Capítulo 2 Vectores deslizantes

2.1 Introducción

Algunas magnitudes físicas que tienen naturaleza vectorial, no quedan completamente determinadas sin especificar un punto del espacio por el cual ha de pasar la dirección definida por el vector que las representa. En estas condiciones, el vector representativo de dichas magnitudes no es un vector libre, y para que su acción no cambie, únicamente puede desplazarse a lo largo de la recta que pasa por el punto y cuya dirección es la del vector. Este tipo de vectores se denominan *vectores deslizante* y la recta que pasando por el punto, *recta soporte* del vector.

En este apartado se definen las operaciones básicas asociadas a ellos y se analizan las propiedades de los conjuntos de vectores deslizantes, obteniéndose resultados que proporcionan un potente y eficaz método para el estudio de la Estática, Cinemática y Dinámica de la partícula y del sólido rígido, que constituyen tres importantes apartados del contenido de la Mecánica Vectorial.

2.2 Vectores deslizantes

Se define el vector deslizante como un vector libre **A** cualquiera tal que su dirección pase por un punto fijo P del espacio. La recta definida por **A** y el punto P es la recta soporte del vector deslizante. Gráficamente, el vector **A** se representa en cualquier posición sobre su recta soporte. Para especificar un vector deslizante concreto es necesario dar las coordenadas del punto y las componentes del vector, es decir, seis valores, tres para fijar la posición del punto y tres para las componentes del vector. En todo lo que sigue en este Capítulo, y cuando no se produzca una confusión de conceptos, se omitirá el término deslizante al referirse a un vector genérico **A** pasando por un punto P.

2.3 Momento de un vector deslizante

Momento de un vector respecto de un punto. Sea **A** un vector deslizante y P un punto cualquiera de su recta soporte. Sea Q otro punto del espacio que no pertenece a la recta soporte del vector. El momento de **A** respecto del punto Q es un vector aplicado en Q obtenido del producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y **A**, figura 2-1. De su definición se deduce que el vector $\mathbf{M}_Q = \overrightarrow{QP} \wedge \mathbf{A}$ es perpendicular al plano definido por la recta soporte de **A** y el punto Q, y su módulo es

$$M_Q = |\mathbf{M}_Q| = \overline{PQ}\,|\mathbf{A}|\,\mathrm{sen}\,\alpha = A\,d$$

siendo d la distancia del punto Q a la recta soporte del vector.

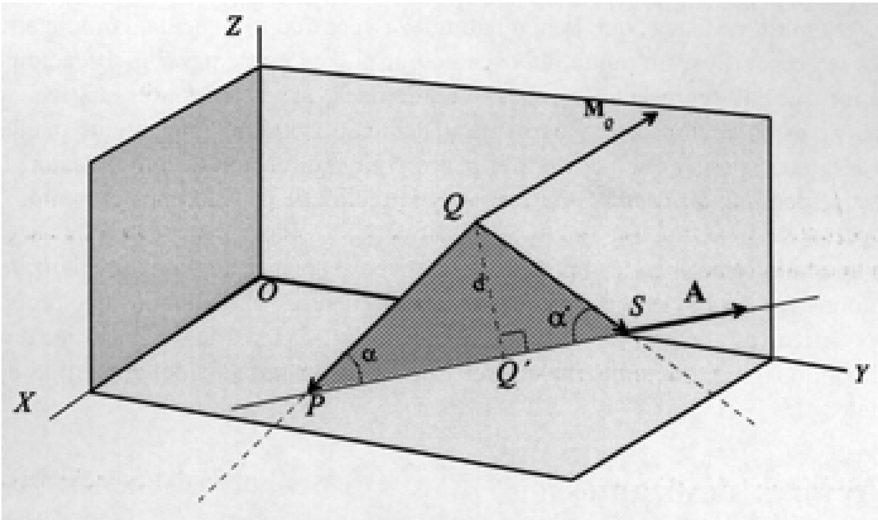

Fig. 2-1

Comprobamos que la definición es correcta, es decir, que el momento $\mathbf{M}_Q$ no depende de la elección del punto que se tome sobre la recta soporte para formar el producto vectorial. En efecto, sea S otro punto de la recta soporte. De la definición, el momento respecto de Q es ahora

$$\mathbf{M}_s = \overrightarrow{QS} \wedge \mathbf{A}$$

En el triángulo definido por los puntos $Q\,P\,S$ se cumple la relación vectorial $\overrightarrow{QS} = \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PS}$ que sustituida en la expresión de $\mathbf{M}_s$ queda

$$\mathbf{M}_s = (\overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PS}) \wedge \mathbf{A} = \mathbf{M}_Q \qquad \text{(2-1)}$$

ya que el producto vectorial es $\overrightarrow{PS} \wedge \mathbf{A} = 0$ por ser vectores paralelos. Por tanto, se puede enunciar que *el momento del vector deslizante* **A** *respecto del punto Q es independiente del punto de la recta soporte que se elija para formar el producto vectorial.* Siempre que sea posible se elegirá el punto Q', pie de la perpendicular bajada de Q a la recta soporte del vector. El vector momento $\mathbf{M}_Q$ es un deslizante cuya recta soporte pasa por el punto Q.

Relación entre los momentos respecto de dos puntos. Veamos la relación que existe entre los momentos de un vector deslizante respecto de dos puntos cualesquiera del espacio. Sean C y D dos puntos del espacio no pertenecientes a la recta soporte del vector deslizante **A**, figura 2-2. Los momentos del vector **A** respecto de los puntos C y D están dados por

$$\mathbf{M}_C = \overrightarrow{CP} \wedge \mathbf{A} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{M}_{D'} = \overrightarrow{DP} \wedge \mathbf{A}$$

Entre los puntos C, D y P se cumple la igualdad vectorial $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DP}$, que sustituída en la expresión de $\mathbf{M}_C$ y operando queda

$$\mathbf{M}_C = (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DP}) \wedge \mathbf{A} = \mathbf{M}_D + \overrightarrow{CD} \wedge \mathbf{A}$$

Los momentos del vector **A** respecto de dos puntos cualesquiera del espacio satisfacen la ecuación

$$\mathbf{M}_C = \mathbf{M}_D + \overrightarrow{CD} \wedge \mathbf{A} \tag{2-2}$$

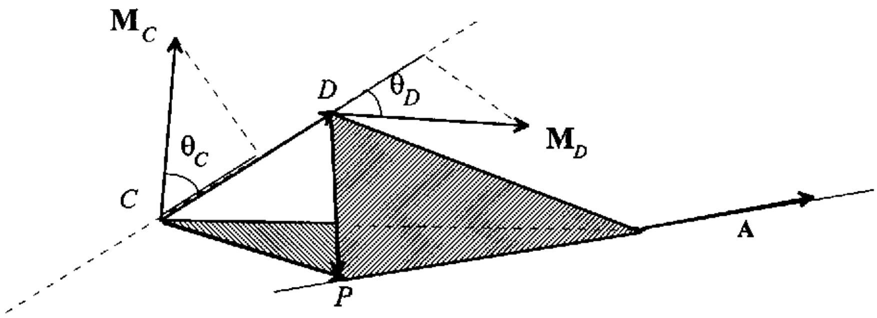

Fig. 2-2

Un primer resultado que se deduce de la ecuación (2-2) es que si los punto C y D definen una dirección paralela a **A**, entonces el segundo sumando de la ecuación es nulo, por ser el producto vectorial de dos vectores paralelos, y queda los momentos respecto de C y D son iguales, $\mathbf{M}_C = \mathbf{M}_D$,es decir que el momento del vector **A** tiene el mismo valor respecto de todos los puntos de una recta paralela al vector. En consecuencia, *a cada recta del espacio paralela al vector deslizante* **A** *le corresponde un único momento.*

Otro resultado del momento de un vector respecto de dos puntos cualesquiera del espacio se obtiene de multiplicar escalarmente la ecuación 2-2 por el vector $\overrightarrow{CD}$. Teniendo en cuenta que el producto mixto de tres vectores, dos de los cuales son iguales es cero, queda que $\overrightarrow{CD} \cdot \mathbf{M}_C = \overrightarrow{CD} \cdot \mathbf{M}_D$ de donde $M_C \cos\theta_C = M_D \cos\theta$ es decir, las proyecciones de los momentos respecto de dos puntos no alineados con **A**, sobre la recta definida por dichos puntos, tienen el mismo valor, ver figura 2-2.

