Capitulo 5 Fundamentos de la mecánica

5.1 Introducción

La Mecánica estudia las interacciones entre los cuerpos materiales, formulando las leyes generales que rigen su estado de ***equilibrio*** o de ***movimiento***. En los capítulos precedentes, es han deducido las leyes que describen el movimiento de la partícula y del sólido rígido, definido como un conjunto de puntos del espacio que mantienen fijas sus distancias relativas durante el movimiento. En la Cinemática, para establecer las leyes del movimiento se han utilizado únicamente dos magnitudes físicas, el espacio y el tiempo. Ahora bien, el modelo geométrico del movimiento de los cuerpos en el espacio vacío debe de ser modificado cuando los resultados obtenidos se quieren aplicar a la descripción del movimiento de los cuerpos en el espació físico, por una parte, dotando de naturaleza material al sólido rígido y de otra, considerando el espacio euclídeo como el sustrato matemático del espacio físico en el cual tienen lugar todos los fenómenos observados.

La magnitud física ***masa*** define el contenido *material* de los cuerpos, los cuales evolucionan en el seno del espacio físico interaccionando entre si. La magnitud física que expresa la medida cuantitativa de la interacción mecánica de los cuerpos se denomina ***fuerza***. El estudio de los cuerpos en movimiento bajo la acción de las fuerzas que actúan sobre ellos corresponde a la *Dinámica*.

Los cuerpos están constituidos por un conjunto de puntos materiales o partículas, entendiendo la partícula como una cantidad de materia que ocupa un punto en el espacio prescindiendo de su forma y dimensiones. Recordemos que esta simplificación permite prescindir de los movimientos internos del cuerpo, tal como se indicó en la Cinemática. Por definición, las posiciones relativas de las partículas que forman un sólido rígido se mantienen inalteradas durante el movimiento. La condición de rigidez es una idealización del comportamiento de los cuerpos reales, los cuales siempre sufren una cierta deformación bajo la acción de las fuerzas que actúan sobre ellos. El estudio de las deformaciones de los sólidos constituye el objetivo de la teoría de la elasticidad.

Las condiciones generales de equilibrio de los cuerpos dependen de su estado, según sea sólido, líquido o gaseoso. El equilibrio de líquidos y gases es el objeto de estudio de la estática de fluidos. En lo que sigue, se entenderá que la ***estática*** comprende únicamente el estudio del equilibrio de los *cuerpos sólidos*. Todos los cuerpos sólidos se deforman más o menos al estar sometidos a la acción de fuerzas exteriores. La intensidad de la deformación depende de la naturaleza del material del sólido, de su forma geométrica, de sus dimensiones y de la manera de aplicar los esfuerzos. En condiciones normales de trabajo, las

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

deformaciones de los sólidos producidas por las fuerzas que actúan sobre ellos tienen valores muy pequeños, y en consecuencia, para establecer las condiciones generales de equilibrio de los sólidos es admisible prescindir de las deformaciones y considerar que los *sólidos se comportan como si fueran indeformables*. De está forma, los sólidos que consideraremos en la estática se comportan como sólidos rígidos, a los que denominares genéricamente como cuerpos.

5.2 Masa y densidad

Todos los cuerpos materiales están formados por un agregado de átomos o moléculas que ocupa un cierto volumen del espacio. Se enuncia ahora como *axioma*, la posibilidad de hacer corresponder a *todo sistema material* un número positivo denominado *masa* del sistema, con la propiedad de que la masa de un cuerpo es la suma de las masa de sus partes constituyentes. La definición operativa de masa así como su unidad en el S.I., el kilogramo (kg), se dará en el apartado 5.5.

Densidad. La masa de los cuerpos se considera que está distribuida de una manera *continua* en la zona del espacio ocupada por el cuerpo. De esta forma, cada elemento de espacio tiene asociada una cantidad de masa diferencial *dm*; el cociente entre la masa y el elemento de espacio define la *densidad* del cuerpo.

La distribución de masa en el espacio puede ser lineal, superficial o cúbica. Los sólidos rígidos cuya distribución de masa es tal que la sección transversal es despreciable frente a la longitud, se definen como cuerpos lineales o *lineas, figura* 5-1; los sólidos rígidos cuya distribución de masa es tal que el grosor es despreciable frente a el área de la superficie que ocupan, se definen como cuerpos superficiales o *áreas, figura* 5-2 y los sólidos rígidos cuya distribución de masa es tal que las tres dimensiones son del mismo orden de magnitud, se definen como cuerpos volumínicos o *volúmenes*, figura 5-3.

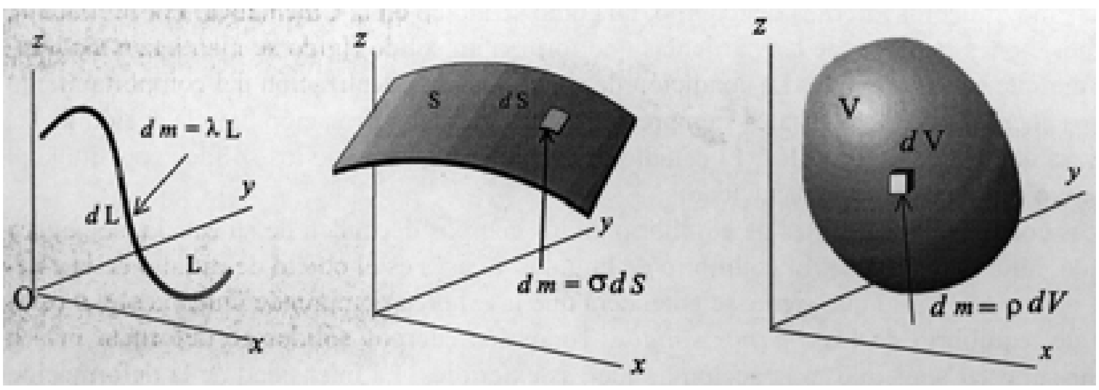


Fig. 5-1 Fig. 5-2 Fig. 5-3

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

Las densidades lineal, superficial y cúbica están definidas respectivamente por las siguientes expresiones

$$\lambda = \frac{dm}{dL} \qquad \sigma = \frac{dm}{dS} \qquad \rho = \frac{dm}{dV} \tag{5-1}$$

La masa total es la suma (integral) de los diferenciales de masa asociada a cada uno de los puntos de la zona del espacio ocupado por el cuerpo, cuyo valor está dado por

$$m = \int_L \lambda dL \qquad m = \int_S \sigma dS \qquad m = \int_V \rho\, dV \tag{5-2}$$

donde los operadores $\int_L$, $\int_S$ y $\int_V$ son las integrales simple, doble y triple extendidas a todos los puntos de la línea L, la superficie S y el volumen V respectivamente. Si los cuerpos son *homogéneos*, las densidades tienen valores constantes en todos los puntos y en este caso, si m es la masa del cuerpo, las densidades están dadas por

$$\lambda = \frac{m}{L} \ \mathrm{kg\,m^{-1}} \qquad \sigma = \frac{m}{S} \ \mathrm{kg\,m^{-2}} \qquad \rho = \frac{m}{V} \ \mathrm{kg\ m^{-3}} \tag{5-3}$$

En lo que sigue se consideraran únicamente cuerpos homogéneos lineales, superficiales o cúbicos, para los cuales sus respectivas densidades son constantes.

