4.3 Movimiento plano del sólido rígido

Un caso particularmente importante del movimiento de un sólido rígido es el movimiento plano, movimiento que tienen los diversos elementos estructurales de una gran mayoría de máquinas o mecanismos, siendo por tanto su estudio de gran importancia en la ingeniería.

4.3.1 Definición del movimiento plano

Un sólido rígido tiene un movimiento *plano si durante el movimiento todos los puntos del sólido se desplazan manteniéndose paralelos a un plano fijo.* Así por ejemplo, una barra o un cuerpo plano de forma cualquiera tal que se muevan manteniéndose constantemente sobre una misma superficie plana, tienen un movimiento plano. También, una barra, un aro o un disco que se mueven manteniéndose en un plano vertical a una superficie horizontal, tiene un movimiento plano.

Para un sólido de forma cualquiera cuyo movimiento sea plano, todos los puntos del sólido que se encuentran en una recta perpendicular al plano fijo tienen, la misma velocidad y la misma aceleración, es decir, sus trayectorias son congruentes. En efecto, sean A y B dos puntos cualesquiera del sólido pertenecientes a una recta perpendicular al plano fijo, figura 4-4, y sean $\mathbf{r}_A$ y $\mathbf{r}_B$ sus posiciones instantáneas respecto de la referencia fija de origen O

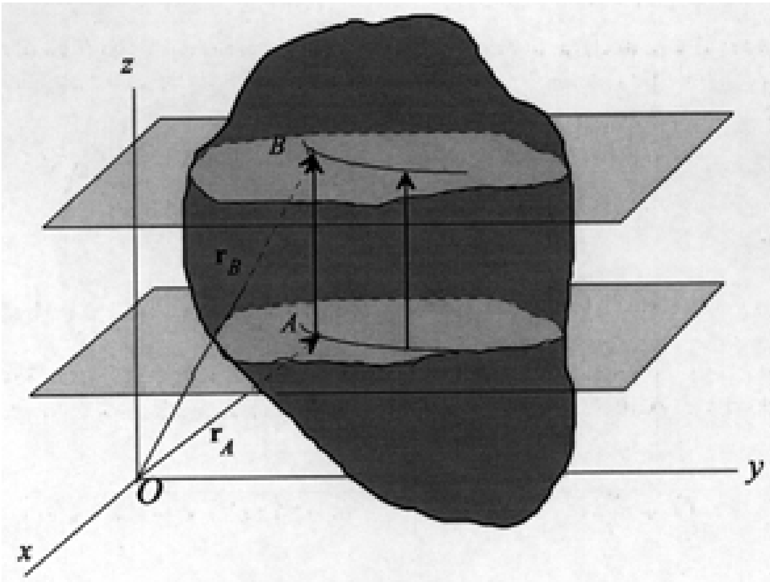


Fig. 4-4

Derivando respecto del tiempo la ecuación vectorial $\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \overrightarrow{AB}$ se tiene que las velocidades de ambos puntos son iguales $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A$ y derivando de nuevo la ecuación de las velocidades se tiene que su aceleraciones también son iguales $\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A$. Por consiguiente, para estudiar el movimiento plano de un sólido rígido es suficiente con estudiar el movimiento de la figura plana que resulta de la intersección del sólido con un plano paralelo al plano fijo. De esta manera, la cinemática del movimiento plano de sólido cualquiera, se reduce a la de un *sólido plano*, al cual, en lo que sigue, se le denominará simplemente sólido o *placa plana*.

4.3.2 Velocidad de los puntos del sólido

Determinemos ahora la *ley de distribución de velocidades* de los puntos del sólido rígido cuando su movimiento es plano. Tomemos el origen de la referencia fija O en un punto del plano del movimiento con dos de los ejes de coordenadas contenidos en él. Sean Q y P dos puntos cualesquiera del la placa plana, y seleccionemos el punto Q como origen de la referencia vinculada con el sólido. Los vectores posición de los puntos P y Q en la referencia fija, están relacionados con la posición relativa por la ecuación , figura 4-5.

$$\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_Q + \mathbf{r}' \tag{4-19}$$

donde $\mathbf{r}'$ es la posición del punto P respecto del origen Q de la referencia móvil.

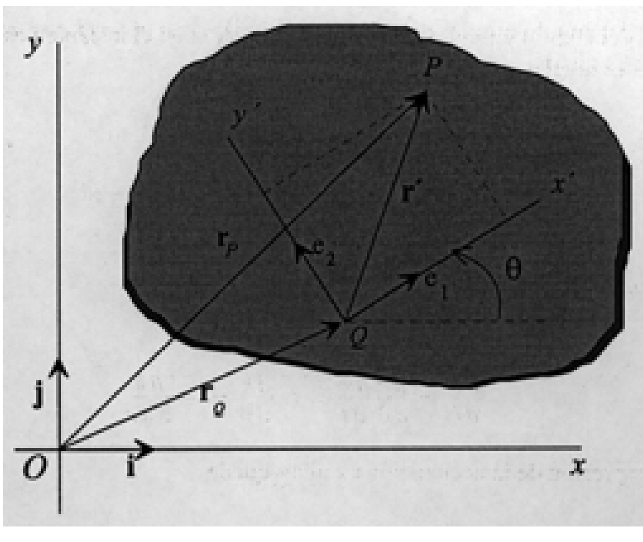


Fig.4-5

Derivando respecto del tiempo la ecuación 4-19 y teniendo en cuenta que la posición relativa de los puntos P y Q no varía durante el movimiento, por lo que la derivada de $\mathbf{r}'$ sólo incluye el término correspondiente a la rotación de la referencia vinculada al sólido respecto de la fija, queda

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_Q + \omega \wedge \mathbf{r}' = \mathbf{v}_Q + \omega \wedge \overrightarrow{QP} \tag{4-20}$$

donde $\omega = d\theta/dt$ es la velocidad angular de rotación del sólido cuya dirección se mantiene constantemente perpendicular al plano de la figura, luego ω es un vector paralelo al eje z, siendo su expresión en componentes $\omega = \omega\,\mathbf{k}$. La ecuación (4-20) es la ley de distribución de velocidades y expresa que *el movimiento instantáneo del sólido es la composición de un movimiento de traslación más un movimiento de rotación.* La traslación queda definida por la velocidad $\mathbf{v}_Q$ del punto Q y la rotación por el vector ω sobre la recta perpendicular al plano del movimiento pasando por Q. En la figura 4-6 se han representado por separado el movimiento instantáneo traslación de velocidad $\mathbf{v}_Q$ y el movimiento de rotación ω pasando por el punto Q.

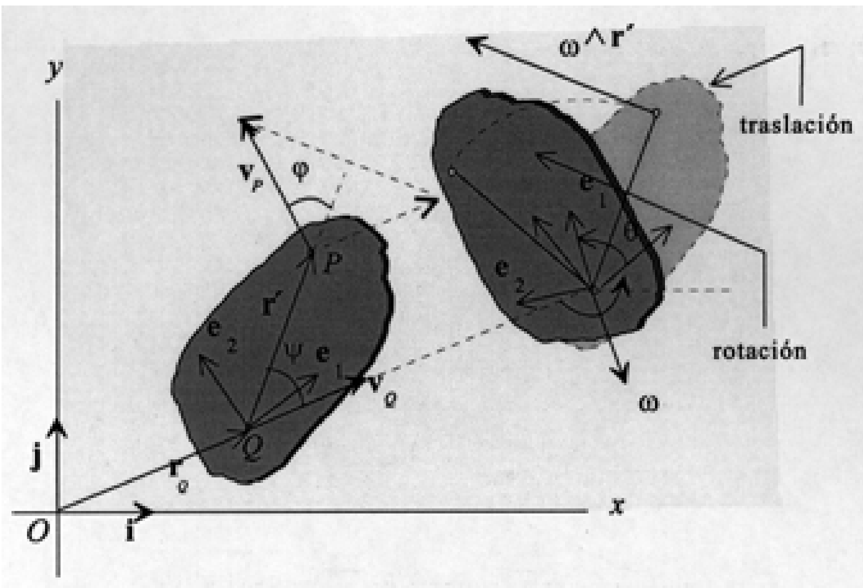


Fig. 4-6

De la ecuación (4-20) se puede deducir una relación entre las magnitudes de las velocidades de los dos puntos. Multiplicando escalarmente por $\mathbf{r}'$ los dos términos de la ecuación y teniendo en cuenta que el producto mixto es cero, queda

$$\mathbf{v}_P \cdot \overrightarrow{QP} = \mathbf{v}_Q \cdot \overrightarrow{QP} \tag{4-21}$$

de donde se tiene la igualdad

$$v_P \cos\varphi = v_Q \cos\psi$$

es decir, *las proyecciones de las velocidades de dos puntos cualesquiera del sólido sobre la recta que los une, son iguales*. Este resultado permite determinar fácilmente la velocidad de un punto del sólido cuando se conocen la dirección de su movimiento y la velocidad de otro punto. La ecuación (4-21) que también se puede deducir directamente de la condición de rigidez, se denomina la *condición cinemática de rigidez.*

4.3.3 Centro instantáneo de velocidades

Sea P un punto cualquiera del sólido cuya velocidad sea $\mathbf{v}_P$ y tracemos por P una recta perpendicular a su velocidad, figura 4-7. Veamos que sobre dicha recta hay un punto C tal que su velocidad es cero.