Momento de un vector respecto de un eje. Consideramos ahora un vector **A** cuya recta soporte pasa por P y un *eje* definido por el vector unitario **u** y el punto Q, al cual lo designaremos como eje definido por **u**. Sea $\mathbf{M}_Q$ el momento de **A** respecto de Q, figura 2-3. Se define el momento de **A** respecto del eje **u**, como el producto escalar del vector **u** por el momento $\mathbf{M}_Q$. El momento de **A** respecto del eje **u** es un escalar dado por

$$m_u = \mathbf{u} \cdot \mathbf{M}_Q = M_Q \cos\theta \qquad (2\text{-}3)$$

es decir, su valor es la proyección del momento de **A** respecto del punto Q sobre el eje.

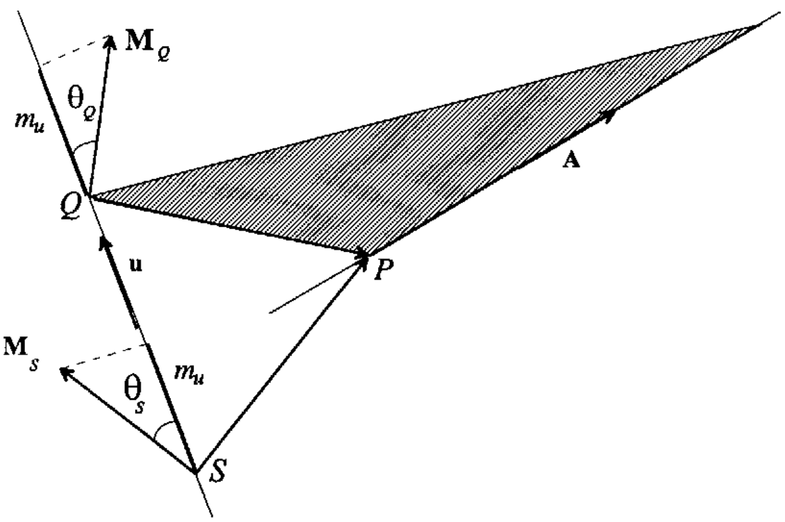

Fig. 2-3

El escalar m_u puede ser positivo o negativo según sea el valor del ángulo θ que forma el momento $\mathbf{M}_Q$ con el eje **u**. En el caso en que el vector **A** sea paralelo al eje **u**, el momento $\mathbf{M}_Q$, que es un vector perpendicular al vector **A**, también lo será respecto al vector **u**, y por tanto, el momento m_u de **A** respecto del eje será cero.

Veamos que la definición es correcta, es decir, que el momento m_u de **A** respecto del eje **u** es independiente del punto Q del eje respecto del cual se tome el momento del vector **A**. En efecto, sea S otro punto cualquiera del eje. El momento de **A** respecto del nuevo punto S es $\mathbf{M}_S = \overrightarrow{SP} \wedge \mathbf{A}$ y el momento de **A** respecto del eje es $m_u{}' = \mathbf{u} \cdot \mathbf{M}_S$. Utilizando la ecuación (2-2) que relaciona los momentos de **A** respecto de los puntos S y Q se tiene

$$\mathbf{M}_{S'} = \mathbf{M}_Q + \overrightarrow{SQ} \wedge \mathbf{A}$$

y multiplicando escalarmente por **u** queda

$$m_u{}' = \mathbf{u} \cdot \mathbf{M}_S = \mathbf{u} \cdot \mathbf{M}_Q = m_u$$

pues el producto mixto $\mathbf{u} \cdot \overrightarrow{SQ} \wedge \mathbf{A} = 0$ ya que incluye dos vectores, **u** y $\overrightarrow{SQ}$ que son paralelos.

2.4 Sistemas de vectores deslizantes

Sean $\mathbf{A}_1 , \mathbf{A}_2 , ..., \mathbf{A}_n$ un conjunto de vectores deslizantes cuyas rectas soportes pasan por los puntos $P_1 , P_2 , ... , P_n$, y supongamos que se conocen las componentes de los vectores y las coordenadas de los puntos. A un conjunto cualquiera de vectores, se le denomina genéricamente *sistema de vectores deslizantes.* Los elementos principales que caracterizan un sistema de vectores deslizantes son: la *resultante* y el *momento resultante* del sistema respecto de un punto del espacio.

Resultante. Se define la resultante del sistema como un vector **R** formado por la suma de los vectores equivalentes a los del sistema trasladados a un punto cualquiera del espacio.

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + ... + \mathbf{A}_n = \sum_1^n \mathbf{A}_i \tag{2-4}$$

Los vectores equivalentes a los del sistema tomados en cualquier punto del espacio siempre son los mismos, luego de su definición, **R** es un vector libre que se denomina el *invariante vectorial* del sistema, figura 2-4.

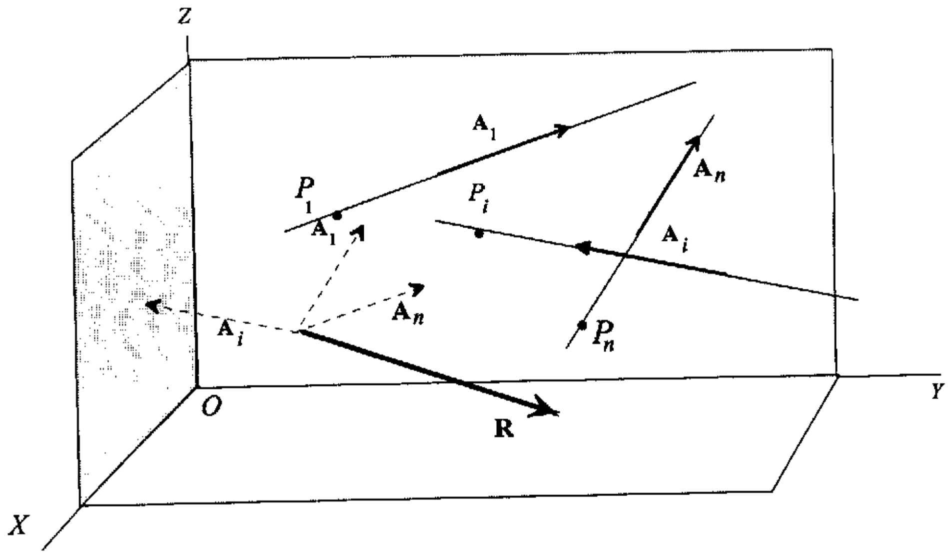

Fig.2-4

Momento resultante. Se define el momento resultante del sistema de vectores deslizantes respecto de un punto Q del espacio como la suma de los momentos de cada uno de los vectores $\mathbf{A}_i$ respecto de dicho punto, figura 2-5.

$$\mathbf{M}_Q = \sum_1^n \overrightarrow{QP_i} \wedge \mathbf{A}_i \qquad (2\text{-}5)$$

