3.7 Movimiento plano en coordenadas polares

Para fijar la posición de un punto de un plano se ha utilizado hasta ahora las coordenadas rectangulares, con la gran ventaja de que la base **i**, **j** del sistema es invariante al pasar de un punto a otro del plano, pero que tiene el inconveniente de que su utilización sistemática para cualquier tipo de problema, presenta en algunos casos una gran dificultad matemática, que hace incluso imposible la obtención de solución del problema. Para estos casos, se hace necesaria la utilización de otros sistemas de coordenadas, como pueden ser el sistema de *coordenadas polares* que se describe a continuación.

3.7.1 Coordenadas polares

El elemento geométrico que permite fijar la posición de los puntos de un plano en coordenadas polares, es una semirecta de dicho plano denominada eje polar. El origen O de la semirecta es el origen de coordenadas. La posición de un punto P cualquiera del plano que contiene a la semirecta queda fijada por dos parámetros: la distancia r al origen O, y el ángulo θ entre la semirecta y el segmento que une el origen con el punto, contado positivo en el sentido contrario al de las agujas del reloj. Un punto P del plano en coordenadas polares se representan por $P\,(r,\,\theta)$. Se puede superponer una referencia rectangular con la polar, tomando el origen común y haciendo coincidir el eje X con el semieje polar, figura 3-24.

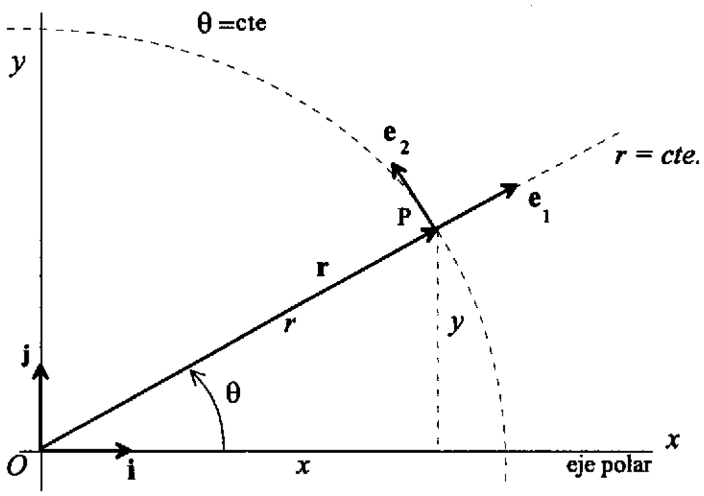


Fig. 3-24

Las curvas coordenadas que pasan por el punto P están dadas por r = cte y θ = cte, que son respectivamente, una circunferencia de radio r y centro en O y la semirecta OP. Los vectores tangentes unitarios por P a dichas curvas coordenadas $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$ forman la base ortonormal de la coordenadas polares, cuya orientación cambia con el valor del ángulo θ. Los vectores de la base se sitúan en el origen O de coordenadas. La relación entre las coordenadas rectangulares y polares del punto P está dada por

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \tag{3-36}$$

de donde

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \theta = \mathrm{arc\,tg}\,(y/x) \tag{3-37}$$

La expresión del vector posición $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$ al sustituir x, y por su valor en polares, cambia a $\mathbf{r} = r\cos\theta\,\mathbf{i} + r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathbf{j}$. Los vectores unidad de la base polar se definen como el límite de los cocientes increméntales del vector $\mathbf{r}$ según r y según θ, cuyos valores están dados por

$$\mathbf{e}_1 = \frac{d\mathbf{r}_r}{dr_r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \qquad \mathbf{e}_2 = \frac{d\mathbf{r}_\theta}{dr_\theta} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial r_\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \tag{3-38}$$

Sustituyendo las derivadas de $\mathbf{r}$ se tienen las expresiones de los vectores de la base polar

$$\mathbf{e}_1 = \cos\theta\,\mathbf{i} + \mathrm{sen}\,\theta\,\mathbf{j} \tag{3-39}$$

$$\mathbf{e}_2 = -\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j} \tag{3-40}$$

La matriz del cambio de base es

$$(e_{ij}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{3-41}$$

3.7.2 Componentes polares de la velocidad y aceleración

El vector posición $\mathbf{r}$ de una partícula expresado en la base polar tiene únicamente componente radial, $\mathbf{r} = r\,\mathbf{e}_1$. La velocidad se obtiene derivando la posición respecto del tiempo, figura 3-25.

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\,\mathbf{e}_1 + r\,\frac{d\mathbf{e}_1}{dt} \tag{3-42}$$

En las coordenadas polares el símbolo de la derivación respecto del tiempo se sustituye por un punto encima de la función sobre la cual actual. La ecuación (3-42) cambia a

$$\mathbf{v} = \dot{r}\,\mathbf{e}_1 + r\,\frac{d\,\mathbf{e}_1}{dt} \tag{3-43}$$

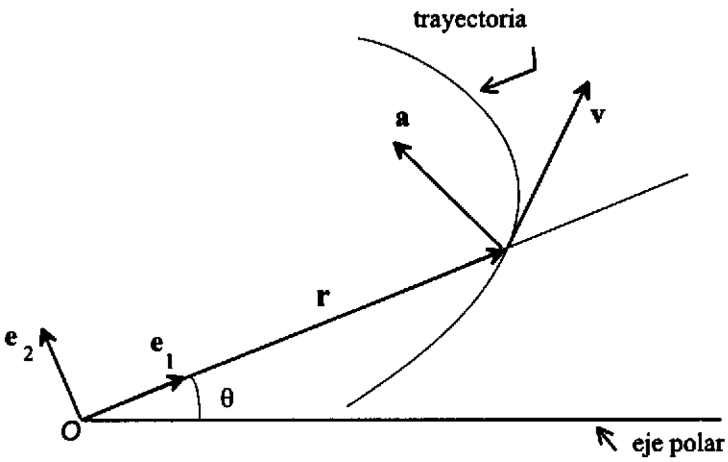


Fig. 3-25

Derivando las expresiones de los vectores de la base (3-39) y (3-40) respecto del tiempo queda

$$\frac{d\mathbf{e}_1}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\,\mathbf{e}_2 = \dot{\theta}\,\mathbf{e}_2 \qquad \frac{d\mathbf{e}_2}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\,\mathbf{e}_1 = -\dot{\theta}\,\mathbf{e}_1 \tag{3-44}$$

Sustituyendo la primera de las (3-44) en (3-43), se obtiene el vector velocidad en la base de las coordenadas polares

$$\mathbf{v} = \dot{r}\,\mathbf{e}_1 + r\dot{\theta}\,\mathbf{e}_2 = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_\theta \tag{3-45}$$

Derivando respecto del tiempo la velocidad y teniendo en cuenta las ecuaciones (3-44), se obtiene la expresión de la aceleración

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\mathbf{e}_1 + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\,\mathbf{e}_2 = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_\theta \tag{3-46}$$

A las componentes de los vectores velocidad y aceleración, dadas por las ecuaciones (3-45) y (3-46), en la base polar $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ se les denominan *componentes radiales y transversales* de la velocidad y aceleración respectivamente.

3.7.3 Velocidad y aceleración angular

Las derivadas respecto del tiempo de los vectores $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$ están dadas por las ecuaciones (3-44), las cuales se pueden poner en forma de productos vectoriales de los vectores de la base. Se define el tercer vector $\mathbf{e}_3$ de la base polar como $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$, figura 3-26.

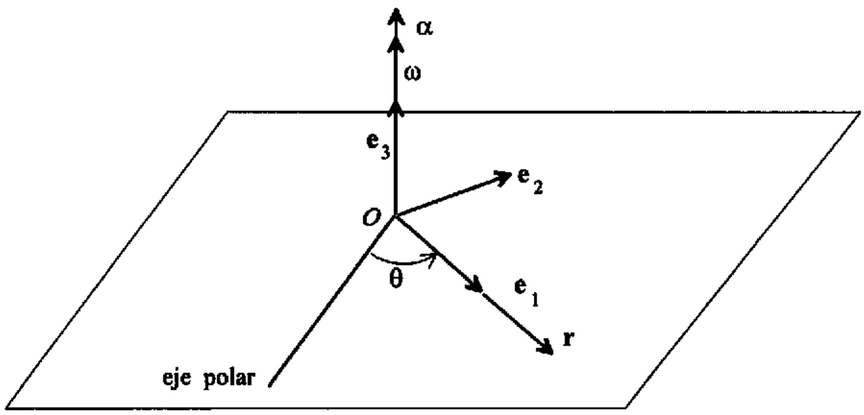


Fig. 3-26

Sustituidas las relaciones vectoriales $\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2$ y $\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1$ en las expresiones de las derivadas, y llamando ω al vector $\dot{\theta}\,\mathbf{e}_3$, las derivadas de los vectores de la base cambian a

$$\frac{d\mathbf{e}_1}{dt} = \varpi \wedge \mathbf{e}_1 \qquad \frac{d\mathbf{e}_2}{dt} = \varpi \wedge \mathbf{e}_2 \tag{3-47}$$

Midiendo el ángulo θ en radianes, el vector ω se mide en radianes por segundo (rad s^{-1}), se denomina *velocidad angular* y mide las tasa de cambio de orientación con el tiempo de la base polar, la cual queda definida para cada posición de la partícula por el vector **r**, luego ω representa la velocidad de rotación de **r** respecto del eje definido por $\mathbf{e}_3$ pasando por el origen O.

De la ecuación (3-45) se tiene que la velocidad transversal se expresa en función de la velocidad angular como $\mathbf{v}_\theta = \omega \wedge \mathbf{r}$. Derivando la velocidad angular ω respecto del tiempo, se tiene la aceleración angular α

$$\alpha = \frac{d\varpi}{dt} = \ddot{\theta}\, \mathbf{e}_3 \qquad (\text{rad s}^{-2}) \qquad (3\text{-}48)$$

3.7.4 Movimiento circular

Cuando la trayectoria de la partícula es una circunferencia, el vector posición $\mathbf{r} = r\,\mathbf{e}_1$ tiene módulo r constante, figura 3-27.

