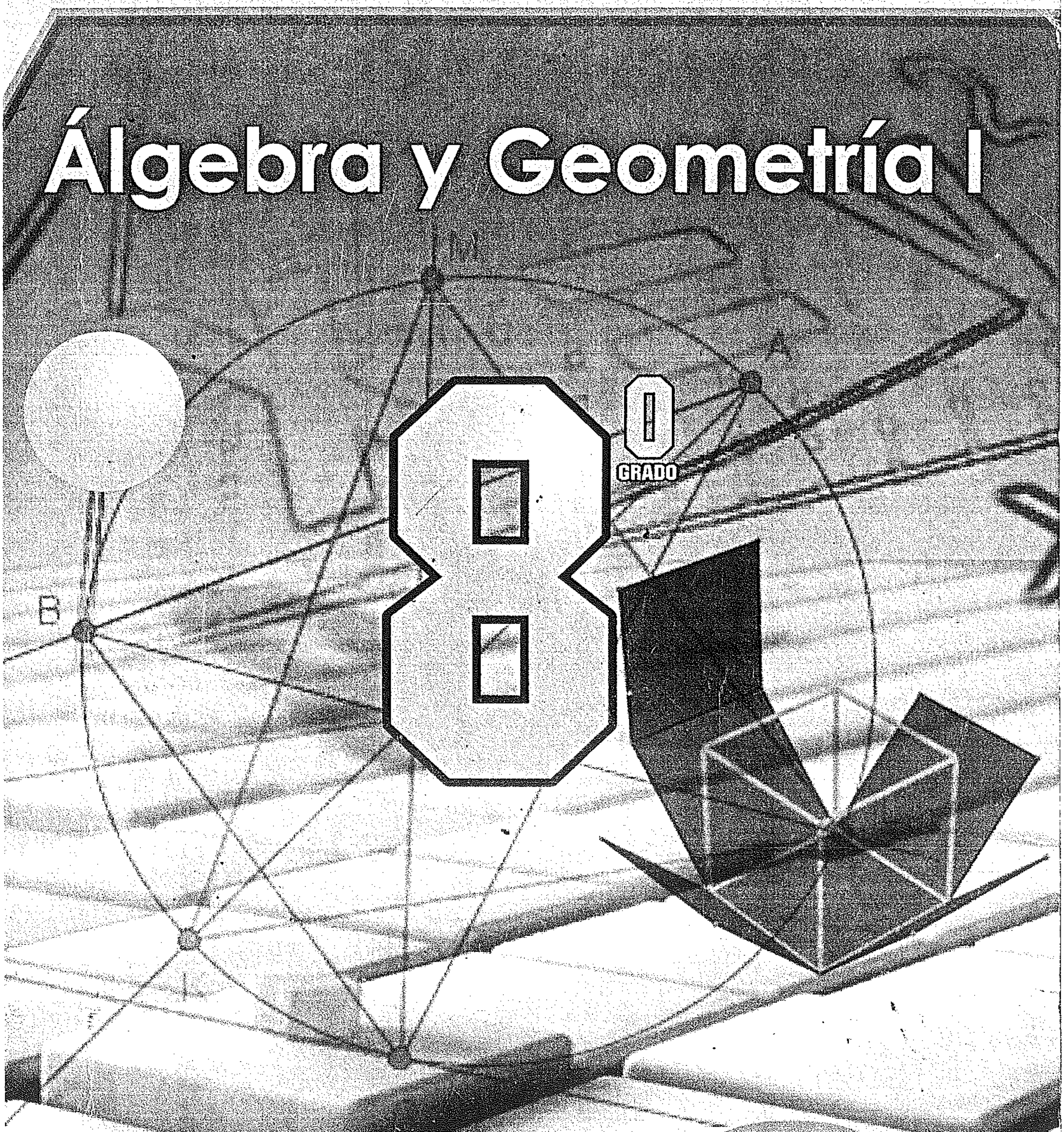
Álgebra y Geometría I



José Lucío Oullón Pérez

ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA I

GRADO 8º

AUTOR

JOSÉ LUCÍO OULLÓN PÉREZ

Licenciado en Educación

Universidad Pontificia Bolivariana

Área mayor: matemática

Área menor: Estadística

Experiencia docente:

Colegio Palermo de San José

Instituto Cultural Atenas

Nuestra Señora de la Providencia

Instituto de Educación Comfenalco

Politécnico Jaime Isaza Cadavid

Universidad de Medellín

Universidad Autónoma Latinoamericana

Universidad Cooperativa de Colombia

Actualmente:

Profesor de la Institución Educativa Atanasio Girardot

Catedrático de la Universidad de Antioquia

INTRODUCCIÓN

Hoy iniciamos tu recorrido por el maravilloso mundo de las matemáticas del grado octavo, que comprende álgebra y geometría.

El material que te entrego consta de conceptos básicos de cada eje temático, ejercicios de aplicación resueltos de cada tema y talleres para la ejercitación algorítmica y la resolución de problemas.

Día a día, cobra mayor importancia el aprendizaje de la matemática: a cada momento observamos como su aplicación nos lleva a descubrimientos insospechados. De ahí la necesidad de presentarla en el proceso educativo de una manera sencilla y amena.

Con gran entusiasmo he elaborado este texto para facilitarle al estudiante el aprendizaje del área de las matemáticas que tanta dificultad presenta a algunos de ellos.

Se ha dicho que el estudio y la práctica de las matemáticas proporciona al educando una serie de ventajas, que van desde el marco exclusivo del pensamiento hasta el de las experiencias diarias y vitales. Además, son instrumento fundamental para el análisis y comprensión de las demás ramas del saber.

De cara al estudiante, mi objetivo ha sido escribir de una manera precisa y amena, de forma que los conceptos y reglas básicas quedasen definidos y mostrados con claridad.

Para mis compañeros docentes, mi objetivo ha consistido en diseñar un instrumento de enseñanza que utiliza técnicas pedagógicas de probada eficacia, permitiendo así al docente hacer uso lo más eficiente posible del período de clase y convertirse en un orientador.

Ahora que estamos dispuestos a estudiar este libro, es conveniente tener en cuenta las siguientes sugerencias:

- Un libro de matemáticas debe leerse despacio para que cada enunciado, cada párrafo sea comprendido en su totalidad. Seguramente habrá párrafos que no los entiendas con una sola lectura y tendrás que volver a ellos una y tal vez más veces.

TABLA DE CONTENIDO

- Escucha atentamente en clase y haz preguntas cuando no entiendas algo de lo que se dijo o algo de lo que se ha leído.

- En este ejemplar se han integrado una serie de talleres, que constan de ejercicios y problemas para que el aprendizaje sea más efectivo; además, se han incluido las respuestas de ellos. Deberás resolver el ejercicio o problema y después comparar con la respuesta.

- Con este texto espero suministrar al estudiante y al profesor un instrumento de trabajo dentro y fuera del aula.

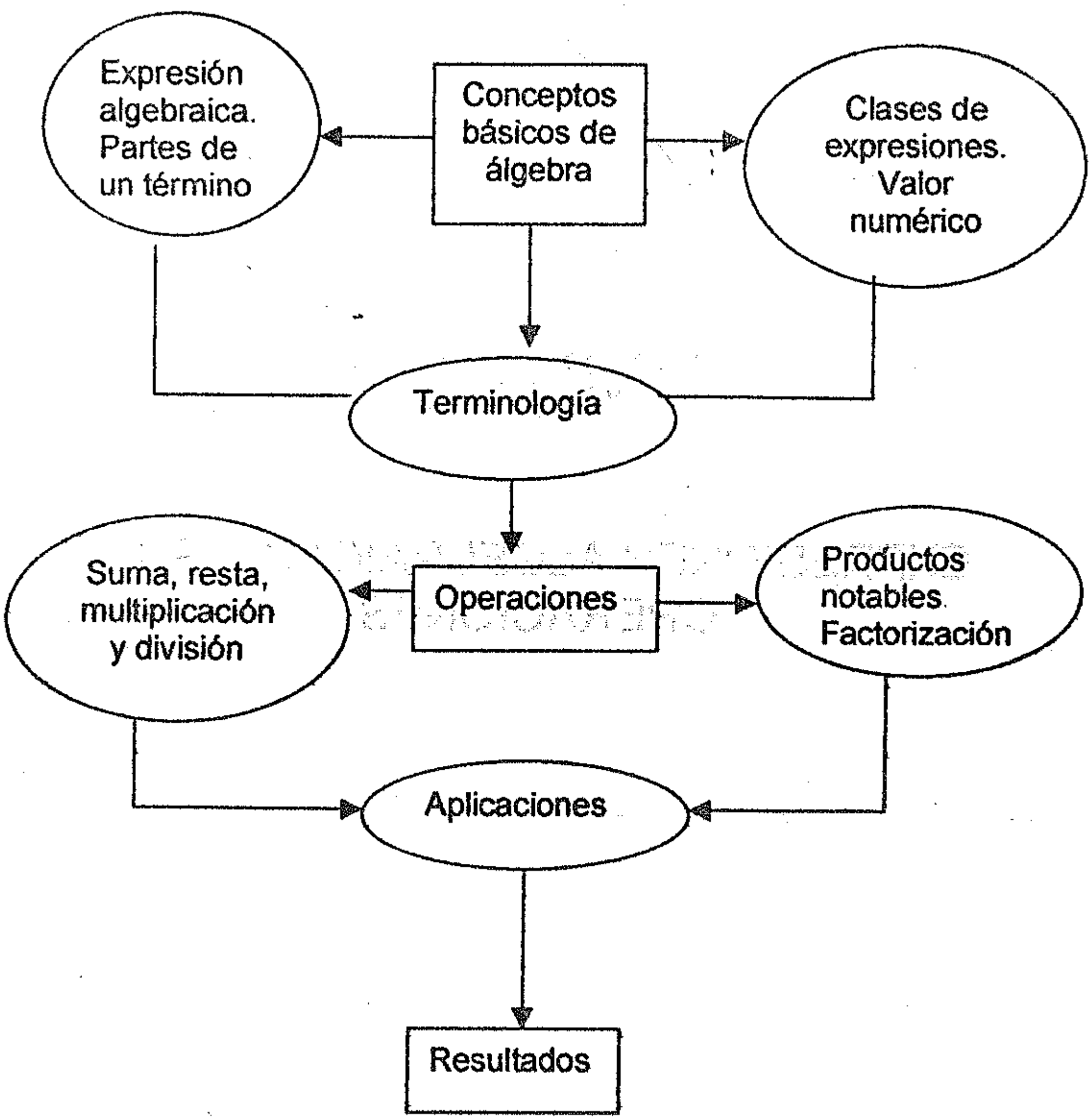
- De tu dedicación, empeño y honestidad depende el éxito, no sólo en esta área sino en toda tu vida.

El autor.

UNIDAD 1

EXPRESIONES ALGEBRAICAS Y SUS OPERACIONES

Mapa conceptual



EXPRESIONES ALGEBRAICAS

EXPRESIONES ALGEBRAICAS

TEMAS.

- Expresión algebraica.
- Grado de una expresión algebraica.
- Ordenamiento de un polinomio.
- Términos semejantes.
- Valor numérico de una expresión algebraica.

PROPÓSITOS.

- Identificar expresiones algebraicas.
- Escribir el grado de una expresión algebraica.
- Ordenar en forma ascendente y descendente un polinomio.
- Identificar términos semejantes.
- Calcular el valor numérico de una expresión algebraica.

ACCIONES PEDAGÓGICAS.

- Lectura de conceptos correspondientes a la unidad.
- Ejemplificación de los temas tratados.
- Asesoría para aclarar las dudas que presenten los estudiantes en los temas estudiados.
- Solución del taller # 1.
- Trabajos en grupos y desescolarizados.
- Salidas al tablero, para resolver ejercicios y aclarar dudas.
- Consultas en la biblioteca, según bibliografía de la guía.

RECURSOS.

- Guía de aprendizaje.
- Profesor.
- Estudiantes.
- Tizas de diferentes colores.
- Biblioteca.

INDICADORES DE LOGROS.

- Identifica expresiones algebraicas.
- Escribe el grado de una expresión algebraica.
- Ordena en forma ascendente y descendente un polinomio.
- Identifica términos semejantes.
- Calcula el valor numérico de una expresión algebraica.

CONCEPTOS Y EJEMPLOS

ÁLGEBRA : Rama de la matemática en la cual se utilizan símbolos (letras) para representar números.

EXPRESIÓN ALGEBRAICA : Un grupo de números y letras combinadas entre sí mediante una o más de las operaciones fundamentales recibe el nombre de expresión algebraica.

Ejemplos : Son expresiones algebraicas las siguientes

1. x 2. $x^2 - 5y$ 3. $2x^3 - \sqrt{5}\,x + 4xy.$

ACTIVIDAD : Solucionar el numeral 1 y 2 del taller 1

TÉRMINO : Un número o una letra, o varios números y letras combinadas entre sí mediante las operaciones de multiplicación o de división, o de ambas, recibe el nombre de término.
Puesto que un término no implica ni adición ni sustracción, todo grupo de letras que en una expresión algebraica esté separado de otros grupos mediante los signos más (+) o menos (-) es un término. De acuerdo con lo anterior, el signo de un término es el signo que le precede.

Ejemplo : En la expresión algebraica $5x^2 - 3x^2y + \frac{2xy}{z}$.

Primer término : $5x^2$
Segundo término : $-3x^2y$
Tercer término : $\frac{2xy}{z}$

PARTES DE UN TÉRMINO: En todo término debemos distinguier cinco partes que son :

1. Signo : S (+ ó -)
2. Parte numérica : PN
3. Parte o partes literales : PL
4. Exponente de la parte o partes literales : EPL
5. Operador que conecta las partes literales de la expresión : O ; pueden ser x , $\sqrt{\ }$, ÷ , potencia , etc.

<u>Ejemplo</u> : Escribir las cinco partes en los siguientes términos :

a. $-7x^5$

- S : -
- PN : 7
- PL : x
- EPL : 5
- O : x (por)

b. x^3

- S : +
- PN : 1
- PL : x
- EPL : 3
- O : x

c. 8

- S : +
- PN : 8
- PL : Cualquier letra
- EPL : 0
- O : x

<u>ACTIVIDAD</u> : Solucionar el numeral 3 y 4 del taller 1.

COEFICIENTE NUMÉRICO Si un término está compuesto de un número y una o más letras, el número recibe el nombre de coeficiente numérico de las letras en el término. Comúnmente al hablar de coeficiente numérico se dice simplemente el coeficiente.

NOTA : Si el término consta solamente de una o más letras, el coeficiente es la unidad (1).

Ejemplos :

1. $3x^2yz$. Coeficiente 3
2. $-5xyz$. Coeficiente -5
3. x^2. Coeficiente 1
4. $-xy^2$. Coeficiente -1

MONOMIO : Una expresión algebraica que contiene solamente un término se denomina monomio.

Ejemplos : Son monomios las siguientes expresiones algebraicas.

1. $5xy$ 2. $-6x^3z$ 3. 8

BINOMIO : Una expresión algebraica que contiene exactamente dos términos se denomina binomio.

Ejemplos : Son binomios las siguientes expresiones algebraicas.

1. $x - 3y$ 2. $4x^2 + 5z$ 3. $7 - 3y$

TRINOMIO : Una expresión algebraica que contiene exactamente tres términos se denomina trinomio.

Ejemplos : Son trinomios las siguientes expresiones algebraicas.

1. $x^2 - 5x + 9$ 2. $xy + 4x^2 - 5xy^2$ 3. $2x^3 + 4y - 3z$

ACTIVIDAD : Solucionar El numeral 5 del taller 1.

GRADO DE UN TÉRMINO : El grado de un término (monomio) se determina como la suma de los exponentes de sus factores literales.

Ejemplos : Calcular el grado de los siguientes términos algebraicos.

1. $7x^3y^2$; Grado : 3+2 = 5.

2. $-3xyz^2$; Grado : 1+1+2 = 4.

3. 7 ; Grado : 0.

GRADO DE UNA EXPRESIÓN ALGEBRAICA : Es el grado del término de más alto grado que aparece en la expresión algebraica.

Ejemplos : Calcula el grado de las siguientes expresiones algebraicas.

1. $3x^3y - 4xy - 2y + 5$; Grado : 3+1 = 4.

2. $2x^2y + xy^2 - y^5 - 2$; Grado : 5

ACTIVIDAD : Solucionar el numeral 6 y 7 del taller #1.

POLINOMIO : La expresión algebraica $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ... + a_nx^n$, la denominamos polinomio en x, de grado n, donde $a_0 = a_0x^0$.
La x representa un número real no determinado, por lo cual se denomina indeterminada o variable.

Ejemplo 1 : La expresión : $-2 + 5x + x^5$. Es un polinomio en x, de grado 5.

Donde : $a_0 = -2$; $a_1 = 5$; $a_2 = 0$; $a_3 = 0$; $a_4 = 0$; $a_5 = 1$; $n = 5$.

Ejemplo 2 : La expresión : $3 - 4x - 5x^2 + x^3$. Es un polinomio en x, de grado 3.
Donde : $a_0 = 3$; $a_1 = -4$; $a_2 = -5$; $a_3 = 1$; $n = 3$.

ORDENAR UN POLINOMIO : Un polinomio está ordenado en relación con una letra, cuando la escritura de los términos está ordenada por sus potencias en forma ascendente o descendente.

Ejemplos : Ordenar en forma ascendente los siguientes polinomios.

1. $x^2 + 1 - 2x^3 - x$; Ordenación : $1 - x + x^2 - 2x^3$.
2. $-7x^3 + 5x + x^4$; Ordenación : $5x - 7x^3 + x^4$.

Ejemplos : Ordenar con relación a las potencias decrecientes de y, los polinomios siguientes.

1. $x^3 - 5x^2y + y^3 - 3xy^2$; Ordenación : $y^3 - 3xy^2 - 5x^2y + x^3$.
2. $5xy^2 - 7 + y^4 - 2x^2y$; Ordenación : $y^4 + 5xy^2 - 2x^2y - 7$.

ACTIVIDAD : Solucionar los numerales 8 del taller #1.

TÉRMINOS SEMEJANTES : Dos o más términos son semejantes, si tienen la misma parte literal, es decir, cuando tienen iguales letras afectadas de iguales exponentes.

Ejemplos :

1. $-5x^2y$; x^2y ; $4x^2y$. Son términos semejantes.
2. $0{,}5z^2$; $10z^2$; z^2. Son términos semejantes.
3. $4x^2y$; $4xy^2$. No son términos semejantes.
4. $3xy^2z$, $3xy^2z^2$. No son términos semejantes.

VALOR NUMÉRICO DE UN POLINOMIO : Es el número que resulta de reemplazar la variable o variables por un número real y efectuar las operaciones indicadas.

Ejemplo 1 : Calcular el valor numérico del polinomio :

$2x^3y^2 + xy - 3x + 4y - 5$. Cuando $x = 2$ y $y = -1$.

Solución : $2(2)^3(-1)^2 + (2)(-1) - 3(2) + 4(-1) - 5 = 2x8x1 - 2 - 6 - 4 - 5$
$= 16 - 17$
$= -1$

<u>Ejemplo2</u> : Calcular el valor numérico del polinomio :

$$0{,}02x^2 + 0{,}3x - 0{,}5. \text{ Cuando } x = 0{,}3.$$

Solución : $0{,}02(0{,}3)^2 + 0{,}3(0{,}3) - 0{,}5 = 0{,}02x0{,}09 + 0{,}09 - 0{,}5$
$= 0{,}0018 + 0{,}09 - 0{,}5$
$= 0{,}0918 - 0{,}5$
$= -0{,}4082$

<u>Ejemplo 3</u> : Calcular el valor numérico del polinomio :

$$(2x^2 - 5y^2)(-3x^2 + y^2). \text{ Cuando } x = -3 \text{ y } y = 2.$$

Solución : $[2(-3)^2 - 5(2)^2][-3(-3)^2 + (2)^2] = (2x9 - 5x4)(-3x9 + 4)$
$= (18 - 20)(-27 + 4)$
$= (-2)(-23)$
$= 46.$

<u>ACTIVIDAD</u> : Solucionar el numeral 9 del taller 1.

TALLER 1

1. Al frente de cada expresión, escribe si corresponde o no, a una expresión algebraica

   a. 25 ____________________

   b. $-\frac{4}{7}$ ____________________

   c. % ____________________

   d. $\sqrt{6}$ ____________________

   e. x ____________________

   f. ( ) ____________________

   g. $(x^2 - 1) + 4$ ____________________

   h. $\frac{a^2}{b}$ ____________________

i. –1 ____________________________

j. ! ____________________________

k. * ____________________________

l. ÷ ____________________________

m. $x^4 - b^4$ ____________________________

n. $8a^2b^3$ ____________________________

o. $x^4y^3 - x^3y^2 + x^2y - 5$ ____________________

p. ? ____________________________

q. $\sqrt{\ }$ ____________________________

2. Identifica en las siguientes expresiones algebraicas las constantes y las variables.

	Constantes	Variables
a. $8m^3n + 25mnx$	________	________
b. $\dfrac{8d^4 - 5b^3 + 6d - 4}{9x^2 - y}$	________ ____	________ ____
c. $\dfrac{r^3}{4}\left(5\sqrt{6+q}\right)$	________ ____	________ ____
d. $6x^3 + \dfrac{2}{5}z^8 - \dfrac{y}{7}$	________ ____	________ ____
e. $n = 7.600 + 20p$	________	________
f. $x = vt$	________	________
g. $a = p(1 + r)^n$	________	________
h. $5x^3 - 6x + 3$	________	________
i. $m + 43$	________	________
j. $4x(y^2 - 6)$	________	________
k. $\dfrac{a}{2} + mxy$	________	________
l. $5\,[3x - (y^2 + 4)]$	________	________

3. Escribe el número de términos que hay en cada expresión.

a. $\frac{1}{x}$ ________________

b. $18p^3q^2r^5$ ________________

c. $4 + x$ ________________

d. $-3x^4 - 3x^2 + 5$ ________________

e. $4m^2 - \frac{6}{m}$ ________________

f. $\frac{8}{r^3} + r^2 - 3r$ ________________

g. $x^4 - \frac{3x^3}{2} + 5x^2 - 4$ ________________

h. $\frac{a^2 - 6}{4x}$ ________________

i. $x^6 - 2x^5 + 3x^2 - 2x + 6$ ________________

j. $a^2+2ab+ b^2$ ________________

k. $\sqrt{2x^3 - 6}$ ________________

l. $8m^{12} + 6m^{11}n^{10} - 4m^5n^{11} + m^4n^{12} - n^{14}$ ________________

m. $\frac{a}{b} + \frac{\sqrt{2x}}{3} - \frac{x+6}{yz}$ ________________

4. Escribe las cinco partes de cada uno de los siguientes términos.

a. 7 ____

b. $-z$ ____

c. $3x$ ____

d. -8 ____

e. $-2a^2$ ____

f. xy^3 ____

g. $\frac{2}{3}$ ____________________

h. $\frac{2x}{5}$ ____________________

i. $-\frac{xy^2}{z^4}$ ____________________

j. $-x^{a+3}$ ____________________

k. xy^2z^4 ____________________

l. $-\frac{8}{3}$ ____________________

m. $\frac{3ab^{x-2}}{2c^2}$ ____________________

n. $-\frac{\sqrt{2a}}{3bc^2}$ ____________________

5. De acuerdo al número de términos, escribe el nombre de cada una de las siguientes expresiones.

   a. $-3x$ ____________________

   b. $x^2 + y - z + 4$ ____________________

   c. $\frac{a^2b^3}{5}$ ____________________

   d. $-4x^2yz^4$ ____________________

   e. $2a + 6b - 3$ ____________________

   f. $x - y$ ____________________

   g. $\frac{a+b+c}{3}$ ____________________

   h. $\frac{a}{3}+\frac{b}{3}+\frac{c}{3}$ ____________________

i. $h^2k^3t^3$ ______________________________

j. $a + b^2 - c^2 + abc - 4$ ______________________________

k. $\frac{3a}{3} - \frac{4b}{5}$ ______________________________

l. $\frac{4}{a^2 - 1}$ ______________________________

m. $x^{a+1} - y^{a-1}$ ______________________________

6. Halla el grado absoluto y el grado relativo respecto a cada letra en cada uno de los siguientes términos.

a. 8 ______________________________

b. $2x$ ______________________________

c. $-3xy^2$ ______________________________

d. $a^{x-1}b^2$ ______________________________

e. p^4q^2r ______________________________

f. $-4xy^3z^6$ ______________________________

g. -1 ______________________________

h. $a^2b^{x+1}c^4$ ______________________________

i. $x^{a-1}y^{2a+2}z$ ______________________________

j. $-\frac{x^2y^3}{z^4}$ ______________________________

k. $x^4y^{-5}z^2$ ______________________________

l. $-2a^{-3}b^4c^{-2}$ ______________________________

m. $-4xy^{x-2}z^{-3}$ ______________________________

n. a^2bc^6 ____________________

o. $p^{\frac{2}{3}}q^{\frac{1}{2}}r^{\frac{3}{4}}$ ____________________

7. Halla el grado absoluto y el grado relativo respecto a la primera letra, de cada uno de los polinomios.

a. $\frac{2}{3}ab + 3a^2b^3 - 4a^4b^5$ ____________________

b. $-x^2y^3 + 5xy^5$ ____________________

c. $x^{a+1}y^2 - 2x^{a+2}y^3 + x^ay^6$ ____________________

d. $-\frac{1}{2}x^2 + 3xy^4 - 2x^3y$ ____________________

e. $-a^6b + 4a^5b^2 - 2a^4b^3 + a^7b$ ____________________

f. $\frac{4}{5}x^{m+2} - \frac{2}{3}x^{m+3}y + 4x^my^5$ ____________________

g. $x^5y^8z + 2x^3y^4z^5 - 3x^4y^2z^3$ ____________________

h. $x^{a+3}y - 2x^{a-2}y^2 + 3x^{a+1}y^3$ ____________________

i. $a^2b^3c^5 - 3a^4b^4c + 6a^3b^5c^6$ ____________________

j. $2xy - x^2y^4 + \frac{1}{2}xy^7$ ____________________

k. $-a^3b^4 + 5ab^6 - 4a^2b^8$ ____________________

8. Ordena en forma descendente (de mayor a menor) los siguientes polinomios.

a. $-2x^2y + 7x - 4 - 3x^3y^2$ ____________________

b. $a^2b^3 - 4a^3b + a^4 - 2ab^2$ ____________________

c. $4mn^3 - 2m^3n^2 + m^2n - 3m^4$ ____________________

d. $\dfrac{y^3}{3} + \dfrac{x^2y^2}{4} - x^3$ ____________________

e. $a^{x-1} + 2a^x - 3a^{x+2} + 4a^{x-2}$ ____________________

f. $x^3 - x^4 + 2x - 3x^5 + x^2$ ____________________

g. $\dfrac{2}{3}x^{m+1} - \dfrac{5}{4}x^{m-1} + \dfrac{3}{7}x^{m+2}$ ____________________

h. $a^{x-2} - \dfrac{2}{3}a^{x-1} + 5a^x + a^{x-3}$ ____________________

i. $ab^4 - a^2b^3 + 2a^3b^2 - 5a^4b$ ____________________

j. $x^2y^3 - 2x^5y + 3x^4y^2 - 6x^6y^4$ ____________________

9. Hallar el valor numérico de las siguientes expresiones.

a. $2x^3$	Si $x = 3$
b. $2x^5$	Si $x = 2$
c. $(2x)^3$	Si $x = 3$
d. $x^4 + x$	Si $x = 1$
e. $(3x)^2$	Si $x = 5$
f. $x^3 + x^2 + x$	Si $x = 4$
g. $(x+2)^3$	Si $x = 3$
h. $(x+y)(x-y) - (x^2 - y^2)$	Si $x = 10$; $y = 5$
i. $(x+y)^2 - (x-y)^2 - xy$	Si $x = 5$; $y = 4$

10. Calcula el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas, considerando :

$a = 1$; $b = -2$; $c = 3$; $d = -4$; $m = \frac{2}{3}$; $n = \frac{1}{2}$; $x = 0$; $y = -1$.

a. $2(a+n)$ b. $a^x + \frac{d}{3}$ c. $\frac{2(a-b)}{3m-y}$ d. $\frac{\sqrt{5a-d}}{c}$

e. $m^{b+c} + 2n - a$ f. $3\left[c+4(3m-2n)\right]$ g. $5(a+b-c)$

h. $4ab^2 + 3a^2c^3 - d^2$ i. $a^2 + 2ab + b^2$

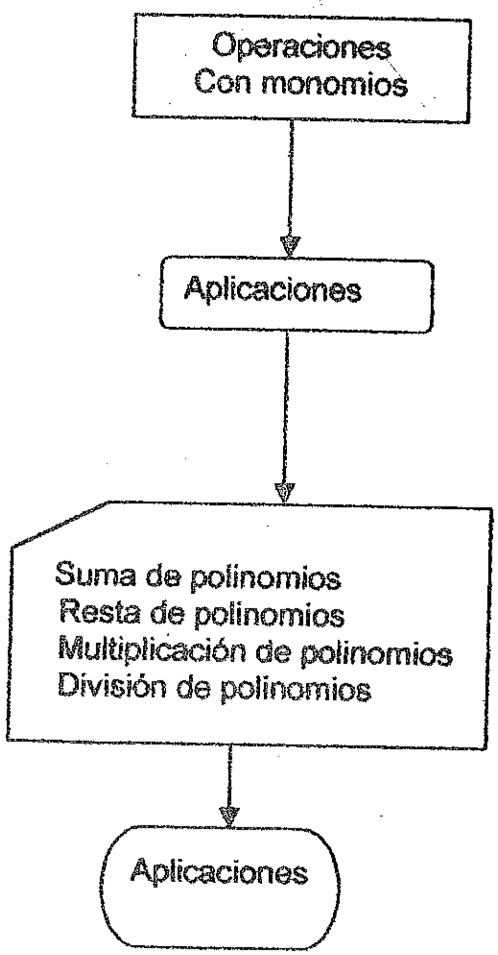
j. $\left[\dfrac{\frac{2}{3}c - \frac{7}{10}b}{25a+8d}\right]^x$ k. $ay - by + d$ l. $a + m - n$

m. $\frac{a}{c} - 2m + 3n^2$ n. $\frac{a+m}{c+n} - \frac{b+c}{3} + mnx$

UNIDAD 2

OPERACIONES CON POLINOMIOS

MAPA CONCEPTUAL



OPERACIONES CON POLINOMIOS

TEMAS:

- Suma de polinomios.
- Sustracción de polinomios.
- Multiplicación de polinomios.
- Productos notables.
- Producto de la forma (x+a)(x+b).
- Producto de la suma por la diferencia de dos cantidades.
- Cuadrado de una suma y de una diferencia.
- Cubo de una suma y de una diferencia.
- División de monomios.
- División de polinomio por monomio.
- División de polinomio por polinomio.
- Factorización de polinomios.

PROPÓSITOS:

- Sumar polinomios.
- Restar polinomios.
- Multiplicar polinomios.
- Identificar productos notables.
- Calcular productos de la forma (x+a)(x+b).
- Calcular producto de la suma por la diferencia de dos cantidades.
- Calcular el cuadrado de una suma y de una diferencia.
- Calcular el cubo de una suma y de una diferencia.
- Dividir monomios.
- Dividir polinomio por monomio.
- Dividir polinomio por polinomio.
- Factorizar polinomios.

ACCIONES PEDAGÓGICAS:

- Lectura de conceptos correspondientes a la unidad.
- Ejemplificación de los temas tratados.
- Asesoría permanente para aclarar las dudas que presenten los estudiantes en los temas estudiados.

- Solución de talleres.
- Trabajos en grupos y desescolarizados.
- Salidas al tablero, para resolver ejercicios y aclarar dudas.

RECURSOS:

- Texto guía.
- Profesor.
- Estudiantes.
- Tizas de diferentes colores.
- Biblioteca.

INDICADORES DE LOGROS:

- Suma dos o más polinomios.
- Resta dos polinomios.
- Multiplica dos o más polinomios.
- Identifica los productos notables.
- Calcula productos de la forma $(x+a)(X+b)$.
- Calcula el producto de la suma por la diferencia de dos cantidades.
- Calcula el cuadrado de una suma y de una diferencia.
- Calcula el cubo de una suma y de una diferencia.
- Divide monomios.
- Divide polinomio por polinomio.
- Factoriza polinomios.

CONCEPTOS Y EJEMPLOS

SUMADE POLINOMIOS:

1. Para sumar polinomios se coloca uno a continuación de los otros con sus respectivos signos, luego, sumamos los coeficientes de los términos semejantes y se deja la misma parte literal.

2. También, para sumar polinomios, podemos escribirlos en columna, ordenando cada polinomio en forma descendente, escribimos los términos semejantes en columnas y luego, se suman.

Ejemplo 1: Sumara los polinomios : $P(x) = 5x^4 - 6x^3 - 3x^2 + 2x$ y $Q(x) = 7x + 3x^3 - 2x^2$.

Solución # 1 : Atendiendo la definición 1.

$P(x) + Q(x) = (5x^4 - 6x^3 - 3x^2 + 2x) + (7x + 3x^2 - 2x^2)$. Operación indicada.

$= 5x^4 - 6x^3 - 3x^2 + 2x + 7x + 3x^2 - 2x^2$. Destruyendo paréntesis.

$= 5x^4 - 6x^3 + 3x^3 - 3x^2 - 2x^2 + 2x + 7x$. Reagrupando términos.

$= 5x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 9x$. Sumando.

Solución #2 : En forma de columna, según definición 2.

$$P(x) + Q(x) = \begin{array}{r} 5x^4 - 6x^3 - 3x^2 + 2x \\ \underline{0x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 7x} \\ 5x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 9x \end{array}$$

Como vemos, cualquiera de las dos formas es válida para sumar polinomios.

Ejemplo 2: Dados los polinomios : $P(x) = x^2y + 6x^2 - 3yx$;
$Q(x) = 2x^2 - 3xy^2 + 5x^2y + 3$; $R(x) = -6x^2y - 12x^2 - 4xy^2 + 5$.

Calcular : $P(x) + Q(X) + R(x)$.

Solución #1 : Según definición 1.

$$P(x)+Q(x)+R(x) =(x^2y+6x^2-3y^2x) + (2x^2-3xy^2+5x^2y+3) + (-6x^2y-12x^2-4xy^2+5)$$

$$P(x)+Q(x)+R(x) = x^2y+6x^2-3y^2x+2x^2-3xy^2+5x^2y+3-6x^2y-12x^2-4xy^2+5$$

$$P(x)+Q(x)+R(x) = 6x^2+2x^2-12x^2+x^2y+5x^2y-6x^2y-3xy^2-3xy^2-4xy^2+3+5$$

$$P(x)+Q(x)+R(x) = -4x^2 - 0x^2y - 10xy^2 + 8$$

$$P(x)+Q(x)+R(x) = -4x^2 - 10xy^2 + 8$$

Solución # 2 : En forma de columna, según definición 2.

$$P(x) + Q(x) + R(x) : \quad \begin{array}{r} 6x^2 + x^2y - 3xy^2 + 0 \\ 2x^2 + 5x^2y - 3xy^2 + 3 \\ -12x^2 - 6x^2y - 4xy^2 + 5 \\ \hline -4x^2 + 0x^2y - 10xy^2 + 8 \end{array} = -4x^2 - 10xy^2 + 8$$

<u>ACTIVIDAD:</u> Solucionar los numerales 1-2-3 del taller #2.

RESTA (SUSTRACCIÓN) DE POLINOMIOS :

Como estudiamos en la suma, en la sustracción, veamos dos formas para efectuar la operación.

1. Indicamos la operación encerrando entre paréntesis los polinomios que vamos a restar. Luego, procedemos como en la adición.

2. Para efectuar la operación sustracción en columnas, se escribe el polinomio minuendo, debajo se escribe el polinomio sustraendo con todos los signos de sus términos cambiados, colocando los términos semejantes en la misma columna y luego, se efectúan las sumas por columnas.

Ejemplo 1: Dados los polinomios :
$P(x) = -8x^2 + 5xy + 4$; $Q(x) = 5x^2 + 4xy - 4y + 8$. Calcular $P(x) - Q(x)$.

