6.6 Componentes de una fuerza

Para que una fuerza quede completamente defina es necesario dar su módulo, dirección y sentido; además, las fuerzas cumplen con la ley del paralelogramo, luego son magnitudes físicas vectoriales. La acción de una fuerza sobre un cuerpo quede especificada si se conoce el punto de aplicación de la fuerza, y según el principio de transmisibilidad, la acción no cambia al desplazar la fuerza sobre su línea soporte, es decir, los vectores representativos de las fuerzas son vectores deslizantes. De está forma, todas las operaciones y propiedades definidas definidos en el Capítulo I para los vectores deslizantes, son aplicables directamente a las fuerzas, adquiriendo dichas operaciones matemáticas contenido físico.

En la estática se considera el equilibrio de partículas y el equilibrio de sólidos rígidos. En el caso de las fuerzas que actúan sobre una partícula, sus vectores representativos tienen un punto de aplicación bien determinado, que es el punto definido por la propia partícula. Cuando sobre la partícula actúan dos fuerzas, la dirección, sentido y módulo de la resultante se determina con la regla del paralelogramo, figura 6-12.

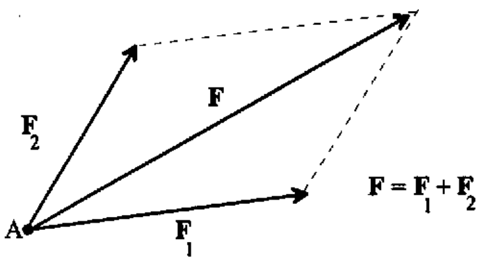


Fig.6-12

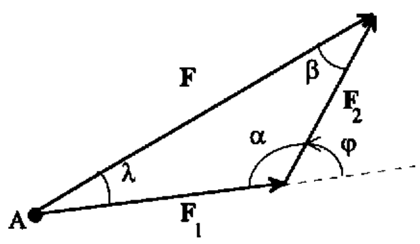


Fig. 6-13

Recíprocamente, dada una fuerza **F**, existen infinitos conjuntos de dos fuerzas que cuya suma es la fuerza **F**. El proceso de sustituir una fuerza por dos o más fuerzas, se denomina *descomponer* la fuerza **F** en *componentes*. En la figura 6-13 se representa el triángulo de fuerzas formado por las dos fuerzas y su resultante. Aplicando la ley del coseno al triángulo de fuerzas se deduce inmediatamente que el módulo de la resultante está dado por

$$F^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2\,F_1\,F_2 \cos\varphi \qquad (6\text{-}14)$$

siendo F_1 y F_2 los módulos de $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ respectivamente y φ el ángulo que forman. Aplicando la ley del seno al triángulo de fuerzas se obtiene la relación entre los módulos de las tres fuerzas

$$\frac{F}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{F_1}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{F_2}{\operatorname{sen}\lambda} \tag{6-15}$$

Las igualdades (6-15) son de gran utilidad para la resolución de problemas de equilibrio en los que intervienen tres fuerzas no paralelas. En el sistema de coordenadas cartesianas asociado a la referencia respecto de la cual se determina el equilibrio, la fuerza **F** se expresa como

$$\mathbf{F} = F_x\,\mathbf{i} + F_y\,\mathbf{j} + F_z\,\mathbf{k} = \mathbf{F}_x + \mathbf{F}_y + \mathbf{F}_z \tag{6-16}$$

donde F_x, F_y y F_z son las ***componentes escalares*** de la fuerza, siendo $\mathbf{F}_x$, $\mathbf{F}_y$ y $\mathbf{F}_z$ sus componentes vectoriales. Cuando no exista posibilidad de confusión, se utilizará indistintamente el término componentes para designar tanto a las escalares como a las vectoriales. La expresión de la fuerza **F** en componentes rectangulares permiten determinar inmediatamente el módulo y los cosenos directores

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \tag{6-17}$$

$$\frac{F_x}{\cos\theta_x} = \frac{F_y}{\cos\theta_y} = \frac{F_z}{\cos\theta_z} = F \tag{6-18}$$

Sustituyendo en (6-16) las expresiones de F_x, F_y y F_z obtenidas de (6-18), se tiene

$$\mathbf{F} = F(\cos\theta_x\,\mathbf{i} + \cos\theta_y\,\mathbf{j} + \cos\theta_z\,\mathbf{k}) = F\,\mathbf{u}$$

donde **u** es un vector unitario con la misma dirección y sentido que **F**.

6.7 Momento de una fuerza

Momento de una fuerza respecto de un punto. Sustituyendo en la definición del momento de un vector deslizante respecto de un punto el vector por la fuerza, se tiene la definición de el momento de la fuerza respecto de un punto. Veamos el contenido físico de dicha operación. Sea **F** una fuerza que actúa sobre un cuerpo y A un punto cualquiera perteneciente a la recta soporte de **F**, figura 6-14.

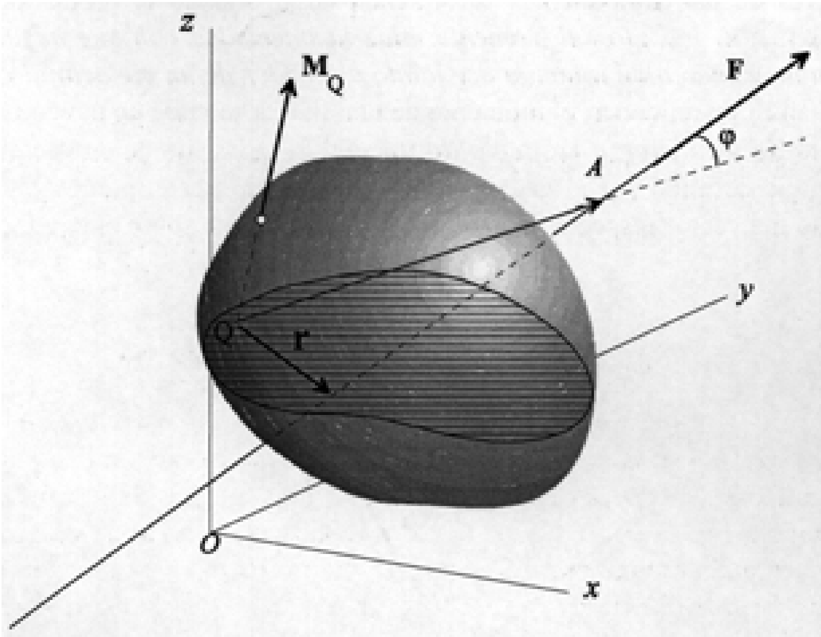


Fig. 6-14

De la definición de momento de un vector respecto de un punto se tiene que el momento de **F** respecto de un punto Q del sólido rígido, figura 6-14, es el vector $\mathbf{M}_Q$ dado por

$$\mathbf{M}_Q = \overrightarrow{QA} \wedge \mathbf{F} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{F} \tag{6-19}$$

donde **r** es el vector correspondiente a la perpendicular bajada de Q a la recta soporte de **F**. El módulo del momento es

$$M_Q = \overline{QA}\ F \operatorname{sen} \varphi = r\,F \tag{6-20}$$

donde r es la distancia de Q a la recta soporte de **F**. En componentes rectangulares el momento de la fuerza es

$$\mathbf{M}_Q = M_x\ \mathbf{i} + M_y\ \mathbf{j} + M_z\ \mathbf{k} \tag{6-21}$$

Los valores de las componentes se obtienen desarrollando el producto vectorial de la ecuación (6-19). *El módulo del momento mide la intensidad con que la fuerza* **F** *tiende a producir un movimiento de rotación del sólido alrededor de un eje definido por* $\mathbf{M}_Q$ *aplicado en* Q. En el SI de unidades, el momento de una fuerza se mide en newton metro (N.m).

Momento de una fuerza respecto de un eje. El momento de un vector deslizante respecto de un eje definido por el vector unitario **u** pasando por el punto Q, es la proyección del momento del vector respecto de uno de los puntos del eje sobre el eje, figura 6-15.

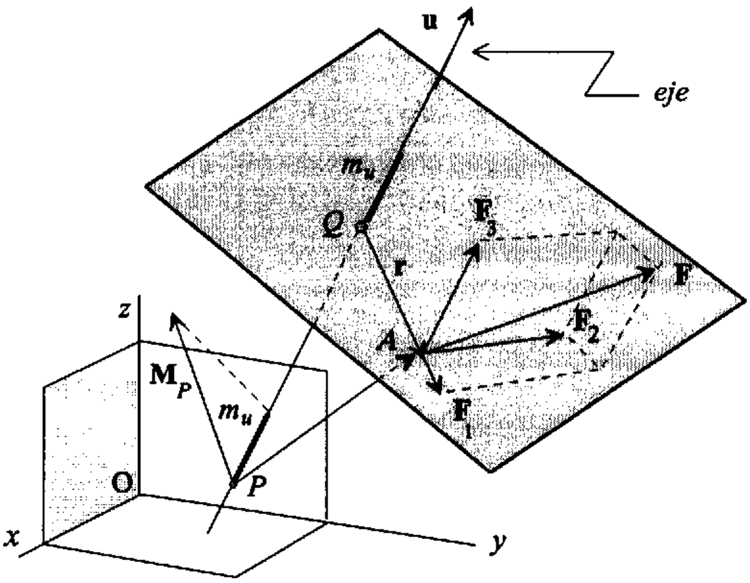


Fig. 6-15

De la definición se tiene, que si A es un punto de la recta soporte de **F**, el momento de la fuerza respecto del eje es

$$m_u = \mathbf{u} \cdot \mathbf{M}_P = \mathbf{u} \cdot \left(\overrightarrow{PA} \wedge \mathbf{F}\right) = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{r} \wedge \mathbf{F}) = r\, F_2 \qquad (6\text{-}22)$$

El significado físico del momento de una fuerza respecto de un eje queda mejor reflejado si se descompone la fuerza en tres componentes como las indicadas en la figura 6-15. De su definición se tiene que, únicamente la componente $\mathbf{F}_2$ contenida en un plano perpendicular al eje que pasa por A y que sea perpendicular al vector **r** que determina la distancia del punto A al eje, participa en el momento de **F** respecto del eje, cuyo valor es $r\, F_2$. Se concluye que *,el momento m_u de* **F** *respecto del eje* **u** *pasando por Q , mide la intensidad de con que la fuerza tiende a hacer girar el sólido alrededor de dicho eje.* Conocidas las componentes de **F** en la referencia, las coordenadas de los puntos Q y A, y los cosenos directores de la dirección del eje, el producto mixto de la ecuación (6-22) proporciona directamente el valor de m_u.