5.3 Concepto de fuerza

La fuerza es la magnitud física que mide la intensidad de la interacción de los cuerpos. Por el momento será suficiente dar una noción intuitiva de fuerza derivada de la experiencia diaria, la cual nos indica que la acción de una fuerza sobre un cuerpo se caracteriza por :

1) *la intensidad o módulo de la fuerza*

2) *la dirección y sentido de la fuerza*

3) *el punto de aplicación de la fuerza.*

Además de el módulo, la dirección y el sentido, que son los elementos característicos de

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

una vector, la experiencia demuestra que las fuerzas satisfacen la ley de la suma de vectores, luego la fuerza es una magnitud física vectorial y la representaremos de una manera genérica por medio del vector **F** y su módulo por F. La recta definida por el punto de aplicación de la fuerza y la dirección del vector **F**, se denomina *recta de acción* o *recta soporte* de la fuerza. También, la experiencia indica que la acción de una fuerza sobre un cuerpo no se modifica si está se desplaza a lo largo de su recta de soporte, lo que confiere a la fuerza el carácter de *vector deslizante*. Cuando sobre un mismo cuerpo actúan varias fuerzas, figura 5-4, el conjunto de fuerzas se denomina *sistema de fuerzas*.

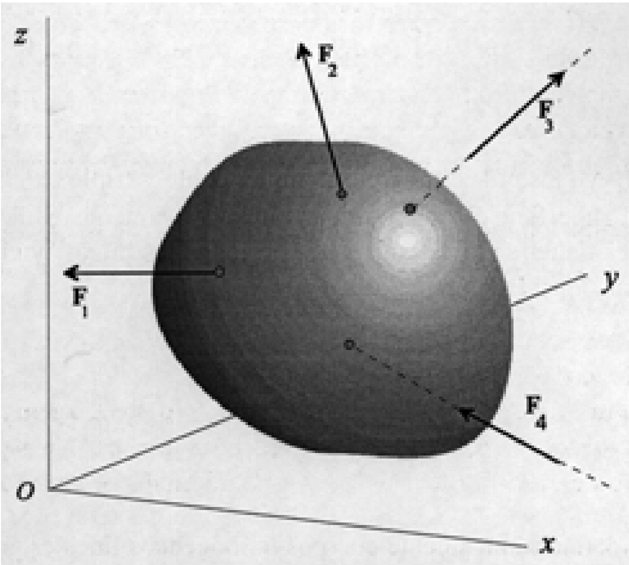


Fig. 5-4

Las fuerzas pueden ser *puntuales* o *repartidas*. Por definición, la fuerza que actúa sobre una partícula es una fuerza *puntual*. También, una fuerza aplicada en un punto determinado de un cuerpo se denomina *concentrada* o *puntual*. La noción de fuerza concentrada o fuerza puntual es convencional, ya que en la práctica es imposible aplicar una fuerza a un cuerpo en un solo punto. En realidad, cualquier fuerza puntual que consideremos, será siempre la resultante de un cierto sistema de fuerzas repartidas en una área muy pequeña del cuerpo. Las fuerzas que actúan sobre todos los puntos del volumen de un cuerpo dado, o sobre los puntos de una parte o del total de su superficie, se denominan fuerzas *repartidas*.

Para efectuar la determinación estática de la intensidad de una fuerza, se utiliza un aparato llamado *dinamómetro* que, previamente calibrado, proporciona el valor numérico de una fuerza determinada. En el SI la unidad de fuerza, es una unidad derivada, que se denomina newton (N). Una unidad práctica ampliamente utilizada en la tecnología es el *kilogramo-fuerza*, existiendo entre ambas unidades la relación 1 kg = 9,81 N.

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

5.4 Leyes de Newton de la mecánica

Los principios fundamentales de la mecánica están formulados en las *tres leyes* de Newton, que describen tanto el estado de reposo o de movimiento de una partícula sometida a la acción de fuerzas debidas a la interacción con los cuerpos de su entorno, como el hecho de que las fuerzas aparecen siempre a pares. Aunque el contenido de la estática se puede formular utilizando únicamente la primera y la tercera de las leyes, se enuncian ahora el conjunto de las tres leyes, dejando para la Dinámica de la partícula el desarrollo del importante concepto de la *inercia* de los cuerpos que constituye el contenido físico de la segunda ley de Newton, así como su aplicación al cálculo de las trayectorias de las partículas en el espacio físico.

La ***Primera ley*** de Newton se refiere al estado de reposo o movimiento uniforme de una partícula, y puede ser enunciada de la siguiente manera: *si la resultante de las fuerzas que actúan sobre una partícula es nula, ésta mantendrá su estado inicial de reposo o de movimiento uniforme.*

En su aplicación a la estática, se considera únicamente el caso en que la partícula se encuentre inicialmente en reposo en la referencia seleccionada.

La ***Segunda ley*** de Newton establece la relación que existe entre la fuerza que actúa sobre una partícula y su aceleración enunciando que: *si la resultante* **F** *de las fuerzas que actúan sobre una partícula es no nula, ésta tiene una aceleración* **a** *tal que la fuerza y la aceleración son vectores proporcionales.* La primera ley es un caso particular de la segunda que corresponde al caso en que la fuerza **F** es nula y que por tanto define el concepto de equilibrio de una partícula.

La fuerza representa la acción de un cuerpo sobre otro y puede ser ejercida, bien por *contacto* físico entre los dos cuerpos o bien a *distancia*, como por ejemplo en el caso de la fuerza atractiva que la Tierra ejerce sobre los cuerpos situados en sus proximidades. La noción intuitiva de fuerza deriva del hecho de observar que cuando un cuerpo ejerce una fuerza sobre otro cuerpo, a la cual denominamos *acción*, éste a su vez ejerce sobre el primero una fuerza de sentido opuesto a la que se denomina *reacción*. La reacción es precisamente lo que proporciona contenido a la acción, ya que sin su presencia la acción deja de existir.