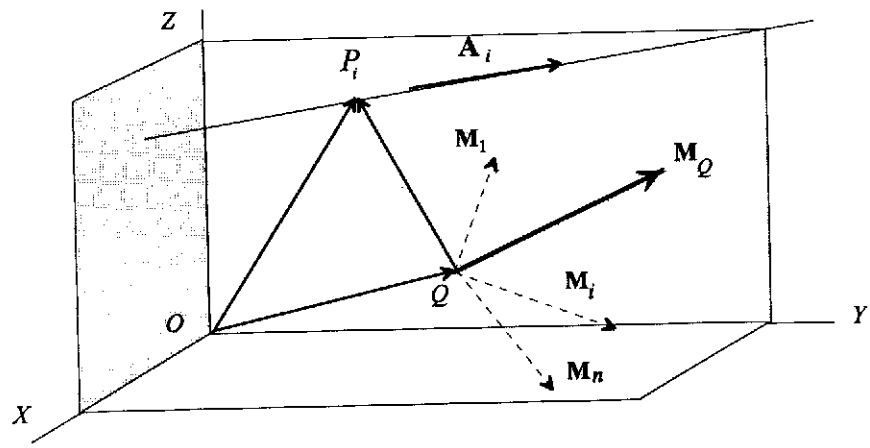

Fig. 2-5

El momento resultante respecto de otro punto, por ejemplo el P, es

$$\mathbf{M}_P = \sum_1^n \overrightarrow{PP_i} \wedge \mathbf{A}_i$$

Los momentos resultantes respecto de los dos puntos $\mathbf{M}_P$ y $\mathbf{M}_Q$ son, en general, vectores diferentes pero entre ellos existe una relación similar a la dada por la ecuación (2-2), que relaciona los momentos de un vector deslizante respecto de dos puntos del espacio, figura 2-6.

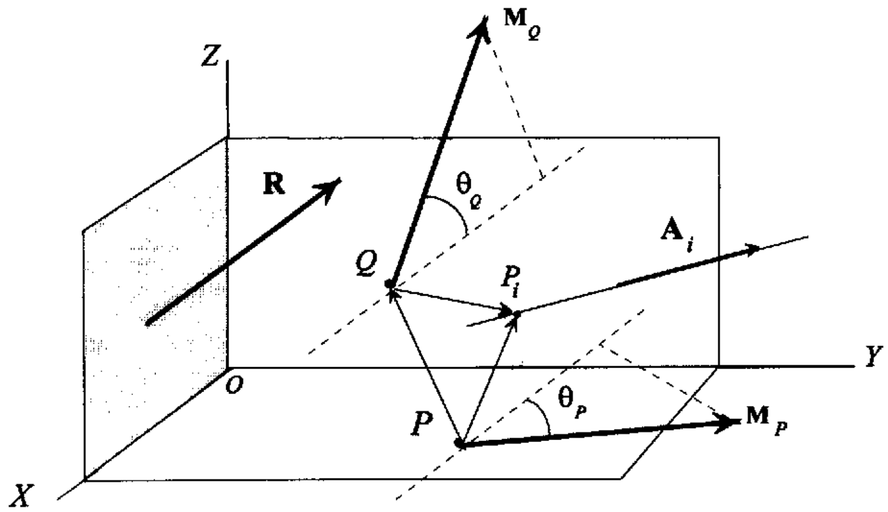

Fig. 2-6

De la figura 2-6 se tiene la relación triangular $\overrightarrow{PP_i} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP_i}$, que sustituida en la expresión de $\mathbf{M}_P$ queda

$$\mathbf{M}_P = \sum_1^n (\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP_i}) \wedge \mathbf{A}_i = \mathbf{M}_Q + \overrightarrow{PQ} \wedge (\sum_1^n \mathbf{A}_i)$$

El sumatorio de los vectores $\mathbf{A}_i$ es la resultante $\mathbf{R}$ del sistema; sustituyendo, se obtiene la ecuación que relaciona los momentos resultantes del sistema de vectores deslizantes respecto de dos puntos del espacio

$$\mathbf{M}_P = \mathbf{M}_Q + \overrightarrow{PQ} \wedge \mathbf{R} \qquad (2\text{-}6)$$

Los momentos resultantes de un sistema de vectores respecto de dos puntos del espacio están relacionados por una ecuación equivalente a la ecuación que relaciona los momentos de un vector **A** respecto de los mismos puntos, cambiando el vector **A** por la resultante **R** del sistema. Cuando la dirección definida por los puntos P y Q es un vector paralelo a **R**, los momentos respecto de P y Q coinciden. Este resultado permite enunciar que : *a todos los puntos de una recta paralela a la resultante le corresponde un único valor del momento resultante del sistema.*

Multiplicando escalarmente por **R** la ecuación (2-6) y teniendo en cuenta que el producto mixto es cero se tiene que

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_P = \mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_Q \qquad (2\text{-}7)$$

Desarrollando el producto escalar y eliminando el módulo de **R** queda

$$M_P \cos \theta_P = M_Q \cos \theta_Q \qquad (2\text{-}8)$$

es decir, la proyección de los momentos resultantes sobre la dirección de la resultante tiene el mismo valor para todos los puntos del espacio, ver figura 2-6. Este valor se denomina el *invariante escalar* del sistema.

Llamando **M** al momento resultante respecto de un punto genérico, y θ al ángulo que forma con la resultante **R**, la ecuación se escribe como

$$M \cos \theta = \text{cte.} \qquad (2\text{-}9)$$

Al producto escalar de la resultante **R** por el momento resultante **M** es también un invariante que se denomina el *trinomio invariante* del sistema.

$$T = \mathbf{R} \cdot \mathbf{M} \qquad (2\text{-}10)$$

Los sistemas de vectores deslizantes se pueden clasificar en dos grupos: a) *sistemas de vectores que se cortan* y b) *sistemas de vectores que se cruzan.*

Sistema de vectores que se cortan. Un sistema de vectores deslizantes que se cortan, es aquel en que las rectas soporte de todos los vectores del sistema tiene un punto común. En general, el origen O se toma en el punto en el que se cortan las rectas soporte de los vectores del sistema. La resultante **R** es la suma de los vectores del sistema. El momento resultante respecto del punto O es cero, ya que todos los vectores del sistema pasan por O y de acuerdo con la ecuación (2-6) se deduce que el momento respecto de otro punto P cualquiera del espacio está dado por

$$\mathbf{M}_P = \overrightarrow{PO} \wedge \mathbf{R} \tag{2-11}$$

que es el momento de la resultante respecto del punto P. De la ecuación (2-11) se deduce que el momento **M** respecto de cualquier punto es perpendicular a la resultante, luego el invariante escalar del sistema y el trinomio invariante son nulos.

Sistema de vectores que se cruzan. Un sistema de vectores deslizantes que se cruzan, es aquel en que las rectas soporte de los vectores no tienen ningún punto común. Las ecuaciones (2-4) y (2-5) dan la resultante y el momento resultante del sistema, y la ecuación (2-6) da la relación entre los momentos resultantes respecto de dos punto del espacio. E invariante escalar y el trinomio invariante del sistema están dados por las ecuaciones (6-9) y (6-10) respectivamente.

De la ecuación (2-9) se deduce que, a valores grandes de M le corresponden ángulos θ grandes (valor del coseno pequeño), y a valores pequeños de M le corresponden ángulos θ pequeños (valor del coseno grande). Para los puntos en que el ángulo θ sea igual a 0° (180°) el coseno tiene el valor + 1 (−1), luego **M** y **R** son paralelos (antiparalelos) y el momento resultante tiene un valor mínimo.

