Capítulo 7 Trabajo virtual y equilibrio

7.1 Introducción

Los problemas de equilibrio estático de sólidos o estructuras puede ser enfocado mediante un procedimiento distinto del hasta ahora utilizado, basado en las ecuaciones de equilibrio. Este nuevo método para el estudio del equilibrio, precisa para su formulación de la definición del concepto de *trabajo* de una fuerza. Como veremos, para ciertos problemas de estática, éste método resulta mucho más útil que el del ***sólido libre*** en el que las ecuaciones de equilibrio se obtienen igualando a cero la suma de fuerzas y la suma de momentos que actúan sobre el sistema .

7.2 Trabajo de una fuerza

La definición mecánica de *trabajo* está asociada al desplazamiento diferencial de una fuerza en el espacio. Sea P el punto de aplicación de una fuerza, el cual queda definido respecto del origen O de una referencia por el extremo del vector posición **r**, figura 7-1. La posición de un punto cualquiera del espacio infinitamente próximo a P, está definida por el extremo del vector $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$ siendo $d\mathbf{r}$ incremento diferencial de posición al pasar de un punto a otro, incremento que se denomina ***desplazamiento infinitesimal o diferencial*** del punto P.

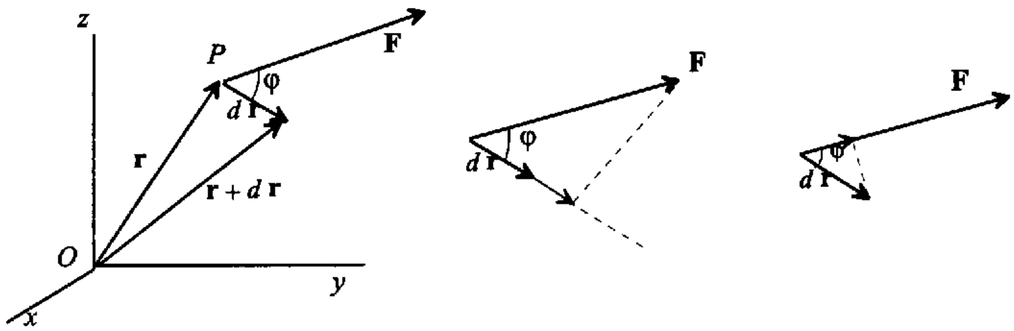


Fig. 7-1

Cuando bajo la acción de la fuerza **F** el punto P se desplaza un $d\mathbf{r}$, se define el trabajo de la fuerza **F** correspondiente al desplazamiento $d\mathbf{r}$ como el producto escalar de la fuerza por el desplazamiento. Está definición es una caso particular del concepto matemático de *circulación de un vector*, operación asociada al producto escalar de una función vectorial por el elemento lineal de espacio. De la definición de trabajo se tiene que

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F\, dr \cos\varphi \tag{7-1}$$

Si F y dr son los módulos de los dos vectores, desarrollando el producto escalar queda la expresión indicada en la ecuación (7-1). El trabajo es una magnitud escalar cuya unidad se obtiene de multiplicar la unidad de fuerza por la unidad de longitud. En el S.I. la unidad de trabajo N.m se denomina *Julio* (J).

De la definición se deduce que el trabajo puede ser positivo, negativo o nulo, según que el ángulo φ sea agudo, obtuso o recto. Descomponiendo la fuerza en una componente paralela al desplazamiento y en otra perpendicular, podemos expresar el trabajo como *el producto escalar del desplazamiento por la componente de la fuerza en esa dirección.*

El trabajo, también puede ser considerado como el producto de **F** por la componente del desplazamiento según la dirección de **F**. Supongamos ahora que una partícula situada en el punto P, sometida a la acción de un conjunto de fuerzas $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, ... $\mathbf{F}_n$, efectúa un desplazamiento $d\mathbf{r}$. Como el trabajo es una magnitud algebraica, el trabajo total de las n fuerzas, es la suma de los trabajos de cada una ellas

$$dW = \left(\textstyle\sum_i^n \mathbf{F}_i \right) \cdot d\mathbf{r} \tag{7-2}$$

Consideremos ahora desplazamientos diferenciales asociados a sólidos rígidos. Veamos primero que el trabajo total de las fuerzas internas que mantienen unidas las partículas de un sólido rígido es nulo. En efecto, dos partículas cualesquiera de un sólido se ejercen fuerzas, del mismo módulo, de la misma dirección y de sentidos opuestos, figuras 7-2 a). En el caso general de un cambio diferencial de posición del sólido, los desplazamientos de las dos partículas son diferentes, pero sus componentes sobre la dirección definida por las dos partículas han de ser iguales, ya que en caso contrario la distancia entre ambas variaría en contra de la hipótesis de que el sólido es rígido y mantiene inalterable la distancia entre sus puntos. Por tanto, el trabajo de $\mathbf{F}_i$ es igual y de signo contrario al de $\mathbf{F}_j$ y su suma es igual a cero.

Sobre el sólido pueden actuar fuerzas exteriores y pares. Evaluemos el trabajo asociado a un par de fuerzas correspondiente a un desplazamiento diferencial del sólido. Si el desplazamiento es una traslación infinitesimal, el trabajo del par es cero; así pues, calculemos el trabajo del par cuando el desplazamiento es un giro diferencial. Sea el par de fuerzas representado en la figura 7-2 b) aplicadas en los puntos A y B del sólido, el cual efectúa un giro de tal manera que el punto A no se mueve y el punto B pasa a ocupar el punto extremo del desplazamiento $d\mathbf{s}$. Únicamente la fuerza **F** del par realiza trabajo, cuyo valor es $dW = F\,ds$.

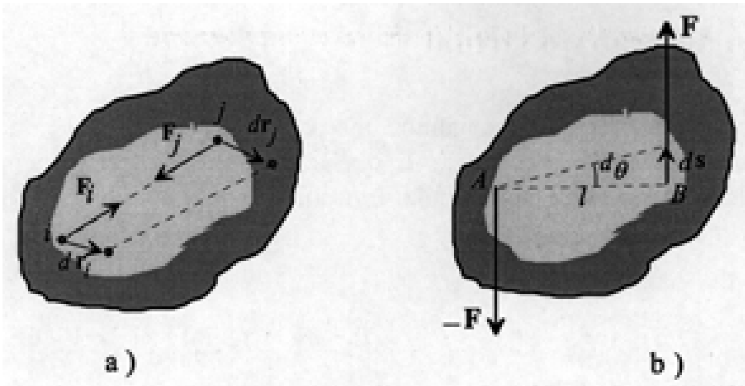


Fig. 7-2

El módulo del desplazamiento diferencial es $ds = l\,d\theta$ y el producto $F\,l$ es el módulo M del momento del par, luego sustituyendo ds por su valor, el trabajo del par viene dado por

$$dW = M\,d\theta \tag{7-3}$$

donde $d\theta$ es el ángulo diferencial girado por el sólido. Cuando el sólido gira en el espacio, como los giros infinitesimales tienen carácter vectorial, el trabajo del par estará dado por $dW = M \cos\varphi\, d\theta$ donde φ es el ángulo que forman el momento del par $\mathbf{M}$ y el eje de giro. Ya que el trabajo es una magnitud escalar, cuando sobre un sólido rígido actúan un sistema de fuerzas y pares exteriores, el trabajo efectuado por el conjunto de fuerzas aplicadas al sólido en un desplazamiento diferencial del sólido, será la suma algebraica de los trabajos efectuados por cada una las fuerzas y pares individuales.

Trabajo virtual. Si el sistema de fuerzas que actúa sobre un cuerpo produce un desplazamiento diferencial del mismo tal como el descrito, el cuerpo no está en equilibrio. Como se ha visto en las secciones anteriores, cuando un cuerpo está en equilibrio, el conjunto de fuerzas y pares que actúa sobre él es un conjunto equilibrado y por tanto no puede producir un desplazamiento lineal infinitesimal del cuerpo. Para poder utilizar la definición de trabajo en el estudio del equilibrio de los cuerpos, es necesario introducir desplazamientos ficticios a los cuales se les llama *desplazamientos virtuales.* Un desplazamiento virtual diferencial arbitrario se representa por $\delta\mathbf{r}$, para indicar que dicho desplazamiento no existe realmente y poder distinguirlo del desplazamiento diferencial real $d\mathbf{r}$. El desplazamiento virtual puede ser también de rotación. A la rotación virtual angular diferencial se le designa por $\delta\theta$. Cambiando en las ecuaciones (7-1) y (7-3) los desplazamientos reales por desplazamientos virtuales, se obtienen las ecuaciones que definen el trabajo virtual de una fuerza y de un par

$$\delta W = \mathbf{F} \cdot \delta\mathbf{r} = F\,\delta l \cos\varphi \qquad \delta W = M\delta\theta \tag{7-4}$$

7.3 Método del trabajo virtual

Equilibrio de una partícula. Supongamos una partícula que se encuentra en equilibrio bajo la acción de n fuerzas $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, ... $\mathbf{F}_n$ que actúan sobre ella. Imaginemos un desplazamiento virtual arbitrario $\delta\mathbf{r}$ de la partícula. El trabajo virtual de todas las fuerzas que actúan sobre la partícula es

$$\delta W = \mathbf{F}_1 \cdot \delta\mathbf{r} + \mathbf{F}_2 \cdot \delta\mathbf{r} + \cdots + \mathbf{F}_n \cdot \delta\mathbf{r} = (\Sigma\, \mathbf{F}_i) \cdot \delta\mathbf{r} = \mathbf{F} \cdot \delta\mathbf{r} \qquad (7\text{-}5)$$

donde $\mathbf{F}$ es la resultante de las fuerzas dadas, que es nula ya que la partícula está en equilibrio. Para una partícula, el principio del trabajo virtual establece que, *si una partícula se encuentra en equilibrio, el trabajo virtual de todas las fuerzas que actúan sobre ella es nulo*, enunciado cuya expresión matemática es la ecuación (7-5). Esta es una condición necesaria y suficiente. En efecto, si hay equilibrio, $\mathbf{F}$ es nula y el trabajo virtual es cero y si el trabajo virtual es cero, como $\delta\mathbf{r}$ es arbitrario, del producto escalar $\mathbf{F} \cdot \delta\mathbf{r} = 0$ se deduce que $\mathbf{F}$ debe de ser nula. La aplicación del principio del trabajo virtual para el equilibrio de una partícula no proporciona una simplificación del problema, ya que δr aparece en todos los términos y por tanto se elimina, quedando las ecuaciones de equilibrio obtenidas de igualar a cero las componentes de las fuerzas según los ejes de coordenadas.