Solución #1 : Según la definición 1.

$P(x) - Q(x) = (-8x^2 + 5xy + 4) - (5x^2 + 4xy - 4y + 8)$. Operación dada.

$= -8x^2 + 5xy + 4 - 5x^2 - 4xy + 4y - 8$. Destruyendo paréntesis.

$= -8x^2 - 5x^2 + 5xy - 4xy + 4y + 4 - 8$. Reagrupando términos.

$= -13x^2 + xy + 4y - 4$. Sumando.

Solución #2 : En forma de columna, según definición 2.

$$P(x) - Q(x) = \begin{array}{r} -8x^2 + 5xy + 0y + 4 \\ -5x^2 - 4xy + 4y - 8 \\ \hline -13x^2 + xy + 4y - 4 \end{array}$$

Ejemplo 2 : Dados los polinomios : $P(x) = 4x^3 + 3x^2 + 5x^4$;

$R(x) = 5x^2 - 2x + 13$ y $R(x) = -x - 2x^3 + 1$.

Calcular : $P(x) - Q(x) - R(X)$.

Solución #1 :

$P(x)\text{-}Q(x)\text{-}R(x) = (4x^3 + 3x^2 + 5x^4)\text{-}(5x^2\text{-}2x+13)\text{-}(\text{-}x\text{-}2x^3+1)$. Operación indicada.

$P(x)\text{-}Q(x)\text{-}R(x) = 4x^3+3x^2+5x^4\text{-}5x^2+2x\text{-}13+x+2x^3\text{-}1$. Destruyendo paréntesis.

$P(x)\text{-}Q(x)\text{-}R(x) = 5x^4+4x^3+2x^3+3x^2\text{-}5x^2+2x+x\text{-}13\text{-}1$. Reagrupando.

$P(x)\text{-}Q(x)\text{-}R(x) = 5x^4 + 6x^3 - 2x^2 + 3x - 14$. Sumando.

Solución #2:

$$
\begin{array}{rr}
 & 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 0x + 0 \\
P(x) - Q(x) - R(x) = & 0x^4 + 0x^3 - 5x^2 + 2x - 13 \\
 & 0x^4 + 2x^3 + 0x^2 + x - 1 \\
\hline
 & 5x^4 + 6x^3 - 2x^2 + 3x - 14
\end{array}
$$

ACTIVIDAD : Solucionara los numerales 4-5-6 del taller #2.

TALLER 2

1. Efectúa las siguientes sumas entre monomios.

   a. $-3x$; $5x$; $-x$ ____________________

   b. $2a$; $-4a^2$; a^2 ; $-6a^2$ ____________________

   c. $3x^2y$; $-5xy^2$ ____________________

   d. $-7xy$; $-2xy$; $9xy$ ____________________

   e. $\frac{2}{3}a$; $-\frac{1}{2}a$; $\frac{5}{4}a$ ____________________

   f. $3x^m$; $-5x^m$; x^m ; $-8x^m$ ____________________

   g. a^2 ; b^3 ; $4c^4$ ____________________

   h. $7ab^2$; $-12ab^2$ ____________________

   i. $-xy^2$; $4xy^2$; $-3xy^2$ ____________________

   j. a ; $-6a$; $-12a$; $4a$; $-5a$ ____________________

   k. $-\frac{5}{2}xy$; $\frac{2}{5}xy$; $\frac{1}{10}xy$ ____________________

   l. $-\frac{2}{3}a^3$; $-\frac{1}{4}a^3$; $5a^3$; a^3 ____________________

   m. $\frac{1}{6}mn$; $-\frac{1}{2}mn$; $-4mn$ ____________________

   n. x^2y ; $-7x^2y$; $4x^2y$; $-2x^2y$; $3x^2y$ ____________________

2. Dados los polinomios : $P(x) = -x^3 + 2x^2 - x$; $Q(x) = x^4 - 2x^3 + x - 3$; $R(x) = 2x^3 - 5x^2 + 2x - 4$; $S(x) = -3x^2 + 5x - 2$. Calcular :

a. P(x) + Q(x) b. P(x) + R(x) c. P(x) + S(x)

d. Q(x) + P(x) e. Q(x) + R(x) f. Q(x) + S(x)

g. S(x) + R(x) h. P(x) + Q(x) + R(x) i. R(X) + S(x) + Q(x)

j. P(x) + Q(x) + R(x) + S(x).

3. Sean : $A = 3a^2 + a - \frac{2}{3}$; $B = \frac{1}{2}a^2 - 2a + \frac{1}{4}$;

$C. -\frac{2}{3}a^2 - \frac{1}{2}a + 5$; $D = -a^2 + \frac{5}{2}a - 1$; $E = 2a - \frac{6}{5}$. Hallar :

a. A + B b. A + C c. A + D d. A + E

e. B + C f. C + D g. D+ E h. E + C

i. A + B + C j. B + C + D k. C + D + E l. A + D + E

m. B + D + E n. A + B + C + E o. A + B + C + D + E.

4. Efectúa las siguientes restas o sustracciones.

a. (4 a) - (-a) ______________________________

b. $(-2x^2) - (3x^2)$ ______________________________

c. $\left(\frac{2}{3}xy\right) - \left(\frac{1}{2}xy\right)$ ______________________________

d. $\left(\frac{3}{5}a^2b\right) - \left(\frac{2}{3}a^2b\right)$ ______________________________

e. $\left(-\frac{1}{4}x^3\right)-\left(-\frac{3}{2}x^3\right)$ ______________________________

f. (-6z) – (9z) ______________________________

5. Escribe la operación correspondiente a cada enunciado y halla la resta.

a. De $4x^2$ resta $-2x^2$ ______________________________

b. Resta $-x^2y^2$ de $4x^2y^2$ ______________________________

c. De $\frac{2}{3}ab$ resta $-\frac{5}{2}ab$ ______________________________

d. Resta $-\frac{4}{7}x^4y$ de $-\frac{8}{2}x^4y$ ______________________________

e. De $-x^2y^3z$ resta $\frac{2}{3}x^2y^3z$ ______________________________

6. Dados los polinomios : $p(a) = -2a + a^3 - 2a^4 + 4a^2 - 4$; $q(a) = 4a^4 + 3a^3 - 7$;

$r(a) = 8a^3 - 4a^4 - 8$; $s(a) = -a^2 + 2a^2 - a + 1$; $t(a) = -4a^4 + 5a^2 - 6a^3 - 8a + 3$.

Calcular :

a. p(a) – q(a) b. p(a) – r(a) c. p(a) – s(a)

d. t(a) – p(a) e. q(a) – t(a) f. s(a) – r(a)

g. q(a) – r(a) h. s(a) – q(a) i. q(a) – s(a)

k. t(a) – s(a) l. t(a) – q(a) m. [p(a) + q(a)] – r(a)

n. [q(a) – r(a)] + s(a) o. [s(a) + q(a)] – p(a) p. t(a) – [q(a) + s(a)]

q. [p(a) + s(a)] – [t(a) + r(a)] r. [q(a) – r(a)] – [s(a) + t(a)]

MULTIPLICACIÓN DE MONOMIOS:

Para Multiplicar dos o más monomios seguiremos los siguientes pasos :

1. Multiplicamos los coeficientes numéricos, teniendo en cuenta la ley de los signos para la multiplicación.

2. En la parte literal, aplicamos el concepto de producto de potencias de igual base, que consiste en sumar los exponentes de las bases iguales y colocar la misma base.

Ejemplo 1: Efectuemos el producto e los siguientes monomios.

$3x^2y^2z^3$; $-5x^3y^4z^5$.

Solución :

$$(3x^2y^2z^3)(-5x^3y^4z^5) = -15x^{2+3}y^{2+4}z^{3+5}$$

$$(3x^2y^2z^3)(-5x^3y^4z^5) = -15x^5y^6z^8$$

Ejemplo 2 : Multipliquemos los siguientes monomios.

$3xy^2$; $-2x$; $-\frac{1}{2}xy$.

Solución :

$$(3xy^2)(-2x)\left(-\frac{1}{2}xy\right) = \frac{6}{2}\,x^{1+1+1}\,y^{2+1}$$

$$(3xy^2)(-2x)\left(-\frac{1}{2}xy\right) = 3x^3y^3$$

ACTIVIDAD : Solucionar el numeral 1 del taller #3.

MULTIPLICACIÓN DE MONOMIO POR POLINOMIO:

Aplicamos la propiedad distributiva, que consiste en multiplicar el monomio por cada término del polinomio, teniendo en cuenta la ley de los signos para la multiplicación.

Ejemplo 1 : Multipliquemos las siguientes expresiones algebraicas.

$3x^2y$; $5x - 2x^2 + y^2$.

Solución :

$$3x^2y\,(5x - 2x^2 + y^3) = 15x^{2+1}y - 6x^{2+2}y + 3x^2y^{1+3}$$

$$3x^2y\,(5x - 2x^2 + y^3) = 15x^3y - 6x^4y + 3x^2y^4$$

Ejemplo 2 : Efectuemos la siguiente operación : $(-4x^3y)(3x^2yz - 3xz + yz^2)$.

Solución :

$$(-4x^3y)(3x^2yz - 3xz + yz^2) = -12x^{3+2}y^{1+1}z + 12x^{3+1}yz - 4x^3y^2z^2$$

$$(-4x^3y)(3x^2yz - 3xz + yz^2) = -12x^5y^2z + 12x^4yz - 4x^3y^2z^2$$

Ejemplo 3 : Multipliquemos $3x^{m+2}y^n$ por $(2x^{m-2}y - x^{2-m}y^{2-n} + 4x^{m-3}y^{2n})$

Solución :

$$3x^{m+2}y^n\,(2x^{m-2}y - x^{2-m}y^{2-n} + 4x^{m-3}y^{2n}) =$$

$$6x^{m+2+m-2}y^{n+1} - 3x^{m+2+2-m}y^{n+2-n} + 12x^{m+2+m-3}y^{n+2n} =$$

$$6x^{2m}y^{n+1} - 3x^4y^2 + 12x^{2m-1}y^{3n} .$$

ACTIVIDAD : Solucionar los numerales 2 y 3 del taller #3.

MULTIPLICACIÓN DE POLINOMIO POR POLINOMIO :

1. Multiplicamos cada término del primer polinomio por cada uno de los términos del segundo polinomio.

2. Se reducen términos semejantes si es posible.

Ejemplo 1 : Efectuemos la siguiente multiplicación : $(2x + 3y)(3x + y)$.

Solución :

$$(2x + 3y)(3x + y) = 2x(3x + y) + 3y(3x + y)$$

$$(2x + 3y)(3x + y) = 6x^2 + 2xy + 9xy + 3y^2$$

$$(2x + 3y)(3x + y) = 6x^2 + 11xy + 3y^2$$

Ejemplo 2 : Efectuemos la siguiente multiplicación : $(3x^2-2x + 3)(2x^2 -3x + 1)$.

Solución :

$$(3x^2-2x+3)(2x^2-3x+3) = 3x^2(2x^2-3x+1) - 2x(2x^2-3x+1) + 3(2x^2-3x+1)$$

$$(3x^2-2x+3)(2x^2-3x+3) = 6x^4 - 9x^3 + 3x^2 - 4x^3 + 6x^2 - 2x + 6x^2 - 9x + 3$$

$$(3x^2-2x+3)(2x^2-3x+3) = 6x^4 - 13x^3 + 15x^2 - 11x + 3$$

ACTIVIDAD : Solucionar el numeral 4 del taller #3.

TALLER 3

1. Calcula los siguientes productos entre monomios.

   a. $(5x^2)(-3x)$ ______________________

   b. $\left(\frac{13}{4}at^2\right)\left(\frac{8}{13}at^2\right)$ ______________________

   c. $(-2x^2y^2)(-4xy)(5x^3y^3)$ ______________________

   d. $(2,3x^4)(-3,1x)$ ______________________

   e. $\left(\frac{2}{3}xy\right)\left(\frac{5}{4}x^2\right)\left(\frac{3}{5}y^2\right)\left(\frac{4}{3}x^2y^2\right)$ ______________________

   f. $(-3y^2z)(xyz^2)(-2x^2)$ ______________________

   g. $(-a^2)(2a^{-4})(-4a^5)(-a^{-1})$ ______________________

   h. $(-x^2y^3)(2x^{-2}y^5)(-y^{-8})$ ______________________

   i. $(a^3b)(-ab^3)(-a^2b^4)(-a^3b)$ ______________________

   j. $\left(\frac{17}{5}x^2\right)\left(\frac{2}{3}x\right)\left(\frac{3}{17}x^2\right)$ ______________________

   k. $\left(\frac{4}{5}a^{-6}\right)(3a^2)\left(\frac{5}{2}a\right)\left(\frac{a^3}{6}\right)$ ______________________

2. Efectuar las siguientes multiplicaciones entre un monomio y un polinomio.

   a. $(4x^2y)(-5xy^2 + 4x^2y3)$ ______________________

   b. $(-3abc^2)(4ab^2 - 2a^2c + a^2bc^3)$ ______________________

   c. $\left(\frac{2}{3}mn\right)\left(\frac{1}{4}m^2np - \frac{3}{2}mn^2 + 4\right)$ ______________________

d. $(-3{,}2xy^2)(1{,}2xy + x^3y - 4{,}1x^2y^2)$ ______________________________

e. $(4m^2)(-3m^3 + 5m^{-1} - 6m^{-2} + 2mn)$ ______________________________

f. $\left(-\frac{5}{2}xyz\right)\left(\frac{3}{4}x^2z^2 - \frac{1}{2}y^2z + 3x^2y^2z^2\right)$ ______________________________

3. Dados : $p(x) = -2xy^2$; $q(x) = 3xy^2 - 4xy + 3$; $r(x) = -\frac{3}{2}xy^2 + 4xyz - \frac{5}{3}y$;

$t(x) = -5x^{-2}y + 2xy^2 - 4xyz^2 + 4$. Calcular :

a. $p(x).q(x)$ ______________________________

b. $p(x).r(x)$ ______________________________

c. $p(x).t(x)$ ______________________________

4. Dados los polinomios : $p(x) = 3x^2 + 2x - 4$; $q(x) = -2x^2 - x + 1$;

$r(x) = x^2 - 3x - 5$; $s(x) = 6x + 2$; $t(x) = -x + 3$; $v(x) = 7x - 4$. Calcular :

a. $p(x).q(x)$ b. $P(x).r(x)$ c. $Q(x).r(x)$ d. $S(x).p(x)$

e. $t(x).q(x)$ f. $v(x).r(x)$ g. $s(x).t(x)$ h. $s(x).v(x)$

i. $t(x).v(x)$ j. $s(x).[p(x) + q(x)]$ k. $t(x).[q(x) - r(x)]$

l. $[p(x) - q(x)][t(x) + v(x)]$ m. $[r(x) - p(x)][s(x) + t(x)]$

n. $[q(x) + r(x)][v(x) - s(x)]$ o. $t(x)[p(x) + q(x) + r(x)]$

PRODUCTOS NOTABLES

1. <u>PRODUCTO DE DOS BINOMIOS:</u> Veamos que sucede cuando nos encontramos con un producto dela forma $(x + a)(x + b)$.

$(x+a)(x+b) = (x+a)x + (x+a)$ Propiedad distributiva.

$(x+a)(x+b) = x^2 + ax + bx + ab$ Propiedad distributiva.

$(x+a)(x+b) = x^2 + (ax + bx) + ab$ Propiedad asociativa.

$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$ Propiedad distributiva.

Observándole resultado de la derecha puede notarse que:

a. El primer término del resultado es el producto de los dos primeros términos de los binomios.

b. El término intermedio es la suma algebraica de los productos obtenidos al multiplicar el primer término de cada binomio por el segundo término del otro.

c. El tercer término es el producto de los segundos términos de los binomios.

<u>Ejemplos :</u> Empleemos el método anterior, para obtener los productos :

1. $(x + 1)(x + 3) = x^2 + (1+3)x + (1)(3)$

   $(x + 1)(x + 3) = x^2 +4x + 3$

2. $(x - 1)(x - 7) = x^2 + (-1-7)x + (-1)(-7)$

   $(x - 1)(x - 7) = x^2 - 8x + 7$

3. $(x - 8)(x + 6) = x^2 + (-8+6)x + (-8)(6)$

   $(x - 8)(x + 6) = x^2 - 2x - 48$

2. PRODUCTO DE LA SUMA POR LA DIFERENCIA DE DOS CANTIDADES

Analicemos el comportamiento del siguiente producto.

$(x + a)(x - a) = (x+a)x + (x+a)(-a)$	Propiedad distributiva.
$(x + a)(x - a) = x^2 + ax - ax - a^2$	Propiedad distributiva.
$(x + a)(x - a) = x^2 + (ax - ax) - a^2$	Propiedad asociativa.
$(x + a)(x - a) = x^2 - a^2$	Inverso aditivo.

CONCLUSIÓN: La suma por la diferencia de dos cantidades es igual al cuadrado de la primera menos el cuadrado de la segunda.

Ejemplos : Apliquemos el método anterior, para obtener los productos.

1. $(x + 5)(x - 5) = x^2 - (5)^2$

   $(x + 5)(x - 5) = x^2 - 25$

2. $(3x+2)(3x - 2) = (3x)^2 - (2)^2$

   $(3x+2)(3x - 2) = 9x^2 - 4$

3. $(4x + 2y)(4x - 2y) = (4x)^2 - (2y)^2$

   $(4x + 2y)(4x - 2y) = 16x^2 - 4y^2$

ACTIVIDAD : Solucionar el numeral 1 del taller #4.

3. CUADRADO DE UNA SUMA : Veamos que sucede cuando tenemos una suma elevada al cuadrado.

$(x + y)^2 = (x + y)(x + y)$	Definición de potencia.
$(x + y)^2 = x(x + y) + y(x + y)$	Propiedad distributiva.
$(x + y)^2 = x^2 + xy + xy + y^2$	Propiedad distributiva.
$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$	Reduciendo términos semejantes.

CONCLUSIÓN : El cuadrado de una suma es igual al cuadrado del primer término más el doble producto del primero por el segundo más el cuadrado del segundo.

4. CUADRADO DE UNA DIFERENCIA: En forma similar a la suma, veamos que sucede en la diferencia.

$(x - y)^2 = (x - y)(x - y)$	Definición de potencia.
$(x - y)^2 = x(x - y) - y(x - y)$	Propiedad distributiva.
$(x - y)^2 = x^2 - xy - xy + y^2$	Propiedad distributiva.
$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$	Reduciendo términos semejantes.

CONCLUSIÓN : El cuadrado de una diferencia es igual al cuadrado del primer término menos el doble producto del primero por el segundo más el cuadrado del segundo.

Ejemplos : Utiliza los productos notables para resolver :

1. $(x + 3)^2 = x^2 + 2.x.3 + 3^2$

   $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$

2. $(x-5)^2 = x^2 - 2.x.5 + 5^2$

$(x-5)^2 = x^2 - 10x + 25$

3. $(4x+5)^2 = (4x)^2 + 2(4x)(5) + (5)^2$

$(4x+5)^2 = 16x^2 + 40x + 25$

4. $(3x-2)^2 = (3x)^2 - 2(3x)(2) + (2)^2$

$(3x-2)^2 = 9x^2 - 12x + 4$

ACTIVIDAD : Solucionar El numeral 2 del taller #4.

5. CUBO DE UNA SUMA : Veamos que sucede cuando tenemos una suma elevada al cubo.

$(x+y)^3 = (x+y)^2(x+y)$

$(x+y)^3 = (x^2 + 2xy + y^2)(x+y)$ Por qué?

$(x+y)^3 = (x^2 + 2xy + y^2)x + (x^2 + 2xy + y^2)y$ Por qué?

$(x+y)^3 = x^3 + 2x^2y + xy^2 + x^2y + 2xy^2 + y^3$

$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

CONCLUSIÓN : El cubo de una suma es igual al cubo del primer término más tres veces el cuadrado del primero por el segundo más tres veces el primero por el cuadrado del segundo más el cubo del segundo.

6. <u>CUBO DE UNA DIFERENCIA :</u> En forma similar a la suma, veamos que sucede con la diferencia.

$(x-y)^3 = (x-y)^2(x-y)$

$(x-y)^3 = (x^2-2xy+y^2)(x-y)$ Por qué?

$(x-y)^3 = (x^2-2xy+y^2)x-(x^2-2xy+y^2)y$ Por qué?

$(x-y)^3 = x^3-2x^2y+xy^2-x^2y+2xy^2-y^3$

$(x-y)^3 = x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$

<u>CONCLUSIÓN :</u> El cubo de una diferencia es igual al cubo del primer término menos tres veces el cuadrado del primero por el segundo más tres veces el primero por el cuadrado del segundo menos el cubo del segundo.

<u>Ejemplos :</u> Utilicemos los productos notables para resolver :

1. $(2x+3)^3 = (2x)^3+3(2x)^2(3)+3(2x)(3)^2+3^3$

$(2x+3)^3 = 8x^3+9(4x^2)+6x(9)+27$

$(2x+3)^3 = 8x^3+36x^2+54x+27$

2. $(3x-2)^3 = (3x)^3-3(3x)^2(2)+3(3x)(2)^2-(2)^3$

$(3x-2)^3 = 27x^3-6(9x^2)+9x(4)-8$

$(3x-2)^3 = 27x^3-54x^2+36x-8$

3. $(x^n - 5)^3 = (x^n)^3 - 3(x^n)^2\,(5) + 3(x^n)(5)^2 - (5)^3$

$(x^n - 5)^3 = x^{3n} - 15x^{2n} + 3x^n\,(25) - 125$

$(x^n - 5)^3 = x^{3n} - 15x^{2n} + 75x^n - 125$

4. $\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{3}\right)^3 = \left(\dfrac{x}{2}\right)^3 + 3\left(\dfrac{x}{2}\right)^2\left(\dfrac{1}{3}\right) + 3\left(\dfrac{x}{2}\right)\left(\dfrac{1}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{3}\right)^3$

$\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{3}\right)^3 = \dfrac{x^3}{8} + \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{3x}{2}\left(\dfrac{1}{9}\right) + \dfrac{1}{27}$

$\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{3}\right)^3 = \dfrac{x^3}{8} + \dfrac{x}{4} + \dfrac{x}{6} + \dfrac{1}{27}$

<u>ACTIVIDAD :</u> Solucionar el numeral 3 del taller #4.

TALLER 4

1. Utiliza los productos notables para calcular rápidamente el resultado de :

a. $(a + 2)(a + 5)$ ______________________

b. $(a + 3)(a + 5)$ ______________________

c. $(a + 5)(a - 2)$ ______________________

d. $(a - 7)(a - 10)$ ______________________

e. $(a - 1)(a - 4)$ ______________________

f. $(x + 9)(x - 3)$ ______________________

g. $(a - 5)(a - 8)$ ______________________

h. $(x - 1)(x + 20)$ ______________________

i. $(c - 6)(c - 7)$ ______________________

j. $(d - 12)(d + 10)$ ______________________

k. $(r + 5)(r - 5)$ ______________________

l. $(8 + u)(8 - u)$ ______________________

m. $(x + 9)(x - 9)$ ______________________

n. $(a + 5b)(a - 5b)$ ______________________

o. $(5x + y)(5x - y)$ ______________________

p. $(3c + d)(3c - d)$ ______________________

q. $(3a + 2b)(3a - 2b)$ ______________________

r. $(2x + 3z)(2x - 3z)$ ______________________

s. $\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{5}\right)\left(\frac{x}{3}-\frac{y}{5}\right)$ ______________________________

t. $\left(\frac{5a}{x}+\frac{y}{2b}\right)\left(\frac{5a}{x}-\frac{y}{2b}\right)$ ______________________________

u. $\left(\frac{y}{5}+\frac{3}{x}\right)\left(\frac{y}{5}-\frac{3}{x}\right)$ ______________________________

v. $\left(\frac{m^2}{3}+\frac{2}{5m}\right)\left(\frac{m^2}{3}-\frac{2}{5m}\right)$ ______________________________

w. $\left(\frac{3m^2}{4}+\frac{2n^4}{3}\right)\left(\frac{3m^2}{4}-\frac{2n^4}{3}\right)$ ______________________________

2. Efectúa las siguientes operaciones :

a. $(b+4)^2$ ______________________________

b. $(b-4)^2$ ______________________________

c. $(5-c)^2$ ______________________________

d. $(5-2c)^2$ ______________________________

e. $(3d+2)^2$ ______________________________

f. $(2d-3)^2$ ______________________________

g. $(2xy-7)^2$ ______________________________

h. $(6ab-6)^2$ ______________________________

i. $(x+2y)^2$ ______________________________

j. $(2x-3)^2$ ______________________________

k. $(a + 3b)^2$ ______________________________

l. $(3x + 2)^2$ ______________________________

m. $(3a - 1)^2$ ______________________________

n. $(3m - 2n)^2$ ______________________________

o. $(3m - 4n)^2$ ______________________________

p. $(4r - 3s)^2$ ______________________________

q. $(5h + 3k)^2$ ______________________________

3. Efectúa las siguientes operaciones :

a. $(x + y)^3$ ______________________________

b. $(c + d)^3$ ______________________________

c. $(m + n)^3$ ______________________________

d. $(x + 3)^3$ ______________________________

e. $(x - y)^3$ ______________________________

f. $(m - n)^3$ ______________________________

g. $(x - 3)^3$ ______________________________

h. $(2a + 1)^3$ ______________________________

i. $(3a - 2)^3$ ______________________________

j. $(2 - 2y)^3$ ______________________________

k. $(x - 2y)^3$ ______________________________

l. $(x^2 - y^2)^3$ ______

m. $(3a^x - 2y^a)^3$ ______

n. $(m^n + y^{2n})^3$ ______

o. $\left(\dfrac{2m^3}{5} + \dfrac{n^2}{4}\right)^3$ ______

p. $\left(\dfrac{2a}{5} - \dfrac{5b}{3}\right)^3$ ______

r. $\left(\dfrac{3m^2}{4} - \dfrac{4m^3}{9}\right)^3$ ______

s. $\left(\dfrac{a^x}{2} - \dfrac{b^3}{3}\right)^3$ ______

t. $\left(\dfrac{3^x}{a} - \dfrac{2^y}{b}\right)^3$ ______

u. $(3x^a - 2y^{n-1})^3$ ______

DIVISIÓN DE MONOMIOS :

Para dividir dos monomios, seguiremos los siguientes pasos :

1. Dividimos los coeficientes numéricos, teniendo en cuenta la ley de los signos para la división.

2. En la parte literal, aplicamos el concepto de cociente de potencias de igual base, que consiste en restar los exponentes de las partes literales del denominador, de los exponentes de las del numerador, siempre y cuando sean iguales.

Ejemplos : Efectuemos los siguientes cocientes indicados :

1. $$\frac{25x^2yz^3}{-5xz^2} = -5x^{2-1}yz^{3-2}$$
$$= -5xyz$$

2. $$\frac{-13xy^4z^4}{-26y^3z^2} = \frac{1}{2}xy^{4-3}z^{4-2}$$
$$= \frac{1}{2}xyz^2$$

3. $$\frac{18x^{m+3}y^{m-1}}{9x^4y^2} = 2x^{m+3-4}y^{m-1-2}$$
$$= 2x^{m-1}y^{m-3}$$

4. $$\frac{-21x^{m+n}y^{m-n}}{3x^{2n}y^{m-2n}} = -7x^{m+n-2n}y^{m-n-(m-2n)}$$
$$= -7x^{m-n}y^{m-n-m+2n}$$
$$= -7x^{m-n}y^{n}$$

ACTIVIDAD : Solucionar el numeral 1 del taller #5.

DIVISIÓN DE UN POLINOMIO POR UN MONOMIO :

Para dividir un polinomio por un monomio, dividimos cada término del polinomio por el monomio, según la regla establecida para la división de monomios.

1. $$\frac{25xy^2 - 15x^2y + 20x\ y^2}{5xy} = \frac{25xy^2}{5xy} - \frac{15x\ y}{5xy} + \frac{20x^2y^2}{5xy}$$

$$= 5y - 3x + 4xy$$

2. $$\frac{16x^2 - 24x^3 + 18x^4}{2x^2} = \frac{16x^2}{2x^2} - \frac{24x^3}{2x^2} + \frac{18x^4}{2x^2}$$

$$= 8 - 12x + 9x^2$$

3. $$\frac{2x^m - 3x^{m+2} - 6x^{m+4}}{3x^3} = \frac{2x^m}{3x^3} - \frac{3x^{m+2}}{3x^3} - \frac{6x^{m+4}}{3x^3}$$

$$= \frac{2}{3}x^{m-3} - x^{m+2-3} - 2x^{m+4-3}$$

$$= \frac{2}{3}x^{m-3} - x^{m-1} - 2x^{m+1}$$

ACTIVIDAD : Solucionar el numeral 2 del taller #5.

DIVISIÓN DE POLINOMIO POR POLINOMIO :

Para hallar el cociente de dos polinomios seguiremos los siguientes pasos :

1. Se ordenan los dos polinomios en orden descendente.

2. Si en el polinomio dividendo, hacen falta términos, se completan esas casillas con ceros.
3. Se halla el cociente entre el primer término del dividendo y el primer término del divisor y se escribe en el cociente.
4. Este resultado se multiplica por cada uno de los términos del divisor y el resultado se resta del dividendo.
5. Se bajan los términos siguientes.

6. Se repite nuevamente el proceso hasta que el polinomio del residuo sea de menor grado que el polinomio del divisor o sea cero.

<u>Ejemplo 1 :</u> Efectuemos la división indicada por : $(x^2 + 2x - 3) \div (x + 3)$.

Solución :

$$
\begin{array}{r|l}
x^2 + 2x - 3 & x + 3 \\ \cline{2-2}
-x^2 - 3x \quad & x - 1 \\ \cline{1-1}
-x - 3 & \\
x + 3 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

x es el resultado de dividir x^2 entre x.

-1 es el resultado de dividir $-x$ entre x.

$$
\text{Luego; } \begin{array}{ccccccc}
x^2 + 2x - 3 & = & (x-1) & . & (x+3) & + & 0 \\
\text{Dividendo} & & \text{Cociente} & & \text{Divisor} & & \text{Residuo}
\end{array}
$$

Ejemplo 2 : Efectuemos la división indicada por: $(-2x^4 + 3x^2 - 1) \div (x^2 - x + 1)$.

Solución :

$$
\begin{array}{r|l}
-2x^4 + 0x^3 + 3x^2 + 0x - 1 & x^2 - x + 1 \\ \cline{2-2}
2x^4 - 2x^3 + 2x^2 & -2x^2 - 2x + 3 \\ \cline{1-1}
-2x^3 + 5x^2 + 0x - 1 & \\
2x^3 - 2x^2 + 2x & \\ \cline{1-1}
3x^2 + 2x - 1 & \\
-3x^2 + 3x - 3 & \\ \cline{1-1}
5x - 4 &
\end{array}
$$

$-2x^2$ es el resultado de dividir $-2x^4$ entre x^2.
$-2x$ es el resultado de dividir $-2x^3$ entre x^2.
3 es el resultado de dividir $3x^2$ entre x^2.

Puesto que el grado del divisor es dos, la división termina cuando el residuo es de grado menor que el divisor. En nuestro ejemplo $5x - 4$ es grado uno. Luego ;

$$
\underbrace{-2x^4 + 0x^3 + 3x^2 + 0x - 1}_{\text{Dividendo}} = \underbrace{(-2x^2 - 2x + 3)}_{\text{Cociente}} \cdot \underbrace{(x^2 - x + 1)}_{\text{Divisor}} + \underbrace{(5x - 4)}_{\text{Residuo}}
$$

ACTIVIDAD : Solucionar El numeral 3 del taller #5.

TALLER 5

1. Efectúa las siguientes divisiones indicadas.

   a. $x^7 \div x^2$ ______________________

   b. $y^5 \div y^3$ ______________________

   c. $w^8 \div w^5$ ______________________

   d. $t^9 \div t^6$ ______________________

   e. $(a^4b^5) \div (ab^2)$ ______________________

   f. $(32a) \div (4a)$ ______________________

   g. $(32a^4) \div (-8a^3)$ ______________________

   h. $(7xy) \div (-7xy)$ ______________________

   i. $(15x^2y^5z^7) \div (5xy^3z^4)$ ______________________

   j. $(18a^9b^8c^3) \div (6a^6b^5c)$ ______________________

   k. $(24a^5b^7c^9) \div (6ab^6c^9)$ ______________________

   l. $(24a^3b^7c^4) \div (18a^2b^3c^2)$ ______________________

   m. $(-6x^2y^2z^2) \div (2xy^2z^2)$ ______________________

   n. $(15a^6x^6y^6) \div (-5a^5x^2y^4)$ ______________________

   o. $(-x^5y^8) \div (-x^3y^2)$ ______________________

   p. $(35x^5y^{10}z^4) \div (-7x^4y^8z^3)$ ______________________

2. Efectúa las siguientes divisiones.

a. $(2x - 4) \div 2$ ____________

b. $(3a - 6) \div (-3)$ ____________

c. $(-7x^3 + 7x^2) \div (-7x)$ ____________

d. $(45x^2 - 15) \div 15$ ____________

e. $(15x^2 - 45x) \div 15x$ ____________

f. $(27xy - 18y^2) \div 9y$ ____________

g. $(8a^2 - 4a + 12) \div 4$ ____________

h. $(x^3 - 7x^2 + 10x) \div (-x)$ ____________

i. $(30a^4 - 33a^3 + a^2) \div 3a^2$ ____________

j. $(6a^8 - 4a^6 + 2a^2) \div a^2$ ____________

k. $(30a^6 - 36a^5) \div 6a^4$ ____________

l. $(40a^3b^2 - 44a^2b) \div 4ab$ ____________

m. $(a^2 - a\,b - ac) \div (-a)$ ____________

n. $(3x^3 - 9xy - 6x) \div 3x$ ____________

3. Efectúa las siguientes divisiones indicadas.

a. $(2x^3 - 7x + 6) \div (x - 2)$ ____________

b. $(2a^2 - a - 15) \div (2a + 5)$ ____________

c. $(2a^2 - 3ab - 2b^2) \div (2a + b)$ ____________

d. $(2y^3 - 7y^2 + 9y - 3) \div (y^2 - 3y + 3)$ ____________

e. $(3y^3 - y^2 + 7y + 6) \div (y^2 - y + 3)$ ____________________

f. $(2y^3 - 9y^2 + 11y - 6) \div (y - 3)$ ____________________

g. $(y^4 + 3y^3 - 3y + 1) \div (y^2 + y - 1)$ ____________________

h. $(x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 11x + 3) \div (x^2 - 2x + 3)$ ____________________

i. $(t^4 - t^2 + 7t + 2) \div (t^3 - 2t^2 + 3t + 1)$ ____________________

j. $(2x^3 - 6x^2 - 3x^2y + 9xy - xy^2 + 3y^2) \div (x - 3)$ ____________________

k. $(2x^3 + x^2 - 4x^2y - 2xy + 10xy^2 + 5y^2) \div (x^2 - 2xy + 5y^2)$ ____________________

l. $(x^4 - 4x^3 + x^2 + 7x - 2) \div (x^3 - 2x^2 - 3x + 1)$ ____________________

m. $(2x^3 - x^2 - 8x - 2) \div (2x + 3)$ ____________________

n. $(3x^3 - 5x^2 - 3x - 1) \div (x^2 - x - 1)$ ____________________

o. $(4x^3 - 9x^2 + 14x - 5) \div (4x - 1)$ ____________________

p. $(2a^4 - 9a - 7 + 3a^2) \div (2a + a^2 - 1)$ ____________________

q. $(13m^3 + 15m + 6m^4 - 6) \div (2 - m + 2m^2)$ ____________________

r. $(7a^3 - 1 + 2a + 2a^4) \div (3a + a^2 - 1)$ ____________________

s. $(16x^5 - 40x - x^3 + 16) \div (x + 4x^2 - 6)$ ____________________

FACTORIZACIÓN

Factorizar un polinomio significa encontrar dos o más polinomios, tales que al multiplicarlos se obtenga el polinomio inicial.

