Capítulo 4 Cinemática del sólido rígido

4.1 Introducción

Un sólido rígido se define como un conjunto de puntos del espacio tales que la distancia entre dos cualesquiera de ellos se *mantiene constante durante el movimiento*. Esta propiedad se denomina *condición de rigidez*. Los cuerpos sólidos en movimiento mantienen, en la mayoría de los casos, prácticamente inalterable su forma durante el movimiento siendo por tanto cinemáticamente equivalentes a un sólido rígido. La *Cinemática del Sólido Rígido* estudia el movimiento de los cuerpos cuando se tienen en consideración sus rotaciones.

El estado cinemático de un sólido en un instante dado, queda completamente definido conociendo las velocidades y aceleraciones de sus puntos, medidas respecto de una determinada referencia, lo cual implica conocer la posición del sólido en dicha referencia. La posición queda fijada dando las coordenadas de tres de sus puntos no alineados, lo que da un total de nueve coordenadas de las cuales, tres de ellas se pueden expresar por medio de la condición de rigidez como combinación de las seis restantes, con lo que únicamente quedan seis coordenadas independientes, que se denominan *coordenadas generalizadas*.

La condición de rigidez impone restricciones al movimiento de tres puntos no alineados del sólido ya que estos han de moverse de manera que las distancias entre ellos no cambien durante el movimiento. Esta limitación hace que sus velocidades no sean independientes. El estado de movimiento de un sólido rígido queda determinado conociendo la velocidad de dos cualesquiera de sus puntos. Establecer la relación que existe entre las velocidades de esos dos puntos cualesquiera de un sólido constituye uno de los objetivos de la Cinemática del sólido rígido. Dicha relación se denomina *ley de distribución de las velocidades*. A partir de ella se deduce, por derivación, la relación entre la aceleraciones, denominada *ley de distribución de las aceleraciones*.

4.2 Movimientos elementales del sólido rígido

El estado de movimiento más simple de un sólido es el de reposo, en el que la velocidad de todos sus puntos es nula. Si el estado de reposo se mantiene en el tiempo, también la aceleración de todos sus puntos es nula. Si el sólido no está en reposo, el movimiento más simple que puede tener es de traslación o de rotación respecto de un eje fijo. Cuando el sólido en rotación se desplaza a lo largo del eje, el movimiento resultante se denomina helicoidal ya que, como veremos más adelante, las trayectorias descritas por los puntos del sólido que no pertenecen al eje son hélices.

4.2.1 Movimiento de traslación

El más sencillo de los movimientos que puede experimentar un sólido rígido es el movimiento de traslación que se define de la siguiente manera: ***el movimiento de un sólido rígido es de traslación, cuando el vector definido por dos cualesquiera de sus puntos se mantiene paralelo así mismo durante el movimiento.*** Consideremos un sólido rígido cuyo movimiento es de traslación y sean Q y P dos cualesquiera de sus puntos, figura 4-1. Sean $\mathbf{r}_Q$ y $\mathbf{r}_P$ los vectores que definen las posiciones instantáneas de los puntos Q y P en la referencia fija de origen O. Debido a la condición de rigidez, el módulo del vector definido por los dos puntos del sólido $\mathbf{r}_{PQ}$ ha de ser constante y, por la definición de movimiento de traslación, también su dirección y sentido han de ser constantes.

