Capítulo 3 Cinemática de la partícula

3.1 Introducción

La Cinemática de la partícula estudia el movimiento de los cuerpos, los cuales se asimilan a puntos geométricos que se desplazan en el espacio euclídeo tridimensional, definiendo las magnitudes físicas fundamentales que determinan sus trayectorias. Para fijar la posición de un punto en el espacio se utilizan básicamente las coordenadas cartesianas definidas en el Capítulo 1, debido a la sencillez de las ecuaciones matemáticas que se utilizan en el estudio teórico del movimiento. No ocurre lo mismo con su utilización sistemática, ya que en una gran mayoría de casos prácticos las coordenadas cartesianas conduce a expresiones matemáticamente complejas, que dificultan o incluso impiden la obtención de la solución. La utilización de otros sistemas de coordenadas, tales como coordenadas polares, coordenadas esféricas, etc, simplifican el estudio del movimiento de la partícula.

El objetivo de la Cinemática de la partícula es la determinación de la curva que describe en el espacio, curva que se denomina *trayectoria*. Conocida la aceleración y fijadas las condiciones iniciales, la Cinemática proporciona el procedimiento para determinar la trayectoria, así como sus características geométricas. Las magnitudes que describen el movimiento, la posición, la velocidad y la aceleración, tienen carácter vectorial. El álgebra de vectores y la integración de ecuaciones diferenciales lineales son, entre otros, los elementos matemáticos comúnmente utilizados en la Cinemática.

El movimiento se manifiesta mediante el cambio de posición de los cuerpos en el espacio respecto de una referencia dada. Esquemáticamente la referencia se representa mediante tres ejes perpendiculares entre sí que se cortan en un punto, origen de la referencia, la cual se considera fija en el espacio y a la que se asocia un sistema de coordenadas para fijar la posición de la partícula. En lo que sigue, se utilizan indistintamente referencia o sistema de coordenadas para especificar el movimiento de la partícula.

3.2 Magnitudes fundamentales del movimiento

Sea P un punto genérico del espacio en el cual se encuentra la partícula en el instante t. En todo lo que sigue, partícula y punto tienen el mismo significado cinemático y serán utilizados ambos términos indistintamente. El punto P, junto con el origen O de la referencia, definen un vector con origen en O y extremo en P, al cual se le designará por $\mathbf{r} \equiv \overrightarrow{OP}$ y se denomina *vector posición* de la partícula. El punto P está en movimiento cuando su posición cambia con el tiempo, entonces el vector posición $\mathbf{r}$ es una función del tiempo t, $\mathbf{r} = \mathbf{r}\,(t)$. A cada instante t le corresponde un valor del vector **r** cuyo punto extremo define la posición de la partícula en dicho instante.

Trayectoria. El lugar geométrico que describe el extremo del vector **r** (t) es una curva en el espacio que se denomina *trayectoria.* Cuando **r** (t) es una función continua del tiempo t, la trayectoria es una curva continua en el espacio, fig. 3-1. A medida que transcurre el tiempo, el extremo del vector posición se desplaza sobre la trayectoria. Sean **r** (t) y **r** ($t + \Delta t$) los valores del vector posición en el instante t y en un instante posterior $t + \Delta t$; el incremento del vector posición al pasar la partícula del punto P al punto Q ,es la diferencia entre ellos y se denomina *desplazamiento.*

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t) \tag{3-1}$$

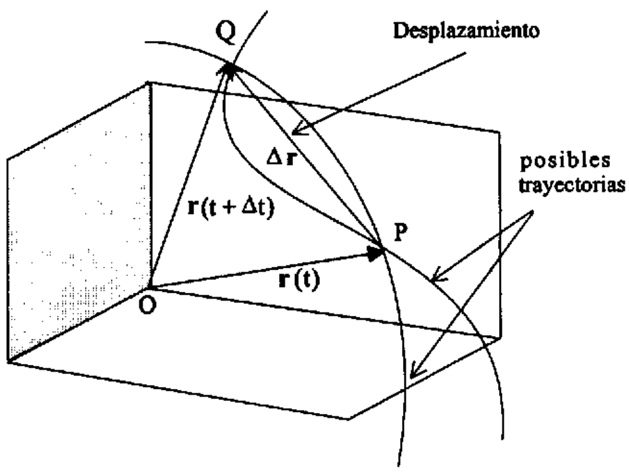


Fig. 3-1

El desplazamiento, en general, no coincide con el recorrido de la partícula sobre la trayectoria. Para un mismo desplazamiento existen infinitas trayectorias que conectan los extremos de los vectores posición que lo definen. En el caso de que la trayectoria sea rectilínea, el desplazamiento (en módulo) y el recorrido son coincidentes.

Velocidad media. Dividiendo ambos términos de la ecuación (3-1) por el incremento de tiempo entre ambas posiciones, se tiene un vector proporcional a $\Delta\mathbf{r}$ que se denomina *velocidad media* de la partícula en dicho intervalo de tiempo. Sus dimensiones son ms^{-1} .

$$\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} \tag{3-2}$$

Velocidad. Consideremos ahora valores de Δt cada vez más pequeños. A medida que sus valores disminuyen también el vector incremento del numerador de la fracción tiene valores cada menores. El límite del cociente cuando Δt tiende a cero, tiende a la derivada del vector posición **r** respecto del tiempo, que se denomina vector velocidad instantánea de la partícula o, de una manera simplificada, *velocidad* de la partícula.

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad \mathrm{ms}^{-1} \tag{3-3}$$

Al tender a cero el incremento del tiempo, el extremo del vector $\Delta\mathbf{r}$ se mueve sobre la trayectoria aproximándose hacia el punto P. En el límite, los extremos del vector $d\mathbf{r}$ son dos puntos infinitamente próximos sobre la curva, puntos que definen la dirección de la tangente a la curva en dicho punto, luego la velocidad **v** es tangente a la curva en el punto P, y su sentido el del movimiento, figura 3-2. Este resultado es aplicable a cualquier punto de la trayectoria y, por tanto, *el vector velocidad tiene la dirección de la tangente a la trayectoria en cada uno de sus puntos.*

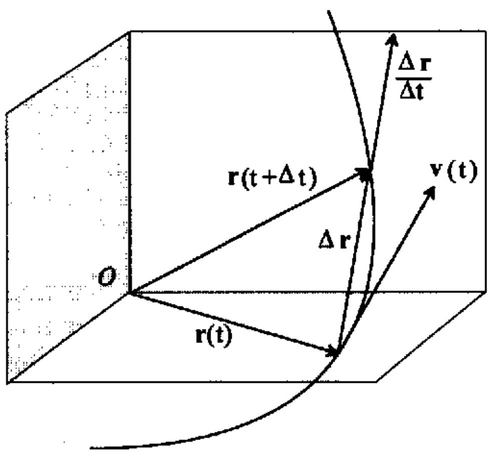


Fig. 3-2

Aceleración. La velocidad mide la tasa de cambio de posición de la partícula con el tiempo y es, por tanto, una magnitud básica del movimiento, pero no permite por sí sola su completa descripción, ya que éste depende de los cambios de la velocidad con el tiempo. La velocidad es una función vectorial continua del tiempo. Representando el vector velocidad con origen en el origen de la referencia, su extremo describe una curva continua en el espacio que se denomina *hodógrafa,* figura 3-3. El incremento de velocidad que experimenta la partícula al pasar de un punto a otro de la trayectoria correspondientes a los instantes t y $t + \Delta t$, es igual a la diferencia de las velocidades en ambos instantes

$$\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}(t+\Delta t) - \mathbf{v}(t) \tag{3-4}$$

Dividiendo por el incremento de tiempo en la ecuación la ecuación (3-4) se obtiene un vector proporcional al incremento de la velocidad que se denomina *aceleración media* de la partícula.

$$\frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{v}(t+\Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t} \tag{3-5}$$

Consideremos ahora incrementos de tiempo cada vez más pequeños, es decir, hacemos que el incremento de tiempo tienda a cero. El vector incremento de velocidad también tiende hacia cero y, en el límite, el cociente incremental tiende a la derivada de la velocidad v respecto del tiempo, vector que se denomina *aceleración* de la partícula en el instante t.

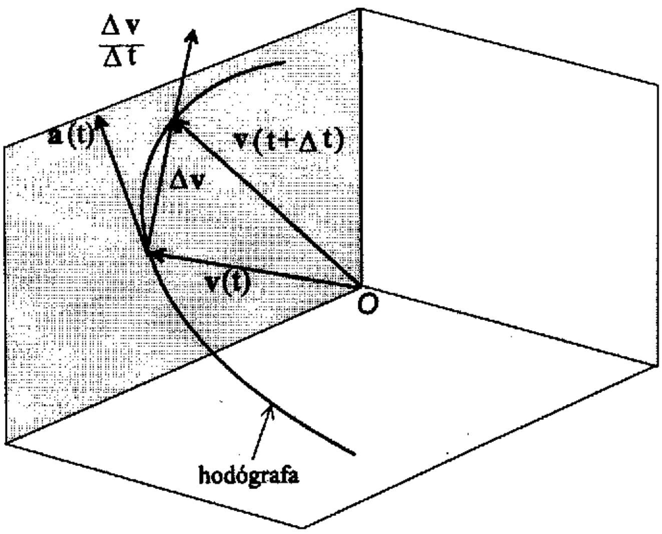


Fig.3-3

La aceleración instantánea de la partícula se define como el límite del cociente incremental dado por la ecuación (3-5) cuando el incremento de tiempo tiende a cero.

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} \quad \mathrm{ms}^{-2} \tag{3-6}$$

El vector aceleración **a** mide, la tasa de cambio de la velocidad con el tiempo, es tangente a la hodógrafa en cada uno de sus puntos y su dirección es totalmente arbitraria respecto de la trayectoria. La *aceleración es la magnitud cinemática que caracteriza el movimiento de la partícula en el espacio.* Conocida la aceleración y fijadas las condiciones iniciales el movimiento de la partícula queda completamente determinado.

Elección de la referencia. Consideremos ahora la influencia que tiene la elección de una referencia determinada sobre los valores de la velocidad **v** y la aceleración **a** de una partícula en movimiento. Veamos que la velocidad y la aceleración son las mismas en cualquier referencia fija que se utilice para describir el movimiento. En efecto, sea O el origen de una referencia fija y Q otro punto fijo cualquiera del espacio, figura 3-4.

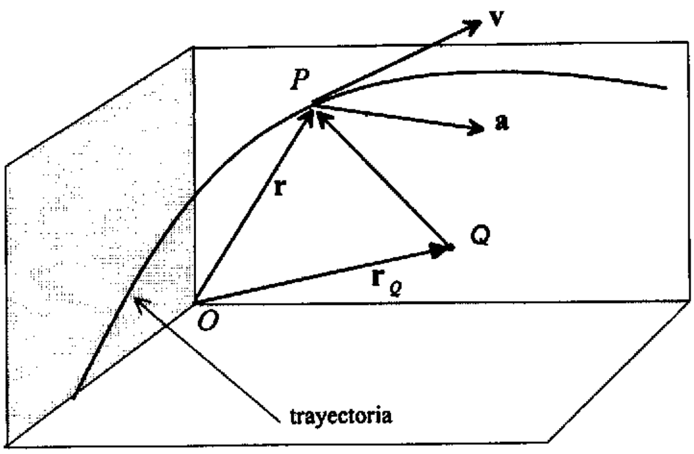


Fig. 3-4

La posición del punto P respecto del punto fijo Q, definida por el vector $\mathbf{r}_Q$ está relacionada con la posición **r** respecto del punto O mediante la ecuación

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{OP} + \mathbf{r}_Q$$

donde el vector $\overrightarrow{OQ}$ es fijo, es decir, no depende del tiempo. Derivando respecto del tiempo se tiene la relación de velocidades $\mathbf{v} = \mathbf{v}_Q$ y derivando de nuevo respecto del tiempo se tiene la relación de aceleraciones $\mathbf{a} = \mathbf{a}_Q$. En consecuencia, *el movimiento de una partícula es el mismo respecto de cualquier referencia fija del espacio.* Este resultado permite elegir la referencia más conveniente para el estudio del movimiento en cada caso concreto.

3.3 Caracterización geométrica de la trayectoria

En función de las características geométricas de la trayectoria, el movimiento de una partícula se pueden clasificar en: *movimiento rectilíneo, movimiento curvilíneo plano o bidimensional, y movimiento curvilíneo en el espacio o movimiento tridimensional.*

Movimiento rectilíneo. El movimiento de una partícula es *rectilíneo* cuando su trayectoria es una recta. El extremo del vector posición coincide en cada instante de tiempo t con un punto de la recta. Si $\mathbf{u}$ es el vector director de la recta, el vector $\Delta\mathbf{r}$ es proporcional a $\mathbf{u}$ siendo el coeficiente de proporcionalidad una cierta función del tiempo, figura 3-5.

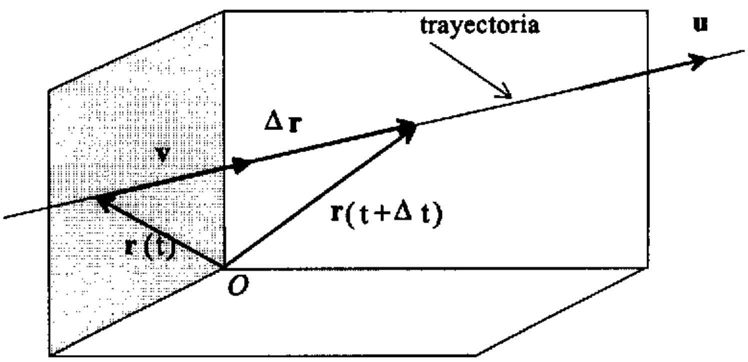


Fig.3-5

Por tanto, la velocidad $\mathbf{v}$ y su incremento $\Delta\mathbf{v}$ tiene dirección $\mathbf{u}$, lo que implica que la aceleración $\mathbf{a}$, que es un vector proporcional a $\Delta\mathbf{v}$, también tiene la dirección $\mathbf{u}$. Así pues, en el movimiento rectilíneo la velocidad y la aceleración son vectores paralelos, luego su producto vectorial es cero, $\mathbf{v} \wedge \mathbf{a} = 0$. Dicha condición caracteriza genéricamente el movimiento rectilíneo de una partícula. En el caso más común, en que la trayectoria coincide con uno de los ejes de coordenadas; el vector posición $\mathbf{r}$, la velocidad $\mathbf{v}$ y la aceleración $\mathbf{a}$ tienen todos ellos dirección constante.