CASOS DE FACOTORIZACIÓN :

1. FACTOR COMÚN : Una expresión algebraica se puede factorizar empleando la técnica del factor común, si todos los términos que la conforman poseen una parte común, ya sea numérica o literal.

   a. Si el factor común es solamente literal, procedemos de la siguiente manera:

      i. Se escoge como factor común el literal con su menor exponente.

      ii. Indicamos el producto de dos factores : el factor común y una expresión de igual número de términos que la original pero, cuyas partes literales han disminuido su exponente en una cantidad igual al exponente del literal que se tomó como factor común.

Ejemplo 1 : Factoricemos $2x^2 - 6x + 3x^3 - x^4$.

Solución : El factor común es el literal x con exponente 1. Luego;

$$2x^2 - 6x + 3x^3 - x^4 = x(2x^{2-1} - 6x^{1-1} + 3x^{3-1} - x^{4-1})$$

$$2x^2 - 6x + 3x^2 - x^4 = x(2x - 6 + 3x^2 - x^3)$$

Observamos que en el segundo término del paréntesis ha desaparecido el literal x. ¿por qué?.

Ejemplo 2 : Factoricemos $2x^3y^4 - 3x^4y^2 + x^3y^2 + x^4y^3$.

Solución : El factor común es el literal x^3y^2. Luego;

$$2x^3y^4 - 3x^4y^2 + x^3y^2 + x^4y^3 = x^3y^2(2x^{3-3}y^{4-2} - 3x^{4-3}y^{2-2} + x^{3-3}y^{2-2} + x^{4-3}y^{3-2})$$

$$2x^3y^4 - 3x^4y^2 + x^3y^2 + x^4y^3 = x^3y^2(2y^2 - 3x + 1 + xy)$$

Observemos que en el tercer término del paréntesis ha desaparecido la parte literal. ¿por qué?

b. Si el factor común es numérico :

   i. Se escoge como factor común el M.C.D. de los coeficientes numéricos en los términos de la expresión.

   ii. Indicamos el producto de dos factores : el factor común y una expresión de igual numero de términos que la original, pero cuyos coeficientes queden divididos por el número que hace las veces de factor común.

Ejemplo 1: Factoricemos $2x^2y + 6x + 8y$.

Solución : El factor común es el M.C.D de 2,6 y 8 que es 2. Luego;

$$2x^2 + 6x + 8y = 2\left(\frac{2x^2}{2} + \frac{6x}{2} + \frac{8y}{2}\right)$$

$$2x^2 + 6x + 8y = 2(x^2 + 3x + 4y)$$

Ejemplo 2: Factoricemos $16d + 48d^2 + 80x^4$.

Solución : El factor común es el M.C.D. de 16,48 y 80 que es 16.

$$16d + 48d^2 + 80x^4 = 16\left(\frac{16d}{16} + \frac{48d^2}{16} + \frac{80x^4}{16}\right)$$

$$16d + 48d^2 + 80x^4 = 16d + 3d^2 + 5x^4$$

c. El factor común posee parte numérica y parte literal.

Este caso es una combinación de los dos anteriores, por lo que para su solución se tendrá en cuenta el procedimiento seguido para el factor común numérico y para el factor común literal.

Ejemplo 1: Factoricemos $12x^3y - 24x^3y^3 + 36x^4y^3$.

Solución : El factor común es $12x^3y$, porque el M.C.D. de 12,24 y 36 es 12 y (x^3y) es el literal común con menor exponente.

$$12x^3y - 24x^3y^3 + 36x^4y^3 = 12^3y\left(\frac{12x^{3-3}y^{1-1}}{12} - \frac{24x^{3-3}y^{3-1}}{12} + \frac{36x^{4-3}y^{3-1}}{12}\right)$$

$$12x^3y - 24x^3y^3 + 36x^4y^3 = 12x^3y(1 - 2y^2 + 3xy^2$$

Ejemplo 2: Factoricemos $14m + 21mn - 28\ m^2$.

Solución : El factor común es 7m, porque el M.C.D. de 14,21 y 28 es 7 y m es el literal común con menor exponente.

$$14m + 21mn - 28m^2 = 7m\left(\frac{14m^{1-1}}{7} + \frac{21m^{1-1}n}{7} - \frac{28m^{2-1}}{7}\right)$$

$$= 7m(2 + 3n - 4m)$$

d. Factor común donde interviene un binomio.

Ejemplo 1: Factoricemos $x(x + 2) - 3(x + 2)$.

Solución : El binomio que actúa como factor común es $(x+2)$. Luego;

$$x(x+2) - 3(x+2) = \left(x + 2\left[\frac{x(x+2)}{(x+2)} - \frac{3(x+2)}{(x+2)}\right]\right)$$

$$x(x+2) - 3(x+2) = (x + 2)(x - 3)$$

Ejemplo 2: Factoricemos $3m(m - 8) - 6(m - 8)$.

Solución : El factor común es $3(m - 8)$, porque el M.C.D. de 3 y 6 es 3 y $(m - 8)$ es el binomio común. luego;

$$3m(m-8) - 6(m-8) = 3(m-8)\left[\frac{3m(m-8)}{3\,(m-8)} - \frac{6(m-8)}{3(m-8)}\right]$$

$3m(m-8)-6(m-8) \quad = \quad 3(m-8)(m-2)$

<u>ACTIVIDAD :</u> Solucionar el numeral 1 del taller #6.

2. <u>AGRUPACIÓN DE TÉRMINOS:</u> Para Este caso necesitamos que la expresión que se va a factorizar tenga un número de términos tal, que con ellos se puedan formar grupos de igual cantidad de elementos.

   Los pasos a seguir son los siguiente :

   a. Se forman los grupos (con igual cantidad de elementos cada uno), teniendo en cuenta que los términos agrupados deben tener un factor común.

   b. Se saca el respectivo factor común en cada grupo. La expresión resultante debe tener como característica, todos los términos que aparecen dentro de signos de agrupación, sean idénticos.

   c. A la expresión anteriormente nombrada se le saca nuevamente factor común en la misma forma como se procedió en el caso en que intervienen binomios en el factor común.

<u>Ejemplo 1:</u> Factoricemos la expresión : $ab + ac + 3b + 3c$.

Solución:

$ab+ac+3b+3c = (ab+ac)+(3b+3c)$	Formamos dos grupos de dos términos Cada uno.
$ab+ac+3b+3c = a(b+c)+3(b+c)$	Cada grupo tiene un factor común : a, en el primer grupo, y 3 en el segundo.
$ab+ac+3b+3c = (b+c)(a+3)$	Aplicando nuevamente el factor común, (b+c) en este caso.

<u>Ejemplo 2:</u> Factoricemos $7xy + 14y - 11zx - 22z$.

Solución :

$7xy - 14y + 11zx - 22z = (7xy + 14y) - (11zx + 22z)$	Formando dos grupos de dos términos cada uno

$7xy - 14y + 11zx - 22z = 7y(x+2) - 11z(x+2)$ Cada grupo tiene un factor común : 7y, en el primer grupo, y 11z en el segundo.

$7xy - 14y + 11zx - 22z = (x+2)(7y-11z)$ Aplicando nuevamente el factor común, (x+2) en este caso.

Ejemplo 3 : Factoricemos $2ab + 2a - b - 2ac + c - 1$.

Solución :

$2ab+2a-b-2ac+c-1 = (2ab - b) - (2ac-c)+(2a - 1)$ Formamos tres grupos de dos términos cada un

$2ab+2a-b-2ac+c-1 = b(2a-1)-c(2a-1)+(2a-1)$ Extrayendo el factor común a cada término.

$2ab+2a-b-2ac+c-1 = (2a-1)(b-c+1)$ Nuevamente extraemos el factor común.

Ejemplo 4 : Factoricemos $2y^2 - 5xy + xy^2 + 3x - 10y + 6$.

Solución :

$$2y^2 - 5xy + xy^2 + 3x - 10y + 6 = (2y + xy^2) - (5xy + 10y) + (3x + 6)$$

$$2y^2 - 5xy + xy^2 + 3x - 10y + 6 = y^2(2 + x) - 5y(x + 2) + 3(x + 2)$$

$$2y^2 - 5xy + xy^2 + 3x - 10y + 6 = (x + 2)(y^2 - 5y + 3)$$

ACTIVIDAD : Solucionar El numeral 2 del taller #6

3. DIFERENCIA DE CUADRADOS : Recordemos que al multiplicar expresiones de la forma $(a + b)(a - b)$ obtenemos resultados del tipo $a^2 - b^2$. Es decir; $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

Observamos que el producto de los dos primeros binomios da como resultado un tercer binomio en el que cada término está elevado al cuadrado, además , tienen signos distintos, es decir, el resultado es una diferencia de cuadrados.

COMO SE CONOCE : Un binomio es una diferencia de cuadrados si :

a. Sus términos tienen distinto signo.
b. A ellos se les puede extraer raíz cuadrada exacta.

COMO SE FACTORIZA :

a. Extraemos la raíz cuadrada a cada término.
b. Se descompone la diferencia de cuadrados en dos factores, la suma de las raíces cuadradas por la diferencia de las mismas.

Ejemplo 1 : Factoricemos $x^2 - 49$.

Solución : Verifiquemos si es una diferencia de cuadrados.

Hallamos la raíz cuadrada del primer término : x
Hallamos la raíz cuadrada del segundo término : 7
Suma de las raíces cuadradas : $x + 7$
Diferencia de las raíces cuadradas : $x - 7$
Como la diferencia de cuadrados es igual a la suma por la diferencia de las raíces Cuadradas, tenemos : $x^2 - 49 = (x + 7)(x - 7)$

Ejemplo 2 : Factoricemos $36x^2 - 64$.

Solución : Verifiquemos si es una diferencia de cuadrados.

Hallamos la raíz cuadrada del primer término : $6x$
Hallamos la raíz cuadrada del segundo término : 8
Suma de las raíces cuadradas : $6x + 8$
Diferencia de las raíces cuadras : $6x - 8$
Como la diferencia de cuadrados es igual a la suma de las raíces por la diferencia de Las mismas, tenemos : $36x^2 - 64 = (6x + 8)(6x - 8)$

Pero cada binomio tiene un factor común, lo extraemos : $36x^2 - 64 = 2(3x + 4)\ 2(3x - 4)$

Finalmente : $36x^2 - 64 = 4(3x + 4)(3x - 4)$

Ejemplo 3 : Factoricemos $(x + 4)^2 - (x - 2)^2$.

Solución : Verifiquemos si es una diferencia de cuadrados.

Hallamos la raíz cuadrada del primer término : $(x + 4)$
Hallamos la raíz cuadrada del segundo término : $(x - 2)$
Como la diferencia de cuadrados es igual a la
Suma de las raices por la diferencia de ellas, tenemos:

$$(x + 4)^2 - (x - 2)^2 = [(x + 4) + (x - 2)][(x + 4) - (x - 2)]$$

Destruyendo paréntesis : $= [x + 4 + x - 2][x + 4 - x + 2]$

Reduciendo términos semejantes : $= (2x + 2)6$
$= 12(x + 1)$

Ejemplo 4 : Factoricemos $\frac{x^2}{36} - \frac{25}{49}$.

Solución : Verifiquemos si es una diferencia de cuadrados.

Hallemos la raíz cuadrada del primer término : $\frac{x}{6}$

Hallemos la raíz cuadrada del segundo término : $\frac{5}{7}$

Suma de las raíces cuadradas : $\frac{x}{6} + \frac{5}{7}$

Diferencia de las raíces cuadradas : $\frac{x}{6} - \frac{5}{7}$

Como la diferencia de cuadrados es igual
A la suma de las raices por la diferencia de ellas,
Tenemos :

$$\frac{x^2}{36} - \frac{25}{49} = \left(\frac{x}{6} + \frac{5}{7}\right)\left(\frac{x}{6} - \frac{5}{7}\right)$$

ACTIVIDAD : Solucionar el numeral 3 del taller #6.

4. <u>SUMA DE CUBOS :</u> La expresión $a^3 + b^3$, se denomina suma de cubos.

<u>COMO SE CONOCE :</u>

a. Los dos términos están separados por el signo más (+).
b. A cada término se le puede extraer raíz cúbica exacta.

<u>COMO SE FACTORIZA :</u>

a. Su factorización es el producto indicado de un binomio y un trinomio.
b. El binomio se forma por las raíces cúbicas de los términos.
c. El trinomio se forma por el cuadrado de la raíz cúbica del primer término, menos el producto de las raíces cúbicas, más el cuadrado de la raíz cúbica del segundo término.

En símbolos : $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

<u>Ejemplo 1 :</u> Factoricemos $x^3 + 64$.

Solución : La expresión $x^3 + 64$ es equivalente a $x^3 + 4^3$, o sea, una suma de cubos. Luego;

Raíz cúbica del primer término : x
Raíz cúbica del segundo término : 4
Suma de las raíces cúbicas : $(x + 4)$
Cuadrado de la raíz cúbica del primer término : x^2
Producto de las raíces cúbicas : $4x$
Cuadrado de la raíz cúbica del segundo término : 16
Aplicando la regla de cómo se factoriza, tenemos :

$$x^3 + 64 = (x + 4)(x^2 - 4x + 16)$$

<u>Ejemplo 2 :</u> Factoricemos $125\,x^3 + 8$.

Solución : La expresión $125x^3 + 8$ es equivalente a $5^3x^3 + 2^3$, o sea, una suma de cubos. Luego;

Raíz cúbica del primer término : $5x$
Raíz cúbica del segundo término : 2

Suma de las raíces cúbicas : $5x + 2$
Cuadrado de la raíz cúbica del primer término : $25x^2$
Producto de las raíces cúbicas : $10x$
Cuadrado de la raíz cúbica del segundo término : 4
Aplicando la regla de cómo se factoriza, tenemos :

$125x^3 + 8 = (5x + 2)(25x^2 - 10x + 4)$

5. DIFERENCIA DE CUBOS : En forma análoga al caso anterior, la expresión $a^3 - b^3$ se denomina diferencia de cubos.

COMO SE CONOCE :

a. A cada término se le puede extraer raíz cúbica exacta.
b. Los dos términos están separados por el signo menos.

COMO SE FACTORIZA :

a. Su factorización es el producto indicado de un binomio y un trinomio.
b. El binomio se forma por la diferencia de la raíz cúbica del primer término y la raíz cúbica del segundo término.
c. El trinomio se forma con el cuadrado de la raíz cúbica del primer término, más el producto de las raíces cúbicas más el cuadrado de la raíz cúbica del segundo término.

Ejemplo 1 : Factoricemos $27x^6 - 125y^6$.

Solución : La expresión $27x^6 - 125y^6$ es equivalente a $(3x^2)^3 - (5y^2)^3$, o sea una diferencia de cubos.

Raíz cúbica del primer término : $3x^2$
Raíz cúbica del segundo término : $5y^2$
Diferencia de las raíces cúbicas : $3x^2 - 5y^2$
Cuadrado de la raíz cúbica del primer término : $9x^4$
Producto de las raíces cúbicas : $15x^2y^2$
Cuadrado de la raíz cúbica del segundo término : $25y^4$
Aplicando la regla de cómo se factoriza, tenemos :

$27y^6 - 125y^6 = (3x^2 - 5y^2)\ (9x^4 + 15x^2y^2 + 25y^4$

Ejemplo 2 : Factoricemos $\frac{27x^3}{64} - \frac{8y^3}{125}$.

Solución :

Raíz cúbica del primer término : $\frac{3x}{4}$

Raíz cúbica del segundo término : $\frac{2y}{5}$

Diferencia de las raíces cúbicas : $\frac{3x}{4} - \frac{2y}{5}$

Cuadrado de la raíz cúbica del primer término : $\frac{9x^2}{16}$

Producto de las raíces cúbicas : $\frac{6xy}{20}$ ó $\frac{3xy}{10}$

Cuadrado de la raíz cúbica del segundo término : $\frac{4y^2}{25}$

Aplicando la regla de cómo se factoriza, tenemos :

$$\frac{27x^3}{64} - \frac{8y^3}{125} = \left(\frac{3x}{4} - \frac{2y}{5}\right)\left(\frac{9x^2}{16} + \frac{3xy}{10} + \frac{4y}{25}\right)$$

ACTIVIDAD : Solucionar el numeral 4 del taller #6.

6. TRINOMIO CUADRADO PERFECTO : Un trinomio que se obtiene al elevar un binomio al cuadrado se llama trinomio cuadrado perfecto.

Por ejemplo : $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$, $(x + y)$ es el binomio que se eleva al cuadrado, y $x^2 + 2xy + y^2$ es el trinomio cuadrado perfecto.

COMO SE CONOCE :

a. La expresión debe estar ordenada (en forma ascendente o descendente).
b. Los términos primero y tercero deben poseer igual signo (+) y raíz cuadrada exacta.
d. El segundo término debe ser igual al doble producto de las raíces cuadradas de los términos primero y tercero.

COMO SE FACTORIZA :

La factorización es un binomio elevado al cuadrado, donde :

i. El primer término del binomio corresponde a la raíz cuadrada del primer término del trinomio.
ii. El signo del binomio será el signo del segundo término del trinomio.
iii. El segundo término del binomio corresponde a la raíz cuadrada del tercer término del trinomio.

Ejemplo 1: Factoricemos $x^2 + 12x + 36$.

Solución : La expresión está ordenada. El primer y tercer término tienen signo positivo.

Raíz del primer término : x
Raíz del tercer término : 6
Doble producto de las raíces cuadradas : $(2)(x)(6) = 12x$
Luego, la expresión es un trinomio cuadrado perfecto.

Aplicando la regla de cómo se factoriza : $x^2 + 12x + 36 = (x + 6)^2$

Ejemplo 2 : Factoricemos $-16x^2 + 40x - 25$.

Solución : Como los términos primero y tercero tienen signo negativo, agrupamos la expresión en un paréntesis precedido por el signo menos (-).

$$-(16x^2 - 40x + 25)$$

Raíz cuadrada del primer término : 4x
Raíz cuadrada del tercer término : 5
Doble producto de las raíces cuadradas : $(2)(4x)(5) = 40x$

Luego; la expresión se puede factorizar : $-(16x^2 - 40x + 25) = -(4x - 5)^2$

Ejemplo 3 : Factoricemos $\dfrac{x^2}{25} - \dfrac{6xy}{5} + 9y^2$.

Solución :

Raíz cuadrada del primer término : $\dfrac{x}{5}$

Raíz cuadrada del tercer término : 3y

Doble producto de las raíces cuadradas . (2) $\left(\frac{x}{5}\right)(3y) = \frac{6xy}{5}$

Luego, la expresión se puede factorizar . $\frac{x^2}{25} - \frac{6xy}{5} + 9y^2 = \left(\frac{x}{5} - 3y\right)^2$

Ejemplo 4 : Factoricemos $\frac{x^2}{9} - \frac{2x}{3} + 1$

Solución

Raíz cuadrada del primer término . $\frac{x}{5}$

Raíz cuadrada del tercer término 1

Doble producto de las raíces cuadradas n (2) $\left(\frac{x}{3}\right)(1) = \frac{2x}{3}$

Luego, la expresión se puede factorizar . $\frac{x^2}{9} - \frac{2x}{3} + 1 = \left(\frac{x}{3} - 1\right)^2$

ACTIVIDAD : Solucionar el numeral 5 del taller #6.

7. TRINOMIO DE LA FORMA $x^{2n} + bx^n + c$:

COMO SE CONOCE :

a. La expresión algebraica debe estar ordenada en forma descendente
b. El primer término del trinomio debe ser positivo y debe tener raíz cuadrada exacta.
c. La variable, que aparece en el segundo término, debe corresponder a la raíz cuadrada del primer término del trinomio.
d. El tercer término es independiente de la letra que aparece en el primero y segundo términos y es una cantidad cualquiera, positiva o negativa.

COMO SE FACTORIZA :

a. La factorización son dos factores binomios cuyo primer término es x^n , o sea , la raíz cuadrada del primer término del trinomio.

b. En el primer binomio, después de x^n se escribe el signo del segundo término del trinomio, y en el segundo binomio, el signo del resultado de multiplicar los signos de los términos segundo y tercero del trinomio.
c. Si los dos binomios tienen en el medio signos iguales, se buscan dos números cuya suma sea igual al segundo término del trinomio y cuyo producto sea el tercer término del trinomio. Estos números son los segundos términos de los binomios.
d. Si los dos binomios tienen en el medio signos distintos, se buscan dos números cuya diferencia sea el segundo término del trinomio y cuyo producto sea el tercer término del trinomio.
El mayor de estos números es el segundo término del primer binomio, y el menor, el segundo término del segundo binomio.

En símbolos . $x^{2n} + bx^n + c = (x^n + M)(x^n + m)$.

M y m representan dos números (mayor y menor, respectivamente) tales que $M + m = b$ y $Mxm = c$.

NOTA : Si no existen números que cumplan con las dos últimas condiciones, la expresión no es factorizable por este método.

Ejemplo 1 : Factoricemos $x^2 + 6x + 8$.

Solución : La expresión está ordenada en forma descendente.
El primer término es positivo y tiene raíz cuadrada exacta : x
La variable que aparece en el segundo término (x), corresponde a la raíz cuadrada del primer término.
Luego; la expresión tiene posibilidades de ser factorizada como :

$X^2 + 6x + 8 = (x + M)(x + m)$.

Hallemos (si existen) los números M y m. Estos números sumados algebraicamente deben ser igual a 6 y multiplicados deben ser igual a 8.
Los números son 4 y 2 porque, $4 + 2 = 6$ y $4 \times 2 = 8$, o sea, $M = 4$ y $m = 2$.
Por lo tanto : $x^2 + 6x + 8 = (x + 4)(x + 2)$.

Ejemplo 2. Factoricemos $x^2 + x - 2$

Solución. La expresión cumple con todas las normas iniciales, por lo que se puede decir que su factorización de ser posible tiene la forma
$X^2 + x - 2 = (x + M)(x + m)$
Ahora, buscamos dos números cuya suma algebraica sea 1 y su producto sea 2.
Dichos números son $M = 2$ y $m = 1$ Luego,
$X^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$

ACTIVIDAD. Solucionar el numeral 6 del taller #6

7 TRINOMIO DE LA FORMA $ax^{2n} + bx^n + c$

COMO SE CONCE.

a. Estar ordenado en forma descendente
b. El primer término tiene que ser positivo, poseer un coeficiente (a) diferente de uno (1) y la parte literal tener raíz cuadrada exacta.
c. La parte literal del segundo término del trinomio debe corresponder a la raíz cuadrada de la parte literal del primer término.
d. El tercer término una cantidad cualquiera, positiva o negativa.

COMO SE FACTORIZA:

Conocida la f horma del trinomio, para poder factorizarlo, se debe transformar a una semejante a la del caso anterior.
El procedimiento es el siguiente

Trinomio original . $ax^{2n} + bx^n + c$
Multiplicamos y dividimos la expresión por el
Coeficiente del primer término : $\dfrac{a\left(ax^{2n} + bx^n + c\right)}{a}$

Multiplicando : $\dfrac{a^2x^{2n} + abx^n + ac}{a}$

Esta expresión se puede escribir de la forma : $\dfrac{\left(ax^n\right)^2 + b\left(ax^n\right) + ac}{a}$

La expresión del numerador tiene la forma del caso anterior, luego, se puede factorizar de la forma : $(x^n + M)(x^n + m)$.

$$ax^{2n} + bx^n + c = \frac{(ax^n + M)(ax^n + m)}{a}$$

Los números M y m deben cumplir $M + m = b$; $M \times m = ac$.

Como último paso en el proceso de factorización, buscamos un factor común en uno o ambos binomios, para simplificarlos con el denominador a.

NOTA . Si no se encuentran dos números que satisfagan las condiciones ($M + m = b$ y $M \times m = ac$), la expresión no es factorizable por este método.

Ejemplo 1 : Factoricemos $2x^2 + 7x + 3$

Solución la expresión cumple con las condiciones de orden, signo del primer término y raíz cuadrada de la parte literal del primer término

Expresión dada	$2x^2 + 7x + 3$
Multiplicando y dividiendo la expresión por 2	$\frac{2(2x^2 + 7x + 3)}{2}$
Efectuando el producto en el primer y tercer Término e indicando el del segundo	$\frac{4x^2 + 7(2x) + 6}{2}$
Expresando el numerador en la forma del Caso anterior	$\frac{(2x)^2 + 7(2x) + 6}{2}$
Factorizamos el numerador	$\frac{(2x + M)(2x + m)}{2}$
Buscamos dos números cuy producto sea 6 Y la suma algebraica, 7. Estos números son $M = 6$ y $m = 1$	$\frac{(2x + 6)(2x + 1)}{2}$
Extraemos factor común en el primer binomio	: $\frac{2(x + 3)(2x + 1)}{2}$
Simplificando el dos del numerador con el dos Del denominador	: $(x + 3)(2x + 1)$

Luego; $2x^2 + 7x + 3 = (x + 3)(2x + 1)$.

Ejemplo 2 : Factoricemos $6x^2 - x - 12$.

Solución : Verificado el cumplimiento de las condiciones del trinomio, procedemos :

Expresión dada	: $6x^2 - x - 12$
Multiplicando y dividiendo por 6	$\dfrac{6(6x^2 - x - 12)}{6}$
Efectuando	$\dfrac{36x^2 - (6x) - 72}{6}$
Factorizando el numerador	$\dfrac{(6x-9)(6x+8)}{6}$
Extraemos factor común en ambos binomios	$\dfrac{3(2x-3)2(3x+4)}{6}$
Simplificando	$(2x-3)(3x+4)$

Luego; $6x^2 - x - 12 = (2x-3)(3x+4)$

Ejemplo 3 : Factoricemos $6x^2 - 11x + 3$.

Solución : Con lo que se ha trabajado, ya el lector es capaz de identificar los pasos que se dan en el procedimiento de este ejemplo y del siguiente.

$$6x^2 - 11x + 3 = \frac{6(6x^2 - 11x + 3)}{6}$$

$$6x^2 - 11x + 3 = \frac{36x^2 - 11(6x) + 18}{6}$$

$$6x^2 - 11x + 3 = \frac{(6x) - 11(6x) + 18}{6}$$

$$6x^2 - 11x + 3 = \frac{(6x-9)(6x-2)}{6}$$

$$6x^2 - 11x + 3 = \frac{3(2x-3)2(3x-1)}{6}$$

$$6x^2 - 11x + 3 = (2x-3)\,(3x-1)$$

Ejemplo 4 : Factoricemos $3x^2 + 5x - 2$

Solución :

$$3x^2 + 5x - 2 = \frac{3(3x^2 + 5x - 2)}{3}$$

$$3x^2 + 5x - 2 = \frac{9x^2 + 5(3x) - 6}{3}$$

$$3x^2 + 5x - 2 = \frac{(3x)^2 + 5(3x) - 6}{3}$$

$$3x^2 + 5x - 2 = \frac{(3x + 6)(3x - 1)}{3}$$

$$3x^2 + 5x - 2 = \frac{3(x + 2)(3x - 1)}{3}$$

$$3x^2 + 5x - 2 = (x + 2)(3x - 1)$$

TALLER No. 6

1. Factorizar las siguientes expresiones.

01 . $xz + xy - x^2$ ____________________

02 . $4x^2 + 2xy - 6xy^2$ ____________________

03 . $2a^3b^2 + 8a^2b^3 - 12a^3b^3$ ____________________

04 . $9x^2y^2 + 15xy^4$ ____________________

05 . $-8x^4yz^2 - 4x^3y^3z^2$ ____________________

06 . $9x^2y^2z^2 - 9x^2y^2$ ____________________

07 . $48xy - 8x^3y - 20x^2y$ ____________________

08 . $12a^3y^2 + 45ab^2y$ ____________________

09. $ax + bx - cx$ ____________________

10 . $8a^3 + 10a^2 - 2a$ ____________________

11 . $a^2bc - ab^2c + abc^2$ ____________________

12 . $12x^3 + 3x^2y - 21xy^2$ ____________________

13 . $45b^2 + 15b - 15$ ____________________

14 . $9m^2n^2 - 27mn + 63$ ____________________

15 . $14a^4b + 12a^3b^2 + 8a^2b^4$ ____________________

16 . $18a^5 - 6a^4b + 9a^3b^2$ ____________________

17 . $(a+b)x + (a+b)y$ ____________________

18 . $(c-d)m - (c-d)\,2n$ ____________________

19 . $x(2a+b) - 15(2a+b)$ ____________________

20 . $(x+y)2z + (x+y)4z^2$ ____________________

21 . $(a+b)(a-b) + (a+b)b$ ____________________

22 . $a(x^2-y) + 2b(x^2 - y)$ ____________________

23 . $(a+5)(x-y) + (b-3)(x-y)$ ____________________

24 . $2c(2a+b) - d(2a+b)$ ____________________

2. Factorizar las siguientes expresiones.

01 . $mn + m + n + 1$ ____________________

02 . $ab + 3a + b + 3$ ____________________

03 . $x^2 + x - xy - y$ ______________________

04 . $rs + 6s - r - 6$ ______________________

05 . $c^2 - 3cd + c - 3d$ ______________________

06 . $2x^2 + 6xy - 5x - 15y$ ______________________

07 . $2h^2 + 6h - 5hk - 15k$ ______________________

08 . $ab - b^2 + ac - cb$ ______________________

09 . $6ut - 10st + 3ur - 5rs$ ______________________

10 . $6xy - 15y^2 + 2xz - 5yz$ ______________________

11 . $6a^2 - 3ab - 36ac + 18bc$ ______________________

12 . $21r^2 - 9rs + 35rz - 15zs$ ______________________

13 . $4m^2 - 5mn + 8mp - 10np$ ______________________

14 . $3ax - 5bx + 6ay - 10by$ ______________________

15 . $-2ax - 2ah - abx - abh$ ______________________

16 . $6ax - 3ay + 2bx - by$ ______________________

17 . $40zw + 8x^2w - 3\ 5z - 7x^2$ ______________________

18 . $18xy + 4yz + 9xw + 2zw$ ______________________

19 . $a^3 - a^2b + ab^2 - b^3$ ______________________

20 . $2x^2y + xy - 2xz - z$ ______________________

21 . $3ac - 6bd + 3ad - 6bc$ ______________________

22 . $7ax + ay - 7bx - by$ ______________________

23 . $2mx - 2my - nx + ny$ ______________________

24 . $8x^2 + 4xy - 2ax - ay$ ______________________

25 . $5ax^2 + 7axy - 5bxy - 7by^2$ ____________________________

26 . $x^2 - xy + xz - x + y - z$ ____________________________

27 . $h^2 - hk - hj - ph + pk + pj$ ____________________________

28 . $8r^3 - 16r^2s - 12rt - 6r^2 + 12rs + 9t$ ____________________________

29 . $m^2 - mn - mp + m - n - p$ ____________________________

3. Factorizar las siguientes expresiones.

01 . $r^2 - 25$ ____________________________

02 . $64 - u^2$ ____________________________

03 . $9 - x^2$ ____________________________

04 . $m^2 - 16y^2$ ____________________________

05 . $4r^2 - 25t^2$ ____________________________

06 . $36a^2 - 49b^2$ ____________________________

07 . $64x^2 - 16$ ____________________________

08 . $16x^4 - 9y^2$ ____________________________

09 . $25x^2 - 16y^4$ ____________________________

10 . $36 - 9x^2$ ____________________________

11 . $8ab^2 - 50ac^2$ ____________________________

12 . $(a + b)^2 - c^2$ ____________________________

13 . $(x + y)^2 - z^2$ ____________________________

14 . $(x-y)^2 - 9a^2$ ____________________________

15 . $100 - (x - y)^2$ ____________________________

16 . $9 - (a + b)^2$ ____________________________

17 . $4c^2 - (3a + b)^2$ ____________________________

18 . $25a^2 - (c - d)^2$ ____________________________

19 . $64x^2 - (8a + b)^2$ ____________________________

20 . $(3x + 9y)^2 - (2x - 5y)^2$ ____________________________

4. Factorizar las siguientes expresiones.

01 . $27x^3 - y^3$ ____________________

02 . $x^3 + 8y^3$ ____________________

03 . $27a^3 + 64b^3$ ____________________

04 . $8r^3 - 27s^3$ ____________________

05 . $8x^6 - 125$ ____________________

06 . $216 - y^6$ ____________________

07 . $a^3b - bc^3$ ____________________

08 . $ax^3 + 8ay^3$ ____________________

09 . $ab^3 - 27a$ ____________________

10 . $ab^2c^3 + 64ab^2$ ____________________

11 . $250x^3 - 2$ ____________________

12 . $9x^3 - 72$ ____________________

13 . $5x^3y^3 - 40$ ____________________

14 . $12n^3 - 12$ ____________________

15 . $27x^3y + a^3b^3y$ ____________________

5. Factorizar las siguientes expresiones.

01. $x^2 + 4x + 4$ ____________________

02 . $m^2 + 2mn + n^2$ ____________________

03 . $x^2 + 10x + 25$ ____________________

04 . $9x^2 + 6x + 1$ ____________________

05 . $4x^2 - 4x + 1$ ____________________

06 . $25x^2 - 10x + 1$ ____________________

07 . $49x^2 - 14x + 1$ ____________________

08 . $9x^2 + 12xy + 4y^2$ ________________________________

09 . $16\,a^2 + 24ab + 9b^2$ ________________________________

10 . $36m^2 + 96mn + 64n^2$ ________________________________

11 . $64r^2 + 64rs + 16s^2$ ________________________________

12 . $9 - 6h + h^2$ ________________________________

13 . $144 - 24r + r^2$ ________________________________

14 . $25x^2 - 30x + 9$ ________________________________

15 . $49x^2 + 28xy + 4y^2$ ________________________________

16 . $x^2 + 100y^2 + 20xy$ ________________________________

17 . $16ab + a^2b^2 + 64$ ________________________________

18 . $\frac{c^2}{16} - \frac{1}{2} + \frac{1}{c^2}$ ________________________________

19 . $\frac{m^2}{4} + \frac{3m}{n^2} + \frac{9}{n^4}$ ________________________________

20 . $\frac{x^2}{25} - \frac{xy}{5} + \frac{y^2}{4}$ ________________________________

6. Factorizar las siguientes expresiones.

01 . $a^2 + 7a + 10$ ________________________________

02 . $b^2 + 8b + 15$ ________________________________

03 . $r^2 - 12r + 27$ ________________________________

04 . $s^2 - 14s + 33$ ________________________________

05 . $h^2 - 27h + 50$ ________________________________

06 . $m^2 + 19m + 48$ ________________________________

07 . $x^2 - x - 2$ ________________________________

08 . $y^2 - 3y - 4$ ________________________________

09 . $w^2 + 2w - 8$ ________________________________

10 . $w^2 + 7w - 18$ ________________________________

11 . $x^2 + 14xy + 24y^2$ ________________________________

12 . $c^2 - 17cd + 30d^2$ ____________________

13 . $x^2 - 3x - 28$ ____________________

14 . $a^2 - 11a + 30$ ____________________

15 . $m^2 - 16m + 60$ ____________________

16 . $z^2 + 3z + 2$ ____________________

17 . $x^2 - 2x - 15$ ____________________

18 . $y^2 - 13y + 22$ ____________________

19 . $c^2 - 12c - 28$ ____________________

20 . $b^2 + 19b + 84$ ____________________

21 . $x^2 + 7x - 18$ ____________________

22 . $r^4 - 10r^2 + 9$ ____________________

23 . $a^2 + 8a + 15$ ____________________

24 . $x^2 - 5x - 14$ ____________________

25 . $p^2 - p - 6$ ____________________

26 . $b^2 + 2b - 24$ ____________________

27 . $b^2 + 5b - 14$ ____________________

28 . $x^2 - x - 6$ ____________________

29 . $x^2 + 6x + 5$ ____________________

30 . $x^2 + 4x - 5$ ____________________

7. Factorizar las siguientes expresiones.

01 . $4x^2 + 5x + 1$ ____________________

02 . $2x^2 + 3x + 1$ ____________________

03 . $3x^2 + 4x + 1$ ____________________

04 . $5 + 7x + 2x^2$ ____________________

05 . $7x^2 + 13x - 2$ ____________________

06 . $6x^2 + x - 5$ ____________________

07 . $5y^2 + 6y + 1$ ____________________

08 . $9m^2 + 10m + 1$ ______________________________

09 . $5b^2 + 7b + 2$ ______________________________

10 . $3c^2 - 11c + 6$ ______________________________

11 . $5x^2 - 28x + 15$ ______________________________

12 . $6x^2 - 11x + 5$ ______________________________

13 . $4x^2 - 11x + 7$ ______________________________

14 . $3y^2 + y - 2$ ______________________________

15 . $5x^2 - 3x - 2$ ______________________________

16 . $7h^2 + 4h - 3$ ______________________________

17 . $5p^2 + 2p - 3$ ______________________________

18 . $6r^2 + 19r - 7$ ______________________________

19 . $6y^2 + 3y - 3$ ______________________________

20 . $9a^2 - 12a - 5$ ______________________________

Completa cada uno de los siguientes trinomios de tal manera que sean cuadrados perfectos.