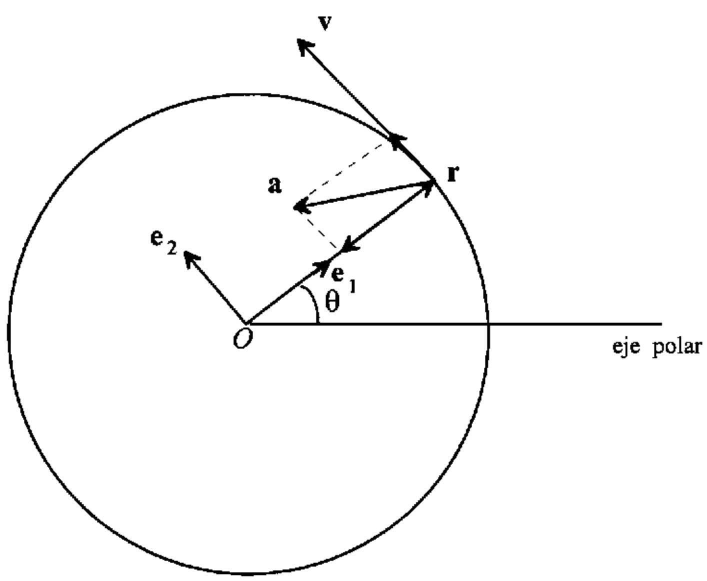


Fig. 3-27

Introduciendo en las ecuaciones (3-45) y (3-46) la condición r = cte, se obtienen las expresiones de la velocidad y de la aceleración para el movimiento circular dadas por

$$\mathbf{v} = r\dot{\theta}\,\mathbf{e}_1 \qquad \mathbf{a} = -r\dot{\theta}^2\,\mathbf{e}_1 + r\ddot{\theta}\,\mathbf{e}_2 \tag{3-49}$$

Ambas expresiones se pueden escribir también en función de la velocidad y de la aceleración angular. En la base polar son

$$\mathbf{v} = r\varpi\,\mathbf{e}_2 \qquad \mathbf{a} = -r\varpi^2\,\mathbf{e}_1 + r\alpha\,\mathbf{e}_2 \tag{3-50}$$

o también, directamente, como productos vectoriales de ω y α por el vector posición **r**

$$\mathbf{v} = \varpi \wedge \mathbf{r} \qquad \mathbf{a} = \varpi \wedge (\varpi \wedge \mathbf{r}) + \alpha \wedge \mathbf{r} \tag{3-51}$$

Se denomina periodo T al tiempo que tarda la partícula en recorrer la circunferencia. El recorrido elemental sobre la circunferencia es $ds = v\,dt$ que, integrado para una vuelta completa, da la ecuación que permite determinar el valor del periodo.

$$2\pi\, r = \int_0^T v\, dt \qquad \text{o} \qquad 2\pi = \int_0^T \varpi\, dt \tag{3-52}$$

Cuando el módulo de la velocidad **v** es constante, el movimiento se denomina *circular uniforme* para el cual el periodo es $T = 2\pi/\omega$.

3.8 Movimiento plano en función del arco

En los apartados anteriores se ha estudiado el movimiento plano de una partícula en coordenadas rectangulares y en coordenadas polares. Eliminando el tiempo entre las ecuaciones paramétricas del movimiento se obtenía la ecuación de la trayectoria, cuyas características geométricas son, obviamente, independientes del tiempo. Cuando la partícula se mueve sobre una trayectoria conocida, es posible expresar su aceleración en función de la *curvatura* de la curva,parámetro que determina la geometría de la curva en cada uno de sus puntos.

3.8.1 Curvatura de una curva plana

La geometría de una curva plana depende del arco elemental *ds,* definido como la distancia entre dos de sus puntos consecutivos sobre la curva infinitamente próximos. Los extremos del arco definen la recta tangente a la curva en uno de sus puntos y el vector unitario τ, definido por $d\mathbf{s} = ds\,\tau$, figura 3-28 a), es su vector director.

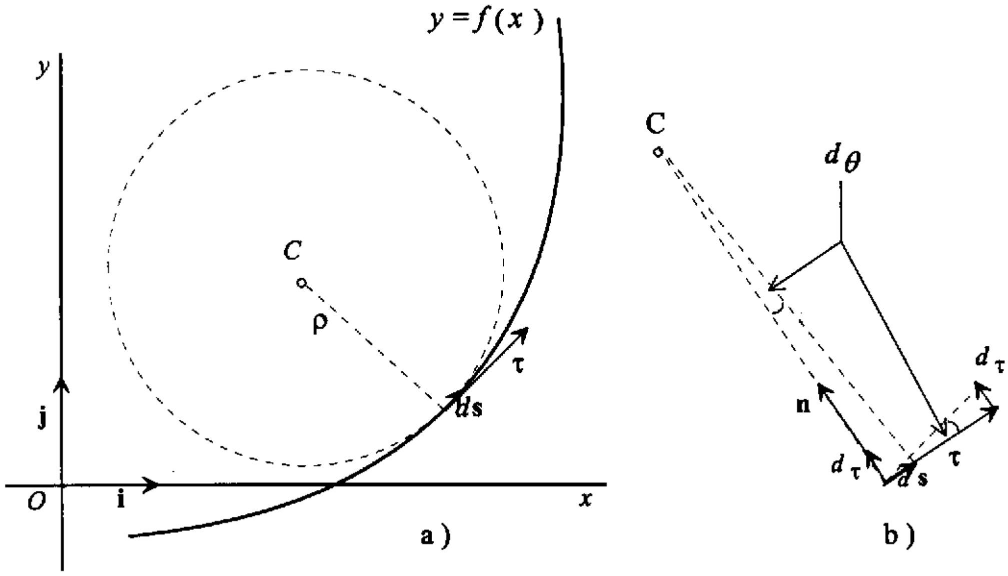


Fig. 3-28

Para cada punto de una curva plana, existe una circunferencia tangente a la curva en dicho punto, de centro C y radio ρ, tal que el elemento de arco ds de la curva pertenece también a la circunferencia, a la cual se denomina *circunferencia osculatriz*. Se define la *curvatura* de la curva en uno de sus puntos por el inverso del radio de la circunferencia tangente en el punto

$$\kappa = \frac{1}{\rho} \tag{3-53}$$

El radio de curvatura y el centro de la circunferencia tangente en un punto de una curva dada, se determina con la condición de que en dicho punto coincidan los valores de ambas curvas así como sus primeras y segundas derivadas, problema que se resuelve en el apartado de contacto de curvas del análisis matemático.

Geométricamente, el valor de la curvatura en un punto está directamente relacionado con el incremento del vector τ al pasar de un extremo al otro del elemento de arco ds de la curva en dicho punto. En efecto, por ser τ un vector unitario, su incremento diferencial $d\tau$ es perpendicular a τ, figura 3-28 b). Los vectores τ y $\tau + d\tau$ son tangentes a la curva en los extremos del arco ds, luego son perpendiculares a los correspondientes radios de la circunferencia tangente, lo que hace que el ángulo $d\theta$ sustentado por el arco ds sea igual al ángulo formado por los vectores τ y $\tau + d\tau$. Los módulos de τ y $\tau + d\tau$ son iguales a uno; identificando el arco con la cuerda se tiene $d\tau = d\theta$ y como $ds = \rho\, d\theta$ queda

$$d\tau = \frac{1}{\rho}\, ds \tag{3-54}$$

Tomando un vector unitario $\mathbf{n}$ en el punto de la curva y dirigido hacia el centro C, la ecuación (3-54) se puede escribir en forma vectorial como

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{1}{\rho}\,\mathbf{n} = \kappa\,\mathbf{n} \tag{3-55}$$

Los vectores τ y $\mathbf{n}$ forman una base ortonormal del espacio bidimensional que contiene a la curva plana, denominada *base intrínseca* de la curva.

3.8.2 Componentes intrínsecas de la aceleración

Una forma natural de describir el movimiento de una partícula cuya trayectoria sea una curva plana determinada, consiste en utilizar el recorrido s de la partícula sobre la trayectoria como parámetro para expresar su velocidad $\mathbf{v}$ y su aceleración $\mathbf{a}$. El elemento de arco en forma vectorial está dado por $d\mathbf{s} = dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j}$, de donde tomando módulos y operando queda

$$ds = \sqrt{1 + y'^2}\; dx \tag{3-56}$$

ecuación que define el arco como parámetro. Teniendo en cuenta que $d\mathbf{s} = ds\,\tau$, se obtiene la expresión del vector tangente en componentes rectangulares

$$\tau = \frac{dx}{ds}\,\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\,\mathbf{j} \tag{3-57}$$

Sea P_0 un punto de la trayectoria, figura 3-29, en el cual se encuentra la partícula en el instante inicial $t = 0$. En un instante posterior t la partícula estará situada en un punto P de la trayectoria a una distancia s del punto origen P_0, medida sobre la trayectoria. Tomaremos como sentido positivo del recorrido s el que corresponde al crecimiento de s con el tiempo. Las coordenadas rectangulares del punto P, que coincide con la posición de la partícula en el instante t, son funciones del arco $x = x(s)$, $y = y(s)$.

