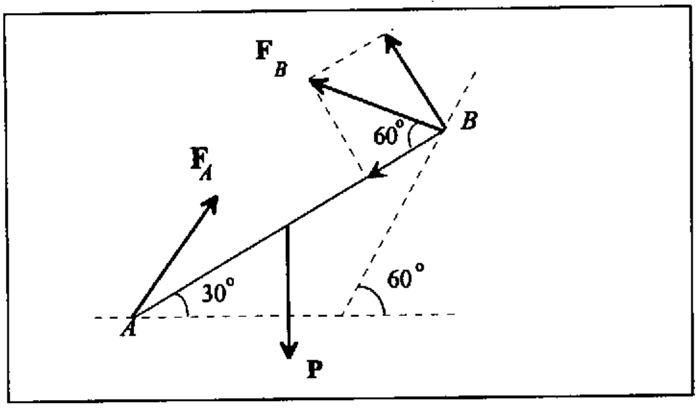
Determinación de las reacciones en los apoyos.



Tomando momentos respecto de A se tiene que $F_B = P/2$, luego el valor de $\mathbf{F}_B$ es

$$F_B = 98 \text{ N}$$

De las ecuaciones (1) y (2) se tiene que

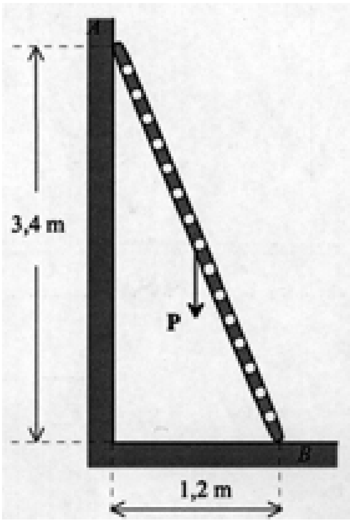
$$\mu = \frac{\text{sen}\,60^\circ}{2 - \cos 60^\circ} = 0,577 \quad \Rightarrow \quad \theta = 30^\circ$$

Conocidos F_B y θ, la ecuación (2) proporciona el valor de la reacción en A

$$F_A = 169,7\text{N}$$

PROBLEMA 6-17

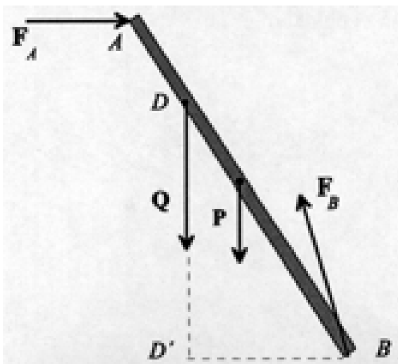
Una escalera de peso P, se apoya en una pared vertical lisa y sobre un suelo horizontal rugosos tal como se ve en la figura. La distancia entre peldaños es de 30 cm. Una persona de peso Q asciende por la escalera. Determinar hasta que peldaño puede ascender sin que la escalera se caiga.
Datos: $P = 20$ kg ; $Q = 60$ kg. ; $\mu = 0{,}265$



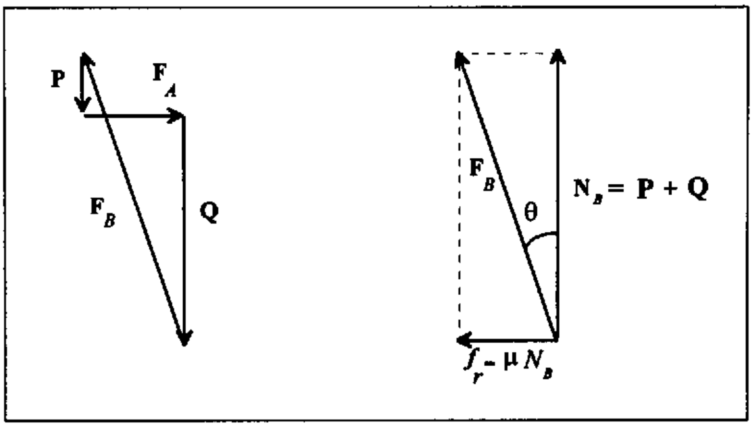
SOLUCIÓN

Se puede ascender por la escalera hasta un punto D, en el cual la componente horizontal de $\mathbf{F}_B$ sea igual al valor máximo de la fuerza de rozamiento. En esta posición, $\mathbf{F}_B$ forma con la normal en B un ángulo θ tal que $\mu = \text{tg}\ \theta = 0{,}265$. Las direcciones de las cuatro fuerzas que actúan sobre la escalera son conocidas. Si D es el punto de la escalera hasta donde puede ascender la persona de peso Q,, las direcciones de las cuatro fuerzas se deben cortar en el punto donde se cortan $\mathbf{F}_A$ y $\mathbf{Q}$ y su suma ha de ser cero.

Diagrama del sólido libre



Sumando gráficamente queda



de donde se tiene

$$F_A - F_B \operatorname{sen}\theta = 0 \qquad \text{y} \qquad F_A = f_r = \mu N_B = \mu(P+Q)$$

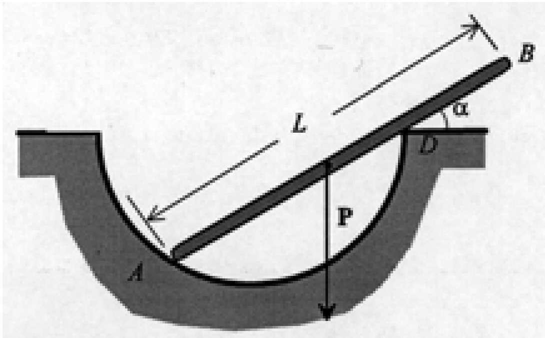
La distancia $\overline{BD} = \sqrt{\overline{DB}^2 + \overline{DD'}^2}$ determina la posición del punto D respecto del pie de la escalera. Igualando a 0 el momento respecto del punto B, se tiene

$$-3{,}4F_A + 0{,}6P + \overline{BD}\,Q = 0 \qquad\qquad \overline{BD} = 1{,}0\,\mathrm{m}$$

Por semejanza de triángulos se obtiene que $\overline{DD'} = 2{,}83\,\mathrm{m}$. Sustituyendo queda que $\overline{BD} = 3{,}0\,\mathrm{m}$ luego se puede ascender hasta el peldaño nº 10.

PROBLEMA 6-18

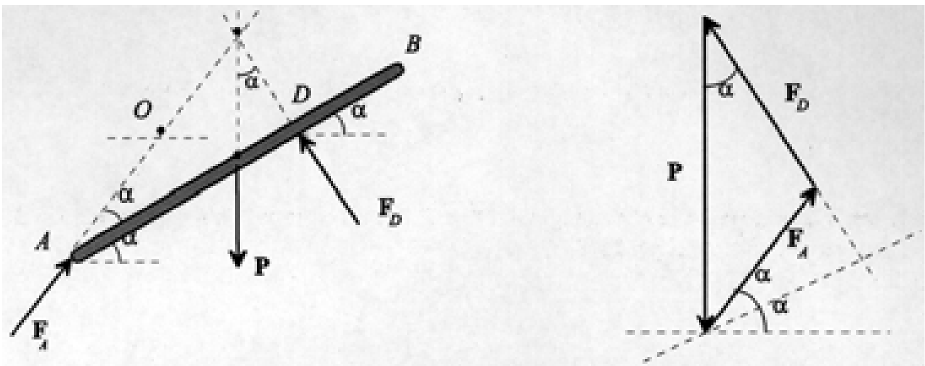
Una barra homogénea de longitud L y peso P se apoya sobre una superficie esférica lisa tal como se ve en la figura. Determinar el ángulo α correspondiente a la situación de equilibrio si el radio de la esfera es R y la longitud de la barra es $L = 3\,R$.



SOLUCIÓN

Los apoyos en A y D son lisos, luego la reacción en A es perpendicular a la semiesfera, y por tanto tiene la dirección radial y en D la reacción es perpendicular a la barra. Para la posición de equilibrio, las fuerzas de reacción ejercidas por los apoyos sobre la barra se han de cortar en un punto de la recta soporte del peso **P**.

Diagrama del sólido rígido y triángulo de fuerzas.



