Capítulo 1 Vectores libres

1.1 Introducción

En el estudio de los fenómenos naturales es preciso definir magnitudes físicas cuyos valores están asociados a elementos matemáticos. Ciertas magnitudes físicas, tales como la densidad, la temperatura, la presión, la energía, etc., quedan completamente definidas por un número real. Estas magnitudes se denominan escalares. Hay otras magnitudes físicas en cambio, tales como la velocidad, la fuerza o el momento cinético, que no quedan definidas únicamente con un valor numérico, es necesario darles además una dirección. Tales magnitudes se denominan vectoriales.

Los fenómenos naturales tienen lugar en el espacio físico, al cual se le asigna una geometría determinada. A partir de resultados experimentales se pone de manifiesto que la geometría euclídea proporciona una descripción extraordinariamente precisa para la determinación de magnitudes tales como distancias, áreas o ángulos en un amplio margen de escalas que van de 10^{-13} cm hasta 10^{28} cm. Así pues, el marco más adecuado para la descripción de las leyes físicas es el de un espacio euclídeo tridimensional. Este espacio es plano, y en él, la suma de los tres ángulos de un triángulo es igual a 180°.

Antes de iniciar el estudio de la Mecánica, cuyas leyes se formulan mediante ecuaciones entre magnitudes vectoriales, se introduce el concepto del vector como elemento unitario del espacio euclídeo y se definen operaciones con los vectores las cuales son de aplicación general.

1.2 Vectores libres

Definiremos un vector en el espacio euclídeo como un segmento orientado. Si los puntos extremos del segmento los designamos por A y B, el vector queda definido por su origen A y su extremo B y lo indicaremos por el símbolo $\overrightarrow{AB}$. Gráficamente se representa por medio de una flecha con origen en A y extremo en B que nos define el sentido. La longitud del segmento se denomina módulo del vector y se representa por $\overline{AB}$. El valor del módulo depende de la unidad elegida para medir distancias. Para representar un vector se utiliza también una notación más simplificada que consiste en un solo carácter en negrita tal como **A** o **a**. En este caso, su módulo se representa por la letra correspondiente entre dos segmentos verticales que se hace igual a la misma letra en cursiva, $|\mathbf{A}| = A$. La letra puede ser tanto mayúscula como minúscula, $|\mathbf{b}| = b$. La representación gráfica en este caso será una flecha sin asignar letras específicas al origen y al extremo del segmento, figuras 1-1 y 1-2.

Fig. 1-1

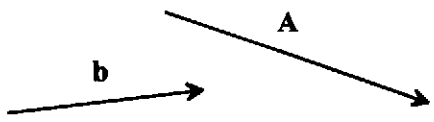


Fig. 1-2

Dos vectores se llaman *equivalentes* cuando tienen la misma dirección, sentido y módulo, es decir, uno de ellos puede hacerse coincidir con el otro mediante una traslación. Los vectores del espacio se pueden separar en clases de vectores equivalentes. Un vector cualquiera de una clase es el representante de dicha clase y se le denomina *vector libre*. En el espacio hay infinitos vectores libres. Se denomina vector nulo **0**, aquel cuyo origen y extremo coinciden en el mismo punto del espacio. El vector nulo carece de dirección y sentido, y su módulo es cero. A los vectores cuyo módulo es la unidad se les denomina vectores unitarios o versores.

1.3 Operaciones con vectores libres

Sean **a** y **b** dos vectores libres cualesquiera y *P* un punto dado del espacio, figura 1-3. Sus equivalentes en *P* son los vectores definidos por los segmentos *PQ* y *PR*, paralelos respectivamente a cada uno de ellos y de la misma longitud, luego $\overrightarrow{PQ}$ = **a** y $\overrightarrow{PR}$ = **b**. El paralelogramo *PQRS* se denomina paralelogramo sustentado por los vectores **a** y **b**, o simplemente, el paralelogramo definido por los dos vectores. Los segmentos *RS* y *QS* definen los vectores $\overrightarrow{RS}$, $\overrightarrow{QS}$ equivalentes a los vectores **a** y **b** respectivamente, figura 1-3.

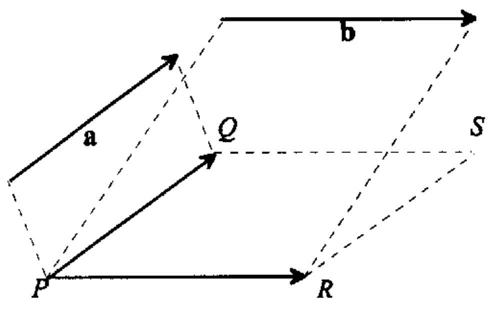


Fig. 1-3

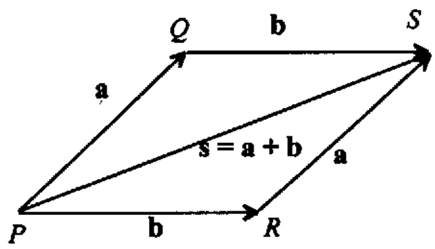


Fig. 1-4

Suma . Se denomina suma de los vectores **a** y **b** al vector **s** = **a** + **b**, definido por el segmento *PS* colocando los vectores uno a continuación del otro, figura 1-4. Del paralelogramo de los vectores **a** y **b** se deduce que la suma es conmutativa

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$$

Fácilmente se puede ver que la suma de vectores es asociativa como se muestra gráficamente en la figura 1-5, es decir, se cumple la igualdad

$$\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} \tag{1-1}$$

Dos vectores tales que tengan la misma dirección y el mismo módulo pero sentidos opuestos se denominan *vectores opuestos.* El opuesto a un vector dado $\mathbf{a}$ se designa como $-\mathbf{a}$ y la suma de ambos es el vector $\mathbf{0}$, $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$, figura 1-6. Se define la *diferencia* de dos vectores como la suma del primero con el opuesto del segundo, figura 1-7.

