Capítulo 6 Fuerzas y equilibrio

6.1 Introducción

La ***estática*** es la parte de la mecánica que estudia las leyes de composición de las fuerzas y las condiciones de *equilibrio* de los cuerpos *materiales*. El concepto de equilibrio de un cuerpo está siempre referido con respecto a una referencia la cual se considera fija en el espacio. En éste sentido el equilibrio de un cuerpo es absoluto. Prácticamente se puede considerar como absoluto el equilibrio de un cuerpo respecto de la tierra o respecto de otros cuerpos rígidamente unidos a ella.

En el contesto general de la mecánica diremos que *un cuerpo está en equilibrio cuando su aceleración es cero* ($\boldsymbol{a} = 0$), es decir, cuando la fuerza que actúa sobre él es nula. La condición de equilibrio implica que el cuerpo puede estar en reposo o se mueve con velocidad uniforme respecto de una referencia fija dada. Un cuerpo se encuentra en reposo respecto de una referencia fija cuando su velocidad en dicha referencia es cero pero, puede no encontrarse en equilibrio. Por ejemplo, si se lanza un objeto verticalmente hacia arriba, este se encuentra *instantáneamente* en reposo cuando alcanza su altura máxima (posición en la que su velocidad es cero), pero no esta en equilibrio ya que su aceleración en dicha posición no es nula. Recíprocamente, un cuerpo puede estar en equilibrio y no estar en reposo. La situación más común es que un cuerpo se encuentre simultáneamente en equilibrio y en reposo, por lo que en el lenguaje corriente, ambos conceptos son sinónimos y en este sentido se considerará en todo lo que sigue la situación de equilibrio de un cuerpo.

Para que un sólido se encuentre en equilibrio bajo la acción de un sistema arbitrario de fuerzas, es necesario que el sistema cumpla las *condiciones de equilibrio*. Una condición necesaria (pero no suficiente) para el equilibrio de un cuerpo es que el sistema de fuerzas que actúan sobre él sea un *sistema equilibrado*, es decir, que la ***resultante*** del sistema sea nula. Establecer las leyes de composición de las fuerzas y la determinación de las condiciones de equilibrio constituyen los objetivos de la estática. Los problemas de la estática se pueden resolver, bien por procedimientos gráficos o bien por métodos analíticos. Se emplean ambos métodos, pero es necesario puntualizar que para resolver un problema concreto, las construcciones geométricas tienen un importante significado físico.

6.2 Principios de la estática : sólido libre

La experiencia confirma que *transportar el punto de aplicación de una fuerza de un punto a otro a lo largo de su recta soporte, no modifica la acción de la fuerza sobre el cuerpo.* Este resultado constituye el *principio de transmisibilidad* que ahora se formula como una ley experimental, pero que puede ser deducido a partir de las leyes de la dinámica. La fuerza **F** aplicada en un punto de su recta de acción y la fuerza **F′** = **F** aplicada a otro punto de la misma recta de acción, producen el mismo efecto sobre un cuerpo y por tanto son *mecánicamente equivalentes*.

La experiencia también muestra que la acción de dos fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ aplicadas en un mismo punto de un cuerpo no se modifica al ser sustituidas ambas fuerzas por una única fuerza **F** obtenida como suma vectorial de las dos fuerzas. La fuerza **F** se denomina la resultante de las fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$. Dicho resultado se conoce como la *regla del paralelogramo* para la suma de dos fuerzas.

Del principio de transmisibilidad y de la regla del paralelogramo se deduce que un cuerpo se puede encontrar en equilibrio bajo la acción de dos fuerzas únicamente si estas tienen, la misma recta soporte, la misma intensidad y sentidos opuestos. Las fuerzas **F** y –**F** definen el sistema de fuerzas equilibrado más simple. En consecuencia, *un sistema de fuerzas equilibrado no tiene acción alguna sobre un sólido rígido y este se encuentra en equilibrio.*

Se define el *momento de un fuerza respecto de un punto* como el producto de el módulo de la fuerza por la distancia del punto a la línea de acción de la fuerza. Dos fuerzas paralelas, iguales en módulo y de sentidos opuestos pero con diferentes líneas de acción se denominan *par de fuerzas.* La distancia entre las líneas de acción se denomina *brazo del par.* Este sistema no es un sistema equilibrado y la acción del par se mide por su *momento*, definido por el producto del módulo de las fuerzas por la distancia que las separa. Para un sistema de fuerzas el *momento resultante* respecto de un punto es la suma de los momentos de cada una de las fuerzas respecto de dicho punto.

La condición *necesaria y suficiente* de equilibrio de un sólido se establece formulando que el sistema de fuerzas que actúa sobre el sólido sea un *sistema equivalente a cero*, es decir, que la resultante del sistema y el momento resultante del sistema respecto de un punto, sean ambos nulos.

Las fuerzas que actúan sobre las partículas de un sólido rígido son de dos tipos :

1) *fuerzas exteriores*

2) *fuerzas interiores*

Las fuerzas que otros cuerpos ejercen sobre las partículas del sólido rígido considerado son las fuerzas *exteriores* y las fuerzas que las partículas del sólido rígido se ejercen entre sí, son fuerzas *interiores*. De los enunciados anteriores se deduce que, considerado un cuerpo como un sólido rígido, las fuerzas interiores forman un sistema equilibrado, y en consecuencia cuando se estudian las condiciones general de equilibrio solo es necesario tener en cuenta las fuerzas exteriores. Las fuerzas exteriores pueden dividirse en dos grupos: a) *fuerzas activas*, que son todas las fuerzas susceptibles de producir movimiento y, b) *fuerzas de reacción* asociadas a las ligaduras o vínculos del cuerpo.

Sólido libre. Por definición, un cuerpo que no está unido a otros cuerpos y que puede efectuar desplazamientos cualesquiera en el espacio, se llama *libre*. Un cuerpo no es libre cuando los desplazamientos en el espacio están limitados por otros cuerpos unidos o en contacto con él. Se llama *ligadura a todo lo que limita los desplazamientos de un cuerpo en el espacio*. Un ejemplo de ligadura es el de un cuerpo en reposo sobre la superficie de una mesa. La ligadura está representada por la superficie de la mesa que le impide el desplazamiento en el sentido vertical descendente.

Cuando un cuerpo sometido a la acción de fuerzas aplicadas tiende a efectuar un desplazamiento impedido por una ligadura, el cuerpo actúa sobre la ligadura con una cierta fuerza, y por la ley de la acción-reacción, la ligadura ejerce sobre el cuerpo una fuerza de la misma intensidad y de sentido opuesto. Se llama *fuerza de ligadura*, o *fuerza de reacción* o simplemente ***reacción*** a la fuerza que la ligadura ejerce sobre el cuerpo. La reacción esta dirigida en el sentido opuesto al que la ligadura impide el desplazamiento del cuerpo.

Las fuerzas que no son de reacción se llaman *fuerzas activas*. La intensidad y la dirección de las fuerzas activas es independiente de otras fuerzas que puedan actuar sobre el cuerpo. Pero la intensidad de la reacción depende siempre de las fuerzas activas que actúan sobre el cuerpo. Si no hay ninguna fuerza activa que actúe sobre un cuerpo, la reacción es nula. Cuando la ligadura limita el desplazamiento en varias direcciones, la reacción tiene en general una dirección desconocida, la cual debe ser determinada durante el proceso de resolución del problema considerado. La determinación precisa de la dirección de las fuerzas de reacción es un elemento esencial en la resolución de problemas de estática. El efecto de la ligadura sobre un cuerpo se ejerce por medio de la fuerza de reacción.

A los efectos del estudio del equilibrio de los cuerpos se puede enunciar que: *todo cuerpo vinculado puede ser considerado como un cuerpo libre si las ligaduras se sustituyen por las correspondientes reacciones*. Las intensidades de las reacciones, en principio desconocidas, se pueden determinar mediante las condiciones de equilibrio. La sustitución de las ligaduras por sus reacciones constituye el método principal de solución de los problemas de estática. En las figuras 6-1 a), b) y c) se muestran tres casos de ligaduras, representadas por superficies, figuras a) y b) y por una articulación y un cable inextensible en el caso de la figura c).

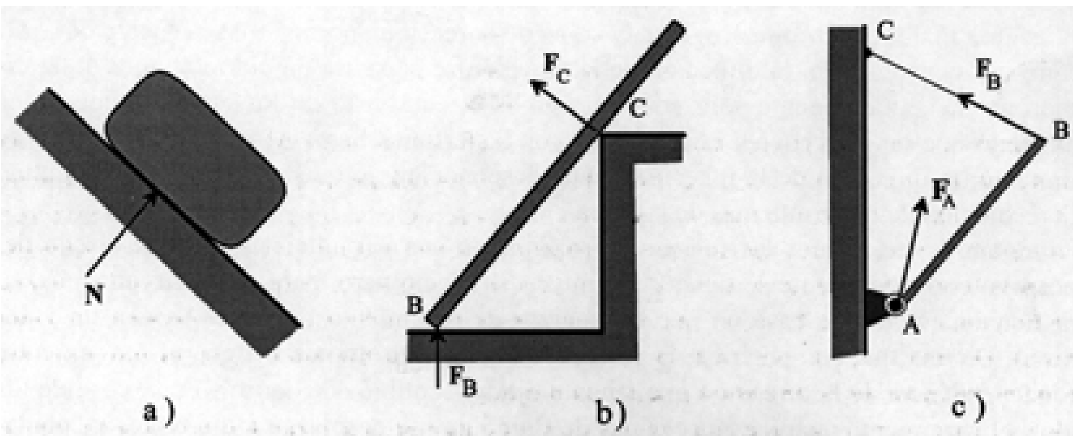


Fig.6-1

La superficie inclinada de la figura 6-1 a), impide el desplazamiento del sólido rígido en la dirección perpendicular y en el sentido de introducirse en ella. La reacción está representada por la fuerza **N**. En el caso de la barra de la figura 6-1 b), las reacciones $\mathbf{F}_B$ y $\mathbf{F}_C$ indican las direcciones y sentidos de los desplazamientos impedidos por la ligadura representada por la superficie indicada. La reacción $\mathbf{F}_C$ es perpendicular a la barra en el punto de apoyo. Las ligaduras de la barra de la figura 6-1 c), están representadas, en el extremo A de la barra por una articulación que impide el desplazamiento simultáneamente en las direcciones perpendicular y paralela a la superficie a la cual esta unida la articulación, y en el extremo B por un cable inextensible que impide que el extremo B de la barra modifique su distancia al punto C de unión del cable con la pared vertical. La reacción en A representada por $\mathbf{F}_A$, tiene dirección desconocida, ya que hay dos desplazamientos prohibidos y la reacción en B tiene la dirección del cable y sentido el de oponerse al aumento de la distancia. Las reacciones en los casos a) y b) tienen las direcciones indicadas, con independencia de las fuerzas que actúen sobre los cuerpos e independientemente de que estos se encuentren en reposo o en movimiento.

