \\ 1 \end{pmatrix},\ z \in \mathbb{R} \right\}$

    iii) $\left\{ \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$ $\quad$ *iv*) Conjunto vacío

12. *i*) *a*) A es invertible, $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad$ *b*) $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

    ii) A no es invertible

    iii) *a*) A es invertible, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad$ *b*) $\begin{pmatrix} 4/3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

    iv) *a*) A no es invertible

    v) *a*) A es invertible, $A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A^T$ $\quad$ *b*) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Respuestas Ejercicios Capítulo 13

Sección 13.1

1. *a*) $\det A = -12$, invertible $\quad$ *b*) $\det A = 0$, no invertible
   c) $\det A = -3$, invertible $\quad$ *d*) $\det A = 8$, invertible
2. *a*) $\det T = -2$, invertible $\quad$ *b*) $\det T = -10$, invertible
   c) $\det T = 0$, no invertible $\quad$ *d*) $\det T = -1$, invertible
3. *a*) *i*) $\lambda = -1$ y $\lambda = 8$ $\quad$ *ii*) $\lambda = -2$ y $\lambda = 1$
   b) Para todo valor de α, A no es invertible.
4. $x=0,\ y=1,\ z=2$
5. $\cos\gamma = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

Sección 13.2

6. *a*) 48 *b*) 9 *c*) 1
7. *a*) $\det B = -3$ *b*) $\det C = -4$ *c*) $\det D = -2$ *d*) $\det E = -10$
8. *b*) *i*) $(b-a)(c-a)(c-b)(a+b+c)$ *ii*) $(b-a)(c-a)(c-b)(ab+ac+bc)$
10. *a*) -24 *b*) $-243/4$ *c*) $-1/324$ *d*) $4/3$ *e*) -4
11. *a*) $\det\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{8}$ *b*) $\det\left(A^{-1}\right) = -1$ *c*) $\det\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{2}$

Sección 13.3

13. *a*) L.I., orientada negativamente *b*) L.D.
 c) L.I., orientada positivamente *d*) L.I., orientada negativamente.
14. *a*) L.I., 12 unidades cúbicas *b*) No son L.I.
15. *a*) T cambia la orientación *b*) 24 unidades cúbicas
16. *a*) 14 unidades cúbicas *b*) 14 unidades cúbicas *c*) 14 unidades cúbicas
17. *a*) 10 unidades cúbicas *b*) 5 unidades cúbicas *c*) 10/3 unidades cúbicas

Respuestas Ejercicios Capítulo 14

Sección 14.1

1. *a*) $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 3$
 b) $A + 3I$ es invertible, $A + I$ y $A - 3I$ no son invertibles. *c*) $\det(A) = -9$
2. *a*) X es un vector propio de T correspondiente a $\lambda = 0$. Y no es vector propio de T.
 b) $a = b = c = d = e = f = 1$
3. *b*) *i*) $\lambda_1 = 2,\ \mathcal{E}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \Big/ y = z = 0 \right\}$: eje x

 ii) $\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 3$

 $\mathcal{E}_{-2} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \Big/ y = 0 \right\}$: plano xz;

 $\mathcal{E}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \Big/ x = z = 0 \right\}$: eje y.

4. *i*) *a*) $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -2$

 b) $\mathcal{E}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \Big/ x = -y = z \right\}$: recta generada por $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

 $\mathcal{E}_{-2} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \Big/ x + y + z = 0 \right\}$: plano que pasa por el origen y

 tiene vector normal $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

 c) Sí; $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

 ii) *a*) $\lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = 5$

 b) $\mathcal{E}_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \Big/ x = z = 0 \right\}$: eje y

$$\mathcal{E}_5 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \Big/ \; x = y = 0 \right\} : \text{eje } z$$

c) No.

iii) *a)* $\lambda_1 = 5/2, \ \lambda_2 = 1/2$

b) $\mathcal{E}_{\frac{5}{2}} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \Big/ \; x = y = -z \right\}$: recta que pasa por el origen y tiene vector director $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\mathcal{E}_{\frac{1}{2}} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \Big/ \; x + 2y - z = 0 \right\}$: plano que pasa por el origen y tiene vector normal $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

c) Sí; $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

iv) *a)* $\lambda_1 = -1, \ \lambda_2 = 2$

b) $\mathcal{E}_{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \Big/ \; x = -y = z \right\}$: recta generada por $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\mathcal{E}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \Big/ \; x = -y, \ z = 0 \right\}$: recta generada por $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) No.