Equilibrio de un solidó. Consideremos ahora el equilibrio de un sólido rígido. En el cálculo del trabajo virtual sólo interviene el trabajo virtual de las fuerzas exteriores, ya que el trabajo virtual de las fuerzas interiores es nulo. En el caso del sólido rígido, el principio del trabajo virtual establece que, *el trabajo virtual de todas las fuerzas exteriores que actúan sobre el sólido es nulo.* Tampoco para el sólido rígido, el principio de los trabajos virtuales presenta ventaja alguna respecto del método convencional.. El desplazamiento virtual asociado a un movimiento lineal o angular está incluido en cada uno de los sumandos de la ecuación $\delta W = 0$, lo que proporciona una de las ecuaciones obtenidas por el método convencional de igualar a cero las fuerzas o los momentos. La ventaja de emplear el método de los trabajos virtuales se pone de manifiesto en los problemas de equilibrio de sistemas en los que intervienen varios sólidos interconectados

7.4 Equilibrio de sistemas ideales

El sistema mecánico formado por varios sólidos unidos entre sí por conexiones sin rozamiento, se denomina *sistema mecánico ideal.* Los dispositivos en los que intervienen poleas y cuerdas, son sistemas ideales mientras que la cuerda sea inextensible y no deslice sobre la polea. En las conexiones aparecen pares de fuerzas del mismo módulo, la misma dirección y sentidos opuestos. Al aislar el conjunto de la estructura mediante el diagrama del sólido libre, las fuerzas en las conexiones son fuerzas interiores, y por tanto, el trabajo total realizado por las fuerzas interiores es nulo. Luego, el principio de los trabajos virtuales aplicable a un sistema ideal establece que, *el trabajo virtual de todas las fuerzas exteriores que actúan sobre un sistema ideal es nulo para cualquier desplazamiento compatible con las conexiones.*

Al aislar el sistema, las fuerzas exteriores existentes en uniones fijas, realizan trabajo nulo en un desplazamiento virtual compatible con las ligaduras. Tampoco realizan trabajo las reacciones en apoyos lisos para desplazamientos virtuales perpendiculares a las reacciones. A este tipo de fuerzas se les denomina *fuerzas reactivas* para distinguirlas de las fuerzas que sí realizan trabajo, llamadas *fuerzas activas.* Así pues, a diferencia del diagrama del sólido libre en el que se incluyen todas las fuerzas exteriores, en el método de los trabajos virtuales sólo es necesario incluir las fuerzas activas, que son las únicas que intervienen en la ecuación $\delta W = 0$.

La configuración de un sistema viene determinada por el número de grados de libertad del sistema. A cada grado de libertad le corresponde una coordenada, por tanto el número de coordenadas independientes necesario para determinar unívocamente la configuración de un sistema, es igual al número de grados de libertad del sistema. El número de desplazamientos virtuales posibles de un sistema compatibles con las conexiones, es igual a su número de grados de libertad. En la mayoría de problemas de equilibrio el sistema tiene un sólo grado de libertad y por tanto, mediante una única coordenada se especifica la configuración del sistema, interviniendo en su solución, una sola la ecuación $\delta W = 0$ correspondiente al desplazamiento virtual único del sistema. Si el sistema tiene n grados de libertad hay que plantear n veces la ecuación $\delta W = 0$ correspondiente a los n desplazamientos virtuales posibles; cada una de las ecuaciones expresa el trabajo virtual nulo de las fuerzas activas para un desplazamiento virtual determinado, considerando nulos los restantes.

Puede verse claramente que, las ventajas del trabajo virtual sobre el método convencional de las ecuaciones de equilibrio consisten en : primero, se puede prescindir de todas las reacciones desconocidas en las ligaduras y apoyos para establecer las relaciones existentes entre las fuerzas activas y segundo, estas relaciones se consiguen sin necesidad de descomponer el sistema. Debido a estas ventajas, el método del trabajo virtual es especialmente útil para determinar la posición de equilibrio de un sistema bajo la acción de cargas conocidas. Sin embargo, hay que hacer notar que si las relaciones geométricas que permiten la determinación de los desplazamientos virtuales para las diferentes fuerzas que interviene no son sencillas, la utilización de los trabajos virtuales pierde su utilidad y es preferible recurrir al método convencional.

Ejemplo nº 1. Veamos un ejemplo de aplicación del método de los trabajos virtuales. Consideremos la palanca articulada de la figura 7-3 a). Supongamos que se quiere determinar la fuerza $\mathbf{F}_1$ sobre el bloque *C*, el cual puede deslizar sin rozamiento sobre el apoyo, para que su posición, definida por el ángulo θ, no cambie al aplicar una carga $\mathbf{Q}$ en la articulación *B* y un momento $\mathbf{M}$ a la barra *AB*. El desplazamiento virtual del bloque *C* define unívocamente los desplazamientos de las barras del sistema, luego éste tiene un grado de libertad y su configuración queda determinada por la coordenada θ. La figura 7-3 b) es el diagrama del sistema en donde sólo se incluyen las fuerzas activas.

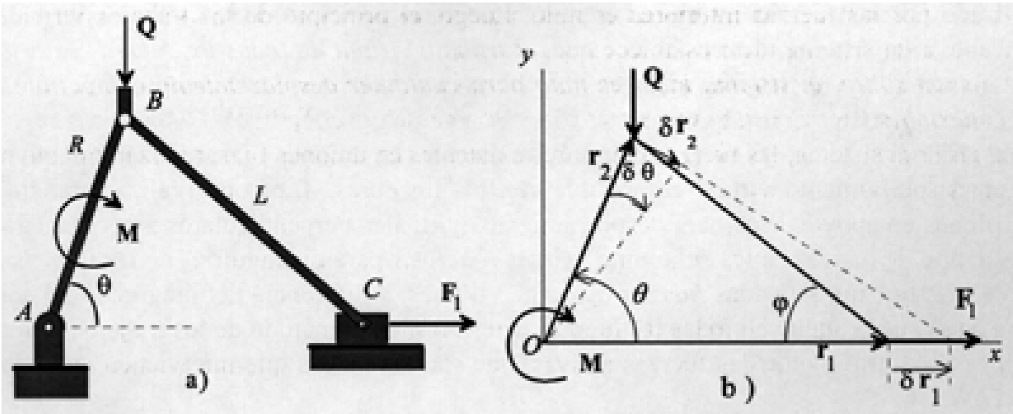


Fig. 7-3

En el sistema de referencia indicado en la figura 7-3 b), las fuerzas activas en componentes son: $\mathbf{F}_1 = F_1\,\mathbf{i}$, $\mathbf{Q} = -Q\,\mathbf{j}$ y $\mathbf{M} = -M\,\mathbf{k}$. Los puntos de aplicación de las fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{Q}$ están definidos por los vectores $\mathbf{r}_1 = x_1\,\mathbf{i}$ y $\mathbf{r}_2 = x_2\,\mathbf{i} + y_2\,\mathbf{j}$ respectivamente. Los correspondientes desplazamientos virtuales de las fuerzas serán $\delta\mathbf{r}_1 = \delta x_1\,\mathbf{i}$ y $\delta\,\mathbf{r}_2 = \delta x_2\,\mathbf{i} + \delta y_2\,\mathbf{j}$ y el correspondiente al par, el giro $-\delta\theta\,\mathbf{k}$. Aplicando el principio de los trabajos virtuales queda

$$\delta W = \mathbf{F}_1 \cdot \delta\mathbf{r}_1 + \mathbf{Q}\cdot\delta\mathbf{r}_2 + \mathbf{M}\cdot(-\delta\theta)\mathbf{k} = F_1\,\delta x_1 - Q\,\delta y_2 + M\,\delta\theta = 0 \tag{a}$$

De la figura 7-3 b) se tienen las coordenadas de los puntos de aplicación de las fuerzas están dadas por $x_1 = R\cos\theta + L\cos\varphi$, $y_2 = R\,\mathrm{sen}\,\theta$ y la relación $L\,\mathrm{sen}\,\varphi = R\,\mathrm{sen}\,\theta$. Diferenciando las dos primeras ecuaciones y teniendo en cuenta la relación entre los ángulos θ y φ queda,

$$\delta x_1 = R\,\mathrm{sen}\,\theta \left(1 + \frac{R\cos\theta}{\sqrt{L^2 - R^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}} \right)\delta\theta \tag{b}$$

$$\delta y_2 = -R\cos\theta\,\delta\theta \tag{c}$$

Sustituyendo (b) y (c) en (a) y despejando, se obtiene

$$F_1 = -\frac{(QR\cos\theta + M)\sqrt{L^2 - R^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}}{R\,\mathrm{sen}\,\theta\left[R\cos\theta + \sqrt{L^2 - R^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}\right]} \tag{d}$$

El valor negativo de la ecuación (d) para la componente según el eje x de la fuerzas $\mathbf{F}_1$ indica que el sentido de la fuerza es hacia la izquierda.