Movimiento curvilíneo plano. El movimiento de una partícula es *curvilíneo plano* cuando su trayectoria es una curva plana figura 3-6, es decir, está con tenida en un plano, denominado el *plano del movimiento*. El extremo del vector posición **r** está constantemente sobre el plano del movimiento, luego su incremento, $\Delta\mathbf{r}$, es un vector contenido en el plano de la trayectoria. Si **u** es el vector director del plano, al ser perpendicular a $\Delta\mathbf{r}$, se cumple que el producto escalar $\mathbf{u} \cdot \Delta\,\mathbf{r} = 0$. Dividiendo por incremento de t y pasando al límite cuando el incremento del tiempo tiende a cero se tiene $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, es decir, la velocidad es un vector contenido en el plano.

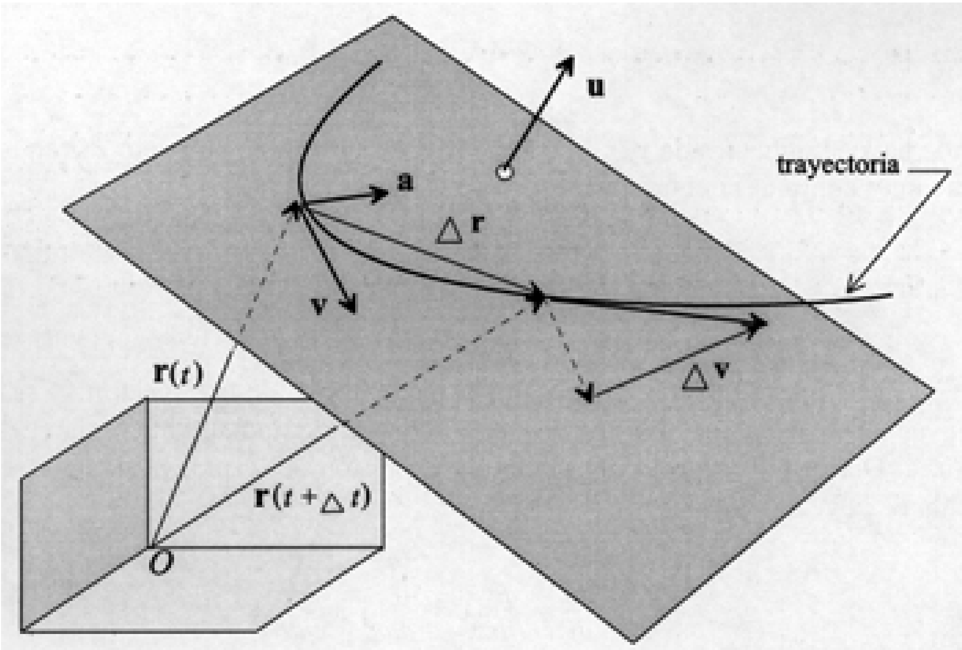


Fig. 3-6

Análogamente, si la velocidad está contenida en el plano del movimiento, su incremento entre dos instantes de tiempo también pertenece al plano, luego se cumple que $\mathbf{u} \cdot \Delta\,\mathbf{v} = 0$, de donde, por un razonamiento análogo al de la velocidad, se deduce que la aceleración **a** es coplanaria con **v**. Así pues, en el movimiento plano los vectores velocidad y aceleración están contenidos en el plano del movimiento, y por tanto, su producto vectorial ha de ser un vector de *dirección* constante. La condición $\mathbf{v} \wedge \mathbf{a} = f(t)\,\mathbf{u}$, siendo **u** un vector unitario, es la condición necesaria y suficiente para que la trayectoria de la partícula sea una curva plana. En el caso más común, el plano que contiene a la trayectoria coincide con uno de los planos de la referencia.

Movimiento curvilíneo en el espacio. El movimiento de una partícula es tridimensional cuando su trayectoria es una curva alabeada. Se denominan curvas alabeadas aquellas que no están contenidas en un plano. La velocidad **v** y la aceleración **a** son vectores con direcciones arbitrarias y por tanto, su producto vectorial $\mathbf{v} \wedge \mathbf{a}$ es un vector cuyo módulo y dirección varían con el tiempo. La hélice es un ejemplo de trayectoria alabeada.

3. 4. Ecuaciones del movimiento

El vector posición **r** se puede expresar en función de los vectores de la base de las coordenadas cartesianas **i**, **j**, **k** como

$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k} \tag{3-7}$$

en donde las componentes de **r**, *x, y, z* son las coordenadas de su punto extremo, las cuales son funciones continuas del tiempo.

$$x = x\,(t) \qquad y = y\,(t) \qquad z = z\,(t) \tag{3-8}$$

Las tres ecuaciones (3.8) son las ecuaciones paramétricas de la trayectoria y se denominan *ecuaciones del movimiento*. Eliminando entre ellas el tiempo se obtiene la ecuación de la trayectoria. Derivando respecto del tiempo la expresión del vector posición **r** se obtiene la expresión de la velocidad

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\,\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\,\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\,\mathbf{k} \tag{3-9}$$

Las componentes del vector **v** se denominan las *componentes rectangulares de la velocidad.*

$$v_1 = \frac{dx}{dt} \qquad v_2 = \frac{dy}{dt} \qquad v_3 = \frac{dz}{dt}$$

Derivando la expresión (2.9) de la velocidad **v** respecto del tiempo se obtiene la expresión de la aceleración en componentes

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}\,\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\,\mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\,\mathbf{k} \tag{3-10}$$

Las componentes del vector **a** se denominan las *componentes rectangulares de la aceleración.*

$$a_1 = \frac{d^2x}{dt^2} \qquad a_2 = \frac{d^2y}{dt^2} \qquad a_3 = \frac{d^2z}{dt^2}$$

Las componentes de la aceleración se pueden obtener también como las derivadas primeras de las componentes de la velocidad

$$a_1 = \frac{dv_1}{dt} \qquad a_2 = \frac{dv_2}{dt} \qquad a_3 = \frac{dv_3}{dt} \tag{3-11}$$

El problema genérico de la Cinemática de la partícula se puede formular de la siguiente forma: ***conocidas las componentes de la aceleración y las condiciones iniciales, determinar las ecuaciones del movimiento.*** El proceso de cálculo implica la realización de dos integraciones: la primera proporciona las componentes de la velocidad y la segunda las ecuaciones del movimiento. Cada integral genera una constante de integración, por lo que en las ecuaciones del movimiento aparecen dos constantes de integración que se determinan con las condiciones iniciales, es decir, las coordenadas del punto posición y las componentes de la velocidad en el instante inicial $t = 0$. Estos valores son, en general, datos del problema. Si lo que se conoce son las ecuaciones del movimiento, sus derivadas primera y segunda proporcionan directamente las componentes de la velocidad y de la aceleración.

3.5 Movimiento rectilíneo

El movimiento de una partícula es rectilíneo cuando ésta se desplaza a lo largo de una línea recta. En este caso, en que la trayectoria es conocida, el problema a resolver se reduce a: dada la aceleración (o la velocidad) y las condiciones iniciales, determinar la ecuación del movimiento, es decir, determinar su posición instantánea. El origen O de la referencia lo tomaremos en un punto cualquiera de la trayectoria y uno de sus ejes (por ejemplo el eje x) coincidente con ella.

3.5.1 Clases del movimiento rectilíneo

Para los movimientos rectilineos, el vector posición de la partícula sólo tiene componente según el eje x dada por $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i}$, y en consecuencia, la velocidad y la aceleración satisfacen también la misma condición, $\mathbf{v} = v_1\,\mathbf{i}$, $\mathbf{a} = a_1\,\mathbf{i}$. Para simplificar la escritura llamaremos $a_1 \equiv a$ y $v_1 \equiv v$. A estos valores de las componentes se les denomina, aceleración y velocidad de la partícula respectivamente, teniendo en cuenta que sus valores no corresponden a los módulos de los vectores, ya que a y v pueden tener valores negativos.

El movimiento rectilineo se caracteriza por el valor de la aceleración, según que ésta corresponda a uno de los siguientes cuatro casos:

a) aceleración constante

b) aceleración función del tiempo t

c) aceleración función de la posición x

d) aceleración función de la velocidad v

Supuesto conocido el valor de la aceleración, veamos como se determina la ecuación del movimiento $x(t)$ en cada uno de los casos.

3.5.2 Aceleración constante

El movimiento rectilíneo con aceleración constante se denomina *movimiento uniforme o movimiento uniformemente acelerado* según que su aceleración sea cero o distinta de cero respectivamente.

Movimiento uniforme. En este movimiento la aceleración es cero, luego de la expresión genérica de la aceleración se tiene

$$a = \frac{dv}{dt} = 0 \tag{3-12}$$

Si la derivada de la velocidad respecto del tiempo es cero, la velocidad su valor es constante, al cual llamaremos v_o que sustituido en la expresión de la velocidad queda $dx/dt = v_o$; pasando dt a multiplicar al segundo término e integrando se obtiene la expresión de la ecuación del movimiento $x = v_o t + C$, determinada salvo la constante de integración C. Si en el instante inicial $t = 0$ la partícula se encuentra en el punto de coordenada x_o, de la ecuación del movimiento se deduce que el valor de la constante es $C = x_o$. Sustituyendo la C por su valor, se tiene

$$x = v_o t + x_o \tag{3-13}$$

En el movimiento rectilíneo uniforme, la posición es una función lineal del tiempo. Las gráficas de las figuras 3-7 y 3-8 representan la posición y la velocidad en función del tiempo. La ecuación del movimiento se puede determinar gráficamente a partir de la gráfica de la velocidad y de la posición inicial. En efecto, el área del rectángulo rayado de la figura 3-8 es $v_o t$, que coincide numéricamente con el recorrido de la partícula entre la posición inicial x_o y la posición instantánea x, expresando el área y el recorrido en las mismas unidades. Este mismo resultado se obtiene analíticamente efectuando la integración definida de la ecuación diferencial $dx = v_o dt$ entre x_o y x, posiciones de la partícula correspondientes a los instantes 0 y t respectivamente.

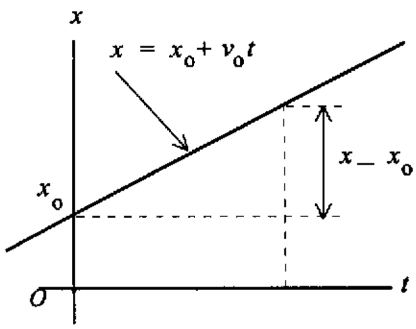


Fig. 3-7

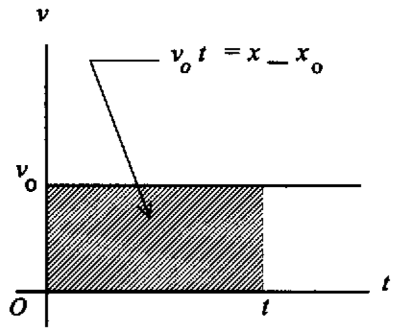


Fig. 3-8

Movimiento uniformemente acelerado. En este caso, la aceleración tiene un valor constante al cual llamaremos a_o. Cuando la aceleración **a** es de sentido opuesto a la velocidad **v**, el movimiento se denomina *uniformemente desacelerado* y el valor de a_o es negativo. La expresión genérica de la aceleración es ahora

$$\frac{dv}{dt} = a_o \tag{3-14}$$

Pasando dt a multiplicar al segundo término de la ecuación e integrando se obtiene la expresión de la velocidad $v = a_o\, t+B$ determinada salvo la constante de integración B. Integrando la ecuación de la velocidad $v = dx/dt = a_o\, t + B$ se obtiene la ecuación del movimiento

$$x = \frac{1}{2} a_o t^2 + B t + C$$

Las constantes de integración B y C se determinan con las condiciones iniciales. Si en el instante inicial $t = 0$ la partícula se encuentra en el punto $x(0) = x_o$ y la componente de velocidad inicial es $v\,(0) = v_o$, los valores de las constantes de integración son: $B = v_o$ y $C = x_o$. Sustituyendo los valores de las constantes de integración se tienen las expresiones de la posición y la velocidad instantáneas de la partícula

$$x = \frac{1}{2} a_o t^2 + v_o\, t + x_o \tag{3-15}$$

$$v = a_o t + v_o \tag{3-16}$$

En el movimiento uniformemente acelerado, la velocidad varía linealmente con el tiempo y la posición varía con el tiempo según una parábola. Las gráficas de las figuras 3-9 y 3-10, representan la posición y la velocidad en función del tiempo. La ecuación del movimiento se puede determinar gráficamente a partir de la gráfica de la velocidad y de la posición inicial. En efecto, el área del trapecio rayado de la figura 3-10, coincide numéricamente con el recorrido de la partícula entre la posición inicial x_o y la posición instantánea x, *expresando* el área y el recorrido en las mismas unidades.

Este mismo resultado se obtiene analíticamente efectuando la integración definida de la ecuación diferencial $dx = v\,dt = (a_o\,t + v_o)\,dt$ entre x_o y x, posiciones de la partícula correspondientes a los instantes 0 y t respectivamente.