$$\mathbf{d} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) = \mathbf{a} - \mathbf{b}$$

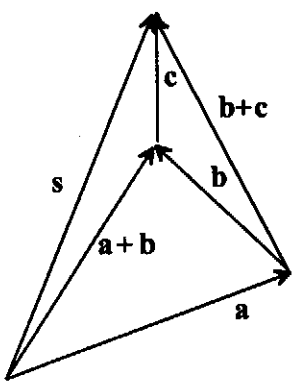


Fig. 1-5

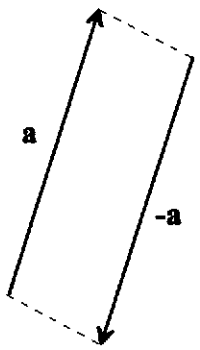


Fig. 1-6

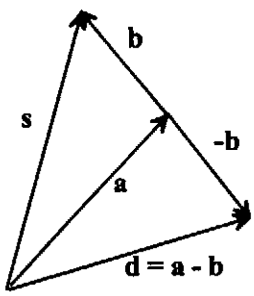


Fig. 1-7

Producto por escalares. Si k es un número real cualquiera y $\mathbf{a}$ un vector libre, el producto de $k\,\mathbf{a}$ es un vector libre que tiene la misma dirección que $\mathbf{a}$, el mismo sentido o el opuesto según que $k > 0$ o $k < 0$, y su módulo es k veces el módulo de $\mathbf{a}$. El producto por escalares es distributivo respecto de la suma $k(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k\,\mathbf{a} + k\,\mathbf{b}$. El conjunto de vectores libres tiene estructura de *espacio vectorial.* La operación interna es la suma y la externa el producto por escalares. Además de la suma y el producto por escalares, con los vectores se pueden definir, entre otras, dos importantes operaciones denominadas *producto escalar* y *producto vectorial.*

Producto escalar. Se define el producto escalar de dos vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ como el escalar que se obtiene de multiplicar el producto de los módulos de los dos vectores por el coseno del ángulo que forman. El producto escalar se designa con un punto entre los vectores.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a\, b \cos\theta \tag{1-2}$$

De su definición se deduce que el producto escalar es conmutativo, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$. El producto escalar es distributivo respecto de la suma, $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$, y de la definición se deduce que el producto escalar de un vector **a** por sí mismo es el módulo del vector al cuadrado, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a^2$. Geométricamente, el producto escalar de dos vectores es el producto del módulo de uno de ellos por la proyección del otro sobre él, figura 1-8.

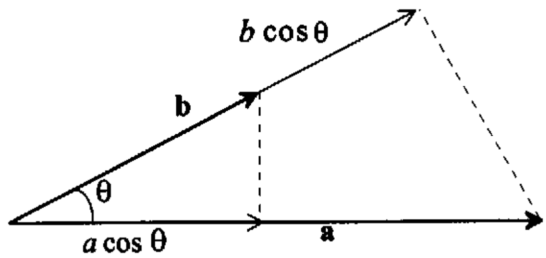


Fig. 1-8

Cuando el producto escalar de dos vectores no nulos es cero, el ángulo que forman es igual a 90°; es decir, los vectores son perpendiculares entre sí.

Producto vectorial. Dados dos vectores cualesquiera **a** y **b**, su producto vectorial se define como el vector **c** cuya ***dirección*** *es perpendicular al plano definido por los vectores,* su ***sentido*** *es el de avance de un sacacorchos que gira para ir del primer al segundo por el camino angular más corto,* y su ***módulo*** *el producto de los módulos por el seno del ángulo que forman,* $c = a\, b$ sen θ. El símbolo que representa la operación producto vectorial es el de un ángulo con el vértice hacia arriba ∧. Así, el producto vectorial del vector **a** por el vector **b** se representa por

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{c} \tag{1-3}$$

El producto vectorial tiene las siguientes propiedades:

El producto vectorial no es conmutativo	$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}$
El producto vectorial de un vector por sí mismo es cero	$\mathbf{a} \wedge \mathbf{a} = 0$
El producto vectorial no es asociativo	$\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) \neq (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c}$
El producto vectorial es distributivo respecto de la suma	$\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{c}$
El producto vectorial es asociativo respecto del producto	$k(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = k\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{a} \wedge k\mathbf{b}$

Fácilmente se puede deducir que el módulo del producto vectorial de dos vectores $|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}|$ es el área del paralelogramo definido por los dichos vectores, figura 1-9.

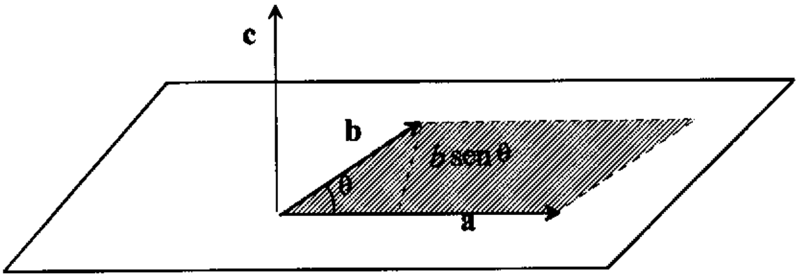


Fig. 1-9

Producto mixto. Dados tres vectores **a**, **b** y **c**, se define el producto mixto como el producto escalar de uno de ellos por el producto vectorial de los otros $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c})$. Esta es una operación derivada de las dos anteriormente definidas, las cuales permiten obtener inmediatamente el resultado del producto mixto. Operando se tiene,

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}| \cos\theta = a\,b\,c \operatorname{sen}\alpha \cos\theta \tag{1-4}$$

Cuando el producto mixto de tres vectores no nulos $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c})$ es cero, el vector **a** es perpendicular al producto vectorial de los otros dos, lo que indica que los tres vectores son coplanarios. Geométricamente el producto mixto de tres vectores representa el volumen de paralepípedo definido por los tres vectores, tal como se muestra en la figura 1-10.