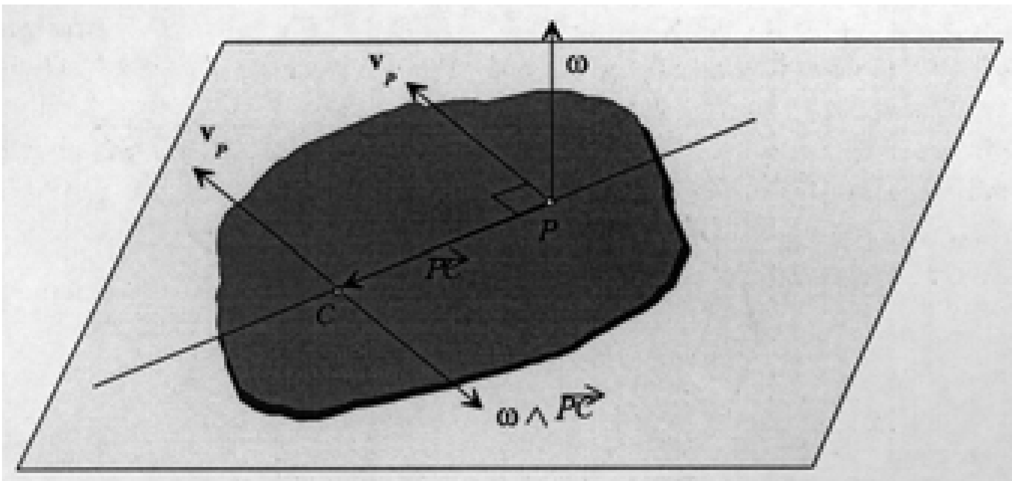


Fig. 4-7

En efecto, según la ecuación (4-20) las velocidades de los puntos C y P están relacionadas por la ecuación

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_P + \boldsymbol{\varpi} \wedge \overrightarrow{PC}$$

pero el producto vectorial $\varpi \wedge \overrightarrow{PC}$ es un vector perpendicular a $\overrightarrow{PC}$, luego es proporcional a $\mathbf{v}_P$, es decir

$$\varpi \wedge \overrightarrow{PC} = k\,\mathbf{v}_P \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_C = (1+k)\mathbf{v}_P$$

Tomando el punto C a una distancia de P tal que $k = -1$, la velocidad de C es cero, el segmento $\overline{PC}$ está dado por

$$\overline{PC} = \frac{v_P}{\varpi}$$

y para la velocidad de P queda

$$\mathbf{v}_P = \overrightarrow{PC} \wedge \varpi = \varpi \wedge \overrightarrow{CP} \tag{4-22}$$

La ecuación (4-22) de la velocidad del punto P, es el momento de ω respecto de P, es decir, la velocidad correspondiente a una rotación respecto del punto C, figura 4-8. Este resultado es válido para todos los puntos del sólido, luego se puede enunciar *el movimiento plano de un sólido es un movimiento de rotación instantáneo respecto del punto C*. Dicho punto se denomina *centro o polo instantáneo de velocidades* ya que su posición es función del tiempo. El punto del sólido cuya velocidad en un instante t es nula, es por tanto, el centro instantáneo de velocidades. Si ningún punto del sólido tiene velocidad nula, el centro instantáneo de velocidades C no pertenece al sólido. El punto C también se suele denominar *centro instantáneo de rotación* (c.i.r.).

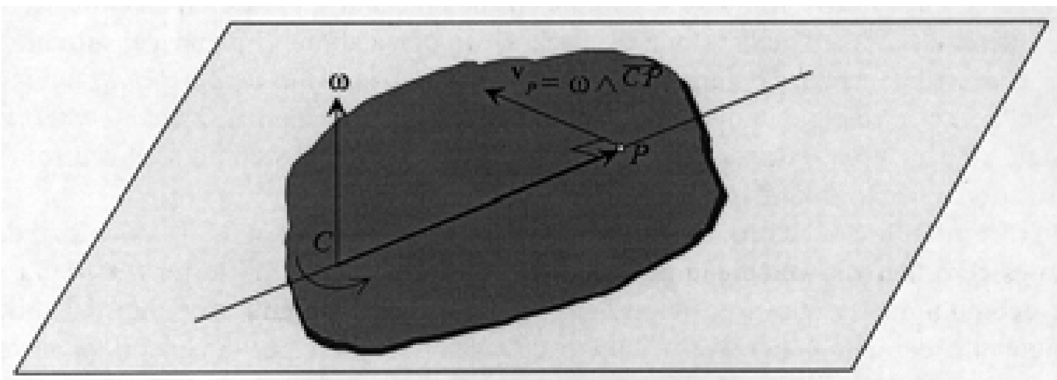


Fig. 4-8

La posición del centro de velocidades se puede determinar gráficamente si se conoce en un instante t las velocidades de dos puntos cualesquiera del sólido. Se pueden dar los siguientes casos: 1) si las velocidades de dos puntos del sólido no son perpendiculares a la recta que pasa por los dos puntos, el centro instantáneo de velocidades es el punto de intersección de las perpendiculares a las velocidades, figura 4-9 (a); 2) si las velocidades son perpendiculares a la recta que pasa por los dos puntos, el centro instantáneo es la intersección de dicha recta con la trazada por los extremos de las velocidades, figuras 4-9 (b) y (c). En el caso en que el movimiento instantáneo del sólido sea de traslación, la velocidad de todos sus puntos es la misma, la ω instantánea es cero y el punto C se encuentra en el infinito.

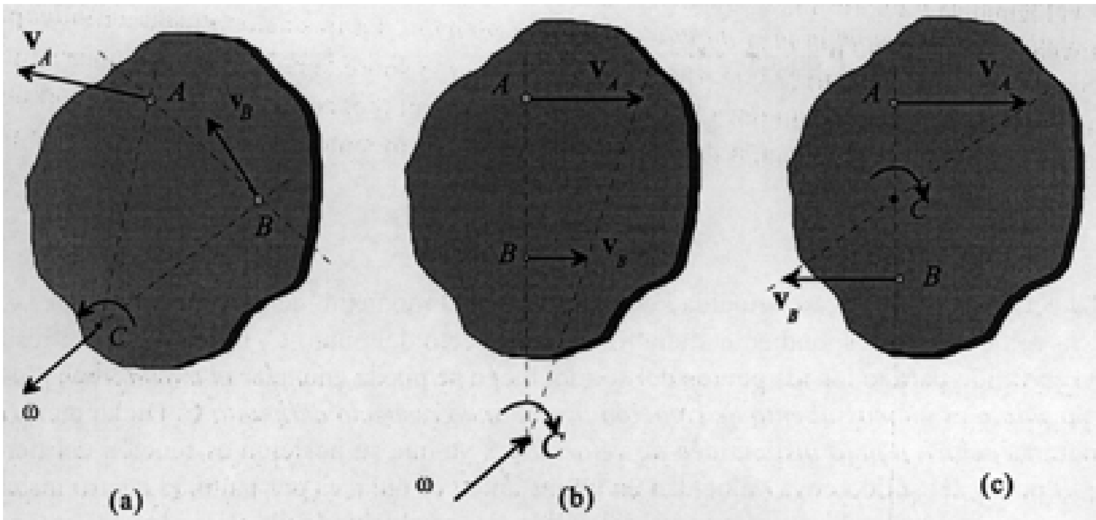


Fig.4-9

Centroide fija y móvil. El punto C cambia en cada instante su posición en el plano respecto de la referencia fija. A medida que la placa se desplaza sobre el plano del movimiento, el punto C describe una curva plana que se denomina *centroide fija o polar fija*. La misma curva vista desde la referencia del sólido se denomina *centroide móvil o polar móvil.* En cada instante, ambas curvas son tangentes entre sí en el punto C y es como sí el centroide móvil rodase sobre el centroide fijo, figura 4-10.

Si en el instante t el centro de velocidades C es un punto del sólido, la velocidad de dicho punto es cero. Pero la velocidad de dicho punto en un instante posterior $t + dt$, ya no será nula, debido a que la nueva posición del punto C coincidirá con otro punto del sólido. Por consiguiente, el punto C tiene velocidad instantánea nula pero, por lo general, la *aceleración instantánea de C es distinta de cero* y por tanto, las aceleraciones de los puntos de la placa no son las debidas a una rotación respecto de C.