La ***Tercera ley*** de Newton establece la relación entre las fuerzas de acción y de reacción que se ejercen dos cuerpos en contacto, y se puede enunciar como: *las fuerzas de acción y de reacción que se ejercen entre sí dos cuerpos en contacto, tienen el mismo módulo, la misma recta de acción y sentidos opuestos.*

La ley de la igualdad de la acción y de la reacción es una de las leyes fundamentales de la mecánica. Esta ley establece que si **F** es la fuerza que un cuerpo 1 ejerce sobre un cuerpo 2, la fuerza que el 2 ejerce sobre el cuerpo 1 es igual a – **F**, ambas sobre la misma recta soporte. Hay que observar que las fuerzas de acción-reacción no se cancelan entre sí ya que cada una de ellas está aplicada a un cuerpo distinto.

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

5.5 Ley de la atracción universal: peso de un cuerpo

Newton extendió la ley intuitiva de la acción-reacción entre los cuerpos en contacto, a la interacción que se ejercen entre sí dos partículas de masas M y m separadas una distancia r, formulando la ***ley de la atracción universal*** que establece que: *dos partículas de masas M y m, separadas una distancia r se ejercen fuerzas atractivas del mismo módulo y de sentidos opuestos,* figura 5-5. El valor de la fuerza está dado por

$$F = G\,\frac{M\,m}{r^2} \qquad \text{o en forma vectorial} \qquad \mathbf{F} = -G\,\frac{M\,m}{r^3}\,\mathbf{r} \qquad (5\text{-}4)$$

donde G es la constante de atracción universal, cuyo valor es $G = 6{,}67.10^{-11}$ $\mathrm{m^3/kg\,s^2}$. La recta soporte de las fuerzas atractivas entre dos partículas, es la recta definida por sus puntos posición, en los cuales está aplicada cada una de las fuerzas.

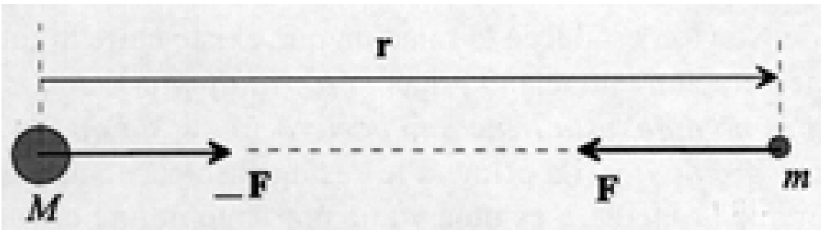


Fig. 5-5

Como veremos en la Dinámica, se puede demostrar que la ecuación (5-4) también da la fuerza que una distribución de masa con simetría esférica de radio R y masa total M ejerce sobre un cuerpo de masa m, situado a una distancia r del centro mayor que R. En consecuencia, una distribución esférica de masa se comporta, a los efectos de ejercer fuerza, como una partícula de masa M situada en el centro de la esfera. Está situación corresponde, por ejemplo, a la fuerza atractiva que la masa M de la Tierra ejerce sobre un cuerpo de masa m, situado en, o más allá de la superficie terrestre. Para estos casos, la fuerza se denomina *fuerza gravitacional* y de forma genérica, la ley también se conoce con el nombre de *ley de la gravitación*. En el segundo término de la ecuación vectorial (5-4) se designa como **g** a todos los términos excepto la masa m del cuerpo, es decir

$$\mathbf{g} = -\frac{G\,M}{r^3}\,\mathbf{r} \qquad (5\text{-}5)$$

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

La magnitud **g** es la *intensidad de la fuerza gravitacional* es decir, la fuerza que se ejerce sobre la unidad de masa m y sus unidades son (N/kg). El vector **g** está dirigido hacia el centro de la Tierra y su módulo dado por

$$g = \frac{G\,M}{r^2} \tag{5-6}$$

decrece con el cuadrado de la distancia al centro de la Tierra. A partir de la ecuación (5-4) puede calcularse la fuerza que la Tierra ejerce sobre un cuerpo de masa m situado a una distancia r de su centro igual o mayor que el radio medio terrestre cuyo valor es R = 6370 km, sustituyendo M por la masa de la tierra $M = 5{,}97\ 10^{24}$ kg y r por el valor de su distancia al centro.

Peso de un cuerpo. Cuando la masa m está unida a un soporte, de tal manera que el conjunto se encuentra en reposo respecto de la Tierra, el cuerpo ejerce sobre el soporte la misma fuerza que la Tierra ejerce sobre él. A la fuerza que el cuerpo ejerce sobre el soporte, se le denomina *peso* del cuerpo y se le designa como **P**. La expresión del peso P de un cuerpo de masa m a la distancia r del centro de la Tierra es

$$P = mg \qquad \text{o en forma vectorial} \qquad \mathbf{P} = m\mathbf{g} \tag{5-7}$$

Para una partícula, el punto de aplicación del peso **P** es el punto del espacio en el que está situada la partícula y para un cuerpo extenso, el punto de aplicación de **P** es un punto del espacio característico de cada cuerpo que se llama *centro de gravedad* del cuerpo.

En la ecuación (5-6) haciendo $r = R$ y sustituyendo valores, se tiene el valor de g en la superficie terrestre es 9,81 N/kg. En el SI el peso de un cuerpo se mide en newtons, pero comúnmente el peso se expresa en kg, entendido ahora el kg como unidad de fuerza. Estableciendo una relación de equivalencia entre el kilo fuerza y el newton, tal que 9,81 N sean igual a un kg, de la ecuación (5-7) se deduce que la masa y el peso de un cuerpo en kg están dados por el mismo número.