2.5 Eje central

Se denomina eje central al lugar geométrico de los puntos del espacio tales que su momento es paralelo a la resultante. Los momentos paralelos a la resultante tienen valor mínimo, por consiguiente, todos ellos tienen el mismo momento y el lugar geométrico es, por tanto, una recta paralela a la resultante. Si C es un punto del eje central el momento resultante $\mathbf{M}_c$ es paralelo a la resultante **R** y su módulo M_C es mínimo, figura 2-7. Para localizar el eje central es necesario determinar únicamente uno cualquiera de sus puntos ya que **R** es su vector que define la dirección de la recta.

Sea C un punto del eje central cuyas coordenadas queremos determinar. Las coordenadas del punto C son las componentes del vector $\overrightarrow{oc}$ que fija la posición de C respecto del origen. Dado el sistema de vectores deslizantes $\mathbf{A}_i$, pasando por los puntos P_i, la resultante del sistema y el momento resultante respecto del origen son

$$\mathbf{R} = \sum_1^n \mathbf{A}_i \qquad \mathbf{M}_o = \sum_1^n \overrightarrow{OP_i} \wedge \mathbf{A} \tag{2-12}$$

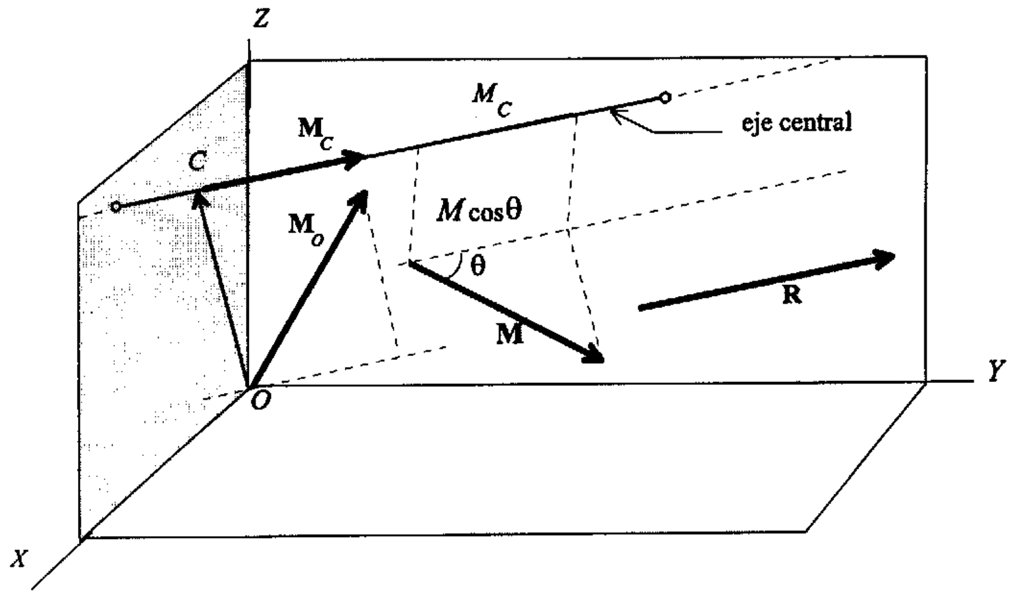

Fig. 2-7

De la ecuación (2-6) se tiene que los momentos resultantes respecto de O y respecto de C están relacionados por la ecuación

$$\mathbf{M}_c = \mathbf{M}_o - \overrightarrow{OC} \wedge \mathbf{R} \tag{2-13}$$

Multiplicando la ecuación (2-13) vectorialmente por **R** por la izquierda, y teniendo en cuenta que el momento resultante respecto de C y la resultante **R** son vectores paralelos, queda

$$0 = \mathbf{R} \wedge \mathbf{M}_o - \mathbf{R} \wedge (\overrightarrow{OC} \wedge \mathbf{R}) \tag{2-14}$$

Desarrollando el doble producto vectorial se tiene

$$0 = \mathbf{R} \wedge \mathbf{M}_o - R^2\, \overrightarrow{OC} + (\mathbf{R} \cdot \overrightarrow{OC})\mathbf{R} \tag{2-15}$$

El resultado de la ecuación (2-15) es válido para *todos* los puntos del eje central. Se puede seleccionar el punto C como el correspondiente al pie de la perpendicular trazada desde el origen al eje. De esta forma el vector $\overrightarrow{oc}$ será perpendicular a $\mathbf{R}$ y, por tanto, el producto escalar $\overrightarrow{oc} \cdot \mathbf{R}$ será igual a cero, lo que permite obtener la expresión del vector $\overrightarrow{oc}$ en función de la resultante del sistema y del momento resultante respecto del origen de coordenadas. Despejando $\overrightarrow{oc}$ de la ecuación (2-15) se obtiene

$$\overrightarrow{OC} = \frac{\mathbf{R} \wedge \mathbf{M}_o}{R^2} = x_c\,\mathbf{i} + y_c\,\mathbf{j} + z_c\,\mathbf{k} \qquad (2\text{-}16)$$

Las componentes del vector $\overrightarrow{oc}$ son las coordenadas del punto C del eje central y su ecuación en forma continua es

$$\frac{x - x_c}{R_1} = \frac{y - y_c}{R_2} = \frac{z - z_c}{R_3} \qquad (2\text{-}17)$$

donde R_1, R_2 y R_3 son las componentes de la resultante $\mathbf{R}$. Cuando $\mathbf{M}_o$ es paralelo a la resultante $\mathbf{R}$ el eje central pasa por el origen y $\mathbf{M}_o$ es el momento mínimo. Fácilmente se puede deducir que el momento mínimo está dado por la expresión

$$\mathbf{M}_c = \left(\frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_o}{R^2}\right)\mathbf{R} \qquad \Rightarrow \qquad M_c = \frac{|T|}{R} \qquad (2\text{-}18)$$

El momento mínimo $\mathbf{M}_c$ es paralelo a la resultante $\mathbf{R}$ si el trinomio invariante $T = \mathbf{R} \cdot \mathbf{M}$ es mayor que cero. Cuando el trinomio invariante tiene un valor negativo el momento mínimo y la resultante son antiparalelos.

2.6 Par de vectores

Un caso particularmente importante de un sistema de vectores que se cruzan lo constituye el formado por dos vectores deslizantes $\mathbf{A}_1$ y $\mathbf{A}_2$ pasando por P_1 y P_2, tales que ambos vectores tienen el mismo módulo $A_1 = A_2 = A$, son paralelos pero de sentidos opuestos y sus rectas soportes están separadas una distancia d. El sistema se denomina par. La resultante $\mathbf{R}$ del sistema es el vector nulo y, por tanto, según la ecuación (2-6), el momento del par es el mismo en todos los puntos del espacio. El momento del par lo podemos tomar respecto de cualquier punto del espacio, pero resulta más sencillo calcular el momento del par utilizando el punto P_1 o el P_2 de sus rectas soportes, figura 2-8