01 . $x^2 + 2xy + (\quad)$

02 . $m^2 - (\quad) + n^2$

03 . $81x^2 - 18xy + (\quad)$

04 . $x^2 + (\quad) + 16$

05 . $4x^2 - (\quad) + 9$

06 . $(\quad) + 4ab + b^2$

07 . $9y^2 + 6xy + (\quad)$

08 . $100x^2 - (\quad) + 16$

09 . $z^2 - 12zx + (\quad)$

10 . $x^4 + (\quad) + 16$

11 . $(\quad) - 10a^2 + 25$

12 . $m^4 + (\quad) + 4$

13 . $r^4 - 10r^2 + (\quad)$

14 . $a^2 + 2ab + (\quad)$

15 . $x^2 + (\quad) + n^2$

16 . $x^2 - (\quad) + y^2$

17 . $9 + (\quad) + a^2$

18 . $x^4 + 4x^2y + (\quad)$

19 . $y^6 - (\quad) + 9$

20 . $a^2 + 6a + (\quad)$

21 . $a^2 - 8a + (\quad)$

22 . $4a^2x^2 + 4abx + (\quad)$

23 . $1 - 2mn + (\quad)$

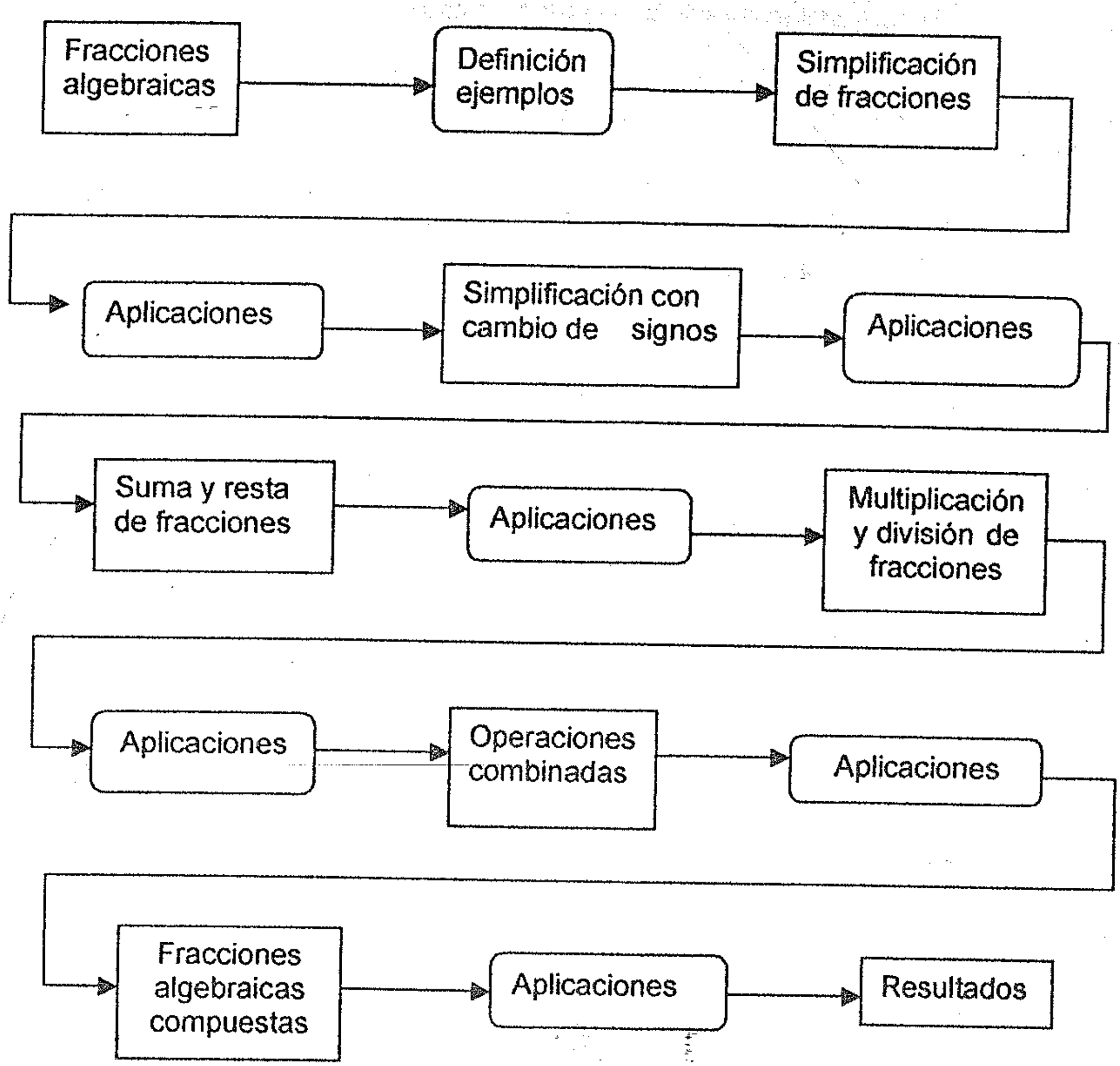
24 . $1 - 4p + (\quad)$

25 . $1 + (\quad) + 4x^2$

UNIDAD 3

FRACCIONES ALGEBRAICAS

MAPA CONCEPTUAL



FRACCIONES ALGEBRAICAS

TEMAS :

- Fracción algebraica.
- Simplificación de fracciones algebraicas.
- Simplificación con cambio de signos.
- Mínimo común múltiplo de fracciones algebraicas.
- Operaciones entre fracciones algebraicas.
- Suma y resta de fracciones algebraicas.
- Multiplicación de fracciones algebraicas.
- División de fracciones algebraicas.
- Operaciones combinadas .
- Fracciones complejas. Simplificación.

PROPÓSITOS :

- Reconocer una fracción algebraica.
- Simplificar fracciones algebraicas.
- Hallar el mínimo común múltiplo de expresiones algebraicas.
- Sumar y restar fracciones algebraicas.
- Dividir fracciones algebraicas.
- Resolver operaciones combinadas.
- Simplificar fracciones algebraicas.

ACCIONES PEDAGÓGICAS :

- Lectura de conceptos y ejemplos correspondientes a la unidad.
- Asesoría por parte del profesor sobre las diferentes dudas que presenten los estudiantes.
- Solución de talleres propuestos.
- Salidas al tablero para resolver ejercicios y aclarar dudas.
- Culminación de los talleres en forma desescolarizada.
- Consultas en la biblioteca.

RECURSOS :

- Texto guía.
- Profesor.
- Estudiantes.
- Vivencias diarias.
- Carteleras.
- Tizas de diferentes colores.

INDICADORES DE LOGROS :

- Reconoce una fracción algebraica.
- Simplifica fracciones algebraicas.
- Halla el m.c.m. de expresiones algebraicas.
- Opera con fracciones algebraicas.
- Combina las operaciones con fracciones algebraicas.
- Simplifica fracciones complejas.

FRACCIONES ALGEBRAICAS :

Son cocientes indicados entre dos expresiones algebraicas. Es decir, las fracciones algebraicas son expresiones que se pueden escribir de la forma

$\frac{p(x)}{q(x)}$, donde p(x) y q(x) son expresiones algebraicas y q(x) es diferente de cero. ¿Por qué?.

Algunos ejemplos de fracciones algebraicas son :

$$\frac{a}{2}\ ;\quad \frac{2x}{3y}\ ;\quad \frac{x+y}{4}\ ;\quad \frac{4m^2n}{3p^3}\ ;\quad \frac{2ab-2a+3}{18a^3+12a^2-63}\ ;\quad \frac{x^2-x-20}{x^2-7x+10}\ ;$$

$$\frac{a^3+b^3}{a+b}\ ;\quad \frac{m}{m^2+2m+4}.$$

Lo primero que estudiaremos de las fracciones algebraicas es la forma de simplificarlas, o sea la manera de escribirlas en su forma más simple.

SIMPLIFICACIÓN DE FRACCIONES ALGEBRAICAS :

Simplificar un a fracción es convertirla en otra equivalente cuyo numerador y denominador sean primos entre sí.
En la simplificación de fracciones algebraicas consideramos dos casos : cuando el numerador y denominador de la fracción son monomios y cuando son polinomios.
Veamos en que consiste cada caso.

1. SIMPLIFICACIÓN DE UNA FRACCIÓN ALGEBRAICA CUYO NUMERADOR Y DENOMINADORE SON MONOMIOS:

En este caso, dividimos o simplificamos las partes numéricas o coeficientes y las partes literales (letras) las simplificamos escribiendo la misma base y restando los exponentes, como lo hicimos cuando estudiamos la división entre dos monomios.
Dicho de otra manera, simplemente suprimimos o simplificamos los factores comunes del numerador y denominador de la fracción.

Ejemplo 1 : Simplifiquemos ó escribamos en su forma más simple la fracción algebraica :

$$\frac{8a^3b^2c}{2a^2b^2m^2}.$$

Solución :

$$\frac{8a^3b^2c}{2a^2b^2m^2} = \frac{4a^{3-2}b^{2-2}c}{m^2}$$

$$\frac{8a^3b^2c}{2a^2b^2m^2} = \frac{4a^1b^0c}{m^2}$$

$$\frac{8a^3b^2c}{2a^2b^2m^2} = \frac{4ac}{m^2}$$

Otra forma :

$$\frac{8a^3b^2c}{2a^2b^2m^2} = \frac{2^2.\cancel{2}.\cancel{a^2}.a.\cancel{b^2}.c}{\cancel{2}.\cancel{a^2}.\cancel{b^2}.m^2}$$

$$\frac{8a^3b^2c}{2a^2b^2m^2} = \frac{4ac}{m^2}$$

Ejemplo 2 : Simplifiquemos la fracción : $\frac{3x^4y^3z}{27x^2y^3z^2}$.

Solución :

$$\frac{3x^4y^3z}{27x^2y^3z^2} = \frac{x^2}{9z}.$$ ¿Por qué?

Ejemplo 3 : Escribamos en su forma más simple la fracción : $\frac{7m^3n^2}{21m^4n^2p^3}$.

Solución :

$$\frac{7m^3n^2}{21m^4n^2p^3} = \frac{1}{3mp^3}.$$ ¿Por qué?

ACTIVIDAD : Solucionar el taller #7

TALLER 7

Simplificar las siguientes fracciones.

1. $\dfrac{81a^4b^2}{27a^3b^3}$

2. $\dfrac{40x^3y^2z}{(2xyz)^3}$

3. $\dfrac{15a^3b^2}{20ab^4}$

4. $\dfrac{12b^2}{40bc}$

5. $\dfrac{-21p}{7p^3q}$

6. $\dfrac{8x^2y^3}{-4x}$

7. $-\dfrac{7a^3b^2}{14ab^2}$

8. $\dfrac{4p^3q^4}{10p^3q^2}$

9. $\dfrac{-5m^5n^3p}{35m^4n^3p^2}$

10. $\dfrac{8x^2y^3z^4}{-14x^2y^3z}$

11. $\dfrac{18p^5q^6}{3p^7q^5}$

12. $\dfrac{42ab^2c^3d^4}{3a^2b^2c^2d^3}$

13. $\dfrac{-9a^2b^3}{24a^3b^4x^2}$

14. $\dfrac{75a^7m^5}{-100a^3m^{12}n^4}$

15. $\dfrac{15x^{12}y^{15}z^{20}}{75x^{11}y^{16}z^{22}}$

16. $\dfrac{21p^8q^{10}r^{12}}{63p^4qr^2}$

17. $\dfrac{30a^6b^2}{45\,a^4m^3n^2}$

2. SIMPLIFICACIÓN DE FRACCIONES ALGEBRAICAS CUYO NUMERADOR Y DENOMINADOR SON POLINOMIOS.

En este caso se factorizan los polinomios del numerador y denominador y se simplifican (suprimen) los factores comunes que hayan en el numerador y denominador.

Ejemplo 1 : Reducir o simplificar la fracción : $\dfrac{3x^2+3x}{6x^3+6x^2}$.

Solución:

$\dfrac{3x^2+3x}{6x^3+6x^2}$: Fracción dada.

$\dfrac{3x^2+3x}{6x^3+6x^2}=\dfrac{3x\cancel{(x+1)}}{6x^2\cancel{(x+1)}}$: Factorizan do numerador y denominado r através del factor común.

$\dfrac{3x^2+3x}{6x^3+6x^2}=\dfrac{1}{2x}$: Suprimiend o los factores comunes.

Luego; $\dfrac{3x^2+3x}{6x^3+6x^2}=\dfrac{1}{2x}$

Ejemplo 2 : Simplificar la fracción algebraica : $\dfrac{3mn}{2m^2p+2m^3}$.

Solución :

$\dfrac{3mn}{2m^2p+2m^3}$: Fracción dada.

$\dfrac{3mn}{2m^2p+2m^3}=\dfrac{3mn}{2m^2(p+m)}$: Factorizando el denominado r.

$\dfrac{3mn}{2m^2p+2m^3}=\dfrac{3n}{2m(p+m)}$: Suprimiendo los factores comunes.

Ejemplo 3 : Reducir a su forma más simple : $\dfrac{x^2+3x}{x^2+2x-3}$.

Solución :

$$\frac{x^2+3x}{x^2+2x-3}$$: Expresión dada.

$$\frac{x^2+3x}{x^2+2x-3}=\frac{x(x+3)}{(x+3)(x-1)}$$: factorizando el numerador y el denominador.

$$\frac{x^2+3x}{x^2+2x-3}=\frac{x}{(x-1)}$$: Suprimiendo los factores comunes.

Ejemplo 4 : Simplificar la fracción : $\dfrac{(a^2-a-2)(a^2-9)}{(a^2-2a-3)(a^2+a-6)}$.

Solución :

$$\frac{(a^2-a-2)(a^2-9)}{(a^2-2a-3)(a^2+a-6)}$$: Fracción dada.

$$\frac{(a^2-a-2)(a^2-9)}{(a^2-2a-3)(a^2+a-6)}=\frac{\cancel{(a-2)}\cancel{(a+1)}\cancel{(a+3)}\cancel{(a-3)}}{\cancel{(a-3)}\cancel{(a+1)}\cancel{(a+3)}\cancel{(a-2)}}$$: Factorizando numerador y denominador.

$$\frac{(a^2-a-2)(a^2-9)}{(a^2-2a-3)(a^2+a-6)}=1$$: Suprimiendo los factores comunes.

ACTIVIDAD : Solucionar el taller #8.

TALLER 8

Reducir a su mínima expresión (ó simplificar) las siguientes fracciones algebraicas.

01. $\dfrac{x^2+3x}{x^2+2x-3}$

02. $\dfrac{2x^2+x-3}{x^2-1}$

03. $\dfrac{ry+rx+tx+ty}{rx+ry}$

04. $\dfrac{a^2+5a-24}{a^2+10a+16}$

05. $\dfrac{5x^3y(x+2)}{25\left(x^3+2x^2\right)}$

06. $\dfrac{12p^2+4p}{8p^2+4p}$

07. $\dfrac{10x^2y^3z}{40\left(x^3-x^2y\right)}$

08. $\dfrac{30a^2bn-90a^2bm}{20a^2b^2n-60a^2b^2m}$

09. $\dfrac{6a^2+5a-6}{15a^2-7a-2}$

10. $\dfrac{x^2-4xy+4y^2}{x^3-8y^3}$

11. $\dfrac{2ax+ay-4bx-2by}{ax-4a-2bx+8b}$

12. $\dfrac{p^3+1}{p^4-p^3+p-1}$

13. $\dfrac{a^4-8a^2+15}{a^4-9}$

14. $\dfrac{m-am+n-an}{1-3a+3a^2-a^3}$

15. $\dfrac{p^4-1}{3p^2-3}$

16. $\dfrac{x(x-3)^2(x-1)}{x^2(x-1)^3(x-3)^4}$

17. $\dfrac{a^3+3a^2-10a}{a^3-4a^2+4a}$

18. $\dfrac{x^2+2xy+y^2}{3x+3y}$

19. $\dfrac{m^2-16}{m^2-8m+16}$

20. $\dfrac{\left(a^3-3a\right)\left(a^3-1\right)}{\left(a^4+a^3+a^2\right)\left(a^2-1\right)}$

21. $\dfrac{2a^3+6a^2-a-3}{a^3+3a^2+a+3}$

22. $\dfrac{8x^3+1}{8x^3-4x^2+2x}$

23. $\dfrac{\left(4x^2+4x-3\right)\left(x^2+7x-30\right)}{\left(2x^2-7x+3\right)\left(4x^2+12x+9\right)}$

24. $\dfrac{5am^2-5an^2x}{5am^2x-10amnx+5an^2x}$

SIMPLIFICACIÓN DE FRACCIONES CON CAMBIO DE SIGNOS

Cuando después de factorizar vemos que no se puede simplificar factores en el numerador y en el denominador, se pueden hacer algunos cambios de signo en los factores para poder simplificarlos.
Estos cambios de signos se rigen por los siguientes principios .

i. Si se cambia el signo del numerador y el signo del denominador de una fracción, la fracción no se altera. Es decir

$$\frac{a}{b} = \frac{-a}{-b}$$

ii. Si se cambia el signo del numerador y el signo de la fracción, la fracción no se altera. Es decir;

$$\frac{a}{b} = -\frac{-a}{b}$$

iii. Si se cambia el signo del denominador y el signo de la fracción, la fracción no se altera. Es decir;

$$\frac{a}{b} = -\frac{a}{-b}$$

Resumen : $\boxed{\frac{a}{b} = \frac{-a}{-b} = -\frac{-a}{b} = -\frac{a}{-b}}$

NOTAS :

1. Cuando el numerador o el denominador son polinomios, para cambiar el signo al numerador o denominador se debe cambiar el signo de cada uno de los términos del polinomio. Es decir ;

$$\boxed{\frac{m-n}{x-y} = \frac{n-m}{y-x} = -\frac{n-m}{x-y} = -\frac{m-n}{y-x}}$$

2. Cuando el numerador y denominador son productos de polinomios, se puede cambiar el signo a un número par de factores sin cambiar el signo ó se puede cambiar el signo a un número impar de factores cambiando el signo de la fracción. Es decir ;

$$\boxed{\frac{(a-b)(c-d)}{(m-n)(p-q)}=\frac{(b-a)(c-d)}{(n-m)(p-q)}=\frac{(b-a)(d-c)}{(m-n)(p-q)}}$$

Ó

$$\boxed{\frac{(a-b)(c-d)}{(m-n)(p-q)}=-\frac{(b-a)(c-d)}{(m-n)(p-q)}=-\frac{(a-b)(d-c)}{(n-m)(q-p)}}$$

<u>Ejemplo 1 :</u> Escribir en su forma más simple la fracción : $\frac{4-4x}{6x-6}$.

Solución :

$\frac{4-4x}{6x-6}$: Fracción dada.

$\frac{4-4x}{6x-6}=\frac{4(1-x)}{6(x-1)}$: Factorizando numerador y denominador.

$\frac{4-4x}{6x-6}=-\frac{4\cancel{(x-1)}}{6\cancel{(x-1)}}$: Cambiando el signo al factor $(1-x)$ y a la fracción.

$\frac{4-4x}{6x-6}=-\frac{4}{6}$: Simplificando el factor común del numerador y denominador.

$\frac{4-4x}{6x-6}=-\frac{2}{3}$: Simplificando.

Ejemplo 2 : Simplificar la fracción : $\dfrac{a^2-x^2}{x^2-ax-3x+3a}$:

Solución :

$$\frac{a^2-x^2}{x^2-ax-3x+3a}$$: Expresión dada.

$$\frac{a^2-x^2}{x^2-ax-3x+3a}=\frac{(a+x)(a-x)}{(x-a)(x-3)}$$: Factorizando el numerador y el denominador.

$$\frac{a^2-x^2}{x^2-ax-3x+3a}=-\frac{(a+x)\cancel{(a-x)}}{\cancel{(a-x)}(x-3)}$$: Cambiando de signo al factor $(x-a)$ y a la fracción.

$$\frac{a^2-x^2}{x^2-ax-3x+3a}=-\frac{(a+x)}{(x-3)}$$: Simplificando el factor común del numerador y denominador.

Ejemplo 3 : Reducir a su mínima expresión : $\dfrac{(x^2-1)(x^2-8x+16)}{(4x-x^2)(1-x^2)}$.

Solución :

$$\frac{(x^2-1)(x^2-8x+16)}{(4x-x^2)(1-x^2)}$$: Expresión dada.

$$\frac{(x^2-1)(x^2-8x+16)}{(4x-x^2)(1-x^2)}=\frac{(x+1)(x-1)(x-4)(x-4)}{x(4-x)(1+x)(1-x)}$$: Factorizando numerador y denominador.

$$\frac{(x^2-1)(x^2-8x+16)}{(4x-x^2)(1-x^2)}=\frac{\cancel{(x+1)}\cancel{(x-1)}\cancel{(x-4)}(x-4)}{x\cancel{(x-4)}\cancel{(1+x)}\cancel{(x-1)}}$$: Cambiando de signo a los factores $(4-x)$ y $(1-x)$.

$$\frac{(x^2-1)(x^2-8x+16)}{(4x-x^2)(1-x^2)}=\frac{x-4}{x}$$: Simplificando los factores comunes del numerador y denominador.

ACTIVIDAD : Solucionar El taller #9.

TALLER 9

Reducir a su expresión más simple (simplificar).

1. $\dfrac{x^2-y^2}{y^2-x^2}$ ______________________________

2. $\dfrac{a^2-a-12}{16-a^2}$ ______________________________

3. $\dfrac{3y-6x}{2mx-my-2nx+ny}$ ______________________________

4. $\dfrac{8-x^3}{x^2+2x-8}$ ______________________________

5. $\dfrac{x^2+x-2}{n-xn-m+xm}$ ______________________________

6. $\dfrac{4a^2-4ab+b^2}{5b-10a}$ ______________________________

7. $\dfrac{9-6m+m^2}{m^2-7m+12}$ ______________________________

8. $\dfrac{3ax-3bx-6a+6b}{2b-2a-bx+ax}$ ______________________________

9. $\dfrac{3bx-6x}{8-b^3}$ ______________________________

10. $\dfrac{2a^2-22a+60}{75-3a^2}$ ______________________________

MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

El mínimo común múltiplo (m.c.m) de expresiones algebraicas lo vamos a necesitar en el siguiente tema (suma y resta de fracciones algebraicas), por eso vamos a estudiarlo muy bien.

En grados anteriores estudiamos la forma de hallar el m.c.m. de dos o más números. Similarmente podemos encontrar el m.c.m. de expresiones algebraicas.

Recordemos que el m.c.m. de varios números es la menor cantidad que contiene, exactamente y al mismo tiempo, a otras cantidades o números.

Por ejemplo, el 20 es el m.c.m. de 2,4,5 y 10 y éste 20 se halla de la siguiente manera :

2	4	5	10	2
1	2	↓	5	2
	1	↓	↓	5
		1	1	

Descomponemos los números en sus factores primos.
El m.c.m. será el producto de éstos factores.

m.c.m. = 2x2x5 = 20

Para encontrar el m.c.m. de expresiones algebraicas, procedemos de la siguiente manera :

1. Si las expresiones son monomios, se halla el m.c.m. de los coeficientes numéricos utilizando el método anterior y luego se agregan a éste las letras comunes y no comunes con su mayor exponente.

2. Si las expresiones son polinomios, los factorizamos y tomamos los factores comunes y no comunes con su mayor exponente.

Ejemplo 1 : Calculemos el m.c.m. de : $4mn$; $5m^3n$; $8m^2n^3p^2$.

Solución : Observamos que las expresiones dadas son monomios, por lo tanto encontramos primero el m.c.m. de los coeficientes 4,5 y 8.

4	5	8	2
2	↓	4	2
1	↓	2	2
	↓	1	5
	1		

m.c.m. = 2x2x2x5 = 40

Luego; agregamos a éste m.c.m. las letras comunes y no comunes con su mayor exponente, es decir ; $m^3n^3p^2$. por lo tanto:

El m.c.m. de 4mn ; $5m^3n$ y $8m^2n^3p^2$ es : $40m^3n^3p^2$.

Ejemplo 2 : Hallar el m.c.m. de : $x^2 - 11x + 24$; $x^3 - 27$ y $x^2 - 6x + 9$.

Solución : Como las expresiones dadas son polinomios, debemos factorizar y tendremos:

$X^2 - 11x + 24 = (x - 8)(x - 3)$

$X^3 - 27 = (x - 3)(x^2 + 3x + 9)$

$X^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$. Luego ;

m.c.m. = $(x - 8)(x - 3)^2(x^2 + 3x + 9)$, que son los factores comunes y no comunes con su mayor exponente que encontramos en la factorización.

Ejemplo 3 : Encontremos el m.c.m. de : $3a^3$; $8ab$; $10b^3$; $12a^2b^3$ y $16a^2b^2$.

Solución : Las expresiones dadas son monomios, por lo tanto hallamos primero el m.c.m. de los coeficientes 3,8,10,12, y 16.

3	8	10	12	16	2
↓	4	5	6	8	2
↓	2	↓	3	4	2
↓	1	↓	↓	2	2
↓		↓	↓	1	3
1		↓	1		5
		1			

m.c.m. = 2x2x2x2x3x5 = 240

Ahora agregamos a éste m.c.m. las letras comunes y no comunes con su mayor exponente, entonces:

El m.c.m. de $3a^3$; $8ab$; $10b^2$; $12\,a^2b^3$ y $16a^2b^2$ es : $240a^3b^3$

Ejemplo 4 : Calculemos el m.c.m de $2a^2$; $6ab$; y $3a^2 - 6ab$.

Solución : En las expresiones dadas tenemos dos monomios y un polinomio. Procedemos de la siguiente manera :

$2a^2 = 2\,a^2$

$6ab = 2 \times 3ab$ El m.c.m. es : $2 \times 3a^2b(a-2b) = 6a^2b(a-2b)$

$3a^2 - 6ab = 3\,a(a-2b)$

Ejemplo 5 : Determinemos el m.c.m. de : $10x^2+10$; $15x+15$ y $5x^2-5$.

Solución : Las expresiones dadas son polinomios, luego, debemos factorizarlos y obtenemos.

$10x^2 + 10 = 10(x^2+1) = 2 \times 5(x^2+1)$

$15x + 15 = 15(x+1) = 3 \times 5(x+1)$ Luego :

$5x^2 - 5 = 5(x^2-1) = 5(x+1)(x-1)$

m.c.m. = $2 \times 5 \times 3(x^2+1)(x+1)(x-1)$

m.c.m. = $30(x^2+1)(x+1)(x-1)$

ACTIVIDADAD : Solucionar EL taller #10.

TALLER 10

Hallar el m.c.m. de las siguientes expresiones.

1. $12xy^2$; $2ax^2y^3$; $5x^2y^3$ ______________________
2. $9a^2bx$; $12ab^2x^2$; $18a^3b^3x$ ______________________
3. 10 ; $6x^2$; $9x^3y + 9xy^3$ ______________________
4. $4x$; $x^3 + x^2$; $x^2y - xy$ ______________________
5. 24 ; $6m^2 + 18m$; $8m - 24$ ______________________
6. $x^2 + 2x$; $x^3 - 2x^2$; $x^2 - 4$ ______________________
7. $1 - a^3$; $1 - a$; $1 - a^2$; $1 - 2a + a^2$ ______________________
8. $x^3 - 9x + x^2 - 9$; $x^4 - 10x^2 + 9$; $x^2 + 4x + 3$; $x^2 - 4x + 32$ __________
9. $4a^2b + 4ab^2$; $15a^2 - 15b^2$ ______________________
10. $2a^2 + 2a$; $3a^2 - 3a$; $a^4 - a^2$ ______________________
11. $x^2 + 3x - 10$; $4x^2 - 7x - 2$ ______________________
12. $ax - 2bx + ay - 2by$; $x^2 + xy$; $x^2 - xy$ ______________________
13. $3ax + 12a$; $2bx^2 + 6bx - 8b$ ______________________
14. $2m^2 + 2mn$; $4mn - 4n^2$ ______________________

OPERACIONES ENTRE FRACCIONES ALGEBRAICAS

En la operatoria con fracciones algebraicas estudiaremos la suma, resta, multiplicación, división y las respectivas combinaciones entre éstas operaciones.

SUMA Y RESTA DE FRACCIONES ALGEBRAICAS :

Para sumar o restar fracciones algebraicas procedemos de la siguiente manera :

1. Factorizamos, si es posible, el numerador y el denominador de cada fracción para simplificarla.

2. Hallamos el m.c.m. de los denominadores si éstos son diferentes.

3. Dividimos el m.c.m. por cada uno de los denominadores de las fracciones que se van a sumar o restar.

4. El resultado de cada división (cociente) lo multiplicamos por los respectivos numeradores de las fracciones que se van a suma o restar.

5. Se efectúan las operaciones en el numerador y se reducen los términos semejantes.

6. Simplificamos el resultado si es posible.

Ejemplo 1 : Efectuemos la operación : $\frac{x-4}{4}+\frac{3x-2}{6}$.

Solución :

$$\frac{x-4}{4}+\frac{3x-2}{6}$$

: Suma dada.

$$\frac{x-4}{4}+\frac{3x-2}{6}=\frac{3(x-2)+2(3x+2)}{12}$$

: Hallamos el m.c.m de 4 y 6 que es 12 y éste lo dividimos por cada denominador e indicamos el producto del resultado de la división por el numerador respectivo.

$$\frac{x-4}{4}+\frac{3x-2}{6}=\frac{3x-6+6x+4}{12}$$

: Efectuando las operaciones en el numerador .

$$\frac{x-4}{4}+\frac{3x-2}{6}=\frac{9x-2}{12}$$

: Reduciendo términos semejantes en el numerador.

Ejemplo 2 : Efectuemos la siguiente resta : $\frac{2a+3}{4a}-\frac{4a^2-2}{16a^2}$.

Solución :

$$\frac{2a+3}{4a}-\frac{4a^2-2}{16a^2}$$

: Expresión dada.

$$\frac{2a+3}{4a}-\frac{4a^2-2}{16a^2}=\frac{2a+3}{4a}-\frac{2(2a^2-1)}{16a^2}$$

: Factorizando el numerador de la segunda fracción.

$$\frac{2a+3}{4a}-\frac{4a^2-2}{16a^2}=\frac{2a+3}{4a}-\frac{(2a^2-1)}{8a^2}$$

: Simplificando la segunda fracción.

$$\frac{2a+3}{4a}-\frac{4a^2-2}{16a^2}=\frac{2a(2a+3)-1(2a^2-1)}{8a^2}$$

: Hallando el m.c.m de 4am y $8a^2$ que es $8a^2$ y dividiendo éste m.c.m. por cada denominador e indicando la multiplicación del resultado (cociente) de la división por el numerador respectivo.

$$\frac{2a+3}{4a}-\frac{4a^2}{16a^2}=\frac{4a^2+6a-2a^2+1}{8a^2}$$

: Efectuando las multiplicaciones en el numerador.

$$\frac{2a+3}{4a}-\frac{4a^2}{16a^2}=\frac{2a^2+6a+1}{8a^2}$$

: Reduciendo términos semejantes en el numerador.

<u>Ejemplo 1 :</u> Efectuemos la operación :

$$\frac{X+5}{X^2+X-12}+\frac{X+4}{X^2+2X-15}+\frac{X-3}{X^2+9X+20}$$

Solución :

$$\frac{x+5}{x^2+x-12}+\frac{x+4}{x^2+2x-15}+\frac{x-3}{x^2+9x+20}=\frac{x+5}{(x+4)(x-3)}+\frac{x+4}{(x+5)(x-3)}+\frac{x-3}{(x+5)(x+4)}$$

$$\frac{x+5}{x^2+x-12}+\frac{x+4}{x^2+2x-15}+\frac{x-3}{x^2+9x+20}=\frac{(x+5)(x+5)+(x+4)(x+4)+(x-3)(x-3)}{(x+4)(x-3)(x+5)}$$

$$\frac{x+5}{x^2+x-12}+\frac{x+4}{x^2+2x-15}+\frac{x-3}{x^2+9x+20}=\frac{(x+5)^2+(x+4)^2+(x-3)^2}{(x+4)(x-3)(x+5)}$$

$$\frac{x+5}{x^2+x-12}+\frac{x+4}{x^2+2x-15}+\frac{x-3}{x^2+9x+20}=\frac{x^2+10x+25+x^2+8x+16+x^2-6x+9}{(x+4)(x-3)(x+5)}$$

$$\frac{x+5}{x^2+x-12}+\frac{x+4}{x^2+2x-15}+\frac{x-3}{x^2+9x+20}=\frac{3x^2+12x+50}{(x+4)(x-3)(x+5)}$$

Ejemplo 4 : Efectuemos la operación $\frac{a}{3a+6}-\frac{1}{6a+12}+\frac{a+12}{12a+24}$

Solución :

$$\frac{a}{3a+6}-\frac{1}{6a+12}+\frac{a+12}{12a+24}=\frac{a}{3(a+2)}-\frac{a+12}{6(a+2)}+\frac{a+12}{12a+24}$$

$$\frac{a}{3a+6}-\frac{1}{6a+12}+\frac{a+12}{12a+24}=\frac{4(a)-2(1)+1(a+12)}{12(a+2)}$$

$$\frac{a}{3a+6}-\frac{1}{6a+12}+\frac{a+12}{12a+24}=\frac{4a-2+a+12}{12(a+2)}$$

$$\frac{a}{3a+6}-\frac{1}{6a+12}+\frac{a+12}{12a+24}=\frac{5a+10}{12(a+2)}$$

$$\frac{a}{3a+6}-\frac{1}{6a+12}+\frac{a+12}{12a+24}=\frac{5\cancel{(a+2)}}{12\cancel{(a+2)}}$$

$$\frac{a}{3a+6}-\frac{1}{6a+12}+\frac{a+12}{12a+24}=\frac{5}{12}$$

ACTIVIDAD : Solucionar el taller #11

TALLER 11

Efectúa las siguientes operaciones entre fracciones.