El concepto de *inercia* (*masa*), se analizará en detalle en la Dinámica de la partícula, siendo suficiente por ahora decir que la masa asociada al peso de un cuerpo es un coeficiente característico de cada cuerpo que determina la intensidad de su interacción gravitacional y que se denomina *masa gravitatoria.* Para una definición operativa de masa gravitatoria se utiliza una balanza de brazos iguales soportada por su centro. Dos cuerpos tienen igual masa cuando, colocando un cuerpo en cada platillo de la balanza esta mantiene su posición horizontal, es decir, está en equilibrio. Experimentalmente se puede comprobar que el estado de equilibrio de una balanza no se modifica al trasladar la balanza de un punto a otro de la tierra,

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

luego la igualdad de masas gravitotrias de dos cuerpos es independiente del lugar en que se proceda a su determinación. A la masa gravitatoria de un cuerpo se le designa simplemente como la masa del cuerpo. En el S.I. de unidades, la unidad de masa es el kilo (kg), que corresponde a la masa de un bloque cilíndrico de platino conservado en la Oficina Internacional de Pesos y Medidas en Sevres. La masa, junto con el espacio y el tiempo forman el conjunto de magnitudes físicas fundamentales de la Mecánica. Todas las otras magnitudes físicas utilizadas en la mecánica derivan de estas tres magnitudes fundamentales, y sus unidades se expresan en función de las unidades de la masa, el espacio y el tiempo.

5.6 Centro de gravedad de sólidos

El vector **g** definido por la ecuación (5-5) mide la intensidad de la fuerza gravitacional con que la Tierra atrae a una masa puntiforme situada a una distancia r de su centro. Un sólido rígido está constituido por un conjunto continuo de infinitas "partículas" de masa dm, cada una de ellas asociada a un elemento de volumen de la distribución espacial de la masa del cuerpo. De esta manera, la fuerza que la Tierra ejerce sobre cada elemento de masa del cuerpo está dada por

$$d\mathbf{P} = \mathbf{g}\, dm \qquad (5\text{-}8)$$

Para cuerpos de pequeñas dimensiones, el valor de **g** no cambia de un punto a otro del cuerpo y el conjunto de fuerzas $d\mathbf{P}$ sobre cada uno de los elementos de masa dm del sólido forma un sistema de vectores paralelos. La resultante de este sistema de fuerzas paralelas es el peso **P** cuerpo

$$\mathbf{P} = \mathbf{g} \int_{Sol} dm = m\,\mathbf{g} \qquad (5\text{-}9)$$

El centro G del sistema de vectores paralelos está definido por la expresión

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\int_{Sol} \mathbf{r}\, dm}{m} \qquad (5\text{-}10)$$

donde **r** es el vector posición del elemento de masa dm. El extremo del vector $\overrightarrow{OG}$ define el punto G, denominado *centro de gravedad* del sólido de coordenadas $G\ (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$. Las

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

expresiones analíticas de los correspondientes centros de gravedad en función de las densidades definidas por las ecuaciones 5-1, son:

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\int_L \lambda\, \mathbf{r}\, dL}{m} \qquad \overrightarrow{OG} = \frac{\int_S \sigma\, \mathbf{r}\, dS}{m} \qquad \overrightarrow{OG} = \frac{\int_V \rho\, \mathbf{r}\, dV}{m} \qquad (5\text{-}11)$$

En las figuras 5-6, 5-7 y 5-8 se muestran, en una representación gráfica, los centros de gravedad de cuerpos cuya masa está repartida sobre una línea, o sobre una superficie o sobre un volumen.

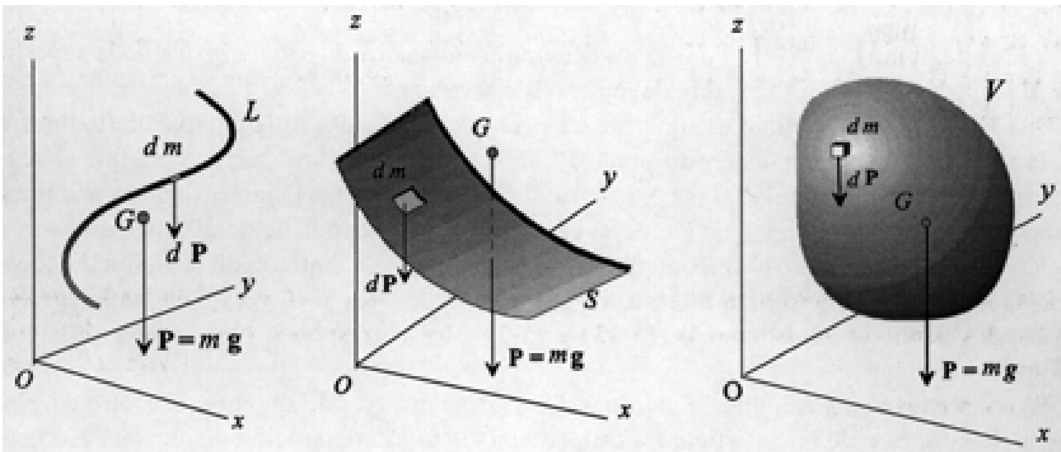


Fig. 5-6 Fig. 5-6 Fig. 5-7

En el caso mas común de sólidos uniformes, las densidades son constantes y las ecuaciones (5-11) cambian a

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\int_L \mathbf{r}\, dL}{L} \qquad \overrightarrow{OG} = \frac{\int_S \mathbf{r}\, dS}{S} \qquad \overrightarrow{OG} = \frac{\int_V \mathbf{r}\, dV}{V} \qquad (5\text{-}12)$$

donde L, S y V son respectivamente la longitud, la superficie y el volumen del sólido. El centro de gravedad G definido por las ecuaciones (5-12) es un punto del espacio que puede

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

pertenecer o no al sólido rígido, independiente de la elección del sistema de referencia seleccionado para fijar la posición de los puntos del cuerpo, y ponen de manifiesto la naturaleza *geométrica* del centro de gravedad de sólidos uniformes, cuando el vector **g** es el mismo en todos los puntos del cuerpo.

Líneas y superficies planas. Para líneas y superficies planas situadas en el plano *x*, *y*, el vector posición **r** de las dos primeras ecuaciones (5-12) es $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$ y las coordenadas de los centros de gravedad de estos cuerpos se obtienen de las siguientes ecuaciones

$$\bar{x}\,L = \int_L x\,dL \qquad \bar{y}\,L = \int_L y\,dL \tag{5-13}$$

$$\bar{x}\,S = \int_S x\,dS \qquad \bar{y}\,S = \int_S y\,dS \tag{5-14}$$

A las integrales $\int_S x\,dS$, $\int_S y\,dS$ se les denomina *momentos de primer orden* de la superficie *S*, respecto del eje *y* y respecto del eje *x* respectivamente.

Una línea o una superficie es simétrica respecto de un eje si a cada punto *P* de la línea o de la superficie le corresponde otro punto *P' de* la misma línea o superficie, tal que el segmento *PP'* sea perpendicular al eje, y este lo divida en dos partes iguales. Cuando una línea o una superficie posee un eje de simetría, el centro de gravedad debe de estar situado sobre dicho eje. En efecto, si se hace coincidir el eje *y* con el eje de simetría de la figura, la coordenada del centro de gravedad es cero, ya que a los productos *x dL* y *x dS* en las integrales de las dos primeras ecuaciones de (5-13) y (5-14), les corresponde otro igual y de signo contrario.

