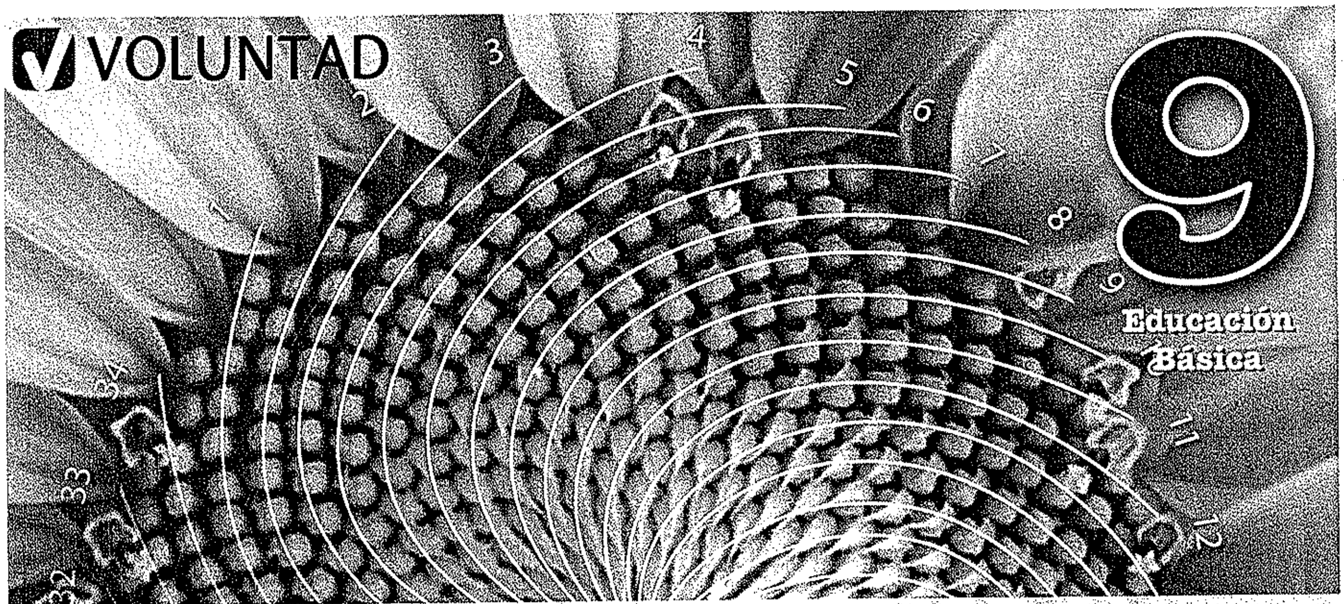
Fórmula

Álgebra y geometría

Fórmula

Álgebra y geometría



El libro del alumno Fórmula de Noveno grado para la Educación Básica ha sido elaborado según el plan de la Empresa Editorial y bajo su responsabilidad por las siguientes personas del Departamento de Investigación Educativa de EDITORIAL VOLUNTAD S. A.

Autoría
Dalila Magdalena Fajardo Tiriath
Licenciada en Física

Martha Cecilia Lora Luz
Licenciada en Matemáticas

Edición
Víctor Hernando Ardila Gutiérrez
Licenciado en Matemáticas

Coordinación de las pruebas de campo
Andrea Escobar Vilá
Especialista en Psicología del Consumidor

Coordinación de equidad de género y adecuación a la diversidad cultural
Miriam Cristy León Acosta
Comunicadora social

Diseño gráfico y coordinación de diagramación
Gina Andrea Navas Negret

Diagramación
Patricia Salinas Garzón
Diego Sánchez Cristancho
John Harris Hurtado Obando

Ilustración
Fernán Pérez Amaya
Néstor Alfonso Yanine Suárez

Retoque digital
Tatiana Peña Latorre

Documentación gráfica
Marco Antonio Vargas Sierra
Ingrid Alejandra Pineda Becerra

Diseño de carátula
Gonzalo Ochoa Martínez

Dirección de arte
Jorge Alberto Osorio Villa
Especialista en Gerencia de Proyectos
diseno@voluntad.com.co

Gerencia editorial
Carlos William Gómez Rosero M. Sc

ISBN Tomo 978-958-02-2690-1 • ISBN Colección 978-958-02-2530-0

Depósito legal • Primera edición, 2009 • Primera reimpresión, 2009 • EDITORIAL VOLUNTAD S. A.
Carrera 7a. No. 24-89 Piso 24 • Teléfono 2410444 - Fax 2410439 • Bogotá, D. C. - Colombia. • *www.voluntad.com.co*
Sus comentarios comuníquelos al área de Matemáticas. • *voluntad@voluntad.com.co* • Impreso en Colombia. • Printed in Colombia.
Impreso por Cargraphics S.A.

Tabla de contenido

Formas de

Unidad 1

MARCO HISTÓRICO

600 a.e.c. 300 a.e.c.
Grecia: Platón, Aristóteles y Euclides elaboran los principios formales de la matemática.

1646-1716. Alemania.
Gottfried Leibniz. Enuncia la necesidad de un lenguaje riguroso, exacto, universal y formal.

1815-1864
George Boole. Aplica el cálculo matemático a la lógica.

1912-1954
Alan Turing. Elabora las bases de la lógica computacional. Propone las máquinas de Turing.

1858-1932. Italia.
Giuseppe Peano. Enuncia los Axiomas que definen el conjunto de los naturales.

1872-1970
Bertrand Russell. Encuentra paradojas en la teoría de conjuntos.

APLICACIONES REALES

Inteligencia artificial: sistemas expertos en la resolución de problemas

Muy relacionadas con la lógica se encuentran:

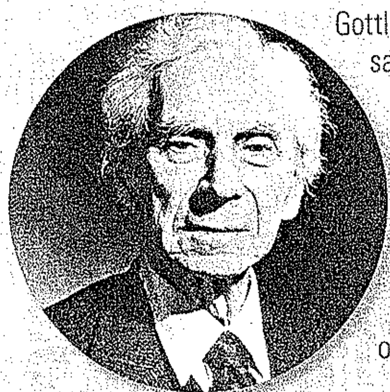
- La semántica o filosofía del lenguaje, que trata acerca del significado de las palabras y de las frases.
- La epistemología, o teoría del conocimiento, que se ocupa de las condiciones bajo las cuales las afirmaciones son verdaderas.
- La psicología del razonamiento, que se refiere a los procesos mentales que se siguen en el curso de un razonamiento.

La inteligencia artificial se constituyó como una de las aplicaciones más exitosas del razonamiento y la robótica como una de sus áreas más productivas.

razonamiento

En el proceso de construcción de la Lógica tres son los protagonistas, entre muchos otros, que marcaron un hito histórico: Aristóteles, Friedrich Gottlob Frege y Bertrand Russell.

En los albores del conocimiento (IV a.e.c.), Aristóteles desarrolló reglas para establecer un razonamiento encadenado que, si se respetan, no producen nunca falsas conclusiones. En el razonamiento los nexos básicos son los silogismos como éste "si todos los humanos son mortales" y "todos los griegos son humanos", entonces: "todos los griegos son mortales". Desde esta perspectiva la ciencia es el resultado de construir sistemas de razonamiento más complejos.

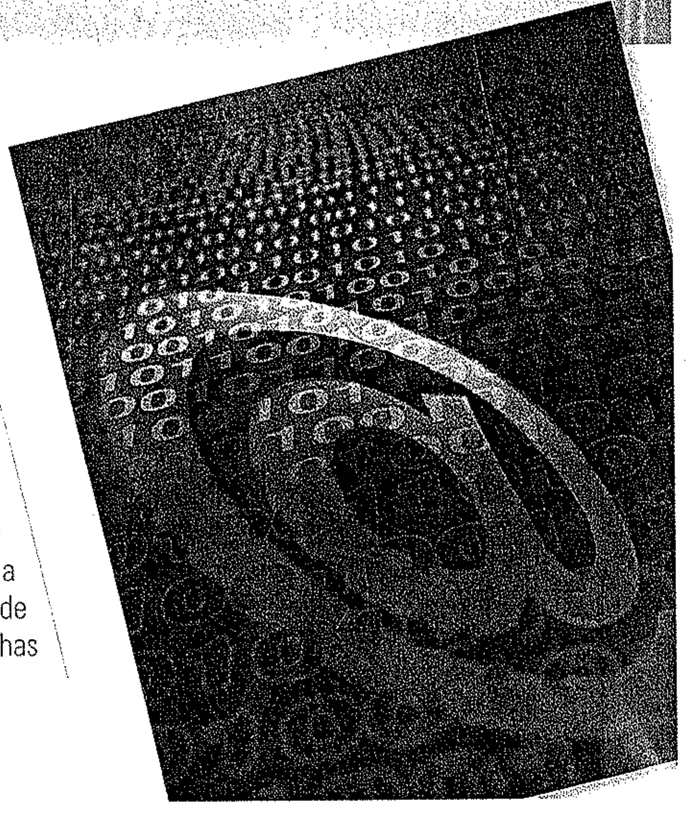


Gottlob Frege (1848-1925), renueva y desarrolla la lógica clásica e introduce los cuantificadores.

Y más recientemente, Bertrand Russell (1872-1970), filósofo, matemático y escritor británico, galardonado con el Premio Nobel de Literatura en 1950, aportó y profundizó con sus obras en el análisis lógico.

Para que argumentes

Si debes elegir entre los números naturales, los números primos, ¿cuál es el proceso que debes realizar?



La robótica es usada principalmente en el campo industrial, en la comprensión de lenguajes y traducción y en la construcción de máquinas que "distingan" formas y sonidos. Este sueño se hizo realidad en las redes formadas por conexiones entre grupos de computadoras y dispositivos asociados que permiten a los usuarios la transferencia electrónica de información. La red de área local, es un ejemplo de la configuración utilizada en muchas oficinas y empresas.

Tema 1

Deducción

LOGRO: detectar, distinguir y analizar estructuras lógicas.

COMPARTE LO QUE SABES

Determina si el siguiente razonamiento es correcto: "Todos los números primos son impares, dos es primo entonces dos es impar".

El **razonamiento** es el proceso mediante el cual se obtienen conclusiones a partir de informaciones dadas. Un razonamiento es válido cuando la verdad de la conclusión se sigue de la verdad de la información dada.

Ejemplos

Lee con atención los siguientes razonamientos:

1. Un hecho es relevante socialmente si en él participan muchos individuos. En una protesta pública la participación de individuos es muy alta. Luego, la protesta pública es relevante socialmente.
2. Si $c \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{R}$ entonces $(c + d) \in \mathbb{R}$ Con este razonamiento afirmamos que si se suman dos reales, el resultado también es real.

Una proposición es una expresión con sentido completo, de la cual puede afirmarse si es verdadera o falsa a partir de un conjunto o modelo de referencia. En general las letras $p, q, r, s, t, \ldots$ se utilizan para nombrar proposiciones.

Ejemplos

Se pueden hallar expresiones que se pueden clasificar como proposiciones como otras que no lo son:

1. Las siguientes expresiones son proposiciones:
   a. 2 es un entero.
   b. $6 + 4 = 10$
   c. El triángulo es una figura plana.
2. No pueden considerarse proposiciones:
   a. ¿Qué día es hoy?
   b. ¡Participe de los grandes descuentos!
   c. El conjunto de los complejos.

Cuando dos o más expresiones se enlazan mediante conectores, se forma una ***proposición compuesta***. Hay cuatro grandes clases de conectores:

Símbolo	Nombre	Conector	Ejemplo
$\wedge$	Conjunción	y	*a* es par y *b* es impar.
$\vee$	Disyunción	o	Un número es positivo o es negativo.
$\rightarrow$	Implicación	Si... entonces,	Si $m \in \mathbb{R}$, entonces, $m^2 \in \mathbb{R}$
$\leftrightarrow$	Bicondicional	Si y sólo si ...	*a* es un número natural, si sólo si, *a* es un número entero positivo.

Razonamiento deductivo

El razonamiento deductivo es una de las formas de demostración mediante la cual se aplican principios universales a casos particulares. La deducción parte de juicios generales, para llegar a conclusiones particulares o menos generales.

Los elementos sobre los que descansa el andamiaje deductivo son cinco, a saber:

1. **Términos o conceptos indefinibles:** es el conjunto de conceptos y vocabulario básico que forman parte de los elementos primarios del conocimiento y que no se definen.
2. **Definiciones:** son proposiciones que exponen con claridad, precisión, exactitud y rigor los significados de los términos de un conocimiento.
3. **Axiomas o postulados:** son proposiciones tan claras y evidentes que no necesitan demostrarse.
4. **Leyes de la lógica:** es el conjunto de estrategias que permiten concluir razonamientos verdaderos.
5. **Teoremas:** son aquellas proposiciones demostrables partiendo de axiomas u otros teoremas ya demostrados, mediante la aplicación de reglas de inferencia aceptadas.

Ejemplo

Los minerales son mezclas sólidas de sustancias químicas, el feldespato es un mineral. Por lo tanto el feldespato es una mezcla sólida de sustancias químicas.

En este ejemplo se puede observar que se parte de dos premisas verdaderas y más generales para llegar a una conclusión que es verdadera y particular.

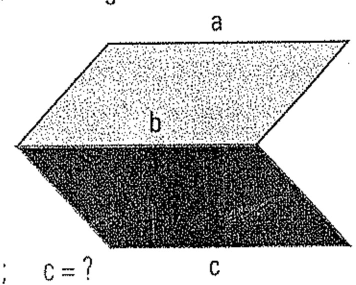
PRÁCTICA EN CONTEXTO

Razonamiento

Axioma 1: "Cosas iguales a una tercera o a cosas iguales, son iguales entre sí".

1. Aplica el axioma 1 a los siguientes casos y encuentra el interrogante.

a.

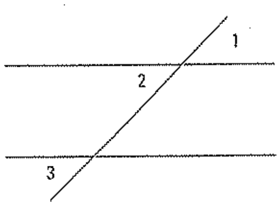


a = 12; a = c; c = ?

a = b; b = c; a = c = 20; b= ?

a = b; b = c; a = ?

b.



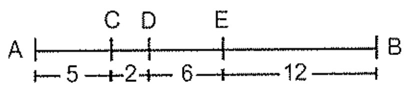
- $\measuredangle 1 = 40°$; $\measuredangle 1 = \measuredangle 3$; $\measuredangle 3 = ?$
- $\measuredangle 1 = \measuredangle 2$; $\measuredangle 1 = \measuredangle 3$; $\measuredangle 3 = ?$
- $\measuredangle 1 = \measuredangle 3$; $\measuredangle 3 = \measuredangle 2$; $\measuredangle 1 = ?$

Razonamiento y comunicación

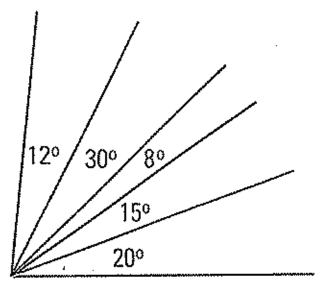
Axioma 2: "el todo es igual a la suma de sus partes".

2. En los siguientes casos, deduce las conclusiones a que se llega aplicando, el axioma 2.

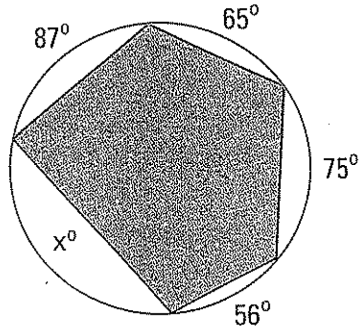
a.



b.



c.



Inducción

Logro: reconocer la inducción como una forma de razonamiento.

Comparte lo que sabes

¿Por qué si las encuestas se practican a un número pequeño de individuos, las conclusiones en muchos casos, abarcan a toda la comunidad?

La inducción se define como el razonamiento que, partiendo de casos particulares, obtiene conclusiones generales ciertas y probables. El proceso está basado en que si algo es cierto para situaciones específicas también lo será para situaciones semejantes, aunque no se haya observado.

Ejemplo

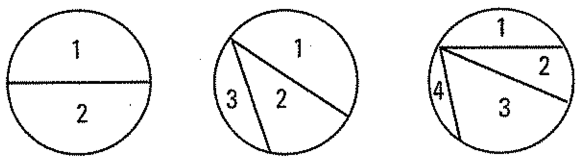
Se desea estudiar el rendimiento académico de un colegio y para esto se analizan los resultados académicos de algunos estudiantes en las diferentes áreas.

Una vez efectuado el análisis se obtiene que el rendimiento de la muestra de estudiantes, en promedio, es de 4, 2 sobre 5, 0. Lo que indica que el colegio está situado en nivel medio alto y se puede concluir que se trata de un colegio con un buen rendimiento. Tal conclusión es posible mediante el estudio de los resultados de algunos de los estudiantes.

Práctica en contexto

Razonamiento

1. Todas las cuerdas (líneas que unen dos puntos cualesquiera de una circunferencia) dividen el interior de la circunferencia en regiones.



a. Estudia el modelo y encuentra el número de regiones que se obtienen para 3, 4, 5 y 6 cuerdas y completa la tabla

Cuerdas	1	2	3	4	5	6
Regiones	2	3				

b. Haz una predicción para 10, 22 y 30 cuerdas. ¿Existe algún algoritmo que permita determinar las regiones para un número más grande de cuerdas? ¿Cuál?

Cuerdas	10	12	...	20	...	30
Regiones						

2. Ordena la información dada en los siguientes razonamientos para que sean válidos:

a. Si las rectas son perpendiculares, entonces se intersecan.
- Las rectas *m* y *n* son perpendiculares.

b. Un triángulo no es un cuadrilátero.
- Un triángulo no es un cuadrado.
- Todo cuadrado es cuadrilátero.

c. Un triángulo escaleno no es isósceles.
- Un triángulo escaleno no es equilátero.
- Si un triángulo es equilátero, entonces es isósceles.

d. El círculo es una figura plana.
- El círculo tiene área.
- Las figuras planas tienen área.

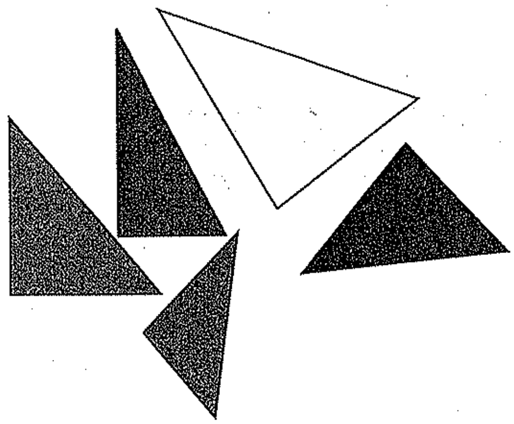
3. Dada la siguiente serie de números: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37

a. ¿Cuál es el siguiente número en la lista?

b. ¿Por qué estás seguro de tu respuesta?

c. ¿Qué propiedad tienen en común los números de la lista?

4. Observa los siguientes triángulos, mide sus ángulos y halla la suma de ellos en cada caso



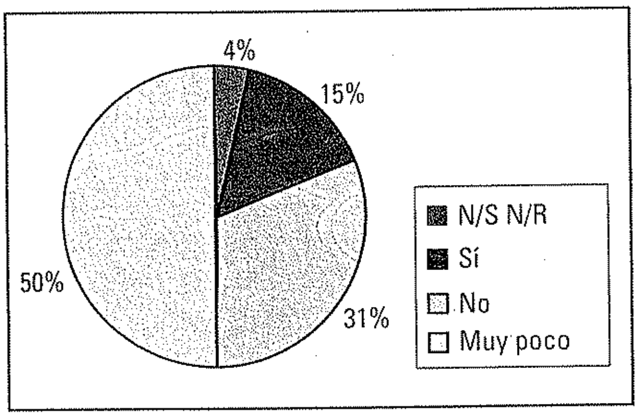
Escribe una proposición a manera de conclusión que exprese algo cierto para cualquier triángulo.

5. Dibuja los siguientes puntos en el plano cartesiano y determina qué hay en común entre ellos.

A = (1, 4); B = (3, 0); C = (0, 6)

Razonamiento y comunicación

6. El 21 de diciembre de 2007 en la sección "Opinómetro", del diario EL TIEMPO de Bogotá, apareció una reseña de los resultados obtenidos al preguntar, por teléfono, a 7 700 hombres de Bogotá: *"En relación con sus ingresos, ¿está conforme con su sueldo actual?"*



a. Establece al menos tres conclusiones a partir de los datos.

b. ¿Se puede llegar a sacar conclusiones con respecto a la opinión de las mujeres? ¿Por qué?

7. Esta disposición de números se conoce cómo *Triángulo de Pascal"* (en honor al matemático Francés *Blaise Pascal*).

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

a. Observa la relación que existe entre cada número y los más próximos de la fila superior. Copia el diseño en tu cuaderno y completa otras tres filas.

b. Encuentra la suma de cada fila. Establece una generalización comprobable.

c. Compara el desarrollo de $(a + b)^2$ con la tercera fila. ¿Qué puedes concluir?

d. Escribe el desarrollo para $(a + 5)^4$. Establece una conclusión general que relacione cada binomio con el triángulo de Pascal.

8. Encuentra en el texto las proposiciones simples que aparecen en él.

El álgebra es la descripción de un algoritmo, que muestra la manera cómo debe resolverse un problema, independientemente de los números particulares que aparezcan en el problema. Comprender el álgebra es avanzar un gran paso en el camino del conocimiento matemático, aunque no significa que se tenga todo el conocimiento. El álgebra es la condensación de miles de años de historia de la humanidad que avanza hacia el dominio del mundo por la habilidad de modelar los sucesos físicos a través de funciones algorítmicas.

Tema 3

Ley del silogismo

Logro: reconocer las reglas de los silogismos.

Comparte lo que sabes

¿Estás de acuerdo con la siguiente afirmación?

Si los chismosos volaran, entonces el Sol no se vería.

Un silogismo es un razonamiento deductivo que consta de tres juicios: dos premisas (la mayor y la menor) y una conclusión. Ésta última se obtiene de la deducción de la primera y segunda premisa.

Ejemplos

1. Juicio 1: premisa mayor: Hacer ejercicio diariamente favorece la salud.
   Juicio 2: premisa menor: María Camila hace ejercicio diariamente.
   Juicio 3: Conclusión: María Camila tiene buena salud.
2. Juicio 1: Premisa mayor: Todos los colombianos son americanos.
   Juicio 2: Premisa menor: Diana es colombiana
   Juicio 3: Conclusión: Diana es americana.

Los silogismos se clasifican en hipotético y disyuntivo.

Ley de silogismo hipotético

Es una regla de inferencia en la cual se aceptan dos condicionales verdaderos, de forma que el *consecuente* del primero es la *hipótesis* o antecedente del segundo. La conclusión es una condicional verdadera formada por la hipótesis del primero y la *tesis* o consecuente el segundo.

Ejemplo

- Si 4 es divisor de 20, entonces 20 es múltiplo de 4.
- Si 20 es múltiplo de 4, entonces $4 \times 5 = 20$.
- Si 4 es divisor de 20 entonces, $4 \times 5 = 20$.

- En este caso las proposiciones son:
- p: 4 es divisor de 20,
- q: 20 es múltiplo de 4
- r: $4 \times 5 = 20$

- Estas proposiciones forman el silogismo:
- Hipótesis 1: $p \to q$
- Hipótesis 2: $q \to r$
- Consecuente: $p \to r$

Ley de silogismo disyuntivo

Es una regla de inferencia en la cual se acepta una disyunción y luego que se comprueba que uno de los términos es falso para concluir que el otro término es verdadero.

Ejemplo

1. La vaca es un batracio o es un mamífero.
   - <u>La vaca no es un batracio.</u>
   - La vaca es un mamífero.
2. Andrés está vivo o está muerto.
   - <u>Andrés no está muerto.</u>
   - Andrés está vivo.
3. Éste CD contiene música o video.
   - <u>Éste CD no contiene música.</u>
   - Éste CD contiene video.

PRÁCTICA EN CONTEXTO

Razonamiento

1. Encuentra la proposición que hace falta en los siguientes silogismos hipotéticos:

a. Si a y b son pares, entonces $a+b$ es par.

- Si $a+b$ es par, entonces ab es par.
- Si ...

b. 0, 98 es decimal y es racional.

- Si 0, 98 es racional, es de la forma $\frac{a}{b}$ con $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$
- Si...

c. Si Javier estudia idiomas, habla inglés.

- Si Javier habla inglés, consigue buen trabajo.
- Si...

d. Si $a > 0$, entonces $-a < 0$

- Si $-a < 0$, entonces $a \neq 0$
- Si...

e. Si vienes a la mejor empresa del país, entonces podrás capacitarte.

- Si te capacitas, tu nivel de vida será mejor.
- Si ...

f. Si $(a+b)^2$ es el cuadrado de un binomio, el desarrollo de $(a+b)^2$ es un trinomio.

- Si el desarrollo de $(a+b)^2$ es un trinomio, los coeficientes del desarrollo de $(a+b)^2$ están en la tabla de Pascal.
- Si...

2. Completa la proposición que falta en los siguientes silogismos disyuntivos:

a. Las águilas son aves o peces.

- Las águilas no son peces.
- Las águilas...

b. El número 3 es positivo o negativo.

- El número 3 no es negativo.
- 3 es...

c. El cuadrilátero ABCD es rectángulo o es trapecio.

- El cuadrilátero ABCD no es cuadrado.
- El cuadrilátero es...

d. Trabajas para esta empresa o te vas de viaje.

- No te vas de viaje.
- Entonces...

e. $\sqrt{3}$ es racional o irracional.

- $\sqrt{3}$ no es racional.
- $\sqrt{3}$ ...

f. Tu calculadora es científica o normal.

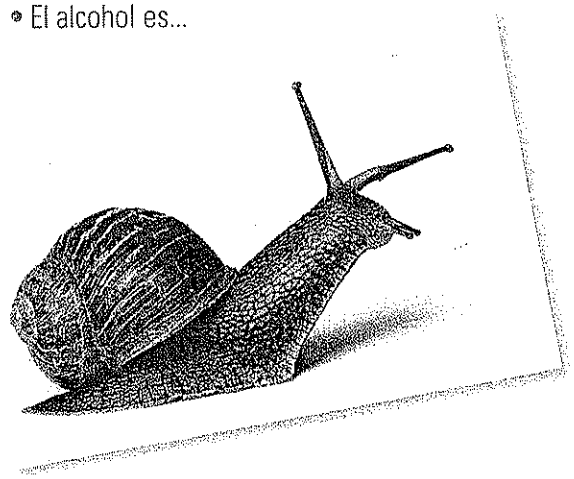
- Tu calculadora no es normal.
- Tu calculadora...

g. Las diagonales de un cuadrado son perpendiculares.

- Esta figura no tiene las diagonales perpendiculares.
- Esta figura....

h. Un compuesto es orgánico o es inorgánico.

- El alcohol no es un compuesto orgánico.
- El alcohol es...



i. Un caracol es gasterópodo o cefalópodo.

- El caracol no es cefalópodo.
- El caracol es...

Método directo de demostración

Logro: aplicar métodos directos de demostración.

Comparte lo que sabes

"Un abogado concertó con sus estudiantes que deberían pagarle por sus enseñanzas si y sólo si ganaban su primer caso ante los tribunales y no debían abonarle nada si lo perdían. Uno de los discípulos resolvió no aceptar ningún caso para eludir así todo pago. El abogado lo demandó para que le pagara, pero el discípulo al enterarse se alejó con una sonrisa, seguro de que en cualquier caso no debía pagar nada. ¿Puedes explicar por qué?

El ejemplo anterior permite concluir que el razonamiento del estudiante fue hecho a partir de una información establecida con anterioridad. Es importante determinar que un razonamiento es válido cuando la verdad de la conclusión se sigue necesariamente de la verdad de la información dada.

Observa el siguiente razonamiento:

- El consumo de alcaloides destruye la salud.
- La salud es vital para el correcto mantenimiento del cuerpo humano.
- El cuerpo es vida.
- Entonces, no consuma alcaloides.

Si te fijas en el proceso de razonamiento empleado en el ejemplo, se emplea la forma si … entonces … para todas y cada una de las proposiciones.

Para que un razonamiento sea una demostración, debe seguir una serie de pasos lógicos para probar la validez de una proposición.

Toda proposición que se quiera demostrar se denomina *teorema* y tiene una de las siguientes formas:

$p \rightarrow q$

Hipótesis Tesis

$p \leftrightarrow q$

Hipótesis Tesis

La proposición de la forma $p \rightarrow q$ recibe el nombre de ***implicación*** y es de la forma "si, ... entonces," y corresponden a los teoremas que suelen demostrarse en matemáticas. Por ejemplo: "si un número es par, es de la forma $2n$".

La proposición de la forma $p \leftrightarrow q$ recibe el nombre de ***doble implicación*** o ***bicondicional***, se lee "si y sólo si" y se interpreta como una doble implicación. Por ejemplo, "Un trapecio es isósceles si y sólo si, sus lados no paralelos son iguales". Esta doble implicación se puede dividir en: "si un trapecio es isósceles, entonces sus lados no paralelos son iguales" y "si un trapecio tiene sus lados no paralelos iguales, entonces es isósceles".

La función principal de una demostración es convencer o persuadir, basado en axiomas, postulados o teoremas, previamente demostrados, acerca de que los supuestos establecidos conducen a la conclusión enunciada.

La demostración directa es el proceso mediante el cual se demuestra $p \rightarrow q$, partiendo de p como verdadera, para concluir que q es también verdadera.

En las demostraciones suelen darse tres argumentos o partes a saber:

1. **Hipótesis:** se refiere a la primera proposición que es considerada como verdadera.
2. **Tesis:** es la segunda proposición que debe probarse.
3. **Demostración:** es el conjunto de definiciones, axiomas, postulados u otros teoremas que deben utilizarse para probar la validez de la tesis y los razonamientos que se hacen para hacerlo.

Ejemplo

- Demostrar que el cuadrado de un número par es otro par.

$a \in \mathbb{Z}$ y es par.	Hipótesis.
$a = 2k$, con $k \in \mathbb{Z}$	Definición de número par.
$a^2 = (2k)^2 = 4k^2$	Aplicación de potencia cuadrada.
$4k^2 = 2(2k^2)$	Factorizando.
a^2 es par.	Es de la forma $2k$, con $k \in \mathbb{Z}$, que es la definición de número par.

Cuantificadores

El cuantificador permite determinar los objetos que cumplen una condición o propiedad. Así cuando se dice: "todos los números enteros son reales", significa que cualquier entero es a su vez real. Si, por el contrario, se afirma que: "algunos reales son racionales," estamos descartando que todos los reales sean a su vez racionales, puesto que existen algunos reales, como los irracionales, que no son racionales aunque sean reales.

Para determinar la cantidad de objetos que cumplen una propiedad se aplican los cuantificadores, "para todo" y, "existe un" o "algunos". Los símbolos son $\forall$ o cuantificador universal y $\exists$ o cuantificador particular o existencial.

La expresión matemática para una proposición de la forma: "todos los elementos de un conjunto A cumplen una propiedad $p(x)$", es $\forall x \in A,\ p(x)$

La expresión matemática para una proposición de la forma: "algunos elementos de un conjunto A cumplen una propiedad $p(x)$ es $\exists x \in A,\ p(x)$

Cuando se afirma que todo elemento de un determinado conjunto cumple una propiedad, se acepta que no existen elementos dentro del conjunto que no cumplan la propiedad.

De igual forma si lo que se afirma es que existe(n) algún (os) elementos que cumplen la propiedad, se acepta que otros no la cumplen.

Para negar cuantificadores se debe tener en cuenta:

$$\neg\left(\forall x \in A, p(x)\right) = \exists x \in A, \neg p(x),$$

esto significa que negar que todos los elementos cumplen una propiedad equivale a aceptar que algunos no la cumplen.

$$\neg\left(\exists x \in A, p(x)\right) = \forall x \in A, \neg p(x),$$

esto significa que negar que algunos elementos cumplen una propiedad equivale a afirmar que ninguno la cumple.

Ejemplo

Considerando que:

$\mathbb{N}$: Conjunto de los números naturales.

$\mathbb{Z}$: Conjunto de los números enteros.

p(x): ser entero.

La expresión: "Todos los naturales son enteros", se simboliza así: $\forall x \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{Z}$

Al negar la expresión, se tiene:

$$\exists x \in \mathbb{N}, x \notin \mathbb{Z}$$

Lo que significaría que algunos naturales no son enteros.

Al efectuar demostraciones directas es indispensable cuantificar la expresión para determinar el procedimiento a seguir.

Ejemplos

1. **Demostrar que para todos los reales se cumple que la suma de dos números por su diferencia es igual a la diferencia de sus cuadrados.**

La expresión matemática para: "todo par de números reales se cumple que su suma por su diferencia es igual a la diferencia de los cuadrados" es:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Ahora, utilizando la ley distributiva del producto se obtiene que:

$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$$

Que era exactamente lo que se deseaba demostrar.

2. **Demostrar que el cuadrado de cualquier número real es positivo.**

Para efectuar la demostración se hace necesario considerar tres casos a saber: que el número real sea positivo, igual a cero o negativo. En cada caso se deben aplicar las leyes de la potenciación.

Caso 1

$\forall a \in \mathbb{R}^+, a^2 = a \times a > 0$

Porque el producto de dos números positivos siempre es positivo.

Caso 2.

$\forall a \in \mathbb{R}^-, -a \in \mathbb{R}^+$

Luego, por el caso anterior, $(-a)^2 = (-a)(-a) > 0$

Porque el producto de dos números negativos siempre es positivo.

Caso 3.

Si $a = 0$, entonces $a^2 = a.a = 0.0 = 0$

Luego $a^2 \geq 0$

Práctica en contexto

Razonamiento

1. **Simboliza las siguientes expresiones utilizando el cuantificador correspondiente, luego niega la expresión, expresa con palabras su significado y analiza su valor de verdad.**

a. Todo número irracional es real.

b. Algunos enteros son racionales.

c. Existen números naturales que no tienen inverso aditivo.

d. Cualquier número real, diferente de cero, tiene inverso multiplicativo en los reales.

e. Algunos racionales no tienen inverso multiplicativo.

f. Todos los reales son pares.

g. Ningún entero es impar.

h. Algunos enteros son divisibles por 2.

i. Los pares son primos.

j. Los impares no son primos.

2. Realiza una demostración para cada enunciado:

a. Para todo par de números reales se cumple: que el cuadrado de su suma es igual a la suma del cuadrado del primer número, con el doble del producto de los dos números y con el cuadrado del segundo número.

b. El cuadrado de un número impar, también es impar.

c. La suma de dos racionales es racional.

d. El doble de un entero negativo sumado el triple del número es también negativo.

e. Todo número de la forma $n^2 + n$ es par.

f. Si la suma de dos números es 106 y el mayor excede al menor en 8, los dos números son enteros.

g. Si la suma de las edades de tres personas es 88 años, la mayor excede a la menor en 20 años y la del medio tiene 18 años menos que la mayor, entonces las tres personas tienen más de 20 años cada una.

h. Los dos números enteros positivos cuya suma es 193 son mayores que 90.

i. Si se divide 642 en dos partes tales que una exceda a la otra en 36, esos números son mayores que 300.

j. Si la edad de una persona es el triple de la de otra, y dentro de 20 años será el doble esa persona tiene actualmente 60 años, y la otra tiene 20 años.

k. Si se divide 85 en dos partes tales que el triple de la parte menor equivale al doble de la mayor, se obtienen dos partes mayores o iguales que 34.

l. El número que disminuido en sus $\frac{3}{8}$ equivale al duplo disminuido en 11, es 8.

Resolución de problemas

3. Un radio fue robado de una tienda. La propietaria estaba segura que Juan, Esteban, Jairo o Diana habían robado el equipo. Cada persona, en su momento, hizo una declaración, pero sólo una era verdadera.

- Juan dijo: "Yo no robé el equipo"
- Esteban dijo: "Juan miente"
- Jairo dijo: "Esteban miente"
- Diana dijo: "Lo robó Esteban"

a. ¿Quién dijo la verdad?

b. ¿Quién robó el radio?

4. Gina, Luis y Pedro son alumnos de noveno o de décimo. Gina y Luis están en el mismo curso. Gina y Pedro están en distinto curso. Si Pedro es alumno de décimo, Luis también lo es, ¿en qué curso está cada uno?

5. El director de una prisión llama a tres de sus presos, les enseña tres boinas blancas y dos boinas negras, y les dice: «Voy a colocar a cada uno de ustedes una boina en la cabeza, el primero de ustedes que me indique el color de la suya será puesto en libertad».

Si los presos están en fila, de manera que el primero no puede ver las boinas de los otros dos, el segundo ve la boina del primero y el tercero ve las boinas de los otros dos, ¿por qué razonamiento uno de los presos obtiene la libertad?

6. Tres personas, de apellidos Blanco, Rubio y Castaño, se conocen en una reunión. Poco después de hacerse las presentaciones, la dama hace notar:

"Es muy curioso que nuestros apellidos sean Blanco Rubio y Castaño, y que nos hayamos reunido aquí tres personas con ese color de cabello"

"Sí que lo es -dijo la persona que tenía el pelo rubio-, pero habrás observado que nadie tiene el color de pelo que corresponde a su apellido."

"¡Es verdad!" -exclamó quien se apellidaba Blanco.

Si la dama no tiene el pelo castaño, ¿de qué color es el cabello de Rubio?

Método indirecto de demostración

Logro: aplicar métodos indirectos de demostración.

COMPARTE LO QUE SABES

¿Qué puedes decir del siguiente razonamiento: "todas las arañas tienen seis patas, todos los seres de seis patas tienen alas, por tanto todas las arañas tienen alas"?

El método de demostración indirecta se basa en el principio lógico de que no pueden ser ciertas al mismo tiempo la afirmación y la negación de una proposición. Consiste en partir de la negación de la tesis para llegar mediante pasos lógicos a demostrar la negación de la hipótesis. Esto es que se parte de $p \rightarrow q$, pero se demuestra $\neg q \rightarrow \neg p$.

Ejemplo

Un triángulo equilátero tiene un lado desigual. Como ves esta afirmación es una contradicción, pues no puede una figura triangular equilátera, es decir con todos sus lados iguales, tener un lado desigual.

Determinar la coherencia y consistencia de los razonamientos cae enteramente dentro del dominio de la lógica. Esto es un buen punto de partida para entender la tarea de los estudiosos de esta disciplina. En razonamientos sencillos es posible concluir, de manera intuitiva, que "algo no funciona" en los razonamientos, pero esta sencillez se diluye rápidamente cuando abordamos discursos más largos y más complejos.

La *demostración indirecta por contradicción* parte de la suposición de que la conclusión es falsa para llegar a un absurdo o contradicción, y de esta forma probar la tesis.

Ejemplo

Demostrar que $\sqrt{2}$ es irracional.

Suponemos que $\sqrt{2}$ es racional.	
$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, con $a, b \in \mathbb{Z}$ y $b \neq 0$	Por definición de número racional.
a, b son primos entre sí, es decir, no tienen divisores distintos a 1 y a -1	Condiciones de a, b, que no quitan generalidad al problema.
$\left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2$	Elevando al cuadrado a ambos lados.
$2 = \frac{a^2}{b^2}$	Aplicando la propiedad de la potenciación de una raíz y de una fracción.
$2b^2 = a^2$	Multiplicando la igualdad por b^2.
a^2 es par.	Al ser a^2 igual a $2b^2$.
a es par.	Si el cuadrado de un número es par, el número también lo es.
$a = 2k$ con $k \in \mathbb{Z}$	Definición de a como par.

$a^2 = 4k^2$	Elevando la igualdad anterior al cuadrado.
$2b^2 = a^2 = 4k^2$	Igualación de una expresión hallada anteriormente con la expresión del paso anterior.
$b^2 = \frac{4k^2}{2} = 2k^2$	Despejando b^2
b^2 es par.	Por definición de número par.
b es par.	Si el cuadrado del número es par, la raíz del número también lo es.
a y b son pares.	Se demostró que cada término es par y se aplicó ley transitiva de la igualdad.
a y b son cada uno divisibles por 2	Contradicción, se supuso que a y b eran primos entre sí, por lo cual no pueden ser al mismo tiempo pares. Como se había supuesto que $\sqrt{2}$ era racional, cosa que no puede darse porque se llega a una contradicción, se tiene que, en efecto, $\sqrt{2}$ es irracional.

Las demostraciones no siempre se hacen de la forma antes expresada. Pueden hacerse mediante un párrafo suficientemente claro.

Refutación por contraejemplo: se basa en encontrar al menos un ejemplo que refute irrevocablemente una proposición de cantidad universal.

Ejemplos

1. Demuestre o refute que el cuadrado de la suma de dos reales es igual a la suma de los cuadrados.

$\forall x, y \in \mathbb{R}, (x+y)^2 = x^2 + y^2$

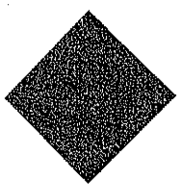
Dado $x = 3$ y $y = 1$ se tiene que $(3+1)^2 \neq 3^2 + 1^2$ puesto que $16 > 10$

Con lo cual se refuta la proposición inicial, concluyéndose que:

$\exists x, y \in \mathbb{R}, (x+y)^2 \neq x^2 + y^2$

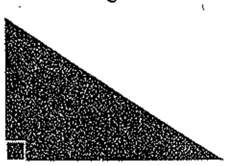
Por lo tanto, se tiene que no es cierto que para todo par de reales, el cuadrado de la suma de dos reales es igual a la suma de los cuadrados, al hallarse dos números reales que no cumplen dicha propiedad.

2. En todo cuadrilátero cuyos lados sean iguales, sus ángulos también lo son.



Esta generalización es falsa dado que el rombo de la izquierda es un cuadrilátero cuyos lados tienen la misma medida, pero sus ángulos no son iguales.

3. Todos los triángulos rectángulos tienen la hipotenusa de igual tamaño que sus catetos.



Esta aseveración es falsa por cuanto ningún triángulo rectángulo (por definición) puede tener sus tres lados iguales.

PRÁCTICA EN CONTEXTO

Razonamiento y comunicación

1. Demuestra mediante el método indirecto que:

a. El conjunto vacío es subconjunto de cualquier conjunto.

b. Si a es par y b es impar, entonces ab es impar.

c. Si a es impar y b es par, entonces $a+b$ es impar.

d. Si $ab=0$, entonces $a=0$, ó, $b=0$

e. La raíz cuadrada de un número real negativo no existe.

f. Todo número es menor o igual que sí mismo.

g. No existen tres enteros positivos consecutivos tales que el cubo del mayor sea igual a la suma de los cubos de los otros dos.

h. Si l_1 y l_2 son dos líneas rectas en el plano y además son perpendiculares a una tercera línea recta l_3, entonces l_1 y l_2 son paralelas.

i. $\sqrt{2}$ es un número irracional.

j. Todos los números enteros son negativos.

k. Todo número divisible por 6 lo es entre 3 y 2

l. Un cuadrilátero con ángulos congruentes es un cuadrilátero convexo.

m. $\sqrt{3}$ es un número irracional.

n. Existen infinitos números primos.

ñ. Dos circunferencias diferentes pueden tener, a lo más, dos puntos en común.

o. Dos planos distintos pueden tener, a lo más, una recta en común.

Solución de problemas

2. Tres embajadores de diferentes países pagaron 30 dólares por la habitación de un hotel.

- Cada uno contribuyó con 10 dólares, pero más tarde, el administrador del hotel se percató que sólo debían haber pagado 25 dólares por lo que llamó al botones y le dio 5 dólares para que se los devolviera a los embajadores.

  El botones pensó que éstos tendrían dificultades para repartirse los 5 dólares por las diferencias lingüísticas y sólo les dio 3 dólares, quedándose con los 2 restantes.

  Así pues, cada embajador pagó por la habitación 10 dólares menos el dólar devuelto, esto es, 9 dólares. Las cuentas son: $9 \times 3 = 27$, más los 2 que se quedó el botones suman 29 dólares. Pero la cuenta original era de 30 dólares.

- ¿Qué pasó con el otro dólar?

Razonamiento y comunicación

3. Halla un contraejemplo para las siguientes afirmaciones:

a. Todos los números negativos son enteros.

b. Todo número divisible por 5 lo es también por 3 y 2.

c. Un cuadrilátero con ángulos congruentes es convexo.

d. Ningún entero positivo par es primo.

e. Todo número primo es de la forma $n + n^2 + 41$

f. Ningún entero n cumple que: $n^2 + n = 6$

g. El producto de dos números es mayor o igual que cualquiera de los factores.

h. Cualquiera que sea el número natural n se cumple que el resultado $n^2 + n + 17$ es un número primo.

i. La suma de dos enteros impares es otro entero impar.

j. La suma de los ángulos exteriores de un triángulo es igual a 180°

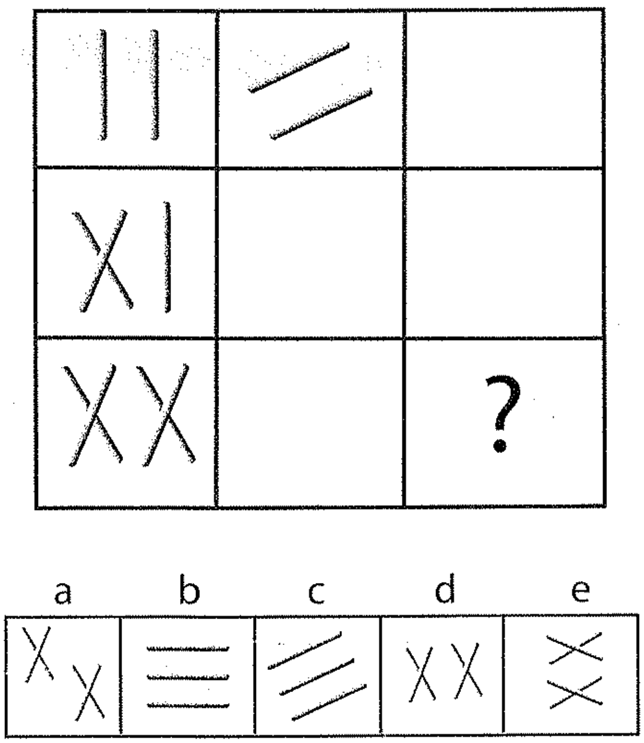
k. $\sqrt{x^2} = x$

l. Si $x^2 = 9$ se tiene que $x = 3$

m. Si $|-x| = x$ entonces x es positivo.

n. Todo número entero posee un inverso multiplicativo y entero.

4. ¿Qué figura corresponde a la casilla de la interrogación? Explica por qué.



5. Analiza y soluciona los siguientes ejercicios.

a. En un salón de clases se encuentran dos estudiantes; Alejandra y Jorge. Alejandra es muy juiciosa y le gusta mantener ordenado el lugar donde está y sabe que demora 2 horas exactas, arreglando y organizando el lugar. Pero el segundo estudiante, Jorge, es totalmente desordenado y convierte el salón en un caos en sólo 3 horas.

- Si el salón estaba desordenado cuando ingresaron a él, y si Alejandra empieza a organizar mientras Jorge comienza a desordenar. ¿Cuánto tiempo tardará Alejandra en ordenar todo el salón?

b. Andrea se ha ido de paseo con Carlos y al leer el termómetro que hay en la pared le expresa a Carlos que hace más calor de lo esperado. Carlos, sin alarmarse, le indica a Andrea que el termómetro está graduado en escala Fahrenheit y no en Celsius. Explica por qué la tranquilidad de Carlos al expresarse.

c. En un reloj digital, ¿a qué horas coinciden el minutero, el segundero y el horario?

d. La criptografía es el arte de escribir en clave.

- Encuentra la solución a este criptograma:

CJ QCAPCRN ÑYPY RPGSLDYP CQ ÑCPQCTCPY.

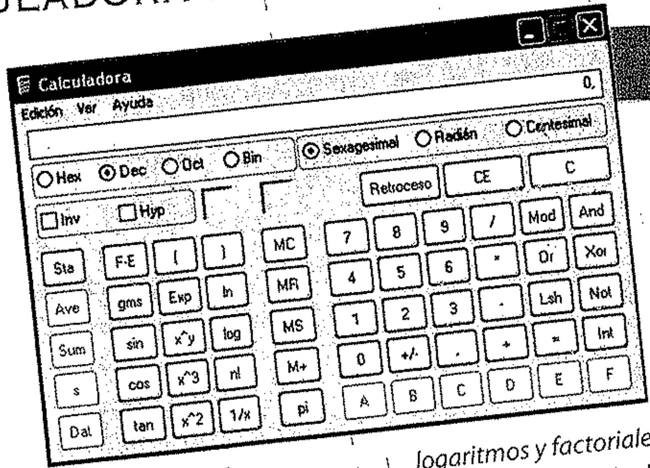
e. Seis compañeros de trabajo quieren viajar y pasar sus vacaciones juntos, así que deciden, cada dos, utilizar diferentes medios de transporte. Se sabe que Alfredo no usa el auto ya que acompaña a Bernardo que no va en avión. Arturo viaja en avión. Si Carlos no va acompañado de Darío ni hace uso del avión, ¿podrías decir en qué medio de transporte llega a su destino Javier?

f. Al realizar un estudio estadístico de la composición de una población dada, se analizó determinadas muestras de familias. Con los siguientes resultados:

- Había más padres que hijos.
- Cada niño tenía una hermana.
- Había más niños que niñas.
- No había padres sin hijos.
- ¿Que puede concluir el estadístico?

TECNOLOGÍA

LA CALCULADORA DEL PC



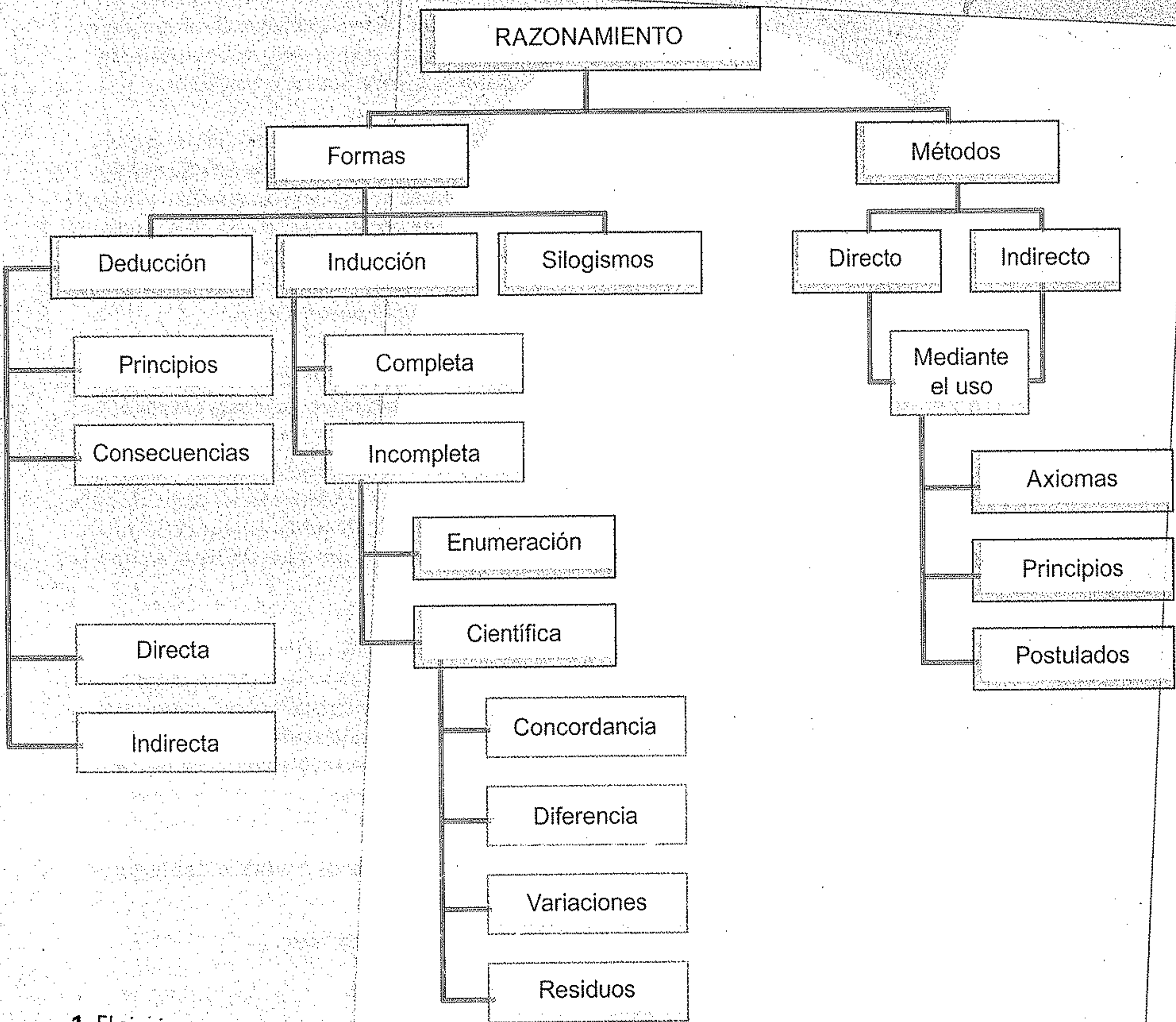
Puedes utilizar la calculadora de tu PC para realizar las mismas operaciones que normalmente harías con una calculadora de mano. Con la calculadora del PC puedes efectuar operaciones aritméticas básicas, como sumar y restar, así como realizar funciones típicas de una calculadora científica, como el cálculo de logaritmos y factoriales. Resulta muy útil conocer la lista alfabética de los botones de la calculadora y sus equivalentes en el teclado, puesto que para muchos es más sencillo efectuar los comandos desde el teclado.

Botón	Tecla	Botón	Tecla
%	%	Bin	F8
(	(	Byte	Byte
)	)	C	ESC
*	*	CE	DEL
+	+	cos	o
+/–	F9	Dat	INS
–	–	Dec	F6
.	.	Sexagesimal	F2
/	/	dms	m
0–9	0–9	Dword	F2
1/x	r	Exp	x
=	Entrar	F–E	v
A–F	A–F	Centesimal	F4
And	&	Hexadecimal	F5
Ave	CTRL+A	Retroceso	Retroceso

Botón	Tecla	Botón	Tecla
Hyp	h	pi	p
Int	;	Qword	F12
Inv	i	Radián	F3
ln	n	s	CTRL+D
log	l	sin	s
Lsh	<	sqrt	@
M+	CTRL+P	Sta	CTRL+S
MC	CTRL+L	Sum	CTRL+T
Mod	%	tan	t
MR	CTRL+R	Word	F3
MS	CTRL+M	Xor	^
n!	!	x^2	@
Not	~	x^3	#
Oct	F7	x^y	y
O bien	| (canalización)		

resumen & refuerzo

2



1. El siguiente anuncio publicitario está en forma de silogismo en cadena (dos premisas y una conclusión). Identifica las dos premisas y establece si el razonamiento es válido.

- En Navidad se duplica la alegría, se triplican los encuentros y se aumentan los antojos.
  Estamos en Navidad. Disfruta la Navidad con la mejor de las compañías.

2. Redacta con esta idea un razonamiento de dos premisas y una conclusión que sea válido.

Pruebas de

Prueba Saber

1. **Identifica si cada enunciado se refiere a términos o conceptos indefinibles, a definiciones, axiomas o postulados, a leyes de la lógica o teoremas**

   a. Punto y recta.

   b. Un conjunto A es un subconjunto de B si y sólo si, todo elemento de A es también elemento de B.

   c. Dado un conjunto universal U y un subconjunto $A \subseteq U$, se denomina complemento de A al conjunto de los elementos de U que no pertenecen a A.

   d. Para cada número real x es verdadera una, y solamente una de las siguientes proposiciones:

   - x es positivo.
   - $-x$ no es positivo, así x es negativo.
   - x es cero.

2. **Describe qué entiendes por demostración y cuáles son las condiciones necesarias para que un procedimiento dado se denomine demostración.**

Prueba PISA

Lee cuidadosamente las siguientes lecturas y responde acertadamente:

CRIPTOGRAFÍA

1	14	14	4
11	7	6	9
8	10	10	5
13	2	3	15

Criptograma de la Fachada de la Pasión

Se trata de un enigmático cuadrado con 16 cifras que permiten hacer 310 combinaciones diferentes que suman siempre 33 (la edad de Cristo en el momento de su muerte).

Desde tiempos remotos el ser humano ha necesitado enviar mensajes que sólo se puedan entender por el directamente interesado o el destinatario. Dicha necesidad condujo a crear sistemas cifrados, de manera que un mensaje después de un proceso de transformación, sólo pudiera ser leído por quién tuviera las herramientas para descifrarlo.

Las civilizaciones más antiguas, como la egipcia, la mesopotámica y la china; ya utilizaban estos métodos. Uno de los primeros métodos conocidos es atribuido a Julio César, que se basa en la sustitución de letras de un documento por la tercera letra que el corresponde en el alfabeto. Así la A se convertía en la D, la G en J y así, sucesivamente.

Su uso se incrementó desde la primera guerra mundial, así como los recursos destinados para su estudio.

Los sistemas criptográficos fueron haciéndose más complejos al pasar el tiempo, hasta llegar a la época actual, donde la informática es parte de nuestras vidas y se hace más necesario realizar operaciones de alta seguridad.

Ahora deseamos que nuestra información sea confidencial, especialmente la que manejamos virtualmente y que corre peligro de ser detectada y manipulada; como por ejemplo: las claves de las tarjetas de crédito, los saldos bancarios, los números de las cuentas y demás.

3. **La criptografía es necesaria desde que el ser humano:**

   a. comenzó a caminar.

   b. se comunica.

   c. tiene sus propias ideas.

   d. apareció.

   e. utiliza armas.

4. ¿Para qué es necesario la criptografía?
   a. Diversión.
   b. En los sistemas bancarios.
   c. Saber información militar.
   d. Todos los anteriores.

Cielo de Colores

Poco se sabe sobre el origen de la cometa. Algunas leyendas mencionan a los países orientales como pioneros en la materia.

En el siglo XII los niños ya jugaban con ellas y hoy en día, la cometa mantiene su popularidad entre los niños de todas las culturas.

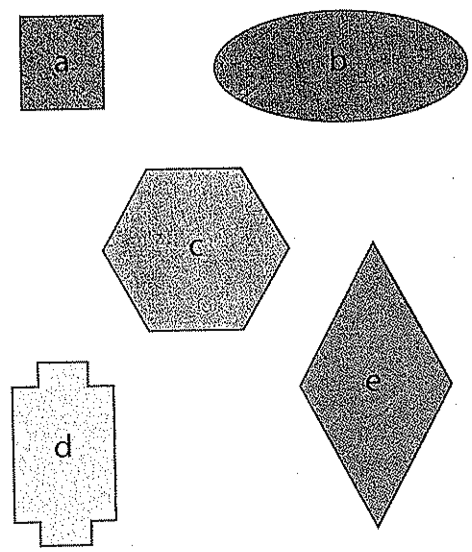
Las cometas son aerodinas, es decir, que superan la fuerza de la gravedad y se mantienen en el aire por la presión que ejerce el viento sobre ellas, la cual se denomina fuerza de elevación. La cola de una cometa contribuye a su estabilidad y equilibrio, pero se puede eliminar arqueando el diseño para alcanzar mayor altitud.

De todas las clases de cometas que existen las principales son:

- El *pandero* o *hexágono*, construida con papel o plástico y palos de guadua, y la cola es de tela o plástico.
- La *tridimensional*: con celdas o cajones por donde pasa el viento. Su vuelo es muy estable, aunque requiere de más viento para alcanzar altura.
- Las *inflables*: que no tienen estructura y se inflan gracias al viento.
- Las *acrobáticas*: que se caracterizan por el vuelo dirigido de su piloto, a través del manejo de diferentes líneas o pitas que permiten su control.

5. Según la información, se puede afirmar que las cometas:
   a. no tienen origen.
   b. su origen es incierto.
   c. no importa cuál es su origen.
   d. tienen origen en todas las culturas.

6. El pandero tiene la forma:



7. La cola en una cometa tiene como principal función:
   a. adornar.
   b. estabilizar.
   c. elevar.
   d. dar fuerza.

Prueba TIMSS

8. Completa las secuencias y halla la fórmula correspondiente a cada una:
   a. 1, 3, 7, 13, ____, ____, ____.
   b. 1, 3, 6, 10, 15, ____, ____, ____.
   c. 1, 8, 27, 64, ____, ____, ____.
   d. 7, 9, 11, 13, ____, ____, ____.
   e. 3, 12, 27, 48, ____, ____, ____.

Números

Unidad 2

3400 a.e.c.
Egipto y Mesopotamia. Uso de símbolos específicos para los números naturales.

VII a.e.c.
Los griegos, descubrieron las magnitudes irracionales e intuyeron la noción de infinito.

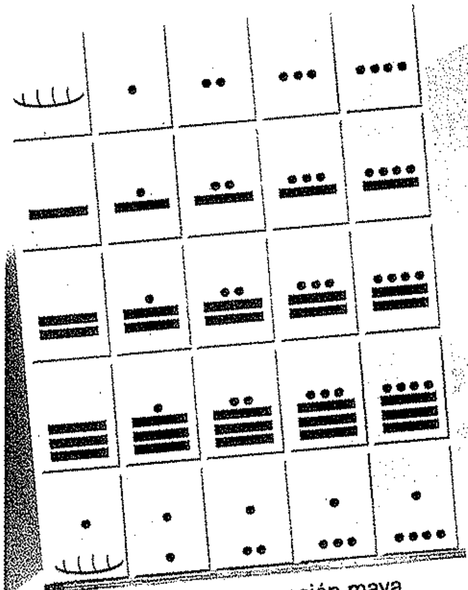
1380-1429
Al Kashi generalizó el uso de los números decimales como los conocemos hoy.

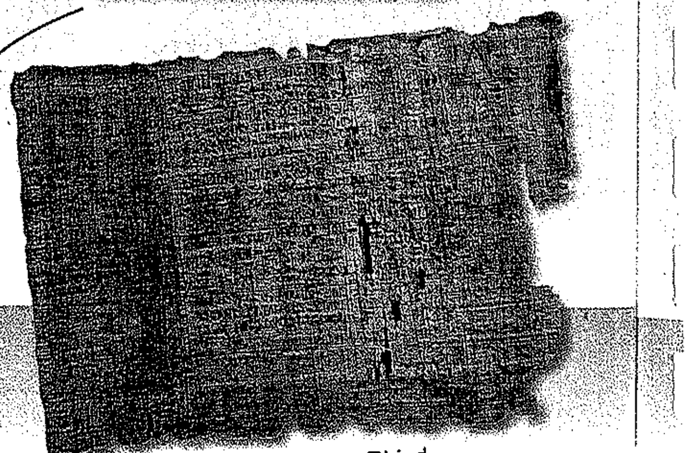
1499-1557
Tartaglia junto con Ferrari resuelven ecuaciones de tercer y cuarto grado e involucran el uso de los números imaginarios.

1540-1603
Viète introduce símbolos algebraicos en sus escritos.

1550-1617
Neper inventa los logaritmos.

1845-1918
George Cantor, Richard Dedekind, Karl Weiertrass, Bernard Bolzano, entre otros, analizan y formalizan el conjunto de los números reales.

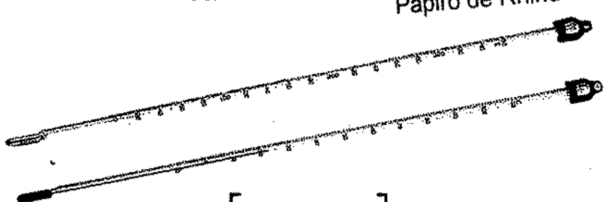

Sistema de numeración maya


Papiro de Rhind

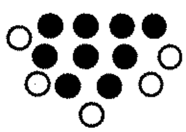
Aplicaciones reales

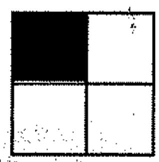
Con los números reales se puede representar la cantidad de habitantes de un país, los días del mes, la cantidad de animales en un establo, la temperatura de un líquido o de un lugar, etc.

Con los reales, además, se pueden representar expresiones del lenguaje cotidiano tales como:"medio día", "un cuarto de hora", "la tercera parte de una ganancia", "los tres quintos de media manzana", etc. Así como las medidas de longitud, área y volumen en los diversos sistemas de medida.



$$\left[4+\frac{11}{2}+\frac{1-\frac{1}{2}}{2+\frac{3}{4}}\right]1\frac{3}{1}$$





reales

Marco histórico

El concepto de número fue elaborado poco a poco a través de los tiempos. Cada cultura manifestó la noción de cantidad y la idea de número de diversas formas, por ejemplo, los mayas usaban rayas y puntos, para notar algunos números.

El uso de las fracciones data de la cultura egipcia, lo cual se supo gracias al análisis de un antiguo documento de esta cultura que es denominado "papiro de Rhind". El cual muestra el uso de algunas reglas para sumar y restar fracciones.

La escuela pitagórica o escuela griega, por su parte, descubrió que con sólo los números naturales y las fracciones no se pueden realizar ni expresar todas las medidas posibles, comenzando así el estudio de las cantidades inconmensurables que posteriormente se llamaron irracionales.

El problema de los números irracionales se resolvió por completo hacia el siglo XVII, cuando Fermat demostró que expresiones como $\sqrt{3}$ no representan a ningún número racional.

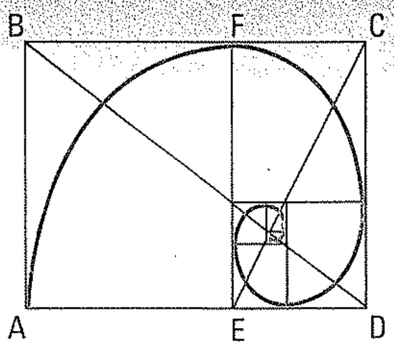
Los matemáticos G. Cantor, R. Dedekind, K. Weiertrass y B. Bolzano fueron los que culminaron la obra, que duró medio siglo de investigaciones, sobre los números naturales, enteros, racionales e irracionales, que considerados juntos, constituyeron lo que se denominó el sistema de los números reales.

Para que argumentes

La evolución de los sistemas de numeración responde a las necesidades del ser humano. ¿Cómo puedes justificar esta afirmación?

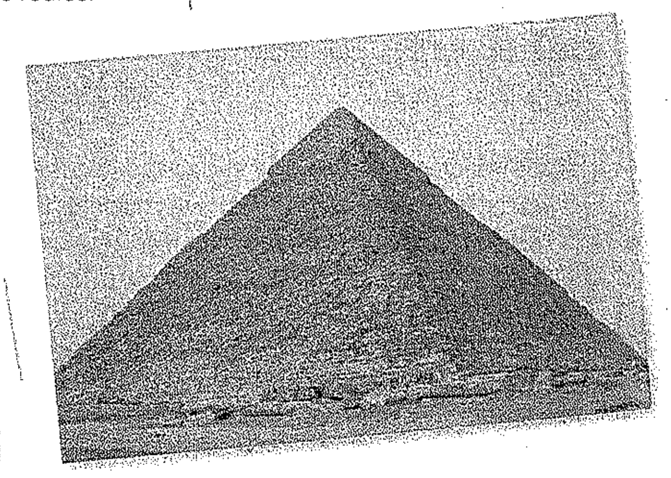
Para que argumentes

Explica cuál es la diferencia entre un número entero, un racional y un irracional.



Igualmente las constantes como pi (π), el número de Euler (e) o la proporción áurea $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ son números reales.

En la pirámide Keops cada una de sus caras está formada por dos medios triángulos áureos.



La recta real

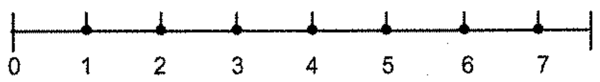
Logro: reconocer la recta real como un todo continuo.

Comparte lo que sabes

Encuentra dos números racionales que estén cerca de π (pi), a derecha e izquierda. ¿Puedes encontrar otros que estén aún más cerca de él?

Representación de los reales en la recta

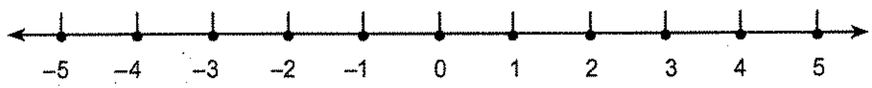
Partiendo de los números con los cuales aprendimos a contar, es decir, los naturales $\mathbb{N}$, diremos que estos números se pueden visualizar a través de una semirrecta, en la cual cada número natural se representa mediante un punto en la recta así:



Cabe anotar que entre dos números naturales hay un número finito de números naturales, por ejemplo entre el 1 y el 4 hay exactamente dos números naturales, el 2 y el 3.

Sin embargo, este conjunto resulta limitado ya que dados dos números $a, b \in \mathbb{N}$ no siempre existe un $x \in \mathbb{N}$ tal que $a + x = b$. Por ejemplo, en la solución de $3 + x = 2$ el valor de x es -1 y $-1 \notin \mathbb{N}$, por tanto es necesario ampliar este conjunto para encontrar solución a este tipo de ecuaciones. Es así como aparece el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z} = \{..., -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$

Así como en los naturales, cada número entero puede ser representado en la recta a través de un punto, así:



En los enteros también se cumple que entre dos de ellos hay un número finito de números enteros, por ejemplo, entre -5 y -1 hay exactamente tres números enteros, -2, -3 y -4.

En el conjunto de los enteros dados dos números $a, b \in \mathbb{Z}$ no siempre existe un $x \in \mathbb{Z}$ tal que $ax = b$. Por ejemplo, en la ecuación $5x = 3$, el número que soluciona la ecuación es $\frac{3}{5}$, pero $\frac{3}{5} \notin \mathbb{Z}$.

Es necesario entonces ampliar el conjunto de los enteros y es así como a parece el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$. Este conjunto está formado por todos los cociente entre números enteros, es decir, si $a, b \in \mathbb{Z}$ y $b \neq 0$, entonces $\frac{a}{b}$ es un número racional.

Los racionales pueden ser representados por una expresión decimal finita (la parte decimal tiene fin) o infinita periódica (la parte decimal se repite indefinidamente).

Ejemplos:

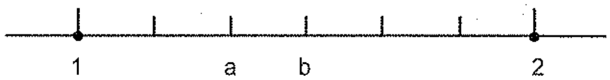
a. $\frac{1}{3} = 0,333...$ es un racional con representación decimal infinita y periódica.

b. $\frac{3}{2} = 1,5$ es un racional con representación decimal finita.

c. $\frac{248}{99} = 2,505050...$ es un racional con representación decimal infinita y periódica.

d. $\frac{14}{7} = 2$ es un racional. Todo número entero es racional.

En los racionales se cumple que entre dos racionales existe un número infinito de racionales. Consideremos los números $a = 1,4325768$ y $b = 1,4325769$, estos dos números se diferencian en la última cifra decimal. Consideremos un número comprendido entre a y b, como por ejemplo, $a < 1,4325768492673 < b$, si a este número le agregas, cada vez una cifra decimal más, podemos encontrar un número infinito de números racionales entre a y b. La visualización de los números racionales se hace entonces más compleja.



Aparentemente los racionales que están entre a y b llenan por completo la recta, pero no es así, ya que la recta aún tiene muchos agujeros y cada uno de ellos corresponde a los números llamados *irracionales*.

Los números irracionales tienen expresión decimal infinita no periódica, por lo cual es difícil caracterizar al conjunto por extensión o por comprensión.

Ejemplos

a. $\pi \approx 3,141592653589793238462643383279\ldots$

b. $\sqrt{2} = 1,41421356237309504880168872420 97\ldots$

c. $e \approx 2,71828182845904523536028747135 27\ldots$

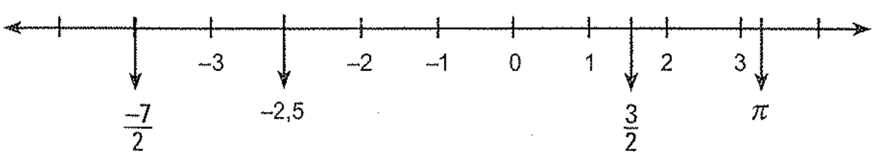
d. $\sqrt{5} \approx 2,23606797749978969640917366873 13\ldots$

Para los griegos los números irracionales eran cantidades "inconmensurables" es decir, cantidades que no se pueden medir, sin embargo lograron representar números como $\sqrt{2}$ ó $\sqrt{3}$.

El conjunto de los números reales se obtiene de la unión de los números racionales e irracionales, es decir:

$$\boxed{\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}}$$

Para visualizar el conjunto de los reales, basta ubicar los números irracionales en los espacios que dejan en la recta los números racionales, así cada espacio vacío es ocupado por un número irracional. Como resultado obtenemos un todo, continuo, que se conoce como la recta real.



En conclusión, los reales se pueden representar a través de puntos sobre la recta real en donde a cada número real x le corresponde exactamente un punto p en la recta y, a cada punto p en la recta le corresponde un número real x.

PRÁCTICA EN CONTEXTO

Razonamiento

1. **Indica si las siguientes afirmaciones son falsas (F) o verdaderas (V). Justifica tu respuesta.**

a. La suma en los irracionales es clausurativa.

b. Todos los naturales son racionales.

c. El producto en los irracionales es clausurativo.

d. No todos los enteros son racionales.

e. No todos los irracionales son reales.

f. La intersección entre los racionales y los irracionales no es un conjunto vacío.

g. El conjunto vacío es un subconjunto del conjunto de los números irracionales.

h. El número 2 es un elemento del conjunto de los números racionales.

i. El conjunto de los números enteros es subconjunto de los números reales.

2. **Considera el siguiente conjunto:**

$A = \left\{-4; \frac{1}{3}; \sqrt{3}; \sqrt{7}; 1, 23; 7; -4, 3; \frac{7}{99}; \frac{8}{2}\right\}$

a. ¿Cuáles de estos números son naturales?

b. ¿Cuáles de estos números son enteros no negativos?

c. ¿Cuáles de estos números son racionales?

d. ¿Cuáles de estos números son irracionales?

e. ¿Cuáles de estos números son enteros?

f. ¿Cuáles de estos números son reales?

Procedimientos

3. **Ubica en una recta real cada grupo de números:**

a. $-1,25; \frac{3}{7}; -4; \sqrt{2}$

b. $-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; \frac{5}{2}; -\frac{4}{2}$

c. $1,5; 5; \frac{1}{4}; -\sqrt{3}$

d. $3,7; -2,4; 1,8; -1,3$

e. $-3,5; -\frac{4}{2}; 3; \sqrt{7}$

Razonamiento

4. **En cada una de las siguientes afirmaciones hay errores. Encuéntralos.**

a. Los números enteros que están entre -1 y 4 son: $-2, 0, 1, 2, 3$.

b. 4 es un número natural pero no es entero.

c. $\frac{1}{4}$ es un número real e irracional.

d. $-\sqrt{7}$ es un número entero negativo e irracional.

e. El conjunto de los números naturales es un conjunto finito.

f. Los naturales son un subconjunto de los enteros no negativos.

g. Los racionales son un subconjunto de los enteros positivos.

h. Los irracionales son un subconjunto de los racionales.

i. Los números $\frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}$ son números irracionales que están entre 1 y 2.

j. Los números primos son números irracionales.

k. $\frac{3}{5}$ es un subconjunto de los números racionales.

5. **Escribe el signo < o > en el espacio indicado según corresponda:**

a. 10	$1,5$	g. -7	-4
b. $-3,8$	$-3,3$	h. $-5,75$	$-5,091$
c. $\frac{7}{4}$	$\frac{13}{2}$	i. π	$3,14$
d. $\frac{3}{5}$	$\frac{5}{6}$	j. e	$-2,5$
e. $\frac{3}{5}$	$-\frac{5}{9}$	k. π	e
f. -3	15	l. $3,11$	$3,111$

6. **Organiza de menor a mayor cada una de las siguientes listas de números.**

a. $-3; \frac{1}{3}; \sqrt{4}; 18; \frac{7}{5}$

b. $1,25; 0; \frac{2}{7}; -\frac{1}{5}; \sqrt{2}$

c. $\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{2}{8}, 9; -2; -\sqrt{6}$

d. $\pi; 8; -\frac{1}{2}; \frac{5}{3}; -\sqrt{2}$

7. Expresa en forma de decimal y concluye, de acuerdo la expresión obtenida, si se trata de un número racional o un irracional.

a. $\sqrt{2}$ c. $\sqrt[3]{8}$ e. $\frac{2}{8}$

b. $\frac{3}{7}$ d. $\frac{1}{5}$ f. $\sqrt[3]{6}$

Solución de problemas

8. En un torneo intercolegiado el equipo de fútbol del colegio jugó 10 partidos de los que ganó 6, empató 3 y perdió 1. ¿Qué porcentaje y qué fracción representan los partidos ganados, empatados y perdidos?

9. Un almacén de electrodomésticos ofrece rebajas en toda la mercancía. En la siguiente tabla se presentan los precios con y sin rebaja.

Producto	Antes	Hoy
Lavadora de 24 lb	$ 1 109 900	$ 919 500
Horno microondas	$ 169 950	$ 139 900
Nevera	$ 1 014 900	$ 852 500
Aspiradora	$ 169 900	$ 139 900
Televisor	$ 1 198 000	$ 899 000

a. ¿Cuál de los productos está más rebajado? Justifica tu respuesta.

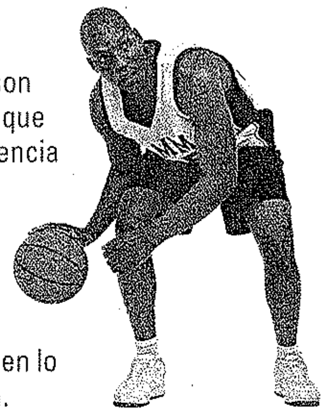
b. Los clientes que paguen la mercancía con tarjeta de crédito, recibirán un 10 % adicional de descuento. Si una persona compra una nevera con tarjeta de crédito, ¿cuál es el porcentaje total de la rebaja?

c. Si los clientes pagan los productos con tarjeta débito deben pagar un 5 % más sobre el producto rebajado. Si un cliente compró un horno microondas con tarjeta débito, ¿cuánto debe pagar dicho cliente? Con respecto al precio inicial, ¿en cuánto fue rebajado el producto?

10. Julia compró 500 g de arequipe. Si se comió el 35% el primer día y el segundo día consumió el 50% de lo que le restaba el día anterior, ¿cuántos gramos de arequipe le quedan?

11. Si Pedro adquirió tres galones de pintura y pintó su alcoba con $\frac{8}{5}$ de la pintura comprada. ¿Cuántos mililitros le quedan aún?

Si gasta $\frac{4}{7}$ de lo que le quedaba, para pintar la alcoba de su hermana, ¿cuántos mililitros gastó al pintar esa alcoba?



12. Los Ángeles Lakers, Rockets, Jazz y Spurs son algunos de los equipos que pertenecen a la conferencia oeste de la NBA. La siguiente tabla muestra el número de partidos ganados, perdidos y el promedio respecto a los partidos ganados en lo que va de la temporada.

a. Con el fin de determinar la efectividad de cada equipo se calcula el cociente entre el número de partidos ganados y el total de partidos jugados. Completa la tabla y determina:

Equipo	Partidos Ganados	Partidos Perdidos	Promedio
Lakers	18	10	0,64
Rockets	13	15	
Jazz	15	14	
Spurs	19	7	

b. ¿cuál de estos equipos es más efectivo? Justifica tu respuesta.

c. Kobe Bryant es una de las grandes estrellas del baloncesto en la NBA. En un partido contra los Knicks de Nueva York, anotó un triple en el primer minuto del tercer cuarto que le permitió superar la barrera de los 20 000 puntos a sus 29 años y 122 días. ¿Cuál es la edad de Kobe Bryant en meses y en horas?

Valor absoluto

Logro: determinar el valor absoluto de números reales.

Comparte lo que sabes

¿Crees que la distancia se puede expresar como un número negativo? Justifica tu respuesta.

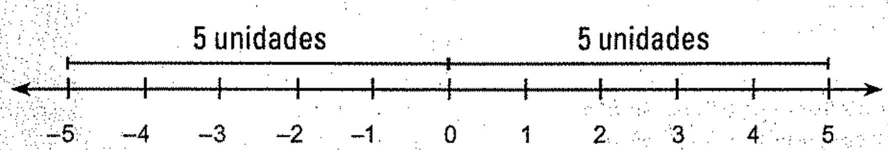
El **valor absoluto** de un número se define como la distancia del número respecto al cero en la recta numérica.

El valor absoluto se simboliza con dos barras así: $|a|$ y se lee "valor absoluto de a".

Ejemplo

Hallar el valor absoluto de 5 y el valor absoluto de -5.

Si ubicamos estos dos números en la recta real se puede observar que ambos están a la misma distancia de cero entonces el valor absoluto de 5 y -5 es 5, es decir $|5| = 5$ y $|-5| = 5$; esto gráficamente es:



El valor absoluto de un número real "x" es el número real no negativo que se denota como $|x|$ y que se define como:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Ejemplos

a. Hallar el valor absoluto de 6.

Como $6 > 0$, entonces $|6| = 6$

b. Hallar el valor absoluto de -8.

Como $-8 < 0$ entonces, $|-8| = -(-8) = 8$

El valor absoluto se utiliza para determinar la distancia entre dos puntos cualesquiera de la recta real.

Consideremos dos puntos x y y sobre la recta real. Para determinar la distancia entre estos dos puntos, que se denota $d(x, y)$, se calcula el valor absoluto de la diferencia entre x y y; es decir $d(x, y) = |x - y| \geq 0$

Ejemplos

a. Hallar la distancia entre -4 y 7:

$|-4 - 7| = |-11| = 11$

b. Hallar la distancia entre -5 y -3:

$|-5 - (-3)| = |-5 + 3| = |-2| = 2$

Propiedades del valor absoluto

El valor absoluto cumple con las siguientes propiedades:

Si $x, y \in \mathbb{R}$ entonces;

a. $|x + y| \leq |x| + |y|$, que se le conoce como *desigualdad triangular*.

b. $|x \times y| = |x| \times |y|$

c. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$; $y \neq 0$

Ejemplos

a. Si $x = -3$, y $y = 11$, entonces $|-3 + 11| \leq |-3| + |11|$

$$|8| \leq 3 + 11$$

$$8 \leq 14$$

b. $|19 - 7| \leq |19| + |-7|$

$$|12| \leq 19 + 7$$

$$12 \leq 26$$

c. $|-3 \times 4| = |-3| \times |4|$

$$|-12| = 3 \times 4$$

$$12 = 12$$

d. $\left|\frac{15}{-20}\right| = \frac{|15|}{|-20|}$

$$\left|\frac{-3}{4}\right| = \frac{15}{20}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

PRÁCTICA EN CONTEXTO

Ejercitación de procedimientos

1. Calcula:

a. $|-(-10)|$

b. $|7| - |3|$

c. $\left|-\frac{3}{2} + x\right|$

d. $|(-14) + (-8)|$

e. $-|-(-5 - 4)|$

f. $3 - |-5| + 4 - |-1|$

g. $-\left|-\frac{2}{3}\right| \times \left|\frac{7}{5}\right|$

h. $||-a| + 2|$

2. Halla la distancia entre cada par de puntos en la recta real, utilizando el concepto de valor absoluto.

a. 3 y -4

b. -15 y 2

c. 13 y 28

d. -10 y -6

e. $\frac{1}{4}$ y $\frac{5}{3}$

f. $-\frac{5}{3}$ y $\frac{6}{7}$

g. $x - y$ y $x - z$

h. 3 y $\sqrt{5}$

i. 3, 2 y 4, 11

j. $3a$ y $9a$

k. $3a - 5b$ y $11, 3b$

l. $11a - 5b$ y $13a - 2c$

3. Determina los valores posibles de x, utilizando la definición de valor absoluto:

a. $|x| = 7$

b. $|x| = \frac{1}{4}$

c. $|x + 3| = 1$

d. $|2 - x| = 5$

e. $\left|\frac{2}{3} + x\right| = 4$

f. $\left|\frac{1}{2} - x\right| = \frac{5}{2}$

g. $|-x| = 78$

h. $|15 - x| = 18$

4. Determina el signo de cada expresión, si $x > 0$, $y < 0$, $z < 0$ y $m > 0$

a. $\frac{|-2xy|}{|zm|}$

b. $\frac{zy}{|x|}$

c. $\frac{-z}{|m|} \times \frac{|-y|}{-x}$

d. $-|xy| \times \frac{|-5m|}{z}$

Solución de problemas

5. La ola invernal ha traído consigo temperaturas muy bajas en todo el mundo. Por ejemplo, en España el INM (Instituto Nacional de Meteorología) reportó que las temperaturas más bajas se presentaron en Molina de Aragón con –14, 5 grados; en Albacete, en donde se alcanzaron los –12, 4 grados y en Huéscar (norte de Granada), con –13, 5 grados.

a. ¿Cuál fue la diferencia de temperatura entre: Molina de Aragón y Huéscar?

b. ¿Cuál fue la diferencia de temperatura entre: Molina de Aragón y Albacete?

6. Un buzo se sumerge 68 pies en el océano, poco tiempo después sube 43 pies. ¿Cuál es la profundidad en que se encuentra el buzo respecto a un punto que se encuentra a 17 pies por debajo de la superficie? (considera la distancia hacia abajo con signo negativo).

Tema 3

Ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto

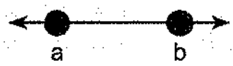
Logro: reconocer el uso de la variable en la interpretación y solución de problemas.

Comparte lo que sabes

Elabora una lista de las propiedades de las ecuaciones y de las inecuaciones o desigualdades, y determina qué tienen en común y en qué se diferencian.

Un intervalo es un subconjunto del conjunto de los números reales. Cada intervalo corresponde a un segmento de recta que se utiliza, por ejemplo, para expresar el conjunto solución de una inecuación.

Clasificación de los intervalos

Intervalo	Notación	Descripción por comprensión	Gráfica (segmento, rayo o recta en verde)
Abierto	(a, b)	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	
Cerrado	$[a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	
Semiabierto a izquierda	$(a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	
Semiabierto a derecha	$[a, b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	
Infinitos	(a, ∞)	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$	
	$[a, \infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$	
	$(-\infty, b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$	
	$(-\infty, b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$	
	$(-\infty, \infty)$	$\{x \mid x \in \mathbb{R}\}$	

Nota: si en la definición del intervalo (a, b), $a = b$, se dice que el intervalo es vacío, de otro lado, si el intervalo es cerrado $[a, b]$ y $a = b$, entonces se obtiene únicamente el punto a.

Ecuaciones con valor absoluto

En la solución de ecuaciones con valor absoluto se deben tener en cuenta las siguientes propiedades:

1. $|x| = a$ y $a > 0$, entonces $x = a$ ó $x = -a$

Ejemplos

a. Resolver la ecuación $|x + 4| = 6$

Se deben encontrar los valores de x tales que $x + 4$ esté a seis unidades de distancia con respecto al cero en la recta, entonces:

$$\begin{aligned} x+4&=6 \quad \text{ó} \quad & x+4&=-6 \\ x&=2 & x&=-10 \end{aligned}$$

Luego el conjunto solución del la ecuación es $\{2, -10\}$

b. Resolver la ecuación $|9 - 4x| = 12$

Se deben encontrar los valores de x tales que $9 - 4x$ esté a 12 unidades de distancia con respecto al cero en la recta numérica, entonces:

$$\begin{aligned} 9-4x&=12 \quad \text{ó} \quad & 9-4x&=-12 \\ x&=-\frac{3}{4} & x&=\frac{21}{4} \end{aligned}$$

El conjunto solución es $\left\{-\frac{3}{4}, \frac{21}{4}\right\}$

2. $|x| = |y|$, entonces $x = y$ ó $x = -y$

Ejemplos

a. Resolver la ecuación $|6x + 3| = |4x - 13|$

Aplicando la propiedad tenemos:

$$\begin{aligned} 6x+3&=4x-13 \quad \text{ó} \quad & 6x+3&=-(4x-13) \\ 2x&=-16 & 6x+3&=-4x+13 \\ x&=-8 & 10x&=10 \\ & & x&=1 \end{aligned}$$

El conjunto solución es $\{-8, 1\}$

b. Resolver la ecuación $|3a - 4| = |3a + 4|$

Aplicando la propiedad tenemos:

$$\begin{aligned} 3a-4&=3a+4 \quad \text{ó} \quad & 3a-4&=-(3a+4) \\ 0&=8 & 6a&=0 \\ & & a&=0 \end{aligned}$$

La primera igualdad es falsa, así que la solución es $\{0\}$

Inecuaciones con valor absoluto

En la solución de inecuaciones con valor absoluto se deben tener en cuenta las siguientes propiedades:

1. $|x| \le a$, entonces $-a \le x \le a$, siempre que $a > 0$.

Ejemplo

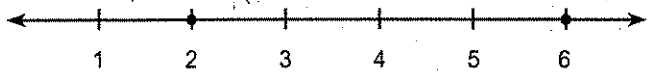
Resolver $|2x - 8| \le 4$

Se deben encontrar los valores de x tales que $2x - 8$ esté a 4 unidades de distancia, o menos, respecto al cero en la recta numérica, entonces:

$$|2x - 8| \le 4$$
$$-4 \le 2x - 8 \le 4$$
$$-4 + 8 \le 2x \le 4 + 8$$
$$4 \le 2x \le 12$$
$$2 \le x \le 6$$

La solución se puede expresar en forma de intervalo. Los valores de x en este caso son mayores o iguales a 2 y menores o iguales a 6 es decir: $[2, 6]$

Gráficamente podemos representar el conjunto solución así:



El segmento azul es la solución.

2. $|x| \ge a$, entonces $x \ge a$, ó, $x \le -a$

Ejemplo

Resolver $|2x + 5| \ge 6$

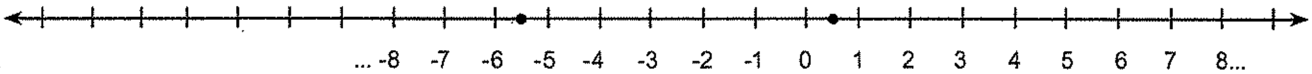
Se deben encontrar los valores de x tales que $3x + 5$ esté a 6 unidades de distancia o más, respecto al cero en la recta numérica, entonces:

$$|2x + 5| \ge 6$$

$$2x + 5 \ge 6 \quad \text{ó} \quad 2x + 5 \le -6$$
$$2x \ge 1 \qquad 2x \le -11$$
$$x \ge \frac{1}{2} \qquad x \le -\frac{11}{2}$$

Luego la solución está dada la unión de los intervalos: $\left(-\infty, -\frac{11}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$

La solución gráfica se muestra en los rayos de color rojo.



PRÁCTICA EN CONTEXTO

Ejercitación de procedimientos

1. Halla el conjunto solución de las siguientes ecuaciones:

a. $|a - 5| = 7$

b. $|3 + x| = \frac{2}{5}$

c. $|m| = 9$

d. $\left|\frac{5a - 3}{2}\right| + 2 = 6$

e. $|y + 7| = |-y + 2|$

f. $\left|\frac{5}{7} - a\right| = |a + 3|$

2. Halla el conjunto solución de las siguientes inecuaciones. Escríbelo como intervalo y represéntalo gráficamente.

a. $|2a - 7| \le 9$

b. $|3n + 5| > 0$

c. $\left|\frac{3y - 1}{4}\right| < 6$

d. $|3x - 8| + 6 > 8$

e. $|8 - 5a| \ge \frac{7}{5}$

f. $\left|\frac{x - 4}{2 - x}\right| \ge 4$

g. $|5a + 3| \ge 2$

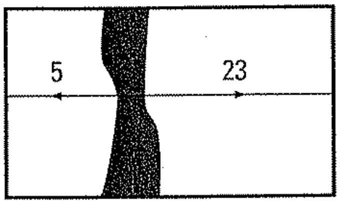
h. $\left|(3x - 5) \times \frac{1}{7}\right| \ge 11$

i. $100 \ge \left|\frac{4z - 11}{2}\right|$

j. $22 \le \left|\frac{1}{3}(2x - 7)\right|$

Solución de problemas

3. Se requiere hacer surcos para sembrar sobre un terreno como el que aparece en la figura.



El dueño del terreno sabe que los surcos deben quedar a mínimo 3 m de distancia del cauce del agua.

a. Calcula en qué sector del terreno se pueden trazar los surcos, si cada uno tiene 1 m de ancho.

b. ¿Cuántos surcos se pueden hacer a la derecha e izquierda del terreno?

c. Elabora un plano que ilustre la solución.

Razonamiento y comunicación

4. Escribe las siguientes proposiciones en términos de desigualdades y valores absolutos:

a. x está entre -4 y 4, inclusive.

b. La distancia entre x y -5 es cuando mucho 6.

c. El precio m de unas acciones difiere de \$ 175 en menos de \$ 50.

d. P es mayor que 6 o menor que -6.

5. A partir de la desigualdad $|-7| > |-3|$, ¿qué otra desigualdad se obtiene si:

a. se suma 3 a ambos miembros de la desigualdad?

b. se resta 3 a ambos miembros de la desigualdad?

c. se multiplica por $\frac{1}{3}$ a ambos miembros de la desigualdad?

d. se divide por 2 ambos lados de la desigualdad?

e. se multiplica por -4 a ambos lados de la desigualdad?

f. se le resta 3 a ambos lados y después se multiplica por -1 a ambos lados de la desigualdad?

g. ¿se multiplica por -1 en el interior de ambos valores absolutos?

6. A partir de la desigualdad $-|5| > -10$, ¿qué desigualdad se obtiene si:

a. se suma 6 a ambos miembros de la desigualdad?

b. se resta -6 a ambos miembros de la desigualdad?

c. se multiplica por $-\frac{1}{12}$ a ambos lados de la desigualdad?

d. se divide entre $\sqrt{9}$ a ambos lados de la desigualdad?

e. se multiplica por -13 a ambos lados de la desigualdad?

f. se elimina el valor absoluto dada en la desigualdad?

7. Una partícula se encuentra en el punto a de un plano. Si debe recorrer 5 milímetros hacia la izquierda del punto a y luego debe trasladarse 8 milímetros hacia la derecha,

a. ¿cuál es la distancia total que se ha movido la partícula?

b. ¿cuál es la distancia de la partícula con respecto al punto a?

c. ¿cuál es la posición de la partícula al final del recorrido?

d. Si en cambio la partícula se traslada siempre hacia la izquierda, ¿cambia en algo la solución de los puntos a., b., y c.? Justifica tu respuesta.

Tema 4

Exponentes enteros y racionales

Logro: simplificar expresiones algebraicas utilizando las propiedades de la potenciación.

COMPARTE LO QUE SABES

Elabora la demostración gráfica del teorema de Pitágoras en tu cuaderno.

La **potenciación** es la operación que simplifica la multiplicación de factores iguales.

Sea $a \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$ y $n \in \mathbb{Z}$, se define a^n como $\underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n-veces}$

Propiedades de la potenciación

1. Producto de potencias de la misma base.

Sean $m, n \in \mathbb{Z}$ y $a \in \mathbb{R}$, entonces:

$a^m \times a^n = a^{m+n}$

Ejemplos

a. $3 \times 3^5 = 3^{1+5} = 3^6$

b. $x^5 \times x^{-2} = x^{5+(-2)} = x^{5-2} = x^3$

c. $(1,25)^4 \times (1,25)^3 = (1,25)^{4+3} = (1,25)^7$

2. Cociente de potencias de la misma base.

Sean $m, n \in \mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$, entonces:

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

Ejemplos

a. $\frac{7^9}{7^5} = 7^{9-5} = 7^4$

b. $\frac{z^3}{z^5} = z^{3-5} = z^{-2}$

3. Potencia de una potencia.

Sean $m, n \in \mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$, entonces:

$(a^m)^n = a^{m \times n}$

Ejemplos

a. $(6^3)^7 = 6^{3\times7} = 6^{21}$

b. $(y^{-3})^4 = y^{-3\times4} = y^{-12}$

4. Potencia de un producto.

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y $m \in \mathbb{Z}$, entonces:

$(ab)^m = a^m \times b^m$

Ejemplos

a. $(8 \times 4)^5 = 8^5 \times 4^5$

b. $(yz)^6 = y^6 z^6$

5. Potencia de un cociente.

Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ y $m \in \mathbb{Z}$, entonces:

$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

Ejemplos

a. $\left(\frac{4}{7}\right)^3 = \frac{4^3}{7^3}$

b. $\left(\frac{x}{2}\right)^4 = \frac{x^4}{2^4} = \frac{x^4}{16}$

6. Exponente negativo.

Sea $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ y $m \in \mathbb{Z}$, entonces

$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$

Ejemplos

a. $9^{-3} = \frac{1}{9^3} = \frac{1}{729}$

b. $5^2 = \frac{1}{5^{-2}}$

7. Exponente cero.

Sea a un número real diferente de cero, entonces: $a^0 = 1$

Ejemplos

a. $3^0 = 1$

b. $-5t^0 = -5 \times t^0 = -5 \times 1 = -5$

PRÁCTICA EN CONTEXTO

Ejercitación de procedimientos

1. Aplica las propiedades de la potenciación para simplificar las siguientes expresiones. Escribe la respuesta sin utilizar exponentes negativos.

a. $\left(\frac{1}{3}\right)^4$

b. $\frac{(a)^3}{2}$

c. $(x^7)^{10}$

d. $(-x)^3$

e. $(a^2)^{-3}$

f. $4^{-2} + 8^{-1}$

g. $(2xy)^4(3xy^4)$

h. $-5x^0 + 5x^0$

i. $(3a^2b)^5(8ab^2)^3$

j. $\left(\frac{4m^2}{3n^4}\right)^5$

k. $\left(\frac{2s}{t^6}\right)^6\left(\frac{s^3}{3t}\right)^4$

l. $(9x^2yz^5)(-8xy)$

m. $\left(\frac{4a^3}{5b}\right)^2 \times \frac{a}{(b^2)^2}$

n. $(4a^2b^5)^{-3}$

o. $5(x+y)^0$

p. $\left(\frac{6m^4n^{-6}p}{2mn^{-6}z^{-2}}\right)^{-2}$

q. $\frac{(2ab^2c^{-3})^2}{(3a^{-1}bc^2)^{-1}}$

r. $(3x^{-3}y^{-2})(6x^{-4}y^7)$

s. $125 \times 5(x+y)(x+y)^6$

t. $100(x+y)(x-y)$

2. Simplifica cada una de las siguientes expresiones:

a. $x^{3a} \times x^{a+2}$

b. $\frac{x^{2m+3}}{x^{m-5}}$

c. $a^{2x+3} \times a^{-2x-3}$

d. $\frac{27m^{x+2}n^{y+4}}{3m^{x-4}n^{y-2}}$

e. $(x^{5a+7})(x^{-9a-4})$

f. $\frac{125^a x^{a+b}}{5^{2a} x^{b-a}}$

Solución de problemas

3. El número de bacterias $N(t)$ que hay en un cultivo después de t horas, está dada por la expresión $N(t) = 2^{10} \times 2^t$

a. Calcula el número de bacterias que habrá después de: $\frac{1}{2}$ hora, 1 hora y un día.

b. ¿Cuántas bacterias había inicialmente?

4. Para determinar la antigüedad de un fósil los científicos utilizan el método denominado "carbono 14". Utilizando la fórmula $P = P_0 \times 2^{\frac{-t}{5\,600}}$, donde P_0 es la cantidad inicial de C_{14} y P la cantidad de C_{14} que queda después de t años.

Si en un fósil están presentes 15 mg de C_{14}, ¿cuántos miligramos estarán presentes en el fósil dentro de 2 000 años?

5. Cuenta una leyenda oriental que un rey quiso premiar las dotes adivinatorias del sumo sacerdote quien predijo una extraordinaria victoria en una batalla. El modesto sacerdote pidió 2 granos de trigo por la primera casilla de un tablero de ajedrez, 4 por la segunda, 8 por la tercera, y el doble cada vez por cada nueva casilla. El rey pareció complacido por la modestia del sacerdote sin embargo después de hacer algunos cálculos se llevó una gran sorpresa.

a. ¿Por qué crees que el rey se sorprendió?

b. ¿Cuántos granos de trigo tendría que pagar el rey al sacerdote?

COMPETENCIA INTERPRETATIVA: soluciona problemas empleando las propiedades de la potenciación

Notación científica

Es usual que cuando se tienen números que contienen muchos ceros a derecha o a izquierda, ya sea números muy grandes como la distancia aproximada de la Tierra al Sol 149 600 000 km o muy pequeños como el diámetro aproximado de un átomo 0, 00000001 cm, éstos se expresen en ***notación científica***.

En esta notación, los números se expresan como un producto, en el que uno de sus factores es un decimal con una sola cifra entera, y el otro factor es una potencia de 10.

Si expresamos las medidas anteriores en notación científica tenemos que la distancia aproximada entre la Tierra y el Sol es $1,496 \times 10^{8}$ **km** y el diámetro aproximado de un átomo es 1×10^{-8} **cm**.

Para escribir un número en notación científica se procede de la siguiente forma:

1. **Si el número tiene ceros a derecha, se debe correr la coma decimal del número, hacia la izquierda, hasta la derecha del primer dígito del número.**

Si el número tiene ceros a la izquierda, entonces se debe correr la coma decimal hacia la izquierda hasta la derecha del primer dígito, diferente de cero, que se encuentre.

2. **Se cuenta el número de lugares que se corrió la coma decimal, si la coma se corrió hacia la izquierda entonces el exponente de 10 será positivo; si por el contrario, la coma se corrió a la derecha, entonces el exponente de 10 será negativo.**

3. **Por último, se multiplica el número que se obtiene al correr la coma decimal por 10 elevado al número de lugares que se corrió la coma decimal, con el exponente correspondiente.**

Ejemplos

Escribe las siguientes cantidades en notación científica:

a. 57 800

b. 0, 0000036

Solución

a. En 57 800 el punto decimal se encuentra a la derecha del último cero. Al correr la coma decimal hasta la derecha del primer dígito, observamos que se mueve cuatro lugares y como el número inicial es mayor que diez entonces el exponente es positivo: $57\,800, = 5,78 \times 10^{4}$

b. En 0, 0000036 la coma decimal se mueve seis lugares hacia la derecha, por lo cual el exponente es negativo: $0,0000036 = 3,6 \times 10^{-6}$

Exponentes racionales

Las expresiones radicales pueden escribirse como expresiones con exponentes racionales y viceversa, este procedimiento resulta útil en la simplificación de expresiones algebraicas. De manera general: $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

Si a es un número positivo, entonces n puede ser cualquier índice, pero si a es un número negativo, entonces n debe ser un número impar para que la raíz sea un número real.

Ejemplos

1. **Observa cómo se escribe cada una de las siguientes expresiones con exponentes racionales:**

a. $\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}}$

b. $\sqrt[3]{-5x^{3}y^{2}} = \left(-5x^{3}y^{2}\right)^{\frac{1}{3}}$

c. $\sqrt[5]{\dfrac{3x^{4}}{2y^{7}}} = \left(\dfrac{3x^{4}}{2y^{7}}\right)^{\frac{1}{5}}$

d. $\sqrt[7]{7x^{5}} = \left(7x^{5}\right)^{\frac{1}{7}}$

e. $\sqrt[4]{ab^{5}} = \left(ab^{4}b\right)^{\frac{1}{4}} = b\left(ab\right)^{\frac{1}{4}}$

2. Observa cómo se escribe cada una de las siguientes expresiones en forma radical.

a. $3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

b. $\left(5x^3y^4\right)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{5x^3y^4}$

c. $\left(x^4y^7z\right)^{\frac{1}{7}} = \sqrt[7]{x^4y^7z}$

d. $\left(w^3x^2y^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(w^2wx^2y^2\right)^{\frac{1}{2}} = wxy\sqrt{w}$

e. $\left(xw^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{6}} = \sqrt[3]{x}\sqrt[6]{y}$

Para simplificar expresiones radicales se puede aplicar la siguiente regla:

Si $m, n \in \mathbb{Z}$, entonces: $\sqrt[n]{a^m} = \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}}$ ¿se cumple para cualquier valor de a?

Ejemplos

a. $\sqrt{y^3} = y^{\frac{3}{2}}$

b. $\sqrt[3]{n^2} = n^{\frac{2}{3}}$

c. $\left(\sqrt{y}\right)^5 = \left(y^{1/2}\right)^5 = y^{\frac{5}{2}}$

PRÁCTICA EN CONTEXTO

Ejercitación de procedimientos

1. Expresa las siguientes cantidades en notación científica:

a. 17 000 000 000

b. 750 000

c. 0,00456

d. 23 000 000 000

e. 0, 0000453

f. 0, 0000000000000000016

g. 9 119 000

h. 824 000 000

2. Escribe cada una de las siguientes expresiones como una potencia con exponente racional:

a. $\sqrt[3]{5^2}$

b. $\sqrt[5]{x^4}$

c. $\sqrt{x^5y}$

d. $\left(\sqrt{a}\right)^5$

e. $\sqrt[4]{7x^3y^5}$

f. $\sqrt[6]{8^2}$

g. $\sqrt[9]{2x - 6y^5}$

h. $\sqrt{(3x + 6y)^3}$

3. Escribe cada una de las siguientes expresiones en forma radical:

a. $x^{\frac{2}{5}}$

b. $m^{\frac{5}{3}}$

c. $\left(x^4\right)^{\frac{1}{6}}$

d. $\left(26y^3\right)^{\frac{1}{2}}$

e. $(6m + 5n)^{\frac{1}{4}}$

f. $z^{\frac{3}{7}}$

g. $\left(2a^2\right)^{\frac{-1}{3}}$

h. $\left(8x^3 + 7y^2\right)^{\frac{-1}{6}}$

Solución de problemas

4. El radio atómico es la distancia que existe entre el núcleo y la capa de valencia (la más externa) del átomo. Con el radio atómico se puede determinar el tamaño del átomo.

En la tabla se presentan los radios atómicos de algunos elementos.

Elemento	Radio atómico
Hidrógeno	0, 79
Helio	0, 49
Boro	0, 98
Carbono	0, 914
Nitrógeno	0, 92

Expresa los radios atómicos en notación científica e investiga el símbolo químico de cada elemento.

5. La distancia aproximada de algunos de los planetas del sistema solar respecto al Sol se encuentra en la tabla a continuación.

Planeta	Distancia en km	Excentricidad orbital
Tierra	150 millones	
Marte	225 millones	0,0934
Venus	108 millones	0,0068
Saturno	1 425 millones	0,0560

a. Escribe en rotación científica cada una de las distancias, en metros, de los planetas respecto al Sol.

b. Investiga qué es la excentricidad orbital. Escribe cada uno de los valores de la excentricidad, en notación científica.

Operaciones con radicales

Logro: aplicar las propiedades de los radicales en la simplificación de expresiones algebraicas.

Comparte lo que sabes

¿Existe alguna relación entre la potenciación y la radicación?

Para simplificar expresiones radicales se debe tener en cuenta que los exponentes que aparecen en el radicando sean divisibles por el índice del radical.

Ejemplos

a. $\sqrt{x^8} = x^{\frac{8}{2}} = x^4$

b. $\sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5^3} = 5^{\frac{3}{3}} = 5$

c. $\sqrt[5]{y^{45}} = y^{\frac{45}{5}} = y^9$

Propiedades de la radicación

Las siguientes propiedades se utilizan para simplificar expresiones radicales:

Propiedad	Ejemplo
Producto de raíces del mismo índice: $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \times b}$	Simplificar $\sqrt{a^9}$ Escribimos el factor a^9 como el producto de dos factores, de tal forma que uno de ellos tenga como exponente el índice del radical o un múltiplo de éste. $\sqrt{a^9} = \sqrt{a^8 a}$, con lo cual $\sqrt{a^8 a} = \sqrt{a^8}\sqrt{a} = a^4\sqrt{a}$
Raíz de una raíz: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \times n]{a}$	Simplificar $\sqrt{\sqrt[3]{5x^2}}$ Multiplicamos los índices de los radicales para dejar un solo radical, que si es posible, se simplifica: $\sqrt{\sqrt[3]{5x^2}} = \sqrt[2\times 3]{5x^2} = \sqrt[6]{5x^2}$
Raíz de un cociente: $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	Simplificar $\sqrt[3]{\frac{15xy^5}{3x^{10}y}}$ $\sqrt[3]{\frac{15xy^5}{3x^{10}y}} = \sqrt[3]{\frac{5y^4}{x^9}} = \sqrt[3]{\frac{5y^3y}{x^9}} = \frac{y}{x^3}\sqrt[3]{5y}$
Suma y resta de radicales: El procedimiento que se utiliza para sumar o restar expresiones radicales es similar al que se utiliza para sumar o restar expresiones algebraicas. Para sumar o restar radicales, se simplifican las expresiones radicales, si es posible; y se operan los términos semejantes, cuando los hay.	Resolver: a. $3\sqrt{x} + 5\sqrt{x}$ $3\sqrt{x} + 5\sqrt{x} = (3 + 5)\sqrt{x} = 8\sqrt{x}$ b. $8\sqrt{16x} - 3\sqrt{25x}$ $8\sqrt{16x} - 3\sqrt{25x} = 8\sqrt{2^4 x} - 3\sqrt{5^2 x} = 8 \times 2^2\sqrt{x} - 3 \times 5\sqrt{x}$ $= (32 - 15)\sqrt{x} = 17\sqrt{x}$ c. $12\sqrt{12x} - 10\sqrt{3x} + \sqrt{2x^3}$ $12\sqrt{2^2 \times 3x} - 10\sqrt{3x} + \sqrt{2x^2x} = 24\sqrt{3x} - 10\sqrt{3x} + x\sqrt{2x}$ $= 14\sqrt{3x} + x\sqrt{2x}$

Propiedad	Ejemplo
Multiplicación de radicales: Para multiplicar radicales se utiliza la regla del producto: $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \times b}$	Resolver: a. $\sqrt{3x^3} \times \sqrt{5x}$ $\sqrt{3x^3} \times \sqrt{5x} = \sqrt{3x^3 \times 5x} = \sqrt{15x^4} = x^2\sqrt{15}$ b. $\sqrt[3]{4xy^2} \times \sqrt[3]{16x^4y^{12}}$ $\sqrt[3]{4xy^2}\sqrt[3]{16x^4y^{12}} = \sqrt[3]{4xy^2 16x^4y^{12}} = \sqrt[3]{64x^5y^{14}}$ $= \sqrt[3]{2^6x^5y^{14}} = 4xy^4\sqrt[3]{x^2y^2}$ c. $\sqrt{3a}\left(\sqrt{27a^2} - \sqrt{a}\right)$ $\sqrt{3a}\left(\sqrt{27a^2} - \sqrt{a}\right) = \sqrt{3a}\sqrt{27a^2} - \sqrt{3a}\sqrt{a}$ $= \sqrt{3a27a^2} - \sqrt{3aa} = 9a\sqrt{a} - a\sqrt{3}$
División de radicales: Para dividir radicales se utiliza la regla del cociente : $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	Resolver : a. $\sqrt{8} \div \sqrt{4}$ $\sqrt{8} \div \sqrt{4} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{4}} = \sqrt{\frac{8}{4}} = \sqrt{2}$ b. $2\sqrt[3]{45x^8y} \div \sqrt[3]{5x^5y^{-8}}$ $\frac{2\sqrt[3]{45x^8y}}{\sqrt[3]{5x^5y^{-8}}} = 2 \times \sqrt[3]{\frac{45x^8y}{5x^5y^{-8}}} = 2 \times \sqrt[3]{9x^3y^9} = 2xy^3\sqrt[3]{9}$

PRÁCTICA EN CONTEXTO

Ejercitación de procedimientos

1. Simplifica:

a. $\sqrt[4]{s^{16}}$

b. $\sqrt{8x^3y^4}$

c. $\sqrt{50}$

d. $\sqrt{\frac{36}{81}}$

e. $\sqrt[5]{5a^{12}b^5c^{26}}$

f. $\sqrt[3]{27m^9n^{11}}$

g. $\sqrt[6]{64a^{23}b^{50}c^{12}}$

h. $\sqrt[4]{\sqrt{6x^{10}}}$

i. $\frac{\sqrt{27z^8}}{\sqrt{3z^2}}$

j. $\sqrt[4]{\frac{16a^8b^{10}}{625a^{-4}}}$

k. $-\sqrt[3]{2\,401x^{18}y^{31}}$

l. $\sqrt{\sqrt{81x^6yz^{11}}}$

m. $\sqrt[7]{49m^{44}n^{14}}$

n. $\frac{\sqrt{338x^7y^{17}}}{\sqrt{2x^{-7}y^{10}z^{-6}}}$

2. Resuelve:

a. $4\sqrt{7} + 3\sqrt{7}$

b. $8\sqrt{2} - 10\sqrt{2} + 3$

c. $b\sqrt{500a} - \sqrt{320ab^2}$

d. $m\sqrt[3]{64m^5n^2} - m^2\sqrt[3]{m^2n^2} + 6\sqrt[3]{m^8n^2}$

e. $\sqrt{2}\left(\sqrt{18x^3y} + \sqrt{32xy^5}\right)$

f. $2\sqrt[3]{r^4s^5}\left(\sqrt[3]{8r^{12}s^4} + \sqrt[3]{16rs^9}\right)$

g. $\left(\sqrt{x} - \sqrt{6y}\right)\left(\sqrt{2y} + \sqrt{8x}\right)$

Solución de problemas

3. El periodo de un péndulo es el tiempo que se demora en realizar una oscilación completa. El periodo T está dado por la fórmula $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$, donde L es la longitud del péndulo (m) y g el valor de la gravedad $(g \approx 10 \text{ m/s}^2)$

a. ¿Cuál es el periodo en segundos de un péndulo cuya longitud es 0, 5 m?

b. La gravedad en la Luna es $\frac{1}{6}$ de la gravedad en la Tierra, ¿cuál es el periodo del mismo péndulo si se traslada a la Luna?

Tema 6

Racionalización

Logro: reducir expresiones algebraicas utilizando la racionalización.

COMPARTE LO QUE SABES

Simplificar la siguiente expresión $\frac{1}{4x^4} \times \sqrt{\frac{16x^{18}yz}{x^{10}}}$

Cuando se trabaja con radicales es usual que aparezcan expresiones fraccionarias que tienen radicales en el denominador. **Racionalizar** una fracción implica buscar una nueva expresión, equivalente a la primera, pero sin radicales en el denominador.

Para racionalizar una fracción se debe multiplicar el numerador y el denominador por un radical de forma que en el denominador se cumpla que $\sqrt[m]{a^m} = a$ y de esa forma "desaparezcan" los radicales:

Ejemplos

a. Racionalizar $\frac{3}{\sqrt{2}}$

Multiplicamos el numerador y el denominador por el radical $\sqrt{2}$, de manera que el denominador se convierta en una raíz exacta: $\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

b. Racionalizar $\frac{7}{\sqrt{5x}}$

En este caso multiplicamos el numerador y el denominador por el radical $\sqrt{5x}$, de manera que el denominador se convierta en una raíz exacta: $\frac{7}{\sqrt{5x}} = \frac{7}{\sqrt{5x}} \times \frac{\sqrt{5x}}{\sqrt{5x}} = \frac{7\sqrt{5x}}{\left(\sqrt{5x}\right)^2} = \frac{7\sqrt{5x}}{5x}$

c. Racionalizar $\frac{3x\sqrt[3]{6x}}{2\sqrt[3]{y}}$

Multiplicamos el numerador y el denominador por el radical $\sqrt[3]{y^2}$:

$$\frac{3x\sqrt[3]{6x}}{2\sqrt[3]{y}} = \frac{3x\sqrt[3]{6x}}{2\sqrt[3]{y}} \times \frac{\sqrt[3]{y^2}}{\sqrt[3]{y^2}} = \frac{3x\sqrt[3]{6xy^2}}{2\left(\sqrt[3]{y}\right)^3} = \frac{3x\sqrt[3]{6xy^2}}{2y}$$

d. Racionalizar $\sqrt[5]{\frac{32a^9b^5}{6c}}$

Aplicamos la regla del cociente: $\sqrt[5]{\frac{32a^9b^5}{6c}} = \frac{\sqrt[5]{32a^9b^5}}{\sqrt[5]{6c}}$ y descomponemos el numerador:

$$\frac{\sqrt[5]{32a^9b^5}}{\sqrt[5]{6c}} = \frac{\sqrt[5]{2^5a^5b^5} \times \sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[5]{6c}} = \frac{2ab\sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[5]{6c}}$$

Para racionalizar debemos tener en cuenta que el denominador sea una raíz exacta. Por tanto, cada factor de la raíz denominador debe convertirse en una potencia exacta de 5, para ello, se debe multiplicar por $\sqrt[5]{6^4c^4}$:

$$\frac{2ab\sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[5]{6c}} = \frac{2ab\sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[5]{6c}} \times \frac{\sqrt[5]{6^4c^4}}{\sqrt[5]{6^4c^4}} = \frac{2ab\sqrt[5]{6^4a^4c^4}}{\sqrt[5]{6^5c^5}} = \frac{2ab\sqrt[5]{6^4a^4c^4}}{6c}$$

Cuando el denominador de una expresión racional es un binomio, para racionalizar el denominador se multiplica el numerador y el denominador por el *conjugado* del denominador.

El *conjugado* de un binomio es otro binomio que tiene los mismos términos, pero con el signo del segundo término cambiado.

Ejemplos

a. El conjugado de $3 + \sqrt{5}$ es $3 - \sqrt{5}$

b. Como el conjugado de $\sqrt{x} - \sqrt{z}$ es $\sqrt{x} + \sqrt{z}$, un ejemplo para racionalizar un binomio es:

$$\frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{z}} = \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{z}} \times \frac{\sqrt{x} + \sqrt{z}}{\sqrt{x} + \sqrt{z}} = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{z}}{x + z}$$

c. Racionalizar el denominador de la expresión: $\frac{3}{5 - \sqrt{2}}$

$$\frac{3}{\left(5 - \sqrt{2}\right)} = \frac{3\left(5 + \sqrt{2}\right)}{\left(5 - \sqrt{2}\right)\left(5 + \sqrt{2}\right)} = \frac{3\left(5 + \sqrt{2}\right)}{\left(5 - \sqrt{2}\right)\left(5 + \sqrt{2}\right)} = \frac{15 + 3\sqrt{2}}{25 - 2} = \frac{15 + 3\sqrt{2}}{23}$$

d. Racionalizar el denominador de: $\frac{\sqrt{2x} + \sqrt{3y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$

$$\frac{\sqrt{2x} + \sqrt{3y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{\sqrt{2x} + \sqrt{3y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \times \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \frac{\sqrt{2x^2} - \sqrt{2xy} + \sqrt{3xy} - \sqrt{3y^2}}{x - y} = \frac{x\sqrt{2} - \sqrt{2xy} + \sqrt{3xy} - y\sqrt{3}}{x - y}$$

PRÁCTICA EN CONTEXTO

Ejercitación de procedimientos

1. Simplifica y racionaliza:

a. $\frac{m}{\sqrt{3}}$

b. $\frac{x}{\sqrt[4]{2}}$

c. $\frac{10}{7\sqrt{2}}$

d. $\frac{4}{\sqrt{a + b}}$

e. $\frac{2\sqrt{5} - \sqrt{7}}{5\sqrt{2}}$

f. $\frac{3\sqrt{6}}{4\sqrt{3} + 2\sqrt{5}}$

g. $\frac{x}{\sqrt{x} + y}$

h. $\frac{3 - \sqrt{2}}{5 - \sqrt{2}}$

i. $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$

j. $\sqrt[3]{\frac{m}{2n^2}}$

k. $\dfrac{\frac{1}{1 - \sqrt{2x}}}{\frac{3x - 2}{\sqrt{x} - 4x}}$

l. $\frac{5 - \sqrt{2}}{4 + \sqrt{3}}$

2. Racionaliza el denominador de cada término y escribe la expresión como una sola fracción:

a. $\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{3}{\sqrt{2}}$

b. $\frac{3 + \sqrt{2}}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{3}} - 2$

c. $\frac{4}{\sqrt{7}} + \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{3}}$

d. $\frac{2}{\sqrt{20}} + \frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{5} + 1}$

Solución de problemas

3. Escribe falso (F) o verdadero (V) según corresponda. Justifica tu respuesta.

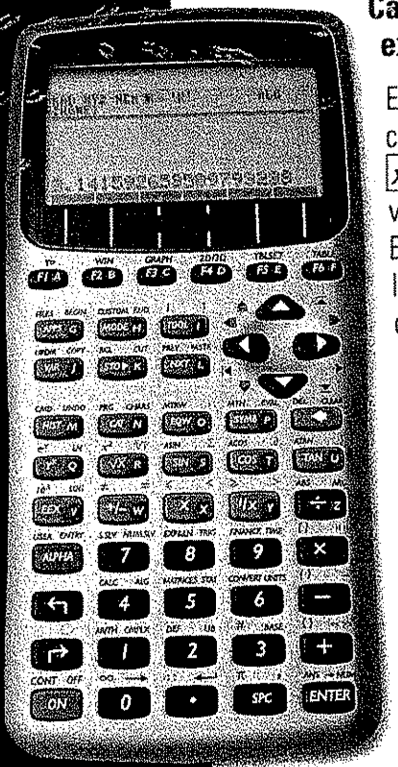
a. El conjugado de $1 - \sqrt{x}$ es $-1 + \sqrt{x}$ ☐

b. Para racionalizar el denominador de una expresión se debe multiplicar el numerador y el denominador de la fracción por un radical de forma que el radicando del numerador sea una raíz exacta. ☐

c. $5\sqrt{x} - \sqrt{y}$ es el conjugado de $5\sqrt{x} + \sqrt{y}$ ☐

TECNOLOGÍA

USO DE LA CALCULADORA CIENTÍFICA



Cálculo de expresiones exponenciales

En las calculadoras científicas encontramos una tecla $\boxed{x^2}$ que se utiliza para elevar un número al cuadrado. El siguiente ejemplo muestra la secuencia de teclas que se digitan para calcular 3^2.

Resultado

$3\boxed{x^2}\boxed{=}9$

Cuando se necesita calcular expresiones exponenciales con otros exponentes, se utilizan las teclas $\boxed{y^x}$ o $\boxed{\wedge}$.

Cuando se necesita usar estas teclas para el cálculo de expresiones, se digita primero la base, luego se presiona la tecla $\boxed{y^x}$ o $\boxed{\wedge}$ y por último, se introduce el exponente.

Ejemplo: calcular 6^4.

Resultado

$6\boxed{y^x}4 = 1\,296$

Utiliza una calculadora científica para hallar:

a. 9^5 c. $\left(\frac{2}{3}\right)^4$ e. $(-4)^{11}$ g. $\left(\frac{-3}{5}\right)^{10}$

b. 8^{-3} d. $\left(\frac{5}{3}\right)^{-2}$ f. $(2,964)^6$ h. 5^{-5}

Cálculo de raíces o expresiones con exponentes racionales

Para determinar las raíces cuadradas se utiliza la tecla $\boxed{\sqrt{x}}$. Por lo tanto, para calcular $\sqrt{36}$, se debe digitar así:

Resultado

$3\boxed{\sqrt{x}}\boxed{=}6$

Las raíces de orden superior pueden calcularse con la tecla $\boxed{\sqrt[x]{y}}$ o la tecla $\boxed{y^x}$. Así, para calcular $\sqrt[5]{243}$ con la tecla $\boxed{\sqrt[x]{y}}$ se debe digitar:

$243\boxed{\sqrt[x]{y}}5 = 3$

Este mismo cálculo se puede hacer con la tecla $\boxed{y^x}$ y con la tecla "inverso".

Para resolver la misma raíz del ejemplo anterior, se debe digitar:

$243\boxed{INV}\boxed{y^x}5 = 3$

Para evaluar una expresión como $\left(\sqrt[5]{754}\right)^2$ en una calculadora, se debe tener en cuenta que esta expresión es equivalente a $754^{\frac{2}{5}}$.

Utilizando las teclas anteriormente vistas y los paréntesis, se aplica el siguiente procedimiento:

$754\boxed{y^x}(2 \div 5)\boxed{=}14,1563$

Nota: según la calculadora las teclas pueden variar, en lugar de la tecla $\boxed{y^x}$ aparece $\boxed{x^y}$ ó $\boxed{a^b}$ y en lugar de la tecla $\boxed{INV}$, aparece $\boxed{2^{nd}}$ o $\boxed{shift}$.

resumen & refuerzo

2

- Números Reales $\mathbb{R}$
  - Números racionales $\mathbb{Q}$
    - Número racionales No enteros
    - Enteros $\mathbb{Z}$
      - Enteros positivos (Naturales) $\mathbb{N}$
      - Cero (0)
      - Enteros negativos
  - Números irracionales $\mathbb{I}$

1. Un cuadrado mágico es un arreglo de números colocado en un cuadro, de tal manera que la suma de filas, columnas y diagonales sea la misma.

Completa este cuadrado mágico con los 16 primeros números naturales, sin repetirlos de tal forma que las columnas, filas y diagonales sumen lo mismo.

1			
	6		
		11	
			16

2. En el siguiente problema se busca conseguir la serie de números naturales con expresiones en las que aparezca cuatro veces el número 4, utilizando símbolos matemáticos simples.

Para los primeros 10 números, únicamente necesitarás los signos de las operaciones fundamentales: suma, resta, multiplicación y división.

Veamos cómo se construyen hasta el número 5.

$\boxed{1 = \frac{44}{44}}$ $\boxed{2 = \frac{4}{4} + \frac{4}{4}}$ $\boxed{3 = \frac{4+4+4}{4}}$

$\boxed{4 = 4 + \frac{4-4}{4}}$ $\boxed{5 = \frac{(4 \times 4) + 4}{4}}$

Termina el ejercicio hasta el número 12.

Pruebas de

Prueba Saber

La Dirección Nacional de Planificación y Financiamiento es la encargada de revisar las cuentas nacionales de gastos en salud. En 1997 las instituciones nacionales de atención hospitalaria tuvieron un presupuesto de 4 093 millones de pesos. Esta cantidad incluye un incremento de 23, 7% respecto del presupuesto de 1995, pero una disminución de 2,6% respecto del presupuesto de 1996.

1. El presupuesto para la atención hospitalaria para el año 1995 fue aproximadamente de:

a. $ 3 309 millones. c. $ 2 876 millones.

b. $ 3 123 millones. d. $ 3 500 millones.

2. El presupuesto para la atención hospitalaria para el año 1996 fue aproximadamente de:

a. $ 4 203 millones. c. $ 4 000 millones.

b. $ 3 800 millones. d. $ 4 199 millones.

3. El aumento del presupuesto de 1995 a 1996 fue de aproximadamente:

a. $ 3 200 millones. c. $ 4 000 millones.

b. $ 894 millones. d. $ 2 500 millones.

4. El aumento del presupuesto de 1995 a 1996 fue de aproximadamente un:

a. 34, 4% c. 38, 5%

b. 40, 6% d. 27, 01%

Prueba PISA

5. En una carrera de velocidad se llama tiempo de reacción al intervalo temporal entre el momento en el que se da el pistoletazo de salida y el momento en que el atleta sale de los tacos. El tiempo final incluye tanto el tiempo de reacción como el tiempo empleado para completar la carrera. En la siguiente tabla figura el tiempo de reacción y el tiempo final de 8 corredores que tomaron parte en una carrera de 100 metros planos.

Calle	Tiempo de reacción (s)	Tiempo final (s)
1	0, 147	10, 09
2	0, 136	9, 99
3	0, 197	9, 87
4	0, 180	No acabó
5	0, 210	10, 17
6	0, 216	10, 04
7	0, 174	10, 08
8	0, 193	10, 13

A. Identifica quiénes fueron los medallistas de oro, plata y bronce en la carrera y completa la siguiente tabla:

Medalla	Calle	Tiempo de reacción	Tiempo final
ORO			
PLATA			
BRONCE			

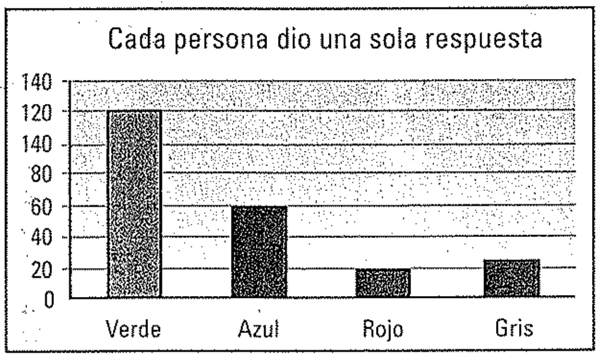
B. Si se organiza a los competidores por el tiempo de reacción, poniendo al más rápido en primer lugar, el orden sería:

a. 2, 1, 7, 8, 4, 3, 5, 6 c. 2, 1, 7, 4, 8, 3, 5, 6

b. 2, 1, 7, 4, 3, 8, 5, 6 d. 2, 1, 4, 7, 8, 3, 5, 6

mejoramiento

6. Se realizó una encuesta a un grupo de personas a las que se les preguntó: ¿qué color prefiere para un carro? La información recogida se muestra aquí:



A. ¿Qué porcentaje de personas prefiere el color verde?

a. 65 % b. 53 % c. 58% d. 60%

B. Si la encuesta se hiciera a 980 personas y se mantuvieran los porcentajes, ¿cuántas personas preferirían el azul?

a. 250 b. 294 c. 264 d. 296

Prueba TIMSS

7. Un ascensor sube desde el piso primero al quinto y luego baja al segundo. Desde ahí, el ascensor sube al cuarto piso y por último, se desplaza al tercer piso. Si los pisos están separados por 3 m, ¿qué distancia habrá recorrido el ascensor?

a. 30 m b. 27 m c. 36 m d. 45 m

8. Para racionalizar la expresión $\sqrt[3]{\frac{64x^9}{1-x}}$ se debe multiplicar por

a. $\sqrt[3]{1^2 - x^2}$ c. $\sqrt{(1-x)^3}$

b. $\sqrt[3]{(-x+1)^2}$ d. $\sqrt[3]{1+2x+x^2}$

9. Determina si las afirmaciones son falsas (F) o verdaderas (V). Justifica tu respuesta con ejemplos.

a. Los números irracionales cumplen la propiedad clausurativa para la suma.

b. Los irracionales son un conjunto finito.

c. El producto en los irracionales no es clausurativo.

d. $\sqrt{6}$ es irracional, porque $\sqrt{2}$ lo es.

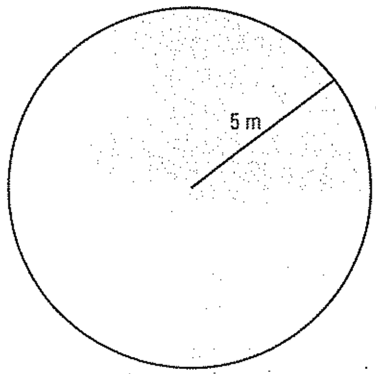
e. Entre dos números racionales, hay un conjunto finito de números irracionales.

f. Los reales cumplen con todas las propiedades de la suma y el producto.

10. Un aro recorre un camino de forma circular. Si el radio de la circunferencia es de 5 m, ¿cuál es la longitud recorrida por la bola si da cuatro vueltas?

a. 3, 1111 c. 125, 66

b. 31, 111 d. 31, 416



11. Luisa, Pedro y Álex quieren determinar cuál es el más alto. Para esto Luisa mide su estatura con palitos de 12 cm de largo y afirma que mide 10 palitos, por su parte Álex se mide con un color de $\frac{1}{11}$ m y afirma que mide 21 colores y Pedro se mide con un metro y asegura que mide 1, 22 m. ¿Cuál de los tres mide más?

a. Luisa. b. Pedro. c. Álex.

Funciones

Unidad 3

100-170
Ptolomeo trabaja con funciones trigonométricas, aunque aún no existe una definición formal de éstas.

1596-1650
René Descartes. Trabajos en geometría analítica donde se aprecian más claramente los conceptos de "variable" y "función".

1667-1748
Johann Bernoulli, estudia algunos problemas de cálculo en variaciones.

1789-1857
Augustin Cauchy dio una definición que hace de la dependencia entre variables el centro del concepto de función.

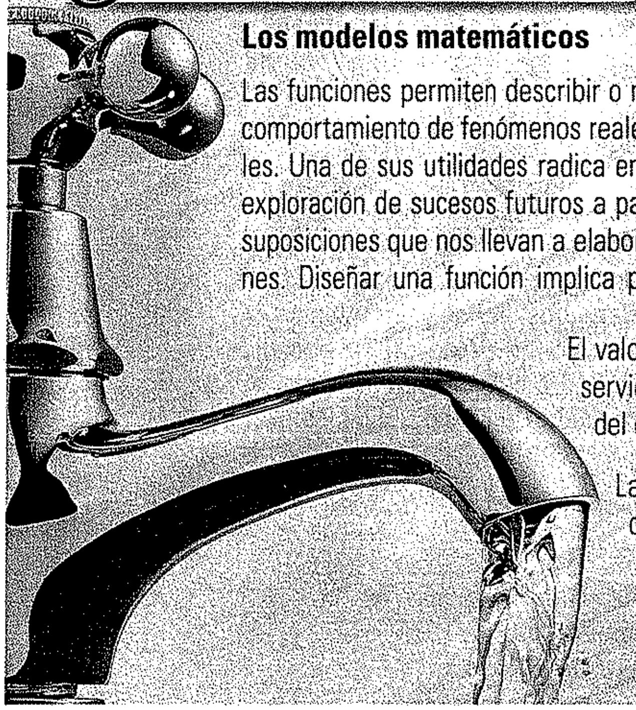
1805-1859. Alemania
Dirichlet define las funciones continuas.

Marco Histórico

En 1637 el matemático francés René Descartes utilizó el término función por primera vez para nombrar una potencia x^n de la variable x, algunos años después, Leibniz asignó el concepto de función a los aspectos relacionados a una curva, como su pendiente. No introdujo la notación funcional, sin embargo, el nombre y el concepto son de características similares al que se utiliza en la actualidad.

En la primera mitad del siglo XIX, Dirichlet definió variable, como un símbolo que representa un número en un conjunto y estableció, además, la relación entre variable independiente (x) y variable dependiente (y).

Aplicaciones Reales

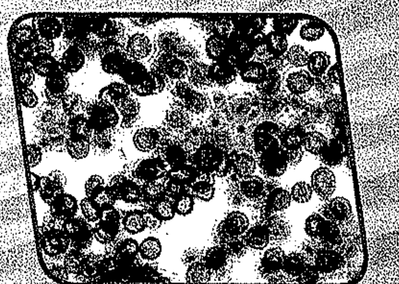


Los modelos matemáticos

Las funciones permiten describir o modelar el comportamiento de fenómenos reales o virtuales. Una de sus utilidades radica en facilitar la exploración de sucesos futuros a partir de unas suposiciones que nos llevan a elaborar predicciones. Diseñar una función implica partir de unas condiciones previas que deben explicitarse en términos de relaciones matemáticas y es exacta en la medida en que se cumplan las condiciones iniciales, y se cumplan las predicciones.

¿Qué tanto puede una función describir nuestra realidad? Muchas situaciones de la cotidianidad dependen de variables tales como:

El valor del consumo mensual de los servicios de agua y gas dependen del consumo.



La cantidad de personas afectadas por una epidemia, depende del tiempo de propagación del virus.

Un aporte significativo a la construcción del concepto de función lo dio Bernoulli al descubrir la ley de la continuidad (referida a un fluido) que implica que cada pareja de moléculas relacionadas estaban antecedidas y precedidas por parejas similares. Con el tiempo, la ley de continuidad utilizada a los fluidos, se aplicó en los conjuntos numéricos dando fuerza y sentido al concepto de función continua, pilar sobre el cual se sustenta todo el principio de las funciones.

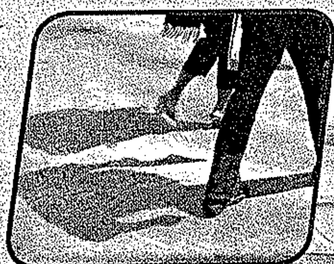
A partir de Fermat (1601-1695) el "análisis matemático" se fundamentó en el concepto de "función", que ya Descartes vagamente había introducido en sus estudios de "geometría analítica".

Científicos como Fermat, Newton y Leibniz hicieron suyo este concepto adoptándolo como una expresión analítica formada con cantidades variables y valores constantes.

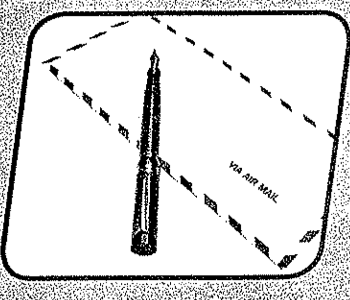
Para que consultes

¿Qué relación existe entre una función y una relación matemática?

La sombra proyectada por cualquier objeto depende de la hora del día.



Los costos por envío de encomiendas dependen de su peso.



Un taxista cobra de acuerdo con la cantidad de kilómetros recorridos.

Función: notación y representación

Logro: reconocer las funciones como modelos de representación.

COMPARTE LO QUE SABES

Elabora una lista con las expresiones que reconoces como funciones, determina un criterio para clasificarlas.

Producto cartesiano

Sean A y B conjuntos no vacíos, definimos $A \times B$ como el conjunto de parejas ordenadas, donde el primer elemento pertenece a A y el segundo pertenece a B. Es decir,

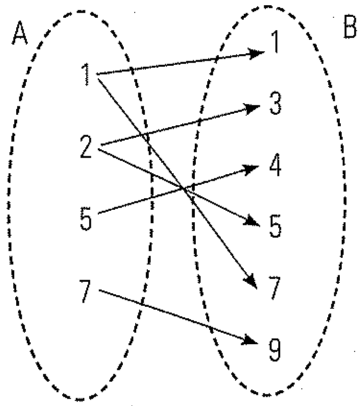
$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ y } b \in B\}$$

Relaciones

Sean A y B conjuntos no vacíos, si R es un subconjunto del producto cartesiano de A y B, es decir, si $R \subseteq A \times B$, entonces R es una relación de A en B.

Ejemplo

Para los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 9\}$ y $B = \{x \in \mathbb{Z}^{+} \mid 0 \leq x \leq 9\}$ se puede definir una relación $f = \{(1,1), (1,7), (2,3), (2,5), (5,4), (7,9)\}$ donde claramente $f \subseteq A \times B$.



El **dominio** de una relación es un conjunto conformado por las primeras componentes de las parejas ordenadas en la relación. En este caso $D_{A\times B} = \{1, 2, 5, 7\}$; y el **rango** está conformado por las segundas componentes, en este caso $R_{A\times B} = \{1, 3, 4, 5, 7, 9\}$

Función

La relación f, de A en B, es una función si y solamente si, dados (a,b) y (a,c) en f, necesariamente $b = c$.

Es decir, para que una relación sea función se debe cumplir que la relación no posee dos parejas que tengan igual la primera componente.

Una **función** es una regla de asociación que relaciona un conjunto llamado **dominio**, con otro conjunto llamado *codominio* y que no permite relacionar un mismo elemento del dominio con dos elementos distintos del codominio.

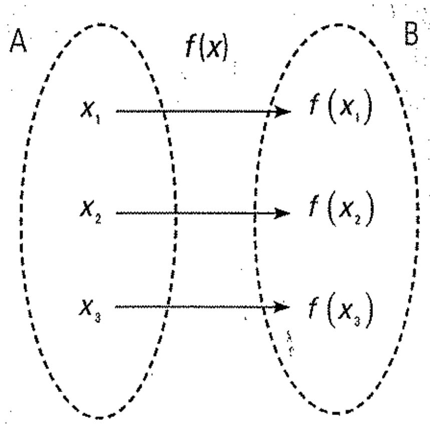
Las funciones se denotan como $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$, etc. y se leen "f de x", "g de x" y h de x", respectivamente. Donde x corresponde a la variable independiente y $f(x)$ a la variable dependiente. Por ejemplo $f(x) = 3x - 1$ hace referencia a la función f, que asigna a cada x con "el triple de x menos 1".