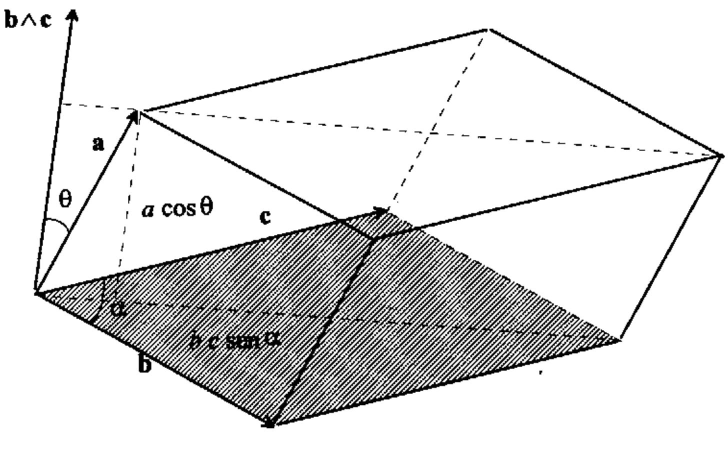


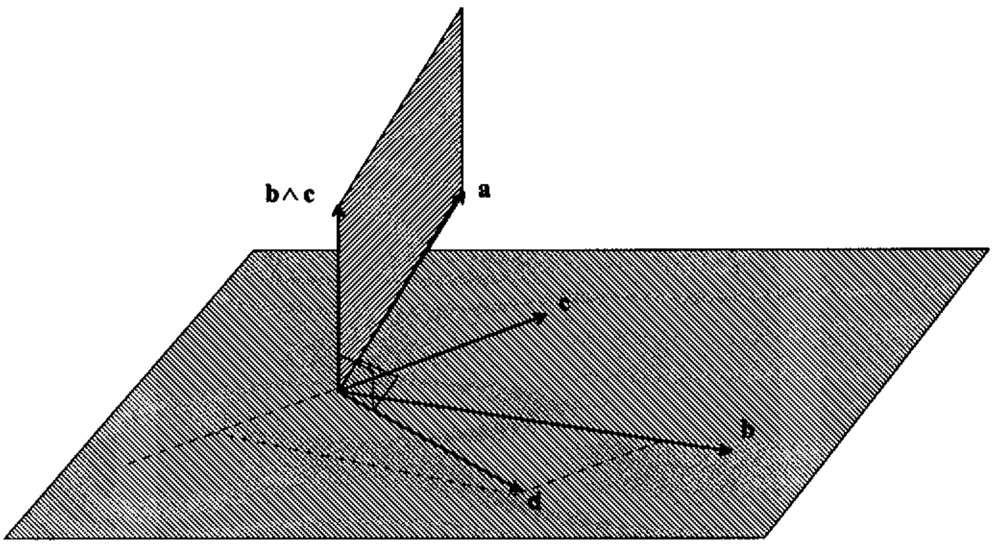
Fig. 1-10

De la interpretación geométrica , fácilmente se deduce que el producto mixto satisface la siguiente relación

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \wedge \mathbf{a})$$

Doble producto vectorial. Dados tres vectores **a, b** y **c**, se define el *doble producto vectorial* como, el producto vectorial de uno de ellos, por el producto vectorial de los otros dos

$$\mathbf{d} = \mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c})$$



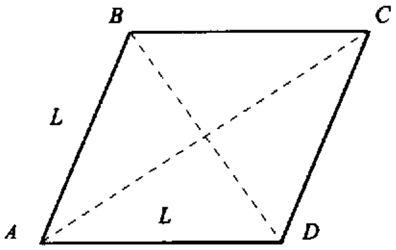
El doble producto vectorial, es un vector perpendicular al vector $\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$, luego es coplanario con **b** y **c**, y es por tanto, una combinación lineal de ellos $\mathbf{d} = k_1\, \mathbf{b} + k_2\, \mathbf{c}$.

$$\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\,\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\,\mathbf{c} \tag{1-5}$$

Se deja como ejercicio demostrar que el valor de los coeficientes de la combinación lineal son los productos escalares que se indican en la ecuación (1-5).

PROBLEMA 1.1

Utilizar los datos de la figura adjunta para demostrar vectorialmente que las diagonales de un rombo son perpendiculares entre sí



SOLUCIÓN

Sea el rombo de lado L definido por los puntos A, B , C y D. Sus diagonales son los segmentos AC y BD. Las diagonales en forma vectorial se pueden poner como suma de los vectores definidos por los lados del rombo

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} \qquad \text{y} \qquad \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$$

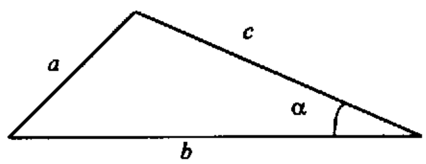
Los cuatro vectores de las ecuaciones anteriores tienen el mismo módulo que es el lado L del rombo. Efectuando el producto escalar de las diagonales se tiene

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DC}) = L^2 - \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DC}\,\overrightarrow{DC} . \overrightarrow{AD} - L^2 = 0$$

Ya que el producto escalar de los vectores definidos por las diagonales es igual a cero, éstas son perpendiculares, tal como se quería demostrar.

PROBLEMA 1.2

Demostrar vectorialmente el teorema del coseno cuyo enunciado es : en el triángulo de lados $a,b,c,$ de la figura adjunta , un lado cualquiera a cumple que $a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos\alpha$



SOLUCIÓN

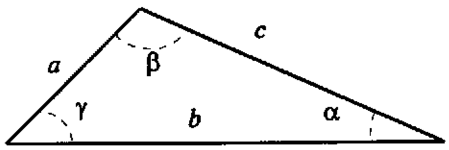
Formemos con los lados del triángulo la suma vectorial $\mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$. Efectuando el producto escalar de

a por sí mismo se tiene **a** · **a** = (**b** + **c**) · (**b** + **c**); y desarrollando el segundo término de la ecuación queda $a^2 = b^2 + c^2 + 2\,b\,c\cos(180 - \alpha)$, de donde $a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos\alpha$ tal como se quería demostrar.