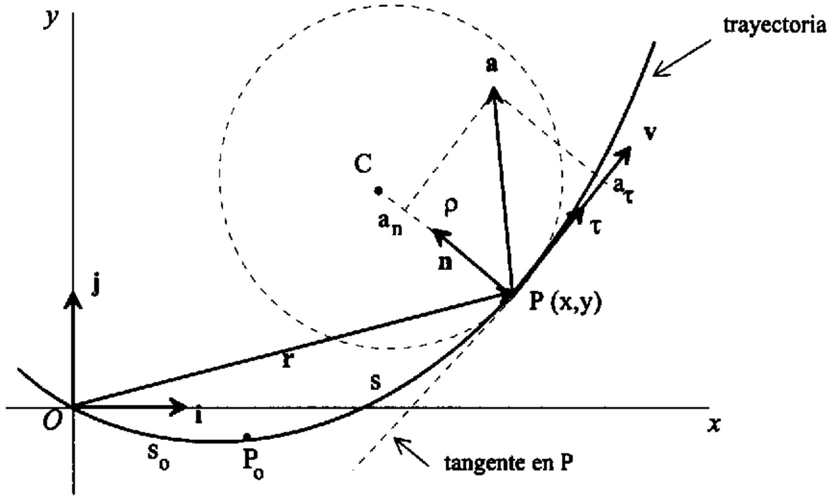


Fig. 3-29

El vector posición de la partícula en cada instante es el vector **r** definido por los puntos O y P, $\mathbf{r} = x(s)\,\mathbf{i} + y(s)\,\mathbf{j}$. La velocidad de la partícula en el punto P es la derivada de **r** respecto del tiempo; derivando se tiene

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = v\,\frac{d\mathbf{r}}{ds} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{v} = v\,\boldsymbol{\tau} \tag{3-58}$$

ya que según (3-57), la derivada de **r** respecto de s es el vector **τ**. La aceleración es la derivada de la velocidad respecto del tiempo; derivando la ecuación (3-58) queda

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau} + v\,\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau} + v^2\,\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} \tag{3-59}$$

pero, teniendo en cuenta la ecuación (3-55), se obtiene finalmente

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\,\mathbf{n} \tag{3–60}$$

Las componentes de la aceleración en la base intrínseca se denominan *aceleración tangencial* y *aceleración normal* respectivamente

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} \qquad\qquad a_n = \frac{v^2}{\rho} \tag{3-61}$$

o también, *componentes intrinseca* de la aceleración

$$\mathbf{a} = a_\tau \boldsymbol{\tau} + a_n\,\mathbf{n} \tag{3-62}$$

De la ecuación (3-62) se pueden obtener los valores de la aceleración tangencial a_t y de la aceleración normal a_n en función de la velocidad **v** y de la aceleración **a** de la partícula. En efecto, multiplicando escalarmente la ecuación (3-62) por la velocidad **v** se tiene la aceleración tangencial a_t, y multiplicando vectorialmente por **v** la ecuación (3-62) y tomando módulos, se tiene la aceleración normal a_n. Mediante un sencillo cálculo se encuentra que sus expresiones están dadas por

$$a_\tau = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}}{v} \qquad\qquad a_n = \frac{|\mathbf{v}\wedge\mathbf{a}|}{v} \tag{3-63}$$

De las ecuaciones (3-61) se deduce que la curvatura está dada por

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{|\mathbf{v}\wedge\mathbf{a}|}{v^3} \tag{3-64}$$

Para trayectorias rectilíneas, la curvatura es $\kappa = 0$ y el radio de curvatura es $\rho = \infty$. Para trayectorias circulares, curvatura constante, el radio de curvatura es el radio de la circunferencia R y la aceleración normal es $a_n = v^2 / R$.

PROBLEMA 3-23

Las coordenadas polares de una partícula cuyo movimiento es plano están dadas por las expresiones $r = 2\,r_o$ sen $\omega\, t$; $\theta = \omega\, t$, en donde r_o y ω son constantes positivas. Determinar :
a) la velocidad y aceleración de la partícula
b) su trayectoria
c) el periodo

SOLUCIÓN

a) Derivando respecto del tiempo las expresiones de **r** y θ se tiene

$$\dot r = 2 r_o\, \omega \cos \omega t \qquad \ddot r = -2 r_o\, \omega^2 \operatorname{sen} \omega t \qquad \dot\theta = \omega \qquad \ddot\theta = 0$$

de donde la velocidad y la aceleración están dadas por

$$\mathbf{v} = 2\, r_o\, \omega\, (\cos \omega\, t\, \mathbf{e}_1 + \operatorname{sen}\ \omega\, t\, \mathbf{e}_2) \qquad \mathbf{a} = -4\, r_o\, \omega^2 \operatorname{sen} \omega\, t\, \mathbf{e}_1 + 4\, r_o\, \omega^2 \cos \omega\, t\, \mathbf{e}_2$$

y sus módulos son : $v = 2\, r_0 \omega$ y $a = 4\, r_0\, \omega^2$

b) Sustituyendo $\theta = \omega\, t$ en la expresión de r se tiene $r = 2\, r_0$ sen θ, que es la ecuación de la trayectoria en polares. Pasando la curva a rectangulares se tiene

$$x = 2\, r_0 \operatorname{sen} \theta \cos \theta \qquad y = 2\, r_0 \operatorname{sen}^2 \theta$$

Eliminando θ entre ambas ecuaciones se obtiene la expresión de la trayectoria en coordenadas rectangulares

$$x^2 + y^2 - 2\, r_0 y = 0$$

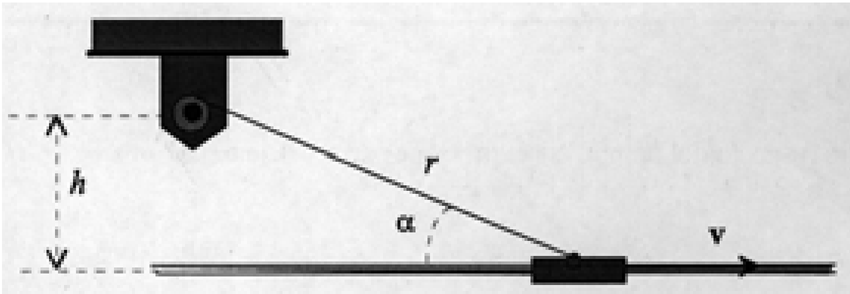
que es la ecuación de una circunferencia de centro C (0, r_0) y radio r_0 .

c) La partícula recorre la circunferencia con velocidad constante $v = 2\, r_0\, \omega$, luego el periodo T es

$$T = \pi / \omega$$

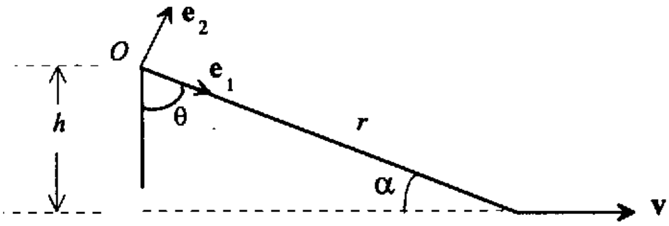
PROBLEMA 3-24

Una deslizadera se mueve sobre una guía horizontal con una velocidad constante v hacia la derecha, tal como se muestra en la figura adjunta. La deslizadera está unida a un cable enrollado sobre un carrete que se encuentra a una distancia h de la guia horizontal. Determinar la variación del ángulo α con el tiempo



SOLUCIÓN

Utilizando coordenadas polares con origen en un punto del eje del carrete, el vector posición **r** es



$$\mathbf{r} = r\,\mathbf{e}_1 = \frac{h}{\cos\theta}\,\mathbf{e}_1$$

La expresión genérica de la velocidad **v** en polares es $\mathbf{v} = \dot{r}\,\mathbf{e}_1 + r\,\dot{\theta}\,\mathbf{e}_2$

La velocidad de la deslizadera en la base polar está dada por $\mathbf{v} = v\,(\cos\alpha\,\mathbf{e}_1 + \operatorname{sen}\alpha\,\mathbf{e}_2)$

Identificando los coeficientes de $\mathbf{e}_2$ en ambas ecuaciones, sustituyendo r por su valor, y despejando $\dot{\theta}$, se obtiene

$$\dot{\theta} = (v\,\operatorname{sen}^2\alpha)/h$$

Derivando respecto del tiempo la relación angular $\theta + \alpha = \pi/2$ queda $\dot{\theta} = -\dot{\alpha}$, que sustituida en la ecuación anterior, resulta

$$\dot{\alpha} = -\frac{v\,\operatorname{sen}^2\alpha}{h} = -\frac{v\,h}{r^2}$$

PROBLEMA 3-25

Una párticula se mueve sobre un plano con velocidad v_0 constante siguiendo una trayectoria dada por $y = 3\,x^2$. Determinar:
a) el arco s en función del tiempo
b) las componentes rectangulares de la velocidad
c) las componentes rectangulares de la aceleración
d) la curvatura κ

SOLUCIÓN

a) La derivada del arco s respecto del tiempo es la velocidad v_0 . Tomando el origen del arco en el origen de coordenadas, el arco s en función del tiempo es $s = v_0\, t$

b) Las componentes de la velocidad son $\qquad v_1 = v_0 \cos\beta \qquad v_2 = v_0 \operatorname{sen}\beta \qquad (1)$

De la figura se tiene que $tg\,\beta = y' = 6\,x$, por lo que se deduce fácilmente que

$$\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1 + 36x^2}} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}\beta = \frac{6x}{\sqrt{1 + 36x^2}}$$

que sustituidas en (1) dan las componentes rectangulares de la velocidad.

c) Las componentes de la velocidad cumplen la condición $v_2 = 6\,x\,v_1$. Derivando respecto del tiempo se tiene

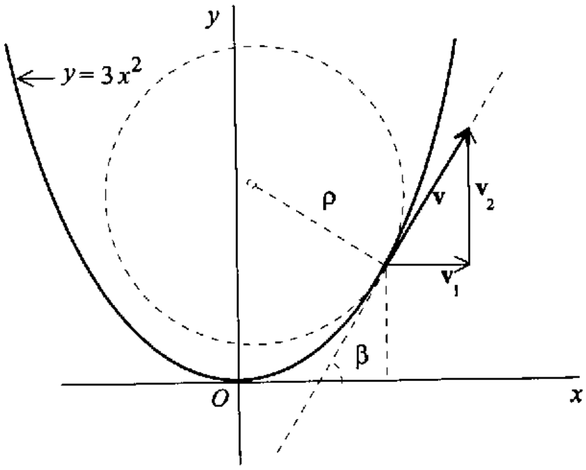
$$a_2 = 6\,v_1^2 + 6\,x\,a_1 \qquad (2)$$