6.3 Fuerza de rozamiento estático

Respecto de las superficies que se han mencionado hasta ahora, se ha supuesto implícitamente que son superficies *lisas*. Las superficies lisas únicamente impiden el desplazamiento de los cuerpos en la dirección de la normal a las superficies en el punto de contacto y no son sino una idealización de la superficie real de un material, la cual siempre presenta un cierto grado de *rugosidad*. La experiencia muestra que cuando hay presentes fuerzas que tiende a desplazar un cuerpo sobre la superficie de otro, en el plano de contacto aparecen fuerzas tangenciales que se opone al desplazamiento de una superficie respecto de la otra. Dichas fuerzas se denominan *fuerzas de rozamiento*.

La aparición del rozamiento está condicionado principalmente por, la rugosidad de las superficies puestas en contacto y por el grado de adherencia entre ellas. La reacción debida a una ligadura real (con rozamiento) será la suma de la reacción normal más la fuerza de rozamiento; por consiguiente, la dirección de la reacción se separará un cierto ángulo de la dirección normal. Inicialmente solo consideraremos el equilibrio de los cuerpos vinculados suponiendo que las superficies involucradas son superficies lisas. Al incluir las fuerzas de rozamiento, la dirección de la reacción queda desconocida, lo que incrementa la dificultad de la resolución de los problemas de estática.

En algunos mecanismos las fuerzas de rozamiento son perjudiciales, y en el diseño del dispositivo correspondiente se tiene a minimizar su efecto pero, para otros mecanismos, su buen funcionamiento se basa en que las fuerzas de rozamiento presentes tengan un valor máximo. De una manera genérica, la fuerza de rozamiento impide o frena el movimiento, con independencia de la dirección que tenga o sea susceptible de adquirir. En el caso de los fluídos, el rozamiento aparece entre capas de fluido que se desplazan a diferentes velocidades, y su estudio, de una gran importancia en la ingeniería, corresponde a la mecánica de fluidos. Para el caso de los sólidos rígidos en equilibrio puestos en contacto, el rozamiento se denomina *rozamiento seco o rozamiento de Coulomb*, y las fuerzas que aparecen entre los sólidos se denominan *fuerzas de rozamiento estático.*

La fuerza de rozamiento estático aparece al formular las condiciones de equilibrio para un sólido que se encuentra en reposo sobre otro cuerpo, cuando está sometido a la acción de fuerzas externas no compensadas. Dicha fuerza se ejerce de tal manera que se opone a la tendencia de las superficies en contacto a deslizar una respecto de la otra. Así, sin el rozamiento no sería posible caminar, ni desplazarnos sobre ruedas, ni poder hacer uso de los objetos e instrumentos habituales, ni la transmisión del movimiento en las máquinas mediante la acción de cables o poleas.

Cuando las superficies en contacto están en movimiento relativo una respecto de la otra, el rozamiento se denomina *rozamiento cinético* el cual, en general, es un inconveniente ya que, por una parte tiene lugar un desgaste de los materiales en contacto y de otra, la necesidad de consumir energía para compensar la pérdida debida al rozamiento y mantener el sistema en condiciones estacionarias de funcionamiento. Sin embargo, en ciertos casos el rozamiento cinético es de gran utilidad, como ocurre en todos los sistemas de frenado.

Como ya se ha indicado, la aparición del rozamiento estático está condicionado sobre todo por la *rugosidad* de las superficies en contacto y por el grado de *adherencia* presente entre los cuerpos presionados el uno contra el otro. A escala microscópica, una superficie con el mayor grado de pulimentación posible no es una superficie plana, sino que presenta una cierta rugosidad. Al colocar dos cuerpos en contacto, debido a la rugosidad de sus superficies, el área real de contacto entre ellos se establece entre las prominencias de las superficies de ambos cuerpos la cual es mucho menor que el área de la superficie macroscópica de apoyo. En dichas *microzonas* de apoyo, la presión tienen valores muy grandes y como resultado de la cual, las fuerzas entre las moléculas de las caras opuestas son muy intensas, generando un fenómeno de adherencia superficial, figura 6-2. En condiciones límites de pulimentación, de eliminación de impurezas y sin capa de aire entre dos superficies de un mismo material puestas en contacto, ambas partes del material quedan firmemente unidas entre sí.

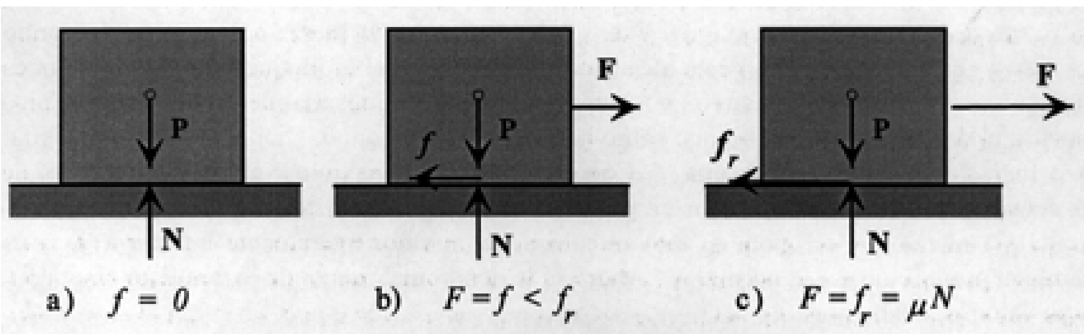


Fig. 6-2

El estudio de todas las particularidades del fenómeno del rozamiento estático sigue siendo un problema físico-químico muy complicado, por tanto no es de extrañar que no exista un tratamiento teórico riguroso y que los cálculos prácticos se basan en una serie de leyes generales, que aunque han sido establecidas experimentalmente, reflejan con suficiente precisión las principales características del rozamiento estático. Estas leyes pueden ser enunciadas de la siguiente manera :

1. *Cuando se tiende a desplazar un cuerpo sobre la superficie de otro, aparece en el plano de contacto de los cuerpos una fuerza de rozamiento f cuyo valor está comprendida entre cero y un valor máximo f_r .*

2. *El valor máximo de la fuerza de rozamiento f_r es proporcional a la fuerza normal N de presión entre las superficies en contacto.*

3. *La fuerza de rozamiento máxima f_r no depende (para presiones pequeñas) del área de las superficies de contacto.*

De la primera y segunda ley del rozamiento estático se tiene que

$$f_r = \mu\ N \tag{6-1}$$

donde μ es el coeficiente de rozamiento estático. Es un número adimensional que depende de la naturaleza y del estado de las superficies de los cuerpos en contacto, cuyo valor puede ser determinado experimentalmente de una manera muy simple. Los materiales cuyo coeficiente de rozamiento μ se desea determinar se sitúan, tal como se ve en la figura 6-2, colocando el bloque de peso **P** de uno de los materiales sobre la superficie horizontal formada con el otro material. El apoyo impide el desplazamiento vertical del bloque, luego la reacción en el apoyo **N** cumple **N** = – **P** .

En la figura 6-2 a) la fuerza de rozamiento es cero ya que no hay ninguna fuerza aplicada al bloque que tienda a moverlo sobre la superficie de contacto. En la figura 6-2 b) se aplica una fuerza horizontal **F** tal que el bloque continua en reposo sobre la superficie horizontal; si para esta **F** aplicada, el bloque no se encuentra en la situación de movimiento inminente, la fuerza de rozamiento f será, igual y de sentido opuesto a la fuerza aplica **F**. Aumentando la fuerza activa, figura 6-2 c) está alcanzará un valor tal que el bloque está en condiciones de movimiento inminente cuando un nuevo incremento infinitesimal de la fuerza activa produciría el deslizamiento del bloque sobre la superficie horizontal. Dicho valor de F es igual a la fuerza de rozamiento máxima f_r. Conocidas la fuerza máxima y el peso del cuerpo, de la ecuación (6-1) se tiene el valor de μ .Cuando el bloque desliza sobre la superficie horizontal, la fuerza que se opone al movimiento tiene un valor ligeramente inferior a f_r y es también proporcional a la normal N. Ahora se le denomina, fuerza de rozamiento cinético f_c y su valor está dado por

$$f_c = \mu_c\ N \tag{6-2}$$

donde μ_c es el *coeficiente de rozamiento cinético*, cuyo valor es ligeramente inferior al coeficiente de rozamiento estático μ.