Proyectando en el triángulo de fuerzas sobre la dirección de la barra, se tiene

$$F_A \cos\alpha = P \operatorname{sen}\alpha \qquad \Rightarrow \qquad F_A = P \operatorname{tg}\alpha$$

De la figura se tiene que la longitud de barra apoyada en la semiesfera está dada por

$$\overline{AD} = 2R\cos\alpha$$

Tomando momentos respecto de D (momentos de las componentes perpendiculares a la barra de $\mathbf{F}_A$ y **P**) se tiene

$$-(F_A \ \mathrm{sen}\,\alpha)\,\overline{AD} + (P\cos\alpha)\,(\overline{AD} - L/2) = 0 \qquad (1)$$

Sustituyendo en la ecuación (1) los valores de F_A y la distancia $\overline{AD}$ se tiene

$$-2\,\mathrm{sen}^2\alpha + 2\cos^2\alpha - \frac{3}{2}\cos\alpha = 0$$

Operando queda

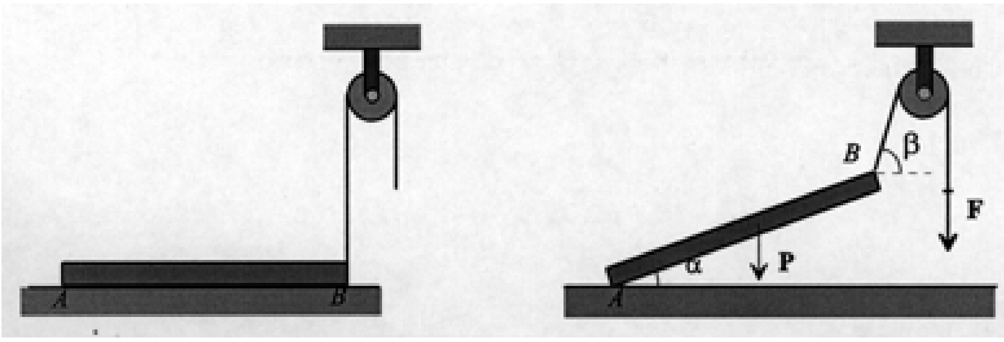
$$\cos^2\alpha - \frac{3}{8}\cos\alpha - \frac{1}{2} = 0$$

de donde se obtiene el valor de α

$$\cos\alpha = 0{,}91875 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 23{,}25\,°$$

PROBLEMA 6-19

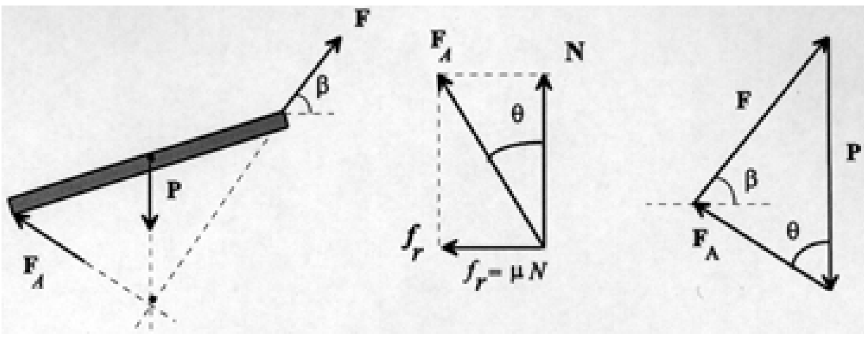
Una barra homogénea de peso P y longitud L está apoyada longitudinalmente sobre un plano horizontal rugoso (el coeficiente de rozamiento es μ). Su extremo B está unido a un cable que pasa a través de una polea lisa. Tirando del extremo libre del cable con una fuerza F se eleva la barra un ángulo α como se muestra en la figura. Determinar la relación entre los ángulos α y β para que la barra no deslize, siendo α el valor máximo para el cual la barra está en equilibrio.



SOLUCIÓN

Se conocen las direcciones de la fuerza **F** y el peso de la barra **P**. La reacción $\mathbf{F}_A$ en A, tiene que pasar por el punto de corte de **F** y **P**. La componente horizontal de $\mathbf{F}_A$ es la fuerza de rozamiento y en la situación límite, su valor es máximo $f_r = \mu N$ y en la condición de movimiento inminente $\mathbf{F}_A$ forma con la normal en A un ángulo θ tal que tg $\theta = \mu$.

Diagrama del sólido libre y triángulo de fuerzas.

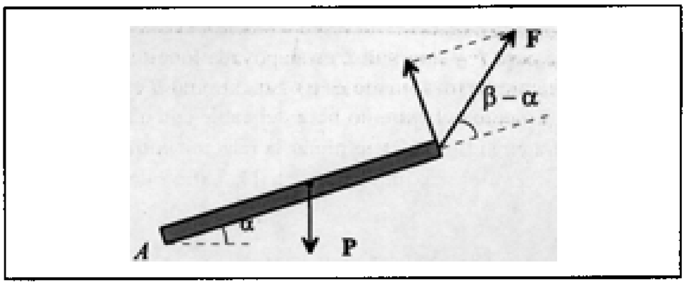


Del triángulo de fuerzas se tiene

$$F\cos\beta = F_A \operatorname{sen}\theta = \mu N = \mu\,(P - F\operatorname{sen}\beta)$$

Agrupando términos queda $\qquad F(\cos\beta + \mu\operatorname{sen}\beta) = \mu P \qquad (1)$

Tomando momentos respecto de *A*



se tiene

$$L\,F \operatorname{sen}(\beta - \alpha) - L/2\,P \cos\alpha = 0 \qquad F \operatorname{sen}(\beta - \alpha) = P/2 \cos\alpha \qquad (2)$$

De (1) y (2) se obtiene

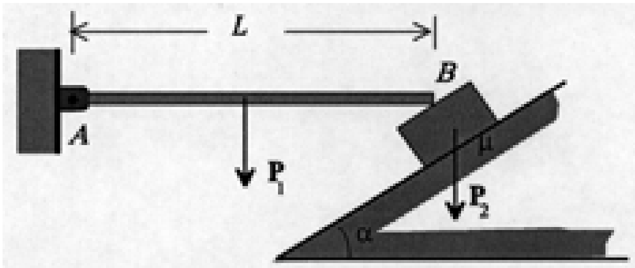
$$\cos\alpha = 2\mu\,\frac{\operatorname{sen}(\beta - \alpha)}{\mu \operatorname{sen}\beta + \cos\beta}$$

y operando queda la relación pedida

$$\operatorname{tg}\beta = 2\,tg\alpha + \frac{1}{\mu}$$

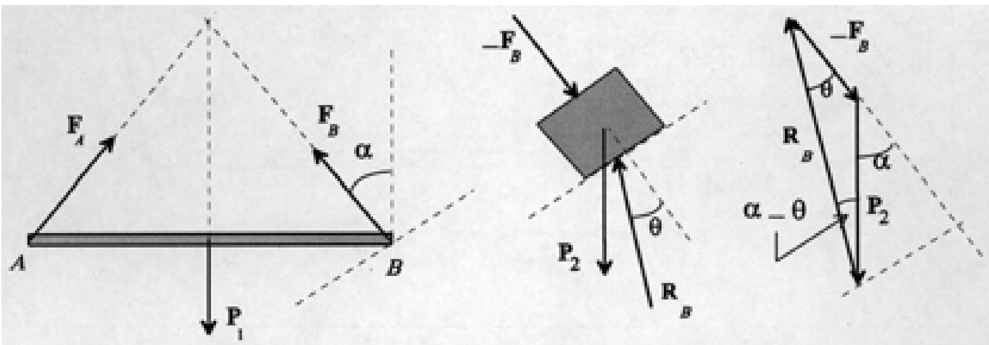
PROBLEMA 6-20

Una barra homogenea de longitud L y peso P_1 está articulada por uno de sus extremos y el otro se apoya sobre la superficie lisa del bloque de peso P_2, el cual está situado sobre un plano inclinado que formsa un ángulo α con la horizontal, tal como se muestra en la figura adjunta. Determinar el coeficiente de rozamiento μ entre el bloque y el plano, necesario para el equilibrio.



SOLUCIÓN

Diagramas del sólido libre de la barra y del bloque



Tomando momentos respecto del punto$A$ en el diagrama del sólido libre de la barra se tiene

$$-P_1\,\frac{L}{2} + L F_B \cos\alpha = 0 \quad\Rightarrow\quad F_B = \frac{P_1}{2\cos\alpha} \tag{1}$$

En el triángulo de fuerzas del bloque se tiene

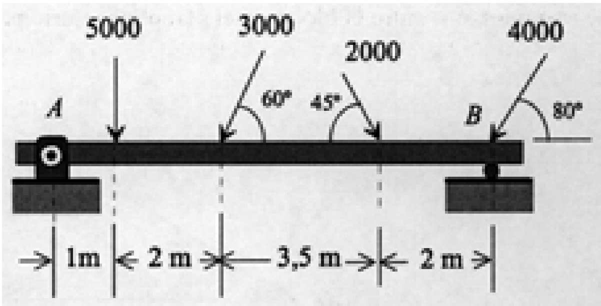
$$\frac{F_B}{\operatorname{sen}(\alpha-\theta)} = \frac{P_2}{\operatorname{sen}\theta} \tag{2}$$

De (1) y (2) operando se obtiene el valor de μ

$$\mu = \frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{P_1/P_2 + \cos^2\alpha}$$

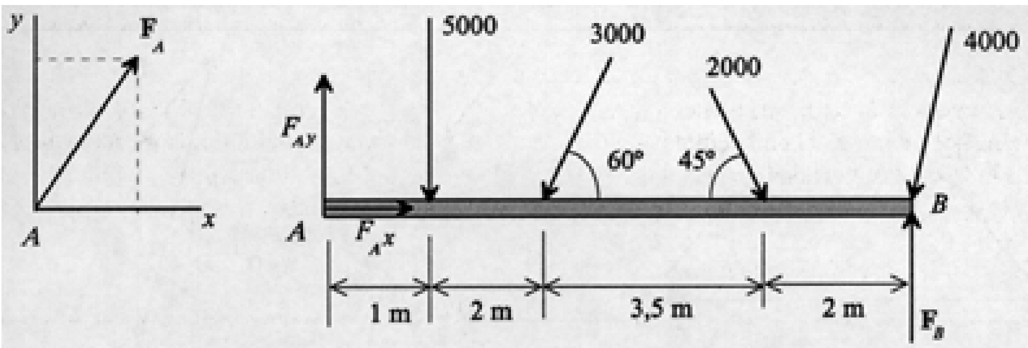
PROBLEMA 6-21

Determinar las reacciones en la articulación A y en el apoyo liso B que se ejercen sobre la viga de la figura adjunta. Considerar el peso de la viga despreciable frente a la carga, dada en kg.