01. $\frac{a-2b}{15a}+\frac{b-a}{20b}$ ______

02. $\frac{x+2}{3x}+\frac{x^2-2}{5x^2}+\frac{2-x^3}{9x^3}$ ______

03. $\frac{9}{5x}-\frac{5}{2x}+\frac{3}{x}$ ______

04. $\frac{6}{x^2}+\frac{7}{2x}-5$ ______

05. $\frac{x-3}{5xy}-\frac{4-3xy^2}{3x^2y^3}$ ______

06. $\frac{3}{5}-\frac{2x+1}{10x}-\frac{4x^2+1}{2x^2}$ ______

07. $\frac{1}{3a-2b}+\frac{a-b}{9a^2-4b^2}$ ______

08. $\frac{a}{m^2-ma}+\frac{m+a}{ma}+\frac{m}{ma-a^2}$ ______

09. $\frac{3}{2p+4}+\frac{p-1}{2p-4}+\frac{p+8}{p^2-4}$ ______

10. $\frac{a-b}{a+b}+\frac{a+b}{a-b}+\frac{4ab}{a^2-b^2}$ ______

11. $\frac{m+1}{10}+\frac{m-3}{5m-10}+\frac{m-2}{2}$ ______

12. $\frac{2n^2}{3n^2+11n+6}+\frac{n+1}{n^2-9}+\frac{1}{3n+2}$ ______

13. $\frac{x-2}{x-1}+\frac{x+3}{x+2}+\frac{x+1}{x-3}$ ______

14. $\frac{a-1}{4a+4}-\frac{a+2}{8a-8}$ ______

15. $\frac{m-1}{m^2+m}-\frac{1}{2m-2}-\frac{1}{2m+2}$ ______

16. $\dfrac{X}{X^2+XY}-\dfrac{1}{X}-\dfrac{1}{X+Y}$ ________ ________ ________ ______

17. $\dfrac{a}{a^2+a-2}-\dfrac{3}{a^2+2a-3}-\dfrac{a}{a^2+5a+6}$ ________ ________ ______

18. $\dfrac{2n^2-3}{10n+10}-\dfrac{n+1}{50}-\dfrac{9n^2-14}{50n+50}$ ________ ________ ________ _

19. $\dfrac{x+3}{x^2-1}+\dfrac{x-1}{2x+2}-\dfrac{x-4}{4x-4}$ ________ ________ ________ ____

20. $\dfrac{m+1}{m^2-m-20}-\dfrac{m+4}{m^2-4m-5}+\dfrac{m+5}{m^2+5m+4}$ ________ ________

21. $\dfrac{2a+1}{12a+8}-\dfrac{a^2}{6a^2+a-2}+\dfrac{2a}{16a-8}$ ________ ________ _______

22. $\dfrac{x}{2x+2}-\dfrac{x+1}{3x-3}+\dfrac{x-1}{6x+6}-\dfrac{5}{18x-18}$ ________ ________ _____

23. $\dfrac{1}{3-3a}-\dfrac{1}{3+3a}+\dfrac{a}{6+6a^2}-\dfrac{a}{2-2a}$ ________ ________ _____

24. $\dfrac{1}{x-y}+\dfrac{x}{y^2-x^2}$ ________ ________ ________ ________

25. $\dfrac{3}{2x+2}-\dfrac{1}{4x-4}-\dfrac{4}{8-8x^2}$ ________ ________ ________ __

MULTIPLICACIÓN DE FRACCIONES ALGEBRAICAS

Para multiplicar dos o más fracciones algebraicas procedemos de la siguiente manera:

1. Factorizamos, si es posible el numerador y denominador de cada fracción.
2. Se simplifican los factores comunes del numerador y denominador.
3. Se efectúan las multiplicaciones entre los numeradores y denominadores.

Ejemplo 1 : Efectuemos la operación : $\frac{2a^2}{3b} x \frac{6b^2}{4a}$.

Solución :

$\frac{2a^2}{3b} x \frac{6b^2}{4a}$: Multiplicación dada.

$\frac{2a^2}{3b} x \frac{6b^2}{4a} = \frac{(2a^2)(2 \times 3b^2)}{(3b)(2 \times 2a)}$: Factorizando el 6 y el 4.

$\frac{2a^2}{3b} x \frac{6b^2}{4a} = ab$: Simplificando.

Ejemplo 2 : Simplificar : $\frac{x^2-5x+6}{3x-15} \times \frac{6x}{x^2-x-30} \times \frac{x^2-25}{2x-4}$.

Solución :

$\frac{x^2-5x+6}{3x-15} \times \frac{6x}{x^2-x-30} \times \frac{x^2-25}{2x-4}$: Multiplicación dada.

$\frac{x^2-5x+6}{3x-15} \times \frac{6x}{x^2-x-30} \times \frac{x^2-25}{2x-4} = \frac{(x-3)\cancel{(x-2)}}{\cancel{3}\cancel{(x-5)}} \times \frac{\cancel{6}x}{(x-6)\cancel{(x+5)}} \times \frac{\cancel{(x+5)}\cancel{(x-5)}}{\cancel{2}\cancel{(x-2)}}$: Factorizando los numeradores y denominadores.

$\frac{x^2-5x+6}{3x-15} \times \frac{6x}{x^2-x-30} \times \frac{x^2-25}{2x-4} = \frac{x(x-3)}{x-6}$: Simplificando.

ACTIVIDAD : Solucionar el taller #12.

TALLER 12

Efectuar las siguientes multiplicaciones.

01. $\frac{5x^2}{7y^3}\times\frac{4y^2}{7m^3}\times\frac{14m}{5x^4}\times\frac{mx}{2}$ ______________________________

02. $\frac{7a}{6m^2}\times\frac{3m}{10n^2}\times\frac{5n^4}{14ax}\times 2m$ ______________________________

03. $\frac{5a+25}{14}\times\frac{7a+7}{10a+50}$ ______________________________

04. $\frac{p^2+7p+10}{p^2-6p-7}\times\frac{p^2-3p-4}{p^2+2p-15}\times\frac{p^3-2p^2-3p}{p^2-2p-8}$ ______________________________

05. $\frac{m^2-81}{2m^2+10m}\times\frac{m+11}{m^2-36}\times\frac{2m-12}{2m+18}\times\frac{m^3+5m^2}{2m+22}$ ______________________________

06. $\frac{n^2-5n+6}{3n-15}\times\frac{6n}{n^2-n-30}\times\frac{n^2-25}{2n-4}$ ______________________________

07. $\frac{a^2+2a}{a^2-16}\times\frac{a^2-2a-8}{a^3+a^2}\times\frac{a^2+4a}{a^2+4a+4}$ ______________________________

08. $\frac{x^3-27}{a^3-1}\times\frac{a^2+a+1}{x^2+3x+9}$ ______________________________

09. $\frac{m^3+2m^2-3m}{4m^2+8m+3}\times\frac{2m^2+3m}{m^2-m}$ ______________________________

10. $\frac{y^2+9y+18}{y-5}\times\frac{5y-25}{5y+15}$ ______________________________

DIVISIÓN DE FRACCIONES ALGEBRAICAS

Recordemos que : $\boxed{\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}}$

Esto mismo lo aplicamos en la división de fracciones algebraicas, o sea multiplicamos el dividendo por el recíproco del divisor

Ejemplo 1 : Efectuemos la operación : $\frac{a^2}{3b^2} \div \frac{2a}{b^3}$.

Solución :

$\frac{a^2}{3b^2} \div \frac{2a}{b^3}$: Operación dada.

$\frac{a^2}{3b^2} \div \frac{2a}{b^3} = \frac{a^2}{3b^2} \times \frac{b^3}{2a}$: Multiplicando el dividendo por el recíproco del divisor.

$\frac{a^2}{3b^2} \div \frac{2a}{b^3} = \frac{ab}{6}$: Simplificando.

Ejemplo 2 : Efectuemos la operación : $\frac{x^2-6x+5}{x^2-15x+56} \div \frac{x^2+2x-35}{x^2-5x-24}$.

Solución :

$\frac{x^2-6x+5}{x^2-15x+56} \div \frac{x^2+2x-35}{x^2-5x-24}$: Operación dada.

$\frac{x^2-6x+5}{x^2-15x+56} \div \frac{x^2+2x-35}{x^2-5x-24} = \frac{x^2-6x+5}{x^2-15x+56} \times \frac{x^2-5x-24}{x^2+2x-35}$: Multiplicando el dividendo por el recíproco del divisor

$\frac{x^2-6x+5}{x^2-15x+56} \div \frac{x^2+2x-35}{x^2-5x-24} = \frac{(x-1)(x-5)}{(x-7)(x-8)} \times \frac{(x-8)(x+3)}{(x+7)(x-5)}$: Factorizando.

$\frac{x^2-6x+5}{x^2-15x+56} \div \frac{x^2+2x-35}{x^2-5x-24} = \frac{(x-1)(x+3)}{(x-7)(x+7)}$: Simplificando.

ACTIVIDAD : Solucionar el taller #13.

TALLER 13

Efectuar las siguientes divisiones.

01. $\dfrac{10n^2}{14p^3} \div \dfrac{20n^4}{28ap^4}$ ______________________

02. $12a^2x^3 \div \dfrac{a^2x}{10}$ ______________________

03. $\dfrac{a\ -a}{2a^2+6a} \div \dfrac{5a^2-5a}{2a+6}$ ______________________

04. $\dfrac{m^2-6m+9}{4m^2-1} \div \dfrac{m^2+5m-24}{2m^2+17m+8}$ ______________________

05. $\dfrac{2mx-2my+nx-ny}{3x-3y} \div 8m+4n$ ______________________

06. $\dfrac{p^2-6p}{p^3+3p^2} \div \dfrac{p^2+3p-54}{p^2+9p}$ ______________________

07. $\dfrac{x^4-1}{x^3+x^2} \div \dfrac{x^4+4x^2+3}{3x^3+9x}$ ______________________

08. $\dfrac{ax^2+5}{4a^2-1} \div \dfrac{a^3x^2+5a^2}{2a-1}$ ______________________

09. $\dfrac{x^2-6x+5}{x^2-15x+56} \div \dfrac{x^2+2x-35}{x^2-5x-24}$ ______________________

10. $\dfrac{20a^2-30a}{15a^3+15a^2} \div \dfrac{4a-6}{a+1}$ ______________________

OPERACIONES COMBIANDAS
CON FRACCIONES ALGEBRAICAS

Las cuatro operaciones básicas se pueden combinar, para resolver ejercicios de este tipo se efectúan primero las operaciones que hay dentro de los paréntesis.

Ejemplo 1 : Resolver las siguientes operaciones :

$$\left(\frac{x^2-9}{x^2-x-12} \div \frac{x-3}{x^2+3x}\right) \times \frac{a^2x^2-16a^2}{2x^2+7x+3} \times \left(\frac{2}{a^2x}+\frac{1}{a^2x^2}\right).$$

Solución : Resolvamos primero las operaciones que hay dentro de los paréntesis.

$$\frac{x^2-9}{x^2-x-12} \div \frac{x-3}{x^2+3x} = \frac{x^2-9}{x^2-x-12} \times \frac{x^2+3x}{x-3}$$

$$\frac{x^2-9}{x^2-x-12} \div \frac{x-3}{x^2+3x} = \frac{(x+3)(x-3)}{(x-4)(x+3)} \times \frac{x(x+3)}{x-3}$$

$$\frac{x^2-9}{x^2-x-12} \div \frac{x-3}{x^2+3x} = \frac{x(x+3)}{x-4}$$

.Este es el resultado de la operación del primer paréntesis.

$$\frac{2}{a^2x}+\frac{1}{a^2x^2} = \frac{2x+1}{a^2x^2}.$$

Resultado de la operación del segundo paréntesis.

Factoricemos la expresión :

$$\frac{a^2x^2-16a^2}{2x^2+7x+3} = \frac{a^2(x^2-16)}{(x+3)(2x+1)}$$

$$\frac{a^2x^2-16a^2}{2x^2+7x+3} = \frac{a^2(x+4)(x-4)}{(x+3)(2x+1)}$$

. Ahora reunimos los resultados obtenidos.

$$\frac{x(x+3)}{x-4} \times \frac{a^2(x+4)(x-4)}{(x+3)(2x+1)} \times \frac{2x+1}{a^2x^2} = \frac{x+4}{x}$$

. Luego;

$$\left(\frac{x^2-9}{x^2-x-12} \div \frac{x-3}{x^2+3x}\right) \times \frac{a^2x^2-16a^2}{2x^2+7x+3} \times \left(\frac{2}{a^2x}+\frac{1}{a^2x^2}\right) = \frac{x+4}{x}$$

ACTIVIDAD : Solucionar el taller #14.

TALLER 14

Efectuar las siguientes operaciones :

01. $\left(\frac{x+5}{3x}-\frac{5x+20}{9x^2}\right)\times\frac{3x}{x+4}$ ______________________

02. $\left(x-2-\frac{4}{x+1}\right)\times\left(x+\frac{4x}{3}\right)$ ______________________

03. $\left(\frac{1}{m+4}+\frac{1}{m-4}\right)\times\left(\frac{m}{4}-\frac{4}{m}\right)$ ______________________

04. $\left(\frac{n^2-1}{n^2+3n+2}\times\frac{n^2+7n+10}{n^2+4n-5}\right)+\frac{n^2-5}{2}$ ______________________

05. $\frac{2}{a+3}-\left(\frac{a^3-1}{a-1}\div\frac{a^2+a+1}{3}\right)$ ______________________

06. $\left(x-6-\frac{10}{x+3}\right)\div\left(x+2-\frac{2}{x+3}\right)$ ______________________

07. $\left(p-\frac{2}{3p-1}\right)\div\left(1-\frac{2}{3p-1}\right)$ ______________________

08. $\left(\frac{m-n}{m+n}-\frac{m+n}{m-n}\right)\div\left(1-\frac{m^2-mn-n^2}{m^2-n^2}\right)$ ______________________

09. $\left(12-3x^2\right)\div\left(\frac{1}{3x^2+5}-\frac{1}{17}\right)$ ______________________

10. $\frac{a^2-5a}{b+b^2}\div\left(\frac{a^2+6a-55}{b^2-1}\times\frac{ax+3a}{ab^2+11b^2}\right)$ ______________________

FRACCIONES ALGEBRAICAS COMPUESTAS O COMPLEJAS

Son aquellas fracciones en las cuales el numerador o el denominador, o ambos, contienen fracciones algebraicas.
Se puede decir que una fracción compleja corresponde a un a división indicada; la raya que separa el numerador del denominador indica que hay que dividir lo que hay encina de la raya entre lo que hay debajo de ella.
Para simplificar fracciones complejas, se resuelven las operaciones del numerador y denominador y ambos resultados se dividen.

Ejemplo 1 : Simplificar : $\dfrac{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}{1+\frac{b}{a}}$.

Solución :

$$\frac{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}{1+\frac{b}{a}} = \frac{\frac{a^2-b^2}{ab}}{\frac{a+b}{a}}$$

Efectuando la resta de fracciones en el numerador y la suma en el denominador.

$$\frac{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}{1+\frac{b}{a}} = \frac{a^2-b^2}{ab} \div \frac{a+b}{a}$$

Escribiendo la división indicada.

$$\frac{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}{1+\frac{b}{a}} = \frac{a^2-b^2}{ab} \times \frac{a}{a+b}$$

Resolviendo la división de fracciones.

$$\frac{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}{1+\frac{b}{a}} = \frac{(a+b)(a-b)}{ab} \times \frac{a}{a+b}$$

Factorizando $a^2 - b^2$.

$$\frac{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}{1+\frac{b}{a}} = \frac{a-b}{b}$$

Simplificando.

Ejemplo 2 : Simplificar : $\dfrac{1}{x-\dfrac{x}{x-\dfrac{x^2}{x+1}}}$

Solución :

$$\frac{1}{x-\dfrac{x}{x-\dfrac{x^2}{x+1}}}$$ Fracción compleja dada.

$$\frac{1}{x-\dfrac{x}{x-\dfrac{x^2}{x+1}}}=\frac{1}{x-\dfrac{x}{\dfrac{x(x+1)-x^2}{x+1}}}$$ Efectuando la resta $x-\dfrac{x^2}{x+1}$.

$$=\frac{1}{x-\dfrac{x}{\dfrac{x^2+x-x^2}{x+1}}}$$ Multiplicando x(x +1).

$$=\frac{1}{x-\dfrac{x}{\dfrac{x}{x+1}}}$$ Reduciendo $x^2-x^2=0$

$$=\frac{1}{x-\dfrac{x(x+1)}{x}}$$ Efectuando $x \div \dfrac{x}{x+1}$

$$=\frac{1}{x-(x+1)}$$ Simplificando $\dfrac{x}{x}=1$

$$=\frac{1}{x-x-1}$$ Suprimiendo el paréntesis en el denominador.

$$=\frac{1}{-1}$$ Reduciendo $x-x=0$

$$=-1$$ Simplificando

ACTIVIDAD : Solucionar el taller #15.

TALLER 15

Simplificar las siguientes fracciones

01. $\dfrac{a^2-\dfrac{1}{a}}{1-\dfrac{1}{a}}$ ____

02. $\dfrac{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}}$ ____

03. $\dfrac{\dfrac{m}{n}-\dfrac{n}{m}}{1+\dfrac{n}{m}}$ ____

04. $\dfrac{x+4+\dfrac{3}{x}}{x-4-\dfrac{5}{x}}$ ____

05. $\dfrac{\dfrac{1}{a}-\dfrac{9}{a^2}+\dfrac{20}{a^3}}{\dfrac{16}{a}-a}$ ____

06. $\dfrac{1+\dfrac{1}{x-1}}{1+\dfrac{1}{x^2-1}}$ ____

07. $\dfrac{a+2-\dfrac{7a+9}{a+3}}{a-4+\dfrac{5a-11}{a+1}}$ ____

08. $\dfrac{\dfrac{a+3}{a+4}-\dfrac{a+1}{a+2}}{\dfrac{a-1}{a+2}-\dfrac{a-3}{a+4}}$ ____

09. $\dfrac{1-\dfrac{7}{m}+\dfrac{12}{m^2}}{m-\dfrac{16}{m}}$ ______________________________

10. $\dfrac{\dfrac{2}{1-x}+\dfrac{2}{1+x}}{\dfrac{2}{1+x}-\dfrac{2}{1-x}}$ ______________________________

11. $\dfrac{1}{a+2-\dfrac{a+1}{a-\dfrac{1}{a}}}$ ______________________________

12. $\dfrac{\dfrac{x}{1-x}+\dfrac{1-x}{x}}{\dfrac{1-x}{x}-\dfrac{x}{1-x}}$ ______________________________

13. $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}}$ ______________________________

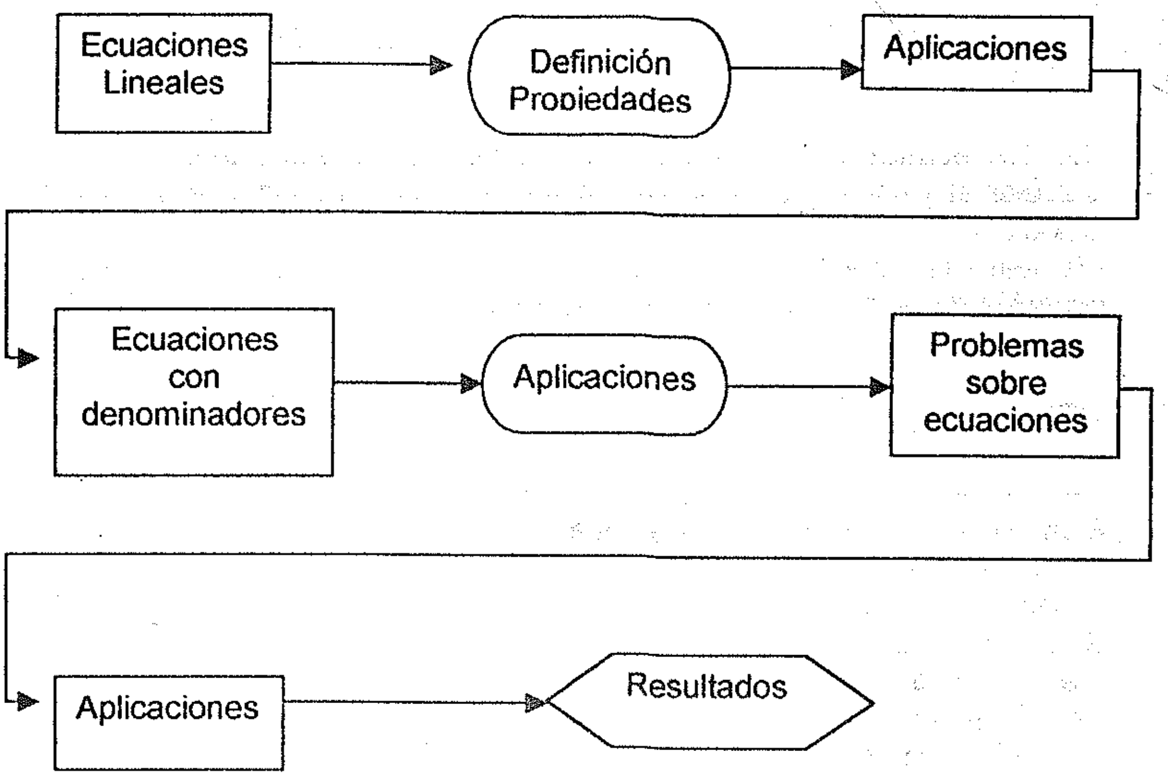
14. $1-\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{\dfrac{x}{3}-1}}$ ______________________________

15. $\dfrac{2}{1+\dfrac{2}{1+\dfrac{2}{x}}}$ ______________________________

UNIDAD 3

ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA

MAPA CONCEPTUAL



ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA

TEMAS :

- Ecuaciones enteras de primer grado con una incógnita.
- Ecuaciones racionales de primer grado con una incógnita.
- Problemas cuya solución requiere resolver una ecuación de primer grado.

PROPÓSITOS :

- Resolver ecuaciones enteras de primer grado con una incógnita.
- Calcular el valor de la incógnita en una ecuación racional de primer grado con una incógnita.
- Plantear y resolver problemas donde su solución requiera resolver una ecuación de primer grado con una incógnita.

ACCIONES PEDAGÓGICAS :

- Lectura de conceptos y ejemplos correspondientes a la unidad.
- Ejemplificación de los temas tratados.
- Asesoría para aclarar las dudas que presenten los estudiantes en los temas estudiados.
- Solución de talleres.
- Trabajos en grupos y desescolarizados.
- Salidas al tablero, para resolver ejercicios, problemas y aclarar dudas.
- Consultas en la biblioteca.

RECURSOS :

- Guía de aprendizaje.
- Profesor.
- Estudiantes
- Tizas de diferentes colores.
- Biblioteca.

INDICADORES DE LOGROS :

- Resuelve ecuaciones enteras de primer grado con una incógnita.
- Calcula el valor de la incógnita en una ecuación racional de primer grado con un incógnita.
- Plantea y resuelve problemas donde su solución requiera resolver una ecuación de primer grado con una incógnita.

ECUACIÓN :

Es una igualdad entre dos expresiones algebraicas y que sólo se verifica o es verdadera para determinados valores de las incógnitas.

Ejemplo : $5x-20 = 2x+4$, es una ecuación en la variable x, porque es una igualdad en la que hay una incógnita, la x, esta igualdad sólo se verifica, o sea que solo es verdadera, para el valor $x = 8$. En efecto, si sustituimos la x por 8, tenemos :

$$5(8) - 20 = 2(8) + 4$$

$$40 - 20 = 16 + 4$$

$$20 = 20$$

MIEMBROS DE LA ECUACIÓN :

Son las expresiones algebraicas separadas por el signo igual (=), en nuestro ejemplo; $5x - 20$ primer miembro y $2x+ + 4$ segundo miembro.

RAICES O SOLUCIONES :

Es el valor (o valores) particulares que hay que atribuir a la variable (variables) para que una ecuación se convierta en una igualdad numérica.

Recordemos las propiedades de monotonía de la igualdad, que nos van a permitir transformar una ecuación en otra más sencilla. Veámoslas :

PROPIEDADES: Si a, b, c son números reales cualesquiera, se cumple que :

1. Si $a = b$, entonces : $a + c = b + c$. Propiedad aditiva.

   Ejemplo : $5 = 5$, entonces ; $5 + 2 = 5 + 2$; $7 = 7$.

2. Si $a = b$, entonces; $a - c = b - c$.. Propiedad de la sustracción.

   Ejemplo : $5 = 5$; entonces; $5 - 3 = 5 - 3$, $2 = 2$.

3. Si $a = b$; entonces , $a \times c = b \times c$. Propiedad multiplicativa.

Ejemplo : $3 = 3$; entonces ; $3 \times 4 = 3 \times 4$; $12 = 12$.

4. Si $a = b$; entonces ; $a \div c = b \div c$, con $c \neq 0$. Propiedad de la división.

   Ejemplo : $10 = 10$; entonces ; $10 \div 5 = 10 \div 5$; $2 = 2$.

Teniendo en cuenta las propiedades de la igualdad, podemos preceder de la siguiente forma para solucionar una ecuación de primer grado.

1. Agrupar y reducir términos semejantes que haya en los dos miembro de la ecuación.
2. Suprimir todos los denominadores. Para ello multiplicamos ambos miembros de la ecuación por el m. c. m. de los denominadores dados originalmente.
3. Efectuar las operaciones indicadas en los dos miembros de la ecuación (suprimiendo paréntesis).
4. Usando las propiedades de la igualdad pasar las variables (incógnita) a un solo miembro y las constantes (valores numéricos) al otro miembro.
5. Solucionar la ecuación de primer grado así obtenida, dividiendo ambos miembros de la ecuación por el coeficiente de la incógnita.
6. Verificar el resultado en la ecuación original.

Ejemplo : Resolvamos la ecuación $2(x + 3) = 4$.

Solución :

Ecuación dada	: $2(x + 3) = 4$
Suprimiendo paréntesis	: $2x + 6 = 4$
Propiedad aditiva	: $2x + 6 + (-6) = 4 + (-6)$
Definición de sustracción	: $2x + 0 = 4 - 6$
Propiedad modulativa	: $2x = -2$
Propiedad de la división	: $\frac{2x}{2} = -\frac{2}{2}$
Simplificando	: $x = -1$

Verificación :

Como $x = -1$, entonces

$$2(-1 + 3) = 4$$
$$2(2) = 4$$
$$4 = 4$$

Vamos a estudiar una forma más rápida para resolver una ecuación de primer grado con una incógnita, esta forma de resolver ecuaciones es con base en las propiedades estudiadas anteriormente, pero con una aplicación directa.

TRANSPOSICIÓN DE TÉRMINOS :

Consiste en cambiar los términos de una ecuación de un miembro a otro.

- Cualquier término de una ecuación se puede pasar de un miembro a otro cambiándole el signo.
- Términos iguales con signos iguales en distinto miembro de una ecuación, pueden suprimirse.
- Los signos de todos los términos de una ecuación se puede cambiar sin que la ecuación varíe, es lo mismo que multiplicar los dos miembros de la ecuación por (-1), con lo cual la ecuación no varía.

FORMA RÁPIDA PARA RESOLVER UNA ECUACIÓN DE PRIMER GRADO

1. Se efectúan las operaciones indicadas , si las hay.
2. Se hace la transposición de términos, reuniendo en un miembro todos los términos que contengan la incógnita y en el otro miembro todas las constantes (cantidades conocidas).
3. Se reducen términos semejantes en ambos miembros.
4. Se resuelve la ecuación resultante dividiendo ambos miembros de la ecuación por el coeficiente de la incógnita.

Ejemplo 1 : Resolvamos la ecuación $5 + 4(x - 2) = 2(x + 7) + 1$.

Solución :

$5 + 4(x - 2) = 2(x + 7) + 1$: Ecuación dada.

$5 + 4x - 8 = 2x + 14 + 1$: Efectuando operaciones.

$4x - 2x = 14 + 8 - 5 + 1$	Transponiendo las incógnitas al miembro derecho y las constantes al izquierdo
$2x = 18$	Reduciendo términos semejantes.
$\frac{2x}{2} = \frac{18}{2}$	Propiedad de la división.
$x = 9$	Simplificando.

Verificando

Como x = 9, entonces

$$\begin{aligned} 5 + 4(9 - 2) &= 2(9 + 7) + 1 \\ 5 + 4(7) &= 2(16) + 1 \\ 5 + 28 &= 32 + 1 \\ 33 &= 33 \end{aligned}$$

Ejemplo 2 . Con lo que se ha trabajado, ya el lector es capaz de identificar los pasos que se siguen en el procedimiento de los ejemplos que aparecen a continuación.

Resolvamos la ecuación $(5 - 3x) - (-4x + 6) = (8x + 11) - (3x - 6)$.

Solución :

$$\begin{aligned} (5 - 3x) - (-4x + 6) &= (8x + 11) - (3x - 6) \\ 5 - 3x + 4x - 6 &= 8x + 11 - 3x + 6 \\ -3x + 4x - 8x + 3x &= 11 + 6 - 5 + 6 \\ 7x - 11x &= 23 - 5 \\ -4x &= 18 \end{aligned}$$

Ejemplo 3 : Resolvamos la ecuación :

$16x - [3x - (6 - 9x)] = 30x + [-(3x + 2) - (x + 3)]$.

Solución :

$$\begin{aligned} 16x - [3x - 6 + 9x] &= 30x + [-3x - 2 - x - 3] \\ 16x - 3x + 6 - 9x &= 30x - 3x - 2 - x - 3 \end{aligned}$$

$$16x - 3x - 9x - 30x + 3x + x = -2 - 3 - 6$$

$$20x - 42x = -11$$

$$-22x = -11$$

$$22x = 11$$

$$x = \frac{11}{22}$$

$$x = \frac{1}{2}$$

ACTIVIDAD : Solucionar el taller #16.

ECUACIONES FARACCIONAARIAS

Se presentan dos casos :

1. Cuando los denominadores son cantidades numéricas (constantes).
2. Cuando los denominadores son variables o incógnitas.

El método para resolver este tipo de ecuaciones consiste en aplicar la propiedad de la multiplicación para suprimir denominadores y, luego, se procede, como los casos estudiados anteriormente.

Ejemplo 1 : Resolvamos la ecuación : $\frac{1}{4}x - \frac{1}{3}x = \frac{1}{2}$.

Solución :

$\frac{1}{4}x - \frac{1}{3}x = \frac{1}{2}$: Ecuación dada.

$$12\left(\frac{1}{4}x-\frac{1}{3}x\right)=12\left(\frac{1}{2}\right)$$: Multiplicando ambos miembros por el m.c.m. de los denominadores que es 12.

$$\frac{12x}{4}-\frac{12x}{3}=\frac{12}{2}$$: Efectuando.

$$3x\text{-}4x = 6$$: Simplificando.

$$-x = 6$$: Efectuando

$$x = -6$$: Cambiando signo en ambos miembros.

Ejemplo 2 : resolvamos la ecuación : $\frac{2x-3}{9}-\frac{x+5}{6}=\frac{3-x}{2}-1.$

Solución :

$$\frac{2x-3}{9}-\frac{x+5}{6}=\frac{3-x}{2}-1$$: Ecuación dada.

$$18\left(\frac{2x-3}{9}-\frac{x+5}{6}\right)=18\left(\frac{3-x}{2}-1\right)$$: Multiplicando ambos miembros de la ecuación por el m.c.m. de los denominadores que es 18

$$\frac{18(2x-3)}{9}-\frac{18(x+5)}{6}=\frac{18(3-x)}{2}-18$$: Efectuando.

$$2(2x-3)-3(x+5) = 9(3-x)-18$$: Simplificando

$$4x-6-3x-15 = 27-9x-18$$: Efectuando.

$$4x-3x+9x = 27-18+6+15$$: Transponiendo términos.

$$13x-3x = 48-18$$: Efectuando.

$$10x = 30$$: Efectuando.

$$\frac{10x}{10}=\frac{30}{10}$$: Propiedad de la división.

$$x = 3$$: Simplificando.

Ejemplo 3 : Resolvamos la ecuación : $\dfrac{1}{3x-3}+\dfrac{1}{4x+4}=\dfrac{1}{12x-12}$.

Solución :

$$\frac{1}{3x-3}+\frac{1}{4x+4}=\frac{1}{12x-12}$$: Ecuación dada.

$$\frac{1}{3(x-1)}+\frac{1}{4(x+1)}=\frac{1}{12(x-1)}$$. Factorizando los denominadores.

$$12(x+1)(x-1)\left[\frac{1}{3(x+1)}+\frac{1}{4(x-1)}\right]=12(x+1)(x-1)\left[\frac{1}{12(x-1)}\right]$$: Multiplicando ambos miembros por el m.c.m. de los denominadores que es 12(x +1)(x –1)

$$\frac{12(x+1)(x-1)}{3(x+1)}+\frac{12(x+1)(x-1)}{4(x+1)}=\frac{12(x+1)(x-1)}{12(x-1)}$$: Efectuando.

$4(x+1)+3(x-1) = x+1$: Simplificando.

$4x+4+3x-3 = x+1$: Efectuando.

$4x+3x-x = 1+3-4$: Transponiendo términos.

$6x = 0$: Efectuando.

$$\frac{6x}{6}=\frac{0}{6}$$: Propiedad de la división.

$x = 0$: Simplificando.

Ejemplo 4 : Resolvamos la ecuación : $\dfrac{a-x}{a}-\dfrac{b-x}{b}=\dfrac{4(a-b)}{ab}$.

Solución :

$$\frac{a-x}{a}-\frac{b-x}{b}=\frac{4(a-b)}{ab}$$: Ecuación dada.

$$ab\left(\frac{a-x}{a}-\frac{b-x}{b}\right)=ab\left(\frac{4(a-b)}{ab}\right)$$: Multiplicamos ambos miembros por el m.c.m. de los denominadores que es ab.

$$\frac{ab(a-x)}{a} - \frac{ab(b-x)}{b} = \frac{4ab(a-b)}{ab}$$ Efectuando.

$$b(a\text{-}x) - a(b\text{-}x) = 4(a-b)$$ Simplificando

$$ab - bx - ab + ax = 4(a-b)$$ Efectuando

$$ax - bx = 4(a-b)$$ Cancelando.

$$x(a-b) = 4(a-b)$$ Factorizando

$$\frac{x(a-b)}{(a-b)} = \frac{4(a-b)}{(a-b)}$$ Propiedad de la división.

$$x = 4$$ Simplificando

TALLER 16

Resolver las siguientes ecuaciones.

01. $2x + 5 = 9$
02. $20 = 3x + 8$
03. $13 = 6 + 7x$
04. $2x - 5 = 9$
05. $4x - 11 = 21$
06. $60 = 10x - 20$
07. $10x + 5x - 6 = 9$
08. $7x + 10 - 2x = 45$
09. $25 = 19 + 20x - 18x$
10. $35 = 6x + 8 + 3x$
11. $4x + x + 9 = 9 + 10$
12. $7x + 2 = 3x + 14$
13. $9x - 4 = 3x - 16$
14. $3x - 2 = 5x + 6$
15. $7x - 5 = 4 + 4x$
16. $3x - 3 = 2 - 7x$
17. $\frac{x}{4} + 3 = 7$
18. $\frac{x}{5} + 2 = 10$
19. $17 = \frac{x}{2} + 15$
20. $\frac{x}{4} - 3 = 7$
21. $\frac{x}{5} - 2 = 10$
22. $2(x + 1) - (x - 1) = 0$
23. $3(3x - 1) + 4(9 - 5x) = 0$

24. $6(4x - 7) - 5(2x + 5) = 3$ ____________________

25. 25. $3(x - 1) + 2(x + 1) = 3x + 12$ ____________________

26. $2x + 5(x + 9) = 16 + 4(x - 12)$ ____________________

27. $(x - 1)[x - 2(x - 3)] = x(1 - x)$ ____________________

28. $(x + 3)(x + 5) - (x - 6)(x + 6) = 0$ ____________________

29. $6x(7 - x) = 36 - 2x(3x - 15)$ ____________________

30. $7x - 3[2x - 5(x - 2) - 3] = 2(x - 1)$ ____________________

31. $4[3x - (1 - 2x)] = 9x - 15$ ____________________

32. $3(x + 3) - 4 = 8[x - (2x + 1)$ ____________________

33. $5x + 6x - 81 = 7x + 102 + 65x$ ____________________

34 . $3x + 101 - 4x - 33 = 108 - 16x - 100$ ____________________

35. $14x - (3x - 2) - [5x + 2 - (x - 1) = 0$ ____________________

36. $6x - (2x + 1) = -\{-5x + [-(-2x - 1)]\}$ ____________________

37. $(x + 3)^2 - 2[x(1 + x)] = x(2 - x)$ ____________________

38. $(2x - 1)^2 = 4x(x - 2)$ ____________________

39. $(x + 4)^2 = (x + 6)^2$ ____________________

40. $2\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}(3x - 7)$ ____________________

41. $4\left(\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}(4x + 12) = 4$ ____________________

42. $3\left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{6}\right) - \frac{3}{4}(2x + 18) = -4$ ____________________

43. $\frac{2}{3}x - \frac{3}{4} + \frac{1}{4}x = x - \frac{5}{4}$ ____________________

44. $\frac{3}{2}x - \frac{2}{3} - \frac{1}{3}x = \frac{4}{3}x - \frac{10}{3}$ ____________________

45. $\frac{5}{6}x + \frac{7}{9} - \frac{2}{3}x = \frac{2}{9}x - \frac{5}{9}$ ____________________

46. $\frac{3}{5}x-5=\frac{1}{2}x-4$ ____________________

47. $\frac{1}{5}x+1=\frac{2}{3}x-\frac{4}{3}$ ____________________

48. $\frac{2x+1}{3}=3x-16$ ____________________

49. $\frac{4x+6}{6}=12-3x$ ____________________

50. $\frac{3x+5}{5}=2x-6$ ____________________

51. $\frac{2x-3}{3}+4=\frac{3x-4}{2}$ ____________________

52. $\frac{3x+5}{4}-\frac{2x-3}{3}=3$ ____________________

53. $\frac{3x}{2}-\frac{7x}{4}=2x-\frac{4}{5}$ ____________________

54. $\frac{5x}{8}-8=\frac{2x}{3}-11$ ____________________

55. $a(x-1)=b(a-x)-a$ ____________________

56. $a(x-2)-b(x-1)=b-a$ ____________________

57. $\frac{2(3x-5)}{7}-\frac{5(x-1)}{6}=\frac{2(x+5)}{3}$ ____________________

58. $\frac{x-2}{\frac{1}{2}-\frac{1}{6}}=x-\frac{x+2}{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}}$ ____________________

59. $\frac{(x-1)}{2}-(x-3)=\frac{(x+3)}{3}+\frac{1}{6}$ ____________________

PROBLEMAS DE APLICACIÓN

No existe un modelo generalizado que sirva para resolver problemas que conduzcan a plantear ecuaciones de primer grado con una incógnita, pero podemos segur algunos pasos que nos servirán de apoyo en la búsqueda de cualquier situación especifica.