5. *i)* *a)* $\lambda_1 = 12, \ \lambda_2 = 1$

b) $\mathcal{E}_{12} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \Big/ \; x = y = \frac{z}{3} \right\}$: recta generada por $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\mathcal{E}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \Big/ \; x + y + 3z = 0 \right\}$: plano que pasa por el origen con vector normal $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

ii) *a)* $\lambda_1 = 0$ *b)* $\mathcal{E}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \Big/ \; z = 0 \right\}$: plano xy

iii) *a)* $\lambda_1 = 0$ *b)* $E_0 = \mathbb{R}^3$: todo el espacio

iv) *a)* $\lambda_1 = 1$

b) $\mathcal{E}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \Big/ \; x = y = z \right\}$: recta generada por $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

v) *a)* $\lambda_1 = 1$ *b)* $E_1 = \mathbb{R}^3$: todo el espacio *vi*) Si $\theta \neq 0$ y $\theta \neq \pi$, $\lambda_1 = 1$, $\mathcal{E}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \Big/ y = z = 0 \right\}$: eje x

Si $\theta = 0$, $R_\theta^x = I$, $\lambda_1 = 1$, $\mathcal{E}_1 = \mathbb{R}^3$. Si $\theta = \pi$, $R_\theta^x = R_\pi^x$, $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1$,

$\mathcal{E}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \Big/ y = z = 0 \right\}$: eje x;

$\mathcal{E}_{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \Big/ x = 0 \right\}$: plano yz.

6. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

7. *a*) Para todo $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$ *b*) Para todo $c \in \mathbb{R}$

8. *a*) Sí existen; $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ *b*) No existen.

c) Sí existen; $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ *d*) No existen.

Sección 14.2

10. *a*) $a = 2$, $b = c = 1$ *b*) a y b reales tales que $a = b$ y $c = 4$

c) $c = 1$, $b = 0$ y a cualquier real *d*) $a = 11$, $b = -9$, $c = -13$

11. *a*) Es ortogonal, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$

b) Es ortogonal, $A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\mathrm{sen}\theta & 0 \\ \mathrm{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) No es ortogonal *d*) No es ortogonal

13. *a*) $a = 0$, $b = -2/\sqrt{6}$, $c = 1/\sqrt{3}$ o $a = 0$, $b = 2/\sqrt{6}$, $c = -1/\sqrt{3}$

14. *b*) $Q = \begin{pmatrix} -2/3 & 1/\sqrt{2} & -1/3\sqrt{2} \\ 2/3 & 1/\sqrt{2} & 1/3\sqrt{2} \\ 1/3 & 0 & -4/3\sqrt{2} \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

15. *a*) $\mathcal{E}_5 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \Big/ x = y = z \right\}$ *b*) $\lambda = 2$

c) Sí, ya que A es simétrica.

$Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2\sqrt{6} \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

16. *i*) *a*) $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = 5$, $\lambda_3 = -1$