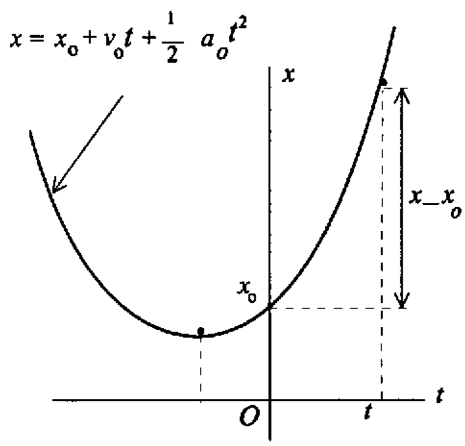


Fig . 3-9

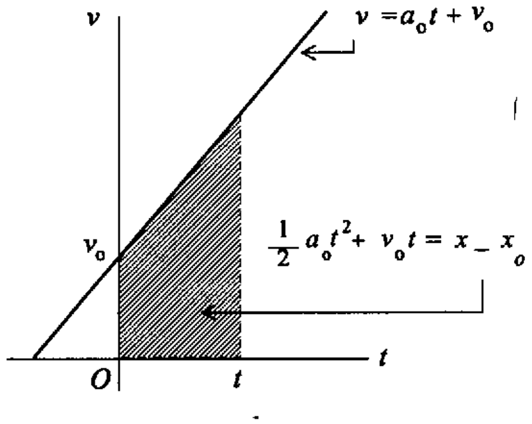


Fig. 3-10

Una relación muy útil para la resolución de problemas de la cinemática de la partícula con aceleración constante, es la que resulta de eliminar el tiempo entre las ecuaciones (3-15) y (3-16) de la posición y de la velocidad, obteniéndose una ecuación que relaciona la velocidad instantánea en función del recorrido y la aceleración dada por

$$v^2 = v_o^2 \pm 2(x - x_0)a_o \tag{3-17}$$

El signo menos corresponde a un movimiento uniformemente desacelerado.

3.5.3 Aceleración función del tiempo

La aceleración a es función del tiempo $a = f(t)$. La expresión genérica de la velocidad se obtiene de la integración de la ecuación diferencial $dv = f(t)\, dt$

$$v = \int f(t)\, dt + A$$

La integración de la ecuación diferencial $dx = vdt$ proporciona la ecuación del movimiento

$$x = \int F(t)\, dt + A\, t + B$$

donde $F(t)$ es la primitiva de $f(t)$; A y B son constantes de integración.

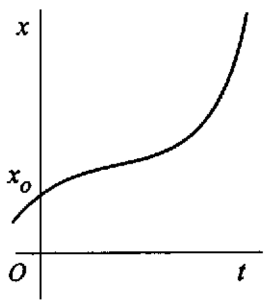


Fig. 3-11

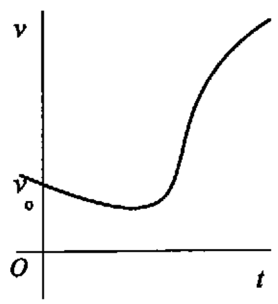


Fig. 3-12

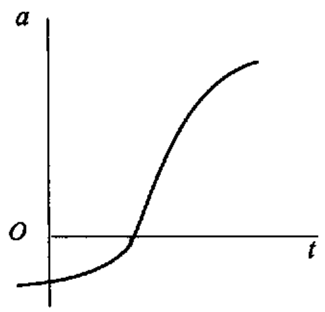


Fig. 3-13

Las figuras 3-11, 3-12 y 3-13 representan las gráficas de la posición, la velocidad y la aceleración en función del tiempo. Las constantes de integración A y B son: $A = x_o$ y $B = v_o$.

Método gráfico. La determinación de la posición x en función del tiempo puede hacerse por un método gráfico mediante la utilización de la integración definida. La integral definida de las ecuaciones $dx = v\, dt$ y $dv = a\, dt$ entre los instantes de tiempo t_1 y t_2

$$x_2 - x_1 = \int_{t_1}^{t_2} v\, dt \qquad\qquad v_2 - v_1 = \int_{t_1}^{t_2} a\, dt \qquad (3\text{-}18)$$

proporcionan, el recorrido de la partícula entre la posiciones x_1, x_2 y la diferencia de velocidades que tiene la partícula en los instantes t_2 y t_1. Estos valores son respectivamente, las áreas encerradas por las curvas $v(t)$ y $a(t)$ entre los instante de tiempo t_1 y t_2. El recorrido de la partícula entre ambas posiciones es numéricamente igual al área S_v de la superficie bajo la curva $v(t)$ entre las posiciones t_1 y t_2, figuras 3-14 y 3-15

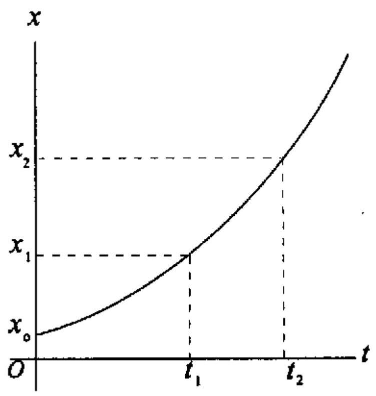


Fig. 3-14

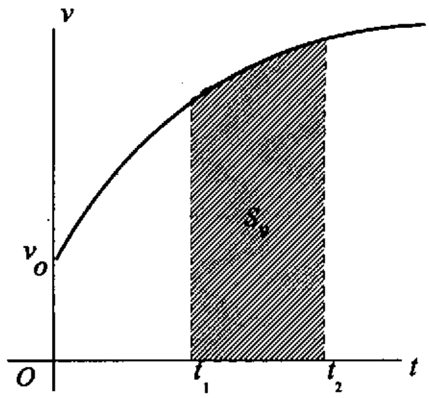


Fig. 3-15

La diferencia de velocidades es numéricamente igual al área *S ade* la superficie bajo la curva de la aceleración $a(t)$ entre los instantes t_1 y t_2, figuras 3-16 y 3-17.

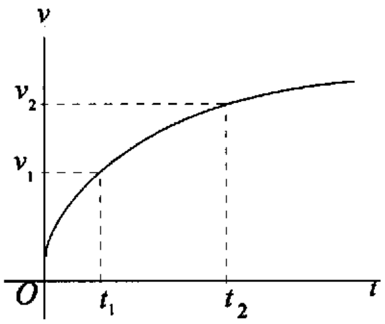


Fig. 3-16

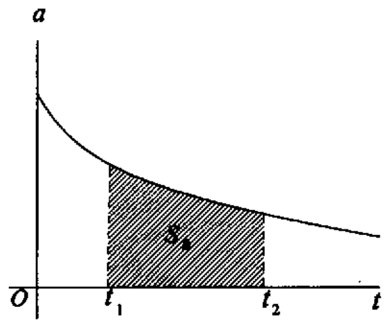


Fig. 3-17

Estas gráficas pueden ser utilizadas para la determinación de las magnitudes del movimiento. Veamos como se puede obtener la expresión de la posición x en función del tiempo a partir de la gráfica de la aceleración. Sean x_o y v_o la posición y la velocidad de la partícula en el instante t = 0. La posición instantánea se obtiene de la primera ecuación de (3-18) cambiando x_2 por x, y x_1 por x_o, y se obtiene

$$x = x_o + \int_o^t v\, dt = x_o + S_v(t) \qquad (3\text{-}19)$$

siendo $S_v(t)$ el área de la superficie limitada por la curva $v(t)$ entre el instante $t = 0$ y el instante t.

3.5.4 Aceleración función de la posición

La aceleración a es función de la posición, $a = f(x)$. La integración directa de la ecuación diferencial $dv/dt = f(x)$ no es posible, pero puede hacerse una sencilla transformación consistente en multiplicar y dividir el primer término de la ecuación por dx, y reagrupando términos, se obtiene la ecuación diferencial de variables separables

$$v\, d\, v = f(x)\, dx$$

cuya integración proporciona la componente de la velocidad en función de la posición

$$v^2 = 2 \int f(x)\, dx + A \qquad (3\text{-}20)$$

Sustituyendo la expresión de la velocidad $v(x)$ en la ecuación $dx/dt = v$ y cambiando términos queda

$$dt = \frac{dx}{v(x)}$$

cuya integración proporciona la posición x como función implícita del tiempo t.

$$t = \int \frac{dx}{v} + B \qquad (3\text{-}21)$$

Las constantes de integración A y B se determinan con las condiciones iniciales. En el caso de que el dato conocido sea la gráfica $v(x)$, se puede determinar geométricamente a partir de ella el valor de la aceleración. La pendiente de la tangente a la curva $v(x)$ en el punto genérico P, es la derivada de v respecto de x, dv/dx = tg β. Dividiendo el numerador y el denominador por dt se tiene tg $\beta = a/v$. Trazando la perpendicular a la tangente en el punto P, ésta forma con la distancia desde el punto P al eje de abcisas el ángulo β, figura 3-18. El segmento PM es el valor de la velocidad en el punto P, luego el segmento MN es el valor de la aceleración en dicho punto.

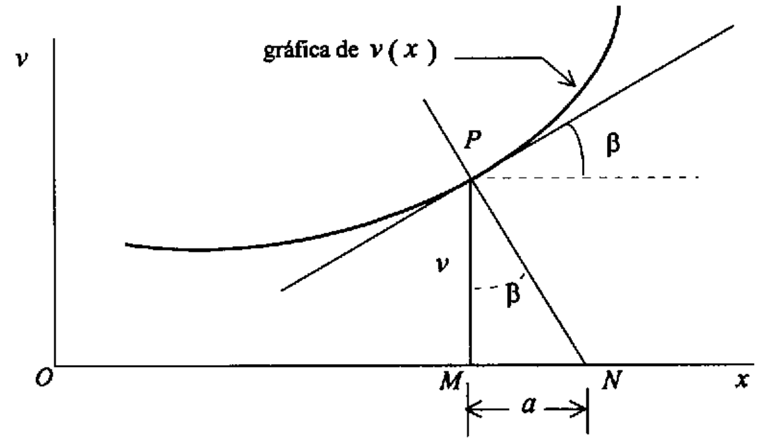


Fig. 3-18

3.5.5 Aceleración función de la velocidad

La aceleración a es función de la velocidad v, $a = f(v)$. La integración de la ecuación diferencial $dt = dv/f(v)$ da la velocidad v como una función implícita del tiempo t

$$t = \int \frac{dv}{f(v)} + A \qquad (3\text{-}22)$$

Una vez determinada la expresión de $v(t)$, integrando la ecuación $dx = v(t)\, dt$ se obtiene la ecuación del movimiento

$$x = \int v(t)\, dt + B \qquad (3\text{-}23)$$

Las constantes de integración A y B se determinan con las condiciones iniciales.

3.5.6 Movimiento simultáneo de partículas

Una situación frecuente en el movimiento de los cuerpos es que sean varios los objetos que están en movimiento simultáneo respecto de una referencia dada. Consideremos el caso de dos partículas que se mueven sobre la misma recta, figura 3-19

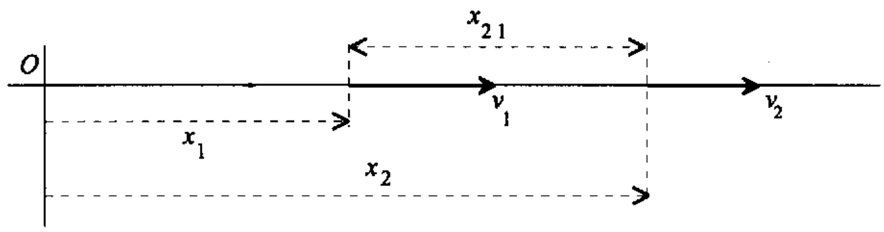


Fig. 3-19

Sean x_1 y x_2 las posiciones instantáneas de ambas partículas respecto del origen O. La diferencia entre ellas $x_{21} = x_2 - x_1$ se denomina *posición relativa* de la partícula 2 respecto de la 1. Derivando respecto del tiempo la ecuación que define la posición relativa, el segundo término es la diferencia de velocidades de ambas partículas, que es la *velocidad relativa* de la partícula 2 respecto de la 1

$$\mathbf{v}_{21} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$$

De una manera análoga, se tiene que la *aceleración relativa*

$$\mathbf{a}_{21} = \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1$$

Consideremos ahora el caso en que dos o más partículas, cuyos desplazamientos posibles son rectilíneos y paralelos, están relacionadas entre sí mediante vínculos que condicionan sus posiciones. Sus movimientos son interdependientes, y las velocidades y aceleraciones de las partículas no tienen valores cualesquiera si no que están relacionadas por ecuaciones derivadas de los vínculos existentes entre las posiciones de las partículas. Las ligaduras entre las posiciones determinan las ecuaciones entre las velocidades y éstas, a su vez, las ecuaciones entre las aceleraciones.

En la figura 3-20 se representa un conjunto de dos poleas y tres cuerpos unidos entre sí por cuerdas inextensibles. La longitud de la cuerda entre el cuerpo 1 y el centro de la polea móvil es constante, así como la longitud de la cuerda que une el cuerpo 2 con el cuerpo 3 a través de la polea móvil.