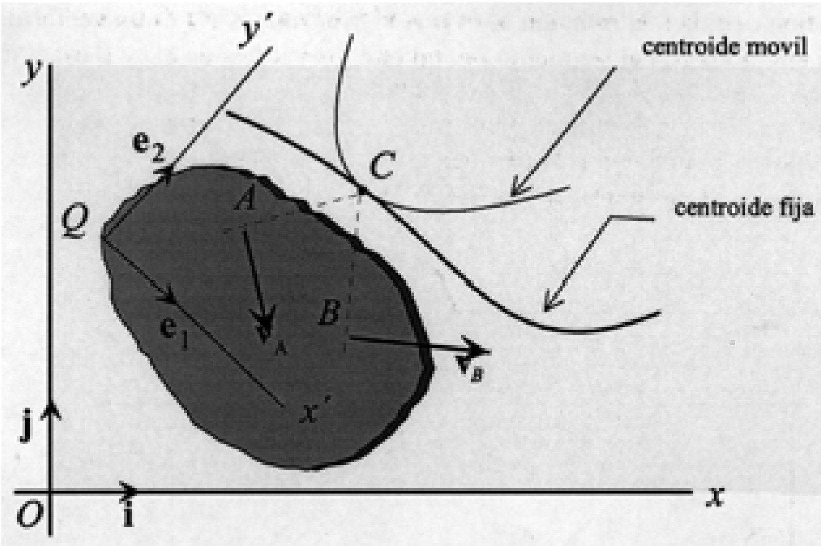


Fig.4-10

4.3.4 Aceleración de los puntos del sólido

La aceleración de un punto P del sólido no se deducen de derivar respecto del tiempo la velocidad dada por la ecuación (4-22), ya que el punto C tiene una aceleración $\mathbf{a}_C$ no nula. Para obtener las aceleraciones de los puntos del sólido, hay que derivar respecto del tiempo la ley de distribución de velocidades dada por la ecuación (4-20), operación que proporciona la *ley de distribución de las aceleraciones* dada por

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_Q + \alpha \wedge \mathbf{r}' + \omega \wedge (\omega \wedge \mathbf{r}') \tag{4-23}$$

La ecuación (4-23) expresa que *la aceleración instantánea de los puntos del sólido es la composición de la aceleración debida a un movimiento de traslación y la de un movimiento de rotación.* Ambos movimientos se han representado separadamente en la figura 4-11, en donde $\mathbf{a}_Q$ es la aceleración de la traslación y $\mathbf{a}_{ro} = \alpha \wedge \mathbf{r}' + \omega \wedge (\omega \wedge \mathbf{r}')$ la aceleración debida a la rotación. Debido al movimiento de rotación de la placa en torno a Q, el punto P tiene una aceleración tangencial $\alpha \wedge \mathbf{r}'$ perpendicular al segmento $\overline{QP}$, en el sentido de la rotación cuando la rotación es acelerada y en sentido contrario si es retardada, cuyo módulo es $a_\tau = \alpha\, r'$, y una aceleración normal $\omega \wedge (\omega \wedge \mathbf{r}')$ que siempre estás dirigida hacia el polo, cuyo módulo es $a_n = \omega^2 r'$.

La aceleración debida a la rotación $\mathbf{a}_{ro} = \alpha \wedge \mathbf{r}' + \omega \wedge (\omega \wedge \mathbf{r}')$ es un vector de módulo a_{ro} que forma un ángulo β con el segmento $\overline{QP}$, tal que los valores de a_{ro} y β están dados por las expresiones

$$a_{ro} = r' \sqrt{\alpha^2 + \varpi^4} \qquad \text{y} \qquad \tan\beta = \frac{|\alpha|}{\varpi^2} \tag{4-24}$$

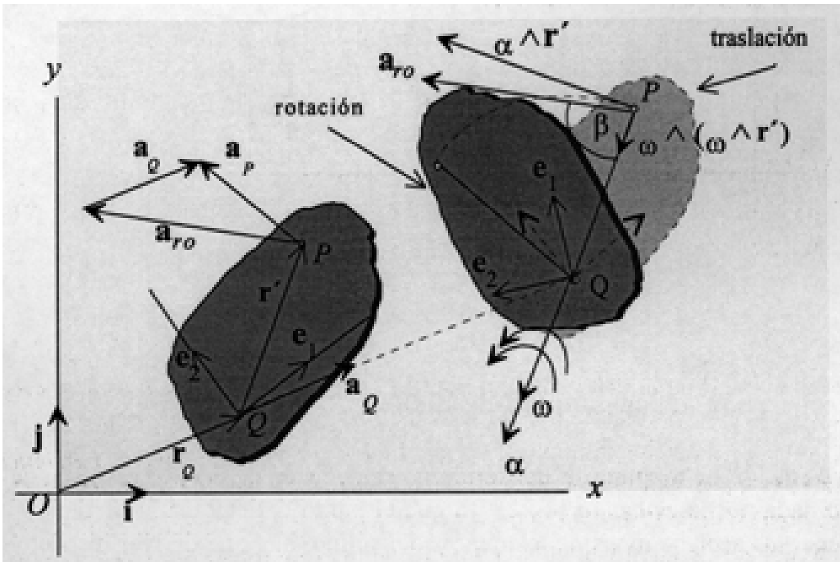


Fig. 4-11

Conocidos los valores de ω y α, el valor de la aceleración $\mathbf{a}_Q$, y el ángulo que $\mathbf{a}_Q$ forma con $\mathbf{r}'$, la ecuación vectorial $\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_Q + \mathbf{a}_{ro}$ permite determinar la aceleración $\mathbf{a}_P$ de un punto cualquiera del sólido. Pero, resulta en general más cómodo el cálculo de las componentes de la aceleración $\mathbf{a}_P$ obtenidas a partir de la ecuación 4-23,

$$a_1 = a_{1Q} - y'\alpha - \omega^2 x' \qquad a_2 = a_{2Q} + x'\alpha - \omega^2 y' \tag{4-25}$$

en donde x', y' son las coordenadas del punto P en la referencia del sólido. En la ecuación (4-23) se puede sustituir directamente el punto genérico Q por el polo del movimiento C y la aceleración de los puntos del sólido se obtiene en función de la aceleración del polo del movimiento

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_C + \alpha \wedge \overrightarrow{CP} - \omega^2 \overrightarrow{CP} \qquad (4\text{-}26)$$

La ecuación (4-26) constituye también la ley de distribución de aceleraciones de los puntos del sólido referida a la aceleración del centro de velocidades, con lo que la aceleración de un punto P es la correspondiente a una traslación con aceleración del polo $\mathbf{a}_C$, mas la debida a una rotación alrededor del polo.

4.3.5 Centro instantáneo de aceleraciones

Cuando el movimiento del sólido *no es un movimiento instantáneo de traslación*, hay un punto del plano cuya aceleración en dicho instante es nula. Dicho punto es *el centro instantáneo de aceleraciones.* Su posición se puede determinar conocidas, la velocidad angular ω, la aceleración angular α y la aceleración $\mathbf{a}_P$ de un punto cualquiera del sólido. Tracemos por el punto una recta cuya dirección no coincida con la de la aceleración $\mathbf{a}_P$ y sea S un punto de dicha recta. La aceleración de S está dada por

$$\mathbf{a}_S = \mathbf{a}_P + \alpha \wedge \overrightarrow{PS} + \varpi \wedge (\varpi \wedge \overrightarrow{PS}) = \mathbf{a}_P + \alpha \wedge \overrightarrow{PS} - \varpi^2 \overrightarrow{PS}$$

donde el vector $\alpha \wedge \overrightarrow{PS}$ es perpendicular a $\overrightarrow{PS}$ y el vector $\varpi^2 \overrightarrow{PS}$ es paralelo a $\overrightarrow{PS}$, tal como se muestra en la figura 4-12.

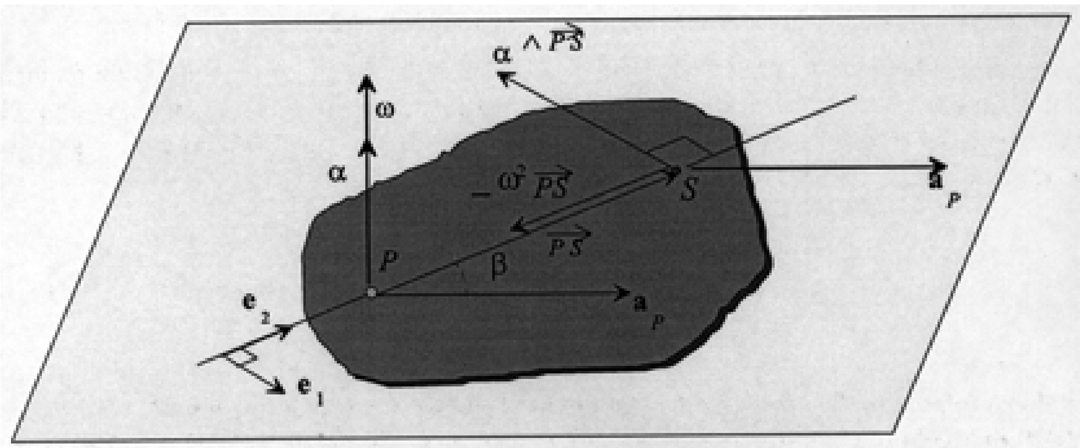


Fig. 4-12

Sean $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$ dos vectores unitarios y perpendiculares tal como se indica en la figura 4-12. La aceleración $\mathbf{a}_P$ en la base $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ es $\mathbf{a}_P = a_P(\text{sen}\,\beta\mathbf{e}_1 + \cos\beta\mathbf{e}_2)$ y los términos de aceleración correspondientes a α y ω

$$\alpha \wedge \overrightarrow{PS} = -k_1\,\mathbf{e}_1 \qquad \varpi^2\,\overrightarrow{PS} = k_2\,\mathbf{e}_2$$

luego, la aceleración $\mathbf{a}_S$ en la base $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ es $\mathbf{a}_S = (a_P \,\text{sen}\,\beta - k_1)\,\mathbf{e}_1 + (a_P\cos\beta - k_2)\,\mathbf{e}_2$ cuyo valor es cero si se selecciona el punto S tal que los coeficientes k_1 y k_2 son iguales a

$$k_1 = a_P\,\text{sen}\,\beta \qquad k_2 = a_P\cos\beta$$

valores que determinan unívocamente la posición del punto S, dada por

$$\overline{PS} = \frac{a_P}{\sqrt{\alpha^2 + \varpi^4}} \qquad \beta = \arctan\frac{|\alpha|}{\varpi^2} \tag{4-27}$$

Tomando la distancia $\overline{PS}$ sobre una recta que pasa por P y que forme con la aceleración $\mathbf{a}_P$ un ángulo β, queda fijada la posición del punto S, *centro* instantáneo de aceleraciones. Ya que P es un punto cualquier del sólido, se puede afirmar que *la aceleración de los puntos del sólido es la debida a un movimiento de rotación respecto del centro instantáneo de aceleraciones.* Las aceleraciones, en módulo, de los puntos del sólido son *directamente proporcionales a las distancias al punto S* y sus direcciones forman un ángulo β con el segmento definido por el punto y el centro de aceleraciones S, figura 4-13.