$\mathcal{E}_{-4} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \Big/ y = z = 0 \right\}$: eje x

$$\mathcal{E}_5=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \Big/ x=0,\ y=z\right\}: \text{recta generada por } \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\mathcal{E}_{-1}=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \Big/ x=0,\ y=-z\right\}: \text{recta generada por } \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

c) Sí, ya que A es simétrica; $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$

d) $Q=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}\\0&1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$, $\quad D=\begin{pmatrix}-4&0&0\\0&5&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$

ii) *a*) $\lambda_1=2,\ \lambda_2=-1$

$$\mathcal{E}_2=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \Big/ x=y=z\right\}: \text{recta generada por } \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\mathcal{E}_{-1}=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \Big/ x+y+z=0\right\}: \text{plano que pasa por el origen y tiene}$$

vector normal $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

c) Sí, ya que A es simétrica; $\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{6}\\2/\sqrt{6}\end{pmatrix}$

d) $Q=\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}&-1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{6}\\1/\sqrt{3}&1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{6}\\1/\sqrt{3}&0&2/\sqrt{6}\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$

iii) *a*) $\lambda_1=0,\ \lambda_2=3$

$$\mathcal{E}_0=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \Big/ x-y+z=0\right\}: \text{plano que pasa por el origen y tiene}$$

vector normal $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

$$\mathcal{E}_3=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \Big/ x=-y=z\right\}: \text{recta generada por } \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

c) Sí, ya que A es simétrica; $\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1/\sqrt{6}\\1/\sqrt{6}\\2/\sqrt{6}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\-1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix}$

d) $Q=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{2}&1/\sqrt{6}&-1/\sqrt{3}\\0&2/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\end{pmatrix}$, $\quad D=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&3\end{pmatrix}$

iv) *a*) $\lambda_1=1,\ \lambda_2=6,\ \lambda_3=-4$

$$\mathcal{E}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \Big/ x = 0,\ \frac{y}{4} = -\frac{z}{3} \right\} : \text{recta generada por} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{E}_6 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \Big/ \frac{x}{5} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} \right\} : \text{recta generada por} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{E}_{-4} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \Big/ \frac{x}{5} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{-4} \right\} : \text{recta generada por} \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

c) Sí, ya que A es simétrica; $\begin{pmatrix} 0 \\ 4/5 \\ -3/5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 3/5\sqrt{2} \\ 4/5\sqrt{2} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -3/5\sqrt{2} \\ -4/5\sqrt{2} \end{pmatrix}$

d) $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 4/5 & 3/5\sqrt{2} & -3/5\sqrt{2} \\ -3/5 & 4/5\sqrt{2} & -4/5\sqrt{2} \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

17. *a*) Sí, ya que A posee 3 vectores propios L.I.

$Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

b) Sí, ya que A es simétrica

$Q = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

c) $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -7 & 8 & 8 \\ 8 & -7 & 8 \\ 8 & 8 & -7 \end{pmatrix}$

18. *a*) $\mathcal{E}_{-3} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \Big/ x - y - z = 0 \right\}$

b) $Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

c) $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -4 & -5 & -5 \\ -5 & -4 & 5 \\ -5 & 5 & -4 \end{pmatrix}$

Respuestas Ejercicios Capítulo 15

Sección 15.1 a sección 15.10

1. *a*) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{9} = 1$

b) $\begin{pmatrix} \pm 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, no hay interceptos con los ejes y y z.

c) Simetría con respecto al origen, a cada eje y a cada plano coordenado.

d) plano xy : $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$, hipérbola

plano xz : $\frac{x^2}{16} - \frac{z^2}{9} = 1$, hipérbola

No existe traza con el plano yz.

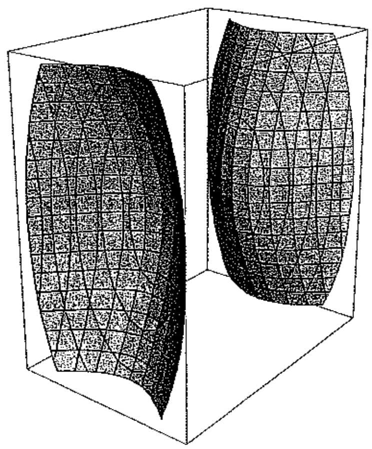
e) plano $z = z_0 : \dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1 + \dfrac{z_0^2}{9}$, hipérbola para todo $z_0 \in \mathbb{R}$

plano $y = y_0 : \dfrac{x^2}{16} - \dfrac{z^2}{9} = 1 + \dfrac{y_0^2}{9}$, hipérbola para todo $y_0 \in \mathbb{R}$