Ejemplo nº 2. Veamos otro ejemplo de aplicación del método del trabajo virtual. Al brazo OA fijo en O se le aplica un momento M tal como se indica en la figura 7-4 a). Se quiere determinar la fuerza **F** que hay que aplicar en la corredera lisa B para que el brazo OA se mantenga en posición horizontal.

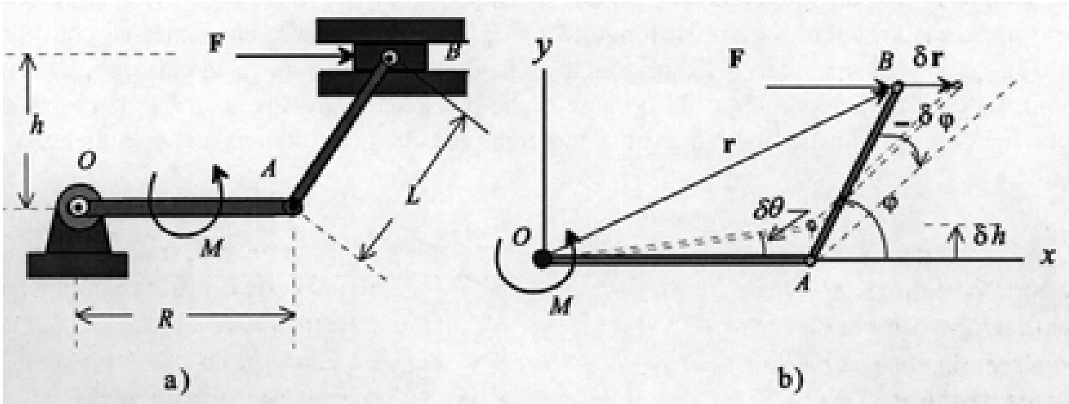


Fig. 7-4

El desplazamiento virtual de la deslizadera define unívocamente los desplazamientos correspondientes del brazo y de la biela compatibles con las ligaduras, tal como se muestra en la figura 7-4 b) del diagrama del sistema, en el que sólo se muestran la fuerza **F** y el momento **M**. La fuerza **F** en la referencia indicada está dada por $\mathbf{F} = F\,\mathbf{i}$ y $\mathbf{M} = M\,\mathbf{k}$. Del diagrama de las fuerzas activas se deduce que el vector posición **r** en componentes está dado por $\mathbf{r} = (R + L\cos\varphi)\,\mathbf{i} + h\,\mathbf{j}$. El desplazamiento virtual de la deslizadera en componentes es $\delta\,\mathbf{r} = L \operatorname{sen}\varphi\,\delta\varphi\,\mathbf{i} + \delta h\,\mathbf{j}$ y el del par, el giro $\delta\theta\,\mathbf{k}$. Aplicando el principio de los trabajos virtuales queda

$$\delta W = \mathbf{F}\cdot\delta\mathbf{r} + \mathbf{M}\cdot\delta\theta\mathbf{k} = FL\operatorname{sen}\varphi\,\delta\varphi + M\,\delta\theta = 0 \qquad \text{(a)}$$

Para poder resolver la ecuación (a) hay que determinar una relación entre $\delta\theta$ y $\delta\varphi$. El desplazamiento lineal del par es $\delta h = R\,\theta$ y de la geometría del sistema se tiene $h = L\operatorname{sen}\varphi$ cuya diferencial es $\delta h = -L\cos\varphi\,\delta\varphi$ Igualando ambas expresiones queda

$$\delta\theta = -\frac{L}{R}\cos\theta\,\delta\varphi \qquad \text{(b)}$$

Sustituyendo (b) en (a) y despejando se tiene el valor de F

$$F = \frac{M}{R\,\mathrm{tg}\varphi} = \frac{M\sqrt{L^2 - h^2}}{R\,h}$$

que mantiene la deslizadera en su posición horizontal.

Ejemplo nº 3. Consideremos un caso de un sistema con tres grados de libertad compuesto por tres barras articuladas de igual longitud L e igual peso P que se encuentra en equilibrio bajo la acción de una fuerza **F** horizontal aplicada al extremo de la tercera barra, figura 7-5a). La configuración de equilibrio viene fijada por los ángulos θ_1, θ_2, θ_3 es decir, el sistema tiene tres grados de libertad correspondientes a las tres coordenadas independientes.

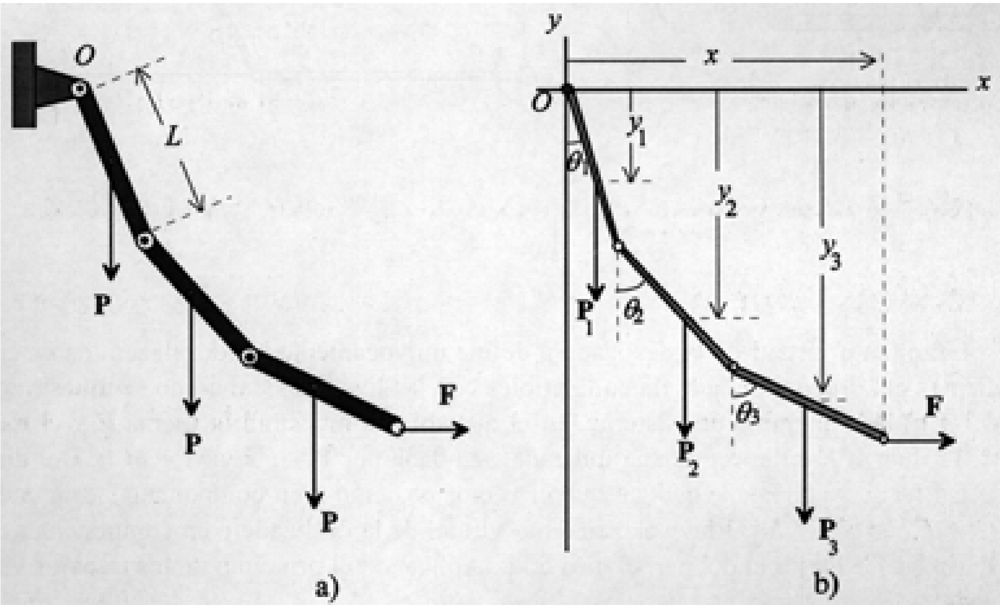


Fig. 7-5

Será necesario aplicar tres veces el principio de los trabajos virtuales, uno por grado de libertad haciendo variar en cada caso una de las coordenadas y dejando constantes las otras dos. Las fuerzas activas que intervienen son las representadas en la figura 7-5 b), cuyas expresiones en componentes están dadas por $\mathbf{P}_1 = -P\,\mathbf{j}$, $\mathbf{P}_2 = -P\,\mathbf{j}$, $\mathbf{P}_3 = -P\,\mathbf{j}$, $\mathbf{F} = F\,\mathbf{i}$. Los vectores posición de los pesos son: $\mathbf{r}_1 = x_1\,\mathbf{i} + y_1\,\mathbf{j}$, $\mathbf{r}_2 = x_2\,\mathbf{i} + y_2\,\mathbf{j}$, $\mathbf{r}_3 = x_3\,\mathbf{i} + y_3\,\mathbf{j}$ y el de la fuerza **F**, el vector $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$. Diferenciando los vectores posición se tienen los desplazamientos virtuales:

$$\delta\mathbf{r}_1 = \delta x_1\,\mathbf{i} + \delta y_1\,\mathbf{j} \quad ; \quad \delta\mathbf{r}_2 = \delta x_2\,\mathbf{i} + \delta y_2\,\mathbf{j} \quad ; \quad \delta\mathbf{r}_3 = \delta x_3\,\mathbf{i} + \delta y_3\,\mathbf{j} \quad ; \quad \delta\mathbf{r} = \delta x\,\mathbf{i} + \delta y\,\mathbf{j}$$

Aplicando el principio de los trabajos virtuales queda

$$\delta W = \mathbf{F}\cdot\delta\mathbf{r} + \mathbf{P}_1\cdot\delta\mathbf{r}_1 + \mathbf{P}_2\cdot\delta\mathbf{r}_2 + \mathbf{P}_3\cdot\delta\mathbf{r}_3 = F\,\delta x - P\,\delta y_1 - P\,\delta y_2 - P\,\delta y_3 = 0 \qquad \text{(a)}$$

Diferenciando los valores de las coordenadas de los puntos de aplicación de las fuerzas en función de la longitud L de las barras y de los ángulos θ_1, θ_2 , θ_3 deducidos de la figura 7-5 b) se tiene:

$$y_1 = -\frac{1}{2}L\cos\theta_1 \quad \Rightarrow \quad \delta y_1 = \frac{1}{2}L\,\mathrm{sen}\,\theta_1\,\delta\theta_1$$

$$y_2 = -L\,(\cos\theta_1 + \frac{1}{2}\cos\theta_2) \quad \Rightarrow \quad \delta y_2 = L(\mathrm{sen}\,\theta_1\delta\theta_1 + \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,\theta_2\,\delta\theta_2)$$

$$y_3 = -L(\cos\theta_1 + \cos\theta_2 + \frac{1}{2}\cos\theta_3) \Rightarrow \delta y_3 = L(\mathrm{sen}\,\theta_1\,\delta\theta_1 + \mathrm{sen}\,\theta_2\,\delta\theta_2\,\frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,\theta_3\,\delta\theta_3)$$

$$x = L(\mathrm{sen}\,\theta_1 + \mathrm{sen}\,\theta_2 + \mathrm{sen}\,\theta_3) \Rightarrow \delta x = L(\cos\theta_1\,\delta\theta_1 + \cos\theta_2\,\delta\theta_2 + \cos\theta_3\,\delta\theta_3)$$