6.8 Par de fuerzas

Se llama *par* al sistema formado por dos fuerzas **F** y **-F** *del mismo módulo, sentidos opuestos y cuyas rectas soportes son paralelas*, figura 6-16. El par de fuerzas es un par de vectores desalizantes cuyo momento, como se vió en el Capítulo 2, es el mismo respecto de todos los puntos del espacio, figura 6-15.

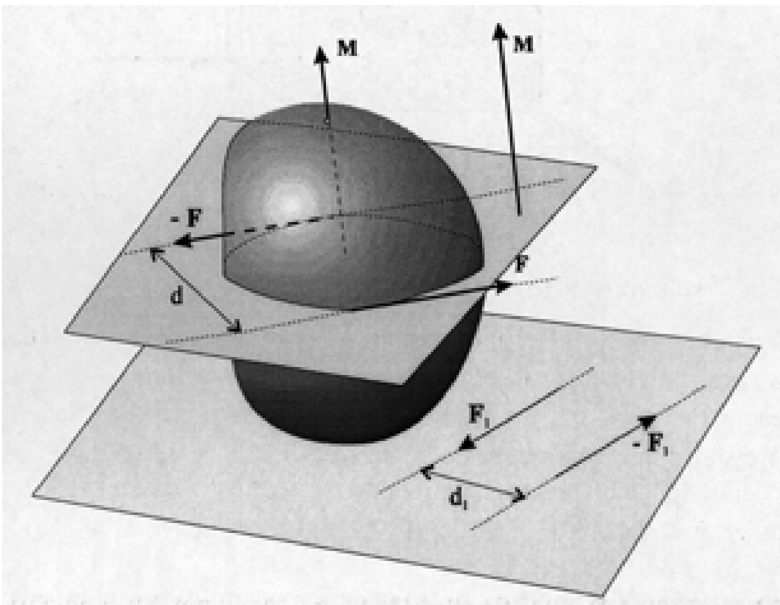


Fig. 6-16

El momento del par se expresa como $\mathbf{M} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{F}$, donde **r** es un vector con origen en un punto de la recta soporte de una de las fuerzas, por ejemplo $\mathbf{F}'$ y extremo un punto de la recta soporte de **F**. El vector **M** es perpendicular al plano defino por las dos rectas soporte y su sentido está defino por el producto vectorial. Si d es la distancia entre las dos rectas, el módulo del momento es $M = dF$.

El momento de un par se representa mediante un vector *libre* $\mathbf{M} = M_x\,\mathbf{i} + M_y\,\mathbf{j} + M_z\,\mathbf{k}$ que caracteriza completamente la acción de las fuerzas del par, y en consecuencia cuando un par actúa sobre un sólido rígido, carece de importancia los puntos de aplicación de las dos fuerzas que forman el par, así como cual sea su módulo y dirección.

El momento $\mathbf{M}_1$ de cualquier otro par de fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $-\mathbf{F}_1$ separadas una distancia d_1, coplanarias con $\mathbf{F}$ y $-\mathbf{F}$ o bien situadas en un plano paralelo al de estas, es igual a $\mathbf{M}$ cuando se cumple que $F_1\, d_1 = F\, d$ y el producto vectorial $\mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{F}_1$ tiene el mismo sentido que el producto vectorial $\mathbf{r} \wedge \mathbf{F}$. Obviamente hay infinitos pares que tienen el mismo momento. Los pares que tienen el mismo momento son sistemas equivalentes ya que tienen la misma resultante y el mismo momento resultante, luego son también *mecánicamente equivalentes*, figura 6-17

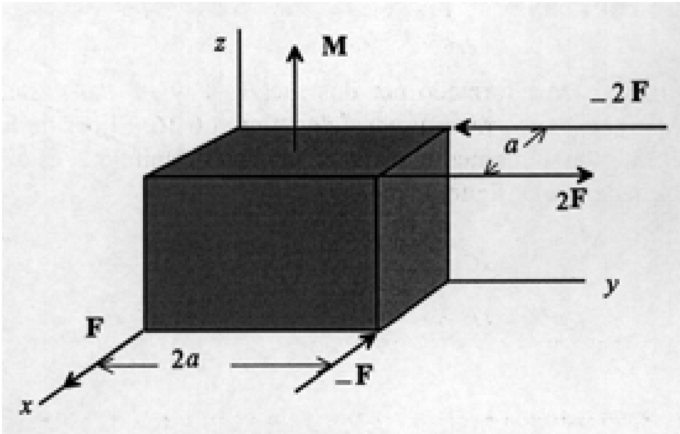


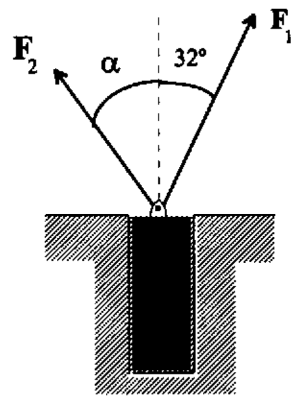
Fig. 6-17

Veamos que el momento $\mathbf{M}$ es una magnitud vectorial, es decir que satisface la ley de la suma de vectores. En efecto, sean $\mathbf{M}_1$ y $\mathbf{M}_2$ los momentos de dos pares de fuerzas $\mathbf{F}_1$, $-\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$, $-\mathbf{F}_2$ tales que los planos π_1 y π_2 que los contienen se cortan bajo un cierto ángulo. Seleccionando pares tales que los orígenes comunes de $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ y de $-\mathbf{F}_1$, $-\mathbf{F}_2$ sean puntos de la recta intersección de los planos π_1 y π_2, fácilmente se puede ver que el sistema formado por los dos pares es otro par $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ y $-\mathbf{F} = -\mathbf{F}_1 + (-\mathbf{F}_2)$ cuyo momento $\mathbf{M}$ es la suma de los momentos $\mathbf{M}_1$ y $\mathbf{M}_2$.

Una fuerza cualquiera $\mathbf{F}$ aplicada en A puede ser sustituida por la misma fuerza aplicada en otro punto B del sólido mas un par, cuyo momento sea igual al momento de $\mathbf{F}$ respecto de B y tal que los vectores del par sean $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}$ y $\mathbf{F}_2 = \mathbf{F}$. En efecto, ambos sistemas son equivalentes ya que tienen la misma resultante y el mismo momento resultante respecto de un punto.

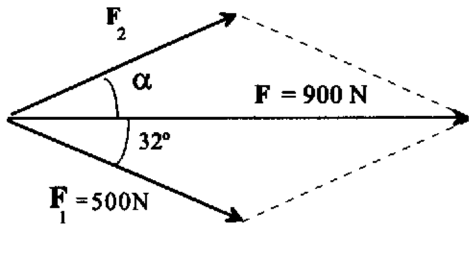
PROBLEMA 6-9

Se desea elevar el bloque de la figura adjunta mediante una fuerza vertical **F** de 900 N. Determinar el módulo y dirección de la fuerza $\mathbf{F}_2$ sabiendo que F_1 = 500 N.



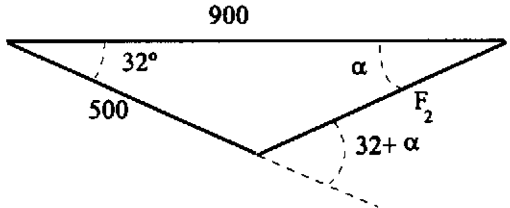
SOLUCIÓN

Solución gráfica. Construyendo a escala las fuerzas y utilizando la ley del paralelogramo se obtiene midiendo sobre el dibujo



$$F_2 = 544.8 \text{ N} \quad \text{y} \quad \alpha = 29.1°$$

Solución trigonométrica. Se construye el triángulo formado por las tres fuerzas



Aplicando el teorema del seno, se tiene

$$\frac{F_2}{\operatorname{sen} 32} = \frac{500}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{900}{\operatorname{sen}(32+\alpha)}$$

Operando en la segunda igualdad se obtiene ,

$$\tan \alpha = \frac{\operatorname{sen} 32}{1{,}8 - \cos 32}$$

ecuación que proporciona el valor del ángulo $\alpha = 29.1°$. Conocido el valor del ángulo, de la primera igualdad se determina el valor de la fuerza $F_2 = 544.8$ N.