Otra forma de notar las funciones se obtiene remplazando $f(x)$ por y; es decir, $f(x) = y = 3x - 1$

Formas de representar las funciones

1. Diagrama sagital

Una función se puede expresar por medio de un diagrama sagital, que consiste en hacer un diagrama de los dos conjuntos que están comprometidos en la relación; de tal forma, que cada elemento del dominio A se relaciona por medio de una flecha con sólo un elemento de B.

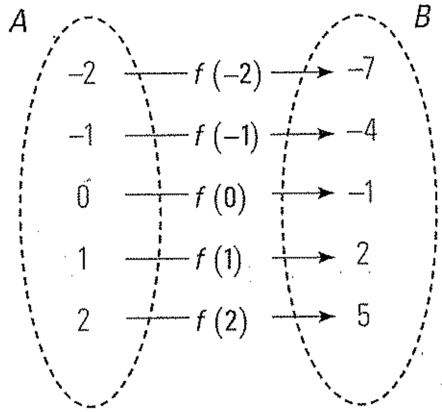


Ejemplo

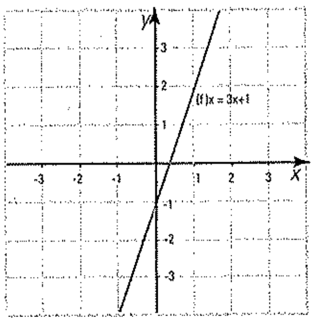
Representar a través de un diagrama sagital la función: $f(x) = 3x - 1$

Si el dominio de la función se restringe a los elementos:

$\{-2, -1, 0, 1, 2\}$, se tiene la representación sagital de la derecha.



2. Plano cartesiano



En el eje horizontal *x*, se representa la variable independiente, la cual corresponde al conjunto del dominio y es llamada primera componente.

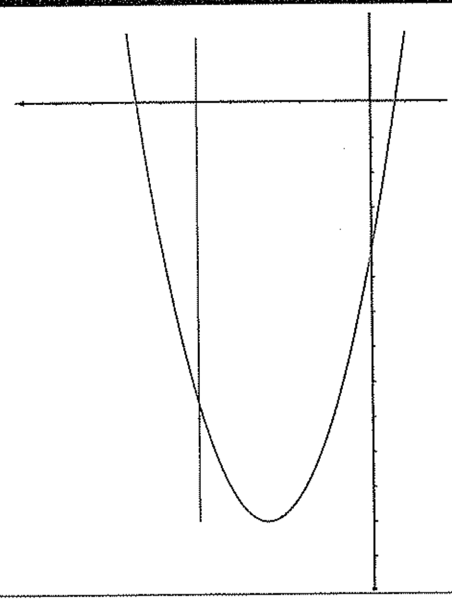
En el eje vertical *y*, se representa la variable dependiente que corresponde al rango de la función, denominada segunda componente.

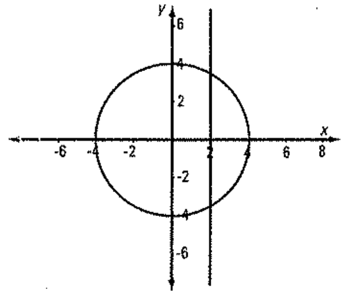
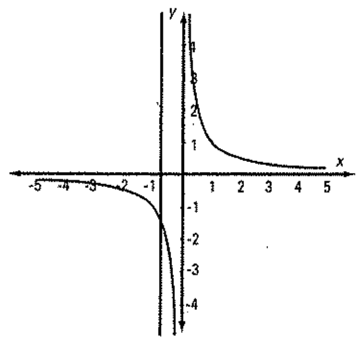
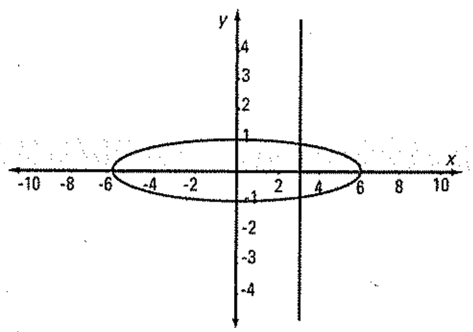
Prueba de la recta vertical

Para determinar si una gráfica en el plano cartesiano corresponde a una función se debe trazar una recta paralela al eje *y* que interseque la curva. Si se observa que dicha recta interseca en más de un punto (en cualquier parte de la curva) a la curva, se trata de una relación, pero no de una función. Si por el contrario, la intersección es un punto único, la curva corresponde a una función. Esta prueba se aplica sobre cualquier elemento del dominio.

Ejemplo

Utiliza la prueba de la recta vertical para determinar si las expresiones son o no funciones.

Ecuación	Gráfica	¿Es función?
$y = x^2 + 6x - 3$		Sí

$x^2 + y^2 = 16$		No
$y = \dfrac{1}{x}$		Sí
$x^2 + 36y^2 = 36$		No

Notación funcional

Suponiendo que el dominio y el codominio de la función son subconjuntos de $\mathbb{R}$ que denominamos X y Y, respectivamente, se tienen las siguientes notaciones para las funciones:

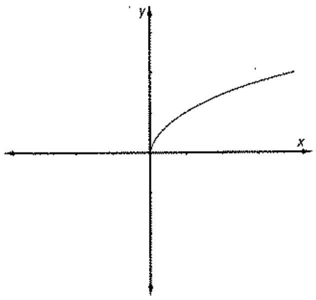
$f : X \rightarrow Y$	Se lee "f es la función de X a Y".
$x \overset{f}{\mapsto} f(x)$	Se lee "por la función f, x se envía a $f(x)$
$\{(x, y) \mid y = f(x)\}$	Se lee "f es la función cuyos pares ordenados son (x, y), donde la regla es $y = f(x)$"

PRÁCTICA EN CONTEXTO

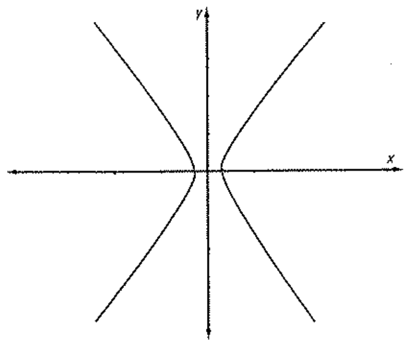
Razonamiento

1. Aplicando la regla de la recta vertical, indica cuál de las siguientes gráficas representan funciones:

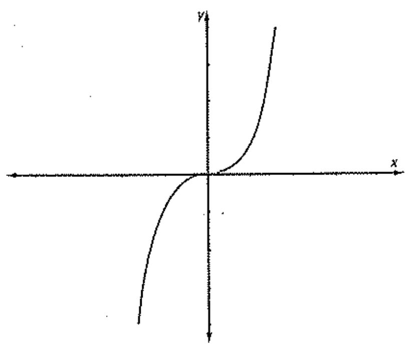
a.



b.



c.



2. Determina si la relación representada corresponde a una función:

a. Número de hijos:

Carolina → 1
Luisa → 2
Martha → 2

b. La mitad de un número:

10 → 5
12 → 6
14 → 7

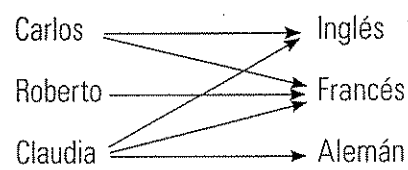
c. El cubo de un número:

3 → 27
5 → 125
7 → 343
9 → 729

d. Masa atómica:

Sodio → 23
Cloro → 35,45
Litio → 6,93

e. Dominio de idiomas.



3. Determina cuáles de las relaciones son también funciones; indica cuál es el dominio y cuál el rango de cada función.

a. $\{(1,3),(2,5),(3,7),(4,9),(5,11)\}$

b. $\{(1,4),(2,7),(3,5),(2,3),(5,8),(6,3)\}$

c. $\{(0,-3),(2,-1),(3,0),(4,1),(9,6)\}$

d. $\{(7,4),(3,2),(5,6),(3,4),(7,2)\}$

e. $\{(-2,4),(-1,1),(0,0),(1,1)\}$

Ejercitación de procedimientos

4. Evalúa cada función en los valores que se indican:

a. $f(x) = x^2 + 5x - 2$; $f(2)$, $f(-1)$, $f\left(\frac{2}{3}\right)$ y $f\left(\sqrt{3}\right)$

b. $g(x) = \sqrt{x^3 - 2x^2 + 5}$; $g(0)$, $g(4)$, $g\left(\frac{1}{3}\right)$ y $g(-1)$

c. $r(t) = |t^2 + 7t - 10|$; $r(2{,}5)$, $r(-2)$, $r(a)$

Función lineal

Logro: modelar situaciones de variación lineal.

COMPARTE LO QUE SABES

Elabora una lista de las propiedades que recuerdes de la recta.

Una función es *lineal* si su representación gráfica en el plano genera una línea recta. La línea recta se define como el lugar geométrico de un punto que se mueve en el plano de forma que al localizarlo en dos posiciones cualesquiera, la pendiente m obtenida es la misma.

Para caracterizar la función lineal partiremos de la siguiente situación:

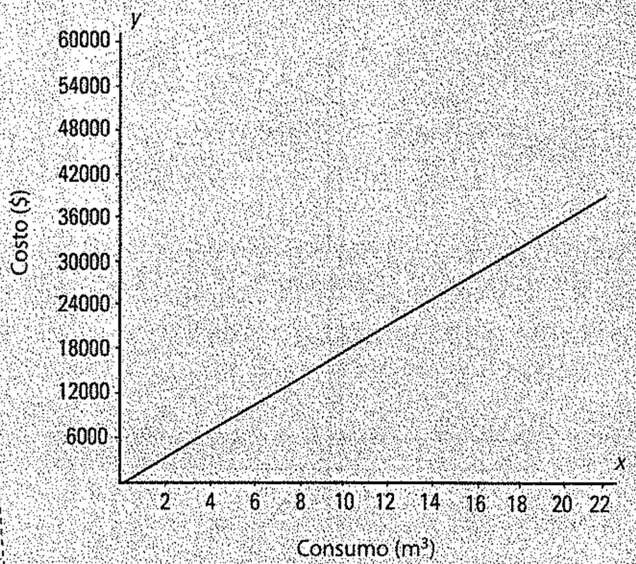
El consumo mensual de agua en una familia promedio está entre **12 m³** y **22 m³**. La siguiente tabla muestra la relación consumo – costo, del servicio de agua, durante los primeros seis meses del año.

Meses	Consumo (m³)	Costo($)
Enero	12	$ 21 600
Febrero	14	$ 25 200
Marzo	16	$ 28 800
Abril	18	$ 32 400
Mayo	20	$ 36 000
Junio	22	$ 39 600

¿Es posible formular a través de una expresión matemática la relación consumo-costo? ¿Existe una cantidad constante en esa relación? ¿Cómo representar claramente esa relación?

Para determinar la relación entre los metros cúbicos consumidos mensualmente y los costos establecidos, se puede observar que existe un coeficiente numérico que relaciona el consumo con el costo y es 1 800, que corresponde al valor del metro cúbico de agua, el cual se obtiene al dividir el costo entre el número de metros cúbicos de agua consumidos.

Al representar los datos de la tabla en el plano cartesiano obtenemos la siguiente gráfica:



En la gráfica podemos observar que a cada valor de x le corresponde uno en y, por lo tanto esta relación es una función.

La relación entre el número de metros consumidos y el costo mensual es **directamente proporcional**.

En enero se consumieron 12 metros cúbicos que multiplicados por $ 1 800 representa un costo de $ 21 600; en febrero se consumieron 14 metros cúbicos que multiplicados por $ 1800 representan un costo de $ 24 200 y así, sucesivamente para cada uno de los meses.

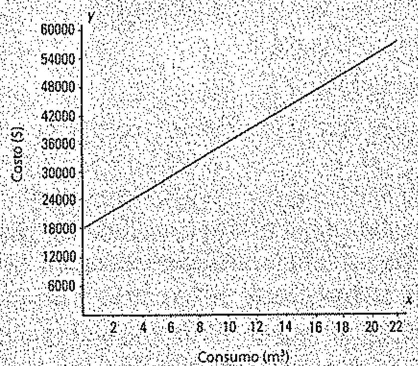
De acuerdo con lo anterior, podemos concluir que el valor constante es 1800. A este valor se le conoce como la **pendiente de la recta**.

Enestecasolafuncióndecostoes $f(x) = 1\,800x$, donde x es la cantidad de metros cúbicos de agua consumidos mensualmente.

Consideremos ahora que a la tabla se le añade un cobro constante adicional de $ 18 000, que corresponde al cobro de aseo. Observemos qué diferencias pueden generarse en la tabla, en la gráfica y en la función.

Meses	x = Consumo	Costo 1 800x	Costo total = 1 800x + 18 000
Enero	12	$ 21 600	$ 39 600
Febrero	14	$ 25 200	$ 43 200
Marzo	16	$ 28 800	$ 46 800
Abril	18	$ 32 400	$ 50 400
Mayo	20	$ 36 000	$ 54 000
Junio	22	$ 39 600	$ 57 600

Esta nueva situación genera la siguiente gráfica:



Si comparamos las dos gráficas encontramos diferencias y similitudes.

- La primera gráfica parte del origen del plano (0,0), mientras la segunda gráfica parte del punto (0, 18 000), que coincide con el valor que se ha agregado por servicio de aseo.
- Las dos gráficas representan rectas crecientes y los costos están relacionados con un valor constante, en este caso $ 1 800 por metro cúbico.

La función de la segunda gráfica es $f(x) = 1\,800x + 18\,000$.

En forma general, una función lineal se nota como: $f(x) = mx + b$

Donde m es la pendiente de la recta y b corresponde al punto de corte de la recta con el eje y.

En el ejemplo ambas funciones tienen pendiente 1 800, pero en la primera gráfica el punto de corte es $b = 0$ y en la segunda función, $b = 18\,000$.

Práctica en contexto

Procedimientos

1. Realiza la gráfica de cada una de estas funciones y determina cuáles de ellas generan una recta.

a. $y = x^2 + 3x$ c. $y = x^2 - 8y + 3$

b. $3x + 4y = 0$ d. $-4x + 3y = 112$

Solución de problemas

2. Por medio de la fórmula física de la distancia:

$d = v \times t$ (distancia es igual a velocidad por tiempo).

a. traza una gráfica de distancia contra tiempo, para una velocidad constante de 60 km/h.

b. determina cuál es la pendiente de la función y el punto de corte con el eje y.

3. La utilidad de un fabricante de bicicletas (en pesos), puede calcularse mediante la función:

$$f(x) = 100\,000x - 75\,000$$

Donde x representa el número de bicicletas vendidas.

a. Traza la gráfica de utilidad contra el número de bicicletas vendidas en un intervalo entre 1 y 3 500.

b. Calcula el número de bicicletas que deben venderse para que la compañía alcance una utilidad de $ 1 000 000.

4. El salario semanal de una vendedora es de $ 120 000 más 15% de comisiones sobre sus ventas semanales.

a. Escribe una función que exprese el salario semanal (s) en términos de x ventas semanales.

b. ¿Cuál es el salario semanal si las ventas alcanzan los $ 5 000 000?

c. Si le rebajan a todos los vendedores el porcentaje de comisiones de 15% a 9%, ¿cómo cambia la función y la gráfica que expresa el salario semanal de un vendedor?

5. Encuentra dos funciones lineales que se intersecten en el punto (0, 2).

6. Hace cinco años Carlos Fernández compró una casa por $ 45 000 000. Este año fue avaluada en $ 50 000 000. Suponiendo que el valor de la casa depende linealmente del tiempo,

a. escribe una función que exprese el valor de la casa, en cualquier momento después de la fecha de compra.

b. ¿cuál será el valor de la casa después de 15 años?

c. ¿Al cabo de cuantos años la casa estará avaluada en 200 000 000?

7. La siguiente tabla ilustra la variación en el costo del pasaje en Transmilenio entre los años 2 001 a 2 007

AÑO	COSTO
2001	$ 800
2002	$ 900
2003	$ 1 000
2004	$ 1 100
2005	$ 1 200
2006	$ 1 300
2007	$ 1 400

a. Marca en el plano cartesiano los puntos con coordenadas (año, pesos) y únelos. ¿Qué gráfica obtuviste?

b. ¿Puedes definir la gráfica resultante como una gráfica lineal? Explica.

c. Con base en la gráfica obtenida, calcula el costo del pasaje en los años 2 010, 2 015, 2 020.

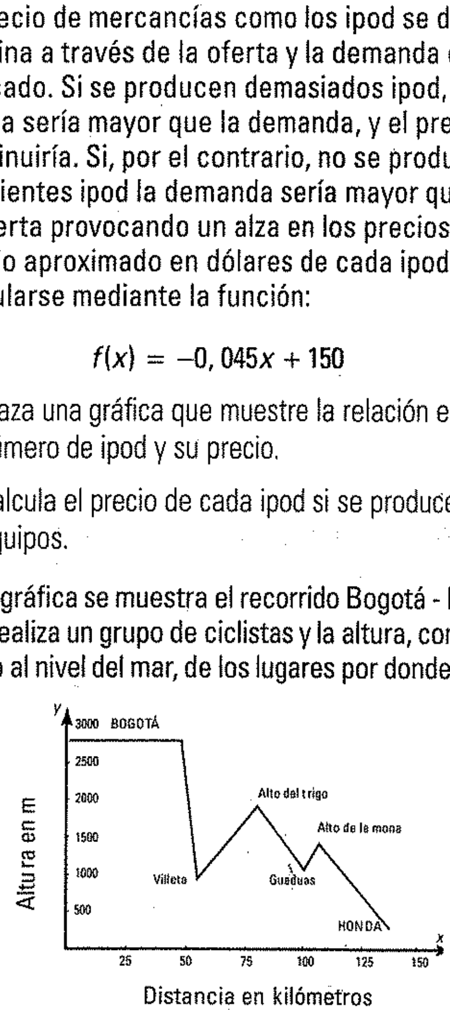
8. El precio de mercancías como los ipod se determina a través de la oferta y la demanda del mercado. Si se producen demasiados ipod, la oferta sería mayor que la demanda, y el precio disminuiría. Si, por el contrario, no se producen suficientes ipod la demanda sería mayor que la oferta provocando un alza en los precios. El precio aproximado en dólares de cada ipod puede calcularse mediante la función:

$$f(x) = -0,045x + 150$$

a. Traza una gráfica que muestre la relación entre el número de ipod y su precio.

b. Calcula el precio de cada ipod si se producen 10 equipos.

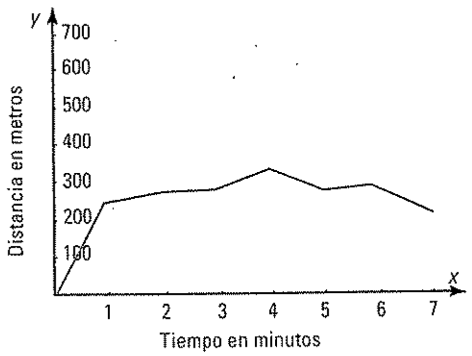
9. En la gráfica se muestra el recorrido Bogotá - Honda que realiza un grupo de ciclistas y la altura, con respecto al nivel del mar, de los lugares por donde pasan.



a. ¿Cuál es el significado de las puntas en la gráfica?

b. Determina cuál es la variable dependiente y cuál la independiente. Justifica tu respuesta.

10. La siguiente gráfica muestra el ritmo de carrera de una persona que está corriendo alrededor de una pista atlética.



a. Elabora un cómic que narre un evento relacionado con la gráfica.

b. ¿Cuál es la variable dependiente y cuál la independiente? Justifica tu respuesta.

11. Grafica e indica, cuáles de las siguientes rectas cortan al eje de las ordenadas en el mismo punto que $y = 3x + 2$

a. $y = 3x - \frac{1}{3}$

b. $y = 3(x + 2)$

c. $y = 4x + 2$

d. $y = 8\left(x + \frac{1}{4}\right)$

e. $y = 7x + 2$

f. $y = 3x + 4$

12. Averigua si cada conjunto de puntos son colineales:

a. (0, 2), (1, –1) y (–1, 5)

b. (–2, –13), (0, –10) y (6, 2)

c. (–8, 2), (12, 6) y (14, 5, 6, 5)

d. (–5, –6), (0, 9) y (2, 15)

13. Un vendedor de computadores sabe que existe una relación funcional entre las ventas que realiza por cada computador y el sueldo que recibe. Dicha función es:

$$f(x) = 200\,000x + 300\,000$$

Donde $f(x)$ es el sueldo que recibe y x es la cantidad de computadores que vende.

a. Elabora la gráfica de la función.

b. Determina la pendiente y el punto de corte con el eje y.

c. ¿Qué elemento de la función muestra que entre más computadores venda, más serán los ingresos del vendedor?

Tema 3

Pendiente de una recta

Logro: interpretar la pendiente como razón de cambio aplicándola en la solución de situaciones en contexto.

Comparte lo que sabes

Enuncia un problema entre dos variables directamente proporcionales que tenga por gráfica la recta cuya función es $y = 5x$.

La **pendiente** de una recta se define como la razón de cambio vertical respecto al cambio horizontal entre cualquier par de puntos de la recta.

Consideremos la gráfica de la función $y = 2x + 1$ y dos de los puntos contenidos en ella, $P_1 = (1, 3)$ y $P_2 = (3, 7)$. Para pasar del punto P_1 al punto P_2, se deben hacer dos cambios uno vertical y uno horizontal. El cambio vertical es: $7 - 3 = 4$ y el cambio horizontal es: $3 - 1 = 2$, por tanto la razón de cambio se puede expresar como:

$$\text{pendiente} = \frac{\text{cambio vertical}}{\text{cambio horizontal}} = \frac{4}{2} = 2$$

Aunque es de anotar que el valor de la pendiente de una recta no depende del par de puntos que se consideren para determinarla.

El procedimiento para determinar la pendiente de una recta que pasa por los puntos $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$ es:

1. Calcular el cambio vertical es decir, hallar: $y_2 - y_1$
2. Calcular el cambio horizontal es decir, hallar $x_2 - x_1$
3. Hallar la razón entre el cambio vertical y el cambio horizontal, es decir: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

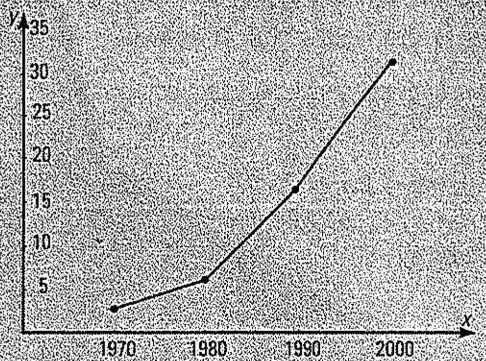
Esta razón se denomina **pendiente de la recta** y se nota con la letra m.

Ejemplo

Un estudiante de economía analiza el comportamiento de la deuda externa colombiana (saldo aproximado) entre los años 1970 y 2001. Él construyó una tabla de datos y a partir de ella realizó la gráfica correspondiente.

Año	(Miles de millones de dólares)
1970	3, 0
1980	7, 1
1990	17, 9
2000	33, 2
2001	33, 1

Fuente: Banco de la Republica



a. ¿Entre qué años el aumento de la deuda fue mayor? ¿Entre qué años el aumento de la deuda fue menor?

b. ¿Qué significado tienen esos valores?

Solución

a. Para determinar cuándo el aumento fue mayor o menor, calcumos el valor de la pendiente para cada segmento de recta en la gráfica.

Pendiente de la recta de 1970 a 1980

$$m = \frac{7,1 - 3,0}{1980 - 1970} = \frac{4,1}{10} = 0,41$$

Pendiente de la recta de 1980 a 1990

$$m = \frac{17,9 - 7,1}{1990 - 1980} = \frac{10,8}{10} = 1,08$$

Pendiente de la recta de 1990 a 2000

$$m = \frac{33,2 - 17,9}{2000 - 1990} = \frac{15,3}{10} = 1,53$$

Pendiente de la recta de 2000 a 2001

$$m = \frac{33,1 - 33,2}{2001 - 2000} = \frac{-0,1}{1} = -0,1$$

Si comparamos los valores obtenidos se observa que el mayor de ellos es 1,53 esto quiere decir que el aumento fue mayor en el periodo comprendido entre 1990 y el año 2000. De igual manera el aumento fue menor en el periodo comprendido entre el año 2000 y el año 2001. En la gráfica podemos observar cuál de los segmentos tiene una inclinación mayor o menor, lo que corresponde a una razón de cambio mayor y menor, respectivamente.

b. La deuda externa entre los años de 1970 y 1980 aumentó a razón de \$ 0,41 miles de millones por año.
La deuda externa entre los años de 1980 y 1990 aumentó a razón de \$ 1,08 miles de millones por año.
La deuda externa entre los años de 1990 y 2000 aumentó a razón de \$ 1,53 miles de millones por año.

Mientras la deuda externa entre los años de 2000 y 2001 disminuyó a razón de \$ 0,1 miles de millones.

PRÁCTICA EN CONTEXTO

Solución de problemas

1. Los casos de sarampión notificados en Colombia entre 1994 y 2001 se encuentran registrados en la siguiente tabla

Año	Núm. de casos sospechosos notificados
1 994	2 777
1 996	1 029
1 997	625
1 998	754
2 001	591

Fuente: Sistema Nacional y vigilancia en salud pública. Informe ejecutivo semanal.

a. Elabora una gráfica en el plano cartesiano, con la información dada.

b. Conecta los puntos utilizando segmentos de recta.

c. Halla la pendiente para cada uno de los segmento de recta.

d. Explica en qué periodos la razón de cambio fue mayor.

2. La temperatura puede variar de una ciudad a otra y este cambio depende, entre muchos factores, a la altura a la que se encuentra el sitio con respecto al nivel del mar.

En un recorrido entre Pasto y Quito, Gabriel registró las siguientes variaciones en altura y temperatura.

Ciudad	Altura sobre el nivel del mar en (m)	Temperatura en grados centígrados
Pasto	2 251	14° C
Pilcuán	1 800	18° C
Ipiales	2 897	12° C
Ibarra	2 228	16, 4° C
Quito	2 818	15° C

a. Elabora una gráfica de la temperatura en función de la altura a partir de la tabla.

b. Determina el valor de la pendiente de los cuatro segmentos de recta obtenidos, y explica su significado.

Ecuación de la recta

Logro: comparar las diferentes formas algebraicas de la ecuación de una recta.

Comparte lo que sabes

¿Cómo identificas que una ecuación corresponde a una recta?

Ecuación de la recta de la forma pendiente- intersección

Ya vimos que las ecuaciones lineales pueden expresarse como $y = mx + b$ donde m es la pendiente y el punto: $(0, b)$ es el corte con el eje y. A esta forma de la ecuación se le conoce como **pendiente intersección.**

Ejemplos

a. $y = \frac{2}{7}x + 13$, tiene como pendiente $\frac{2}{7}$ y el punto de corte con el eje y es $(0, 13)$

b. $y = -4x - 8$, tiene como pendiente -4 y el punto de corte con el eje y es $(0, -8)$.

Ecuación general de la recta

La ecuación de una recta también puede expresarse de la forma $ax + by = c$; donde a, b y c son números reales y a y b no son simultáneamente cero.

Ejemplos

a. $x + 18y = 4$; b. $\frac{1}{5}x + y = 0$

Son ecuaciones generales de rectas.

Ecuación de la recta de la forma punto– pendiente

Partiendo de la fórmula de la pendiente, se puede obtener la forma punto pendiente de una recta. Utilicemos la expresión para calcular la pendiente entre los puntos (x,y) y (x_1, y_1), que es $m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$. Multiplicando los dos términos de la ecuación por $x_2 - x_1$ obtenemos: $y - y_1 = m(x - x_1)$ o lo que es lo mismo

$$y = m(x - x_1) + y_1$$

En donde m es la pendiente y (x_1, y_1) es un punto de la recta.

Ejemplos

a. La ecuación de la recta con pendiente $m = 7$ y que pasa por el punto $(-9, 3)$ es:

$$y - 3 = 7(x + 9)\text{, es decir } y = 7x + 66$$

b. La ecuación de la recta con pendiente $m = \frac{9}{2}$ y que pasa por el punto $(2, 0)$ es:

$$y = \frac{9}{2}(x - 2)\text{, es decir } y = \frac{9}{2}x - 9$$

c. La ecuación de la recta que pasa por el punto $(3, -2)$ y cuya pendiente es $m = -4$ es:

$$y - (-2) = -4(x - 3) \text{ y al resolver: } y = -4x + 10$$

Rectas paralelas

Dos rectas son paralelas cuando no se intersecan, es decir, cuando no tienen puntos de corte.

Sean l_1 y l_2 dos rectas, estás son paralelas si sus pendientes son iguales, es decir si $m_1 = m_2$.

Ejemplo

Encuentra la ecuación de la recta que es paralela a la recta $y = -\frac{1}{3}x + 2$ y que pasa por el punto $(3, 4)$.

La pendiente de la recta dada es $m_1 = -\frac{1}{3}$; por tanto, la segunda recta debe tener pendiente $m_2 = -\frac{1}{3}$

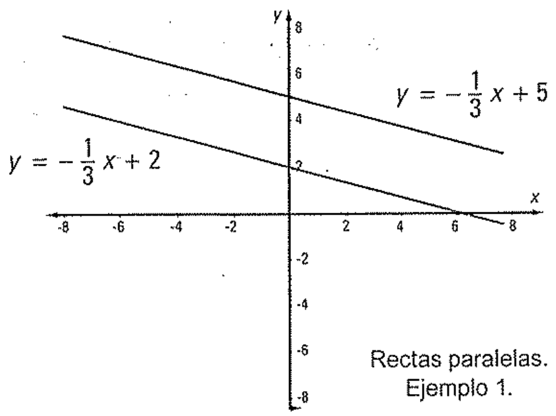
Como de la segunda recta conocemos la pendiente y uno de los puntos por donde pasa, remplazando los valores en la ecuación de la forma punto pendiente y obtenemos:

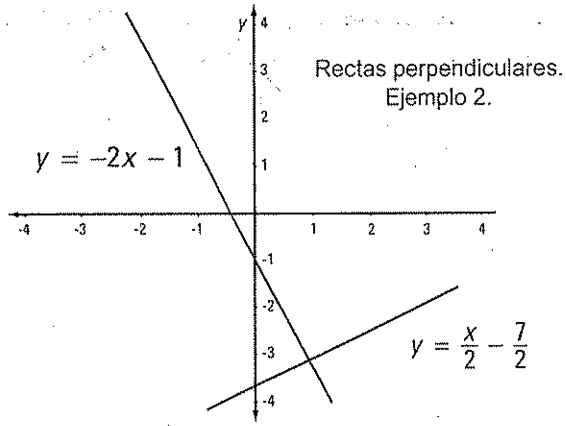
$$y - 4 = \frac{-1}{3}(x - 3)\text{, entonces } y = -\frac{1}{3}x + 5$$

Rectas perpendiculares

Dos rectas son perpendiculares cuando se intersecan formando ángulos rectos.

Dos rectas l_1 y l_2 son perpendiculares si el producto de sus pendientes es igual a menos uno, es decir, si $m_1 \times m_2 = -1$





Ejemplo

Determina la ecuación de la recta que es perpendicular a $y = -2x - 1$ y que pasa por el punto $(1, -3)$.

La pendiente de la recta dada es $m_1 = -2$, por lo cual debemos encontrar una pendiente m_2 tal que $m_1 \times m_2 = -1$, en este caso $-2m_2 = -1$, es decir, $m_2 = \frac{1}{2}$.

Remplazando el valor de la pendiente y el punto en la ecuación de la forma punto pendiente, obtenemos:

$y + 3 = \frac{1}{2}(x - 1)$ y al operar: $y = \frac{x}{2} - \frac{7}{2}$ que es la ecuación de la recta perpendicular que buscamos.

PRÁCTICA EN CONTEXTO

Ejercitación de procedimientos

1. A partir de la información, encuentra la ecuación de la recta.

a. $m = 3$, pasa por el punto $(1, 4)$.

b. Pasa por los puntos $(1, -3)$ y $(5, 4)$.

c. $m = 3$ y la intersección con el eje y es en el punto $(0, 5)$.

d. $m = 6$ y se intersecta con el eje x en el punto $(2, 0)$.

e. Pasa por los puntos $(-7, -3)$ y $(-2, -1)$.

2. Determina la pendiente de la recta que pasa por cada par de puntos.

a. $(2, 5)$ y $(3, 7)$

b. $(0, 0)$ y $(7, 10)$

c. $(-7, 4)$ y $(3, -5)$

d. $(-1, 1)$ y $(0, 4)$

e. $(10, 8)$ y $(2, 8)$

f. $(-3, 2)$ y $(4, 3)$

3. Demuestra que los puntos $O = (-15, -6)$; $M = (1, 4)$ y $N = (6, -4)$ son los vértices de un triángulo rectángulo.

4. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $(7, -3)$ y que es paralela a la recta de ecuación $2x - 5y = 8$

5. Halla la ecuación de la recta que es perpendicular a la recta $x + 3y = 1$ y que pasa por el punto $\left(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}\right)$.

Funciones lineales crecientes, decrecientes y constantes

Logro: identificar las diversas funciones lineales.

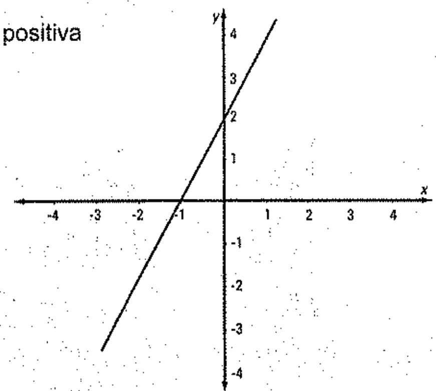
Comparte lo que sabes

Demuestra que el cuadrilátero con vértices en $A = (2, 7)$, $B = (6, 6)$, $C = (5, 13)$ y $D = (9, 12)$ es un paralelogramo.

Función lineal creciente

El signo de la pendiente indica el sentido de la gráfica en el plano. Cuando la pendiente de una recta es positiva decimos que la función lineal es **creciente**.

Pendiente positiva



En la imagen, la recta pasa por los puntos $(-1, 0)$ y $(0, 2)$; tiene pendiente $m = \frac{2-0}{0-(-1)} = 2$ que es positiva y por tanto, la función es creciente.

Ejemplo

Determina si la función que determina la recta que pasa por los puntos $(1, 3)$ y $(5, 8)$ es creciente.

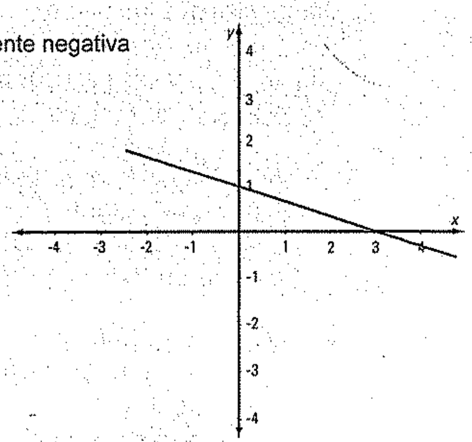
Recordemos que la fórmula para obtener la pendiente de una recta es $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ y al remplazar en los valores dados, obtenemos $m = \frac{8-3}{5-1}$, es decir $m = \frac{5}{4} > 0$

Como se observa, la pendiente es positiva, lo que indica que la recta efectivamente es una función lineal creciente.

Función lineal decreciente

Cuando la pendiente de una recta es negativa, entonces decimos que la función lineal es decreciente (desciende de izquierda a derecha):

Pendiente negativa



En la imagen, la recta pasa por los puntos $(0, 1)$ y $(3, 0)$; tiene pendiente $m = \frac{0-1}{3-0} = \frac{-1}{3}$ que es negativa y por tanto, la recta es decreciente.

Ejemplo

Dada la ecuación de la recta: $5y + \frac{8}{3}x = 11$, determina si la recta corresponde a una función lineal creciente o decreciente.

Despejamos la variable *y*:

$$5y + \frac{8}{3}x + \left(-\frac{8}{3}x\right) = 11 + \left(-\frac{8}{3}x\right)$$

$$5y = 11 - \frac{8}{3}x$$

$$y = -\frac{8}{15}x + \frac{11}{5}$$

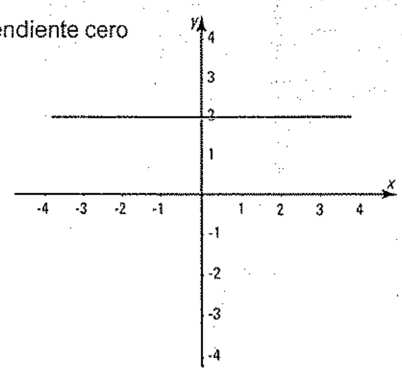
Como $-\frac{8}{15}$ es el coeficiente que acompaña a la variable *x*, se sabe que éste indica la pendiente de la recta. Como: $-\frac{8}{15} < 0$, se tiene que la función lineal es decreciente.

Función constante

Cuando la pendiente de la recta es cero, decimos que la función lineal es constante, es decir su gráfica no crece, ni decrece.

Dicha función se puede ver de la forma $f(x) = k$, donde *k* es una constante. Es decir, todos los elementos del dominio tienen la misma imagen, en este caso a *k*.

Pendiente cero



En la imagen, la recta pasa por los puntos (–3, 2) y (1, 2); tiene pendiente $m = \frac{2-2}{-3-1} = \frac{0}{-4} = 0$; por tanto, la recta es constante.

Ejemplo

Mostrar que la función lineal $y = f(x) = 8$, es una función constante.

En esta función no importa qué valor tome *x*, el valor de *y* siempre será 8; por tanto si tomamos dos puntos cualesquiera de la función, éstos siempre tendrán por segunda componente a 8.

Al tomar dos puntos cualesquiera de la función, como por ejemplo (–4, 8) y (1 000, 8), y hallar la pendiente con ellos obtenemos:

$$m = \frac{8-8}{1\,000+4} = \frac{0}{1\,004} = 0$$

Como la pendiente obtenida es cero, se concluye que la función es constante.

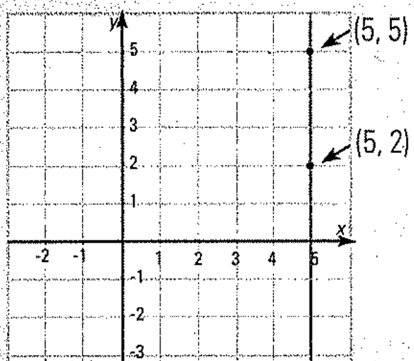
Pendiente indefinida

La pendiente de cualquier recta paralela al eje *y* (o perpendicular al eje *x*) es indefinida. La ecuación de una recta vertical tiene la forma: $x = k$, donde *k* es número real cualquiera.

Ejemplo

La gráfica de la ecuación $x = 5$ es una recta vertical como muestra la figura:

Pendiente indefinida



Si consideramos los puntos (5, 2) y (5, 5) en la gráfica de la función $x = 5$ y aplicamos la fórmula para obtener la pendiente obtenemos $m = \frac{5-2}{5-5} = \frac{3}{0}$, pero dividir por cero no tiene sentido, por tanto podemos afirmar que la pendiente de la recta es **indefinida**.

PRÁCTICA EN CONTEXTO

Ejercitación de procedimientos

1. Indica si la función correspondiente a cada recta es creciente, decreciente o constante:

a. $y = \frac{3}{4}x - 5$

b. $y = -7x + \frac{1}{3}$

c. $y = 4$

d. $\frac{2}{3}x + 5y = 0$

e. $y - 9x = 0$

f. $-4y = -8x - 4$

g. $2x - 3y = 1$

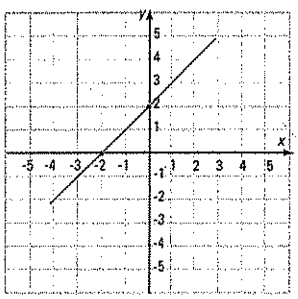
h. $3y = 6$

i. $x = 10$

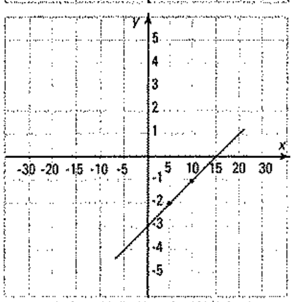
j. $\frac{3}{5}x = 4y - 3$

2. A partir de las siguientes gráficas indica si las funciones que representan son constantes, crecientes o decrecientes y determina la ecuación de la recta.

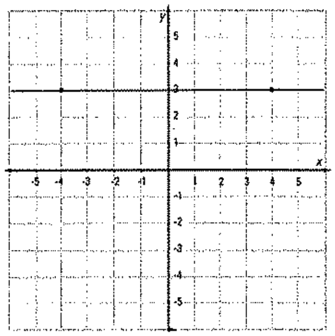
a.



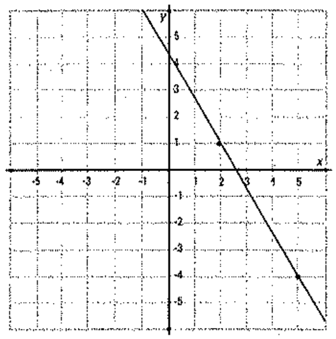
b.



c.



d.



3. Determina si cada par de rectas son paralelas, perpendiculares o ni paralelas ni perpendiculares. Además indica si cada recta es creciente, decreciente o constante.

a. $3x + y = 4$ $\qquad 2x - 3 = -\frac{1}{2}y$

b. $y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$ $\qquad y + \frac{3}{2}x = 2$

c. $y = 5x + 2$ $\qquad -5x + y - 4 = 0$

d. $4y - 12 = -10$ $\qquad 2y = -\frac{10}{4}x - 4$

e. $8x - 4y = 16$ $\qquad 8x + 16y = 32$

f. $y = \frac{7}{4}x + \frac{2}{3}$ $\qquad -\frac{1}{4}x + y = -8$

Solución de problemas

4. La utilidad anual de una tienda puede calcularse mediante la función $f(x) = 30x - 10\,000$, donde x representa el número de unidades vendidas por año.

a. Traza la gráfica de la función entre 0 y 12 000.

b. Calcula el número de unidades que deben venderse, como mínimo, para evitar que la tienda quiebre.

c. ¿Cuántas unidades debe vender la tienda para obtener una utilidad de $ 1 677 140?

5. Se ha realizado una carrera de 400 metros planos en la que han participado cuatro corredores. La versión del comentarista deportivo respecto de cada uno de ellos es:

a. **Corredor 1:** Salió muy rápido pero poco a poco fue perdiendo fuerzas para llegar a la meta casi andando y llegó en tercera posición.

b. **Corredor 2:** Mantuvo siempre la misma velocidad hasta los últimos 50 metros. A partir de ahí fue mucho más rápido.

c. **Corredor 3:** Salió rápido pero a los 100 metros tropezó y cayó al suelo. Al cabo de unos segundos se levantó y continuó pero ya mucho más lento y llegó el último.

d. **Corredor 4:** Salió lento pero conforme transcurría la prueba, aumentó la velocidad llegando el primero.

Haz las gráficas espacio - tiempo y velocidad - tiempo de cada uno de los corredores.

6. El tren de la Sabana se desplaza a una velocidad máxima de 9 m/s. Si el tren necesita 15 segundos para detenerse completamente,

a. ¿qué distancia necesita recorrer para parar completamente?

b. representa en el plano cartesiano la relación distancia-tiempo.

c. determina si la función obtenida es creciente, decreciente o constante.

7. A partir de la recta que se genera con cada par de puntos, determina el dominio, el codominio, la pendiente, el corte con el eje x y con el eje y, y si las funciones son crecientes, decrecientes o constantes.

a. (3, 2) y (5, 7)

b. (4, 1) y (6, 7)

c. (3, 3) y $\left(\frac{1}{5}, 2\right)$

d. (0, 0) y (0, 3)

e. (1, 2) y (10, 2)

8. Formula las ecuaciones de dos rectas que tengan pendiente $m = -\frac{5}{7}$.

a. Escribe la ecuación de una recta que sea perpendicular a las rectas obtenidas en el punto anterior.

b. Determina en qué puntos se intersecan las tres rectas dadas y grafícalas.

c. Señala si las rectas obtenidas corresponden a funciones crecientes, decrecientes o constantes.

9. Dado el punto (5, 3),

a. halla la ecuación de dos rectas perpendiculares que se intersecten en ese punto.

b. grafica ambas rectas en el plano cartesiano.

c. indica cuál es la pendiente de cada una.

d. determina si se trata de funciones lineales crecientes, decrecientes o constantes.

10. Responde:

a. ¿en cuántos puntos, a lo más, se pueden intersecar dos rectas?

b. ¿cómo son las pendientes de dos rectas que se intersecan, pero no necesariamente son perpendiculares?

c. ¿Cómo son las pendientes de dos rectas que nunca se intersecan?

d. Cuando se intersecan tres rectas, ¿qué objeto matemático se puede generar?

Gráficas de la forma y = mx + b y de la forma Ax + By = C

Logro: representar gráficamente situaciones de cambio de funciones lineales.

Comparte lo que sabes

Encuentra el valor de k en $4x + 3y - k = 0$, para que la gráfica de la recta pase por el punto $A = (1, -2)$

Gráficas de la forma $y = mx + b$

Veamos cómo se puede construir la gráfica de una función lineal. Recordemos que la gráfica siempre corresponde a una línea recta.

Tabla de valores

Para graficar, tomamos algunos valores y se remplaza a x, por estos valores en la ecuación. Con los resultados se construye una tabla en la cual se asigna a cada valor x un valor para $f(x)$.

Ejemplo

Graficar la función $f(x) = 3x - 1$ utilizando una tabla de valores.

En este caso $f(x) = y = 3x - 1$, es una ecuación de la forma $y = mx + b$ que claramente es una recta.

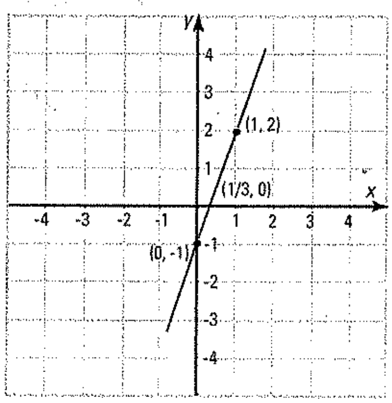
Se debe remplazar en la función cada uno de los valores elegidos para obtener los valores de $f(x)$:

Para $x = -1$ se tiene que: $f(-1) = 3(-1) - 1$ $f(-1) = -4$	Para $x = 0$, se tiene: $f(0) = 3(0) - 1$ $f(0) = -1$	Para $x = \frac{1}{2}$ se tiene que: $f\left(\frac{1}{2}\right) = 3\left(\frac{1}{2}\right) - 1$ $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

Y, si se realiza el mismo procedimiento con todos los valores elegidos con anterioridad, se obtiene una tabla como:

x	$f(x)$
-1	-4
$\frac{-1}{2}$	$\frac{-5}{2}$
0	-1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	2
$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{2}$
2	5
$\frac{5}{2}$	$\frac{13}{2}$
3	8

Utilizando los valores obtenidos en el procedimiento anterior, se elabora la gráfica correspondiente.



Nota: todos los puntos de la tabla se encuentran sobre la gráfica de la función. Observa que basta con dos puntos para trazarla.

Pares ordenados

Otra forma de graficar es a partir de un conjunto de pares ordenados.

Si se tienen los puntos de manera ordenada:

$f(x) = \{(-1,-4), (0,-1), (1,2), (2,5), (3,8)\}$

Se pueden marcar en el plano cartesiano y luego se unen. En este caso los pares ordenados corresponden a la gráfica de la recta anterior.

Gráficas a partir de las características de la función

También se puede graficar a partir de las características de la función. Para graficar funciones lineales se debe tener en cuenta las siguientes características:

a. Entre dos puntos pasa una única recta; por lo tanto, al hallar dos puntos que pertenecen a la función, éstos se pueden unir con una línea recta que corresponde a la gráfica de la función.

b. El término independiente de la ecuación $f(x) = mx + b$, es b. Con este término se puede determinar el punto de corte de la recta con el eje y, que es $(0, b)$

c. Para determinar cuándo una recta corta al eje x, se debe resolver la siguiente ecuación $f(x) = 0$, es decir, $mx + b = 0$, cuya solución corresponde al punto en que la función corta al eje x: $\left(\frac{-b}{m}, 0\right)$

d. El signo de la pendiente permite establecer si la función es creciente o decreciente y facilita graficar la función o comprobar que la gráfica hecha corresponde a la función que se tiene.

Ejemplo

Graficar la función $f(x) = 3x - 1$ a partir de sus características.

Como la pendiente de la recta es positiva, la gráfica de la función es una recta creciente. Además, el término -1 en la función indica que el punto de corte con el eje y es $(0,-1)$, mientras que el punto de corte con eje x se obtiene resolviendo $3x - 1 = 0$, cuya solución es $x = \frac{1}{3}$ lo cual muestra que la función corta al eje x en el punto $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$.

Procedemos ahora a dibujar en el plano los dos puntos encontrados, para unirlos y formar así la línea recta, que es la gráfica de la función.

Con respecto a la ecuación de la forma $Ax + By = C$, ésta se puede expresar mediante la fórmula general y trabajarla como se realizó en el proceso anterior.

Observa:

Al tener $Ax + By = C$, se puede despejar y, así:

$$Ax + By = C$$

$$Ax + (-Ax) + By = C + (-Ax)$$

$$By = C - Ax$$

$$\frac{B}{B}y = \frac{C}{B} - \frac{A}{B}x$$

$$y = \frac{C}{B} - \frac{A}{B}x \text{, entonces } y = -\frac{A}{B}x + \frac{C}{B}$$

Así la ecuación obtenida es de la misma forma de: $y = mx + b$

En este caso, la pendiente m es $-\frac{A}{B}$, y el valor de b es $\frac{C}{B}$, por lo cual a esta nueva forma de la ecuación se le puede aplicar los correspondientes métodos para graficar la función correspondiente.

PRÁCTICA EN CONTEXTO

Ejercitación de procedimientos

1. Grafica las siguientes funciones utilizando una tabla de valores:

a. $f(x) = 4x - 1$

b. $f(x) = -2x + 7$

c. $f(x) = 2 - 0,7x$

d. $g(x) = \frac{2}{3} + \frac{6}{3}x$

e. $f(x) = \frac{4}{5}x + 1$

f. $s(t) = 2t - \sqrt{3}$

g. $k(z) = \sqrt{2}z + 7$

h. $h(w) = \frac{5}{2}w + 9$

2. Grafica cada conjunto de pares ordenados en un plano cartesiano. Verifica si se encuentran sobre la gráfica de una función lineal.

a. $h(x) = \{(1,4), (2,5), (3,7), (4,8), (5,5)\}$

b. $s(t) = \{(-2,-5), (1,-2)(-3,-6), (0,-3)\}$

c. $f(x) = \{(3,0), (2,9)\}$

d. $t(x) = \{(3,4)(2,5)(1,-1)\}$

e. $h(r) = \{(2,3), (1,8), (3,3)\}$

f. $m(w) = \{(1,3), (8,8)\}$

g. $g(x) = \{(4,3), (6,1), (5,5)\}$

h. $r(x) = \{(a,b), (2a,5b)\}$ si $a = b$

i. $q(x) = \{(a,b), (2a,5b)\}$ si $a \neq b$

3. Grafica las siguientes funciones utilizando las características de una función lineal:

a. $f(x) = 4 - 2x$

b. $g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{4}{5}$

c. $h(x) = \sqrt{2}x + 6$

d. $s(t) = -0,4t - 3$

e. $q(x) = -6x + 2$

f. $p(x) = \frac{2}{7} - \frac{1}{4}x$

g. $g(z) = -\frac{1}{3}z + 21$

h. $r(x) = \sqrt[3]{8}x - 3$

i. $t(x) = \sqrt{5}x + 5$

Solución de problemas

4. La utilidad de un fabricante de estufas puede calcularse mediante la función $f(x) = 100x - 75\,000$, donde x representa el número de estufas vendidas.

a. Traza la gráfica de la función.

b. Calcula el número de estufas que deben venderse para alcanzar el punto de equilibrio, es decir cuando las ganancias son \$ 0.

c. Calcula el número de estufas que deben venderse para que la compañía alcance una utilidad de \$ 10 000 000.

5. Encuentra la ecuación de dos funciones lineales cuya intersección sea el punto (0, 2) y una de ellas pase por (4, 0).

6. Existen diversas reglas para determinar una dosis medicinal para niños cuando se ha especificado la dosis para adultos (en mg), dichas reglas pueden estar basadas en el peso, la estatura, o en otras cantidades. Si t = edad del niño (en años), d = dosis para adultos, y c = dosis infantil, existen entonces dos reglas.

$c = \frac{t+1}{24}d$ (Regla de cowling).

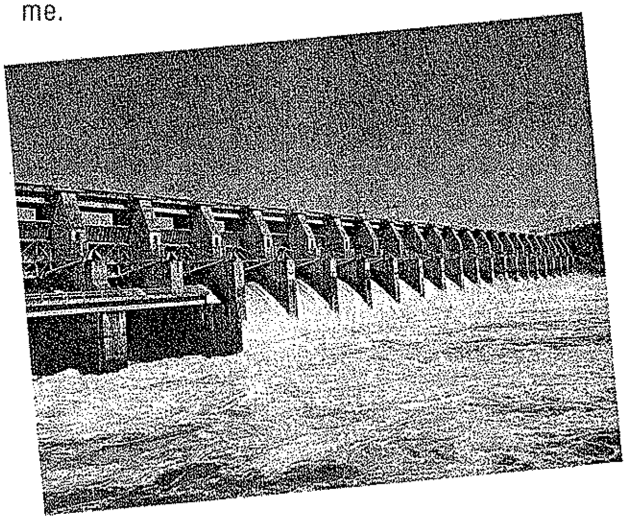
Considera $d = 1$ cucharadita

$c = \frac{2}{25}td$ (Regla de Friend).

a. Grafica estas dos funciones en un mismo plano para $0 \leq t \leq 15$.

b. ¿Para qué edad, aproximadamente, las dos reglas dan la misma recomendación?

7. En una represa se pierde agua de manera uniforme.



Si la cantidad inicial era de 3 500 millones de litros y los datos diarios obtenidos se hallan registrados en la siguiente tabla:

día	1	2	3
millones de litros	3 499, 5	3 499	3 498, 5

a. Encuentra una fórmula para calcular qué cantidad de agua queda cada día.

b. Si continúan perdiéndose litros en la misma proporción, ¿en cuánto tiempo quedará vacía la represa?

c. ¿Cuándo hadrá 2 500 millones de litros en la rerpresa?

d. ¿Inicialmente se puede determinar si la función es creciente o decreciente? Explica.

e. Realiza una gráfica de la función.

8. Ángel desea enviar un paquete de Bogotá a Villavicencio, que están a 95 km de distancia. Para hacerlo consultó con dos empresas de transportes: la empresa A le cobra un cargo fijo de $ 300 000, más $ 5 000 por kilómetro recorrido; mientras que la empresa B le cobra $ 200 000 de cargo fijo, más $10 000 por kilómetro recorrido.

a. ¿Con cuál de las dos empresas le sale más económico llevar el paquete?

b. Calcula el costo de enviar un paquete tanto por la empresa A como por la empresa B, si la distancia entre el punto de envío y el de recepción fuera de 15 km y luego si fuera de 153 km.

c. Encuentra una función que determine el precio de llevar un paquete en términos de la distancia entre los lugares de envío y destino.

d. Grafica las funciones que obtuviste en el punto anterior.

9. Se tiene un rectángulo que tiene 5 cm de altura y 7 cm de base. Si se aumenta en x cm la base de dicho rectángulo:

a. halla las expresiones funcionales para el perímetro y el área.

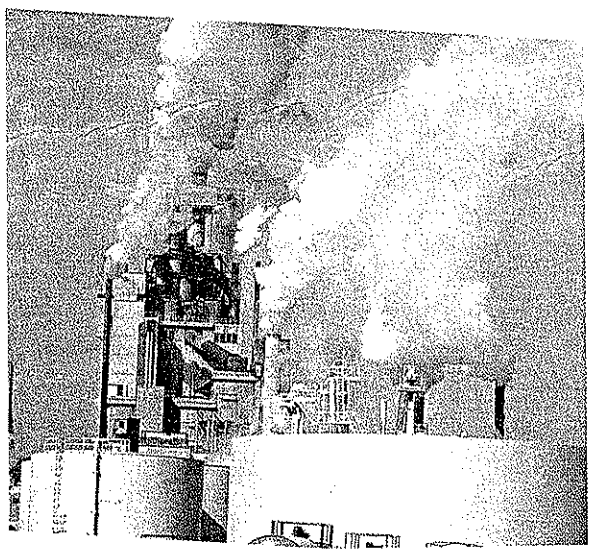
b. realiza las gráficas correspondientes.

10. En una determinada ciudad se requiere realizar un estudio de la contaminación que se genera entre las 7 de la mañana hasta las 7 de la noche. Si n es el nivel de polución dada en partículas por millón (p.p.m.), y t es el tiempo en horas después de las 7 de la mañana; y se sabe que a las 11 de la mañana el nivel de polución era de 100 p.p.m. y crece uniformemente a razón de 18 p.p.m. por hora.

a. determina la función que modela el problema.

b. identifica la pendiente m y un punto de la función.

c. grafica la función utilizando tabla de valores.



Gráficas de funciones cuadráticas

Logro: analizar y construir gráficas de funciones cuadráticas.

Comparte lo que sabes

Encuentra la figura que se obtiene con los puntos de intersección de cada par de las siguientes rectas $y = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}$, $y = \frac{-x}{7} + 6$, $y = \frac{3}{5}x - \frac{22}{5}$ y $y = \frac{-1}{7}x + \frac{16}{7}$.

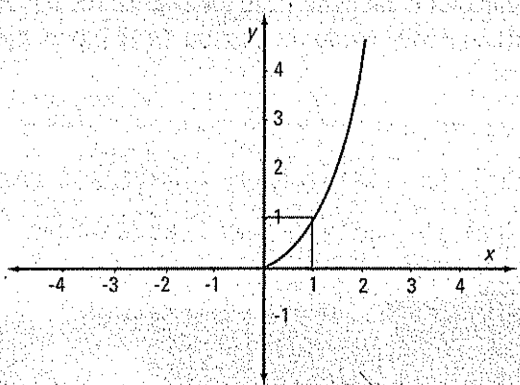
Hasta el momento hemos trabajado con funciones lineales, que tienen como propiedad que la variable está elevada a la potencia uno; ahora abordaremos una función de grado dos.

Partamos de la siguiente situación:

Si se desea construir una caja de base cuadrada, ¿cómo varía el área de la base, si se aumenta la longitud del lado?

Para una longitud de 1 cm tenemos que el área de la base es de **1 cm²**, si aumentamos la longitud del lado en un centímetro, entonces el área de la base será **4 cm²** y, si la longitud aumenta a 3 cm, entonces el área será **9 cm²**.

Al representar en el plano el área de la base en función del lado se obtiene la siguiente gráfica:



¿Cuál es la función que modela la situación anterior?

Como el área de un cuadrado depende del lado, podemos decir que la función que representa la variación del área (y) respecto dicha longitud es $y = x^2$. A esta clase de función se le denomina **función cuadrática**. Estas funciones también son llamadas **polinomiales de segundo grado**, ya que la variable aparece en la expresión con potencia 2, o también **parábolas** por la forma de la curva que generan.

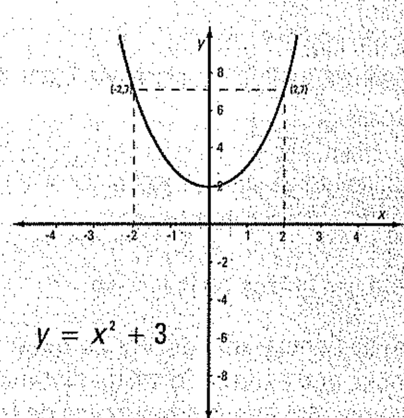
La expresión general para las funciones cuadráticas es $y = ax^2 + bx + c$, donde a, b y c son reales con $a \neq 0$. Estas funciones pueden presentarse de otras tres formas polinomiales de segundo grado, que se generan cuando alguno de los coeficientes b ó c, es cero.

1. De la forma $y = ax^2 + c$, donde a y c son distintos de cero y $b = 0$.

Ejemplo

Para la ecuación $y = x^2 + 3$, podemos realizar una tabla de datos para obtener la gráfica de la función:

x	y
–2	7
–1	4
0	3
1	4
2	7

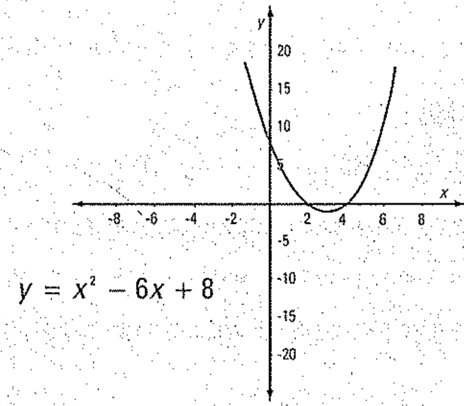


2. De la forma $y = ax^2 + bx + c$, donde a, b y c son distintos de cero.

Ejemplo

Sea $y = x^2 - 6x + 8$, entonces la tabla de datos y la gráfica de la función son:

x	y
−1	15
0	8
1	3
2	0
3	−1
4	0
5	3

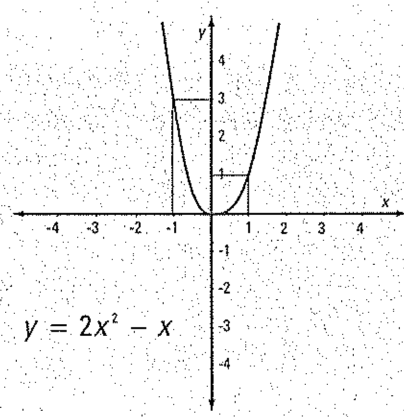


3. De la forma $y = ax^2 + bx$, donde a y b son diferentes de cero, pero $c = 0$.

Ejemplo

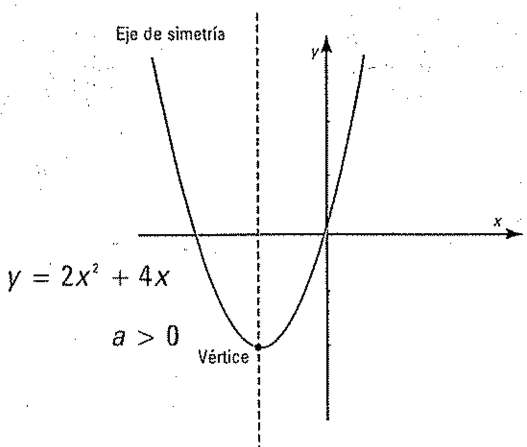
En $y = 2x^2 - x$, la tabla de valores y la gráfica correspondientes son:

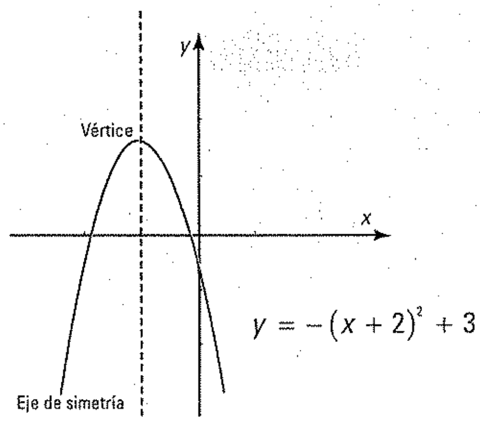
x	y
−3	21
−2	10
−1	3
0	0
1	1
2	6
3	15



Propiedades de las gráficas de las funciones cuadráticas de la formula $y = ax^2 + bx + c$.

- Las parábolas son simétricas respecto a una recta vertical, paralela al eje y, que pasa por un punto denominado **vértice** y que se denomina **eje de simetría**. Este eje divide a la parábola en dos ramas simétricas.
- Las parábolas pueden abrir hacia arriba o hacia abajo. Si a es positivo ($a > 0$), la parábola abre hacia arriba y si a es negativo ($a < 0$), la parábola abre hacia abajo.
- El vértice en una parábola es el punto mínimo en el caso de que ésta abra hacia arriba, o el punto máximo, en el caso de que abra hacia abajo.





- El vértice de una parábola tiene coordenadas: $\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$
- El eje de simetría es la recta cuya ecuación es $x = -\frac{b}{2a}$
- La intersección de la curva con el eje y (en caso de que lo corte), está dado por la ecuación $y = c$.

Ejemplo

Graficar la función $y = x^2 - x - 2$.

- Los valores correspondientes a a, b y c en esta función son $a = 1$, $b = -1$ y $c = -2$
- Como el valor de a es positivo $(a > 0)$, entonces la parábola abre hacia arriba.
- Podemos hallar el valor mínimo calculado primero el valor de su abscisa:

$$\left(\frac{-b}{2a}\right) = \left(\frac{-(-1)}{2 \times 1}\right)$$
$$\left(\frac{-b}{2a}\right) = \frac{1}{2}$$

De esta forma obtenemos la coordenada en x del vértice. Para hallar la coordenada correspondiente a ese valor, remplazamos $\frac{1}{2}$ en la función:

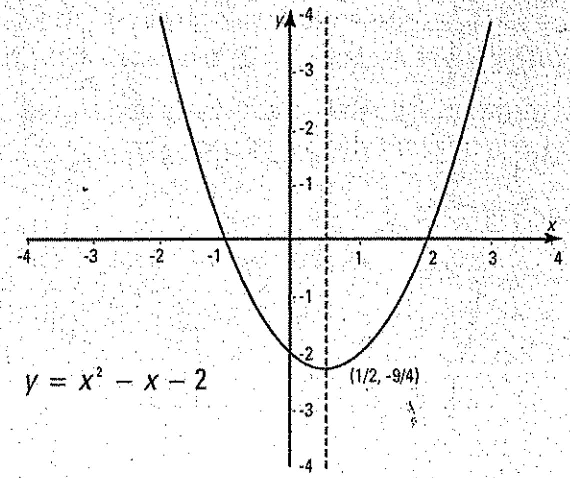
$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - 2$$
$$y = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 2$$
$$y = -\frac{1}{4} - 2$$
$$y = -\frac{9}{4}$$

Luego el vértice es el punto de coordenadas: $v = \left(\frac{1}{2}, \frac{-9}{4}\right)$

- El eje de simetría tiene por ecuación $x = \frac{1}{2}$ y el intercepto con el eje y es -2.

  Por medio de una tabla de datos podemos ajustar mejor la gráfica.

x	y
-1	0
0	-2
$\frac{1}{2}$	$\frac{-9}{4}$
1	-2
2	0



PRÁCTICA EN CONTEXTO

Ejercitación de procedimientos

1. En cada una de las siguientes funciones determina si la parábola abre hacia arriba o hacia abajo, la ecuación del eje de simetría y las coordenadas del vértice.

a. $f(x) = 3x^2 - 10x - 3$

b. $h(x) = -8x^2 - 2x$

c. $g(x) = x(x - 3)$

d. $y = 3x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

e. $f(x) = -4x(x - 2) - 7$

f. $y = (x - 5)^2$

g. $y + 3x^2 - 5x = 9$

h. $f(x) = -x^2 + \frac{3}{2}x + 4$

i. $y = \frac{1}{5}x^2$

j. $y = 5x^2$

k. $y = x^2 + 3$

l. $y = x^2 - 3$

2. Traza la gráfica de las siguientes funciones y halla: el eje de simetría, el vértice y el punto máximo o mínimo.

a. $y = 2x^2 + 3x - 4$

b. $f(x) = \frac{1}{3}(x - 3)^2$

c. $g(x) = (x - 5)^2 + 1$

d. $h(x) = -(x - 1)^2 - 7$

e. $y = 5x^2 - 2$

f. $f(x) = \frac{2}{5}x^2$

g. $y = -8x^2 - 12x$

h. $y - \frac{3}{7}x + x^2 = \frac{5}{2}$

Solución de problemas

3. Analiza y responde:

a. ¿Qué valor de la función cuadrática es la que expresa la amplitud de la parábola?

b. Si la función lineal tiene sólo una solución, ¿cuántas soluciones puede tener la función cuadrática?

c. La fórmula $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ¿en qué se relaciona con la función cuadrática?

d. Encuentra al menos tres ejemplos de funciones cuadráticas tal que su gráfica no toque al eje x.

e. Encuentra al menos tres ejemplos de funciones cuadráticas tal que su gráfica toque al eje x en un solo punto.

f. Encuentra al menos tres ejemplos de funciones cuadráticas tal que su gráfica corte al eje x en dos puntos.

g. La función cuadrática puede tocar en más de dos puntos al eje x.

Razonamiento

4. Elabora en un mismo plano las gráficas de las siguientes funciones:

$y = x^2 - 8x + 15$

$y = -x^2 - 8x + 15$

$y = -x^2 + 8x - 15$

$y = 2x^2 - 16x + 30$

$y = \frac{x^2}{2} - 4x + \frac{15}{2}$

5. Traza una parábola en cada caso:

a. vértice en el origen, que abra hacia arriba y que corte al eje x en el punto (1, 0). ¿Cuál es el otro punto de corte?

b. vértice en el punto (1, 3). ¿Corta esta gráfica al eje x? ¿Qué se requiere para ello?

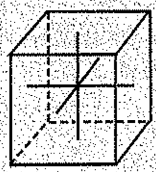
c. Eje de simetría la recta $x = 4$ y corta al eje x en un único punto. ¿Cuál es su vértice?

Funciones cúbicas

Logro: analizar y construir gráficas de funciones cúbicas.

Comparte lo que sabes

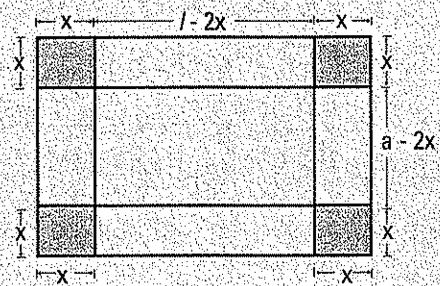
Dada la ecuación $y = x^2 - (m - 2)x + 10$, halla los o el valor para m de tal forma que la gráfica de la función toque en un solo punto al eje x.



Cristal cúbico

Los cristales cúbicos, como el de la pirita aquí mostrado, tienen tres ejes perpendiculares con la misma longitud. La estructura cúbica, o isométrica, es la más simétrica de todos los cristales. El sistema cristalino de la pirita forma rocas bastante duras, pero muy friables, es decir, que se desmenuzan con facilidad. La pirita se conoce también como "oro de los locos" debido a su color amarillo y a su lustre metálico que lo asemeja al oro.

Las funciones cúbicas suelen emplearse en la búsqueda de volúmenes o en problemas en los cuales se requiere optimizar el material utilizado para minimizar costos de produccion.



Ejemplo

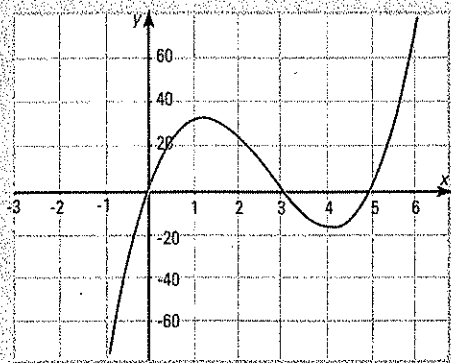
Se desea cortar una lámina para hacer una caja, sin tapa, con el máximo volumen posible, tal como se ve en la figura.

El volumen es igual al área de la base por la altura, por tanto:

$$V = x \times (l - 2x) \times (a - 2x)$$

Donde: l es el largo, a es el ancho y x es la cantidad que debe cortarse de las esquinas de la lámina.

Si el largo de la lámina es de 10 dm y el ancho de 6 dm, se genera la función: $f(x) = x(10 - 2x)(6 - 2x) = 60x - 32x^2 + 4x^3$



Al buscar los ceros de la función se encuentran tres valores para x en los que y se hace 0. Éstos son $x = 0$, $x = 3$ y $x = 5$, los cuales indican que si no se corta nada en las esquinas, o se corta un valor de 3, ó de 5, no se puede armar caja alguna pues el volumen sería cero. Observa que hay un punto donde la función tiene un valor máximo para $x = 1{,}2$ aproximadamente.

Ejemplo

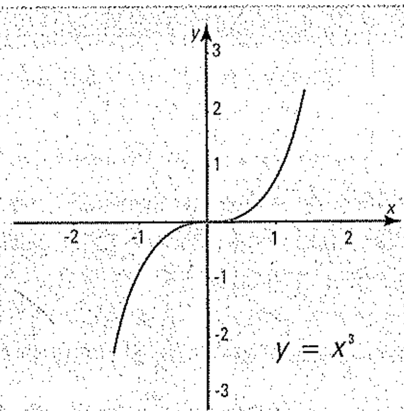
Consideremos la función, $f(x) = x^3$ definida en $\mathbb{R}$ que asigna a cada número real el volumen de un cubo con arista igual a x.

En la siguiente tabla aparecen algunos valores de x y y para la función $y = x^3$

x	…	−3	−2	−1	0	1	2	3	…
y	…	−27	−8	−1	0	1	8	27	…

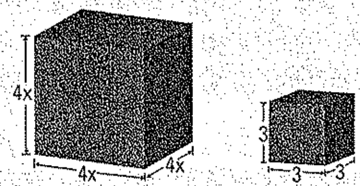
Observa que:

- El conjunto de todas las parejas ordenadas de la función $y = x^3$ determinan una curva creciente.
- Si se toma como centro el punto (0, 0) encontramos que, al rotar la curva en el primer cuadrante hasta hacerla coincidir con la rama en el tercer cuadrante, el punto (–1, –1) coincide con (1, 1); (–2, –8) coincide con (2, 8) y así, sucesivamente. En general, el punto $(-x, -x^3)$ coincide con el punto (x, x^3), por lo tanto, la gráfica de $y = x^3$ es simétrica con respecto al origen.



Ejemplo

Utilizando los cubos de la figura, determina una expresión para calcular la diferencia entre los volúmenes de las figuras.



Para encontrar la expresión buscada, resta el volumen del cubo pequeño del volumen del cubo más grande y factoriza:

- Volumen del cubo grande $= (4x)^3$
- Volumen del cubo pequeño $= 3^3$
- Diferencia entre cubos $= (4x)^3 - 3^3$ luego $f(x) = 64x^3 - 27$

Ecuación general

La función cúbica es de la forma: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, con *a*, *b*, *c* y *d* son constantes y $a \neq 0$ para que la función no se reduzca a una función cuadrática.

La función cúbica tiene como dominio y como recorrido a todo el conjunto de los números reales y para graficarla hay que elaborar una tabla de valores.

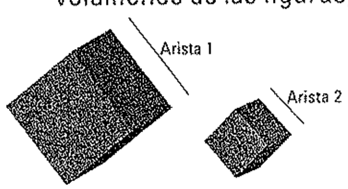
Propiedades de la función cúbica

• El dominio de la función es todo el conjunto $\mathbb{R}$. • El recorrido de la función es todo el conjunto $\mathbb{R}$. • La función es simétrica respecto del origen, ya que $f(-x) = -f(x)$	• Es siempre creciente. • No tiene asíntotas. • La función puede tener un máximo de 3 puntos de intersección con el eje *x*. • La función tiene un solo punto de corte con el eje *y*.

PRÁCTICA EN CONTEXTO

Ejercitación de procedimientos

1. Determina una expresión para calcular la diferencia entre los volumenes de las figuras, teniendo en cuenta las dimensiones.



a. Arista 1 es 27 y la arista 2 es $x - 1$

b. Arista 1 es $2x$ y la arista 2 es $\frac{1}{64}$.

2. Grafica en un mismo plano las siguientes funciones

$y = x^3$; $y = (x-1)^3$; $y = x^3 - 1$

$y = \frac{x^3}{2}$; $y = 4x^3$; $y = -2x^3$

Tema 9

Funciones inversas

Logro: hallar la inversa de una función dada.

Comparte lo que sabes

Grafica y encuentra los puntos de corte entre las funciones $f(x) = x^3 - 1$ y $g(x) = x - 1$.

La gráfica de la función inversa f^{-1} de f, se obtiene efectuando una reflexión de la gráfica de f con respecto a la recta $y = x$; es decir, si la gráfica de f contiene al punto (a, b) entonces la gráfica de f^{-1} debe contener al punto (b, a) y recíprocamente.

Para hacer claridad sobre el concepto de función inversa, que se presenta en esta sección, se toma la función definida por la ecuación $f(x) = y = x^3 - 1$, cuyo dominio y rango es el conjunto de los números reales.

Al despejar x en la ecuación (1) se obtiene:
$x = \sqrt[3]{y + 1}$

En esta ecuación a cualquier valor de y, tomado del rango de f, existe uno y sólo un valor de x situado en el dominio de f. En consecuencia, la ecuación $x = \sqrt[3]{y + 1}$ define una nueva función cuyo dominio es el rango de f y cuyo rango es el domino de f.

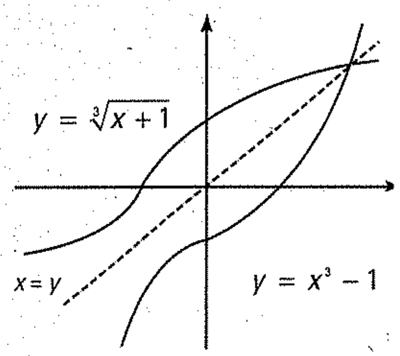
En $y = x^3 - 1$, la función asigna al valor $x = 2$ un único valor y en el rango, en este caso, $y = 2^3 - 1 = 7$.

La segunda ecuación $x = \sqrt[3]{y + 1}$ efectúa la operación inversa, al valor $y = 7$ le asigna el valor de $x = \sqrt[3]{7 + 1} = 2$

Si se quiere ahora representar, como es usual, con x como variable independiente y y como a la dependiente, se intercambia x con y en la ecuación y se obtiene $y = \sqrt[3]{x + 1}$.

Esta función, se representa en forma general por $f^{-1}(x) = y = \sqrt[3]{x + 1}$ se conoce como la **inversa** de la función $f(x)$. Igualmente, la función $y = f(x) = x^3 - 1$ es la inversa de la función $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x + 1}$.

Las gráficas de $f(x)$ y de $f^{-1}(x)$ representadas en el mismo plano cartesiano aparecen en la figura:



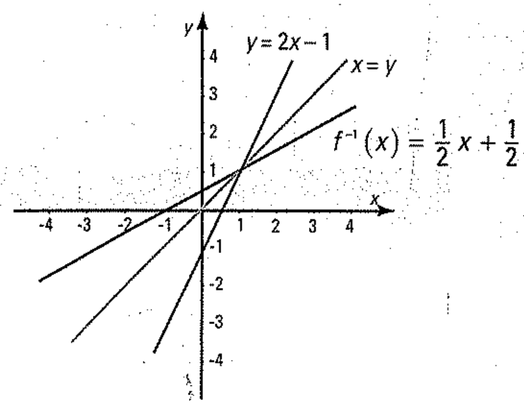
Sólo las funciones inyectivas, es decir, aquellas en las que $f(x) = f(y)$ entonces $x = y$, tienen inversa. Para encontrar la función inversa de una función inyectiva, se sigue el siguiente procedimiento:

1. Remplaza $f(x)$ por y.
2. Intercambia las variables x y y.
3. Despeja y en la ecuación.
4. Cambia y por $f^{-1}(x)$.

Ejemplo

Halla la inversa de la función $f(x) = 2x - 1$

Paso 1. $y = 2x - 1$	Remplaza $f(x)$ por y.
Paso 2. $x = 2y - 1$	Intercambia las variables.
Paso 3. $y = \frac{x+1}{2}$	Se despeja y en la ecuación.
Paso 4. $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$	Cambia y por $f^{-1}(x)$.



Gráfica de la función: $f(x) = 2x - 1$ (azul) y de su inversa: $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ (rojo).

PRÁCTICA EN CONTEXTO

Ejercitación de procedimientos

1. Encuentra la función inversa (si existe) de cada una de las funciones dadas:

a. $f(x) = 3x - 2$

b. $g(x) = \sqrt{x+3}$, con $x \geq -3$

c. $r(x) = 36 - x^2$

d. $m(x) = -x$

e. $f(x) = \frac{1}{x}$, con $x > 0$

f. $h(x) = \sqrt{x}$, con $x \geq 0$

g. $p(x) = 4x^2$

h. $t(x) = 2x^3 - 10$

2. Para cada una de las funciones dadas, determina su función inversa (si existe) y construye la gráfica para $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ en el mismo plano:

a. $f(x) = \frac{x+1}{2}$

b. $f(x) = \sqrt{x-2}$, con $x \geq 2$

c. $f(x) = \frac{x-2}{x+1}$ y $x \neq -1$

d. $f(x) = \sqrt[3]{x+3}$

e. $f(x) = x^2 - 4$, con $x \geq 0$

f. $f(x) = \sqrt[3]{x}$

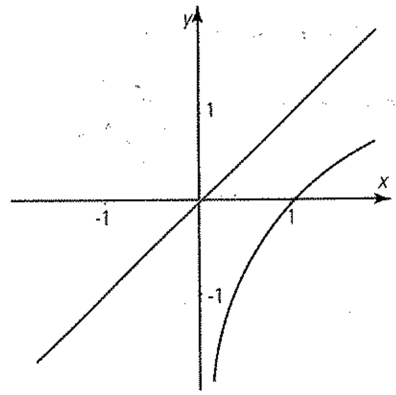
g. $f(x) = x^2 + 3$

h. $f(x) = \frac{5}{x}$ y $x \neq 0$

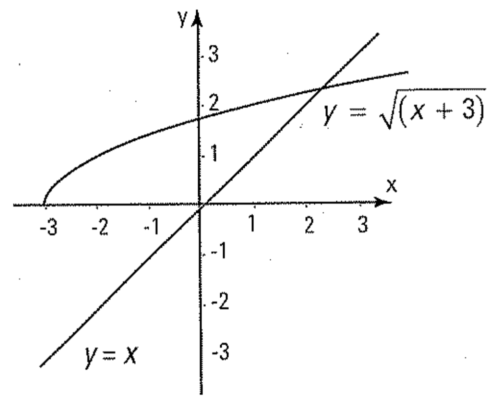
3. Considera la función $f(x) = \frac{9}{5}x + 32$ que convierte x grados Celsius en grados Fahrenheit. Halla la función inversa y explica qué clase de conversiones se pueden hacer con la función obtenida.

4. Dibuja la inversa de las siguientes funciones en tu cuaderno:

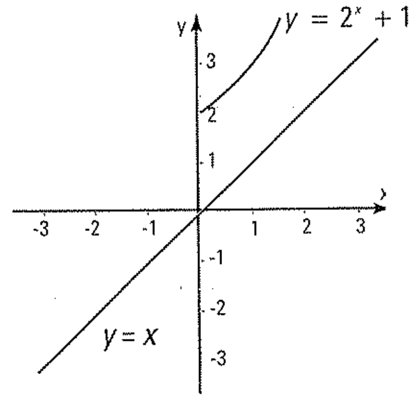
a.



b.



c.



5. Si $g(3) = 5$ y $g(-1) = 5$, explica por qué $g(x)$ no tiene inversa.

6. Si la gráfica de la función $y = f(x)$ es tal que ninguna recta horizontal intersecta la gráfica en más de un punto, entonces $f(x)$ es uno a uno y tiene función inversa.
Traza dos gráficas uno a uno y sus inversas y dos gráficas que tengan función inversa.

Función exponencial

Logro: analizar situaciones de crecimiento o decrecimiento exponencial.

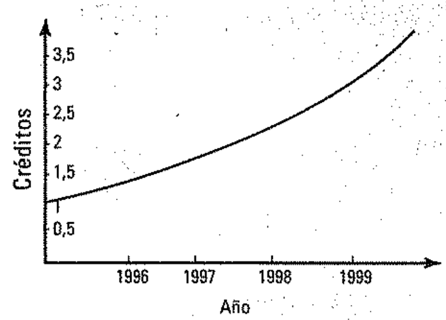
Comparte lo que sabes

Un cultivo de bacterias triplica su población cada hora. Si el cultivo comenzó con 4 bacterias, ¿cuántas bacterias habrá en 2 horas, en 10 horas y en 24 horas?

Históricamente, los exponentes fueron introducidos en matemáticas para expresar de forma corta el producto de varios factores semejantes, y por esto sólo se consideraron inicialmente exponentes naturales. El estudio de las potencias se divide en varios casos, de acuerdo con el conjunto al que pertenece el exponente (entero, racional).

Las **funciones exponenciales** tienen una amplia variedad de aplicaciones en el campo de la economía, el análisis de comportamiento de crecimiento poblacional, mundial y local, la proyección del crecimiento de virus y bacterias, e incluso, en el análisis de costos en los mercados publicitarios de innumerables empresas.

Los datos ilustrados en la gráfica muestran el crecimiento, en miles, del número de personas que obtuvieron crédito para inversión libre en la ciudad de Miami, en los años 1996 a 1999. Al analizar la curva encontramos que su crecimiento se hace cada vez mayor y corresponde a una función exponencial.



Una función exponencial es una función de la forma $f(x) = a^x$ donde a es un número real positivo y x representa la variable.

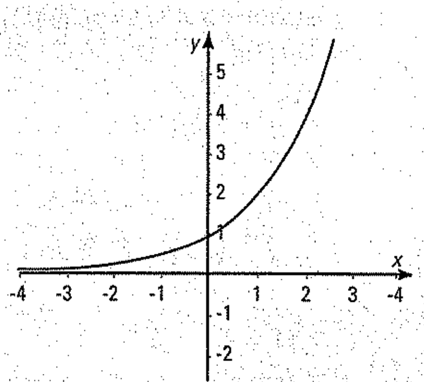
Las funciones exponenciales pueden graficarse seleccionando valores para x y tabulando los respectivos resultados en y.

Ejemplo

Encontrar la gráfica para $f(x) = 2^x$

Al reemplazar x por los diferentes valores asignados, se determinan parejas ordenadas, con las cuales se elabora la gráfica. Algunos valores de la función son:

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8



Observa que el dominio de la función lo constituyen todos los reales, mientras que el rango son solamente los reales positivos $\mathbb{R}^+$. En la tabla hemos seleccionado algunos enteros positivos y negativos lo cual no implica que no se puedan elegir racionales o irracionales.

Nota: Si $a = 1$, entonces $f(x) = 1^x = 1$, es decir la función es constante.

En las funciones exponenciales de la forma $f(x) = a^x$ donde $a > 0$ se cumple que:

a. El dominio de la función es el conjunto de los reales $\mathbb{R}$.

b. El rango de la función son los reales positivos $\mathbb{R}^+$.

c. La gráfica pasa por los puntos $\left(-1, \frac{1}{a}\right)$, $(0, 1)$ y $(1, a)$

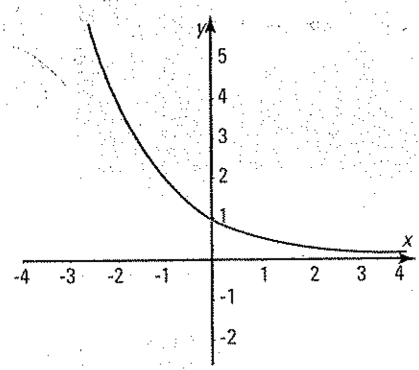
d. El eje x es asíntota de la función.

Ejemplo

Encontrar la gráfica para $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Al remplazar x por los diferentes valores asignados, determinan las parejas ordenadas a partir de las cuales se elabora la gráfica.

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$



La gráfica que se obtiene es la de una función exponencial decreciente.

Teorema (leyes de los exponentes)

Sean $a, b, x \in \mathbb{R}$ con $a > 0$ y $b > 0$, entonces:

1. $a^x \times a^y = a^{x+y}$

2. $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

3. $(a^x)^y = a^{x \times y}$

4. $a^0 = 1$

5. $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

6. $a^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{a^x}$

7. $a^{\frac{-x}{y}} = \frac{1}{\sqrt[y]{a^x}}$

8. $(ab)^x = a^x \times b^x$

9. $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$

10. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-x} = \left(\frac{b}{a}\right)^x = \frac{b^x}{a^x}$

Ejemplo

El número de gametos (un tipo de célula reproductiva) g en cierta planta está determinado por la función $g(n) = 2^n$, donde n es el número total de células que tiene comúnmente un individuo de esta especie. Determinar el número de gametos si la planta tiene 12 células.

Al evaluar 2^{12} en una calculadora, podemos determinar que un individuo de esta especie tiene 4 096 gametos.

PRÁCTICA EN CONTEXTO

Ejercitación de procedimientos

1. Grafica cada función exponencial:

a. $y = f(x) = 3^x$

b. $y = 2^{-x}$

c. $y = \left(\frac{2}{5}\right)^{-x}$

d. $y = (3^x)^2$

e. $y = 2^2 \times 2^x$

f. $y = 3^x + 2$

g. $y = 4^{\frac{1}{x}}$

h. $y = \left(2^{\frac{x}{2}}\right)^2$

i. $y = \left(\frac{2}{5}\right)^x$

Solución de problemas

2. El interés compuesto es la operación financiera en la cual el capital aumenta al final de cada periodo por adición de los intereses vencidos.

En otras palabras, si a un capital le agregamos los intereses que ha obtenido en un determinado periodo, y a este nuevo capital e intereses le pagamos un nuevo interés en un período siguiente, entonces, el interés pagado ha sido compuesto

El monto A al que asciende un capital C cuando se pone a interés compuesto es $A = C(1 + i)^t$, donde i es el interés al que se pone el capital y t el tiempo al el que se coloca.

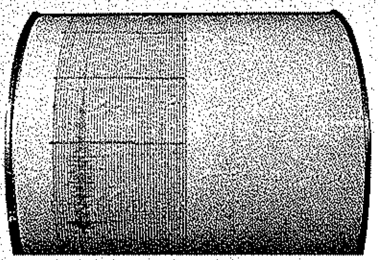
a. ¿Cuál es el monto final de un capital de $ 500 000 que se invierte a una tasa de interés compuesto del 9 % mensual por 3 años?

La función logarítmica

Logro: analizar situaciones de variación con funciones logarítmicas.

Comparte lo que sabes

Elabora en un mismo plano la gráfica de las siguientes funciones $f(x) = 2^x$, $f(x) = 2^{-x}$ y $f(x) = -(2^x)$



Los logaritmos tienen múltiples aplicaciones. La más frecuente es la evaluación y comparación de la intensidad de los sismos, mediante la escala de Richter establecida por el sismólogo estadounidense Charles Francis Richter (1900-1985), para calcular la intensidad de los terremotos mediante la energía del movimiento en el hipocentro o foco gracias a una escala de intensidades que aumenta exponencialmente de un valor al siguiente. Para tal fin, determinó la ecuación $R = \log_{10}(I)$ donde I representa el número de veces que es más intenso el terremoto respecto de la actividad sísmica más pequeña que se puede medir con el sismógrafo.

La **función logarítmica** está definida únicamente para los números positivos a.

Así, $y = \log_a x$ significa que $x = a^y$.

De acuerdo con esta definición, se puede concluir que la función exponencial es la función inversa de la función logarítmica y viceversa.

En la ecuación $y = \log_a x$, la letra y representa el logaritmo, la letra a representa la base y log es la abreviatura de la expresión "logaritmo", esta expresión se lee: "y es el logaritmo de x en base a".

Logaritmo (exponente)

Potencia

$y = \log_a x$

Base

Lo cual significa

Exponente

$x = a^y$

Número

Base

En otras palabras, el logaritmo del número x en la base a, es el exponente al cual debe elevarse la base para obtener el número x, es decir, **un logaritmo es un exponente.**

Ejemplo

$\log_{10} 1000 = 3$, lo que significa que $1000 = 10^3$ $\quad$ $\log_2 1024 = 10$, lo que significa que $2^{10} = 1024$

Forma de graficar funciones logarítmicas

Ejemplo

Graficar $f(x) = y = \log_2 x$, indicando el dominio y rango de la función.

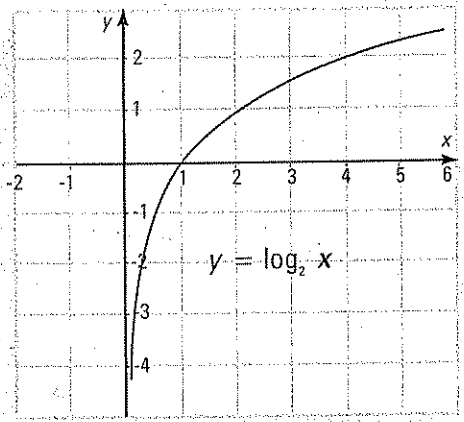
Esta ecuación se expresa en forma exponencial como $2^y = x$. Para empezar se construye la tabla utilizando la forma exponencial y luego intercambiamos los valores de x con los de y para obtener la gráfica del logaritmo.

Tabla para $y = 2^x$

x	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
y	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32

Tabla para $y = \log_2 x$

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
y	−3	−2	−1	0	1	2	3



Escala Richter	Efectos
< 3,5	No se siente.
3,5 – 5,4	Daños menores.
5,5 – 6,0	Daños ligeros.
6,1 – 6,9	Daños deveros.
7,0 – 7,4	Grandes daños.
> 8,0	Gran terremoto.

Observa la gráfica de la página 78 y comprueba que corresponde a la función inversa de esta gráfica. ¿Por qué?

Ejemplo

Tal como vimos en la introducción de esta sección, una de las aplicaciones de los logaritmos es la escala de Richter que se define mediante la ecuación $R = \log_{10}(I)$ donde I representa el número de veces en que es más intenso el terremoto, respecto de la actividad sísmica más pequeña que se puede medir con el sismógrafo.

Si un terremoto mide 6 grados en la escala de Richter, ¿cuántas veces es más intenso respecto de la actividad sísmica más pequeña que se pueda medir?

El número asignado en la escala de Richter R es igual a 6, para determinar cuántas veces es más intenso el terremoto respecto a la actividad sísmica más pequeña que se pueda medir, sustituimos R por 6 en la fórmula y despejamos I:

$$R = \log_{10}(I)$$

$$6 = \log_{10}(I)$$

Resolviendo:

$$10^6 = I$$

Lo cual significa que un terremoto que mida 6 grados en la escala de Richter, es 1 000 000 de veces más intenso con respecto a la actividad más pequeña que se pueda medir.

PRÁCTICA EN CONTEXTO

Ejercitación de procedimientos

1. Escribe cada igualdad en forma logarítmica:

a. $5^5 = 3125$

b. $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$

c. $7^{-3} = \frac{1}{343}$

2. Escribe cada igualdad en forma exponencial:

a. $\log_2 64 = 6$

b. $\log_{\frac{1}{5}} 625 = -4$

c. $\log_4 4\,096 = 6$

Solución de problemas

3. Si la magnitud de un terremoto es de 4,5 en la escala de Richter,

a. ¿cuántas veces es más intenso respecto de la actividad sísmica más pequeña que se puede medir?

b. ¿cuántas veces es más intenso un terremoto que mide 5, 2 grados Richter que uno que mide 5, 25?

4. Averigua en Internet acerca de la magnitud de algunos terremotos y clasifícalos.

TECNOLOGÍA

LAS CALCULADORAS GRAFICADORAS

¿Cómo representar funciones con la calculadora TI-83?

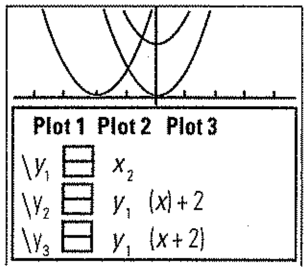
Encendida la calculadora con la tecla ON, se presenta la pantalla principal.

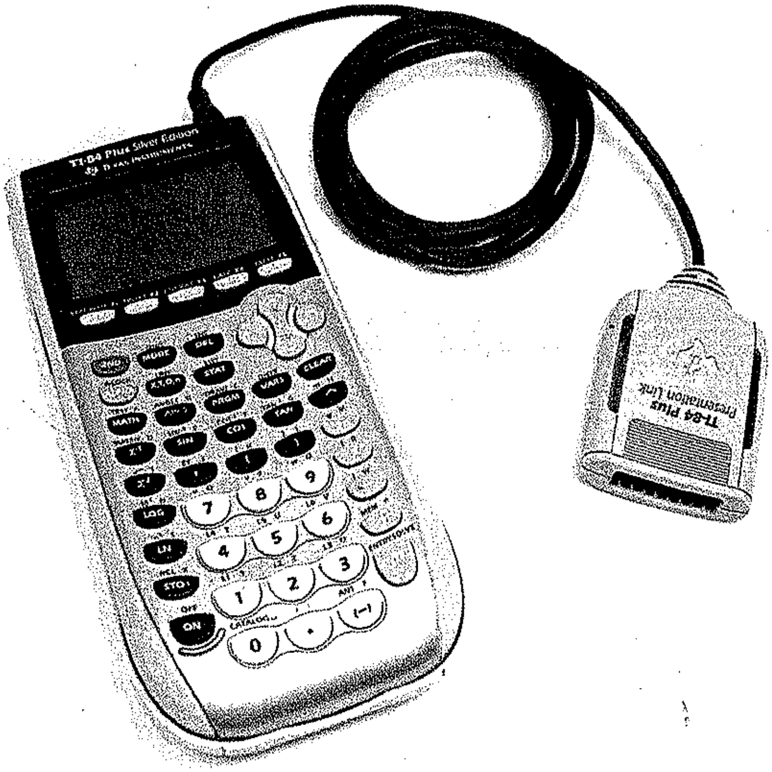
Si algo quedó escrito en la sesión anterior, se podrá borrar con la tecla CLEAR y si es necesario borrar un caracter hay que pulsar DEL, después de situarse sobre él.

Para representar funciones se utilizarán, fundamentalmente las siguientes teclas: las cinco teclas superiores, fuera del teclado general, con los rótulos: Y=, WINDOW, ZOOM, TRACE y GRAPH; las cuatro teclas dispuestas en círculo y que con las flechas indican las distintas direcciones en las que se puede mover el cursor; la tecla que lleva impresas las letras X, T, q y n; las teclas numéricas y las que indican las distintas operaciones.

La primera de las teclas superiores, rotulada como $Y =_1$ *permite acceder a un menú de 10 funciones:*

$$y_1 \,,\, y_2 \,,\, y_3 \,,\, \ldots \,,\, y_8 \,,\, y_9 \,,\, y_0 \,.$$





resumen & refuerzo

2

Propiedades de los logaritmos

Regla del producto para logaritmos

Para números reales positivos x, y, a, con $a > 0$ se tiene:

- $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$

Regla del cociente para logaritmos

Para números reales positivos x, y, a *con* $a > 0$ se cumple que:

$\log_a \left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

Regla de la potencia para logaritmos

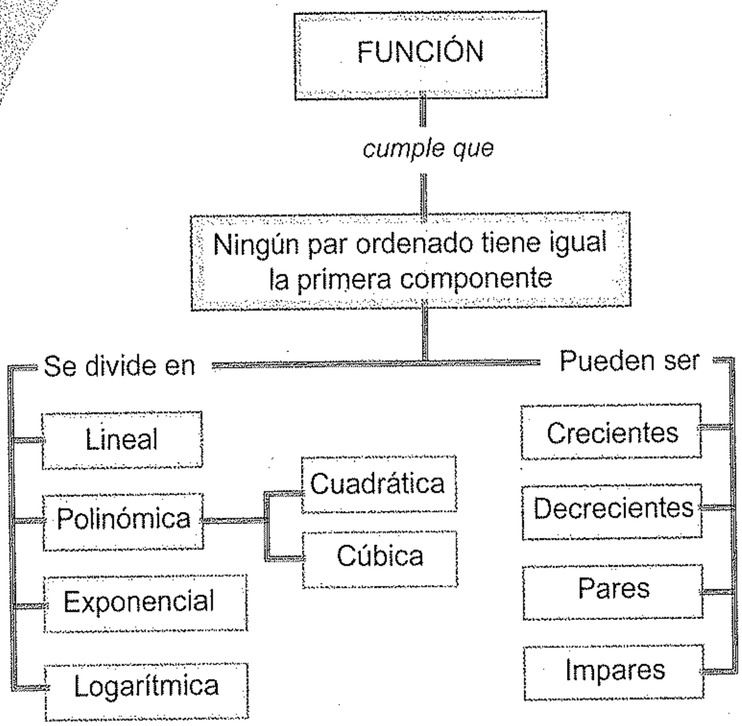
Si x y a son números reales positivos y $n \in \mathbb{R}$ entonces:

$\log_a (x^n) = n[\log_a (x)]$

Otras propiedades

Si x y a son números reales positivos, entonces

- $\log_a a^x = x$
- $a^{\log_a x} = x$, si $(x > 0)$



Actividades

1. Escribe cada igualdad en forma logarítmica:

a. $3^2 = 9$ c. $0.5^2 = 0.25$ e. $5^2 = 25$ g. $10^2 = 100$

b. $2^3 = 8$ d. $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$ f. $\left(\frac{7}{9}\right)^3 = \frac{343}{729}$ h. $\log_7 49 = 2$

2. Escribe cada igualdad en forma exponencial

a. $\log_2 32 = 5$ c. $\log_{\frac{1}{2}} 0.0625 = 4$

b. $\log_{10} 100 = 2$ d. $\log_5 3125 = 5$

3. Grafica las funciones y sus inversas.

a. $y = \log_2 x$ b. $y = \log_3 x$ c. $y = \log_{10} x$ d. $y = \log_{\frac{1}{2}} x$

Pruebas de

Prueba Saber

Con el fin de prestarle un buen servicio a los estudiantes, el centro de copiado del colegio en donde estudia Rafael tiene la siguiente promoción:

No. de fotocopias	Precio por cada fotocopia
1–10	$ 100
11–50	$ 80
51–100	$ 60
101 o más.	$ 50

1. A lo largo de un día de trabajo, el profesor de sociales ordenó fotocopias 3 veces, gastando aproximadamente $ 12 000. El número de fotocopias que ordenó en cada una de sus visitas para obtener el máximo ahorro fue:

a. La primera vez ordenó 100 fotocopias, la segunda vez otras 100 y finalmente, 20.

b. Siempre ordenó fotocopias múltiplos de 5, ordenando cada vez menos cantidad.

c. Siempre ordenó múltiplos de 10. En total ordenó 210 fotocopias.

d. Siempre que fue ordenó 40 fotocopias.

2. Paola necesita 100 fotocopias de un mismo original, pero al leer la lista de precios decide ordenar 101 fotocopias. Para calcular el ahorro hecho se debe:

a. Calcular el valor de 99 fotocopias a $ 60 c/u, restarle el valor de 100 fotocopias a 50 c/u y sumarle $ 50 al valor optenido.

b. Averiguar lo que cuestan 99 fotocopias a $ 50 c/u, lo que cuestan 99 a $ 60 c/u, sumar las cantidades y dividir el resultado entre 2.

c. Calcular lo que cuestan 100 fotocopias a $ 100 c/u y restarle lo que cuestan 99 a $ 50 c/u.

d. Calcular lo que cuestan 99 fotocopias a $ 60 y restarle el valor de 100 a $ 50 c/u.

3. Si tuvieras $ 8 800, ¿cuántos juegos de fotocopias podrías sacar, si tienes un paquete de 17 hojas?

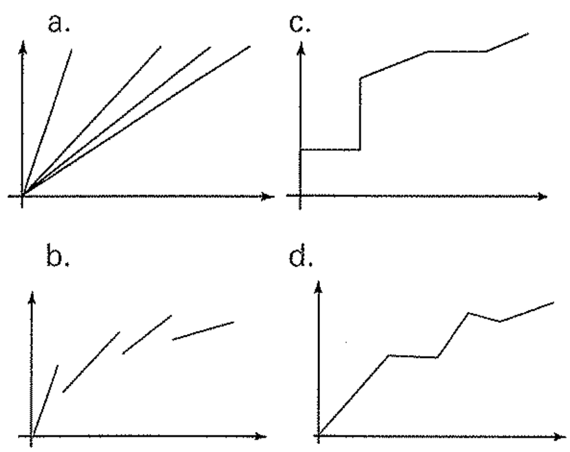
a. Más de 10.
c. Exactamente 10.
b. Más de 12.
d. Exactamente 12.

4. Con el fin de relacionar el movimiento mensual de otra fotocopiadora, el administrador encuentra la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 100x & 0 \le x \le 25 \\ 80x, & 25 < x \le 50 \\ 60x, & 50 < x < 90 \\ 50x, & 90 \le x \le 120 \end{cases}$$

donde x es el número de fotocopias.

La gráfica aproximada que corresponde a la función es:



Prueba PISA

5. Si al final de un día se quiere determinar la cantidad de dinero ganado con la fotocoliadora del punto 1 es necesario recopilar información acerca de:

a. Número de clientes.

b. Número de fotocopias de $ 100 y de $ 50 solicitadas en el día.

c. Número de fotocopias tomadas durante el día.

d. Número de total de fotocopias tomadas, discriminando cuántas de $ 100, $ 80, $ 60 y $ 50.

mejoramiento

6. Al cotizar el cartucho de tinta para la fotocopiadora se recibió la siguiente información:

Tipo	Valor $	Copias
A	37 000	925
B	41 000	1 100
C	62 000	3 000
D	32 000	1 000

El cartucho que resulta más rentable por la cantidad de fotocopias es:

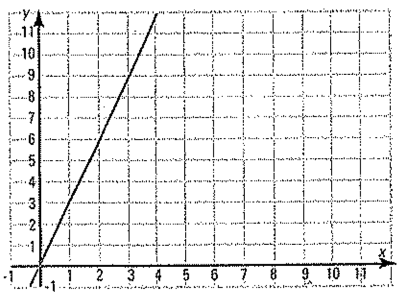
a. El cartucho tipo C. c. El cartucho tipo D.

b. El cartucho tipo A. d. El cartucho tipo B.

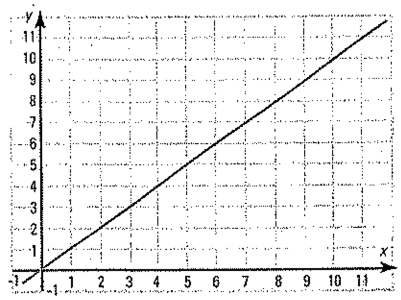
Prueba TIMSS

7. La gráfica de la función $f(x) = ax$ donde a está entre 0 y 1, y x entre 0 y 12.

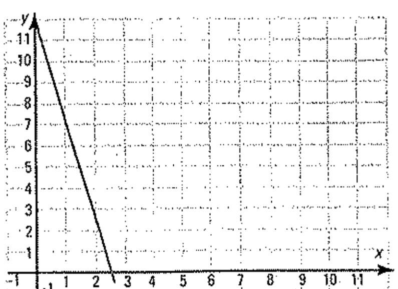
a.



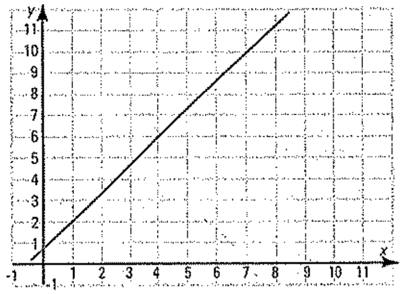
b.



c.

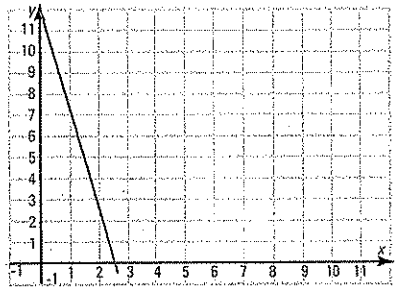


d.

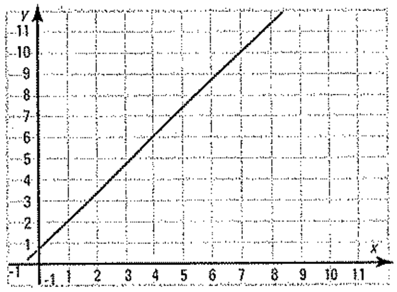


8. La gráfica con la pendiente más cercana a la de la función $y = x$, es:

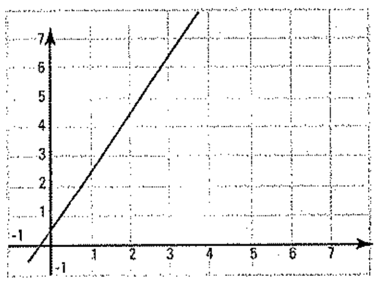
a.



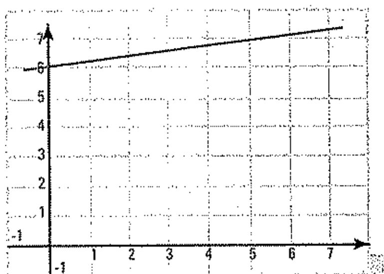
b.



c.



d.



Sistemas de

Unidad 4

300 a.e.c.
Los griegos desarrollan métodos geométricos para resolver ecuaciones algebraicas.

598-660
India
Brahmagupta determina cómo resolver ecuaciones lineales.

850-930
Egipto
A Abu-Kamil se le atribuye una obra donde trata sobre la solución de ecuaciones lineales por métodos simples y falsa posición.

1704-1752
Suiza
Cramer. Expuso en "Introducción al análisis de las curvas algebraicas" la teoría newtoniana referente a las curvas algebraicas, clasificándolas según el grado de la ecuación.

1596-1650
Descartes contribuye al desarrollo de la notación simbólica.

1540-1603
Francia.
Viète introduce la notación simbólica.

APLICACIONES REALES

Investigación de operaciones

En las industrias de producción se aplica la investigación de operaciones (IO), la cual hace referencia a un enfoque científico de la toma de decisiones.

La IO representa mediante modelos simbólicos, las relaciones funcionales que se dan en la realidad, buscando por ejemplo obtener resultados óptimos en cuanto al manejo y distribución de recursos, del trabajo y del tiempo.

ecuaciones lineales

Marco histórico

En las **matemáticas**, un sistema de ecuaciones es un conjunto de dos o más ecuaciones con varias incógnitas, que modela un problema que requiere para su solución tener en cuenta más de una variable.

Los griegos para resolver sistemas de ecuaciones lineales se basaban en la geometría. El griego Thymaridas en el año 400 a.e.c. planteó un método para resolver *n* ecuaciones con n incógnitas. Diophanto resolvió también problemas en los que aparecían sistemas de ecuaciones, pero los transformaba en una ecuación lineal.

La introducción de la notación simbólica asociada a *Viète* (1540-1603), marca el inicio de una nueva etapa en la cual Descartes (1596-1650) contribuye de forma importante al desarrollo de dicha notación.
En este momento, el álgebra se convierte en la ciencia de los cálculos simbólicos y de las ecuaciones.

Posteriormente, Euler (1707-1783) define el álgebra como la teoría de los "cálculos con cantidades de distintas clases".

Estudios realizados por Leibniz a finales del siglo XVII, presentaron la solución a algunos sistemas de tres ecuaciones con dos incógnitas. Posteriormente, en el siglo XVIII, MacLaurin, Cramer, Bézout, Vandermonde, Lagrange y Laplace presentan en sus estudios el desarrollo de los determinantes planteando así una teoría completa como la "regla de Cramer" para la solución de sistemas de ecuaciones lineales.

Para que argumentes

¿Crees que en la naturaleza existen diversos fenómenos que son modelados con ecuaciones lineales o, por el contrario, consideras que sólo modelan casos ideales?

Los modelos utilizados corresponden, en muchas ocasiones, a sistemas de ecuaciones o inecuaciones lineales.

Los siguientes son los pasos en la investigación de operaciones:

1. Definir el problema en forma clara.
2. Construir un modelo que represente al sistema o al proceso en estudio.
3. Deducir una o varias soluciones del modelo.
4. Hacer una prueba del modelo y de la solución obtenida, contrastando esto con la realidad, si es que existe información suficiente, de lo contrario el contraste se hace con modelos secundarios.
5. Ajustar el modelo y hacer monitoreo de los resultados.
6. Implementación de la solución.

Videojuegos

Los populares videojuegos, poseen como parte de su construcción y funcionamiento, una relación estrecha con los sistemas de ecuaciones lineales.

Las acciones que ejecutan los personajes, los desplazamientos y los movimientos en general son controlados por ecuaciones que dependen de variables como el tiempo.

Tema 1

Método gráfico para solucionar sistemas de ecuaciones

Logro: identificar gráficamente la solución de sistemas de ecuaciones lineales.

COMPARTE LO QUE SABES

¿Cuándo dos rectas son paralelas y cuándo son perpendiculares?, ¿cómo son sus pendientes?

Solución de sistemas lineales

Se llama *sistema de ecuaciones lineales* a un conjunto de dos o más ecuaciones. Iniciaremos con el estudio de los sistemas dos por dos (dos ecuaciones con dos incógnitas). En forma general estos sistemas se pueden presentar como:

$$\begin{cases} ax + by = m \\ dx + ey = n \end{cases}$$

Donde a, b, d, e, m y n son números reales.

Ejemplo

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ x + y = -1 \end{cases}$$

La *solución* de un sistema de ecuaciones de dos por dos es un *punto* o par ordenado (x, y) que satisface las dos ecuaciones del sistema. Si el sistema consta de más de dos ecuaciones, por ejemplo un sistema tres por tres (tres ecuaciones con tres incógnitas), entonces la solución será una terna ordenada (x, y, z) la cual satisface a cada una de las ecuaciones del sistema.

En el ejemplo anterior la solución del sistema es la pareja ordenada $(-7, 6)$, pues satisface a cada una de las ecuaciones del sistema, veamos:

En la primera ecuación:

$$2x + 3y = 4$$
$$2(-7) + 3(6) = 4$$
$$-14 + 18 = 4$$
$$4 = 4$$

En la segunda ecuación:

$$x + y = -1$$
$$-7 + 6 = -1$$
$$-1 = -1$$

Los sistemas de ecuaciones lineales, también llamados sistemas de ecuaciones simultáneas, se pueden resolver por diferentes métodos, entre los que se encuentran:

- Método gráfico.
- Método de sustitución.
- Método de igualación.
- Método de reducción.

Analizaremos cada uno de los métodos empezando por el método gráfico. En la unidad anterior ya se explicaron las diferentes formas de construir la gráfica de una función lineal.

El método gráfico para resolver sistemas lineales consiste en trazar cada una de las funciones lineales en un mismo plano para determinar gráficamente el punto de intersección, que corresponde a la solución del sistema.

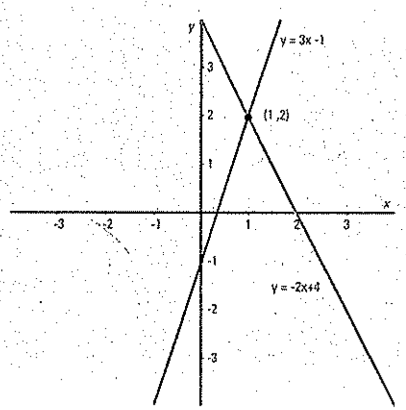
Al utilizar este método hay que tener en cuenta que, en el plano, dos rectas sólo pueden tener tres posiciones relativas (entre sí): se cortan en un punto, son paralelas o son coincidentes (la misma recta).

Si las dos rectas se cortan en un punto, las coordenadas (x, y) de éste conforman la solución del sistema, se dice que el sistema es compatible determinado; si las rectas son paralelas, no tienen ningún punto en común y el sistema no tiene solución. Por último, si ambas rectas coinciden, hay infinitos puntos que pertenecen a ambas y el sistema es compatible indeterminado.

Ejemplos

1. Hallar la solución de: $\begin{cases} y = 3x - 1 & (1) \\ y = -2x + 4 & (2) \end{cases}$

Aplicando cualquiera de las estrategias para trazar funciones lineales, graficamos las ecuaciones (1) y (2):



Se observa en la gráfica que las rectas se intersecan, o se cortan en el punto (1, 2). Este punto es la solución del sistema que se puede expresar como $x = 1$, $y = 2$.

Se puede verificar la solución al remplazar los valores de x y y en el sistema:	Ecuación 1:	Ecuación 2:
	$\boxed{y = 3x - 1}$	$\boxed{y = -2\,x + 4}$
	$2 = 3(1) - 1$	$2 = -2(1) + 4$
	$2 = 3 - 1$	$2 = -2 + 4$
	$2 = 2$	$2 = 2$

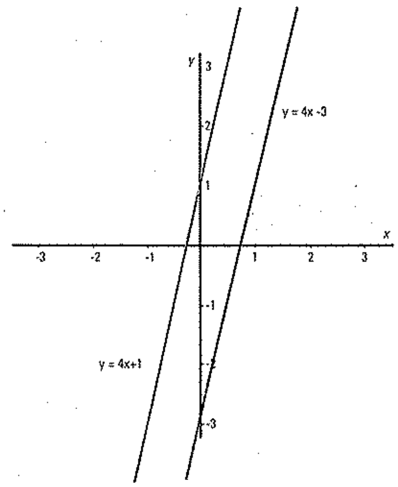
Podemos observar que los valores encontrados satisfacen las ecuaciones del sistema por tanto, la solución en correcta. El sistema dado es compatible determinado.

2. Hallar la solución del sistema:

$$\begin{cases} y - 4x = 1 \\ y + 3 = 4x \end{cases}$$

Para graficar el sistema es conveniente primero escribir las ecuaciones en la forma $y = mx + b$.

$$\begin{cases} y = 4x + 1 \\ y = 4x - 3 \end{cases}$$



Al graficar se observa que las dos rectas son paralelas, ya que sus pendientes son iguales. En este caso el sistema no tiene solución porque no hay punto de corte entre las rectas. El sistema dado es incompatible.

3. Hallar la solución del sistema:

$$\begin{cases} y = 3x - 2 \\ 3y = 9x - 6 \end{cases}$$

Primero se escribe la segunda ecuación del sistema en la forma $y = mx + b$:

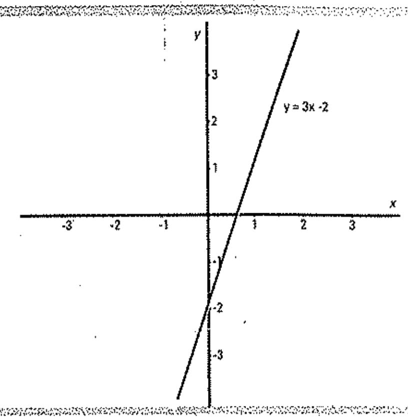
$$y = \frac{9}{3}x - \frac{6}{3}$$

Así, $y = 3x - 2$

Entonces el sistema queda expresado como:

$$\begin{cases} y = 3x - 2 \\ y = 3x - 2 \end{cases}$$

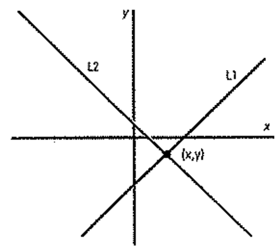
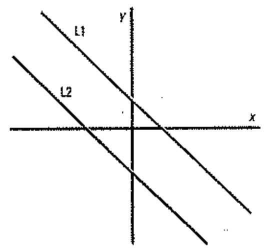
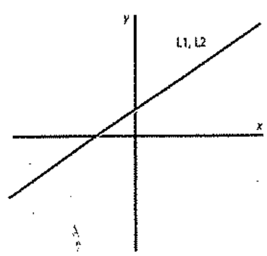
Al construir la gráfica se observa que las dos rectas coinciden. Es evidente que se trata de la misma recta y que los puntos de corte son infinitos, por tanto el sistema tiene infinitas soluciones y el sistema es compatible indeterminado.



PRÁCTICA EN CONTEXTO

1. Completa cada sistema para que tenga:

2. Clasifica cada sistema de ecuaciones de acuerdo con su solución.

a. **Única solución:** cuando las rectas se intersecan en un punto. Este tipo de sistemas también recibe el nombre de **sistema consistente**. $\begin{cases} y = \square\, x + 5 \\ y = \square\, x - 3 \end{cases}$ $\begin{cases} \square\, y + 5x = 1 \\ 3x + \square\, y = 4 \end{cases}$	$\begin{cases} y = 2 - x \\ y = x - 6 \end{cases}$  Sistema:________________
b. **Ninguna solución:** cuando las rectas no se cortan, es decir, son paralelas. Este tipo de sistemas recibe también el nombre de **sistema inconsistente**. $\begin{cases} y = \square\, x - 4 \\ y = \square\, x + 9 \end{cases}$ $\begin{cases} \square\, y + 5x = 1 \\ 3x + \square\, y = 4 \end{cases}$	$\begin{cases} y = \frac{-3}{2}x + 3 \\ y = -\frac{3x}{2} - \frac{9}{2} \end{cases}$  Sistema:________________
c. **Infinitas soluciones:** cuando las dos rectas coinciden en todos los puntos. Este tipo de sistemas recibe también el nombre de **sistema dependiente**. $\begin{cases} y = \square\, x + \square \\ y = \square\, x + \square \end{cases}$ $\begin{cases} y = \square\, x - \square \\ y = \square\, x + \square \end{cases}$	$\begin{cases} y = \frac{3}{4}x + 3 \\ 4y = 3x + 12 \end{cases}$  Sistema:________________

Ejercitación de procedimientos

1. Escribe cada una de las ecuaciones de los siguientes sistemas de la forma $y = mx + b$ y sin graficarlas, determina si el sistema tiene una única solución, no tiene solución o tiene infinitas soluciones.

a. $\begin{cases} y - 7 = \frac{1}{2}x \\ 2y - x = -3 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x - \frac{1}{4}y = 7 \\ 4x - 2y = 14 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x + y = 5 \\ 9x - y = -3 \end{cases}$

d. $\begin{cases} y + 1 = 5x \\ 3y - 15x = -3 \end{cases}$

e. $\begin{cases} 4x - 2y = -6 \\ -10y + 30 = -20x \end{cases}$

f. $\begin{cases} y = -\frac{1}{3}x + 1 \\ 3y = 4x - 9 \end{cases}$

2. Utiliza el método gráfico para determinar la solución de los siguientes sistemas de ecuaciones:

a. $\begin{cases} y = x + 3 \\ y = -\frac{3}{2}x - 2 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x = 4 \\ y - x = 1 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 2y - 3x = 10 \\ 2y + 4 = -3x \end{cases}$

d. $\begin{cases} 2y + 2 = -4x \\ 2x + 4y = 8 \end{cases}$

e. $\begin{cases} -5y + 7x = 1 \\ 28x - 4 = 20y \end{cases}$

f. $\begin{cases} y = x + 3 \\ y = -x + 5 \end{cases}$

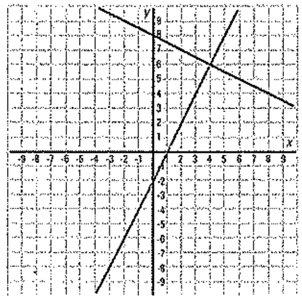
g. $\begin{cases} y = \frac{8}{5}x + 5 \\ y = -\frac{3}{5}x - 6 \end{cases}$

h. $\begin{cases} x + 9 = y + 2 \\ y - 5 = x + 2 \end{cases}$

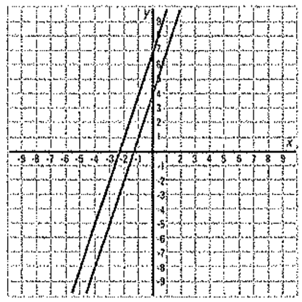
i. $\begin{cases} 7y + 3x = 2 \\ 14y + 6x = 4 \end{cases}$

3. Halla la solución de cada sistema de ecuaciones. Escribe además las ecuaciones correspondientes para cada recta:

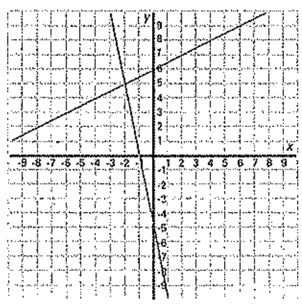
a.



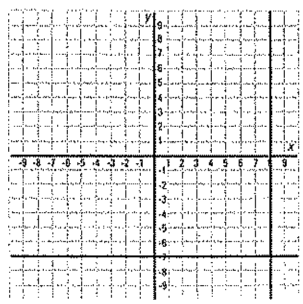
b.



c.



d.



Método de sustitución

Logro: aplicar el método de sustitución en la solución de sistemas de ecuaciones lineales.

COMPARTE LO QUE SABES

Dado el sistema $\begin{cases} px - 6y = 3 \\ -2x - 2q + 4y = 0 \end{cases}$, indica valores para p y q para que el sistema no tenga solución, y valores para que tenga infinitas soluciones.

En ocasiones aplicar el método gráfico no es muy práctico a la hora de resolver un sistema de ecuaciones lineales ya que no siempre la solución (si existe) se puede ver claramente, en ese caso se recurre a los métodos algebraicos como el **método de sustitución**.

Para resolver un sistema de ecuaciones simultáneas por el método de sustitución se aplica el siguiente procedimiento:

1. Se despeja una variable (cualquiera) en una de las ecuaciones que conforman el sistema.
2. Se sustituye ese valor en la otra ecuación y se resuelve la ecuación para la variable que queda.
3. Se remplaza el valor encontrado, en el paso anterior, en la primera ecuación para hallar el valor de la otra incógnita.
4. Se verifica la solución en el sistema inicial.

Ejemplos

1. Halla la solución del sistema:

$$\begin{cases} 3x - 4y = 5 & (1) \\ 2x = 5y - 3 & (2) \end{cases}$$

- Se despeja una variable en cualquiera de las ecuaciones, resulta sencillo en este caso se eligió despejar x en la segunda ecuación: $x = \frac{5y-3}{2}$ (3)
- Se sustituye a x por esta expresión en la ecuación *(1)* y se resuelve para encontrar el valor de y:

$$3\left(\frac{5y-3}{2}\right) - 4y = 5 \text{ y se resuelve:}$$

$$\frac{15}{2}y - \frac{9}{2} - 4y = 5$$

$$\frac{15}{2}y - 4y = 5 + \frac{9}{2}$$

$$\frac{7}{2}y = \frac{19}{2} \text{ entonces } y = \frac{19}{7}$$

- Se puede remplazar el valor de y en cualquiera de las dos ecuaciones iniciales y despejar x, pero como ya se tiene x despejada en la ecuación (3), se hace el remplazo en esta ecuación:

$$x = \frac{5}{2}\left(\frac{19}{7}\right) - \frac{3}{2}$$

$$x = \frac{95}{14} - \frac{3}{2}, \text{ por tanto } x = \frac{37}{7}$$

y la solución del sistema es $\left(\frac{37}{7}, \frac{19}{7}\right)$.

- Se verifica la solución remplazando a x y y por los valorers hallados:

$$3x - 4y = 5$$

$$3\left(\frac{37}{7}\right) - 4\left(\frac{19}{7}\right) = 5$$

$$\frac{111}{7} - \frac{76}{7} = 5$$

$$\frac{35}{7} = 5, \text{ entonces } 5 = 5$$

Ahora en: $2x = 5y - 3$

$$2\left(\frac{37}{7}\right) = 5\left(\frac{19}{7}\right) - 3$$

$$\frac{74}{7} = \frac{95}{7} - 3$$

$$\frac{74}{7} = \frac{95-21}{7}, \text{ entonces } \frac{74}{7} = \frac{74}{7}$$

2. Hallar la solución del siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x - 5y = 1 & (1) \\ -4x + 10y = 6 & (2) \end{cases}$$

Despejando x en la ecuación (1): $x = \dfrac{1 + 5y}{2}$

Remplazando en la ecuación (2): $-4\left(\dfrac{1+5y}{2}\right) + 10y = 6$

Despejando y tenemos: $-\dfrac{4}{2} - \dfrac{20}{2}y + 10y = 6$

Resolviendo: $-2 - 10y + 10y = 6$

$$-10y + 10y = 6 + 2$$

$$0 = 8$$

Lo cual es falso, por tanto el sistema no tiene solución.

...ctas en este caso son paralelas.

3. Hallar la solución del siguiente sistema:

$$\begin{cases} b - 5a = -3 & (1) \\ -2b + 10a = 6 & (2) \end{cases}$$

Despejando b de la ecuación (1): $b = -3 + 5a$

Sustituyendo b en la ecuación (2):

$$-2(-3 + 5a) + 10a = 6$$

$$6 - 10a + 10a = 6$$

$$-10a + 10a = 6 - 6$$

$$0 = 0$$

Se ha obtenido una igualdad que siempre es verdadera.

En este caso se puede afirmar que el sistema tiene infinitas soluciones. Las rectas coinciden.

RAPICOPIAS centro de copiado
NIT. 43.103.212-3
Transversal 51 a No. 69-05
Teléfono: 260 47 10
Medellín

Lito Eneldo Fernando de J. Quiroz Z. NIT 70.517.252-4 - Tel: 239 47 90

DÍA 22 MES 01 AÑO 2011
ORDEN DE TRABAJO 1342

2

Nombre: Luis Alfonso Villa
Teléfono:
Abonó:
Resta:

CANT.	DESCRIPCIÓN
1	Copia 191 col
*	Formato a tamaño
*	Libro de actividades 5
*	Videos solo copia

TOTAL $ 28.700

OBSERVACIONES: Pasó las 12:00

RECLAMAR CON ESTE RECIBO

$2y$

$= 27$

$- y$

$\dfrac{- 3y}{2}$

$+ y) - (9y + 11x) = 2y - 2x$

$x + 5y + 3) = (x - y) - (6x + 8y)$

...o y ejercitación de procedimientos

... si el valor dado es solución del sistema:

$\begin{cases} 4x + 3y = -1 \\ x + 2y = \frac{7}{6} \end{cases} \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$

$\begin{cases} 5m + n = 8 \\ 4m + n = 6 \end{cases} \quad (-2, 2)$

$\begin{cases} 5x + y = 6 \\ 3x - 2y = 14 \end{cases} \quad (4, -2)$

d. $\begin{cases} y(x - 2) - x(y - 3) = -14 \\ x(y - 6) - y(x + 9) = 54 \end{cases} \quad (-2, -6)$

e. $\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{5}{6}y = 2 \\ \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}y = 3 \end{cases} \quad (4, 1)$

f. $\begin{cases} \ldots \\ 0,3a + 0, \ldots \end{cases}$

g. $\begin{cases} 4m + 9 = 8n + 3 \\ 5n + \frac{1}{2} = 5m + \frac{1}{2} \end{cases}$

h. $\begin{cases} x = 14 - y \\ x - y = 6 \end{cases}$

Método de igualación

Logro: aplicar el método de igualación en la solución de sistemas de ecuaciones lineales.

Comparte lo que sabes

Completa el sistema $\begin{cases} y = -2x + 1 \\ y = \end{cases}$ de forma que la solución sea (2, –3). Compara tu respuesta con la de tus compañeros.

Para resolver un sistema de ecuaciones simultáneas por el **método de igualación** se aplica el siguiente procedimiento:

1. Se despeja la misma variable en las dos ecuaciones que conforman el sistema.
2. Se igualan las dos ecuaciones obtenidas.
3. Se resuelve la ecuación resultante para hallar el valor de la incógnita.
4. Se remplaza el valor encontrado en cualquiera de las ecuaciones iniciales y se halla el valor de la otra incógnita.
5. Se verifica la solución en el sistema inicial.

Ejemplos

1. Hallar la solución del sistema:

$$\begin{cases} 6x + 8y = -3 & (1) \\ -2x - 2y = -1 & (2) \end{cases}$$

- Despejando x en las ecuaciones (1) y (2) obtenemos:

$$x = \frac{-3 - 8y}{6}$$

$$x = \frac{2y - 1}{-2}$$

- Al Igualar las ecuaciones, podemos encontrar el valor de y:

$$\frac{-8y - 3}{6} = \frac{2y - 1}{-2}$$

$$-2(-8y - 3) = 6(2y - 1)$$

$$16y + 6 = 12y - 6$$

$$16y - 12y = -6 - 6$$

$$4y = -12, \text{ entonces } y = -3$$

- Conocido el valor de y se remplaza en alguna de las ecuaciones obtenidas para encontrar el valor de x:

$$x = \frac{2y - 1}{-2}$$

$$x = \frac{2(-3) - 1}{-2} = \frac{-6 - 1}{-2}, \text{ entonces } x = \frac{7}{2}$$

- La solución del sistema es $\left(\frac{7}{2}, -3\right)$. Verifica en tu cuaderno si la solución es correcta.

2. Hallar la solución de $\begin{cases} -4a - 3b = 2 & (1) \\ 9b + 12a = 4 & (2) \end{cases}$

- Despejando b en las ecuaciones (1) y (2) obtenemos:

$$b = \frac{4a + 2}{-3}$$

$$b = \frac{4 - 12a}{9}$$

- Al igualar las ecuaciones y despejar a a se obtiene:

$$\frac{4a + 2}{-3} = \frac{4 - 12a}{9}$$

$$9(4a + 2) = -3(4 - 12a)$$

$$36a + 18 = -12 + 36a$$

$$36a - 36a = -12 - 18$$

$0 = -30$, por lo cual el sistema no tiene solución.

¿Cómo son las rectas?

Ejemplo

3. Hallar la solución de: $\begin{cases} ax - by = 0 & (1) \\ x + y = \dfrac{a+b}{ab} & (2) \end{cases}$

Despejando x en las ecuaciones (1) y (2):

$x = \dfrac{by}{a}$ $\qquad$ $x = \dfrac{a+b}{ab} - y$

Igualando las ecuaciones anteriores y despejando y:

$$\frac{by}{a} = \frac{a+b}{ab} - y$$

$$\frac{by}{a} + y = \frac{a+b}{ab}$$

$$y\left(\frac{b}{a} + 1\right) = \frac{a+b}{ab}$$

$$y = \frac{\dfrac{a+b}{ab}}{\left(\dfrac{b}{a}+1\right)} = \frac{\dfrac{a+b}{ab}}{\left(\dfrac{b+a}{a}\right)}$$

$y = \dfrac{a(a+b)}{ab(b+a)}$, entonces $y = \dfrac{1}{b}$

- Remplazando el valor de y en alguna de las ecuaciones obtenidas anteriormente:

$x = \dfrac{b\left(\dfrac{1}{b}\right)}{a}$, es decir $x = \dfrac{1}{a}$

y la solución del sistema es $\left(\dfrac{1}{a}, \dfrac{1}{b}\right)$.

Verifícala.

PRÁCTICA EN CONTEXTO

Ejercitación de procedimientos

1. Aplicando el método de igualación resuelve los siguientes sistemas:

a. $\begin{cases} 5m - 9 = 4n \\ 3n + 1 = -2m \end{cases}$

b. $\begin{cases} x - 7y + 17 = 0 \\ -3x - 2y - 5 = 0 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 12x - 6y = 10 \\ 6x + 12y = 10 \end{cases}$

d. $\begin{cases} ay - 4ab = -bx \\ \dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b} \end{cases}$

e. $\begin{cases} 2x - 3y = -14 \\ 3x + 3y = 39 \end{cases}$

f. $\begin{cases} 3x + 3y = -4 \\ 4y + 4x = -2 \end{cases}$

g. $\dfrac{3x}{m} - 3 = -\dfrac{3y}{n}$
$\dfrac{9x}{m} = 3 + \dfrac{6y}{n}$

h. $6a + 4b = 14$
$-3b + 6a = -21$

i. $-\dfrac{3}{2}y = 6 - 3a$
$3y = 6a - 12$

j. $3a - 2b = 5$
$a = 2 + b$

k. $-5y = -3 - 4x$
$2x = -1 - 3y$

l. $-(x - 3y) - y = x$
$2(x - 2y) - 5 = 0$

Razonamiento y ejercitación de procedimientos

2. Determina si la afirmación es falsa (F) o verdadera (V). Justifica tu respuesta.

a. El sistema $\begin{cases} \dfrac{3}{m} + \dfrac{1}{n} = 1 \\ \dfrac{6}{m} + \dfrac{1}{n} = 2 \end{cases}$ tiene infinitas soluciones.

b. La pareja ordenada (10,5) es la solución del sistema: $\begin{cases} x - y = 5 \\ 3(x - 5) = 3y \end{cases}$

c. El sistema $\begin{cases} 0,2x + 0,5y = 1,2 \\ -3,5x + 6,3y = 2,8 \end{cases}$ no tiene solución.

d. La pareja ordenada (2, −0, 5) no es solución del sistema $\begin{cases} \dfrac{y}{4} = \dfrac{13}{24} - \dfrac{x}{3} \\ \dfrac{3x}{2} - \dfrac{19}{4} = \dfrac{4}{3} \end{cases}$

e. El valor de m en el sistema $\begin{cases} 6(m + n) - 12 = 30 - 3m \\ 0,9m + 1,2n = 10,2 \end{cases}$ es igual a −2.

Método de reducción

Logro: aplicar el método de reducción en la solución de sistemas de ecuaciones lineales.

Comparte lo que sabes

Halla los valores de a para que (4 000, 3 000) sea la solución del sistema $\begin{cases} y = 0,75x \\ y = ax + 500 \end{cases}$

Para resolver un sistema de ecuaciones simultáneas por el **método de reducción**, o eliminación, se aplica el siguiente procedimiento:

1. En caso necesario, se reescribe cada ecuación en la forma: $ax + by = c$.
2. Si es necesario se multiplica una o ambas ecuaciones por una constante (o constantes) de manera que el coeficiente de una de las variables sea el opuesto aditivo del coeficiente de la misma variable, pero de la otra ecuación.
3. Se suman los lados respectivos de las ecuaciones, obteniendo una sola ecuación con una sola variable.
4. Se despeja la variable obtenida en la ecuación.
5. Se sustituye el valor obtenido en cualquiera de las ecuaciones iniciales y se resuelve la para encontrar el valor de la variable restante.
6. Se verifica la solución en el sistema inicial.

Ejemplos

1. Hallar la solución del sistema: $\begin{cases} 8x - 2y = 28 & (1) \\ 10x + 4y = 22 & (2) \end{cases}$

- En este caso se puede multiplicar la primera ecuación por 2 de manera que al sumar las dos ecuaciones se elimine la variable y; resultando $16x - 4y = 56$
- Sumando las dos ecuaciones obtenemos:

$$\begin{array}{r} 16x - 4y = 56 \\ +\ 10x + 4y = 22 \\ \hline 26x \qquad = 78 \end{array}$$

es decir $x = \frac{78}{26} = 3$

- Remplazando el valor de x en cualquiera de las ecuaciones iniciales, por ejemplo en la ecuación (2), y despejando y, se obtiene:

$$10(3) + 4y = 22$$

$$30 + 4y = 22$$

$$4y = 22 - 30, \text{ es decir } y = \frac{-8}{4} = -2.$$

- Por lo cual, la solución del sistema es (3, –2). Verifica la solución.

2. **Hallar la solución del sistema:**

$$\begin{cases} 10x + 8y = 4 & (1) \\ 5x + 4y = 2 & (2) \end{cases}$$

- Multiplicando la segunda ecuación por (–2), obtenemos:

$$-10x - 8y = -4 \quad (3)$$

y sumando las ecuaciones (1) y (3):

$$\begin{array}{r} 10x + 8y = 4 \\ -10x - 8y = -4 \\ \hline 0 = 0 \end{array}$$

por lo cual el sistema tiene infinitas soluciones.