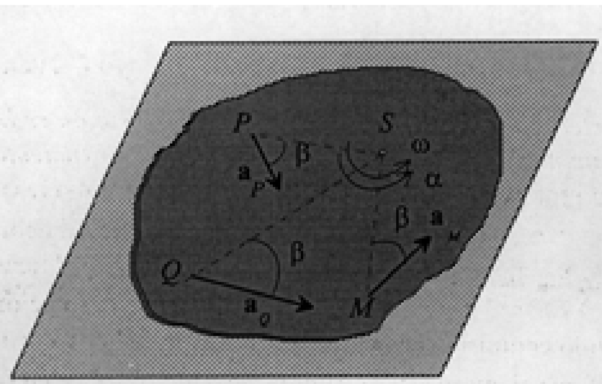


Fig. 4-13

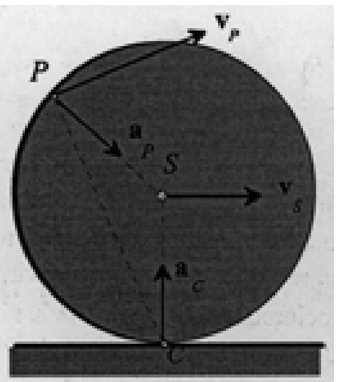


Fig. 4-14

Recordemos que el centro instantáneo de velocidades C y el centro instantáneo de aceleraciones S son dos puntos *distintos* del plano del movimiento ya que el centro de velocidades tiene velocidad cero pero aceleración distinta de cero, por consiguiente, no puede ser el punto S. Para determinar el ángulo β se toma el valor absoluto de la aceleración angular ya que está puede ser del mismo sentido que la velocidad angular o de sentido contrario.

Consideremos por ejemplo, un disco de radio R que rueda sin deslizar siguiendo una trayectoria rectilínea, desplazándose hacia la derecha con *movimiento uniforme* sobre una superficie horizontal, figura 4-14. La trayectoria del punto central del disco será por tanto, una línea recta. Como el disco *rueda sin deslizar*, el punto del disco que en cada instante está en contacto con la superficie horizontal tiene velocidad cero, luego dicho punto es el centro instantáneo de velocidades C. La velocidad de otro punto cualquiera del disco, por ejemplo el punto P de la periferia, es el momento de ω respecto de P, es decir, un vector perpendicular al segmento $\overline{CP}$ y de módulo $v_P = \omega\,\overline{CP}$, siendo ω la velocidad angular del disco, cuyo valor esta dado por $\omega = v_S/R$, en donde v_S es la velocidad del punto central del disco.

La aceleración del punto central del disco es cero, luego dicho punto es el centro instantáneo de aceleraciones S. Aplicando la ecuación (4-26) al punto S y teniendo en cuenta que la aceleración angular α es cero se tiene

$$0 = \mathbf{a}_C - \varpi^2 \overrightarrow{CS} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{a}_C = \varpi^2 \overrightarrow{CS} \tag{4-28}$$

La aceleración del punto C de contacto con el suelo, es un vector dirigido hacia el centro del disco de módulo $a_C = R\,\omega^2$. Para este caso, el ángulo β es cero, luego la aceleración de otro punto P cualquiera de la periferia del disco tendrá el mismo módulo que la de C y estará dirigida hacia el centro del disco.

Si el disco *rueda sin deslizar* con una velocidad angular *variable* $\omega(t)$, el punto C de contacto con la superficie horizontal sigue siendo el centro instantáneo de velocidades, pero ahora, el punto central del disco tienen aceleración, luego no es el centro instantáneo de aceleraciones, figura 4-15.

Las velocidades del punto central del disco G y del punto de contacto en el apoyo C están relacionadas por la ecuación

$$\mathbf{v}_G = \mathbf{v}_C + \varpi \wedge \overrightarrow{CG} = \varpi \wedge \overrightarrow{CG}$$

ya que la velocidad $\mathbf{v}_C$ es nula. Derivando, se tiene la ecuación que relaciona las aceleraciones de los puntos G y C

$$\mathbf{a}_G = \mathbf{a}_C + \alpha \wedge \overrightarrow{CG} - \varpi^2 \overrightarrow{CG}$$

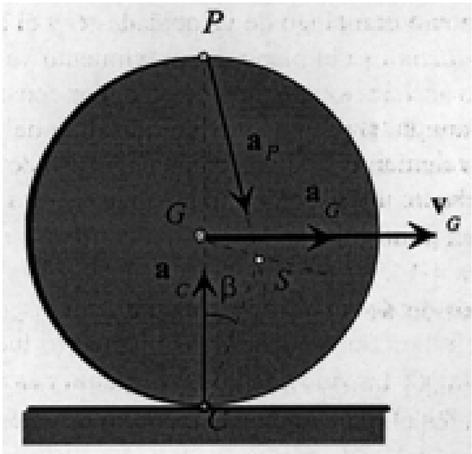


Fig. 4-15

La trayectoria de G es rectilínea lo que obliga a que su aceleración sea perpendicular a $\overrightarrow{CG}$, luego la suma del primer y tercer sumando del segundo término de la ecuación anterior ha de ser cero, de donde se tiene que las aceleraciones de los puntos G y C están dadas por

$$\mathbf{a}_G = \alpha \wedge \overrightarrow{CG} \qquad\qquad \mathbf{a}_C = \varpi^2\, \overrightarrow{CG}$$

El centro instantáneo de aceleraciones es el punto S cuya posición se determina por medio de las ecuaciones (4-27), tomando como valor de la aceleración la del punto G o la del P.

4.3.6 Movimiento plano en referencias móviles

En las secciones precedentes se ha considerado el movimiento plano del sólido rígido como el movimiento de una placa plana que se mantiene paralela a un plano de referencia. En el plano del movimiento se seleccionaba una referencia fija respecto de la cual se determinan la posición, la velocidad y la aceleración de los puntos del sólido, estableciéndose las relaciones cinemáticas que describen su movimiento.

Pero, en la gran mayoría de aplicaciones técnicas se plantean otro tipo de situaciones en las cuales, el movimiento del sólido está referido a un sistema de coordenadas en movimiento respecto de una referencia que se considera fija en el espacio, o en otros casos, los movimientos de dos puntos están relacionados, pero dichos puntos pertenecen a sólidos rígidos distintos. Para estudiar el movimiento plano en estas circunstancias se toma, tanto la referencia móvil O_1 X, Y como la referencia fija O x, y, ambas contenidas en el plano del movimiento.

La referencia móvil junto con el sólido se mueven simultáneamente respecto de la referencia fija; a dicho movimiento se le denomina *movimiento de arrastre* del sólido. Además, el sólido se desplaza respecto de la referencia móvil, movimiento al que se le denomina *movimiento relativo* del sólido. El movimiento absoluto del sólido respecto de la referencia fija se denomina *movimiento compuesto*. En este caso, el trabajo de la Cinemática consiste en caracterizar el movimiento del sólido, estableciendo las ecuaciones que relacionan las velocidades de los puntos del sólido y las ecuaciones que relacionan las aceleraciones, mediante las magnitudes cinemáticas de definen el movimiento relativo y el de arrastre.

Velocidad de los puntos del sólido. El movimiento plano de un sólido rígido es equivalente al movimiento de una placa desplazándose sobre una superficie plana. Como en las secciones precedentes, los orígenes de la referencias fija y de la referencia móvil se toman en puntos del plano del movimiento y con dos de sus ejes contenidos en él, figura 4-16. En el caso más general, el movimiento de la referencia móvil respecto de la fija será el correspondiente a una traslación y rotación simultáneas.

Sean $\mathbf{v}_{01}$ y ω_1 las velocidades de traslación y rotación respectivamente y sea P un punto cualquiera del sólido rígido en movimiento respecto de la referencia móvil. Teniendo en cuenta la condición de rigidez, la velocidad absoluta del punto P que ahora denominaremos por $\mathbf{v}_P$, es la suma de la velocidad relativa $\mathbf{v}_r$ más la velocidad de arrastre $\mathbf{v}_{ar}$. En todo lo que sigue, a la velocidad relativa $\mathbf{v}_r$ la denominaremos como $\mathbf{v}_{1P}$.