Sustituyendo en (a) y haciendo variar θ_1 mientras θ_2 y θ_3 se mantienen constantes, se tiene

$$\delta W_1 = (FL\cos\theta_1 - \frac{1}{2}PL\,\mathrm{sen}\,\theta_1 - PL\,\mathrm{sen}\,\theta_1 - PL\,\mathrm{sen}\,\theta_1)\delta\theta_1 = 0 \Rightarrow \mathrm{tg}\,\theta_1 = \frac{2F}{5P} \qquad (b)$$

Haciendo variar θ_2 mientras θ_1 y θ_3 se mantienen constantes, se obtiene

$$\delta W_2 = (FL\cos\theta_2 - \frac{1}{2}PL\,\mathrm{sen}\,\theta_2 - PL\,\mathrm{sen}\,\theta_2)\delta\theta_2 = 0 \qquad \Rightarrow \quad \mathrm{tg}\,\theta_2 = \frac{2F}{3P} \qquad \text{(c)}$$

Haciendo variar θ_3 mientras θ_1 y θ_2 se mantienen constantes, se obtiene

$$\delta W_3 = (FL\cos\theta_3 - \frac{1}{2}PL\,\mathrm{sen}\,\theta_3)\delta\theta_3 \qquad \Rightarrow \quad \mathrm{tg}\,\theta_3 = \frac{2F}{P} \qquad \text{(d)}$$

Las ecuaciones (b), (c) y (d) dan los valores de los ángulos de la configuración de equilibrio.

7.5 Sistemas con elementos elásticos y rozamiento

Muelles. En algunas aplicaciones de la ingeniería, se utilizan sistemas mecánicos en los cuales uno o varios de sus elementos sufren deformaciones elástica. El comportamiento elástico del sistema proviene de los resortes que incorpora, o también, de la naturaleza elástica de los elementos estructurales cargados. Consideremos ahora sistemas ideales en los que uno de sus elementos sea un muelle, y se pretende determinar la configuración de equilibrio aplicando el principio de los trabajos virtuales. Será necesario evaluar el trabajo virtual correspondiente a la fuerza del muelle para poder incorporarlo a la ecuación $\delta W = 0$.

El muelle es un elemento que realiza trabajo. Para que un muelle ejerza una fuerza sobre un cuerpo es necesario que su longitud tenga un valor diferente de su longitud natural l. Si se designa por Δl la deformación del muelle, se encuentra experimentalmente que la fuerza que ejerce el muelle está dada por

$$F = k\,\Delta l \tag{7-6}$$

donde k es la *constante elástica del muelle*, expresada en N/m. La ecuación (7-6) es válida dentro de los límites del comportamiento lineal del muelle. La dirección de la fuerza **F** ejercida por el muelle es la definida por el origen y el extremo del muelle, con el origen fijo y el extremo libre unido al cuerpo sobre el que ejerce la fuerza, su sentido es opuesto a la deformación, marcando la tendencia del muelle deformado a recuperar su longitud natural, tal como se muestra en la figura 7-6.

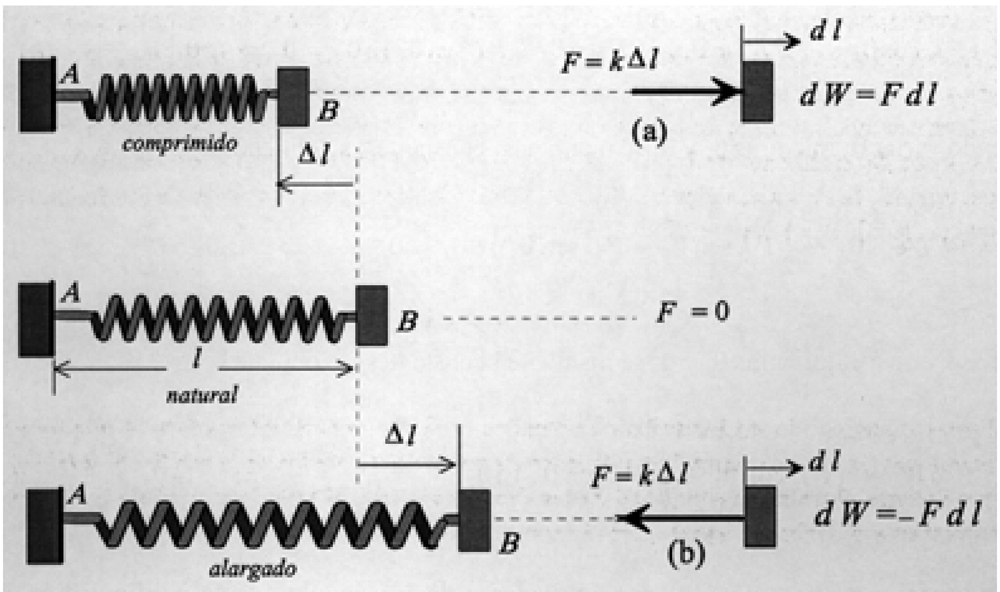


Fig. 7-6

El trabajo realizado por el muelle cuando el cuerpo B unido a su extremo libre efectúa un desplazamiento diferencial dl, está dado por el producto escalar de la fuerza por el desplazamiento

$$dW_m = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} \tag{7-7}$$

El trabajo de la fuerza **F** es *positivo* cuando el desplazamiento diferencial del cuerpo hace que la deformación *disminuya*, figura 7-6 (a) y es *negativo* cuando el desplazamiento diferencial del cuerpo hace que la deformación *aumente*, figura 7-6 (b). Cuando el sistema en equilibrio incluye un muelle, la fuerza del muelle es una fuerza activa y para un desplazamiento virtual del sistema, el trabajo virtual correspondiente a la fuerza del muelle, dado por

$$\delta \mathrm{Wm} = \mathbf{F} \cdot \delta\mathbf{l} \tag{7-8}$$

se incluirá como un sumando más en la ecuación del principio de los trabajos virtuales.

Rozamiento. Supongamos un sistema ideal tal que alguno de sus elementos estructurales está en contacto con superficies de apoyo rugosas, y sea μ el coeficiente de rozamiento de ambas superficies. La determinación de la configuración de equilibrio del sistema mediante el método de los trabajos virtuales requiere dar al sistema un desplazamiento virtual compatible con las ligaduras, y calcular el trabajo virtual de las fuerzas activas que actúan sobre el sistema. Con referencia al rozamiento, el desplazamiento virtual del elemento del sistema sobre la superficie de apoyo, es equivalente a una situación de movimiento inminente, por lo que la fuerza de rozamiento tiene su valor máximo $F_r = \mu N$, donde N es la reacción normal en el apoyo. Calculando el valor de N mediante las ecuaciones de equilibrio del sistema, queda determinada la fuerza de rozamiento como una fuerza externa más que actúa sobre el sistema, cuya dirección es la de la tangente a la superficie de apoyo y sentido opuesto al desplazamiento. Si δr es el desplazamiento, el trabajo virtual de la fuerza de rozamiento es siempre un trabajo negativo y está dado por

$$\delta \mathrm{W}_r = -F_r\, \delta\, r \tag{7-9}$$

Así pues, el principio de los trabajos virtuales para sistemas ideales sobre el que actúan fuerzas externas, fuerzas de muelles y fuerzas de rozamiento, se formula mediante una ecuación que incluye el trabajo virtual δW de las fuerzas activas, el trabajo virtual de las fuerzas de los muelles y el trabajo virtual de las fuerzas de rozamiento

$$\delta \mathrm{W} + \delta \mathrm{W}_m + \delta \mathrm{W}_r = 0 \tag{7-10}$$

Ejemplo nº 4. Consideremos el sistema representado en la figura 7-7 a). El sistema está formado por dos barras articuladas de la misma longitud L, que bajo la acción de una carga **Q** aplicada en la articulación B comprimen un muelle de constante k y longitud natural l, unido al bloque C el cual se apoya sobre una superficie rugosa siendo μ el coeficiente de rozamiento entre ambas superficies. Mediante la aplicación del principio de los trabajos virtuales, determinar el valor de la carga Q para que el sistema esté en equilibrio en la posición indicada.