1. Leer cuidadosamente el problema cuantas veces sea posible, para entender la situación planteada en el enunciado.
2. Hacer una gráfica o bosquejo que nos ayude a entender mejor el problema, si es posible.
3. Identificar que términos se buscan y las expresiones literales correspondientes, para representar los valores desconocidos.
4. Plantear cómo se puede relacionar la situación del problema con el término desconocido.
5. Resolver la ecuación planteada.

Ejemplo 1: Hallar el número que aumentado en 20 equivale a 5 veces el mismo número.

Solución :

Sea x el número buscado.

Sea x + 20 el número aumentado en 20.

Sea 5x cinco veces el número.

De acuerdo con el enunciado del problema :

$$x + 20 = 5x$$
$$x - 5x = -20$$
$$-4x = -20$$
$$4x = 20$$
$$x = \frac{20}{4}$$
$$x = 5.$$

Ejemplo 2 : La suma de tres enteros pares consecutivos es 96. Hallar los tres números.

Solución : La forma de un número par es 2x.

Sea 2x el primer número.

Sea 2x + 2 el segundo número.

Sea 2x + 4 el tercer número.

Según el enunciada del problema:

$$2x + (2x + 2) + (2x + 4) = 96$$
$$2x + 2x + 2 + 2x + 4 = 96$$
$$6x = 96 - 2 - 4$$
$$6x = 90$$
$$x = \frac{90}{6}$$
$$x = 15$$

Primer número : 2(15) = 30

Segundo número : 2(15) + 2 = 32

Tercer número : 2(15) + 4 = 34

<u>Ejemplo 3 :</u> La suma de tres números enteros impares consecutivos es 45. Calculemos los tres números.

Solución : La forma de un número entero impar es : $2x + 1$.

Sea $2x + 1$ el primer número entero impar.

Sea $2x + 3$ el segundo número impar.

Sea $2x + 5$ el tercer número impar.

Según el enunciado del problema :

$$(2x + 1) + (2x + 3) + (2x + 5) = 45$$
$$2x + 1 + 2x + 3 + 2x + 5 = 45$$
$$6x = 45 - 1 - 3 - 5$$
$$6x = 36$$
$$x = \frac{36}{6}$$
$$x = 6$$

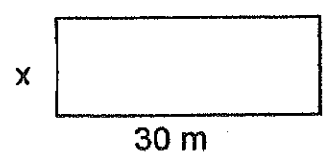
Primer número : 2(6) + 1 = 13

Segundo número : 2(6) + 3 = 15

Tercer número : 2(6) + 5 = 17

<u>Ejemplo 4 :</u> El área de un rectángulo es 120 m^2 y su largo es de 30 m. Calcular el ancho del rectángulo.

Solución : Sabemos por geometría elemental que el rectángulo tiene los lados paralelos e iguales de dos en dos.



Sea x el ancho del rectángulo.

Según el problema :

$30x = 120$

$x = \dfrac{120}{30}$ Luego, el ancho del rectángulo es de 4 metros.

$x = 4.$

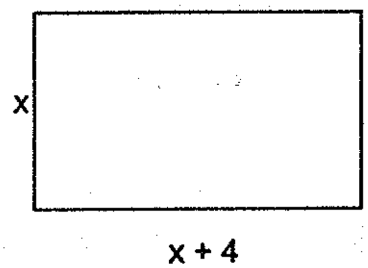
Ejemplo 5 : El largo de un rectángulo excede al ancho en 4 centímetros. Si el perímetro mide 60 centímetros. ¿Cuáles son las medidas del largo y del ancho?

Solución :

Sea x el ancho del rectángulo.

Sea x + 4 el largo del rectángulo.

Como el perímetro es la suma de todos los lados, tenemos :



$$x + x + 4 + x + x + 4 = 60$$
$$4x = 60 - 4 - 4$$
$$4x = 52$$
$$x = \frac{52}{4}$$

$x = 13.$ Ancho. Largo: $13 + 4 = 17$ metros.

Ejemplo 6 : La edad de Rubén es el cuádruplo de la edad de Jaime. Si ambas Edades suman 45 años. Calcular la edad de cada uno.

Solución :

Sea x la edad de Jaime.

Sea 4x la edad de Rubén.

$$x + 4x = 45$$
$$5x = 45$$
$$x = \frac{45}{5}$$
$$x = 9.$$

Edad de Jaime : 9 años.

Edad de Rubén : $4x9 = 36.$

Ejemplo 7 : Hace 14 años la edad de un padre era el triple de la edad de su hijo y ahora es el doble. Calcular las edades actuales de los dos.

Solución : En este tipo de problemas tenemos que ubicarnos en las épocas respectivas, y luego, plantear la ecuación según el enunciado del problema.

Sea x la edad actual del hijo.

Sea $2x$ la edad actual del padre.

Sea $x - 4$ la edad del hijo hace 14 años.

Sea $2x - 14$ la edad del padre hace 14 años.

Según el enunciado del problema :

$$2x - 14 = 3(x - 14)$$

$$2x - 14 = 3x - 42$$

$$2x - 3x = 14 - 42$$

$$-x = -28$$

$x = 28$. Edad del hijo.

$2x28 = 56$. Edad del padre.

Ejemplo 8 : La suma de las edades de Ana y María es 65 años. Dentro de 10 años la edad de María será los 5/12 de la de Ana. ¿Cuál es la edad actual de cada una?

Solución : Tenemos que ubicarnos en la época actual y dentro de 10 años.

Sea x la edad actual de Ana.

Sea $65 - x$ la edad actual de María.

Sea $x + 10$ la edad de Ana dentro de 10 años.

Sea $65 - x + 10$ la edad de María dentro de 10 años.

Luego :

$$65 - x + 10 = \frac{5}{12}(x + 10)$$

$$12(75 - x) = 12 \times \frac{5}{12}(x + 10)$$

$$900 - 12x = 5x + 50$$

$$-12x - 5x = 50 - 900$$

$$-17x = -850$$

$$17x = 850$$

$$x = \frac{850}{17}$$

$x = 50$. Edad de Ana.

$65 - 50 = 15$: Edad de María.

TALLER 17

01. Hallar Un número tal que sumado a 121 resulta 21. Sol : 9.

02. Hallar un número tal que sumado a 15 resulta cuatro veces el número. Sol : 5.

03. Hallar un número que restado de 40 resulta 27. Sol : 13.

04. Hallara un número tal que sumando 20 al doble de dicho número se obtiene 32. Sol : 6.

05. Hallar un número tal que restando 7 al triple de dicho número se obtiene 23. Sol : 10.

06. Hallar un número tal que restando15 al cuádruplo del número se obtiene el mismo número. Sol : 5.

07. Hallar un número tal que sumando 5 a la mitad de dicho número se obtiene 29. Sol : 48.

08. Hallar un número tal que restando su militad de 15 se obtiene 6. Sol : 18.

09. Hallar tres números enteros consecutivos cuya suma sea 36. Sol : 11 ; 12 ; 13.

10. Hallar tres número enteros consecutivos impares cuya suma sea 33. Sol : 9 ; 11 ; 13.

11. Cuatro veces un número aumentado en 45 es igual a 7 veces dicho número. Hallar el número. Sol : 15.

12. Diez veces un número disminuido en siente es igual a ocho veces el número aumentado en 21. Hallar el número. Sol : 14.

13. Dos tercios de un número aumentado en 10 es igual a 24. Hallar el número. Sol : 21.

14. Hallar un número si dos veces la suma del número y cuatro es igual al número más 11. Sol : 3.

15. Hallar un número tal que tres veces la suma del número y 2, sea igual a cuatro veces el número disminuido en tres. Sol : 9

16. Hallara un número si 25 menos tres veces el número es igual a ocho veces la diferencia que se obtiene cuando se resta al número la unidad. Sol : 3.

17. Tres niños ganan len total $6.000. Enrique ganó $2.000 menos que Eduardo y Joaquín ganó dos veces más que Enrique. Hallar lo que ganó cada uno. Sol : $1.000 ; $2.000 ; $3.000.

18. Dividir 196 en tres partes tales que la segunda sea el duplo de la primera y la suma de las dos primera exceda a la tercera en 20. Sol : 36 ; 72 ; 88.

19. La edad de Clara es triple que la de Carolina y hace 5 años era el cuádruplo de la de Carolina. Hallara las edades actuales. Sol : 45 y 15 años.

20. Un comerciante adquiere 50 lapiceros y 35 borradores, por $16.000. Cada lapicero costó el doble de lo que costó cada borrador más $50. Hallar el precio de un lapicero y de un borrador. Sol : $250 ; $100.

21. Seis personas iban a comprar una casa contribuyendo por partes iguales, pero dos de ellas desistieron del negocio y entonces cada una de las restantes tuvo que poner $2.000.000 más. Cuál era el valor de la casa. Sol : $24.000.000.

22. Hace 12 años la edad de Inés era el doble de la de Carlota y dentro de 12 años la edad de Inés será 68 años menos que el triple de la de Carlota. Hallar las edades actuales. Sol : 52 y 32 años.

23. tengo $185 en monedas de 10 y 5 pesos. Si en total tengo 22 monedas. ¿Cuántas son de 10 pesos y cuántas son de 5 pesos? Sol : 15 y 7.

24. Un hombre desea repartir $16.500 entre tres hijos y dos hijas, y quiere que cada hija reciba $2.000 más que cada hijo. Hallar la parte de cada hija y de cada hijo. Sol : $2.500 ; $4.500.

25. En cada día , de lunes a jueves gané $6 más que lo que gané el día anterior, si el jueves gané el cuádruplo de lo que gané el lunes. ¿Cuánto gané cada día? Sol : $6 ; $12 ; $18 ; $24.

26. Tenía cierta suma de dinero, ahorro una semana igual a lo que tenia y gasté $50; luego ahorré una suma igual al doble de lo que me quedaba y gasté $390. Si ahora no tengo nada. ¿Cuánto tenía al principio? Sol : $90.

27. Hace 5 años la edad de un padre era tres veces la de su hijo y dentro de 5 años será el doble. ¿Qué edad tiene ahora el padre y el hijo? Sol : 35 y 15 años.

28. Dentro de 4 años la edad de Viviana será el triple de la de Ángela, y hace dos años era el quíntuple. Hallar las edades actuales. Sol : 32 y 8 años.

29. La diferencia de dos números es 6 y la mitad del mayor excede en 10 a los 3/8 del menor. Hallar los números. Sol : 56 y 62.

30. Joselíto tiene $120 y Manuelílto $90. Después que Joselíto le dio a Manuelíto cierta suma, Manuelíto tiene 11/10 de lo que le queda a Joselíto. ¿Cuánto le dio Joselito a Manuelíto? Sol : $20.

31. Vendí un reloj por $8.000 más la tercera parte de lo que me había costado y en esta operación gané $2.000. ¿Cuánto me había costado el reloj? Sol : $9.000.

32. Si tres veces el sucesor de un número se suma al número, la suma es 31. Encuentra el número. Sol : 7.

33. Los números de grado en los tres ángulos de cierto triángulo se representan por tres números enteros consecutivos. Encuentra el número de grados en cada uno de los ángulos. Sol : 58 ; 60 y 62 grados.

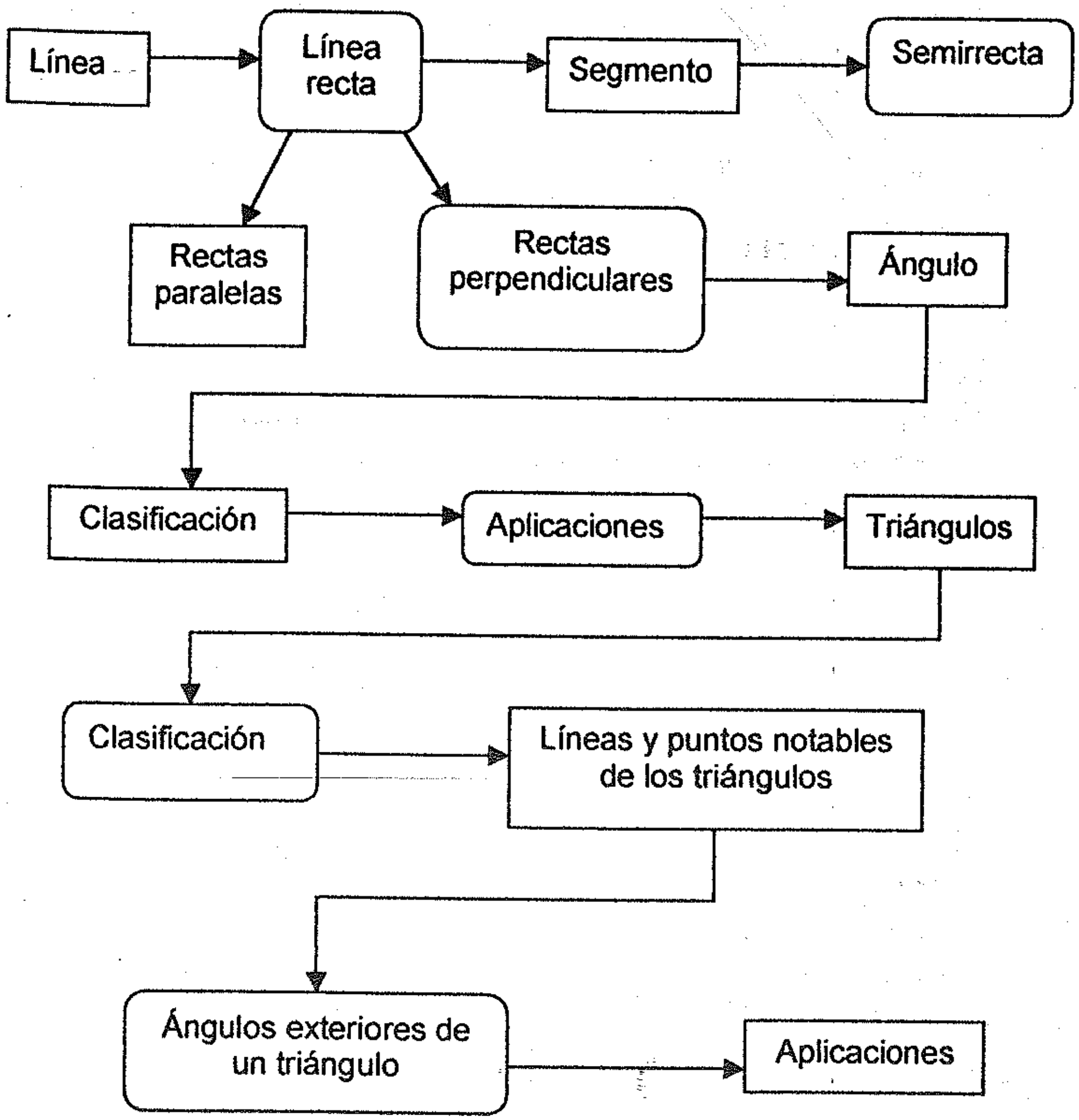
34. En un grupo de 35 estudiantes había 10 hombres menos que el doble de las mujeres. Determine cuántos había de cada sexo. Sol : 20 hombres ; 15 mujeres.

35. En un colegio, la mitad de los alumnos menos seis poseen automóviles. El total de automóviles propiedad de los alumnos es 198. ¿Cuántos alumnos hay en el colegio? Sol : 408 alumnos.

UNIDAD 4

ÁNGULOS Y TRIÁNGULOS

MAPA CONCEPTUAL



GEOMETRÍA

TEMAS.

- Línea, línea recta.
- Segmento.
- Semirrecta.
- Rectas paralelas y perpendiculares.
- Ángulo.
- Clasificación de los ángulos.
- Aplicaciones.
- Triángulos.
- Clasificación de los triángulos.
- Líneas y puntos notables de los triángulos.
- Ángulos exteriores de un triángulo.
- Aplicaciones.

PROPÓSITOS.

- Identificar línea, línea recta, segmento y semirrecta.
- Construir rectas paralelas y perpendiculares.
- Identificar como se genera un ángulo.
- Clasificar los ángulos.
- Resolver ejercicios con ángulos.
- Construir triángulos.
- Trazar las líneas y puntos notables de los triángulos.
- Calcular los ángulos exteriores de un triángulo.
- Resolver ejercicios con triángulos.

ACCIONES PEDAGÓGICAS.

- Lectura de conceptos y ejemplos correspondientes a la unidad.
- Ejemplificación de los temas tratados.
- Asesoría permanente para aclarar las dudas que presenten los estudiantes en los diferentes temas tratados.
- Solución de talleres en clase y en forma desescolarizada.
- Trabajos en grupos.
- Salidas al tablero, para resolver ejercicios y aclarar dudas.

RECURSOS.

- Texto guía.
- Profesor.
- Estudiantes.
- Tizas de diferentes colores.

- Regla, transportador, compás, escuadras, carteleras.
- Biblioteca.

INDICADORES DE LOGROS.

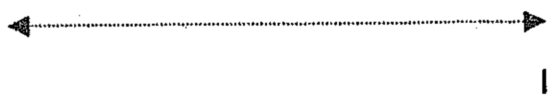
- Identifica línea, línea recta, segmento y semirrecta.
- Construye rectas paralelas y perpendiculares.
- Identifica como se genera un ángulo.
- Clasifica los ángulos.
- Resuelve ejercicios con ángulos.
- Construye triángulos.
- Traza las líneas y puntos notables en un triángulo.
- Calcula los ángulos exteriores de un triángulo.
- Resuelve problemas con triángulos.

ÁNGULOS Y TRIÁNGULOS

Antes de estudiar los ángulos y triángulos, recordemos algunos conceptos básicos estudiados en los grados anteriores.

LINEA : Es una sucesión de infinitos puntos.

LINEA RECTA : Es una sucesión infinita de puntos orientados en una misma dirección.



recta $\overleftrightarrow{l}$

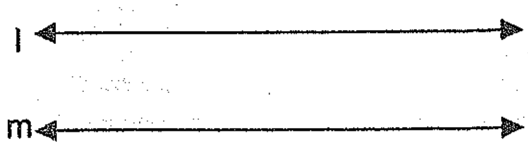
SEGMENTO : Cuando la línea recta está limitada en sus extremos, se llama segmento ; en nuestro caso, sus límites , son los puntos M y N, los cuales reciben el nombre de origen y extremo del segmento.

Segmento $\overline{MN}$

SEMIRRECTA : Cuando La línea recta está limitada en uno de sus extremos, recibe el nombre de semirrecta.

Semirrecta $\overrightarrow{OP}$

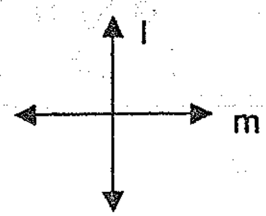
RECTAS PARALELAS : Son las rectas que no tienen ningún punto en común.



$\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$

RECTAS PERPENDICULARES :

Dos rectas son perpendiculares, cuando al cortarse forman ángulos rectos (90°).



$\overleftrightarrow{l} \perp \overleftrightarrow{m}$

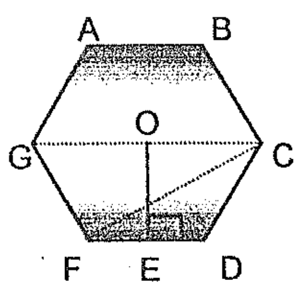
POLÍGONO : Se da el nombre de polígono a toda superficie plana limitada en todos los sentidos por segmentos de línea recta.

POLÍGONO REGULAR : Se define como aquel que tiene todos sus lados y ángulos iguales.

DIAGONAL : Es el segmento de recta que une dos vértices no consecutivos de un polígono.

APOTEMA : Todos los polígonos regulares tienen un punto llamado centro del polígono, el cual equidista de todos los lados del mismo.
El segmento de la perpendicular trazada desde el centro del polígono regular a un lado, se llama APOTEMA.

PERÍMETRO : Es la suma de los lados de cualquier figura geométrica.



$\overline{CG}$ y $\overline{CF}$: Diagonales.

$\overline{OE}$: Apotema.

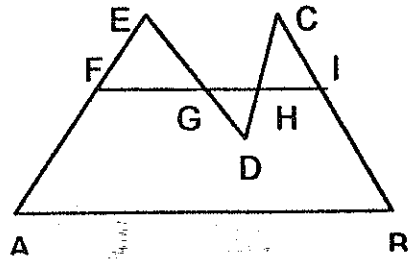
O : Centro del polígono.

Perímetro = $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DF} + \overline{FG} + \overline{GA}$

Este polígono se llama regular convexo (hexágono).

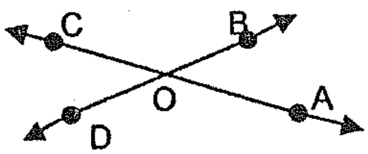
POLÍGONO NO CONVEXO (CÓNCAVO) :

Cuando una recta corta a un polígono en más de dos puntos, entonces recibe el nombre de polígono no convexo o cóncavo



CONCEPTO DE ÁNGULO :

Toda región comprendida entre dos semirrectas que tienen un punto en común (O), recibe el nombre de ángulo.



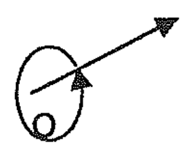
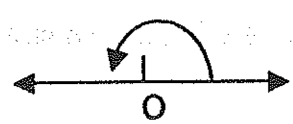
$\overrightarrow{OA}$: Lado inicial del ángulo AOB

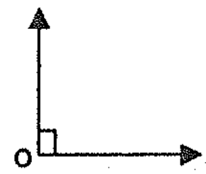
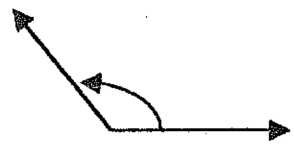
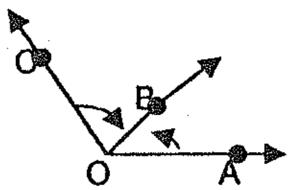
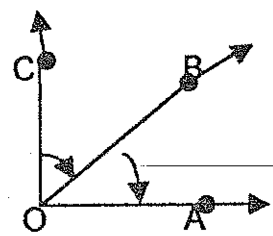
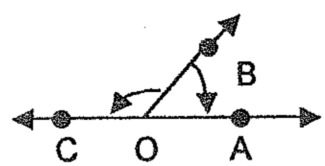
$\overrightarrow{OB}$: Lado final del ángulo AOB

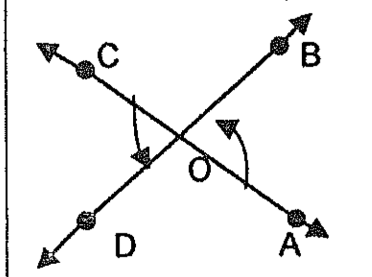
Se simboliza : ∢ AOB, con vértice en (O) y lados $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$, También se puede simbolizar : ∢ O que significa el ángulo cuyo vértice es O, también podemos usar las letras griegas α(alpha), β(betha), θ(tetha), etc.

Los ángulos se miden usando el transportador, como ya estudiamos en el grado sexto.

CLASES Y PARES DE ÁNGULOS

Ángulo de un giro	Si los lados inicial y final coinciden por ser el giro de una vuelta tenemos el ángulo de un giro ángulo completo	
Ángulo llano	Si el desplazamiento es de media vuelta, siendo los lados colineales , se llama ángulo llano	

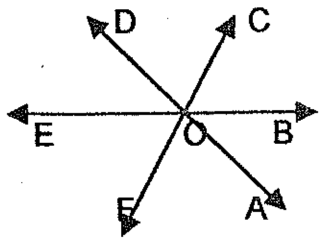
Ángulo recto	Cuando el desplazamiento es de un cuarto de vuelta, recibe el nombre de ángulo recto. (sus lados son perpendiculares.	
Ángulo agudo	Si la amplitud del ángulo es menor que la de un ángulo recto, se llama ángulo agudo	
Ángulo obtuso	Si la amplitud del ángulo es mayor que la de un ángulo recto, se llama ángulo obtuso	
Ángulos adyacentes	Un par de ángulos que tienen un lado común, se denominan adyacentes. ∢AOB y∢ BOC son adyacentes.	
Ángulos complementarios	Un par de ángulos cuyas amplitudes suman un ángulo recto, se llaman complementarios ∢ AOB y ∢ BOC son complementarios	
Ángulos suplementarios	Un par de ángulos cuyas amplitudes sumen un ángulo llano reciben el nombre de suplementarios ∢ AOB y ∢ BOC son suplementarios	

Ángulos opuestos por el vértice	Dos ángulos formados por la intersección de dos recta y cuyas amplitudes son iguales, se llaman opuestos por el vértice. ∢ AOB y ∢ COD son opuestos por el vértice.	

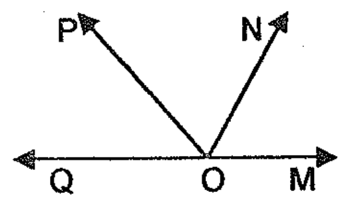
EJERCICIO

1. Escribe con letras todos los ángulos que se forman en las siguientes figuras.

a.

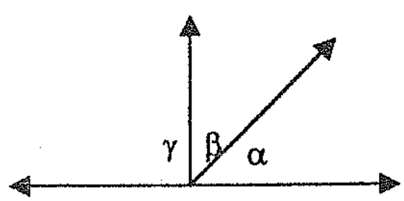


b.



2. En la figura, la semirrecta $\overline{OA}$ es perpendicular a la recta m. Identifica :

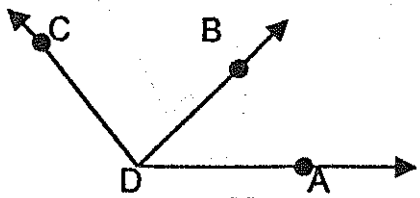
   a. Dos ángulos rectos.
   b. Dos ángulos agudos.
   c. Un ángulo obtuso.
   d. Dos ángulos complementarios.
   e. Dos ángulos adyacentes.
   f. Dos ángulos no adyacentes.
   g. Dos ángulos suplementarios.



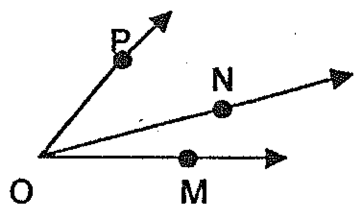
3. Decir si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos.

   a. Si el ángulo A mide 35 grados, es un ángulo agudo ____________
   b. Si el ángulo B mide 73 grados, es un ángulo obtuso ____________
   c. Si el ángulo C mide 95 grados, es un ángulo obtuso ____________

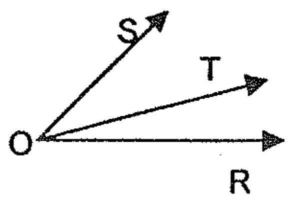
4. El ángulo CDB mide 80 grados, la medida del ángulo ADB es 60 grados. ¿Cuánto mide el ángulo ADC?



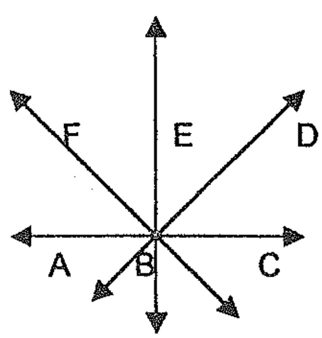
5. La medida del ángulo MON es de 3 grados y la medida del ángulo MOP es 15 grados. ¡Cuánto mide el ángulo NOP?



6. Si $\measuredangle$TOS = 30° y $\measuredangle$ROS = 45°. ¿Cuánto vale $\measuredangle$ROT ?.



7.



$\overleftrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{EB}, \overrightarrow{FB} \perp \overrightarrow{DB}$ y $\measuredangle$ CBD = 30°.

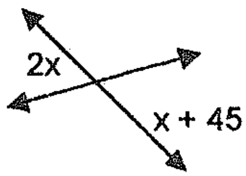
a. ¿ Cuánto mide cada uno de los ángulos : $\measuredangle$ABE , $\measuredangle$EBC , $\measuredangle$EBF , $\measuredangle$ FBD , $\measuredangle$ABD ?

b. ¿Qué ángulos miden 60°?

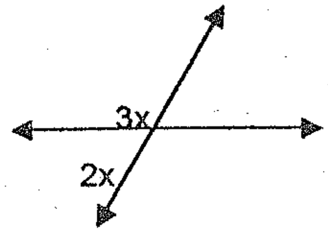
c. ¿Qué ángulo o ángulos miden 150°?

8. Calcular el valor de x y la medida de cada ángulo en cada una de las siguientes figuras.

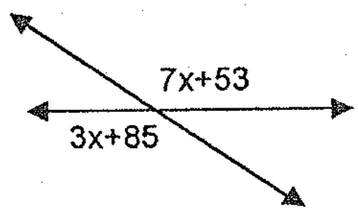
a.



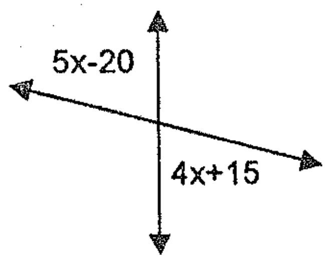
b.



c.

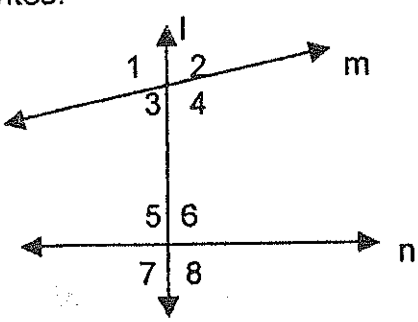


d.



DEFINICIÓN:

Una transversal es una recta que interseca a dos rectas coplanarias en dos puntos diferentes.



La transversal l, interseca a m y n en dos puntos diferentes. De esta forma se forman se determinan 8 ángulos especiales que se clasifican así :

Ángulos internos : $\measuredangle 3$, $\measuredangle 4$, $\measuredangle 5$, $\measuredangle 6$.

Ángulos externos : $\measuredangle 1$, $\measuredangle 2$, $\measuredangle 7$, $\measuredangle 8$.

Ángulos alternos internos : $\measuredangle 3$ y $\measuredangle 6$; $\measuredangle 4$ y $\measuredangle 5$

Ángulos correspondientes : $\measuredangle 2$ y $\measuredangle 6$; $\measuredangle 1$ y $\measuredangle 5$

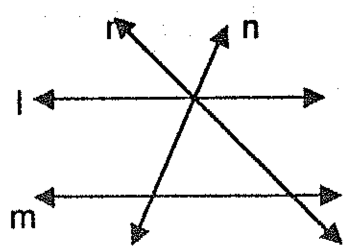
$\measuredangle 4$ y $\measuredangle 8$; $\measuredangle 3$ y $\measuredangle 7$

Si las dos rectas son paralelas, y están cortadas por una transversal, entonces :

a. Cada par de ángulos alternos internos son congruentes.
b. Cada par de ángulos correspondientes son congruentes.

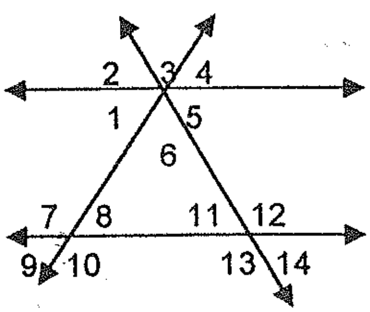
EJERCICIO

1. De acuerdo con la gráfica :



a. Nombrar todas las transversales de l y m.
b. Nombrar todas las transversales de l y r.
c. Nombrar todas las transversales de r y n.
d. Nombrar todas las transversales de m y n.

2. De acuerdo con la gráfica, clasificar cada par de ángulos.



a. $\measuredangle 4$ y $\measuredangle 8$ ______________

b. $\measuredangle 3$ y $\measuredangle 7$ ______________

c. $\measuredangle 1$ y $\measuredangle 8$ ______________

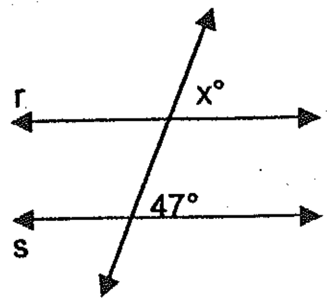
d. $\measuredangle 12$ y $\measuredangle 11$ ______________

e. $\measuredangle 2$ y $\measuredangle 11$ ______________

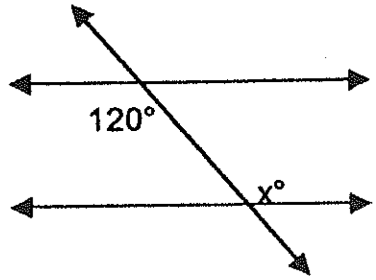
f. $\measuredangle 11$ y $\measuredangle 14$ ______________

3. En cada figura las rectas r y s son paralelas. Encontrar el valor de x y de los demás ángulos.

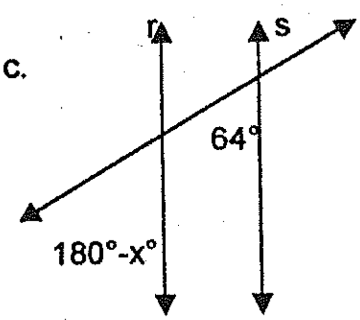
a.



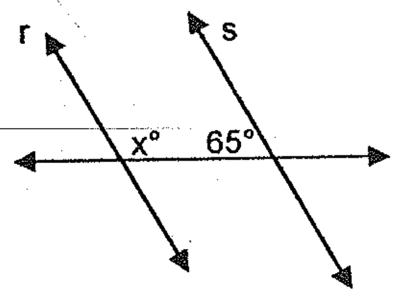
b.



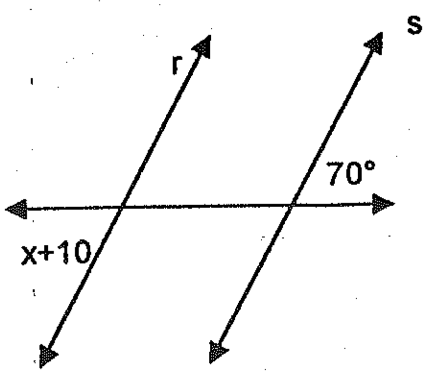
c.



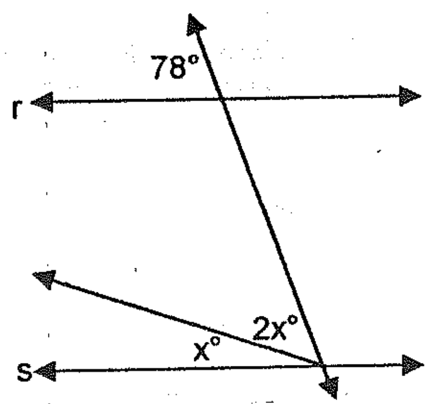
d.



e.