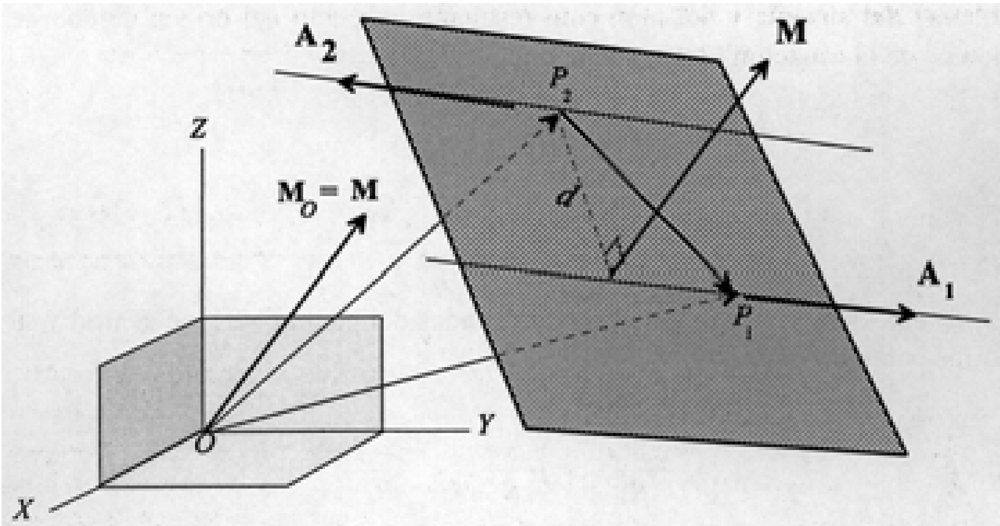

Fig. 2-8

Tomando momentos respecto del punto P_2 se tiene $\mathbf{M} = \overrightarrow{P_1P_2} \wedge \mathbf{A}_1$, ya que el momento de $\mathbf{A}_2$ respecto de P_2 es cero. El momento del par es un vector perpendicular al plano definido por los dos vectores. Calculemos directamente el momento resultante respecto del origen para ver que coincide con **M**. En efecto, sumando los momentos de cada uno de los vectores del para respecto del origen queda

$$\mathbf{M}_o = \overrightarrow{OP_1} \wedge \mathbf{A}_1 + \overrightarrow{OP_2} \wedge \mathbf{A}_2 = (\overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_2}) \wedge \mathbf{A}_1 = \overrightarrow{P_1P_2} \wedge \mathbf{A}_1 = \mathbf{M}$$

En consecuencia, como ya se ha indicado, *el momento* **M** *del par es el mismo en todos los puntos del espacio.* Su módulo es el producto del módulo A de los vectores del par por la distancia d que los separa

$$M = d\ A \tag{2-19}$$

El par de vectores cuyo momento es **M** queda totalmente indeterminado, en el sentido de que para un momento dado hay infinitos pares de vectores que tienen el mismo momento. El par queda determinado por su momento.

2.7 Sistemas de vectores deslizantes coplanarios

Un sistema de vectores deslizantes es coplanario cuando todos los vectores del sistema están contenidos en el mismo plano, figura 2-9. El plano que contiene a los vectores del sistema se hace coincidir con uno de los planos del sistema de coordenadas.

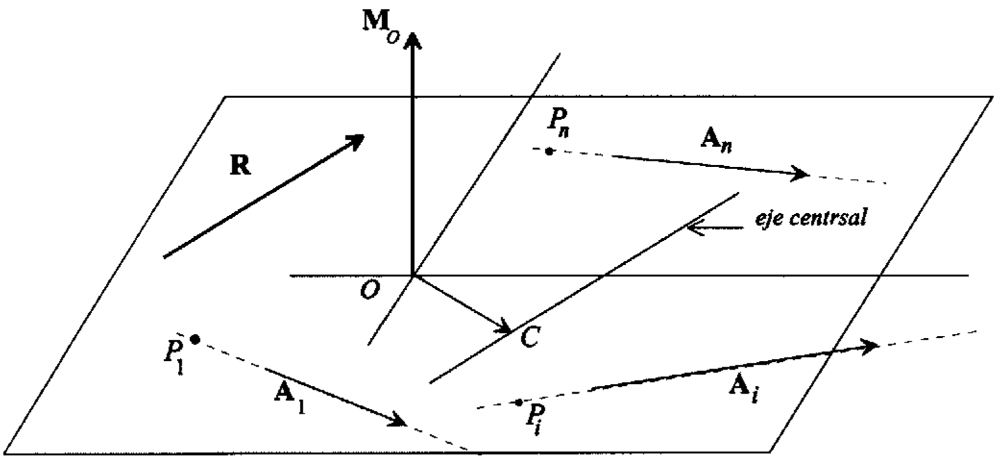

Fig. 2-9

La resultante del sistema $\mathbf{R} = \Sigma\, \mathbf{A}_i$ es un vector paralelo al plano del sistema y el momento resultante respecto del origen

$$\mathbf{M}_o = \Sigma\, \overrightarrow{OP_i} \wedge \mathbf{A}_i$$

es un vector perpendicular al plano del sistema. El trinomio invariante $T = \mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_o = 0$, luego el momento mínimo es cero. El punto C del eje central está dado por

$$\overrightarrow{OC} = \frac{\mathbf{R} \wedge \mathbf{M}_o}{R^2} \qquad (2\text{-}20)$$

y pertenece al plano del sistema ya que $\mathbf{R}$ y $\mathbf{M}_o$ son vectores perpendiculares. Como el momento mínimo es cero, el eje central es la recta del plano tal que el momento resultante del sistema respecto de cualquier punto de ella es nulo.

2.8 Reducción de sistemas de vectores deslizantes

En la práctica, el número de vectores de un sistema puede ser muy grande lo que hace que sea engorroso el cálculo de la resultante y del momento resultante del sistema respecto de un punto del espacio. Los parámetros que caracterizan a un sistema son su resultante y su momento resultante, luego sería realmente ventajoso que dado un sistema, se pudiese determinar otro sistema mas sencillo que tenga, la misma resultante y el mismo momento resultante que el primero Cuando dos sistemas cumplen ambas condiciones son *equivalentes* y el sistema más sencillo es el sistema *reducido* del primero.

Sistemas equivalentes. El sistema formado por los vectores $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, ..., $\mathbf{A}_n$ aplicados en los puntos P_1 , P_2 , ..., P_n , y el formado por los vectores $\mathbf{A}_1'$, $\mathbf{A}_2'$,..... $\mathbf{A}_n'$ aplicados en los puntos P_1', P_2' , ...P_n', son equivalentes cuando se cumplen las siguientes condiciones: a) *tienen la misma resultante* $\mathbf{R} = \mathbf{R}'$ y b) *tienen el mismo momento resultante respecto de un punto del espacio* $\mathbf{M}_Q = \mathbf{M}_Q'$. Aplicando la ecuación 2-6, se deduce inmediatamente que dos sistemas equivalentes tienen el mismo momento resultante respecto de todos los puntos del espacio.

Reducción de sistemas. El proceso de reducción de un sistema consiste en *determinar* otro más sencillo que sea equivalente al sistema dado. Veamos que un sistema dado cualquiera se puede reducir como máximo a otro que tiene tres vectores, dos de los cuales forman un par. En efecto, sean $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, ..., $\mathbf{A}_n$, pasando por los puntos P_1 , P_2 , ..., P_n los vectores deslizantes del sistema que se quiere reducir. Su resultante es

$$\mathbf{R} = \sum_1^n \mathbf{A}_i \tag{2-21}$$

y el momento resultante respecto de O es

$$\mathbf{M}_O = \sum_1^n \overrightarrow{OP_i} \wedge \mathbf{A}_i \tag{2-22}$$

Formemos el sistema $\mathbf{A}_1'$, $\mathbf{A}_2'$, $\mathbf{A}_3'$ tal que $\mathbf{A}_1'$ esté aplicado en el origen O y sea igual a la resultante $\mathbf{R}$ del sistema dado, y $\mathbf{A}_2'$, $\mathbf{A}_3'$ formen un par, cuyo momento $\mathbf{M}'$ sea igual al momento resultante del sistema dado respecto del origen O. Veamos que ambos sistemas son equivalentes. La resultante $\mathbf{R}'$ es $\mathbf{R}' = \mathbf{A}_1' + \mathbf{A}_2' + \mathbf{A}_3' = \mathbf{A}_1'$ ya que $\mathbf{A}_2' = -\mathbf{A}_3'$, pero $\mathbf{A}_1' = \mathbf{R}$, luego las resultantes de ambos sistemas son iguales, $\mathbf{R}' = \mathbf{R}$. El momento resultante del sistema prima respecto del origen es únicamente el momento del par ya que el momento de $\mathbf{A}_1'$ es cero pues pasa por O, pero el momento del par es igual al momento resultante del sistema dado respecto de O, $\mathbf{M}' = \mathbf{M}_o$ luego ambos sistemas son equivalentes.