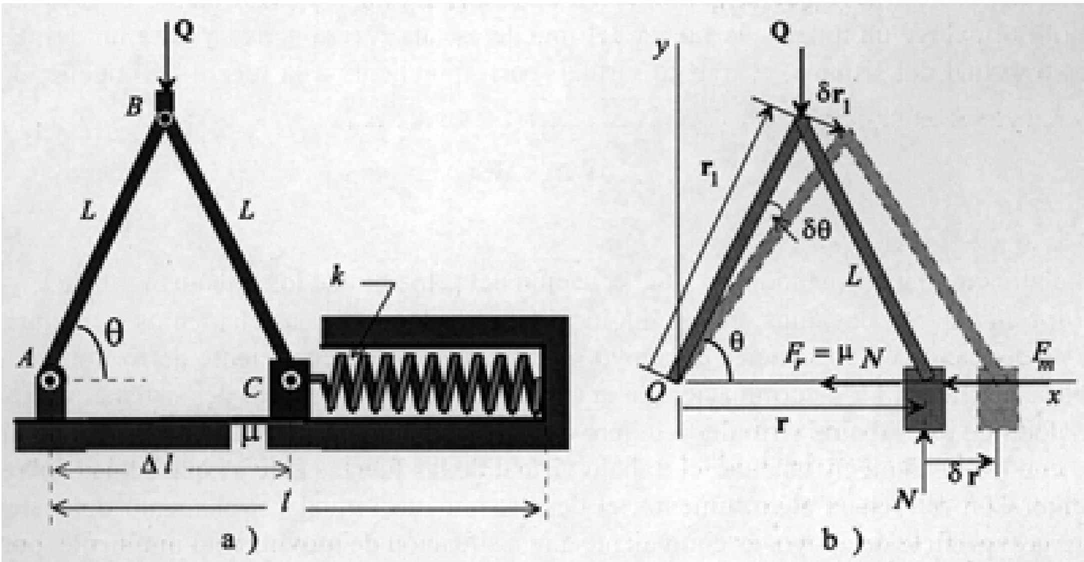


Fig. 7-7

El desplazamiento virtual del bloque C define unívocamente los desplazamientos de las barras del sistema, luego éste tiene un grado de libertad y su configuración queda determinada por la coordenada θ. De la figura 11-7 a) se tiene que el incremento de longitud del muelle comprimido por la carga **Q**, está dado por $\Delta l = 2\,L\cos\theta$.

En el sistema de referencia indicado en la figura 7-7 b), la carga está dada por $\mathbf{Q} = -\,Q\,\mathbf{j}$ y la fuerza del muelle es $\mathbf{F}_m = -\,(2\,k\,L\cos\theta)\,\mathbf{i}$. Mediante las ecuaciones de equilibrio del sistema se obtiene que el valor de la reacción normal N está dado por $N = Q/2$, luego la fuerza de rozamiento es $\mathbf{F}_r = -(\mu\,Q/2)\,\mathbf{i}$.

El vector posición del punto de aplicación de la fuerza del muelle y de la fuerza de rozamiento es el vector $\mathbf{r} = 2\,L\cos\theta\,\mathbf{i}$, y el de la carga **Q** es $\mathbf{r}_1 = L\,(\cos\theta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j})$. Los desplazamientos virtuales de las fuerzas que actúan sobre el sistema están dados respectivamente por

$$\delta\mathbf{r} = 2\,L\,(\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{i})\,\delta\theta \qquad\qquad \delta\mathbf{r}_1 = L\,(\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{i} - \cos\theta\,\mathbf{j})\,\delta\theta$$

Aplicando el principio de los trabajos virtuales se tiene

$$\delta W + \delta Wm + \delta W_r = \mathbf{Q} \cdot \delta \mathbf{r}_1 + \mathbf{F}_m \cdot \delta \mathbf{r} + \mathbf{F}_r \cdot \delta \mathbf{r} = 0 \tag{a}$$

Efectuando los productos escalares de la ecuación (a) queda

$$Q\,L \cos\theta\,\delta\theta - 2\,k\,L\,\Delta\,l \operatorname{sen}\theta\,\delta\theta - \mu\,Q\,L \operatorname{sen}\theta\,\delta\theta = 0 \tag{b}$$

Aislando el valor de la carga Q en la ecuación (b) se obtiene

$$Q = \frac{4\,k L \operatorname{sen}\theta}{1 - \mu \operatorname{tg}\theta} \tag{c}$$

El sistema articulado puede utilizarse únicamente para valores de μ menores que $1/\operatorname{tg}\theta$. Para el caso en que $\mu \operatorname{tg}\theta = 1$, el sistema no puede permanecer en equilibrio ya que requeriría aplicar en la articulación B una carga infinita.

Rendimiento mecánico. La clara ventaja del método de los trabajos virtuales frente a las ecuaciones de equilibrio, consiste en que el sistema se trata como un todo sin necesidad de desmembrarlo. Sin embargo, cuando el sistema no es ideal, es decir, están presentes rozamientos internos apreciables en el sistema, es necesario separar el sistema para calcular las fuerzas de rozamiento internas y en consecuencia, el método de los trabajos virtuales pierde su eficacia.

Debido a la pérdida de energía a causa del trabajo de las fuerzas de rozamiento, el trabajo proporcionado por la máquina es siempre menor que el trabajo entregado a la misma. Se define el *rendimiento mecánico* como el cociente entre el trabajo útil realizado por la máquina y el trabajo entregado a esta. Para las máquinas ideales, este cociente es igual a la unidad y para las máquinas reales es siempre menor que la unidad.

$$\eta = \frac{\text{Trabajo util realizado}}{\text{Trabajo entregado}} \tag{7-11}$$

El rendimiento de las máquinas simples constituidas por sistemas que tienen un grado de libertad, se puede evaluar mediante el principio de los trabajos virtuales, calculando el numerador y el denominador de la ecuación (7-11) para un desplazamiento virtual del sistema. A título de ejemplo, evaluemos el rendimiento del sistema de la figura 7-7. El trabajo útil realizado en el desplazamiento virtual considerado, es el trabajo para incrementar la deformación del muelle, dado por ***trabajo útil*** $= 4\, k\, L^2$ sen θ cos θ $\delta\theta$, y el trabajo entregado al sistema es el trabajo de la carga Q ***trabajo entregado*** $= Q\, L$ cos θ $\delta\theta$. Sustituyendo Q por su valor dado por la ecuación (c), de la definición (7-11) se obtiene

$$\eta = 1 - \mu \operatorname{tg} \theta \qquad (11\text{-}12)$$

Queda claro que el sistema sólo es utilizable para valores de μ tales que μ tg θ <1.

7.6 Energía potencial y equilibrio

En un sentido genérico, la energía de un sistema representa la capacidad que tiene el sistema de realizar un trabajo. Consideremos de nuevo el trabajo realizado por el muelle en un desplazamiento diferencial dado. Si el desplazamiento aumenta la deformación del muelle, el trabajo de la fuerza del muelle es negativo y si el desplazamiento disminuye la deformación del muelle, el trabajo es positivo. El principio de conservación de la energía afirma que la energía de un sistema se mantiene constante en una transformación cualquiera del mismo.

Un muelle deformado efectúa trabajo, luego tiene energía. La energía del muelle deformado se denomina ***energía potencial elástica*** y su valor, que lo denominaremos por U_e aumenta con la deformación. Aplicando al muelle deformado el principio de conservación de la energía se tiene que $W + U_e = cte$. Si el muelle no trabaja $W = 0$, la energía potencial se mantiene constante. Diferenciando la ecuación de la conservación de la energía se obtiene

$$dW + dU_e = 0 \qquad \text{de donde} \qquad dU_e = -\, dW \qquad (7\text{-}13)$$

Supongamos un desplazamiento dx tal que aumenta la deformación del muelle; el trabajo de la fuerza del muelle es $dW = -F\, dx$. Sustituyendo en (7-13) queda

$$dU_e = F\, dx \qquad (7\text{-}14)$$

donde la fuerza del muelle está dada por $F = k\, x$, siendo x el alargamiento inicial. La energía potencial del muelle correspondiente al alargamiento x, se obtiene integrando la ecuación (7-14) entre 0 y x. Al alargamiento cero le corresponde energía potencial elástica nula, luego queda

$$U_e = \int_0^x kx' \, dx' = \frac{1}{2} k x^2 \qquad (7\text{-}15)$$

Si la longitud natural del muelle aumenta hasta Δl, su energía potencial elástica está dada por la ecuación (7-15) sustituyendo x por Δl. Debido a que la medida de la deformación está elevada al cuadrado, la energía potencial elástica de un muelle deformado es siempre positiva con independencia del signo que tenga la deformación.

En mecánica, existe otro tipo de energía potencial asociada a la posición de un cuerpo en un campo de fuerzas. Concretamente, el peso **P** de un cuerpo es la resultante de las fuerzas que la tierra ejerce sobre el cuerpo, debido a la interacción gravitacional de la masa de la tierra con la masa del cuerpo. Tal como se vio en el Capítulo 5, la intensidad de la gravitación **g** es un vector constante en las proximidades de la superficie terrestre y en consecuencia, el peso **P** de un cuerpo situado en cualquier punto de dicho entorno, es también una magnitud constante.

Como ya se ha visto en las secciones anteriores, la expresión del peso de un cuerpo en una referencia con el eje y en sentido vertical está dada por $\mathbf{P} = -P\,\mathbf{j}$. Si el punto de aplicación del peso está definido por el extremo del vector $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$, el trabajo del peso en un desplazamiento diferencial $d\mathbf{r} = dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j}$, es $dW = -P\,dy$. El trabajo del peso es negativo si su cota y aumenta ($dy > 0$) y es positivo si su cota y disminuye ($dy < 0$).