Solución analítica. Tomando un sistema de coordenadas con origen en el punto de unión de las fuerzas y el eje y en la dirección vertical , las componentes de $\mathbf{F}_1$ y de $\mathbf{F}_2$ según los ejes satisfacen las ecuaciones

$$500 \operatorname{sen} 32 - F_2 \operatorname{sen} \alpha = 0$$

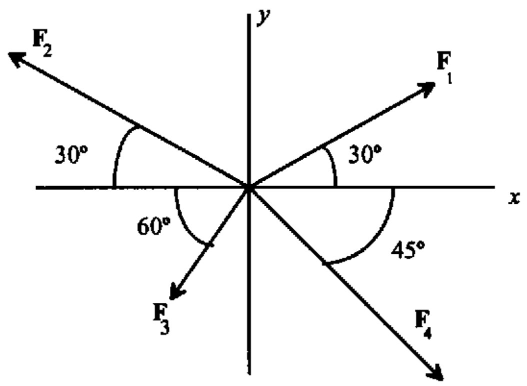
$$500 \cos 32 + F_2 \cos \alpha = 900$$

que forman un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, cuya solución es

$$F_2 = 544.8 \text{ N} \quad \text{y} \quad \alpha = 29{,}1°$$

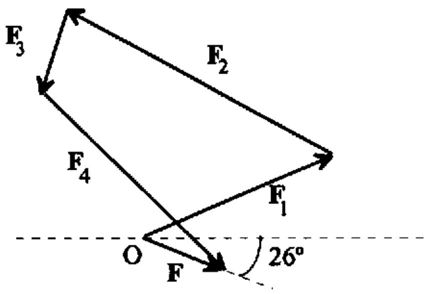
PROBLEMA 6-10

Determinar la resultante del sistema de fuerzas concurrentes que se indica en la figura adjunta., sabiendo que $F_1 = 150$ N, $F_2 = 200$ N, $F_3 = 80$ N y $F_4 = 180$ N.



SOLUCIÓN

Gráfica. A partir del origen O, se dibujan a escala uno a continuación de otro. Uniendo el origen del primero con el final del último se obtiene la resultante. Midiendo la resultante se obtiene F = 49 N formando un ángulo de – 26° con la horizontal



Analítica. Se determinan las componentes según x y según y de cada una de las fuerzas. A partir de estos valores se obtiene la resultante y el ángulo que forma con el eje x. Las componentes de las fuerzas son

$$\mathbf{F}_1 = 129.9\,\mathbf{i} + 75.0\,\mathbf{j}$$

$$\mathbf{F}_2 = -173.2\,\mathbf{i} + 100.0\,\mathbf{j}$$

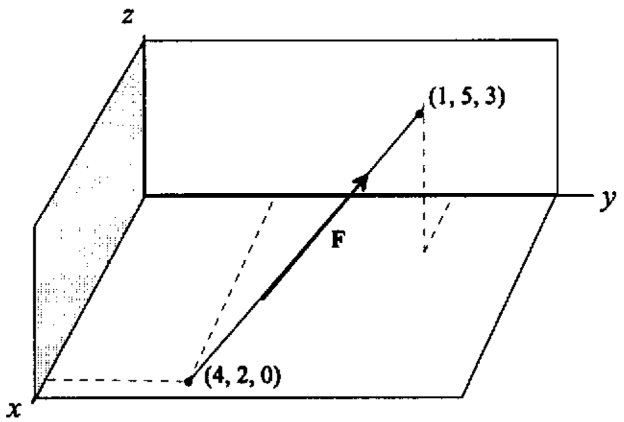
$$\mathbf{F}_3 = -40.0\,\mathbf{i} - 69.2\,\mathbf{j}$$

$$\mathbf{F}_4 = 127.3\,\mathbf{i} - 127.3\,\mathbf{j}$$

La resultante es $\mathbf{F} = \Sigma\ \mathbf{F}_i = 44.0\ \mathbf{i} - 21.5\ \mathbf{j}$, de donde F = 49,0 N y $\varphi = -26°$

PROBLEMA 6-11

Una fuerza de 17,32 kg está dirigida a lo largo de la recta que va del punto de coordenadas (4, 2, 0) hasta el punto de coordenadas (1, 5, 3) tal como se muestra en la figura adjunta . Los valores de las coordenadas estan dados en metros. Determinar el momento de **F** respecto del origen *O* y los momentos respecto de los ejes *x, y, z.*



SOLUCION

De la figura se tiene que un vector unitario en la dirección y sentido de la fuerza es el vector

$$\mathbf{u} = \frac{\sqrt{3}}{3}(-\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$$

luego el vector fuerza es $\mathbf{F} = 10(-\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$. El momento de la fuerza respecto del origen está dado por $\mathbf{M}_0 = \overrightarrow{OP} \wedge \mathbf{F}$, donde el punto *P* extremo del vector $\overrightarrow{OP}$ es un punto cualquiera de la recta soporte de **F**. Tomando como punto *P* el punto de coordenadas (4 , 2, 0), el momento de la fuerza respecto del origen es

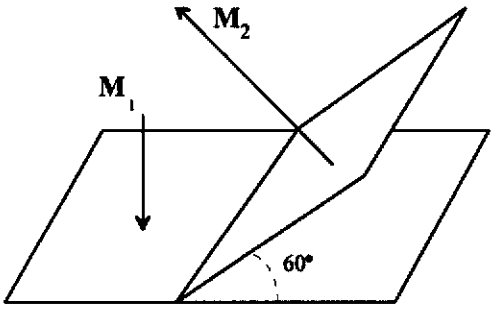
$$\mathbf{M}_0 = 10(2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k})$$

El producto escalar del vector $\mathbf{M}_0$ por los vectores de la base **i, j, k** proporciona los momentos de la fuerza respecto de los ejes *x, y, z* . Sus valores son :

$$m_x = 20 \qquad m_y = -40 \qquad m_z = 60$$

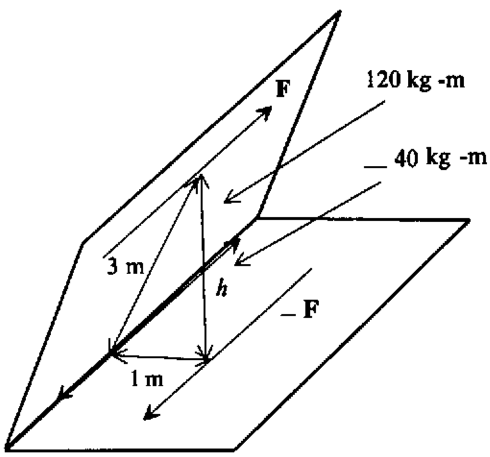
PROBLEMA 6-12

En la figura adjunta se representa un par de momento $M_1 = -40$ kg-m que actua sobre un plano horizontal y otro par de momento $M_2 = 120$ kg-m que actua sobre un plano que forma 60° con el horizontal. Determinar gráficamente el momento resultante **M**

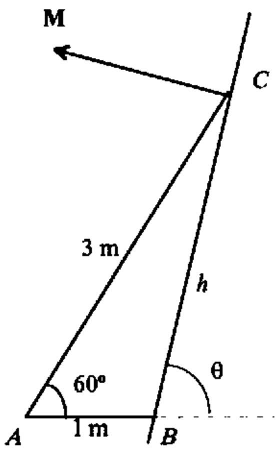


SOLUCION

El momento M_1 es el de un par de fuerzas de 40 kg situadas en el plano horizontal y separadas una distancia de un metro, y el momento M_2 es el de un para de fuerzas de 40 kg situadas en el plano inclinado y separadas una distancia de 3 m, tal como se muestra en la figura a). Para facilitar la suma de los momentos de los dos pares, los vectores que los forman se han tomado con sus direcciones paralelas a la recta de intersección de los planos.



a)



b)

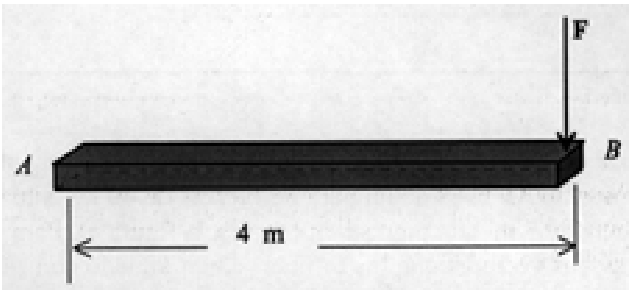
El par resultante está formado por las fuerzas **F** y − **F** separadas una distancia h . Su momento es un vector **M** perpendicular al plano definido por **F** y − **F**, plano que forma con la horizontal un ángulo θ, figura b). Para calcular la distancia h, brazo del par resultante, aplicando la ley del coseno al triángulo ABC se tiene $h = \sqrt{7} = 2{,}645$ m, luego el momento del par resultante es

$$M = 105{,}8 \text{ kg m}$$

Para calcular el ángulo θ, aplicando la ley del seno al triángulo ABC se tiene que $\theta = 79{,}2°$

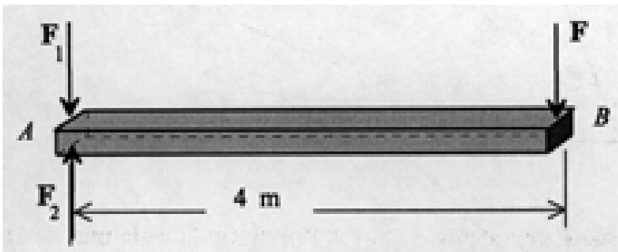
PROBLEMA 6-13

Una barra horizontal de 4 m de largo está sometida a una fuerza vertical hacia abajo de 12 kg aplicada en su extremo B. Demostrar que es equivalente a una fuerza de 12 kg hacia abajo aplicada en su extremo A y a un par de sentido horario de 48 kg-m.



SOLUCION

Apliquemos en el extremo A de la barra dos fuerzas verticales $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ de módulos iguales a F y de sentidos opuestos.