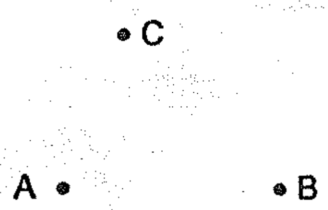


f.



TRIÁNGULO :

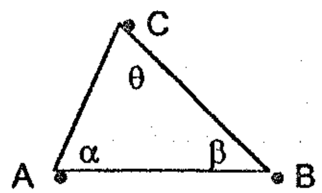
Si dibujamos tres puntos A, B y C, que no estén en la misma recta. Tenemos en esta forma la figura.



Estos puntos determinan.

- Tres segmentos.
- Tres rectas.
- Doce semirrectas.

La figura formada por la unión de los tres segmentos, $\overline{AB}, \overline{BC}$ y $\overline{CA}$, la llamaremos **triángulo** , los segmentos son los lados del triángulo y los puntos extremos de los lados son los vértices del triángulo.

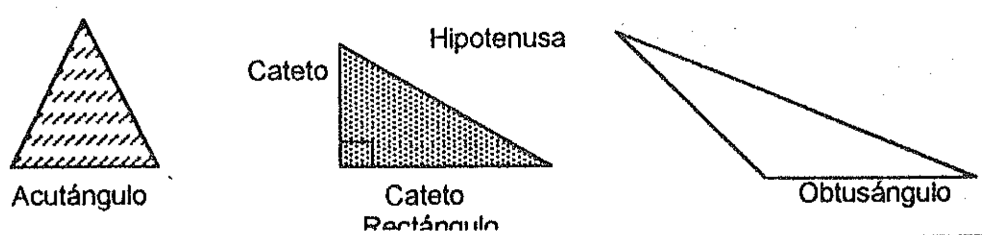


El símbolo Δ ABC lo usaremos para indicar el triángulo de vértices A ; B y C y de lados $\overline{AB}, \overline{BC}$ y $\overline{CA}$.
Cada vértice de un triángulo es extremo común a dos lados del mismo.
También se forman tres ángulos interiores : α , β y θ.
El símbolo ΔABC lo leemos "triángulo ABC".
Los triángulos pueden clasificarse según sus ángulos.

Acutángulo : Es un triángulo con sus tres ángulos agudos.

Rectángulo : Es un triángulo con un ángulo recto.

Obtusángulo : Es un triángulo con un ángulo obtuso.



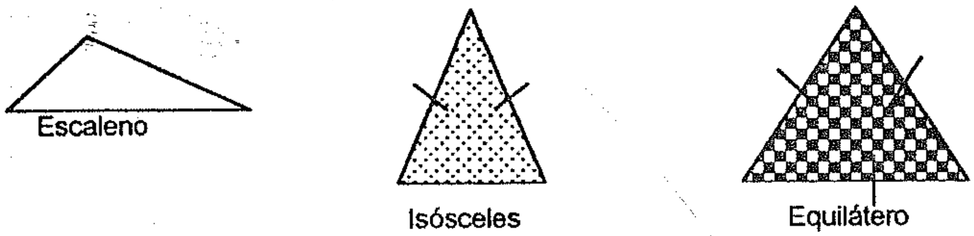
En todo triángulo rectángulo el lado opuesto al ángulo recto se llama hipotenusa y los otros dos lados se llaman catetos.

Los triángulos también pueden clasificarse de acuerdo con sus lados.

Escaleno : Es el triángulo que tiene todos sus lados desiguales.

Isósceles : Es el triángulo que tiene dos lados iguales.

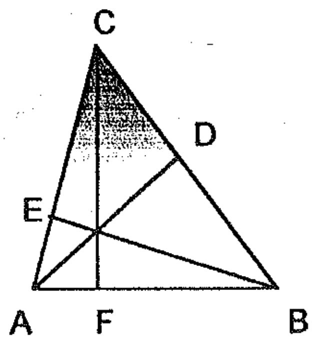
Equilátero : Es el triángulo que tiene sus tres lados iguales.



En un triángulo isósceles el lado desigual se llama base y el ángulo opuesto se llama ángulo en el vértice y los otros dos ángulos se llaman ángulos en la base. Las marcas hechas en los lados indican los lados iguales.

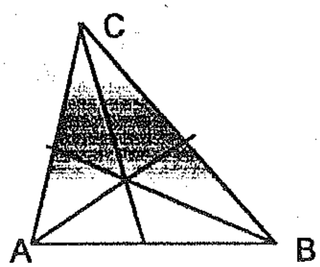
LINEAS Y PUNTOS NOTABLES DE LOS TRIÁNGULOS.

ALTURA: Es la perpendicular trazada desde cada vértice al lado opuesto.
El punto donde se cortan las tres alturas se llama **ortocentro.**

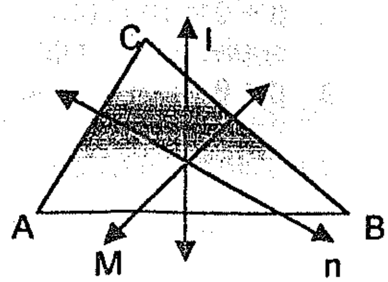


Observamos que en el triángulo se pueden trazar tres alturas :
$\overline{AD}$, $\overline{BE}$ y $\overline{CF}$

MEDIANA: Es el segmento que une cada vértice con el punto medio de su lado opuesto.
El punto donde se cortan las tres medianas se llama **baricentro.**



MEDIATRIZ: Es la línea recta perpendicular que pasa por el punto medio de cada lado.
El punto donde se cortan las tres mediatrices se llama **circuncentro.**

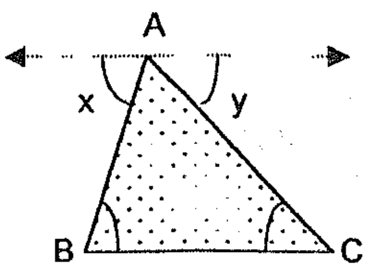


$l \perp \overline{AB}$; $m \perp \overline{BC}$;

$n \perp \overline{AC}$.

PROPIEDAD FUNDAMENTAL DE LOS TRIÁNGULOS.

En todo triángulo, la suma de las medidas de los tres ángulos interiores es igual a 180°



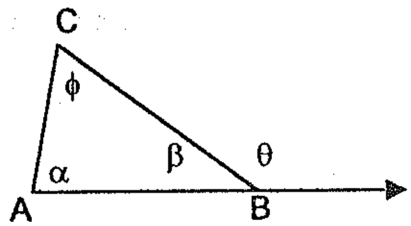
1. Tracemos por el punto A, una recta $\overleftrightarrow{m}$ paralela a $\overline{BC}$.
2. $m\measuredangle x = m\measuredangle B$
$m\measuredangle y = m\measuredangle C$ (por ser ángulos alternos internos entre paralelas).

3. $m\measuredangle x + m\measuredangle A + m\measuredangle y = 180°$
(los tres ángulos forman un ángulo llano).

4. $m\measuredangle B + m\measuredangle A + m\measuredangle C = 180°$ (principio de sustitución 2 en 3).

PROPIEDAD DE LOS ÁNGULOS EXTERIORES DE UN TRIÁNGULO

En todo triángulo, la medida de un ángulo exterior, es igual a la suma de los ángulos interiores no adyacentes.



1. $\alpha + \beta + \phi = 180°$ (por ser ángulos interiores de un triángulo).
2. $\beta + \theta = 180°$ (por ser suplementarios).
3. $\beta + \theta = \alpha + \beta + \phi$ (ley transitiva).
4. $\theta = \alpha + \phi$ (propiedad cancelativa).

También se cumple que : la suma de las medidas de los ángulos exteriores de un triángulo es siempre igual a 360°

NOTA: En el grado sexto aprendimos a construir triángulos, si tienes alguna duda, te recomiendo consultar en el texto MATEMÁTICAS AL ALCANCE DE TODOS GRADO SEXTO, el tema de construcción de triángulos, ya podemos resolver los siguientes problemas.

PROBLEMAS

Construye los siguientes triángulos y en cada uno de ellos trazar : una de las alturas, medianas, mediatrices y bisectrices.

01.	a = 9cm.	b = 8cm	C = 50°
02.	a = 5cm.	b = 4cm.	C = 35°
03.	b = 7cm.	c = 6cm.	A = 48°
04.	A = 55°	C = 25°	b = 5cm.
05.	a = 9cm.	b = 8cm.	c = 6cm.
06.	A = 80°	B = 60°	c = 4cm.

07. A = 140° B = 10° c = 5cm.

08. c = 5cm. a = 4cm. b = 3cm.

09. c = 10cm. a = 6cm. b = 8cm.

10. a = 6cm. b = 2cm. c = 3cm.

11. Equilátero de 5 cm de lado.

12. Equilátero de 7 cm de lado.

13. Equilátero de 6 cm de lado.

14. Isósceles cuyos lados congruentes midan 5 cm. y el otro lado 3cm.

15. Isósceles cuyos lados congruentes midan 6 cm y el otro lado 7 cm.

16. Isósceles y cuyos lados congruentes midan 8 cm. y el otro lado 5 cm.

17. Dos ángulos interiores de un triángulo miden 40° y 60°. ¿Cuánto mide el otro ángulo? Sol : 80°.

18. Si los ángulos interiores de un triángulo miden 30° , 60° y 90°. ¿Cuánto miden sus ángulos exteriores? Sol : 150° ; 120° y 90°.

19. Los ángulos de la base de un triángulo isósceles miden 130°, hallar el valor del ángulo en el vértice y del ángulo externo adyacente a la base. Sol : 50° y 115°.

20. Hallar el valor del ángulo exterior de un triángulo rectángulo isósceles, formado por la hipotenusa y la prolongación de uno de sus catetos. Sol : 135°.

21. El ángulo en el vértice de un triángulo isósceles mide 70°; hallar el valor de los ángulos externos adyacentes a la base. Sol : 125°.

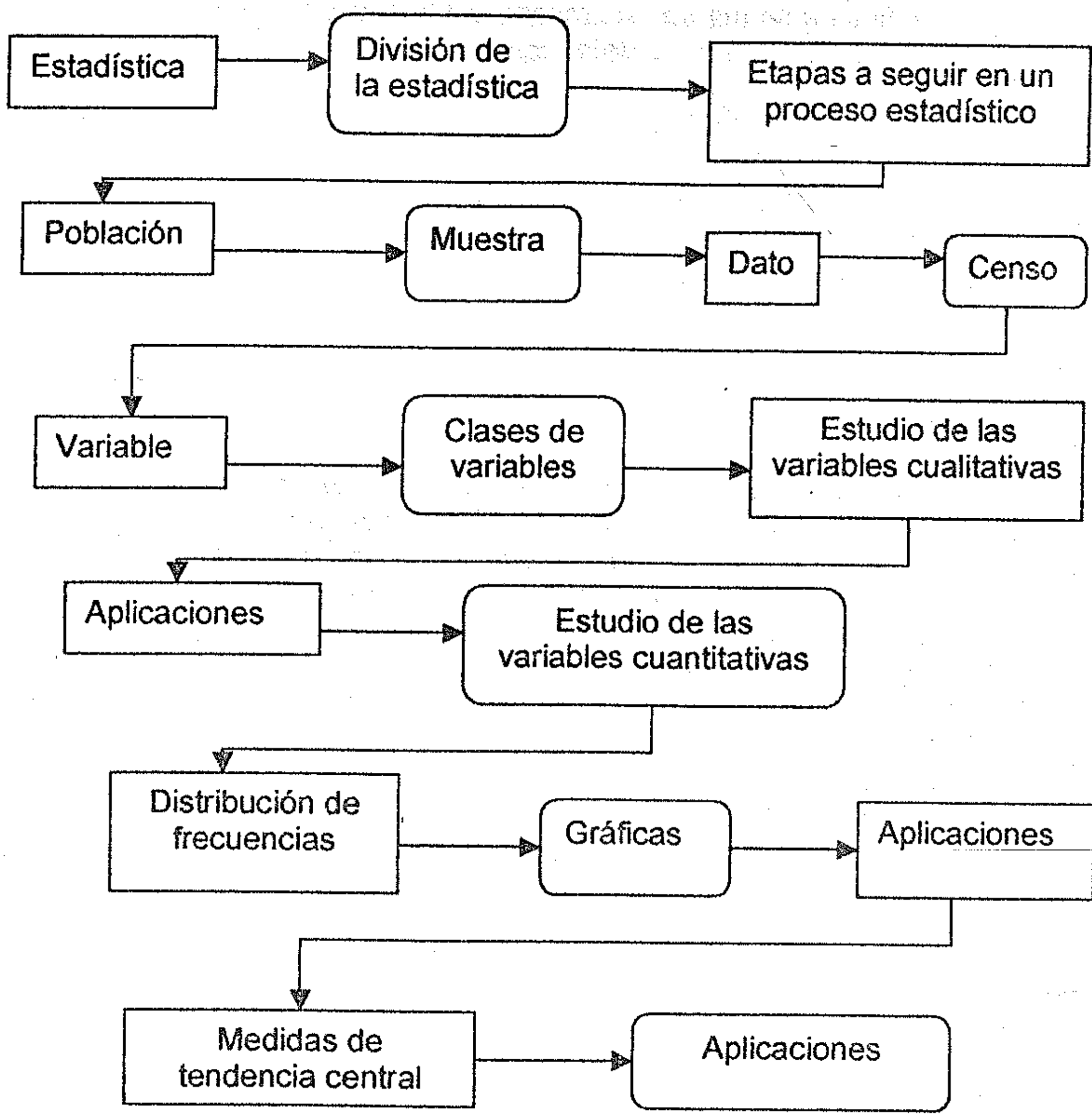
22. En un triángulo ABC el ángulo A es el doble del ángulo B y el ángulo B es el triple del ángulo C. Calcular el valor de los ángulos. Sol : 18° ; 54° y 108°.

23. El ángulo interior de un triángulo es la quinta parte del ángulo exterior adyacente. Calcular los dos ángulos. Sol : 30° y 150°.

UNIDAD 5

ESTADÍSTICA

MAPA CONCEPTUAL



ESTADÍSTICA

TEMAS.

- Concepto.
- Etapas a seguir en un proceso estadístico.
- Población, muestra, dato, censo.
- Variable.
- Clases de variables.
- Aplicaciones.
- Distribución de frecuencias.
- Grafica de las variables cuantitativas.
- Aplicaciones.
- Medidas de tendencia central.
- Aplicaciones.

PROPÓSITOS.

- Identificar las etapas a seguir en un proceso estadístico.
- Identificar población, muestra, dato y censo.
- Diferenciar una variable cualitativa de una cuantitativa.
- Resolver problemas con variables cualitativas.
- Construir tablas de distribución de frecuencias.
- Graficar las variables cuantitativas.
- Calcular las medidas de tendencia central.

ACCIONES PEDAGÓGICAS.

- Lectura de conceptos y ejemplos correspondiente al tema tratado.
- Ejemplificación de cada temas estudiado.
- Asesoría permanente, para aclarar todas las dudas que presenten los estudiantes en los temas tratados.
- Pequeñas consultas .
- Trabajos en clase y en forma desescolarizada.

RECURSOS.

- Texto guía.
- Profesor.
- Estudiantes.
- Tizas de diferentes colores.
- Carteleras.
- Regla, compás, transportador.
- Biblioteca.

INDICADORES DE LOGROS.

- Identifica las etapas a seguir en un proceso estadístico.
- Identifica población , muestra, dato y censo.
- Diferencia una variable cualitativa de una cuantitativa.
- Resuelve problema con variables cualitativas.
- Construye tablas de distribución de frecuencias.
- Gráfica las variables cuantitativas.
- Calcula las medidas de tendencia central.

ESTADÍSTICA

ESTADÍSTICA : Es la recolección, ordenación, análisis e interpretación, presentación de los datos referentes a un experimento previamente planeado.

DIVISIÓN DE LA ESTADÍSTICA.

1. DESCRIPTIVA : Es el método para obtener, de un conjunto de datos, conclusiones sobre los mismos. Su estudio incluye el de las técnicas de recolectar, presentar y ordenar datos.

2. INFERENCIAL : Es el método y conjunto de técnicas que se utilizan para obtener conclusiones que sobrepasan los límites de los conocimientos aportados por los datos. Necesita de la teoría de probabilidades, que estudiaremos en los grados siguientes.

ETAPAS A SEGUIR EN UN PROCESO ESTADÍSTICO

1 . Planeación del experimento problema.
2 . Recolección de datos.
3 . Ordenación.
a) Tablas
4 . Presentación b) Graficas

Estas cuatro primeras etapas corresponden a la estadística descriptiva.

5 . Análisis e interpretación.

Esta última etapa corresponde a la estadística inferencial.

POBLACIÓN : Es el conjunto de elementos observables que poseen una determinada característica.

Ejemplo 1 : Los habitantes de Colombia.

Ejemplo 2 : Los estudiantes de Colombia mayores de 13 años.

MUESTRA : Es un subconjunto de la población sobre la cual se hace el estudio y se sacan conclusiones válidas para la población siempre y cuando sea representativa. La representaremos por la letra (n).

Ejemplo 1 : Los habitantes de Medellín.

Ejemplo 2 : Los estudiantes de Medellín mayores de 13 años.

DATO O PUNTO MUESTRAL : Es cada uno de los elementos que pertenecen a la muestra.

CENSO : Es el estudio que se hace sobre cada uno de los elementos de la población.

VARIABLE ESTADÍSTICA : Es un símbolo que representa una cualidad o modalidad, o que representa una característica que es medible y se representa por cualquier simbolismo.

Ejemplo 1 : El estado civil de un grupo de personas.

X : Soltero, casado, viudo, etc.

Ejemplo 2 : El ingreso semanal de las familias del barrio "Caras lindas".

Y : $100.000 , $120.000 , $150.000 , $200.000 . . .

CLASES DE VARIABLES.

1 . CUALITATIVAS : Son aquellas que expresan una cualidad o una característica que no es medible. Es decir, no se puede expresar en números.

Ejemplo 1 : El sexo de las personas que asisten a una función de cine.

X : Masculino; femenino.

Ejemplo 2 : La clase de personas que asisten a la iglesia.

Y : Ricos, pobres, clase media, etc.

2 . CUANTITATIVAS : Son aquellas variables que expresan una característica que es medible.

Ejemplo 1 : El número de fanáticos que asisten cada domingo al estadio de fútbol.

X : 2.000, 7.000, 12.000 . . .

Ejemplo 2 : La venta de chocolatinas cada día en la tienda del colegio.

Y : 30, 45, 70, 85 . . .

VARIABLE INDEPENDIENTE : Es la que no depende de otra.

Ejemplo 1 : La madre en el cuidado de su bebé.

Bebé : Variable dependiente.
Madre : Variable independiente.

Ejemplo 2 :

Edad	Peso
5 años	20 kilos
10 años	30 kilos

Edad : Variable independiente
Peso : Variable dependiente.

ESTUDIO DE LAS VARIABLES CUALITATIVAS

Las variables cualitativas se pueden presentar en tablas y gráficas; estos pueden ser :

a . El de barras.
b . El de sectores; este a su vez, puede ser en circulo o semicírculo.

Ejemplo : En cierta empresa de 60 trabajadores. Hay 5 cargos : 5 administradores, 10 economistas, 15 educadores, 5 obreros y 25 ingenieros. Queremos presentar esta información en una tabla y en gráficos de barras y de sectores.

Cargo	# de trabajadores
Administradores	5
Economistas	10
Educadores	15
Ingenieros	25
Obreros	5
Total	60

Tabla de distribución por cargos de los trabajadores de la empresa.

El gráfico de barras puede ser horizontal o vertical.

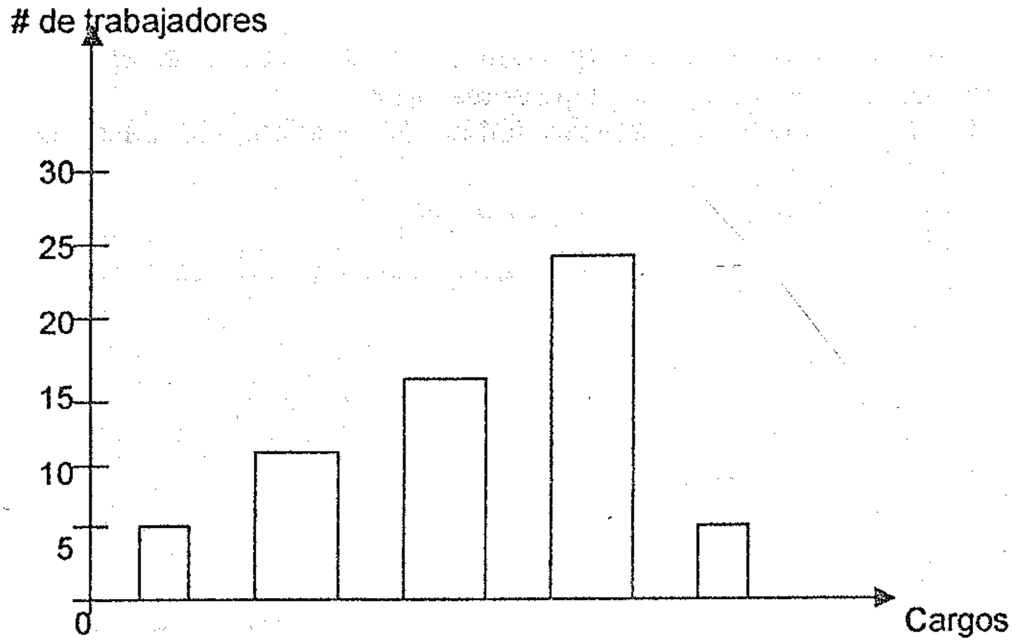


Gráfico de barras verticales de la distribución por cargos de la empresa.

Gráfico de sectores de la Distribución por cargos de la empresa.

TALLER

1 . En el liceo "Los calildosos" que consta de 100 estudiantes en los grados sextos, se encontraron los siguientes datos.
40 de los jóvenes practican fútbol, 30 voleibol, 20 básquetbol y 10 ajedrez.
Construir los gráficos de barras y de sectores.

2 . Los siguientes datos son sobre afición a ciertas diversiones de 1.000 personas entrevistadas en la calle.

A 50 personas les gusta el teatro, 50 el cine, 50 los toros, 100 el baile, 300 los deportes, 250 escuchar música y a 200 otras diversiones.

a. Elabora una tabla.
b. Gráfico de barras.
c. Gráfico de sectores

3 . Se llevó a cabo una encuesta a 80 estudiantes del grado sexto y se preguntó.¿Cuál es su color favorito?. Los resultados son los siguientes: 10 estudiante se inclinan por el color amarillo, 15 por el azul, 20 por el verde, 5 por el negro, 30 por el rojo.

a. Elabora una tabla.
b. Gráfico de barras.
c. Gráfico de sectores.

ESTUDIO DE LAS VARIABLES CUANTITATIVAS

1 . DISCRETAS : Son las que toman valores enteros.

Ejemplo 1 : El número de niños que nacen diariamente en determinada clínica.

Ejemplo 2 : La cantidad de lapiceros que se vende diariamente en la papelería del liceo.

2 . CONTINUAS : Son aquellas que toman cualquier valor en un intervalo dado.

Ejemplo 1: La estatura de cada uno de los estudiantes de nuestro liceo.

Ejemplo 2 : La temperatura registrada cada media hora en un observatorio.

TABLA DE DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS

Para el estudio estadístico de una muestra hay que elaborarla, ordenando y presentando los datos en forma de tablas de distribución de frecuencias, cuyo modelo general es el siguiente.

Valor de la variable	Frecuencias absolutas	Frecuencias relativas	Frecuencias acumuladas	Frecuencias acumuladas relativas
X_i	f_i	f_i/n	F_i	F_i/n
x_1	f_1	F_1/n	F_1	F_1/n
x_2	f_2	F_2/n	F_2	F_2/n
x_3	f_3	F_3/n	F_3	F_3/n
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
x_k	f_k	f_k/n	F_k	F_k/n

X_i : Representa los distintos valores de la variable ordenados de menor a mayor.

f_i : Representa las veces que se repite x_i

f_i /n : Es el cociente que se obtiene de dividir la frecuencia absoluta por el tamaño muestral.
Esta frecuencia se puede expresar en tantos por ciento del tamaño muestral, para lo cual basta multiplicar por cien.

Ejemplo : Si $f_i /n = 0{,}57$, entonces $f_i /n \times 100 = 57$, indica que el número de veces que se repite x_i es el 57% de la muestra.

F_i : Representa la suma de las frecuencias absolutas, donde $F_1 = f_1$.

F_i /n : Es el cociente que se obtiene de dividir la frecuencia acumulada por el tamaño muestral.
Esta frecuencia también se puede expresar en tantos por ciento del tamaño muestral

Ejemplo : Si $F_i /n = 0{,}82$, entonces $F_i /n \times 100 = 82$. Indica que entre todos los valores que son menores o iguales que x_i totalizan el 82% de la muestra.

Ejemplo : Se realizaron 50 partidos de fútbol y para cada uno de ellos se observó el número total de goles anotados (la suma de los anotados por cada equipo); los resultados para los 50 partidos fueron:

5 6 8 6 5 4 2 9 8 2 4 5 6 8 7 6 3 7 1 6 6 8 4 9 6

7 5 2 1 3 2 7 6 8 6 2 4 3 9 5 3 6 5 3 6 4 8 8 4 7

Construir una tabla de distribución de frecuencias e interpretarla.

X_i	Recuento	f_i	f_i /n	F_i	F_i /n
1	//	2	2/50 = 0,04	2	2/50 = 0,04
2	/////	5	5/50 = 0,1	2+5 = 7	7/50 = 1,4
3	/////	5	5/50 = 0,1	2+5+5 = 12	12/50=0,24
4	///// /	6	6/50 = 0,12	2+5+5+6 = 18	18/50=0,36
5	///// /	6	6/50 = 0,12	2+5+5+6+6 = 24	24/50=0,48
6	///// ///// /	11	11/50=0,22	2+5+5+6+6+11 = 35	35/50 = 0,7
7	/////	5	5/50 = 0,1	2+5+5+6+6+11+5 = 40	40/50 = 0,8
8	///// //	7	7/50 = 1,4	2+5+5+6+6+11+5+7=47	47/50=0,94
9	///	3	3/50 = 0,06	2+5+5+6+6+11+5+7+3=50	50/50 = 1
		n=50	Suma = 1		

INTERPRETACIONES :

$f_4 = 6$, significa que en 6 de los 50 partidos jugados se anotaron 4 goles en cada partido.

$f_6 = 11$, significa que en 11 de los 50 partidos jugados se anotaron 6 goles en cada uno.

$F_4 /n \times 100 = 0{,}12 \times 100 = 12$, significa que en el 12% de los partidos se anotaron 4 goles en cada uno.

$F_5 = 24$, significa que en 24 partidos jugados se anotaron 5 goles o menos en cada uno.

$F_7 = 40$, significa que en 40 partidos se anotaron 7 goles o menos en cada partido.

$F_3 / n \times 100 = 0{,}24 \times 100 = 24$, significa que en el 24% de los partidos jugados se anotaron 3 goles o menos en cada uno.

$F_8 / n \times 100 = 0{,}94 \times 100 = 94$, significa que en el 94% de los partidos jugados se anotaron 8 goles o menos en cada uno.

REPRESENTACIÓN GRAFICA

Los gráficos más comúnmente usados son, para el caso discreto, el gráfico de barras de frecuencias absolutas y el gráfico de barras de frecuencias acumuladas.
Para el gráfico de frecuencias absolutas, hacemos corresponder a cada x_i una barra de longitud proporcional al f_i correspondiente.
Para el gráfico de barras de frecuencias acumuladas a cada x_i se hace corresponder una barra de longitud proporcional a su F_i correspondiente.

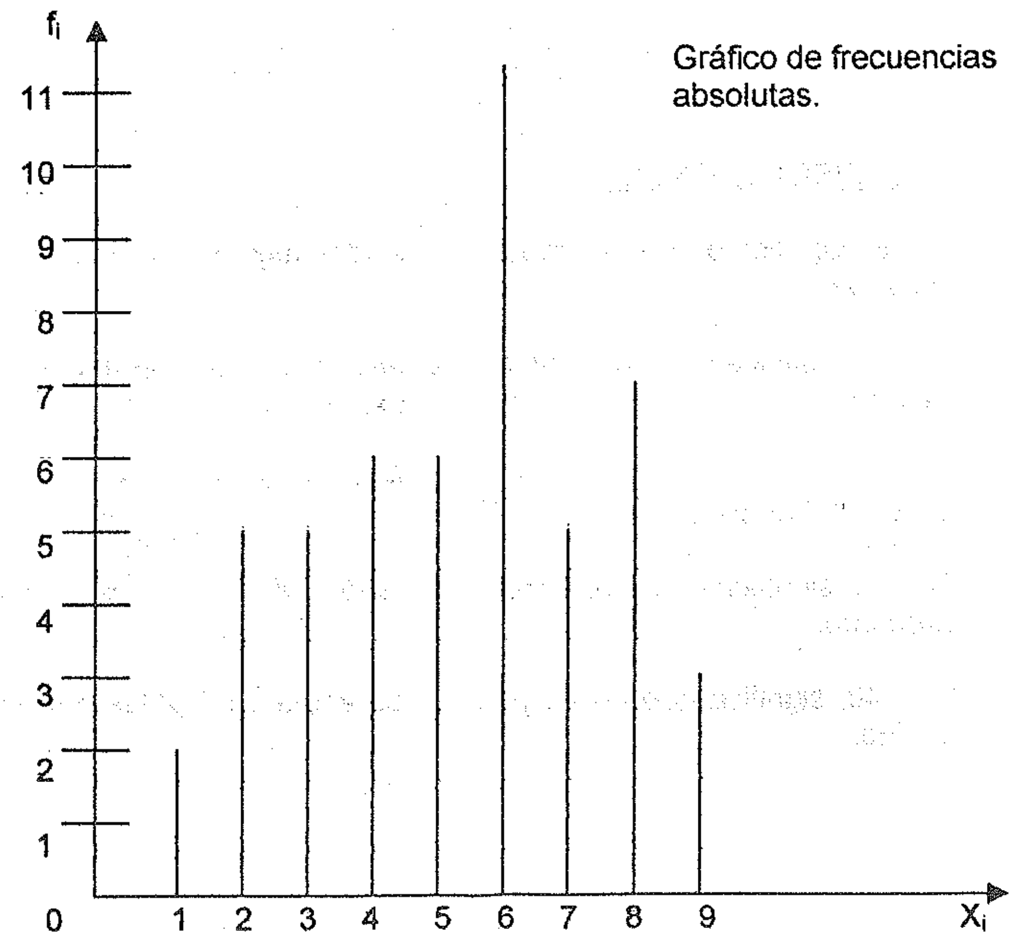


Gráfico de frecuencias absolutas.

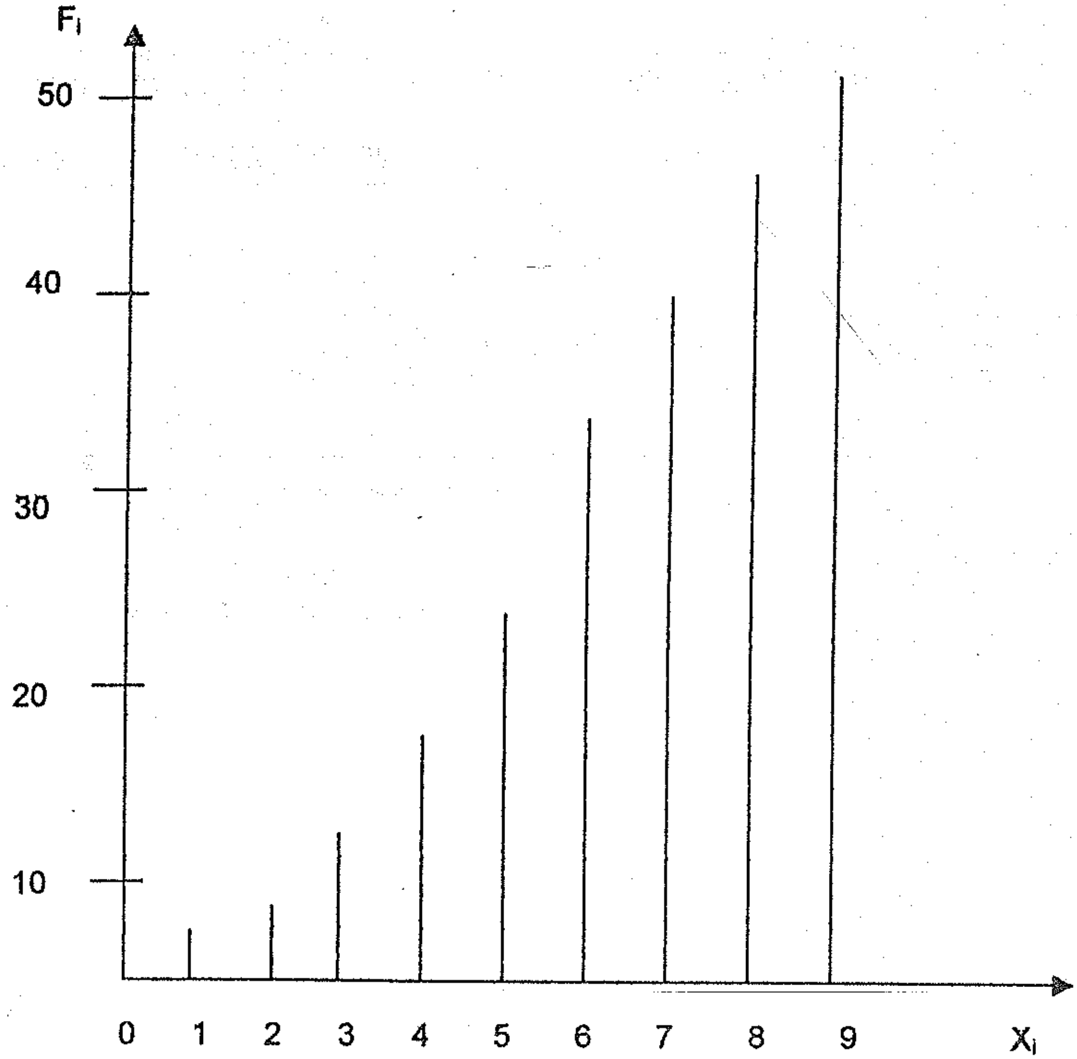


Gráfico de frecuencias acumuladas.

TALLER

1 . Se investigó la edad de un grupo de 40 personas de la empresa de chocolates "El buen sabor", obteniéndose los siguientes resultados.

20	20	28	30	24	29	23	21	21	20	27	26	24	25	23	23
30	21	28	23	25	22	24	29	25	25	27	23	25	22	24	24
26	25	21	23	29	23	28	30								

a. Elabora la tabla de distribución de frecuencias.
b. Cuál fue la edad más frecuente?
c. Cuántas personas tienen 25 años o menos?
d. Qué porcentaje de las personas tienen edad entre 26 y 28 años incluyendo los extremos?
e. Qué porcentaje de las personas tienen edad de 28 años o más?
f. Qué porcentaje de las personas tienen 27 años?
g. Qué porcentaje de las personas tienen edad de 28 años o menos?
h. Construir el gráfico de frecuencias absolutas y el gráfico de frecuencias acumuladas.

2 . Se tomó una muestra sobre el consumo semanal de carne de res en libras por familia y los resultados fueron :

5	8	6	9	5	6	7	0	3	5	0	1	4	3	7	6	7	6	7
6	5	4	6	4	5	2	5	9	1	7	8	3	7	5	6	5	2	3
3	4	1	2	10	12	12												

Construya una tabla de frecuencias para estos datos y responda las siguientes preguntas:

a. Cuáles datos representan el 25% menor de la muestra?
b. Cuántas familias consumen 7 libras o menos semanalmente?
c. Qué porcentaje de las familias consumen más de 9 libras por semana?
d. Podemos decir que la mitad de la gente consume menos de 6 libras por semana?

Sol : 0 , 1 , 2 y 3 ; 36 ; 6,9% ; si.

3 . Se desea obtener información sobre el número de hijos por familia en una región campesina de Colombia. Se toma una muestra de 70 familias.