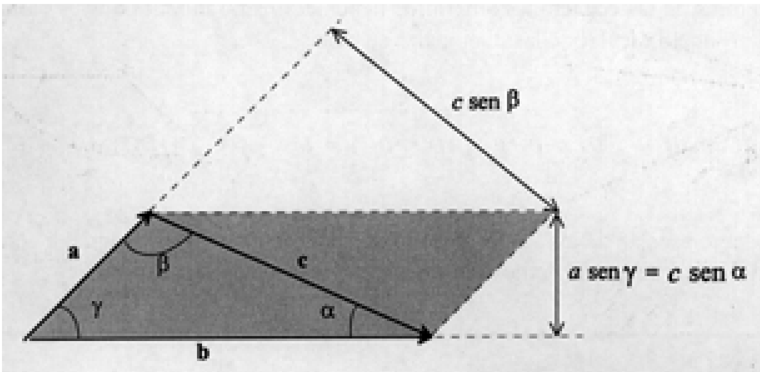
PROBLEMA 1.3
Demostrar vectorialmente la ley del seno cuyo enunciado es: en un triángulo de lados *a,b,c,* se cumple que cada lado es proporcional al seno del ángulo que tiene en frente

SOLUCIÓN

Consideremos el triángulo de la figura adjunta.



Construyamos sobre el triángulo los vectores **a**, **b** y **c**, tal como se ve en la figura siguiente.



De la definición del producto vectorial de dos vectores se deduce que los tres productos vectoriales $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$, $\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$ y $\mathbf{a} \wedge \mathbf{c}$, son iguales. El valor común del módulo de los tres productos vectoriales es el área del rectángulo rayado en la figura. Escribiendo los módulos de cada uno de los vectores se tiene

$$|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}| = a b \operatorname{sen}\gamma \qquad |\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}| = b c \operatorname{sen}\alpha \qquad |\mathbf{a} \wedge \mathbf{c}| = c a \operatorname{sen}\beta$$

Igualando sus expresiones queda la identidad $a\,b \operatorname{sen}\gamma = b\,c \operatorname{sen}\alpha = a\,c \operatorname{sen}\beta$. Dividiendo la identidad anterior por el producto de los módulos de los tres vectores que define el triángulo a b c, se tiene el enunciado

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$$

1.4 Espacio vectorial euclídeo

El conjunto de los vectores definidos en el espacio euclídeo tridimensional tienen estructura de espacio vectorial. Se denomina *base* del espacio vectorial a tres vectores cualesquiera **a**, **b** y **c** linealmente independientes. Tres vectores son linealmente independientes cuando la ecuación lineal $k_1\mathbf{a} + k_2\mathbf{b} + k_3\mathbf{c} = \mathbf{0}$ se satisface si, y sólo si, los escalares k_i i = 1, 2, 3, cumplen $k_1 = k_2 = k_3 = 0$. Los vectores **a**, **b** y **c** forman una base del espacio vectorial euclídeo tridimensional.

Las propiedades de las operaciones suma y producto por escalares permiten que cualquier vector del espacio vectorial se puede expresar como una combinación lineal de los vectores de la base $\mathbf{d} = p\,\mathbf{a} + m\,\mathbf{b} + n\,\mathbf{c}$. Los tres escalares ($p, m, n$) son las componentes del vector **d** en la base **a**, **b**, **c**, figura 1-11.

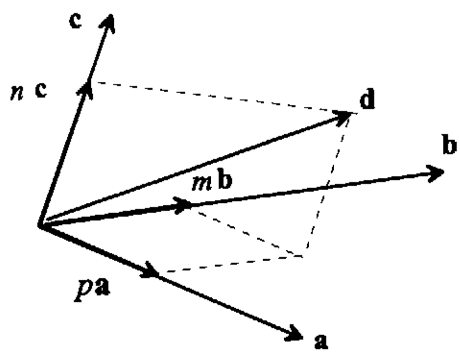


Fig. 1-11

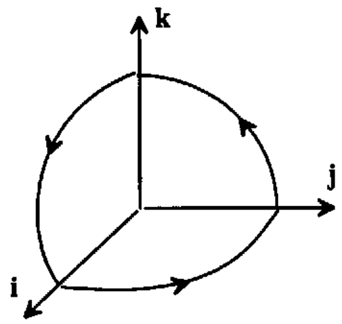


Fig. 1-12

Cuando los tres vectores de la base son unitarios y mutuamente perpendiculares entre sí, la base se denomina ortonormal, figura 1-12. La nomenclatura comúnmente empleada para los vectores de la base ortonormal es **i**, **j**, **k**. Por definición los vectores de la base **i**, **j**, **k** tienen de módulo uno y son perpendiculares entre sí, luego cumplen las condiciones de ortonormalidad $|\mathbf{i}| = |\mathbf{j}| = |\mathbf{k}| = 1$ y $\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{i} = 0$.

La base se denomina directa cuando $\mathbf{i} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{k}$, es decir, cuando mediante giros de 90° en el sentido contrario al de las agujas del reloj se hace coincidir el vector **i** con el vector **j**, y éste con el **k**, sea cual sea la orientación que tenga el vector **i**.