Los movimientos de los tres cuerpos, así como el de la polea móvil, son rectilíneos verticales. Para fijar sus posiciones tomaremos el origen en un punto del nivel horizontal que pasa por el centro de la polea fija con el eje de las x positivo en sentido descendente. Las posiciones cumplen:

$$x_1 + x = \text{constante} \tag{3-24}$$

$$x_2 + x_3 - 2x = \text{constante} \tag{3-25}$$

Derivando respecto del tiempo y sustituyendo se tienen las ecuaciones de las componentes de las velocidades

$$2v_1 + v_2 + v_3 = 0 \tag{3-26}$$

Derivando de nuevo se obtiene la ecuación de las aceleraciones

$$2a_1 + a_2 + a_3 = 0 \tag{3-27}$$

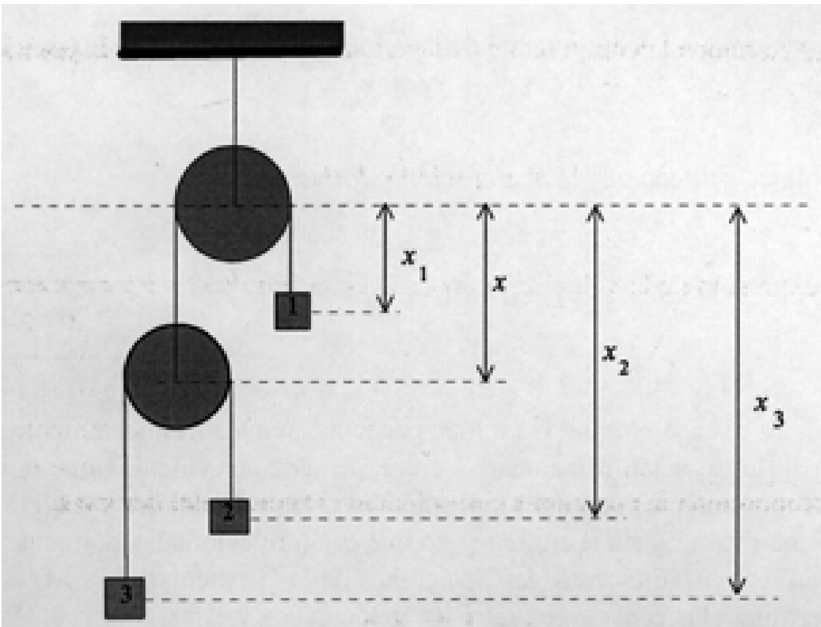


Fig. 3-20

PROBLEMA 3.1

El movimiento rectilíneo de una partícula esta definido por su vector posición según la expresión $\mathbf{r} = (2 + 4\,t - 2\,t^2)\,\mathbf{i}$ m . Determinar :

a) su velocidad y aceleración

b) el tiempo transcurrido hasta que la partícula pasa por el origen y la distancia recorrida

SOLUCIÓN

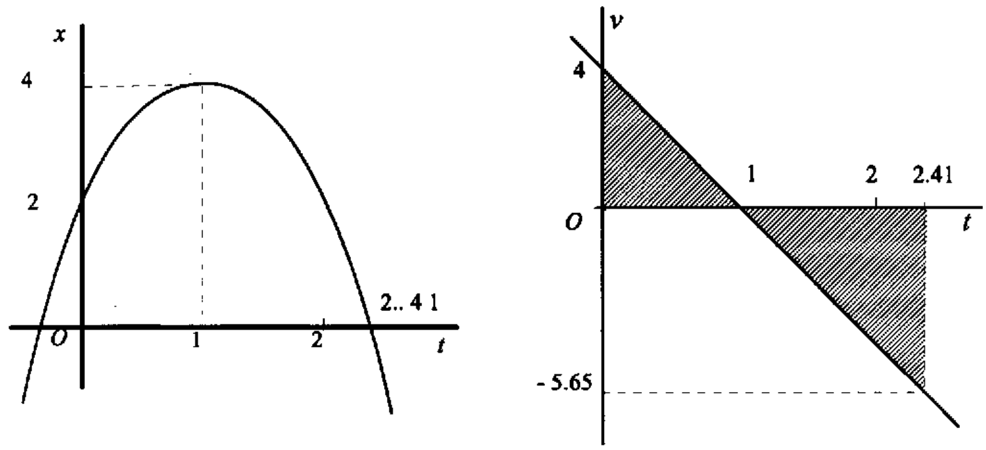
a) Cuando el vector posición es una función conocida del tiempo su componente es la ecuación del movimiento *x(t)*. Para el dato del problema se tiene

$$x(t) = 2 + 4\,t - 2\,t^2 \text{ m}$$

La velocidad es la derivada de x respecto del tiempo $\qquad v(t) = 4 - 4\,t \quad \text{ms}^{-1}$

La aceleración es la derivada de la velocidad respecto del tiempo $\qquad a(t) = -4 \quad \text{ms}^{-2}$

El movimiento es uniformemente desacelerado hasta el instante $t = 1$ s. Para valores de tiempo t mayores que 1 s. el movimiento es acelerado.



b) En el instante inicial $t = 0$ la partícula se encuentra a 2 m del origen moviéndose con una velocidad de 4 ms^{-1}. Volverá a pasar por el origen en el instante en que x sea cero. Igualando *x(t)* a cero

$$2 + 4\,t - 2\,t^2 = 0\ , \quad \text{de donde} \quad t = 1 + \sqrt{2} \text{ s}$$

En el instante $t = 1$ s la velocidad de la partícula es cero y se encuentra a 4 m del origen. En dicha posición invierte el sentido del movimiento y vuelve hacia el origen recorriendo en total 6 m. El área de la superficie rayada son 6 m^2, que coincide numéricamente con el recorrido de la partícula desde el instante $t = 0$ hasta el instante $t = 2{,}41$ s en que pasa de nuevo por el origen.

PROBLEMA 3.2

Un coche inicia su movimiento con una aceleración de 6 ms^{-2} que la mantiene durante 4 s. En los siguientes 8 s se mueve con velocidad constante y después, aplicando los frenos, desacelera a razón de 10 ms^{-2} hasta parase. Determinar :

a) la velocidad cuando el movimiento es uniforme

b) la distancia total recorrida

c) la gráfica *v-t*, comprobando que el área encerrada por la curva y el eje del tiempo es numéricamente igual a la distancia recorrida.

SOLUCIÓN

a) La velocidad constante con que se mueve el coche durante 8 s es la velocidad final adquirida durante los primeros 4 s en los que el movimiento es uniformemente acelerado. La velocidad es igual a la aceleración por el tiempo, luego su valor es de 24 ms^{-1}

b) La distancia recorrida en los primeros 4 s es $x_1 = 1/2\ a t^2 = 48$ m

La distancia recorrida a velocidad constante es $x_2 = v\, t = 192$ m.

La distancia recorrida desacelerando hasta parase se obtiene de $0 = v^2 - 2\, a\, x_3$, de donde el valor de x_3 es

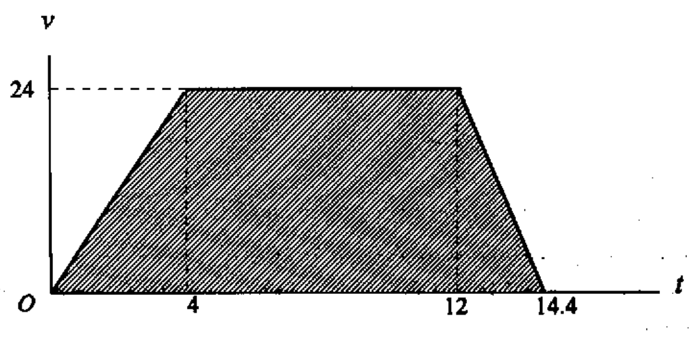
$$x_3 = 28{,}8 \text{ m.}$$

El tiempo de desaceleración se obtiene de $0 = 24 - 10\, t_3$, de donde $t_3 = 2.4$ s.

La distancia total recorrida es $x = x_1 + x_2 + x_3 = 268{,}8$ m.

c) Gráfica *v-t*

El área de la zona rayada es 268,8 m^2, que coincide numéricamente con el recorrido total del coche.

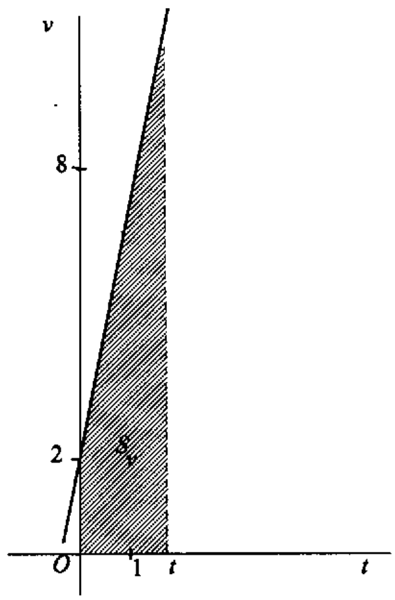


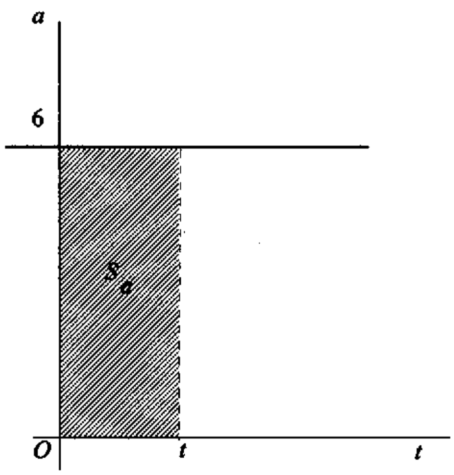
PROBLEMA 3.3

Una partícula se mueve a lo largo de una recta con aceleración constante $a_o = 6\ \text{ms}^{-2}$. En el instante inicial $t = 0$ su posición y velocidad son $x_o = 1$ m y $v_o = 2\ \text{ms}^{-1}$.
Determinar su velocidad y posición: a) gráficamente, b) por integración

SOLUCIÓN

a) Gráficamente





b) Integrando la ecuación $dv = a_o\,dt$ se obtiene la velocidad $v = 6\,t + A$. El valor de la constante de integración es $A = 2$. La velocidad en función del tiempo es

$$v = 6\,t + 2$$

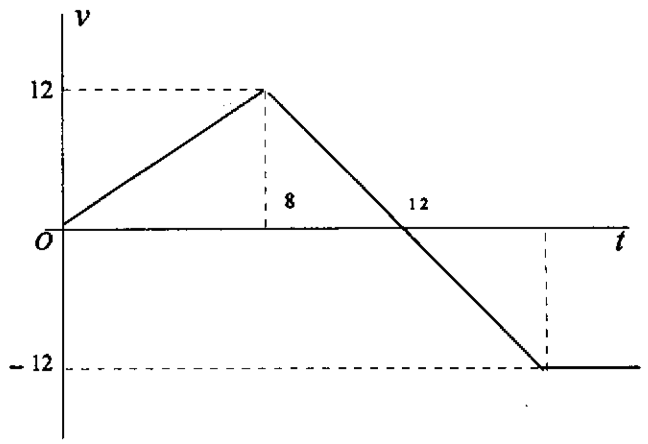
Integrando $dx = (6\,t + 2)\,dt$ se obtiene la posición $x = 3\,t^2 + 2\,t + B$. La constante vale $B = 1$. La ecuación del movimiento es

$$x = 3\,t^2 + 2\,t + 1$$

De la gráfica de la aceleración se deduce el valor del área $S_a = 6\,t$, es igual a la diferencia de velocidades correspondientes a los instantes t y $t = 0$, cuyo valor es 2. Igualando se tiene la velocidad en el instante t, $v = 6\,t + 2$, cuya gráfica es la dibujada en la figura adjunta.
El área $S_v = 1/2\,(v + 2)\,t$ es igual a la diferencia entre la posición x de la partícula en el instante t y la posición en el instante inicial $t = 0$, que es 1 m. Igualando, sustituyendo el valor de v, y despejando la posición, se tiene la ecuación del movimiento $x = 3\,t^2 + 2\,t + 1$

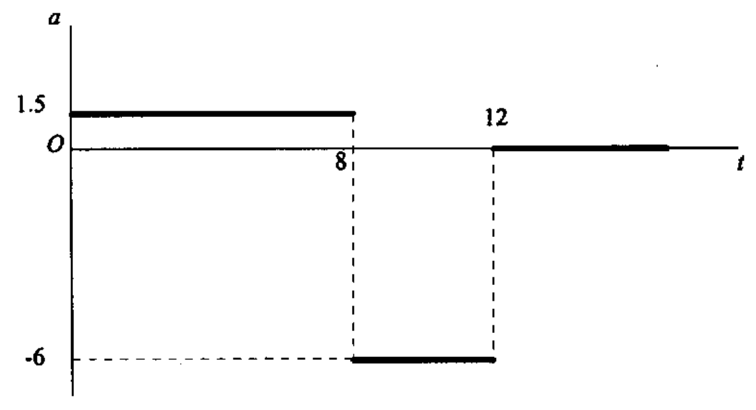
PROBLEMA 3.4

La velocidad de una partícula cuyo movimiento es rectilineo varía en función del tiempo según la gráfica adjunta. En el instante inicial la partícula se encuentra a -12 m del origen.
Determinar:
a) las gráficas a-t y x-t en el intervalo $0 < t < 16$ s
b) los instantes en que la partícula pasa por el origen

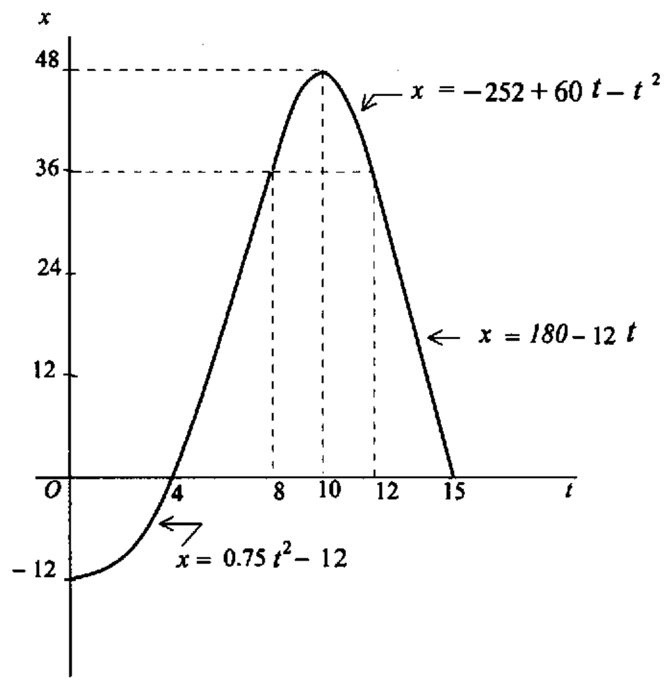


SOLUCIÓN

a) La aceleración es la pendiente de la tangente en cada uno de los puntos de la gráfica de la velocidad. De las pendientes de la gráfica de la velocidad se deduce que entre 0 y 8 s la aceleración es de 1,5 ms^{-2}, entre 8 y 12 s la aceleración es de -6 ms^{-2}, y, a partir de los 12 s, la aceleración es nula.



Determinación de la gráfica x-t.