¿Cómo son las rectas correspondientes al sistema?

3. Hallar la solución del sistema: $\begin{cases} \dfrac{a}{x} - \dfrac{1}{y} = 3b & (1) \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 4b & (2) \end{cases}$

- Sumando directamente las ecuaciones (1) y (2) eliminamos la variable y:

$$\begin{array}{r} \dfrac{a}{x} - \dfrac{1}{y} = 3b \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 4b \\ \hline \dfrac{a}{x} + \dfrac{1}{x} = 7b \end{array}$$

Por lo cual, $x = \dfrac{a+1}{7b}$ y al sustituir a x en la ecuación (1) encontramos que:

$$\frac{a}{\frac{a+1}{7b}} - 3b = \frac{1}{y}\text{, es decir, que}$$

$$\frac{7ab}{a+1} - 3b = \frac{1}{y}$$

$$\frac{7ab - 3b(a+1)}{a+1} = \frac{1}{y}$$

$$\frac{7ab - 3ab - 3b}{a+1} = \frac{1}{y}$$

$$\frac{4ab - 3b}{a+1} = \frac{1}{y}$$

Entonces $\dfrac{b(4a-3)}{a+1} = \dfrac{1}{y}$, es decir, $y = \dfrac{a+1}{b(4a-3)}$, por lo tanto la solución del sistema es:

$$\left(\frac{a+1}{7b}, \frac{a+1}{b(4a-3)}\right)$$

Verifica la solución.

Práctica en contexto

Ejercitación de procedimientos

1. Aplicando el método de reducción resuelve los siguientes sistemas:

a. $\begin{array}{l} b = 5 - \frac{a}{2} \\ 5b = 2a - 2 \end{array}$

b. $\begin{array}{l} 2n = 5 \\ m + n = 0 \end{array}$

c. $\begin{array}{l} x = -y + c \\ (a+b)y = (a-b)x \end{array}$

d. $\begin{array}{l} \frac{a}{2} + \frac{b}{2} - 1 = 0 \\ 5a - b - 4 = 0 \end{array}$

e. $\begin{array}{l} -4y - 4x = 30 \\ 4y + 5x = -44 \end{array}$

f. $\begin{array}{l} \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{y} = \dfrac{3}{5} \\ \dfrac{-3}{y} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{-1}{2} \end{array}$

g. $\begin{array}{l} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{y} - 2 \\ \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{y} \end{array}$

h. $\begin{array}{l} \dfrac{x-3}{3} - \dfrac{y-4}{4} = 0 \\ \dfrac{x-4}{2} + \dfrac{y+2}{5} = 3 \end{array}$

i. $\begin{array}{l} \dfrac{x+b}{a} = \dfrac{a+b}{b} - \dfrac{y-b}{b} \\ \dfrac{x-a}{b} = \dfrac{a+b}{b} + \dfrac{y-b}{b} \end{array}$

Razonamiento y ejercitación de procedimientos

2. Halla los valores que hacen falta teniendo en cuenta la solución dada para cada sistema.

a. $\begin{cases} -x - 4y = \square \\ 5x - \square y = 4 \end{cases}$ $(2,3)$

b. $\begin{cases} \square x + y = -2 \\ 6x - 5y = \square \end{cases}$ $\left(\frac{1}{2}, -3\right)$

c. $\begin{cases} 3a + 2b = 7 \\ \square a + \square b = 9 \end{cases}$ $(1, 2)$

d. $\begin{cases} 10m + \square n = 1 \\ 16m - 9n = \square \end{cases}$ $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right)$

e. $\begin{cases} -3x - 8y = \square \\ \square x + 9y = 1 \end{cases}$ $(-4, 1)$

f. $\begin{cases} \square x - 4y = -1 \\ 2x - \square y = 2 \end{cases}$ $(-11, -8)$

Problemas

Logro: modelar situaciones de variación utilizando sistemas de ecuaciones.

Comparte lo que sabes

Utiliza cualquiera de los métodos vistos anteriormente y resuelve el sistema $\begin{cases} -10x + 2y = -8 \\ 2x - 5y = -3 \end{cases}$

Existen problemas que involucran más de una variable y por tanto deben ser resueltos utilizando un sistema de ecuaciones lineales. En esta sección aprenderás a plantear sistemas de ecuaciones lineales a partir de una situación dada y a aplicar los métodos de solución.

Al abordar un problema es importante tener en cuenta los siguientes pasos:

1. **Comprender el problema, es decir, leer cuidadosamente el problema, y hacerlo tantas veces como sea necesario; identificando cuál es la información relevante (los datos) y cuál es la incógnita o incógnitas.**
2. **Asignar a cada una de las incógnitas una variable específica; éstas se utilizaran en el planteamiento del sistema.**
3. **Establecer las ecuaciones que muestren las relaciones dadas entre las variables y las cantidades conocidas.**
4. **A partir del sistema planteado, escoger el método de solución apropiado y aplicarlo.**
5. **Verificar la solución obtenida.**

Ejemplo

1. **Un vendedor recibe su salario semanal, más una comisión porcentual sobre sus ventas. En una semana vendió $ 850 000 en mercancías y recibió como pago, en total, por esa semana $ 205 000. En la siguiente semana vendió $ 675 000 en mercancía y su salario fue de $ 187 500. Determina cuál es el salario semanal del vendedor y cuál es el porcentaje de la comisión que recibe por sus ventas.**

Solución

De la lectura del problema se puede extraer que el salario del vendedor está compuesto por un valor fijo (semanal) más un porcentaje sobre las ventas que haga en una semana.

Llamemos:

x al salario semanal.
y al porcentaje de comisión.

Los valores de las ventas de cada semana y el salario semanal nos sirven para plantear el sistema de ecuaciones:

Salario fijo semanal + Comisión = Pago semanal.

En la semana 1 ganó: $x + 850\,000y = 205\,000$

En la semana 2 ganó: $x + 675\,000y = 187\,500$

Luego el sistema de ecuaciones es:

$$\begin{cases} x + 850\,000y = 205\,000 \\ x + 675\,000y = 187\,500 \end{cases}$$

Este sistema se puede resolver aplicando el método de reducción multiplicando la segunda ecuación por −1 y sumándola con la primera ecuación:

$$\begin{array}{r} x + 850\,000y = 205\,000 \\ -x - 675\,000y = -187\,500 \\ \hline 175\,000y = 17\,500 \end{array}\text{, por lo cual}$$

$$y = \frac{17\,500}{175\,000}\text{, es decir, } y = 0,1$$

Este resultado nos muestra que la comisión del vendedor es del 10%.

Teniendo el valor de y podemos hallar el valor de x remplazando y en cualquiera de las ecuaciones del sistema inicial, por tanto:

$$x + 675\,000y = 187\,500$$

$$x + 675\,000(0,1) = 187\,500$$

$$x + 67\,500 = 187\,500$$

$$x = 187\,500 - 67\,500$$

$$x = 120\,000$$

Entonces el salario semanal del vendedor es de $ 120 000

2. Un jardinero necesita aplicar una solución líquida de potasio con concentración del 5% al jardín de una finca, pero tiene una solución líquida de potasio del 2% y otra del 10%. ¿Cuántos galones debe mezclar de cada una de las soluciones para obtener 6 galones con concentración del 5%?

Solución

Llamemos:

x a los galones de solución al 2%.
y a los galones de solución al 10%.

El total de galones que se quiere obtener es 6, por tanto: $x + y = 6$

La concentración de potasio líquido en los seis galones debe ser del 5%; por tanto: $(0,02)\,x + (0,1)\,y = (0,05)\,6$

- Luego el sistema de ecuaciones es:

$$\begin{cases} x + y = 6 & (1) \\ (0,02)\,x + (0,1)\,y = 0,3 & (2) \end{cases}$$

Y para resolverlo se puede a utilizar el método de sustitución.

- Despejando x de la ecuación (1), obtenemos: $x = 6 - y$
- Sustituyendo este valor en la ecuación (2) y despejando:

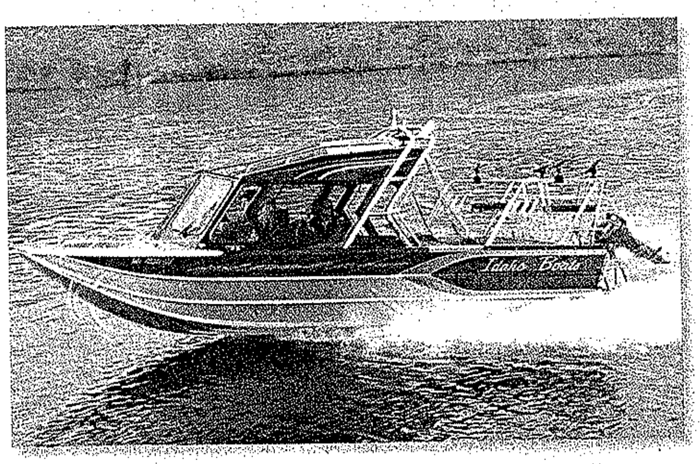
$$(0,02)(6 - y) + (0,1)\,y = 0,3$$

$$0,12 - 0,02y + 0,1y = 0,3$$

$$0,08y = 0,18$$

$$y = 2,25$$

- Luego se necesitan 2, 25 galones de solución al 10%.
  - Para hallar el valor de x remplazamos y en la ecuación (3), entonces $x = 6 - 2,25$, es decir $x = 3,75$, por lo cual se necesitan 3, 75 galones de solución al 2%.



3. Una lancha de motor viaja contra la corriente de un río recorriendo 8 km en 25 minutos. Al regreso de su viaje (con la misma corriente) le toma 20 minutos. Calcula la velocidad de la lancha y la velocidad de la corriente en kilómetros por hora.

Solución

Llamemos:

x a la velocidad de la lancha.
y a la velocidad de la corriente.

Para plantear el problema, debemos tener en cuenta que: cuando la lancha viaja en contra de la corriente ésta retarda su movimiento, pero cuando viaja en el mismo sentido de la corriente su velocidad aumenta, por tanto:

- La velocidad en contra de la corriente es: $x - y$
- La velocidad a favor de la corriente es: $x + y$
- El tiempo en horas de los dos recorridos es:

  Tiempo en contra de la corriente $\frac{25}{60} = \frac{5}{12}$ horas.

  Tiempo a favor de la corriente $\frac{20}{60} = \frac{1}{3}$ horas.
- El recorrido fue de 8 km, tanto en el viaje de ida como de regreso.

Teniendo en cuenta la definición de distancia $(d = v \times t)$ podemos plantear el sistema:

$$\begin{cases} 8 = (x - y)\frac{5}{12} \\ 8 = (x + y)\frac{1}{3} \end{cases}, \text{ es decir, } \begin{cases} x - y = 19,2 & (1) \\ x + y = 24 & (2) \end{cases}$$

Aplicando el método de reducción tenemos:

$$\begin{array}{r} x - y = 19,2 \\ x + y = 24 \\ \hline 2x \quad = 43,2 \end{array}$$

por lo cual $x = 43,2 \div 2 = 21,6$.

Remplazando el valor de x en la ecuación (2) obtenemos:

$$21,6 + y = 24$$

$$y = 24 - 21,6 = 2,4$$

Luego, la velocidad de la lancha es de 21, 6 km/h y la velocidad de la corriente es 2, 4 km/h.

PRÁCTICA EN CONTEXTO

Solución de problemas

1. Resuelve los siguientes problemas:

a. Entre Carlos, Manuel y Pedro tienen \$ 240 000. Si Manuel tiene el doble de lo que tiene Pedro y Carlos tiene \$ 40 000 más de lo que tiene Manuel, ¿cuánto tiene cada uno?

b. Si una granja tuviera 1 metro más de largo y de ancho, el área sería 26 m^2 más de lo que es en la actualidad; y si tuviera 3 metros menos de largo y 2 metros más de ancho, el área sería 19 m^2 más grande de lo que es actualmente.

¿Cuáles son las dimensiones de la granja?

c. María y Claudia aportan capital a una empresa. Si la diferencia de aportes representa un tercio del capital conjunto y el doble de uno de los aportes menos el otro es igual a \$ 60 000, ¿cuál es el capital total?

d. La distancia entre la ciudad A y la ciudad B es de 26 km. Si de una de las ciudades sale un ciclista que recorre 1 km cada tres minutos y de la otra ciudad sale al encuentro, simultáneamente, otro ciclista que recorre 1 km cada cuatro minutos. Calcula cuánto tiempo tardarán en encontrarse.

e. Una persona gasta $\frac{1}{3}$ de su dinero y luego $\frac{2}{5}$ de lo que le queda. Si tiene aún \$ 60 000 ¿cuánto dinero tenía inicialmente?

f. La base mayor de un trapecio es el doble de la menor y la altura del mismo es igual a 12, 5 cm. ¿Cuántos centímetros tiene cada una de las bases, si la superficie del trapecio es de 75 centímetros cuadrados?

g. En la batalla de Boyacá, la suma de las edades de Bolívar y Santander, en esa fecha, era de 63 años. Y si al doble de la edad de Bolívar se le resta la edad de Santander aumentada en 21 el resultado es la edad que tenía al morir el héroe comunero José Antonio Galán es decir, 42. ¿Cuántos años tenían Bolívar y Santander en el año en que ocurrió la batalla de Boyacá?

h. Una llave abierta por completo llena un tanque en cinco horas. Otra abierta por completo lo hace en dos horas. ¿Cuánto tiempo se tardará en llenarlo si se mantienen las dos llaves abiertas parcialmente de tal manera que permitan el pasaje de la mitad del caudal?

i. Guillermo es el zootecnista que se encarga de preparar una dieta de engorde para pollos. Él determina que éstos necesitan 20 g de proteína y 6 g de grasa y cuenta con dos tipos de alimento:

* El primero contiene 20% de proteína y 2% de grasa.
* El segundo contiene 10% de proteína y 6% de grasa.

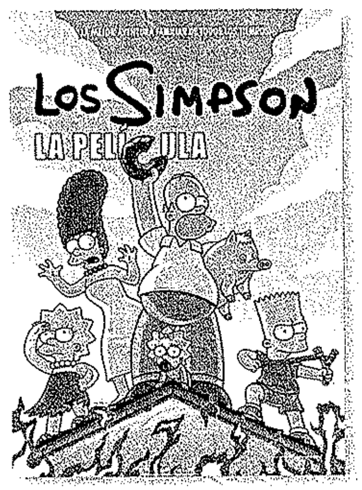
¿Cuántos gramos de cada alimento deberá mezclar para obtener una dieta saludable?

j. Para fabricar objetos de plata se tienen dos aleaciones: una contiene 35% de plata y otra 60%. ¿Qué cantidad debe utilizar de cada una para obtener 100 g de una aleación que contenga 50% de plata?

k. Una cantina contiene 12 l de agua y 18 l de leche y otra contiene 9 l de agua y 3 l de leche. ¿Cuántos litros hay que sacar de cada cantina para obtener una mezcla de 7 l de agua y 7 l de leche?

l. En un almacén de ventas al por mayor se realiza una venta de fin de año que consiste en camisetas de marca A y blusas de marca B. Se sabe que el precio de una camiseta y una blusa es de $105 000 y que con el dinero para una blusa se pueden comprar dos camisetas. ¿Cuánto es el valor de una camiseta y 5 blusas?

m. En un restaurante X se venden dos tipos de menú: el almuerzo ejecutivo y el especial. Dos amigos entran al restaurante y el primero pide ejecutivo mientras el segundo solicita que le traigan el menú especial, la cuenta que deben pagar entre los dos es $ 14 500. Luego entran cinco personas, tres de ellos pidieron el ejecutivo y los demás piden al mesero el almuerzo especial y la cuenta les salió por $ 34 500. ¿Cuánto cuesta un almuerzo ejecutivo y uno especial?



n. David y Alexander se van a una feria de software. Como son aficionados a las películas y los videos, David terminó comprando dos películas y cinco videojuegos, mientras Alexander compró tres películas y ocho videojuegos, y la cuenta de los dos sumó $ 684 000. Si Alexander regresa y compra 7 videojuegos y una película y paga por estos artículos $ 326 000, ¿cuánto cuestan un videojuego y 3 películas?

Sistemas 3 X 3

Logro: modelar situaciones de variación utilizando sistemas de ecuaciones lineales de tres por tres.

Comparte lo que sabes

Hallar las edades de dos personas sabiendo que la suma de las mismas es 50 años y que la razón entre las mismas era, hace 5 años, igual a $\frac{1}{3}$.

Los sistemas 3×3, es decir tres ecuaciones con tres incógnitas, son de la forma:

$$\begin{cases} ax + by + cz = m \\ dx + ey + fz = n \\ gx + hy + iz = l \end{cases}$$

Donde $a, b, c, d, e, f, g, h, i, m, n, l$ son números reales.

La solución de estos sistemas, si existe, es una terna ordenada de la forma (x, y, z), que se encuentra utilizando cualquiera de los métodos algebraicos vistos.

Ejemplos

1. Resolver el sistema: $\begin{cases} 2x + 4y + 3z = 3 & (1) \\ 10x - 8y - 9z = 0 & (0) \\ 4x + 4y - 3z = 2 & (3) \end{cases}$

- Sumando las ecuaciones (1) y (3) eliminamos la variable z.

$$\begin{array}{rrrrrrrl} & 2x & + & 4y & + & 3z & = & 3 \\ + & 4x & + & 4y & - & 3z & = & 2 \\ \hline & 6x & + & 8y & & & = & 5 \quad (4) \end{array}$$

- Multiplicando la ecuación (1) por 3 y sumándola con la ecuación (2) podemos, de igual forma, eliminar la variable z.

$$\begin{array}{rrrrrrrl} & 6x & + & 12y & + & 9z & = & 9 \\ + & 10x & - & 8y & - & 9z & = & 0 \\ \hline & 16x & + & 4y & & & = & 9 \quad (5) \end{array}$$

Con las ecuaciones (4) y (5) podemos formar un sistema 2×2 y de esta forma encontrar los valores de x y y.

Para solucionar el nuevo sistema debemos multiplicar la ecuación (5) por -2 y sumarla con la ecuación (4):

$$\begin{array}{rrrrrl} & 6x & + & 8y & = & 5 \\ + & -32x & - & 8y & = & -18 \\ \hline & -26x & & & = & -13 \end{array}$$

entonces $x = \frac{-13}{-26} = \frac{1}{2}$

- Remplazando x en la ecuación (4).

$$6\left(\frac{1}{2}\right) + 8y = 5, \text{ entonces } 3 + 8y = 5$$

$$y = \frac{5-3}{8} = \frac{1}{4}$$

- Teniendo los valores de $x = \frac{1}{2}$ y $y = \frac{1}{4}$, podemos remplazarlos en la ecuación (1) para hallar el valor de z.

$$2\left(\frac{1}{2}\right) + 4\left(\frac{1}{4}\right) + 3z = 3$$

$$1 + 1 + 3z = 3$$

$$z = \frac{1}{3}$$

- Entonces la solución del sistema es la terna:

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right)$$

Una ecuación de la forma $ax + by + cz = d$ representa un plano.

Cuando se elimina una variable de un par de ecuaciones, se determina la ecuación de una recta: la que resulta de intersectar los dos planos.

Cuando se intersecta uno de los planos con los otros dos, se determinan dos rectas, cuyo punto de corte es común a los tres planos.

Por lo tanto, resolver un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas significa encontrar el punto de convergencia de los tres planos correspondientes. ¿En qué casos no habrá solución? ¿En qué casos las soluciones son infinitas? Explica.

2. Resolver el sistema: $\begin{cases} 3a - b + c = 2 & (1) \\ 2a + b + 2c = 1 & (2) \\ a - 2b - c = 0 & (3) \end{cases}$

- Sumando las ecuaciones (1) y (3) se elimina la variable c:

$$\begin{array}{rrrrrl} 3a & - & b & + & c = 2 & \longrightarrow \text{Plano (1)} \\ + \quad a & - & 2b & - & c = 0 & \longrightarrow \text{Plano (3)} \\ \hline 4a & - & 3b & & = 2 \quad (4) & \longrightarrow \text{Recta donde se cortan los planos (1) y (3).} \end{array}$$

- Multiplicando la ecuación (3) por 2 y sumándola con la ecuación (2) se elimina la variable c:

$$\begin{array}{rrrrrl} 2a & - & 4b & - & 2c = 0 & \longrightarrow \text{Plano (3)} \\ + \quad 2a & + & b & + & 2c = 1 & \longrightarrow \text{Plano (2)} \\ \hline 4a & - & 3b & & = 1 \quad (5) & \longrightarrow \text{Recta donde se cortan los planos (3) y (2).} \end{array}$$

- Para resolver el nuevo sistema dos por dos, restamos de la ecuación (4) la (5):

$$\begin{array}{rrrl} 4a & - & 3b & = 2 \\ - \quad 4a & - & 3b & = 1 \\ \hline & & 0 & = 1 \end{array}$$

lo cual es falso, por tanto el sistema no tiene solución.

¿Qué ocurre con los tres planos en este caso?

PRÁCTICA EN CONTEXTO

Ejercitación de procedimientos

1. Determina la solución de los siguientes sistemas lineales de tres variables:

a. $\begin{cases} 6x + 8y + 2x = 2 \\ 2x + 6y - 2z = -4 \\ -4x + 2y - 4z = -2 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2x - 3y + 5z = 5 \\ -6x + 9y + 4z = 4 \\ 4x + 6y - z = 3 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y - z = -3 \\ x - 3y + 2z = 1 \end{cases}$

d. $\begin{cases} \frac{3}{2}n - 4p = -\frac{1}{2} \\ m + \frac{3}{2}n + 2p = \frac{3}{2} \\ \frac{m}{2} - p = 0 \end{cases}$

e. $\begin{cases} \frac{1}{3}b + c - \frac{a}{3} = \frac{1}{3} \\ -\frac{5}{3}c + \frac{2}{3}b + a = \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3}a + b - \frac{2}{3}c = 2 \end{cases}$

f. $\begin{cases} \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}c - \frac{5}{4} = 0 \\ \frac{1}{4}a - \frac{3}{4}c + \frac{6}{4} = 0 \\ a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{4}c + \frac{9}{4} = 0 \end{cases}$

g. $\begin{cases} 10x - 2y + 6z = 24 \\ 2x + 8y - 4z = 6 \\ 4x - 6y - 2z = 14 \end{cases}$

h. $\begin{cases} -8x = 8 \\ 4x - 12y = 8 \\ -4x + 8y + 12z = -28 \end{cases}$

i. $\begin{cases} 3x - 2y + 2 = 2 \\ x + 4y - z = 6 \\ 2x + 5y - 7z = -9 \end{cases}$

j. $\begin{cases} 3x - 5y + z = 0 \\ \frac{7}{9}x + 3y - z = 9 \\ 21x - 35y + 7z = 0 \end{cases}$

k. $\begin{cases} 6x - 3y = 7 \\ 23x + 9z = 4 \\ \frac{2}{9}y - 11z = 12 \end{cases}$

l. $\begin{cases} 22x - 13y + z = 6 \\ 2x + 4y - 9z = 0 \\ 12x - \frac{4}{5}z = 1 \end{cases}$

2. Determina si la terna corresponde a la solución del sistema. De no serlo, halla la correcta.

a. $\begin{cases} 2a + 6b - 4c = 1 \\ 2a + b - 3c = -7 \\ a + 3b - 2c = 4 \end{cases}$ Sol $(2, 3, -1)$

b. $\begin{cases} 4x + 6y = -10 \\ 4x - 8y + 6z = 56 \\ 6x + 2y + 8z = 38 \end{cases}$ Sol $(2, -3, 4)$

c. $\begin{cases} a - 5 = 0 \\ 2a + 3b - 2 = 0 \\ 5a + 4b + c + 1 = 0 \end{cases}$ Sol $\left(-5, \frac{8}{3}, \frac{46}{3}\right)$

d. $\begin{cases} \frac{1}{2}(m + p - 5) - 2m = -11 \\ \frac{1}{2}(m + p - 5) + 2p = 9 - m \\ \frac{1}{2}(m + p - 5) = n - p \end{cases}$ Sol $(-1, 2, 6)$

Modelación y solución de problemas

3. Plantea un sistema de ecuaciones que se ajuste a la situación dada y soluciónalo.

a. Encuentra tres números tales que su suma sea 210, que la mitad de la suma del primero y del último más la cuarta parte del otro sea 95 y el promedio de los dos últimos sea 80.

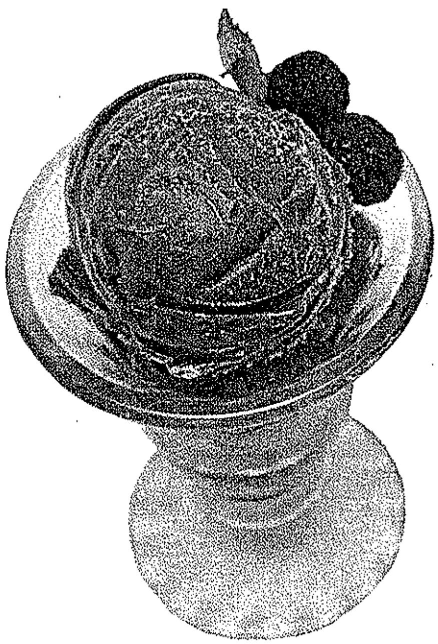
b. Una video tienda maneja tres clases de películas: infantiles, acción y terror. El 60% de las películas infantiles más el 50% de las películas de acción representan el 30% del total de las películas. Además, el 20% de las infantiles más el 60% de las de acción más el 60% de las de terror representan la mitad de la totalidad de películas. Si hay 100 películas infantiles, más que de acción, ¿cuántas películas de cada tipo hay?

c. Tres amigos desean reunir $ 26 000 para comprar un juego. Entre ellos acuerdan que el de mediana estatura debe poner el doble que el de más baja estatura y que el más alto debe poner las dos terceras partes de lo que ponga el mediano. ¿Cuánto aportó cada uno?

d. Una tienda ha vendido 600 ejemplares de un videojuego por un total de $ 55 540 800. La última versión del videojuego ha salido a la venta por un valor de $ 104 400. Además, la última versión ha sido vendida con un descuento del 30% y con 40% las dos versiones anteriores del videojuego.

El número total de ejemplares vendidos de las dos versiones anteriores ha sido la mitad del de la última versión. ¿Cuántos ejemplares vendió de cada versión?

e. Una fábrica de helados elabora tres tipos de helados: H1, H2 y H3; a partir de tres ingredientes A, B y C. Se sabe que la composición y costo de cada helado viene dado por la tabla:



	H1	H2	H3
Unidades del ingrediente A	2	1	1
Unidades del ingrediente B	1	2	1
Unidades del ingrediente C	1	1	2
Precio	\$ 2 610	\$ 3 230	\$ 2 030

- Encuentra el precio unitario de cada ingrediente.

f. Andrea, Lucía y Mónica compran en una tienda de cadena, cada una, 3 labiales, 2 perfumes y un delineador y pagaron por todo \$ 521 100. A la semana siguiente Andrea y Lucía compraron un perfume y un delineador, cada una, y pagaron \$ 92 200 entre ambas. Al finalizar esa misma semana el trío volvió al almacén, pero esta vez compró, cada una, un delineador y un labial por lo que cada una pagó \$ 60 500. ¿Cuál es el precio de un labial, un perfume y un delineador?

4. Describe lo que puede ocurrir al tratar de intersectar tres planos.

Una opción es que los tres planos sean paralelos. ¿Cuáles son las otras posibilidades? Usa gráficas para explicar cada caso.

5. El dueño de una librería sabe que tiene en total 80 libros, entre matemáticas, química y física. Cuando el vendedor arregla los libros se da cuenta que faltan ocho libros de química para que iguale al número de libros de matemáticas. Además, que sumando los de matemáticas y los de química aún faltan cuatro libros para que alcancen, en número, a los de física. ¿Puedes determinar cuántos libros de matemáticas, química y física tiene la librería?

6. En un taller de mecánica el dueño deja salir los autos arreglados cada tres horas, revisándolos previamente para evitar contratiempos y recibiendo el dinero, el cual es depositado en la caja registradora.

En la primera visita del día se da cuenta que hay 11 carros que se sincronizaron, 7 a los que se les cambió la batería y a 4 a los que se les cambió el aceite; por lo cual fueron entregados a sus dueños y el total de dinero que ingresó a la registradora fue de \$ 3 297 000.

En su segunda visita 3 carros fueron sincronizados y 7 a los que se les cambió la batería, lo cual suma \$ 1 845 000.

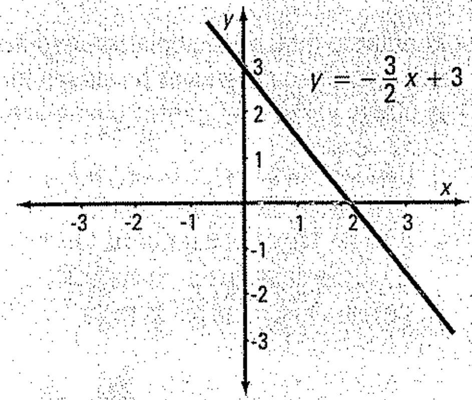
En la última visita del día, el dueño sólo entrega 9 carros para cambio de aceite y al contar todo el dinero de la registradora contó \$ 6 159 000. ¿Cuánto vale en este taller hacerle a un carro el cambio de aceite, la sincronización y el cambió de batería, si no hay rebajas de ninguna clase?

Desigualdades con dos incógnitas

Logro: resolver gráficamente desigualdades con dos incógnitas.

Comparte lo que sabes

Encuentra el conjunto solución de la desigualdad $|3x + 1| \geq 2$



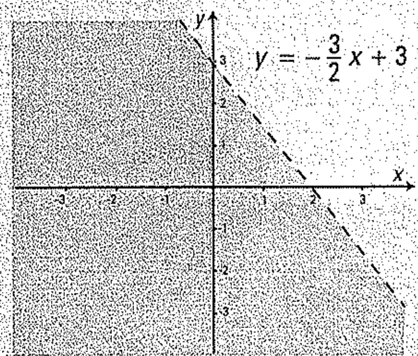
Algunos ejemplos de desigualdades con dos variables son:

$6x - 4y < 12$, $2x - 3y - 6 < 0$, $5x - y \geq 4$

La gráfica de una desigualdad corresponde a la gráfica del total de las soluciones.

Ejemplo

Halla el conjunto solución de la inecuación $3x + 2y < 6$ y traza la gráfica correspondiente.



En primer lugar se despeja la variable y:

$y < \frac{6 - 3x}{2}$, es decir $y < -\frac{3}{2}x + 3$

Existe una relación entre la función lineal $y = -\frac{3}{2}x + 3$ y la desigualdad $y < -\frac{3}{2}x + 3$, veamos:

En el plano cartesiano se traza la gráfica de $y = -\frac{3}{2}x + 3$

La recta divide al plano en dos partes que se llaman **semiplanos**.

Tomemos un punto que esté ubicado por encima de la recta por ejemplo (2, 3) y verifiquemos si se satisface la desigualdad dada:

$3 < -\frac{3}{2}(2) + 3$, que al resolver muestra que: $3 < 0$, lo cual es falso.

Ahora tomemos un punto que esté por debajo de la recta, por ejemplo (–1, 2) y remplazemos en la desigualdad dada:

$2 < -\frac{3}{2}(-1) + 3$, es decir, $2 < \frac{9}{2}$, la cual es una desigualdad verdadera.

Por tanto la solución corresponde al semiplano inferior.

Para representar la solución se sombrea el semiplano correspondiente y en este caso la gráfica de la recta $y = -\frac{3}{2}x + 3$ se deja punteada ya que sus puntos no hacen parte de la solución. ¿Por qué?

Ejemplo

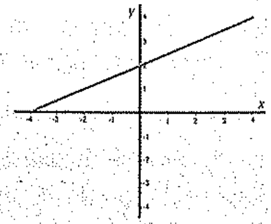
Hallar las soluciones y traza la gráfica de la inecuación $x - 2y + 4 \leq 0$

Despejando la variable y obtenemos: $y \geq \frac{x + 4}{2}$, es decir, $y \geq \frac{x}{2} + 2$

Se traza la gráfica de la recta $y = \frac{x}{2} + 2$ y tomamos un punto que esté ubicado por encima de la recta por ejemplo (–1, 3) y verifiquemos la desigualdad dada:

$3 \geq -\frac{1}{2} + 2$, es decir $3 \geq \frac{3}{2}$, la cual es una desigualdad es verdadera.

- Los puntos por debajo de la recta no satisfacen la desigualdad, pero debemos verificar si los puntos sobre la recta la cumplen o no.
- El punto (6, 5), está sobre la recta. Ahora, $5 \geq \frac{6}{2} + 2$, es decir, $5 \geq 5$ la cual es una desigualdad verdadera, por lo cual los puntos de la recta, también cumplen la desigualdad.



La solución corresponde al semiplano superior y en este caso la gráfica de la recta $y = \frac{x}{2} + 2$ se traza de forma continua ya que sus puntos hacen parte de la solución.

En resumen:

Para trazar la gráfica del conjunto solución de una desigualdad lineal se debe realizar el siguiente procedimiento:

1. Se traza la recta de la ecuación $ax + by + c = 0$, en línea punteada si la desigualdad es del tipo "mayor que" o "menor que" y de forma continua si la desigualdad es del tipo "mayor o igual" o "menor o igual".

2. Se toma un punto cualquiera de cada uno de los semiplanos determinados por la recta y se observa lo que ocurre con cada uno de ellos con respecto a la inecuación.

3. Se sombrea el semiplano correspondiente a los puntos donde se verifica la inecuación.

PRÁCTICA EN CONTEXTO

Ejercitación de procedimientos

1. Encuentra la solución y traza la gráfica de cada una de las siguientes desigualdades lineales:

a. $10x + 15y \geq 10 + 5$

b. $\frac{2}{5}x - y > 2$

c. $\frac{4}{3}x + y < 4$

d. $x + y + 3 \leq 0$

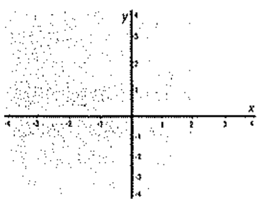
e. $x + \frac{1}{2}y < 1$

f. $7 + 4x - 2y \leq 2$

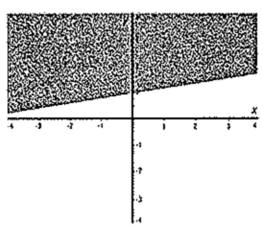
Razonamiento

2. Escribe la desigualdad que le corresponde a cada gráfica:

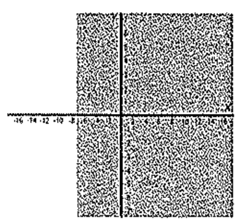
a.



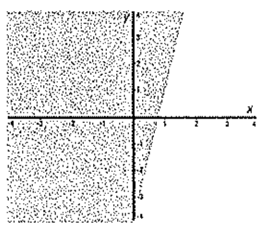
b.



c.



d.



Sistema de desigualdades lineales

Logro: modelar situaciones de variación utilizando sistemas de inecuaciones lineales.

Comparte lo que sabes

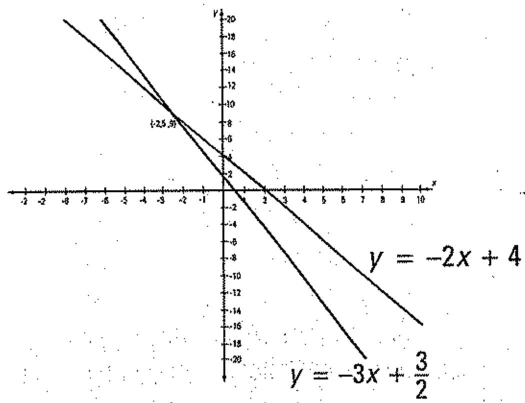
Encuentra el conjunto solución de la desigualdad $7x - 2y + 1 \leq -5$

El conjunto solución de una inecuación es un semiplano, por tanto el conjunto solución de un sistema de desigualdades lineales es la intersección de todos los semiplanos que representan las soluciones particulares.

Para resolver estos sistemas utilizaremos el método gráfico.

Ejemplo

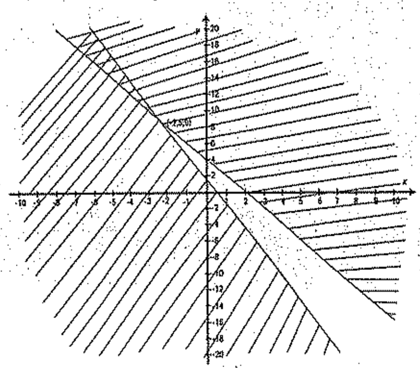
Hallar el conjunto solución del sistema $\begin{cases} 6x + 2y < 3 \\ 8 - 2y < 4x \end{cases}$



Se trazan las gráficas de las ecuaciones $y = -3x + \frac{3}{2}$ y $y = -2x + 4$

Las rectas se cortan en el punto (–2,5, 9)

La solución de $y < -3x + \frac{3}{2}$ es el conjunto de puntos que están por debajo de la recta $y = -3x + \frac{3}{2}$.



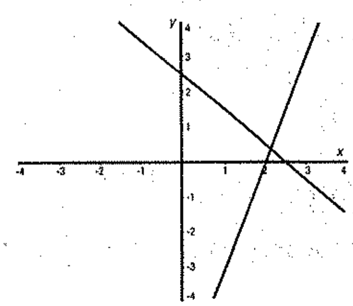
Ahora, la solución de $y > -2x + 4$ es el conjunto de puntos que están por encima de la recta $y = -2x + 4$.

La solución gráfica del sistema la conforman todos los puntos comúnes a las dos regiones, los cuales se encuentran en la parte superior izquierda, como se puede observar en la siguiente imagen.

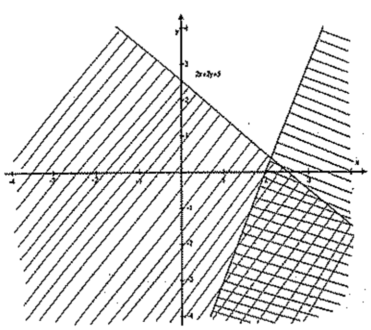
Ejemplo

Hallar el conjunto solución del sistema

$\begin{cases} 3x - y \geq 6 \\ 2x + 2y < 5 \end{cases}$



Al trazar las gráficas de las rectas $y = 3x - 6$ y $y = -x + \frac{5}{2}$, se tiene:



Determinamos los semiplanos que son solución de cada una de las desigualdades del sistema y la intersección de éstos es la solución, como lo muestra la gráfica.

Para trazar la gráfica del conjunto solución de un sistema de desigualdades lineales se debe realizar el siguiente procedimiento:

1. Se trazan las rectas de las ecuaciones en el sistema, en línea punteada si la desigualdad es del tipo "mayor que" o "menor que" y de forma continua si la desigualdad es del tipo "mayor o igual" o "menor o igual".

2. Se determina el semiplano solución de cada una de las desigualdades, sombreando la porción del plano que corresponda a cada una de ellas.

3. La intersección de los semiplanos será la solución del sistema y si los semiplanos no se intersecan entonces el sistema no tiene solución.

Ejemplo

El entrenador de un equipo de baloncesto necesita comprar balones y conos para su entrenamiento, cada balón tiene un costo de 42 dólares y cada cono cuesta 2 dólares.

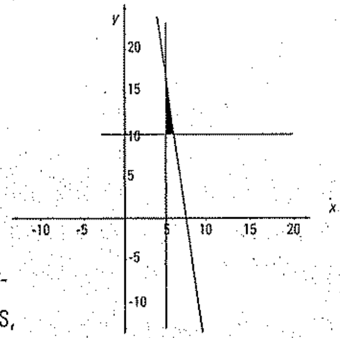
El entrenador sabe que se necesitan por lo menos 5 balones y 10 conos, y que el total del gasto no debe exceder los 250 dólares. Plantea un sistema de desigualdades que describa la situación y determine el número de balones y conos.

Solución:

Llamemos x al número de balones. Llamemos y al número de conos.

El total de los balones tiene un costo de $42x$, el total de los conos tiene un costo de $2y$ y como el costo total no debe ser mayor a 250 dólares, y mínimo se necesitan 5 balones y 10 conos, obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 42x + 2y \leq 250 \\ x \geq 5 \\ y \geq 10 \end{cases}$$



Ahora graficamos el sistema. Todos los puntos en el interior de la región triangular limitada por la intersección de los semiplanos, es la solución del sistema:

Termina el análisis del problema.

PRÁCTICA EN CONTEXTO

Ejercitación de procedimientos

1. Determina la solución de cada uno de los sistemas de desigualdades lineales:

a. $\begin{cases} x + 2y - 3 > 0 \\ 2x - y - 1 < 0 \end{cases}$

b. $\begin{cases} -3y + 2x + 6 \leq 0 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - 2 \geq 0 \end{cases}$

c. $\begin{cases} y \geq 0 \\ 2x + 3y \leq 8 \end{cases}$

d. $\begin{cases} y + 3x > 3 \\ -4x + 4 \geq -3y \end{cases}$

e. $\begin{cases} x - y < 0 \\ 2x + 5y < 10 \end{cases}$

f. $\begin{cases} -3x > y + 2 \\ -x < \frac{1}{3}y - 1 \end{cases}$

Solución de problemas

2. Plantea para cada uno de los siguientes problemas un sistema de desigualdades, elabora la gráfica y resuélvelo.

a. Un grupo de teatro desea estrenar su obra en un auditorio que cuenta con 500 asientos. En la taquilla se ofrecen entradas de $ 60 000 y de $ 40 000; y el grupo planea vender mínimo 200 entradas de $ 40 000 y recaudar más de $ 1 200 000. ¿Cuántas entradas de cada precio deben vender?

b. Aníbal está horneando pan. Él tiene dos clases diferentes de harina. La harina X está enriquecida con 0, 12 mg de calcio por gramo; la harina Y está enriquecida con 0, 04 mg de calcio por gramo. Si cada barra de pan tiene 300 g o menos de harina y Aníbal quiere que cada barra de pan tenga menos de 25 mg de calcio, ¿cuánto de cada tipo de harina debería usar para cada barra de pan?

Matrices

Logro: identificar y utilizar matrices.

Comparte lo que sabes

Las edades de tres hermanos sumadas dos a dos, dan 11, 14 y 23 años, respectivamente. ¿Cuál es la edad de cada uno de ellos?

Una matriz es un arreglo rectangular de números formado por filas y columnas.

Ejemplos

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} \begin{matrix} \longrightarrow \text{Fila 1} \\ \longrightarrow \text{Fila 2} \end{matrix}$$

Columna 1 — Columna 2

$$\begin{bmatrix} -3 & 5 & \frac{2}{3} & 9 & -8 \\ 0 & 10 & 0 & 21 & 7 \\ -11 & \frac{7}{9} & 4,2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

La notación que se utiliza para llamar a las matrices son las letras mayúsculas y sus elementos se notan con letras minúsculas:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

donde los subíndices indican el lugar que ocupan dentro de la matriz, por ejemplo a_{21} indica que el elemento se encuentra ubicado en la segunda fila y en la primera columna. En forma general, el elemento a_{ij} está ubicado en la fila i y en la columna j.

Si la matriz tiene m filas y n columnas, se dice que es de dimensión $m \times n$ o simplemente que es una matriz $m \times n$.

Si el número de filas de la matriz es igual al número de columnas, la matriz es denominada **matriz cuadrada**.

Ejemplo

$$A_{4\times4} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 8 & 5 \\ 2 & 6 & 4 & -7 \\ -1 & 1 & 5 & 4 \\ 3 & 6 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$, es una matriz cuadrada 4×4.

Si el número de filas y el número de columnas en la matriz no es igual, la matriz se denomina matriz rectangular.

Ejemplo

$$B_{3\times5} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 8 & 7 & 2 \\ 6 & 1 & 3 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$, es una matriz rectangular de 3×5.

Cuando una matriz tiene dimensiones $m \times 1$ o $1 \times n$, es decir, si la matriz tiene una sola fila o una sola columna se llama *matriz vector* o simplemente *vector*.

Ejemplo

$$N = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -4 & 6 \end{bmatrix} \text{ y } M = \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix},$$

son vectores de 1×4 y 3×1, respectivamente.

Cuando todos los elementos de una matriz, independientemente del tamaño de la matriz, son iguales a cero, entonces la matriz se denomina *matriz nula*.

Ejemplo

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si en una matriz cuadrada los elementos de la diagonal principal son iguales a uno y los demás elementos son iguales a cero, la matriz se denomina **matriz identidad** y se denota como 1_n, donde n representa el número de filas o columnas.

Ejemplo

$$1_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz transpuesta de una matriz $m \times n$ es una matriz que se obtiene al intercambiar los elementos de las filas por los de las columnas, es decir, un elemento a_{kj} se pasa a la posición del elemento a_{jk}, y viceversa, formando una nueva matriz de dimensión $n \times m$.

Ejemplos

a. Sea $A = \begin{bmatrix} 5 & -1,5 \\ 3 & 2 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$, entonces la matriz transpuesta de A es: $A^t = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -1,5 & 2 & 7 \end{bmatrix}$

b. La transpuesta de $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & -7 \\ 4 & 0 & 9 \end{bmatrix}$ es: $B^t = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 5 & 0 \\ 4 & -7 & 9 \end{bmatrix}$

PRÁCTICA EN CONTEXTO

Ejercitación de procedimientos

1. Escribe los elementos solicitados, dada la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 & 3 \\ 8 & 7 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 5 & 11 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$a_{11} =$ ____ $a_{23} =$ ____ $a_{42} =$ ____ $a_{24} =$ ____

2. Construye tres matrices diferentes con los siguientes elementos: 3, 4, 1, 2, 0, –2, 7, 11, 9 y determina la transpuesta de cada una de las matrices que escribiste.

3. Escribe la matriz transpuesta de cada una de las siguientes matrices:

a. $\begin{bmatrix} 2 \\ 9 \\ 1 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 \\ -1 & 6 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} -5 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

e. $\begin{bmatrix} -0,1 & 0 & 1 & 3 & -8 & 0 & -1 \\ 0 & -0,1 & 1 & 2,6 & 5 & 9 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Operaciones con matrices

Logro: resolver operaciones con matrices.

Comparte lo que sabes

Encuentra tres ejemplos de matrices tales que su transpuesta sea igual a la matriz original.

Suma y resta de matrices

Sean A y B dos matrices del mismo tamaño, definimos la suma $A+B=C$ o la resta $A-B=C$, como otra matriz cuyos elementos son, respectivamente, la suma o la diferencia de los elementos en la misma posición de las matrices que se operan, es decir, los elementos en C son de la forma $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ y los de la matriz D son de la forma $d_{kj}=a_{kj}-b_{kj}$.

Ejemplo

Sean $A=\begin{bmatrix}-3 & 5\\ 7 & 1\end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 6 & 2\end{bmatrix}$, entonces:

$$A+B=\begin{bmatrix}-3 & 5\\ 7 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 6 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3+(-1) & 5+0\\ 7+6 & 1+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & 5\\ 13 & 3\end{bmatrix}$$

$$A-B=\begin{bmatrix}-3 & 5\\ 7 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 6 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3-(-1) & 5-0\\ 7-6 & 1-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 5\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

Multiplicación de matrices

1. Para multiplicar una matriz A por un número real k, se multiplica cada elemento de A por el número k. Es decir, cada elemento de kA es de la forma ka_{ij}.

Ejemplo

Sea $A=\begin{bmatrix}8 & -2\\ 3 & 5\end{bmatrix}$ y $k=3$, al calcular kA obtenemos:

$$kA=3\times\begin{bmatrix}8 & -2\\ 3 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\times 8 & 3\times(-2)\\ 3\times 3 & 5\times 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}24 & -6\\ 9 & 15\end{bmatrix}$$

2. Sean A y B dos matrices, para efectuar el producto de $A\times B$, se debe tener en cuenta que el número de filas del primer factor debe ser igual al número de columnas del segundo factor.

- El producto de una matriz $1\times m$ por una matriz $m\times 1$ es una matriz de tamaño 1×1, es decir, es un número.

Sea $A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix}b_{11}\\ b_{21}\\ b_{31}\end{bmatrix}$ entonces $A\times B=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31}$

Ejemplo

Sea $A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 7\end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix}4\\ 2\\ -3\end{bmatrix}$ entonces $A\times B=2\times 4+(-1)\times 2+7\times(-3)=8-2-21=-15$

- El producto de una matriz A de tamaño $n\times m$, por una matriz B de tamaño $m\times n$ es una matriz C de tamaño $n\times n$, donde cada c_{ij} se obtiene al multiplicar la fila i-ésima de A por la columna j-ésima de B.

Ejemplos

a. Sea $A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\\ b_{31} & b_{32}\end{bmatrix}$, entonces

$$C=A\times B=\begin{bmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32}\\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32}\end{bmatrix}$$

b. Sean $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ y $N = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 2 & 0 \\ -1 & 6 & 3 & 1 \\ 7 & 0 & 4 & 8 \end{bmatrix}$, encontrar $M \times N$

M es una matriz 2×3 y N es una matriz 3×4, por lo cual la matriz producto es de tamaño 2×4. Para encontrar la matriz producto se efectúa el producto de la primera fila de M por la primera columna de N, luego la segunda fila de M por la primera columna de N y así sucesivamente, por tanto:

$$M \times N = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 & -4 & 2 & 0 \\ -1 & 6 & 3 & 1 \\ 7 & 0 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (1)(5)+(2)(-1)+(-3)(7) & (1)(-4)+(2)(6)+(-3)(0) & (1)(2)+(2)(3)+(-3)(4) & (1)(0)+(2)(1)+(-3)(8) \\ (4)(5)+(0)(-1)+(-2)(7) & (4)(-4)+(0)(6)+(-2)(0) & (4)(2)+(0)(3)+(-2)(4) & (4)(0)+(0)(1)+(-2)(8) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -18 & 8 & -4 & -22 \\ 6 & -16 & 0 & -16 \end{bmatrix}$$

División de matrices entre un real

Para dividir una matriz A por un número real k, es lo mismo que multiplicar A por $\frac{1}{k}$:

Ejemplo

Sea $A = \begin{bmatrix} 3 & 27 \\ -81 & 2 \end{bmatrix}$ y $k = 3$, calcular $A \div k$.

$$A \div k = A \times \frac{1}{k} = \frac{1}{3} \times \begin{bmatrix} 3 & 27 \\ -81 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{3} & \frac{27}{3} \\ \frac{-81}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ -27 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

PRÁCTICA EN CONTEXTO

Ejercitación de procedimientos

1. Para cada uno de los siguientes ejercicios calcula las operaciones: $A + B$, $A - B$, $-2A$, $3B$, $\frac{A}{2}$.

a. $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

b. $A = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$

c. $A = \begin{bmatrix} 5 & -6 & 4 \\ 0 & 8 & 3 \\ -6 & -2 & 7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 6 & 1 & -4 \\ 6 & 5 & 4 \\ -8 & 2 & 9 \end{bmatrix}$

2. Para cada uno de los siguientes ejercicios calcula $A \times B$ y $B \times A$ y compara los resultados.

a. $A = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$

b. $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \\ 0 & -5 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

c. $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 2 & -5 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 7 & -4 \end{bmatrix}$

Matrices y sistemas de ecuaciones

Logro: reescribir los sistemas de ecuaciones lineales, por medio de matrices.

COMPARTE LO QUE SABES

¿Cómo determinas cuál método es más apropiado a la hora de resolver un sistema de ecuaciones lineales?

Los sistemas de ecuaciones pueden ser expresados y resueltos utilizando matrices. A continuación se enumeran los pasos para resolver un sistema 2×2.

1. Las ecuaciones deben estar expresadas de la forma $ax + by = c$.

2. Se escribe la matriz aumentada, es decir, una matriz conformada por dos matrices pequeñas separadas por una barra vertical. La matriz a la izquierda de la recta contiene los coeficientes de las variables del sistema de ecuaciones, y los números en la matriz de la derecha son las constantes a las que están igualadas las ecuaciones del sistema.

   Dado el sistema $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$, la matriz aumentada para este sistema es $\left[\begin{array}{cc|c} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{array}\right]$

3. Se transforma la matriz aumentada a una matriz triangular, es decir, a una matriz que sólo tiene ceros encima ó debajo de la diagonal principal y que en la diagonal tenga sólo unos, es decir de la forma: $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & p & m \\ 0 & 1 & n \end{array}\right]$ o $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & h \\ q & 1 & k \end{array}\right]$

Para pasar esta matriz a la forma triangular se debe aplicar el método de transformación de filas:

a. Todos los números de una fila pueden multiplicarse por cualquier número real distinto de cero.

b. Dos filas de una matriz pueden intercambiarse.

c. Se puede remplazar una fila de la matriz, por la suma o diferencia de esta fila con cualquier otra en la matriz. Por ejemplo la fila r, por la fila r más k veces otra fila t, con $k \in \mathbb{R}$.

Es importante tener en cuenta que para cambiar un elemento distinto de cero por un uno en la matriz aumentada, basta multiplicar toda la fila que lo contiene por su inverso multiplicativo. A partir del uno encontrado, se pueden hacer ceros todos los números de la columna que lo contiene, multiplicando la fila que contiene al uno por el inverso aditivo del número a convertir y luego sumándolo a la fila en la que se encuentra este último.

Ejemplos

1. Resolver el sistema $\begin{cases} 5x + y = 6 \\ 3x - 2y = 14 \end{cases}$ utilizando el método matricial.

   La matriz aumentada de este sistema es: $\left[\begin{array}{cc|c} 5 & 1 & 6 \\ 3 & -2 & 14 \end{array}\right]$

- La idea es entonces cambiar el 5 de nuestro sistema por un 1, para lo cual multiplicamos la primera fila por $\frac{1}{5}$: $\left[\begin{array}{cc|c} 5\left(\frac{1}{5}\right) & 1\left(\frac{1}{5}\right) & 6\left(\frac{1}{5}\right) \\ 3 & -2 & 14 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{5} & \frac{6}{5} \\ 3 & -2 & 14 \end{array}\right]$

- El paso siguiente es obtener 0 en la componente ubicada en la segunda fila de la primera columna. Es decir, debemos cambiar el 3 por un cero, para lo cual sumamos −3 veces la primera fila a la segunda:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{5} & \frac{6}{5} \\ 3+1(-3) & -2+\left(\frac{1}{5}\right)(-3) & 14+\left(\frac{6}{5}\right)(-3) \end{array}\right]$$

Resolviendo los productos y las sumas obtenemos: $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{5} & \frac{6}{5} \\ 0 & -\frac{13}{5} & \frac{52}{5} \end{array}\right]$

- Para obtener 1 en la componente ubicada en segunda fila de la segunda columna, multiplicamos la segunda fila por $\frac{-5}{13}$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{5} & \frac{6}{5} \\ 0\left(\frac{-5}{13}\right) & \frac{-13}{5}\left(\frac{-5}{13}\right) & \frac{52}{5}\left(\frac{-5}{13}\right) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{5} & \frac{6}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{52}{13} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{5} & \frac{6}{5} \\ 0 & 1 & -4 \end{array}\right]$$

- El sistema equivalente a esta última matriz aumentada es:

$$\begin{cases} x + \frac{1}{5}y = \frac{6}{5} \\ y = -4 \end{cases}$$

- Aplicando el método de sustitución podemos hallar el valor de x:

$x + \frac{1}{5}(-4) = \frac{6}{5}$, es decir, $x = \frac{6}{5} + \frac{4}{5} = 2$, por lo cual la solución del sistema es $(2, -4)$.

2. Hallar la solución del sistema $\begin{cases} a - 2b + 4c = 5 \\ -3a + 4b - 2c = -8 \\ 4a + 5b - 4c = -3 \end{cases}$ **utilizando matrices.**

- Escribimos la matriz aumentada relacionada con el sistema:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 5 \\ -3 & 4 & -2 & -8 \\ 4 & 5 & -4 & -3 \end{array}\right]$$

- Debemos llevarla a la forma triangular superior, es decir a la forma: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & d & f & p \\ 0 & 1 & g & q \\ 0 & 0 & 1 & r \end{array}\right]$

- Con el elemento de la primera fila y primera columna no hay inconveniente puesto que ya es uno.
- Para transformar en cero el elemento en la segunda fila y primera columna, es decir a −3, sumamos a la segunda fila 3 veces la primera:

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & 10 & 7 \\ 4 & 5 & -4 & -3 \end{array}\right]$ Luego dividimos por −2 la segunda fila: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -5 & \frac{-7}{2} \\ 4 & 5 & -4 & -3 \end{array}\right]$

- Sumamos a la tercera fila -4 veces la primera. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -5 & \frac{-7}{2} \\ 0 & 13 & -20 & -23 \end{array}\right]$

- Multiplicamos la segunda fila por -13 y la sumamos a la tercera: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -5 & \frac{-7}{2} \\ 0 & 0 & 45 & \frac{45}{2} \end{array}\right]$

- Dividimos la última fila por 45: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -5 & \frac{-7}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right]$

- Esta matriz representa el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x - 2y + 4z = 5 \\ y - 5z = \frac{-7}{2} \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$

- La solución del sistema es $z = \frac{1}{2}$, $y = \frac{-7}{2} + 5\left(\frac{1}{2}\right) = -1$ y $x = 5 + 2(-1) - 4\left(\frac{1}{2}\right) = 1$

- Verifica dicha solución.

PRÁCTICA EN CONTEXTO

Ejercitación de procedimientos

1. Resuelve cada sistema de ecuaciones utilizando matrices:

a. $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 5y + 3z = -2 \\ x - 7z = 3 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2x - 3y = -2 \\ 5x - 2 = 3y \end{cases}$

c. $\begin{cases} 2a - 5b = 4 \\ 3b + 2c = -3 \\ 7a - 3c = 1 \end{cases}$

d. $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y + 2z = 5 \\ x - y - 3z = -10 \end{cases}$

e. $\begin{cases} 2x + 4y + 3z = 3 \\ 10x - 8y - 9z = 0 \\ 4x + 4y - 3z = 2 \end{cases}$

f. $\begin{cases} 9x + 16y = 7 \\ 4y + 3x = 0 \end{cases}$

g. $\begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ -3x + 9y = -3 \end{cases}$

h. $\begin{cases} -2c + 10b - 4a = -2 \\ 3a - 2 - 5b = -c \\ c + 2a - 5b = 1 \end{cases}$

i. $\begin{cases} 3m - n + 2p = -3 \\ 2m + 3p - 4n = -12 \\ -4m + 8n - 6p = 10 \end{cases}$

j. $\begin{cases} 2x + 5y - z = 1 \\ 4x + 10y - 2z = 2 \\ 3x - y + z = 7 \end{cases}$

k. $\begin{cases} 2x - 2y + 2z = 1 \\ 2x - 4y + 2z = 4 \\ 4x - 2y - 4z = 3 \end{cases}$

l. $\begin{cases} 3a - 5b + c = -1 \\ b - c = 2 \\ c + 2a = -1 \end{cases}$

m. $\begin{cases} 6x - 9y = -6 \\ 15x - 6 = 9y \end{cases}$

n. $\begin{cases} -3 + 2n = m \\ 5m - 1 = n \end{cases}$

o. $\begin{cases} 3x + 2y + z + w = 5 \\ x + 3y - 4z + 2w = 0 \\ x - 3z + 3w = 45 \\ z = 8 \end{cases}$

2. Escribe para los sistemas del punto anterior la matriz ampliada asociada en cada caso.

3. Para cada matriz, halla el sistema lineal correspondiente, teniendo en cuenta que la primera columna representa a la variable x, la segunda columna a la variable y y la tercera a la variable z:

a. $A = \left[\begin{array}{cc|c} -5 & 1 & 0 \\ 8 & 3 & 2 \end{array}\right]$

b. $B = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -5 & \frac{1}{7} & 1 \\ 6 & 2 & 9 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right]$

c. $A = \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 7 & 1 & -1 \\ 0 & 9 & 4 & -2 \end{array}\right]$

d. $B = \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 0 & 5 \\ \frac{1}{10} & 4 & 23 & 2 \\ \frac{6}{5} & 7 & -3 & 0 \end{array}\right]$

e. $C = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \\ 5 & 3 & 2 & -1 \end{array}\right]$

Solución de problemas

4. Mateo, Luis y Juan dejan diariamente hojas de propaganda de un supermercado en todas las casas de su barrio. Mateo reparte siempre el 20% del total de la propaganda, Luis reparte 100 hojas más que Mateo, y entre Juan y Mateo dejan 850 hojas en las casas. Plantea un sistema de ecuaciones que permita averiguar cuántas hojas repartió cada uno. Utiliza matrices para resolver el problema.

5. Las edades (en años) de un niño, su padre y su abuelo verifican las siguientes condiciones: la edad del padre es α veces la de su hijo. El doble de la edad del abuelo más la edad del niño y más la del padre es de 182 años. El doble de la edad del niño más la del abuelo es 100 años.

a. Establece las edades de los tres, suponiendo que $\alpha = 2$.

b. Para $\alpha = 3$, ¿qué ocurre con el problema planteado?

c. Siguiendo con $\alpha = 3$, ¿qué ocurre si en la segunda condición la suma es de 200 en vez de 182?

Matrices y determinantes

Logro: utilizar métodos que involucren determinantes para solucionar sistemas de ecuaciones.

Comparte lo que sabes

El cociente de una división es 3 y el resto es 5.
Si el divisor disminuye en 2 unidades, el cociente aumenta en 1 y el resto nuevo es 1. Halla el dividendo y el divisor.

El determinante es una operación sobre las matrices, tal que a cada matriz cuadrada le asigna un número.

Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$ su determinante se denota como $|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$.

Ejemplo

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = (1)(-3) - (2)(4) = -11$$

Un método para encontrar el determinante de una matriz $n \times n$, con $n > 2$, es el llamando **método de menores complementarios** o **cofactores**.

El desarrollo del determinante de una matriz 3×3 es:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

Ejemplo

Encontrar el determinante de la matriz $\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & -2 \\ 5 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & -2 \\ 5 & 8 & 9 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - (2)\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = (-1)(27+16) - (2)(36+10) + (-1)(32-15) = -152$$

Regla de Cramer

Dado el sistema $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$, definimos:

D = el determinante conformado por los coeficientes de x y y, es decir $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$

D_x = el determinante que se obtiene al remplazar en D los coeficientes de x por los términos independientes.

D_y = el determinante que se obtiene al remplazar en D los coeficientes de y por los términos independientes.

$$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} \qquad D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

Entonces la solución del sistema es: $x = \frac{D_x}{D}$ y $y = \frac{D_y}{D}$

De igual forma, dado el sistema $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$, la solución del sistema es $x = \frac{D_x}{D}$, $y = \frac{D_y}{D}$ y $z = \frac{D_z}{D}$

Ejemplo

Resuelve el sistema: $\begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ x - y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 2 \end{cases}$, por medio de la regla de Cramer.

Primero calculemos $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2(-2-1) - 1(2-2) + 1(1+2) = -3$

$$D_x = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2(-2-1) - 1(2-2) + 1(1+2) = -3$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2(2-2) - 2(2-2) + 1(2-2) = 0$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2(-2-1) - 1(2-2) + 2(1+2) = 0$$

Por tanto, $x = \frac{D_x}{D} = \frac{-3}{-3} = 1$; $y = \frac{D_y}{D} = \frac{0}{-3} = 0$ y $z = \frac{D_z}{D} = \frac{0}{-3} = 0$

PRÁCTICA EN CONTEXTO

Ejercitación de procedimientos

1. Evalúa los siguientes determinantes:

a. $\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 8 \end{vmatrix}$

b. $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 9 & 7 \end{vmatrix}$

c. $\begin{vmatrix} 6 & -5 & 7 \\ -5 & -7 & 0 \\ 1 & 8 & -9 \end{vmatrix}$

d. $\begin{vmatrix} 3 & 9 & -7 \\ -8 & -1 & 2 \\ 7 & 0 & 6 \end{vmatrix}$

e. $\begin{vmatrix} 5 & -9 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 9 & 5 & 1 \end{vmatrix}$

f. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & 8 \\ 3 & -1 & -4 & 2 \\ -7 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix}$

2. Halla el valor de x para cada uno de los determinantes:

a. $\begin{vmatrix} 4 & x \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 8$

b. $\begin{vmatrix} x & -5 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 10$

c. $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & x & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 6$

d. $\begin{vmatrix} -1 & x & -2 \\ -3 & 0 & 4 \\ -1 & -x & -1 \end{vmatrix} = 14$

3. Resuelve los siguientes sistemas utilizando la regla de Cramer:

a. $\begin{cases} -6b - a = 8 \\ 7a - 1 = 15b \end{cases}$

b. $\begin{cases} 6n = 3m + 6 \\ 8m - 5 = 7n - 9 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 4x + 4y = 2 + 3z \\ 10x - 8y = 10z \\ 2x + 3z = 3 - 4y \end{cases}$

d. $\begin{cases} x + y + 2z = 11 \\ x - y + z = 3 \\ 2x + y + 3z = 17 \end{cases}$

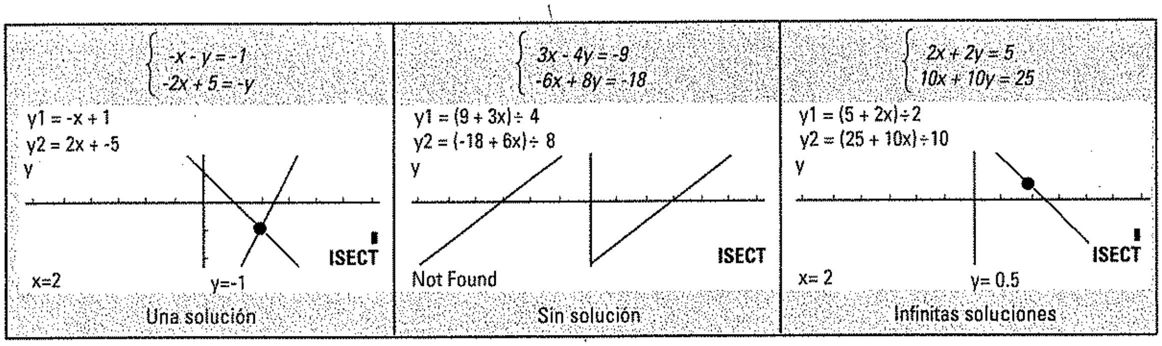
Solución de problemas

4. Tres mujeres hicieron compras por valor de \$1 000 000. Si la segunda mujer invirtió el doble de lo que invirtió la primera, y la tercera invirtió \$ 200 000 más que la segunda, ¿cuánto invirtió cada una?

TECNOLOGÍA

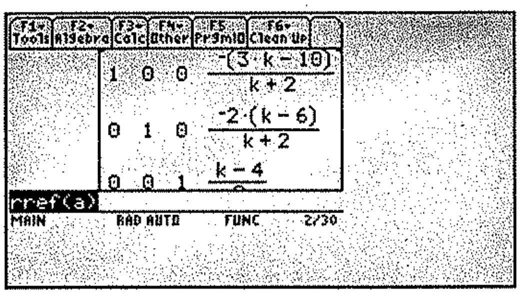
Las calculadoras graficadoras permiten generar representaciones de las soluciones de sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas.

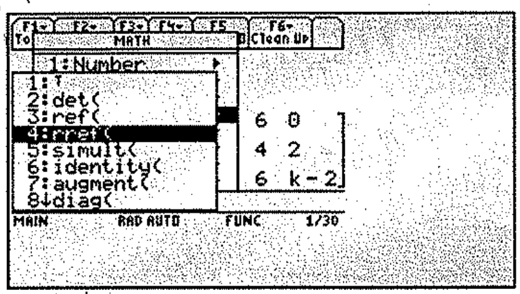
En la siguiente imagen se muestran algunos ejemplos de la solución gráfica que se obtiene en una calculadora al ingresar sistemas lineales

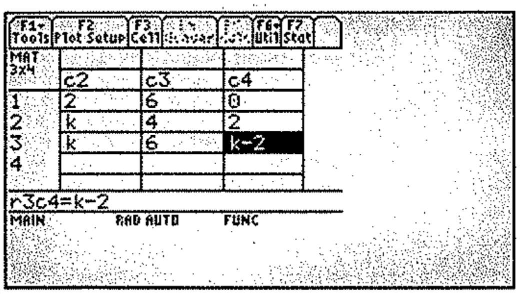


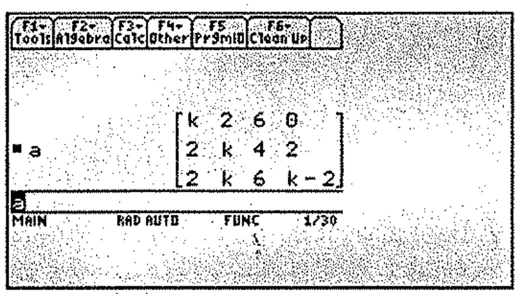
Una solución — Sin solución — Infinitas soluciones

También se pueden resolver sistemas de ecuaciones lineales de tres ecuaciones con tres incógnitas utilizando el desarrollo de matrices y determinantes.









resumen & refuerzo

2

1. Determina cuál es el error en cada uno de los ejercicios:

a.

$$a + b = c$$
$$(4-3)(a+b) = (4-3)c$$
$$4a - 3a + 4b - 3b = 4c - 3c$$
$$4a + 4b - 4c = 3a + 3b - 3c$$
$$4(a + b - c) = 3(a + b - c)$$
$$4 = 3$$

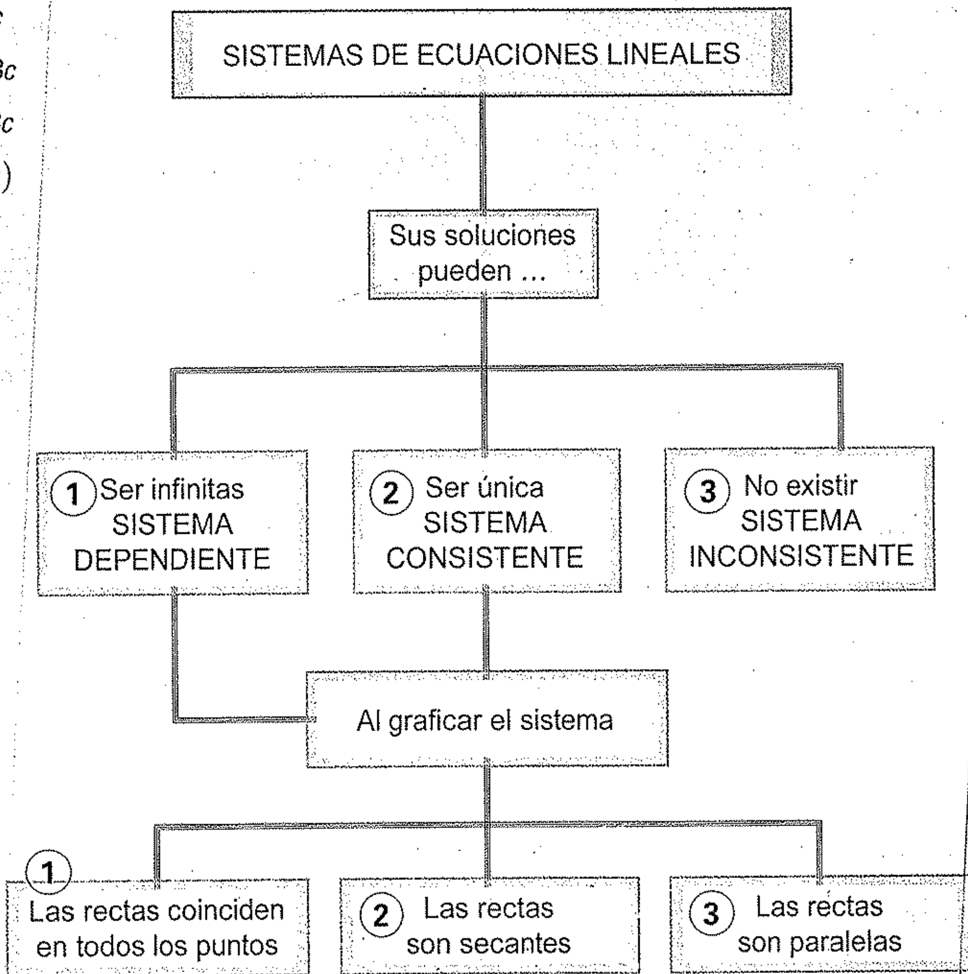
b.

$$a = b$$
$$a^2 = ab$$
$$a^2 - b^2 = ab - b^2$$
$$(a-b)(a+b) = (a-b)b$$
$$a + b = b$$
$$a + a = a$$
$$2a = a$$
$$2 = 1$$

2. Soluciona el siguiente problema:

Un hombre compró tres clases diferentes de acciones por 20 000 dólares. Una de ellas paga 6% de interés anual, otra paga 7% y la última, un 8% anual. Al final del primer año, la suma de los intereses de las acciones al 6% y al 7% es de 940 dólares, y la suma de los intereses de las acciones al 6% y al 8% es de 720 dólares.

¿Cuánto dinero invirtió en cada una de las acciones?



Pruebas de

Prueba Saber

A partir de la siguiente situación responde las preguntas 1 a 5.

El gerente de una fábrica realizó un estudio de mercado para analizar el precio de venta al público de un producto en función de las unidades que se distribuyen en el comercio en dos ciudades diferentes.

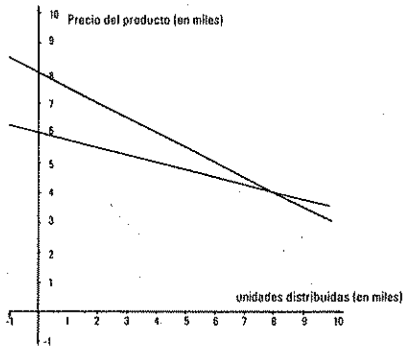
De dicho estudio se concluyó que:

El precio del producto en la ciudad A está dado por:

$$f(x) = -\frac{1}{2}x + 8$$

El precio del producto en la ciudad B está dado por:

$$g(x) = -\frac{1}{4}x + 6$$



en donde x representa las unidades (en miles) del producto que se encuentra en el comercio en cada ciudad. La fábrica distribuye entre 1 000 y 20 000 unidades en cada ciudad. La gráfica muestra la relación de precios entre las dos ciudades.

1. **Teniendo en cuenta el comportamiento de las ventas en las ciudades A y B es correcto afirmar que:**

a. Cuando la fábrica distribuye a las dos ciudades 3 000 unidades, los precios en estas dos ciudades son iguales.

b. Si se distribuye menos de 8 000 unidades en cada ciudad, el precio *g(x)*, siempre será menor en comparación con la otra ciudad.

c. Sin importar la cantidad de unidades distribuidas en cada ciudad, el precio *f(x)* siempre será menor que *g(x)*.

d. Cuando la fábrica distribuye más de 8 000 unidades, en cada ciudad el precio $g(x)$ siempre será menor en comparación con *f(x)*.

2. **Cuando la fábrica distribuye a las dos ciudades 5 000 unidades del producto, se observa que:**

a. El precio en las dos ciudades no cambia.

b. El precio en la ciudad A es mayor que en la ciudad B.

c. El precio en la ciudad B es mayor que en la ciudad A.

d. Baja el precio tanto en la ciudad A como en la B.

3. **Cuando la fábrica distribuye a las dos ciudades 8 000 unidades del producto, se observa que:**

a. El precio de la ciudad A aumenta pero el de la ciudad B disminuye.

b. El precio de la ciudad A disminuye pero el de la ciudad B aumenta.

c. El precio en las dos ciudades es el mismo.

d. El precio de las dos ciudades aumenta.

4. **Según la gráfica, se puede afirmar que:**

a. A mayor cantidad de producto distribuido en las ciudades, menor es el precio.

b. A mayor cantidad de producto en el mercado, el precio en la ciudad A es más bajo que en la ciudad B.

c. Si el número de productos en el mercado aumenta en cualquiera de las dos ciudades, el precio irá aumentando en ambas ciudades.

d. A mayor cantidad de producto en el mercado el precio en la ciudad B es más bajo que en la ciudad A.

5. Los números 8 y 6 contenidos en las funciones $f(x) = -\frac{1}{2}x + 8$ y $g(x) = -\frac{1}{4}x + 6$ representan:

a. Los precios respectivos en las ciudades A y B cuando en el mercado se encuentran 1 000 unidades del producto.

b. Los precios respectivos en las ciudades A y B cuando el mercado se encuentra desabastecido.

c. La cantidad de producto mínimo que debe existir en cada ciudad.

d. El costo por mantener el producto en el mercado.

6. La empresa modificó el precio de su producto en la ciudad B (ahora es $h(x) = -x + 16$) mientras que en la ciudad A permaneció igual. De acuerdo con lo anterior podemos decir que:

a. El precio en las ciudades A y B nunca podrá ser igual, así se distribuya una cantidad muy grande de productos en ellas.

b. El nuevo precio en la ciudad B siempre es menor que el anterior precio y mayor que el de la ciudad A.

c. El nuevo precio en la ciudad B es igual a de la ciudad A cuando se distribuyen 5 500 unidades del producto.

d. El precio en la ciudad A aumenta con el cambio en la relación $g(x)$.

Prueba PISA

7. Una industria de cueros produce tres artículos diferentes, cada uno de los cuales precisa para su elaboración de tres materias primas. En la siguiente tabla se presenta el número de unidades de cada materia prima que se requiere para elaborar una unidad de cada producto.

Materia prima	Artículo x	Artículo y	Artículo z
A	3	2	4
B	4	3	3
C	2	3	5

Si la industria dispone de 60 unidades de A, 80 unidades de B y 50 unidades de C.

a. determina las cantidades de artículos que produce la industria.

b. si los precios de venta de cada artículo son, respectivamente, \$ 50 000, \$ 60 000 y \$ 100 000 y si gasta en cada unidad de materia prima \$ 5 000, \$ 7 000 y \$ 6 000, respectivamente. Determina el beneficio total que consigue con la venta de toda la producción obtenida.

8. Un fabricante de abanicos dispone de dos modelos A y B. El modelo A requiere, para su elaboración, 20 cm² de papel, 120 cm² de lámina de madera y 1 enganche metálico. El modelo B requiere: 60 cm² de papel, 80 cm² de lámina de madera y 1 enganche metálico. El costo de producción de cada modelo es de 1, 20 dólares el A y 1, 30 dólares el B. El precio de venta es de 1, 80 dólares independientemente de cual sea el modelo. Teniendo en cuenta que las existencias son de 3 000 cm² de papel, 7 200 cm² de lámina de madera y 70 enganches, ¿cuál es la región solución?

Prueba TIMSS

9. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & -14 \\ 0 & -31 \end{bmatrix}$, encuentra una matriz C tal que $A \times A \times C = 2B$

Ecuaciones cuadráticas

Unidad 5

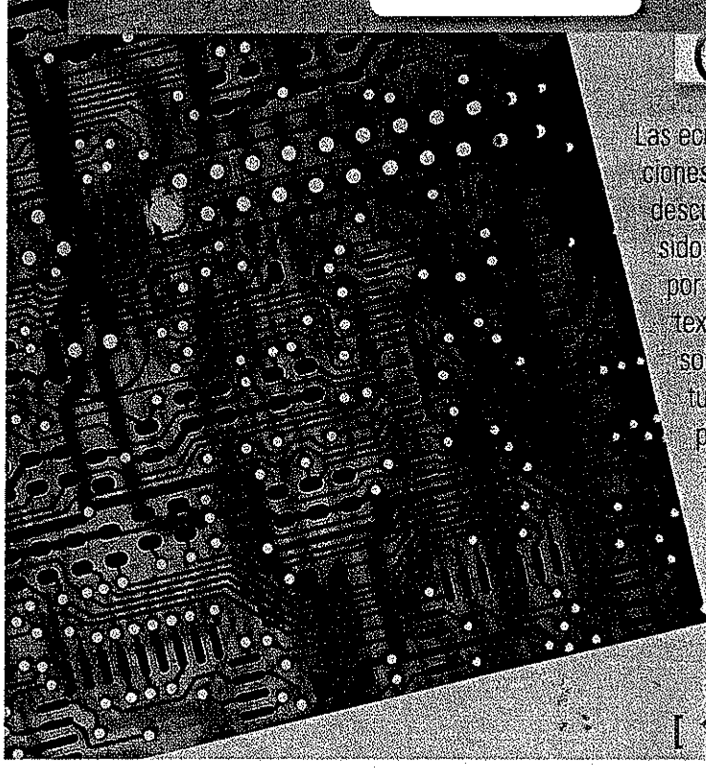
1501-1576
Italia. G. Cardano. Inició el estudio serio de los números complejos.

1512-1596
Juan Pérez de Moya resolvió la versión sincopada de un problema cuadrático. En su "Aritmética práctica y especulativa".

2 000 a.e.c.
Babilonia. En la tablilla cuneiforme denominada BM13901, de la civilización babilonia, aparece la resolución de ecuaciones de segundo grado con una incógnita.

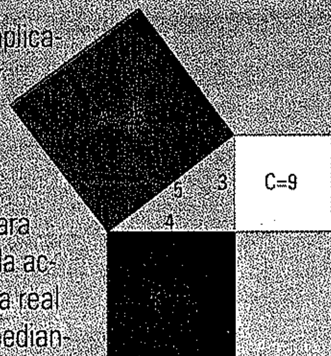
598-660
India. Brahmagupta presenta en sus escritos la resolución de la ecuación:
$x^2 - 10x = -9$

900
Mohamed Ibn Musa presenta una estrategia para solucionar la ecuación:
$x^2 + 10x = 39$



Aplicaciones

Las ecuaciones cuadráticas surgen como aplicaciones a problemas sencillos. Neugebauer descubrió en 1930 que estas habían sido manejadas con gran propiedad por los babilonios en algunos de los textos más antiguos que conocemos para solucionar problemas sobre áreas. En la actualidad muchas situaciones de la vida real pueden representarse o calcularse mediante el uso de ecuaciones cuadráticas:



- para realizar cálculos de áreas de cuadrados, círculos, lados y radios.
- para calcular el valor numérico de muchas aplicaciones que requieren elementos de trigonometría o cálculo.

y números complejos

MARCO HISTÓRICO

En el siglo cuarto antes de Cristo, apareció en Grecia una obra titulada *"Aritmética"* que constaba de 13 libros, en la que un matemático poco conocido en ese entonces, se propuso solucionar los grandes problemas del álgebra. Este gran matemático fue Diofanto, nacido en Alejandría y quien vivió entre 325-409 d.e.c.

Diofanto utilizó por vez primera un símbolo especial (no era la actual x) para expresar la incógnita en las ecuaciones. Según parece a él se le debe los cimientos de la teoría de las ecuaciones de primer grado y la solución de las de segundo.

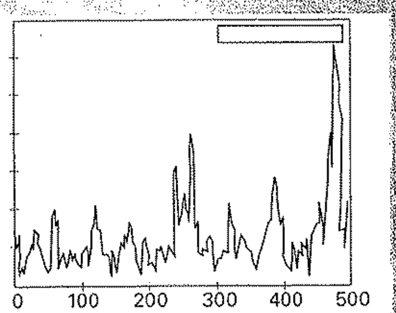
En el curso de la Edad Media, los métodos y las notaciones de Diofanto se perfeccionaron muy lentamente. Se introdujeron símbolos que permitían designar varias incógnitas. Sin embargo, las operaciones de suma y de resta se designaron por mucho tiempo utilizando las letras p y m y la raíz cuadrada mediante el símbolo $\mathfrak{R}$, de igual forma, el signo igual (=) sólo se introdujo a mediados del siglo XVI.

Es en el siglo XVI que se consolida la actual notación de los exponentes. Descartes, Newton y Leibniz perfeccionan la notación general, introduciendo definitivamente subíndices para distinguir los coeficientes y exponentes para designar el grado de los términos.

Para que argumentes

¿Porqué en matemáticas se utilizan las variables en lugar de utilizar directamente los nombres de los objetos o cosas?

- también es útil, en muchas aplicaciones de carácter científico, industrial y técnico, aplicaciones en la física (en los movimientos parabólicos), aplicaciones en la ingeniería (para calcular el grado de solidez de un cuerpo), o cuando un técnico hidráulico trata de averiguar la fuerza con que son arrastradas las piedras por una corriente de agua.
- en aplicaciones de carácter comercial: cálculo de intereses compuestos, tasas de interés, ganancias sobre ventas o utilidades de una compañía.



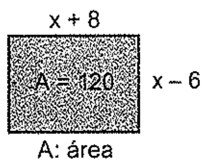
En eventos de salud: expectativa de vida, lectura de exámenes médicos, etc.

Solución de ecuaciones cuadráticas

Logro: resolver problemas que involucran funciones cuadráticas utilizando diversos métodos.

Comparte lo que sabes

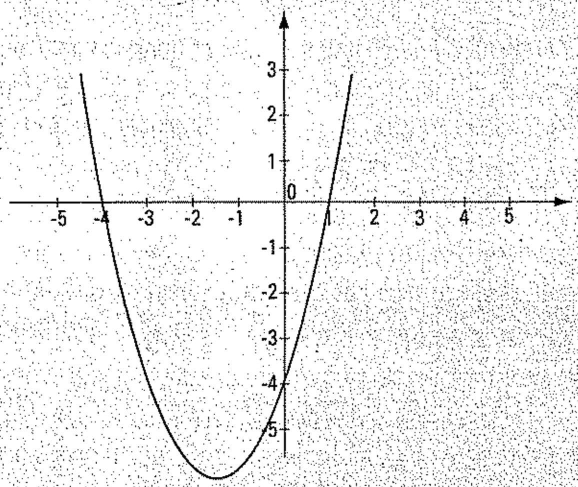
Determina la longitud y el perímetro de la figura a partir de la información dada.



En esta sección aplicarás los conceptos de raíz cuadrada, completación de cuadrados y aplicación de la fórmula general como alternativas que facilitan encontrar las soluciones de una ecuación de segundo grado.

Encontrar las soluciones de una ecuación cuadrática es hallar los puntos de corte de la gráfica con el eje x.

Por ejemplo, en la ecuación $x^2 + 3x - 4 = 0$, las soluciones son: $x_1 = -4$ y $x_2 = 1$; es decir, la gráfica de la ecuación corta al eje x en los puntos $(-4, 0)$ y en $(1, 0)$



Uso de la propiedad de la raíz cuadrada

Todo número positivo tiene dos raíces cuadradas, así por ejemplo: $\sqrt{25} = +5$ y $\sqrt{25} = -5$.

Esto se puede escribir en forma simplificada como $\sqrt{25} = \pm 5$. Lo cual indica que la raíz cuadrada de 25 tiene dos soluciones: una positiva, $+5$ y otra negativa, -5.

Este hecho puede utilizarse para resolver ecuaciones de la forma: $x^2 = a$. Observa:

Si $x^2 = a$ con $a \in \mathbb{R}^+$ entonces $x = \pm\sqrt{a}$

Ejemplos

a. $x^2 - 16 = 0$	b. $x^2 + 7 = 56$	c. $(x - 5)^2 = 50$
$x^2 - 16 + 16 = 0 + 16$	$x^2 + 7 - 7 = 56 - 7$	$x - 5 = \pm\sqrt{50}$
$x^2 = 16$	$x^2 = 49$	$x = 5 \pm \sqrt{25} \times \sqrt{2}$
$x = \pm\sqrt{16}$	$x = \pm\sqrt{49}$	$x = 5 \pm 5\sqrt{2}$
$x = \pm 4$	$x = \pm 7$	

Resolución de ecuaciones cuadráticas completando el cuadrado

Para resolver una ecuación cuadrática puede hacerse uso de la factorización de un trinomio cuadrado perfecto y luego aplicar la propiedad de la raíz cuadrada para resolver la ecuación resultante.

De no tenerse un trinomio cuadrado perfecto, debe hacerse uso del álgebra para lograrlo.

Ejemplos

a. $x^2 + 12x + 27 = 0$

$$x^2 + 12x + 27 - 27 = 0 - 27$$

$$x^2 + 12x = -27$$

En esta última ecuación se debe determinar el cuadrado de la mitad del coeficiente numérico del término de primer grado, en este caso $\left(\frac{1}{2}(12)\right)^2 = 36$, que es el término que completa el trinomio cuadrado perfecto, luego se debe sumar el valor encontrado a ambos lados de la última igualdad:

$$x^2 + 12x + 36 = -27 + 36$$

$$x^2 + 12x + 36 = 9$$

Con este procedimiento se encontró una ecuación equivalente con la primera, pero en la que uno de sus miembros es un trinomio cuadrado perfecto. Ahora se puede utilizar la propiedad de la raíz cuadrada y encontrar la solución:

$$(x+6)^2 = 9$$

$$x + 6 = \pm\sqrt{9}$$

$$x + 6 = \pm 3$$

$$x_1 = +3 - 6 \text{ y } x_2 = -3 - 6$$

$$x_1 = -3 \text{ y } x_2 = -9$$

Es fácil comprobar que ambas son soluciones de la ecuación:

Para $x = -3$: $(-3)^2 + 12(-3) + 27 = 0$;

para $x = -9$: $(-9)^2 + 12(-9) + 27 = 0$

b. $x^2 + 2x - 7 = 0$

$$x^2 + 2x = 7$$

$$x^2 + 2x + 1 = 7 + 1$$

$$(x+1)^2 = 8$$

$$x + 1 = \pm\sqrt{8}$$

$$x + 1 = \pm\sqrt{4}\sqrt{2}$$

$$x + 1 = \pm 2\sqrt{2}$$

$$x = -1 \pm 2\sqrt{2}$$

Lo cual implica que $x_1 = -1 - 2\sqrt{2}$ y $x_2 = -1 + 2\sqrt{2}$. Así: $x_1 \approx -3,828$ y $x_2 \approx 1,828$

c. $3x^2 + 6x - 24 = 0$

Antes de comenzar, multiplicamos la ecuación por $\frac{1}{3}$ para obtener en el coeficiente principal un 1:

$$\frac{1}{3}(3x^2 + 6x - 24) = \frac{1}{3}(0)$$

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

Ahora podemos completar el cuadrado y encontrar las soluciones:

$$x^2 + 2x - 8 + 8 = 0 + 8$$

$$x^2 + 2x + 1 = 9$$

$$(x+1)^2 = 9$$

$$(x+1) = \pm\sqrt{9}$$

$x + 1 = \pm 3$, es decir, $x = -1 \pm 3$; luego,

$$x_1 = -4 \text{ y } x_2 = 2.$$

Resolución de ecuaciones cuadráticas utilizando la factorización

Para resolver una ecuación cuadrática se puede utilizar alguno de los casos de factorización, teniendo en cuenta estos pasos:

1. Igualar a cero la ecuación dada.
2. Identificar el caso de factorización que más se acomoda al problema.
3. Factorizar de acuerdo con cada caso.
4. Finalmente encontrar las soluciones.

Ejemplos

a. $12-8n+n^2=0$ — Se puede utilizar el caso para factorizar expresiones de la forma: x^2+bx+c.

$(n-6)(n-2)=0$ — Factorizando la ecuación.

$n_1=6$ y $n_2=2$ — Haciendo cada factor igual a cero y despejando la variable.

b. $6x^2-11ax-10a^2=0$ — Utilizando el caso de factorización para expresiones ax^2+bx+c.

$(2x-5a)(3x+2a)=0$ — Factorizando o descomponiendo la ecuación.

$x_1=\frac{5a}{2}$ y $x_2=\frac{-2a}{3}$ — Haciendo cada factor igual a cero y despejando la variable.

Para resolver una ecuación por alguno de los métodos de factorización, se debe tener en cuenta:

- utilizar la propiedad de la suma para eliminar todos los términos de un lado de la ecuación y de esta forma igualar la ecuación a cero.
- sumar los términos semejantes y luego factorizar, aplicando el caso que sea necesario.
- igualar a cero cada factor que contenga la variable y resolver la ecuación que resulta.
- verificar las soluciones en la ecuación original.

PRÁCTICA EN CONTEXTO

Ejercitación de procedimientos

1. Utiliza la propiedad de la raíz cuadrada para resolver:

a. $x^2-1=0$
b. $x^2=16$
c. $x^2=36$
d. $x^2+11=60$
e. $4x^2=16$
f. $3x^2-1=11$
g. $6x^2-16=200$
h. $8x^2-392=0$
i. $(x+3)^2=16$
j. $(x-9)^2-5=16$
k. $(x-0,3)^2=6,25$
l. $(2x-6)^2=64$
m. $\left(\frac{3}{2}x-\frac{1}{5}\right)^2=\frac{1}{9}$
n. $\left(\frac{7}{2}x-\frac{12}{7}\right)^2=\frac{1}{49}$
o. $\left(\frac{1}{2}x-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{4}$
p. $\left(\frac{1}{5}x-\frac{4}{57}\right)^2=\frac{9}{4}$
q. $\left(x-\frac{1}{7}\right)^2=\frac{16}{49}$
r. $\left(\frac{3}{4}x-5\right)^2=\frac{1}{36}$
s. $\left(x-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{144}{289}$
t. $\left(\frac{3}{8}x-\frac{5}{9}\right)^2=\frac{4}{36}$

2. Completa un trinomio cuadrado perfecto para hallar las soluciones de cada ecuación:

a. $x^2+4x-12=0$
b. $x^2+2x-8=0$
c. $x^2+6x-27=0$
d. $x^2+8x-9=0$
e. $x^2+12x-13=0$
f. $x^2+20x-21=0$
g. $x^2+x-\frac{3}{4}=0$
h. $x^2+3x-4=0$
i. $x^2+\frac{7}{2}x-2=0$
j. $x^2+14x-15=0$

k. $3x^2 - 5x - 2 = 0$ p. $-x^2 - 4x + 12 = 0$

l. $2x^2 - 7x - 4 = 0$ q. $-\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2} = 0$

m. $x^2 + x - 1 = 0$ r. $18x^2 - 6x = 0$

n. $-x^2 + 3x + 4 = 0$ s. $2x^2 = 8x + 90$

o. $-x^2 + 9x - 20 = 0$ t. $2x^2 - 3x = 5$

3. Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas utilizando la factorización. Si no es posible hacerlo, explica.

a. $x^2 - 2x - 8 = 0$ i. $x^2 + 11x + 30 = 0$

b. $x^2 - 6x - 7 = 0$ j. $x^2 + 13x + 40 = 0$

c. $x^2 - 2x - 3 = 0$ k. $x^2 + 14x + 40 = 0$

d. $x^2 - 3x - 10 = 0$ l. $x^2 + 14x + 48 = 0$

e. $x^2 - 16x - 17 = 0$ m. $x^2 + 24x + 80 = 0$

f. $x^2 - 4x - 12 = 0$ n. $x^2 + 4x - 12 = 0$

g. $x^2 + 9x + 18 = 0$ o. $x^2 - 10x + 21 = 0$

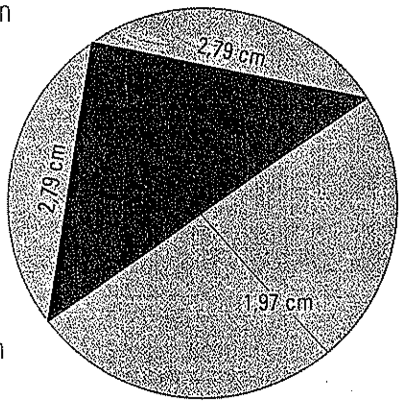
h. $x^2 - 2x - 15 = 0$ p. $x^2 - 12x + 35 = 0$

Razonamiento y modelación

4. Resuelve los siguientes problemas:

a. Un triángulo rectángulo inscrito en un círculo tiene como base el diámetro de la circunferencia.

Si además, como se ve en la figura, los catetos que forman el triángulo rectángulo son iguales, determina una ecuación de segundo grado que demuestre que los datos del dibujo son verdaderos.

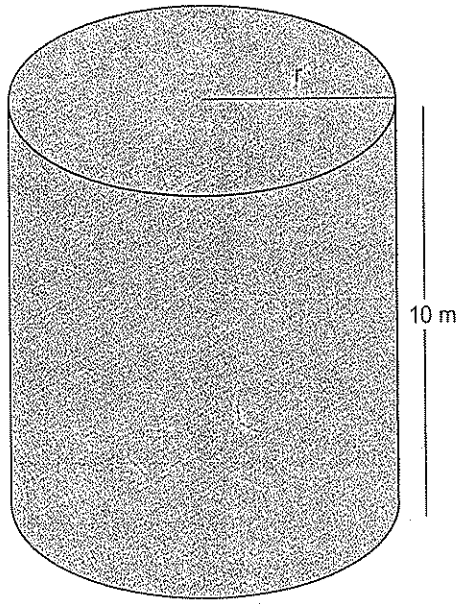


b. Si la diagonal de un cuadrado mide 60 cm más que cada lado, determina la longitud del lado.

c. Determina las dimensiones de un jardín si el largo es 3 m más que el doble del ancho y tiene de área 65 m².

d. Encuentra dos enteros consecutivos cuyo producto es 156.

e. Halla el radio de este cilindro si el volumen es 7π m³.



f. La suma de dos números es 10 y la suma de sus cuadrados es 58. Halla ambos números.

g. El número de diagonales de un polígono de n lados está dado por $D = \frac{n(n-3)}{2}$. Encuentra el polígono que tiene 54 diagonales.

h. La suma de los primeros n números naturales es $S = \frac{n(n+1)}{2}$ ¿Cuántos números naturales consecutivos, comenzando con el 1, suman 1 275?

i. Se han invertido $ 500 a una tasa de interés compuesto anual de x, por 2 años. Si el valor acumulado en los dos años es de $ 595,04, ¿a cuánto equivale x?

Resolución de ecuaciones utilizando la fórmula cuadrática

Logro: deducir y aplicar la fórmula general para resolver ecuaciones.

COMPARTE LO QUE SABES

El producto de dos enteros pares consecutivos es 288, ¿cuáles son esos enteros?

Forma general de la ecuación cuadrática

La forma general de una ecuación de segundo grado es: $ax^2 + bx + c = 0$

Donde a es el coeficiente del término cuadrático y es distinto de cero, b es el coeficiente del término de primer grado y c es la constante.

Ejemplos

Fórmula general	Valor de coeficientes
$x^2 + 2x - 7 = 0$	$a = 1,\ b = 2$ y $c = -7$
$-4x^2 + 0,8 = 0$	$a = -4,\ b = 0$ y $c = 0,8$
$\frac{1}{5}x^2 - \frac{3}{9}x = 0$	$a = \frac{1}{5},\ b = -\frac{3}{9}$ y $c = 0$

Deducción de la fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas

Existen varias formas para deducir la fórmula de la ecuación cuadrática. Aquí utilizaremos el método de completación de cuadrados perfectos.

Sea la ecuación cuadrática general: $ax^2 + bx + c = 0$

$\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0$	Dividiendo ambos miembros de la igualdad entre a.
$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} - \frac{c}{a} = 0 - \frac{c}{a}$ $x^2 + \frac{bx}{a} = -\frac{c}{a}$	Restando $\frac{c}{a}$ en ambos términos.
$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$	Sumando en ambos miembros de la igualdad $\left(\frac{b}{a} \div 2\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}$ para completar el cuadro.
$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$	Reescribiendo el trinomio como un binomio al cuadrado.
$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$	Resolviendo el lado derecho.
$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$	Aplicando la propiedad de la raíz cuadrada.
$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	Aplicando la regla del cociente para radicales.
$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	Restando $\frac{b}{2a}$ en ambos lados.
$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	Escribiendo el término de la derecha con denominador común para obtener finalmente la fórmula cuadrática.

Utilización de la fórmula cuadrática para resolver ecuaciones cuadráticas

Para resolver ecuaciones cuadráticas por medio de la fórmula, es necesario tener en cuenta los siguientes puntos:

1. Escribe la ecuación cuadrática en la forma general $ax^2 + bx + c = 0$.
2. Determina los valores numéricos de a, b y c.
3. Sustituye a, b y c con los valores correspondientes en la fórmula para obtener la solución.
4. Efectúa las operaciones indicadas en la fórmula.
5. Evita cometer los errores más comunes al aplicar la fórmula, como por ejemplo:

Correcto	Incorrecto	
$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$x = -b \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$

Ejemplos

1. Resolver la ecuación $x^2 + 5x = 14$

- Lo primero que se debe hacer es organizar los términos de la ecuación: $x^2 + 5x - 14 = 0$; en esta ecuación $a = 1$, $b = 5$ y $c = -14$
- Se remplaza en la fórmula general y se efectúan las operaciones indicadas:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(1)(-14)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 56}}{2}$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{81}}{2} = \frac{-5 \pm 9}{2}, \text{ entonces}$$

$$x_1 = \frac{-5 - 9}{2} = \frac{-14}{2} = -7 \text{ y } x_2 = \frac{-5 + 9}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

- Verifica las soluciones.

2. Resolver la ecuación $2x + 8 = x^2$

- Ordenando y escribiendo en forma general los términos de la ecuación se tiene $-x^2 + 2x + 8 = 0$

Aplicando la fórmula general:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(-1)(8)}}{2(-1)}$$

$x = \frac{-2 \pm 6}{-2}$, entonces $x_1 = 4$ y $x_2 = -2$

- Verifica las soluciones.

3. Resolver la ecuación $\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{5}x - 2 = 0$

- Se reduce la expresión a común denominador

$\frac{5x^2 + 6x - 30}{15} = 0$;

- Al multiplicar por 15 a ambos lados se obtiene la ecuación en su forma general:

$5x^2 + 6x - 30 = 0$

Aplicando la fórmula general:

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 600}}{10}$$

En forma aproximada:

$$x_1 = \frac{-6 + \sqrt{636}}{10} = 1,92$$

$$\text{y } x_2 = \frac{-6 - \sqrt{636}}{10} = -3,12$$

4. Resolver la ecuación $m^2 + \frac{2}{5}m - \frac{1}{3} = 0$

Esta ecuación puede resolverse aplicando directamente la fórmula general; sin embargo, se puede multiplicar a ambos lados de la igualdad por 15, que es el mínimo común múltiplo de los denominadores:

$$15\left(m^2 + \frac{2}{5}m - \frac{1}{3}\right) = 15(0)$$

$$15m^2 + 6m - 5 = 0$$

Ahora se puede utilizar la fórmula general:

$$m = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 300}}{30} = \frac{-6 \pm 4\sqrt{21}}{30}$$

En forma aproximada: $m_1 = -0,811$ y $m_2 = 0,411$

Cómo escribir una ecuación cuadrática conocidas las soluciones

En los siguientes ejemplos se explica el método para escribir una ecuación cuadrática a partir de sus soluciones, es decir, de sus cortes con respecto al eje x.

Ejemplos

1. Si $x_1 = 3$, $x_2 = 2$

$x - 3 = 0$ y $x - 2 = 0$	Igualando las ecuaciones a 0.
$(x-3)(x-2) = 0$	Aplicando la propiedad del factor nulo.
$x^2 - 2x - 3x + 6 = 0$	Multiplicando los factores.
$x^2 - 5x + 6 = 0$	Reduciendo a términos semejantes.

2. Si $x_1 = 6 + m$ y $x_2 = 3 - 5m$

La ecuación surge de la expresión:

$$[x - (6+m)][x - (3-5m)] = 0$$

$$x^2 - x(3-5m) - x(6+m) + (3-5m)(6+m) = 0$$

$$x^2 - x(9-4m) + (6+m)(3-5m) = 0$$

Uso del discriminante para determinar el número de soluciones reales de una ecuación cuadrática

Se debe recordar que las ecuaciones cuadráticas se representan en el plano por medio de una parábola y que sus cortes con el eje x representan las soluciones de la ecuación. Pero en muchos casos las gráficas no tocan al eje x, lo que indica que la ecuación no tiene solución en los reales.

El discriminante es la expresión escrita bajo el radical de la fórmula cuadrática: es decir, $b^2 - 4ac$; éste permite determinar, en forma algebraica, si la ecuación tiene dos, una o ninguna solución real.

Para una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$, se cumple que:

Si $b^2 - 4ac > 0$, la ecuación tiene dos soluciones reales distintas.

Si $b^2 - 4ac = 0$, la ecuación tiene una solución real.

Si $b^2 - 4ac < 0$, la ecuación no tiene soluciones reales.

Ejemplos

1.

a. Determina el discriminante de la ecuación

$$x^2 - 11x + 18 = 0$$

Como: $a = 1$, $b = -11$ y $c = 18$

El discriminante es:

$$b^2 - 4ac = (-11)^2 - 4(1)(18) = 121 - 72 = 49$$

b. ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación dada?

Como el determinante es mayor que cero, la ecuación tiene dos soluciones reales distintas.

c. Aplica la fórmula cuadrática para encontrar las soluciones.

$x_{1,2} = \dfrac{-(-11) \pm \sqrt{49}}{2} = \dfrac{11 \pm 7}{2}$, luego las soluciones de la ecuación son $x_1 = 9$ y $x_2 = 2$.

2. Sin suministrar las soluciones, determina si las siguientes ecuaciones tienen dos soluciones reales, una solución real, o ninguna solución real.

a. $2x^2 - x - 6 = 0$

El discriminante de la ecuación es $(-1)^2 - 4(2)(-6) =$

Como el discriminante es positivo, la ecuación tiene dos soluciones reales. Encuéntralas.

b. $x^2 + 7x + 15 = 0$

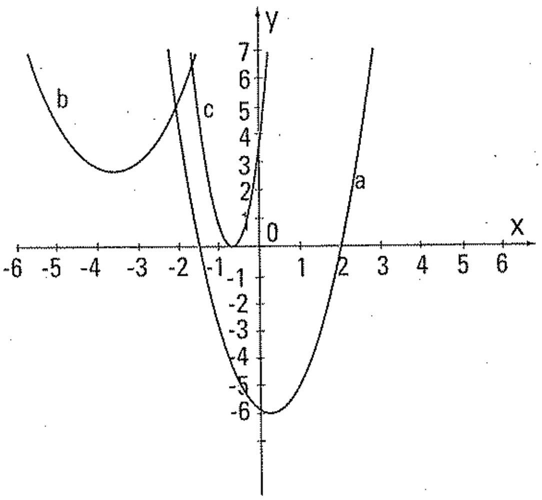
El discriminante de la ecuación es $7^2 - 4(1)(15) = -11$

Como el discriminante es negativo, la ecuación no tiene solución en los reales.

c. $9x^2 + 12x + 4 = 0$

El discriminante de la ecuación es $12^2 - 4(9)(4) = 0$

Como el discriminante es igual a cero, la ecuación tiene una solución en los reales.



En la gráfica pueden verse los cortes de las gráficas de los ejercicios anteriores con el eje x; a: 2 cortes, es decir, 2 soluciones en $\mathbb{R}$; b: 0 cortes, es decir, 0 soluciones en $\mathbb{R}$ y c: 1 corte, es decir, una solución en $\mathbb{R}$.

PRÁCTICA EN CONTEXTO

Ejercitación de procedimientos

1. Determina el discriminante, soluciona la ecuación con la fórmula cuadrática y grafica la ecuación.

a. $x^2 - 4x = 5$

b. $x^2 - 6x = 9$

c. $2x^2 + x - 1 = 0$

d. $x^2 + 5x - 24 = 0$

e. $3x^2 + 10x + 2 = 0$

f. $-v^2 - v = -1$

g. $3m = 2m^2 - \dfrac{9}{8}$

h. $\dfrac{2}{3}x^2 - \sqrt{8}x + 3 = 0$

i. $2(3m-1)^2 + (3m-1) = 1$

j. $x^2 = -1$

2. Determina $k \in \mathbb{R}$ de manera tal que: $\left(\dfrac{11-5k}{k}\right)x^2 + (k+1)x + 1 = 0$, tenga discriminante igual a 0.

3. Encuentra el valor del discriminante de la ecuación: $\dfrac{x+3}{3} - \dfrac{2}{x-4} = \dfrac{x}{6} + \dfrac{x-2}{4}$

Gráficas de funciones cuadráticas

Logro: graficar funciones cuadráticas.

Comparte lo que sabes

Elabora una lista de al menos 5 funciones cuadráticas que no tengan solución en los reales.

La gráfica de una función cuadrática se denomina *parábola*. En el tema anterior hicimos un análisis de las intersecciones con el eje x de las funciones cuadráticas; ahora graficaremos las funciones cuadráticas utilizando varios métodos: el trazado de puntos, las intersecciones, los ejes de simetría, los vértices, los patrones y las traslaciones.

Determinar cuándo una parábola abre hacia arriba o hacia abajo

El signo del coeficiente principal, esto es, el signo de a en $y = ax^2 + bx + c$, determina si la parábola abre hacia arriba o hacia abajo.

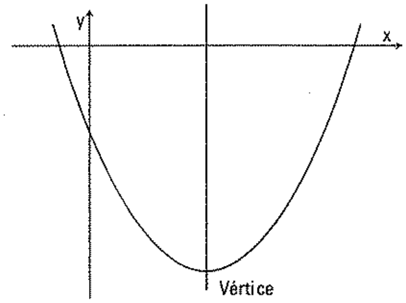
Si $a > 0$, la parábola abre hacia arriba.

Si $a < 0$, la parábola abre hacia abajo.

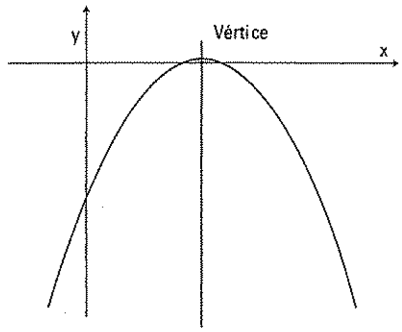
En el caso de las parábolas que abren hacia **arriba**, el **vértice** es el valor mínimo que alcanza la función.

En el caso de las parábolas que abren hacia **abajo**, el **vértice** es el valor máximo que alcanza la función.

a > 0



a < 0



Determinar el eje de simetría, el vértice y las intersecciones con el eje de las x

Las gráficas de funciones cuadráticas tienen simetría respecto a una recta vertical que pasa por el vértice, esto significa que si la gráfica se doblara por la línea de simetría las partes situadas a los lados, coincidirían.

Para determinar el eje de simetría basta con determinar $x = -\frac{b}{2a}$, que es la ecuación de dicho eje.

Para deducir esta expresión procederemos como sigue:

Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$, se factoriza a en los dos primeros términos y se obtiene:

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c$$

- Sumando y restando dentro del paréntesis el cuadrado, de la mitad del coeficiente en x se obtiene:

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c$$

- Se reescribe la función así:

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - a\left(\frac{b^2}{4a^2}\right) + c$$

- Se expresa el trinomio como el cuadrado de un binomio:

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

- Escribimos las dos últimas fracciones con denominador común:

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a}$$

- Se combinan los términos de la primera y segunda parte:

$$f(x) = a\left[x - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right]^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Obsérvese que cuando $x = -\frac{b}{2a}$ el valor de $f(x) = y = \frac{4ac - b^2}{4a}$ que corresponden a las coordenadas del vértice.

Así que para determinar el vértice de la parábola se debe seguir los siguientes pasos:

1. Se determina el eje de simetría con la fórmula $x = -\frac{b}{2a}$

2. Se determina el vértice al evaluar la función en el punto sobre el eje, por tanto el vértice (x, y) es:

$$(x, y) = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$$

Número de intersecciones con el eje *x*

El discriminante $4ac - b^2$ puede usarse para determinar el número de intersecciones con el eje x, así:

1. Si $4ac - b^2 > 0$, $f(x)$ tiene dos intersecciones con el eje x.
2. Si $4ac - b^2 = 0$, $f(x)$ tiene una intersección con el eje x.
3. Si $4ac - b^2 < 0$, $f(x)$ no tiene intersecciones con el eje x.

Ejemplos

1. Examina la ecuación $f(x) = -x^2 - 12x - 11$
   a. Determina si la parábola abre hacia arriba o hacia abajo.
   b. Determina la intersección de la gráfica con eje y.
   c. Determina el vértice.
   d. Determina, las intersecciones de la ecuación con eje x.
   e. Traza la gráfica.

Solución

a. Como $a = -1$, es decir $a < 0$, la parábola abre hacia abajo.

b. Para determinar la intersección con el eje y hacemos $x = 0$ y despejamos y.

$y = f(0) = -0^2 - 12(0) - 11 = -11$, luego el punto de intersección de la gráfica de la función con el eje y es en el punto $(0, -11)$

c. Para determinar el vértice:

- Determinamos la coordenada para x:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-12)}{2(-1)} = -6$$

- Determinamos la coordenada para y:

$$f(-6) = y = \frac{4(-1)(-11) - (-12)^2}{4(-1)} = \frac{44 - 144}{-4} = 25$$

Luego el vértice es el punto $(-6, 25)$.

d. Para determinar los puntos de intersección con el eje x hacemos $f(x) = y = 0$

$$-x^2 - 12x - 11 = 0$$

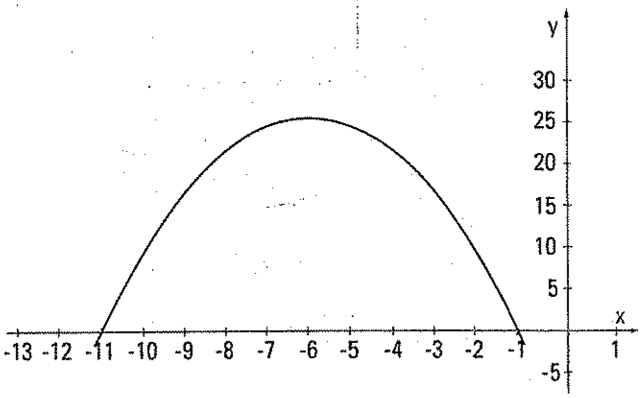
$$x^2 + 12x + 11 = 0$$

$$(x + 11)(x + 1) = 0$$

$$x_1 = -11 \text{ y } x_2 = -1$$

Luego los puntos de intersección con el eje x son $(-11,0)$ y $(-1,0)$

e. Gráfica:



En alguna funciones al determinar los puntos de corte con el eje x o con el eje y, pueden obtenerse valores irracionales. En ese caso es necesario que utilices la calculadora para estimar esos valores redondeando a la centésima más cercana.

2. A partir de la ecuación:

$f(x) = 2x^2 + 6x - 10$

a. Determina el vértice.

b. Determina las intersecciones de la gráfica con eje x.

c. Traza la gráfica.

<u>Solución</u>

a. Para determinar el vértice

- hallamos la coordenada para x:

$$x = -\frac{6}{2(2)} = \frac{-6}{4} = -1,5$$

- determinamos la coordenada para y:

$$f(-1,5) = y = \frac{4(2)(-10) - (6)^2}{4(2)} = \frac{-80 - 36}{8} = -14,5$$

Luego el vértice es el punto $(-1,5, -14,5)$.

b. Para determinar los puntos de intersección con el eje x hacemos $f(x) = y = 0$, es decir,

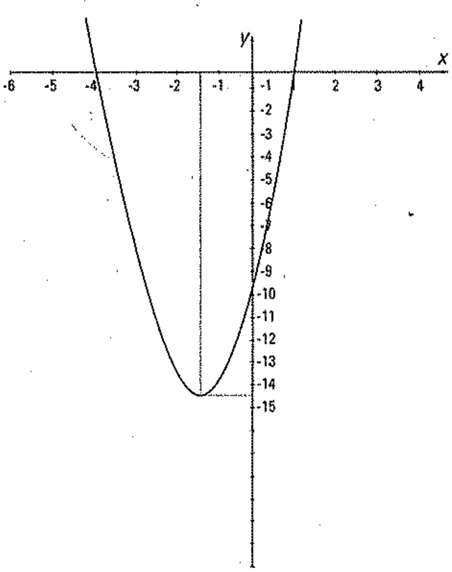
$$2x^2 + 6x - 10 = 0$$

Al aplicar la fórmula cuadrática:

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4(2)(-10)}}{2(2)}$$

Luego los puntos de intersección con el eje x son: $(-4,19; 0)$ y $(1,19; 0)$

c. Gráfica:



PRÁCTICA EN CONTEXTO

Ejercitación de procedimientos

1. Encuentra las soluciones aplicando la fórmula general para ecuaciones cuadráticas:

a. $x^2 + 3x + 1 = 0$

b. $x^2 + 4x + 1 = 0$

c. $x^2 + 7x + 1 = 0$

d. $x^2 + 4x + 3 = 0$

e. $x^2 + 7x + 2 = 0$

f. $x^2 + 5x + 5 = 0$

g. $3x^2 - 5x + 2 = 0$

i. $x^2 + 11x = -24$

j. $x^2 = 16x - 63$

k. $12x - 4 - 9x^2 = 0$

l. $5x^2 - 7x - 90 = 0$

m. $6x^2 = x + 222$

n. $x + 11 = 10x^2$

o. $49x^2 - 70x + 25 = 0$

p. $12x - 7x^2 + 64 = 0$

q. $x^2 = -15x - 56$

r. $32x^2 + 18x - 17 = 0$

s. $176x = 121 + 64x^2$

t. $8x + 5 = 36x^2$

u. $27x^2 + 12x - 7 = 0$

v. $15x = 25x^2 + 2$

w. $8x^2 - 2x - 3 = 0$

x. $105 = x + 2x^2$

2. Examina cada función. En cada caso determina:

- si la parábola abre hacia arriba o hacia abajo.
- la intersección de la curva con el eje y.
- el vértice.
- las intersecciones de la parábola con eje x.
- la gráfica correspondiente.

a. $f(x) = x^2 - 7x + 8$

b. $f(x) = x^2 - 3x + 2$

c. $f(x) = 2x + x^2 + 1$

d. $f(x) = -6 - x^2 - 5x$

e. $f(x) = -2x + x^2 - 3$

f. $f(x) = 6x^2 - 3x - 4$

g. $f(x) = 6 + 7x + x^2$

h. $f(x) = 5x^2 - 7x - 3$

i. $f(x) = x^2 - x + 1$

j. $f(x) = 6x^2 - 2x + 1$

k. $f(x) = x^2 - 6x + 8$

l. $f(x) = 3x^2 - 4x - 7$

m. $f(x) = x^2 + 4x + 4$

n. $f(x) = 3x - x^2 + 10$

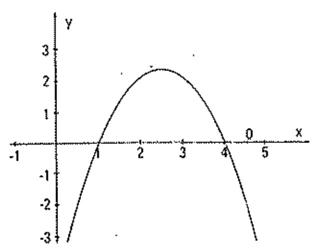
o. $f(x) = 9 - x^2$

p. $f(x) = 5x + 7 - 2x^2$

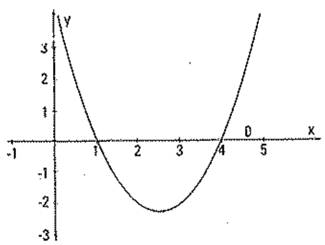
Razonamiento

3. Sea la función $f(x) = x^2 + 5x + 4$, ¿cuál de las siguientes gráficas corresponde al trazado de la función? Explica por qué.

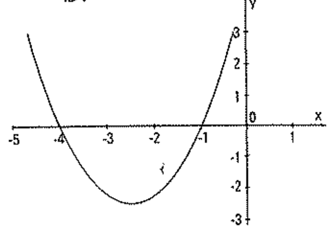
a.



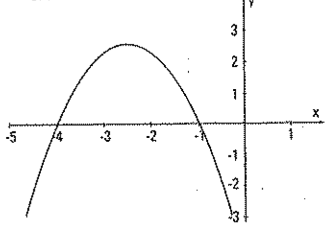
c.



b.



d.



Problemas de aplicación

Logro: modelar situaciones de variación aplicando la función cuadrática.

Comparte lo que sabes

¿Cuáles son los números que sumados dan nueve y la suma de sus cuadrados es 53?

Muchos problemas relacionados con áreas, volúmenes, máximos, utilidades, porcentajes, curvas de funcionamiento de distintos órganos humanos se resuelven fácilmente aplicando el modelo de la función cuadrática.

Ejemplos

1. Hallar dos números enteros positivos consecutivos, tales que el cuadrado del mayor exceda en 57 al triple del menor.

El primer paso a seguir consiste en buscar el modelo matemático que relacione las variables con sus condiciones. Si x es el número menor el mayor es $x+1$ y la ecuación se plantea así:

$$(x+1)^2 - 57 = 3x$$

$$x^2 - x - 56 = 0$$

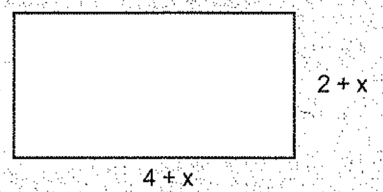
Aplicamos la fórmula general:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+224}}{2}$$

$$x_1 = 8 \text{ y } x_2 = -7$$

Como la solución de x_2 no es positiva, que es una condición en el ejercicio, los números buscados son 8 y 9.

2. Si el largo y el ancho de un rectángulo de 2×4 aumentan la misma cantidad, al área del nuevo rectángulo medirá el doble del área original. ¿Cuáles son las dimensiones del nuevo rectángulo?



Es necesario determinar el área inicial que es:

$$A = (l) \times (a) = (4) \times (2) = 8$$

Entonces el área nueva es: $A = (2+x)(4+x)$ luego:

$$16 = (2+x)(4+x)$$

$$16 = x^2 + 6x + 8$$

De donde: $x^2 + 6x - 8 = 0$

Aplicando la fórmula cuadrática

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \text{ obtenemos:}$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{68}}{2}, \text{ es decir, } x_1 = 1,12 \text{ y } x_2 = -7,12$$

Así las dimensiones del nuevo rectángulo serán aproximadamente:

$$4 + 1,12 = 5,12 \text{ por } 2 + 1,12 = 3,12.$$

Nótese que se descarta la solución de x_2 ya que resulta ser una medida negativa.

3. Carlos es cuatro años mayor que Luis y la suma de los cuadrados de ambas edades es 106. Hallar la edad de Carlos y de Luis.

Sea x = la edad de Carlos y y = la edad de Luis.

Por la primera parte del ejercicio se sabe que:

$$x = y + 4$$

Despejando la variable y, obtenemos: $y = x - 4$

Y por la segunda condición: $x^2 + y^2 = 106$

Reemplazando y en la segunda ecuación, obtenemos

$$x^2 + (x-4)^2 = 106$$

$$x^2 + x^2 - 8x + 16 = 106$$

$$2x^2 - 8x - 90 = 0$$

$$x^2 - 4x - 45 = 0$$

$$(x-9)(x+5) = 0$$

Las soluciones obtenidas son: $x_1 = 9$ y $x_2 = -5$

Como las edades están dadas siempre por números positivos, se rechaza $x = -5$. Así, la edad de Carlos es 9, mientras la edad de Luis es $9 - 4 = 5$.

4. Un estudiante compró cierta cantidad de libros, todos al mismo precio. El costo total fue de $ 245 000. Si en el transcurso del semestre se le perdieron dos de los libros, pero los restantes fueron vendidos a mayor precio del original, $ 15 000 más y en total obtuvo $ 5 000 de ganancias, ¿cuál es el precio de cada libro y cuántos libros tenía inicialmente?

Sea x = número de libros y y = precio de cada libro.

- Por la primera parte del ejercicio se sabe que, $xy = 245\,000$

Y por segunda parte, que $(x-2)(y+15\,000) = 245\,000 + 5\,000$

- Despejando y de la primera ecuación, obtenemos: $y = \dfrac{245\,000}{x}$
- Remplazando y en la segunda ecuación: $(x-2)\left(\dfrac{245\,000}{x} + 15\,000\right) = 250\,000$

$$245\,000 + 15\,000x - \frac{490\,000}{x} - 30\,000 = 250\,000$$

$215\,000x + 15\,000x^2 - 490\,000 = 250\,000x$, es importante recordar que para efectuar este paso se debe poner por condición que $x \neq 0$.

- Simplificando y reorganizando: $3x^2 - 7x - 98 = 0$

$$\text{Aplicando la fórmula cuadrática } x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(3)(-98)}}{2(3)}$$

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm 35}{6}, \text{ entonces } x_1 = 7 \text{ y } x_2 = -4,666$$

Como el número de libros es un número natural, se descarta la segunda solución. Así el número de libros es 7, y sustituyendo este valor en $y = \dfrac{245\,000}{x}$ se obtiene que el valor de cada libro es de $ 35 000.

Práctica en contexto

Modelación y solución de problemas

1. Resuelve los siguientes problemas:

a. El cuadrado de un número disminuido en 9 equivale a 8 veces el exceso del número sobre 2. Halla el número.

b. La longitud de un patio excede en 4 a su ancho. Si cada dimensión se aumenta en 4, su área sería el doble, ¿cuáles son las dimensiones?

c. La diferencia de dos números es 7 y su suma multiplicada por el número menor equivale a 184. Encuentra los números.

d. Un tren emplea cierto tiempo en recorrer 240 km. Si la velocidad hubiera sido 20 km/h más que la que llevaba, hubiera tardado 2 horas menos en recorrer dicha distancia. ¿En qué tiempo recorrió los 240 km?

e. Halla tres números consecutivos tales que el cociente del mayor entre el menor, equivalga a los $\frac{3}{10}$ del número intermedio.

f. El producto de dos números es 180 y su cociente da $1\frac{1}{4}$. Halla los números.

g. El cociente de dividir 84 entre cierto número excede en 5 a ese número. Halla el número.

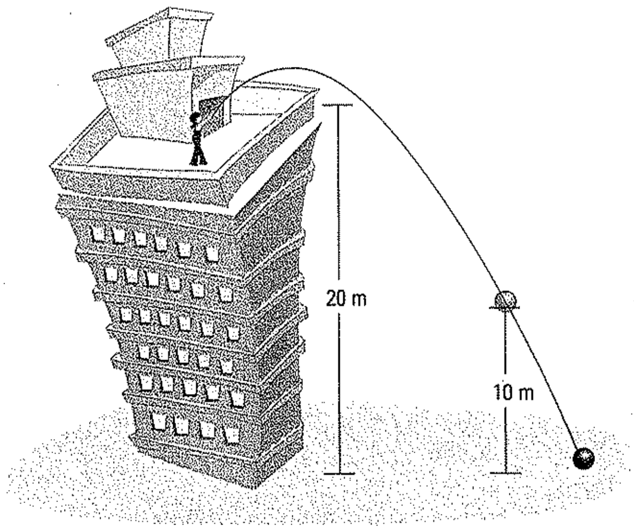
h. La edad de una persona hace 6 años era la raíz cuadrada de la edad que tendrá dentro de 6 años. Halla la edad de esa persona.

i. Se sabe que el desplazamiento de una pelota lanzada desde un edificio está dada por la fórmula:

$$h = \frac{1}{2} g t^2 + v_o t + h_o .$$

Si una persona se encuentra parada en la azotea de un edificio de 20 m de alto y lanza una pelota con $v_o = 4 \frac{\text{m}}{\text{seg}}$, $h_0 = 20\,\text{m}$ y $-9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

- Después del lanzamiento, ¿cuánto tiempo tarda en estar a 10 m del piso?



- ¿Cuánto tiempo tarda en llegar al piso?

j. Encuentra dos enteros pares, positivos y consecutivos cuyo producto sea 168.

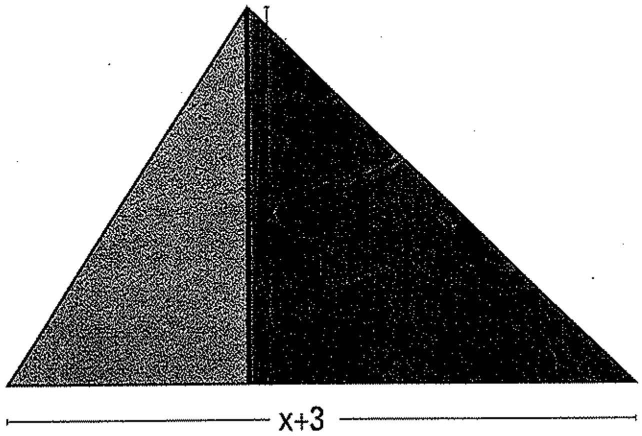
k. Encuentra los dos números positivos, cuya suma sea 21 y su producto es 104.

l. La suma de un número con su recíproco es $\frac{10}{3}$. Encuentra el número.

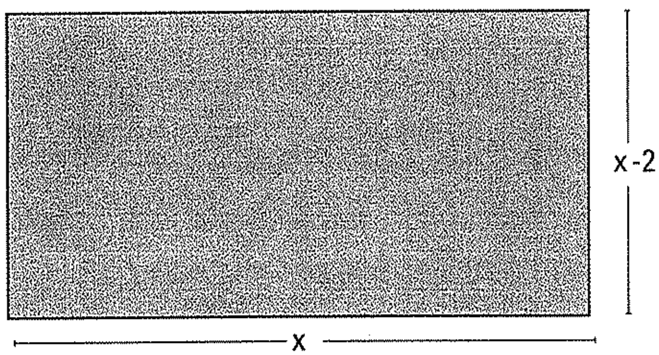
m. Encuentra todos los números que cumplen que su suma es igual que su producto.

n. ¿A qué distancia (aproximadamente) estará el horizonte de un avión que vuela a dos millas de altura, teniendo en cuenta que el radio de la Tierra mide 4 000 millas?

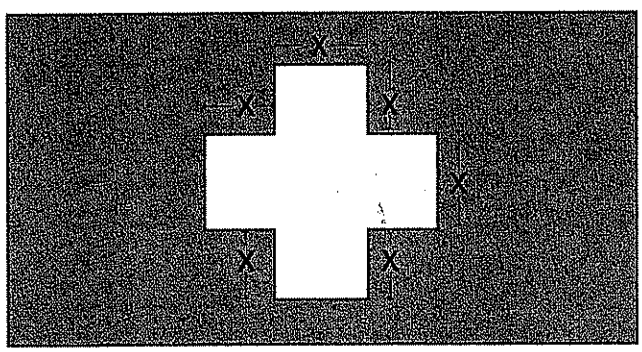
o. Encuentra la base y la altura de un triángulo (no necesariamente isósceles, ni equilátero) cuya área mide $2\,\text{m}^2$, dado que la base mide 3 dm más que la base.



p. La anchura de un rectángulo mide 2 m menos que la longitud. Encuentra ambas dimensiones expresadas en centímetros dado que el área del rectángulo es de $12\,\text{m}^2$.

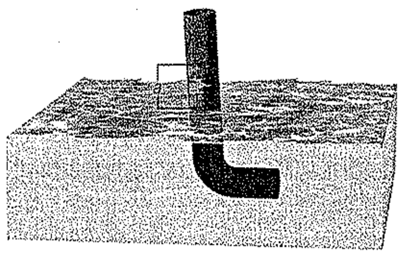


q. Una bandera tiene una cruz blanca, de anchura uniforme, sobre fondo morado. Encuentra la anchura de dicha cruz que abarque la mitad del área total, si las dimensiones de la bandera son 3 por 4 decímetros.



r. Un método para medir la velocidad del agua en un arroyo o en un río consiste en usar un tubo en forma de L como lo indica la figura. La ley de Torricelly nos dice que la altura (en pies) a la que se eleva el agua dentro del tubo, por encima de la superficie, está relacionada con su velocidad en pies sobre segundo mediante la fórmula $v^2 = 2ga$, donde g vale aproximadamente 32 pies por segundo.

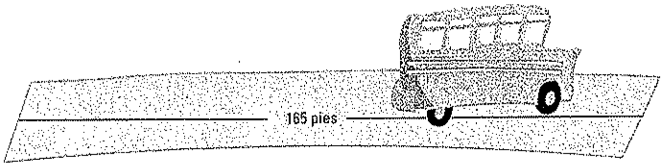
¿A qué velocidad fluye la corriente cuando $a = 0,5$ pies?



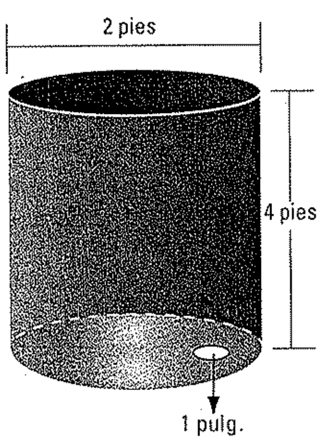
s. El mínimo número de pies d necesarios para detener en las mejores condiciones posibles a un auto que viaje a una velocidad v (medida en millas por hora) está dado por la fórmula:

$$d = 0,044v^2 + 1,1v$$

Calcula la velocidad de un bus escolar que necesitó de 165 pies para detenerse, después de haber advertido el peligro.



t. Un barril de 2 pies de diámetro y 4 pies de altura tiene en el fondo un orificio de desagüe de 1 pulgada de diámetro.



Es posible demostrar que la altura de la superficie del agua, respecto del fondo del barril, en un tiempo t, después de abierto el desagüe, está dada por la fórmula:

$$h = \left(\sqrt{h_0} - \frac{5}{12}t\right)^2$$

donde h representa la altura del barril, h_0 en este caso es 0, que es el nivel de agua sobre el orificio de desagüe cuando $t = 0$. Si el barril está lleno y se abre el desagüe, ¿cuánto tardará en vaciarse la mitad del contenido?

u. Una llave puede llenar un depósito en 5 horas menos que otro. Las dos llaves abiertas lo llenarán en 5 horas. ¿Cuánto tiempo tardará cada una por separado en llenar el depósito?

v. Una prensa de imprenta nueva puede realizar un trabajo en 1 hora menos que otra más antigua. Juntas pueden realizar el mismo trabajo en 1, 2 horas. ¿Cuánto tiempo tardará cada una por separado en hacer el mismo trabajo?

w. Una lancha rápida tarda 1 hora más en viajar 24 km contra la corriente de un río que en el viaje de regreso.

Si la lancha viaja a 10 km/h en agua tranquila, ¿cuál es la velocidad de la corriente en su viaje de 24 km?

x. En cierta ciudad, la ecuación de la demanda para los discos populares está dada por $d = \frac{3\,000}{p}$, donde d representa la cantidad de discos solicitados en un día ordinario y p representa el precio en dólares por disco.

Observa que conforme se eleva el precio por disco, disminuye el número de discos que la gente desea comprar y viceversa.

Por otra parte, la ecuación de la oferta es $s = 200p - 700$, donde s es la cantidad de discos que el proveedor desea surtir a p dólares por disco.

Observa, que este caso, al subir el precio por disco, aumenta el número de discos que el proveedor desea surtir.

¿A qué precio se igualarán la oferta y la demanda?, es decir a qué precio $d = s$?

Recuerda que en la teoría económica el precio al que se igualan la oferta y la demanda recibe el nombre de punto de equilibrio.

Desigualdades cuadráticas

Logro: resolver desigualdades cuadráticas.

COMPARTE LO QUE SABES

Soluciona la ecuación $(3m + 7)^2 + 5(3m + 7) - 150 = 0$.

La solución de una desigualdad cuadrática (o e inecuación), es el conjunto de todos los valores que la hacen verdadera.

Ejemplo

En la inecuación $x^2 - 7x + 6 > 0$ al sustituir x por 2 y efectuar las operaciones encontramos que $2^2 - 7(2) + 6 = 4 - 14 + 6 = -4$, por tanto 2 no pertenece al conjunto solución de la desigualdad. ¿Por qué?

En cambio si sustituimos a x por 7, obtenemos: $7^2 - 7(7) + 6 = 49 - 49 + 6 = 6$, así que 7 es parte del conjunto solución de la inecuación. Sin embargo, no es la única solución que satisface la desigualdad.

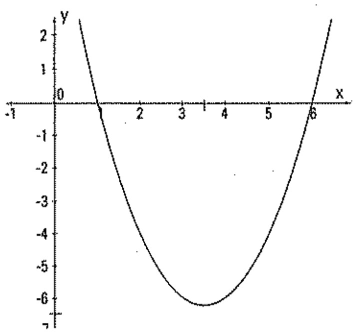
Resolución de desigualdades cuadráticas

El primer método que se va a estudiar es el método de **graficación de signos**, para lo cual se traza la gráfica correspondiente para determinar cuáles valores de x satisfacen la inecuación.

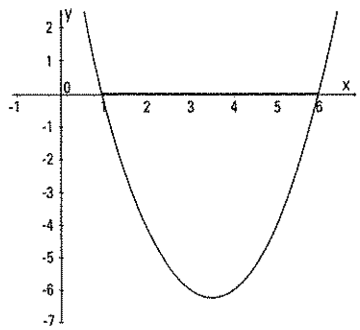
Ejemplo

Sea la desigualdad $x^2 - 7x + 6 < 0$ y analicemos las graficas a continuación:

Grafica 1:
$f(x) = x^2 - 7x + 6$



Gráfica 2:
$x^2 - 7x + 6 < 0$



En la gráfica 2 el trazo en verde corresponde a los valores que satisfacen la desigualdad; así que todos los valores comprendidos entre 1 y 6 hacen verdadera la desigualdad. Compruébalo tomando algún valor entre 1 y 6.

Sin embargo el método de graficación puede resultar largo y dispendioso, por lo cual se aplica el **método de la recta numérica** que explicaremos mediante el siguiente ejemplo.

Ejemplo

Resolver la desigualdad $x^2 - 7x + 6 > 0$

Para solucionarla se procede como sigue:

1. iguala a cero la expresión:

$$x^2 - 7x + 6 = 0$$

2. Resuelve la ecuación que resulta, con el método más apropiado:

$$x^2 - 7x + 6 = 0$$

$$(x - 6)(x - 1) = 0$$

$$x - 6 = 0 \text{ y } x - 1 = 0$$

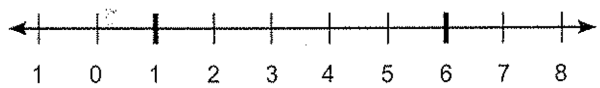
Entonces $x = 6$ y $x = 1$ son las soluciones de la ecuación cuadrática.

Los valores obtenidos, se denominan **valores frontera** y serán utilizados para dividir la recta en intervalos. Si la desigualdad es "estrictamente mayor" o "estrictamente menor" los valores frontera no son parte de la solución. Si, por el contrario, la desigualdad es "mayor o igual" o "menor o igual", los valores frontera son parte de la solución.

Se señalan los valores en la recta real y se obtienen tres intervalos, que una vez señalados nos sirven para determinar el comportamiento de la desigualdad en cada intervalo.

Para esto se toma un número contenido en cada intervalo y se evalúa la desigualdad en estos valores. Si el valor tomado cumple la desigualdad, todos los números en el intervalo la cumplen y la solución de la desigualdad resulta de la unión de los intervalos en donde se satisface la desigualdad.

Continuando con el ejemplo, al señalar los puntos se obtiene:



Del primer intervalo $(-\infty, 1)$ se toma el valor 0 y lo reemplazamos en la desigualdad: $0^2 - 7(0) + 6 = 6$, como $6 > 0$ el número 0 satisface la condición.

Del segundo intervalo $(1, 6)$ se toma el número 2, que al remplazarlo en la desigualdad se obtiene: $2^2 - 7(2) + 6 = -4$

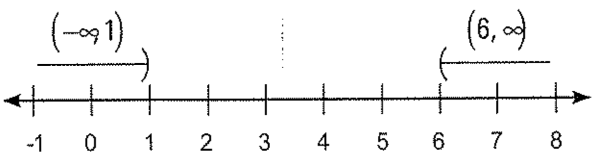
En este caso $-4 < 0$ por lo cual el número -4 no satisface la desigualdad y por tanto ningún número en el intervalo la cumplen.