En consecuencia, un cuerpo es un sistema que trabaja, luego tiene energía. La energía U_g asociada a un cuerpo debido a su posición respecto de una referencia determinada, se denomina *energía potencial gravitatoria* del cuerpo. Al igual que en el caso del muelle, del principio de conservación de la energía se deduce que

$$dU_g = -\,dW = P\,dy \qquad (7\text{-}16)$$

Si el desplazamiento vertical diferencial disminuye la cota, el trabajo es positivo y el incremento diferencial de energía potencial es negativo. Integrando la ecuación (7-16) se tiene

$$U_g = P\,y + \text{cte.} \qquad (7\text{-}17)$$

Asignándole a la energía potencial el valor nulo cuando el cuerpo está en la cota $y = 0$, la constante de integración de la ecuación (7-17) es nula, y la energía potencial del cuerpo en la cota y es

$$U_g = P\,y = m\,g\,y \qquad (7\text{-}18)$$

La energía potencial gravitatoria de un cuerpo es positiva para posiciones por encima de la cota cero, y negativa para posiciones del cuerpo por debajo de la cota cero. La energía potencial mecánica U de un sistema es la suma de la energía potencial elástica y de la energía potencial gravitatoria del sistema. Se tiene

$$U = U_g + U_e \tag{7-19}$$

Si en un sistema no están presentes fuerzas de rozamiento cinético, cuyo trabajo se pierde en forma de calor, del principio de la conservación de la energía aplicado al sistema se tiene que

$$dW = -\,dU \tag{7-20}$$

Los sistemas en los que no están presentes fuerzas de rozamiento cinético, se denominan *sistemas conservativos*, para los cuales es aplicable la ecuación (7-20) cualquiera que sea el tipo de fuerzas consideradas.

Veamos ahora la relación entre la energía potencial y el equilibrio. La ecuación (7-20), aplicada a un sistema en equilibrio al cual se le somete a un desplazamiento virtual, se transforma en la expresión $\delta W = -\,\delta U$, donde δW es el trabajo de las fuerzas activas del sistema en el desplazamiento virtual. Si la configuración del sistema viene determinada por una coordenada θ, la energía potencial del sistema será función de dicha coordenada, luego $\delta U = (dU/d\theta)\,\delta\theta$ y de la aplicación del principio de los trabajos virtuales $\delta W = 0$, se tiene

$$\frac{dU}{d\theta} = 0 \tag{7-21}$$

En función de la energía potencial, el principio de los trabajos virtuales establece que *si un sistema está en equilibrio, la derivada de la energía potencial del sistema es nula.* De la ecuación (7-21) se obtiene el valor de θ correspondiente a la configuración de equilibrio. Para los sistemas con n grados de libertad, se tienen n coordenadas independientes. El incremento diferencial de la energía potencial es

$$\delta U = \sum_{1}^{n} \frac{\partial U}{\partial \theta_i}\,\delta\theta_i \tag{7-22}$$

y el principio establece que se deberán igualar a cero las n derivas parciales de U respecto de cada una de las n coordenadas.

Ejemplo nº 5. Las dos barras articuladas de la figura 7-8 de longitud $L = 3\ h/4$ y peso P están soportadas por un muelle de constante k y longitud natural $h/4$. El sistema se encuentra en equilibrio en la posición indicada. Determinar θ y el valor de k compatible con el sistema. El bloque unido al muelle se desplaza sobre la guía horizontal sin rozamiento.

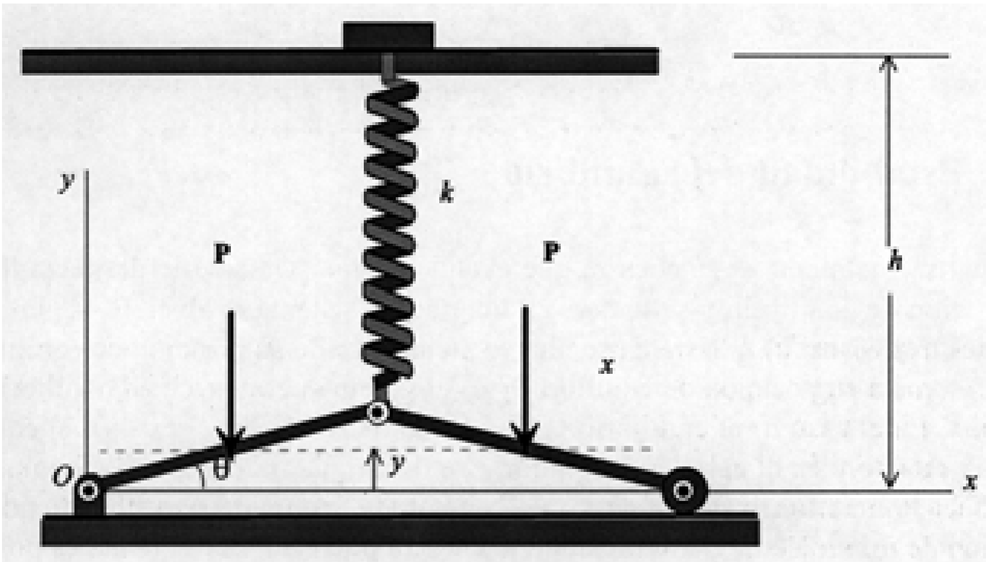


Fig. 7-8

De la figura, fácilmente se deduce que el incremento de longitud del muelle está dado por $\Delta l = h/4 - L\,\text{sen}\theta$ y la cota y del punto de aplicación del peso **P** de las barras está dadas por $y = 1/2\ L\ \text{sen}\theta$. De las ecuaciones (7-15), (7-18) y (7 -19), sustituyendo valores se tiene que la energía potencial del sistema está dada por

$$U = U_g + U_m = P L \,\text{sen}\,\theta + \frac{1}{2} k \left(\frac{h}{4} - L \,\text{sen}\,\theta\right)^2 \qquad \text{(a)}$$

Aplicando el principio de los trabajos virtuales en la forma de la energía potencial queda

$$\frac{dU}{d\theta} = PL\cos\theta - k\left(\frac{h}{4} - L\,\text{sen}\,\theta\right) L\cos\theta = 0 \qquad \text{(b)}$$

de donde se obtiene el valor de la coordenada θ de la posición de equilibrio

$$3 \operatorname{sen} \theta = 1 - \frac{4P}{kh} \qquad \text{(c)}$$

De la ecuación (c) se deduce que la constante k de elasticidad del muelle ha de tener un valor tal que

$$k > \frac{4P}{h} \qquad \text{(d)}$$

7.7 Estabilidad del equilibrio

Experimentalmente se encuentra que cuando a un sistema se le desplaza ligeramente de su posición de equilibrio y se le deja en libertad, el sistema evoluciona según uno de los siguientes tres casos: ***a***) el sistema se mueve alejándose de su posición de equilibrio, ***b***) el sistema retorna a su posición de equilibrio y ***c***) el sistema permanece en equilibrio en la nueva posición. En el caso *a*) el equilibrio se denomina inestable, en el caso *b*) el equilibrio se denomina estable y en el caso *c*) el equilibrio se denomina indiferente. La evolución del sistema pone de manifiesto el principio, de que todo sistema físico libre tiende a ocupar la posición de mínima energía. Utilizando la energía potencial del sistema, es posible describir estos estados de equilibrio mediante las derivadas de la función U, y por tanto, saber si la posición de equilibrio del sistema es inestable, estable o indiferente.

Como se ha visto, la configuración de equilibrio de un sistema con un grado de libertad queda definida por el valor (o valores) de θ que satisface la ecuación $dU/d\theta = 0$, la cual gráficamente representa, que la tangente a la curva $U = f(\theta)$ en dicho punto es horizontal, o que la función U tiene un valor constante. La función U tiene un máximo en el punto θ si la derivada segunda en ese punto es negativa $d^2U/d^2\theta < 0$; la función U tiene un mínimo en el punto θ si la derivada segunda en ese punto es positiva $d^2U/d^2\theta > 0$ y la función U tiene un punto de inflexión en θ si la derivada segunda en ese punto tiene un valor nulo $d^2U/d^2\theta = 0$. Si la primera derivada y todas las sucesivas son nulas, la función U es constante.

Equilibrio inestable. El equilibrio es inestable cuando la energía potencial es ***máxima***. En efecto, al desplazar ligeramente el sistema de la posición de equilibrio, su energía potencial en la nueva posición tiene un valor menor que el del máximo, y al dejarlo en libertad evoluciona de tal manera que su energía potencial disminuya, es decir, alejándose de la posición de equilibrio.

Equilibrio estable. El equilibrio es estable cuando la energía potencial es ***mínima***. En efecto, al desplazar ligeramente el sistema de la posición de equilibrio, su energía potencial en la nueva posición tiene un valor mayor que el del mínimo, y al dejarlo en libertad evoluciona de tal manera que su energía potencial disminuya, es decir, acercándose a la posición de equilibrio.

Equilibrio indiferente. El equilibrio es indiferente cuando la energía potencial es *constante*. En efecto, al desplazar ligeramente el sistema de la posición de equilibrio, su energía potencial en la nueva posición tiene el mismo valor, luego sigue siendo una posición de equilibrio. En resumen se tiene:

$$\frac{dU}{d\theta} = 0 \qquad \frac{d^2U}{d\theta^2} < 0 \qquad \text{equilibrio inestable} \qquad (7\text{-}23)$$

$$\frac{dU}{d\theta} = 0 \qquad \frac{d^2U}{d\theta^2} > 0 \qquad \text{equilibrio estable} \qquad (7\text{-}24)$$

$$\frac{dU}{d\theta} = 0 \qquad \frac{d^2U}{d\theta^2} = \frac{d^3U}{d\theta^3} = \ldots\ldots = 0 \qquad \text{equilibrio indiferente} \qquad (7\text{-}25)$$

Si las dos primeras derivas son nulas, pero no lo son las de orden superior, el equilibrio es inestable si la primera derivada no nula que se encuentra es negativa, y el equilibrio es estable, si la primera derivada no nula que se encuentra es de orden par y mayor que cero. Cuando el sistema tiene n grados de libertad, la energía potencial es una función de n variables independientes, y será necesario aplicar la teoría de funciones de varias variables para determinar el criterio de estabilidad del sistema. El sistema de n variables es estable si se cumple que

$$\frac{\partial U}{\partial\theta_1} = 0 \qquad \frac{\partial U}{\partial\theta_2} = 0 \qquad \frac{\partial U}{\partial\theta_3} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{\partial U}{\partial\theta_n} = 0 \qquad (7\text{-}26)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\theta_1^2} > 0 \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial\theta_2^2} > 0 \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial\theta_3^2} > 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{\partial^2 U}{\partial\theta_n^2} > 0 \qquad (7\text{-}27$$

Como ejemplo de aplicación, consideremos el análisis del estado de equilibrio del sistema representado en la figura 7-8. De la condición de equilibrio $dU/d\theta = 0$, se deduce que el valor del ángulo θ satisface la ecuación $3 \text{ sen } \theta = 1 - 4\, P/k\, h$.