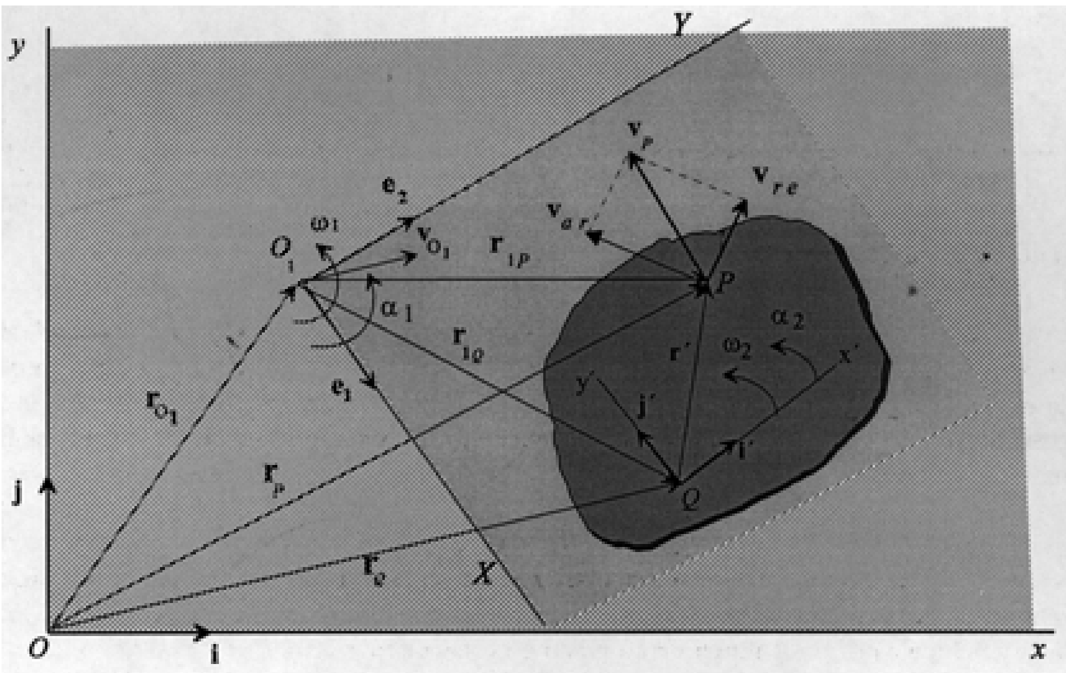


Fig. 4-13

Sustituyendo valores se obtiene que la velocidad absoluta está dada por

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{1P} + \mathbf{v}_{O_1} + \boldsymbol{\varpi}_1 \wedge \mathbf{r}_{1P} \tag{4-27}$$

Como se ha visto en la sección anterior, la velocidad del punto P respecto de la referencia de origen O_1 hay que relacionarla con la velocidad de otro punto Q del sólido considerado como polo del movimiento respecto de dicha referencia. En el caso más general, el movimiento del sólido en la referencia O_1 es el correspondiente a una traslación y rotación simultáneas y, en este caso, la relación entre las velocidades de los puntos P y Q es

$$\mathbf{v}_{1P} = \mathbf{v}_{1Q} + \boldsymbol{\varpi}_2 \wedge \overrightarrow{\mathrm{QP}} \tag{4-28}$$

donde $\mathbf{v}_{1Q}$ es la velocidad del polo Q, y ω_2 la velocidad de rotación del sólido respecto de Q. La velocidad absoluta del punto Q está dada por una expresión equivalente a la del punto P

$$\mathbf{v}_Q = \mathbf{v}_{1Q} + \mathbf{v}_{O_1} + \boldsymbol{\varpi}_1 \wedge \mathbf{r}_{1Q} \tag{4-29}$$

Las posiciones de los puntos P y Q respecto de la referencia móvil satisfacen la ecuación

$$\mathbf{r}_{1P} = \mathbf{r}_{1Q} + \overrightarrow{\mathrm{QP}} \tag{4-30}$$

Sustituyendo (4-28) y (4-30) en (4-27), y teniendo en cuenta la ecuación (4-29), queda

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_Q + (\boldsymbol{\varpi}_1 + \boldsymbol{\varpi}_2) \wedge \overrightarrow{\mathrm{QP}} = \mathbf{v}_Q + \boldsymbol{\varpi} \wedge \overrightarrow{\mathrm{QP}} \tag{4-31}$$

donde $\omega = \omega_1 + \omega_2$ es la suma de las velocidades angulares de la referencia móvil respecto de la fija y del sólido respecto de la referencia móvil. La ecuación (4-31) relaciona las velocidades absolutas de dos puntos del sólido de la misma manera que la ecuación (4-20) relaciona las velocidades de los puntos de un sólido en movimiento respecto de una referencia fija. La velocidad absoluta de un punto del sólido es *la suma geométrica de la velocidad del polo más la velocidad del punto debida a la rotación* ω *del sólido alrededor del polo.* De la misma manera que en la sección anterior, en el movimiento compuesto se define el centro instantáneo de velocidades C como un punto de velocidad nula.

La velocidad de otro punto cualquiera del sólido es el momento de ω aplicado en C respecto de dicho punto, luego el *movimiento compuesto del sólido es una rotación instantánea alrededor de C.* La determinación de C se puede hacer de la forma ya conocida, como intersección de las perpendiculares a las velocidades de dos puntos cualesquiera del sólido, o sino, también, con la velocidad de un de un punto del sólido y la velocidad angular ω mediante la siguiente ecuación

$$\mathbf{v}_P = \boldsymbol{\varpi} \wedge \overrightarrow{CP} \tag{4-32}$$

donde $\overrightarrow{CP}$ es el vector posición del punto P respecto del punto C, y su módulo la distancia de P a C sobre la perpendicular a la velocidad $\mathbf{v}_P$. Vamos a deducir ahora las velocidades de los puntos del sólido para diferentes casos del movimiento compuesto.

a) *Composición de movimientos de traslación.* Consideremos, en principio, el caso en que el movimiento relativo del sólido es de traslación con velocidad $\mathbf{v}_2$ y el movimiento de arrastre es también un movimiento de traslación con velocidad $\mathbf{v}_1$. De la ecuación (4-31), teniendo en cuenta que las velocidades angulares son nulas, se deduce que todos los puntos del sólido tienen la misma velocidad dada por

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \tag{4-33}$$

El movimiento resultante de dos movimientos de traslación es otro movimiento de traslación cuya velocidad es la suma de velocidades de cada uno de ellos.

b) *Composición de movimientos de rotación y traslación.* Consideremos el caso en que el movimiento de arrastre es un movimiento de traslación y rotación con velocidades $\mathbf{v}_1$ y ω_1 respectivamente, y el movimiento relativo es una traslación con velocidad $\mathbf{v}_2$. De la ecuación (4-31) se deduce que la velocidad de un punto P del sólido está dada por

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_Q + \boldsymbol{\varpi}_1 \wedge \mathbf{r}_{1P} \tag{4-34}$$

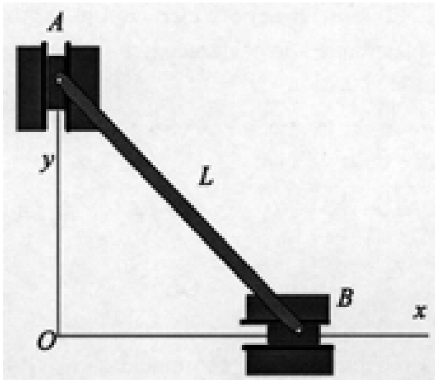
Haciendo coincidir el origen O_1 de la referencia móvil con un punto Q del sólido tomado como polo del movimiento tenemos entonces $\mathbf{r}_{1Q} = 0$, y a partir de la ecuación (4-29) se deduce que la velocidad de Q es $\mathbf{v}_Q = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$. Conocida la velocidad de Q, el centro instantáneo de rotación C se determina mediante la ecuación (4-32) aplicada al punto Q. Tomando módulos queda

$$\overline{CQ} = \frac{v_Q}{\varpi_1} \tag{4-35}$$

La ecuación (4-35) es la distancia a la que se encuentra de Q el punto C medida sobre la perpendicular trazada a la velocidad $\mathbf{v}_Q$.

PROBLEMA 4-5

La barra AB de longitud L desliza a lo largo de las guías horizontal y vertical, tal como se muestra en la figura. El extremo B se mueve hacia la derecha con velocidad constante v_0. Si en el instante inicial la barra estaba en posición vertical, determinar : a) la velocidad y la aceleración angular de la barra en función del tiempo, b) la velocidad y la aceleración del extremo A en función del tiempo,c) la centroide fija y móvil



SOLUCIÓN

Movimiento de la barra. En un instante cualquiera t, la velocidad del punto A tiene la dirección del eje y. El punto de intersección de las perpendiculares a las velocidades de los extremos de la barra es el centro instantáneo de rotación C. La velocidad angular de la barra es un vector perpendicular al plano de la figura dirigido hacia afuera. La velocidad de B en función de la velocidad angular ω de la barra es

$$\mathbf{v}_0 = \omega \wedge \overrightarrow{CB} = \omega\, y\, \mathbf{i}$$

La coordenada y del punto C está relacionada con la coordenada x por la ecuación $y = \sqrt{L^2 - x^2}$, en donde x es el recorrido del punto B desde la posición inicial hasta el instante t; luego $x = v_0\, t$. Sustituyendo la y se tiene la velocidad angular en función del tiempo

$$\varpi = \frac{v_0}{\sqrt{L^2 - v_0^2\, t^2}}$$

La derivada de ω respecto del tiempo es la aceleración

$$\alpha = \frac{v_0^3\, t}{\left(L^2 - v_0^2 t^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Velocidad del punto *A*. La velocidad del punto A es el momento de ω respecto de A ,

$$\mathbf{v}_A = \varpi \wedge \overrightarrow{CA} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{v}_A = -\frac{v_0^2\ t}{\sqrt{L^2 - v_0^2\ t^2}}\ \mathbf{j}$$