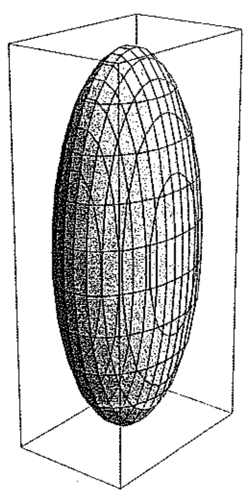
plano $x = x_0 : \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{9} = \dfrac{x_0^2}{16} - 1$, circunferencia si $|x_0| > 4$,

$\begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ si $|x_0| = 4$ y no existe si $|x_0| < 4$

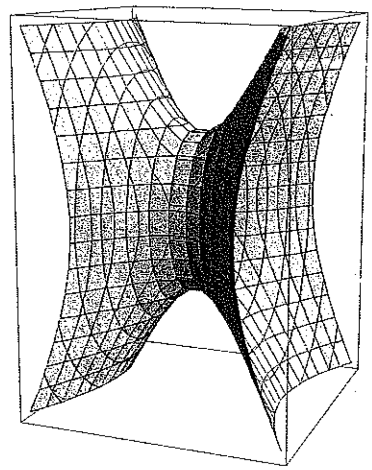
f)



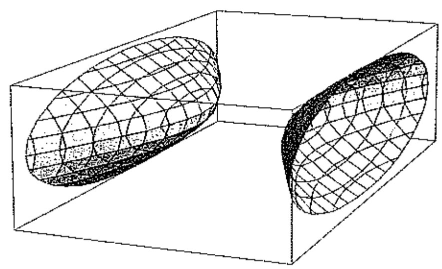
2. *a*) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{36} = 1$, elipsoide



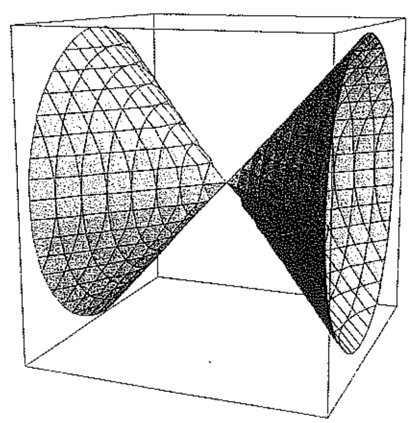
b) $\dfrac{x^2}{2} - y^2 + \dfrac{z^2}{3} = 1$, hiperboloide de una hoja, eje y



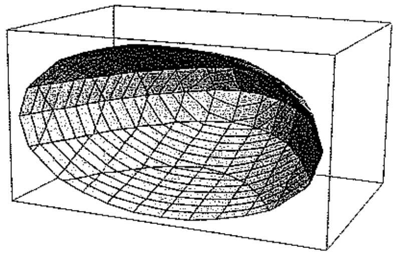
c) $-\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} - z^2 = 1$, hiperboloide de dos hojas, eje y



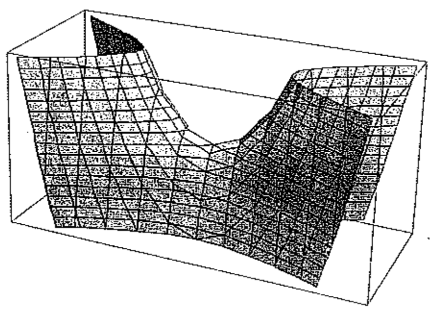
d) $x^2 + z^2 = y^2$, cono circular recto, eje y



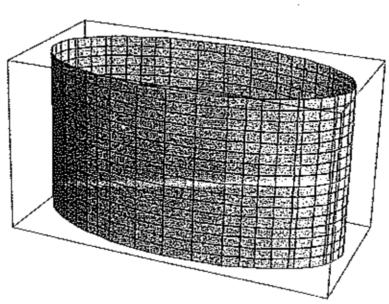
e) $\dfrac{y^2}{1/4} + z^2 = 12x$, paraboloide elíptico, eje x