Tabla 6.1
Valores aproximados del coeficiente de rozamiento estático

Materiales	μ	**Materiales**	μ
Metal sobre metal	0.15 – 0.60	Metal sobre cuero	0.30 – 0.60
Metal sobre madera	0.20 – 0.60	Madera sobre madera	0.25 – 0.50
Metal sobre vidrio	0.50 – 0.70	Vidrio sobre vidrio	0.90 – 1.0
Metal sobre piedra	0.30 – 0.70	Piedra sobre piedra	0.40 – 0.70

Cono de rozamiento. Consideremos ahora el caso en que la superficie plana de la figura 6-2 sobre la que se apoya el bloque de peso **P** forma un cierto ángulo con la horizontal, figura 6-3 y que la única fuerza activa es el peso. En la posición representada en la figura 6-3 a), la superficie inclinada forma con la horizontal un ángulo φ y el bloque no está en la situación de movimiento inminente.

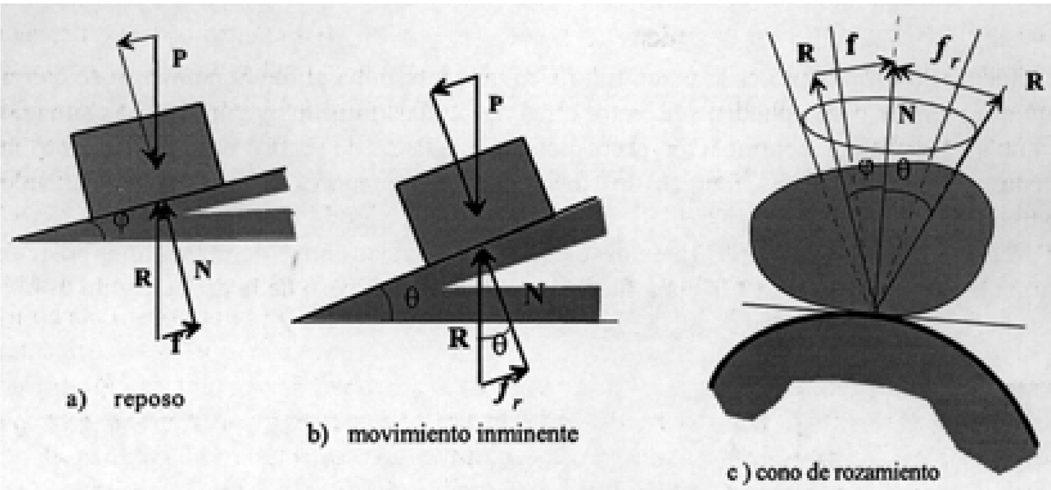


Fig. 6-3

La reacción en el apoyo **R** es igual a $-$**P**, y se cumple que **P** = **f** + **N**, donde $f = P$ sen φ es la fuerza de rozamiento existente, opuesta a la componente del peso en la dirección paralela al plano inclinado que constituye la fuerza activa susceptible de producir deslizamiento, y $N = P \cos \varphi$ es la fuerza vinculante que impide el movimiento del bloque en la dirección perpendicular al plano inclinado. Al aumentar el ángulo φ, este alcanza un valor θ tal que el bloque se encuentra en situación de movimiento inminente, figura 6-3 b). En está posición la fuerza de rozamiento tiene su valor máximo $f_r = P\, sen\, \theta$ y la normal es $N = P \cos\theta$. Sustituyendo estos valores en la ecuación (6-1) queda que el coeficiente de rozamiento μ está dado por

$$\mu = \operatorname{tg} \theta \tag{6-3}$$

Al ángulo θ se le llama *ángulo de rozamiento estático.* El ángulo de rozamiento θ es el ángulo que forma la reacción **R** con la normal **N** en el apoyo en condiciones de movimiento inminente.

En el caso más general de contacto entre dos superficies figura 6-3 c), tal que el deslizamiento posible de una superficie sobre otra pueda tener lugar en cualquier dirección, la reacción **R** tiene una dirección arbitraria en el espacio, y en el caso de movimiento inminente, está situada sobre una *superficie cónica* de semieje θ definido por el valor del coeficiente de rozamiento $\mu = \operatorname{tg}\theta$ entre ambas superficies. Dicha superficie se denomina *cono de rozamiento.* Si la resultante forma con la normal un ángulo φ menor que θ, el cuerpo se encuentra en reposo y el valor de la fuerza de rozamiento existente está dado por $f = R$ sen φ.

6.4 Rozamiento en cuñas, tornillos y correas

La fuerza de rozamiento es la magnitud física que determina el funcionamiento de ciertas máquinas simples como pueden ser, entre otras, las cuñas, tornillos y correas. Las situaciones que se describen a continuación corresponden a estados de reposo o de movimiento inminente, en las cuales las fuerzas de rozamiento son menores o iguales que su valor máximo.

Cuñas. Las cuñas son dispositivos destinados a modificar convenientemente la posición de grandes cargas aplicando a la cuña fuerzas menores que el peso de la carga, figura 6-4.

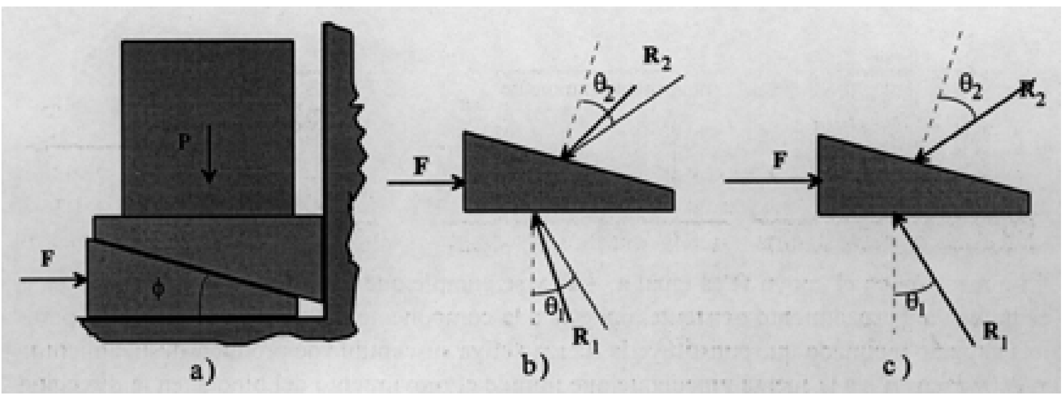


Fig. 6-4

Una cuña es un bloque de peso despreciable que tiene dos superficies planas que forman un ángulo pequeño, destinadas en general a posicionar cargas muy pesadas. Para este fin se utilizan comúnmente por parejas, figura 6-4 a), y según sea el ángulo ϕ de la cuña, el peso a elevar puede ser mucho mayor que la fuerza **F** aplicada a la cuña. Si el bloque no está en condiciones de movimiento inminente, figura 6-4 b) las reacciones $\mathbf{R}_1$ y $\mathbf{R}_2$ forman con las correspondientes normales a las superficies de la cuña ángulos menores que los definidos por los coeficientes de rozamiento entre las superficies en contacto, $\operatorname{tg}\theta_1 = \mu_1$ y $\operatorname{tg}\theta_2 = \mu_2$. En la posición de movimiento inminente en sentido ascendente del bloque, las fuerzas de rozamiento tienen valores máximos y las reacciones $\mathbf{R}_1$ y $\mathbf{R}_2$ forman con las correspondientes normales los ángulos θ_1 y θ_2, figura 6-4 c), tal que $\mathbf{F} = \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2$.

Tornillos. Los tornillos de rosca cuadrada son máquinas simples que proporcionan grandes fuerzas de salida con pequeños esfuerzos aplicados. Estos dispositivos se utilizan, entre otros mecanismos, en prensas, en gatos elevadores ..etc, y en todos ellos, es el rozamientos en los filetes del tornillo lo que impide que se aflojen manteniendo su posición incluso después de anular la fuerza aplicada. Consideremos el gato representado en la figura 6-5 a), el cual soporta una carga de peso **P**.

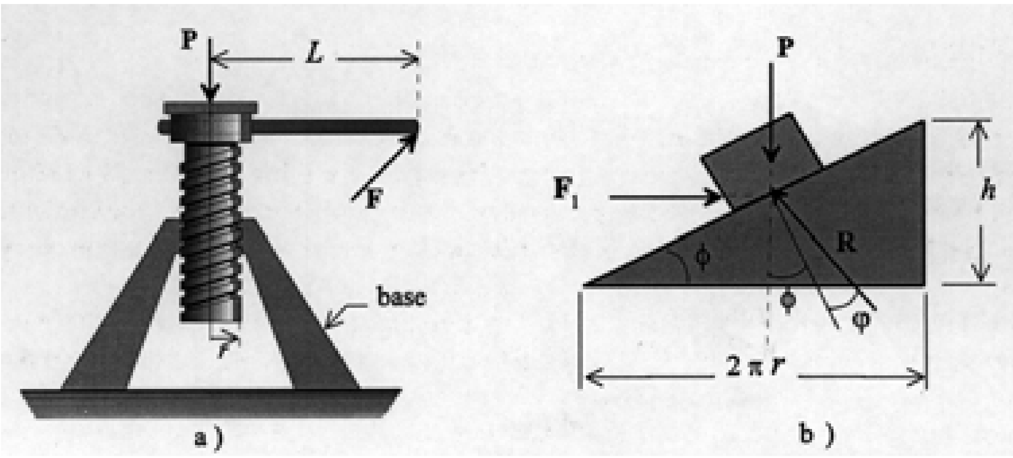


Fig. 6-5

El tornillo soporta el peso **P** y se apoya en la rosca de la base, estableciéndose el contacto entre ellos a través de una porción de la rosca. Mediante la aplicación de una fuerza horizontal **F** en el extremo del mango del tornillo y perpendicular a él, se consigue mantener la carga **P** en equilibrio. El tornillo trabaja utilizando el rozamiento entre la superficie de los filetes del tornillo con la superficie de la rosca de la base.