Finalmente, del intervalo $(6, \infty)$ se toma el número 8 y se remplaza en la desigualdad obteniendo: $8^2 - 7(8) + 6 = 14$

Como $14 > 0$, entonces 8 satisface la desigualdad y por tanto el conjunto solución de la desigualdad es $(-\infty, 1) \cup (6, \infty)$

La respuesta de la desigualdad se puede dar de varias formas:

a. Sobre la recta numérica:



b. En la notación de intervalo:

$$(-\infty, 1) \cup (6, \infty)$$

c. En la notación de conjuntos:

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ó } x > 6\}$$

3. Resolver la desigualdad $x^2 - 6x + 9 > 0$

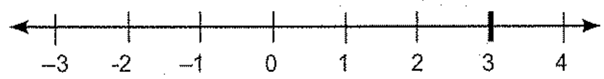
- Iguala la expresión a cero:

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$(x - 3)^2 = 0$$

Luego: $x - 3 = 0$, es decir que el único punto frontera que debemos tener en cuenta es $x = 3$

Representando el valor frontera en la recta numérica, éste genera dos intervalos:



Eliges de cada intervalo un número y efectúa los valores de prueba por ejemplo:

$$1 \in (-\infty, 3] \qquad 4 \in (3, \infty)$$

$$(1)^2 - 6(1) + 9 = 4 > 0 \qquad 4^2 - 6(4) + 9 = 1 > 0$$

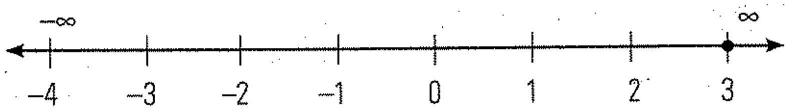
Observa que el primer intervalo incluye el valor frontera 3, pero el segundo intervalo no lo contiene por considerarlo parte del primero. En este caso es necesario verificar si el valor frontera cumple con el requisito de ser estrictamente mayor que cero.

$$3^2 - 6(3) + 9 = 0$$

Como ves, el valor frontera no cumple la desigualdad, por lo cual la solución de la desigualdad es el conjunto de los reales menos el valor 3

La respuesta puede darse de tres formas:

a. Recta numérica:



b. Notación de intervalo:

$$(-\infty, 3) \cup (3, \infty) = \mathbb{R} - \{3\}$$

c. Notación de conjunto:

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 3\}$$

4. Resuelve la desigualdad $2x^2 - 5x - 7 \geq 0$

Iguala la expresión a cero:

$$2x^2 - 5x - 7 = 0$$

$$(x+1)\left(x - 3\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$(x+1) = 0 \text{ ó, } \left(x - 3\frac{1}{2}\right) = 0$$

Luego las soluciones son $x = -1$ y $x = 3\frac{1}{2}$

- La solución de la ecuación genera dos valores frontera y tres intervalos: $(-\infty, -1)$; $\left(-1, 3\frac{1}{2}\right)$; $\left(3\frac{1}{2}, \infty\right)$

Probamos con un valor elegido al azar en cada intervalo: –2 para el primero, 0 para el segundo y 5 para el tercero:

$$2(-2)^2 - 5(-2) - 7 = 11$$

$$2(0)^2 - 5(0) - 7 = -7$$

$$2(5)^2 - 5(5) - 7 = 18$$

- Al remplazar en la desigualdad por cada uno de los valores elegidos en el primer y tercer intervalo, se cumple la desigualdad, mientras que, si se remplaza por cualquier elemento del segundo intervalo la desigualdad no se cumple.

Respuesta:

a. En la recta numérica:

b. En notación de intervalo:

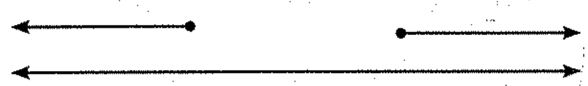
$$(-\infty, -1] \cup \left[3\frac{1}{2}, \infty\right) = \mathbb{R} - \left(-1, 3\frac{1}{2}\right)$$

c. En notación de conjunto:

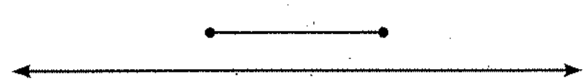
$$\left\{x \in R \mid x \leq -1 \ \text{ ó, } \ x \geq 3\frac{1}{2}\right\}$$

Si $ax^2 + bx + c = 0$ con $a > 0$ tiene dos soluciones reales distintas, entonces:

1. En la desigualdad de la forma $ax^2 + bx + c \geq 0$ la solución es la unión de los intervalos solución, con los extremos como se muestra en la imagen:



2. En la desigualdad de la forma $ax^2 + bx + c \leq 0$ la solución es el intervalo central y la solución en la recta numérica es:



Si $ax^2 + bx + c = 0$ con $a > 0$ tiene una solución real, entonces,

1. En la desigualdad de la forma $ax^2 + bx + c \geq 0$, la solución es el conjunto de todos los reales.

2. En la desigualdad de la forma $ax^2 + bx + c > 0$ la solución es el conjunto de los reales menos el valor frontera o solución.

3. En la desigualdad de la forma $ax^2 + bx + c \leq 0$, la solución es el valor frontera.

4. En la desigualdad de la forma $ax^2 + bx + c < 0$, la solución es el conjunto vacío ϕ.

PRÁCTICA EN CONTEXTO

Razonamiento

1. Determina si las siguientes expresiones son verdaderas (V) o falsas (F):

   a. La desigualdad $x^2 + x - 12 > 0$ tiene por solución:

   $(-\infty, -4] \cup [3, \infty)$

   b. El intervalo $[-6, 3]$ es la solución de la desigualdad $x^2 + 3x - 18 \leq 0$.

   c. En la desigualdad $x^2 - 12x + 11 \geq 0$ el 0 pertenece la solución.

   d. El intervalo $(-\infty, 1]$ es parte de la solución de $x^2 - 4x + 3 < 0$.

   e. 2 pertenece a la solución de $x^2 + 3x - 10 < 0$.

Ejercitación de procedimientos

2. Resuelve las siguientes desigualdades y representa la respuesta en forma de:

   - Recta numérica.
   - Intervalo
   - Notación de conjuntos.

   a. $x^2 + 8x - 9 \geq 0$

   b. $2x^2 + 5x - 10 < 0$

   c. $0,2x^2 + 2x + 0,3 \leq 0$

   d. $\frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{5}x + \frac{3}{10} > 0$

   e. $x^2 - 4x + 1 \geq 0$

3. Relaciona cada inecuación cuadrática con la representación numérica de su solución.

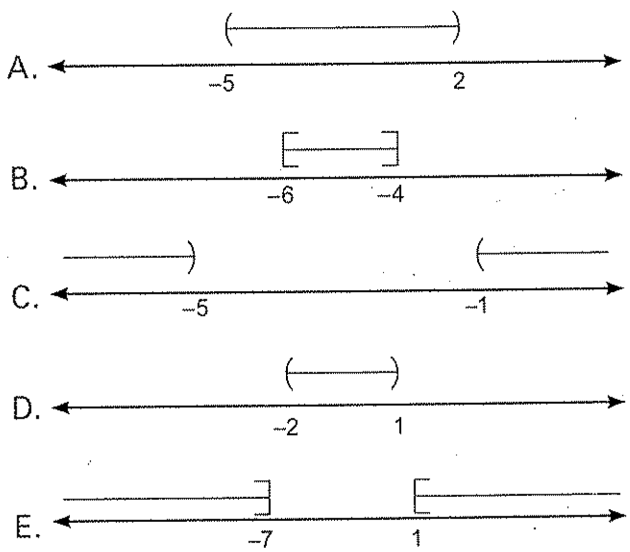
   a. $x^2 + x - 2 < 0$

   b. $x^2 + 10x + 24 \leq 0$

   c. $x^2 + 6x - 7 \geq 0$

   d. $x^2 + 3x - 10 < 0$

   e. $x^2 + 6x + 5 > 0$



4. Encuentra una desigualdad cuadrática que tenga por solución:

   a. $\left(-\infty, \frac{-3}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{5}, \infty\right)$

   b. $[\sqrt{2}, 25]$

   c. $(-\infty, -1) \cup \left(\frac{7}{4}, \infty\right)$

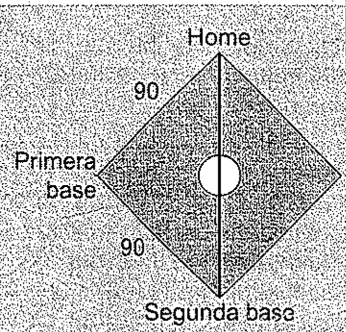
COMPETENCIA INTERPRETATIVA: expresa gráfica y simbólicamente la solución de inecuaciones de segundo grado

Ecuaciones con radicales

Logro: resolver ecuaciones que contienen radicales.

Comparte lo que sabes

Las medidas reglamentarias del diamante en un campo de béisbol es un cuadrado con 90 pies entre las bases. ¿A qué distancia se encuentra la segunda base del home?



Se conoce como **ecuación radical** a las ecuaciones que contienen una variable en un radical.

Los siguientes ejemplos ilustran el procedimiento para resolver ecuaciones con radicales:

1. Resolver la ecuación $\sqrt{x} = 5$

$$\text{Como: } \sqrt{x} = 5$$

$$\text{Se tiene que: } \left(\sqrt{x}\right)^2 = 5^2, \text{ entonces } x = 25$$

2. Hallar el valor de x en la ecuación $\sqrt{x-4} - 3 = 0$

Se aisla el radical que contiene la variable: $\sqrt{x-4} = 3$

Se eleva al cuadrado a ambos lados de la igualdad: $(\sqrt{x-4})^2 = (3)^2$

Se despeja la variable $x - 4 = 9$

$$\text{luego: } x = 9 + 4$$

$$\text{y así: } x = 13$$

Se comprueba la solución en la ecuación: $\sqrt{13-4} = \sqrt{9} = \pm 3$

3. Resolver la ecuación $\left(\sqrt{x-1}\right) = x - 3$

Se elevan ambos miembros de la igualdad al cuadrado:

$$\left(\sqrt{x-1}\right)^2 = (x-3)^2$$

$$x - 1 = x^2 - 6x + 9$$

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$\text{Al factorizar: } (x-5)(x-2) = 0$$

Entonces: $x - 5 = 0$ ó, $x - 2 = 0$, es decir, $x = 5$ ó, $x = 2$.

La solución de la ecuación es $x = 5$, ya que $x = 2$ no lo es porque aunque satisface la ecuación $\left(\sqrt{x-1}\right)^2 = (x-3)^2$ no satisface la ecuación original $\sqrt{x-1} = x - 3$

4. Despejar V en $r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$

Como se trata de una raíz cúbica, se elevan ambos miembros de la ecuación al cubo:

$$(r)^3 = \left(\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}\right)^3$$

$$r^3 = \frac{3V}{4\pi}$$

$$r^3(4\pi) = 3V$$

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}$$

5. Despejar en $v = \sqrt[5]{6gh}$ la variable g.

Como se trata de una raíz quinta, se elevan ambos miembros de la ecuación a la cinco:

$$(v)^5 = \left(\sqrt[5]{6gh}\right)^5$$

$$v^5 = 6gh$$

$$g = \frac{v^5}{6h}$$

PRÁCTICA EN CONTEXTO

Ejercitación de procedimientos

1. Resuelve las ecuaciones:

a. $\sqrt{x} = 4$

b. $\sqrt{x+4} = 10$

c. $6 + \sqrt{x-9} = 7$

d. $\sqrt[3]{x} + 1 = 2$

e. $\sqrt{x^2 + x - 1} = \sqrt{x+3}$

f. $\sqrt{m^2 + 6m - 4} = m$

g. $\sqrt{x} = 9$

h. $\sqrt{x-2} = 4$

i. $2\sqrt{4x+5} = 14$

j. $\sqrt{2x+8} = \sqrt{x-8}$

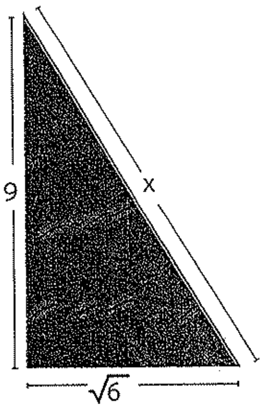
k. $\sqrt{x} = 8$

l. $\sqrt{x} + 2x = 1$

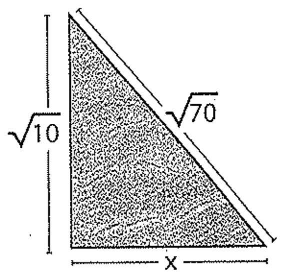
Modelación

2. Utiliza el teorema de Pitágoras para determinar el lado desconocido:

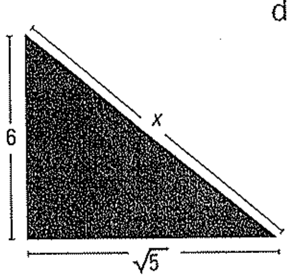
a.



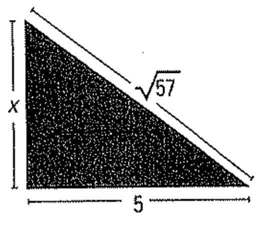
b.



c.

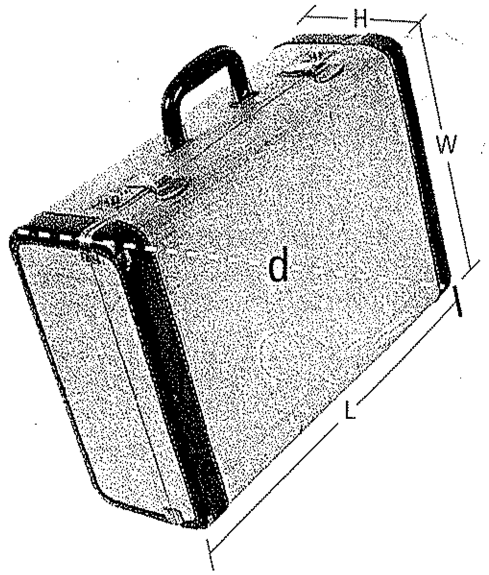


d.



Razonamiento y solución de problemas

3. Resuelve los siguientes problemas:



Una fórmula para determinar la longitud de la diagonal de una maleta es:

$d = \sqrt{L^2 + W^2 + H^2}$ siendo L el largo, W el ancho, H el alto y d la distancia entre una esquina superior y su esquina inferior opuesta.

a. Determina la longitud de la diagonal de una maleta que mide 12 cm de altura, $2\sqrt{39}$ cm de largo y 10 cm de ancho.

b. Si el largo y el ancho se duplican, ¿cómo cambia la diagonal?

c. Despeja W en la fórmula.

Números complejos

Logro: reconocer y operar con los números complejos.

COMPARTE LO QUE SABES

¿Qué pasa al aplicar la fórmula cuadrática sobre la ecuación cuadrática $10x^2 - 5x + 10 = 0$?

Se define **"número complejo"** a la expresión de la forma $a + bi$, en donde a, b son números reales e $i = \sqrt{-1}$, la cual se conoce como la *unidad imaginaria*.

Sobre este conjunto numérico se pueden definir las operaciones de suma, resta, multiplicación y división; además el conjunto cumple todas las propiedades sobre estas operaciones así como los racionales o los reales.

Los números complejos aparecieron al buscar soluciones para ecuaciones como $x^2 = -1$ las cuales no tienen solución en los reales.

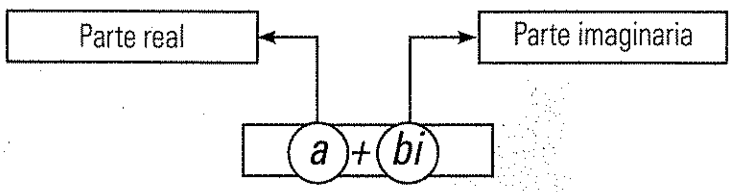
Cardano sugirió que el número real 40 se puede expresar como $\left(5 + \sqrt{-15}\right)\left(5 - \sqrt{-15}\right)$ expresión que constituye una suma de raíces por una diferencia de raíces y que resuelta es:

$$(5)^2 - \left(\sqrt{-15}\right)^2 = 25 - (-15) = 40$$

Los números complejos son un área de trabajo del álgebra que se denomina "teoría de cuerpos algebraicos", así como de ramas del análisis como la variable compleja y de las matemáticas aplicadas y la física como la aerodinámica, el electromagnetismo, entre otras.

Todo número de la forma $a + bi$ donde $a, b \in \mathbb{R}$, e $i = \sqrt{-1}$ se conoce como número complejo y su representación en esta forma se denomina **representación binomial**.

En los números complejos se distinguen dos partes: una parte real y una parte imaginaria.



Si en un complejo $a = 0$, entonces $a + bi = bi$ el cual se denomina *imaginario puro*.

Si en un complejo $b = 0$, entonces $a + bi = a$ el cual es un número real, por lo cual podemos afirmar que los números complejos contienen a los números reales, es decir, los números complejos son una extensión de los números reales $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Otra forma de caracterizar a los complejos es a través de una de las propiedades algebraicas más importantes y es que los números complejos contienen a todas las raíces de los polinomios con coeficientes en los reales.

Ejemplos

Encontrar el valor de a y b en cada número complejo.

1. $5 + 6i$ — $a = 5,\ b = 6$

2. $-2 - 7i$ — $a = -2,\ b = -7$

3. $\sqrt{2}i$ — $a = 0,\ b = \sqrt{2}$

4. 15 — $a = 15,\ b = 0$

5. $10i$ — $a = 0,\ b = 10$

6. $-9\frac{\sqrt{3}}{2}i$ — $a = 0,\ b = -9\frac{\sqrt{3}}{2}$

Para escribir la raíz cuadrada de un número negativo en términos de i, se aplica la siguiente propiedad:

Sea n un número real positivo, entonces $\sqrt{-n} = \sqrt{-1}\sqrt{n} = i\sqrt{n} = \sqrt{n}\,i$

Ejemplos

Escribir las raíces negativas en términos de la unidad imaginaria i:

1. $\sqrt{-4} = \sqrt{-1}\sqrt{4} = 2\sqrt{-1} = 2i$

2. $\sqrt{-8} = \sqrt{-1}\sqrt{8} = 2\sqrt{2}i$

3. $\sqrt{-13} = \sqrt{-1}\sqrt{13} = \sqrt{13}i$

4. $\sqrt{-36} = \sqrt{-1}\sqrt{36} = 6i$

5. $\sqrt{-12} = \sqrt{12}\sqrt{-1} = 2\sqrt{3}i$

6. $\sqrt{-\frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{1}{9}}\sqrt{-1} = \frac{1}{3}\sqrt{-1} = \frac{1}{3}i$

7. $\sqrt{-\frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}}\sqrt{-1} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}\sqrt{-1} = \frac{\sqrt{3}}{2}i$

8. $\sqrt{-\frac{25}{2}} = \sqrt{\frac{25}{2}}\sqrt{-1} = \frac{5\sqrt{2}}{2}i$

Expresión de un número complejo como pareja ordenada

La expresión $a + bi$ se puede también escribir como un par ordenado, en el cual el primer elemento indica la parte real y el segundo elemento la parte imaginaria sin la unidad imaginaria. Así $a + bi = (a, b)$

Ejemplos

Escribir como pareja ordenada cada uno de los siguientes números complejos.

1. $5 - 9i$	$(5, -9)$	**4.** $1 - i$	$(1, -1)$
2. $-\sqrt{3} + 7i$	$\left(-\sqrt{3}, 7\right)$	**5.** $-4\sqrt{2}$	$\left(-4\sqrt{2}, 0\right)$
3. $-8i$	$(0, -8)$	**6.** $-7 - \sqrt[2]{-10}$	$\left(-7, \sqrt{10}\right)$

Conjugado de un número complejo

Si $a + bi$ es un número complejo llamaremos *conjugado* del número, al número $a - bi$ es decir al número complejo que tiene la misma parte real pero la parte imaginaria de signo opuesto.

Ejemplos

Hallar el conjugado de los siguientes números complejos y escribir el número y su conjugado como pareja ordenada.

Complejo	Conjugado	Parejas ordenadas	
1. $5 - i$	$5 + i$	$(5, -1)$	$(5, 1)$
2. $-2 + 3i$	$-2 - 3i$	$(-2, 3)$	$(-2, -3)$
3. $4 + i\sqrt{2}$	$4 - i\sqrt{2}$	$\left(4, \sqrt{2}\right)$	$\left(4, -\sqrt{2}\right)$
4. $11 - 13i$	$11 + 13i$	$(11, -13)$	$(11, 13)$
5. $1 + 10i$	$1 - 10i$	$(1, 10)$	$(1, -10)$
6. $23 - 7\frac{\sqrt{3}}{2}i$	$23 + 7\frac{\sqrt{3}}{2}i$	$\left(23, -\frac{7\sqrt{3}}{2}\right)$	$\left(23, \frac{7\sqrt{3}}{2}\right)$

Plano de los números complejos o diagrama de Argand

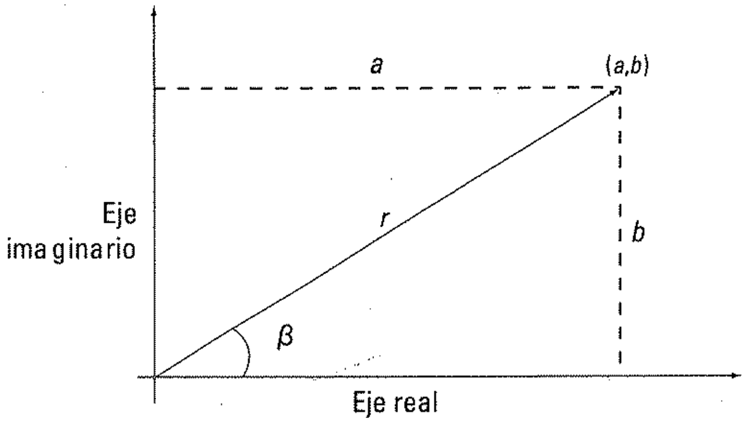
A diferencia de la representación de los demás números reales, la intuición nos falla cuando se trata de graficar los números complejos.

Se sabe que ningún número real cumple con la ecuación $x^2 = -1$, por lo cual la parábola generada por la ecuación $y = x^2 + 1$ no toca al eje x.

Para graficar un número complejo es de enorme utilidad su representación como pareja ordenada. Cada número complejo será ubicado en un punto del plano cartesiano, que tiene por coordenadas a la representación como pareja ordenada del complejo.

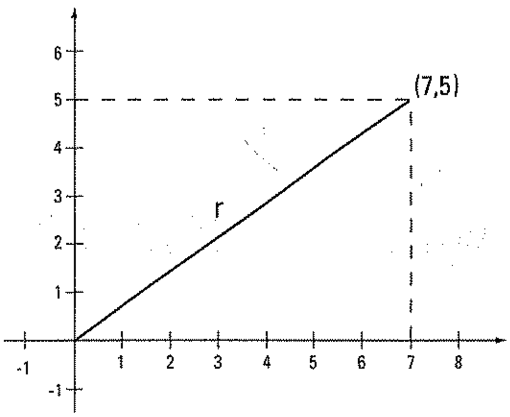
Representamos el número complejo $a + bi$ con el punto (a, b) en el plano, teniendo en cuenta que el plano sobre el que se grafica ya no es el plano cartesiano real, sino que se denomina *plano imaginario*. Además, denominamos vector de posición al segmento de recta que une el punto (0,0) con el punto (a, b) y que representaremos con la letra r.

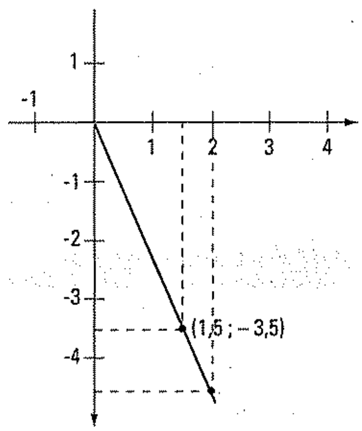
La siguiente imagen corresponde a la representación gráfica de un número complejo en el que tanto a como b son números positivos.



Ejemplos

Al representar gráficamente los complejos $7 + 5i$ y $1{,}5i -3{,}5i$ se obtienen respectivamente, las siguientes representaciones:





PRÁCTICA EN CONTEXTO

Ejercitación de procedimientos

1. Escribe las raíces negativas en términos de la unidad imaginaria:

a. $\sqrt{-9}$ e. $\sqrt{-50}$ i. $\sqrt{-\frac{81}{539}}$

b. $\sqrt{-180}$ f. $\sqrt{-49}$ j. $\sqrt{-23}$

c. $\sqrt{-1}$ g. $\sqrt{-\frac{169}{578}}$ k. $\sqrt{-236}$

d. $\sqrt{-4}$ h. $\sqrt{-\frac{7}{4}}$ l. $\sqrt{\frac{-125}{3}}$

2. Utiliza la fórmula cuadrática para encontrar las raíces de las siguientes ecuaciones cuadráticas y escríbelas en términos de la unidad imaginaria:

a. $7x^2 + 2x + 3 = 0$ c. $14x^2 + 4x + 7 = 0$

b. $-9x^2 + 6x - 11 = 0$ d. $\frac{x^2}{6} + \frac{5}{3}x + 41 = 0$

Razonamiento

3. Completa la siguiente tabla:

Complejo	Conjugado	Pareja ordenada
a.	$15 - 2i$	
b.		$(-2, \sqrt{23})$
c.	$\frac{5}{13} - \frac{\sqrt{29}}{2}i$	
d. $1 - 19i$		
e.	$2 + 10i\sqrt{5}$	
f.		$(-25, -7\sqrt{7})$

4. Representa en el plano cartesiano cada uno de los siguientes números complejos:

a. $3 - i$ d. $-5 - 2i$

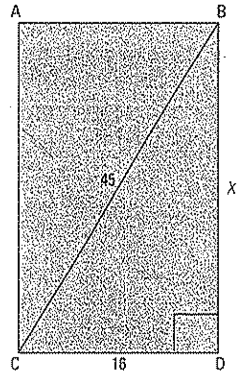
b. $1 + i$ e. $6 - 3i$

c. $-2 + 3i$ f. $8 + 2i$

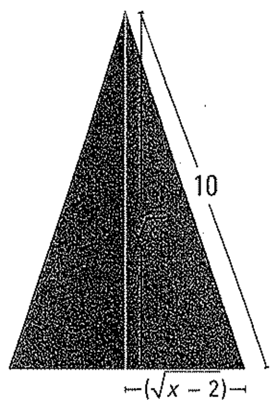
Solución de problemas

5. Determina el valor de x para cada una de las siguientes figuras:

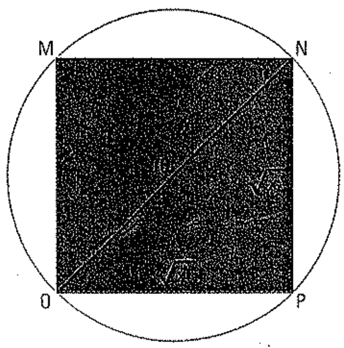
a.



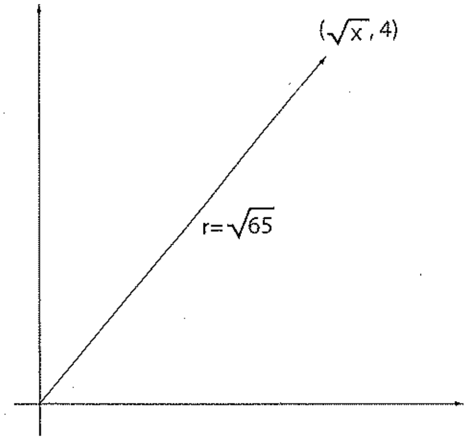
b.



c.



d.



Tema 8

Operaciones con números complejos

Logro: reconocer y operar con números complejos.

COMPARTE LO QUE SABES

Utiliza la fórmula cuadrática para encontrar las raíces de la ecuación $2x^2 + 5x + 12 = 0$ y exprésalas en términos de la unidad imaginaria.

Suma y resta de números complejos

Para sumar o restar dos números complejos se deben seguir los siguientes pasos:

1. Escribe los números en la forma $a + bi$ y $c + di$.
2. Suma o resta, por separado, la parte real de los números $(a + c)$ y los coeficientes de la parte imaginaria $(b + d)$.
3. Escribe la respuesta de la forma
$$(a + c) + (b + d)\,i$$

Ejemplos

1. Suma $(2 + 3i) + (9 - 2i) + (1 + 5i)$

$= (2 + 3i) + (9 - 2i) + (1 + 5i)$

$= (2 + 9 + 1) + (3 - 2 + 5)\,i$

$= 12 + 6i$

2. Suma $\left(-6 + \sqrt{-12}\right) + \left(5 + 2\sqrt{3}i\right) + (7 - 8i)$

$= \left(-6 + 2\sqrt{3}i\right) + \left(5 + 2\sqrt{3}i\right) + (7 - 8i)$

$= (-6 + 5 + 7) + \left(2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 8\right)i$

$= 6 + \left(4\sqrt{3} - 8\right)i$

3. De $6 - 4i$ restar $7 - 8i$

$(6 - 4i) - (7 - 8i)$

$= 6 - 4i - 7 + 8i$

$= (6 - 7) + (-4i + 8i)$

$= -1 + 4i$

4. Suma los siguientes complejos representados como parejas ordenadas.

$$(2, 6) + \left(-3, \sqrt{2}\right) + \left(\frac{-2}{7}, -1\right)$$

En este caso debes sumar por separado las primeras y segundas componentes.

$(2, 6) + \left(-3, \sqrt{2}\right) + \left(\frac{-2}{7}, -1\right)$

$= \left(2 + (-3) + \left(-\frac{2}{7}\right),\ \left(6 + \sqrt{2} - 1\right)\right)$

$= \left(-\frac{9}{7},\ 5 + \sqrt{2}\right)$

Que escrito de forma binomial es $-\frac{9}{7} + \left(5 + \sqrt{2}\right)i$

5. Efectuar la operación indicada:

$$(2 - 3i) - (3 - 4i) + (-1 + 9i) - (-6 + i)$$

$$2 - 3i - 3 + 4i - 1 + 9i + 6 - i = 4 + 9i$$

Producto de números complejos

Para definir de forma clara el producto entre dos complejos es importante primero conocer las potencias de la unidad imaginaria.

Potencias de la unidad imaginaria

$i^0 = 1$ e $i^1 = i$

$i^2 = \left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1$

$i^3 = i^2 \times i = -1 \times i = -i$

$i^4 = i^2 \times i^2 = (-1) \times (-1) = 1$

$i^5 = i^4 \times i = 1 \times i = i$

$i^6 = i^4 \times i^2 = 1 \times -1 = -1$

$i^7 = i^4 \times i^3 = 1 \times -i = -i$

$i^8 = i^4 \times i^4 = 1 \times 1 = 1$

$i^9 = \left(i^4\right)^2 \times i^1 = 1^2 \times i = i$

$i^{10} = \left(i^4\right)^2 \times i^2 = 1 \times -1 = -1$, etc.

De forma general, i^n es igual a:

a. -1 si $n = 4k + 2$ c. 1 si $n = 4k$

b. $-i$ si $n = 4k + 3$ d. i si $n = 4k + 1$

Ejemplos

Evaluar

1. i^{35} Al dividir 35 entre 4 el residuo es 3, por tanto $i^{35} = i^{4(8)+3} = -i$	**4.** i^{308} Al dividir 308 entre 4 el residuo es 0, por tanto $i^{308} = i^{4(77)} = 1$	**7.** $i^{226} = i^{4(56)+2} = -1$
2. i^{102} Al dividir 102 entre 4 el residuo es 2, por tanto $i^{102} = i^{4(25)+2} = -1$	**5.** i^{53} Al dividir 53 entre 4 el residuo es 1, por tanto $i^{53} = i^{4(13)+1} = i$	**8.** $i^{375} = i^{4(93)+3} = -i$
3. i^{43} Al dividir 43 entre 4 el residuo es 3, por tanto $i^{43} = i^{4(10)+3} = -i$	**6.** i^{89} Al dividir 89 entre 4 el residuo es 1, por tanto $i^{89} = i^{4(22)+1} = i$	**9.** $i^{541} = i^{4(135)+1} = i$

Para multiplicar dos números complejos se deben tener en cuenta los siguientes pasos:

1. Escribe los números de la forma $a + bi$
2. Multiplica los números complejos como si fueran polinomios.
3. Se remplazan las potencias de i por su equivalente, teniendo en cuenta el análisis hecho anteriormente.
4. Se escribe la respuesta de la forma:

$$a + bi$$

Ejemplos

Multiplicar los siguientes números complejos:

1. $2i(17 - 9i) = 2i(17) + 2i(-9i)$

$= 34i - 18i^2$

$= 34i - 18(-1)$

$= 34i + 18$

$= 18 + 34i$

2. $\sqrt{-16}\left(\sqrt{2} - 5\right)$

$= 4i\left(\sqrt{2} - 5\right)$

$= 4i\sqrt{2} - 20i$

$= \left(4\sqrt{2} - 20\right)i$

3. $\left(\sqrt{-49} + 3\right)\left(6 + \sqrt{-25}\right)$

$= (7i + 3)(6 + 5i)$

$= (3 + 7i)(6 + 5i)$

$= 18 + 15i + 42i + 35i^2$

$= 18 + 57i + 35(-1)$

$= 18 + 57i - 35$

$= -17 + 57i$

4. $(-2, 7) \times (4, 12)$

$(-2 + 7i)(4 + 12i)$

$= (-2)(4) + (-2)(12i) + 7i(4) + 7i(12i)$

$= -8 - 24i + 28i + 84i^2$

$= -8 + 4i + 84(-1)$

$= -8 + 4i - 84$

$= -92 + 4i$

En la multiplicación de números complejos suele cometerse con mucha frecuencia un error. Lee el siguiente ejemplo detenidamente para identificarlo.

Ejemplo

Realizar el producto de $\sqrt{-4} \times \sqrt{-36}$

Es incorrecto que lo resuelvas así:
$\sqrt{-4} \times \sqrt{-36} = \sqrt{144} = 12$

ya que desde el comienzo las raíces no existen.

La forma correcta es:
$= \sqrt{-4} \times \sqrt{-36} = (2i)(6i)$
$= 12i^2 = 12(-1) = -12$

Recuerda que la regla $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ sólo se cumple si a, b son reales no negativos.

División de números complejos

La división de complejos tiene como fundamento el concepto de número conjugado explicado en el tema anterior.

Recordemos:

Número complejo	Conjugado
$a + bi$	$a - bi$
$a - bi$	$a + bi$
bi	$-bi$
a	a

Ejemplo

Al multiplicar $\left(6 - \sqrt{7}i\right)\left(6 + \sqrt{7}i\right)$ se obtiene

$$\left(6 - \sqrt{7}i\right)\left(6 + \sqrt{7}i\right) = (6)^2 + \left(\sqrt{7}\right)^2 = 36 + 7 = 43$$

El producto de un complejo por su conjugado

En los complejos se cumple que: "el producto de un número por su conjugado es igual a la suma del cuadrado de la parte real con el cuadrado del coeficiente real de la parte imaginaria".

$$\begin{aligned}(a + bi)(a - bi) &= a^2 - abi + abi - (bi)^2 \\ &= a^2 - i^2b^2 \\ &= a^2 + b^2\end{aligned}$$

Reglas para dividir
1. Cambia todos los números complejos a la forma $a + bi$.
2. Racionaliza el denominador, multiplicando el numerador y el denominador por el conjugado del denominador y escribe la respuesta de la forma $a + bi$.

$$\begin{aligned}\frac{a + bi}{c + di} &= \left(\frac{a + bi}{c + di}\right)\left(\frac{c - di}{c - di}\right) \\ &= \frac{ac + cbi - adi - bd\left(i^2\right)}{c^2 + d^2} \\ &= \frac{ac + bd + (cb - ad)i}{c^2 + d^2} \\ &= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{(cb - ad)}{c^2 + d^2}i\end{aligned}$$

Ejemplos

Dividir:

1. $\dfrac{5 - i}{i}$

$$\left(\frac{5 - i}{i}\right)\left(\frac{-i}{-i}\right) = \left(\frac{-5i + i^2}{-i^2}\right)$$

$$= \frac{-5i + (-1)}{-(-1)}$$

$$= \frac{-5i - 1}{1} = -5i - 1$$

2. $\dfrac{1}{9 - 3i}$

$$\left(\frac{1}{9 - 3i}\right)\left(\frac{9 + 3i}{9 + 3i}\right) = \frac{9 + 3i}{81 + 9} = \frac{9 + 3i}{90} = \frac{1}{10} + \frac{i}{30}$$

3. $\dfrac{7 - 2i}{3 + 4i}$

$$\left(\frac{7 - 2i}{3 + 4i}\right)\left(\frac{3 - 4i}{3 - 4i}\right) = \frac{21 - 34i + 8i^2}{(3)^2 - (4i)^2}$$

$$= \frac{21 - 34i + 8(-1)}{9 - 4(-1)}$$

$$= \frac{13 - 34i}{13} = 1 - \frac{34}{13}i$$

4. $\dfrac{i}{3 + 2i}$

$$\left(\frac{i}{3 + 2i}\right)\left(\frac{3 - 2i}{3 - 2i}\right) = \frac{3i - 2i^2}{9 + 4} = \frac{2 + 3i}{13}$$

PRÁCTICA EN CONTEXTO

Ejercitación de procedimientos

1. Efectúa las operaciones indicadas:

a. $(6-7i)+(17-9i)-(15+2i)$

b. $\left(2\frac{1}{5}+3i\sqrt{3}\right)-\left(9+\frac{7}{3}i\right)+(1-5i)-(4i)$

c. $(1,3-i)-(1-2,4i)-(4+i)$

d. $(2+i)+(19-2i)-(-1-6i)$

e. $(12-3i)+(6-5i)-(1+9i)-(4-i)$

f. $(3i)-(9i)+(11-5i)-(7-9i)$

g. $(8+3i)-(2-7i)+(5+2i)$

2. Efectúa las operaciones indicadas:

a. $-3i(4-9i)$

b. $\frac{9+5i}{i}$

c. $(2+2i)(7+5i)$

d. $(71-9i)(-17+i)$

e. $\sqrt{-81}\left(\sqrt{3}+23\right)$

f. $\frac{4-3i}{2-i}$

g. $(i-21)(-4i-5)$

h. $(8+4i)(3-7i)$

i. $(3+3i)(3-3i)$

j. $\frac{58i}{i}$

k. $(-2i)(+5i)$

l. $(2+2i)(7+5i)$

m. $i(-24+i)$

n. $\frac{9+\sqrt{-25}}{6-\sqrt{-4}}$

o. $(2-9i)(9i+2)$

p. $(i-21)(-4i-5)$

q. $(12-2i)(-4+5i)$

r. $\frac{13+i}{5-8i}$

s. $(10-i)(9-i)$

t. $(-2i)(+5i)$

u. $\sqrt{-25}\left(\sqrt{-25}+6\right)$

v. $0,19+0,35i \div 0,2i$

w. $(18)(6+5i)$

x. $(2-9i)(9i+2)$

y. $\frac{3-5i}{4+\sqrt{3}i}$

z. $\frac{2+3i}{i}$

3. Evalúa:

a. i^2 d. i^{11} g. i^{549}

b. i^{34} e. i^9 h. i^{639}

c. i^{23} f. i^{1234} i. i^{721}

4. Teniendo en cuenta las propiedades del módulo o elemento neutro de la suma en los números reales determina cuál es el elemento módulo en los números complejos.

5. Sea (x,y) un número complejo.

a. Halla el par (w,z) tal que $(x,y)(w,z)=(1,0)$. A (w,z) se le denomina inverso multiplicativo.

b. ¿Existe algún número complejo que no tenga inverso multiplicativo? ¿Cuál?

6. Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas:

a. $x^2+3x+3=0$

b. $2x^2+4x+5=0$

c. $x^2+3x=-8$

La primera referencia conocida de las raíces cuadradas de números negativos proviene del trabajo de los matemáticos griegos, como Herón de Alejandría en el siglo I antes de Cristo, como resultado de una imposible sección de una pirámide. Los complejos se hicieron más patentes en el Siglo XVI, cuando la búsqueda de fórmulas que dieran las raíces exactas de los polinomios de grados 2 y 3 fueron encontradas por matemáticos italianos como Tartaglia y Cardano. Aunque sólo estaban interesados en las raíces reales de este tipo de ecuaciones, se encontraban con la necesidad de lidiar con raíces de números negativos. El término **imaginario** para estas cantidades fue acuñado por Descartes en el Siglo XVII y está en desuso. La existencia de números complejos no fue completamente aceptada hasta 1799.

Los números complejos se usan en ingeniería electrónica y en otros campos para una descripción adecuada de las señales periódicas variables. Cuando representamos una corriente o un voltaje de corriente alterna usamos fórmulas que involucran números complejos. Ingenieros eléctricos y físicos usan la letra *j* para la unidad imaginaria en vez de *i* que está típicamente destinada a la intensidad de corriente.

El campo complejo es igualmente importante en mecánica cuántica.

En la relatividad especial y la relatividad general, algunas fórmulas para la métrica del espacio-tiempo son mucho más simples si tomamos el tiempo como una variable imaginaria.

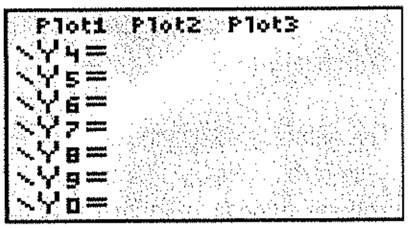
TECNOLOGÍA

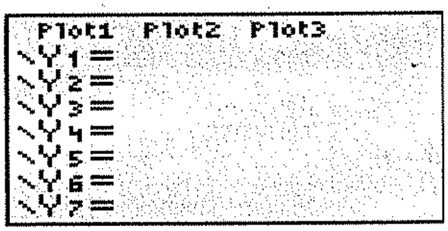
LAS CALCULADORAS GRAFICADORAS

¿Cómo representar funciones con la calculadora TI-83?

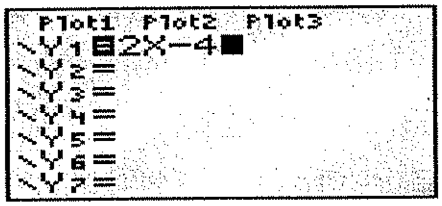
Para representar funciones se utilizarán, fundamentalmente las siguientes teclas: las cinco teclas superiores, fuera del teclado general, con los rótulos: Y=, WINDOW, ZOOM, TRACE y GRAPH; las cuatro teclas dispuestas en círculo y que con las flechas indican las distintas direcciones en las que se puede mover el cursor; la tecla que lleva impresas las letras X,T, q y n; las teclas numéricas y las que indican las distintas operaciones.

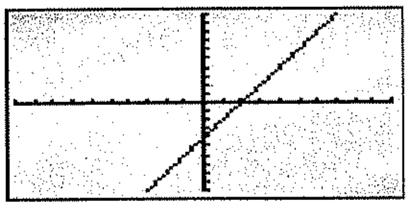
La primera de las teclas superiores, rotulada como Y =, permite acceder a un menú de 10 funciones y_1, y_2, y_3, y_8, y_9, y_0.



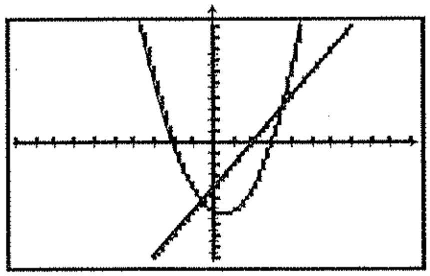


Se puede escribir la primera función $y_1 = 2x - 4$, *mediante las teclas: 2,x,–,4 y pulsando la tecla GRAPH, se obtiene la gráfica de la función, después de que en la parte superior de la pantalla se vea un pequeño segmento dotado de movimiento.*





Si se vuelve a pulsar Y=, *se puede escribir* $y_2 = x^2 - x - 6$, *desplazándose hasta* y_2 *y teniendo en cuenta que el cuadrado viene representado por* ^2 *y mediante GRAPH:*



resumen & refuerzo

2

Actividades

1. Halla $z \in \mathbb{C}$ tal que $(2+i)(1+i) = 2 + zi$.

2. Verifica si las siguientes igualdades entre complejos son falsas o verdaderas:

a. $(3+i)(3-i)\left(\frac{2+i}{10}\right) = 2 + i$

b. $\left(\sqrt{2} - i\right) - i\left(1 - \sqrt{2}i\right) = -2i$

c. $\frac{1+2i}{3-4i} + \frac{2-i}{5i} = \frac{-2}{5}$

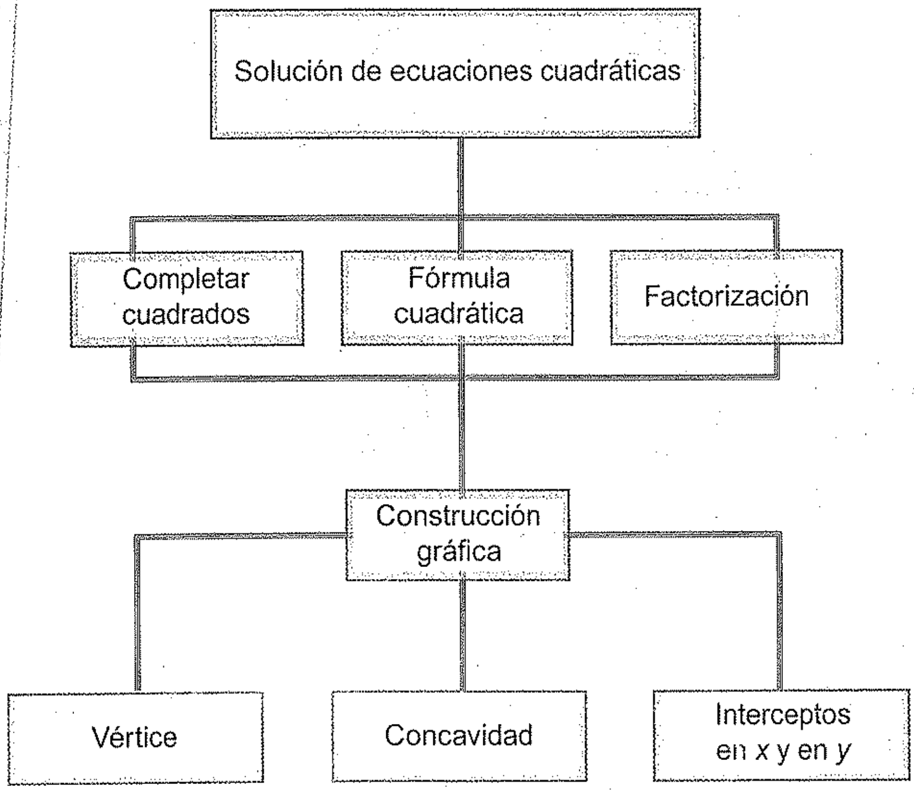
d. $\frac{5}{(1-i)(2-i)(3-i)} = \frac{i}{2}$

3. Expresa los siguientes complejos en la forma $a + bi$.

a. $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}i}{\sqrt{2}-\sqrt{3}i}$

b. $\frac{(3-i)(2+i)}{i+1}$

c. $1 + \cfrac{i}{1 + \cfrac{i}{1 + \cfrac{i}{1+i}}}$

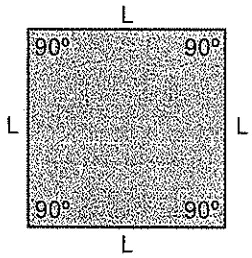


Pruebas de

Prueba Saber

El cuadrado es la figura geométrica formada por cuatro líneas rectas de igual longitud, denominadas lados, que forman ángulos rectos (90°).

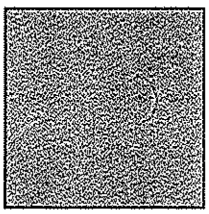
Cuadrado



El cuadrado es una figura muy estable y de carácter permanente, asociada a conceptos como permanencia, honestidad, rectitud, limpieza, esmero y equilibrio.

La figura derivada del cuadrado por modificación de sus lados es el rectángulo, de propiedades análogas al cuadrado, aunque sugiere menos perfección y estabilidad.

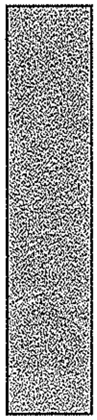
Equilibrio del cuadrado



El cuadrado expresa direccionalidad horizontal y vertical, referencia primaria con respecto al equilibrio y el bienestar. Es menos sugerente y más neutro que los rectángulos, pero más sólido. Invita a mirar su centro y pasear la mirada en espiral en torno a ese punto.

Rectángulo horizontal

Los rectángulos horizontales aportan solidez, estabilidad, dan la sensación de ser difíciles de volcar. Cuando son de gran tamaño permiten que la mirada del espectador se pasee de un lado a otro, en sentido horizontal.



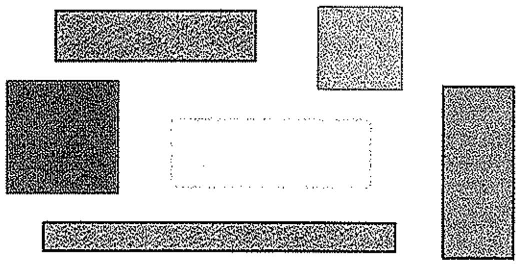
Rectángulo vertical

Los rectángulos verticales, por el contrario, dan sensación de menos solidez, son menos estables, parece que pueden volcarse en cualquier momento. En ellos, la mirada del espectador no puede moverse de un lado a otro, pero puede hacerlo verticalmente, dando sensación de elevación. Es apto para representar aquellos objetos que en la realidad tienen una forma ascendente.

Formas cuadrangulares variadas

Los cuadrados y rectángulos verán modificadas sus cualidades visuales según su forma, tamaño, color del contorno y área interna, ubicación, escala, etc.

La proyección tridimensional del cuadrado es el hexaedro o cubo, cuerpo geométrico muy asociado a las obras propias del ser humano, como los edificios.



Elige la respuesta correcta:

1. Un rectángulo tiene 12 m² de área y 16 m de perímetro. Las dimensiones de la base y la altura son respectivamente:

   a. 4 y 3 c. 16 y 16

   b. 12 y 1 d. 6 y 2

2. La base de un rectángulo es el doble de su altura. Si su área es de **200 m²**, las dimensiones de la base y la altura son respectivamente:

   a. 10 y 5 c. 40 y 5

   b. 20 y 10 d. 200 y 1

3. El área de un cuadrado cuya diagonal es $6\sqrt{2}$ es:

a. 6 c. 8

b. 2 d. $4\sqrt{2}$

4. El producto de $8-5i$ con $7+6i$ es:

a. $\frac{21-8i}{85}$ c. $56-30i$

b. $\frac{26-83i}{85}$ d. $86+13i$

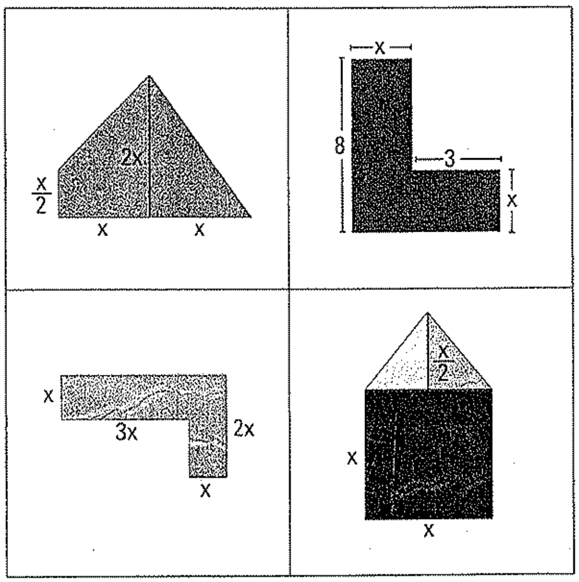
5. Si se aumentan en 2 m los lados de un cuadrado, su área aumenta en $20\ m^2$. El lado del cuadrado es:

a. 8 m c. 4 m

b. 10 m d. 6 m

6. Al observar las siguientes figuras, es cierto que:

a. Todas las figuras tienen la misma área.



b. Las funciones que describen el área de cada figura son lineales.

c. Las áreas están representadas por una función lineal y tres funciones cuadráticas.

d. Las áreas de todas las figuras se pueden expresar como monomios.

Prueba PISA

7. Para calcular el total de estudiantes inscritos en el nivel básico de secundaria de un país se estableció la función:

$$E(t) = -0,043t^2 + 1,22t + 46$$

En la que $E(t)$ representa el número de estudiantes (dado en millones), en función del tiempo y t es el número de años entre 1992 y 2011, donde 1992 representa el año uno del estudio, por lo cual $1 \le t \le 20$

a. Calcula el total de niños inscritos en 1 998

b. ¿En qué año el total de niños inscrito fue de 47 millones?

Prueba TIMSS

8. Determina los números reales a y b, sabiendo que: $(-1+i)a + (1+2i)b = 1$

9. El resultado de la operación $(3-2i)+(1+2i)\times(6-2i)-(2-i)$ es:

a. $4-13i$ c. $11-11i$

b. $11+9i$ d. $4-9i$

10. Encuentra los puntos de intersección de la circunferencia $x^2+y^2=1$ y la recta $y=x-3$.

¿Son soluciones reales o imaginarias?

a. $3-5i$ c. $\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2}i$

b. $\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}i$ d. $3-5i$

11. Cuál es el valor de $(1-i)^3$:

a. $-3i$ c. $1-i$

b. $-2-2i$ d. $-1-2i$

Sucesiones y

Unidad 6

495-435 a.e.c.
Grecia. Zenón de Elea enuncia algunas paradojas sobre el infinito.

287-212 a.e.c.
Arquímedes construye sucesiones infinitas de triángulos.

1170-1250. Italia.
Fibonacci define la sucesión que lleva su nombre: "números de Fibonacci".

1602-1675
Roberval determinó que el área entre una curva y una línea está formada por un número infinito de rectángulos muy delgados.

MARCO HISTÓRICO

En matemáticas, la sucesión de Fibonacci es la sucesión infinita de números naturales dispuesta de la siguiente manera:

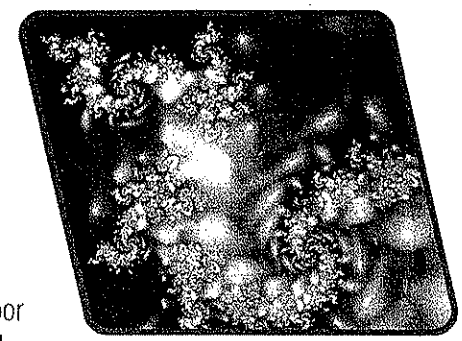
0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55...

Donde el primer elemento es 0, el segundo es 1 y cada elemento restante es la suma de los dos anteriores.

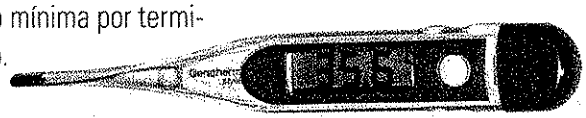
APLICACIONES

Las sucesiones se utilizan para representar y predecir fenómenos que ocurren de forma recurrente. Por ejemplo: el verde de los semáforos, la variación de los índices de precios al consumidor, entre otros.

Los fractales se obtienen a partir de progresiones geométricas. Donde se repite el mismo procedimiento infinitas veces.



La observación y registro diario de los cambios de temperatura, permiten por ejemplo determinar cuál puede ser la temperatura máxima o mínima por termino medio.



progresiones

A cada elemento de esta sucesión se le llama número de Fibonacci. Esta sucesión fue descrita en Europa por Leonardo de Pisa, matemático italiano del siglo XIII, también conocido como Fibonacci.

La sucesión fue descrita por Fibonacci como la solución a un problema de la cría de conejos:

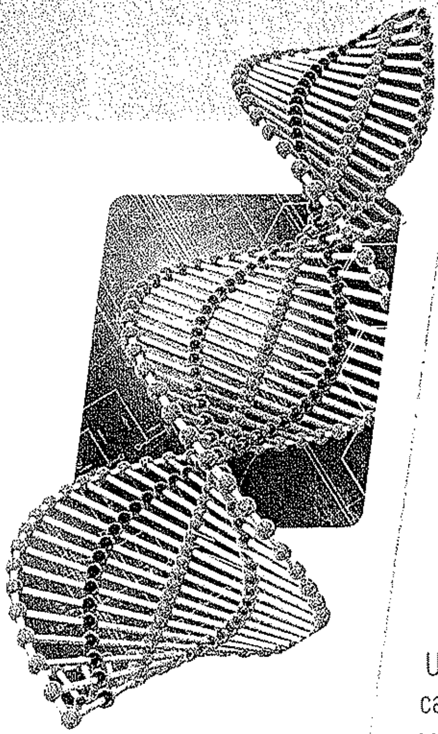
"Cierto hombre tiene una pareja de conejos juntos en un lugar cerrado y desea saber cuántos son criados a partir de este par en un año cuando es su naturaleza parir otro par en un mes, y en el segundo mes los nacidos parir también".

De esta manera Fibonacci presentó la sucesión en su libro Liber Abaci, publicado en 1 202.

Para que investigues

¿En qué consiste la paradoja de Zenón sobre Aquiles y la tortuga?

Podemos encontrar una clase de proporcionalidad llamada la media dorada que se obtiene del cociente de números consecutivos en las estructuras atómicas, en la construcción del ADN, la descripción de las órbitas planetarias y en los espirales de los caracoles.



De otra parte, la descripción de fenómenos en masa como el fenómeno del mercado bursátil tiene una relación dentro de la estructura con las progresiones.

Un mercado en alza se subdivide en 5 ondas y un mercado en baja se subdivide en 3 ondas, la relación 5 a 3 es el principio matemático de la teoría de Elliot.

Sucesiones y series

Logro: determinar términos en sucesiones y series.

COMPARTE LO QUE SABES

Observa la siguiente secuencia 6, 10, 14, 18,... ¿cuál es el número que sigue en la secuencia? ¿Existe una patrón en la secuencia?

Sucesión

Una sucesión de números reales es una función, que asocia a cada número natural n un número real a_n, denominado el n-ésimo término de la sucesión.

Ejemplo

Observa la siguiente sucesión: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24,...

Cada uno de los números de la sucesión recibe el nombre de **término**. El primer término de esta sucesión es 3 y se representa como $a_1 = 3$, de la misma manera el segundo término es $a_2 = 6$, $a_3 = 9$, $a_4 = 12$ y así, sucesivamente. Los puntos suspensivos indican que la sucesión es infinita, es decir, que la sucesión no tiene un último término.

En este caso los términos de la sucesión se obtienen multiplicando cada número natural por tres, observa:

$$\begin{array}{cccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & ..., n, & ... \text{ Dominio} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3, & 6, & 9, & 12, & 15, & 18, & ..., 3n, & ... \text{ Rango} \end{array}$$

De aquí podemos concluir que para cada número natural n, el término correspondiente de la sucesión es $3n$. Por tanto, el término general a_n de esta sucesión se puede expresar como:

$$a_n = 3n$$

Si queremos determinar el decimoquinto termino de la sucesión, entonces remplazamos n por 15. Por lo cual

$$a_{15} = 3 \times 15 = 45$$

De manera general una sucesión infinita se puede expresar como

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, ..., a_n, ...$$

Existen también sucesiones finitas porque tienen un último término y su dominio incluye únicamente los primeros n números naturales.

Ejemplo

2, 4, 6, 8, 10

Esta sucesión finita definida sólo para $n = 1, 2, 3, 4$ y 5.

Serie

Una serie es la suma de los números de una sucesión. Una vez definido el término general de una sucesión, es posible determinar la suma de los primeros n términos de la sucesión, y esto se representa a través de la expresión:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$$

Donde la letra sigma mayúscula $\sum$ es el símbolo de la suma, i es el índice de la suma y muestra en qué término de la sucesión se inicia la suma, en este caso comienza con el primer término a_1, n es límite superior de la suma e indica cuál es el último término de la suma.

Ejemplos

Consideremos la sucesión 1, 4, 7, 10, 13,..., $3n-2$,...; la representación de la suma de los primeros n términos es:

$$\sum_{k=1}^{5}(3k-2)$$

La anterior expresión se lee "la suma desde $k = 1$ hasta 5 de $3k - 2$"

Para evaluar esta serie remplazamos los valores de k empezando por 1 hasta el número 5. Resolvemos la operación indicada y finalmente, sumamos todos los resultados.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{5}(3k-2) &= (3\times1-2)+(3\times2-2)+(3\times3-2)+(3\times4-2)+(3\times5-2)\\ &= 1+4+7+10+13\\ &= 35\end{aligned}$$

Es posible definir sumas infinitas. Observemos la siguiente sucesión:

3, 1, 3, 1, 3, 1,....

El término n-ésimo de la sucesión es $a_n = 2 + (-1)^{n+1}$

Al calcular la serie infinita, se suman infinitos términos y esto se representa así:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} 2+(-1)^{n+1} &= (2+1)+(2-1)+(2+1)+\ldots\\ &= 3+1+3+1+\ldots = \infty\end{aligned}$$

Es una serie que tiende a infinito, es decir la suma de sus términos crece más y más cada vez sin acercarse a algún valor en específico.

PRÁCTICA EN CONTEXTO

Ejercitación de procedimientos

1. Escribe los primeros nueve términos de las siguientes sucesiones:

a. $a_n = 3 - 5n$

b. $a_n = \dfrac{2n-3}{n^2+4}$

c. $a_n = \dfrac{n}{2} + 4$

d. $a_n = 8 + (-0,2)^n$

e. $a_n = 3^n - 1$

f. $a_n = (n-3)(n-4)(n-5)$

g. $a_n = (-2^n)$

h. $a_n = (0,1)^{n+1}$

i. $a_n = \dfrac{n}{3} - 5$

j. $a_n = (-1)^{n-1}\dfrac{n+6}{2n}$

k. $\dfrac{1}{2^n}$

l. $2n + 1$

m. $(-1)^n 5n + 4$

n. $n^2 + 3$

2. Desarrolla cada una de las series:

a. $\sum_{k=1}^{6}(k^2-4)$

b. $\sum_{i=2}^{5}(3i^2+1)$

c. $\sum_{i=1}^{4}\dfrac{i^2}{4}$

d. $\sum_{k=1}^{5}\dfrac{4}{k+1}$

e. $\sum_{K=0}^{4}(K^2+1)^K$

f. $\sum_{i=0}^{9}(-1)^{i+1}(i^2-1)$

g. $\sum_{n=2}^{5}\dfrac{n^3}{n+2}$

h. $\sum_{i=1}^{7} i(i-3)$

3. Determina el término indicado en cada sucesión:

a. $a_n = 4n + 1$, cuarto término.

b. $a_n = (3^n + 2)$, tercer término.

c. $a_n = \dfrac{n(n^2+1)}{2}$, octavo término.

d. $a_n = (n-3)(n+4)$, decimosegundo término.

e. $a_n = 2^{n+1} - n$, noveno término.

f. $a_n = (2n-3)^2$, quinto término.

Progresiones aritméticas

Logro: determinar términos, diferencia y sumas de progresiones aritméticas para aplicarlos en la solución de problemas.

COMPARTE LO QUE SABES

¿Recuerdas haber observado patrones numéricos alguna vez? ¿Cuáles?

Una **progresión aritmética** es una sucesión donde cada término, excepto el primero, se obtiene sumándole al anterior un número constante d, llamado **diferencia**.

Esta diferencia se puede calcular restando dos términos consecutivos.

Ejemplos

En la progresión 1, 5, 9, 13, 17, 21,... la diferencia es $9 - 5 = 4$

En la progresión $\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{9}{2}, \frac{13}{2}, \frac{17}{2}, \ldots$ la diferencia es $\frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2$

En la progresión 4, 1, –2, –5, –8,... la diferencia es $-5 - (-2) = -3$

El n-ésimo término de una progresión aritmética está dado por la fórmula:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

Ejemplo

1. Escribe una expresión para el término general a_n de una progresión aritmética cuyo primer término es 2 y cuya diferencia común es –7. Calcula el décimo término de la progresión.

Para hallar el n-ésimo término sustituimos en la fórmula $a_n = a_1 + (n-1)d$ a a_1 por 2 y a d por –7.

$$a_n = 2 + (n-1)(-7)$$

$$a_n = 2 - 7n + 7$$

$$a_n = -7n + 9$$

Podemos ahora calcular el décimo término sustituyendo el valor de n por 10:

$$a_{10} = -7(10) + 9$$

$$a_{10} = -70 + 9$$

$$a_{10} = -61$$

2. Determina el número de términos en la progresión aritmética 3, 8, 13, 18, 23,..., 43.

El primer término es $a_1 = 3$, el n-ésimo término es $a_n = 43$ y la diferencia común es $d = 5$. Sustituyendo estos valores en la ecuación $a_n = a_1 + (n-1)d$ y despejando n obtenemos:

$$43 = 3 + (n-1)5$$

$$43 = 3 + 5n - 5$$

$$43 = 5n - 2$$

$$\frac{45}{5} = n$$

$$9 = n$$

Por lo tanto, la progresión tiene 9 términos.

Cálculo de la diferencia común

De la fórmula $a_n = a_1 + (n-1)d$ se puede deducir una expresión que nos permita determinar la diferencia común en una progresión aritmética. Para esto debemos simplemente despejar de la ecuación a d.

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_n - a_1 = (n-1)d$$

$$\frac{a_n - a_1}{(n-1)} = d$$

Ejemplo

Hallar la diferencia de la progresión aritmética cuyo primer término es $a_1 = 6$ y el décimoquinto término es $a_{15} = 34$.

Remplazando los valores de a_1, a_n y n obtenemos:

$$d = \frac{34-6}{(15-1)} = \frac{28}{14} = 2$$

Serie aritmética

La suma de los términos de una progresión aritmética recibe el nombre de **serie aritmética.**

Una serie aritmética puede expresarse como:

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + (a_1 + 3d) + \ldots + (a_n - 2d) + (a_n - d) + a_n$$

Donde a_n es el último término de la progresión, $a_n - d$ es el penúltimo término y así, sucesivamente.

- Al conmutar los términos de la ecuación obtenemos:

$$S_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \ldots + (a_1 + 3d) + (a_1 + 2d) + (a_1 + d) + a_1$$

- Sumando término a término $S_n + S_n$, obtenemos $2S_n = n(a_1 + a_n)$ y dividimos por 2, para obtener:

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

Ésta es la fórmula para calcularla n-ésima suma parcial de una progresión aritmética.

Ejemplo

1. Si el primer y décimo término de una progresión aritmética son –4 y 23, respectivamente, ¿cuál es el termino 40?

Se debe calcular la diferencia d, para esto remplazamos los datos en la ecuación $d = \frac{a_n - a_1}{(n-1)}$.

$$d = \frac{23+4}{10-1} = \frac{23+4}{9} = 3$$

Podemos ahora calcular a_{40}:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_{40} = -4 + (40-1)3$$

$$a_{40} = 113$$

2. Calcular la suma de los primeros cuarenta términos de la progresión aritmética anterior:

$$S_{40} = \frac{40(-4+113)}{2} = 2\,180$$

Ejemplo

En una competencia de matemáticas, Ana obtuvo en la primera de 10 pruebas 100 puntos y en cada una de las siguientes pruebas tuvo 5 puntos menos que en la prueba anterior. ¿Qué puntaje obtuvo Ana en la última prueba?

El primer término de la progresión es $a_1 = 100$ la diferencia común es $d = -5$. Debemos averiguar a_{10}.

Remplazando los datos en la ecuación:

$$a_{10} = 100 + (10 - 1)(-5)$$
$$a_{10} = 100 - 45$$
$$a_{10} = 55$$

El puntaje de la última prueba fue de 55 puntos.

PRÁCTICA EN CONTEXTO

Ejercitación de procedimientos

1. Escribe los 8 primeros términos de la progresión aritmética cuyo n-ésimo término se indica:

a. $a_n = 3n - 2$
b. $a_n = 5n + 1$
c. $a_n = 3(n - 1)$
d. $a_n = 2n$
e. $a_n = 3n + 7$
f. $a_n = 7n - 2$

2. Determina el valor indicado a partir de los valores dados para a_1 y d:

a. a_3, si $a_1 = 5$ y $d = 4$.
b. a_8, si $a_1 = -7$ y $d = 6$.
c. a_{10}, si $a_1 = 28$ y $d = -5$.
d. a_7, si $a_1 = \frac{1}{2}$ y $d = 3$.
e. a_{15}, si $a_1 = -9$ y $d = -5$.

3. Determina n a partir de los valores dados para a_1, a_n y d:

a. $a_1 = 7$, $a_n = -7$ y $d = -2$.
b. $a_1 = -1$, $a_n = 4,5$ y $d = 0,5$.
c. $a_1 = -\frac{1}{5}$, $a_n = \frac{17}{5}$ y $d = \frac{2}{5}$.
d. $a_1 = 820$, $a_n = 100$ y $d = -9$.
e. $a_1 = -53$, $a_n = 24$ y $d = 11$.

4. Determina S_n a partir de la información dada:

a. $a_1 = -5$, $a_9 = 75$ y $n = 9$.
b. $a_1 = 800$, $a_6 = 787,5$ y $n = 6$.
c. $a_1 = 7$, $a_{11} = 67$ y $n = 11$.
d. $a_1 = -\frac{5}{3}$, $a_9 = 3$ y $n = 9$.
e. $a_1 = 6$, $a_n = 83$ y $n = 8$.

Solución de problemas

5. Carlos gana un salario anual de $ 18 000 000. Su jefe le ha prometido un aumento de $ 1 200 000 cada año, durante los siguientes 10 años.

a. ¿Cuánto será el salario de Carlos en 10 años?
b. ¿Cuánto habrá ganado Carlos en 10 años de trabajo?

6. Determina cuántos enteros entre 30 y 378 son divisibles entre 6. ¿Cuánto suman estos números?

7. Un almacén rifa entre sus clientes 10 bonos, los cuales suman en total $ 5 000 000. El último ganador recibirá $ 950 000 y la diferencia entre cada bono es de $ 100 000. Halla el valor de cada uno de los bonos.

8. Una persona apila troncos. Si en la primera fila tiene 23 troncos y cada fila va disminuyendo en un tronco, ¿cuál es el número total de troncos en la pila?

9. Una pelota rebota sobre el suelo a una altura de 5 pies. Si cada rebote sucesivo es de 5 pulgadas menos, ¿cual será la altura en el décimo rebote?

10. Un estudiante desea hacer un ahorro diario. Él inicia con $ 1 000 y cada día aumentará la cantidad en $ 500. ¿Cuánto habrá ahorrado en 30 días?

COMPETENCIA ARGUMENTATIVA: aplica las progresiones aritméticas para resolver problemas.

Logro: determinar términos y sumas de progresiones geométricas.

Progresiones geométricas

Comparte lo que sabes

Si 199 es el centésimo término de una progresión aritmética y la suma de sus primeros 100 términos es 10 000, calcula el primer término de la progresión y la diferencia.

Una **progresión geométrica** o **sucesión geométrica** es la secuencia de elementos numéricos en la que cada uno de ellos se obtiene multiplicando el anterior por una constante llamada **razón o factor de la progresión**.

Observa las siguientes sucesiones:

a. 3, 6, 12, 24, 48, ... b. −2, −14, −98, −686 ... c. $\frac{3}{5}$, 3, 15, 75, 375 d. 5, −5, 5, −5 ...

Como ves cada término, excepto el primero, se obtiene multiplicando el anterior por una constante. La constante en la primera sucesión es 2, en la segunda es 7, en la tercera es 5 y en la cuarta es −1

La constante que determina la progresión geométrica se denomina **razón de la progresión**.

Ejemplos

1. La progresión 1, 2, 4, 8, 16, 32 es una progresión geométrica cuya razón es 2, como también lo es en la progresión 5, 10, 20, 40, 80, 160.
2. La razón no necesariamente tiene que ser un número entero. Así, 12, 3, 0, 75, 0, 1875 es una progresión geométrica con razón $\frac{1}{4}$.
3. La razón tampoco tiene porque ser positiva, por ejemplo en la progresión 3, −6, 12, −24 la razón es −2.

Este tipo de progresiones se denominan progresiones alternantes porque los signos alternan entre positivo y negativo.

4. Cuando la razón es igual a 1 se obtiene una progresión constante: 7, 7, 7, 7.
5. Un caso especial es cuando la razón es igual a cero, por ejemplo: 4, 0, 0, 0.

Procedimientos para hallar términos y sumas en las progresiones

Si a_0 , a_1 , a_2 , ..., a_n son los términos de una progresión geométrica con razón r entonces se cumple que:

$$a_{n+1} = ra_n$$

La razón de una progresión geométrica puede obtenerse dividiendo cualquier término por el término inmediatamente anterior a este en la progresión:

$$r = \frac{a_{k+1}}{a_k}$$

Todos los términos de la progresión quedan determinados por el primer término y la razón. Efectuando la sustitución en cada paso, la progresión se convierte en $a_1r^0, a_1r^1, a_1r^2, a_1r^3, ...$ de donde se infiere otra fórmula para el término n-ésimo:

$$a_n = a_1r^{n-1}$$

Ejemplo

La secuencia 3, 6, 12, 24, 48, 96 es una progresión geométrica cuya razón es 2 ya que:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{6}{3} = \frac{12}{6} = \frac{24}{12} = \frac{48}{24} = 2$$

Deducción de la suma de los primeros *n* términos de una progresión geométrica

La suma de los primeros *n* términos consecutivos de una progresión geométrica es:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$$

Si multiplicamos ambos miembros de la igualdad por la razón de la progresión *r* se tiene que:

$$r\left(S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n\right)$$

$$rS_n = a_1 r + a_2 r + a_3 r + ... + a_n r$$

Como al multiplicar un término de una progresión geométrica por la razón se obtiene el término siguiente de esa progresión, entonces $S_n r = a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_n r$

Ahora procedemos a restar a esta igualdad la primera, con lo cual tendremos:

$$\begin{array}{rl} S_n = & a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n \\ -rS_n = & -a_2 - a_3 - a_4 - ... - a_n - a_n r \\ \hline S_n - S_n r = & a_1 \qquad\qquad\qquad\qquad - a_n r \end{array}$$

Despejado S_n en la última igualdad se obtiene:

$$S_n(1 - r) = a_1 - a_n r$$

$$S_n(r - 1) = a_n r - a_1$$

$$S_n = \frac{a_n r - a_1}{r - 1}$$

De esta manera se obtiene la suma de los *n* términos de una progresión geométrica cuando se conoce el primer y el último término de la misma. Si se quiere simplificar la fórmula utilizando la otra expresión del término general de la progresión, se obtiene:

$$S_n = \frac{a_1 r^n - a_1}{r - 1} = a_1\left(\frac{r^n - 1}{r - 1}\right)$$

Ejemplos

1. Encuentra el valor de *r* para cada una de las siguientes progresiones geométricas:

Enunciado	Procedimiento
a. 2, 10, 50, 250 . . .	Como se tiene que $r = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ entonces:
b. −2, 4, −8, 16, −32, 64. . .	a. $r = \frac{10}{2} = \frac{50}{10} = \frac{250}{50} = 5$, por tanto $r = 5$.
c. $\frac{4}{5}, \frac{8}{15}, \frac{16}{45}, \frac{32}{135}$	b. $r = \frac{4}{-2} = \frac{-8}{4} = \frac{16}{-8} = \frac{-32}{16} = \frac{64}{-32} = -2$, luego $r = -2$.
	c. $\left(\frac{8}{15} \div \frac{4}{5}\right) = \left(\frac{16}{45} \div \frac{8}{15}\right) = \left(\frac{32}{135} \div \frac{16}{45}\right) = \frac{2}{3}$; luego $r = \frac{2}{3}$

2. Encuentra los tres primeros términos de la progresión geométrica, si se sabe que $a_4 = 3$ y $r = \frac{5}{4}$.

Sabemos que $r = \frac{a_{n+1}}{a_n}$, por lo cual $\frac{5}{4} = \frac{3}{a_3}$, es decir $a_3 = \frac{4 \times 3}{5} = \frac{12}{5}$

$\frac{5}{4}=\frac{\frac{12}{5}}{a_2}$, entonces $a_2=\frac{48}{25}$. Ahora: $\frac{5}{4}=\frac{\frac{48}{25}}{a_1}$, por lo cual $a_1=\frac{192}{125}$

Obteniéndose $a_1=\frac{192}{125}$; $a_2=\frac{48}{25}$ y $a_3=\frac{12}{5}$

PRÁCTICA EN CONTEXTO

Ejercitación de procedimientos

1. Halla el valor de r para cada una de las siguientes progresiones geométricas:

a. $2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$

b. $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{8}{9}$

c. 625, 125, 25, 5, 1

d. $\frac{3}{5}, \sqrt{2}, \frac{20}{3}, \frac{100\sqrt{2}}{9}$

e. 2, 0, 0, 0, 0

f. $7, \frac{7}{3}, \frac{7}{9}, \frac{7}{27}$

2. Encuentra cada una de las cantidades indicadas para cada progresión geométrica:

a. $a_1 = 2$, $a_6 = -2$, $r =$ ______________

b. $a_3 = 4$, $r = 0,5$, $a_1 =$ ______________

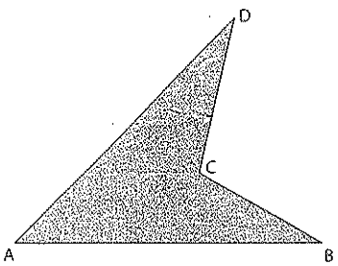
c. $a_1 = 3$, $a_2 = 1$, $a_{15} =$ ______________

Solución de problemas

3. Si una progresión geométrica tiene cinco términos negativos, la razón es igual a la cuarta parte del primer término y la suma de los dos primeros términos es 24. Halla los cinco términos.

- Que otra progresión puedes hallar con esta misma información.

4. Halla los ángulos de un cuadrilátero si se sabe que sus medidas están en progresión geométrica y que el mayor es 27 veces el menor.



5. La suma de tres números en progresión geométrica es 280 y la diferencia entre los extremos es de 120. Halla los números.

6. Si los dos primeros términos de una sucesión son: 10 y 6. Halla la razón y el décimo término.

7. Si el primer término de una sucesión es 5 y el segundo término es $\frac{-5}{4}$, indica qué forma tienen los términos pares y los términos impares. Determina una fórmula general para cada caso.

8. Si la razón de una progresión es $\frac{3}{7}$, determina el quinto, sexto y décimo término, si el primero es 83.

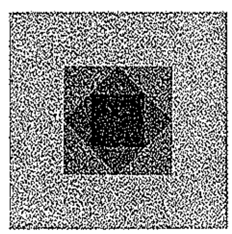
9. Si en la primera oscilación del péndulo de un reloj descompuesto su disco se desplaza 9 cm y cada siguiente oscilación recorre un tercio de la anterior, ¿cuánto se ha desplazado en la tercera oscilación?

10. A una cuerda de 175 cm se le hacen dos cortes, de modo que uno de los extremos mide 25 cm. Sabiendo que las longitudes de los trozos están en progresión geométrica, determina la longitud de cada trozo.

11. Se tiene un barril de vino con 2 048 litros. Si el primer día se vació la mitad de contenido, al día siguiente la mitad de lo que quedaba, y así sucesivamente todos los días, ¿qué cantidad de vino se ha sacado al cabo de 10 días?

12. ¿Cuántos metros de lino se ha comprado en un almacén si por el primer metro se han pagado $ 9 000 y por cada metro comprado se hace una rebaja de $ 1 000 sobre el precio del metro anterior y se pagó en total $ 45 000?

13. Dado un cuadrado de 1 metro de lado, unimos dos a dos los puntos medios de sus lados y obtenemos así un nuevo cuadrado, en el que se repite la misma operación que en el primero, de esta forma se prosigue por cuatro veces.



¿Cuál es la suma de las cuatro áreas de los cuadrados así encontrados?

Interés compuesto

Logro: utilizar procesos inductivos para verificar conjeturas.

Comparte lo que sabes:

Si Alfredo pone $ 5 000 000 en un CDT al 11,7% de interés anual, por 2 años, ¿cuánto dinero recibe cuando liquida el CDT?

Una de las aplicaciones más conocidas de las progresiones geométricas es el interés compuesto. El **interés compuesto** suma periódicamente los intereses al capital. Luego considera los intereses sobre este nuevo capital.

Así pues, se define interés compuesto como aquel que se cobra por un crédito y al ser liquidado se acumula al capital (Capitalización del interés), por lo que en la siguiente liquidación de intereses, el interés anterior forma parte del capital o base del cálculo del nuevo interés.

A manera de ejemplo se puede decir que si se tiene un crédito por $ 1 000 000 al 2% mensual, al cabo del primer mes se ha generado un interés de $ 20 000: $(1\,000\,000 \times 0,02)$, valor que se suma al capital inicial, el cual es ahora de $ 1 020 000. En el segundo mes, el interés se calcula sobre $1 020 000, lo que da un interés de $ 20 400: $(1\,020\,000 \times 0,02)$, valor que se acumula nuevamente al saldo anterior de $ 1 020 000 quedando un capital de $ 1 040 400 y así, sucesivamente.

Pero si la cantidad de dinero que se pone es más alta y se pone por muchos más meses, entonces el proceso se hace dispendioso, por lo cual se diseñó una fórmula para calcular el interés compuesto de una cantidad dada de dinero:

$$C_t = C\left(1 + \frac{i}{100}\right)^t$$

Así se calcula el capital final (C_t) que se obtiene a partir de un capital (C) en t años, al tanto por ciento de interés anual (i).

Ejemplos

1. Se depositan en un banco $ 500 000 al 32% anual, durante 10 años. ¿A cuánto asciende el monto al cabo de 3 años? ¿Cuál es la ganancia?

Observa la siguiente tabla:

Tiempo	Capital inicial	Intereses por periodo	Monto final en cada periodo
1	500 000	$500\,000 \times 0,32$	500 000 + 160 000 = 660 000
2	660 000	$660\,000 \times 0,32$	660 000 + 211 200 = 871 200
3	871 200	$871\,200 \times 0,32$	871 200 + 278 784 = 1 149 984

Por la tabla podemos concluir el capital en tres años asciende a $ 1 149 948 y que la ganancia es de 1 149 984 − 500 000 = 649 984 pesos.

Si observamos las cifras de las columnas 2 y 4 se comportan como sucesiones geométricas cuya razón, en este caso, es 0, 32.

2. Fernando depositó $ 5 000 000 en una fiducia por cuatro años, que ofrece el 1, 5% mensual, capitalizando los intereses. ¿Cuánto retira Fernando al finalizar el contrato con la fiducia?

Se deben remplazar los valores que conocemos en la formula $C_t = C\left(1+\frac{i}{100}\right)^t$

$C_{48} = 5\,000\,000\left(1+\frac{1,5}{100}\right)^{48} = 10\,217\,391,45$

Por lo tanto Fernando retira 10 217 391, 45

PRÁCTICA EN CONTEXTO

Ejercitación de procedimientos

1. Determina a cuánto asciende el capital dado, si se pone a interés compuesto por el tiempo y los intereses dados:

a. C = $ 5 000, r = 20%, t = 5 años.

b. C = $ 8 000, r = 10%, t = 4 años.

c. C = $ 15 000, r = 25%, t = 3 años.

d. C = $ 12 000, r = 8%, t = 7 años.

e. C = $ 4 000, r = 20%, t = 3 años.

f. C = $ 9 000, r = 2%, t = 10 años.

g. C = $ 7 500, r = 9%, t = 5 años.

h. C = $ 100 000, r = 22%, t = 6 años.

2. Halla el tiempo que se dejó un capital a interés compuesto, a partir de los datos dados:

a. C_t = $ 90 000; r = 19%; C = $ 5 000.

b. C_t = $ 190 000; r = 9%; C = $ 3 000.

c. C_t = $ 80 000; r = 20%; C = $ 4 000.

d. C_t = $ 70 000; r = 12%; C = $ 1 000.

e. C_t = $ 150 000; r = 25%; C = $ 2 000.

f. C_t = $ 60 000; r = 12%; C = $ 1 200.

g. C_t = $ 450 000; r = 10%; C = $ 50 000.

h. C_t = $ 32 000; r = 24%; C = $ 1 300.

Solución de problemas

3. Un banco presta cierta suma al 33% de interés anual que en 6 años se convierte es $ 700 000. ¿Cuál fue la suma prestada?

4. Halla los intereses y el monto recibido al cabo de 5 años sobre un capital de $ 1 000 000 al 20% de interés anual.

5. Si se reciben $ 67 000 de intereses después de depositar una suma en un banco, al cabo de un año a un interés anual de 40%, ¿cuánto se depositó?

6. Determina el interés que gana en dos años un depósito de $ 10 000 000 en:

a. una cuenta que paga el 20 % de interés anual convertible trimestralmente.

b. una cuenta que paga el 20 % de interés anual convertible diariamente.

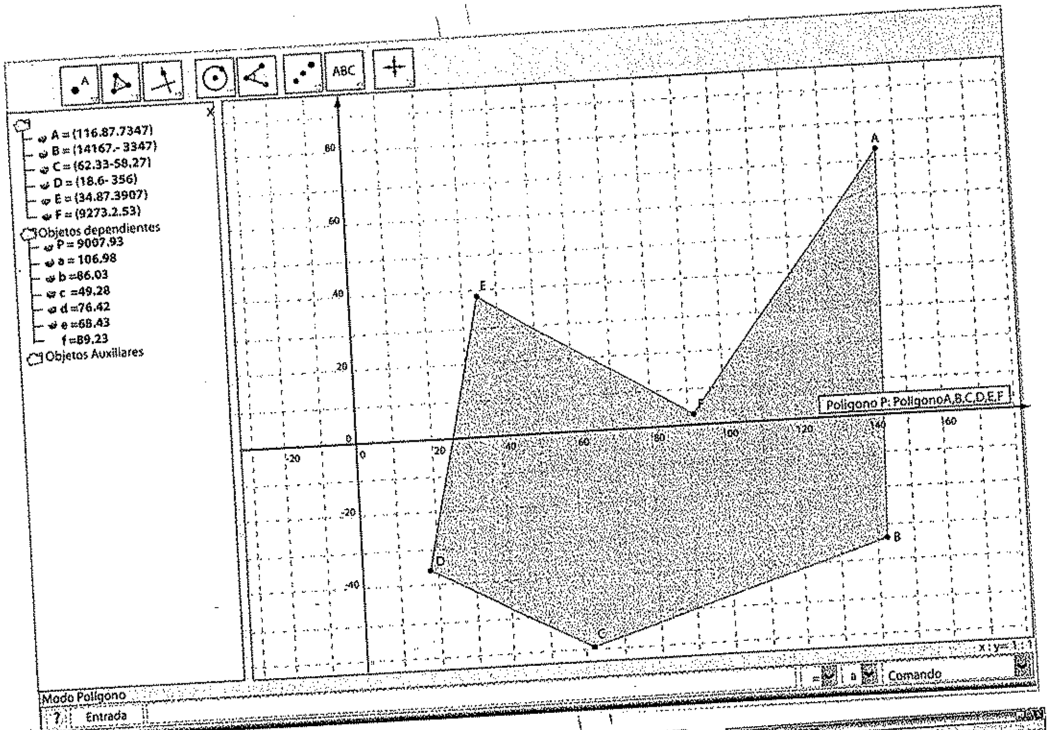
7. Completa la siguiente tabla para cálcular sobre $ 12 000 500 un interés de 12 % anual.

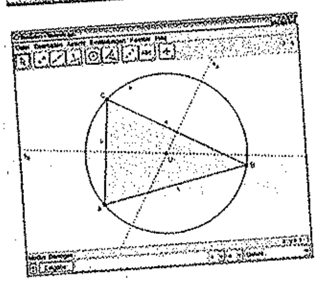
Tiempo meses	Capital inicial	Intereses por período	Monto final en cada período
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			

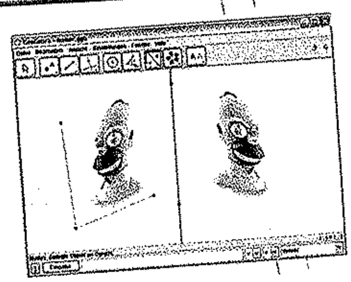
COMPETENCIA ARGUMENTATIVA: resuelve problemas de interés compuesto

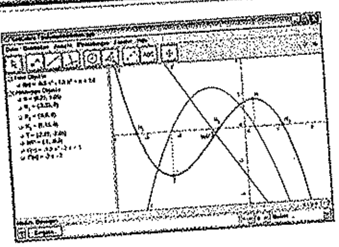
TECNOLOGÍA

El programa GeoGebra









GeoGebra es una aplicación de código abierto (es decir es un programa libre) diseñada especialmente para el aprendizaje y la enseñanza de las materias de Geometría y Álgebra. El programa nos permite manejarnos con comodidad a través de un entorno atractivo en el que tan sólo deberemos seleccionar qué tipo de figura queremos estudiar e ir colocando los puntos, líneas o ángulos donde los necesitemos.

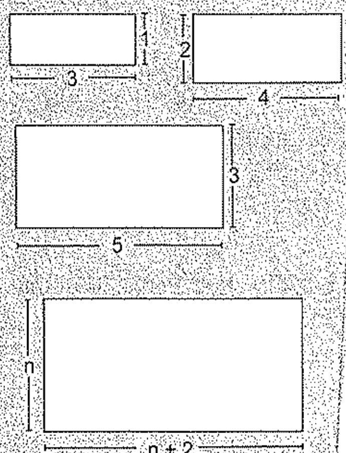
GeoGebra dispone de todo tipo de operaciones que plasma sobre la cuadrícula de su interfaz, desde el trazo de simples segmentos y líneas paralelas, hasta la traslación de cualquier objeto conforme a un vector dirección. En su interfaz podremos visualizar un plano geométrico y otro algebraico, interrelacionados de manera que si añadimos elementos en uno u otro se creen de igual forma en el otro.

resumen & refuerzo

Actividades

1. Una persona invierte, en una cuenta de ahorros \$1 000 000, a 6 % de interés compuesto por un año capitalizable cada bimestre. Calcula el saldo de la cuenta.

2. Observa los siguientes rectángulos:



   a. Determina los perímetros de los rectángulos y organízalos en una sucesión.

   b. Determina el término general para el perímetro del n-ésimo rectángulo.

   c. Determina las áreas de los rectángulos y organízalos en una sucesión.

   d. Determina el término general para el área del n-ésimo rectángulo.

Sucesión

Listado de números que tiene un orden específico y una propiedad en común.

Progresión aritmética

Sucesión en la que cada término, excepto el primero, se obtiene del anterior sumándole un número fijo llamado diferencia.

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

Serie aritmética

Es la suma de los n primeros términos de una progresión aritmética:

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

Progresión geométrica

Sucesión en la que cada término, después del primero, se obtiene del anterior multiplicándolo por un número fijo llamado razón.

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

Serie geométrica

Es la suma de los n primeros términos de una progresión aritmética:

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}, \text{ con } r \neq 1$$

Interés compuesto

Pruebas de

Prueba Saber

1. ¿Se pueden hallar dos sucesiones diferentes cuyos primeros n términos sumen lo mismo? Da ejemplos.

2. ¿Qué diferencia existe entre una serie geométrica y una serie aritmética?

a. No hay diferencias.

b. Que la serie aritmética se refiere a operaciones aritméticas y en la geométrica a rectas, longitudes y áreas.

c. En la representación.

d. Que en la serie aritmética los términos se obtienen mediante sumas, mientras que en las geométricas los términos se obtienen por productos.

3. Se colocan \$ 3 500 000 en una libreta de ahorros que da el 8 % semestral con capitalizaciones mensuales. ¿Cuánto habrá en la libreta al pasar 2 años y 8 meses?

a. \$ 6 506 111 c. \$ 4 993 333

b. \$ 5 347 398 d. \$ 5 211 215

4. La caja de ahorros de una empresa coloca todo su capital que asciende a los 320 millones de pesos en bonos del estado que garantizan un 5, 1 % de interés trimestral capitalizables quincenalmente. ¿Cuánto habrá para repartir entre sus socios por concepto de intereses al pasar un año?

a. \$ 159 570 929

b. \$ 65 280 000

c. \$ 132 457 992

d. \$ 392 077 246

5. Consideremos la siguiente situación: 2 ciclistas se preparan para una competencia: Pablo comienza con 1 000 metros, y todos los días recorre 1000 metros más que el día anterior, en tanto que Emilio empieza con 200 metros y cada día duplica lo hecho el día anterior. ¿Cuántos metros recorre cada uno hasta el décimo día?

a. Pablo recorre 9 000 m y Emilio 51 200 m.

b. Pablo recorre 10 000 m y Emilio 102 400 m.

c. Pablo recorre 11 000 m y Emilio 22 200 m.

d. Pablo recorre 55 000 m y Emilio 11 000 m.

6. En una progresión aritmética el término $a_5 = \frac{11}{3}$ y el término $a_7 = 7$. Si en total la progresión tiene 13 términos entonces S_n es:

a. 91 b. 130 c. 112 d. 98

7. En una progresión geométrica el término $a_8 = \frac{1}{4}$ y el término $a_9 = 0,125$. Si en total la progresión tiene 20 términos entonces S_n es:

a. $2^6 - \frac{1}{2^{14}}$ b. $2^{16} - \frac{1}{2^4}$ c. 63, 9 d. $2^9 - \frac{1}{2^{21}}$

Prueba PISA

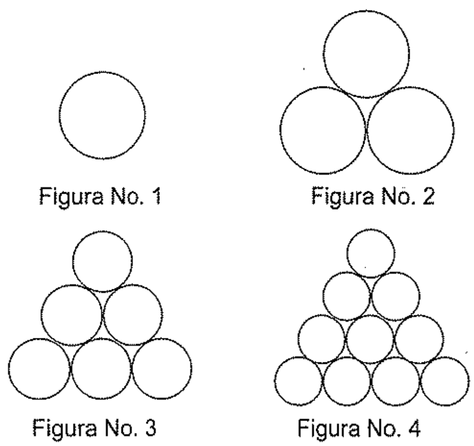


Figura No. 1 Figura No. 2 Figura No. 3 Figura No. 4

Observa la anterior secuencia de círculos y resuelve:

mejoramiento

8. ¿Cuántos círculos tiene la figura No. 15?

a. 120 b. 162 c. 155 d. 127

9. El término n-ésimo de la sucesión que determina el número de circunferencias en cada figura es:

a. $a_n = a_{n-1} + n$
b. $a_n = a_{n+1} - n$
c. $a_n = \frac{n(n-1)}{2}$
d. $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$

10. Una pequeña ciudad tiene 600 000 habitantes. Si la tasa de crecimiento de esa población es 8 % anual, ¿cuántos habitantes tendrá dentro de tres años?

a. 744 181 b. 755 827 c. 743 704 d. 733 920

Prueba TIMSS

11. Se invierten $ 4 000 en un instrumento que paga el 4, 4% de interés trimestral con capitalizaciones mensuales durante 7 meses. Luego se invierten $ 1 500 adicionales, al capital formado, por 8 meses y finalmente se aportan $1 800 durante 9 meses. Determina cuánto será el monto final, teniendo en cuenta que el capital se maneja redondeándolo al entero mayor más próximo y los intereses con dos cifras decimales.

a $ 9 636 b. $ 9 589 c. $ 8 978 d. $ 9 990

12. La razón geométrica en la sucesión 1; 0,25; 0, 0625 es:

a. 1 b. $\frac{2}{5}$ c. $\frac{25}{3}$ d. $\frac{1}{4}$

13. El catorceavo término de la sucesión geométrica 7, 14, 28, 56, 112, ... es:

a. 57 344 b. 64 521 c. 128 222 d. 51 478

14. El término general para la sucesión $-2, 4, -6, 8, -10$ es:

a. $n+2$, para todo n.

b. $-n$, para n impar.

c. $-2n$ si n es par, $2n$ si n es impar.

d. $2n$ si n es par, $-2n$ si n es impar.

15. Los tres primeros términos de la sucesión $a_n = \frac{n+1}{n}$, para $n \geq 1$ son:

a. $2, 3, \frac{4}{3}$

b. $2, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}$

c. $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}$

d. 1, 2, 4

16. Si el quinto término de una progresión geométrica es 48 y la razón es 2, entonces el primer término es:

a. 1 b. 2 c. 3 d. 4

17. Si se colocan $ 350 000 al 28% de interés compuesto anual, al cabo de 10 años el monto final es de:

a. $ 1 539 316
b. $ 4 132 071
c. $ 2 522 015
d. $ 5 879 650

18. La suma de los primero p términos de la sucesión $a_n = n^2 - 4$ es:

a. $\sum_{k=1}^{p} k - 4$
b. $\sum_{k=1}^{n} (k-4)^2$
c. $\sum_{k=1}^{p} (k-2)(k+2)$
d. $\sum_{i=1}^{p} k^2 - 2^2$

19. La solución de $\sum_{p=3}^{7} \left(p^2 - p\right)$ es:

a. 200
b. 110
c. 150
d. 135

20. Una suma equivalente a la suma $\sum_{m=2}^{5} (3m^2 + 7)$ es:

a. $28 + \sum_{p=2}^{5} 3p^2$

b. $\sum_{m=2}^{5} 3m + \sum_{j=2}^{5} 3m + 7$

c. $\sum_{m=2}^{5} m\left(3m + \frac{7}{m}\right)$

d. $\sum_{m=1}^{4} (3m^2 + 7)$

Semejanza y

Unidad 7

MARCO HISTÓRICO

El número áureo es conocido como número de oro, número dorado, sección áurea, razón áurea, razón dorada, media áurea, proporción áurea y divina proporción; y es representado por la letra griega φ (fi) (en honor al escultor griego Fidias) la cual equivale al número irracional:

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,6180339887498948482045868343656381177203091798 05...$$

Este número es un número que posee muchas propiedades interesantes y que fue descubierto en la antigüedad, no como "unidad" sino como relación

3000 a.e.c.
Antigüo Egipto. Medición de predios agrarios y construcción de pirámides y monumentos.

600 a.e.c.
Grecia. Thales de Mileto y Pitágoras inician la geometría demostrativa.

300 a.e.c.
Grecia. Euclides en "Los Elementos" recopila, ordena y sistematiza todos los conocimientos de geometría.

1793-1856
Rusia. Lobachevski, junto con Bolyai y Gauss crean los principios de la geometría no euclideana.

1821-1895
Reino Unido. Arthur Cayley desarrolla la geometría para espacios con más de tres dimensiones.

APLICACIONES REALES

Hoy en día la sección áurea se puede ver en multitud de diseños. El más conocido y difundido es la medida de las tarjetas de crédito.

En la arquitectura moderna sigue usándose. Por ejemplo, está presente en el conocido edificio de la ONU en New York, el cual no es más que un gran prisma rectangular cuya cara mayor sigue las citadas proporciones.

En la naturaleza, hay muchos elementos relacionados con la sección áurea:

- El número de pares de conejos, n meses después de que una primera pareja comienza a reproducirse.
- La relación entre la cantidad de abejas macho y abejas hembra en un panal.
- La distribución de las hojas en un tallo.
- La relación entre el grosor de las ramas principales y el tronco, o entre las ramas principales y las secundarias.

o proporción. Esta proporción se encuentra tanto en algunas figuras geométricas como en las partes del cuerpo, en la naturaleza como relación entre cuerpos, en la morfología de diversos objetos tales como caracolas, nervaduras de las hojas de algunos árboles, etc.

En la Grecia antigua se utilizó con frecuencia para establecer las proporciones de los templos, tanto en las bases de los edificios como en las fachadas.

En el Partenón, Fidias lo aplicó en la composición de las esculturas.

Platón (428-347 a.C.) consideró la sección áurea como la mejor de todas las relaciones matemáticas y la llave a la física del cosmos. En el Renacimiento se usó profusamente en las artes plásticas y la arquitectura para lograr el equilibrio y la belleza.

Da Vinci la denominó "divina proporción" en el libro donde aparecen los sólidos Platónicos.

En 1525, Alberto Durero publicó las instrucciones sobre cómo trazar con regla y compás la espiral basada en la sección áurea.

Para que consultes

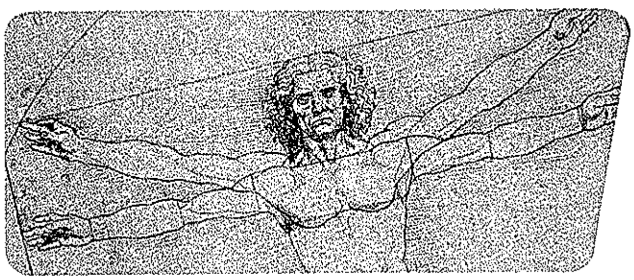
¿Tuvo alguna influencia la evolución de la geometría en el arte y la pintura de cada época?

- La Anatomía de los humanos se basa en una relación *phi* exacta, así vemos que puede encontrarse como:

la relación entre la altura de un ser humano y la altura de su ombligo; la relación entre la distancia del hombro a los dedos y la distancia del codo a los dedos, la relación entre el diámetro externo de los ojos y la línea inter-pupilar.

Si se mide el diámetro de los bronquios por el de la tráquea se obtiene *phi*.

Está comprobado que la mayor cantidad de números *phi* en el cuerpo y el rostro hacen que se reconozca y se mida la belleza.



Tema 1

Razones y polígonos semejantes

Logro: establecer criterios de semejanza entre polígonos.

Comparte lo que sabes:

¿Por qué la mitad, de la mitad, de la mitad de una hoja de papel es la octava parte de la hoja de papel?

Razones o relaciones entre cantidades

Cuando se comparan dos cantidades se utiliza la **razón**, que es el cociente entre la primera y segunda cantidad. De esta forma, una razón es un número al cual no se le asocia ninguna unidad de medida.

Ejemplo

La razón de 24 m a 6 m es **24 m ÷ 6 m**, que es igual a 4 sin unidad de medida.

Las razones o relaciones se pueden expresar en las siguientes formas:

1. Empleando dos puntos : , 3 : 24
2. Utilizando la preposición "a", 3 a 4
3. Como una fracción común: $\frac{3}{4}$
4. Como una fracción decimal 0,75
5. Como un porcentaje 75 %.

Para calcular razones es necesario que las cantidades que intervengan se midan en la misma unidad. Las razones deben simplificarse reduciéndolas a los términos más sencillos y eliminando las fracciones que en ellas aparezcan.

Ejemplos

1. Para hallar la relación o razón de 1 pie a 4 pulgadas, primero se expresa el pie en pulgadas (1 pie = 12 pulgadas), y luego se hace la relación de 12 pulgadas a 4 pulgadas, el resultado es la relación 3 a 1, es decir, 3.
2. La razón $2\frac{1}{2} : \frac{1}{2}$ es igual a 5 : 1, o sea 5.

La relación entre tres o más cantidades se puede expresar mediante una razón continua.

Ejemplo

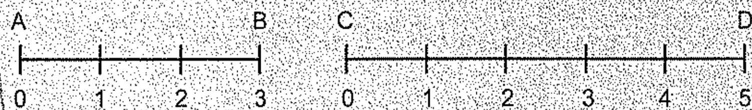
La razón de 2 a 3 a 5, es la razón continua 2 : 3 : 5. Esta forma de expresar la razón de tres cantidades es una combinación de tres razones aisladas, a saber: 2 : 3, 3 : 5 y 2 : 5.

Razones o relaciones entre segmentos

La razón de dos segmentos es igual al cociente de sus medidas, las cuales deben estar dadas en la misma unidad de medida.

Ejemplo

La razón entre dos segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ es $\frac{3}{5}$, dibujar los segmentos.



Proporciones

Se llama **proporción** a la igualdad de dos razones. Por ejemplo, **2 : 5 = 4 : 10** es lo mismo que $\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$, es una proporción.

El **cuarto término** de una proporción se denomina *cuarta proporcional* de los otros tres términos tomados en orden. De esta forma, en **2 : 3 = 4 :** x, x es el cuarto término proporcional.

Se llaman **medios** de una proporción a los términos que ocupan la parte central, es decir, al segundo y al tercer término de la proporción. Así en la proporción $\frac{5}{8} = \frac{20}{32}$, **8** y **20** son los medios de la proporción.

Se denomina **extremos** de una proporción a los términos que ocupan las posiciones exteriores, es decir, al primero y al cuarto término de la proporción. Por ejemplo, en $a : b = c : d$ los medios son b y c, y los extremos son a y d. Así en la proporción $\frac{1}{7} = \frac{5}{35}$, **1** y **35** son los términos extremos de la proporción.

Si los dos medios de una proporción son iguales, cualquiera de ellos se denomina media proporcional entre el primer y cuarto término. Por ejemplo: en la proporción 9 : 3 = 3 : 1 implica que 3 es media proporcional entre 9 y 1.

Principios relativos a las proporciones

1. En toda proporción, el producto de los medios es igual al producto de los extremos.

$$\text{Si } a : b = c : d \text{, entonces } a \times d = c \times b$$

Ejemplo

$$\text{Si } \frac{3}{5} = \frac{6}{10}\text{, entonces, } (3)(10) = (5)(6)$$

2. Si el producto de dos números es igual al producto de otros dos, uno de los pares puede hacer las veces de medios, el otro par puede hacer las veces de extremos en la proporción.

Por tanto, si $3x = 5y$, entonces

$$x : y = 5 : 3 \text{, ó, } y : x = 3 : 5 \text{, ó, } 3 : y = 5 : x \text{, ó, } y : 3 = x : 5$$

Ejemplo

$$\text{Si } 4 \times 12 = 8 \times 6 \text{, entonces:}$$

$$\frac{4}{8} = \frac{6}{12}\text{, o también } \frac{12}{6} = \frac{8}{4}$$

Métodos de transformación de una proporción en otra

3. **Método de inversión:** una proporción se puede transformar en otra invirtiendo los términos de cada razón.

Ejemplo

$$\text{Si } \frac{4}{8} = \frac{6}{12}, \left(r = \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{entonces, } \frac{8}{4} = \frac{12}{6} \; (r = 2)$$

4. **Método de alternación:** si se cambian entre sí los medios, o entre sí los extremos, de una proporción, se obtiene una nueva proporción.

Ejemplo

$$\text{Si } \frac{1}{7} = \frac{5}{35}\text{, entonces } \frac{35}{7} = \frac{5}{1} \text{ o también}$$

$$\frac{1}{5} = \frac{7}{35}$$

5. **Método de adición:** en la proporción $a : b = c : d$ se puede sumar a ambos lados de la igualdad una unidad y de esta forma producir una proporción $a + b : b = c + d : d$

Ejemplo

$$\text{Si } \frac{1}{7} = \frac{5}{35}\text{, entonces}$$

$$\frac{1+7}{7} = \frac{5+35}{35} \; (r = 1,1428\ldots)$$

6. **Método de sustracción:** en la proporción $a : b = c : d$ se puede restar a ambos lados de la igualdad una unidad y de esta forma producir otra proporción $a - b : b = c - d : d$

Ejemplo

Si $\frac{15}{12} = \frac{5}{4}$, entonces, $\frac{15-12}{12} = \frac{5-4}{4}$

Otros principios relativos a las proporciones

7. Si tres de los términos de una proporción son iguales a los correspondientes de otra, los términos restantes de ambas también son iguales.

Ejemplo

Si $\frac{x}{2} = \frac{14}{4}$ y $\frac{7}{2} = \frac{14}{4}$ entonces, $x = 7$

8. Si se tiene una sucesión de razones iguales, la razón entre la suma de los numeradores y la suma de los denominadores es parte de la sucesión de razones iguales.

Ejemplos

1. Si $\frac{2}{5} = \frac{6}{15} = \frac{4}{10}$, entonces,

$$\frac{2+6+4}{5+15+10} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5} = \frac{6}{15} = \frac{4}{10}$$

2. Si $\frac{m-n}{4} = \frac{n-1}{15} = \frac{1}{10}$, entonces

$$\frac{m-n+n-1+1}{4+15+10} = \frac{m}{29}, \text{ de donde } \frac{m}{29} = \frac{1}{10}$$

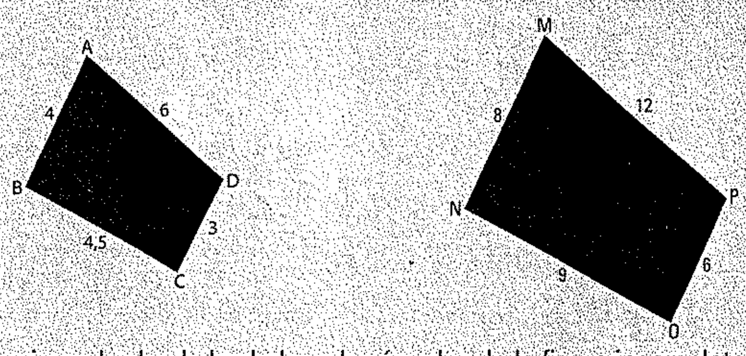
Aplicación de los principios a polígonos proporcionales

Dos polígonos convexos son semejantes si tienen igual número de lados, sus ángulos interiores correspondientes son iguales y las razones entre sus lados homólogos son iguales. Recordemos que dos lados son homólogos si están comprendidos entre dos ángulos respectivamente congruentes.

Cuando dos polígonos son semejantes y además sus lados homólogos son congruentes, es decir que la razón entre los lados es igual a 1, los polígonos son congruentes.

Ejemplo

1. Determinar la razón entre los lados homólogos para los cuadriláteros ABCD Y MNOP



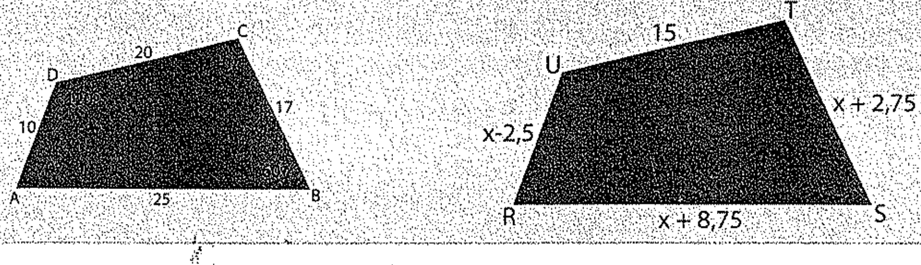
$\frac{\overline{AB}}{\overline{MN}} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

$\frac{\overline{BC}}{\overline{NO}} = \frac{4,5}{9} = \frac{1}{2}$

$\frac{\overline{CD}}{\overline{OP}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$\frac{\overline{DA}}{\overline{PM}} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

2. Determinar el valor de los lados y los ángulos de la figura incompleta:



Como $20 : 15 = 17 : x + 2,75$ se tiene que $20(x + 2,75) = (15)(17)$.

Al resolver la ecuación $x = 10$, lo que indica que el lado ST mide 12, 75.

Por lo tanto, los lados UR y RS son:

$$UR = 10 - 2,5 = 7,5$$

$$RS = 10 + 8,75 = 18,75$$

Por definición, se tiene que los ángulos comprendidos entre lados homólogos de figuras semejantes son congruentes, por tanto:

$$\measuredangle A = \measuredangle R = 70°;$$
$$\measuredangle B = \measuredangle S = 60°;$$
$$\measuredangle C = \measuredangle T = 110°$$
$$\text{y } \measuredangle D = \measuredangle U = 120°$$

PRÁCTICA EN CONTEXTO

Ejercitación de procedimientos

1. Aplicando la primera propiedad, determina cuáles son proporciones y cuáles no.

a. $\frac{4}{5} = \frac{2}{3}$ d. $\frac{9}{8} = \frac{27}{24}$

b. $\frac{28}{16} = \frac{7}{4}$ e. $\frac{1}{5} = \frac{8}{25}$

c. $\frac{3}{6} = \frac{6}{12}$ f. $\frac{2}{21} = \frac{8}{84}$

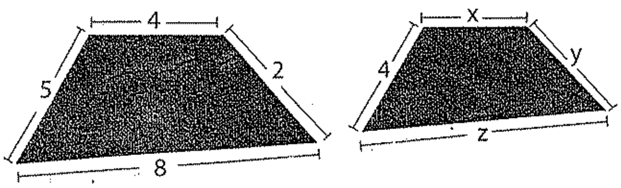
2. Halla la incógnita aplicando la propiedad que sea necesaria:

a. $\frac{x}{5} = \frac{6}{30}$ d. $\frac{4 + x}{8} = \frac{10}{4}$

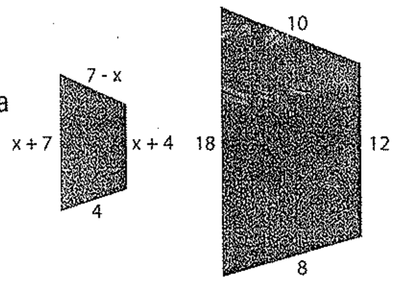
b. $\frac{9}{x} = \frac{x}{4}$ e. $\frac{3x}{9} = \frac{12}{18}$

c. $\frac{x}{27} = \frac{3}{x}$ f. $\frac{45}{23} = \frac{x}{46}$

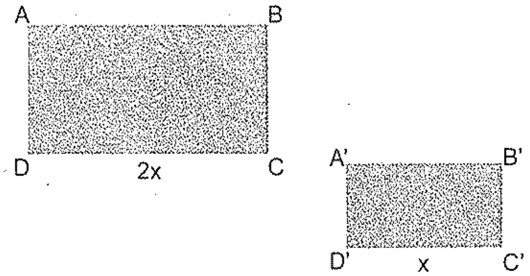
3. Si los ángulos homólogos son proporcionales, determina la medida de los lados de la segunda figura:



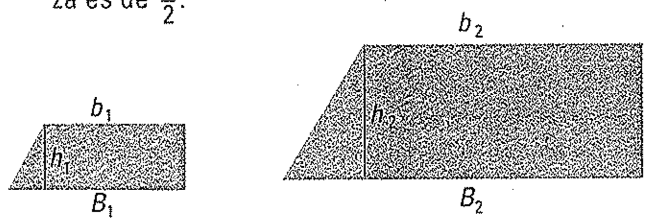
4. Dado que las figuras son semejantes, determina la incógnita y verifica que se cumplan las razones para cada lado homólogo.



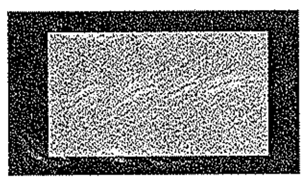
5. Dados dos rectángulos ABCD y A'B'C'D' semejantes y el perímetro del primero es igual a 18 y su largo es el doble del largo del segundo, halla las medidas de los lados de ambos rectángulos y el perímetro del segundo.



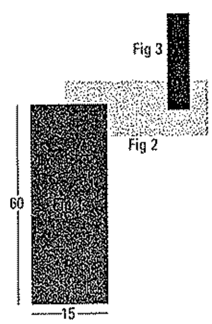
6. Determina una conclusión sobre la razón entre las áreas de los siguientes trapecios semejantes, si la longitud de la base mayor del trapecio más grande es 12, el área es 60 y la razón de semejanza es de $\frac{1}{2}$.



7. Se tiene un terreno rectangular cuya área es 6 000 y se quiere construir un jardín interior que sea $\frac{3}{4}$ del terreno total. ¿Cuáles son las dimensiones del jardín?



8. Se sabe que en la siguiente composición, la razón de semejanza entre las figuras es de $\frac{3}{5}$. Halla el área de cada una.



Tema 2

Triángulos semejantes

Logro: establecer, justificar y aplicar criterios de semejanza entre triángulos en la solución de problemas.

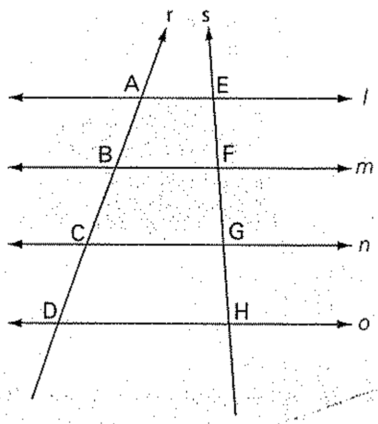
Comparte lo que sabes

Si en un mapa cada centímetro
representa 375 metros,
¿cuántos kilómetros representan en el mapa 8 cm?

Teorema de Thales

Thales de Mileto vivió hacia el año 600 a.e.c. y es considerado el más antiguo de los "siete sabios de grecia" y aunque se sabe muy poco de su vida, se le considera como el padre de la geometría. Su más conocido teorema es posible enunciarlo desde dos perspectivas:

"Si dos rectas secantes son cortadas por una serie de rectas paralelas, los segmentos determinados en una de las rectas son proporcionales a los segmentos correspondientes en la otra recta."



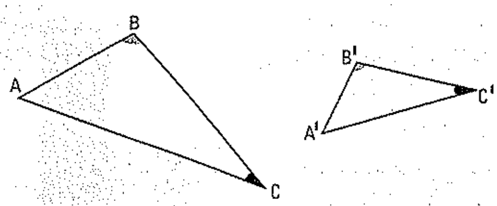
Si se cortan varias rectas paralelas por dos rectas transversales, la razón de dos segmentos cualesquiera de una de ellas es igual a la razón de los correspondientes de la otra.

De acuerdo con el teorema, la razón de la medida de los segmentos, formados en las rectas, es igual. Por lo cual se forman las siguientes proporciones así:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{FG}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{GH}} \text{ y } \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{FG}}$$

Triángulos semejantes

Se denominan triángulos semejantes a los triángulos que tienen sus ángulos correspondientes iguales y sus lados homólogos proporcionales. Los triángulos semejantes tienen la misma forma aunque no tengan, necesariamente, el mismo tamaño.



En la semejanza de triángulos puede cambiar el tamaño y la orientación de una figura pero no su forma. Por lo tanto, dos triángulos son semejantes si tienen la misma forma.

En el caso del triángulo, la forma sólo depende de sus ángulos, que no es el caso, por ejemplo de un rectángulo donde los ángulos son todos rectos pero cuya forma depende de la longitud de la base y de la altura.

- Se puede simplificar así la definición: dos triángulos son semejantes si sus ángulos son iguales dos a dos.

Si la semejanza entre triángulos la entendemos como una homotecia, la cual tiene la propiedad de multiplicar todas las longitudes de una figura por un mismo factor, entonces las razones longitud imagen / longitud origen son todas iguales, lo que da una segunda caracterización de los triángulos semejantes.

- Dos triángulos son semejantes si las razones de los lados correspondientes son iguales.

Si se reúnen estas dos propiedades, obtenemos:

$$\Delta ABC \approx \Delta A'B'C', \text{ entonces } \measuredangle A = \measuredangle A',$$

$$\measuredangle B = \measuredangle B' \text{ y } \measuredangle C = \measuredangle C'$$

$$\text{y } \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}}$$

Corolarios
* Si dos triángulos son congruentes, entonces son semejantes.
* Todos los triángulos equiláteros son semejantes.
* Si dos triángulos tienen dos ángulos iguales, el tercer ángulo también es igual.

Criterio de semejanza AAA

Si los tres ángulos de un triángulo son congruentes con los tres ángulos de otro triángulo, entonces los triángulos son semejantes.

Este postulado se simplifica en el **Criterio de semejanza AA:**

Si dos ángulos de un triángulo son congruentes a los ángulos de otro triángulo, entonces los triángulos son semejantes.

Criterio de semejanza LAL

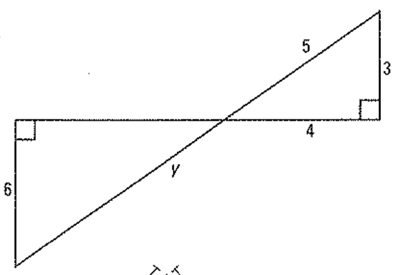
Dos triángulos son semejantes si tienen respectivamente congruente un ángulo, comprendido entre lados proporcionales.

Práctica en contexto

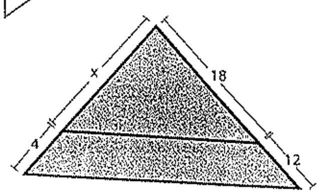
Razonamiento

1. En cada caso halla el valor de la incógnita:

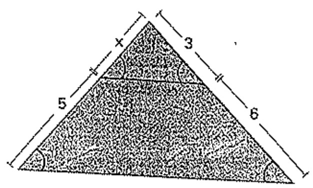
a.



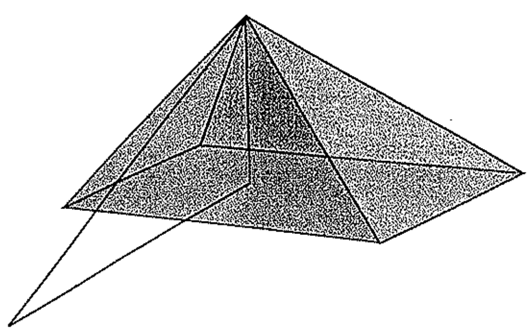
b.



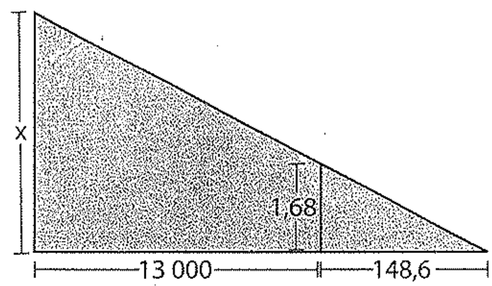
c.



2. Thales de Mileto en uno de sus viajes a Egipto determinó la altura de la pirámide de Keops, aprovechando la sombra que ésta proyectaba en la arena en un determinado momento, creando la situación esquematizada en la figura.



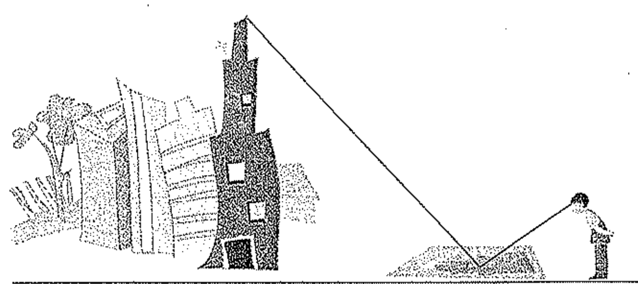
- Halla la altura aproximada de la pirámide.



3. Las medidas de un triángulo son 3 cm, 5 cm y 6 cm, respectivamente. Si el más largo de los lados de un triángulo semejante mide 18 cm. Encuentra la medida de los otros dos lados.

4. Un método para encontrar la altura de un objeto es colocar un objeto en el suelo y después colocarse de tal manera que la parte más alta del objeto pueda verse en un espejo.

¿Qué altura tiene una torre, si una persona de 150 cm de altura observa la parte superior de la torre cuando el espejo está a 120 m de la torre y la persona está a 6 m del espejo?



5. Los lados de un triángulo rectángulo miden 6 cm, 8 cm y 10 cm, respectivamente. ¿Cuánto medirán los catetos de un triángulo semejante al primero, si su hipotenusa mide 15 cm?

Triángulos rectángulos

Logro: establecer, justificar y aplicar criterios de semejanza entre triángulos en la solución de problemas.

Comparte lo que sabes

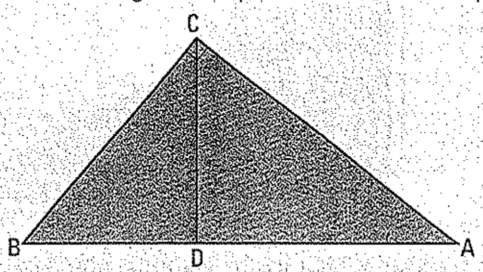
¿Sabes qué es un pantógrafo?
¿Puedes explicar cómo funciona?

En la naturaleza existen múltiples e interesantes ejemplos de semejanza entre triángulos rectángulos. En la fotografía se ha trazado una espiral como sucesión de segmentos en ángulo recto sobre la concha del Nautilus. Justamente sobre esta relación, trataremos en esta sección.

Partamos del análisis de la siguiente proporción: la media geométrica entre 4 y 16 es 8, dado que $\frac{4}{8} = \frac{8}{16}$.

Teorema de la altura a la hipotenusa como media proporcional

En un triángulo rectángulo, la longitud de la altura a la hipotenusa es la media geométrica entre las longitudes de los dos segmentos que se forman en la hipotenusa.



En el triángulo ABC, el ángulo C es un ángulo recto y $\overline{CD}$ es una altura. Por tanto, $\frac{AD}{DC} = \frac{DC}{DB}$

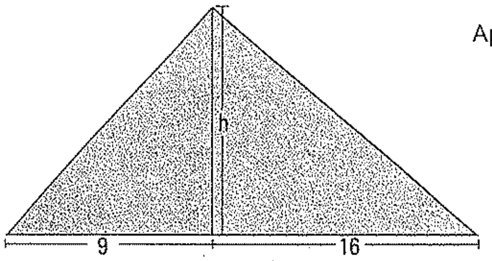
Demostración:

Afirmación	Justificación
$\measuredangle ADC$ es un ángulo recto en D.	$\overline{CD}$ es una altura.
$\measuredangle BDC$ es un ángulo recto en D.	$\overline{CD}$ es una altura.
$\measuredangle C$ es un ángulo recto.	Por hipótesis, D corresponde al ángulo opuesto a la hipotenusa.
$\measuredangle BCD$ es complementario de $\measuredangle ACD$	Son parte de un ángulo recto.
$\measuredangle BCD + \measuredangle ACD = 90°$	Porque son ángulos complementarios.
$\measuredangle CAD$ es complementario de $\measuredangle ACD$	Son los ángulos no rectos de un triángulo rectángulo.
$\measuredangle CAD + \measuredangle ACD = 90°$	Porque son ángulos complementarios.
$\measuredangle BCD \cong \measuredangle CAD$	Dos ángulos complementarios a un tercero son iguales entre sí.
$\triangle ADC \approx \triangle CDB$	Por el criterio AA
$\frac{AD}{DC} = \frac{DC}{DB}$	Partes correspondientes de triángulos semejantes son proporcionales.

Ejemplo

Hallar el área del triángulo rectángulo cuya altura divide la hipotenusa en dos segmentos de 9 y 16 centímetros, respectivamente.

Solución gráfica:



Solución analítica:

Aplicando el teorema, tenemos que

$$\frac{9}{h} = \frac{h}{16}$$

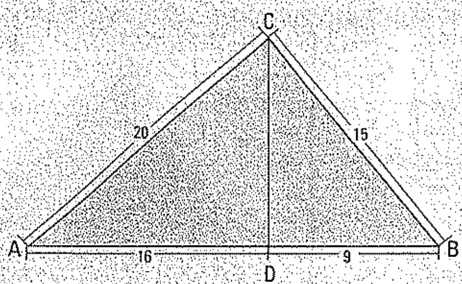
$$h^2 = 144$$

$$h = 12 \text{ cm}$$

Teorema del cateto como media geométrica

En un triángulo rectángulo al que se le ha trazado la altura que cae sobre la hipotenusa, cada cateto es la media geométrica entre la longitud de la hipotenusa y la longitud del segmento de la hipotenusa adyacente al cateto.

Ejemplo



El teorema determina que:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \text{ y } \frac{\overline{DB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$$

Aplicando los datos propuestos en el triángulo se tiene que:

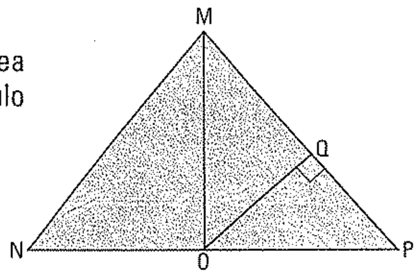
$\frac{16}{20} = \frac{20}{25}$ en donde la razón es 0, 8.

$\frac{9}{15} = \frac{15}{25}$ en donde la razón es 0, 6.

PRÁCTICA EN CONTEXTO

Razonamiento

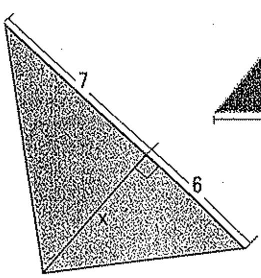
1. Halla el área del triángulo isósceles.



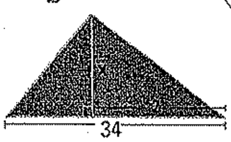
Si $\overline{PQ} = 2$ y $\overline{QM} = 7$.

2. Halla el valor de la incógnita en cada caso:

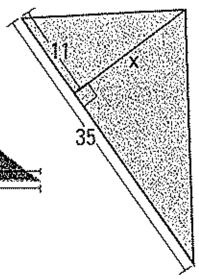
a



b

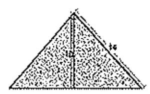


c

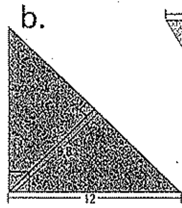


3. Halla el perímetro de los triángulos rectángulos:

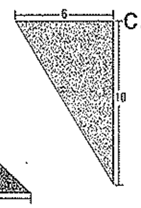
a.



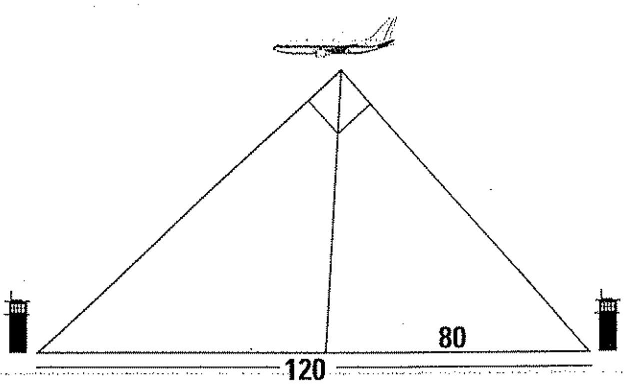
b.



c.



4. Un avión es observado por dos torres de control, ubicadas en ciudades diferentes, distantes entre sí 200 km. Halla la altura del avión si un punto en tierra que se encuentra debajo de él, está a 80 km de una de las ciudades y su posición forma un ángulo recto respecto a las dos ciudades.

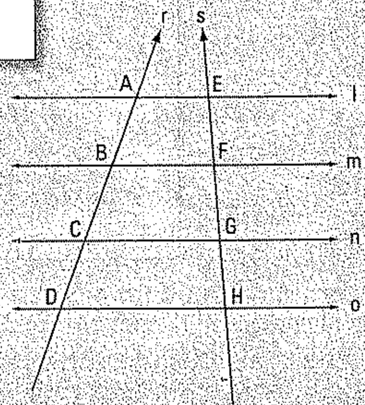


Triángulos especiales

Logro: resolver triángulos rectángulos.

Comparte lo que piensas

Los lados de un triángulo T miden 10 cm, 14 cm y 12 cm. Otro triángulo T' es semejante a éste y la razón de semejanza entre T' y T es $\frac{7}{2}$. ¿Cuánto mide el perímetro de T'?, ¿puedes calcularlo sin hallar sus lados?

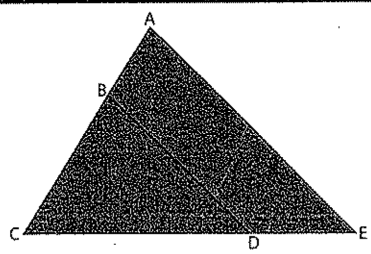
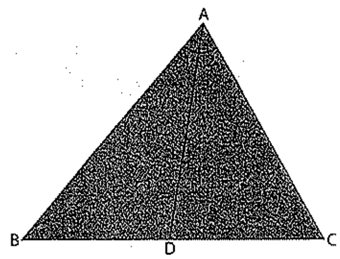


Recordemos lo que dice el teorema de Thales:

Teorema de Thales

Si se cortan varias rectas paralelas por dos rectas transversales, la razón de dos segmentos cualesquiera de una de ellas es igual a la razón de los correspondientes de la otra.

Esto significa que: $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{FG}}$, o también $\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{FG}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{GH}}$

Aplicaciones del teorema de Thales en los triángulos		
1. Toda recta paralela a alguno de los lados de un triángulo y que corta los otros dos lados, divide estos lados en partes proporcionales.	En el triángulo ACE, de la figura, en el cual $\overline{BD} \,//\, \overline{AE}$, se cumple que: $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{EC}}{\overline{DC}}$	
2. La bisectriz de alguno de los ángulos interiores de un triángulo, divide al lado sobre el que cae en segmentos proporcionales a los lados adyacentes.	En el triángulo ABC, de la figura, en donde $\measuredangle 1 = \measuredangle 2$ se cumple que: $\frac{\overline{BD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{AC}}$	

Triángulo de 30° - 60° - 90°

Un triángulo de 30° - 60° - 90° es la mitad de un triángulo equilátero. Por lo cual, en el triángulo rectángulo ACD, $\overline{AD}$ es la mitad del lado $\overline{AB}$.

Considerando $\overline{AD}$ como unidad de medida, obtenemos que $\overline{AB} = \overline{AC} = 2\overline{AD}$, y al aplicar el teorema de Pitágoras tendremos que:

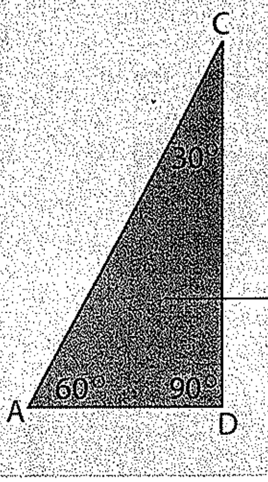
$$\left(\overline{CD}\right)^2 = \left(\overline{AC}\right)^2 - \left(\overline{AD}\right)^2$$

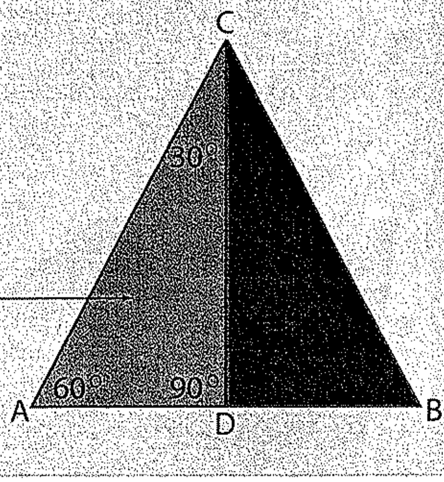
$$\left(\overline{CD}\right)^2 = \left(2\overline{AD}\right)^2 - \left(\overline{AD}\right)^2$$

$$\overline{CD} = \left(\sqrt{3}\right)\overline{AC}$$

Por lo tanto, la razón de los lados es:

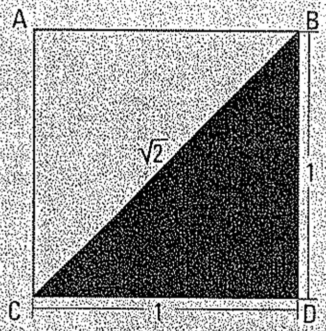
$$\overline{AD} : \overline{CD} : \overline{AC} = 1 : \sqrt{3} : 2$$

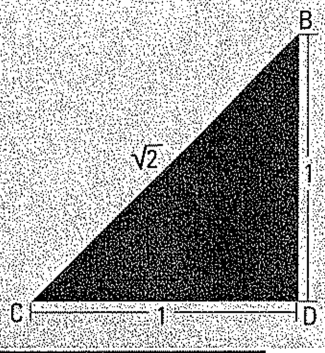




Triángulo de 45° - 45° - 90°

Un triángulo de 45° - 45° - 90° es la mitad de un cuadrado.





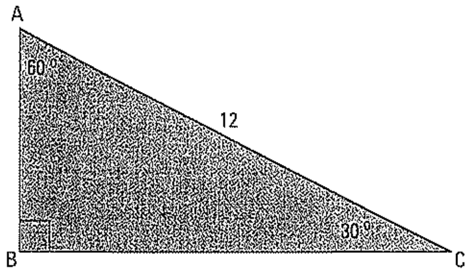
Haciendo el análisis como en 30° - 60° - 90°, encontramos que la relación entre los lados es:

$\overline{CD} : \overline{DB} : \overline{CB} = 1 : 1 : \sqrt{2}$

PRÁCTICA EN CONTEXTO

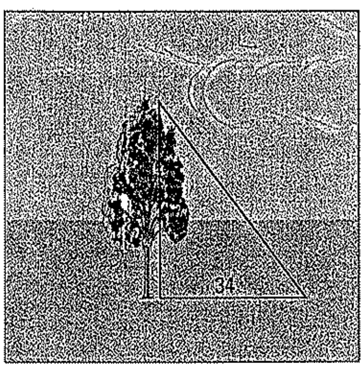
Solución de problemas

1. Si la hipotenusa de un triángulo 30° - 60° - 90° tiene 12 unidades. Halla sus catetos:



2. Cada uno de los lados no paralelos de un trapecio isósceles tiene 18 unidades, los ángulos de la base miden 60° y la base menor mide 10 unidades. Realiza la gráfica correspondiente y halla la base mayor y la altura.

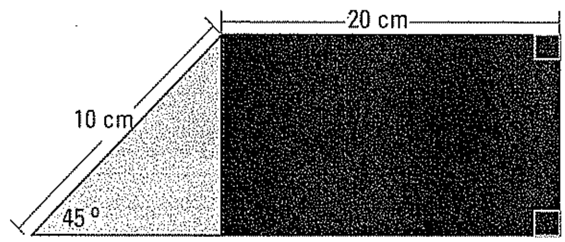
3. Si un árbol de 15 metros de altura proyecta una sombra de 34 m, ¿cuánto proyecta un árbol de 10 metros a la misma hora?



4. Cuál es la media geométrica entre:

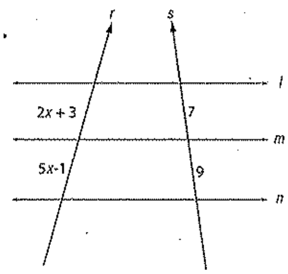
a. 4 y 6 b. 9 y 16 c. 4 y 5 d. 12 y 16

5. Determina el área del siguiente trapecio rectángulo:

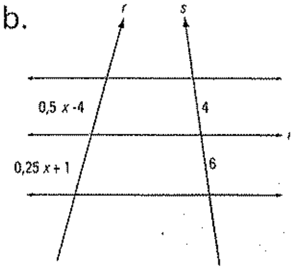


6. Si l, m y n son rectas paralelas y r y s son secantes, halla el valor de la incógnita y el valor de cada segmento:

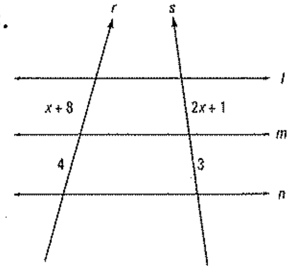
a.



b.



c.



7. La base y la altura de un triángulo miden, 6 y 12 cm, respectivamente. Un triángulo semejante a éste tiene un área 16 veces mayor. Calcula la base y la altura homólogas.

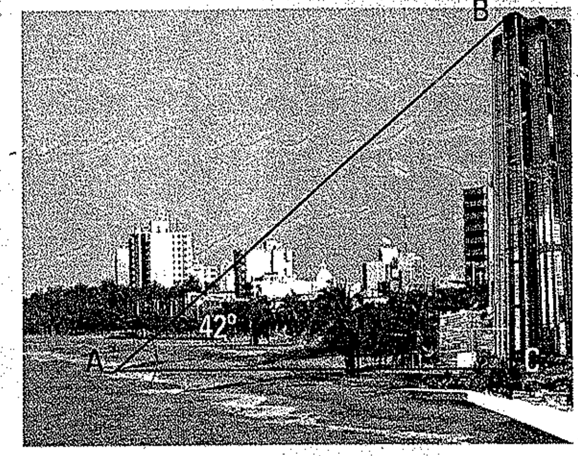
8. La base de un triángulo isósceles mide 10 cm y los lados iguales miden 13 cm. Halla los lados de un triángulo semejante cuya base esté en razón de $\frac{5}{7}$ con la base del primero.

Razones trigonométricas

Logro: identificar las razones trigonométricas en triángulos rectángulos.