La fuerza $\mathbf{F}_2$ forma junto con la fuerza $\mathbf{F}$ un par, luego la fuerza resultante aplicada a la barra es la fuerza $\mathbf{F}_1$. El momento de la fuerza $\mathbf{F}$ respecto del extremo A de la barra es

$$\mathbf{M}_A = \overrightarrow{AB} \wedge \mathbf{F} \quad \Rightarrow \quad M_A = 48 \text{ kg-m} \quad \text{sentido horario}$$

que es también el momento del par y el momento de $\mathbf{F}_1$ respecto de A es cero, luego la fuerza $\mathbf{F}_1$ aplicada en A y el par son equivalentes a la fuerza $\mathbf{F}$ aplicada en B.

6.9 Reducción de sistemas de fuerzas concurrentes

Sean $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, $\mathbf{F}_4$ ..... $\mathbf{F}_n$, n fuerzas tales que sus líneas de acción se cortan todas en un mismo punto del espacio, figura 6-18. El conjunto de dichas fuerzas forma un sistema de fuerzas concurrentes. Tomaremos como origen de coordenadas el punto donde se cortan las fuerzas.

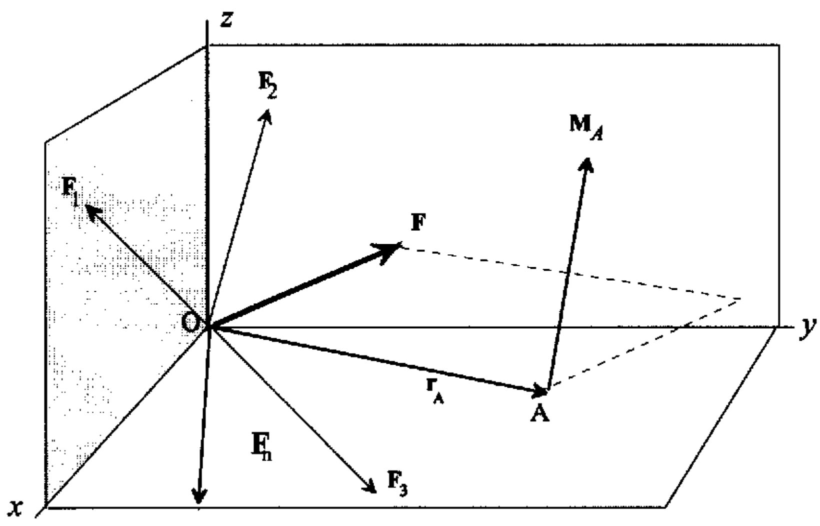


Fig. 6-18

El método de la construcción poligonal para la suma de vectores, obtenido como resultado de aplicar retiradamente la ley del paralelogramo a los vectores del sistema , proporciona la resultante $\mathbf{F}$ del sistema dada por

$$\mathbf{F} = \sum_1^n \mathbf{F}_i \tag{6-23}$$

Como ya se demostró en el Capítulo 2, el momento resultante del sistema respecto de un punto cualquiera del espacio es igual al momento de la resultante, es decir, que si $\mathbf{r}_A$ es el vector posición del punto respecto del origen se cumplen

$$\mathbf{M}_A = \sum_i^n \mathbf{M}_{iA} = \sum_i^n \mathbf{r}_A \wedge \mathbf{F}_i = \mathbf{r}_A \wedge \mathbf{F} \tag{6-24}$$

Este resultado constituye el *Teorema de Varignon*, cuyo enunciado dice que : *el momento respecto de un punto de la resultante de un sistema de fuerzas concurrentes es igual a la suma de los momentos de cada una de las fuerzas del sistema respecto del mismo punto.* Las ecuaciones (6-23) y (6-24) expresan que la resultante y el sistema son equivalentes. En consecuencia, el sistema de fuerzas concurrentes se *reduce* a *un vector único* que es la resultante **F** aplicada en el punto común de las fuerzas del sistema. La acción de la resultante sobre un sólido rígido es la misma que la del sistema, es decir, la resultante **F** es *mecánicamente equivalente* al sistema original de fuerzas concurrentes $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, ... $\mathbf{F}_n$.

El sistema de fuerzas concurrentes está equilibrado cuando es *equivalente a cero*, es decir, que la resultante del sistema sea nula. En efecto, si la resultante es nula **F** = 0, como su momento respecto de *O* es cero ya que **F** pasa por *O*, también lo es respecto de cualquier otro punto del espacio, luego el sistema es equivalente a cero.

En muchos problemas de estática es conveniente escribir la ecuación (6-23) en componentes, quedando

$$F_x = \sum F_{ix} \qquad F_y = \sum F_{iy} \qquad F_z = \sum F_{iz} \tag{6-25}$$

y de formas análoga para los momentos

$$M_x = \sum M_{ix} \qquad M_y = \sum M_{iy} \qquad M_z = \sum M_{iz} \tag{6-26}$$

La condición *necesaria y suficiente* para que un sólido bajo la acción de un sistema de fuerzas concurrentes esté en equilibrio es que la resultante del sistema sea igual a cero, condición que se establece mediante las ecuaciones

$$F_x = 0 \qquad F_y = 0 \qquad F_z = 0 \tag{6-27}$$

La condición de equilibrio expresada mediante la suma vectorial de las fuerzas, implica que al construir el polígono de fuerzas, añadiendo al extremo del vector $\mathbf{F}_1$ el equivalente al $\mathbf{F}_2$ y así sucesivamente hasta dibujar el equivalente a la fuerza $\mathbf{F}_n$, el extremo de éste coincida con el origen del $\mathbf{F}_1$, es decir, que la poligonal sea cerrada, figura 6-19.

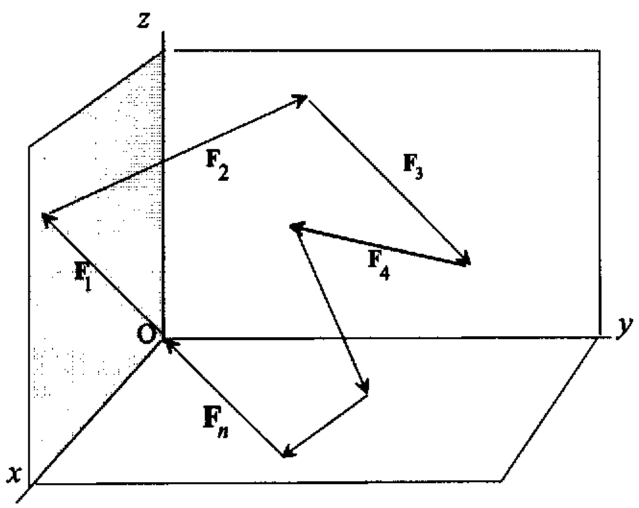


Fig. 6-19

6.9.1 Equilibrio de fuerzas coplanarias concurrentes

En el caso en que las fuerzas del sistema estén todas contenidas en un mismo plano, el sistema de fuerzas se denomina *coplanario*. La resultante **F** dada por la ecuación (6-23) está contenida en el mismo plano que contiene a las fuerzas del sistema y el momento **M** del sistema respecto de un punto cualquiera del plano es un vector perpendicular al plano, figura 6-20.

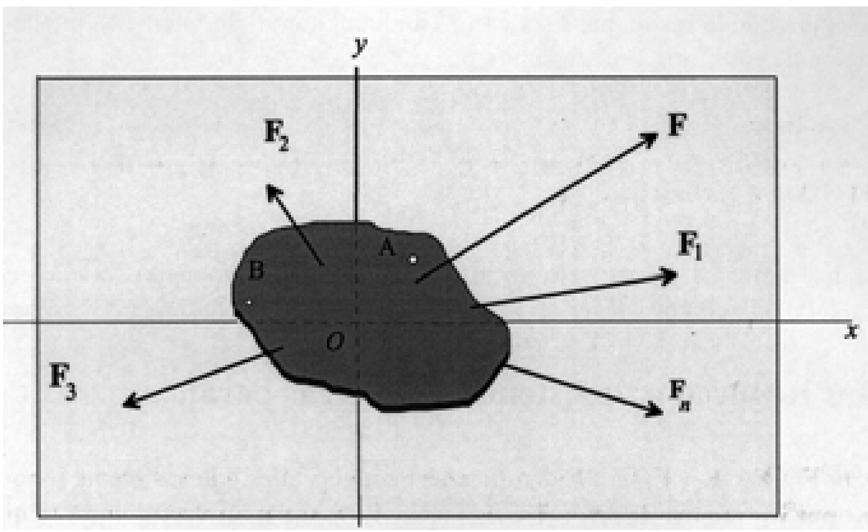


Fig. 6-20

Tomando el origen O en el punto donde se cortan las fuerzas y dos ejes de la referencia, por ejemplo el eje X y el eje Y, en el plano que contiene a las fuerzas, las ecuaciones (6-25) se reducen a

$$F_x = \sum F_{ix} \qquad F_y = \sum F_{iy} \tag{6-28}$$

y el momento resultante respecto de cualquier otro punto del plano X, Y tiene únicamente componente según el eje Z

$$M_z = \sum M_{iz} \tag{6-29}$$

El sistema coplanario de fuerzas concurrentes, constituye uno de los casos más frecuentes en el estudio de los problemas de equilibrio de la partícula y del sólido rígido para el cual la resultante **F** y el momento resultante **M** son vectores perpendiculares. Para que exista equilibrio, el sistema de fuerzas ha de ser *equivalente a cero*, es decir la resultante **F** ha de ser cero. Como el momento respecto del origen es cero, la condición de equilibrio está dada por

$$\Sigma F_{ix} = 0 \qquad \Sigma F_{iy} = 0 \tag{6-30}$$

que asegura que la resultante **F** es cero. También, como fácilmente se puede comprobar, la condición de equilibrio está dada por

$$\Sigma M_{iA} = 0 \qquad \Sigma M_{iB} = 0 \tag{6-31}$$

donde los puntos A, B respecto de los cuales se toman momentos pueden elegirse cualesquiera del plano con tal que el origen no esté sobre la recta definida por ambos puntos.