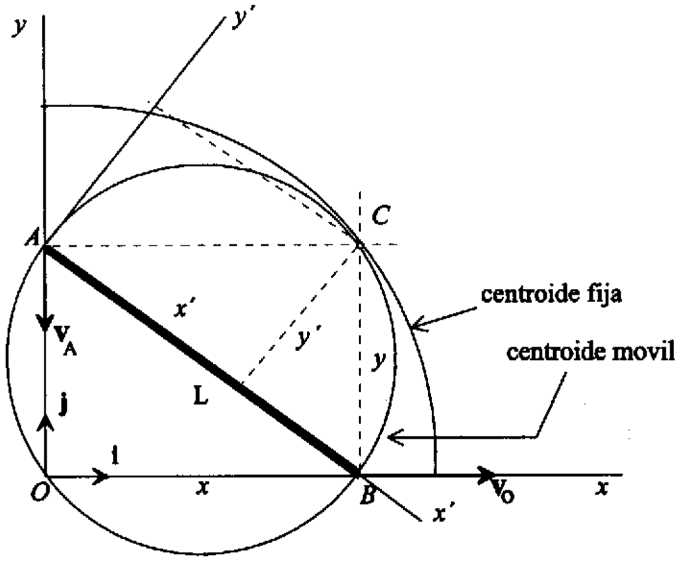
Aceleración del punto *A*. El punto B tiene aceleración nula ya que su velocidad es constante y, por consiguiente, es el centro instantáneo de aceleraciones G. De la ecuación (3-24) se deduce que la aceleración de A está dada por la ecuación

$$\mathbf{a}_A = \varpi^2 \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} \wedge \alpha \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{a}_A = -\frac{v_0^2\ L^2}{\left(L^2 - v_0^2 t^2\right)^{3/2}}\ \mathbf{j}$$

Centroides. De la figura se deduce que las coordenadas $(x\ ,\ y)$ del punto C en la referencia fija satisfacen la ecuación

$$x^2 + y^2 = L^2 \tag{1}$$

que es la ecuación de una circunferencia de radio L centrada en el origen.



Tomando el origen de la referencia móvil, rígidamente unida a la barra, en el extremo A de la barra con el eje x' coincidente con ella las coordenadas (x', y') del punto C están relacionadas con las coordenadas x, y por las ecuaciones

$$x'^2 + y'^2 = x^2 \qquad y'^2 + (L - x'^2) = y^2 \tag{2}$$

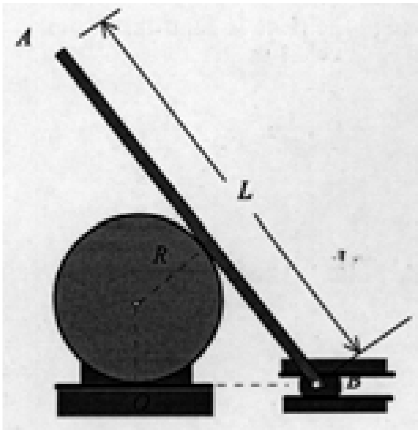
Sustituyendo las ecuaciones (2) en (1) se tiene la centroide móvil

$$x'^2 + y'^2 - L x' = 0$$

ecuación de una circunferencia de radio $L/2$ con centro en el punto $(0, L)$.

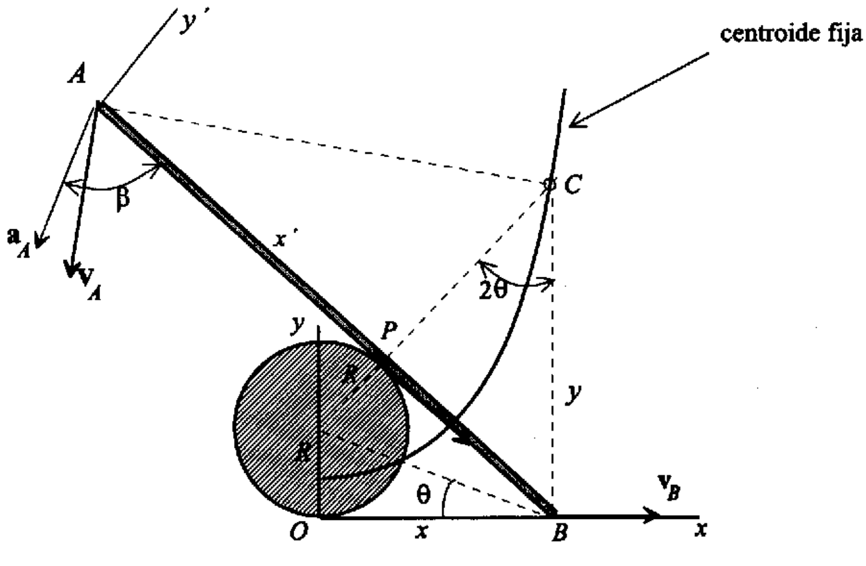
PROBLEMA 4-6

La barra AB de longitud L está apoyada sobre un cilindro de radio R y su extremo B se mueve con una velocidad constante v_0 hacia la derecha a lo largo de una guía horizontal, tal como se muestra en la figura. Determinar en función de la distancia OB : a) la velocidad y aceleración angular de la barra, b) la velocidad y aceleración del extremo A de la barra, c) la centroide fija



SOLUCIÓN

Tomamos como origen de la referencia fija el punto O de contacto de la sección del cilindro con el plano del papel con la horizontal y en el punto A del extremo de la barra el origen de la referencia ligada a ella.



Velocidad angular de la barra.
La velocidad del punto P de la barra que está en contacto con el cilindro tiene la dirección de la tangente al cilindro en dicho punto. Llamemos x a la posición instantánea del extremo B respecto del origen O de la referencia fija. Trazando perpendiculares a las velocidades de los puntos P y B se determina la posición del centro instantáneo de velocidades C. La recta que une el punto B con el centro de la circunferencia forma con el eje de la x un ángulo θ y el ángulo que forma la barra con el eje x es el doble 2θ, que es igual al ángulo que forman las perpendiculares a las velocidades de los puntos P y B. La velocidad angular de la barra está relacionada con la velocidad de B por la ecuación $v_0 = \omega\, y$. De la figura, $x = y \operatorname{sen} 2\theta$. Teniendo en cuenta que $\tan\theta = R/x$, se tiene que

$$\operatorname{sen} 2\theta = \frac{2Rx}{R^2 + x^2}$$

Despejando y sustituyendo se obtiene la expresión de ω $$\varpi = \frac{2Rv_0}{x^2 + R^2}\mathbf{k} \qquad (1)$$

Aceleración angular. $$\alpha = \frac{d\varpi}{dt} = v_0\,\frac{d\varpi}{dx} = -\frac{4Rv_0^2\,x}{(x^2 + R^2)^2}\mathbf{k} \qquad (2)$$

Velocidad del punto A. $$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \varpi \wedge \overrightarrow{BA} \;\Rightarrow\; \mathbf{v}_A = \left(v_0 - \varpi L \operatorname{sen} 2\theta\right)\mathbf{i} - \varpi L \cos 2\theta\,\mathbf{j} \qquad (3)$$

siendo $$\cos 2\theta = \frac{x^2 - R^2}{x^2 + R^2}$$

Aceleración del punto A. El punto B tiene aceleración nula, luego es el centro de aceleraciones.

$$\mathbf{a}_A = \alpha \wedge \overrightarrow{BA} - \varpi^2\,\overrightarrow{BA} \;\Rightarrow\; a_A = \frac{4RL\,v_0}{(x^2 + R^2)^2}\sqrt{x^2 + R^2 v_0^2}$$

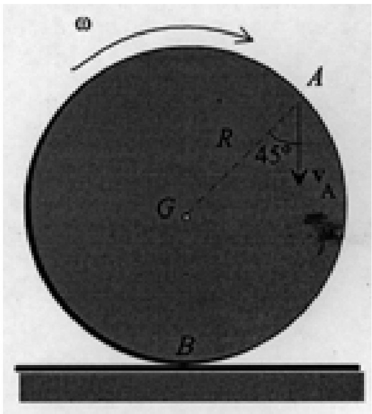
$$\tan\beta = \frac{x}{R}\;;\; \beta = \frac{\pi}{2} - \theta \;\Rightarrow\; \mathbf{a}_A = -a_A\,(\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j})$$

Centroide fija. Sustituyendo el valor del sen 2 θ en la ecuación que relaciona la x con la y queda la ecuación de una parábola.

$$y = \frac{x^2}{2R} + \frac{R}{2}$$

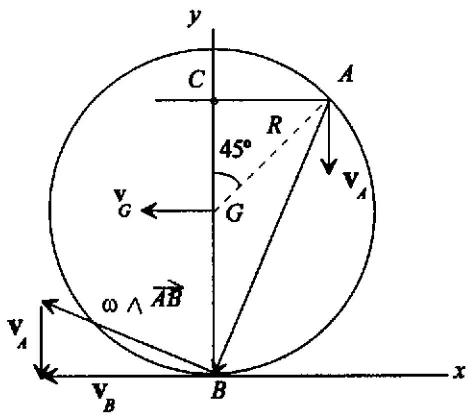
PROBLEMA 4-7

Un disco de radio $R = 0{,}4$ m rueda y desliza sobre un plano horizontal. Su velocidad angular es $\omega = 25$ rd s^{-1} y la velocidad del punto A está dirigida verticalmente hacia abajo, formando con el radio posición del punto el ángulo que se indica en la figura. Determinar : a) la velocidad de deslizamiento, b) el valor de la velocidad del punto A, c) el centro instantáneo de velocidades, d) la velocidad del centro del disco



SOLUCIÓN

Tomamos el origen de la referencia fija en el punto del plano horizontal que coincide con el punto B de contacto del disco con el plano.