Se puede considerar el tornillo como un bloque de peso **P** en equilibrio, apoyado sobre la superficie inclinada de la rosca de la base, figura 6-5 b). Sobre el bloque, situado en el plano inclinado actuarán, además de su peso **P**, la resultante **R**, que forma con la normal al plano inclinado un ángulo φ menor que el de rozamiento, y una fuerza horizontal $\mathbf{F}_1$ cuyo momento respecto del eje del tornillo equilibra al de la fuerza **F** aplicada a una distancia L del eje en el extremo del mango del tornillo. Si h y r son el paso de rosca y el radio medio del tornillo, a una vuelta completa le corresponde la longitud lineal $2\pi\, r$ y un desplazamiento vertical h, luego el ángulo del plano inclinado equivalente a la superficie de la rosca está dado por $\operatorname{tg}\phi = h/(2\,\pi\, r)$.

Determinemos el valor de la fuerza F aplicada en el extremo del mango del tornillo para las condiciones de movimiento inminente hacia arriba de la carga **P**. En condiciones de movimiento inminente, la componente de la reacción **R** forma con la normal al plano inclinado el ángulo θ dado por μ = tg q y la fuerza de rozamiento tiene el valor máximo $f_r = \mu\, N$. Construyendo el triángulo de fuerzas del diagrama del sólido libre del bloque, figura 6-6 b) se deduce inmediatamente que

$$F_1 = P\,\operatorname{tg}(\phi + \theta) \quad \text{pero} \quad F_1\, r = F\,L \quad \Rightarrow \quad F = \frac{rP}{L}\operatorname{tg}(\phi + \theta) \qquad (6\text{–}4)$$

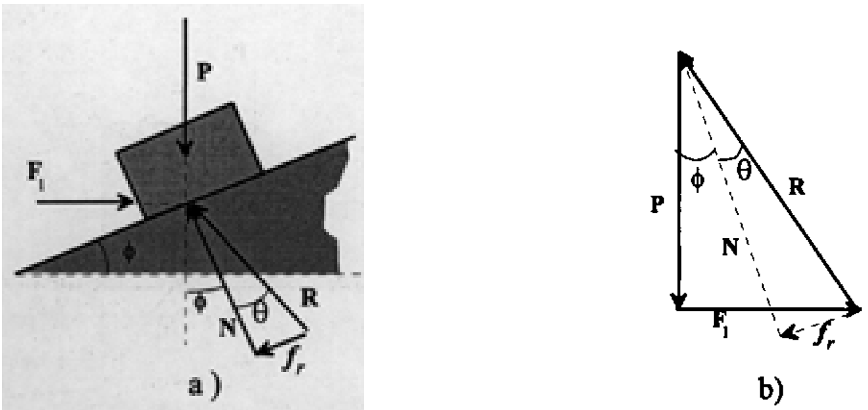


Fig. 6-6

De la ecuación (6-4) se deduce que el valor mínimo del momento M aplicado a la cabeza del tornillo que produce un desplazamiento ascendente de la carga está dado por

$$M = rP\,\operatorname{tg}(\phi + \theta) \qquad (6\text{-}5)$$

y su valor, para un tornillo dado, aumenta con el coeficiente de rozamiento. Disminuyendo el valor del momento aplicado M dado por (6-5), el tornillo tiene a descender, con lo cual la fuerza F_1 cambia de sentido y por tanto también lo hace la fuerza de rozamiento. Si el ángulo del plano inclinado es mayor que el ángulo de rozamiento, para mantener el equilibrio es necesario considerar la fuerza $\mathbf{F}_1$ tal como la representada en la figura 6-7 a).

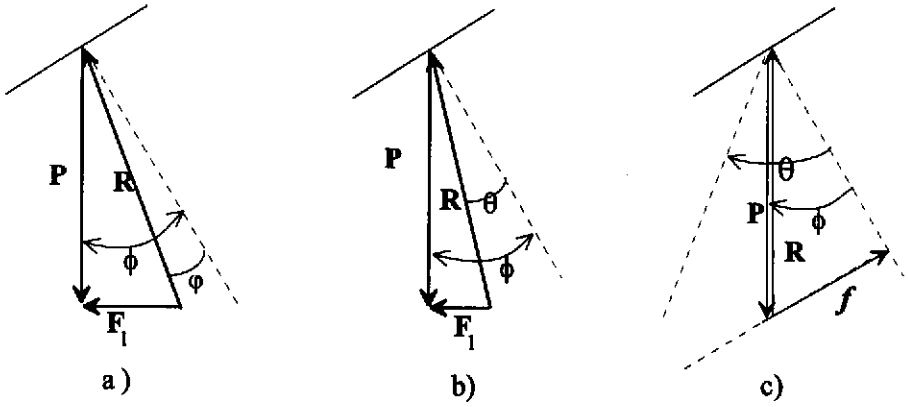


Fig. 6-7

La figura 6-7 b) corresponde al triángulo de fuerzas para la situación de movimiento inminente en sentido descendente cuando el ángulo de rozamiento es menor que el ángulo del plano inclinado, de la cual se deduce que el valor de la fuerza F aplicada al extremo del mango del tornillo en la condición de movimiento inminente descendente está dado por

$$F = \frac{rP}{L} tg(\phi - \theta) \qquad (6\text{-}6)$$

Si el ángulo del plano inclinado es *menor* que el ángulo de rozamiento, figura 6-7 c), el tornillo se mantiene en equilibrio bajo la acción de la carga **P** incluso suprimiendo la fuerza F. Esta condición recibe el nombre de ***irreversibilidad del tornillo***, y constituye un criterio para el diseño de muchos tornillos.

Correas. Las correas son elementos de transmisión de esfuerzos mecánico que se utilizan en muchos de maquinaria, cuyo funcionamiento es posible debido al rozamiento entre la correa y la polea sobre la cual actúa. El par aplicado a la polea es máximo cuando la correa está en condiciones de deslizamiento inminente. Consideraremos correas planas en contacto con superficies cilíndricas tal como se representa en la figura 6-8 a).

Debido al rozamiento, las tensiones a uno y otro lado del tambor cilíndrico son distintas; supongamos que la tensión T_2 es mayor que la tensión T_1, con lo cual el movimiento inminente de la correa es hacia la derecha. El rozamiento existente a lo largo del ángulo ϕ de contacto entre la correa y el tambor ejerce sobre el tambor un par de sentido horario y el tambor ejerce sobre la correa una resistencia de sentido opuesto, que depende de la normal la cual varía de un punto a otro a lo largo de la zona de contacto. Vamos a determinar la relación entre las tensiones y dicho ángulo en situación de deslizamiento inminente, siendo μ el coeficiente de rozamiento entre la correa y el cilindro. Consideremos un elemento diferencial de correa cuyos extremos sustentan el arco $d\,\varphi$. Las fuerzas que actúan sobre el elemento de correa se muestran en la figura 6-8 b) en donde la normal dN está dirigida en sentido radial.

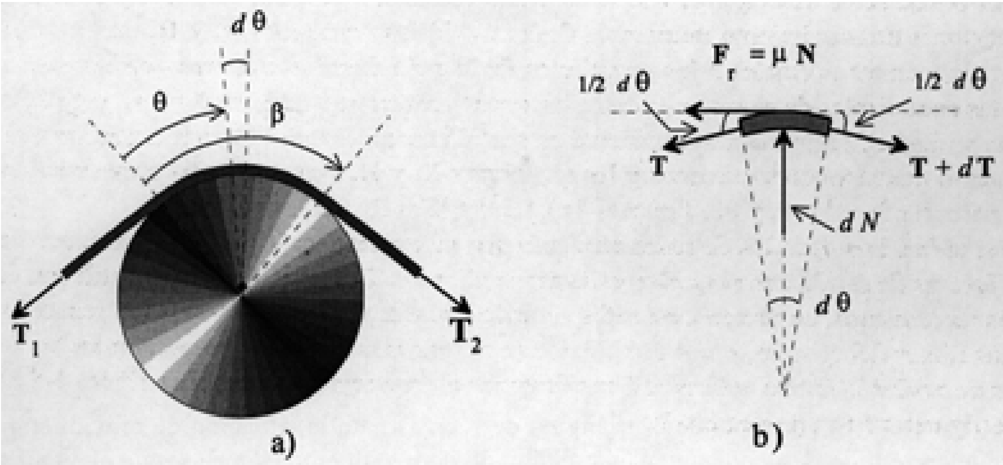


Fig. 6-8

Teniendo en cuenta que para ángulos diferenciales el coseno es igual a 1 y el seno es igual al ángulo, en condiciones de movimiento inminente la fuerza dT que tiende a producir deslizamiento de la correa sobre el tambor es igual a la fuerza de rozamiento, luego se tiene $dT = dF_r = \mu\, dN$. Pero la normal, despreciando infinitésimos de orden superior, está dada por $dN = T\,d\theta$; sustituyendo queda

$$dT = \mu\, T\, d\theta \qquad (6\text{-}7)$$

Integrando (6-7) entre las tensiones en los extremos de la correa en contacto con el tambor, se obtiene la relación entre ellas y el ángulo de contacto

$$T_2 = T_1\, e^{\mu\beta} \qquad (6\text{-}8)$$

En cualquiera de las posibles aplicaciones, la ecuación (6-8) sólo es utilizable en condiciones de movimiento inminente, teniendo en cuenta que T_2 es mayor que T_1 y el ángulo de contacto β se debe expresar en *radianes*, cuyo valor puede ser mayor que 2π en el caso en que se trate de una cuerda enrollada n veces a un poste cilíndrico.

Correas trapezoidales. En una gran mayoría de casos, las correas utilizadas en transmisión tienen forma trapezoidal y se denominan *correas trapezoidales.* Como se ve en la figura 6-9, el contacto entre la correa y la polea tiene lugar a lo largo de las superficies laterales de la polea, las cuales forman entre sí un ángulo α.