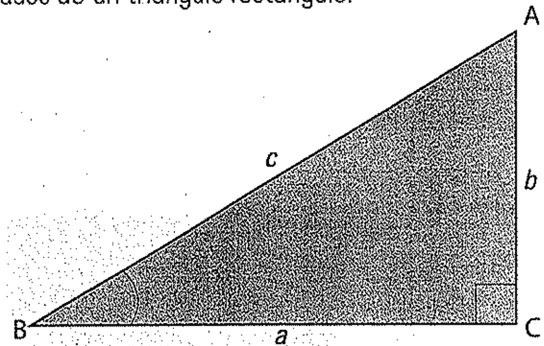
Comparte lo que sabes

¿De qué manera harías mediciones de grandes alturas (puentes, edificios, distancias de la Tierra a la Luna, etc.)?



Las elevaciones de edificios muy altos se pueden determinar con la ayuda de las razones trigonométricas de un triángulo rectángulo. En la imagen, si se conoce la distancia AC y la medida del ángulo A, la medida BC (altura del edificio) puede conocerse aplicando el concepto de razón trigonométrica.

Una *razón trigonométrica* es el cociente entre la longitud de dos lados de un triángulo rectángulo.

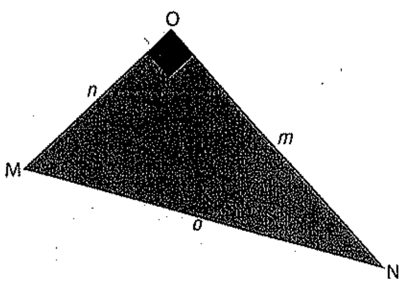


En el triángulo ABC de la figura, el lado $AC = b$ es el lado opuesto al ángulo B. El lado $BC = a$ es el lado adyacente del ángulo B. El lado $AB = c$ es la hipotenusa. Las razones trigonométricas para el ángulo B del triángulo ABC se definen así:

$\text{seno}(B) = \text{sen}(B) = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \dfrac{b}{c}$	$\text{cotangente}(B) = \cot(B) = \dfrac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \dfrac{a}{b}$
$\text{coseno}(B) = \cos(B) = \dfrac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \dfrac{a}{c}$	$\text{secante}(B) = \sec(B) = \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \dfrac{c}{a}$
$\text{tangente}(B) = \tan(B) = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \dfrac{b}{a}$	$\text{cosecante}(B) = \csc(B) = \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \dfrac{c}{b}$

Ejemplos

1. Encontrar el valor de las seis funciones para el ángulo agudo M en el triángulo rectángulo MNO



En el triángulo MON

Ángulo recto: O.	Cateto opuesto: $m = 5,5$
Cateto adyacente: $n = 3,5$	Hipotenusa: $o = 6,5$

$$\text{sen}(M) = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{m}{o} = \frac{5,5}{6,5} = \frac{11}{13} = 0,8461$$

$$\cos(M) = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{n}{o} = \frac{3,5}{6,5} = \frac{7}{13} = 0,5384$$

$$\tan(M) = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{m}{n} = \frac{5,5}{3,5} = \frac{11}{7} = 1,5714$$

$$\cot(M) = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{n}{m} = \frac{3,5}{5,5} = \frac{7}{11} = 0,6363$$

$$\sec(M) = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{o}{n} = \frac{6,5}{3,5} = \frac{13}{7} = 1,8571$$

$$\csc(M) = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{o}{m} = \frac{6,5}{5,5} = \frac{13}{11} = 1,1818$$

De la misma manera se pueden encontrar las funciones trigonométricas para el ángulo N. Calcúlalas.

2. Calcula las longitudes de los lados de un triángulo, conocida una de las razones trigonométricas, en este caso, $\text{sen}(B) = \frac{4}{5}$

Según la definición de seno, el cateto opuesto es 4, y la hipotenusa es 5.
Para encontrar el cateto faltante se aplica el teorema de Pitágoras $a^2 + b^2 = c^2$.

$$4^2 + b^2 = 5^2$$

$$b = \sqrt{25 - 9}\text{, entonces } b = 4$$

Los catetos miden 3 y 4 y la hipotenusa mide 5.

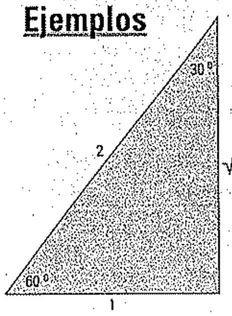
Nota: Se pudo haber tomado el cateto opuesto y la hipotenusa de triángulos semejantes con el que se tomó como referencia.

Funciones trigonométricas de triángulos rectángulos especiales

En el tema anterior encontramos la razón de los lados de algunos triángulos especiales, las cuales son:

1. En un triángulo de 30° - 60° - 90°, los lados están a razón de $1 : \sqrt{3} : 2$
2. En un triángulo de 45° - 45° - 90°, los lados están a razón de $1 : 1 : \sqrt{2}$

Ejemplos

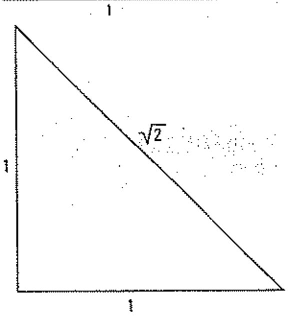


1. Hallar el valor de seno de 30° y la tangente de 30° Considera el triángulo rectángulo de 30°- 60° - 90°:

Como la relación entre los lados está dada por $1 : \sqrt{3} : 2$, entonces,

$$\text{sen}(30°) = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{1}{2} = 0,5$$

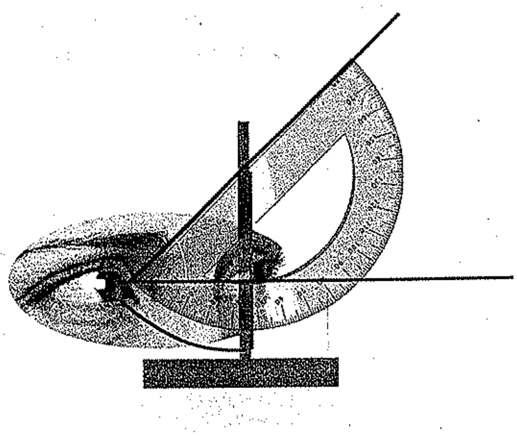
$$\tan(30°) = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0,5773$$



2. Halla el valor de coseno y cosecante. Considera el triángulo 45°, 45°, 90°.

Como la relación entre los lados está dada por $1 : 1 : \sqrt{2}$ entonces,

$$\cos(45°) = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,7071$$



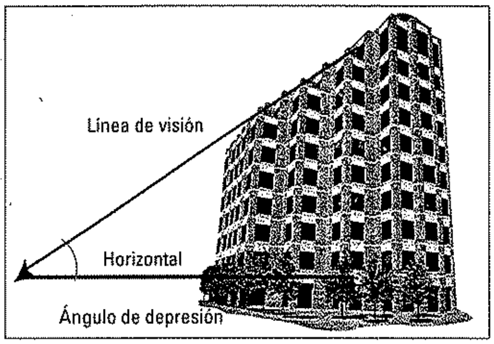
Ángulo de elevación.

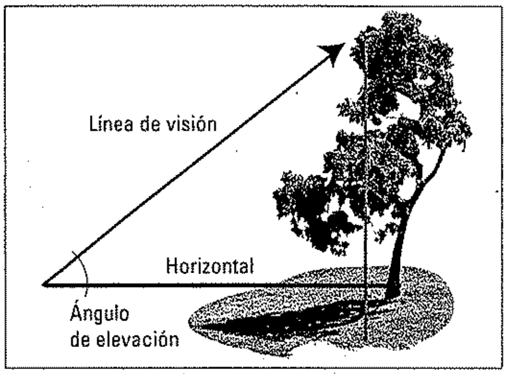
Construcción de un aparato medidor de ángulos

Se llama *línea de visión* a la recta imaginaria que une el ojo de un observador con el lugar observado.

Llamamos **ángulo de elevación** al que forman la horizontal del observador y el lugar observado, cuando éste está situado arriba del observador. Cuando el observador está más alto llamaremos al ángulo, **ángulo de depresión**.

Los conceptos de ángulo de depresión y de elevación dependen de la posición del observador, así, si el observador ubicado en la azotea de un edificio mira hacia abajo, tiene una línea de visión con ángulo de depresión, que puede medirse de arriba hacia abajo. Pero si el observador está mirando hacia arriba, se trata de un ángulo de elevación.





Consideraciones para tener en cuenta

Cuando se resuelven ejercicios con respecto a triángulos es bueno tener en cuenta que:

a. La suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo es igual a dos ángulos rectos.

b. En todo triángulo, un ángulo exterior es igual a la suma de los dos ángulos interiores no adyacentes.

c. Para cualquier triángulo, un lado es menor que la suma de los otros dos lados pero es mayor que la diferencia.

d. En todo triángulo, entre mayor es un lado mayor es su ángulo opuesto.

e. Dos triángulos son congruentes cuando tienen congruente un lado y sus dos ángulos adyacentes: (ALA).

f. Si un triángulo tiene dos lados congruentes, sus ángulos opuestos son congruentes.

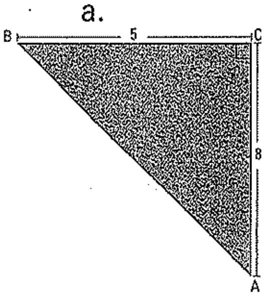
g. Dos triángulos son congruentes cuando tienen dos lados congruentes y el ángulo entre ellos también es congruente: (ALA).

PRÁCTICA EN CONTEXTO

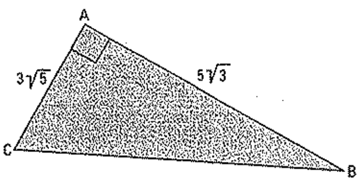
Ejercitación de procedimientos

1. Halla el valor de las seis razones trigonométricas para el ángulo *B* en cada triángulo rectangulo:

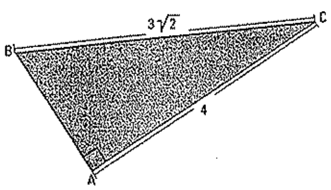
a.



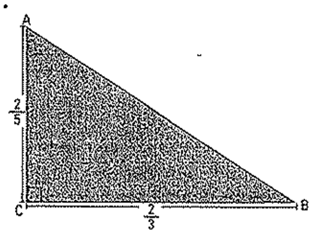
b.



c.



d.

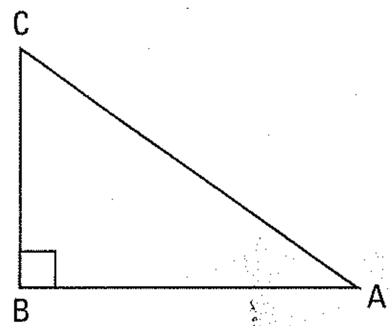


2. Halla el valor de las razones trigonométricas restantes para cada caso. Da la respuesta como fracción y como decimal.

a. $\operatorname{sen} A = \frac{7}{8}$

b. $\cos A = \frac{5}{13}$

c.



en donde $\tan A = \frac{7}{9}$

d. $\csc A = \frac{7}{8}$

3. Determina, sin usar calculadora, el valor de las siguientes expresiones.

   a. $\cos 30° + \operatorname{sen} 30° - \tan 60°$

   b. $\cos 60° + \operatorname{sen} 45° + \cot 30°$

   c. $\cot 45 - \cos 30° - \sec 60° + \tan 45°$

   d. $\cos 30° + \dfrac{\cos 45°}{\cos 60°}$

   e. $\dfrac{\operatorname{sen} 45° - \cot 60°}{\csc 30°}$

   f. $\dfrac{\tan 30°}{\tan 60°}\left(\dfrac{\operatorname{sen} 45°}{\cos 45° - \tan 45°}\right)$

4. Resuelve los siguientes rectángulos si $A = 90°$, b y c son catetos que se oponen a los ángulos B y C:

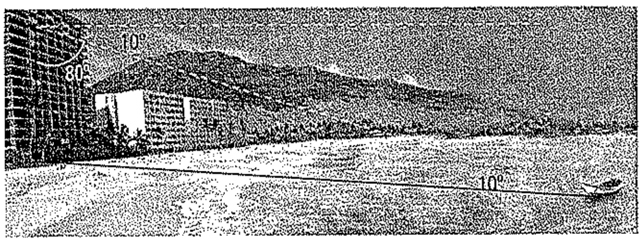
   a. $B = 45°$, $b = 23$.

   b. $C = 60°$, $a = 12$.

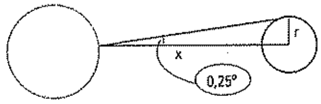
   c. $C = 30°$, $b = 6$.

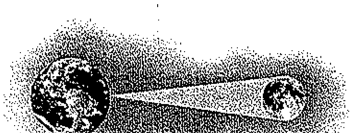
Solución de problemas

5. Una persona desde un edificio cercano a la playa, observa una lancha averiada con un ángulo de depresión de 10°. Si la persona se encuentra a 20 m de altura y la distancia entre el edificio y la playa es de 15 m, calcula cuántos metros deben nadar los ocupantes de la ancha para alcanzar la playa.

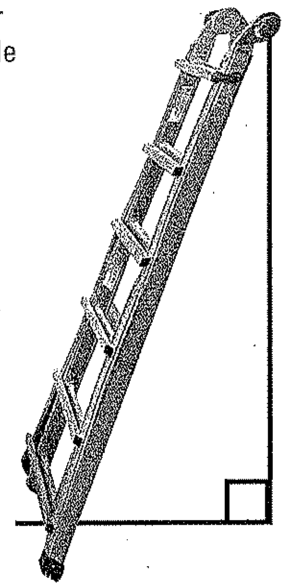


6. El radio lunar es de 1 738 km y al observar la Luna desde la Tierra bajo un ángulo de 0,25 grados, la distancia a la Luna es de 398 317 km con respecto a la Tierra. Compruébalo.





7. Un artista desea realizar una obra en una pared de un edificio. Si el artista tiene una escalera de 12 m de longitud y el ángulo que se forma entre el piso y la escalera es de 60°, ¿cuál es la altura de la pared?



8. Desde una embarcación que se dirige a un islote, se observa el extremo superior de un faro de 20 m de alto con un ángulo de elevación de 18°; tiempo después de navegar en dirección del faro, se observa con un ángulo de elevación de 35°. ¿Qué distancia recorrió la embarcación en este intervalo de tiempo?

9. Uno de los lados congruentes de un triángulo isósceles mide 6 cm y uno de los ángulos de la base mide 27°; calcula la base y la altura del triángulo.

10. Una bandera cuya asta mide 6 m está situada sobre una columna. Desde cierto punto, el extremo superior de la bandera se ve con un ángulo de elevación de 20° y el extremo inferior se observa con un ángulo de elevación de 12°. Calcula la altura de la columna y la distancia entre la columna y el punto de observación.

11. Desde un avión a 1 500 m de altura se observa una embarcación, con un ángulo de depresión de 34° y sobre el mismo plano en sentido opuesto, se observa el puerto con un ángulo de depresión de 45°. ¿A qué distancia se encuentra el puerto de la embarcación?

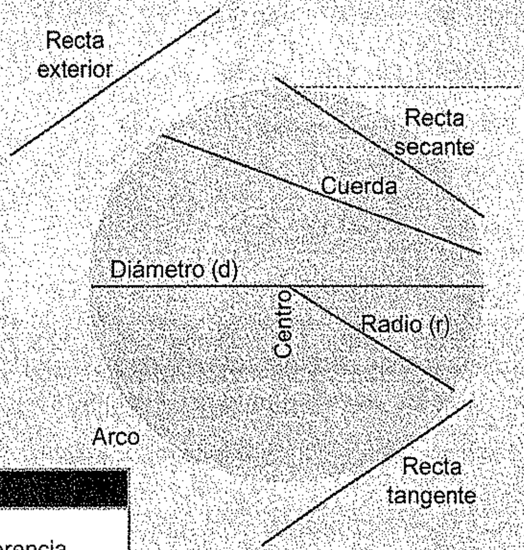
12. La diagonal de un pentágono regular mide 9 m. Calcula la longitud de la circunferencia circunscrita al polígono.

Rectas tangentes a una circunferencia

Logro: reconocer las principales propiedades geométricas de la circunferencia.

Comparte lo que sabes

Explica las diferencias entre una figura inscrita y una circunscrita, en otra.

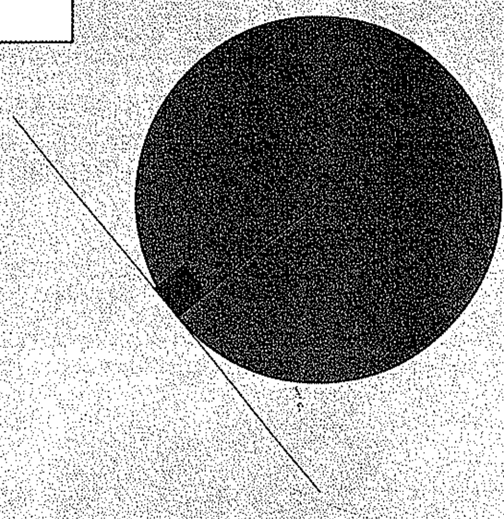


Circunferencia

Se denomina **circunferencia** al lugar geométrico formado por todos los puntos que distan r unidades de un punto dado llamado *centro*.

El **círculo** es la superficie plana limitada por una circunferencia.

Definiciones básicas:
• Radio: es la distancia del centro a cualquier punto de la circunferencia.
• Cuerda: es el segmento que une dos puntos cualesquiera de la circunferencia.
• Diámetro: es la cuerda que contiene el centro de la circunferencia.
• Semicircunferencia: así se le denomina a cualquiera de las partes en que es dividida la circunferencia por un diámetro.
• Secante: es la recta que corta a la circunferencia en dos puntos.
• Tangente: es la recta que toca la circunferencia en un solo punto.
• Recta exterior: es la recta que no corta ni toca a la circunferencia.



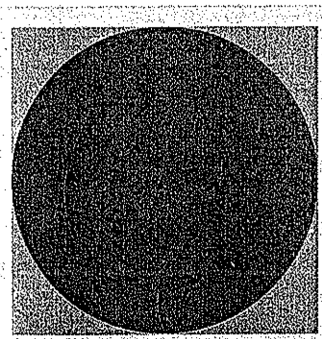
Área de un círculo

El área A de un círculo está dada por: $A = \pi r^2$
donde r es el radio de la circunferencia.

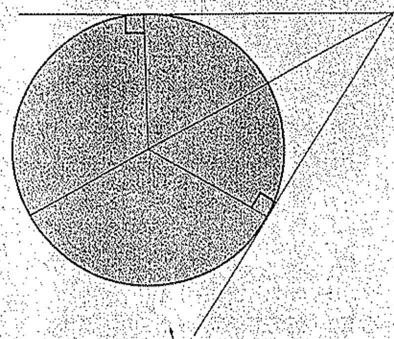
La longitud L de la circunferencia es: $2\pi r$

Teoremas fundamentales

1. Si una recta es perpendicular a un radio en un punto del círculo, entonces la recta es tangente al círculo.

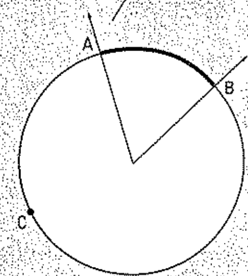


2. Si una circunferencia se inscribe en un cuadrilátero, entonces los lados del cuadrilátero son iguales.

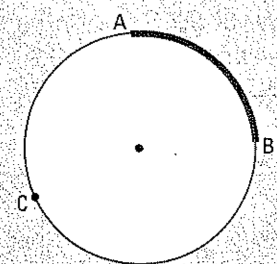


3. Si por un punto exterior a una circunferencia se trazan dos tangentes a ésta, entonces los segmentos comprendidos son iguales. La línea que une el centro con el vértice es bisectriz del ángulo que forman las tangentes.

La medición en grados de los arcos

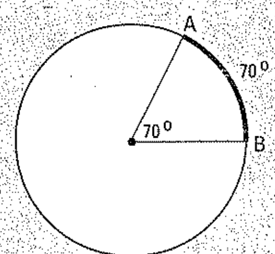


Cuando se eligen dos puntos en una circunferencia, que no sean extremos de un diámetro, se determinan dos arcos. A uno se le llama arco mayor y al otro arco menor.

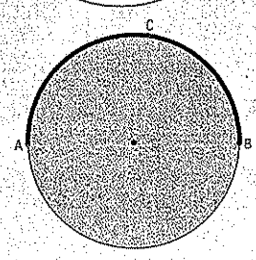


El arco *AB*, en la imagen, designa al arco menor y está determinado por los puntos *A* y *B*. Este arco también define un ángulo con vértice en el centro y extremos los extremos del arco.

Cuando además se nombra un tercer punto, se está asignando un arco mayor. Por ejemplo, en este caso, el arco $\overset{\frown}{ACB}$.



La medida del arco se determina por la medida del ángulo central. Así, por ejemplo, el arco *AB*, en la imagen, tiene 70°

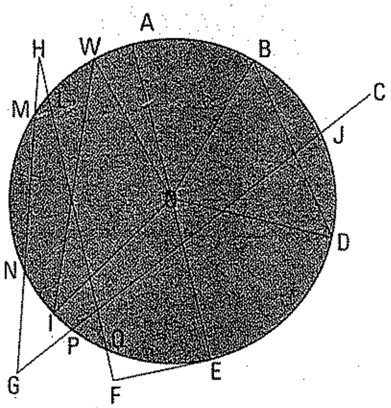


Si se determinan los arcos *AC* y *CB*, la suma de ambos arcos genera el arco *AB*

PRÁCTICA EN CONTEXTO

Ejercitación de procedimientos

1. A partir de la siguiente figura indica:



a. Todas las cuerdas.

b. Todos los radios.

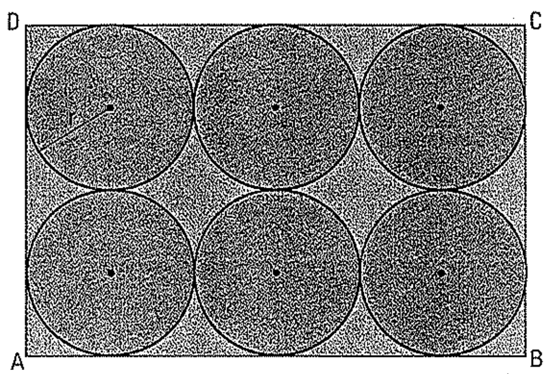
c. Todos los diámetros.

d. Todos los arcos.

e. Todas las rectas tangentes.

f. Todos los ángulos que al menos uno de cuyos lados sea tangente a la circunferencia.

2. En la figura *ABCD* es un rectángulo. Las circunferencias son tangentes entre sí y tangentes a los lados del rectángulo. Además tienen igual radio.



a. Si $r = 2$, halla el área del rectángulo y el área comprendida entre las circunferencias.

b. Si $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$, halla el área comprendida entre las circunferencias.

3. Traza una circunferencia y realiza lo que se indica:

a. traza un segmento que tenga un extremo en el círculo.

b. traza un segmento que esté por completo dentro del círculo.

c. traza un segmento que interseque al círculo en dos puntos y contenga al centro.

4. Traza una circunferencia y haz lo que se indica:

a. Traza una recta que no sea ni secante ni tangente.

b. Dibuja un ángulo que tenga su vértice en la circunferencia y que interseque a la circunferencia pero que no esté inscrito.

c. Traza un ángulo cuyos lados intersecten a la circunferencia pero cuyo vértice no esté fuera de la circunferencia y que no sea ni central ni inscrito.

5. Con respecto a la siguiente figura.

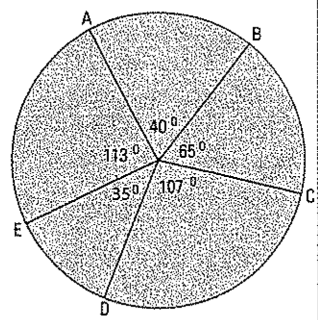
Encuentra la medida de los arcos:

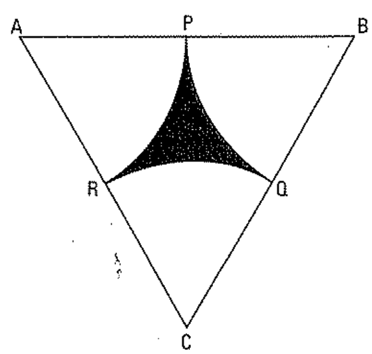
a. $AB=$ e. $CDE=$

b. $ABC=$ f. $DEA=$

c. $DC=$ g. $BD=$

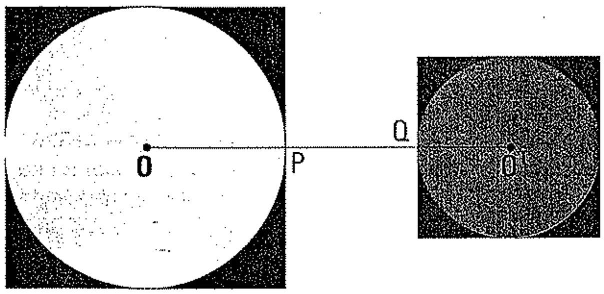
d. $EDC=$ h. $BCD=$





6. En la figura, el triángulo *ABC* es equilátero y *PQR* son los puntos medios de los lados. Halla el área de la región sombreada, si $AB = 6$ cm.

7. Si la distancia entre los centros de dos circunferencias es 7 cm y ambas están inscritas en cuadrados de 6 cm y 4 cm, respectivamente, como se muestra en la imagen, encuentra la distancia entre P y Q.



8. Si una recta es tangente a dos circunferencias que no se intersecan sino en un solo punto y el radio de cada una es r y r' respectivamente. Determina cómo se calcula la longitud de la recta que une los centros de dichas circunferencias.

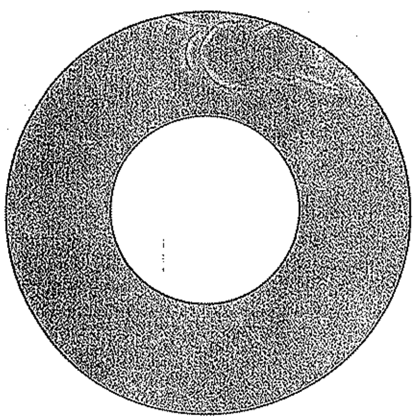
9. Si el área de un círculo es 153,9384 m² y se utiliza en la fórmula $\pi = 3,1416$, ¿cuál es la longitud de la circunferencia?

10. En dos circunferencias de radio k y k', respectivamente, la recta que une los centros es de longitud l, con l mayor que $k + k'$.

a. Elabora una imagen que represente el problema.

b. Halla el área del cuadrado que tiene como longitud de uno de sus lados el segmento de la recta l que no hace parte de ninguna de los círculos.

11. Dado que el radio del círculo mayor es 3 y del menor es 1. Determina la medida del área sombreada.



12. Determina si las siguientes afirmaciones son falsas (F) o verdaderas (V). Justifica tu respuesta con un ejemplo.

a. En toda circunferencia la medida del radio es menor que la de cualquiera de sus cuerdas. ( )

b. La mayor longitud que puede tener una cuerda es de dos radios. ( )

c. La circunferencia divide el plano en tres regiones: fuera de la circunferencia, dentro de la circunferencia y la circunferencia misma. ( )

d. Una recta y una circunferencia pueden tener máximo dos puntos en común. ( )

e. Una semicircunferencia es lo mismo que un semicírculo. ( )

f. Una semicircunferencia es una curva cerrada. ( )

g. Todo diámetro perpendicular a una cuerda en una circunferencia, divide a ésta y a los arcos que subtiende en partes iguales. ( )

h. Si dos circunferencias son tangentes y una está contenida en la otra, la distancia entre sus centros se obtiene restando el radio de la menor del radio de la mayor. ( )

i. Si dos circunferencias son concéntricas la distancia entre sus centros es mayor que el radio de una de ellas. ( )

j. En una circunferencia no es posible construir cuerdas paralelas. ( )

k. Dos diámetros perpendiculares generan cuatro arcos de igual tamaño. ( )

l. Los arcos entre dos cuerdas paralelas son iguales. ( )

Arcos y cuerdas

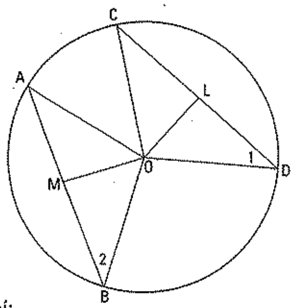
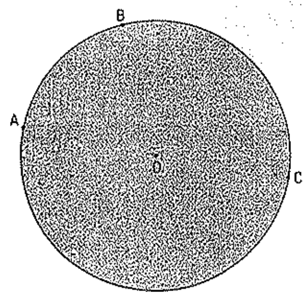
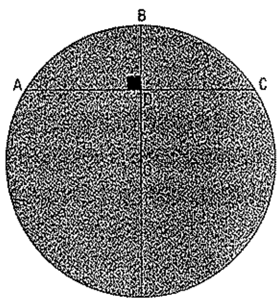
Logro: reconocer las propiedades de los arcos, los ángulos y las cuerdas.

Comparte lo que sabes

¿Has oído hablar de broca, taladro, fresa, barreno y berbiquí?

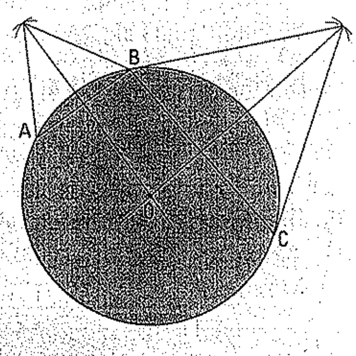
¿Conoces qué principios se aplican en su funcionamiento y en qué tipo de producción se utilizan?

Existen tres teoremas que enuncian los principios básicos de la relación entre la circunferencia y las cuerdas.

1. En un círculo o en círculos congruentes, las cuerdas iguales, es decir de igual longitud, equidistan del centro.  Así: si $\overline{AB} = \overline{CD}$, entonces $\overline{OL} = \overline{OM}$	**2.** Por tres puntos no alineados pasa una circunferencia y sólo una.  Esto significa que a un triángulo sólo es posible circunscribir una única circunferencia, que pase por sus vértices.	**3.** Si una recta que pasa por el centro de un círculo es perpendicular a una cuerda, entonces biseca a la cuerda y a los arcos que genera la cuerda.  Así, el arco *AB* es igual al arco *BC*, porque $\overline{OB}$ es perpendicular a $\overline{AC}$.

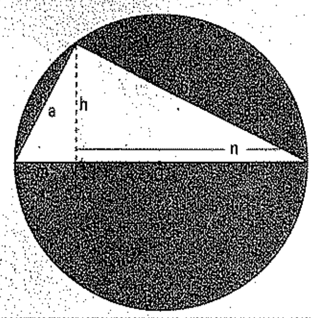
Construcción

Sean tres puntos no alineados *A*, *B*, *C*; para construir una circunferencia que pase por estos tres puntos se deben tener en cuenta los siguientes pasos:



1. Unir los puntos con los segmentos *AB* y *BC*.
2. Buscar la mediatriz de cada segmento: para bisecar el segmento *AB*, con un compás se hace centro en *A* y desde *B* se traza un arco, luego se hace centro en *B* y desde *A* se traza otro arco. Estos arcos se deben intersecar y desde el punto de intersección se traza una perpendicular que biseca al segmento *AB*. Se debe realizar el mismo proceso con el segmento *BC*.
3. Las líneas trazadas se cortan en un punto diferente de *A*, *B* y *C*. Ese nuevo punto *O*, es el centro de la circunferencia pedida. Haciendo centro en él, y con radio cualquiera de los puntos dados, se traza la circunferencia.

Principios relativos a las cuerdas



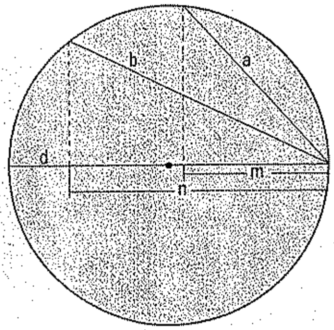
1. Toda cuerda que tenga uno de sus extremos sobre un extremo de un diámetro, es media proporcional entre éste y la proyección de la cuerda sobre él.

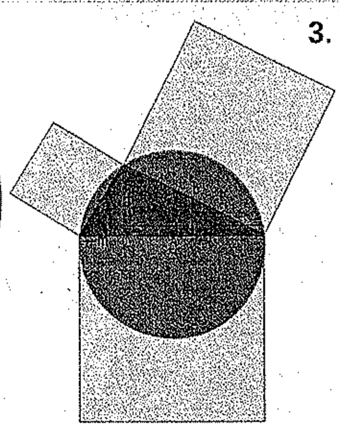
   Si *a* y *b* son cuerdas, *d* es un diámetro, *m* la proyección de *a* sobre *d*, *n* la proyección de *b* sobre *d*, entonces la propiedad se expresa así:

$$\frac{m}{a} = \frac{a}{d} \text{ y también } \frac{n}{b} = \frac{b}{d}$$

2. Los cuadrados de dos cuerdas a y b trazadas desde un mismo extremo de un diámetro d, son proporcionales a sus respectivas proyecciones, m y n, sobre el diámetro.

$\frac{a^2}{m} = \frac{b^2}{n}$ ó $\frac{a^2}{b^2} = \frac{m}{n}$





3. La suma de los cuadrados de las cuerdas que tienen uno de sus extremos en un diámetro de una circunferencia y el otro en el mismo punto de la circunferencia, es igual al cuadrado del diámetro.

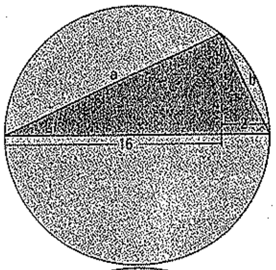
$a^2 + b^2 = d^2$
(Triángulo de Pitágoras)

PRÁCTICA EN CONTEXTO

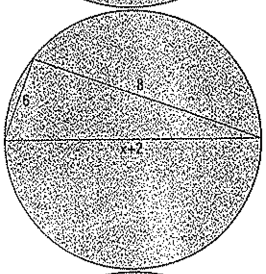
Ejercitación de procedimientos

1. Aplicando los principios antes enunciados, encuentra el valor de la incógnita:

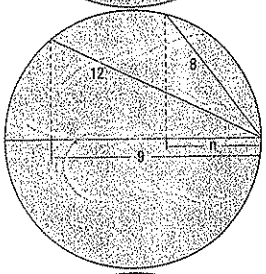
a.



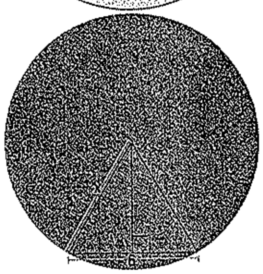
b.



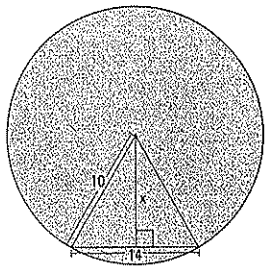
c.



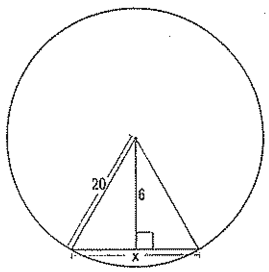
d.



e.

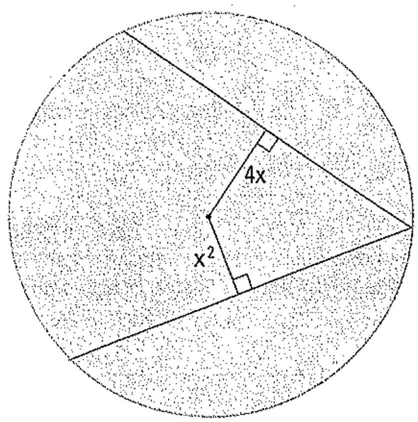


f.



2. En la figura, las cuerdas son iguales. La distancia de cada una de ellas al centro está representada por x^2 y $4x$, respectivamente.

¿Cuánto miden las distancias de las cuerdas al centro?

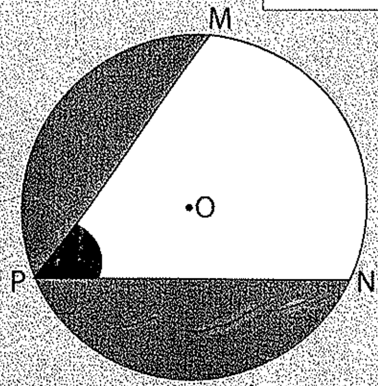


Ángulos inscritos

Logro: reconocer las características de los ángulos inscritos.

Comparte lo que sabes

¿Qué significa que la Tierra sea achatada en los polos?

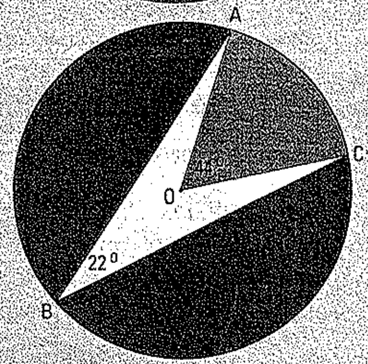


Se llama **ángulo inscrito** al que tiene su vértice sobre la circunferencia y sus lados son cuerdas de ésta.

Un ángulo inscrito en un arco tiene el vértice en el arco y sus lados pasan por los extremos de éste.

La intersección del ángulo con la circunferencia origina además del vértice, un arco que está comprendido o subtendido por dicho ángulo.

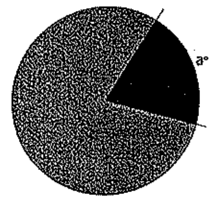
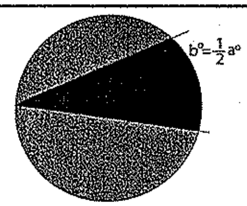
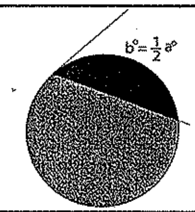
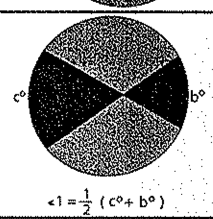
En la figura el ángulo inscrito *MPN*, origina el arco *MN*.

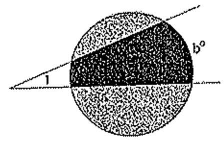
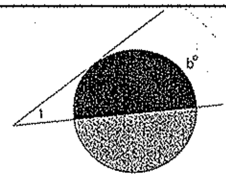
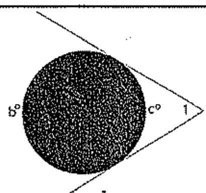


La medida del ángulo inscrito no es igual a la del ángulo central, aunque generen el mismo arco. En la figura, tanto el ángulo *ABC*, como el ángulo *AOC*, generan el mismo arco. Sin embargo la medida de estos ángulos no es igual.

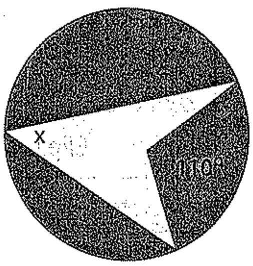
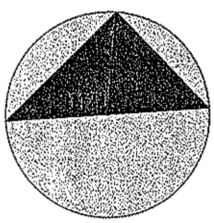
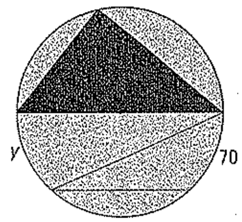
La medida del ángulo inscrito es la mitad del ángulo central que tiene los mismos extremos y de su correspondiente arco.

Principios relativos a los ángulos

Vértice	Características	Gráfica	Medida
En el centro de la circunferencia.	Se denomina ángulo central y está formado por dos radios.		La medida del ángulo es igual a la del arco.
En la circunferencia.	Se denomina ángulo inscrito y está formado por dos cuerdas.		El ángulo mide la mitad del ángulo central o la mitad del arco que abarca.
	Se denomina ángulo semiinscrito y está formado por una cuerda y una tangente a la circunferencia.		
En el interior de la circunferencia.	Se denomina ángulo interior y está formado por dos cuerdas que se cortan al interior de la circunferencia.		La medida del ángulo es igual a la semisuma de los arcos que abarcan.

	Se denomina ángulo exterior y está formado por dos secantes a la circunferencia.	 $\angle 1 = \frac{1}{2}(c^\circ - b^\circ)$	
Fuera de la circunferencia.	Se denomina ángulo exterior y está formado por una secante y una tangente.	 $\angle 1 = \frac{1}{2}(b^\circ - c^\circ)$	La medida de ángulo es igual a la semidiferencia de los arcos que abarcan.
	Se denomina ángulo exterior y está formado por dos tangentes.	 $\angle 1 = \frac{1}{2}(b^\circ - c^\circ)$	

Ejemplos

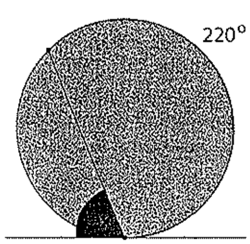
1. Hallar el valor de *x*:  Como el ángulo inscrito es la mitad del ángulo central, $x = 55^\circ$	**2.** Hallar el valor de *x*:  *x* es la mitad del ángulo suplementario de 112°, entonces $x = \frac{180^\circ - 112^\circ}{2} = \frac{68^\circ}{2} = 34^\circ$	**3.** Hallar el valor de *x* y de *y*:  Como *x* está inscrito en un semicírculo, entonces *x* es igual a 90°. El arco *y* es igual al arco de 70°, entonces *y* es igual a 70°

PRÁCTICA EN CONTEXTO

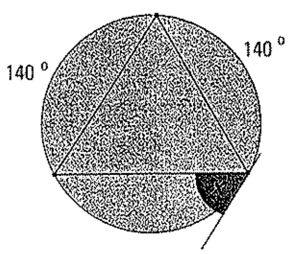
Ejercitación de procedimientos

En cada caso encuentra las incógnitas:

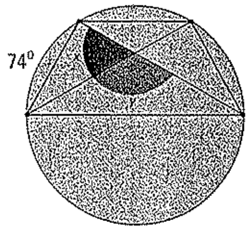
a.



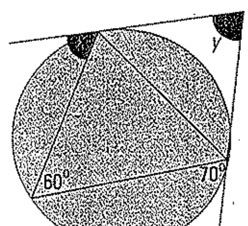
b.



c.



d.

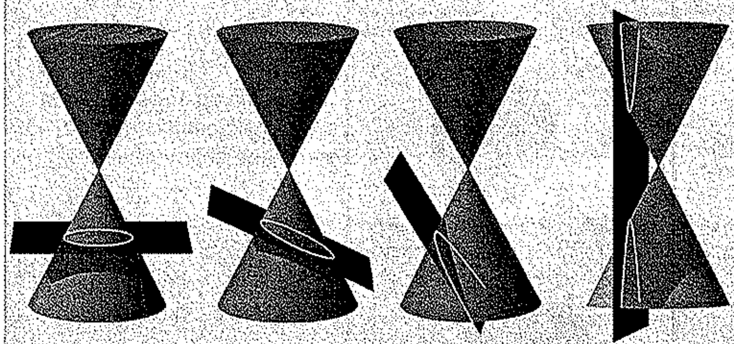


Cónicas

Logro: identificar las cuatro formas básicas de las cónicas.

Comparte lo que sabes

Si tuvieras que construir una circunferencia, ¿cómo podrías hacerlo sin tener a mano un compás?



Se denomina *sección cónica* a la curva que se genera en la intersección de un cono con un plano que no pasa por su vértice.

Si el plano es perpendicular al eje del cono, la intersección resultante es un **círculo**.

Si el plano está ligeramente inclinado, el resultado es una **elipse**.

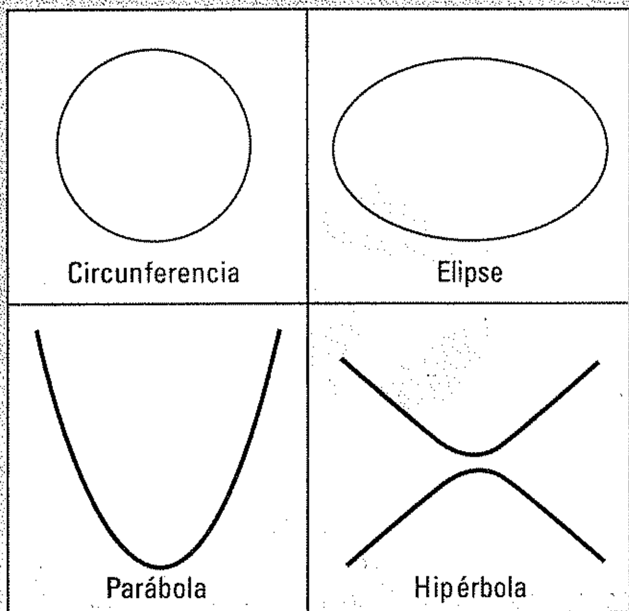
Si el plano es paralelo al costado (un elemento del cono), se produce una **parábola**.

Si el plano corta ambas extensiones del cono, produce una **hipérbola**.

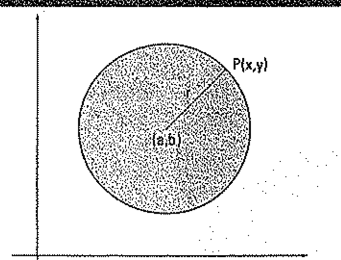
Esquema de las cuatro secciones cónicas

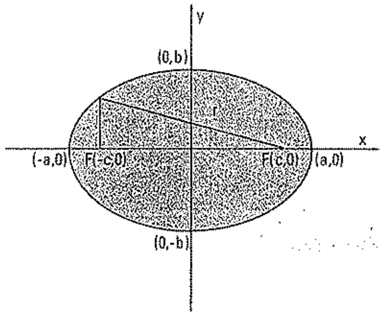
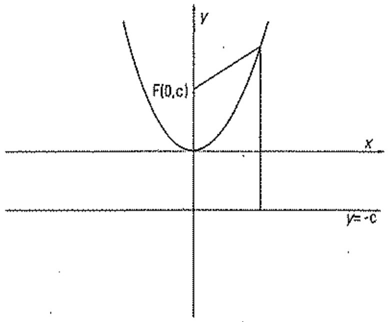
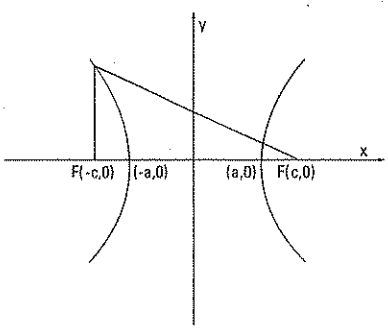
Las curvas cónicas son importantes en astronomía: dos cuerpos masivos que interactúan según la ley universal de la gravitación describen secciones cónicas si su centro de masa se considera en reposo. Si están muy juntas describirán elipses, si se alejan demasiado describirán hipérbolas o parábolas.

También son importantes en aerodinámica y en su aplicabilidad industrial, ya que permiten ser repetidas por medios mecánicos con gran exactitud, logrando superficies, formas y curvas perfectas.



Definiciones básicas

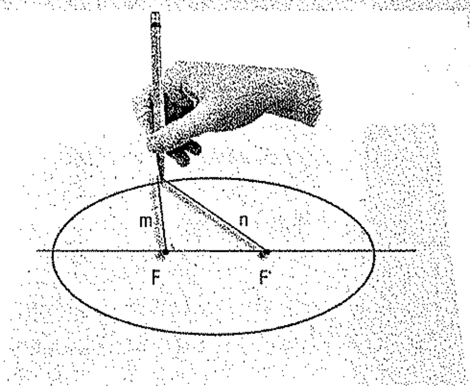
Sección	Gráfica	Definición
Circunferencia		Se llama circunferencia al lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado *centro*. El radio de la circunferencia es la distancia de un punto cualquiera de dicha circunferencia al centro.

Elipse		La elipse es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos es constante. Estos dos puntos fijos se llaman *focos* de la elipse.
Parábola		La parábola es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado *foco F* y de una recta fija llamada *directriz*.
Hipérbola		Es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias entre dos puntos fijos es constante. Estos dos puntos fijos se llaman *focos* de la hipérbola.

PRÁCTICA EN CONTEXTO

Razonamiento

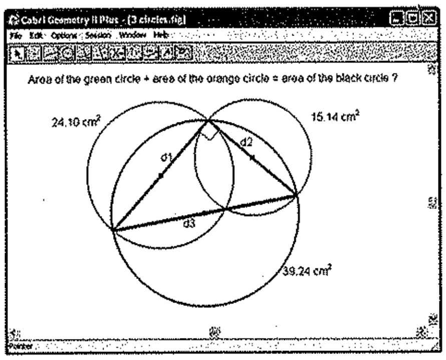
1. Construye una elipse, para lo cual sigue las siguientes instrucciones:
   a. Sobre la superficie en que vas a dibujar, define una horizontal que va servir de soporte.
   b. Fija con ayuda de un par de chinches los focos y en ellos los extremos de la cuerda.
   c. Con la ayuda de un lápiz tensiona la cuerda formando un triángulo y traza la curva, tal como se muestra en la imagen.

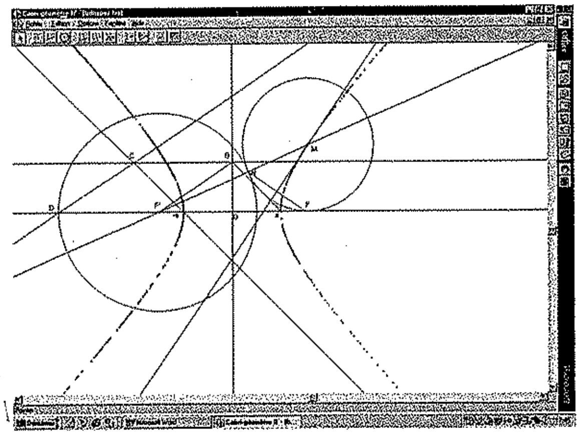


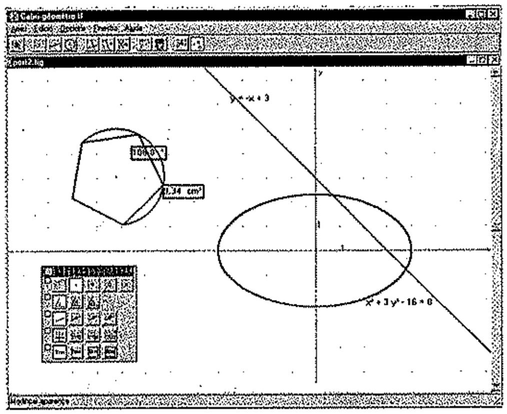
2. Investiga la ecuación general de cada una de las cónicas.
3. ¿Estas ecuaciones determinan funciones? Explica por qué sí o por qué no.

TECNOLOGÍA

Una aproximación a Cabri como herramienta útil en las construcciones geométricas.







Un documento Cabri Géomètre está compuesto de una figura construida libremente sobre una hoja única de papel virtual de un metro cuadrado (1m × 1m). Una figura está compuesta de objetos geométricos (puntos, rectas, círculos, www ...) e igualmente de otros objetos (números, textos, fórmulas, ...).

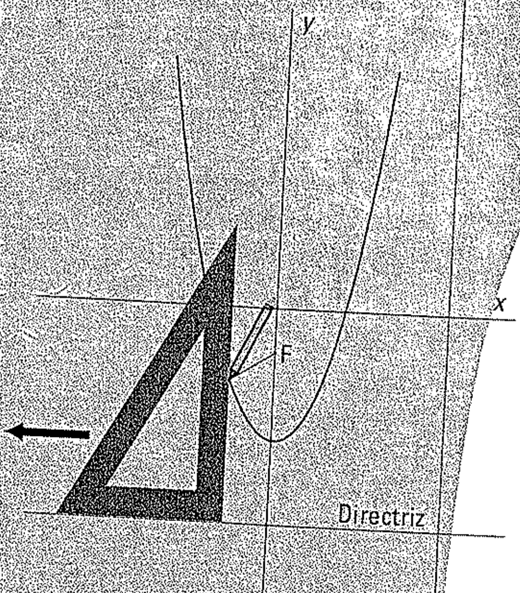
Un documento puede también incluir macro-construcciones, que permiten, memorizando construcciones intermedias, extender las funcionalidades del software.

La aplicación permite abrir simultáneamente varios documentos y soporta el Cortar-Copiar-Pegar entre otras muchas funciones.

Cabri, es un programa que se construyó a finales de los ochenta, en el seno de un laboratorio de investigación asociado al CNRS (Centro de investigación científica) y a la Universidad Joseph Fourier de Grenoble. Tiene como filosofía permitir el máximo de interacciones (ratón, teclado,...) entre el usuario y el software, respetando por una parte los comportamientos usuales de las aplicaciones y del sistema, y por otra el comportamiento matemático.

resumen & refuerzo

Construye la parábola



Utilizando los siguientes elementos puedes construir una parábola.

Necesitas: una hoja gruesa, un pedazo de hilo, una regla larga, una escuadra, chinches o cinta, un lápiz o esfero o marcador delgado.

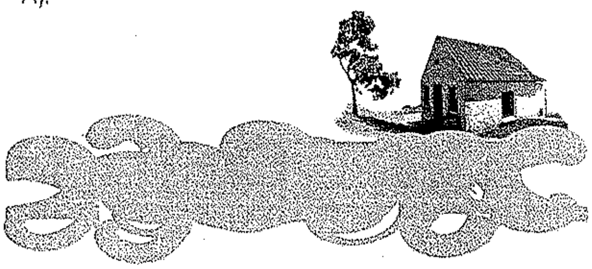
Sobre la hoja traza los ejes cartesianos y en la parte de abajo una línea que llamaremos *directriz*. Fija a uno de los extremos de la cuerda uno de los ángulos de la escuadra y en el otro el chinche, que incrustarás sobre el eje y en un punto que ahora será el foco (F).

Tal como la indica la figura, ve deslizando sobre la directriz —con ayuda de la regla larga— la escuadra, sobre la que irás deslizando con el lápiz la cuerda.

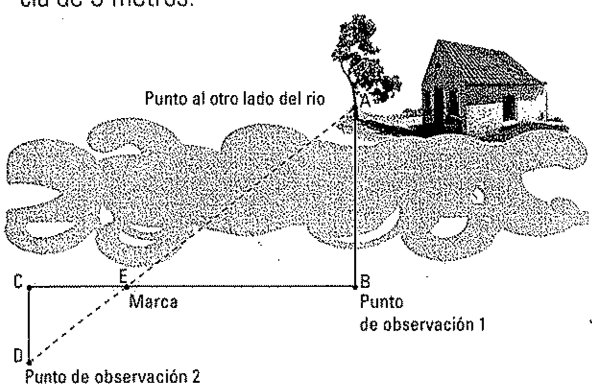
- Semejanza
  - Es la relación de las figuras geométricas cuyos lados son proporcionales y cuyos ángulos son congruentes.
    - Clases
      - De polígonos
        - Teorema de Thales
        - Transformaciones
          - Extremos y medios
          - Propiedades de las proporciones
      - De triángulos
        - Rectángulos
          - 30º 60º
          - 45º 45º
          - Con la altura sobre la hipotenusa
        - Otros triángulos
          - Criterio LAL
          - Criterio LLL

Prueba Saber

Un pescador necesita medir al ancho del río que le provee el sustento diario, pero no puede llegar al otro lado desde el punto donde se encuentra. Decidió identificar al otro lado del río un punto de referencia, en este caso el árbol junto a la casa (punto A).



Se ubicó enfrente del árbol y trazó una línea imaginaria sobre el río, teniendo en cuenta que fuera perpendicular a la corriente. Este punto, del lado donde se encuentra el pescador es el punto B o punto de observación. Ahora, se desplaza a un lado del punto, tratando de hacerlo perpendicularmente y a una distancia considerable. Marca ese lugar como el punto C. Desde allí camina de manera perpendicular al cauce pero alejándose del río para establecer un nuevo punto de observación (punto D) a una distancia de 3 metros.



Desde el punto de observación 2, ve hacia el punto de referencia al otro lado del río y pide ayuda para que por donde pasa la línea imaginaria que resulta al mirar el punto de referencia desde el punto D, se ponga una marca (Punto E).

1. Al leer el texto anterior se puede establecer que:

a. el pescador construyó un nuevo sistema de medición.

b. se necesitan tres observadores.

c. nunca se deben cruzar los ríos.

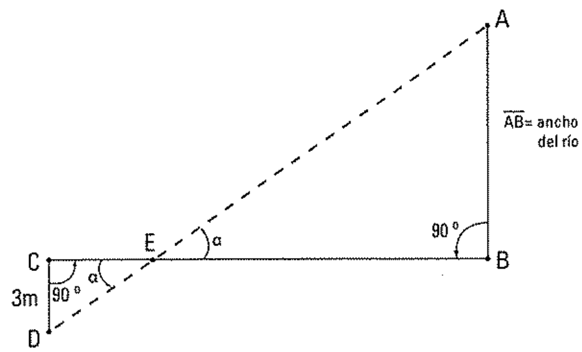
d. se pueden aplicar conceptos matemáticos en la vida diaria.

2. Los triángulos formados a partir del esquema del pescador (ver figuras) son:

a. innecesarios c. iguales

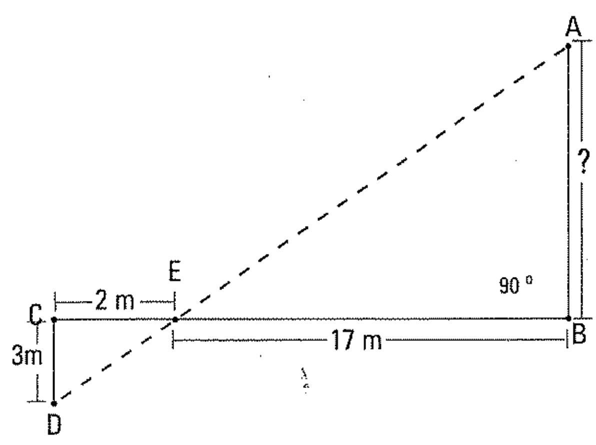
b. semejantes d. irregulares

3. De acuerdo al croquis que surge de este análisis, la proporción correcta:



a. $\frac{AB}{CD} = \frac{BC}{CD}$ b. $\frac{AB}{CD} = \frac{BE}{EC}$ c. $\frac{AB}{CD} = \frac{BC}{EA}$

4. Si el pescador tiene los siguientes datos:



mejoramiento

El ancho del río es:

a. No puede determinarse.   c. 12, 3 m

b. 25, 5 m   d. 11, 3 m

5. Si todas las medidas aumentaran en un metro, el ancho del río es:

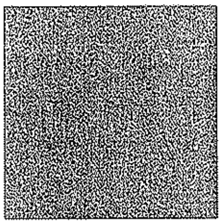
a. 34,1 m   c. 12, 5 m

b. 24 m   d. 26, 5 m

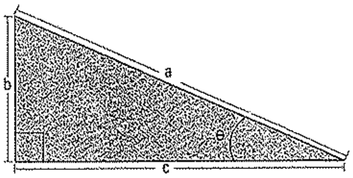
Prueba PISA

6. Determina el perímetro de cada figura si cada medida se da en kilómetros.

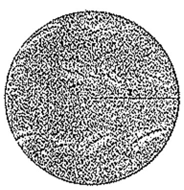
a. $l = 3$



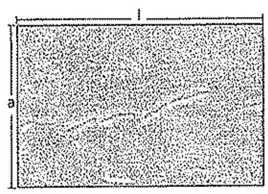
b. $b = 3$, $c = 4$



c. $r = 3$



d. $l = 3$, $a = 2$

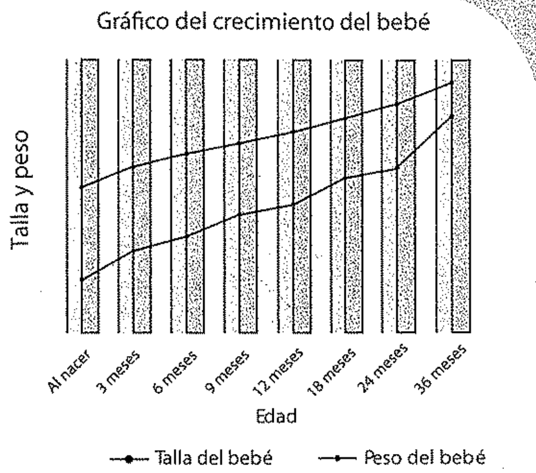


7. El crecimiento de un niño está dado por la gráfica de la derecha:

De acuerdo con el gráfico se puede concluir que:

a. el crecimiento del bebé depende de la talla.

b. la talla es proporcional al peso.

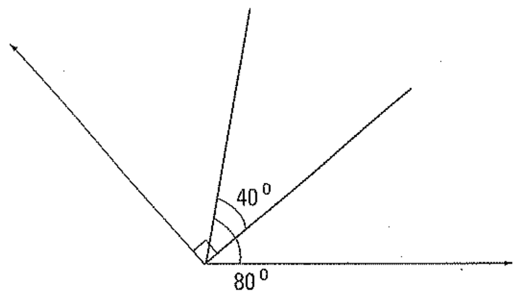


c. El crecimiento es inversamente proporcional a la talla.

d. La talla es directamente proporcional al crecimiento.

Prueba TIMSS

8. ¿Cuál es la medida del ángulo mayor dados los datos que se ven en la figura?



9. Halla el área de un paralelogramo, cuyos lados miden 11 cm y 12 cm y el ángulo comprendido entre ellos mide 46,5°.

10. Desde un faro de 30 m de alto se divisa un barco con un ángulo de depresión de 26°. Un tiempo después, se observa el mismo barco con un ángulo de depresión de 62°. ¿Qué distancia a recorrido el barco?

11. Dos aviones parten de un mismo punto, el primero hacia el norte con una velocidad de 320 km/h y el segundo hacia el este con una velocidad de 400 km/h. ¿A qué distancia se encuentra uno del otro, después de dos horas?

Estadística y

Unidad 8

Marco histórico

1540

Alemania. Sebastián Muster aporta indicaciones de métodos de observación, análisis cuantitativo y amplió los campos de inferencia y teoría ***estadística***.

3050 a.e.c.

En Egipto se recogen datos poblacionales y de riquezas del país.

1532

En Inglaterra se registran las defunciones de forma sistemática por temor a la peste.

1691. Alemania.

Gaspar Neumann empleó los datos estadísticos para fines ajenos a la política.

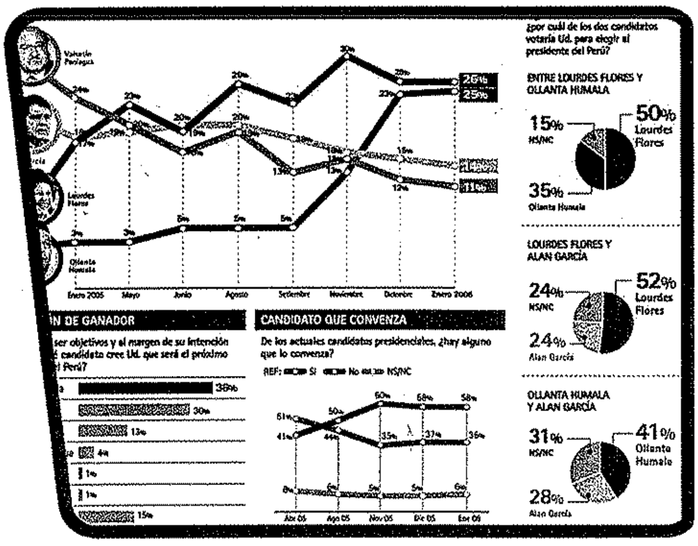
S. XVII - XVIII

Bernoulli, Maseres, Lagrange y Laplace desarrollaron la teoría de la probabilidad.

1760

Achenwall introdujo la palabra estadística.

Aplicaciones reales



probabilidad

El estudio de fenómenos experimentales asociados inicialmente a los juegos de azar dio origen a la probabilidad. Posteriormente esta disciplina matemática se fundamentó en la estadística como una técnica para la medición y el estudio de la incertidumbre constituyéndose como una teoría en la década de 1650. El matemático Jackes Bernoulli es considerado el iniciador de la teoría de la probabilidad, ampliando el campo de estudio de esta disciplina, que en principio se orientó hacia problemas financieros, a las ciencias sociales, la meteorología y la medicina, entre muchos otros.

Uno de los periodos de desarrollo más significativos de la estadística se dio entre los siglos XVIII y XIX y es en el periodo en que su campo de aplicación se extendió a muchas otras disciplinas como la astronomía, la geodesia, la psicología, la biología, las ciencias sociales, etc.

Con la llegada de los computadores a partir de la Segunda Guerra Mundial, se inicia un desarrollo acelerado de la estadística caracterizado por la aparición de técnicas que permitieron que las grandes cantidades de datos obtenidos de encuestas y censos, fueran fáciles de organizar y analizar, permitiendo que se mejore la calidad de las investigaciones, al reducirse su manipulación.

Para que consultes

¿En qué consiste la inferencia estadística?

Los periodistas además de dedicarse al espacio de la noticia, dan a conocer la opinión de las personas en temas de interés como por ejemplo el alcoholismo, las enfermedades, la intención de voto en campañas políticas, etc. A través del periodismo investigativo utilizan encuestas u otros instrumentos técnicos de medición, e informan los resultados a través de los medios a los que tienen acceso.

Este tipo de instrumento también es importante para la orientación en los logros tanto de las políticas de gobierno, como de estado, en beneficio de la ciudadanía.

Las campañas publicitarias de las grandes marcas nacionales e internacionales están basadas en estudios previos sobre lo que la gente quiere o le gusta. Existen personas especializadas en marketing que recopilan toda la información necesaria mediante encuestas por ejemplo, aplicadas a grupos de personas pre-seleccionadas y con ayuda de la estadística se toman las decisiones más acertadas para lograr ventas exitosas sin correr mayores riesgos.

Presentación de datos

Logro: elaborar tablas de distribución de frecuencias y representaciones gráficas de datos agrupados.

Comparte lo que sabes

Los medios de comunicación constantemente arrojan resultados de encuestas relacionadas con distintos temas de interés, ¿qué información se presenta en las fichas técnicas?

En estadística es usual que se trabajen datos numerosos, siendo necesario agrupar dichos datos de manera tal que se pueda tener una buena representación de los mismos. Esta agrupación se hace determinando el número de clases y se organizan los datos en una tabla que se conoce como *distribución de frecuencias*.

Algunos aspectos que se deben tener en cuenta para elaborar una distribución de frecuencias son:

1. **Cada clase debe tener el mismo ancho.**
2. **Las clases deben estar organizadas de manera que no se superpongan y que cada uno de los datos pertenezca exactamente a una sola clase.**

Para explicar el procedimiento de elaboración de una distribución de frecuencias tomaremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo

Las siguientes son las calificaciones que obtuvieron 40 estudiantes en el examen final de matemáticas en un colegio en el que se califica de 00 a 100.

65	53	81	60	73	74	73	77	71	76
72	94	63	85	65	83	58	37	45	68
76	74	97	90	87	88	65	52	91	33
87	66	72	77	47	98	69	64	38	75

Una distribución de frecuencias agrupadas corresponde a un listado que se presenta a través de un diagrama, en el cual se le asocia a cada clase una frecuencia.

Se organizan los datos de menor a mayor, teniendo en cuenta que no falte ninguno de los datos.

Se debe calcular el *rango* de los datos, determinando cuál es el dato mayor y cuál es el dato menor. Luego, se halla la diferencia entre ellos.

Dato mayor = 98.
Dato menor = 33.
Dato mayor – Dato menor = Rango.
98 – 33 = 65 es el rango.

Se elige el número de clases (m), por ejemplo $m = 8$ y un ancho de clase (c), por ejemplo: $c = 9$, de manera tal que el producto de m por c sea levemente mayor al rango. En nuestro caso $m \times c = 8 \times 9 = 72 > 65$.

Se elige un punto inicial que puede estar un poco por debajo del menor de los valores, en este caso tomaremos como valor inicial 30; al contar a partir de este valor de 9 en 9, que es el ancho de cada clase, entonces tenemos que la primera clase será 30 - 39 y el resto de las clases serían: 40 - 49, 50 - 59, 60 - 69, 70 - 79, 80 - 89 y 90 - 99; estos valores se conocen como *límites de clase*.

Los primeros valores de cada clase es decir: 30, 40, 50, 60, 70, 80 y 90 se llaman límites de clase inferior y los valores 49, 59, 69, 79, 89 y 99 son los límites de clase superior.

El *ancho* de cada clase corresponde a la diferencia entre el límite superior y el límite inferior de cada clase. El ancho de clase siempre debe ser el mismo.

Se debe asegurar que cada uno de los datos pertenezca a una sola clase, para lo cual se hace un conteo de los datos de acuerdo con la clase a la que pertenecen y a este valor se le conoce como ***frecuencia***.

La frecuencia *f* para cada clase está dada por el número de datos que pertenecen a esa clase.

Clases	Frecuencia (f)	Porcentaje
30 - 39	3	7,5%
40 - 49	2	5%
50 - 59	3	7,5%
60 - 69	9	22,5%
70 - 79	12	30%
80 - 89	6	15%
90 - 99	5	12,5%

Para verificar que el conteo ha sido correcto la suma de las frecuencias debe ser igual al total de los datos, en este caso la suma da 40 que es la cantidad de alumnos.

Si se quiere presentar el porcentaje que corresponde a cada una de las frecuencias se elabora una distribución porcentual que corresponde a dividir cada frecuencia de la clase entre el número total de datos y multiplicando luego por el 100%.

Ejemplo

La frecuencia de la primera clase es 3, que dividida por el número de datos: 40 y multiplicada por 100%:

$$\frac{3}{40} \times 100\ \% = 7,5\ \%$$

Clases	Frecuencia (f)	Porcentaje
30 - 39	3	7, 5 %
40 - 49	2	5 %
50 - 59	3	7, 5 %
60 - 69	9	22, 5 %
70 - 79	12	30 %
80 - 89	6	15 %
90 - 99	5	12, 5 %

La suma de los porcentajes debe dar como resultado 100%.

Cada clase puede ser representada por un valor único, el cual se denomina ***marca de clase*** y corresponde al punto medio de la clase. Cada marca de clase se calcula sumando los límites de cada clase y dividiendo este resultado entre dos.

Ejemplo

La **marca de clase** de la primera clase estaría dada por $\frac{30 + 39}{2} = 34,5$

Clases	Frecuencia (f)	Marcas de clase
30 - 39	3	34, 5
40 - 49	2	44, 5
50 - 59	3	54, 5
60 - 69	9	64, 5
70 - 79	12	74, 5
80 - 89	6	84, 5
90 - 99	5	94, 5

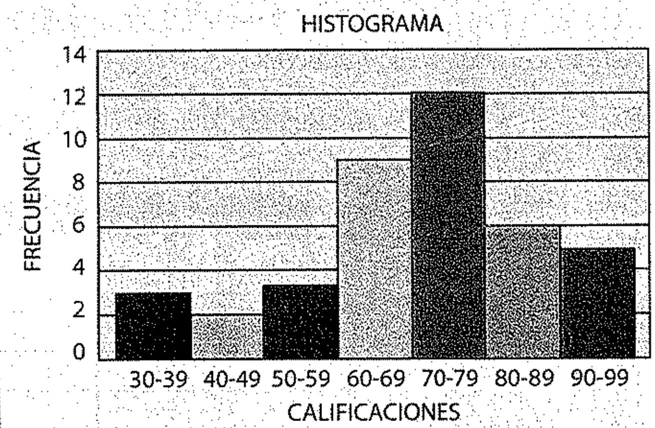
Representaciones gráficas

Una forma muy práctica de condensar toda la información y tener una visión general de la misma es la representación a través de gráficas. Algunas de ellas son: los histogramas de frecuencias, los polígonos de frecuencias y los diagramas circulares.

Histogramas

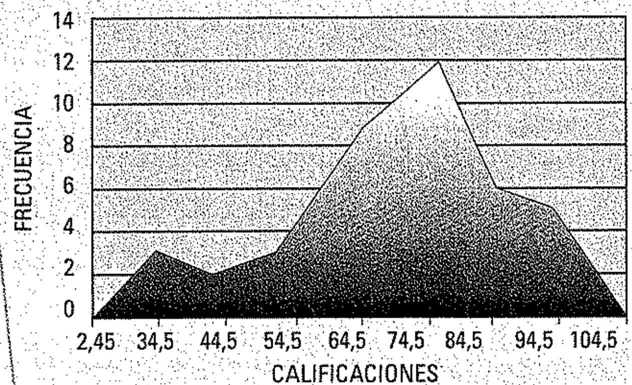
Es un gráfico de barras cuya amplitud es el ancho de clase que representa una distribución de frecuencias de una variable cuantitativa. Los histogramas llevan los siguientes componentes:

1. Una escala vertical, que identifica las frecuencias de cada una de las clases.
2. Una escala horizontal donde se ubican las clases (límite inferior y superior).
3. Las escalas deben estar rotuladas indicando las unidades pertinentes.



Polígono de frecuencias

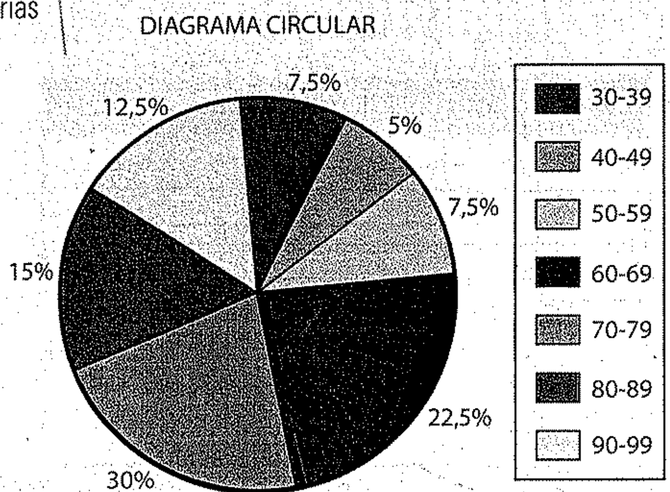
Se ubican las marcas de clase en el eje x y las frecuencias en el eje y. Se ubican los puntos a la altura de la frecuencia que corresponde a cada una de las clases y luego se unen los puntos con líneas rectas. Se agregan en ambos extremos marcas de clase con frecuencia cero para "amarrar" la gráfica al eje x.



Gráficas circulares

Son utilizadas para representar especialmente frecuencias porcentuales. Para elaborar estas gráficas se convierte la distribución de frecuencias en una distribución porcentual, se elabora un círculo y se obtienen los ángulos centrales de varias secciones multiplicando los porcentajes por 3, 6.

Clases	Frecuencia (f)	Porcentaje	Ángulo
30 - 39	3	7, 5 %	27
40 - 49	2	5 %	18
50 - 59	3	7, 5 %	27
60 - 69	9	22, 5 %	81
70 - 79	12	30 %	108
80 - 89	6	15 %	54
90 - 99	5	12, 5 %	45



PRÁCTICA EN CONTEXTO

Resolución de problemas

1. Los siguientes datos representan el número de visitantes a un zoológico en 60 días, de lunes a viernes.

54	61	55	65	63	49	62	74	59	61
55	60	58	63	66	60	78	76	61	57
67	54	53	63	47	58	52	67	43	59
53	56	64	58	48	52	57	62	56	62
69	60	73	55	63	56	62	48	43	64
45	70	75	71	42	46	59	67	52	58

a. Agrupa estos datos en una distribución de frecuencias que tenga las clases 40 - 44, 45 - 49, 50 - 54, 55 - 59, 60 - 64, 65 - 69, 70 - 74 y 75 - 79.

b. Convierte la distribución obtenida en el punto anterior en una distribución porcentual.

c. Traza un histograma de esta distribución de frecuencias.

d. Traza un polígono de frecuencias de esta distribución.

2. En un estudio sobre osos se recolectaron los siguientes datos que corresponden a los pesos de 54 osos adultos medido en libras.

344	262	140	154	150	213
331	360	126	116	142	270
348	285	105	223	202	245
166	144	332	150	202	126
228	166	123	780	182	332
220	336	204	165	365	235
215	214	180	213	305	416
193	242	204	185	321	170
332	305	321	321	245	321

a. Determina una distribución de clases adecuada para los datos.

b. Traza un histograma de esta distribución de frecuencias.

c. Traza un polígono de frecuencias de esta distribución.

3. Los siguientes datos representan las edades de 80 competidores de una maratón.

32	39	39	36	34	28	36	40	38	25
68	29	33	40	46	42	40	26	32	39
51	34	49	51	23	46	33	23	50	31
51	30	45	51	30	32	29	21	43	37
31	65	40	51	24	34	28	50	25	46
25	50	26	30	29	41	40	33	39	23
25	37	23	38	30	36	30	38	31	30
61	30	21	59	36	50	28	40	37	24

a. Determina una distribución de clases adecuada para los datos.

b. Convierte la distribución obtenida en el punto anterior en una distribución porcentual.

c. Traza un polígono de frecuencias de esta distribución.

d. Traza un diagrama circular de esta distribución.

4. La siguiente tabla presenta los datos correspondientes al peso en gramos de 30 recién nacidos de un hospital en un día.

3 290	2 970	2 670	2 900	3 250	3 850
2 830	2 730	3 100	3 150	2 830	3 550
3 800	3 560	3 220	2 860	2 430	2 650
3 730	2 630	2 500	3 110	2 420	2 430
3 520	2 700	2 150	2 610	2 700	3 260

a. Halla una distribución por clases coherente con los datos dados.

b. Realiza un histograma de la distribución de frecuencias.

c. Analiza los datos obtenidos y realiza tres conclusiones a las que puedes llegar a partir de dicho análisis.

Medidas de tendencia central

Logro: calcular medidas de tendencia central en datos agrupados.

COMPARTE LO QUE SABES

¿Qué significado tiene la palabra promedio?
¿De cuántas maneras se puede calcular un promedio?

En estadística es usual determinar dentro de un conjunto de datos aquel que sea el más representativo del conjunto, el cálculo del **promedio** de todos los datos es el más utilizado. Por ejemplo, supongamos que un estudiante universitario tiene las siguientes notas en matemáticas al final de un periodo 2,5; 3,8; 4,2; su nota final corresponde al promedio de las tres notas, es decir sumamos la tres notas y ese resultado se divide entre el número de notas que en este caso corresponde a 3, por tanto la nota definitiva del estudiante será de 3, 5. Este valor es el que representa a todos los demás valores y en muchas ocasiones también es denominado **media aritmética**.

Los promedios en estadística se conocen como medidas de tendencia central y son tres:

La **media** (media aritmética), la **mediana** y la **moda**.

Veamos la definición y cómo se calcula cada una de las medidas de tendencia central.

Media: la media de un conjunto de datos agrupados, se representa con $(\overline{X})$, se obtiene del cociente entre la suma de los productos de las frecuencias (f) por las marcas de clase x y el número total de datos. Es decir,

$$\overline{X} = \frac{\sum f \times x}{n}$$

Donde: x son las marcas de clase, f es la frecuencia y n es el número total de datos.

Ejemplo

Los salarios de los 40 empleados del área de servicios generales de una empresa, se encuentran detallados en la siguiente tabla. ¿Cuál es el salario promedio?

Salario en miles	f	x	
450 - 500	4	475	1 900
500 - 550	6	525	3 150
550 - 600	5	575	2 875
600 - 650	16	625	10 000
650 - 700	4	675	2 700
700 - 750	3	725	2 175
750 - 800	2	775	1 550
	$n = 40$		$\sum f \times x = 24\ 350$

Aplicando la fórmula $\overline{X} = \frac{\sum f \times x}{n}$ tenemos $\overline{X} = \frac{24\ 350}{40} = 608,75$, por lo cuál el salario promedio es de $ 608 750.

Mediana: la mediana establece el valor que divide a la cantidad de datos ordenados en dos partes iguales y se representa con el símbolo $(\widetilde{X})$. Es decir, es el punto central del arreglo de los datos que son ordenados de acuerdo a su magnitud, por tanto el 50 % de los datos esta por encima de la mediana y el otro 50 % esta por debajo de ella.

Para calcular la mediana aplicamos la fórmula

$$\left(\tilde{X}\right) = L + \left[\frac{\frac{n}{2} - fa}{f}\right]c$$

Donde L es el límite inferior de la clase que contiene a la mediana, fa es la frecuencia acumulada que precede a la clase de la mediana, f es la frecuencia de clase de la mediana y c es el intervalo de clase de la mediana.

Ejemplo

Encontrar la mediana del conjunto de datos organizados en la siguiente tabla.

Salario (en miles)	f	Frecuencia acumulada (fa)
450 - 500	4	4
500 - 550	6	10
550 - 600	5	15
600 - 650	16	31
650 - 700	4	35
700 - 750	3	38
750 - 800	2	40
	$n = 40$	

1. Se elabora una distribución de frecuencias acumulada (fa), la cual se calcula sumando las frecuencias de cada clase desde el primer intervalo hasta la frecuencia de clase del intervalo de interés.
2. Se divide el número total de datos entre 2. En el ejemplo: $n = 40$, así que: $\frac{40}{2} = 20$
3. Se determina qué clase contiene este valor. La clase que contiene el veinteavo valor es 600 - 650, la cual se denomina la clase de la mediana.
4. De la información contenida en la tabla podemos establecer que:

$L = 600$, $n = 40$, $f = 16$, $c = 50$, $fa = 15$.

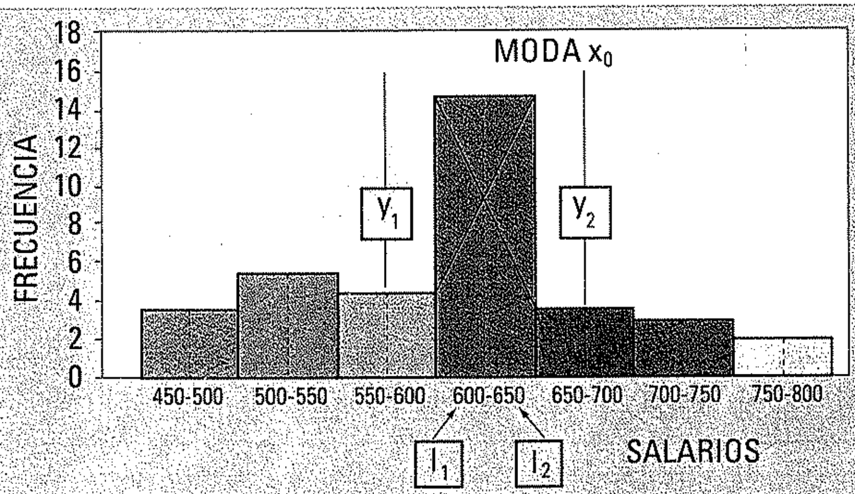
Aplicando la formula $\tilde{x} = L + \left[\frac{\frac{n}{2} - fa}{f}\right]c$

Tenemos $\tilde{x} = 600 + \left[\frac{\frac{40}{2} - 15}{16}\right]50$

$\tilde{x} = \$\,615\,625$ que corresponde a la mediana del salario.

Moda: la moda corresponde al dato que más se repite y se representa con el símbolo (x_0). En un conjunto de datos agrupados no se puede determinar la moda a simple vista, por lo cual se realiza el siguiente procedimiento:

1. Se determina cuál es el intervalo que tiene la mayor frecuencia, este se conoce como el intervalo modal. En nuestro caso corresponde al intervalo 600 - 650.
2. Se calcula la diferencia entre la frecuencia del intervalo modal y la frecuencia del intervalo que se encuentra a la izquierda de éste, o al intervalo inmediatamente anterior al modal: $y_1 = 16 - 5 = 11$
3. Se calcula la diferencia entre la frecuencia del intervalo modal y la frecuencia del intervalo que se encuentra a la derecha de éste, o inmediatamente después: $y_2 = 16 - 4 = 12$
4. Se determina el límite inferior del intervalo modal l_1 y el ancho de clase c. De la tabla de ejemplo se puede observar que $l_1 = 600$ y $c = 50$



De los triángulos semejantes tenemos que:

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{x_0 - l_1}{l_2 - x_0}$$

Despejando x_0:

$$y_1(l_2 - x_0) = y_2(x_0 - l_1)$$

$$x_0(y_1 + y_2) = y_1 l_2 + y_2 l_1$$

Como $l_2 = l_1 + c$, entonces $x_0 = \dfrac{y_1(l_1 + c) + y_2 l_1}{(y_1 + y_2)}$

$$= \frac{l_1(y_1 + y_2) + y_1 c}{y_1 + y_2}$$

$$= l_1 + \frac{y_1 c}{y_1 + y_2}$$

Ésta es la fórmula que utilizaremos para calcular la moda en un conjunto de datos agrupados.

Ahora bien, en el ejercicio que estamos desarrollando tenemos que: $l_1 = 600$, $y_1 = 11$, $y_2 = 12$ y $c = 50$

Al remplazar estos valores en la fórmula obtenemos:

$$x_0 = 600 + \frac{11(50)}{23} = 623,913$$

$x_0 = \$\,623\,913$ que corresponde a la moda del salario.

Puede ocurrir que dos intervalos de clase consecutivos tengan la misma frecuencia, en este caso la moda es la media aritmética de las dos marcas de clase, pero si existen dos o más intervalos no consecutivos con la misma frecuencia entonces se dice que hay dos o más modas que son las marcas de clase de dichos intervalos.

PRÁCTICA EN CONTEXTO

Solución de problemas

1. Doscientos estudiantes participaron en una olimpiada matemática. La siguiente tabla muestra la distribución de frecuencias de los puntajes obtenidos. Calcula la media y la mediana.

Puntaje	Frecuencia
10 - 24	13
25 - 39	31
40 - 54	20
55 - 69	64
70 - 84	42
85 - 99	30

2. En una fábrica se realizan mediciones aleatorias de cierto producto que tienen en el mercado, el cuál debe pesar 500 g aproximadamente. En cierta medición que demora 10 minutos y que evalúa 1 000 unidades del producto, la máquina da los siguientes datos:

Peso (g)	Frecuencia
480 - 485	11
486 - 490	20
491 - 495	205
496 - 505	520
506 - 510	194
511 - 515	35
516 - 520	15

a. Calcula la media, la mediana y la moda.

b. A partir de los datos obtenidos, ¿puedes obtener conclusiones sobre la eficiente de la máquina?

3. La siguiente distribución de frecuencias muestra las velocidades de 60 conductores que fueron multados por exceder el límite de velocidad permitido de 60 km/h.

Determina la media e indica cómo se compara la media con el límite de velocidad establecido.

Puntaje	Frecuencia
72 - 75	22
76 - 79	17
80 - 83	11
84 - 87	5
88 - 91	3
92 - 95	2

4. En una granja se registró en un mes el nacimiento de 25 terneros. El peso en kg de cada uno está registrado en la siguiente tabla:

50	45	46	36	35
46	44	36	35	34
31	46	37	43	40
25	43	46	40	33
39	38	38	22	31

a. Elabora una distribución de frecuencias que contenga las clases: 21, 5 - 26, 5; 26, 5 - 31, 5; 31, 5 - 36, 5; 36, 5 - 41, 5; 41, 5 - 46, 5; 46, 5 - 51,5.

b. Calcula para estos datos la moda, la media y la mediana.

5. En la siguiente tabla se muestra la cantidad de litros de agua que se pierde en cada apartamento en un conjunto residencial.

0, 90	0, 40	0, 34	0, 89	0, 89
0, 94	0, 32	0, 97	0, 56	0, 42
0, 44	0, 65	0, 02	0, 53	0, 76
0, 47	0, 03	0, 35	0, 72	0, 70
0, 29	0, 57	0, 78	0, 79	0, 90
0, 13	0, 02	0, 43	0, 71	0, 70
0, 10	0, 18	0, 21	0, 62	0, 93
0, 60	0, 35	0, 80	0, 11	0, 76
0, 13	0, 84	0, 60	0, 32	0, 23
0, 52	0, 03	0, 18	0, 53	0, 57
0, 62	0, 69	0, 35	0, 69	0, 93
0, 08	0, 60	0, 24	0, 40	0, 79
0, 16	0, 89	0, 66	0, 85	0, 09
0, 07	0, 52	0, 08	0, 56	1, 00
0	0, 82	0, 22	0, 73	0, 14

a. Organiza la información en una tabla de distribución de frecuencias y determina la mediana, la moda y la media de los datos agrupados.

b. Reorganiza la información en una tabla de distribución frecuencias con la mitad de las clases que utilizaste en el punto anterior y determina la mediana, la moda y la media de los datos agrupados.

c. Compara los datos que obtuviste en los puntos anteriores, ¿qué puedes concluir?

Argumentación

6. Responde las siguientes preguntas:

a. ¿Puede coincidir la media y la moda?

b. ¿Puede no existir la moda en un conjunto de datos?

c. ¿Cuáles son las ventajas y las desventajas de la media, la mediana y la moda, cuando se interpreten los datos?

Medidas de dispersión

Logro: calcular medidas de dispersión en datos agrupados.

Comparte lo que sabes

Si dentro de un conjunto de datos existen unos pocos valores muy grandes o unos pocos valores muy pequeños. ¿Cómo crees que se afecta la media? ¿Sería la media el valor representativo más adecuado para el conjunto de datos?

Como ya vimos las medidas de tendencia central determinan cuál es el valor representativo dentro de un conjunto de datos. Las medidas de dispersión muestran hasta qué punto estas medidas de tendencia central son representativas del conjunto de datos.

Las medidas de dispersión miden la separación o la variabilidad de los valores de la distribución en relación al valor central. En otras palabras, permiten conocer que tan cerca o que tan lejos están los valores de la distribución de la media.

Las medidas de dispersión que vamos a estudiar son: la **desviación media**, la **varianza** y la **desviación estándar**.

Desviación media

Para calcular la desviación media organizamos una distribución de frecuencias que contenga:

- Las marcas de clase.
- Los productos de las frecuencias por las marcas de clase.
- Se debe calcular la media aritmética y registrar las diferencias entre cada una de las marcas de clase y la media.
- Se calculan además los productos de las frecuencias por las diferencias.

Continuando con el ejemplo de los salarios, del tema anterior, obtenemos la siguiente tabla.

Recordemos que ya se determinó que $\overline{x} = 608,75$

Salario (miles)	f	x	$f \times x$	$x - \overline{x}$	$f \times (x - \overline{x})$
450 - 500	4	475	1 900	−133, 75	−535
500 - 550	6	525	3 150	−83, 75	−502, 5
550 - 600	5	575	2 875	−33, 75	−168, 75
600 - 650	16	625	10 000	16, 25	260
650 - 700	4	675	2 700	66, 25	265
700 - 750	3	725	2 175	116, 25	348, 75
750 - 800	2	775	1 550	166, 25	332, 5
Totales	$n = 40$		$\sum (f \times x) = 24\ 350$		$\sum f \times (x - \overline{x}) = 60$

Por último, la suma de las frecuencias por las diferencias se divide entre el total de datos y se obtiene la desviación media, es decir:

$$DM = \frac{\sum f \times (x - \overline{x})}{n}$$

En este caso la $DM = \frac{60}{40} = 1,5$

Lo que indica que cualquiera de los datos se desvía de la media en 1, 5 unidades, aproximadamente.

Desviación estándar

La desviación estándar para datos no agrupados se calcula a partir de la siguiente expresión:

$$s = \sqrt{\frac{\sum (f \times x^2) - \frac{\left(\sum f \times x\right)^2}{n}}{(n-1)}}$$

Ejemplo

Haciendo referencia al mismo ejemplo e incluyendo en la distribución de frecuencias una columna que contenga el producto del cuadrado de cada una de las marcas de clase por su frecuencia, obtenemos:

Salario (miles)	f	x	f × x	f × x²
450 - 500	4	475	1 900	902 500
500 - 550	6	525	3 750	1 653 750
550 - 600	5	575	2 875	1 653 125
600 - 650	16	625	10 000	6 250 000
650 - 700	4	675	2 700	1 822 500
700 - 750	3	725	2 175	1 576 875
750 - 800	2	775	1 550	1 201 250
	$n = 40$		$\sum (f \times x) = 24\,350$	$\sum (f \times x^2) = 15\,060\,000$

$\sum (f \times x)$ se obtiene al sumar los productos de cada una de las marcas de clase por su frecuencia.

$\sum (f \times x^2)$ se obtiene al sumar los productos del cuadrado de cada una de las marcas de clase por su frecuencia.

$$s = \sqrt{\frac{(15\,060\,000) - \frac{(24\,350)^2}{40}}{39}}$$

$$= \sqrt{\frac{602\,400\,000 - 592\,922\,500}{40 \times 39}}$$

$$= \sqrt{\frac{9\,477\,500}{1\,560}}$$

$$s = 77,94$$

Es importante tener en cuenta que en un conjunto de datos la dispersión es pequeña si los valores se acumulan estrechamente alrededor de su media y es amplia si los valores se acumulan en forma esparcida alrededor de su media.

Varianza

La varianza es una medida estadística de dispersión igual al cuadrado de la desviación estándar.

Ejemplo

Siguiendo nuestro ejemplo, la varianza de los datos es de:

$$s^2 = (77,94)^2, \text{ es decir, } s^2 = 6\,074,64$$

Existe una dificultad con la varianza, ya que las unidades son diferentes a las unidades del conjunto de datos pues están al cuadrado, en nuestro caso tendríamos para la varianza unidades de pesos al cuadrado, lo cual no hace fácil la comprensión de esta medida respecto a los valores iniciales.

Ejemplo

Hallar la desviación estándar y la varianza para la siguiente distribución de frecuencias.

Clases	f
10 - 15	6
16 - 21	13
22 - 27	4
28 - 33	7
34 - 39	9

Complementamos nuestra tabla con columnas que contengan las marcas de clase **x**, los productos de las frecuencias por marcas de clase $(f \times x)$ y los productos de los cuadrados de las marcas de clase por las frecuencias $(f \times x^2)$.

Clases	f	x		
10 - 15	6	12, 5	75	937, 5
16 - 21	13	18, 5	240, 5	4 449, 25
22 - 27	4	24, 5	98	2 401
28 - 33	7	30, 5	213, 5	6 511, 75
34 - 39	9	36, 5	328, 5	11 990, 25
	$n = 39$		$\sum(f \times x) = 955,5$	$\sum(f \times x^2) = 26\,289,75$

Al aplicar la fórmula se obtiene $s = 8,7$

Como la varianza corresponde al cuadrado de la desviación estándar tenemos que: $s^2 = 75,69$

PRÁCTICA EN CONTEXTO

Solución de problemas

1. El peso en kilogramos de 50 niños entre los 24 y 36 meses que asistieron al servicio de urgencias de un hospital se encuentra registrado en la siguiente tabla:

Peso (kg)	f
5 - 6	10
7 - 8	7
9 - 10	15
11 - 12	12
13 - 15	6

a. Halla la media.

b. Halla la desviación media.

c. Halla la desviación estándar.

2. Los datos obtenidos del crecimiento en milímetros de 100 plantas de cierta especie dada, en un determinado tiempo *t*, se dan en la siguiente tabla:

Crecimiento (mm)	f
0 - 5	42
6 - 10	30
11 - 15	12
16 - 20	8
20 - 25	5
26 - 30	3

a. Halla la media.

b. Halla la desviación media.

c. Halla la desviación estándar.

d. ¿Se puede hallar la varianza? Si tu respuesta es positiva, encuéntrala.

3. La siguiente tabla muestra el desplazamiento diario que deben hacer los trabajadores de una fábrica desde su casa hasta su lugar de trabajo:

Distancia (km)	*f*
5 - 9	7
10-14	10
15 - 19	23
20 - 24	15
25 - 29	8
30 - 34	5

a. Halla la media.

b. Halla la desviación media.

c. Halla la desviación estándar.

4. Se realizó un estudio sobre el dinero que gasta una familia promedio cuando realiza sus compras en un almacén de cadena.

El estudio arrojó los siguientes resultados:

Gastos (en miles de pesos)	*f*
0 - 99	800
100 - 199	1 100
200 - 299	1 500
300 - 399	1 100
400 - 499	500
500 - 599	300
600 - 699	150
700 - 799	50

a. Halla la media.

b. Halla la desviación media.

c. Halla la desviación estándar.

5. La siguiente tabla muestra el peso en kilogramos de cada una de las sustancias en un laboratorio.

0, 21	0, 28	0, 19	0, 03	0, 18	0, 35
0, 56	0, 63	0, 35	0, 28	0, 20	0, 70
0, 55	0, 10	0, 40	0, 41	0, 94	0, 07
0, 60	0, 89	0, 11	0, 96	0, 46	0, 05
0, 32	0, 41	0, 25	0, 89	0, 84	0, 12
0, 77	0, 37	0, 47	0, 80	0, 31	0, 74
0, 25	0, 12	0, 64	0, 03	0, 16	0, 84
0, 93	0, 15	0, 29	0, 15	0, 12	0, 20
0, 65	0, 35	0, 03	0, 72	0, 41	0, 78
0, 33	0, 12	0, 04	0, 28	0, 59	0, 89
0, 57	0, 28	0, 62	0, 86	0, 67	0, 73
0, 91	0, 71	0, 96	0, 60	0, 71	0, 07
0, 08	0, 85	0, 93	0, 27	0, 98	0, 31
0, 78	0, 67	0, 13	0, 09	0, 73	0, 01
0, 14	0, 52	0, 89	0, 40	0, 73	0, 75
0, 80	0, 15	0, 70	0, 18	0, 45	0, 84
0, 38	0, 90	0, 07	0, 09	0, 60	0, 45
0, 96	0, 81	0, 03	0, 21	0, 04	0, 29
0, 23	0, 72	0, 23	0, 65	0, 21	0, 96
0, 21	0, 41	0, 68	0, 38	0, 36	0, 48

Organiza la información en una tabla de distribución de frecuencias y determina la mediana, la moda, la media, la desviación media, la desviación estándar y la varianza de los datos.

6. Haz el siguiente ejercicio:

a. Recolecta información acerca de: la edad, estatura, y peso de tus compañeros de curso.

b. Elabora para cada variable una distribución de frecuencia para datos agrupados.

c. Calcula la media para la edad, el peso y la estatura.

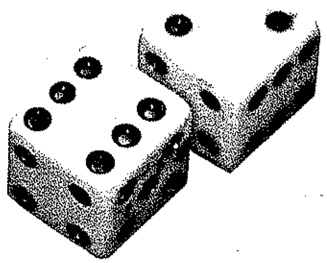
d. Calcula la desviación media y estándar, en cada caso.

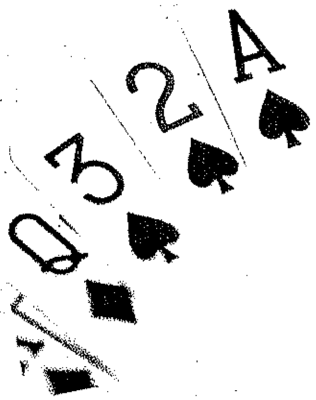
Concepto y aplicación de la probabilidad

Logro: reconocer eventos probabilísticos.

COMPARTE LO QUE SABES

¿Cuántas posibilidades tienes de que al lanzar tres monedas al aire, todas caigan en cara?





Los juegos de azar fueron el punto de partida de la probabilidad, considerar, por ejemplo, los posibles resultados que se podrían obtener al lanzar un dado.

Estos hechos despertaron el interés de hombres como Paccioli, Cardano y Tartaglia quienes hicieron los primeros estudios sobre los juegos de azar.

Es importante tener en cuenta algunos conceptos básicos asociados a la probabilidad.

Experimento aleatorio: es cualquier situación que se puede repetir indefinidamente bajo las mismas condiciones, pero del que se desconoce cuál será su resultado. En esta clase de experimento se pueden presentar uno o varios resultados de un conjunto bien definido de posibles resultados. Si el experimento se repite gran número de veces entonces aparece algún modelo de regularidad estadística en los resultados obtenidos, de tal forma que se puede prever el resultado sin necesidad de volver a realizar el experimento.

Ejemplo

El lanzamiento de una moneda observando la sucesión de caras y sellos que se presentan en varios lanzamientos.

Espacio muestral: es el conjunto de todos los posibles resultados en un experimento, que se nota con la letra griega mayúscula omega (Ω).

Ejemplo

Para el experimento aleatorio de lanzar un dado, tenemos 6 posibles resultados que corresponden a las seis caras del mismo. En este caso, el espacio muestral es el conjunto:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Suceso o evento aleatorio: es cualquier subconjunto del espacio muestral.

Ejemplo

Consideremos el experimento aleatorio del lanzamiento de un dado. Ya vimos que su espacio muestral es

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Ahora bien, consideremos el evento: "El dado caiga en un número impar". Los posibles resultados para este suceso son $A = \{1, 3, 5\}$.

Como podemos observar los resultados del suceso están contenidos en el espacio muestral, es decir,

$$A \subseteq \Omega$$

Técnicas de conteo

Cuando se quiere establecer el número de elementos de un conjunto, específicamente de un espacio muestral (los posibles resultados en un experimento aleatorio), se utilizan algunas técnicas de conteo como lo son las *permutaciones* y las *combinaciones*.

Este tema hace parte de lo que se denomina álgebra combinatoria, que estudia las posibilidades de ordenamiento y agrupación de series o colecciones de objetos.

Permutaciones

Una permutación hace referencia a las maneras de organizar *r* objetos seleccionados de un conjunto de *n* objetos distintos. Para hablar de este tema se introduce un nuevo concepto matemático: la *notación factorial*.

En el cálculo de permutaciones se utiliza la **notación factorial** para expresar productos de números enteros consecutivos.

El producto de todos los enteros positivos menores o iguales que el entero positivo *n* se nota como $n!$ y se lee: "*n* factorial".

Ejemplo

$$1! = 1$$

$$2! = 1 \times 2 = 2$$

$$3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$$

$$4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$$

$$5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$$

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \ldots \times n$$

Para calcular permutaciones en las cuales no se admiten repeticiones de elementos se utilizan las fórmulas:

1. $nPn = n!$ Cuando intervienen todos los elementos.

Ejemplo

¿Cuántos números de 3 cifras se pueden hallar con los dígitos 1, 2 y 3 sin repetir ningún digito?

Este ejercicio se puede ver como el llenar tres casillas con tres bolas distintas, sin dejar ninguna casilla vacía. Obteniéndose seis opciones:

1, 2, 3	2, 3, 1
1, 3, 2	3, 1, 2
2, 1, 3	3, 2, 1

Que equivale a utilizar la fórmula: ${}_3P_3 = 3!$, es decir,

$${}_3P_3 = 1 \times 2 \times 3 = 6$$

Se pueden formar 6 números diferentes.

2. ${}_nP_r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$ Cuando intervienen *r* de los *n* elementos.

Ejemplos

a. ¿Cuántas placas se pueden realizar con los dígitos del uno al cinco? Si se sabe que en ninguna placa pueden existir repeticiones en los números, que importa la posición de los números y que a cada placa sólo le caben 2 dígitos.

$${}_5P_2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = 4 \times 5 = 20$$

Que podemos verificar como sigue:

1, 2	2, 1	3, 1	4, 1	5, 1
1, 3	2, 3	3, 2	4, 2	5, 2
1, 4	2, 4	3, 4	4, 3	5, 3
1, 5	2, 5	3, 5	4, 5	5, 4

b. ¿De cuántas maneras se pueden organizar 9 personas en 4 sillas?

$${}_9P_4 = \frac{9!}{(9-4)!} = \frac{9!}{5!} = 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 3\,024.$$

Las personas se pueden organizar de 3 024 maneras.

Si algunos de los objetos son iguales, es decir que hay r elementos, $a_1, a_2, ..., a_r$ que se repiten, y n_i representa la cantidad de veces que se repite el elemento a_i, entonces el número de permutaciones está dado por la fórmula:

3. $p = \dfrac{n!}{n_1!n_2!...n_r!}$

Ejemplo

¿Cuántas combinaciones de once letras se pueden formar con las letras de la palabra PROBABILIDAD?

En este ejemplo $n = 11$ y las letras *b, a, d* e *i* se repiten dos veces cada una, es decir que:

$$n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 2$$

$$P = \frac{11!}{2!2!2!2!} = \frac{39\,916\,800}{16} = 2\,494\,800 \text{ combinaciones.}$$

Combinaciones

A diferencia de las permutaciones, en las combinaciones no importa cuál es el orden en que se coloquen los objetos.

Si se quiere determinar el número de maneras en qué se pueden seleccionar r elementos de un conjunto de n elementos, sin importar el orden, estamos refiriéndonos a una combinación que se nota, así:

$$nCr = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Ejemplo

Un profesor de literatura presenta a sus estudiantes los títulos de nueve obras literarias y pide a sus estudiantes escoger tres de ellas para trabajar durante su clase. ¿De cuántas maneras un estudiante puede seleccionar tres obras de las nueve posibles?

En esta situación no importa el orden en que se elijan las obras, $n = 9$ y $r = 3$ sustituyendo estos valores en la fórmula tenemos:

$$_9C_3 = \binom{9}{3} = \frac{9!}{3!(9-3)!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{(3 \times 2 \times 1) \times (6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)} = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = 84$$

Un estudiante puede seleccionar tres de nueve libros, de 84 maneras distintas.

Probabilidades

La probabilidad mide la frecuencia con la que ocurre un resultado.

El primero en dar una definición clásica de probabilidad fue Jacob Bernoulli; esta definición fue reformulada por Abraham De Moivre de la siguiente manera:

"Una fracción en la que el numerador es igual al número de apariciones del evento y el denominador es igual al número total de casos en los que el suceso pueda o no pueda ocurrir. Tal fracción expresa la probabilidad de que ocurra un evento".

Esta definición se basa en la suposición de que todos los resultados del experimento son igualmente probables. La probabilidad se calcula de la siguiente manera:

$$\text{probabilidad} = P(A) = \frac{\text{número de posibles resultados del evento } A}{\text{número total de resultados posibles del experimento}}$$

Ejemplo

Si se lanza un dado no cargado, es decir que todas sus caras tiene la misma probabilidad de caer, ¿cuál es la probabilidad de obtener...

a. un 3? b. un número impar?

a. El número de posibles resultados del evento A es 1, dado que una sola cara contiene a 3. De otro lado, el número total de resultados posibles es 6, que corresponde a las seis caras del dado, por tanto:

$$P(A) = \frac{1}{6} = 0,16 = 16,6\ \%$$

b. El número de posibles resultados del evento B es 3, dado que tres de las seis caras contienen números impares:

$$P(B) = \frac{3}{6} = 0,5 = 50\ \%$$

Sucesos o eventos independientes

Sean A y B dos eventos, éstos son independientes si la probabilidad de que ocurra B no está influenciada por la probabilidad de que ocurra A.

Dos sucesos A y B son **independientes** si se cumple que: $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Ejemplo

En una clase hay 10 niños y 12 niñas. De ellos, 5 niños y 8 niñas tocan algún instrumento musical. Eligiendo un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea niña y toque un instrumento?

Suceso A: Que sea niña $P(A) = \frac{12}{22}$

Suceso B: Que toque un instrumento, $P(B) = \frac{8}{12}$

$$P(A \cap B) = \frac{12}{22} \times \frac{8}{12} = 0,36 = 36\ \%$$

PRÁCTICA EN CONTEXTO

Ejercitación de procedimientos

1. En los siguientes eventos determina el espacio muestral:
   a. Una mano de cinco cartas de las baraja francesa (corazones, tréboles, picas, diamantes).
   b. El lanzamiento de dos dados simultáneamente.
   c. El lanzamiento de 3 monedas simultáneamente.
2. Determina cuántos grupos de cinco cartas se pueden seleccionar del palo de espadas, de la baraja española.
3. ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar un dado se obtenga un número mayor que 3?
4. ¿De cuántas maneras pueden sentarse 10 personas en un banco de 4 puestos?
5. Un alumno tiene que elegir 7 de las 10 preguntas de un examen. ¿De cuántas maneras puede elegirlas?
6. Con las letras de la palabra CAMILLA, ¿Cuántos grupos de 7 letras se podrán organizar, teniendo en cuenta el orden?
7. Determina si cada una de las siguientes expresiones es falsa o verdadera:
   a. $3! + 4! = 7!$
   b. $\frac{1}{6!} + \frac{1}{6!} = \frac{1}{6}$
   c. $(3!)(5!) = 15!$
   d. $13! = \frac{14!}{14}$
   e. $\frac{5!}{3!} = 6$
   f. $\frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{5 \times 6}{2}$
8. Si se lanzan dos dados, ¿cuál es la probabilidad de que en cada lanzamiento los dados sumen:
   a. 5? b. 7? c. 12? d. 1? e. 13?
9. En una tómbola hay 20 bolas rojas, 15 azules, 7 blancas y 2 negras. Si se saca una de las bolas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea...
   a. roja? c. negra?
   b. azul? d. ni blanca, ni negra?

COMPETENCIA INTERPRETATIVA Calcula la probabilidad de eventos sencillos

TECNOLOGÍA

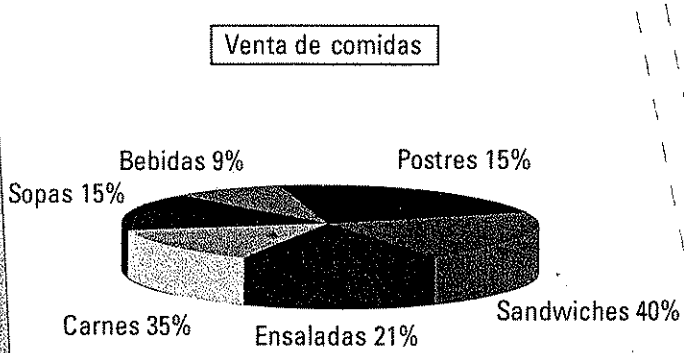
Existen programas como Excel que permiten generar gráficas estadísticas como histogramas, polígonos de frecuencias, gráficas circulares, diagramas de dispersión, entre otros.

El menú gráfico sólo está disponible cuando se crea con anterioridad una tabla de valores en una hoja de cálculo, la cual es el documento principal que se utiliza en excel para almacenar y trabajar con datos, y consta de celdas que se organizan en filas y columnas.

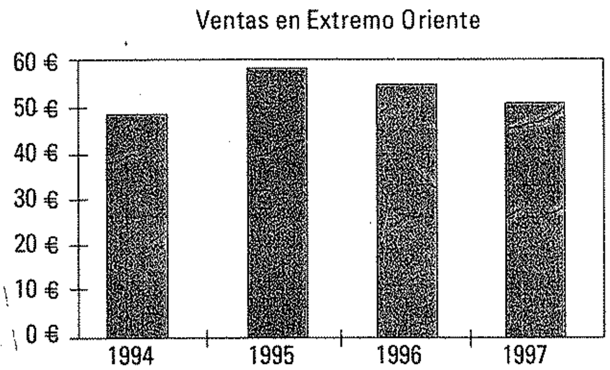
Al activar el menú gráfico, el programa incrusta una gráfica es la hoja actual o en una hoja independiente. Este menú proporciona comandos para crear y modificar gráficos, para lo cual se deben realizar los siguientes pasos:

Haz clic en el asistente para gráficos en la barra de herramientas estándar, o bien, puedes hacer clic en "Gráfico" en el menú "Insertar" y debes seguir las instrucciones del asistente para generar alguno de los diferentes gráficos.

Circular

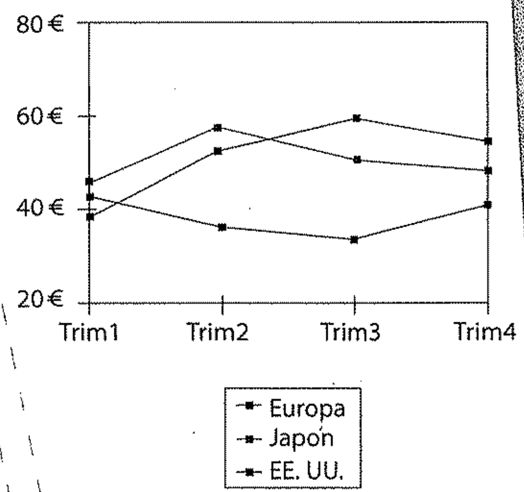


Este tipo de gráfico muestra la contribución de cada valor al total. También está disponible con efecto visual 3D, como muestra el siguiente gráfico.



Barras

Este tipo de gráfico compara valores de distintas categorías. Como muestra el siguiente gráfico, las categorías se organizan horizontalmente y los valores verticalmente, con el objeto de resaltar la variación producida en el transcurso del tiempo.



Líneas

Este tipo de gráfico muestra tendencias a lo largo del tiempo o entre categorías. El asistente tiene disponible marcadores de diversas formas y colores para cada valor o dato.

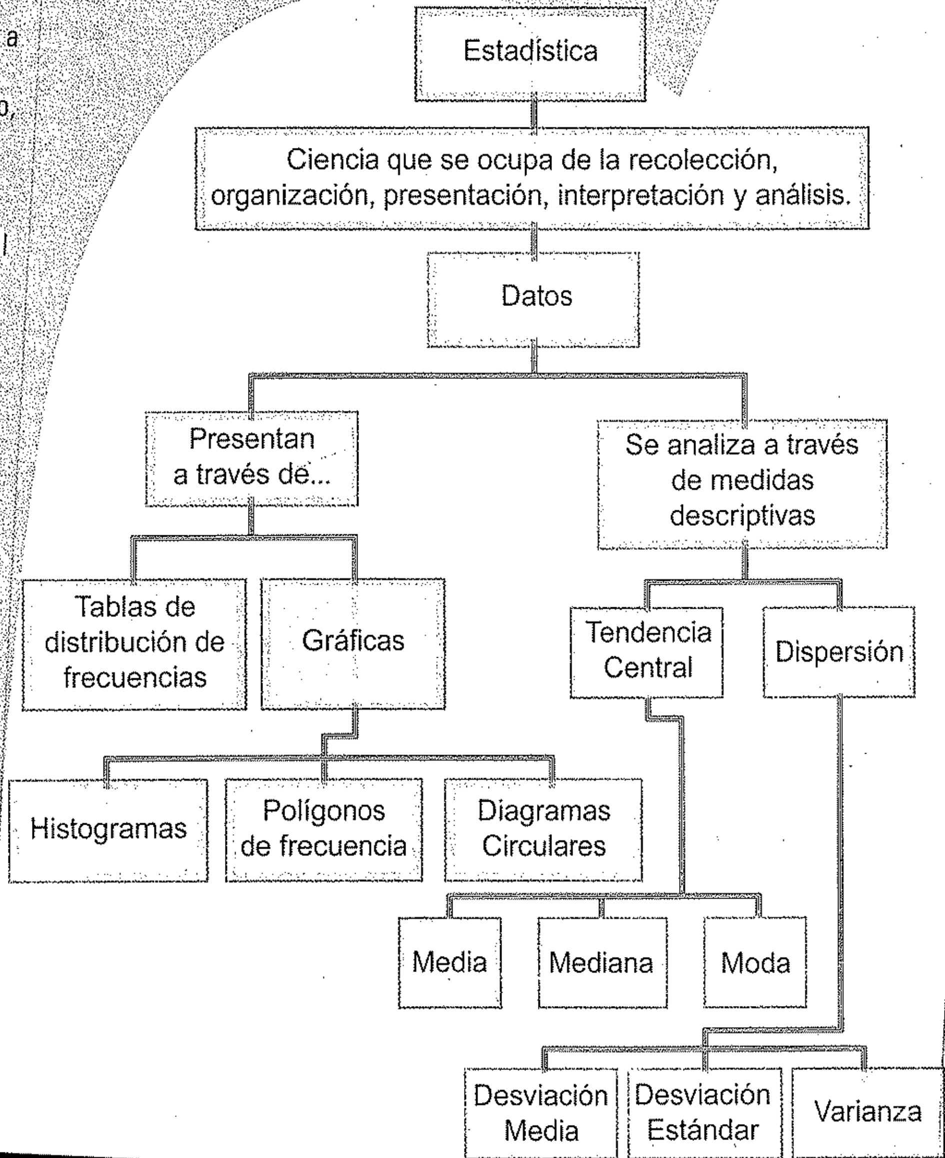
resumen & refuerzo

1. En un grupo de estudiantes hay 22 mujeres y 21 hombres. De las mujeres sólo a 10 les gusta el fútbol y de éstas sólo 6 van al estadio, a 18 de los hombres les gusta el fútbol y de éstos sólo 12 van al estadio. Si se escoge un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que...

a. sea mujer, le guste el fútbol pero no vaya al estadio?

b. sea hombre, le guste el fútbol y vaya al estadio?

2. Un profesor utiliza el promedio para determinar la nota definitiva de sus estudiantes. Teniendo en cuenta que el promedio de la tareas equivale al 20 % de la nota definitiva, el primer parcial 10 %, el segundo parcial el 25 %, los talleres de práctica el 10 % y el examen final el 35 %. Calcula el promedio final de los cinco estudiantes que aparecen relacionados en la siguiente tabla. (La nota máxima es 50)



Estudiante	Tareas	Primer parcial	Segundo parcial	Taller	Examen final
Andrea Trujillo	45	35	30	25	38
Santiago Pinzón	43	40	48	35	40
Maria Ramos	47	38	27	45	28
Tomas Aguirre	40	25	41	37	30
Camila López	47	45	38	46	45
Andrés Pérez	36	23	32	36	29

Pruebas de

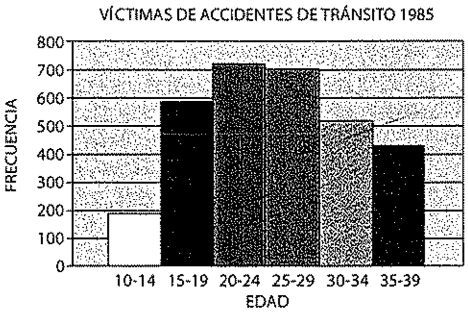
Prueba Saber

El total anual de víctimas por accidentes de tránsito en determinada ciudad entre los 10 y los 40 años, en los años de 1985 y 1999; figura en la siguiente tabla que recoge la distribución por edades:

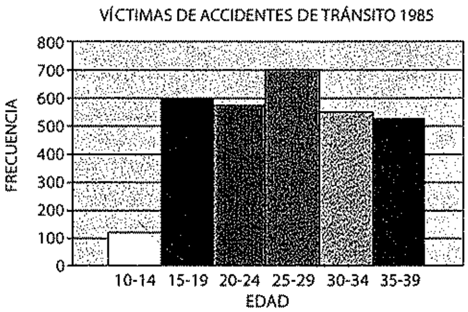
Edad	1985	1999
10 - 14	183	267
15 - 19	581	532
20 - 24	728	705
25 - 29	697	540
30 - 34	533	445
35 - 39	437	338

1. La gráfica que mejor representa la distribución de frecuencias para el año 1985 es:

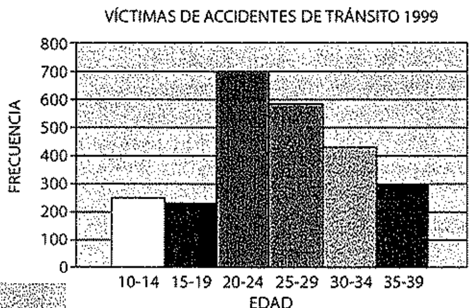
a.



b.

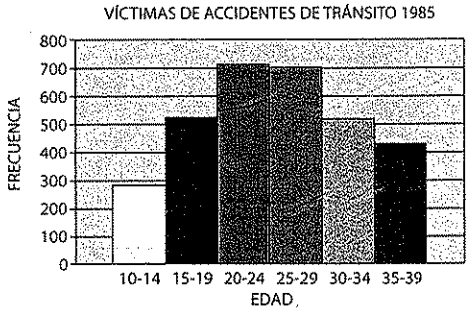


c.

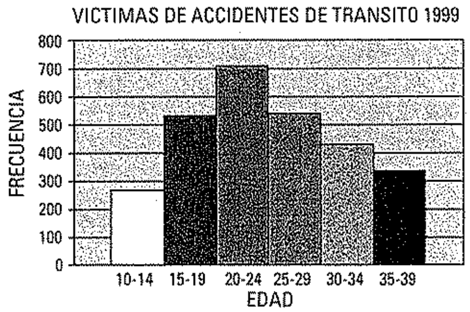


2. La gráfica que mejor representa la distribución de frecuencias para el año 1999 es:

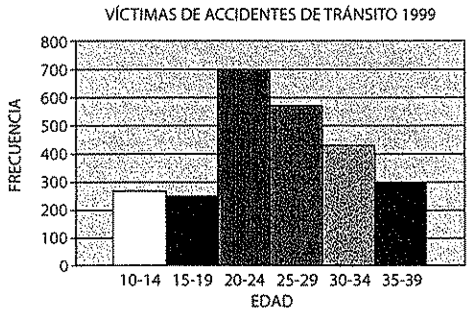
a.



b.



c.



3. La moda para los dos años se encuentra ubicada en:

a. en el segundo intervalo.

b. en el tercer intervalo.

c. existen dos modas.

d. no hay moda.

4. Con base en las estadísticas del año 1985 se iniciaron campañas educativas sobre prevención de accidentes a conductores y peatones. Comparando los datos de la tabla podemos afirmar que:

a. El porcentaje de víctimas aumentó aproximadamente un 11 % entre 1985 y 1999.

b. El porcentaje de víctimas disminuyó aproximadamente un 11 % entre 1985 y 1999.

c. El porcentaje de víctimas disminuyó aproximadamente un 111 % entre 1985 y 1999.

d. El porcentaje de víctimas no tuvo ninguna variación.

5. Comparando el promedio de edad (la media) para el año 1985 y el promedio de edad para el año 1999 se puede afirmar que:

a. El promedio de edad fue el mismo para los dos años.

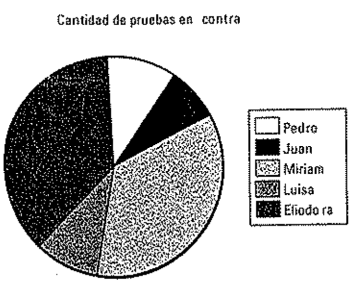
b. El promedio de edad fue mayor en el año 1985 que en el año 1999.

c. El promedio de edad fue mayor en el año 1999 que en el año 1985.

d. El promedio de edad fue mayor en el año 1985 que en el año 1999.

Prueba PISA

6. Un detective debe reducir las probabilidades de acusar a personas inocentes durante su investigación. Si durante un proceso de acusación encuentra que existen cinco personas que pueden estar comprometidas en el proceso que lleva a cabo, y entrega a la juez un gráfico como resultado, ¿cuál será la persona que la juez decidirá acusar?



a. Pedro c. Miriam e. Eliodora

b. Juan d. Luisa

Prueba TIMSS

El siguiente gráfico contiene información sobre las exportaciones nacionales en miles de millones de pesos.

7. ¿Cuál es el valor de las exportaciones de café en el año 2000 si el total de exportaciones ese año fue de 44,8 mil millones de pesos?

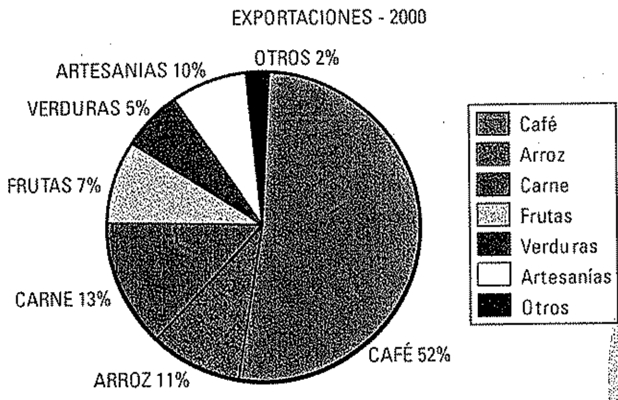
a. 27, 3 mil millones

b. 20, 1 mil millones

c. 23, 3 mil millones

d. 21, 5 mil millones

e. 18, 5 mil millones



8. ¿Cuál es el valor de las exportaciones de arroz en el año 2000?

a. 30, 1 mil millones

b. 32, 3 mil millones

c. 4, 9 mil millones

d. 3, 02 mil millones

9. Se realizó una encuesta para determinar el porcentaje de personas que utilizan el color negro en sus prendas. De 500 personas encuestadas, 80 respondieron positivamente. ¿Cuál es el porcentaje buscado?

a. 50 % c. 30 %

b. 75 % d. 16 %

Página 7

1.

a.

c = 12

b = a = 20

a = c

b.

< 3 = 40°

< 3 = < 2

< 1 = < 2

Página 8

1.

Cuerdas	1	2	3	4	5	6
Regiones	2	3	4	5	6	7

3.

a. 41 c. Son primos.

4. Son triángulos rectángulos.
En todo triángulo la suma de los ángulos interiores es 180°.

5. Están en el primer cuadrante

8.

- El algebra es descripción de un algoritmo.
- Un algoritmo muestra la manera como debe resolverse un problema

Página 11

1.

a. Si *a* y *b* son pares, entonces *ab* es par.

b. Si 0, 98 es decimal, es de la forma $\frac{a}{b}$, con $a, b \in Z, b \neq 0$.

2.

a. Las águilas son aves o peces.

Las águilas no son peces.

Las águilas son aves.

b. El número 3 es positivo o negativo.

El número 3 no es negativo.

El número 3 no es positivo.

3. es positivo

c. Ese cuadrilátero es rectángulo o es trapecio.

Ese cuadrilátero no es cuadrado.

Ese cuadrilátero es trapecio.

d. Trabajas para esta empresa o te vas de viaje.

No te vas de viaje, entonces trabajas para esta empresa.

Página 14

1.

a. $\forall x \in I \rightarrow x \in R$

d. $\forall x \in R, x \neq 0, \exists x \in R \;/\; x.\frac{1}{x} = 1$

2.

a. Demostración.

- a, b son reales.
- $(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$
- $(a + b)^2 = a^2 + ab + ab + b^2$
- $a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Conclusión: $\therefore (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Página 28

1.

a. F

b. V

c. F

d. F

e. F

f. F

g. V

h. V

i. V

2.

a. $\left\{7, \frac{8}{2}\right\}$

c. $\left\{-4 ; \frac{1}{3} ; 1,23 ; -4,3 ; 7 ; \frac{8}{2} ; \frac{7}{99}\right\}$

d. $\{\sqrt{3}; \sqrt{7}\}$

e. $\{-4; 7; \frac{8}{2}\}$

f. Todos

3. En la recta real cada conjunto queda ordenado así:

a.

-4

$-1,25$

$\frac{3}{7}$

$1,41$

b.

$\frac{-4}{2}$

$\frac{-3}{2}$

$\frac{1}{2}$

$\frac{5}{2}$

c.

$-1,73$

$\frac{1}{4}$

$1,5$

d.

$-2,4$

$-1,3$

$1,8$

$3,7$

e.

$-3,5$

-2

$2,6$

4.

a. cumplen la condición: $\{0, 1, 2, 3\}$

b. sí es entero.

c. es racional y real.

d. es irracional negativo.

e. es infinito.

f. Son el conjunto de los enteros no negativos.

g. Los enteros positivos son un subconjunto de los racionales.

h. los irracionales no son un subconjunto de los racionales.

i. Son números racionales entre 1 y 2.

5.

a. >

b. <

c. <

d. <

e. >

f. <

g. <

h. <

i. >

j. >

k. >

6.

a. $-3, \frac{1}{3}, \frac{7}{5}, \sqrt{4}, 18$

c. $-\sqrt{6}; -2; \frac{2}{8}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 9$

b. $-\frac{1}{5}; 0; \frac{2}{7}; 1,25; \sqrt{2}$

d. $-\pi; -\sqrt{2}; -\frac{1}{2}; \frac{5}{3}; 8$

Página 29

8. 60 % partidos ganados, 30 % partidos empatados, 10 % partidos perdidos.

9.

a. El televisor ya que está rebajado $ 299 000

b. 26 %.

12.

a.

Equipo	PG	PP	Promedio
Lakers	18	10	0,64
Rockets	13	15	0,46
Jazz	15	14	0,51
Spurs	19	7	0,73

Spurs tiene el mejor promedio

c. 352 meses aproximadamente; 253 488 horas.

Página 31

1.

a. 10.

b. 4.

d. 22.

e. -9

f. 1.

g. $\frac{-14}{15}$

h. $a + 2$.

2.

a. 7

b. 17

c. 15

d. 4

e. $\frac{17}{12}$

f. $\frac{53}{21}$

g. $|z - y|$

h. $3 - \sqrt{5}$

3.

a. $X = 7 \vee X = -7$

b. $X = -\frac{1}{4} \vee X = \frac{1}{4}$

c. $X = -2 \vee X = -4$

d. $X = 7 \vee X = -3$

e. $X = \frac{10}{3} \vee X = -\frac{14}{3}$

f. $X = 3 \vee X = -2$

g. $X = 78 \vee X = -78$

h. $X = 33 \vee X = -3$

4.

a. positivo.

b. positivo.

c. negativo.

d. positivo.

5.

a. 1 grado.

b. 2, 1 grados.

6. -25 pies

Página 34

1.

a. $\{-2, 12\}$

b. $\left\{-\frac{17}{5}, -\frac{13}{5}\right\}$

c. $\{-9, 9\}$

d. $\left\{-1, \frac{11}{5}\right\}$

e. $\left\{-\frac{5}{2}\right\}$

f. $\left\{-\frac{8}{7}\right\}$

2.

a. $[-1, 8]$

b. $\left(-\frac{5}{3}, \infty\right)$

c. $\left(-\frac{23}{3}, \frac{25}{3}\right)$

d. $(-\infty, 2) \cup \left(\frac{10}{3}, -\infty\right)$

e. $\frac{33}{175}, \frac{47}{175}$

f. $2 < x \leq \frac{12}{5} \wedge \frac{4}{3} \leq x < 2$

4.

a. $|x| \leq 4$

b. $|x + 5| \leq 6$

c. $|m - 175| \leq 50$

d. $|p| \geq 6$

5.

a. $10 > 6$

b. $4 > 0$

c. $\frac{7}{3} > 1$

6.

a. $1 > -4$

b. $-11 > -16$

c. $\frac{5}{2} < 5$

Página 37

1.

a. $\frac{1}{81}$

b. $\frac{a^3}{2}$

c. x^{70}

d. $-x^3$

e. $\frac{1}{a^6}$

f. $\frac{3}{16}$

g. $48x^5y^8$

h. 0

i. $7\,680a^{13}b^{11}$

j. $\frac{4^5 m^{10}}{3^5 n^{20}}$

k. $\frac{2^6 s^{18}}{3^4 t^{40}}$

l. $-72x^3y^2z^5$

m. $\frac{4^2 a^7}{5^2 b^6}$

n. $\frac{1}{4^3 a^6 b^{15}}$

o. 5

p. $\frac{1}{9m^6p^2z^4}$

q. $\frac{12ab^5}{c^4}$

r. $\frac{18x^{12}}{y^{14}}$

2.

a. x^{4a+2}

b. x^{m+8}

c. 1

d. $9m^6y^6$

e. x^{-4a+3}

f. $5^a x^{2a}$

4. 11, 7 mg aproximadamente.

5. El rey se dio cuenta de que en su reino no se contaba con los suficientes granos de trigo para pagar su deuda. El total de granos de trigo está dado por $2^1 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{64}$

Página 39

1.

b. $7,5 \times 10^5$

e. $4,53 \times 10^{-5}$

g. $9,119 \times 10^6$

h. $8,24 \times 10^8$

2.

a. $5^{\frac{2}{3}}$

b. $x^{\frac{4}{5}}$

c. $x^{\frac{5}{2}}y^{\frac{1}{2}}$

d. $a^{\frac{5}{2}}$

e. $(7x^3y^5)^{\frac{1}{4}}$

f. $8^{\frac{2}{6}}$

g. $(2x - 6y^5)^{\frac{1}{9}}$

h. $(3x + 6y)^{\frac{3}{2}}$

3.

a. $\sqrt[5]{x^2}$

b. $\sqrt[3]{m^5}$

c. $\sqrt[6]{x^4}$

d. $\sqrt{26y^3}$

e. $\sqrt[4]{6m + 5n}$

f. $\sqrt[2]{z^3}$

g. $\frac{1}{\sqrt[3]{2a^2}}$

5.

a. $1,50 \times 10^8$, $2,25 \times 10^8$, $1,08 \times 10^8$, $1,425 \times 10^9$

b. $1,67 \times 10^{-2}$, $9,34 \times 10^{-2}$, $6,8 \times 10^{-3}$, $5,6 \times 10^{-2}$

Página 41

1.

a. s^4

b. $2xy^2\sqrt{2x}$

c. $5\sqrt{2}$

e. $a^2bc^5\sqrt[5]{5a^2c}$

f. $3m^3n^3\sqrt[3]{n^2}$

g. $2a^3b^8c^2\sqrt[6]{a^5b^2}$

h. $x\sqrt[8]{6x^2}$

i. $3z^3$

j. $\frac{4a^3b^2\sqrt[4]{b^2}}{5}$

k. $-7x^6y^{10}\sqrt[3]{7y}$

l. $3xz^2\sqrt[4]{x^2yz^3}$

m. $m^6n^2\sqrt[7]{49m^2}$

n. $13x^7y^3z^3\sqrt{y}$

2.

a. $7\sqrt{7}$

b. $-2\sqrt{2} + 3$

c. $2b\sqrt{5a}$

d. $9m^2\sqrt[3]{m^2n^2}$

e. $\sqrt{xy}\left(6x + 8y^2\right)$

f. $4r^5s^2\sqrt[3]{rs^3} + 4rs^4\sqrt[3]{2r^2s^2}$

g. $\sqrt{2xy} + 2x\sqrt{2} - 2y\sqrt{3} - 4\sqrt{3xy}$

3.

a. 1, 4 segundos.

b. 3, 5 segundos.

Página 43

1.

a. $\frac{m\sqrt{3}}{3}$

b. $\frac{x\sqrt[4]{8}}{2}$

c. $\frac{5}{7}\sqrt{2}$

d. $\frac{4\sqrt{a+b}}{a+b}$

e. $\frac{2\sqrt{10} - \sqrt{14}}{10}$

g. $\frac{x\left(\sqrt{x} - y\right)}{x - y^2}$

h. $\frac{13 - 2\sqrt{2}}{23}$

i. $\frac{a - \sqrt{ab}}{a - b}$

j. $\frac{\sqrt[3]{4mn}}{2n}$

k. $2y\sqrt[6]{2xy^3}$

l. $\frac{3\sqrt{2} - 6\sqrt{30}}{28}$

2.

a. $\frac{\sqrt{5}}{5} + \frac{3\sqrt{2}}{2}$

b. $\frac{4\sqrt{7}}{7} + \frac{2\sqrt{5}}{5} - \frac{\sqrt{3}}{3}$

c. $\frac{\sqrt{6} - 4}{2}$

d. $\frac{15-5\sqrt{5}+\sqrt{20}}{10}$

3.

a. Falso

b. Falso

c. Verdadero.

Página 53

1.

a. Sí es función.

b. no es función.

c. Sí es función.

2.

a. Sí es función.

b. Sí es función.

c. Sí es función.

d. Sí es función.

e. No es función.

3.

a. Sí es función.
Dominio $\{1, 2, 3, 4, 5\}$
Rango $\{3, 5, 7, 9, 11\}$

b. No es función.

c. Sí es función.
Dominio $\{0, 2, 3, 4, 9\}$
Rango $\{-3, -1, 0, 1, 6\}$

d. No es función.

e. Si es función.
Dominio $\{-2, -1, 0, 1\}$
Rango $\{4, 1, 0, 1\}$

4.

a. $f(2) = 12, f(-1) = -6, f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{16}{9}, f\left(\sqrt{3}\right) = 5\sqrt{3} + 1$

c. $r(2,5) = 13,75, r(-2) = 20, r(a) = |a^2 + 7a - 10|$

Página 55

1. son rectas b y d.

4.

a. $S = 0,15x + 1\,200\,000$

b. \$ 1 950 000

5.

a. $y = 1\,000\,000x + 45\,000\,000$

b. \$ 60 000 000

c. 155 años.

Página 61

1.

a. $y - 4 = 3(x - 1)$

b. $y + 3 = 7/4(x - 1)$

c. $y - 5 = 3x$

2.

a. 2

b. 10 /7

c. −9 / 10

d. 3

e. 0

f. 1 / 7

Página 64

1.

a. creciente

b. decreciente

c. constante

d. decreciente

e. creciente

f. creciente

g. creciente

h. constante

i. vertical

4.

b. aproximadamente mas de 667 unidades.

c. aproximadamente mas de 3 493 unidades.

Página 64

2.

a. creciente

b. creciente

c. constante

d. decreciente

3.

a. ni paralelas ni perpendiculares.

b. perpendiculares

c. paralelas

d. ni paralelas ni perpendiculares

e. perpendiculares

f. ni paralelas ni perpendiculares

10.

a. en un punto

b. diferentes

c. iguales

d. un triángulo

Página 68.

4.

b. 750 estufas

Página 73

1.

a. Abre hacia arriba.

b. Abre hacia abajo.

d. Abre hacia arriba.

e. Abre hacia abajo.

f. Abre hacia arriba.

g. Abre hacia abajo.

h. Abre hacia abajo.

i. Abre hacia arriba.

3.

b. Máximo dos.

Página 91

1.

a. No tiene solución.

b. Tiene solución única.

c. Tiene solución única.

d. infinitas soluciones.

e. No tiene solución.

f. Tiene solución única.

2.

b. (4, 5)

c. No tiene solución

d. (–2, 3)

e. Infinitas soluciones

f. (1, 4)

g. (–5, –3)

h. infinitas soluciones

i. Infinitas soluciones

3.

a. $\begin{cases} y = 2x - 2 \\ y = -\frac{1}{2}x + 8 \end{cases}$ Sol. (4, 6)

b. $\begin{cases} y = 3x + 7 \\ y = 3x + 4 \end{cases}$ No tiene solución

c. $\begin{cases} y = -5x - 5 \\ y = \frac{1}{2}x + 6 \end{cases}$ sol. (–2, 5)

d. $\begin{cases} y = -7 \\ x = 8 \end{cases}$ Sol. (8,–7)

Página 93

1.

b. $a = -1$, $b = -1$

c. infinitas soluciones

d $x = -5$, $y = -1$

e. infinitas soluciones.

f. No tiene solución

2.

a. Sí
b. No
c. No
d. No
e. No

Página 95

1.

a. m = 1, n = −1
b. x = −3, y = 2
c. $x = 1, y = \frac{1}{3}$
d. x = 2a, y = 2b
e. x = 5, y = 8
f. No tienen solución
g. $x = \frac{3m}{5}, y = \frac{2n}{5}$
h. a = −1, b = 5,
i. Infinitas soluciones
j. a = 1, b = −1
k. $x = -\frac{7}{11}, y = \frac{1}{11}$
l. $x = -\frac{5}{2}, y = -\frac{5}{2}$

2.

a. Falso
b. Falso
c. Verdadero
d. Falso
e. Falso
f. Verdadero

Página 97

1.

a. a = 6, b = 2
b. $m = -\frac{5}{2}, n = \frac{5}{2}$
c. $x = \frac{c(a+b)}{2a}, y = \frac{c(a-b)}{2a}$
d. a = 1, b = 1
e. $x = -14, y = \frac{13}{2}$
f. $x = \frac{25}{4}, y = \frac{50}{11}$
g. No tiene solución.

i. $a = -\frac{6}{5}, y = \frac{19}{5}$

2.

a. $\begin{cases} -x - 4y = 7 \\ 5x - 2y = 4 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2x + y = -2 \\ 6x - 5b = 18 \end{cases}$

e. $\begin{cases} -3x - 8y = 4 \\ 2x + 9y = 1 \end{cases}$

f. $\begin{cases} 3x - 4y = -1 \\ 2x - 3y = 2 \end{cases}$

Página 103

1.

a. $x = \frac{17}{4}, y = -4, z = \frac{-23}{4}$

b. $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{3}, z = 1$

c. x = 1, y = 2, z = 3

d. $m = \frac{1}{2}, n = \frac{1}{3}, p = \frac{1}{4}$

e. no tiene solución.

f. $a = \frac{9}{7}, b = -\frac{41}{7}, c = \frac{17}{7}$

2.

a. No es solución.
b. Sí es solución.
c. No es solución.
d. No es solución.