La elección del punto O para reducir el sistema es arbitraria, se podría haber tomado cualquier otro punto del espacio. Si el sistema de vectores dado tiene eje central podemos elegir el punto C de dicho eje para reducir el sistema. El momento del sistema dado respecto de C es el momento mínimo $\mathbf{M}_c$. El sistema $\mathbf{A}_1' = \mathbf{R}$ pasando por C y el par $\mathbf{A}_2' = -\mathbf{A}_3'$, tal que su momento sea $\mathbf{M}_c$, es un sistema equivalente al dado. En este caso, los vectores del par están contenidos en un plano perpendicular al eje central.

Torsor. El sistema reducido de un sistema dado formado por, el vector $\mathbf{A}_1'$ igual a la resultante $\mathbf{R}$ del sistema sobre el eje central y un par $\mathbf{A}_2' = -\mathbf{A}_3'$ tal que el módulo sea igual al módulo de la resultante del sistema $A_2' = A_3' = R$ y su momento sea igual al momento mínimo $\mathbf{M}_c$ del sistema, se denomina el *torsor* del sistema, figura 2-10.

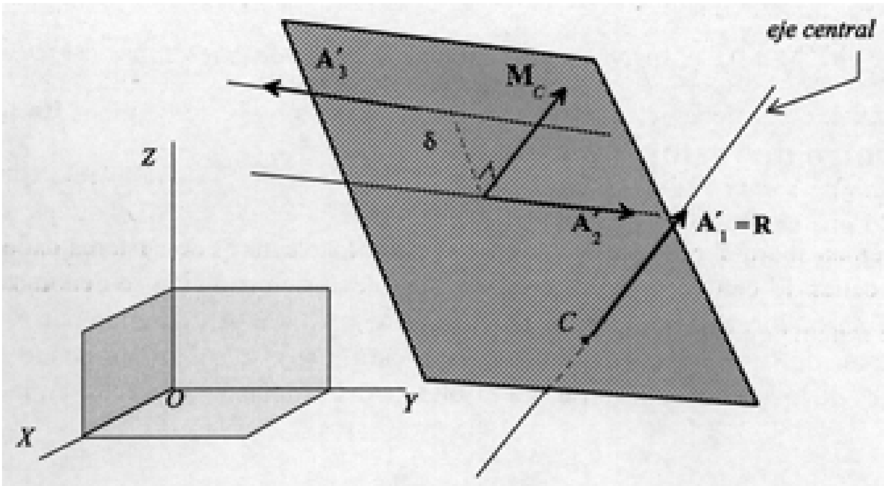

Fig. 2-10

La distancia entre los vectores del par es la flecha del torsor δ. Su valor está dado por

$$\delta = \frac{M_c}{R} = \frac{|\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}|}{R^2} \qquad (2\text{-}23)$$

Sistema coplanario. En el caso particular de que el sistema de vectores sean coplanarios, como el momento mínimo es cero, el sistema se *reduce a un único vector* igual a la resultante del sistema $\mathbf{A}_1' = \mathbf{R}$ aplicado en el punto C del eje central.

Clasificación de sistemas. Los sistemas de vectores deslizantes se clasifican en función del valor de su trinomio invariante T. Un sistema se reduce a un torsor cuando el producto escalar de $\mathbf{R}$ por $\mathbf{M}$ es distinto de cero, es decir, cuando $T = \mathbf{R} \cdot \mathbf{M} \neq 0$. En este caso, el sistema se reduce a su resultante aplicada en el eje central más un par cuyo momento coincide con el momento mínimo del sistema y el módulo de los vectores del par es igual al módulo de la resultante del sistema.

Veamos ahora a que se reducen los sistemas tales que su trinomio invariante es nulo, es decir, sistema para los cuales se cumple que $T = \mathbf{R} \cdot \mathbf{M} = 0$. El trinomio invariante puede ser cero en los siguientes casos:

a) $\mathbf{R} = 0$ y $\mathbf{M} = 0$, *el sistema es equivalente a cero*

b) $\mathbf{R} \neq 0$ y $\mathbf{M} = 0$, *el sistema es equivalente a un vector único*

c) $\mathbf{R} = 0$ y $\mathbf{M} \neq 0$, *el sistema es equivalente a un par*

d) $\mathbf{R} \neq 0$ y $\mathbf{M} \neq 0$, *el sistema es equivalente a un vector único sobre el eje central.*

2.9 Centro de vectores paralelos

Consideremos ahora el caso particular en que todos los vectores del sistema dado tienen la misma dirección. El conjunto de vectores que cumplen esta condición se denomina *sistema de vectores paralelos.* Sea $\mathbf{u}$ un vector unitario, y $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, ..., $\mathbf{A}_n$ pasando por P_1, P_2, ..., P_n los vectores del sistema, tales que $\mathbf{A}_i = A_i\,\mathbf{u}$ para $i = 1, 2, ...\ n$, en donde A_i son las componentes de los vectores según $\mathbf{u}$. La resultante del sistema es un vector en la dirección de $\mathbf{u}$

$$\mathbf{R} = (\sum A_i)\,\mathbf{u} \tag{2-24}$$

y el momento resultante respecto del origen es un vector perpendicular a $\mathbf{u}$ dado por

$$\mathbf{M}_o = \sum_1^n \overrightarrow{OP_i} \wedge \mathbf{A}_i = (\sum_1^n A_i\,\overrightarrow{OP_i}) \wedge \mathbf{u} \tag{2-25}$$

luego el trinomio invariante $T = \mathbf{R} \cdot \mathbf{M} = 0$ ya que $\mathbf{R}$ y $\mathbf{M}_o$ son perpendiculares, figura 2-11. El sistema equivale a un vector único que es la resultante $\mathbf{R}$ pasando por un punto C del eje central dado por

$$\overrightarrow{OC} = \frac{\mathbf{R} \wedge \mathbf{M}_o}{R^2} \tag{2-26}$$

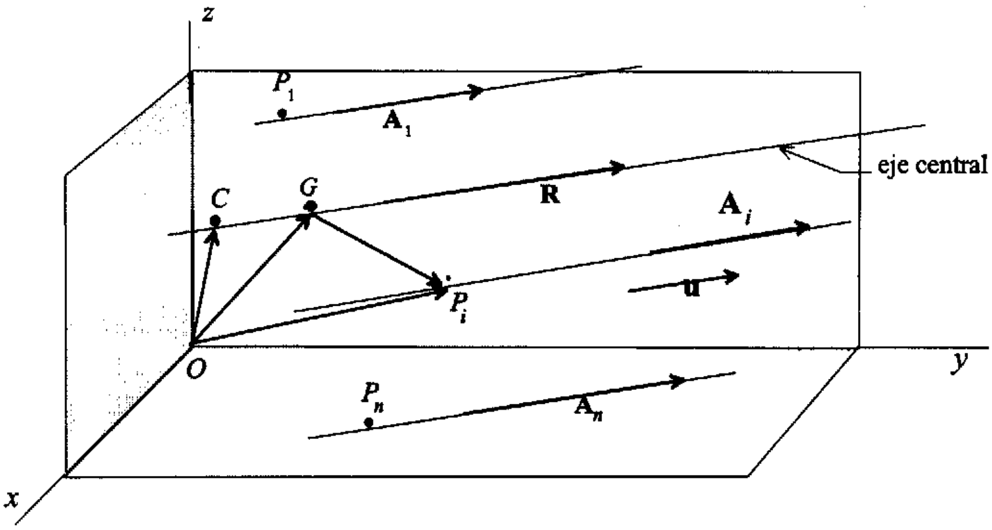

Fig. 2-11

Veamos que el extremo del vector $\overrightarrow{OG}$ definido por la siguiente ecuación vectorial es un punto del eje central.