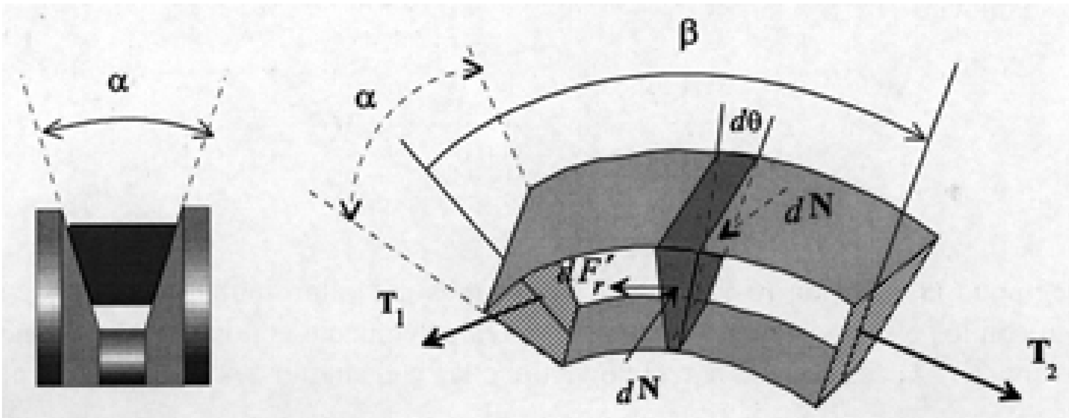


Fig.6-9

Supongamos que la tensión $\mathbf{T}_2$ es mayor que la tensión $\mathbf{T}_1$, y que el contacto entre la polea y la correa está definido por el ángulo β. Lo mismo que en el caso anterior, en condiciones de movimiento inminente, la fuerza dT sobre un elemento diferencial de correa $d\theta$ que tiende a producir deslizamiento de la correa sobre la polea, es igual a la fuerza de rozamiento dF_r, que ahora actúa sobre las dos caras, es decir $dT = dF_r$, figura 6-10.

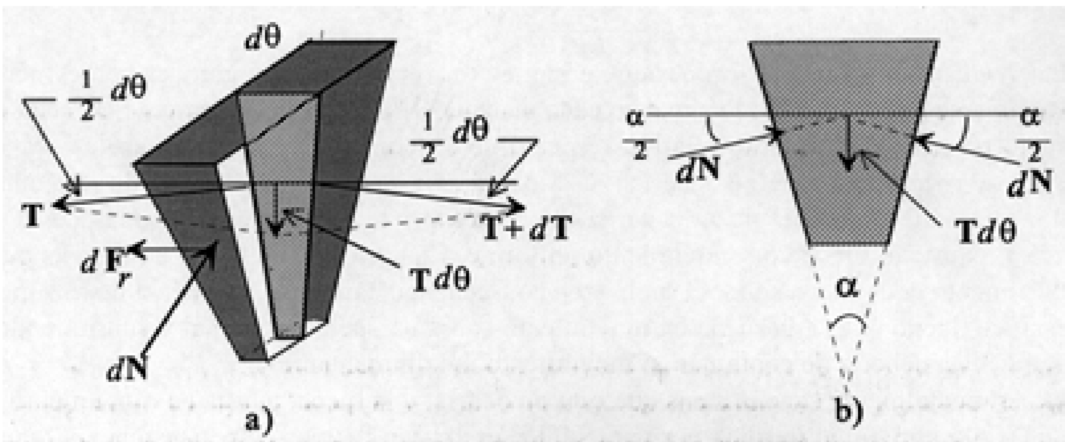


Fig. 6-10

De la figura 6-10 a), se deduce que la fuerza de rozamiento sobre las dos caras del elemento de correa $d\theta$ es igual a $dF_r = 2\ dF_r' = 2\ \mu\ dN$, donde dN es un fuerza dirigida según la perpendicular a las caras de la polea y sentido hacia la correa. La normal total sobre las dos caras del elemento $d\theta$, despreciando infinitésimos de orden superior, satisface la condición 2 sen (α/2) $dN = T\,d\theta$. Eliminando la fuerza normal dN entre ambas ecuaciones y operando se obtiene

$$\frac{dT}{T} = \frac{\mu}{\operatorname{sen}(\alpha/2)}\,d\theta \qquad (6\text{-}9)$$

Integrando la ecuación (6-9) entre 0 y β, límites del valor del ángulo $d\theta$ que se corresponden con los extremos de la porción de correa en contacto con la polea, en donde las tensiones son T_1 y T_2, se obtiene la relación entre ellas y el ángulo de contacto dada por

$$T_2 = T_1\ e^{\left(\frac{\mu}{\operatorname{sen}(\alpha/2)}\right)^{\beta}} = T_1\,e^{\mu_e \beta} \qquad (6\text{-}10)$$

donde el parámetro $\mu_e = \mu / \operatorname{sen}(\alpha/2)$ se puede definir como el coeficiente de rozamiento equivalente para las correas trapezoidales. Su valor es siempre mayor que el correspondiente valor de μ, por lo que las correas trapezoidales admiten mayores tensiones que las correas normales sin que se produzca deslizamiento de la correa sobre la polea.

6.5 Resistencia a la rodadura

Las ruedas son máquinas simples que permiten mover cargas muy grandes con esfuerzos relativamente pequeños debido a que en cada instante el "punto" de contacto de la rueda con el suelo no tiene movimiento relativo respecto de él, con lo cual se eliminan las grandes fuerzas de rozamiento que aparecerían si la carga se arrastrara en contacto directo con el suelo. Ahora bien, para desplazar la carga colocada sobre la rueda hay que aplicar a esta una fuerza **F** para que ruede con movimiento uniforme. Cuando **F** es nula, no hay tendencia al deslizamiento de la rueda sobre el suelo y en consecuencia tampoco hay fuerza de rozamiento estático, luego puesta la rueda en movimiento sobre un suelo horizontal y suprimiendo la fuerza **F**, ésta debería de continuar en movimiento indefinidamente.

Experimentalmente encontramos que esto no ocurre, y la rueda, puesta en movimiento sobre un suelo horizontal termina por pararse, luego existen fuerzas de resistencia a su movimiento que no son debidas al rozamiento estático. Prescindiendo de la resistencia que ofrece el aire al desplazamiento de un cuerpo en su seno, la resistencia al movimiento de la rueda sobre la superficie plana tiene su origen en dos causas distintas:

1) *el rozamiento en el eje de la rueda*

2) *la rueda y el suelo no son sólidos rígidos*

Analizamos el efecto de la primera causa. Consideremos una rueda con una carga **Q** sobre su eje que rueda hacia la derecha con velocidad constante. La resistencia debida al rozamiento con el cojinete, ejerce un par **M** de sentido antihorario figura 6-11 a), luego para mantener su movimiento se deben de añadir dos fuerzas, la fuerza **F** y la fuerza de rozamiento **f** ejercida por el suelo sobre la rueda, ya que ahora la rueda sí tiene tendencia a deslizar sobre él, tal que ambas fuerzas formen un par de momento **–M**. Si el rozamiento con el suelo es nulo, la rueda deslizaría sobre el suelo sin girar en su cojinete.

Veamos el efecto de la segunda causa, es decir, que la rueda y el suelo no son sólidos rígidos, y por tanto se deforman. Como resultado de la deformación, el contacto entre la rueda y el suelo no es un punto si no una cierta área. Consideremos que, o bien no hay rozamiento con el eje, con lo que el par **M** es nulo y las fuerzas **F** y **f** también son nulas, o que el rozamiento con el eje es despreciable, por ejemplo, una rueda que rueda libremente con velocidad constante sobre un suelo horizontal, figura 6-11 b).

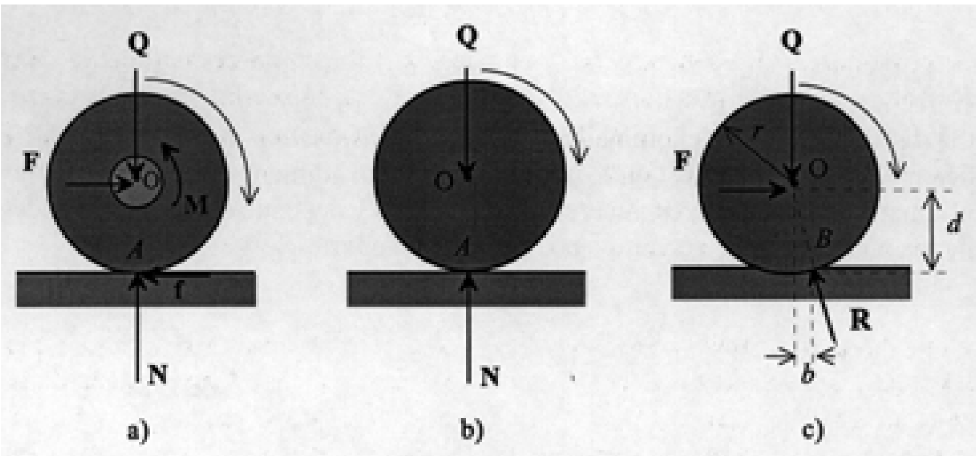


Fig. 6-11

Supongamos que su eje soporta una carga **Q**. Si el apoyo sobre el suelo fuese realmente puntiforme, la reacción **N** del suelo sobre la rueda sería igual y de sentido opuesto a la carga **Q**, y puesta a rodar, al ser nulo el sistema de fuerzas exteriores que actúan sobre ella, continuaría rodando indefinidamente, cosa que no ocurre, ya que la experiencia demuestra que el movimiento de la rueda es retardado y finalmente se para. Esto es debido a que el contacto no es puntual, lo que genera una resistencia al movimiento de la rueda sobre el suelo, que se denominada *resistencia a la rodadura.* Los materiales reales se deforman al estar sometidos a las grandes presiones existentes en la pequeña zona de contacto entre la rueda y el suelo. Para simplificar, asociemos la deformación únicamente al suelo, figura 6-11 c).