SOLUCIÓN

Diagrama del sólido libre de la barra



La reacción en la articulación A de dirección desconocida se descompone en sus componentes, según el eje x en la dirección de la barra y según el eje y perpendicular a la barra.
La condición de equilibrio está dada por

$$\Sigma F_x = 0 \quad \text{y} \quad \Sigma F_y = 0$$

que junto a la ecuación de la suma de los momentos respecto de A igual a cero, forman un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas cuya solución proporciona las reacciones pedidas. De la ecuación de los momentos se tiene

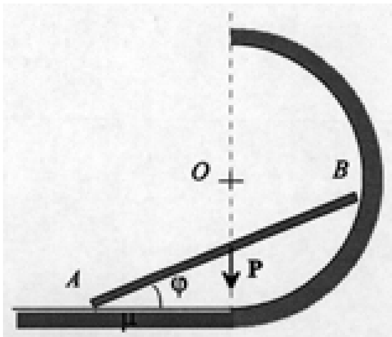
$$F_B = 6525{,}9 \ \text{kg}$$

y de la suma de las componentes de las fuerzas según el eje x y según el eje y, se tiene

$$F_{Ax} = 780{,}4 \ \text{kg} \qquad \text{y} \qquad F_{Ay} = 6425{,}5 \ \text{kg}$$

PROBLEMA 6-22

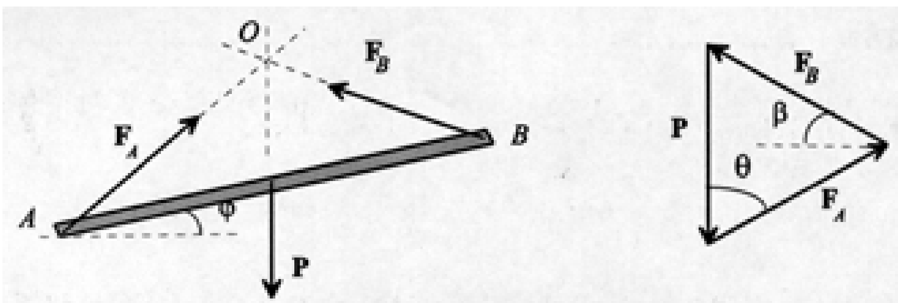
Una barra homogénea AB de peso **P** se apoya por su extremo B sobre la superficie interior lisa de un semicilindro hueco de radio R y por su extremo A sobre un suelo horizontal rugoso. La longitud L de la barra es L = 1,6 R. En la posición de equilibrio límite, el centro de gravedad de la barra está sobre el diámetro vertical del semicilindro. Determinar para dicha posición, la relación el ángulo que forma la barra con la horizontal y el coeficiente de rozamiento μ. y las reacciones en los apoyos.



SOLUCIÓN

Por su extremo B, la barra se apoya en la superficie cilíndrica lisa luego la reacción en B tiene dirección radial y se corta en O con la dirección del peso. En la situación de equilibrio, la reacción en A se ha de cortar con las otras dos fuerzas, luego pasa por el punto O. En la situación de movimiento inminente, la reacción en A forma con la normal un ángulo θ tal que tg θ = μ.

Diagrama del sólido libre de la barra

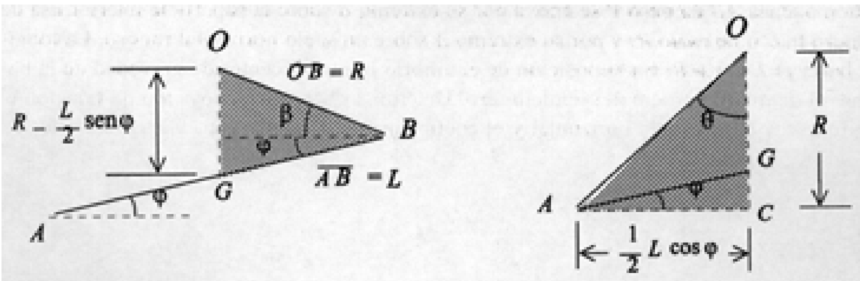


Del triángulo de fuerzas se tiene:

$$F_A \operatorname{sen} \theta = F_B \cos \beta \qquad (1)$$

$$F_B \operatorname{sen} \beta + F_A \cos \theta = P \qquad (2)$$

Consideremos los triángulos OGB y OAC de la figura adjunta.



Del primero se deduce que $$R\cos\beta = \frac{L}{2}\cos\varphi \;\Rightarrow\; \cos\beta = \frac{L}{2R}\cos\varphi \qquad (3)$$

y del segundo, teniendo en cuenta que AO es la dirección de $\mathbf{F}_A$

$$\mu = \text{tg}\,\theta = \frac{\frac{1}{2}L\cos\varphi}{R} \qquad (4)$$

y combinando las ecuaciones (3) y (4) resulta

$$\mu = \cos\beta = \frac{L}{2R}\cos\varphi \qquad (5)$$

Aplicando la ley del seno al triángulo OGB se tiene

$$\frac{R - \frac{1}{2}L\,\text{sen}\,\varphi}{\text{sen}\,(\beta + \varphi)} = \frac{\frac{1}{2}L}{\cos\beta} \qquad (6)$$

Operando en (6) queda

$$\frac{2R}{L} = \cos\varphi\,\text{tg}\,\beta + 2\,\text{sen}\,\varphi \;\text{ de (3) }\Rightarrow\; 1 = \text{sen}\,\beta + 2\cos\beta\,\text{tg}\,\varphi \;\text{ de (3) }\Rightarrow\; \text{sen}\,\beta = 1 - \frac{L}{R}\text{sen}\,\varphi$$

De la relación trigonométrica $\text{sen}^2\beta + \cos^2\beta = 1 \quad\Rightarrow\quad 3\,\text{sen}^2\varphi - 5\,\text{sen}\,\varphi + 1 = 0$

Resolviendo la ecuación de segundo grado resulta $\text{sen}\,\varphi = 0{,}2333 \quad\Rightarrow\quad \varphi = 13{,}5°$

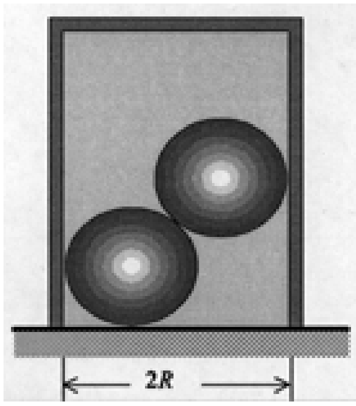
y sustituyen en la ecuación (5) se obtiene el valor de μ $\quad \mu = 0{,}8\cos\varphi = 0{,}77$

Las ecuaciones (1) y (2) proporcionan los valores de la reacciones

$$F_A = 0{,}77\,P \quad \text{y} \quad F_B = 0{,}6\,P$$

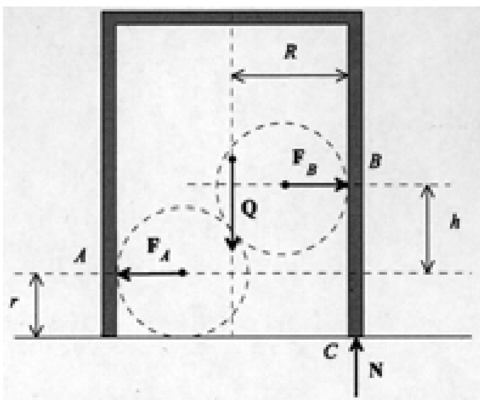
PROBLEMA 6-23

Un cilindro de radio R se opoya boca abajo sobre una superficie horizontal, tal como se muestra en la figura adjunta. En su interior hay dos esferas iguales de radio r y peso P cada una. Determinar el peso Q del cilindro para que este no vuelque. Todas las superficies se consideran lisas.



SOLUCIÓN

Diagrama del sólido libre del cilindro en la situación límite para volcar

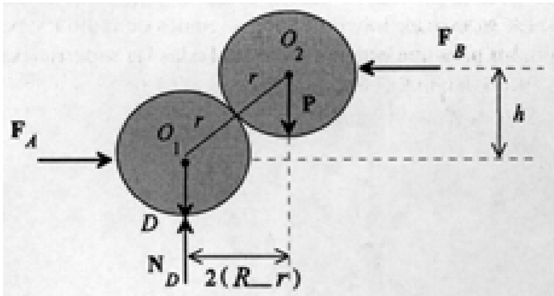


Las esferas ejercen fuerzas sobre la pared del cilindro en los puntos de contacto A y B formando un par tal como se indica en la figura anterior. En la situación de vuelco inminente, el cilindro se apoya únicamente en el punto C y el momento del peso del cilindro respecto de C, que tiende a mantener el cilindro en posición vertical, está equilibrado por el momento del par que tiende a volcarlo. Luego para que no vuelque se ha de cumplir que

$$R\,Q \geq h\,F \tag{1}$$

siendo F el módulo de las fuerzas del par. El valor mínimo de Q corresponde al igual.