6.10 Reducción de sistemas de fuerzas paralelas

Sean $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, $\mathbf{F}_4$ ..... $\mathbf{F}_n$, n fuerzas paralelas tales que sus rectas soportes quedan definidas por los puntos A_1, A_2, A_3, A_4 ...... A_n, y sea $\mathbf{u}$ un vector unitario que define la dirección de las n fuerzas, es decir que $\mathbf{F}_i = F_i\,\mathbf{u}$ para $i =$ 1,2,3...... n. Ahora las F_i son las componentes de las fuerzas según la dirección $\mathbf{u}$ y pueden tener valores tanto positivos como negativos. El sistema de fuerzas paralelas constituye un sistema de vectores paralelos; la resultante y el momento resultante respecto del origen están dados por

$$\mathbf{F} = \sum_i^n F_i \, \mathbf{u} \tag{6-32}$$

$$\mathbf{M}_O = \left(\sum_i^n F_i \, \overrightarrow{OA_i} \right) \wedge \mathbf{u} \tag{6-33}$$

De ambas ecuaciones se tiene que el sistema se *reduce* a la resultante (6-32) aplicada en el origen, más un par de momento dado por (6-33). La *condición de equilibrio* es que el sistema reducido sea *equivalente a cero,* luego se tiene

$$\sum_i^n F_i = 0 \qquad \sum_i^n F_i \, \overrightarrow{OA_i} = 0 \tag{6-34}$$

Ahora bien, la resultante y el momento respecto del origen son perpendiculares, luego el momento mínimo es cero. Como ya vimos en el Capítulo 2, el eje central es la recta de momentos mínimos, y en el caso de vectores paralelos un punto del eje está dado por

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_i^n F_i \, \overrightarrow{OA_i}}{\sum_i^n F_i} \tag{6-35}$$

El punto G definido por la ecuación (6-35) pertenece al eje central y se denomina *centro de fuerzas paralelas.* Por ser del eje central, el momento respecto de G es cero, luego el sistema de fuerzas se *reduce* a la resultante **F** aplicada en G.

6.10.1 Equilibrio de fuerzas coplanarias paralelas

Cuando el sistema de fuerzas paralelas es coplanario, el origen de coordenadas se toma en un punto del plano y dos de sus ejes contenidos en él. El momento resultante respecto del origen $\mathbf{M}_O$ es un vector perpendicular al plano. El sistema se reduce a la resultante **F** aplicada en el origen y a un par, cuyo momento **M** sea igual al del sistema respecto del origen, figura 6-21.

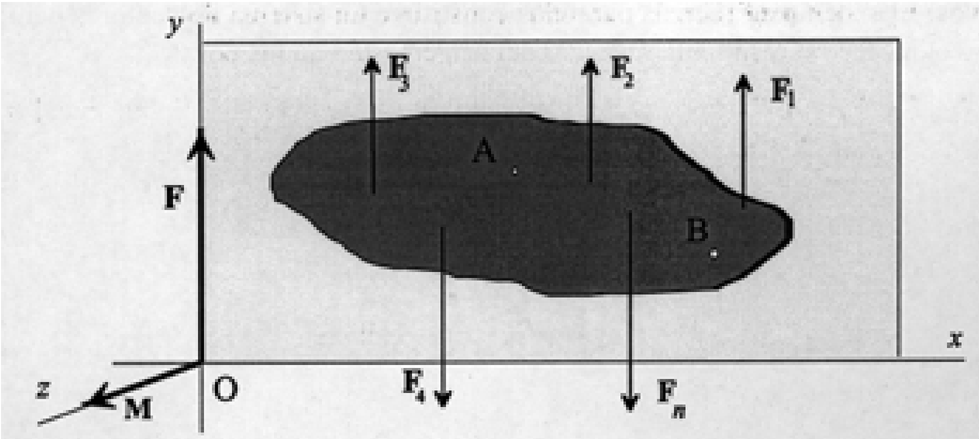


Fig. 6-21

Haciendo coincidir la dirección de las fuerzas con uno de los ejes de coordenadas, por ejemplo el eje y, la ecuación (6-32) cambia

$$\mathbf{F} = \sum_i^n F_i \, \mathbf{j} \qquad (6\text{-}36)$$

y la ecuación (6-33) a

$$\mathbf{M}_O = \left(\sum_i^n F_i \overrightarrow{OA_i}\right) \wedge \mathbf{j} = \sum_i^n M_{iz} \; \mathbf{k} \qquad (6\text{-}37)$$

La condición de *equilibrio* de un sistema de un sistema coplanario de fuerzas paralelas queda asegurado por las condiciones

$$\Sigma F_i = 0 \qquad\qquad \Sigma M_{i\,z} = 0 \qquad (6\text{-}38)$$

Fácilmente se puede ver que la condición de equilibrio también queda establecida mediante las ecuaciones

$$\Sigma M_{i\,A} = 0 \qquad\qquad \Sigma M_{i\,B} = 0 \qquad (6\text{-}39)$$

donde A y B son dos puntos cualesquiera del plano con la condición de que no definan una recta paralela a las fuerzas del sistema.

6.11 Reducción de sistemas de fuerzas que se cruzan

Sean $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, $\mathbf{F}_4$ ..... $\mathbf{F}_n$ n fuerzas tales que sus rectas soportes definidas por los puntos A_1, A_2, A_3, A_4 ...... A_n no se cortan entre sí, figura 6-22.

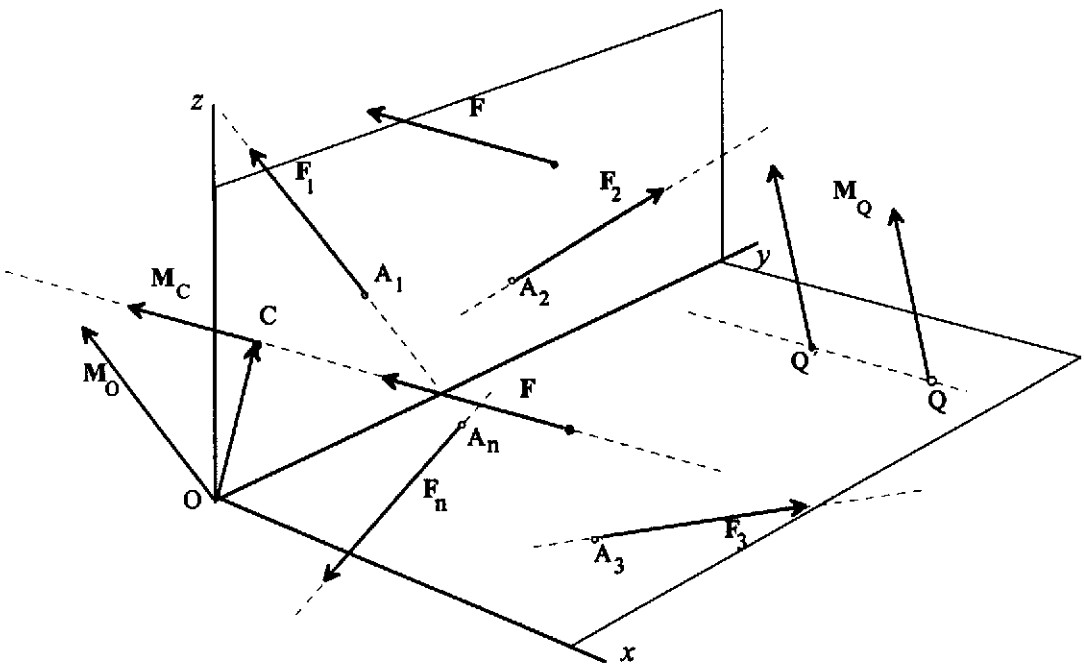


Fig. 6-22

El conjunto de fuerzas forma un sistema de vectores deslizantes que se cruzan. La resultante $\mathbf{F}$ del sistema es la suma de los vectores equivalentes a las fuerzas del sistema trazados en un punto Q cualquiera del espacio. De está manera se tiene el módulo, dirección y sentido de la resultante

$$\mathbf{F} = \sum_1^n \mathbf{F}_i \tag{6-40}$$

El momento resultante del sistema de fuerzas respecto del origen es la suma de los momentos respecto del origen de cada una de las fuerzas del sistema

$$\mathbf{M}_o = \sum_i^n \mathbf{M}_{io} = \sum_1^n \mathbf{r}_{A_i} \wedge \mathbf{F}_i \tag{6-41}$$

donde $\mathbf{r}_{A_i}$ es el vector posición del punto de aplicación A_i de la fuerza $\mathbf{F}_i$, respecto del origen. El sistema se *reduce* a la resultante (6-40) aplicada en el origen y a un par cuyo momento sea el momento resultante del sistema respecto del origen dado por la ecuación (6-41). La condición de *equilibrio* es que el sistema sea *equivalente a cero*, es decir que se cumpla

$$\sum_1^n \mathbf{F}_i = 0 \qquad \sum_i^n \mathbf{M}_{io} = \sum_1^n \mathbf{r}_{A_i} \wedge \mathbf{F}_i = 0 \tag{6-42}$$

Para este caso, el eje central es la recta tal que el momento del sistema respecto de uno cualquiera de sus puntos, es paralelo a la resultante. Las coordenadas del punto C por el cual pasa el eje central están dadas por el extremo del vector, figura 6-23.

$$\overrightarrow{OC} = \frac{\mathbf{F} \wedge \mathbf{M}_o}{F^2} \tag{6-43}$$

y el momento $\mathbf{M}_C$ del sistema de fuerzas respecto de C es paralelo a la resultante $\mathbf{F}$ del sistema. Si $\mathbf{M}_o$ forma un ángulo θ con $\mathbf{F}$, el módulo de $\mathbf{M}_C$ es $M_C = M_o \cos\theta = \mathbf{M}_o \cdot \mathbf{F}/F$.