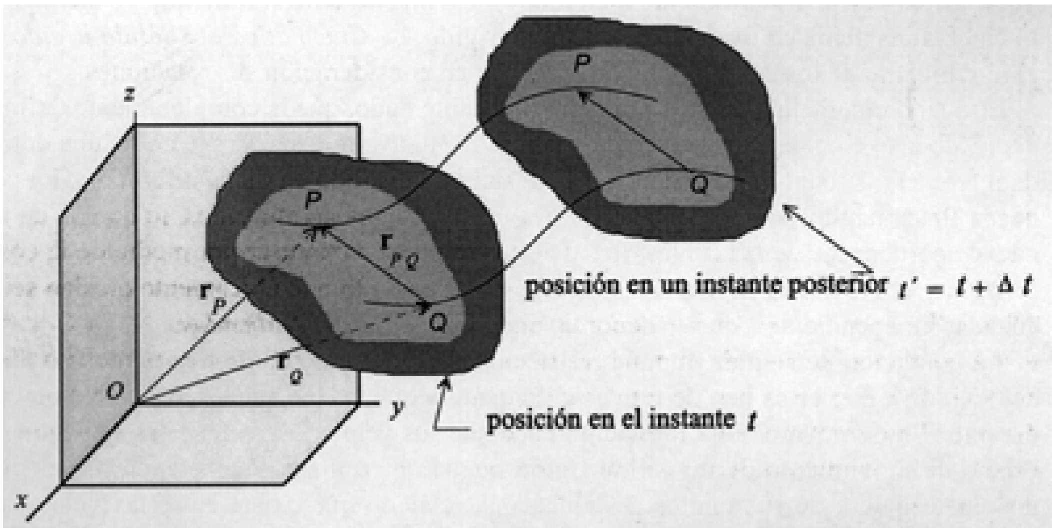


Fig. 4-1

De la figura se deduce la siguiente relación vectorial $\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_Q = \mathbf{r}_{QP}$ entre los vectores posición de ambos puntos, que derivada respecto del tiempo queda

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_Q \tag{4-1}$$

y derivando de nuevo respecto del tiempo la ecuación (4-1) se tiene

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_Q \tag{4-2}$$

De las ecuaciones (4-1) y (4-2) se deduce que si en un instante t un sólido rígido está animado de un movimiento de traslación, entonces *todos los puntos del sólido tienen la misma velocidad y la misma aceleración.* Veamos ahora que las trayectorias son congruentes. Sean $\mathbf{r}_P'$ y $\mathbf{r}_Q'$ los vectores posición de los punto P y Q en un instante posterior $t' > t$. De la condición de rigidez y de la definición de movimiento de traslación se tiene que los vectores posición en los instante t y t'satisfacen la relación $\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_Q = \mathbf{r}_P' - \mathbf{r}_Q'$, de donde se tiene que

$$\Delta \mathbf{r}_P = \mathbf{r}_P - \mathbf{r}'_P = \mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_Q' = \Delta \mathbf{r}_Q \tag{4-3}$$

La ecuación (4-3) expresa que el desplazamiento de todos los puntos del sólido entre los instante t y $t' = t + \Delta t$ es el mismo para todos ellos, luego sus trayectorias son congruentes. Si las trayectorias son líneas rectas, la traslación es *rectilínea,* y si son curvas, la traslación es *curvilínea.* El movimiento del sólido en su conjunto queda completamente descrito por el movimiento de uno cualquiera de sus puntos y es, por tanto, formalmente equivalente al movimiento de una partícula.

4.2.2 Movimiento de rotación

Un sólido rígido tiene un movimiento de rotación alrededor de un eje fijo que pasa por él, cuando *dos cualesquiera de sus puntos no cambian de posición durante el movimiento.* De la condición de rigidez se deduce inmediatamente que la velocidad de todos los puntos del sólido alineados con los dos puntos fijos ha de ser nula. En efecto, si Q es un punto alineado con los dos puntos fijos, las distancias de Q a cada uno de los dos puntos fijos se han de mantener constantes durante el movimiento, luego ha de estar en reposo y por tanto su velocidad es nula.

La recta definida por los dos puntos fijos se denomina *eje de rotación* y todos los puntos del sólido pertenecientes al eje tienen velocidad nula. Determinemos ahora la velocidad de los puntos del sólido que no pertenecen al eje. Sea P un punto genérico del sólido que no pertenece al eje de rotación. En un punto O del eje de rotación perteneciente al sólido rígido se toma el origen de la referencia fija. Tomemos el mismo punto O como origen de una referencia vinculada al sólido, tal que sus ejes participen del movimiento del sólido, y que los ejes z y z'de ambas referencias coinciden con el eje de rotación del sólido. Sean $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, y $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ los vectores de las bases de las referencias fija y móvil respectivamente, en donde $\mathbf{k} = \mathbf{e}_3$, tal como se muestra en la figura 4-2. El vector posición $\mathbf{r}_P$del punto genérico P del sólido, es el mismo en ambas referencias.