La componente a_1 es la derivada respecto del tiempo de v_1 . Haciendo la derivada de v_1 *se* tiene

$$a_1 = -\,v_0^2\,\frac{36\,x}{\left(1 + 36\,x^2\right)^2} \qquad (3)$$

que, sustituida en (2), da la componente a_2 de la aceleración

$$a_2 = \frac{6\,v_0^2}{\left(1 + 36\,x^2\right)^2}$$



d) La curvatura de la curva k es el inverso del radio de curvatura $k = \dfrac{1}{\rho} = \dfrac{|\mathbf{v} \wedge \mathbf{a}|}{v^3}$

Efectuando operaciones queda $$k = \frac{6}{\left(1 + 36x^2\right)^{3/2}}$$

PROBLEMA 3-26

Una partícula recorre una trayectoria circular de radio R. Su velocidad v en función del arco s está dada por $v = 2\,k\,s^{1/2}$, en donde k es una constante positiva. Determinar:
a) las componentes intrínsecas de la aceleración
b) la posición en la cual la velocidad y la aceleración forman un ángulo de 45°
c) el tiempo t_o que tarda la partícula en dar la primera vuelta

SOLUCIÓN

a) La aceleración tangencial es la derivada de la velocidad respecto del tiempo

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = v\frac{dv}{ds} = 4\,k^2$$

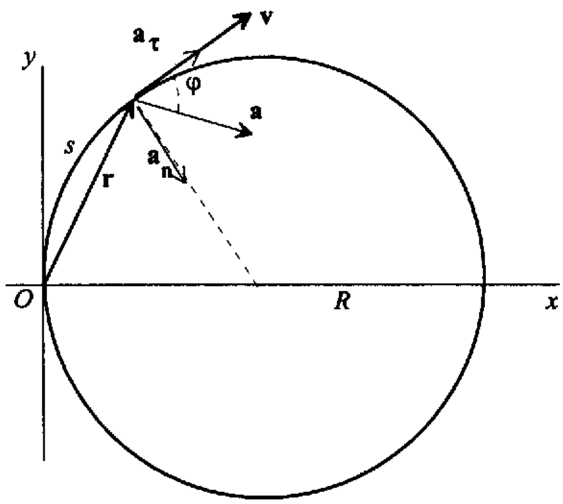
y la aceleración normal es

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{4\,k^2\,s}{R}$$

b) La velocidad y la aceleración forman un ángulo φ cuya tangente es igual al cociente entre la aceleración normal y la aceleración tangencial, siendo su valor

$$\text{tg}\,\varphi = \frac{s}{R}$$

La tangente de 45° es igual a 1, luego la aceleración forma un ángulo de 45° con la velocidad cuando la partícula ha recorrido un arco cuya longitud sea igual al radio de la circunferencia.



c) Calculemos la expresión del arco en función del tiempo; de $ds = v\,dt = 2\,k\,s^{1/2}\,dt$ se tiene

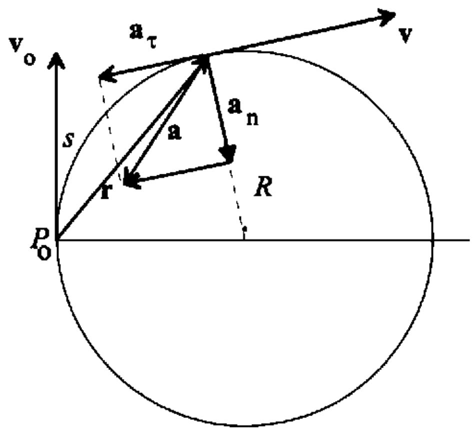
$$\frac{ds}{\sqrt{s}} = 2k\,dt \qquad \text{e integrando queda} \qquad s = k^2\,t^2$$

La velocidad en función del tiempo es $v = 2\,k^2\,t$. En el tiempo dt la partícula recorre el arco ds, luego $ds = 2\,k^2\,t\,dt$. Llamando T al tiempo que tarda en dar la primera vuelta, su valor se obtiene de la integral

$$\oint ds = 2\,k^2 \int_0^T t\,dt \qquad 2\pi R = k^2\,T^2 \qquad T = \frac{\sqrt{2\pi R}}{k}$$

PROBLEMA 3-27

Una partícula recorre una trayectoria circular de radio R partiendo del punto P_o con velocidad v_o. Su movimiento es retardado y las aceleraciones tangencial a_τ y normal a_n tienen el mismo valor. Determinar: a) su velocidad instantánea **v**, b) el valor de a_τ y a_n, c) el arco s en función del tiempo.



SOLUCIÓN

a) La trayectoria es una circunferencia de radio R. La curvatura es constante $\kappa = 1/R$, $\rho = R$.
El movimiento es retardado, luego de

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}\tau \quad \text{y} \quad a_n = \frac{v^2}{R}\mathbf{n} \qquad \text{se tiene que} \qquad -\frac{dv}{dt} = \frac{v^2}{R}$$

Integrando se obtiene la velocidad de la partícula en función del tiempo

$$\frac{1}{v} = \frac{t}{R} + C$$

Para $t = 0$, $v = v_o$ sustituyendo en la expresión de la velocidad se tiene $C = 1/v_o$, de donde la velocidad está dada por

$$v = \frac{R\,v_o}{v_o\,t + R} \qquad \text{o en forma vectorial} \qquad \mathbf{v} = v\,\tau$$

b) La aceleración tangencial es $$a_\tau = \frac{dv}{dt} = -\frac{R\,v_o^2}{(v_o\,t + R)^2}$$

y la aceleración normal es $$a_n = -a_\tau = \frac{R\,v_o^2}{(v_o\,t + R)^2}$$

La aceleración instantánea es $$\mathbf{a} = a_\tau \boldsymbol{\tau} + a_n\,\mathbf{n}$$

y su módulo $$a = \frac{\sqrt{2}\,R\,v_o^2}{(v_o\,t + R)^2}$$

c) El recorrido s en función del tiempo se obtiene integrando $v = ds/dt$.

$$s = R\ln(\,v_o\,t + R\,) + C$$

Para $t = 0$, $s = 0$, sustituyendo queda $C = -R\ln R$, de donde el recorrido en función del tiempo es

$$s = R\ln\left[1 + \left(\frac{v_o}{R}\right)t\right]$$

3.9 Movimiento en referencias móviles

En las secciones anteriores la referencia utilizada para describir el movimiento de una partícula en el espacio se ha considerado fija. Frecuentemente, es necesario determinar el movimiento de una partícula respecto de una referencia, la cual a su vez, está en movimiento respecto de otra. Al ser todas las referencias cinemáticamente equivalentes, consideraremos fija a una de ellas y móvil a la otra, según convenga.

En la sección 3.2 hemos visto que si Q es otro punto fijo del espacio, la velocidad y la aceleración de una partícula medidas desde O o desde Q, son las mismas. Consideremos ahora que el punto Q se mueve con una velocidad $\mathbf{v}_Q$ en la referencia de origen O, y consideremos Q como el origen de otra referencia, la cual está en movimiento respecto de O. La determinación de la velocidad y la aceleración del punto P en ambas referencias da valores distintos y, por tanto, también las trayectorias que describe el punto P en ambas referencias son diferentes.

Las relaciones existentes entre las velocidades y las aceleraciones dependen del movimiento de la referencia móvil respecto de la fija. Si la base de la referencia móvil mantienen fija su orientación, el movimiento de la referencia móvil es de *traslación*; cuando su orientación cambia con el tiempo, el movimiento se denomina de *rotación*, ya que como veremos, la tasa de cambio de orientación con el tiempo se puede expresar mediante una velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$, tal como se ha hecho en los cambios de orientación de las bases de las coordenadas polares, cilíndricas y esféricas. Establecer las relaciones que existen entre las magnitudes cinemáticas del movimiento de la partícula en ambas referencias constituye el objetivo de la presente sección.

Estas relaciones se establecen en el marco de la Mecánica Clásica para la cual el espacio y el tiempo son absolutos, es decir, las medidas de la longitud de un segmento y la de un intervalo temporal entre dos sucesos dan el mismo resultado en todas las referencias, y son, por tanto, magnitudes que no están afectadas por la velocidad de la referencia en la cual se hace su determinación. Esto es válido para velocidades pequeñas comparadas con la de la luz, circunstancia que se da en la gran mayoría de las aplicaciones técnicas. Cuando la velocidad de la referencia tiene valores próximos a la velocidad de la luz el marco de la Mecánica Clásica ya no es aplicable y debe ser sustituido por el de la Mecánica Relativista en la cual el espacio y el tiempo no son magnitudes absolutas.

3.9.1 Referencias en traslación: transformación de Galileo

Sean O y Q los orígenes de las referencias fija y móvil respectivamente, figura 3-30, y consideremos que las orientaciones de los vectores base $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ de la referencia de origen Q se mantienen fijas en el espacio mientras que el punto origen Q esta en movimiento respecto de la referencia de origen O. En cada instante, los vectores posición $\mathbf{r}$ y $\mathbf{r}'$ del punto P en ambas referencias están relacionados por la ecuación vectorial $\mathbf{r} = \mathbf{r}_Q + \mathbf{r}'$ donde $\mathbf{r}_Q$ es el vector posición del origen de la referencia móvil respecto de la fija. Las expresiones de dichos vectores en las bases de las respectivas referencias son: $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ y $\mathbf{r}' = x'\mathbf{e}_1 + y'\mathbf{e}_2 + z'\mathbf{e}_3$. Derivando respecto del tiempo la ecuación que relaciona las posiciones, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_o + \mathbf{r}'$, se tiene la relación entre las velocidades en ambas referencias

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_Q + \mathbf{v}' \quad \text{donde } \mathbf{v}' \text{ es} \quad \mathbf{v}' = \frac{dx'}{dt}\mathbf{e}_1 + \frac{dy'}{dt}\mathbf{e}_2 + \frac{dz'}{dt}\mathbf{e}_3 \tag{3-65}$$

La velocidad $\mathbf{v}$ de la partícula en la referencia fija es la suma de la velocidad de traslación instantánea del origen Q de la referencia móvil más la velocidad $\mathbf{v}'$ medida en la referencia móvil.