Diagrama del sólido libre de las dos esferas



Suma de fuerzas igual a cero $\Rightarrow$ $\mathbf{F}_A = -\mathbf{F}_B = \mathbf{F}$ $\mathbf{N}_D = 2\,\mathbf{P}$

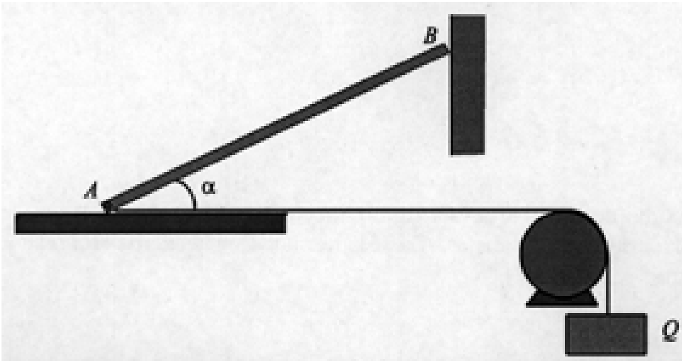
Suma de momentos respecto de O_1 igual a cero $\Rightarrow$ $F\,h = 2P\,(R - r)$ (2)

De (1) y (2) se obtiene

$$Q = 2P\left(1 - \frac{r}{R}\right)$$

PROBLEMA 6-24

Una barra homogénea de longiitud L y peso **P**, se apoya por su extremo B en una pared vertical rugosa de coeficiente μ y por su extremo A sobre un plano horizontal liso. Su extremo A está unido a un cable, de peso despreciable, que pasa por encima de un cilindro circular fijo (ver figura adjunta) de cuyo extremo pende un peso Q. El coeficiente de rozamiento entre el cable y el cilindro es μ_1. Determinar el intérvalo de valores de α para el equilibrio.

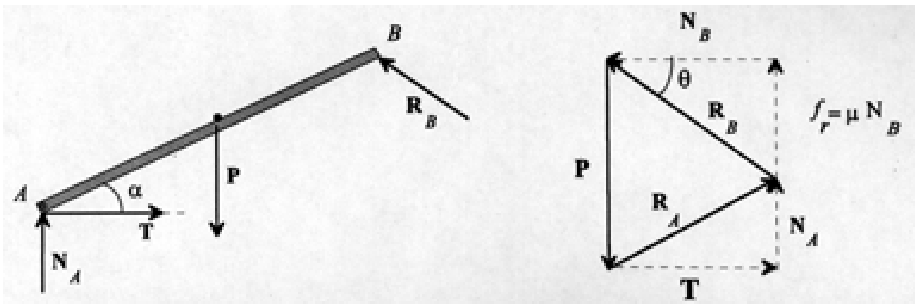


SOLUCIÓN

a) Para el valor mínimo de α , la barra está en situación de movimiento inminente hacia abajo, luego la fuerza de rozamiento en B está dirigida hacia arriba y como tiene su valor máximo, forma con la normal un ángulo tal que μ = tg θ. El extremo A de la barra tiene tendencia a desplazarse hacia la izquierda, luego la tensión T del cable está relacionada con la carga Q por la ecuación

$$T = Q\, e^{\frac{\pi \mu_1}{2}}$$

Diagrama del sólido libre para la barra



Del triángulo de fuerzas se deduce que $T = N_B$ y $N_A + \mu N_B = P$

Igualando a cero la suma de momentos respecto de A se tiene

$$-\left(P\frac{L}{2}\cos\alpha\right) + N_B\, L\,\mathrm{sen}\,\alpha + f_r\, L\cos\alpha = 0$$

Operando queda $\mathrm{tg}\,\alpha_m = \frac{1}{2}\frac{P}{T} - \mu \quad \Rightarrow \quad tg\,\alpha_m = \frac{1}{2}\frac{P}{Q}\, e^{-\frac{\pi\mu_1}{2}} - \mu$

b) Para el valor máximo de α, la barra está en movimiento inminente hacia arriba, luego la fuerza de rozamiento en B está dirigida hacia abajo. Ahora la tensión T en la cuerda está relacionada con la carga Q por la ecuación

$$T = Q e^{-\frac{\pi\mu_1}{2}}$$

De la ecuación de los momentos respecto de A igual a cero se tiene

$$\mathrm{tg}\,\alpha_M = \frac{1}{2}\frac{P}{T} + \mu \quad \Rightarrow \quad tg\,\alpha_M = \frac{1}{2}\frac{P}{Q}\, e^{\frac{\pi\mu_1}{2}} + \mu$$

La barra está en equilibrio para un ángulo α tal que

$$tg\,\alpha_m \le \alpha \le tg\,\alpha_M$$

6.15 Equilibrio de armaduras y entramados

Las estructuras articuladas consisten en un conjunto de elementos conectados entre sí en unos puntos denominados nudos. El análisis de la estructura está enfocado a determinar las fuerzas de acción y reacción entre sus elementos bajo la acción de cargas conocidas. Se consideran dos tipos particulares de estructuras: *las armaduras y los entramados*

Armaduras planas. Las armaduras están constituidas por elementos de dos fuerzas capaces de soportar grandes cargas con un peso estructural pequeño. En las *armaduras planas*, todos sus elementos están contenidos en el mismo plano, y todas las cargas aplicadas deben de estar contenidas en el plano de la armadura. Los elementos de la armadura son en general barras delgadas unidas por sus extremos, que sólo pueden soportar pequeñas cargas laterales, por lo que las cargas deben de aplicarse únicamente en los nudos. En realidad, las barras están conectadas mediante uniones roblonadas, remachadas o soldadas a una placa, pero al estudiar su equilibrio, estas uniones se sustituyen por pasadores ideales exentos de rozamiento constituyendo una simplificación aceptable, de lo que resulta que las fuerzas que actúan en cada extremo de una barra se reducen a una única fuerza, sin que exista ningún par.

Frecuentemente en el análisis de las armaduras se desprecia el peso de las barras, hipótesis que resulta aceptable en el caso de armaduras pequeñas. En el caso de armaduras de puente grande se supone que los pesos de las barras están aplicados en los nudos, de tal manera que se aplica la mitad del peso de la barra sobre cada uno de los nudos a los que está conectada. Como resultado de estas hipótesis, cada elemento de la armadura sólo soporta fuerzas en sus extremos y del equilibrio de la barra se deduce que estas fuerzas han de ser fuerzas axiales según se indica en la figura 6-27 a).

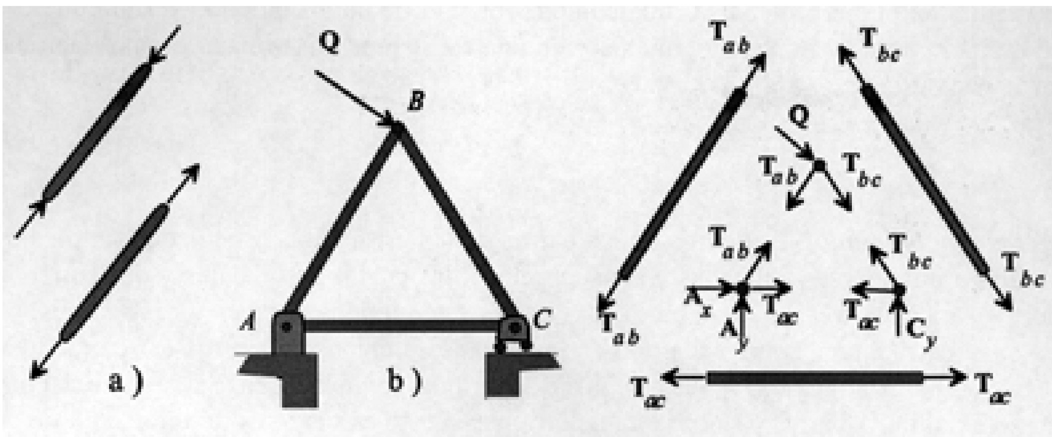


Fig. 6-27

Un determinado elemento de la armadura puede trabajar a tracción o a compresión, según que las fuerzas en sus extremos tiendan a estirar la barra o a acortarla. En su forma más sencilla, una armadura como la representada en la figura 6-27 b) consiste en un conjunto de elementos de dos fuerzas unidos por pasadores sin rozamiento. Para mantener la forma de la armadura al someterla a cargas, las armaduras han de ser estructuras rígidas, y la estructura más sencilla que mantiene su forma, con independencia de como este apoyada, es el triángulo.

Una estructura tal como la representada en la figura 6-28 a) es una estructura rígida ya que al someterla a una carga en B permanecerá prácticamente inalterada en su forma. Podemos ampliar una estructura de este tipo si se añaden dos nuevas barras unidas a nudos diferentes y se conectan sus extremos libres entre si, figura 6-28 b).