Matriz de cambio de base. En el espacio vectorial euclídeo hay infinitas bases ortonormales. Sea $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ y $\mathbf{e}_3$ otra base ortonormal directa. Cada uno de los vectores de la nueva base se puede expresar como una combinación lineal de los vectores de la base **i**, **j**, **k**, y se tiene

$$\mathbf{e}_1 = e_{11}\mathbf{i} + e_{12}\,\mathbf{j} + e_{13}\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{e}_2 = e_{21}\mathbf{i} + e_{22}\,\mathbf{j} + e_{23}\,\mathbf{k} \qquad \text{(a)}$$

$$\mathbf{e}_3 = e_{31}\mathbf{i} + e_{32}\,\mathbf{j} + e_{33}\,\mathbf{k}$$

Un vector **s** cualquiera del espacio vectorial puede ser expresado como una combinación lineal de los vectores de la nueva base $\mathbf{d} = p\,\mathbf{e}_1 + q\,\mathbf{e}_2 + r\,\mathbf{e}_3$, o como una combinación lineal de los vectores de la base vieja $\mathbf{d} = d_1\,\mathbf{i} + d_2\,\mathbf{j} + d_3\,\mathbf{k}$. Teniendo en cuenta las tres ecuaciones (a), se deduce que las componentes del vector en ambas bases están relacionados por las ecuaciones

$$d_1 = p\,e_{11} + q\,e_{21} + r\,e_{31}$$

$$d_2 = p\,e_{12} + q\,e_{22} + r\,e_{32} \qquad \text{(b)}$$

$$d_3 = p\,e_{13} + q\,e_{23} + r\,e_{33}$$

Estas tres ecuaciones se pueden sustituir por una única ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{21} & e_{31} \\ e_{12} & e_{22} & e_{32} \\ e_{13} & e_{23} & e_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \qquad \text{(1-6)}$$

La matriz cuadrada (e_{ij}) $i, j = 1, 2, 3$ se denomina *matriz de cambio de base* y su determinante vale 1, *det* (e_{ij})= 1. Las matrices con determinante igual a 1 tienen inversa y esta coincide con la matriz traspuesta.

En efecto, el producto de una matriz por su inversa es, por definición de inversa, la matriz identidad I cuyo determinante es 1 y cuyos elementos son todos ceros, excepto los de la diagonal principal que son unos.

$$(e_{ij})^{-1}\,(e_{ij}) = I$$

La matriz traspuesta de una dada se obtiene cambiando filas por columnas, lo que no altera el valor de su determinante. Si $(e_{ij})'$ es la traspuesta de (e_{ij}), entonces *det* $(e_{ij})' = 1$, y se cumple

$$(e_{ij})' \, (e_{ij}) \;\; = I$$

De ambas ecuaciones se deduce que la inversa coincide con la traspuesta $(e_{ij})^{-1} = (e_{ij})'$. Este resultado permite pasar fácilmente de unas componentes a otras. Las componentes del vector **d** en la base **i**, **j** y **k**, (d_1, d_2, d_3) están relacionadas con sus componentes (p, q, r) en la base $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ por las tres ecuaciones (b), que en su forma matricial es la ecuación (1-6). Multiplicando por la izquierda la ecuación (1-6) por la inversa de la matriz del cambio de base, se obtiene

$$\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \qquad (1\text{-}7)$$

Este resultado permite poder calcular fácilmente las componentes de un vector en una base ortonormal cualquiera conociendo sus componentes en otra base ortonormal dada, lo que justifica la preferente utilización de bases ortonormales frente a las que no lo son, siempre que esto sea posible.

Coordenadas cartesianas . Tomando el origen de los vectores **i**, **j**, **k** en un punto arbitrario O del espacio, las tres rectas definidas por los vectores de la base junto con el punto O son las aristas del triedro definido por los tres vectores, las cuales se denominan ejes. La posición de un punto del espacio P respecto del origen O queda unívocamente determinado por la terna de números reales (x, y, z) cuyos valores son las longitudes de los siguientes segmentos

$$OP_1 = x \qquad OP_2 = y \qquad OP_3 = z$$

donde P_1, P_2 y P_3 son las proyecciones de P sobre los ejes y su signo es positivo cuando el sentido es el mismo que el de los vectores de la base y negativo si es opuesto. La terna de valores (x, y, z) son las *coordenadas cartesianas* del punto P, figura 1-13. Las rectas paralelas a los ejes pasando por el punto P se denominan *curvas coordenadas* en P. Se definen con la condición de que dos de las tres coordenadas sean constantes. La curva coordenada paralela al eje OX es $y =$ cte, $z =$ cte, es decir, la recta intersección de ambos planos.

La base local en P está formada por los vectores tangentes unitarios a las curvas coordenadas en P y dirigidos en sentido positivo el sentido creciente de la coordenada variable.

Para las coordenadas cartesianas estos vectores en P son equivalentes a **i, j, k**.

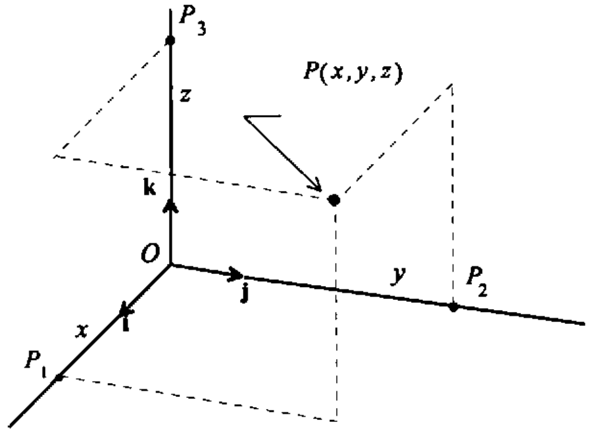


Fig. 1-13

La base local de las coordenadas cartesianas es un invariante espacial. Este hecho representa una gran ventaja en la utilización de las coordenadas cartesianas frente a otros sistemas de coordenadas, como por ejemplo, las coordenadas esféricas, las cilíndricas, las polares, etc., los cuales también generan bases ortonormales, pero a diferencia de las coordenadas cartesianas, la base local no es un invariante espacial ya que su orientación cambia de un punto a otro del espacio.

La simplificación que representa la invariancia de la base facilita el estudio teórico del comportamiento de los sistemas físicos pero, en muchos casos, el desarrollo de un determinado problema en coordenadas cartesianas presenta una gran complejidad de cálculo, lo que dificulta o incluso impide la obtención o la interpretación de resultados y, por lo tanto, debe ser estudiado utilizando otro sistema de coordenadas más adecuado.