En consecuencia, si una línea o una superficie posee dos ejes de simetría, el centro de gravedad de la línea o de la superficie está situado en el punto intersección de dichos ejes. Esta propiedad permite determinar inmediatamente los centros de gravedad de circunferencias, perímetros rectangulares, etc, así como de círculos, elipses, superficies rectangulares o cualquier otra figura simétrica.

Una línea o una superficie es simétrica respecto de un centro *O*, si a cada punto *P* de la línea o de la superficie le corresponde otro punto *P'* de la misma figura tal que el punto *O* es el centro del segmento *PP'*. El centro de simetría *O* es el centro de gravedad de la figura ya que a cada producto **r** *dL* o **r** *dS* que aparece en las dos primeras integrales (5-12), le corresponde otro igual y de signo contrario. Cuando una figura tiene centro de simetría, no necesariamente tiene un eje de simetría; pero si una figura tiene dos ejes de simetría perpendiculares, su punto de intersección es un centro de simetría y por tanto el centro de gravedad.

Superficies arbitrarias. Cuando se trata de determinar el centro de gravedad de una superficie arbitraria, está puede dividirse en triángulos, rectángulos u otras formas usuales. Si la figura tiene un agujero, su área se cuenta negativa, figura 5-8.

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

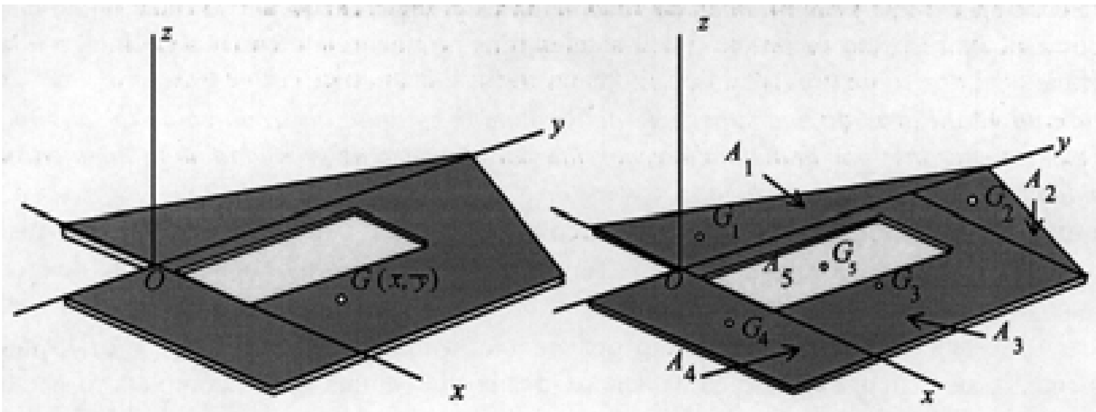


Fig. 5-8

Las coordenadas de los centros de gravedad de cada una de las figuras en las que se ha descompuesto la superficie original, tienen signo positivo o negativo en la referencia elegida. El centro de gravedad de la figura compuesta se obtiene determinando el centro de gravedad de *n* partículas correspondientes a las *n* divisiones, cuyas posiciones son conocidas. Las ecuaciones (5-14) cambian a

$$\bar{x} \sum_i^n A_i = \sum_i^n \bar{x}_i A_i \qquad \bar{y} \sum_i^n A_i = \sum_i^n \bar{y}_i A_i \tag{5-15}$$

De una forma similar se procede para determinar el centro de gravedad de una línea compuesta, dividiendo la línea en elementos más sencillos. Cuando el perfil de la superficie cuyo centro de gravedad se quiere determinar está formado por curvas analíticas que no permiten la división según figuras conocidas, es necesario calcular las integrales de las ecuaciones (5-14) expresando el elemento de área por $dS = dx\, dy$ en el caso de coordenadas rectangulares y por $dS = r\, dr\, d\theta$ en coordenadas polares, con lo cual estas son integrales dobles. Sin embargo, en muchos casos es posible determinar las coordenadas del centro de gravedad mediante una integración sencilla, lo que se consigue tomando elementos de área en cuya expresión aparezca únicamente el diferencial de una de las variables.

5.7 Teoremas de Pappus-Guldin

Los teoremas de Pappus-Guldin relacionan las superficies y los volúmenes de revolución con las coordenadas de los centros de gravedad de las líneas y superficies que los engendran. Una *superficie de revolución* es la engendrada por la rotación de una curva plana

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

respecto de un eje fijo y un *volumen de revolución* es el engendrado por la rotación de una superficie plana respecto de un eje fijo. Los ejes fijos no tienen que cortar a la línea o a la superficie.

Teorema 1º *El área de una superficie de revolución es igual al producto de la longitud de la curva generatriz por la distancia recorrida por el centro de gravedad de la línea en su movimiento al generar la superficie.*

En efecto, consideremos un elemento de arco dL de la línea L de la figura 5-9 a), la cual da una vuelta completa alrededor del eje x. Teniendo en cuenta el valor del elemento de área dA asociada al elemento de línea dL, el área de la superficie engendrada por la línea L al efectuar una rotación completa respecto del eje x está dada por $Sx = 2\pi \int_L y\, dL$. Análogamente, la superficie engendrada haciendo girar la línea L una vuelta completa respecto del eje y está dada por $S_y = 2\pi \int_L x\, dL$. Despejando las integrales y sustituyéndolas en las ecuaciones (5-13) se tiene

$$S_x = 2\,\pi\,\bar{y}\,L \qquad\qquad S_y = 2\,\pi\,\bar{x}\,L \qquad (5\text{-}16)$$