$$\overrightarrow{OG} = \frac{A_1\,\overrightarrow{OP_1}}{R} + \frac{A_2\,\overrightarrow{OP_2}}{R} + \dots\dots + \frac{A_n\,\overrightarrow{OP_n}}{R} = \frac{\sum A_i\,\overrightarrow{OP_i}}{\sum A_i} \qquad (2\text{-}27)$$

En efecto, sea G un punto del eje central. Ya que el momento mínimo es nulo, el momento resultante respecto de G ha de ser cero, luego se cumple que

$$\sum_1^n \overrightarrow{GP_i} \wedge \mathbf{A}_i = \mathbf{0} \qquad (2\text{-}28)$$

Despejando $\overrightarrow{GP_i}$ de la relación triangular $\overrightarrow{OP_i} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GP_i}$ i= 1, 2,...... n, y sustituyendo en (2-28), se obtiene

$$\sum_1^n (\overrightarrow{OP_i} \wedge \overrightarrow{OG}) \wedge \mathbf{A}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[\sum_1^n A_i\,\overrightarrow{OP_i} - (\sum_1^n A_i)\,\overrightarrow{OG}\right] \wedge \mathbf{u} = 0 \qquad (2\text{-}29)$$

El producto vectorial del primer término de la ecuación (2-29) es igual a cero para toda dirección **u**, lo que implica que el vector entre corchetes ha de ser necesariamente nulo, de donde

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum A_i \overrightarrow{OP_i}}{\sum A_i} \qquad (2\text{-}30)$$

La ecuación (2-30) define unívocamente el punto G extremo del vector $\overrightarrow{OG}$, como un punto del eje central que se denomina el *centro de vectores paralelos*. Su posición en el espacio es independiente del punto que se tome como origen. Desarrollando (2-30) se tiene la expresión del vector en componentes

$$\overrightarrow{OG} = \left(\frac{\sum A_i x_i}{\sum A_i}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\sum A_i z_i}{\sum A_i}\right)\mathbf{k} = \bar{x}\,\mathbf{i} + \bar{y}\,\mathbf{j} + \bar{z}\,\mathbf{k} \qquad (2\text{-}31)$$

en donde (x_i, y_i, z_i) son las coordenadas del punto P_i. Las componentes del vector $\overrightarrow{OG}$ se les suele designar como $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$, que son las coordenadas del punto G, centro del sistema de vectores paralelos.

PROBLEMA 2.1

Determinar el momento del vector deslizante $\mathbf{A} = 2\,\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\,\mathbf{k}$ pasando por el punto $P\,(3,-1,2)$ respecto del origen y respecto del punto $Q\,(1,-2,3)$. Comprobar que se cumple la relación entre los momentos.

SOLUCIÓN

El momento respecto del origen es $$\mathbf{M}_o = \overrightarrow{OP} \wedge \vec{A} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = -5\,\mathbf{i} - 5\,\mathbf{j} + 5\,\mathbf{k}$$

El momento respecto del punto Q es $$\mathbf{M}_Q = \overrightarrow{QP} \wedge \vec{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 4\,\mathbf{i} - 8\,\mathbf{j}$$

Comprobemos que se cumple la relación entre los momentos $\mathbf{M}_o = \mathbf{M}_Q + \overrightarrow{OQ} \wedge \vec{A}$; en efecto, el producto vectorial del segundo término es

$$\overrightarrow{OQ} \wedge \vec{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = -9\,\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j} + 5\,\mathbf{k}$$

que sumado a $\mathbf{M}_Q$ da el valor de $\mathbf{M}_o$

PROBLEMA 2.2

Dado el vector deslizante $\mathbf{A} = 3\,\mathbf{i} + \mathbf{j} + 6\,\mathbf{k}$, tal que su momento respecto del origen es el vector $\mathbf{M}_o = a\,\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j} - 2\,\mathbf{k}$. Determinar el valor de a y un punto de su recta soporte.

SOLUCIÓN

El momento del vector es perpendicular al vector, luego se cumple $\mathbf{M}_o \cdot \mathbf{A} = 0$. Desarrollando el producto escalar se tiene $a = 3$. Sea $P\,(x_o, y_o, z_o)$ un punto de la recta soporte del vector $\mathbf{A}$. El momento del vector respecto del origen es

$$\mathbf{M}_o = \begin{pmatrix} x_o \\ y_o \\ z_o \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = (6y_o - z_o)\,\mathbf{i} + 3\,(z_o - 2x_o)\,\mathbf{j} + (x_o - 3y_o)\,\mathbf{k}$$

Identificando términos con el valor de $\mathbf{M}_o$ se tiene el siguiente sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas

$$\begin{array}{rrrl} & 6y_o & -\ z_o & = \ \ 3 \\ -6x_o & & +\ 3z_o & = \ \ 3 \\ x_o & -3y_o & & = -2 \end{array}$$

El determinante del sistema $\begin{vmatrix} 0 & 6 & -1 \\ -6 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 18 - 18 = 0$

tiene un valor nulo, luego las tres ecuaciones son linealmente dependientes y existen infinitas soluciones. Haciendo $x_o = -2$ se tienen los valores $y_o = 0$ y $z_o = -3$, que son las coordenadas de un punto de la recta.

PROBLEMA 2.3

Dado un vector **A** sobre la recta de ecuación $\frac{x-1}{\sqrt{2}} = \frac{y-2}{\sqrt{3}} = \frac{z}{2}$, determinar su momento *m* respecto del eje dado por $x = \frac{y-1}{\sqrt{2}} = z - 2$

SOLUCIÓN

El vector **A** en componentes es $\mathbf{A} = \sqrt{2}\,\mathbf{i} + \sqrt{3}\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}$. Un punto *P* de su recta soporte es el punto de coordenadas (1, 2, 0).

El vector unitario **u** del eje es $\mathbf{u} = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j} + \frac{1}{2}\mathbf{k}$

Uno de sus puntos *Q*, es el punto de coordenadas (0, 1, 2). El momento de **A** respecto de *Q* es el vector

$$\mathbf{M}_Q = \overrightarrow{QP} \wedge \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix} = 2(1 + \sqrt{3})\,\mathbf{i} - (1 + \sqrt{2})\,\mathbf{j} + (\sqrt{3} - \sqrt{2})\,\mathbf{k}$$

El momento *m* de **A** respecto del eje **u** es $m = \mathbf{u} \cdot \mathbf{M}_Q = \frac{3}{2}(\sqrt{3} - \sqrt{2}) - 1$

El escalar *m* es negativo. En todos los puntos del eje el momento forma con el eje un ángulo mayor de 90°.