3.

a. 50, 40, 120
c. $ 6 000, $ 12 000 y $ 8 000
e. A = $ 870, B = $ 580, C = $ 290

Página 107

2.

a. $x \leq 2$

c. $x > 8$

d. $\frac{1}{2}x - 3y \geq 4$

Página 111

1. 1, 4, 11, 6

Página 113

1.

a. $A + B = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$

$A - B = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

$-2B = \begin{bmatrix} -8 & -2 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$

$3A = \begin{bmatrix} 9 & 15 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$

$\frac{A}{2} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

Página 116

1.

a. $x = \frac{170}{73}, y = \frac{-25}{73}, z = \frac{-7}{73}$

b. $x = \frac{4}{3}, y = \frac{14}{9}$

c. $a = \frac{1}{88}, b = \frac{-35}{44}, c = \frac{-27}{88}$

d. $x = 1, y = 2, z = 3$

e. $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{4}, z = \frac{1}{3}$

f. $x = -\frac{7}{3}, y = \frac{7}{4}$

g. $x = 2, y = \frac{1}{3}$

i. no tiene solución.

Página 119

1.

a. 16

b. 3

c. 372

e. 250

2.

a. $x = 2$

d. $x = \frac{-14}{17}$

3.

a. $a = -2, b = -1$

d. $x = 4, y = 3, z = 2$

4.

a. \$ 160 000, \$ 320 000, \$ 520 000,

Página 128

1.

a. $x = \pm 1$

b. $x = \pm 4$

c. $x = \pm 6$

d. $x = \pm 7$

e. $x = \pm 2$

f. $x = \pm 2$

g. $x = \pm 6$

h. $x = \pm 7$

i. $x = -3 \pm 4$

j. $x = 9 \pm \sqrt{21}$

k. $x = 0.3 \pm 2.5$

l. $x = 3 \pm 4$

m. $x = \frac{6 \pm 10}{45}$

n. $x = \frac{24 \pm 2}{49}$

o. $x = \frac{4 \pm 3}{3}$

p. $x = \frac{8 \pm 171}{570}$

q. $x = \frac{1 \pm 4}{7}$

r. $x = \frac{60 \pm 2}{9}$

s. $x = \frac{17 \pm 48}{68}$

t. $x = \frac{120 \pm 72}{81}$

3.

a. $x_1 = 4, x_2 = -2$

b. $x_1 = 7, x_2 = -1$

c. $x_1 = 3, x_2 = -1$

d. $x_1 = 5, x_2 = -2$

e. $x_1 = 17, x_2 = -1$

f. $x_1 = 6, x_2 = -2$

g. $x_1 = -6, x_2 = -3$

h. $x_1 = 5, x_2 = -3$

4.

c. $l = 13m, a = 5m$

d. 21 y 23

Página 139

1.

a. 5

b. 12 x 8

c. 15, 8

d. 6 h

e. 4, 5, 6

f. 12, 15

Página 145

1.

a. Falso

b. Verdadero

c. Verdadero

d. Falso

e. Falso

2.

a. $x^2 + 8x - 9 \geq 0$

$(-\infty, -9] \cup [1, \infty)$

$\{x \in R \; / \; x \leq -9, \vee x \geq 1\}$

b. $2x^2 + 5x - 10 < 0$

$(1.3, 3.8)$

$\{x \in R \; / \; 1.3 < x < 3.8\}$

c. $0.2x^2 + 2x + 0.3 \leq 0$

$[-14.4, 4.3]$

$\{x \in R \; / \; -1.44 \leq x \leq 4.3\}$

d. $\frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{5}x + \frac{3}{10} > 0$

$(-\infty, 0.53) \cup (2.13, \infty)$

$\{x \in R \; / \; x < 0.53, \vee, x > 2.13\}$

Página 147

1.

a. 16

b. 96

d. 18

2.

a. $\pm\sqrt{87}$

b. $\pm 2\sqrt{15}$

c. $\pm\sqrt{41}$

d. $\pm\sqrt{32}$

3.

a. 20 cm.

b. $\frac{1}{5}\sqrt{73}$

c. $\sqrt{L^2 + H^2 - d^2}$

Páginas 150

1.

a. 3i

b. $6i\sqrt{5}$

c. i

d. 2i

e. $5i\sqrt{2}$

f. 7i

g. $\frac{13i\sqrt{2}}{34}$

h. $\frac{i\sqrt{7}}{2}$

i. $\frac{9}{77}i\sqrt{11}$

Página 163

1.

a. $a_1 = -2, a_2 = -7, a_3 = -12, a_4 = -17, a_5 = -22, a_9 = -42$

c. $a_1 = \frac{9}{2}, a_2 = 5, a_3 = \frac{11}{2}, a_4 = 6, a_5 = \frac{13}{2}, a_9 = \frac{17}{2}$

e. $a_1 = 2, a_2 = 8, a_3 = 26, a_4 = 80, a_5 = 242, a_9 = 19\,682$

g. $a_1 = -2, a_2 = 4, a_3 = -8, a_4 = 16, a_5 = -32, a_9 = -512$

Página 166

1.

a. $a_1 = 1, a_2 = 4, a_3 = 7, a_4 = 10, a_5 = 13, a_6 = 16, a_7 = 19, a_8 = 22$

c. $a_1 = 0, a_2 = 3, a_3 = 6, a_4 = 9, a_5 = 12, a_6 = 15, a_7 = 18, a_8 = 21$

e. $a_1 = 1, a_2 = \frac{4}{3}, a_3 = \frac{6}{4}, a_4 = \frac{8}{5}, a_5 = \frac{10}{6}, a_6 = \frac{12}{7}, a_7 = \frac{14}{8}, a_8 = \frac{16}{9}$

2.

a. $a_3 = 19$ e. $a_{15} = -79$

5.

a. \$ 28 800 000 b. \$234 000 000

9. 10 pulgadas

Página 169

1.

a. $\frac{1}{2}$

b. $\frac{4}{3}$

c. $\frac{1}{5}$

d. $\frac{5\sqrt{2}}{3}$

e. 0

2.

a. –1 b. 16 c. $\frac{1}{3^{13}}$

3. $\frac{96^5}{8 \times 10^5}$

4. 243°, 81°, 27°, 9°

5. 40, 80, 160

6. $r = \frac{3}{10}$; $a_{10} = \frac{248\,430}{1\,953\,125}$

Página 217

1.

Media = 60, 5

Mediana = 63, 4

Media = 78, 5

Mediana = 77, 8

Problemas adicionales

1. En una granja se crían gallinas y conejos. Si se cuentan las cabezas, son 50, si las patas, son 134. ¿Cuántos animales hay de cada clase?

2. En la granja se han envasado 300 litros de leche en 120 botellas de dos y cinco litros. ¿Cuántas botellas de cada clase se han utilizado?

3. Al comenzar los estudios de Bachillerato se les hace un test a los estudiantes con 30 preguntas sobre Matemáticas. Por cada pregunta contestada correctamente se le dan 5 puntos y por cada cuestión incorrecta o no contestada se le quitan 2 puntos. Un alumno obtuvo en total 94 puntos. ¿Cuántas cuestiones respondió correctamente?

4. Un ama de casa compra en un supermercado 6 kg de café y 3 de azúcar, por lo que paga $ 15 300. Ante la amenaza de nuevas alzas, vuelve al día siguiente y compra 1 kg de café y 10 kg de azúcar por lo que paga $ 8 250. No se fija en el precio y plantea el problema a su hijo de 13 años. Éste después de calcular lo que su madre hubiera pagado por 6 kg de café y 60 de azúcar halla el precio de cada artículo. ¿Podrías llegar tú a resolver el problema?

5. En un puesto de verduras se han vendido 2 kg de naranjas y 5 kg de papas por $ 8 350 y 4 kg de naranjas y 2 kg de papas por $ 12 850. Calcula el precio de un kilogramo de naranja y uno de papas.

6. En una pastelería se fabrican dos clases de tortas. La primera necesita 2,4 kg de masa y 3 horas de elaboración. La segunda necesita 4 kg de masa y 2 horas de elaboración. Calcula el número de tortas preparadas de cada tipo si se han dedicado 67 horas de trabajo y 80 kg de masa.

7. Halla dos números tales que si se divide el primero por 3 y el segundo por 4 la suma es 15; mientras que si se multiplica el primero por 2 y el segundo por 5 la suma es 174.

8. Un número consta de dos cifras cuya suma es 9. Si se invierte el orden de las cifras, el resultado es igual al número dado más 9 unidades. Halla dicho número.

9. Determina dos números tales que la diferencia de sus cuadrados es 120 y su suma es 6.

10. Halla una fracción equivalente a tres quintos cuyos términos elevados al cuadrado sumen 544.

11. Calcula dos números positivos tales que la suma de sus cuadrados sea 193 y la diferencia sea 95.

12. Un número está formado por dos cifras cuya suma es 15. Si se toma la cuarta parte del número y se le agregan 45 resulta el número con las cifras invertidas. ¿Cuál es el número?

13. Calcula dos números que sumen 150 y cuya diferencia sea cuádruple del menor.

14. Calcula el valor de dos números sabiendo que suman 51 y que si al primero lo divides entre 3 y al segundo entre 6, los cocientes se diferencian en 1.

15. Juan y Roberto comentan:
    Juan: "Si me das 2 monedas, tendré tantas como tú"
    Roberto: "Sí, pero si me das 4, entonces tendré 4 veces más que tú".
    ¿Cuántas monedas tienen cada uno?

16. Al preguntar en mi familia cuántos hijos son, yo respondo que tengo tantas hermanas como hermanos y mi hermana mayor responde que tiene doble número de hermanos que de hermanas. ¿Cuántos hijos e hijas somos?

17. Hace 5 años la edad de mi padre era el triple de la de mi hermano y dentro de 5 años sólo será el duplo. ¿Cuáles son las edades de mi padre y de mi hermano?

18. Entre mi abuelo y mi hermano tienen 56 años. Si mi abuelo tiene 50 años más que mi hermano, ¿qué edad tiene cada uno?

19. Sabemos que mi tío tiene 27 años más que su hijo y que dentro de 12 años le doblará la edad. ¿Cuántos años tiene cada uno?

20. La edad de mi tía, hoy es el cuadrado de la de su hija; pero dentro de nueve años será solamente el triple. ¿Qué edad tiene cada una?

21. Un rectángulo tiene un perímetro de 392 metros. Calcula sus dimensiones sabiendo que mide 52 metros más de largo que de ancho.

22. Un rectángulo mide 40 metros cuadrados de área y 26 metros de perímetro. Calcula sus dimensiones.

23. El perímetro de un rectángulo mide 36 metros. Si se aumenta en 2 metros su base y se disminuye en 3 metros su altura, el área no cambia. Calcula las dimensiones del rectángulo.

24. Uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo es 18° mayor que el otro. ¿Cuánto mide cada ángulo del triángulo?

25. La altura de un trapecio isósceles mide 4 cm, la suma de las bases es de 14 cm, y los lados oblicuos miden 5 cm. Averigua las bases del trapecio.

26. La diferencia de las diagonales de un rombo es de 2 m. Si a las dos las aumentamos en 2 m el área aumenta en 16 metros cuadrados. Calcula las longitudes de las diagonales, el perímetro y el área de dicho rombo.

27. Los lados paralelos de un trapecio miden 15 cm y 36 cm, respectivamente, y los no paralelos 13 y 20 cm. Calcula la altura del trapecio.

28. A las tres de la tarde sale de la ciudad un coche con una velocidad de 80 km/h. Dos horas más tarde sale una moto en su persecución a una velocidad de 120 km/h. ¿A qué hora lo alcanzará? ¿A qué distancia de la ciudad?

29. Dos pueblos, A y B, distan 155 km. A la misma hora salen de cada pueblo un ciclista. El de A viaja a una velocidad de 25 km/h y el de B a 33 km/h. ¿A qué distancia de cada pueblo se encuentran? ¿Cuánto tiempo ha transcurrido?

30. Un crucero tiene habitaciones dobles (2 camas) y sencillas (1 cama). En total tiene 47 habitaciones y 79 camas. ¿Cuántas habitaciones tiene de cada tipo?

31. Un depósito se llena por un grifo en 5 horas y por otro en 2 horas. ¿Cuánto tardará en llenarse abriendo los dos grifos a la vez?

32. Dos grifos alimentan simultáneamente un depósito tardando 2,4 horas en llenarlo. Si se abriera cada grifo por separado el primero tardaría 2 horas menos que el segundo. ¿Cuánto tiempo tardaría cada uno de ellos en llenarlo de manera independiente?

33. Un reloj señala las tres en punto. A partir de esa hora, ¿a qué hora coincidirán las manecillas por primera vez?

34. Un reloj señala las tres en punto. Por tanto las manecillas del reloj forman un ángulo recto. ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que formen de nuevo un ángulo recto?

35. Un reloj marca las doce horas. ¿A qué hora la manecilla que marca los minutos se encontrará otra vez con la manecilla que marca la hora?

Problemas de aplicación de las funciones en la vida real

1. Existe una función que relaciona el volumen de sangre de un individuo con su peso, la cual está dada por: $f(x) = 1/14\, x$ donde x es el peso del individuo, medido en kilos, y $f(x)$ es la cantidad de sangre en el cuerpo, medido en litros.
   a. Grafica la función.
   b. ¿Cuántos litros de sangre tienen los siguientes pacientes, si sus pesos respectivos son: 58, 46 y 62 kilogramos.
   c. Determine el peso de los siguientes pacientes si se sabe que tienen:
   - 3 litros de sangre.
   - 2 500 cc
   - 36 dl
   - 3 500 ml

2. Se sabe que los grillos chirrían con mayor frecuencia a mayores temperaturas y con menor frecuencia a menores temperaturas. Por consiguiente, el número de chirridos es una función de la temperatura. Los siguientes datos se reunieron y fueron registrados en una tabla.

Temperatura ° C	6	8	10	15	20
Número de chirridos por minuto.	11	29	47	75	109

Si al ubicar los datos en una gráfica, sigue un modelo lineal, determina:
   a. la ecuación de la recta que describe el fenómeno.
   b. ¿Cuál será el número aproximado de chirridos por minuto cuando la temperatura es de 18°C?
   c. ¿Cuál es el aumento de chirridos por minuto emitidos por un grillo entre los 13° C y los 25° C de temperatura?
   d. Si el número de chirridos que emite un grillo es de 151 por minuto, ¿cuál será la temperatura?

3. Se llevó a cabo un experimento para estudiar el efecto de cierto medicamento para disminuir la frecuencia cardiaca en adultos y se obtuvieron los siguientes resultados:

Dosis administrada en mg	0,5	0,75	1	1,25
Disminución en la frecuencia cardiaca (latidos/m)	9,05	10,075	11,1	12,125

Suponiendo que los datos siguen un modelo lineal:

a. determina la función que representa el problema.

b. Interpreta la pendiente de la recta.

c. Si se administran 2 mg, ¿cuál es la disminución en la frecuencia cardiaca?

d. ¿Para qué dosis la frecuencia cardiaca disminuye en 10 latidos/m?

4. Se ha comprobado en un tipo particular de pacientes que la relación entre el riesgo coronario R, y el nivel de colesterol C, cuando éste último está por encima de 210 es lineal. Sabiendo que el riesgo coronario a un nivel de colesterol de 210 es 0,160 y a un nivel de 231 es 0,192:

   a. Encuentra la ecuación que relaciona *R* en función de *C*.

   b. Interpreta la pendiente de la función lineal encontrada en a.

   c. ¿Qué riesgo coronario corresponde a un nivel de colesterol de 260?

   d. ¿Para qué nivel de colesterol el riesgo es de 1?

5. En pacientes con enfisema pulmonar, se estudia el número de años que el paciente ha fumado y la evaluación médica con respecto al daño sufrido por los pulmones (Medido en una escala de 1 a 100 puntos).

   Los pacientes son clasificados según la edad de éstos en: menores de 40 años y 40 o más años.

   Algunos antecedentes relativos al estudio, indican que el daño sufrido por los pulmones es de 25 puntos, para los pacientes que llevan fumando 20 años, en cualquiera de los grupos.

   Además se sabe que para un paciente con 40 o más años, que lleva 28 años fumando, el daño pulmonar tiene un puntaje de 30. Para un paciente menor a 40 años, que lleva 28 años fumando, el daño pulmonar es de 28 puntos.

   Según lo anterior determina:

   a. La gráfica del análisis correspondiente a la situación descrita y la expresión matemática adecuada al caso.

   Responde b. y c. considerando el grupo de pacientes con 40 o más años.

   b. Si al aumentar el número de años que ha fumado un paciente, ¿aumenta o disminuye el daño en los pulmones? ¿A qué razón?

   c. ¿Cuál es el daño pulmonar para un paciente que lleva fumando 42 años?

   d. Lo mismo que en b), pero considerando a los paciente con menos de 40 años.

6. En la medida en que el aire (sin humedad) sube, se expande y se enfría. Si la temperatura a nivel de la tierra es de 20°C y a 1 km de altura es 10°C:

   a. Escribe la relación entre la altura y temperatura, si se supone que entre ellas existe una relación lineal.

   b. Haz el gráfico.

   c. Determina la temperatura a 3 km de altura.

7. Al nacer un bebé perderá peso normalmente durante unos pocos días, después comenzará a ganarlos. Un modelo para el peso medio de los bebés durante las 2 primeras semanas de vida es: $P(t) = 0{,}015\,t^2 - 0{,}18\,t + 3{,}3$, con t medido en días.
   a. Determina la porción del gráfico que representa el problema.
   b. ¿Cuánto pesa el bebé al nacer?
   c. ¿Cuándo el bebé alcanza su mínimo peso?
   d. ¿Cuántos kilos pierde?
   e. ¿Cuál es ese mínimo peso?
   f. Indica el intervalo de tiempo en el cual el bebé comienza a aumentar de peso.
   g. ¿Cuánto pesa el bebé a las 2 semanas?
   h. ¿Cuántos kilos aumenta desde que nace hasta las 2 semanas?

8. En una reacción química la cantidad Q (en gramos) de una sustancia producida en t horas viene dada por $Q(t) = 16t - 4t^2$; $0 < t \leq 2$.
   a. Grafica la porción de la función acorde con el problema.
   b. ¿Cuántos gramos de sustancias se han producido después de media hora?
   c. ¿En qué instante la cantidad de sustancia producida es máxima?
   d. ¿Cuál es el valor de esa cantidad máxima de sustancia producida?
   e. ¿Cuál es el promedio de sustancia producida entre la media y 2 horas?

9. La siguiente función $y = 0{,}1875x^2 - 18x + 670$ representa el número de accidentes automovilísticos que se producen durante el día, donde x es la velocidad a la cual viaje el automóvil, determina:
   a. La porción del gráfico que representa al problema.
   b. El número de accidentes que se producen si el automóvil viaja a una velocidad de 100 km/horas.
   c. Si en un día se producen 500 accidentes, ¿a qué velocidad viajaban los automóviles?
   d. ¿A qué velocidad debe viajar para que el número de accidentes sea mínimo?
   e. ¿Cuál sería el número de accidentes mínimo?

10. Crecimiento de los niños. La tasa de crecimiento y, de un niño, en libras por mes, se relaciona con su peso actual x, en libras, mediante la fórmula $y = cx(21-x)$, en la cual c es una constante positiva, y $0 < x < 21$. ¿A qué peso se tiene la tasa máxima de crecimiento?

11. En cierto cultivo con medio limitado, la tasa de crecimiento bacteriano $N(x)$ está en función del número x de bacterias presentes a través de la fórmula:
    $N(x) = x(1\,000\,000 - x)/1\,665\,000$. Calcula el número máximo de bacterias.

12. En un bosque, un depredador se alimenta de las presas y su población está en función del número de presas x que hay en el bosque a través de la fórmula:
    $y = 1/6x^2 - 10x + 90$

    ¿Para qué valor de x el número de depredadores es máximo?

13. En un lago grande un pez depredador se alimenta de uno más pequeño y la población de depredadores en cualquier instante está en función del número de peces pequeños que

hay en el lago en ese momento. Supón que cuando hay *x* peces pequeños, la población de depredadores es $y = 1/4x^2 + 80$. Si la temporada de pesca terminó hace *t* semanas, entonces $x = 8t + 90$. Expresa *y* en términos *t*, calcula el valor de *t* para el cual *y* es máximo.

14. Una masa de aire frío se aproxima a la universidad. La temperatura es de *z* grados *t* horas después de la media noche y $z = 0{,}1(400 - 40t + t^2)$ para cuando $0 < t < 12$. Calcula el valor de *t* para la cual la temperatura es mínima.

Una de las funciones que estudiaste es la exponencial que se usa para estudiar el crecimiento de las poblaciones y su efecto sobre el medio ambiente.

- Lee con cuidado.

Crecimiento de la población, desarrollo sostenible y medio ambiente

Sergei Kapitza

El crecimiento de la población ha alcanzado ya prácticamente el punto máximo de transición que llevará a una estabilización de la población en un futuro previsible, situándose el período de transición entre 1965 y 2050. Esta transición es notablemente corta, sobre todo si la comparamos con los millones de años de nuestra historia y, sin embargo, casi una décima parte de todos los seres humanos que han existido van a vivir este período de cambio rápido. El ritmo y la amplitud de esta transición se debe a interacciones en la población mundial y son el resultado de un comportamiento complejo de un sistema de dinámica claramente no lineal. Durante este período de ochenta y cinco años, la población del mundo se multiplicará por tres y envejecerá notablemente. Es indiscutiblemente el período más crítico y singular por el que nunca haya pasado la humanidad, que a lo largo de su historia siempre ha seguido un patrón de crecimiento estable y continuo. Este patrón está evolucionando ahora muy rápidamente hacia el de una población estabilizada. De hecho, es simplemente imposible evolucionar más de prisa desde el nacimiento hasta la saturación (excepto a través de una guerra nuclear total), y este cambio rápido ha de tenerse en cuenta para poder entender los problemas con los que se enfrenta el mundo en la actualidad.

Desde la conferencia de Río de Janeiro sobre Desarrollo y Medio Ambiente, en 1993, el concepto de desarrollo sostenible ha surgido como un hito significativo en el debate internacional sobre los problemas del mundo. Cinco años más tarde tuvo lugar otra conferencia en Nueva York para hacer balance de los resultados: en ella se revelaron algunas dificultades, con la aparición de diferentes actitudes frente al desarrollo y el medio ambiente entre los países desarrollados y los países en vías de desarrollo. El consenso alcanzado en Río de Janeiro se encuentra ahora en peligro; es preciso examinar las razones que subyacen bajo las diferentes actitudes, teniendo siempre en cuenta la transición demográfica.

La distribución de la tierra, de los alimentos, de la energía y de la riqueza en el mundo muestra que el sistema demográfico mundial está muy lejos del equilibrio. Éste es el factor más importante, ya que indica que la relación entre esta distribución y un crecimiento rápido se refuerza a medida que un país se acerca a la transición demográfica. Por otra parte, la evolución de esta distribución *demuestra que el proceso de evolución de la población mundial es dinámicamente sostenible de otro modo no habría podido evolucionar regularmente durante un millón e años, como lo ha hecho. Podemos asumir que el sistema demográfico mundial es abierto, y posee recursos suficientes para soportar su desarrollo en un futuro previsible. La primera indicación de una penuria mundial sería un patrón más uniforme del uso de los recursos. Al ritmo actual, el próximo siglo promete ser crucial para la que la humanidad alcance la etapa final en su adaptación al estado estabilizado del futuro, para luego alcanzar un patrón de desarrollo sostenible. Para entonces todo progreso deberá medirse por criterios que nos sean el simple crecimiento cuantitativo, el estereotipo de desarrollo ha dominado la humanidad durante un millón de años, es decir, decenas de miles de generaciones. La historia y nuestra existencia actual nos demuestran que el software, nuestras ideas y valores evolucionan mucho más lentamente que el hardware, que durante siglos se ha centrado en un crecimiento y una productividad máximos. Bajo la presión del rápido desarrollo, estas posturas inamovibles deberán cambiar. De todos los factores, éste es probablemente el más importante a la hora de resolver el problema de la sostenibilidad.*

Estas ideas y conceptos proporcionan el contexto histórico para considerar la sostenibilidad de la biodiversidad de la biosfera. Como muestran las investigaciones recientes, se puede esperar que la biodiversidad se pierda en gran parte durante este período de rápido crecimiento, como sucedió en el mundo desarrollado hace dos o tres generaciones, es decir, durante el período de crecimiento rápido. Hoy en día, el rápido crecimiento del mundo en vías de desarrollo se percibe como la principal amenaza para le medio ambiente mundial y la biodiversidad está en primera línea, como un elemento a largo plazo, cuando se la compara con los procesos medio ambientales a corto plazo. La misma tasa de crecimiento y la rápida transición hacia un nuevo mundo estabilizado son factores que compiten en la determinación de los resultados y del estado del mundo en un futuro previsible. Lo que en cierto modo puede y debe resolver estos problemas es un cambio de los valores que determinan los patrones de comportamiento social de la gente. Al ritmo de desarrollo del momento, el crecimiento material supera con creces el desarrollo del software de la humanidad. La diferencia entre nuestros valores e ideas y nuestro desarrollo material está influida en gran medida por los procesos de globalización. Si la generalización de la tecnología, el dinero y el conocimiento industrial están acelerando el desarrollo, la correspondiente difusión de ideas y valores apropiados ha quedado muy rezagada. La misma complejidad de la sociedad mundial complica aún más las cosas, ya que es necesario mucho tiempo para que nuestros hábitos y costumbres sociales se estabilicen, y aún más para que las instituciones internacionales evolucionen. Se puede medir la importancia de estos horizontes temporales, si se piensa que son necesarios nueve meses para producir un "hardware" humano, pero al menos veinte años para "programarlo" o educarlo. Éstas son las constantes fundamentales biológicas y humanas que en definitiva determinan nuestro desarrollo personal y el destino final de la humanidad. En último término, es la interacción y el equilibrio entre mente y materia lo que resolverá nuestro porvenir.

Medidas y equivalencias

Sistema métrico decimal

Medidas de superficie (lineales) y sus equivalencias en el sistema de medida inglés y en el métrico decimal:

Conversión de unidades métricas a inglesas:

1 metro =	39,37	pulgadas	in	(inch)
	3,28083	pies	ft	(feet)
	1,09361	yardas	yd	(yard)
	1000	milímetros	mm	-
	100	centímetros	cm	-
	100	decímetros	dm	-
	0,001	kilómetros	km	-
1 centímetro =	0,3937	pulgada	in	(inch)
	0,0328083	pies	ft	(feet)
	10	milímetros	mm	
	0,01	metros	m	
1 milímetro =	0,03937	pulgadas	in	(inch)
	0,001	metros	m	-
1 kilómetro =	3 280,83	pies	ft	(feet)
	1 093,61	yardas	yd	(yard)
	0,62137	millas	mi	(mile)
	1 000	metros	m	-

Conversión de unidades inglesas a métricas:

1 pulgada =	0,833	pies	ft	(feet)
	0,022777	yardas	yd	(yard)
	2,54	centímetros	cm	-
	25,4	milímetros	mm	-
	12	pulgadas	in	(inch)
1 pie =	0,33333	yardas	yd	(yard)
	0,3048	metros	m	-
	30,48	centímetros	cm	-
1 yarda =	36	pulgadas	in	(inch)
	3	pies	ft	(feet)
	0,9144	metro	m	-
1 milla =	5 280	pies	ft	(feet)
	1 760	yardas	yd	(yard)
	320	rods	-	(1 rod = 5,03 m)
	8	furlongs	-	(1 furlong = 200m)
	1 609,35	metros	m	-
	1,60935	kilómetros	km	-

MEDIDAS DE PESO

1 gramo =	0,03527	onza	oz	(ounce)
	0,001	kilogramo	kg	-
1 kilogramo =	1 000	gramos	g	-
	2,20462	libras	lb	(pound)
1 tonelada métrica =	2 204,62	libras	lb	
	1 000	kilogramos	kg	(pound)
1 onza =	0,0625	libra	lb	(pound)
	28,35	gramos	g	-
1 libra =	16	onzas	oz	(ounces)
	453,592	gramos	g	-
	0,453592	kilogramo	kg	-

Para consultar otras equivalencias consulta nuestra página web: *www.voluntad.com.co* sección Salón del Saber.

GLOSARIO

Asíntota: Recta que prolongada indefinidamente se acerca a una curva sin llegar a tocarla. También llamadas tangentes en el infinito, las asíntotas pueden ser horizontales, verticales u oblicuas.

Combinaciones: De m elementos tomados de n en n, subconjuntos de n elementos que se pueden formar a partir de un conjunto de m elementos.

Compatible: Un sistema de ecuaciones lineales es compatible si tiene alguna solución. Si ésta es única diremos que es compatible determinado, si hay más de una compatible indeterminado.

Conjunto imagen: el de las imágenes en una aplicación, también llamado recorrido. Se denota $Im(f)$.

Dominio de una función: Conjunto de valores x para los que está definida la función, es decir que existe $y = f(x)$. Suele indicarse con Dom (f).

Ecuación: Igualdad que se cumple para determinados valores de la incógnita. Ecuación lineal de la forma $ax + b = 0$.

Frecuencia absoluta: número de veces que se repite un resultado o suceso en un experimento estadístico.

Frecuencia acumulada: la que resulta de acumular las frecuencias absolutas.

Función: Aplicación cuyo dominio y recorrido son R o subconjuntos de R.

Función afín: función de la forma $y = mx + b$.

Función impar: en la que $f(-x)=-f(x)$, para cualquier x de su dominio. Su gráfica es simétrica respecto del origen de coordenadas.

Función racional: función real de variable real dada por el cociente de dos funciones polinómicas, $f(x)/g(x)$. Su dominio es la recta real excluyendo las raíces de $g(x)$.

Grado de un polinomio: mayor exponente al que aparece elevada la indeterminada.

Igualación: Método de resolución de sistemas de ecuaciones en el que despejada la misma incógnita en dos ecuaciones se igualan sus valores en ambas.

Imagen: Elemento del conjunto final que corresponde a uno del conjunto inicial en una aplicación.

Inyectiva: Una aplicación f : $A \rightarrow B$ es inyectiva si a elementos distintos de A corresponden elementos distintos de B $f(a) = f(b) \rightarrow a=b$.

Logaritmo: Logaritmo de un número en cierta base, exponente a que hay que elevar la base para obtener el número dado.

Moda: Medida de centralización en una distribución estadística, es el valor más repetido.

Ordenada: En un sistema de coordenadas cartesianas, segunda componente del par ordenado de números que determinan un punto del plano; se representa en el eje vertical.

Ordenada en el origen: punto $(0, n)$ en el que una recta, $y = mx + n$, corta al eje de ordenadas; siendo m la pendiente.

Parábola: Cónica, lugar geométrico de los puntos que equidistan de uno fijo llamado foco y de una recta llamada directriz.

Rectas paralelas: rectas en el mismo plano que no tienen ningún punto en común. Dos rectas paralelas tienen la misma pendiente.

Pendiente: De una recta, aumento o disminución de la ordenada de un punto de la recta, para un aumento de la abscisa de una unidad. Es la tangente del ángulo que forma la recta con el eje de abscisas.

Permutaciones: Una permutación de n elementos es una reordenación de esos n elementos. El número de permutaciones que se pueden hacer con n elementos es $n!$.

Probabilidad: De un suceso, cociente entre el número de casos favorables y el n^o de casos posibles en un experimento aleatorio.

Número racional: que puede escribirse en la forma a/b (b distinto de 0).Q

Reflexión: Simetría axial en el plano. dados un punto P y una recta r, el simétrico de P respecto a r es el punto P', tal que el segmento PP' es perpendicular a r y r corta a este segmento en el punto medio.

Reflexiva: Propiedad de las relaciones binarias que se cumple cuando cada elemento está relacionado consigo mismo.

Semejantes: Figuras que tienen la misma forma pero diferente extensión. Figuras cuyos ángulos homólogos son iguales y cuyos segmentos homólogos son proporcionales.

Términos semejantes: en un polinomio, términos con la misma parte literal.

Suceso: Cada uno de los subconjuntos del espacio muestral de un experimento aleatorio.

Variable: Elemento de un conjunto en el que está definida una función $y=f(x)$.

Variable independiente: x, puede tomar cualquier valor.

Variable dependiente: y, los valores que toma dependen de los que tome x.

+ + + + Bibliografía + + +

Allendoerfer, Carl; Oacley Cletus. Matemáticas Universitarias. Cuarta edición. Edición revisada. Editorial Mc Graw-Hill. Latino Americana, S.A., 1990.

De Burgos, Juan. Curso de Algebra y Geometría. Editorial Alhambra. Madrid, 1.980.

Deaño, Alfredo. Introducción a la lógica formal. Alianza Editorial. Madrid, 1970.

Dou, Alberto. Fundamentos de la matemática. Editorial Labor, S.A.; Barcelona, 1970.

Enciclopedia temática Planeta. Historia de la Ciencia, Matemáticas, Informática, Astronomía, Astronáutica. Editorial Planeta, S.A.; Barcelona, 1979.

Galicia Arrambide, Moisés. Introducción a la lógica matemática. McGraw Hill, México, 1976.

Gianella, Alicia. Lógica simbólica y elementos de metodología de las ciencias. Editorial "El Ateneo". Buenos Aires, 1980.

Hunter, Geoffrey. Metalógica. Introducción a la metateoría de la lógica clásica de primer orden. Paraninfo S.A.: Madrid, 1981.

Jaramillo, Alberto y otros. Modelos de Razonamiento Lógico-matemático. Implementados en situaciones problema, en algunos temas específicos de la Matemática. Colección educativa Aula abierta. 2001.

Keller, David. The Art of Reasoning with Symbolic Logic. W.W. Norton & Company. New York , London . 1990.

Kneller, George F. La lógica y el lenguaje en la educación. Editorial "El Ateneo". Buenos Aires, 1969.

Mejía, Clara Elena y Jaramillo A., Alberto. Diseño de algunas estrategias de intervención Pedagógica en el área de la lógica en la Educación Secundaria. Universidad de Antioquia, Facultad de Educación, Medellín, 1996.

Ministerio de Educación Nacional, Estándares Básicos por competencias, Bogotá, D.C. 2006.

Negro, Adolfo; Zorio, Valeriano. Cerca de la matemática (1). Editorial Alhambra, S.A. Madrid, 1975.

Rojo, Armando. Algebra I. Librería "El ateneo" Editorial. Buenos Aires, Argentina, 1983.

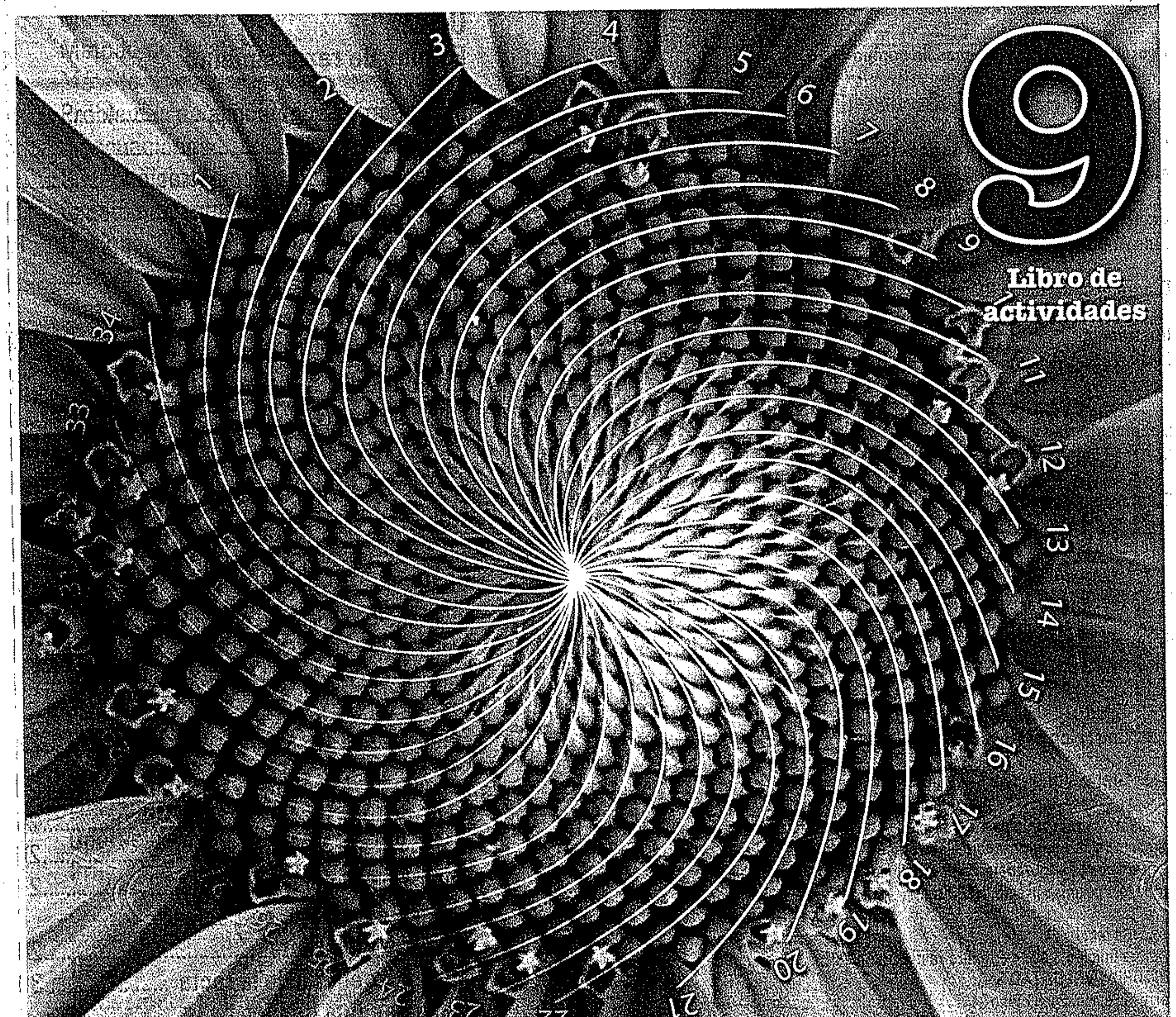
Solow, Daniel. Cómo entender y hacer demostraciones en matemáticas. Editorial Limusa. México, 1987.

Suppes, Patrick; Hill, Shirley. Primer curso de lógica matemática. Editorial Reverté Colombiana, S.A. Bogotá, 1983.

Suppes, Patrick. Introducción a la lógica simbólica. Editorial Continental. México, 1966.

Fórmula

Álgebra y geometría



9

Libro de actividades

VOLUNTAD

El libro de actividades **Fórmula de Noveno grado** para la Educación Básica ha sido elaborado según el plan de la Empresa Editorial y bajo su responsabilidad por las siguientes personas del Departamento de Investigación Educativa de **EDITORIAL VOLUNTAD S. A.**

Autoría: Luis Daniel León Barrero
Licenciado en Matemáticas

Johanna Andrea Fuentes Díaz
Licenciada en Matemáticas

Edición: Víctor Hernando Ardila Gutiérrez
Licenciado en Matemáticas

Coordinación de las pruebas de campo
Andrea Escobar Vilá
Especialista en Psicología del Consumidor

Coordinación de equidad de género y adecuación a la diversidad cultural : Miriam Cristy León Acosta

Diseño gráfico y coordinación de diagramación
Gina Andrea Navas Negret

Diagramación: Diego Sánchez Cristancho

Ilustración
Fernán Pérez Amaya
Gonzalo Ocho Martínez

Documentación gráfica
Martha Liliana Robayo Méndez

Diseño de carátula: Gonzalo Ochoa Martínez

Dirección de arte: Jorge Alberto Osorio Villa
Especialista en Gerencia de Proyectos
diseno@voluntad.com.co

Gerencia editorial
Carlos William Gómez Rosero M. Sc.

ISBN Tomo 978-958-02-2690-1
ISBN Colección 978-958-02-2580-0

Depósito legal
Primera edición, 2009 • Primera reimpresión, 2009
EDITORIAL VOLUNTAD S. A.
Carrera 7a. No. 24-89 Piso 24
Teléfono 2410444 - Fax 2410439
Bogotá, D. C. - Colombia.
www.voluntad.com.co
Sus comentarios comuníquelos al área de Matemáticas.
voluntad@voluntad.com.co
Impreso en Colombia por Cargraphics S.A.
Printed in Colombia.

{Tabla de contenido}

Unidad 1

Formas de razonamiento

La lógica es la ciencia que estructura la base del razonamiento, pues gracias a ella desarrollamos mayor agudeza en el análisis de la argumentación. Nos proporciona principios para decidir qué tipo de evidencia es apropiada en una situación particular, y nos fija principios para determinar qué peso tiene una pieza dada como evidencia. En conclusión, es una herramienta de gran ayuda en la toma de decisiones y en la solución de problemas.

Entendemos por razonar la acción de ordenar las ideas en la mente para llegar a una conclusión.

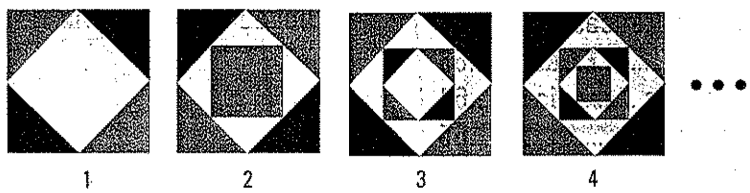
Razonar en matemáticas tiene que ver con:

- Dar cuenta del cómo y del porqué de los procesos que se siguen para llegar a conclusiones.
- Justificar las estrategias y los procedimientos puestos en acción en el tratamiento de problemas.
- Formular hipótesis, hacer conjeturas y predicciones, encontrar contraejemplos, usar hechos conocidos, propiedades y relaciones para explicar otros hechos.
- Encontrar patrones y expresarlos en forma matemática.
- Utilizar argumentos propios para exponer ideas, comprendiendo que las matemáticas más que una memorización de reglas y algoritmos, son lógicas y potencian la capacidad de pensar.

Tomado de lineamientos curriculares, MEN.

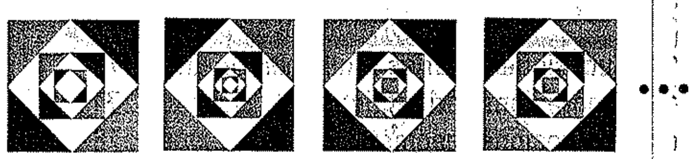
Prueba que sabes

Teniendo en cuenta la siguiente secuencia:



De las siguientes opciones la que va en la posición 6 es:

A. B. C. D.



Justifica la lógica de tu respuesta.

Logro: argumentar con propiedad razonamientos lógicos y algebraicos en el desarrollo de demostraciones por métodos de inducción y deducción.

Inducción y deducción

COMPARTE LO QUE SABES

¿Quién utilizó por primera vez los métodos de inducción y deducción? ¿Para que los usó?

Razonamiento inductivo

Se mueve de lo particular a lo general, realiza observaciones particulares en forma de premisas y luego razona a partir de estas premisas para obtener una conclusión general.

Ejemplos

1. Después de observar repetidas veces que el alcohol altera la capacidad en una persona para manejar un vehículo, un joven tomó la decisión de no tomar si va a manejar debido a los riesgos que puede correr.

2. Observa:

   $3^2 - 2^2 = 5$

   $4^2 - 3^2 = 7$

   $5^2 - 4^2 = 9$

   $6^2 - 5^2 = 11$

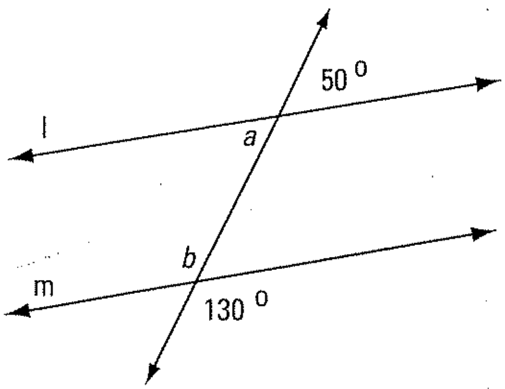
   ¿Qué se obtiene al efectuar la operación $10\,000^2 - 9\,999^2$?

Razonamiento deductivo

El razonamiento deductivo, también llamado demostración o prueba, es el razonamiento a partir de hechos demostrados, utilizando pasos lógicamente válidos para llegar a una conclusión.

Ejemplo

Hallar la medida de cada ángulo. ¿La recta *l* es paralela a la *m*? Explica tu razonamiento.



Razonamiento

$a = 50°$ por la definición de ángulos opuestos por el vértice.

$b = 130°$ por definición de ángulos opuestos por el vértice.

Las rectas son paralelas por la definición de ángulos correspondientes.

PRÁCTICA EN CONTEXTO

Razonamiento

1. Observa las siguientes pirámides:

¿Cuántos cuadrados se necesitaran para construir una pirámide que tenga 10 cuadrados en la base?

2. De la observación de casos se ha encontrado que:

$$1 + 2 + \dots n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Muestra que se cumple para los diez primeros números naturales.

3. En cada caso observa la serie de números y calcula los siguientes tres números:

   a. 1, 3, 6, 10, 15, 21, …

   b. 1, 4, 9, 16, 25, 36, …

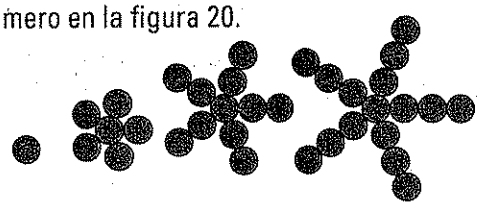
   c. 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, …

4. Usa la regla dada para generar los próximos cinco términos de la secuencia.

$$2, 5, 9, 14, \dots, \frac{n(n+3)}{2}$$

Modelación y razonamiento

5. Halla la regla para encontrar el número de círculos en la figura número n y úsala para hallar tal número en la figura 20.

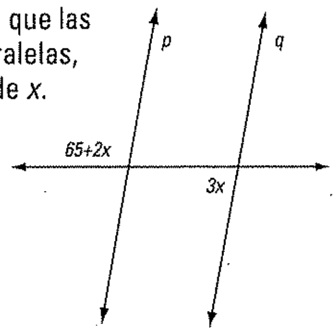


Número de figura	1	2	3	4	...	n	...	20
Número de círculos	1	6	11	16	...		...	

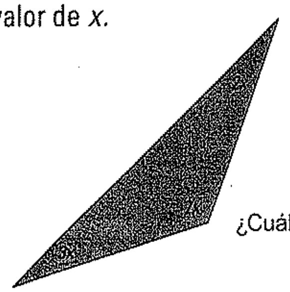
¿Usaste razonamiento inductivo o deductivo para contestar esta pregunta?

Interpretación de gráficas y razonamiento

6. Teniendo en cuenta que las rectas p y q son paralelas, encuentra el valor de x.



7. Los ángulos interiores de un triángulo dependen del valor de x.



¿Cuál es el valor de x?

Interpretación de enunciados. Razonamiento.

8. Analiza la siguiente secuencia:
B1C3D5E7F9...

Encuentra los 5 términos siguientes.

9. Una familia se subió a una barca. En total pesaban 150 kg. El padre pesaba el doble que la madre y el hijo sólo un tercio de lo que pesó la madre.

¿Cuál de las alternativas es correcta?

- La madre pesó 50 kg.
- El niño pesó 10 kg.
- El padre pesó 75 kg.
- El padre y el niño pesaron juntos 115 kg.
- La madre y el padre juntos pesaron 135 kg.

10. Determina la conclusión del siguiente análisis:

Si $a \in \mathbb{R}$ y $a \neq 1$.

Observación 1:

$$(1-a)(1+a) = 1-a^2$$

Observación 2:

$$(1-a)(1+a+a^2) = 1-a^3$$

Observación 3:

$$(1-a)(1+a+a^2+a^3) = 1-a^4$$

Observación 4:

$$(1-a)(1+a+a^2+a^3+a^4) =$$

Observación general:

$$(1-a)(1+a+a^2+a^3+a^4+\ldots+a^n) =$$

Solución de problemas

11. Estos son los objetos de Camila, Andrés y Felipe. Averigua el nombre del dueño de cada juguete teniendo en cuenta que las siguientes proposiciones son verdaderas.

a. El juguete de Felipe no es el de la mitad.

b. El juguete de Camila no está a la izquierda de otro juguete.

Logro: reconocer y aplicar la ley del silogismo como herramienta para deducir proposiciones.

Ley del silogismo

Comparte lo que sabes

¿Qué es una proposición? ¿Qué es una premisa?

Ley del silogismo

Cada vez que se tengan como premisas proposiciones de la forma de la forma $P \to Q$ y $Q \to R$, se puede deducir que $P \to R$.

En símbolos:

$$\begin{array}{c} P \to Q \\ \underline{Q \to R} \\ P \to R \end{array}$$

Ejemplo Si sigue aumentando la temperatura en el planeta, entonces habrá desórdenes climáticos.

Si hay desórdenes climáticos, entonces el campo sufrirá grandes pérdidas económicas.

Conclusión: Si sigue aumentando la temperatura en el planeta, entonces el campo sufrirá grandes pérdidas económicas.

Práctica en contexto

Razonamiento

1. Determina en cada caso la conclusión correspondiente:

a. $P \to Q$: si voy al colegio entonces paso por la biblioteca.

$Q \to R$: si paso por la biblioteca entonces consultaré la tarea de matemáticas.

Conclusión:

b. $P \to Q$: si Juan es bogotano, es colombiano.

$Q \to R$: si es colombiano, es americano.

Conclusión:

c. $P \to Q$: si el precio del dólar baja entonces el precio de los vehículos baja.

$Q \to R$: si el precio de los vehículos baja entonces habrá más demanda de este producto.

Conclusión:

2. En cada caso plantea proposiciones que hagan verdadera la conclusión dada.

a. $P \to Q$: ____________________

$Q \to R$: ____________________

Conclusión:

Si la temperatura disminuye, entonces sufrirás una hipotermia.

b. $P \to Q$: ____________________

$Q \to R$: ____________________

Conclusión:

Si hay un terremoto en Bogotá, entonces las construcciones se derrumbarán fácilmente.

c. $P \to Q$: ____________________

$Q \to R$: ____________________

Conclusión:

Si una figura tiene todos sus ángulos y lados congruentes, entonces es un polígono regular.

Tema 3

Método directo de demostración

Logro: identificar y aplicar el método directo en el análisis y demostración de proposiciones.

COMPETENCIA ARGUMENTATIVA: utiliza el método directo como estrategia en la demostración de proposiciones

Comprueba lo que sabes

¿Cómo podrías demostrar que el conjunto de los números naturales es un conjunto infinito?

Si se quiere demostrar que A entonces B; se examinan los elementos que aparecen en la proposición A, y, fijando la atención en la proposición B, se intenta analizarlos minuciosamente para poder deducir B.

Para probar que la proposición "Si A entonces B" es verdadera, lo primero que se debe hacer es reconocer cuál es la proposición A y cuál la B. Por lo general, todo lo que está entre las palabras "si" y "entonces" constituye la proposición A, y todo lo que está después de "entonces", la B.

Otra forma de reconocerlo: todo lo que se supone que es cierto, o sea, la hipótesis, es A y todo lo que se tiene que probar que es cierto, o sea, la tesis, es B.

Ejemplo

Demostrar la siguiente proposición utilizando el método directo.

Si a y b son números pares entonces $a+b$ es un número par.

Supongamos que a y b son números pares. Luego $a = 2n$, con $n \in Z$, y $b = 2k$, con $k \in Z$, por la definición de número par.

Luego: $a + b = 2n + 2k$

Y al factorizar: $a + b = 2(n + k)$.
Entonces por definición, a + b es un número par.

Práctica en contexto

Razonamiento

1. Justifica cada uno de los pasos que se exponen en la siguiente demostración.

"Si a, b y c son enteros consecutivos entonces la suma $a + b + c$ es un múltiplo de tres."

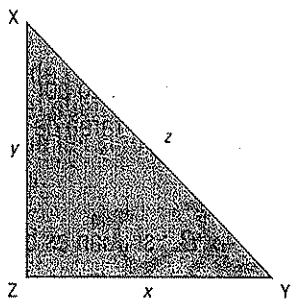
Supongamos que a, b y c son enteros consecutivos y que:

- $a = n$, $b = n+1$, $c = n+2$, para $n \in Z$
- $a+b+c = n+(n+1)+(n+2)$
- $a+b+c = 3n+3$
- $a+b+c = 3(n+1)$

2. En cada caso demuestra la proposición utilizando el método directo.

a. Si a es un número impar, entonces su cubo también es impar.

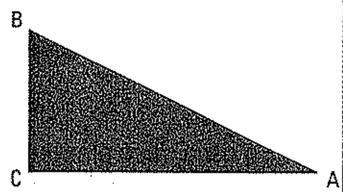
b. Si el triángulo rectángulo XYZ de catetos x e y, e hipotenusa z tiene de área $\frac{z^2}{4}$, entonces es isósceles.



c. Si $a, b, c \in \mathbb{R}/$: $a < b$ y $c > 0$, entonces:

$$a \cdot c < b \cdot c$$

d. Si ABC es un triángulo rectángulo con $\measuredangle C$ recto, entonces $\measuredangle A$, $\measuredangle B$ son complementarios.



Logro: identificar y aplicar el método indirecto en el análisis y demostración de proposiciones.

Método indirecto de demostración

COMPARTE LO QUE SABES

¿Se podría demostrar por el método directo que dos de los lados de un triángulo isósceles son iguales? Explica.

Método indirecto

Este método se basa en que una proposición es equivalente a su contrarrecíproca:

$(p \to q) \leftrightarrow (\sim q \to \sim p)$

En el método indirecto se fija la atención en la tesis B y, no perdiendo de vista la hipótesis A, se van buscando situaciones intermedias en las que B podría deducirse. Cuando se haya encontrado, se asegura que el camino contrario es correcto.

Ejemplo

Probar que si n^2 es impar entonces n es impar.

Por el método indirecto debe preguntarse, ¿si n es par, n^2 es par?

Prueba: como n es par entonces puede escribirse como: $n = 2q$, así que: $n^2 = 4q^2$, lo cual indica que n^2 es par.

Esto quiere decir que la contrarrecíproca es válida, por tanto el teorema también lo es. Así que si n^2 es impar entonces n es impar.

Reducción al absurdo

En este caso de demostración indirecta se asume A verdadera y se niega a B intentando llegar a algo ilógico, que se conoce como contradicción.

Método de reducción al absurdo o contradicción para proposiciones del tipo A, entonces B	Si es par entonces a es par.
1. Se niega B y se asume como verdadera. 2. A partir de las premisas, de la teoría y de la hipótesis auxiliar se razona por el método directo, hasta obtener una conclusión. 3. Se muestra que no pueden ser ciertas la afirmación y la negación de una misma proposición, es decir, se encuentra una contradicción. 4. Se concluye que B es cierta.	1. Supongamos que a no es par, entonces: $a = 2n + 1,\ n \in Z$: Definición de número impar. 2. $a^2 = (2n+1)^2$: Elevamos al cuadrado. $a^2 = 4n^2 + 4n + 1$ Desarrollo de potencias. $a^2 = 2(2n^2 + 2n) + 1$ Factorizando. Conclusión: a^2 es impar. 3. Se llega a una contradicción, pues se aceptaba que a^2 es par. 4. Conclusión: a es par.

PRÁCTICA EN CONTEXTO

Razonamiento

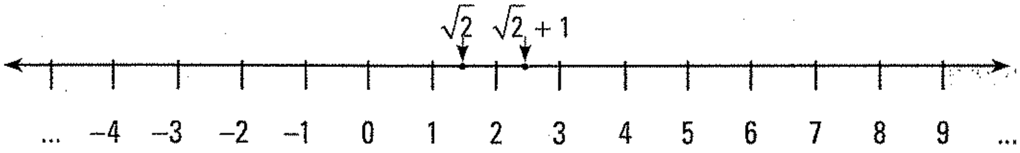
1. Si consideramos *"A entonces B"* como implicación directa, están asociadas las siguientes implicaciones: *"B entonces A"* llamada *implicación recíproca* y *"no B entonces no A"* llamada *implicación contrarrecíproca.* Para cada enunciado escribe su recíproco y su contrarrecíproco.
   a. Si una figura plana es un cuadrado, entonces es un rombo.
   b. Si una figura plana es un cuadrado, entonces es un rectángulo.
   c. Si una figura plana es un rectángulo, entonces es un paralelogramo.
   d. Si un triángulo tiene dos ángulos iguales, entonces es isósceles.

2. Utiliza el método de demostración indirecta en cada caso.
   a. Para a y $b \in \mathbb{R}$, si $a \cdot b = 0$ entonces $a = 0$ ó $b = 0$.
   b. Si x es un número real tal que $x^2 = 2$, entonces x, no es racional.
   c. Si $x = 2$, entonces $3x^2 - 7x + 2 = 0$

Pruebas de

Prueba Saber

1. En la recta numérica que se muestra se han localizado dos números reales $\sqrt{2}$ y $\sqrt{2}+1$.



La proposición "entre $\sqrt{2}$ y $\sqrt{2}+1$ es posible encontrar otro número irracional" es:

a. Falsa, porque $\sqrt{2}+1$ es el siguiente de $\sqrt{2}$.

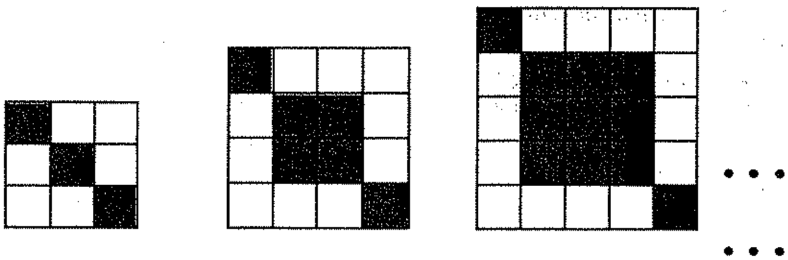
b. Verdadera porque un irracional que está entre $\sqrt{2}$ y $\sqrt{2}+1$ es $\sqrt{3}$.

c. Falsa, porque sólo se puede ubicar racionales entre $\sqrt{2}$ y $\sqrt{2}+1$.

Prueba PISA

Una empresa encargada de diseñar y vender modelos de embaldosados, lanzó al mercado su nueva línea llamada "cuadrícula", la cual se caracteriza por su distribución de baldosas cuadradas blancas y negras conformando diferentes tamaños y diseños.

Las siguientes gráficas representan algunos de los modelos que dispone la empresa:



Tamaño 3 Tamaño 4 Tamaño 5

2. Teniendo en cuenta que cada baldosa es de 0, 5 m de lado, el perímetro de cada diseño dependiendo del tamaño, está dado por la siguiente serie de valores:

a. 0, 5; 1; 1; 5; 2; 2; 5.....

b. 6, 12, 18, 24.....

c. 6, 8, 10, 12, ...

d. 6, 9, 12, 15, ...

3. Un cliente quiere instalar en su patio el tamaño 11, así que debe comprar:

a. 34 baldosas blancas y 66 negras.

b. 36 baldosas blancas y 85 negras.

c. 38 baldosas blancas y 83 negras.

d. 42 baldosas blancas y 102 negras.

4. Según los modelos de que dispone la empresa es correcto afirmar:

a. El número de baldosas negras es igual al número de baldosas blancas sin importar el tamaño.

b. Si el perímetro aumenta, entonces el número de baldosas blancas disminuye.

c. En cualquier caso, el número de baldosas blancas es mayor que el número de baldosas negras.

d. A partir del tamaño 3, el número de baldosas blancas es menor que el de baldosas negras.

5. La expresión $n^2 - 4n + 6$, donde n es el tamaño del diseño, representa:

a. La cantidad de baldosas negras que se necesitan en cada diseño.

b. La cantidad de baldosas blancas que se necesitan en cada diseño.

c. El perímetro de cada diseño.

d. El área de cada diseño.

Prueba TIMSS

Carlos realizó el siguiente análisis para demostrar que si a^2 es un número impar entonces a es un número impar.

Supongamos que a^2 es un número impar.	**Hipótesis auxiliar.**
$a^2 = 2n + 1$ y $n \in \mathbb{N}$	**Definición de impar.**
$a = \sqrt{2n+1}$	**Tomando raíces cuadradas en la ecuación anterior.**

Conclusión: Como $2n + 1$ es impar, entonces $\sqrt{2n+1}$ es impar.

6. El método empleado por Carlos para construir su demostración se denomina:

a. Demostración por inducción.

b. Ley del silogismo.

c. Demostración directa.

d. Demostración indirecta.

7. El análisis de Carlos en la demostración es:

a. Correcto, ya que si $a^2 = 9$ entonces $a = 3$, luego se cumple la proposición

b. Correcta, porque se cumple para infinitos valores como $a^2 = \{1, 9, 25, 49, 81, \ldots\}$

c. Incorrecto, porque la raíz cuadrada de un número impar puede ser irracional.

d. Incorrecto, porque la raíz cuadrada de un número impar puede ser par o impar.

8. La contrarrecíproca de la proposición que Carlos intentó demostrar es:

a. Si a es un número impar entonces a^2 es un número impar.

b. Si a^2 no es un número impar entonces a no es un número impar.

c. Si a no es un número impar entonces a^2 no es un número impar.

d. Si a^2 no es impar entonces a^2 es un número par.

Unidad 2

Números reales

- Los griegos (VII a.e.c - VII d.e.c), establecieron los cimientos para la teoría de números y descubrieron las magnitudes irracionales. No conocían los números negativos.
- En la India (V - XV) se introdujeron los números negativos y operaron con magnitudes irracionales, sin representarlas geométricamente.
- Hacia 1500 el cero fue aceptado como un número y los números irracionales se usaban más libremente.
- Los matemáticos G. Cantor, R. Dedekind, K. Weiertrass y B. Bolzano fueron los que culminaron la obra, que duró medio siglo de investigaciones, sobre los números naturales, enteros, racionales e irracionales, que considerados juntos, constituyeron lo que se denominó el sistema de los números reales.

Si se representan los números racionales en una recta real se observa que algunos quedarán muy juntos; sin embargo, si se tiene en cuenta que aún falta representar los números irracionales, se puede intuir que en la representación mencionada quedarán huecos. Cuando agregamos los puntos que representan a los números irracionales la recta real queda completa.

Los números reales constituyen un conjunto completo ¡sin huecos! en la recta real.

Números reales $\mathbb{R}$

Conjunto conformado por

- Racionales $\mathbb{Q}$: Aquellos números que se pueden escribir como una fracción en el cual el numerador y el denominador son números enteros y el denominador siempre es diferente de cero.
  - *Conjunto conformado por*
  - Enteros $\mathbb{Z}$
    - *Conjunto conformado por*
    - negativos: {–1, –2, –3, –4, –5.......}
    - cero
    - positivos
      - naturales $\mathbb{N}$: {1, 2, 3, 4, 5.......}
  - Decimales
    - *Conjunto conformado por*
    - exactos: –2,5; 8, 7; 5, 371; –0, 1059
    - periódicos
      - puros: $2,\overline{6}$; $-3,\overline{9}$
      - mixtos: $-3,56\overline{7}$; $9,23\overline{481}$
- Irracionales $\mathbb{I}$: Aquellos números que se escriben como decimales infinitos no periódicos.
  - $\sqrt{2}$, π, $\sqrt[3]{5}$

PRUEBA QUE SABES

- ¿Cuál crees que fue la necesidad de crear el conjunto de los números naturales?
- ¿Es normal usar en la vida cotidiana los números racionales o sólo contribuyen al cálculo aritmético?
- ¿Los números racionales e irracionales se pueden expresar en forma decimal? ¿Cuál es la diferencia entre estos dos conjuntos numéricos?
- Si dos personas parten de un mismo punto, uno dos metros hacia el norte y el otro, un metro hacia el oriente, ¿cuál es la distancia mínima que los separa?

Logro: identificar y representar el conjunto de los números reales en la recta numérica.

Tema 1

La recta real

Comparte lo que sabes

¿Por qué $\sqrt{3}$ no es un número racional? Argumenta tu respuesta.

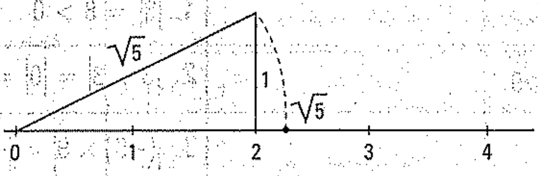
Representación de los irracionales en la recta real

Para representar el número $\sqrt{5}$, es posible utilizar el teorema de Pitágoras. Para esto, se construye un triángulo rectángulo de base 2 y altura 1, de esta manera se obtiene la medida de su diagonal la cual se rota sobre la recta real comenzando desde el origen como se muestra en la figura:

Base: 2

Altura: 1

Diagonal: $c = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$



Práctica en contexto

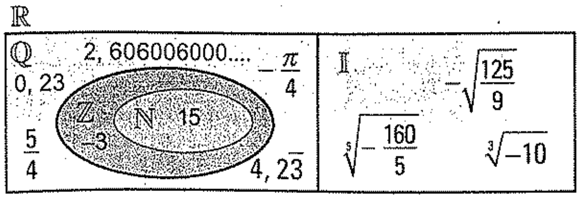
Razonamiento y comunicación

1. Coloca debajo de cada número una cruz indicando a qué conjunto numérico pertenece:

	$1+\sqrt{-3}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{-2}{5}$	π	$\frac{27}{10}$	$\frac{0}{3}$
$\mathbb{N}$						
$\mathbb{Z}$						
$\mathbb{Q}$						
$\mathbb{I}$						
$\mathbb{R}$						

2. Teniendo en cuenta el siguiente conjunto finito de números,

$T = \left\{15, -3, -\sqrt{\frac{125}{9}}, \sqrt[3]{-10}, \frac{5}{4}, 0, 23, -\frac{\pi}{4}, 4, 2\overline{3}, 2,606006000...., \sqrt[5]{-\frac{160}{5}}\right\}$, Felipe realizó un esquema clasificándolos de acuerdo con el conjunto numérico al que pertenecen, $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$, o $\mathbb{I}$.



a. ¿Se podría afirmar que Felipe clasificó correctamente los números? Justifica tu respuesta.

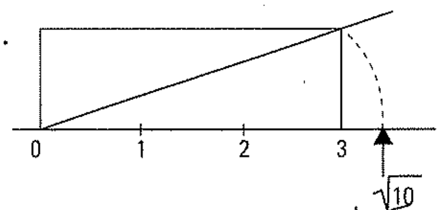
b. Ordena los elementos del conjunto T en forma ascendente.

c. Sobre una recta numérica representa de manera exacta o aproximada los elementos del conjunto T.

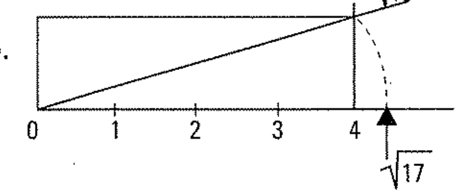
Modelación y comunicación

3. Justifica mediante el teorema de Pitágoras la representación de los siguientes números irracionales:

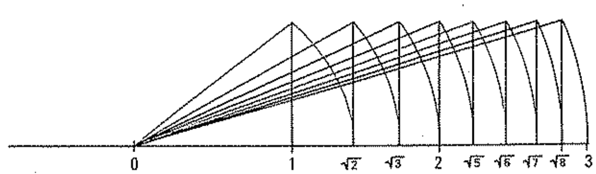
a.



b.



4. Halla tres números reales entre cada par de números representados en la siguiente recta.



COMPETENCIA ARGUMENTATIVA: Justifica relaciones de orden entre los números reales

Tema 2

Valor absoluto

Logro: calcular el valor absoluto de números reales y relacionarlo con situaciones que involucren el concepto de distancia.

El valor absoluto de un número real a representado por $|a|$, se define de la siguiente manera:

1. Si $a \geq 0$, entonces $|a| = a$.

2. Si $a < 0$, entonces $|a| = -a$

3. Si a y b son dos puntos en la recta numérica, la distancia de a a b es $d(a,b) = |b-a|$.

Propiedades del valor absoluto	Ejemplos
1. $\|a\| \geq 0$	**1.** $\|8\| = 8 > 0$
2. $\|a\| = 0$ si y sólo si $a = 0$	**2.** $\|3-3\| = \|0\| = 0$
3. $\|a \times b\| = \|a\| \times \|b\|$	**3.** $\|(-5) \times 9\| = \|-5\| \times \|9\| = 45$
4. $\left\|\frac{a}{b}\right\| = \frac{\|a\|}{\|b\|}$, con $b \neq 0$.	**4.** $\left\|\frac{-\sqrt{12}}{3}\right\| = \frac{\|-\sqrt{12}\|}{\|3\|} = \frac{\sqrt{12}}{3}$
5. $\|a-b\| = \|b-a\|$	**5.** $\left\|\frac{4}{3} - 2\right\| = \left\|2 - \frac{4}{3}\right\| = \left\|\frac{2}{3}\right\| = \frac{\|2\|}{\|3\|} = \frac{2}{3}$

Práctica en contexto

Procedimientos

1. Halla el valor absoluto de los siguientes números:

a. $|239|$ d. $|0,56|$ g. $|-12| - |61|$

b. $|\sqrt{7} - 4|$ e. $\left|\frac{7}{3} - 9\right|$ h. $|\sqrt[3]{-216}|$

c. $|-\sqrt[7]{-128}|$ f. $|\sqrt{5} - 2,3|$

2. Aplica las propiedades del valor absoluto para encontrar el resultado de las siguientes operaciones:

a. $\left|5 \times \left(-\frac{8}{10}\right)\right|$ d. $\left|\left(\frac{12}{5} - \frac{9}{15}\right)\left(-\frac{10}{18}\right)\right|$

b. $|0,45 - \sqrt{64}|$ e. $\left|\frac{(-10-70)}{15}\right|$

c. $|\sqrt[3]{25} \times \sqrt[3]{-5}|$ f. $\left|\frac{3}{7} - \sqrt[3]{\frac{27}{343}}\right|$

3. En cada caso se da un trío de números A, B y C. Encuentra:

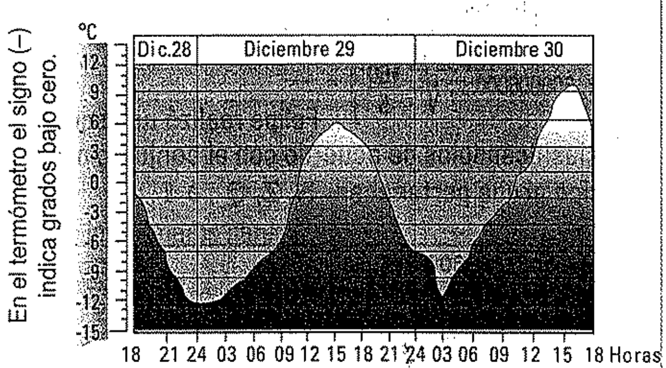
$d(A,B)$, $d(B,C)$, $d(A,C)$, $d(C,B)$

a. $3, 8, -5$ c. $\frac{7}{2}, -34, -0,5\overline{6}$

b. $-2, -\frac{3}{5}, -9$ d. $-\frac{5}{2}, -\frac{4}{10}, -\frac{1}{5}$

Solución de problemas

4. La siguiente gráfica muestra la variación de la temperatura en el Nevado del Cocuy en Boyacá desde las 18 horas del 28 de diciembre hasta las 18 horas del 30 de diciembre.



El 30 de diciembre a las 03 horas el termómetro marcó –11°C y a las 09 horas del mismo día marcó –3°C, ¿cuál fue la variación de la temperatura?

COMPETENCIA INTERPRETATIVA: aplica las propiedades del valor absoluto para explicar situaciones que involucren la noción de distancia.

Logro: analizar las relaciones de valor absoluto y aplicarlas en la solución de ecuaciones e inecuaciones.

Ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto

Comparte lo que sabes

Si el doble de la edad de Juan es mayor que 5 y se puede representar en forma algebraica como $2x > 5$, ¿qué valores enteros pueden entonces representar la edad de Juan? De acuerdo con el contexto, ¿sería lógico afirmar que x pueda tomar valores negativos?

Resolución de ecuaciones	Resumen de las soluciones para inecuaciones con valor absoluto	
Ejemplo Resolver $\lvert x\rvert = 5$ ¿Cuáles son los números cuyo valor absoluto es igual a 5? **Solución:** $x = 5$ ó $x = -5$	Desigualdad $(d > 0)$	Solución
	1. $\lvert x\rvert < d$	$-d < x < d$
	2. $\lvert x\rvert \leq d$	$-d \leq x \leq d$
	3. $\lvert x\rvert > d$	$x < -d$ ó $x > d$
	4. $\lvert x\rvert \geq d$	$x \leq -d$ ó $x \geq d$
Ejemplo Resolver $\lvert x - 4\rvert = 3$ Recordemos que $\lvert a - b\rvert$ geométricamente representa la distancia entre a y b, luego el problema consiste encontrar los números que están alejados a 3 unidades de 4. **Solución:** $x = 7$ ó $x = 1$	**Ejemplo** Resolver $\lvert x - 2\rvert < 4$ La inecuación involucra el signo <, luego la solución es de la forma 1. $-4 < x - 2 < 4$ $-4 + 2 < x - 2 + 2 < 4 + 2$, sumando 2 a cada lado. Luego, $-2 < x < 6$ La solución de la inecuación está dada por $x = (-2, 6)$	

Práctica en contexto

Modelación

1. Utiliza el símbolo de valor absoluto para expresar cada uno de los siguientes enunciados:

a. La distancia entre x y 8 es 5.

b. x está entre -6 y 6 pero no es 6 ni -6.

c. x no está a más de 9 unidades de -5.

d. $x + 2$ está a menos de 4 unidades de 23.

e. x es mayor que 11 o menor que -11.

Procedimientos

2. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a. $|a - 3| = 5$

b. $|3x - 6| = x$

c. $|x - 14| = x - 14$

d. $|9x - 2| = 0$

e. $\left|\frac{x}{3} - 5\right| = 4$

3. Resuelve las siguientes inecuaciones:

a. $|x| < 1$

b. $|x - 3| < 5$

c. $|5x - 8| \leq 1$

d. $|6x + 1| \geq 0$

e. $\left|\frac{3}{4}x - 1\right| \leq 3$

Solución de problemas

4. Expresa en forma de valor absoluto la siguiente situación:

La diferencia de temperatura entre dos sustancias que se están mezclando no debe ser menor que 8°C ni mayor que 15°C.

COMPETENCIA ARGUMENTATIVA: justifica en forma algebraica y geométrica la solución de ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto.

Tema 4

Exponentes enteros, racionales y propiedades

Logro: aplicar las propiedades de los exponentes y radicales en la solución de situaciones en contextos matemáticos o de otras ciencias.

Comparte lo que sabes

¿Por qué el área de un terreno se expresa en unidades cuadradas?

Existen números reales que representan cantidades muy grandes o muy pequeñas de uso frecuente en campos como la física, la química, la economía o la astronomía, por ejemplo:

Unidad	Forma decimal	Forma expotencial (Notación científica)
Masa de un átomo de hidrógeno	0, 000 000 000 000 000 000 000 001 7 g	$1,7 \times 10^{-24}$ g
Masa del Sol	1 083 000 000 000 kg	$1,083 \times 10^{12}$ kg
Año luz: distancia recorrida por la luz en el año en el vacío.	9 460 700 000 000 km	$9,460\,7 \times 10^{12}$ km

Dado lo incómodo que resulta trabajar con estos números en forma decimal, la matemática proporcionó a dichas ciencias una notación que permite simplificar y agilizar los cálculos con los números mencionados. En esta sección se analiza con detenimiento el estudio de los exponentes enteros y racionales.

Regla de los exponentes enteros	Radicales y exponentes racionales
Para los números reales *a* y *b*, con *m* y *n* enteros:	1. $a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$
1. $a^m \times a^n = a^{m+n}$	2. $a^{\frac{m}{n}} = \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, si $a > 0$ cuando n es par.
2. $\left(a \times b\right)^m = a^m \times b^m$	**Reglas para los radicales:**
3. $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$, con $b \neq 0$.	Dado que $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[n]{b}$ son reales:
4. $\left(a^m\right)^n = a^{m \times n}$	1. $\sqrt[n]{a^n} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$
5. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, con $a \neq 0$.	2. $\sqrt[n]{a \times b} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$
6. $a^0 = 1$, con $a \neq 0$.	3. $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$, $b \neq 0$
7. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, con $a \neq 0$.	Nota: se debe satisfacer que:
8. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$, con $a \neq 0$ y $b \neq 0$.	$a \geq 0$, $b \geq 0$ si *n* es par.

Práctica en contexto

Procedimientos

1. Halla el valor de la expresión dada sin la ayuda de la calculadora. Escribe la repuesta en forma de decimal y en notación científica.

a. $(4\,000)^2 \times (200\,000)^3 \times (0,0000000006)$

b. $\left[(3\,000\,000)^{-1} \times (0,000027)\right]^{-1}$

c. $\dfrac{(40\,000)^2}{(8\,000\,000) \times (0,0004)^8}$

2. Determina la fracción irreducible correspondiente a cada una de las siguientes expresiones:

a. $\dfrac{6^2 \times 3^5 \times 2^4}{6^7}$

b. $\dfrac{-3^{-2}}{\left(1+\dfrac{5}{3}\right)^2}$

c. $\dfrac{7 + 4^{-1}}{3 \times 4^{-1}}$

d. $\dfrac{-25^6 \times 14^{10} \times (-8)^0}{(-7)^{10} \times 10^{10}}$

e. $\left[\dfrac{4^2 \times 5^5 \times 16^2}{2^4 \times 10^{10}}\right]^{-2}$

f. $\dfrac{6^3 + 6^5 - \left(\dfrac{1}{216}\right)^{-1}}{6^4 \times 3}$

3. Simplifica cada una de las expresiones dadas de modo que sólo queden exponentes positivos. Supón que todas las variables son positivas y todos los denominadores son diferentes de cero.

a. $\left(-16x^{-3}y^8\right)\left(2^{-3}x^7y^{-10}\right)$

b. $\left(-24x^{-3}y^4z\right) \div \left(2^3x4y^{-6}\right)$

c. $\left(\dfrac{m^{-3}n^{-4}p^{-6}}{m^4n^2p^0}\right)^{-5}$

d. $\left(\dfrac{3^{-1}w^{-1}z^{-15}}{6^{-2}w^4n^{-9}}\right)^{-2}$

4. Simplifica cada expresión y escribe la respuesta en forma de radicales:

a. $a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{2}{5}}$

b. $\dfrac{x^{\frac{4}{9}}}{x^{\frac{1}{12}}}$

c. $y^{-\frac{4}{3}} \times y^6$

d. $\dfrac{m^{-\frac{4}{5}}}{m^{-\frac{3}{5}}}$

e. $z^{-\frac{3}{5}} \times z^{\frac{1}{10}}$

f. $\left(\dfrac{n^{-\frac{10}{3}}}{n^0}\right)^{-\frac{6}{5}}$

5. Simplifica los siguientes radicales:

a. $\sqrt{24x^5y} \times \sqrt{6xy}$

b. $\sqrt{63w^7z^5} \times \sqrt{28w^{-3}z^2}$

c. $\sqrt[3]{16m^{12}n^6} \cdot \sqrt[3]{3m^2n^{12}}$

d. $\sqrt{\dfrac{12x^3y^{12}}{27x^5y^8}}$

e. $\sqrt[4]{\dfrac{32p^{11}q^5}{162p^3q^7}}$

f. $\dfrac{\sqrt[3]{-25m^3n^4}}{\sqrt[3]{3\,125n^7}}$

Comunicación y razonamiento

6. Dado el siguiente conjunto numérico:

$$\left\{ \sqrt[3]{-8},\ \sqrt[6]{-729},\ \sqrt[7]{-1},\ \sqrt[4]{1},\ \sqrt{32},\ \sqrt{-49},\ \sqrt{0} \right\}$$

¿Es correcto afirmar que es un subconjunto de los números reales?

Solución de problemas

7. Interés compuesto: Si se invierte un capital C (en pesos), durante n años con un interés anual (i), el capital futuro acumulado (S) está dado por $S = C(1+i)^n$ y el interés (I) ganado es $I = S - C$. Encuentra S e I para cada capital teniendo en cuenta el tiempo y el interés anual.

a. \$ 2 400 000 a cinco años con un interés del 15 %.

b. \$ 1 000 000 a 8 años con un interés del 10 %.

c. \$ 2 500 000 a 3 años con un interés del 9,5 %.

d. \$ 15 000 000 a 10 años con un interés del 8 %.

8. Publicidad y ventas: Imagina que se determinó que las ventas de un libro disminuyen luego de terminar una campaña publicitaria con ventas diarias que se determinan mediante:

$$C(t) = 25\,000 \times 2^{\left(-\frac{1}{10}\right)t}$$

Donde C se mide en pesos y t es el número de días después de finalizar la campaña.

a. ¿Cuáles son las ventas diarias 5 días después de finalizada la campaña?

b. ¿Cuánto capital se debe contabilizar al cabo de 10 días de finalizada la campaña?

Tema 5

Operaciones con radicales

Logro: simplificar radicales y calcular sus operaciones básicas.

COMPETENCIA ARGUMENTATIVA: simplifica radicales haciendo uso de procesos algebraicos y numéricos

Comparte lo que sabes

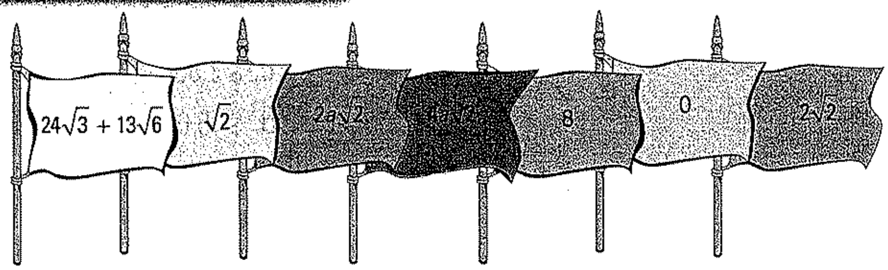
¿Cuál es la longitud de la arista de un cubo que tiene como volumen $8\ m^3$?

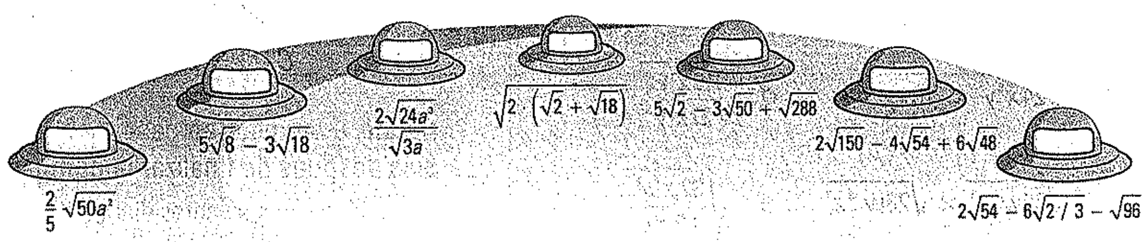
Ejemplo de simplificación de radicales	Operaciones con radicales
Expresar en su forma más simple cada uno de los siguientes radicales: a. $\sqrt{84}$ b. $\sqrt[3]{40}$ c. $\sqrt[5]{-96}$ **Solución** a. $\sqrt{84} = \sqrt{2^2 \times 3 \times 7} = 2\sqrt{21}$ b. $\sqrt[3]{40} = \sqrt[3]{2^3 \times 5} = 2\sqrt[3]{5}$ c. $\sqrt[5]{-96} = -\sqrt[5]{2^5 \times 3} = -2\sqrt[5]{3}$	a. Calcular $\sqrt{90} + \sqrt{160}$ $\sqrt{90} + \sqrt{160} = \sqrt{9 \times 10} + \sqrt{16 \times 10} = 3\sqrt{10} + 4\sqrt{10} = 7\sqrt{10}$ b. Calcular $\sqrt{54} - \sqrt{150}$ $\sqrt{54} - \sqrt{150} = \sqrt{9 \times 6} - \sqrt{25 \times 6} = 3\sqrt{6} - 5\sqrt{6} = -2\sqrt{6}$ c. Calcular $\sqrt{3}\left(\sqrt{6} - 5\right)$ $\sqrt{3}\left(\sqrt{6} - 5\right) = \sqrt{18} - 5\sqrt{3} = 3\sqrt{2} - 5\sqrt{3}$ d. Calcular $\sqrt[4]{8} \times \sqrt[6]{32}$ Como el $\text{m.c.m.}(4, 6) = 12$, entonces: $\sqrt[4]{8} \times \sqrt[6]{32} = \sqrt[12]{8^3} \times \sqrt[12]{32^2} = \sqrt[12]{\left(2^3\right)^3 \times \left(2^5\right)^2} = \sqrt[12]{2^9 \times 2^{10}} = \sqrt[12]{2^{19}}$ $= \sqrt[12]{2^{12} \times 2^7} = 2\sqrt[12]{2^7} = 2\sqrt[12]{128}$

Práctica en contexto

Procedimientos

1. Relaciona cada base con la respuesta que se encuentra en las banderas:





2. Simplifica en cada caso las expresiones:

a. $-3\sqrt{a} - \sqrt{a} + 2\sqrt{a}$ c. $\sqrt{18} + 5\sqrt{8}$

b. $\sqrt{54} - 3\sqrt{24}$ d. $\frac{2}{3}\sqrt{x} - \sqrt{x}$

3. Multiplica en cada caso y luego simplifica:

a. $\sqrt{5} \times \left(\sqrt{5} + \sqrt{8}\right)$ c. $\left(\sqrt{n} + \sqrt{5}\right) \times \left(\sqrt{n} - \sqrt{5}\right)$

b. $\sqrt{n} \times \left(\sqrt{n} - 6\right)$ d. $\left(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{q}\right)\left(\sqrt[3]{81} + \sqrt[3]{9}\sqrt[3]{q} + \sqrt[3]{q^2}\right)$

Racionalización

Logro: racionalizar expresiones matemáticas.

Comparte lo que sabes

¿Son equivalentes las fracciones $\dfrac{\sqrt{x}}{2}$ y $\dfrac{x}{2\sqrt{x}}$? Compruébalo dándole un valor a x y operando.

Al procedimiento de eliminar los radicales del numerador o del denominador de una expresión fraccionario se le denomina racionalización.

Racionalizar el denominador

Ejemplo

Racionalizar $\dfrac{2}{\sqrt{6}}$

Solución

$\dfrac{2}{\sqrt{6}} \times \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}$, se multiplica y divide por el radical que se va a racionalizar y luego se simplifica:

$$\frac{2}{\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{6 \times 6}} = \frac{2\sqrt{6}}{6} = \frac{1}{3}\sqrt{6}$$

Ejemplo

Racionalizar $\dfrac{5}{\sqrt{x} - \sqrt{8}}$

Solución

$\dfrac{5}{\sqrt{x} - \sqrt{8}} \times \dfrac{\sqrt{x} + \sqrt{8}}{\sqrt{x} + \sqrt{8}}$, para eliminar los radicales del denominador se multiplica por $\sqrt{x} + \sqrt{8}$ y luego se simplifica:

$$\frac{5}{\sqrt{x} - \sqrt{8}} \times \frac{\sqrt{x} + \sqrt{8}}{\sqrt{x} + \sqrt{8}} = \frac{5\sqrt{x} + 5\sqrt{8}}{x - 8} = \frac{5\sqrt{x} + 10\sqrt{2}}{x - 8}$$

Racionalizar el numerador

Ejemplo

Racionalizar $\dfrac{\sqrt{3}}{15}$

Solución

$$\frac{\sqrt{3}}{15} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{3}{15\sqrt{3}} = \frac{1}{5\sqrt{3}}$$

Ejemplo

$$\frac{\sqrt{2 + x} - \sqrt{x}}{2}$$

Solución

$$\frac{\sqrt{2 + x} - \sqrt{x}}{2} \times \frac{\sqrt{2 + x} + \sqrt{x}}{\sqrt{2 + x} + \sqrt{x}} = \frac{2 + x - x}{2 \times \left(\sqrt{2 + x} + \sqrt{x}\right)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2 + x} + \sqrt{x}}$$

Práctica en contexto

Procedimientos

1. Racionaliza el denominador de cada expresión:

a. $\dfrac{2}{\sqrt{14}}$ b. $\dfrac{12\sqrt{b}}{3\sqrt{2} - \sqrt{b}}$ c. $\dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{8}}$ d. $\dfrac{\sqrt{3} - \sqrt{12}}{\sqrt{12} + \sqrt{3}}$ e. $\dfrac{3}{\sqrt{6 - h}}$ f. $\dfrac{2\sqrt{m} + 5\sqrt{n}}{3\sqrt{m} - \sqrt{n}}$

2. Racionaliza el numerador de cada expresión:

a. $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{8}}$ b. $\dfrac{\sqrt{p} - \sqrt{q}}{\sqrt{q} + \sqrt{p}}$ c. $\dfrac{\sqrt{2(m + n)} - \sqrt{2n}}{m}$ d. $\dfrac{\dfrac{7}{\sqrt{x + h}} - \dfrac{7}{\sqrt{h}}}{x}$

3. Simplifica y expresa la respuesta de manera que no aparezcan radicales en el denominador:

a. $\dfrac{5}{1 + \sqrt{2}} - \dfrac{4}{2 + \sqrt{3}}$ b. $\dfrac{x + 9}{1 - \sqrt{x}} - \dfrac{10}{1 - \sqrt{x}}$

Pruebas de

Prueba Saber

1. El número real $\frac{2-\pi}{2}$ está en el intervalo:

a. $(-1, 0)$ y es un número irracional.

b. $(-1, 0)$ y es un número racional.

c. $(-4, -3)$ y es un número irracional.

d. $(-4, -3)$ y es un número racional.

2. Un estudiante analiza las siguientes expresiones $5x$ y $5 + x$, donde x pertenece a los números reales. Respecto a las dos expresiones es correcto afirmar:

a. El producto de cinco por cualquier número real es siempre mayor que el número.

b. El producto de cinco por cualquier número negativo siempre es menor que el número.

c. Al sumar un número negativo con cinco el resultado siempre es negativo.

d. Cualquier número negativo al sumarlo con cinco da como resultado un número positivo.

3. Otro estudiante decide analizar la siguiente expresión: $5x - (x + 5)$ y afirma correctamente que la expresión es:

a. Positiva cuando x es positiva.

b. Negativa cuando x es menor que 1, 25.

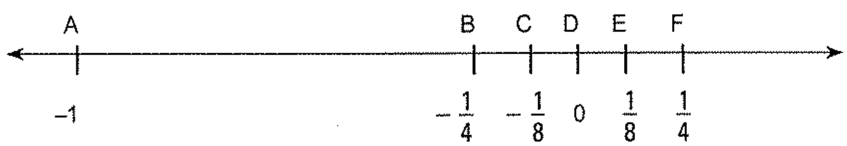
c. Siempre diferente de cero.

d. Es cero cuando x toma el valor de 5.

Pruebas TIMSS

Responde las preguntas 4 a 8 teniendo en cuenta la informacion.

En la recta numérica se han señalado algunos puntos con sus respectivas coordenadas:



4. Si P y Q son los puntos medios de $\overline{BC}$ y $\overline{EF}$ respectivamente, entonces la distancia d (P, Q) es:

a. $\frac{3}{16}$ b. $\frac{3}{8}$ c. $\frac{6}{8}$ d. $-\frac{3}{16}$

5. Si la distancia $\overline{DF}$ se divide en n segmentos congruentes, la longitud de cada uno de los n segmentos es:

a. $\frac{1}{4}$ b. $\frac{1}{4n}$ c. $\frac{4}{n}$ d. $\frac{1}{n}$

6. De la expresión $\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^2$ es correcto afirmar que:

a. Es racional y se ubica en A y D.

b. Es racional y se ubica entre A y B.

c. Es irracional y se ubica entre C y D.

d. Es irracional y se ubica entre D y F.

mejoramiento

7. Es correcto afirmar que:

a. De 0 a $\frac{1}{8}$ existe una cantidad finita de números decimales.

b. De 0 a $\frac{1}{8}$ no existe ningún número irracional.

c. El predecesor de 0, 1 es 0.

d. Entre cualquier pareja de números existe una cantidad infinita de números racionales e irracionales.

8. El número real:

$$0,\overline{5} = \frac{5}{10} + \frac{5}{100} + \frac{5}{1\,000} + \frac{5}{10\,000} + ...$$

Es un número:

a. Racional menor que $\frac{5}{8}$.

b. Irracional menor que $\frac{5}{10\,000}$

c. Irracional, porque su expresión decimal es finita.

d. Racional, porque su expresión decimal es infinita no periódica.

Prueba PISA

Responde las preguntas 9 a 11 teniendo en cuenta la siguiente información:

Andrés ganó $ 8 500 000 en una rifa.

9. Si Andrés decide guardar el dinero en su casa y gastar cada mes la mitad de lo que le queda, la expresión que representa el dinero que tiene al finalizar el séptimo mes es:

a. $\frac{1}{2}(8\,500\,000)$

b. 4 250 000

c. $2^7 \times (8\,500\,000)$

d. $\frac{1}{2^7} \times (8\,500\,000)$

10. Si Andrés decide guardar todo el dinero que ganó en una entidad bancaria que paga el 10 % de interés anual siempre sobre el capital inicial ($ 8 500 000) y no hacer retiros, la cantidad de dinero que tiene después de *n* años está representada por la expresión:

a. $8\,500\,000\left(\frac{1}{10}\right)^n$

b. $8\,500\,000\left(\frac{11}{10}\right)^n$

c. $8\,500\,000 + \left(\frac{n}{10}\right)$

d. $8\,500\,000 + \left(8\,500\,000 \times \frac{n}{10}\right)$

11. La cantidad de dinero que Andrés tiene en el banco al cabo de tres años y conservando las mismas condiciones es:

a. $ 11 313 500 c. $ 11 050 000

b. $ 11 000 000 d. $ 9 350 000

12. El número de años que debe pasar para tener un capital de $ 15 000 000 sin hacer retiros y manteniendo las mismas condiciones del punto 10, es aproximadamente de:

a. 5 años. c. 10 años.

b. 8 años. d. 6 años.

13. Para que el dinero de Andrés se duplique, debe permanecer en el banco en forma aproximada:

a. 1 año. c. 7 años.

b. 15 años. d. 20 años.

14. Si Andrés retira el dinero después de 5 años y medio de estar en el banco, recibirá aproximadamente:

a. $ 12 750 000 c. $ 22 500 000

b. $ 14 357 495 d. $ 25 000 000

Unidad 3

Funciones

La noción de función aparece por primera vez en el siglo XVIII d.e.c. con Leonhard Euler (1707-1783) quien intenta dar una definición formal: "Una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta de cualquier manera a partir de la cantidad variable y de números o cantidades constantes".

Hasta 1755 Euler publica en el libro Institutiones calculi differentialis, un concepto más general de función:

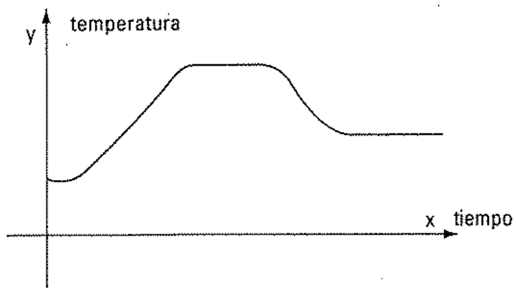
"Si algunas cantidades dependen de otras de tal modo que si estas últimas cambian también lo hacen las primeras, entonces las primeras cantidades se llaman funciones de las segundas."

Otros matemáticos como Fourier, Cauchy y Laplace entre otros, continuaron trabajando con el concepto de función clasificándolas en forma algebraica y analítica.

Prueba que sabes

Una persona coloca un pedazo de pizza congelado en un horno microondas y lo calienta durante un periodo de 5 minutos. A continuación lo saca y lo deja enfriar antes de comerlo.

La representación más natural y conveniente de este fenómeno como en la mayoría de las funciones, es su gráfica:



Existe una relación entre la temperatura del pedazo de pizza y el tiempo transcurrido.

¿Cómo cambia la temperatura conforme pasa el tiempo?

____

____

____

____

____

Como se analizó en el ejemplo anterior, una de las mayores utilidades de las funciones es que permiten expresar el cambio que se produce en los objetos al pasar el tiempo.

En general, las variables no tienen significación en sí mismas sino sólo en relación con otras variables:

- El área A de un círculo depende del radio r del mismo. La regla que relaciona r con A se expresa con la ecuación $A = \pi r^2$, así que A es función de r.
- El crecimiento de la población humana P depende del tiempo t. Para cada valor de tiempo t existe un valor correspondiente a P, y decimos que P es una función de t.
- El costo C para enviar por correo una encomienda a determinada ciudad depende de su peso p, luego C es una función de p.
- El volumen V de un líquido varía al aumentar su temperatura T, V es una función de T.

  En cada uno de estos ejemplos se describe una relación entre las dos variables, cada función se expresa mediante una regla o ecuación.
- ¿Es posible relacionar tu estatura a través del tiempo? Si es posible, explícalo mediante una gráfica aproximada.

Logro: reconocer cuándo una relación entre dos conjuntos es una función.

Función: Propiedades y notación

COMPARTE LO QUE SABES

¿Qué es una variable?

Si la población de una ciudad cambia a medida que el tiempo pasa, entonces, ¿la población y el tiempo se pueden considerar variables? ¿El cambio en la población depende del tiempo?

Función

Sean los subconjuntos numéricos A y B de $\mathbb{R}$, cuando se establece una relación entre ellos de tal forma que a cada valor de la variable independiente $x \in A$, le corresponde un único valor de la variable dependiente $y \in B$, se dice que dicha relación es una función.

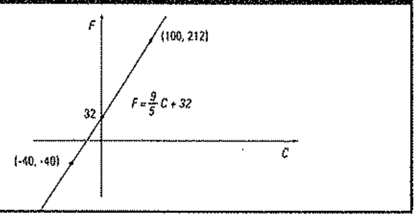
DOMINIO: conjunto formado por todos los valores que puede tomar la variable independiente.

RANGO: conjunto formado por todos los valores que toma la variable dependiente.

Una función se representa de cuatro formas:

- Algebraica: mediante una fórmula explícita.
- Verbal: mediante un enunciado.
- Numérica: mediante una tabla de valores.
- Visual: mediante una gráfica.

Ejemplo

Algebraica	Verbal	Numérica		Gráfica
$F = \frac{9}{5}C + 32$	Relación de temperatura entre las escalas Fahrenheit y Celsius.	Celsius (Dominio)	Fahrenheit (Rango)	
		−40	−40	
		0	32	
		100	212	

PRÁCTICA EN CONTEXTO

Comunicación y razonamiento

1. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de pares ordenados representan funciones?

a. $\{(2,4),(3,6),(6,12),(13,26)\}$

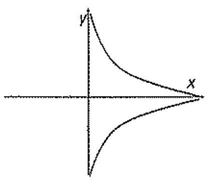
b. $\{(3,5),(2,5),(4,5),(1,3)\}$

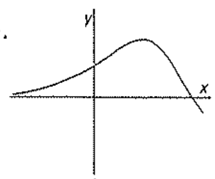
c. $\{(1,2),(3,5),(2,5),(-2,5)\}$

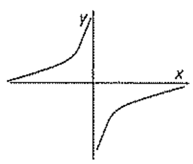
d. $\{(-1,-5),(0,-3),(1,-1),(2,1),(5,5)\}$

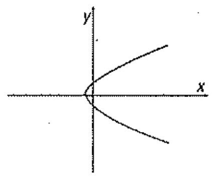
e. $\{(2,-2),(2,2),(-2,2),(-2,2)\}$

2. Determina si cada una de las siguientes gráficas representa una función:

a. 

b. 

c. 

d. 

3. Encuentra el dominio de cada una de las siguientes funciones:

a. $f(x) = 2x - 3$

b. $f(x) = \dfrac{x-3}{(x+2)(x-1)}$

c. $f(x) = \sqrt{(x-1)(x-6)}$

d. $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$

e. $f(x) = \sqrt{2x-6}$

4. Construye la gráfica de las siguientes funciones y luego determina su respectivo dominio y rango:

a. $y = x - 5$

b. $y = x^2 - 3x + 4$

c. $y = \dfrac{1}{x}$

d. $y = \sqrt{x+4}$

COMPETENCIA ARGUMENTATIVA: Justifica gráfica y en forma algebraica la diferencia entre relaciones y funciones.

Tema 2

Función lineal

Logro: trazar la gráfica de una función lineal y aplicar sus principales atributos en la solución de problemas.

Comparte lo que sabes

Un carro se encuentra a una distancia de 20 km desde su punto de partida y va a una velocidad constante de 30 kilómetros por hora, ¿a qué distancia se encontrará el carro después de 1 hora, 2 horas y 3 horas? ¿Se puede afirmar que el cambio de la distancia con respecto al tiempo es siempre el mismo? Justifica tu respuesta.

Toda función de la forma $y = mx + b$, con m, y $b \in \mathbb{R}$, se denomina una función lineal.

Variable independiente

$$\text{Variable dependiente} \longleftarrow y = mx + b \longrightarrow \text{Punto de intersección con el eje y}$$

Pendiente

Práctica en contexto

Modelación y razonamiento

1. Dadas las siguientes ecuaciones, subraya cuáles definen una función lineal.

a. $y = 8x - 3$

b. $y = \sqrt{5x - 2}$

c. $y = \sqrt{3}x - \frac{9}{8}$

d. $y = 3x^2 + 1$

e. $y = -\frac{3}{5}x + \frac{1}{2}$

2. Relaciona cada tabla de valores con su respectiva función lineal.

a.

x	y
-2	-8
-1	-5
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
2	4

A. $y = 2x - 5$

b.

x	y
-2	-3
-1	-1
$\frac{1}{2}$	-2
3	7

B. $y = 3x - 2$

c.

x	y
-1	-7
$-\frac{1}{2}$	-6
$\frac{1}{2}$	-4
3	1

C. $y = 2x + 1$

Modelación y procedimientos

3. Si $y = 3x - 4$

a. Completa la siguiente tabla de valores de la función:

x	-2	-1	0	1	2	3
y			-4			

b. Dibuja la gráfica de la función.

4. Representa gráficamente las siguientes funciones lineales:

a. $y = -3x + 8$

b. $y = -4$

c. $y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{5}$

d. $y = \frac{7}{8}x$

5. Los datos que se presentan en la tabla, corresponden al número aproximado de una población de bacterias (y) medida en miles a lo largo de un tiempo (t) en horas.

t (horas)	0	1	2	3	4	5	6	7
y (miles)	3	6	12	24	48	96	192	384

¿Se ajustan los datos a una función lineal?

6. En cada caso marca con una x si el enunciado determina una función lineal:

   a. ◯ La distancia recorrida por un automóvil sobre un camino recto a una velocidad constante.

   b. ◯ El volumen de una esfera a medida que se hace variar el radio.

   c. ◯ La altura de un objeto que es lanzado en forma parabólica en relación con su distancia horizontal.

   d. ◯ El perímetro de un cuadrado en relación con la longitud de un lado.

   e. ◯ La temperatura ambiente a medida que se aumenta la altura sobre el nivel de mar.

7. Una empresa que se dedicada a la elaboración de un tipo de lápiz establece una ecuación lineal para estimar el costo de producir cierto número de lápices (x) mediante la siguiente ecuación:

$$C(x) = 250x + 300 \text{ pesos}$$

   a. ¿Qué representan los valores 250 y 300 en el probléma?

   b. Representa mediante una gráfica el comportamiento de la ecuación.

   c. ¿Cuánto cuesta fabricar 2 500 unidades de lápices?

   d. Si el empresario decide disponer de $ 5 000 000 de pesos, ¿cuántas unidades podrá fabricar?

8. La relación existente entre la venta a domicilio de teléfonos celulares y el sueldo de un vendedor es:

$$y = 15\,000x + 650\,000 \text{ pesos mensuales.}$$

Donde y es el sueldo del vendedor y x es la cantidad de teléfonos vendidos.

   a. Si se sabe que el número de celulares vendidos al mes en promedio es de 25, determina el rango de la función y explica el resultado.

   b. Dibuja la gráfica correspondiente.

   c. ¿Cuántos celulares se deben vender para recibir un sueldo superior a $ 1 000 000?

9. En la tabla se lista el promedio de dióxido de carbono en la atmósfera medido en partes por millón (p.p.m.) en el observatorio del Mauna Loa, desde 1972 a 1990.

Año (t)	CO_2 Nivel en p.p.m
1972	326, 6
1974	330
1976	332
1978	335, 3
1980	338, 5
1982	341
1984	344, 3
1986	347, 5
1988	351, 3
1990	354

Los científicos del observatorio han verificado que los datos se ajustan aproximadamente a la siguiente ecuación lineal:

$$C(t) = 1,496667t - 2624,826667$$

   a. Verifica que los datos se ajustan a la función dada.

   b. En el 2008 la medición del nivel de dióxido de carbono fue de 380, 5 ppm. ¿Se ajusta el dato a la ecuación planteada?

   c. Usa el modelo lineal para predecir el nivel de CO_2 en el año 2015.

   d. De acuerdo con este modelo, ¿a partir de qué año el nivel de CO_2 excederá las 400 partes por millón?

Tema 3

Pendiente de una recta

Logro: encontrar la pendiente de una recta y relacionar su uso en la modelación de problemas de variación lineal.

Comparte lo que sabes

En una reacción química uno de los reactivos se descompone a medida que la temperatura aumenta de acuerdo con la siguiente ecuación: $A = -5{,}6T + 2$, donde A es la cantidad de reactivo en gramos y T la temperatura en °C. ¿Qué significa que la pendiente tenga un valor negativo?

Pendiente de una recta

La pendiente de una recta es la razón (o cociente) de cambio entre las dos variables, la variación de y respecto a la variación de x y mide la inclinación respecto al eje x.

Si dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) pertenecen a una recta, la pendiente m de la recta es:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Ejemplo Encontrar la pendiente de la recta que pasa por los puntos: (3, 1) y (−2, 2).

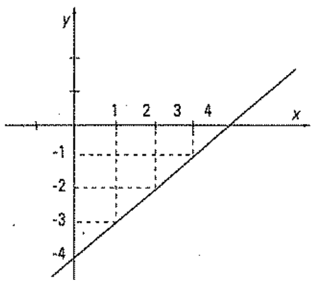
Solución: $m = \frac{2-1}{-2-3} = -\frac{1}{5}$

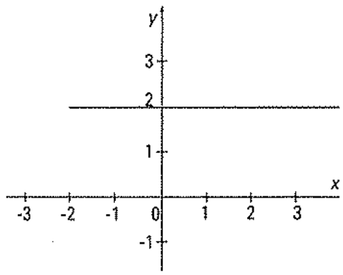
Significa que por cada unidad recorridas en el eje y, se recorren 5 unidades sobre el eje x.

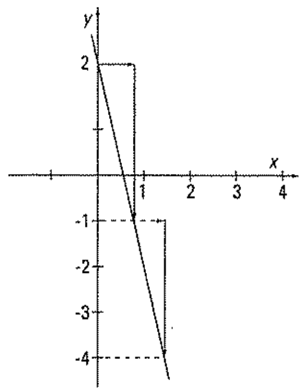
Práctica en contexto

Modelación

1. Determina la pendiente de la recta en cada caso:







Procedimientos

2. Encuentra la pendiente de la recta que pasa por los puntos:

a. (−3, −2) y (1, 5) d. (−2, 3) y (4, −6)

b. (1, −3) y (5, −1) e. (−8, −3) y (5,−3)

c. (2, 1) y (2, 5)

3. Dos rectas L_1 y L_2 son paralelas si tienen la misma pendiente $m_1 = m_2$ y perpendiculares si $m_1 \cdot m_2 = -1$. Determina para cada pareja de ecuaciones si las rectas son paralelas o perpendiculares o ninguna de ellas.

a. $y = -8x + 13$ y $y = -8x - 10$

b. $y = 2x - 6$ y $y = -\frac{1}{2}x - 5$

c. $y = \frac{2}{3}x + 4$ y $y = -\frac{2}{3}x + 13$

d. $y = -\frac{5}{3}x + 2$ y $y = \frac{3}{5}x + 8$

e. $y = \frac{7}{2}x + \frac{3}{4}$ y $y = \frac{7}{2}x$

4. Cuando el aire seco se eleva, se expande y se enfría. La temperatura T en grados centígrados como función de la altitud h en kilómetros se ajusta al siguiente modelo lineal:

$$T(h) = -10h + 22 \text{ grados centígrados.}$$

a. Construye la gráfica del modelo lineal.

b. ¿Qué significa en el problema que $m = -10$?

Logro: encontrar la ecuación de una recta que pasa por dos puntos y relacionarla con diferentes contextos que involucren variación lineal.

Ecuación de la recta

Comparte lo que sabes

Dos objetos se mueven en línea recta y las ecuaciones que describen su movimiento son:

Objeto 1: $d = 20t + 3$ y Objeto 2: $d = 20t + 10$

Donde d es la distancia recorrida por cada objeto y t es el tiempo. ¿Cuál lleva más ventaja en el instante en que comienza la observación ($t = 0$)?

Ecuación de la recta

La ecuación de una recta que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) se determina mediante la ecuación:

$$m(x - x_1) = y - y_1$$

Ejemplo. Encontrar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(-2, -5)$ y $(1, 7)$

Solución

Primera solución	Solución alternativa
Determinamos primero la pendiente: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{7-(-5)}{1-(-2)} = 4$ Luego con la ecuación $m(x - x_1) = y - y_1$ y teniendo en cuenta un punto de la recta, por ejemplo (1, 7) se remplaza x_1 por 1 y y_1 por 7: $4(x-1) = (y-7)$ $4x - 4 = y - 7$ $4x - 4 + 7 = y$ $4x + 3 = y$	Se calcula la pendiente de la recta de la misma manera que en la primera solución: $m = 4$ Luego con la ecuación $y = mx + b$ y un punto de la recta, por ejemplo (1, 7), se remplaza a x por 1 e y por 7: $7 = 4(1) + b$ Se despeja b en la ecuación: $7 = 4 + b$ $7 - 4 = b$ $b = 3$ Entonces: $y = 4x + 3$

Práctica en contexto

Procedimiento

1. En cada caso encuentra la ecuación de la recta que pasa por los puntos indicados y dibuja la gráfica:

a. $(2, 4)$ y $(6, 8)$

b. $(-5, 12)$ y $(1, 3)$

c. $(10, 7)$ y $(21, -4)$

d. $\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{10}\right)$ y $\left(\frac{5}{2}, \frac{9}{10}\right)$

e. $(-1, -7)$ y $(10, 16)$

f. $(10, 6)$ y $(-1, 6)$

g. $(-2, -7)$ y $(2, 5)$

h. $\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{2}\right)$ y $\left(\frac{1}{3}, -\frac{3}{5}\right)$

i. $(-1, 4)$ y $(2, -5)$

j. $(-6, -8)$ y $(0, 0)$

k. $(-3, -25)$ y $(6, -25)$

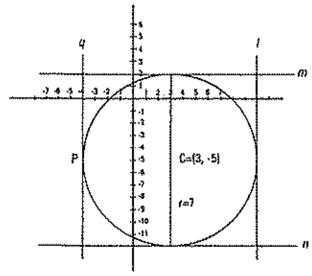
l. $(-12, -2)$ y $(-12, 9)$

2. Halla la ecuación de la recta en cada caso dadas las condiciones:

a. $m = 3$ y pasa por el punto $(-1, 5)$.
b. $m = 1$ y pasa por el punto $(-2, -8)$.
c. $m = \frac{3}{2}$ y pasa por el punto $(-4, 7)$.
d. $m = -\frac{1}{4}$ y pasa por el punto $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$.
e. $m = 0$ y pasa por $(2, 9)$.

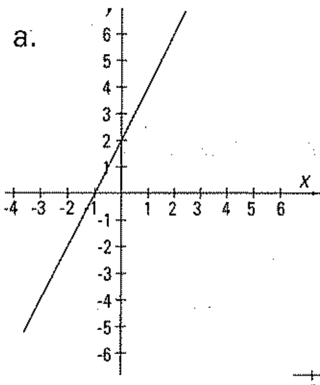
Modelación y comunicación

3. Una recta tangente a una circunferencia en un punto P es perpendicular a la recta que pasa por P en dirección del radio. Encuentra la ecuación de cada recta tangente a la circunferencia de la figura:

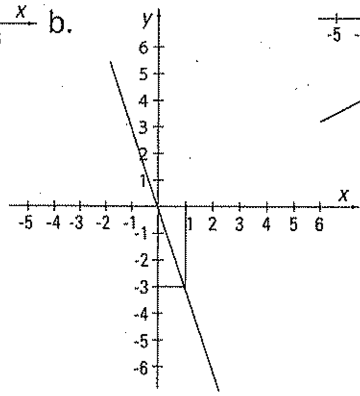


4. Encuentra en cada caso la ecuación de la recta:

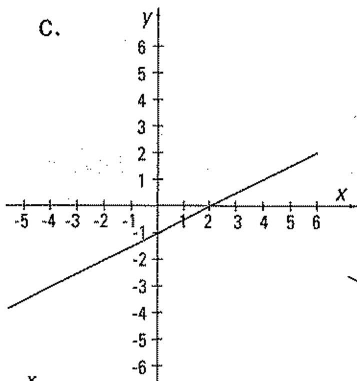
a.



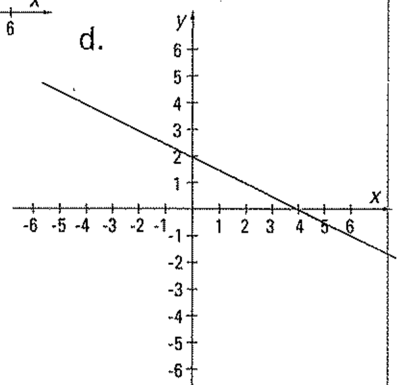
b.



c.



d.



Solución de problemas

5. Los biólogos han observado que los chirridos de los grillos de una especie se encuentran relacionados linealmente con la temperatura. Un grillo produce 110 chirridos cada minuto si la temperatura está alrededor de 75^oF y 180 chirridos si la temperatura es de 90^oF.

a. Encuentra una función lineal que modele la relación existente entre el número de chirridos y la temperatura.

b. ¿Qué significado tiene la pendiente en el problema?

c. Si la temperatura es de 70^oF, ¿cuántos chirridos emite un grillo por minuto?

6. Camila compró un computador portátil en $ 2 800 000 pesos. Al cabo de 6 años el equipo será obsoleto debido a los nuevos diseños y solamente le ofrecerán por él la décima parte de su costo original.

a. Determina una ecuación lineal que relacione la depreciación del equipo a medida que transcurre el tiempo.

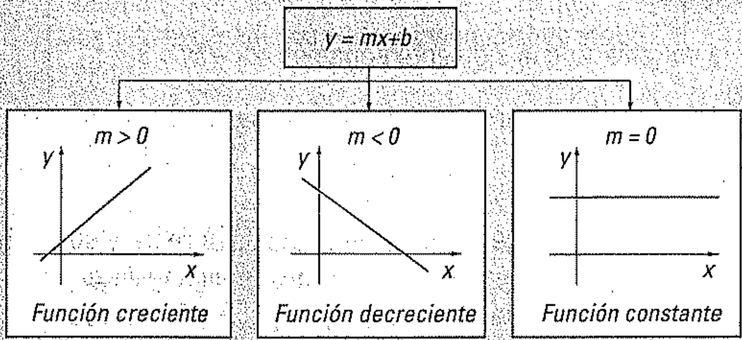
b. ¿Cuál es el costo del equipo al cabo de 2 años?

c. Calcula el momento en el que el valor del equipo equivale a la mitad del precio.

Logro: identificar una función lineal teniendo en cuenta el tipo de variación de la pendiente y sus relaciones en contextos reales.

Tema 5

Función creciente, decreciente y función constante



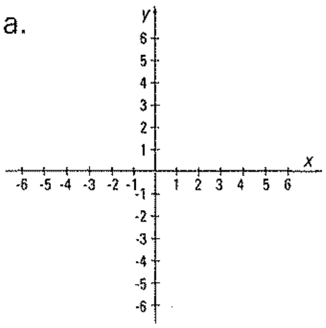
Si el punto de corte con el eje y es $b = 0$, se obtiene la ecuación $y = mx$. En este caso la función se denomina lineal de proporcionalidad directa y su gráfica es una recta que pasa por el origen.

Práctica en contexto

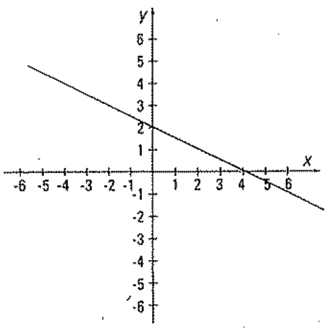
Comunicación. Interpretación de gráficas

1. Según el signo de la pendiente, clasifica las funciones en crecientes, decrecientes o constantes y determina cuáles son de proporcionalidad directa.

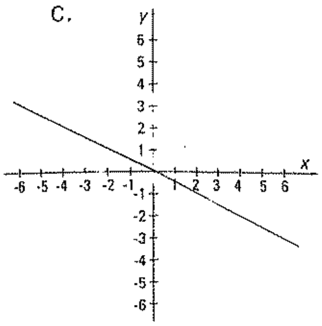
a.



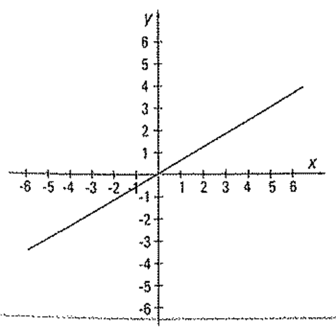
b.



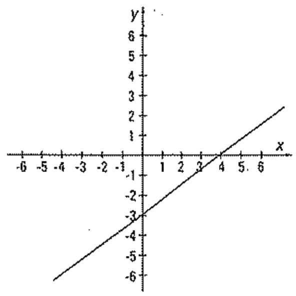
c.



d.



e.



Modelación y razonamiento

2. En cada caso, ubica los puntos en el plano de coordenadas y determina si la recta que pasa por ellos es una función creciente, decreciente o constante.

a. (3, –4), (4, 7)

b. (15, 2), $\left(8, \frac{10}{3}\right)$

c. (7, 3), (10, 2)

d. $\left(-2 - \frac{5}{7}\right)$, $\left(\frac{1}{3}, -\frac{15}{21}\right)$

e. (–13, –9), (–1, –4)

3. Marca con C, D, o K si el enunciado representa una función creciente, decreciente o constante, en forma respectiva:

a. Esteban compró un apartamento en $ 60 000 000. Al cabo de dos años una persona interesada en comprar el inmueble le ofreció $ 70 000 000.

b. Las ganancias mensuales de una empresa son siempre de $ 250 000 000 de pesos.

c. Un alpinista concluye que por cada kilómetro ascendido en una montaña, la temperatura disminuye 10°C.

d. Las acciones de una empresa de hidrocarburos durante dos años consecutivos se han mantenido a un valor fijo.

COMPETENCIA ARGUMENTATIVA: reconoce y justifica modelos lineales a través de la variación de la pendiente aplicada a diferentes contextos.

Tema 6

Ecuación general de la recta

Logro: reconocer diferentes maneras de representar en forma algebraica una función lineal.

COMPARTE LO QUE SABES

Utiliza tus habilidades en álgebra para despejar la variable *y* de la siguiente ecuación: $2x - 5y = 3$.

La nueva expresión, ¿se parece a la ecuación de una función lineal?, ¿cuáles son los valores de m y b?

Ecuación general de la recta

Toda ecuación de la forma $Ax + By = C$, con $A \neq 0$ y $B \neq 0$, tiene como gráfica una línea recta y se conoce como la ecuación general de una recta; también se puede escribir de la forma pendiente-intersecto como $y = mx + b$. En el caso de que $A = 0$ se tiene una recta paralela al eje x y si $B = 0$, la recta que resulta es paralela al eje y.

Ejemplo

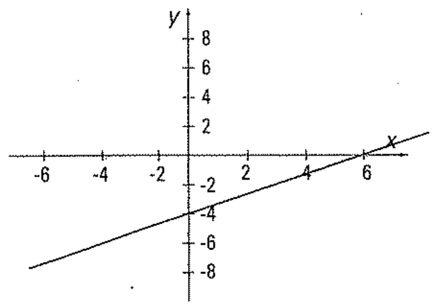
Trazar la gráfica de la ecuación $2x - 3y = 12$

Solución

Para trazar la gráfica se pueden encontrar los puntos de corte con el eje x y el eje y.

- Para el punto de corte con *x*, se sustituye *y* por 0 de tal forma que la ecuación se transforma en $2x = 12$. Luego se despeja *x* y se obtiene $x = 6$.
- Para el punto de corte con *y*, se sustituye *x* por 0 de tal forma que la ecuación se reduce a $-3y = 12$, y luego se despeja *y* para obtener $y = -4$.

Con estos puntos se puede graficar la recta como se muestra en la figura:



Como: $2x - 3y = 12$

$$3y = 2x - 12$$

Ecuación pendiente - intersecto. $y = \frac{2}{3}x - 4$

Ejemplo

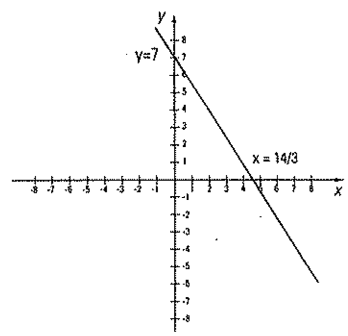
Trazar la gráfica de la ecuación

$$y = -\frac{3}{2}x + 7$$

Solución

De la ecuación se infiere que la pendiente es $-\frac{3}{2}$ y el punto de corte con el eje *y* es 7.

Esta información es suficiente para trazar la gráfica como se muestra en la figura:



$$y = -\frac{3}{2}x + 7$$

Primero se ubica el punto de corte con el eje *y*: (0, 7), y luego a partir de ese punto, por cada desplazamiento de tres unidades hacia la derecha se realiza un desplazamiento de 2 unidades hacia abajo.

PRÁCTICA EN CONTEXTO

Modelación y procesos

1. Expresa las ecuaciones de la forma pendiente-intersecto para encontrar los valores de *m* y *b* luego traza cada recta.

a. $5x + y = 16$

b. $12x + y - 23 = 0$

c. $0 = 12 - 3x + 8y$

d. $0 = 15 - 3x + 3y$

e. $y - 14x = 15$

f. $-9x + y - 12 = 0$

g. $9 = 3y - 21x$

h. $6y - 12 = 42x$

2. Determina la ecuación general de la recta que satisface las condiciones dadas y construye su gráfica.

   a. Corte en x en 4 y en y en -3.

   b. Corte en x en -5 y en y en -1.

   c. Que pase por $(7, 2)$ y $(-1, 3)$.

   d. Que pase por $(1, 8)$ y tenga corte en x en -5.

   e. Pase por $(2, -4)$ y sea paralela a la recta $5x - 2y + 4 = 0$.

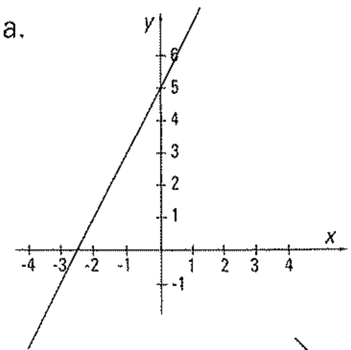
   f. Pase por $(-2, 5)$ y sea paralela a la recta $2x + 6y = 2$.

   g. Pase por $(3, -9)$ y sea perpendicular a la recta $x - 4y - 8 = 0$.

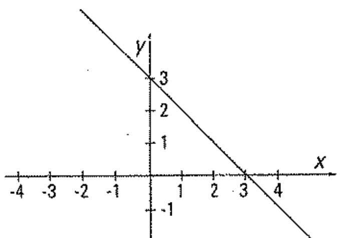
   h. Pase por $(2, 1)$ y sea perpendicular a la recta $3x - 2y = 18$.

3. Halla la ecuación general y la ecuación pendiente - intersecto de las siguientes rectas:

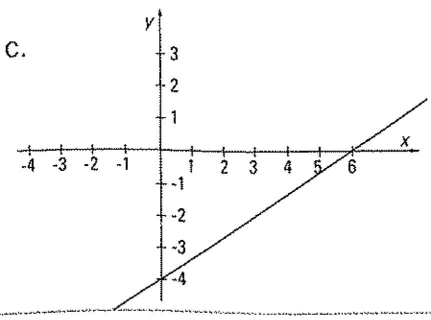
a.



b.



c.



4. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto $(-4, 3)$ y es paralela a $4x + 5y - 20 = 0$.

5. Determina la ecuación de la recta que pasa por el origen y es perpendicular a $4x + 6y + 12 = 0$.

Solución de problemas

6. La longitud prenatal se puede determinar mediante ultrasonido. El crecimiento de un feto de más de 13 semanas se puede aproximar mediante la fórmula $L - 1,6t + 6,2 = 0$, donde L es la longitud en cm y t es el tiempo en el vientre medido en semanas.

   a. Traza la gráfica de la función de longitud en términos del tiempo.

   b. ¿Cuál es la edad aproximada de un feto cuya longitud es de 30 cm?

7. El peso promedio w de una ballena azul se puede determinar relacionándolo con su longitud L (en pies), mediante la función:

$$w - 1,8L + 43,1 = 0$$

   Para un intervalo de longitud entre 21 y 60 pies.

   a. Estima el peso de una ballena que tiene una longitud de 45 pies.

   b. ¿Cuál es la longitud de una ballena que pesa 23 toneladas?

8. Se estima que el costo anual de una clase de automóvil está dado por la ecuación:

$$C + 0,04m = 7\,200$$

   Donde m representa el kilometraje del auto y C es el costo en dólares.

   a. Representa el modelo de costo mediante una gráfica.

   b. ¿Cuál es el precio del vehículo cuando el kilometraje marca 19 500 kilómetros?

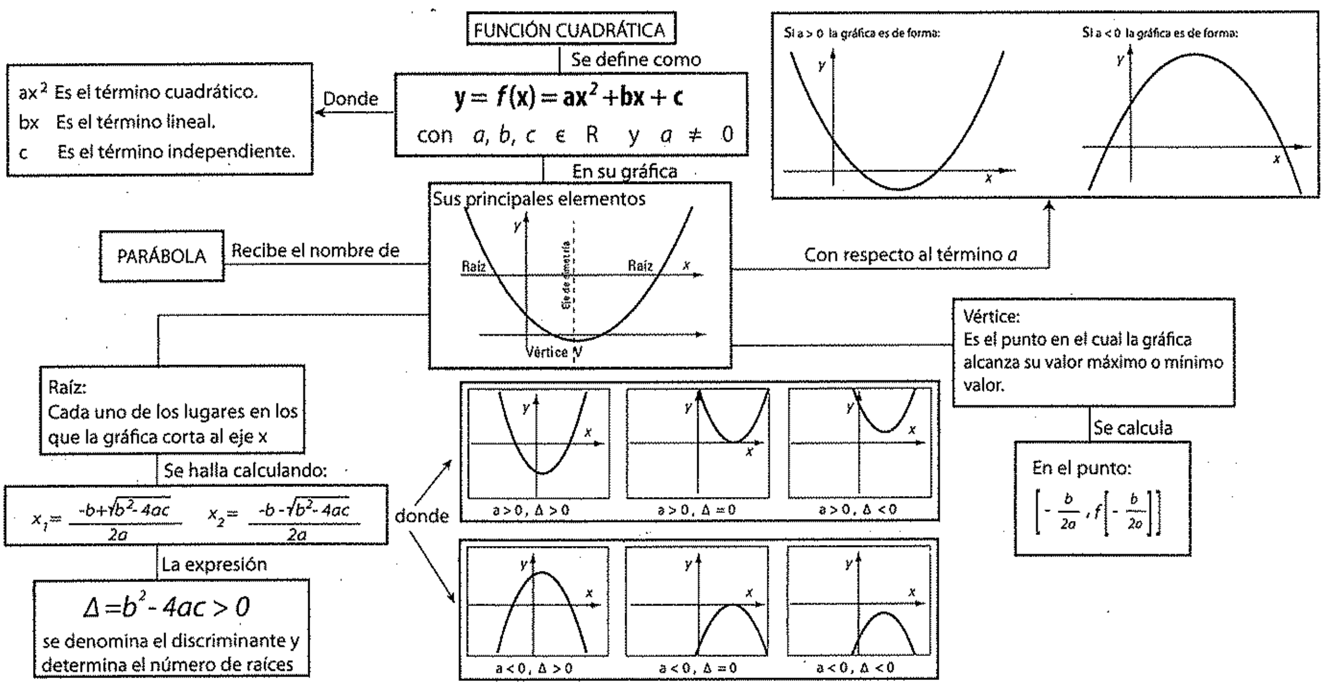
Tema 7

Gráfica de una función de la forma $y = ax^2 + bx + c$

Logro: reconocer una función cuadrática y construir su gráfica en el plano cartesiano identificando sus principales características.

Comparte lo que sabes

Para la siguiente función $f(x) = 3(x+1)^2 - 2$, resuelve el binomio elevado al cuadrado y suma los términos semejantes. ¿De qué grado es el polinomio obtenido? ¿Qué diferencia encuentras con respecto a la ecuación de la función lineal? ¿Qué valores puede tomar x para que f (x) sea un número real?



Práctica en contexto

Modelación y procedimientos

1. Traza la gráfica de la parábola dada y determina las coordenadas de su vértice y de sus intersecciones con los ejes:

a. $y = x^2 - 8$

b. $y = -x^2 - 5$

c. $y = 3x^2 - 6$

d. $y = x^2 + 8x + 15$

e. $y = x^2 - 5x + 6$

f. $y = -x^2 - 4x + 4$

g. $y = 2x^2 - 20x + 57$

h. $y = x^2 - 2x + 5$

i. $y = 9x^2 + 6x + 1$

j. $y = -3x^2 + 6x - 2$

2. En cada caso transforma la función $y = ax^2 + bx + c$ a la forma estándar $y = a(x-h)^2 + k$ completando el cuadrado, luego halla su respectivo valor extremo (vértice) y bosqueja la gráfica.

a. $y = 5x^2 - 30x + 49$

b. $y = -x^2 + x + 4$

c. $y = 4x^2 - 4x + 1$

d. $y = x^2 - 16x + 25$

e. $y = -3x^2 - 6x + 12$

Procedimientos

3. Determina el vértice de las siguientes parábolas sin efectuar ningún cálculo algebraico:

a. $y = \left(x - 3\right)^2 - 2$

b. $y = \frac{1}{2}\left(x + 1\right)^2 - \frac{3}{4}$

c. $y = -x^2 + \frac{5}{6}$

d. $y = \left(x + 5\right)^2 + \frac{1}{2}$

e. $y = -4\left(x + 8\right)^2$

Modelación

4. Determina en cada caso si es posible si la parábola abre hacia arriba o hacia abajo y traza la gráfica teniendo en cuenta la información dada:

a. Su gráfica pasa por el punto (2, 4) y su vértice es el punto (–3, 4).

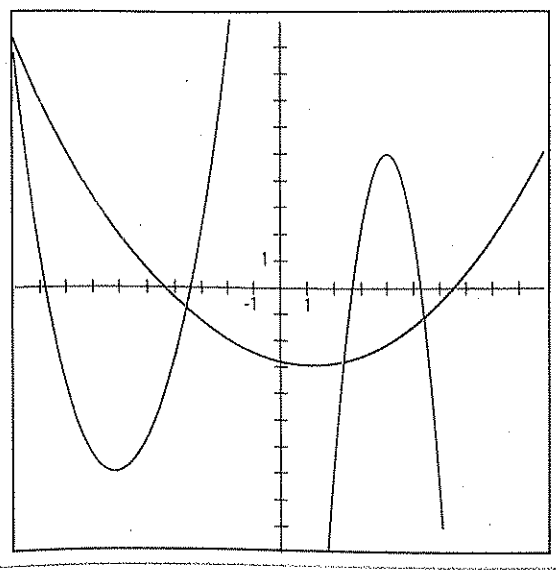
b. Pasa por los puntos (–5, 1), (3, –2) y (0, 7).

c. Su gráfica intercepta al eje *y* en el punto (0, 2) y tiene vértice en (2, 1).

d. Sus abscisas en el origen son –3 y 5 y su ordenada del punto máximo está en 4.

e. Sus abscisas en el origen son 8 y 0 y su ordenada mínima es –48.

5. Encuentra el vértice de cada parábola y la forma de su ecuación.



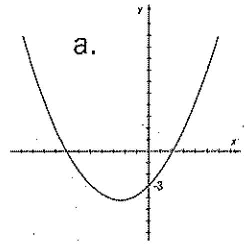
6. Relaciona cada una de las parábolas con la ecuación que le corresponde:

a. $y = \frac{1}{5}x^2 + x - 3$

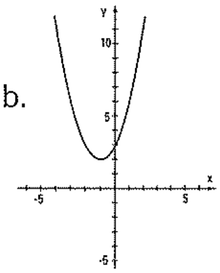
b. $y = x^2 + 2x + 3$

c. $y = -x^2 - 2x - 5$

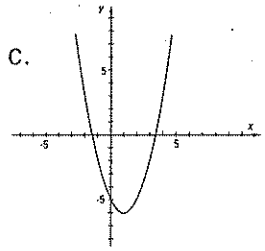
a.



b.



c.



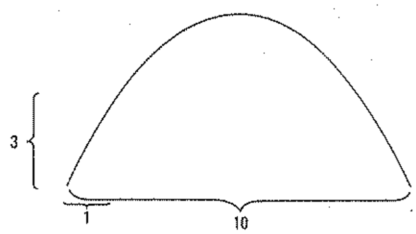
Solución de problemas

7. Supongamos que un jugador de fútbol patea un tiro libre de tal manera que la trayectoria de la pelota se puede modelar mediante la función $y = -0,08x^2 + 9x$, donde *y* es la altura en metros de la pelota cuando *x* es la distancia en metros, que recorre en forma horizontal.

a. ¿A qué distancia cayo el balón?

b. ¿A partir de qué distancia la pelota comienza a descender?

8. Un grupo de estudiantes construye un arco de forma parabólica para ser colocado en la entrada de su colegio. Las bases del arco están a 10 metros una de la otra. Los estudiantes cuentan con una cinta métrica de 3 metros. Desean saber cuál es la altura máxima que alcanza el arco. Pero con su cinta sólo pueden determinar que a 1 metro de la base la altura es de 3 metros.



a. ¿Es correcto afirmar que el arco se puede modelar mediante la ecuación $y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{10}{3}x$?

b. ¿Cuál es la altura del arco?

Tema 8

Función cúbica

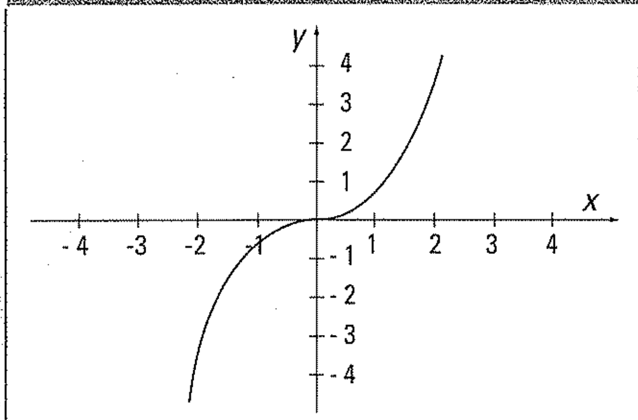
Logro: reconocer una función cúbica y construir su gráfica en el plano cartesiano identificando sus principales características.

Comparte lo que sabes

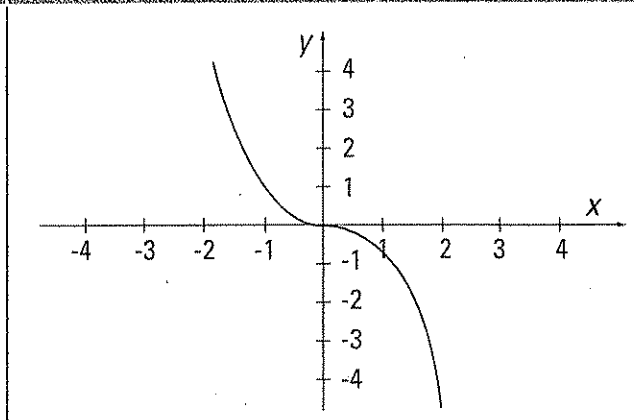
Si las dimensiones de una caja son: $h = x$, $a = x - 2$ y $L = 3x$, donde h, a y L son la altura, el ancho y el largo, respectivamente y v es el volumen de la caja, modela una ecuación que represente el volumen como función de x. ¿Cuál es el grado del polinomio obtenido?

Una función cúbica es aquella que tiene la forma $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, con $a \neq 0$ y $b, c, d \in \mathbb{R}$.

Forma de las funciones $y = ax^3$, con $a > 0$



Forma de las funciones $y = -ax^3$, con $a < 0$



Ejemplo: Trazar la gráfica de la función cúbica $y = 2x^3 - x^2 + 8x - 4$.

La expresión $2x^3 - x^2 + 8x - 4$ se puede factorizar de la siguiente manera:

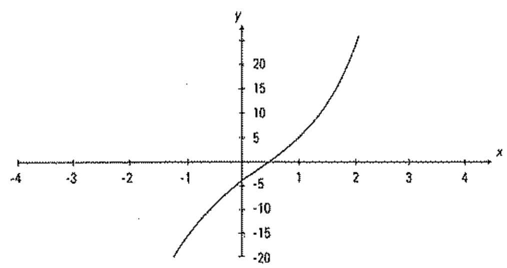
$$\left(2x^3 - x^2\right) + \left(8x - 4\right)$$

$$= x^2\left(2x - 1\right) + 4\left(2x - 1\right)$$

Luego, $y = \left(x^2 + 4\right)\left(2x - 1\right)$

Se pueden determinar fácilmente los puntos de corte con x, igualando la ecuación a cero y encontrando las raíces: $\left(x^2 + 4\right)\left(2x - 1\right) = 0$.

De esta forma se obtiene que $x = \dfrac{1}{2}$, por lo que la gráfica de la función es en forma aproximada:



Práctica en contexto

Modelación

1. Traza la gráfica de las siguientes funciones cúbicas:

   a. $y = \dfrac{1}{4}x^3 - 5$

   b. $y = -\dfrac{1}{9}x^3 - 6$

   c. $y = x^3 - 16x$

   d. $y = -x^3 + 3x^2 + 10x$

   e. $y = x^3 - 3x^2 - 910x + 27$

Solución de problemas

2. A partir de una pieza rectangular de cartón cuyas dimensiones son 12 por 18 cm, se construirá una caja sin tapa recortando cuadrados de igual tamaño en las esquinas y doblando hacia arriba los lados.

   a. Encuentra la función de volumen en términos de la altura de la caja.

   b. Determina todos los valores positivos de x tales que $V\left(x\right) > 0$ y traza su correspondiente gráfica.