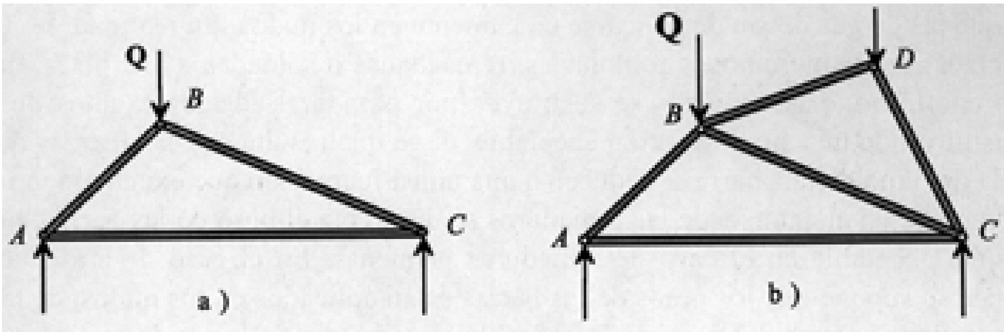


Fig. 6-28

Una estructura construida de esta manera se denomina *armadura simple.* En el proceso de formación de una estructura simple a partir del triángulo base, se observa que por cada nuevo triángulo, el número de barras aumenta en dos y el de nudos en uno. Resulta que el número de barras m y el número de nudos n de una estructura así formada están relacionados por la ecuación

$$m = 2\,n - 3 \qquad (6\text{-}49)$$

Método de los nudos. Cada una de las barras de las estructuras articuladas simples están sometidas a dos fuerzas aplicadas en sus extremos, las cuales son iguales y de sentido contrario y dirigidas a lo largo de la barra. Las barras están unidas entre si por pasadores, y por tanto, cada barra ejerce sobre cada uno de los pasadores colocados en sus extremos, fuerzas de reacción que son iguales, opuestas y dirigidas a lo largo de la barra. Su valor se denomina esfuerzo axial de la barra, y se trata de determinar si este esfuerzo es de tracción o de compresión para cada una de las barras. Los pasadores estarán en equilibrio sometidos a las fuerzas que les ejercen las barras que concurren en cada uno de ellos.

En una estructura formada por m barras tenemos $n = 1/2\,(m + 3)$ nudos y el mismo número de pasadores. Las condiciones de equilibrio de la estructura se establecen mediante las n condiciones de equilibrio de los nudos, imponiendo que las resultantes de las fuerzas en los

n nudos son nulas $\mathbf{R}_i = 0$ para $i = 1,2, \ldots\ldots n$. Las n ecuaciones vectoriales constituyen un sistema de 2 n ecuaciones escalares que permite determinar $m + 3$ incógnitas, proporcionando el valor de los esfuerzos axiales de las barras asi como las componentes de las reacciones en los apoyos. En los nudos pueden concurrir dos o más barras y soportar cargas o estar descargados, dando lugar a situaciones de equilibrio con condiciones excluyentes. Cuando en un nudo concurren dos barras, estas pueden estar alineadas o formando un cierto ángulo. Si están alineadas, el pasador está sometido a un par de fuerzas en su misma dirección y por tanto este nudo no puede soportar ningún tipo de carga, figura 6-29 a). Si forman un cierto ángulo y no hay carga, para que exista equilibrio los esfuerzos axiales deben ser nulos. Estas barras no trabajan y se denominan barras descargadas, figura 6-28 b).

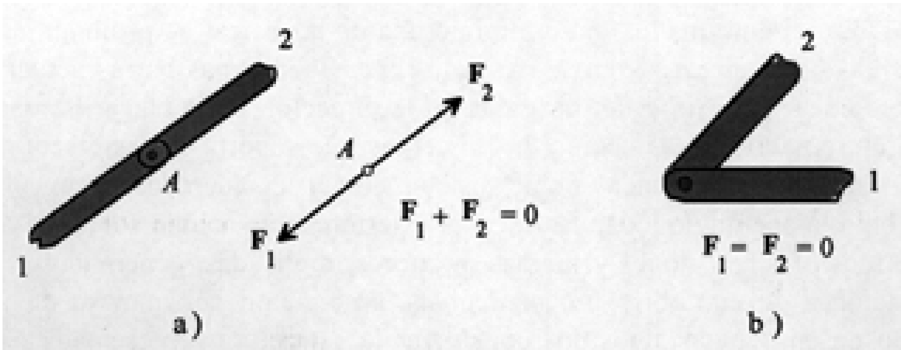


Fig. 6-29

Cuando en un nudo concurren tres barras y no hay carga, la condición de equilibrio del pasador implica que la barra 3 está descargada, figura 6-30 a).

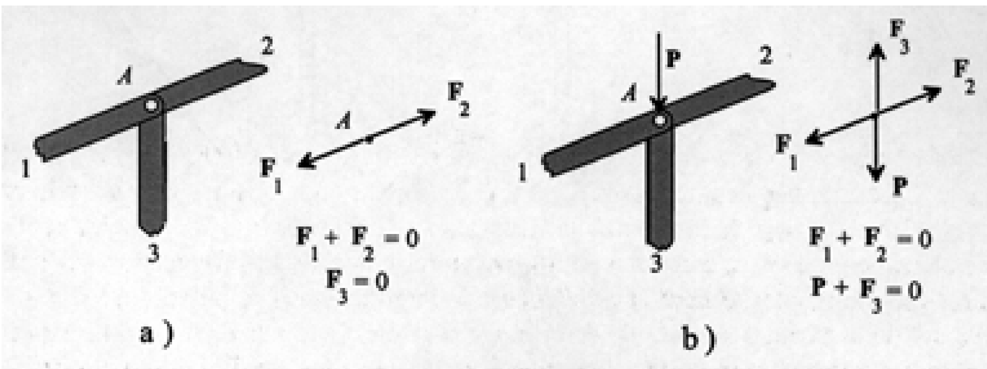


Fig. 6-30

Si en el nudo hay una carga en la dirección de la barra 3 el esfuerzo axial de esta barra es igual a la carga Q, figura 6-30 b). Si la carga **Q** tiene una dirección arbitraria los esfuerzos $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ no son iguales.

Método de las secciones. Cuando en una estructura articulada se pretende determinar únicamente los esfuerzos en un número reducido de barras, el método de los nudos no es el más apropiado ya que implica la determinación de todos los esfuerzos. Se puede eliminar el cálculo de los esfuerzos en las barras que no intervienen si se recurre al método de las secciones. Ya que la estructura en su conjunto está en equilibrio, cada una de sus partes también lo está. Podemos individualizar una sección de la estructura en la cual intervenga la barra de la cual interesa determinar su esfuerzo, prescindiendo del resto de la estructura. La sección se considera como un sólido rígido en equilibrio, al cual se le aplica $\sum \mathbf{F} = 0$ y $\sum \mathbf{M} = 0$, sistema que nos proporcionará el valor del esfuerzo deseado. Este método es útil para determinar esfuerzos en estructuras articuladas compuestas por la unión de estructuras simples.

Entramados. En un entramado, como mínimo una de las barras se prolonga más allá del pasador pudiendo soportar cargas en su extremo libre. Sobre estas barras actuaran más de dos fuerzas que en general no están dirigidas en la dirección de la barra. La condición de equilibrio del entramado bajo la acción de las cargas que soporta se establece imponiendo las condiciones de equilibrio a cada uno de sus elementos, considerados como sólidos libres en equilibrio bajo la acción de todas las fuerzas exteriores que actúan sobre él. Aparecerán de esta forma todas las reacciones y fuerzas interiores implicadas, generando un cierto número de ecuaciones de equilibrio independientes, en función del número de incógnitas. Como ejemplo de entramado, podemos considerar la estructura representada en la figura 6-31 a).

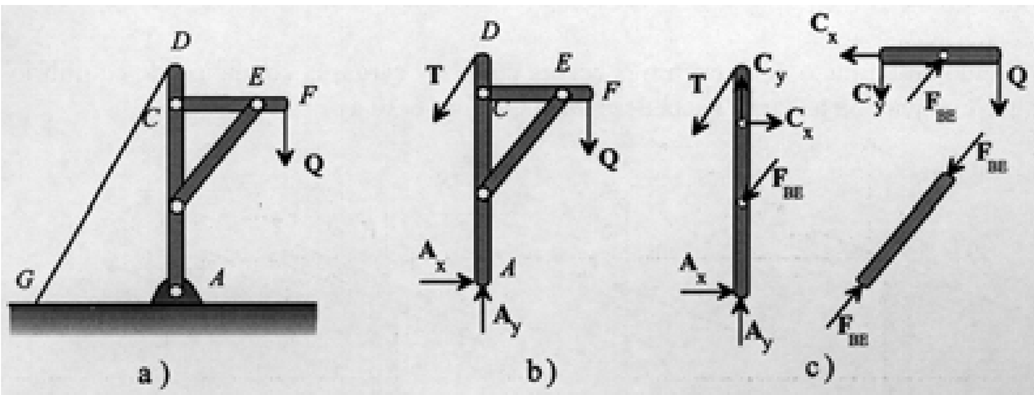
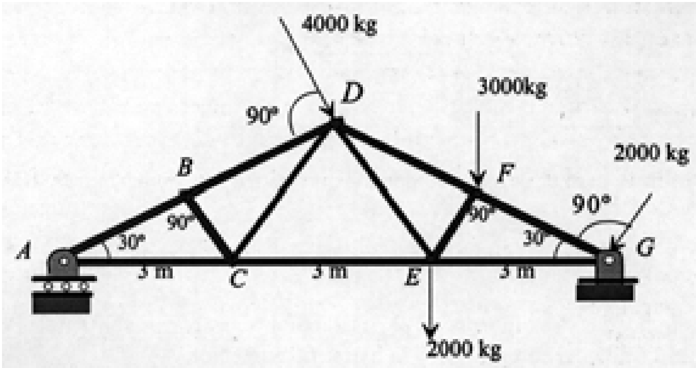


Fig. 6-31

En la figura 6-31b) se representa el equilibrio de la estructura en su conjunto, en la cual no aparecen las fuerzas interiores entre las distintas piezas. Para determinar las fuerzas interiores del entramado, es necesario desmontar éste y dibujar el diagrama del sólido libre de cada uno de los elementos, figura 6-31 c). Las fuerzas que actúan en los extremos de las barras tienen el mismo módulo, la misma recta soporte y sentidos opuestos.