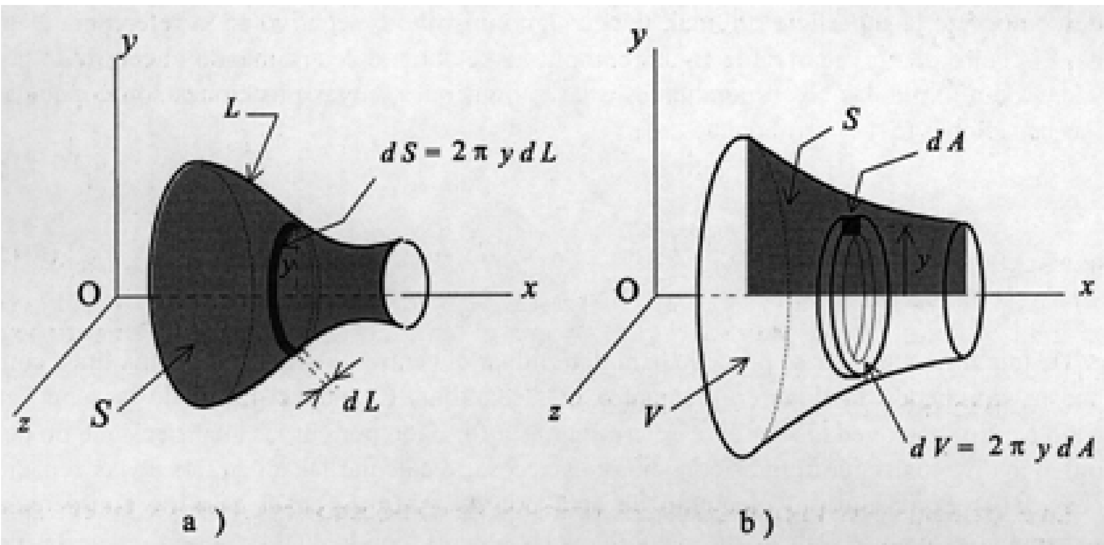


Fig. 5-9

Cuando se conocen las áreas de las superficies S_x y S_y engendradas por la rotación de la línea L en torno al eje x y al eje y respectivamente, las ecuaciones (5-16) proporcionan las coordenadas del centro de gravedad de la línea L.

Teorema 2º. ***El volumen de un cuerpo de revolución es igual al producto del área de la superficie generatriz multiplicada por la distancia recorrida por el centro de gravedad del área en su movimiento al generar el volumen.***

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

En efecto, consideremos un elemento de área dS de la superficie S de la figura 5-9 b), la cual da una vuelta completa alrededor del eje x. Teniendo en cuenta el valor del elemento de volumen dV engendrada por dA, el volumen del cuerpo engendrado por la superficie S al efectuar una rotación completa respecto del eje x es $V_x = 2\pi \int_x y\, dA$. De una manera análoga, el volumen engendrado por la rotación completa de la superficie S respecto del eje y es $V_x = 2\pi \int_y x\, dA$. Despejando las integrales y sustituyéndolas en las ecuaciones (5-14) se tiene

$$V_x = 2\,\pi\,\bar{y}\,S \qquad\qquad V_y = 2\,\pi\,\bar{x}\,S \tag{5-17}$$

Cuando se conocen los volúmenes de revolución V_x y V_y engendrados por la superficie S al girar en torno al eje x y en torno al eje y respectivamente, las ecuaciones (5-17) proporcionan las coordenadas del centro de gravedad de la superficie S.

Cuando no es posible utilizar el 2° teorema de Pappus-Guldin para determinar el centro de gravedad de un volumen limitado por superficies analíticas, éste debe de ser calculado por medio de las ecuaciones

$$\bar{x}\,V = \int_V x\,dV \qquad \bar{y}\,V = \int_V y\,dV \qquad \bar{z}\,V = \int_V z\,dV$$

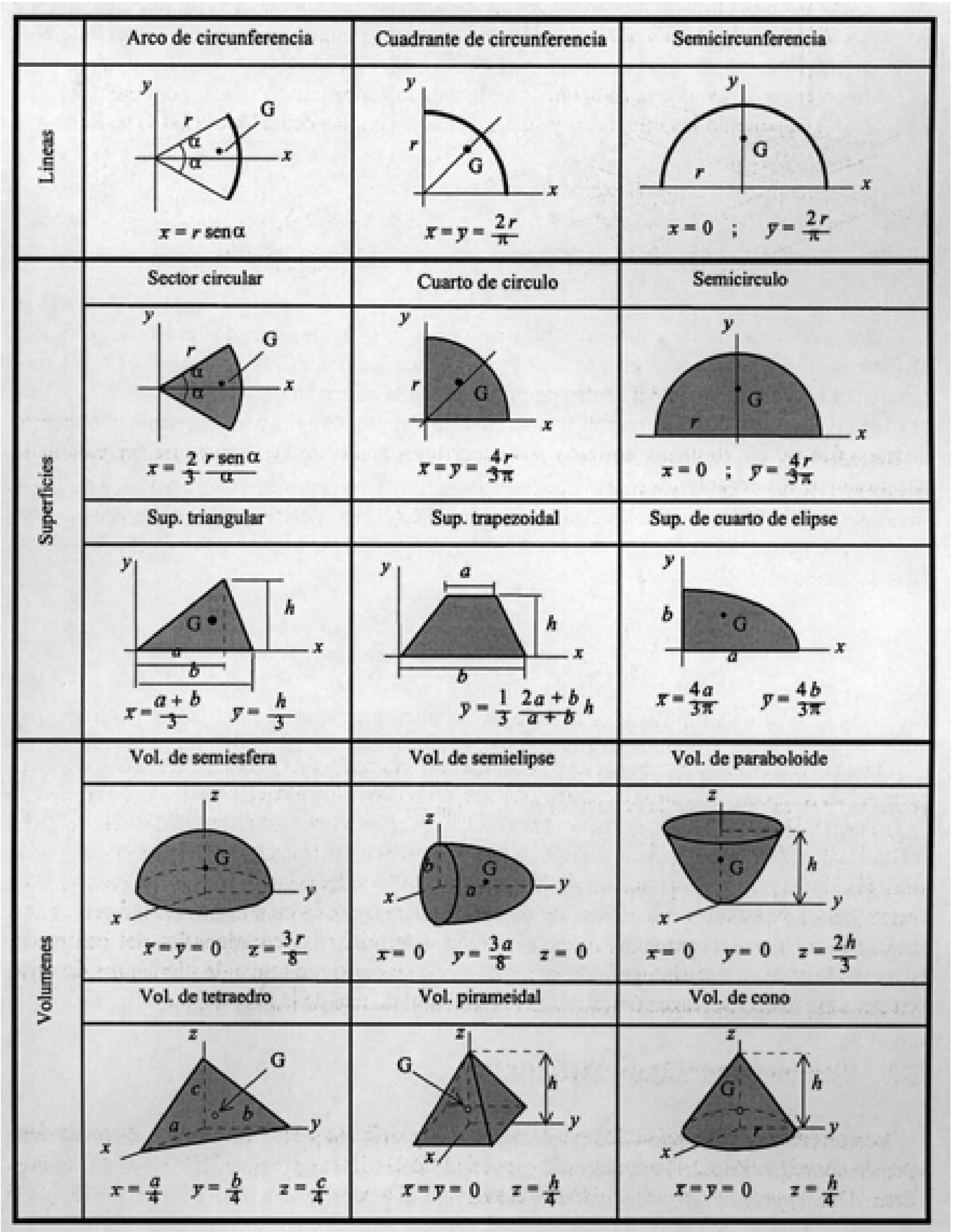
donde el elemento de volumen está dado por $dV = dx\,dy\,dz$ y las integrales son triples. Sin embargo, es posible simplificar el cálculo de las integrales si la geometría del volumen permite su partición en volúmenes diferenciales extensos dV_{el} de tal manera que las coordenadas de su centro de gravedad sean conocidas. Se obtienen las coordenadas del centro de gravedad del volumen por las ecuaciones