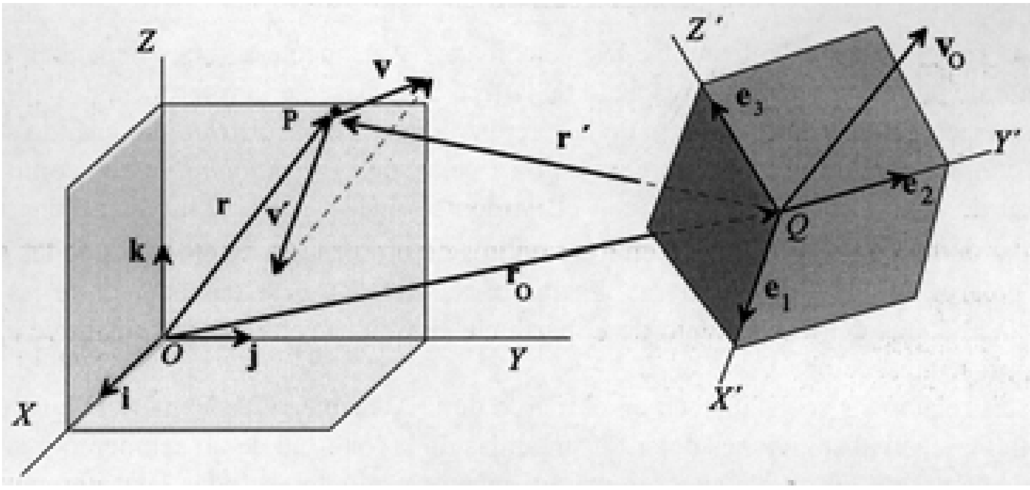


Fig. 3-30

Derivando la ecuación (3-65) respecto del tiempo se tiene la relación entre las aceleraciones en ambos sistemas.

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_Q + \mathbf{a}' \tag{3-66}$$

donde $\mathbf{a}'$ es la derivada de $\mathbf{v}'$ respecto del tiempo. Utilizando la matriz del cambio de base de ambas referencias, se obtienen las expresiones de $\mathbf{v}'$ y $\mathbf{a}'$ en la referencia de origen O. Cuando el movimiento del punto Q es uniforme la velocidad $\mathbf{v}_Q$ es constante y su aceleración $\mathbf{a}_Q$ es nula, en consecuencia, la aceleración del punto P es la misma en ambas referencias; y ya que todas las referencias son cinemáticamente equivalentes, se pude enunciar que *todas las referencias en movimiento uniformen miden la misma aceleración.* Este enunciado constituye el principio de relatividad de Galileo. Consideremos el caso en que los ejes de la referencia móvil son paralelos a los de la referencia fija con lo cual, la base de ambas referencias es la misma. Si suponemos que los ejes X y X′ son coincidentes, que el punto Q se desplaza en el sentido positivo del eje X y que se empieza a contar el tiempo en el instante en que ambos orígenes coinciden, fácilmente se establece que las coordenadas del punto P en ambos referencias están relacionadas por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} x' &= x - v_Q t \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned} \qquad (3\text{-}67)$$

El conjunto de las cuatro ecuaciones (3-67) se denomina *transformación de Galileo.* La cuarta ecuación expresa el hecho de que el tiempo es una magnitud absoluta, es decir, que transcurre por igual en todas las referencias.

3.9.2 Referencias en rotación

Consideremos ahora que la velocidad del punto Q es cero, $\mathbf{v}_Q = 0$, es decir, el punto Q tienen una posición fija en la referencia O pero la base de la referencia asociada al punto Q cambia de orientación con el tiempo, $\mathbf{e}_1(t)$, $\mathbf{e}_2(t)$, $\mathbf{e}_3(t)$, figura 3-31.

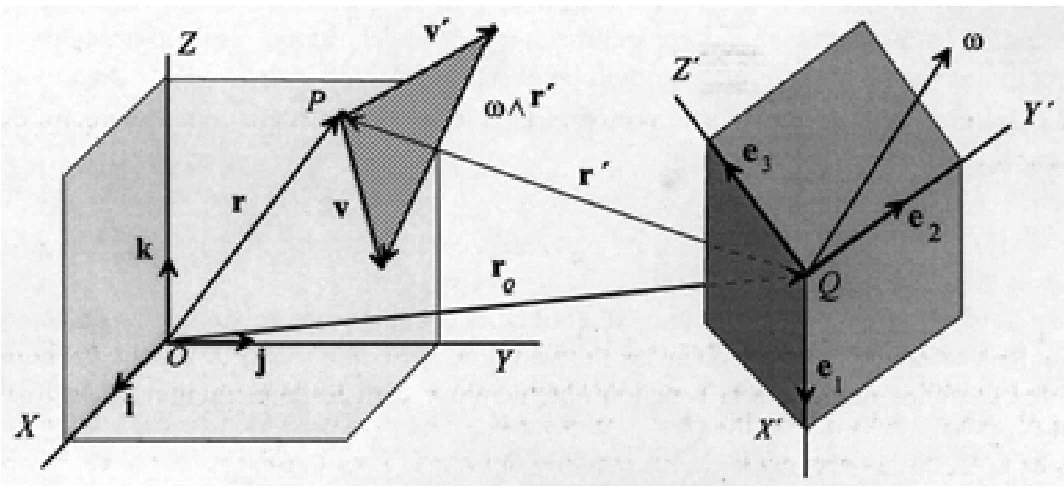


Fig. 3-31

Las posiciones del punto P en ambas referencias están relacionadas por la ecuación vectorial $\mathbf{r} = \mathbf{r}_Q + \mathbf{r}'$, en donde $\mathbf{r}'$ es el vector posición de P en la referencia Q. Al efectuar la derivada respecto del tiempo se ha de tener en cuenta que tanto las coordenadas posición del punto P en la referencia de origen Q (x', y', z') como los vectores de la base asociada a Q son funciones del tiempo. La derivada la ecuación $\mathbf{r} = \mathbf{r}_Q + \mathbf{r}'$ respecto del tiempo queda

$$\mathbf{v} = \left(\frac{dx'}{dt}\mathbf{e}_1 + \frac{dy'}{dt}\mathbf{e}_2 + \frac{dz'}{dt}\mathbf{e}_3\right) + \left(x'\frac{d\mathbf{e}_1}{dt} + y'\frac{d\mathbf{e}_2}{dt} + z'\frac{d\mathbf{e}_3}{dt}\right) \qquad (3\text{-}68)$$

El primer paréntesis del segundo término de la ecuación (3-68) es la velocidad $\mathbf{v}'$ de la partícula en la referencia de origen Q; se demuestra que el segundo paréntesis es

$$x'\frac{d\mathbf{e}_1}{dt} + y'\frac{d\mathbf{e}_2}{dt} + z'\frac{d\mathbf{e}_3}{dt} = \varpi \wedge \mathbf{r}' \qquad (3\text{-}69)$$

donde ω es un vector libre que mide la tasa de cambio de orientación con el tiempo de la base de la referencia de origen Q con respecto a la referencia fija, al cual se le denomina *velocidad angular de rotación*. Sustituyendo (3-69) en la ecuación (3-68) se obtiene que, la relación entre las velocidades de la partícula en referencias en rotación con origen fijo es

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \omega \wedge \mathbf{r}' \qquad (3\text{-}70)$$

La ecuación (3-69) expresa una propiedad general de la derivación respecto del tiempo de un vector cualquiera de la referencia móvil, en el sentido de que la derivada de dicho vector incluye el término aditivo $\omega \wedge$ (por el vector). El vector ω se considera como un vector de la referencia fija.

3.9.3 Aceleración de Coriolis

Derivando (3-70) respecto del tiempo, se obtiene la ecuación que relaciona las aceleraciones en ambas referencias. Al efectuar las derivadas de $\mathbf{v}'$ y de $\mathbf{r}'$ hay que añadir los correspondientes términos debidos a la rotación obteniéndose para las aceleraciones la siguiente ecuación

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \alpha \wedge \mathbf{r}' + \omega \wedge (\omega \wedge \mathbf{r}') + 2\,\omega \wedge \mathbf{v}' \qquad (3\text{-}71)$$

donde α es la derivada de ω respecto del tiempo, denominada *aceleración angular*. El último sumando del segundo término de la ecuación (3-71) es un término complementario de aceleración, debido a la rotación de la referencia móvil respecto de la fija, que se denomina *aceleración de Coriolis*, la cual está presente siempre que la velocidad $\mathbf{v}'$ de la partícula no sea, ni nula ni paralela a la velocidad angular de rotación ω.

3.9.4 Movimiento general

Cuando la referencia móvil, además del movimiento de rotación respecto de la referencia fija, su origen Q tiene una velocidad $\mathbf{v}_Q$ respecto de O, el movimiento de la referencia móvil es a la vez de traslación y rotación. En los segundos términos de las ecuaciones (3-69) y (3-70) hay que añadir la velocidad $\mathbf{v}_Q$ y la aceleración $\mathbf{a}_Q$ respectivamente. Si $\mathbf{v}'$ es la velocidad en la referencia móvil, la expresión general para la velocidad $\mathbf{v}$ de una partícula en una referencia fija está dada por

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + (\mathbf{v}_Q + \omega \wedge \mathbf{r}') \tag{3-72}$$

donde el paréntesis es el término de velocidad que se añade debido al movimiento de la referencia móvil respecto de la fija que se denominada *velocidad de arrastre* $\mathbf{v}_{ar}$. De una manera análoga, para la aceleración se tiene

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + [\,\mathbf{a}_Q + \alpha \wedge \mathbf{r}' + \varpi \wedge (\varpi \wedge \mathbf{r}')\,] + 2\,\omega \wedge \mathbf{v}' \tag{3-73}$$

La velocidad $\mathbf{v}$ y la aceleración $\mathbf{a}$ de la partícula en la referencia fija se denominan *velocidad y aceleración absolutas,* y la velocidad $\mathbf{v}'$ y la aceleración $\mathbf{a}'$ de la partícula en la referencia móvil se denominan *velocidad y aceleración relativas*. Los tres sumandos entre paréntesis son el término de aceleración debido al movimiento de la referencia móvil respecto de la fija que se denominada *aceleración de arrastre* $\mathbf{a}_{ar}$, y el término de aceleración de Coriolis se le designa como $\mathbf{a}_C$. Con esta nomenclatura las ecuaciones (3-72) y (3-73) se escriben, para la velocidad