7	9	3	10	9	6	10	8	8	5	8	6	9	2	6	11	8	9	7
8	7	4	5	7	8	9	8	10	9	8	9	10	9	4	8	11	5	7
9	7	4	10	9	8	8	7	9	7	6	9	8	9	8	5	7	7	9
7	9	7	8	13	6	8	7	10	8	11	8	5	9	8				

Construye una tabla de distribución de frecuencias para estos datos y responde las siguientes preguntas :

a. Cuántas familias tienen 7 hijos?
b. Cuántas familias tienen 9 hijos o menos?
c. Qué porcentaje de las familias tiene once hijos?
d. Que porcentaje de las familias tiene once hijos o más?
e. Qué porcentaje de las familias tiene once hijos o menos?

Sol : 12 ; 60 ; 4,29% ; 5,7% ; 94,29%

MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL

Cuando tenemos una lista de datos numéricos, a veces tenemos la necesidad de extraer un dato que sea representativo de todos ellos, es decir que nos dé una cierta idea del valor más típico, ya sea porque es el que más se repite, porque se acerca más a los datos centrales, o porque es el valor alrededor del cual están los demás. Este tipo de datos que se ubican hacia el lugar central de la lista, y que indica medidas representativas se llaman MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL. Ellas son : el promedio (media aritmética), la mediana y la moda.

PROMEDIO (MEDIA ARITMÉTICA) : Es el valor alrededor del cual se encuentran los datos de una lista.
Se calcula, haciendo la suma de todos los datos, y dividiendo ésta por el número de datos sumados.

Ejemplo 1 : En una fábrica industrial se contaron durante 10 horas sucesivas los artículos defectuosos que se producían cada hora. Los resultados fueron los siguiente :
5 , 5 , 6 , 5 , 6 , 10 , 5 , 4 , 4 , 3.
Calcular el promedio de artículos defectuosos por hora.

$$\overline{X} = \frac{5+5+6+5+6+10+5+4+4+3}{10} \; ; \; \overline{X} = 5{,}3.$$

Interpretación : El promedio de artículos defectuosos por hora fue de 5,3

Ejemplo 2 : Si10 personas tienen los siguientes salarios diarios: \$18.000; \$20.000 ; \$20.000 ; \$19.000 ; \$22.000 ; \$21.000 ; \$25.000 ; \$23.000 ; \$200.000 ; \$220.000. Calcular el salario promedio diario.

$$\overline{X} = \frac{18.000+20.000+20.000+19.000+\ldots+220.000}{10} \; ; \; \overline{X} = \$58.800$$

Esto significa que esas 10 personas, en promedio, tienen cada una un salario diario de \$58.800.

MEDIANA (M_e) : Es el valor que separa el conjunto de datos en dos partes de igual tamaño : una parte formada por todos los datos iguales o inferiores a M_e y la otra formada por todos los datos iguales o superiores a M_e.

OBSERVACIÓN : Si hay datos iguales a la mediana, éstos estarán en los dos conjuntos en que la mediana separa al conjunto de datos.

Ejemplo 1 : Para el conjunto de datos : 1 ; 4 ; 8 ; 11 ; 13 ; 28 ; 30.

$M_e = 11$.

Ejemplo 2 : Para el conjunto de datos : 9 ; 9 ; 9 ; 12 ; 13 ; 13 ; 13.

$M_e = 12$.

Ejemplo 3 : Para el conjunto de datos : 13 ; 13 ; 13 ; 13 ; 13.

$M_e = 13$

En cada uno de estos ejemplos se tiene una lista (en orden ascendente) de valores, de modo que el número de ellos es impar; en estos casos, siempre la mediana es el que ocupa el lugar central; es decir, el lugar $\frac{n+1}{2}$, donde n es el número de datos.

Cuando n (número de datos) es par, la mediana se obtiene como la semisuma entre el dato que ocupa el lugar $\frac{n}{2}$ y el siguiente.

Ejemplo 4 : Dado el conjunto de datos : 2 ; 4 ; 5 ; 7 ; 9 ; 11.

$M_e = \frac{5+7}{2}$; $M_e = 6$.

Ejemplo 5 : Dado el conjunto de datos : 3 ; 8 ; 11 ; 15.

$M_e = \frac{8+11}{2}$; $M_e = 9{,}5$

En general, si M_e es la mediana de un conjunto de datos, entonces : "al menos un 50% de los datos es igual o inferior a M_e y al menos un 50% de los datos es igual o superior a M_e"

MODA (M_o) : Se define como el valor de máxima frecuencia.
Una distribución puede tener una moda(distribución unimodal) o dos modas(bimodal) o, en general, varias modas (distribución plurimodal).

Cuando el conjunto de datos es muy grande, para calcular las medidas de tendencia central tenemos que recurrir a las tablas de distribución de frecuencia.

MEDIA EN UNA DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS O MEDIA ARITMÉTICA PONDERADA

Para calcular la media aritmética en una distribución de frecuencias : multiplicamos cada dato por su frecuencia absoluta, y dividimos este producto por el número total de datos.

Ejemplo : Retornemos al ejemplo de los goles en los 50 partidos.

X_i	f_i	$X_i \times f_i$
1	2	2
2	5	10
3	5	15
4	6	24
5	6	30
6	11	66
7	5	35
8	7	56
9	3	27
	n=50	Suma = 265

$\overline{X} = \frac{265}{50}$; $\overline{X} = 5{,}3$

Interpretación : En cada uno de los 50 partidos se anotaron, en promedio, 5,3 goles.

CALCULO DE LA MEDIANA EN UNA DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS

En general el procedimiento es el siguiente :

a. Calculamos $\frac{n}{2}$.

b. Buscamos en las F_i la primera que sea igual o superior a $\frac{n}{2}$.

c. Determinamos la mediana así :

i. Si el F_i encontrado en (b) es superior a $\frac{n}{2}$, entonces la mediana será el x_i correspondiente.

ii. Si el F_i encontrado es igual a $\frac{n}{2}$, entonces la mediana será la semisuma entre el x_i correspondiente y el x_i siguiente.

Ejemplo 1 : Consideremos el ejemplo de los 50 partidos de fútbol.

X_i	f_i	F_i
1	2	2
2	5	7
3	5	12
4	6	18
5	6	24
6	11	35
7	5	40
8	7	47
9	3	50
	Suma = 50	

a. $\frac{n}{2} = \frac{50}{2} = 25$

b. El primer F_i igual o superior a 25 es $F_6 = 35$.

c. Como 35 es mayor que 25, entonces estamos en el caso (i) y por tanto $M_e = 6$ goles.

Significa esto que : En al menos un 50% de los partidos jugados se anotaron 6 goles o menos y al menos en un 50% de los partidos se anotaron 6 goles o más.

Ejemplo 2 : Supongamos que el número de hijos por familia, entre 60 familias es :

X_i	f_i	F_i
0	5	5
1	10	15
3	5	20
4	10	30
6	15	45
7	15	60
	Suma = 60	

a. $\frac{n}{2} = \frac{60}{2} = 30$

b. El primer F_i igual o superior a 30 es $F_4 = 30$, entonces según (ii),

$$M_e = \frac{4+6}{2} = 5.$$

Significa que : Al menos un 50% de las familias estudiadas tienen 5 hijos o menos y al menos un 50% de las familias tienen 5 hijos o más.

CALCULO DE LA MODA EN UNA DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS

Aquí buscamos en la columna de frecuencias absolutas (f_i) el valor máximo entre las f_i. El x_i correspondiente será la moda o valor modal.

Ejemplo 1 : Volvamos al caso de la distribución del número de goles en los 50 partidos.

X_i	f_i
1	2
2	5
3	5
4	6
5	6
6	11
7	5
8	7
9	3
	n = 50

El f_i máximo es $f_6 = 11$ y el x_i correspondiente es 6.
Luego, $M_o = 6$.

Interpretación : El número de goles por partido que Más se presentó fue de 6.

Obsérvese que 6 no es el número más alto de Goles por partido (éste fue 9).

Ejemplo 2 : Supongamos que la distribución del número de hijos por familia, entre 60 familias es :

X_i	f_i
0	5
1	10
3	5
4	10
6	15
7	15
	n = 60

Aquí el f_i máximo es 15 y a él corresponden los x_i 6 y 7. Entonces la distribución es bimodal.

Una moda es 6 hijos por familia y la otra 7 hijos Por familia.

Interpretación : Por familia, el número de hijos que Que más se presentó es de 6 y También 7.

TALLER

1 . El aumento de peso (en libras) de 10 terneros a los que se les suministró una dieta suplementaria fue:

121 ; 101 ; 110 ; 108 ; 107 ; 95 ; 89 ; 120 ; 109 117

Calcular : Media, mediana y moda Sol:107,7 ; 108,5 ; no hay.

2 . A once personas que participaron en un experimento de psicología se les pidió que memorizaran una lista de 10 palabras. Más tarde se le solicitó que recordaran el mayor número de ellas. Los resultados fueron los siguientes :

6 ; 4 ; 8 ; 9 ; 10 ; 6 ; 5 ; 8 ; 9 ; 4 ; 8

Calcular : Media, mediana y moda.

Sol : 7 ; 8 ; 8.

3 . Los siguientes datos son los niveles de glucosa en la sangre extraída a 10 niños:

56 ; 62 ; 63 ; 65 ; 65 ; 65 ; 65 ; 68 ; 70 ; 72

Calcular : Media, mediana y moda.

Sol : 65,1 ; 65 ; 65.

4 . Se juega al tiempo cinco monedas 50 veces consecutivas y se anotan los números de caras obtenidas cada vez, con el siguiente resultado :

0 1 1 1 1 1 1 1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 3

3 3 3 3 3 3 4 4 4 5 0 1 1 1 1 2 2 2 2 2

2 2 3 3 3 3 3 4 4 4

a. Construir una tabla de distribución de frecuencias.
b. Calcular la media, mediana y moda.

Sol : 2,24 ; 2 ; 2.

RESPUESTAS DE ALGUNOS TALLERES

TALLER #1.

9. a. 54 b. 64 c. 216 d. 2 e. 225 f. 84 g. 125 h. 0 i. 60

10. a. 3 b. $-\frac{1}{3}$ c. 2 d. 1 e. $\frac{2}{3}$ f. 9 g. -20 h. 81 i. 1 k. -7 d. $\frac{7}{6}$ m. $-\frac{1}{4}$ n. $\frac{1}{7}$

TALLER #2.

1. a. x b. $2a-9a^2$ c. $3x^2y-5xy^2$ d. 0 e. $\frac{17}{2}a$ f. $-9x^m$ g. $a^2+b^3+4c^4$ h. $-\frac{13}{3}mn$ i. 0 j. $-18a$ k. $-2xy$ l. $\frac{61}{12}a^3$ m. $-\frac{13}{3}mn$ n. $-x^2y$

2. a. $x^4-4x^3+3x^2-3$ b. x^3-3x^2+x-4 c. $-x^3-x^2+4x-2$
   d. $x^4-4x^3+3x^2-3$ e. x^4-5x^2+3x-7 f. $X^4-2x^3-3x^2+6x-5$
   g. $2x^3-8x^2+7x-6$ h. $x^4-x^3-3x^2+2x-7$ i. x^4-8x^2+8x-9
   j. x^4-3x^2+5x-5

3. a. $\frac{7}{2}a^2-a-\frac{5}{12}$ b. $\frac{7}{3}a^2+\frac{1}{2}a+\frac{13}{5}$ c. $2a^2+\frac{7}{2}a-\frac{5}{3}$
   d. $3a^2+3a-\frac{28}{15}$ e. $-\frac{1}{6}a^2-\frac{5}{2}a+\frac{21}{4}$ f. $-\frac{5}{3}a^2+2a+4$
   g. $-a^2+\frac{9}{2}a-\frac{11}{5}$ h. $-\frac{2}{3}a^2+\frac{1}{2}a+\frac{19}{5}$ i. $\frac{17}{6}a^2-\frac{3}{2}a+\frac{55}{12}$
   j. $-\frac{7}{6}a^2+\frac{17}{4}$ k. $-\frac{5}{3}a^2+4a+\frac{14}{5}$ l. $2a^2+\frac{11}{2}a-\frac{33}{15}$
   m. $-\frac{1}{2}a^2+\frac{5}{2}a-\frac{39}{20}$ n. $\frac{17}{6}a^2-\frac{1}{2}a+\frac{17}{20}$ o. $\frac{17}{6}a^2+\frac{3}{2}a-\frac{7}{20}$

4. a. $5a$ b. $-5x^2$ c. $\frac{1}{6}xy$ d. $-\frac{1}{15}a^2b$ e. $\frac{5}{4}x^3$ f. $-15z$

5. a. $6x^2$ b. $5x^2y^2$ c. $-\frac{17}{7}x^4y$ d. $-\frac{5}{3}x^2y^3z$

6. a. $-6a^4 - 2a^3 + 4a^2 - 2a + 3$ b. $2a^4 - 7a^3 + 4a^2 - 2a + 4$
c. $-2a^4 + a^3 + 3a^2 - a - 5$ d. $-2a^4 - 7a^3 + a^2 - 6a + 7$
e. $8a^4 + 6a^3 - 2a^2 + 8a - 10$ f. $4a^4 - 8a^3 + a^2 - a + 9$
g. $8a^4 - 5a^3 + 1$ h. $-a^4 - 3a^3 + a^2 - a + 8$
i. $4a^4 + 3a^3 - a^2 + a - 8$ k. $-4a^4 - 6a^3 + 4a^2 - 7a + 2$
l. $-8a^4 - 9a^3 + 5a^2 - 8a + 10$ m. $6a^4 - 4a^3 + 4a^2 - 2a - 3$
n. $8a^4 - 5a^3 + a^2 - a + 2$ o. $3a^4 + 2a^3 - 3a^2 + a - 2$
p. $-8a^4 - 9a^3 + 4a^2 - 7a + 9$ q. $6a^4 - a^3 + 5a + 2$
q. r. $12a^4 + a^3 - 6a^2 + 9a - 3$

<u>TALLER #3</u>

1. a. $-15x^3$ b. $2a^2t^4$ c. $40x^6y^6$ d. $7{,}13x^5$ e. $\frac{2}{3}x^5y^5$
f. $6x^3y^3z^3$ g. $-8a^2$ h. 2 i. $-a^9b^9$ j. $\frac{2}{5}x^5$ k. 1

2. a. $-20x^3y^3 + 16x^4y^4$ b. $-12a^2b^3c^2 + 6a^3bc^3 - 3a^3b^2c^5$
c. $\frac{1}{6}m^3n^2p - m^2n^3 + \frac{8}{3}mn$ d. $3{,}84x^2y^3 - 3{,}2x^4y^3 + 13{,}12x^3y^4$
e. $-12m^5 + 8m^3n + 20m - 24$ f. $-\frac{15}{8}x^3yz^3 + \frac{5}{4}xy^3z^2 - \frac{15}{2}x^3y^3z^3$

3. a. $-6x^2y^4 + 8x^2y^3 - 6xy^2$ b. $3x^2y^4 - 8x^2y^3z + \frac{10}{3}xy^3$
c. $10x^{-1}y^3 - 4x^2y^4 + 8x^2y^3z^2 - 8xy^2$

4. a. $-x^4 - 7x^3\ 9x^2 + 6x - 4$ b. $3x^4 - 7x^3 - 25x^2 + 7x + 20$
c. $-2x^4 + 5x^3 + 14x^2 + 2x - 5$ d. $18x^3 + 18x^2 - 20x - 8$
e. $2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$ f. $7x^3 - 25x^2 - 23x + 20$ g. $-6x^2 + 16x + 6$
h. $42x^2 - 10x - 8$ i. $-7x^2 + 25x - 12$ j. $6x^3 + 8x^2 - 16x - 6$
k. $3x^3 - 11x^2 + 18$ l. $30x^3 - 5x^2 - 15x + 5$ m. $-10x^3 - 35x^2 - 30x - 5$
n. $-x^3 + 2x^2 + 20x + 24$ o. $-2x^3 + 8x^2 + 2x - 24$

TALLER #4.

1. a. $a^2 + 7a + 10$ b. $a^2 + 8a + 10$ c. $a^2 + 3a - 10$
   d. $a^2 - 17a + 70$ e. $a^2 - 5a + 4$ f. $x^2 + 6x - 27$
   g. $a^2 - 13a + 40$ h. $x^2 + 19x - 20$ i. $c^2 - 13c + 42$
   j. $d^2 - 2d - 120$ k. $r^2 - 25$ l. $64 - u^2$ m. $x^2 - 81$
   n. $a^2 - 25b^2$ o. $25x^2 - y^2$ p. $9c^2 - d^2$ q. $9a^2 - 4b^2$
   r. $4x^2 - 9z^2$ s. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25}$ t. $\frac{25a^2}{x^2} - \frac{y^2}{4b^2}$ u. $\frac{y^2}{25} - \frac{9}{x^2}$
   v. $\frac{m^4}{9} - \frac{4}{25m^2}$ w. $\frac{9m^4}{16} - \frac{4n^8}{9}$
2. a. $b^2 + 8b + 16$ b. $b^2 - 8b + 16$ c. $25 - 10c + c^2$
   d. $25 - 20c + 4c^2$ e. $9d^2 + 12d + 4$ f. $4d^2 - 12d + 9$
   g. $4x^2y^2 - 28xy + 49$ h. $36a^2b^2 - 72ab + 36$ i. $x^2 + 4xy + 4y^2$
   j. $4x^2 - 12x + 9$ k. $a^2 + 6ab + 9b^2$ l. $9x^2 + 12x + 4$
   m. $9a^2 - 6a + 1$ n. $9m^2 - 12mn + 4n^2$ o. $9m^2 - 24mn + 16n^2$
   p. $16r^2 - 24rs + 9s^2$ q. $25h^2 + 30hk + 9k^2$
3. a. $x^2 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$ b. $c^2 + 3c^2d + 3cd^2 + d^3$
   c. $m^3 + 3m^2n + 3mn^2 + n^3$ d. $x^3 + 9x^2 + 27x + 27$
   e. $x^2 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$ f. $m^3 - 3m^2n + 3mn^2 - n^3$
   g. $x^3 - 9x^2 + 27x - 27$ h. $27a^3 + 12a + 6a + 1$
   i. $27a^3 - 54a^2 + 36a - 8$ j. $8 - 24y + 24y^2 - 8y^3$
   k. $x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3$ l. $x^6 - 3x^4y^2 + 3x^2y^4 - y^6$
   m. $27a^{3x} - 54a^{2x}y^a + 54a^xy^{2a} - 8y^{3a}$ n. $m^{3n} + 3m^{2n}y^{2n} + 3m^ny^{4n} - y^{6n}$
   o. $\frac{8m^6}{125} + \frac{3m^6n^2}{25} + \frac{3m^3n^4}{40} + \frac{n^6}{64}$ p. $\frac{8a^2}{25} - \frac{4a^2b}{5} + \frac{10ab^2}{15} - \frac{125b^3}{27}$
   r. $\frac{27m^6}{64} - \frac{3m^7}{4} + \frac{4m^8}{9} - \frac{64m^9}{729}$ s. $\frac{a^{3x}}{8} - \frac{a^{2x}b^3}{4} + \frac{a^xb^6}{6} - \frac{b^9}{27}$
   t. $\frac{3^{3x}}{a^3} - \frac{3^{2x+1}2^y}{a^2b} + \frac{3^{x+1}2^{2y}}{ab^2} - \frac{2^{3y}}{b^3}$ u. $27x^{3a} - 54x^{2a}y^{n-1} + 54x^ay^{2n-2} - 8y^{3n-3}$

TALLER #5.

1. a. x^5 b. y^2 c. w^3 d. t^3 e. a^3b^3 f. 8 g. $-4a$ h. -1

   i. $3xy^2z^3$ j. $3a^3b^3c^2$ k. $4a^4b$ l. $\frac{4}{3}ab^4c^2$ m. $-3x$

   n. $-3ax^4y^2$ o. x^2y^6 p. $-5xy^2z$

2. a. $x-2$ b. $-a+2$ c. x^2-x d. $3x^2-1$ e. $x-3$ f. $3x-2y$

   g. $2a^2-a+3$ h. $-x^2+7x-10$ i. $10a^2-11a+\frac{1}{3}$

   j. $6a^6-4a^4+2$ k. $10a^2-6a$ l. $10a^2b-11a$ m. $-a+b+c$

   n. x^2-3y-2

3. a. $2x^2+4x+1$ $r=8$ b. $a-3$ c. $a-2b$ d. $2y-1$

   e. $3y+2$ f. $2y^2-3y+2$ g. y^2-y+5 $r=-9y+6$

   h. x^2-3x+3 i. $t+2$ j. $2x^2-3xy-y^2$ k. $2x+1$ l. $x-2$

   m. x^2-2x-1 $r=1$ n. $3x-2$ $r=-2x-3$ o. x^2-2x+3 $r=-2$

   p. $2a^2-4a+13$ $r=-39a+6$ q. $3m^2+8m+1$ $r=8$

   r. $2a^2+a-1$ $r=6a-2$ s. $4x^3-x^2+6x-3$ $r=-x-2$

TALLER #6.

1. 01. $x(z+y-x)$ 02. $2x(2x+y-3y^2)$ 03. $2a^2b^2(a+4b-6ab)$

   04. $3xy^2(3x+5y^2)$ 05. $-4x^3yz^2(2x+y^2)$ 06. $9x^2y^2(z^2-1)$

   07. $4xy(12-2x^2-5x)$ 08. $3ay(4a^2y+15b^2)$ 09. $x(a+b-c)$

   10. $2a(4a^2+5a-1)$ 11. $abc(a-b+c)$ 12. $3x(4x^2+xy-7y^2)$

   13. $15(3b^2+b-1)$ 14. $9(m^2n^2-3mn+7)$ 15. $2a^2b(7a^2+6ab+4b^3)$

   16. $3a^3(6a^2-2ab+3b^3)$ 17. $(a+b)(x+y)$ 18. $(c-d)(m-2n)$

   19. $(2a+b)(x-15)$ 20. $2z(x+y)(1+2z)$ 21. $a(a+b)$

   22. $(x^2-y)(a+2b)$ 23. $(x-y)(a+b+2)$ 24. $(2a+b)(2c-d)$

2. 01. $(n+1)(m+1)$ 02. $(b+3)(a+1)$ 03. $(x+1)(x-y)$

   04. $(r+6)(s-1)$ 05. $(c-3d)(c+1)$ 06. $(x+3y)(2x-5)$

   07. $(h+3)(2h-5k)$ 08. $(a-b)(b+c)$ 09. $(3u-5s)(2t+r)$

   10. $(2x-5y)(3y+z)$ 11. $(2a-b)(3a-18)$ 12. $(7r-3s)(3r+5z)$

13. $(4m-5n)(m+2p)$ 14. $(3a-5b)(x+2y)$ 15. $-a(x+h)(2+b)$

16. $(2x-y)(3a+b)$ 17. $(8w-7)(5z+x^2)$ 18. $(9x+2z)(2y+w)$

19. $(a-b)(a^2+b^2)$ 20. $(2x+1)(xy-z)$ 21. $3(c+d)(a-2b)$

22. $(7x+y)(a-b)$ 23. $(x-y)(2m-n)$ 24. $(4x-a)(2x+y)$

25. $(5x+7y)(ax-by)$ 26. $(x-y+z)(x-1)$ 27. $(h-k-j)(h-p)$

28. $(4r-3)(2r^2-4sr-3t)$ 29. $(m-n-p)(m+1)$

3. 01. $(r+5)(r-5)$ 02. $(8+u)(8-u)$ 03. $(3+x)(3-x)$

04. $(m+4y)(m-4y)$ 05. $(2r+5t)(2r-5t)$ 06. $(6a+7b)(6a-7b)$

07. $16(2x+1)(2x-1)$ 08. $(4x^2+3y^2)(4x^2-3y^2)$ 09. $(5x+4y^2)(5x-4y^2)$

10. $9(2+x)(2-x)$ 11. $2a(2b+5c)(2b-5c)$ 12. $(a+b+c)(a+b-c)$

13. $(x+y+z)(x+y-z)$ 14. $(x-y+3a)(x-y-3a)$

15. $(10+x-y)(10+x+y)$ 16. $(3+a+b)(3-a-b)$

17. $(2c+3a+b)(2c-3a-b)$ 18. $(5a+c-d)(5a-c+d)$

19. $(8x+8a+b)(8x-8a-b)$ 20. $(5x+4y)(x+14y)$

4. 01. $(3x-y)(9x^2+3xy+y^2)$ 02. $(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)$

03. $(3a+4b)(9a^2-12ab+16b^2)$ 04. $(2r-3s)(4r^2+6rs+9s^2)$

05. $(2x^2-5)(4x^2+10x+25)$ 06. $(6-y^2)(36+6y^2+y^4)$

07. $b(a-c)(a^2+ac+c^2)$ 08. $a(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)$

09. $a(b-3)(b^2+3b+9)$ 10. $ab^2(c+4)(c^2-4c+16)$

11. $2(5x-1)(25x^2+5x+1)$ 12. $9(x-2)(x^2+2x+4)$

13. $5(xy-2)(x^2y^2+2xy+4)$ 14. $12(n-1)(n^2+n+1)$

15. $y(3x+ab)(9x^2-3abx+a^2b^2)$

5. 01. $(x+2)^2$ 02. $(m+2)^2$ 03. $(x+5)^2$ 04. $(3x+1)^2$ 05. $(2x-1)^2$

06. $(5x-1)^2$ 07. $(7x-1)^2$ 08. $(3x+2y)^2$ 09. $(4a+3b)^2$

10. $(6m+8n)^2$ 11. $(8r+4s)^2$ 12. $(3-h)^2$ 13. $(12-r)^2$ 14. $(5x-3)^2$

15. $(7x+2y)^2$ 16. $(x+10y)^2$ 17. $(ab+8)^2$ 18. $\left(\frac{c}{4}-\frac{1}{c}\right)^2$

19. $\left(\frac{m}{2}+\frac{3}{n^2}\right)^2$ 20. $\left(\frac{x}{5}-\frac{y}{2}\right)^2$

6. 01. (a+5)(a+2)   02. (b+5)(b+3)   03. (r-9)(r-3)   04. (s-11)(s-3)
05. (h –25)(h-2)   06. (m+16)(m+3)   07. (x – 1)(x +1)   08. (y – 4)(y +1)
09. (w +4)(w –2)   10. (w +9)(w –2)   11. (x +12y)(x +2y)
12. (c –15d)(c –2d)   13. (x –7)(x +4)   14. (a – 6)(a – 5)
15. (m –10)(m – 6)   16. (z +2)(z +1)   17. (x –5)(x +3)
18. (y –11)(y –2)   19. (c –14)(c +2)   20. (b +12)(b +7)
21. (x + 9)(x –2)   22. (r +3)(r –3)(r +1)(r –1)   23. (a+5)(a+3)
24. (x –7)(x+2)   25. (p –3)(p+2)   26. (b+6)(b –2)   27. (b+2)(b –2)
28. (x –3)(x +2)   29. (x + 5)(x + 1)   30. (x + 5)(x – 1)

7. 01. (4x+1)(x+1)   02. (2x+1)(x+1)   03. (3x+1)(x+1)   04. (5+2x)(1+x)
05. (7x–1)(x +2)   06. (x +1)(6x–5)   07. (y +1)(5y +1)
08. (m+1)(9m+1)   09. (b+1)(5b+2)   10. (c –3)(3c –2)   11. (x+5)(5x –3)
12. (x –1)(6x –5)   13. (4x –7)(x –1)   14. (y +3)(3y –2)
15. (x –1)(5x+2)   16. (h+1)(7h –3)   17. (p +1)(5p –3)
18. (2r+7)(3r –1)   19. 3(y +1)(2y –1)   20. (3a –5)(3a + 1)

TALLER #7.

1. $\frac{3a}{b}$ 2. $\frac{5}{yz^2}$ 3. $\frac{3a^2}{4b^2}$ 4. $\frac{3b}{10c}$ 5. $-\frac{3}{p^2q}$ 6. $-2xy^3$ 7. $-\frac{a^2}{2}$ 8. $\frac{2q^2}{5}$

9. $-\frac{m}{7p}$ 10. $-\frac{4z^3}{7}$ 11. $\frac{6q}{p^2}$ 12. $\frac{14cd}{a}$ 13. $-\frac{3}{8abx^2}$ 14. $-\frac{3a^4}{4m^7n^4}$ 15. $\frac{x}{5yz^2}$

16. $\frac{p^4q^9r^{10}}{3}$ 17. $\frac{2a^2b^2}{3m^3n^2}$

TALLER #8.

01. $\frac{x}{x-1}$ 02. $\frac{2x+3}{x+1}$ 03. $\frac{r+t}{r}$ 04. $\frac{a-3}{a+2}$ 05. $\frac{xy}{5}$ 06. $\frac{3p+1}{2p+1}$

07. $\frac{y^3z}{4(x-y)}$ 08. $\frac{3}{2b}$ 09. $\frac{2a+3}{5a+1}$ 10. $\frac{x-2y}{x^2+2xy+4y^2}$ 11. $\frac{2x+y}{x-4}$

12. $\frac{1}{p-1}$ 13. $\frac{a^2-5}{a^2+3}$ 14. $\frac{m+n}{(a-1)^2}$ 15. $\frac{p^2+1}{3}$ 16. $\frac{1}{x(x-1)^2(x-3)^2}$

17. $\frac{a+5}{a-2}$ 18. $\frac{a+5}{a-2}$ 19. $\frac{m+4}{m-4}$ 20. $\frac{a^2-3}{a(a+1)}$ 21. $\frac{2a^2-1}{a^2+1}$

22. $\frac{2x+1}{2x}$ 23. $\frac{x+10}{2x+3}$ 24. $\frac{m^2-nx}{x(m-n)^2}$

TALLER #9.

1. -1 2. $-\frac{a+3}{a+4}$ 3. $\frac{3}{n-m}$ 4. $-\frac{x^2+2x+4}{x+4}$ 5. $\frac{x+2}{m-n}$ 6. $\frac{b-2a}{5}$

7. $\frac{m-3}{m-4}$ 8. 3 9. $-\frac{3x}{b^2+2b+4}$ 10. $\frac{6(6-a)}{3(a+5)}$

TALLER #10.

1. $60ax^2y^3$ 2. $36\,a^3b^3x^2$ 3. $90x^2y(x^2+y^2)$ 4. $4x^2y(x^2-1)$

5. $24m(m^2-9)$ 6. $x^2(x^2-4)$ 7. $(1-a)^2(1+a)(1+a+a^2)$

8. $(x^2-9)(x^2-1)(x^2-4x+32)$ 9. $60ab(a^2-b^2)$ 10. $6\,a^2(a^2-1)$

11. $(x+5)(x-2)(4x+1)$ 12. $x(a-2b)(x^2-y^2)$ 13. $6ab(x+4)(x-1)$

14. $4mn(m^2-n^2)$

TALLER #11.

01. $-\frac{3a^2-7ab+8b^2}{60ab}$ 02. $\frac{19x^3+30x^2-18x+10}{45x^3}$ 03. $\frac{19}{5}x$

04. $\frac{(3-2x)(5x+4)}{2x^2}$ 05. $\frac{3x^2y^2+6xy^2-20}{15x^2y^3}$ 06. $-\frac{16x^2+5}{10x^2}$

07. $\frac{4a+b}{9a^2-4b^2}$ 08. $\frac{2m}{a(m-a)}$ 09. $\frac{p+4}{2p(p-2)}$ 10. $\frac{2(a+b)}{a-b}$

11. $\frac{m^2+6m-18}{10(m-2)}$ 12. $\frac{2n^3-2n^2+5n-7}{(3n+2)(n+3)(n-3)}$ 13. $\frac{3x^3+4x^2-14x-5}{(x-1)(x+2)(x-3)}$

14. $\frac{a^2-8a}{8(a+1)(a-1)}$ 15. $\frac{1-2m}{m(m+1)(m-1)}$ 16. $-\frac{1}{x}$

17. $\frac{a-6}{(a+2)(a+3)(a-1)}$ 18. $-\frac{1}{25}$ 19. $\frac{x^2+3x+16}{4(x+1)(x-1)}$ 20. $\frac{m-10}{(m-5)(m+1)}$

21. $\frac{(a+1)(3a-1)}{4(3a+2)(2a-1)}$ 22. $\frac{3x^2-16x-4}{9(x+1)(x-1)}$ 23. $\frac{2a-3a^2-3a^4}{6(1-a)(1+a)(1+a^2)}$

24. $\frac{y}{(x+y)(x-y)}$ 25. $\frac{5x-6}{4(x+1)(x-1)}$

TALLER #12.

01. $\frac{4}{7mxy}$ 02. $\frac{n^2}{4x}$ 03. $\frac{a+1}{4}$ 04. $\frac{p+1}{p-7}$ 05. $\frac{m(m-9)}{4(m+6)}$

06. $\frac{n(n-1)(n-5)}{(n-6)(n-2)}$ 07. $\frac{1}{a+1}$ 08. $\frac{x-3}{a-1}$ 09. $\frac{m(m+3)}{(m+1)}$ 10. $y+6$

TALLER #13.

01. $\frac{ap}{n^2}$ 02. $120x^2$ 03. 0 04. $\frac{m-3}{2m-1}$ 05. $\frac{1}{12}$ 06. $\frac{1}{p+3}$

07. $\frac{3(x-1)}{x}$ 08. $\frac{1}{a^2(2a-1)}$ 09. $\frac{(x-1)(x+3)}{x^2-49}$ 10. $\frac{1}{3a}$

TALLER #14.

01. $\frac{3x^2+10x-20}{3x(x+4)}$ 02. $\frac{7x(x-3)(x+2)}{3(x+1)}$ 03. $\frac{1}{2}$ 04. $\frac{n^2-3}{2}$

05. $-\frac{3a+7}{a+3}$ 06. $\frac{x-7}{x+1}$ 07. $\frac{3p+2}{3}$ 08. -4 09. $17(3x^2+5)$

10. $\frac{b(b-1)}{x+3}$

TALLER #15.

01. a^2+a+1 02. $\frac{a+b}{b-a}$ 03. $\frac{m-n}{n}$ 04. $\frac{x+3}{x-5}$ 05. $\frac{(5-a)}{a^2(a+4)}$

06. $\frac{x+1}{x}$ 07. $\frac{(a+1)^2}{(a+3)(a+5)}$ 08. $\frac{5}{4a+2}$ 09. $\frac{m-3}{m(m+4)}$ 10. $-\frac{1}{x}$

11. $\frac{a-1}{a^2-2}$ 12. $\frac{2x^2-2x+1}{1-2x}$ 13. $\frac{x-1}{2x-1}$ 14. $\frac{x-2}{2x-5}$ 15. $\frac{2(x+2)}{3x+2}$

TALLER #16.

01. 2 02. 4 03. 1 04. 7 05. 8 06. 3 07. 1 08. 11 09. 3

10. 3 11. 2 12. 3 13. –3 14. –4 15. 3 16. $\frac{1}{2}$ 17. 16

18. 40 19. 4 20. 40 21. 60 22. –3 23. 3 24. 5 25. $\frac{13}{2}$

26. $\frac{77}{3}$ 27. 3 28. $-\frac{41}{8}$ 29. 3 30. $\frac{19}{14}$ 31. –1 32. $-\frac{13}{11}$

33. –3 34. –4 35. $\frac{1}{7}$ 36. 2 37. $-\frac{9}{2}$ 38. $-\frac{1}{4}$ 39. –5 40. $\frac{13}{4}$

41. 12 42. 99 43. $\frac{6}{11}$ 44. 16 45. 24 46. 10 47. 5 48. 7

49. 3 50. 5 51. 6 52. 9 53. $\frac{16}{45}$ 54. 72 55. $\frac{ab}{a+b}$

56. $\frac{a}{a-b}$ 57. $-\frac{55}{9}$ 58. $-\frac{3}{4}$ 59. $\frac{8}{5}$

EJERCICIO: Página 138.

3. a. V b. F c. V 4. 140° 5. 12° 6. 15° 7. a. 90° ; 90°,; 90°; 90° ; 180° 8. a . 45 b. 36 c. 8 d. 35.

EJECICIO: Página 141.

3. a. 47° b. 120° c. 116° d. 115° e. 60° f. 39°.