Para determinar si el equilibrio es estable, inestable o indiferente, es necesario calcular el signo de la derivada segunda de la energía potencial U del sistema para el valor de θ que anula la primera derivada. La derivada sègunda de la energía es

$$\frac{d^2U}{d\theta^2} = -PL\,\mathrm{sen}\,\theta + kL\left(\frac{h}{4} - L\,\mathrm{sen}\,\theta\right)\mathrm{sen}\,\theta + kL^2\cos^2\theta$$

Sustituyendo el senθ por su valor correspondiente a la posición de equilibrio y operando queda

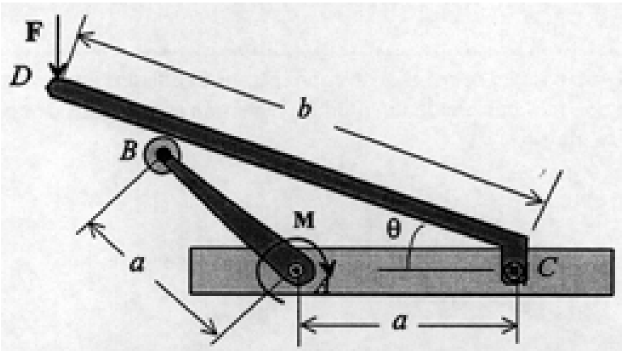
$$\frac{d^2U}{d\theta^2} = \frac{LP}{3}\left(\frac{k}{4P/h} - 1\right)\left(1 - \frac{4P/h}{k}\right) + kL^2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Pero como $k > 4P/h$, la derivada segunda de la energía es > 0 y el equilibrio es estable para la posición definida por el ángulo

$$\theta = \mathrm{arc\,sen}\,\frac{1}{3}\left(1 - \frac{4P}{kh}\right)$$

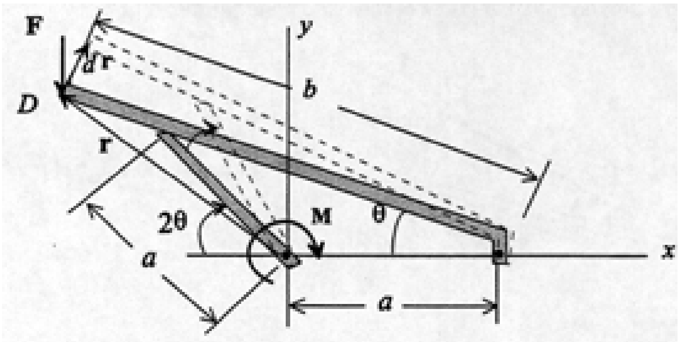
PROBLEMA 7-1

Determinar el módulo del par **M** aplicado a la barra *AB* de la figura adjunta para que el sistema se mantenga en equilibrio.



SOLUCIÓN

El desplazamiento virtual de la biela *AB* define unívocamente el desplazamiento correspondiente de la barra articulada *CD* del brazo tal como se ve en la figura adjunta del diagrama del sistema, en el que sólo se muestran la fuerza **F** y el momento **M**.



La fuerza **F** en la referencia indicada está dada por $\mathbf{F} = -F\,\mathbf{j}$ y $\mathbf{M} = M\,\mathbf{k}$. Del diagrama de las fuerzas activas se deduce que el vector posición **r** del punto de aplicación de la fuerza está dado por $\mathbf{r} = -(b \cos\theta - a)\,\mathbf{i} + b \,\text{sen}\,\theta\,\mathbf{j}$. El desplazamiento virtual en componentes de la barra articulada es $\delta\,\mathbf{r} = b\,\text{sen}\,\theta\,\delta\,\theta\,\mathbf{i} + b\,cosq\,\delta\theta\,\mathbf{j}$ y el desplazamiento virtual del par, es el giro $-$ 2 dq **k**. Aplicando el principio de los trabajos virtuales queda

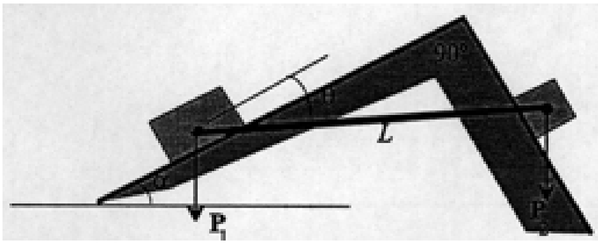
$$\delta W = 2M\delta\theta \; - Fb\cos\theta\,\delta\theta = 0$$

de donde el par aplicado para mantener el equilibrio está dado por

$$M = \frac{1}{2} Fb\cos\theta$$

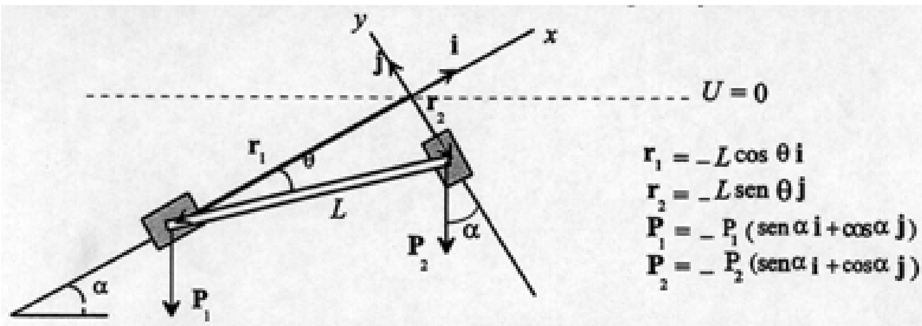
PROBLEMA 7-2

Los pesos $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$ de la figura adjunta se mantienen sobre planos inclinados sin rozamiento y unidos mediante una barra rígida inestensible de longitud L. Determinar el ángulo de equilibrio θ y el tipo de equilibrio del sistema.



SOLUCIÓN

El desplazamiento virtual de uno de los bloques determina unívocamente el del otro, luego el sistema tiene un grado de libertad, luego su configuración queda determinada por el ángulo θ. El sistema de referencia para fijar la posición de los bloques es el indicado en la figura adjunta.



De la figura se deducen inmediatamente las expresiones de los pesos y de sus posiciones en la referencia. Los desplazamientos virtuales de los pesos están dados respectivamente por

$$\delta \mathbf{r}_1 = L \operatorname{sen}\theta\, \delta\theta\, \mathbf{i} \qquad \delta \mathbf{r}_2 = -L\cos\theta\, \delta\theta\, \mathbf{j}$$

Aplicando el principio de los trabajos virtuales queda

$$\delta W = \mathbf{P}_1 \cdot \delta\mathbf{r}_1 + \mathbf{P}_2 \cdot \delta\mathbf{r}_2 = -(P_1 L \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\alpha)\delta\theta + (P_2 \cos\theta\cos\alpha)\delta\theta = 0$$

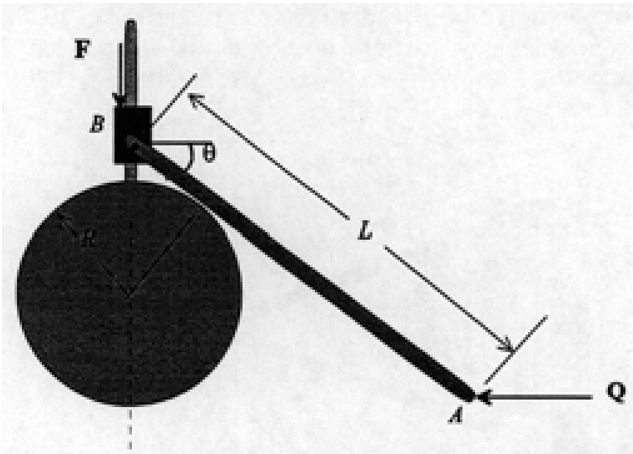
de donde se tiene la condición de equilibrio $\quad \operatorname{tg}\theta = \dfrac{P_2}{P_1 \operatorname{tg}\alpha}$

Estabilidad del equilibrio. Tomando el nivel cero de energía potencial en la línea de puntos de la figura, se tiene que la energía potencial del sistema es $U = -P_1 L \operatorname{sen}\alpha\cos\theta - P_2 L \operatorname{sen}\theta\cos\alpha$. Igualando a cero la derivada de U respecto de θ se obtiene la condición de equilibrio y la derivada 2ª

$$\frac{d^2U}{d\theta^2} = P_1 L \operatorname{sen}\alpha\cos\theta + P_2 L\cos\alpha \operatorname{sen}\theta > 0 \qquad \Rightarrow \textit{equilibio estable}$$

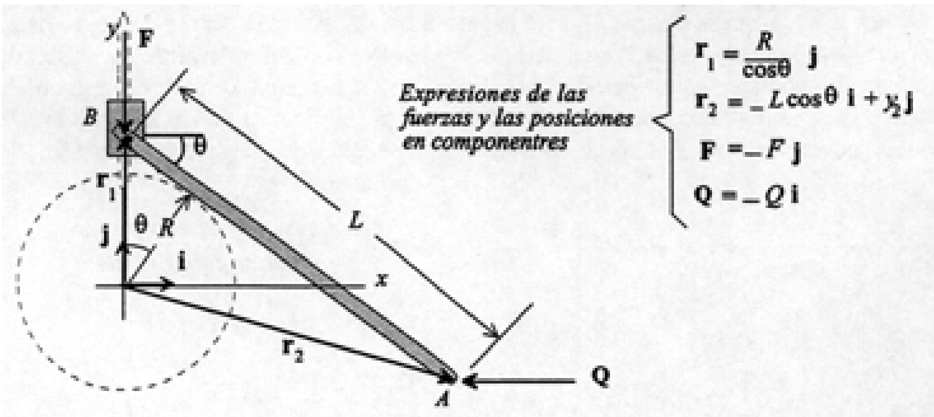
PROBLEMA 7-3

Una barra de longitud L está unida a un pasador por su extremo B y se apoya sobre una superficie cilínfrica circular lisa de radio R . El pasador puede deslizar sin rozamiento a lo largo de la guía vertical cuya dirección pasa por el centro del cilindro, tal como se ve en la figura adjunta. Determinar el valor de la fuerza **F** aplicada al pasador para que el sistema esté en equilibrio.