$$\bar{x}\,V = \int_V \bar{x}_{el}\,dV_{el} \qquad \bar{y}\,V = \int_V \bar{y}_{el}\,dV_{el} \qquad \bar{z}\,V = \int_V \bar{z}_{el}\,dV_{el}$$

Con este procedimiento se consigue reducir las integrales triples a integrales dobles o sencillas.

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

Tabla 5-1 Centros de gravedad de cuerpos

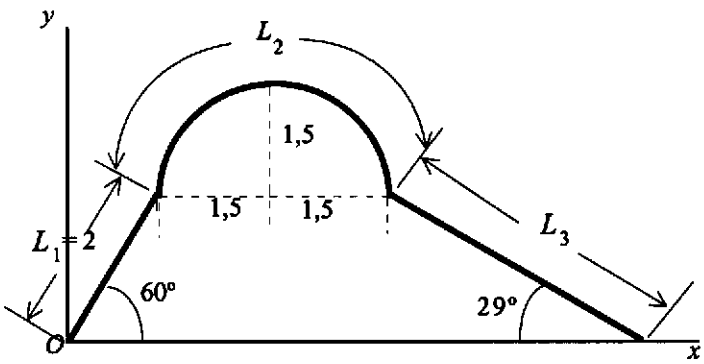


Líneas	Arco de circunferencia	Cuadrante de circunferencia	Semicircunferencia
	$x = r\,\text{sen}\,\alpha$	$x = y = \frac{2r}{\pi}$	$x = 0$; $y = \frac{2r}{\pi}$
Superficies	Sector circular	Cuarto de círculo	Semicírculo
	$x = \frac{2}{3}\frac{r\,\text{sen}\,\alpha}{\alpha}$	$x = y = \frac{4r}{3\pi}$	$x = 0$; $y = \frac{4r}{3\pi}$
	Sup. triangular	Sup. trapezoidal	Sup. de cuarto de elipse
	$x = \frac{a+b}{3}$ $y = \frac{h}{3}$	$y = \frac{1}{3}\frac{2a+b}{a+b}h$	$x = \frac{4a}{3\pi}$ $y = \frac{4b}{3\pi}$
Volúmenes	Vol. de semiesfera	Vol. de semielipse	Vol. de paraboloide
	$x = y = 0$ $z = \frac{3r}{8}$	$x = 0$ $y = \frac{3a}{8}$ $z = 0$	$x = 0$ $y = 0$ $z = \frac{2h}{3}$
	Vol. de tetraedro	Vol. piramidal	Vol. de cono
	$x = \frac{a}{4}$ $y = \frac{b}{4}$ $z = \frac{c}{4}$	$x = y = 0$ $z = \frac{h}{4}$	$x = y = 0$ $z = \frac{h}{4}$

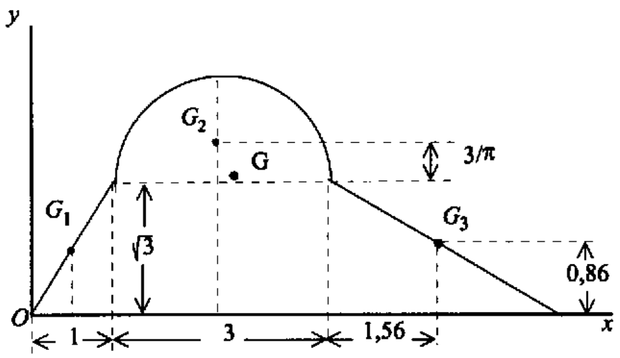
© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

PROBLEMA 5-1

Determinar las coordenadas del centro de gravedad de el alambre uniforme representado en la figura adjunta. Las cotas se dan en metros.



SOLUCIÓN



La longitud del segmento circular es $L_2 = 1{,}5\,\pi$ y la longitud de $L_3 = 3{,}57$. Las coordenadas de los centros de gravedad de cada una de las partes del alambre son :

$$G_1\,(0{,}5\,,\ \sqrt{3}/2\,) \qquad G_2\,(2{,}5\,,\ \sqrt{3}+\frac{3}{\pi}\,) \qquad G_3\,(\,5{,}56\,,\ 0{,}86\,)$$

Utilizando las ecuaciones 5-15 se tiene que las coordenadas del centro de gravedad del alambre están dadas por

$$\bar{x} = \frac{m_1\bar{x}_1 + m_2\bar{x}_2 + m_3\bar{x}_3}{m_1 + m_2 + m_3} \qquad \bar{y} = \frac{m_1\bar{y}_1 + m_2\bar{y}_2 + m_3\bar{y}_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

siendo $m_1 = \lambda\, L_1$, $m_2 = \lambda\, L_2$, $m_3 = \lambda\, L_3$ las masas de cada uno de los trozos del alambre. Sustituyendo valores se obtiene

$$\bar{x} = 2{,}75 \qquad \bar{y} = 1{,}88$$

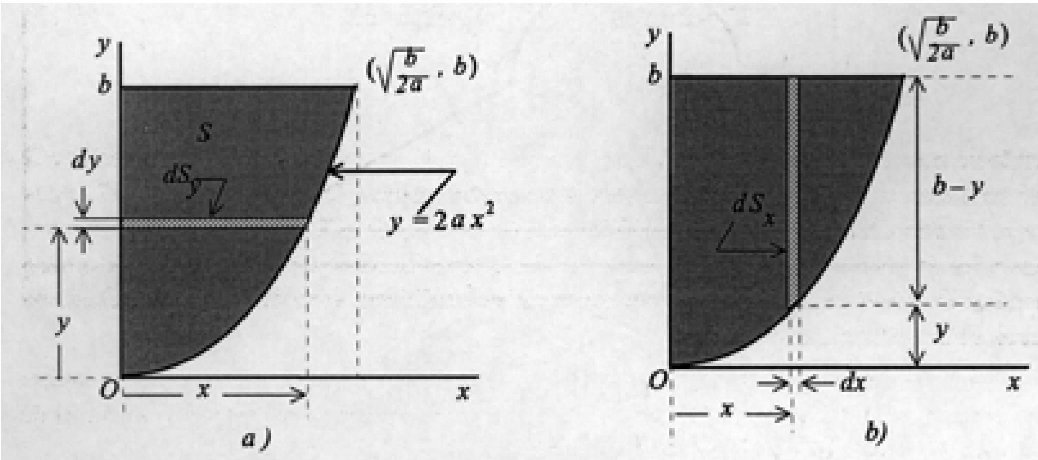
© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