La velocidad del punto P del sólido en la referencia fija es, cinemáticamente equivalente, a la velocidad de una partícula en referencias en rotación con origen fijo. En la ecuación (3-70) de la cinemática de la partícula relaciona la velocidad de la partícula en ambas referencias, se tiene que incluir ahora la condición de rigidez, con lo cual la velocidad relativa $\mathbf{v}'$ del punto P en la referencia en rotación es cero, luego de la ecuación (3-70) se obtiene que la velocidad del punto genérico P del sólido rígido en la referencia fija está dada por

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}_P \tag{4-4}$$

donde el vector ω, asociado a la rotación de la base móvil la cual esta unida rígidamente al sólido, es la velocidad de rotación del sólido. El vector ω representativo de la rotación, es un vector sobre el eje de rotación, su módulo es la magnitud de la rotación y, su dirección y sentido determinan la dirección y el sentido de la rotación.

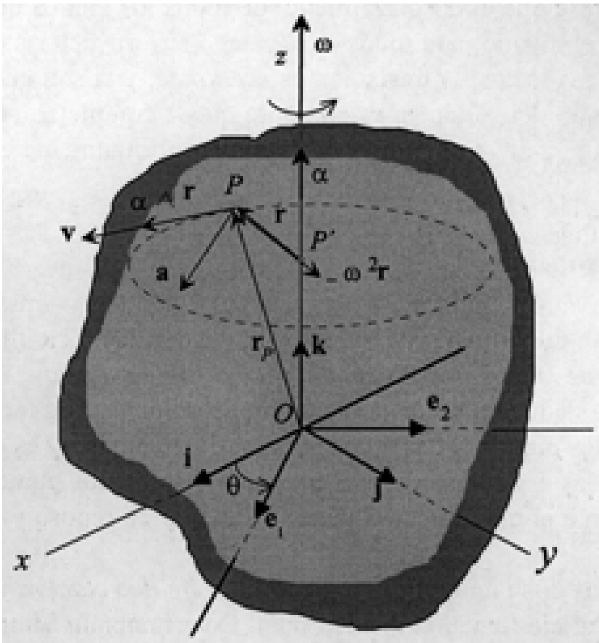


Fig. 4-2

La ecuación (4-4) da la velocidad de un punto cualquier del sólido y es por tanto, la *ley de distribución de velocidades* del sólido. Aplicada para los puntos del eje se deduce inmediatamente que su velocidad es nula ya que para dichos puntos ω y $\mathbf{r}_P$ son vectores paralelos. De una manera análoga, la ecuación (3-71) de la cinemática de la partícula junto a la condición de rigidez, proporciona la aceleración de un punto cualquiera del sólido, ecuación que constituye la *ley de distribución de las aceleraciones*

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha} \wedge \mathbf{r}_P + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}_P) \tag{4-5}$$

siendo α la aceleración angular del sólido. Determinemos ahora las trayectorias de los puntos del sólido. La ecuación de la velocidad de un punto del sólido se puede escribir como

$$\mathbf{v} = \omega \wedge \mathbf{r}_P = \omega \wedge \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{PQ} \wedge \omega \tag{4-6}$$

La última igualdad de la ecuación (4-6) expresa que la velocidad de un punto del sólido es el momento del vector ω respecto de dicho punto, pero el momento de un vector respecto de un punto es independiente del punto que se tome sobre su recta soporte para formar el producto vectorial. Tomando el punto P' proyección del punto P sobre el eje, la velocidad es

$$\mathbf{v} = \omega \wedge \mathbf{r} \tag{4-7}$$

en donde $\mathbf{r}$ es el radio vector del punto P respecto del eje de rotación. Para la aceleración queda

$$\mathbf{a} = \alpha \wedge \mathbf{r} + \omega \wedge (\omega \wedge \mathbf{r}) = \alpha \wedge \mathbf{r} - \omega^2 \mathbf{r} \tag{4-8}$$