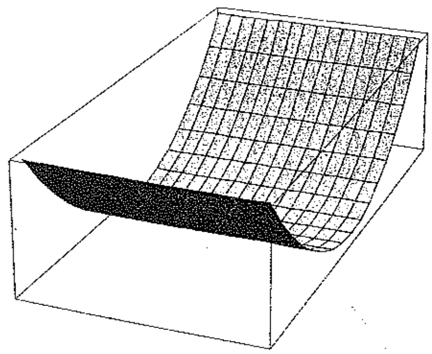
$f)$ $z = y^2 - \dfrac{x^2}{1/4}$, paraboloide hiperbólico, eje z



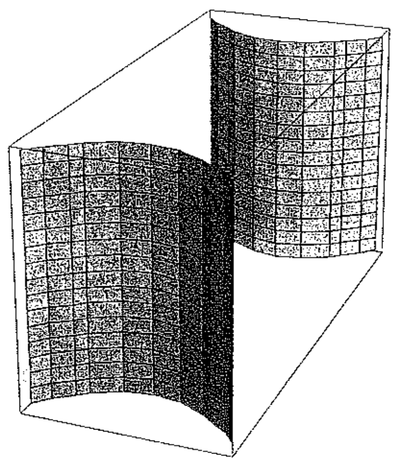
$g)$ $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$, cilindro ecto elíptico, eje z



$h)$ $z = \dfrac{1}{4}x^2$, cilindro recto parabólico, eje z



i) $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1$, cilindro recto hiperbólico, eje z



Sección 15.11

3. *a*) $x' = x - 1,\ y' = y - 2,\ z' = z - 3;\quad \dfrac{(x')^2}{4} + (y')^2 + \dfrac{(z')^2}{9} = 1$, elipsoide, eje z'

b) $x' = x + 1,\ y' = y - 3,\ z' = z + 2;\quad \dfrac{(x')^2}{3} + \dfrac{(y')^2}{6} - \dfrac{(z')^2}{9} = 1$ hiperboloide de una hoja, eje z'

c) $x' = x - 2,\ y' = y + 1,\ z' = z - 4;\quad (x')^2 - (y')^2 - (z')^2 = 1$ hiperboloide de dos hojas, eje x'

d) $x' = x,\ y' = y - 3,\ z' = z + 5;\quad 4\,(x')^2 + 9\,(y')^2 - (z')^2 = 0$ cono elíptico, eje z'

e) $x' = x + 1,\ y' = y + 2,\ z' = z - 1;\quad (x')^2 + 16\,(z')^2 = 16y'$ paraboloide elíptico, eje y'

f) $x' = x + 9,\ y' = y - 12,\ z' = z;\quad z' = 3\,(y')^2 - 7\,(x')^2$ paraboloide hiperbólico, eje z'

4. *a*) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = Q^T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ con $Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & -4/3\sqrt{5} & 2/3 \\ 0 & 5/3\sqrt{5} & 2/3 \\ -2/\sqrt{5} & -2/3\sqrt{5} & 1/3 \end{pmatrix}$;

$(x')^2 + (y')^2 + 10\,(z')^2 = 100$, elipsoide.

b) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = Q^T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ con $Q = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$;

$x'' = x',\ y'' = y' + \dfrac{2}{\sqrt{6}},\ z'' = z' - \dfrac{4}{\sqrt{3}}$

$-(x'')^2 - (y'')^2 + 2(z'')^2 = 1$, hiperboloide de dos hojas, eje z''

c) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = Q^T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ con $Q = \begin{pmatrix} 0 & 3/5 & -4/5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$;

$\dfrac{(x')^2}{9} + \dfrac{(z')^2}{4} = y'$, paraboloide elíptico, eje y'

d) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = Q^T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ con $Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$;

$x'' = x' + \dfrac{389\sqrt{2}}{144},\ y'' = y' - \dfrac{20}{6\sqrt{6}},\ z'' = z' - \dfrac{17}{3\sqrt{3}}$;