SOLUCIÓN

El sistema tiene un grado de libertad y su configuración queda definida por el ángulo θ . El origen de coordenadas se toma en el centro del cilindro tal como se indica en la figura adjunta.



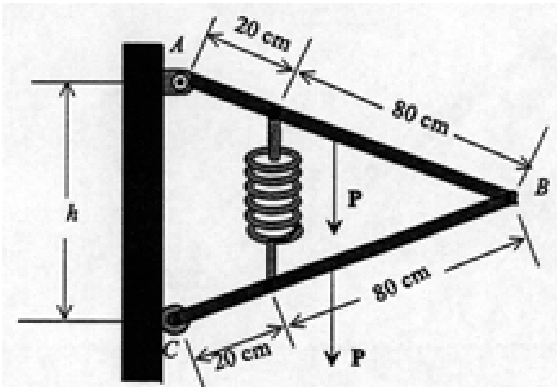
Los desplazamientos virtuales están dados por $\delta \mathbf{r}_1 = \dfrac{R \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta^2}\,\delta\theta\,\mathbf{j}$ y $\delta \mathbf{r}_2 = -L \operatorname{sen}\theta\,\delta\theta\,\mathbf{i} + \delta y_2\,\mathbf{j}$

Aplicando el principio de los trabajos virtuales queda

$$\delta W = \mathbf{F}\cdot\delta\mathbf{r}_1 + \mathbf{Q}\cdot\delta\mathbf{r}_2 = -\frac{F R \operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta}\delta\theta + Q L \operatorname{sen}\theta\,\delta\theta = 0 \quad\Rightarrow\quad F = \frac{Q L}{R}\cos^2\theta$$

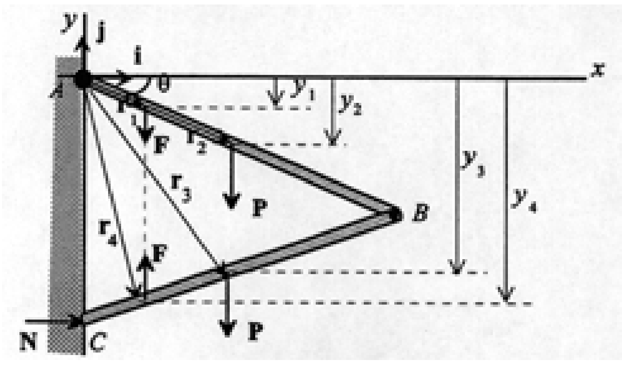
PROBLEMA 7-4

Dos barras *AB* y *BD* homogéneas , de masa iguales a 10 kg , están unidas por su extremo *B* mediante un pasador y conectadas a los extremos de un muelle tal como se indica en la figura adjunta. La longitud del muelle sin deformar es de 36 cm y su constante $k = 680$ N/m. Determinar el valor h correspondiente a la posición de equilibrio.



SOLUCIÓN

La configuración del sistema queda definida por el ángulo θ que la barra *AB* forma con la horizontal.El muelle se sustituye por las fuerzas **F** que ejerce sobre las barras. El desplazamiento virtual del extremo *C* de la barra en contacto con la pared es perpendicular a la reacción N, luego el trabajo virtual correspondiente es cero. Las fuerzas que intervienen en el trabajo virtual tienen la dirección del eje *y* , luego sólo es necesario determinar las componentes según el eje *y* de sus vectores posición.



Expresiones de los vectores posición en componentes

$\mathbf{r}_1 = x_1\mathbf{i} - 20\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathbf{j}$

$\mathbf{r}_2 = x_2\mathbf{i} - 50\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathbf{j}$

$\mathbf{r}_3 = x_3\mathbf{i} - 150\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathbf{j}$

$\mathbf{r}_4 = x_4\mathbf{i} - 180\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathbf{j}$

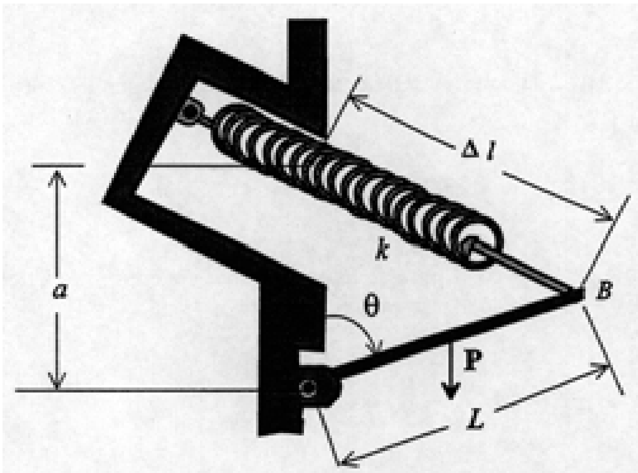
Aplicando el principio de los trabajos virtuales queda

$$\delta W = \mathbf{F}\cdot\delta\mathbf{r}_1 + \mathbf{P}\cdot\delta\mathbf{r}_2 + \mathbf{P}\cdot\delta\mathbf{r}_3 + \mathbf{F}\cdot\delta\mathbf{r}_4 = (-160F\cos\theta + 200P\cos\theta)\delta\theta = 0$$

de donde se tiene que la fuerza del muelle está dada por $4F = 5P$. El incremento de longitud está dado por $\Delta l = F/k = 5P/4k =$ 18 cm y la del muelle alargado $l = 54$ cm. Inmediatamente se tiene que la posición de equilibrio es $h = 67{,}5$ cm.

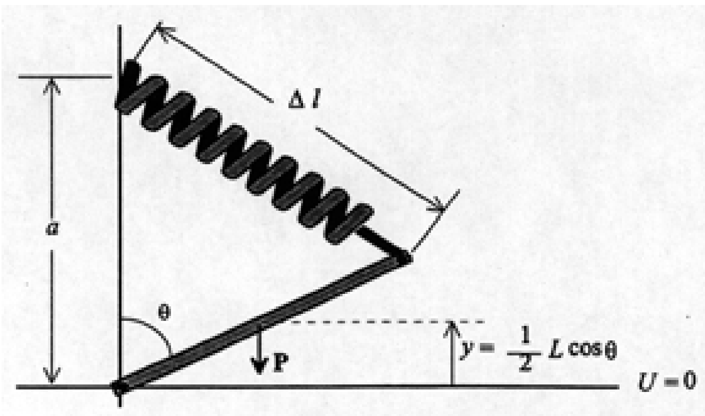
PROBLEMA 7-5

Una barra uniforme de longitud L y peso **P** se mantiene en equilibrio mediante un muelle de constante k tal como se muestra en la figura adjunta. Para el valor $\theta = 0°$, el muelle no está deformado . Discutir la posición de equilibrio.



SOLUCIÓN

La posición del sistema queda unívocamente definida por el ángulo θ. Para determinar la posición de equilibrio se utiliza directamente la energía potencial del sistema. El nivel cero de energía potencial se toma en la horizontal que pasa por el extremo A de la barra.



La energía potencial del sistema es la suma de la energía potencial del peso **P** más la energía potencial elástica del muelle

$$U = \frac{1}{2} L P \cos\theta + \frac{1}{2} k \, \Delta l^2$$

De la figura se deduce, utilizando la ley del coseno, que el incremento de longitud del muelle está dado por

$$\Delta l^2 = L^2 + a^2 - 2aL\cos\theta$$

Utilizando la energía potencia del sistema, la condición de equilibrio se formula por $dU/d\theta = 0$. Derivando e igualando a cero se tiene

$$-\frac{1}{2}LP\,\mathrm{sen}\,\theta + \frac{1}{2}k(2aL\,\mathrm{sen}\,\theta) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad k = \frac{1}{2}\frac{P}{a}$$

La condición de equilibrio se cumple para $\theta = 0°$ y para el valor hallado de la constante k del muelle. Calculemos a continuación la derivada segunda de la energía potencial

$$\frac{d^2U}{d\theta^2} = L(ak - \frac{P}{2})\cos\theta = 0$$

Para el valor hallado de k la segunda derivada, así como todas las sucesivas, tienen valor nulo, luego el equilibrio es indiferente y el sistema permanece en equilibro para cualquier valor de θ.