Escribamos la velocidad del punto B en función de la velocidad del punto A

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \varpi \wedge \overrightarrow{AB} = -\varpi R\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\mathbf{i} + \left(-v_A + \varpi R\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\mathbf{j}$$

La velocidad de B solo tienen componente **j**, luego de su expresión se tiene que

$$\mathbf{v}_B = -17{,}7\,\mathbf{i}\ \mathrm{ms^{-1}} \qquad \text{y} \qquad v_A = 7{,}07\ \mathrm{ms^{-1}}$$

El centro instantáneo de velocidades C se determina trazando perpendiculares a las velocidades de los puntos A y B. Sus coordenadas son

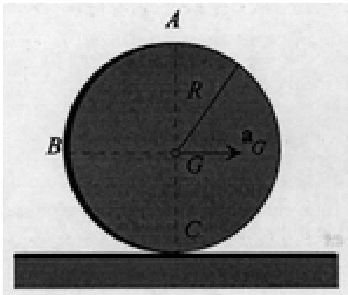
$$C(\,0,\ 0{,}6828\,)$$

El módulo de la velocidad del punto G es el mismo que el de la velocidad del punto A, ya que están a la misma distancia del centro instantáneo de velocidades, y la velocidad de G ha de ser perpendicular al segmento CG, luego su expresión es

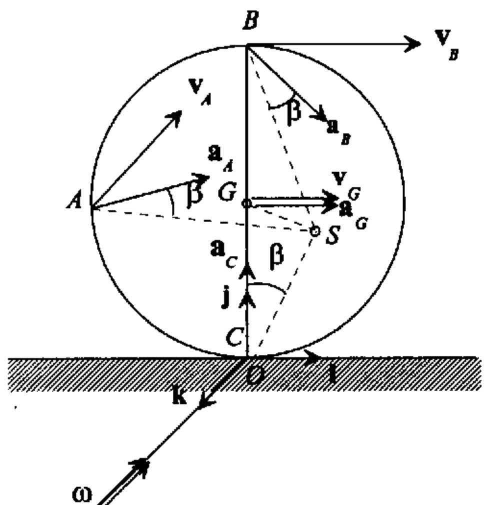
$$\mathbf{v}_G = -7{,}07\,\mathbf{i}$$

PROBLEMA 4-8

Un cilindro de radio $R = 1{,}5$ m rueda sin deslizar sobre un plano horizontal. La aceleración $\mathbf{a}_G$ del centro del disco es constante $a_G = 3\ \mathrm{ms}^{-2}$ y en el instante inicial su velocidad angular es nula. Determinar en el instante $t = 1$ s : a) la velocidad del punto G, b) la velocidad angular del cilindro, c) la aceleración angular del cilindro, d) la velocidad de los puntos A y B, e) la aceleración de los puntos A, B y C .



SOLUCIÓN



Velocidad del punto G. El origen de la referencia fija lo tomamos en el punto del plano que coincide con el punto C, punto de contacto del cilindro con el plano, los ejes tal como se indica en la figura adjunta.

La trayectoria del punto G es rectilinea y su movimiento uniformemente acelerado. Aplicando los resultados de la *cinemática del punto* y teniendo en cuenta las condiciones iniciales, la velocidad instantánea del punto G es

$$\mathbf{v}_G = 3\,t\,\mathbf{i} = 3\,\mathbf{i} \quad \mathrm{ms}^{-1}$$

El cilindro rueda sin deslizar, luego la velocidad del punto de contacto C del cilindro con el plano es nula, es decir que el punto C es el centro instantáneo de velocidades. El punto C lo tomaremos como polo del movimiento.

Velocidad angular. La velocidad del punto G respecto de C está dada por

$$\mathbf{v}_G = \boldsymbol{\varpi} \wedge \overrightarrow{CG} = -\,\varpi_3\,R\,\mathbf{i}$$

Igualando ambas expresiones de $\mathbf{v}_G$ se tiene $\boldsymbol{\varpi} = -2\,t\,\mathbf{k} = -2\,\mathbf{k} \;\; \mathrm{rad\,s}^{-1}$

Aceleración angular. La aceleración angular es la derivada respecto del tiempo de la velocidad angular

$$\boldsymbol{\alpha} = -2\,\mathbf{k} \;\; \mathrm{rad\,s}^{-2}$$

Velocidad de los puntos A y B. Sus velocidades están dadas por las expresiones

$$\mathbf{v}_A = \boldsymbol{\varpi} \wedge \overrightarrow{CA} = 2.12\,t(\mathbf{i} + \mathbf{j}) = 2.12(\mathbf{i} + \mathbf{j})\;\mathrm{ms}^{-1} \qquad \mathbf{v}_B = \boldsymbol{\varpi} \wedge \overrightarrow{CB} = 6\,t\,\mathbf{i} = 6\,\mathbf{i}\;\mathrm{ms}^{-1}$$

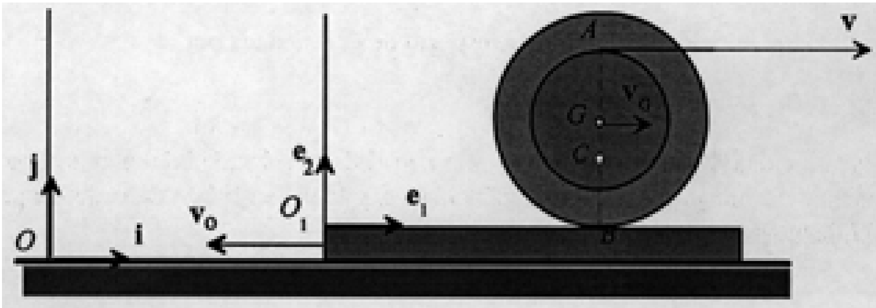
Aceleración de los puntos A , B y C. Sus aceleraciones están dadas por las expresiones

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_G + \boldsymbol{\alpha} \wedge \overrightarrow{GA} - \varpi^2\,\overrightarrow{GA} = 9\,\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j} \qquad \mathbf{a}_B = \mathbf{a}_G + \boldsymbol{\alpha} \wedge \overrightarrow{GB} - \varpi^2\,\overrightarrow{GB} = 6(\mathbf{i} - \mathbf{j})$$

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_G + \boldsymbol{\alpha} \wedge \overrightarrow{GC} - \varpi^2\,\overrightarrow{GC} = 6\,\mathbf{j}$$

PROBLEMA 4-9

Un disco de radio r que dispone de un resalte circular de radio r_0 rueda sin deslizar sobre una plancha que se desplaza sobre una superficie horizontal con velocidad $\mathbf{v}_0$ constante hacia la izquierda. En el resalte hay enrollado un cable inestensible cuyo extremo se mueve con una velocidad $\mathbf{v}$ horizontal constante hacia la derecha. Determinar: a) la velocidad angular de la polea , b) la velocidad del centro de la polea , c) el centro instantáneo de rotación



SOLUCIÓN

Velocidad angular del disco. La velocidad del punto A de la polea es la misma que la del extremo del cable, y la velocidad relativa del punto B es cero. La posición del punto A es

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1B} + \overrightarrow{BA}$$

Derivando respecto del tiempo queda

$$\mathbf{v} = v\mathbf{i} = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\varpi} \wedge \overrightarrow{BA} = -v_0\,\mathbf{i} - \varpi_3\,(r + r_0)\,\mathbf{i}$$

de donde

$$\boldsymbol{\varpi} = \varpi_3\,\mathbf{k} = -\left(\frac{v_0 + v}{r + r_0}\right)\mathbf{k}$$

Velocidad de G. Aplicando la ecuación de la velocidad al punto G se tiene

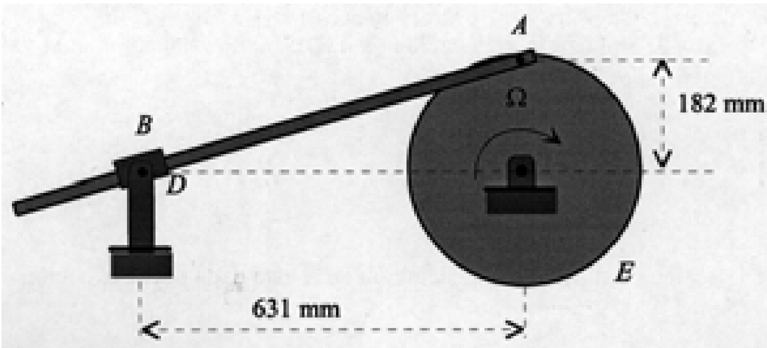
$$\mathbf{v}_G = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\varpi} \wedge \overrightarrow{BG} = \left(\frac{r v - r_0 v_0}{r + r_0}\right)$$