COMPETENCIA ARGUMENTATIVA: explica procesos algebraicos y geométricos para identificar las principales características de una función cúbica.

Logro: identifica las condiciones necesarias para determinar la inversa de una función.

Tema 9

Función inversa

COMPARTE LO QUE SABES

Grafica las ecuaciones, $y = x^2$ y $x = y^2$, en el plano cartesiano y luego compáralas. ¿Qué observas?

Funciones uno a uno

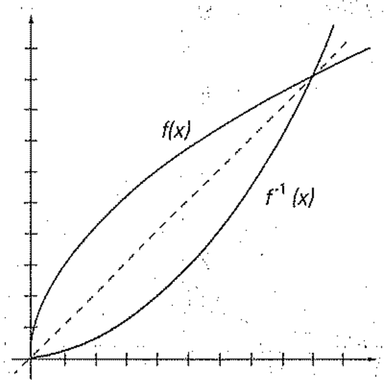
Una función es uno a uno si ninguna recta horizontal intercepta su gráfica más de una vez, es decir, $f(x_1) \neq f(x_2)$, siempre que $x_1 \neq x_2$.

Función inversa

Si una función $f(x)$ tiene dominio A y rango B, entonces su función inversa $f^{-1}(x)$ tiene dominio B y rango A y está definida por:

$f^{-1}(y) = x$, siempre que, $f(x) = y$

Gráficamente la función inversa es simétrica sobre su función con respecto a la recta $y = x$.

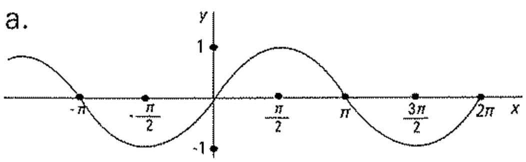


PRÁCTICA EN CONTEXTO

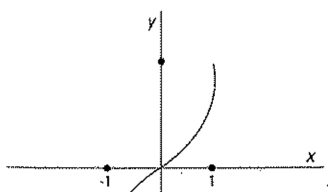
Comunicación y razonamiento

1. Observa la gráfica y determina si es una función uno a uno:

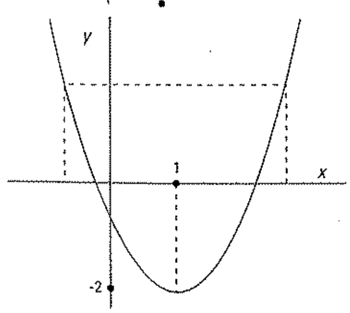
a.



b.



c.



Modelación y procesos

2. En cada caso, halla la función inversa y construye su respectiva gráfica.

a. $y = 2x + 1$

b. $y = \dfrac{x-1}{x+4}$

c. $y = \dfrac{2}{x+2}$

d. $y = \sqrt{3x-5}$

Solución de problemas

3. Una población de conejos en una granja se comporta de acuerdo con la fórmula:

$$p(t) = \frac{2\,500t}{t+1}$$

Donde t es el tiempo en meses desde el principio del año.

a. Traza la gráfica de la población de conejos.

b. Halla la inversa de la función y grafícala.

c. ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que se tenga una población de 2 000 conejos?

Tema 10

Función exponencial

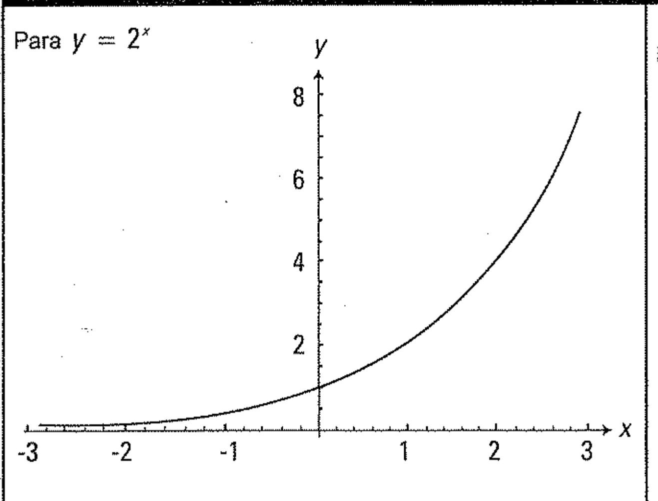
Logro: reconocer y graficar una función exponencial y aplicar sus propiedades en la solución de problemas prácticos.

Comparte lo que sabes

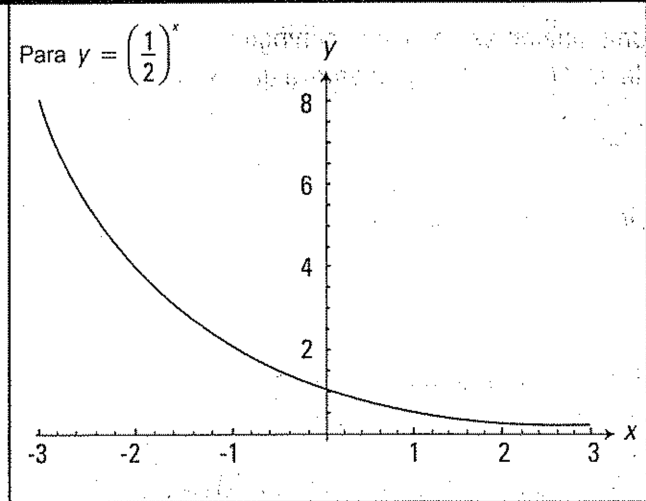
Observa las siguientes funciones: $f(x) = x^3$ y $f(x) = 3^x$. ¿Qué diferencias encuentras?

Se denomina función exponencial a la función definida por $f(x) = a^x$ donde $a > 0$ y $a \neq 1$.

Gráfica de una función exponencial para a > 1



Gráfica de una función exponencial para 0 < a < 1



Práctica en contexto

Modelación y procesos

1. Traza la gráfica de las funciones utilizando tablas de valores:

a. $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

b. $y = (0,6)^x$

c. $y = \left(\frac{4}{3}\right)^x$

d. $y = 4^{-x}$

e. $y = 3 \times 2^x$

f. $y = -\frac{1}{2} \times 4^x$

Procedimientos

2. En cada caso encuentra el valor de x:

a. $5^{3-x} = 125$

b. $\frac{4^{x+1}}{2^{x+2}} = 128$

c. $3^{1-x^2} = \frac{1}{27}$

d. $2^{3x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3x+2}$

3. La población de una ciudad se duplica cada 30 años. En el tiempo t = 0, la población inicial es de 100 000 habitantes.

a. Encuentra una ecuación que modele el crecimiento de la población en función del tiempo.

b. ¿Cuál es la población después de 25, 50 y 100 años en forma respectiva?

4. Las sustancias radiactivas se desintegran emitiendo radiaciones y transformándose en otras sustancias. Este proceso se realiza con el paso del tiempo y varía según el tipo de sustancia.

La velocidad con que se desintegra una sustancia radioactiva se determina mediante su periodo de desintegración, que es el tiempo que tarda en desaparecer la mitad de su masa inicial. Por ejemplo, el actinio tarda un periodo aproximado de 28 años. Si tenemos una masa inicial de 1 kilogramo y su periodo de desintegración es de 1 año:

a. Encuentra una función que modele el proceso de desintegración a través del tiempo.

b. Construye la gráfica respectiva.

COMPETENCIA PROPOSITIVA: utiliza la función exponencial para modelar situaciones relacionadas con demografía y química.

Logro: reconocer y graficar una función logarítmica y aplicar sus propiedades en la solución de problemas prácticos.

Tema 11
Función logarítmica

Comparte lo que sabes

¿En qué has usado anteriormente los logaritmos? ¿Para qué sirven?

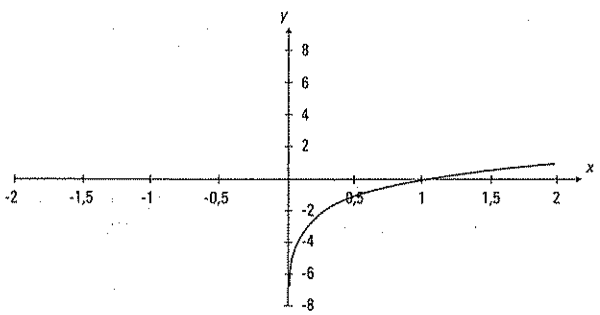
La función inversa de la función exponencial se denomina función logarítmica y se define de la siguiente forma:

$$y = \log_a x \text{ donde } x = a^y \text{, para } a > 0 \text{ y } a \neq 1.$$

Nota: La notación ln expresa el logaritmo cuya base es el número e (de Euler que equivale a 2, 71 en forma aproximada).

Gráfica de una función logarítmica

$y = \log_2 x$



Propiedades de los logaritmos

Si a, m, n $\in R^+$, $a \neq 1$ y $c \in \mathbb{R}$, entonces:

a. $\log_a a^x = x$

b. $\log_a 1 = 0$

c. $\log_a m^c = c \log_a m$

d. $\log_a (m \times n) = \log_a m + \log_a n$

e. $\log_a \left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n$

f. $\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}$ Fórmula para cambiar de base.

Práctica en contexto

Procedimientos

1. Expresa la ecuación dada en forma exponencial:

a. $\log_2 128 = 7$ c. $\log_3 (x + 8) = 5$

b. $\ln(x - 5) = 4$

2. Calcula el valor de cada expresión:

a. $\log 10\,000$ b. $\log_5 625$ c. $\log_3 (27^8)$ d. $\ln(e^8)$

3. Encuentra el valor de x:

a. $\log_6 x = 3$ c. $\log_7 (x - 3) = 5$

b. $\log_2 64 = x$ d. $\ln(x^2 + x) = \ln(2x - 6)$

Modelación

4. Traza la gráfica de las siguientes funciones:

a. $y = \log_2 (-x)$ b. $y = -\log_3 (x)$

c. $y = \log_2 (x - 1)$

Solución de problemas

5. El crecimiento de una población se ajusta a la ecuación $P(t) = ce^{rt}$, donde r es la tasa de crecimiento relativo y c es la población inicial. La población de una ciudad en 1980 era de 3 500 000 habitantes, con una tasa de crecimiento relativo del 3 %. Si la población sigue creciendo a esta tasa, ¿cuándo alcanzará los 30 000 000 de habitantes?

6. La longitud L de un pez se relaciona con su edad mediante la fórmula de crecimiento de Von Bertalanffy: $L = a(1 - be^{-kt})$, en la cual a, b y k son constantes positivas que dependen del tipo de pez. Encuentra la función inversa que sirve para estimar la edad de un pez mediante una medición de su longitud.

7. El fechamiento por carbono 14 (C - 14) es un método que usan los arqueólogos para determinar la edad de los fósiles. Cuando un organismo muere deja de asimilar c – 14 y la cantidad de este en el organismo empieza a reducirse exponencialmente de acuerdo con la fórmula: $Q = Q_o e^{-0{,}000124t}$, donde t es medido en años y Q_o es la cantidad de carbono c – 14 presente cuando muere el organismo. Si $Q_o = 100$ miligramos:

a. ¿Cuánto c – 14 hay después de 1 000 años?

b. ¿Cuánto tiempo ha pasado cuando la cantidad de c – 14 se ha reducido a la mitad?

COMPETENCIA INTERPRETATIVA: Utiliza las propiedades de los logaritmos para resolver ecuaciones y problemas en diferentes contextos.

Pruebas de

Prueba Saber

Responde las preguntas 1 a 4 de acuerdo con la siguiente información.

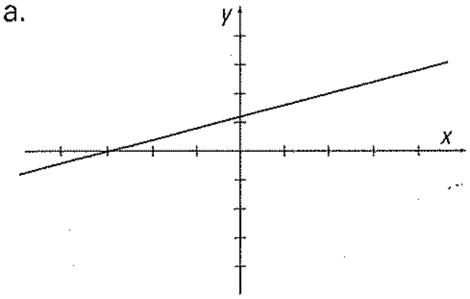
Investigaciones médicas recientes sugieren que el riesgo R (dado como porcentaje) de tener un accidente automovilístico se puede relacionar con la concentración de alcohol en la sangre de una persona mediante la siguiente ecuación:

$$R = 6e^{12x}$$

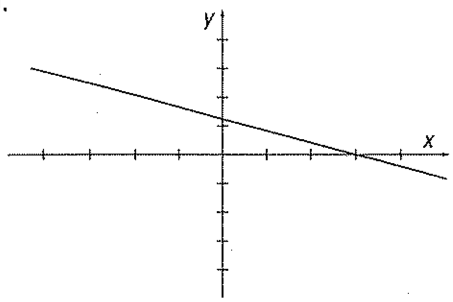
Donde x es la concentración de alcohol en la sangre.

1. Un bosquejo de la función dada es:

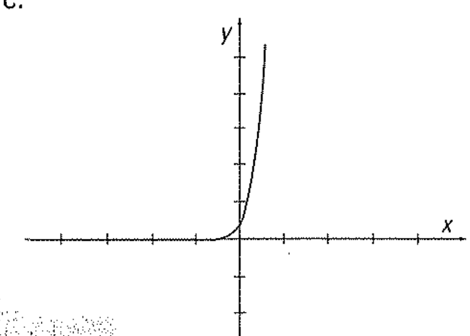
a.



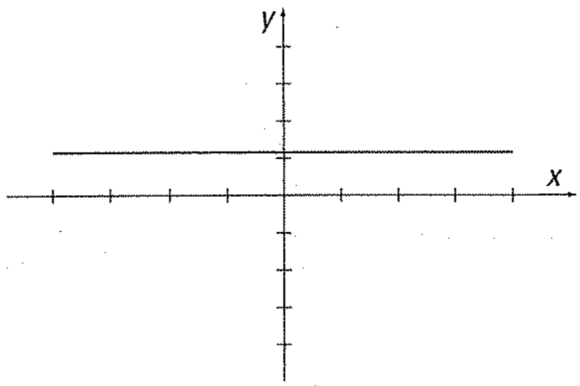
b.



c.



d.



2. Si se tiene una concentración de 0, 04 de alcohol en la sangre, se produce un riesgo aproximado de:

a. 6 % c. 2 %

b. 10 % d. 9 %

3. Si la ley establece que las personas con un riesgo mayor o igual al 20 % de sufrir un accidente no deben conducir vehículos, ¿cuál es la mínima concentración de alcohol en la sangre de un conductor para ser arrestado y multado?

a. 0, 01 c. 0, 08

b. 0, 08 d. 0, 1

4. Con respecto a la función de riesgo accidental, no es correcto afirmar que:

a. Si $x = 0$, el riesgo de sufrir un accidente es del 6 %.

b. Para algún x, el riesgo de sufrir un accidente es del 5 %

c. Para $x = 0, 234$, el riesgo de sufrir un accidente es del 100 %, en forma aproximada.

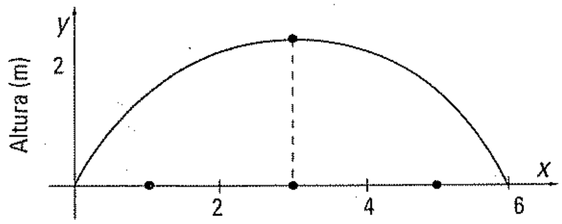
d. El dominio de la función debe estar en [0; 0, 235]

mejoramiento

Prueba TIMSS

Responde las preguntas 5 a 7 de acuerdo con la siguiente información:

En el sistema de coordenadas cartesianas que se muestra en la figura, se ha representado la trayectoria parabólica de un disco lanzado al aire. El desplazamiento horizontal que alcanza el objeto es de 6 metros y la altura máxima es de 2 metros.



Desplazamiento horizontal (m)

5. La función que describe la trayectoria del disco es:

a. $y = -(x-3)^2 + 2$

b. $y = -\frac{2}{9}x^2 + \frac{4}{3}x$

c. $y = -(x+3)^3 + 2$

d. $y = -\frac{2}{9}x^2 - \frac{4}{3}x$

6. Si una rana salta en forma horizontal 2 m y la altura máxima del salto es $\frac{16}{9}$ m, la expresión que describe el movimiento es:

a. $y = -(x-2)^2 + \frac{16}{9}$

b. $y = (x-2)^2 + \frac{16}{9}$

c. $x = -(y-2)^2 + \frac{16}{9}$

d. $y = -(x-2)^2 - \frac{16}{9}$

7. La ecuación $y = -x^2 + 2x$ representa la trayectoria del salto de una rana que en un instante alcanza un desplazamiento horizontal (x) y una altura (y). El desplazamiento horizontal máximo es 2 m y la altura máxima es 1 m. Cuando la rana esté a una altura de $\frac{1}{2}$ m, el desplazamiento horizontal alcanzado puede ser:

a. $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$, ó, $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$

b. $1-\sqrt{2}$, ó, $1+\sqrt{2}$

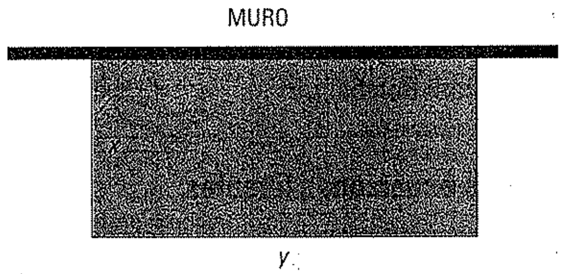
c. $\frac{-2-\sqrt{2}}{2}$, ó, $\frac{-2+\sqrt{2}}{2}$

d. $-1-\sqrt{2}$, ó, $-1+\sqrt{2}$

Prueba PISA

Responde las preguntas 8 y 9 de acuerdo con la siguiente información:

8. Un granjero usa 250 metros de alambre para cercar un terreno rectangular adyacente a un muro de piedra, como se muestra en la figura:



La expresión que permite calcular la cantidad de alambre para cercar el terreno es:

a. $2x + 2y$

b. $x + y$

c. $2x + y$

d. $x + 2y$

9. La expresión algebraica para calcular el área en términos de la longitud del terreno es:

a. $A = -2x^2 + 250x$

b. $A = -2x^2 + 125x$

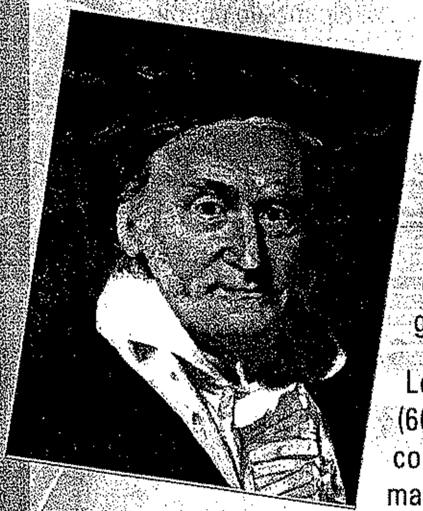
c. $A = -x^2 + 250x$

d. $A = -\frac{1}{2}x^2 + 125x$

Unidad 4

Sistema de ecuaciones lineales

CARL FRIEDRICH GAUSS



El alemán Carl Friedrich Gauss (1777-1855) trabajó sobre la resolución de ecuaciones múltiples por el método escalonado que lleva su nombre (MÉTODO DE ELIMINACIÓN DE GAUSS).

Durante el periodo comprendido entre 1700 a.e.c y 1700 d.e.c el desarrollo de las ecuaciones algebraicas se hizo a través de la solución de métodos geométricos denominados ÁLGEBRA GEOMÉTRICA estudiados por los griegos (300 a.e.c.).

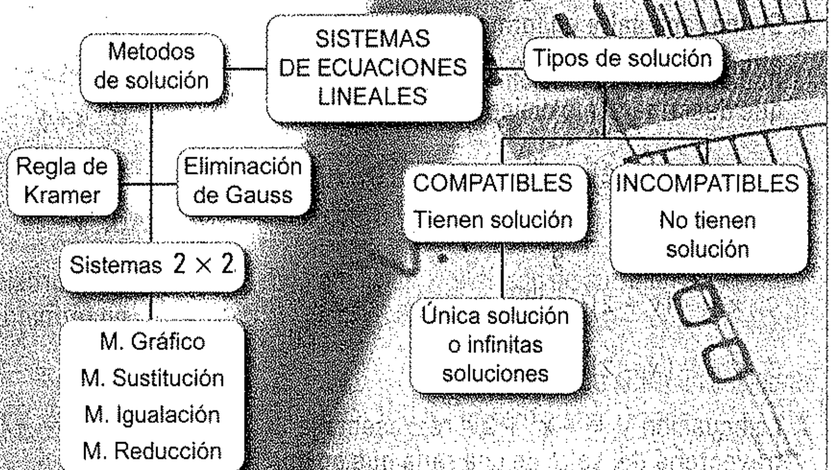
Los sistemas de ecuaciones lineales fueron ya resueltos por los babilonios (600 a.e.c al 300 d.e.c), los cuales llamaban a las incógnitas con palabras tales como longitud, anchura, área, o volumen, sin que tuvieran relación con problemas de medida.

El Renacimiento artístico europeo nació y floreció en Italia. Durante esta época de esplendor cultural se vivió también en el territorio italiano un extraordinario auge de las matemáticas y, en particular, de los desarrollos algebraicos relacionados con la resolución de ecuaciones. Algunos de los representantes más destacados de la «escuela» de algebristas italianos fueron Niccolò Tartaglia, Girolamo Cardano, Lodovico Ferrari y Rafael Bombelli.

Sistemas de ecuaciones lineales:

Muchos problemas reales tienen que ver con situaciones en las cuales dos o más valores cambian linealmente al mismo tiempo. A menudo, se desea hallar cuándo estos valores serán iguales. Por ejemplo, los valores pueden referirse a la ubicación de dos caminantes en el momento en el que se encuentran.

Varios valores que cambian linealmente se representan por varias ecuaciones lineales, llamadas un sistema de ecuaciones lineales. Identificar dónde los valores son iguales requiere resolver el sistema, esto es, hallar los valores de las variables que hacen ciertas todas las ecuaciones lineales en el sistema. El tipo de solución se resume de la siguiente manera:



PRUEBA QUE SABES

Averigua qué es el punto de equilibrio en economía y da un ejemplo.

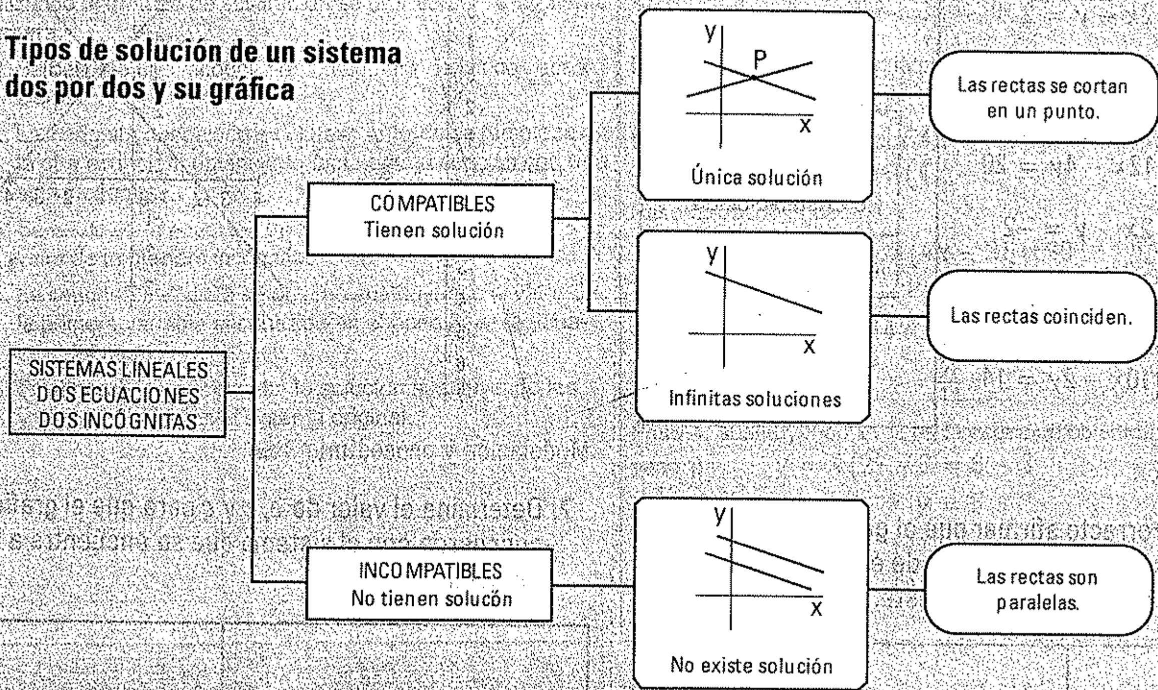
Logro: utilizar el método gráfico como herramienta para solucionar problemas con sistemas de ecuaciones lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas.

Método gráfico para solucionar sistemas de ecuaciones

Comparte lo que sabes

Las ecuaciones $\begin{matrix} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{matrix}$ representan un sistema lineal de 2×2. Observa que cada ecuación tiene la forma general de una recta. Calcula la pendiente de cada recta si: $a_1 = 2$, $b_1 = 6$, $c_1 = 2$, $a_2 = 4$, $b_2 = 12$ y $c_2 = 7$.

Tipos de solución de un sistema dos por dos y su gráfica



Práctica en contexto

Razonamiento y comunicación

1. Completa la siguiente tabla:

	Coeficiente de x	Coeficiente de y	Término independiente
$3x + 5y = -6$			
$-0,5x + 2y = \frac{3}{4}$			
$13x + 5 = 8y$			
$-x - 2,56y + 46 = 3$			

2. Traduce los enunciados en ecuaciones con dos incógnitas usando el lenguaje algebraico:

a. La suma de dos cantidades es 105.

b. El perímetro de un rectángulo es 250 cm.

c. El número de patas entre gallinas y conejos es 40.

d. La cantidad de dinero en monedas de $ 200 y $ 500 es de $ 18 500.

e. La edad de Juan es tres años menos que el triple de la de Carlos.

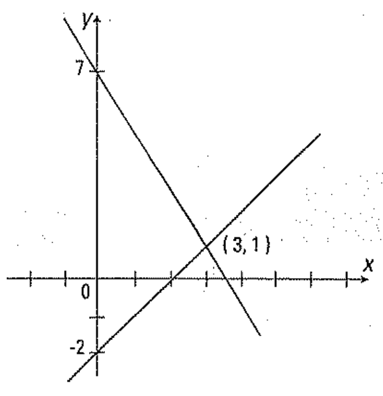
Razonamiento y procesos

3. Determina el tipo de solución de cada una de los sistemas lineales y relaciona con una flecha las dos columnas.

Sistema lineal	Tipo de solución
a. $\begin{cases} 2x - y = 2 \\ x - 2y = -2 \end{cases}$	
b. $\begin{cases} 3x - y = 10 \\ 12x - 4y = 20 \end{cases}$	Única solución
c. $\begin{cases} 2x - y = -2 \\ -2x - y = 1 \end{cases}$	No existe solución
d. $\begin{cases} 5x - y = 7 \\ 10x - 2y = 14 \end{cases}$	Infinitas soluciones

Modelación

4. ¿Es correcto afirmar que el gráfico corresponde a la solución del sistema de ecuaciones lineales dado? Justifica tu respuesta.

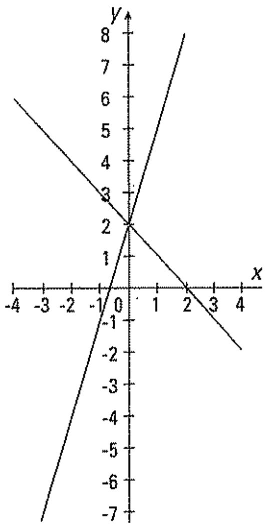
$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x - y = 2 \end{cases}$	

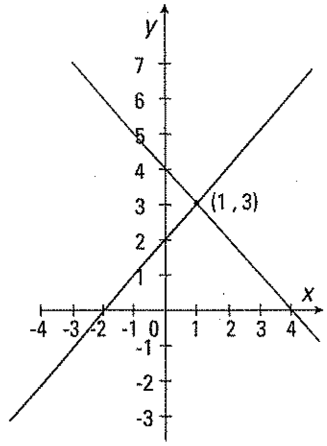
5. Dado el sistema $\begin{cases} x + 6y = 11 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$

a. Representa gráficamente las ecuaciones del sistema.

b. Determina gráficamente el tipo de solución del sistema.

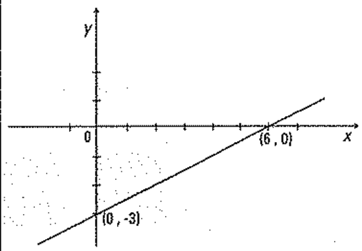
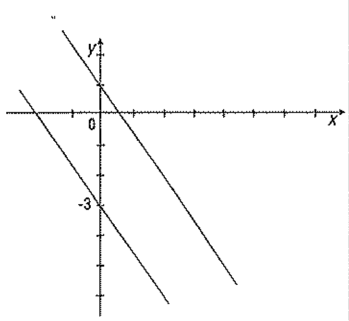
6. Construye para cada gráfico un sistema de ecuaciones cuya representación geométrica sea la indicada en cada caso:





Modelación y procedimientos

7. Determina el valor de *a*, *b* y *c* para que el gráfico concuerde con el sistema que se encuentra a la derecha:

	Infinitas soluciones $\begin{cases} ax + by = c \\ x = 6 + 2y \end{cases}$
	Sin solución $\begin{cases} 2x + y = -3 \\ ax + by = c \end{cases}$

Logro: aplicar el método de sustitución para resolver sistemas de ecuaciones lineales de 2×2.

Tema 2

Método de sustitución

Comparte lo que sabes

Representa el sistema: $\begin{cases} 5x + 3y = 5 \\ 4x + 7y = 27 \end{cases}$

Procedimiento	Ejemplo
Para resolver un sistema de ecuaciones lineales 2×2 utilizando el método de sustitución se procede de la siguiente manera: 1. Se despeja una incógnita en cualquiera de las dos ecuaciones. 2. La incógnita despejada en el paso anterior se remplaza en la otra ecuación, obteniendo una nueva ecuación con una sola incógnita. 3. Se resuelve la ecuación del paso 2 para encontrar el valor de la primera incógnita. 4. La segunda incógnita se obtiene sustituyendo el valor de la primera variable encontrado en el paso 3, en la ecuación del paso 1. 5. Finalmente, se comprueba la solución sustituyendo los valores hallados en el sistema original.	Resolver el sistema $\begin{cases} 4x - y = 3 \\ 2x + 3y = 19 \end{cases}$ **Paso 1:** despejando y en la primera ecuación: $y = 4x - 3$ **Paso 2:** sustituyendo y por $4x - 3$ en la segunda ecuación: $2x + 3(4x - 3) = 19$ **Paso 3:** despejando a x: $2x + 3(4x - 3) = 19$; $2x + 12x - 9 = 19$; $14x = 19 + 9$; $x = \frac{28}{14} = 2$ **Paso 4:** sustituyendo x = 2 en la ecuación obtenida en el paso 1: $y = 4(2) - 3 = 8 - 3$; $y = 5$ **Paso 5:** $\begin{cases} 4(2) - (5) = 3 \\ 2(2) + 3(5) = 19 \end{cases}$

Práctica en contexto

Procedimientos y razonamiento

1. Analiza en cada caso si la solución dada satisface el sistema:

Solución	Sistema
$(2, -1)$	$\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ -3x + y = -7 \end{cases}$
$(4, 6)$	$\begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ -x + y = 1 \end{cases}$
$(1, 3)$	$\begin{cases} 5x - y = 2 \\ x + 4y = 13 \end{cases}$

2. Resuelve estos sistemas de ecuaciones por el método de sustitución:

a. $\begin{cases} 2x + 3y = 3 \\ 5x - 6y = 3 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ x - 2y = 11 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ 3x + 2y = 13 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 5x - y = 7 \\ 3x + 2y = 12 \end{cases}$

e. $\begin{cases} \frac{5}{2}x - \frac{7}{2}y = -1 \\ 8x + 3y = 11 \end{cases}$

f. $\begin{cases} \frac{(x + y)}{2} = 4 \\ \frac{y - 1}{3x} = 2 \end{cases}$

g. $\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y = \frac{1}{2} \\ \frac{5}{12}x + \frac{2}{9}y = \frac{1}{4} \end{cases}$

h. $\begin{cases} 3x + 4y = 8 \\ \frac{(8 - 3x)}{y} = 4 \end{cases}$

Tema 3

Método de igualación

LOGRO: aplicar el método de igualación para resolver sistemas de ecuaciones lineales de 2×2.

COMPARTE LO QUE SABES

¿Recuerdas la siguiente propiedad de los reales: si $a = b$ y $b = c$, entonces $a = c$? ¿Cómo se le llama a esta propiedad?

Procedimiento

Para resolver un sistema de ecuaciones lineales 2×2 utilizando el método de igualación se procede de la siguiente manera:

1. Despejar la misma incógnita en las dos ecuaciones.
2. Se igualan las ecuaciones del paso 1.
3. Se resuelve la ecuación resultante para encontrar el valor de la primera incógnita.
4. El valor obtenido, se sustituye en cualquiera de las dos ecuaciones del paso 1 para encontrar el valor de la segunda incógnita.
5. Finalmente, se comprueba la solución sustituyendo los valores hallados en el sistema original.

Ejemplo

Resolver el sistema: $\begin{cases} 5x - 2y = 4 \\ 2x - 3y = 5 \end{cases}$

Paso 1: despejando x en ambas ecuaciones,

$$x = \frac{4 + 2y}{5}\ ,\ x = \frac{5 + 3y}{2}$$

Paso 2: $\dfrac{4 + 2y}{5} = \dfrac{5 + 3y}{2}$

Paso 3: resolviendo la ecuación para y:

$$2(4 + 2y) = 5(5 + 3y)$$
$$8 + 4y = 25 + 15y$$
$$11y = -17$$
$$y = -\frac{17}{11}$$

Paso 4: $x = \dfrac{4 + 2\left(-\frac{17}{11}\right)}{5} = \dfrac{4 - \frac{34}{11}}{5} = \dfrac{\frac{44 - 34}{11}}{5} = \dfrac{\frac{10}{11}}{5} = \dfrac{2}{11}$

Paso 5: $\begin{cases} 5\left(\frac{2}{11}\right) - 2\left(-\frac{17}{11}\right) = 4 \\ 2\left(\frac{2}{11}\right) - 3\left(-\frac{17}{11}\right) = 5 \end{cases}$

PRÁCTICA EN CONTEXTO

Procedimientos

1. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones por el método de igualación:

a. $\begin{cases} 3x + 5y = 7 \\ 7x - y = -9 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 5x + 8y = 6 \\ 3x + 4y = 6 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 3x = 12 \\ -2x - y = -3 \end{cases}$

d. $\begin{cases} x = 8 - 3y \\ y = -\frac{1}{4}x \end{cases}$

e. $\begin{cases} y = \frac{4}{3}x + 3 \\ y = \frac{2}{3}x + \frac{7}{3} \end{cases}$

f. $\begin{cases} 2p - q = 0 \\ q - 2p = 2 \end{cases}$

g. $\begin{cases} x = \frac{1}{3}y + \frac{2}{3} \\ 2x = y - 1 \end{cases}$

h. $\begin{cases} m - n = \frac{1}{2} \\ n = 4m - 2 \end{cases}$

Modelación

2. En cada caso, encuentra y resuelve el sistema de ecuaciones que modelan los enunciados.

a. La suma de dos números es 23, y el doble del primero excede en 5 unidades al segundo.

b. El perímetro de un rectángulo es de 20 unidades, el largo del rectángulo es el triple del ancho disminuido en dos unidades.

c. El número de monedas de \$ 200 y de \$ 500 es 40 y la cantidad de dinero que se reúne con estas monedas es de \$ 14 500.

COMPETENCIA INTERPRETATIVA: reconoce y aplica el método de igualación para resolver sistemas de ecuaciones lineales de 2×2

Logro: aplicar el método de reducción para resolver sistemas de ecuaciones lineales de 2×2.

Método de reducción o eliminación

Comparte lo que sabes

¿Qué son ecuaciones equivalentes?

Procedimiento	Ejemplo
Para resolver un sistema de ecuaciones lineales de 2×2 utilizando el método de reducción se procede de la siguiente manera: 1. Si es necesario, se multiplica una o ambas ecuaciones por números favorables que hagan que los coeficientes de una de las incógnitas sean idénticos, pero de diferente signo. 2. Se suman las ecuaciones para eliminar una incógnita. 3. Se despeja la variable en la ecuación resultante. 4. Se sustituye el valor hallado, en una de las ecuaciones originales para encontrar el valor de la segunda incógnita, y luego se despeja. 5. Se comprueba la solución sustituyendo los valores en el sistema de ecuaciones original.	Resolver el sistema: $\begin{cases} 5x - 6y = 4 \rightarrow (1) \\ 3x + 7y = 8 \rightarrow (2) \end{cases}$ **Paso 1:** se multiplica la ecuación (1) por 3 y la ecuación (2) por (–5): $15x - 18y = 12$ $-15x - 35y = -40$ **Paso 2:** se suman las ecuaciones y se obtiene, $0x - 53y = -28$ **Paso 3:** $y = \frac{28}{53}$ **Paso 4:** $5x - 6\left(\frac{28}{53}\right) = 4$; $5x = 4 + \frac{168}{53}$; $5x = \frac{212 + 168}{53}$; $5x = \frac{380}{53}$ $x = \frac{76}{53}$ **Paso 5:** $5\left(\frac{76}{53}\right) - 6\left(\frac{28}{53}\right) = 4$ $3\left(\frac{76}{53}\right) + 7\left(\frac{28}{53}\right) = 8$

Práctica en contexto

Procedimientos

1. Resuelve los sistemas de ecuaciones usando el método de eliminación:

a. $\begin{cases} 2m - 3n = 1 \\ 4m - 2n - 4 = 1 \end{cases}$

e. $\begin{cases} 2u - 6v = 1 \\ u - 3v = 4 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 3p + 2q = 14 \\ 2p + q = 8 \end{cases}$

f. $\begin{cases} 6m - 4n = 16 \\ 9m - 3n = 24 \end{cases}$

c. $\begin{cases} s = 2t - 4 \\ 3s - 6t + 12 = 0 \end{cases}$

g. $\begin{cases} 7r - 8s = 9 \\ 4r + 3s = -10 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 2b - 5c = 3 \\ 3b = -10 + 5c \end{cases}$

h. $\begin{cases} w + 3z = -1 \\ 2w - z = 5 \end{cases}$

2. Felipe resolvió el siguiente sistema de ecuaciones por reducción. ¿Son correctos sus argumentos?

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 4x + y = -2 \end{cases}$$

Multiplicamos la primera ecuación por 4

$\begin{cases} 4x + 8y = 16 \\ 4x + y = -2 \end{cases}$, restamos y obtenemos $7y = 14$

Luego $x = 2$, $y = 1$.

COMPETENCIA INTERPRETATIVA: reconoce y aplica el método de reducción para resolver sistemas de ecuaciones de 2×2

Tema 5

Problemas de aplicación de sistemas de ecuaciones

Logro: aplicar los métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales de 2×2 en la resolución de situaciones problema en diferentes contextos.

Comparte lo que sabes

La suma de dos números es 5 y su diferencia es 1. El problema anterior, ¿cuántas incógnitas tienes?

En un problema que tenga n número de incógnitas, ¿cuántas ecuaciones debes plantear para encontrar la solución?

Una empresa vende un artículo en \$ 10 000 por unidad. Los costos fijos de producción de la empresa son de \$ 2 400 000 por mes y los costos variables son de \$ 5 000 por unidad.

¿Cuántas unidades debe producir el fabricante cada mes para alcanzar su punto de equilibrio en el que no hay perdidas ni ganancias?

Solución

La función que describe el ingreso de la empresa al vender x número de artículos es $I(x) = 10\,000x$.

La función de costo de producir x unidades está dada por los costos fijos totales más los costos variables totales: $C(x) = 2\,400\,000 + 5\,000x$

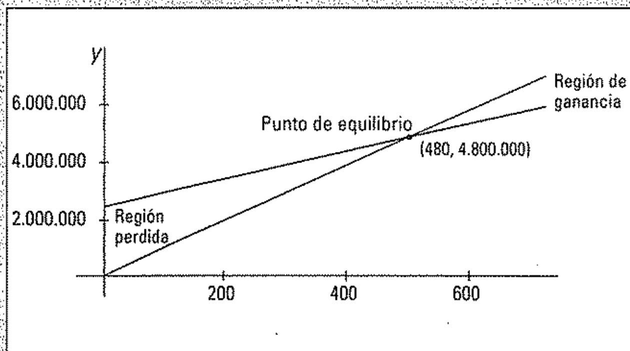
El punto de equilibrio se encuentra cuando $C(x) = I(x)$, es decir donde los ingresos por venta son iguales a los costos de producción. Luego si se igualan las dos funciones se obtiene el punto de equilibrio.

$$10\,000x = 2\,400\,000 + 5\,000x$$

$$5\,000x = 2\,400\,000$$

$$x = 480$$

Mediante el desarrollo algebraico y gráfico del sistema, la empresa alcanza su punto de equilibrio si se producen 480 unidades, luego a partir de este número, la empresa comenzará a obtener dividendos.



Práctica en contexto

Solución de problemas

1. En un triángulo isósceles de 28 cm de perímetro, el lado desigual es tres veces menor que cada uno de los otros lados. ¿Cuánto miden los lados?
2. En una tienda de anticuario hay 12 candelabros de 2 y 3 brazos. Si para utilizarlos se necesitan 31 velas, ¿cuántos candelabros hay de cada tipo?
3. Dos números suman 51. Si el primero lo dividimos entre 3 y el segundo entre 6, los cocientes se diferencian en 1. Halla los números.
4. En un corral hay 50 animales entre gallinas y conejos. El número de patas es de 150. ¿Cuántos animales hay de cada clase?
5. En la papelería, Andrés pagó \$ 5 000 por 5 lápices y 3 borradores. Si Luisa pagó \$ 1 900 por 2 lápices y un borrador, ¿cuál es el precio de un lápiz y un borrador?
6. Un ejercicio realizado en clase consta de 16 preguntas. El profesor suma 10 puntos por cada

respuesta correcta y resta 6 puntos por cada cuestión no contestada o mal contestada. Si un estudiante ha obtenido 64 puntos en el ejercicio, ¿cuántas preguntas ha contestado correctamente?

7. El cociente de una división es 3 y el resto 5. Si el divisor disminuye en 2 unidades, el cociente aumenta en 1 unidad y el nuevo resto es 1. Encuentra el dividendo y el divisor.

8. Una tortuga camina a 0,4 m/s y se arrastra a 0,3 m/s. Si al realizar un determinado trayecto, la tortuga camina la primera parte y se arrastra la segunda, tarda 110 segundos. Si en la primera parte se arrastra y en la segunda parte camina, tarda 100 segundos. Encuentra la longitud de las dos partes.

9. Las edades de una madre y un hijo suman 83 años. Cuando la madre tenía la edad del hijo, sus edades sumaban 33 años. Averigua la edad de cada uno.

10. A lo largo del año se han producido 11 600 accidentes de tráfico, de los que 5 600 se han debido a un exceso de velocidad.

Averigua el número de autos y de motos accidentados si el 40 % de los accidentes de autos y el 60 % de las de motos se han producido por no llevar la velocidad adecuada.

11. El boleto de entrada a un espectáculo de teatro es de $ 15 000 para afiliados y $ 22 500 para público en general. Si se vendió un total de 450 boletos y se obtuvo un ingreso total de $ 7 777 500, ¿cuántos boletos de cada tipo se vendieron?

12. Una aerolínea que vuela de Bogotá a Cartagena con escala en Medellín, cobra $ 450 000 por el pasaje a Medellín y $ 600 000 de Bogotá a Cartagena. En Bogotá abordaron un total de 185 pasajeros y los ingresos totales fueron $ 105 000 000. ¿Cuántos pasajeros bajaron del avión en Medellín?

13. Una empresa de computadores determina que el costo de producir x número de computadores se relaciona con la siguiente expresión algebraica:

$$C(x) = 750\,000x + 600\,000 \text{ pesos.}$$

Si la función de ingresos por la venta de computadores es:

$$I(x) = 825\,000x$$

a. Representa gráficamente las ecuaciones del sistema.

b. ¿A partir de cuántos computadores la empresa obtiene ganancias?

14. Camila decide colocar $ 400 000 en dos entidades financieras, la primera le ofrece un interés del 8 % y la segunda un interés del 9 %. Al cabo de un año los ingresos por las dos inversiones son de $ 34 400. ¿Cuánto dinero invirtió Camila en cada entidad bancaria?

15. El administrador de una fábrica de muebles establece un plan de producción para dos modelos A y B de sillas y cuenta con dos divisiones. Una división es el taller de máquinas y herramienta donde se fabrican las partes del producto y la otra es la división de ensamble y terminado donde se unen las partes para obtener el producto terminado. El modelo A requiere 4 horas para elaborar las piezas y 5 horas para ensamblarlas, el modelo B requiere 3 horas para elaborar las piezas y una para ensamblarlas. Si la fábrica dispone de 200 horas mensuales para elaboración de piezas y 84 horas mensuales para ensamble, ¿cuántas sillas tipo A y tipo B se pueden construir mensualmente en esta fábrica?

Tema 6

Sistemas lineales 3 x 3 (tres ecuaciones con tres incógnitas)

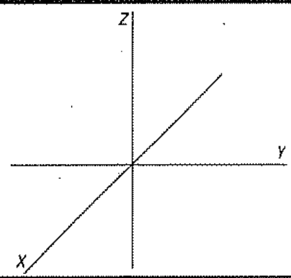
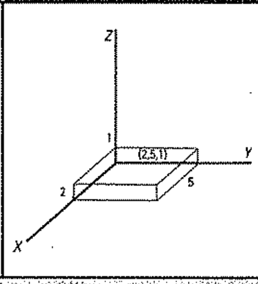
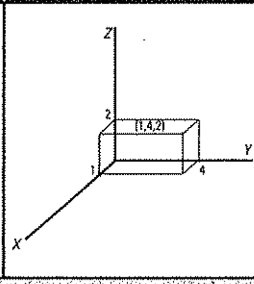
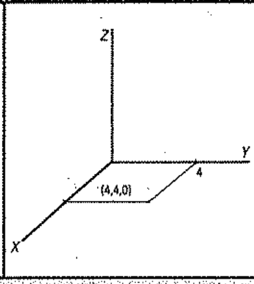
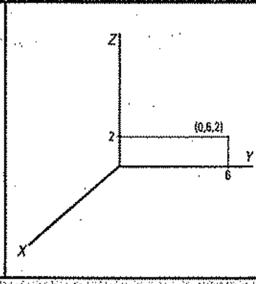
Logro: identificar la solución de sistemas de ecuaciones lineales de 3×3.

Comparte lo que sabes

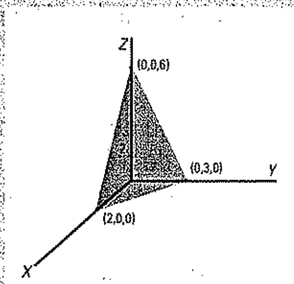
¿Qué es par ordenado? ¿Cómo se llaman la coordenada en *x* y la coordenada en *y* de un par ordenado?

Espacio tridimensional

Un espacio tridimensional está representado por la intersección ortogonal de tres ejes llamados eje X, eje Y y eje Z. Cada punto en el espacio tridimensional tiene como coordenadas ternas de la forma (x, y, z), como se muestra a continuación:

Espacio tridimensional	(2, 5, 1)	(1, 4, 2)	(4, 4, 0)	(0, 6, 2)
				

Ecuaciones lineales con tres variables



Una ecuación de la forma $ax + by + cz = d$ es una ecuación lineal con tres variables (x, y, z), tres coeficientes (a, b, c), y un término independiente d. La representación gráfica de esta ecuación en un sistema de coordenadas tridimensional es un plano; por ejemplo:

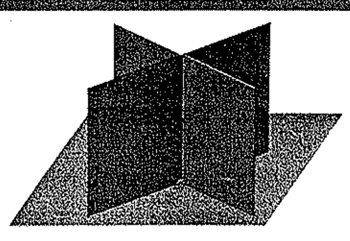
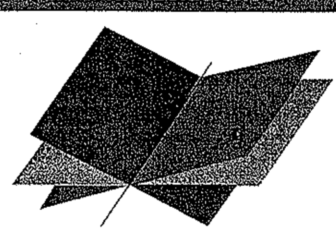
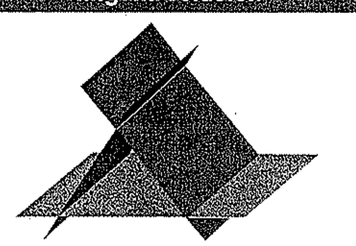
El plano correspondiente a la ecuación $3x + 2y + z = 6$, se muestra a la izquierda.

Este plano pasa por los puntos (2, 0, 0), (0, 3, 0) y (0, 0, 6) lo cuales muestran las intersecciones del plano con cada uno de los ejes. Uniendo los tres puntos entre sí, se obtiene una región por donde pasa el plano de la ecuación $3x + 2y + z = 6$.

Sistemas de ecuaciones lineales de 3×3

Un sistema de ecuaciones lineales de 3×3, se representa algebraicamente de la siguiente manera: posee tres ecuaciones y tres incógnitas, y su solución gráfica está determinada así:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

Única solución	Infinitas soluciones	Ninguna solución
 Los tres planos se cortan en un único punto (punto azul).	 Los tres planos se intersecan en una recta.	 No existe ningún punto en común para los tres planos.

Por ejemplo, como $x = -1$, $y = 2$ y $z = 1$ es la única solución del sistema, $\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 2x + 3y + 2z = 6 \\ -x + y + z = 4 \end{cases}$, entonces

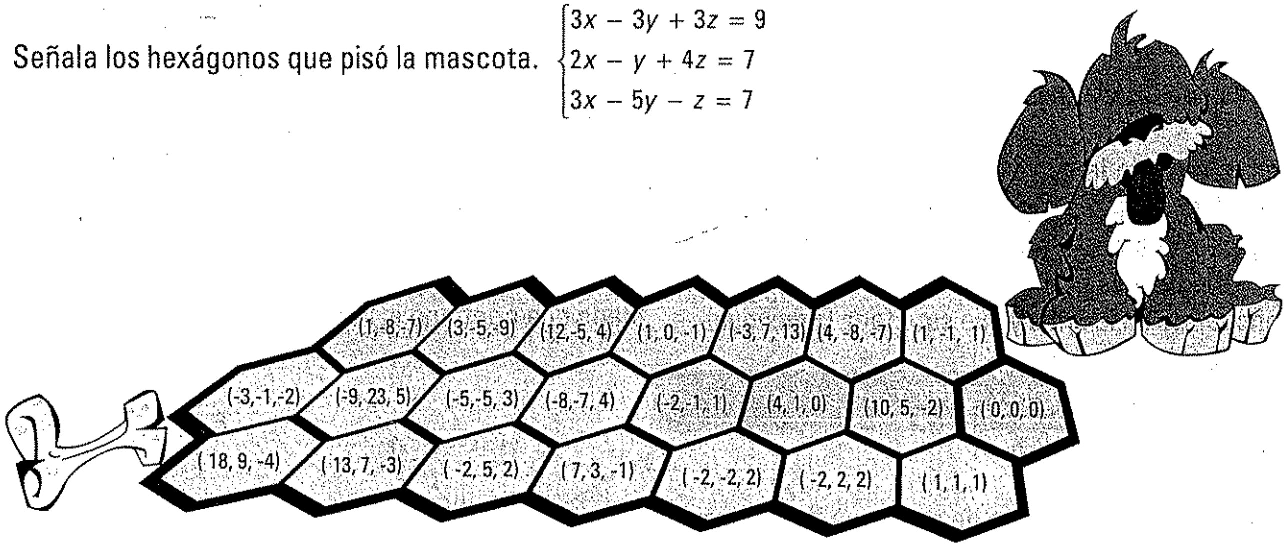
los tres planos correspondientes a cada ecuación se cortan en el punto $(-1, 2, 1)$.

PRÁCTICA EN CONTEXTO

Procedimientos y comunicación

1. Para llegar hasta su comida, la mascota sólo pisó hexágonos cuya terna sea solución del sistema:

Señala los hexágonos que pisó la mascota. $\begin{cases} 3x - 3y + 3z = 9 \\ 2x - y + 4z = 7 \\ 3x - 5y - z = 7 \end{cases}$



2. Grafica los siguientes puntos en el espacio tridimensional:

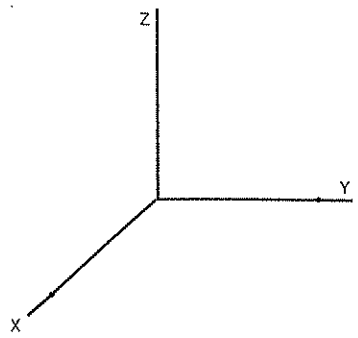
a. $(2, -3, 5)$

b. $(-1, \frac{3}{4}, -3)$

c. $(\frac{1}{2}, -3, 0)$

d. $(\sqrt{5}, 4, 7)$

3. Dibuja el plano $4x + 3y + 8z = 20$ en el sistema de coordenadas mostrado.



Modelación y procedimientos

4. Encuentra una ecuación de tres variables que modele cada una de las situaciones enunciadas:

a. Juan contó \$ 28 200 en monedas de \$ 100, \$ 200 y \$ 500.

b. La edad de Andrés es del doble de la suma de la edad de Fabio y Lucía.

c. Una persona invirtió una suma de dinero en tres corporaciones al 6 %, 7 % y 10 % y al año obtuvo un interés de \$ 345 600.

d. El promedio de tres números es 54.

Tema 7

Desigualdades con dos incógnitas

Logro: reconocer la representación algebraica y gráfica de una desigualdad lineal con dos incógnitas.

Comparte lo que sabes

Si la edad de Víctor y la de Bibiana son cantidades desconocidas pero se sabe que la suma de las dos es mayor o igual que 50, ¿cómo se puede representar algebraicamente esta expresión?

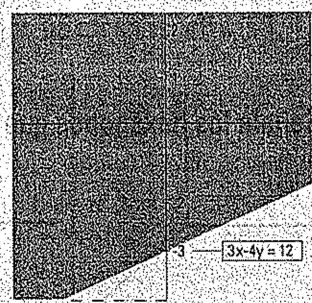
Una desigualdad lineal es aquella que se puede escribir en una de las siguientes formas, donde a, b y c representan números reales:

$$ax + by < c \qquad ax + by > c \qquad ax + by \leq c \qquad ax + by \geq c$$

Representación grafica de las desigualdades

Representar en el plano de coordenadas XY, la gráfica de la desigualdad $3x - 4y \leq 12$.

Primero se traza la recta $3x - 4y = 12$, como una línea sólida, ya que el signo $\leq$ indica que los puntos que pertenecen a la recta satisfacen la desigualdad dada. Después se selecciona un punto que no se encuentre en la línea y que satisfaga la desigualdad $3x - 4y \leq 12$, por ejemplo (0, 0). Luego se observa si este punto se encuentra en la región que está por encima o debajo de la recta. La representación gráfica de la solución estará dada por la recta $3x - 4y = 12$ y el semiplano que contiene al punto (0, 0).

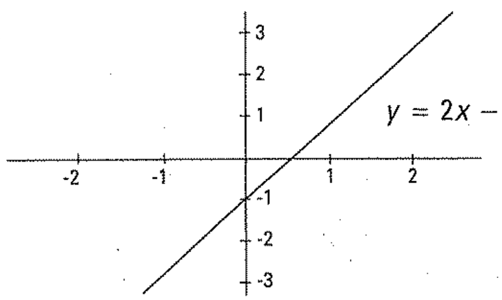


Práctica en contexto

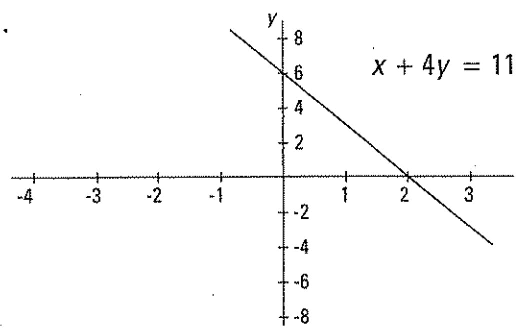
Comunicación y modelación

Sombrea la región solución de cada una de las desigualdades, teniendo en cuenta la recta dada.

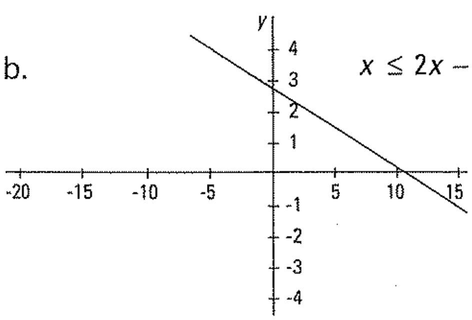
a.



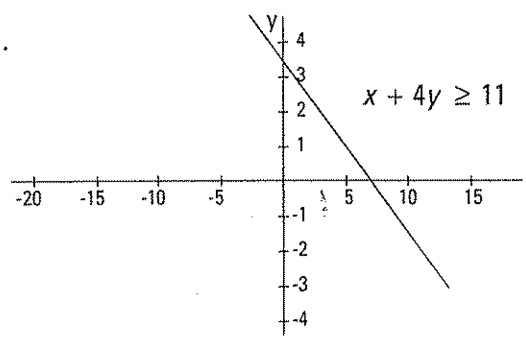
c.



b.



d.



Logro:
encontrar la región solución de un sistema de desigualdades lineales y resolver problemas que involucren desigualdades en diferentes contextos.

Tema 8

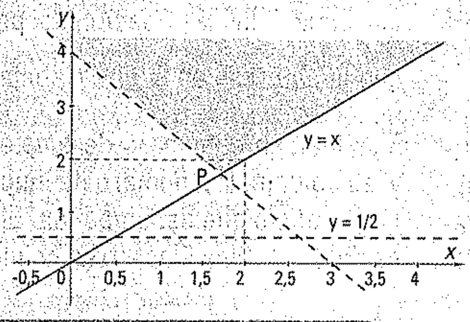
Sistemas de desigualdades lineales

Comparte lo que sabes

¿Qué es una restricción?

Observa cómo se representa de manera geométrica la solución del sistema de desigualdades:

$$4x+3y>12$$
$$x-y<0$$



La intersección de los dos semiplanos es la región sombreada. Un punto de esta región es un elemento del conjunto solución del sistema dado. El punto P, la intersección de las dos líneas rectas determinadas por las ecuaciones, se encuentra resolviendo las ecuaciones simultáneas:

$$4x+3y=12$$
$$x-y=0$$

Práctica en contexto

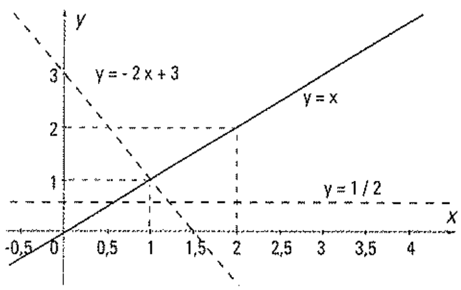
Modelación, comunicación y procedimientos

1. Señala la región solución para cada sistema y encuentra las coordenadas de los puntos de las esquinas. Ten en cuenta que para cada caso se cumple que $x \geq 0$ y $y \geq 0$.

$y > -2x + 3$

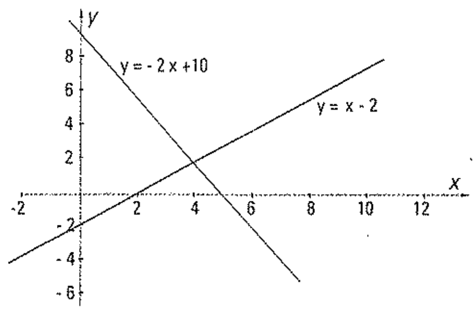
$y \leq x$

$y > \frac{1}{2}$



$y \geq -2x + 10$

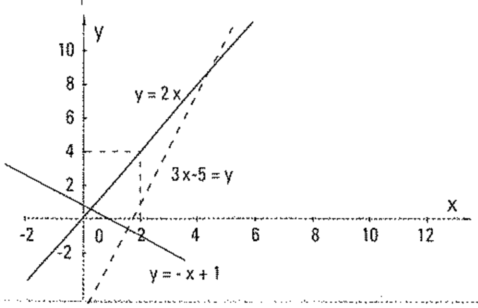
$y \geq x - 2$



$x + y > 1$

$3x - 5 \leq y$

$y < 2x$



2. Traza la gráfica de los siguientes sistemas de desigualdades:

a. $\begin{cases} x + 5y \leq 200 \\ 2x + 3y \leq 134 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x + 2y \geq 10 \\ 2x + y \geq 11 \\ x + 3y \geq 15 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$

Solución de procesos

3. Una agencia de motocicletas tiene un máximo de \$ 120 000 000 para invertir en la compra de no más de 26 motocicletas de dos tipos diferentes, línea de de lujo y línea económica. El costo de una moto de lujo es de \$ 9 600 000 y una moto económica es de \$ 3 000 000. Escribe el sistema de desigualdades que modela el problema de acuerdo con las restricciones dadas y grafica la región solución para el sistema.

COMPETENCIA PROPOSITIVA: resuelve desigualdades y las aplica en diferentes contextos.

Tema 9

Matrices

Logro: reconocer el concepto de matriz y considerar los tipos de matrices especiales para ordenar información en análisis de problemas.

Comparte lo que sabes

¿Qué es un cuadrado mágico?

Matrices: una matriz se define como un arreglo rectangular de números compuesto por un número finito de filas m y de columnas n. El orden de una matriz está dado por su tamaño denotado por la expresión $m \times n$.

Ejemplo Dos empresas A y B dedicadas a la fabricación de autos, distribuyen sus empleados en una plantilla de la siguiente forma: en la empresa A trabajan 90 obreros calificados, 120 comerciales y 30 administrativos. En la empresa B hay 70 obreros, 45 comerciales y 50 administrativos.

Los datos se pueden representar usando una matriz que indique la clasificación del personal de acuerdo con la empresa en la que trabaja: $\begin{pmatrix} 90 & 120 & 30 \\ 70 & 45 & 50 \end{pmatrix}$, las filas indican el número de empleados por empresa y las columnas el número de empleados de acuerdo con el oficio que desempeñan. El orden de la matriz es de 2×3 (dos filas y tres columnas).

Matrices especiales

Tipo	Característica	Ejemplo
Matriz nula: matriz cuyas entradas son ceros.	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{2\times2}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{3\times2}$
Matriz cuadrada: matriz cuyo número de filas es igual al de las columnas	$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \sqrt{3} & 5 \end{pmatrix}_{2\times2}$; $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -9 \\ \frac{5}{2} & -3 & 0 \\ 4 & 23 & -8 \end{pmatrix}_{3\times3}$
Matriz identidad matriz cuadrada cuya diagonal son unos y las otras entradas son ceros.	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{2\times2}$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3\times3}$

Práctica en contexto

Procedimientos

1. Dadas las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & 4 & 9 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 6 \\ -1 & 5 & 0 \\ -5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Encuentra cada uno de los elementos:

a. a_{32} :___ y b_{32} :___

b. a_{12} :___ y b_{12} :___

c. a_{23} :___ y b_{23} :___

d. a_{33} :___ y b_{33} :___

2. Para cada caso elabora una matriz que cumpla las condiciones dadas:

a. Matriz de orden 3×2 cuyos elementos son enteros negativos.

b. Matriz de orden 2×4, tal que $a_{14} = \sqrt{5}$.

c. Matriz identidad de orden 5×5.

COMPETENCIA INTERPRETATIVA: utiliza la noción de matriz para representar problemas en un número finito de variables.

Logro: argumentar condiciones de suficiencia para realizar operaciones entre matrices.

Tema 10
Operaciones con matrices

COMPARTE LO QUE SABES

Andrea y Sandra tienen dos trabajos: en el primero ganan \$ 250 000 y \$ 300 000, en forma respectiva y en el segundo \$ 350 000 y \$ 500 000. Ordena la información en una matriz.

Ellas saben que el próximo año les aumentarán en los dos trabajos el 10 %, ¿cual será la matriz que relacione los salarios el próximo año?

Operaciones	Condiciones	Ejemplo
Suma y resta de matrices	1. Las matrices A y B deben ser del mismo tamaño. 2. La suma y la resta se realizan término a término, es decir el elemento a_{13} se suma o resta con b_{13}.	$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 72 \\ 2 & 27 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 13 & -2 & 9 \\ 5 & -7 & 14 & 5 \end{pmatrix}$ $A + B = \begin{pmatrix} 3 & 10 & 0 & 81 \\ 7 & 20 & 19 & 4 \end{pmatrix}$; $A - B = \begin{pmatrix} -1 & -16 & 4 & 63 \\ -3 & 34 & -9 & -6 \end{pmatrix}$
Multiplicación de un real por una matriz (producto de un escalar por una matriz).	Multiplicar un número por una matriz es equivalente a multiplicar el número por cada uno de los elementos de la matriz.	$-5 \times \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ \frac{2}{5} & 0 & 1 \\ 2 & -6 & 3 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 15 & 10 \\ -2 & 0 & -5 \\ -10 & 30 & -15 \\ -20 & 10 & 0 \end{pmatrix}$
Multiplicación entre matrices.	El número de columnas de la primera matriz debe coincidir con el número de filas de la segunda matriz.	$A \times B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} 3a+4e & 3b+4f & 3c+4g & 3d+4h \\ 2a+5e & 2b+5f & 2c+5g & 2d+5h \\ 6a+7e & 6b+7f & 6c+7g & 6c+7h \end{pmatrix}$

PRÁCTICA EN CONTEXTO

1. Utiliza las matrices para realizar las operaciones indicadas cuando sea posible:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

a. –2A   e. 2A – 3B   i. DC

b. 5D   f. 3B + 4F   j. AB

c. 3C + 4D   g. CD   k. EC

d. 7C – 5D   h. DE   l. A^2

Solución de problemas

2. Ventas: Supón que la matriz A representa las ventas (en millones de pesos) de una compañía en 2006 en varias ciudades y la matriz B representa sus ventas (en millones de pesos) para la misma compañía en 2007 en las mismas ciudades.

a. Escribe la matriz que representa el total de ventas por tipo y ciudad para ambos años.

$$A = \begin{pmatrix} 450 & 260 & 720 \\ 450 & 350 & 130 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 320 & 250 & 655 \\ 430 & 390 & 170 \end{pmatrix}$$

b. Escribe la matriz que representa la diferencia de ventas por tipo y ciudad de 2006 a 2007.

Tema 11

Matrices y sistemas de ecuaciones

Logro: aplicar el método de eliminación de Gauss-Jordan en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

Comparte lo que sabes

¿Qué nombre reciben los sistemas de ecuaciones lineales que tienen el mismo número de incógnitas y de ecuaciones?

El proceso que se utiliza para resolver un sistema de ecuaciones lineales usando matrices se denomina **Método de eliminación de Gauss - Jordan**, en este método se utilizan operaciones elementales por fila para reducir la matriz de coeficientes a la matriz identidad.

Un sistema de ecuaciones de la forma:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

puede ser representado en una matriz ampliada así:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{array}\right]$$

de tal forma que mediante operaciones elementales entre filas se debe simplificar a una matriz reducida de la siguiente forma:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & k_1 \\ 0 & 1 & 0 & k_2 \\ 0 & 0 & 1 & k_3 \end{array}\right]$$

Al obtener la matriz reducida, la solución para cada variable es $x = k_1$, $y = k_2$ y $z = k_3$.

Operaciones elementales entre filas:

a. Intercambiar dos filas:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{array}\right]_{f_1 \leftrightarrow f_2}$$

b. Multiplicar una fila por una constante no nula:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 3a_3 & 3b_3 & 3c_3 & 3d_3 \end{array}\right]_{3f_3}$$

c. Sumar un múltiplo de una fila a otra fila:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -3a_3 + a_1 & -3b_3 + b_1 & -3c_3 + c_1 & -3d_3 + d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{array}\right]_{-3f_3 + f_1}$$

Práctica en contexto

Procedimientos

1. A continuación se da un ejemplo de cómo se resuelve un sistema de ecuaciones lineales por medio del método de eliminación de Gauss - Jordan.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \end{array}\right] \approx \overbrace{\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \end{array}\right]}^{\textit{Paso } 1} \approx \overbrace{\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & -7 & -5 & 4 \end{array}\right]}^{\textit{Paso } 2} \approx \overbrace{\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -7 & -5 & 4 \end{array}\right]}^{\textit{Paso } 3} \approx \overbrace{\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{11}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{array}\right]}^{\textit{Paso } 4} \approx \overbrace{\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{11}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]}^{\textit{Paso } 5} \approx \overbrace{\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]}^{\textit{Paso } 6}$$

a. ¿Cuál es el sistema de ecuaciones lineales que se desea resolver?

b. Justifica las operaciones elementales entre filas realizadas en cada paso para encontrar la matriz reducida.

c. ¿Cuál es la solución del sistema?

2. Utiliza el método de reducción de Gauss - Jordan para encontrar la solución de los siguientes sistemas:

a. $\begin{cases} 7x - 2y = -1 \\ 3x + 6y = 11 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2x + 4y + 4z = 3\,200 \\ x + 2y + 2z = 1\,700 \\ x + y + 2z = 1\,300 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 2x + 3y + 2z = 180 \\ -x + 2y + 4z = 180 \\ 2x + 6y + 5z = 270 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 2x - 6y - 12z = 6 \\ 3x - 10y - 20z = 5 \\ 2x - 17z = -4 \end{cases}$

COMPETENCIA ARGUMENTATIVA: resuelve sistemas de ecuaciones lineales aplicando método de eliminación de Gauss-Jordan

Logro: usar la regla de Cramer para resolver sistemas de ecuaciones lineales aplicados en diferentes contextos.

Matrices y determinantes

COMPARTE LO QUE SABES

¿Es la solución de un sistema de ecuaciones independiente del método que se use para resolverlo? Explica.

Determinantes: toda matriz de orden $n \times n$ se asocia con un valor numérico real al que se le denomina determinante de una matriz. En este tema calcularemos determinantes para matrices de 2×2 y 3×3. El determinante de una matriz A, se denota como $|A|$ y está dado por:

$\lvert A \rvert = (a_{11} \cdot a_{22}) - (a_{21} \cdot a_{12})$ para una matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$	$\lvert A \rvert = [(a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}) + (a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13}) + (a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23})] - [(a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13}) + (a_{11} \cdot a_{32} \cdot a_{23}) + (a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33})]$ para una matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

Regla de Cramer para resolver sistemas de ecuaciones lineales

Una aplicación de los determinantes es la regla de Cramer para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Considera el sistema de ecuaciones de 2×2: $\begin{cases} ax + by = d \\ cx + dy = e \end{cases}$ La solución del sistema está dada por: $x = \dfrac{\begin{vmatrix} d & b \\ e & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}, \; y = \dfrac{\begin{vmatrix} a & d \\ c & e \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$	Para un sistema de 3×3 $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$, la solución es: $x = \dfrac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}; \; y = \dfrac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}; \; z = \dfrac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$

PRÁCTICA EN CONTEXTO

Procedimientos

1. Evalúa cada determinante:

a. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ d. $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}$ g. $\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ -6 & 9 \end{vmatrix}$

b. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ e. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 5 & -2 & 9 \\ 2 & 13 & 11 \end{vmatrix}$ h. $\begin{vmatrix} 8 & -2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$

c. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 8 & -2 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix}$ f. $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & 0 \\ 5 & -3 & 15 \end{vmatrix}$

Solución de problemas

2. Encuentra el número de monedas de \$ 100, \$ 200 y \$ 500 sabiendo que hay un total de 80 monedas y entre todas las monedas suman \$ 18 400. Además la suma del número de monedas de \$ 100 y de \$ 200 es igual al triple del número de monedas \$ 500.

3. Tres especies (A, B, C) de aves han sido llevadas a una isla con una población de 4 000. Después de un tiempo la especie A, ha duplicado su población, la especie B, ha incrementado en un 50 % y la especie C, se ha extinguido. Si el incremento en la población de la especie A es igual al de la especie B y si la población total se ha incrementado en 1 000 animales, determina la población inicial de cada una de las tres especies.

COMPETENCIA PROPOSITIVA: resuelve problemas que se pueden modelar a través de un sistema de ecuaciones lineales haciendo uso de la regla de Cramer.

Pruebas de

Prueba Saber

Marca con una X la respuesta correcta.

1. Si la utilidad por unidad del producto X es de \$ 500 y la utilidad por unidad del producto Y es \$ 350, entonces la utilidad U obtenida por producir x número de unidades del producto X y y unidades del producto Y es:

   a. U = 500 x + 350 y

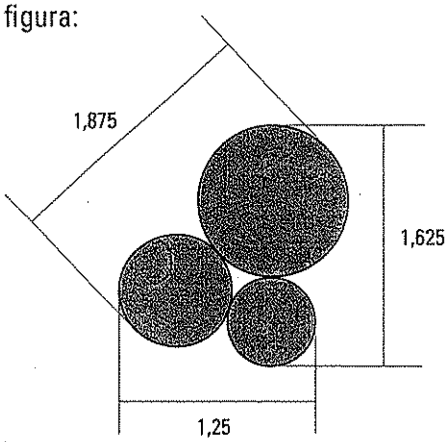
   b. U = 350 x + 500 y

   c. U = 500 X + 350 Y

   d. U = 550 X + 500 Y

   Pregunta tomada del examen del Icfes.

2. Tres varillas circulares se encuentran soldadas entre sí tal y como se muestra en la figura:



Donde:

x = valor del diámetro de la circunferencia más pequeña.

y = valor del diámetro de la circunferencia mediana.

z = valor del diámetro de la circunferencia más grande.

Para calcular el diámetro de cada una de las circunferencias se debe construir un sistema de ecuaciones. ¿Cuál de las siguientes opciones es la adecuada?

a. $\begin{cases} x + y = 1,25 \\ y + z = 1,625 \\ x + z = 1,875 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x + y = 1,25 \\ y + z = 1,875 \\ x + z = 1,625 \end{cases}$

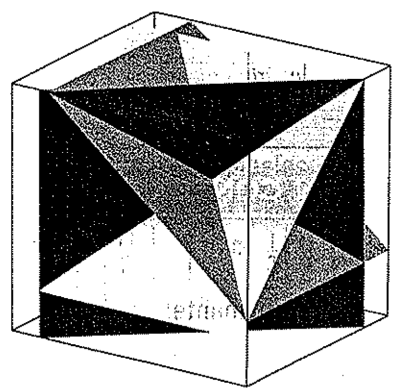
c. $\begin{cases} x + y = 1,625 \\ y + z = 1,875 \\ x + z = 1,25 \end{cases}$

d. $\begin{cases} x + y = 1,875 \\ y + z = 1,25 \\ x + z = 1,625 \end{cases}$

Prueba TIMSS

3. Al utilizar un software graficador para resolver un sistema de ecuaciones lineales, el resultado es el siguiente:

   Con respecto al sistema de ecuaciones es correcto decir:



   a. es inconsistente, no posee solución.

   b. es consistente y posee infinitas soluciones.

   c. es consistente y posee única solución.

   d. es inconsistente, posee infinitas soluciones.

mejoramiento

Prueba PISA

Responde las preguntas 4 y 5 de acuerdo con la siguiente información

Una compañía fabrica dos productos X y Y. Para cada producto requiere usar dos máquinas distintas A y B. En la fabricación de una unidad del producto X se requiere usar 3 horas la máquina A y 1 hora, la B. Para fabricar una unidad del producto Y se requieren 2 horas en la máquina A y 2 horas en la B. Se puede disponer de la máquina A las 24 horas del día, pero la máquina B, sólo 16 horas diarias.

Sea: x = número de unidades fabricadas del producto X en un día.

y = número de unidades fabricadas del producto Y en un día.

4. El sistema de desigualdades que representa la situación planteada es:

a. $\begin{cases} 3x + y > 24 \\ 2x + 2y > 16 \end{cases}$

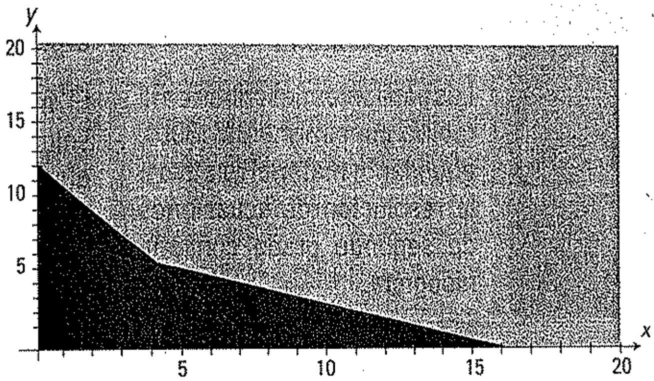
b. $\begin{cases} 3x + y \leq 16 \\ 2x + 2y \leq 24 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 3x + 2y \leq 24 \\ x + 2y \leq 16 \end{cases}$

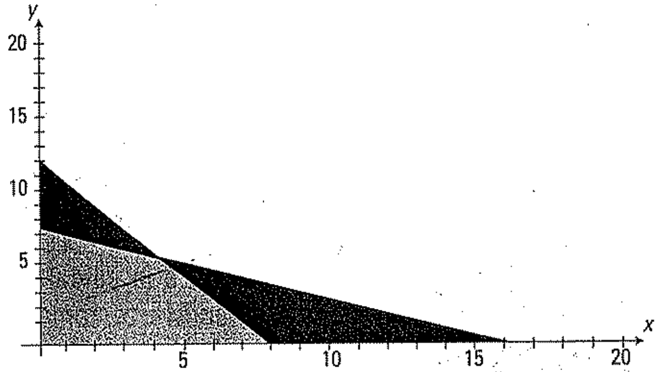
d. $\begin{cases} 3x + 2y \geq 16 \\ x + 2y \geq 24 \end{cases}$

5. De las siguientes gráficas, la región verde que contiene las parejas (x, y) que satisfacen las condiciones dadas en el enunciado es:

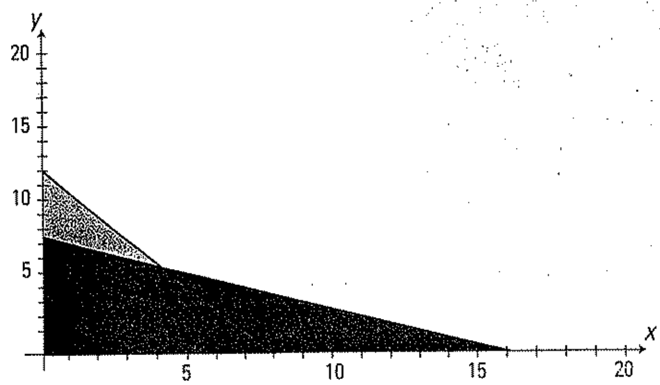
a.



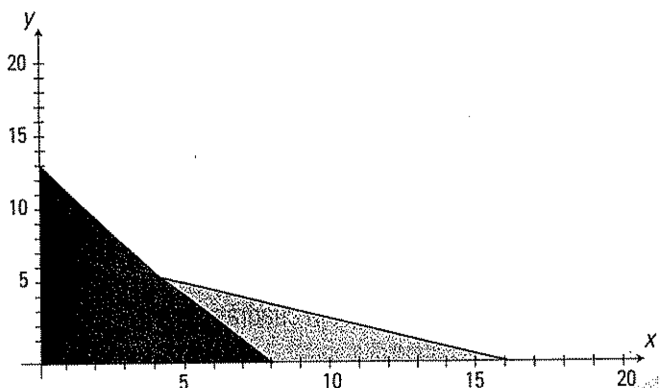
b.



c.



d.



Unidad 5

Ecuaciones cuadráticas y números complejos

Año 2000 a.e.c.

Los babilonios describen en la tablilla cuneiforme BM13901, abundante material relativo a la resolución de ecuaciones de segundo grado con una incógnita.

Siglo XII

El matemático indio Brahmagupta, propone una solución a la ecuación cuadrática denominada "regla Brahmagupta" determinada por la ecuación

$$x = \frac{-\frac{b}{2} + \sqrt{ac + \left(\frac{b}{2}\right)^2}}{a}$$

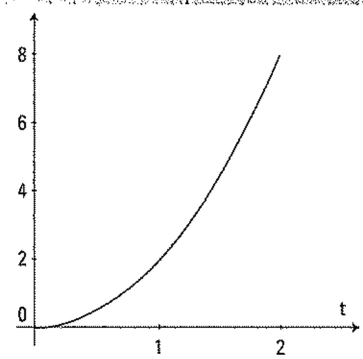
Siglo XVI

Rafael Bombelli en su libro "Álgebra" publicado en 1572 introdujo una teoría consistente de los números complejos.

Caída libre de un cuerpo en Marte

La caída libre de un cuerpo se debe únicamente a la influencia de la gravedad. En Marte la aceleración de la gravedad es aproximadamente de $3,7\,m/s^2$ y la función que modela la caída libre en ese planeta se describe por medio de $s(t) = 1,85\,t^2$, en donde s es la distancia en metros a la que cae el cuerpo y t el tiempo en segundos.

La gráfica muestra la caída libre de un cuerpo en Marte, tomando como punto de partida la distancia a la que se encontraba el cuerpo antes de caer. De esta forma, s mide la distancia de alejamiento del cuerpo desde su posición inicial.



PRUEBA QUE SABES

- ¿Cómo cambia la distancia por cada segundo que se mueve el cuerpo? ¿Qué puedes concluir?
- ¿Es una gráfica creciente o decreciente? Indica los intervalos de tiempo en que la distancia crece o decrece.
- ¿Por qué no se toman intervalos de tiempo negativos?
- Indica el punto de corte con el eje x que determina la raíz o solución de la ecuación cuadrática.

Cuando la distancia s toma el valor de cero, la situación anterior se puede representar de la siguiente forma $0 = 1,85\,t^2$. Esta ecuación se denomina ecuación cuadrática.

En general, una ecuación polinómica de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, donde a, b y c son constantes con $a \neq 0$, se denomina ecuación cuadrática.

Determina la solución de la siguiente ecuación cuadrática $x^2 + 1 = 0$

despejando: $x^2 = -1$,

- ¿Qué se obtiene al intentar despejar x?
- Plantea una solución para las siguientes ecuaciones cuadráticas:

$x^2 + 2 = 0$; $x^2 + 3 = 0$; $x^2 + 4 = 0$; $x^2 + 5 = 0$. ¿Qué puedes concluir?

Logro: resolver ecuaciones cuadráticas aplicando métodos de factorización y completación de cuadrados.

Solución de ecuaciones cuadráticas

COMPARTE LO QUE SABES

¿Cuál es la diferencia entre una ecuación lineal y una cuadrática?

Las soluciones o raíces de una ecuación cuadrática son los valores de x para los que la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$, satisfacen la igualdad.

Métodos de solución

• **Por factorización:** Consiste en factorizar el polinomio e igualar a cero.

Este método se basa en la propiedad de la multiplicación por cero; si $a \times b = 0$ entonces, $a = 0$, ó, $b = 0$.

• **Ecuación de la forma** $ax^2 + bx = 0$

Resolver: $20x^2 + 5x = 0$

Aplicando factor común: $5x(4x + 1) = 0$

Luego: $x = 0$, ó, $x = -\frac{1}{4}$

• **Ecuación de la forma** $x^2 + bx + c = 0$

Se factoriza usando el caso para el trinomio de la forma $x^2 + bx + c$:

Resolver: $x^2 - x - 6 = 0$

Factorizando: $(x - 3)(x + 2) = 0$

$x - 3 = 0$ ó $x + 2 = 0$

despejando la incógnita: $x = 3$ ó $x = -2$

• **Ecuación de la forma** $ax^2 + bx + c = 0$ Se factoriza usando el caso de factorización para el trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$.

Resolver: $2x^2 + x - 15 = 0$

$\frac{(2x + 6)(2x - 5)}{2} = 0$, $\quad \frac{2(x + 3)(2x - 5)}{2} = 0$

$(x + 3)(2x - 5) = 0$,

Igualando a cero cada factor:

$x + 3 = 0$ ó $2x - 5 = 0$

Despejando la incógnita: $x = -3$ ó $x = \frac{5}{2}$

Por completación de cuadrados

Resolver $2x^2 + 4x - 6 = 0$

Se dividen ambos miembros de la ecuación por el coeficiente de x^2.

El término independiente se lleva al otro lado de la ecuación: $x^2 + 2x = 3$

Como $b = 2$, hay que adicionar a ambos lados de la igualdad $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{2}{2}\right)^2 = 1$, obteniendo $x^2 + 2x + 1 = 4$, luego, se factoriza al lado izquierdo, $(x + 1)^2 = 4$, finalmente, resolviendo por raíces; $x + 1 = \pm 2$, y despejando:

$x + 1 = 2$ ó $x + 1 = -2$, así $x = 1$ ó $x = -3$

PRÁCTICA EN CONTEXTO

Ejercitación y procesos

1. Encuentra las soluciones ó raíces de las siguientes ecuaciones cuadráticas por factorización:

a. $x^2 - 49 = 0$
b. $40x^2 + 5x = 0$
c. $1 - 25b^2 = 0$
d. $16y^2 + 32y = 0$
e. $\frac{1}{9}y^2 + \frac{1}{3}y = 0$
f. $x^2 - 4x - 21 = 0$
g. $x^4 - 18x^2 + 32 = 0$
h. $3x^2 + 2x - 8 = 0$
i. $5y^2 = 125$
j. $7x^2 - 18x + 8 = 0$
k. $9m^2 - 6m = 24$
l. $y^2 + 6y - 315 = 0$

2. Soluciona las ecuaciones cuadráticas completando cuadrados:

a. $x^2 + 8x + 7 = 0$
b. $x^2 + 12x = -11$
c. $4b^2 - 8b - 12 = 0$
d. $c^2 + 10c + 9 = 0$
e. $x^2 - 24x = -23$
f. $9y^2 + 36y + 1 = 0$
g. $2x^2 + 16x = 3$
h. $6y^2 - 12y - 2 = 0$

COMPETENCIA INTERPRETATIVA, PROPOSITIVA: reconoce la estructura de las ecuaciones cuadráticas para determinar sus soluciones.

La fórmula cuadrática

Logro: resolver ecuaciones de segundo grado por fórmula cuadrática.

Comparte lo que sabes

¿Se puede factorizar cualquier polinomio de una ecuación cuadrática?

Con la ecuación cuadrática general $ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$, se puede obtener una fórmula para hallar las raíces o soluciones de cualquier ecuación que tenga esta forma, en términos de los coeficientes a, b y c, usando el método para completar cuadrados.

Dividiendo ambos lados de la igualdad entre a y llevando $\frac{c}{a}$, al lado derecho:

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

Completando el trinomio cuadrado perfecto se obtiene:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

Factorizando y sumando los términos al lado derecho:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Despejando x: $\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

La expresión $b^2 - 4ac$ es el discriminante que permite determinar la naturaleza de sus soluciones:

- Si $b^2 - 4ac$ es positiva, la ecuación tiene dos soluciones reales y la gráfica corta al eje x en dos puntos.
- Si $b^2 - 4ac$ es cero, la ecuación tiene una solución real y la gráfica corta el eje x en un punto.
- Si $b^2 - 4ac$ es negativa, la ecuación no tiene solución real y la gráfica no corta al eje x.

Práctica en contexto

Procedimientos

1. Encuentra la solución de las siguientes ecuaciones cuadráticas con la fórmula general:

a. $8x^2 + 3x + 5 = 0$ f. $5b^2 = 3$

b. $y^2 - 4y = -2$ g. $39 - 25x = -4x^2$

c. $14x = -x^2 - 33$ h. $2x^2 - \frac{1}{2}x + 1 = 0$

d. $\frac{1}{2}x^2 - 4x = -5$ i. $y^2 - 11y - 60 = 0$

e. $10x^2 + 43x = 35$ j. $y^2 = 128 - 8y$

2. Indica la naturaleza de las raíces de las siguientes ecuaciones cuadráticas.

a. $x^2 - 8x - 105 = 0$ e. $\frac{1}{3}y^2 + 2y - 1 = 0$

b. $6x^2 - 20x = -6$ f. $-3x^2 + x = 12$

c. $y^2 = -8y - 3$ g. $2b = 3b^2$

d. $7c^2 + 2c + 13 = 0$ h. $\frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{3}x = -\frac{1}{4}$

i. $5x^2 - 11x - 3 = 0$ j. $-3y^2 = 768$

3. Completa la siguiente tabla:

Ecuación	a	b	c	Discriminante
$\frac{x^2 + 12}{2} = 5x$				
$\frac{7}{2} = \frac{8x^2 - 36x}{4}$				
$9 = \frac{18x^2 - 3}{3x}$				
$-\frac{x}{3} = \frac{-6x^2 + 9x}{6}$				
$\frac{30y - 25}{15y} = 3y$				

Competencia interpretativa: reconoce la estructura de las ecuaciones cuadráticas y la naturaleza de sus raíces.

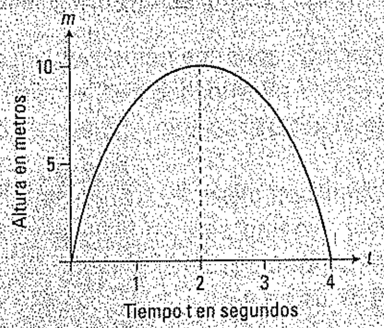
Logro: relacionar la expresión algebraica con la gráfica de una función cuadrática.

Gráfica de funciones cuadráticas

Comparte lo que sabes

¿Qué es una parábola?

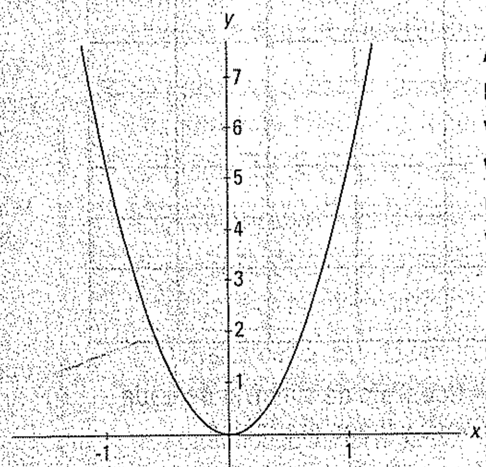
La siguiente gráfica representa la altura que alcanza un balón al ser lanzado hacia arriba a una cierta velocidad.



Teniendo en cuenta la gráfica, responde:

- ¿Cuál es la máxima altura que alcanza el balón?
- ¿Cuál es el intervalo de tiempo en el que el balón permanece en el aire?
- ¿Cuál es el intervalo de tiempo de ascenso y descenso del balón?

Los cambios de velocidad de la situación anterior están representados por una función cuadrática y su gráfica es una parábola. El punto máximo y la simetría entre los intervalos de tiempo de ascenso y descenso son elementos característicos de este tipo de curvas. El dominio de la función son todos los reales.



Al punto máximo o mínimo de la curva se le denomina **vértice**, y la recta que pasa por el vértice y es paralela al eje **y** se le denomina **eje de simetría**.

En su expresión algebraica general, $f(x) = ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$, es posible determinar cuatro casos al graficar una función cuadrática.

$f(x) = ax^2$, donde $b = 0$ y $c = 0$	• El vértice de la función es el punto (0, 0). El eje de simetría es el eje y. • Si $a > 0$ la curva abre hacia arriba. • Si $a < 0$ la curva abre hacia abajo. • El valor $\lvert a \rvert$ determina la abertura de la función: $\lvert a \rvert > 1$, la curva es más estrecha con respecto a la curva en la que $a = 1$ $0 < \lvert a \rvert < 1$, la curva es más ancha con respecto a la curva en la que $a = 1$.
$f(x) = ax^2 + c$, donde $b = 0$	• El vértice de la función es el punto (0, c) y el eje de simetría es el eje y. Si $c > 0$, hay una traslación vertical de la parábola $y = ax^2$ hacia arriba c unidades; si $c < 0$ la traslación es c unidades hacia abajo.
$f(x) = ax^2 + bx$, donde $c = 0$	• Las coordenadas del vértice están dadas por $V = \left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$. • El eje de simetría es la recta $x = -\frac{b}{2a}$ • Si $a > 0$ la curva abre hacia arriba. • Si $a < 0$ la curva abre hacia abajo.
$f(x) = ax^2 + bx + c$	• La gráfica se puede obtener haciendo una tabla de valores a partir de la construcción de la gráfica $y = ax^2 + bx$, y trasladándola verticalmente c unidades con respecto al eje de simetría.

PRÁCTICA EN CONTEXTO

Modelación y procedimientos

1. Completa la tabla con el valor de y según los valores de x y grafica las funciones en el plano cartesiano.

x	−2	−1	0	1	2
$y = x^2$					
$y = 3x^2$					
$y = \frac{1}{3}x^2$					
$y = -x^2$					
$y = -3x^2$					
$y = -\frac{1}{3}x^2$					

2. Determina el vértice y eje de simetría de cada una de las funciones y luego grafícalas.

a. $y = 4x^2$

b. $y = \frac{1}{4}x^2$

c. $y = \frac{1}{4}x^2 + 2$

d. $y = -4x^2 - 2$

e. $y = -2x^2$

f. $y = -2x^2 + x$

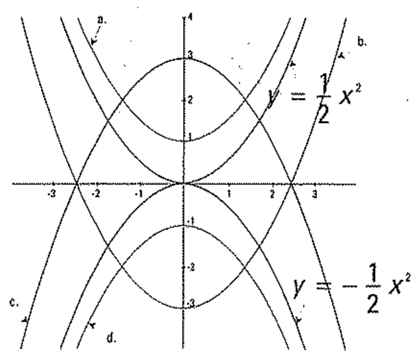
g. $y = -2x^2 + x - 4$

h. $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2$

i. $y = 2x^2 + 5x + 3$

j. $y = 5x^2 + 2x - 5$

3. A continuación aparecen las gráficas de las funciones $y = \frac{1}{2}x^2$ y $y = -\frac{1}{2}x^2$. Escribe la ecuación correspondiente para cada una de las gráficas.



Ecuaciones:

a. ____________________

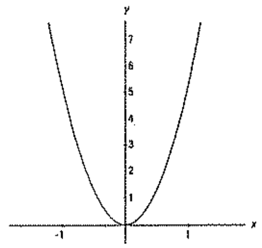
b. ____________________

c. ____________________

d. ____________________

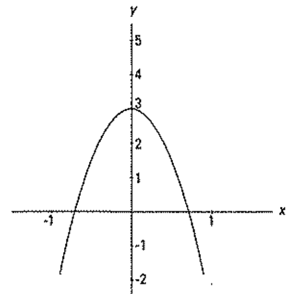
4. Dibuja las transformaciones en cada gráfica teniendo en cuenta las condiciones dadas.

$y = 5x^2$



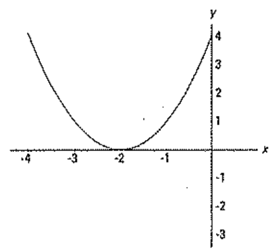
a. Trasládala 5 unidades hacia arriba

$y = -6x^2 + 3$



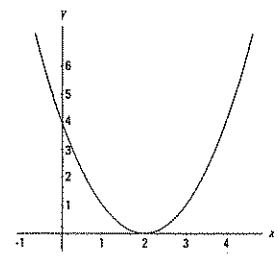
b. Trasládala 2 unidades hacia arriba

$y = (x + 2)^2$



c. Trasládala 3 unidades hacia abajo.

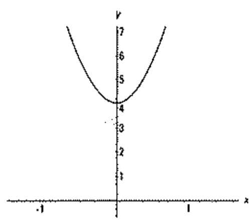
$y = (x - 2)^2$



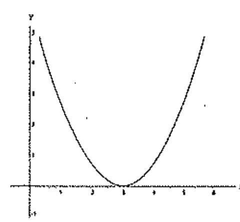
d. Trasládala 4 unidades hacia arriba.

5. Determina las raíces de las funciones y analiza el discriminante a partir de las gráficas:

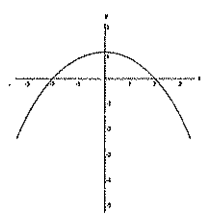
a.



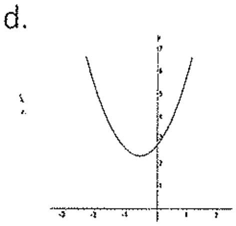
c.



b.



d.



Logro: resolver problemas que se modelan a través de funciones cuadráticas.

Problemas

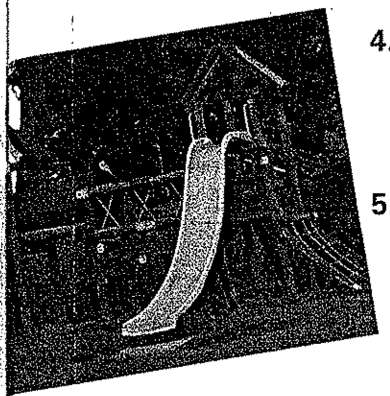
PRÁCTICA EN CONTEXTO

Solución de problemas

1. La multiplicación entre dos números es 800 y su diferencia es 7. ¿Cuáles son los números?

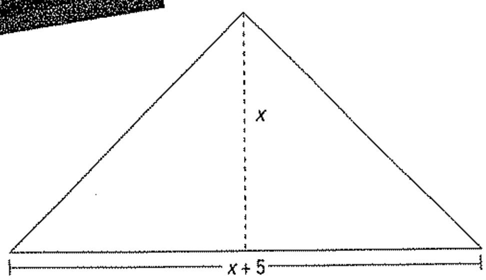
2. La suma de dos números es 130 y su división es 9. ¿Cuáles números cumplen las condiciones?

3. La multiplicación entre las edades de Diego y Camilo es 338. Si dentro de 7 años la suma de sus edades es 53, ¿cuál es la edad actual de cada uno?



4. Halla las dimensiones de un parque con forma rectangular cuyo perímetro es 420 m y su área es de 10 800 m^2 .

5. Halla las dimensiones de un triángulo isósceles cuya base excede en 5 cm a la altura, si su área es de 24 cm^2.



6. Una piedra se deja caer con una velocidad inicial de 0 m/s y recorre 16 m. ¿Cuánto tiempo tarda en llegar al suelo? (La ecuación que determina la altura es: $y = v_0 t + \frac{1}{2} gt^2$, donde $g = 9,8 m/s^2$)

7. Una persona que se encuentra en un globo a 200 m del piso, suelta una bolsa de lastre para alcanzar una mayor altura. Si la velocidad inicial de la bolsa es de 20 m/s, determina el tiempo de caída. (La ecuación que determina la altura es: $y = v_0 t + \frac{1}{2} gt^2$, sabiendo que $g = 9,8 m/s^2$)

8. El disco de una pulidora inicia su movimiento con una velocidad angular de 10 rad/s. Si la aceleración angular es de $4\,\mathrm{rad}/s^2$, halla el tiempo necesario para girar 3 000 rad. (La ecuación que modela el movimiento del disco es: $\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$, donde θ es ángulo de giro, ω_0 es la velocidad angular y α es la aceleración angular).

9. Se necesita delimitar un terreno rectangular con una cerca de 1 400 m de longitud.

a. Determina la ecuación que modela la situación.

b. ¿Cuáles deben ser las dimensiones del terreno?

c. ¿La solución a este problema es única? ¿Cuántas soluciones puede tener?

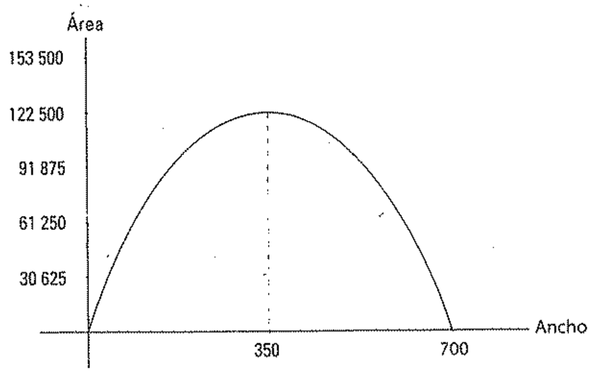
d. ¿Cuáles deben ser las dimensiones del terreno para que el área delimitada sea máxima?

e. ¿Cuál puede ser el área del terreno, teniendo en cuenta que el perímetro es de 1 400 m?

f. Determina la función que relaciona las áreas que puede tener el terreno.

Modelación y razonamiento

10. La siguiente gráfica relaciona el ancho y el área que puede tomar el terreno.



a. Escribe los intervalos para los cuales la gráfica es creciente y decreciente.

b. Argumenta porqué la gráfica no toma valores negativos.

c. ¿El ancho puede tomar el valor de cero?

COMPETENCIA INTERPRETATIVA/ PROPOSITIVA/ ARGUMENTATIVA: modela problemas y plantea estrategias de solución aplicando ecuaciones cuadráticas

Tema 5

Desigualdades cuadráticas

Logro: identificar y aplicar los métodos de solución algebraico y gráfico de las desigualdades cuadráticas.

COMPARTE LO QUE SABES

Si el ingreso obtenido por un fabricante está dado por la función $I(x) = 60x - 0,3x^2$, y su ingreso máximo es 100 dólares, modela esta restricción.

Para resolver una desigualdad cuadrática sigue los siguientes pasos:

Paso 1: lleva todos los términos de la desigualdad al lado izquierdo para que el lado de la derecha sea cero.

Paso 2: factoriza el polinomio que quede al lado izquierdo.

Paso 3: halla los puntos críticos, los cuales se encuentran cuando cada uno de los factores se igualan a cero y despejando x. Luego, analiza en qué caso la desigualdad es positiva o negativa, ubicando los puntos críticos en la recta numérica. Éstos dividen la recta en intervalos. Enseguida se analizan los signos de cada factor en los intervalos formados.

Paso 4: aplica las reglas de multiplicación de signos y determina el intervalo que satisface la desigualdad original.

Paso 5: interpreta las soluciones en el gráfico y expresa los intervalos solución de la desigualdad.

Ejemplo: resolver la desigualdad cuadrática:

$$2x^2 - 12x \geq 14$$

Paso 1: $2x^2 - 12x - 14 \geq 0$

Paso 2: $(x-7)(2x+2) \geq 0$

Paso 3: la desigualdad indica que la multiplicación entre ambos factores debe ser mayor o igual que 0, por lo que x debe tomar valores de tal forma que los signos de los dos factores sean ambos positivos o negativos.

Puntos críticos: $x - 7 = 0$ y $x + 1 = 0$

$x = 7$ $\quad$ $x = -1$

Paso 4:

$(x-7)$ ------------------------------+++++++++++++++

$(2x+2)$ --------+++++++++++++++++++++++++++++++

$(x-7)(2x+2)$ ++++++---------------------+++++++++++++++

Producto positivo -1 Producto negativo 7 Producto positivo

Paso 5: el conjunto solución es la unión de los intervalos $(-\infty, -1] \cup [7, \infty)$, donde el producto de los dos factores es positivo o igual a cero.

PRÁCTICA EN CONTEXTO

Procedimientos

1. Soluciona las siguientes desigualdades cuadráticas:

a. $5x^2 + 30 < 0$

b. $x^2 + 2x \geq 88$

c. $5x^2 - 23x > 10$

d. $\frac{1}{2}x^2 + 3x \leq 0$

e. $x^2 > 0$

f. $x^2 + 3x \geq 108$

g. $x^2 + 13x - 140 \leq 0$

h. $4x^2 - 57x \leq 45$

i. $12x^2 + 3x < 0$

j. $x^2 + 20x \leq 69$

k. $3x^2 - 7x > 40$

l. $81x^2 + 27x \geq 0$

2. Grafica la solución de las desigualdades:

a. $-5x^2 + 3x + 2 > 0$

b. $2x^2 + 1 \leq 0$

c. $\frac{x^2}{3} + x + 6 \leq 0$

d. $4x^2 - 7 \geq 0$

e. $x^2 - 9x + 18 < 0$

f. $-\frac{1}{2}x^2 + 3x - 4 < 0$

COMPETENCIA INTERPRETATIVA/PROPOSITIVA: soluciona desigualdades cuadráticas a partir del análisis algebraico y gráfico

Logro: resolver en forma algebraica ecuaciones que involucren radicales.

Ecuaciones con radicales

Comparte lo que sabes

¿A qué es igual $\sqrt[n]{a^n}$?

Las ecuaciones cuya incógnita se encuentra bajo un radical se denominan ecuaciones con radicales. Para resolverlas se debe eliminar el radical o los radicales con el fin de llevarla a una forma polinómica y resolverla por los métodos ya conocidos.

Resolver las siguientes ecuaciones:

Ejemplo

$x+7=\sqrt{7x+37}$

Se elevan al cuadrado ambos lados de la igualdad para eliminar la raíz : $(x+7)^2 = 7x+37$,

Se resuelve el binomio elevado al cuadrado:

$x^2+14x+49=7x+37$

Se iguala la ecuación a cero y se resuelve:

$$x^2+14x+49-7x-37=0$$
$$x^2+7x+12=0$$
$$(x+4)(x+3)=0$$

Las raíces son $x=-4$ y $x=-3$.

Ejemplo

Resolver la ecuación: $\sqrt{3x-8}=\sqrt{2x-7}+1$

Se elevan al cuadrado ambos lados de la igualdad las veces que sea necesario hasta eliminar los radicales: $3x-8=\left(\sqrt{2x-7}+1\right)^2$

$3x-8=(2x-7)+2\sqrt{2x-7}+1$

Se eliminan los paréntesis y se despeja el radical, para elevar de nuevo al cuadrado ambos lados de la igualdad: $3x-8-2x+7-1=2\sqrt{2x-7}$

$$x-2=2\sqrt{2x-7}$$
$$(x-2)^2=4(2x-7)$$
$$x^2-4x+4=8x-28$$
$$x^2-12x+32=0$$
$$(x-8)(x-4)=0$$

Las raíces son: $x=8$ y $x=4$.

Práctica en contexto

Procedimientos

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a. $x-5=\sqrt{35-13x}$
b. $\sqrt[3]{4x-6}=2$
c. $\sqrt{x^2+2x}=2$
d. $\sqrt[4]{a^2-5}=3$
e. $\sqrt{4y^2+2y}-3=0$
f. $\sqrt{2y^2+1}+3=0$
g. $\sqrt{x-4}-x+2=0$
h. $x+\sqrt{2x+1}=2$
i. $a-3=\sqrt{3a-11}$
j. $\sqrt{3y-2}-\sqrt{y-1}=1$
k. $\sqrt{4x}-\sqrt{x+2}-1=0$
l. $\sqrt{y+2}-\sqrt{y+3}=\sqrt{y+1}$

Solución de problemas

2. Resuelve los siguientes problemas.

a. La raíz cuadrada de 6 veces un número aumentado en 10 es 8. ¿Cuál es el número?

b. La raíz cúbica de 9 veces un número disminuido en 8 es 4. ¿Cuál es el número?

c. El área s de la superficie lateral de un cono está dada por la función $s=\pi r\sqrt{r^2+h^2}$. Determina la altura h, si el área es $20\,\text{cm}^2$ y $r=2\,\text{cm}$.

d. La diagonal de una caja está determinada por la función $d=\sqrt{a^2+h^2+l^2}$, donde la altura h es 3 veces el ancho y el largo l es $\frac{1}{3}$ del ancho. Determina las dimensiones de la caja.

Tema 7

Los números complejos

Logro: reconocer la estructura del conjunto de los números complejos.

COMPARTE LO QUE SABES

¿Cuáles son los subconjuntos numéricos de los reales?

Ante la necesidad de dar solución a ecuaciones de la forma $x^2+1=0$ para la cual no existe un número real x tal que $x^2=-1$, con $x=\pm\sqrt{-1}$, se amplía el conjunto de los números reales al conjunto de los números complejos donde la unidad imaginaria es $i=\sqrt{-1}$ e $i^2=-1$. De esta forma, se puede expresar una raíz par de un número negativo como el producto de un número real por la unidad imaginaria, por ejemplo:

$$\sqrt{-9}=\sqrt{9(-1)}=\sqrt{9}\sqrt{-1}=3i.$$

Así, el conjunto de los números complejos se define como el conjunto de números de la forma $a+bi$, donde a y b son números reales e $i^2=-1$.

Las potencias de i

Las potencias de i se obtienen a partir de la definición del conjunto de los complejos, como $i=\sqrt{-1}$, entonces:

$i^1=i \qquad i^3=i^2\times i^1=-1\times i=-i$

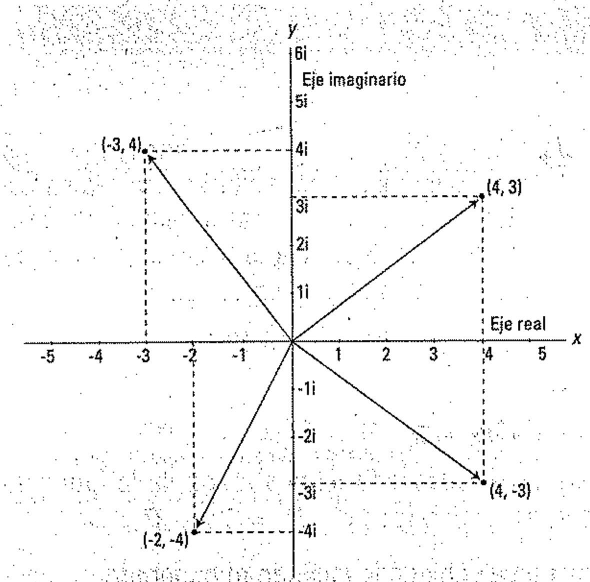
$i^2=\left(\sqrt{-1}\right)^2=-1$

$i^4=i^3\times i^1=(-i)\times i=-i^2=-(-1)=1$

Las anteriores potencias se conocen como potencias básicas de i y, a partir de i^5 se repite en ciclos de a cuatro.

Representación gráfica de los números complejos

La representación gráfica en el plano complejo de las parejas ordenadas (–3, 4), (–2, –4), (4, 3), (4, –3), que corresponden a los números complejos $-3+4i$, $-2-4i$, $4+3i$, $4-3i$ se muestra en la figura.

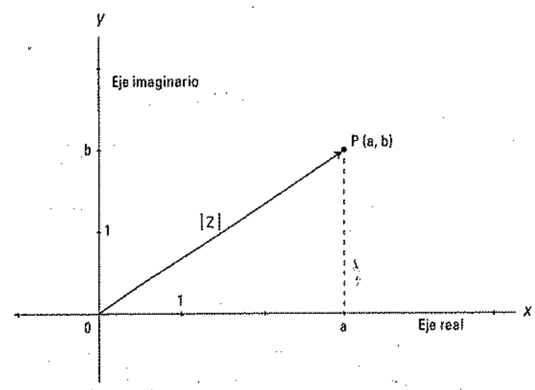


Números complejos conjugados

El conjugado de un número complejo difiere en el signo de la parte imaginaria, si $z=a+bi$ el conjugado de z se escribe como $\bar{z}=a-bi$. En el ejemplo anterior las representaciones geométricas del número complejo $z=4+3i$ y su conjugado $\bar{z}=4-3i$, son simétricas respecto al eje real del plano complejo.

Norma de un número complejo

La norma $\|z\|$ de un número complejo $z=a+bi$, se refiere a la magnitud del vector que lo representa. La magnitud del vector se determina por la relación que existe entre los catetos a y b del triángulo rectángulo mostrado en la imagen de la izquierda y su hipotenusa $\|z\|$, expresada por el teorema de Pitágoras así: $\|z\|^2=a^2+b^2$, de tal forma que, $\|z\|=\sqrt{a^2+b^2}$

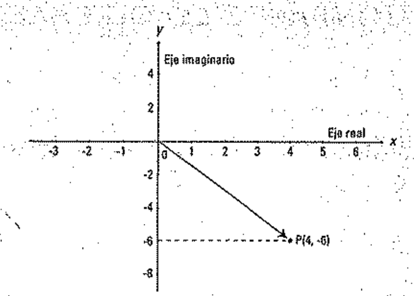


Ejemplo: determinar la norma del número complejo $z = 4 - 6i$.

El correspondiente par ordenado del número complejo es $(4, -6)$, por tanto la magnitud de los catetos del triángulo rectángulo que se forma al graficar el vector dirigido de z son $a = 4$ y $b = -6$:

$\|z\| = \sqrt{4^2 + (-6)^2}$ Luego, $\|z\| = \sqrt{16 + 36}$,

luego $\|z\| = \sqrt{52}$



PRÁCTICA EN CONTEXTO

Procedimientos

1. Halla la raíz de los siguientes números:

a. $\sqrt{-625}$

b. $\sqrt{-169}$

c. $\sqrt[4]{-1\,296}$

d. $\sqrt[4]{-6\,561m^4}$

e. $\sqrt[6]{-729a^{12}}$

f. $\sqrt[8]{-256a^8b^{24}}$

g. $\sqrt[4]{-20\,736a^8b^{12}}$

h. $\sqrt{-4a^6b^{10}c^{22}}$

i. $\sqrt{-\frac{1}{9}x^2y^{14}z^{40}}$

j. $\sqrt[3]{-\frac{27}{125}a^9b^{21}c^{30}}$

2. Escribe cada expresión de la forma $a + bi$:

a. $\sqrt{-7}$

b. $\sqrt{-256}$

c. $\sqrt{-2} + \sqrt{81}$

d. $\sqrt{625} - \sqrt{-100}$

e. $-\sqrt{-196} - \sqrt{289}$

f. $-\sqrt[3]{64a^3} + \sqrt{-144}$

g. $\sqrt[3]{6} - \sqrt[3]{-343a^3}$

h. $-\sqrt[4]{-625} - \sqrt{8}$

i. $\sqrt{-\frac{16}{81}} + \frac{7}{3}$

j. $\sqrt[3]{-1728} + \sqrt[3]{729}$

3. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a. $x^2 = -49$

b. $m^2 = -121$

c. $n^4 = -81$

d. $-p^4 = 16$

e. $-2y^6 = 8\,192$

f. $3x^2 - 7 = -115$

g. $m^4 - 8 = -14\,649$

h. $4m^2 = -900$

i. $\frac{1}{2}n^4 = -5\,000$

j. $\frac{1}{3}p^2 + 4 = -1\,448$

4. Completa la tabla:

Número	Parte real	Parte imaginaria
$\sqrt{-36}$		
$\sqrt{-169}$		
$\sqrt{196} + \sqrt{-2}$		
$-\sqrt{16} - \sqrt{-16}$		

5. Escribe el valor correspondiente a cada potencia de i:

a. i^6 b. i^{11} c. i^{16} d. i^{19} e. i^{20}

f. i^{24} g. i^{30} h. i^{40} i. i^{36}

Modelación y procesos

6. Representa en el plano los siguientes complejos:

a. $-13 - i$

b. $2 + 7i$

c. $11 - 7i$

d. $-4 - \frac{3}{4}i$

e. $\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$

f. $9i$

g. $\sqrt{2} - 2i$

h. -4

i. $-\frac{8}{3}i$

j. $\frac{5}{2} - 5i$

7. Halla la norma de los siguientes números complejos:

a. $4 - 7i$

b. $8i$

c. $\sqrt{2} + 5i$

d. 8

e. $5i + \frac{1}{3}$

f. $11 + 10i$

g. $-15 - 3i$

h. $\frac{1}{3}i - 7$

i. $-\frac{3}{2}i - \frac{1}{2}$

Tema 8

Operaciones con números complejos

Logro: realizar operaciones entre números complejos.

COMPARTE LO QUE SABES

¿Qué son términos semejantes? ¿Cuál es la conjugada de una expresión?

Adición de números complejos

Si z_1 y $z_2 \in C$ con $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$, entonces $z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$, o

$z_1 + z_2 = (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$, en notación cartesiana.

Ejemplo: $(3 + 7i) + (12 - 9i) = (3 + 12) + (7 - 9)i = 15 - 2i$

Multiplicación de números complejos

$z_1 \times z_2 = (a + bi) \times (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

Ejemplo: $(2 - 3i) \times (5 + 2i) = (2 \times 5 - (-3) \times 2) + (2 \times 2 + (-3) \times 5)i = (10 + 6) + (4 - 15)i = 16 - 11i$

División de números complejos

La división entre dos números complejos se resuelve multiplicando el numerador y el denominador por el conjugado del denominador: $\frac{a + bi}{c + di} = \frac{a + bi}{c + di} \times \frac{c - di}{c - di} = \frac{(ac + bd)}{c' + d'} + \frac{(bc - ad)i}{c' + d'}$

Ejemplo: $\frac{5 + 3i}{4 - 2i} = \frac{5 + 3i}{4 - 2i} \times \frac{4 + 2i}{4 + 2i} = \frac{(20 - 6)}{16 + 4} + \frac{(12 + 10)i}{16 + 4} = \frac{14}{20} + \frac{22i}{20} = \frac{7}{10} + \frac{11i}{10}$

Propiedades de los números complejos

PROPIEDAD	FORMA SIMBÓLICA	EJEMPLO
Clausurativa	$(a + bi) + (c + di) = e + fi \in \mathbb{C}$ $(a + bi) \times (c + di) = f + gi \in \mathbb{C}$	$(5 + 2i) + (-2 - 4i) = (5 - 2) + (2 - 4)i =$ $3 - 2i \in \mathbb{C}$
Conmutativa	$(a + bi) + (c + di) = (c + di) + (a + bi)$ $(a + bi) \times (c + di) = (c + di) \times (a + bi)$	$(6 + 5i) + (-2 + 15i) = (-2 + 15i)(6 + 5i)$ $(2 + 5i)(3 - i) = (3 - i)(2 + 5i)$
Modulativa	Suma: Existe un número complejo $0 + 0i$, tal que $(a + bi)((0 + 0i) = a + bi$	$(-5 + 11i) + (0 + 0i) = -5 + 11i$
	Multiplicación: Existe un número complejo $1 + 0i$, tal que $(a + bi) \times (+0i) = a + bi$	$(10 - 5i) \times (1 + 0i)$ $= (10 - 0) + (0 - 5)i = 10 - 5i$
Asociativa	$Si\ x, y, z \in \mathbb{C}$, entonces, Suma: $(x + y) + z = x + (y + z)$ Multiplicación: $(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$	$[(2 + i) + (3 - 2i)] + (-1 + 4i)$ $= (2 + i) + [(3 - 2i) + (-1 + 4i)]$
Inverso	Inverso aditivo: Para todo $a + bi$, existe $-a - bi \in \mathbb{C}$, tal que $(a + bi) + (-a - bi) = 0 + 0i$	$(6 - 4i) + (-6 + 4i) = 0 + 0i$
	Inverso multiplicativo: El inverso de $z \in \mathbb{C}$, es $z^{-1} \in \mathbb{C}$, tal que $z \times z^{-1} = z \times \frac{1}{z} = \frac{z}{z} = 1$	$(3 - 8i) \times \frac{1}{3 - 8i} = \frac{3 - 8i}{3 - 8i} = 1$

PRÁCTICA EN CONTEXTO

Procedimientos

1. Desarrolla las siguientes adiciones y sustracciones entre números complejos:

a. $4i + (6 - 9i)$

b. $(-4 - 11i) + (16 + 3i)$

c. $(11 - 5i) + 9$

d. $(3 + 4i) + (8 - 15i) + 3i$

e. $\left(\frac{1}{2} - 9i\right) + \left(8 + \frac{2}{3}i\right)$

f. $\left(\frac{2}{5} - \frac{1}{4}i\right) + \left(-2 + \frac{5}{2}i\right)$

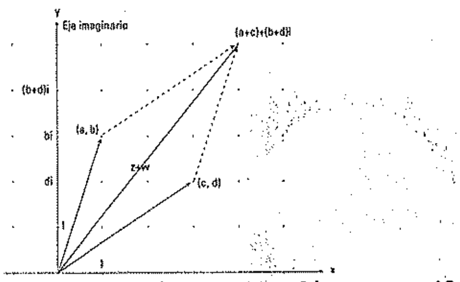
g. $(-7 - 9i) - (12 + 9i)$

h. $(17 - 38i) - (4i + 9) - 4i$

i. $\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4}i\right) - \left(\frac{5}{4} + i\right)$

j. $\left(\frac{4}{5} - i\right) - \left(-2 + \frac{1}{3}i\right)$

2. La suma de dos complejos puede representarse gráficamente por medio de un vector. $z = a + bi$ y $w = c + di$.



Si $x = 4i$, $y = -2 - 7i$, $z = 11 + 6i$ y $v = -10 + i$, representa los siguientes números y operaciones en el plano complejo.

a. z	d. x	g. $v+y$
b. v	e. $z+v$	h. $z+x$
c. y	f. $y+x$	i. $y+z$

3. Encuentra la norma de la suma entre los siguientes complejos y represéntalos en el plano complejo:

a. $(2 - 3i) + 9i$

b. $(-2 + 11i) + (-4i - 1)$

c. $(-2 + 4i) + (-7 + 13i)$

4. Resuelve las operaciones indicadas:

a. $(2 + 5i)(-7 + 9i)$

b. $(-6 - 8i)(4 + 8i)$

c. $(-7 - 8i)(-11 - 6i)$

d. $\left(\frac{1}{2} - 2i\right)\left(\frac{3}{4} + 5i\right)$

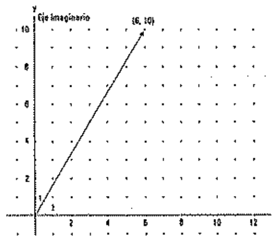
e. $\left(-9 + \frac{1}{5}i\right)\left(\frac{5}{2} - 7i\right)$

f. $(2 - 11i) \div (-10 + 17i)$

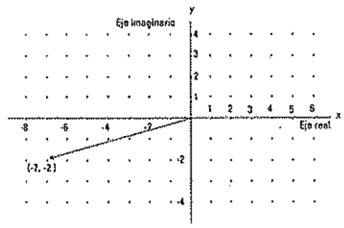
Modelación y procedimientos

5. Encuentra y representa dos números complejos tales que su suma sea el resultado del vector representado en cada plano:

a.



b.



Razonamiento

6. Escribe el proceso para resolver cada operación y las propiedades utilizadas para su solución:

a. $(-6 + 8i) + (-11 - 4i) - (7 + 11i)$

b. $\left[(-2 + 7i)(17 - 7i)\right] + (9 + i)$

c. $\left[\left(\frac{2}{5} + 8i\right)\left(-10 + \frac{1}{4}i\right)\right] - \left[\left(-5 + \frac{2}{3}i\right) \div \left(-\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i\right)\right]$

d. $\left[(-7 + 2i)\left(\frac{1}{-7 + 2i}\right)\right] \times \left[\left(\frac{2}{7} - 9i\right) - \left(-\frac{1}{8} - 7i\right)\right]$

e. $\left[(-11 + 9i)(4 + 6i)\right] \times \left[(4 + 6i)(-11 + 9i)\right] + (3 - i)$

Pruebas de

Contesta las preguntas 1 y 2 de acuerdo con la siguiente información.

El área de un triángulo es 150 cm^2 y su base es 5 cm menos que su altura.

1. Si h representa la altura del triángulo, la ecuación que representa la situación anterior es:

a. $h^2 - 5h - 300 = 0$ c. $h^2 - 5h - 150 = 0$

b. $5h^2 - 150 = 0$ d. $5h^2 - 300 = 0$

2. La altura del triángulo es:

a. 30 cm b. 15 cm c. 25 cm d. 20 c

3. De acuerdo con la gráfica de la función cuadrática, que interseca al eje x en dos puntos, la naturaleza de sus soluciones es:

a. Dos soluciones complejas.

b. Una solución real.

c. Dos soluciones reales.

d. Una solución compleja.

4. La ecuación cuadrática $-3x^2 + 8x - 22 = 0$ tiene dos soluciones complejas, porque:

a. La gráfica corta al eje x en dos puntos.

b. El discriminante es cero.

c. La gráfica corta al eje x en un punto.

d. El discriminante es negativo.

Soluciona las preguntas 5 y 6 de acuerdo con la siguiente información.

El perímetro de un rectángulo es 250 cm.

5. La ecuación que representa el área del rectángulo en términos de uno de sus lados x es:

a. $A = 250x - x^2$ c. $A = 125x - x^2$

b. $A = 125 - x^2$ d. $A = 250 - x^2$

6. El área máxima que puede tener el rectángulo, teniendo en cuenta su perímetro es:

a. 3 906, 25 cm^2

b. 4 050, 5 cm^2

c. 2 500 cm^2

d. 3 010, 5 cm^2

7. Las soluciones de la ecuación $x - 6 = \sqrt{52 - 12x}$, son:

a. $x_1 = 87,8,\ x_2 = -0,13$

b. $x_1 = 4,\ x_2 = -4$

c. $x_1 = \frac{58}{13},\ x_2 = 0$

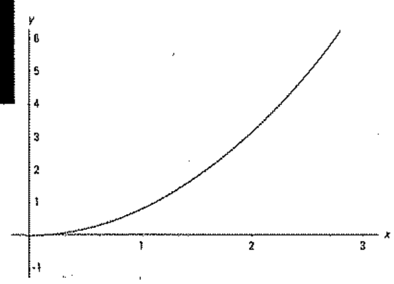
d. $x_1 = 16,\ x_2 = -16$

Prueba PISA

Contesta las preguntas 8 y 9 de acuerdo con los siguientes datos.

La caída libre de los cuerpos en la luna se describe por medio de la función $s(t) = 0,8\,t^2$, en donde s es la distancia en metros y t el tiempo en segundos.

La representación gráfica es:



8. Determina el recorrido de un cuerpo en una caída libre de un cuerpo en la Luna para los siguientes tiempos:

T (s)	2	4	6	7	8	10	13
s (t) (m)							

9. Responde de acuerdo con la situación y/o la gráfica.

a. ¿Es creciente o decreciente?

b. ¿El tiempo puede tomar valores negativos? ¿Puede ser $t = 0$?

c. Escribe el intervalo numérico de todos los valores que puede tomar la variable t.

d. ¿Qué altura cae un cuerpo en la Luna durante 20 s?

10. Escribe falso F o verdadero V, de acuerdo con cada afirmación y justifica tu respuesta.

a. La raíz de la ecuación $x^2 = -2$, es un número complejo.

b. La potencia $i^{15} = -i$.

c. El conjunto de los números reales son un subconjunto de los números complejos.

d. El inverso aditivo de $-5 + 3i$ es $5 - 3i$.

e. El producto de un número complejo por su conjugado es un número real.

Prueba TIMSS

11. Las raíces de la ecuación cuadrática $2x^2 + x - 10 = 0$ son:

a. $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{-79}}{4}$

b. $x_1 = -\dfrac{5}{2}$, $x_2 = 2$

c. $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{-79}}{4}$

d. $x_1 = 10$, $x_2 = 2$

12. Para dar solución a la ecuación cuadrática $x^2 - 14x - 15 = 0$ completando cuadrados, la ecuación correspondiente es:

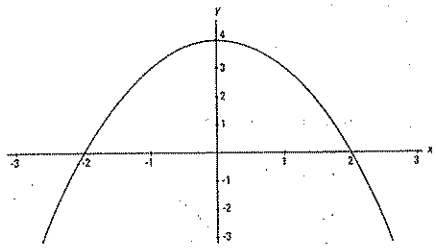
a. $(x - 7)^2 = 34$

b. $(x + 7)^2 = 15$

c. $(x - 7)^2 = 64$

d. $(x + 7)^2 = -15$

13. La función que corresponden a la gráfica es:



a. $y = -x^2 - 4$

b. $y = -2x^2 + 4$

c. $y = -x^2 + 4$

d. $y = 2x^2 + 4$

14. El intervalo solución de la desigualdad cuadrática $5x^2 + 6x - 8 \geq 0$, es:

a. $(-\infty, -2] \cup \left[\dfrac{4}{5}, \infty\right)$

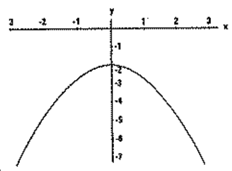
b. $(-\infty, \infty)$

c. $\left[-2, \dfrac{4}{5}\right]$

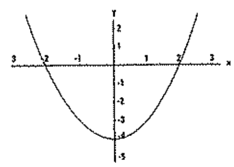
d. $(-\infty, -2) \cup \left(\dfrac{4}{5}, \infty\right)$

15. La gráfica que se obtiene al trasladar la función $y = -x^2 + 2$, cuatro unidades hacia abajo, es:

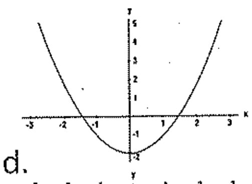
a.



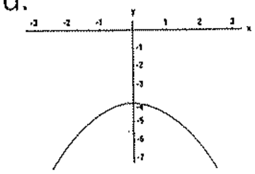
b.



c.



d.



16. La norma de la suma entre $(7 + 12i) + (-18 - 15i)$, es:

a. $\sqrt{549}$ b. $\sqrt{130}$ c. $\sqrt{193}$ d. $\sqrt{1\,354}$

17. La suma de dos números es 13 y la suma de sus cuadrados es 89. La ecuación que permite determinar los números es:

a. $x^2 - 26x + 80 = 0$

b. $x^2 - 26x + 169 = 0$

c. $2x^2 - 26x + 80 = 0$

d. $2x^2 - 26x + 169 = 0$

Unidad 6

Sucesiones y progresiones

1212 d.e.c. Leonardo de Pisa más conocido como Leonardo Fibonacci plantea en su obra Liber Abaci un problema acerca de la reproducción de una familia de conejos en la cual después de pasados varios meses el número de parejas reproducidas se puede escribir a de la siguiente forma:

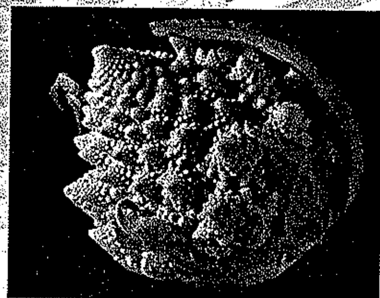
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34…

Esta sucesión de números es conocida como la sucesión de Fibonacci.

En 1887, nace Srinivasa Ramanujan, quien desde los 25 años comenzó a mostrar su trabajo acerca de patrones ocultos que encontró en las propiedades de los números. La mayor parte de su trabajo está escrita en formas complicadas de series infinitas.

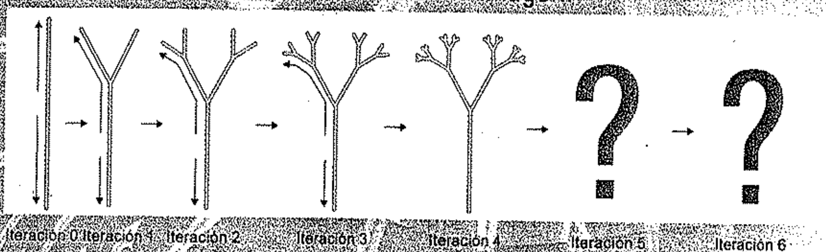
La geometría fractal

Algunos elementos de la naturaleza pueden modelarse a través de fractales: las montañas, franjas costeras, nubes, hojas, árboles, vegetales, copos de nieve y otros objetos. Una de las características más importantes en algunos fractales es que su área es finita pero su longitud es infinita.



Veamos cómo se construye un árbol fractal binario

Con el tallo como estructura inicial, tomamos un segmento extremo y lo dividimos en dos ramas, formando un ángulo predeterminado (60° por ejemplo), para generar las dos primeras ramas. A medida que el proceso iterativo continúa, los segmentos extremos de cada rama se van dividiendo en dos ramas más, como se muestra en la imagen.



- Construye la iteración 7, ¿cuántas ramas se generan?
- Completa la siguiente tabla relacionando la cantidad de ramas que se generan en cada iteración.

Iteración	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Número de ramas de cada iteración	2	4	8			64			

- ¿Cuántas ramas se generan en la iteración 100? Describe el proceso que utilizaste.
- Encuentra un patrón para generar la secuencia del número de ramas generadas en cada iteración.
- Encuentra una forma para expresar la cantidad de ramas que tendrá en total el árbol fractal en cualquier iteración.

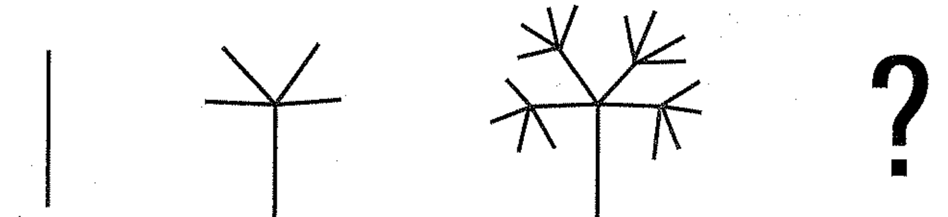
Logro: identificar los términos de una sucesión y una serie.

Sucesiones y series

COMPARTE LO QUE SABES

En el mundo cotidiano, ¿qué es una serie?

El siguiente *árbol fractal cuaternario* se forma partiendo del tallo como estructura inicial y tomando un segmento extremo que se divide en cuatro ramas y se continúa con el proceso para cada iteración.



Iteración 0 Iteración 1 Iteración 2 Iteración 3

- La cantidad de ramas que se generan en cada iteración se relacionan en el siguiente cuadro. ¿Cuál es el número de ramas para las iteraciones faltantes?

Iteración	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Número de ramas de cada iteración	4	16	64						

- ¿Cuál es la cantidad de ramas que se generan en la iteración 100?
- ¿Cuál es la expresión general de la sucesión que permite saber la cantidad de ramas que se generan para cualquier iteración?

Para el árbol fractal, los números de la tabla están escritos como una sucesión, es decir una lista de números con un orden específico. A cada número de la sucesión se le llama un **término de la sucesión**.

Para conocer la cantidad de ramas que tiene el árbol fractal cuaternario en la iteración 3, sumamos la cantidad de ramas generadas en la iteración 1, 2 y 3; por lo tanto, el árbol fractal tiene 84 ramas. Este proceso podemos escribirlo como una **serie**.

Una serie es la suma de los términos de una sucesión. Para escribir la suma de los términos de una sucesión usamos la letra griega sigma $\sum$. Por ejemplo, una serie finita es la suma de los cinco primeros términos de la sucesión $3n$ donde n está representado por los números naturales: $\sum_{n=1}^{5} 3n = 3 + 6 + 9 + 12 + 15 = 45$

PRÁCTICA EN CONTEXTO

Modelación y procesos

1. Escribe como una sumatoria la cantidad de ramas que tiene el árbol fractal cuaternario en la iteración 100.
2. Encuentra el término general ó término n- ésimo de las siguientes sucesiones:
   a. 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, ...
   b. 3, 5, 7, 9, 11, 13, ...
   c. $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \ldots$
   d. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8} \ldots$
3. Encuentra la sumatoria de los primeros 10 términos de cada sucesión anterior.

Ejercitación y procedimientos

4. Desarrolla las siguientes series y determina su suma:
   a. $\sum_{n=1}^{8} (3n + 1)$
   b. $\sum_{n=1}^{6} n^2$
   c. $\sum_{n=1}^{7} (5n + 3)$
   d. $\sum_{n=1}^{5} \frac{n+2}{n}$
   e. $\sum_{n=1}^{5} \frac{2}{10^n}$
   f. $\sum_{n=1}^{6} \frac{(-1)^n}{n+1}$

COMPETENCIA INTERPRETATIVA/PROPOSITIVA: reconoce los términos de una sucesión y expresa el término n-ésimo de una sucesión para hallar series

Tema 2

Progresiones aritméticas

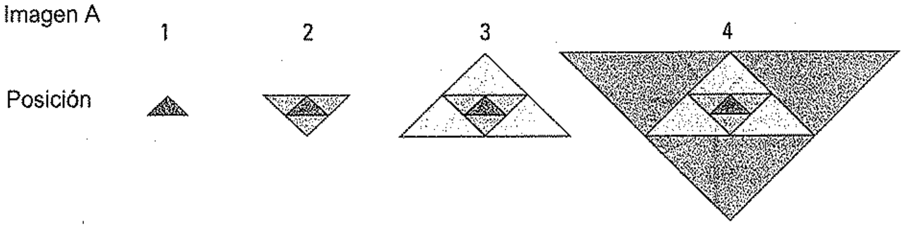
Logro: construir progresiones aritméticas a partir de representaciones geométricas y numéricas.

Comparte lo que sabes

Observa la siguiente sucesión: 1, 6, 11, 16. ¿Cuál es la diferencia entre cada par consecutivo de los términos de ella?

El siguiente ejemplo muestra una secuencia de figuras geométricas:

Imagen A



- ¿Dibuja la figura siguiente de la sucesión? Describe cómo se obtienen las gráficas de esta sucesión.
- El siguiente cuadro relaciona la cantidad de triángulos en cada posición. ¿Cuál es el número de triángulos de las posiciones faltantes?

Posición	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Número de triángulos	1	4	7						

- ¿Cuál es la cantidad de triángulos que hay en la posición 100?

En el ejemplo anterior, el término siguiente de la serie se determina sumando al anterior una cantidad constante: 3; por tanto, la sucesión anterior se denomina **progresión aritmética**.

Una sucesión de números es una progresión aritmética cuando cada uno de los términos de la sucesión es igual al anterior más una cantidad constante llamada diferencia de la progresión denotada por la letra *d*.

Término *n*-ésimo de una progresión aritmética

El término *n*-ésimo de una progresión aritmética se escribe como $a_n = a_1 + (n-1)d$, siendo a_1 el primer término, *d* la diferencia y *n* la posición del número que corresponde a la progresión. Esta forma general permite determinar cualquier término de la progresión.

Ejemplo: Si el primer término de una progresión aritmética es $a_1 = 9$ y $a_2 = 11$, determinar el término 10 de la progresión.

Como $a_1 = 9$ y $d = 2$, entonces $a_{10} = 9 + (10 - 1)2$; $a_{10} = 9 + (9)2 = 27$

Suma de los términos de una progresión aritmética

Para calcular la suma s_n de un número dado de términos *n* de una progresión aritmética, conociendo el primer término de la progresión a_1, el último término a_n, la diferencia *d*, el número *n* de términos cuya suma se busca, entonces: $s_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$

Ejemplo: Determinar la suma de los primeros 20 números pares.

La progresión aritmética es 2, 4, 6, 8, 10,..., 40; donde $a_1 = 2$, $a_n = 40$ y $n = 20$. Al remplazar en la fórmula se tiene:

$$s_{20} = \frac{20(2+40)}{2} = \frac{840}{2} = 420$$

PRÁCTICA EN CONTEXTO

Ejercitación y procedimientos

1. Escribe los primeros 6 primeros términos de cada progresión aritmética si:

a. $a_1 = 8$; $d = 7$
b. $a_1 = 10$; $d = \frac{1}{2}$
c. $a_1 = -7$; $d = 4$
d. $a_1 = \frac{1}{2}$; $d = \frac{1}{2}$
e. $a_1 = 100$; $d = -2$
f. $a_1 = 6$; $d = \frac{2}{3}$
g. $a_1 = -\frac{5}{2}$; $d = \frac{7}{2}$
h. $a_1 = -12$; $d = 5$

2. Determina la diferencia en las siguientes progresiones y escribe los términos que faltan hasta completar los diez primeros términos:

a. 12, 10, 8, 6, ...
b. $\frac{1}{2}, \frac{7}{2}, \frac{13}{2}, \frac{19}{2}, ...$
c. −3, 2, 7, 12, ...
d. −10, −16, −22, −28, ...
e. $-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{7}{4}, \frac{11}{4}, ...$
f. $-8, -\frac{17}{2}, -9, -\frac{19}{2}, ...$
g. 100, 50, 0, −50, ...
h. $\frac{4}{3}, 2, \frac{8}{3}, \frac{10}{3}, ...$

Solución de problemas

3. Resuelve los siguientes problemas.

a. En un teatro las filas aumentan de a 2 sillas por fila. Si la primera fila tiene 20 sillas, ¿cuántas sillas tendrá la fila 15? Y, ¿cuántas sillas tendrá en total el teatro en las primeras 15 filas.

b. Determina la suma de los primeros 20 múltiplos positivos de 5.

c. Determina la suma de de los primeros 10 múltiplos positivos de 3.