$(y'')^2 + \dfrac{(z'')^2}{2} = \dfrac{8}{3\sqrt{2}} x''$, paraboloide elíptico, eje x''

e) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = Q^T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ con $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$;

$(y')^2 + 3(z')^2 = 3$, cilindro recto elíptico, eje x'

f) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = Q^T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ con $Q = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 & -2/3 \end{pmatrix}$;

$\dfrac{(x')^2}{9} + \dfrac{(y')^2}{3} - \dfrac{(z')^2}{9} = 1$, hiperboloide de una hoja, eje z'

Bibliografía

[1] Banchoff, Thomas and Wermer John, *Linear Algebra Through Geometry*, Springer - Verlag, New York, Second Edition, 1991.

[2] Lima, Elong Lages, *Geometria Analítica e Álgebra Linear*, Coleção Matemática Universitária, Impa, Rio de Janeiro, 2001.

[3] Florey, Francis G., *Álgebra Lineal y aplicaciones*, Prentice Hall, Bogotá, 1980.

[4] Lheman, Charles H., *Geometría Analítica*, Limusa, México, 1996.

[5] Apostol, Tom M., *Calculus*, Segunda edición, Reverté, 1982.

[6] Grossman, Stanley I., *Álgebra Lineal*, Mcgraw - Hill, Tercera edición, México, 1992.

[7] Leithold, Louis, *El Cálculo*, Séptima Edición, Oxford University Press, México, 1998.

Índice

Ángulos directores, 290, 308
Área de un paralelogramo, 173, 301, 316

Abscisa, 34

Baricentro, 21

Cónica, 203
    degenerada, 203
Cilindro recto
    elíptico, 491
    hiperbólico, 492
    parabólico, 493
Circunferencia, 204
    centro de una, 204
    forma canónica de la ecuación de una, 205
    radio de una, 204
Combinación lineal
    de vectores en el espacio, 310
    de vectores en el plano, 98
    de vectores geométricos en el espacio, 280
Componente
    vectorial de un vector en la dirección de otro, 25
    escalar, 282
    escalar de un vector en la dirección de otro, 26
Componentes escalares, 35, 287
Cono circular, 491
Cono elíptico, 489
    extensión de un, 490
    interceptos con los ejes coordenados , 489
    simetría de un, 489
    trazas de un, 490
    vértice de un, 491
Coordenada, 32
Coordenadas cartesianas, 34, 285
Cosenos directores, 291, 308
Cramer
    fórmulas de, 175, 434

Descomposición canónica, 66, 311
    de un vector geométrico en el plano, 32, 35
    de vectores en el espacio, 285, 287
Descomposición de un vector
    en componentes ortogonales, 25
    en las direcciones de dos vectores dados, 24
Desigualdad
    de Cauchy - Schwarz, 30, 67, 312
    triangular, 14, 63, 308
Determinante
    de una matriz de orden 2, 167
    de una matriz de orden 3, 429
    de una transformación lineal, 429
    de una transformación lineal , 167
    desarrollo por cofactores, 430
    propiedades básicas, 177, 436
Dirección de un vector
    en el espacio, 279, 290
    en el plano, 4, 64
Distancia
    de un punto a un plano, 346
    de un punto a una recta, 96, 335
    entre dos puntos, 63, 308
    entre dos rectas ajenas, 347

Ecuación característica
    de una matriz de orden 2, 185
    de una matriz de orden 3, 455
    de una transformación lineal, 455
    de una transformación lineal , 185
Ecuación general de segundo grado, 263
    en tres variables, 479
Ecuación lineal, 149, 401
    conjunto solución de una, 149, 401
    solución de una, 149, 401