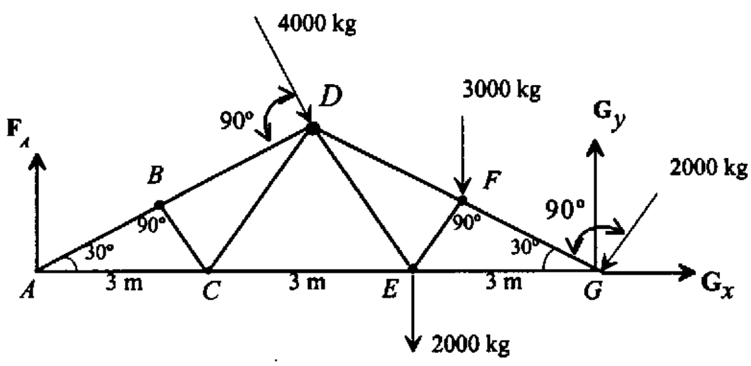
PROBLEMA 6-23

Determinar los esfuerzos axiales en los elementos *BD*, *CD*, *CE* , *DE*, *DF* y *EF* de la estructura de la figura adjunta.



SOLUCIÓN

Primero se determinan las reacciones en los apoyos considerando la estructura como un sólido libre. La reacción en el apoyo liso *A* es vertical y en la reacción desconocida en la articulación *G* se descompone en sus componentes según el eje *x* y el eje *y*.



De la figura se deduce que la distancia $\overline{FG} = 2,6$ m y la distancia $\overline{DG} = 5,2$ m

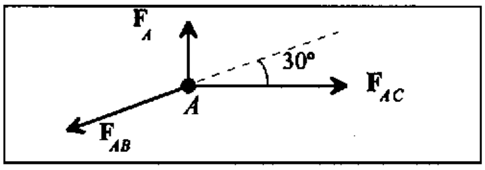
De la ecuación $\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad G_x = 1000$ kg

De la ecuación $\sum M_G = 0 \quad \Rightarrow \quad F_A = 2570$ kg

De la ecuación $\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad F_A = 8464 - G_y \quad \Rightarrow \quad G_y = 5894$ kg

En el nudo B concurren tres barras y no hay carga, luego la barra BC no trabaja, es decir, está descargada

Equilibrio en el nudo A. Las fuerzas que actúan sobre el pasador en A se representan en la siguiente figura.

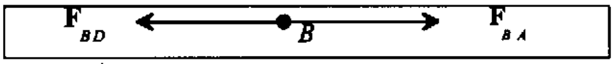


De la condición de equilibrio para el punto A se deduce que las fuerzas de las barras AB y AC sobre el pasador A son :

$$F_{AB} = \frac{F_A}{\cos 60^\circ} = 5140 \text{ kg} \quad \text{y} \quad F_{AC} = F_{AB} \cos 30^\circ = 4451 \text{ kg}$$

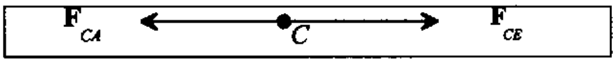
cuyos sentidos son los indicados. Las fuerzas de el pasador sobre las barras son iguales pero de sentidos opuestos, luego la AB trabaja a compresión y la barra AC a tracción.

Equilibrio en el nudo B.



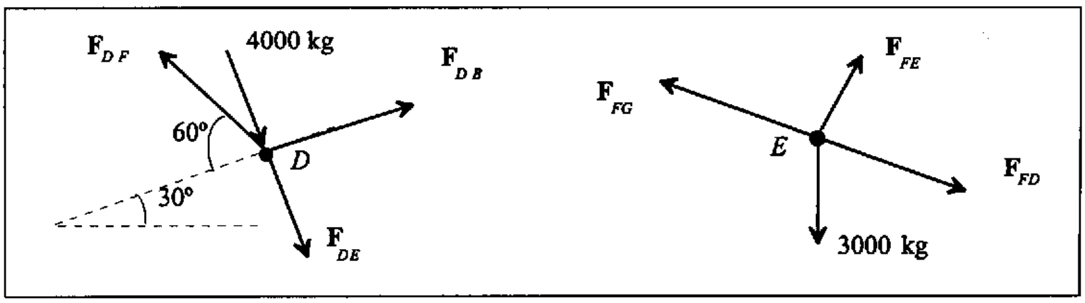
La fuerza sobre la barra BD es $F_{BD} = F_{AB} = 5140 \text{kg}$ y la barra BD trabaja compresión.

Equilibrio en el nudo C. El nudo C no soporta carga y en él concurren 4 barras, pero la barra BC está descargada $F_{BC} = 0$, y la condición de equilibrio obliga a que la barra CD este descargada $F_{CD} = 0$



La fuerza en la barra CE es $F_{CE} = F_{AC} = 4451$ kg y trabaja a tracción.

Equilibrio en el nudo D y en el nudo E

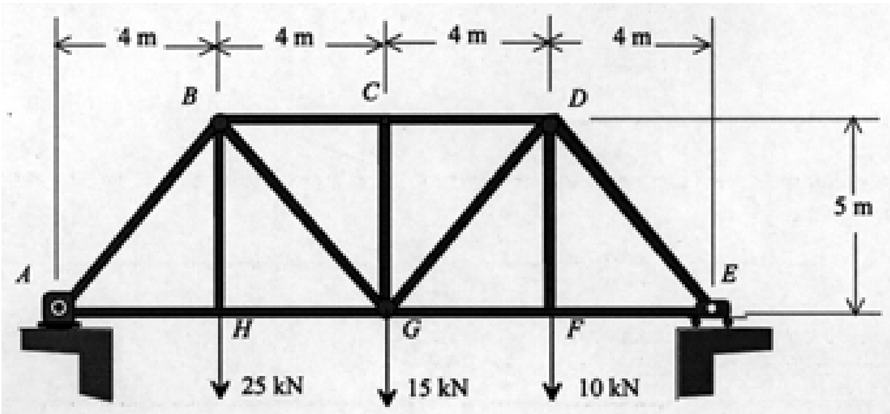


La carga de 4000 kg es perpendicular BD y la barra DE también forma 90º con la barra BD. De la condición de equilibrio se deduce que $F_{DB} = F_{DF} \cos 60^\circ \Rightarrow F_{DF} = 10280$ kg y $F_{DF} \cos 30^\circ = 4000 + F_{DE} \Rightarrow F_{DE} = 4902$ kg , luego la barra DF trabaja a compresión y la barra DE a tracción.

En el nudo E concurren tres barras y hay una carga de 3000 kg, luego la fuerza sobre el pasador debida a la barra EF vale $F_{FE} = 3000 \cos 30^\circ = 2592$ kg y la barra trabaja a compresión.

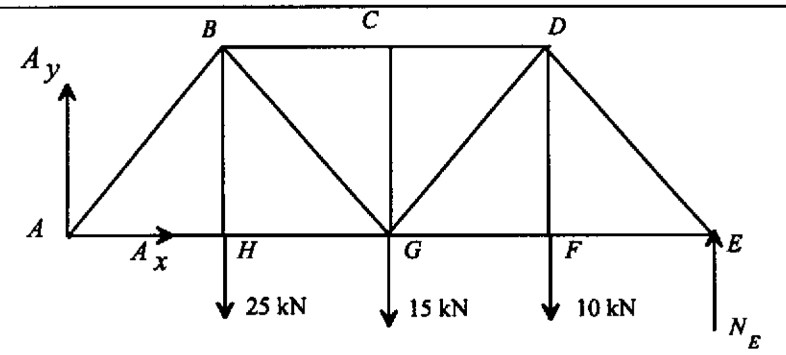
PROBLEMA 6-24

Determinar los esfuerzos axiales en las barras *BC*, *BG* y *GH* de la armadura de puente representada en la figura adjunta.



SOLUCIÓN

Determinemos las reacciones en los apoyos considerando la armadura como un sólido libre.



Tomando momentos respecto de A se obtiene la reacción normal en el apoyo E.

$$\Sigma M_A = -100\,\text{kNm} - 120\,\text{kNm} - 120\,\text{kNm} + 16\,N_E = 0 \Rightarrow N_E = 21250\,N$$

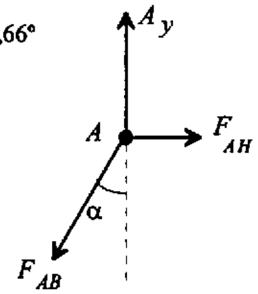
No hay carga en sentido horizontal, luego $A_x = 0$ y de igualar a cero la suma de fuerzas respecto de y queda $A_y = 50$ kN. De la figura se obtiene que el ángulo que forma la barra AB con el eje y está dado por

$$\text{tg}\,\alpha = 0{,}8 \Rightarrow \alpha = 38{,}66^\circ$$

Como en el nudo C no hay carga, la barra CG está descargada.

Equilibrio del nudo A.

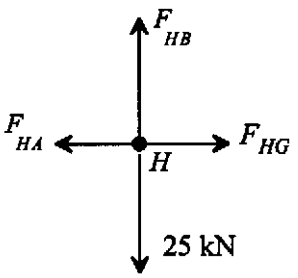
$\alpha = 38{,}66°$



$F_{AB} = 64$ kN ; la barra *AB* trabaja a compresión

$F_{AH} = 40$ kN ; la barra *AH* trabaja a tracción

Equilibrio del nudo H.