Ejercitación y procedimientos

4. Determina el término indicado de cada progresión aritmética, si:

a. $a_1 = \frac{1}{2}; d = 3; a_8 = ?$
b. $a_1 = -10; d = 3; a_{10} = ?$
c. $a_1 = \frac{1}{4}; d = 4; a_{15} = ?$
d. $a_1 = 45; d = \frac{3}{5}; a_9 = ?$
e. $a_1 = -10; d = -5; a_{20} = ?$
f. $a_1 = -\frac{2}{3}; d = 3; a_{25} = ?$
g. $a_1 = 13; d = -2; a_{30} = ?$
h. $a_1 = -25; d = 5; a_{50} = ?$

5. Determina la suma de los primeros *n* términos de cada sucesión:

a. $a_1 = -2; a_{10} = -47; n = 10$
b. $a_1 = -\frac{1}{2}; a_7 = \frac{23}{2}; n = 7$
c. $a_1 = 45; a_{12} = -120; n = 12$
d. $a_1 = -10; a_6 = -9; n = 6$
e. $a_1 = 15; a_5 = 3; n = 5$
f. $a_1 = \frac{2}{3}; a_{15} = -\frac{166}{3}; n = 15$
g. $a_1 = -18; a_8 = -\frac{29}{2}; n = 8$
h. $a_1 = 20; a_{11} = -180; n = 11$

6. Escribe los primeros 5 términos de cada progresión y luego halla el término a_{10} y la suma de los primeros 10 términos s_{10} .

a. $a_1 = \frac{2}{3}; d = 4$
b. $a_1 = -100; d = 5$
c. $a_1 = -42; d = -4$
d. $a_1 = \frac{2}{5}; d = 5$
e. $a_1 = -10; d = 3$
f. $a_1 = 30; d = -\frac{1}{3}$
g. $a_1 = 13; d = -6$
h. $a_1 = -5; d = 12$

7. Halla la suma s_n , encontrando el número de términos de cada progresión:

a. 35, 29, 23, 17, ... , −49
b. −12, −19, −26, −33, ... , −75
c. 100, 75, 50, 25, ... , −375
d. $\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{9}{2}, \frac{13}{2}, ..., \frac{45}{2}$
e. −25, −20, −15, −10, ... , 95
f. 17, 6, −5, −16, ... , −170
g. −50, −27, −4, 19, ... , 433

COMPETENCIA INTERPRETATIVA/PROPOSITIVA: reconoce los elementos de una progresión aritmética y la construye

Logro: construir progresiones geométricas usando representaciones geométricas y numéricas.

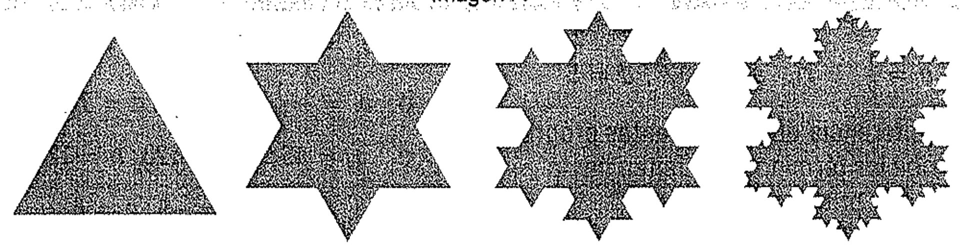
Progresiones geométricas

Comparte lo que sabes

Observa los siguientes números: 6, 12, 18, 24, ¿cómo se obtiene uno de los términos a partir del anterior?

El copo de nieve de Sierpinski es un fractal que tiene un perímetro infinito pero el área que encierra es finita. Este fractal se forma partiendo de un triángulo equilátero con lados L, llamado nivel 0, en una primera transformación, cada lado se divide en tres segmentos de igual longitud, el segmento del medio se retira y se remplaza por dos segmentos de longitud $\frac{1}{3}L$ que se forman con los segmentos adyacentes un ángulo $\alpha = 60°$, generándose el fractal del Nivel 1 y así mismo, se obtienen los demás niveles.

Imagen A



Nivel 0 Nivel 1 Nivel 2 Nivel 3

- En el siguiente cuadro se relaciona la cantidad de lados del fractal en cada nivel. ¿Cuáles son los números de lados correspondientes a los niveles faltantes?

Nivel	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Número de Lados	3	12	48						

- Encuentra el patrón numérico que forma la sucesión anterior y determina la cantidad de lados que tendría el fractal en el nivel 10.

Los términos de la sucesión anterior se obtienen multiplicando el término anterior por un factor constante igual a 4. Las sucesiones que tienen este comportamiento se denominan **progresiones geométricas**.

Una sucesión es una progresión geométrica si el siguiente término es igual al anterior multiplicado por un factor constante. Al factor constante se le llama también razón de la progresión, que se puede calcular dividiendo cualquier término por el término anterior y se denota por r.

Término n-ésimo de una progresión geométrica

El término n-ésimo de una progresión geométrica se escribe como $a_n = a_1 r^{n-1}$. Esta forma general permite determinar cualquier término de la progresión.

Ejemplo: Si el primer término de una progresión geométrica es 8 y el segundo es 2, determinar el séptimo término.

Como $a_1 = 8$ y $a_2 = 2$, entonces la razón de la progresión geométrica r, está dada por: $r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

El séptimo término de la sucesión está dado por $a_7 = 8\left(\frac{1}{4}\right)^{7-1}$, luego: $a_7 = \frac{8}{4\,096}$.

Suma de los términos de una progresión geométrica

Para calcular la suma de un número dado de términos de una progresión geométrica, conociendo el primer término de la progresión a_1, la razón r, el número n de términos cuya suma se busca, entonces la suma requerida s está dada por: $s_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r-1}, r \neq 1$

Ejemplo Determinar la suma de los primeros 6 términos de la progresión geométrica $\frac{1}{4}, 1, 4, 16, \ldots$

Como $a_1 = \frac{1}{4}$ y $a_2 = 1$, la razón r de la progresión geométrica está dada por $r = 1 \div \frac{1}{4} = 4$.

Entonces, la suma de los seis primeros términos de la serie está dada por:

$$s_6 = \frac{\frac{1}{4}(4^6 - 1)}{4-1} = \frac{\frac{1}{4}(4\,095)}{3} = \frac{\frac{4\,095}{4}}{3} = \frac{4\,095}{12} = \frac{1\,365}{4}$$

Práctica en contexto

Razonamiento y procedimientos

1. Indica cuáles de las siguientes progresiones son geométricas y en caso de serlo, escribe la razón geométrica correspondiente:

a. 5, 15, 45, 135, 405, 1 215, ...

b. $\frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, \ldots$

c. 8, –16, 32, –64, 128, –256, 512, ...

d. $6, -2, \frac{2}{3}, -\frac{2}{9}, \frac{2}{27}, -\frac{2}{81}, \ldots$

2. Determina los primeros 10 términos de cada progresión geométrica conociendo el primer término a_1 y la razón r:

a. $a_1 = 10$ y $r = \frac{1}{2}$ c. $a_1 = 15$ y $r = \frac{1}{5}$

b. $a_1 = \frac{2}{3}$ y $r = 3$ d. $a_1 = -\frac{3}{4}$ y $r = 2$

3. Construye los primeros 6 términos de las siguientes progresiones geométricas, dados los dos primeros términos a_1, a_2.

a. $a_1 = -2$, $a_2 = 12$

b. $a_1 = -13$, $a_2 = -26$

c. $a_1 = \frac{2}{5}$, $a_2 = -2$

d. $a_1 = 18$, $a_2 = -6$

e. $a_1 = 15$, $a_2 = -30$

4. Escribe los primeros 7 términos de cada progresión geométrica y halla su suma, si:

a. $a_1 = 4; a_2 = 10$ b. $a_1 = -3; r = 8$

c. $a_1 = 10; a_2 = 14$ d. $a_1 = 8; r = \frac{5}{2}$

Razonamiento y procedimientos

5. Observa el comportamiento del fractal del Triángulo de Sierpinski. Para su construcción, partimos de un triángulo equilátero de una unidad de longitud de lado, llamado el nivel 0, luego hallando los puntos medios de cada lado del triángulo inicial, formamos otro triángulo equilátero en el interior y lo retiramos, así se repite el proceso, como lo muestra la figura.

Nivel 1   Nivel 2   Nivel 3   Nivel 4

Determina la razón de la progresión que se forma y escribe la cantidad de triángulos que se retiran en el nivel 10 y luego en el nivel 100.

Determina la suma de los primeros 10 términos de la progresión del Triángulo de Sierpinski.

Ejercitación y procedimientos

6. Halla el término de la progresión geométrica que se indica en cada caso:

a. $a_1 = 2; a_2 = 3; a_{15} = ?$

b. $a_1 = -2; a_2 = 8; a_{20} = ?$

c. $a_1 = 7; a_2 = 1; a_{18} = ?$

Tema 4

Problemas

Logro: resolver problemas que se pueden modelar usando progresiones aritméticas y geométricas.

Práctica en contexto

Ejercitación y procedimientos

1. Completa la tabla con los primeros 8 términos de cada progresión. Indica qué tipo de progresión es y el término n-ésimo de cada una.

Progresión	Geométrica / Aritmética	Término n-ésimo
4, 2, 1, ...		
–42, –34, –26, ...		
$42, 14, \frac{14}{3}, \ldots$		
–2, 0, 2, ...		
$\frac{1}{2}, \frac{1}{12}, \frac{1}{72}, \ldots$		
4, –20, 100, ...		
$\frac{2}{3}, 4, 24, \ldots$		
$\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \ldots$		

2. Completa la tabla con el término que se indica y determina la suma para cada progresión.

Progresión	Término a_n	Suma S_n
5, 17, 29, ...	$a_7 =$	$S_7 =$
$\frac{2}{3}, \frac{2}{21}, \frac{2}{147}, \ldots$	$a_{11} =$	$S_{11} =$
–53, –65, –77, ...	$a_{15} =$	$S_{15} =$
–16, 48, –144, ...	$a_{21} =$	$S_{21} =$
$-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \ldots$	$a_9 =$	$S_9 =$
50, 10, 2, ...	$a_{10} =$	$S_{10} =$
$\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \ldots$	$a_5 =$	$S_5 =$
–7, –27, –47, ...	$a_8 =$	$S_8 =$

3. Calcula la suma de los primeros 12 términos de una progresión aritmética cuyo n-ésimo término es $3n + 2$.

4. Calcula la suma de los primeros 15 términos de una progresión geométrica cuyo n-ésimo término es $\frac{n+3}{3}$.

5. En una progresión aritmética el primer término es –14, el último –102 y la suma de esos términos es –696. Halla la razón de la progresión.

6. La suma de los 15 primeros términos de una progresión aritmética es –240 y $a_{15} = -44$. Halla el primer término.

7. ¿Cuántos términos de la progresión 2, –1, –4,... deben tomarse para que la suma sea –530?

8. La suma de una progresión geométrica de razón –3 es –1 641 y el último término es –2 187. Halla el primer término.

9. En una progresión geométrica el primer término es –32, el último término es –512 y la suma es –352. Halla la razón.

Modelación y procesos

10. Karl Friedrich Gauss (1777-1855) un matemático, determinó mentalmente la suma de los primeros 100 números naturales, explica la manera cómo puedes hacer esta suma y encuentra su resultado.

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + 100$$

Encuentra una forma general para hallar la suma de los primeros n números naturales sin importar la cantidad que nos pidan: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + n$

11. Determina una forma de hallar la suma de los primeros 100 números pares.

$$2 + 4 + 8 + 10 + \ldots + n$$

Solución de problemas

12. Cierto péndulo en cada oscilación (de izquierda a derecha o de derecha a izquierda) recorre el 95 % de la distancia recorrida en la oscilación anterior. Si en la primera oscilación de derecha a izquierda recorrió una distancia de 15 pies, determina la distancia total recorrida por el péndulo hasta el momento que se detiene. Puedes utilizar la fórmula $S_\infty = \frac{a_1}{1-r}$, ya que podemos considerarla como una progresión geométrica infinita.

Logro: reconocer las variaciones del interés simple y compuesto como progresiones.

Tema 5

Interés simple y compuesto

Comparte lo que sabes

Este mes un jean de $ 50 000 está rebajado el 10 % y el próximo mes se rebajará de nuevo otro 10 %, ¿cuál es el precio del Jean después de haber hecho las dos rebajas?

El *interés simple* se comporta como una progresión aritmética. Se obtiene cuando los intereses producidos, se deben únicamente al capital inicial durante el tiempo que dure la inversión.

Ejemplo: Un artesano vende uno de sus productos por $ 90 000, el comerciante le ofrece comprar sus productos aumentando la compra de los mismos $ 10 000 al término de los siguientes 6 años. ¿Cuál será el precio del producto después de los 6 años?

Al sumar una cantidad constante cada año se obtiene una progresión aritmética; así el término general es $a_n = a_1 + (n-1)d$. Termina de resolver el problema.

El *interés compuesto* se comporta como una progresión geométrica, se obtiene cuando al capital se le suman periódicamente los intereses producidos, es decir al final de cada periodo, el capital que se tiene es el capital anterior más los intereses producidos por ese capital durante dicho periodo.

Ejemplo: Juan Carlos ahorra en una cuenta $ 200 000 al 4 % de interés compuesto cada año. Después de 11 años, ¿cuál ha sido el monto del interés generado y el saldo de la cuenta?

Si Q es el capital invertido, al inicio del segundo año el dinero habrá aumentado $Q + 0,04Q$ o $1,04Q$. Termina de resolver el problema.

Práctica en contexto

Solución de problemas

Resuelve los siguientes problemas, teniendo en cuenta las variaciones de cada interés.

1. El salario de un trabajador será aumentado $ 70 000 en el término de los siguientes 5 años con un salario inicial de $ 650 000. ¿Cuál será el salario al término de los 5 años?
2. Si Camila ahorra el día 1, $ 500, el día 2, $ 1 000, el día 3, $ 1 500, y así durante un año de 365 días, ¿cuánto habrá ahorrado en total al final del año?
3. Carlos recibe un sueldo de $ 1 000 000 y su jefe le ha propuesto pagarle durante los siguientes 7 años $ 100 000 más cada año. ¿Cuál será el salario de Carlos dentro de 7 años? ¿Cuánto ganará en total durante esos 8 años?
4. Un péndulo recorre el 80 % de la oscilación anterior (de izquierda a derecha o de derecha a izquierda), si la primera oscilación es de 12 pies, determina la distancia total que recorre el péndulo hasta detenerse.
5. Andrés invierte $ 2 500 000 en un ahorro al 6 % de interés compuesto cada año. ¿Cuánto ha ahorrado al cabo de 12 años? ¿Cuál fue el monto del interés generado?
6. Una pelota cae de una mesa de 40 pulgadas de altura; si en cada rebote alcanza el 75 % de la altura anterior, ¿calcula la distancia total que recorre la pelota hasta que se detenga?

Pruebas de

Prueba Saber

Marca con una X la respuesta correcta.

1. El siguiente término de la sucesión $\{-1, 4, -9, 16, -25, 36, ...\}$ es:

   a. -49 b. 50 c. 49 d. -50

2. La serie que corresponde a la sucesión $\{14, 21, 28, 35, 42, 49\}$ es:

   a. $\sum_{n=1}^{6}(3n+3) = 189$

   b. $\sum_{n=1}^{6}(7n+7) = 189$

   c. $\sum_{n=1}^{6}7n = 189$

   d. $\sum_{n=1}^{6}(3n+7) = 189$

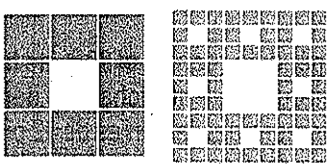
3. El primer término de una progresión aritmética es 4, el último es 44 y la suma es 144. La diferencia d es:

   a. 8 b. 7 c. 6 d. 9

Contesta las preguntas 4, 5 y 6 teniendo en cuenta la siguiente situación.

La siguiente figura es un fractal llamado la Carpeta de Sierpinski, observa cada una de sus iteraciones.

Imagen A



Iteración 1 Iteración 2

4. Si se cuentan los cuadros de color para cada iteración, la progresión que forman es:

   a. 8, 16, 24, 32, ... c. 8, 64, 512, 4 096, ...

   b. 9, 81, 729, 6 561, ... d. 9, 18, 27, 36, ...

5. El término n-ésimo de la progresión de la carpeta de Sierpinski es:

   a. $8 - n$ b. $8n$ c. $8 + n$ d. 8^n

6. La cantidad de cuadros de color en la iteración 5 es de:

   a. 40 b. 32 768 c. 26 300 d. 13

7. Camilo invierte ahorrando $ 2 500 000 a un interés compuesto del 5 % anual. Al cabo de 5 años la cantidad de dinero ahorrado será:

   a. 3 038 766

   b. 12 656 250

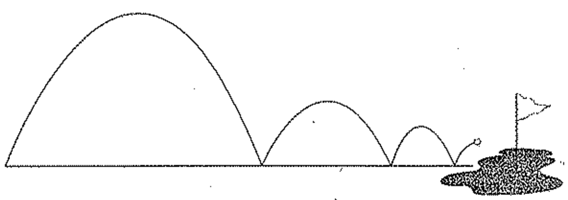
   c. 18 984 375

   d. 3 190 704

Prueba PISA

8. Un jugador de golf está a una cierta distancia del hoyo; al intentar el primer tiro, la pelota llega a la mitad de la distancia inicial, en el segundo tiro vuelve a caer en la mitad de la distancia del tiro anterior, y cada vez que le pega a la pelota, ésta sólo cubre la mitad de la distancia hasta el hoyo, así:

Imagen B



   a. Escribe la serie numérica que describe el comportamiento de cada tiro.

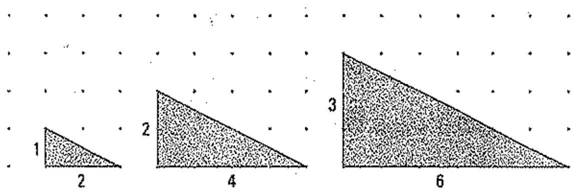
   b. ¿En qué tiro la pelota llegará hasta el hoyo? Argumenta tu respuesta.

   c. Escribe de manera general el comportamiento de esta situación.

mejoramiento

9. El triángulo rectángulo

Estudiaremos el comportamiento de las transformaciones que sufre un triángulo rectángulo en la medida de sus lados, su perímetro y área. Observa la siguiente secuencia de figuras:



a. Construye el cuarto triángulo de la sucesión de figuras.

b. Escribe la relación que encuentras entre los lados del triángulo.

c. Determina una expresión general para la medida de cada uno de los lados del triángulo.

d. Determina las áreas de los cuatro primeros triángulos.

e. Determina una expresión general para hallar el área de cualquier triángulo que guarde la misma relación.

f. ¿Qué clase de progresión forman las áreas de los triángulos? Argumenta tu respuesta.

g. Determina el área del décimo triángulo de la sucesión de figuras.

Prueba TIMSS

10. El término n-ésimo de la sucesión $\frac{1}{4}, \frac{4}{7}, \frac{9}{12}, \frac{25}{19}, \frac{36}{28}, \ldots$ es:

a. $\frac{n^2}{n+4}$

b. $\frac{n^2+1}{n^2+3}$

c. $\frac{n^2}{n^2+3}$

d. $\frac{n+3}{n^2}$

11. La siguiente sucesión muestra los recíprocos de los números naturales: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ la serie de los primeros 6 términos de la sucesión es:

a. $\frac{47}{19}$ b. $\frac{2}{7}$ c. $\frac{1}{3}$ d. $\frac{49}{20}$

12. El primer término de una progresión geométrica de 5 terminos es -8, el último término $-\frac{1}{2}$ y la suma es $-\frac{31}{2}$. La razón de la progresión es:

a. $-\frac{1}{3}$

b. $-\frac{1}{2}$

c. $\frac{1}{2}$

d. $\frac{1}{3}$

13. El séptimo término de la progresión $-12, -20, -28, \ldots$ es:

a. -60 c. -59

b. -61 d. -62

14. Los primeros 6 términos de una progresión geométrica cuyo primer término es 27 y el segundo término es 9, son:

a. $27, 9, 3, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9}$

b. $27, 9, 3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}$

c. $27, 9, 3, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{7}$

d. $27, 9, 3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}$

15. La suma de los siete primeros términos de una progresión aritmética es 231 y el término $a_7 = -42$. El primer término de la progresión es:

a. -24

b. -23

c. -25

d. -2

Unidad 7

Semejanza y circunferencias

En el año 6000, los Babilonios, inventan la rueda y con ella descubren algunas de las propiedades de la circunferencia. Determinan que la relación entre la circunferencia y su diámetro era algo más de 3 y dividen la circunferencia en 360 partes iguales obteniendo el grado sexagesimal.

Cultura egipcia

Esta cultura se dedicó al cálculo de áreas y volúmenes. Se centró en tres grandes problemas: el cálculo del área del triángulo isósceles, el del trapecio y el del círculo.

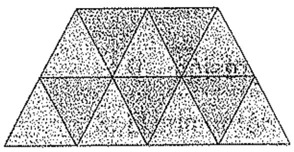
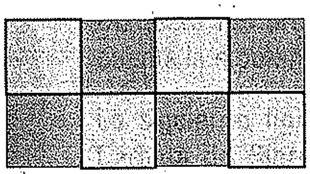
Cultura greca

Busca explicaciones racionales a los asuntos generales y específicamente a la geometría que comienza a analizarse como una ciencia deductiva. Entre los matemáticos más conocidos están:

- *Siglo VII a.e.c., Thales de Mileto.*
- *Siglo VI a.e.c. Pitágoras de Samos.*
- *Siglo IV a.e.c. Euclides.*

PRUEBA QUE SABES

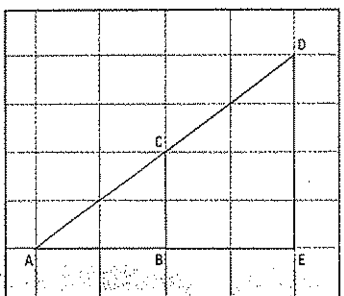
Observa las siguientes figuras

	• ¿Cuántos triángulos hay en la figura? • ¿Cuántos triángulos iguales hay? • Los triángulos pequeños forman un triángulo mayor, ¿cuál es la relación entre los lados de ambos triángulos?
	• ¿Cuántos cuadrados hay en la figura? • ¿Cuántos cuadrados iguales hay? • Los cuadrados pequeños forman un cuadrado mayor, ¿cuál es la relación entre los lados de ambos cuadrados?

Analiza las siguientes situaciones:

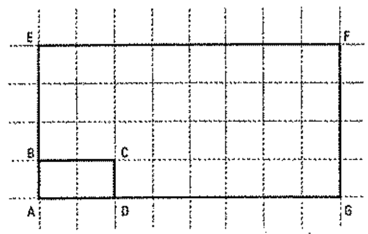
Determina las medidas de las siguientes figuras, comparándolas con otras:

Observa el triángulo ABC y el triángulo ADE.



- ¿Cuál es la relación entre los lados del triángulo ΔABC y ΔADE ?
- Determina el perímetro de cada uno de los triángulos y halla su relación.
- Determina el área de cada uno de los triángulos y halla su relación.

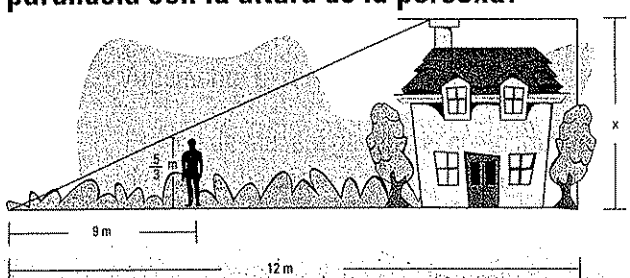
Observa los rectángulos ABCD y AEFG.



- ¿Cuál es la relación entre los lado de ellos?
- Determina el perímetro de cada uno de los rectángulos y halla su relación.

Determina el área de cada uno de los rectángulos y halla su relación.

¿Cómo determinas la altura de una casa comparándola con la altura de la persona?



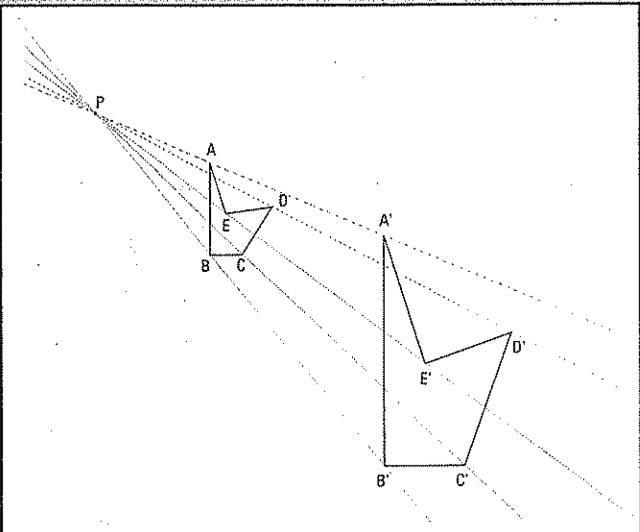
Tema 1

Logro: reconocer los criterios de semejanza entre polígonos a partir de la relación entre sus lados y ángulos y su representación geométrica.

Polígonos semejantes

Comparte lo que sabes

¿A qué se refiere el concepto de proporcionalidad?



La figura de la izquierda muestra dos polígonos que tienen la misma forma. Cada lado del segundo polígono 2,4 veces de cada lado del polígono inicial. El segundo polígono A´B´C´D´E´, se denomina polígono semejante y se genera al hacer la proyección desde el punto P con rectas que pasan por los vértices del primer polígono ABCDE.

En general dos polígonos son semejantes entre sí, si cumplen que:

1. Los ángulos de los vértices de los polígonos semejantes son iguales:

$$\hat{A} = \hat{A}' \,;\ \hat{B} = \hat{B}' \,;\ \hat{C} = \hat{C}' \,;\ \hat{D} = \hat{D}' \,;\ \hat{E} = \hat{E}'$$

2. Los lados respectivos son proporcionales:

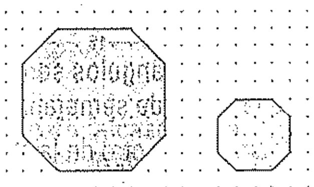
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{D'E'}} = \frac{\overline{EA}}{\overline{E'A'}} = \text{Constante.}$$

Se llaman **homólogos** a los vértices, lados y ángulos correspondientes a dos polígonos semejantes y se denomina **razón de semejanza** a la constante de proporcionalidad (que aparece siempre que se dividen las longitudes de dos lados homólogos).

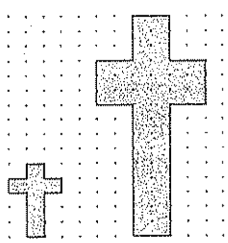
Práctica en contexto

Modelación y procedimientos

1. Determina la razón de semejanza entre cada par de polígonos.



A. Razón:________



B. Razón: ________

Solución de problemas

2. Analiza las siguientes relaciones de semejanza y resuélvelas:

a. Dos triángulos son semejantes y la razón de semejanza es 4. Si los lados de uno de los triángulos miden 8, 13 y 17 cm, ¿cuánto miden los lados del otro triángulo? ¿Qué puedes decir de los ángulos, del perímetro y área de los dos triángulos?

b. Dos rectángulos son semejantes y la razón de semejanza es de $\frac{1}{3}$. Si los lados del rectángulo son respectivamente 45 y 30 cm, ¿cuánto miden los lados del otro rectángulo?, ¿qué puedes decir de los ángulos, del perímetro y del área de ambos rectángulos?

3. Construye un polígono semejante al polígono dado por medio de la proyección de rayos a partir del punto P como se mostró en el ejemplo inicial.

a. Un cuadrilátero que tiene por lados 4, 6, 3 y 8 cm, con razón de semejanza 5.

b. Un triángulo cuyos lados son 7, 5 y 9 cm, con razón de semejanza 2.

c. De un pentágono regular cuyos lados sean 8 cm y su razón de semejanza sea de $\frac{1}{2}$.

COMPETENCIA INTERPRETATIVA, PROPOSITIVA Y ARGUMENTATIVA: reconoce y construye polígonos semejantes teniendo en cuenta sus criterios.

Tema 2

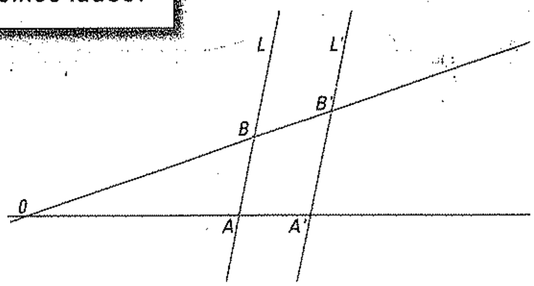
Triángulos semejantes

Logro: establecer relaciones de semejanza entre triángulos.

COMPETENCIA INTERPRETATIVA /PROPOSITIVA /ARGUMENTATIVA: identifica y construye triángulos semejantes a partir de sus criterios de semejanza.

Comparte lo que sabes

¿Cómo se llaman los polígonos que tienen tres, cuatro y cinco lados?



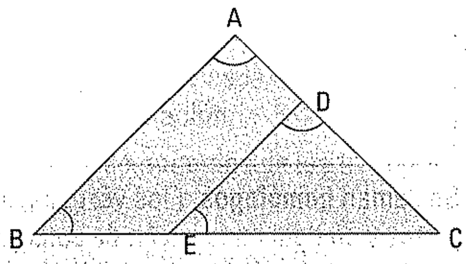
El teorema de Tales o Thales describe las relaciones de proporcionalidad entre dos segmentos que intersecan rectas paralelas y que parten de un mismo punto. Así, si

$L \parallel L'$, entonces: $\dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \dfrac{\overline{OB'}}{\overline{OB}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$ y $\dfrac{\overline{AA'}}{\overline{OA}} = \dfrac{\overline{BB'}}{\overline{OB}}$

Criterios de semejanza para los $\triangle ABC$ y $\triangle DEC$.

Teorema (AA): Si dos triángulos tienen dos de sus ángulos correspondientes iguales, entonces son semejantes.

$$\measuredangle A = \measuredangle D$$
$$\measuredangle B = \measuredangle E$$



Teorema (LLL): Si dos triángulos tienen los tres lados correspondientes proporcionales, entonces son semejantes.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EC}}$$

Teorema (LAL): Si dos triángulos tienen un ángulo correspondiente igual y los lados del ángulo tienen una misma razón, son semejantes.

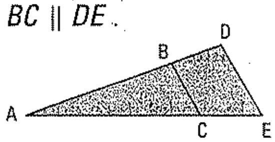
$$\measuredangle B = \measuredangle E \text{ y } \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EC}}$$

Práctica en contexto

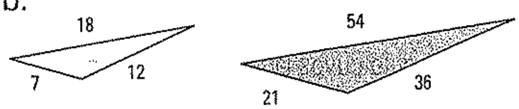
Razonamiento y modelación

1. Determina las relaciones de semejanza entre los siguientes pares de triángulos y argumenta dicha relación por medio de uno de los criterios de semejanza.

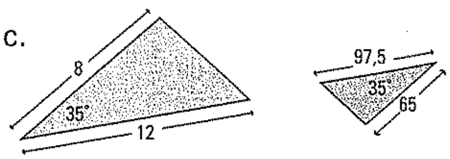
a. Si conocemos que: $\overline{BC} \parallel \overline{DE}$.



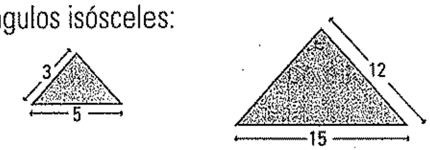
b.



c.



d. Dos triángulos isósceles:



2. Comprueba que los siguientes triángulos son semejantes y determina la razón de semejanza.

a. Uno de lados 10 cm, 8 cm, 6 cm y otro de lados: 75 cm, 60 cm, 45 cm, respectivamente.

b. Uno de lados 10 cm, 14 cm, 18 cm y otro de lados 95 cm, 133 cm, 171 cm respectivamente.

c. Uno de lados 8 cm, 12 cm, 16 cm y otro de lados 44 cm, 66 cm, 88 cm, respectivamente.

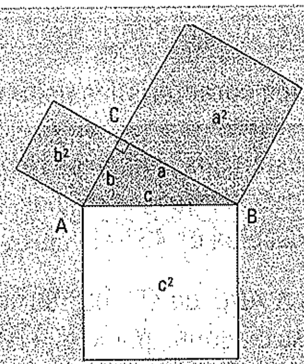
3. Construye dos triángulos semejantes al triángulo cuyos lados miden 14 cm, 9 cm y 7 cm, sabiendo que la razón de semejanza del primero es $\frac{1}{3}$ y la del segundo es 5. ¿Cuál es la longitud de los lados de cada uno de los triángulos construidos?

Logro: reconocer las características de los triángulos rectángulos por medio del teorema de Pitágoras.

Triángulos rectángulos

Comparte lo que sabes

¿A qué equivale la suma de de los ángulos internos de un triángulo?

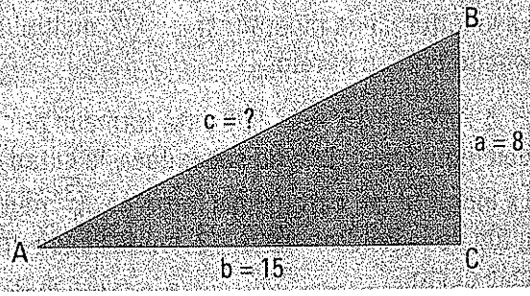


El ΔABC es un triángulo rectángulo si uno de sus ángulos internos es recto. Los lados que forman el ángulo recto se llaman **catetos** y el lado opuesto a ese ángulo se denomina **hipotenusa**. La relación existente entre los catetos y la hipotenusa está definida por el teorema de Pitágoras, el cual establece que el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos.

Teorema de Pitágoras: $c^2 = a^2 + b^2$

Ejemplo: La longitud de los catetos del ΔABC, miden 8 y 15 unidades. Encontrar la medida de la hipotenusa c.

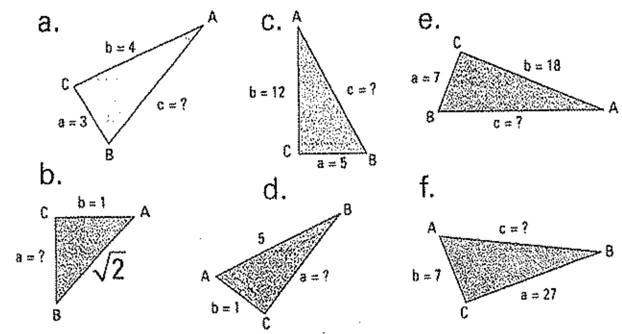
$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$c^2 = 8^2 + 15^2$$
$$c^2 = 64 + 225$$
$$c^2 = 289$$
$$\sqrt{c^2} = \sqrt{289}$$
$$c = 17$$



Práctica en contexto

Ejercitación y procesos

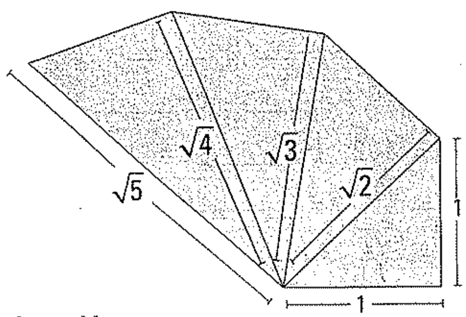
1. Encuentra el valor indicado para cada uno de los triángulos rectángulos.



2. En cada caso se dan dos longitudes de los lados de un triángulo rectángulo. Determina la longitud del lado desconocido. Considera a y b los catetos y c, la hipotenusa.
   a. $a = 3; b = ?; c = 5$
   b. $a = ?; b = 12; c = 13$
   c. $a = 11; b = 5; c = ?$
   d. $a = ?; b = 17; c = 23$
   e. $a = 1; b = ?; c = \sqrt{28}$
   f. $a = 2; b = 9; c = ?$

Modelación y procesos

3. Construye con regla y compás segmentos que midan $\sqrt{8}$ y $\sqrt{11}$ partiendo del triángulo rectángulo en el que la hipotenusa mide $\sqrt{2}$.



Solución de problemas

4. Resuelve los siguientes problemas usando el teorema de Pitágoras.
   a. Una persona viaja 9 millas al norte y 14 millas al Oriente. ¿A qué distancia está del punto inicial?
   b. Una escalera de 3 m se coloca contra una pared. La distancia desde la base de la escalera hasta la pared es de 2 m. ¿A qué altura desde el suelo se encuentra la parte más alta de la escalera?
   c. La longitud de cada lado de un triángulo equilátero es de 15 cm. Determina la altura del triángulo.

Tema 4

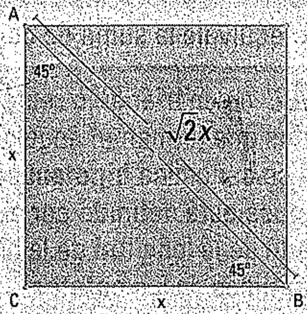
Triángulos especiales

Logro: identificar las características de los triángulos especiales.

Comparte lo que sabes

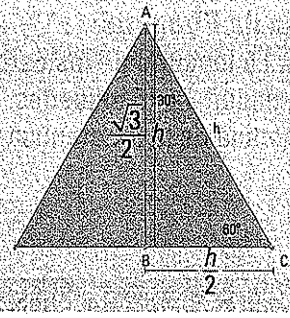
¿Qué característica tienen los triángulos isósceles?

Existen dos triángulos rectángulos especiales que se caracterizan por la medida de sus ángulos internos, éstos son, el triángulo rectángulo isósceles de 45°-45°-90° y el triángulo rectángulo de 30°-60°-90°.



El $\triangle ABC$ de 45°-45°-90° está formado por dos lados de un cuadrado y su diagonal, por lo que la longitud de sus catetos es igual.

La longitud de la hipotenusa es $\sqrt{2}$ multiplicada por la longitud de un cateto.

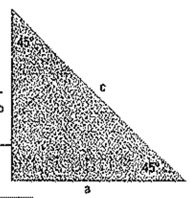


El $\triangle ABC$ de 30°-60°-90° está formado por la altura de un triángulo equilátero, uno de sus lados y la mitad de la base.
La longitud del cateto más largo es $\frac{\sqrt{3}}{2}$ multiplicada por la longitud de la hipotenusa o $\sqrt{3}$ multiplicada por la longitud del lado más corto.

Práctica en contexto

Ejercitación y procesos

1. En cada caso, determina las longitudes de los lados indicados para el $\triangle ABC$ de 45°-45°-90°.



a. $a = 5$, $b =$ ______, $c =$ ______

b. $a = 325$, $b =$ ______, $c =$ ______

c. $a = 3\sqrt{2}$, $b =$ ______, $c =$ ______

d. $c = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $a =$ ______, $b =$ ______

e. $c = \frac{5\sqrt{2}}{7}$, $a =$ ______, $b =$ ______

f. $c = 11\sqrt{2}$, $a =$ ______, $b =$ ______

g. $b = \frac{7}{2}\sqrt{2}$, $a =$ ______, $b =$ ______

2. Determina el perímetro y el área de los siguientes triángulos especiales de 45°-45°-90°, dadas las longitudes de los lados indicadas. Toma como referencia el triángulo del punto 1.

a. Si $a = 3$

b. Si $a = 6\sqrt{2}$

c. Si $a = \frac{\sqrt{2}}{4}$

d. Si $c = 10$

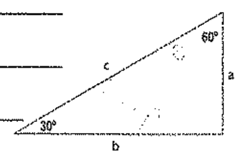
e. Si $c = 235$

f. Si $c = 5\sqrt{6}$

g. Si $b = 7\sqrt{18}$

h. Si $b = 10\sqrt{2}$

3. Determina las longitudes de los lados indicados para el $\triangle ABC$ 30°-60°-90°:



a. $c = \sqrt{3}$, $a =$ ______, $b =$ ______

b. $c = \frac{\sqrt{3}}{5}$, $a =$ ______, $b =$ ______

c. $c = 9$, $a =$ ______, $b =$ ______

d. $b = 8\sqrt{3}$, $a =$ ______, $c =$ ______

e. $b = 3\sqrt{3}$, $a =$ ______, $c =$ ______

f. $b = 6$, $a =$ ______, $c =$ ______

g. $a = 2\sqrt{27}$, $b =$ ______, $c =$ ______

h. $a = \sqrt{243}$, $b =$ ______, $c =$ ______

i. $a = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, $b =$ ______, $c =$ ______

4. Determina el perímetro y área de los siguientes triángulos especiales de 30°-60°-90°, dadas las longitudes de los lados indicadas. Toma como referencia el triángulo del punto 2.

a. Si $a = 4\sqrt{3}$

b. Si $a = \frac{1}{2}$

c. Si $a = 5\sqrt{27}$

d. Si $b = 12$

e. Si $b = 18$

f. Si $c = \frac{1}{\sqrt{3}}$

g. Si $c = 6\sqrt{48}$

h. Si $b = 30$

COMPETENCIA INTERPRETATIVA / PROPOSITIVA: determina la medida de los lados de triángulos especiales por medio de sus relaciones.

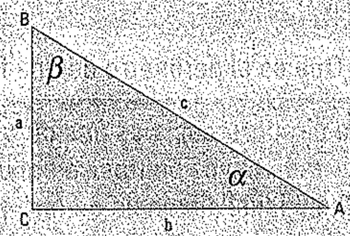
Logro:
identificar las razones trigonométricas en las relaciones de los lados de un triángulo rectángulo.

Tema 5

Razones trigonométricas

Comparte lo que sabes

¿Qué es una razón en matemáticas?



Las razones trigonométricas se definen como la relación que existe entre el cociente de las longitudes de dos lados de un triángulo rectángulo y el ángulo agudo interno correspondiente.

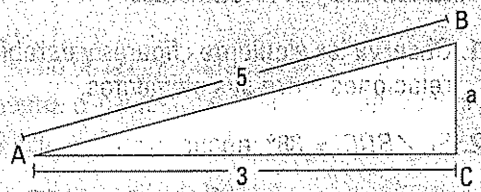
Si α es la medida del ángulo CAB del triángulo rectángulo ΔABC, a es la medida del cateto opuesto al ángulo α y b es el cateto adyacente al ángulo α, entonces se pueden definir las siguientes razones trigonométricas:

Razones trigonométricas	Recíprocas de las razones trigonométricas
$\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}} = \dfrac{a}{c}$	$\csc\alpha = \dfrac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto opuesto}} = \dfrac{c}{a}$
$\cos\alpha = \dfrac{\text{Cateto adyacente}}{\text{Hipotenusa}} = \dfrac{b}{c}$	$\sec\alpha = \dfrac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto adyacente}} = \dfrac{c}{b}$
$\tan\alpha = \dfrac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto adyacente}} = \dfrac{a}{b}$	$\cot\alpha = \dfrac{\text{Cateto adyacente}}{\text{Cateto opuesto}} = \dfrac{b}{a}$

Ejemplo: evaluar las seis razones trigonométricas en el ΔABC con respecto al ángulo A.
Para hallar la razones trigonométricas primero hay que encontrar el cateto a opuesto al ángulo A.
Usando el teorema de Pitágoras: $c^2 = a^2 + b^2$ se tiene:

$$25 = a^2 + 9$$

Despejando: $\sqrt{16} = \sqrt{a^2}$; luego, $a = 4$.
De esta forma, las seis razones trigonométricas están dadas por:



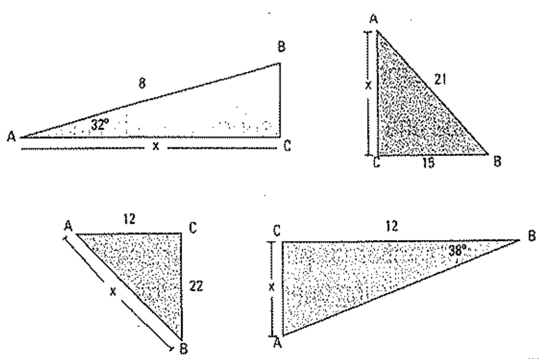
$\operatorname{sen} A = \frac{4}{5}$ $\quad$ $\tan A = \frac{4}{3}$ $\quad$ $\sec A = \frac{5}{3}$

$\cos A = \frac{3}{5}$ $\quad$ $\csc A = \frac{5}{4}$ $\quad$ $\cot A = \frac{3}{4}$

Práctica en contexto

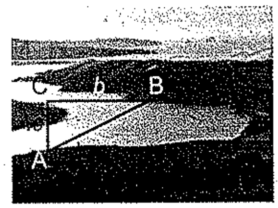
Ejercitación y procedimientos

1. Encuentra el valor de x y d escribe el proceso:



Solución de problemas

2. Soluciona los siguientes problemas:



a. Determina el lado b del río, si desde el punto B se observa con un ángulo de depresión de 50° al punto A y el lado c mide 63 km.

b. ¿Cuál es el largo de una escalera que se encuentra apoyada a 3 m de altura desde el piso sobre una pared y forma un ángulo de elevación de 60° desde la base al punto de apoyo.

COMPETENCIA INTERPRETATIVA / PROPOSITIVA / ARGUMENTATIVA: soluciona problemas a partir de las razones trigonométricas en triángulos rectángulos

Tema 6

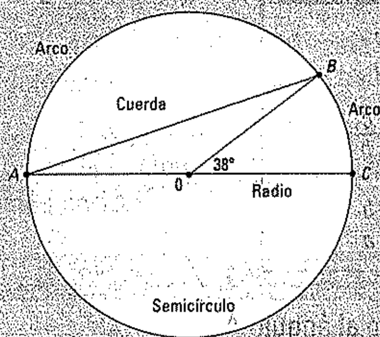
Arcos, cuerdas y ángulos centrales

Logro: identificar los elementos de la circunferencia.

Comparte lo que sabes

¿Qué es el perímetro de una figura?

La circunferencia es una curva cerrada cuyos puntos se encuentran a igual distancia de otro punto llamado centro. Se denomina círculo a los puntos de la circunferencia y al conjunto de puntos interiores de ella. La circunferencia barre un ángulo de 360°.



- El **radio** es cualquier segmento que une el centro con un punto de la circunferencia: $\overline{OB} = \overline{OC} = \overline{AO}$
- El **diámetro** es la recta que une dos puntos de la circunferencia y pasa por el centro: $\overline{AC} = \overline{AO} + \overline{OC}$
- Un **ángulo central** es el que está formado por dos radios y cuyo vértice es el punto centro. Dos ángulos centrales son: $\angle AOB$ y $\angle BOC$.
- Una **cuerda** es el segmento que une dos puntos de la circunferencia. Por ejemplo $\overline{AB}$ y el diámetro $\overline{AC}$ son cuerdas.
- Un **arco** es una parte de la circunferencia y se representa por el símbolo $\frown$, por ejemplo $\widehat{AB}$. La semicircunferencia es un arco igual a la mitad de la circunferencia: $\widehat{ABC}$. Se llama arco menor a aquel que es inferior a la semicircunferencia y arco mayor, al que es superior a la semicircunferencia: $\widehat{BC}$ es un arco menor y $\widehat{ABC}$ es un arco mayor; para nombrar un arco mayor se usan tres letras.

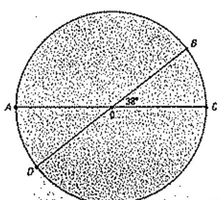
Un ángulo central tiene igual número de grados que el arco que abarca; un ángulo central de 90° abarca un arco de 90°, un ángulo central de 120° abarca un arco de 120°, etc.

Práctica en contexto

Razonamiento y procedimientos

1. Observa las siguientes figuras y establece las relaciones entre sus elementos.

2. Si $\angle BOC = 38°$, encuentra:



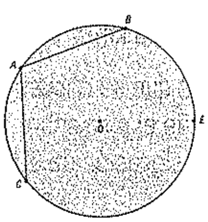
a. Medida del $\angle AOD$.

b. Medida de los arcos $\widehat{BC}$ y $\widehat{AD}$.

c. Medida de los arcos $\widehat{AB}$ y $\widehat{CD}$.

d. Nombra todos los arcos mayores que se pueden formar e indica su medida.

3. Si la cuerda $\overline{AB} = \overline{AC}$ y la medida del arco $\widehat{AB}$ es $\frac{1}{5}$ de la longitud de la circunferencia, encuentra:

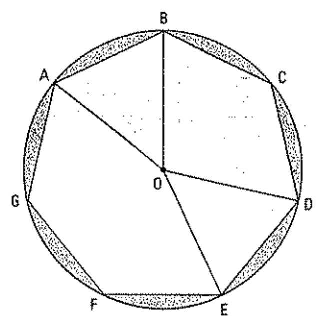


a. La medida de los arcos $\widehat{AB}, \widehat{AC}, \widehat{BC}$.

b. Nombra todos los arcos mayores que se pueden formar e indica su medida, si el punto E está ubicado a la misma distancia de B que de A.

4. El polígono inscrito en la circunferencia es un heptágono regular.

a. Encuentra la medida de los ángulos centrales $\angle AOB$, $\angle AOC$, $\angle AOD$ y los arcos correspondientes.



b. Nombra los arcos y ángulos que tienen la misma medida.

c. Nombra algunos arcos menores y mayores que se pueden formar e indica su medida.

d. Escribe una relación general entre las medidas de los ángulos centrales y arcos para cualquier polígono regular inscrito en una circunferencia.

e. ¿Cuántas cuerdas puedes trazar en el heptágono con la condición que pasen por los vértices del polígono y que sean distintas a los lados?

COMPETENCIA INTERPRETATIVA / PROPOSITIVA: determina las relaciones entre los elementos de una circunferencia.

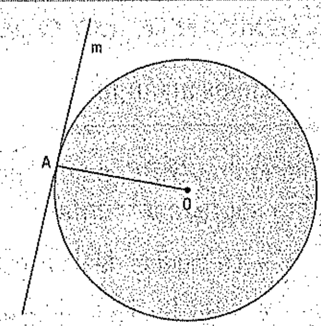
Logro: identificar las rectas tangentes a una circunferencia y la relación que existe con sus elementos.

Tema 7

Rectas tangentes a una circunferencia

Comparte lo que sabes

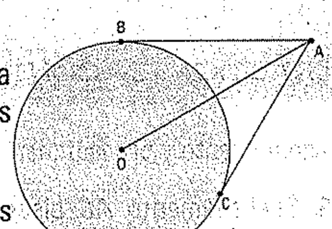
¿Cuál es la relación que existe entre el radio y el diámetro de una circunferencia?



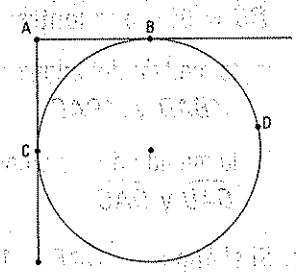
La recta m es tangente a la circunferencia si la toca en un solo punto.

Relación de las rectas tangentes con los elementos de una circunferencia

- Toda recta tangente a la circunferencia es perpendicular al radio que pasa por el punto de contacto.



- Las rectas tangentes trazadas desde un punto exterior a la circunferencia son iguales. Si AB y AC son rectas tangentes a la circunferencia, entonces $AB = AC$.
- La recta que une el centro de una circunferencia con un punto exterior, es bisectriz del ángulo que forman las tangentes trazadas por ese punto a la circunferencia. Si AB y AC son tangentes a la circunferencia, entonces el segmento $\overline{OA}$ es bisectriz del $\angle BAC$.



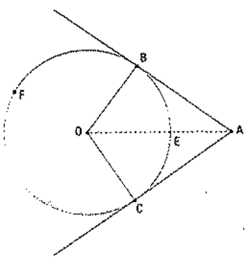
- La medida de un ángulo formado por dos rectas tangentes a una circunferencia unidas por un punto exterior, es la mitad de la resta entre las medidas del arco mayor y la medida del arco menor.

$$\angle CAB = \frac{1}{2}\left(\widehat{BDC} - \widehat{BC}\right)$$

Práctica en contexto

Razonamiento y procesos

1. Si $\angle BOC = 110°$, encuentra:



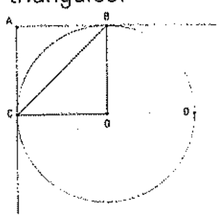
a. la medida del ángulo $\angle BOA$.

b. la medida de los arcos $\widehat{BFC}$, $\widehat{BC}$ y $\widehat{BFE}$.

c. la medida del ángulo $\angle BAC$.

d. ¿Qué clase de triángulos son $\Delta\, AOB$ y $\Delta\, AOC$? ¿Qué relación tienen estos dos triángulos?

2. Si $\overline{AB} = \overline{AC}$, encuentra:



a. la medida de los arcos $\widehat{BC}$ y $\widehat{BDC}$.

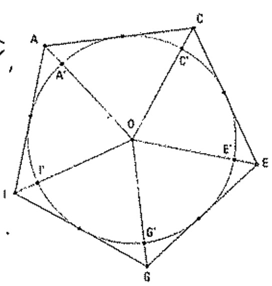
b. la medida del ángulo $\angle BAC$.

c. ¿Qué clase de triángulo es $\Delta\, BOC$?

d. ¿Qué clase de polígono es $ABOC$?

e. Si el radio de la circunferencia es $r = 4$ cm, encuentra el perímetro y área correspondientes al triángulo $\Delta\, BOC$ y el polígono $ABOC$.

3. El pentágono regular de la figura está circunscrito en la circunferencia, halla:



a. la medida de los arcos $\widehat{A'C'}$, $\widehat{C'E'}$, $\widehat{E'G'}$, $\widehat{G'I'}$ e $\widehat{I'G'}$. ¿Qué puedes concluir?

b. La medida de los ángulos $\angle A$, $\angle C$, $\angle E$, $\angle G$, $\angle I$. ¿Qué puedes concluir?

c. ¿Qué clase de triángulo es el $\Delta\, AOC$? ¿Qué puedes decir de los demás triángulos?

d. ¿Cuál es el perímetro y el área del pentágono si el radio de la circunferencia es $r = 4$ cm y el lado $\overline{OA} = 6$ cm?

COMPETENCIA INTERPRETATIVA/ PROPOSITIVA/ ARGUMENTATIVA: relaciona los elementos de la circunferencia con rectas tangentes

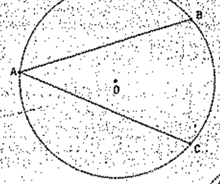
Tema 8

Ángulos inscritos

Logro: identificar los ángulos inscritos en una circunferencia.

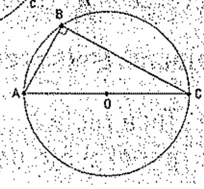
Comparte lo que sabes

¿Qué es un ángulo?



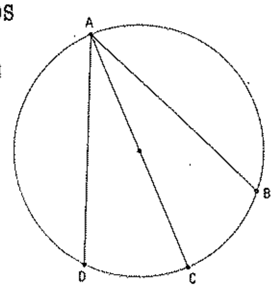
El ángulo $\angle ABC$ es un ángulo inscrito en una circunferencia si su vértice está sobre la circunferencia y sus lados son cuerdas.

- La medida de un ángulo inscrito es la mitad del arco que abarca, $\angle A = \frac{1}{2}\widehat{BC}$.
- Todo ángulo inscrito en una semicircunferencia es un ángulo recto.



Práctica en contexto

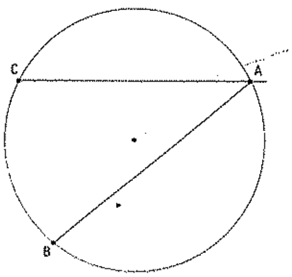
Razonamiento y procedimientos



1. Si el segmento $\overline{AC}$ biseca al ángulo $\angle DAB$ y el arco $\widehat{BC} = 95°$, encuentra:

a. la medida del ángulo $\angle BAD$ y $\angle BAC$.

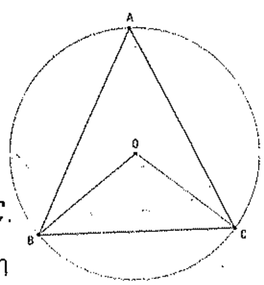
b. la medida de los arcos $\widehat{DAB}$ y $\widehat{DAC}$.



2. Si el ángulo $\angle DAB = 150°$, encuentra:

a. la medida del ángulo $\angle BAC$.

b. la medida de los arcos $\widehat{CB}$ y $\widehat{BAC}$.

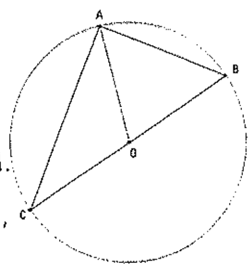


3. Si $\angle BOC = 85°$, encuentra:

a. la medida de los arcos $\widehat{BC}$ y $\widehat{BAC}$.

b. la medida del ángulo $\angle BAC$.

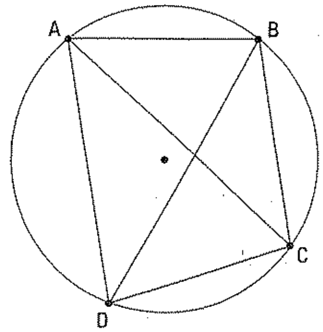
c. ¿Qué clase de triángulos son ΔBOC y ΔABC?



4. Si el ángulo $\angle COA = 115°$, encuentra:

a. La medida del ángulo $\angle OCA$.

b. La medida de los arcos $\widehat{AB}$, $\widehat{CA}$ y $\widehat{BCA}$.

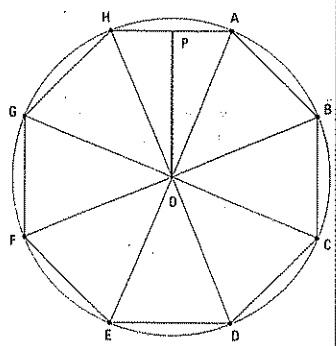


5. Si los ángulos $\angle DAC = 48°$ y $\angle CAB = 34°$, encuentra:

a. la medida de los arcos $\widehat{BC}$ y $\widehat{CD}$.

b. la medida de los ángulos $\angle ACD$ y $\angle ACB$.

c. la medida de los arcos $\widehat{AD}$ y $\widehat{AB}$.



6. El polígono inscrito en la circunferencia es un octágono regular. Encuentra:

a. la medida de todos los ángulos inscritos formados por cada uno de los vértices del octágono y sus lados correspondientes.

b. la medida de todos los arcos que abarcan los ángulos inscritos formados por los vértices del octágono y sus lados correspondientes.

c. la medida de los ángulos centrales en la circunferencia.

d. Si el radio de la circunferencia es $r = 8$ cm y cada lado del octágono mide 6 cm, determina el perímetro y área del octágono.

COMPETENCIA INTERPRETATIVA / PROPOSITIVA / ARGUMENTATIVA: Establece relaciones entre los elementos del círculo a partir de la medida de ángulos inscritos

Logro:
relacionar los segmentos especiales de una circunferencia para la medición de ángulos.

Tema 9

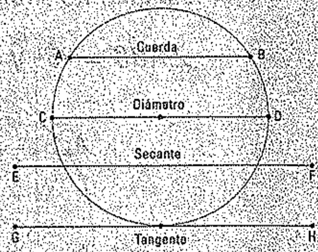
Segmentos especiales

COMPARTE LO QUE SABES

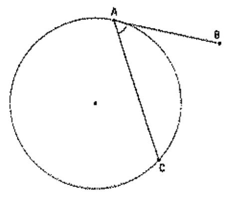
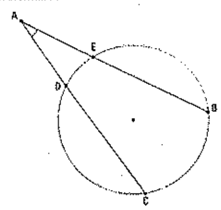
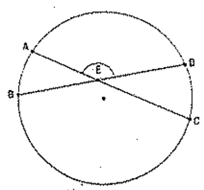
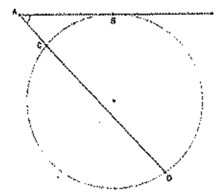
¿Cuál es la relación que existe entre un arco y un ángulo central?

Los segmentos especiales de la circunferencia son las cuerdas, el diámetro, los segmentos tangentes y los segmentos secantes.

El segmento $\overline{EF}$ es secante pues corta en dos puntos a la circunferencia.



Relaciones de los segmentos especiales con la medición de ángulos

Clase de ángulo	Diagrama	Clase de ángulo	Diagrama
Ángulo formado por una tangente y una cuerda. $\angle A = \frac{1}{2}\widehat{AC}$		Ángulo formado por dos secantes. $\angle A = \frac{1}{2}\left(\widehat{BC} - \widehat{DE}\right)$	
Ángulo formado por dos cuerdas que se cortan. $\angle AEB = \frac{1}{2}\left(\widehat{AB} + \widehat{CD}\right)$		Ángulo formado por una secante y una tangente. $\angle A = \frac{1}{2}\left(\widehat{BD} - \widehat{BC}\right)$	

PRÁCTICA EN CONTEXTO

Razonamiento y procesos

1. Los segmentos $\overline{AD}$ y $\overline{AE}$ son secantes a la circunferencia y se intersecan en el punto A. Encuentra:

   a. $\angle A$, si $\widehat{DE} = 95°$ y $\widehat{BC} = 30°$

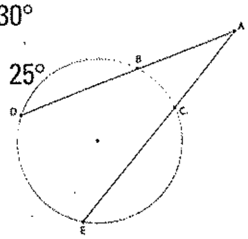
   b. $\angle A$, si $\widehat{DE} = 120°$ y $\widehat{BC} = 25°$

   c. $\angle A$, si $\widehat{DE} - \widehat{BC} = 55°$

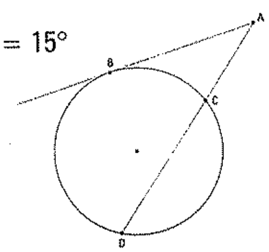
   d. $\angle A$, si $\widehat{DE} - \widehat{BC} = 32°$

   e. $\widehat{DE}$, si $\widehat{BC} = 98°$ y $\angle A = 24°$

   f. $\widehat{DE}$, si $\widehat{BC} = 65°$ y $\angle A = 15°$



2. El segmento $\overline{AB}$ es tangente a la circunferencia y se interseca con el segmento $\overline{AD}$ secante a la circunferencia en el punto A. Encuentra:



   a. $\angle A$ si $\widehat{BD} = 130°$ y $\widehat{BC} = 40°$

   b. $\angle A$ si $\widehat{BD} = 100°$ y $\widehat{BC} = 58°$

   c. $\angle A$ si $\widehat{CD} = 85°$ y $\widehat{BC} = 53°$

   d. $\angle A$ si $\widehat{CD} = 92°$ y $\widehat{BC} = 38°$

   e. $\widehat{BC}$ si $\widehat{BD} = 125°$ y $\angle A = 40°$

   f. $\widehat{BC}$ si $\widehat{BD} = 110°$ y $\angle A = 35°$

   g. $\widehat{BD}$ si $\widehat{BC} = 40°$ y $\angle A = 26°$

   h. $\widehat{BD}$ si $\widehat{BC} = 60°$ y $\angle A = 30°$

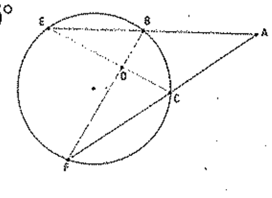
3. Si $\angle A = 30°$ y $\angle EDF = 85°$

   Encuentra:

   a. la medida del arco $\widehat{BC}$.

   b. la medida del arco $\widehat{EF}$.

   c. la medida del ángulo $\angle EDB$.

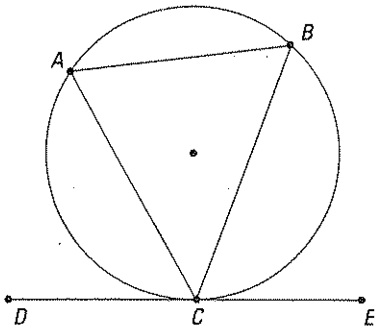


COMPETENCIA INTERPRETATIVA/ PROPOSITIVA: establece la medida de los ángulos formados por los segmentos especiales de una circunferencia

Pruebas de

Responde las preguntas 1 y 2 de acuerdo con la siguiente situación:

$\angle ABC = 75°$ y el arco $\widehat{AB} = 110°$



1. La medida del ángulo $\angle BCE$, es:

a. 90° b. 100° c. 150° d. 50°

2. La medida del arco $\widehat{AC}$, es:

a. 150° b. 75° c. 135° d. 100°

3. Las medidas de los ángulos del $\triangle ABC$, son:

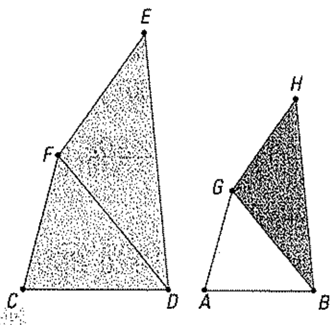
a. $\angle A = 45°$, $\angle B = 75°$, $\angle C = 60°$

b. $\angle A = 50°$, $\angle B = 75°$, $\angle C = 55°$

c. $\angle A = 65°$, $\angle B = 75°$, $\angle C = 40°$

d. $\angle A = 35°$, $\angle B = 75°$, $\angle C = 70°$

4. El polígono ABHG está en razón de $\frac{2}{3}$ de semejanza con el polígono CDEF. Si los lados del polígono CDEF son CF = 9 cm, FE = 12 cm, ED = 24 cm, DC = 9 cm, las medidas de los lados del polígono ABHG, en forma respectiva son:



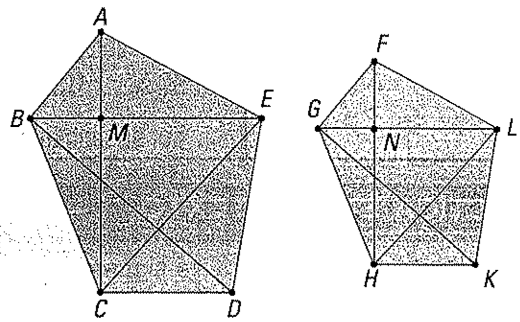
a. $AG = 6\,\text{cm}$, $GH = 8\,\text{cm}$, $HB = 16\,\text{cm}$ y $BA = 6\,\text{cm}$

b. $AG = 13,5\,\text{cm}$, $GH = 18\,\text{cm}$, $HB = 36\,\text{cm}$ y $BA = 13,5\,\text{cm}$

c. $AG = 7\,\text{cm}$, $GH = 9\,\text{cm}$, $HB = 17\,\text{cm}$ y $BA = 7\,\text{cm}$

d. $AG = 12\,\text{cm}$, $GH = 17\,\text{cm}$, $HB = 35\,\text{cm}$ y $BA = 12\,\text{cm}$

5. Si el polígono FLKHG está en razón de semejanza de $\frac{3}{4}$ con el polígono AEDCB y si los lados del polígono AEDCB son $AB = \frac{4}{3}\,\text{cm}$, $BC = 1\,\text{cm}$, $CD = \frac{15}{16}\,\text{cm}$, $DE = \frac{9}{4}\,\text{cm}$ y $AE = \frac{21}{16}\,\text{cm}$, entonces las medidas de los lados del polígono FLKHG son:



a. $FG = 1\,\text{cm}$, $GH = \frac{3}{4}\,\text{cm}$, $HK = \frac{45}{64}\,\text{cm}$ $KL = \frac{27}{16}\,\text{cm}$, $LF = \frac{63}{64}\,\text{cm}$

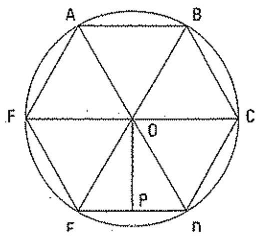
b. $FG = 1\,\text{cm}$, $GH = 6\,\text{cm}$, $HK = \frac{64}{45}\,\text{cm}$ $KL = \frac{9}{2}\,\text{cm}$, $LF = \frac{21}{4}\,\text{cm}$

c. $FG = 2\,\text{cm}$, $GH = 5\,\text{cm}$, $HK = \frac{13}{4}\,\text{cm}$ $KL = 4\,\text{cm}$, $LF = 5\,\text{cm}$

d. $FG = 4\,\text{cm}$, $GH = 7\,\text{cm}$, $HK = 4\,\text{cm}$, $KL = 5\,\text{cm}$; $LF = \frac{11}{2}\,\text{cm}$

Prueba PISA

6. El hexágono regular está inscrito en la circunferencia.



a. Halla la medida de los ángulos centrales en la circunferencia y de los arcos que subtiende cada uno.

b. Halla la medida de los arcos mayores y menores que se pueden formar en la figura.

c. Escribe una relación general entre las medidas de los ángulos centrales y arcos para cualquier polígono regular inscrito en una circunferencia.

d. ¿Cuántas cuerdas puedes trazar en el hexágono con la condición que unan vértices del polígono pero que no sean los lados?

e. ¿Qué clase de triángulos se forman en la figura al trazar las diagonales del hexágono?

f. ¿Cuál es el perímetro y el área del hexágono si la medida del radio es 8 cm y la medida del segmento $\overline{OP} = 6$ cm?

g. Halla la medida de los ángulos inscritos formados por los vértices del hexágono y sus lados correspondientes.

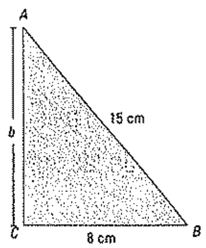
h. Encuentra la medida de los arcos que subtienden los ángulos inscritos formados por los vértices del hexágono y sus lados correspondientes.

Prueba TIMSS

7. La medida del ángulo inscrito que subtiende un arco de 125°, es:

a. 60° b. 62,5° c. 65° d. 63,5°

8. La medida del cateto b del triángulo rectángulo ΔABC:



a. 17 cm

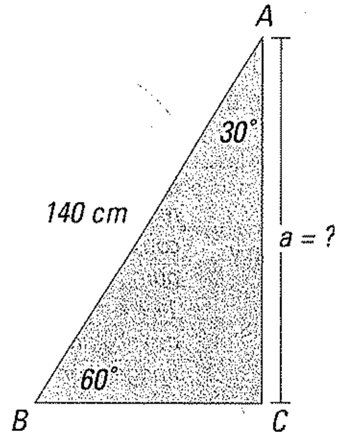
b. 13 cm

c. 12,7 cm

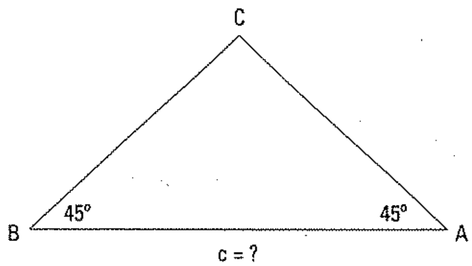
d. 11,5 cm

9. La medida del cateto a del triángulo especial ΔABC de 30° - 60° - 90°, es:

a. 70 cm b. $70\sqrt{3}$ cm c. 50 cm d. $140\sqrt{3}$ cm

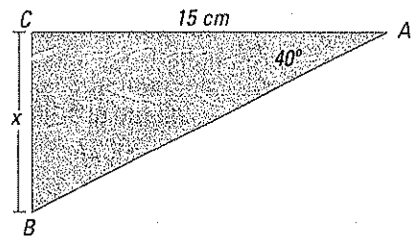


10. La medida de la hipotenusa del triángulo especial ΔABC de 45°- 45°- 90°, cuyos catetos miden 1 cm, es:



a. 10 cm b. $\sqrt{2}$ cm c. 5 cm d. $2\sqrt{2}$ cm

11. El valor de x en el triángulo rectángulo ΔABC es:



a. 9,6 cm

b. 5,5 cm

c. 12,6 cm

d. 11,5 cm

Estadística y probabilidad

Año 3000 a.e.c.

Los babilonios registran datos en pequeñas tablillas de arcilla sobre la producción agrícola y el comercio.

Siglo XXXI a.e.c.

Los egipcios ya registraban y analizaban la información de la población y renta del país.

2000 a.e.c.

China existían registros numéricos similares de censos.

758 - 762

Los reyes carolingios, Pipino el Breve y Carlomagno ordenaron hacer estudios minuciosos de las propiedades de la iglesia.

Principios del siglo XVI

Comienza Inglaterra el registro de nacimientos y defunciones.

1662

Apareció el primer estudio estadístico notable de población.

Tomado de http://www.cortland.edu/FLTEACH/STATS/stat-sp.html

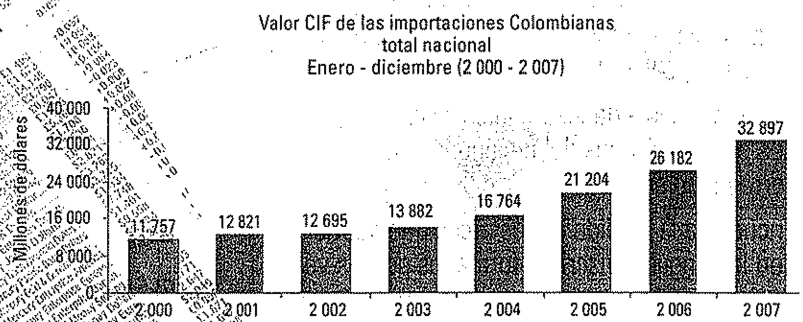
Las importaciones en Colombia

El Departamento Administrativo Nacional de Estadísticas DANE, determinó que durante el primer semestre de 2007 las importaciones aumentaron en 27,1 % debido a la caída del dólar, el Valle del Cauca hizo el 11,4 % de estas compras; se destaca que los colombianos están importando cada vez más todo tipo de carros, maquinarias e insumos.

Las mayores compras fueron de vehículos y sus partes, las cuales registraron un crecimiento del 55,0 %; calderas, máquinas y partes con el 42,2 %; fundición, hierro y acero con el 47,4 % y cereales con un aumento del 46,5 %. Las importaciones de calderas, máquinas y partes, representaron el 14,9 % del total de las compras externas realizadas durante enero - junio de 2007, seguido de vehículos y sus partes con el 13,1 %; aparatos y material eléctrico, de grabación o imagen con el 10,6 % y productos químicos orgánicos con el 6,0 %.

El 25,8 % de las importaciones realizadas durante el sexto mes de 2007, fueron originarias de Estados Unidos; el 10,2 % de México, el 10 % de China, el 5,7 % de Brasil, el 4,9 % de Venezuela, el 3,8 % de Japón, el 3,2 % de Alemania y el 2,8 % de Corea.

En el siguiente diagrama de barras se muestra la variación frente a las importaciones realizadas durante los últimos siete años.



Al leer atentamente la información anterior se pueden hacer diferentes análisis:

- ¿Cuál fue el artículo que más se importó en Colombia durante el primer semestre de 2007?
- ¿Cuál fue el país al que Colombia más le compró? ¿A qué crees que se debe esto?
- ¿Cuál fue el país al que Colombia menos le compró? ¿A qué crees que se debe esto?

Observa el gráfico de barras y analiza:

- el comportamiento de las importaciones del país durante los años 2000 a 2007.
- ¿En cuál año se dio el mayor aumento de las importaciones del país con respecto al año anterior?
- ¿En cuál año fue menor el aumento de las importaciones del país con respecto al año anterior?

Logro: usar los gráficos estadísticos como un método para organizar y representar datos numéricos.

Presentación de datos

COMPARTE LO QUE SABES

¿Qué datos estadísticos se publican a diario en los noticieros?

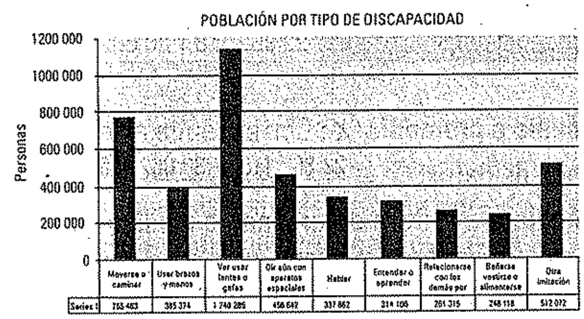
El análisis de datos numéricos se puede hacer a partir de diferentes representaciones.

Ejemplo: el DANE incluyó en el censo de 2005, preguntas para obtener los datos relacionados con las personas que tienen algún tipo de discapacidad las cuales se relacionan en la siguiente tabla de frecuencias.

Tabla de frecuencias.

Discapacidad	Cantidad de personas	Porcentaje %
Moverse o caminar	765 463	17
Usar brazos y manos	385 374	9
Ver a pesar de usar lentes	1 190 285	26
Oír aún con aparatos especiales	456 642	10
Hablar	337 862	8
Entender o aprender	314 106	7
Relacionarse con los demás	261 315	6
Bañarse, vestirse o alimentarse	248 118	6
Otra limitación	512 012	11
Total	4 471 177	100

Diagrama de barras o histograma.



Polígono de frecuencias.

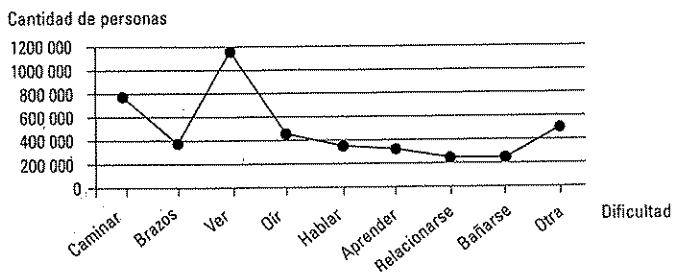
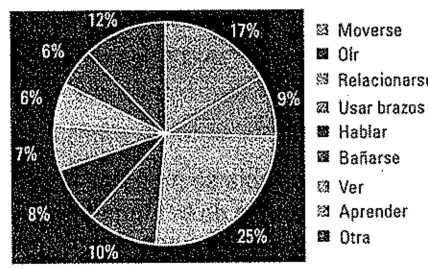


Diagrama circular.



PRÁCTICA EN CONTEXTO

Procedimientos

1. Analiza las diferentes gráficas estadísticas de la situación anterior: "Discapacidades de algunos colombianos" y responde las preguntas.
   a. ¿Cuál es la función corporal más afectada entre los colombianos que tienen algún tipo de discapacidad? ¿Cuál es la función corporal menos afectada?
   b. Nombra las funciones corporales afectadas que tienen la frecuencia más aproximada entre ellas.

2. Construye el diagrama de barras, polígono de frecuencias y diagrama circular y analiza la situación haciendo una comparación entre las edades de hombres y mujeres. Utiliza la información de la tabla que muestra la cantidad de niños y jóvenes de una ciudad con alguna discapacidad.

Grupos de edad (años)	Total		
	Total	Hombres	Mujeres
Total	17 616	6 484	11 132
Menores de tres	226	133	93
De 3 a 4	223	127	96
De 5 a 9	778	422	356
De 10 a 14	993	511	482
De 15 a 19	843	355	488

Tema 2
Medidas de tendencia central

Logro: determinar y analizar las medidas de tendencia central para el análisis de datos estadísticos.

Comparte lo que sabes

¿Qué significa que los estudiantes el primer bimestre hayan tenido 8 como promedio de calificaciones?

Censo nacional

La siguiente tabla muestra la población colombiana censada en las últimas cuatro jornadas de censo nacional de los años 1973, 1985, 1993 y 2005.

Imagen A

Año de jornada censal	1973	1985	1993	2005
Población censada	22 862 118	30 062 198	37 635 094	42 090 502

Media o promedio $\overline{X}$: Corresponde al valor de la suma de todos los datos dividido por la cantidad total de datos: $\overline{X} = \frac{22\,862\,118 + 30\,062\,198 + 37\,635\,094 + 42\,090\,502}{4} = \frac{132\,649\,912}{4} = 33\,162\,478$

Mediana $\widetilde{X}$: Para determinar la mediana se organizan los datos de menor a mayor; si el número de datos es impar la mediana es el dato que ocupa el lugar del centro; si el número de datos es par, la mediana es el promedio entre los dos datos del centro.

Ordenando los datos de menor a mayor: 22 862 118, 30 062 198, 37 635 094, 42 090 502. Como el número de datos es par, se toman los dos datos del centro y se promedian para determinar la mediana:

$$\widetilde{X} = \frac{30\,062\,198 + 37\,635\,094}{2} = \frac{67\,697\,292}{2} = 33\,848\,646$$

Moda $\widehat{X}$: Es el dato que tiene la mayor frecuencia o el dato que más se repite.

Práctica en contexto

Solución de problemas

1. En la siguiente tabla se muestra la cantidad de personas censadas de la ciudad de Bogotá D.C., durante los años 1973, 1985, 1993, 2005.

Año	Personas censadas
1973	2 861 913
1985	4 236 490
1993	5 484 244
2005	6 778 691

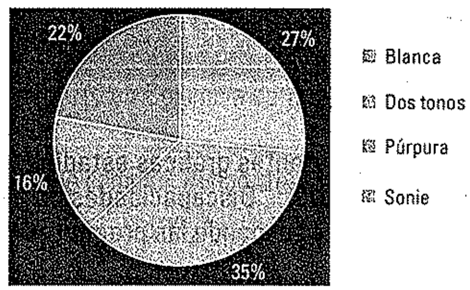
a. Determina la media y la mediana.

b. Construye un diagrama de barras.

c. Escribe cómo fue el comportamiento del número de habitantes en la ciudad durante los años 1973 a 2005.

d. ¿En qué año se dio el mayor aumento de habitantes en la ciudad de Bogotá con respecto al año anterior? ¿En qué año se dio el menor aumento de habitantes?

2. La hacienda San José de Palmira, Valle, vendió en el mes de enero 15 230 unidades de orquídeas de la especie Dendobrium blanca de dos tonos, Púrpura y Sonie. De acuerdo con el diagrama circular, contesta.



a. ¿Cuál es la media, la mediana y la moda?

b. Construye la tabla de frecuencias, el diagrama de barras y el polígono de frecuencias.

c. Escribe un análisis de las ventas de orquídeas según la especie.

COMPETENCIA INTERPRETATIVA/PROPOSITIVA/ARGUMENTATIVA: analiza situaciones estadísticas a partir de las medidas de tendencia central

Logro: determinar las medidas de dispersión para el análisis de situaciones estadísticas.

Medidas de dispersión

Comparte lo que sabes

¿Qué significa la palabra dispersión?

Las medidas de dispersión indican la mayor o menor concentración de los datos con respecto a las medidas de tendencia central, estas medidas son: rango, varianza y desviación estándar.

Ejemplo: el DANE realizó un estudio de las personas con alguna discapacidad en la ciudad de Bogotá, con el fin de aportar datos a nivel estadístico a los programas que brindan condiciones de calidad de vida.

Estructuras o funciones corporales	Total
El sistema nervioso	72 956
Los ojos	69 949
Los oidos	28 279
Los demás órganos de los sentidos (olfato, tacto, gusto)	5 694
La voz y el habla	24 074
El sistema cardiorrespiratorio y las defensas	77 255
La digestión, el metabolismo, las hormonas	43 874
El sistema genital y reproductivo	18 523
El movimiento del cuerpo, manos, brazos, piernas	94 060
La piel	8 955

Rango: Corresponde a la diferencia entre el valor del dato mayor y el dato menor de la distribución.

El rango de esta variable es $R = 94\,060 - 5\,694 = 88\,366$, lo cual indica que la variable es muy dispersa.

Varianza: Para calcular la varianza se determina primero la desviación de cada dato, la cual indica la distancia que hay entre la frecuencia y la media:

La desviación del i-ésimo dato es $d_i = x_i - \overline{X}$.

Si la variable se ha tomado de una población, la varianza se define como la media de las desviaciones al cuadrado.

La varianza poblacional se simboliza σ^2;

$$\sigma^2 = \frac{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + \dots + d_n^2}{n}$$

Si la variable se ha tomado de una muestra, la varianza se define como la suma de los cuadrados de las desviaciones sobre el número de datos menos uno.

La varianza muestral se simboliza S^2;

$$S^2 = \frac{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + \dots + d_n^2}{n-1}$$

Si el valor de la varianza es grande, el valor de la media no es un buen representante ya que existen datos muy alejados entre sí o que están muy lejanos del promedio.

Desviación estándar: corresponde a la raíz cuadrada de la varianza e indica cuánto tienden a alejarse los datos del promedio.

La desviación estándar poblacional, se simboliza σ:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + \dots + d_n^2}{n}}$$

La desviación estándar muestral, se simboliza S:

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + \dots + d_n^2}{n-1}}$$

Práctica en contexto

Solución de problemas

Para la siguiente situación, determina el rango, la varianza y la desviación estándar. Luego, argumenta de acuerdo con los resultados si la media representa los datos de la situación.

En la siguiente tabla se registra la cantidad de nuevos estudiantes matriculados durante el año 2007, frente a las dificultades de cobertura en educación a nivel nacional.

Secciones del país	Oficial	No oficial
Transición	587 571	149 606
1°	918 466	153 468
2°	785 124	142 439
3°	757 277	139 054
4°	739 210	136 869
5°	719 553	131 751
6°	701 079	122 663
7°	602 594	114 750
8°	529 084	107 879
9°	461 246	101 241
10°	405 026	99 805
11°	329 305	90 892

Tema 4

Concepto y aplicación de la probabilidad

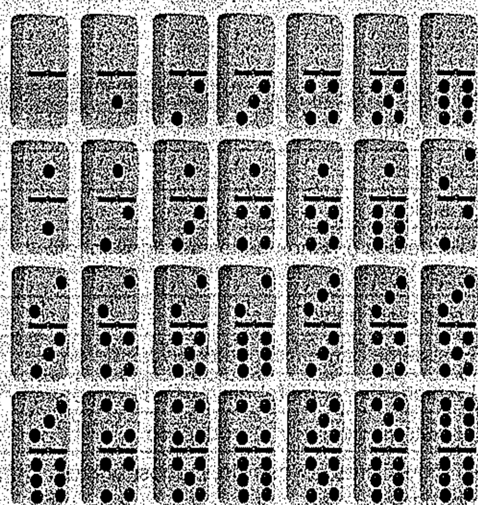
Logro: identificar un experimento aleatorio y determinar la probabilidad de sus sucesos.

Comparte lo que sabes

¿A qué se refieren los meteorólogos cuando dicen que la probabilidad de lluvia del día de mañana es del 50 %?

Un experimento es cualquier acción que genera un resultado.

En los siguientes ejemplos se muestran los sucesos que ocurren al extraer una ficha de dominó y las diferentes posibilidades que se pueden obtener de acuerdo con las características del experimento.

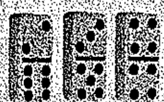


1. Extraer una ficha que tenga un espacio en blanco.

Casos posibles:

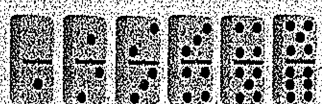
2. Extraer una ficha de tal forma que el total de la suma de sus puntos sea ocho.

Casos posibles:



3. Extraer una ficha de tal forma que el total de la resta de sus números sea uno.

Casos posibles:



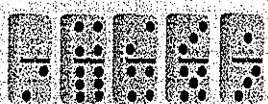
El ejemplo anterior es un experimento aleatorio, ya que permite conocer todos los posibles resultados antes de su realización, pero no el resultado exacto de lo que se va a obtener. Se representa con la letra E.

El conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio se llama espacio muestral y se representa con la letra S.

Para los siguientes experimentos, ¿cuál ficha que tiene mayor posibilidad de salir?

A. Extraer una ficha que tenga en uno de sus espacios el uno.

B. Extraer una ficha donde el total de su resta sea dos.



La posibilidad de que uno de los resultados sea elegido la determina la probabilidad. Esta es una medida que brinda el grado de certidumbre de que ocurra un evento para tomar una decisión frente a un experimento aleatorio.

La **probabilidad** de ocurrencia de un evento se determina dividiendo el número de elementos del evento entre el número de elementos del espacio muestral S. Si A es un evento de un experimento aleatorio, la probabilidad de que ocurra está dada por: $P(A) = \frac{\#(A)}{\#(S)}$

La probabilidad para el experimento A está dada por: $P(A) = \frac{7}{28}$ y la del experimento B: $P(B) = \frac{5}{28}$.

Por lo tanto, el experimento A tiene mayor probabilidad de ocurrir que el experimento B.

PRÁCTICA EN CONTEXTO

Solución de problemas

1. Determina cuál de los siguientes experimentos es aleatorio. Argumenta tu respuesta.

a. El equipo de olimpiadas matemáticas de un colegio recibe una copa de distinción por ganar el primer puesto como equipo, y se decidió rifar la copa entre los seis estudiantes participantes.

b. Un grupo de amigos decide jugar al juego del "palillo más corto", el cual consiste en que los jugadores, por turnos, eligen un palillo y pierde aquel que elija el palillo más corto.

c. El organizador de la copa de fútbol intercolegial recibe la inscripción de diez equipos, forma dos grupos para comenzar a programar los partidos de tal forma que en la primera ronda los equipos de cada grupo jueguen todos entre sí.

d. Comprar la boleta de una rifa que juega con las tres últimas cifras de una lotería.

e. Lanzar una moneda al aire y observar cuál lado queda hacia arriba.

f. Al jugar bingo se tiene una urna llena de balotas y se saca una de ellas. Ten en cuenta que en cada balota está impreso un número de dos cifras.

2. Determina el espacio muestral de los siguientes experimentos aleatorios.

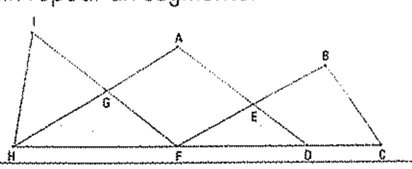
a. Escribir los números de tres cifras que se puedan formar con los dígitos 1, 2 y 3.

b. Tomar una ficha de un juego de dominó, donde el total de la suma de sus números sea seis.

c. Lanzar un dado al aire y observar la cara que queda hacia arriba.

d. Sacar una carta de entre las diez del palo espadas de una baraja española.

e. Trazar los posibles caminos para dibujar la figura sin levantar el lápiz, pasando por todos los puntos y sin repetir un segmento.



3. Analiza las siguientes proposiciones indicando si son falsas (F) o verdaderas (V), a partir del experimento de lanzar un dado.

a. La probabilidad de sacar 6 es mayor que la probabilidad de sacar 1. ( )

b. La probabilidad de todos los números es la misma y corresponde a $\frac{1}{6}$. ( )

c. La probabilidad de sacar 1, 2 ó 3 es menor que la probabilidad de sacar 4, 5 ó 6. ( )

4. Determina el espacio muestral del experimento de lanzar dos dados y observar la pareja de números que se obtiene.

a. ¿Cuál es la probabilidad de obtener 10 puntos con un lanzamiento de los dos dados?

b. ¿Cuál es la probabilidad de obtener 8 puntos con un lanzamiento de los dos dados?

c. ¿Es mayor la probabilidad de sacar 12 puntos que 6 puntos? Justifica tu respuesta.

5. La baraja de cartas está compuesta por 52 cartas divididas en cuatro palos: picas y tréboles de color negro y, corazones y diamantes de color rojo. Determina las siguientes probabilidades.

a. ¿Qué probabilidad hay de sacar una carta de color rojo?

b. ¿Qué probabilidad hay de sacar el número 7?

c. ¿Qué probabilidad hay de sacar un número par, si se sacan todas las cartas impares? ¿La probabilidad de sacar un número par es la misma? Justifica tu respuesta.

d. Si se tiene la baraja completa, ¿qué probabilidad hay de sacar un 5 de corazones? Y, si se tiene únicamente el palo de corazones, ¿la probabilidad de sacar 5 de corazones, es la misma? Justifica tu respuesta.

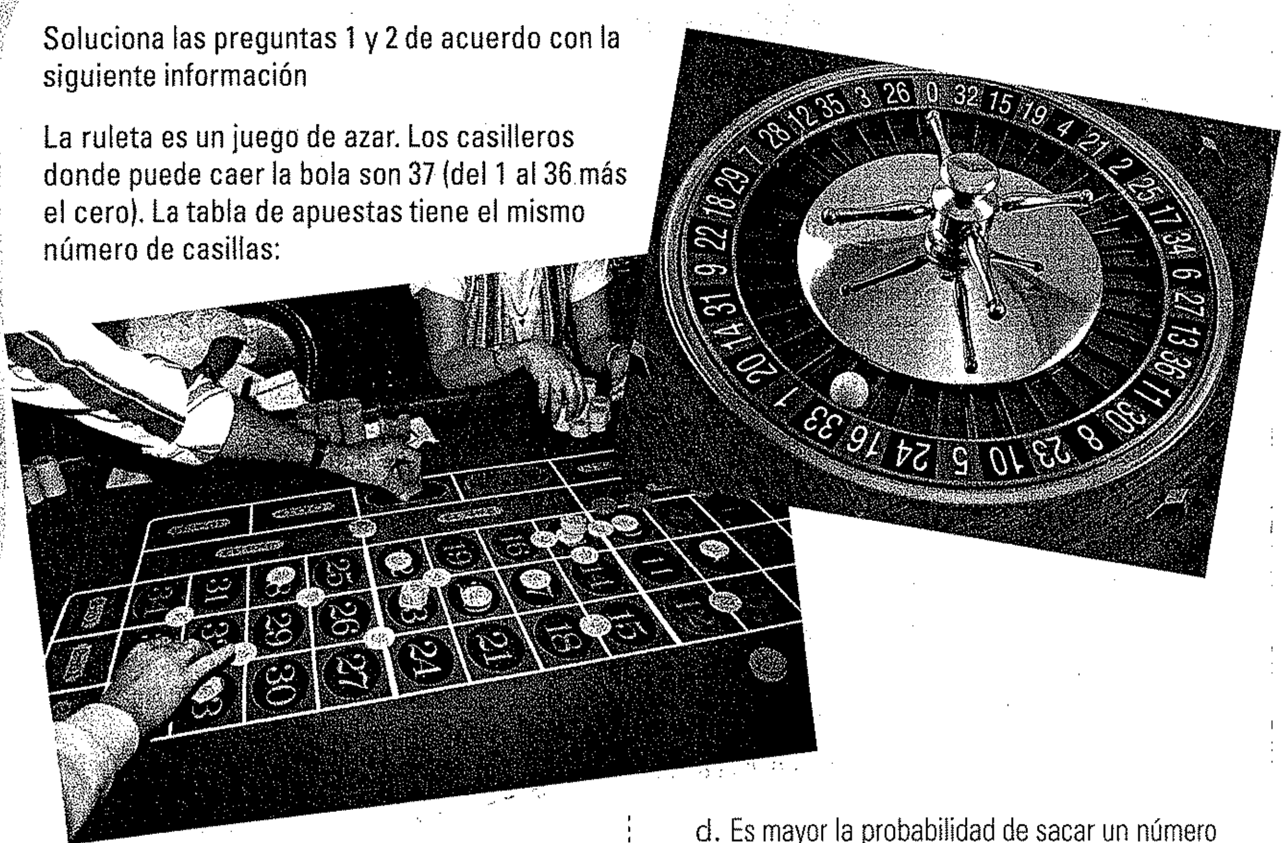
6. En una urna oscura hay dos balotas rojas, una balota azul y una balota verde.

- ¿Cuál es el color que tiene mayor probabilidad de salir? Justifica tu respuesta.

Pruebas de

Soluciona las preguntas 1 y 2 de acuerdo con la siguiente información

La ruleta es un juego de azar. Los casilleros donde puede caer la bola son 37 (del 1 al 36 más el cero). La tabla de apuestas tiene el mismo número de casillas:



Cuando la ruleta gira se puede apostar a que la bolita cae en un número específico, en un color específico, en el intervalo del 1 al 18, en el intervalo del 19 al 36, en un número par o en un número impar.

1. De las siguientes afirmaciones, es verdadera:

a. La probabilidad de sacar un número rojo es mayor que la probabilidad de sacar un número negro.

b. La probabilidad de sacar un número par es menor que la probabilidad de sacar un número impar.

c. La probabilidad de sacar el número 17 negro es mayor que la probabilidad de sacar un número impar.

d. Es mayor la probabilidad de sacar un número par que la probabilidad de sacar el número 7.

2. Si fueras a apostar, ¿cuál opción de las siguientes elegirías?

a. Número 7 rojo.

b. Color rojo.

c. Número 8 negro.

d. Número 23 rojo.

Prueba PISA

Contesta las preguntas de acuerdo con la siguiente situación.

El grupo de proyección estadística del DANE presentó la cantidad de población a nivel nacional por departamentos de los años 2005 y 2010.

mejoramiento

Departamento	Año	
	2005	2010
00 Nacional	42 888 592	45 508 205
05 Antioquia	5 682 276	6 066 377
08 Atlántico	2 166 156	2 314 447
11 Bogotá	6 840 116	7 363 782
13 Bolívar	1 878 993	1 979 781
15 Boyacá	1 255 311	1 267 597
17 Caldas	968 740	978 362
18 Caquetá	420 337	447 723
19 Cauca	1 268 937	1 318 983
20 Cesar	903 279	966 420
23 Córdoba	1 467 929	1 582 187
25 Cundinamarca	2 280 037	2 477 038
27 Chocó	454 030	476 173
41 Huila	1 011 418	1 083 200
44 La Guajira	681 575	818 695
47 Magdalena	1 149 917	1 201 388
50 Meta	783 168	870 876
52 Nariño	1 541 956	1 639 569
54 N. de Santander	1 243 975	1 297 842
63 Quindío	534 552	549 624
66 Risaralda	897 509	925 105
68 Santander	1 957 789	2 010 404
70 Sucre	772 010	810 650
73 Tolima	1 365 342	1 387 641
76 Valle del Cauca	4 161 425	4 382 939
81 Arauca	232 118	247 541
85 Casanare	295 353	325 596
86 Putumayo	310 132	326 093
88 San Andrés	70 554	73 320
90 Amazonia	293 658	318 856

Fuente: DANE. Grupo de Proyecciones 2007

3. Determina la media de la cantidad total de habitantes para los años 2005 y 2010.

4. Determina las medidas de tendencia central para los años 2005 y 2010. Argumenta si la media es una buena medida para la cantidad de población de cada año.

5. Construye un polígono de frecuencias que compare la cantidad poblacional por departamentos de los años 2005 y 2010. Describe los comportamientos para cada año, haciendo una comparación entre ellos.

6. Analiza:

a. ¿cuál es el departamento, incluyendo su capital, que tiene mayor población?

b. ¿cuál es el departamento, incluyendo su capital, que tiene menor población?

Solucionario

Unidad 1

Tema 1. Página 5

1. 55 cuadrados.

3.

a. 28, 36, 45. c.34, 55, 89.

b. 49, 64, 81.

5.

No. de figura	n	20
No. de círculos	$1+5(n-1)$	96

6. x = 23.

7. x = 15.

9. La madre y el padre juntos pesaron 135 kg.

11. Los patines son de Felipe, el Ipod es de Andrés y la bicicleta es de Camila.

Unidad 2

Tema 2. Página 14

1.

a. 239 d. $\frac{20}{3}$ g. -49

b. $\sqrt{3}$ e. $0,56$ h. 6

c. 2 f. $0,064$

2.

a. 4 c. 5 e. $\frac{16}{3}$

b. $7,55$ d. 1 f. 0

4. 10 grados.

Tema 3. Página 15

1.

a. $|x-8|=5$

b. $|x|=6$

c. $|x-(-5)|\leq 9$

d. $|(x+2)-23|<4$

e. $|x|>11$

2.

a. a = −2 ó a = 8. d. $x=\frac{2}{9}$

b. $x=\frac{3}{2}$ ó x = 3 e. x = 3 ó x = 27.

c. x = 0 ó x = 14.

3.

a. $x=(-1,\ 1)$

b. $x=(-2,8)$

c. $x=\left[\frac{7}{5},\frac{9}{5}\right]$

d. x = Todos los reales.

e. $x=\left[-\frac{8}{3},\frac{16}{3}\right]$

4. $8\leq |x|\leq 15$

Tema 4. Página 16

2.

a. $\frac{1}{2}$ c. $\frac{29}{3}$ e. 10 000

3.

a. $-\frac{2x^4}{y^2}$ c. $\left(m^7n^6p^6\right)^5$

4.

a. $\sqrt[15]{a^{11}}$ c. $\sqrt[3]{y^{14}}$ e. $\frac{1}{\sqrt{z}}$

5.

a. $12x^3y$ d. $\frac{2y^2}{3x}$

b. $42w^2z^3\sqrt{z}$ e. $\frac{2p^2}{3\sqrt{q}}$

7.

a. S = \$ 4 827 257; I = \$ 2 427 257.

b. S = \$ 2 143 589; I = \$ 1 143 589.

c. S = \$ 3 282 331; I = \$ 782 331.

d. S = \$ 32 383 875; I = \$ 17 383 875.

8.

a. \$ 35 355 b. \$ 50 000

Tema 5. Página 18

2.

a. $-2\sqrt{a}$ c. $13\sqrt{2}$

b. $-3\sqrt{6}$ d. $-\frac{1}{3}\sqrt{x}$

3.

a. $5+2\sqrt{10}$ c. n − 5

b. $n-6\sqrt{n}$ d. 9 − q

Tema 9. Página 19

1.

a. $\frac{\sqrt{14}}{7}$ d. $-\frac{1}{5}$

e. $\frac{3\sqrt{6-h}}{6-h}$

2.

b. $\frac{p-q}{\left(\sqrt{p}+\sqrt{q}\right)^2}$

d. $-\frac{7}{h\sqrt{(x-h)}+\sqrt{h\left(x^2-h^2\right)}}$

3.

a. $\frac{12\sqrt{3}-5\sqrt{2}-19}{3}$

b. $\frac{(x-1)\left(1+\sqrt{x}\right)}{1-x}$

Unidad 3

Tema 1. Página 23

1. La única que no es función es la e.

2. La a y la d no son funciones.

3.

a. Los números reales.

b. Los números reales con excepción de −2 y 1.

c. $(-\infty,1]\cup[6,\infty)$

d. Los números reales con excepción de −2.

e. Los números reales mayores o iguales que 3.

Tema 2. Página 24

1. Son funciones lineales a, c y e.

5. No es una función lineal.

6. Son funciones lineales a, d, e.

7.

c. \$ 625 300

d. Aproximadamente 20 000 lápices.

8.

c. 24 celulares.

9.

b. Sí se ajusta.

c. 390,96 ppm.

d. A partir del año 2021.

Tema 3. Página 26

1.

a. 1 b. 0

2.

a. $\frac{7}{4}$ b. $\frac{1}{2}$

c. Pendiente indeterminada o indefinida porque es una recta vertical.

d. $-\frac{3}{2}$ e. 0

Tema 4. Página 27

1.

a. $y=x+2$ g. $y=3x-1$

b. $y=-\frac{3}{2}x+\frac{9}{2}$ h. $y=\frac{11}{10}x-\frac{29}{30}$

c. $y=-x+17$ i. $y=-3x+1$

d. $y=\frac{3}{11}x+\frac{12}{55}$ j. $y=\frac{4}{3}x$

e. $y=\frac{23}{11}x-\frac{54}{11}$ k. $y=-25$

f. $y=6$ l. $x=-12$

2.

a. $y=3x+8$ c. $y=\frac{3}{2}x+13$

b. $y=x-6$ d. $y=9$

5.

a. $y = \frac{14}{3}x - 240$; con x temperatura y y cantidad de chirridos.

c. 87

6.

a. $y = -420\,000x + 2\,800\,000$; con x los años y y el costo.

b. $ 1 960 000

c. 3,3 años.

Tema 5. Página 29

3.

a. C b. K c. D d. K

Tema 6. Página 30

2.

a. $3x - 4y - 12 = 0$ e. $5x - 2y - 18 = 0$

b. $x + 5y + 1 = 0$ f. $x + 3y - 13 = 0$

3.

a. $2x - y + 5 = 0$; $y = 2x + 5$

b. $x + y - 3 = 0$; $y = -x + 3$

4. $4x + 5y + 1 = 0$

5. $6x - 4y = 0$

6.

b. 22,6 semanas.

7.

a. Aproximadamente 38 toneladas.

b. Aproximadamente 37 pies.

8.

b. 6 420 dólares.

Tema 7. Página 32

2.

a. $y = 5(x-3)^2 - 4$, vértice $(3, -4)$.

c. $y = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$, vértice $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

e. $y = -3(x+1)^2 + 9$, vértice $(-1, 9)$

3.

a. $(3, -2)$ c. $\left(0, \frac{5}{6}\right)$ e. $(-8, 0)$

7.

a. 225 metros.

8.

a. Es correcto. b. 8,3 metros.

Tema 8. Página 34

2.

a. $V = 4h^3 - 60h^2 + 216h$

b. $0 < x < 6$

Tema 9. Página 35

2.

a. $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ c. $y = \frac{2 - 2x}{x}$

b. $y = \frac{-4x - 1}{x - 1}$ d. $y = \frac{1}{3}y^2 + \frac{5}{3}$

3.

b. $P(t) = \frac{t}{2500 - t}$

c. 4 meses.

Tema 11. Página 37

1.

a. $2^7 = 128$

b. $e^4 = x - 5$

c. $3^5 = x + 8$

3.

a. 216 b. 6 c. 16810

d. No hay solución en los reales.

5. 71,6 años

7.

a. 88,33 miligramos.

b. 5590 años aproximadamente.

Unidad 4

Tema 1. Página 41

2.

a. $x + y = 105$

c. $x + y = 40$

e. $x - 3y = -3$

3.

a. Única solución.

b. No existe solución.

c. Única solución.

d. Infinitas soluciones.

4. Correcto

6.

a. $x - y = 2$ $2x + y = -2$

b. $x + y = 4$ $x - y = -2$

7.

a. $a = 2$; $b = -4$; $c = 12$.

b. $a = \frac{1}{2}$; $b = 1$; $c = 1$.

Tema 2. Página 43

1. $(4, 6)$ no es solución.

2.

a. $\left(1, \frac{1}{3}\right)$ c. $(3, 2)$

b. $(3, -4)$ d. $(2, 3)$

Tema 3. Página 44

1.

a. $(-1, 2)$ e. $\left(-1, \frac{5}{3}\right)$

c. $(4, -5)$ g. $(3, 7)$

2.

b. $(2, 8)$

Tema 4. Página 45

1.

a. $\left(\frac{13}{8}, \frac{3}{4}\right)$

c. Infinitas soluciones.

e. No tiene solución.

g. $(-1, -2)$

2. No es correcto.

Tema 5. Página 46

2. Hay 5 candelabros de 2 brazos y 7 de 3 brazos.

4. Hay 25 gallinas y 25 conejos.

6. Contestó 10 preguntas bien.

8. El primer trayecto mide 12 metros y el segundo 24 metros.

10. Se accidentaron 6 800 autos y 4 800 motos.

12. Se bajaron 145 pasajeros en Medellín.

14. Invirtió $ 160 000 en la primera y $ 240 000 en la segunda.

Tema 6. Página 49

4.

b. $2x - y - z = 0$

d. $\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z = 54$

Tema 9. Página 52

1.

a. 1 y 0. c. 9 y 3.

b. 3 y 2. d. 2 y 3.

Tema 11. Página 54

1.

a. $$\begin{aligned} 2x + 5y + 4z &= 4 \\ x + 4y + 3z &= 1 \\ x - 3y - 2z &= 5 \end{aligned}$$

b. $x = 3$, $y = -2$, $z = 2$.

Tema 12. Página 55

1.

a. -2 c. -16 d. 31

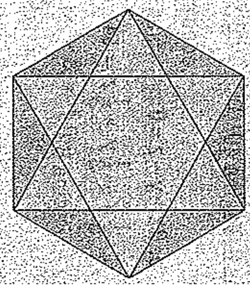
g. -33 h. 30

Para más respuestas consulta *www.voluntad.com.co* sección solucionarios.

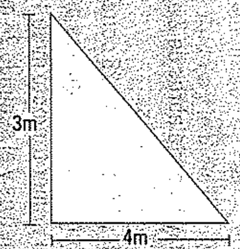
1. ¿Falso o Verdadero?

El número 325, expresado en el sistema binario es 1011.

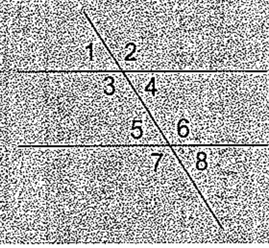
2. ¿Cuántos triángulos hay en la figura?



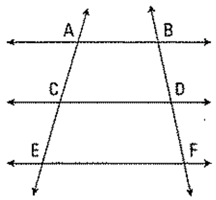
3. ¿Cuál es el valor de la hipotenusa?



4. Si el ángulo 1 mide 30°, ¿Cuál es el valor de los demás ángulos?

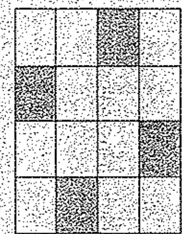


5. $\frac{\overline{AB}}{\overline{CE}} = \frac{?}{\overline{DF}}$



6. Dos móviles parten de un mismo punto pero en direcciones contrarias, el primero a 3 km/h, el segundo a 7 km/h. Después de 3,5 h, ¿cuál es la distancia que los separa?

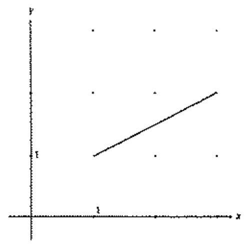
7. ¿Qué porcentaje de todos los cuadros representan los cuadros oscuros?



8. Remplaza cada letra por un dígito para que se cumpla la suma.

$$\begin{array}{r} A\;C\;A \\ +\;B\;A\;E \\ \hline E\;D\;C \end{array}$$

9. ¿Cuál es la distancia entre los puntos del segmento?

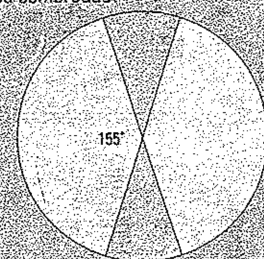


10. ¿A cuántos años equivalen un millón de segundos?

11. ¿Cuál es el quinto término de la sucesión?

$3, \frac{13}{7}, \frac{37}{17}$

12. ¿Qué porcentaje del total corresponde al área sombreada?



13. El movimiento de dos cuerpos se describe por

$$x_1 = 5t + 2,5t^2 \text{ y}$$

$$x_2 = -6t - 3t^2$$

Encuentra el momento del choque y la distancia total recorrida por cada móvil antes del choque.

14. ¿Cuál es el valor de x si?

$$\frac{1}{x} = \frac{2}{5} + \frac{5}{2}\ ?$$

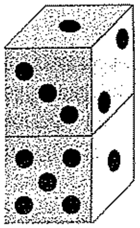
15. Si m y n son enteros positivos, ¿cuál es el menor valor que puede tomar m para que?

$$2\,940\ m = n^2$$

16. Escribe sólo los números de 1 a 4 en las casillas para obtener los resultados que se muestran.

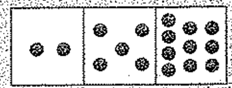
10	9	11	10

17. Al colocar los dados como se muestra y sumar los puntos de las bases y de las caras que se tocan, ¿qué resultado se obtiene?



18. Las ruedas de la bicicleta de Andrés tienen 69 cm de diámetro. Si Andrés recorre 8 km, ¿cuál es el entero más cercano a la cantidad de revoluciones que realiza una de las ruedas de la bicicleta?

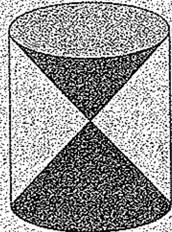
19. ¿Cuántos puntos tendrá la séptima figura?



20. Una garrafa con capacidad de 5 litros está completamente llena de jugo. Se sacan 2 litros de jugo de la garrafa, se rellena con agua y se mezcla. Luego, se sacan 2 litros de esta mezcla y se vuelve a rellenar con agua. ¿Qué porcentaje de la mezcla final es jugo?

21. 15 hombres necesitan 15 días para construir una casa. ¿Cuántos días necesitan 25 trabajadores para hacer la misma construcción?

22. ¿Cuál es el volumen del sólido sombreado si el radio es 5 m y la altura del cilindro 15 m?



23. Resuelve la ecuación:

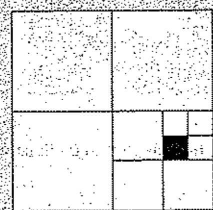
$$x^2 + (-2x - 1) = (x + 2)(x + 3)$$

24. Cuando el reloj marca las 8:00 en punto, ¿cuál es el ángulo menor entre las manecillas?

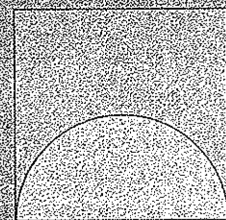
25. Si el 20% de mi dinero es $30 000, ¿qué cantidad de dinero tengo?

26. ¿Cuál es el número de naranjos que se pueden sembrar en un terreno de **8 hm²** si cada árbol ocupa **16 m²**?

27. Con base en la figura, ¿qué parte representa la región sombreada con relación al cuadrado mayor?

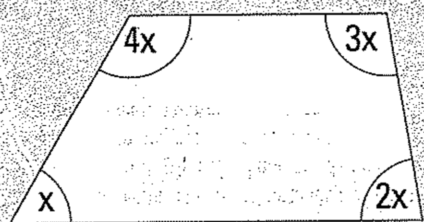


28. ¿Cuál es el área de la región rosada?



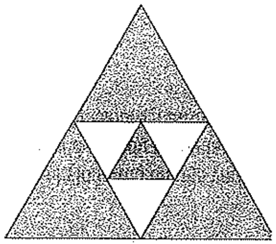
29. ¿Cuál es la longitud de una varilla de acero que se puede dividir en pedazos de 8, 9 y 15 cm sin que sobre material?

30. ¿Cuál es el valor del ángulo x?



MES 2

1. ¿Qué fracción del área del triángulo mayor representa el triángulo verde?



2. Una máquina produce 120 botellas plásticas en un minuto. ¿Cuál es el número de botellas en una semana sabiendo que se le hace mantenimiento diario por 2 horas?

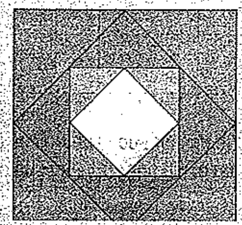
3. ¿Cuál es la menor suma que se puede conseguir al sumar tres de los números del conjunto $\{7, 25, -2, 14, -5\}$?

4. Una persona tiene entre vacas y caballos 70 animales. Si triplica las vacas y duplica los caballos, necesitaría un establo con capacidad para 200 animales. ¿Cuántas vacas y caballos hay?

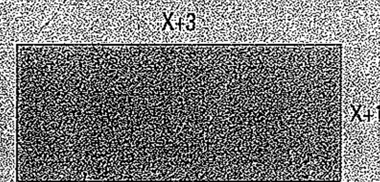
5. ¿Cuántos números enteros hay entre $\sqrt{6}$ y $\sqrt{60}$?

6. Un barco navega por el río Magdalena a favor de la corriente 20 km en 2 h y se devuelve 10 km en contra durante 3 h. Halla la velocidad del barco cuando no existe corriente alguna y la velocidad del río.

7. Encuentra el valor del lado del cuadrado amarillo.



8. Encuentra el valor de X para cuando el perímetro tiene la misma magnitud que el área.



9. Si B es un dígito y $B2 \times 7B = 6\ 396$, ¿cuál es el valor de B?

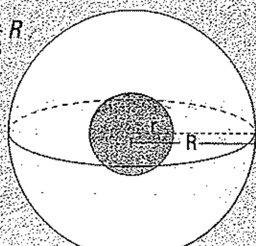
10. Si $A * B$ significa $A \times B + A + B$, ¿cuánto es $2 * (3 * 4)$?

11. Determina si la conclusión es correcta: Alberto asiste a la convención ó Carlos expone su teoría. Si Carlos expone su teoría, Pedro podrá experimentar. Pedro no podrá experimentar, por tanto, Alberto no asiste a la convención.

12. El número i es un entero impar, mientras que p es un entero par. El número $i^2 + pi$, ¿en qué casos es par y en qué casos es impar?

13. Se toman los múltiplos de 2 entre 1 y 101 y se halla el promedio, lo mismo se hace, por separado, con los múltiplos de 3, 4, 5 y 6. ¿Cuál de estos cinco números es el mayor?

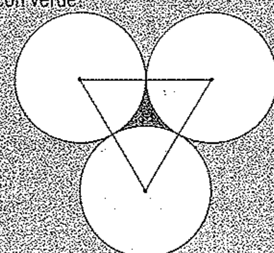
14. Halla el área que se encuentra entre las dos esferas en términos del radio menor sabiendo que $r = \frac{2}{3}R$.



15. Remplaza cada letra por un dígito para que se cumpla la suma:

$$\begin{array}{r} A\ B\ D\ E \\ +\ C\ B\ E\ A \\ \hline D\ D\ G\ F \end{array}$$

16. ¿Cómo se calcula el área de la región sombreada con verde?



17. En un conjunto de cinco números el promedio de tres de ellos es 15 y el promedio de los otros dos es 10, ¿cuánto es el promedio de los cinco números?

18. Nombra 5 valores de x para los que:

$$\frac{3x+5}{x-4} < 0$$

19. ¿Cuántos enteros de cuatro cifras, todas distintas y diferentes de cero, tienen por suma digital a doce?

20. Simplifica, expresando el resultado en forma radical:

$$\frac{\left(\frac{x+2}{x+3}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{x+2}{x+3}\right)}{\left(\frac{x+2}{x+3}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{(x+3)^{\frac{3}{2}}}{x+2}}$$

21. Se colocan 20 fichas numeradas del 1 al 20 en una urna. Juan escoge una al azar y luego Paula hace lo mismo. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los números en las fichas escogidas sea impar?

22. Remplaza cada letra por un dígito para que se cumpla el producto

$$\begin{array}{cccccc} & C & B & E & A & F \\ & & & \times & C & A \\ \hline B & F & 6 & A & A & F \\ D & C & 7 & F & F & \\ \hline A & E & E & A & A & F \end{array}$$

23. La razón entre la edad de María y Ana es $\frac{3}{2}$; dentro de doce años la razón será $\frac{5}{4}$.

¿Cuántos años tiene María?

24. Si se triplica el largo de un rectángulo y su ancho se reduce a la mitad, ¿por cuánto se ha multiplicado su área?

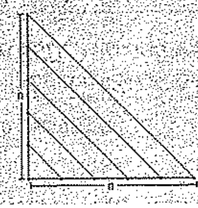
25. Observa la sucesión:

−4, −24, −144, −864,…

Halla el séptimo término de la sucesión

26. Dos dígitos son tales que su suma no es mayor que nueve, ¿cuántos valores posibles puede tomar el producto de estos números?

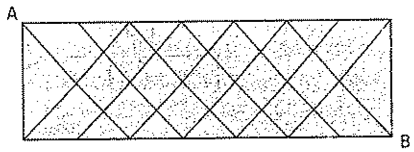
27. Encuentra la sucesión correspondiente a las áreas de los triángulos, sabiendo que los lados del triángulo pequeño miden $\frac{n}{5}$.



28. Calcula la suma de los primeros diez términos de la sucesión

2, 0, −2, −4,…

29. ¿Cuántos caminos son posibles para llegar de A a B?



30. Se disponen los estudiantes de una clase de baile en una circunferencia igualmente espaciados y se numeran consecutivamente comenzando por el 1. Si el estudiante 12 queda diametralmente opuesto al estudiante 45, ¿cuántos estudiantes hay en la clase?

1. ¿Cuál es el valor de k en la siguiente igualdad?

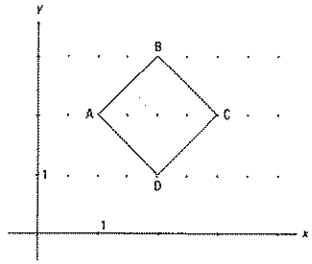
$$x^2 = \frac{x^{k+1}\left(x^{3k} \div x^{k+2}\right)}{\left(x^k\right)^{k-1}}$$

2. Cuatro hermanos A, B, C y D tienen edades a, b, c y d. Si $a+b+c=15$, $b+c+d=29$, $a+b+d=22$ y $a+c+d=27$, ¿cuál es la edad del mayor de los hermanos?

3. Cuántos números enteros n entre 1 y 1 000 hacen que n^2-1 sea divisible entre 5?

4. Si $y=f(x)$ y $f(x)=3x+2$ entonces, ¿a qué es igual $f(y)$?

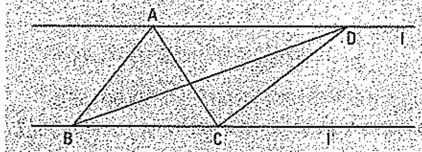
5. ¿Cual es el perímetro del cuadrado ABCD?



6. Si x y y son números enteros positivos y $x+y+xy=54$, ¿cuál es el valor de $x+y$?

7. ¿Falso o verdadero?

Si $L \parallel L'$, x = área del ΔABC y k = área del ΔBCD, entonces $k > x$



8. Si

$i = i$

$i^2 = i$

$i^3 = -i$

$i^4 = i$

Entonces, $i^{-3} = ?$

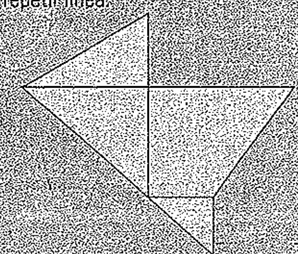
9. Un desagüe permite que un tanque se desocupe en 6 horas, mientras que otro lo hace en 4 horas. ¿Cuánto tardará el tanque en desocuparse con ambos desagües abiertos?

10. En un almacén suben los precios de sus artículos en un 5% el día sábado, pero el domingo ofrecen una promoción con el 7% de descuento. ¿Cuál es el verdadero descuento tomando como base el precio del viernes?

11. ¿Cuál es la base numérica mínima en que deben estar escritos los números para que la suma sea correcta?

$$\begin{array}{r} 5\ 3\ 2\ 0\ 1 \\ +\ 3\ 4\ 5\ 3\ 2 \\ \hline 1\ 2\ 1\ 0\ 3\ 3 \end{array}$$

12. Traza la siguiente figura sin levantar la mano ni repetir línea.



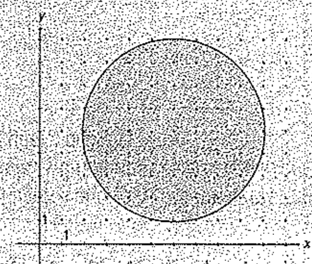
13. Adivinanza

Soy un número menor a 100, múltiplo de 9, con 5 divisores y soy potencia de 3.

¿Quién soy?

14. Estoy seguro de que siempre miento, ¿soy un mentiroso?

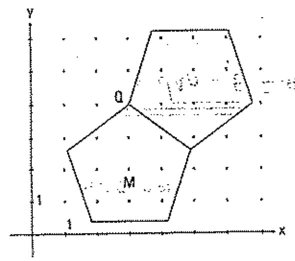
15. ¿Cuál es el área del cuadrado que se puede inscribir en la circunferencia?



16. Soy un número de dos cifras menor que 60, la suma de mis dígitos es 4, la misma cantidad de divisores que tengo.

¿Quién soy?

17. ¿Cuál es el valor aproximado del perímetro de la figura?



18. ¿Cuál es el valor de p en la siguiente igualdad?

$$\left(\frac{3}{a^{p-7}}\right)^{p-8} = \left(\frac{1}{27}\right)^{p+1}$$

19. ¿Es correcta esta tabla?

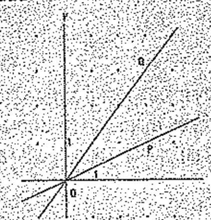
Lado	Área cuadrado
1	1
2	4
3	6
4	8

20. ¿Cuántos números palíndromos (que se leen igual de derecha a izquierda que de izquierda a derecha) de cuatro cifras son múltiplos de 5?

21. $ABCD$ es un número par y $DB = AC$, ¿cuántas opciones existen para $ABCD$?

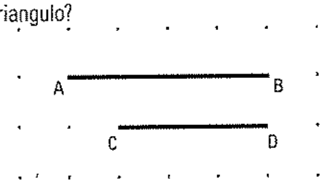
22. Dado un segmento de medida determinada, ¿cuál es el proceso que seguirías para construir, con regla y compás, un triángulo isósceles cuyo perímetro coincida con el del segmento dado?

23. Si y representa distancia y x tiempo, ¿cuál recta representa un movimiento con mayor velocidad?



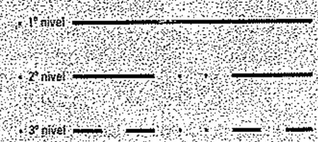
24. Una permutación de un número se consigue al reorganizar los dígitos. Si dos de estos dígitos son iguales, ¿cuántas permutaciones distintas existen?

25. Si el segmento $\overline{AB}$ representa la base de un triangulo isósceles y el segmento $\overline{CD}$ su altura, ¿cuál es el valor del perímetro del triangulo?



26. Laura tiene cinco blusas de diferente color, cuatro pantalones, tres chaquetas y cuatro pares de zapatos. ¿Durante cuántos días Laura puede vestirse de manera diferente?

27. ¿Cuál es la cantidad de segmentos que aparecerán en el quinto nivel?



28. ¿Cuál es el valor de n en la siguiente igualdad? $(n+2)^{2n} = \left((n+2)^2\right)^{3n-2}$

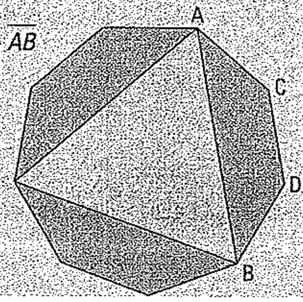
29. Un caracol tiene la siguiente regla para realizar cualquier recorrido, el primer día recorre una cierta distancia, el segundo recorre la tercera parte del día anterior, el tercer día recorre la tercera parte del día anterior y así, sucesivamente. ¿Cuál es la máxima distancia que el caracol puede alcanzar si sigue su trayecto de manera infinita?

30. ¿Cuántos pares de primos entre 1 y 50 tienen suma prima?

1. Dos lados de un triángulo miden 6 y 8, ¿cuáles son las medidas enteras que puede tener el tercer lado?

2. ¿Falso o verdadero?

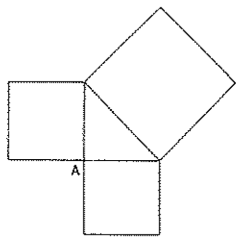
$\overline{AC} = \frac{1}{3}\overline{AB}$



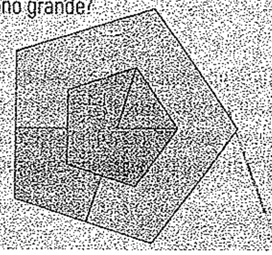
3. Si $f(x) = 3x - 8$ entonces $2 \times f(2) = ?$

4. Una oveja se ata en medio de un prado y cubre 20 m² de superficie para pastar. Si se desea reducir a la mitad dicha superficie, ¿cuánto corresponde disminuirle a la cuerda que se usó para atarla?

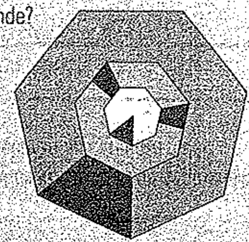
5. Trace la figura, empezando en el punto A, sin levantar el lápiz y repetir línea.



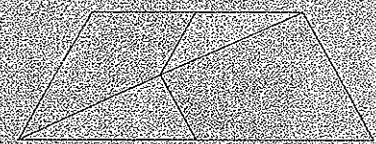
6. ¿Cuál es la fracción que ocupa la sección sombreada de azul con respecto al área del pentágono grande?



7. ¿Cuál es la fracción que ocupan las secciones más oscuras respecto al área del heptágono grande?



8. ¿Falso o verdadero?



La suma de las secciones sombreadas equivale a la mitad del área del trapecio.

9. Si

$f(2) = 4$, $f(3) = 9$, $f(4) = 16$

entonces $f(x) = ?$

10. Si:

$f(1) = 1$

$f(2) = -2$

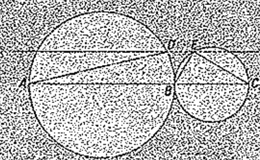
$f(3) = -5$

$f(4) = -8$

$f(x + h) = ?$

11. La gravedad de la Luna es un sexto de la de la Tierra. Si un objeto pesa 40 kg en la Tierra, ¿cuánto pesará en la Luna?

12. Si $\overline{BC} = \frac{1}{2}\overline{AB}$, entonces ¿cómo es el área del ΔBEC respecto al área del ΔABD?



13. ¿Cuál es el valor de n en la siguiente ecuación?

$$3\sqrt{81 + \sqrt{25 + \sqrt{4n - 6}}} = 9$$

14. Un punto divide un segmento en una razón 2 a 7. Si otro punto divide en dos partes el pedazo más grande en una razón 2 a 7, ¿cuál es la razón en la que el segundo punto divide al segmento original?

15. Dos números están en la relación de 3 a 2; si sumamos 7 al menor, el resultado es igual al mayor. Halla los números.

16. Ana cobra por cada problema de física y química que resuelva. Si resuelve 4 problemas de química y 5 de física recibe $ 14 500 y por 9 de química y 8 de física recibe $ 18 000. ¿Cuánto cobra por cada tipo de problema?

17. La mitad de la edad de Juan equivale a la tercera parte de la edad de Mario. Si ambas edades sumadas equivalen a un siglo, ¿cuáles son las edades respectivas de Mario y Juan?

18. Soy un número de dos cifras tal que las dos terceras partes del dígito de mis unidades equivalen al dígito de mis decenas y el doble de la suma de mis dos dígitos equivale a cinco veces el dígito de mis decenas.

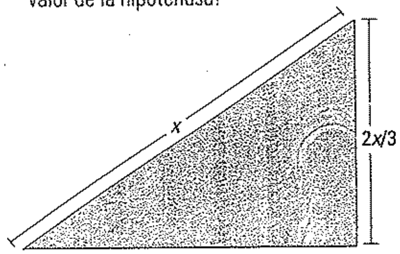
¿Quién soy?

19. ¿Qué números consecutivos cumplen con la siguiente condición:

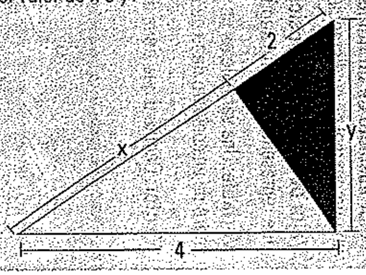
el cuadrado del mayor es igual al doble del menor excedido en 5?

20. El producto de dos números naturales consecutivos es 5 256, si el doble del número mayor excede en uno a la suma de los dos números naturales, ¿cuáles son los números?

21. Si el perímetro del triángulo es 12, ¿cuál es el valor de la hipotenusa?



22. Si el área sombreada equivale a 8, ¿cuál es el valor de x e y?

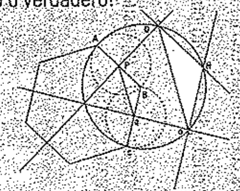


23. Algunos valores de n hacen que $2^n - 1$ sea primo. Encuentra todos aquellos que sean menores que 50.

24. Si hoy es martes, entonces tengo examen. Si presento el examen puedo jugar. Estoy jugando, ¿qué día es hoy?

25. Los siguientes datos corresponden a los pesos(en kilogramos) de 15 personas escogidas al azar: 70, 70, 63, 75, 85, 96, 63, 75, 86, 90, 59, 57, 77, 70, 67. ¿Cuál es el promedio de peso de ellas?

26. ¿Falso o verdadero?



El triángulo ΔpBq es semejante al triángulo ΔQHO.

27. Una hormiga sólo puede caminar por las aristas de una caja de dimensiones 7 cm, 9 cm y 11 cm. ¿Cuál es la mayor distancia que puede recorrer desde un vértice hasta el otro vértice más alejado si no puede repetir el recorrido por ninguna arista?

28. Tres lápices y 4 borradores valen $ 3 200. Dos lápices y 6 reglas valen $ 7 000. Nueve borradores y 4 reglas valen $ 5 400. ¿Cuánto valen una docena de lápices, media decena de borradores y 10 reglas?

29. Completa la igualdad con dos números pares:

$\square \times \square + \square = 2008$

30. Mi casa tiene cuatro salidas, por cualquiera de ellas que salga, siempre quedo dirigiéndome hacia el sur. ¿Dónde vivo?

GLOSARIO

Área superficial: Área de la superficie de un sólido.

Binomio: Polinomio que consta exactamente de dos términos.

Combinaciones: Son listas en las que el orden no es importante.

Cuerda de una circunferencia: Es un segmento de recta que une dos puntos de la circunferencia.

Diagonal de un polígono: Es un segmento de recta que une dos vértices no contiguos del polígono.

Ecuación: Una ecuación es una declaración de que dos números o expresiones matemáticas son iguales.

Figura regular: Una figura es regular si todos sus lados son congruentes y todos sus ángulos son congruentes.

Figuras semejantes: Figuras que tienen la misma forma pero no necesariamente el mismo tamaño.

Modelo matemático: Abstracción de un problema real en un problema matemático.

Número algebraico: Es cualquier número real o complejo que es solución de una ecuación polinómica.

Opuesto (elemento): Para cualquier número entero, racional, real o complejo a, existe un número $-a$ tal que $a + (-a) = (-a) + a = a$.

Par ordenado: Es la forma estándar de identificar puntos en un plano coordenado.

Patrón o modelo: Es una secuencia de elementos que tienen una regla o un orden.

Polígono convexo: Es un polígono en el que todos sus ángulos internos son menores de 180°.

Polinomio cero: Es el polinomio en el que todos los coeficientes son 0.

Porcentaje: Porcentaje de una cantidad es el producto de un tanto por ciento por la cantidad.

Probabilidad: Razón del número de formas en que puede ocurrir un resultado particular al número total de resultados igualmente posibles.

Problema: En el contexto de la Matemática, un problema es una pregunta que el alumno o la alumna no ha visto antes y para la cual un algoritmo o procedimiento no es inmediatamente obvio.

Proporción: Proposición de igualdad entre dos razones.

Razonamiento deductivo: Proceso para demostrar que si ciertas proposiciones son aceptadas como verdaderas, entonces es posible probar que otras proposiciones se concluyen a partir de aquellas.

Razonamiento inductivo: Proceso de observación de datos, identificación de patrones y elaboración de generalizaciones a partir de las observaciones efectuadas.

Sistema de coordenadas cartesianas: Es un sistema gráfico que divide el plano en cuatro cuadrantes. Los puntos en el plano se identifican mediante pares ordenados.

Solución de una ecuación: Cuando una ecuación tiene una variable, una solución de la ecuación es un número que hace la ecuación verdadera cuando se sustituye la variable por ese número.

Trinomio: Es un polinomio que consta exactamente de tres términos.

Valor absoluto de un número real: El valor absoluto de un número real es su distancia de cero.

Valor de lugar o valor posicional de un dígito: Es el valor que representa un dígito según su posición en un numeral.

Variable: Una variable es un símbolo que representa un número de un conjunto dado de números.

Vector: Cantidad que tiene dirección y magnitud.

+ + + + Bibliografía + + +

BARNETT- URIBE "Álgebra y Geometría 2". Ed. Mc.Graw Hill.

BOYER Carl B. Historia de la matemática. Ciencia y tecnología. Alianza editorial.

CLEMENS "Geometría" Ed. Pearson, Prentice Hall.

GUILLEN Michael. Cinco Ecuaciones que cambiaron el mundo. Ed. Temas de debate.

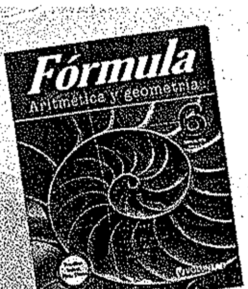
JOHNSON Kuby. Estadística elemental. Lo esencia.2 edición. Thomson Editores.

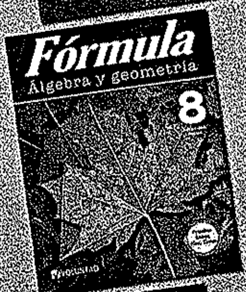
SULLIVAN, Michael. "Álgebra", Ed. Pearson, Prentice Hall.

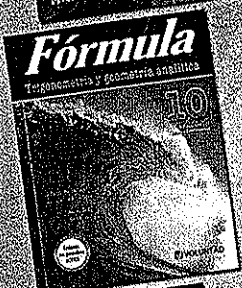
SWOKOWSKI Earl W. Álgebra y trigonometría con geometría analítica. Segunda Edición. Grupo editorial Iberoamericana.

VÁSQUEZ - CASTILLO. "Geometría Analítica". Ed. Pearson, Prentice Hall.

Fórmula 9
Álgebra y geometría







La serie **Fórmula** se ha diseñado para ser una herramienta en la solución de problemas del mundo físico, social y también del propio campo de las matemáticas.

En el ***Libro del alumno*** se concentra el desarrollo de las temáticas, los ejemplos y actividades propias de cada una de las unidades. Por su parte, el ***libro de actividades***, tiene por objeto, enfatizar en las situaciones problemáticas y en reforzar las competencias matemáticas a través de los procesos de pensamiento.

La estructura del ***Libro del alumno*** contempla las siguientes secciones:

Marco histórico Recupera el origen de los conceptos y muestra su desarrollo a través del tiempo.

Aplicaciones reales Muestra la aplicabilidad de las matemáticas en el entorno próximo de los estudiantes y en el mundo en general.

Temáticas Manejo de los conceptos básicos de la unidad.

Práctica en contexto Son las actividades propias de la temática que buscan el desarrollo de una o más competencias matemáticas.

Tecnología Se muestra como un conjunto de saberes que permiten fabricar instrumentos y modificar el medio ambiente para satisfacer las necesidades humanas.

Resumen y refuerzo Relación y jerarquía que existe entre los conceptos manejados en la unidad.

Pruebas de mejoramiento Pruebas que apuntan a la evaluación de las competencias y desempeños de los estudiantes que se abordan desde la perspectiva nacional (Prueba Saber e ICFES) y mundial (Pruebas TIMSS y Pisa).

Libro de actividades

Hace énfasis en el desarrollo de un pensamiento orientado hacia la **solución de problemas.**

En cada tema se hace una síntesis de las ideas y conceptos básicos.

Práctica en contexto Actividades y problemas correspondientes a las temáticas de cada unidad del manual.

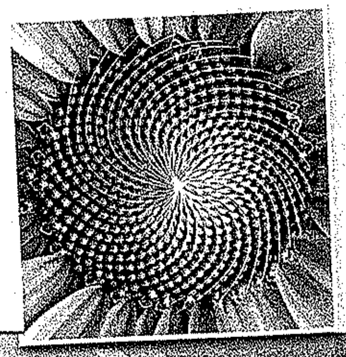
Competencias

Tanto en la cabecera del enunciado de las actividades como al pie de las páginas, se señalan las competencias particulares o procesos que se busca desarrollar con cada actividad y los desempeños o indicadores de logros enlazados con alguna de las competencias generales.

Pruebas de mejoramiento Buscan evidenciar los logros de los estudiantes a partir del desarrollo de pruebas nacionales e internacionales.

Calendario matemático

Problemas diarios encaminados a desarrollar procesos de pensamiento matemático.



Nuestra portada: *En el girasol pueden contarse 21 espirales en un sentido y 34 en el otro.*

Estos números forman parte de la serie de Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55.

ISBN 978-958-02-2690-1
9 789580 226901

VOLUNTAD
www.voluntad.com.co