De la gráfica *v-t* se deduce que la velocidad de la partícula entre $t = 0$ y $t = 8$ s está dada por $v = 1.5\, t$
La posición de la partícula para un instante t comprendido entre 0 y 8 s está dada por

$$x + 12 = 1/2\ v\,t = 1/2\ (1.5\,t)\,t = 3/4\ t^2 \qquad \text{de donde} \qquad x = -12 + 3/4\ t^2$$

Para $t = 8$ s la posición es $x = 36$ m. Entre $t = 8$ y $t = 12$ s la velocidad es

$$v = 12 - 6\,(t - 8) = 60 - 6\,t$$

La velocidad se hace igual a cero para $t = 10$ s. La posición para un instante t, tal que $8 < t < 12$, está dada por

$$x - 36 = 12 + \tfrac{1}{2}\,(t - 10)\,v$$

y operando queda

$$x = -252 + 60\,t - 3\,t^2$$

Para el instante $t = 12$ s la posición es 36 m. La posición para valores de $t > 12$ está dada por

$$x - 36 = (-12)\,(t - 12) \qquad \text{de donde} \qquad x = 180 - 12\,t$$

b) La partícula pasa por el origen en los instante

$$t = 4\ \text{s} \quad \text{y} \quad t = 15\ \text{s}$$

PROBLEMA 3.5

En el instante $t = 10$ s una partícula cuya trayectoria es rectilínea y su aceleración constante, se encuentra a 80 m del origen de coordenadas, moviéndose con una velocidad de -12 m/s. Si en el instante inicial se encontraba en el origen, determinar :
a) la velocidad y la aceleración iniciales
b) la distancia recorrida hasta el instante $t = 10$ s
c) dibujar las gráficas $x(t)$ y $v(t)$

SOLUCIÓN

a) En el instante inicial la partícula estaba en el origen, luego $x_o = 0$. La ecuación del movimiento

de la partícula es $$x = v_o t + \tfrac{1}{2} a t^2$$

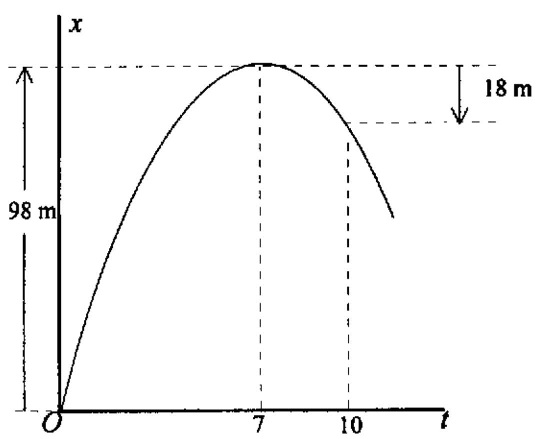
y su velocidad está dada por $$v = v_o + a t$$

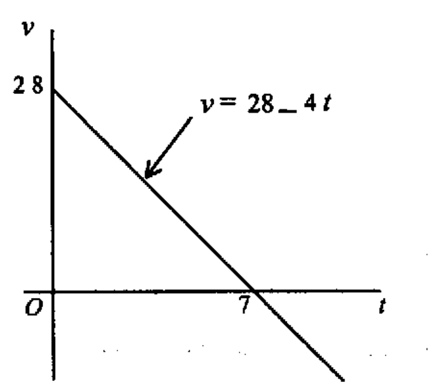
Sustituyendo los valores para $t = 10$ s queda

$$80 = 10\, v_o + 50\, a \qquad\qquad -12 = v_o + 10\, a$$

Resolviendo el sistema se obtiene $v_o = 28$ m/s y $a = -4$ m/s^2

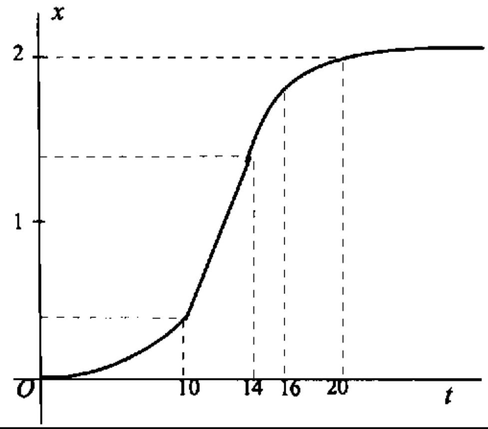
b) La partícula inicialmente se aleja del origen con un movimiento uniformemente retardado hasta pararse. Después vuelve hacia el origen con un movimiento uniformemente acelerado. El instante en que se para se determina igualando a cero su velocidad, $0 = 28 - 4\,t$. Luego el instante en se para es $t_1 =$ 7 s. La distancia recorrida hasta ese instante es $x_1 = 98$ m. A partir de este instante su movimiento es uniformemente acelerado y la distancia recorrida hasta los 10 s es $x_2 = 18$ m. La distancia total recorrida hasta los 10 segundos es de 116 m.





PROBLEMA 3.6

El movimiento de una partícula es rectilineo. La gráfica adjunta muestra el recorrido x en función del tiempo, x en m. y t en s. Determinar: a) la velocidad media, b) la velocidad máxima, c) el instante en que la velocidad coincide con la velocidad media, d) la aceleración media en los primeros 10 segundos, e) la aceleración media entre $t = 10$ y $t = 16$ segundos



SOLUCIÓN

a) De la gráfica se deduce que la partícula en 20 segundos ha recorrido 2,0 m. La velocidad media es el desplazamiento, que en este caso coincide con el recorrido dividido por el tiempo

$$v_{me} = \frac{2.0}{20} = 0,1\,ms^{-1}$$

b) La velocidad instantánea $v(t)$ de la partícula es la pendiente de la tangente a la gráfica x-t en cada uno de sus puntos. De la gráfica se deduce que las tangentes en los instantes $t = 0$ y $t = 20$ son rectas horizontales, luego la velocidad en dichos instantes es nula, $v(0) = v(20) = 0$. La pendiente crece entre $t = 0$ y $t = 10$ s, instante a partir del cual la gráfica tiene un tramo recto hasta el instante $t = 14$ s, decreciendo a continuación hasta alcanzar el valor cero en $t = 20$ s. La partícula tiene velocidad máxima durante el tramo recto de la gráfica y su valor coincide con la pendiente de dicho tramo

$$v_{max} = 0,25\ \text{ms}^{-1}$$

c) La tangente a la curva en el punto correspondiente a $t = 16$ es igual a 0,1 m, que coincide con el valor de la velocidad media.

d) La aceleración media en los 10 primeros segundos es la diferencia de velocidades en los extremos del intervalo dividida por el tiempo $a_{me} = 0,025\ \text{ms}^{-2}$

e) La aceleración media entre los 10 y los 16 segundos es

$$a'_{me} = -0,025\ \text{ms}^{-2}$$

PROBLEMA 3.7

En un vehículo en movimiento, desde el instante en que se percibe una señal de parar hasta que se acciona el freno transcurre un tiempo, denominado tiempo de reacción, del orden de 0.5 s. Si la desaceleración máxima de un automovil es de 8 ms^{-2} y debe quedar parado despues de recorrer 4 m, determinar:
a) la velocidad máxima a la cual debe circular
b) la distancia recorrida durante el frenado
c) el tiempo de frenado

SOLUCIÓN

a) Sea v_o la velocidad a la cual se circula cuando se percibe la señal de parar. La distancia recorrida hasta el instante de aplicar el freno está dado por

$$x_o = 0,5\ v_o \tag{1}$$

La velocidad final es nula, luego de la ecuación (2.15) se tiene

$$0 = v_o^2 - 16\ (x - x_o) \tag{2}$$

en donde x es la distancia recorrida mientras se está frenando. La distancia total recorrida hasta pararse es de 4 m, luego

$$x + x_o = 4 \tag{3}$$

Sustituyendo (1) y (3) en (2) se tiene

$$v_o^2 + 16\ v_o - 64 = 0 \tag{4}$$

Resolviendo la ecuación (4) se obtiene el valor de la velocidad máxima

$$v_o = 3{,}31\ \mathrm{ms^{-1}} = 12\ \mathrm{km/h}$$

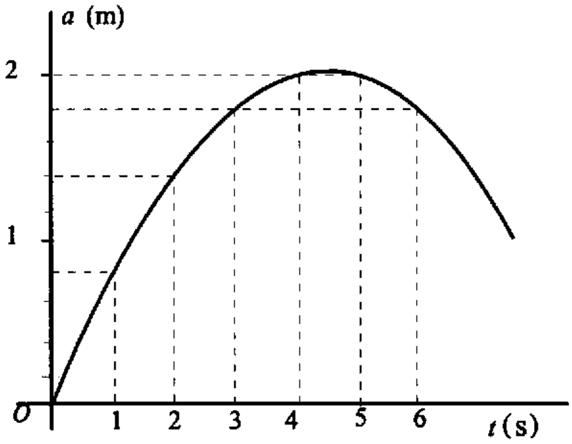
b) La distancia recorrida mientras se aplica el freno es

$$x = 4 - x_o = 2{,}35\ \mathrm{m.}$$

c) El tiempo de frenado es $$t = \frac{3{,}31}{8} = 0{,}4\ s$$

PROBLEMA 3.8

La gráfica de la figura es la aceleración en función del tiempo de una partícula cuyo movimiento es rectillíneo. En el instante inicial la partícula se encuentra en el origen y su velocidad es $v_o = 5$ ms^{-1}. Determinar: a) el espacio recorrido hasta $t = 4$ s, b) el instante en que la velocidad tiene el mismo valor que en el origen



SOLUCIÓN

a) La aceleración *a(t)* es una parábola que pasa por el origen de coordenadas y cuyo eje de simetría está en $t = 4.5$ s. La ecuación de la parábola es

$$a = m\,t + n\,t^2$$

en donde m y n son coeficientes. De los datos de la anterior figura se tiene

$$m + n = 0.8$$

$$2\,m + 8\,n = 1$$

Resolviendo el sistema se tiene $m = -0.1$ y $n = 0.8$. La expresión de la aceleración en función del tiempo es

$$a = -0.1\,t^2 + 0.9\,t$$

Integrando $dv = a\,dt$ se obtiene la velocidad: $v = -0.1/3\,t^3 + 0.45\,t^2 + 5$

Integrando la velocidad se obtiene la posición: $x = -0.1/12\,t^4 + 0.15\,t^3 + 5\,t$

Para $t = 4$ s , $x\,(4) = 27{,}46$ m

b) El valor de la velocidad vuelve a ser de 5 m/s en el instante $t = 13{,}5\ s$

PROBLEMA 3.9

Una partícula con movimiento rectilineo tiene una velocidad dada por $v = 20 - 5x$ ms^{-1}. En el instante inicial la partícula se encuentra en el origen. Determinar :
a) la ecuación del movimiento
b) la aceleración en función del tiempo
c) instante en que la velocidad es nula y el espacio recorrido hasta parase

SOLUCIÓN

a) Integrando la ecuación $dx = v\,dt = (20 - 5x)\,dt$ se tiene

$$t = \int \frac{dx}{(20 - 5x)} + C = -\frac{1}{5}\ln(20 - 5x) + C$$

En el instante inicial la partícula se encuentra en el origen de coordenadas, luego $C = 1/5 \ln 20$. Sustituyendo y despejando la x en función del tiempo queda

$$x = 4\,(1 - e^{-5t})$$

b) Derivando dos veces la posición se obtiene la aceleración en función del tiempo

$$a = -5\,e^{-5t}$$

c) Sustituyendo la ecuación del movimiento en la expresión de la velocidad se tiene la velocidad en función del tiempo

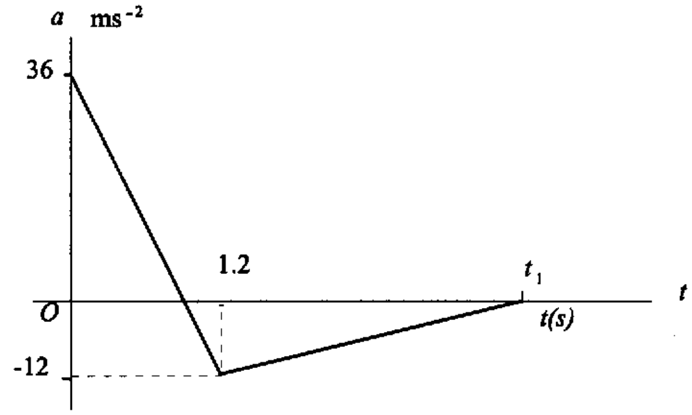
$$v = e^{-5t}$$

La velocidad se anula para $t = \infty$. En dicho instante la aceleración también es nula, luego la partícula se para. El espacio recorrido hasta pararse es

$$x(\infty) - x(0) = 0{,}2\ m \quad \mathrm{m}$$

PROBLEMA 3.10

Una partícula se encuentra inicialmente en reposo. Empieza a moverse con una aceleración que varía con el tiempo según la gráfica adjunta y termina por volver al reposo en el instante t_1. Determinar: a) el instante t_1 en que se para, b) la distancia recorrida hasta pararse.



SOLUCIÓN

a) Determinemos primero el punto de corte de la aceleración con el eje de los tiempos. La recta que pasa por los puntos (0, 36) y (12, −12) está dada por $a = 36 - 40\,t$, de donde la aceleración es nula en el instante $t = 0{,}9$ s. La aceleración instantánea de la partícula es $a = dv/d\,t$, de donde

$$v = \int_0^t a\,dt$$

Si en el instante t_1 la partícula está en reposo se ha de cumplir que $\int_0^t a\,dt = 0$.

Aplicando una de las propiedades de la integración definida queda

$$\int_0^{0.9} a\,dt + \int_{0.9}^{t} a\,dt = 0$$

cuyos valores son las áreas $\qquad 16{,}2 + \frac{1}{2}\,(t_1 - 0{,}9)\,(-12) = 0$

De los triángulos definidos por la gráfica de la aceleración se tiene

$$t_1 = 3{,}6 \text{ s}$$

b) La distancia recorrida hasta el instante $t = 0{,}9$ s está dada por $x_1 = (\,0{,}9 - t_{C1}\,)\,S_1$, en donde $S_1 = 16{,}2$ y t_{C1} es la abcisa del centro del área definida por los instantes $t = 0$ y $t = 0{,}9$ s. El área es un triángulo, luego $t_{C1} = 0{,}3$ s. Sustituyendo queda $x_1 = 9{,}72$ m. Para el cálculo de la distancia recorrida hasta el instante 1,2 s hay que tener en cuenta que la velocidad para $t = 0{,}9$ s es $v(0{,}9) = 16{,}2$ m s^{-1}.