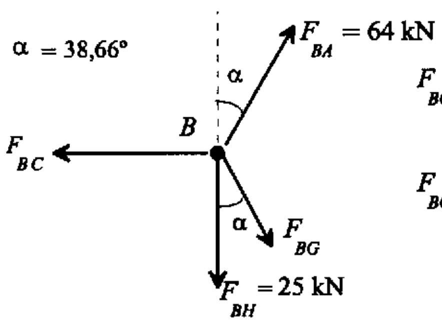


$F_{HG} = 40$ kN ; la barra *GH* trabaja a tracción

$F_{HB} = 25$ kN ; la barra *HB* trabaja a tracción

Equilibrio del nudo B.

$\alpha = 38{,}66°$

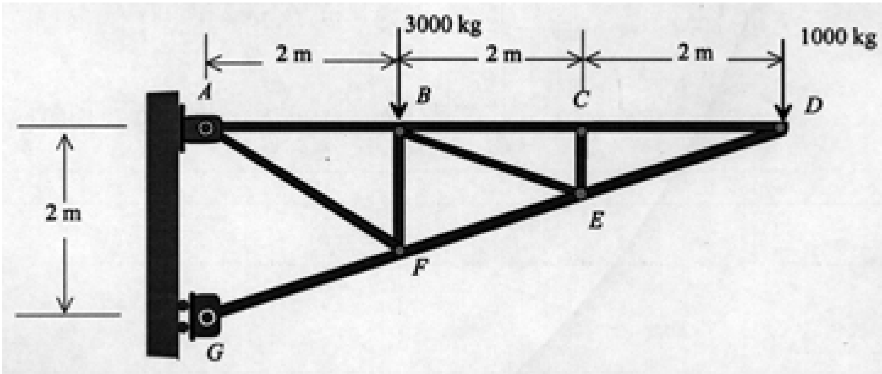


$F_{BG} = 32$ kN ; la barra *BG* trabaja a tracción

$F_{BC} = 60$ kN ; la barra *AH* trabaja a compresión

PROBLEMA 6-25

Determinar las fuerzas en todos los elementos de la viga armada en voladizo que se representa esquemáticamente en la figura adjunta.

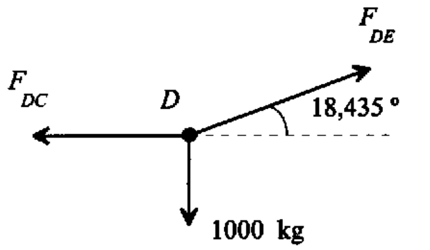


SOLUCIÓN

Del nudo *C* se deduce que la barra *CE* no trabaja, y del nudo *E* que la barra *BE* tampoco trabaja.. El ángulo de las barras en el nudo *D* es $\operatorname{tg} \alpha_D = 1/3$; $\alpha_D = 18,435°$. De la armadura se deduce que la longitud de la barra *BF* es $\overline{BF} = 4/3$. El ángulo de las barras en *A* es

$$\operatorname{tg} \alpha_A = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \alpha_A = 33,69°$$

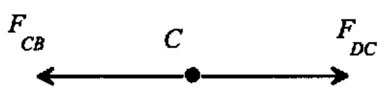
Equilibrio del nudo D



$F_{DE} = 3162,27$

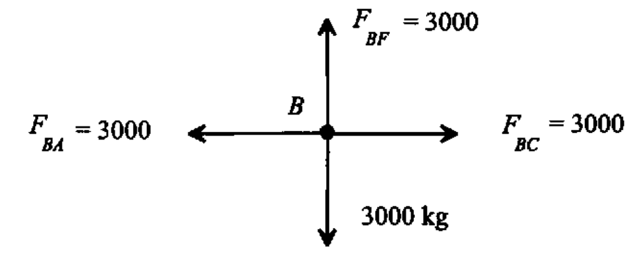
$F_{DC} = 3000$

Equilibrio en el nudo C

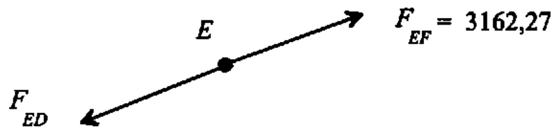


$F_{CB} = F_{DC} = 3000$

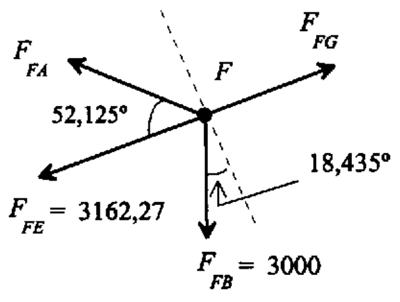
Equilibrio en el nudo B



Equilibrio en el nudo E



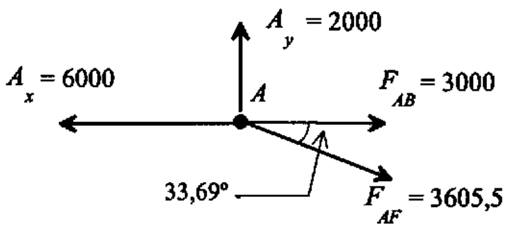
Equilibrio en el nudo F



$$F_{FA} = \frac{3000 \cdot \cos 18{,}435}{\text{sen } 52{,}125} = 3605{,}5 \text{ kg}$$

$$F_{FG} = 3162{,}27 + 3000 \cdot \text{sen } 18{,}435 + 3605{,}5 \cdot \cos 52{,}125 = 6324{,}55 \text{ kg}$$

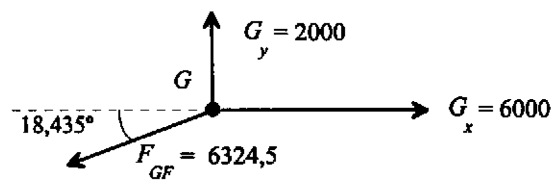
Equilibrio del nudo A



$$F_{AB} + F_{AF} \cos 33{,}69 - A_x = 0$$

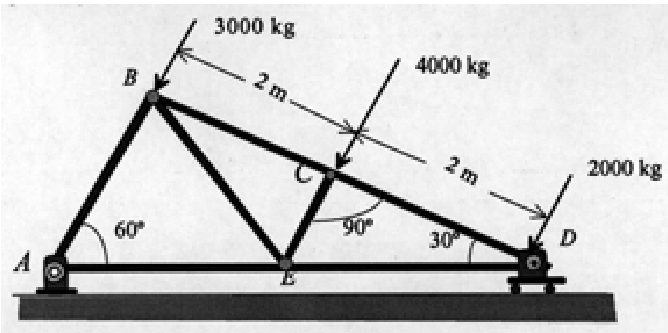
$$A_y - F_{AF} \text{ sen } 33{,}69 = 0$$

Equilibrio en el nudo G



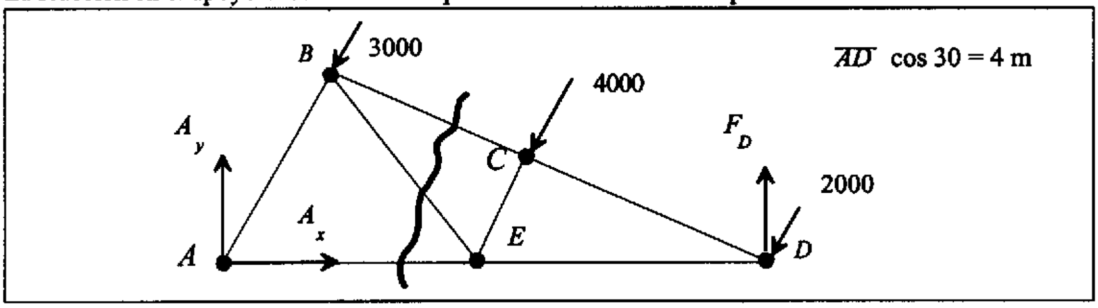
PROBLEMA 6-26

Determinar los esfuerzos axiales de todos los elementos de la estructura esquemáticamente representada en la figura adjunta.



SOLUCIÓN

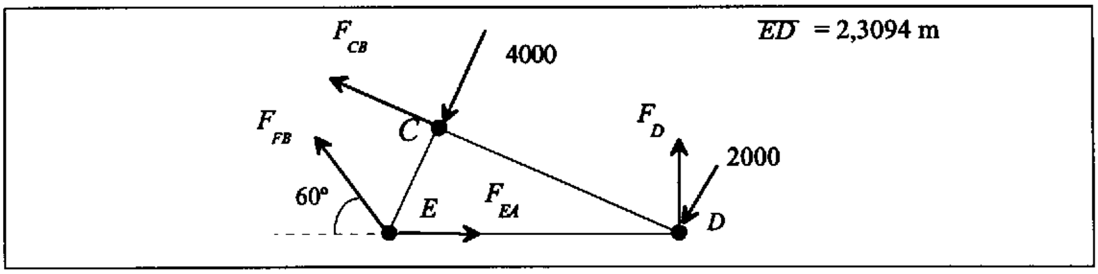
La reacción en el apoyo D se determina aplicando la condición de equilibrio a la armadura.



$$\sum \mathbf{M}_A = 0 \qquad -8000 - 8000 + F_D\,\overline{AD} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_D = 3464 \text{ kg}$$

Método de las secciones

Tomamos la parte derecha del corte de la figura anterior.