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_{ar} \tag{3-74}$$

y para la aceleración

$$\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_{ar} + \mathbf{a}_C \tag{3-75}$$

Si la partícula se encuentra en reposo en la referencia móvil su velocidad y aceleración relativas son nulas, $\mathbf{v}_r = \mathbf{a}_r = 0$, y la aceleración absoluta es únicamente el término correspondiente a la aceleración de arrastre

$$\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_Q + \alpha \wedge \mathbf{r}' + \omega \wedge (\omega \wedge \mathbf{r}') \qquad (3\text{-}76)$$

3.9.5 Movimiento de la partícula en la superficie terrestre

A efectos prácticos, la Tierra es una esfera de radio R = 6370 km, que es el valor medio del radio terrestre. De los diferentes movimientos de la tierra, el que tiene una influencia notable sobre los cuerpos que se desplazan en su superficie, es el *movimiento de rotación*. La tierra gira alrededor de un eje que pasa por su centro en la dirección norte-sur, siendo el sentido de movimiento hacia el este. Prescindiendo de su movimiento alrededor del sol, la Tierra se puede considerar como un cuerpo en rotación fijo en el espacio. La velocidad angular ω, es un vector situado sobre el eje de rotación de la tierra dirigido hacia el norte, cuyo módulo ω es aproximadamente igual a $\omega = 2\pi$ / 86400 rad s^{-1}, siendo 86400 segundos la duración del día oficial. Así pues, una referencia asociada a elementos de la superficie terrestre, estará animada de una movimiento de rotación uniforme respecto de una referencia fija en el espacio.

El designar como fija o móvil una u otra de las referencias asociadas a los sistemas de coordenadas rectangulares con origen en los puntos O y Q es arbitrario. Ahora, tomaremos el origen Q del sistema de coordenadas fijo en el centro de la tierra con el vector $\mathbf{e}_3$ de la base sobre el eje de rotación de la tierra y los vectores $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ en el plano ecuatorial. En un punto de la superficie terrestre de latitud λ, tomaremos el origen O del sistema de coordenadas móvil con la base **i**, **j**, **k** orientada, con el eje x en el sentido del *paralelo* del lugar, el eje y en el sentido del *meridiano* del lugar y el eje z en sentido *radial* tal como se muestra en la figura 3-32. Ahora las magnitudes cinemáticas de interés son las referidas a la superficie terrestre, luego para simplificar la escritura se asigna la notación prima a las magnitudes absolutas y sin prima a las relativas.

Consideremos el movimiento de un partícula cuando esta se desplaza con una velocidad **v** respecto de la superficie terrestre. La aceleración absoluta de la partícula situada en un entorno próximo a la superficie terrestre es la de la gravedad **g**, donde **g** un vector dirigido hacia el centro de la tierra cuyo módulo g es aproximadamente igual a 9,8 ms^{-2}.

El origen O de la referencia móvil tiene un movimiento circular uniforme de velocidad absoluta $\mathbf{v}_o{}' = \omega \wedge \mathbf{R}$ y una aceleración absoluta $\mathbf{a}'_o = \omega \wedge (\omega \wedge R) = \omega^2 R \cos\lambda\, \mathbf{n}$. De la ecuación (3-73) se tiene que la aceleración de la partícula en la referencia de origen O está dada por

$$\mathbf{a} = \mathbf{g} - \mathbf{a}'_o - \omega \wedge (\omega \wedge \mathbf{r}) - 2\, \omega \wedge \mathbf{v} \qquad (3\text{-}77)$$

El término de aceleración $-\mathbf{a}'_o$, se denomina *aceleración centrífuga* ya que está dirigida perpendicularmente al eje de rotación de la Tierra y sentido hacia afuera

$$\mathbf{a}_{ce} = -\omega^2 R \cos\lambda \ \mathbf{n} \tag{3-78}$$

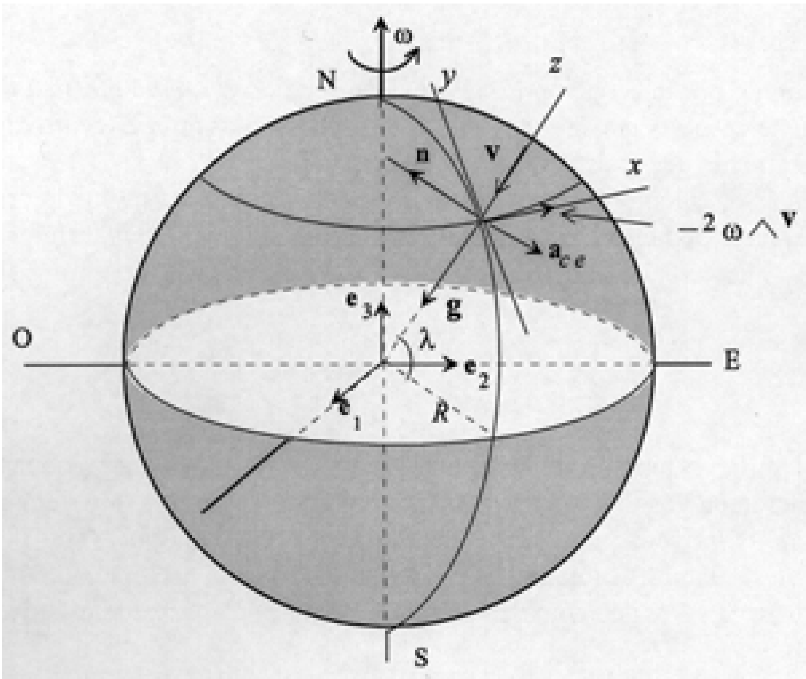


Fig. 3-32

donde **n** es el vector normal unitario dirigido hacia el centro de la circunferencia que describe el punto *O*. El movimiento de la partícula tiene lugar en un entorno próximo a la superficie terrestre y el vector posición de la partícula **r** es tal que su módulos mucho menor que el radio terrestre R ($r << R$), luego el término de aceleración $-\omega \wedge (\omega \wedge \mathbf{r})$, cuya magnitud es proporcional a $\omega^2 r$, en cualquier caso es despreciable frente a la aceleración de centrífuga $\varpi^2 R \cos\lambda$. Prescindiendo de este término de aceleración, la ecuación (3-77) queda

$$\mathbf{a} = \mathbf{g} + \mathbf{a}_{ce} - 2\,\omega \wedge \mathbf{v} \tag{3-79}$$

La aceleración absoluta **g** de la partícula en componentes es $\mathbf{g} = -g\,\mathbf{k}$ y la aceleración centrífuga expresada en componentes **i**, **j**, **k** está dada por

$$\mathbf{a}_{ce} = -\mathbf{a}'_o = -\varpi^2 R \cos\lambda\, (\operatorname{sen}\lambda\ \mathbf{j} - \cos\lambda\ \mathbf{k} \qquad (3\text{-}80)$$

La suma de los dos primeros términos de la ecuación (3-79) en componentes es

$$\mathbf{g} + \mathbf{a}_{ce} = -\varpi^2 R \cos\lambda \operatorname{sen}\lambda\ \mathbf{j} - (g - \varpi^2 R \cos^2\lambda)\ \mathbf{k} \qquad (3\text{-}81)$$

El vector definido por la ecuación (3-81) se denomina *aceleración efectiva de la gravedad* en la superficie terrestre $\mathbf{g}_{ef} = \mathbf{g} + \mathbf{a}_{ce}$, cuya dirección no pasa por el centro de la Tierra, es decir, está ligeramente desviada respecto de la dirección radial.

Para simplificar el cálculo de la trayectorias de las partículas, se puede prescindir en la ecuación (3-81) de la pequeña componente **j** de la aceleración efectiva dirigida hacia el sur, quedando para la aceleración efectiva

$$\mathbf{g}_{ef} = -(g - \omega^2 R \cos^2\lambda)\ \mathbf{k} \qquad (3\text{-}82)$$

Su magnitud varía en función de la latitud, pero su valor medio es prácticamente igual al valor de la aceleración absoluta, por lo que para la gran mayoría de problemas de mecánica la aceleración de la gravedad en la superficie terrestre está dada por $\mathbf{g} = -g\ \mathbf{k}$. En conclusión, con todas estas simplificaciones, la ecuación (3-79) de la aceleración de la partícula en la referencia de origen O vinculada a un punto de la superficie terrestre está dada por

$$\mathbf{a} = \mathbf{g} - 2\,\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v} \qquad (3\text{-}83)$$

Para el caso en que la velocidad **v** de la partícula sea la correspondiente a la caída libre de un cuerpo, $\mathbf{v} = -v\ \mathbf{k}$, la componente de aceleración de Coriolis está dirigida hacia el este, siendo $-2\,\omega \wedge \mathbf{v} = 2\,\omega\, v \cos\lambda\ \mathbf{i}$. Debido a está aceleración, el movimiento del cuerpo no es exactamente vertical sino que describe una curva contenida en el plano x-z (ver problema 3-31) en el cual se determina la desviación producida por dicha aceleración.