Ecuaciones de rotación, 112
Ecuaciones lineales, 98
Ecuaciones lineales equivalentes, 149, 401
Elipse, 224
  centro de una, 225
  eje focal de una, 224
  eje mayor de una, 225
  eje menor de una, 225
  eje normal de una, 225
  excentricidad de una, 227
  focos de una, 224
  horizontal, 233
  vértices de una, 224
  vertical, 233
Elipsoide, 482
  extensión de un, 484
  interceptos con los ejes coordenados, 483
  simetría de un, 483
  trazas de un, 483
Esfera, 484
  centro de una, 484
  ecuación en forma canónica para una, 485
  radio de una, 484
Espacio propio
  de una matriz, 456
  de una transformación lineal, 456
Expresión lineal, 98

Fórmulas de Cramer, 175, 434
Factorización
  de una matriz, 187, 461
  de una matriz simétrica de orden 2, 195
  de una matriz simétrica de orden 3, 470

Hipérbola, 203, 239
  eje focal de una, 241
  eje normal de una, 241
  eje transverso de una, 241
  focos de una, 239
  horizontal, 250
  rama derecha de una, 242
  rama izquierda de una, 242
  vértices de una, 241
  vertical, 250
Hiperboloide de dos hojas, 487
  extensión de un, 488
  interceptos con los ejes coordenados , 487
  simetría de un, 487
  trazas de un, 488
Hiperboloide de una hoja, 485
  extensión de un, 486
  interceptos con los ejes coordenados , 485
  simetría de un, 486
  trazas de un, 486

Inversa
  de una matriz, 140
  de una transformación, 135

Método de eliminación
  de Gauss, 409, 412
  de Gauss - Jordan, 419
Matrices
  producto entre, 131
  suma de, 125, 379
Matriz
  criterios de invertibilidad de una, 141
  de orden 2, 115
  de orden 3, 370
  de paso de un sistema cartesiano a otro, 501
  de una transformación lineal, 115
  diagonal, 189, 436
  escalonada, 413
  escalonada reducida, 419
  identidad, 115, 370
  nula, 115, 370
  ortogonal de orden 2, 193
  ortogonal de orden 3, 470
  simétrica de orde 3, 464
  simétrica de orden 2, 189
  transpuesta de una, 383
  triangular, 436

Operciones con transformaciones lineales, 378
Ordenada, 34
Orientación positiva, 32

Par ordenado, 33
  orientado negativamente, 168
  orientado positivamente, 168
Parábola, 203, 211
  directriz de una, 211
  foco de una, 211

formas canónicas de la ecuación de una, 213
horizontal, 216
lado recto de una, 211
vértice de una, 211
vertical, 216
Paraboloide elíptico, 494
extensión de un, 495
interceptos con los ejes coordenados, 494
simetría de un, 494
trazas de un, 494
Paraboloide hiperbólico
extensión de un, 497
interceptos con los ejes coordenados, 496
simetría de un, 496
simetría de un, 496
trazas de un, 496
Plano, 337
ecuación en forma general para un, 340
ecuación en forma normal para un, 338
ecuación vectorial paramétrica para un , 349
ecuaciones paramétricas para un, 350
ecuaciones paramétricas para un , 348
generado por dos vectores, 350
recta paralela a un, 345
recta perpendicular a un, 345
recta secante o que corta a un, 345
vector normal a un, 338
Plano Cartesiano, 34
Plano coordenado, 283
Planos
ángulo entre , 343
paralelos, 342
perpendiculares, 342
secantes o que se cortan, 342
Producto
de un vector por un escalar, 304
de una matriz por un escalar, 128
de una matriz por un vector, 116, 370
de una transformación por un escalar, 126
entre matrices de orden 2, 131
entre matrices de orden 3, 380
entre transformaciones lineales, 379
Producto mixto o triple producto escalar, 301, 317
Producto vectorial, 296, 316
Proyección
de un vector sobre otro, 25, 26, 69, 282, 313
de un vector sobre una recta, 107, 363
Puntos coplanares, 303