Se tiene $$x(1{,}2) = x_1 + 16{,}2 \cdot 0.3 + (1{,}2 - t_{C2})\,S_2$$

siendo $t_{C2} = 1{,}1$ s y $S_2 = -\ 1{,}8$ m^2

Sustituyendo queda $x_2 = 14{,}40$ m.

Para el cálculo de la distancia recorrida hasta el instante 3,6 s hay que tener en cuenta que la velocidad para $t = 1{,}2$ s es $v(1{,}2) = 14{,}4$ ms^{-1}

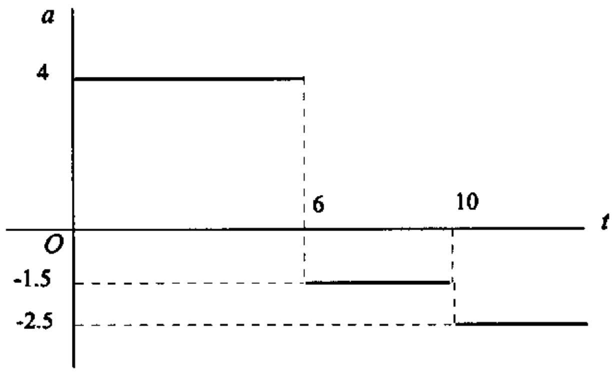
$$x(3.6) = 14{,}40 + 14{,}4 \cdot 2{,}4 + (3{,}6 - t_{C3})\,S_3$$

siendo $t_{C3} = 2{,}0$ s y $S_3 = -\ 14{,}4$ m^2

Sustituyendo queda $x(3{,}6) = 25{,}92$ m

PROBLEMA 3.11

Una partícula tiene un movimiento rectilíneo cuya aceleración se representa en la figura. En el instante inicial se encuentra en el origen y su velocidad es de $-\ 8$ ms^{-1}. Determinar su posición en los instantes $t = 6$ s, $t = 10$ s y $t = 14$ s. Determinar los instantes en que vuelve a pasar por el origen y los espacios recorridos.



SOLUCIÓN

Calculemos las posiciones utilizando la ecuación (3-18). Es necesario conocer las velocidades al principio de cada tramo cuyos valores son $v(0) = -8$ m/s, $v(6) = 16$ m/s y $v(10) = 10$ m/s. Las coordenadas de los centros de los rectángulos definidos por cada uno de los tres tramos de aceleración constante son 3, 8 y 12, y sus áreas 24, 6 y 10 respectivamente.

Posición en el instante $t = 6$; $x(6) = (-8)\,6 + (6-3)\,24 = 24$ m

Posición en el instante $t = 10$; $x(10) = 24 + 16\,(4) - (10-8)\,6 = 76$ m

Posición en el instante $t = 14$; $x(14) = 76 + 10\,(4) - (14-12)\,10 = 96$ m

Ecuaciones del movimiento:

En el intervalo $0 \leq t \leq$ es $x = -8\,t + 2\,t^2$.

Esta ecuación se anula para $t = 4$ s, instante en que la partícula se encuentra de nuevo en el origen. La distancia recorrida hasta dicho instante es $s_1 = 16$ m.

En el intervalo $6 \leq t \leq 10$ es $x = 24 + 16\,(t - 6) - 0.75\,(t-6)^2$

En el intervalo $10 \leq t \leq 14$ es $x = 76 + 10\,(t-10) - 1.25\,(t-10)^2$ (1)

Esta ecuación se anula para $t = 22{,}76$ s, instante en que la partícula se encuentra otra vez en el origen. El recorrido de la partícula entre $t = 4$ y $t = 14$ s es $s_2 = 96$ m, valor que coincide con la posición más alejada del origen y es, por tanto, el vértice de la parábola (1); esta distancia es la que recorrerá hasta pasar de nuevo por el origen. El recorrido total de la partícula es

$$s = s_1 + 2\,s_2 = 208 \text{ m}$$

PROBLEMA 3.12

La aceleración de una partícula cuyo movimiento es rectilineo está dada por $a = -3\,x$, donde x es la posición. La velocidad en el origen es $3^{1/2}$ m/s y en el instante inicial su posición es $x = -1$ Determinar: la posición, la velocidad y la aceleración en función del tiempo.

SOLUCIÓN

La expresión de la aceleración se puede escribir como

$$\frac{dv}{dx}\frac{dt}{dt} = -3x \text{ que operando se transforma en } v\,dv = -3x\,dx$$

Integrando se obtiene la velocidad en función de la posición

$$v^2 = -3x^2 + \text{cte.}$$

Cuando la partícula se encuentra en el origen de coordenadas su velocidad es $\sqrt{3}$ m/s, luego sustituyendo en la expresión de la velocidad , la constante de integración es igual a 3. La velocidad en función de la posición es

$$v^2 = 3(1 - x^2)$$

La velocidad es la derivada de la posición respecto del tiempo; operando se tiene

$$\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \sqrt{3}\, dt$$

Integrando se tiene
$$x = \mathrm{sen}(\sqrt{3}\, t + cte)$$

De la condición inicial $t = 0$, $x = -1$, se tiene que el valor de constante es $-\pi/2$. La ecuación del movimiento es

$$x = \mathrm{sen}(\sqrt{3}\, t - \frac{\pi}{2})$$

Las derivadas primera y segunda de x respecto del tiempo, proporcionan la velocidad y la aceleración respectivamente

$$v = \sqrt{3}\, \cos(\sqrt{3}\, t - \frac{\pi}{2})$$

$$a = -3\, \mathrm{sen}(\sqrt{3}\, t - \frac{\pi}{2})$$

PROBLEMA 3.13

Una partícula se mueve a lo largo de una recta con una aceleración $a = 9\,x$ ms^{-2}. En el instante inicial su posición es $x_o = 1$ m y su velocidad $v_o = 3$ ms^{-1}.
Determinar :
a) la ecuación del movimiento
b) la velocidad en función del tiempo

SOLUCIÓN
a) La aceleración se puede expresar como $a = dv/dx$. Sustituyendo el valor de la aceleración e integrando se tiene

$$v^2 = 9x^2 + A$$

De las condiciones iniciales se deduce que la constante de integración $A = 0$, de donde queda para la velocidad $v = 3\,x$. Sustituyendo $v = dx/dt$ e integrando se tiene

$$x = B\,e^{3t}$$

Con las condiciones, la constante de integración queda $B = 1$ y la ecuación del movimiento es

$$x = e^{3t} \quad \text{m}$$

b) Derivando x respecto de t se tiene la velocidad en función del tiempo

$$v = 3\,e^{3t} \quad \text{ms}^{-1}$$

PROBLEMA 3.14

Una partícula cuyo movimiento es rectilíneo con aceleración $a = 3\ (v + 1)^{1/2}$ ms^{-2} se encuentra en el instante 1 s en la posición $x(1) = 1$ m moviéndose con una velocidad $v\ (1) = 3$ ms^{-1} Determinar: a) la posición y la velocidad en función del tiempo, b) los valores de la posición, la velocidad y la aceleración para $t = 3$ s .

SOLUCIÓN

a) Integrando la expresión de la aceleración $dv = a\ dt$ se tiene

$$t = \frac{1}{3} \int \frac{dv}{\sqrt{v + 1}} + C_1 \qquad t = \frac{2}{3}\sqrt{v + 1} + C_1 \qquad C_1 = -\frac{1}{3}$$

Operando y sustituyendo queda

$$v(t) = \frac{1}{4}(9t^2 + 6t - 3)$$

De $dx/dt = v$ se obtiene

$$x = \int v(t)dt + C_2 \qquad x(t) = \frac{3}{4}(t^3 + t^2 - t) + C_2 \qquad C_2 = \frac{1}{4}$$

La ecuación de la posición es

$$x(t) = \frac{3}{4}(t^3 + t^2 - t) + \frac{1}{4}$$

b) Los valores pedidos son :

$$a\ (3) = 6 \text{ ms}^{-2} \qquad v\ (3) = 24 \text{ ms}^{-1} \qquad x\ (3) = 25 \text{ m}$$

PROBLEMA 3.15

Dos partículas se mueven sobre la misma recta habiendo iniciado sus movimientos simultáneamente. La partícula 1 esta inicialmente en reposo pero tiene una aceleración de 1 ms^{-2} durante los primeros 3 s. Entre los 3 y los 9 s su aceleración es nula y, a apartir de este instante, su aceleración tiene el valor inicial. La segunda partícula tiene una velocidad inicial de 8 ms^{-1} y una aceleración de − 0,5 ms^{-2} durtante los primeros 5 s; a continuación se anula y vuelve a tener el valor inicial a partir del segundo 10. Determinar :
a) el instante t en que ambas partículas tienen la misma velocidad
b) el valor de dicha velocidad
c) gráfica *v-t*

SOLUCIÓN

a) La velocidad de la partícula 1 en función del tiempo es

$$v_1 = \int a\,dt = \int_0^3 dt + \int_9^t dt = 3 + (t-9) \qquad \text{para } t \geq 9$$

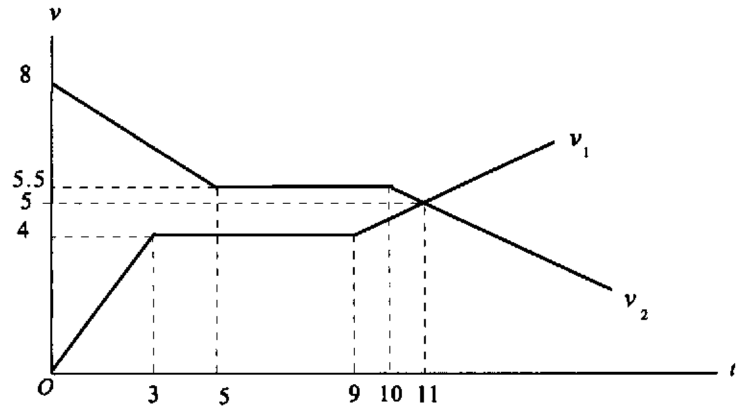
La velocidad de la partícula 2 en función del tiempo es

$$v_2 = 8 + \int_0^5 (-0.5)dt + \int_{10}^t (-0.5)\,dt = \frac{21}{2} - \frac{1}{2}t \qquad \text{para } t \geq 10$$

Igualando ambas expresiones de la velocidad se tiene la ecuación $\frac{21}{2} - \frac{t}{2} = 3 + (t-9)$
cuya solución en t = 11 s, instante en que ambas velocidades tienen un valor común.

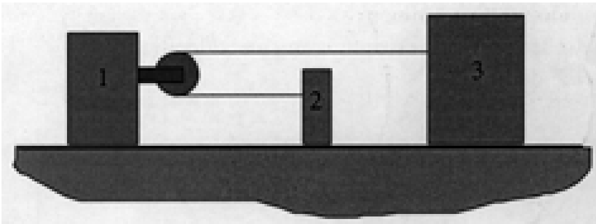
b) El valor común de la velocidad en este instante es de 5 ms^{-1} .

c) Gráficas *v-t*



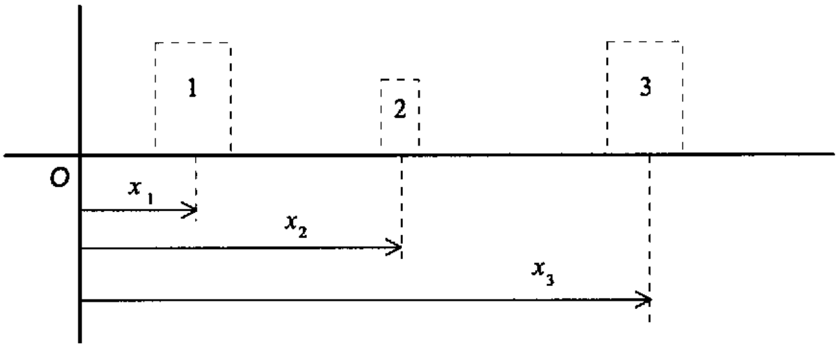
PROBLEMA 3.16

En la figura el bloque 1 se mueve hacia la izquierda con una velocidad de 1 m/s, la cual decrece a razón de 0,5 m/s^2 , y el bloque 2 se mueve hacia la derecha con una velocidad de 2 m/s, la cual decrece con una tasa de 0,2 m/s^2. Determinar la velocidad y la aceleración del bloque 3, y su velocidad y aceleración relativas respecto del bloque 2.



SOLUCIÓN

Consideremos un sistema de referencia tal como se ve en la figura adjunta.



La relación vincular entre las posiciones de los tres bloques se expresa mediante la siguiente ecuación

$$2 (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) = \text{cte.}$$

de donde $$-2 x_1 + x_2 + x_3 = \text{cte.}$$

Derivando respecto del tiempo se tiene la relación entre las velocidades $-2 v_1 + v_2 + v_3 = 0$

cuya derivada proporciona la relación entre las aceleraciones $-2 a_1 + a_2 + a_3 = 0$

de donde se tiene $v_3 = 4$ m/s hacia la izquierda, y $a_3 = 1{,}2$ m/s^2 hacia la derecha.

La velocidad relativa $v_{32} = v_3 - v_2 = 6$ m/s hacia la izquierda y la aceleración relativa $a_{32} = a_3 - a_2 = 1{,}4$ m/s^2 hacia la derecha.

3.6 Movimiento plano en coordenadas rectangulares

El movimiento de las partículas cuyas trayectorias están contenidas en un plano constituye un apartado muy importante de la Cinemática debido al gran número de casos prácticos cuyo movimiento tiene lugar sobre una superficie plana. Para determinar las trayectorias de las partículas se utilizan, en general, debido a su gran sencillez para describir el movimiento, un sistema de coordenadas rectangulares. En el sistema de coordenadas rectangulares, las curvas coordenadas son dos familias de rectas perpendiculares entre sí, lo que hace que la base local sea la misma en todos los puntos del plano.