Para mantener la rueda rodando con velocidad constante es necesario que la rueda en cada instante ascienda por la deformación producida en el suelo, para lo cual hay que aplicar una fuerza horizontal **F** que la suponemos dirigida hacia la derecha. La resultante **R** de la reacción en apoyo ha de cumplir que **Q** + **F** = **R**, es decir, la componente horizontal de **R** es igual y de sentido opuesto a la **F** y la componente vertical de **R** equilibra la carga **Q**, luego la reacción **R** tiene una dirección que pasa por un punto B, cuyas cotas respecto del centro O de la rueda son las marcadas en la figura 6-11 c).

Para que el movimiento de la rueda sea uniforme, el momento de las fuerzas exteriores respecto de B ha de ser nulo

$$F\,d = Q\,b$$

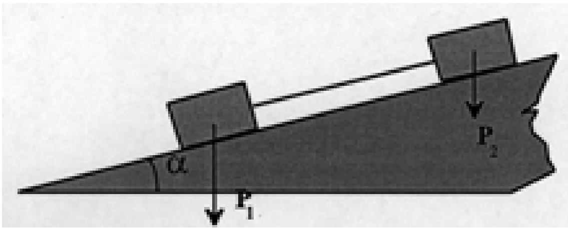
Pero la deformación es realmente muy pequeña, lo que permite sustituir el valor d por el radio r de la rueda y queda

$$F\,r = Q\,b \qquad \Rightarrow \qquad b = \frac{F}{Q}\,r \tag{6-11}$$

A la distancia b, se le denomina *coeficiente de resistencia a la rodadura*. A diferencia del coeficiente de rozamiento estático, b no es un número adimensional y se mide normalmente en milímetros. Su valor es, en general, muy pequeño y depende de las propiedades mecánicas de los materiales que constituyen la rueda y el soporte.

PROBLEMA 6-1

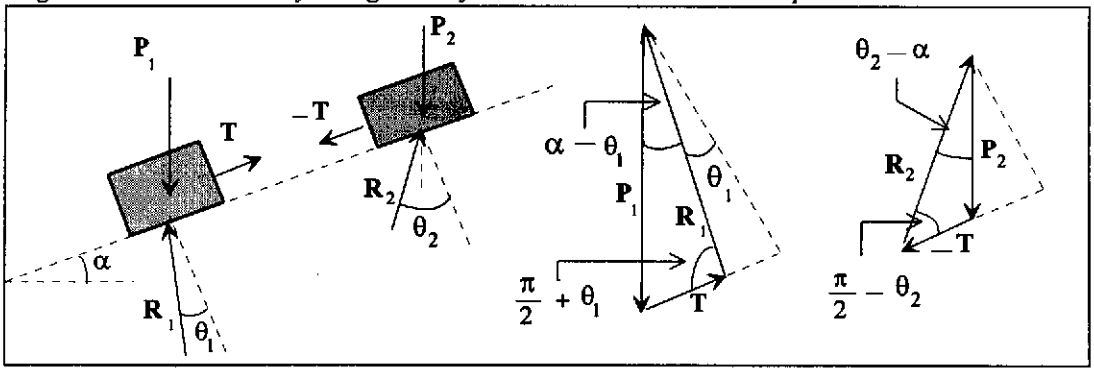
En la figura adjunta se representan dos cuerpos de pesos $\mathbf{P_1}$ y $\mathbf{P_2}$ tales que $\mathbf{P_1} = 3\,\mathbf{P_2}$, unidos mediante un cable y colocados sobre un plano inclinado α. Los coeficientes de rozamientos respectivos entre los cuerpos y el plano son μ_1 y μ_2. Determinar el valor máximo de α para que no haya deslizamiento y la tensión de la cuerda para esta situación.



SOLUCIÓN

El movimiento posible de los bloques bajo la acción de su propio peso es el de deslizamiento sobre el plano inclinado, luego la fuerza de rozamiento es tangente al plano inclinado y dirigida hacia arriba. En condiciones de movimiento inminente, las reacciones en los apoyos forman con la normal al plano inclinado ángulos θ_1 y θ_2 cuyas tangentes son iguales a μ_1 y μ_2 respectivamente.

Diagramas del sólido libre y triángulos de fuerzas de cada uno de los bloques.



Del triángulo de fuerzas para cada uno de los bloques se tiene

$$\frac{T}{\operatorname{sen}(\alpha - \theta_1)} = \frac{P_1}{\cos\theta_1} \qquad \frac{T}{\operatorname{sen}(\theta_2 - \alpha)} = \frac{P_2}{\cos\theta_2}$$

Operando se tiene que la tensión T de la cuerda está dada por

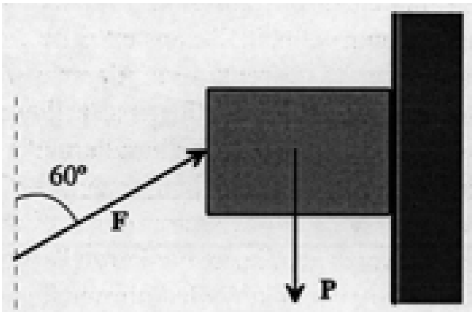
$$T = P_1\,(\mu_1 - \operatorname{tg}\alpha)\cos\alpha \qquad \text{o} \qquad T = P_2\,(\mu_2 - \operatorname{tg}\alpha)\cos\alpha$$

Igualando ambas ecuaciones queda

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\mu_1 P_1 + \mu_2 P_2}{P_1 + P_2} = \frac{3\mu_1 + \mu_2}{4}$$

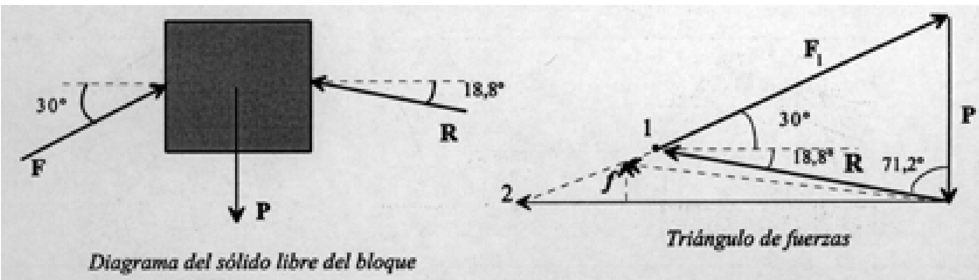
PROBLEMA 6-2

El bloque de la figura adjunta tiene un peso de 1200 kg y está apoyado en una pared vertical con un coeficiente de rozamiento de 0.34. En el punto central de la cara de la izquierda se le aplica una fuerza **F** cuya dirección forma con la vertical un ángulo de 60°. Determinar el intérvalo de valores de F para que el bloque se mantenga en equilibrio



SOLUCIÓN

El valor mínimo de la fuerza F aplicada al bloque para que este no deslice hacia abajo, es el que produce una fuerza de rozamiento máxima, para la cual, la reacción de la pared sobre el bloque forma un ángulo θ con la normal al bloque tal que $\text{tg}\ \theta = 0,34$ de donde $\theta = 18,8°$.



Del triángulo de fuerzas se tiene

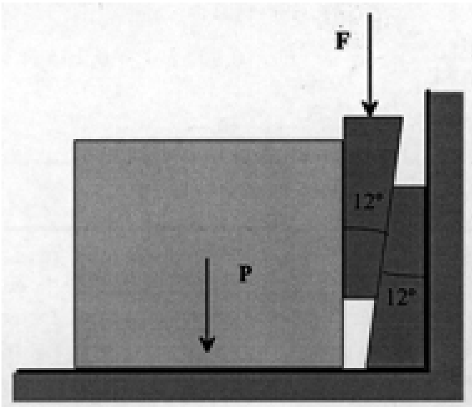
$$\frac{F_1}{\text{sen } 71,2} = \frac{P}{\text{sen} 48,8} \quad \Rightarrow \quad F_1 = 1510 \text{ kg}$$

A medida que aumenta el valor de F pasando el punto origen del vector **F** de el punto 1 al punto 2, la reacción forma con la normal un ángulo menor de 18,8°, y la fuerza de rozamiento presente f es menor que la máxima. Cuando el origen del vector fuerza está en el punto 2, la reacción es normal al bloque y la fuerza de rozamiento es cero. Este es el valor máximo de F para que el bloque este en equilibrio. Del triángulo de fuerzas se tiene $F_2 = P / \text{sen } 30 = 2400$ kg . El bloque está en equilibrio para cualquier valor de F tal que

$$1510 \leq F \leq 2400$$

PROBLEMA 6-3

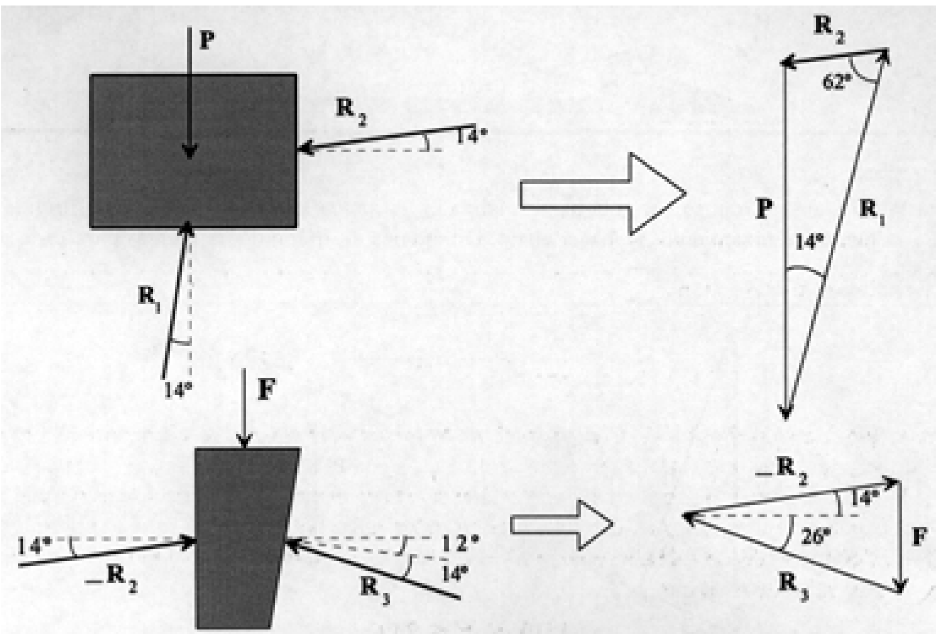
Determinar el valor mínimo de la fuerza **F** aplicada a la cuña de la figura adjunta, para que el bloque de peso 628 kg esté en condiciones de movimiento inminente, si el coeficiente de rozamiento entre todas las superficies es de 0, 25.