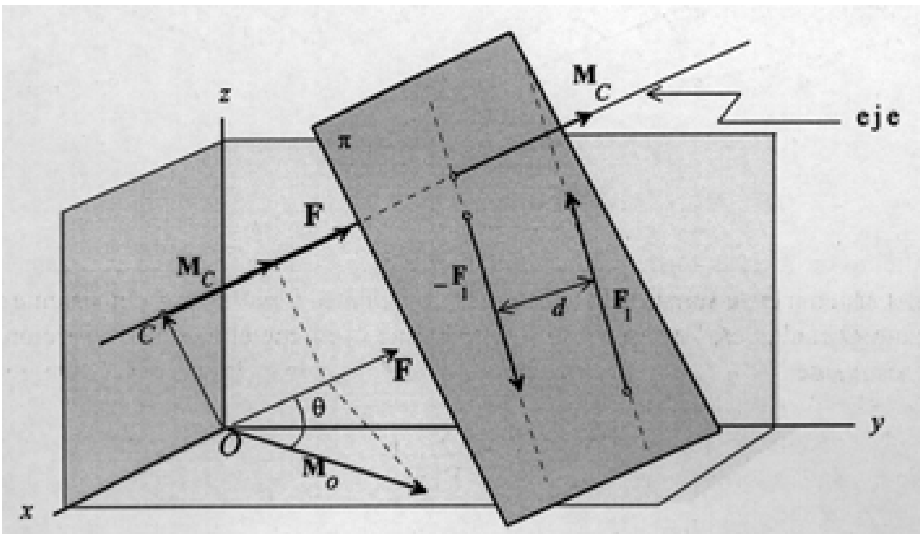


Fig. 6-23

Dibujemos un plano π cualquiera perpendicular al eje, figura 6-23. En dicho plano se pueden representar infinitos pares de fuerzas cuyo momento coincida con $\mathbf{M}_C$. El sistema formado por la resultante **F** pasando por *C*, mas un par de momento $\mathbf{M}_C$ es equivalente al sistema original de fuerzas, ya que ambos tienen la misma resultante y el mismo momento resultante respecto de el punto *C*. En consecuencia, *el sistema mas general de fuerzas que se cruzan se reduce a una fuerza, la resultante* **F** *del sistema y a un par, de momento el momento mínimo* $\mathbf{M}_C$ *del sistema.* Cuando el módulo de los vectores del par es igual al módulo de la resultante **F** del sistema, el sistema se denomina *torsor* y la distancia entre los vectores del par es la *flecha del torsor* dada por $\delta = M_m / F$.

6.11.1 Equilibrio de fuerzas coplanarias que se cruzan

Cuando todas las fuerzas del sistema $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, $\mathbf{F}_4$ ..... $\mathbf{F}_n$ están contenidas en un mismo plano, el sistema de fuerzas se llama coplanario, figura 6-24.

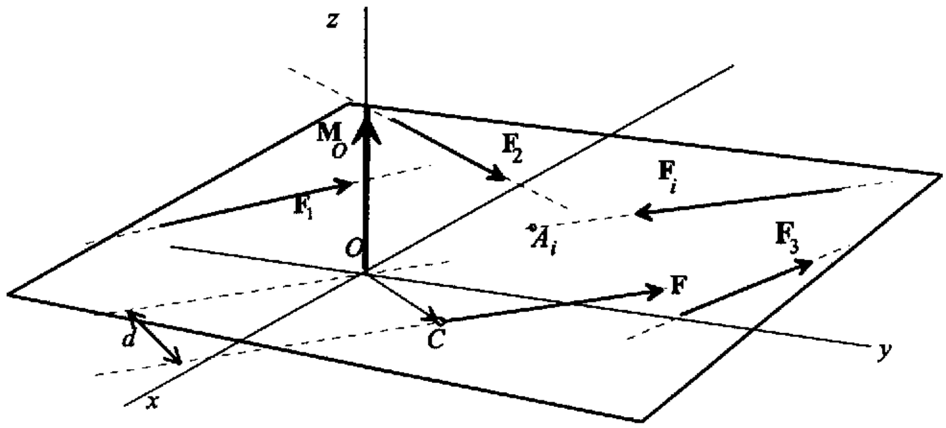


Fig .6-24

En general, se hace coincidir el plano de las fuerzas con uno de los planos de coordenadas, por ejemplo el *X, Y*. La resultante **F** del sistema está contenida en el mismo plano y el momento resultante **M** respecto de cualquier punto del plano es la suma de los momentos de cada una de las fuerzas del sistema respecto del punto, los cuales son perpendiculares al plano, luego **M** también lo es. En consecuencia, la resultante **F** y el momento **M** son vectores perpendiculares. Las ecuaciones (6-40) y (6-41) cambian a

$$\mathbf{F} = (\textstyle\sum_1^n F_{ix})\mathbf{i} + (\sum_1^n F_{iy})\mathbf{j} \tag{6-44}$$

$$\mathbf{M}_o = \textstyle\sum_1^n \overrightarrow{OA_i} \wedge \mathbf{F}_i = (\sum_i^n M_{iz})\mathbf{k} \tag{6-45}$$

La condición de equilibrio para un sólido, bajo la acción de un sistema de fuerzas que se cruzan coplanarias, figura 6-25, queda establecida por el siguiente sistema de ecuaciones

$$\Sigma F_{i\,x} = 0 \qquad \Sigma F_{i\,y} = 0 \qquad \Sigma M_{i\,z} = 0 \tag{6-46}$$

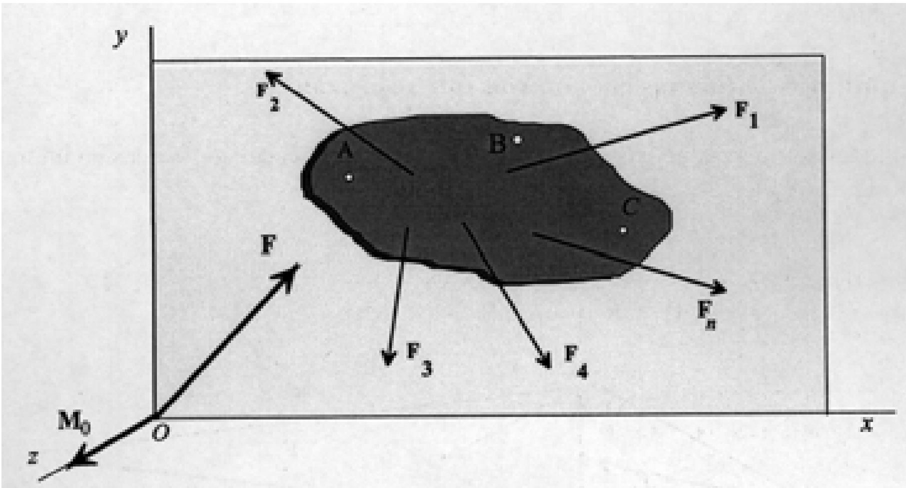


Fig. 6-25

La condición de que el sistema de fuerzas sea equivalente a cero, también queda establecida por las ecuaciones

$$\Sigma F_{i\,x} = 0 \qquad \Sigma M_{i\,A} = 0 \qquad \Sigma M_{i\,B} = 0 \tag{6-47}$$

donde A y B son puntos cualesquiera con tal que la recta definida por los dos puntos no sea paralela al eje y. Por último, como fácilmente se puede comprobar, la condición de equilibrio puede formularse por las ecuaciones

$$\Sigma M_{i\,A} = 0 \qquad \Sigma M_{i\,B} = 0 \qquad \Sigma M_{i\,C} = 0 \tag{6-48}$$

siendo A, B y C son tres puntos cualesquiera del plano con tal que no estén alineados. Veamos que el sistema equivale a una fuerza única. Consideremos de nuevo el sistema de fuerzas de la figura 6-24. Tomando módulos en la ecuación (6-43) y llamando d al módulo del vector $\vec{oc}$, que es la distancia trazada desde el origen a la recta paralela a $\mathbf{F}$ que pasa por C, se tiene $F\,d = M_o$ y en forma vectorial $\mathbf{M}_o = \vec{oc} \wedge \mathbf{F}$, donde C es un punto del eje central luego, el momento del sistema respecto de C es cero. El vector **F** aplicado en C es equivalente al sistema de fuerzas coplanarias ya que ambos tienen la misma resultante y el mismo momento resultante respecto de un punto del plano. En consecuencia, *el sistema de fuerzas coplanarias se reduce a un vector único formado por la resultante* **F** *aplicada en C.*

6.12 Equilibrio de tres fuerzas coplanarias

Cuando el sistema de fuerzas coplanarias que actúa sobre un sólido rígido está formado solo por *tres fuerzas,* o puede reducirse a tres, para que el sólido esté en equilibrio es *necesario* que las tres fuerzas sean *concurrentes o paralelas*. El sólido de la figura 6-26 a) no está en equilibrio ya que las fuerzas que actúan sobre él no se cortan en el mismo punto.