PROBLEMA 3-28

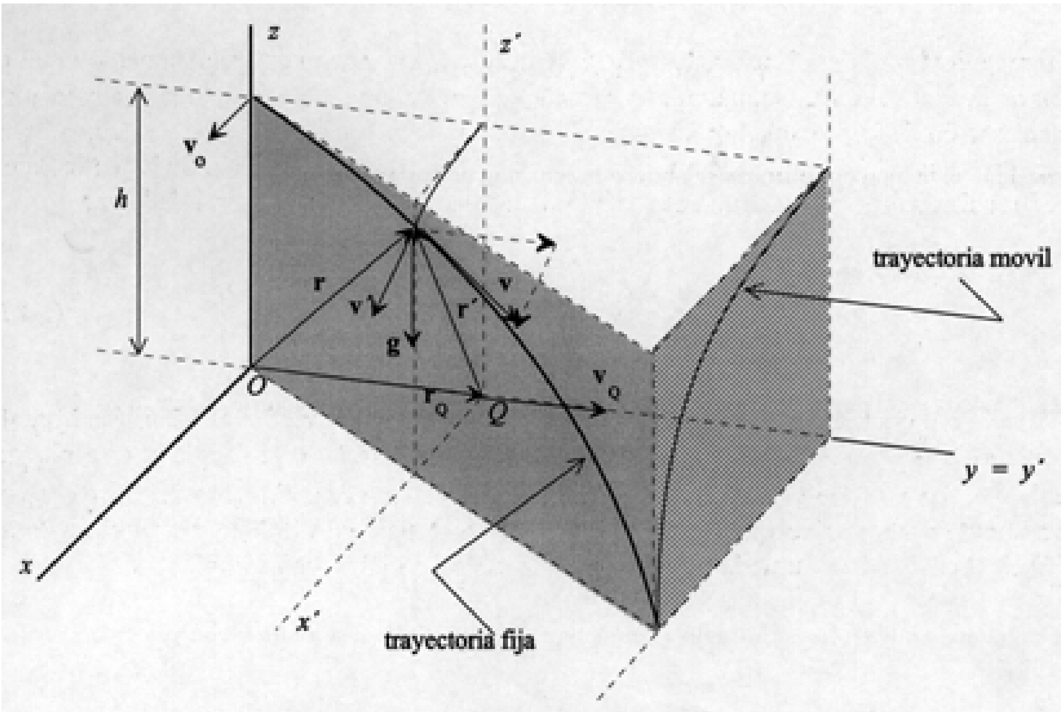
Desde un tren que se mueve sobre una vía recta y horizontal a 72 km/h se lanza un objeto en dirección perpendicular a la vía y paralelo al suelo con una velocidad de $v_o = 15$ m/s. Determinar:

a) su trayectoria vista desde el tren y vista desde el suelo

b) el punto de impacto con el suelo si se ha lanzado desde una altura de 4 m. No tener en cuenta la resistencia del aire.

SOLUCIÓN

a) Para determinar la trayectoria respecto de tierra tomaremos una referencia tal como la indicada en la figura adjunta, es decir, con uno de sus ejes coincidente con la dirección de la velocidad del tren. Los ejes de la referencia móvil asociada al tren se toman paralelos a los de la referencia fija. Los orígenes de ambas referencias se hacen coincidir en el instante $t = 0$.
La referencia móvil (el tren), tiene un movimiento uniforme respecto de la fija, luego ambas referencias miden la misma aceleración que es la de la gravedad **g**. El movimiento del cuerpo respecto del tren es un movimiento parabólico contenido en el plano x'- z'. Las coordenadas del punto según el eje X y el eje Z coinciden en ambos sistemas $x = x'$, $z = z'$.



Bajo la acción de la gravedad $(- g\,\mathbf{k})$ el cuerpo adquiere una componente de velocidad según el eje

z' cuyo valor en función de la posición es

$$v_3 = -\sqrt{2g(h-z)}$$

La velocidad en la referencia móvil $\mathbf{v}'$es la velocidad relativa

$$\mathbf{v}_r = v_o\,\mathbf{i} - \sqrt{2g(h-z)}\;\mathbf{k}$$

Las componentes de la velocidad son las derivadas respecto del tiempo de las componentes del vector posición $\mathbf{r}'$. Identificando queda

$$\frac{dx}{dt} = v_o \qquad\qquad \frac{dz}{dt} = -\sqrt{2g(h-z)}$$

Integrando se tiene las ecuaciones de la trayectoria

$$x = v_o\,t \qquad\qquad z = h - \frac{1}{2}g\,t^2$$

Eliminando el tiempo entre ambas se obtiene la ecuación de la trayectoria

$$z = h - \left(\frac{1}{2}\frac{g}{v_o^2}\right)\;x^2$$

La coordenada x del punto de impacto sobre el suelo se obtiene de la trayectoria haciendo $z = 0$

$$x = v_o\sqrt{\frac{2h}{g}} = 13{,}55\ \text{m}$$

El tiempo que tarda en llegar al suelo es el tiempo de caída desde una altura h con velocidad vertical nula

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 0{,}90\ \text{s}$$

Trayectoria en la referencia fija

La velocidad en la referencia fija **v** es la suma de la velocidad del tren $\mathbf{v}_Q$, velocidad de arrastre, más la velocidad relativa $\mathbf{v} = \mathbf{v}_Q + \mathbf{v}_r$. Integrando las componentes de la velocidad absoluta se tiene las ecuaciones del movimiento

$$x = v_o\, t \qquad y = v_Q\, t \qquad z = h - \frac{1}{2} g\, t^2$$

y eliminando el tiempo entre ellas, la trayectoria, curva definida por la intersección del paraboloide

$$z = h - \left(\frac{1}{2}\frac{g}{v^2}\right)\; x^2$$

con el plano $$v_Q\, x - v_o\, y = 0$$

La coordenada y del punto de impacto es

$$y = v_Q\, t = v_Q \sqrt{\frac{2h}{g}} = 18{,}07 \text{ m}$$

PROBLEMA 3-29

Durante una tormenta, la trayectoria de las gotas de agua observadas desde la ventana de una tren cuya velocidad es de 15 km/h, forman an ángulo de 30° con la vertical. Cuando la velocidad del tren ha aumentado hasta 30 km/h el ángulo de las gotas con la vertical es de 45°. Si el tren se parase ¿ cual sería el ángulo de la trayectoria de las gotas de agua respecto del suelo ? Determinar la velocidad con que caen las gotas de agua.

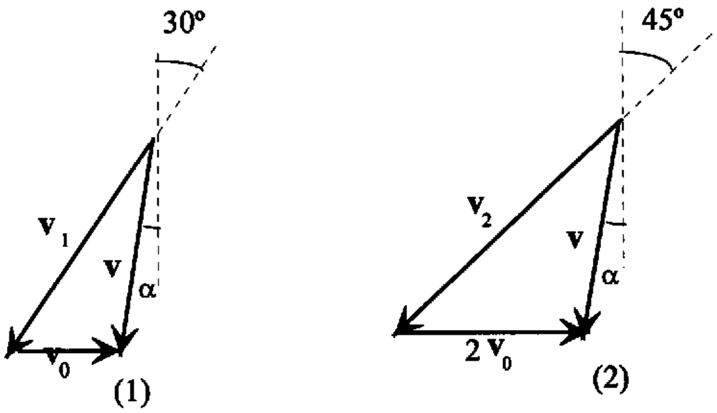
SOLUCIÓN

Sea $\mathbf{v}$ la velocidad de la lluvia respecto del suelo, que es su velocidad absoluta. La referencia ligada al tren es la móvil, que en el primer caso tiene una velocidad de traslación $\mathbf{v}_o$ = 15 km/h y en el segundo caso, una velocidad de traslación de 30 km/h, es decir que 2 $\mathbf{v}_o$. Estas son las velocidades del origen de la referencia móvil respecto de la fija. De la ecuación (3-63) se tiene

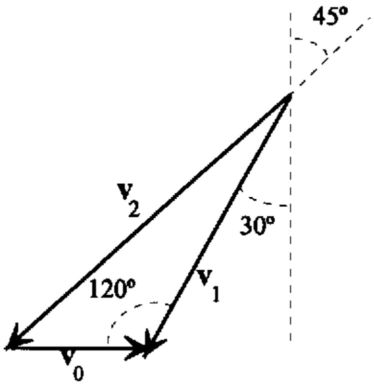
$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_o + \mathbf{v}_1 \qquad (1)$$

$$\mathbf{v} = 2\,\mathbf{v}_o + \mathbf{v}_2 \qquad (2)$$

donde $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son las velocidades relativas en cada uno de los casos. Sea α ángulo que forma la velocidad $\mathbf{v}$ de la lluvia con la vertical. En la figura adjunta se representan las ecuaciones (1) y (2).



Igualando las ecuaciones (1) y (2) se tiene $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_o + \mathbf{v}_2$, de cuya representación gráfica



De la ley del seno se tiene $$\frac{v_o}{\operatorname{sen}15} = \frac{v_1}{\operatorname{sen}45} = \frac{v_2}{\operatorname{sen}120}$$

Operando se obtiene los valores de las velocidades relativas $v_1 = 41$ km/h y $v_2 = 50$ km/h

De la ecuación (1) en componentes se tiene, para el ángulo α

$$\tan\alpha = \frac{v_1 \operatorname{sen}30 - v_o}{v_1 \cos 30} = 0.155 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 8,8^\circ$$ La lluvia forma con el suelo un ángulo de 81,2°

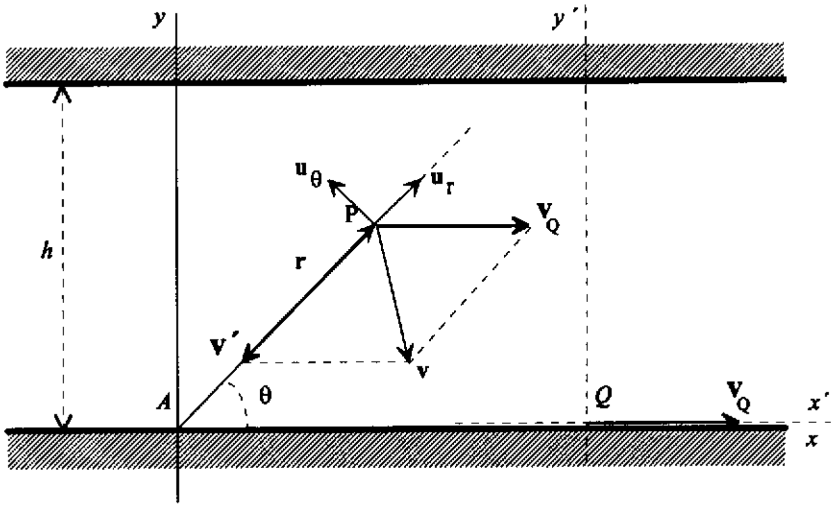
y para la velocidad $$v = \frac{v_1 \cos 30}{\cos\alpha} = 35,8 \text{ km/h} = 9,9 \text{ m/s}$$

PROBLEMA 3-30

El agua de un canal de anchura h se mueve con velocidad constante paralela a las orillas. Una lancha atraviesa el canal con una velocidad respecto del agua tal que su dirección pasa constantemente por un punto fijo A de la orilla opuesta situado perpendicularmente al punto de salida B. La lancha tiene una velocidad constante (módulo) cuyo valor es el doble que la velocidad del agua del canal Determinar la trayectoria de la barca respecto de tierra.