SOLUCIÓN

En condiciones de movimiento inminente, las reacciones en los apoyos forman con las normales un ángulo dado por $\operatorname{tg}\theta = 0,25$ de donde $\theta = 14°$.

Diagramas del sólido libre del bloque y de la cuña en contacto con él.



Del triángulo de fuerzas del bloque se tiene

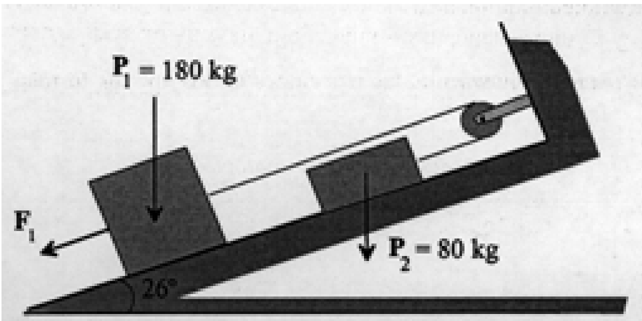
$$\frac{P}{\text{sen } 62} = \frac{R_2}{\text{sen } 14} \quad \Rightarrow \quad R_2 = 0{,}274\, P$$

y del de la cuña se tiene

$$\frac{F}{\text{sen} 40} = \frac{R_2}{\text{sen} 64} \quad \Rightarrow \quad F = 0{,}715 R_2 \;= 0{,}196\, P \;=\; 123.0 \text{ kg}$$

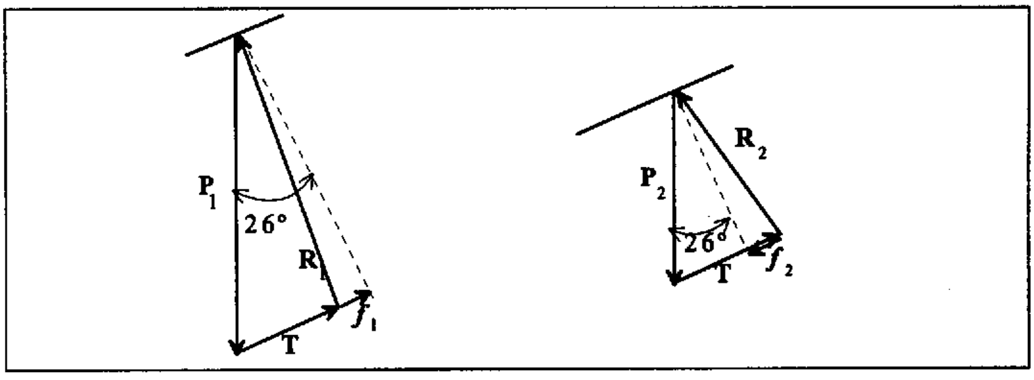
PROBLEMA 6-4

Los bloques de la figura adjunta unidos entre sí por una cuerda que pasa por una polea lisa,se encuentran en reposo sobre el plano inclinado cuando la tensión T de la cuerda es 50 kg. El coeficiente de rozamiento de ambos bloques con el plano es de 0,35. Determinar : a) la fuerza de rozamiento en cada uno de bloques ; b) la fuerza mínima $\mathbf{F}_1$ aplicada al bloque 1 paralelamente al plano inclinado para que se inicie el movimiento .



SOLUCIÓN

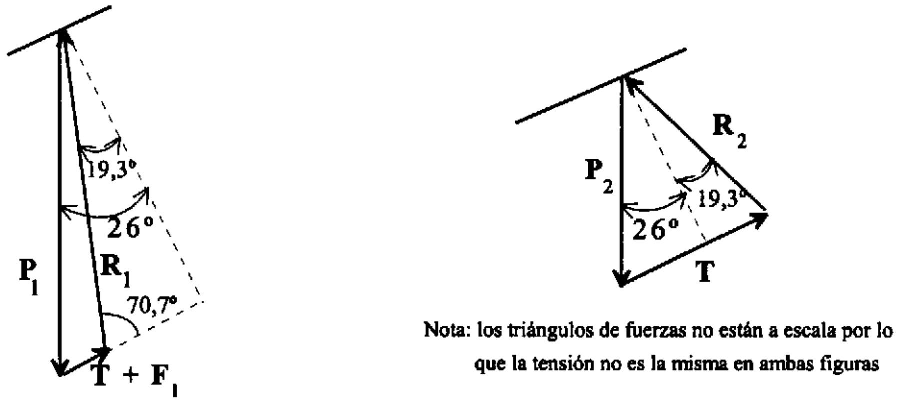
a) Para los bloques en reposo sobre el plano inclinado, la fuerza de rozamiento f_1 está dirigida hacia arriba y la fuerza de rozamiento f_2 hacia abajo. Dibujemos el triángulo de fuerzas para cada uno de bloques.



De los triángulos de fuerza se obtiene inmediatamente que

$$P_1 \operatorname{sen}26 = T + f_1 \qquad T = P_2 \operatorname{sen}26 + f_2 \quad \Rightarrow \quad f_1 = 28{,}9 \text{ kg} \qquad f_2 = 15{,}0 \text{ kg}$$

b) Apliquemos ahora una fuerza $\mathbf{F}_1$ al bloque 1 tal que el sistema está en condiciones de movimiento inminente. Las fuerzas de rozamiento tienen valor máximo y las reacciones forman con las normales ángulos tales que $\operatorname{tg}\theta = 0{,}35 \Rightarrow \theta = 19{,}3$. La tensión T de la cuerda es desconocida. Los triángulos de fuerzas para los bloques son los dibujados en la siguiente figura.



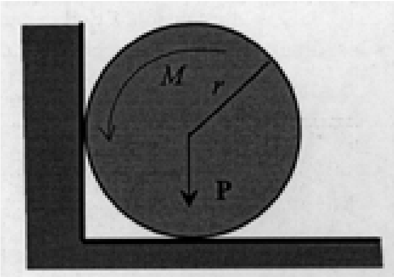
Nota: los triángulos de fuerzas no están a escala por lo que la tensión no es la misma en ambas figuras

De los triángulos de fuerzas se deduce inmediatamente que

$$\frac{T - F_1}{\operatorname{sen} 6{,}7} = \frac{P_1}{\operatorname{sen} 109{,}3} \qquad \frac{T}{\operatorname{sen} 45{,}3} = \frac{P_2}{\operatorname{sen} 70{,}7} \quad \Rightarrow \quad T = 60{,}25 \text{ kg} \qquad F_1 = 38{,}0 \text{ kg}$$

PROBLEMA 6-5

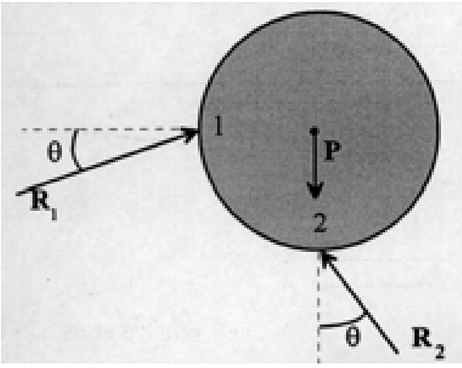
Un disco de peso **P** y radio *r* se apoya en la pared y en el suelo tal como se muestra en la figura adjunta . El coeficiente de rozamiento en las superficies de contacto es μ. Determinar el momento mínimo *M* que es necesario aplicarle para que inicie el movimiento .

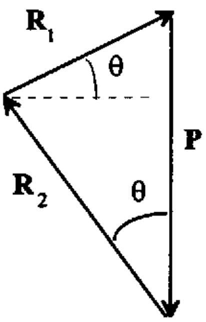


SOLUCIÓN

En condiciones de movimiento inminente, las reacciones en los apoyos forman con la normal un ángulo θ tal que $\operatorname{tg}\theta = \mu$. La orientación de las reacciones es la correspondiente a impedir el movimiento de los puntos de contacto.