Las ecuaciones (4-7) y (4-8) son las correspondientes a las del movimiento circular de una partícula luego, los puntos que no pertenecen al eje describen circunferencias concéntricas con el eje y situadas en planos perpendiculares a él. El primer sumando de la ecuación (4-8) es la aceleración tangencial del movimiento circular del punto P, $\alpha \wedge \mathbf{r} = \alpha\, \mathbf{k} \wedge \mathbf{r}$ y el segundo sumando su aceleración normal $\omega \wedge (\omega \wedge \mathbf{r}) = -\,\omega^2 \mathbf{r}$. Los módulos de la velocidad $\mathbf{v}$ y de la aceleración $\mathbf{a}$ del punto P están dados respectivamente por

$$v = \omega\, r \qquad\qquad a = r\,\sqrt{\alpha^2 + \varpi^4} \tag{4-9}$$

El movimiento de rotación de un sólido está caracterizado por la aceleración angular α. Si α es cero, la rotación es uniforme, y si es diferente de cero, el movimiento de rotación es uniformemente acelerado si α tiene el mismo sentido que ω o retardado si α es de sentido contrario a ω. De la condición de rigidez se sigue que el ángulo θ girado por el punto P hasta el instante t es el mismo para todos los puntos y es, por tanto, el ángulo girado por el sólido. La velocidad y la aceleración angulares del sólido son las derivadas primera y segunda de θ respecto del tiempo

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \qquad\qquad \alpha = \frac{d^2\theta}{d\,t^2} \tag{4-10}$$

Las ecuaciones (4-10) son similares a las del movimiento rectilíneo de una partícula cambiando desplazamientos lineales por desplazamientos angulares y velocidad y la aceleración lineal por la angular, luego $\theta\ (t)$ es la ***ecuación del movimiento*** del sólido en rotación con eje fijo. En general, las condiciones del movimiento del sólido se expresan dando la aceleración angular α o la velocidad angular ω en función del tiempo junto con las condiciones iniciales del movimiento. Para la *rotación uniforme* $\alpha = 0$, la velocidad angular es constante y el desplazamiento angular θ está dado por

$$\theta = \theta_o + \omega\, t \tag{4-11}$$

donde θ_o es la posición angular inicial. Para la *rotación uniformemente acelerada* α = cte, la velocidad y la posición angular están definidas por

$$\omega = \omega_o + \alpha\ t \qquad\qquad \theta = \varpi_o\, t\ +\ \tfrac{1}{2}\,\alpha\, t^2 \tag{4-12}$$

siendo ω_o es la velocidad angular inicial. Eliminando el tiempo entre las dos ecuaciones (4-12) se obtiene

$$\varpi^2 = \varpi_o^2\ \pm\ 2\theta\alpha$$

El signo – corresponde a un movimiento uniformemente retardado. Eliminando el tiempo entre las ecuaciones (4-10) se obtiene

$$\alpha = \varpi\frac{d\varpi}{d\,\theta} \tag{4-13}$$

ecuación que permite determinar la posición angular del sólido cuando la aceleración α es función de θ o de ω.

Cuando el eje de rotación no pasa por el cuerpo, ninguno de sus puntos tiene velocidad nula, y todos ellos describen circunferencias concéntricas con el eje, situadas en planos perpendiculares a él.

4.2.3 Movimiento helicoidal

El *movimiento helicoidal* es la superposición de un movimiento de rotación en torno a un eje fijo y de un movimiento de traslación rectilíneo a lo largo de dicho eje. Para describir el movimiento tomaremos el origen O de la referencia fija en un punto del eje de rotación, tal que los ejes de coordenadas x, y estén situados en un plano perpendicular al eje de rotación. Se elige como origen de la referencia ligada al sólido un punto C perteneciente al eje de rotación, tal que sus ejes de coordenadas x', y' estén también contenidos en un plano perpendicular al eje de rotación. De esta manera, los ejes z y z'de ambas referencias coinciden con el eje de rotación. Sean $\mathbf{v}_C$ y ω las velocidades de traslación y de rotación del sólido en un instante dado. La velocidad del origen C de la referencia unida al sólido es la velocidad de traslación $\mathbf{v}_C$. Sea $\mathbf{r}_P'$ el vector posición de un punto cualquiera P del sólido respecto del origen móvil C, figura 4-3.