SOLUCIÓN

El origen de la referencia fija O lo tomaremos en el punto A de la otra orilla del canal, en frente del punto B de salida. La velocidad de la lancha v_0 es la velocidad relativa que apunta constantemente hacia A. Un punto Q de la superficie del agua, tal como se muestra en la figura adjunta, será el origen de la referencia móvil cuya velocidad $\mathbf{v}_Q$ es la velocidad del agua del canal.



La velocidad absoluta es la suma de la relativa más la de arrastre $\mathbf{v} = \mathbf{v}_Q + \mathbf{v}'$, en donde el módulo de $\mathbf{v}'$ es v_0. De la figura se deduce que en componentes rectangulares la velocidad absoluta es

$$\mathbf{v} = (v_Q - v_0 \cos\theta)\mathbf{i} - v_0 \operatorname{sen}\theta\, \mathbf{j}$$

La posición instantánea del punto P (x, y) está dada por el extremo del vector $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$. El seno y el coseno de θ en función de las coordenadas del punto P están dados por las siguientes expresiones

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

valores que dificultan el cálculo de la trayectoria en coordenadas rectangulares. Resultan conveniente determinar la trayectoria en coordenadas polares. La derivada del vector posición $\mathbf{r} = r\,\mathbf{u}_r$ es la velocidad absoluta

$$\mathbf{v} = \frac{dr}{dt}\mathbf{u}_\lambda + r\frac{d\theta}{dt}\mathbf{u}_\theta$$

Igualando componentes con la expresión de $\mathbf{v} = \mathbf{v}_Q + \mathbf{v}'$ en la base polar

$$\mathbf{v} = (v_Q \cos\theta - v_0)\mathbf{u}_r + (-v_Q \operatorname{sen}\theta)\mathbf{u}_\theta$$

se tiene

$$\frac{dr}{dt} = v_Q \cos\theta - v_0 \qquad\qquad r\frac{dr}{dt} = -v_Q \operatorname{sen}\theta$$

De ambos, dividiendo miembro a miembro y multiplicando por $d\,\theta$, queda

$$\frac{dr}{r} = \left(-\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} + \frac{2}{\operatorname{sen}\theta}\right)d\theta$$

ecuación diferencial de variables separadas, de la cual se obtiene directamente la trayectoria en coordenadas polares

$$r(\theta) = \frac{h}{\operatorname{sen}\theta}\left(\operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta\right)$$

Cambiando las coordenadas polares a coordenadas rectangulares $x = r\cos\theta$ y $y = r\operatorname{sen}\theta$ se obtiene la ecuación de la trayectoria

$$y^2 = h^2 - 2hx$$

Nota: $\int \frac{d\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}\right)$

PROBLEMA 3-31

Determinar la desviación respecto del pie de la perpendicular que experimenta un cuerpo que se deja caer desde una altura h sobre el nivel del suelo en un punto de la superficie terrestre de latitud λ.

SOLUCIÓN

Consideremos un sistema de referencia con el origen en el punto O de la superficie terrestre que coincida con el pie de la perpendicular trazada desde la altura h hasta el suelo, el eje x dirigido según el paralelo del lugar hacia el este y el eje y dirigido según el meridiano hacia el norte del lugar. Está referencia tiene un movimiento de rotación respecto de la referencia fija con origen en el centro de la Tierra. Para valores de h pequeños comparados con el radio de la Tierra, la aceleración de un cuerpo que se mueve con velocidad **v** respecto de la superficie terrestre está dada por la ecuación (3-83)

$$\mathbf{a} = \mathbf{g} - 2\,\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}$$

y su expresión en componentes es

$$\mathbf{a} = 2\varpi v \cos\lambda\,\mathbf{i} - g\,\mathbf{k}$$

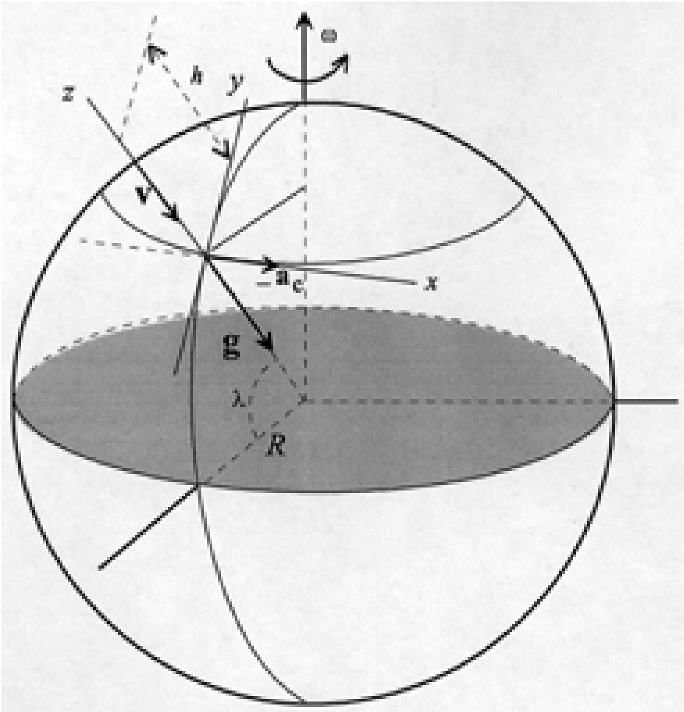
La aceleración no tiene componente según el eje y, es decir $dv_2 / dy = 0$, luego la componente v_2 de la velocidad es constante; pero al ser nula la velocidad inicial, también lo es en cualquier instante, de donde $v_2 = dy / dt = 0$. Las coordenadas del punto inicial son $(0, 0, h)$, luego $y = 0$ y en consecuencia , el movimiento de la partícula tiene lugar en el plano x - z .

Integrando la componente de la aceleración según el eje z, $a_3 = d\,v_3 / d\,z = -g$ y teniendo en cuenta las condiciones iniciales para la velocidad se obtiene que la componente de velocidad según el eje z es

$$v_3 = \frac{dz}{dt} = -g\,t$$

Integrando de nuevo y aplicando las condiciones iniciales para la posición, se tiene la ecuación del movimiento según el eje z

$$z = h - \frac{1}{2} g\,t^2$$



Nota: $v = \sqrt{v_1^2 + v_3^2} \cong \sqrt{v_3^2} = g t$. Sustituyendo en la expresión de la aceleración queda para la componente a_1

$$a_1 = 2 \varpi g \cos \lambda \; t = \frac{d v_1}{d t}$$

Integrando se obtiene la componente de velocidad según el eje x

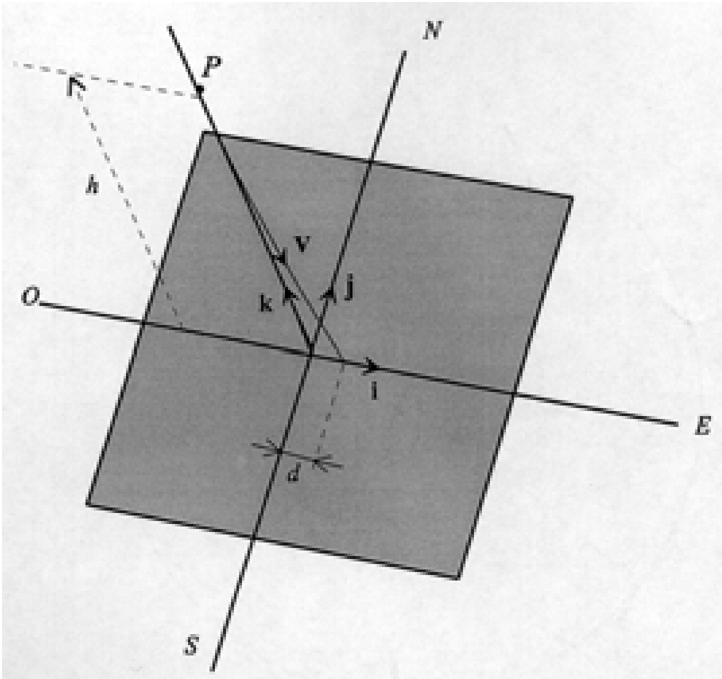
$$v_1 = (\varpi g \cos \lambda) t^2 + cte$$

De las condiciones iniciales para la velocidad se tiene que $cte = 0$. La integración de la componente v_1 de la velocidad proporciona la ecuación del movimiento según el eje x

$$x = \frac{1}{3} (\varpi g \cos \lambda) \, t^3$$

Las ecuaciones del movimiento del movimiento de la partícula son:

$$x = \frac{1}{3} (\varpi g \cos \lambda) \, t^3 \qquad z = h - \frac{1}{2} g \, t^2$$



Eliminando el tiempo entre las ecuaciones entre ellas, se obtiene la ecuación de la trayectoria.

$$z = h - \frac{1}{2}\left(\frac{9g\ x^2}{\varpi^2\ \cos^2\lambda}\right)^{\frac{1}{3}}$$

La desviación d es el valor de x correspondiente a $z = 0$. Haciendo $z = 0$ en la ecuación de la trayectoria y operando se obtiene el desplazamiento hacia el este de la partícula

$$d = \left(\frac{2}{3}\ \varpi h \sqrt{\frac{2h}{g}}\right)\cos\lambda$$

Para los valores numéricos $h = 200$ m , $\lambda = 51{,}1^{\circ}$, g = 9,81 ms^{-2} queda $d = 3{,}8$ cm.