3.6.1 Componentes rectangulares de la aceleración

Para describir el movimiento plano tomaremos la referencia con el origen en un punto del plano del movimiento y dos de sus ejes, el eje X y el eje Y, contenidos en él, fig 3-21.

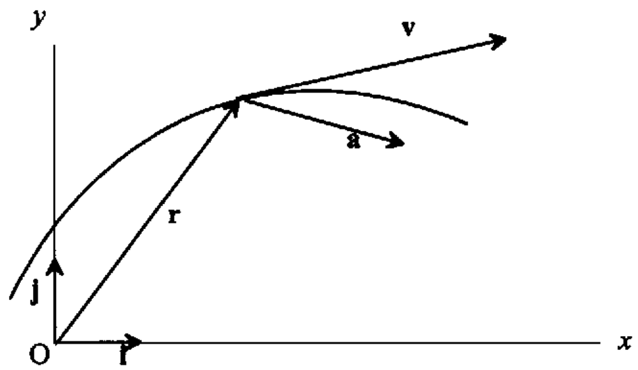


Fig. 3-21

Las expresiones de los vectores posición, velocidad y aceleración en componentes rectangulares son

$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} \qquad \mathbf{v} = v_1\,\mathbf{i} + v_2\,\mathbf{j} \qquad \mathbf{a} = a_1\,\mathbf{i} + a_2\,\mathbf{j}$$

El problema genérico del movimiento plano de una partícula consiste en: dadas las componentes de la aceleración y las condiciones iniciales, determinar la trayectoria de la partícula. La trayectoria es una curva plana que se obtiene eliminando el tiempo entre las ecuaciones del movimiento. La determinación de las ecuaciones del movimiento $x(t)$ e $y(t)$ sigue un proceso equivalente al descrito en el movimiento rectilíneo cuando las componentes de la aceleración son, constantes, o función del tiempo, o la componente a_1 es función de x y la componente a_2 es función de y, o la componente a_1 es función de v_1 y la componente a_2 es función de v_2 .

En todos estos casos el movimiento plano se puede considerar como la superposición de dos movimientos rectilíneos independientes que tienen lugar a lo largo de el eje X y del eje Y respectivamente. Las ecuaciones diferenciales del movimiento

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a_1 \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = a_2 \tag{3-28}$$

se pueden integrar de una manera independiente por los métodos descritos en la sección 3-4, dando como resultado las ecuaciones del movimiento $x(t)$ e $y(t)$, y, a partir de ellas, la trayectoria. Las componentes de la velocidad se obtienen integrando las componentes de la aceleración

$$v_1 = \int a_1 \, dt + A \qquad v_2 = \int a_2 \, dt + B \tag{3-29}$$

y las ecuaciones del movimiento de la integración de las componentes de la velocidad

$$x_1 = \int v_1 \, dt + C \qquad x_2 = \int v_2 \, dt + D \tag{3-30}$$

Las cuatro constantes de integración A, B, C, y D se determinan con las condiciones iniciales del movimiento. Cuando cada una de las componentes de la aceleración son funciones de x e y, el movimiento plano no se puede considerar como la superposición de dos movimientos rectilíneos independientes, y el cálculo de la trayectoria requiere, en cada caso concreto, la resolución del correspondiente sistema de ecuaciones diferenciales.

Cuando sobre un mismo plano se desplaza más de una partícula el estado cinemático del conjunto se denomina movimiento simultáneo de partículas. Las posiciones de las partículas pueden ser independientes o vinculadas. En el primer caso no existen relaciones entre las magnitudes cinemáticas de las partículas y, en el segundo, las velocidades y aceleraciones de las partículas satisfacen entre sí condiciones deducidas de los vínculos existentes entre las posiciones.

3.6.2 Movimiento parabólico

El movimiento de los cuerpos en las proximidades de la superficie terrestre cuando, no se tiene en cuenta la resistencia del aire, los desplazamientos son muy pequeños comparados con el radio de la tierra y suponiendo que la tierra está fija en el espacio, son movimientos uniformemente acelerados, cuya aceleración es la de la gravedad $g = 9{,}8\ \mathrm{m/s^2}$. En una referencia con el eje X horizontal y el eje Y vertical, el vector aceleración está dado por la expresión es $\mathbf{a} = -g\,\mathbf{j}$.

Un cuerpo lanzado con velocidad inicial $\mathbf{v}_o$ paralela a la aceleración $\mathbf{a}$, tiene un movimiento rectilíneo ascendente o descendente según que $\mathbf{v}_o$ esté dirigida hacia arriba o hacia abajo. Si la velocidad inicial $\mathbf{v}_o$ no sea paralela a la aceleración, su movimiento está contenido en un plano y la trayectoria es una parábola. Sea α el ángulo que forma la velocidad inicial $\mathbf{v}_o$ con la horizontal en el punto de lanzamiento en el cual tomaremos el origen de coordenadas, figura 3-22. Las componentes de la aceleración son constantes

$$a_1 = 0 \qquad\qquad a_2 = -g$$

luego el movimiento se puede descomponer en dos movimientos rectilíneos independientes según los ejes de coordenadas.

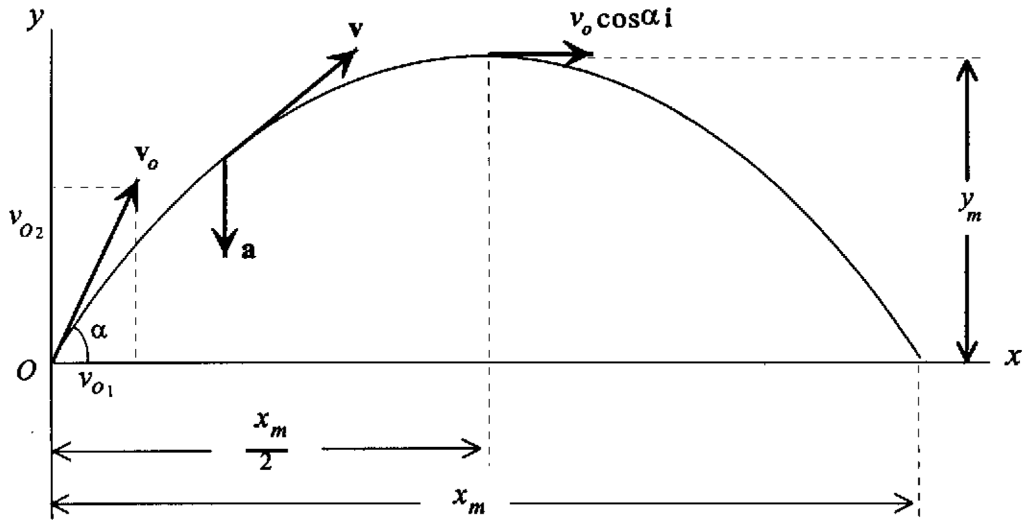


Fig. 3-22

El movimiento según el eje x es un movimiento uniforme y el movimiento según el eje y

es un movimiento uniformemente acelerado. En el instante inicial la partícula se encuentra en el origen de coordenadas y su velocidad es

$$\mathbf{v}_o = v_{o1}\,\mathbf{i} + v_{o2}\,\mathbf{j} = v_o \cos\alpha\ \mathbf{i} + v_o \operatorname{sen}\alpha\,\mathbf{j}$$

Las ecuaciones del movimiento se obtienen integrando las componentes de la aceleración

$$v_1 = \int a_1 dt + C_1 \qquad v_2 = \int a_2 dt + C_2$$

lo que proporciona las componentes de la velocidad

$$v_1 = v_o \cos\alpha \qquad v_2 = -g\,t + v_o \operatorname{sen}\alpha$$

Las constantes de integración se determinan con las condiciones iniciales. Integrando las componentes de la velocidad se obtienen las ecuaciones del movimiento

$$x = (v_o \cos\alpha)\,t \qquad y = (v_o \operatorname{sen}\alpha)\,t - \frac{1}{2}\,g\,t^2 \tag{3-31}$$

En el instante inicial, la partícula se encuentra en el origen de coordenadas, luego las constantes de integración correspondientes a las ecuaciones del movimiento son nulas. Eliminando el tiempo entre las ecuaciones (3-31) se obtiene la trayectoria.

$$y = (\tan\alpha)x - \left[\frac{g}{2v_o^2 \cos^2\alpha}\right]x^2 \tag{3-32}$$

La ecuación (3-32) es la de una parábola con la concavidad dirigida hacia los valores negativos del eje y, tal como se representa en la figura 3-22. Las coordenadas del vértice de la parábola se determinan de la condición $dy/dx = 0$, de donde se obtienen la longitud máxima alcanzada por el proyectil y la altura máxima de éste. Igualando a cero la derivada de y respecto de x, se obtiene el valor de x que hace que la y sea máxima; la parábola es una curva simétrica respecto de un eje vertical que pasa por su vértice, luego la distancia máxima es dos veces el valor de la x correspondiente a la y_m. El alcance también se puede obtener directamente de la ecuación de la trayectoria como el valor de x para $y = 0$, y la altura máxima como la de un movimiento vertical con velocidad inicial v_o sen α. Operando queda para el alcance

$$x_m = \frac{v_o^2 \operatorname{sen} 2\alpha}{g} \tag{3-33}$$

y para la altura máxima

$$y_m = \frac{v_o^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{2g} \tag{3-34}$$

Fijando la velocidad inicial v_o, los valores de la distancia máxima x_m y de la altura máxima y_m dependen únicamente del ángulo α. Es obvio que el ángulo de tiro para el cual el alcance es máximo es $\alpha = 45°$ ya que para este ángulo el seno vale uno; la altura máxima absoluta corresponde a un lanzamiento vertical para el cual $\alpha = 90°$. Estos dos valores determinan la denomina *parábola de seguridad* para una velocidad v_o dada, definida como la parábola que pasa por los puntos correspondientes al alcance máximo y a la altura máxima absoluta, figura 3-23.

Para calcular la ecuación de la parábola de seguridad, hay que determinando los coeficientes de la expresión general de una parábola

$$y = m x^2 + n x + p$$

imponiendo las condiciones de que su vértice sea el punto $(0, v_o^2/2g)$ y que los puntos de corte con el eje x tengan de abcisas $\pm\, v_o^2/g$. Operando se obtiene

$$y = -\frac{2g}{v_o^2} x^2 + \frac{v_o^2}{2g} \tag{3-35}$$

Los puntos del plano situados mas allá de la parábola de seguridad no pueden ser alcanzados por un proyectil lanzado con una velocidad v_o.

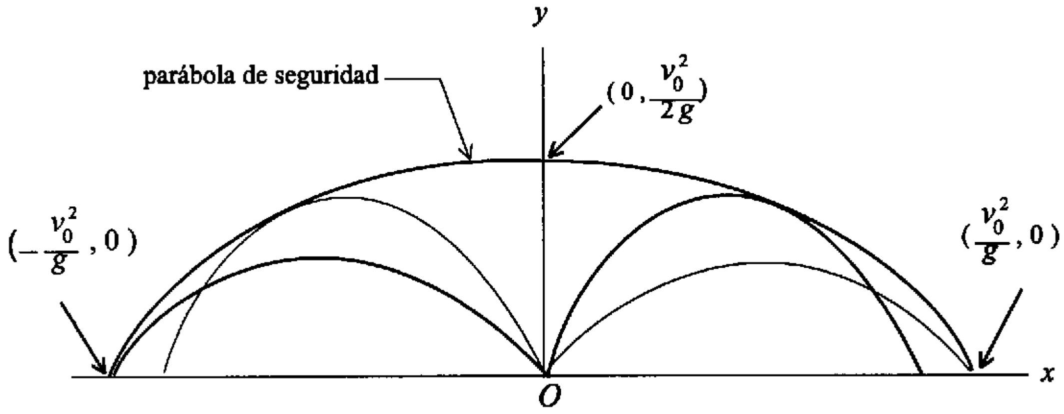


Fig.3-23

En los casos en que el movimiento parabólico no se inicia en el origen, sino que en el instante inicial $t = 0$, la partícula se encuentre en el punto de coordenadas (x_o, y_o) con una velocidad $\mathbf{v}_o$ tal que forme un ángulo α con la horizontal, las constante de integración de las ecuaciones del movimiento $x(t)$ e $y(t)$ son ahora iguales a x_o e y_o respectivamente, con lo que las ecuaciones (3-31) cambian a

$$x = x_o + (v_o \cos\alpha)\, t \qquad\qquad y = y_o + (v_o \operatorname{sen}\alpha)\, t - \frac{1}{2} g t^2$$

y la ecuación de la trayectoria es

$$y = y_o + (\operatorname{tg}\alpha)(x - x_o) - \frac{g}{2 v_o^2 \cos^2\alpha}(x - x_o)^2$$

PROBLEMA 3-17

El vector posición de una partícula cuyo movimiento es plano varía en función del tiempo según la expresión $\mathbf{r} = 2\,t\,\mathbf{i} - 8\,t^2\,\mathbf{j}$ m. Determinar :
a) la ecuación de la trayectoria
b) la velocidad y la aceleración

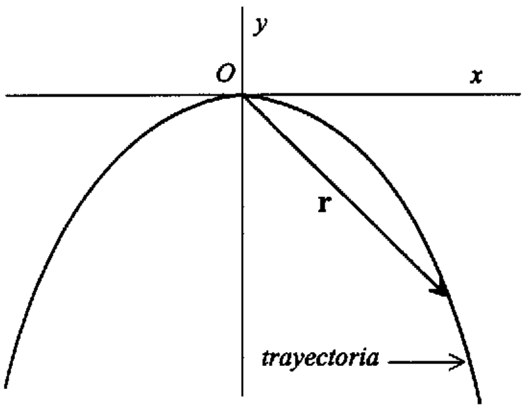
SOLUCIÓN

a) Las ecuaciones del movimiento son: $x = 2\,t$, $y = -8\,t^2$

Eliminando el tiempo entre ellas queda la ecuación de la trayectoria

$$y = -2\,x^2$$

que es una parábola con la concavidad dirigida hacia las y negativas.



b) La velocidad es la derivada de la posición respecto del tiempo.