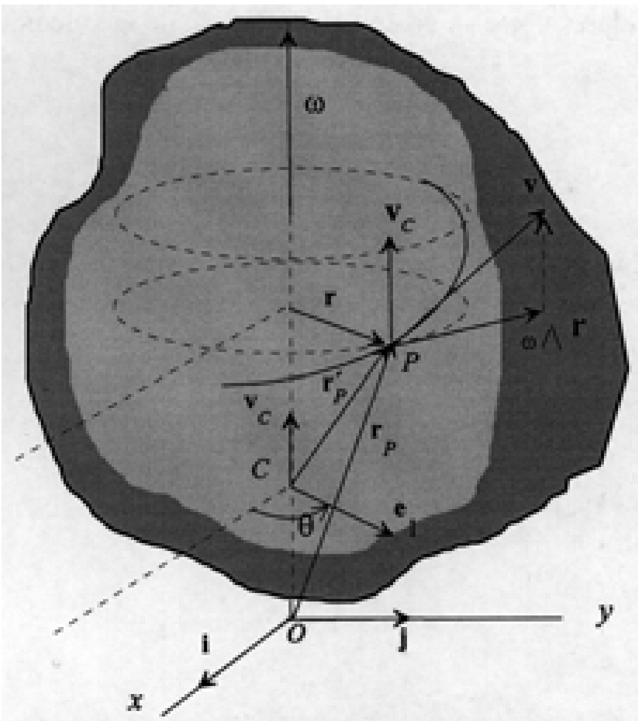


Fig. 4-3

De la ecuación (3-70) sección 3.6.4, que relaciona las velocidades de un punto en referencias en rotación con origen móvil, se tiene que la velocidad $\mathbf{v}$ del punto P en la referencia fija está dada por

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}_P' \qquad (4\text{-}14)$$

El producto vectorial $\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}_P'$ es el momento de $\boldsymbol{\omega}$ respecto del punto P y por tanto es igual a $\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}_P$, siendo $\mathbf{r}_P$ el vector posición del punto P respecto del origen O de la referencia fija y también es igual a $\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}$, donde $\mathbf{r}$ es el radio vector del punto P, figura 4-3. Sustituyendo el segundo sumando de la ecuación (4-14) por sus expresiones equivalentes se tiene para la velocidad de un punto cualquiera del sólido la siguiente ecuación

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}_P = \mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r} \qquad (4\text{-}15)$$

La ecuación (4-15) es la *ley de distribución de velocidades* de los puntos del sólido rígido animado de un movimiento helicoidal. La velocidad de un punto es la suma de la velocidad de traslación a lo largo del eje más la velocidad debida a la rotación en torno a él. Ambos vectores son perpendiculares entre sí, de donde el módulo de la velocidad es

$$v = \sqrt{v_C^2 + \varpi^2 r^2} \qquad (4\text{-}16)$$

Derivando la ecuación (4-15) respecto del tiempo se tiene la *ley de distribución de las aceleraciones.*

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_C + \boldsymbol{\alpha} \wedge \mathbf{r} - \omega^2 \mathbf{r} \qquad (4\text{-}17)$$

La velocidad instantánea del punto P en componentes rectangulares está dada por

$$\mathbf{v} = -\omega\, r \operatorname{sen} \theta\, \mathbf{i} + \omega\, r \cos \theta\, \mathbf{j} + v_C\, \mathbf{k} \qquad (4\text{-}18)$$