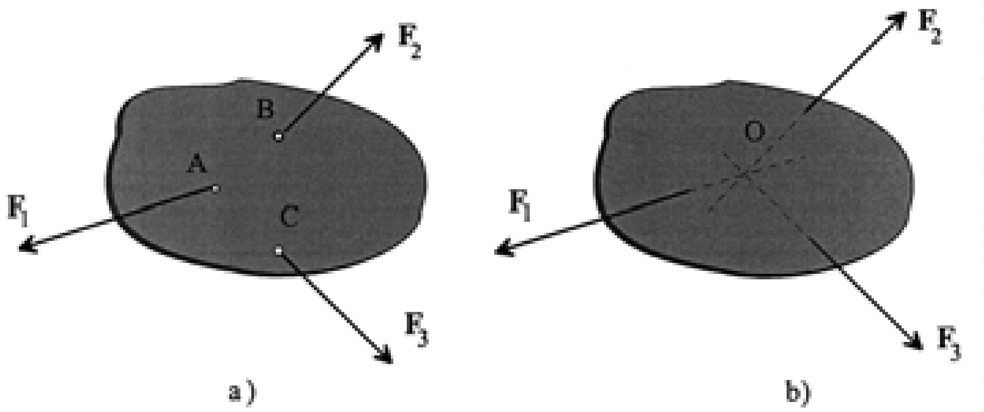


Fig. 6-26

Para que esté en equilibrio, si dos de las fuerzas se cortan en un punto O, figura 6-26 b), necesariamente la dirección de la tercera fuerza ha de pasar por O, condición impuesta por que en el equilibrio el momento del sistema ha de ser nulo y no lo sería si la tercera fuerza no pasa por O. Este resultado facilita mucho la resolución gráfica de problemas relativos al equilibrio del sólido en los casos en que se desconoce la dirección de una de las tres fuerzas. Determinando el punto de intersección de las dos fuerzas conocidas, es posible fijar la línea de acción de la tercera fuerza ya que está debe de pasar por el punto de intersección de las dos primeras. En el equilibrio de un sólido rígido con un punto fijo, sometido a un sistema de fuerzas coplanarias concurrentes, la reacción ha de equilibrarse con la resultante de todas las fuerzas activas, la cual ha de pasar necesariamente por el punto fijo.

El problema del equilibrio se llama *estáticamente determinado* si el número de incógnitas es igual al de ecuaciones independientes. Si el número de incógnitas es mayor que el número de ecuaciones de equilibrio independientes, el problema se denomina *estáticamente indeterminado*. Para el equilibrio de un sistema de fuerzas coplanarias concurrentes estáticamente determinado, el número de incógnitas no ha de ser más de dos y para un sistema de fuerzas arbitrario, no ha de ser más de tres.

El procedimiento a seguir en la resolución de problemas relativos al equilibrio de un sistema plano de fuerzas mediante el método de las proyecciones incluye los siguientes pasos:

1) *aislar el sólido para determinar las magnitudes desconocidas*

2) *representar las fuerzas activas (incluido el peso en el centro de gravedad del sólido)*

3) *dibujar el diagrama del sólido libre bajo la acción de las fuerzas activas y de las reacciones de los vínculos (incluyendo dimensiones para calcular momentos)*

4) *cerciorarse que el problema es estáticamente determinado*

5) *elegir en el plano de acción de las fuerzas los ejes de coordenadas orientados de modo que sean paralelos o perpendiculares a la mayoría de las fuerzas.*

Las proyecciones de las fuerzas se consideran son positivas o negativas según que su sentido coincida con el sentido positivo o negativo de los ejes de coordenadas. Las ventajas del método analítico sobre el método geométrico del polígono de fueras son evidentes en los problemas de equilibrio cuando existen más de tres fuerzas concurrentes. En estos casos, la resolución del polígono de fuerzas presenta ciertas dificultades, mientras que el método de las proyecciones solo implica un número mayor de fuerzas a proyectar.

6.13 Equilibrio de sistemas de sólidos

Consideremos ahora el equilibrio de un conjunto de sólidos que están en contacto unos con otros por medio de sus superficies o acoplados mediante articulaciones, pasadores, hilos o barras. Un problema importante en la estática de un sistema de sólidos es la determinación de las reacciones en los vínculos, para lo cual, junto con el equilibrio del sistema se analiza el equilibrio de los distintos sólidos que lo forman. Una vez seleccionado un cuerpo concreto, todos los demás sólidos del sistema y sus vínculos respectivos se omiten y las acciones de estos sobre el cuerpo cuyo equilibrio se considera, se sustituyen por las correspondientes reacciones.

Al establecer el equilibrio de todo el sistema de cuerpos, las reacciones vinculares entre ellos, son fuerzas internas mutuamente equilibradas, y por lo tanto, no intervienen en las ecuaciones de equilibrio. Sin embargo, al considerar el equilibrio de cada cuerpo por separado, las reacciones respectivas con el resto del sistema, son fuerzas externas y entran en las ecuaciones de equilibrio. En general, al resolver problemas referentes al equilibrio de un sistema de sólidos, el número de ecuaciones obtenidas al considerar el equilibrio del conjunto no son suficientes para que el sistema esté estáticamente determinado. Para todo el conjunto, las condiciones de equilibrio se reducen, a tres ecuaciones para un sistema plano arbitrario de fueras, o bien a dos ecuaciones, para un sistema de fuerzas paralelas. En estos casos, el número de incógnitas puede ser mayor que el número de ecuaciones.

Esta circunstancia no hace que el sistema sea estáticamente indeterminado, ya que si el sistema se separa en diferentes cuerpos sólidos y se plantean las ecuaciones de equilibrio para cada uno de ellos, pueden aparecer un número de nuevas incógnitas menor que el de nuevas ecuaciones de equilibrio. Si el número total de ecuaciones de equilibrio independientes asociadas, a todo el sistema y a sus partes separadas, es igual al número total de incógnitas, el problema estará estáticamente determinado.

Cuando el sistema de sólidos se subdivide en diferentes cuerpos, al reemplazar las interacciones por las reacciones entre dos cuerpos, teniendo en cuenta la ley de acción - reacción, la reacción que actúa sobre el segundo cuerpo se toma de modo que sea igual en módulo y de sentido opuesto a aquella que actúa sobre el primero de cuerpos.

Por último, al plantear las ecuaciones de equilibrio, los ejes de coordenadas y los puntos respecto de los cuales se plantean las ecuaciones de los momentos de las fuerzas, se elegirán de manera que en cada ecuación aparezca una sola incógnita. Básicamente, el método de resolución a seguir es el mismo que el correspondiente a un sólido rígido.

6.14 Reacciones vinculares en sistemas planos

En un sistema plano, las fuerzas activas están contenidas en un mismo plano, por lo tanto, las reacciones vinculares necesarias para mantener el sistema en equilibrio deberán estar contenidas también en el mismo plano de las fuerzas activas. Las reacciones ejercidas por los vínculos sobre un sistema bidimensional pueden clasificarse en tres grupos correspondientes a los tres tipos básicos de vínculos:

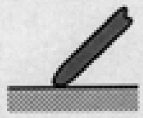
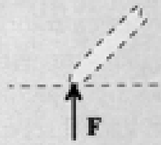
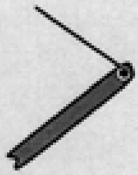
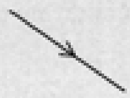
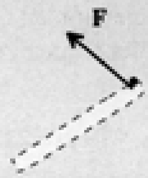
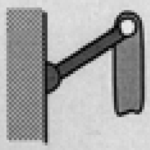
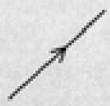
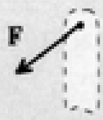
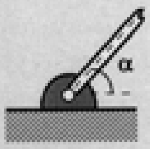
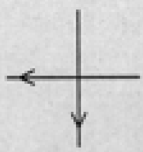
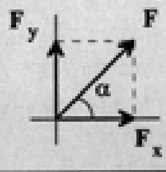
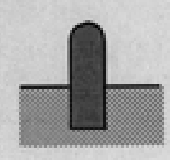
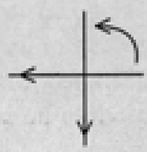
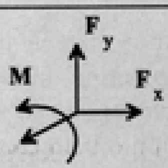
a) Vínculos establecidos por: *apoyos en superficies lisas*, *cable tensados y bielas*, *collarines y pasadores sobre varillas y ranuras lisas. Cada* uno de estos vínculos puede impedir el movimiento sólo en una dirección definida, luego introduce *una incógnita,* que es el módulo de la reacción.

b) Vínculos establecidos por: *superficies rugosas*, *articulaciones o bisagras*, *pasadores*. Estos vínculos impiden la traslación en cualquier dirección pero no el movimiento de giro respecto del enlace, luego introducen *dos incógnitas* expresadas como las componentes de la reacción o bien como el módulo de la reacción y el ángulo que forma con la horizontal.

c) Vínculos establecidos por: *empotramientos*. Las reacciones de este tipo impiden completamente el movimiento tanto de traslación como de rotación, luego introducen *tres incógnitas,* dos correspondientes a las componentes de la fuerza y una al momento del par de reacción.