PROBLEMA 5-2

Determinar las coordenadas del centro de gravedad de la superficie limitada por la parábola $y = 2\,a\,x^2$ y las rectas $x = 0$, $y = b$.

SOLUCIÓN

La gráfica adjunta *a*) es la de la superficie *S* cuyo centro de gravedad se quiere determinar.



Se pueden utilizar las ecuaciones (5-14). De la figura *a*) se deduce que el área de la superficie está dada por la integral

$$S \;=\; \int_0^b dS_y \;=\; \int_0^b x\,dy \;= 4\,a \int_0^b x^2\,dx \;=\; \frac{4\,a}{3}\,b^3$$

Las coordenadas de *G* se obtienen de las ecuaciones

$$\bar{x}\,S \;=\; \int_0^{\sqrt{b/2a}} x\,dS_x \qquad\qquad \bar{y}\,S \;=\; \int_0^b y\,dS_y$$

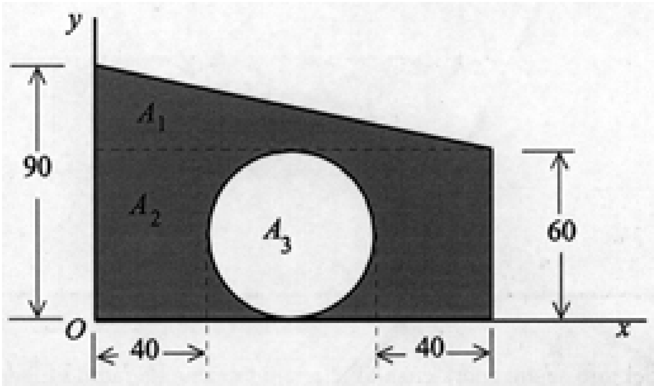
donde el dS_x, figura b), está dado por $dS_x \;=\; (\,b - y\,)\,dx \;=\; (\,b - 2\,a\,x^2\,)\,dx$, y el dS_y está dado por $dS_y = x\,dy$. Sustituyendo los dS en las correspondientes integrales se tiene

$$\bar{x} \;=\; \frac{3}{32\,a^2 b} \qquad\qquad \bar{y} \;=\; \frac{3}{10\,a\,\sqrt{2\,a\,b}}$$

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

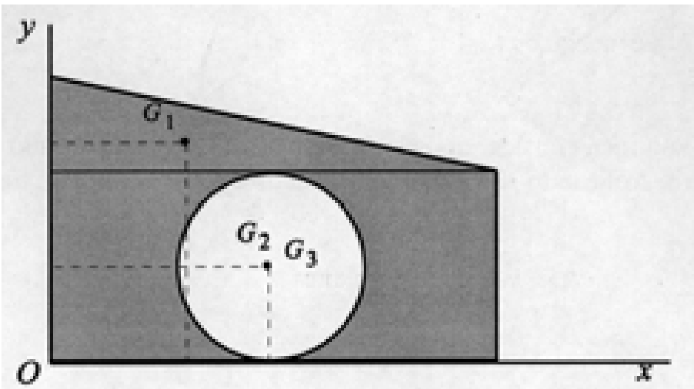
PROBLEMA 5-3

Determinar el centro de gravedad del área trapezoidal de la figura adjunta a la cual se le ha eliminado un círculo. Las cotas se dan en cm.



SOLUCIÓN

El área se compone de un triángulo más un rectángulo mas un círculo de área negativa.. Sus áreas respectivas son $A_1 = 2100$, $A_2 = 8400$ y $A_3 = -900\pi$. Las coordenadas de sus respectivos centros de gravedad son : G_1 (46.6, 70) ; G_2 (70, 30) ; G_3 (70, 30)



Utilizando las ecuaciones (5-15) se tiene que las coordenadas del centro de gravedad de la placa son

$$\bar{x} = \frac{A_1\bar{x}_1 + A_2\bar{x}_2 + A_3\bar{x}_3}{A_1 + A_2 + A_3} \qquad \bar{y} = \frac{A_1\bar{y}_1 + A_2\bar{y}_2 + A_3\bar{y}_3}{A_1 + A_2 + A_3}$$

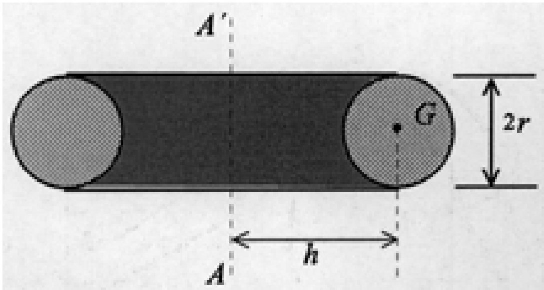
Sustituyendo valores y operando queda

$$\bar{x} = 63,6 \text{ cm} \qquad \bar{y} = 41,0 \text{ cm}$$

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

PROBLEMA 5-4

Utilizar los teoremas de Pappus-Guldin para determinar la superficie y el volumen de un toro circular cuya sección tiene un radio r y su radio medio es h.



SOLUCIÓN

La superficie del toro se engendra cuando la circunferencia de radio r efectúa una vuelta completa alrededor del eje $A\,A'$. El centro de gravedad de la circunferencia es su centro. Aplicando el 1° teorema de Pappus- Guldin se tiene

$$(2\pi r) \times (2\pi h) = S \qquad \Rightarrow \qquad S = 4\pi^2 h r$$

Para determinar el volumen consideremos la sección recta que es un círculo de radio r cuyo centro de gravedad es el centro. Aplicando ahora el 2° teorema de Pappus-Guldin se tiene

$$(\pi r^2) \times (2\pi h) = V \qquad \Rightarrow \qquad V = 2\pi^2 h r^2$$

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.