Centro instantáneo de velocidades. El centro instantáneo es un punto de velocidad nula, luego de la ecuación de la velocidad se tiene $0 = -\mathbf{v}_0\,\mathbf{i} + \omega\,BC\,\mathbf{i}$. La posición de C queda definida por el segmento

$$\overline{BC} = \left(\frac{v_0}{v_0 + v}\right)(r + r_0)$$

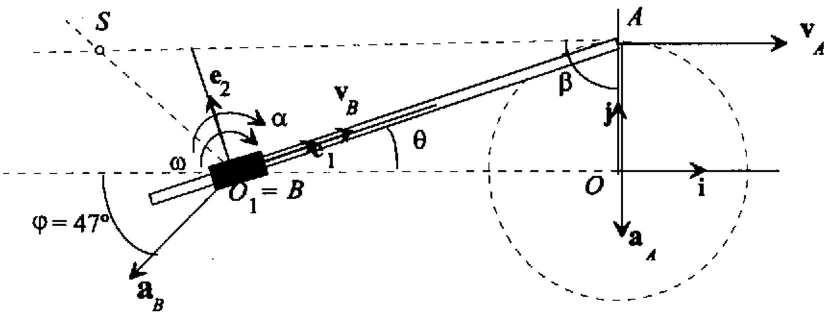
PROBLEMA 4-10

El disco E de la figura gira en sentido horario con una velocidad angular constante de 20 rad / s. En el instante representado, determinar : a) la velocidad angular de la barra b) la aceleración del punto B de la barra en contacto con la deslizaderac) la aceleración angular de la barra



SOLUCIÓN

Las referencias fija y móvil se toman tal como se muestra en la figura adjunta. La referencia de la barra coincide con la móvil en el instante considerado. La velocidad del extremo de la barra es igual a la del punto de la periferia del disco coincidente con él, luego su valor es $v_A = 3{,}64\ \mathrm{ms}^{-1}$. Su aceleración es la correspondiente a un movimiento circular uniforme, es decir, $a_A = 72{,}8\ \mathrm{rs}^{-2}$.



Velocidad angular de la barra. Derivando la ecuación

$$\mathbf{r}_A = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1A} = \overrightarrow{OO_1} + \mathbf{r}_1$$

respecto del tiempo se tiene

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\varpi} \wedge \mathbf{r}_1$$

siendo $\mathbf{v}_{re}$ la velocidad relativa de la barra, ω la velocidad angular de ambas, y $\varpi \wedge \mathbf{r}_1$ la velocidad de arrastre. Expresando las tres velocidades de (1) en la base móvil e identificando el coeficiente en ambos términos se tiene

$$v_{re} = v_A \cos\theta = 3.5 \text{ ms}^{-1} \qquad \varpi_3 = -\frac{v_A}{r_1}\operatorname{sen}\theta = -1{,}59 \text{ rd s}^{-1} \tag{2}$$

Aceleración del punto B. Aplicando la ecuación (3-43) al punto B queda que el valor de su aceleración expresada en la base móvil es

$$\mathbf{a}_B = a_{re}\,\mathbf{e}_1 + 2\varpi_3 v_{re}\,\mathbf{e}_2 = a_{re}\,\mathbf{e}_1 - 11{,}13\,\mathbf{e}_2 \tag{3}$$

La relación entre la aceleración de B y la aceleración de A está dada por la ecuación (3-44)

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \alpha \wedge \mathbf{r}_1 - \varpi_3^2\,\mathbf{r}_1 \tag{4}$$

Expresando las aceleraciones del segundo término de la ecuación (4) en la base móvil e identificando con la (3) los coeficientes de $\mathbf{e}_1$ se tiene

$$a_{re} = -a_A \operatorname{sen}\theta + \varpi_3^2\,r_1 = -18{,}47 \text{ ms}^{-2} \tag{5}$$

La aceleración de B en la referencia móvil es $\mathbf{a}_a = -18{,}47\,\mathbf{e}_1 - 11{,}13\,\mathbf{e}_2$. Aplicando la matriz del cambio de base, la aceleración de B en la referencia fija es

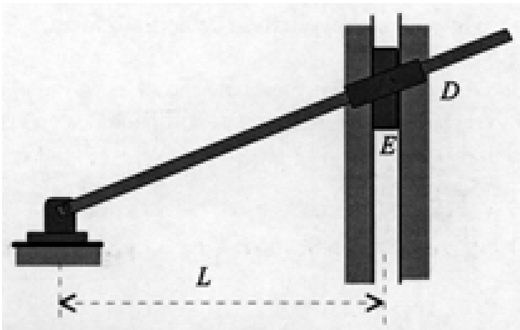
$$\mathbf{a}_s = -14{,}70\,\mathbf{i} - 15{,}80\,\mathbf{j}$$

Aceleración angular. Identificando los coeficientes de $\mathbf{e}_2$ entre (3) y (4) se tiene la aceleración angular

$$\alpha_3 = \frac{-a_A \cos\theta - 2\varpi_3 v_{re}}{r_1} = -93{,}2 \text{ rds}^{-2} \tag{6}$$

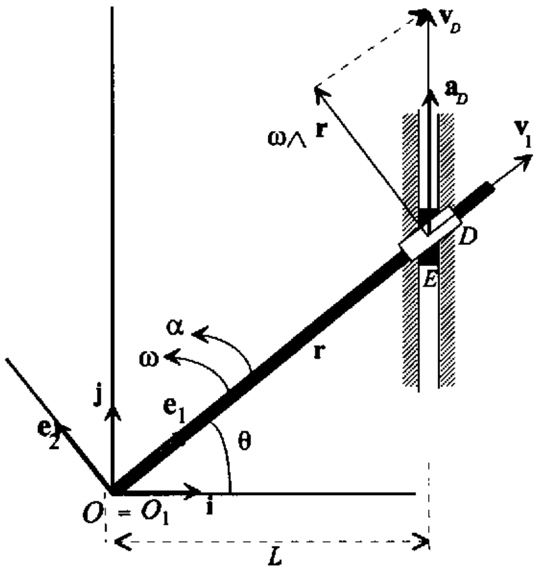
PROBLEMA 4-11

La barra de la figura gira con velocidad angular ω y aceleración angular α constantes en santido antihorario pasando por la deslizadera D la cual está unida a un bloque E que se desplaza por la ranura vertical. Determinar:a) la velocidad y la aceleración de la deslizaderab) la velocidad y la aceleración relativas de la deslizadera



SOLUCIÓN

El movimiento de la deslizadera es el mismo que el del bloque E al cual está unida mediante un eje. El bloque solo puede desplazarse a lo largo del eje y, por lo que su velocidad y aceleración solo tienen componente $\mathbf{j}$. El origen de la referencia fija y móvil se toman en el centro de rotación de la barra tal como se indica en la figura adjunta.



El vector posición del punto D en ambas referencias coincide, luego $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{O_1D} = \mathbf{r}$. Derivando se tiene la velocidad

$$\mathbf{v}_D = \mathbf{v}_1 + \boldsymbol{\varpi} \wedge \mathbf{r}$$

y derivando de nuevo, la aceleración

$$\mathbf{a}_D = \mathbf{a}_1 + \boldsymbol{\alpha} \wedge \mathbf{r} + \boldsymbol{\varpi} \wedge (\boldsymbol{\varpi} \wedge \mathbf{r}) + 2\boldsymbol{\varpi} \wedge \mathbf{v}_1$$

siendo $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{a}_1$ la velocidad y la aceleración relativas de la deslizadera.

Velocidad de D. La velocidad de D en la referencia móvil es $\mathbf{v}_D = v_1\,\mathbf{e}_1 + \omega\, r\,\mathbf{e}_2 = v_x\,\mathbf{i} + v_y\,\mathbf{j}$. Mediante la matriz del cambio de base se determinan sus componentes en la referencia fija

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & v_1 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & \varpi r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1\cos\theta - \varpi r \operatorname{sen}\theta \\ v_1 \operatorname{sen}\theta + \varpi r\cos\theta \end{bmatrix}$$

La componente de la velocidad según i es nula, luego $v_x = v_1\cos\theta - \omega\, r \operatorname{sen}\,\theta = 0$, de donde se tiene la velocidad relativa

$$v_1 = \frac{\varpi L}{\cos^2\theta}\operatorname{sen}\theta \qquad (1)$$

Sustituyendo su valor en la expresión de la componente j queda para la velocidad de D

$$\mathbf{v}_D = \frac{L\varpi}{\cos^2\theta}\,\mathbf{j} \qquad (2)$$

Aceleración de D. La aceleración se puede obtener utilizando el mismo procedimiento, es decir, expresando la aceleración en la referencia móvil, determinando las componentes en la referencia fija e igualando a cero la componente x. Pero en este caso, una simple derivación de la ecuaciones (1) y (2) respecto del tiempo proporciona el resultado. La aceleración relativa es

$$a_1 = \frac{L}{\cos\theta}\,[\varpi^2 + (\alpha + 2\varpi^2 \operatorname{tag}\theta)\operatorname{tag}\theta]$$

y la aceleración está dada por

$$\mathbf{a}_D = \frac{L}{\cos^2\theta}\,(\alpha + 2\,\varpi^2 \operatorname{tag}\theta)\,\mathbf{j}$$