Espacio vectorial bidimensional. Los vectores **c**, tales que sean combinación lineal de dos vectores dados **a** y **b**, forman un subespacio vectorial de dimensión dos, figura 1-14.

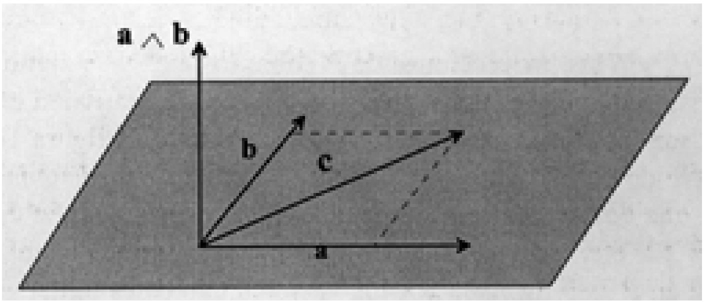


Fig. 1-14

Los tres vectores **a**, **b** y **c** son coplanarios, luego el producto vectorial de dos de ellos, **a** ∧ **b**, es un vector perpendicular al plano que los contiene y, por tanto, el producto mixto de los tres vectores es nulo

$$\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = 0 \tag{1-8}$$

La ecuación (1-8) es la condición necesaria y suficiente para que tres vectores sean coplanarios. Cualquier par de vectores del plano que no sean proporcionales forman una base del espacio bidimensional. Una base ortonormal estará formada por los vectores **i** y **j**. Los ejes definidos por los vectores **i**, **j** aplicados en un punto 0 del plano forman un sistema de coordenadas cartesianas planas. Las coordenadas (x, y) de un punto P quedan determinadas por las proyecciones de P sobre los ejes, figura 1-15.

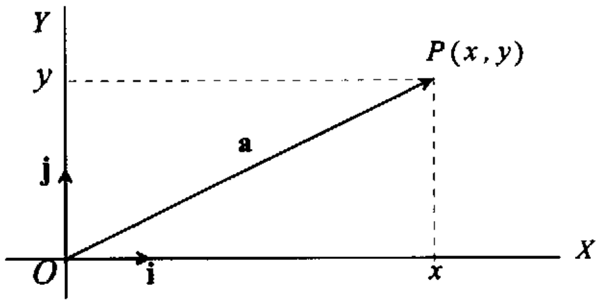


Fig. 1-15

Los vectores del plano, tomados con su origen en el origen de coordenadas, tienen dos componentes rectangulares $\mathbf{a} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$ que coinciden con las coordenadas del punto extremo del vector.

Vectores y magnitudes físicas. Las magnitudes físicas *escalares* son aquellas cuyos valores no dependen del sistema de coordenadas. Son escalares, por ejemplo, la temperatura, la presión, la masa, etc. Un vector es una magnitud que define una dirección en el espacio y que tiene un módulo. Ambas propiedades tampoco dependen del sistema de coordenadas. La velocidad **v** y la fuerza **F**, entre otras, son magnitudes físicas vectoriales. Los vectores que representan estas magnitudes en puntos distintos del espacio y en instantes de tiempo diferentes pueden ser comparados, ya que los vectores no están ligados a posiciones concretas del espacio y éste, hasta donde experimentalmente se puede determinar, es plano.

No todas las magnitudes que tienen asociada una dirección y un módulo son necesariamente magnitudes vectoriales. Para que una magnitud física pueda ser representada mediante un vector ha de tener: a) *módulo, dirección y sentido independientes del sistema de coordenadas* y b) *debe satisfacer la ley de la suma de vectores.*

Un ejemplo de magnitud física que tiene dirección sentido y módulo, pero que no es una magnitud vectorial, son las rotaciones finitas de un sólido. Veamos un sencillo ejemplo en el cual no se cumple la propiedad conmutativa de la suma de vectores. Supongamos que situamos un cubo cuyas caras están numeradas del 1 al 6 con las aristas paralelas a los ejes de un sistema de coordenadas rectangulares y efectuamos dos rotaciones consecutivas de amplitud 90°, una por ejemplo alrededor del eje x y otra alrededor del eje y, ambas en el sentido de las agujas del reloj. Cada rotación tiene dirección, sentido y módulo, y, por tanto, se puede considerar que es una magnitud *vectorial*. Pero fácilmente se puede comprobar que la disposición final del cubo es diferente dependiendo de que primero se haga la rotación respecto del eje x seguida de la rotación respecto del eje y o de que se efectúe primero la rotación respecto de y seguida de la rotación respecto de x. En definitiva, las rotaciones finitas de un sólido no satisfacen la propiedad conmutativa de la suma de vectores y, por lo tanto, no son magnitudes vectoriales.

1.5 Componentes rectangulares de un vector

Sean P y Q dos puntos cualesquiera del espacio euclídeo tridimensional y sean (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2) sus respectivas coordenadas en la referencia indicada en la figura 1-16.