Diagrama del sólido libre *Triángulo de fuerzas*





Del triángulo de fuerzas se deduce inmediatamente que

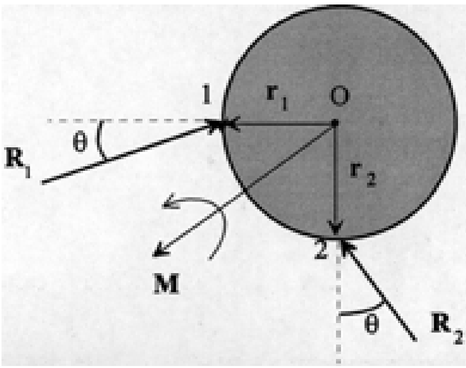
$$P^2 = R_1^2 + R_2^2 \qquad \text{y} \qquad R_1 = R_2 \operatorname{tg}\theta = \mu R_2$$

de donde las reacciones están dadas por

$$R_1 = \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}} P \qquad R_2 = \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}} P \tag{a}$$

Para que el disco este en condiciones de movimiento inminente, el momento aplicado ha de ser igual y de sentido opuesto al momento resistente, cuyo valor es la suma de los momentos de las reacciones respecto del centro del disco, es decir

$$\mathbf{M} = -(\mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{R}_1 + \mathbf{r}_2 \wedge \mathbf{R}_2) = \mathbf{R}_1 \wedge \mathbf{r}_1 + \mathbf{R}_2 \wedge \mathbf{r}_2 \qquad \text{(b)}$$



Los productos vectoriales del segundo miembro de la ecuación (b) son vectores paralelos perpendiculares al disco, luego el módulo de **M** es

$$M = R_1\, r \operatorname{sen}\theta + R_2\, r \operatorname{sen}\theta \qquad \text{(c)}$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (a), queda

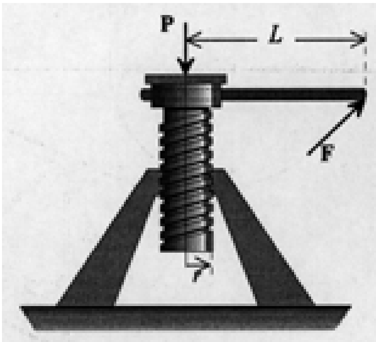
$$M = \frac{(1+\mu)\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{1+\mu^2}}\, rP \qquad \text{(d)}$$

pero del triángulo de fuerzas se tiene $P \operatorname{sen}\theta = R_1 = \mu P / \sqrt{1+\mu^2}$. Sustituyendo el seno de θ en (d), se obtiene finalmente el valor de M

$$M = \frac{(1+\mu)\mu}{1+\mu^2}\, rP$$

PROBLEMA 6-6

El gato de la figura adjunta tiene un tornillo de filite cuadrado de coeficiente de rozamiento 0, 35 y radio medio 30 mm. Determinar el máximo paso de rosca h : a) para que mantenga su posición sin aplicar ningún momento ; b) para que el momento mínimo necesario para hacer descender el gato sea 20% del momento mínimo para hacerlo subir ; c) con el paso de rosca del apartado b), determinar la fuerza F para elevar el peso $P = 3000$ N si $L = 300$ mm.



SOLUCIÓN

a) Para que el tornillo mantenga la posición sin aplicar ningún momento es necesario que el ángulo de rozamiento tg $\theta = \mu$ sea mayor que el ángulo del plano inclinado equivalente al tornillo definido por $h = 2\,\pi\, r$ tg ϕ , donde h es el paso de rosca y r el radio medio del tornillo. El mayor paso de rosca posible para que se cumpla esta condición es el corresponde a tg ϕ = tg θ = 0,35. Para los valores del problema queda

$$h = 2\pi r \operatorname{tg}\theta = 66 \text{ mm}$$

b) En condiciones de movimiento mínimo ascendente o descendente cuando el ángulo de rozamiento es mayor que el ángulo de la rosca, los momentos aplicados al tornillo están dados respectivamente por

$$M_{\uparrow} = rP\operatorname{tg}(\theta+\phi) \qquad\qquad M_{\downarrow} = rP\operatorname{tg}(\theta-\phi)$$

El momento descendente tiene que ser el 20% del ascendente, luego $5\operatorname{tg}(\theta-\phi) = \operatorname{tg}(\phi+\theta)$ donde tg θ = 0,35 de donde θ = 19,29 °. Resolviendo la ecuación transcendente anterior se tiene que tg ϕ = 0,217, luego el paso de rosca del tornillo es

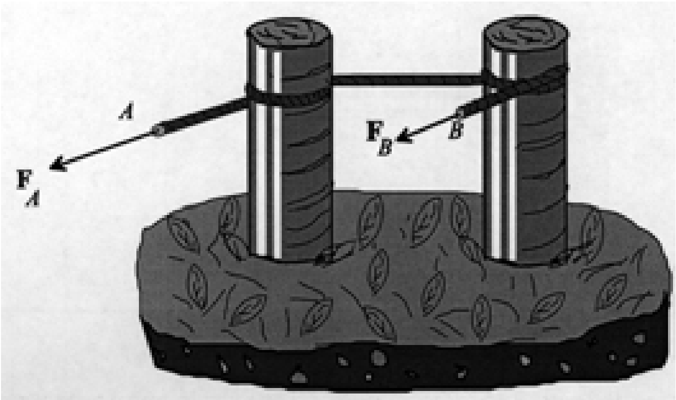
$$h = 2\pi r \operatorname{tg}\phi = 41,0 \text{ mm}$$

c) La fuerza F aplicada al mango del tornillo para hacer subir el peso P está dada por

$$F = \frac{rP}{L}\operatorname{tg}(\theta+\phi) \qquad \text{sustituyendo valores se tiene} \qquad F = 184,5\;N$$

PROBLEMA 6-7

Una cuerda esta arrollada a dos postes tal como se indica en la figura adjunta. Una fuerza de 10 kg en su extremo B equilibra a una fuerza de 1000 kg en su extremo A. Determinar :
a) el coeficiente de rozamiento estático
b) la tensión en el tramo entre los poste

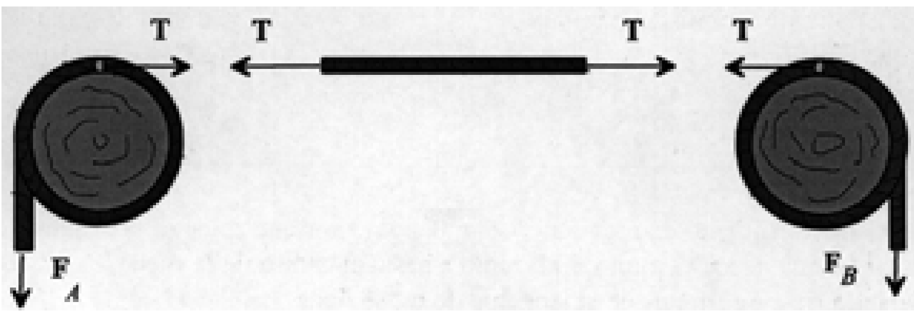


SOLUCIÓN

a) La ecuación que relaciona las tensiones en los extremos de la cuerda es $F_A = F_B\, e^{\mu\beta}$ donde β es el ángulo de contacto de la cuerda con los postes., cuyo valor es $\beta = 5\,\pi$. Sustituyendo valores queda $1000 = 10\; e^{5\pi\mu}$. Tomando logaritmos neperianos se obtiene

$$\mu = 0{,}2931$$

b) Consideremos la sección central de la cuerda representada en la figura adjunta.



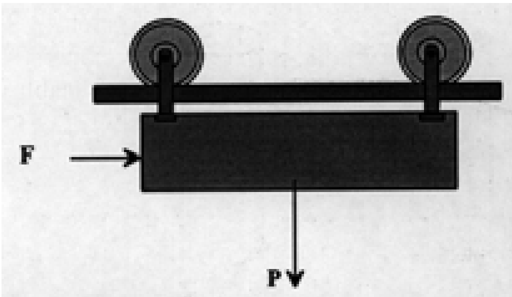
Aplicando a cada uno de los postes la ecuación de las tensiones se tiene

$$F_A = T e^{5\pi\mu/2} \qquad ; \qquad T = F_B\, e^{5\pi\mu/2}$$

Sustituyendo valores y tomando logaritmos se tiene $\ln T = 4{,}605$ de donde $T = 100$ kg

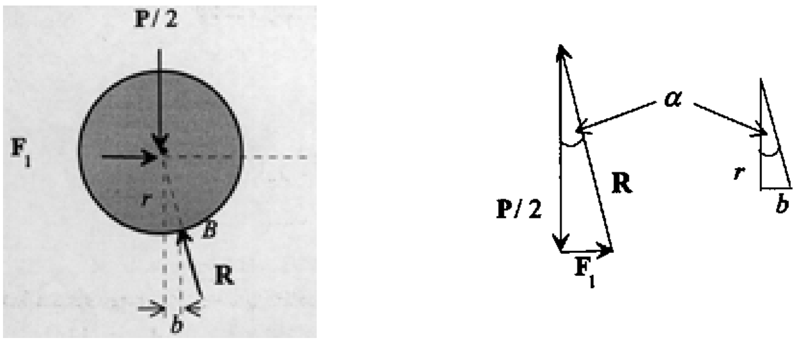
PROBLEMA 6-8

En la figura adjunta se muestra una grua aérea . El diámetro de las dos ruedas es de 80 mm y el peso de la carga es de 3000 kg. Las ruedas y la guía horizontal son de acero y el coeficiente de resistencia a la rodadura es de 0,22 mm. Determinar la fuerza horizontal necesaria para desplazar la grua .



SOLUCIÓN

La fuerza que se ejerce sobre cada uno de los ejes de las ruedas es **P/2**. En la siguiente figura se representa el diagrama del sólido libre de una de las ruedas y el triángulo de fuerzas correspondiente.



El coeficiente de rozamiento de rodadura *b* es mucho menor que *r*, luego la distancia entre el pie de la perpendicular bajada desde el punto *B* al radio *r* hasta el centro de la rueda, es prácticamente igual al radio. Igualando las expresiones de la tangente de α , se tiene

$$F_1 = \frac{b\,P}{2r} = 8,25 \text{ kg}$$

Como hay dos ruedas, la fuerza total para equilibrar la fuerza debida al rozamiento de la rodadura es

$$F = 2F_1 = 16,5 \text{ kg}$$