Cuando la velocidad de traslación $\mathbf{v}_C$ y la velocidad de rotación $\boldsymbol{\omega}$ tienen valores constantes, la trayectoria del punto es una curva alabeada denominada *hélice,* y el movimiento del sólido es un movimiento *helicoidal uniforme.* Se denomina *paso de hélice* al desplazamiento del sólido a lo largo del eje en un periodo. Su valor está dado por

$$d = v_C\, T = 2\pi\, v_C / \varpi$$

PROBLEMA 4.1

El movimiento de rotación de un volante está definido por la ecuación $\theta = 3/18\ t^3$. Determinar : a) su velocidad y aceleración angular ; b) la velocidad y aceleración de los puntos que se encuentran a una distancia $h = 0{,}3$ m del eje en el instante en que las componentes normal y tangencial de la aceleracion tienen el mismo valor.

SOLUCIÓN

a) La velocidad y la aceleración angular del volante están dadas por la primera y segunda derivadas de la coordenada angular respecto del tiempo

$$\varpi = \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}t^2 \qquad \alpha = \frac{d\varpi}{dt} = t$$

b) La velocidad lineal de un punto que se encuentra a una distancia h del eje está dada por $v = \omega\ h$, y las componentes de su aceleración son $a_t = \alpha\ h$ y $a_n = \omega^2\ h$. Sustituyendo valores queda

$$v = \tfrac{3}{20}t^2 \qquad a_t = 0.3\,t \qquad a_n = \tfrac{3}{40}t^4$$

Igualando las expresiones de las componentes de la aceleración se obtiene el instante en que sus valores coinciden

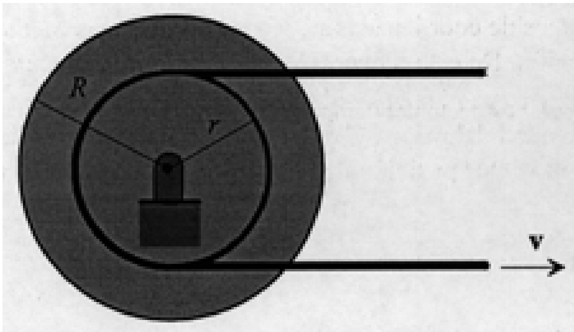
$$t = 4^{1/3} = 1{,}6s$$

Los valores de la velocidad y de la aceleración en este instante son

$$v = 0{,}8\ \mathrm{ms^{-1}} \qquad a_t = a_n = 0{,}47\ \mathrm{ms^{-2}} \qquad a = 0{,}66\ \mathrm{ms^{-2}}$$

PROBLEMA 4. 2

Una polea de radio $r = 4$ cm , está siendo accionada por una correa cuya velocidad es de 1,6 ms^{-1} y su aceleración de 0, 4 ms^{-2}. Un disco cuyo radio exterior es R = 12cm está sujeto al eje de la polea. Determinar: a) la velocidad y aceleración angular del disco; b) la velocidad y aceleración de un punto de la periferia del disco.



SOLUCIÓN

a) Los puntos de la periferia de la polea tienen la misma velocidad que la correa de transmisión. La velocidad angular de la polea es

$$\omega = v/r = 4\ 0 \text{ rad s}^{-1}$$

Esta velocidad angular es también la velocidad angular del disco. La componente tangencial de la aceleración de los puntos de la periferia de la polea es igual a la aceleración de la correa de transmisión, $a_\tau = \alpha\ r = 0{,}4$ de donde la aceleración angular del disco es