Recta en el espacio, 327
ecuación vectorial de una, 327
ecuaciones escalares paramétricas, 328
ecuaciones simétricas de una, 328
vector director de una, 327
Recta en el plano, 79
ángulo de inclinación y pendiente de una, 83
distancia de un punto a una, 96
ecuación en la forma general, 91
ecuación en la forma normal, 92
ecuación en la forma pendiente-intercepto, 88
ecuación en la forma punto-pendiente, 88
ecuaciónes vectoriales y paramétricas , 79
ecuaciones escalares no paramétricas, 87
ecuaciones paramétricas, 81
ecuaciones simétricas, 88
generada por un vector, 81
vector normal a una, 92
Rectas
ángulo entre, 95
paralelas, 84
perpendiculares, 94
Rectas en el espacio
ángulo y posiciones relativas entre, 331
ajenas o que se cruzan, 332
paralelas, 331
perpendiculares, 331
que se cortan, 331
Regla
de la mano derecha, 297
del paralelogramo para la suma de vectores, 7
del triángulo para la suma de vectores, 7
Rotación de ejes, 260, 500

Sistema cartesiano, 283
derecho, 283
izquierdo, 283

Sistema de ecuaciones lineales, 151
conjunto solución de un, 151, 402
de 3 ecuaciones con tres incógnitas, 401, 405
equivalentes, 402
escalonado, 413
homogéneo, 416
matriz aumentada de un , 412
matriz de coeficientes de un , 412
no soluble o inconsistente, 151, 402
soluble o consistente, 151, 402
solución de un, 151, 402
solución trivial de un, 402
vector de incógnitas de un , 412
vector de términos independientes de un , 412
Sistemas de ecuaciones lineales equivalentes, 153, 405
Superficie cilíndrica, 481
directriz de una, 481
generatriz de una, 481
recta, 481
Superficie cuadrática degenerada, 479
Superficies cuadráticas, 479
simétricas con respecto a un eje coordenado, 480
simétricas con respecto a un plano coordenado, 480
simétricas con respecto al origen, 481
Sustitución regresiva, 405

Teorema de la proporción, 20, 61
Terna ordenada, 282
orientada negativamente, 441
orientada positivamente, 441
Transformación
biyectiva , 135
identidad, 113, 369
imagen de un conjunto bajo una, 119, 373
inversa de una, 135
invertible, 135
inyectiva o uno a uno, 134
lineal, 114
nula, 113, 369
proyección sobre un plano, 365
proyección sobre una recta, 108, 363
rango o recorrido de una, 134
reflexión respecto a un plano, 366
reflexión respecto a una recta, 109, 364
rotación por un ángulo , 110
rotación por un ángulo alrededor de un eje, 368
sobreyectiva, 134
traslación por un vector, 112, 368
Transformación lineal
criterios de invertibilidad de una, 137
del espacio, 369, 371
del plano, 107
invertible, 140, 386, 387
que cambia la orientación, 171
que preserva la orientación, 171
Transformaciones lineales
compuesta de, 129
del espacio, 363
inversa para, 384
producto de, 131
propiedades de las, 116
suma de, 123
Traslación de ejes, 208, 497
Triple producto vectorial, 304

Valor propio y vector propio
de una matriz, 184, 453
de una transformación lineal , 184, 453
Vector
componente escalar de un vector en la dirección de otro, 26
de posición, 36
descomposición de un, 23
dirección de un, 4, 64, 308
geométrico, **3**
geométrico en el espacio, 279
inverso aditivo de un, 58, 305
magnitud de un, 4, 62
nulo, 10, 58, 279, 305
opuesto de un, 10
producto de un escalar por un, 14, 15, 304
transpuesto de un, 384
unitario, 17, 64, 279
Vectores
ángulo entre, 279, 313
ángulo entre, 5, 68
canónicos, 66
diferencia entre, 11

linealmente dependientes, 99, 310
en el espacio, 281
linealmente independientes, 310
en el espacio, 281
ortogonales, 68, 313
paralelos, 5, 64, 279, 308
perpendiculares, 5, 279
producto escalar entre, 29, 67, 282, 312
suma de, 6
suma y multilplicación por escalar, 279
Vectores coordenados , 55, 58
diferencia entre, 59, 305
suma y producto por escalar, 57, 304
Volumen de un paralelepípedo, 302, 317, 445