PROBLEMA 2.4

De un sistema de vectores deslizantes se conoce: el módulo de la resultate $R = 21$, el trinomio invariante $T = \mathbf{R} \cdot \mathbf{M} = 25$ y la ecuación del eje central, $2x = 3y = z$. Determinar :
a) la resultante
b) el momento mínimo
c) el momento respecto del punto P (3, 2, 1)

SOLUCIÓN

a) El vector **R** es paralelo al vector director del eje central. Sean R_1, R_2 y R_3 las componentes de la resultante. De la condición de paralelismo se tiene

$$\frac{R_1}{3} = \frac{R_2}{2} = \frac{R_3}{6} = \lambda$$

Despejando cada una de las componentes y sustituyendo en la expresión del módulo queda

$$49\lambda^2 = 21^2 \quad \text{de donde} \quad \lambda = 3$$

La resultante del sistema es $\mathbf{R} = 9\,\mathbf{i} + 6\,\mathbf{j} + 18\,\mathbf{k}$

b) Del trinomio invariante se tiene el módulo del momento mínimo $M_o = \frac{25}{R} = \frac{25}{21}$, de donde

$$\mathbf{M}_m = \frac{25}{21^2}\,\mathbf{R} = \frac{25}{147}\,(3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k})$$

c) El origen es un punto del eje central, por consiguiente, el momento resultante respecto del origen es el momento mínimo. De la ecuación de los momentos se tiene

$$\mathbf{M}_o = \mathbf{M}_P + \overrightarrow{OP} \wedge \mathbf{R}$$

pero el momento respecto de O es el momento mínimo. Sustituyendo y operando queda

$$\mathbf{M}_P = \mathbf{M}_m + 3\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\frac{25}{49} - 30\right)\mathbf{i} + \left(\frac{50}{147} + 45\right)\mathbf{j} + \frac{50}{49}\,\mathbf{k}$$

PROBLEMA 2.5

Dado el sistema de vectores deslizantes $\mathbf{A}_1 = (1, 2, 1)$, $\mathbf{A}_2 = (a, 1, 0)$ y $\mathbf{A}_3 = (1, 0, -1)$ pasando por los puntos P_1 (1, 2, 3) , P_2 (− 1, 0, 1) y P_3 (2, 0, − 1) . Determinar: a) el valor de a para que el módulo de la resultante sea $R = 5$, b) el momento resultante respecto del origen, c) el momento resultante mínimo, d) la ecuación del eje central, e) Si el módulo de la resultante no es conocido, determinar el valor de a para que el sistema equivala a un único vector.

SOLUCION

a) La resultante del sistema es $\mathbf{R} = (2 + a)\,\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j}$, cuyo módulo cumple $25 = (2 + a)^2 + 9$, de donde

$$2 + a = \pm 4 \quad \text{y} \quad a = +2\ , -6$$

b) La resultante del sistema es $\mathbf{R} = \pm 4\,\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j}$; el signo + corresponde al valor $a = 2$ y el signo − al valor $a = -6$. El momento resultante respecto del origen es (para $a = -6$)

$$\mathbf{M}_o = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -5\,\mathbf{i} - 3\,\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

c) El trinomio invariante es $T = \mathbf{R} \cdot \mathbf{M} = 11$; el momento mínimo es $\mathbf{M}_{\pi} = \frac{11}{25}(-4\,\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j})$

d) Un punto del eje central está dado por $\overrightarrow{OC} = \dfrac{\mathbf{R} \wedge \mathbf{M}_o}{R^2} = \dfrac{1}{25}(-3\,\mathbf{i} + 4\,\mathbf{j} + 27\,\mathbf{k})$

ecuación del eje central en forma continua $\dfrac{x + \frac{3}{25}}{-4} = \dfrac{y - \frac{4}{25}}{3} = \dfrac{z - \frac{27}{25}}{0}$

o como intersección de dos planos $75\,x + 100\,y = 7$; $25\,z = 27$.

e) El sistema equivale a un único vector cuando $\mathbf{R} \neq 0$ y $\mathbf{M} \neq 0$, pero $\mathbf{M} \cdot \mathbf{R} = 0$. El momento respecto del origen es

$$\mathbf{M}_o = -5\,\mathbf{i} + (3 + a)\,\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

De $T = 0$ se tiene $-10 - 5\,a + 9 + 3\,a = 0$, de donde $a = -1/2$.

Un punto de la recta soporte del vector está ahora dado por las componentes del vector

$$\overrightarrow{OC} = \frac{\mathbf{R} \wedge \mathbf{M}_o}{R^2} = \frac{4}{45}\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -5 \\ \frac{5}{2} \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{12}{45}\mathbf{i} + \frac{6}{45}\mathbf{j} + \frac{75}{45}\mathbf{k}$$

El momento del sistema respecto del punto C $\left(\frac{-12}{45}, \frac{6}{45}, \frac{75}{45} \right)$ es cero.

PROBLEMA 2.6

De un sistema de vectores deslizantes se conocen sus momentos respecto de tres puntos del espacio $\mathbf{M}_o = 2\ \mathbf{i} + \mathbf{j}$ respecto del origen ; $\mathbf{M}_P = 4\,\mathbf{i} + a\,\mathbf{j}$ respecto del punto $P(1, 1, 1)$ y $\mathbf{M}_Q = b\,\mathbf{i} + 4\,\mathbf{j} + c\,\mathbf{k}$ respecto del punto $Q(0, 1, -1)$.
Determinar : a) la resultante , b) los valores de a, b y c , c) el eje central

SOLUCIÓN

a) La ecuación (2-6) relaciona los momentos resultantes de un sistema de vectores deslizantes respecto de dos puntos del espacio. Aplicada a los puntos *O-P* y *O-Q* respectivamente, se tiene

$$\mathbf{M}_o = \mathbf{M}_P + \overrightarrow{OP} \wedge \mathbf{R} \qquad (1)$$

$$\mathbf{M}_o = \mathbf{M}_Q + \overrightarrow{OQ} \wedge \mathbf{R} \qquad (2)$$

Se tienen que determinar las tres componentes (R_1, R_2, R_3) de la resultante $\mathbf{R}$ del sistema. Escribiendo las ecuaciones (1) y (2) en componentes queda:

$$2\,\mathbf{i} + \mathbf{j} = 4\,\mathbf{i} + a\,\mathbf{j} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix} \qquad (3)$$

$$2\,\mathbf{i} + \mathbf{j} = b\,\mathbf{i} + 4\,\mathbf{j} + c\,\mathbf{k} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix} \qquad (4)$$

Desarrollando los productos vectoriales, agrupando términos e identificando los coeficientes de los vectores de la base en ambos miembros de las ecuaciones, se obtienen los siguientes sistemas lineales correspondientes respectivamente a las ecuaciones (3) y (4)

$$4 + R_3 - R_2 = 2 \qquad b + R_2 + R_3 = 2$$

$$a + R_1 - R_3 = 1 \qquad 4 - R_1 = 1$$

$$R_2 - R_1 = 0 \qquad c - R_1 = 0$$

Resolviendo el sistema se encuentra que $R_1 = R_2 = 3$ y $R_3 = 1$; luego la resultante del sistema está dada por

$$\mathbf{R} = 3\,\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

b) Del sistema se tiene que los valores de los coeficientes a, b y c están dados por

$$a = -1 \qquad b = -2 \qquad c = 3$$

c) La ecuación (2-17) define el vector $\overrightarrow{OC}$ cuyo extremo es un punto del eje central.

$$\overrightarrow{OC} = \frac{\mathbf{R} \wedge \mathbf{M}_0}{R^2} = \frac{1}{19}\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{19}(-\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k})$$

La ecuación del eje central es

$$\frac{x + \frac{1}{19}}{3} = \frac{y - \frac{2}{19}}{3} = \frac{z + \frac{3}{19}}{1}$$