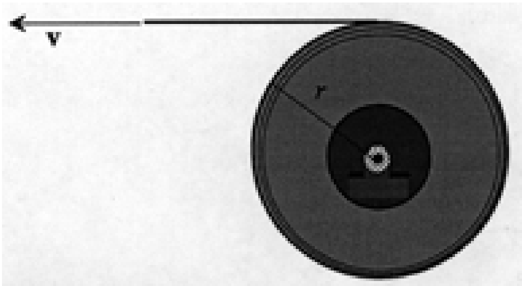
$$\alpha = 10 \text{ rad s}^{-2}$$

b) La velocidad lineal de los puntos del contorno del disco será $\alpha = \omega R = 4{,}8 \text{ ms}^{-1}$. Las componentes de la aceleración de los puntos del contorno del disco son $a_\tau = \alpha R = 1{,}2 \text{ ms}^{-2}$ y $a_n = \omega^2 R = 192$ ms^{-2}. El valor de la aceleración es

$$a = \sqrt{a_\tau + a_n} = 192{,}0 \text{ ms}^{-2}$$

PROBLEMA 4.3

En los procesos de impresión el papel se ha de introducir en la impresora a velocidad constante. Si el radio inicial del rollo de papel es R, el grosor del papel es h y la velocidad constante es v, determinar el valor de la aceleración angular α en función del radio r instantáneo del rollo.



SOLUCIÓN

Sea θ el ángulo girado hasta el instante t. El número de vueltas dado por el rollo de papel hasta ese instante es $\theta/2\pi$. El radio r en el instante t es

$$r = R - h\frac{\theta}{2\pi} = R - \frac{h}{2\pi}\theta$$

siendo función lineal del ángulo girado. La velocidad angular ω en el instante t es $\omega = v/r$, de donde la aceleración angular α es igual a

$$\alpha = \frac{d\varpi}{dt} = \frac{d\varpi}{dr}\frac{dr}{dt} = -\frac{v}{r^2}\frac{dr}{dt}$$

La derivada de r respecto de t se puede escribir como

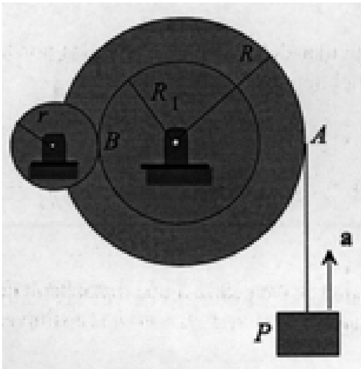
$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \varpi\frac{dr}{d\theta} = -\frac{hv}{2\pi r}$$

Sustituyendo en la expresión de la aceleración angular queda

$$\alpha = \frac{h\,v^2}{2\pi\,r^3}$$

PROBLEMA 4-4

El mecanismo de elevación de la figura adjunta se compone de un cilindro de radio $R = 0,5$ m que tiene enrollado un cable. Rígidamente unido a él hay un disco de radio $R_1 = 0,3$ m el cual está conectado a otro disco de arrastre de radio $r = 0,2$ m . El peso P que esta unido al extremo libre del cable asciende con una aceleración constante de 4 $\mathrm{ms^{-2}}$ partiendo del reposo. Determinar la aceleración angular α del disco de arrastre.



SOLUCIÓN

Movimiento del cilindro. El cable unido al cilindro es inextensible, luego la velocidad del punto A del cilindro es igual a la velocidad del peso P, y la componente tangencial de la aceleración del punto A del cilindro es igual a la aceleración del peso P. El movimiento del peso P es rectilíneo uniformemente acelerado , luego su velocidad es $v = a\,t$. La velocidad y aceleración angular del cilindro son respectivamente

$$\omega_1 = v/R = a\,t/R = 8\,t\ \mathrm{s^{-1}} \qquad \text{y} \qquad \alpha_1 = a/R = 8\ \mathrm{s^{-2}}$$

ambas en sentido antihorario. Al estar el disco de radio R_1 unido rígidamente al cilindro, sus velocidades y aceleraciones angulares son las mismas.

Movimiento del disco de arrastre. La velocidad del punto de contacto B entre los dos discos es la misma. Igualando sus valores expresados en función de las correspondientes velocidades angulares se tiene

$$\frac{\varpi}{R_1} = \frac{\varpi_1}{r} \qquad \text{de donde} \qquad \omega = 20\,t\ \mathrm{s^{-1}} \quad \text{sentido horario.}$$

La aceleración angular es la derivada de ω respecto del tiempo, de donde

$$\alpha = 20\ \mathrm{s^{-2}}$$