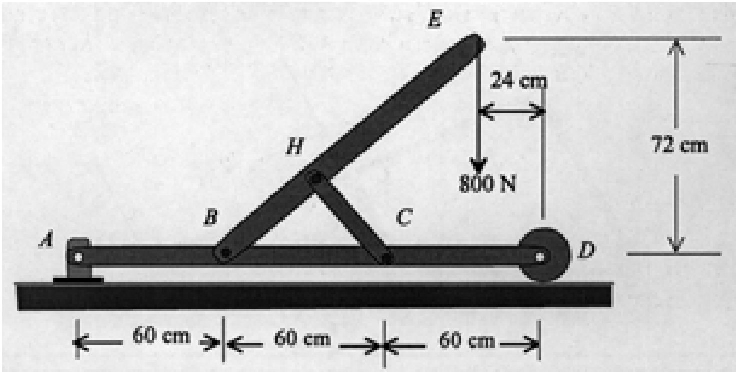
$$\sum \mathbf{M}_E = 0 \qquad -4000 + F_D\,\overline{ED} + F_{CB}\,\overline{EC} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{CB} = -3464 \text{ kg}$$

$$\sum \mathbf{M}_D = 0 \qquad 8000 - \overline{ED}\,F_{EB}\,\text{sen}\,60^\circ = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{EB} = 4000 \text{ kg}$$

$$\sum \mathbf{F}_X = 0 \qquad F_{EA} - 3000 - 2000 + 3000 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{EA} = 2000 \text{ kg}$$

PROBLEMA 6-27

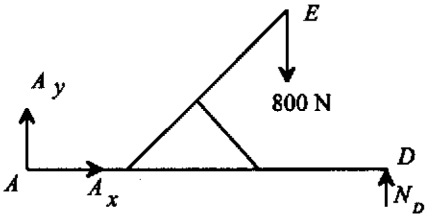
Determinar las fuerzas que se ejercen sobre la barra *ABCD* del entramado representado en la figura adjunta.



SOLUCIÓN

De la figura se deduce que la barra *BE* tiene una longitud de $\overline{BE} = \sqrt{72^2 + 96^2} = 120$ cm y forma con la horizontal un ángulo dado por $\operatorname{tg}\alpha = 72/96 \Rightarrow \alpha = 36{,}87°$. La longitud *BH* es $\overline{BH} = 60 \cos 36{,}87 = 48\,\text{cm}$

Apliquemos la condición de equilibrio para el entramado considerado como un sólido libre.



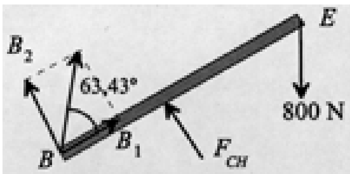
$\Sigma M_A = 0 \rightarrow (-1{,}56)\,800 + 1{,}8 N_D = 0$

$N_D = 693{,}33$ N

$\Sigma F_x = 0 \rightarrow A_x = 0$

$\Sigma F_y = 0 \rightarrow A_y = 106{,}66$ N

Equilibrio de la barra *BE*.



$\Sigma M_B = 0 \longrightarrow (-120)\,640 + 48 F_{CH} = 0 \quad F_{CH} = 1600$ N

$\Sigma F_1 = 0 \longrightarrow B_1 = 480$ N

$\Sigma F_2 = 0 \longrightarrow B_2 = -960$ N

Fuerzas sobre la barra *ABCD*.

$\mathbf{F}_A = 106{,}66\,\mathbf{j}$

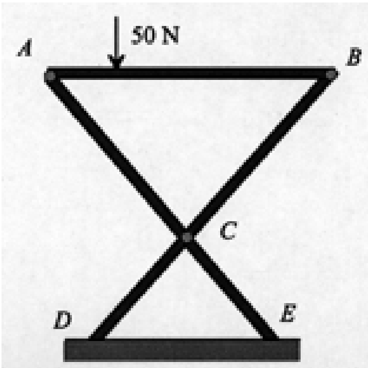
$\mathbf{F}_B = -960\,\mathbf{i} + 480\,\mathbf{j}$

$\mathbf{F}_C = 960\,\mathbf{i} - 1280\,\mathbf{j}$

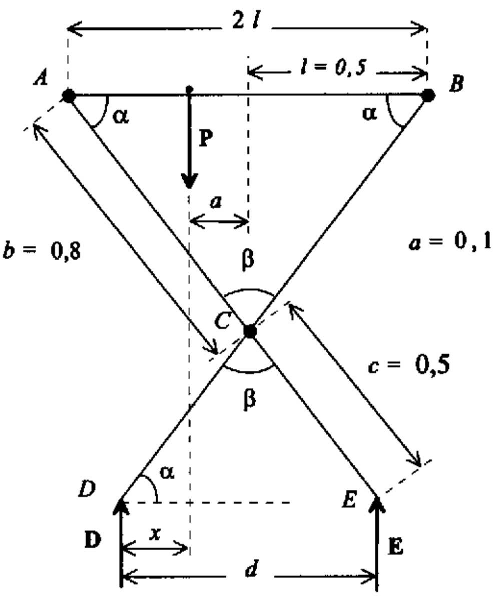
$\mathbf{N}_D = 693{,}33\,\mathbf{j}$

PROBLEMA 6-28

La estructura articulada de la figura está constituida por una barra AB de 1 m. de longitud y dos barras iguales AE y BD de 1,3 m. de longitud. Estas barras están articuladas en el punto C siendo AC y BC iguales a 0,8 m. Se ejerce una fuerza vertical y hacia abajo de 50 N a una disntancia de 10 cm. a la izquierda del punto medio de la barra AB. Calcular: a) las reacciones en los apoyos D y E ; b) las fuerzas ejercidas en las articulaciones A y C sobre la barra AE .



SOLUCIÓN



Para el sistema $\sum \mathbf{F} = 0$ $\quad \mathbf{D} + \mathbf{E} - \mathbf{P} = 0$ (1)

$\sum \mathbf{M}_D = 0$ $\quad -\mathbf{P}\,x + \mathbf{E}\,d = 0$ (2)

en donde $$x = d/2 - a$$

Cálculo de d. Empleando la ley del seno en el triángulo *DCE* se tiene $\dfrac{d}{\operatorname{sen}\beta} = \dfrac{c}{\operatorname{sen}\alpha}$

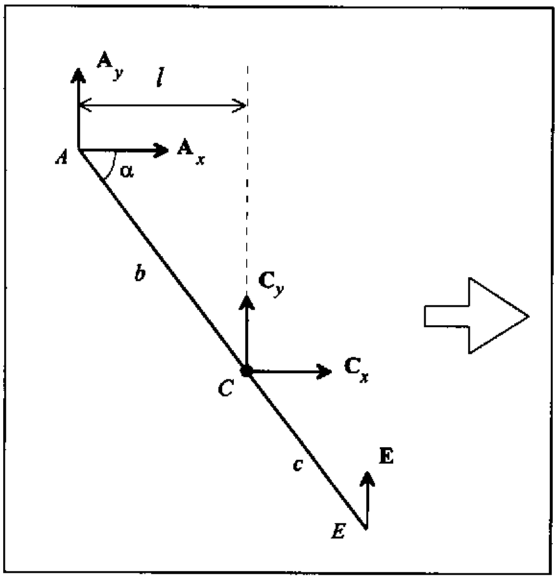
y en el triángulo *ACB* $$\frac{2l}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{b}{\operatorname{sen}\alpha}$$

de donde $$\frac{d}{2l} = \frac{c}{b} \qquad d = \frac{5}{8}\ \text{m.}$$

Para x queda $$x = 5/16 - 1/10 = 17/80\ \text{m.}$$

De (2) $E = (x/d)\,P = 17$ N y de (1) $D = 33$ N

Fuerza en las articulaciones

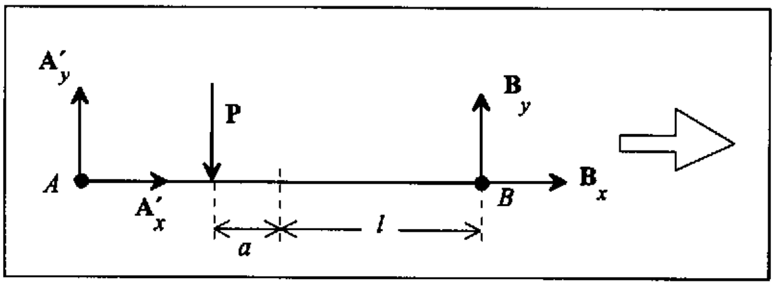


$$\sum \mathbf{F} = 0 \qquad \left\{ \begin{array}{l} A_x + C_x = 0 \\ A_y + C_y + E = 0 \end{array} \right\}$$

$$\sum \mathbf{M}_A = 0$$

$$E\left(l + \tfrac{d}{2}\right) + C_y\, b\cos\theta + C_x\, b\operatorname{sen}\theta = 0$$

$$A_x = -A'_x$$
$$A_y = -A'_y$$



$$\sum \mathbf{M}_B = 0$$

$$(-2l)A'_y + (l+a)P = 0$$

$$A'_y = 30\ \text{N.}$$

Para C_y tenemos: $C_y = 13$ N , $C_x = -A_x = -32{,}5$ N