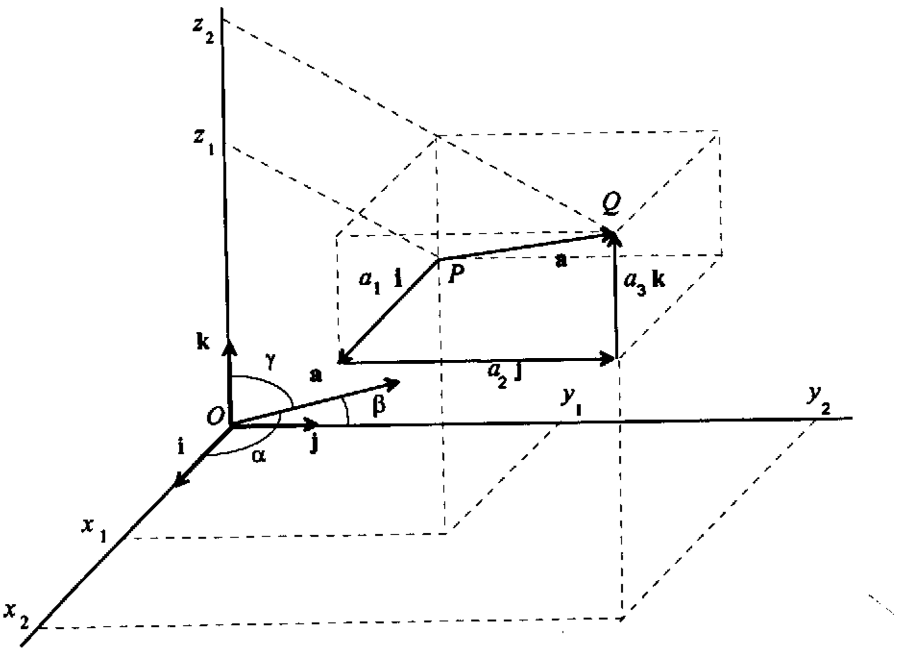


Fig. 1-16

Designemos por **a** al vector definido por ambos puntos cuyo origen es el punto P y su extremo el punto Q. La expresión del vector genérico **a** como una combinación lineal de los vectores de la base es $\mathbf{a} = a_1\,\mathbf{i} + a_2\,\mathbf{j} + a_3\,\mathbf{k}$. Los escalares a_1 , a_2 y a_3 son las *componentes rectangulares* del vector **a**.

Se deduce inmediatamente que los valores de las componentes rectangulares de **a** se obtiene de las coordenadas de los puntos P y Q origen y extremo respectivamente del vector, y sus valores son: $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$, $a_3 = z_2 - z_1$. Las componentes rectangulares de un vector son las diferencias de las coordenadas correlativas del punto extremo menos la del punto origen. Si el origen del vector coincide con el origen de coordenadas, sus componentes rectangulares son las coordenadas del punto extremo del vector.

Veamos como se expresan la dirección y el módulo a del vector en componentes. La dirección queda definida por los *cosenos directores*, que son los cosenos de los ángulos que dicho vector forma con los vectores de la base.

De la definición de producto escalar se tiene

$$a_1 = \mathbf{i}\cdot\mathbf{a} = \mathrm{a}\cos\alpha \qquad a_2 = \mathbf{j}\cdot\mathbf{a} = \mathrm{a}\cos\beta \qquad a_3 = \mathbf{k}\cdot\mathbf{a} = \mathrm{a}\cos\gamma$$

Igualando y despejando se tienen que los cosenos directores de **a** están dados por

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{\mathrm{a}} \qquad \cos\beta = \frac{a_2}{\mathrm{a}} \qquad \cos\gamma = \frac{a_3}{\mathrm{a}} \tag{1-9}$$

Elevando al cuadrado y sumando se obtiene la ecuación que relaciona los cosenos directos

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \tag{1-10}$$

El *módulo* del vector se obtiene sustituyendo las ecuaciones (1-9) en la ecuación (1-10) y despejando a queda

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \tag{1-11}$$

Operaciones en componentes Las operaciones definidas anteriormente con los vectores libres como elementos unitarios de un espacio vectorial, se pueden expresar ahora en componentes.

Suma. El vector suma tiene por componentes la suma de los componentes correlativos de cada uno de los sumandos. Si $\mathbf{s} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$, entonces

$$\mathbf{s} = (a_1 + b_1 + c_1)\mathbf{i} + (a_2 + b_2 + c_2)\mathbf{j} + (a_3 + b_3 + c_3)\mathbf{k}$$

Producto por escalares. El producto del escalar k por el vector $\mathbf{a}$ en componentes es

$$k\,\mathbf{a} = (k\,a_1)\mathbf{i} + (k\,a_2)\mathbf{j} + (k a_3)\mathbf{k}$$

Producto escalar. El producto escalar de dos vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ es

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Producto vectorial. El producto vectorial de dos vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ es

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = (a_2 b_3 - b_2 a_3)\mathbf{i} + (a_3 b_1 - b_3 a_1)\mathbf{j} + (a_1 b_2 - b_1 a_2)\mathbf{k}$$

Producto mixto. El producto mixto de tres vectores **a**, **b** y **c** es un número dado por el determinante de sus componentes

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

PROBLEMA 1.4

Demostrar que el determinante de la matriz de cambio de base ortonormal que aparece en la ecuación (1-6) es igual a 1.

SOLUCIÓN

Desarrollando el determinante de la matriz se tiene

$$det\ (e_{ij}) = \begin{vmatrix} e_{11} & e_{21} & e_{31} \\ e_{12} & e_{22} & e_{32} \\ e_{13} & e_{23} & e_{33} \end{vmatrix} = e_{11}\,e_{22}\,e_{33} + e_{21}\,e_{32}\,e_{13} + e_{31}\,e_{12}\,e_{23} - e_{31}\,e_{22}\,e_{13} - e_{21}\,e_{12}\,e_{33} - e_{11}\,e_{23}\,e_{32}$$

Agrupando términos queda

$$det\ (e_{ij}) = (e_{12}\,e_{23} - e_{22}\,e_{13})\,e_{31} + (e_{21}\,e_{13} - e_{23}\,e_{11})\,e_{32} + (e_{11}\,e_{22} - e_{21}\,e_{12})\,e_{33}$$

La base es directa, luego $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3$. Esta ecuación vectorial es equivalente a las tres ecuaciones escalares siguientes

$$e_{12}\,e_{23} - e_{22}\,e_{13} = e_{31} \qquad e_{21}\,e_{13} - e_{23}\,e_{11} = e_{32} \qquad e_{11}\,e_{22} - e_{21}\,e_{12} = e_{33}$$

que sustituidas en la expresión del determinante queda

$$det\ (e_{ij}) = e_{31}^2 + e_{32}^2 + e_{33}^2$$

El segundo término de la ecuación es el módulo del vector $\mathbf{e}_3$ al cuadrado, cuyo valor es igual a 1 ya que es unitario, obteniendo entonces

$$det\ (e_{ij}) = 1$$

PROBLEMA 1.5

Sea $\mathbf{A} = \mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} + 3\,\mathbf{k}$ la expresión de un vector en la base $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$. Sean $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ y $\mathbf{e}_3$ los vectores de otra base ortonormal directa tal que se cumple $\mathbf{i}\cdot\mathbf{e}_1 = 1/2$; $\mathbf{j}\cdot\mathbf{e}_2 = \sqrt{3}/3$; $\mathbf{k}\cdot\mathbf{e}_3 = 1$. Calcular las componentes de $\mathbf{A}$ en la nueva base.