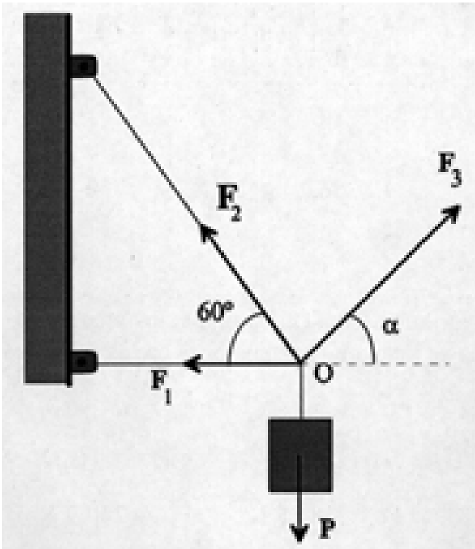
Tabla 6-1

Reacciones vinculares planas

	Vinculo	*Direccion (es) prohibidas*	*Reaccion (es)*	*Incognita (as)*
Apoyo liso				Modulo de F
Cable				Modulo de F
Barra				Modulo de F
Articulación				F_x , F_y o F , α
Empotramiento				F_x, F_y, M

PROBLEMA 6-14

En el esquema de la figura adjunta, un bloque de 600 N de peso pende de dos cables. Determinar: a) el intérvalo de valores de la fuerza $\mathbf{F}_3$ para que ambos cables esten tensos; b) el valor de las tensiones para $F_3 = 500$ N. Dato : tg $\alpha = 4/3$



SOLUCION

a) En el punto O concurren cuatro fuerzas coplanarias $\mathbf{P}$, $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ y $\mathbf{F}_3$. Para que el punto este en equilibrio se ha de cumplir

$$\mathbf{P} + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = 0$$

Seleccionando el sistemas de coordenadas con origen en el punto O y con el eje x horizontal, la condición de equilibrio queda

$$\Sigma F_x = 0 \qquad\qquad \Sigma F_y = 0 \qquad (1)$$

La fuerza $\mathbf{F}_3$ forma con la horizontal un ángulo α, tal que tg $\alpha = 4/3$, de donde se tiene que las componentes de F_3 están dadas por

$$F_{3x} = 3\,F/5 \qquad\qquad F_{3y} = 4\,F/5$$

El sistema de ecuaciones (1) queda

$$3F_3 = 5F_1 + \frac{5}{2}F_2 \qquad\qquad 4F_3 = 3000 - \frac{5\sqrt{3}}{2}F_2 \qquad (2)$$

El sistema de ecuaciones (2) tiene tres incógnitas, luego es estáticamente indeterminado. El valor mínimo de F_3 corresponde a $F_1 = 0$. Sustituyendo y resolviendo el sistema se obtiene que el valor mínimo de F_3 es 326.2 N. El valor máximo de F_3 corresponde a $F_2 = 0$, de donde su valor es de 750 N. Para que los dos cables estén tensados, la fuerza F_3 ha de estar comprendida entre ambos valores

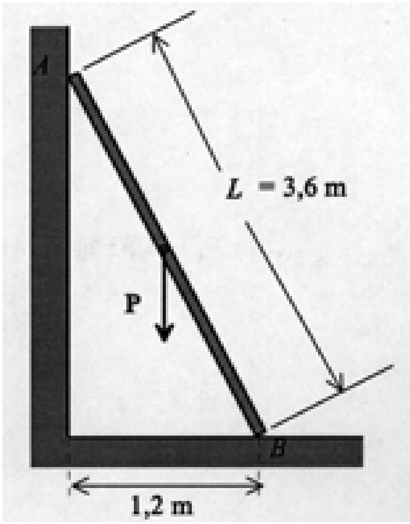
$$326{,}2 \; < \; F_3 \; < \; 750$$

b) Fijado el valor de la fuerza F_3, el sistema (2) contiene dos incógnitas, luego es estáticamente determinado. Resolviendo el sistema se tiene que las tensiones en los cables están dadas por

$$F_1 = 184{,}5\,\text{N} \qquad F_2 = 230{,}9\,\text{N}$$

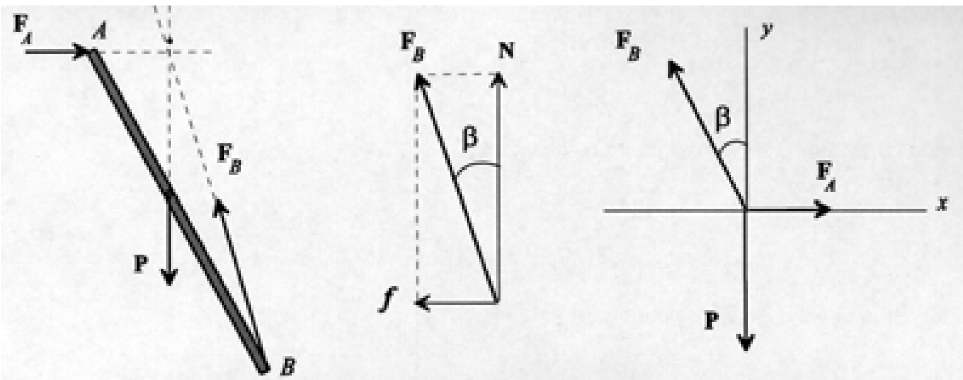
PROBLEMA 6-15

La barra homogenea de la figura tiene un peso de 20 kg y una longitud de 3,6 m. Su extremo *A* se apoya sobre una pared vertical lisa y su extremo *B* sobre un suelo horizontal rugoso a una distancia de 1,2 m de la pared. Determinar: a) las reacciones en los apoyos y el ángulo β que forma $\mathbf{F}_B$ con la normal, b) el ángulo límite de equilibrio de la barra con la pared si el coeficiente de rozamiento con el suelo es $\mu = 0{,}35$



SOLUCION

a) Para que un sólido libre sometido a tres fuerzas coplanarias este en equilibrio, la condición necesaria es que las tres fuerzas se corten en un punto. La fuerza $\mathbf{F}_B$ de dirección desconocida tiene que pasar por el punto de corte de las dos cuya dirección se conoce, $\mathbf{F}_A$ y $\mathbf{P}$. La suma de las tres fuerzas ha de ser nula. Gráficamente se tiene



Igualando a cero la suma de fuerzas según el eje *x* y según el eje *y* se tiene

$$\sum F_x = F_A - f = F_A - F_B \operatorname{sen} \beta = 0 \qquad (1)$$

$$\sum F_y = N - P = F_B \cos \beta - P = 0 \qquad (2)$$

un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas F_A, F_B y β. Se necesita la ecuación de los momentos. Igualando a cero la suma de momentos respecto del punto B, queda

$$\sum M_B = -3{,}4 F_A + 0{,}6 P = 0$$

de donde se tiene $F_A = 3{,}53 \text{ kg} = 34{,}6 \text{ N}$

De la ecuaciones (1) y (2) se tiene $\operatorname{tg} \beta = \frac{F_A}{P} = 0{,}1765 \Rightarrow \beta = 10°$

Sustituyendo valores se tiene para F_B $F_B = \frac{P}{\cos \beta} = 20{,}3 \text{ kg} = 199 \text{N}$

b) Sea α el ángulo que forma la barra con la pared en la situación de movimiento inminente. La fuerza de rozamiento tiene su valor máximo, luego

$$f_r = \mu N = \mu P = F_A$$

Tomando momentos respecto del punto B se tiene

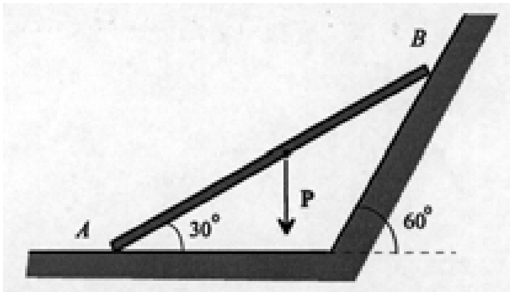
$$-F_A L \cos \alpha + P \frac{L}{2} \operatorname{sen} \alpha = 0$$

y sustituyendo el valor de F_A se obtiene

$$\operatorname{tg} \alpha = 2\mu = 0{,}70 \Rightarrow \alpha = 35°$$

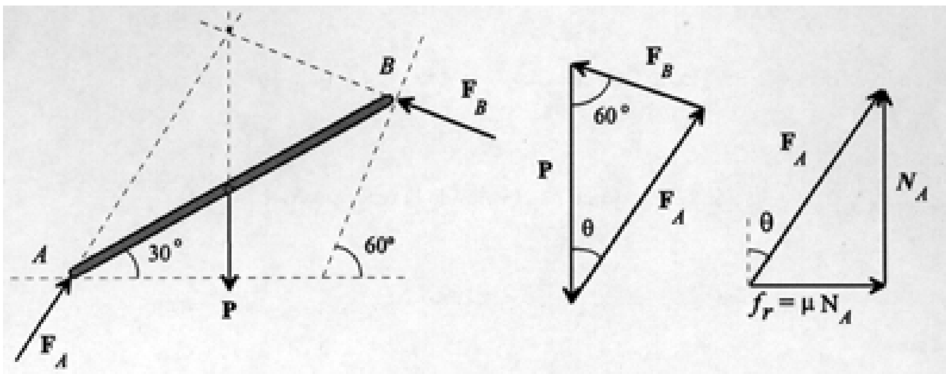
PROBLEMA 6-16

Una barra homogénea de peso 20 kg. y longitud L se apoya sobre dos superficies tal como se muestra en la figura. En el extremo B la pared es lisa y en el extremo A rugosa. Determinar el valor *mínimo* de μ para que la barra esté en equilibrio y las reacciones en los apoyos.



SOLUCIÓN

La barra está sometida a tres fuerzas coplanarias. Las direcciones de las fuerzas $\mathbf{F}_B$ y $\mathbf{P}$ son conocidas y de la condición de equilibrio se deduce que la tercera fuerza $\mathbf{F}_A$ tiene que pasar por el punto de corte de las dos anteriores. Dibujando el diagrama del sólido libre se tiene :



Las tres fuerzas se han de cortar en un punto y su suma ha de ser nula. La componente horizontal de $\mathbf{F}_A$ es la fuerza de rozamiento $f = F_A$ sen θ. Para el valor mínimo de μ compatible con el equilibrio, la fuerza de rozamiento tiene su valor máximo, luego se tiene que

$$f = \mu N_A \qquad \text{siendo} \qquad \mu = \text{tg}\,\theta \qquad \text{y} \quad N_A = P - F_B \cos 60° \tag{1}$$

Del triángulo de fuerzas se deduce que

$$\mu N_A = F_A \,\text{sen}\,\theta = F_B \,\text{sen}\, 60° \tag{2}$$