Las componentes de la velocidad son:
$v_1 = 2 \qquad v_2 = -16\,t$

Las componentes de la aceleración son:
$a_1 = 0 \qquad a_2 = -16$

El modulo de la velocidad es

$$v = (4 - 256\,t^2)^{1/2}$$

El módulo de la aceleración es

$$a = 256\,t^2$$

La velocidad **v** y la aceleración **a** se obtienen derivando el vector posición respecto del tiempo

$$\mathbf{v} = 2\,\mathbf{i} - 16\,t\,\mathbf{j}$$

$$\mathbf{a} = -16\,\mathbf{j}$$

El movimiento a lo largo del eje x es uniforme y a lo largo del eje y es unifórmente acelerado.

PROBLEMA 3-18

El vector posición de una partícula cuya trayectoria es plana es una función del tiempo dada por la ecuación $\mathbf{r} = (t - \text{sen}\, t)\,\mathbf{i} + (1 - \cos t)\,\mathbf{j}$. Determinar: a) la velocidad y aceleración de la partícula , b) la ecuación de la hodógrafa

SOLUCIÓN

a) La velocidad es la derivada de la posición $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$, de donde

$$\mathbf{v} = (1 - \cos t)\,\mathbf{i} + \text{sen}\, t\,\mathbf{j} \qquad \text{y su módulo es} \qquad v = \sqrt{2\,(1 - \cos t)}\ \text{ms}^{-1}$$

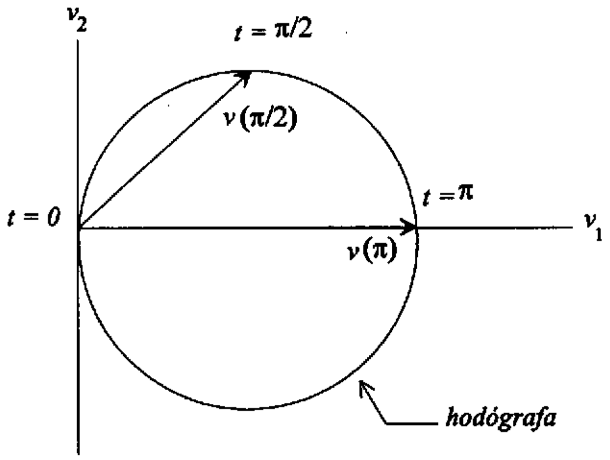
La aceleración es la derivada de la velocidad $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$, de donde

$$\mathbf{a} = \text{sen}\, t\ \mathbf{i} + \cos t\ \mathbf{j} \qquad \Rightarrow \qquad a = 1\ \text{ms}^{-1}$$

b) La hodógrafa es la curva descrita por el extremo del vector velocidad situado en el origen de coordenadas. Eliminando el tiempo entre las ecuaciones $v_1 = 1 - \cos t$ y $v_2 = \text{sen}\, t$, se obtiene

$$(v_1 - 1)^2 + v_2^2 = 1$$

En el sistema de ejes coordenadas v_1 , v_2 la ecuación anterior corresponde a una circunferencia de radio 1 y centro en $(1, 0)$.



PROBLEMA 3-19

La aceleración de una partícula cuyo movimiento es plano está dada por $\mathbf{a} = -k\,\mathbf{i} + k\,\mathbf{j}$ en donde k es una constante positiva.. En el instante inicial se encuentra en el origen de coordenadas con velocidad $\mathbf{v}(0) = v_0\,\mathbf{i}$. Determinar : a) la trayectoria , b) el valor de la velocidad mínima

SOLUCIÓN

a) Integrando $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -k$ y $\dfrac{d^2y}{dt^2} = k$ se obtienen las ecuaciones del movimiento

$$x = -\frac{1}{2}kt^2 + C_1 t + C_2 \qquad\qquad y = \frac{1}{2}kt^2 + C_3 t + C_4$$

Con las condiciones iniciales $\quad C_1 = v_o \qquad C_2 = 0 \qquad C_3 = 0 \qquad C_4 = 0$

y las ecuaciones del movimiento son: $\quad x(t) = v_o\,t - \dfrac{1}{2}k\,t^2 \qquad y(t) = \dfrac{1}{2}k\,t^2$

Eliminando el tiempo se obtiene la ecuación de la trayectoria, que es una parábola no centrada

$$(x + y)^2 = \left(\frac{2v_o}{k}\right)y$$

b) El vector velocidad es $\mathbf{v} = (v_o - k\,t)\mathbf{i} + k\,t\,\mathbf{j}$, siendo su módulo

$$v = \sqrt{(v_o - 2v_o\,kt + 2k^2t^2)}$$

Derivando e igualando a cero su derivada, $dv/dt = 0$, se tiene en qué instante de tiempo la velocidad pasa por un valor extremo (mínimo)

$$t = \frac{v_o}{2k}$$

que, sustituida en la expresión de la velocidad, da la velocidad mínima

$$v_{\min} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,v_o$$

PROBLEMA 3-20

Una partícula se mueve sobre un plano con una aceleración **a** = − 9 y **j** m/s^2. En el instante inicial, el vector posición es **r**$_o$ = 3 **j** m y su velocidad **v**$_o$= 3 **i** m/s. Determinar: a) la trayectoria, b) la hodógrafa, c) el tiempo transcurrido hasta que la trayectoria corta al eje X.

SOLUCIÓN

a) La aceleración sólo tiene componente **j** , luego

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dv_1}{dt} = 0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -9y \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dv_2}{dt} = -9y$$

Integrando queda para la primera

$$v_1 = C_1 \qquad \Rightarrow \qquad x = C_1\,t + C_2$$

y para la segunda

$$v_2\,d\,v_2 = -9\,y\,dy \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}v_2^2 = -\frac{1}{2}9y^2 + C_3$$

De las condiciones iniciales se tiene

$$C_1 = 3 \qquad C_2 = 0 \qquad 2C_3 = 81$$

Sustituyendo queda

$$x = 3\,t \quad (1)$$

y la componente v_2 de la velocidad cuyo valor es

$$v_2^2 = 9(9 - y^2)$$

Transformando la expresión de la v_2 se tiene

$$v_2 = \frac{dy}{dt} = 3\sqrt{9 - y^2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dy}{\sqrt{9 - y^2}} = 3\,dt$$

Integrando se tiene $y = 3$ sen $(-3\ t + C_4)$. De las condiciones iniciales queda $C_4 = \pi/2$, y sustituyendo queda $y = 3 \cos (3\ t)$ (2) . Los valores de y oscilan entre 3 y −3, cambiando alternativamente el sentido de la aceleración. Eliminando el tiempo entre las ecuaciones (1) y (2) se obtiene la trayectoria

$$y = 3 \cos (x)$$

b) El vector velocidad es $\mathbf{v} = 3\ \mathbf{i} - 9$ sen $(3\ t)\ \mathbf{j}$, luego su extremo está constantemente sobre una recta paralela al eje $\mathbf{j}$ trazada por el punto $v_1 = 3$. La componente v_2 de la velocidad tiene valores comprendidos entre − 9 y 9 m/s. La hodógrafa es un segmento rectilíneo paralelo al eje $\mathbf{j}$ comprendido entre dichos valores.

c) El vector posición en función del tiempo es $\mathbf{r}\ (t) = 3\ t\ \mathbf{i}\ +\ 3 \cos (3t)\ \mathbf{j}$. En los instantes en que la trayectoria corte al eje X la componente $\mathbf{j}$ debe de ser nula, luego

$$3t = \frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{3\pi}{2}\ ;\ \frac{5\pi}{2}\ ;\ \cdots\cdots \quad \Rightarrow \quad 3t = (2n + 1)\ \frac{\pi}{2} \qquad n = 0\ , 1, 2,\ ....$$

PROBLEMA 3-21

La trayectoria de una partícual es la parábola $y^2 = 2\,x$. La ecuación de la hodógrafa coincide con la de la trayectoria. En el instante inicial se encuentra en el punto (1/2, 1). Determinar: a) las ecuaciones del movimiento, b) la velocidad y la aceleración

SOLUCIÓN

a) La hodógrafa es la curva descrita por el extremo del vector velocidad con origen en el origen de coordenadas . En este caso, el extremo del vector **v** está en cada instante sobre la parábola $y^2 = 2\,x$, luego las componentes de la velocidad satisfacen la misma ecuación que las componentes del vector posición.

$$v_2^2 = 2\,v_1 \qquad (1)$$

Derivando respecto del tiempo la ecuación de la trayectoria se tiene

$$y\,v_2 = v_1 \qquad (2)$$

Sustituyendo (1) en (2) se tiene $v_2 = dy/dt = 2y$ $\qquad dy/y = 2\,dt$

Integrando queda $\qquad \ln y = \ln e^{2t} + A$

De las condiciones iniciales se tiene que la constante de integración $A = 0$. Las ecuaciones del movimiento son

$$x = 0.5\,e^{4t} \qquad\qquad y = e^{2t}$$

b) Derivando las ecuaciones del movimiento se obtienen las componentes de la velocidad y de la aceleración, cuyas expresiones vectoriales están dadas por

$$\mathbf{v} = 2\,e^{4t}\,\mathbf{i} + 2e^{2t}\,\mathbf{j}$$

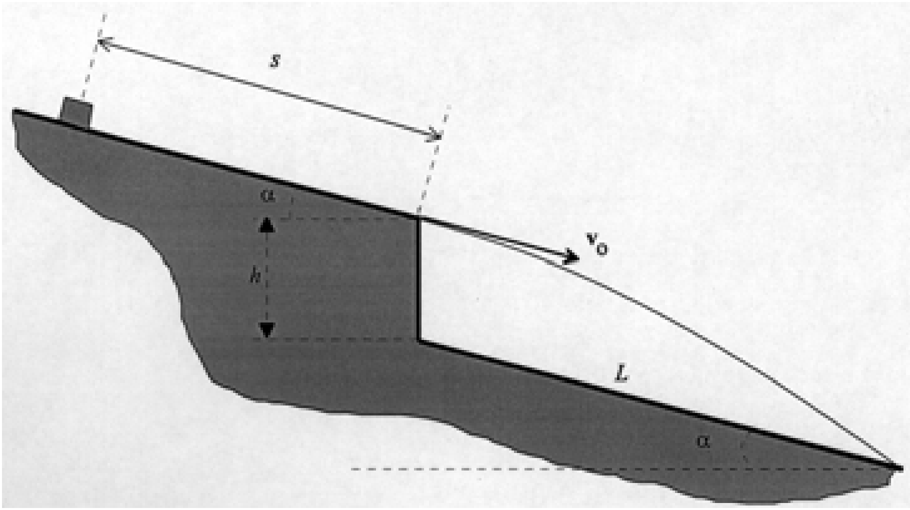
y

$$\mathbf{a} = 8e^{4t}\,\mathbf{i} + 4e^{2t}\,\mathbf{j}$$

respectivamente.

PROBLEMA 3-22

El bloque de la figura desliza sobre el plano inclinado partiendo del reposo recorriendo una distancia s hasta el borde del desnivel de altura h. Determinar la longitud L desde el pie del desnivel hasta el punto de choque .



SOLUCIÓN

El movimiento del bloque sobre el plano inclinado es un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado. El valor de la aceleración es la componente de la aceleración de la gravedad **g** en la dirección del plano inclinado, cuyo valor es g sen α. De la ecuación que relaciona la velocidad con el desplazamiento y la aceleración se tiene que la velocidad del bloque después de recorrer la distancia s es

$$v_0 = \sqrt{2s\, g\, sen\alpha} \qquad (1)$$

La aceleración del bloque a partir del desnivel es la de la gravedad **g**, luego su movimiento es parabólico. Para calcular la distancia L tomaremos como sistema de referencia el indicado en la figura adjunta.

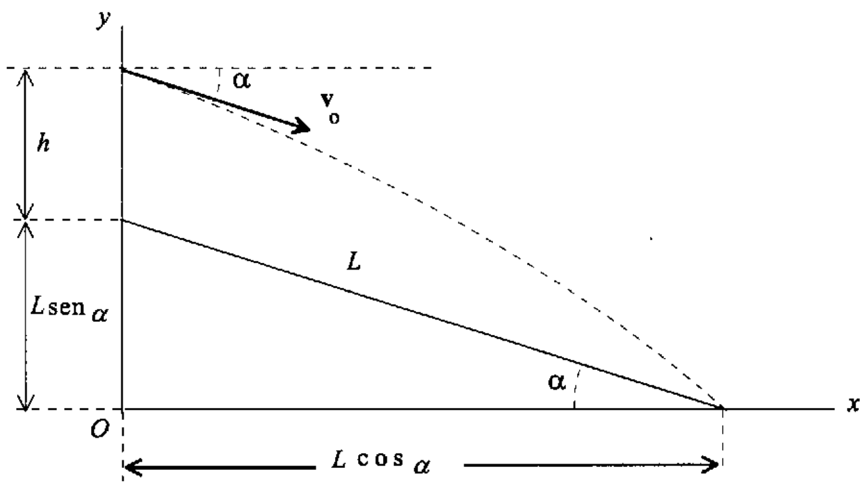
Las condiciones iniciales son las que corresponden a la posición $(0, y_o)$, siendo $y_o = h + L$ senα.

La velocidad inicial es $\mathbf{v}_o = v_0 \cos\alpha\, \mathbf{i} - v_o \text{sen}\, \alpha\, \mathbf{j}$

Las ecuaciones del movimiento son :

$$x = (v_o \cos\alpha\ )\, t$$

$$y = y_o - (\ v_o \text{sen}\ \alpha)\, t\ -\ g/2\ t^2$$



Eliminando el tiempo entre ellas se tiene la trayectoria

$$y = y_0 - (\text{tg}\,\alpha)\,x - \left(\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}\right)x$$

Las coordenadas del punto de impacto son ($L\cos\alpha$, 0). Sustituyendo valores queda

$$0 = h - \left(\frac{g}{2\,v_0^2}\right)L^2$$

Despejando *h* y teniendo en cuenta (1), el valor pedido es

$$L = 2\sqrt{s\,h\,\text{sen}\,\alpha}$$