SOLUCIÓN

Para calcular las componentes del vector **A** en la nueva base hay que determinar los elementos de la matriz de cambio de base que son las componentes de los vectores $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ en la base $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$.
De los datos del problema se tiene $e_{11} = 1/2$; $e_{22} = \sqrt{3}/3$; $e_{33} = 1$. Los vectores son unitarios, por consiguiente, las componentes primera y segunda del vector $\mathbf{e}_3$ son iguales a cero, $e_{31} = e_{32} = 0$, ya que su tercera componente es igual a 1. El vector $\mathbf{e}_3$ coincide con el vector $\mathbf{k}$.

Del producto vectorial $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3$ se deduce que $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$ son coplanarios con los vectores **i** y **j**, por lo que sus terceras componentes son nulas, $e_{13} = e_{23} = 0$.

De las ecuaciones de normalización $\qquad e_{11}^2 + e_{12}^2 = 1 \quad ; \quad e_{21}^2 + e_{22}^2 = 1$

y teniendo en cuenta los valores de e_{11} y de e_{22}, se deduce el valor de las componentes

$$e_{12} = \sqrt{3}/2 \quad \text{y} \quad e_{21} = -\sqrt{3}/2$$

La matriz de cambio de base es

$$(e_{ij}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y de la ecuación matricial} \quad \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = (e_{ij})^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

se obtienen las componentes del vector **A** en la base nueva cuyos valores son

$$a_1 = \tfrac{1}{2} + \sqrt{3} \quad ; \quad a_2 = 1 - \sqrt{3} \quad ; \quad a_3 = 1$$

PROBLEMA 1. 6

Demostrar que los vectores $\mathbf{A} = 3\,\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\,\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = -\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j} + 4\,\mathbf{k}$, $\mathbf{C} = 4\,\mathbf{i} - 2\,\mathbf{j} - 6\,\mathbf{k}$ forman un triángulo. Determinar el valor de sus ángulos.

SOLUCIÓN

Para que tres vectores formen un triángulo se ha de cumplir que uno de ellos sea la suma de los otros dos o que la suma de todos ellos sea igual a cero. Con los datos del enunciado se tiene que $\mathbf{A} = \mathbf{B} + \mathbf{C}$ forman un triángulo. La longitud de los lados del triángulo son los módulos de los vectores

$$a = |\mathbf{A}| = \sqrt{14} \qquad b = |\mathbf{B}| = \sqrt{26} \qquad c = |\mathbf{C}| = \sqrt{56}$$

Del módulo del producto vectorial de **A** por **B** se tiene $|\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}| = a\,b\,\mathrm{sen}(180 - \gamma)$

El producto vectorial del primer término de la ecuación es el vector $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} = 10\,(\,\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}\,)$. Sustituyendo valores y despejando se tiene

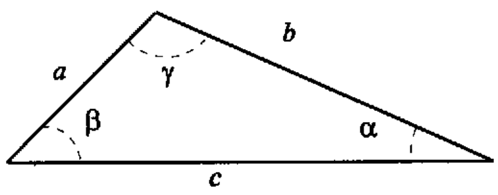
$$\mathrm{sen}\,(\,180 - \gamma\,) = 0.90785 \qquad \text{de donde} \qquad \gamma = 114.79^\circ$$

De la ley del seno se obtienen los valores de los senos de los otros dos ángulos

$$\mathrm{sen}\,\alpha = 0.45393 \qquad \text{y} \qquad \mathrm{sen}\,\beta = 0.61859$$

de donde

$$\alpha = 27.0^\circ \qquad \text{y} \qquad \beta = 38.21^\circ$$



PROBLEMA 1.7

Sean los vectores $\mathbf{A} = 4\,\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j}$ y $\mathbf{B} = \mathbf{i} + 3\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}$. Determinar:
a) el ángulo que forman
b) el valor de m para que el vector $\mathbf{C} = 3\,\mathbf{i} + m\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}$ sea coplanario con **A** y **B**
c) expresar **C** como una combinación lineal de **A** y **B**

SOLUCIÓN

a) El ángulo que forman dos vectores está dado por

$$\cos\theta = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{A\,B}$$

Sustituyendo valores se tiene

$$\cos\theta = \frac{13}{5\sqrt{14}} \qquad \theta = 46.0$$

b) Para que tres vectores sean coplanarios se ha de cumplir que su producto mixto sea nulo

$$\mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\wedge\mathbf{B}) = 0$$

Sustituyendo valores queda $\mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\wedge\mathbf{B}) = 18 - 8\,m + 18 = 0$. De donde

$$m = \frac{9}{2}$$

c) La expresión de **C** en función de **A** y **B** es de la forma $\mathbf{C} = k_1\,\mathbf{A} + k_2\,\mathbf{B}$, en donde k_1 y k_2 son dos coeficientes a determinar. Escribiendo la relación vectorial en componentes e identificando los coeficientes de los vectores de la base en ambos términos de la ecuación se tiene

$$4\,k_1 + k_2 = 3 \qquad 2\,(k_1 + k_2) = 3 \qquad k_2 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad k_1 = 1/2 \quad \text{y} \quad k_2 = 1$$

sustituyendo queda

$$\mathbf{C} = \frac{1}{2}\,\mathbf{A} + \mathbf{B}$$